



HAL
open science

Modèles analytiques électromagnétiques bi et tri dimensionnels en vue de l'optimisation des actionneurs disques : étude théorique et expérimentale des pertes magnétiques dans les matériaux granulaires

Olivier De de La Barrière La Barrière

► **To cite this version:**

Olivier De de La Barrière La Barrière. Modèles analytiques électromagnétiques bi et tri dimensionnels en vue de l'optimisation des actionneurs disques : étude théorique et expérimentale des pertes magnétiques dans les matériaux granulaires. Autre. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2010. Français. NNT : 2010DENS0032 . tel-00562019

HAL Id: tel-00562019

<https://theses.hal.science/tel-00562019>

Submitted on 2 Feb 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ENSC-(n° d'ordre)

THESE DE DOCTORAT
DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN

Présentée par

Monsieur *Olivier de la Barrière*

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN

Domaine :

ELECTRONIQUE –ELECTROTECHNIQUE-AUTOMATIQUE

Sujet de la thèse :

Modèles analytiques électromagnétiques bi et tri dimensionnels en vue de l'optimisation des actionneurs disques. Etude théorique et expérimentale des pertes magnétiques dans les matériaux granulaires.

Thèse présentée et soutenue à Cachan le 12 Novembre 2010 devant le jury composé de :

Mr P. BROCHET	Professeur des Universités à l'ECL (Lille)	Rapporteur
Mme A. KEDOUS LEBOUÇ	Directrice de Recherche CNRS au GE2Lab (Grenoble)	Rapporteur
Mr F. FIORILLO	Directeur de Recherche CNR à l'INRIM (Turin)	Examineur
Mr M. MARKOVIC	Chercheur à l'EPFL (Lausanne)	Examineur
Mr F. CHABOT	Docteur Ingénieur PSA	Invité
Mr M. GABSI	Professeur des Universités à l'ENS Cachan	Directeur de thèse
Mr H. Ben AHMED	Maître de Conférences HDR à l'ENS Cachan	Encadrant
Mr M. LOBUE	Chargé de Recherche CNRS au SATIE	Encadrant

Laboratoire SATIE
ENS CACHAN/CNRS/UMR 8029
61, avenue du Président Wilson, 94235 CACHAN CEDEX (France)

Remerciements

J'exprime la plus grande reconnaissance à Monsieur Pascal Larzabal, directeur du Laboratoire SATIE, pour m'avoir accueilli au sein de son laboratoire, d'avoir soutenu ma candidature pour l'obtention de l'allocation de recherche, ainsi que pour m'avoir permis d'être moniteur à l'IUT de Cachan.

Je remercie Monsieur Pascal Brochet et Madame Afef Lebouc pour avoir accepté la tâche de rapporteurs. Que Messieurs Miroslav Markovic, Fausto Fiorillo, et Franck Chabot soient également remerciés d'avoir participé au jury de soutenance, et d'apporter leurs expertises à l'évaluation de ce travail.

Ma profonde reconnaissance va à mon directeur de thèse, Monsieur Mohamed Gabsi, ainsi qu'à mes deux co-encadrants, Messieurs Hamid Ben Ahmed et Martino LoBue, pour m'avoir donné l'immense chance de préparer ma thèse à leurs côtés, en particulier pour la confiance qu'ils ont bien voulu m'accorder en me recrutant, et l'extraordinaire ambiance scientifique et humaine dont j'ai pu bénéficier tout au long de ces trois années, qui m'a permis de m'épanouir pleinement dans mes travaux de recherche. En particulier, je remercie Monsieur Mohamed Gabsi pour sa bonne humeur, la qualité de son encadrement scientifique et humain, ainsi que d'avoir supporté mes plaisanteries au cours de ces années. Travailler sous sa direction est un plaisir. Déjà en préparation d'agrégation de Génie Electrique, j'ai eu le privilège de bénéficier des grandes qualités de pédagogue de Monsieur Hamid Ben Ahmed. C'est à cette occasion qu'il a suscité mon intérêt pour cette science passionnante qu'est l'électrotechnique. Je ne le remercierai jamais assez pour sa grande présence (malgré les kilomètres séparant Cachan de Ker Lann), sa disponibilité à toute épreuve (nous avons dû ruiner le laboratoire en notes de téléphone), la très grande qualité de son encadrement scientifique, sa bonne humeur contagieuse, son enthousiasme à toute épreuve, ainsi que la qualité de son accueil et le temps consacré lors de mes trop rares visites à Ker Lann. Mon stage de Master 2 à ses côtés m'a donné envie de m'engager dans cette grande aventure qu'est la thèse. Je remercie vivement Monsieur Martino LoBue, mon co-encadrant sur la partie des matériaux magnétiques, pour ses grandes compétences scientifiques dans un domaine tout nouveau pour moi. Il a su éveiller ma curiosité dans le domaine passionnant des matériaux magnétiques et de la caractérisation des pertes. Je le remercie également pour sa pédagogie, sa clairvoyance et sa maîtrise de la bibliographie dans ce domaine difficile. Merci aussi pour sa bonne humeur permanente, sa gentillesse, sa grande disponibilité, sa patience pour répondre à mes questions, son enthousiasme communicatif, les longues discussions pour interpréter tel ou tel résultat. D'autre part, ses compétences en langue anglaise sont pour moi de la plus grande utilité. Je le remercie enfin de m'avoir permis de travailler avec l'Institut INRIM de Turin, qui est un laboratoire très dynamique dans le domaine des matériaux magnétiques. Cela m'a permis de trouver un post-doctorat, et aiguisé ma volonté de poursuivre, je l'espère, mon activité de recherche dans ce domaine. D'autre part, je remercie mes trois superviseurs pour la patience à toute épreuve dont ils ont toujours su faire preuve lors de la période de rédaction, la qualité de leurs commentaires, qui ont été décisifs pour me permettre d'aboutir à ce mémoire.

Je remercie toute l'équipe de l'INRIM de Turin pour sa gentillesse, et la qualité de l'accueil lors de chacune de mes visites. En particulier, je souhaite remercier Monsieur Fausto Fiorillo pour ses conseils, son aide précieuse, son intérêt constant et son implication dans mon travail. Merci à lui de m'avoir fait partager toute son expérience et ses connaissances aussi bien théoriques qu'expérimentales dans le problème de la caractérisation des pertes magnétiques. Sans son aide, la partie sur les matériaux magnétiques aurait été très réduite. Je remercie au plus haut point Monsieur Carlo Appino, qui a réalisé l'essentiel du travail de mesures magnétiques présenté dans cette thèse. Je sais que cette tâche s'est révélée semée d'embûches, et de surcroît très fastidieuse et répétitive : qu'il trouve ici l'expression sincère de ma reconnaissance. Je remercie également Monsieur Carlo Ragusa, qui a consacré une grande partie de son séjour en tant que professeur invité à travailler avec moi. Les résultats présentés dans la partie matériau doivent beaucoup à son aide précieuse. Je me réjouis de passer une année de post-doctorat en compagnie dans cette équipe très dynamique et fort sympathique.

Je remercie également les autres chercheurs du Laboratoire SATIE dont l'aide m'a été des plus précieuses : Monsieur Frédéric Mazaleyrat, pour son aide, ses conseils, la qualité de ses cours de Master, ses encouragements et sa bonne humeur. Je remercie également Messieurs Emmanuel Hoang, Jean-Paul Louis et Bernard Multon, chercheurs dans l'équipe SETE, pour m'avoir fait partager, chacun à leur manière, leurs grandes compétences dans le domaine de machines électriques, ainsi que leur enthousiasme contagieux en matière de recherche. J'exprime aussi ma gratitude à Vincent Loyau, Gérard Chaplier et Karim Zehani pour m'avoir beaucoup aidé sur la partie expérimentale concernant les matériaux magnétiques, qui était un monde nouveau pour moi. Je fais aussi un clin d'œil à Gérard Chaplier, pour toutes les discussions que nous avons pu avoir. J'exprime également ma reconnaissance à Monsieur Michel Lécrivain, pour son inventivité, ses conseils, sa patience, et sa capacité à mettre au point, et à réaliser rapidement, des solutions techniques aux nombreux problèmes que l'on rencontre lorsque l'on fait des expérimentations. Son aide, particulièrement dans la découpe et le bobinage des tores, m'ont été des plus précieux. Je remercie aussi Monsieur Redouane Harici, pour son aide concernant les aspects expérimentaux, comme le polissage des échantillons de matériau magnétique, leur découpe, etc... J'exprime aussi ma gratitude à Monsieur Olivier Hubert, Chercheur au LMT, pour m'avoir initié à l'observation microscopique des échantillons de SMC.

Que tout le personnel technique du laboratoire SATIE trouve ici l'expression de ma reconnaissance : Messieurs Bach et Robin pour les aspects informatiques, Mesdames Abriet et Buissou pour leur aide précieuse dans les tâches administratives.

Je ne peux pas non plus finir sans exprimer ma reconnaissance envers mes camarades de bureau qui m'ont supporté pendant ces années, avec lesquels une profonde et sincère amitié s'est nouée : Sami Hlioui et Javier Ojeda (les grands, ceux qui étaient là avant moi), et les « jeunes » : Boumedyen Nedjar, Guangjin Li, et Phi Hung Nguyen. C'est extrêmement bénéfique, au cours des trois années que durent la thèse, de se trouver dans une telle ambiance à la fois détendue et studieuse. J'exprime tout particulièrement ma gratitude profonde à Sami Hlioui, qui a toujours répondu présent pour m'aider avec les « ordinateurs », et je crois que la tâche a été rude. C'est aussi grâce à lui que j'ai pu m'initier à l'utilisation des logiciels éléments finis, dont les résultats ont été des plus utiles pour vérifier les modèles électromagnétiques réalisés dans cette thèse. J'exprime aussi ma sincère reconnaissance envers les doctorants des autres sites du laboratoire, qui m'ont toujours témoigné une franche camaraderie lors de mes visites et déplacements : Judicaël Aubry, Julien Seigneurieux, Marie Ruellan, Marianne Lossec, Yaël Thiaux, Vincent Debusschère, Thu Thuy Dang, Pierre François... Je remercie également l'équipe pédagogique avec laquelle j'ai collaboré en tant que moniteur à l'IUT de Cachan au cours de ces trois années : Olivier Béthoux (qui fut aussi mon professeur), Christophe Vermaelen, Elias Khalil, Xavier Mininger, Demba Diallo, Jean-Yves Le Chenadec...

Enfin, je ne pourrais terminer sans remercier ceux qui sont chers à mon cœur, et qui m'ont toujours soutenu au cours de mes études : mon père, ma mère, ma grand-mère, et ma sœur Florence.

Table des matières

1	Généralités sur les machines disques	13
1.1	Les différentes topologies et utilisation des machines à flux axial	13
1.1.1	Les machines à flux axial simple face	14
1.1.1.1	Les topologies à grosses dents	14
1.1.1.2	Les topologies à petites dents	18
1.1.2	Les topologies à flux axial à faces multiples	21
1.1.2.1	Les topologies avec encoches	21
1.1.2.2	Les topologies sans encoche	23
1.2	Modèles électromagnétiques	25
1.2.1	Les modèles fondés sur une modélisation électromagnétique simplifiée.	26
1.2.1.1	Comparaisons des topologies de machines à flux axial entre elles	28
1.2.1.2	Comparaison des topologies des machines à flux axial et à flux radial	35
1.2.2	Les modèles fondés sur une modélisation électromagnétique évoluée	45
1.2.2.1	Les modèles fondés sur la résolution formelle des équations de Maxwell	45
1.2.2.2	Les modèles fondés sur des modèles réductants	49
1.2.2.3	Les modèles éléments finis 3D	50
1.2.2.4	Etude de la sensibilité du modèle sur les résultats d'optimisation	51
2	Les pertes dans les matériaux doux	61
2.1	La caractérisation des matériaux doux en champ bidirectionnel	61
2.1.1	Les différents dispositifs rencontrés pour la mesure des pertes en champ tournant	62
2.1.2	Le problème du contrôle de la forme du locus d'induction	64
2.1.3	La mesure des pertes dans le matériau	67
2.1.3.1	La méthode fondée sur l'évaluation du champ magnétique	67
2.1.3.2	La méthode thermométrique	68
2.2	Présentation de la théorie des pertes dans le matériau ferromagnétique	69
2.2.1	Rappel sur la théorie des pertes en champ unidirectionnel.	69
2.2.1.1	Les pertes par hystérésis.	70
2.2.1.2	Les pertes classiques.	87
2.2.1.3	Les pertes excédentaires.	89
2.2.2	Identification des différents paramètres des pertes en champ alternatif.	98
2.2.2.1	Les pertes classiques.	98
2.2.2.2	Les pertes par hystérésis et excédentaires.	98
2.2.2.3	Prise en compte du comportement des pertes excédentaires en basse fréquence.	100
2.2.2.4	Présence de cycles mineurs.	101
2.2.3	Etude des pertes en champ bidimensionnel.	103
2.2.3.1	Une étude simplifiée : le modèle de Stoner et Wohlfarth (1948)	103
2.2.3.2	Le modèle phénoménologique des pertes en champ tournant.	106
2.2.3.3	Les modèles de déduction des pertes en champ tournant à partir de mesures.	113
2.2.3.4	Autres méthodes présentes dans la littérature pour déduire les pertes en champ tournant à partir de mesures.	118

3	Modèles analytiques 2D	125
3.1	Présentation de la topologie à modéliser, et état de l'art sur les modèles	125
3.1.1	La topologie étudiée	126
3.1.2	État de l'art sur les différents modèles présents dans la littérature	127
3.1.2.1	Le calcul de la distribution du champ magnétique dans l'entrefer	127
3.1.2.2	Le calcul de la distribution du champ magnétique dans les parties ferromagnétiques, et calcul des pertes fer associées	128
3.1.2.3	Apport du travail de modélisation présenté	130
3.2	Modèles sans effet d'encoche statorique	130
3.2.1	Le calcul de l'induction dans l'entrefer	132
3.2.1.1	Calcul de l'induction à vide	132
3.2.1.2	Calcul de l'induction due aux courants statoriques	138
3.2.2	Le calcul de l'induction dans les parties ferromagnétiques de la machine	145
3.2.2.1	Calcul des inductions dans les parties ferromagnétiques statoriques	145
3.2.2.2	Calcul des inductions dans les parties ferromagnétiques rotoriques	151
3.3	Modèles avec effet d'encoche statorique	154
3.3.1	Le calcul de l'induction dans l'entrefer	154
3.3.1.1	Exposé de la méthode analytique	154
3.3.1.2	Vérification par éléments finis des résultats	156
3.3.2	Le calcul de l'induction dans les parties ferromagnétiques de la machine sur la base du calcul des inductions dans l'entrefer en tenant compte des encoches	164
3.3.2.1	Calcul de l'induction dans les dents du stator	164
3.3.2.2	Calcul de l'induction dans la culasse du stator	166
4	Modèles analytiques 3D	173
4.1	Revue des méthodes de modélisation analytique tri-dimensionnelles des machines électriques présentes dans la littérature	174
4.1.1	Méthodes générales de prise en compte des effets tri-dimensionnels dans les machines électriques	174
4.1.2	Méthodes propres à l'actionneur à flux axial	186
4.1.3	Apport du travail proposé dans ce chapitre	190
4.2	Le modèle analytique 3D de l'actionneur résultant du développement de la machine à flux axial au niveau du rayon moyen	191
4.2.1	Cadre de l'étude	191
4.2.1.1	Hypothèses simplificatrices pour la modélisation analytique	191
4.2.1.2	Récapitulatif de la structure étudiée	192
4.2.2	Méthode de calcul analytique du flux à vide avec prise en compte des effets de bord	193
4.2.2.1	Modèle de l'actionneur développé au rayon moyen	194
4.2.2.2	Modèle 3D de l'actionneur développé au rayon moyen	197
4.2.2.3	Méthode originale pour le calcul de la fonction perméance $m(z)$ tenant compte de la longueur finie du fer W	201
4.2.2.4	Comparaison des modèles quasi-3D et 3D entre eux, et avec la méthode des éléments finis 3D	203
4.2.3	Extension du modèle 3D au cas d'aimants de forme plus complexe	210
4.2.3.1	Extension du modèle analytique 3D au cas des aimants circulaires	211
4.2.3.2	Présentation des résultats	214
4.2.4	Méthode pour le calcul de l'inductance cyclique de la machine	218
4.2.4.1	Hypothèses de travail et enjeux de la modélisation 3D de l'inductance cyclique de la machine linéaire	218
4.2.4.2	Détail du modèle analytique réalisé	221
4.2.4.3	Présentation des résultats obtenus	225
4.3	Le modèle analytique 3D de l'actionneur à flux axial à aimants permanents	228
4.3.1	Cadre de l'étude	228
4.3.1.1	Hypothèses simplificatrices	228
4.3.1.2	Structure de l'actionneur étudié	229

4.3.2	Méthode de calcul du flux à vide de la machine	231
4.3.2.1	Présentation du problème, démarche, et conditions aux limites	231
4.3.2.2	Détail du modèle analytique 3D	233
4.3.2.3	Mise en oeuvre du modèle, vérification par éléments finis et étude de l'effet de courbure	236
4.3.2.4	Vérification expérimentale du modèle du flux à vide	246
5	Etude approfondie des pertes magnétiques	253
5.1	Les pertes dans les matériaux laminés en haute fréquence	254
5.1.1	Etat de l'art sur les pertes en haute fréquence dans les matériaux laminés	254
5.1.1.1	Exposé des différentes méthodes de calcul des pertes dans les tôles soumises à des inductions de fréquences élevées	254
5.1.1.2	Apport du travail présenté ici	258
5.1.2	Calcul de la répartition locale de l'induction dans une tôle laminée soumise à une induction moyenne d'excitation bi-directionnelle	258
5.1.2.1	Hypothèses de travail	258
5.1.2.2	Cas non-linéaire	260
5.1.2.3	Cas linéaire	263
5.1.2.4	Comparaison des résultats de diffusion du champ magnétique	263
5.1.3	Calcul des pertes dans la tôle à fréquence élevée	265
5.1.3.1	Calcul de la composante de pertes classiques	265
5.1.3.2	Calcul de la composante de pertes par hystérésis	265
5.1.3.3	Calcul de la composante de pertes excédentaires	265
5.1.3.4	Résultats obtenus	266
5.2	Etude des pertes magnétiques dans les matériaux doux composites	268
5.2.1	Etat de l'art sur les matériaux doux composites (SMC)	269
5.2.1.1	Présentation générale des SMC, fabrication, état de l'art sur les caractérisations statiques et dynamiques	269
5.2.1.2	Utilisations des matériaux doux composites	283
5.2.1.3	Apport du travail proposé dans cette thèse	291
5.2.2	Procédure de séparation des pertes dans les SMC	292
5.2.2.1	Dispositif de caractérisation expérimental	293
5.2.2.2	Calcul du terme de pertes classiques	300
5.2.2.3	Résultats de l'application de la séparation des pertes dans les deux échantillons	315
5.2.2.4	Interprétation des résultats en utilisant la théorie de Bertotti	320
5.2.3	Dimensionnement d'un système de caractérisation des matériaux magnétiques composites avec une excitation d'induction bi-directionnelle	329
6	Performances de la machine disque sur la base des modèles 2D	351
6.1	Modèle de comportement magnéto-thermo-électrique de l'actionneur à flux axial à aimants insérés	351
6.1.1	Calcul des pertes et déduction du modèle électrique	353
6.1.1.1	Calcul des pertes dans la machine	353
6.1.1.2	Le modèle électrique de la machine	358
6.1.2	Le modèle thermique de la machine en régime permanent	359
6.2	Optimisation de la machine à flux axial sur la base des modèles 2D développés	363
6.2.1	La stratégie d'optimisation	364
6.2.1.1	Le problème d'optimisation de la machine électrique	364
6.2.1.2	Utilisation de l'algorithme génétique pour résoudre le problème	365
6.2.1.3	Détails concernant la détermination optimale de la commande à géométrie fixée	367
6.2.2	Présentation et analyse des résultats d'optimisation	372
6.2.2.1	Influence de la loi d'optimisation locale de la commande	372
6.2.2.2	Etude de sensibilité sur la nature des aimants utilisés	379
6.2.2.3	Introduction d'une contrainte de puissance apparente	382

A	Raccord entre les différentes zones pour le modèle 2D double saillance	401
A.1	Raccord entre la zone I (les encoches), et la zone II (l'entrefer)	401
A.1.1	Continuité du potentiel	401
A.1.2	Raccord en dérivée normale du potentiel	402
A.2	Raccord entre la zone II (l'entrefer), et la zone III (le rotor)	402
A.2.1	Continuité du potentiel	402
A.2.2	Raccord en dérivée normale du potentiel	403
A.3	Résolution du problème sous forme matricielle	403
B	Calcul analytique des coefficients du développement en séries de Fourier-Bessel de la densité de charges magnétiques	405

Introduction générale

Le souci relativement récent de développer des moyens de propulsion et de production d'énergie plus propres et plus rationnels pour des raisons tant économiques qu'écologiques a mis la recherche en électrotechnique sur le devant de la scène. En effet, l'énergie électrique, par sa souplesse, son rendement de conversion, sa fiabilité, sa propreté à l'utilisation, apparaît comme un intermédiaire indispensable et incontournable pour des dispositifs de conversion d'énergie plus performants. En particulier, les applications de transport font peser des contraintes draconiennes sur les machines électriques utilisées en traction, tant en termes de volume, de rendement ou de couple, qui peinent à être remplies par les dispositifs conventionnels d'autant que les exigences de compacité, de fiabilité et de coût sont en continue croissance. Il est donc souhaitable de mettre au point de nouvelles structures de machines qui permettent de mieux satisfaire les contraintes propres aux systèmes de propulsion électrique. Il est aussi nécessaire de repenser substantiellement le processus de conception de ces machines afin de garantir que le dispositif proposé pour chaque application soit optimal, du moins optimisé. Ceci ne peut se faire qu'en posant de manière formelle le problème de la conception de machine, étape indispensable pour appliquer une démarche d'optimisation systématique. L'équipe SETE du laboratoire SATIE (comme d'autres équipes de recherche en électrotechnique) est impliquée depuis de nombreuses années dans ce renouveau de l'électrotechnique. D'une part, des travaux significatifs, comme ceux menés sur les machines synchrones à double excitation, montrent une nette volonté de concevoir de nouvelles topologies, plus à même de remplir les cahiers des charges de la traction électrique. D'autre part, certains travaux de l'équipe se sont centrés sur les systèmes de conversion, les modèles et les outils de dimensionnement et de gestion associés utilisant les sources d'énergie propres et renouvelables. Ces problèmes se distinguent par leur complexité : beaucoup de paramètres, problèmes multi-objectifs et multi-contraintes.

Le travail présenté dans ce mémoire de thèse se situe à l'interface de plusieurs disciplines, ce qui s'est traduit par des interactions fortes entre plusieurs équipes de recherche et laboratoires. En premier lieu, il s'inscrit naturellement dans la longue tradition de l'équipe SETE. En effet, le choix a été fait d'étudier des topologies de machines relativement originales comme les machines disques, potentiellement plus intéressantes dans les applications de traction. Cette étude a été menée avec le souci constant de développer des modèles dédiés à une procédure d'optimisation systématique de ces topologies de machines électriques, notamment par la résolution formelle des équations de Maxwell. Cette approche offre un compromis intéressant entre la précision des modèles et le temps de calcul, même si des hypothèses assez fortes sont nécessaires, comme la linéarité des matériaux utilisés. Une étude bi-dimensionnelle a d'abord été réalisée, avec la prise en compte de phénomènes tels que la double saillance de l'actionneur. L'hypothèse 2D n'étant pas satisfaisante dans le cadre des machines disques, un important effort a été mené de telle manière à étendre la modélisation analytique au cas tri-dimensionnel. Ce travail de modélisation nous a fait prendre conscience que le progrès actuel de l'électrotechnique ne peut se limiter exclusivement aux topologies ou au problème de l'optimisation des paramètres géométriques des machines électriques : il s'agit d'un progrès bien plus fondamental, remettant en question l'utilisation même des matériaux conventionnels utilisés depuis longtemps en électrotechnique. Par exemple, les matériaux laminés conventionnels, par leur anisotropie, atteignent une certaine limite lorsqu'il s'agit de satisfaire des sollicitations tri-dimensionnelles d'induction, comme c'est le cas dans les machines discoïdes. Il nous est donc apparu nécessaire, dans une deuxième étape de ces travaux, de s'intéresser aux nouveaux matériaux granulaires isotropes. Ces matériaux, bien que prometteurs en termes de propriétés d'isotropie, peinent à voir leur utilisation généralisée, notamment à cause du manque flagrant de travaux de caractérisation des pertes les concernant. C'est donc avec la volonté de contribuer à combler ce manque pénalisant que nous avons entrepris un travail visant à étendre à ces nouveaux matériaux granulaires isotropes la théorie de la séparation des pertes qui a déjà démontré toute son efficacité pour les matériaux laminés. Ce second axe de recherche sur les matériaux magnétiques granulaires a été mené de concert avec la branche matériau de l'équipe IPPEM du laboratoire SATIE, ainsi que l'institut INRIM de Turin (anciennement IEN Galileo Ferraris). Ces deux structures de recherche

collaborent en effet depuis plusieurs années, en mettant en commun leur savoir-faire, leur expérience, ainsi que leurs ressources expérimentales dans le domaine de l'étude et de la caractérisation des matériaux magnétiques. Dans le cadre de cette thèse, des travaux de mesure des pertes ont été menés à l'INRIM de Turin, en profitant des grandes compétences de ce laboratoire dans le domaine de la métrologie. Les résultats obtenus ont été expliqués par des observations microscopiques des matériaux réalisées grâce aux ressources en imagerie électronique de l'Institut d'Alembert, ressources communes à plusieurs laboratoires en sciences appliquées de l'ENS de Cachan.

Etant donné la présence de deux thèmes de recherche distincts bien que fondamentalement reliés que sont les modèles analytiques des machines disques et la caractérisation des pertes dans les matériaux granulaires, ce mémoire de thèse sera donc organisé comme suit.

- Il nous est apparu indispensable de commencer par deux chapitres d'introduction (CHAPITRES 1 ET 2), chacun d'entre eux étant dédié à l'un des deux thèmes de recherche. Le CHAPITRE 1 est consacré à l'état de l'art sur les topologies de machines disques, et concerne aussi les méthodes de modélisation les plus communes. Nous implanterons certains des modèles proposés, afin de montrer l'importance cruciale du modèle sur les résultats d'une optimisation, aussi bien dans l'espace des objectifs, que dans l'espace des paramètres, qui est de première importance pour le constructeur de machine. Cette étude justifiera l'intérêt des travaux entrepris dans cette thèse. Le CHAPITRE 2, quant-à-lui, sera consacré à une présentation de la théorie de la séparation des pertes en champ alternatif, et de l'extension phénoménologique au champ tournant. Cette présentation constitue une étape indispensable, aussi bien pour évaluer les pertes fer dans la machine dans le CHAPITRE 6 consacré à l'optimisation, que pour appréhender le travail sur la séparation des pertes dans les matériaux granulaires mené au cours du CHAPITRE 5.
- Le CHAPITRE 3 s'intéresse à l'élaboration de modèles bi-dimensionnels de la machine disque à aimants insérés, à bobinage réparti. Le modèle bi-dimensionnel sera mené sur la base d'un développement de la structure au niveau de son rayon moyen. L'hypothèse inhérente aux modèles analytiques consiste à supposer les matériaux magnétiques de perméabilité infinie. Un premier modèle, existant dans la littérature sera repris, consistant à tenir compte de la saillance du rotor à aimants insérés, tout en négligeant la saillance statorique. Nous verrons que ce modèle permet de calculer convenablement le couple moyen de la machine. En revanche, il s'avère impuissant pour permettre une prédiction correcte des inductions dans le stator, rendant impossible du même coup le calcul des pertes fer. Cet inconvénient nous conduira alors à développer un modèle analytique 2D original, prenant en compte la double saillance rotor-stator. Sur cette base, il sera montré qu'une évaluation précise des inductions dans le fer devient possible. Des vérifications des modèles par éléments finis 2D seront effectuées.
- Le CHAPITRE 4 se consacrera à l'élaboration de modèles analytiques tri-dimensionnels de la machine à flux axial, vu que cette dernière, par sa courbure et la longueur finie de ses aimants suivant la coordonnée radiale, est une structure fondamentalement tri-dimensionnelle. Après un état de l'art sur la prise en compte des effets 3D dans les machines électriques, nous proposerons différents niveaux de modélisation, de complexité progressive. Dans un premier temps, nous continuerons à développer la machine à flux axial à son rayon moyen, en nous contentant d'une modélisation des effets de bords suivant la direction radiale. Nous reprendrons une stratégie existant dans la littérature, appelée « quasi-3D », consistant à découpler le plan de modélisation 2D du CHAPITRE 3 des effets de bords dans la direction perpendiculaire à ce plan. Nous montrerons la limite de ce modèle, et notre apport résidera dans la mise au point d'un modèle analytique réellement tri-dimensionnel de l'actionneur développé au rayon moyen. Une fois ce travail effectué, nous remettrons en question le développement de la machine au niveau de son rayon moyen, en proposant un modèle analytique de cet effet de courbure. Après ce travail, nous allons disposer d'une bibliothèque de modèles de la machine à flux axial, avec et sans effets de bords radiaux, et avec et sans effet de courbure. Nous nous en servirons pour comparer ces modèles d'une complexité différente entre eux. Le résultat fondamental à retenir sera que les effets de bords radiaux apparaissent absolument fondamentaux pour mener une modélisation sérieuse de l'actionneur disque. En revanche, l'effet de courbure ne joue pas un rôle de premier plan, et peut fort bien être occulté dans une première approche. Les modèles proposés sont systématiquement vérifiés par éléments finis 3D.
- Avec le CHAPITRE 5, le travail sur les matériaux magnétiques sera abordé. Une première étape sera de modéliser en haute fréquence les matériaux laminés. Puis motivés par le caractère tri-dimensionnel de notre machine montré au CHAPITRE 4, nous discuterons de l'applicabilité de la théorie de la séparation des pertes dans les matériaux magnétiques granulaires isotropes. Après une compréhension générale de la structure des matériaux granulaires compactés, et des observations de ces derniers au microscope électronique, nous proposerons un

modèle de pertes classiques, point de départ de la théorie de la séparation des pertes. Nous démontrerons le caractère local de ces pertes par courants induits dans les échantillons toriques qui nous ont été utiles. Après une caractérisation en champ uni-directionnel de deux échantillons différents de matériaux commerciaux sur une large gamme de fréquences et pour plusieurs niveaux d'inductions, nous appliquerons le principe de la séparation des pertes. Nous isolerons la composante de pertes excédentaires, puis analyserons cette dernière au moyen de la théorie de Bertotti, afin d'en déduire des informations sur la microstructure du matériau magnétique. Ces informations seront alors confirmées par des observations microscopiques des échantillons. Le point à retenir sera l'aspect poly-cristallin des particules de matériau magnétique.

- Enfin, le CHAPITRE 6 reprendra les modèles électromagnétiques bi-dimensionnels de la machine à flux axial à aimants permanents insérés, développés au CHAPITRE 3, afin de proposer une stratégie de conception optimale de ce type de machines. Avant de passer à l'outil d'optimisation proprement dit, nous allons en premier lieu nous intéresser à la manière d'élaborer, à partir du modèle électromagnétique 2D, un modèle électrique simplifié de la machine fondé sur la théorie de Park. Un modèle thermique 2D simplifié sera aussi envisagé, ayant comme entrée les résultats du calcul de pertes cuivre et fer, ces dernières étant calculées par intégration des résultats fournis par le modèle de pertes magnétiques locales présenté au CHAPITRE 2. Ensuite, la stratégie d'optimisation sera abordée, fondée sur l'utilisation d'un algorithme évolutionnaire. Le volume externe permis pour l'actionneur sera fixé, tandis qu'un cahier des charges de type véhicule hybride, avec deux points de fonctionnement représentatifs des cycles généralement proposés dans ce genre d'applications, sera considéré. Nous porterons une attention particulière à la détermination de l'alimentation optimale minimisant les pertes de la machine à flux axial pour chaque point de fonctionnement. Par la suite, une étude de sensibilité sur la nature de l'aimant utilisé sera effectuée, en insistant sur le fait qu'il n'est pas toujours pertinent d'utiliser l'aimant ayant la plus grande induction rémanente. Nous montrerons que le défluxage pour atteindre des points à haute vitesse a une utilité intrinsèque concernant la réduction des pertes magnétiques dans la machine, hors de toute contrainte d'onduleur. Ce chapitre se terminera par l'étude de l'impact sur la géométrie et les performances de la machine d'une contrainte de puissance apparente d'onduleur.

Chapitre 1

Généralités sur les machines disques : architectures, intérêt, modélisation

Introduction

Nous allons dans ce chapitre dresser un état de l'art non exhaustif concernant les machines à flux axial à aimants permanents, ainsi que les différents modèles électromagnétiques actuellement existants en vue de la conception optimale de ces structures. Dans un premier temps, les différentes topologies et architectures des machines discoïdes à aimants permanents, ainsi que leurs applications, sont envisagées. Dans un second temps, nous allons faire ressortir l'intérêt de ces topologies spéciales, en exposant les différentes stratégies de comparaison de ces structures entre elles d'une part, et avec les structures conventionnelles à flux radial d'autre part. Les différents modèles possibles pour le dimensionnement seront aussi passés en revue et analysés, en insistant sur leurs avantages et inconvénients respectifs dans une optique de conception. Nous présenterons pour finir les résultats d'optimisation d'une structure de machine à flux axial pour le critère couple volumique, en utilisant certains des différents modèles électromagnétiques de la littérature présentés dans ce chapitre. La sensibilité importante de la complexité du modèle choisi sur les résultats optimisés obtenus sera ainsi mise en évidence, ce qui justifiera le travail important d'amélioration des modèles électromagnétiques poursuivi tout au long de cette thèse.

1.1 Les différentes topologies et utilisation des machines à flux axial

Nous allons présenter dans cette partie les principales structures de machines synchrones à aimants permanents à flux axial ainsi que leurs applications. Les différentes topologies, aussi bien au niveau de la constitution générale (structure simple face ou multi-faces) que du type de bobinage (bobinage réparti ou bobinage torique) seront détaillées. Nous donnerons la représentation schématique suivante des machines à flux axial, par comparaison aux machines à flux radial. La rotation du rotor d'une machine tournante implique la création d'un couple, donc d'une force dans la direction orthoradiale à l'axe de rotation. En admettant que les forces dans les machines électriques soient dues à des forces de Laplace, il y a deux manières de générer ces forces dans la direction orthoradiale. La première consiste à orienter l'induction dans la direction radiale (on parle alors de machine à flux radial), avec les courants dans la direction axiale (figure 1.1), la force étant bien dans ce cas dans la direction orthoradiale. La seconde méthode afin de générer une force dans la direction orthoradiale est de placer l'induction dans la direction axiale, les courants étant à leur tour dans la direction radiale (figure 1.2).

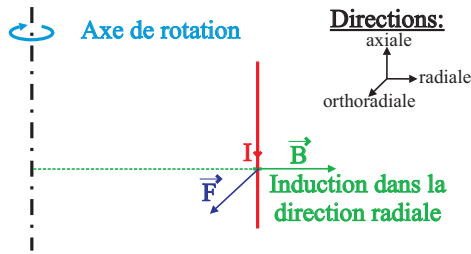


FIGURE 1.1: Principe de fonctionnement de la machine à flux radial

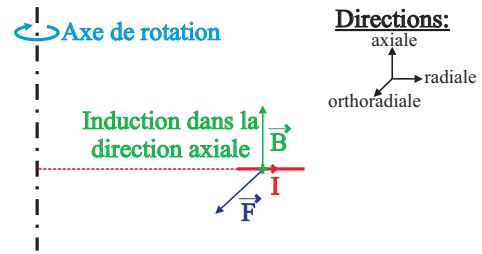


FIGURE 1.2: Principe de fonctionnement de la machine à flux axial

1.1.1 Les machines à flux axial simple face

1.1.1.1 Les topologies à grosses dents

Les machines à flux axial simple face sont utilisées dans les applications industrielles, en raison de leur forme disque au rotor, ainsi que, nous le verrons, pour leur fort couple volumique. Aussi peut-on citer la référence [Brisset *et al.*, 2006], qui relate l'utilisation d'une machine à flux axial simple face à grosses dents pour une application de pompe haut de gamme visant à fonctionner dans un milieu industriel exigeant en termes d'environnement, avec des liquides corrosifs à pomper. La structure synchrone à flux axial à aimants permanents s'avère plus intéressante qu'une motorisation asynchrone cylindrique conventionnelle, du fait de la réduction de l'encombrement axial, ainsi que de la plus grande tolérance des machines à aimants permanents aux entrefers importants : en effet, dans ce type d'application de pompage de liquides corrosifs, le rotor se doit d'être mécaniquement isolé du stator, et ceci oblige à placer, dans l'entrefer, une paroi isolante amagnétique, qui a l'inconvénient d'augmenter la largeur de l'entrefer équivalent. La structure à grosses dents est choisie pour la facilité du bobinage, et en plus pour la place gagnée au niveau des têtes de bobine. A ce propos, dans la référence [Brisset *et al.*, 2006], une photo (reprise à la figure 1.3), montre le gain de volume du bobinage concentré par rapport au bobinage réparti, ce qui se traduit aussi par un gain sur les pertes dans le cuivre.

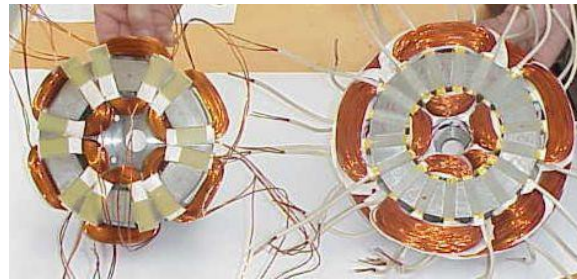


FIGURE 1.3: Photo tirée de la référence [Brisset *et al.*, 2006], montrant la différence entre un bobinage réparti (à petites dents), et un bobinage concentré (à grosses dents)

Cette photo illustre aussi parfaitement la différence entre le bobinage réparti à petites dents qui oblige à faire chevaucher les différentes bobines, et le bobinage concentré, à grosses dents, pour lequel une bobine unique s'enroule autour de chaque dent. La structure à grosses dents semble plus complexe, mais il est néanmoins possible, afin de simplifier la procédure de dimensionnement, de raisonner sur une machine à petites dents pour calculer le couple électromagnétique, car l'article [Brisset *et al.*, 2006] donne une méthode afin de trouver une équivalence entre les bobinages à grosses dents et à petites dents. Cette méthode permet d'ailleurs de retrouver que, pour produire un couple moyen avec une machine à grosses dents, les nombres de pôles au stator et au rotor ne peuvent pas être égaux. Les auteurs ont choisi, dans ce cas, pour des raisons de simplicité du montage, un nombre de paires de pôles rotoriques égal à 4 et un nombre de paires de pôles statoriques égal à 3, ce qui donne la topologie représentée à la figure 1.4. Dans la référence [Derks, 2004], une explication est donnée à l'insertion d'une dent ferromagnétique intermédiaire entre les deux bobines : il s'agit de lisser l'onde d'induction dans l'entrefer, de manière à réduire le

couple de détente. En outre, le flux dans la machine (donc le couple hybride à ampères-tours identiques) est lui aussi augmenté par la présence d'une dent intermédiaire, du fait que cette dent, en réduisant la proportion des fuites inter-aimants, augmente le flux des aimants qui atteint le stator. Néanmoins, il est signalé que cette dent augmente la fréquence de variation de l'induction dans les aimants due aux effets d'encoches, et par là même les pertes rotoriques.

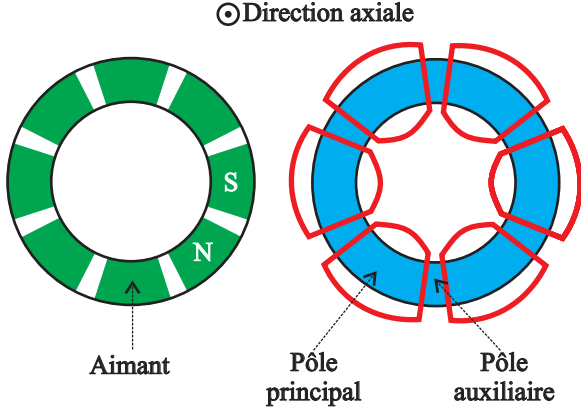


FIGURE 1.4: Représentation dans le plan perpendiculaire à la direction radiale de la machine de la référence [Brisset *et al.*, 2006], au niveau de l'entrefer

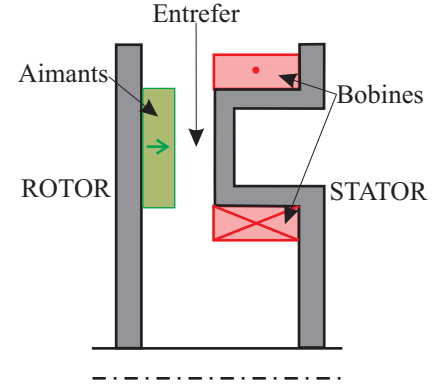


FIGURE 1.5: Coupe axiale de la machine de la référence [Azzouzi, 2007], utilisée pour le système de réfrigération et la génératrice éolienne

Un autre auteur [Azzouzi, 2007] a utilisé une structure analogue de machine pour une génératrice d'éolienne, ainsi que pour une application de réfrigération de petite puissance, représentée en coupe axiale au niveau de la figure 1.5. L'auteur a mis au point une méthode de calcul analytique du flux à vide dans l'entrefer en tenant compte de la saillance statorique, ce qui lui a permis d'évaluer analytiquement l'expression du couple de détente par la méthode du tenseur de Maxwell. En effet, le potentiel-vecteur dans l'entrefer est périodique et est une fonction scalaire dans le cadre d'une approximation 2D de la machine, ce qui permet de l'écrire sous la forme suivante, dans le repère cylindrique naturel de la machine à flux axial (r, θ, z) , l'origine de la coordonnée axiale se situant à la surface du stator :

$$A(r, \theta, z) = \sum_{k \neq 0} \frac{r}{k} \left[\left(C_k \cosh\left(\frac{kz}{r}\right) + D_k \sinh\left(\frac{kz}{r}\right) \right) \cos(k\theta) + \left(E_k \cosh\left(\frac{kz}{r}\right) + F_k \sinh\left(\frac{kz}{r}\right) \right) \sin(k\theta) \right] \quad (1.1)$$

Pour obtenir le couple instantané, il suffit de déterminer ce potentiel-vecteur en ne mettant que les aimants pour source (pas les courants), et en considérant bien entendu l'encoche statorique. Les aimants et l'encoche fournissent des conditions aux limites plus ou moins complexes qui permettent de déterminer les constantes C_k , D_k , E_k , et F_k pour tout entier naturel k . Si on note R_1 le rayon actif interne de la machine à flux axial, et R_2 son rayon actif externe, alors la méthode du tenseur de Maxwell donne l'expression suivante, pour le couple de détente instantané de la machine, en appelant B_θ et B_z les composantes d'induction dans la machine obtenues par dérivation du potentiel-vecteur :

$$C_d = \frac{1}{3\mu_0} (R_2^3 - R_1^3) \int_0^{2\pi} B_\theta B_z d\theta \quad (1.2)$$

Tout calcul fait, l'expression du couple de détente instantané est donc, si l'intégrale précédente est évaluée en la coordonnée $z = 0$, correspondant à la surface du stator :

$$C_d = \frac{(R_2^3 - R_1^3)}{6\mu_0} \sum_{k \neq 0} (D_k E_k - C_k F_k) \quad (1.3)$$

Il est à noter que les coefficients C_k , D_k , E_k , et F_k dépendent de la position angulaire choisie du rotor par rapport au stator. Par conséquent, en évaluant l'expression analytique 1.3 pour chaque position angulaire du rotor par rapport au stator, l'évolution angulaire du couple de détente est trouvée. Naturellement, cette dernière est à valeur moyenne nulle. L'auteur de [Azzouzi, 2007] s'est ensuite servi de cette expression analytique afin d'étudier l'amplitude du couple de détente en fonction de l'ouverture de la dent auxiliaire. Plus la dent auxiliaire a une ouverture importante, et plus le couple de détente est effectivement limité (la variation d'énergie magnétique dans l'entrefer est réduite), ce qui va dans le sens de la conclusion de la référence [Derks, 2004]. Un compromis doit être trouvé, afin de ne pas trop réduire l'espace bobinable, ce qui causerait une augmentation des pertes dans le cuivre.

