



**HAL**  
open science

# Fissuration en mode mixte I+II non proportionnel : approche expérimentale et modélisation de la plasticité

Pierre-Yves Decreuse

► **To cite this version:**

Pierre-Yves Decreuse. Fissuration en mode mixte I+II non proportionnel : approche expérimentale et modélisation de la plasticité. Autre. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2010. Français. NNT : 2010DENS0027 . tel-00561842

**HAL Id: tel-00561842**

**<https://theses.hal.science/tel-00561842>**

Submitted on 2 Feb 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ENSC-2009/2010



**THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Présentée par

**Pierre-Yves Decreuse**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Domaine

**MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL**

Sujet de la thèse

**Fissuration en mode mixte I+II non proportionnel**  
*Approche expérimentale et modélisation de la plasticité*

Soutenue à Cachan le 01 octobre 2010 devant le jury composé de :

Véronique Doquet	Professeure, École Polytechnique	Présidente du jury
Alain Combescure	Professeur, INSA de Lyon	Rapporteur
Véronique Aubin	Professeure, École Centrale de Paris	Rapporteuse
Sylvain Calloch	Professeur, ENSIETA, Brest	Examineur
Damien Halm	Professeur, ENSMA, Poitiers	Examineur
Samuel Forest	Directeur de recherche CNRS, École des Mines de Paris	Examineur
Laudine Brouillet	Ingénieure, DGA Bagneux	Invitée
Sylvie Pommier	Professeure, ENS de Cachan	Directrice de thèse

**LMT-Cachan**

ENS Cachan / CNRS / UPMC / PRES UniverSud Paris  
61 avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan cedex, France



Au terme de ces trois années passées au LMT de Cachan, l'heure est aux remerciements et je prie les personnes que je risque d'oublier de bien vouloir m'excuser.

Tout d'abord, je tiens à remercier l'ensemble des membres du personnel du laboratoire, qui au quotidien, par leur disponibilité et leur bonne humeur ont rendu mon séjour au sein du laboratoire toujours plus agréable. Merci à vous, je garderai un excellent souvenir de ces années passées en votre compagnie.

Merci à tous les collègues et amis avec lesquels j'ai le plus sympathisé au cours de ces années : Sylvain P., Carole H., Arnaud C., Erwan M., Flavien F., Renaud G., Louis K. et Boubou ! Merci à vous pour ces sorties, services rendus et autres moments de détente !

Je souhaite ensuite exprimer mes plus sincères remerciements à Sylvie Pommier sans qui ce travail n'aurait pu se réaliser. Sylvie, un grand Merci pour ces années passées à tes côtés. Je ne saurais trop te remercier pour ta disponibilité et ta gentillesse hors pair. Cela m'a permis de réaliser cette thèse dans des conditions idéales. Merci à toi !

Bien évidemment, j'adresse toute ma reconnaissance à l'ensemble des membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Merci aux rapporteurs : Alain Combescure et Véronique Aubin pour leurs précieux conseils. Merci à Véronique Doquet pour avoir accepté de présider ce jury. Et enfin merci aux examinateurs : Damien Halm, Samuel Forest et Sylvain Calloch.

Et enfin, à mes parents à qui je suis fier de dédier ce travail. Je vous suis infiniment reconnaissant de m'avoir toujours soutenu et encouragé au cours de ces vingt-sept années ! Merci à vous...



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Table des figures</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xv</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 État de l'art</b>	<b>5</b>
1 Le contexte industriel . . . . .	6
1.1 Structures . . . . .	6
1.2 Chargement . . . . .	8
2 Le contexte scientifique . . . . .	9
2.1 La fissuration . . . . .	9
2.2 Modéliser la fissuration, le cadre de la mécanique de la rupture . .	14
2.3 Eléments de thermodynamique de la fissuration . . . . .	21
2.4 Critères de propagation par fatigue en modes mixtes . . . . .	23
<b>2 Fissuration en mode I</b>	<b>25</b>
1 Le matériau d'étude . . . . .	27
1.1 L'acier S355NL . . . . .	27
1.2 Microstructures . . . . .	28
1.3 Comportement élasto-plastique cyclique . . . . .	31
1.4 Identification d'un modèle de comportement élasto-plastique . . .	35
2 Essais de fissuration en mode I à différents rapports de charge . . . . .	39
2.1 Dispositif expérimental . . . . .	39
2.2 Matériau de base . . . . .	40
2.3 ZAT . . . . .	43
3 Modèle de propagation de fissure en mode I . . . . .	45
3.1 Hypothèses . . . . .	45
3.2 Détermination des champs de référence . . . . .	47
3.3 Loi de comportement élasto-plastique cyclique en mode I . . . . .	52
3.4 Confrontation essai / modèle . . . . .	56
4 Résumé du chapitre . . . . .	61

<b>3</b>	<b>Mesure de champs de déplacement en pointe de fissure</b>	<b>63</b>
1	Problématique . . . . .	65
1.1	Rappel du modèle . . . . .	65
2	Approche expérimentale de la mesure de la plasticité cyclique en pointe de fissure . . . . .	69
2.1	Mesure des champs de déplacement en pointe de fissure . . . . .	69
2.2	Localisation de l'extrémité de la fissure . . . . .	74
2.3	Construction expérimentale d'une base de champs spatiaux de référence . . . . .	77
3	Dépouillement d'un cas de chargement de mode I . . . . .	83
3.1	Mesure des variables globales $\dot{K}_I$ et $\dot{\rho}_I$ en cours d'essai . . . . .	83
3.2	Erreur associée à l'approximation du champ de vitesse . . . . .	86
3.3	Discussion et analyse des résultats . . . . .	89
4	Étude d'un cas de chargement de mode I avec surcharge de mode II . . . . .	91
5	Mesure expérimentale des facteurs d'intensité plastique en mode mixte avec ASTREE . . . . .	95
5.1	Les objectifs de l'étude . . . . .	95
5.2	Pilotage en termes de facteurs d'intensité des contraintes nominaux $K_I^\infty$ et $K_{II}^\infty$ . . . . .	96
5.3	Construction expérimentale du domaine d'élasticité en mode mixte du matériau . . . . .	99
5.4	Extraction des facteurs d'intensité et des erreurs en mode mixte . . . . .	105
6	Résumé du chapitre . . . . .	117
<b>4</b>	<b>Comportement élasto-plastique cyclique en modes mixtes</b>	<b>119</b>
1	Généralités . . . . .	121
1.1	État de l'art . . . . .	121
1.2	L'approche multi-échelle généralisée au mode $I + II$ . . . . .	122
2	Détermination des facteurs d'intensité plastiques . . . . .	124
2.1	Hypothèses . . . . .	124
2.2	Partition par symétrie du champ de vitesse en modes I et II . . . . .	124
2.3	Extraction des facteurs d'intensité . . . . .	125
2.4	Simulation par éléments finis en élasto-plasticité . . . . .	126
2.5	Construction d'une base de champs spatiaux de référence . . . . .	127
2.6	Calcul de l'erreur associée à cette approximation . . . . .	129
2.7	Exemple d'extraction des facteurs d'intensité . . . . .	130
2.8	Discussion intermédiaire . . . . .	132
3	Formulation condensée du comportement élasto-plastique en mode mixte . . . . .	135
3.1	Surface seuil . . . . .	135
3.2	Loi d'écoulement plastique . . . . .	140
3.3	Loi d'évolution . . . . .	143
3.4	Effet des paramètres du modèle . . . . .	145
3.5	Confrontations simulations / modèle . . . . .	146

4	Résumé du chapitre . . . . .	149
<b>5</b>	<b>Fissuration en mode mixte</b>	<b>151</b>
1	Introduction . . . . .	153
2	Modélisation de la fissuration . . . . .	154
2.1	Loi de propagation . . . . .	154
2.2	Détermination des facteurs d'intensité des contraintes nominaux .	156
2.3	Prévision du trajet de fissuration . . . . .	157
2.4	Vitesse de fissuration en mode mixte . . . . .	162
3	Facteurs d'intensité des contraintes et fissures non plane . . . . .	165
3.1	Introduction . . . . .	165
3.2	Facteurs d'intensité des contraintes pour une fissure présentant une branche . . . . .	167
3.3	Évaluation des facteurs d'intensité des contraintes . . . . .	168
3.4	Illustrations numériques des problèmes rencontrés . . . . .	170
4	Détermination de la fissure plane équivalente à une fissure comportant une branche . . . . .	177
4.1	Équivalence au sens mécanique des fissures droites et bifurquée .	177
4.2	Mise en œuvre de la méthode . . . . .	180
4.3	Application à un cas concret de fissuration . . . . .	186
5	Résumé du chapitre . . . . .	190
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>191</b>
	<b>Annexes</b>	<b>195</b>
<b>A</b>	<b>Décomposition de Karhunen-Loeve</b>	<b>197</b>
<b>B</b>	<b>Mesures expérimentales des variables globales <math>\tilde{K}_I</math>, <math>\rho_I</math>, <math>\tilde{K}_{II}</math> et <math>\rho_{II}</math> avec ASTREE199</b>	
1	Surface seuil n°1, direction $K_{II}^\infty = 0MPa\sqrt{m}$ . . . . .	201
2	Surface seuil n°1, direction $K_I^\infty = 30MPa\sqrt{m}$ . . . . .	202
3	Surface seuil n°1, direction $\Delta K_I^\infty = 2\Delta K_{II}^\infty$ . . . . .	203
4	Surface seuil n°1, direction $\Delta K_I^\infty = -2\Delta K_{II}^\infty$ . . . . .	204
5	Surface seuil n°1, direction $K_I^\infty = 27.5MPa\sqrt{m}$ . . . . .	205
6	Surface seuil n°2, direction $K_{II}^\infty = 10MPa\sqrt{m}$ . . . . .	206
7	Surface seuil n°2, direction $K_I^\infty = 25MPa\sqrt{m}$ . . . . .	207
8	Surface seuil n°2, direction $\Delta K_I^\infty = 2\Delta K_{II}^\infty$ . . . . .	208
9	Surface seuil n°2, direction $\Delta K_I^\infty = -2\Delta K_{II}^\infty$ . . . . .	209
10	Surface seuil n°2, direction $K_I^\infty = 27.5MPa\sqrt{m}$ . . . . .	210
	<b>Bibliographie</b>	<b>211</b>





# Table des figures

1.1	Simulation en éléments finis d'une structure navale. (Principia Marine) . .	6
1.2	Exemple de fissure ayant été amorcée dans un cordon de soudure. (Source : DGA Bagneux) . . . . .	7
1.3	Chargement sur la structure du à l'état de la mer. La composante basse fréquence correspond à la houle, le signal haute fréquence correspond au "slamming" (Principia Marine) . . . . .	8
1.4	Renfort structural à l'origine de la mixité du chargement. (Principia Marine)	8
1.5	Rupture brutale de deux "liberty ships" . . . . .	9
1.6	(a) Faciès de rupture d'un acier inoxydable 316L (F. Fremy) (b) Forma- tion des stries de fatigue par émoussement plastique. [Pelloux, 1969] . . .	10
1.7	Illustration de la loi de Paris . . . . .	11
1.8	Propagation des fissures par fatigue. [Besson <i>et al.</i> , 2001] . . . . .	11
1.9	Courbe de Paris pour l'acier S355NL : (croix) pour un rapport de charge $R = 0.1$ et pour un chargement à amplitude constante, (triangles) même rapport de charge mais avec une surcharge d'un facteur 1.5 sur le charge- ment nominal appliquée tous les 10000 cycles . . . . .	13
1.10	Zones d'intérêt autour de l'extrémité de la fissure. . . . .	14
1.11	Différents modes d'ouverture d'une fissure. . . . .	15
1.12	Repère attaché à la pointe de fissure. . . . .	16
1.13	Illustration de la branche de fissure. [Amestoy et Leblond, 1992] . . . . .	18
1.14	Illustration de la branche de fissure courbée. [Frelat et Leblond, 1999] . .	19
1.15	Faciès de rupture, front de fissure elliptique . . . . .	19
1.16	Illustration d'une fissure 3D, présentant une courbure. [Leblond, 1999] . .	20
1.17	Définition d'un contour d'intégration.[Besson <i>et al.</i> , 2001] . . . . .	22
2.1	Analyse micrographique . . . . .	28
2.2	Microstructures de ZAT simulées (clichés MEB) . . . . .	30
2.3	Dispositif d'essai . . . . .	31
2.4	Comportement élasto-plastique de l'acier S355NL, microstructure de base	32
2.5	Comportement élasto-plastique cyclique de l'acier S355NL, microstruc- tures de ZAT simulées, résultats obtenus pour les trois nuances. . . . .	33
2.6	Comparaisons, boucle d'hystérésis obtenues pour une amplitude de dé- formation $\Delta\varepsilon = 1\%$ . . . . .	34

2.7	Modèle de comportement élasto-plastique pour le matériau de base, comparaison avec les résultats d'essai . . . . .	36
2.8	Exemple de confrontation essai/simulation pour des boucles d'hystérésis à 0.5% pour le matériau de base, $ZAT_1$ et $ZAT_3$ . . . . .	37
2.9	Éprouvette CCT ayant servi aux essais de fissuration en mode I . . . . .	39
2.10	Courbe de Paris pour un rapport de charge $R = 0.1$ . . . . .	40
2.11	Courbe de Paris pour un rapport de charge $R = 0.5$ . . . . .	40
2.12	Courbe de Paris pour un rapport de charge $R = -1$ . . . . .	41
2.13	Courbe de Paris pour un rapport de charge $R = 0.1$ avec une surcharge d'un facteur 1.5 sur le chargement nominal tous les 5000 cycles . . . . .	41
2.14	Courbe de Paris pour un rapport de charge $R = 0.1$ . . . . .	43
2.15	Courbe de Paris pour un rapport de charge $R = -1$ . . . . .	43
2.16	Courbe de Paris pour un rapport de charge $R = 0.1$ avec une surcharge d'un facteur 1.5 sur le chargement nominal tous les 10000 cycles . . . . .	44
2.17	Courbe de Paris pour un rapport de charge $R = 0.1$ avec une surcharge d'un facteur 1.5 sur le chargement nominal tous les 100000 cycles . . . . .	44
2.18	$R_0(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ : Référentiel de l'étude ; $R_T(T, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ : Repère attaché à la pointe de fissure avec : $\vec{e}_z$ tangent au front de la fissure, $\vec{e}_y$ normal au plan de fissuration et $\vec{e}_x$ normal au front de la fissure, D une section normale à $\vec{e}_z$ , C son contour . . . . .	45
2.19	Maillage éléments finis, détail sur la zone où le maillage est raffiné . . . . .	48
2.20	Évolution de $\rho$ en fonction $K_I^\infty$ : loi d'émoussement . . . . .	52
2.21	Évolution de $\rho$ en fonction $\phi$ . . . . .	53
2.22	Courbe de Paris pour un rapport de charge $R = 0.1$ . . . . .	57
2.23	Courbe de Paris pour un rapport de charge $R = 0.5$ . . . . .	57
2.24	Courbe de Paris pour un rapport de charge $R = -1$ . . . . .	57
2.25	Courbe de Paris pour un rapport de charge $R = 0.1$ avec une surcharge de 1.5 le chargement nominal tous les 5000 cycles . . . . .	58
2.26	Courbe de Paris pour un rapport de charge $R = 0.1$ . . . . .	59
2.27	Courbe de Paris pour un rapport de charge $R = -1$ . . . . .	59
2.28	Courbe de Paris pour un rapport de charge $R = 0.1$ avec une surcharge de 1.5 le chargement nominal tous les 10000 cycles . . . . .	60
2.29	Courbe de Paris pour un rapport de charge $R = 0.1$ avec une surcharge de 1.5 le chargement nominal tous les 100000 cycles . . . . .	60
3.1	Champ de déplacement en pointe de fissure issus de simulations par éléments finis. . . . .	67
3.2	Dispositif optique déployé lors d'un essai. . . . .	69
3.3	Fenêtre optique de $3 \times 3 \text{ mm}$ : mouchetis servant à la corrélation d'images dans une région centrée sur l'extrémité de la fissure. . . . .	70
3.4	Distribution des niveaux de gris sur une image 8 bits (256 niveaux de gris), plus la dynamique est élevée, plus l'incertitude de mesure est faible. . . . .	71

3.5	Analyse de la texture de l'image : les tâches de peinture sont assimilées à des ellipses de petit axe $2R_1$ et de grand axe $2R_2$ . Il est commun de choisir une zone d'intérêt 4 fois plus grande que $R_2^{max}$ . . . . .	71
3.6	Qualité du mouchetis déposé sur l'éprouvette ; Incertitude sur le déplacement en fonction de la dimension de la zone d'intérêt (ZOI) pour un déplacement de 0.5 pixel . . . . .	72
3.7	Mesure d'incertitude sur une éprouvette soumise à une charge constante dans la machine d'essai. L'échelle des déplacements est en micromètre. La dimension de l'image est de 3mm par 3mm, l'échelle de la ZOI est de 92 $\mu m$ . (a) Composante du champ selon x. (b) Composante du champ selon y . . . . .	73
3.8	Distribution de la norme des sauts de déplacements pour les noeuds voisins du maillage de corrélation. . . . .	74
3.9	Résidus de corrélation normalisé appliqué aux images avec et sans le masque . . . . .	75
3.10	Champs de vitesse de mode I à l'instant $t$ : (a) Composante $v_x$ (b) Composante $v_y$ . Les vecteurs représentent le vecteur vitesse de chaque noeud, les échelles de couleur l'intensité des composantes (a) $v_x$ et (b) $v_y$ . . . . .	76
3.11	Chargement permettant de construire les champs spatiaux de référence $\underline{u}_I^e(P)$ et $\underline{u}_I^c(P)$ . . . . .	78
3.12	Champs de référence élastique de mode I $\underline{u}_I^e$ : (a) Composante $u_{I,x}^e$ (b) Composante $u_{I,y}^e$ . Les vecteurs représentent le vecteur déplacement du noeud . . . . .	79
3.13	(a) Champs asymptotiques de Westergaard à l'extrémité de la fissure $u_I$ tracé en déformations planes ; (b) Champs mesurés expérimentalement, lors d'une phase de décharge, (c) Champs asymptotiques de Westergaard à l'extrémité de la fissure $u_I$ tracé en contraintes planes. . . . .	81
3.14	Champs spatiaux de référence complémentaire de mode I $\underline{u}_I^c$ : (a) Composante $u_{I,x}^c$ (b) Composante $u_{I,y}^c$ . Les vecteurs représentent le vecteur déplacement des noeuds . . . . .	82
3.15	Illustration du montage de flexion quatre points dissymétrique : (a) Différentes positions des appuis pour changer la mixité du chargement, (b) Axe du roulement à bille, (c) Éprouvette, (d) Dispositif de maintien en position de l'éprouvette, (e) Entaille initiale . . . . .	83
3.16	Chargement nominal appliqué à l'éprouvette, exprimé comme un facteur d'intensité des contraintes nominal $K_I^\infty$ . . . . .	84
3.17	Évolution du facteur d'intensité $\dot{K}_I(t)$ mesuré pendant le cycle . . . . .	84
3.18	Évolution du facteur d'intensité $\dot{\rho}_I(t)$ pendant le cycle . . . . .	85
3.19	(a) Évolution de l'erreur $C_1$ au cours du chargement. (b) Évolution de l'erreur $C_2$ . (c) Évolution de la différence des erreurs $C_1$ et $C_2$ . (d) Évolution de la différence des erreurs $C_1^R$ et $C_2^R$ . . . . .	87
3.20	(a) Norme du champ résiduel $\underline{v}^{residu^{C1}}$ défini par l'équation 3.19 (b) Norme du champ résiduel $\underline{v}^{residu^{C2}}$ défini par l'équation 3.20 . . . . .	88
3.21	Loi d'érousement plastique $K^\infty = f(\rho)$ . . . . .	89

3.22	Loi d'érousement plastique tracée dans un graphique $K_I^\infty - K_0$ en fonction de $\sqrt{\rho_I - \rho_0}$ , où $(\rho_0, K_0)$ est le point atteint juste avant le changement de direction de chargement. . . . .	90
3.23	Comparaison de la loi $K_I^\infty - \check{K} = f(\rho)$ : (a) Résultats issus des essais. (b) Résultats issus d'une simulation par éléments finis ; Une régression linéaire de ces deux courbes donne une pente de $-3$ dans les deux cas. . .	90
3.24	Diagramme de Paris : Vitesse de fissuration obtenue lors d'un essai de référence en mode I pur et d'un essai en mode I au cours duquel quelques avec surcharges de mode II ont été appliquées . . . . .	91
3.25	Détail du chargement appliqué, avec les cycles servant à l'acquisition des variables globales $\check{K}_I$ et $\dot{\rho}_I$ . . . . .	92
3.26	(a) Chargement de mode I appliqué à l'éprouvette. (b) Évolution du facteur d'intensité $\check{K}_I(t)$ du champ élastique de référence. (c) Évolution du facteur d'intensité plastique $\dot{\rho}_I(t)$ du champ complémentaire de référence. (d) Réponse plastique $\rho$ à la sollicitation nominale $K_I^\infty$ . . . . .	93
3.27	(a) Chargement de mode I appliqué à l'éprouvette après les cycles de Mode II. (b) Évolution du facteur d'intensité $\check{K}_I(t)$ du champ élastique de référence. (c) Évolution du facteur d'intensité plastique $\dot{\rho}_I(t)$ du champ complémentaire de référence (d) Réponse plastique $\rho$ à la sollicitation élastique $K_I^\infty$ . . . . .	94
3.28	(a) Chargement appliqué à l'éprouvette. (b) Évolution de la loi $K_I^\infty = f(\rho_I)$ , juste avant/juste après l'application des cycles de mode II, et enfin après propagation de la fissure sur une distance de $3mm$ depuis le point d'application des cycles de Mode II. . . . .	94
3.29	Éprouvette cruciforme utilisée pour réaliser les essais sur Astree . . . . .	95
3.30	Chargement appliqué à l'éprouvette. . . . .	96
3.31	Évolution des paramètres $f_I$ et $f_{II}$ en fonction de la longueur de fissure $2a$ . . . . .	98
3.32	(a) Chargement de mode I appliqué à l'éprouvette de flexion quatre points en fonction du temps. (b) Évolution de la différence des erreurs $C_1^R(t)$ et $C_2^R(t)$ au cours du temps. . . . .	99
3.33	Différentes directions de chargement servant à déterminer le domaine d'élasticité de l'acier S355NL . . . . .	100
3.34	Centrage du domaine d'élasticité du matériau dans la direction "K <sub>I</sub> " . . . . .	101
3.35	Champs de référence élastiques : (a) Projection selon l'axe $\underline{X}$ du champ élastique de référence $u_I^e$ (b) Projection selon l'axe $\underline{Y}$ du champ élastique de référence $u_I^e$ (c) Projection selon l'axe $\underline{X}$ du champ élastique de référence $u_{II}^e$ (d) Projection selon l'axe $\underline{Y}$ du champ élastique de référence $u_{II}^e$ . . . . .	103
3.36	Champs de référence complémentaire : (a) Projection selon l'axe $\underline{X}$ du champ complémentaire de référence $u_I^c$ (b) Projection selon l'axe $\underline{Y}$ du champ complémentaire de référence $u_I^c$ (c) Projection selon l'axe $\underline{X}$ du champ complémentaire de référence $u_{II}^c$ (d) Projection selon l'axe $\underline{Y}$ du champ complémentaire de référence $u_{II}^c$ . . . . .	104

3.37	Evolution du facteur d'intensité des contraintes nominal $K_{II}^{\infty}$ en fonction du facteur d'intensité plastique $\rho_{II}$ pour la direction de chargement 2 . . . .	105
3.38	(a) Chargement appliqué exprimé en facteur d'intensité des contraintes nominal (b) Évolution des facteurs d'intensité plastiques $\rho_I$ et $\rho_{II}$ (c) $K_I^{\infty}$ en fonction de $K_{II}^{\infty}$ (d) $\rho_I$ en fonction de $\rho_{II}$ (e) Évolution de la différence des erreurs $C_1^R$ et $C_2^R$ (f) Représentation de l'évolution de l'erreur au cours du chargement . . . . .	107
3.39	(a) Chargement appliqué exprimé en facteur d'intensité des contraintes nominal (b) Évolution des facteurs d'intensité plastiques $\rho_I$ et $\rho_{II}$ (c) $K_I^{\infty}$ en fonction de $K_{II}^{\infty}$ (d) $\rho_I$ en fonction de $\rho_{II}$ (e) Évolution de la différence des erreurs $C_1^R$ et $C_2^R$ (f) Représentation de l'évolution de l'erreur au cours du chargement . . . . .	108
3.40	Chargement appliqué, exprimé en facteurs d'intensité des contraintes nominaux pour la construction du domaine d'élasticité du matériau. Les symboles représentent les niveaux de chargements pour lesquels une image a été prise. . . . .	109
3.41	(a) Évolution des erreurs des erreurs $C_1^R$ et $C_2^R$ au cours du chargement (b) Représentation du domaine d'élasticité avec un critère tel que $C_1^R - C_2^R = 5\%$	109
3.42	Évolution du critère $C_1^R - C_2^R$ , pour les directions de chargement étudiées.	110
3.43	(a) Chargement appliqué à l'éprouvette (b) Évolution des variables plastiques $\rho_I$ et $\rho_{II}$ . . . . .	110
3.44	(a) Chargement appliqué exprimé en termes de facteur d'intensité des contraintes nominal pour déterminer deux surfaces seuils (b) Évolution du critère $C_1^R - C_2^R$ , pour les directions de chargement étudiées. . . . .	112
3.45	(a) Direction d'écoulement plastique dans un diagramme $(K_{II}^{\infty}, K_I^{\infty})$ (b) Direction d'écoulement plastique dans un diagramme $(G_{II}, G_I)$ . . . . .	113
3.46	(a) Direction d'écoulement plastique dans un diagramme $(K_{II}^{\infty}, K_I^{\infty})$ (b) Direction d'écoulement plastique dans un diagramme $(G_{II}, G_I)$ . . . . .	113
3.47	Chargement appliqué afin de comparer les directions d'écoulement de deux surfaces seuils . . . . .	114
3.48	Séquences de chargement telles que $\Delta K_I^{\infty} = 0MPa\sqrt{m}$ et $\Delta K_{II}^{\infty} = 12MPa\sqrt{m}$ . Évolution des variables plastiques $\rho_I$ et $\rho_{II}$ pour : (a) $\bar{K}_I^{\infty} = 27.5MPa\sqrt{m}$ et $\bar{K}_{II}^{\infty} = 0MPa\sqrt{m}$ (b) $\bar{K}_I^{\infty} = 27.5MPa\sqrt{m}$ et $\bar{K}_{II}^{\infty} = 10MPa\sqrt{m}$ (cf. FIG.3.47)	114
3.49	Chargements appliqués à même $\Delta K_{II}^{\infty}$ pour différentes valeurs de $K_I^{\infty}$ afin d'étudier les directions d'écoulement plastique . . . . .	115
3.50	Séquences de chargement telles que $\Delta K_I^{\infty} = 0MPa\sqrt{m}$ et $\Delta K_{II}^{\infty} = 12MPa\sqrt{m}$ . Évolution des variables plastiques $\rho_I$ et $\rho_{II}$ pour : (a) $\bar{K}_I^{\infty} = 30MPa\sqrt{m}$ et $\bar{K}_{II}^{\infty} = 0MPa\sqrt{m}$ (b) $\bar{K}_I^{\infty} = 27.5MPa\sqrt{m}$ et $\bar{K}_{II}^{\infty} = 0MPa\sqrt{m}$ (c) $\bar{K}_I^{\infty} = 27.5MPa\sqrt{m}$ et $\bar{K}_{II}^{\infty} = 10MPa\sqrt{m}$ (d) $\bar{K}_I^{\infty} = 25MPa\sqrt{m}$ et $\bar{K}_{II}^{\infty} = 10MPa\sqrt{m}$ (cf. FIG.3.49) . . . . .	116

4.1	$R_0(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ : Référentiel de l'étude ; $R_T(T, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ : Repère attaché à la pointe de fissure avec : $\vec{e}_z$ tangent au front de la fissure, $\vec{e}_y$ normal au plan de fissuration et $\vec{e}_x$ normal au front de la fissure, D une section normale à $\vec{e}_z$ , C son contour . . . . .	124
4.2	Maillage par éléments finis réalisé sous Abaqus 6.5 : (a) Région d'intérêt autour de la pointe de fissure. (b) Détail du maillage à une distance de 100 $\mu m$ autour de la pointe de la fissure . . . . .	126
4.3	(a) Évolution de l'erreur $C_1^R$ et $C_2^R$ au cours d'un chargement de mode mixte. (b) Évolution de la différence des erreurs $C_1^R$ et $C_2^R$ , notion de seuil de plasticité . . . . .	129
4.4	(a) Trajet de chargement appliqué en $K_I/K_{II}$ au modèle éléments finis. (b) Réponse plastique à la sollicitation imposée. . . . .	130
4.5	tracé de 5 cycles, après le cycle 1, le cycle 100 et le cycle 1000. (a) Évolution du facteur d'intensité plastique $\rho_I(t) = \rho_{const} + \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \dot{\rho}_I(t)$ en fonction du temps à différents cycles de chargement. (b) Évolution des boucles d'hysteresis au fur et à mesure des cycles . . . . .	132
4.6	Construction de la surface seuil de plasticité. . . . .	136
4.7	Surface seuil de plasticité issue des simulations en éléments finis superposé au critère de plasticité . . . . .	138
4.8	Évolution de la surface seuil de plasticité au cours du chargement. . . . .	139
4.9	Surface seuil dans un diagramme $(G_I, G_{II})$ . . . . .	141
4.10	Directions d'écoulement récupérées à partir des simulations en éléments finis . . . . .	141
4.11	Évolutions du centre du domaine d'élasticité issues des simulations par éléments finis (symboles pleins) ou du modèle (symboles creux et lignes) . . . . .	144
4.12	Influence du paramètre R du modèle . . . . .	145
4.13	Influence du paramètre $K_I^Y$ du modèle . . . . .	145
4.14	Comparaison entre les boucles d'hysteresis obtenues avec le modèle et celles issues de simulations par éléments finis. Mode I pur, cycles 1000 à 1005 . . . . .	146
4.15	Comparaison entre les boucles d'hysteresis obtenues avec le modèle et celles issues de simulations par éléments finis. Chargement en phase, c'est à dire en mode mixte proportionnel avec $K_I^\infty = K_{II}^\infty$ . . . . .	147
4.16	Comparaison entre les boucles d'hysteresis obtenues avec le modèle et celles issues de simulations par éléments finis. Chargement en quadrature de phase . . . . .	147
4.17	Comparaison entre les boucles d'hysteresis obtenues avec le modèle et celles issues de simulations par éléments finis. Chargement déphasé de $\frac{\Pi}{4}$ . . . . .	148
4.18	Comparaison entre les boucles d'hysteresis obtenues avec le modèle et celles issues de simulations par éléments finis. Chargement de mode II ayant une fréquence deux fois plus élevée que celle de mode I . . . . .	148

5.1	Illustration schématique de la relation entre $\dot{\rho}$ et le taux de création de nouvelles surfaces libres $\dot{s}$ . (a) avant déformation. (b) surface libre créée lorsque les faces de la fissure s'écartent. (c) surface libre créée lorsque les faces de la fissure se rapprochent. (d) Cas d'une fissure se propageant en moyenne sur un même plan l'aire fissurée n'est pas égale à la moitié de la surface libre créée par seconde . . . . .	155
5.2	Modèle par éléments finis de l'éprouvette de flexion quatre points. . . . .	156
5.3	Illustration du montage de flexion quatre points dissymétrique : (a) Différentes positions des appuis pour changer la mixité du chargement, (b) Axe du roulement à bille, (c) Éprouvette, (d) Dispositif de maintien en position de l'éprouvette, (e) Entaille initiale . . . . .	157
5.4	Position des appuis du montage de flexion quatre points asymétrique, configuration symétrique. . . . .	158
5.5	(a) Evolution des facteurs d'intensité des contraintes de mode I et de mode II. (b) Position de l'extrémité de la fissure déterminée par analyse d'images lors de l'essai, comparaison avec les prévisions du modèle de fissuration . . . . .	158
5.6	Position des appuis du montage de flexion quatre points asymétrique. . . . .	159
5.7	(a) Evolution des facteurs d'intensité des contraintes de mode I et de mode II. (b) Position de l'extrémité de la fissure déterminée par analyse d'images lors de l'essai, comparaison avec les prévisions du modèle de fissuration . . . . .	159
5.8	Position des appuis du montage de flexion quatre points asymétrique. . . . .	160
5.9	(a) Evolution des facteurs d'intensité des contraintes de mode I et de mode II. (b) Position de l'extrémité de la fissure déterminée par analyse d'images lors de l'essai, comparaison avec les prévisions du modèle de fissuration . . . . .	160
5.10	Position des appuis du montage de flexion quatre points asymétrique. . . . .	161
5.11	(a) Evolution des facteurs d'intensité des contraintes de mode I et de mode II. (b) Position de l'extrémité de la fissure déterminée par analyse d'images lors de l'essai, comparaison avec les prévisions du modèle de fissuration . . . . .	161
5.12	Eprouvette 1, (a) Evolution de la longueur de fissure en fonction du nombre de cycles. (b) comparaison simulations/expériences dans un diagramme de Paris, la vitesse de fissuration est tracée en fonction de $\Delta K$ équivalent 5.5162	
5.13	Eprouvette 2, (a) Evolution de la longueur de fissure en fonction du nombre de cycles. (b) comparaison simulations/expériences dans un diagramme de Paris, la vitesse de fissuration est tracée en fonction de $\Delta K$ équivalent 5.5163	
5.14	Eprouvette 3, (a) Evolution de la longueur de fissure en fonction du nombre de cycles. (b) comparaison simulations/expériences dans un diagramme de Paris, la vitesse de fissuration est tracée en fonction de $\Delta K$ équivalent 5.5163	



5.15	Eprouvette 4, (a) Evolution de la longueur de fissure en fonction du nombre de cycles. (b) comparaison simulations/expériences dans un diagramme de Paris, la vitesse de fissuration est tracée en fonction de $\Delta K$ équivalent	5.5 164
5.16	Illustration : modélisation de la fissure par segments macroscopique, le modèle de fissuration prévoyant un trajet de fissuration formé d'une série de micro-segment. . . . .	166
5.17	Description du domaine $S$ en pointe de fissure. La normale extérieur à $S$ , $\underline{m}$ , est telle que $\underline{m}=\underline{n}$ sur $\Gamma_0$ , $\Gamma^+$ et $\Gamma^-$ et $\underline{m} = -\underline{n}$ sur $\Gamma$ . . . . .	168
5.18	Positionnement du problème : une fissure plane soumise à des sollicitations extérieures. Les facteurs d'intensité des contraintes $K_I$ et $K_{II}$ seront calculés pour les différents contours en pointe de fissure . . . . .	170
5.19	Maillage de l'éprouvette, raffiné en pointe de fissure, ainsi que les différents contours choisis pour le calcul des facteurs d'intensité des contraintes	171
5.20	Évolution des facteurs d'intensité des contraintes sur un ensemble de contours utilisés pour le calcul des intégrales d'interaction. Cas d'une fissure plane . . . . .	171
5.21	Schématisme d'une fissure plane et d'une branche infinitésimale en vue d'un calcul de facteurs d'intensité des contraintes par la méthode des intégrales d'interaction. . . . .	172
5.22	Évolution des facteurs d'intensité des contraintes sur un ensemble de contours d'intégrales d'interaction. Cas d'une branche de fissuration de longueur nulle mais orientée. . . . .	173
5.23	Cas d'une fissure présentant une branche de longueur finie . . . . .	174
5.24	Évolution des facteurs d'intensité des contraintes sur un ensemble de contours d'intégrales d'interaction. Cas d'une fissure présentant une branche de longueur finie . . . . .	174
5.25	Évolution des facteurs d'intensité des contraintes sur un ensemble de contours d'intégrales d'interaction. Cas d'une fissure présentant une branche de longueur finie . . . . .	175
5.26	Illustration du domaine fissuré $\Omega$ : (a) Cas de fissuration "réel" présentant une branche de longueur finie. (b) Fissure plane équivalente orientée d'un angle $\alpha$ que l'on cherche à déterminer. . . . .	177
5.27	(a) $\underline{u}^I$ : champ de déplacement de mode $I$ en pointe de fissure. (b) $\underline{u}^{II}$ : champ de déplacement de mode $II$ . (c) $\underline{u}^{CL_1}$ (d) $\underline{u}^{CL_2}$ : Extraction des champs de déplacement en pointe de fissure plane pour deux jeux de conditions aux limites. . . . .	180
5.28	Illustration de la branche bifurquée d'un angle $\theta = 45^\circ$ de longueur $L_{bif} = 0.4r_d$ . . . . .	181
5.29	Évolution de l'erreur relative $C_R^T(\alpha)$ commise par l'approximation, par une fissure plane, de la fissure présentant une branche à son extrémité. . .	182
5.30	Repartition de l'erreur pour différents angles de bifurcation $\theta$ et différents angles de fissure plane équivalente $\alpha$ . . . . .	182

5.31	Répartition de l'erreur $C_R^T$ en fonction des conditions aux limites définies par $P_{CL_1}$ et $P_{CL_2}$ . L'erreur est exprimée en pourcentage d'écart par rapport à la valeur moyenne. . . . .	183
5.32	Loi d'évolution de l'angle $\alpha$ optimum de la fissure plane en fonction de l'angle de la branche $\theta$ pour différentes longueurs de branche $\frac{L_{bif}}{r_d}$ . . . .	183
5.33	Erreur relative minimum $C_{Rmin}^T$ dans l'approximation pour des angles de bifurcation $\theta \in [0; 70^\circ]$ . . . . .	184
5.34	Angle $\alpha_{min}$ pour lequel l'erreur est minimum pour les différentes longueurs de bifurcation notées $\frac{L_{bif}}{r_d}$ . . . . .	184
5.35	(a) Géométrie de la fissure bifurquée et les différents contours d'intégration. (b) Nouvelle géométrie de fissure plane dans un domaine d'intérêt $\Omega$ , de rayon $r_d$ . . . . .	186
5.36	(a) Calcul des facteurs d'intensité des contraintes par la méthode des intégrales d'interaction sur une fissure bifurquée. (b) Le même calcul sur une géométrie de fissure plane équivalente . . . . .	186
5.37	Valeurs des facteurs d'intensité des contraintes en fonction des contours $\Gamma_i$ suivant différentes géométries de fissure.(a) $K_I$ . (b) $K_{II}$ . . . . .	187
5.38	Test de la fissure droite optimum sur le cas vu au dessus . . . . .	187
5.39	Évolution de la géométrie de fissure au cours du temps, le trajet de fissure est approché par un plan "glissant" de longueur $r_d$ à son extrémité, l'évolution est ainsi continue entre les états 1 et 2 ou 2 et 3. . . . .	188
5.40	Géométrie de fissure "réelle" et fissure plane équivalente pour le domaine d'étude $\Omega$ de rayon $r_d$ . . . . .	188
5.41	Comparaison au cours d'une propagation de fissure en mode mixte . . . .	189
B.1	(a) Chargement appliqué exprimé en facteur d'intensité des contraintes nominal (b) Évolution des facteurs d'intensité plastiques $\rho_I$ et $\rho_{II}$ (c) $K_I^\infty$ en fonction de $K_{II}^\infty$ (d) $\rho_I$ en fonction de $\rho_{II}$ (e) Évolution de la différence des erreurs $C_1^R$ et $C_2^R$ (f) Représentation de l'évolution de l'erreur au cours du chargement . . . . .	201
B.2	(a) Chargement appliqué exprimé en facteur d'intensité des contraintes nominal (b) Évolution des facteurs d'intensité plastiques $\rho_I$ et $\rho_{II}$ (c) $K_I^\infty$ en fonction de $K_{II}^\infty$ (d) $\rho_I$ en fonction de $\rho_{II}$ (e) Évolution de la différence des erreurs $C_1^R$ et $C_2^R$ (f) Représentation de l'évolution de l'erreur au cours du chargement . . . . .	202
B.3	(a) Chargement appliqué exprimé en facteur d'intensité des contraintes nominal (b) Évolution des facteurs d'intensité plastiques $\rho_I$ et $\rho_{II}$ (c) $K_I^\infty$ en fonction de $K_{II}^\infty$ (d) $\rho_I$ en fonction de $\rho_{II}$ (e) Évolution de la différence des erreurs $C_1^R$ et $C_2^R$ (f) Représentation de l'évolution de l'erreur au cours du chargement . . . . .	203

B.4	(a) Chargement appliqué exprimé en facteur d'intensité des contraintes nominal (b) Évolution des facteurs d'intensité plastiques $\rho_I$ et $\rho_{II}$ (c) $K_I^\infty$ en fonction de $K_{II}^\infty$ (d) $\rho_I$ en fonction de $\rho_{II}$ (e) Évolution de la différence des erreurs $C_1^R$ et $C_2^R$ (f) Représentation de l'évolution de l'erreur au cours du chargement . . . . .	204
B.5	(a) Chargement appliqué exprimé en facteur d'intensité des contraintes nominal (b) Évolution des facteurs d'intensité plastiques $\rho_I$ et $\rho_{II}$ (c) $K_I^\infty$ en fonction de $K_{II}^\infty$ (d) $\rho_I$ en fonction de $\rho_{II}$ (e) Évolution de la différence des erreurs $C_1^R$ et $C_2^R$ (f) Représentation de l'évolution de l'erreur au cours du chargement . . . . .	205
B.6	(a) Chargement appliqué exprimé en facteur d'intensité des contraintes nominal (b) Évolution des facteurs d'intensité plastiques $\rho_I$ et $\rho_{II}$ (c) $K_I^\infty$ en fonction de $K_{II}^\infty$ (d) $\rho_I$ en fonction de $\rho_{II}$ (e) Évolution de la différence des erreurs $C_1^R$ et $C_2^R$ (f) Représentation de l'évolution de l'erreur au cours du chargement . . . . .	206
B.7	(a) Chargement appliqué exprimé en facteur d'intensité des contraintes nominal (b) Évolution des facteurs d'intensité plastiques $\rho_I$ et $\rho_{II}$ (c) $K_I^\infty$ en fonction de $K_{II}^\infty$ (d) $\rho_I$ en fonction de $\rho_{II}$ (e) Évolution de la différence des erreurs $C_1^R$ et $C_2^R$ (f) Représentation de l'évolution de l'erreur au cours du chargement . . . . .	207
B.8	(a) Chargement appliqué exprimé en facteur d'intensité des contraintes nominal (b) Évolution des facteurs d'intensité plastiques $\rho_I$ et $\rho_{II}$ (c) $K_I^\infty$ en fonction de $K_{II}^\infty$ (d) $\rho_I$ en fonction de $\rho_{II}$ (e) Évolution de la différence des erreurs $C_1^R$ et $C_2^R$ (f) Représentation de l'évolution de l'erreur au cours du chargement . . . . .	208
B.9	(a) Chargement appliqué exprimé en facteur d'intensité des contraintes nominal (b) Évolution des facteurs d'intensité plastiques $\rho_I$ et $\rho_{II}$ (c) $K_I^\infty$ en fonction de $K_{II}^\infty$ (d) $\rho_I$ en fonction de $\rho_{II}$ (e) Évolution de la différence des erreurs $C_1^R$ et $C_2^R$ (f) Représentation de l'évolution de l'erreur au cours du chargement . . . . .	209
B.10	(a) Chargement appliqué exprimé en facteur d'intensité des contraintes nominal (b) Évolution des facteurs d'intensité plastiques $\rho_I$ et $\rho_{II}$ (c) $K_I^\infty$ en fonction de $K_{II}^\infty$ (d) $\rho_I$ en fonction de $\rho_{II}$ (e) Évolution de la différence des erreurs $C_1^R$ et $C_2^R$ (f) Représentation de l'évolution de l'erreur au cours du chargement . . . . .	210

## Liste des tableaux

2.1	Composition chimique du S355NL en pourcentages massiques . . . . .	27
2.2	Données Arcelor-Mittal pour l'acier S355NL . . . . .	28
2.3	Coefficients du modèle pour différents états métallurgiques . . . . .	36
2.4	Tableau récapitulatif des différents essais de mode I réalisés sur des éprouvettes CCT en acier S355NL. . . . .	39
2.5	Paramètres de la loi d'émoussement pour le matériau de base et pour les ZAT . . . . .	56
3.1	Relation entre les efforts $F_x$ et $F_y$ dans chaque vérin et les facteurs d'intensité des contraintes $K_I^\infty$ et $K_{II}^\infty$ pour une fissure de longueur $2a = 30mm$ . . . . .	96
3.2	Relation entre les efforts $F_x$ et $F_y$ dans chaque vérin et les facteurs d'intensité des contraintes $K_I^\infty$ et $K_{II}^\infty$ pour une fissure de longueur $2a = 35mm$ . . . . .	97
3.3	Relation entre les efforts $F_x$ et $F_y$ dans chaque vérin et les facteurs d'intensité des contraintes $K_I^\infty$ et $K_{II}^\infty$ pour une fissure de longueur $2a = 40mm$ . . . . .	97
3.4	Relation entre les efforts $F_x$ et $F_y$ dans chaque vérin et les facteurs d'intensité des contraintes $K_I^\infty$ et $K_{II}^\infty$ pour une fissure de longueur $2a = 45mm$ . . . . .	97
3.5	Évolution des paramètres $f_I$ et $f_{II}$ en fonction de la longueur de fissure $2a$ . . . . .	97
5.1	Tableau récapitulatif des différents essais de mode mixte réalisés sur des éprouvettes de flexion quatre points asymétrique en acier S355NL. . . . .	158



# Introduction

La prévision de la durée de vie d'une structure industrielle est indispensable pour se prémunir contre les risques de rupture en service. Cette prévision peut être assez difficile, de nombreux paramètres étant incertains ou variables (le chargement réel, les conditions de fonctionnement, la présence de défauts etc.). Plus l'incertitude sur la durée de vie est grande et plus la marge de sécurité sur cette durée de vie doit être large. Ainsi garantir la sécurité sans compromettre la viabilité économique impose de limiter l'incertitude sur la durée de vie potentielle des pièces.

Les travaux qui vont être présentés ici ont pour objectif final d'améliorer la prévision de la résistance à la fissuration par fatigue des structures. La présence d'un défaut dans la structure est supposée et on cherche à simuler son évolution sous l'effet du chargement subi par la structure. Ce chargement peut être variable dans le temps, de manière plus ou moins aléatoire, en intensité et en direction. Une prévision optimale de la durée de vie devrait se baser sur l'ensemble du chargement et pas seulement sur les cas les plus défavorables. Pour cela, il faut disposer de méthodes de calcul rapides et tenant compte de l'effet des variations du chargement sur la fissuration.

Ces dernières années, de nombreux outils de simulation numérique ont été développés. Il est maintenant possible de modéliser la présence d'une fissure de forme complexe dans une structure tridimensionnelle par éléments finis et d'actualiser sa géométrie lorsque cette fissure se propage. Cependant, sauf exceptions, le comportement du matériau est élastique linéaire et on utilise des critères de propagation des fissures ne tenant pas compte des effets du comportement non-linéaire du matériau.

Or il est bien admis par la communauté scientifique que, pour la fissuration par fatigue, la plasticité localisée à l'extrémité de la fissure a une importance considérable sur la vitesse et la direction de propagation des fissures de fatigue. Il est possible de faire des calculs par éléments finis en intégrant le comportement non-linéaire du matériau. Mais la simulation de la propagation d'une fissure dans une structure tridimensionnelle, en non-linéaire, et sous un chargement réaliste reste trop coûteuse. En effet la "vie" de la structure peut comporter plusieurs dizaine de millions de cycles de chargement. Des méthodes alternatives devront donc être utilisées.

Cette thèse porte sur l'extension des travaux de [Pommier et Hamam, 2007] à la fissuration en mode mixte I+II. Ces derniers ont proposé une approche, dite multi-échelle, qui permet de décrire les champs de vitesse dans la région entourant l'extrémité de la fissure, en élasto-plasticité et en Mode I, via un nombre réduit de variables scalaires globales. Un jeu d'équations différentielles scalaires portant sur ces variables globales per-

met ensuite de modéliser le comportement élasto-plastique cyclique de la région entourant l'extrémité de la fissure et cela de manière incrémentale. Cette réduction du nombre de degrés de liberté du problème lève les limites des approches en éléments finis non-linéaires pour simuler la propagation de fissures par fatigue. La plasticité localisée dans la région entourant l'extrémité de la fissure est entièrement décrite par ce modèle simplifié et le calcul de structure peut alors être effectué dans un cadre linéaire. Le modèle de [Pommier et Hamam, 2007] permet de simuler la propagation des fissures en mode I sous un chargement aléatoire, comportant plusieurs millions de cycles, en quelques minutes.

L'extension de ce modèle aux chargements multi-axiaux et donc à la fissuration en mode mixte s'inscrit naturellement dans la continuité de ces travaux. En effet, dans une structure, les contraintes ne sont généralement ni uniformes, ni uniaxiales, du fait de la complexité géométrique de la structure. Par ailleurs, la structure peut subir des conditions aux limites variées et le chargement est alors non-proportionnel. Dans ces conditions, les fissures sont sollicitées en mode-mixte non-proportionnel au cours de leur propagation.

De nombreux auteurs ont montré que les changements de taux de mixité du chargement pouvaient faire varier la direction de propagation d'une fissure et sa vitesse, avec des effets d'histoire assez complexes induits par la plasticité et le contact. Il a également été montré que la prise en compte du comportement élasto-plastique du matériau permettait de prévoir la plupart des effets d'histoire induit par le chargement, à l'exception notable des effets tribologiques, liés aux évolutions des conditions de frottement entre les faces des fissures. En s'appuyant sur des calculs par éléments finis en non-linéaire, ces auteurs ont montré que le trajet de fissuration simulé peut être prévu si les contraintes internes induites par plasticité sont bien prises en compte. Cependant, comme en mode I, la simulation dans un contexte industriel de la fissuration en mode mode mixte et en non-linéaire est trop coûteuse. D'où l'objectif de ces travaux, d'étendre le modèle incrémental développé par [Pommier et Hamam, 2007] à la fissuration par fatigue en mode mixte non-proportionnel.

Afin de présenter les travaux réalisés dans le cadre de cette thèse les points suivant seront abordés :

- Un premier chapitre introductif présentant le cadre scientifique de ces travaux. Les bases de la mécanique linéaire de la rupture sont présentées rapidement. Enfin des résultats que l'on peut trouver dans la littérature concernant la prise en compte de la mixité du chargement sur la fissuration seront présentés.
- Un deuxième chapitre est consacré à l'étude expérimentale du comportement mécanique du matériau d'étude et de la fissuration par fatigue en mode I de l'acier S355NL. La modélisation de la propagation de fissure par fatigue en mode I a permis de simuler les chargements à amplitude variable appliqués lors des expérimentations et de les comparer aux résultats expérimentaux.
- Le chapitre 3 présente une validation expérimentale des démarches numériques et des choix de modélisation qui ont été effectués pour établir le modèle présenté au chapitre 4. Cette validation a été réalisée en se basant sur la mesure des champs de vitesse par corrélation d'images numériques (DIC) et leur exploitation avec les mêmes hypothèses qu'en numérique. L'utilisation de la machine d'essai ASTREE,

nous a permis de construire expérimentalement le domaine d'élasticité de la région entourant l'extrémité de la fissure et de suivre son évolution. Il a été choisi de présenter les résultats expérimentaux au chapitre 3 et les méthodes numériques au chapitre 4. Comme les mêmes méthodes sont appliquées, ces deux chapitres sont interdépendants.

- Le chapitre 4 est dédié au développement d'un modèle de comportement élasto-plastique pour la région entourant l'extrémité de la fissure. Il porte sur l'établissement du critère de plasticité, des lois d'évolution du domaine d'élasticité, ainsi que l'évolution des grandeurs plastique au cours du chargement. Les choix de modélisation sont guidés par les observations de résultats de simulation numériques et validés par les essais présentés au chapitre 3. Les simulations numériques par éléments finis ou avec le modèle de comportement pour la région entourant l'extrémité de la fissure sont comparées pour des cas de chargement variés.
- Enfin, un dernier chapitre présente la loi de fissuration choisie pour simuler la propagation des fissures en mode mixte en tenant compte des effets de la plasticité modélisés au chapitre 4. L'intégration de ce modèle de comportement au sein d'un code de calcul de structure par éléments finis linéaire est abordé. Les difficultés numériques particulières liées à la modélisation des fissures non planes sont discutées et une méthode est proposée pour actualiser la géométrie en minimisant ces difficultés.





# Chapitre 1

## État de l'art

*Ce chapitre est consacré à établir le contexte industriel et scientifique dans lequel se place cette étude.*

### Sommaire

---

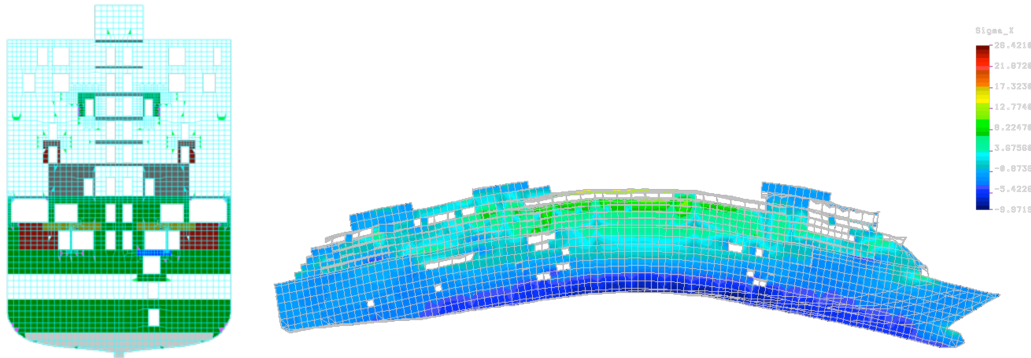
<b>1</b>	<b>Le contexte industriel</b> . . . . .	<b>6</b>
1.1	Structures . . . . .	6
1.2	Chargement . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Le contexte scientifique</b> . . . . .	<b>9</b>
2.1	La fissuration . . . . .	9
2.2	Modéliser la fissuration, le cadre de la mécanique de la rupture . . . .	14
2.3	Eléments de thermodynamique de la fissuration . . . . .	21
2.4	Critères de propagation par fatigue en modes mixtes . . . . .	23

---

# 1 Le contexte industriel

## 1.1 Structures

L'application industrielle de cette étude porte sur la simulation de la propagation des fissures au sein de structures navales.



**FIGURE 1.1:** Simulation en éléments finis d'une structure navale. (Principia Marine)

Ces structures sont constituées d'un assemblage de plaques et de poutres en acier faisant apparaître des discontinuités géométriques autour desquelles se forment des zones de concentration de contraintes notamment au voisinage des cordons de soudure. Les risques d'amorçage et de propagation des fissures de fatigue se situent essentiellement dans les joints soudés. (FIG.1.2)

Ces fissures de fatigue ne peuvent être mises en évidence qu'après enlèvement de protections ou de calorifugeage. Elles ne sont par conséquent découvertes qu'assez tard en période d'entretien ou en cours de mission durant laquelle elles sont dans un premier temps réparées sommairement. (perçage ou rechargement par soudure)

Les contrôles non destructifs effectués lors de la fabrication du bâtiments de surface et en période d'entretien sont : un examen visuel et des méthodes de ressuage. Suivant le type et les dimensions des défauts, ils sont soit :

- Acceptés si les dimensions sont inférieurs aux dimensions critiques obtenues en fonction des critères d'acceptation de la réglementation.
- Réparés.
- Acceptés par dérogation au cas par cas.

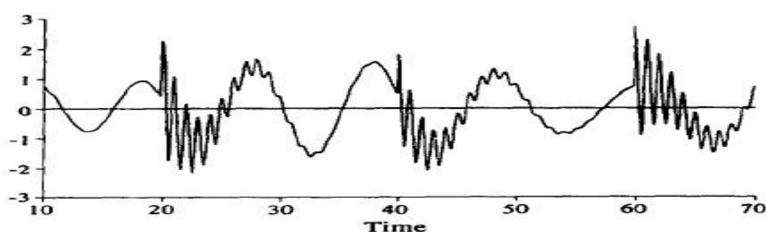
La durée de vie de ces bâtiments de surface est d'au moins 30 ans, et les périodes entre les phases d'inspection varient entre 6 et 10 ans.



**FIGURE 1.2:** Exemple de fissure ayant été amorcée dans un cordon de soudure. (Source : DGA Bagneux)

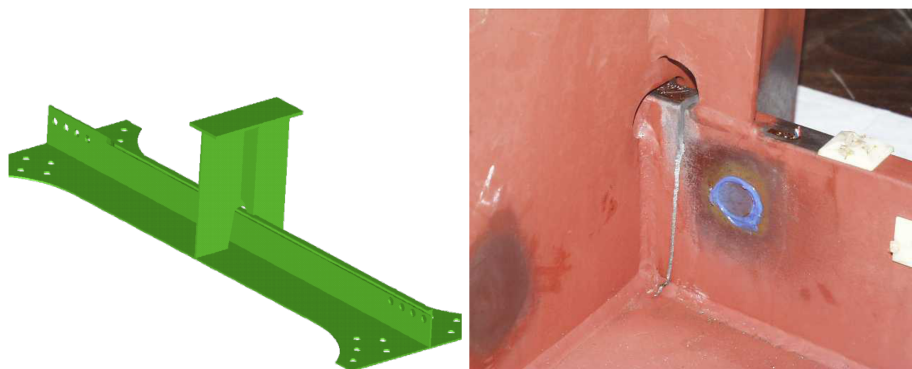
## 1.2 Chargement

Les structures navales telles que les navires, les plates-formes pétrolière ou les frégates sont soumises naturellement à des sollicitations dues à l'état de la mer. Les contraintes vues par la structure sont donc fortement cycliques et à amplitude variable. (FIG.1.3)



**FIGURE 1.3:** Chargement sur la structure du à l'état de la mer. La composante basse fréquence correspond à la houle, le signal haute fréquence correspond au "slamming" (Principia Marine)

Lors de la navigation, la structure subit les états de mer provoqués par la houle (FIG.1.3). Mais un effet, dit de "slamming" vient se superposer au signal de houle. En effet, du fait de la longueur de coque de ces navires, ils ne suivent pas parfaitement le mouvement de houle mais "rebondissent" sur les fronts de vague. Cet effet de slamming aura pour conséquence de créer des surcharges dans la structure.



**FIGURE 1.4:** Renfort structural à l'origine de la mixité du chargement. (Principia Marine)

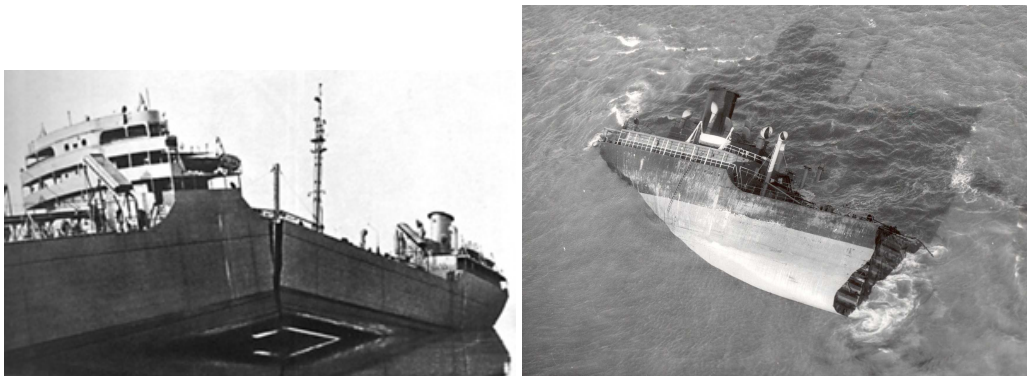
Comme on l'a fait remarquer, les fissures apparaissent majoritairement au niveau des joints soudés. De part la géométrie de l'ossature du navire, le chargement dans ces zones est complexe, il est de type multiaxial, non proportionnel, à amplitude variable. (FIG.1.4)

## 2 Le contexte scientifique

### 2.1 La fissuration

Historiquement, la prise en compte des défauts et des fissures dans le dimensionnement des structures a fait suite aux ruptures fragiles des "liberty ships" en 1941. 2700 "liberty ships" ont été construits à partir de l'été 1941. Ces cargos de 440 pieds et 10000 tonnes servant à affréter troupes et matériels vers l'Europe ont été construits en des temps records pour faire face à l'urgence : le "SS Patrick Henry" a été construit en 4 jours et 15 h ! Pour réduire les temps de production des navires, le constructeur a décidé de remplacer les traditionnels rivets par des joints soudés ; à la suite de cette décision, 362 exemplaires de ces cargos ont subi des avaries similaires à la FIG.1.5.

L'opération de soudage modifie la microstructure de l'acier et sa tenue mécanique et induit des contraintes internes. Dans le cas des "liberty ships", il semblerait que deux effets se soient combinés. Une augmentation de la température de transition fragile-ductile due à la fragilisation du matériau par le soudage et l'apparition de contraintes résiduelles qui n'étaient pas prises en compte dans le dimensionnement de la structure seraient à l'origine de la rupture de ces navires par fissuration instable.

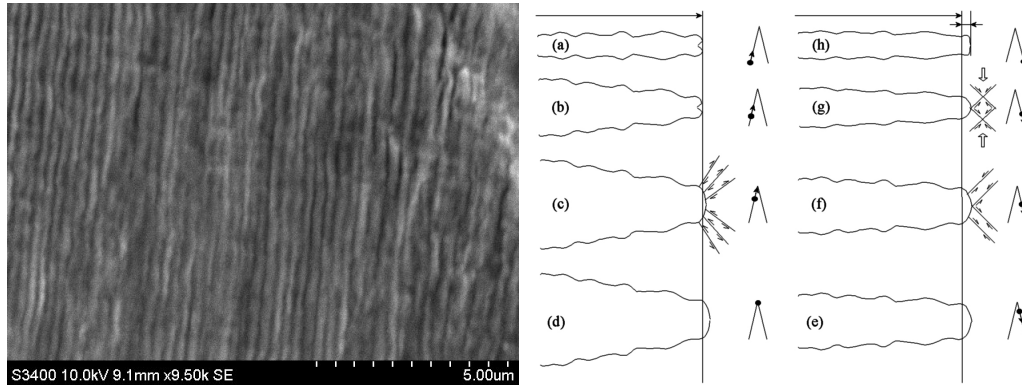


**FIGURE 1.5:** Rupture brutale de deux "liberty ships"

Par la suite, ce sont les accidents successifs des avions "comet", en 1952, 1953 et 1954 qui ont été à l'origine du développement de critères de fissuration stables, tels que la loi de Paris [Paris *et al.*, 1961] pour la fatigue, pour calculer la durée de vie de pièces contenant déjà des fissures. En effet, il a été montré que un an après leur mise en service les fuselages de ces avions présentaient de nombreuses fissures de fatigue qui s'étaient propagées du fait des cycles de pressurisation et dépressurisation de la cellule à partir des hublots. Ceux-ci avaient une forme rectangulaire et ont été ensuite remplacés par des hublots ovoïdes pour minimiser les concentrations de contraintes à partir desquels s'étaient initiées des fissures de fatigue.

### 2.1.1 Mécanisme de propagation des fissures

Le chargement de fatigue provoque donc une propagation stable, cycle à cycle des fissures. Lorsqu'on observe le faciès de rupture d'une pièce rompue par fatigue (FIG.1.6(a)), certains matériaux laissent apparaître très visiblement des stries de fatigue. Elles sont dues à la plasticité en pointe de fissure, et plus particulièrement à l'érousement plastique en pointe de fissure [Pelloux, 1969].



**FIGURE 1.6:** (a) Faciès de rupture d'un acier inoxydable 316L (F. Fremy) (b) Formation des stries de fatigue par érousement plastique. [Pelloux, 1969]

La FIG.1.6(b) illustre le phénomène : la fissure, sollicitée en mode I, s'ouvre (a-d), et s'érouse au fur et à mesure que le niveau de contrainte augmente (c). Lors de la décharge (e-f), la fissure se referme. La région autour de l'extrémité de la fissure subit une déformation plastique en retour (g). La fissure s'est finalement propagée d'une longueur approximativement égale au rayon d'érousement. Le pas entre deux stries correspond à l'avancée de fissure par cycle.

Le fait que l'avancée de la fissure soit directement proportionnelle à la plasticité en pointe de fissure est un point important dans le développement des modèles de fissuration qui vont suivre. Comme nous le verrons, que ça soit pour le mode I ou le mode mixte, les lois de fissuration sont liées à l'érousement plastique de la fissure.

### 2.1.2 La loi de Paris

[Paris, 1964] a proposé une loi empirique reliant la vitesse de fissuration stable par cycle de fatigue  $\frac{da}{dN}$  à l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes  $\delta K$ . Représentée dans un diagramme logarithmique, cette loi laisse apparaître trois domaines distinct :

- Pour  $\Delta K_S < K < K_I^C$ , la vitesse de fissuration est proportionnelle à l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes à la puissance m.

$$\frac{da}{dN} = C\Delta K^m \quad (1.1)$$

- Pour  $K_{max} > K_I^C$  la fissuration devient instable. Avant d'atteindre ce point, les vitesses de fissuration sont supérieures à celles prévues par la loi de Paris.
- Pour  $\Delta K < \Delta K_S$  l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes est inférieure au seuil de non propagation. Juste avant ce seuil, les vitesses de fissuration deviennent inférieures à celles prévues par la loi de Paris, la propagation de fissure devient très lente, voire indétectable.

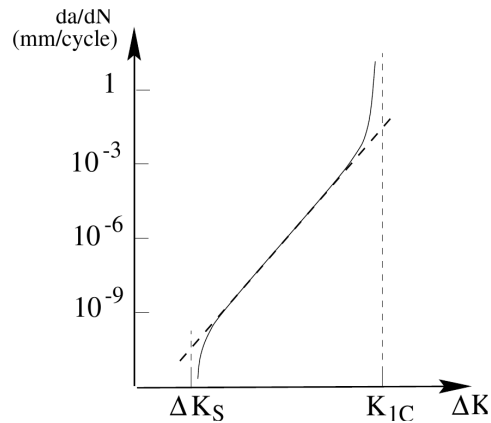


FIGURE 1.7: Illustration de la loi de Paris

### 2.1.3 Le seuil de non-propagation

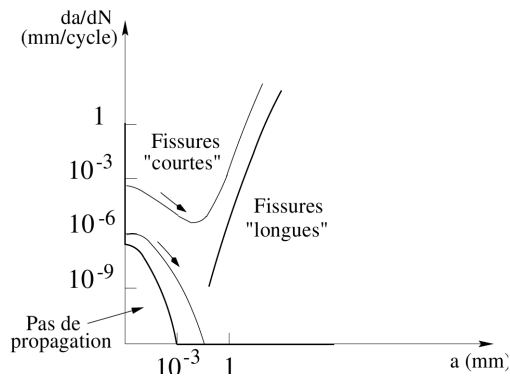


FIGURE 1.8: Propagation des fissures par fatigue. [Besson *et al.*, 2001]

Le seuil de non-propagation des fissures est observé expérimentalement en pré-fissurant des éprouvettes, par exemple sous chargement de fatigue à amplitude constante. Au cours de la pré-fissuration, l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes augmente avec la longueur de la fissure. Ensuite, l'amplitude du chargement est asservie sur la longueur de la fissure afin d'imposer une décroissance lente de l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes jusqu'à ce que la fissure s'arrête.



Les essais permettant de mesurer le seuil de non-propagation ont très vite montré une dépendance aux effets d'histoire du chargement et en particulier au sillage plastique laissé par les cycles utilisés pour pré-fissurer l'éprouvette et aux effets d'environnement. Ainsi, si on ajuste le chargement de manière à imposer une décroissance lente de  $\Delta K$  autour d'une valeur moyenne de  $K$  gardée constante, ou bien pour un rapport de charge  $R = K_{min}/K_{max}$ , les seuils de non-propagation des fissures trouvés ne seront pas les mêmes. De même si le taux de décroissance de  $\Delta K$  avec la longueur de la fissure n'est pas suffisamment petit, la fissure s'arrête du fait des contraintes résiduelles laissées par les cycles antérieurs. On montre alors que la vitesse de décroissance de  $\Delta K$  doit être choisie en relation avec la dimension de la zone plastique de la fissure [Suresh, 1998], [Miller, 1997].

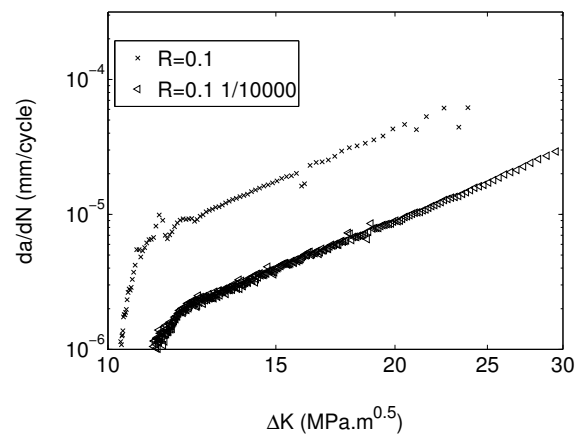
On constate également que les fissures courtes sont susceptibles de se propager plus rapidement que les fissures longues [Gao *et al.*, 2007]. Au fur et à mesure de leur propagation leur vitesse diminue (bien que  $\Delta K$  augmente) parce que divers effets de fermeture des fissures peuvent rendre une partie du cycle de fatigue inefficace [Elber, 1971], [Elber, 1970] et aussi parce que la zone plastique dans la région en pointe de fissure se confine progressivement, rendant le développement de la plasticité dans la région en pointe de fissure plus difficile au fur et à mesure qu'on tend vers des conditions de déformations planes [Fleck et Newman, 1988]. Dans certains cas, les fissures courtes s'arrêtent, dans d'autres cas, elles finissent par rejoindre le régime dit "de Paris".

#### 2.1.4 L'effet de surcharge

Pour les mêmes raisons, et contrairement à ce que l'on pourrait croire, l'application d'une surcharge à une structure fissurée sollicitée en fatigue, retarde la propagation de la fissure. En effet, lorsque la fissure se propage de manière stable par fatigue, la zone plastifiée autour de l'extrémité de la fissure reste généralement confinée à l'intérieur du massif élastique linéaire de la pièce. Lors de l'application d'une surcharge, la zone plastique entourant l'extrémité de la fissure s'accroît. Lors de la décharge, le milieu extérieur tend à revenir à déformation nulle, ce qui induit des contraintes résiduelles de compression dans la zone plastique. Par la suite, ces contraintes de compression tendent à maintenir la fissure fermée sur une portion du cycle de fatigue. Ce phénomène de fermeture des fissures est à l'origine de forts effets de retard sur la vitesse de propagation.

La FIG.1.9 illustre ce phénomène. Un essai de fissuration par fatigue en mode I a été réalisé sur une éprouvette CCT en acier S355NL. Un essai de référence à amplitude constante avec un rapport de charge  $R = 0.1$  est superposé à un essai, au même rapport de charge, mais pour lequel une surcharge de 1.5 fois le chargement nominal a été appliquée tous les 10000 cycles de fatigue. Reporté dans un diagramme de Paris, l'effet est très marqué, la vitesse de fissuration avec les surcharges a été abaissée d'un rapport 10 en comparaison de l'essai de référence.

Les contraintes résiduelles, l'écroutissage du matériau, et plus généralement l'énergie élastique stockée dans le milieu ont ainsi une très grande influence sur la vitesse de fissuration.

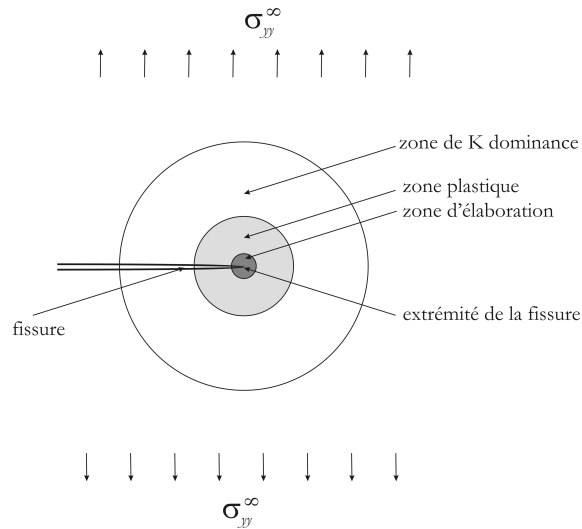


**FIGURE 1.9:** Courbe de Paris pour l'acier S355NL : (croix) pour un rapport de charge  $R = 0.1$  et pour un chargement à amplitude constante, (triangles) même rapport de charge mais avec une surcharge d'un facteur 1.5 sur le chargement nominal appliquée tous les 10000 cycles

## 2.2 Modéliser la fissuration, le cadre de la mécanique de la rupture

### 2.2.1 Hypothèses géométriques

On distingue généralement 3 zones autour de l'extrémité de la fissure. (FIG.1.10)



**FIGURE 1.10:** Zones d'intérêt autour de l'extrémité de la fissure.

La première zone, ou "process zone" est le domaine où se produisent les phénomènes de dégradation du matériau qui permettent la propagation de la fissure. Sauf exceptions, en fatigue, ce domaine est extrêmement localisé. Lorsque la fissure se propage par strie, la dimension de cette "process zone" est comparable à la taille des stries, c'est à dire de taille généralement inférieure au micromètre. Lorsque la fatigue se combine avec un autre mécanisme, comme du fluage, de la corrosion etc. la zone où le matériau est dégradée autour de l'extrémité de la fissure peut être beaucoup plus grande.

La seconde zone est la zone plastique. Dans un domaine, qui peut avoir une dimension millimétrique, le matériau se déforme plastiquement. On distingue la zone plastique monotone, dans laquelle le matériau s'est déformé plastiquement une fois, lors d'une surcharge par exemple, de la zone plastique cyclique dans laquelle le matériau se déforme plastiquement à chaque cycle.

La dernière zone est la zone de K-dominance. Dans cette zone, le milieu est élastique linéaire, et même si les champs mécaniques sont perturbés par la présence d'une zone plastique lorsqu'on s'approche de l'extrémité de la fissure, les solutions asymptotiques de la mécanique linéaire de la rupture sont représentatives de l'état de contrainte et de déformation dans la majeure partie de la zone de K-dominance.

Si on exclue le problème des fissures courtes, la fissuration par fatigue à très fort  $\Delta K$  ou bien sous une forte contrainte moyenne  $K_{moy}$  à haute température ou dans un environnement dans lequel le matériau est chimiquement réactif, alors on pourra généralement faire l'hypothèse de séparation des échelles. En effet, on trouve un facteur 10 à 100 entre les tailles de chacune de ces zones.

Dans ce cas, on peut considérer que la zone de K-dominance contrôle le développement de la zone plastique, qui elle-même contrôle la propagation de la fissure.

Enfin, les solutions de la mécanique linéaire de la rupture sont données pour une fissure plane à front droit. Une dernière échelle à considérer est celle qui correspond à cette hypothèse. La fissure est habituellement considérée comme plane à l'échelle de la micro-structure, alors que sa surface présente pourtant des aspérités (stries, facettes...) ou qu'il existe de petites branches de fissure secondaires.

### 2.2.2 Modes de fissuration

Dans le cas général, d'une fissure plane à front droit dans un milieu 3D, trois modes de sollicitation de la fissure permettent de décrire l'ensemble des cas de chargement.

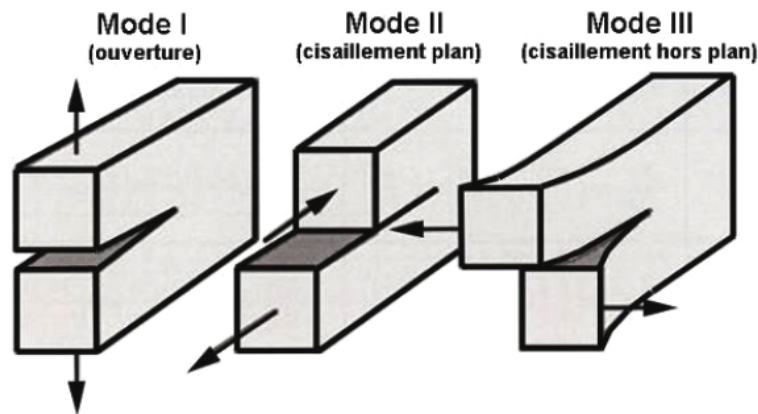


FIGURE 1.11: Différents modes d'ouverture d'une fissure.

- Le mode I, mode symétrique par rapport au plan de fissure.
- Le mode II, mode anti-symétrique par rapport au plan et au front de fissure.
- Le mode III, mode anti-plan.

En mode I+II, par exemple, le taux de mixité définit le rapports entre les contributions de mode II et de mode I.

Les trois modes (FIG.1.11) sont définis par symétrie. Par conséquent, il est toujours possible, même dans un milieu non-linéaire, de partitionner n'importe quel état en trois modes. Attention, si le milieu est non-linéaire le taux de mixité trouvé sur le champ de contrainte peut être différent de celui trouvé pour le champ de déformation.

Enfin, les modes étant définis par des relations de symétrie vis à vis du plan et du front de la fissure, cela implique qu'on considère des champs (de déplacement, de contrainte, de déformation...) à une échelle où la fissure peut être considérée comme plane à front droit.

### 2.2.3 Solutions asymptotiques

Dans tous les cas, élasticité linéaire ou milieu non-linéaire, les champs mécaniques sont discontinus au passage du plan de la fissure et continus ailleurs. La discontinuité disparaît sur le front de la fissure.

En *élasticité linéaire*, ceci est à l'origine d'une singularité au niveau du front de la fissure. Lorsque la distance  $r$  (FIG.1.12) à l'extrémité de la fissure tend vers 0, les champs de contrainte et de déformation tendent vers l'infini. [Williams, 1957] a exprimé les champs de contrainte au voisinage de la singularité à l'aide d'un développement asymptotique pour  $r \rightarrow 0$  :

$$\sigma(r, \theta) = \sum_p K_p f_p(\theta) r^{\lambda_p} \quad (1.2)$$

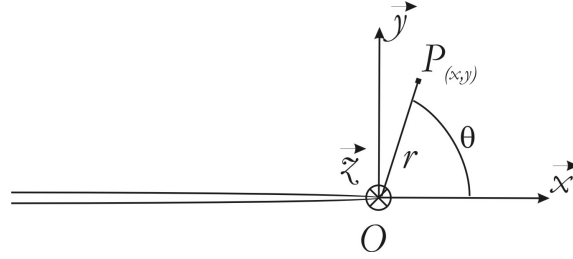


FIGURE 1.12: Repère attaché à la pointe de fissure.

Le développement au premier ordre de (1.2) a été donné par [Westergaard, 1939]. Le tenseur des contraintes  $\sigma(r, \theta)$  est exprimé comme le produit des facteurs d'intensité des contraintes  $K_i$  et de fonctions angulaires  $f_i(\theta)$  :

$$\sigma(r, \theta) = \sum_i \frac{K_i}{\sqrt{2\pi r}} f_i(\theta) \quad (1.3)$$

Le champ de déplacement au voisinage de l'extrémité de la fissure ( $r \rightarrow 0$ ) est alors donné par :

$$u(r, \theta) = \sum_i \frac{K_i \sqrt{r}}{2\pi} g_i(\theta) \quad (1.4)$$

En élasticité linéaire, les facteurs d'intensité des contraintes  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  suffisent à définir le chargement de la zone de K-dominance.

Lorsque le milieu est élasto-plastique et que la zone plastique reste bien confinée à l'intérieur de la zone de K-dominance. On définira alors les facteurs d'intensité des contraintes nominaux  $K_I^\infty$ ,  $K_{II}^\infty$  et  $K_{III}^\infty$  qui sont les facteurs d'intensité des contraintes correspondant au même problème si le matériau était élastique linéaire.

**Solutions asymptotiques en mode I** [Westergaard, 1939] Le champ de contrainte est donné par :

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^I(r, \theta) &= K_I \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) \\
\sigma_{yy}^I(r, \theta) &= K_I \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) \\
\sigma_{xy}^I(r, \theta) &= K_I \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\
\sigma_{xz}^I(r, \theta) &= 0. \\
\sigma_{yz}^I(r, \theta) &= 0. \\
\sigma_{zz}^I(r, \theta) &= \nu(\sigma_{xx}^I + \sigma_{yy}^I) \quad \text{en déformations planes} \\
\sigma_{zz}^I(r, \theta) &= 0. \quad \text{en contraintes planes}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Le champ de déplacement est donné par :

$$\begin{aligned}
u_x^I(r, \theta) &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) \\
u_y^I(r, \theta) &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) \\
u_z^I(r, \theta) &= 0. \quad \text{en déformations planes}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Au premier terme du développement asymptotique, vient s'ajouter l'effet de la contrainte  $T_I$ . Cette contrainte  $T_I$  vient s'ajouter au terme  $\sigma_{xx}^I$  dans le développement asymptotique du champ de contrainte.

**Solutions asymptotiques en mode II** Le champ de contrainte est donné par :

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{II}(r, \theta) &= -K_{II} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} (2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}) \\
\sigma_{yy}^{II}(r, \theta) &= K_{II} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\
\sigma_{xy}^{II}(r, \theta) &= K_{II} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) \\
\sigma_{xz}^{II}(r, \theta) &= 0. \\
\sigma_{yz}^{II}(r, \theta) &= 0. \\
\sigma_{zz}^{II}(r, \theta) &= \nu(\sigma_{xx}^{II} + \sigma_{yy}^{II}) \quad \text{en déformations planes} \\
\sigma_{zz}^{II}(r, \theta) &= 0. \quad \text{en contraintes planes}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

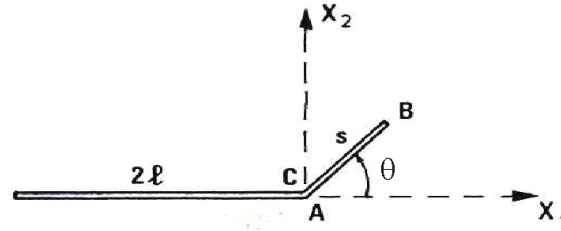
Le champ de déplacement est donné par :

$$\begin{aligned}
u_x^{II}(r, \theta) &= \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (2 + \kappa + \cos \theta) \\
u_y^{II}(r, \theta) &= \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (2 - \kappa - \cos \theta) \\
u_z^{II}(r, \theta) &= 0. \quad \text{en déformations planes}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

## 2.2.4 Fissure non-plane

Lorsqu'une fissure se propage sous un chargement complexe dans une structure tridimensionnelle, elle ne reste généralement pas plane à front droit. Or les facteurs d'intensité des contraintes sont généralement définis pour une fissure plane à front rectiligne ; dès lors que le plan de fissuration change, la validité de ces résultats est discutable.

On considère par exemple, une fissure de longueur  $2l$  qui présente une branche de longueur  $l$  inclinée d'un angle  $\theta$  par rapport au plan de fissuration principal.



**FIGURE 1.13:** Illustration de la branche de fissure. [Amestoy et Leblond, 1992]

Lorsque  $s \rightarrow 0$ , [Leblond, 1989] et [Amestoy et Leblond, 1992] ont montré que les facteurs d'intensité des contraintes juste après branchement  $(K_I^*, K_{II}^*)$  dépendent uniquement des facteurs d'intensité des contraintes juste avant branchement  $(K_I, K_{II})$  et de l'angle  $\theta$  de la nouvelle direction de propagation par une relation de la forme :

$$\begin{pmatrix} K_I^* \\ K_{II}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11}(\theta) & F_{12}(\theta) \\ F_{21}(\theta) & F_{22}(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_I \\ K_{II} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Les fonctions  $F_{11}$ ,  $F_{12}$ ,  $F_{21}$  et  $F_{22}$  peuvent être exprimées comme suit :

$$\begin{aligned} F_{11}(\theta) &= \cos^3 \frac{\theta}{2} \\ F_{12}(\theta) &= -3\cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ F_{21}(\theta) &= \frac{1}{2} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \\ F_{22}(\theta) &= \frac{1}{2} (3\cos \theta - 1) \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

Ces expressions de  $K_I^*$  et  $K_{II}^*$  correspondent à une longueur de la branche  $s$  tendant vers 0. On peut les comparer aux solutions trouvées pour une branche de longueur  $s$  non nulle. Pour cela, les solutions proposées par [Frelat et Leblond, 1999], [Fett *et al.*, 2004] peuvent être utilisées. Ces auteurs ont déterminé les solutions asymptotiques pour le cas d'un branchement 2D de longueur  $s$  mais incluant la courbure du plan de fissuration donnée par  $a$ . Si l'on utilise les solutions précédentes [Leblond, 1989] et [Amestoy et Leblond, 1992], les facteurs d'intensité après le branchement ne dépendent que des facteurs d'intensité des contraintes juste avant branchement  $(K_I, K_{II})$ . En revanche, avec cette nouvelle solution [Frelat et Leblond, 1999] on constate que les facteurs d'intensité après branchement dépendent maintenant de la contrainte  $T_I$  avant le branchement [Cotterell et Rice, 1980a] [Cotterell et Rice, 1980b]. Ainsi si la contrainte  $T_I$  est grande, une discontinuité de  $(K_I, K_{II})$  peut être observée après branchement. Les problèmes liés à cette discontinuité de la solution seront discutés dans le CHAP.5.

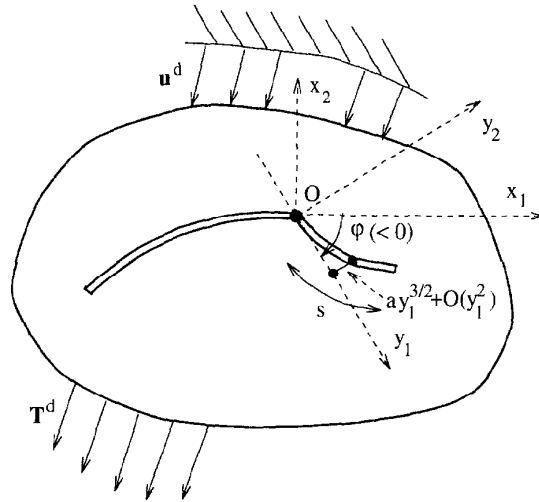


FIGURE 1.14: Illustration de la branche de fissure courbée. [Frelat et Leblond, 1999]

$$\begin{pmatrix} K_I^*(s) \\ K_{II}^*(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11}(\theta) & F_{12}(\theta) \\ F_{21}(\theta) & F_{22}(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_I \\ K_{II} \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} G_{11}(\theta) \\ G_{21}(\theta) \end{pmatrix} T_I + a \begin{pmatrix} H_{11}(\theta) & H_{12}(\theta) \\ H_{21}(\theta) & H_{22}(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_I \\ K_{II} \end{pmatrix} \right] \sqrt{s} \quad (1.10)$$

### 2.2.5 Fissure à front courbe

De manière similaire, l'hypothèse que le front de fissure est rectiligne n'est généralement pas vérifiée expérimentalement. La FIG. 1.15 présente le faciès de rupture par fatigue d'une éprouvette en acier. Le front n'est pas droit mais elliptique. La courbure du front de fissure modifie les sollicitations vues par la zone de K-dominance par comparaison avec un front droit.

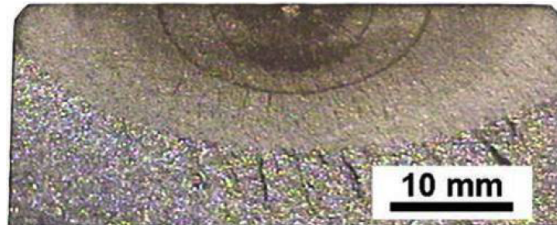


FIGURE 1.15: Faciès de rupture, front de fissure elliptique

[Leblond, 1999] a proposé des solutions analytiques pour calculer les facteurs d'intensité des contraintes de fissures 3D à plan et front courbes et présentant une branche.



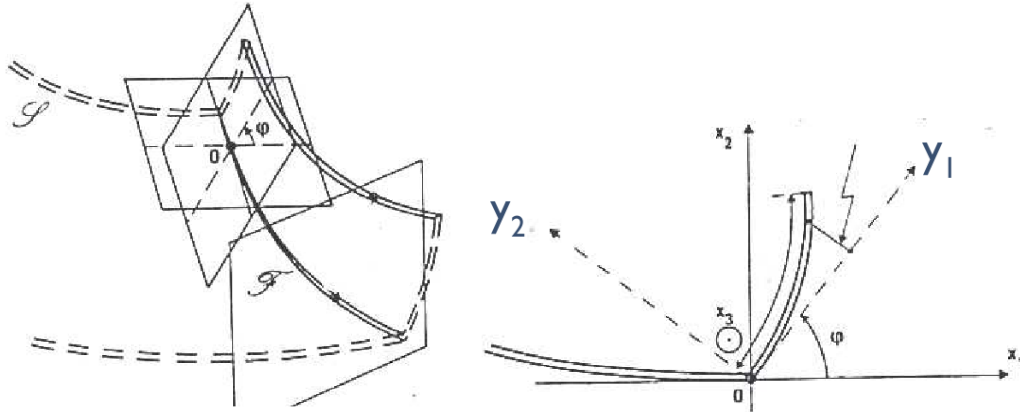


FIGURE 1.16: Illustration d'une fissure 3D, présentant une courbure. [Leblond, 1999]

$$\begin{pmatrix} K_I^*(s) \\ K_{II}^*(s) \\ K_{III}^*(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11}(\theta) & F_{12}(\theta) & 0 \\ F_{21}(\theta) & F_{22}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & F_{33}(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} G_{11}(\theta) & 0 & 0 \\ G_{21}(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & G_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_I \\ T_{II} \\ T_{III} \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} H_{11}(\theta) & H_{12}(\theta) & 0 \\ H_{21}(\theta) & H_{22}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & H_{33}(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{pmatrix} \right] \sqrt{s} \quad (1.11)$$

Le premier terme de l'expression (1.11) correspond au calcul des facteurs d'intensité des contraintes juste après branchement d'une fissure plane, ceci a été développé dans [Leblond, 1989] et [Amestoy et Leblond, 1992]. Les expressions de  $F_{ij}$ ,  $G_{ij}$  et  $H_{ij}$  sont données dans [Leblond, 1999].

Dans la plupart des cas, une hypothèse de déformation plane le long du front de fissure pourra néanmoins être utilisée.

## 2.3 Eléments de thermodynamique de la fissuration

### 2.3.1 Théorie de Griffith, approche de Bui et Ehlacher

Soit  $\delta W_s$  la quantité d'énergie nécessaire à la création d'aire fissurée  $\delta S$ ,  $\delta W_{elas}$  l'énergie élastique de déformation stockée,  $\delta W_{cin}$  l'énergie cinétique et  $\delta W_{ext}$  le travail des efforts extérieurs.

[Griffith, 1920] postula que :

$$\delta W_s = 2\gamma\delta S \quad (1.12)$$

Et que l'énergie totale ne variait pas :

$$\delta W_{tot} = \delta W_{elas} + \delta W_{cin} + \delta W_{ext} + \delta W_s = 0 \quad (1.13)$$

Supposons un état d'équilibre pour une fissure stationnaire ( $\delta W_{cin} = 0$ ), le critère de propagation de la fissure à l'équilibre est défini ainsi :

$$\delta W_{elas} + \delta W_{ext} + 2\gamma\delta S = 0 \quad (1.14)$$

$$\Rightarrow -\frac{\delta}{\delta S}(W_{elas} + W_{ext}) = 2\gamma \quad (1.15)$$

Le taux de restitution d'énergie  $G$  est alors donné comme suit :

$$G = -\frac{\delta}{\delta S}(W_{elas} + W_{ext}) \quad (1.16)$$

Le critère d'initiation de fissure peut donc être ré-écrit comme :

$$G = 2\gamma \quad (1.17)$$

Lorsque le milieu est élastique linéaire, le taux de restitution d'énergie  $G$  peut être calculé à partir des facteurs d'intensité des contraintes (ici en mode I+II) [Irwin, 1960] :

$$G = \frac{K_I^2}{E^*} + \frac{K_{II}^2}{E^*} \quad (1.18)$$

où, en déformation plane :

$$E^* = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (1.19)$$

Il devient donc possible de relier l'énergie de surface  $\gamma$  de [Griffith, 1920] à la ténacité du matériau  $K_I^c$  dans un cas de déformation plane en mode I par :

$$K_I^c = \sqrt{\frac{2\gamma E}{1 - \nu^2}} \quad (1.20)$$

### 2.3.2 Comportement non-linéaire, champ HRR, C\*

Dans un milieu non-linéaire, et compte tenu de la singularité, le niveau de contrainte à l'extrémité de la fissure est tel que les approches élastiques linéaires [Westergaard, 1939] ne peuvent plus être utilisées, c'est pourquoi [Hutchinson, 1968] et [Rice et Rosengren, 1968] ont proposé les champs HRR (Hutchinson, Rice et Rosengren) valables à proximité de l'extrémité de la fissure et tenant compte de l'écroutissage du matériau via une loi de comportement élastique non-linéaire.

Supposons un matériau dont le comportement lors d'un chargement uniaxial  $\sigma_0$  est donné par une loi de Holomon :

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad (1.21)$$

Le champ *HRR* de contrainte au voisinage de l'extrémité de la fissure peut alors s'exprimer comme :

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \left( \frac{JE}{\sigma_0^2 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n) \quad (1.22)$$

Les déformations sont données par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_0}{E} \left( \frac{JE}{\sigma_0^2 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} r^{\frac{n}{n+1}} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta, n) \quad (1.23)$$

Les champs de déplacement sont données par :

$$u_i = \frac{\sigma_0}{E} \left( \frac{JE}{\sigma_0^2 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} r^{\frac{n}{n+1}} \tilde{u}_i(\theta, n) \quad (1.24)$$

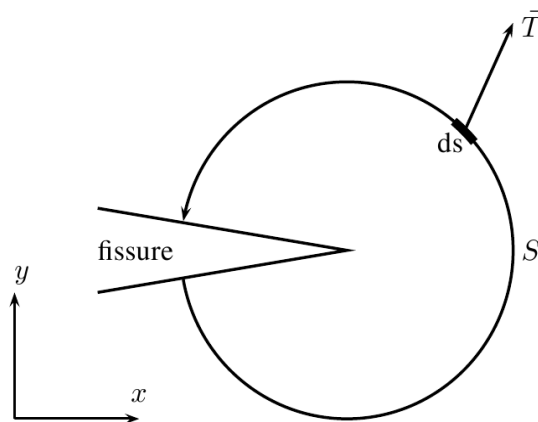


FIGURE 1.17: Définition d'un contour d'intégration.[Besson *et al.*, 2001]

$J$  étant l'intégrale de contour suivante (FIG.1.17) :

$$J = \int_{\Gamma} \left( w dy - \vec{T} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} ds \right) \quad (1.25)$$

avec  $w$  l'énergie de déformation :

$$w = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (1.26)$$

Les fonctions  $\tilde{\sigma}_{ij}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{ij}$  et  $\tilde{u}_i$  sont tabulées,  $I_n$  est un paramètre qui dépend faiblement de l'exposant  $n$ . Le taux de restitution d'énergie  $G$  est alors égal à l'intégrale  $J$  de Rice.

On remarque que le cas de l'élasto-plasticité parfaite peut être représenté par une loi élastique non linéaire (en chargement monotone) pour laquelle  $n \rightarrow \infty$ . Dans ce cas, les champs HRR prévoient que les contraintes tendent à devenir indépendantes de  $r$  autour de l'extrémité de la fissure. Les champs HRR décrivent ainsi les champs de contrainte à l'intérieur de la zone plastique monotone et pas la transition entre la zone plastique monotone et la solution élastique qui prévaut quand  $r$  augmente et que la zone plastique est confinée.

Dans le cas des milieux visqueux, avec une loi de fluage de la forme :

$$\dot{\varepsilon} = K \sigma^n \quad (1.27)$$

Le tenseur des contraintes s'exprime par :

$$\sigma_{ij} = \left( \frac{C^*}{KI_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n) \quad (1.28)$$

$C^*$  étant l'intégrale de contour suivante :

$$C^* = \int_{\Gamma} \left( w^* dy - \vec{T} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} ds \right) \quad (1.29)$$

avec  $w^*$  la puissance de déformation :

$$w^* = \int \sigma_{ij} d\dot{\varepsilon}_{ij} \quad (1.30)$$

## 2.4 Critères de propagation par fatigue en modes mixtes

### 2.4.1 Démarches fondées sur la mécanique de la rupture

Le calcul de la direction de propagation des fissures en mode mixte peut être réalisé par le biais de critères mécaniques qui se basent sur les champs de contraintes ou de déformations issus de la mécanique linéaire de la rupture. Le choix du critère dépend du mécanisme de propagation des fissures ([Qian et Fatemi, 1996]).

- Le critère de la contrainte circonférentielle maximale prédit la direction de propagation comme étant la direction qui maximise la contrainte  $\sigma_{\theta\theta}$  normale au plan de propagation ([Erdogan et Sih, 1963]). La direction  $\theta$  de propagation vérifie donc :

$$\frac{d\sigma_{\theta\theta}}{d\theta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\sigma_{\theta\theta}}{d\theta^2} < 0 \quad (1.31)$$

Après simplification des solutions asymptotique de la mécanique linéaire de la rupture on aboutit à :

$$K_I \sin\theta + K_{II}(3\cos\theta - 1) = 0 \quad (1.32)$$

Ce qui donne :

$$\theta = 2\arctan \left( \frac{1}{4} \left[ \frac{K_I}{K_{II}} - \text{sign}(K_{II}) \sqrt{8 + \left( \frac{K_I}{K_{II}} \right)^2} \right] \right) \quad (1.33)$$

Ce critère est particulièrement adapté au cas de rupture fragile par clivage.

- Un critère énergétique, communément appelé méthode  $G - \theta$ , donne comme direction de propagation  $\theta$  celle qui maximise le taux de restitution d'énergie. Comme on a pu le voir dans (1.16) le taux de restitution d'énergie est défini ainsi :

$$G(\theta) = -\frac{\partial W^{tot}}{\partial A} \quad (1.34)$$

La direction de propagation  $\theta$  selon la méthode  $G - \theta$  doit donc satisfaire :

$$\frac{dG(\theta)}{d\theta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2G(\theta)}{d\theta^2} < 0 \quad (1.35)$$

- De nombreux autres critères peuvent être trouvés dans la littérature, ceux-ci ont été retenus car ils sont valables pour les matériaux ductiles pour les faibles taux de mixité du chargement  $\frac{K_{II}}{K_I}$ .

#### 2.4.2 Démarches fondées sur les éléments finis

Dans les approches éléments finis actuelles, le comportement élasto-plastique cyclique du matériau peut être pris en compte dans les simulations. Il devient donc possible de simuler l'état des contraintes internes et de l'érouissage du matériau, qui traduisent les effets d'histoire, après une propagation cycle à cycle de la fissure. En ce qui concerne la fissuration en modes mixtes, [Doquet et Bertolino, 2008] ont montré qu'en utilisant un critère d'endommagement basé sur une moyenne spatiale des quantités locales calculées par éléments finis, il était possible d'estimer correctement le plan de propagation de la fissure ainsi que sa vitesse.

Ces mêmes approches permettent de prendre en compte l'effet d'histoire lié au contact des lèvres de la fissure ([Elguedj, 2006], [Doquet *et al.*, 2009]). En effet, en mode mixte, les contraintes de cisaillement sur les lèvres de la fissure évoluent en fonction du niveau de fermeture de la fissure mais aussi en fonction de l'histoire du chargement.

# Chapitre 2

## Fissuration en mode I

*Ce chapitre est consacré à l'étude expérimentale du comportement mécanique et de la fissuration par fatigue en Mode I de l'acier S355NL et de la modélisation de la fissuration par fatigue en Mode I pour pouvoir simuler la propagation de fissures sous chargement à amplitude variable.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Le matériau d'étude . . . . .</b>	<b>27</b>
1.1	L'acier S355NL . . . . .	27
1.2	Microstructures . . . . .	28
1.3	Comportement élasto-plastique cyclique . . . . .	31
1.4	Identification d'un modèle de comportement élasto-plastique . . . . .	35
<b>2</b>	<b>Essais de fissuration en mode I à différents rapports de charge . . . . .</b>	<b>39</b>
2.1	Dispositif expérimental . . . . .	39
2.2	Matériau de base . . . . .	40
2.3	ZAT . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Modèle de propagation de fissure en mode I . . . . .</b>	<b>45</b>
3.1	Hypothèses . . . . .	45
3.2	Détermination des champs de référence . . . . .	47
3.3	Loi de comportement élasto-plastique cyclique en mode I . . . . .	52
3.4	Confrontation essai / modèle . . . . .	56

**4    Résumé du chapitre . . . . . 61**

---

# 1 Le matériau d'étude

## 1.1 L'acier S355NL

Le matériau d'étude, l'acier S355NL, est un alliage de fer, carbone et manganèse. Son comportement élasto-plastique cyclique a été caractérisé pour divers états métallurgiques. En effet, des fissures de fatigue sont parfois observées au voisinage des joints soudés, dans la zone affectée thermiquement (ZAT). Dans cette zone, le matériau a subi une histoire thermique, variable selon la distance au joint soudé et qui est susceptible de modifier son comportement mécanique par rapport au matériau de base. Des éprouvettes d'acier S355NL, dans son état de base ou bien traitées thermiquement de manière à simuler l'histoire thermique vue en différents points de la ZAT, ont donc été testées afin d'identifier la relation entre le comportement élasto-plastique cyclique du matériau et son état métallurgique.

Élément chimique	C	Mn	P	S	Si	Al	Cr	Cu	Ni
%	0.12	1.46	0.016	0.01	0.44	0.041	0.02	0.01	0.01

**TABLE 2.1:** Composition chimique du S355NL en pourcentages massiques



## 1.2 Microstructures

### 1.2.1 Le matériau de base

La structure du matériau dans son état de base est ferrito-perlitique. Les propriétés mécaniques standards de ce matériau, couramment employé pour des applications navales, sont données par Arcelor-Mittal.

$R_e$	$R_m$	$A\%$
$\geq 355$ MPa	470 – 630 MPa	$\geq 22$

TABLE 2.2: Données Arcelor-Mittal pour l'acier S355NL

La microstructure de ce matériau a été étudiée en microscopie électronique à balayage. Les grains ont une dimension de l'ordre de  $15\mu\text{m}$  (FIG.2.1). Les grains de ferrite ont une teinte variable selon leur orientation cristalline. Les grains de perlite sont alignés. Cet alignement résulte du procédé de laminage.

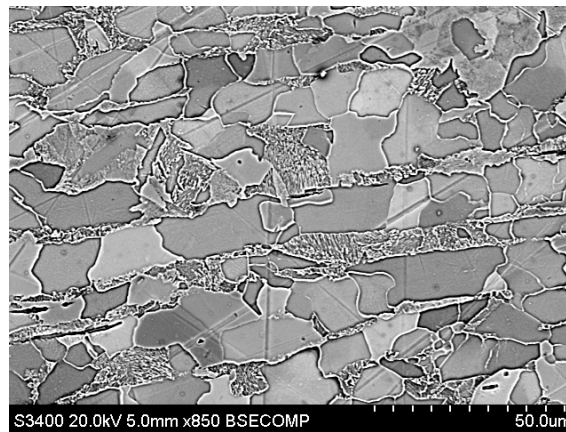


FIGURE 2.1: Analyse micrographique

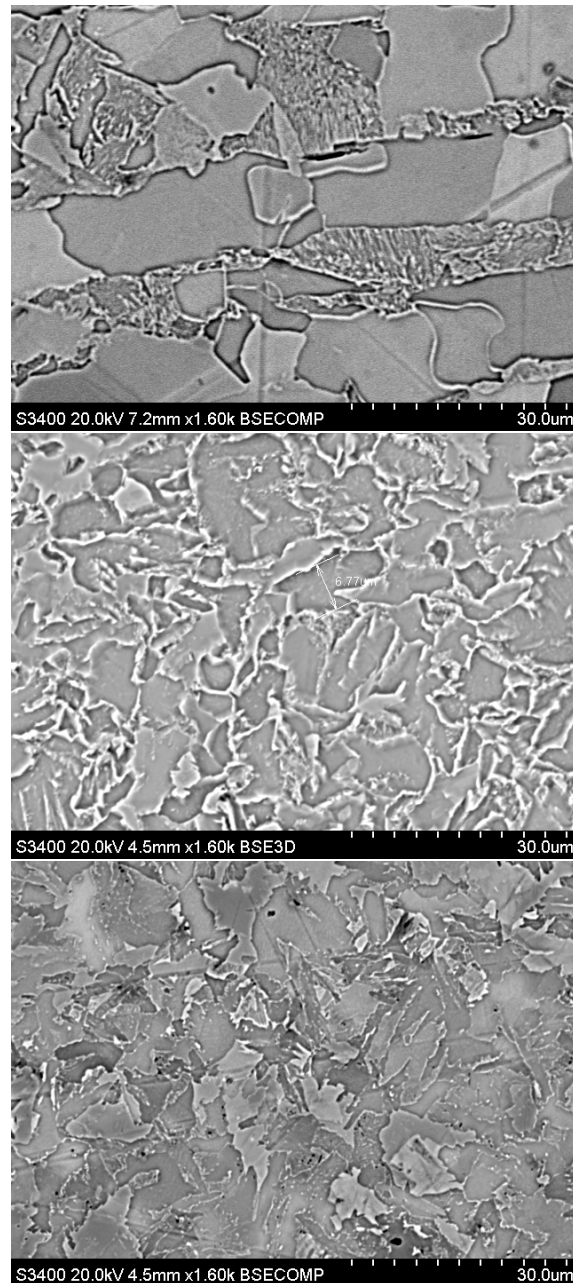
### 1.2.2 Zone affectée thermiquement

L'opération de soudage occasionne, de par son apport énergétique, des modifications métallurgiques au niveau du joint soudé. Ces modifications vont affecter les microstructures de la zone fondue et des zones affectées thermiquement. La zone affectée thermiquement appelée ZAT est le siège de modification métallurgique du métal de base qui peuvent induire des fragilités, des baisses de résistance mécanique et des manques de ductilité.

Afin de caractériser le comportement du matériau dans la ZAT, trois types d'éprouvettes nous ont été fournies. Ces éprouvettes ont été prélevées dans le matériau de base et ont subi un traitement thermique permettant de simuler l'histoire thermique subie dans la zone affectée thermiquement.

En effet, comme la ZAT d'un cordon de soudure est de petite taille, il est difficile d'y prélever des éprouvettes. Mais, lors du soudage, on peut mesurer les variations de température dans la ZAT et appliquer ensuite cette histoire thermique sur le matériau massif. On obtient alors des microstructures dites de ZAT simulées. Trois éprouvettes de ce type ont été testées, puis préparées pour être observées au microscope électronique à balayage (FIG.??).

On constate que les microstructures de ZAT simulées 2.2 sont très différentes de la microstructure de base du matériau FIG.2.1. Les grains sont apparemment plus fins, de formes plus complexes et les bandes de perlite ont disparu. Cette microstructure s'apparente à de la bainite.



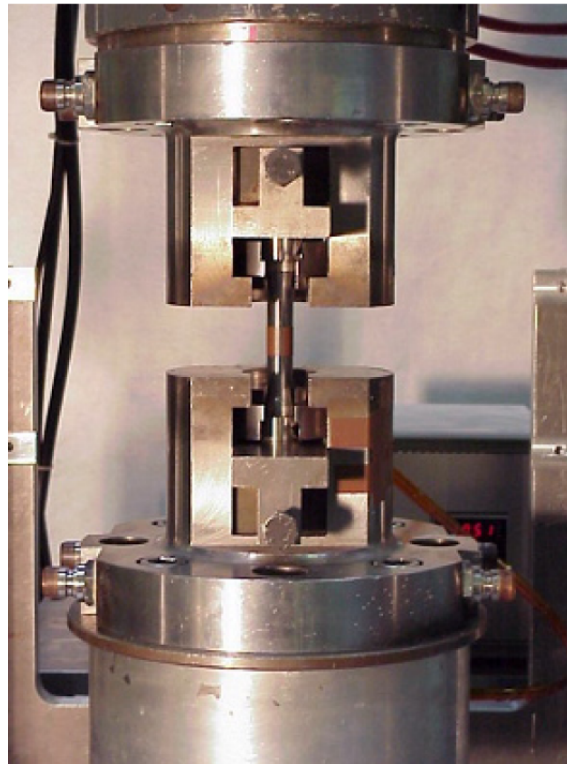
**FIGURE 2.2:** Microstructures de ZAT simulées (clichés MEB)

### 1.3 Comportement élasto-plastique cyclique

Afin de caractériser le comportement élasto-plastique cyclique du matériau des essais de traction/compression à déformation imposée ont été réalisés.

#### 1.3.1 Dispositif expérimental

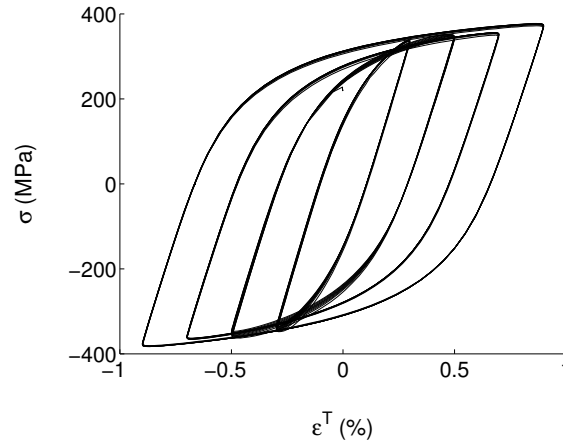
La FIG.2.3 illustre le mode opératoire de l'essai. L'éprouvette est équipée d'un extensomètre. La machine d'essai est asservie sur cet extensomètre. On applique sur l'éprouvette des cycles d'amplitude de déformation croissante à rapport de déformation égal à -1. Comme le matériau d'étude présente très peu d'écrouissage isotrope, dix cycles seulement sont appliqués pour chaque niveau de déformation.



**FIGURE 2.3:** Dispositif d'essai

La principale difficulté de cet essai réside dans l'alignement des mors de la machine d'essai. En effet, lors des phases de compression, si les axes sont mal alignés l'éprouvette peut fléchir et flamber. En outre, au fur et à mesure que la déformation plastique cumulée augmente l'éprouvette s'endommage. Dans ce cas, le module observé juste après la décharge en traction est inférieur à celui observé lors d'une phase de recharge en compression. Lors des essais, une différence notable a été observée à partir d'un niveau maximum de déformation égal à 1.2%. Pour toutes ces raisons, les essais n'ont été exploités que jusqu'aux cycles d'amplitude de déformation égale à  $\pm 1.2\%$ .

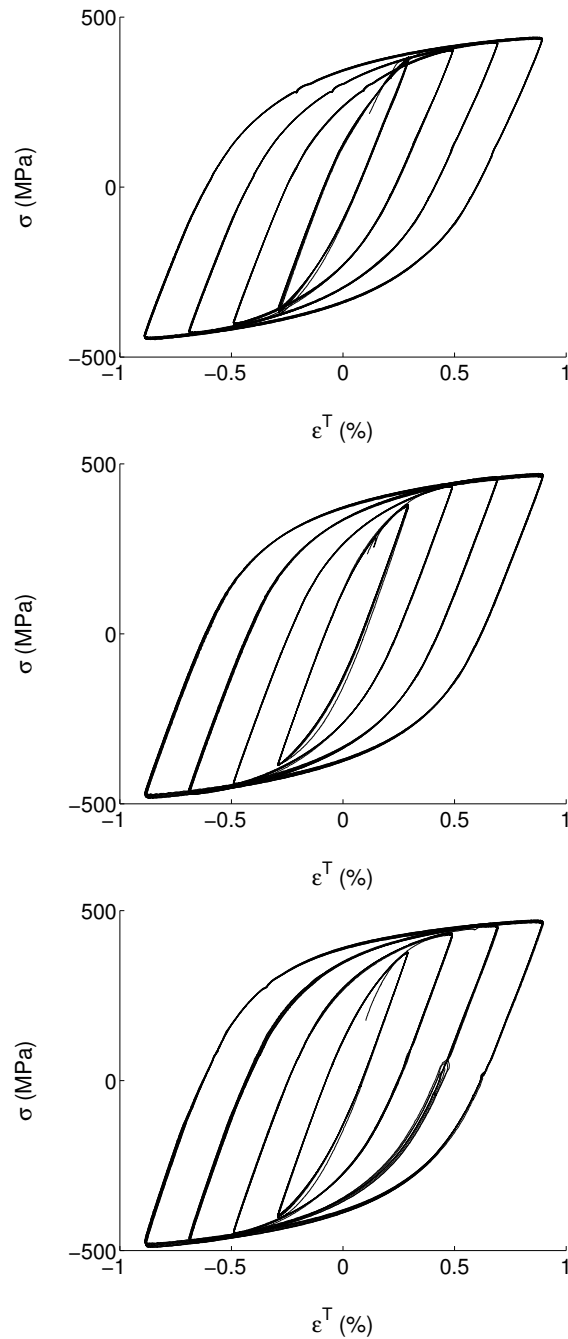
### 1.3.2 Résultats



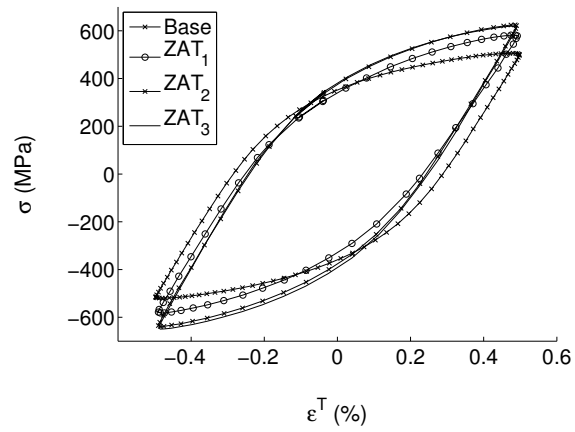
**FIGURE 2.4:** Comportement élasto-plastique de l'acier S355NL, microstructure de base

La FIG.2.4 représente l'évolution de la contrainte  $\sigma$  appliquée à l'éprouvette en fonction de la déformation totale  $\epsilon_t$  pour différents niveaux de déformation. On remarque que les dix cycles appliqués pour chaque niveau de déformation se superposent quasi parfaitement. Le matériau ne présente donc pas d'écrouissage isotrope.

On constate que les comportements élasto-plastique observés pour la microstructure de base ou pour les microstructures de ZAT simulées sont assez différents. Dans tous les cas le matériau présente peu d'écrouissage isotrope hormis un adoucissement cyclique dans les tous premiers cycles. La contrainte maximale augmente de l'ordre de 20% (FIG.2.6) pour les microstructures de ZAT simulées par rapport à la microstructure de base.



**FIGURE 2.5:** Comportement élasto-plastique cyclique de l'acier S355NL, microstructures de ZAT simulées, résultats obtenus pour les trois nuances.



**FIGURE 2.6:** Comparaisons, boucle d'hystérésis obtenues pour une amplitude de déformation  $\Delta\epsilon = 1\%$

## 1.4 Identification d'un modèle de comportement élasto-plastique

Ces résultats expérimentaux ont ensuite permis d'identifier les coefficients d'un modèle de comportement élasto-plastique à cinq paramètres à écrouissage cinématique non-linéaire de type Armstrong-Frederick ([Lemaitre *et al.*, 2009]). Ce modèle est défini comme suit :

- Une élasticité linéaire isotrope :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda Tr \underline{\underline{\varepsilon}}_e \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}_e \quad (2.1)$$

- Un critère de plasticité de Von Mises :

$$f = \sqrt{\frac{3}{2} Tr((\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}})^D) \cdot (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}})^D} - R \quad (2.2)$$

- Avec la condition de consistance pour la plasticité

$$f = 0 \text{ en plasticité} \quad (2.3)$$

$$\Rightarrow \dot{f} = 0 \quad (2.4)$$

- Et la loi de normalité pour l'écoulement plastique

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (2.5)$$

$$\dot{p} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial R} \quad (2.6)$$

- Des lois d'évolution

1. Un écrouissage cinématique non-linéaire de Armstrong & Frederick

$$\underline{\underline{\dot{X}}} = \frac{2}{3} C \underline{\underline{\varepsilon}}_p - \gamma \underline{\underline{X}} \dot{p} \text{ avec} \quad (2.7)$$

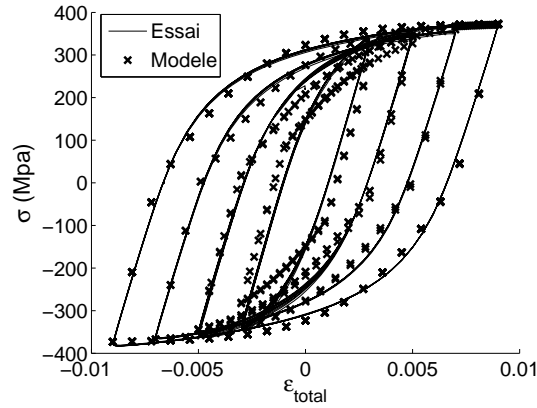
$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} Tr(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_p \cdot \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_p)} \quad (2.8)$$

2. Un écrouissage isotrope non-linéaire

$$R = R_0 + Q(1 - e^{-bp}) \quad (2.9)$$

Cette loi de comportement est implantée en standard dans le code Abaqus v6.5 et a été utilisée pour simuler numériquement les essais de comportement afin d'identifier, pour chaque type de microstructure, le jeu de coefficients permettant de représenter au mieux l'ensemble des résultats expérimentaux.





**FIGURE 2.7:** Modèle de comportement élasto-plastique pour le matériau de base, comparaison avec les résultats d'essai

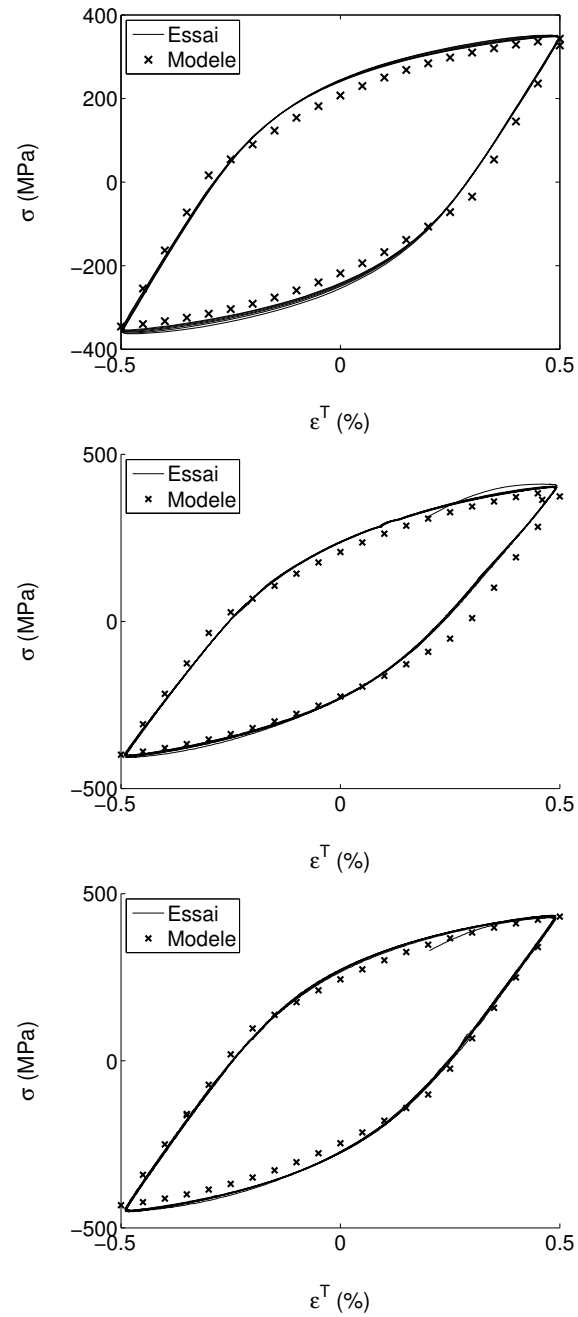
	$E$ (GPa)	$\nu$	$R_0$ (MPa)	$C$ (MPa)	$\gamma$	$Q$ (MPa)	$b$
Matériau de base	182	0.3	230	76000	390	-50	300
$ZAT_1$	182	0.3	270	92000	370	-70	300
$ZAT_2$	182	0.3	330	89000	410	-70	300
$ZAT_3$	182	0.3	330	89000	410	-70	300

**TABLE 2.3:** Coefficients du modèle pour différents états métallurgiques

Une comparaison entre les essais et la simulation via le modèle de comportement est présentée en FIG.2.7.

Les coefficients identifiés pour chaque microstructure sont présentés dans le TAB.2.3. On note que seule la taille du domaine d'élasticité et le coefficient d'écroutissage cinématique  $C$  varient d'une microstructure à l'autre, les autres coefficients restant inchangés.

Par la suite, le comportement élasto-plastique pour une microstructure intermédiaire entre le matériau de base et les microstructures de ZAT simulées étudiées ici sera défini par interpolation à partir des jeux de coefficients déterminés ici.



**FIGURE 2.8:** Exemple de confrontation essai/simulation pour des boucles d'hystéresis à 0.5% pour le matériau de base,  $ZAT_1$  et  $ZAT_3$ .



## 2 Essais de fissuration en mode I à différents rapports de charge

### 2.1 Dispositif expérimental

Les essais de fissuration en mode I ont été réalisés sur des éprouvettes CCT (FIG.2.9) prélevées dans des tôles d'acier S355NL. La machine d'essai est une MTS 50kN. Le suivi de l'avancée de fissure a été réalisé à l'aide d'un suiveur de fissure, calibré à partir de répliques du trajet de fissuration en surface, et vérifié à posteriori en microscopie optique à partir du faciès de rupture.

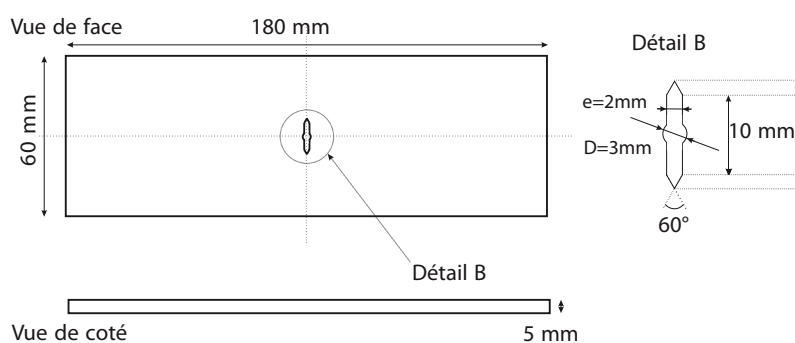


FIGURE 2.9: Éprouvette CCT ayant servi aux essais de fissuration en mode I

Différents rapports de charge ont été expérimentés, le TAB.2.4 récapitule les essais de fissuration de mode I réalisés. Afin d'étudier l'influence de surcharges de mode I sur la propagation par fatigue de la fissure et, par la suite, vérifier que le modèle incrémental est capable de reproduire ces effets d'histoire du chargement, une série d'essais présentant des surcharges de mode I à différentes fréquences complète la campagne d'essais de mode I.

Eprouvette	Matériau	Rapport de charge	$S_{max}/S_{min}$ (MPa)	Surcharge	Rapport de surcharge	FIG.
1	Base	0.1	83/8.3	Non	0	FIG.2.10
2	Base	0.5	133/66.5	Non	0	FIG.2.11
3	Base	-1	83/-83	Non	0	FIG.2.12
4	Base	0.1	83/8.3	1 / 5000	1.5	FIG.2.13
5	ZAT	0.1	83/8.3	Non	0	FIG.2.14
6	ZAT	-1	83/-83	Non	0	FIG.2.15
7	ZAT	0.1	83/8.3	1/10000	1.5	FIG.2.16
8	ZAT	0.1	83/8.3	1/100000	1.5	FIG.2.17

TABLE 2.4: Tableau récapitulatif des différents essais de mode I réalisés sur des éprouvettes CCT en acier S355NL.

## 2.2 Matériau de base

Comme nous l'avons souligné au CHAP.2, §1.3, page 31 les deux variantes de l'acier S355NL que nous avons reçues diffèrent très peu en termes de comportement élasto-plastique. En revanche, la microstructure de l'acier ayant subi un traitement thermique similaire à ce que l'on peut trouver au voisinage d'un cordon de soudure (ZAT) était bien différente de celle de l'acier S355NL de base. Nous nous sommes donc intéressés au comportement en fissuration de ces deux variantes du matériau.

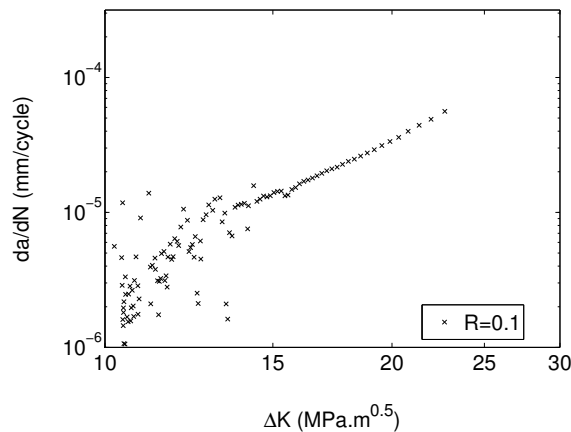


FIGURE 2.10: Courbe de Paris pour un rapport de charge  $R = 0.1$

Un premier essai de référence à chargement à amplitude constante a été réalisé, FIG.2.10, sur le matériau de base. Le chargement appliqué est un sinus de rapport de charge  $R = 0.1$ . La contrainte maximale appliquée à l'éprouvette CCT est de 83 MPa, contre 8.3 MPa pour la contrainte minimale. Le calcul du facteur d'intensité des contraintes nominal  $K_I^\infty$  s'appuie sur les solutions de [Murakami, 1987].

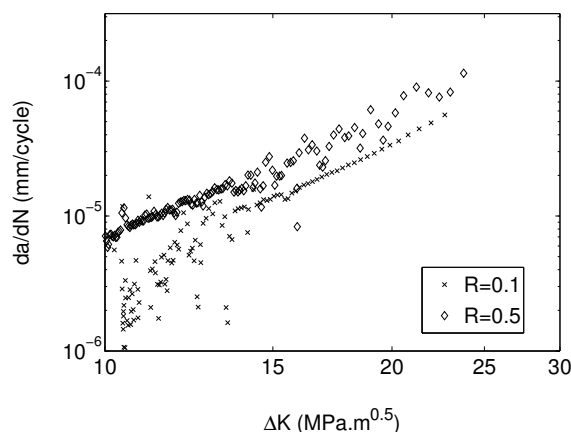
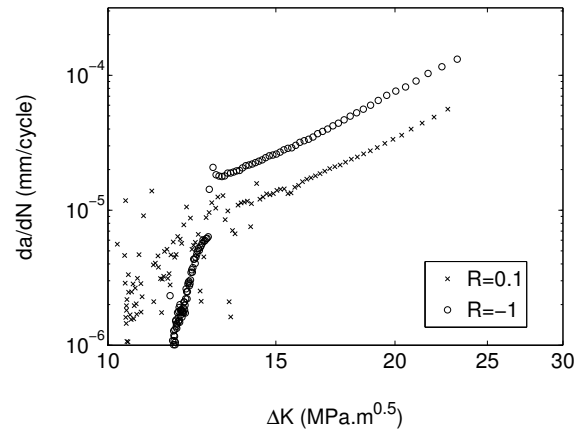


FIGURE 2.11: Courbe de Paris pour un rapport de charge  $R = 0.5$

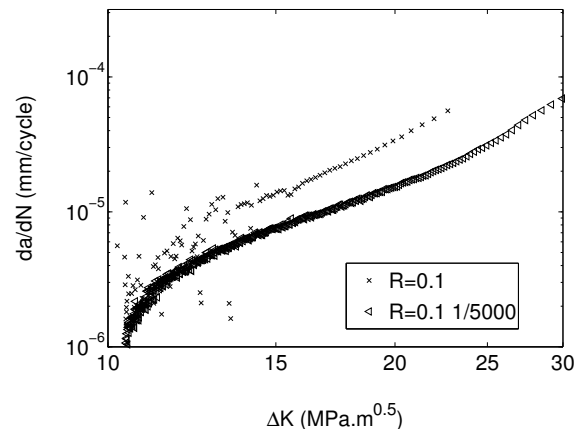
Un second essai, où le chargement est un sinus de rapport de charge  $R = 0.5$  compris

entre  $S_{max} = 133$  MPa et  $S_{min} = 66.5$  MPa, permet de montrer l'effet endommageant d'une contrainte moyenne élevée du cycle de fatigue. À titre de comparaison, l'essai de référence à  $R = 0.1$  est superposé au résultat à  $R = 0.5$  sur la FIG.2.11. Pour un même  $\Delta K$ , la vitesse de fissuration est deux fois plus élevée à  $R = 0.5$  qu'à  $R = 0.1$ .



**FIGURE 2.12:** Courbe de Paris pour un rapport de charge  $R = -1$

Enfin un chargement à rapport de charge négatif  $R = -1$  permet de discuter des effets de fermeture de fissure. Si le milieu était élastique, la fissure devrait se fermer lorsque le facteur d'intensité des contraintes nominal est nul. La vitesse de fissuration devrait être la même pour  $R = 0$  et pour  $R = -1$ . Mais, du fait de la plasticité du matériau, le facteur d'intensité des contraintes pour lequel la fissure se ferme  $K_I^{cl}$  est au dessus de zéro pour  $R = 0.1$  et en dessous pour  $R = -1$ . La vitesse de fissuration est ainsi 150% plus grande pour  $R = -1$  que pour  $R = 0$ .



**FIGURE 2.13:** Courbe de Paris pour un rapport de charge  $R = 0.1$  avec une surcharge d'un facteur 1.5 sur le chargement nominal tous les 5000 cycles

L'influence des effets d'histoire du chargement peut être mise en évidence par un essai de propagation par fatigue cyclique où des surcharges sont appliquées à différentes

fréquences. Généralement l'application d'une surcharge a tendance à ralentir la vitesse de fissuration. En effet, la zone plastique en pointe de fissure s'agrandit avec la surcharge, ainsi le niveau de fermeture des lèvres de la fissure augmente. La partie efficace du chargement s'en voit donc réduite dans cette zone de confinement des contraintes internes. Dans le cas de l'acier S355NL, le chargement nominal est un sinus de rapport de charge  $R = 0.1$ , des surcharges d'un facteur 1.5 sont appliquées tous les 5000 cycles. Une diminution de la vitesse de fissuration de l'ordre de 200% a été observée FIG.2.13.

### 2.3 ZAT

Des essais similaires ont été réalisés pour le matériau de microstructure représentatif de la ZAT. Les effets observés sont les mêmes, une vitesse de fissuration supérieur à  $R = -1$  par rapport à  $R = 0.1$ . Et un fort effet de retard si on applique des surcharges (FIG.2.16 et 2.17).

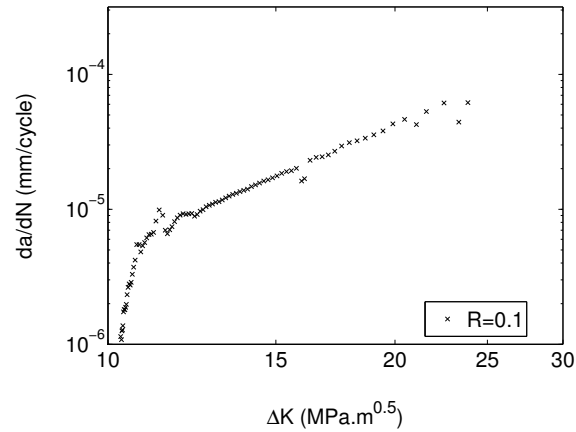


FIGURE 2.14: Courbe de Paris pour un rapport de charge  $R = 0.1$

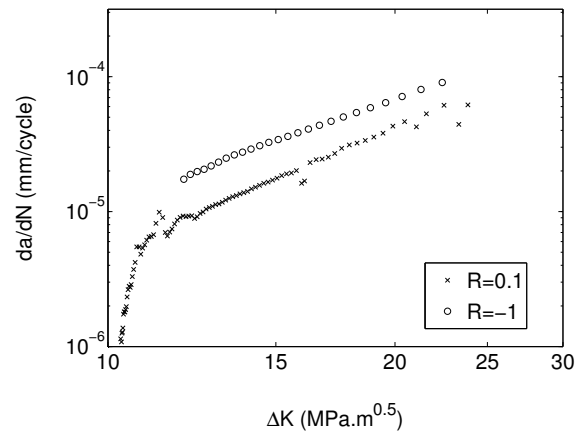
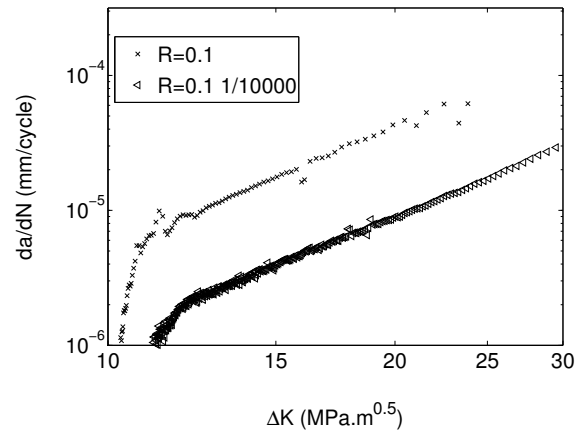
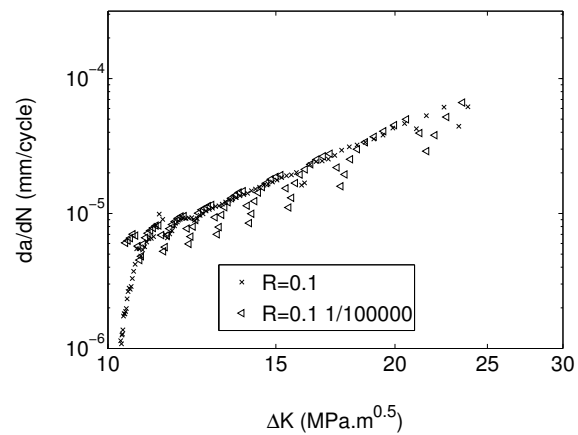


FIGURE 2.15: Courbe de Paris pour un rapport de charge  $R = -1$





**FIGURE 2.16:** Courbe de Paris pour un rapport de charge  $R = 0.1$  avec une surcharge d'un facteur 1.5 sur le chargement nominal tous les 10000 cycles

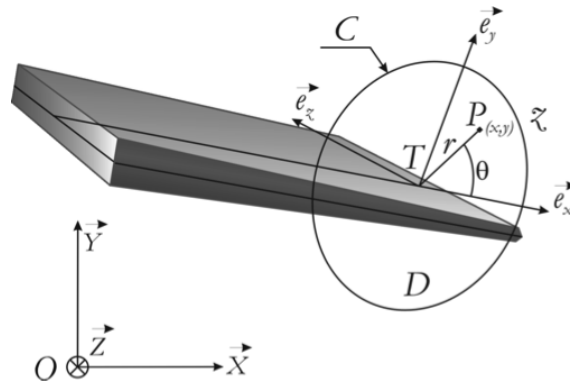


**FIGURE 2.17:** Courbe de Paris pour un rapport de charge  $R = 0.1$  avec une surcharge d'un facteur 1.5 sur le chargement nominal tous les 100000 cycles

### 3 Modèle de propagation de fissure en mode I

Ce modèle a pour objectif de simuler la fissuration dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture mais de tenir compte du comportement élasto-plastique cyclique du matériau et des effets d'histoire que les non-linéarités du matériau induisent sur la fissuration par fatigue. Pour cela, on se place à une échelle qui englobe la zone de K-dominance et les zones plastiques cycliques et monotones. A cette échelle, toutes les non-linéarités sont condensées dans un modèle de comportement élasto-plastique cyclique de la région en pointe de fissure complété par une loi de propagation, le reste de la structure étant élastique linéaire.

#### 3.1 Hypothèses



**FIGURE 2.18:**  $R_0(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  : Référentiel de l'étude ;  $R_T(T, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  : Repère attaché à la pointe de fissure avec :  $\vec{e}_z$  tangent au front de la fissure,  $\vec{e}_y$  normal au plan de fissuration et  $\vec{e}_x$  normal au front de la fissure, D une section normale à  $\vec{e}_z$ , C son contour

On définit le champ de vitesse d'un point P dans la région de la pointe de fissure ainsi :

$$\underline{v}(P)_{R_0} = \underline{v}(T)_{R_0} + \underline{\omega}(R_T/R_0) \wedge \underline{TP} + \underline{v}(P)_{R_T} \quad (2.10)$$

Les deux premiers termes de 2.10 sont nuls si la fissure ne se propage pas. La loi de propagation de la fissure aura pour objectif de définir ces deux termes. Pour introduire le modèle de comportement élasto-plastique cyclique de la région en pointe de fissure, nous nous intéresserons à  $\underline{v}(P)_{R_T}$  que nous noterons  $\underline{v}(P, t)$ .

Le champ déplacement de mode I dans la région de la pointe de fissure est approché par la superposition d'un champ élastique et d'un champ complémentaire. Chacun de ces champs est ensuite interprété comme étant le produit d'un champ de référence, uniquement fonction des coordonnées spatiales et d'un facteur d'intensité, fonction des conditions aux limites (chargement, géométrie de fissure, etc). Le principal avantage de cette approche est de réduire drastiquement le nombre de degrés de liberté du problème. En pratique, les champs de référence sont données dans un repère attaché au front de fissure, ainsi les degrés de libertés se réduisent à :

- Coordonnées de l'extrémité de la fissure.
- Facteur d'intensité élastique  $\tilde{K}_I$
- Émoussement plastique  $\rho$

Si l'on utilise des calculs par éléments finis, la décomposition de [Karhunen, 1947], permet de construire le champ complémentaire par la voie numérique et d'exprimer le champ de vitesse en pointe de fissure comme suit :

$$\underline{v}(P,t) = \dot{\tilde{K}}_I(t) \cdot \underline{u}_I^e(P) + \dot{\rho}(t) \cdot \underline{u}_I^c(P) \quad (2.11)$$

Le détail de cette approximation est donné dans l'annexe A. La décomposition de [Karhunen, 1947], comme d'autres techniques de décomposition orthogonale, permet d'approcher un champ de l'espace et du temps obtenu pour une séquence de chargement donnée, en une somme de produits de fonctions du temps et de champs de l'espace. Ici, une hypothèse supplémentaire est faite, qui est que les champs construits pour une séquence de chargement particulière restent valables pour d'autres séquences de chargement. Pour cela, on détermine d'abord une solution élastique du problème. Cette solution restera valable pour une séquence de chargement complexe en élasto-plasticité, par exemple au début de chaque décharge (ce qui se produit à chaque cycle en fatigue). Ensuite, on construit le champ complémentaire pour une séquence particulière avec la décomposition [Karhunen, 1947], et on fait l'hypothèse que ce champ complémentaire restera valable pour d'autres séquences. Lors de l'élaboration du modèle, on simule diverses séquences et on contrôle la validité de cette hypothèse en calculant l'erreur entre le champ calculé par éléments finis et son approximation pour chaque pas de temps de ces séquences.

Le champ complémentaire, chargé de capturer la part strictement plastique du champ de vitesse, doit vérifier certaines propriétés et cela quelle que soit la manière dont on le détermine (expression analytique, champ calculé numériquement ou champ expérimental). En mode I, le champ complémentaire doit être symétrique par rapport au plan de la fissure. Si la déformation plastique est confinée alors, hors de la zone plastique, les faces de la fissure sont parallèles.

### 3.2 Détermination des champs de référence

$\underline{v}(P, t)$  correspond au champ de vitesse "réel" obtenu par exemple, à partir de simulations en éléments-finis non linéaire, prenant en compte le comportement élasto-plastique du matériau.  $\underline{u}_I^e(P)$  et  $\underline{u}_I^c(P)$  sont les champs de référence respectivement élastique et complémentaire.

#### 3.2.1 Expression analytique

La construction de ces champs référence peut être réalisée par le biais d'expressions analytiques. Le champ de référence élastique  $\underline{u}_I^e(P)$  peut par exemple être calculé par les solutions asymptotique de Westeergard :

$$\underline{u}_{I_x}^e(r, \theta) = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) \quad (2.12)$$

$$\underline{u}_{I_y}^e(r, \theta) = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) \quad (2.13)$$

avec  $\mu = \frac{E}{2(1-\nu)}$ ,  $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$  en contrainte plane et  $\kappa = 3-4\nu$  en déformation plane.

Pour déterminer une expression analytique du champ complémentaire on peut utiliser la théorie des dislocations distribuées [Hills *et al.*, 1996], [Dai *et al.*, 1997]. Ceci a été fait, notamment par Hutchinson [Hutchinson, 1968]. Pour un problème bidimensionnel, une déformation plastique correspond à la création d'un dipôle de dislocations dont la somme des vecteurs de Burgers est nulle, pour une problème tridimensionnel des boucles de dislocations pourront être introduites.

Si on entre un peu dans le "détail", le problème de la plasticité en pointe de fissure se résout analytiquement, par superposition des champs élastiques de la mécanique linéaire de la rupture et des champs élastiques des dislocations. On détermine le plan de cisaillement maximum, et on introduit un dipôle de dislocation sur ce plan, l'une d'elles est située à l'extrémité de la fissure et l'autre sur la frontière de la zone plastique. La position de cette frontière n'est pas l'objet de cette discussion, on ne cherche qu'à justifier la forme du champ de vitesse.

En mode I, le plan de cisaillement maximum, n'étant pas le plan de symétrie, il faut symétriser le problème, en introduisant deux dipôles symétriques par rapport au plan de la fissure. Par symétrie, les deux dislocations symétriques situées à l'extrémité de la fissure forment une dislocation coin, qui induit un déplacement entre les faces de la fissure noté  $\rho_I$ . Pour chaque dipôle, la seconde dislocation, située sur la frontière de la zone plastique, de vecteur de Burgers de signe opposé à celle située à l'extrémité de la fissure, induit un champ de contrainte interne dans le milieu. Ce champ de contrainte ne s'annule pas sur les surfaces libres de la fissure. Il faut donc introduire une distribution de dislocations images, le long des faces de la fissure, choisie de manière à annuler ce champ. Cette distribution de dislocations images induit un déplacement des faces de la fissure, caractérisé par un

facteur d'intensité des contraintes "interne", qui se superpose au facteur d'intensité des contraintes nominal de la structure. C'est pour cette raison que le facteur d'intensité du champ élastique, noté  $\tilde{K}_I$ , n'est pas exactement égal à  $K_I^\infty$ .