Les travaux présentés dans la référence [Brisset *et al.*, 2008] concernent également les applications éoliennes. Dans cet article, une structure de machine à aimants à flux axial a été conçue pour la production d'énergie éolienne à entraînement direct. En effet, l'entraînement direct permet de réduire la partie mécanique, en évitant l'utilisation d'un réducteur de vitesse, ce qui aboutit à un gain en volume, en nuisances sonores, en maintenance, mais surtout en coût. Néanmoins, ceci complexifie les structures des machines, en exigeant un nombre de paires de pôles bien plus important. La structure développée dans [Brisset *et al.*, 2008] possède neuf phases. La raison de ce nombre important réside dans le fait qu'un grand nombre de phases autorise une plus grande robustesse aux défaillances éventuelles. Qui plus est, comme précisé dans la référence [Vizireanu *et al.*, 2005], l'avantage réside aussi dans une forte diminution des harmoniques parasites de champ magnétique lorsque le nombre de phases augmente. Le calcul du nombre de pôles au stator et au rotor est fondé, comme dans [Brisset *et al.*, 2006], sur une équivalence entre la topologie classique à bobinage réparti, et la topologie à grosses dents présentée ici. La topologie à grosses dents ne peut créer un couple que si les nombres de paires de pôles au stator et au rotor ne sont pas multiples l'un de l'autre. La structure à grosses dents (9 pôles au stator, et 10 au rotor), est montrée au niveau de la figure 1.6, qui est tirée de la référence [Brisset *et al.*, 2008]. La vitesse de rotation étant faible, à condition que le nombre de paires de pôles demeure raisonnable, les pertes dans les circuits magnétiques, pour les matériaux doux comme pour les aimants, qui sont d'ordinaire importantes dans les machines à pôles lisses, ne vont pas jouer ici un rôle de premier plan. Un intérêt de cette structure réside dans le système de refroidissement forcé à eau au coeur de l'encoche qui a été développé (figure 1.7 pour le stator). Le conduit de refroidissement à eau passe en fait entre les deux bobines présentes dans une encoche donnée. Sur cette base, un modèle thermique fondé sur l'utilisation des résistances thermiques a été développé, fournissant des résultats en bon accord avec ceux obtenus par la méthode des éléments finis. Qui plus est, il est possible de faire un schéma équivalent électrique pour chaque phase. Dans cette perspective, en plus des inductances propres de chaque phase, il faut calculer les inductances mutuelles entre chaque phase, et les faire figurer dans le schéma électrique équivalent. L'approche est assez lourde, du fait que la machine comporte neuf phases en tout. Pour finir, une optimisation bi-objectifs de la structure, dans le but de minimiser la masse et de maximiser le facteur de puissance (qui est le reflet du coût de l'onduleur à utiliser), a été menée.

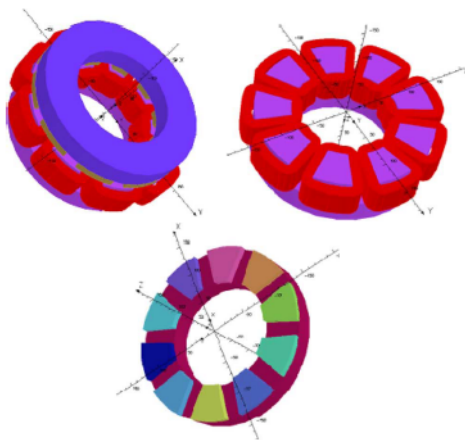


FIGURE 1.6: Structure de la machine à grosses dents étudiée dans la référence [Brisset *et al.*, 2008] (9 pôles au stator, 10 pôles au rotor)

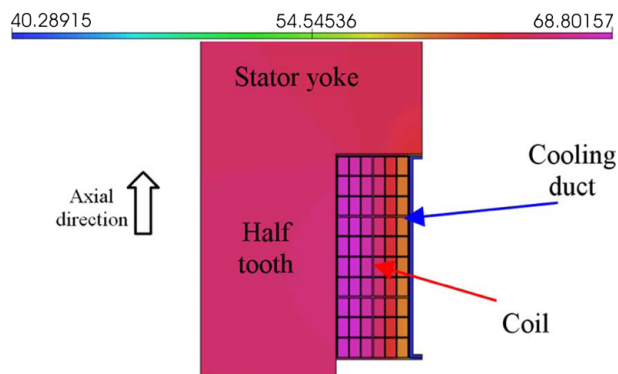
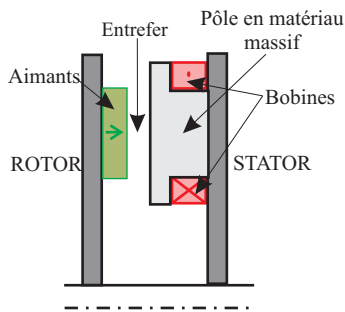
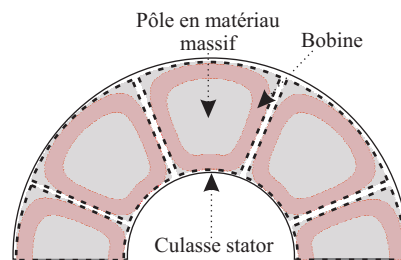


FIGURE 1.7: Stator de la machine à flux axial pour application éolienne étudiée dans la référence [Brisset *et al.*, 2008], avec un conduit de refroidissement entre les bobinages de deux phases dans les encoches

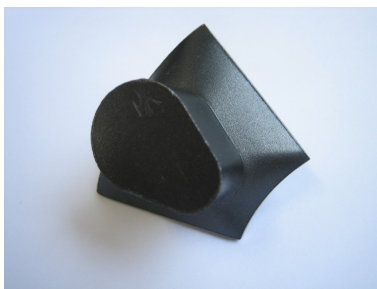
J.F. Gieras [Gieras *et al.*, 2008] a souligné la relative facilité de réalisation de telles structures de machines à grosses dents. En effet, comme montré sur les figures 1.8a (coupe axiale) et 1.8b (vue de l'entrefer), il suffit de placer au centre de chaque bobine, une fois cette dernière enroulée, une grosse dent en matériau magnétique massif ayant une forte résistivité afin que le champ variable n'induisse pas trop de pertes (les nouveaux matériaux composites à base de poudres de fer à grains isolés sont les mieux prescrits pour cette perspective), puis de coller le tout sur la culasse. La figure 1.8c est une photographie d'un tel pôle en poudre de fer compactée d'une machine à flux axial, fournie gratuitement par la société Höganas à l'équipe matériaux du laboratoire SATIE.



(a) Coupe axiale de la machine de la machine à grosses dents simple face avec pôles statoriques massifs



(b) Représentation du stator de la machine à grosses dents simple face avec pôles statoriques massifs



(c) Photographie d'un pôle statorique en matériau composite formé de poudre de fer fourni par la société Höganas

FIGURE 1.8: Machine à grosses dents simple face avec des pôles statoriques en matériau massif [Gieras *et al.*, 2008]

D'autres auteurs ont utilisé ce type de topologie à flux axial simple face à grosses dents dans le véhicule électrique. Ainsi la référence [Patterson, 1995] utilise-t-elle la machine à flux axial dans un véhicule solaire. Afin de réduire les composants mécaniques, le choix a été fait, pour ce type de véhicule, d'intégrer un moteur au plus près de chaque roue. Une machine disque apparaît plus facile à intégrer que les classiques machines à flux radial. Mais les auteurs de [Patterson, 1995] insistent sur le fait que le principal avantage de ce type de structure réside dans la possibilité d'effectuer un défluxage mécanique. En effet, dans les applications de traction, la nécessité d'atteindre des vitesses élevées donne à la plage de défluxage atteignable une importance critique. Avec une topologie à flux axial, qui, naturellement, est peu défluxable si elle est à pôles lisses, on peut néanmoins atteindre une plage importante du plan couple-vitesse en augmentant plus ou moins l'entrefer de la machine par un dispositif mécanique, chose relativement aisée pour une machine disque. Cette possibilité de défluxage mécanique a été également évoquée par les auteurs de [Lipo et Aydin, 2004a], et il est spécifié qu'une telle structure est équivalente à une machine à flux radial dont on sortirait plus ou moins le rotor du stator. Néanmoins, le dispositif mécanique à mettre en oeuvre pour la machine à flux axial est bien plus simple. L'augmentation de l'entrefer diminue le couple maximal, mais permet d'atteindre de plus grandes vitesses : un entrefer réglable assure donc un degré de liberté supplémentaire pour balayer la zone la plus large possible du plan couple-vitesse (figure 1.9).

D'autres auteurs (référence [Van Tichelen *et al.*, 2003]) ont relaté l'utilisation d'autres topologies de machines à flux axial à aimants permanents à bobinage concentrique, avec un bobinage statorique dit « en U » (figure 1.10) en référence à la forme particulière des dents du stator, qui ressemblent à des culasses de transformateur autour desquelles sont enroulés les bobinages triphasés (une dent pour chaque enroulement). Le principal avan-

tage de ce type de topologie réside dans la grande simplicité de réalisation du bobinage statorique. Dans l'article [Van Tichelen *et al.*, 2003], un modèle analytique simplifié, de type uni-dimensionnel, a été présenté pour ce type de machines non conventionnelles, et une vérification par éléments finis a été effectuée. La référence [Liu *et al.*, 2003] pousse plus loin l'étude de la structure en question, en proposant un modèle fondé sur le calcul analytique simplifié des perméances d'entrefer pour le calcul du couple de la machine en question. L'extraction des expressions analytiques des perméances suppose un certain nombre d'hypothèses simplificatrices, comme la linéarité des matériaux magnétiques, l'absence d'inductances de fuites... Il est aussi mis en lumière le fait que le principal inconvénient de cette structure est la force d'attraction axiale entre les dents du stator et le rotor. Afin de pouvoir modéliser cette force d'attraction, un calcul, sur la base du modèle analytique développé, a permis d'évaluer la valeur de la force d'attraction. La méthode utilisée repose sur la méthode de la variation de l'énergie magnétique contenue dans l'entrefer de la machine.

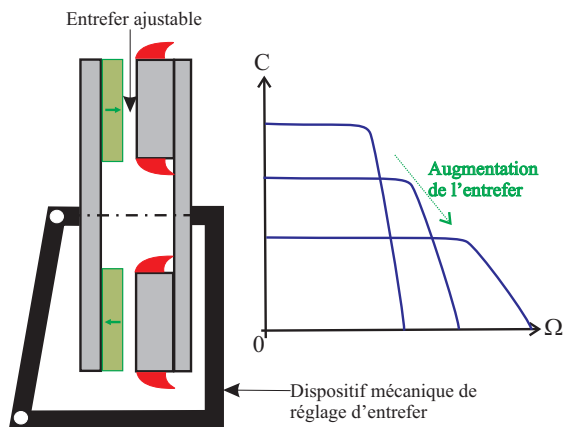


FIGURE 1.9: Ajustement de l'entrefer pour atteindre une plus large plage de points de fonctionnement (référence [Lipo et Aydin, 2004a])



FIGURE 1.10: Machine à stator en U pour véhicule hybride (référence [Van Tichelen *et al.*, 2003])

1.1.1.2 Les topologies à petites dents

Les machines à flux axial à bobinage réparti sont plus rares, du fait de la difficulté de la réalisation de leurs bobinages. Gieras [Gieras *et al.*, 2008] relate l'utilisation de telles machines dans les applications où un couple massique important est demandé, comme par exemple la motorisation des ascenseurs, et donne l'exemple d'une machine synchrone à flux axial simple face à aimants et à dents pour laquelle le constructeur s'est servi du diamètre important du rotor afin d'y placer directement le tambour d'enroulement du câble d'ascenseur.

D'autres auteurs ont utilisé ces topologies dans les systèmes de production d'énergie éolienne. En effet, la multiplicité des variantes de topologies offre d'intéressantes perspectives pour l'intégration de la machine électrique au coeur du système de production. Ainsi les auteurs de [Chan et Lai, 2007] proposent-ils une topologie de machine synchrone à aimants simple face pour la production d'énergie éolienne. L'intérêt est de réaliser un entraînement direct. La spécificité de leur machine est d'être à rotor externe, dans le but de fixer les pales de l'éolienne directement sur le rotor de la machine. Bien qu'il n'y ait qu'une seule couche d'aimants, le rotor comporte néanmoins deux faces, afin, disent les auteurs, d'être hermétiquement fermé, dans le but de réduire la probabilité de défaillance de l'équipement éolien. L'autre spécificité importante de la machine développée est d'avoir un stator interne, sans matériau ferromagnétique (figure 1.11a pour la coupe axiale, et figure 1.11b pour la coupe orthoradiale). Ce choix d'un stator sans matériau fer peut sembler quelque peu étrange, car la machine possède ainsi un entrefer équivalent magnétique très important, ce qui oblige à utiliser, par conséquent, un volume d'aimants accru pour créer dans l'entrefer une induction de valeur significative. Néanmoins, cette solution possède l'avantage non négligeable d'offrir plus de place pour le cuivre, car on fait l'économie du volume des encoches. Mais sans doute l'avantage décisif est-il l'annulation du couple de détente du fait de l'absence de dents statoriques, ce qui aboutit à une réduction notable des ondulations totales de couple. Or, dans les applications éoliennes, le problème des ondulations de couple occupe une place de premier plan, car de telles fluctuations ont tendance à réduire de manière importante la durée de vie

de la chaîne mécanique, qui est déjà l'élément le plus fragile de l'ensemble, dégradant alors la fiabilité du système de production d'énergie.

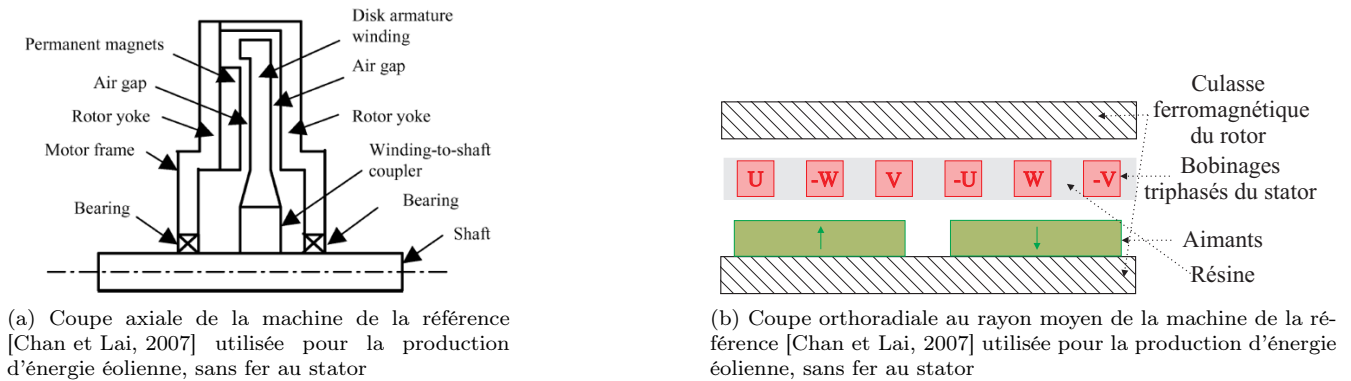


FIGURE 1.11: Machine de la référence [Chan et Lai, 2007], sans fer au stator

Ce stator sans fer, en plus de l'annulation du couple de détente de la machine, supprime aussi la quasi-totalité des pertes fer. Par conséquent, les bobinages classiques sont tenus en un ensemble rigide par un liant en résine. Les auteurs ont fait un modèle électromagnétique de leur structure par éléments finis 2D, puis un modèle électrique en se servant du modèle par éléments finis pour trouver les éléments du schéma équivalent par phase. Le rendement a été calculé en ne comptabilisant que les pertes par effet Joule dans le stator (pour le prototype à une échelle réduite réalisé, si on génère une puissance utile de 200W à une vitesse de 600tr/min, un rendement de 80% a été mesuré). Néanmoins, il est spécifié dans la référence [Gieras *et al.*, 2008] que ce type de topologie sans encoche statorique avait pour inconvénient de soumettre les bobinages au champ magnétique des aimants, provoquant ainsi des pertes par courants induits dans le cuivre du bobinage. Un autre exemple de ce type de structure de machine disque sans fer au stator est fourni par la référence [Bernard, 2001, Ben Ahmed *et al.*, 2000], pour une application de stockage inertielle. Dans cette référence, il s'agit de concevoir une machine disque avec des pertes extrêmement réduites. A cette fin, afin d'éviter les pertes fer dans le stator, ce dernier est fabriqué en époxy. De part et d'autre de la plaque d'époxy, les bobinages statoriques sont collés pour former un bobinage à quatre paires de pôles, comme montré au niveau de la figure 1.12. Comme on le voit sur cette figure, une stratégie a été développée afin de proposer un bobinage générant un champ magnétique tournant sans harmonique spatial. En outre, l'originalité de cette machine, qui est de type inducteur bobiné (et non à aimants) est que le bobinage inducteur se trouve au niveau du stator, et non au rotor, afin de supprimer les contacts tournants (figure 1.12). Le champ inducteur tourne par le biais d'un rotor constitué de pôles ferromagnétiques tournants, qui ont pour effet de canaliser le flux généré par l'inducteur dans l'entrefer de la machine (figure 1.13).

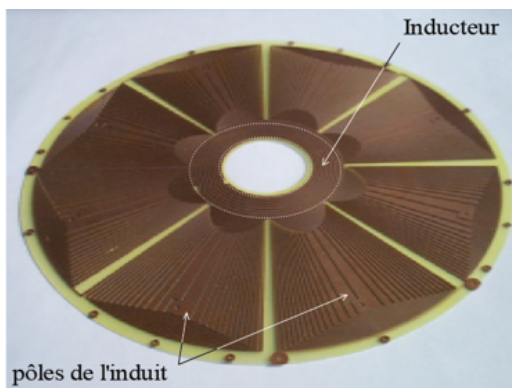


FIGURE 1.12: Stator sans fer de la machine de la référence [Bernard, 2001], destinée au stockage inertielle

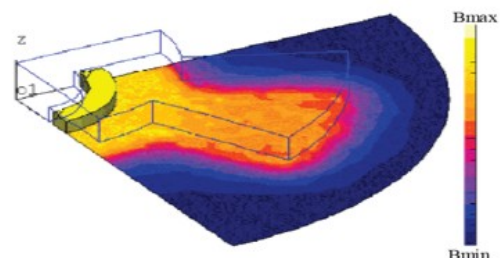


FIGURE 1.13: Répartition des niveaux d'inductions dus aux courants inducteurs au voisinage d'un pôle ferromagnétique tournant de la machine de la référence [Bernard, 2001]

Un autre domaine d'application des machines synchrones à aimants à flux axial à petites dents est la traction hybride. Ainsi les auteurs de [Zhao *et al.*, 2008] ont-ils utilisé la structure en question dans un ensemble complexe, associant d'une part la machine à flux axial, et d'autre part une machine à flux radial à aimants (figure 1.14). En fait, dans cette application, la machine à flux axial joue un rôle d'assistance d'une autre machine synchrone à flux radial. Les deux rotors à aimants sont couplés sur un même axe, relié aux roues du véhicule. Le moteur thermique est couplé à la partie bobinée de la machine à flux axial, qui n'est pas fixe, et se trouve alimentée par un système de contacts glissants. Le stator, relié à la carcasse du véhicule, correspond au stator de la machine à flux radial. L'idée du dispositif est de servir en quelque sorte d'embrayage électromagnétique au véhicule. En effet, les bobinages des deux machines, via, pour chacun d'eux, un convertisseur continu alternatif, sont reliés à un même bus continu avec un organe de stockage. Avec le dispositif de commande, il est possible de gérer de manière optimale les transferts d'énergie dans le véhicule hybride. Qui plus est, outre sa compacité, la machine à flux axial, au plus proche du moteur thermique, peut servir de volant inertiel [Ehsani *et al.*, 2009]. Une étude d'optimisation par éléments finis de la forme des aimants de la machine à flux axial est donnée par la suite dans cette référence, dans le but de générer une onde d'induction dans l'entrefer la plus sinusoïdale possible. Le résultat est qu'il faut biseauter le bord supérieur des aimants afin d'optimiser le contenu harmonique de l'induction dans l'entrefer.

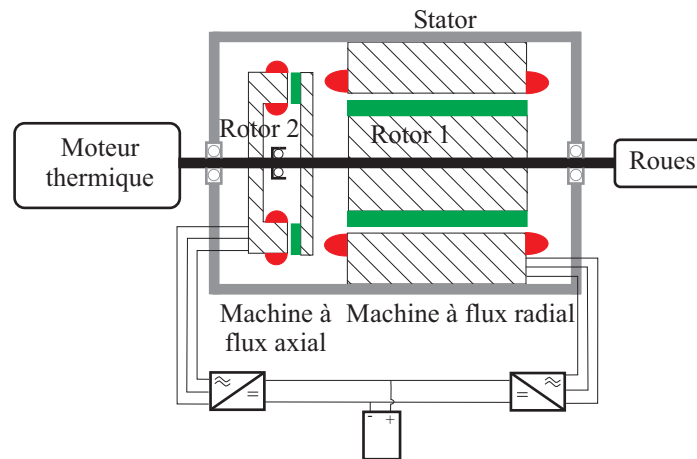


FIGURE 1.14: La machine de la référence [Zhao *et al.*, 2008] pour l'utilisation dans le véhicule hybride

Terminons cette partie par une note sur les matériaux utilisés dans ce genre d'applications. En effet, nous avons vu, que pour les topologies de machines à grosses dents, l'option consistant à insérer des pôles en matériau doux massif dans les bobines comportait de nombreux avantages, en particulier en ce qui concerne la simplicité de fabrication. Certains auteurs vont même plus loin, en proposant directement des topologies entièrement en matériau magnétique formée de poudre de fer compactée [Marignetti *et al.*, 2007]. En effet, les auteurs de cette dernière référence ont utilisé le matériau « ATOMET EM1 » fabriqué par la société QMP. Ce matériau, bien qu'ayant une perméabilité moindre, laisse entrevoir des perspectives intéressantes concernant la réduction des pertes magnétiques. De plus, les auteurs se sont principalement intéressés aux propriétés thermiques du matériau, qui, comme les propriétés magnétiques, sont isotropes. Cet avantage sur les matériaux laminés apparaît déterminant dans les applications comme les machines à flux axial, qui sont fondamentalement des structures tri-dimensionnelles. De toute façon, la référence [Anpalahan et Lamperth, 2006] a mis en évidence la difficulté technologique qu'il y a à fabriquer des stators feuilletés pour les machines à flux axial. Ceci nécessite en effet de rouler la bande de tôle utilisée. Il faut en outre prévoir de percer les trous des encoches, de manière de plus en plus espacée pour tenir compte de l'augmentation du rayon au fur et à mesure de la phase d'enroulement. Cette difficulté de fabrication des culasses feuilletées de machines à flux axial par roulage est suggérée à la figure 1.15, tirée de la référence [Anpalahan et Lamperth, 2006].

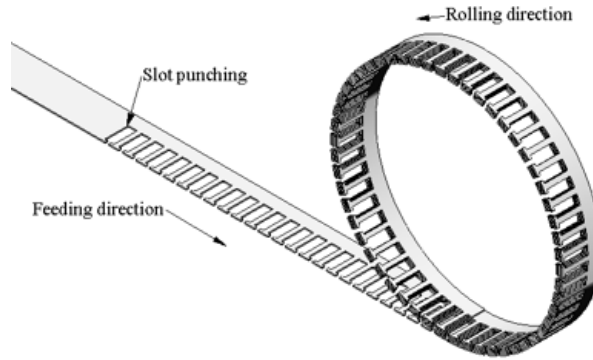


FIGURE 1.15: Illustration de la difficulté de fabrication par roulage de tôles du stator des machines à flux axial, à cause de l'espacement progressif des trous des encoches (référence [Anpalahan et Lampert, 2006])

1.1.2 Les topologies à flux axial à faces multiples

1.1.2.1 Les topologies avec encoches

Un des avantages des topologies à flux axial réside dans la grande quantité de variantes possibles, qui peuvent être, on l'a vu, simple face, ou double face, et plus généralement, à faces multiples, avec rotor externe (N stators et $N + 1$ rotors), ou alors à stator externe ($N + 1$ stators et N rotors). Nous y reviendrons dans la partie consacrée à la modélisation différentes topologies, pour nous concentrer ici sur les applications.

Par exemple, dans les applications éoliennes, il n'est pas rare d'opter pour des machines multi-étages. La principale raison est, comme suggéré dans [Brisset *et al.*, 2008], de permettre de réduire le diamètre externe de la machine si ce dernier est limité. Dans cette référence, il est simplement proposé de connecter deux machines identiques sur un même axe. Néanmoins, certains arrangements permettent de faire l'économie, en longueur axiale, d'une face statorique ou d'une face rotorique. Ainsi la référence [Cirani, 2002] propose-t-elle une topologie torique à stator encoché interne, et à deux rotors externes (fig 1.34a). Dans cette référence, ce type de topologie torique est proposé pour être utilisé dans une application de traction hybride, à condition d'y adjoindre, pour favoriser la défluxage, des pôles ferromagnétiques entre les aimants (on obtient ainsi une machine à pôles rotoriques saillants à aimants enterrés). En fait, concernant les topologies toriques des références [Gieras *et al.*, 2008, Aydin *et al.*, 2002a, Profumo *et al.*, 1996], il existe deux principaux choix possibles pour la fabrication : soit, comme dans la figure 1.16, on place des aimants de même polarité en vis-à-vis, soit on place des aimants de polarité opposée en vis-à-vis (figure 1.17). Dans le premier cas, le flux des aimants est canalisé dans le stator, ce qui oblige à prévoir la culasse statorique en conséquence. Dans le second cas, la culasse statorique juste traversée par l'induction, est réduite au minimum pour assurer la rigidité mécanique. Mais, comme représenté au niveau de la figure 1.17, ceci se solde par des têtes de bobine bien plus importantes, car, si on veut que le couple produit par une face n'annule pas le couple produit par l'autre, les conducteurs aller d'une bobine doivent dans ce cas être décalés d'un pas polaire par rapport aux conducteurs retour.

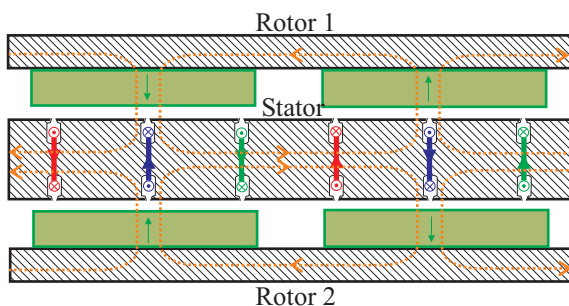


FIGURE 1.16: Machine torique développée au rayon moyen avec aimants de même polarité en vis-à-vis

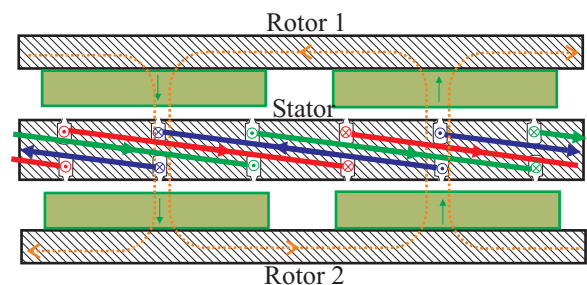


FIGURE 1.17: Machine torique développée au rayon moyen avec aimants de polarité opposée en vis-à-vis

Ce type de topologie a été généralisé à des structures ne comportant pas qu'un seul stator interne et deux parties rotoriques externes, mais N stators internes et $N + 1$ rotors externes (référence [Aydin *et al.*, 2004]). Un exemple de machine avec un nombre de couches strictement supérieur à deux est montré au niveau de la référence [Feudale *et al.*, 2005], et schématisée à la figure 1.18. Selon les auteurs, l'argument qui les a poussé à mettre au point cette topologie est l'impossibilité d'augmenter le diamètre externe de l'actionneur, car celui-ci fonctionne en entraînement direct des roues du train. En plus, cette topologie, comme montré au niveau de la figure 1.19, possède l'avantage d'offrir des possibilités de refroidissement intéressantes. Ainsi un circuit de refroidissement forcé à eau est-il placé au centre de chaque tore. Enfin, notons que, quel que soit le type de machines qui nous intéresse, des rotors comportant des arrangements d'aimants un peu plus complexes sont possibles, comme par exemple des structures à pôles saillants à concentration de flux, toujours présentées dans la référence [Aydin *et al.*, 2004], et schématisées au niveau de la figure 1.20.

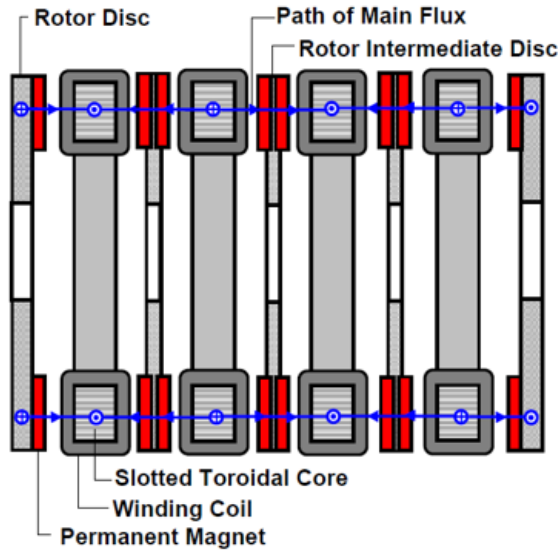


FIGURE 1.18: Machine torique à couches multiples pour application de traction ferroviaire de la référence [Feudale *et al.*, 2005]

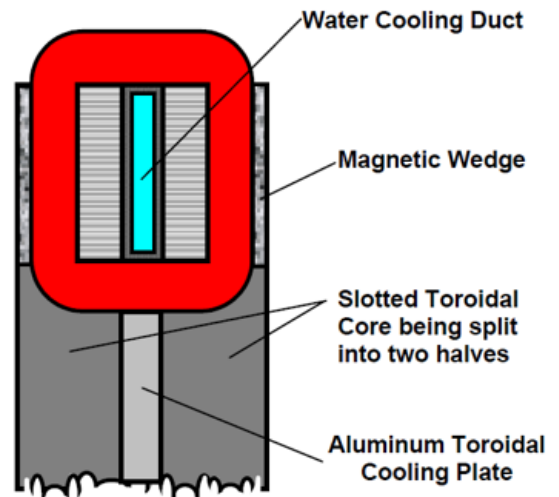


FIGURE 1.19: Système de refroidissement de la machine torique à couches multiples de la référence [Feudale *et al.*, 2005]

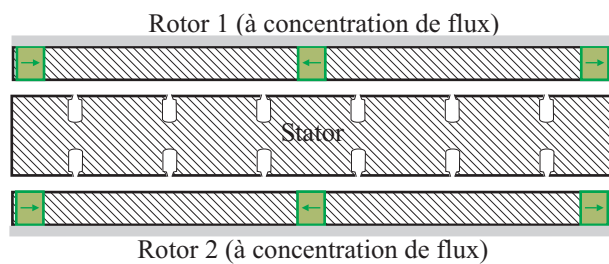


FIGURE 1.20: Exemple de machine torique avec une topologie à concentration de flux au niveau du rotor

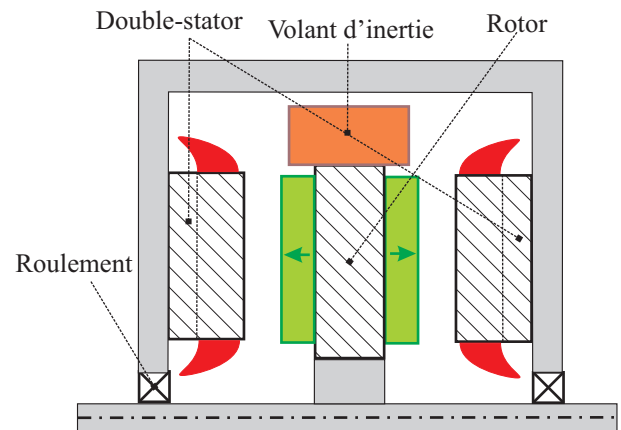


FIGURE 1.21: Machine avec rotor interne et double stator encoché à petites dents externe, intégrant le volant d'inertie d'un véhicule hybride

La référence [Sahin et Vandenput, 1999] propose des structures duales de machines, avec un rotor interne et deux stators externes (figure 1.21). La machine proposée dans cette dernière référence possède un rotor volumineux, car intégrant directement le volant d’inertie du véhicule hybride pour lequel est destinée la machine de la figure 1.21. Dans la référence [Gieras *et al.*, 2008], ainsi que dans les références [Aydin *et al.*, 2004] et [Profumo *et al.*, 2002], les auteurs vont même plus loin en proposant des topologies à stator central et à double rotor externe, mais faisant carrément l’économie d’une culasse rotorique, en plaçant les aimants dans des trous appropriés ménagés dans un disque en résine (figure 1.34b pour le schéma en coupe). Les mêmes auteurs ont proposé, au lieu du classique bobinage à petites dents pour les faces statoriques, d’utiliser, pour chaque face, un bobinage torique (figure 1.34d et référence [Huang *et al.*, 2002]). Bien que l’espace occupé par les têtes de bobine soit réduit grâce au bobinage torique, il semble néanmoins que ce type de configuration soit pénalisant à cause de la longueur excessive du bobinage qu’elle réclame, du fait que les faces externes de la machine ne contribuent pas directement à la création de couple.

Pour finir, signalons que d’autres auteurs ([Lipo et Aydin, 2004a], [Aydin *et al.*, 2002b]), choisissent, pour améliorer les capacités de contrôle, notamment en régime de défluxage de ces actionneurs, de donner à ces structures double face des possibilités de double-excitation. Le bobinage supplémentaire ajouté, parcouru par un courant continu, se trouve localisé au milieu du stator. La figure 1.22 propose une structure à flux axial à encoches double face avec rotor interne, et la figure 1.23 illustre la structure duale où le stator est situé à l’intérieur. Le fait marquant de ces topologies réside dans la stratégie mise au point afin de permettre au flux produit par la bobine de double excitation d’être plus efficace : le rotor à aimants est en effet muni de pôles en fer massif qui alternent avec les aimants. Ces pôles en fer réduisent la réluctance du trajet du flux de double excitation. L’explication détaillée du fonctionnement se trouve dans la référence [Aydin *et al.*, 2002b], où les trajets de flux, à la fois pour les aimants et le flux de double-excitation, sont montrés en trois dimensions.

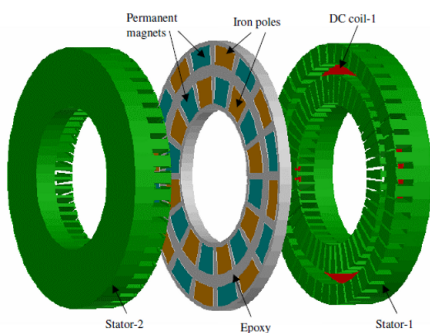


FIGURE 1.22: La machine à flux axial à double excitation (topologie à rotor interne) de [Lipo et Aydin, 2004a], avec pôles en fer pour permettre le défluxage

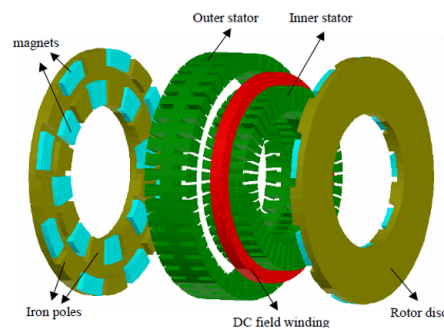


FIGURE 1.23: La machine à flux axial à double excitation (topologie à disques rotoriques externes) de [Aydin *et al.*, 2002b], avec pôles en fer pour permettre le défluxage

1.1.2.2 Les topologies sans encoche

Les topologies toriques sans encoche statorique sont très répandues. Ainsi l’article [Dubois *et al.*, 1999] propose-t-il une de ces topologies pour application éolienne. Le schéma en coupe de la machine est donné au niveau de la figure 1.24. L’avantage de ce type de structure est, selon les auteurs de [Dubois *et al.*, 1999], la densité de couple volumique très avantageuse, car la suppression des encoches permet de placer bien plus de bobinage. Néanmoins, l’article [Dubois *et al.*, 1999] précise qu’alors, cet avantage se paie au niveau du prix de la machine, car l’entrefer magnétique équivalent plus important qui en résulte réclame l’utilisation de volumes d’aimant bien plus conséquents pour conserver une induction raisonnable dans l’entrefer de la machine. Cela étant, il semble que l’on soit gagnant au niveau du couple volumique, car, dans l’application envisagée dans la référence [Dubois *et al.*, 1999], le compromis entre volume d’aimant et volume de cuivre penche en faveur du volume d’aimant, ce qui pousse à prendre une machine sans encoche. En outre, pour les applications éoliennes, l’article [Chalmers et Spooner, 1999] apprécie aussi l’absence de couple de détente du fait de la suppression des encoches. La topologie représentée au niveau de la figure 1.24 est la plus classique. Néanmoins, les références [Aydin *et al.*, 2004] ainsi que [Gieras *et al.*, 2008]

signalent des variantes permettant d'augmenter encore le couple volumique, comme celle de la figure 1.25. En effet, dans ce dernier cas, la face externe du tore est utilisée en tant que face active, pour produire du couple en plaçant un aimant à induction radiale, dans une machine où l'arbre constitue le stator, et la carcasse externe, sur laquelle sont rattachés les aimants, fait office de rotor.

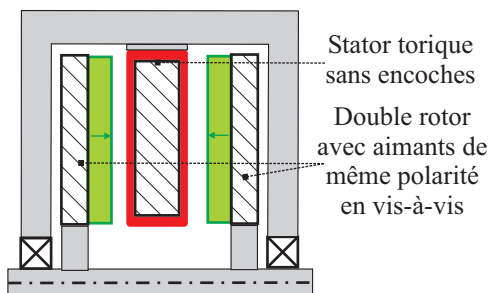


FIGURE 1.24: La machine à flux axial à stator interne torique sans encoche de [Dubois *et al.*, 1999]

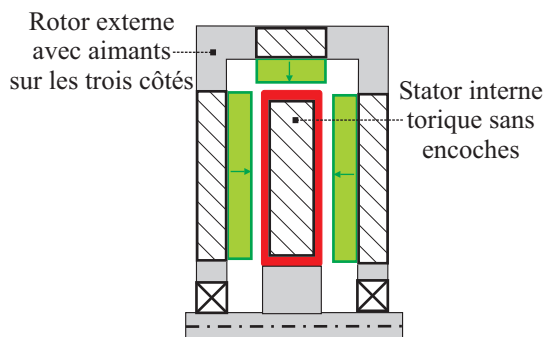


FIGURE 1.25: Topologie de machine à stator interne sans encoche présentée dans les références [Aydin *et al.*, 2004, Gieras *et al.*, 2008], incluant des aimants radiaux afin d'augmenter le couple volumique

Dans les articles [Profumo *et al.*, 1996] et [Caricchi *et al.*, 1996], les auteurs signalent l'intérêt de telles structures dans les applications de type véhicule hybride, où la densité de couple est un critère important, mais aussi la qualité de ce dernier, qui doit avoir les ondulations les plus réduites possible. Dans ce contexte, la machine torique sans encoche apparaît ici comme le candidat idéal, car l'absence des encoches annule automatiquement tout couple de détente. Dans [Caricchi *et al.*, 1996], les auteurs signalent l'utilisation d'une telle structure dans un moteur-roue pour un véhicule électrique, afin de réduire au minimum la partie mécanique du véhicule. Ce moteur, pour s'intégrer au mieux dans la roue, est à rotor externe, et comporte une originalité dans le sens où il est constitué de deux moteurs à bobinage torique sans encoche accolés (figure 1.26). La raison de ce dédoublement de structure réside dans le fait que le diamètre externe, pour l'intégration dans une roue, est nécessairement limité, ce qui oblige à mettre deux étages pour atteindre le couple demandé. En outre, le stator est refroidi en faisant circuler au centre des tores de l'eau de refroidissement.

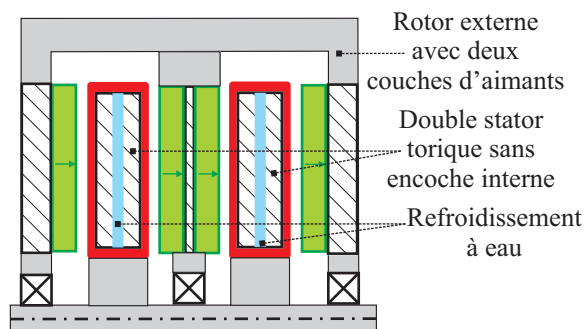


FIGURE 1.26: Moteur-roue de la référence [Caricchi *et al.*, 1996] pour la traction électrique, comportant deux structures toriques sans encoche dédoublées, ainsi qu'un refroidissement à eau

Cette topologie torique sans encoche est utilisée dans d'autres applications où les couples volumique et massique réclamés sont importants : l'article [Simsir et Ertan, 1999] propose l'utilisation de telles machines dans une application de lave-linge, qui est présentée comme une application contraignante en ce qui concerne les couples à fournir (afin de vaincre l'inertie de la charge à entraîner). Cette solution de motorisation s'est avérée bien supérieure, à la fois en termes de couple massique et de rendement, que les motorisations classiques avec moteur universel ou

asynchrone (la masse de fer est divisée par deux pour la machine à flux axial torique à aimants sans encoche par rapport au moteur universel ou asynchrone). Néanmoins, du fait de l'absence des encoches, les courants absorbés par la machine à flux axial sont plus importants que pour les autres types de moteur, ce qui est un problème concernant le prix et la masse de l'onduleur à utiliser. L'étude de comparaison a été menée sur la base des équations de dimensionnement, que l'on va détailler dans la partie suivante.

Finissons en signalant que les machines toriques sans encoche ne sont pas les seules topologies de machines sans encoche multicouche qui existent. En effet, pour des applications très particulières comme celle présentée dans la référence [Hill-Cottingham *et al.*, 2001], où il est question d'un avion stratosphérique fonctionnant à l'énergie solaire utilisé à des fins de télécommunications, il est proposé une topology à flux axial à aimants multicouche sans fer, sauf au niveau des disques terminaux du rotor afin de permettre le rebouclage du flux (figure 1.27). De telles topologies sans fer présentent un entrefer magnétique équivalent très élevé qui nécessite une grande quantité d'aimants pour produire des inductions conséquentes. Néanmoins, dans ce genre d'applications très marginales, le coût ne compte guère. Ce choix de structure trouve sa justification dans le fait que pour le même volume externe, les surfaces actives d'une machine à flux radial classique seraient bien moindres que pour cette machine à flux axial multicouche, autorisant donc un couple plus important. L'article signale aussi qu'une machine à flux radial aurait environ des mêmes quantités de fer qu'il est nécessaire de placer au niveau des disques terminaux du rotor de la machine à flux axial. De plus, ces disques ferromagnétiques se trouvant tous deux au rotor de la machine, les pertes ferromagnétiques y sont très faibles. Enfin, la machine est plus facile à fabriquer, car la suppression du fer au stator entraîne la disparition des forces d'attraction axiale entre le stator et le rotor. Le bobinage est de type à grosses dents, moulé dans une résine très légère (figure 1.28). Il faut néanmoins tempérer ces dernières conclusions, car le placement des bobines dans l'entrefer génère des pertes par courants induits dans ces derniers, qui sont calculées par éléments finis dans l'article.

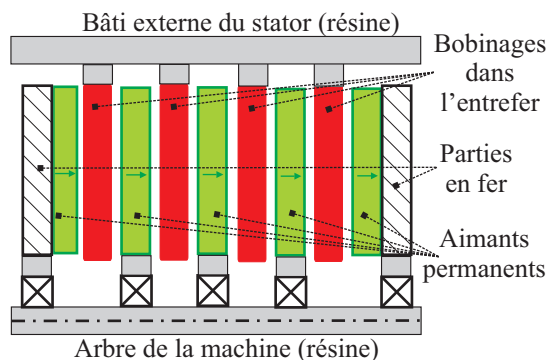


FIGURE 1.27: La topology à flux axial multicouche sans fer de la référence [Hill-Cottingham *et al.*, 2001]

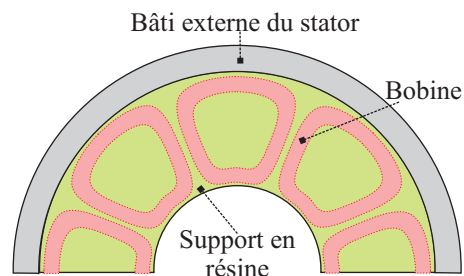


FIGURE 1.28: Bobinage de la machine à flux axial multicouche sans fer de la référence [Hill-Cottingham *et al.*, 2001]

1.2 Les modèles électromagnétiques des machines à flux axial à aimants permanents

La littérature électrotechnique présente de nombreuses méthodes de modélisation des machines à flux axial en vue de leur conception. L'objectif d'un travail de modélisation d'un système physique est de pouvoir prédéterminer les performances de ce système, comme, pour une machine électrique, le couple développé. On donne généralement au départ certains paramètres, comme par exemple ses caractéristiques géométriques ou les propriétés des matériaux utilisés. La nécessité de disposer d'un modèle s'inscrit généralement dans une démarche de dimensionnement du système pour une application donnée. En effet, le cahier des charges à respecter définit les performances souhaitées, et le modèle dont on dispose est alors inversé afin de fournir les paramètres qu'il convient d'adopter pour réaliser un dispositif qui vérifie le cahier des charges. Le plus souvent, le problème d'inversion est sous-déterminé, c'est-à-dire que l'on peut trouver une infinité de combinaisons de paramètres qui permet de respecter le cahier des charges fixé. Auquel cas, il faut rajouter d'autres critères afin de pouvoir inverser le problème. Ces critères sont le plus

souvent des performances à optimiser : par exemple, pour une machine électrique, il peut s'agir de minimiser les pertes, la masse totale, le volume ou encore le coût : on ne parle plus alors de processus d'inversion du modèle, mais d'optimisation à partir du modèle.

Cela étant, les stratégies et les méthodes de modélisation électromagnétique des machines électriques ne sont bien évidemment pas uniques, et de nombreuses variantes existent. Nous nous proposons, dans cette partie, d'exposer les principales voies qui peuvent être suivies afin d'aboutir à la modélisation des performances électromagnétiques des machines synchrones à flux axial à aimants permanents.

1.2.1 Les modèles fondés sur une modélisation électromagnétique simplifiée.

Dans cette section, toutes les notations introduites sont récapitulées dans le tableau 1.4 à la fin du chapitre. De tels modèles analytiques permettent, moyennant certains calculs très simples sur des grandeurs physiques usuelles, d'aboutir à des règles de dimensionnement en reliant les grandeurs géométriques et d'alimentation des machines à flux axial à leurs performances en termes de couple, mais aussi de pertes, d'échauffement... Bien sûr, l'utilisation de ces modèles analytiques simplifiés se paie au niveau de leur précision, mais, selon leurs auteurs, il ne s'agit que d'un prélude afin d'identifier des géométries de machines intéressantes lors d'un pré-dimensionnement rapide, géométries qui devront par la suite être validées par simulation au moyen des éléments finis 3D lors de la phase de dimensionnement. La simplicité de tels modèles est intéressante dans le sens où elle permet, en appliquant les modèles à différentes topologies de machines, de comparer ces machines entre elles.

Aydin, dans le chapitre 3 de sa thèse [Aydin, 2004], a appliqué les méthodes de dimensionnement des machines électriques mises au point par Lipo [Lipo, 2004] afin de proposer des modèles de dimensionnement et des comparaisons des machines à flux axial à aimants permanents. Le point de départ de ce raisonnement est le bilan de puissance de la machine, qui permet d'aboutir à une équation appelée « équation de dimensionnement », qui lie la puissance mécanique délivrée par la machine aux principales dimensions ainsi qu'aux grandeurs électriques et magnétiques choisies par le concepteur. Gieras a montré en détail dans son livre [Gieras *et al.*, 2008] que, dans le cas d'une machine à flux axial à aimants permanents, cette équation de dimensionnement pouvait être écrite sous la forme (la machine est supposée simple face pour l'instant) :

$$P_{MA} = K_e K_i K_p \eta B_g A_L \frac{f}{p} (1 - \lambda^2) \frac{1 + \lambda}{2} D_o^3 \quad (1.4)$$

Dans l'équation 1.4, les paramètres introduits ont la signification suivante :

- D_o est le diamètre externe actif de la machine à flux axial. On définit D_i le diamètre interne actif, et $D_g = \frac{D_o + D_i}{2}$ le diamètre moyen actif de la machine à flux axial. Le paramètre $\lambda = \frac{D_i}{D_o}$ est de grande importance comme on va le voir par la suite.
- B_g est la charge magnétique, définie comme étant l'induction magnétique maximale sous un pas polaire dans l'entrefer de la machine.
- A_L est définie comme étant la charge électrique de la machine, c'est-à-dire le courant efficace total par unité de longueur d'entrefer. Par exemple, pour la charge électrique statorique, dans le cas où la face statorique comporte au total N_t spires par phase, le nombre de phases du stator étant noté m , et en notant I_{rms} la valeur efficace du courant dans chaque fil de la machine, nous aurons la relation suivante :

$$A_L = 2mN_t \frac{I_{rms}}{\pi D_g} \quad (1.5)$$

- f est la fréquence d'alimentation de la machine (son inverse est la période T), et p est le nombre de paires de pôles.
- A partir de la force électromotrice due aux aimants $e(t)$ et du courant d'alimentation $i(t)$, ayant respectivement une amplitude E_{pk} et I_{pk} , on définit les fem et courant normalisés de la manière suivante :

$$f_e(t) = \frac{e(t)}{E_{pk}} \quad (1.6)$$

et :

$$f_i(t) = \frac{i(t)}{I_{pk}} \quad (1.7)$$

Le facteur de forme de la puissance (en régime sinusoïdal, c'est le facteur de puissance $\cos(\varphi)$), noté K_p est défini par :

$$K_p = \frac{1}{T} \int_0^T f_e(t) f_i(t) dt \quad (1.8)$$

Le facteur de forme de la tension K_e se définit ainsi, pour la machine à flux axial :

$$K_e = \frac{E_{pk}}{N_t B_g \frac{f}{p} (D_o^2 - D_i^2)} \quad (1.9)$$

Quant au facteur de forme du courant, il est défini comme suit :

$$K_i = \frac{I_{pk}}{I_{rms}} \quad (1.10)$$

– η est le rendement de la machine.

Aydin [Aydin, 2004] introduit un facteur d'aspect des machines à flux axial comme étant :

$$K_L = \frac{D_o}{L_e} \quad (1.11)$$

où L_e est la hauteur axiale de la machine, qui va être imposée par certaines considérations sur les grandeurs physiques et géométriques. Avec ce paramètre, on trouve une deuxième expression de l'équation de dimensionnement 1.4 :

$$P_{MA} = K_e K_i K_p K_L \eta B_g A_L \frac{f}{p} \left[(1 - \lambda^2) \frac{1 + \lambda}{2} D_o^2 \right] L_e \quad (1.12)$$

Aydin se sert de cette équation pour mener une optimisation à deux variables (B_g et λ) afin de maximiser le couple volumique. Gieras [Gieras *et al.*, 2008] avait simplement pris le rapport $\lambda = \frac{D_i}{D_o} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ afin de maximiser la puissance grâce à l'équation 1.4 ou 1.12, mais Aydin a une approche plus complexe et plus exacte en considérant notamment les têtes de bobine. C'est l'approche que nous présentons ici.

L'intérêt de tout ce formalisme réside dans la possibilité, en maintenant par ailleurs constantes les charges magnétiques B_g et A_L , de réécrire ces équations pour les machines à flux radial (qui sont elles bien connues [Lipo, 2004]), et donc de disposer d'un moyen à la fois rapide et puissant de comparaison des topologies (d'une part entre les topologies à flux axial et à flux radial, mais aussi entre les différentes topologies de machines à flux axial). Pour la machine à flux radial, on rappelle donc que ces équations de dimensionnement s'écrivent :

$$P_{MR} = K_e K_i K_p \eta B_g A_L \frac{f}{p} [D_g^2] L_e \quad (1.13)$$

Les paramètres de cette équation sont similaires à ceux présents dans l'équation 1.4, si ce n'est que dans le cas de la machine à flux radial, D_g est le rayon d'entrefer de la machine, et L_e est sa hauteur active. Nous pouvons obtenir, en introduisant $\lambda_o = \frac{D_g}{D_o}$ le rapport entre le diamètre d'entrefer et le diamètre externe de la machine, l'équation 1.13 sous la forme suivante :

$$P_{MR} = K_e K_i K_p \eta B_g A_L \frac{f}{p} \lambda_o^2 D_o^2 L_e \quad (1.14)$$

Dans cette équation, λ_o est le dual du facteur de forme des machines à flux axial K_L . De la même manière, le facteur de forme des machines à flux radial est défini par :

$$K_l = \frac{L_e}{D_g} \quad (1.15)$$

Il constitue un paramètre d'optimisation de la machine à flux radial, qui est lui le dual du rapport des diamètres $\lambda = D_i/D_o$ de la machine à flux axial. Les dimensions introduites pour la machine à flux radial sont résumées à la figure 1.29.

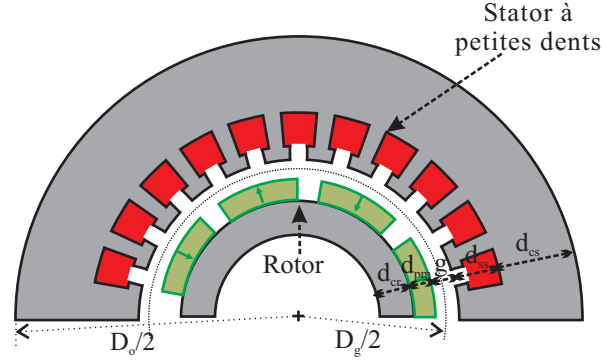


FIGURE 1.29: Les principales dimensions de la machine à flux radial

1.2.1.1 Comparaisons des topologies de machines à flux axial entre elles

Aydin [Aydin, 2004] s'est servi de la théorie développée sur les machines à flux axial dans le but d'optimiser une structure de machine à flux axial en forme de tore bobiné sans encoche. Nous rappelons cette structure vue en coupe à la figure 1.30. Le bobinage considéré est donc localisé dans l'entrefer, et c'est, comme représenté à la figure 1.31, un bobinage triphasé réparti classique, bobiné autour du tore ferromagnétique constituant le stator. Le bobinage de chaque phase occupe le tiers du pas polaire.

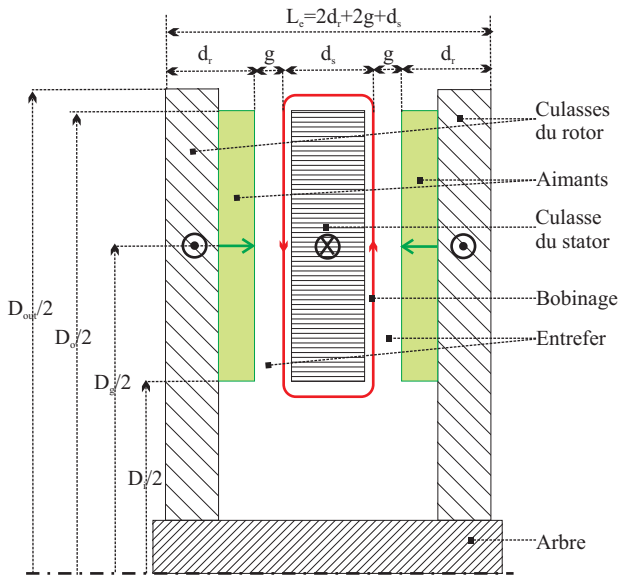


FIGURE 1.30: Vue en coupe de la machine à flux axial torique à stator interne sans encoche [Huang *et al.*, 1999]

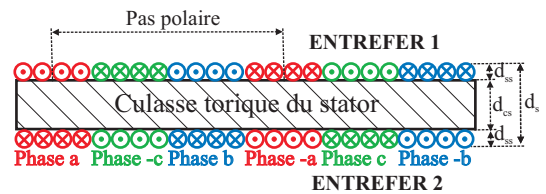


FIGURE 1.31: Vue en coupe au niveau du rayon moyen de la machine à flux axial torique sans encoche [Huang *et al.*, 1999]

La première étape consiste à exprimer la hauteur axiale des parties actives L_e (équation 1.12) en fonction des paramètres géométriques et magnétiques de la machine à flux axial. En se référant aux notations de la figure 1.30, la hauteur axiale des parties actives peut être écrite sous la forme :

$$L_e = 2d_r + 2g + d_s \quad (1.16)$$

où d_r est la longueur active du rotor : $d_r = d_{cr} + d_{pm}$, ces deux grandeurs correspondant respectivement à la hauteur axiale d'une culasse rotorique, et à la hauteur axiale des aimants. L'épaisseur axiale de l'entrefer de la machine est notée g . La hauteur du stator torique sans encoche est notée d_s . Cette hauteur est formée d'une culasse

ferromagnétique feuilletée, de hauteur d_{cs} , et de celle des bobinages dans le sens axial, notée W_{cu} : $d_s = d_{cs} + 2W_{cu}$. Afin d'évaluer W_{cu} , Huang [Huang *et al.*, 1999] a mis au point une méthode fondée sur des considérations de volume. En introduisant J_s la densité surfacique efficace de courant dans le fil de cuivre, et K_{cu} le facteur de bobinage, des considérations simples sur le volume de cuivre permettent en effet d'écrire que :

$$W_{cu} = \frac{D_i - \sqrt{D_i^2 - \frac{2A_L D_g}{K_{cu} J_s}}}{2} \quad (1.17)$$

Cette grandeur est d'ailleurs utile non seulement pour la question de l'encombrement axial, mais aussi celle des dimensions radiales, car on peut alors écrire le diamètre externe total de la machine sous la forme :

$$D_{out} = D_o + 2W_{cu} \quad (1.18)$$

A noter que dans son article [Huang *et al.*, 1999], Huang avait différencié les expressions des épaisseurs des têtes de bobine internes et externes, mais cette subtilité ne semble pas avoir été reprise par Aydin dans sa thèse [Aydin, 2004].

Nous allons nous servir des conditions de non-saturation des parties ferromagnétiques afin de déterminer leur épaisseur. Dans tous ces calculs, le flux de réaction magnétique sera négligé par rapport à celui des aimants. On appelle B_{cs} le niveau d'induction tolérable dans la culasse du stator, et β_a l'ouverture angulaire relative des aimants (supposé radiaux) par rapport au pas polaire. Nous introduisons l'induction moyenne d'entrefer sous un pôle Nord d'aimant \overline{B}_g , reliée à l'induction maximale d'entrefer B_g par la relation suivante : $\overline{B}_g = K_f B_g$. Le coefficient K_f est le rapport entre la valeur moyenne de l'induction d'entrefer sous un pôle \overline{B}_g et sa valeur maximale B_g , et doit être déterminé par éléments finis tri-dimensionnels dans la machine à flux axial. Dans notre cas, où les aimants sont radiaux, et d'ouverture angulaire β_a , il est légitime de dire, en première approximation, que $K_f \approx \beta_a$. On obtient alors, pour l'épaisseur de la culasse du stator :

$$d_{cs} = \frac{B_g K_f \pi D_o (1 + \lambda)}{B_{cs} 4p} \quad (1.19)$$

Pour ce qui est des épaisseurs rotoriques, il faut diviser l'expression précédente par un facteur deux, du fait que la culasse du rotor ne doit canaliser que le flux magnétique présent sous une seule face :

$$d_{cr} = \frac{B_u \pi D_o (1 + \lambda)}{B_{cs} 8p} \quad (1.20)$$

où B_u est l'induction moyenne sur un pôle au niveau de la surface des aimants. Cette grandeur est calculée de la manière suivante : vu que B_u est l'induction moyenne à la surface des aimants, c'est l'image du flux magnétique injecté par les aimants dans l'entrefer. Une partie de ce flux n'atteint pas le stator, car elle est perdue à cause des fuites inter-aimants. C'est pour cela que l'on introduit le coefficient de fuites $K_d < 1$, de telle manière que l'induction moyenne d'entrefer sous un pôle statorique \overline{B}_g , qui est l'image du flux des aimants atteignant effectivement le stator, soit liée à l'induction moyenne B_u par la relation : $\overline{B}_g = K_d B_u$. Aydin propose de calculer le coefficient de fuites K_d par éléments finis, et Huang [Huang *et al.*, 1999] en donne une estimation très grossière : $K_d = 1 - \frac{p}{30}$, mais qui met en évidence le fait que les fuites inter-aimants augmentent avec le nombre de paires de pôles p de la machine. C'est cette expression que nous adopterons par la suite.

Aydin [Aydin, 2004] propose aussi la formule suivante (trouvée par un raisonnement sur la droite de charge de l'aimant [Dote et Kinoshita, 1990]), qui permet de déterminer la hauteur axiale des aimants d_{pm} en fonction de l'induction maximale d'entrefer voulue B_g (en ne perdant pas de vue que, pour cette topologie sans encoches au stator, l'entrefer réel magnétique est en fait $g + W_{cu}$) :

$$d_{pm} = \frac{K_f B_g}{B_R - \frac{1}{\beta_a} B_u} (g + W_{cu}) \quad (1.21)$$

Grâce à cette modélisation, Aydin [Aydin, 2004] a pu calculer le facteur de forme de la machine à flux axial, dont l'expression est :

$$K_L = 1 / \left\{ \frac{\pi(1+\lambda)}{4p} \left(\frac{K_f B_g}{B_{cs}} + \frac{B_u}{B_{cs}} \right) + \frac{1}{D_o} (2W_{cu} + 2g) \left(1 + \frac{K_f B_g}{B_R - \frac{1}{\beta_a} B_u} \right) \right\} \quad (1.22)$$

La procédure d'optimisation de la puissance massique (ou du couple massique) proposée par Aydin dans sa thèse [Aydin, 2004] est la suivante : dans un premier temps, certains paramètres sont choisis arbitrairement, de manière

cohérente avec l'expérience : c'est le cas du nombre de paires de pôles, de la charge électrique A_L , de la densité surfacique de courant efficace de courant J_S , de l'épaisseur de l'entrefer g , ainsi que des inductions maximales dans les culasses de la machine. Ensuite, connaissant la puissance mécanique voulue en sortie et la vitesse (ce qui est équivalent à donner un couple) le nombre de paires de pôles choisi impose la fréquence d'alimentation, et l'équation 1.4 est utilisée de manière à connaître le diamètre externe de la machine.

Le facteur de forme de la machine étant connu, il devient donc possible d'évaluer le volume externe total de l'actionneur, et donc la puissance volumique de la machine à flux axial torique sans encoche, par division de la puissance par l'expression du volume $\pi \left(\frac{D_{out}}{2}\right)^2 L_e$. Si on divise encore par la vitesse de la machine, proportionnelle au quotient $\frac{f}{p}$, on obtient alors l'expression du couple massique.

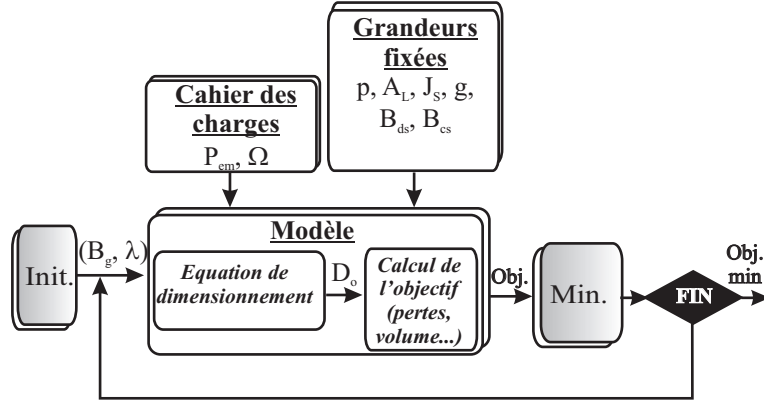


FIGURE 1.32: Synoptique de l'optimisation à partir des deux paramètres (B_g, λ)

Aydin [Aydin, 2004] a mené, l'optimisation de la puissance massique de la machine torique à flux axial, en traçant le couple massique en fonction des deux paramètres que sont B_g et λ , et en prenant le maximum de la courbe obtenue. Le synoptique de l'optimisation est montré à la figure 1.32. Il a en outre, après avoir modélisé les pertes (dans le cuivre et dans le fer), tracé le rendement de la machine en fonction des deux mêmes paramètres, et en a pris le maximum. Le résultat est que la combinaison de paramètres (B_g, λ) maximisant la puissance massique ne coïncide pas avec celle maximisant le rendement. Mais Aydin montre que l'optimum de rendement est plus robuste que celui du couple massique, et par conséquent si on est amené à s'en écarter pour maximiser un autre critère, le rendement ne s'en trouvera que très peu dégradé (ceci montre que la puissance massique et le rendement sont bien deux critères contradictoires, mais « pas trop »).

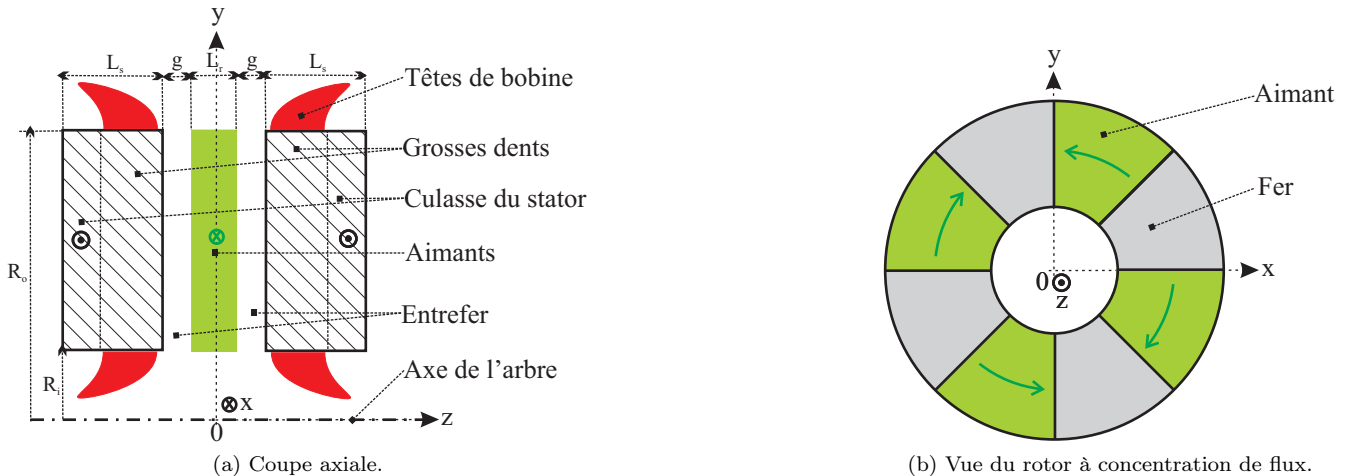


FIGURE 1.33: Topologie de la machine axiale à aimants à un rotor interne à concentration de flux et deux stators externes à grosses dents [Huang *et al.*, 1999].

D'autres auteurs ont fait le même travail pour des topologies de machines différentes. Ainsi Huang [Huang *et al.*, 1999] a-t-il appliqué la méthode afin de modéliser la machine axiale à double stator extérieur pour un rotor intérieur. Les bobinages statoriques sont à grosses dents pour la facilité de réalisation, le rotor étant à concentration de flux (figure 1.33).

La différence avec cette nouvelle machine réside dans la détermination de l'épaisseur des aimants d_{pm} , qui doit prendre en compte le phénomène de concentration de flux par le biais d'un facteur de concentration du flux, ainsi que dans l'évaluation de la longueur des têtes de bobine, auxquelles les formules de la machine torique ne s'appliquent plus. La forme des têtes de bobine pour la topologie à grosses dents est supposée former un demi-cercle, dont le diamètre est la distance entre les deux encoches. Les auteurs ont ensuite optimisé séparément pour les mêmes contraintes et le même cahier des charges ces machines, puis les ont comparées : les puissances massiques sont du même ordre de grandeur, bien qu'un léger avantage en faveur de la machine torique ait pu être observé. Ceci montre que, bien que la machine torique, à cause de son entrefer équivalent considérable, puisse sembler défavorable à la production d'une forte densité de couple, dans le cas présent, l'absence d'encoche laisse plus de place pour placer du cuivre, ce qui compense au niveau du couple produit la perte d'induction des aimants due au grand entrefer. Le même léger avantage est également obtenu sur le plan du rendement en faveur de la machine torique, la diminution des pertes fer due à l'absence des dents étant plus importante que l'augmentation des pertes cuivre (d'autant que la machine à grosses dents possède des pertes cuivre assez importantes, à cause de têtes de bobine relativement conséquentes). En outre, une étude de sensibilité a été effectuée sur le nombre de paires de pôles, mettant en évidence l'effet bénéfique de l'augmentation de ce paramètre sur le couple massique. Enfin, les deux machines à flux axial, dans ce cas, sont, d'après les études menées, plus intéressantes sur tous les plans en comparaison d'une motorisation utilisant une machine asynchrone à flux radial.

Au cours d'une autre étude [Huang *et al.*, 2002, Aydın *et al.*, 2001, Huang *et al.*, 2001, Huang *et al.*, 2000], les mêmes auteurs ont étendu ces comparaisons fondées sur les équations de dimensionnement à d'autres topologies de machines à flux axial. Plusieurs topologies à double face ont été modélisées par les équations de dimensionnement, puis comparées entre elles. Il s'agit des machines représentées en coupe (pour les parties actives) au niveau de la figure 1.34.

- Les machines à flux axial à deux faces à rotor externe : la machine torique sans encoche statorique de la figure 1.30, la machine torique avec encoches statoriques de la figure 1.34a.
- Les machines à flux axial à rotor interne : la machine disque avec encoches statoriques (il s'agit d'un bobinage à petites dents) de la figure 1.34b, la machine tore sans encoche statorique de la figure 1.34c, ainsi que la machine tore avec encoches statoriques de la figure 1.34d. Le rotor de ces machines à aimants à rotor interne est représenté à la figure 1.34e. Il est en fait constitué d'un simple support de matériau amagnétique percé pour y loger les aimants.

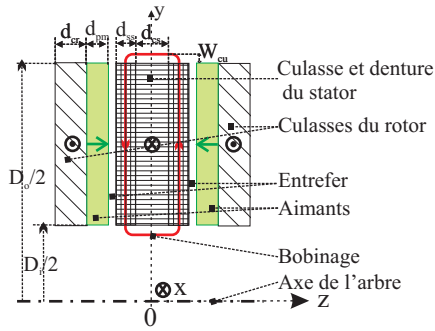
La méthodologie décrite auparavant pour écrire les équations de dimensionnement demeure inchangée : en se fixant un cahier des charges (une puissance mécanique à fournir ainsi qu'une vitesse de rotation), le diamètre externe actif D_o se trouve imposé par le biais de l'équation 1.4, qui, en prenant la racine cubique, donne :

$$D_o = \sqrt[3]{\frac{P_M}{K_e K_i K_p \eta B_g A_L \frac{f}{p} (1 - \lambda^2) \frac{1+\lambda}{2}}} \quad (1.23)$$

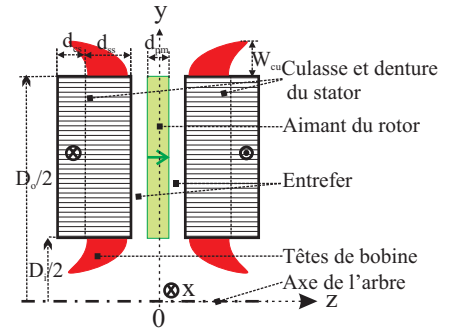
Ensuite, la hauteur active L_e de la machine est déduite en calculant l'épaisseur de chaque portion par les méthodes précédentes : les hauteurs des culasses statorique et rotorique sont calculées par des considérations de concentration de flux, la hauteur d_{pm} des aimants par un raisonnement sur la droite de charge. Dans les structures à encoches, il faut modéliser l'entrefer équivalent par un coefficient de Carter K_C . Pour les machines à rotor interne, la géométrie implique que dans l'expression 1.21, l'entrefer vu par les aimants doit être multiplié par deux.

- Pour les structures à rotor interne sans encoche, l'équation donnant l'épaisseur des aimants d_{pm} est le double de l'équation 1.21, car l'entrefer équivalent dans lequel débite l'aimant est doublé par rapport au cas précédent. Nous rappelons que W_{cu} est l'épaisseur des têtes de bobine dans les structures toriques non encochées donnée par l'équation 1.17.
- Pour les structures à rotor interne avec encoches, l'épaisseur des aimants est alors donnée par l'équation suivante, K_C étant le coefficient de Carter de la machine :

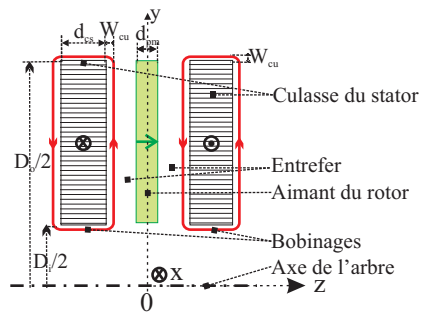
$$d_{pm} = \frac{2K_f B_g}{B_R - \frac{1}{\beta_a} B_u} (K_C g) \quad (1.24)$$



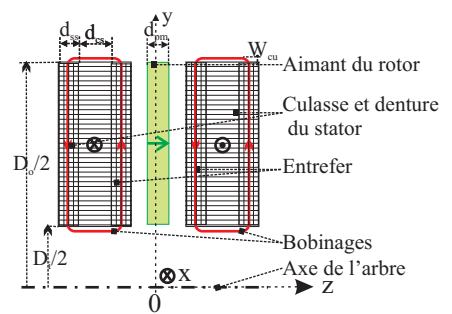
(a) La machine à bobinage torique avec encoches statoriques à rotor externe



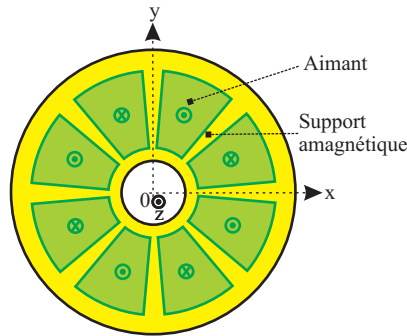
(b) La machine à bobinage réparti avec encoches statoriques à rotor interne



(c) La machine à bobinage torique sans encoches à rotor interne



(d) La machine tore avec encoches statoriques à rotor interne



(e) Topologie du rotor interne

FIGURE 1.34: Les différentes topologies de machines à flux axial à aimants en surface comparées dans [Huang *et al.*, 2002, Aydin *et al.*, 2001].

Dans cette étude, il est supposé, pour les machines à encoches, que l'ouverture relative des encoches β_e par rapport au pas dentaire τ_s (voir figure 1.35 pour la définition de ce paramètre) est égale à $1/2$.

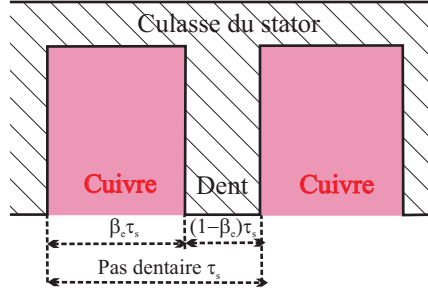


FIGURE 1.35: Définition de l'ouverture relative β_e de l'encoche par rapport au pas dentaire

En effet, il a été montré [Lipo, 2004] que ce choix permettait de maximiser, pour des contraintes de densité de courant efficace J_s et d'induction maximale dans la dent B_{ds} données, le produit $B_g A_L$ des charges magnétiques et électriques. En supposant que le flux de l'entrefer est parfaitement concentré dans les dents, on peut écrire que (en appelant d_{ss} la hauteur de la zone de denture) :

$$B_g A_L = (1 - \beta_e) \beta_e B_{ds} J_s d_{ss} \quad (1.25)$$

L'expression précédente est bien maximale si $\beta_e = \frac{1}{2}$.

Il est important de déterminer l'épaisseur radiale W_{cu} des têtes de bobine, afin de trouver l'expression du diamètre externe : $D_{out} = D_o + 2W_{cu}$. Pour les machines toriques, qu'elles soient à rotor interne ou externe, on écrit que :

$$W_{cu} = \begin{cases} \frac{D_i - \sqrt{D_i^2 - \frac{2A_s D_g}{K_{cu} J_s}}}{2} & \text{pour les machines sans encoche} \\ \frac{D_i - \sqrt{D_i^2 - \frac{2A_s D_g}{\beta_e K_{cu} J_s}}}{2} & \text{pour les machines avec encoches} \end{cases} \quad (1.26)$$

En ce qui concerne la machine disque à petites dents (figure 1.34b), les auteurs proposent une formule empirique pour les têtes de bobine, qui tient compte de la dépendance de cette grandeur en fonction du nombre de paires de pôles :

$$W_{cu} = 0.62 \frac{D_o}{p} \quad (1.27)$$

Pour les machines toriques sans encoche (à rotor interne ou externe), la hauteur d'encoche d_{ss} est directement égale à W_{cu} . Pour les machines avec encoches (les machines toriques à rotor interne ou externe, ainsi que la machine disque à petites dents), on trouve :

$$d_{ss} = \frac{1}{\beta_e K_{cu}} \frac{A_L}{J_s} \quad (1.28)$$

Avec les considérations précédentes, il est donc possible de déduire l'épaisseur axiale L_e de la machine, ainsi que son volume, en fonction des paramètres (B_g, λ) . Une optimisation peut alors être menée. Les conclusions, sous les hypothèses de cette modélisation simplifiée, sont les suivantes :

- les machines toriques à stator interne (figures 1.30 et 1.34a) ont des puissances ou couples volumiques légèrement supérieurs, avec une préférence pour la machine sans encoche. Ceci est dû au fait que, dans les machines toriques, la zone ainsi que la longueur des têtes de bobine W_{cu} sont réduites comparées à celles des machines disques à bobinage réparti (figure 1.34b). Il semble de plus que le fait de ne pas mettre d'encoche soit intéressant par rapport aux structures encochées dans les cas étudiés. En effet, l'augmentation de l'épaisseur d'aimant nécessaire pour obtenir une induction d'entrefer significative est plus faible que l'augmentation de l'épaisseur d_{ss} de la zone d'encoche qui est observée dans les machines encochées, pour garantir la même charge électrique A_L que dans une machine sans encoche.
- En revanche, les machines toriques à stator externe, avec ou sans encoches (figures 1.34d et 1.34c), malgré le gain en hauteur axiale sur la zone de culasse du rotor et sur le volume des têtes de bobine dû au bobinage torique, sont moins intéressantes, leur structure torique impliquant que les faces externes de l'actionneur se

retrouvent être des faces inactives afin de générer le couple demandé. Qui plus est, le bobinage étant beaucoup plus long, les pertes cuivre sont accrues. Leur seul avantage est de présenter le facteur puissance ou couple sur surface d'évacuation le plus important, à cause justement de leur surface externe.

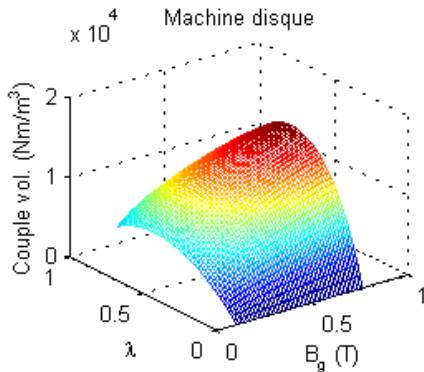
- Cela étant, la machine disque à rotor interne à bobinage réparti (figure 1.34b) est la machine qui présente le couple massique le plus important. En effet, la culasse statorique est économisée, et le bobinage, même si les têtes de bobine de la machine disque en allongent la longueur, est tout de même moins important que pour les machines toriques à rotor interne (figures 1.34d et 1.34c), qui présentent des faces externes inactives dont nous venons de parler.

Les auteurs de ces articles vérifient ensuite que les modèles développés sont en bonne concordance avec les éléments finis 3D.

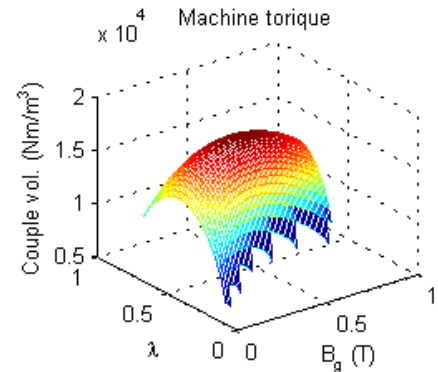
A titre d'exemple, on se propose de comparer, pour le cahier des charges suivant (Couple de 100Nm, vitesse de 2700tr/min), qui est un cahier des charges que nous reprendrons au chapitre 2, le couple massique de la machine torique sans encoche à rotor externe (figure 1.30), avec celui de la machine disque à bobinage réparti à double stator et à rotor interne (figure 1.34b). Nous utilisons la méthode de comparaison introduite auparavant. Les hypothèses sont :

- Un coefficient de bobinage $K_{cu} = 0.4$.
- Une ouverture relative des encoches par rapport au pas dentaire $\beta_e = 0.5$ pour la machine à bobinage réparti (figure 1.34b).
- Un entrefer $g = 2mm$.
- Une ouverture relative de l'aimant par rapport au pas polaire $\alpha_i = 150/180$ (pour des impératifs de minimisation des harmoniques).
- Une densité linéique de courant efficace $A_L = 600A/cm$.
- Une densité surfacique de courant efficace dans le cuivre $J_s = 10A/mm^2$.
- Une alimentation en régime sinusoïdal, avec une commande de type couple par ampère maximal.
- N'ayant à ce stade pas de modèle éléments finis 3D, le coefficient K_f sera pris égal à β_a .
- Le nombre de paires de pôles $p = 4$.
- Nous prendrons un rendement unitaire dans cette étude simplifiée.
- Des inductions à saturation de 1.5T dans toutes les parties ferromagnétiques de la machine.

Les résultats d'optimisation du couple massique en fonction des paramètres (B_g, λ) sont consignés au niveau de la figure 1.36 et du tableau 1.1.



(a) Pour la machine disque à bobinage réparti à encoches et rotor interne (figure 1.34b)



(b) Pour la machine torique sans encoche à rotor externe (figure 1.30)

FIGURE 1.36: Tracé du couple massique en fonction des paramètres (B_g, λ) .

Paramètre	Valeur
$\frac{C_{em}}{V_{tot}}$	$1.59 \cdot 10^4 Nm/m^3$
λ	0.47
B_g	0.75T
D_o	22.6cm
W_{cu}	3.6cm
D_{out}	30.2cm
d_{ss}	2.3cm
d_{pm}	10mm
L_e	8.8cm

(a) Pour la machine disque à bobinage réparti à encoches et rotor interne optimisée

Paramètre	Valeur
$\frac{C_{em}}{V_{tot}}$	$1.73 \cdot 10^4 Nm/m^3$
λ	0.52
B_g	0.41T
D_o	27.7cm
W_{cu}	1.2cm
D_{out}	30.21cm
d_{ss}	$W_{cu} = 1.2cm$
d_{pm}	7.4mm
L_e	8.1cm

(b) Pour la machine torique sans encoche à rotor externe

TABLE 1.1: Paramètres des machines optimisées.

Les conclusions à déduire de cette étude sont les suivantes :

- La machine torique sans encoche à rotor externe (figure 1.30) apparaît effectivement un peu plus intéressante du point de vue du couple massique (bien que les valeurs soient sur le fond très proches). Ceci est dû au fait que, étant donné que l'on n'a pas, dans la zone de bobinage, à consacrer de volume pour placer les dents en fer, on peut, à charge électrique donnée, fortement réduire la hauteur d_{ss} de la zone d'encoche, et donc y gagner sur le volume total.
- L'induction d'entrefer est, comme on peut s'y attendre, bien plus faible dans le cas de la machine torique sans dent que dans le cas de la machine disque à bobinage réparti à double stator (figure 1.34b), et ceci à cause de l'entrefer magnétique équivalent très grand rajouté par le bobinage. En effet, il ne sert à rien d'augmenter la hauteur de l'aimant, car le quotient $\frac{1}{1 + \frac{g + W_{cu}}{d_{pm}}}$, qui conditionne la valeur de l'induction dans l'entrefer, ne varie plus guère en fonction de d_{pm} lorsque $g + W_{cu}$ prend des valeurs grandes. Pour atteindre le couple, il faut donc non plus miser sur la valeur de l'induction maximale d'entrefer B_g , mais sur l'augmentation du diamètre actif externe D_o . Or, comme ce paramètre intervient par son cube dans l'expression du couple, il n'est pas besoin de beaucoup l'augmenter pour atteindre le couple désiré. Ceci donne une raison de l'intérêt des topologies sans encoche pour les machines à flux axial. Qui plus est, l'absence de dents statoriques constitue un excellent point pour la réduction à la fois des pertes fer, mais aussi du couple de détente (qui est en fait nul).
- Le volume des têtes de bobine joue un rôle important : en effet, pour la machine torique, qui a pourtant un plus grand diamètre actif externe D_o , le diamètre total externe D_{out} n'est pas augmenté par rapport à la machine disque à bobinage réparti, pour laquelle le bobinage plan implique des excursions plus grandes du cuivre. Ceci se paie aussi au niveau des pertes cuivre. Pour illustrer cette influence, nous avons relancé le calcul pour un nombre de paires de pôles $p = 10$, qui est plus grand, et donc qui diminue l'excursion radiale des têtes de bobine de la machine disque. La conclusion est que cette fois, c'est le couple massique de la machine disque à bobinage réparti ($2.64 \cdot 10^4 Nm/m^3$) qui est légèrement plus grand que celui de la machine torique ($2.45 \cdot 10^4 Nm/m^3$), bien que les résultats soient encore sur le fond semblables. En effet, en réduisant le volume des têtes de bobine, l'aspect bénéfique de la structure de la machine disque (qui fait l'économie d'une culasse statorique) peut donner tout son effet. Mais alors les pertes fer à vitesse importante, avec la présence des dents, risquent de devenir considérables.

1.2.1.2 Comparaison des topologies des machines à flux axial et à flux radial

Les modèles basés sur les équations de dimensionnement peuvent aussi servir à apprécier les performances relatives des machines à flux axial vis à vis de celles des classiques machines à flux radial. Néanmoins, cette tâche apparaît assez ardue, étant donné le nombre de paramètres qui entrent en jeu, ainsi que la multiplicité des critères et des contraintes possibles.

Certains auteurs présentent des études simplifiées permettant de comprendre les effets des différents paramètres entrant en jeu lors de la conception des machines à flux axial et à flux radial, avec des contraintes différentes. Ainsi, l'article [Brown *et al.*, 2002] propose de faire deux comparaisons du couple volumique fondées sur les équations de dimensionnement : l'une en maintenant le volume d'aimant constant, et l'autre en maintenant le volume externe

des machines constant. La comparaison à volume d'aimant constant part de considérations géométriques basiques : pour avoir le même volume d'aimant, les deux types de machines ont des surfaces actives constantes : le diamètre d'entrefer D_g de la machine à flux radial sera pris identique au rayon moyen $\frac{D_o+D_i}{2} = D_o \frac{1+\lambda}{2}$ de la machine à flux radial (figure 1.37), et la hauteur de la machine à flux radial est égale à $\frac{D_o-D_i}{2} = D_o \frac{1-\lambda}{2}$.