Ainsi une approximation analytique du champ de référence complémentaire  $\underline{u}_I^c(P)$  peut être donnée par le champ de déplacement d'une dislocation coin :

$$\underline{u}_{I_x}^c(r, \theta) = \frac{1}{\pi(\kappa + 1)} [(\kappa - 1) \log r - 2 \cos^2 \theta] \quad (2.14)$$

$$\underline{u}_{I_y}^c(r, \theta) = \frac{1}{\pi(\kappa + 1)} [(\kappa + 1) \theta - 2 \cos \theta \sin \theta] \quad (2.15)$$

### 3.2.2 Construction des champs de référence par voie numérique

Les expressions analytiques ont certaines limitations, en particulier, les champs élastiques sont des solutions asymptotiques et lorsqu'on calcule l'erreur associée à l'approximation du champ de vitesse par l'équation 2.11, celle-ci augmente lorsqu'on s'éloigne de l'extrémité de la fissure. Les champs de référence sont donc construits à partir de calculs par éléments finis. Le même modèle est utilisé pour construire les champs de référence et pour calculer le champ de vitesse  $\underline{v}(P, t)$  dans la région de la pointe de fissure pour diverses séquences de chargement élasto-plastique complexes. (FIG.2.19)

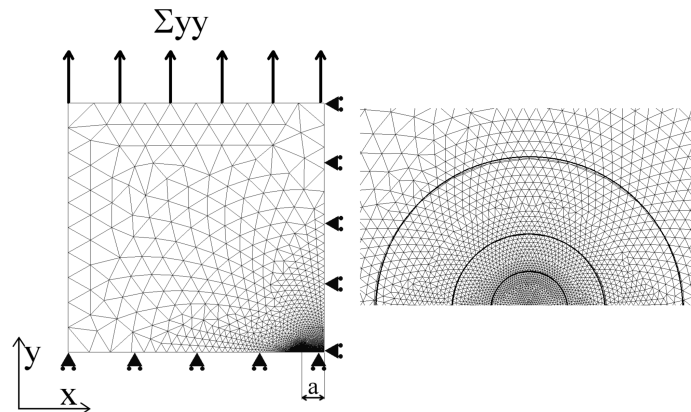


FIGURE 2.19: Maillage éléments finis, détail sur la zone où le maillage est raffiné

Un modèle éléments finis bi-dimensionnel a été mis en place pour réaliser ces simulations. Les éléments sont de type linéaire avec l'hypothèse simplificatrice de déformations planes. Le modèle comporte une fissure centrale de longueur  $2a = 20\text{mm}$ . Le maillage est raffiné dans la région d'intérêt ([McClung, 1996]), dans un rayon  $r = 5\text{mm}$  autour de l'extrémité de la fissure. Le déplacement de tous les noeuds situés entre  $r = 10\mu\text{m}$  et  $r = 1\text{mm}$  est extrait à chaque pas de temps afin de construire le champ de vitesse  $\underline{v}(P, t)$ .

Pour construire le champ élastique de référence  $\underline{u}_I^e(P)$ , la loi de comportement du matériau est d'abord choisie purement élastique avec un module d'élasticité  $E = 192\text{GPa}$

correspondant à celui de l'acier S355NL. Les conditions aux limites imposées au modèle sont telles que  $K_I^\infty = 1MPa\sqrt{m}$ .

Pour construire ensuite le champ complémentaire, le chargement est ajusté de manière à simuler un chargement monotone en mode I jusqu'à un facteur d'intensité des contraintes nominal maximum (typiquement  $K_I^{max} = 0.7K_{Ic}$ ). La loi de comportement est alors choisie élasto-plastique avec écrouissage. L'évolution du champ de vitesse  $\underline{v}(P,t)$  est enregistrée pour chaque pas de temps de ce premier calcul. Puis on procède à une décomposition orthogonale de la solution numérique  $\underline{v}(P,t)$  obtenue afin de se donner une base orthogonale de champs spatiaux de référence. Pour cela on procède de la façon suivante.

Premièrement, comme on dispose déjà de la solution élastique  $\underline{u}_I^e(P)$ , on commence par projeter  $\underline{v}(P,t)$  sur cette solution élastique. Le résultat scalaire de cette projection est noté  $\dot{K}_I$ . La projection  $\dot{K}_I$  trouvée par cette méthode diffère (légèrement) du facteur d'intensité des contraintes nominal appliqué  $\dot{K}_I^\infty$ . En effet, deux types de contraintes engendrent des champs « élastiques », les contraintes appliquées ou « macroscopiques » et les contraintes internes qui proviennent du confinement de la zone plastique.  $\dot{K}_I$  mesure l'ensemble des deux.  $\dot{K}_I^\infty$  ne mesure que l'effet de la variation des contraintes appliquées « à l'infini ». Soit :

$$\dot{K}_I^\infty(t) = \frac{\int_{r=0}^{r=r_{max}} \int_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} \underline{v}(P,t) \cdot \underline{u}_I^e(P) dr r d\theta}{\int_{r=0}^{r=r_{max}} \int_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} \underline{u}_I^e(P) \cdot \underline{u}_I^e(P) dr r d\theta} \quad (2.16)$$

On calcule alors le résidu :

$$\underline{v}(P,t)^{residu}(P,t) = \underline{v}(P,t) - \dot{K}_I^\infty(t) \underline{u}_I^e(P) \quad (2.17)$$

Ce résidu peut alors être décomposé en une somme de produits de champ spatiaux, orthogonaux deux à deux, et de leurs facteurs d'intensité en utilisant la décomposition orthogonale de Karhunen-Loeve. On ne conserve que le premier terme de cette décomposition, soit :

$$\underline{v}(P,t)^{residu}(P,t) \approx A(t) \underline{a}(P) \quad (2.18)$$

Le champ  $\underline{a}(P)$  est orthogonal par construction au champ  $\underline{u}_I^e(P)$  et peut être utilisé comme champ complémentaire. On préfère cependant l'adimensionner, afin de pouvoir lire directement son facteur d'intensité comme la partie strictement irréversible du déplacement relatif des faces de la fissure en ouverture ou en débattement (par analogie avec le CTOD, Crack Tip Opening Displacement).

$$\underline{u}_I^c(P) = \frac{\underline{a}(P)}{\int_{r=0}^{r=r_{max}} (\underline{a}_y(r, \theta = \pi) - \underline{a}_y(r, \theta = -\pi)) dr / (2r_{max})} \quad (2.19)$$

En pratique, la valeur de  $r_{max}$  utilisée dans les divers calculs qui ont été effectués est égale à  $1mm$ .

On fera l'hypothèse par la suite que les deux champs complémentaires ( $\underline{u}_I^e(P)$  et  $\underline{u}_I^c(P)$ ) construits à partir de simulations de phases de chargement monotone en mode I, en élasticité puis en élasto-plasticité pourront être utilisés pour représenter le champ de vitesse pour n'importe quelle séquence de chargement complexe. On pourra alors se limiter à étudier l'évolution des facteurs d'intensité de ces deux champs.

Pour vérifier la qualité et la pertinence de cette hypothèse l'erreur associée à l'approximation du champ de vitesse est systématiquement calculée à chaque pas de temps.

### 3.2.3 Extraction des facteurs d'intensité

On dispose donc d'une base orthogonale de champ spatiaux de référence ( $\underline{u}_I^e(P)$  et  $\underline{u}_I^c(P)$ ) pour représenter le champ de vitesse de manière réduite. Cette base est définie *a priori* pour un matériau donné. On peut maintenant projeter sur cette base le champ de vitesse  $\underline{v}(P,t)$  obtenu, pour n'importe quelle séquence de chargement de Mode I. Ce qui permet d'extraire les vitesses des facteurs d'intensité de la partie élastique et de la partie plastique et de définir un champ de vitesse approché  $\tilde{\underline{v}}(P,t)$  pour la région située à l'extrémité de la fissure :

$$\tilde{\underline{v}}(P,t) = \dot{\tilde{K}}_I(t)\underline{u}_I^e(P) + \dot{\rho}_I(t)\underline{u}_I^c(P) \quad (2.20)$$

On extrait d'abord la vitesses de variation  $\dot{\tilde{K}}_I$  du facteur d'intensité du champs élastique de référence. Cette vitesse est donnée en  $MPa\sqrt{(m)}s^{-1}$  et est très proche de la vitesse de variation  $\dot{K}_I^\infty$  du facteur d'intensité des contraintes nominal.

On procède comme suit pour extraire  $\dot{\tilde{K}}_I$  :

$$\dot{\tilde{K}}_I(t) = \frac{\int_{r=0}^{r=r_{max}} \int_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} \underline{v}(P,t) \cdot \underline{u}_I^e(P) drrd\theta}{\int_{r=0}^{r=r_{max}} \int_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} \underline{u}_I^e(P) \cdot \underline{u}_I^e(P) drrd\theta} \quad (2.21)$$

On procède comme suit pour extraire  $\dot{\rho}_I(t)$  :

$$\dot{\rho}_I(t) = \frac{\int_{r=0}^{r=r_{max}} \int_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} \underline{v}(P,t) \cdot \underline{u}_I^c(P) drrd\theta}{\int_{r=0}^{r=r_{max}} \int_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} \underline{u}_I^c(P) \cdot \underline{u}_I^c(P) drrd\theta} \quad (2.22)$$

Par commodité,  $\rho_I = \int(\dot{\rho}_I dt)$  sera utilisé pour tracer des résultats de simulation. Compte tenu des hypothèse faites plus haut, et en particulier de l'adimensionnement du

champ complémentaire,  $\rho_I$  peut être interprété comme l'émoussement plastique à l'extrémité de la fissure, ou encore la partie strictement plastique du CTOD.

### 3.2.4 Calcul de l'erreur

Maintenant que l'on dispose de ces deux facteurs d'intensité, on peut définir une solution approchée du champ de vitesse et l'erreur associée à cette approximation. Il est utile de définir deux erreurs :

- la première,  $C_1(t)$ , est l'erreur que l'on commet si l'on approche le champ de vitesse  $\underline{v}(P,t)$  par une représentation élastique  $\underline{v}^e(P,t)$ , dont la définition est donnée ci-dessous,
- la seconde,  $C_2(t)$ , celle qu'on commet en utilisant deux champs pour chaque mode, un champ élastique et un champ complémentaire  $\underline{v}(P,t)$ , dont la définition est donnée ci-dessous.

$$\underline{\tilde{v}}^e(P,t) = \dot{K}_I(t) \underline{u}_I^e(P) \quad (2.23)$$

$$\underline{\tilde{v}}(P,t) = \dot{K}_I(t) \underline{u}_I^e(P) + \dot{\rho}_I(t) \underline{u}_I^c(P) \quad (2.24)$$

L'erreur  $C_1(t)$  et l'erreur relative  $C_{1R}(t)$  se calculent comme suit :

$$C_1(t) = \sqrt{\int_{r=0}^{r=r_{max}} \int_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} (\underline{v}(P,t) - \underline{v}^e(P,t))^2 r d\theta dr} \quad (2.25)$$

$$C_{1R}(t) = \frac{C_1(t)}{\sqrt{\int_{r=0}^{r=r_{max}} \int_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} (\underline{v}(P,t))^2 r d\theta dr}} \quad (2.26)$$

L'erreur  $C_2(t)$  et l'erreur relative  $C_{2R}(t)$  se calculent comme suit :

$$C_2(t) = \sqrt{\int_{r=0}^{r=r_{max}} \int_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} (\underline{v}(P,t) - \underline{v}(P,t))^2 r d\theta dr} \quad (2.27)$$

$$C_{2R}(t) = \frac{C_2(t)}{\sqrt{\int_{r=0}^{r=r_{max}} \int_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} (\underline{v}(P,t))^2 r d\theta dr}} \quad (2.28)$$



### 3.3 Loi de comportement élasto-plastique cyclique en mode I

Cette démarche permet de générer des évolutions de  $\rho_I = \int (\dot{\rho}_I dt)$  en fonction de  $K_I^\infty$  pour diverses séquences de chargement (FIG.2.20) à partir de simulations par éléments finis en élasto-plasticité. Un modèle incrémental est alors mis en place, qui à partir d'un jeu d'équations d'évolution scalaires simples, fournit la même réponse en termes d'évolutions de  $\rho_I$  en fonction de  $K_I^\infty$  que les évolutions générées à partir de calculs par éléments finis en élasto-plasticité. Ce modèle est construit dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles, de manière tout à fait analogue aux modèles de plasticité des milieux continu sauf qu'il représente le comportement de la région de K-dominance située autour de l'extrémité de la fissure et qui englobe la zone plastique. Par la suite, ce modèle peut être utilisé dans un calcul de structure fissurée élastique. Tout ce qui est non-linéaire sera condensé dans le modèle incrémental.

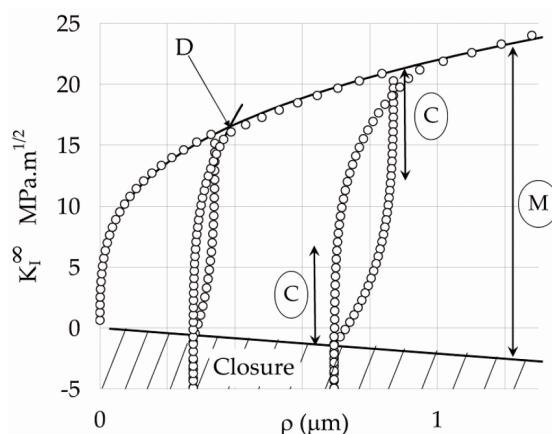


FIGURE 2.20: Évolution de  $\rho$  en fonction  $K_I^\infty$  : loi d'émoussement

Le calcul de l'émoussement plastique  $\rho_I$  a été réalisé, par exemple, pour une succession de charges-décharges de niveau croissant. Après chaque changement du sens du chargement, on peut remarquer sur la FIG.2.20 l'apparition d'un domaine, noté C, dans lequel  $\rho_I$  ne varie pas. Comme  $\rho_I$  mesure la plasticité en pointe de fissure, on peut considérer que le comportement de la structure fissurée reste élastique dans cette plage de  $K_I^\infty$ . Ce domaine C, peut donc être interprété comme étant le domaine d'élasticité cyclique de la fissure. Ce domaine évolue, sa position varie au cours du chargement, on lui associera donc une variable interne de type écrouissage cinématique qui détermine sa position et une seconde variable qui détermine sa taille.

De la même façon, pendant les montées en charges, une discontinuité de pente est observée au moment où le chargement appliqué dépasse le chargement maximal atteint auparavant (point D). Cette rupture de pente correspond physiquement au niveau de chargement au-delà duquel la zone plastique monotone en pointe de fissure s'étend. Le domaine, noté M, correspond donc au domaine d'élasticité monotone de la fissure. La limite inférieure de ce domaine correspond au point de contact entre les lèvres de la fissure. Là

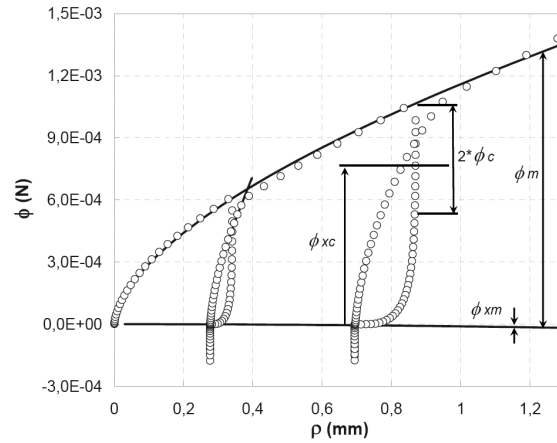
encore deux variables internes sont introduites, l'une déterminant la taille du domaine et l'autre sa position (c'est à dire le niveau d'ouverture de la fissure).

Le détail des analyses ayant permis d'établir en mode I la forme des équations d'évolution de ces variables internes dans un cadre thermodynamique peut être trouvé dans [Pommier et Hamam, 2007] et [Hamam, 2006].

Le potentiel thermodynamique  $\phi$  associé à l'éroussement plastique  $\rho_I$ , est décrit comme suit :

$$\phi = A^2 K_I^2 \text{sign}(K_I) \text{ avec } A = \sqrt{\frac{1-\nu^2}{2E}} \quad (2.29)$$

La FIG.2.21 montre l'évolution de l'éroussement plastique  $\rho_I$  en fonction de  $\phi$ .



**FIGURE 2.21:** Évolution de  $\rho$  en fonction  $\phi$

La loi d'éroussement décrit l'évolution de ces quatre variables :

- $\phi_{xc}$  : La position de la zone plastique cyclique.
- $\phi_c$  : La demi-taille de la zone plastique cyclique.
- $\phi_{xm}$  : La position de la zone plastique monotone.
- $\phi_m$  : La demi-taille de la zone plastique monotone.

La description analytique de la loi d'éroussement distingue les phases de plasticité monotone des phases de plasticité cyclique. L'extension de la zone plastique monotone est conditionnée par :

$$f_m = 0 \text{ et } \frac{d\phi}{dt} > 0 \quad (2.30)$$

Les lois associées à la plasticité monotone sont les suivantes :

– Loi de fissuration :

$$\frac{da}{dt} = \alpha \frac{d\rho}{dt} \quad (2.31)$$

– Critère de plasticité ( $\phi_{xm} < \phi$ ) :

$$f_m = \sqrt{(\phi - \phi_{xm})^2} - \phi_m \quad (2.32)$$

– Loi d'écoulement :

$$\frac{d\rho}{dt} = \lambda \frac{\partial f_m}{\partial \phi} \quad (2.33)$$

– Consistance :

$$f_m = 0 \text{ et } \frac{df_m}{dt} = 0 \quad (2.34)$$

– Équation d'évolution :

$$\frac{\partial \phi_{xm}}{\partial \rho} = a_{xm} \sqrt{\phi_{xm}} \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial \phi_m}{\partial \rho} + \frac{\partial \phi_{xm}}{\partial \rho} = A^2 a_m^2 \frac{\sqrt{\phi_m + \phi_{xm}}}{\sqrt{\phi_m + \phi_{xm}} - Ab_m} \text{ avec } A = \frac{1 - \nu^2}{2E} \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial \phi_m}{\partial a} = p_a \phi_m \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial \phi_{xm}}{\partial a} = k_a \phi_{xm} + k_b \phi_m \quad (2.38)$$

Les paramètres matériaux ( $a_m, b_m, a_{xm}, p_a, k_a, k_b$ ) sont identifiées automatiquement par la méthode des moindres carrés à partir de quelques simulations par éléments finis en élasto-plasticité.

Les phases de plasticité cyclique sont conditionnées par :

$$f_c = 0 \quad (2.39)$$

Les lois associés à la plasticité cyclique sont les suivantes :

– Loi de fissuration :

$$\frac{da}{dt} = \alpha \left| \frac{d\rho}{dt} \right| \quad (2.40)$$

– Critère de plasticité :

$$f_c = \sqrt{(\phi - \phi_{xc})^2} - \phi_c \quad (2.41)$$

– Loi d'écoulement :

$$\frac{d\rho}{dt} = \lambda \frac{\partial f_c}{\partial \phi} \quad (2.42)$$

– Consistance :

$$f_c = 0 \text{ et } \frac{df_c}{dt} = 0 \quad (2.43)$$

– Équation d'évolution :

$$\frac{\partial \phi_c}{\partial \rho} = \frac{\partial \phi_c}{\partial a} = \frac{\partial \phi_{xc}}{\partial a} = 0 \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial \phi_{xc}}{\partial \rho} = A^2 \frac{a_c^2 \sqrt{\phi_{xc} + \delta \phi_c}}{\delta \left( \sqrt{\phi_{xc} + \delta \phi_c} - \frac{\phi_c}{Ab_c} \right) - \frac{Ab_c}{2}} \text{ avec } \delta = \text{sign} \frac{d\rho}{dt} \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial \phi_m}{\partial a} = p_a \phi_m \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial \phi_{xm}}{\partial a} = k_a \phi_{xm} + k_b \phi_m \quad (2.47)$$

– Evolution de  $\phi_c$  et  $\phi_{xc}$  lorsque la plasticité monotone est activée :

$$\phi = \phi_c + \phi_{xc} \text{ et } \phi_c = \frac{A^2 b_c}{2} \left( 2 \frac{\sqrt{\phi}}{A} - b_c \right) \quad (2.48)$$

### 3.4 Confrontation essai / modèle

Le comportement de l'acier S355NL a été identifié au CHAP.2, §1.4, page 35 un modèle de comportement de type Armstrong-Frederick a permis de déterminer les paramètres des écrouissages cinématique et isotrope. Leurs valeurs sont rapportés dans le TAB.2.3. Le comportement élasto-plastique cyclique du matériau est utilisé pour identifier les paramètres du modèle incrémental. Ces simulations ainsi que l'identification des paramètres de la loi d'érouissement ont été automatisés sous Abaqus, leurs valeurs sont récapitulés dans le TAB.2.5.

	$a_m$	$b_m$	$a_{cf}$	$b_{cf}$	$a_{xm}$	$p_a$	$k_a$	$k_b$
Matériau de base	14.2	6.9	28.7	6.4	-1.4	-0.0015	-0.071	0.009
ZAT	32.8	3.8	64.5	3.9	-1.6	-0.0015	-0.006	0.002

**TABLE 2.5:** Paramètres de la loi d'érouissement pour le matériau de base et pour les ZAT

La loi d'érouissement est donc identifiée pour les deux variantes de l'acier S355NL, seul le paramètre  $\alpha$  de la loi de fissuration reste à déterminer.

#### 3.4.1 Identification du paramètre $\alpha$ de la loi de fissuration

La loi de fissuration relie le taux de variation de l'érouissement plastique  $\frac{d\rho}{dt}$  au taux de création d'aire fissurée par unité de longueur de front  $\frac{da}{dt}$  par :

$$\frac{da}{dt} = \alpha \left| \frac{d\rho}{dt} \right| \quad (2.49)$$

L'identification du paramètre  $\alpha$  se fait grâce à un essai de fissuration sous chargement cyclique d'amplitude constante. Le modèle incrémental est utilisé pour prévoir  $\frac{d\rho}{dt}$ , et la prédiction de  $\frac{da}{dt}$  dépend du coefficient  $\alpha$  choisi. Pour identifier le coefficient  $\alpha$  de l'acier S355NL nous avons utilisé l'essai à rapport de charge  $R = 0.1$ , décrit FIG.2.22, comme essai de référence pour le matériau de base. Le coefficient  $\alpha$  a été ajusté de manière à ce que les vitesses de fissuration expérimentales et simulées avec le modèle incrémental soient en accord .

#### 3.4.2 Matériau de base

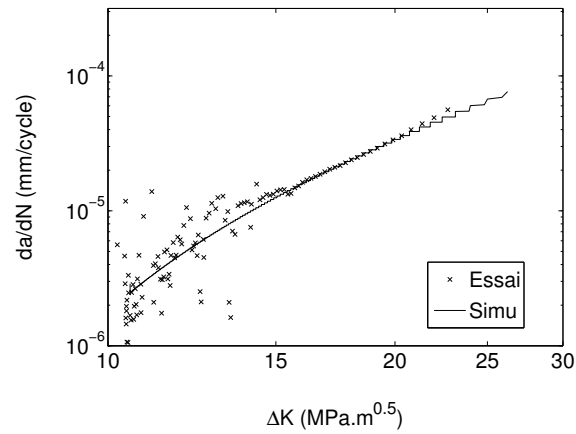


FIGURE 2.22: Courbe de Paris pour un rapport de charge  $R = 0.1$

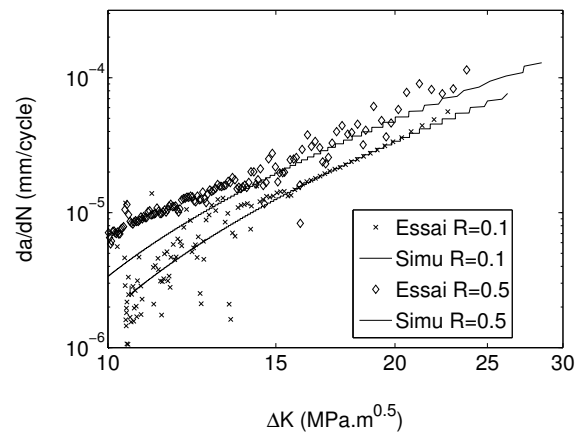


FIGURE 2.23: Courbe de Paris pour un rapport de charge  $R = 0.5$

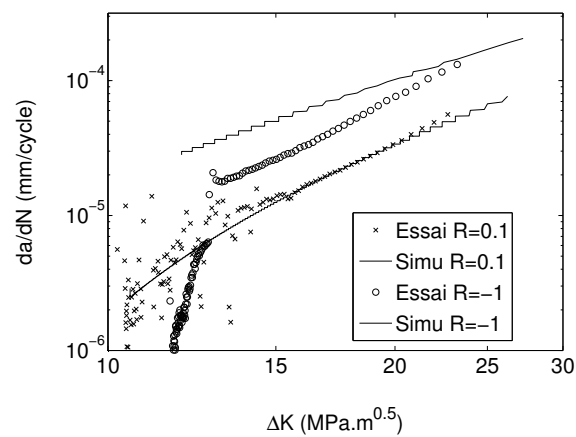
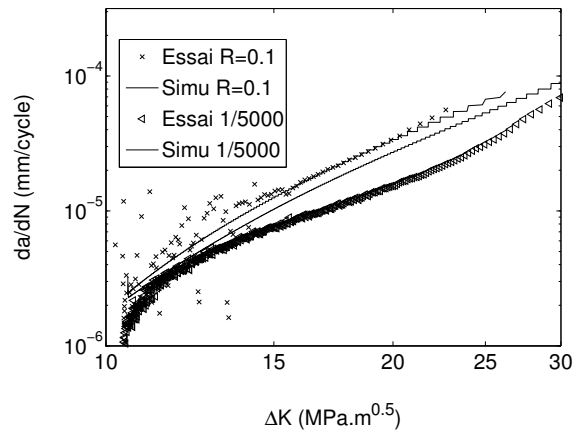
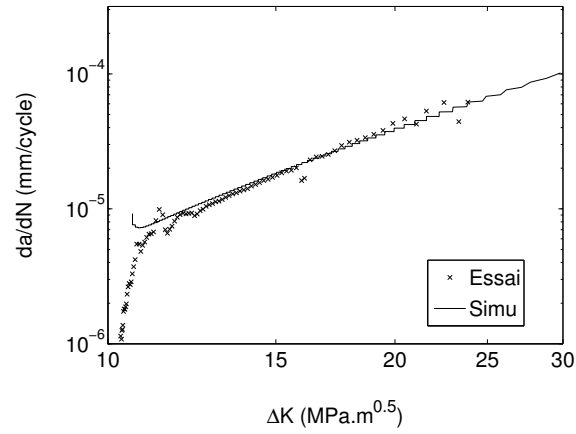
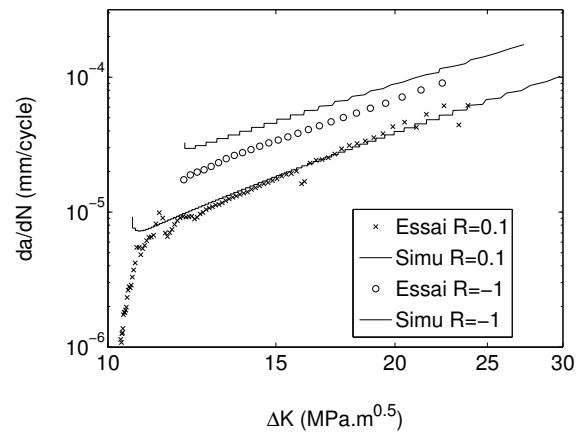


FIGURE 2.24: Courbe de Paris pour un rapport de charge  $R = -1$



**FIGURE 2.25:** Courbe de Paris pour un rapport de charge  $R = 0.1$  avec une surcharge de 1.5 le chargement nominal tous les 5000 cycles

## 3.4.3 ZAT

FIGURE 2.26: Courbe de Paris pour un rapport de charge  $R = 0.1$ FIGURE 2.27: Courbe de Paris pour un rapport de charge  $R = -1$



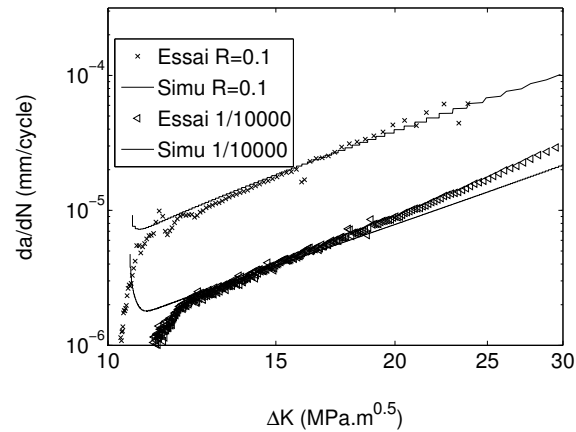


FIGURE 2.28: Courbe de Paris pour un rapport de charge  $R = 0.1$  avec une surcharge de 1.5 le chargement nominal tous les 10000 cycles

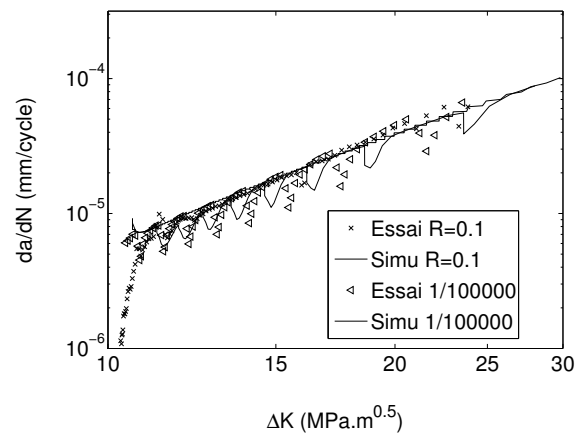


FIGURE 2.29: Courbe de Paris pour un rapport de charge  $R = 0.1$  avec une surcharge de 1.5 le chargement nominal tous les 100000 cycles

## 4 Résumé du chapitre

Ce chapitre était consacré à l'étude expérimentale du comportement mécanique et de la fissuration par fatigue en Mode I de l'acier S355NL et de la modélisation de la fissuration par fatigue en Mode I pour pouvoir simuler la propagation de fissures sous chargement à amplitude variable.

Une première campagne d'essai sur éprouvette lisse a permis de déterminer le comportement élasto-plastique de l'acier S355NL ainsi qu'une variante du matériau ayant subi un traitement thermique semblable à ce que l'on retrouve dans les "Zones Affectées Thermiquement". Un modèle de comportement de type Armstrong-Frederik a été identifié pour les deux variantes de matériau.

Une seconde campagne d'essai sur éprouvette CCT a été menée, elle visait à caractériser le comportement en fatigue cyclique de mode I du matériau. Des essais à différents rapports de charge, avec la présence ou non de surcharges, ont été réalisés afin de mettre en évidence les effets de retard ou d'accélération de la vitesse de propagation des fissures. Enfin, l'application du modèle de [Pommier et Hamam, 2007] à l'acier S355NL a servi à simuler la propagation de fissure avec les chargements testés expérimentalement. Un bon accord entre les simulations et les essais est à retenir.



# Chapitre 3

## Mesure de champs de déplacement en pointe de fissure

*Ce second chapitre est consacré à décliner expérimentalement  
la démarche de changement d'échelle utilisée pour analyser  
les champs de vitesse autour de l'extrémité de la fissure.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Problématique</b> . . . . .	<b>65</b>
1.1	Rappel du modèle . . . . .	65
<b>2</b>	<b>Approche expérimentale de la mesure de la plasticité cyclique en pointe de fissure</b> . . . . .	<b>69</b>
2.1	Mesure des champs de déplacement en pointe de fissure . . . . .	69
2.2	Localisation de l'extrémité de la fissure . . . . .	74
2.3	Construction expérimentale d'une base de champs spatiaux de ré- férence . . . . .	77
<b>3</b>	<b>Dépouillement d'un cas de chargement de mode I</b> . . . . .	<b>83</b>
3.1	Mesure des variables globales $\dot{K}_I$ et $\dot{\rho}_I$ en cours d'essai . . . . .	83
3.2	Erreur associée à l'approximation du champ de vitesse . . . . .	86
3.3	Discussion et analyse des résultats . . . . .	89
<b>4</b>	<b>Étude d'un cas de chargement de mode I avec surcharge de mode II</b> . .	<b>91</b>
<b>5</b>	<b>Mesure expérimentale des facteurs d'intensité plastique en mode mixte avec ASTREE</b> . . . . .	<b>95</b>

5.1	Les objectifs de l'étude . . . . .	95
5.2	Pilotage en termes de facteurs d'intensité des contraintes nominaux $K_I^\infty$ et $K_{II}^\infty$ . . . . .	96
5.3	Construction expérimentale du domaine d'élasticité en mode mixte du matériau . . . . .	99
5.4	Extraction des facteurs d'intensité et des erreurs en mode mixte . . .	105
<b>6</b>	<b>Résumé du chapitre . . . . .</b>	<b>117</b>

---

# 1 Problématique

## 1.1 Rappel du modèle

Le modèle incrémental de fissuration par fatigue consiste à se donner d'une part, une loi de comportement étendue, au sens où elle porte sur une région et pas sur un point matériel, et d'autre part, une loi de fissuration. Le modèle est applicable si l'hypothèse de séparation des échelles peut être faite, entre

- l'échelle de la structure fissurée considérée comme élastique linéaire,
- l'échelle de la région entourant l'extrémité de la fissure qui se comporte de manière élasto-plastique cyclique et
- l'échelle à laquelle se produisent les phénomènes d'endommagement.

Avec cette hypothèse, le cadre de la mécanique linéaire de la rupture (MLR) peut être utilisé à l'échelle de la structure fissurée. A l'échelle inférieure, si la zone plastique est bien confinée, son développement est fortement contraint par le milieu élastique qui l'entoure. Par conséquent, un petit nombre de degrés de liberté suffit pour représenter le champ de vitesse dans la région élasto-plastique. Et enfin, la fissuration est le résultat de ce qui se produit aux échelles supérieures. Dans le modèle, la loi de fissuration exprime ainsi le taux de création d'aire fissurée par unité de longueur de front en fonction du taux d'une mesure globale de la partie irréversible du champ de vitesse ( $\dot{\rho}_I$  en Mode I) dans la région élasto-plastique.

Cette hypothèse de séparation des échelles est généralement valable en fatigue dans le domaine dit "de Paris", c'est à dire aux conditions suivantes :

- La zone plastique reste confinée dans un massif élastique ; la dimension de la fissure et la plus petite distance entre l'extrémité de la fissure et un bord libre de la pièce doivent être au moins cinq fois plus grandes que la dimension de la zone plastique.
- La zone d'élaboration (process zone) reste bien confinée dans la zone plastique cyclique.

La caractéristique d'une sollicitation de fatigue est que le sens de chargement change régulièrement. A chaque changement de sens du chargement, le matériau passe par une phase de comportement élastique. Dans ces phases, en cohérence avec la mécanique linéaire de la rupture et dans un repère attaché à l'extrémité de la fissure, nous avons :

$$\underline{v}(P,t) = \dot{\underline{K}}_I(t) \cdot \underline{u}_I^e(P) + \dot{\underline{K}}_{II}(t) \cdot \underline{u}_{II}^e(P) \quad (3.1)$$

On étendra ceci à l'élasto-plasticité, par l'ajout de champs de référence complémentaires ( $\underline{u}_I^c(P); \underline{u}_{II}^c(P)$ ) et de leur facteurs d'intensité ( $\dot{\rho}_I(t); \dot{\rho}_{II}(t)$ ) pour obtenir :

$$\underline{v}(P,t) = \dot{\underline{K}}_I(t) \cdot \underline{u}_I^e(P) + \dot{\rho}_I(t) \cdot \underline{u}_I^c(P) + \dot{\underline{K}}_{II}(t) \cdot \underline{u}_{II}^e(P) + \dot{\rho}_{II}(t) \cdot \underline{u}_{II}^c(P) \quad (3.2)$$

La décomposition de [Karhunen, 1947] (Annexe A) permet de partitionner le champ de vitesse  $\underline{v}(P,t)$  en une somme de produits de champs de référence, fonctions de l'espace,

et de leur facteurs d'intensité, variables au cours du temps(3.2). On fait l'hypothèse supplémentaire que les champs de référence, construits pour des cas de chargement simples, restent valables toutes les séquences de chargement. Le champ de vitesse peut alors être décrit comme étant la superposition de :

- $\dot{\tilde{K}}_I(t) \cdot \underline{u}_I^e(P)$  : composante "élastique" de mode I,  $\dot{\tilde{K}}_I(t)$  étant le taux de variation du facteur d'intensité des contraintes apparent de mode I et  $\underline{u}_I^e(P)$  le champ de référence associé, indépendant du temps. Le taux de variation du facteur d'intensité "apparent"  $\dot{\tilde{K}}_I$  est la somme des taux de variation des facteurs d'intensité des contraintes nominal  $\dot{K}_I^\infty$  et interne  $\dot{K}_I^{sh}$
- $\dot{\rho}_I(t) \cdot \underline{u}_I^c(P)$  : composante complémentaire de mode I,  $\dot{\rho}_I(t)$  étant le facteur d'intensité plastique de mode I.  $\dot{\rho}_I(t)$  peut être assimilé à la partie plastique du CTOD ("*Crack Tip Opening Displacement*") et  $\underline{u}_I^c(P)$  le champ de référence complémentaire associé, indépendant du temps.

Le partitionnement s'écrit de la même façon en mode II :

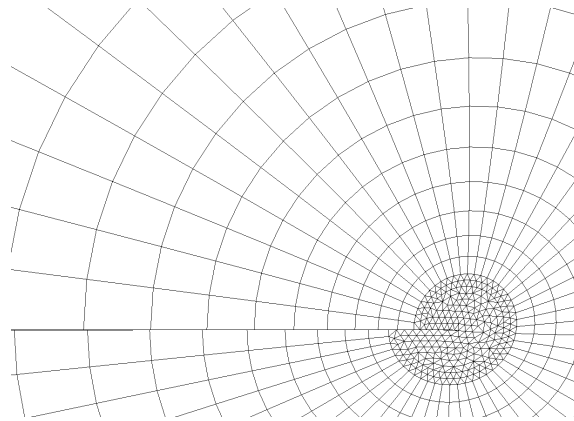
- $\dot{\tilde{K}}_{II}(t) \cdot \underline{u}_{II}^e(P)$  : composante "élastique" de mode II,  $\dot{\tilde{K}}_{II}(t)$  étant le taux de variation du facteur d'intensité des contraintes apparent de mode II et  $\underline{u}_{II}^e(P)$  le champ de référence associé, indépendant du temps. Le taux de variation du facteur d'intensité "apparent"  $\dot{\tilde{K}}_{II}$  est la somme des taux de variation des facteurs d'intensité des contraintes nominal  $\dot{K}_{II}^\infty$  et interne  $\dot{K}_{II}^{sh}$
- $\dot{\rho}_{II}(t) \cdot \underline{u}_{II}^c(P)$  : composante complémentaire de mode II,  $\dot{\rho}_{II}(t)$  étant le facteur d'intensité plastique de mode II.  $\dot{\rho}_{II}(t)$  peut être assimilé à la partie plastique du CTSD ("*Crack Tip Sliding Displacement*") et  $\underline{u}_{II}^c(P)$  le champ de référence complémentaire associé, indépendant du temps.

Le champ de vitesse dans la région élasto-plastique entourant l'extrémité de la fissure, peut ainsi être représenté au cours du temps par quatre variables globales scalaires  $\dot{\tilde{K}}_I(t)$ ,  $\dot{\rho}_I(t)$ ,  $\dot{\tilde{K}}_{II}(t)$  et  $\dot{\rho}_{II}(t)$ .

Ces quatre variables sont des variables cinématiques, elle permettent de représenter le mouvement de manière simplifiée en tenant compte des contraintes qu'impose le massif élastique sur la région élasto-plastique entourant l'extrémité de la fissure. Néanmoins, ces variables ne sont pas directement les variables internes qui permettent de prévoir la vitesse et la direction de propagation des fissures. Par exemple, la modélisation des contraintes internes dans la région élasto-plastique est nécessaire pour pouvoir prévoir la vitesse de fissuration en mode mixte, la direction de propagation et les effets d'histoire du chargement ([Doquet et Bertolino, 2008], [Sander et Richard, 2006] et [Sander et Richard, 2005]). Ces auteurs ont utilisé la méthodes des éléments finis pour accéder au détail des champs de contrainte et de déformation en pointe de fissure. Avec l'approche retenue ici, des va-

riables globales, plutôt que des champs, seront utilisés pour modéliser ces phénomènes. Le détail de ce modèle est présenté dans (cf. CHAP.4, §1.2, page 122).

Le modèle (cf. CHAP.4, §1.2, page 122) est essentiellement construit en s'appuyant sur des simulations numériques par éléments finis. Ces simulations permettent de produire des évolutions de  $\rho_I(t)$  et  $\rho_{II}(t)$  pour diverses séquences de chargement nominal  $K_I^\infty(t)$  et  $K_{II}^\infty(t)$ . Ces simulations sont réalisées en déformations planes et avec la loi de comportement élasto-plastique cyclique identifiée pour le matériau. Concrètement, les champs de référence  $(\underline{u}_I^e(P), \underline{u}_{II}^e(P))$  et  $(\underline{u}_I^c(P), \underline{u}_{II}^c(P))$  sont identifiés une fois pour toute à l'aide de simulations de séquences de chargement monotone, soit en Mode I pur, soit en Mode II pur (FIG.3.1). Une fois ces champs connus, l'évolution des variables globales  $\dot{K}_I(t)$ ,  $\dot{K}_{II}(t)$  et  $\dot{\rho}_{II}(t)$  est obtenue, pour toute séquence de chargement en mode mixte, par projection du champ  $\underline{v}(P,t)$  à chaque pas de temps sur les champs de référence.



**FIGURE 3.1:** Champ de déplacement en pointe de fissure issus de simulations par éléments finis.





## 2 Approche expérimentale de la mesure de la plasticité cyclique en pointe de fissure

### 2.1 Mesure des champs de déplacement en pointe de fissure

L'enjeu de l'étude expérimentale conduite ici, est d'appliquer la démarche précédente, non pas à des champs de vitesses issus de simulations numériques, mais à des champs de vitesse expérimentaux, afin de pouvoir déterminer l'évolution des variables globales  $\dot{K}_I(t)$ ,  $\dot{\rho}_I(t)$ ,  $\dot{K}_{II}(t)$  et  $\dot{\rho}_{II}(t)$  de manière expérimentale. L'objectif est de vérifier que la démarche de changement d'échelle qui a été mise au point pour des calculs numériques par éléments finis, est bien valide et applicable à des résultats expérimentaux.

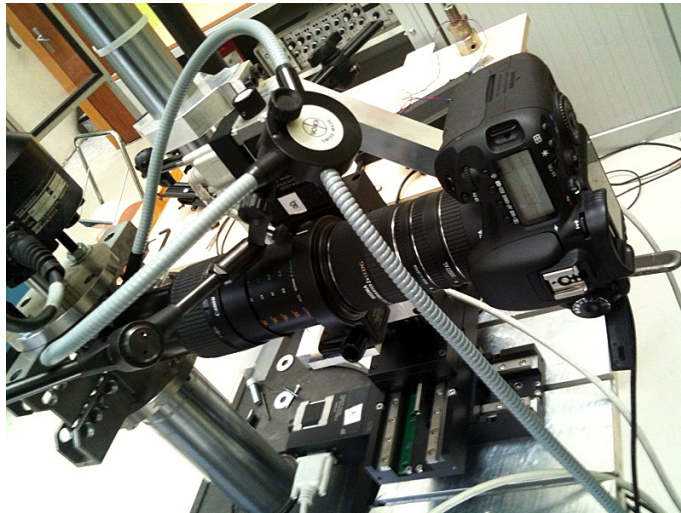
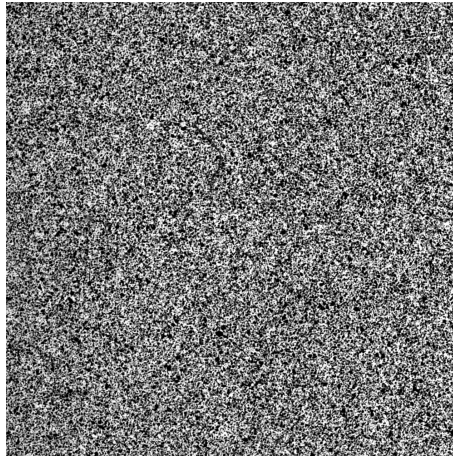


FIGURE 3.2: Dispositif optique déployé lors d'un essai.

Dans cette étude, le champ de vitesse est mesuré par corrélation d'images optiques réalisées en surfaces de l'échantillon. L'outil de corrélation d'images Correli, développé au LMT, a été récemment porté sous une plateforme de développement en langage C++, nommé LMTpp ([Leclerc *et al.*, 2009]). Cela permet plus de flexibilité à l'utilisateur et les performances ont été accrues, ce qui permet une acquisition et un traitement des images quasiment en temps réel pendant le cyclage de fatigue. Des fonctions complémentaires, nécessaires à notre étude expérimentale, ont été développées, comme par exemple la localisation de la pointe de fissure, le traitement des champs en vue de la décomposition de Karhunen-Loeve, l'acquisition des champs de référence, etc.

La corrélation d'images permet de récupérer les champs de déplacement entre une image de référence et une image déformée ([Sutton *et al.*, 1983]). Suivant les moyens optiques déployés, il est possible d'avoir une description précise de ces champs même à une échelle réduite. L'érouissage présent dans le matériau peut fortement modifier la taille et la forme de la zone plastique en pointe de fissure ([Rice et Rosengren, 1968]). Pour le matériau de l'étude, dans le régime de Paris, la taille de la zone plastique a un

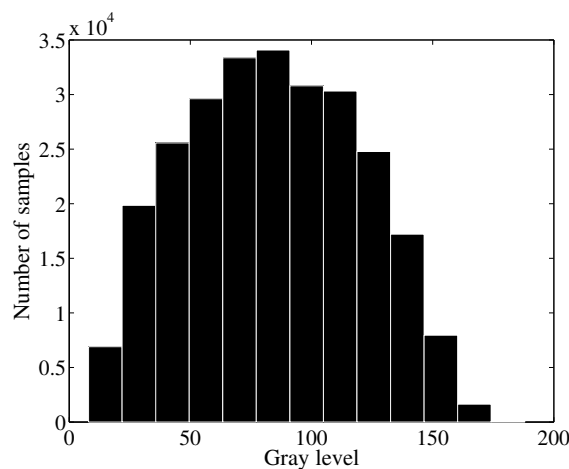
rayon qui reste inférieur à  $500\mu\text{m}$ . Le dispositif optique mis en oeuvre pour cet essai permet d'observer une zone de  $5.8\text{mm}$  par  $3.7\text{mm}$  en plein capteur ( $12\text{MPix}$ ) (FIG.3.3). La zone observée englobe donc largement la région élasto-plastique. L'ensemble des quatre photosites rouge, verts et bleu de l'image sont concaténés en un seul : un pixel de l'image représente alors un carré de côté  $2.9\mu\text{m}$  à la surface de l'éprouvette. Par commodité, on utilise une fenêtre optique de travail de dimension ( $3\text{mm}$  par  $3\text{mm}$ ) plus ou moins centrée sur l'extrémité de la fissure.



**FIGURE 3.3:** Fenêtre optique de  $3\times 3\text{mm}$  : mouchetis servant à la corrélation d'images dans une région centrée sur l'extrémité de la fissure.

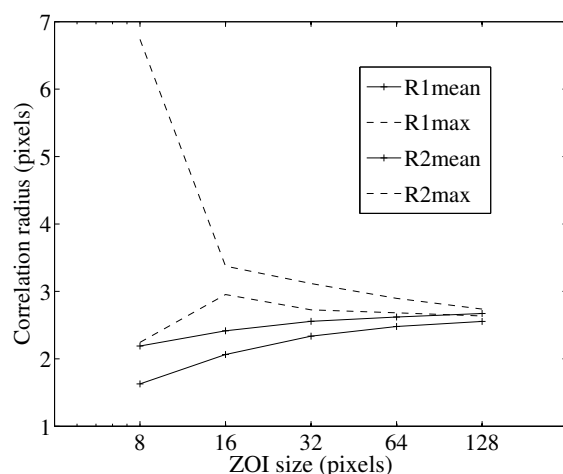
L'éclairage de la surface à observer est un aspect important pour la mesure de champs de déplacement par corrélation d'image. Dans la gamme de grossissement ( $G8$  et plus) qui a été utilisée ici, les images optiques sont très peu lumineuses, mais on ne peut pas non plus augmenter le temps d'exposition au risque d'obtenir des clichés flous. La FIG.3.4 permet de voir si l'éclairage est adapté : l'algorithme de corrélation utilisé, travaille sur des images en niveau de gris codé sur 8 bits. Un noir absolu apparaît comme étant à 0 et un blanc à 255. Plus la dynamique de l'image est importante, plus le gradient des niveaux de gris entre deux états de déplacement est important, et plus l'algorithme de calcul des champs de déplacement est précis ([Schreier *et al.*, 2000]).

La dimension de la fenêtre optique ( $3\text{mm}$  par  $3\text{mm}$ ) et sa discrétisation spatiale ( $2.9\mu\text{m}$  par pixel) définissent des contraintes sur la texture de l'image. Celle ci doit avoir une échelle supérieure ou égale à l'échelle du pixel. Par ailleurs, l'algorithme de corrélation d'image est basé sur l'hypothèse que le champ de déplacement est linéaire (ou quadratique) par morceaux à l'échelle de la zone d'intérêt (ZOI). Pour que cet algorithme fonctionne bien, l'échelle de la ZOI doit être suffisamment grande devant l'échelle de la texture de l'image. Et, bien entendu, plus l'échelle de la ZOI est petite et meilleure est la représentation des champs de déplacement. Le mouchetis de l'éprouvette a été réalisé à l'aide d'un aérographe : de microscopiques gouttes de peinture sont projetées sur l'éprouvette. Grâce à ce procédé, on obtient une texture aléatoire dont la taille des taches est comprise entre 2 et 7 pixels. La FIG.3.5 représente la répartition de la taille des tâches de peinture



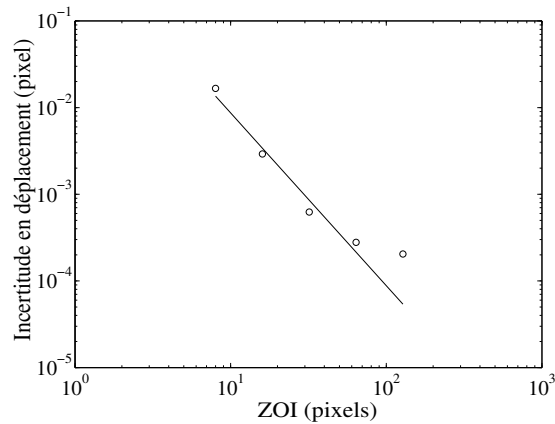
**FIGURE 3.4:** Distribution des niveaux de gris sur une image 8 bits (256 niveaux de gris), plus la dynamique est élevée, plus l'incertitude de mesure est faible.

dans une région située en pointe de fissure.



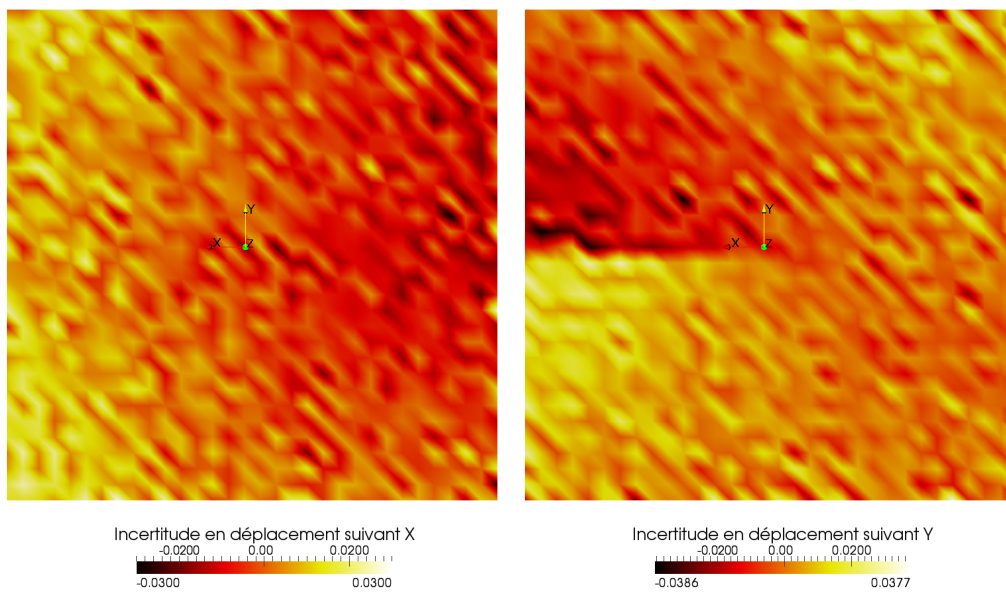
**FIGURE 3.5:** Analyse de la texture de l'image : les tâches de peinture sont assimilées à des ellipses de petit axe  $2R_1$  et de grand axe  $2R_2$ . Il est commun de choisir une zone d'intérêt 4 fois plus grande que  $R_2^{max}$

Afin d'analyser la qualité du mouchetis et de chiffrer l'incertitude de mesure, on peut effectuer des déplacements virtuels de l'image et voir comment l'algorithme de corrélation se comporte. Le cas le plus défavorable étant un déplacement uniforme de 0.5 pixel, l'image est traduite dans les directions  $x$  et  $y$ . Les FIG.3.6 illustrent cette analyse : pour un déplacement nul, on obtient bien une erreur nulle, de même pour un déplacement de 1 pixel. En admettant que l'on choisisse une ZOI, "Zone Of Interest", de 64 pixels, ou encore de  $185 \mu m$  de côté, l'incertitude maximum sur le déplacement est alors de  $4.10^{-4}$  pixel, ce qui équivaut à  $1.1 nm$  dans le cas le plus défavorable.



**FIGURE 3.6:** Qualité du mouchetis déposé sur l'éprouvette ; Incertitude sur le déplacement en fonction de la dimension de la zone d'intérêt (ZOI) pour un déplacement de 0.5 pixel

Les résultats montrés sur les figures 3.5 et 3.6 estiment l'erreur que l'on commettrait dans un cas idéal où le mouchetis resterait inchangé au cours de l'essai, excepté un déplacement de solide rigide. En pratique, de nombreuses sources de bruit peuvent apparaître : vibrations du sol, vibrations du vérin de la machine d'essai, changement de luminosité, dégagement thermique, distorsion optique, etc [Yoneyama et Kikuta, 2006]. Un moyen simple pour estimer l'incertitude de mesure, englobant un maximum de sources de bruit, consiste à réaliser une série de clichés de l'éprouvette, installée sur la machine d'essai et pour un niveau de chargement fixe, et de corrélérer les images entre elles. En théorie, aucun déplacement ne devrait être observé mais en pratique d'infimes déplacements sont mesurés. L'hydraulique de la machine de traction compression y est pour beaucoup, elle génère de très faibles variations au niveau du déplacement du vérin. Comme on peut le voir sur la FIG.3.7, la fissure commence à apparaître, certes avec de très faibles niveaux de déplacement mais cela montre que l'éprouvette est faiblement sollicitée même au repos. Une moyenne de ces mesures d'incertitude montre que l'on peut observer des champs de déplacement avec une précision de l'ordre  $0.07\mu m$  avec une ZOI de 32 pixels (FIG.3.7).

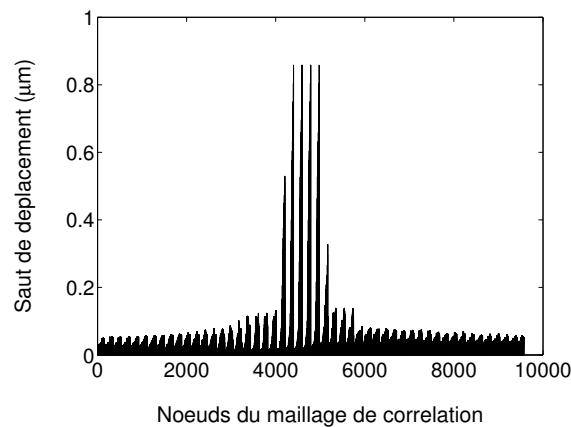


**FIGURE 3.7:** Mesure d'incertitude sur une éprouvette soumise à une charge constante dans la machine d'essai. L'échelle des déplacements est en micromètre. La dimension de l'image est de  $3\text{mm}$  par  $3\text{mm}$ , l'échelle de la ZOI est de  $92\ \mu\text{m}$ . (a) Composante du champ selon  $x$ . (b) Composante du champ selon  $y$

## 2.2 Localisation de l'extrémité de la fissure

Par commodité pour la suite du traitement, l'image est centrée sur la pointe de la fissure via un algorithme de localisation, puis recadrée pour avoir une fenêtre d'observation de  $3\text{mm}$  par  $3\text{mm}$  autour de l'extrémité.

La présence d'une discontinuité dans le champ de déplacement permet de détecter la présence d'une fissure. La FIG.3.8 l'illustre bien. Les sauts de déplacement entre deux noeuds voisins du maillage de l'image sont pour la plupart très faibles. Seuls les sauts de déplacement entre des noeuds situés de part et d'autre des lèvres de la fissure se distinguent. Un algorithme simple qui balaye l'ensemble des discontinuités de proche en proche pour en extraire les valeurs les plus hautes permet de localiser la position de l'extrémité de la fissure en surface avec une précision d'une dizaine de pixels (environ  $6\mu\text{m}$ ). Cette technique de détection de l'extrémité a été validée à partir d'une mesure par répliques d'acétate de cellulose du trajet de fissuration.



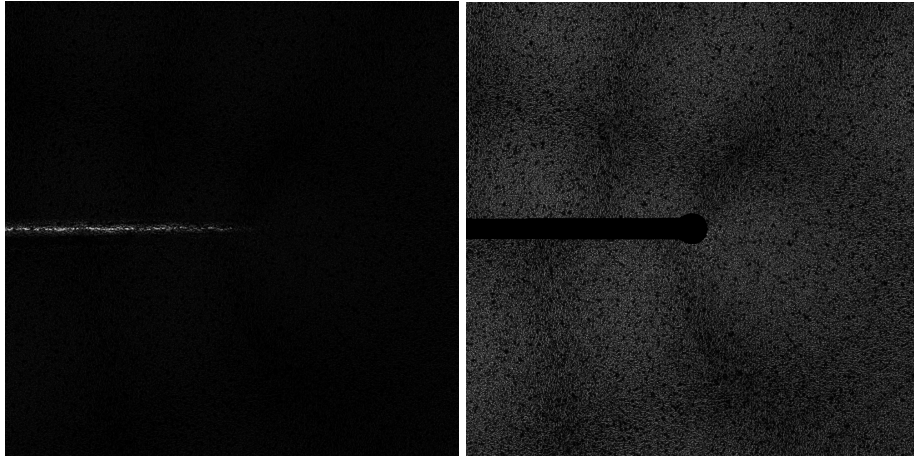
**FIGURE 3.8:** Distribution de la norme des sauts de déplacements pour les noeuds voisins du maillage de corrélation.

Une fois la position de l'extrémité de la fissure connue, un masque est généré pour éliminer les aberrations de corrélation qui pourraient apparaître au voisinage des lèvres de la fissure et de son extrémité. En effet, comme il a été dit plus haut l'algorithme de corrélation d'image utilisé contient l'hypothèse que le champ de déplacement est continu, linéaire ou quadratique par morceaux à l'échelle de la ZOI, ce n'est évidemment pas le cas au passage de la discontinuité. Celle-ci doit donc être repérée dans un premier temps, puis éliminée de l'image en utilisant un masque. La corrélation d'image est appliquée sur le restant de l'image pour lequel l'hypothèse de continuité est valide.

Si l'on considère deux images,  $f$  et  $g$ , entre lesquelles sont calculées par corrélation d'image les composantes de surface  $(u(x,y), v(x,y))$  du champ de déplacement qui les distingue. Si  $f(x,y)$  est la fonction renvoyant le niveau de gris normalisé du pixel  $(x,y)$  de l'image  $f$ ,  $g(x,y)$  celle de l'image  $g$ , le résidu de corrélation est défini comme suit :

$$\int_x \int_y [g(x+u, y+v) - f(x, y)]^2 dx dy \quad (3.3)$$

La FIG.3.9 est une carte des résidus de la corrélation.

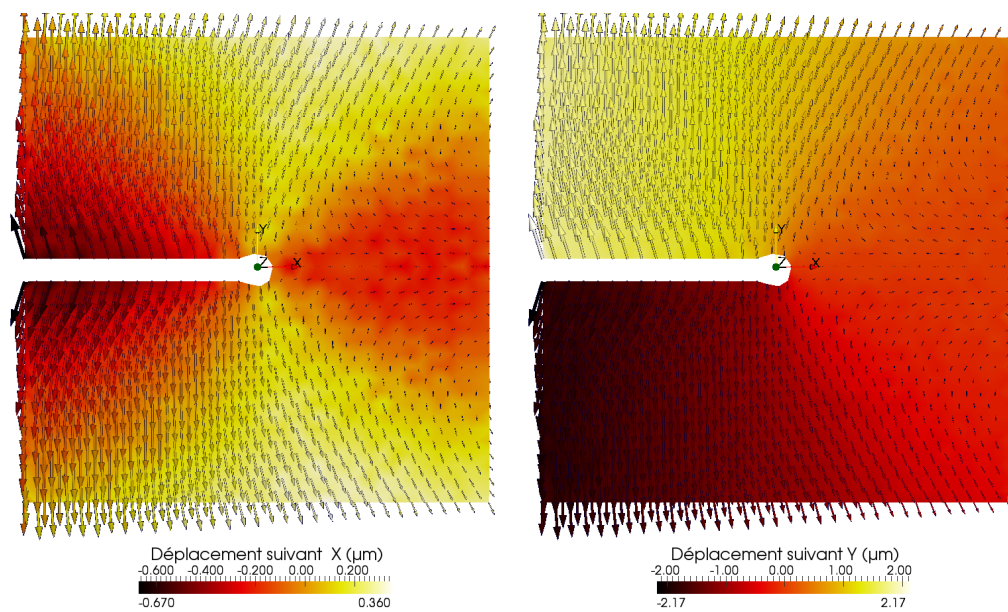


**FIGURE 3.9:** Résidus de corrélation normalisé appliqué aux images avec et sans le masque

Le masque permet d'éliminer les zones bruitées et donc d'améliorer la qualité de la définition des champs de déplacement en pointe de fissure. On cherche ensuite l'approximation continue, linéaire par morceaux, du champ de déplacement  $(u(x, y), v(x, y))$  qui permet de minimiser le résidu de corrélation entre les deux images.

À partir de ces trois outils, détermination des discontinuités, masque et corrélation d'images, il est maintenant possible d'extraire le champ de vitesse  $\underline{v}(P, t)$  au cours d'un essai mécanique. ( FIG.3.10)





**FIGURE 3.10:** Champs de vitesse de mode I à l'instant  $t$  : (a) Composante  $v_x$  (b) Composante  $v_y$ . Les vecteurs représentent le vecteur vitesse de chaque noeud, les échelles de couleur l'intensité des composantes (a)  $v_x$  et (b)  $v_y$ .

## 2.3 Construction expérimentale d'une base de champs spatiaux de référence

Jusqu'ici, les champs de référence étaient construits à partir de simulations numériques par éléments finis (cf. CHAP.4, §1.2, page 122). Dans cette étude, les champs de références sont construits expérimentalement. La démarche utilisée pour exploiter les calculs par éléments finis ne peut pas être transposée directement pour l'analyse des champs expérimentaux. Pour construire les champs de référence "élastiques"  $\underline{u}_I^e(P)$  et  $\underline{u}_{II}^e(P)$ , il suffisait d'appliquer un chargement nominal correspondant à une valeur d'intensité des contraintes  $K_I^\infty$  ou  $K_{II}^\infty$  égal à  $1MPa\sqrt{m}$  dans un cadre d'élasticité linéaire. Lors d'un essai, il n'est bien évidemment pas possible d'interdire au matériau de se déformer plastiquement. Il faut donc procéder autrement. Une première méthode peut être d'utiliser une solution élastique du problème construite par ailleurs (solution de Westergaard ou solution d'un calcul numérique). Cependant la taille des grains du matériau est comparable à celle de la ZOI, les solutions construites en élasticité linéaire isotrope risquent donc d'être mal adaptées au voisinage de l'extrémité de la fissure. Par ailleurs, les solutions élastiques sont construites en faisant des hypothèses sur la géométrie du problème, et cette géométrie n'est que partiellement connue. On ne voit que l'intersection de la fissure avec la surface, mais l'angle, par exemple, avec lequel le front de la fissure débouche en surface n'est pas connu. Nous avons donc choisi de faire l'hypothèse que la région en pointe de fissure se comporte de manière essentiellement élastique lors d'une phase de décharge d'amplitude  $\Delta K$  significativement inférieure au seuil de non propagation des fissures en fatigue  $\Delta K_I^{th}$ . Avec cette hypothèse, on procède comme suit pour construire la base de champs spatiaux de référence.

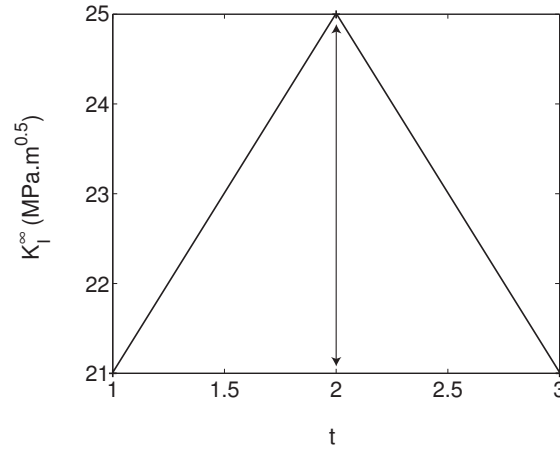
On applique le chargement nominal de mode I décrit FIG.3.11. Au cours de ce chargement, trois prises de vue sont réalisées :

- A l'instant  $t_1$  où  $K_I^\infty(t_1) = 21MPa\sqrt{m}$
- A l'instant  $t_2$  où  $K_I^\infty(t_2) = 25MPa\sqrt{m}$
- A l'instant  $t_3$  où  $K_I^\infty(t_3) = 21MPa\sqrt{m}$

Par commodité, trois champs sont définis :

- $\underline{u}^{12}(P)$  : champ de déplacement mesuré entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ .
- $\underline{u}^{32}(P)$  : champ de déplacement mesuré entre les instants  $t_3$  et  $t_2$ .
- $\underline{u}^{13}(P)$  : champ de déplacement mesuré entre les instants  $t_1$  et  $t_3$ .

Étant donné que la valeur de  $K_I^\infty(t_2)$  est supérieure à  $K_I^\infty \max(t < t_2)$ , on peut affirmer que le chargement entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  plastifie la région en pointe de fissure. A l'inverse, l'amplitude de la phase de décharge entre les instants  $t_2$  et  $t_3$  a été calibrée de telle sorte que  $K_I^\infty(t_2) - K_I^\infty(t_3) < 0.7K_I^{th}$ . Où  $\Delta K_I^{th}$  est le seuil de non propagation des fissures par fatigue dans ce matériau. Ainsi le comportement du matériau est, dans cette phase de décharge, considéré comme essentiellement élastique dans la fenêtre optique de travail.



**FIGURE 3.11:** Chargement permettant de construire les champs spatiaux de référence  $\underline{u}_I^e(P)$  et  $\underline{u}_I^c(P)$

On a donc :

- $\underline{u}^{12}(P)$  : champ de déplacement pour la phase de chargement entre  $t_1$  et  $t_2$  où le matériau a un comportement élasto-plastique
- $\underline{u}^{32}(P)$  : champ de déplacement pour la phase de chargement entre  $t_3$  et  $t_2$  où le matériau a un comportement élastique
- $\underline{u}^{13}(P)$  : champ de déplacement résiduel entre  $t_1$  et  $t_3$

### 2.3.1 Champ élastique de référence

Le champ  $\underline{u}^{32}(P)$  représente donc un champ de déplacement "élastique" vis-à-vis d'une sollicitation de  $\Delta K_I^\infty(t_2 - t_3)$ .

Le champ élastique de référence  $\underline{u}_I^e(P)$  est donc donné par :

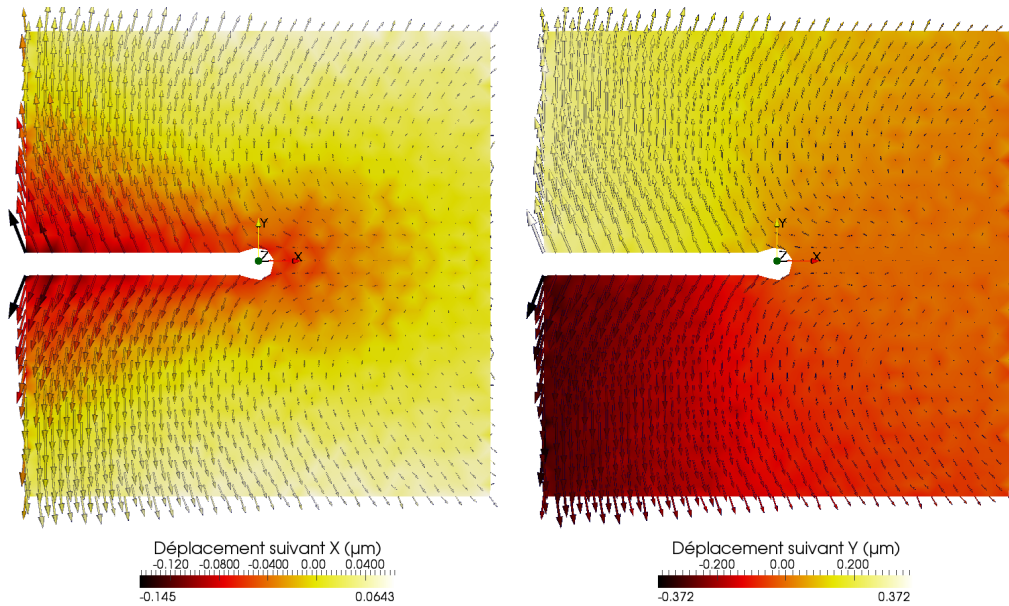
$$\underline{u}_I^e(P) = \frac{\underline{u}^{32}(P)}{\Delta K_I^\infty(t_2 - t_3)} \quad (3.4)$$

A titre de comparaison, la forme analytique d'un champ élastique de mode I à l'extrémité de la fissure est donnée par les expressions asymptotiques de Westergaard en déplacement : (FIG.3.13(a))

$$\underline{u}_I^x(r, \theta) = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) \quad (3.5)$$

$$\underline{u}_I^y(r, \theta) = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) \quad (3.6)$$

avec  $\mu = \frac{E}{2(1-\nu)}$ ,  $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$  en contrainte plane et  $\kappa = 3-4\nu$  en déformation plane.



**FIGURE 3.12:** Champs de référence élastique de mode I  $\underline{u}_I^e$  : (a) Composante  $u_{I,x}^e$  (b) Composante  $u_{I,y}^e$ . Les vecteurs représentent le vecteur déplacement du noeud

Les techniques de mesure par corrélation d'images, permettent de mesurer le déplacement de la surface de l'éprouvette, mais le déplacement de la surface d'un objet tridimensionnel ne peut pas être assimilé à la solution d'un problème bidimensionnel en contraintes planes. D'autant plus que la solution en déplacement du problème 2D contrainte plane de la mécanique de la rupture ne vérifie pas les équations de compatibilité ([Bui, 2006] chapitre 3, page 2) et qu'il serait donc discutable de l'utiliser pour analyser le champ de déplacement en surface. Celle en déformation plane ne vérifie pas les conditions de surface libre pour les termes  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$  et  $\sigma_{33}$ . Enfin, on ne connaît pas la géométrie de la fissure à l'intérieur de l'éprouvette. La FIG.3.13 montre que les champs de Westergaard en contraintes planes ou en déformations planes ont cependant globalement la même forme que les champs expérimentaux. Mais l'écart peut atteindre 15% entre les deux solutions analytiques pour une même valeur du facteur d'intensité des contraintes et on peut également remarquer des différences entre la forme des champs analytiques et des champs expérimentaux. Les techniques de stéréo-corrélation permettent de mesurer les déplacements hors plan ([Besnard *et al.*, 2006], [Tay *et al.*, 2006], [Roux *et al.*, 2008], [Rannou *et al.*, 2009]), et donc permettent de reconstruire le champ de déplacement 3D de la surface, ce qui pourra améliorer dans le futur la mesure des champs de déplacement et leur analyse via des solutions élastiques tridimensionnelles.