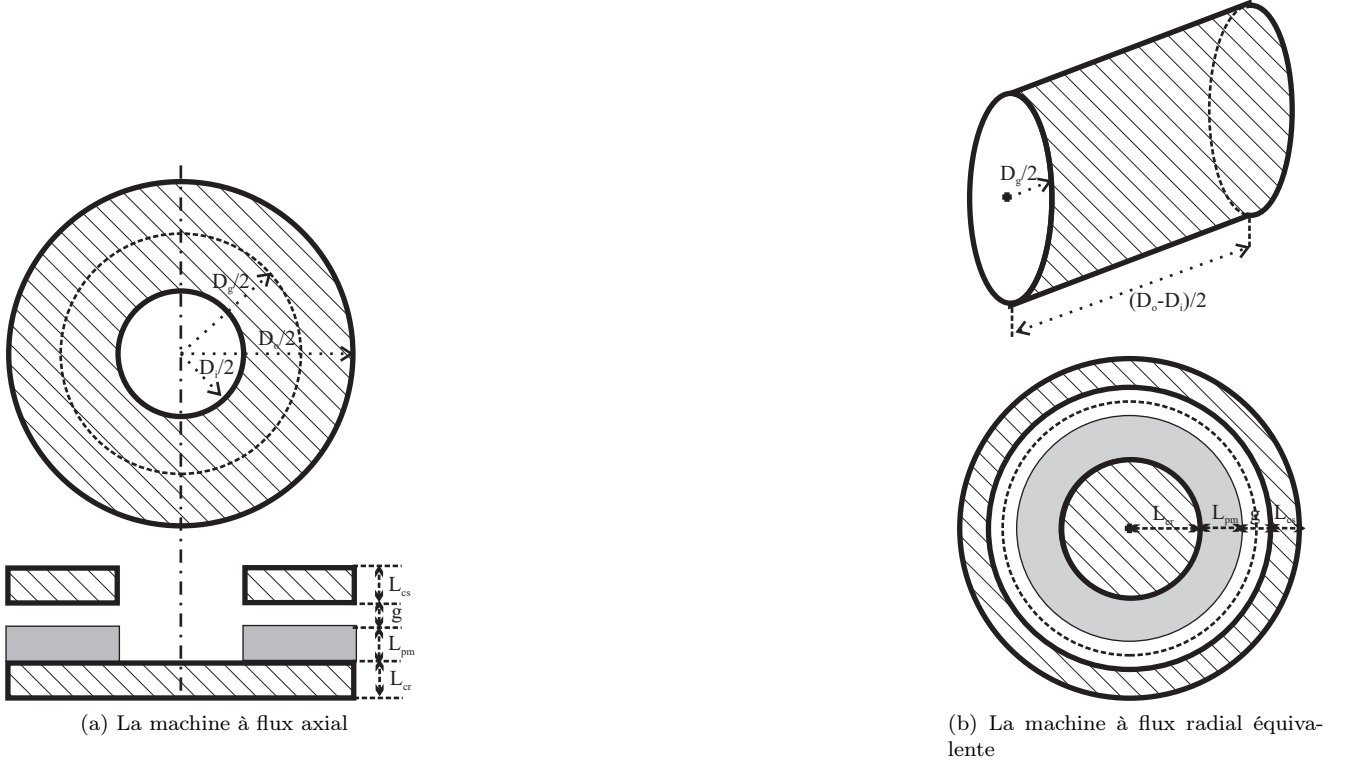
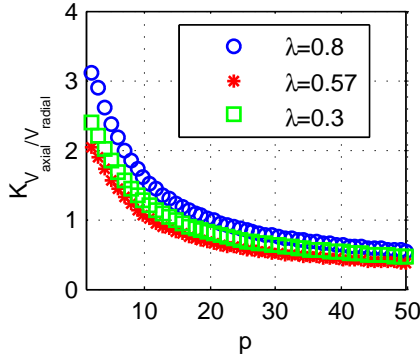


FIGURE 1.37: Equivalence entre la machine à flux axial et la machine à flux radial équivalente (pour un volume d'aimant donné) [Brown *et al.*, 2002]

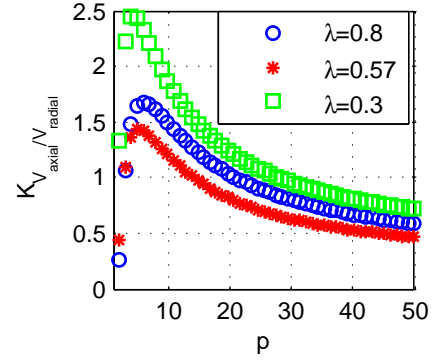
Les volumes des machines sont calculés de la façon suivante : les auteurs de [Brown *et al.*, 2002] donnent, de manière empirique une relation en fonction du diamètre externe D_o pour l'entrefer g de la machine à flux axial : $g = 0.006D_o$. L'entrefer de la machine à flux radial est pris à la même valeur (les auteurs signalent qu'une machine à flux radial peut avoir un diamètre d'entrefer plus faible, mais justifient cette valeur en disant que dans ce dernier cas, il faut prévoir un système de rétention des aimants à cause de la force centrifuge, qui de toute façon augmente l'entrefer magnétique équivalent). Quant à la hauteur des aimants, les auteurs disent vouloir les faire fonctionner à leur point d'énergie maximale, ce qui amènerait normalement à prendre d_{pm} égal à g , mais à cause de la réaction magnétique d'induit, les auteurs préconisent de prendre $d_{pm} = g^{\frac{4}{3}}$. De cette manière, on a bien le même volume d'aimant pour les deux machines. Pour les hauteurs de culasses statorique et rotorique, les auteurs font l'hypothèse que ces dernières, pour les deux machines, supportent une induction double de celle de l'entrefer, ce qui conduit à s'orienter vers la solution : $d_{cs} = d_{cr} = \frac{\pi D_o (1+\lambda)}{8p}$. La zone de bobinage est supposée de hauteur axiale négligeable, tout comme les têtes de bobine. En notant A_L la charge électrique efficace, et B_g l'amplitude de l'induction magnétique d'entrefer, toutes deux supposées spatialement sinusoïdales et en quadrature, la force surfacique tangentielle est donnée par la relation : $f_e = \frac{A_L B_g}{\sqrt{2}}$, et le couple est $C_{em} = f_e \pi D_o^2 \frac{1-\lambda^2}{4} \frac{D_g}{2}$ (on rappelle que $\lambda = \frac{D_i}{D_o}$). Après quelques manipulations algébriques, à couple donné à fournir, on peut trouver le rapport entre les volumes de la machine à flux axial et celui de la machine à flux radial :

$$K_{V_{axial}/V_{radial}} = \frac{\pi \frac{1+\lambda}{p} + 0.0056}{4 \left(\frac{1+\lambda}{2} + 0.006 + \pi \frac{1+\lambda}{4p} \right)^2 \left(\frac{(1-\lambda)\lambda}{1+\lambda} \right)} \quad (1.29)$$

Cette fonction est tracée au niveau de la figure 1.38a en fonction du nombre de paires de pôles. La machine à flux axial apparaît plus intéressante pour les nombres de paires de pôles importants, du fait que l'augmentation de p permet de diminuer la hauteur axiale de la machine par le volume des culasses. Alors que pour la machine à flux radial, l'augmentation du nombre de paires de pôles diminue d_{cs} , mais non d_{cr} . Le rapport optimal entre diamètre externe et interne pour la machine à flux axial $\lambda_{opt} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.57$ calculé par Gieras [Gieras *et al.*, 2008] est retrouvé. Néanmoins, Parviainen, dans sa thèse [Parviainen, 2005], estime que cette étude surestime trop les performances de la machine à flux axial. En effet, la prise en compte des têtes de bobine pour la machine à flux axial agrandit le diamètre externe, qui intervient au carré dans le volume, alors que les têtes de bobine de la machine à flux radial ont une influence sur la longueur active, qui est simplement proportionnelle au volume. Qui plus est, il faut préciser que ce type de comparaisons à volume constant défavorise naturellement la machine à flux radial, car sa forme se trouve imposée, et donc ne peut pas être optimisée. Ces conclusions restent vraies lorsque la contrainte change : les auteurs de [Brown *et al.*, 2002] ont en effet répété leur étude en maintenant non plus le volume d'aimant constant, mais le diamètre externe constant. Le résultat est donné à la figure 1.38b. On voit toujours le rapport des diamètres optimal introduit par Gieras. La nouveauté est que pour un nombre de paires de pôles très bas, la machine à flux axial peut reprendre l'avantage sur la machine à flux radial, car à diamètre externe fixé, l'épaisseur des culasses nécessitée pour les nombres de paires de pôles très bas réduit de manière considérable le rayon d'entrefer de la machine à flux radial, ce qui n'est pas le cas pour la machine à flux axial.



(a) Comparaison à volume d'aimant fixé



(b) Comparaison à diamètre externe fixé

FIGURE 1.38: Comparaison des volumes des machines à flux axial et à flux radial [Brown *et al.*, 2002]

D'autres auteurs mènent à partir des équations de dimensionnement simplifiées des études similaires, mais en changeant la nature des objectifs ou des contraintes. Ainsi les auteurs de la référence [Zhang Z., 1996] ont-ils comparé le couple volumique des machines à flux axial et radial sans se fixer de contrainte particulière, toujours en négligeant le volume des têtes des bobinages. Pour la machine à flux radial, le point de départ est l'équation de dimensionnement en $D_g^2 L_e$. Il s'agit de, sous l'hypothèse d'une machine à pôles lisses et d'une commande à couple par ampère maximal :

$$C_{em_R} \propto B_g A_L D_g^2 L_e \quad (1.30)$$

On fait l'hypothèse que l'induction supportée par les culasses est deux fois plus importante que dans l'entrefer. Alors, pour la machine à flux radial, le diamètre externe est lié au diamètre d'entrefer par : $D_o = D_g \left(1 + \frac{\pi}{4p}\right)$. Auquel cas, le couple volumique de la machine à flux radial devient :

$$\rho_{em_R} \propto B_g A_L \frac{\pi}{4} \frac{1}{\left(1 + \frac{\pi}{4p}\right)^2} \quad (1.31)$$

Quant à la machine à flux axial, les auteurs approximent le diamètre interne D_i à zéro, et négligent, dans le calcul de la hauteur axiale, non seulement l'épaisseur de l'entrefer, mais aussi celle des aimants, pour ne prendre en compte que l'épaisseur du stator. Gieras [Gieras *et al.*, 2008] a montré que :

$$C_{em_A} \propto B_g A_L D_g^3 \quad (1.32)$$

Or, le volume de la machine à flux axial est donné par : $\pi \left(\frac{D_o}{2}\right)^2 L_e = \pi D_g^2 \frac{\pi D_g}{4p} = D_g^3 \frac{\pi^2}{4p}$. Donc la densité de couple volumique de la machine à flux axial est donc donnée par la relation :

$$\rho_{em_A} \propto B_g A_L \frac{4p}{\pi^2} \quad (1.33)$$

Le rapport entre les deux densités de couple est donc :

$$K_{\rho_{A/R}} = \frac{p \left(1 + \frac{\pi}{4p}\right)^2}{\pi} \quad (1.34)$$

La fonction de l'équation 1.34 est tracée au niveau de la figure 1.39. Ce tracé met en évidence que la densité de couple de la machine à flux axial pourrait, sans autre contrainte, toujours surpasser celle de la machine à flux radial. De même qu'auparavant, cette conclusion est à tempérer à cause de la non-prise en compte des têtes de bobine dans le volume, hypothèse qui défavorise toujours la machine à flux axial.

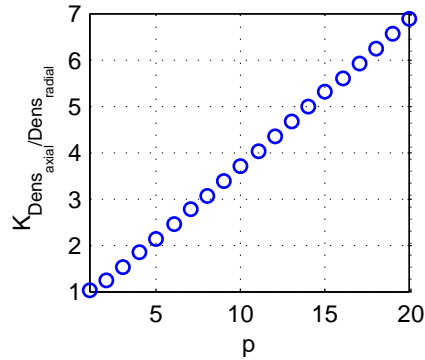


FIGURE 1.39: Rapport entre la densité volumique de couple de la machine à flux axial et celle de la machine à flux radial [Zhang Z., 1996]

Les mêmes auteurs ont par la suite développé une étude plus originale, en prenant cette fois-ci pour critère le couple massique [Cavagnino *et al.*, 2002]. La comparaison porte d'une part sur la machine à flux radial à aimants déposés classique, et d'autre part sur la machine à flux axial à double stator externe et à rotor interne à bobinage réparti de la figure 1.34b. La démarche, ainsi que les contraintes, sont nouvelles. L'idée est de se fixer, en plus des matériaux (induction à saturation maximale dans les matériaux ferromagnétiques, induction rémanente des aimants, la résistivité du bobinage...), trois autres contraintes :

- le volume externe alloué à l'actionneur (aussi bien la machine à flux axial que la machine à flux radial) est constant est fixé à l'avance.
- les pertes (la somme des pertes cuivre et des pertes fer) par unité de surface externe de la machine sont une donnée du problème (on raisonne à rapport pertes sur surface d'évacuation constant).
- la vitesse est également imposée.

Chaque structure (à flux radial ou axial) est optimisée afin d'en maximiser le couple massique. Les paramètres d'optimisation, pour les deux structures, sont le rapport :

- $K_D = \frac{D_{int}}{D_{out}}$ le rapport des diamètres internes et externes de la machine en incluant les têtes de bobine.
- $K_{L_e} = \frac{L_{out}}{D_{out}}$ le rapport entre la hauteur totale de la machine et le diamètre externe total, en tenant compte des têtes de bobine.
- p le nombre de paires de pôles de la machine.

Une optimisation paramétrique sur le triplet (K_D, K_{L_e}, p) permet de trouver, pour les deux topologies, les paramètres qui maximisent le couple massique (à noter que l'on ne cherche pas à atteindre un couple fixe, mais que seul le couple massique est ici intéressant). Reste à expliquer comment, lorsque l'on donne un triplet (K_D, K_{L_e}, p) , les auteurs procèdent afin de calculer le couple massique. La stratégie développée se décompose en trois étapes :

1. Le calcul de la géométrie. Pour cela, certains paramètres sont fixés à l'avance pour les deux machines, tels que l'épaisseur de l'entrefer g , ou encore l'ouverture relative des aimants par rapport au pas polaire. Connaissant le

volume total et le rapport K_{L_e} , il est possible de calculer les dimensions externes des actionneurs. Ensuite, des considérations sur la géométrie des têtes de bobine (qui dépendent du nombre de paires de pôles) permettent de calculer les diamètres internes et externes actifs de la machine, notés D_i et D_o pour la machine à flux axial, ou alors la hauteur active L_e de la machine à flux radial. Les hauteurs de culasses et d'aimants, ainsi que la largeur des encoches, sont alors calculées pour les deux machines, sous contrainte bien sûr d'entrer dans le volume alloué d'une part, et d'atteindre la limite de saturation des matériaux magnétiques d'autre part. La masse de la machine est alors calculée.

2. Les calcul des pertes. Etant donné que l'on connaît le volume externe, ainsi que les pertes par unité de surface autorisées, il est possible de déduire les pertes totales pour une géométrie de machine donnée. La géométrie et la vitesse étant connues à ce stade, on peut alors, en négligeant la réaction magnétique d'induit, calculer les pertes fer. Par différence, les pertes cuivre sont alors aussi connues. Ceci donne les courants que l'on peut injecter dans les encoches.
3. Le calcul du couple. Connaissant à présent les charges électriques et magnétiques, il est possible de trouver le couple, par une étude au premier harmonique, et un autopilotage utilisant la stratégie du couple par ampère maximal. Le couple massique délivré par les deux actionneurs (à flux radial, et à flux axial), peut alors être connu.

Après ce travail, les auteurs aboutissent aux conclusions suivantes :

- Contrairement à l'idée communément admise, le couple délivré, dans un volume donné, n'est pas une fonction strictement croissante en fonction du nombre de paires de pôles. En effet, bien que dans une certaine mesure, le couple soit augmenté à cause de la réduction de la taille des culasses, les hypothèses de travail impliquent que, si on augmente trop le nombre de paires de pôles, les pertes fer vont devenir importantes, et à pertes totales imposées, vont de ce fait réduire les pertes cuivre. Par conséquent, le courant admissible, donc le couple, vont se trouver diminués : le couple présente donc un maximum en fonction du nombre de paires de pôles sous les hypothèses de l'étude (à volume fixe).
- Les auteurs conseillent, d'après les résultats obtenus, d'utiliser les machines à flux radial lorsque le rapport $K_{L_e} = \frac{L_{out}}{D_{out}}$ est supérieur à 1. A l'inverse, la machine à flux axial est attractive pour les formes très aplaties ($K_{L_e} \leq 0.3$). Cette réduction de la hauteur active n'est possible que si on augmente le nombre de paires de pôles de manière importante. En effet, il est prouvé que la machine à flux axial n'est intéressante que si on utilise un nombre de paires de pôles significatif (de l'ordre d'une vingtaine). Sinon, en plus d'augmenter la hauteur des culasses de manière trop importante, les têtes de bobine prennent une proportion trop importante dans le volume alloué, ce qui, on l'a vu est plus pénalisant pour les topologies à flux axial que radial.
- Le rapport optimal entre diamètres interne et externe, lorsque le critère est le couple massique, n'est pas égal à $\frac{1}{\sqrt{3}}$, et varie avec le nombre de paires de pôles de la machine, ce qui démontre que ce paramètre dépend fortement du critère d'optimisation choisi pour la machine.
- La topologie à flux axial à rotor central offrant deux faces actives, ainsi que l'absence de culasse rotorique, semble être plus intéressante, du moins au niveau du couple massique, que la topologie classique de la machine à flux radial.

D'autres auteurs [Qu *et al.*, 2003] ont étudié des structures à flux radial duales des topologies toriques à flux axial présentées lors de la section précédente. Ainsi la machine à flux radial représentée au niveau de la figure 1.40 apparaît-elle comme la structure duale de la machine torique à encoches à stator interne de la figure 1.34a.

Les auteurs ont écrit les équations de dimensionnement (en tenant compte des têtes de bobine) pour la machine torique à flux axial avec stator encoché, ainsi que pour la machine duale à flux radial. Ensuite, ils ont optimisé les deux structures pour différents critères que nous allons donner. Pour la machine à flux axial, les paramètres d'optimisation sont le couple (B_g, λ) , et pour la machine à flux radial le couple (B_g, K_l) , en se fixant un point à atteindre dans le plan couple-vitesse. Les conclusions obtenues sont les suivantes :

- Les couples massiques des machines à flux axial et radial sont très voisins. Néanmoins, si on contraint le facteur de forme K_l de la machine à flux radial, et le rapport des diamètres λ de la machine à flux axial à des valeurs faibles, il semble que la machine à flux radial puisse, dans de telles conditions, assurer un couple massique plus important. A l'inverse, dès que l'on permet d'augmenter ces deux paramètres, la machine à flux axial est plus attractive du point de vue du couple massique.
- La masse de fer des deux machines est très semblable. Néanmoins, il apparaît que la machine à flux axial a besoin de plus de masse d'aimants, alors que la machine à flux radial nécessite plus de cuivre. Le coût volumique des aimants étant supérieur à celui du cuivre, cette constatation implique que le coût de la matière utilisée

pour la machine à flux axial est supérieur. Ceci se justifie par le fait que le diamètre équivalent d'entrefer est plus grand pour la machine à flux radial que pour la machine à flux axial (le couple de la machine à flux axial est une fonction cubique du diamètre, alors que c'est une fonction carré du diamètre pour la machine à flux radial).

- Pour les rendements (les pertes cuivre ainsi que les pertes fer au premier harmonique ont été considérées), les valeurs obtenues sont très semblables d'une machine à l'autre. Néanmoins, au point de vue de l'efficacité du refroidissement, il apparaît que la machine à flux radial possède des pertes par surface d'entrefer plus importantes, ce qui nécessite un refroidissement plus efficace. Mais le système de refroidissement de la machine à flux radial, qui possède un entrefer suivant la direction axiale, est naturellement plus efficace.

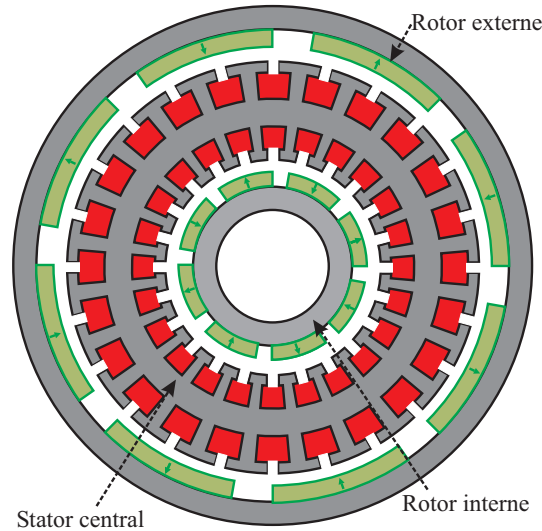


FIGURE 1.40: La machine à flux radial duale de la machine à flux axial torique avec stator encoché [Qu *et al.*, 2003]

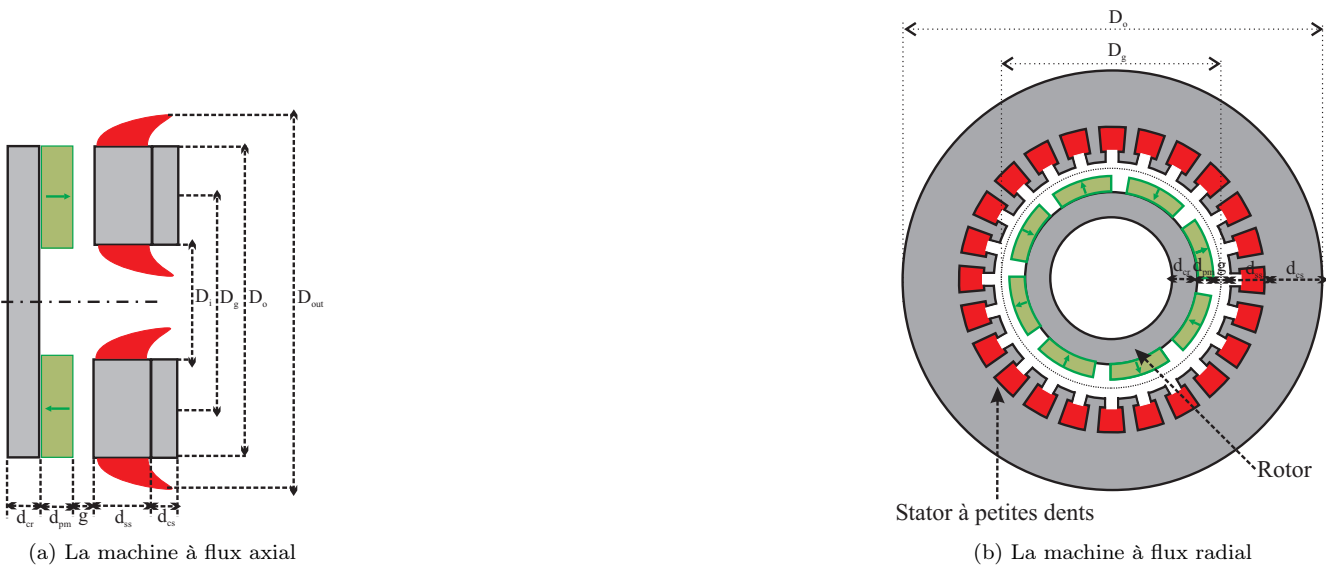


FIGURE 1.41: Les machines à flux axial et flux radial simple face à stator encoché

Afin d'illustrer la méthode de comparaison que nous venons de décrire, nous nous proposons d'appliquer la

technique présentée dans l'article [Qu *et al.*, 2003] non pas aux machines à bobinage torique et à double rotor, mais aux machines synchrones à aimants simple face à stator denté, qu'elles soient à flux axial ou à flux radial (figure 1.41). En effet, c'est ce genre de machines qui nous occupera par la suite. Nous nous proposons d'optimiser ces deux topologies en prenant pour critère le couple volumique. La contrainte est d'atteindre le point de fonctionnement dans le plan couple-vitesse ($100Nm, 2700tr/min$), qui nous occupera également dans la suite de cette thèse. Les paramètres d'optimisation seront (B_g, λ) pour la machine à flux axial, et (B_g, K_l) pour la machine à flux radial. En outre, nous allons faire varier le nombre de paires de pôles autorisé pour les deux machines, afin de voir comment ce paramètre agit sur le dimensionnement des deux machines.

Les hypothèses de comparaison pour les deux machines sont :

- Un coefficient de bobinage $K_{cu} = 0.4$.
- Une ouverture relative des encoches par rapport au pas dentaire $\beta_e = 0.5$.
- Un entrefer $g = 2mm$.
- Une ouverture relative de l'aimant par rapport au pas polaire $\alpha_i = 150/180$ (pour des impératifs de minimisation des harmoniques).
- Une densité linéique de courant efficace $A_L = 600A/cm$.
- Une densité surfacique de courant efficace dans le cuivre $J_s = 10A/mm^2$.
- Une alimentation en régime sinusoïdal, avec une commande de type couple par ampère maximal.
- Le coefficient K_f sera pris égal à β_a pour la machine à flux axial.
- Nous prendrons un rendement unitaire dans cette étude simplifiée.
- Des inductions à saturation de 1.5T dans toutes les parties ferromagnétiques de la machine.

Le dimensionnement de la machine à flux radial sera fait en déterminant, pour le couple souhaité, le diamètre d'entrefer correspondant, en supposant le facteur de forme K_l connu. Auquel cas, l'équation 1.13 permet d'aboutir à la formule :

$$D_g = \sqrt[3]{\frac{P_M}{K_e K_i K_p K_l \eta B_g A_L \frac{f}{p}}} \quad (1.35)$$

Le diamètre d'entrefer étant à présent connu, nous pouvons en déduire la hauteur des aimants permettant d'assurer l'induction dans l'entrefer B_g souhaitée, l'épaisseur d_{ss} de la zone d'encoches nécessaire pour ne pas dépasser la densité de courant J_s imposée pour les deux machines, ainsi que les hauteurs de culasses statorique et rotorique d_{cs} et d_{cr} nécessaires pour ne pas saturer les parties ferromagnétiques. Les têtes de bobine sont prises en compte grâce aux formules vues auparavant. Au niveau de la figure 1.42, nous montrons les résultats d'optimisation pour le couple volumique des deux topologies en prenant un nombre de paires de pôles p égal à 6. Les machines optimales pour les deux topologies ont leurs paramètres géométriques consignés dans le tableau 1.2. Nous introduisons aussi le facteur de forme externe des machines, défini, pour la machine à flux axial, comme :

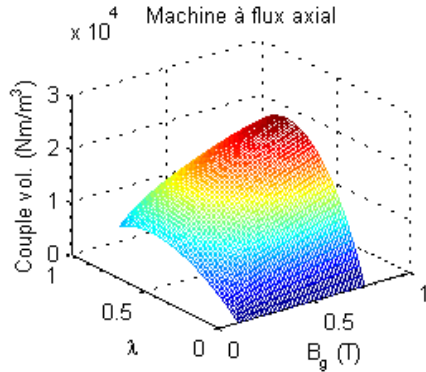
$$K_{L_{out}} = \frac{L_e}{D_{out}} \quad (1.36)$$

La définition de ce facteur de forme externe pour la machine à flux axial peut sembler contradictoire en regard du facteur de forme K_L défini par Aydin dans sa thèse [Aydin, 2004] pour la machine à flux axial (formule 1.11), qui était, rappelons-le, $K_L = \frac{D_o}{L_e}$. Ceci est volontaire, afin de permettre une comparaison aisée avec le facteur de forme externe de la machine à flux radial, défini comme suit :

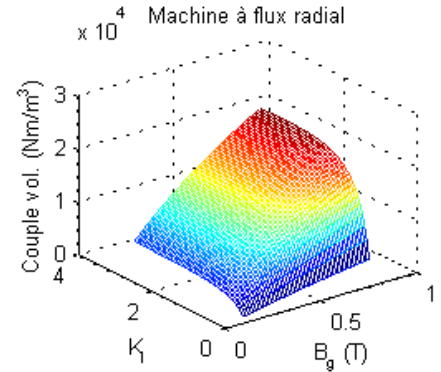
$$K_{l_{out}} = \frac{L_{out}}{D_o} \quad (1.37)$$

La longueur axiale totale L_{out} de la machine à flux radial est la somme de la longueur axiale active L_e , à laquelle on ajoute les têtes de bobines : $L_{out} = L_e + 2W_{cu}$. Nous rappelons que pour la machine à flux radial, Aydin [Aydin, 2004] avait défini le facteur de forme K_l comme à la formule 1.15 ($K_l = \frac{L_e}{D_g}$). Tous ces paramètres sont récapitulés dans le tableau 1.4.

Ces facteurs de forme externes nous semblent tout-à-fait caractéristiques de la forme du volume externe de la machine.



(a) Couple volumique de la machine à flux axial simple face en fonction des paramètres (B_g, λ)



(b) Couple volumique de la machine à flux radial en fonction des paramètres (B_g, K_l)

FIGURE 1.42: Tracé du couple massique en fonction des paramètres de conception des deux machines

Paramètre	Valeur
$\frac{C_{em}}{V_{tot}}$	$2.41 \cdot 10^4 Nm/m^3$
λ	0.52
B_g	0.75T
D_o	22.8cm
W_{cu}	2.4cm
D_{out}	27.54cm
d_{ss}	4.37cm
d_{pm}	5mm
L_e	7.0cm
K_{Lout}	0.253

(a) Paramètres géométriques de la machine à flux axial optimisée, à simple face

Paramètre	Valeur
$\frac{C_{em}}{V_{tot}}$	$2.30 \cdot 10^4 Nm/m^3$
K_l	2.38
B_g	0.75T
W_{cu}	2.31cm
D_o	14.66cm
d_{ss}	2.33cm
d_{pm}	5mm
L_e	21.09cm
L_{out}	25.72cm
K_{lout}	1.75

(b) Paramètres géométriques de la machine à flux radial optimisée, à simple face

TABLE 1.2: Paramètres des machines optimisées

Les conclusions de l'étude sont les suivantes :

- Comme nous l'avons constaté lors de la partie précédente, le maximum de couple volumique pour les machines à dents semble toujours se trouver pour l'induction d'entrefer la plus grande possible (ici, étant donné que le paramètre β_e est choisi égal à $1/2$, et que l'induction à saturation est de 1.5T, la limite d'induction d'entrefer est de 0.75T, et ceci pour les deux topologies de machines). Notons que ce résultat est aussi lié au fait que l'on n'a pas cherché à minimiser les pertes fer.
- Pour ce nombre de paires de pôles, le couple volumique de la machine à flux axial est légèrement plus grand (l'ordre de grandeur est le même) que celui de la machine à flux radial. Ceci est dû au fait que le nombre de paires de pôles relativement élevé qui a été choisi permet une réduction du volume de la machine à flux axial, alors que l'espace interne au rotor de la machine à flux radial, bien qu'inutile magnétiquement lorsque le nombre de paires de pôles est grand, intervient dans le volume. Cette constatation nous suggère d'étudier les couples volumiques optimaux des deux machines en fonction du nombre de paires de pôles choisi. Cette étude est faite au niveau de la figure 1.43. Le résultat nous permet de dire, que la machine à flux axial possède un meilleur couple volumique lorsque le nombre de paires de pôles est élevé (ici, $p = 5$ semble la limite), alors qu'à faible nombre de paires de pôles, c'est l'inverse. La raison du meilleur couple volumique de la machine à flux radial pour des nombres de paires de pôles faibles tient au fait que les têtes de bobine de la machine à flux axial, toujours importantes à faible nombre de paires de pôles, interviennent, comme déjà signalé, selon une fonction quadratique dans la formule du volume total. Cette remarque justifie le fait que les machines

à flux axial ne sont vraiment intéressantes qu'à nombre de paires de pôles important, et donc, pour une vitesse imposée par le cahier des charges, la fréquence électrique sera de ce fait élevée. Par conséquent, un soin particulier devra être apporté lors de la modélisation des pertes ferromagnétiques, et en tout cas, il faudra choisir de manière adaptée le matériau. Ces points seront abordés dans la suite de l'exposé.

- Un autre commentaire est appelé par le facteur de forme externe des machines optimisées. L'idée intuitive que la machine à flux axial est une machine discoïde apparaît clairement démontrée, au niveau du tableau 1.2 et de la figure 1.44. Les machines à flux radial sont des machines à hauteur totale L_{out} importante comparée à celle des machines à flux axial (qui est L_e). Pour les machines à flux radial, cette grandeur décroît cependant de manière importante en fonction du nombre de paires de pôles. La raison réside dans le fait que les têtes de bobine, qui représentent quasiment la moitié de la hauteur active pour un nombre de paires de pôles p unitaire, ont une hauteur diminuant rapidement dès que p augmente, alors que le diamètre externe D_o ne diminue guère, à cause justement de l'espace non utilisé au sein du rotor. Pour la machine à flux axial, la diminution des têtes de bobine lorsque le nombre de paires de pôles p augmente, se trouve compensée par la diminution de la hauteur active L_e , ce qui justifie un volume fortement diminué, mais un facteur de forme qui demeure néanmoins quasiment constant en fonction du nombre de paires de pôles.

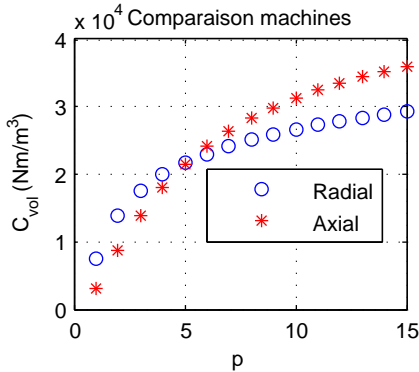


FIGURE 1.43: Couple volumique des machines à flux axial et radial en fonction du nombre de paires de pôles

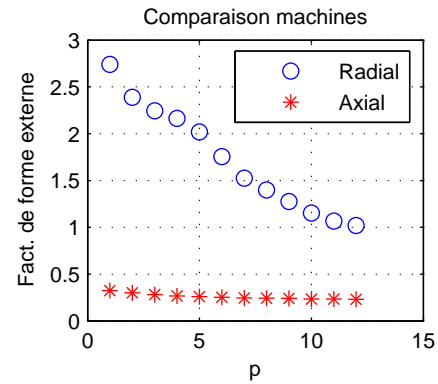


FIGURE 1.44: Facteur de forme externe des machines à flux axial et radial en fonction du nombre de paires de pôles

Néanmoins, on se doit de relativiser la généralité des conclusions données dans cette section. En effet, ces dernières sont intimement liées au choix, il est vrai arbitraire, de certaines quantités. Par exemple, il convient d'étudier la sensibilité des résultats obtenus en changeant les valeurs des densités linéiques A_L et surfaciques J_S de courant. Il est montré dans la référence [Lipo, 2004] que l'échauffement ΔT d'une machine électrique (en supposant que l'évacuation thermique est due uniquement à des transferts convectifs au niveau de la surface du stator, et en notant h le coefficient de convection, et ρ la résistivité des conducteurs de la machine) est lié au produit $A_L J_S$ par la relation de proportionnalité :

$$A_L J_S \propto \frac{h}{\rho} \Delta T \quad (1.38)$$

Afin de se placer dans les mêmes conditions de refroidissement de la machine, nous maintenons le produit $A_L J_S$ constant, mais nous multiplions par deux la valeur de J_S (on prend $J_S = 20 A/mm^2$), et par contre divisons par deux la valeur de A_L par rapport au cas précédent. Nous répétons l'optimisation du couple volumique précédente pour chaque nombre de paires de pôles p . Les résultats obtenus pour cette étude, avec le même nombre de paires de pôles qu'auparavant, sont consignés au niveau de la figure 1.45a. Nous y voyons que le couple volumique de la machine à flux axial semble surpasser de manière beaucoup plus nette celui de la machine à flux radial, et pour un nombre de paires de pôles encore plus bas (inférieur à 5). Il ne faut donc pas perdre de vue que ces études comparatives, fondées sur des hypothèses fortes et des grandeurs arbitraires, conduisent à des résultats fondamentalement dépendants de ces hypothèses. Ceci étant, nous croyons que les tendances observées, c'est-à-dire ici l'augmentation des performances des machines à flux axial lorsque le nombre de paires de pôles est important, doivent être prises en considération. Le fait que la supériorité de la machine à flux axial en terme de couple volumique soit encore plus importante

lorsque l'on choisit une charge électrique efficace A_L plus faible s'interprète de la façon suivante : le produit $A_L B_g$ représente la pression tangentielle de force dans l'entrefer. Or, l'amplitude B_g d'induction dans l'entrefer est fixée par la saturation des matériaux ferromagnétiques. Par conséquent, la valeur choisie pour A_L impose la pression tangentielle de force dans l'entrefer. Lorsque cette pression est faible (car A_L est choisi faible), alors la machine à flux axial apparaît comme d'autant plus intéressante pour le couple volumique que la machine à flux radial. Ceci vient du fait que la machine à flux axial a un couple qui varie selon le cube du diamètre actif externe, alors que le couple de la machine à flux radial évolue suivant le carré du diamètre d'entrefer. Au niveau de la figure 1.45b, nous confirmons cette tendance en prenant le cas inverse de celui de la figure 1.45a : nous doublons cette fois la densité linéique de courant A_L (et divisons par deux la densité volumique J_S de courant dans le cuivre, afin de conserver un échauffement identique). Nous avons donc une pression tangentielle plus importante dans l'entrefer. Auquel cas, nous voyons, à l'inverse de la situation précédente, que la machine à flux radial prend l'avantage sur la machine à flux axial, ce qui justifie bien que la topologie à flux axial révèle tout son potentiel si on dispose de pressions tangentielles faibles, grâce à la possibilité de produire du couple plus facilement au niveau des couches de rayon élevé de la machine.



FIGURE 1.45: Couple volumique comparé des machines à flux axial et radial en fonction du nombre de paires de pôles, en maintenant le même produit $A_L J_S$ (image de l'échauffement) qu'à la figure 1.43

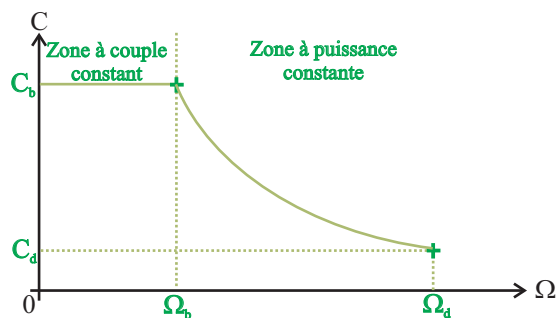


FIGURE 1.46: Cahier des charges dans le plan couple-vitesse avec contrainte de défluxage

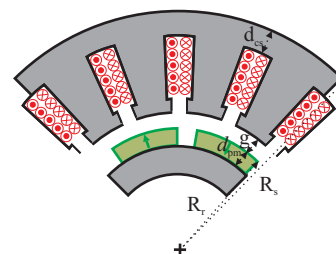


FIGURE 1.47: Machine à grosses dents [Wakui, 2006]

Jusqu'ici, nous avons exposé des techniques de comparaison des machines à flux axial et à flux radial, principalement sur le critère du couple volumique, mais en supposant que la machine doit atteindre un seul et unique couple fixé par le cahier des charges. Néanmoins, d'autres chercheurs ont comparé les solutions de motorisation à flux radial et à flux axial en intégrant la contrainte de vitesse variable, en particulier la contrainte de défluxage pour atteindre des points de fonctionnement situés à haute vitesse et bas couple de manière à respecter la contrainte de tension. Nous pouvons en ce sens faire référence au travail des auteurs suivants [Wakui, 2006], qui ont comparé

les performances respectives des deux types de machines, en supposant un cahier des charges constitué de deux points de fonctionnement : un point dit point de base (C_b, Ω_b), ainsi qu'un point dit point de défluxage, situé dans la zone à puissance constante, noté (C_d, Ω_d) (figure 1.46). La topologie choisie est de type machine à grosses dents (la topologie à flux radial a été représentée au niveau de la figure 1.47).

Les auteurs se fixent une contrainte de tension et de courant maximal. En concordance avec la stratégie classique de défluxage, ils utilisent la tension et le courant maximal au point de base, en injectant, pour ce point, l'intégralité du courant dans l'axe q de la machine. Pour le point de défluxage, la tension et le courant maximaux se doivent de ne pas être dépassés. En conséquence, le courant injecté dans l'axe q de la machine assure le couple demandé, alors que le courant d'axe d doit permettre de rester dans le cercle de tension maximale [Morimoto *et al.*, 1994a]. Si l'on ne veut pas dépasser, ce faisant, le courant maximal injecté au point de base, cela se traduit par une contrainte sur l'inductance cyclique de la machine à assurer. Par conséquent, le cahier des charges au point de base donne les paramètres électriques de la machine : le point de base donne le flux à vide afin d'assurer le couple de base avec le courant maximal autorisé, et le point de défluxage impose l'inductance de la machine. Le nombre de paires de pôles provient d'une contrainte sur la modulation de largeur d'impulsions, plutôt qu'une contrainte sur le volume ou les pertes fer, comme il est usuel.

Les auteurs proposent la méthode suivante : pour un rayon R_r donné du rotor (et en se fixant certains paramètres comme la hauteur des aimants ou de l'entrefer), tous les autres paramètres géométriques de la machine sont exprimés : la forme des encoches et le nombre de spires sont donnés par l'inductance voulue (dans ce cas, l'inductance est supposée être due uniquement aux fuites à la base des encoches). Les dimensions des dents et des culasses sont données par des impératifs de non-saturation. Le travail est fait pour la topologie à flux axial et à flux radial. Les têtes de bobine ne sont pas prises en compte. Une optimisation est effectuée sur le rayon d'entrefer R_r de la machine à flux radial, ou sur le rayon moyen de la machine à flux axial. Les conclusions sont en accord avec celles obtenues lors des études précédentes, surtout lorsque les têtes de bobine sont négligées : la machine à flux axial permet un gain de volume (en particulier sur les parties ferromagnétiques du rotor) de l'ordre de 40% par rapport à la machine à flux radial. Néanmoins, l'impact de la contrainte de défluxage sur la géométrie de la machine n'est pas envisagé dans l'article : ce point sera abordé au niveau du chapitre 2 de cette thèse.

1.2.2 Les modèles fondés sur une modélisation électromagnétique évoluée

D'autres auteurs, afin de répondre au mieux à des cahiers de charges exigeants ou complexes, envisagent de concevoir leur machine électrique en s'appuyant sur des résultats fournis par des algorithmes d'optimisation systématique [Azzouzi *et al.*, 2005b]. Dans ce cas, il est nécessaire de disposer de modèles suffisamment précis, mais aussi rapides, afin de répondre aux exigences des algorithmes d'optimisation qui réclament de nombreuses évaluations des modèles. Nous distinguons d'une part les modèles analytiques fondés sur la résolution formelle des équations de Maxwell, et d'autre part les modèles fondés sur les réseaux réductants saturables.

1.2.2.1 Les modèles fondés sur la résolution formelle des équations de Maxwell

Certains chercheurs ont voulu réadapter le travail de modélisation analytique fait par Zhu [Zhu *et al.*, 1993, Zhu et Howe, 1993a, Zhu et Howe, 1993b, Zhu et Howe, 1993c] dans le cadre de la machine à flux axial. Ce travail consiste, après avoir fait certaines hypothèses simplificatrices, comme le fait de supposer que les parties ferromagnétiques de la machine ont une perméabilité infinie, en la résolution formelle des équations de Maxwell. La plupart des calculs, afin de simplifier les équations, et de pouvoir définir sans ambiguïté les conditions aux limites, sont menés en supposant les modèles bidimensionnels. Ainsi la détermination du potentiel-vecteur se ramène-t-elle au problème de la détermination d'une fonction scalaire, ce dernier se situant en effet selon une direction perpendiculaire au plan de modélisation. Dans la référence [Bumby *et al.*, 2004], un modèle analytique 2D d'une machine à flux axial torique sans encoche a été mis au point. Le modèle a pour objectif de modéliser chaque face de la machine séparément, pour calculer d'une part le flux dû aux aimants, et d'autre part le flux de réaction magnétique d'induit. Un modèle d'inductance de la face circulaire axiale du tore a été également proposé par les auteurs. Le principe de résolution, basé sur l'utilisation du développement en séries de Fourier du potentiel-vecteur, nécessite le développement de la machine au niveau de son rayon moyen (figure 1.48a). Ensuite, les auteurs proposent de modéliser chaque entrefer de la façon suivante : ils considèrent que les frontières air-fer peuvent être modélisées par des conditions de type Neumann homogène, et placent, à une abscisse arbitraire Y_m dans l'entrefer une certaine densité linéique de courant,

appelée $K_L(x)$ (figure 1.48b). Cette densité a la forme générique suivante, en notant τ le pas polaire :

$$K_L(x) = \sum_{n \geq 1} K_{L_n} \sin\left(n \frac{\pi}{\tau} x\right) \quad (1.39)$$

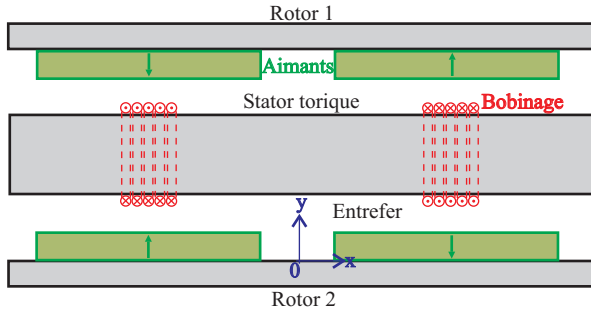
Le potentiel-vecteur, dans les zones (I) et (II) de la figure 1.48b, aura la forme analytique suivante, en séparant les variables, et en tenant compte des conditions de Neumann au niveau des ordonnées $y = 0$ et $y = h_a + e$ (h_a étant la hauteur des aimants, et e le largeur de l'entrefer) :

$$\begin{cases} A^{(I)}(x, y) = \sum_{n \geq 1} \alpha_n^{(I)} \cosh\left(n \frac{\pi}{\tau} y\right) \sin\left(n \frac{\pi}{\tau} x\right) & \text{dans la zone (I)} \\ A^{(II)}(x, y) = \sum_{n \geq 1} \alpha_n^{(II)} \cosh\left(n \frac{\pi}{\tau} (y - h_a - e)\right) \sin\left(n \frac{\pi}{\tau} x\right) & \text{dans la zone (II)} \end{cases} \quad (1.40)$$

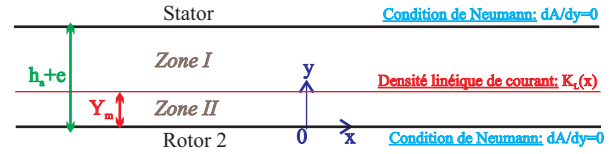
La dépendance en x , qui est une série de Fourier, est trouvée par des conditions de périodicité dans l'entrefer de la machine. On injecte la série de Fourier dans l'équation de Laplace que vérifie le potentiel aussi bien dans la zone (I) que dans la zone (II) :

$$\Delta A = 0 \quad (1.41)$$

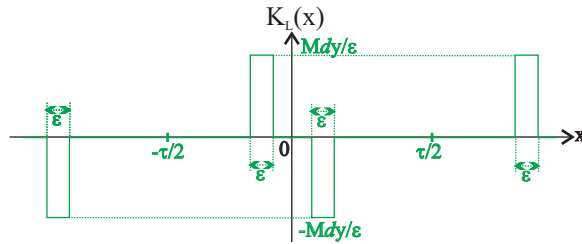
On obtient, après avoir séparé les variables, des équations différentielles hyperboliques en y , ce qui justifie l'expression proposée.



(a) Géométrie de la machine torique à pôles lisses étudiée (référence [Bumby *et al.*, 2004])



(b) Méthode de résolution consistant à placer une densité linéique de courant en une abscisse Y_m dans l'entrefer (référence [Bumby *et al.*, 2004])



(c) Densité linéique de courant équivalente aux aimants (référence [Bumby *et al.*, 2004])

FIGURE 1.48: Méthode de calcul du champ présentée dans [Bumby *et al.*, 2004]

Le potentiel-vecteur est ensuite déduit en écrivant la continuité de l'induction normale et du champ tangentiel au niveau de la densité linéique de courant $K_L(x)$ située en $y = Y_m$. La modélisation de la réaction magnétique d'induit se fait en considérant la densité linéique de courant créée par les bobinages en $y = h_a + e$. En ce qui concerne les aimants, la méthode consiste en l'utilisation du modèle ampérien de ces derniers : on sait en effet que, du point de vue magnétique, l'aimant est équivalent à une densité linéique de courant égale à son aimantation M répartie uniformément sur ses bords parallèles à la direction d'aimantation. On considère donc une couche d'épaisseur élémentaire dy d'aimant, située en $y = Y_m$, et les auteurs calculent (figure 1.48c) par la méthode décrite auparavant le potentiel vecteur élémentaire dA causé par cette couche (sur la figure 1.48c, on voit que ceci est fait en supposant que le bord de l'aimant au niveau duquel se situe la couche de courant n'est pas d'épaisseur nulle, mais d'épaisseur ϵ que l'on fait tendre ensuite vers zéro dans les calculs). Une fois ce potentiel vecteur élémentaire

déterminé, les auteurs en déduisent le potentiel-vecteur dû aux aimants par intégration du potentiel-vecteur sur toute la hauteur h_a de l'aimant. Enfin, les flux à vide et les inductances propres puis mutuelles sont déduites par circulation du potentiel-vecteur. Une méthode originale est développée pour tenir compte de l'inductance au niveau de la partie du bobinage torique dans la direction axiale, qui relie les deux faces actives (en pointillés au niveau de la figure 1.48a) : les auteurs reprennent simplement l'expression analytique de l'inductance d'une face active de la machine, mais en faisant tendre, dans cette expression mathématique, la distance entre les deux faces (qui vaut $h_a + e$) vers l'infini.

L'article [Marignetti *et al.*, 2006] a repris cette méthode pour la modélisation d'une structure à flux axial à une face. Les hypothèses simplificatrices utilisées sont les mêmes (matériaux ferromagnétiques idéaux, parties ferromagnétiques lisses). L'hypothèse simplificatrice 2D utilisée est tout de même un peu différente : en effet, l'équation de Laplace dans chaque zone est résolue dans le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) de la machine à flux axial. Néanmoins, c'est la dépendance du potentiel suivant la coordonnée radiale r de la machine qui se trouve négligée : le potentiel se voit donc dirigé uniquement dans cette direction radiale et ne dépend que des coordonnées (r, θ) . Auquel cas, l'équation de Laplace va devenir, dans chaque zone :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = 0 \quad (1.42)$$

Cette hypothèse amène à considérer r comme une constante dans les expressions du potentiel-vecteur, ce qui revient en fait à appliquer le modèle de [Bumby *et al.*, 2004] non pas seulement au rayon moyen, mais par couches successives concentriques. Il est donc possible, pour chaque couche, de considérer que l'ouverture relative de l'aimant par rapport au pas polaire τ est différente, et ainsi de tenir compte du fait que la forme des aimants n'est pas forcément invariante par déplacement radial (l'article qualifie ces aimants « d'aimants inclinés » d'un angle α_m : figure 1.49). Sinon, en ce qui concerne la méthode de modélisation des aimants, l'article reste fidèle à la méthode introduite dans la référence [Bumby *et al.*, 2004], concernant la modélisation par couches élémentaires. Le calcul du couple moyen devient donc possible, par application du tenseur de Maxwell. Néanmoins, l'encoche étant négligé, on se doit de préciser que le couple instantané ainsi calculé ne peut pas traduire une composante importante des ondulations de couple observées en réalité, à cause de l'absence du couple de détente dans la modélisation.

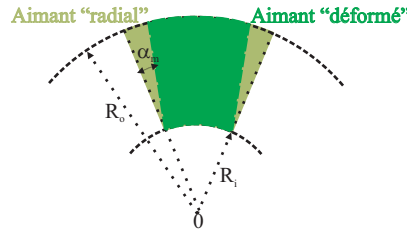


FIGURE 1.49: Inclinaison de la forme des aimants dans la machine à flux axial de la référence [Marignetti *et al.*, 2006]

C'est pour corriger ce défaut que d'autres auteurs [Azzouzi *et al.*, 2005a], [Azzouzi, 2007] ont choisi d'appliquer la même stratégie de modélisation, mais en tenant compte des dents du stator (il faut préciser que la topologie étudiée est une machine à grosses dents à pôles auxiliaires intercalés dont nous avons parlé dans l'introduction, et que par conséquent l'utilisation du coefficient de Carter n'est plus admise). En outre, ces auteurs se démarquent par le fait que, dans la zone des aimants, ils ont abandonné la stratégie de modélisation par couches successives avec le modèle ampérien, pour résoudre directement l'équation de Poisson :

$$\vec{\Delta} \vec{A} = -\text{rot} \vec{B}_r \quad (1.43)$$

où $\vec{B}_r = \mu_0 M \vec{e}_z$ est l'induction rémanente des aimants. Ce calcul a été mené de manière semblable pour la réaction magnétique d'induit de la machine, ce qui a ainsi permis de calculer tous les termes du couple instantané (le calcul de l'induction à vide due aux aimants en tenant compte des encoches permet de faire une évaluation du couple de détente, qui, dans les applications éoliennes qui intéressent les auteurs, est un critère à minimiser). Même si le modèle dégagé ici ne tient pas compte des effets de bord étant donné que la dépendance radiale du potentiel-vecteur a été négligée, les auteurs ont extrait, après calcul, au moyen d'une étude par éléments finis, une fonction de modulation dépendant de la coordonnée radiale r qui vient moduler la composante d'induction axiale B_z afin de

tenir compte de l'affaiblissement de cette induction au voisinage des bords de l'actionneur. La fonction modulante proposée est du type suivant :

$$g(r) = \frac{1}{\pi} \left[\arctan \left(\frac{r - R_i}{a} \right) - \arctan \left(\frac{r - R_o}{a} \right) \right] \quad (1.44)$$

où a est un paramètre ajustable par éléments finis, qui caractérise l'affaiblissement de l'induction à cause des effets de bord. Cet affaiblissement est d'ailleurs supposé identique au niveau du rayon interne actif R_i et au niveau du rayon externe actif R_o . Ce modèle, tenant ainsi compte de la dépendance de l'induction en fonction des trois coordonnées spatiales (r, θ, z) (ce repère est le repère cylindrique naturel de la machine disque), est qualifié de quasi-3D par ses auteurs, du fait que la dépendance en fonction de r a été prise en compte après coup : il y a découplage entre ce qui se passe dans le plan (r, θ) et la dépendance en fonction de la coordonnée radiale r . Nous reviendrons sur ce point au cours du chapitre 3. D'autres chercheurs [Virtic *et al.*, 2009] ont écrit l'équation de Laplace du potentiel-vecteur en coordonnées cylindriques en tenant compte de la dépendance radiale :

$$\Delta A = \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = 0 \quad (1.45)$$

Ils ont ensuite tenté de résoudre cette équation par la séparation des variables, en écrivant que :

$$A(r, \theta, z) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot Z(z) \quad (1.46)$$

L'injection de cette expression dans l'équation de Laplace donne alors les trois équations suivantes :

$$\begin{cases} Z'' - K_1^2 Z & = 0 \\ \Theta'' + K_2^2 \Theta & = 0 \\ r^2 R'' + rR' + (K_1^2 r^2 - K_2^2) R & = 0 \end{cases} \quad (1.47)$$

où K_1 et K_2 sont des constantes à déterminer par des raisonnements sur la périodicité du potentiel. Les auteurs renoncent alors à prendre en compte la troisième équation, qui est une équation de Bessel, faute de pouvoir définir des conditions aux limites suivant la direction radiale. Par conséquent, ne considérant que les deux premières équations, ils se dirigent donc vers le modèle 2D par couches des références [Marignetti *et al.*, 2006, Azzouzi *et al.*, 2005a, Azzouzi, 2007]. Ce calcul leur sert à déterminer le couple causé par chaque couche élémentaire de l'actionneur, et ensuite de sommer les effets de toutes les couches élémentaires pour en déduire le couple total.

Pour finir cette partie consacrée aux modèles analytiques fondés sur la résolution formelle des équations de Maxwell des machines à flux axial, signalons que d'autres auteurs se sont consacrés à la prise en compte des effets 3D de l'actionneur, par une méthode semi-analytique fondée sur l'utilisation de la théorie des charges magnétiques. Ainsi les auteurs de [Jennane *et al.*, 2004a] ont-ils réinvesti la méthode développée pour la modélisation des actionneurs linéaires de l'article [Xiong et Nasar, 1989], dans lequel les aimants étaient modélisés par des feuilles de charges magnétiques fictives en leur surface, tandis que les parties ferromagnétiques, supposées idéales, se sont vues prises en compte par la méthode des images magnétiques (figure 1.50). La densité surfacique de charges magnétiques fictives est égale à $\sigma_m = \pm M$. Supposons que l'actionneur possède un nombre total p de pôles. Le champ magnétique produit par un élément de longueur élémentaire dx d'aimant centré autour du point (x_i, y_i) portant la charge σ_m en un point (x_0, y_0) est, d'après la loi de Coulomb :

$$\begin{cases} dH_x & = \frac{\sigma_m(x_0 - x_i)dx}{2\pi[(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2]} \\ dH_y & = \frac{\sigma_m(y_0 - y_i)dx}{2\pi[(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2]} \end{cases} \quad (1.48)$$

D'après la figure 1.50, le pôle d'aimant se situant dans l'intervalle $[\frac{1-\alpha}{2}\tau + i\tau; \frac{1+\alpha}{2}\tau + i\tau]$ porte la charge $\sigma_{m_i} = (-1)^{i+1} M$. Par conséquent, en intégrant l'expression précédente sur tout le pas polaire, puis en sommant sur les p pôles d'une couche, et sur toutes les couches dues à la périodisation induite par la méthode des images, on peut obtenir l'expression du champ magnétique. Introduisons les notations suivantes (voir la figure 1.50) :

- Soit un entier i repérant le $i^{\text{ème}}$ aimant (dans le sens horizontal) de l'actionneur réel. Cet aimant a ses coordonnées comprises entre les abscisses $x_{1_i} = \frac{1-\alpha}{2}\tau + i\tau$ et $x_{2_i} = \frac{1+\alpha}{2}\tau + i\tau$, en rappelant que τ est le pas polaire de l'aimant, et α est l'ouverture relative de l'aimant par rapport au pas polaire.

- On note h_k la position des charges surfaciques modélisant les aimants de la couche k (la couche 0 représentant l'actionneur réel). L'observation de la figure 1.50 nous montre que si l'entier k est pair, alors $h_k = k(h_a + e) + h_a$, et si l'entier k est impair, alors $h_k = k(h_a + e) + e$.

Le résultat de l'intégration des charges élémentaires, menée sur chaque aimant et sur chaque couche, donne les composantes de champ magnétique suivant, quelque soit la position du point d'intérêt (x_0, y_0) :

$$\begin{cases} H_x(x_0, y_0) &= \frac{M}{4\pi} \sum_{i=1}^{p_m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{i+1} \ln \frac{(x_0 - x_{1_i})^2 + (y_0 - h_k)^2}{(x_0 - x_{2_i})^2 + (y_0 - h_k)^2} \\ H_y(x_0, y_0) &= \frac{M}{4\pi} \sum_{i=1}^{p_m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{i+1} \left[\arctan \frac{x_0 - x_{1_i}}{y_0 - h_k} - \arctan \frac{x_0 - x_{2_i}}{y_0 - h_k} \right] \end{cases} \quad (1.49)$$

Cette méthode est puissante : elle est généralisable en trois dimensions, et permet de prendre en compte les effets de bord de l'actionneur, en supposant que le nombre de pôles p est fini, ce qui est utile pour un actionneur linéaire. Néanmoins, même si cette méthode, appliquée à la machine à flux axial, permet, selon des auteurs de [Jennane *et al.*, 2004a], d'évaluer de manière précise le flux à vide de la machine, le calcul des intégrales, étant donné la géométrie assez complexe de la machine à flux axial, ne peut se faire que numériquement. Ceci étant, le gain de temps de calcul par rapport à une méthode entièrement numérique comme les éléments finis 3D est appréciable. En plus, vu que le calcul des intégrales est numérique, des formes d'aimants variables peuvent être prises en compte.

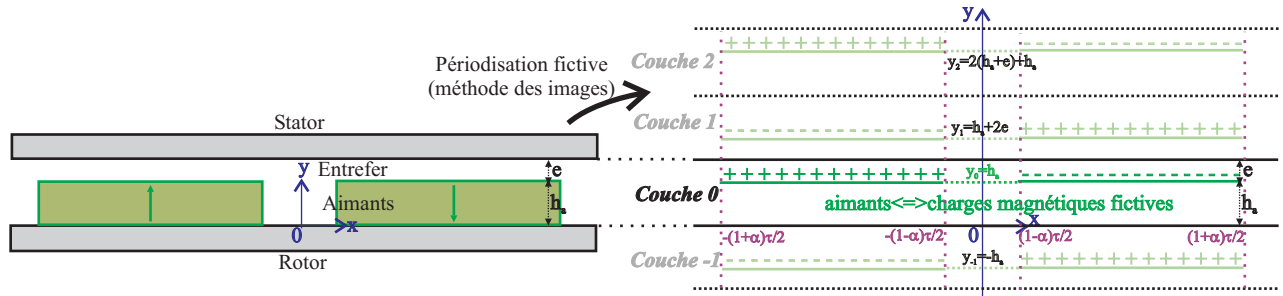


FIGURE 1.50: Modélisation des actionneurs à aimants par la méthode des images (référence [Xiong et Nasar, 1989])

1.2.2.2 Les modèles fondés sur des modèles réductants

De nombreux documents expliquant la modélisation des actionneurs par des réseaux de réductances sont disponibles [Ostovic, 1989]. L'intérêt de ces méthodes est de pouvoir prendre en compte, au prix d'itérations, la saturation des parties ferromagnétiques de l'actionneur. L'article [Qu et Lipo, 2004] propose un modèle des fuites inter-aimants d'un actionneur linéaire, qui peut être appliqué à la machine à flux axial que l'on développerait au niveau de son rayon moyen. Des expressions des réductances de fuite sont déduites.

Les auteurs des références [Parviainen *et al.*, 2004, Parviainen, 2005] ont développé des modèles de schémas réductants des machines à flux axial, afin de tenir compte de la saturation magnétique. Un exemple de schéma réductant 2D pour une couche élémentaire de la machine à flux axial est représenté au niveau de la figure 1.51, où les réductances hachurées sont des réductances saturables. Dans la référence [Parviainen, 2005], il est dit que la machine est modélisée en 2D, mais l'effet de courbure est pris en compte par le fait que la machine est modélisée couche par couche, chaque couche étant située au niveau d'un rayon r donné (cette méthode est semblable à celle discutée auparavant avec le modèle analytique). Il est ainsi possible de prendre en compte des aimants dont l'ouverture relative par rapport au pas polaire n'est pas constante en fonction du rayon. Néanmoins, par cette méthode, les effets de bord ne sont pas pris en compte.

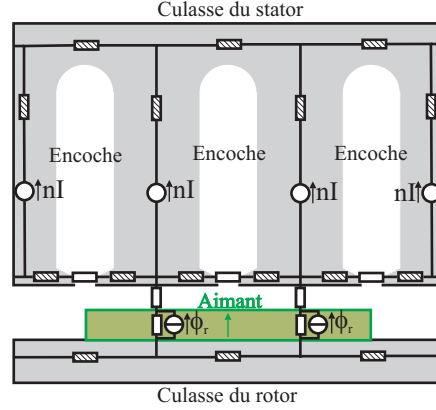


FIGURE 1.51: Schéma réductant proposé par la référence [Parviainen, 2005] pour une couche élémentaire (à un r donné de la machine à flux axial)

1.2.2.3 Les modèles éléments finis 3D

Des modèles éléments finis 3D sont utilisés par de nombreux auteurs, que ce soit par ceux qui optimisent leurs machines sur la base de modèles simplifiés pour vérifier la cohérence de leurs résultats, ou par ceux qui vérifient les modèles analytiques développés. La possibilité de prendre en compte la saturation magnétique, ainsi que les effets 3D et les effets d'encoche en font un outil indispensable, qui est cependant pénalisé par la lourdeur du temps de calcul [Gonzalez-Lopez *et al.*, 2008]. En plus de pouvoir prendre en compte des phénomènes physiques complexes comme la saturation magnétique, et d'autre part la relative facilité avec laquelle il est possible de modéliser les structures diverses, quelle que soit leur complexité (il suffit de pouvoir en faire le dessin), cette méthode est appliquée à tous les types d'actionneurs et dispositifs électromagnétiques. On peut citer, par exemple, la modélisation de structures non conventionnelles comme les machines à double excitation, comportant des dents ferromagnétiques qui alternent avec les aimants, nécessitant des calculs par éléments finis 3D [Aydin, 2003]. D'autres auteurs ont développé des modèles dont le point de départ est une étude éléments finis 3D permettant de calculer les ondulations de couple des structures de machines à flux axial. Ainsi Aydin propose-t-il, dans la référence [Aydin *et al.*, 2006] le modèle suivant. Il décompose, grâce à une étude par éléments finis préalable, la force électromotrice à vide en série de Fourier :

$$e(t) = E_1 \sin(\omega_m t) + E_3 \sin(3\omega_m t) + E_5 \sin(5\omega_m t) + \dots \quad (1.50)$$

De même, on connaît le courant injecté, si on opte pour une stratégie à couple par ampère maximal :

$$i(t) = I_1 \sin(\omega_m t) + I_3 \sin(3\omega_m t) + I_5 \sin(5\omega_m t) + \dots \quad (1.51)$$

Le couple instantané est donné par la formule :

$$T(t) = T_0 + \sum_{n \geq 1} T_{6n} \cos(n6\omega_m t) \quad (1.52)$$

Les harmoniques de couple sont donnés par la formule :

$$\begin{cases} T_0 = \frac{3}{2\omega_m} [E_1 I_1 + E_5 I_5 + E_7 I_7 + E_{11} I_{11} + \dots] \\ T_6 = \frac{3}{2\omega_m} [I_1 (E_7 - E_5) + I_5 (E_{11} - E_1) + \dots] \\ T_{12} = \frac{3}{2\omega_m} [I_1 (E_{13} - E_{11}) + I_5 (E_{17} - E_7) + \dots] \end{cases} \quad (1.53)$$

La formule suivante sert à quantifier l'ondulation de couple :

$$TRF = \frac{2\sqrt{T_6^2 + T_{12}^2 + \dots}}{T_0} \quad (1.54)$$

Ensuite, les auteurs proposent une étude de la quantité TRF (qui devient donc un critère à minimiser) en fonction de l'ouverture relative des aimants par rapport au pas polaire pour le cas d'une machine torique à encoches, et ils retrouvent un taux d'ondulation de couple minimal pour une ouverture relative du pas dentaire de 150/180.

1.2.2.4 Etude de la sensibilité du modèle sur les résultats d'optimisation

Nous terminons cette étude par une étude de sensibilité du modèle utilisé sur des machines optimisées. Nous nous intéressons à la machine à flux axial à aimants déposés simple face à stator encoché et à bobinage réparti. Nous allons reprendre la stratégie de comparaison, en fixant les données suivantes :

- Un coefficient de bobinage $K_{cu} = 0.4$.
- Une ouverture relative des encoches par rapport au pas dentaire $\beta_e = 0.5$.
- Un entrefer $g = 2mm$.
- Une ouverture relative de l'aimant par rapport au pas polaire $\alpha_i = 150/180$ (pour des impératifs de minimisation des harmoniques).
- Une densité linéique de courant efficace $A_L = 600A/cm$.
- Une densité surfacique de courant efficace dans le cuivre $J_s = 10A/mm^2$.
- Une alimentation en régime sinusoïdal, avec une commande de type couple par ampère maximal.
- Nous prendrons un rendement unitaire dans cette étude simplifiée.
- Des inductions à saturation de $1.5T$ dans toutes les parties ferromagnétiques de la machine.
- Une induction rémanente égale à $B_r = 1.2T$.

Les méthodes d'optimisation présentées ci-dessus proposaient de mener une optimisation sur les deux paramètres (B_g, λ) , puis d'en déduire le diamètre externe actif D_o connaissant le couple voulu. Néanmoins, lorsque le modèle est plus compliqué (prise en compte de fuites entre aimants...), cette stratégie s'avère impossible, car le modèle est plus difficilement inversible pour en déduire les paramètres géométriques. Nous nous proposons donc, afin de rester fidèle à la stratégie d'optimisation déjà développée, de choisir les paramètres suivants :

- la hauteur h_a des aimants.
- le rapport entre diamètres interne et externe actifs $\lambda = \frac{D_i}{D_o}$.
- le diamètre externe actif D_o .

L'objectif est encore le couple volumique. Les contraintes sont :

- atteindre le couple demandé de $100Nm$.
- le flux des aimants (car nous négligeons celui de réaction magnétique d'induit) ne doit pas saturer la culasse (l'induction ne doit pas dépasser $1.5T$ dans la culasse de la machine).
- l'induction d'entrefer maximale ne doit pas dépasser $\beta_e 1.5T = 0.75T$ afin de ne pas saturer les dents de la machine.

Nous menons l'optimisation du couple volumique avec les quatre modèles suivants :

- un modèle unidimensionnel du flux négligeant toute forme de fuites inter-aimants, consistant à dire que l'induction maximale d'entrefer est égale à $B_g = \frac{h_a}{h_a + K_C g} B_r$ (appelé « modèle 1D » car les inductions sont supposées n'avoir qu'une seule composante). On rappelle que K_C est le coefficient de Carter.
- un modèle réductant des fuites inter-aimants (celui exposé dans l'article [Qu et Lipo, 2004]) avec développement de la machine au niveau de son rayon moyen.
- un modèle analytique de type résolution formelle des équations de Maxwell par développement en série de Fourier du potentiel-vecteur, en adoptant un modèle par couches élémentaires de l'actionneur (référence [Marignetti *et al.*, 2006]).
- enfin, un modèle par éléments finis 3D très simple de l'actionneur axial, en négligeant toute saillance (figure 1.52), et en supposant infinie la perméabilité du fer).

Les trois premières optimisations sous contraintes sont menées avec des algorithmes d'optimisation déterministe de type descente du gradient avec méthodes de pénalité pour les contraintes. Le temps de calcul, grâce à la simplicité des modèles, ne dure que quelques secondes. Pour le modèle éléments finis, peu compatibles avec les algorithmes déterministes, l'optimisation sous contraintes a été menée par un algorithme de type essais particuliers. Dans ce cas, l'optimisation demande trois jours de calcul.

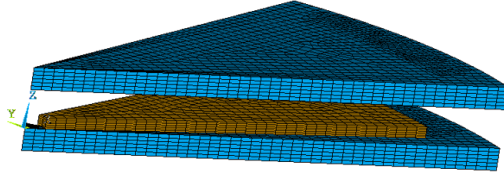


FIGURE 1.52: Le modèle éléments finis 3D mis en oeuvre sur un pas polaire

Les résultats sont consignés dans le tableau 1.3. Afin de pouvoir comparer plus facilement les résultats d’optimisation, nous avons fixé le paramètre $\lambda = \frac{D_i}{D_o}$, puis relancé les optimisations pour plusieurs valeurs de λ en optimisant à chaque fois que les deux paramètres (h_a, D_o) . Une telle étude permettra, en plus d’offrir une présentation plus aisée des résultats sous forme de figure, d’effectuer une étude concernant la sensibilité de l’optimum trouvé. En effet, il ne s’agit pas seulement, dans un problème d’optimisation en Sciences de l’Ingénieur, de déterminer un optimum, encore faut-il évaluer sa robustesse à la variation des paramètres autour de ce dernier, afin de garantir la réalisabilité pratique de l’optimum en question. Les résultats sont montrés au niveau des figures 1.53a et 1.53b dans l’espace des paramètres, et 1.53c dans l’espace des objectifs. On retrouve bien entendu sur ces figures les valeurs optimales trouvées pour les optimisations tri-objectifs du tableau 1.3, lorsque la courbe de couple volumique optimal de la figure 1.53c passe par son maximum en fonction de λ .

Les conclusions sont les suivantes :

- au niveau du temps de calcul (consigné à la fin du tableau 1.3, et noté t_{calc}), les trois premiers modèles sont très rapides. En revanche, le temps de calcul du modèle éléments finis 3D, comme attendu, est bien supérieur, nécessitant trois jours de calcul pour terminer une optimisation.
- le modèle réductant 2D au rayon moyen semble surestimer les fuites de manière très importante. La raison est que ce dernier n’est pas adapté pour la grande valeur d’entrefer $e = 2mm$ que nous avons choisie ici. Ainsi la hauteur des aimants est-elle bien trop grande, et aboutit à une saturation du stator, car on surestime les fuites, et donc, par conséquent, on sous-estime l’induction entrant dans le stator.
- le modèle analytique par couches est assez proche des résultats donnés par le modèle électromagnétique 1D dans ce cas : même hauteur des aimants $h_a = 3.8mm$ qui aboutit à la saturation de la culasse du stator. Tout au plus le diamètre externe est-il un peu plus grand pour compenser les effets des fuites, ce qui se paie par une petite diminution du couple volumique obtenu.
- le modèle éléments finis 3D, bien que le temps de calcul nous ait interdit de réaliser autant de points de calcul que pour les modèles précédents, est intéressant, dans le sens où il permet d’estimer l’ampleur de l’erreur que l’on fait en négligeant les effets de bord dans les précédents modèles. Le couple volumique est réduit, et semble rejoindre celui du modèle réductant qui surestime les fuites. Néanmoins, dans l’espace des paramètres, il n’en est rien, les deux modèles aboutissant à des hauteurs d’aimant totalement différentes (on observe une variation d’un facteur supérieur à deux). Précisons bien entendu que, plus que l’espace des objectifs, c’est l’espace des paramètres qui intéresse le concepteur de machine. Cette disparité dans l’espace des paramètres entre la méthode éléments finis 3D et le schéma réductant s’explique de la manière suivante. Les effets de bords 3D, ainsi que le bruit de calcul inhérent à la méthode des éléments finis, sont la cause d’un pic d’induction d’entrefer au niveau des bords radiaux de l’actionneur (référence [Aydin, 2003]). Afin que l’induction maximale d’entrefer B_g ne dépasse pas la valeur $0.75T$ (pour ne pas saturer le fer du stator), la hauteur des aimants diminue autour de $3mm$. Ceci se paie par une augmentation du diamètre externe actif D_o pour assurer le couple (faible, il est vrai, car on a vu que le diamètre externe actif intervenait dans le couple de la manière suivante : $C_{em} \propto D_o^3$), ce qui se solde donc par une augmentation du volume externe qui varie approximativement selon D_o^2 . Alors que pour le modèle réductant, qui surestime les fuites à cause du grand entrefer, on augmente la hauteur de l’aimant à plus de $6mm$ pour tenter de compenser le flux excessif perdu en fuites.
- l’étude de la robustesse de l’optimum atteint (tant au niveau des objectifs que des paramètres) en fonction de $\lambda = \frac{D_i}{D_o}$ est intéressante. En effet, si, pour des raisons liées à la fabrication, le paramètre λ est amené à varier autour de sa valeur optimale absolue de manière raisonnable ($\pm 10\%$), le couple volumique optimal ne diminuera pas de plus de 5% par rapport à la valeur trouvée lors de l’optimisation à trois paramètres. Qui plus est, on s’aperçoit que l’optimum de couple volumique correspondant à la nouvelle valeur de λ à présent considérée comme imposée pourra être réalisé assez facilement. En effet, dans l’espace des paramètres, la

variation de (h_a, D_o) optimaux en fonction du paramètre imposé λ est limitée (h_a ne varie même pas du tout pour trois des modèles).

Cette étude montre sur ce cas particulier l'importance du modèle que l'on choisit dans une démarche de conception optimale. Les modèles par éléments finis 3D, bien que précis, ne sont guère viables pour ce type de tâche, à cause d'un temps de calcul bien trop important. Les modèles 2D (réductants ou bien analytiques) sont rapides, mais cette étude suggère clairement leurs limites, dans le sens où leurs résultats peuvent s'éloigner de ceux des éléments finis 3D, soit au niveau des critères, soit au niveau des paramètres. Ceci est gênant, car, dans des applications embarquées comme le véhicule hybride où la masse, mais aussi le rendement sont des facteurs critiques (rappelons que toute l'énergie vient du carburant fossile), même une augmentation très faible des performances de la machine électrique peut se traduire par une économie significative de carburant. Enfin, malgré la possibilité de prendre en compte la saturation magnétique, nous prenons conscience de la difficulté d'optimiser avec des schémas réductants, car le domaine de validité des expressions simplifiées des réductances peut être restreint (ces expressions ne sont pas valides pour toutes les géométries), ce qui s'oppose par nature au principe de l'optimisation, qui nécessite de balayer la plage la plus large possible de l'espace des paramètres.

Paramètre	Valeur
$\frac{C_{em}}{V_{tot}}$	$1.94 \cdot 10^4 Nm/m^3$
λ	0.513
h_a	3.8mm
D_o	22.77cm
D_{out}	27.48cm
d_{cs}	1.88cm
d_{cr}	1.88cm
L_e	8.71cm
t_{calc}	instantané

(a) Modèle électromagnétique 1D de la machine

Paramètre	Valeur
$\frac{C_{em}}{V_{tot}}$	$1.85 \cdot 10^4 Nm/m^3$
λ	0.480
h_a	5.8mm
D_o	22.39cm
D_{out}	27.01cm
d_{cs}	1.71cm
d_{cr}	1.71cm
L_e	8.77cm
t_{calc}	15s

(b) Modèle réductant des fuites inter-aimants (référence [Qu et Lipo, 2004])

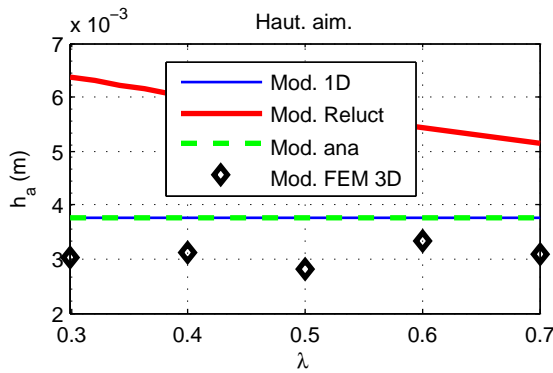
Paramètre	Valeur
$\frac{C_{em}}{V_{tot}}$	$1.92 \cdot 10^4 Nm/m^3$
λ	0.513
h_a	3.8mm
D_o	22.91cm
D_{out}	27.65cm
d_{cs}	1.86cm
d_{cr}	1.86cm
L_e	8.68cm
t_{calc}	35s

(c) Modèle électromagnétique par résolution formelle des équations de Maxwell (référence [Marignetti *et al.*, 2006])

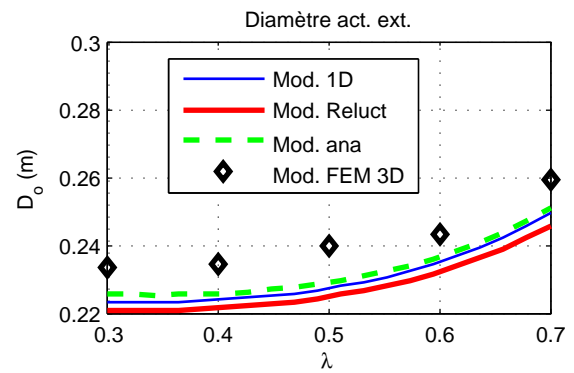
Paramètre	Valeur
$\frac{C_{em}}{V_{tot}}$	$1.87 \cdot 10^4 Nm/m^3$
λ	0.50
h_a	2.8mm
D_o	23.97cm
D_{out}	28.32cm
d_{cs}	1.79cm
d_{cr}	1.79cm
L_e	8.51cm
t_{calc}	3 jours

(d) Modèle électromagnétique par éléments finis 3D (figure 1.52)

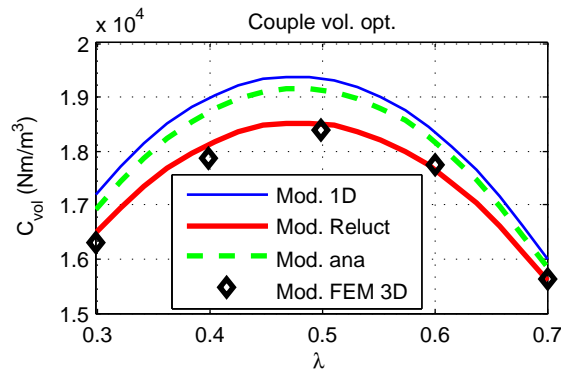
TABLE 1.3: Paramètres des machines optimisées



(a) Valeurs de la hauteur h_a des aimants obtenue (espace des paramètres)



(b) Valeurs du diamètre externe actif D_o obtenu (espace des paramètres)



(c) Valeurs des couples volumiques obtenus (espace des objectifs)

FIGURE 1.53: Résultats d'optimisation du couple volumique par les quatre méthodes en fixant pour chaque optimisation le paramètre λ

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons, dans un premier temps, présenté les principales topologies de machines à flux axial existantes dans la littérature électrotechnique, en insistant sur leurs applications respectives. Les topologies possibles sont extrêmement variées, tant au niveau du bobinage (concentré ou réparti), que par l'architecture de l'actionneur. En effet, les machines discoïdes offrent, sur ce plan, un grand nombre de variantes possibles : architecture simple face ou double face, à stator central, ou bien à rotor central, autorisant éventuellement de supprimer la culasse rotorique, avec ou sans encoches, ou même sans culasse statorique... Les possibilités offertes par ce type de machine sont quasiment illimitées, le plus difficile étant de choisir la topologie adaptée à chaque application.

Dans la seconde partie, nous avons approché le problème de la modélisation de ce genre de structure par des modèles électromagnétiques très simplifiés. Ces modèles nous ont fourni un prétexte pour évoquer les nombreux travaux de comparaisons de topologies fondés sur ces équations de dimensionnement. Ainsi avons-nous parlé des comparaisons des topologies de machines à flux axial entre elles, en insistant sur le couple volumique. Nous avons aussi comparé, avec le même modèle, la machine à flux axial simple face à aimants déposés avec son homologue à flux radial, toujours sur le plan du couple volumique. Deux points fondamentaux nous semblent importants à rappeler : d'une part, la machine à flux axial semble plus prometteuse en terme de couple volumique pour un nombre de paires de pôles élevé, car une diminution de l'épaisseur des culasses diminue directement la hauteur axiale, alors que le volume interne du rotor de la machine à flux radial, bien qu'inactif, ne permet pas de diminuer le volume. D'autre part, la machine à flux axial, qui autorise, par l'augmentation du rayon, des couples importants (le couple varie proportionnellement au cube du rayon, alors qu'il varie en fonction du carré de ce paramètre pour la machine

à flux radial), en fait un choix privilégié lorsque les pressions tangentielles sont peu importantes. A noter cependant que les têtes de bobine sont plus pénalisantes sur le volume d'une machine à flux axial que pour une machine à flux radial. D'une manière générale, on retiendra donc que ces comparaisons, bien qu'instructives, ne doivent pas être considérées sans une certaine réserve, car fortement liées aux hypothèses de départ adoptées.

Enfin, nous avons passé en revue les différents types de modèles électromagnétiques proposés dans la littérature, qui sont les modèles analytiques (schémas réductants ou bien résolution formelle des équations de Maxwell), adaptés à l'optimisation, ainsi que les modèles numériques de type éléments finis, obligatoirement tri-dimensionnels car la machine à flux axial est une structure fondamentalement tri-dimensionnelle. Nous reviendrons sur ce point par la suite. Bien que précis, ces modèles sont très coûteux en temps de calcul. Nous avons illustré l'utilisation de ces modèles en les implantant au sein d'un processus d'optimisation automatique. Les résultats ont confirmé la tendance prévue sur le temps de calcul. Mais surtout, ils ont permis de prendre conscience du rôle absolument capital du modèle lors du processus d'optimisation. En effet, suivant le modèle choisi, les machines extraites par l'optimiseur sont différentes. Cette différence s'illustre en fait plus dans l'espace des paramètres géométriques que des objectifs, ce qui est gênant pour le constructeur de machine. Pour des raisons de temps de calcul, le recours à un modèle analytique est primordial. Le modèle réductant n'est hélas pas valable sur une plage de variation des paramètres très importante, ce qui est problématique dans un processus d'optimisation systématique. Cela explique pourquoi, par la suite, nous allons nous tourner vers les modèles analytiques fondés sur la résolution formelle des équations de Maxwell.

Cela étant, et avant cela, il convient de refaire ce travail d'analyse des données bibliographiques pour l'autre thème qui nous a occupés au cours de ce travail de recherche : la modélisation des pertes ferromagnétiques. En effet, les comparaisons entre machines à flux axial et radial suggèrent que la machine à flux axial autorise le gain le plus important en terme de couple volumique lorsque le nombre de paires de pôles est important. Or, à vitesse imposée, ceci implique une augmentation de la fréquence de fonctionnement, à un tel point que les modèles de pertes fer classiques peuvent ne pas s'avérer suffisants. En conséquence, un travail de modélisation approfondi des pertes magnétiques, quelle que soit la forme de l'induction d'excitation, nous semble donc capital pour nous attaquer à ce travail de conception de machines discoïdes. D'autres chapitres sur les matériaux traiteront plus spécifiquement de la modélisation des pertes en haute fréquence, en envisageant notamment le recours à des matériaux spécifiques pour ce genre d'application haute vitesse, tels que les matériaux magnétiques composites.

Notation	Unité	Signification
B_g	T	Charge magnétique, l'induction maximale dans l'entrefer
A_L	A/m	Charge électrique, qui est la densité linéique efficace de courant due aux bobinages
D_o	m	Diamètre externe actif de la machine à flux axial, ou diamètre externe de la machine à flux radial
D_i	m	Diamètre interne actif de la machine à flux axial
D_g	m	Diamètre moyen actif de la machine à flux axial $D_g = \frac{D_o + D_i}{2}$, ou diamètre moyen d'entrefer de la machine à flux radial
m		Nombre de phases au stator de la machine
N_t		Nombre de spires par phase au stator de la machine
I_{rms}	A	Courant efficace dans une phase de la machine
g	m	Valeur de l'épaisseur d'un entrefer de la machine
d_r	m	Épaisseur totale d'un rotor de la machine
d_{cr}	m	Épaisseur d'une culasse rotorique
d_{pm}	m	Épaisseur d'un aimant de la machine
d_s	m	Épaisseur totale d'un stator de la machine
d_{cs}	m	Épaisseur d'une culasse statorique
d_{ss}	m	Épaisseur d'une zone d'encoche statorique
L_e	m	Épaisseur axiale de la machine à flux axial, ou épaisseur axiale active de la machine à flux radial
W_{cu}	m	Excursion des têtes de bobine

(a) Paramètres communs aux deux topologies de machines (à flux axial, et à flux radial)

Topologie	Notation	Unité	Signification
Flux axial	D_{out}	m	Diamètre externe total de la machine de la machine à flux axial, différent du diamètre externe actif D_o à cause des têtes de bobine : $D_{out} = D_o + 2W_{cu}$
	λ		Rapport entre diamètre interne actif et diamètre externe actif pour la machine à flux axial : $\lambda = \frac{D_i}{D_o}$
	K_L		Facteur de forme de la machine à flux axial, défini par $K_L = \frac{D_o}{L_e}$
	$K_{L_{out}}$		Facteur de forme externe de la machine à flux axial, défini par $K_{L_{out}} = \frac{L_e}{D_{out}}$ (inversé par rapport à K_L pour permettre la comparaison avec la machine à flux radial)
Flux radial	L_{out}	m	Épaisseur axiale totale de la machine à flux radial, différente de l'épaisseur axiale active L_e à cause des têtes de bobine : $L_{out} = L_e + 2W_{cu}$
	λ_o		Rapport entre diamètre d'entrefer moyen et diamètre externe pour la machine à flux radial : $\lambda_o = \frac{D_g}{D_o}$
	K_l		Facteur de forme de la machine à flux radial, défini par la relation $K_l = \frac{L_e}{D_g}$
	$K_{l_{out}}$		Facteur de forme externe de la machine à flux radial, défini par $K_{l_{out}} = \frac{L_{out}}{D_o}$

(b) Paramètres propres à chacune des deux topologies de machines (à flux axial, et à flux radial)

TABLE 1.4: Table des notations utilisées dans la section 1.2.1

Bibliographie

- [Anpalahan et Lamperth, 2006] ANPALAHAN, P. et LAMPERTH, M. (2006). Design of multi-stack axial flux permanent magnet generator for a hybrid electric vehicle. *In IEEE Vehicle Power and Propulsion Conference, 2006. VPPC*, pages 1–4.
- [Aydin, 2004] AYDIN, M. (2004). *Axial flux surface mounted PM machines for smooth torque traction drive applications*. Thèse de doctorat, University of Wisconsin-Madison.
- [Aydin et al., 2001] AYDIN, M., HUANG, S. et LIPO, T. (2001). Optimum design and 3d finite element analysis of nonslotted and slotted internal rotor type axial flux pm disc machines. *In IEEE Power Engineering Society Summer Meeting, 2001*, volume 3.
- [Aydin et al., 2002a] AYDIN, M., HUANG, S. et LIPO, T. (2002a). A new axial flux surface mounted permanent magnet machine capable of field control. *In Industry Applications Conference, 2002. 37th IAS Annual Meeting. Conference Record of the*, volume 2.
- [Aydin et al., 2002b] AYDIN, M., HUANG, S. et LIPO, T. (2002b). A new axial flux surface mounted permanent magnet machine capable of field control. *In Industry Applications Conference, 2002. 37th IAS Annual Meeting. Conference Record of the*, volume 2.
- [Aydin et al., 2004] AYDIN, M., HUANG, S. et LIPO, T. (2004). Axial flux permanent magnet disc machines : a review. *In Symposium on Power Electronics, Electrical Drives, Automation, and Motion (SPEEDAM)*, pages 61–71.
- [Aydin et al., 2006] AYDIN, M., HUANG, S., LIPO, T., TC-G, T., INC, C. et PEORIA, I. (2006). Torque quality and comparison of internal and external rotor axial flux surface-magnet disc machines. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 53(3):822–830.
- [Aydin, 2003] AYDIN, M.; Huang, S. L. T. (2003). Performance evaluation of an axial flux consequent pole pm motor using finite element analysis. *In IEMDC*.
- [Azzouzi, 2007] AZZOUZI, J. (2007). *Contribution à la modélisation et à l'optimisation des machines synchrones à aimants à flux axial. Application au cas de l'aérogénérateur*. Thèse de doctorat, Université du Havre.
- [Azzouzi et al., 2005a] AZZOUZI, J., BARAKAT, G. et DAKYO, B. (2005a). Quasi-3-d analytical modeling of the magnetic field of an axial flux permanent-magnet synchronous machine. *IEEE Transaction on Energy Conversion*, 20(4):746–752.
- [Azzouzi et al., 2005b] AZZOUZI, J., KARIM, N., BARAKAT, G. et DAKYO, B. (2005b). Axial flux pm synchronous generator design optimization : robustness test of the genetic algorithm approach. *In Power Electronics and Applications, 2005 European Conference on*, page 10.
- [Ben Ahmed et al., 2000] BEN AHMED, H., KERZREHO, C., COGNARD, J., DELAMARRE, J., MULTON, B. et BERNARD, N. (2000). Moteur/générateur à réluctance excitée et à bobinage dans l'entrefer. Brevet international PCT/FR00/003459.
- [Bernard, 2001] BERNARD, N. (2001). *Conception, dimensionnement et commande d un moteur/générateur synchrone à excitation homopolaire et à bobinages dans l entrefer pour accumulateur électromécanique d énergie*. Thèse de doctorat, Ecole normale supérieure de cachan.
- [Brisset et al., 2006] BRISSET, S., GILLON, F., BROCHET, P. et DHELFT, R. (2006). Conception d'une motopompe synchrone à flux axial et à bobinages concentrés : Application à une pompe étanche. *Revue internationale de génie électrique*, 9(2-3):185–208.
- [Brisset et al., 2008] BRISSET, S., VIZIREANU, D. et BROCHET, P. (2008). Design and optimization of a nine-phase axial-flux pm synchronous generator with concentrated winding for direct-drive wind turbine. *IEEE transactions on Industrial Applications*, 93:9994.
- [Brown et al., 2002] BROWN, N., HAYDOCK, L. et BUMBY, J. (2002). An idealised geometric approach to electromagnetically comparing axial and radial flux permanent magnet machines. *In International Conference on Electrical Machines (ICEM), Bruges, Belgium*.
- [Bumby et al., 2004] BUMBY, J., MARTIN, R., MUELLER, M., SPOONER, E., BROWN, N. et CHALMERS, B. (2004). Electromagnetic design of axial-flux permanent magnet machines. *IEE Proceedings-Electric Power Applications*, 151:151.