### 2.3.2 Champ complémentaire de référence

Pour l'identification du champ complémentaire de référence, le principe reste le même.  $\underline{u}^{13}$  représente un champ "élasto-plastique", auquel on a ôté la partie élastique macroscopique

pique via  $\underline{u}^{13}$ . Afin de s'assurer que toute la partie élastique du comportement du matériau soit bien éliminée, et en particulier les déformations élastiques provenant des contraintes internes, on définit la projection de  $\underline{u}^{13}$  sur  $\underline{u}_I^e(P)$  par :

$$\alpha = \frac{\int \underline{u}^{13}(P) \cdot \underline{u}_I^e(P) dS}{\int \underline{u}_I^e(P)^2 dS} \quad (3.7)$$

On obtient donc le champ complémentaire de référence  $\underline{u}_I^c(P)$  :

$$\underline{u}_I^c(P) = \frac{\underline{u}^{13}(P) - \alpha \underline{u}_I^e(P)}{CTOD} \quad (3.8)$$

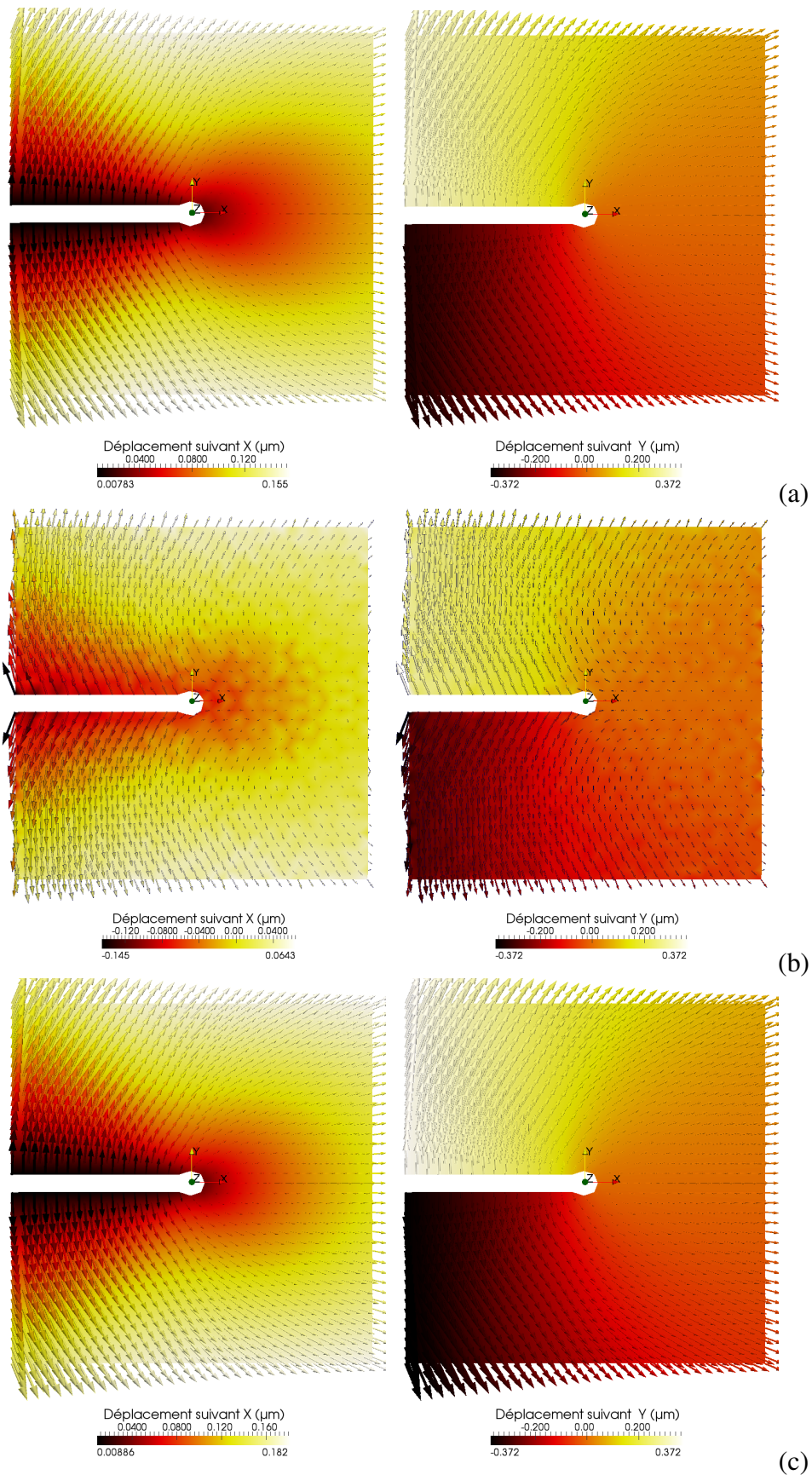
La partie plastique du CTOD (Crack Tip Opening Displacement) qui est utilisée pour adimensionner le champ complémentaire est mesurée comme suit :

$$CTOD^p = \frac{1}{1\mu m} \int_{x=-\delta}^{x=0} (\underline{u}^{13}(x < 0, y = 0) - \alpha \underline{u}_I^e(x < 0, y = 0)) \quad (3.9)$$

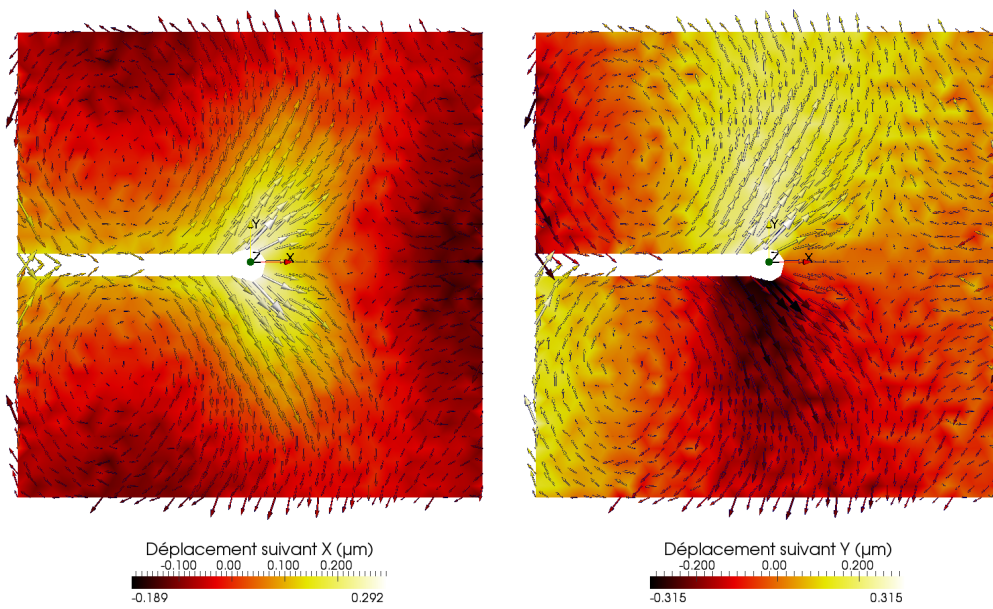
Par construction, les champs  $\underline{u}_I^e$  et  $\underline{u}_I^c$  sont orthogonaux et peuvent maintenant être utilisés comme base de champs pour représenter le champ de vitesse de mode I pour diverses séquences de chargement.

On procède de même pour la construction des champs spatiaux de référence  $\underline{u}_{II}^e$  et  $\underline{u}_{II}^c$ , il suffit d'appliquer un chargement nominal similaire à FIG.3.11 mais de mode II.

Ces champs de références spatiaux sont définis une fois pour toute pour un matériau donné.



**FIGURE 3.13:** (a) Champs asymptotiques de Westergaard à l'extrémité de la fissure  $u_I$  tracé en déformations planes ; (b) Champs mesurés expérimentalement, lors d'une phase de décharge, (c) Champs asymptotiques de Westergaard à l'extrémité de la fissure  $u_I$  tracé en contraintes planes.

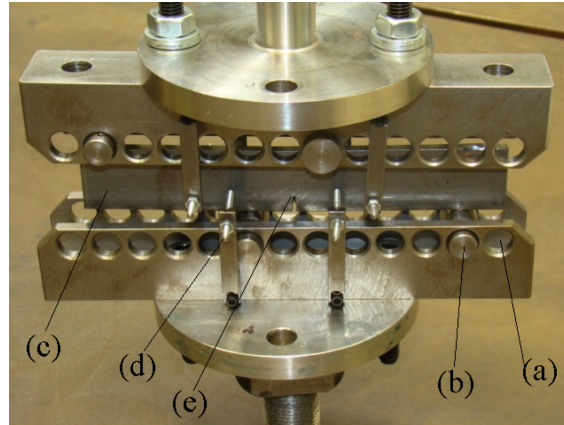


**FIGURE 3.14:** Champs spatiaux de référence complémentaire de mode I  $\underline{u}_I^c$  : (a) Composante  $u_{I,x}^c$  (b) Composante  $u_{I,y}^c$ . Les vecteurs représentent le vecteur déplacement des noeuds

### 3 Dépouillement d'un cas de chargement de mode I

#### 3.1 Mesure des variables globales $\dot{K}_I$ et $\dot{\rho}_I$ en cours d'essai

Un chargement de mode I est appliqué à l'éprouvette à l'aide d'un montage de flexion quatre points (FIG.3.15).



**FIGURE 3.15:** Illustration du montage de flexion quatre points dissymétrique : (a) Différentes positions des appuis pour changer la mixité du chargement, (b) Axe du roulement à bille, (c) Éprouvette, (d) Dispositif de maintien en position de l'éprouvette, (e) Entaille initiale

Si l'on considère le chargement comme étant de mode I pur, l'approximation des champs en pointe de fissure se ramène donc à :

$$\underline{v}(P,t) = \dot{K}_I(t) \cdot \underline{u}_I^e(P) + \dot{\rho}_I(t) \cdot \underline{u}_I^c(P) \quad (3.10)$$

La base orthogonale de champ spatiaux de référence  $(\underline{u}_I^e(P), \underline{u}_I^c(P))$  a été construite suivant la méthode décrite au CHAP.3, §2, page 124.

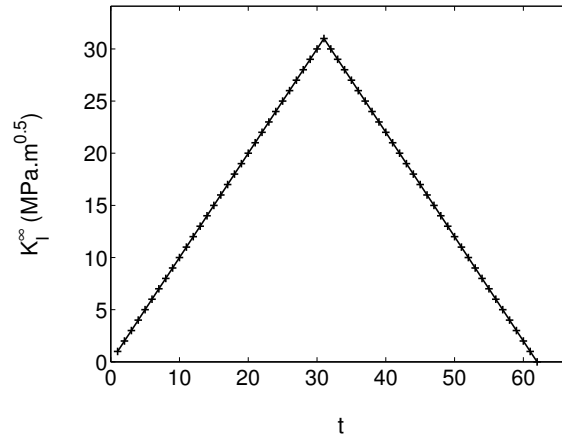
On peut maintenant projeter sur cette base le champ de vitesse  $\underline{v}(P,t)$  obtenu, pour n'importe quelle condition de chargement et n'importe quelle histoire de chargement. Ce qui permet d'extraire les facteurs d'intensité  $\dot{K}_I(t)$  et  $\dot{\rho}_I(t)$  et de définir un champ de vitesse approché pour la région située à l'extrémité de la fissure.

Le chargement nominal appliqué est tracé sur la FIG.3.16, le champ  $\underline{v}_I(P,t)$  représente alors le déplacement mesuré du point  $P(x,y)$  entre l'instant  $t$  et  $t + dt$ .

On extrait d'abord la variation  $\dot{K}_I$  du facteur d'intensité du champ élastique de référence qui est défini sur l'ensemble des points  $P(x,y)$  de la région de la pointe de fissure comme suit :

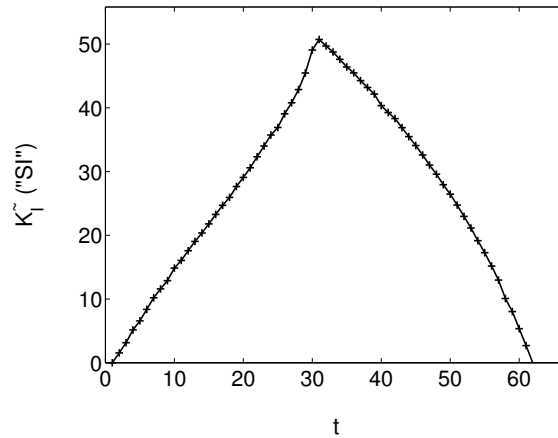
$$\dot{K}_I(t) = \frac{\int \underline{v}_I(P,t) \cdot \underline{u}_I^e(P) dS}{\int \underline{u}_I^e(P) \cdot \underline{u}_I^e(P) dS} \quad (3.11)$$





**FIGURE 3.16:** Chargement nominal appliqué à l'éprouvette, exprimé comme un facteur d'intensité des contraintes nominal  $K_I^\infty$

Le cumul des  $\dot{\tilde{K}}_I(t)$  permet de tracer l'évolution de  $\tilde{K}_I(t)$  au cours du chargement. (FIG.3.17) Une explication sera donnée dans la suite concernant la différence entre la valeur maximum de  $K_I^\infty$  et celle de  $\tilde{K}_I$ .

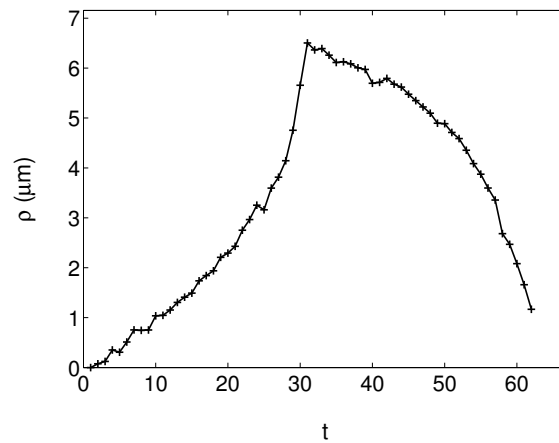


**FIGURE 3.17:** Évolution du facteur d'intensité  $\tilde{K}_I(t)$  mesuré pendant le cycle

On extrait ensuite la variation  $\dot{\rho}_I(t)$  du facteur d'intensité du champ complémentaire qui est défini sur l'ensemble des points  $P(x,y)$  de la région de la pointe de fissure comme suit :

$$\dot{\rho}_I(t) = \frac{\int \underline{v}(P,t) \cdot \underline{u}_I^c(P) dS}{\int \underline{u}_I^c(P) \cdot \underline{u}_I^c(P) dS} \quad (3.12)$$

Le cumul des  $\dot{\rho}_I(t)$  nous donne l'évolution de  $\rho_I(t)$  au cours du chargement. (FIG.3.18)



**FIGURE 3.18:** Évolution du facteur d'intensité  $\rho_I(t)$  pendant le cycle

Notons la forte non-linéarité de  $\rho(t)$  entre les instants  $t = 20$  et  $t = 30$ , cela correspond au moment où le chargement nominal appliqué  $K_I^\infty$  dépasse le niveau maximal atteint lors de la prè-fissuration de l'éprouvette. Une fois le maximum du cycle atteint,  $\rho$  décroît d'abord lentement pendant une dizaine de pas de temps, puis beaucoup plus fortement.

### 3.2 Erreur associée à l'approximation du champ de vitesse

On définit deux types d'erreurs associées à l'approximation (3.10) du champ de vitesse de mode I  $\underline{v}(P,t)$  :

- la première,  $C_1(t)$ , est l'erreur que l'on commet si l'on approche le champ de vitesse  $\underline{v}(P,t)$  par sa projection, notée  $\tilde{\underline{v}}^e(P,t)$ , sur le champ spatial élastique de référence :

$$\tilde{\underline{v}}^e(P,t) = \dot{K}_I(t) \underline{u}_I^e(P) \quad (3.13)$$

L'erreur  $C_1(t)$  est définie sur l'ensemble des points  $P(x,y)$  de la région de la pointe de fissure comme suit :

$$C_1(t) = \sqrt{\int (\underline{v}(P,t) - \tilde{\underline{v}}^e(P,t))^2 dS} \quad (3.14)$$

L'erreur relative associée  $C_1^R(t)$  :

$$C_1^R(t) = \frac{C_1(t)}{\sqrt{\int \underline{v}(P,t)^2 dS}} \quad (3.15)$$

- la seconde,  $C_2(t)$ , celle qu'on commet si l'on approche le champ de vitesse  $\underline{v}(P,t)$  en utilisant le champ élastique de référence et le champ complémentaire de référence, on définit  $\tilde{\underline{v}}(P,t)$  :

$$\tilde{\underline{v}}(P,t) = \dot{K}_I(t) \underline{u}_I^e(P) + \dot{\rho}_I(t) \cdot \underline{u}_I^c(P) = \tilde{\underline{v}}^e(P,t) + \dot{\rho}_I(t) \cdot \underline{u}_I^c(P) \quad (3.16)$$

L'erreur  $C_2(t)$  est définie sur l'ensemble des points  $P(x,y)$  de la région de la pointe de fissure comme suit :

$$C_2(t) = \sqrt{\int (\underline{v}(P,t) - \tilde{\underline{v}}(P,t))^2 dS} \quad (3.17)$$

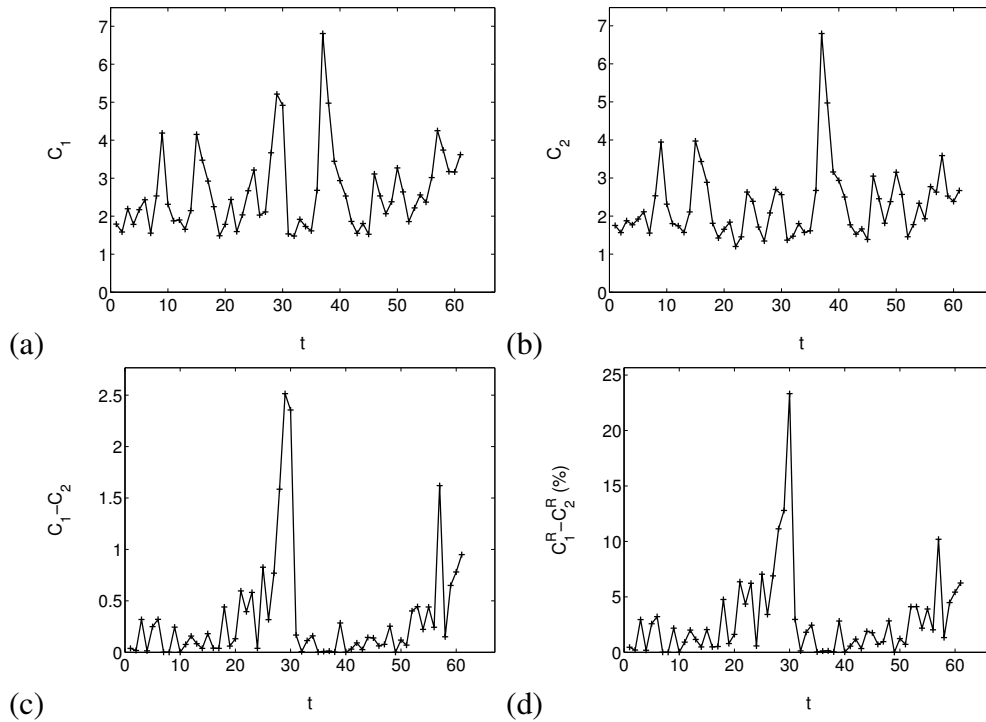
L'erreur relative associée  $C_2^R(t)$  :

$$C_2^R(t) = \frac{C_2(t)}{\sqrt{\int \underline{v}(P,t)^2 dS}} \quad (3.18)$$

Ces différentes erreurs sont calculées au cours du chargement présenté FIG.3.16 à partir des mesures expérimentales du champ de vitesse. Les évolutions des erreurs  $C_1$  et  $C_2$  sont très bruitées (FIG.3.19(a) et (b)) et restent difficiles à interpréter. En revanche la différence des erreurs  $C_1 - C_2$  ou  $C_1^R - C_2^R$  permet d'annuler une large partie de ce bruit (FIG.3.19(c) et (d)) et peut être discutée. Nous verrons par la suite, qu'une fois le dispositif expérimental "rôdé", les niveaux de bruit atteints sont significativement amoindris.

Dans la phase de chargement comprise entre les instants  $t = 0$  et  $t = 20$ , l'erreur  $C_1^R - C_2^R$  reste inférieure à 5%, on peut en déduire, que dans cette plage de facteur d'intensité des contraintes, les deux approximations du champ de vitesse ( $\tilde{v}^e(P,t)$  et  $\tilde{v}^e(P,t)$ ) sont aussi bonnes l'une que l'autre. Le comportement du matériau peut alors être considéré comme essentiellement élastique.

En revanche, au delà de l'instant  $t = 20$ , l'écart entre ces deux approximations croît très rapidement jusqu'à atteindre quasiment 25%. Il est clair qu'on peut considérer que le matériau dans la fenêtre optique de travail se plastifie puisque l'approximation du champ de vitesse  $\underline{v}$  par une solution purement élastique  $\tilde{v}^e$  n'est plus suffisante. C'est alors qu'interviennent le champ complémentaire. Nous allons voir dans la suite comment utiliser l'évolution de l'erreur  $C_1^R - C_2^R$  dans le cadre d'essais multi-axiaux pour déterminer la surface seuil du domaine élastique expérimentalement.



**FIGURE 3.19:** (a) Évolution de l'erreur  $C_1$  au cours du chargement. (b) Évolution de l'erreur  $C_2$ . (c) Évolution de la différence des erreurs  $C_1$  et  $C_2$ . (d) Évolution de la différence des erreurs  $C_1^R$  et  $C_2^R$

On peut définir un champ résiduel  $\underline{v}^{residu^{C_1}}(P,t)$  associé à l'erreur  $C_1(t)$  :

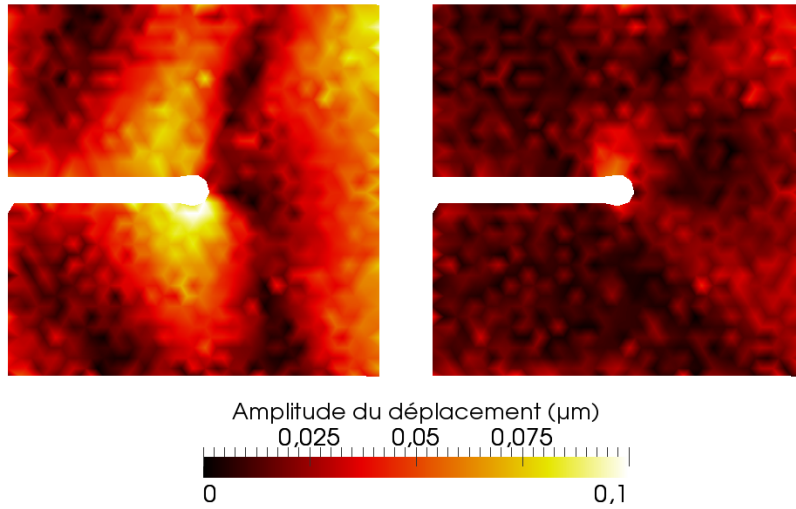
$$\underline{v}^{residu^{C_1}}(P,t) = \underline{v}(P,t) - \tilde{v}^e(P,t) = \underline{v}(P,t) - \dot{K}_I(t)\underline{u}_I^e(P) \quad (3.19)$$

Il est ainsi possible d'avoir une représentation spatiale de l'erreur commise en approchant le champ de vitesse par sa projection "élastique" seulement. L'intensité de ce résidu est tracé FIG.3.20(a), sa forme est très proche de la forme de zones plastiques en pointe de fissure.

On remarque également que le champ  $\underline{v}^{residu^{C1}}$  a la même forme que  $\underline{u}_I^c$ . Cela correspond à la partie manquante de l'approximation sur  $\underline{v}$  à savoir  $\dot{\rho}_I \cdot \underline{u}_I^c$ .

De la même façon, il est possible de définir le champ résiduel  $\underline{v}^{residu^{C2}}(P,t)$  associé à l'erreur  $C_2(t)$  :

$$\underline{v}^{residu^{C2}}(P,t) = \underline{v}(P,t) - \tilde{\underline{v}}^e(P,t) - \tilde{\underline{v}}^c(P,t) = \underline{v}(P,t) - \dot{K}_I(t) \underline{u}_I^e(P) - \dot{\rho}_I(t) \underline{u}_I^c(P) \quad (3.20)$$



**FIGURE 3.20:** (a) Norme du champ résiduel  $\underline{v}^{residu^{C1}}$  défini par l'équation 3.19 (b) Norme du champ résiduel  $\underline{v}^{residu^{C2}}$  défini par l'équation 3.20

On constate FIG.3.20(b) que le champ complémentaire  $\underline{u}_I^c(P)$ , pondéré par le facteur d'intensité plastique  $\rho_I$ , permet de réduire considérablement le niveau d'erreur sur l'approximation du champ de vitesse  $\underline{v}(P,t)$ .

### 3.3 Discussion et analyse des résultats

Cette démarche permet de tracer la mesure globale de la plasticité  $\rho_I$  en fonction du facteur d'intensité des contraintes nominal  $K_I^\infty$ . Les résultats de cet essai tracé sur la figure 3.22 sont comparables à ce qui est obtenu par les simulations numériques. Au début du chargement, lorsque le comportement du matériau peut être considéré comme essentiellement élastique,  $\rho_I$  évolue très peu. Puis le comportement devient nettement non-linéaire et  $\rho_I$  augmente fortement.

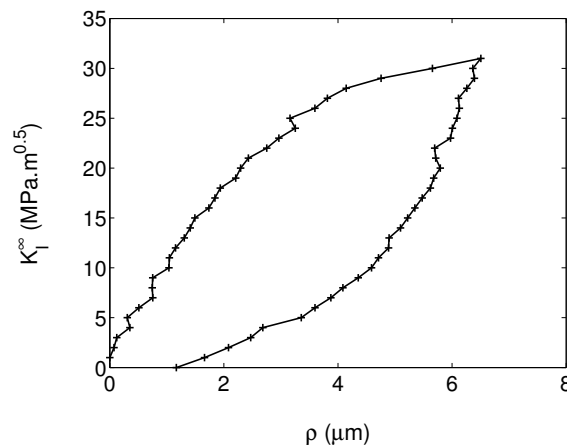
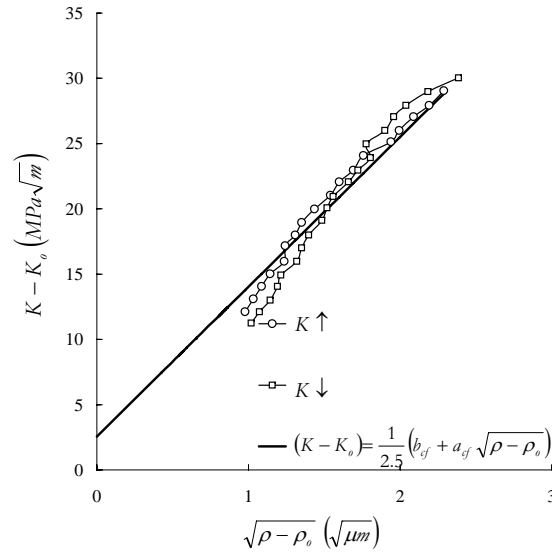


FIGURE 3.21: Loi d'érouissage plastique  $K^\infty = f(\rho)$

Si l'on trace, l'évolution de  $K_I^\infty - K_0$  en fonction de  $\sqrt{\rho_I - \rho_0}$  où  $(\rho_0, K_0)$  est le point atteint juste avant le changement de direction de chargement, on constate trois choses :

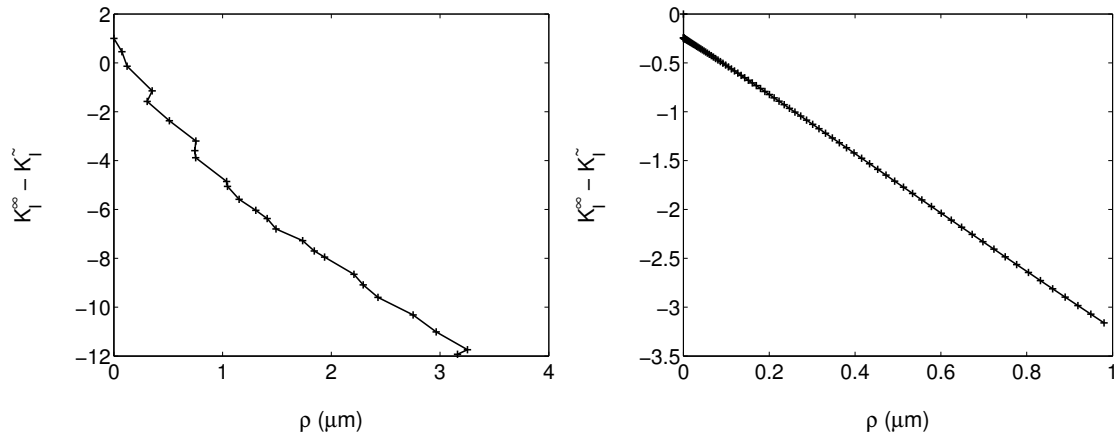
- premièrement, l'évolution est raisonnablement linéaire, ce qui permet d'approcher, le comportement élasto-plastique de la région en pointe de fissure par la fonction suivante  $K_I^\infty - K_0 = b + c\sqrt{\rho_I - \rho_0}$  comme cela avait déjà été observé lors des simulations numériques par éléments finis [Hamam, 2006] et comme cela est fait dans le modèle incrémental de fissuration par fatigue.
- deuxièmement, les évolutions obtenues en traction et en compression se superposent, ce qui, encore une fois, est cohérent avec ce qui avait été obtenu par les simulations numériques.
- troisièmement, les coefficients  $a_{cf}$  et  $b_{cf}$  déterminés au CHAP.2, §3.3, page 52 pour le matériau de base en s'appuyant sur des simulations numériques par éléments finis en déformations planes sont différents de ceux trouvés à partir des résultats expérimentaux. Les coefficients  $b$  et  $c$  trouvés expérimentalement en surface sont approximativement égaux à  $a_{cf}$  et  $b_{cf}$  divisés par un même facteur 2.5.

La valeur du facteur d'intensité des contraintes apparent  $\tilde{K}_I$  calculé par projection du champ de vitesse sur le champ élastique de référence (FIG.3.17) diffère du facteur d'intensité nominal  $K_I^\infty$  appliqué. Cette différence est due aux contraintes internes dans la région dans la pointe de fissure qui ne sont pas prise en compte dans le cas du facteur d'intensité des contraintes nominal  $K_I^\infty$  mais qui induisent des déformations élastiques



**FIGURE 3.22:** Loi d'érouissage plastique tracée dans un graphique  $K_I^\infty - K_0$  en fonction de  $\sqrt{\rho_I - \rho_0}$ , où  $(\rho_0, K_0)$  est le point atteint juste avant le changement de direction de chargement.

internes dans la région entourant l'extrémité de la fissure.

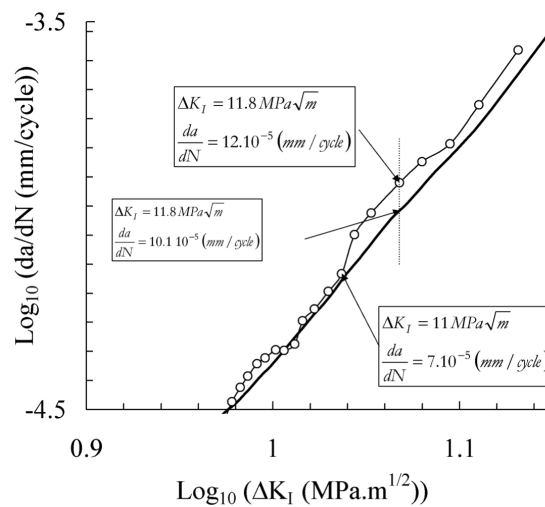


**FIGURE 3.23:** Comparaison de la loi  $K_I^\infty - \tilde{K} = f(\rho)$  : (a) Résultats issus des essais. (b) Résultats issus d'une simulation par éléments finis ; Une régression linéaire de ces deux courbes donne une pente de  $-3$  dans les deux cas.

On trouve expérimentalement et numériquement que la différence  $\tilde{K}_I - K_I^\infty$  évolue linéairement en fonction de l'érouissage plastique  $\rho_I$ . (FIG.3.23). Le même coefficient de proportionnalité est trouvé par la voie expérimentale et en s'appuyant sur des simulations numériques par éléments finis. On confirme ainsi par ces essais, que la seule variable pertinente pour mesurer la partie inélastique du champ de vitesse est bien  $\rho_I$ . Le modèle incrémental pourra donc se limiter à modéliser la loi d'érouissage (FIG.3.22).

## 4 Étude d'un cas de chargement de mode I avec surcharge de mode II

Une fois la méthode mise en place, elle peut être utilisée pour étudier divers effets d'histoire induits par plasticité. Par exemple, l'influence de surcharges de mode II sur une propagation de fissure en mode I a été mise en évidence lors d'essais de fissuration par fatigue FIG.3.24. Pour cet essai, l'éprouvette d'acier S355NL a été pré-fissurée en Mode I. Puis dix surcharges en mode II ont été appliquées en utilisant le montage de flexion 4 points dissymétrique. Après ces surcharges, l'éprouvette a de nouveau été sollicitée en mode I jusqu'à rupture.

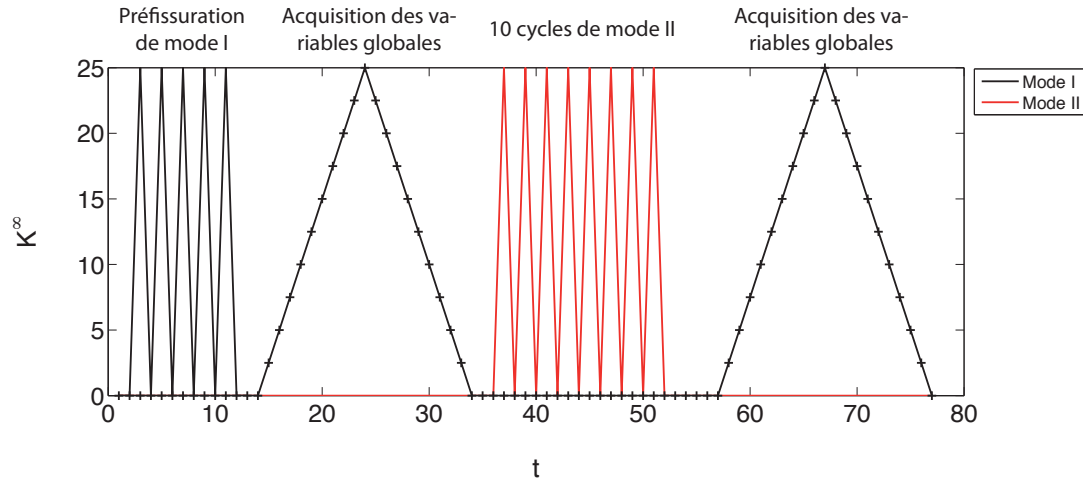


**FIGURE 3.24:** Diagramme de Paris : Vitesse de fissuration obtenue lors d'un essai de référence en mode I pur et d'un essai en mode I au cours duquel quelques avec surcharges de mode II ont été appliquées

Il apparaît nettement que les surcharges de mode II ont accéléré transitoirement la vitesse de propagation de fissure en mode I. L'explication la plus probable à ce phénomène est sans doute la modification de la zone plastique en pointe de fissure. En effet les surcharges de mode II peuvent fortement modifier la taille et la forme de cette zone ainsi que les effets de fermeture. Afin de mieux comprendre ce phénomène, un second essai a été réalisé en utilisant la méthode de mesure de champs en pointe de fissure détaillée au CHAP.3, §3, page 83.

Les conditions de chargement sont similaire à celle de l'essai de fissuration FIG.3.24. L'éprouvette est pré-fissurée en mode I jusqu'à une longueur de fissure  $a = 15 \text{ mm}$ . Deux cycles de mode I sont analysés précisément avec la mesure de champs en pointe de fissure afin d'en extraire les variables globales ( $\dot{K}_I(t)$ ,  $\dot{\rho}_I(t)$ ). A ce moment là, dix surcharges de mode II sont appliquées, via le montage de flexion quatre points dissymétrique (FIG.3.15) tel que  $K_I^\infty = K_{II}^\infty = 25 \text{ MPa}\sqrt{m}$  II. On espère ainsi donner une explication concrète au phénomène présenté à la FIG.3.24.





**FIGURE 3.25:** Détail du chargement appliqué, avec les cycles servant à l'acquisition des variables globales  $\dot{K}_I$  et  $\dot{\rho}_I$

L'amplitude de chargement des cycles de mode I analysés avant les surcharges est reporté FIG.3.26(a) : un premier cycle d'amplitude  $K_I^\infty = 25MPa\sqrt{m}$  est appliqué, suivi d'un cycle de surcharge en mode I, tel que  $K_I^\infty = 30MPa\sqrt{m}$ .

Avant l'application des cycles de mode II, l'amplitude du facteur d'intensité plastique  $\rho_{oI}$ , ou du "CTOD", atteint  $3\mu m$  lors du chargement à  $K_I^\infty = 25MPa\sqrt{m}$ , et  $6\mu m$  lors de la surcharge à  $K_I^\infty = 30MPa\sqrt{m}$ . (FIG.3.26(c))

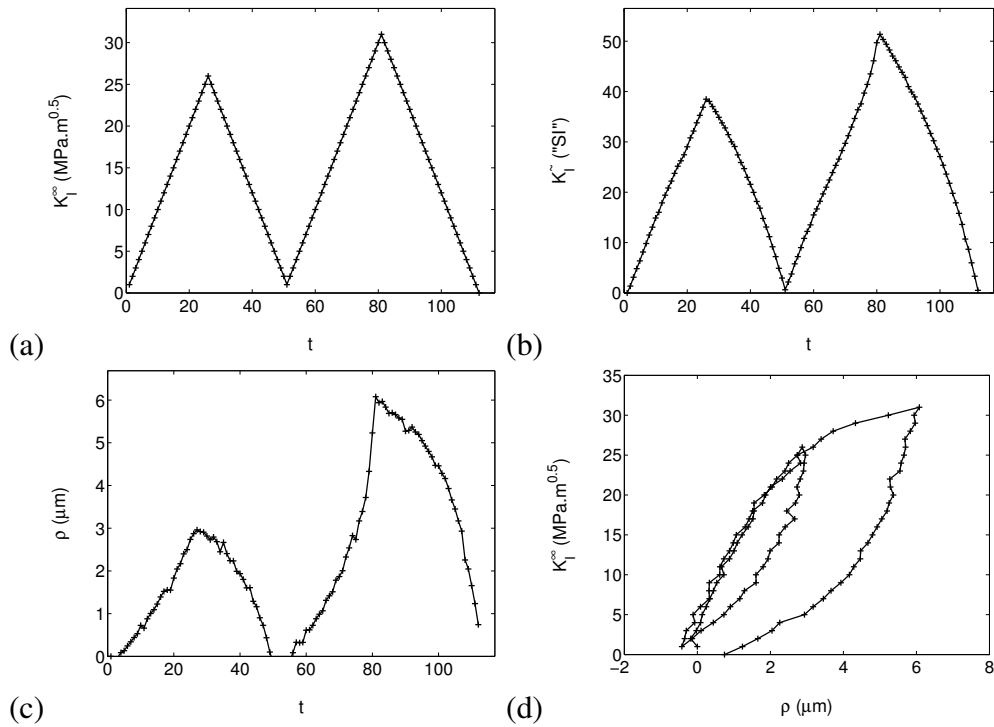
Après l'application des cycles de mode II, les deux premiers cycles de Mode I appliqués sont analysés par la même méthode. L'amplitude du facteur d'intensité plastique  $\rho_{oI}$  atteint cette fois  $12\mu m$  pour le même niveau de chargement. Lors de la surcharge à  $K_I^\infty = 30MPa\sqrt{m}$  l'amplitude est à nouveau doublée pour atteindre  $22\mu m$  (FIG.3.27(c)). L'effet des cycles de mode II sur le comportement en mode I est donc très prononcé, à même amplitude de chargement, les lèvres de la fissure s'ouvrent pratiquement trois fois plus après l'application des cycles de mode II.

Dans le cas du modèle de propagation de fissure en mode I, la vitesse de fissuration  $\frac{da}{dt}$  est relié à  $\frac{d\rho}{dt}$  par :

$$\frac{da}{dt} = \alpha \left| \frac{d\rho}{dt} \right| \quad (3.21)$$

Pour l'acier S355NL, l'essai de mode I de référence a permis de fixer la valeur de  $\alpha$  à 0.11. Cela signifie que si l'amplitude de  $\rho$  triple, alors la vitesse de fissuration augmente de 30%. Lors de l'essai de fissuration FIG.3.24, on avait observé une augmentation transitoire de la vitesse de fissuration de 20%.

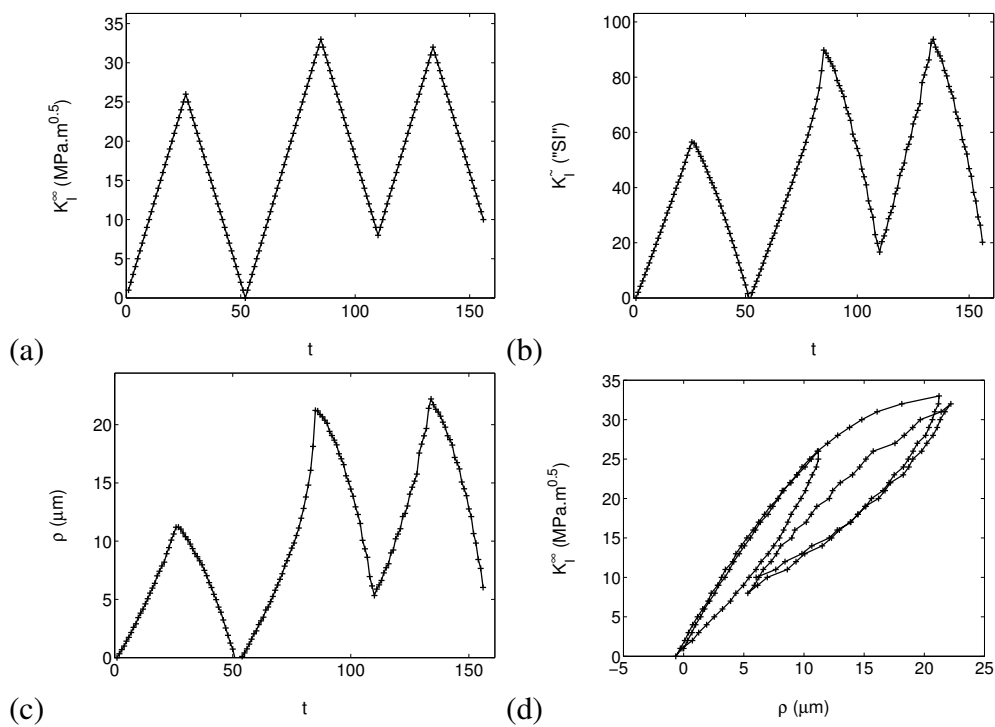
On peut maintenant s'intéresser à la portée de cet effet sur la vitesse de fissuration. Lors de l'essai de fissuration FIG.3.24, la portée de l'effet des cycles de Mode II était d'environ  $3mm$ . Pour étudier la réponse plastique après l'application des cycles de Mode



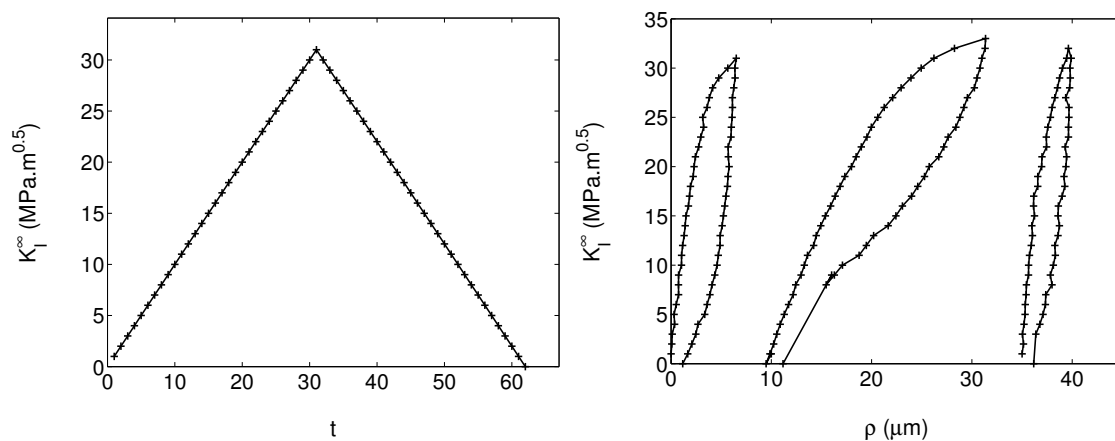
**FIGURE 3.26:** (a) Chargement de mode I appliqué à l'éprouvette. (b) Évolution du facteur d'intensité  $\check{K}_I(t)$  du champ élastique de référence. (c) Évolution du facteur d'intensité plastique  $\rho_I(t)$  du champ complémentaire de référence. (d) Réponse plastique  $\rho$  à la sollicitation nominale  $K_I^\infty$ .

II, la fissure a donc été propagée de  $3\text{mm}$  avec un chargement initial d'amplitude  $K_I^\infty = 30\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$  et un cycle de chargement a été analysé par corrélation d'images. On observe que l'amplitude du facteur d'intensité plastique  $\rho_I$  est redevenue équivalente à ce qui était observé avant l'application des cycles de mode II.

À titre de comparaison, la réponse plastique  $\rho$  à la sollicitation nominale de mode I  $K_I^\infty$ , juste avant, juste après les cycles de mode II et après propagation de la fissure sur une distance de  $3\text{mm}$  depuis le point d'application des cycles de Mode II, a été tracée sur un même graphique à un décalage de l'origine près. (FIG.3.28)



**FIGURE 3.27:** (a) Chargement de mode I appliqué à l'éprouvette après les cycles de Mode II. (b) Évolution du facteur d'intensité  $\hat{K}_I(t)$  du champ élastique de référence. (c) Évolution du facteur d'intensité plastique  $\hat{\rho}_I(t)$  du champ complémentaire de référence (d) Réponse plastique  $\rho$  à la sollicitation élastique  $K_I^\infty$ .

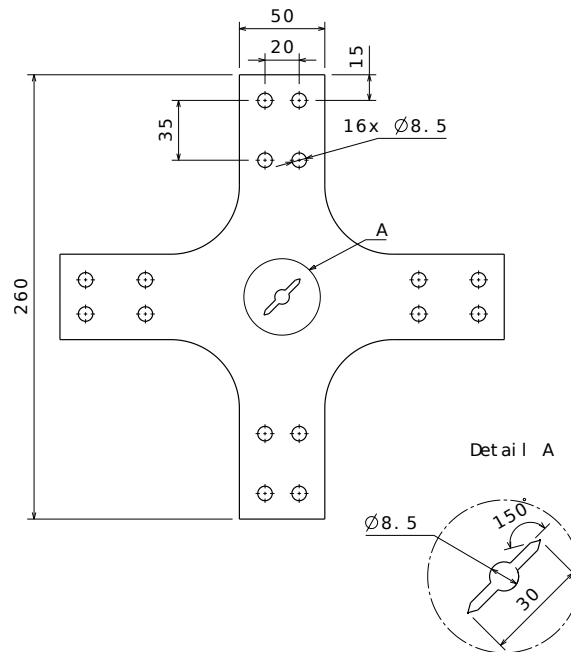


**FIGURE 3.28:** (a) Chargement appliqué à l'éprouvette. (b) Évolution de la loi  $K_I^\infty = f(\rho_I)$ , juste avant/juste après l'application des cycles de mode II, et enfin après propagation de la fissure sur une distance de 3mm depuis le point d'application des cycles de Mode II.

## 5 Mesure expérimentale des facteurs d'intensité plastique en mode mixte avec ASTREE

### 5.1 Les objectifs de l'étude

ASTREE est une machine d'essai tri-axiale à 6 vérins, dont les vérins sont asservis deux à deux de manière à appliquer des efforts triaxiaux ([Calloch et Marquis, 1999]). Le montage de flexion quatre points asymétrique, présenté auparavant, ne permet pas de réaliser des chargements non proportionnels puisque que l'éprouvette n'est chargée que par un seul vérin. La machine ASTREE a donc été utilisée pour appliquer des chargements de mode mixte I+II non-proportionnels sur des éprouvettes plates fissurées.



**FIGURE 3.29:** Éprouvette cruciforme utilisée pour réaliser les essais sur Astree

Des éprouvettes cruciformes ont été usinées dans une nuance d'acier S355NL (FIG.3.29). L'éprouvette a été pré-entaillée par électro-érosion en son centre sur une longueur de  $2a = 30\text{mm}$ . Le plan de la fissure est incliné à  $45^\circ$  par rapport aux axes de chargement.

## 5.2 Pilotage en termes de facteurs d'intensité des contraintes nominaux $K_I^\infty$ et $K_{II}^\infty$

Des simulations par éléments finis, en élasticité linéaire, ont permis d'établir les relations entre les facteurs d'intensité des contraintes nominaux de mode I et de mode II et les efforts appliqués à l'éprouvette. Pour ces simulations la fissure reste dans son plan et la méthode des intégrales d'interaction est utilisée pour calculer les facteurs d'intensité  $K_I^\infty$  et  $K_{II}^\infty$ . Le mode I est obtenu en appliquant le même effort de traction sur les quatre attaches de l'éprouvette. Le mode II en appliquant un effort de traction dans une direction et de compression dans l'autre. Par symétrie, on peut écrire que :

$$\begin{pmatrix} K_I^\infty \\ K_{II}^\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_I(a) & f_I(a) \\ f_{II}(a) & -f_{II}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

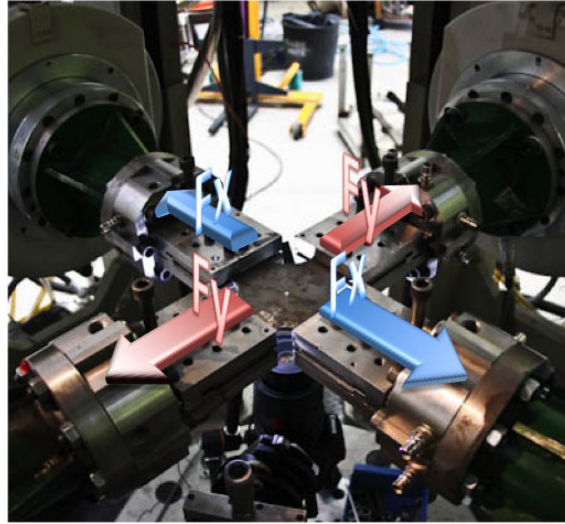


FIGURE 3.30: Chargement appliqué à l'éprouvette.

$2a$ (mm)	$F_x$ (kN)	$F_y$ (kN)	$K_I^\infty$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$K_{II}^\infty$ (MPa $\sqrt{m}$ )
30	1	0	0.24	0.39
30	0	1	0.24	-0.39
30	1	1	0.49	0

TABLE 3.1: Relation entre les efforts  $F_x$  et  $F_y$  dans chaque vérin et les facteurs d'intensité des contraintes  $K_I^\infty$  et  $K_{II}^\infty$  pour une fissure de longueur  $2a = 30\text{mm}$ .

À partir des données du TAB.3.5 l'interpolation linéaire suivante est définie :

$$f_I(2a) = -0.0375 * 2a + 3.165 \quad (3.23)$$

$$f_{II}(2a) = -0.0178 * 2a + 1.803 \quad (3.24)$$

2a (mm)	$F_x$ (kN)	$F_y$ (kN)	$K_I^\infty$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$K_{II}^\infty$ (MPa $\sqrt{m}$ )
35	1	0	0.27	0.43
35	0	1	0.27	-0.43
35	1	1	0.54	0

**TABLE 3.2:** Relation entre les efforts  $F_x$  et  $F_y$  dans chaque vérin et les facteurs d'intensité des contraintes  $K_I^\infty$  et  $K_{II}^\infty$  pour une fissure de longueur  $2a = 35mm$ .

2a (mm)	$F_x$ (kN)	$F_y$ (kN)	$K_I^\infty$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$K_{II}^\infty$ (MPa $\sqrt{m}$ )
40	1	0	0.30	0.46
40	0	1	0.30	-0.46
40	1	1	0.61	0

**TABLE 3.3:** Relation entre les efforts  $F_x$  et  $F_y$  dans chaque verin et les facteurs d'intensité des contraintes  $K_I^\infty$  et  $K_{II}^\infty$  pour une fissure de longueur  $2a = 40mm$ .

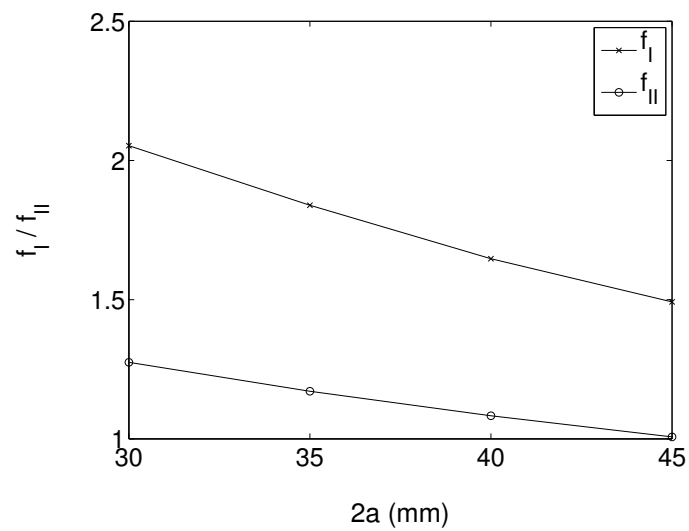
2a (mm)	$F_x$ (kN)	$F_y$ (kN)	$K_I^\infty$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$K_{II}^\infty$ (MPa $\sqrt{m}$ )
45	1	0	0.34	0.50
45	0	1	0.34	-0.50
45	1	1	0.67	0

**TABLE 3.4:** Relation entre les efforts  $F_x$  et  $F_y$  dans chaque verin et les facteurs d'intensité des contraintes  $K_I^\infty$  et  $K_{II}^\infty$  pour une fissure de longueur  $2a = 45mm$ .

2a (mm)	$f_I(a)$	$f_{II}(a)$
30	2.053	1.275
35	1.839	1.171
40	1.647	1.083
45	1.492	1.007

**TABLE 3.5:** Évolution des paramètres  $f_I$  et  $f_{II}$  en fonction de la longueur de fissure  $2a$

Cette solution est utilisée pour piloter la machine d'essai ASTREE et pour dépouiller les résultats expérimentaux.



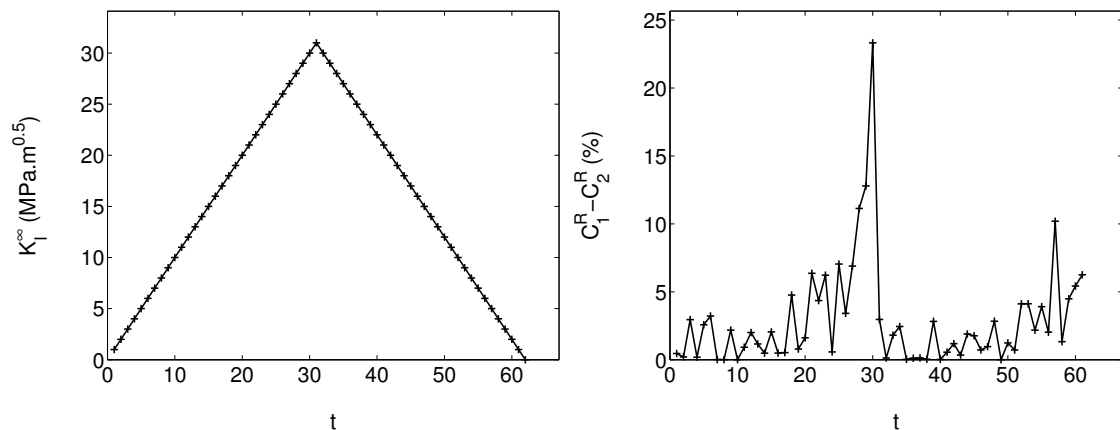
**FIGURE 3.31:** Évolution des paramètres  $f_I$  et  $f_{II}$  en fonction de la longueur de fissure  $2a$

### 5.3 Construction expérimentale du domaine d'élasticité en mode mixte du matériau

L'objectif de cette étude expérimentale est d'étudier la plasticité en mode mixte non-proportionnelle de la région entourant l'extrémité de la fissure et pas la propagation de la fissure. Pour cela, l'éprouvette est d'abord pré-fissurée en mode I sur quelques millimètres. Puis les champs de vitesse dans la région  $\Omega$  entourant l'extrémité de la fissure sont déterminés expérimentalement à partir des images numériques et analysés par la technique d'extraction des facteurs d'intensité élastiques ( $\tilde{K}_I$  et  $\tilde{K}_{II}$ ) et plastiques ( $\rho_I$  et  $\rho_{II}$ ) déjà présentée CHAP.3, §3, page 83 et adaptée aux chargements de mode mixte. Dans le cas du mode I, le facteur d'intensité  $\rho_I$ , représente la partie plastique de l'ouverture de la fissure ("CTOD"), tandis que  $\tilde{K}_I$  est le facteur d'intensité du champ spatial de référence "élastique". On définit deux erreurs relatives  $C_1^R$  et  $C_2^R$  :

- $C_1^R(t)$  représentant l'évolution au cours du chargement de l'erreur  $C_1^R$  commise en approchant le champ de vitesse dans la région entourant l'extrémité de la fissure par sa projection sur la solution élastique.
- $C_2^R(t)$  représentant l'évolution au cours du chargement de l'erreur  $C_2^R$  commise en enrichissant l'approximation par l'ajout d'une composante complémentaire chargée de représenter la plasticité.

La FIG.3.32 rappelle les résultats déjà obtenus en mode I sur une éprouvette de flexion quatre points. Dans ce cas, la valeur seuil peut être ajustée à 5% d'erreur, par exemple.



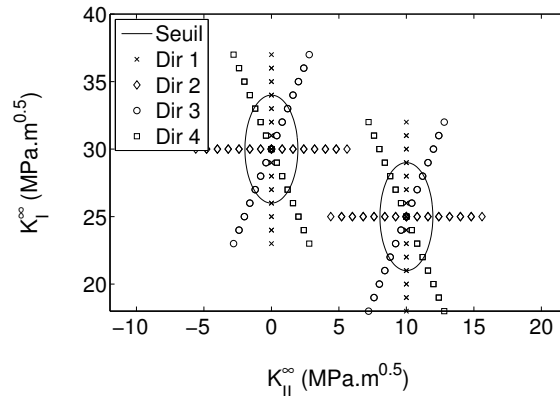
**FIGURE 3.32:** (a) Chargement de mode I appliqué à l'éprouvette de flexion quatre points en fonction du temps. (b) Évolution de la différence des erreurs  $C_1^R(t)$  et  $C_2^R(t)$  au cours du temps.

En cohérence avec les approches numériques qui vont suivre et ce qui a déjà été montré en mode I, le domaine d'élasticité de la région  $\Omega$  entourant l'extrémité de la fissure est construit ainsi : Lorsque au cours d'une phase de chargement de mode mixte, dans la direction ( $K_I$ ,  $K_{II}$ ), la différence entre les erreurs  $C_1^R(t)$  et  $C_2^R(t)$  reste inférieure à une valeur seuil, la région  $\Omega$  est supposée se comporter de manière essentiellement élastique, puisque une approximation du champ de vitesse enrichie pour tenir compte de la plasticité



n'est pas meilleure qu'une approximation élastique. Dès que la différence entre  $C_1^R(t)$  et  $C_2^R(t)$  atteint la valeur seuil, la frontière du domaine d'élasticité est atteinte. Pour chaque direction de chargement explorée, un point de la surface seuil de plasticité peut ainsi être déterminé. L'ensemble du domaine est déterminé en rayonnant dans plusieurs directions, et en calculant la valeur de  $C_1^R(t) - C_2^R(t)$  au cours du chargement.

Les différentes directions de chargement explorées sont représentées FIG.3.33. Avec cette approche, huit points sur chaque surface seuil peuvent être déterminés. Les symboles sur les courbes représentent les niveaux de chargements pour lesquels une image numérique est réalisée afin de déterminer le champs de vitesse dans la région  $\Omega$ .



**FIGURE 3.33:** Différentes directions de chargement servant à déterminer le domaine d'élasticité de l'acier S355NL

Pour déterminer la position de la frontière du domaine d'élasticité, il est nécessaire d'entrer en plasticité. Or il a déjà été montré, en Mode I, que le domaine d'élasticité se déplace lorsque la région  $\Omega$  se déforme plastiquement. Aussi, pour éviter que la mesure de la position du domaine d'élasticité dans une direction ne perturbe les mesures réalisées dans d'autres directions, après chaque mesure des cycles de chargement dans la même direction mais d'amplitude progressivement décroissante sont appliqués pour recentrer le domaine d'élasticité avant de passer à la direction suivante. En outre, les directions de chargement explorées successivement ont été "croisées" pour les mêmes raisons.

Un exemple de chargement cyclique décroissant appliqué pour centrer la surface seuil autour d'une valeur moyenne  $K_I^{\infty} = 30 \text{MPa}\sqrt{m}$  et  $K_{II}^{\infty} = 0$  après une mesure de  $C_1^R(t)$  et  $C_2^R(t)$  est donné FIG.3.34.

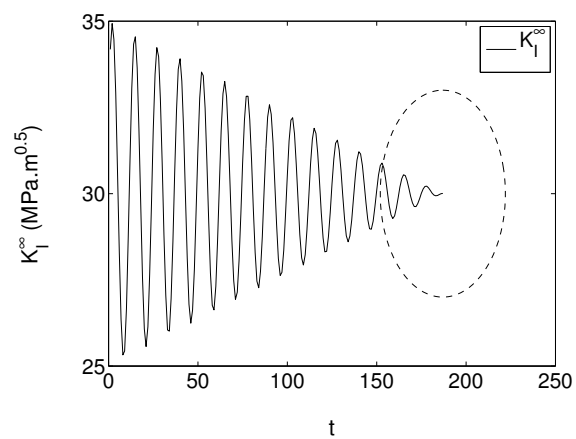


FIGURE 3.34: Centrage du domaine d'élasticité du matériau dans la direction " $K_I$ "

### 5.3.1 Construction des champs de référence en mode mixte

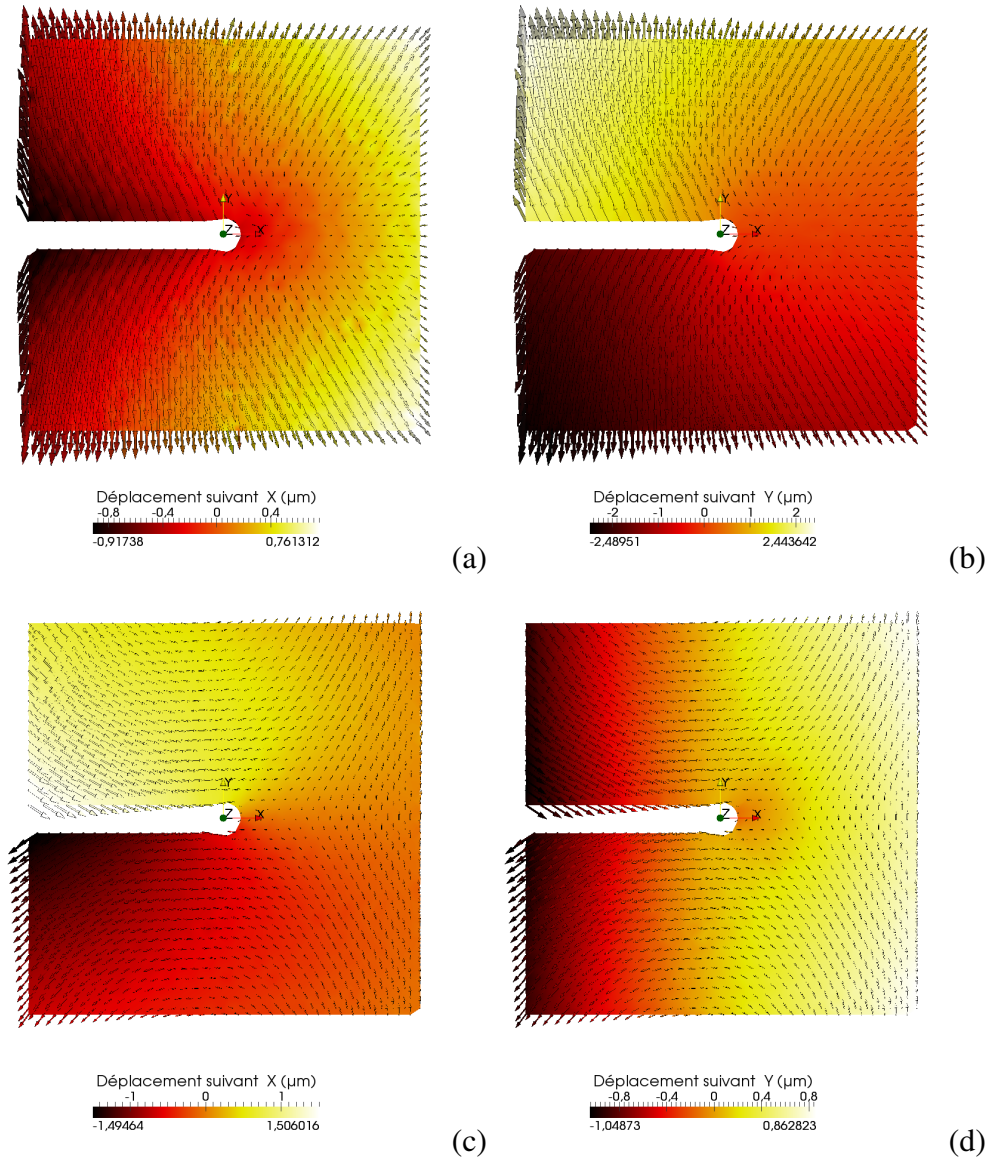
En cohérence avec la méthode utilisée pour construire les champs de référence de mode I déjà présentée CHAP.3, §2, page 124, un chargement de mode I "pur" a d'abord été appliqué à l'éprouvette. Puis une décharge en mode I a été appliquée à l'éprouvette. Le champ de vitesse déterminé au cours de la phase de décharge est déterminé par corrélation d'images, on retient la partie symétrique du champ de vitesse par rapport au plan de la fissure. Le champ est ensuite adimensionné par l'amplitude  $\Delta K_I^\infty$  de la décharge, pour construire le champ  $\underline{u}_I^e$ . La même méthode est employée pour construire le champ de référence de mode II  $\underline{u}_{II}^e$ , excepté qu'on retient alors la partie anti-symétrique.

Les champs élastique de mode I (FIG.3.35(a) et (b)) et de mode II (FIG.3.35(c) et (d)) sont obtenus respectivement pour une décharge élastique de  $\Delta K_I^\infty = 4MPa\sqrt{m}$  et  $\Delta K_{II}^\infty = 2MPa\sqrt{m}$  afin de rester dans le domaine élastique théorique du matériau. Sur les figures 3.35 (a) à (d), on constate que le champ élastique de mode I mesuré correspond bien à ce qui était attendu.

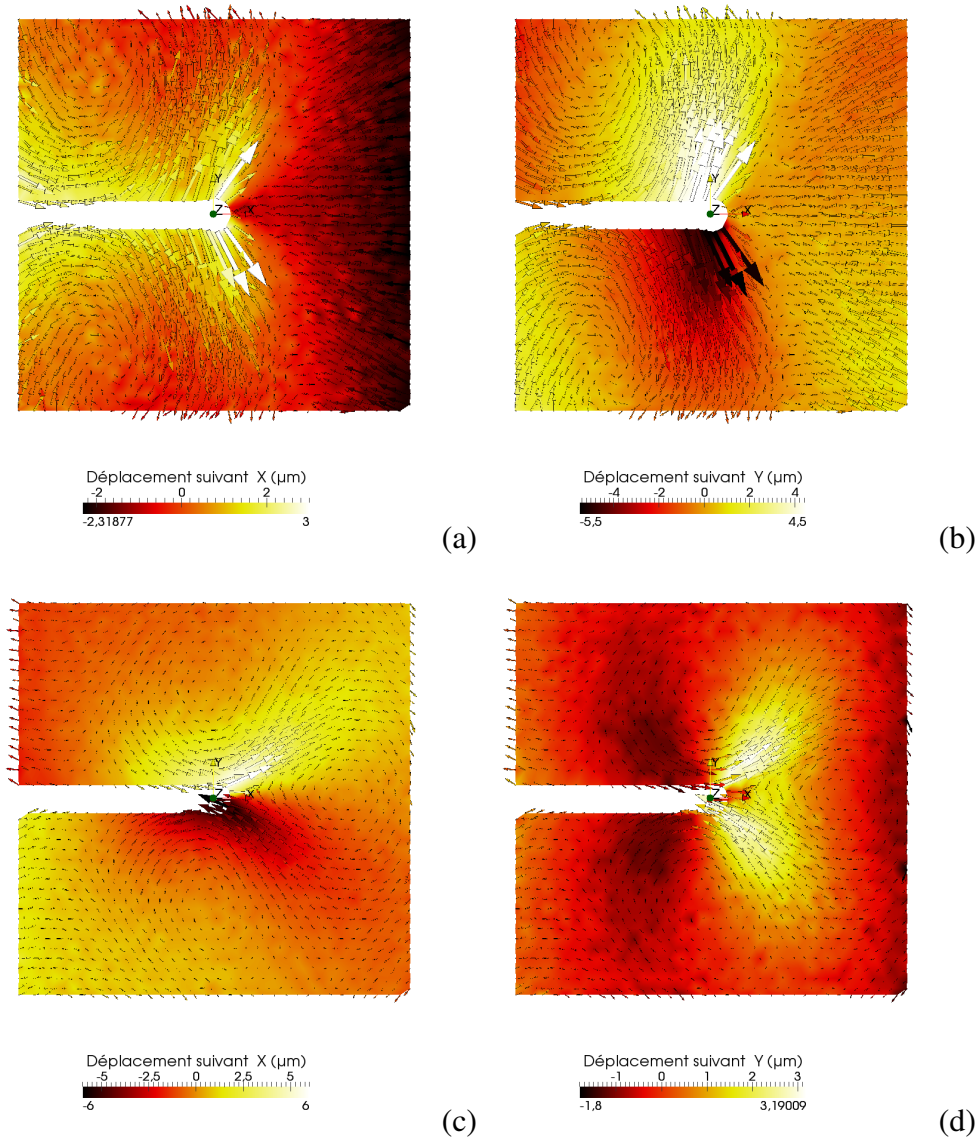
Les champs complémentaires de mode I et de mode II (FIG.3.36) ont été obtenus en déterminant le champ de déplacement ( $\Delta \underline{u}_I^{exp}$  ou  $\Delta \underline{u}_{II}^{exp}$ ) entre deux images prises au même niveau de chargement l'une avant la mise en charge et l'autre après décharge, pour chaque mode. Dans les deux cas, et en cohérence avec ce qui a déjà été fait en mode I, on projette ce champ de déplacement sur le champ élastique déjà déterminé expérimentalement pour calculer respectivement  $\Delta \tilde{K}_I$  ou  $\Delta \tilde{K}_{II}$ . On détermine alors le résidu, respectivement :

$$\begin{aligned} - \Delta \underline{u}_I^R &= \Delta \underline{u}_I^{exp} - \Delta \tilde{K}_I \underline{u}_I^e \\ - \Delta \underline{u}_{II}^R &= \Delta \underline{u}_{II}^{exp} - \Delta \tilde{K}_{II} \underline{u}_{II}^e \end{aligned}$$

Ce résidu est alors adimensionné pour construire les champs de référence complémentaires de Mode I et de Mode II. A la différence des champs élastiques, ces champs sont d'intensité décroissante lorsqu'on s'éloigne de l'extrémité de la fissure. Ceci est dû au fait que la zone plastique est confinée. Là encore, le champ de Mode I est bien symétrique et celui de Mode II antisymétrique. On constate également que le champ de Mode I tend à être maximal selon deux plans inclinés à  $\pm 70^\circ$ . Le champ de Mode II est lui bien antisymétrique et ses maxima tendent à être atteints sur deux plans inclinés à  $\pm 15^\circ$ .