- [Caricchi *et al.*, 1996] CARICCHI, F., CRESCIMBINI, F. et DI NAPOLI, A. (1996). Prototype of innovative wheel direct drive with water-cooled axial-flux pm motor for electric vehicle applications. In *Conference Proceedings of Applied Power Electronics Conference and Exposition, Eleventh Annual.*, volume 2.
- [Cavagnino *et al.*, 2002] CAVAGNINO, A., LAZZARI, M., PROFUMO, F. et TENCONI, A. (2002). A comparison between the axial flux and the radial flux structures for pm synchronous motors. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 38(6):1517–1524.
- [Chalmers et Spooner, 1999] CHALMERS, B. et SPOONER, E. (1999). An axial-flux permanent-magnet generator for a gearless wind energysystem. *IEEE Transaction on Energy Conversion*, 14(2):251–257.
- [Chan et Lai, 2007] CHAN, T. et LAI, L. (2007). An axial-flux permanent-magnet synchronous generator for a direct-coupled wind-turbine system. *IEEE Transaction on Energy Conversion*, 22(1):86–94.
- [Cirani, 2002] CIRANI, M. (2002). Analysis of an innovative design of an axial flux torus-machine. Rapport technique TRITA-ETS-2002-05, Royal Institute of Technology (KTH). Licentiate Thesis.
- [Derks, 2004] DERKS, D., G. F. . B. P. (2004). Influence of the inserted tooth in axial ac synchronous machine. In *ICEM*.
- [Dote et Kinoshita, 1990] DOTE, Y. et KINOSHITA, S. (1990). *Brushless servomotors : fundamentals and applications*. Clarendon Press.
- [Dubois *et al.*, 1999] DUBOIS, M., POLINDER, H. et FERREIRA, J. (1999). Comparison of generator topologies for direct-drive wind turbines. In *Proc. Nordic Countries Power Industrial Electronics Conf*, pages 22–26.
- [Ehsani *et al.*, 2009] EHSANI, M., GAO, Y. et EMADI, A. (2009). *Modern electric, hybrid electric, and fuel cell vehicles : fundamentals, theory, and design*. CRC.
- [Feudale *et al.*, 2005] FEUDALE, F., ODORICO, A., SICA, M., CARICCHI, F., CAPPONI, F. et CRESCIMBINI, F. (2005). Multi-stage axial flux pm machine for direct drive railway traction applications. In *Ship Propulsion and Railway Traction Systems Conference*.
- [Gieras *et al.*, 2008] GIERAS, J., WANG, R. et KAMPER, M. (2008). *Axial flux permanent magnet brushless machines*. Springer Verlag.
- [Gonzalez-Lopez *et al.*, 2008] GONZALEZ-LOPEZ, D., TAPIA, J., WALLACE, R. et VALENZUELA, A. (2008). Design and test of an axial flux permanent-magnet machine with field control capability. *IEEE Transactions on Magnetics*, 44(9):2168–2173.
- [Hill-Cottingham *et al.*, 2001] HILL-COTTINGHAM, R., COLES, P., EASTHAM, J., PROFUMO, F., TENCONI, A. et GIANOLIO, G. (2001). Multi-disc axial flux stratospheric aircraft propeller drive. In *Conference Record of the Thirty-Sixth IEEE IAS Annual Meeting*, volume 3.
- [Huang *et al.*, 2000] HUANG, S., AYDIN, M. et LIPO, T. (2000). Comparison of (non-slotted and slotted) surface mounted pm motors and axial flux motors for submarine ship drives. In *Third Naval Symposium on Electrical Machines*.
- [Huang *et al.*, 2001] HUANG, S., AYDIN, M. et LIPO, T. (2001). Low noise and smooth torque permanent magnet propulsion motors : Comparison of non-slotted and slotted radial and axial flux topologies. In *IEEE International Aegean Electrical Machine and Power Electronic Conference*, pages 1–8.
- [Huang *et al.*, 2002] HUANG, S., AYDIN, M. et LIPO, T. (2002). A direct approach to electrical machine performance evaluation : Torque density assessment and sizing optimization. In *15th International Conference on Electrical Machines, ICEM*, pages 26–28.
- [Huang *et al.*, 1999] HUANG, S., LUO, J., LEONARDI, F. et LIPO, T. (1999). A comparison of power density for axial flux machines based on general purpose sizing equations. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 14:185–192.
- [Jennane *et al.*, 2004a] JENNANE, J., FADLI, N., CHARPENTIER, J. et QUESADA, J. (2004a). Semi-analytical study of 3 kinds of axial flux pm actuator. *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, 19(1):299–302.
- [Lipo, 2004] LIPO, T. (2004). *Introduction to AC machine design*. Wisconsin power electronics research center : University of Wisconsin, Madison.
- [Lipo et Aydin, 2004a] LIPO, T. et AYDIN, M. (2004a). Field weakening of permanent magnet machines—design approaches. In *EPE Power Electronics and Motion Control Conference*.

- [Liu *et al.*, 2003] LIU, C., LIN, S., ZAMORA, J. et CHIANG, T. (2003). Optimal operational strategy design of a single-sided permanent magnet axial-flux motor for electrical vehicle application. *In Industry Applications Conference, 2003. 38th IAS Annual Meeting. Conference Record of the*, volume 3.
- [Marignetti *et al.*, 2007] MARIGNETTI, F., COLLI, V. et COIA, Y. (2007). Design of axial flux pm synchronous machines through 3d coupled electromagnetic thermal and fluid dynamical finite elements analysis. *IEEE transactions on Industrial Electronics*, 55(10):3591–3601.
- [Marignetti *et al.*, 2006] MARIGNETTI, F., TOMASSI, G. et BUMBY, J. (2006). Electromagnetic modelling of permanent magnet axial flux motors and generators. *Compel*, 25(2):510–522.
- [Morimoto *et al.*, 1994a] MORIMOTO, S., SANADA, M. et TAKEDA, Y. (1994a). Wide speed operation of interior permanent magnet synchronous motors with high performance current regulator. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 30(4):920–926.
- [Ostovic, 1989] OSTOVIC, V. (1989). *Dynamics of Saturated Electric Machines*. Springer-Verlag.
- [Parviainen, 2005] PARVIAINEN, A. (2005). *Design of axial-flux permanent-magnet low-speed machines and performance comparison between radial-flux and axial-flux machines*. Thèse de doctorat, Lappeenranta University of Technology.
- [Parviainen *et al.*, 2004] PARVIAINEN, A., NIEMELA, M. et PYRHONEN, J. (2004). Modeling of axial flux permanent-magnet machines. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 40(5):1333–1340.
- [Patterson, 1995] PATTERSON, D. (1995). An efficiency optimized controller for a brushless dc machine, and loss measurement using a simple calorimetric technique. *In Power Electronics Specialists Conference, 1995. PESC'95 Record., 26th Annual IEEE*, volume 1.
- [Profumo *et al.*, 2002] PROFUMO, F., EASTHAM, F., TENCONI, A. et GIANOLIO, G. (2002). "plastic" electric motors : a viable solution for axial flux machines. *In Industrial Electronics, 2002. ISIE 2002. Proceedings of the 2002 IEEE International Symposium on*, volume 1.
- [Profumo *et al.*, 1996] PROFUMO, F., ZHANG, Z. et TENCONI, A. (1996). Axial flux machines drives : a new viable solution for electric cars. *In Industrial Electronics, Control, and Instrumentation, 1996., Proceedings of the 1996 IEEE IECON 22nd International Conference on*, volume 1.
- [Qu *et al.*, 2003] QU, R., AYDIN, M. et LIPO, T. (2003). Performance comparison of dual-rotor radial-flux and axial-flux permanent-magnet bldc machines. *In Proceedings of IEEE Electric Machines and Drives Conference, IEMDC'03*, pages 1–4.
- [Qu et Lipo, 2004] QU, R. et LIPO, T. (2004). Analysis and modeling of air-gap and zigzag leakage fluxes in a surface-mounted permanent-magnet machine. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 40(1):121–127.
- [Sahin et Vandenput, 1999] SAHIN, F. et VANDENPUT, A. (1999). Design considerations of the flywheel-mounted axial-flux permanent-magnet machine for a hybrid electric vehicle. *In Eighth European conference on power electronics and applications. EPE*, volume 99.
- [Simsir et Ertan, 1999] SIMSIR, N. et ERTAN, H. (1999). A comparison of torque capabilities of axial flux and radial flux type of brushless dc (bldc) drives for wide speed range applications. *In 1999 International Conference on Power Electronics and Drive Systems (PEDS 99). IEEE*, pages 719–24.
- [Van Tichelen *et al.*, 2003] VAN TICHELEN, P., PEETERS, E. et VITO, B. (2003). Design of a new axial flux permanent magnet generator for hybrid electric vehicles. *In 2003 IEEE 58th Vehicular Technology Conference, 2003. VTC 2003-Fall*, volume 5.
- [Virtic *et al.*, 2009] VIRTIC, P., PISEK, P., HADZISELIMOVIC, M., MARCIC, T. et STUMBERGER, B. (2009). Torque analysis of an axial flux permanent magnet synchronous machine by using analytical magnetic field calculation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 45(3):1036–1039.
- [Vizireanu *et al.*, 2005] VIZIREANU, D., KESTELYN, X., BRISSET, S., BROCHET, P., MILET, Y. et LALOY, D. (2005). Polyphased modular direct-drive wind turbine generator. *In Power Electronics and Applications, 2005 European Conference on*, page 9.
- [Wakui, 2006] WAKUI, K. (2006). A comparison between axial and radial flux pm motor by optimum design method from the required output nt characteristics. *Compel*, 25(2):496–509.
- [Xiong et Nasar, 1989] XIONG, G. et NASAR, S. (1989). Analysis of fields and forces in a permanent magnet linear synchronous machine based on the concept of magnetic charge. *IEEE Transactions on Magnetics*, 25(3):2713–2719.

- [Zhang Z., 1996] ZHANG Z., Profumo F., T. A. (1996). Axial-flux versus radial-flux permanent-magnet motors. *In Electromotion*, volume 3, pages 134–140.
- [Zhao *et al.*, 2008] ZHAO, H., LI, L., ZHENG, P., LIU, R. et ZHAO, J. (2008). Research on the axial-radial flux compound-structure permanent-magnet synchronous machine (cspmsm) used for hev. *In Electrical Machines and Systems, 2008. ICEMS 2008. International Conference on*, pages 3250–3253.
- [Zhu et Howe, 1993a] ZHU, Z. et HOWE, D. (1993a). Instantaneous magnetic field distribution in brushless permanent magnet dc motors, part ii : Armature-reaction field. *IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS MAG*, 29:136–136.
- [Zhu et Howe, 1993b] ZHU, Z. et HOWE, D. (1993b). Instantaneous magnetic field distribution in brushless permanentmagnet dc motors. iii. effect of stator slotting. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 29(1 Part 2):143–151.
- [Zhu et Howe, 1993c] ZHU, Z. et HOWE, D. (1993c). Instantaneous magnetic field distribution in permanent magnetbrushless dc motors. iv. magnetic field on load. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 29(1):152–158.
- [Zhu *et al.*, 1993] ZHU, Z., HOWE, D., BOLTE, E. et ACKERMANN, B. (1993). Instantaneous magnetic field distribution in brushless permanentmagnet dc motors. i. open-circuit field. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 29(1):124–135.

Chapitre 2

Etat de l'art sur les pertes dans les matériaux doux utilisés en électrotechnique

Introduction

Comme on l'a vu dans le chapitre précédent consacré à l'état de l'art sur les méthodes de conception des machines à flux axial, ce type de topologie ne révèle tout son potentiel en termes de couple massique que lorsque le nombre de paires de pôles utilisé est grand. Par conséquent, pour des vitesses de rotation fixées par le cahier des charges, ceci implique des fréquences de fonctionnement importantes. Qui plus est, la machine à flux axial est fondamentalement une structure tridimensionnelle. Ceci a pour conséquence que les matériaux magnétiques sont soumis à des contraintes d'induction d'excitation sévères, tant sur le plan de la fréquence de fonctionnement que sur le caractère multi-composantes des loci d'induction dans les culasses de la machine. De telles exigences sont assez inhabituelles en électrotechnique, et réclament, afin de calculer les pertes dans les matériaux magnétiques de manière satisfaisante, de développer des modèles de pertes spécifiques à ces situations extrêmes. C'est pour cela que le cinquième chapitre de cette étude sera consacré au développement de modèles de pertes fer adaptés au fonctionnement à haute fréquence, ainsi que dans les matériaux composites doux isotropes à base de poudre de fer compactée. Cela étant, avant d'entreprendre de tels travaux, il convient d'évoquer ce qui a été fait dans la littérature sur ce sujet : c'est le but de ce chapitre. Avant de nous consacrer à l'exposé de la théorie et du modèle de pertes dans la seconde partie de ce travail, il faut en premier lieu exposer les méthodes de mesure et de caractérisation des pertes magnétiques, qui constituent un point de départ indispensable à toute étude dans ce domaine. Le cas des mesures en induction unidimensionnelle étant classique, nous nous permettrons ici de ne traiter que le cas des mesures en champ bidimensionnel, qui requiert des procédés de caractérisation bien entendu spécifiques.

2.1 La caractérisation des matériaux magnétiques doux en champ bidirectionnel

Nous aurons l'occasion de montrer, au chapitre 4 de la présente thèse, que la machine à flux axial est fondamentalement une structure tridimensionnelle, ce qui laisse présager une sollicitation également tridimensionnelle des matériaux magnétiques (il est montré dans [Zhu et Ramsden, 1998] que de toute façon, même les machines synchrones à aimants à flux radial étaient le siège d'excitations de type bidirectionnelles en induction, en particulier au niveau des jointures entre culasse et dents). Afin de mieux appréhender le phénomène des pertes fer dans les machines électriques, il importe d'effectuer des caractérisations de ces matériaux au sein de dispositifs expérimentaux bien plus simples que les machines. Dans ces dispositifs, on soumet les échantillons à des excitations en induction connues et supposées uniformes, et on mesure les pertes qui en résultent. Le cas de la caractérisation en induction unidimensionnelle a été largement et de manière exhaustive débattu dans les références [Lebouc, 2006a, Lebouc, 2006b]. Nous allons donc nous intéresser dans cette partie à la mesure des pertes dans les cas bi et tridimensionnels, ce qui nécessite un appareillage plus complexe que les classiques mesures en champ unidimensionnel, bien que les méthodes en soient naturellement fortement inspirées.

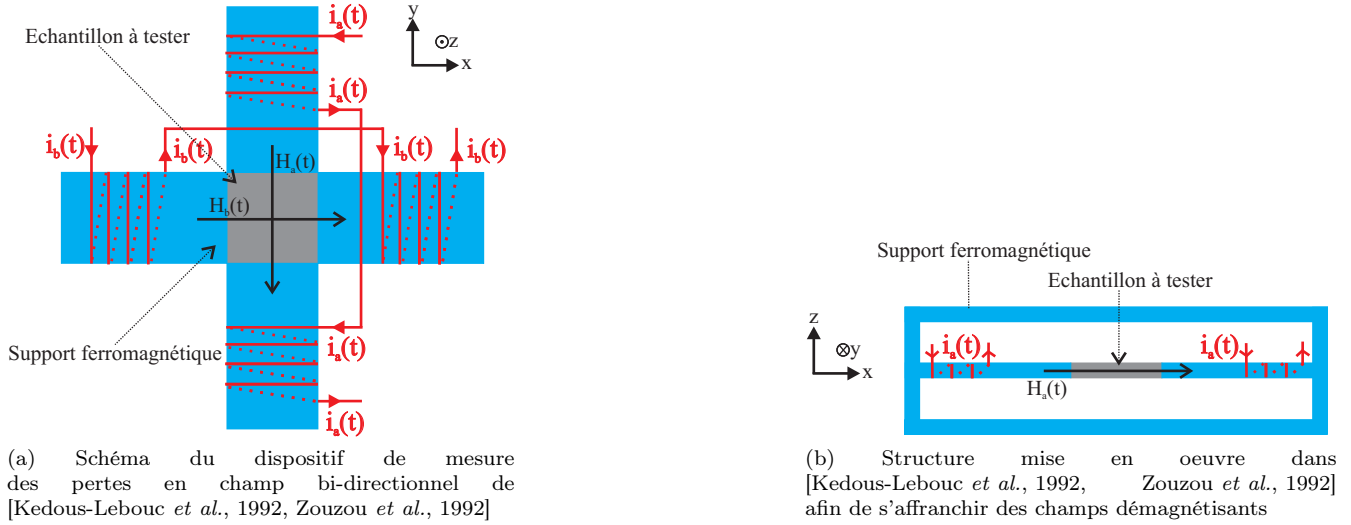


FIGURE 2.1: Dispositif de mesure des pertes en champ bi-directionnel de [Kedous-Lebouc *et al.*, 1992, Zouzou *et al.*, 1992]

2.1.1 Les différents dispositifs rencontrés pour la mesure des pertes en champ tournant

Les dispositifs de caractérisation des pertes en champ bidirectionnel sont naturellement plus complexes que ceux utilisés en champ alternatif, du fait de la nécessité de créer deux composantes d'induction. Nous représentons au niveau de la figure 2.1 le dispositif mis en oeuvre par les auteurs de [Kedous-Lebouc *et al.*, 1992] et de [Zouzou *et al.*, 1992]. L'échantillon sur lequel on fait les mesures est un carré de 80mm de côté. Afin de générer les deux composantes de champ magnétique, on place des bobines d'excitation suivant les deux axes le long desquels on souhaite magnétiser l'échantillon. Afin d'éviter les champs démagnétisants, ce circuit magnétique d'excitation est fermé suivant les deux axes. Néanmoins, à cause des effets de bord, les auteurs ont prouvé, à l'aide d'études par éléments finis 2D [Nencib *et al.*, 1995], que l'induction magnétique n'était homogène que sur un carré de côté 20mm au centre de l'échantillon. C'est pour cela que les capteurs de champ et d'induction ont été disposés dans la zone centrale de l'échantillon. Le capteur de champ magnétique est une bobine plate très mince (le support n'étant pas magnétique), que l'on dispose à la surface de l'échantillon (figure 2.2a). On sait que le champ tangentiel à la surface de l'échantillon est continu. Par conséquent, le champ capté par la bobine est approximativement le champ magnétique dans l'échantillon. Le champ magnétique est capté par le biais de la tension aux bornes du bobinage V_H (N_H étant le nombre de spires de la bobine) :

$$H = \frac{1}{N_H \mu_0} \int V_H dt \quad (2.1)$$

En champ bidimensionnel, le capteur de champ est en fait constitué de deux bobines dont les directions respectives de bobinage sont en quadrature spatiale, de manière à capter les deux composantes de champ dans l'échantillon. Certains auteurs [Enokizono et Sievert, 1990, Sievert, 1990] signalent que la composante tangentielle de champ magnétique décroît très rapidement lorsque l'on s'éloigne de la surface du matériau, ce qui rend la méthode précédente imprécise, même si l'épaisseur de la bobine du capteur de champ magnétique est très faible. Afin de remédier à ce problème, il a été proposé [Zhu et Ramsden, 1993a, Guo *et al.*, 2008] de placer non pas un capteur de champ magnétique, mais deux (figure 2.2b), à des distances d_1 et d_2 connues de la surface de l'échantillon. Par la suite, une extrapolation linéaire des champs magnétiques H_1 capté par la bobine 1 et H_2 capté par la bobine 2 est effectuée pour connaître le véritable champ magnétique H à la surface du matériau :

$$H = \frac{d_2 H_1 - d_1 H_2}{d_2 - d_1} \quad (2.2)$$

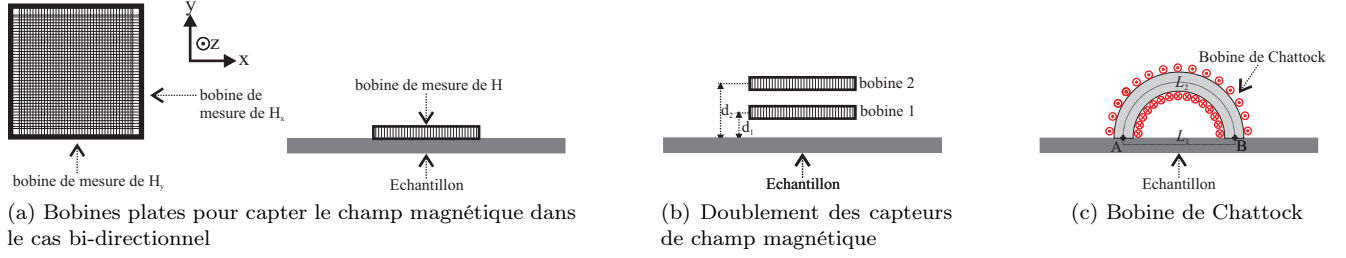


FIGURE 2.2: Les dispositifs de mesure du champ magnétique

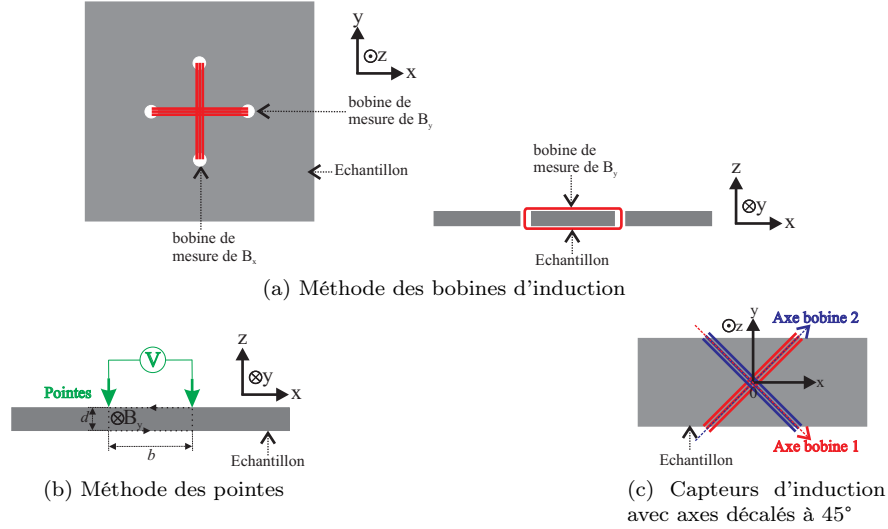


FIGURE 2.3: Les dispositifs de mesure de l'induction magnétique

Une autre possibilité, signalée dans [Fiorillo et Mazaleyrat, 2008] pour capter le champ magnétique dans un échantillon, est la bobine de Chattock (figure 2.2c). Le principe de fonctionnement est le suivant : la chute de potentiel magnétique scalaire à la surface du matériau est donnée par, en l'absence de courant dans le bobinage :

$$\int_{L_1} H_1 dl = \int_{L_2} H_2 dl \quad (2.3)$$

où H_1 est ici le champ magnétique dans le matériau que l'on veut mesurer, et H_2 le champ magnétique dans le matériau non-magnétique de la bobine de Chattock. Si nous supposons les champs magnétiques uniformes dans les différentes parties, alors nous avons $H_1 = L_2/L_1 H_2$, et alors le champ magnétique H_1 recherché est lié à la tension V_H mesurée aux bornes du bobinage et le nombre N_H de spires de ce dernier par la relation :

$$H_1 = \frac{L_2}{L_1} \frac{1}{N_H \mu_0} \int V_H dt \quad (2.4)$$

En ce qui concerne les capteurs d'induction, on utilise un bobinage de quelques spires placé autour de l'échantillon à caractériser. Comme on l'a signalé, l'induction n'étant uniforme qu'au niveau du centre de l'échantillon, il est nécessaire de percer ce dernier afin de localiser les capteurs d'induction uniquement en son centre (figure 2.3a). L'induction est alors calculée à partir de la tension V_B aux bornes de la bobine, du nombre N_B de spires, ainsi que la surface d'une spire S_{spire} :

$$B(t) = \frac{1}{N_B S_{spire}} \int V_B dt \quad (2.5)$$

D'autres auteurs [Brix *et al.*, 1982, Sievert *et al.*, 1989], pour capter l'induction magnétique localement sans percer l'échantillon, ont mis au point une méthode de mesure consistant à placer deux pointes au-dessus de la

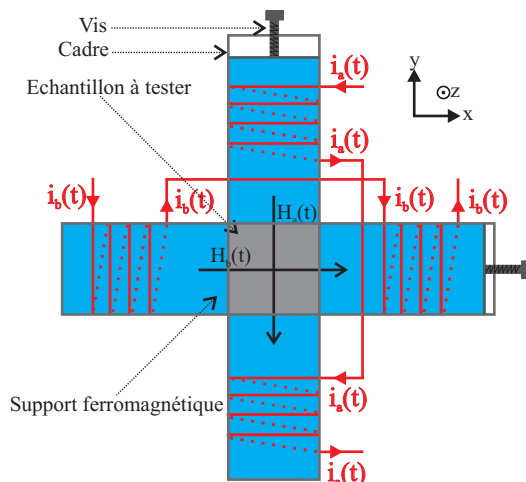


FIGURE 2.4: Dispositif [Basak et Moses, 1978] permettant d'appliquer des contraintes mécaniques suivant les deux axes

zone de l'échantillon qui nous intéresse, et de mesurer la chute la tension V_p entre ces deux pointes (figure 2.3b). L'induction à mesurer est alors donnée par intégration :

$$B(t) = \frac{2}{\omega d} \int V_p dt \quad (2.6)$$

D'autres chercheurs [Sasaki *et al.*, 1985], afin de mesurer les deux composantes d'inductions, choisissent de placer les bobines inductives avec un axe décalé de 45° par rapport aux axes x et y (figure 2.3c). Auquel cas, afin de tenir compte du décalage angulaire des axes des bobines par rapport aux axes des coordonnées, il faut faire l'opération suivante (en notant B_1 l'induction vue par la bobine 1, et B_2 l'induction vue par la bobine 2) :

$$\begin{cases} B_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (B_1 + B_2) \\ B_y = -\frac{1}{\sqrt{2}} (B_1 - B_2) \end{cases} \quad (2.7)$$

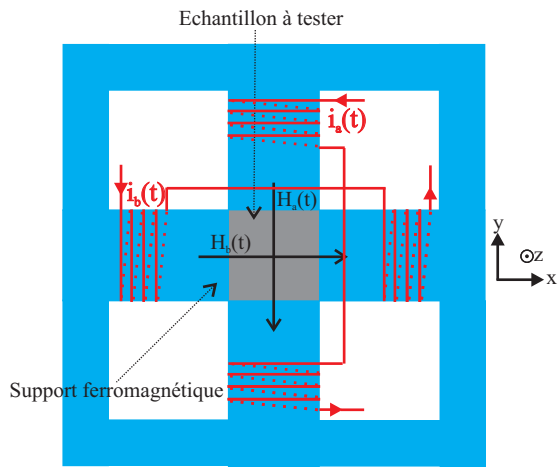
Certains chercheurs [Basak et Moses, 1978] ont perfectionné le dispositif afin d'évaluer l'effet des contraintes mécaniques appliquées suivant les deux axes sur les pertes. Un tel dispositif est montré à la figure 2.4.

Les dispositifs représentés au niveau de la figure 2.4 ou 2.1 sont des dispositifs tridimensionnels, à cause du circuit ferromagnétique de rebouclage du flux magnétique pour éviter les champs démagnétisants (figure 2.1b). D'autres chercheurs ont réalisé des systèmes permettant d'effectuer ce rebouclage du flux dans le plan de mesure [Zhu *et al.*, 1999, Zhu et Ramsden, 1993b], ce qui donne des dispositifs de géométrie légèrement différente (figure 2.5a). Qui plus est, afin de réduire les courants requis pour magnétiser l'échantillon, ce dispositif utilise la concentration de flux, avec un support magnétique de plus grande section que l'échantillon (figure 2.5b). Les mêmes auteurs ont d'ores et déjà entamé la construction d'un dispositif de caractérisation tridimensionnel [Guo *et al.*, 2006a] afin de caractériser les matériaux isotropes, comme les matériaux à base de poudres de fer de la société suédoise Höganäs, et obtenu à ce propos d'intéressants résultats sur les pertes dans ces matériaux composites.

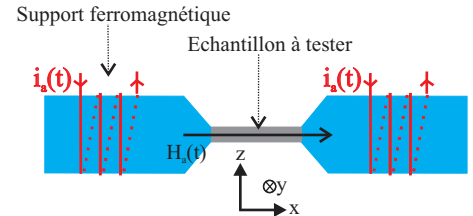
Pour finir, nous parlerons du dispositif mis au point à l'INRIM de Turin [Appino *et al.*, 2007, Appino *et al.*, 2009a, Ragusa *et al.*, 2007], [Fiorillo, 2004], afin de remédier au problème de la non-uniformité de l'induction dans tous les systèmes précédents. Il s'agit d'un système où l'inducteur est un stator de machine alternative, et l'échantillon est une tôle FeSi de forme ronde (figure 2.6). Un tel dispositif, en étant invariant par rotation, permet un gain en terme d'homogénéité du champ dans l'échantillon. Qui plus est, il permet d'atteindre des inductions de l'ordre de 1.8T à des fréquences de 200Hz, notamment grâce à la concentration de flux qui s'opère. Néanmoins, nous le verrons dans le paragraphe suivant, ceci se paie par une complexification du contrôle, car il y a maintenant 3 phases à alimenter.

2.1.2 Le problème du contrôle de la forme du locus d'induction

Le problème posé du contrôle concerne la détermination de l'alimentation du dispositif de caractérisation afin de pouvoir soumettre l'échantillon au lieu d'induction voulu. La non-linéarité fondamentale du système est susceptible



(a) Schéma du dispositif de mesure des pertes en champ bidirectionnel de [Zhu *et al.*, 1999, Zhu et Ramsden, 1993b]



(b) Concentration de flux pour le dispositif de [Zhu *et al.*, 1999, Zhu et Ramsden, 1993b]

FIGURE 2.5: Dispositif de mesure des pertes en champ bidirectionnel de [Zhu *et al.*, 1999, Zhu et Ramsden, 1993b]

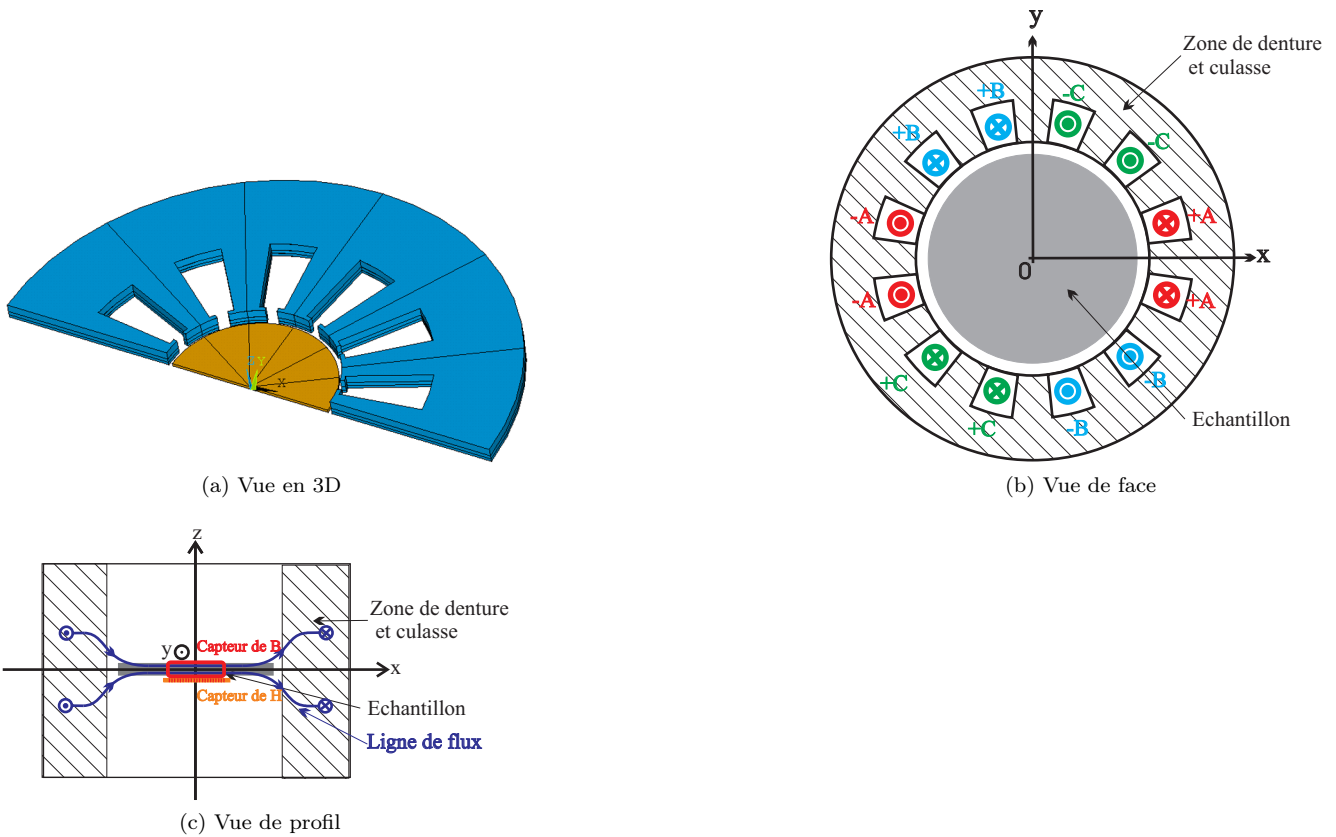


FIGURE 2.6: Le dispositif de mesure des pertes en champ tournant mis en oeuvre dans [Appino *et al.*, 2007, Appino *et al.*, 2009a, Ragusa *et al.*, 2007], [Fiorillo, 2004]

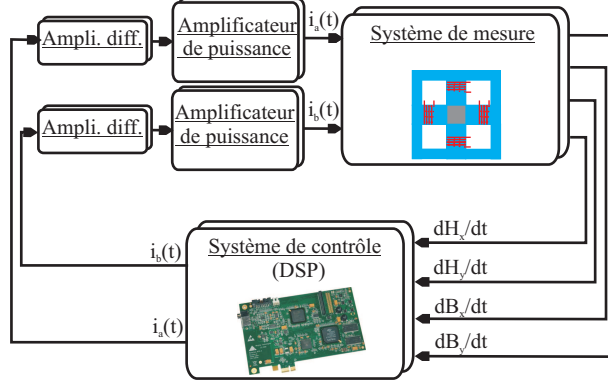


FIGURE 2.7: Synoptique du dispositif de contrôle à mettre en oeuvre

de rendre ce contrôle particulièrement délicat. Les auteurs de [Zhu *et al.*, 1999, Zhu et Ramsden, 1993b] ont donné le synoptique du schéma du contrôle à mettre en oeuvre (figure 2.7), sans pour autant détailler l'algorithme de commande utilisé. Etant donné l'architecture du système, on peut supposer qu'il s'agit d'un dispositif de contrôle en temps réel.

En revanche, dans la référence [Ragusa et Fiorillo, 2006], les auteurs expliquent en détail l'algorithme mis en oeuvre pour leur régulation (qui correspond au système de mesure avec le stator de machine alternative) : ils ont repris la méthode de contrôle non-linéaire fondée sur la méthode du point fixe mise en oeuvre dans la référence [Leibovic, 1963a, Leibovic, 1963b]. Le point de départ est la discrétisation de l'onde d'induction voulue en un certain nombre N de points sur une période temporelle $T = 2\pi/\omega$ de manière à pouvoir traiter le problème de façon numérique. Admettons que l'on veuille obtenir au centre de l'échantillon une induction tournante, c'est-à-dire que l'on souhaite un vecteur d'induction de la forme :

$$\overrightarrow{B_0}(t) = \begin{pmatrix} B_{0m} \cos(\omega t) \\ B_{0m} \sin(\omega t) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Le processus de discrétisation est illustré au niveau de la figure 2.8. Ensuite, pour chaque instant repéré par un entier $n \in [1, N]$, on applique le contrôle suivant, afin de trouver itérativement le champ magnétique permettant d'obtenir l'induction voulue :

$$\left(\overrightarrow{H_{a_n}}\right)_{k+1} = \left(\overrightarrow{H_{a_n}}\right)_k + \nu \left[\left(\overrightarrow{B_{0_n}}\right) - \left(\overrightarrow{B_n}\right)_k \right] \quad (2.9)$$

où $\left(\overrightarrow{B_n}\right)_k$ est le vecteur induction obtenu lors de l'itération k pour l'échantillon n , et $\left(\overrightarrow{H_{a_n}}\right)_k$ est le vecteur champ magnétique obtenu lors de l'itération k pour l'échantillon n . Si le nombre ν est choisi de manière à ce que l'application qui associe l'induction au champ magnétique soit contractante, alors la méthode du point fixe garantit qu'au bout d'un nombre suffisant d'itérations, la différence entre l'induction voulue et celle obtenue tendra vers zéro. Sachant que le théorème d'Ampère assure la proportionnalité entre les courants et le champ magnétique (notons K ce rapport de proportionnalité), on passe des deux composantes de champ magnétique obtenues aux courants à appliquer dans les phases a , b , ou c par une transformation de type Concordia :

$$\begin{bmatrix} i_{a_n} \\ i_{b_n} \\ i_{c_n} \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \overrightarrow{H_{a_n}} \quad (2.10)$$

Par la suite, par la connaissance des courants à appliquer au niveau des phases de la machine, et connaissant par ailleurs les matrices de résistance $[R]$ et d'inductance $[L]$ des phases de la machine, on peut en déduire le vecteur des tensions simples $[e]$ à appliquer au niveau des phases de la machine électrique :

$$[e] = [R][i] + [L] \frac{d[i]}{dt} \quad (2.11)$$

Une fois que les tensions à appliquer aux bornes des trois phases de l'inducteur sont connues, il ne reste plus alors qu'à effectuer la mesure des pertes dans l'échantillon. Nous expliquerons comment dans la partie qui suit.

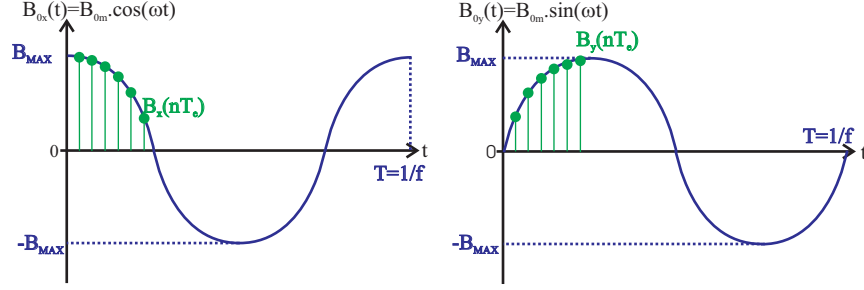


FIGURE 2.8: Discretisation des deux composantes d'induction d'un locus circulaire

2.1.3 La mesure des pertes dans le matériau

On distingue principalement deux méthodes de mesure possibles : la méthode dite « de mesure du champ magnétique », et la méthode thermométrique. La première, nous allons le voir, est surtout utilisée en champ faible, alors que la seconde est plutôt utilisée en champ fort, lorsque les pertes sont importantes. Les deux méthodes, utilisables sur une plage de valeurs de champ intermédiaires, ont donné des résultats similaires [Appino *et al.*, 2007, Ragusa *et al.*, 2007], ce qui est rassurant quant à leur bien-fondé.

2.1.3.1 La méthode fondée sur l'évaluation du champ magnétique

Dans la référence [Brissonneau, 1997], il est montré que la connaissance du champ magnétique à la surface de l'échantillon, ainsi que l'induction moyenne dans ce dernier suffit à calculer les pertes. Replaçons-nous, pour simplifier, dans le cas du problème du champ unidimensionnel. Considérons le système constitué d'un matériau ferromagnétique en forme de tôle d'épaisseur d , représenté au niveau de la figure 2.9. La tôle considérée, munie d'un repère $(0xyz)$, est supposée infinie suivant les deux directions x et y . On s'intéresse, comme suggéré au niveau de la figure 2.9, à un parcours fictif $efgh$ de longueur L suivant l'axe $(0x)$, et étendu sur toute la largeur d de la tôle. La direction de magnétisation est l'axe $(0y)$. La puissance volumique entrant dans la tôle, d'après le théorème de Poynting, s'exprime ainsi, en tenant compte des symétries existant entre les deux faces :

$$p_{vol}(t) = \frac{2}{d} E_x \left(z = \frac{d}{2}, t \right) H_y \left(z = \frac{d}{2}, t \right) \quad (2.12)$$

L'équation de Maxwell-Faraday $\vec{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ permet d'écrire que, après application du théorème de Green sur le contour $efgh$:

$$-2LE_x \left(z = \frac{d}{2}, t \right) = - \int_{-d/2}^{d/2} \frac{\partial B_y}{\partial t} (z, t) L dz \quad (2.13)$$

Grâce à cette relation, la puissance volumique devient donc :

$$p_{vol}(t) = H_y \left(z = \frac{d}{2}, t \right) \frac{\partial \overline{B}_y}{\partial t} (t) \quad (2.14)$$

où l'induction moyenne sur la tôle a été appelée $\overline{B}_y(t) = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} B_y(z, t) dz$. La puissance volumique moyenne dissipée est donc donnée par la formule suivante :

$$P_{vol} = \frac{1}{T} \int_0^T H_y \left(z = \frac{d}{2}, t \right) \frac{\partial \overline{B}_y}{\partial t} (t) dt \quad (2.15)$$

Ce dernier résultat a été obtenu en champ unidimensionnel. La référence [Brix *et al.*, 1982] l'a généralisé au cas de l'excitation bidimensionnelle de champ, en revenant à la définition générale du vecteur de Poynting, faisant intervenir en réalité le flux du produit vectoriel $\vec{E} \wedge \vec{H}$ à travers la surface de la tôle. Auquel cas, on obtiendrait, dans le système de coordonnées présenté au niveau de la figure 2.9 :

$$P_{vol} = \frac{1}{T} \int_0^T \left[H_x \left(z = \frac{d}{2}, t \right) \frac{\partial \overline{B}_x}{\partial t} (t) + H_y \left(z = \frac{d}{2}, t \right) \frac{\partial \overline{B}_y}{\partial t} (t) \right] dt \quad (2.16)$$

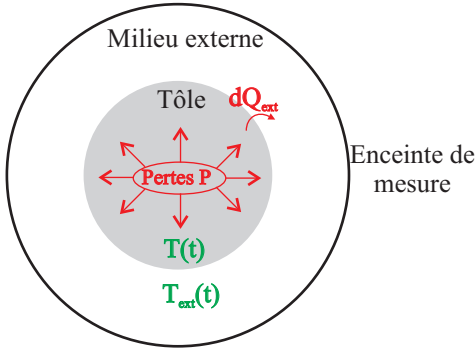


FIGURE 2.10: Modèle thermique mis en oeuvre dans la méthode thermométrique

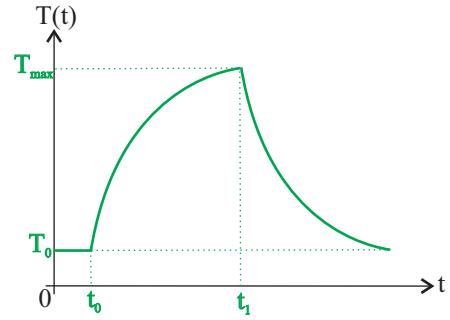


FIGURE 2.11: Modèle thermique mis en oeuvre dans la méthode thermométrique

externe, la température $T(t)$ va s'élever suivant l'équation suivante :

$$P = C_m \frac{dT}{dt} + \frac{dQ_{ext}}{dt} \quad (2.18)$$

Si on note K_{ext} le coefficient d'échange thermique avec le milieu extérieur, on aura alors l'équation :

$$\frac{dQ_{ext}}{dt} = K_{ext} (T(t) - T_{ext}) \quad (2.19)$$

L'instant pour lequel l'application de l'induction 2D qui provoque les pertes est stoppée est noté t_1 . Par conséquent, les équations régissant l'élévation de température sont alors :

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} + \frac{K_{ext}}{C_m} T(t) = \frac{K_{ext}}{C_m} T_{ext} + \frac{P}{C_m} & \text{pour } t \text{ dans } [t_0, t_1] \\ \frac{dT}{dt} + \frac{K_{ext}}{C_m} T(t) = \frac{K_{ext}}{C_m} T_{ext} & \text{pour } t \text{ dans } [t_1, \infty] \end{cases} \quad (2.20)$$

Ce qui donne les solutions :

$$T(t) = \begin{cases} T_a + \frac{P}{C_m} \left(1 - \exp\left(-\frac{K_{ext}}{C_m} (t - t_0)\right) \right) & \text{pour } t \text{ dans } [t_0, t_1] \\ T_a + (T_{max} - T_a) \exp\left(-\frac{K_{ext}}{C_m} (t - t_1)\right) & \text{pour } t \text{ dans } [t_1, \infty] \end{cases} \quad (2.21)$$

L'allure de l'élévation de température est représentée au niveau de la figure 2.11. Ensuite, en fonction de l'évolution de la température trouvée expérimentalement par un thermocouple collé à l'échantillon, il est possible de déterminer les inconnues P et K_{ext} en choisissant pour ces paramètres les valeurs qui dépeignent le mieux, au sens des moindres carrés, le relevé expérimental.

2.2 Présentation de la théorie des pertes dans le matériau ferromagnétique

L'objectif de ce chapitre est de proposer des formulations des pertes dans les matériaux ferromagnétiques, connaissant l'induction variable à laquelle ces derniers sont soumis. Dans un premier temps, nous allons parler des concepts de modélisation des pertes dans le cas de matériaux ferromagnétiques soumis à une excitation monodimensionnelle. Puis, dans un second temps, nous nous intéresserons aux pertes dans le cas où l'induction appliquée est bidimensionnelle.

2.2.1 Rappel sur la théorie des pertes en champ unidirectionnel.

La théorie du calcul des pertes en champ unidirectionnel (et aussi en champ bidirectionnel) se fonde sur le concept, bien justifié physiquement [Bertotti, 1983], de la séparation des pertes. Ce dernier consiste à dire que

les pertes dans un matériau ferromagnétique se décomposent en trois composantes superposables : les pertes par hystérésis, les pertes classiques et les pertes excédentaires. Cette décomposition s'explique par le fait que, même si par ailleurs toutes les pertes sont dues à des courants induits dans le matériau, ces courants interviennent à des échelles spatio-temporelles très différentes les unes des autres suivant la nature du phénomène physique qui les engendre.

Nous allons passer en revue les différents modèles théoriques utilisés afin d'évaluer ces trois termes de pertes. Pour cette étude, nous supposons que nous avons à traiter le cas d'une tôle en matériau ferromagnétique, dont l'épaisseur sera notée d . Le champ alternatif appliqué, de type donc monodimensionnel, agit dans le plan du feuilletage, supposé infini.