**FIGURE 3.35:** Champs de référence élastiques : (a) Projection selon l'axe  $\underline{X}$  du champ élastique de référence  $\underline{u}_I^e$  (b) Projection selon l'axe  $\underline{Y}$  du champ élastique de référence  $\underline{u}_I^e$  (c) Projection selon l'axe  $\underline{X}$  du champ élastique de référence  $\underline{u}_{II}^e$  (d) Projection selon l'axe  $\underline{Y}$  du champ élastique de référence  $\underline{u}_{II}^e$

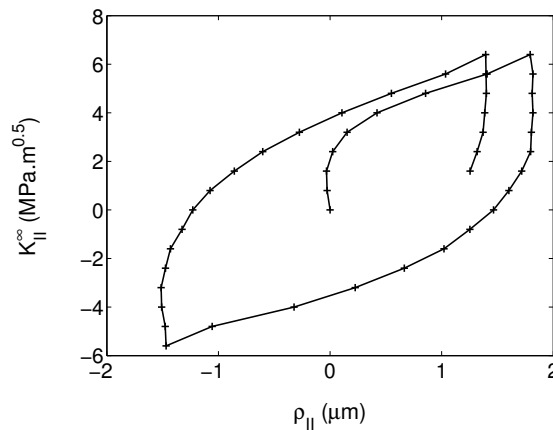


**FIGURE 3.36:** Champs de référence complémentaire : (a) Projection selon l'axe  $\underline{X}$  du champ complémentaire de référence  $\underline{u}_I^c$  (b) Projection selon l'axe  $\underline{Y}$  du champ complémentaire de référence  $\underline{u}_I^c$  (c) Projection selon l'axe  $\underline{X}$  du champ complémentaire de référence  $\underline{u}_{II}^c$  (d) Projection selon l'axe  $\underline{Y}$  du champ complémentaire de référence  $\underline{u}_{II}^c$

## 5.4 Extraction des facteurs d'intensité et des erreurs en mode mixte

Toutes les séquences de chargement de mode mixte présentées FIG.3.33, ont été réalisées sur ASTREE et dépouillées. L'extraction des facteurs d'intensité et des erreurs  $C_1^R$  et  $C_2^R$  pour la direction 2 (pour laquelle  $\Delta K_I^\infty = cste$ ) est présentée FIG.3.38. La même analyse a été effectuée pour la direction 4, les résultats sont présentés FIG.3.39. L'ensemble des données expérimentales, les facteurs d'intensité extraits des images, ainsi que les erreurs  $C_1^R$  et  $C_2^R$ , sont reportés dans l'annexe B pour chaque direction de chargement étudiée.

On constate pour la direction 2, FIG.3.38, que la composante plastique de Mode II, varie cycliquement comme le chargement appliqué, cependant, il existe des phases pendant lesquelles  $\rho_{II}$  ne varie pas (entre les instants 10 et 14 par exemple, ou 23 et 27). Pour plus mieux mettre en évidence cet effet, le facteur d'intensité des contraintes nominal  $K_{II}^\infty$  été tracé en fonction du facteur d'intensité plastique  $\rho_{II}$  FIG.3.37. La courbe obtenue est similaire a ce qui était obtenu en Mode I expérimentalement ou à partir de calculs par éléments finis.



**FIGURE 3.37:** Evolution du facteur d'intensité des contraintes nominal  $K_{II}^\infty$  en fonction du facteur d'intensité plastique  $\rho_{II}$  pour la direction de chargement 2

On remarque néanmoins FIG.3.38 (b et d) qu'une variation significative du facteur d'intensité plastique  $\rho_I$  est observée et cela même si le chargement appliqué est une amplitude de Mode II pur, autour d'une valeur moyenne de  $K_I^\infty$ . Les erreurs relatives  $C_1^R(t)$  et  $C_2^R(t)$  ont été également calculées à chaque prise d'image. On note que l'écart entre ces deux erreurs varie de manière similaire à ce qui est obtenu par simulation numérique 3.38. Au début du chargement et après chaque changement du sens du chargement, on observe que l'erreur  $C_1^R(t)$  commise en approchant le champ de vitesse mesuré par sa projection sur le champ élastique, est égale à l'erreur  $C_2^R(t)$  commise en utilisant l'approximation élasto-plastique. Dans ce cas, le comportement de la région  $\Omega$  peut être considéré comme essentiellement élastique. Ensuite, l'écart entre les deux erreurs augmente progressivement, la plasticité ne peut plus être négligée.

Afin de visualiser le domaine d'élasticité, pour chaque direction de chargement, l'écart

entre ces deux erreurs  $C_1^R(t) - C_2^R(t)$  est représenté en niveau de couleur dans un diagramme ( $K_{II}^\infty, K_I^\infty$ ). Les plots noirs correspondent à 5% d'écart entre ces deux erreurs, les plots blancs à un comportement élastique.

Dans le chapitre suivant, le seuil de plasticité mesuré, représenté par  $C_1^R(t) - C_2^R(t)$  est comparé à l'expression analytique de la surface seuil de plasticité en mode mixte.

Ces résultats permettent de valider expérimentalement la démarche de représentation des champs de vitesse sous forme d'une somme de produits de facteurs d'intensité et de champs de référence. On montre également que les erreurs relatives associées à cette approximation sont faibles et peuvent être utilisées pour détecter le seuil critère de plasticité.

5.4.1 Résultats - Direction  $K_I^\infty = 30\text{MPa}\sqrt{m}$

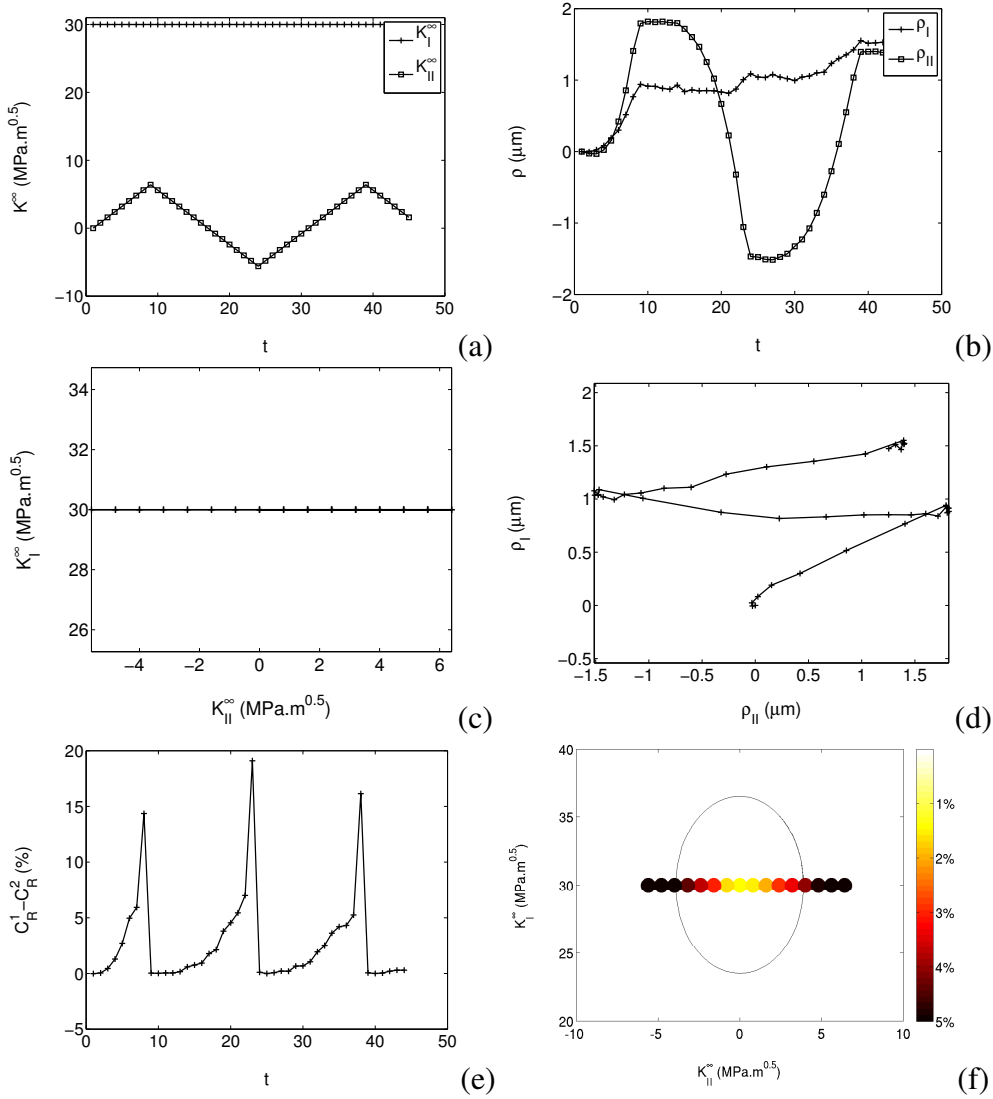
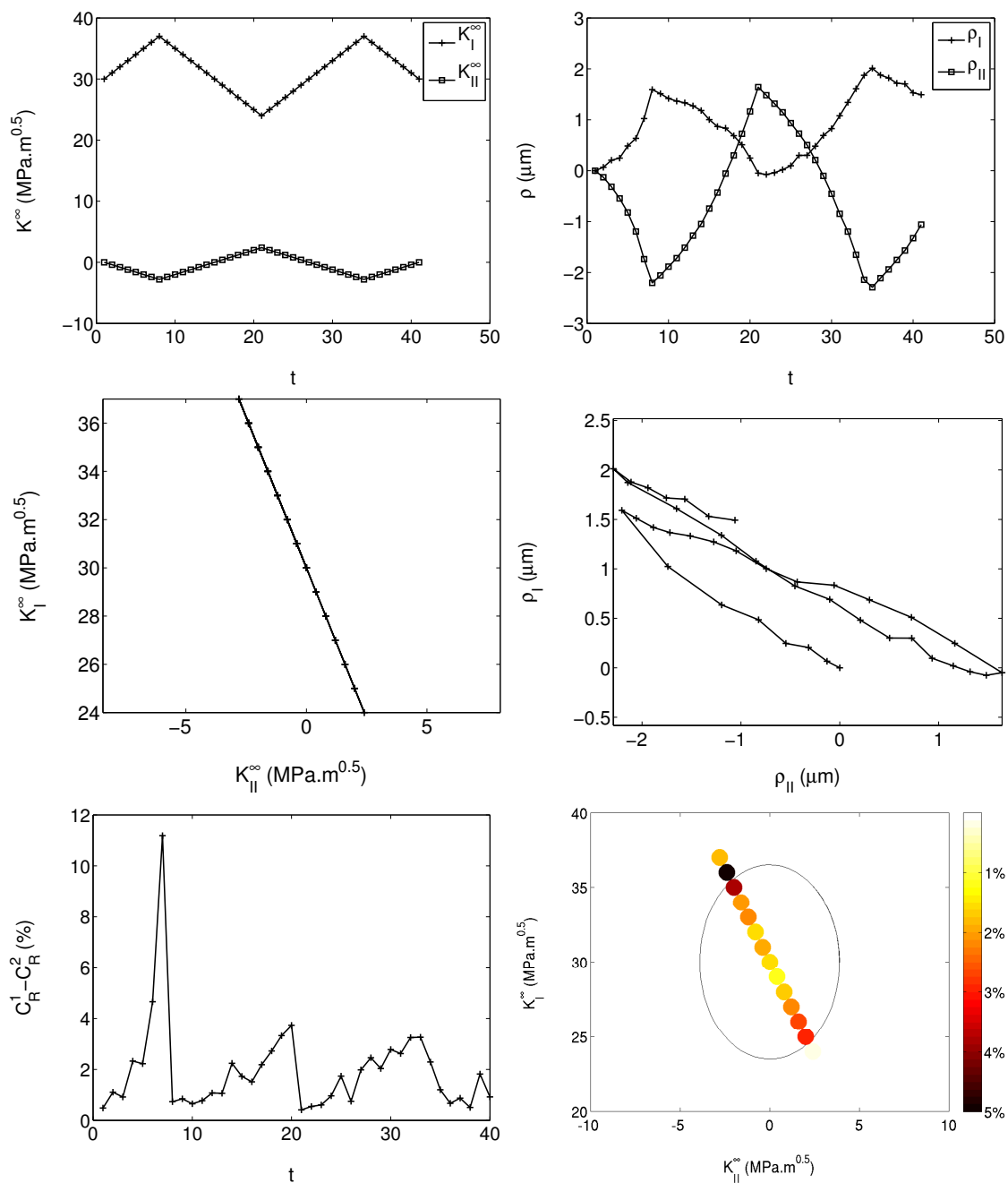


FIGURE 3.38: (a) Chargement appliqué exprimé en facteur d'intensité des contraintes nominal (b) Évolution des facteurs d'intensité plastiques  $\rho_I$  et  $\rho_{II}$  (c)  $K_I^\infty$  en fonction de  $K_{II}^\infty$  (d)  $\rho_I$  en fonction de  $\rho_{II}$  (e) Évolution de la différence des erreurs  $C_R^1$  et  $C_R^2$  (f) Représentation de l'évolution de l'erreur au cours du chargement



5.4.2 Résultats - Direction  $\Delta K_I^\infty = -2\Delta K_{II}^\infty$ 

**FIGURE 3.39:** (a) Chargement appliqué exprimé en facteur d'intensité des contraintes nominal (b) Évolution des facteurs d'intensité plastiques  $\rho_I$  et  $\rho_{II}$  (c)  $K_I^\infty$  en fonction de  $K_{II}^\infty$  (d)  $\rho_I$  en fonction de  $\rho_{II}$  (e) Évolution de la différence des erreurs  $C_R^I$  et  $C_R^2$  (f) Représentation de l'évolution de l'erreur au cours du chargement

### 5.4.3 Construction expérimentale de la surface seuil de plasticité

La démarche expérimentale présentée CHAP.3, §5.3, page 99, permet de construire une base expérimentale de champs de référence, élastique et plastique, pour chaque mode. Le champ de vitesse déterminé entre deux images prises pendant l'essai est ensuite projeté sur cette base, ce qui permet d'extraire les taux de variations des facteurs d'intensité. On calcule aussi à chaque pas de temps l'erreur relative associée à une approximation élastique ou bien élasto-plastique de ce champ.

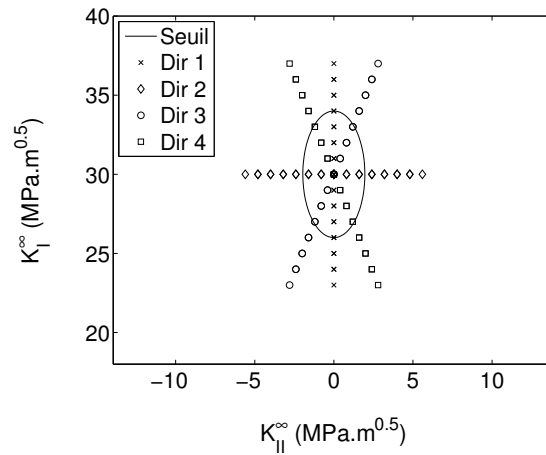


FIGURE 3.40: Chargement appliqué, exprimé en facteurs d'intensité des contraintes nominaux pour la construction du domaine d'élasticité du matériau. Les symboles représentent les niveaux de chargements pour lesquels une image a été prise.

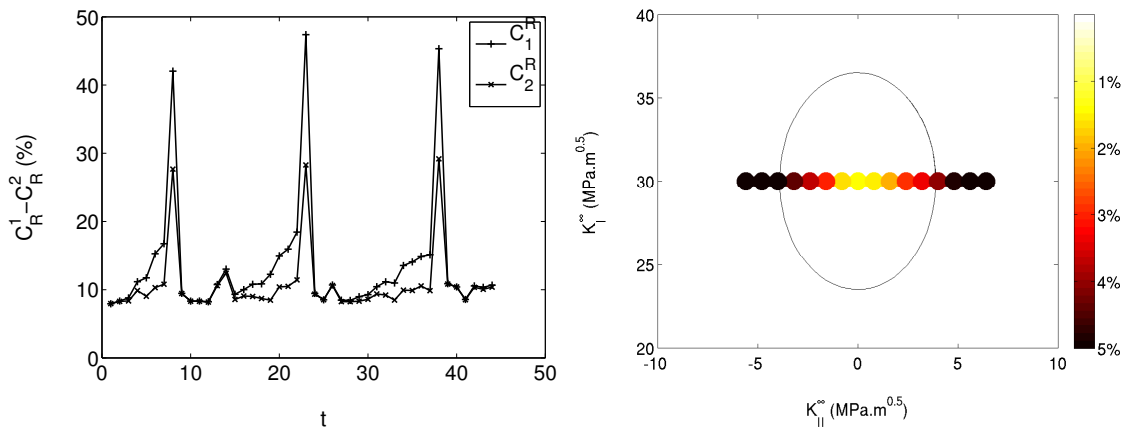


FIGURE 3.41: (a) Évolution des erreurs des erreurs  $C_1^R$  et  $C_2^R$  au cours du chargement (b) Représentation du domaine d'élasticité avec un critère tel que  $C_1^R - C_2^R = 5\%$

La comparaison des erreurs  $C_1^R$  et  $C_2^R$  au cours de l'exploration d'une direction de chargement permet d'évaluer l'importance des champs complémentaires dans l'approximation du champ de vitesse dans la région entourant l'extrémité de la fissure. La FIG.3.41

est un exemple pour la direction 2 de chargement où  $\Delta K_I^\infty = cste$ , le critère a été choisi tel que  $C_1^R - C_2^R = 5\%$ .

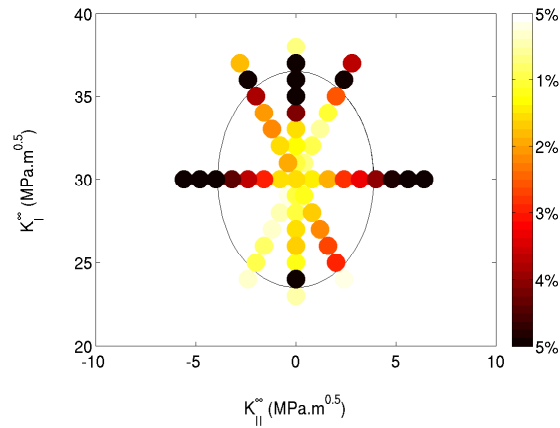


FIGURE 3.42: Évolution du critère  $C_1^R - C_2^R$ , pour les directions de chargement étudiées.

L'ensemble des directions de chargements pour l'obtention d'une surface seuil est reporté FIG.3.42. La forme de la surface seuil analytique, calculée pour  $\nu = 0$  (voir CHAP.4, §4.7), a été superposée aux résultats expérimentaux. La taille du domaine d'élasticité utilisée ici est telle que  $K_I^Y = 6MPa\sqrt{m}$ , lors des simulations numériques nous avons identifié un domaine d'élasticité de  $K_I^Y = 4MPa\sqrt{m}$  pour représenter au mieux l'acier S355NL. On remarque que dans certaines directions de chargement l'évolution de l'écart entre les deux erreurs  $C_1^R - C_2^R$  est bruitée ce qui peut rendre difficile la détermination de l'intersection entre la direction de chargement et la surface seuil. Mais l'existence d'un domaine d'élasticité de forme ellipsoïdale semble confirmée par l'expérience.

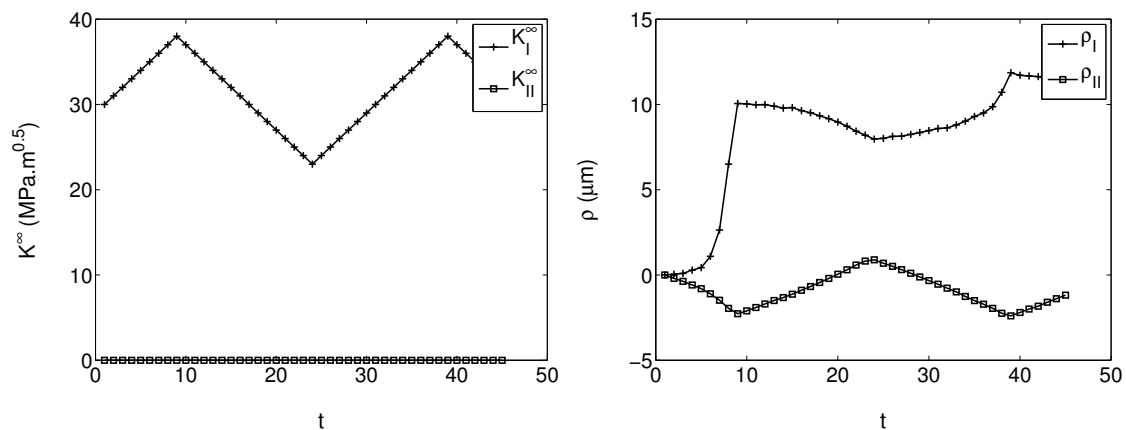


FIGURE 3.43: (a) Chargement appliqué à l'éprouvette (b) Évolution des variables plastiques  $\rho_I$  et  $\rho_{II}$

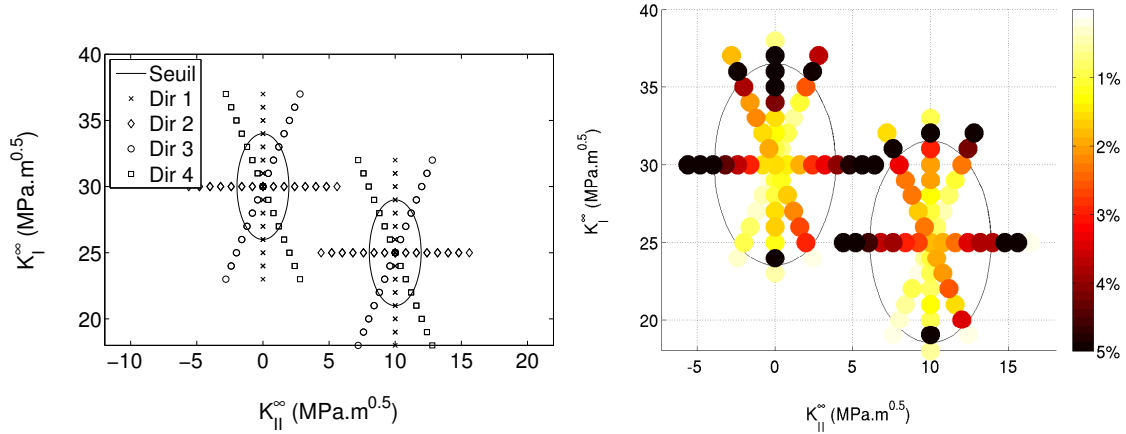
Malgré la procédure de "centrage" du domaine d'élasticité présentée CHAP.3, §5.3, page 99, la FIG.3.43 montre que le domaine n'était pas tout à fait centré lors de la déter-

mination de la première surface seuil. En effet, lors de la première montée en charge en mode I pur, jusqu'au point à partir duquel on va rayonner pour déterminer la surface seuil le matériau se déforme beaucoup comme le montre l'évolution de  $\rho_I$  ( $CTOD \approx 10\mu m$ ). Cette première phase correspond à une phase de plasticité monotone. Il avait été montré par [Hamam, 2006] que l'extension de la zone plastique monotone est plus facile que celle de la zone plastique cyclique. En d'autres termes, la pente de la courbe  $K_I^\infty$  en fonction de  $\rho_I$  est plus grande quand la déformation se produit dans la zone plastique cyclique, que lorsque la zone plastique monotone s'étend. Dans tous les cas, ce chargement initial a pu déformer la surface seuil de plasticité.

On peut aussi noter la présence d'un écoulement de mode II (présence de  $\rho_{II}$ ) alors que la sollicitation était de mode I pur.

### 5.4.4 Loi d'évolution

Les essais et simulations par éléments finis réalisés en Mode I, montrent que le domaine d'élasticité se déplace. Aucune variation de taille du domaine n'a été observée numériquement en Mode I. Étant donné la possibilité d'obtenir la surface seuil expérimentalement, en Mode mixte, nous avons voulu vérifier si l'on pouvait généraliser cela aux chargements de mode mixte.



**FIGURE 3.44:** (a) Chargement appliqué exprimé en termes de facteur d'intensité des contraintes nominal pour déterminer deux surfaces seuils (b) Évolution du critère  $C_1^R - C_2^R$ , pour les directions de chargement étudiées.

Une deuxième surface seuil a donc été construite expérimentalement autour d'une position  $K_I^X = 25MPa\sqrt{m}$  et  $K_{II}^X = 10MPa\sqrt{m}$  après avoir pris soin de centrer le domaine autour de ce nouveau centre en appliquant des cycles d'amplitude décroissante. On constate que l'on peut à nouveau délimiter par les erreurs  $C_1^R$  et  $C_2^R$  un domaine dans lequel cet écart est très faible (FIG.3.44). Les résultats expérimentaux montrent que ce domaine est moins large selon l'axe de Mode II que selon celui de Mode I. Une représentation de la surface seuil par une ellipse de facteur de forme 1.6 (voir CHAP.4, §4.7) est en bon accord avec les résultats expérimentaux.

Compte tenu de ces résultats, l'hypothèse selon laquelle le domaine d'élasticité se déplace sans changer de forme semble se vérifier.

### 5.4.5 Écoulement

Les essais réalisés permettent d'extraire  $\dot{\rho}_I$  et  $\dot{\rho}_{II}$  au moment où le critère de plasticité est atteint. Il devient donc possible de tracer la direction d'écoulement expérimentale en regard du seuil de plasticité. Ceci a été fait pour les deux surfaces seuil et pour chaque direction de chargement FIG.3.48 et 3.46.

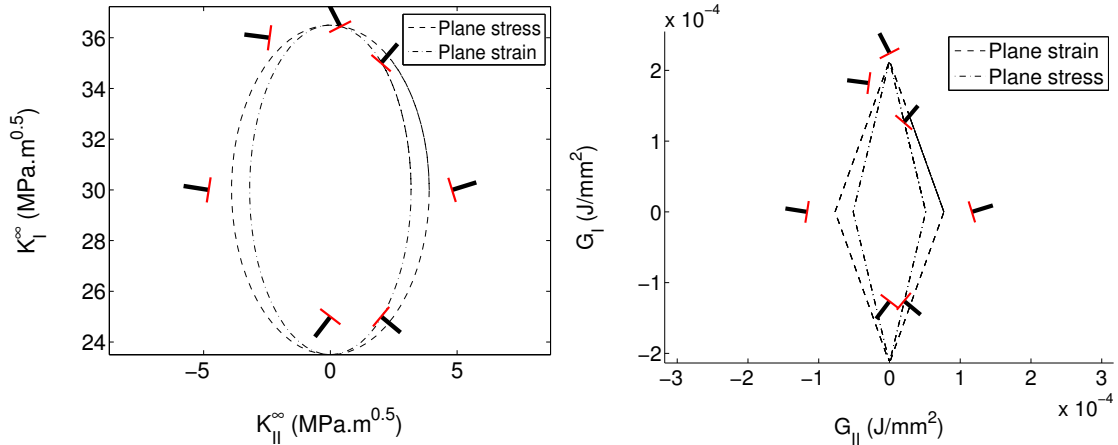


FIGURE 3.45: (a) Direction d'écoulement plastique dans un diagramme  $(K_{II}^{\infty}, K_I^{\infty})$  (b) Direction d'écoulement plastique dans un diagramme  $(G_{II}, G_I)$

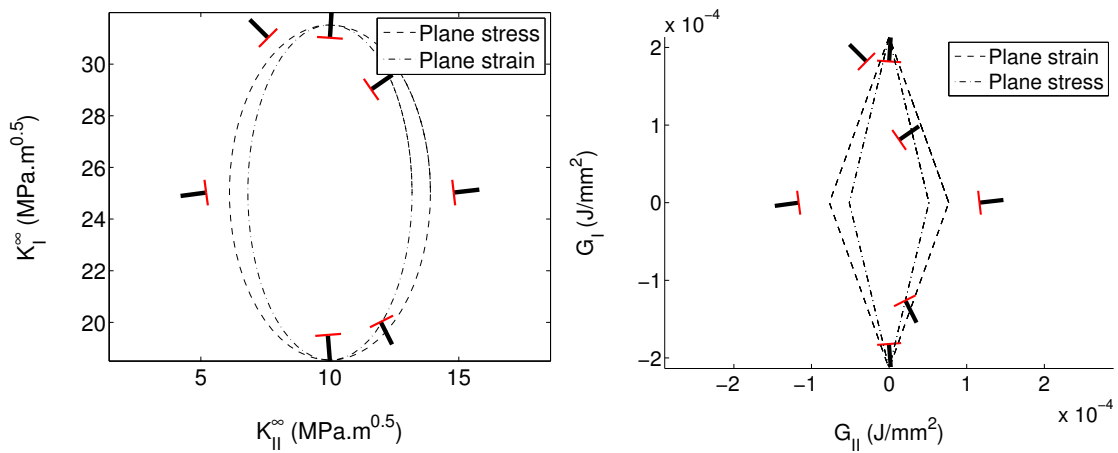
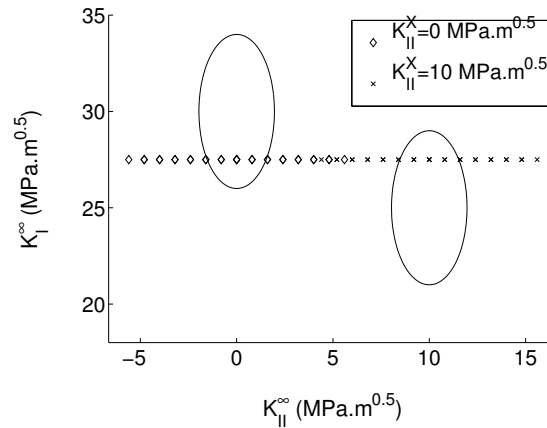


FIGURE 3.46: (a) Direction d'écoulement plastique dans un diagramme  $(K_{II}^{\infty}, K_I^{\infty})$  (b) Direction d'écoulement plastique dans un diagramme  $(G_{II}, G_I)$

Pour ces deux surfaces seuil la direction d'écoulement a été représentée soit dans un diagramme  $(K_{II}^{\infty}, K_I^{\infty})$ , soit dans un diagramme  $(G_{II}, G_I)$  où le centre du domaine d'élasticité est noté  $(K_{II}^X, K_I^X)$  et où  $G_i = (1 - \nu^2)(K_i^{\infty} - K_i^X)^2/E$ . Ces résultats montrent que la direction d'écoulement varie considérablement selon la direction de chargement et selon le point de départ (ici  $K_{II}^X, K_I^X$ ). Bien que les mesures soient un peu difficiles à interpréter

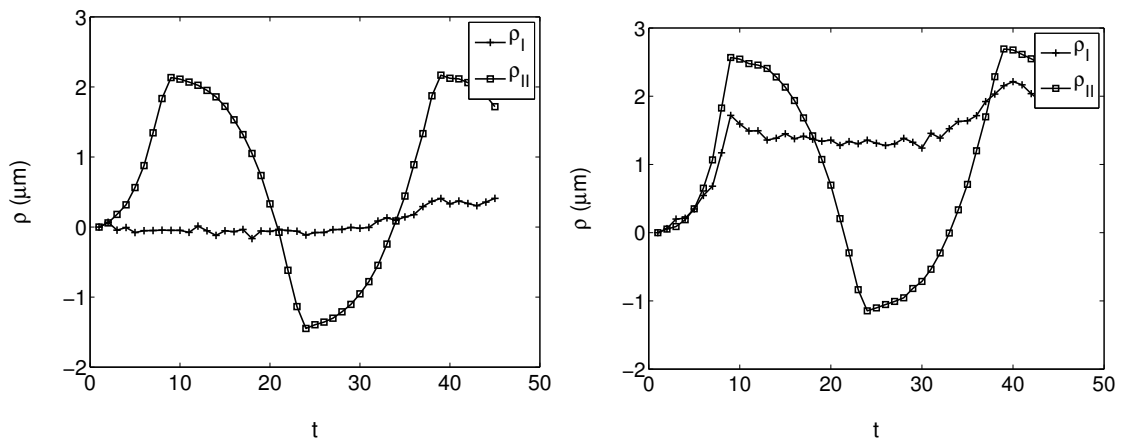
une hypothèse d'écoulement normal à la surface seuil semble cohérente avec les résultats. En revanche, cette approche ne permet pas discriminer entre un écoulement normal à surface seuil dans un diagramme  $(K_{II}^\infty, K_I^\infty)$  ou  $(G_{II}, G_I)$ .

Afin de discuter plus précisément la direction d'écoulement, deux nouvelles directions de chargement ont été explorées. (FIG.3.47)



**FIGURE 3.47:** Chargement appliqué afin de comparer les directions d'écoulement de deux surfaces seuils

Elles ont été choisies telles que  $K_I^\infty = 27.5MPa\sqrt{m}$  dans les deux cas. Par ailleurs dans les deux cas également, la même amplitude  $\Delta K_{II}^\infty = 12MPa\sqrt{m}$  est appliquée. Les deux séquences de chargement sont donc sensiblement identiques, au niveau moyen de  $K_{II}^\infty$  près. Par contre elles diffèrent de part leur histoire de chargement.

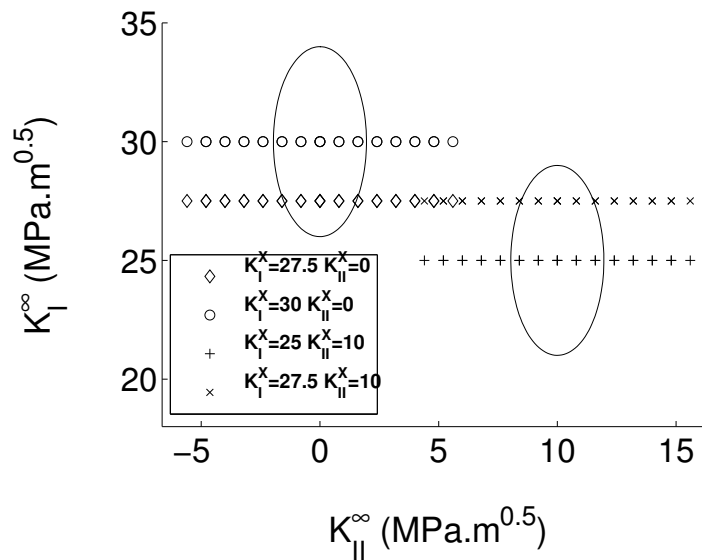


**FIGURE 3.48:** Séquences de chargement telles que  $\Delta K_I^\infty = 0MPa\sqrt{m}$  et  $\Delta K_{II}^\infty = 12MPa\sqrt{m}$ . Évolution des variables plastiques  $\rho_I$  et  $\rho_{II}$  pour : (a)  $\bar{K}_{II}^\infty = 27.5MPa\sqrt{m}$  et  $\bar{K}_{II}^\infty = 0MPa\sqrt{m}$  (b)  $\bar{K}_{II}^\infty = 27.5MPa\sqrt{m}$  et  $\bar{K}_{II}^\infty = 10MPa\sqrt{m}$  (cf. FIG.3.47)

Comme on peut le constater sur la FIG.3.48, un écoulement plastique de mode I, est présent dans un cas et non dans l'autre. Théoriquement, l'écoulement plastique décrit

par la variable  $\rho_I$  aurait du être de même amplitude mais de direction opposée entre les deux surfaces seuils. En pratique, ce qui apparaît ici (FIG.3.50) est dû au fait que la première surface seuil n'était probablement pas centrée initialement à la position attendue (cf. FIG.3.47)

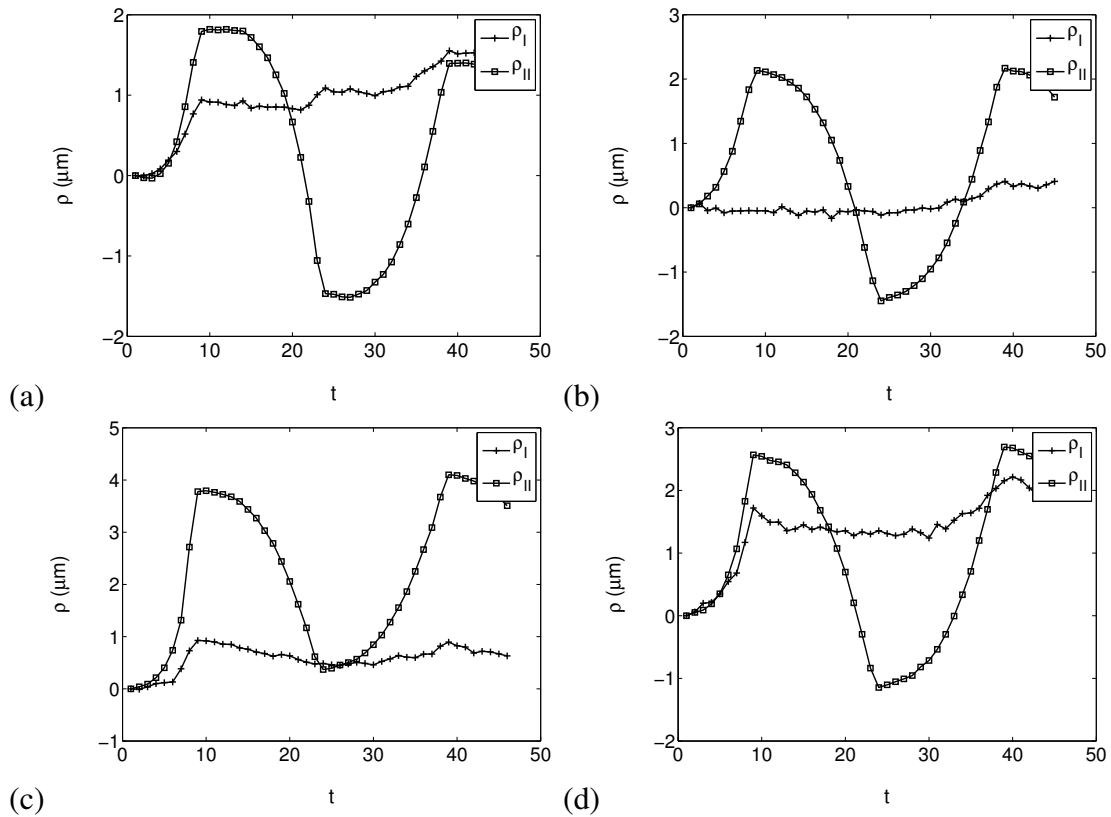
Afin de confirmer cette hypothèse, on peut s'intéresser aux cas de chargements de la FIG.3.49. Ils correspondent tous à un chargement tel que  $\Delta K_{II}^\infty = 12MPa\sqrt{m}$  mais à différents niveaux de  $K_I^\infty$ .



**FIGURE 3.49:** Chargements appliqués à même  $\Delta K_{II}^\infty$  pour différentes valeurs de  $K_I^\infty$  afin d'étudier les directions d'écoulement plastique

On observe FIG.3.50 que l'amplitude de  $\rho_I$  lors de la première phase de chargement en mode II est non nulle, mais sa valeur dépend de  $K_I^\infty$  moyen. En revanche, au second cycle, cette amplitude est nulle, du fait du centrage de la surface seuil. Ce résultat illustre clairement l'effet d'histoire du chargement.





**FIGURE 3.50:** Séquences de chargement telles que  $\Delta K_I^\infty = 0 \text{MPa}\sqrt{\text{m}}$  et  $\Delta K_{II}^\infty = 12 \text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ . Évolution des variables plastiques  $\rho_I$  et  $\rho_{II}$  pour : (a)  $\bar{K}_I^\infty = 30 \text{MPa}\sqrt{\text{m}}$  et  $\bar{K}_{II}^\infty = 0 \text{MPa}\sqrt{\text{m}}$  (b)  $\bar{K}_I^\infty = 27.5 \text{MPa}\sqrt{\text{m}}$  et  $\bar{K}_{II}^\infty = 0 \text{MPa}\sqrt{\text{m}}$  (c)  $\bar{K}_I^\infty = 27.5 \text{MPa}\sqrt{\text{m}}$  et  $\bar{K}_{II}^\infty = 10 \text{MPa}\sqrt{\text{m}}$  (d)  $\bar{K}_I^\infty = 25 \text{MPa}\sqrt{\text{m}}$  et  $\bar{K}_{II}^\infty = 10 \text{MPa}\sqrt{\text{m}}$  (cf. FIG.3.49)

## 6 Résumé du chapitre

La démarche expérimentale développée dans ce chapitre a permis d'étendre et de valider les approches numériques concernant la description des champs de déplacement en pointe de fissure. L'exploitation de ces champs au cours d'un chargement permet de décrire l'évolution de la plasticité au travers des variables globales de plasticité ( $\rho_I$  et  $\rho_{II}$ ). Enfin l'extension de la démarche expérimentale à des chargements de mode mixte non proportionnels avec ASTREE a permis d'extraire les données nécessaires à la détermination de la surface seuil du domaine d'élasticité du matériau étudié.

L'acquisition des champs de déplacement à une échelle suffisamment réduite pour pouvoir observer la plasticité en pointe de fissure (fenêtre optique de 3x3 mm) a nécessité la mise en place d'un dispositif optique nouveau et lourd à mettre en œuvre au cours des expérimentations. Les champs de déplacement ont été obtenus par corrélation d'images.

Enfin, une loi reliant les efforts dans les verrins d'ASTREE aux facteurs d'intensité de contraintes de mode I et mode II d'une éprouvette cruciforme, a été construite par éléments finis. Elle permet de piloter la machine d'essai en terme de facteur d'intensité des contraintes, c'est ce qui a permis de réaliser le chargement nécessaire à la détermination du domaine d'élasticité du matériau.



# Chapitre 4

## Comportement élasto-plastique cyclique en modes mixtes

*Ce chapitre portera sur l'établissement d'un modèle de comportement condensé destiné à représenter le comportement élasto-plastique cyclique en mode mixte de la région entourant l'extrémité de la fissure dans laquelle se produisent les phénomènes irréversibles.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Généralités</b> . . . . .	<b>121</b>
1.1	État de l'art . . . . .	121
1.2	L'approche multi-échelle généralisée au mode $I + II$ . . . . .	122
<b>2</b>	<b>Détermination des facteurs d'intensité plastiques</b> . . . . .	<b>124</b>
2.1	Hypothèses . . . . .	124
2.2	Partition par symétrie du champ de vitesse en modes I et II . . . . .	124
2.3	Extraction des facteurs d'intensité . . . . .	125
2.4	Simulation par éléments finis en élasto-plasticité . . . . .	126
2.5	Construction d'une base de champs spatiaux de référence . . . . .	127
2.6	Calcul de l'erreur associée à cette approximation . . . . .	129
2.7	Exemple d'extraction des facteurs d'intensité . . . . .	130
2.8	Discussion intermédiaire . . . . .	132

<b>3</b>	<b>Formulation condensée du comportement élasto-plastique en mode mixte</b>	<b>135</b>
3.1	Surface seuil . . . . .	135
3.2	Loi d'écoulement plastique . . . . .	140
3.3	Loi d'évolution . . . . .	143
3.4	Effet des paramètres du modèle . . . . .	145
3.5	Confrontations simulations / modèle . . . . .	146
<b>4</b>	<b>Résumé du chapitre . . . . .</b>	<b>149</b>

---

# 1 Généralités

## 1.1 État de l'art

La plasticité localisée à l'extrémité d'une fissure est connue pour introduire des effets d'histoire du chargement en mode mixte comme en mode I. En mode I, pour une même amplitude et une même valeur moyenne du facteur d'intensité des contraintes nominal, la vitesse de fissuration peut prendre des valeurs très différentes selon l'histoire du chargement. En mode mixte, des effets d'histoire sont observés sur la vitesse de fissuration mais également sur le plan de propagation de la fissure ([Dahlin et Olson, 2008], [Dahlin et Olson, 2002] et [Gao et Upul, 1996]).

Ces effets d'histoire sont principalement attribués à deux effets principaux, la plasticité [Sander et Richard, 2006], [Sander et Richard, 2005] et [Doquet et Bertolino, 2008] et le contact entre les faces de la fissure [Doquet *et al.*, 2009]

En ce qui concerne les effets du contact, la friction entre les deux faces d'une fissure évolue dans le temps, d'une part parce que la quantité de surfaces en contact et leur état de surfaces peut varier et d'autre part parce que les contraintes internes peuvent modifier les conditions dans lesquelles le contact se produit. En ce qui concerne les effets de la plasticité, deux effets principaux se produisent, d'une part le matériau subit un écrouissage et d'autre part des contraintes internes sont laissées dans la région entourant l'extrémité de la fissure et dans son sillage.

Dans les approches éléments finis actuelles, le comportement élasto-plastique cyclique du matériau peut être pris en compte dans les simulations, en tenant compte des caractéristiques du matériau (écrouissage cinématique, isotrope, comportement anisotrope...). Les calculs par éléments finis permettent alors de simuler l'état des contraintes internes et de l'écrouissage du matériau, après une propagation cycle à cycle de la fissure et de leur effet sur la sollicitation locale en chaque point de la région entourant l'extrémité de la fissure. Il a été montré ([Doquet et Bertolino, 2008]) qu'en utilisant un critère d'endommagement basé sur une moyenne spatiale des quantités locales calculées par éléments finis et bien adapté à un matériau, le plan de propagation de la fissure et sa vitesse pouvaient être correctement estimés. Selon le mode d'endommagement du matériau, on peut utiliser un critère basé sur le maxima au cours du temps des contraintes normales au plan de propagation potentiel ou bien basé sur une moyenne spatiale de l'amplitude des contraintes de cisaillement. Dans les deux cas, la dimension du rayon de moyennation est un paramètre du critère à ajuster pour un matériau donné.

Cependant, si les calculs par éléments finis en élasto-plasticité permettent d'analyser les résultats expérimentaux et de discuter la pertinence du critère de propagation, leur utilisation dans un contexte industriel reste encore hors de portée. Les problèmes industriels concernent des structures tridimensionnelles dans lesquelles se développent des fissures également tridimensionnelles et le nombre de cycles à simuler peut être de plusieurs millions de cycles. C'est pourquoi [Pommier et Hamam, 2007] ont développé un modèle, dit multi-échelle, qui permet de décrire le comportement élasto-plastique à une échelle locale, en pointe de fissure, à travers un ensemble d'équations aux dérivés partiels scalaires.

Il a été initialement développé pour pour simuler la propagation de fissure vis-à-vis de chargement à amplitude variable de mode I. On se propose ici d'étendre cette approche aux cas de chargements de mode mixte.

## 1.2 L'approche multi-échelle généralisée au mode $I + II$

L'application du modèle présenté dans [Pommier et Hamam, 2007] au matériau d'étude est décrite dans le CHAP.2,§3, page 45. Il nous a ainsi été possible de simuler les essais de fissuration à amplitudes variables en mode I, avec la prise en compte des différents effets des surcharges. Un accord satisfaisant entre simulations et résultats expérimentaux a été trouvé. L'adaptation de cette approche aux sollicitations de mode mixte comprend deux parties, la première concerne la modélisation simplifiée du comportement élasto-plastique cyclique de la région entourant l'extrémité de la fissure, celle ci restant fixe. La seconde partie concerne la modélisation de la propagation de la fissure. Ce chapitre est consacré à la loi de comportement et le suivant la loi de propagation. Afin de modéliser le comportement élasto-plastique cyclique en mode mixte de la région de la pointe de fissure, on représente le mouvement dans cette zone à travers les évolutions de quelques variables scalaires. Le modèle doit ensuite permettre de calculer les évolutions de ces variables en fonction du chargement nominal appliqué. Par similitude avec les approches classiques de la mécanique linéaire de la rupture, où le champ de vitesse est approché par le produit de champs de référence spatiaux  $(\underline{u}_I^e, \underline{u}_{II}^e)$  et des facteurs d'intensité des contraintes  $(\dot{K}_I^\infty, \dot{K}_{II}^\infty)$ , nous généraliserons cette approche aux cas élasto-plastiques cycliques de mode mixte, par l'ajout de deux champs complémentaires de référence  $(\underline{u}_I^c, \underline{u}_{II}^c)$  et de leurs facteurs d'intensité  $(\dot{\rho}_I, \dot{\rho}_{II})$ , que nous appellerons facteurs d'intensité plastiques et qui serviront à fournir une mesure condensée de la plasticité dans la région entourant l'extrémité de la fissure.

Comme cela a déjà été mentionné dans le chapitre précédent, en élasto-plasticité, les facteurs d'intensité  $(\dot{\check{K}}_I, \dot{\check{K}}_{II})$  des champs de référence  $(\underline{u}_I^e, \underline{u}_{II}^e)$  ne sont pas égaux aux taux des facteurs d'intensité des contraintes nominaux  $(\dot{K}_I^\infty, \dot{K}_{II}^\infty)$  du fait de la présence de contraintes internes induites par la plasticité confinée dans la zone plastique à l'extrémité de la fissure.

Avec cette approche, les mouvements de la matière dans le repère attaché au plan et à l'extrémité de la fissure sont représentés par quatre facteurs d'intensité  $(\dot{\check{K}}_I, \dot{\check{K}}_{II}, \dot{\rho}_I, \dot{\rho}_{II})$  et cela avec une assez bonne précision, comme on le verra par la suite. Le chargement lui est représenté par les variations des facteurs d'intensité des contraintes nominaux  $(\dot{K}_I^\infty, \dot{K}_{II}^\infty)$ .

En dehors de ces quatre degrés de libertés, qui permettent de représenter la cinématique dans le repère attaché au plan et à l'extrémité de la fissure, des variables supplémentaires devront être ajoutées au modèle. Les contraintes internes, par exemple, qui introduisent des effets d'histoire du chargement, seront modélisées par le biais de variables internes. Les grandes lignes du modèle sont les suivantes :

- À partir du chargement, exprimé en termes de taux des facteurs d'intensité des contraintes nominaux  $(\dot{K}_I^\infty, \dot{K}_{II}^\infty)$  et de l'état des variables internes du modèle, le

modèle permet de déterminer une mesure condensée du taux de plasticité en mode mixte via  $(\dot{\rho}_I, \dot{\rho}_{II})$ . Pour cela on se donnera un domaine d'élasticité défini par sa frontière ( $f$ ) et une loi d'écoulement plastique.

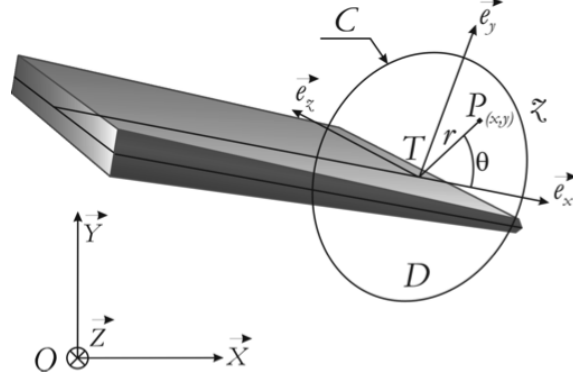
- Le taux de plasticité  $(\dot{\rho}_I, \dot{\rho}_{II})$  détermine ensuite l'évolution des variables internes du modèle, il s'agit des lois d'évolutions du modèle.
- Finalement, le taux de création d'aire fissurée ainsi que la direction de propagation sont calculés à partir de  $(\dot{\rho}_I, \dot{\rho}_{II})$  (voir le chapitre suivant).

Ces différents éléments constituent le modèle de fissuration par fatigue en mode mixte avec effet d'histoire et sont détaillés dans la suite de ce chapitre, dans [Pommier *et al.*, 2009] et [Decreuse *et al.*, 2009].



## 2 Détermination des facteurs d'intensité plastiques

### 2.1 Hypothèses



**FIGURE 4.1:**  $R_0(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  : Référentiel de l'étude ;  $R_T(T, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  : Repère attaché à la pointe de fissure avec :  $\vec{e}_z$  tangent au front de la fissure,  $\vec{e}_y$  normal au plan de fissuration et  $\vec{e}_x$  normal au front de la fissure, D une section normale à  $\vec{e}_z$ , C son contour

On définit le champ de vitesse d'un point P dans la région de la pointe de fissure ainsi :

$$\underline{v}(P)_{R_0} = \underline{v}(T)_{R_0} + \underline{\omega}(R_T/R_0) \wedge \underline{TP} + \underline{v}(P)_{R_T} \quad (4.1)$$

Les deux premiers termes de 4.1 seront fournis par la loi de fissuration qui donne le déplacement du front et du plan de la fissure. Dans cette partie, nous nous intéresserons à  $\underline{v}(P)_{R_T}$  que nous noterons  $\underline{v}(P, t)$ .

### 2.2 Partition par symétrie du champ de vitesse en modes I et II

Le mode I étant symétrique par rapport au plan de la fissure, et le mode II étant antisymétrique par rapport au plan et au front de la fissure, la partition suivante du champ de vitesse peut être écrite :

$$\underline{v}(P, t) = \underline{v}_I(P, t) + \underline{v}_{II}(P, t) \quad (4.2)$$

la composante de mode I du champ se calcule alors comme suit :

$$\begin{aligned} v_I^x(x, y, t) &= \frac{v_x(x, y, t) + v_x(x, -y, t)}{2} \\ v_I^y(x, y, t) &= \frac{v_y(x, y, t) - v_y(x, -y, t)}{2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

La composante de mode II est antisymétrique et se détermine donc comme suit :

$$\begin{aligned} v_{II}^x(x, y, t) &= \frac{v_x(x, y, t) - v_x(x, -y, t)}{2} \\ v_{II}^y(x, y, t) &= \frac{v_y(x, y, t) + v_y(x, -y, t)}{2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

### 2.3 Extraction des facteurs d'intensité

Dans le cas où le matériau reste élastique linéaire les champs  $(\underline{v}_I(P,t), \underline{v}_{II}(P,t))$  peuvent être exprimés comme le produit de l'évolution des facteurs d'intensité des contraintes nominaux et  $\left(\frac{dK_I^\infty}{dt}, \frac{dK_{II}^\infty}{dt}\right)$  de champs de références élastiques  $(\underline{u}_I^e, \underline{u}_{II}^e)$  :

$$\underline{v}_I(P,t) = \frac{dK_I^\infty}{dt} \underline{u}_I^e(P) \quad (4.5)$$

$$\underline{v}_{II}(P,t) = \frac{dK_{II}^\infty}{dt} \underline{u}_{II}^e(P) \quad (4.6)$$

Où  $\underline{u}_I^e(P)$  et  $\underline{u}_{II}^e(P)$  sont solution du problème avec des conditions aux limites telles que  $K_I^\infty = 1$  ou  $K_{II}^\infty = 1$ . Si maintenant le comportement du matériau est élasto-plastique, le champ de vitesse est alors approché par la superposition suivante :

$$\underline{v}_I(P,t) \approx \frac{d\tilde{K}_I}{dt} \underline{u}_I^e(P) + \frac{d\rho_I}{dt} \underline{u}_I^c(P) \quad (4.7)$$

$$\underline{v}_{II}(P,t) \approx \frac{d\tilde{K}_{II}}{dt} \underline{u}_{II}^e(P) + \frac{d\rho_{II}}{dt} \underline{u}_{II}^c(P) \quad (4.8)$$

On aboutit donc à l'approximation suivante :

$$\underline{v}(P,t) \approx \dot{\tilde{K}}_I(t) \cdot \underline{u}_I^e(P) + \dot{\rho}_I(t) \cdot \underline{u}_I^c(P) + \dot{\tilde{K}}_{II}(t) \cdot \underline{u}_{II}^e(P) + \dot{\rho}_{II}(t) \cdot \underline{u}_{II}^c(P) \quad (4.9)$$

Cette approximation est basée sur la décomposition de [Karhunen, 1947], qui est par construction orthogonale (Annexe A), les champs vérifient donc :

$$\int_D \underline{u}_I^e(P) \cdot \underline{u}_I^c(P) dS = 0 \quad (4.10)$$

$$\int_D \underline{u}_{II}^e(P) \cdot \underline{u}_{II}^c(P) dS = 0 \quad (4.11)$$

Ce qui permet de déterminer les taux des facteurs d'intensité par projection sur les champs orthogonaux de référence :

- Détermination des taux des facteurs d'intensité élastique de mode I et de mode II :

$$\frac{d\tilde{K}_I}{dt} = \frac{\int_D \underline{v}_I(P,t) \cdot \underline{u}_I^e(P) dS}{\int_D \underline{u}_I^e(P) \cdot \underline{u}_I^e(P) dS} \quad (4.12)$$

$$\frac{d\tilde{K}_{II}}{dt} = \frac{\int_D \underline{v}_{II}(P,t) \cdot \underline{u}_{II}^e(P) dS}{\int_D \underline{u}_{II}^e(P) \cdot \underline{u}_{II}^e(P) dS} \quad (4.13)$$

- Détermination des taux des facteurs d'intensité plastique de mode I et de mode II :

$$\frac{d\rho_I}{dt} = \frac{\int_D \underline{v}_I(P,t) \cdot \underline{u}_I^c(P) dS}{\int_D \underline{u}_I^c(P) \cdot \underline{u}_I^c(P) dS} \quad (4.14)$$

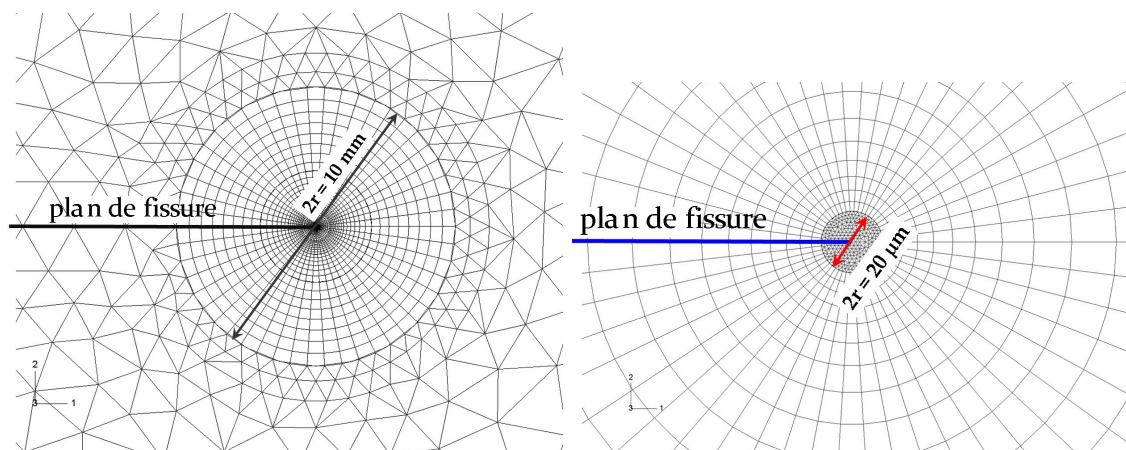
$$\frac{d\rho_{II}}{dt} = \frac{\int_D \underline{v}_{II}(P,t) \cdot \underline{u}_{II}^c(P) dS}{\int_D \underline{u}_{II}^c(P) \cdot \underline{u}_{II}^c(P) dS} \quad (4.15)$$

## 2.4 Simulation par éléments finis en élasto-plasticité

Les champs complémentaires peuvent être obtenus :

- Soit analytiquement, comme présenté au CHAP.2, §3.2.1, page 47
- Soit expérimentalement, comme présenté au CHAP.3, §2, page 124
- Soit par le biais de simulation par éléments finis.

Dans ce dernier cas, un modèle bidimensionnel de plaque "infinie" est utilisé avec les hypothèses de déformations planes. La plaque comporte en son centre une fissure traversante de longueur  $2a = 60mm$ , le maillage est raffiné dans un rayon de  $5mm$  autour de la pointe de fissure. La valeur du déplacement aux noeuds est extraite à chaque incrément de chargement dans un rayon compris entre  $10\mu m$  et  $1mm$  autour de l'extrémité de la fissure (FIG.4.2).



**FIGURE 4.2:** Maillage par éléments finis réalisé sous Abaqus 6.5 : (a) Région d'intérêt autour de la pointe de fissure. (b) Détail du maillage à une distance de  $100 \mu m$  autour de la pointe de la fissure

La loi de comportement utilisée pour les calculs est celle de l'acier S355NL de base présentée dans le TAB.2.3, page 36.

## 2.5 Construction d'une base de champs spatiaux de référence

Grâce aux propriétés d'orthogonalité des champs de référence  $\underline{u}_I^e$ ,  $\underline{u}_I^c$ ,  $\underline{u}_{II}^e$  et  $\underline{u}_{II}^c$  (eq. 4.10 et 4.11), ces derniers vont pouvoir être utilisés comme base de projection du champ de vitesse calculé par éléments finis  $\underline{v}(P, t)$  et récupérés à chaque incrément de chargement dans la région d'intérêt autour de l'extrémité de la fissure. Cette base de champs est propre au matériau d'étude.

La solution éléments finis du problème élastique décrit ci-dessus va permettre d'extraire les champs de référence élastique  $\underline{u}_I^e(P)$  de mode I et  $\underline{u}_{II}^e(P)$  de mode II. Les conditions aux limites appliquée sur la plaque fissurée ont été ajustées de telle sorte que  $\Delta K_I^\infty = 1MPa\sqrt{m}$  et  $\Delta K_{II}^\infty = 1MPa\sqrt{m}$ .

La construction des champs complémentaire de mode I ou de mode II nécessite un chargement suffisamment élevé pour que la région d'intérêt autour de l'extrémité de la fissure se déforme plastiquement. Soit un instant du chargement  $t_1$ , pour lequel on commence à acquérir le champ de déplacement en pointe de fissure, à l'instant  $t_2$ , le chargement a atteint une valeur maximale compatible avec un problème de fatigue (e.g.  $K_I^{max} = 0.7K_I^c$ ).

Le champ élastique de référence de mode II étant connu, on peut définir par projection le facteur d'intensité élastique correspondant entre les instant  $t_1$  et  $t_2$  :

$$\frac{\tilde{K}_{II}(t_2) - \tilde{K}_{II}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\int_D (\underline{u}(P, t_2) - \underline{u}(P, t_1)) \cdot \underline{u}_{II}^e(P) dS}{\int_D \underline{u}_{II}^e(P) \cdot \underline{u}_{II}^e(P) dS} \quad (4.16)$$

Il devient alors possible d'ôter la partie élastique au champ de vitesse  $\underline{v}(P, t)$  pour obtenir un champ de vitesse résiduel  $\underline{v}^R(P, t)$  :

$$\underline{v}^R(P, t) = \frac{(\underline{u}(P, t_2) - \underline{u}(P, t_1))}{t_2 - t_1} - \frac{(\tilde{K}_{II}(t_2) - \tilde{K}_{II}(t_1)) \underline{u}_{II}^e(P)}{t_2 - t_1} \quad (4.17)$$

C'est alors qu'intervient la décomposition de [Karhunen, 1947] (Annexe A) qui permet de décomposer ce résidu en une somme de produits de champ spatiaux et de facteurs d'intensité, orthogonaux deux à deux. Nous ne retiendrons que le premier terme pour approcher  $\underline{v}^R$  :

$$\underline{v}^R(P, t) \approx \dot{A}(t) \underline{a}(P) \quad (4.18)$$

Par commodité pour la suite du traitement, le champ  $\underline{a}(P)$  est adimensionné afin de pouvoir lire directement son facteur d'intensité comme la partie plastique du déplacement relatif des faces de la fissure (par analogie avec les CTOD et CTSD) :

$$\underline{u}_{II}^c(P) = \frac{(r_M - r_m) \underline{a}(P)}{\int_{r_m=10\mu m}^{r_M=1mm} (\underline{a}(r, \theta = \pi) - \underline{a}(r, \theta = -\pi))} \quad (4.19)$$

On procède de manière pour construire le champ complémentaire de mode I

## 2.6 Calcul de l'erreur associée à cette approximation

Afin de chiffrer la qualité de l'approximation (eq. 4.9), deux erreurs sont calculées :

- $C_1(t)$  est l'erreur commise en approchant le champ de vitesse  $\underline{v}(P,t)$  par sa projection sur les champs élastique de référence.
- $C_2(t)$  est l'erreur commise en approchant le champ de vitesse  $\underline{v}(P,t)$  par sa projection sur les quatre champs de référence, élastique et plastique.

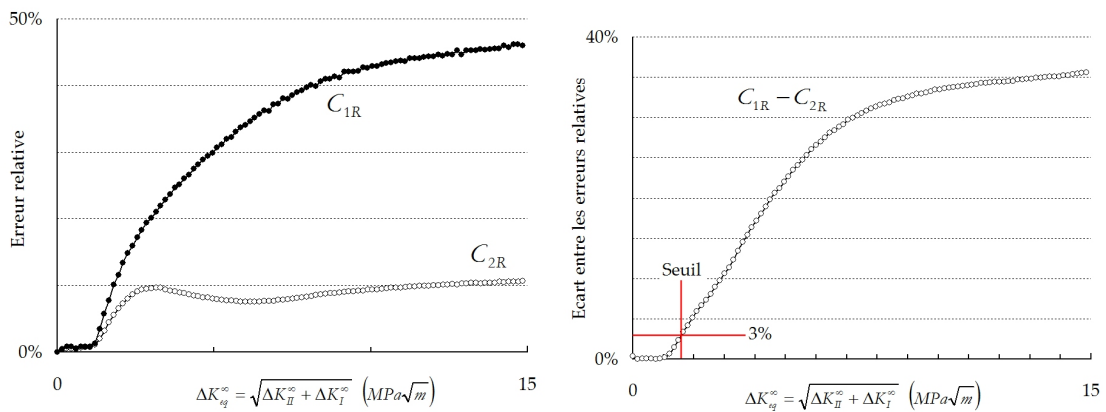
$$C_1 = \sqrt{\int_D \left( \left[ v_I(P,t) - \frac{d\tilde{K}_I}{dt} u_I^e(P) \right]^2 + \left[ v_{II}(P,t) - \frac{d\tilde{K}_{II}}{dt} u_{II}^e(P) \right]^2 \right) dS} \quad (4.20)$$

$$C_1^R = \frac{C_1}{\sqrt{\int_D (v_I(P,t)^2 + v_{II}(P,t)^2) dS}} \quad (4.21)$$

$$C_2 = \sqrt{\int_D \left( \left[ v_I(P,t) - \frac{d\tilde{K}_I}{dt} u_I^e(P) - \frac{d\rho_I}{dt} u_I^c(P) \right]^2 + \left[ v_{II}(P,t) - \frac{d\tilde{K}_{II}}{dt} u_{II}^e(P) - \frac{d\rho_{II}}{dt} u_{II}^c(P) \right]^2 \right) dS} \quad (4.22)$$

$$C_2^R = \frac{C_2}{\sqrt{\int_D (v_I(P,t)^2 + v_{II}(P,t)^2) dS}} \quad (4.23)$$

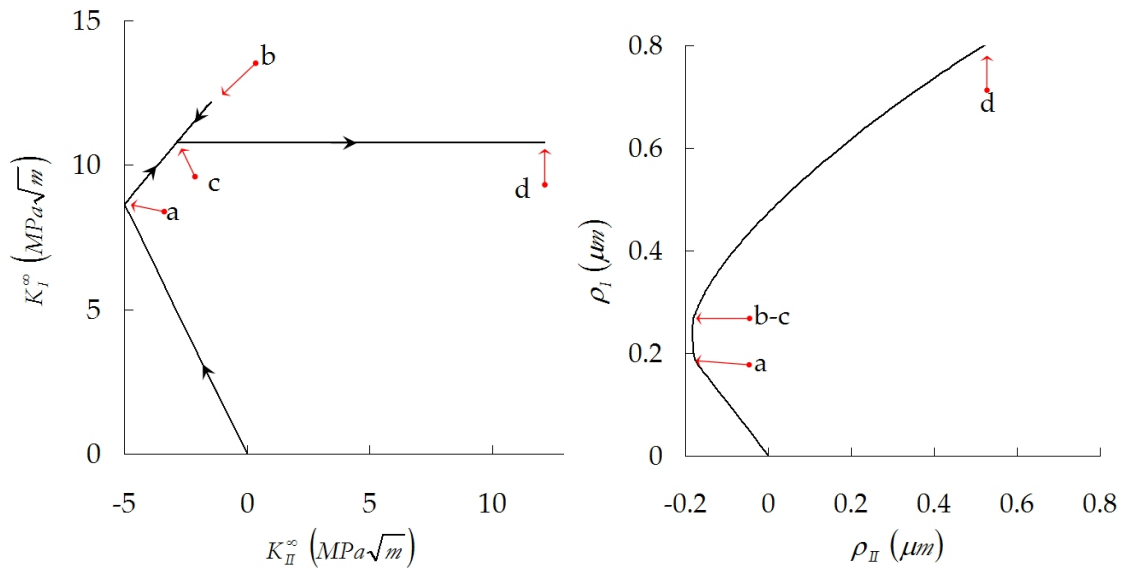
La FIG.4.3 illustre l'évolution des erreurs au cours d'un chargement de mode mixte.



**FIGURE 4.3:** (a) Évolution de l'erreur  $C_1^R$  et  $C_2^R$  au cours d'un chargement de mode mixte. (b) Évolution de la différence des erreurs  $C_1^R$  et  $C_2^R$ , notion de seuil de plasticité

## 2.7 Exemple d'extraction des facteurs d'intensité

Une fois les champs de référence  $u_I^e$ ,  $u_I^c$ ,  $u_{II}^e$  et  $u_{II}^c$  déterminés, il devient possible d'extraire les quatre facteurs d'intensité (cf §2.3) au cours de n'importe quel chargement de mode mixte. Des scripts en langage python permettent d'automatiser le processus en pilotant Abaqus : détermination des champs de référence élastiques et complémentaires pour des cas de chargement monotone soit en mode I pur soit en mode II pur, puis extraction par post-traitement des taux des facteurs d'intensité ( $\dot{\rho}_I$ ,  $\dot{\rho}_{II}$ ) en fonction du chargement nominal appliqué pour n'importe quelle séquence de chargement. Il devient donc très facile de passer d'un matériau à un autre car seuls les paramètres de la loi de comportement du matériau sont à modifier.



**FIGURE 4.4:** (a) Trajet de chargement appliqué en  $K_I/K_{II}$  au modèle éléments finis. (b) Réponse plastique à la sollicitation imposée.

Par commodité, on tracera par la suite  $\rho_I = \int_I \dot{\rho}_I$  et  $\rho_{II} = \int_{II} \dot{\rho}_{II}$  pour certaines phases du chargement en fonction de  $K_I^\infty$  et  $K_{II}^\infty$ . En mode mixte I+II, comme en mode I, il est observé que  $\dot{K}_I$  reste très proche de  $\dot{K}_I^\infty$  et que  $\dot{K}_{II}$  reste proche de  $\dot{K}_{II}^\infty$ . En outre les écarts entre  $\dot{K}_I$  et  $\dot{K}_I^\infty$  et entre  $\dot{K}_{II}$  et  $\dot{K}_{II}^\infty$  sont directement linéaire de  $|\dot{\rho}_I|$  et  $|\dot{\rho}_{II}|$ . Par conséquent, on se limitera par la suite à discuter les évolutions de  $\rho_I$  et  $\rho_{II}$  en fonction de  $K_I^\infty$  et  $K_{II}^\infty$ .