Qui plus est, nous faisons l'hypothèse que les fréquences auxquelles nous travaillons restent assez faibles, pour que la répartition de l'induction dans le matériau puisse être considérée comme uniforme.

2.2.1.1 Les pertes par hystérésis.

La première composante des pertes que nous allons étudier sont les pertes par hystérésis. Au cours de cette partie, nous allons présenter, en partant des principes physiques élémentaires du magnétisme dans les milieux matériels, la raison du fractionnement des matériaux ferromagnétiques en domaines de Weiss, qui est directement responsable des cycles d'hystérésis observés, et donc de la composante de pertes dont nous parlons. L'étude commencera par un rappel des principes physiques du magnétisme, plus particulièrement des matériaux ferromagnétiques. Puis nous montrerons, comment, pour minimiser l'énergie du système, les domaines apparaissent au sein du matériau. Enfin, grâce à la structure en domaines et aux imperfections du matériau, nous justifierons la présence des cycles d'hystérésis. Nous fonderons cette présentation sur les références [Brissonneau, 1997], [Feynman *et al.*, 1979], ainsi que [Landau et Lifchitz, 1969].

Rappels des théories du paramagnétisme et du ferromagnétisme Les caractéristiques des matériaux dits « magnétiques », comme le fer, le nickel, ou le cobalt, sont liées à certaines propriétés des éléments qui les constituent. En effet, l'origine des propriétés magnétiques de ces matériaux tient à la répartition des électrons au sein des couches électroniques externes des atomes constitutifs de la matière magnétique. En effet, ces couches électroniques, qui ne sont pas complètes, sont susceptibles de donner à chaque atome un certain moment magnétique. Nous ne nous attarderons pas davantage sur ces notions de physique fondamentale, car, somme toute, les propriétés magnétiques des échantillons qui nous intéressent ne sont pas réellement liées aux propriétés de la matière magnétique à l'échelle atomique (même si ce sont ces propriétés qui sont à l'origine des phénomènes magnétiques), mais plutôt à l'arrangement en domaines, aux impuretés qui gênent le déplacement des parois... Nous pourrions qualifier ces caractères de mésoscopiques, et ce sont sur eux que nous focaliserons ensuite nos développements. Nous allons ici simplement nous contenter de voir chaque atome comme porteur d'un moment magnétique, noté \vec{M} . Ce moment magnétique total d'un atome est proportionnel au moment cinétique total de l'atome, caractérisé par un certain nombre J (à ne pas confondre avec la polarisation), selon la relation :

$$\mathcal{M} = gJ\mathcal{M}_B \quad (2.22)$$

où \mathcal{M}_B est un moment magnétique élémentaire d'un atome, appelé « magnéton de Bohr », et qui vaut $\mathcal{M}_B = 9.273 \cdot 10^{-24} Am^2$. Le moment cinétique total J est combinaison du moment cinétique orbital de l'atome en question, ainsi que du moment de spin des électrons. Le facteur g , appelé facteur de Landé, sans dimension, est trouvé par la théorie quantique.

Partant de ce modèle simplifié où chaque atome est générateur d'un moment magnétique total \vec{M} de module constant, mais susceptible de s'orienter de manière variable dans l'espace, nous allons, dans cette partie, comprendre alors comment il est possible, dans un matériau magnétique, d'observer une polarisation macroscopique élevée. Nous allons nous limiter au cas important du ferromagnétisme. Mais avant, il convient d'analyser le cas du paramagnétisme.

Théorie du paramagnétisme Considérons, comme nous l'avons dit, que la matière est modélisable par des moments magnétiques élémentaires \vec{M} de module constant. Appliquons une induction magnétique \vec{B} . L'hypothèse importante de l'étude des matériaux paramagnétiques dans laquelle nous nous plaçons ici consiste à considérer l'énergie d'interaction entre chaque moment magnétique \vec{M} avec l'induction magnétique \vec{B} imposée par le milieu

extérieur, en négligeant toute interaction des moments magnétiques entre eux. Chaque moment possède donc une énergie potentielle :

$$W_m = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B} \quad (2.23)$$

Cette énergie potentielle tend à aligner le moment magnétique de l'atome considéré dans la direction de l'induction magnétique \vec{B} , afin de minimiser l'énergie du système. Cela étant, l'agitation thermique empêche cette mise en ordre. En effet, les concepts de physique statistique nous apprennent qu'à toute température, la répartition des moments magnétiques à l'équilibre satisfait la statistique de Maxwell-Boltzmann. Par conséquent, la probabilité que le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ considéré soit dans la direction θ par rapport à l'axe d'application de l'induction magnétique \vec{B} est alors :

$$P_{m_{\mathcal{J}}} = K \cdot \exp\left(-\frac{W_m}{k_B T}\right) = K \cdot \exp\left(\frac{\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}}{k_B T}\right) = K \cdot \exp\left(\frac{\mathcal{M} \cdot B \cdot \cos(\theta)}{k_B T}\right) \quad (2.24)$$

où k_B est la constante de Boltzmann, et K est une constante. La mécanique quantique nous renseigne sur le fait que la projection d'un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ sur l'axe de l'induction magnétique \vec{B} ne peut prendre que $2\mathcal{J} + 1$ valeurs distinctes, allant de $-gm_{\mathcal{J}}\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ à $gm_{\mathcal{J}}\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$, où $m_{\mathcal{J}}$ est un nombre pouvant prendre $2\mathcal{J} + 1$ valeurs équiréparties entre $-\mathcal{J}$ et \mathcal{J} . La probabilité recherchée s'écrit donc :

$$P_{m_{\mathcal{J}}} = K \cdot \exp\left(\frac{gm_{\mathcal{J}}\mathcal{M}_{\mathcal{B}}B}{k_B T}\right) \quad (2.25)$$

La constante K qui figure dans cette dernière expression est obtenue par la relation de normalisation :

$$\sum_{m_{\mathcal{J}}=-\mathcal{J}}^{+\mathcal{J}} P_{m_{\mathcal{J}}} = 1 \implies K = \frac{1}{\sum_{m_{\mathcal{J}}=-\mathcal{J}}^{+\mathcal{J}} \exp\left(\frac{gm_{\mathcal{J}}\mathcal{M}_{\mathcal{B}}B}{k_B T}\right)} \quad (2.26)$$

Par conséquent, en notant N le nombre de moments magnétiques par unité de volume, la polarisation moyenne obtenue dans la direction d'application de l'induction magnétique \vec{B} est donc donnée par la relation :

$$\langle J \rangle = \mu_0 N \sum_{m_{\mathcal{J}}=-\mathcal{J}}^{+\mathcal{J}} P_{m_{\mathcal{J}}} gm_{\mathcal{J}}\mathcal{M}_{\mathcal{B}} \quad (2.27)$$

Dans le cas où la température serait nulle, l'effet de l'agitation thermique serait inexistant, et alors tous les moments magnétiques seraient parfaitement alignés avec l'axe d'application de l'induction magnétique \vec{B} . La polarisation moyenne obtenue serait alors :

$$\langle J_0 \rangle = \mu_0 N \mathcal{M} = \mu_0 N g \mathcal{J} \mathcal{M}_{\mathcal{B}} \quad (2.28)$$

Nous pouvons ainsi nous intéresser à la polarisation réelle obtenue, et la polarisation à température nulle :

$$\frac{\langle J \rangle}{\langle J_0 \rangle} = \frac{1}{\mathcal{J}} \sum_{m_{\mathcal{J}}=-\mathcal{J}}^{+\mathcal{J}} P_{m_{\mathcal{J}}} m_{\mathcal{J}} \quad (2.29)$$

Tous calculs faits, en remplaçant la probabilité par son expression, nous pouvons écrire la formule précédente sous la forme suivante :

$$\frac{\langle J \rangle}{\langle J_0 \rangle} = B_{\mathcal{J}} \left(\frac{\mathcal{M}B}{k_B T} \right) \quad (2.30)$$

où $B_{\mathcal{J}}$ est la fonction dite de Brillouin, dont l'expression est :

$$B_{\mathcal{J}}(x) = \frac{2\mathcal{J} + 1}{2\mathcal{J}} \coth\left(\frac{2\mathcal{J} + 1}{2\mathcal{J}} x\right) - \frac{1}{2\mathcal{J}} \coth\left(\frac{1}{2\mathcal{J}} x\right) \quad (2.31)$$

Le paramètre x , sans dimension, est ici défini par le quotient : $x = \frac{\mathcal{M}B}{k_B T}$. On peut montrer que si le nombre \mathcal{J} est assez grand, cela revient à supposer que la distribution des angles θ de projection du moment magnétique sur la

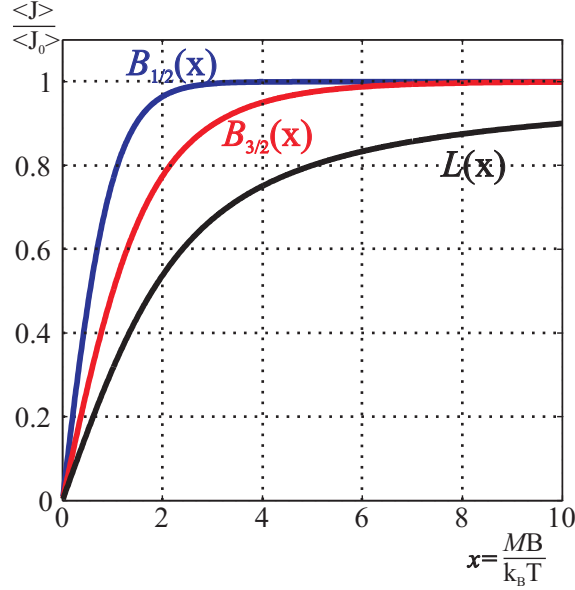


FIGURE 2.12: Les fonctions de Brillouin pour $\mathcal{J} = 1/2$, pour $\mathcal{J} = 3/2$, ainsi que la fonction de Langevin

direction d'application de l'induction \vec{B} est continuellement répartie, et l'on retrouve la configuration de la mécanique classique. Auquel cas, la fonction limite est appelée « fonction de Langevin », notée $L : B_{\mathcal{J}} \rightarrow L$ (en pratique, on peut confondre les deux fonctions lorsque $\mathcal{J} \geq 20$). L'expression de la fonction de Langevin est :

$$L(x) = \coth(x) - \frac{1}{x} \quad (2.32)$$

Les fonctions de Brillouin pour différents ordres \mathcal{J} , ainsi que la fonction de Langevin, sont représentées à la figure 2.12.

Nous pouvons noter que plus l'induction B est grande, ou plus l'effet de la température est faible, alors plus le rapport x est grand, par conséquent le rapport $\frac{\langle J \rangle}{\langle J_0 \rangle} \rightarrow 1$. Néanmoins, on se doit de préciser qu'à température ambiante ($T = 293\text{K}$), on a $k_B T = 4 \cdot 10^{-21}\text{J}$, alors que si chaque moment élémentaire a un module égal au magnéton de Bohr ($\mathcal{M} = \mathcal{M}_B$) et est placé dans une induction $B = 1\text{T}$, le produit $\mathcal{M}_B B$ est égal à $9,3 \cdot 10^{-24}\text{J}$. Ceci permet de dire que $\mathcal{M}_B B \ll k_B T$ à la température ambiante. Par conséquent, l'effet de l'agitation thermique l'emporte largement, le quotient x tend vers zéro, et il en est de même du rapport $\frac{\langle J \rangle}{\langle J_0 \rangle}$ d'après la figure 2.12. Donc la théorie du paramagnétisme ne peut pas, à elle seule, justifier les polarisations magnétiques assez importantes qui interviennent dans les matériaux utilisés en électrotechnique. Néanmoins, nous allons à présent partir de cette théorie du paramagnétisme afin de construire la théorie des matériaux ferromagnétiques.

Théorie du ferromagnétisme Nous allons maintenant nous servir de la théorie du paramagnétisme pour construire celle du ferromagnétisme, et ainsi donner une interprétation à l'apparition d'un moment magnétique spontané dans les corps ferromagnétiques. Le défaut de la théorie du paramagnétisme était de considérer que les atomes sont indépendants les uns des autres. En réalité, ce n'est pas le cas car il existe une énergie d'interaction des moments magnétiques portés par chaque atome entre eux, qui tend, au même titre que l'induction extérieure \vec{B} appliquée, à aligner les moments magnétiques des atomes voisins suivant une même direction. Heisenberg a proposé, afin de tenir compte de l'interaction des moments de spins \vec{S}_i et \vec{S}_j portés par deux atomes voisins, d'introduire une énergie d'interaction de type électrostatique de la forme :

$$W_{ij} = -2J_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \quad (2.33)$$

où J_{ij} est l'intégrale d'échange. Le nombre J_{ij} favorise l'apparition d'un ordre ferromagnétique si il est positif, et anti-ferromagnétique dans le cas contraire. Des expressions plus complexes pour cette énergie, avec diverses

intégrales d'échanges pouvant être positives ou négatives suivant la nature des atomes considérés, servent à étudier des cas plus compliqués, comme le ferrimagnétisme. Nous choisissons ici de ne considérer que l'apparition des ordres ferromagnétiques, avec une seule intégrale d'échange positive. Les moments de spins sont liés au moment magnétique total de l'atome. On admet en outre que l'interaction peut s'exercer uniquement entre les moments magnétiques d'atomes voisins. Par conséquent, l'expression précédente est équivalente, pour deux moments magnétiques voisins $\vec{\mathcal{M}}_i$ et $\vec{\mathcal{M}}_j$, à :

$$W_{ij} = -E \cdot \vec{\mathcal{M}}_i \cdot \vec{\mathcal{M}}_j \quad (2.34)$$

où la constante E est positive dans le cas du ferromagnétisme. Soit un atome i possédant Z voisins. Par conséquent, l'interaction d'échange entre le moment $\vec{\mathcal{M}}_i$ et son entourage est donc donnée par :

$$W_i = -E \cdot \vec{\mathcal{M}}_i \cdot \sum_{j=1}^Z \vec{\mathcal{M}}_j \quad (2.35)$$

On en faisant la moyenne des moments des Z atomes voisins :

$$W_i = -Z \cdot E \cdot \vec{\mathcal{M}}_i \cdot \langle \vec{\mathcal{M}}_j \rangle \quad (2.36)$$

Nous allons admettre que le moment moyen $\langle \vec{\mathcal{M}}_j \rangle$ vu par l'atome i est constant en toute position du cristal. Par conséquent, en notant N le nombre d'atomes par unité de volume et \vec{J} la polarisation, il vient :

$$\langle \vec{\mathcal{M}}_j \rangle = \frac{\vec{J}}{\mu_0 N} \quad (2.37)$$

Donc, en tenant compte de l'induction \vec{B} appliquée, l'énergie d'interaction devient donc :

$$W_i = -\vec{\mathcal{M}}_i \cdot \left(\vec{B} + \frac{Z \cdot E}{\mu_0 N} \vec{J} \right) \quad (2.38)$$

L'usage [Brissonneau, 1997] est d'appeler λ le rapport $\frac{Z \cdot E}{\mu_0 N}$, cette énergie devient :

$$W_i = -\vec{\mathcal{M}}_i \cdot \left(\vec{B} + \lambda \vec{J} \right) \quad (2.39)$$

En comparant cette expression avec celle de l'équation 2.23, tout ce passe comme si l'interaction entre les atomes, que nous n'avions pas prise en compte dans le cas du paramagnétisme, rajoutait une induction magnétique supplémentaire, appelée « champ moléculaire de Weiss », proportionnelle à la polarisation, et notée :

$$\vec{B}_{mol} = \lambda \langle \vec{J} \rangle \quad (2.40)$$

Par conséquent, par analogie avec le travail fait dans le cas du paramagnétisme, nous pouvons dire que la polarisation moyenne est donnée par l'équation :

$$\frac{\langle J \rangle}{\langle J_0 \rangle} = B_{\mathcal{J}} \left(\frac{\mathcal{M}(B + \lambda \langle J \rangle)}{k_B T} \right) \quad (2.41)$$

Cette équation sera résolue graphiquement, en introduisant un nombre x sans dimension tel que :

$$\begin{cases} \frac{\langle J \rangle}{\langle J_0 \rangle} &= B_{\mathcal{J}}(x) \\ \frac{\langle J \rangle}{\langle J_0 \rangle} &= \frac{k_B T}{\mathcal{M} \lambda \langle J_0 \rangle} x - \frac{B}{\lambda \langle J_0 \rangle} \end{cases} \quad (2.42)$$

La méthode de résolution graphique est exposée à la figure 2.13. Il apparaît clairement que pour les températures faibles, la droite tracée pour la résolution graphique a une pente peu prononcée, et l'aimantation moyenne observée $\langle J \rangle$ est très voisine de l'aimantation observée à température nulle, notée $\langle J_0 \rangle$. A contrario, plus on augmente la température, plus la pente de la droite devient forte, et donc le rapport $\frac{\langle J \rangle}{\langle J_0 \rangle}$ diminue. Si on néglige l'induction

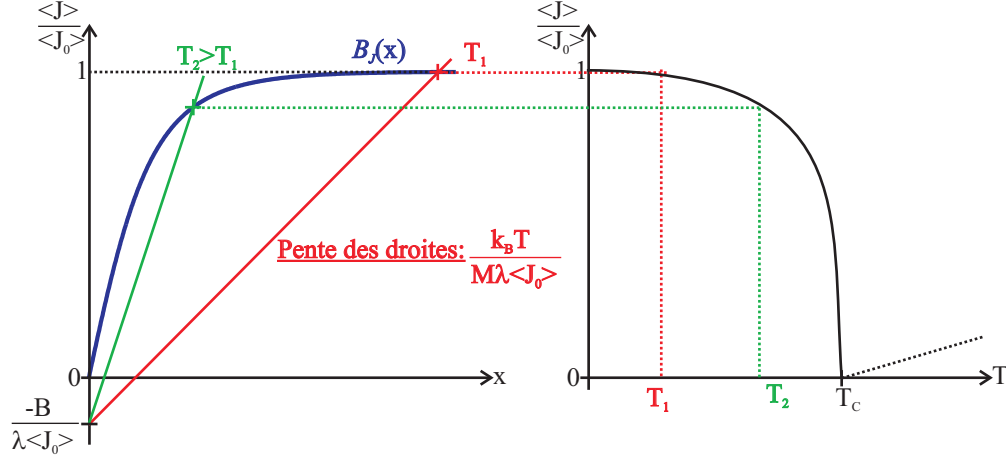


FIGURE 2.13: Résolution graphique du système 2.42 pour trouver la polarisation moyenne $\langle J \rangle$ dans le cas du ferromagnétisme

appliquée \vec{B} par rapport au champ moléculaire $\vec{B}_{mol} = \lambda \langle \vec{J} \rangle$, hypothèse souvent vérifiée en pratique, alors la droite tracée pour la résolution graphique passe par l'origine. En augmentant encore la température, la droite tracée devient la tangente à la fonction de Brillouin à l'origine. Pour cette température, appelée température de Curie et notée T_C , l'aimantation moyenne $\langle J \rangle$ s'annule rigoureusement. Connaissant la pente à l'origine de la fonction de Brillouin, qui est égale à $\frac{1+\mathcal{J}}{3\mathcal{J}}$, l'expression analytique de cette température de Curie est :

$$T_C = \frac{1 + \mathcal{J}}{\mathcal{J}} \frac{M\lambda \langle J_0 \rangle}{3k_B} \quad (2.43)$$

Après la température de Curie, il est possible de montrer que le matériau devient paramagnétique, en suivant une loi dite de Curie-Weiss, du type :

$$\langle J \rangle = \frac{B}{\lambda} \frac{T_C}{T - T_C} \quad (2.44)$$

Cette théorie a été vérifiée en pratique, aussi bien pour la polarisation moyenne $\langle J \rangle$ en fonction de la température que par l'existence de la température de Curie pour laquelle le matériau perd son caractère ferromagnétique.

Genèse des domaines L'étude précédente a montré que l'introduction de l'énergie d'échange entre moments magnétiques d'atomes voisins peut, malgré l'agitation thermique, contribuer à l'alignement des moments magnétiques suivant une direction commune, ce qui justifiait la présence d'une polarisation moyenne $\langle \vec{J} \rangle$ dans le cas du ferromagnétisme. Néanmoins, un tel raisonnement suggère donc que n'importe quel morceau de fer devrait posséder une polarisation magnétique moyenne. Ceci est en contradiction avec l'expérience, qui démontre l'existence d'un état désaimanté pour lequel le matériau ne présente aucune polarisation moyenne apparente. C'est l'application d'un champ magnétique externe, qui, éventuellement, peut l'aimanter. Nous allons voir que ceci est dû au fait que l'énergie d'échange n'est pas la seule à entrer en compte : il existe d'autres termes d'énergie, et, pour minimiser la somme de ces énergies, des domaines de polarisation moyenne opposée peuvent apparaître, sous réserve que l'échantillon soit de dimension assez grande. C'est cette structure en domaines qui justifiera la polarisation moyenne nulle pour l'échantillon à l'état désaimanté.

Autres composantes d'énergie interne -Energie magnétocristalline

L'énergie magnétocristalline est un terme important d'énergie interne. Elle vient du fait que, dans une structure cristalline, toutes les orientations de la polarisation moyenne $\langle \vec{J} \rangle$ ne sont pas équivalentes : il existe des directions, appelées directions de facile aimantation, pour lesquelles le travail à fournir pour aimanter l'échantillon est moindre que dans d'autres. Par exemple, pour le fer, ces directions sont les arêtes du cube du cristal. Comme représenté à la figure 2.14, il s'agit des directions cristallographiques [100], [010], et [001]. On voit, sur la courbe d'aimantation de

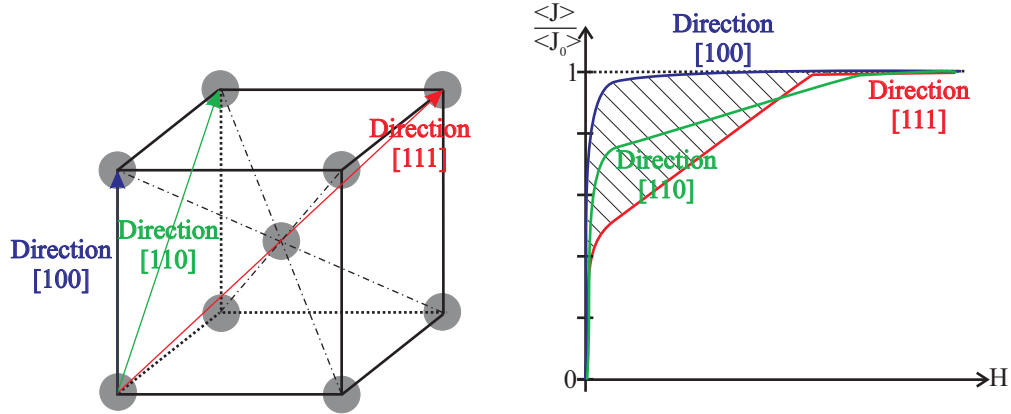


FIGURE 2.14: La structure cristallographique du fer

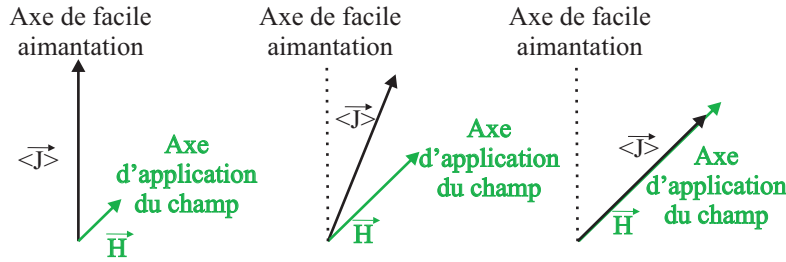


FIGURE 2.15: Application d'un champ magnétique \vec{H} hors d'une direction de facile aimantation

la figure 2.14, que si le champ d'excitation est appliqué suivant l'axe de facile aimantation d'un échantillon monocristallin, sa polarisation atteint directement la saturation. A l'inverse, ce n'est pas le cas si on applique le champ d'excitation suivant les directions [110] et [111], comme représenté au niveau des autres courbes d'aimantation la figure 2.14. Nous pouvons interpréter ce résultat de la façon suivante. Comme représenté à la figure 2.15, si un champ magnétique est appliqué suivant un axe qui n'est pas l'axe de facile aimantation, le matériau se sature très facilement suivant la direction qui se trouve suivant l'axe de facile aimantation le plus proche. Mais la polarisation observée suivant l'axe d'application du champ d'excitation est simplement la projection de la polarisation à saturation suivant cet axe. Si cette théorie est exacte, nous devrions observer dans la direction [110] d'application du champ au voisinage d'un champ magnétique nul ($H \approx 0$) une polarisation de type $\frac{\langle J_0 \rangle}{\sqrt{2}}$, et $\frac{\langle J_0 \rangle}{\sqrt{3}}$ dans la direction [111]. Il semble que ce soit effectivement les valeurs observées sur la figure 2.14. Ensuite, pour des champs magnétiques d'excitation bien plus importants, suivant la direction d'application du champ, il est possible d'observer une augmentation relativement lente de la polarisation qui atteint des valeurs proches de celle à saturation. Ceci est expliqué au niveau de la figure 2.15, où le champ intense provoque une rotation de l'aimantation. Ce champ nécessaire pour faire passer l'aimantation d'une direction de facile aimantation vers une direction plus difficile est appelé « champ d'anisotropie ». L'énergie volumique à fournir pour atteindre l'aimantation à saturation, égale à $\int_0^J H dJ$, est plus grande dans le cas où on se trouve dans une direction d'aimantation difficile (le supplément d'énergie volumique nécessaire dans la direction [111] par rapport à celle nécessaire dans la direction [100] est représenté par l'aire hachurée de la figure 2.14).

Plaçons-nous dans le cas d'un cristal cubique. L'expression analytique de cette énergie, selon [Brissonneau, 1997], peut être obtenue par un développement en puissances croissantes de l'énergie magnétocristalline en fonction des cosinus directeurs α_1 , α_2 et α_3 du vecteur polarisation $\langle \vec{J} \rangle$ par rapport aux arêtes du cube du cristal. En tenant compte des symétries, seules les puissances paires du développement sont à considérer. Alors on obtient :

$$U_K = K_1 (\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2) + K_2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \dots \quad (2.45)$$

Il est coutume de ne considérer que le premier terme de ce développement. Ainsi aurons-nous :

$$U_K = K_1 (\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2) \quad (2.46)$$

Pour le fer pur, où les axes de facile aimantation sont les arêtes du réseau cubique centré, la constante K_1 est positive, et la valeur $K_1 = 4,8 \cdot 10^4 J.m^{-3}$ a été trouvée expérimentalement.

-Energie magnétostatique d'un système de moments

Comme signalé dans [Brissonneau, 1997], ce terme d'énergie, très important pour comprendre la structure des matériaux magnétiques, trouve son origine dans l'interaction coulombienne entre les moments magnétiques présents dans la matière. Afin d'évaluer cette énergie magnétostatique, la référence [Brissonneau, 1997] propose de modéliser la matière aimantée comme un grand nombre de moments magnétiques en interaction dans le vide. Les moments sont localisés aux noeuds du réseau cristallin. On s'intéresse à un moment magnétique particulier, d'indice i , et noté $\vec{\mathcal{M}}_i$. Au point où est localisé ce moment magnétique, il règne une induction \vec{B}_i causée en ce point par tous les autres moments du matériau. Appelons \vec{B}_{ji} l'induction causé par le moment $\vec{\mathcal{M}}_j$ au niveau du point où se trouve le moment $\vec{\mathcal{M}}_i$. On peut donc exprimer ainsi l'induction totale \vec{B}_i que subit le moment $\vec{\mathcal{M}}_i$:

$$\vec{B}_i = \sum_{j \neq i} \vec{B}_{ji} \quad (2.47)$$

L'énergie potentielle du moment $\vec{\mathcal{M}}_i$ qui subit l'induction \vec{B}_i est donnée par :

$$W_i = -\vec{\mathcal{M}}_i \cdot \vec{B}_i \quad (2.48)$$

L'énergie potentielle propre magnétostatique du matériau est donc :

$$W_m = -\frac{1}{2} \sum_i \vec{\mathcal{M}}_i \cdot \vec{B}_i \quad (2.49)$$

Le facteur $\frac{1}{2}$ vient du fait que, s'agissant d'une énergie propre, il ne faut pas compter deux fois la même interaction magnétostatique entre deux moments i et j . Le problème est donc de calculer l'induction \vec{B}_i causée au niveau du point où se localise le moment $\vec{\mathcal{M}}_i$ par tous les autres moments du matériau. Pour cela, la référence [Brissonneau, 1997] propose d'utiliser la méthode de Lorentz. On introduit pour cela une petite sphère fictive de rayon R grand par rapport aux distances inter-atomiques, mais tout de même petit par rapport à la taille de l'échantillon. On sépare fictivement l'induction créée au point i par l'ensemble des moments situés à l'extérieur de la sphère fictive, et ceux situés à l'intérieur. Alors on aura :

$$\vec{B}_i = \vec{B}_i(r < R) + \vec{B}_i(r > R) \quad (2.50)$$

On calcule l'effet des moments localisés à l'intérieur de la sphère fictive. On a :

$$\vec{B}_i(r < R) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{j/r_{ij} < R} \left[\frac{3\vec{r}_{ij} (\vec{\mathcal{M}}_j \vec{r}_{ij})}{r_{ij}^5} - \frac{\vec{\mathcal{M}}_j}{r_{ij}^3} \right] \quad (2.51)$$

On suppose les moments dans la sphère tous alignés dans une seule et même direction. Alors la sommation précédente sur tous les moments localisés dans la sphère est nulle : $\vec{B}_i(r < R) = \vec{0}$.

Quant aux moments situés à l'extérieur de la sphère, ils créent au centre de cette dernière, là où se situe le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}_i$, l'induction suivante, en se souvenant que le coefficient démagnétisant d'une sphère est égal à $\frac{1}{3}$ (et que le champ démagnétisant d'une sphère est uniforme dans cette dernière), et en notant \vec{H} le vecteur champ magnétique :

$$\vec{B}_i(r > R) = \mu_0 \vec{H} + \frac{\langle \vec{J} \rangle}{3} \quad (2.52)$$

Au final, on aura :

$$\vec{B}_i = \mu_0 \vec{H} + \frac{\langle \vec{J} \rangle}{3} \quad (2.53)$$

En reprenant l'équation 2.49, dans laquelle la somme a été remplacée par une intégrale sur tout le volume V_e de l'échantillon, on peut écrire que :

$$W_m = -\frac{1}{2} \iiint_{(V_e)} \frac{\langle \vec{J} \rangle}{\mu_0} \left(\mu_0 \vec{H} + \frac{\langle \vec{J} \rangle}{3} \right) dv \quad (2.54)$$

On ne considère que la partie variable de cette énergie magnétostatique, qui est, par unité de volume :

$$w_m = -\frac{1}{2} \langle \vec{J} \rangle \cdot \vec{H} \quad (2.55)$$

Brown [Brown, 1962] a montré que l'on avait la relation intégrale sur tout l'espace (E) :

$$\iiint_{(E)} \vec{B} \cdot \vec{H} dv = 0 \quad (2.56)$$

En se rappelant que la polarisation est nulle hors de la matière magnétique, et que l'on a dans la matière la relation constitutive $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \langle \vec{J} \rangle$, alors on peut étendre la partie variable ΔW_m de l'intégrale 2.54 sur tout l'espace (E), pour obtenir au final :

$$\Delta W_m = \frac{1}{2} \iiint_{(E)} \mu_0 H^2 dv \quad (2.57)$$

Cette expression montre que la partie variable de l'énergie magnétostatique du système est directement liée au carré du module du champ magnétique H présent dans tout l'espace. Or, si nous raisonnons avec un modèle coulombien de la matière aimantée, nous savons que le champ magnétique est directement lié aux charges magnétiques fictives présentes dans l'espace, par l'intermédiaire du théorème de Gauss. Nous rappelons que le modèle coulombien [de Lacheisserie, 2000] de la matière aimantée consiste à rendre équivalente un matériau où règne une polarisation \vec{J} (non forcément uniforme), à du vide, où nous aurions des charges magnétiques fictives, dont la distribution serait la suivante :

- une densité surfacique de charges magnétiques fictives σ^* à la frontière (S) du matériau (notons \vec{n} le vecteur normal sortant), égale à $\vec{J} \cdot \vec{n}$.
- une densité volumique de charges magnétiques fictives ρ^* dans le volume (V) du matériau égale à $\rho^* = -\text{div} \vec{J}$.

Si nous supposons que, dans le corps aimanté, la polarisation est constante égale à sa valeur moyenne $\langle \vec{J} \rangle$, il n'existe aucune charge volumique $\rho^* = 0$. Cela étant, il existera en revanche une densité surfacique de charges $\sigma^* = \langle \vec{J} \rangle \cdot \vec{n}$ au niveau de la frontière (S) du corps magnétique, comme le montre la figure 2.16. La présence de ces pôles magnétiques fictifs provoque l'apparition de lignes de champ magnétique, qui, en vertu de la formule 2.57, va induire une énergie magnétostatique significative. Anticipons quelque peu la suite de cette étude sur la genèse des domaines magnétiques : supposons qu'au lieu d'avoir une polarisation magnétique dans une seule direction comme dans la figure 2.16, nous parvenions à obtenir la configuration représentée au niveau de la figure 2.17 : la polarisation a la même orientation, mais nous avons à présent deux zones de taille égale, appelées domaines, qui fractionnent le matériau. Dans l'une d'elles, la polarisation se dirige vers le haut, alors qu'elle est vers le bas dans l'autre. Que devient l'énergie magnétostatique dans une telle configuration ? En raisonnant par charges magnétiques fictives équivalentes, nous voyons qu'à présent, chaque face comporte en quantité égale des pôles positifs et négatifs. Grâce au théorème de Gauss, il est possible de montrer que les lignes de champ magnétique gardent à présent un caractère bien plus local que dans le cas de la figure 2.16, ces dernières se rebouclant au niveau des charges de signes opposé d'une même face de l'échantillon. Observée à grande distance, cette configuration permet une compensation des charges au niveau de chaque face, et donc empêche la création d'un champ magnétique à grande échelle. Ceci permet donc de réduire de manière drastique l'énergie magnétostatique du système. Cette remarque sera d'une importance capitale pour introduire la notion de domaine magnétique.

-Energie magnéto-élastique

Le dernier terme d'énergie interne que nous allons présenter est l'énergie magnéto-élastique. Dans la référence [Jiles, 1998], une explication schématique est donnée sur l'origine physique de ce terme d'énergie en une dimension. Nous avons repris cette explication à la figure 2.18. Supposons le matériau de type polycristallin. Nous allons voir que, dans la direction de la polarisation, le corps ferromagnétique est susceptible de se déformer (pour la figure 2.18,

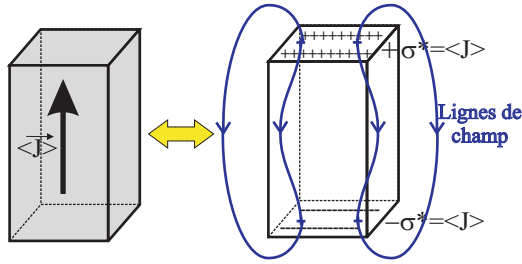


FIGURE 2.16: Modèle coulombien des matériaux magnétiques

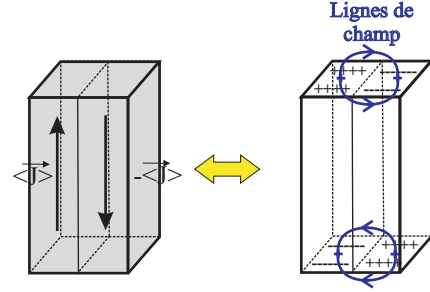


FIGURE 2.17: Fractionnement du milieu magnétique en deux zones de polarisation opposée, afin de réduire l'énergie magnétostatique

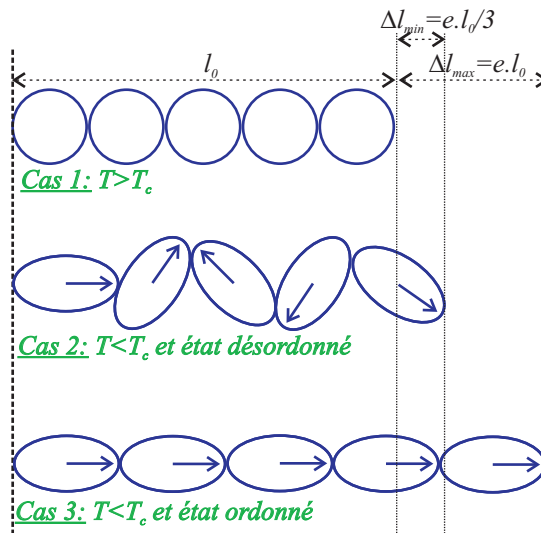


FIGURE 2.18: Explication schématique du phénomène de magnétostriction

il s'agit d'un allongement). On s'intéresse à l'allongement relatif $\frac{\Delta l}{l_0}$ dans la direction dans laquelle l'aimantation est appliquée. Partons d'une température au-dessus du point de Curie $T \geq T_C$ (c'est le cas 1 de la figure 2.18). Auquel cas, il n'y a aucune aimantation spontanée, et la longueur est l_0 . Abaissons progressivement la température. Alors il apparaît des interactions d'échange, qui, dans chaque cristal, vont créer une polarisation locale. Néanmoins, l'aimantation résultante sur tout le corps reste nulle en moyenne (c'est l'état désaimanté, ou le cas 2 de la figure 2.18), à cause de la répartition aléatoire dans l'espace de ces polarisations locales. Appelons e l'allongement relatif du grand axe de chaque particule (considérée schématiquement comme un ellipsoïde) en comparaison de la dimension de la particule au-dessus du point de Curie. Comme dans le cas 2 (état désaimanté), les polarisations locales sont orientées aléatoirement dans l'espace, on peut montrer, en supposant que la distribution de l'orientation des polarisations locales de chaque particule est uniforme dans l'espace, qu'à l'état démagnétisé, l'augmentation relative de longueur est égale à $\frac{\Delta l_{min}}{l_0} = \frac{e}{3}$. Si on applique un champ magnétique externe, ceci a pour effet d'aligner tous les moments magnétiques dans la direction horizontale (cas 3 de la figure 2.18), et alors, on a cette fois clairement $\frac{\Delta l_{max}}{l_0} = e$. Il est coutume d'appeler λ_s l'amplitude de la déformation relative entre l'état aimanté (ou ordonné), et l'état désaimanté (ou désordonné). Dans le cas unidimensionnel de la figure 2.18, on aura bien entendu :

$$\lambda_s = \frac{\Delta l_{max}}{l_0} - \frac{\Delta l_{min}}{l_0} = \frac{2}{3}e \quad (2.58)$$

Dans la référence [Brissonneau, 1997], cette formule a été généralisée en trois dimensions, qui est le cas qui nous intéresse en pratique. Soit un cristal cubique isotrope. Notons $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ les cosinus directeurs de la direction

d'application de l'aimantation, et $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ la direction dans laquelle on s'intéresse à la variation de dimension à cause des phénomènes magnétostrictifs. Alors il est possible de montrer que la formule 2.58 devient, dans ce cas :

$$\lambda_s = \frac{3}{2}\lambda_0 \left[(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3)^2 - \frac{1}{3} \right] = \frac{3}{2}\lambda_0 \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right) \quad (2.59)$$

où l'angle θ est, dans cette dernière formule, l'angle entre la direction d'application du champ magnétique externe, et la direction de mesure de la déformation magnétostrictive. La constante λ_0 est la constante de magnétostriction, caractéristique du matériau (un signe positif signifie un allongement, un signe négatif un raccourcissement). Dans la référence [Brissonneau, 1997], des formules plus compliquées sont données dans le cas de matériaux anisotropes.

On a ici envisagé le phénomène de magnétostriction comme une déformation que subit un matériau aimanté dans une direction donnée. Néanmoins, il est aussi possible de voir le phénomène de manière inverse : si on applique une contrainte mécanique σ (en N/m^2) dans une direction donnée repérée par ses cosinus directeurs $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ par rapport aux axes du cristal isotrope, alors on va créer une déformation élastique. Cette dernière est à l'origine d'une densité volumique d'énergie magnéto-élastique lorsque l'on va appliquer un champ magnétique externe dans la direction $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, dont l'expression est alors, d'après [Brissonneau, 1974] :

$$U_\sigma = -\frac{3}{2}\lambda_0\sigma (\alpha_1^2\gamma_1^2 + \alpha_2^2\gamma_2^2 + \alpha_3^2\gamma_3^2) = -\frac{3}{2}\lambda_0\sigma \cos^2 \theta \quad (2.60)$$

où l'angle θ est, dans cette formule, l'angle entre la direction d'application du champ magnétique externe, et la direction de la contrainte σ .

Minimisation de la somme des termes d'énergie, et explication de la structure en domaines -

Existence des domaines, énergie de paroi

L'existence des domaines de Weiss a été pressentie par le physicien Weiss au début du siècle passé, et les premières observations ont été menées dans les années 1930. Cette hypothèse justifie l'existence d'un état désaimanté pour les matériaux ferromagnétiques. Pourvu que le corps ferromagnétique dépasse quelques dizaines de nanomètres (voir les explications de la référence [Bertotti, 1998]), l'existence de domaines dans les corps ferromagnétiques permet de minimiser efficacement la somme des termes d'énergie que nous venons de lister ci-dessus. Cette subdivision en domaines consiste, comme nous l'avons pressenti lors de la partie consacrée à l'énergie magnétostatique, à diviser la matériau magnétique en différentes zones. Au sein de chacune d'entre elles, la polarisation, c'est-à-dire l'orientation des moments magnétiques, est uniforme, afin de ne pas augmenter l'énergie d'échange entre moments voisins. De cette manière, la figure 2.17 montre que la composante d'énergie magnétostatique du système se trouve fortement réduite. Enfin, en orientant, au sein de chaque domaine, l'aimantation suivant l'axe de facile aimantation, la composante d'énergie d'anisotropie magnétocristalline n'est pas augmentée. Néanmoins, une question importante doit être traitée : que se passe-t-il au niveau des frontières entre domaines, où l'aimantation change de direction de manière brutale ? Traitons le cas représenté à la figure 2.19 où on a une frontière au niveau de laquelle l'aimantation varie de 180° . Nous avons fait un zoom sur la frontière entre les deux domaines, appelée encore « paroi de Bloch ». Il est difficile de dire comment se comporte avec précision les moments magnétiques au niveau de cette paroi. En effet, une inversion brutale de l'aimantation d'un atome à l'autre n'augmenterait pas le terme d'énergie d'anisotropie magnétocristalline, mais aurait des conséquences fâcheuses quant à l'augmentation de l'énergie d'échange entre les atomes voisins pour lesquels le moment magnétique serait opposé. Afin de minimiser la somme des deux termes que sont l'énergie d'échange et l'énergie magnétocristalline, nous allons montrer, comme fait dans la référence [Landau et Lifchitz, 1969], que la paroi de Bloch est le siège d'une rotation progressive du moment magnétique sur une distance δ (figure 2.19), qui est néanmoins faible en regard de la largeur totale du domaine magnétique. Afin de déterminer cette distance δ de rotation du moment magnétique dans la paroi de Bloch, nous allons chercher à minimiser la somme de l'énergie d'échange et de l'énergie d'anisotropie (les autres termes d'énergie n'interviennent pas dans ce calcul, car ils ne dépendent pas de la structure de la paroi).