La FIG.4.4 illustre bien l'aspect "contre-intuitif" du comportement élasto-plastique en mode mixte. L' "éprouvette" est chargée jusqu'au point **a**, au cours de cette partie du chargement la région entourant l'extrémité de la fissure se plastifie,  $|\rho_I|$  et  $|\rho_{II}|$  croissent simultanément. Entre les points **a** et **b**,  $K_I^\infty$  et  $K_{II}^\infty$  augmentent, cela a pour conséquence d'augmenter la valeur de  $|\rho_I|$ , mais en revanche  $|\rho_{II}|$  est resté au même niveau. Puis une étape de décharge élastique est appliquée entre les points **b** et **c**. Le résultat le moins intuitif reste l'évolution des facteurs d'intensité plastique  $\rho_I$  et  $\rho_{II}$  entre les points **c** et **d**. La sollicitation est telle que  $\Delta K_I^\infty(d-c) = 0 \text{MPa}\sqrt{m}$  et  $\Delta K_{II}^\infty(d-c) = 15 \text{MPa}\sqrt{m}$

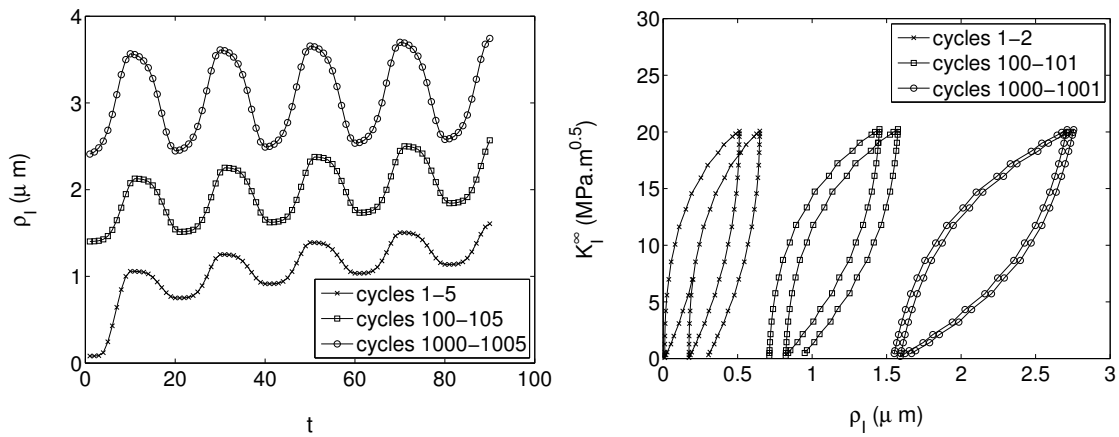
et pourtant on observe que  $\rho_I$  et  $\rho_{II}$  croissent tout deux de la même manière. Le taux de mixité de l'écoulement plastique est donc généralement différent du taux de mixité du chargement nominal. Une sollicitation nominale en mode II peut induire un écoulement plastique en mode mixte, la réciproque étant également vraie, selon le niveau moyen de  $K_I^\infty$  et  $K_{II}^\infty$  et selon l'histoire du chargement.



## 2.8 Discussion intermédiaire

Cette approche permet donc de représenter les champs de vitesse calculés par éléments finis ou bien mesurés expérimentalement dans la région d'intérêt entourant l'extrémité de la fissure via les évolutions de quatre variables scalaires ( $\tilde{K}_I$ ,  $\tilde{K}_{II}$ ,  $\rho_I$ ,  $\rho_{II}$ ) qui sont respectivement les facteurs d'intensité des champs spatiaux de référence ( $\underline{u}_I^e$ ,  $\underline{u}_I^c$ ,  $\underline{u}_{II}^e$ ,  $\underline{u}_{II}^c$ ).

Les champs de déplacement ont été obtenus, dans le cas présent, par le biais de simulations par éléments finis. L'extraction des facteurs d'intensité  $\tilde{K}_I$ ,  $\tilde{K}_{II}$ ,  $\rho_I$  et  $\rho_{II}$  correspond à une méthode de changement d'échelle. Dans ces calculs par éléments finis, les caractéristiques du comportement non-linéaire du matériau sont prises en compte via la loi de comportement du matériau. Ces caractéristiques locales doivent influencer le comportement à l'échelle supérieure et donc les évolutions de  $\rho_I$  et  $\rho_{II}$  en fonction du chargement nominal  $K_I^\infty$  et  $K_{II}^\infty$ . Le matériau d'étude S355NL présentant de l'écrouissage cinématique non-linéaire, nous nous sommes donc intéressés à l'influence du nombre de cycles de chargements sur le comportement élasto-plastique de la région d'intérêt.



**FIGURE 4.5:** tracé de 5 cycles, après le cycle 1, le cycle 100 et le cycle 1000. (a) Évolution du facteur d'intensité plastique  $\rho_I(t) = \rho_{const} + \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \dot{\rho}_I(t)$  en fonction du temps à différents cycles de chargement. (b) Évolution des boucles d'hysteresis au fur et à mesure des cycles

Un peu plus de mille cycles de chargement de mode I ont été simulés numériquement par éléments finis, l'extraction des facteurs d'intensité a ensuite été réalisée pour les 5 premiers cycles de chargement, puis au bout de cent cycles et enfin au bout de mille cycles. Pour tracer ces courbes, on calcule le facteur d'intensité plastique comme suit  $\rho_I(t) = \rho_{const} + \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \dot{\rho}_I(t)$ ,  $\rho_{const}$  étant choisie arbitrairement pour que les courbes ne se superposent pas sur les graphes. La FIG.4.5 met en évidence d'une part, un effet analogue à du rochet et d'autre part, la stabilisation de ce rochet et des boucles d'hystérésis au fur et à mesure des cycles [Vincent *et al.*, 2004]. Sur la FIG.4.5.(a), l'amplitude de  $\rho_I$  par cycle a quasiment doublé entre le premier et le millièmes cycle simulé. De plus, on peut remarquer sur la FIG.4.5.(b) que les boucles d'hystérésis sont ouvertes pour les premiers

cycles, puis se ferment progressivement avant de se stabiliser, ce qui met fin à l'effet de rochet. Il sera donc nécessaire pour la suite de tenir compte ce temps de stabilisation pour l'identification des variables du modèle.

La simulation de ces mille cycles de chargements de Mode I, sur une machine récente avec Abaqus 6.7, a nécessité plus de quatre heures de calcul. Ceci montre bien la limite des approches par éléments finis pour la fatigue à grand nombre de cycles. En effet, la validation de la tenue à la fissuration par fatigue d'une pièce ou d'une structure, dans un cadre industriel, peut nécessiter la simulation de plusieurs millions de cycles de chargement et dans une structure tridimensionnelle, alors que le problème traité ici était bidimensionnel et que la position de la fissure restait fixe. D'où l'intérêt de la formulation condensée du comportement élasto-plastique de la région en pointe de fissure en mode I, comme en mode mixte...



### 3 Formulation condensée du comportement élasto-plastique en mode mixte

L'objectif de cette formulation est de reproduire la réponse plastique de l'acier S355NL (FIG.4.4, page 130), au travers des variables  $\rho_I$  et  $\rho_{II}$ , vis-à-vis d'une sollicitation de mode mixte exprimée en termes de chargement nominaux  $K_I^\infty$ ,  $K_{II}^\infty$ , tout en s'affranchissant de coûteux calculs non-linéaires par éléments finis.

Nous allons détailler dans les paragraphes suivants les éléments du modèles :

- Une fonction seuil de plasticité
- Une loi d'écoulement plastique
- Des lois d'évolution des variables internes

On peut remarquer que ce modèle entre dans la catégorie des modèles de comportement non-locaux ou à grandeurs généralisées puisqu'on exprime le mouvement dans toute une région (via  $\dot{\rho}_I$ ,  $\dot{\rho}_{II}$ ,  $\dot{K}_I$  et  $\dot{K}_{II}$ ) en fonction de variables caractérisant le chargement de cette même région ( $K_I^\infty$ ,  $K_{II}^\infty$ ). Pour chaque partie, on présente la modélisation d'une part et les résultats des simulations numériques par éléments finis que l'on cherche à remplacer par cette modélisation.

#### 3.1 Surface seuil

##### 3.1.1 Construction de surfaces seuil par éléments finis

Pour les faibles niveaux de chargement le comportement du matériau, même en pointe de fissure est essentiellement élastique et l'erreur  $C_1^R$  reste donc faible. En revanche, lorsque que la région en pointe de fissure commence à se déformer plastiquement, l'erreur commise en approchant le champ de vitesse par la projection sur les solutions élastiques pour chaque mode devient non négligeable. L'erreur  $C_1^R$  augmente significativement, tandis que l'erreur  $C_2^R$  reste faible. Il devient donc possible, en observant l'évolution de l'erreur  $C_2^R - C_1^R$  au cours d'un chargement, de définir un seuil  $C^{th}$ , en deçà duquel une approximation élastique du problème est tout aussi acceptable qu'une approximation élasto-plastique et au delà duquel le comportement du matériau ne pourra plus être considéré comme essentiellement élastique.

Avec ce critère, la frontière du domaine d'élasticité peut être trouvée pour divers taux de mixité du chargement. En pratique, on applique une histoire de chargement au modèle éléments finis. Puis à partir du point atteint, on explore diverses direction de chargement dans un dans un plan ( $K_I^\infty$ ,  $K_{II}^\infty$ ). Pour chaque direction, on détermine l'intersection avec la frontière du domaine d'élasticité comme le point pour lequel  $C_2^R - C_1^R = C^{th}$ . Le critère est choisi arbitrairement à  $C^{th} = 3\%$ . En répétant le calcul pour un nombre suffisant de directions, on est capable de construire numériquement une surface seuil de plasticité (FIG.4.6) dans un plan ( $K_I^\infty$ ,  $K_{II}^\infty$ ).

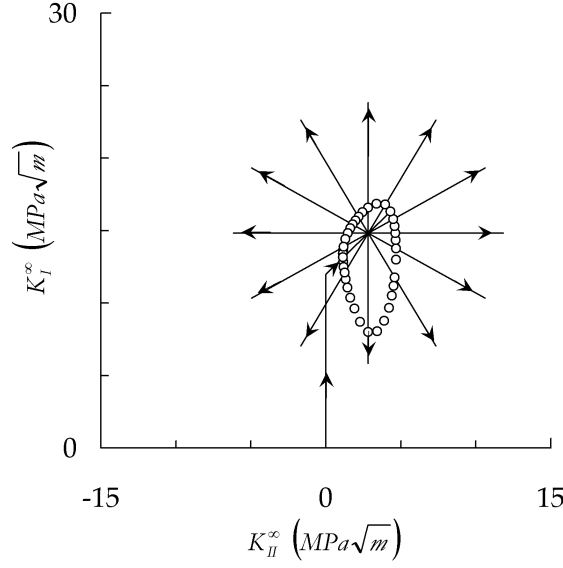


FIGURE 4.6: Construction de la surface seuil de plasticité.

### 3.1.2 Modélisation du seuil de plasticité

A l'intérieur du domaine d'élasticité, le matériau se comporte de manière essentiellement élastique linéaire. Les champs de la mécanique linéaire de la rupture peuvent donc être employés. Les calculs numériques par éléments finis mettent en évidence que le domaine d'élasticité n'est pas toujours centré sur zéro. On introduit donc deux variables internes  $K_I^X$  et  $K_{II}^X$  qui définissent la position du centre du domaine d'élasticité dans le plan  $(K_I^\infty, K_{II}^\infty)$ . On peut donc exprimer les composantes du tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  à partir des fonctions de Westergaard, en tenant compte de la position  $K_I^X$  et  $K_{II}^X$  de ce centre :

$$\underline{\underline{\sigma}} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{(K_I^\infty - K_I^X)}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{(K_{II}^\infty - K_{II}^X)}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{yy} = \frac{(K_I^\infty - K_I^X)}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{(K_{II}^\infty - K_{II}^X)}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sigma_{xy} = \frac{(K_I^\infty - K_I^X)}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{(K_{II}^\infty - K_{II}^X)}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \end{cases} \quad (4.24)$$

Ceci peut aussi se noter :

$$\underline{\underline{\sigma}} = ((K_I^\infty - K_I^X) \underline{\underline{\sigma}}_I^e + (K_{II}^\infty - K_{II}^X) \underline{\underline{\sigma}}_{II}^e) \quad (4.25)$$

Etant donné que le matériau obéit localement au critère de plasticité de Von Mises, qui est un critère en densité d'énergie élastique de cisaillement critique, le seuil de plasticité de la région entourant l'extrémité de la fissure est modélisé comme un critère de Von Mises généralisé. Pour cela, on calcule l'énergie élastique de cisaillement comme suit :

$$W_{cis}(K_I, K_{II}) = \int_{r=0}^{r_{max}} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \frac{Tr[\underline{\underline{\sigma}}^D \cdot \underline{\underline{\sigma}}^D]}{2\mu} r d\theta dr \quad (4.26)$$

Où la partie déviatorique du tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  est définie ainsi :

$$\underline{\underline{\sigma}}^D = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} Tr[\underline{\underline{\sigma}}] \cdot \underline{\underline{I}} \quad (4.27)$$

En supposant que la plasticité se produit pour une énergie élastique de cisaillement critique, déterminée en mode I pour un niveau du facteur d'intensité des contraintes égal à  $K_I^Y$ , il vient :

$$W_{cis}(K_I, K_{II}) = W_{cis}(K_I^Y, 0) \quad (4.28)$$

Que l'on peut ré-écrire sous la forme :

$$f(K_I, K_{II}) = (K_I^\infty - K_I^X)^2 + \left(\frac{K_I^Y}{K_{II}^Y}\right)^2 (K_{II}^\infty - K_{II}^X)^2 - (K_I^Y)^2 \quad (4.29)$$

Avec :

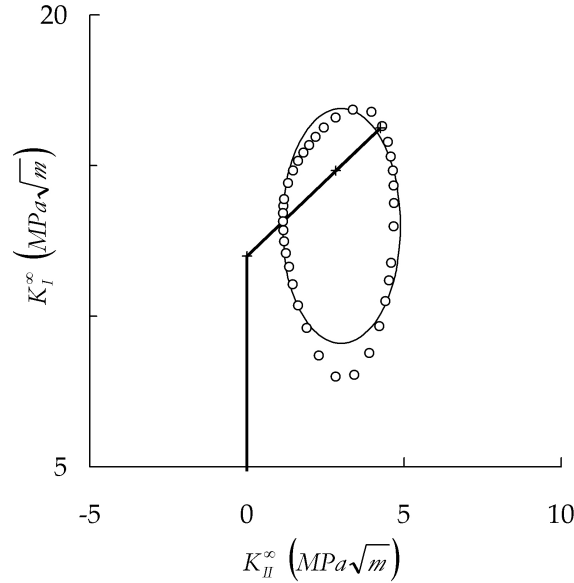
$$\frac{K_I^Y}{K_{II}^Y} = \sqrt{\frac{19 - 16\nu + 16\nu^2}{7 - 16\nu + 16\nu^2}} \approx 2.07 \quad si \quad \nu = 0.3 \quad (4.30)$$

La forme de la surface seuil, calculée à partir des champs issus de la mécanique linéaire de la rupture est une ellipse de centre  $(K_I^X, K_{II}^X)$ , et de rapport de forme  $\frac{K_I^Y}{K_{II}^Y}$  dans un diagramme  $(K_I, K_{II})$ . (FIG.4.7). La taille de l'ellipse est ajustée via le paramètre  $K_I^Y$ . Le facteur de forme est en revanche imposé par le coefficient de Poisson du matériau. On constate que ce modèle de la surface seuil est en bon accord avec les résultats des simulations par éléments finis bien qu'une distorsion soit présente. Modéliser cette distorsion pourrait faire l'objet d'une étude plus approfondie en utilisant une approche de "Kurtyka" comme dans [Vincent *et al.*, 2004].

### 3.1.3 Remarque

Dans l'expression du seuil de plasticité 4.29, la dimension  $r_{max}$  du domaine d'intégration a disparu. Cela vient de la forme des champs asymptotiques, qui sont proportionnels à une même puissance de  $r$  pour tous les modes. On peut donc intégrer séparément la fonction de forme (fonction de  $\theta$ ) et la fonction d'échelle (ici  $1/\sqrt{2\pi r}$ ). La même fonction d'échelle venant en facteur de tous les champs, quelle que soit la composante et quel que soit le mode, ces champs sont "autosimilaires".

Dans l'équation 4.28, le terme d'échelle apparaît alors en facteur de la même manière de part et d'autre de l'équation, ce qui permet de l'éliminer. On obtient ainsi une expression de la surface seuil **indépendante de l'échelle du problème**. C'est une remarque



**FIGURE 4.7:** Surface seuil de plasticité issue des simulations en éléments finis superposé au critère de plasticité

importante puisque les autres approches non-locales ou à grandeurs généralisées de la plasticité requièrent la définition d'un paramètre d'échelle, caractéristique du matériau. Cette élimination de l'échelle est possible parce que les champs de Westergaard sont autosimilaires et tendent asymptotiquement vers zéro lorsque la distance à l'extrémité de la fissure augmente.

On peut signaler qu'on observe que les champs de références ( $\underline{u}_I^c, \underline{u}_{II}^c$ ) ont des propriétés analogue, même si cette propriété n'a pas été "forcée" lors de la construction numérique ou expérimentale de ces champs. Pour le futur et afin de garantir cette indépendance à l'échelle, il suffirait d'appliquer une deuxième fois la technique de partition de Karhunen-Loeve :

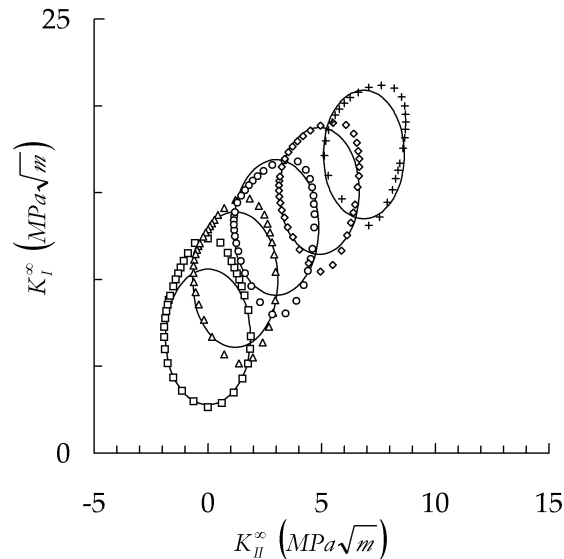
$$\underline{v}^R(\underline{x}, t) = \underline{v}^{EF}(\underline{x}, t) - \dot{\tilde{K}}_I(t) \underline{u}_I^e(\underline{x}) - \dot{\tilde{K}}_{II}(t) \underline{u}_{II}^e(\underline{x}) \underline{v}^R(P, t) \approx A(t) \underline{a}(\underline{x}) \approx A(t) b(r) \underline{f}(\underline{x}/r) \quad (4.31)$$

où  $\underline{x}$  est la position d'un point  $P$  dans le repère attaché à l'extrémité de la fissure et où  $r$  est la distance à l'extrémité de la fissure.

### 3.1.4 Evolution du seuil de plasticité

Des simulations par éléments finis ont ensuite été conduites afin de vérifier si le seuil de plasticité trouvé par éléments fini conservait bien la forme d'une ellipse au cours du chargement. Pour cela, des scripts pythons ont été mis en place qui permettent de rechercher numériquement la surface seuil au cours d'un chargement et d'étudier ainsi l'évolution du domaine d'élasticité (FIG.4.8). La surface seuil trouvé numériquement correspond

globalement a une ellipse dont le centre se déplace dans le plan  $(K_I^\infty, K_{II}^\infty)$ . Cette ellipse se distord légèrement dans la direction du chargement appliqué mais ne s'incline pas et ne change pas de rapport de forme. On observe globalement un bon accord entre le critère de plasticité de type Von Mises généralisé et les surfaces seuils successives déterminées à partir des simulations par éléments finis.



**FIGURE 4.8:** Évolution de la surface seuil de plasticité au cours du chargement.

Le centre du domaine  $(K_I^X, K_{II}^X)$ , ainsi que sa taille  $K_I^Y$  sont donc introduits comme variables internes du modèle et suffisent avec l'équation 4.28 à modéliser le seuil de plasticité. Leurs évolutions représentent respectivement l'évolution des contraintes internes dans la région entourant l'extrémité de la fissure et l'évolution du degré d'écrouissage du matériau. On constate que dans le cas du matériau d'étude, l'ellipse se déplace. Cet effet est analogue à un écrouissage cinématique. On observe par ailleurs que si un très grand nombre de cycles est appliqué FIG.4.5 la dimension  $K_I^Y$  du domaine d'élasticité diminue. Cet effet est analogue à un écrouissage isotrope négatif.



### 3.2 Loi d'écoulement plastique

Afin d'écrire ce modèle de plasticité dans un cadre thermodynamique, deux nouvelles variables alors sont introduites :

$$G_I = \text{sign}(K_I - K_I^X) \frac{(K_I - K_I^X)^2 (1 - \nu^2)}{E} \quad (4.32)$$

$$G_{II} = \text{sign}(K_{II} - K_{II}^X) \frac{(K_{II} - K_{II}^X)^2 (1 - \nu^2)}{E} \quad (4.33)$$

On fait l'hypothèse, en mode mixte comme en mode I, que la fissuration est directement proportionnelle à  $\dot{\rho}_I$  et à  $\dot{\rho}_{II}$ . Avec ces choix, la dissipation devra alors faire intervenir des variables homogène à  $G$  pour chaque mode, d'où le choix des variables  $G_I$  et  $G_{II}$ .

Le seuil de plasticité  $f(K_I, K_{II})$  peut alors se ré-écrire sous la forme :

$$f(G_I, G_{II}) = \frac{|G_I|}{G_I^Y} + \frac{|G_{II}|}{G_{II}^Y} - 1 \quad (4.34)$$

Avec :

$$G_I^Y = \frac{K_I^{Y2} (1 - \nu^2)}{E} \quad \text{et} \quad G_{II}^Y = \frac{K_{II}^{Y2} (1 - \nu^2)}{E} \quad (4.35)$$

La surface seuil devient donc un losange dans le diagramme en  $(G_I, G_{II})$  (FIG.4.9)

Notons qu'un très faible écart entre la solution analytique dans le diagramme en  $(K_I, K_{II})$ , où la surface seuil est une ellipse et la forme obtenue par les simulations en éléments finis se traduit par un écart notable, dans le diagramme en  $(G_I, G_{II})$ . L'écart est trouvé dans la direction du chargement appliqué qui a été à l'origine du déplacement de la surface.

Une loi d'écoulement normale a été choisie pour modéliser l'écoulement plastique :

$$\dot{\rho}_I = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial G_I} \quad (4.36)$$

$$\dot{\rho}_{II} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial G_{II}} \quad (4.37)$$

A l'échelle locale, le matériau obéit au critère de Von Mises ainsi qu'à une loi d'écoulement normale, nous avons voulu nous assurer que, à l'échelle globale, c'est-à-dire par rapport aux variables  $\rho_I$  et  $\rho_{II}$  du modèle, la direction d'écoulement corresponde bien à la normale à la surface seuil obtenue (FIG.4.9).

A partir de l'évolution de  $\rho_I$  et de  $\rho_{II}$  obtenue en post-traitant les simulations par éléments finis, on définit le taux d'écoulement plastique  $d\rho$  dans la direction d'écoulement  $\alpha$  comme suit :

$$d\rho_I = d\rho \sin\alpha \quad (4.38)$$

$$d\rho_{II} = d\rho \cos\alpha \quad (4.39)$$

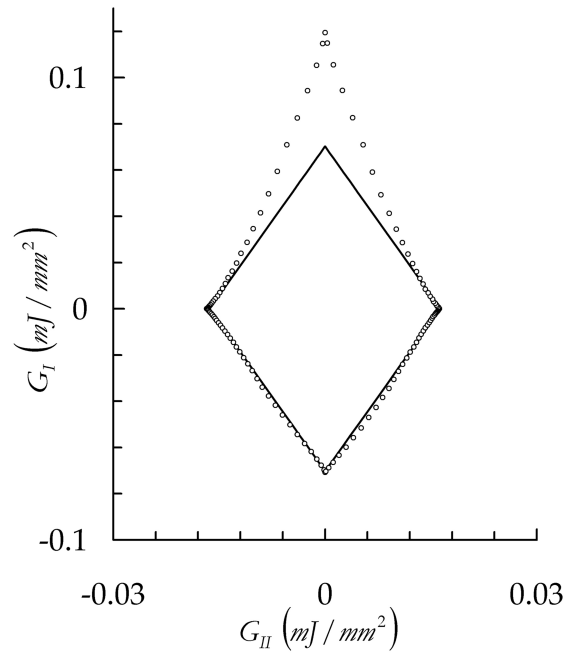


FIGURE 4.9: Surface seuil dans un diagramme  $(G_I, G_{II})$

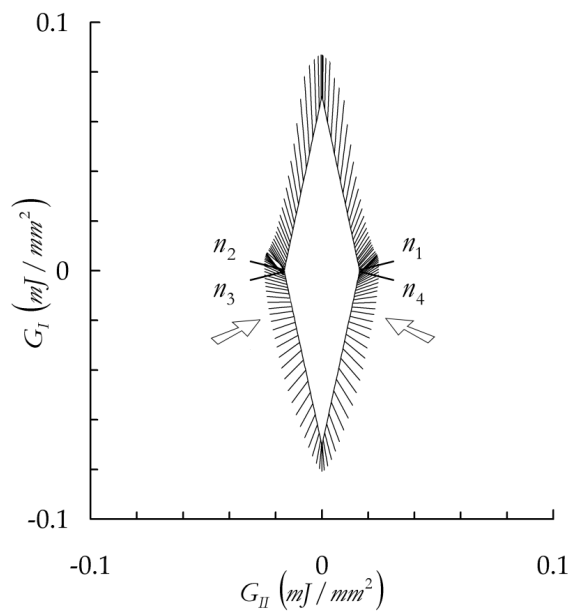


FIGURE 4.10: Directions d'écoulement récupérées à partir des simulations en éléments finis

Par un procédé similaire à l'obtention de la surface seuil (§3.1, page 135), 127 directions de chargements radiales ont été explorées, et à chaque point de la surface seuil, la direction d'écoulement  $\alpha$  est déterminée. L'ensemble des directions d'écoulement  $\alpha$

est reporté sur la FIG.4.10, globalement les directions d'écoulement obtenues peuvent être considérées comme étant en accord avec la loi d'écoulement normale proposée pour modéliser la plasticité à l'échelle globale. En revanche là où la surface seuil trouvée par éléments finis s'écarte notablement de la surface seuil analytique, les directions d'écoulement s'écartent aussi fortement de la direction normale à cette surface. Il faut également signaler qu'au moment où on détecte numériquement que l'on a franchi la surface seuil, celle-ci s'est déjà un peu déplacée. La vérification "numérique" de la loi de normalité n'est pas aisée.

En pratique, on admet donc que la loi de normalité reste valable même à l'échelle globale, l'évolution de  $\rho_I$  et  $\rho_{II}$  pour le modèle sera calculé ainsi :

$$\dot{\rho}_I = \dot{\lambda} \frac{\text{sign}(G_I)}{G_I^Y} \quad (4.40)$$

$$\dot{\rho}_{II} = \dot{\lambda} \frac{\text{sign}(G_{II})}{G_{II}^Y} \quad (4.41)$$

Avec  $\dot{\lambda}$  le multiplicateur plastique. Sa valeur est calculée à partir des équations de consistance de la plasticité, à savoir :

$$f = 0 \quad (4.42)$$

$$\dot{f} = 0 \quad (4.43)$$

Numériquement, un algorithme de retour radial permet de trouver la valeur de  $\dot{\lambda}$  qui satisfasse les conditions de consistance. Au niveau des quatre sommets du losange, toutes les directions d'écoulement sont possibles. Numériquement, la direction d'écoulement est calculée comme une combinaison linéaire des directions normales aux deux faces du losange qui se coupent en un sommet. Les coefficients de la combinaison linéaire sont choisis de manière à ce que la direction de chargement  $G_I$ ,  $G_{II}$  soit la même que la direction d'écoulement.

### 3.3 Loi d'évolution

Dans le cas du mode mixte, les seules variables internes qui ont été introduites sont les positions du centre du domaine d'élasticité  $(K_I^X, K_{II}^X)$ , elles décrivent l'état de contraintes internes dans la région de l'extrémité de la fissure. Afin de déterminer l'évolution de  $K_I^X$  et  $K_{II}^X$ , nous nous sommes à nouveau appuyés sur une série de simulations par éléments finis visant à tester différentes directions de chargement et à observer l'évolution du centre du domaine d'élasticité pour ces différentes directions. Chaque point de ce graphique est obtenu en explorant, puis en post-traitant 16 directions de chargement autour du point pour placer la surface seuil.

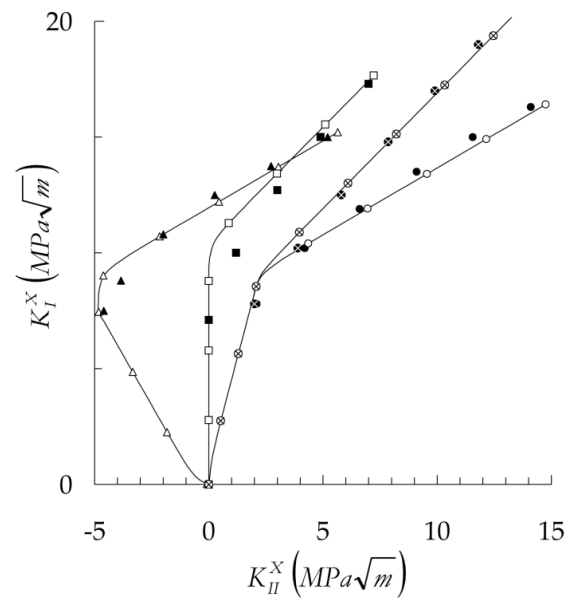
Empiriquement, la loi de type écrouissage cinématique linéaire a été choisie pour représenter le plus simplement possible les résultats des simulations :

$$\frac{\partial K_I^X}{\partial \rho_I} = R \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial K_{II}^X}{\partial \rho_{II}} = R \quad (4.45)$$

On remarque que cette loi très simple permet de représenter très correctement les directions dans lesquelles le domaine d'élasticité se déplace en mode mixte, y compris lors des changements de direction du chargement.

En revanche pour une direction donnée, la position du domaine d'élasticité obtenue par élément finis et obtenue avec le modèle ne se superposent pas parfaitement. Une version non-linéaire de la loi d'écrouissage pourra être établie dans le futur pour pallier cette difficulté.



**FIGURE 4.11:** Évolutions du centre du domaine d'élasticité issues des simulations par éléments finis (symboles pleins) ou du modèle (symboles creux et lignes)

### 3.4 Effet des paramètres du modèle

Le modèle de plasticité contient donc deux paramètres, la dimension du domaine d'élasticité  $K_I^Y$  et la pente  $R$  de la loi d'écrouissage cinématique. Pour illustrer l'effet de ces deux paramètres sur le comportement simulé, des boucles d'hysteresis sont tracées pour une sollicitation de mode I pur, pour différentes valeurs de  $R$ ,  $K_I^Y$  étant fixé FIG.4.12 ou pour différentes valeurs de  $K_I^Y$ ,  $R$  étant fixée FIG.4.13.

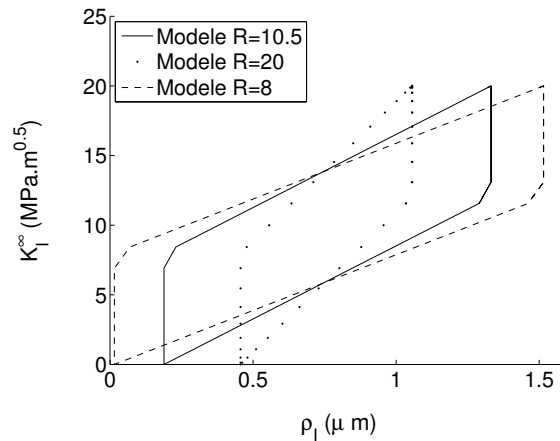


FIGURE 4.12: Influence du paramètre  $R$  du modèle

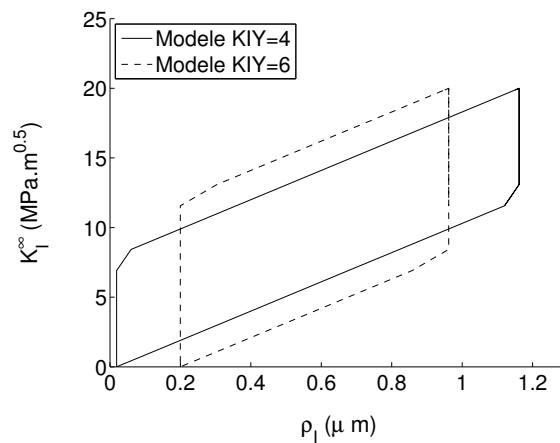


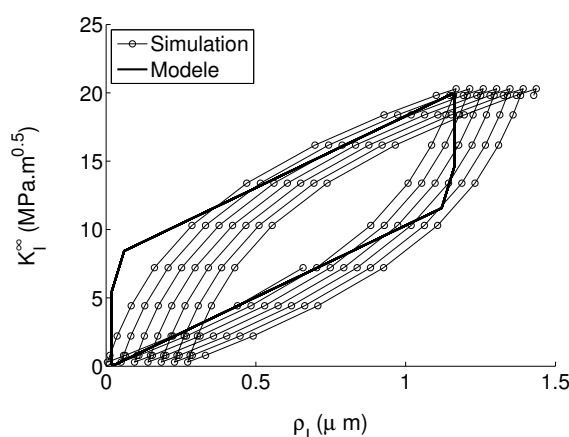
FIGURE 4.13: Influence du paramètre  $K_I^Y$  du modèle

### 3.5 Confrontations simulations / modèle

Le modèle de plasticité cyclique en mode mixte est composé des éléments suivants :

- une surface seuil de plasticité,
- une loi d'écoulement normale associée à ce seuil,
- une loi d'écrouissage cinématique linéaire.

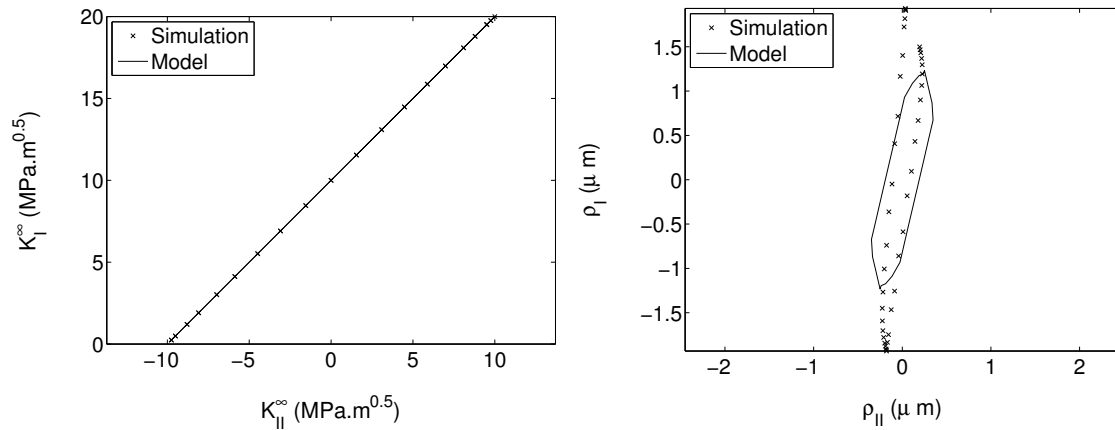
Cet ensemble d'équations scalaires est censé pouvoir reproduire les caractéristiques principales du comportement élasto-plastique cyclique de la région entourant l'extrémité de la fissure, c'est à dire les évolutions de  $\dot{\rho}_I$  et  $\dot{\rho}_{II}$  en fonction de  $\dot{K}_I^\infty$  et  $\dot{K}_{II}^\infty$  en mode mixte non-proportionnel.



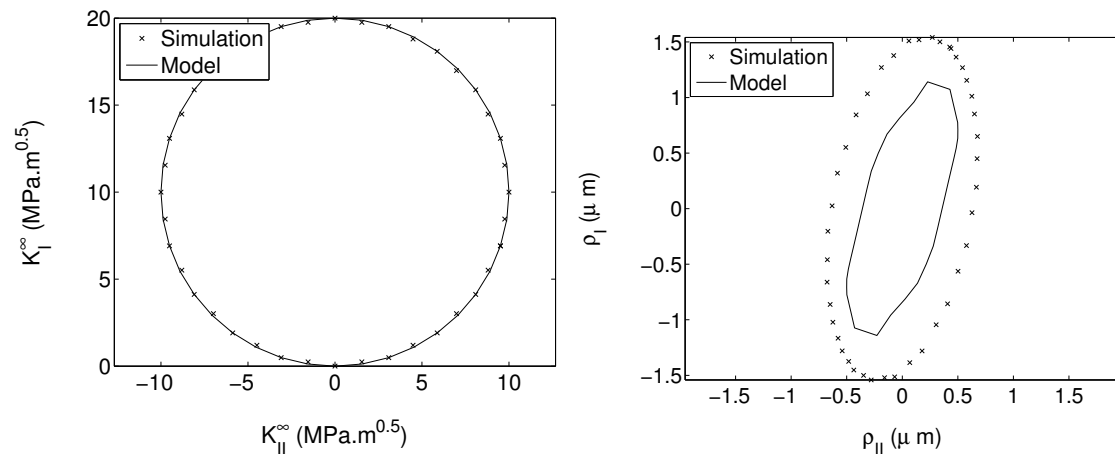
**FIGURE 4.14:** Comparaison entre les boucles d'hysteresis obtenues avec le modèle et celles issues de simulations par éléments finis. Mode I pur, cycles 1000 à 1005

Comme nous l'avons souligné au §2.8, page 132 les simulations par éléments finis montrent un effet de Rochet qui tend à s'atténuer au bout d'un millier de cycles. Comme l'illustre la FIG.4.14 le modèle proposé n'est pas capable de reproduire cet effet de Rochet, puisque  $K_I^Y$  est constant et que l'écrouissage cinématique est linéaire. Pour cette raison, l'ensemble des résultats qui vont être présentés par la suite, représentent le/les derniers cycle(s) extrait d'une simulation de 1000 cycles de chargement en Mode I. Par ailleurs, le choix d'un écrouissage cinématique linéaire ne permet pas de représenter au mieux le comportement en mode I qui est plutôt non-linéaire. Cependant, quelques tentatives ont été faites pour introduire un écrouissage cinématique non-linéaire. Si le comportement en mode I était alors mieux décrit en revanche les directions du déplacement du domaine d'élasticité FIG.4.11 n'étaient plus représentées correctement, c'est pourquoi en l'état actuel un écrouissage cinématique linéaire a été retenu.

Ces résultats montrent que le modèle peut encore être amélioré en particulier en introduisant un écrouissage cinématique non-linéaire plutôt que linéaire. En revanche, le modèle est bien capable de prévoir les bons rapport d'amplitude entre le niveau de déformation plastique en mode II et en mode I pour divers types de chargement. Des formes de cycles tout à fait non-intuitives sont aussi assez correctement reproduites. On constate



**FIGURE 4.15:** Comparaison entre les boucles d'hysteresis obtenues avec le modèle et celles issues de simulations par éléments finis. Chargement en phase, c'est à dire en mode mixte proportionnel avec  $K_I^\infty = K_{II}^\infty$

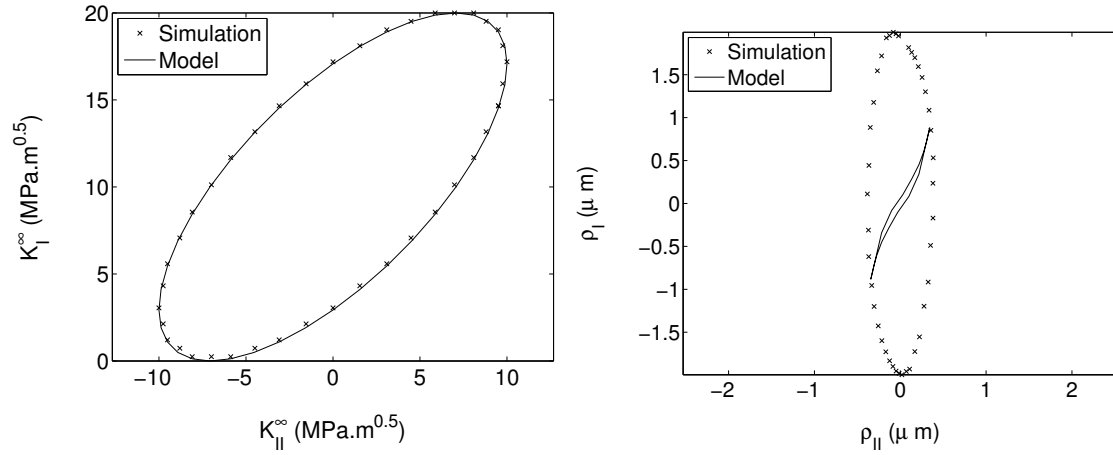


**FIGURE 4.16:** Comparaison entre les boucles d'hysteresis obtenues avec le modèle et celles issues de simulations par éléments finis. Chargement en quadrature de phase

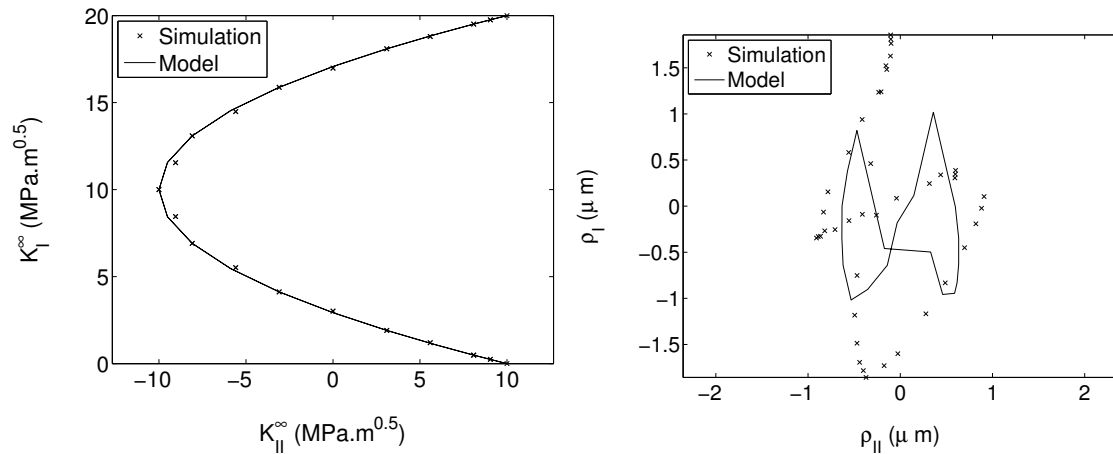
ainsi sur la FIG.4.18 qu'un chargement "en forme de C", conduit à un écoulement plastique "en forme de noeud papillon", aussi bien par les simulations éléments finis que par le modèle. L'accord n'est que qualitatif mais, l'ordre de grandeur des écoulements de mode I et de mode II est également respecté.

Le modèle reste donc largement à améliorer, mais il a été choisi dans la thèse de poursuivre sur la loi de fissuration et l'implémentation du modèle dans un code de calcul afin de pouvoir aboutir à des simulations de fissuration en mode mixte non-proportionnel avec effets d'histoire, plutôt que d'affiner le modèle de plasticité.





**FIGURE 4.17:** Comparaison entre les boucles d'hysteresis obtenues avec le modèle et celles issues de simulations par éléments finis. Chargement déphasé de  $\frac{\Pi}{4}$



**FIGURE 4.18:** Comparaison entre les boucles d'hysteresis obtenues avec le modèle et celles issues de simulations par éléments finis. Chargement de mode II ayant une fréquence deux fois plus élevée que celle de mode I

## 4 Résumé du chapitre

L'enjeu de ce chapitre était d'établir un modèle destiné à représenter le comportement élasto-plastique cyclique en mode mixte de la région entourant l'extrémité de la fissure.

L'ensemble de ce travail est basé sur la description des champs de vitesse (ou de déplacement) dans la région entourant l'extrémité de la fissure. La décomposition de ces champs en une partie élastique et une partie complémentaire permet de traduire le comportement élasto-plastique local du matériau au travers de variables globales de plasticité  $\rho_I$  et  $\rho_{II}$ .

Le modèle a ensuite été construit autour d'une démarche thermodynamique qui permet de donner une forme analytique aux lois d'évolution des variables. Un critère de plasticité et une loi d'écoulement permettent de connaître l'évolution des variables de plasticité.

Des simulations en éléments finis ont servi à déterminer les champs de référence élastiques et complémentaires, l'analyse des champs de vitesse au cours de chargement de mode mixte, complexe, ont pu valider la démarche et donner le cadre de validité du modèle.

L'atout majeur de ce modèle de pouvoir décrire le champ de vitesse élasto-plastique de mode mixte dans la région entourant l'extrémité de la fissure, tout en s'affranchissant des coûteux calculs en éléments finis non-linéaire. La description de ces champs est condensé en quatre variables scalaires et leur évolution est calculée de manière incrémental vis-à-vis du chargement appliqué. D'un point de vue industriel, le modèle est tout à fait utilisable pour pouvoir simuler plusieurs millions de cycles de chargement réel, obtenu sur le terrain, en des temps de calcul eux aussi réel...



# Chapitre 5

## Fissuration en mode mixte

*Ce quatrième chapitre porte sur la loi de propagation des fissures et l'implémentation du modèle dans un calcul de structure.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>153</b>
<b>2</b>	<b>Modélisation de la fissuration</b>	<b>154</b>
2.1	Loi de propagation	154
2.2	Détermination des facteurs d'intensité des contraintes nominaux	156
2.3	Prévision du trajet de fissuration	157
2.4	Vitesse de fissuration en mode mixte	162
<b>3</b>	<b>Facteurs d'intensité des contraintes et fissures non plane</b>	<b>165</b>
3.1	Introduction	165
3.2	Facteurs d'intensité des contraintes pour une fissure présentant une branche	167
3.3	Évaluation des facteurs d'intensité des contraintes	168
3.4	Illustrations numériques des problèmes rencontrés	170
<b>4</b>	<b>Détermination de la fissure plane équivalente à une fissure comportant une branche</b>	<b>177</b>
4.1	Équivalence au sens mécanique des fissures droites et bifurquée	177
4.2	Mise en œuvre de la méthode	180
4.3	Application à un cas concret de fissuration	186

<b>5</b>	<b>Résumé du chapitre . . . . .</b>	<b>190</b>
----------	-------------------------------------	------------

---

# 1 Introduction

Le modèle de plasticité cyclique développé au chapitre précédent permet de calculer une mesure condensée ( $\dot{\rho}_I$  et  $\dot{\rho}_{II}$ ) de la vitesse de déformation plastique en mode mixte dans la région entourant l'extrémité de la fissure à partir de la connaissance de l'évolution des facteurs d'intensité des contraintes nominaux ( $\dot{K}_I$  et  $\dot{K}_{II}$ ), c'est à dire des facteurs d'intensité des contraintes déterminés en considérant le milieu comme élastique. La finalité et l'utilité du modèle est de pouvoir prévoir la propagation de la fissure dans la structure. Le modèle de plasticité doit donc être complété par deux éléments :

- le calcul des facteurs d'intensité des contraintes nominaux dans la structure fissurée
- une loi de fissuration définissant le taux de création d'aire fissurée en fonction de ( $\dot{\rho}_I$  et  $\dot{\rho}_{II}$ )

La première partie de ce chapitre porte sur la loi de fissuration. Le modèle permettant de prévoir le trajet de fissuration et la vitesse de fissuration est d'abord présenté. Puis, afin de valider ce modèle, une campagne d'essai a été réalisée sur des éprouvettes de flexion 4 points asymétriques. Dans cet essai le trajet de fissure est relativement simple, le problème du calcul des facteurs d'intensité nominaux ne se pose donc pas. Ces essais permettent de tester l'accord entre le modèle et les essais en termes de vitesse de fissuration et de direction de propagation.

Le seconde partie de ce chapitre porte sur l'implémentation du modèle et en particulier le calcul de facteurs d'intensité des contraintes nominaux. En effet, compte tenu de la loi de fissuration utilisée, la fissure tend à avoir un trajet complexe. Elle peut rester plane ou comporter, selon le mode de chargement, de nombreuses branches. Dans ce cas, la modélisation de la fissure dans un calcul de structure pour déterminer les facteurs d'intensité des contraintes nominaux soulève quelques difficultés qui seront discutées dans cette partie.

## 2 Modélisation de la fissuration

### 2.1 Loi de propagation

Il a été montré que la plasticité cyclique à l'extrémité de la fissure est à l'origine du mécanisme de propagation des fissures de fatigue ([Pelloux, 1969], [Neumann, 1969]) du moins dans le régime dit "de Paris". Dans le cas du mode I, une loi d'endommagement empirique reliant le taux de création d'aire fissurée par unité de longueur de front  $\frac{da}{dt}$  à la mesure du taux de plasticité  $\frac{d\rho_I}{dt}$  a donc été proposée [Hamam, 2006] :

$$\frac{da}{dt} = \alpha \left| \frac{d\rho_I}{dt} \right| \quad (5.1)$$

Comme on a pu le constater dans le chapitre consacré au comportement en fatigue de mode I de l'acier S355NL (CHAP.2, §3.3, page 52), la simplicité de cette loi d'endommagement ne nuit en rien à la qualité de la prévision de la vitesse de fissuration, et ce, même dans les cas de chargements complexes, à amplitudes variables. L'importance est portée sur la description de la plasticité en pointe de fissure et des effets d'histoire qui en découlent.

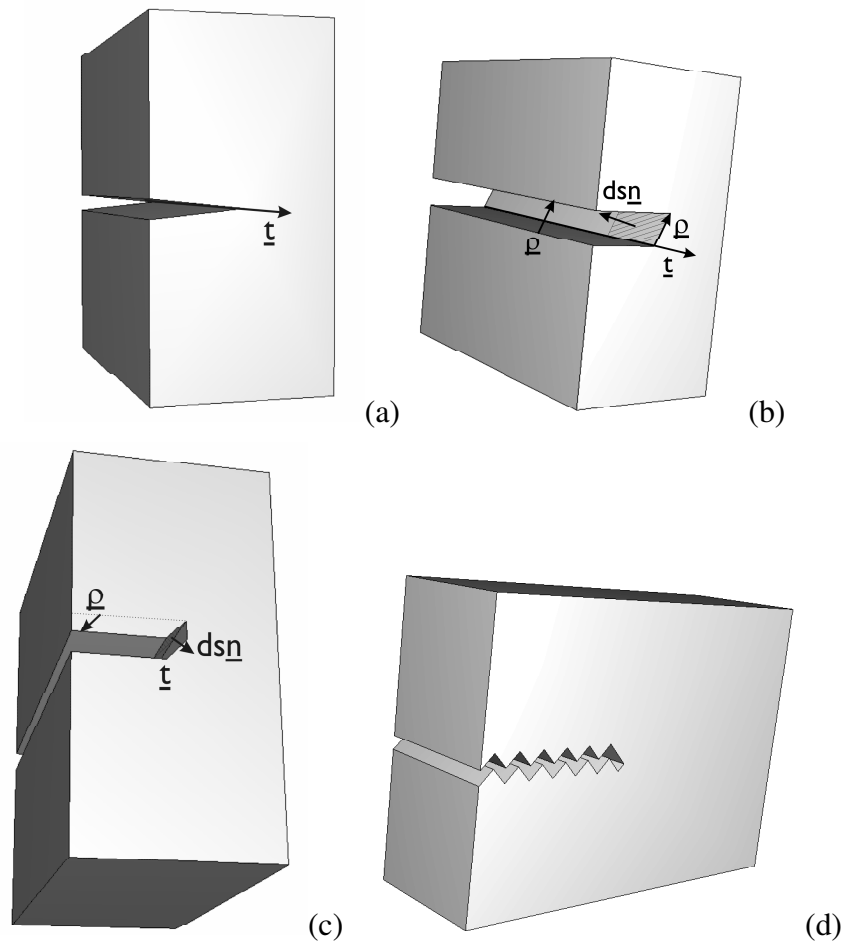
En mode mixte, une approche géométrique du problème de la fissuration permet d'établir la loi suivante, où  $\dot{s}$  est le taux de création de nouvelles surfaces libres par unité de longueur de front de fissure orienté par le vecteur  $\underline{t}$  donné en fonction du taux de plasticité  $\underline{\dot{\rho}} = (\dot{\rho}_I, \dot{\rho}_{II})$  :

$$\underline{\dot{s}} = \underline{t} \wedge \underline{\dot{\rho}} \quad (5.2)$$

$$\dot{a} = \alpha \dot{s} \quad (5.3)$$

Compte tenu de la manière dont les champs complémentaires ont été définis,  $\underline{\dot{\rho}}$  est interprété comme la partie irréversible du débattement des faces de la fissure hors de la zone plastique. Le résultat 5.3 est alors une conséquence géométrique des hypothèses sur le champ de vitesse. On remarque que l'orientation des nouvelles surfaces libres créées dépend du signe de l'écoulement plastique. On crée des surfaces libres lors de l'ouverture et lors de la fermeture de la fissure. Si ces surfaces libres ont été en contact avec l'atmosphère elles ne pourront pas se résorber, et cela même si le retour était l'exact opposé de l'aller. Si la fissure reste coplanaire, alors la vitesse de propagation se réduit au déplacement du front de la fissure, et on peut écrire simplement que le taux de création d'aire fissurée  $\dot{a} = \alpha \dot{s}$ , où  $\alpha$  doit avoir un ordre de grandeur proche de 1/2. On verra dans la seconde partie de ce chapitre que lorsque la fissure ne reste pas dans un plan, des hypothèses supplémentaires doivent être faites pour actualiser le plan de la fissure à partir de la connaissance de  $\dot{s}$ . On imagine bien que si la fissure zigzague autour d'un plan de fissuration moyen et que l'on ne souhaite pas modéliser géométriquement tous ces zigzags alors  $\dot{a}$  doit être une projection de  $\alpha \dot{s}$  sur ce plan.

Dans un premier temps, des essais ont été mis en oeuvre au cours desquels la propagation de la fissure reste essentiellement coplanaire (sauf au tout début de l'essai). Dans



**FIGURE 5.1:** Illustration schématique de la relation entre  $\dot{\rho}$  et le taux de création de nouvelles surfaces libres  $\dot{s}$ . (a) avant déformation. (b) surface libre créée lorsque les faces de la fissure s'écartent. (c) surface libre créée lorsque les faces de la fissure se rapprochent. (d) Cas d'une fissure se propageant en moyenne sur un même plan l'aire fissurée n'est pas égale à la moitié de la surface libre créée par seconde

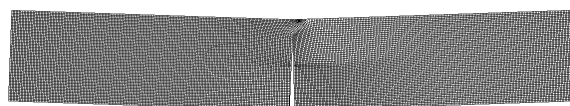
ce cas, on détermine  $\dot{\rho}$  à partir du taux de variation des facteurs d'intensité des contraintes nominaux, puis  $\dot{s}\underline{n} = \dot{\rho}\underline{t} \wedge \underline{\rho}$  et enfin la propagation de la fissure est donnée par  $\dot{a} = \alpha\dot{s}$ . Un essai est utilisé pour déterminer un coefficient  $\alpha$  et les autres essais permettent de vérifier si l'équation 5.3 permet de prévoir correctement la direction et la vitesse de fissuration, au moins qualitativement.



## 2.2 Détermination des facteurs d'intensité des contraintes nominaux

Pour valider la démarche (5.3), des essais de fissuration en flexion 4 points asymétrique (FIG.5.3) ont d'abord été réalisés. Une entaille est réalisée par électro-érosion au milieu de l'éprouvette. La fissure se propage ensuite dans l'éprouvette à partir de cette entaille sur un plan incliné par rapport au plan médian de l'éprouvette avec une inclinaison qui dépend de la manière dont les appuis ont été positionnés sur l'éprouvette. Pour pouvoir simuler la fissuration avec le modèle et confronter ces résultats aux essais, il faut d'abord calculer les facteurs d'intensité des contraintes nominaux à partir desquels on calcule  $\hat{\rho}$ .

Pour cela, un modèle éléments finis de l'éprouvette de flexion a été mis en place (FIG.5.2). Il permet, à partir du trajet de fissuration réel, de construire la géométrie "numérique" équivalente au cas de fissuration étudié. La méthode des intégrales d'interaction, décrite au §3.3, page 168, est utilisée pour déterminer les valeurs  $K_I$  et de  $K_{II}$  au cours de la propagation de la fissure.



**FIGURE 5.2:** Modèle par éléments finis de l'éprouvette de flexion quatre points.

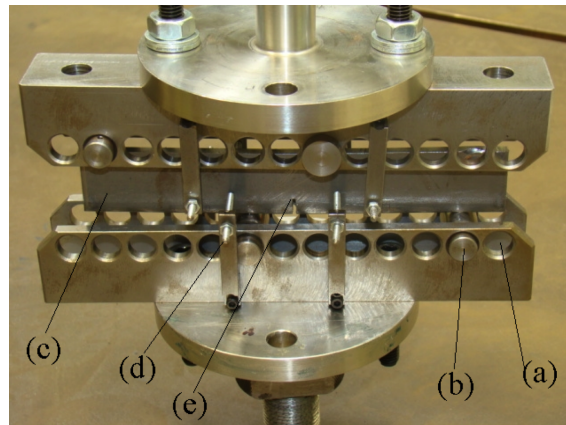
À partir des données expérimentales sur la position de l'extrémité de la fissure, un script python génère les géométries successives de l'éprouvette fissurée et le maillage adapté pour en extraire la relation entre des facteurs d'intensité des contraintes au cours de l'avancée.

L'application des efforts dans le cas du montage de flexion quatre points asymétrique peut se faire de plusieurs manières, selon que le montage est rotulé ou rigide. Dans le cas présent, le montage n'est pas rotulé. Les plans d'appui du montage sont alignés avant chaque essai expérimental et restent parallèles au cours de l'essai. L'application des efforts dans le modèle éléments finis a été adapté en conséquence, les points d'application des efforts sur chaque face de l'éprouvette sont contraints de rester dans un même plan horizontal. Avec ce montage, le taux de mixité du chargement ( $K_{II}/K_I$ ) dépend de la position des appuis. Mais comme il n'y a qu'un seul vérin pour appliquer l'effort, ce type de montage ne permet d'étudier que des cycles de chargement de mode mixte proportionnels.

### 2.3 Prédiction du trajet de fissuration

Lors des essais, la position de l'extrémité de la fissure est déterminée par corrélation d'images avec l'algorithme présenté au §2.2, page 74. Sur les figures 5.4 à les résultats de quatre types de chargement différents sont présentés. Pour chaque cas, les positions des appuis sont d'abord tracés. Puis les trajets de fissuration mesuré par corrélation d'images lors des essais et les facteurs d'intensité des contraintes nominaux correspondants à chaque trajet sont tracés.

Le trajet expérimental est confronté au trajet obtenu à l'aide du modèle. Attention, lors de ces simulations, l'évolution du chargement nominal ( $K_I^\infty$  et  $K_{II}^\infty$ ) en fonction de la longueur de fissure est la même que dans les essais. On impose la loi  $K_I^\infty(a)$  et  $K_{II}^\infty(a)$  qui correspond au trajet de fissure relevé expérimentalement. En revanche, la direction de propagation et la vitesse de propagation sont données par le modèle. Ceci signifie que si le trajet de fissuration simulé s'écarte du trajet de fissuration expérimental, c'est uniquement le modèle de fissuration qui est en cause et pas le calcul de  $K_I^\infty$  et  $K_{II}^\infty$ .



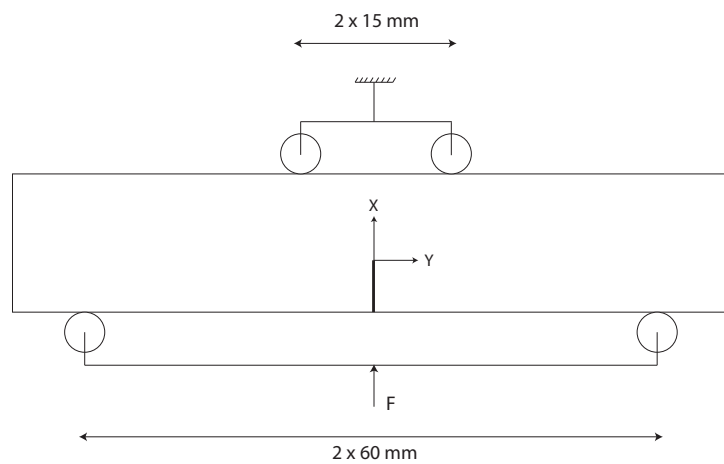
**FIGURE 5.3:** Illustration du montage de flexion quatre points dissymétrique : (a) Différentes positions des appuis pour changer la mixité du chargement, (b) Axe du roulement à bille, (c) Éprouvette, (d) Dispositif de maintien en position de l'éprouvette, (e) Entaille initiale

Le TAB.5.1 récapitule les essais réalisés sur l'acier S355NL avec le montage de flexion asymétrique.

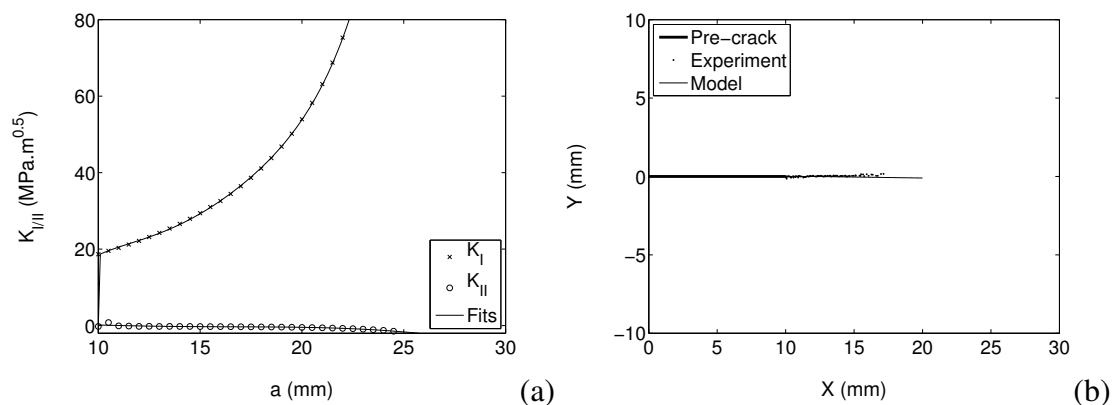
Les premières comparaisons ont été réalisées en mode I. La comparaison entre les résultats expérimentaux et prévisions du modèle est présentée sur la figure 5.5 (b). On note que la fissure reste bien dans son plan. Le second essai est asymétrique 5.6. Au début de la propagation le taux de mixité  $K_I^\infty/K_{II}^\infty$  est très faible mais augmente au fur et à mesure que la fissure se propage. La direction de propagation de la fissure est qualitativement bien reproduite par le modèle. Les autres cas, 5.8 et 5.10 donnent des résultats moins satisfaisants mais qualitativement corrects.

Eprouvette	Matériau	Pos. appuis haut (mm)	Pos. appuis bas (mm)	$F_{max}/F_{min}$ (N)	FIG.
1	Base	-15/+15	-60/+60	5000/500	FIG.5.4
2	Base	-60/+15	-45/+75	12000/1000	FIG.5.6
3	Base	-15/+75	-75/+15	12000/1000	FIG.5.8
4	Base	-45/+15	-75/+75	5000/500	FIG.5.10

**TABLE 5.1:** Tableau récapitulatif des différents essais de mode mixte réalisés sur des éprouvettes de flexion quatre points asymétrique en acier S355NL.



**FIGURE 5.4:** Position des appuis du montage de flexion quatre points asymétrique, configuration symétrique.



**FIGURE 5.5:** (a) Evolution des facteurs d'intensité des contraintes de mode I et de mode II. (b) Position de l'extrémité de la fissure déterminée par analyse d'images lors de l'essai, comparaison avec les prévisions du modèle de fissuration

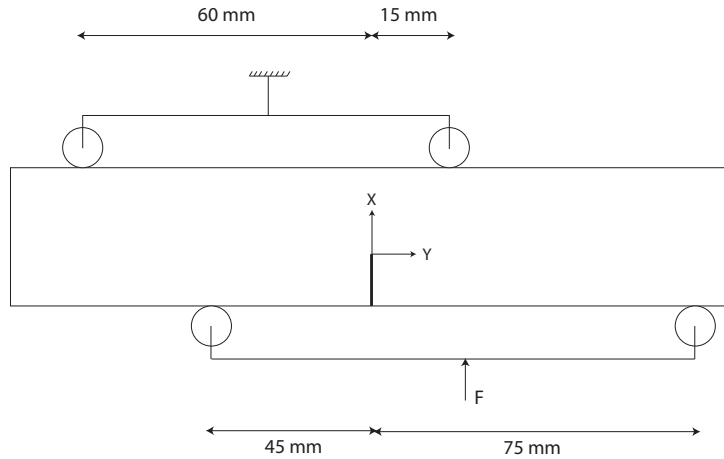


FIGURE 5.6: Position des appuis du montage de flexion quatre points asymétrique.

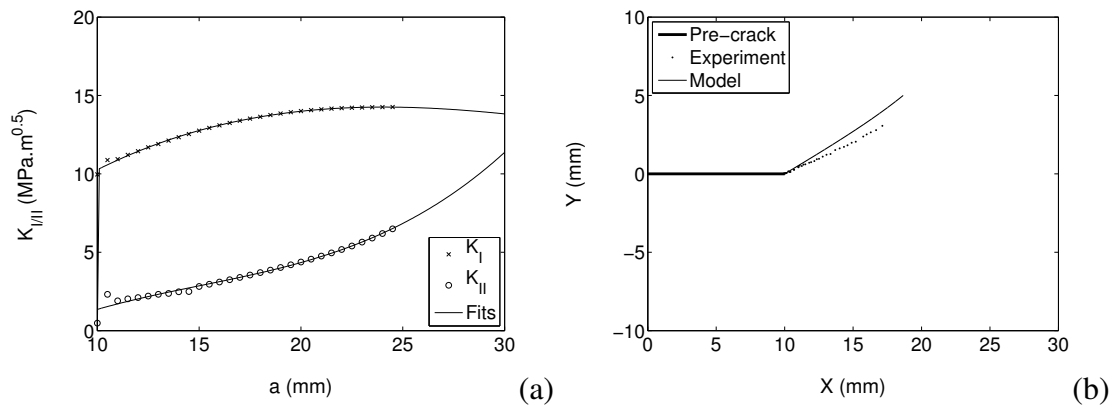
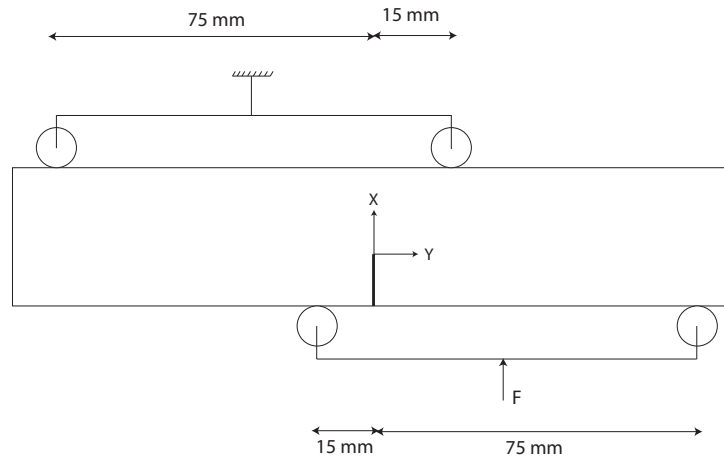
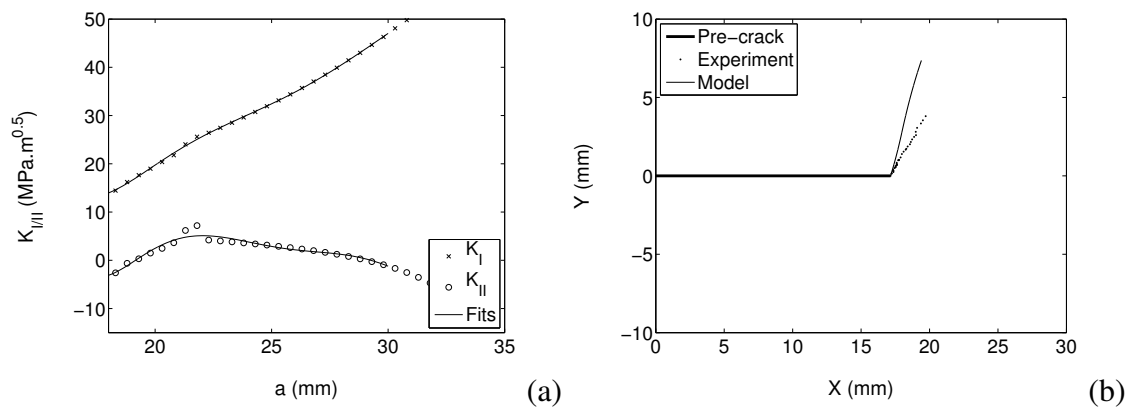


FIGURE 5.7: (a) Evolution des facteurs d'intensité des contraintes de mode I et de mode II. (b) Position de l'extrémité de la fissure déterminée par analyse d'images lors de l'essai, comparaison avec les prévisions du modèle de fissuration



**FIGURE 5.8:** Position des appuis du montage de flexion quatre points asymétrique.



**FIGURE 5.9:** (a) Evolution des facteurs d'intensité des contraintes de mode I et de mode II. (b) Position de l'extrémité de la fissure déterminée par analyse d'images lors de l'essai, comparaison avec les prévisions du modèle de fissuration

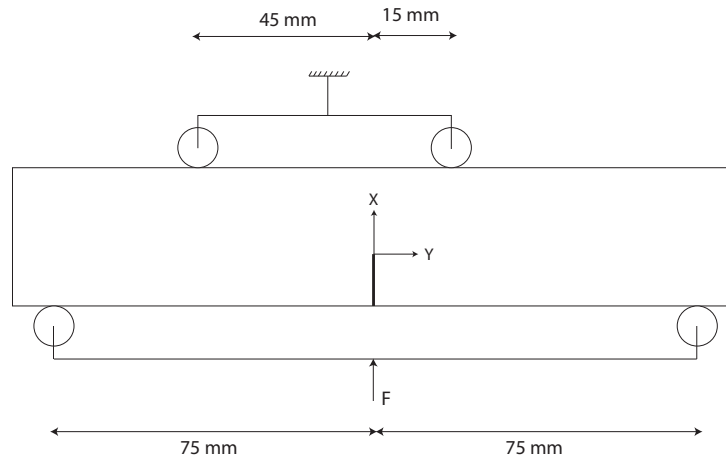


FIGURE 5.10: Position des appuis du montage de flexion quatre points asymétrique.

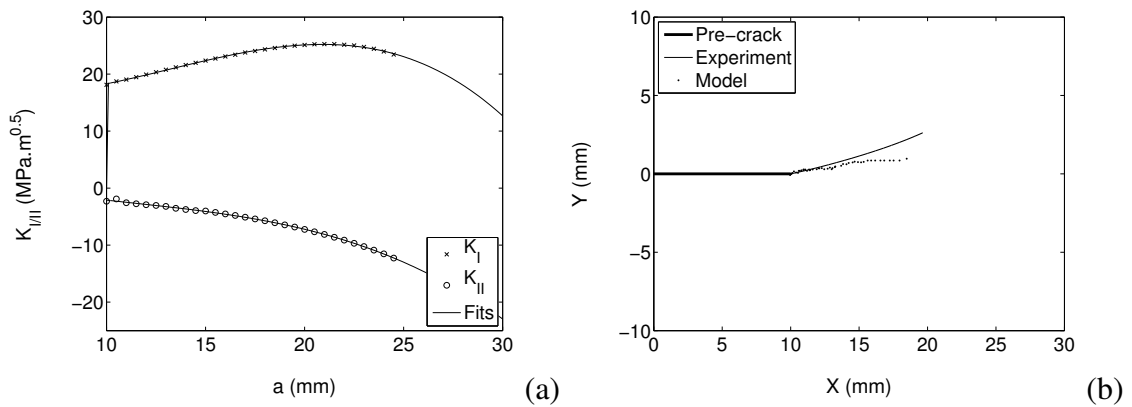


FIGURE 5.11: (a) Evolution des facteurs d'intensité des contraintes de mode I et de mode II. (b) Position de l'extrémité de la fissure déterminée par analyse d'images lors de l'essai, comparaison avec les prévisions du modèle de fissuration

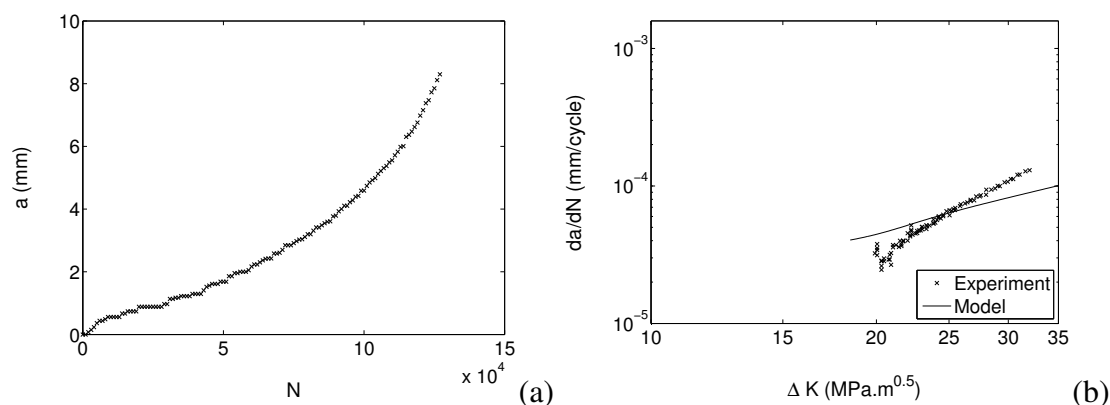
## 2.4 Vitesse de fissuration en mode mixte

Dans un second temps, les vitesses de fissuration simulées et expérimentales sont comparées. Comme la fissuration est en mode mixte et que le taux de mixité du chargement évolue progressivement lors de la propagation des fissures, il a été choisi de tracer les évolutions dans un diagramme "de Paris", où la vitesse de propagation de fissure (ici le taux de création d'aire fissurée) est tracée en fonction d'un facteur d'intensité des contraintes équivalent  $\Delta K_{eq}$  calculé de la même manière pour le tracé des résultats de simulation et des résultats d'essai.  $\Delta K_{eq}$  est choisi par commodité pour tracer les graphiques, mais n'est utilisé nulle part dans les simulations. On définit :

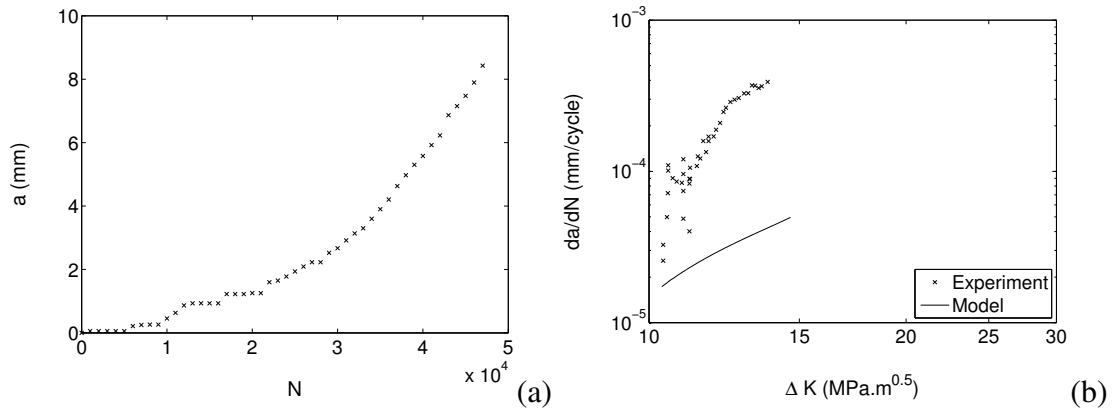
$$K_{eq} = \sqrt{K_I^{\infty 2} + K_{II}^{\infty 2}} \quad (5.4)$$

$$\Delta K_{eq} = [K_{eq}^{max} - K_{eq}^{min}]_{parcycle} \quad (5.5)$$

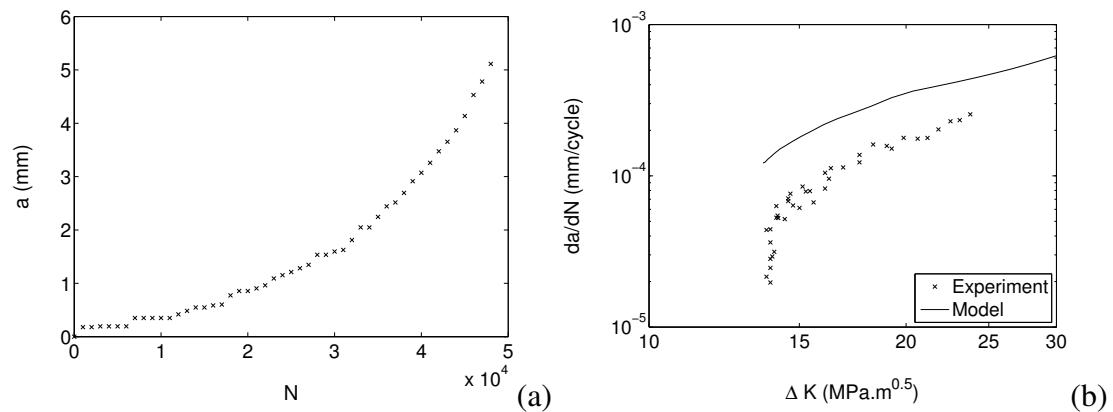
On ajuste le coefficient  $\alpha$  de la loi de fissuration 5.3 de manière à ce que la vitesse de fissuration prédite par le modèle en mode I, soit plus ou moins en accord avec les résultats expérimentaux obtenus en Mode I. Avec ce même coefficient  $\alpha$ , on compare alors les vitesses simulées et expérimentales. On constate que dans tous les cas, la vitesse expérimentale s'écarte significativement de la vitesse simulée. Il a été souligné au chapitre précédent que les effets liés aux variations du niveau de fermeture de la fissure n'avaient pas encore été pris en compte. Cela peut sans doute expliquer ces écarts, qui restent significatifs.



**FIGURE 5.12:** Eprouvette 1, (a) Evolution de la longueur de fissure en fonction du nombre de cycles. (b) comparaison simulations/expériences dans un diagramme de Paris, la vitesse de fissuration est tracée en fonction de  $\Delta K$  équivalent 5.5

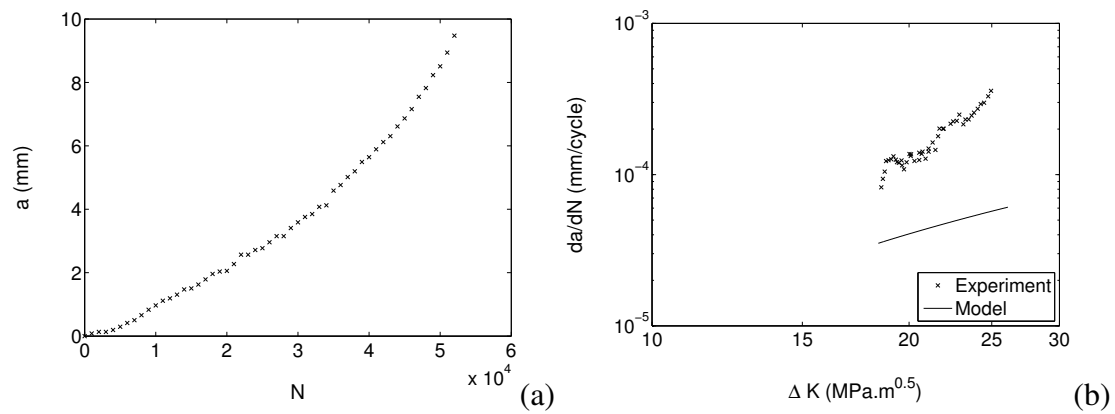


**FIGURE 5.13:** Eprouvette 2, (a) Evolution de la longueur de fissure en fonction du nombre de cycles. (b) comparaison simulations/expériences dans un diagramme de Paris, la vitesse de fissuration est tracée en fonction de  $\Delta K$  équivalent 5.5



**FIGURE 5.14:** Eprouvette 3, (a) Evolution de la longueur de fissure en fonction du nombre de cycles. (b) comparaison simulations/expériences dans un diagramme de Paris, la vitesse de fissuration est tracée en fonction de  $\Delta K$  équivalent 5.5





**FIGURE 5.15:** Eprouvette 4, (a) Evolution de la longueur de fissure en fonction du nombre de cycles. (b) comparaison simulations/expériences dans un diagramme de Paris, la vitesse de fissuration est tracée en fonction de  $\Delta K$  équivalent 5.5

## 3 Facteurs d'intensité des contraintes et fissures non plane

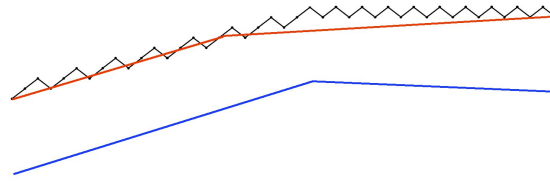
### 3.1 Introduction

Le modèle incrémental présenté dans les parties précédentes permet de prévoir, direction et vitesse de propagation instantané dans le cas de chargements de mode mixte non proportionnels. Parmi les paramètres d'entrée du modèle, on trouve, entre autres, les facteurs d'intensité des contraintes nominaux  $K_I^\infty$  et  $K_{II}^\infty$ , qui décrivent la sollicitation de la fissure dans le problème élastique équivalent. Leur détermination reste un problème ouvert, en particulier dès lors que la fissure change de direction de propagation, bifurque ou présente des branches.

Or dans le modèle incrémental, la loi de fissuration (eq. 5.3, page 154) prévoit le taux de création d'aire fissurée à partir du taux de plasticité  $\dot{\rho}_I$  et  $\dot{\rho}_{II}$  issu du modèle de plasticité. Ainsi, à chaque incrément de chargement induisant de la plasticité dans la région entourant l'extrémité de la fissure, une avancée microscopique de fissure est prédite. Compte tenu des hypothèses principale du modèle de plasticité, (la surface seuil est un losange dans le diagramme  $(G_I, G_{II})$  et l'écoulement plastique est normal à celle surface), la direction d'écoulement plastique peut prendre quatre valeurs distinctes. Par conséquent, selon le mode de chargement, la fissuration peut rester co-planaire ou bien former une branche à chaque incrément. En mode I, par exemple, avec ces hypothèses, la fissure se propage en zig-zag, ce qui est d'ailleurs conforme au modèle de Neumann [Neumann, 1969]. Le trajet de fissuration calculé n'est en réalité qu'un ensemble de micros segments dont l'orientation individuelle est fortement différente du trajet de fissuration "moyen" qui pourrait être observé macroscopiquement.

L'intensité du chargement appliqué à la structure est traduite en terme de facteurs d'intensité des contraintes pour la fissure étudiée. Ces derniers évoluent au fur et à mesure de l'avancée de fissure, mais pour des raisons évidentes d'allègement du temps de calcul, les relations entre les conditions aux limites appliquées et les facteurs des contraintes ne sont actualisés qu'après une avancée significative de la fissure et non à chaque incrément de chargement. La question qui se pose est de savoir quand et comment actualiser la géométrie de la fissure dans le calcul de structure. Une première approche a été mise en oeuvre et ensuite abandonnée pour les raisons qui vont être développées dans cette partie. Cette approche consistait simplement à suivre l'extrémité courante de la fissure prévue par le modèle incrémental, puis à actualiser la géométrie de la fissure dans le calcul de structure, dès que la distance entre l'extrémité courante de la fissure et la dernière position de l'extrémité pour laquelle les relations entre facteurs d'intensité des contraintes et conditions aux limites ont été calculées atteignait une valeur seuil. Avec cette approche, la fissure est formée de macro-segments dont la longueur et l'inclinaison dépendent du critère retenu pour actualiser la géométrie.

Les facteurs d'intensité des contraintes sont définis pour une fissure asymptotiquement plane et à front droit. On peut les déterminer en utilisant la méthode des intégrales d'inter-



**FIGURE 5.16:** Illustration : modélisation de la fissure par segments macroscopique, le modèle de fissuration prévoyant un trajet de fissuration formé d'une série de micro-segment.

action ou par analyse asymptotique des champs de déplacement ou de contrainte. Dans le cas présent, cependant, la fissure n'est pas plane. Des solutions analytiques ont été établies par plusieurs auteurs [Leblond, 1989], [Leblond, 1999], [Amestoy et Leblond, 1992] qui permettent de calculer les facteurs d'intensité des contraintes juste après branchement. Ces solutions montrent l'existence d'une discontinuité des facteurs d'intensité des contraintes quand la longueur de la branche tend vers zéro. La présence d'une contrainte T [Frelat et Leblond, 1999], par exemple, est à l'origine de sauts du facteur d'intensité des contraintes qui peut rendre le trajet de fissuration instable [Cotterell et Rice, 1980a] (Voir le Chapitre 1). Ce problème rend l'évolution des facteurs d'intensité des contraintes avec le trajet de fissuration significativement dépendante de la manière dont ce trajet de fissuration est approché dans le calcul de structure.

Les paragraphes suivants ont pour objectif :

- d'illustrer, sur le cas élémentaire d'une fissure plane présentant une branche à son extrémité, les difficultés rencontrées dans l'estimation numérique des facteurs d'intensité des contraintes (on utilisera les intégrales d'interaction implantées dans le code Abaqus),
- d'étudier l'approximation d'un trajet de fissuration complexe par une fissure plane par morceaux,

### 3.2 Facteurs d'intensité des contraintes pour une fissure présentant une branche

On rappelle que les facteurs d'intensité des contraintes juste après branchement ( $K_I^*$ ,  $K_{II}^*$ ) dépendent des facteurs d'intensité des contraintes juste avant branchement ( $K_I$ ,  $K_{II}$ ) et de l'angle  $\theta$  de la nouvelle direction de propagation ([Leblond, 1989], [Amestoy et Leblond, 1992]) par une relation de la forme :

$$\begin{pmatrix} K_I^* \\ K_{II}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11}(\theta) & F_{12}(\theta) \\ F_{21}(\theta) & F_{22}(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_I \\ K_{II} \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Les coefficients  $F_{11}$ ,  $F_{12}$ ,  $F_{21}$  et  $F_{22}$  peuvent être exprimés comment suit :

$$F_{11}(\theta) = \cos^3 \frac{\theta}{2}$$

$$F_{12}(\theta) = -3\cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

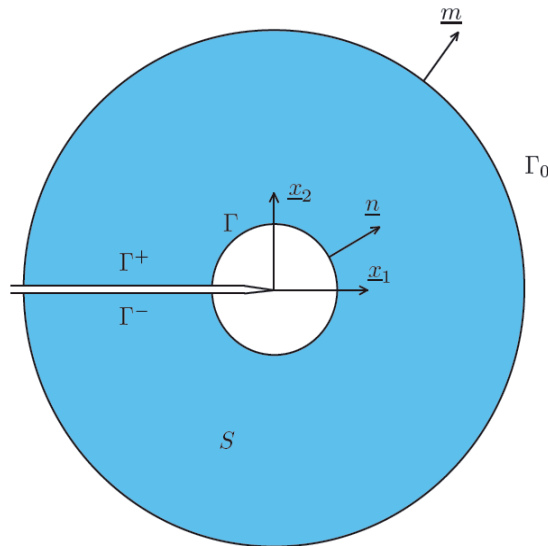
$$F_{21}(\theta) = \frac{1}{2} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2}$$

$$F_{22}(\theta) = \frac{1}{2} (3\cos \theta - 1) \cos \frac{\theta}{2}$$

Les expressions de  $K_I^*$  et  $K_{II}^*$  correspondent alors à une longueur  $s$  de la branche tendant vers 0. Si la branche  $s$  prend une longueur finie, d'autres termes interviennent alors dans le calcul des facteurs d'intensité des contraintes, tels que la contrainte  $T$ .

### 3.3 Évaluation des facteurs d'intensité des contraintes

Le modèle incrémental a vocation à être implémenté dans un code de calcul de structure adapté à l'étude de la fissuration. L'intégration dans un code X-FEM, est parfaitement adaptée au calcul des facteurs d'intensité des contraintes nominaux, puisqu'on reste dans le cadre de l'élasticité linéaire et facilite la mise en oeuvre des calculs. Les effets d'histoire provenant de la plasticité dans la région entourant l'extrémité de la fissure étant pris en compte par le biais du modèle incrémental. Dans un premier temps, le code X-FEM développé par Pierre Alain Guidault au LMT [Guidault, 2005] a été utilisé pour tester la démarche. Dans ce code, les facteurs d'intensité des contraintes sont déterminés par la méthode des intégrales d'interaction, sur laquelle nous donnons quelques éléments ci-dessous.



**FIGURE 5.17:** Description du domaine  $S$  en pointe de fissure. La normale extérieure à  $S$ ,  $\underline{m}$ , est telle que  $\underline{m}=\underline{n}$  sur  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$  et  $\underline{m} = -\underline{n}$  sur  $\Gamma$ .

Dans le cas de la fissuration plane, le taux de restitution d'énergie  $G$  se calcule comme suit :

$$G = \frac{K_I^2}{E^*} + \frac{K_{II}^2}{E^*} \quad (5.7)$$

où  $E^* = E$  en contrainte plane et  $E^* = E/(1 - \nu^2)$  en déformation plane.

Le calcul du taux de restitution d'énergie  $G$  peut s'effectuer par l'intermédiaire de l'intégrale de Rice  $J$  :

$$G = J = \int_{\Gamma} \left( \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma \varepsilon) \underline{n} \cdot \underline{x}_1 - \sigma \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \underline{n} \right) dl \quad (5.8)$$

Soit l'état réel (1) et l'état auxiliaire (2) correspondant aux champs asymptotiques en fond de fissure pour le mode I pur ou le mode II pur, on définit l'intégrale  $J^{(1+2)}$  pour la somme

des états (1) et (2) :

$$J^{(1+2)} = \int_{\Gamma} \left( \frac{1}{2} Tr \left( (\boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)}) (\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}) \right) \underline{n} \cdot \underline{x}_1 - (\boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \frac{\partial (\underline{u}^{(1)} + \underline{u}^{(2)})}{\partial x_1} \cdot \underline{n} \right) dl \quad (5.9)$$

or  $J^{(1+2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + I^{(1,2)}$  avec :

$$I^{(1,2)} = \int_{\Gamma} \left( Tr(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}) \underline{n} \cdot \underline{x}_1 - \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \frac{\partial \underline{u}^{(2)}}{\partial x_1} \cdot \underline{n} - \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \frac{\partial \underline{u}^{(1)}}{\partial x_1} \cdot \underline{n} \right) dl \quad (5.10)$$

L'intégrale  $I^{(1,2)}$  est appelée intégrale d'interaction entre les états (1) et (2). On a ainsi :

$$J^{(1+2)} = \frac{(K_I^{(1)} + K_I^{(2)})^2}{E^*} + \frac{(K_{II}^{(1)} + K_{II}^{(2)})^2}{E^*} = J^{(1)} + J^{(2)} + \frac{2}{E^*} (K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)}) \quad (5.11)$$

Pour le mode I pur on choisit  $K_I^{(2)} = 1$  et  $K_{II}^{(2)} = 0$  on en déduit :

$$K_I^{(1)} = \frac{E^*}{2} I^{(1,model)} \quad (5.12)$$

De même pour le mode II pur,  $K_I^{(2)} = 0$  et  $K_{II}^{(2)} = 1$  donc :

$$K_{II}^{(1)} = \frac{E^*}{2} I^{(1,modeII)} \quad (5.13)$$

L'intégrale de contour 5.10 est réécrite sous la forme d'une intégrale de domaine plus appropriée pour les calculs en éléments finis. Cela fait apparaître une fonction régulière  $f(\underline{M})$  de valeur unitaire sur  $S$  (FIG.5.17) et de valeur nulle en dehors du contour  $\Gamma_0$

$$I^{(1,2)} = \int_{\partial S} \left( \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \frac{\partial \underline{u}^{(2)}}{\partial x_1} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \frac{\partial \underline{u}^{(1)}}{\partial x_1} - Tr(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}) \cdot \underline{x}_1 \right) \cdot \underline{f} \underline{m} dS \quad (5.14)$$

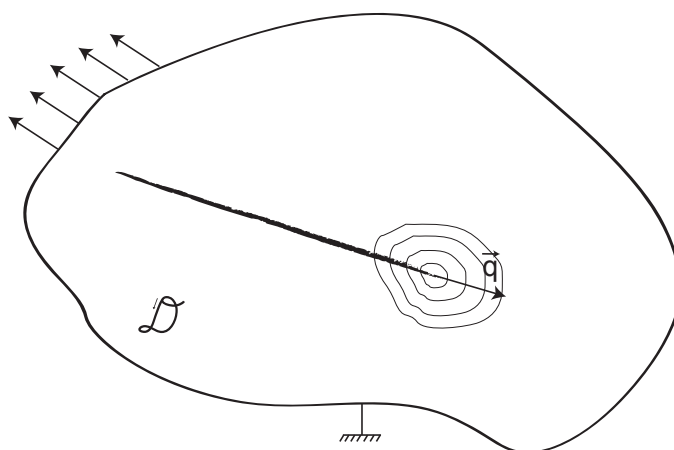
$$I^{(1,2)} = \int_S \left( \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \frac{\partial \underline{u}^{(2)}}{\partial x_1} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \frac{\partial \underline{u}^{(1)}}{\partial x_1} - Tr(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}) \cdot \underline{x}_1 \right) \cdot \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} dS \quad (5.15)$$

La méthode, dite, des intégrales d'interaction permet donc d'évaluer la valeur des facteurs d'intensité des contraintes via une approche énergétique, basée sur le calcul du taux de restitution d'énergie  $G$ . Elle présente l'avantage de prendre en compte tous les noeuds situés à l'intérieur du contour choisi et est, en théorie, indépendante du contour d'intégration choisi autour de la pointe de fissure. Elle s'appuie sur la données des champs auxiliaire (2) de mode I et II donnée par la mécanique linéaire de la rupture. Dans la suite de l'étude, le vecteur  $\underline{x}_1$  définissant le plan de fissuration, serait noté  $\underline{q}$ .

### 3.4 Illustrations numériques des problèmes rencontrés

#### 3.4.1 Cas d'une fissure plane

Pour illustrer les difficultés numériques rencontrées dans la détermination des facteurs d'intensité des contraintes pour une fissure non-plane, on se propose de simuler la mise à jour des facteurs d'intensité des contraintes au cours de la propagation de la fissure avec la méthode des intégrales d'interaction sur un problème élémentaire. Le problème initial (FIG.5.18) est une fissure plane, de longueur  $a$  dans un milieu soumis à différentes conditions aux limites en déplacement et en effort. L'état des contraintes vu par la fissure est caractérisé par les facteurs d'intensité des contraintes nominaux  $K_I$  et  $K_{II}$ . Ces derniers serviront de données d'entrée au modèle de fissuration pour prévoir la vitesse et la direction de la propagation vis-à-vis du chargement appliqué.



**FIGURE 5.18:** Positionnement du problème : une fissure plane soumise à des sollicitations extérieures. Les facteurs d'intensité des contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  seront calculés pour les différents contours en pointe de fissure

Pour mener à bien cette étude, une "éprouvette numérique" (FIG.5.19), cruciforme, a été modélisée sous Abaqus pour permettre des sollicitations de mode mixte ( $I + II$ ). Le comportement du matériau restera purement élastique linéaire, on se place sous les hypothèses de contraintes planes. Le maillage est extrêmement raffiné en pointe de fissure afin de pouvoir étudier les effets de maillage, de contour d'intégration et de faire progresser la fissure pas à pas. Le nombre de contours  $\Gamma$  servant au calcul de  $K_I$  et de  $K_{II}$  a été choisi volontairement élevé (25) pour la suite de l'étude, cependant dès les premiers contours le calcul converge vers une valeur en accord avec la sollicitation de mode  $I$  pur qui a été appliqué à l'éprouvette. (FIG.5.20)

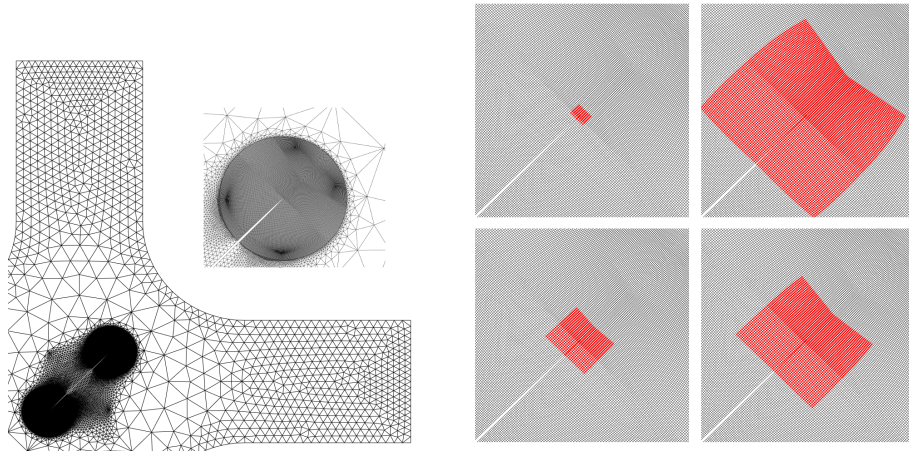


FIGURE 5.19: Maillage de l'éprouvette, raffiné en pointe de fissure, ainsi que les différents contours choisis pour le calcul des facteurs d'intensité des contraintes

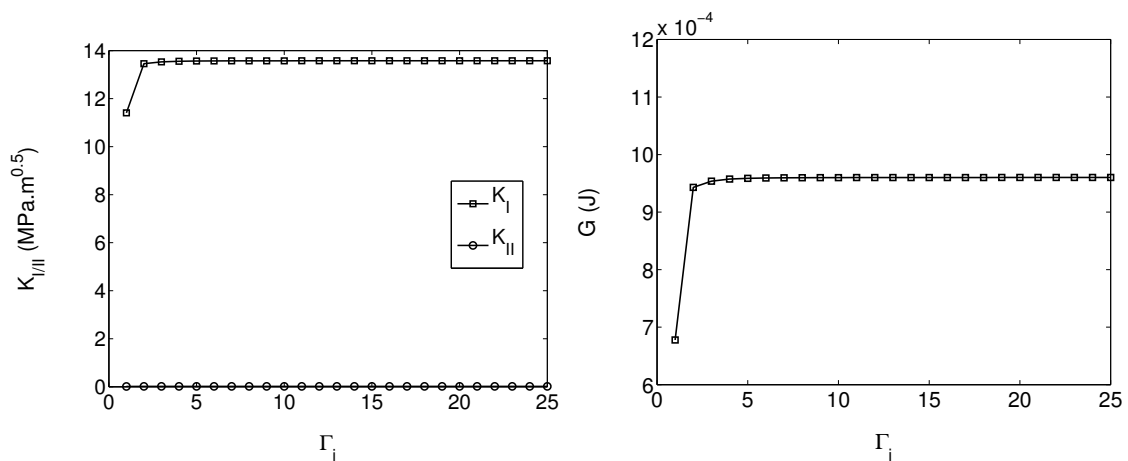
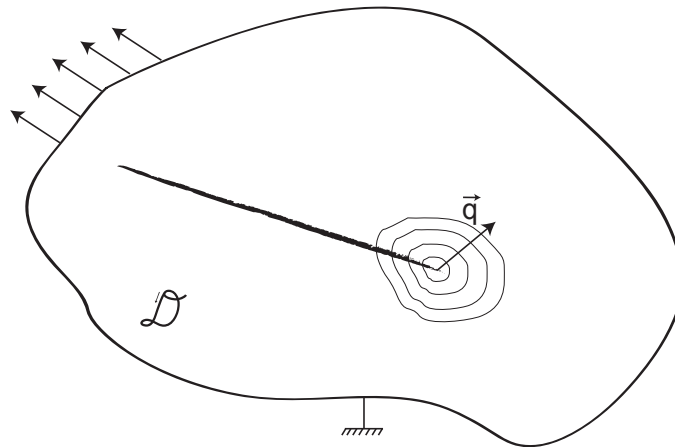


FIGURE 5.20: Évolution des facteurs d'intensité des contraintes sur un ensemble de contours utilisés pour le calcul des intégrales d'interaction. Cas d'une fissure plane



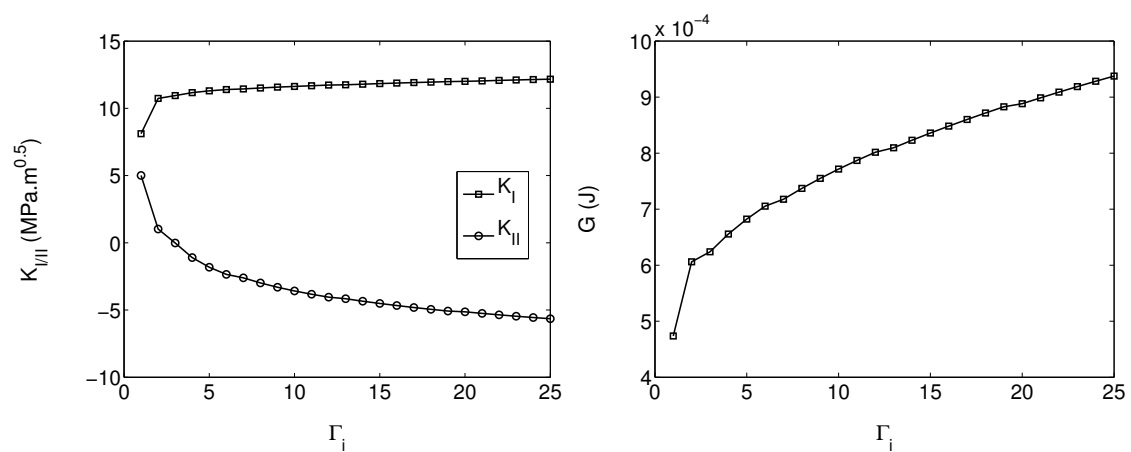
### 3.4.2 Cas d'une fissure plane avec une branche de longueur infinitésimale

Les valeurs de  $(K_I; K_{II})$  trouvée à l'étape précédente seront ensuite injectée dans le modèle de fissuration afin de prédire la direction de propagation  $\theta$  et le taux de création d'aire fissurée  $da$  selon la sollicitation appliquée. Soit  $a$  la longueur de la fissure initiale, afin d'étudier le cas des fissures infinitésimales,  $(da_1; da_2)$  est choisi tel que  $da_1 \rightarrow 0$  et  $da_2 \rightarrow 0$  mais  $\tan\left(\frac{da_2}{da_1}\right) = \theta$ , ainsi le vecteur unitaire  $\underline{q}$  servant au calcul de  $(K_I; K_{II})$  est orienté suivant la direction de propagation prédite par la modèle de fissuration. (FIG.5.21)



**FIGURE 5.21:** Schématisation d'une fissure plane et d'une branche infinitésimale en vue d'un calcul de facteurs d'intensité des contraintes par la méthode des intégrales d'interaction.

La géométrie de la fissure n'a pas changé, le chargement appliqué à l'éprouvette reste le même, mais les facteurs d'intensité des contraintes donnés par les intégrales d'interaction ne sont plus les mêmes. (FIG.5.22). Le chargement appliqué est tel que la fissure est sollicitée en mode *I* pur, or le résultat numérique donné ici laisse croire à une sollicitation de mode *II* supplémentaire. L'indépendance au contour d'intégration pour le calcul des intégrales d'interactions n'est pas vérifiée non plus.



**FIGURE 5.22:** Évolution des facteurs d'intensité des contraintes sur un ensemble de contours d'intégrales d'interaction. Cas d'une branche de fissuration de longueur nulle mais orientée.

### 3.4.3 Cas d'une fissure présentant une branche de longueur finie

Intéressons-nous maintenant à un cas plus concret et plus réaliste. Imaginons que le modèle de fissuration prédise une avancée de fissure finie  $da$  dans la direction  $\theta$ . La fissure initialement plane va donc maintenant comporter deux branches. Le vecteur unitaire  $\underline{q}$  des intégrales d'interaction est orienté dans la direction de la dernière branche créée. (FIG.5.23)

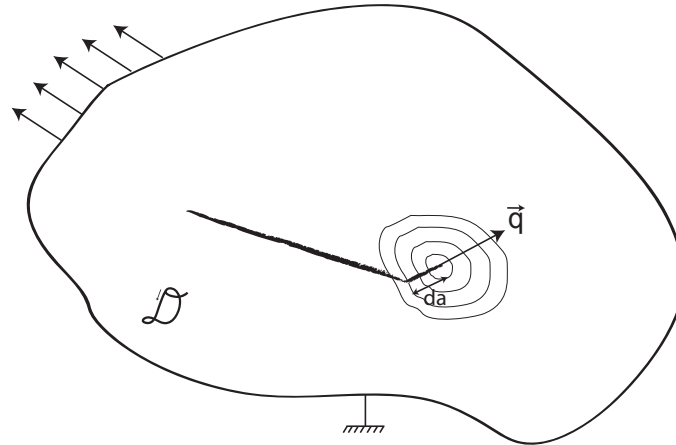


FIGURE 5.23: Cas d'une fissure présentant une branche de longueur finie

Entre le contour 1 et le contour 10, seule la branche de la fissure bifurquée est prise en compte dans le calcul de  $(K_I; K_{II})$ , la solution reste alors indépendante du contour, passé le contour 10, la partie plane de la fissure rentre en compte et on retombe sur les problèmes de la FIG.5.22 à savoir la dépendance du résultat au contour d'intégration.

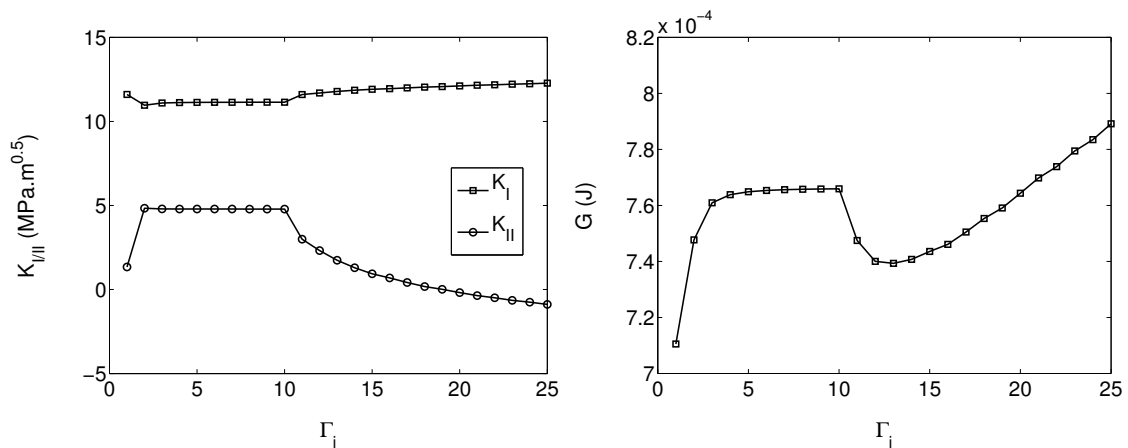
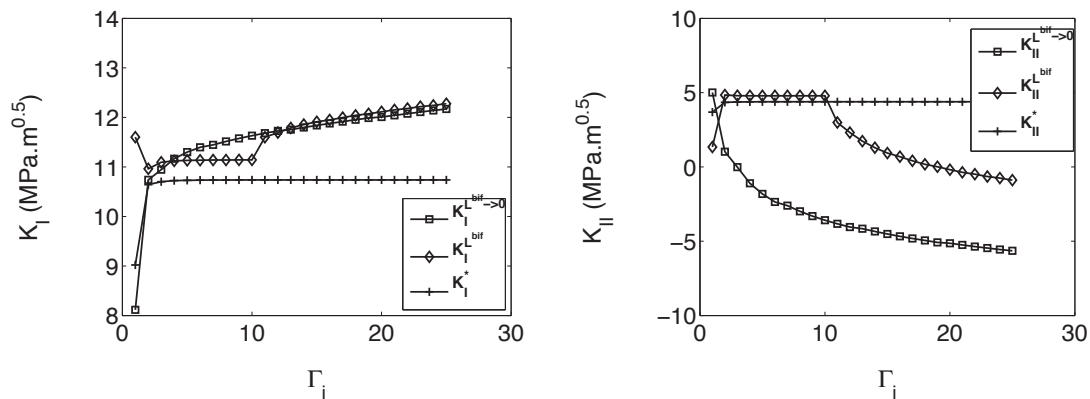


FIGURE 5.24: Évolution des facteurs d'intensité des contraintes sur un ensemble de contours d'intégrales d'interaction. Cas d'une fissure présentant une branche de longueur finie

### 3.4.4 Discussion

À titre de comparaison, nous avons regroupé sur la même FIG.5.25 les valeurs des facteurs d'intensité des contraintes de mode I et de mode II calculés pour :

- Une branche de fissure infinitésimale orientée d'un angle  $\theta$ .
- Une branche de fissure de longueur finie orientée d'un angle  $\theta$ .
- Dans le cadre de [Amestoy et Leblond, 1992] juste après le branchement.



**FIGURE 5.25:** Évolution des facteurs d'intensité des contraintes sur un ensemble de contours d'intégrales d'interaction. Cas d'une fissure présentant une branche de longueur finie

- $K_I^{L^{bif} \rightarrow 0}$  et  $K_{II}^{L^{bif} \rightarrow 0}$  représentent respectivement le facteur d'intensité des contraintes de mode I et de mode II dans le cas la branche de fissure infinitésimale.
- $K_I^{L^{bif}}$  et  $K_{II}^{L^{bif}}$  représentent respectivement le facteur d'intensité des contraintes de mode I et de mode II dans le cas la branche de fissure de longueur finie.
- $K_I^*$  et  $K_{II}^*$  correspondent aux valeurs des facteurs d'intensité des contraintes juste après le branchement selon les résultats de [Amestoy et Leblond, 1992]

On constate que les trois tendent à converger lorsque le contour d'intégration est très petit. La solution analytique et la solution numérique trouvée pour une branche de longueur finie sont également assez proches pourvu que le contour d'intégration n'entoure que la branche de fissure bifurquée. Si les contours d'intégration ont un rayon tel que les deux branches interviennent dans le calcul, le résultat devient très significativement dépendant du contour d'intégration.

### 3.4.5 Bilan

En conclusion, une détermination correcte des facteurs d'intensité des contraintes ne pourra se faire qu'à condition d'appliquer la méthode d'extraction des facteurs d'intensité des contraintes (ici les intégrales d'interaction) à l'échelle des branches de la fissure. Or, compte tenu du modèle utilisé, il est courant de prévoir des branches de longueur micrométrique, qu'il est hors de question de modéliser dans le calcul de structure. Il faudra

donc approcher le trajet de fissuration prévu par le modèle incrémental, par un trajet plus simple, plan par morceaux à l'échelle à laquelle on souhaite travailler dans le calcul de structure. La section suivante a pour objectif de chercher, en s'appuyant sur des calculs numériques par éléments finis, quelle serait la meilleure approximation plane d'une fissure présentant une branche à son extrémité. On peut ensuite approcher une fissure complexe en utilisant la même démarche par récurrence.

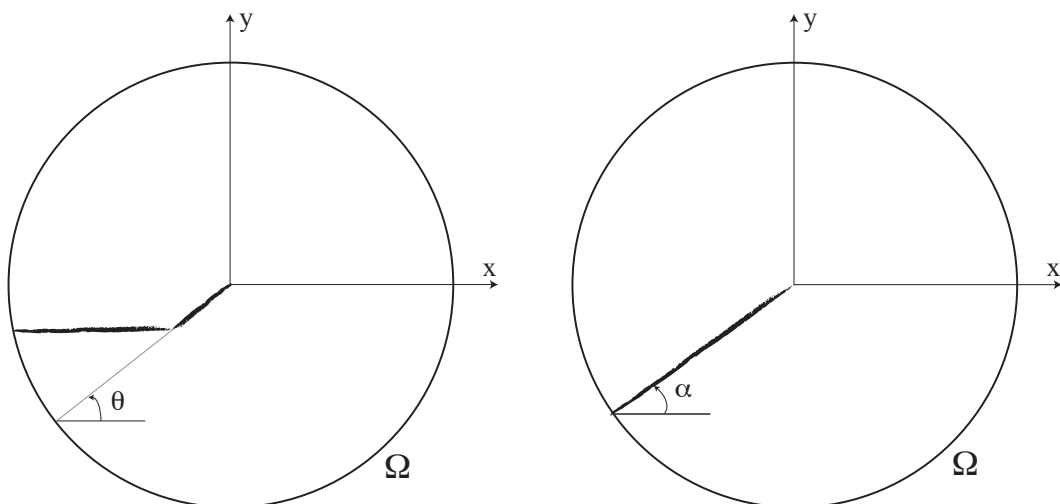
## 4 Détermination de la fissure plane équivalente à une fissure comportant une branche

### 4.1 Équivalence au sens mécanique des fissures droites et bifurquée

Comme il l'a été montré à la section précédente, la méthode des intégrales d'interaction standard pour déterminer  $(K_I; K_{II})$  n'est valable que pour des fissures qui restent planes dans le champs d'action des contours d'intégration. Le même type de difficulté se poserait également avec d'autres méthodes d'estimation des facteurs d'intensité des contraintes. Pour éviter ces difficultés, la fissure pourra être approchée par un plan dans la zone d'intérêt, c'est à dire pour nous dans la zone d'extraction des  $(K_I; K_{II})$ . La question est maintenant de savoir comment approcher un trajet de fissuration complexe par un plan au voisinage de l'extrémité de la fissure.

On se propose donc dans cette partie de déterminer la fissure plane équivalente, au sens mécanique, à une fissure comportant deux branches orientées d'un angle  $\theta$  (FIG.5.26). On distingue l'approximation de la fissure au sens mécanique d'une approximation géométrique de celle-ci, c'est à dire du plan de fissuration moyen. L'approximation au sens mécanique du trajet de fissuration, est celle qui permet d'obtenir, dans la zone d'intérêt, la meilleure adéquation entre les champs mécaniques (en élasticité linéaire, on peut se limiter aux champs de déplacement) calculés avec la géométrie complexe (ici, deux branches) ou avec une géométrie plus simple (ici, un plan).

Pour cela, considérons un domaine  $\Omega$ , centré sur l'extrémité de la fissure, de rayon  $r_d$ , dans lequel on va extraire le champs de déplacement  $\underline{u}$  en chaque point du maillage.



**FIGURE 5.26:** Illustration du domaine fissuré  $\Omega$  : (a) Cas de fissuration "réel" présentant une branche de longueur finie. (b) Fissure plane équivalente orientée d'un angle  $\alpha$  que l'on cherche à déterminer.

On suppose que le milieu peut être soumis à deux chargements extérieurs (épreuve en croix) au minimum, afin de se trouver dans un cas représentatif d'un chargement non-proportionnel. Dans le cas de l'élasticité, il est possible de définir un champ de déplacement  $\underline{u}^{bif}$  donné sur un domaine  $\Omega$  autour de la pointe de fissure (FIG.5.26(a)) tel que :

$$\underline{u}^{bif}(P_{CL_1}, P_{CL_2}) = P_{CL_1} \underline{u}^{CL_1} + P_{CL_2} \underline{u}^{CL_2} \quad (5.16)$$

Avec  $P_{CL_1}$  la proportion de chargement vis-à-vis de la condition aux limites numéro 1 et  $P_{CL_2}$  celle correspondant à la condition aux limites numéro 2. L'ensemble des cas de mixité du chargement sera choisi pour  $P_{CL_1} \in [-1; 1]$  et  $P_{CL_2} \in [-1; 1]$ .

De la même façon, le champ de déplacement  $\underline{u}^{droite}$  est défini ainsi (FIG.5.26(b)) :

$$\underline{u}^{droite}(\alpha) = K_I \underline{u}^I(\alpha) + K_{II} \underline{u}^{II}(\alpha) \quad (5.17)$$

$K_I$  et  $K_{II}$  étant les facteurs d'intensité des contraintes de mode I et de mode II dans un repère attaché à la pointe de fissure orienté d'un angle  $\alpha$ . (FIG.5.26(b))

Chercher la fissure plane équivalente représentant au mieux la fissure "réelle" avec sa branche de longueur finie, au sens mécanique, revient donc à trouver l'angle  $\alpha$ , tel que pour chaque cas de chargement donné par  $(P_{CL_1}; P_{CL_2})$ , les conditions suivantes soit vérifiées :

$$\frac{\partial C^{CL_i}(\alpha)}{\partial \alpha} = 0; \frac{\partial^2 C^{CL_i}(\alpha)}{\partial^2 \alpha} < 0 \quad (5.18)$$

avec :

$$C^{CL_i}(\alpha) = \int_{\Omega} \left( \underline{u}^{bif} - \underline{u}^{droite}(\alpha) \right) \quad (5.19)$$

$$C^{CL_i}(\alpha) = \int_{\Omega} \left( \underline{u}^{bif} - K_I \underline{u}^I - K_{II} \underline{u}^{II} \right) \quad (5.20)$$

Pour chaque couple de conditions aux limites  $(P_{CL_1}; P_{CL_2})$ , on déterminera, par la méthode des moindres carrés, le couple  $(K_I; K_{II})$  qui satisfait la condition 5.18 :

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} |\underline{u}^I|^2 & \underline{u}^I \cdot \underline{u}^{II} \\ \underline{u}^I \cdot \underline{u}^{II} & |\underline{u}^{II}|^2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} \underline{u}^{bif} \cdot \underline{u}^I \\ \underline{u}^{bif} \cdot \underline{u}^{II} \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

On peut en déduire :

$$\begin{pmatrix} K_I \\ K_{II} \end{pmatrix} = A^{-1} B \quad (5.22)$$

Une erreur globale  $C^T(\alpha)$  prenant en compte tous les cas de chargement peut désormais être définie :

$$C^T(\alpha) = \int_{P_{CL_1}} \int_{P_{CL_2}} C^{CL_i}(\alpha) \quad (5.23)$$

$$C^T(\alpha) = \int_{P_{CL_1}} \int_{P_{CL_2}} \int_{\Omega} \left( \underline{u}^{bif} - \underline{u}^{droite}(\alpha) \right)^2 \quad (5.24)$$

$$C^T(\alpha) = \int_{P_{CL_1}} \int_{P_{CL_2}} \int_{\Omega} \left( P_{CL_1} \underline{u}^{CL_1} + P_{CL_2} \underline{u}^{CL_2} - K_{I\alpha} \underline{u}^I(\alpha) - K_{II\alpha} \underline{u}^{II}(\alpha) \right)^2 \quad (5.25)$$

pour  $P_{CL_1} \in [-1; 1]$  et  $P_{CL_2} \in [-1; 1]$ .

Afin d'obtenir une erreur relative à l'ensemble du domaine  $\Omega$ , on définit :

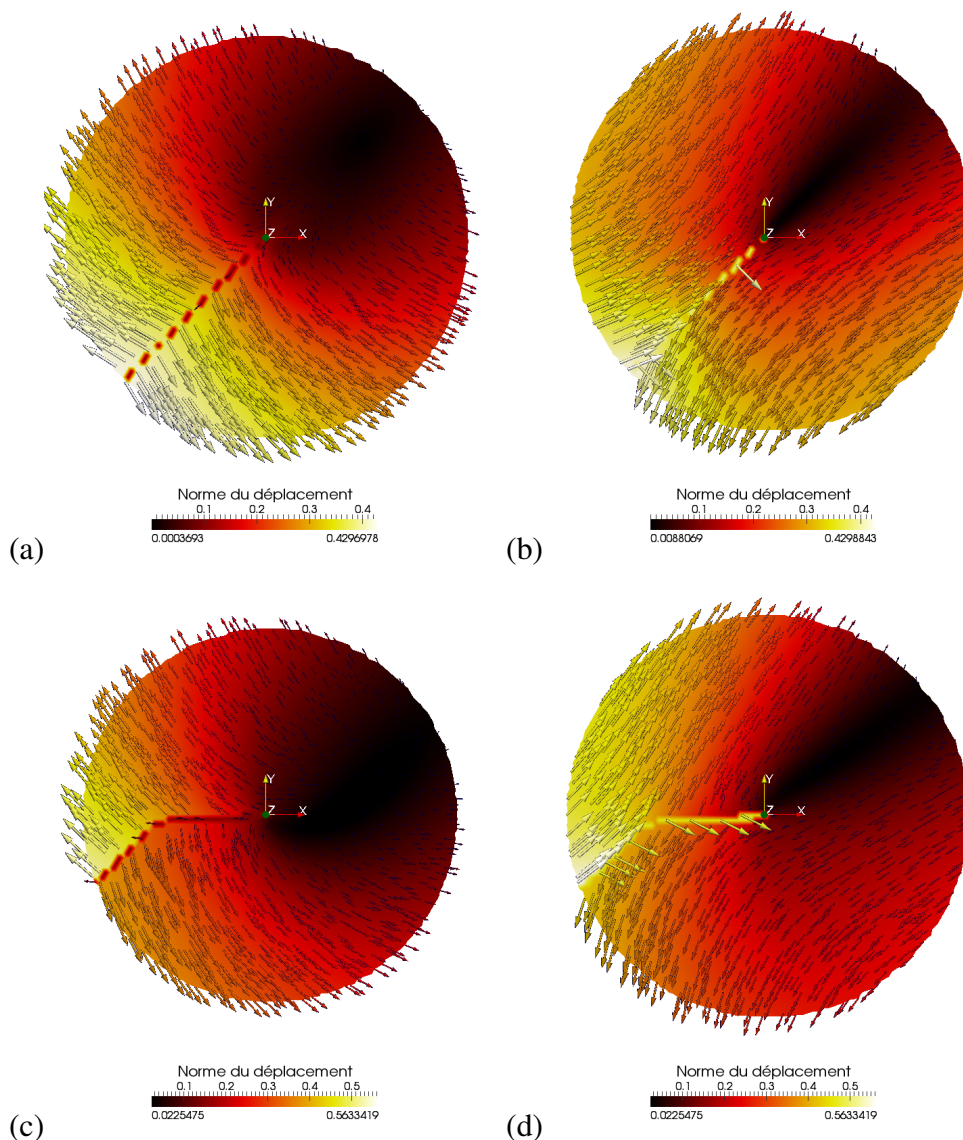
$$C_R^T(\alpha) = \frac{\int_{P_{CL_1}} \int_{P_{CL_2}} \int_{\Omega} \left( P_{CL_1} \underline{u}^{CL_1} + P_{CL_2} \underline{u}^{CL_2} - K_{I\alpha} \underline{u}^I(\alpha) - K_{II\alpha} \underline{u}^{II}(\alpha) \right)^2}{\int_{P_{CL_1}} \int_{P_{CL_2}} \int_{\Omega} \left( P_{CL_1} \underline{u}^{CL_1} + P_{CL_2} \underline{u}^{CL_2} \right)^2} \quad (5.26)$$

$C_R^T(\alpha)$  représente l'erreur relative que l'on commet en admettant que le champ de déplacement de la fissure bifurquée  $\underline{u}^{bif}$  est équivalent au champ de déplacement  $\underline{u}^{droite}(\alpha)$  obtenu dans le cas d'une fissure plane à son extrémité, centré sur la pointe de fissure, orienté d'un angle  $\alpha$ .

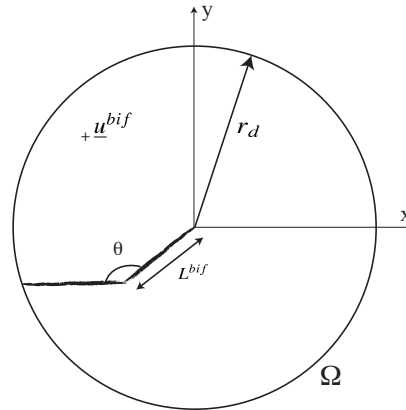


## 4.2 Mise en œuvre de la méthode

L'extraction des champs de déplacement  $\underline{u}^{bif}$  et  $\underline{u}^{droite}$  a été réalisée à l'aide de la plateforme de développement LMTpp (FIG.5.27). Pour chacun des cas de bifurcation étudiés, un masque représentant le trajet de la fissure est généré automatiquement et le maillage est adapté en conséquence. Par ailleurs, la corrélation d'images durant les phases expérimentales est aussi réalisée avec la plateforme de développement LMTpp. Ainsi il serait tout à fait possible de récupérer des champs de déplacement issus de l'expérimentation comme donnée d'entrée à cette étude.



**FIGURE 5.27:** (a)  $\underline{u}^I$  : champ de déplacement de mode I en pointe de fissure. (b)  $\underline{u}^{II}$  : champ de déplacement de mode II. (c)  $\underline{u}^{CL1}$  (d)  $\underline{u}^{CL2}$  : Extraction des champs de déplacement en pointe de fissure plane pour deux jeux de conditions aux limites.



**FIGURE 5.28:** Illustration de la branche bifurquée d'un angle  $\theta = 45^\circ$  de longueur  $L_{bif} = 0.4r_d$

Soit un cas de propagation de fissure où la bifurcation a lieu dans une direction  $\theta = 45^\circ$  telle que  $L_{bif} = 0.4r_d$  (FIG.5.28). La procédure décrite à la section 4.1 pour déterminer la fissure plane équivalente peut être résumée ainsi :

- Étape 1 :  $\alpha = 0$ , le champ de déplacement de la fissure plane est obtenu par rotation d'un champ de référence.
- Étape 2 : Un état de chargement de la fissure bifurquée est choisi dans  $P_{CL_1} \in [-1; 1]$  et  $P_{CL_2} \in [-1; 1]$ .
- Étape 3 :  $(K_I; K_{II})$  est déterminé par la méthode des moindres carrés pour minimiser  $|\underline{u}_{bif} - K_I \underline{u}^I - K_{II} \underline{u}^{II}|$
- Étape 4 : L'erreur  $C^T(\alpha)$  est obtenue pour tous les cas de chargement dans  $P_{CL_1} \in [-1; 1]$  et  $P_{CL_2} \in [-1; 1]$
- Étape 5 :  $\alpha = \alpha + d\alpha$ , retour à l'étape 1.

L'évolution de  $C_R^T(\alpha)$  pour  $\alpha \in [0; 90^\circ]$  est donnée FIG.5.29. La fonction admet bien un minimum pour  $\alpha = 21,6^\circ$ , l'erreur  $C_R^T$  vaut alors 15,2%. Ce minimum peut-être interprété comme étant : l'angle  $\alpha$  d'une fissure plane qui minimise l'erreur  $C_R$  pour tous les cas de chargement, vis-à-vis du cas où le plan de fissuration présentait deux branches orientées d'un angle  $\theta$ .

On peut maintenant s'intéresser à d'autres angles de bifurcation  $\theta$ , et ainsi obtenir la répartition de l'erreur pour toutes les directions de propagation. (FIG.5.30). Les calculs ont été fait pour un domaine d'intérêt de rayon  $r_d$  dans lequel la fissure présente deux portions planes, dont une branche de longueur  $L_{bif} = 0.4r_d$ . Le fond de vallée sera noté  $(C_{Rmin}^T(\theta), \alpha_{min}(\theta))$  dans la suite.

Afin de généraliser cette approche à tous les cas de fissure que l'on pourrait rencontrer, il reste plus qu'à déterminer un loi permettant de relier tous les paramètres de la fissure "réelle", à savoir :  $L^{bif}$  la longueur de la branche de bifurcation et  $\theta$  l'angle de cette dernière, aux paramètres de la fissure plane équivalente qui sont : le rayon du domaine  $\Omega$  dans lequel on approximera la fissure "réelle" et  $\alpha_{min}$  l'angle de la fissure plane optimale.

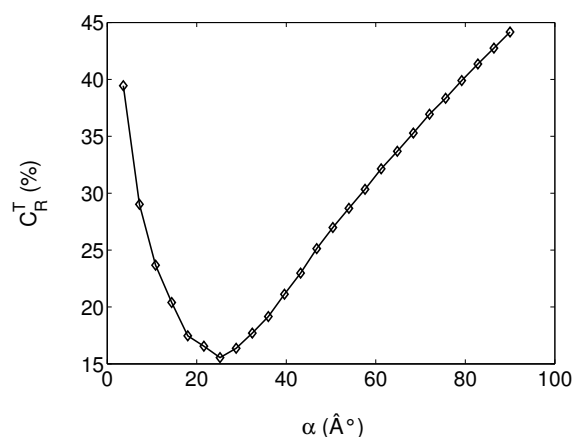


FIGURE 5.29: Évolution de l'erreur relative  $C_R^T(\alpha)$  commise par l'approximation, par une fissure plane, de la fissure présentant une branche à son extrémité.

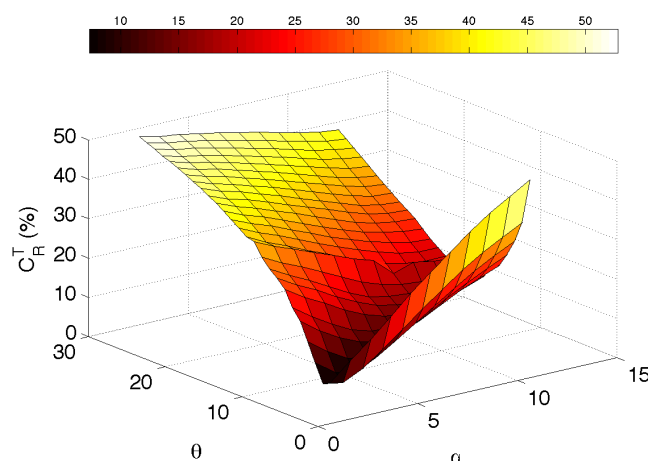


FIGURE 5.30: Repartition de l'erreur pour différents angles de bifurcation  $\theta$  et différents angles de fissure plane équivalente  $\alpha$ .

A partir des résultats présentés FIG.5.32, il est possible d'établir la loi suivante :

$$\frac{\alpha_{min}}{\theta} = \frac{L^{bif}}{r_d} \quad (5.27)$$

avec  $\alpha_{min}$ , l'angle de la fissure plane, pour lequel l'erreur  $C_R^T(\alpha)$  est minimum, ( $L^{bif}; \theta$ ) la longueur et la direction de la branche et enfin  $r_d$  le rayon du domaine  $\Omega$  autour l'extrémité de la fissure où l'approximation est faite.

Comme l'illustre la FIG.5.33, l'approximation par une fissure plane ne se fait pas sans impliquer d'erreur, intéressons-nous à un cas des plus défavorable, à savoir  $L^{bif} = 0.4r_d$ , la branche bifurquée prend ainsi quasiment la moitié du domaine d'étude. L'erreur relative croît logiquement au fur et à mesure que l'angle de bifurcation augmente, allant de 8% à

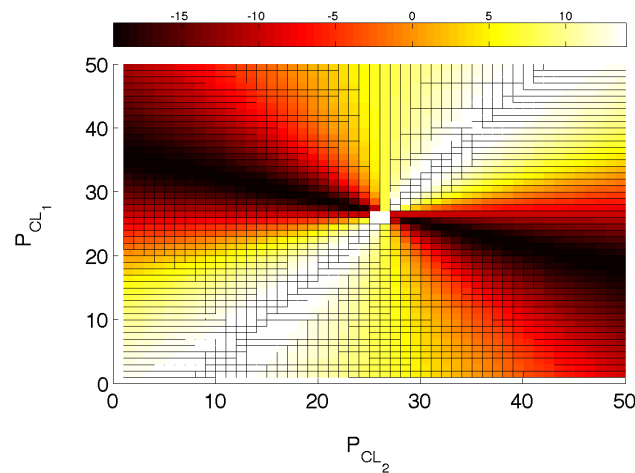


FIGURE 5.31: Répartition de l'erreur  $C_R^T$  en fonction des conditions aux limites définies par  $P_{CL_1}$  et  $P_{CL_2}$ . L'erreur est exprimée en pourcentage d'écart par rapport à la valeur moyenne.

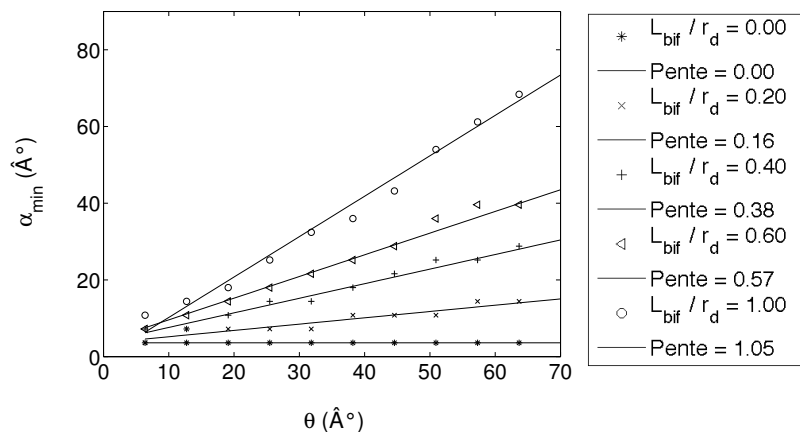


FIGURE 5.32: Loi d'évolution de l'angle  $\alpha$  optimum de la fissure plane en fonction de l'angle de la branche  $\theta$  pour différentes longueurs de branche  $\frac{L_{bif}}{r_d}$

environ 20%.

Par similitude, on peut s'intéresser à l'évolution de l'erreur relative en fonction de la longueur de la branche bifurquée. Elle est maximum pour des rapports  $\frac{L_{bif}}{r_d}$  autour de 0.6 et atteint alors 17%. Les FIG.5.33 et 5.34 permettent de définir un critère dans la mise à jour de la géométrie de fissure. Admettons que l'on ne veuille pas induire plus de 10% d'erreur en approxinant la fissure bifurquée, il faudra alors mettre à jour la géométrie de la fissure dès que la branche occupera 20% du domaine étudié.

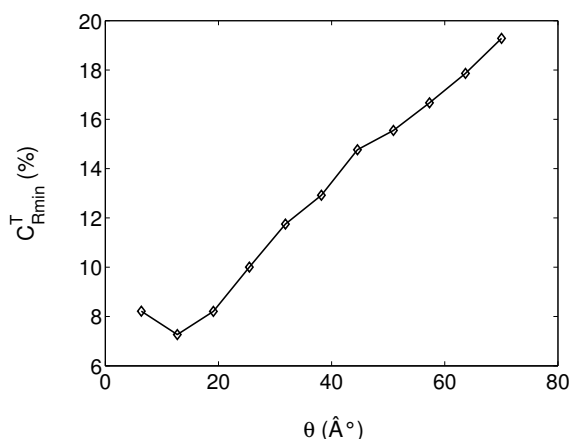


FIGURE 5.33: Erreur relative minimum  $C_{Rmin}^T$  dans l'approximation pour des angles de bifurcation  $\theta \in [0; 70^{\circ}]$

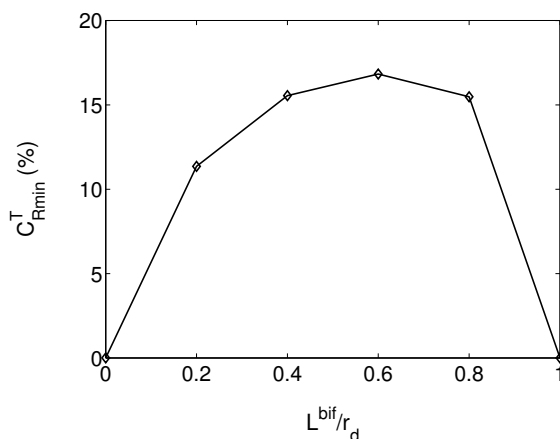


FIGURE 5.34: Angle  $\alpha_{min}$  pour lequel l'erreur est minimum pour les différentes longueurs de bifurcation notées  $\frac{L^{bif}}{r_d}$

#### 4.2.1 Bilan

Cette étude avait pour but de définir comment approcher au mieux un trajet de fissuration complexe par une fissure plane à son extrémité sur un domaine de rayon  $r_d$ , domaine dans lequel sont extrait les facteurs d'intensité des contraintes. Comme les trajets de fissuration prévus par le modèle incrémental sont constitués de segments plans, la démarche peut être mise en place sur un problème élémentaire, une fissure plane principale avec une branche de longueur  $L_{bif}$  à son extrémité, et ensuite appliquée par récurrence pour un problème plus complexe, au fur et à mesure que la fissure se propage.

Les résultats suivants ont été obtenus.

- la meilleure approximation au sens mécanique, n'est pas nécessairement la meilleure approximation au sens géométrique

- la fréquence de la réactualisation de la géométrie est liée à au ratio de la longueur  $\frac{L^{bif}}{r_d}$  de la branche bifurquée par rapport à la dimension du domaine  $r_d$ . L'erreur liée à une approximation par un plan reste inférieure à 10% pour un ratio  $\frac{L^{bif}}{r_d}$  inférieur à 20%.
- une relation simple entre l'orientation optimale  $\alpha_{min}$  du plan de fissuration approché dans un domaine  $r_d$  à l'extrémité de la fissure et l'orientation  $\theta$  de la branche de longueur  $L^{bif}$  a été trouvée :  $\frac{\alpha_{min}}{\theta} = \frac{L^{bif}}{r_d}$ .

### 4.3 Application à un cas concret de fissuration

#### 4.3.1 Mise à jour de la géométrie de fissure

On peut maintenant appliquer la méthode présentée ci-dessus, à l'exemple FIG.5.35(a), section 3.4.3. On cherche à déterminer les facteurs d'intensité des contraintes pour la fissure FIG.5.35(a), elle comporte une branche orientée d'un angle  $\theta = 45^\circ$  de longueur  $L_{bif} = 0.4r_d$ , la fissure plane équivalente dans le domaine  $\Omega$  sera donc orientée d'un angle  $\alpha = 0.4 * 45 = 18^\circ$ . (FIG.5.35(b))

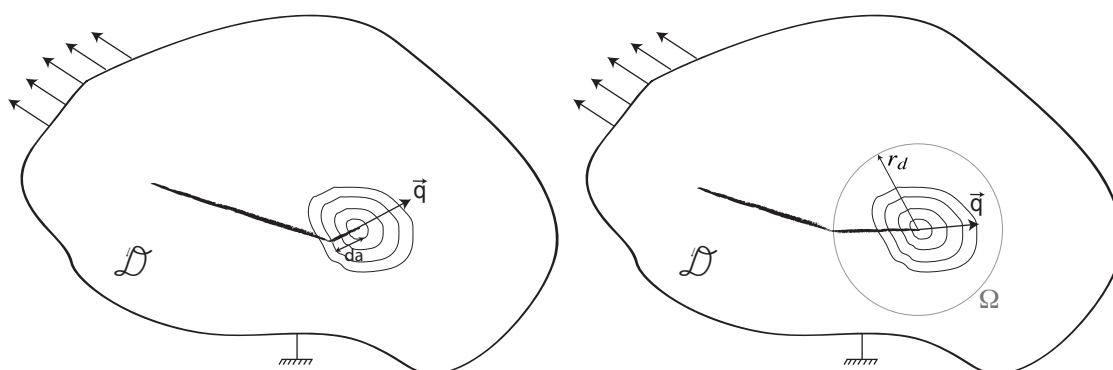


FIGURE 5.35: (a) Géométrie de la fissure bifurquée et les différents contours d'intégration. (b) Nouvelle géométrie de fissure plane dans un domaine d'intérêt  $\Omega$ , de rayon  $r_d$

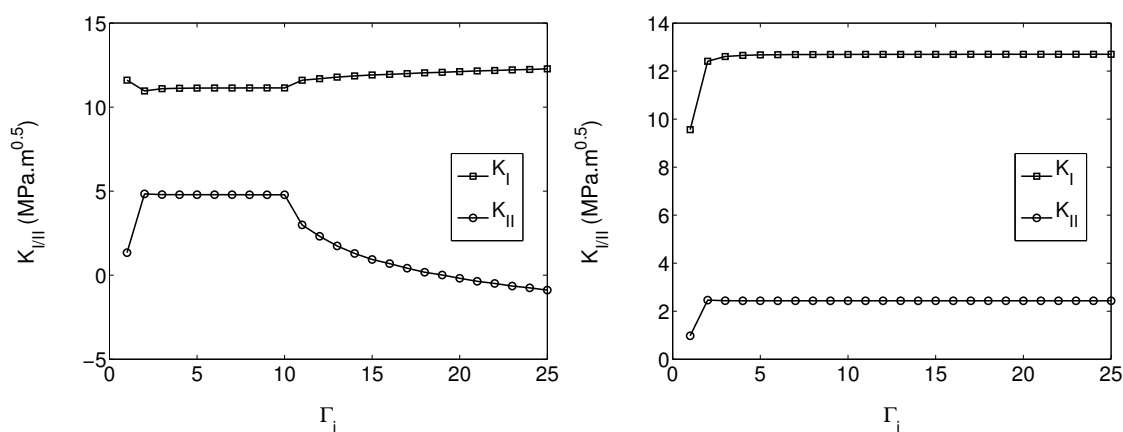


FIGURE 5.36: (a) Calcul des facteurs d'intensité des contraintes par la méthode des intégrales d'interaction sur une fissure bifurquée. (b) Le même calcul sur une géométrie de fissure plane équivalente

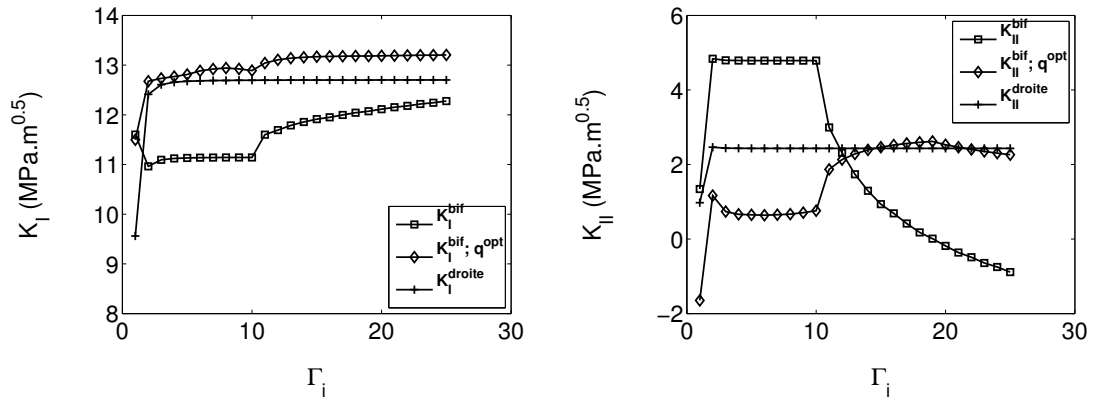


FIGURE 5.37: Valeurs des facteurs d'intensité des contraintes en fonction des contours  $\Gamma_i$  suivant différentes géométries de fissure.(a)  $K_I$ . (b)  $K_{II}$ .

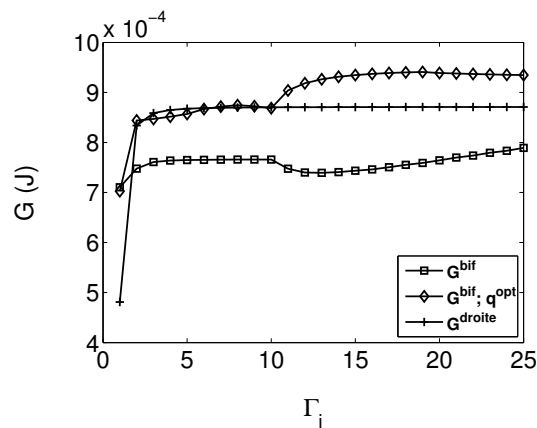
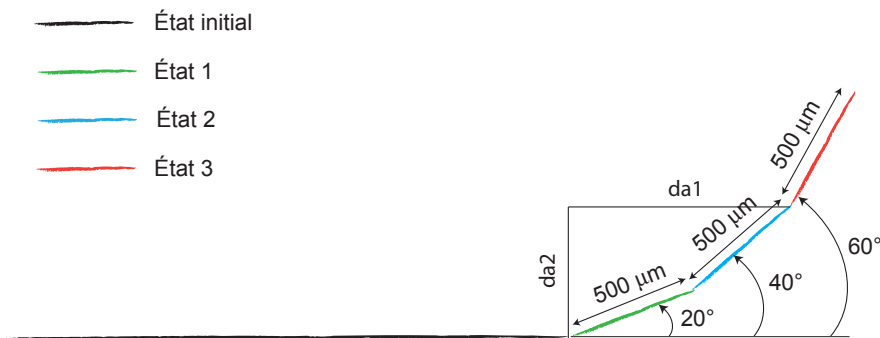


FIGURE 5.38: Test de la fissure droite optimum sur le cas vu au dessus



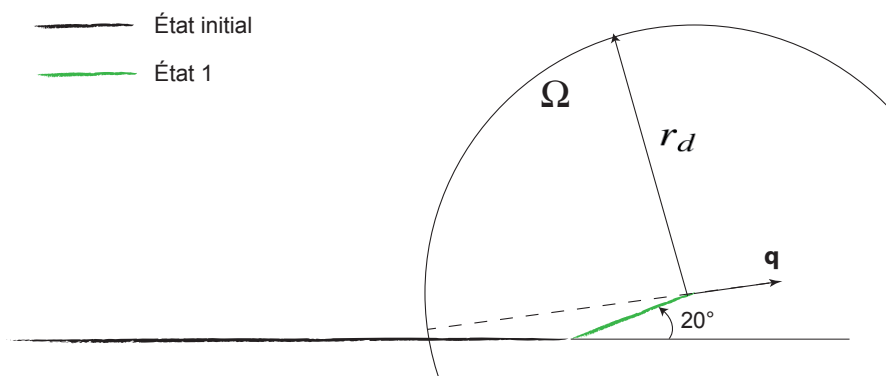
### 4.3.2 Fissure propageante

Nous nous sommes ensuite intéressés à un cas où la fissure se propage (FIG.5.39) pour mettre en œuvre la méthode vue précédemment.



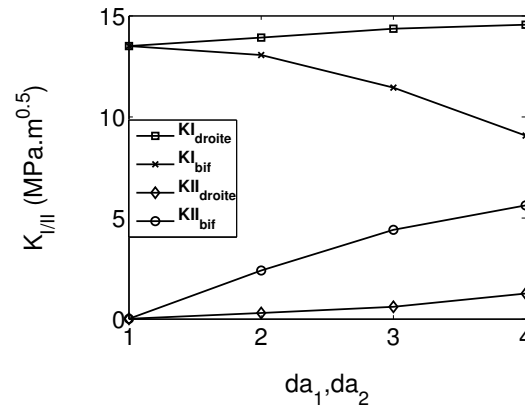
**FIGURE 5.39:** Évolution de la géométrie de fissure au cours du temps, le trajet de fissure est approché par un plan "glissant" de longueur  $r_d$  à son extrémité, l'évolution est ainsi continue entre les états 1 et 2 ou 2 et 3.

Soit une fissure de longueur  $a = 30\text{mm}$  dans son état initial, imaginons maintenant un état de fissuration "1", où le modèle de propagation de fissure en mode mixte aurait prédit une avancée de fissure  $da$  dans la direction  $\theta = 20^\circ$ , vis-à-vis des cycles de chargement que l'on aurait appliqué. Le calcul des facteurs d'intensité des contraintes a été effectué par la méthode des intégrales d'interaction, dans deux cas différents : la premier, avec la géométrie de fissure "réelle" présentant une branche de bifurcation vue par les contours (1 à 10) servant aux intégrales d'interaction et un deuxième cas sur la géométrie "réelle" mais en orientant le vecteur  $q$  non pas selon l'orientation de la dernière branche plane de la fissure "réelle", mais selon l'angle  $\alpha_{min}$  de la fissure plane équivalente. (FIG.5.40).



**FIGURE 5.40:** Géométrie de fissure "réelle" et fissure plane équivalente pour le domaine d'étude  $\Omega$  de rayon  $r_d$

La FIG.5.41 illustre les différents résultats obtenus sur le calcul des facteurs d'intensité des contraintes pour les trois états de fissuration.



**FIGURE 5.41:** Comparaison au cours d'une propagation de fissure en mode mixte

On remarquera que les valeurs obtenues dans les deux cas sont bien distinctes. Les valeurs de  $\Delta K$  indicées "bif" correspondent aux valeurs calculées sans faire d'approximation de la fissure bifurquée. La fluctuation des facteurs d'intensité des contraintes est nettement moins marquée en utilisant l'angle de la fissure plane équivalente à la région d'étude. Bien conscient que cette solution n'est sûrement pas la plus adaptée et fidèle au cas de fissuration "réelle", elle n'est en réalité qu'une ébauche sur ce qui pourrait être réalisé par la suite sur l'intégration de ce modèle au sein d'un code de calcul de structure.

## 5 Résumé du chapitre

Ce dernier chapitre portait sur l'établissement d'une loi de propagation des fissures et l'implémentation du modèle dans un calcul de structure.

Un modèle destiné à représenter le comportement élasto-plastique cyclique en mode mixte de la région entourant l'extrémité de la fissure a été présenté au chapitre précédent, il vise à prédire l'évolution du domaine d'élasticité du matériau, ainsi que l'évolution des variables plastique en accord avec le chargement de mode mixte appliqué. À partir de la connaissance de ces grandeurs plastiques, il devient possible de calculer le taux de création d'aire fissuré à chaque incrément de chargement.

Une loi de fissuration, simple, a donc été proposée pour prédire la direction ainsi que la vitesse de fissuration. Une campagne d'essai sur des éprouvettes de flexion quatre points a permis de comparer les résultats simulés aux essais. Un bon accord a été observé sur les direction de propagation, en revanche la vitesse de fissuration est mal prédite. Contrairement à la loi de propagation choisie dans le cas des chargements de mode I, la loi choisie en mode mixte n'inclue pas les effets de fermeture des fissures. C'est sans doute ce qui est à l'origine de la mauvaise prédiction de la vitesse de fissuration.

Enfin, une étude sur le calcul des facteurs d'intensité des contraintes dans les cas de fissure présentant un branchement a été menée. L'intégration du modèle de plasticité au sein d'un modèle XFEM de calcul des structures nécessite la mise à jour des facteurs d'intensité des contraintes au fur et à mesure de l'avancée. La méthode des intégrales d'interaction utilisée actuellementLes présente de fortes discontinuités dans le calcul des facteurs d'intensité des contraintes, nous avons donc proposé une loi, incluant les effets d'échelle, pour déterminer la fissure plane équivalente au branchement fissuré.

# Conclusion et perspectives

Cette étude a porté sur la modélisation du comportement élasto plastique cyclique de la région entourant l'extrémité d'une fissure sollicitée en mode mixte I+II. Le matériau de l'étude était l'acier S355NL. L'ensemble des campagnes expérimentales menées ont permis de valider les hypothèses simplificatrices sur lesquelles se basent la modélisation. L'objectif initial était de développer un outil performant pour la simulation de la propagation de fissures de fatigue sollicitée en mode mixte non proportionnel I+II.

Dans un premier temps, le matériau de l'étude a été caractérisé afin de pouvoir simuler le comportement en fatigue en mode I via le modèle de [Pommier et Hamam, 2007]. Pour rappel, ce modèle présente l'avantage de réduire le nombre de degrés de liberté du problème à un jeu de quelques variables scalaires. La représentation de l'évolution des champs de vitesse dans la région entourant l'extrémité de la fissure, est condensée dans les évolutions de variables scalaires  $\dot{K}_I$  et  $\dot{\rho}_I$  qui sont respectivement les facteurs d'intensité des champs de référence élastique  $u_I^e$  et complémentaire  $u_I^c$ . Les champs de référence sont des fonctions de forme, et ne dépendent que de l'espace. Un jeu de variables internes est aussi introduit, afin de prendre en compte les effets d'histoire provenant de l'écrouissage du matériau et des contraintes internes dans les zones plastiques cyclique et monotone en pointe de fissure. Les paramètres des lois d'évolutions du modèle de plasticité pour la région entourant l'extrémité de la fissure ont été identifiés en s'appuyant sur des calculs par éléments finis en élasto-plasticité pour plusieurs nuances de l'acier différant par leur traitement thermique. Le paramètre de la loi de fissuration pour chaque nuance a été établi à partir d'un essai de fissuration sous chargement d'amplitude constante. Une campagne d'essais de fissuration sur éprouvettes CCT a permis de valider l'identification des paramètres et la loi de fissuration pour des chargements d'amplitude variable.

L'approximation cinématique sur le champ de vitesse dans la région entourant l'extrémité de la fissure n'avait jusqu'alors été validée que pour des champs issus de simulations numériques en éléments finis et en Mode I. Dans cette étude une validation expérimentale de la démarche a pu être effectuée en mode I et en mode mixte. Des mesures optiques à une échelle réduite (3x3 mm), sur des éprouvettes de flexion quatre points et sur des éprouvettes cruciformes fissurées, ont permis d'acquérir les champs de déplacement en pointe de fissure par corrélation d'images. Il nous a ainsi été possible de construire la base de champs de référence, comportant un champ élastique et complémentaire pour chaque

mode. Une fois cette base construite il a été possible de projeter le champ de vitesse mesuré expérimentalement au cours de chargements multiaxiaux variés sur cette base. Cette méthode appliquée aux éprouvettes de flexion quatre points a permis de montrer que le changement de la vitesse de fissuration en mode I, du fait de l'application de cycles de mode II pouvait être attribuée à un effet transitoire lié à la plasticité. Les essais réalisés sur la machine multiaxiale ASTREE, ont permis de réaliser des sollicitations de mode mixte rayonnant autour d'un niveau moyen et de construire expérimentalement la surface seuil d'écoulement plastique pour la région entourant l'extrémité de la fissure. Il a également été possible d'estimer les directions d'écoulement au passage du seuil de plasticité.

L'extension du modèle de [Pommier et Hamam, 2007] aux chargements de mode mixte I+II non proportionnels a nécessité la réécriture de nouvelles lois de comportement. Afin de prédire l'évolution des variables internes du modèle, un domaine d'élasticité pour la région entourant l'extrémité de la fissure a été défini dans un diagramme  $(G_I, G_{II})$ . La frontière de ce domaine est établie en écrivant un critère de plasticité de Von Mises étendu au cas des champs de la mécanique de la rupture. La position du centre de ce domaine  $(K_I^X, K_{II}^X)$  dépend de l'état des contraintes internes dans la structure fissurée. Cette position est définie comme une variable interne du modèle de plasticité et évolue de manière linéaire en fonction de la mesure du taux de plasticité dans la région entourant l'extrémité de la fissure  $(\dot{\rho}_I, \dot{\rho}_{II})$ . Une loi d'écoulement normale à la surface seuil (dans un diagramme  $(G_I, G_{II})$ ) a été introduite pour calculer  $(\dot{\rho}_I, \dot{\rho}_{II})$ . Un algorithme de retour radial a été utilisé pour satisfaire le critère de plasticité. Les taux de plasticité  $(\dot{\rho}_I, \dot{\rho}_{II})$  pour des cas de chargement variés ont été calculés soit par éléments finis en élasto-plasticité, soit en utilisant le modèle de plasticité pour la région entourant l'extrémité de la fissure. Le modèle peut encore être amélioré. La loi d'évolution du centre du domaine d'élasticité, en particulier, devrait évoluer, elle a actuellement une forme linéaire qui n'est pas très bien adaptée, il faudrait lui donner une forme non-linéaire. Néanmoins les résultats obtenus sont globalement en bon accord avec les résultats des simulations par éléments finis en élasto-plasticité.

Enfin, une loi de fissuration en mode mixte a été proposée afin d'exprimer le taux de création d'aire fissurée par unité de longueur de front de fissure en fonction du taux de plasticité. Différents essais de fissuration en mode mixte ont été réalisés sur des éprouvettes de flexion quatre points, la direction de propagation ainsi que la vitesse de propagation ont ensuite été comparés aux prédictions du modèle. Un très bon accord sur la direction de propagation est obtenu, en revanche la vitesse de propagation est encore mal prédite. Une des raisons principales de cet écart avec l'expérience est que l'évolution du contact avec la plasticité et l'avancée de la fissure n'a pas encore été modélisée. Or le contact est connu pour avoir un effet important en fissuration, par les effets de fermeture et par les effets de friction entre les faces de la fissure. Cette partie du modèle reste à développer et à implémenter.

Les perspectives de ces travaux sont nombreuses. La finalité de ce modèle serait son

intégration au sein d'un outil de calcul de structure de type XFEM. Ainsi il serait possible de combiner les avantages de la méthode XFEM en ce qui concerne les capacités à simuler des structures massives, et les avantages d'un modèle de comportement élasto-plastique dans les régions présentant des fissures. Ce travail a déjà débuté avec le post-doc de Sophie Dartois qui a intégré le modèle de plasticité présenté dans ce rapport au code XFEM de [Guidault, 2005]. Cependant la mise à jour des facteurs d'intensité des contraintes par les méthodes des intégrales d'interactions posait des problèmes de recouvrement des fissures. Une solution a été proposée dans le dernier chapitre de ce document mais son intégration au code XFEM reste à faire.



# Annexes





# Annexe A

## Décomposition de Karhunen-Loeve

D'après les travaux de [Karhunen, 1947], le champs de vitesse  $\underline{v}(P,t)$ , connu pour un ensemble de points  $(P_{i=1,n}, t_{k=1,p})$ , fonction du temps  $t$  et l'espace  $P(x,y)$ , peut être approximé par une somme de produit de fonctions d'une seule variable, par exemple des champs spaciaux  $\underline{u}^m(P)$  et leur facteur d'intensité  $\dot{a}^m(t)$  :

$$\underline{v}(P,t) = \sum_{m=1}^{m_0} \dot{a}^m(t) \underline{u}^m(P) \quad (\text{A.1})$$

Pour approcher la fonction  $\underline{v}(P,t)$ , la matrice  $\underline{\underline{M}}$  du mouvement est construite comme suit :

$$M_{ik} = \underline{v}(P_i, t_k) \quad (\text{A.2})$$

La matrice d'autocorrélation spatiale  $\underline{\underline{C}}$  du mouvement de dimension  $[n, n]$  est défini ainsi :

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^p \underline{v}(P_i, t_k) \underline{v}(P_j, t_k) \quad (\text{A.3})$$

Cette matrice est diagonalisée et on retient, pour approcher  $\underline{\underline{C}}$ , les  $m_0$  vecteurs propres  $\underline{u}^m(P)$  de la matrice  $\underline{\underline{C}}$  qui ont les plus grandes valeurs propres. Par construction, les vecteurs  $\underline{u}^m(P)$  sont orthogonaux et normalisés soit :

$$\sum_{i=1}^n \underline{u}_1^m(P_i) \cdot \underline{u}_2^m(P_i) = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$\sum_{i=1}^n \underline{u}_1^m(P_i) \cdot \underline{u}_1^m(P_i) = 1 \quad (\text{A.5})$$

L'équation ci-dessus implique également que la corrélation spatiales entre deux champs  $\underline{u}^m(P)$  distincts est nulle. Les champs  $\underline{u}^m(P)$  constituent ainsi une base de champs permettant de représenter le mouvement comme une composition de mouvement spatialement

indépendants. Leurs facteurs d'intensité  $\dot{a}^m(t)$  constituent alors les variables cinématiques du problème et se calculent comme suit :

$$\dot{a}_m(t_k) = \sum_{i=1}^n M_{ik} \underline{u}^m(P_i) \quad (\text{A.6})$$

L'erreur associée à l'approximation du mouvement à l'ordre  $m_0$  se calcule comme suit :

$$C(m_0) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^n \left( v(P_i, t_k) - \sum_{m=1}^{m_0} \dot{a}^m(t_k) \underline{u}^m(P_i) \right)^2}{\sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^n (v(P_i, t_k))^2}} \quad (\text{A.7})$$

Le nombre  $m_0$  de mouvements indépendants  $\underline{u}^m(P)$  à considérer est le nombre  $m_0$ , au-delà duquel la réduction de l'erreur par la prise en compte d'un mouvement supplémentaire devient négligeable, soit :

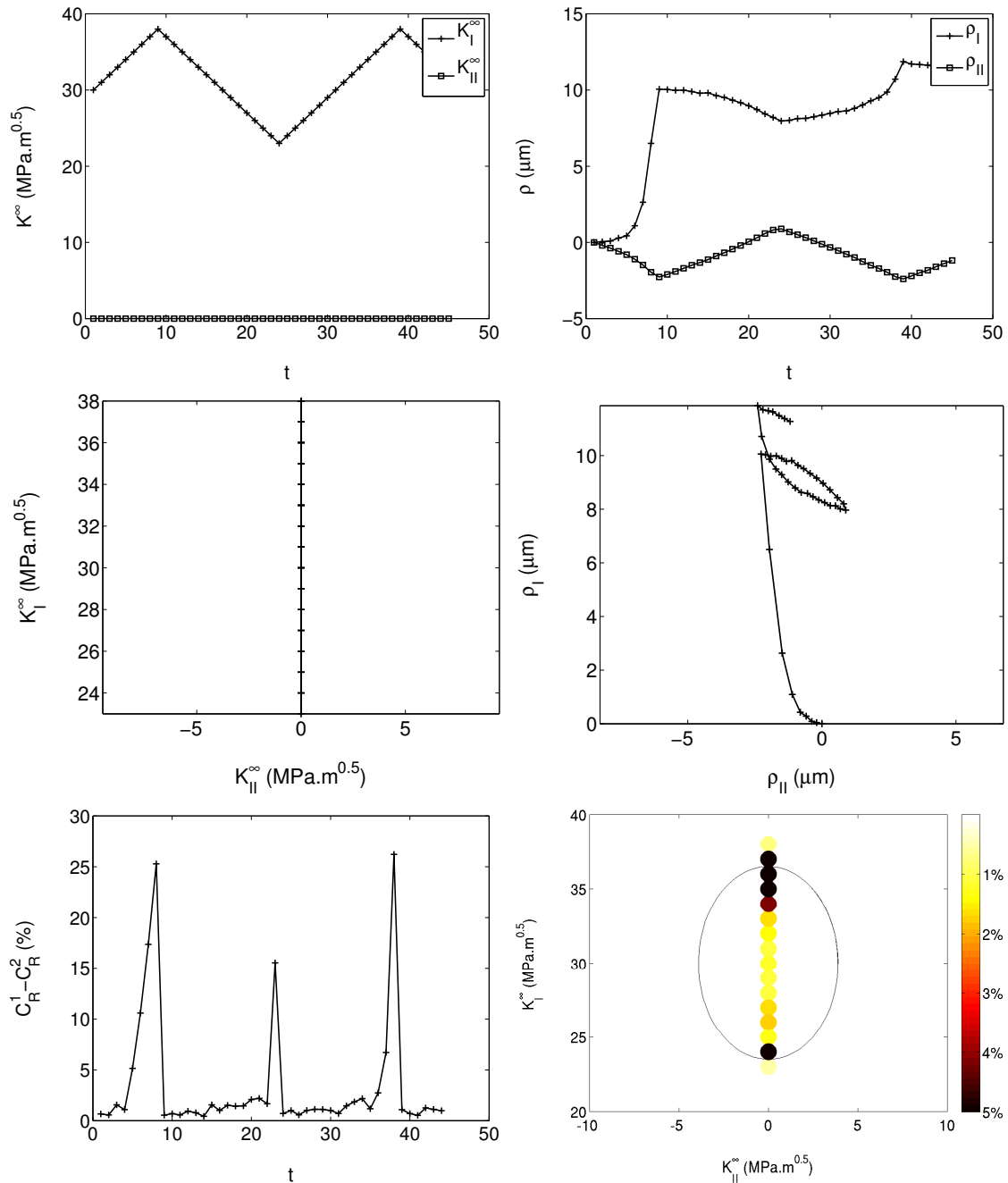
$$\frac{C(m_0) - C(m_0 + 1)}{C(m_0)} < Crit \quad (\text{A.8})$$

## **Annexe B**

# **Mesures expérimentales des variables globales $\tilde{K}_I$ , $\rho_I$ , $\tilde{K}_{II}$ et $\rho_{II}$ avec ASTREE**

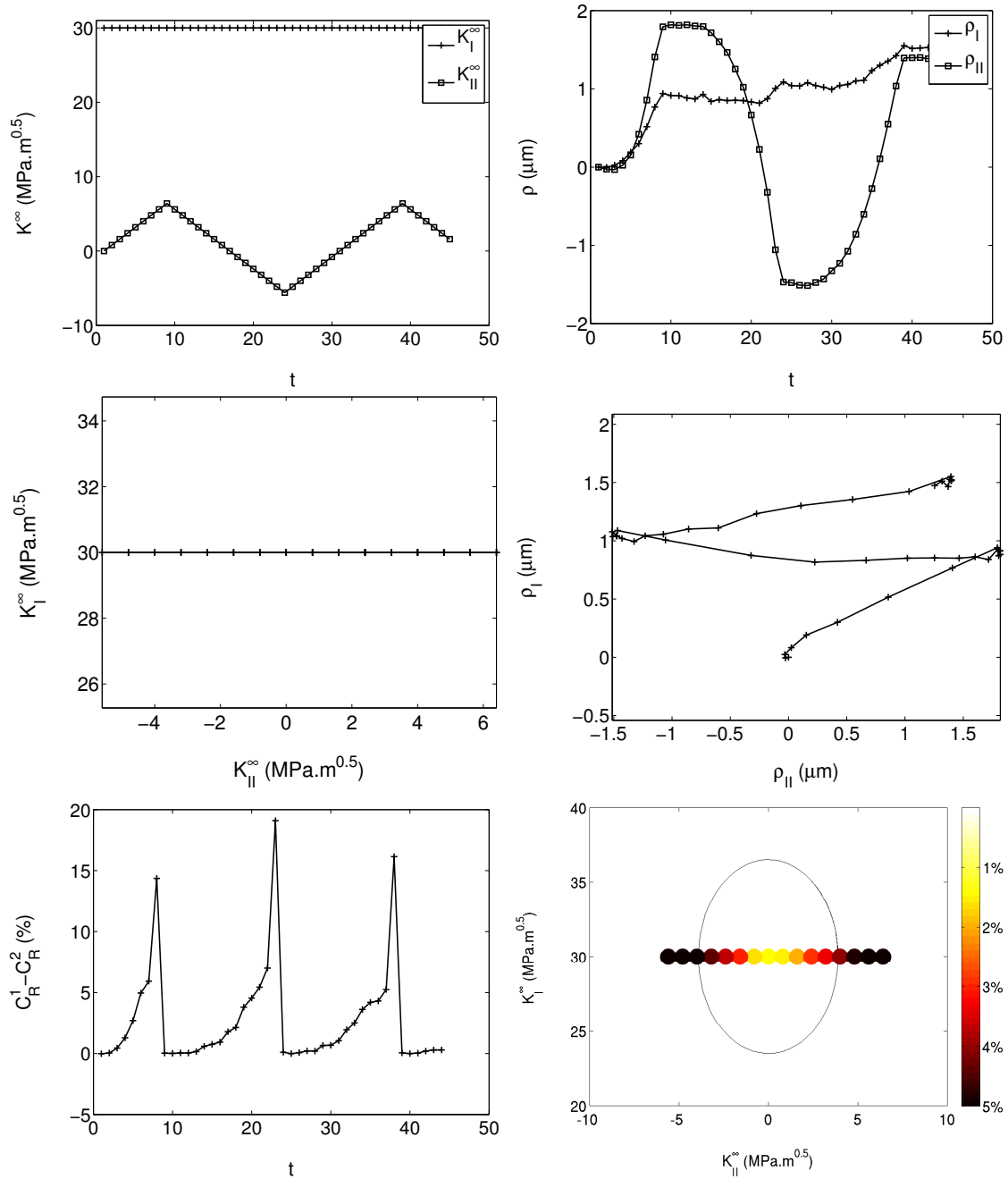


# 1 Surface seuil n°1, direction $K_{II}^\infty = 0MPa\sqrt{m}$



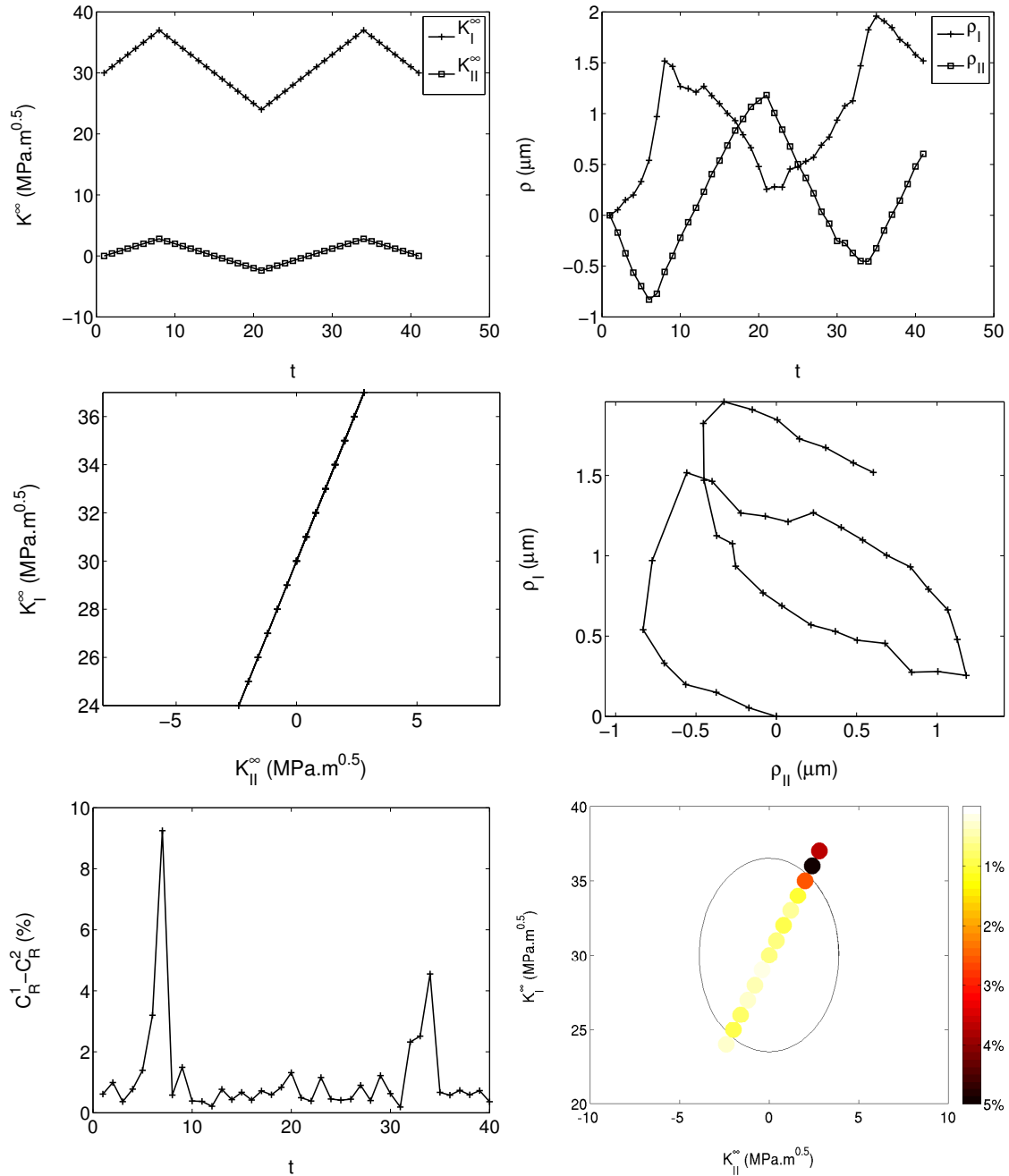
**FIGURE B.1:** (a) Chargement appliqué exprimé en facteur d'intensité des contraintes nominal (b) Évolution des facteurs d'intensité plastiques  $\rho_I$  et  $\rho_{II}$  (c)  $K_I^\infty$  en fonction de  $K_{II}^\infty$  (d)  $\rho_I$  en fonction de  $\rho_{II}$  (e) Évolution de la différence des erreurs  $C_R^1$  et  $C_R^2$  (f) Représentation de l'évolution de l'erreur au cours du chargement

## 2 Surface seuil n°1, direction $K_I^\infty = 30 \text{MPa}\sqrt{m}$



**FIGURE B.2:** (a) Chargement appliqué exprimé en facteur d'intensité des contraintes nominal (b) Évolution des facteurs d'intensité plastiques  $\rho_I$  et  $\rho_{II}$  (c)  $K_I^\infty$  en fonction de  $K_{II}^\infty$  (d)  $\rho_I$  en fonction de  $\rho_{II}$  (e) Évolution de la différence des erreurs  $C_1^R$  et  $C_2^R$  (f) Représentation de l'évolution de l'erreur au cours du chargement

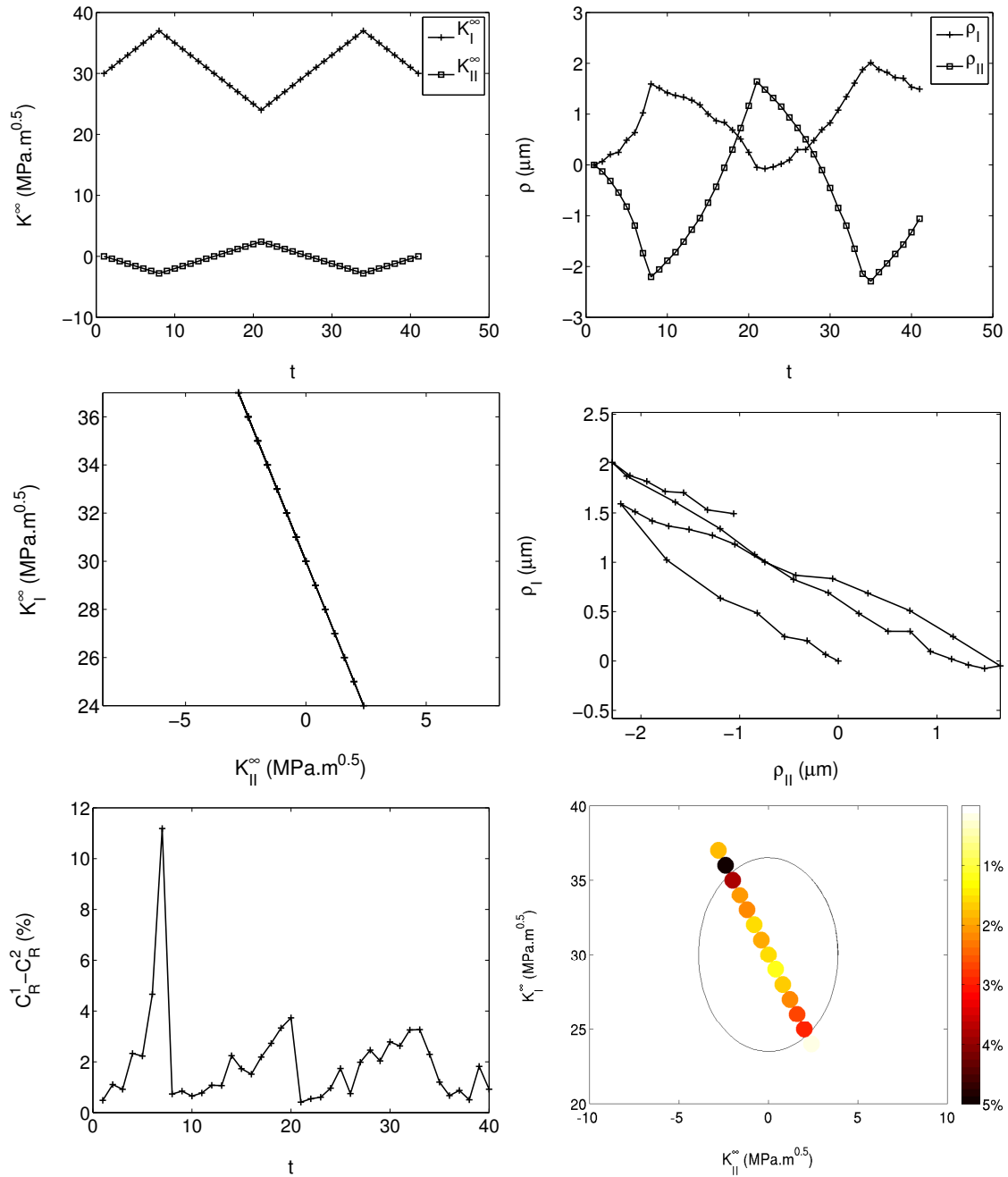
### 3 Surface seuil n°1, direction $\Delta K_I^\infty = 2\Delta K_{II}^\infty$



**FIGURE B.3:** (a) Chargement appliqué exprimé en facteur d'intensité des contraintes nominal (b) Évolution des facteurs d'intensité plastiques  $\rho_I$  et  $\rho_{II}$  (c)  $K_I^\infty$  en fonction de  $K_{II}^\infty$  (d)  $\rho_I$  en fonction de  $\rho_{II}$  (e) Évolution de la différence des erreurs  $C_R^I$  et  $C_R^R$  (f) Représentation de l'évolution de l'erreur au cours du chargement

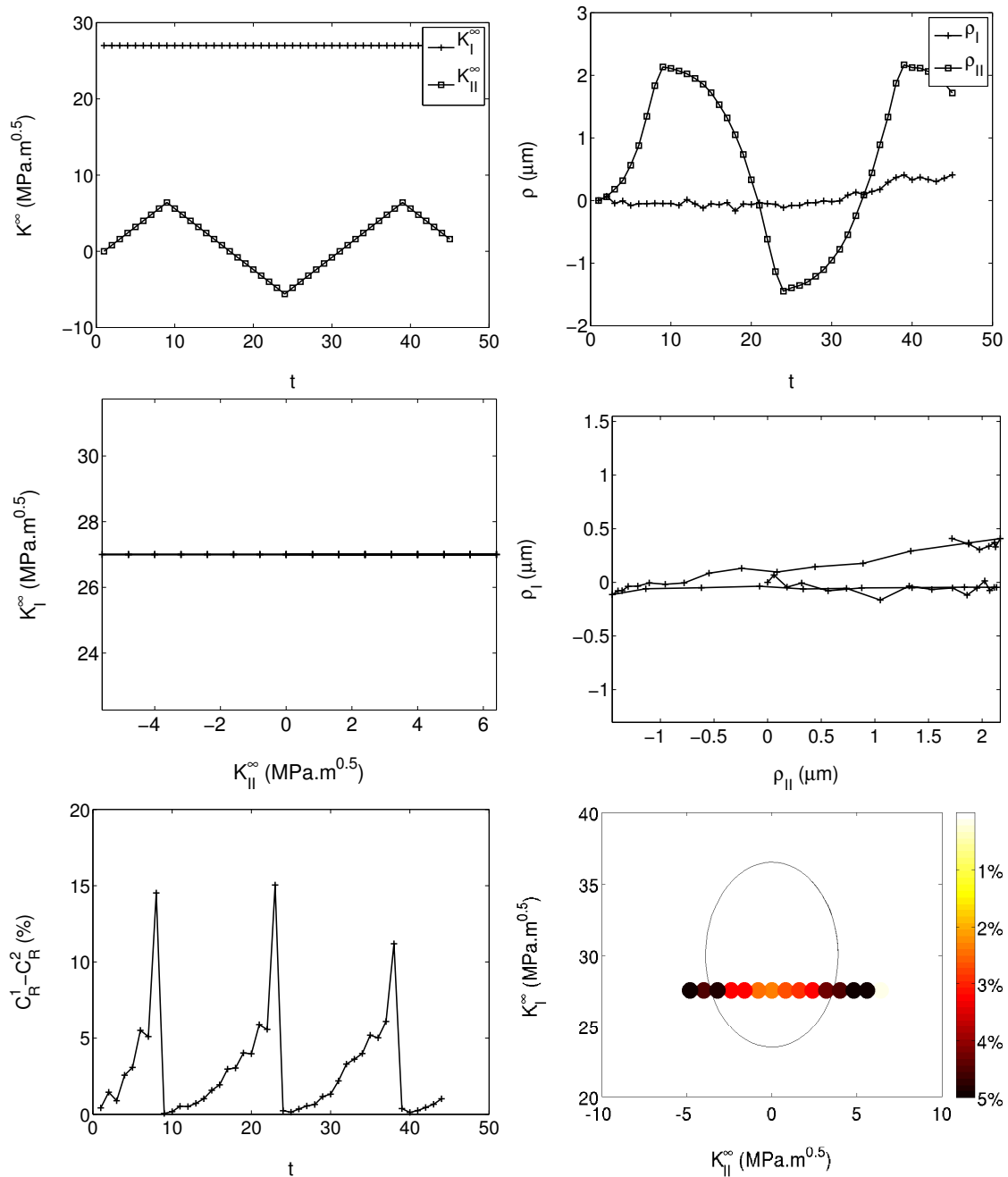


#### 4 Surface seuil n°1, direction $\Delta K_I^\infty = -2\Delta K_{II}^\infty$



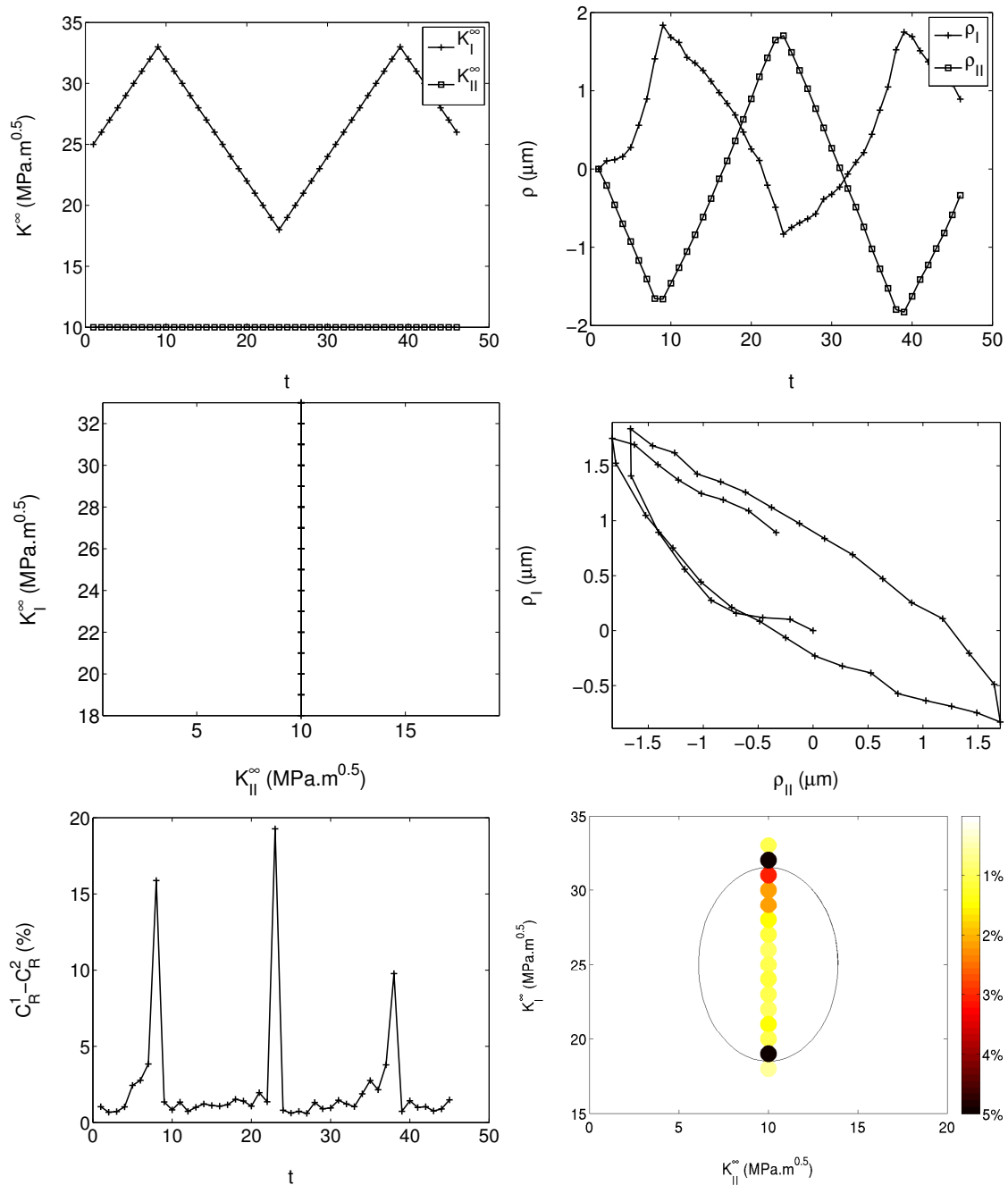
**FIGURE B.4:** (a) Chargement appliqué exprimé en facteur d'intensité des contraintes nominal (b) Évolution des facteurs d'intensité plastiques  $\rho_I$  et  $\rho_{II}$  (c)  $K_I^\infty$  en fonction de  $K_{II}^\infty$  (d)  $\rho_I$  en fonction de  $\rho_{II}$  (e) Évolution de la différence des erreurs  $C_R^1$  et  $C_R^2$  (f) Représentation de l'évolution de l'erreur au cours du chargement

## 5 Surface seuil n°1, direction $K_I^\infty = 27.5 \text{MPa}\sqrt{m}$



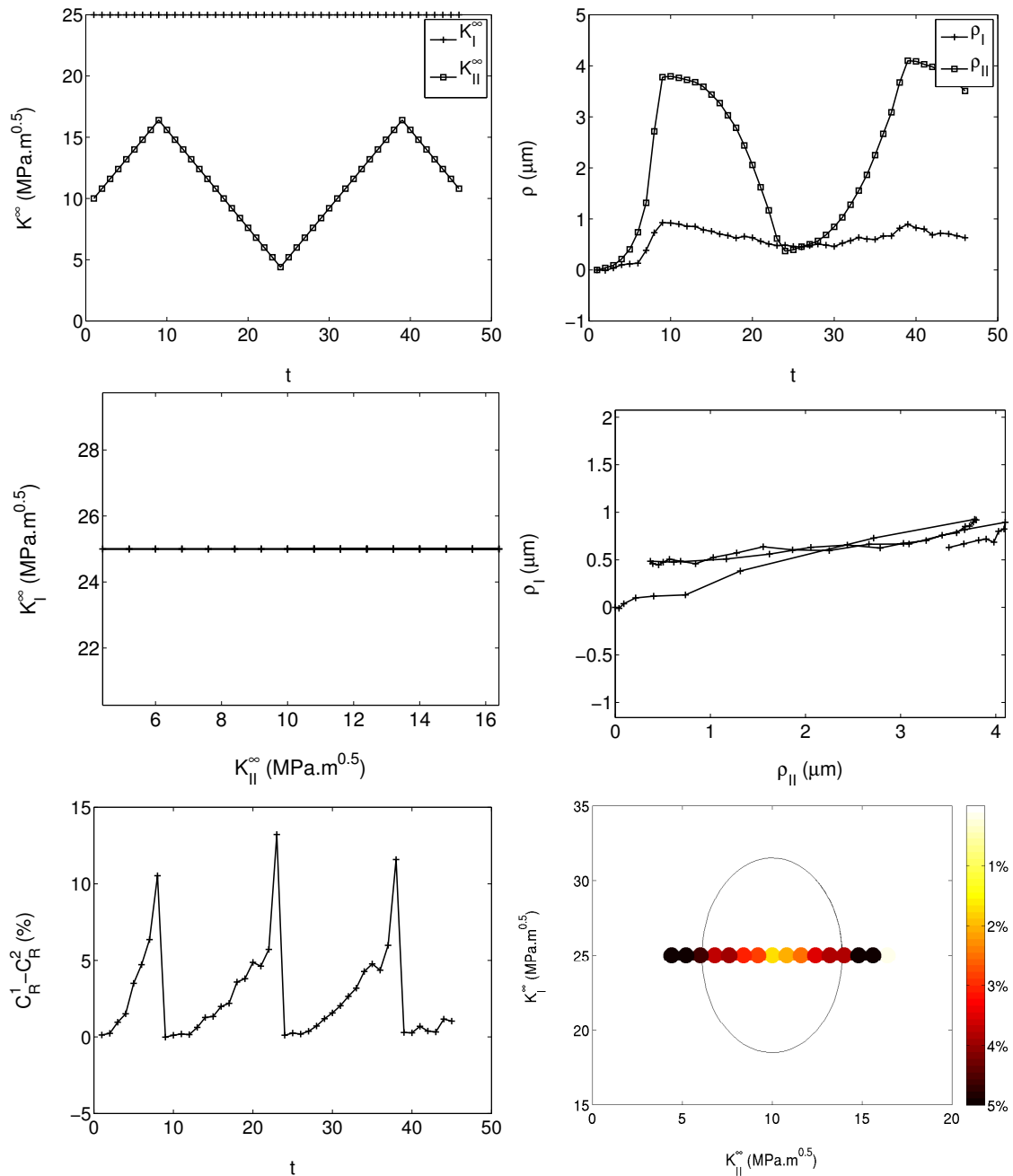
**FIGURE B.5:** (a) Chargement appliqué exprimé en facteur d'intensité des contraintes nominal (b) Évolution des facteurs d'intensité plastiques  $\rho_I$  et  $\rho_{II}$  (c)  $K_I^\infty$  en fonction de  $K_{II}^\infty$  (d)  $\rho_I$  en fonction de  $\rho_{II}$  (e) Évolution de la différence des erreurs  $C_R^1$  et  $C_R^2$  (f) Représentation de l'évolution de l'erreur au cours du chargement

## 6 Surface seuil n°2, direction $K_{II}^\infty = 10 \text{MPa}\sqrt{m}$



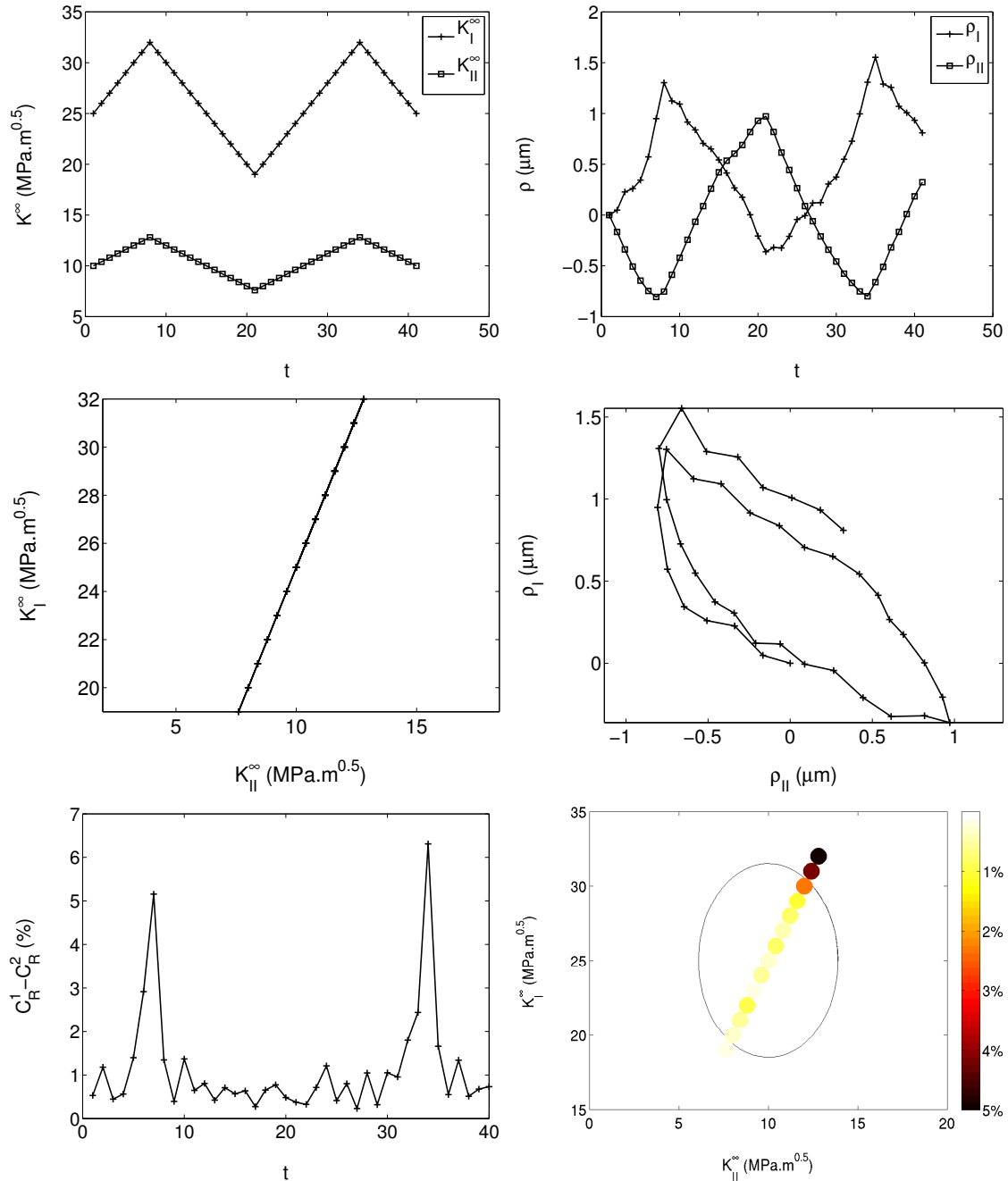
**FIGURE B.6:** (a) Chargement appliqué exprimé en facteur d'intensité des contraintes nominal (b) Évolution des facteurs d'intensité plastiques  $\rho_I$  et  $\rho_{II}$  (c)  $K_I^\infty$  en fonction de  $K_{II}^\infty$  (d)  $\rho_I$  en fonction de  $\rho_{II}$  (e) Évolution de la différence des erreurs  $C_R^1$  et  $C_R^2$  (f) Représentation de l'évolution de l'erreur au cours du chargement

## 7 Surface seuil n°2, direction $K_I^\infty = 25\text{MPa}\sqrt{m}$



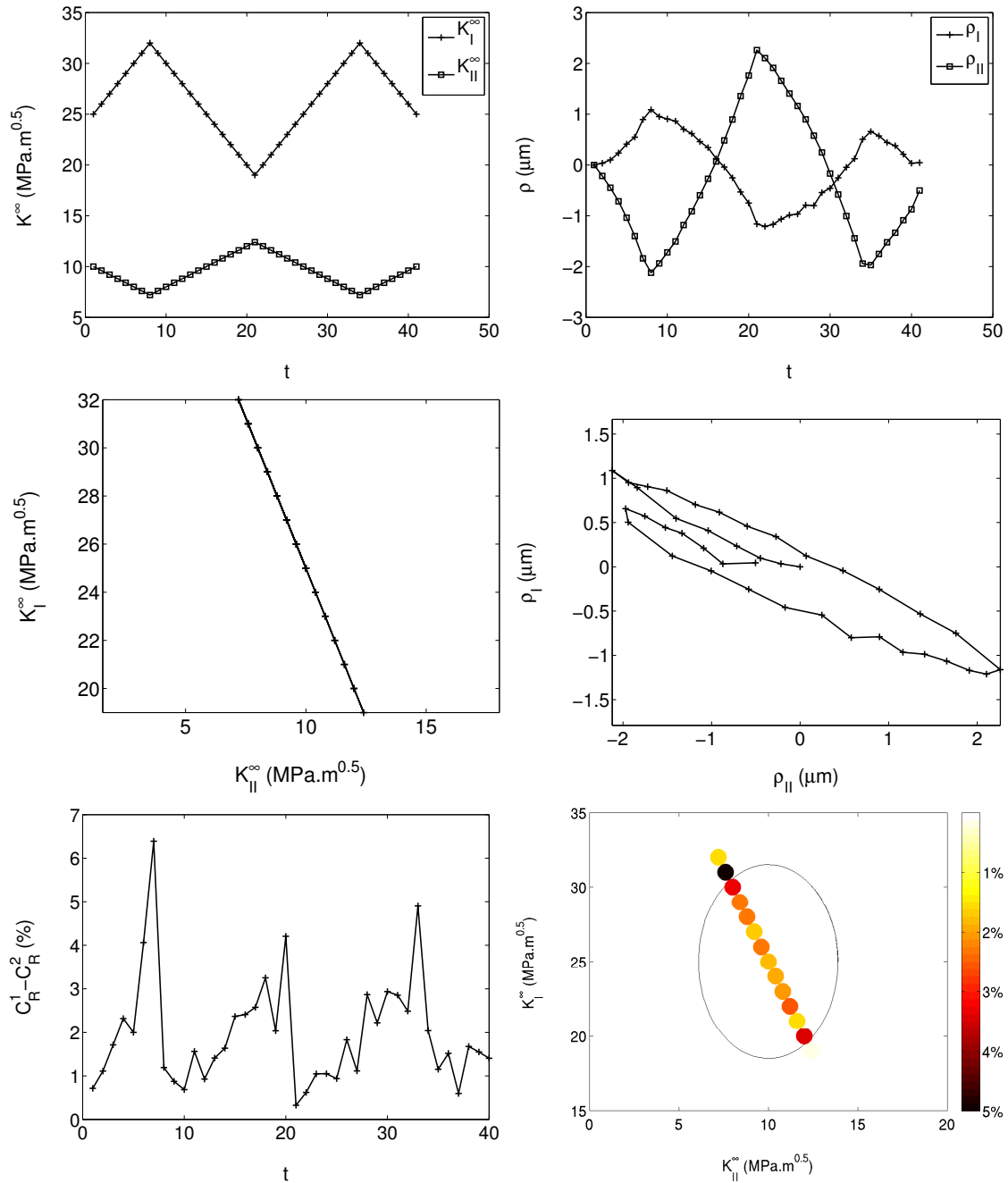
**FIGURE B.7:** (a) Chargement appliqué exprimé en facteur d'intensité des contraintes nominal (b) Évolution des facteurs d'intensité plastiques  $\rho_I$  et  $\rho_{II}$  (c)  $K_I^\infty$  en fonction de  $K_{II}^\infty$  (d)  $\rho_I$  en fonction de  $\rho_{II}$  (e) Évolution de la différence des erreurs  $C_R^1$  et  $C_R^2$  (f) Représentation de l'évolution de l'erreur au cours du chargement

## 8 Surface seuil n°2, direction $\Delta K_I^\infty = 2\Delta K_{II}^\infty$



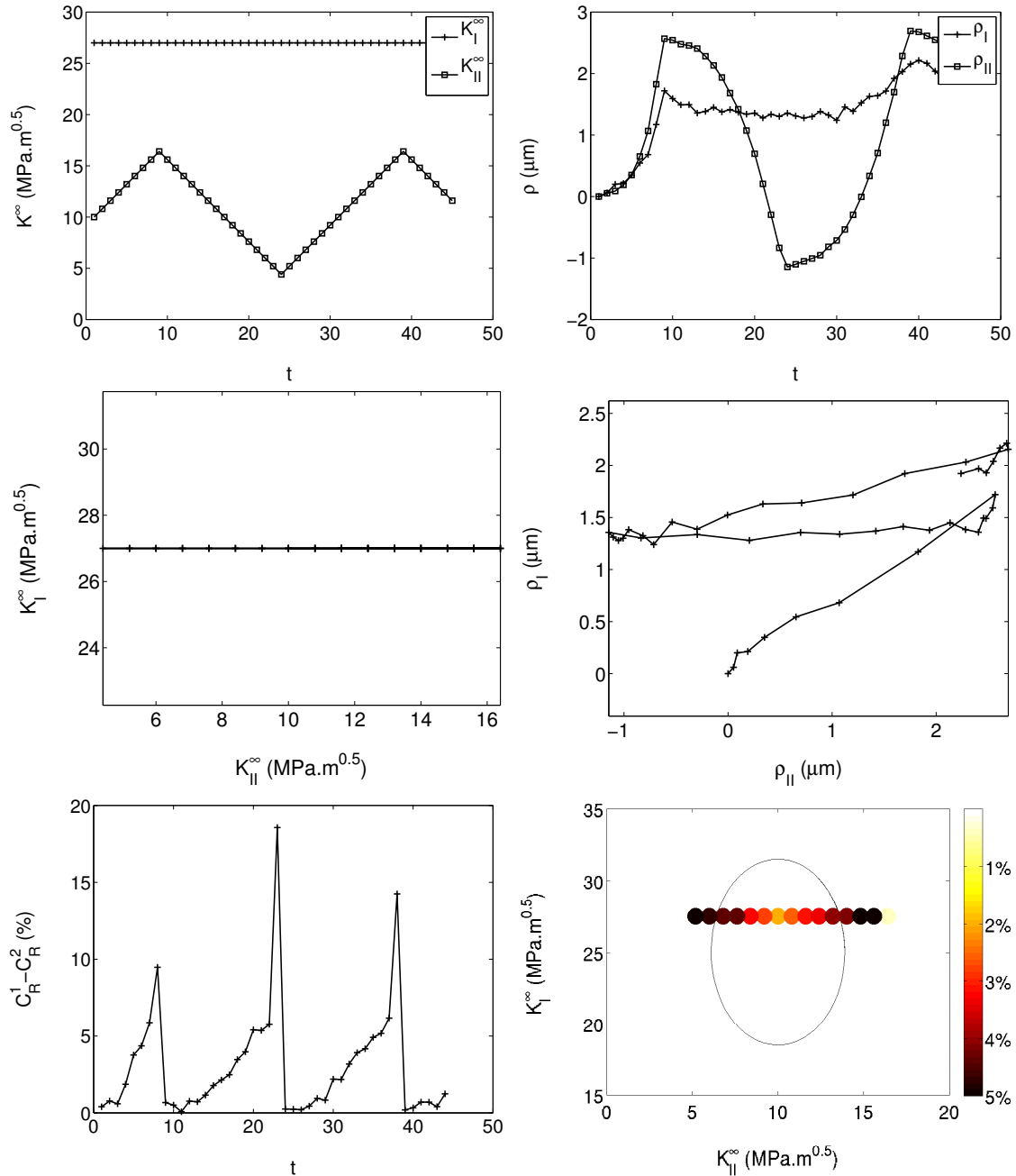
**FIGURE B.8:** (a) Chargement appliqué exprimé en facteur d'intensité des contraintes nominal (b) Évolution des facteurs d'intensité plastiques  $\rho_I$  et  $\rho_{II}$  (c)  $K_I^\infty$  en fonction de  $K_{II}^\infty$  (d)  $\rho_I$  en fonction de  $\rho_{II}$  (e) Évolution de la différence des erreurs  $C_R^1$  et  $C_R^2$  (f) Représentation de l'évolution de l'erreur au cours du chargement

## 9 Surface seuil n°2, direction $\Delta K_I^\infty = -2\Delta K_{II}^\infty$



**FIGURE B.9:** (a) Chargement appliqué exprimé en facteur d'intensité des contraintes nominal (b) Évolution des facteurs d'intensité plastiques  $\rho_I$  et  $\rho_{II}$  (c)  $K_I^\infty$  en fonction de  $K_{II}^\infty$  (d)  $\rho_I$  en fonction de  $\rho_{II}$  (e) Évolution de la différence des erreurs  $C_R^1$  et  $C_R^2$  (f) Représentation de l'évolution de l'erreur au cours du chargement

## 10 Surface seuil n°2, direction $K_I^\infty = 27.5 \text{MPa}\sqrt{m}$



**FIGURE B.10:** (a) Chargement appliqué exprimé en facteur d'intensité des contraintes nominal (b) Évolution des facteurs d'intensité plastiques  $\rho_I$  et  $\rho_{II}$  (c)  $K_I^\infty$  en fonction de  $K_{II}^\infty$  (d)  $\rho_I$  en fonction de  $\rho_{II}$  (e) Évolution de la différence des erreurs  $C_R^1$  et  $C_R^2$  (f) Représentation de l'évolution de l'erreur au cours du chargement

# Bibliographie

- [Amestoy et Leblond, 1992] AMESTOY, M. et LEBLOND, J. (1992). Crack paths in plane situation -ii. detail form of the expansion of the stress intensity factors. *International Journal of Solids and Structures*, 29:465–501.
- [Besnard *et al.*, 2006] BESNARD, G., HILD, F. et ROUX, S. (2006). Finite-element displacement fields analysis from digital images : Application to portevin-le chatelier bands. *Experimental Mechanics*, 46:789–803.
- [Besson *et al.*, 2001] BESSON, J., CAILLETAUD, G., CHABOCHE, J. et FOREST, S. (2001). Mécanique non linéaire des matériaux. *Hermès*.
- [Bui, 2006] BUI, H. (2006). Fracture mechanics. inverse problems and solutions. *Springer*.
- [Calloch et Marquis, 1999] CALLOCH, S. et MARQUIS, D. (1999). Triaxial tension compression tests for multiaxial cyclic plasticity. *International Journal of Plasticity*, 15:521–549.
- [Cotterell et Rice, 1980a] COTTERELL, B. et RICE, J. (1980a). Slightly curved or kinked cracks. *Int J Fract*, 16:155–169.
- [Cotterell et Rice, 1980b] COTTERELL, B. et RICE, J. (1980b). Some remarks on elastic crack-tips stress fields. *Int J Fract*, 16:155–169.
- [Dahlin et Olson, 2002] DAHLIN, P. et OLSON, M. (2002). The effect of of plasticity on incipient mixed mode fatigue crack growth. *Fat. Fract. Eng. Mat. Struct.*, 26:577–588.
- [Dahlin et Olson, 2008] DAHLIN, P. et OLSON, M. (2008). Fatigue crack growth - mode i cycles with periodic mode ii loading. *International Journal of Fatigue*, 30:931–941.
- [Dai *et al.*, 1997] DAI, D., HILLS, D. et NOWELL, D. (1997). Modelling of growth of three-dimensional cracks by a continuous distribution of dislocation loops. *Comput. Mech.*, 19:538–544.
- [Decreuse *et al.*, 2009] DECREUSE, P., POMMIER, S., GENTOT, L. et PATTOFATTO, S. (2009). History effect in fatigue crack growth under mixed mode loading conditions. *Int J of Fatigue*, 31:1733–1741.
- [Doquet *et al.*, 2009] DOQUET, V., ABBADI, M., BUI, Q. et PONS, A. (2009). Influence of the loading path on fatigue crack growth under mixed-mode loading. *International Journal of Fracture*, 159:219–232.



- [Doquet et Bertolino, 2008] DOQUET, V. et BERTOLINO, G. (2008). Local approach to fatigue cracks bifurcation. *International Journal of Fatigue*, 30:942–950.
- [Elber, 1970] ELBER, W. (1970). Fatigue crack closure under cyclic tension. *Engng. Fract. Mech.*, 2:37–45.
- [Elber, 1971] ELBER, W. (1971). The significance of fatigue crack closure. *ASTM STP 486*, pages 230–242.
- [Elguedj, 2006] ELGUEDJ, T. (2006). Simulation numérique de la propagation de fissure en fatigue par la méthode des éléments finis étendus : prise en compte de la plasticité et du contactfrottement. *Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, France*.
- [Erdogan et Sih, 1963] ERDOGAN, F. et SIH, G. (1963). On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *J. bas. Engng, ASME Trans*, 85:519–525.
- [Fett et al., 2004] FETT, T., PHAM, V. et BAHR, H. (2004). Weight functions for kinked semi-infinite cracks. *Eng. Fract. Mech.*, 71:1987–1995.
- [Fleck et Newman, 1988] FLECK, N. et NEWMAN, J. (1988). Analysis of crack closure under plane strain conditions, mechanics of fatigue crack closure. *ASTM STP 982*, pages 319–341.
- [Frelat et Leblond, 1999] FRELAT, J. et LEBLOND, J. (1999). Branchement d’une fissure initialement fermée en présence de frottement. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Astronomy*, 327-12:1251–1258.
- [Gao et Upul, 1996] GAO, H. et UPUL, S. (1996). Effect of non-proportionnal overloading in fatigue life. *Fat. Fract. Eng. Mat. Struct.*, 19:1197–1206.
- [Gao et al., 2007] GAO, N., BROWN, M., MILLER, K. et REED, P. (2007). An effective method to investigate short crack next term growth behaviour by reverse bending testing. *International Journal of Fatigue*, 29:565–574.
- [Griffith, 1920] GRIFFITH, A. (1920). The phenomena of rupture and flow in theory of fracture. *Solids. Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 221:163–198.
- [Guidault, 2005] GUIDAULT, P. (2005). Une stratégie de calcul pour les structures fissurées : Analyse locale-globale et approche multiéchelle pour la fissuration. *Thèse de doctorat*.
- [Hamam, 2006] HAMAM, R. (2006). Simulation de la propagation des fissures par fatigue dans les toiles des roues de train sous chargement à amplitude variable. *Thèse de doctorat*.
- [Hills et al., 1996] HILLS, D., KELLY, P., DAI, D. et KORSUNSKY, A. (1996). Solution of crack problems, the distribution dislocation technique. *Solid Mechanics and its applications*, 44.
- [Hutchinson, 1968] HUTCHINSON, J. (1968). Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material. *J. Mech. Phys. Solids.*, 16:13–31.
- [Irwin, 1960] IRWIN, G. (1960). Plastic zone near a crack and fracture toughness. *Proc. of the 7th Sagamore Ordnance Materials Conference*, 4:63–78.

- [Karhunen, 1947] KARHUNEN, K. (1947). Über lineare methoden in der wahrscheinlichkeitsrechnung. *Mat.-Phys.*, 37:1–79.
- [Leblond, 1989] LEBLOND, J. (1989). Crack paths in plane situation -i. general form of the expansion of the stress intensity factors. *International Journal of Solids and Structures*, 25:1311–1325.
- [Leblond, 1999] LEBLOND, J. (1999). Crack paths in three-dimensional elastic solids. i two-term expansion of the stress intensity factors. application to crack path stability in hydraulic fracturing. *International Journal of Solids and Structures*, 36:79–103.
- [Leclerc *et al.*, 2009] LECLERC, H., PÉRIÉ, J., ROUX, S. et HILD, F. (2009). Integrated digital image correlation for the identification of material properties. *In Mirage 2009*.
- [Lemaitre *et al.*, 2009] LEMAITRE, J., CHABOCHE, J., BENALLAL, A. et DESMORAT, R. (2009). Mécanique des matériaux solides. *Dunod*.
- [McClung, 1996] MCCLUNG, R. (1996). Finite elements perspectives on the mechanics of fatigue crack closure. *In Proc. Fatigue 96, 6th International Fatigue Congress, Berlin FRG*.
- [Miller, 1997] MILLER, K. (1997). The three thresholds for fatigue crack propagation. *ASTM STP*, pages 267–286.
- [Murakami, 1987] MURAKAMI, Y. (1987). Stress intensity factors handbook. *Pergamon Press, Oxford*.
- [Neumann, 1969] NEUMANN, P. (1969). Coarse slip model of fatigue. *Acta metallurgica*, 17:1219–1225.
- [Paris, 1964] PARIS, P. (1964). The fracture mechanics approach to fatigue. in fatigue : An interdisciplinary approach. *Syracuse University Press*.
- [Paris *et al.*, 1961] PARIS, P., GOMEZ, M. et ANDERSON, W. (1961). The fracture mechanics approach to fatigue. *A rational analytic theory of fatigue.*, 13:9–14.
- [Pelloux, 1969] PELLOUX, R. (1969). Mechanisms of formation of ductile fatigue striations. *Transactions of the American. Society for Metals*, 62:281–285.
- [Pommier et Hamam, 2007] POMMIER, S. et HAMAM, R. (2007). Incremental model for fatigue crack growth based on a displacement partitioning hypothesis of mode i elastic-plastic displacement fields. *Fat. Fract. Eng. Mat. Struct.*, 30:582–598.
- [Pommier *et al.*, 2009] POMMIER, S., LOPEZ-CRESPO, P. et DECREUSE, P. (2009). A multi-scale approach to condense the cyclic elastic-plastic behaviour of the crack tip region into an extended constitutive model. *Fatigue, Fracture of Engineering Materials, Structures.*, 32:899–915.
- [Qian et Fatemi, 1996] QIAN, J. et FATEMI, A. (1996). Mixed mode fatigue crack growth, a literature survey. *Engineering Fracture Mechanics*, 55-6:969–990.
- [Rannou *et al.*, 2009] RANNOU, J., LIMODIN, N., RÉTHORÉ, J., GRAVOUIL, A., LUDWIG, W., BAÏETTO-DUBOURG, M., BUFFIÈRE, J., COMBESCURE, A., HILD, F. et ROUX, S. (2009). Three dimensional experimental and numerical multiscale analysis of a fatigue crack. *Computer methods in applied mechanics and engineering*.

- [Rice et Rosengren, 1968] RICE, J. et ROSENGREN, G. (1968). Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. *Phys. Solids.*, 16:1–12.
- [Roux *et al.*, 2008] ROUX, S., HILD, F., VIOT, P. et BERNARD, D. (2008). Three-dimensional image correlation from x-ray computed tomography of solid foam. composites part a. *Applied Science and Manufacturing*, 39:1253–1265.
- [Sander et Richard, 2005] SANDER, M. et RICHARD, H. (2005). Finite element analysis of fatigue crack growth with interspersed mode i and mixed-mode overloads. *International Journal of Fatigue*, 27:905–913.
- [Sander et Richard, 2006] SANDER, M. et RICHARD, H. (2006). Experimental and numerical investigations on the influence of the loading direction on the fatigue crack growth. *International Journal of Fatigue*, 28:583–591.
- [Schreier *et al.*, 2000] SCHREIER, H., BRAASCH, J. et SUTTON, M. (2000). Systematic errors in digital image correlation caused by intensity interpolation. *Optical Engineering*, 39:2915–2921.
- [Suresh, 1998] SURESH, S. (1998). Fatigue of materials. *Cambridge University Press*.
- [Sutton *et al.*, 1983] SUTTON, M., WOLTERS, W., PETERS, W., RANSON, W. et MCNEILL, S. (1983). Determination of displacements using improved digital image correlation. *Image and Vision Computing*, 1:133–139.
- [Tay *et al.*, 2006] TAY, C., QUAN, C., HUANG, Y. et FU, Y. (2006). Digital image correlation for whole field out-of-plane displacement measurement using a single camera. *Optical Engineering*, 45:1–9.
- [Vincent *et al.*, 2004] VINCENT, L., CALLOCH, S. et MARQUIS, D. (2004). A general cyclic plasticity model taking into account yield surface distortion for multiaxial ratchetting. *International Journal of Plasticity*, 20:1817–1850.
- [Westergaard, 1939] WESTERGAARD, H. (1939). Bearing pressures and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 6:49–53.
- [Williams, 1957] WILLIAMS, M. (1957). On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Journal of Applied Mechanics*, 24:109–114.
- [Yoneyama et Kikuta, 2006] YONEYAMA, S. et KIKUTA, H. (2006). Lens distortion correction for digital image correlation by measuring rigid body displacement. *Optical Engineering*, 45:1–9.