Dans le but de justifier le surcroît d'énergie d'échange au niveau de la paroi de Bloch à cause du changement de direction des moments magnétiques, les auteurs de la référence [Landau et Lifchitz, 1969] proposent d'introduire ce qu'ils appellent une énergie volumique de non-uniformité, notée u_{non-u} , dont la valeur est proportionnelle au carré des variations du vecteur aimantation \vec{M} :

$$u_{non-u} = \eta_1 \left[\left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial y} \right)^2 \right] + \eta_2 \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial z} \right)^2 \quad (2.61)$$

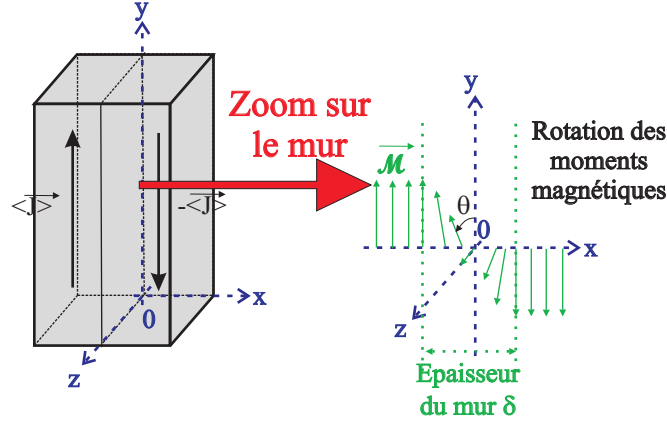


FIGURE 2.19: Division du corps ferromagnétique en domaines, et zoom sur les moments magnétiques au niveau de la paroi de Bloch

Dans les cristaux cubiques, les constantes η_1 et η_2 sont égales. Qui plus est, vu que, dans notre cas, afin de déterminer l'épaisseur δ du mur, nous considérerons qu'il est infini dans le plan $(0yz)$, la seule dépendance à prendre en compte sera celle suivant la coordonnée x . Par conséquent, l'énergie de non-uniformité apparaissant à cause des interactions d'échange au niveau de la paroi va alors prendre la forme suivante :

$$u_{non-u} = \eta_1 \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial x} \right)^2 \quad (2.62)$$

Nous pouvons montrer que lors du changement de direction du vecteur aimantation \vec{M} , aucune composante d'aimantation apparaît suivant l'axe $(0x)$, et donc $M_x = 0$. En effet, si ce n'était pas le cas, comme l'aimantation \vec{M} ne dépend que de la coordonnée spatiale x , on aurait alors $\text{div } \vec{M} \neq 0$. Or $\text{div } \vec{B} = \mu_0 (\text{div } \vec{H} + \text{div } \vec{M}) = 0$, alors $\text{div } \vec{H} \neq 0$, et donc $H_x \neq 0$. Comme on l'a vu lors de la partie consacrée à l'énergie magnétostatique, ceci donnerait lieu à l'apparition d'une composante d'énergie magnétostatique énergétiquement défavorable. Par conséquent, le vecteur \vec{M} sera cherché sous la forme :

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ M_y = M \cos[\theta(x)] \\ M_z = M \sin[\theta(x)] \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

L'axe de facile aimantation étant l'axe $(0y)$, l'énergie volumique d'anisotropie va donc s'écrire $K_1 M_z^2$ (on étudie en effet une paroi à 180° dans un cristal uniaxe). Minimiser l'énergie de paroi va donc obliger à minimiser l'intégrale suivante (qui est une énergie par unité de surface de la paroi) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\eta_1 \left(\left(\frac{\partial M_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial M_z}{\partial x} \right)^2 \right) + K_1 M_z^2 \right] dx = M^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\eta_1 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + K_1 \sin^2 \theta \right] dx \quad (2.64)$$

Les auteurs de [Landau et Lifchitz, 1969] proposent pour résoudre ce problème de minimisation d'intégrale d'en écrire l'équation d'Euler, qui est :

$$\eta_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - K_1 \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (2.65)$$

La primitive est donnée par :

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 - \frac{K_1}{\eta_1} \sin^2 \theta = \text{const} \quad (2.66)$$

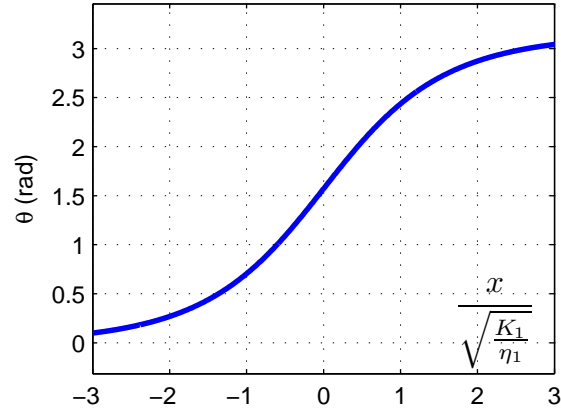


FIGURE 2.20: Evolution de l'angle de rotation de l'aimantation \vec{M} , noté $\theta(x)$, en fonction de la coordonnée d'espace x

En supposant la largeur de la couche de transition faible par rapport à la largeur des domaines, les conditions aux limites suivantes peuvent être retenues :

$$\begin{cases} \theta = 0 & \text{pour } x = -\infty \\ \theta = \pi & \text{pour } x = +\infty \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 & \text{pour } x = \pm\infty \end{cases} \quad (2.67)$$

Par conséquent, la constante introduite dans l'équation 2.66 est nulle, et cette équation devient donc :

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 = \frac{K_1}{\eta_1} \sin^2 \theta \quad (2.68)$$

En intégrant cette dernière équation, on va alors obtenir :

$$\cos \theta = -\tanh \sqrt{\frac{K_1}{\eta_1}} x \quad (2.69)$$

L'évolution de l'angle $\theta(x)$ en radians est donnée à la figure 2.20. Cette fonction hyperbolique donne donc le profil de variation de l'angle $\theta(x)$ au travers de la paroi de Bloch qui permet de minimiser la somme des énergies de non-uniformité et d'anisotropie. Sa largeur « caractéristique » δ est donnée par l'expression :

$$\delta \approx 4\sqrt{\frac{\eta_1}{K_1}} \quad (2.70)$$

Pour cette fonction $\theta(x)$, la somme minimisée des deux énergies est donc égale à ce que l'on appelle couramment la « tension de paroi », notée γ , qui est l'énergie de la paroi par unité de surface, et qui est donnée par l'équation :

$$\gamma = 4M^2 \sqrt{\eta_1 K_1} \quad (2.71)$$

La référence [Brissonneau, 1997] donne quelques exemples numériques de largeurs de parois. Par exemple, pour le fer pur, la constante de l'énergie de non-uniformité η_1 est de l'ordre de $1.5 \cdot 10^{-11} J/m$, alors que la constante de l'énergie d'anisotropie est de $K_1 = 4.8 \cdot 10^4 J/m^3$. La largeur caractéristique de la paroi est donc $\delta = 1.8 \cdot 10^{-7} m$, soit à peu près 600 mailles atomiques, et la tension de paroi est $\gamma = 1.7 \cdot 10^{-3} J/m^2$. Dans les matériaux durs, en revanche, la constante d'anisotropie est bien plus grande, afin de créer des aimants. Ceci implique que la rotation de l'aimantation se produit sur des distances bien plus courtes, dans le but de minimiser l'énergie d'anisotropie. Par exemple, pour les alliages terres rares-métaux 3d, η_1 est de l'ordre de $10^{-11} J/m$, alors que la constante de l'énergie d'anisotropie est très importante, et vaut $K_1 = 5 \cdot 10^6 J/m^3$. Ceci implique que l'épaisseur caractéristique de la

paroi est bien plus faible : $\delta = 5.6 \cdot 10^{-9}m$, soit 20 distances interatomiques, et la tension de paroi est très élevée, et vaut $\gamma = 3 \cdot 10^{-2}J/m^2$. De cette manière, il est très difficile, énergétiquement parlant, de former une paroi afin de démagnétiser l'aimant en question.

-Exemples de structures de domaines classiques

Les paragraphes précédents ont montré que, pour minimiser l'ensemble des termes d'énergie dont nous venons de parler, la subdivision des matériaux magnétiques en domaines pouvait s'avérer pertinente. La polarisation magnétique se trouve, à l'intérieur de chaque domaine, suivant un des axes de facile aimantation, afin de minimiser l'énergie d'anisotropie magnétocristalline. Au niveau des frontières des domaines, appelées parois de Bloch, une épaisseur optimale existe, afin de minimiser la somme de l'énergie d'anisotropie et de l'énergie d'échange entre moments voisins. Nous pouvons donc à présent, pour faciliter le raisonnement, regrouper ces deux termes d'énergie en un seul, que l'on appelle la « tension de paroi », en étant sûr que cette dernière a été minimisée. Il y aura donc deux termes entrant en compétition : d'une part, l'énergie de paroi, et d'autre part, l'énergie magnétostatique, et il importe que la configuration de domaines choisie soit apte à minimiser ces deux termes. Nous verrons en outre que l'énergie magnéto-élastique joue un rôle, notamment pour les domaines de fermeture. La référence [Feynman *et al.*, 1979] propose d'étudier trois configurations basiques distinctes de distributions de domaines magnétiques, représentées à la figure 2.21. Le cas 1, par une absence de domaines, minimise l'énergie de paroi (cette dernière est rigoureusement nulle). Néanmoins, comme on l'a déjà dit, avec ce genre de configuration, les pôles magnétiques ne se compensent pas localement, ce qui donne naissance à un champ magnétique à grande échelle, et donc s'avère très coûteux en terme d'énergie magnétostatique. Le cas 2 de la figure 2.21 propose des domaines à 180° . Ces derniers, au prix d'une énergie de paroi proportionnelle à leur surface (et donc à leur nombre), permettent une annulation locale des pôles magnétiques, favorisant ainsi la diminution drastique de l'énergie magnétostatique. Quand la subdivision s'arrête-elle ? Elle s'arrêtera lorsque l'énergie de mur supplémentaire nécessitée par l'introduction d'une nouvelle paroi sera supérieure à la diminution de l'énergie magnétostatique qui résulte de l'introduction de cette paroi. Selon [Feynman *et al.*, 1979], un point fondamental à comprendre est que cet équilibre au niveau du nombre de parois dépend fondamentalement de la taille de l'échantillon. En effet, l'énergie de mur est proportionnelle à la surface des parois, donc au carré des dimensions caractéristiques, alors que l'énergie magnétostatique est proportionnelle au volume, donc au cube des dimensions, de cet échantillon. Par conséquent, plus la taille augmente, plus l'énergie magnétostatique prend un poids important, ce qui nécessite, pour la réduire, une division en domaines plus fine. Par conséquent, le nombre de domaines augmente avec la taille de l'échantillon considéré. A contrario, pour les très petits échantillons, il a été montré dans [Bertotti, 1998] que ces derniers, lorsque l'on approche quelques dizaines de nanomètres, pouvaient devenir mono-domaines. Le cas 3 de la figure 2.21 mérite quelques explications complémentaires. En effet, afin d'éviter la formation de pôles magnétiques, il apparaît aux extrémités des domaines dits « de fermeture », l'aimantation se localisant suivant les axes de facile aimantation horizontaux de l'échantillon aux extrémités de ce dernier. De cette manière, même si des parois supplémentaires à 90° sont rajoutées, on évite d'avoir des lignes de champ à l'extérieur de l'échantillon, ce qui permet d'annuler réellement l'énergie magnétostatique. Cette configuration semble donc plus favorable énergétiquement parlant que le cas 2. En réalité, il est bien difficile de conclure. En effet, on a vu que la magnétostriction imposait une variation de longueur dans le sens d'application de l'aimantation dans le matériau magnétique. Les domaines verticaux principaux induisent une variation de forme dans la direction verticale. Cette variation de forme est aussi imposée par les domaines de fermeture, mais cette fois dans le sens horizontal. Cette déformation dans deux sens différents soumet le matériau à des contraintes mécaniques, induisant la présence d'un terme d'énergie supplémentaire difficile à quantifier, car dépendant de l'élasticité du matériau.

Dans la référence [Landau et Lifchitz, 1969], une discussion simplifiée est proposée afin d'évaluer la largeur l des domaines de Weiss dans le cas 2, en fonction de la hauteur H de l'échantillon considéré. En effet, l'énergie de paroi est proportionnelle à la surface totale de paroi, soit au rapport $\frac{H}{l}$, et de plus l'énergie magnétostatique est proportionnelle à l . Par conséquent la valeur des largeurs de domaines l minimisant la somme des deux termes d'énergie est proportionnelle à \sqrt{H} . Précisons en outre que toutes ces considérations sont très dépendantes de la forme du matériau. En effet, si, à la figure 2.21, la forme n'était pas parallélépipédique, mais si une des faces était coupée de manière inclinée, la configuration en domaines obtenue serait à coup sûr très différente.

Processus d'aimantation Nous nous sommes consacrés, lors de la section qui précède, à décrire la structure d'un matériau magnétique au repos, lorsqu'aucune excitation ne lui est appliquée. Nous allons, dans la partie qui suit, analyser les mécanismes d'aimantation lors de l'application d'un champ magnétique H_a . Nous nous limiterons au cas de l'aimantation unidirectionnelle, le cas bidirectionnel sera traité plus tard dans ce chapitre.

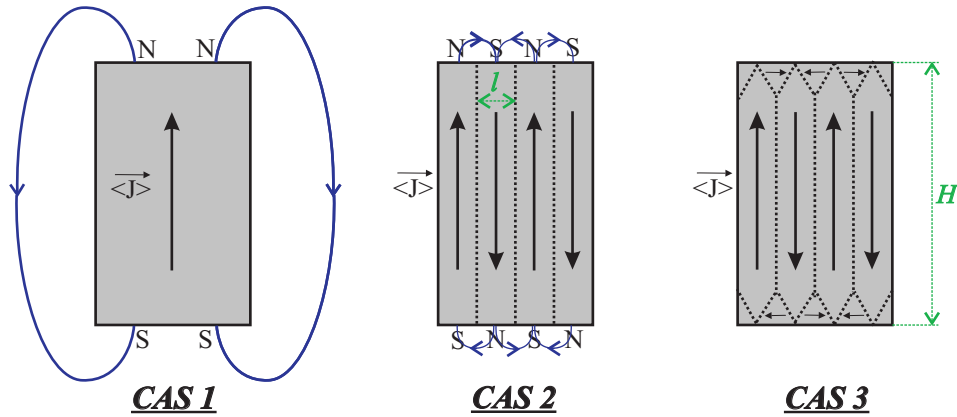


FIGURE 2.21: Les différentes configurations en domaines évoquées par la référence [Feynman *et al.*, 1979]

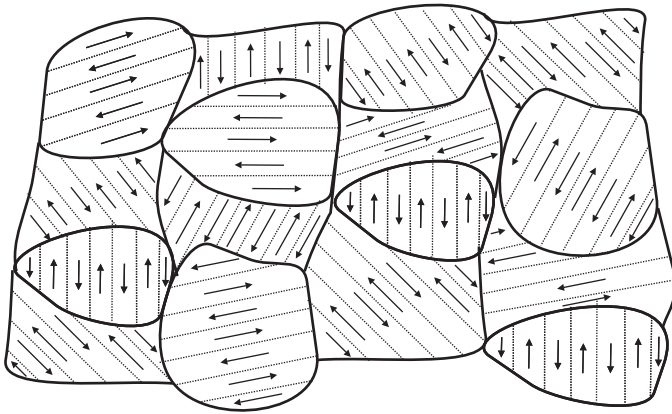


FIGURE 2.22: Etat désaimanté du matériau réel polycristallin

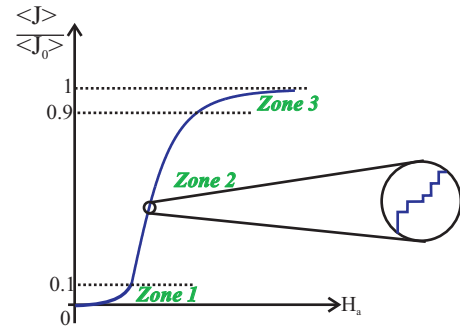


FIGURE 2.23: Courbe de première aimantation du matériau réel polycristallin

Courbe de première aimantation Partons de l'état démagnétisé. Dans la référence [Brissonneau, 1997], une méthode est donnée afin d'atteindre cet état. Il s'agit d'appliquer un champ alternatif lentement décroissant, jusqu'à atteindre la valeur nulle. On s'intéresse à un matériau réel : ce dernier n'est pas, loin de là, un monocristal. Dans la référence [Feynman *et al.*, 1979], une représentation schématique d'un tel matériau a priori polycristallin a été donnée, que nous reprenons au niveau de la figure 2.22. Comme on le voit sur cette figure, au départ, l'orientation des axes de facile aimantation, dans chaque grain cristallographique du matériau réel, est aléatoire. L'aimantation résultante, si on a bien désaimanté auparavant l'échantillon, est nulle.

Augmentons à présent le champ magnétique H_a appliqué au niveau de cet échantillon dans une direction donnée. La réponse obtenue en terme de polarisation moyenne $\langle J \rangle$ suivant l'axe d'application du champ magnétique prend l'allure donnée à la figure 2.23. Il est évident que l'aimantation globale va augmenter dans la même direction que le champ magnétique appliqué, dans le but de réduire l'énergie d'interaction qui résulte de l'application de ce champ. On distingue trois zones distinctes :

- La zone 1, pour les champs magnétiques H_a faibles. On est dans la zone où la polarisation moyenne demeure très faible $0 \leq \frac{\langle J \rangle}{\langle J_0 \rangle} \leq 0.1$. Le champ magnétique appliqué est responsable d'une pression au niveau des parois de Bloch tendant à agrandir les domaines qui ont une orientation proche de celle du champ magnétique, au détriment des autres. Cet agrandissement se fait de plusieurs manières différentes, suivant le modèle de la paroi que l'on adopte. Si on admet que la paroi est rigide, alors celle-ci se déplace sur une distance assez courte pour qu'aucun phénomène irréversible, comme le passage d'une impureté, ne puisse s'y produire. Une autre façon d'envisager le problème, comme représenté au niveau de la figure 2.24, consiste à adopter un modèle

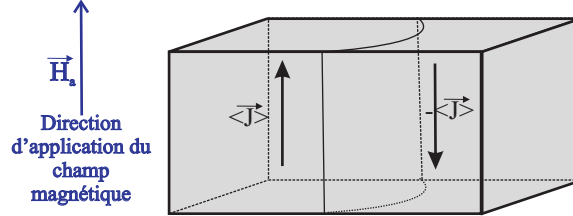


FIGURE 2.24: Phénomène de courbure de paroi en champ faible

de paroi pouvant se déformer ou se courber légèrement, afin d'augmenter le domaine dont la polarisation est la plus proche de la direction du champ magnétique. A noter que dans cette zone de champs faibles, les transformations sont dites réversibles (ou presque), vu que le champ appliqué H_a reste très faible. Si le champ appliqué H_a est supprimé, on revient normalement à l'origine. Globalement, dans cette zone, la structure en domaines est peu perturbée.

- Dans la zone 2, qui correspond à la plus grande partie de la courbe d'aimantation, les choses se compliquent, car les parois commencent à se déplacer de manière importante, afin de privilégier les domaines qui ont une aimantation proche de la direction du champ magnétique appliqué. L'augmentation de la polarisation est bien plus rapide qu'avant, et cette zone correspond à la majeure partie de la courbe de première aimantation $0.1 \leq \frac{\langle J \rangle}{\langle J_0 \rangle} \leq 0.9$. Dans chaque grain cristallographique élémentaire, il y a des impuretés qui gênent le déplacement des parois à grande échelle. Chaque fois qu'une paroi rencontre une de ces impuretés, elle peut y rester bloquée. Lorsque le champ appliqué atteint une valeur qui lui permette de s'en détacher, ce détachement est brusque, et s'accompagne d'un phénomène de pertes par courants induits irréversible, quand bien même l'évolution du champ magnétique $H_a(t)$ appliqué est quasi-statique. D'ailleurs, un zoom sur la courbe obtenue dans cette zone (figure 2.23) peut mettre en évidence ce déplacement des parois par à-coups. Il existe des techniques pour convertir ces variations brutales d'aimantation en ondes sonores, appelées « bruit de Barkhausen », afin d'entendre ces déplacements de parois irréguliers à cause des imperfections du cristal.
- Dans la zone 3, au voisinage de l'aimantation à saturation $0.9 \leq \frac{\langle J \rangle}{\langle J_0 \rangle} \leq 1$, on assiste de nouveau à un phénomène réversible. En effet, à la fin de la zone 2, les parois de Bloch ont pratiquement entièrement disparu, les grains cristallographiques ont leur polarisation entièrement orientée suivant leur axe de facile aimantation local qui est le plus favorable énergétiquement parlant au champ magnétique appliqué. La zone 3 correspond à la rotation réversible, pour des champs magnétiques beaucoup plus importants, de la polarisation dans chaque domaine de l'axe de facile aimantation local vers l'axe d'application du champ magnétique extérieur \vec{H}_a .

Origine du cycle d'hystérésis, et des pertes par hystérésis Nous avons étudié à la partie précédente la courbe de première aimantation d'un matériau magnétique. Que se passe-t-il si nous soumettons ce dernier à un champ appliqué $H_a(t)$ alternatif? Même si ce dernier est quasi-statique (nous verrons après cette partie qu'en régime variable, d'autres types de pertes interviennent), les phénomènes de mouvement de parois, majoritairement irréversibles, vont entraîner des pertes, appelées pertes par hystérésis. Cette déperdition d'énergie se traduit, au niveau de la courbe $\langle J \rangle(H_a)$, par l'apparition d'un phénomène d'hystérésis. Un exemple classique de cycle d'hystérésis est montré à la figure 2.25. Dans la référence [Bertotti, 1998], il est montré, par des considérations thermodynamiques, que l'énergie volumique perdue au cours d'un cycle de fonctionnement est représentée par l'aire du cycle. Le sens de parcours, représenté à la figure 2.25, ne peut pas être différent, sous peine de ne pas respecter le deuxième principe de la thermodynamique. D'un point de vue qualitatif, en se souvenant que l'énergie perdue de manière quasi-statique au cours du cycle de fonctionnement est due à l'accrochage des parois de Bloch sur les impuretés du cristal, il est normal que ce phénomène se traduise par un retard de la polarisation moyenne $\langle J \rangle$ sur le champ magnétique H_a appliqué. Ce retard est aussi une manière d'envisager le phénomène d'hystérésis représenté à la figure 2.25. Nous allons d'ailleurs profiter de cette figure pour définir la polarisation rémanente J_r (qui est la polarisation moyenne restant lorsque le champ magnétique décroissant H_a appliqué passe par la valeur nulle). Le champ coercitif H_C est le champ magnétique pour lequel la polarisation s'annule.

Dans le chapitre 2 de la référence [Bertotti, 1998], une interprétation élégante du phénomène d'hystérésis, et de la perte d'énergie qui en résulte, est donnée. Le point de départ est l'écriture de l'énergie libre volumique de Gibbs

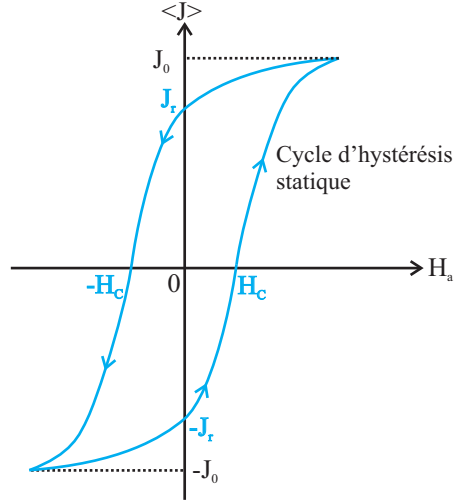


FIGURE 2.25: Exemple de cycle d'hystérésis statique $\langle J \rangle (H_a)$

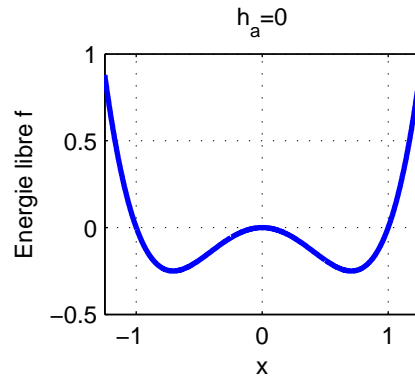


FIGURE 2.26: Le profil d'énergie libre simplifié

du système lorsqu'un champ magnétique \vec{H}_a est appliqué. Cette dernière aura l'expression suivante :

$$g_L = f - \langle \vec{J} \rangle \cdot \vec{H}_a \quad (2.72)$$

L'énergie f contient tous les termes d'énergie dont nous avons parlé. Néanmoins, il faut aussi tenir compte des défauts du matériau, qui font que la fonction f aura un caractère « multi-vallées », c'est-à-dire qu'elle comportera au moins deux minima (en fait, dans un matériau réel, cette fonction est bien plus complexe, car elle peut comporter un très grand nombre de minima). Pour fixer les idées, intéressons-nous au cas très simplifié suivant : l'énergie f est une fonction d'une seule variable scalaire notée x (cette variable, qui décrit l'état interne du matériau, peut être par exemple la polarisation moyenne, ou bien aussi la position d'une unique paroi de Bloch, comme dans le chapitre 9 de [Bertotti, 1998]), et présente deux minima distincts, c'est un polynôme de degré 4 du type $f(x) = x^4 + 2ax$ (figure 2.26, dans le cas où $a = 0.5$). Dans ce cas, l'énergie libre est alors (on raisonne en grandeurs normalisées, ce qui explique les notations en lettres minuscules) :

$$g_L(x) = f(x) - h_a x$$

Suivons un cycle de magnétisation du matériau, de manière quasi-statique pour considérer que l'on est en permanence dans un état d'équilibre (figure 2.27). On part d'un cas où le matériau est saturé par un champ magnétique négatif (étape 1). Dans ce cas, l'énergie libre ne présente qu'un seul minimum, dans lequel se trouve le système. On augmente alors le champ h_a appliqué. On note $-h_c$ le champ pour lequel apparaît un second minimum

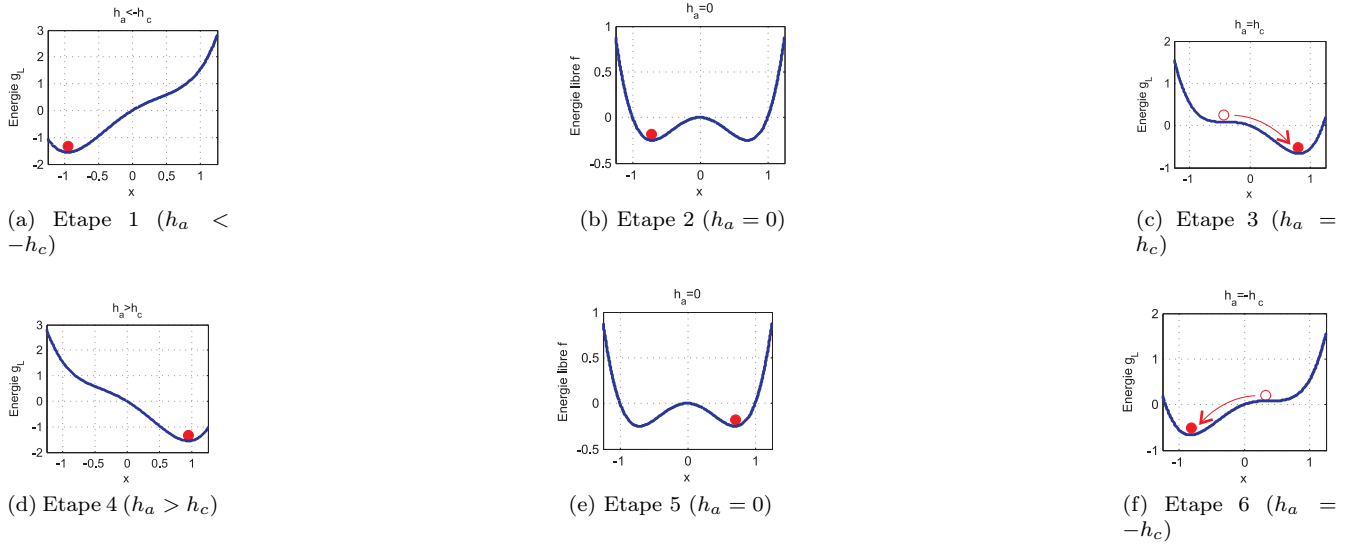


FIGURE 2.27: Génération d'un cycle d'hystérésis

(et x_c l'état correspondant). Par conséquent, ce champ est donné en satisfaisant les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \left(\frac{dg_L}{dx} \right)_{x=x_c} = 0 \\ \left(\frac{d^2g_L}{dx^2} \right)_{x=x_c} = 0 \end{cases} \quad (2.73)$$

Ce qui donne, dans notre cas :

$$\begin{cases} h_c = 8 \left(\frac{a}{3} \right)^{3/2} \\ x_c = \left(\frac{a}{3} \right)^{1/2} \end{cases} \quad (2.74)$$

Lorsque l'on passe par le champ $h_a = 0$, on reste dans l'état de saturation négative. Lorsque l'on atteint le champ $+h_c$ (Etape 3), le minimum d'énergie dans lequel se trouvait le système disparaît, et alors le système bascule brusquement de manière irréversible dans l'état de saturation positive. Ensuite, une augmentation du champ appliqué au delà de h_c (étape 4) se traduit par une augmentation réversible de l'aimantation. Les étapes 5 et 6 correspondent au chemin inverse, et au basculement dans l'état de saturation négative pour un champ $-h_c$. Pour se rendre compte de la formation d'un cycle d'hystérésis, on représente, au cours du cycle, le parcours dans le plan (x, h_a) (figure 2.28). On a donc tracé la dérivée la fonction énergie libre f , car, pour déterminer l'état x obtenu pour un champ appliqué h_a donné, l'impératif de minimisation de la dérivée de l'énergie libre g_L équivaut à la résolution de l'équation $\frac{df}{dx} = h_a$. Le champ magnétique $-h_c$ apparaît donc comme le champ pour lequel l'équation $\frac{df}{dx} = h_a$ commence à admettre deux solutions. La figure 2.28 met clairement en évidence la formation du cycle d'hystérésis quasi-statique.

Nous savons, d'après le premier principe de la thermodynamique, que l'énergie perdue sur un cycle tel que celui représenté au niveau de la figure 2.28 est représenté par l'aire du cycle, noté ΔW , qui, étant donné les notations de la figure en question, est donnée par la formule suivante :

$$\Delta W = g_L(-x_c; h_c) - g_L(x_f; h_c) \quad (2.75)$$

Il est donc utile de retenir que l'hystérésis quasi-statique est due à la présence de multiples minima dans la fonction énergie libre. Le champ magnétique h_c pour lequel ont lieu les basculements irréversibles est le champ coercitif.

En conclusion de cette partie, on peut annoncer que les pertes par hystérésis (ou pertes quasi-statiques) sont données par la relation suivante :

$$W_{hyst} = \oint H dJ \quad (2.76)$$

Il est aussi possible t'introduire le champ d'hystérésis, noté H_{hyst} , qui est défini par :

$$H_{hyst} = \frac{W_{hyst}}{4J_{max}} \quad (2.77)$$

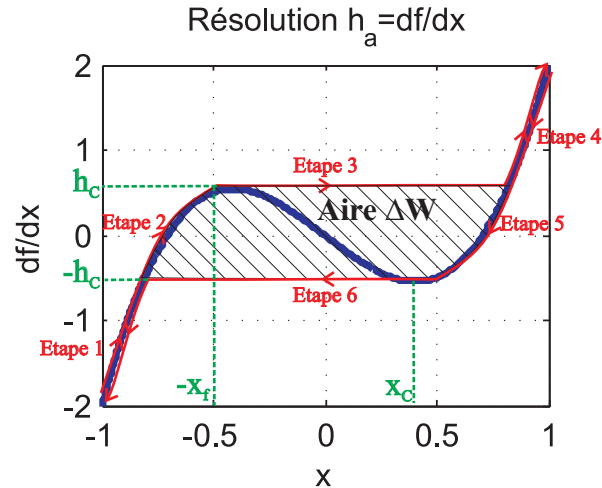


FIGURE 2.28: Représentation du parcours dans le plan (x, h_a)

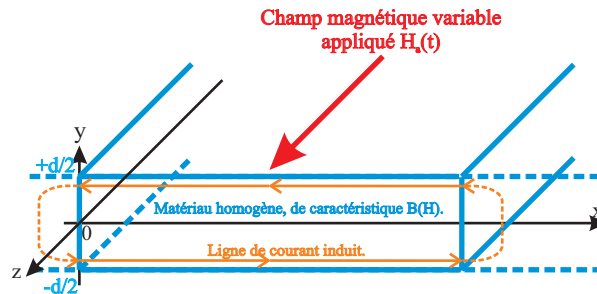


FIGURE 2.29: La tôle étudiée, homogénéisée pour le calcul des pertes classiques.

Ce champ correspondrait par ailleurs au champ coercitif si le cycle d'hystérésis était rigoureusement carré.

2.2.1.2 Les pertes classiques.

La première partie a mis en lumière le fait que les pertes par hystérésis étaient dues à des phénomènes microscopiques, se situant sur des échelles spatio-temporelles très réduites. A l'inverse, les pertes classiques (ou encore « maxwelliennes ») que l'on étudie ici sont, quant à elles, liées à la variation de flux globale au sein du milieu conducteur de conductivité σ , induisant des courants de Foucault de type macroscopique. D'après l'équation de Maxwell-Faraday, cette variation de flux induit un champ électrique, et, par suite, puisque le matériau est justement conducteur, une densité de courant, source de pertes par effet Joule. Ces pertes, appelées « pertes classiques », peuvent être calculées par application des équations de Maxwell, en moyennant, du fait du caractère macroscopique, les effets des domaines magnétiques dans une relation de constitution moyenne du matériau liant le champ magnétique à l'induction, notée $B(H)$, valable en tout point du matériau qui est supposé ici homogène.

La figure 2.29 rappelle le système étudié, constitué d'une tôle dans laquelle on calcule les courants de Foucault. D'après cette géométrie, tous les champs et inductions magnétiques sont dirigés suivant l'axe (Oz) , le champ électrique E , et donc la densité de courant induite j , sont dirigés suivant l'axe (Ox) . Qui plus est, toutes les grandeurs ne dépendent que de la coordonnée spatiale y , les autres directions étant supposées infinies. Enfin, le champ magnétique appliqué par les courants d'excitation, noté H_a , est bien sûr supposé homogène dans l'espace.

Nous allons nous placer à des fréquences suffisamment faibles pour pouvoir négliger l'effet de peau. Cela revient à négliger le champ magnétique dû aux courants de Foucault, noté H_{eddy} , par rapport au champ appliqué H_a : $H_{eddy} \ll H_a$. par conséquent, et ceci quelque soit la loi $B(H)$, l'induction B , et par conséquent sa dérivée temporelle

$\frac{dB}{dt}$, ne vont dépendre que du temps, comme H_a , et non plus de la coordonnée d'espace y (Référence [Bertotti, 1998], chapitre 12).

L'équation de Maxwell-Ampère donne :

$$\frac{\partial H}{\partial y} = j \quad (2.78)$$

Et celle de Maxwell-Faraday, en rappelant que σ est la conductivité du matériau :

$$\frac{\partial j}{\partial y} = \sigma \frac{dB}{dt} \quad (2.79)$$

Après intégration, sachant en outre que en $y = \pm \frac{d}{2}$, $H = H_a$, nous allons obtenir les deux équations suivantes, pour la densité de courant $j(y, t)$, ainsi que pour le champ magnétique $H(y, t)$:

$$j(y, t) = \sigma \frac{dB}{dt} y \quad (2.80)$$

$$H(y, t) = H_a(t) - \frac{\sigma}{2} \frac{dB}{dt} \left(\frac{d^2}{2} - y^2 \right) \quad (2.81)$$

L'équation 2.81 montre que l'on a une décroissance parabolique, lorsque l'on s'éloigne des bords de la tôle, du champ magnétique, à cause justement de l'effet du champ magnétique dû aux courants de Foucault H_{eddy} , qui s'oppose donc bien au champ magnétique appliqué H_a , conformément à la loi de Lenz.

Pour obtenir la puissance perdue par effet Joule par unité de volume du fait des pertes classiques, on effectue l'intégration suivante :

$$p_{cl}(t) = \frac{1}{d} \cdot \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \frac{j^2(y, t)}{\sigma} dy = \frac{\sigma d^2}{12} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \quad (2.82)$$

Nous sommes intéressés par la valeur moyenne de cette puissance instantanée sur un cycle de magnétisation. Nous obtenons alors l'expression connue des pertes classiques dans une tôle d'épaisseur d :

$$P_{cl} = \frac{\sigma d^2}{12} \left(\frac{dB}{dt} \right)_{eff}^2 \quad (2.83)$$

Ainsi, pour une induction d'excitation sinusoïdale à la fréquence f , d'amplitude B_{max} , les pertes classiques valent :

$$P_{cl}^{SIN} = \frac{\pi^2}{6} \sigma d^2 B_{max}^2 f^2 \quad (2.84)$$

Alors que pour un signal triangulaire, nous aurions, sous les mêmes hypothèses de fréquence et de valeur maximale :

$$P_{cl}^{TRI} = \frac{4}{3} \sigma d^2 B_{max}^2 f^2 \quad (2.85)$$

Les pertes classiques sont donc plus faibles avec un signal de forme triangulaire qu'avec un signal sinusoïdal, à fréquence et valeur maximale d'induction donnée. En fait, on pourrait montrer qu'à amplitude d'induction et fréquence données, il n'existe pas d'autre forme d'induction d'excitation qui puisse produire moins de pertes que le signal triangulaire. Remarquons d'autre part que la présence de cycles mineurs ne va rien changer à cette formule.

Nous allons montrer que ces pertes classiques vont induire un élargissement du cycle $B(H)$ du matériau, par rapport au cycle quasi-statique d'hystérésis étudié lors du paragraphe correspondant. En effet, en prenant la moyenne suivant la coordonnée y de l'équation 2.81, il est possible d'obtenir l'expression :

$$\frac{\sigma d^2}{12} \frac{dB}{dt} = H_a(t) - \langle H \rangle(B) \quad (2.86)$$

Cette dernière équation peut aussi être vue comme un équilibre de pression, entre le champ appliqué $H_a(t)$, d'une part, et d'autre part la somme des pressions statiques et dynamiques exercées par le matériau en réponse à l'excitation. $\langle H \rangle$ est la moyenne spatiale du champ magnétique. La quantité $\langle H \rangle(B)$ représente la caractéristique interne du matériau, qui elle, n'est pas modifiée. En revanche, on voit bien que, contrairement au cas de l'hystérésis

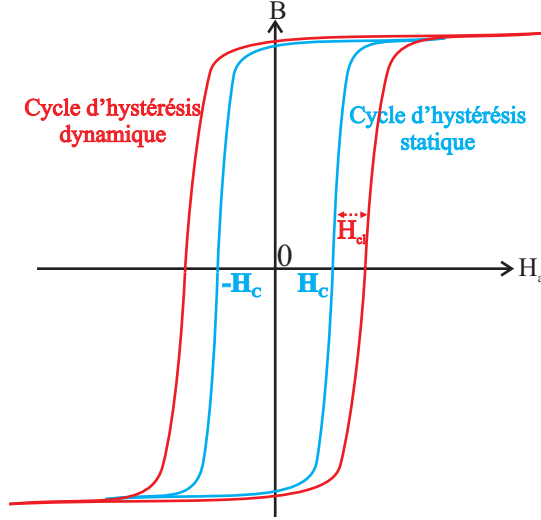


FIGURE 2.30: Le cycle d'hystérésis élargi par les pertes statiques.

quasi-statique où l'on avait $H_a(t) = \langle H \rangle(B)$, cette dernière égalité n'est plus vérifiée. La différence entre ces deux grandeurs est appelée « champ classique », noté $H_{cl}(t)$, égal à :

$$H_{cl}(t) = \frac{\sigma d^2}{12} \frac{dB}{dt} \quad (2.87)$$

Le cycle d'hystérésis, élargi par ce champ classique, prend donc l'aspect donné sur la figure numéro 2.30.

Qui plus est, les pertes instantanées peuvent aussi s'exprimer, en fonction du champ classique $H_{cl}(t)$, en reprenant l'équation 2.82, ainsi que la définition du champ classique :

$$p_{cl}(t) = H_{cl}(t) \frac{dB}{dt} \quad (2.88)$$

Il est cependant important de noter que l'hypothèse de négliger l'effet de peau permet d'aboutir à des expressions de pertes (équation 2.83) indépendantes de la caractéristique $\langle H \rangle(B)$ du matériau considéré.

2.2.1.3 Les pertes excédentaires.

Dans la partie précédente, nous avons calculé les pertes dynamiques classiques en supposant le matériau homogénéisé par une loi $B(H)$ moyenne, valable en tout point. En réalité, le matériau magnétique est en fait constitué de domaines, déjà introduits dans la partie sur les pertes par hystérésis. L'objectif de cette partie va être de montrer que la prise en compte de cette répartition en domaines magnétiques va induire d'autres pertes, connues sous le nom de pertes excédentaires, où anormales, non prises en compte dans la théorie des pertes classiques. Nous allons aussi proposer une expression mathématique pour ces pertes, en nous fondant sur le travail présenté dans le chapitre 12 de la référence [Bertotti, 1998]. Nous allons dans un premier temps nous intéresser aux pertes causées par l'existence d'une paroi de Bloch unique au milieu de l'échantillon, qui apparaît comme le point de départ de la théorie. Dans un second temps, nous présenterons le classique modèle de Pry et Bean. Ce modèle fera ensuite l'objet d'une correction statistique. Ceci mènera alors à l'expression des pertes excédentaires.

Dans toute la suite de l'exposé, nous allons formuler l'approximation que nous restons éloignés de l'état de saturation de la tôle, ce qui permettra de dire, comme c'est souvent le cas lors de l'étude des matériaux doux, que l'induction B se confond avec la polarisation J , en négligeant le terme $\mu_0 H$ devant J .

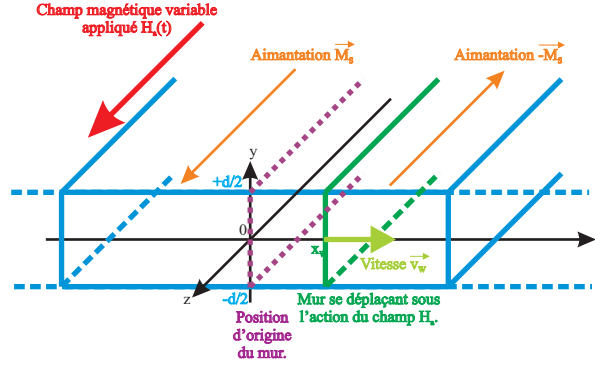


FIGURE 2.31: Cas d'un échantillon avec une seule paroi.

Introduction d'une unique paroi au sein de la tôle. Nous considérons la situation représenté à la figure 2.31, où la tôle n'a qu'une seule paroi de Bloch. Sous l'action du champ magnétique, cette paroi se déplace, pour privilégier l'un ou l'autre sens d'orientation de l'aimantation. Le mouvement de la paroi de Bloch à la vitesse $v_W = \frac{dx_W}{dt}$, et l'inversion de l'aimantation qui en découle, va générer une variation de flux dans la tôle, donnée par l'expression suivante :

$$\frac{d\Phi}{dt} = 2J_S dv_W \quad (2.89)$$

où $J_S = \mu_0 M_S$ est la polarisation à saturation.

Le champ magnétique et l'induction, comme dans la partie consacrée à l'évaluation des pertes classiques, se situent suivant l'axe $(0z)$, et ne dépendent pas de cette dernière coordonnée. En revanche, ils dépendent des deux coordonnées d'espace x et y . Le champ électrique, et donc la densité de courant j , sont toujours dans le plan $(0xy)$, mais ont deux composantes suivant ces deux axes. Avec l'équation constitutive du matériau $B = \mu_0 \cdot (H + M)$, où $M = \pm M_S$, nous trouvons que la densité de courant dans le matériau va devoir vérifier les équations :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{j} &= \vec{0} \\ \text{div } \vec{j} &= 0 \end{aligned} \quad (2.90)$$

avec la condition à la limite, pour la composante $j_y(x, y)$, au niveau des frontières de la tôle :

$$j_y \left(x, y = \pm \frac{d}{2} \right) = 0 \quad (2.91)$$

et au niveau de la paroi, la loi de Faraday impose :

$$j_y(x = x_W^-, y) - j_y(x = x_W^+, y) = \sigma J_S v_W = \frac{\sigma}{2d} \frac{d\Phi}{dt} \quad (2.92)$$

Une étude mathématique, fondée sur des développements en termes de fonctions propres, permet d'extraire les expressions sous forme de séries de la densité de courant vérifiant les équations précédentes :

$$\begin{aligned} j_x(x, y) &= \frac{2\sigma}{d} \frac{d\Phi}{dt} \sum_{n \text{ impair}} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n\pi} \sin \frac{n\pi y}{d} \exp \left(-\frac{n\pi |x - x_W|}{d} \right) \\ j_y(x, y) &= \mp \frac{2\sigma}{d} \frac{d\Phi}{dt} \sum_{n \text{ impair}} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n\pi} \cos \frac{n\pi y}{d} \exp \left(-\frac{n\pi |x - x_W|}{d} \right) \end{aligned} \quad (2.93)$$

où les deux signes dans l'expression de j_y sont relatifs aux régions où $x > x_W$, et $x < x_W$, respectivement. L'allure de ces lignes de courant autour de la paroi a été représentée de manière schématisée à la figure 2.32.

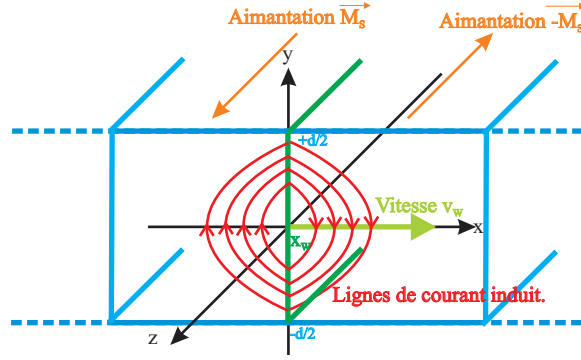


FIGURE 2.32: Les lignes de courant induites par le déplacement de la paroi.

La puissance perdue à cause du mouvement de l'unique paroi, par unité de longueur (suivant l'axe z) de la tôle se calcule par intégration de la quantité $\frac{j_x^2 + j_y^2}{\sigma}$ sur la surface de la tôle, dans le plan (Oxy). Cette puissance est :

$$p_W(t) = \sigma G \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)^2 \quad (2.94)$$

où la constante G vaut :

$$G = \frac{4}{\pi^3} \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^3} = 0,1356 \dots \quad (2.95)$$

Cette constante G peut être vue comme une information sur la forme de la paroi : ici, la valeur de G calculée est liée à la forme droite de la paroi que l'on a supposé.

Le modèle de Pry et Bean. A présent, nous allons considérer le cas de la même tôle, mais avec cette fois une distribution uniforme de domaines, toujours séparés les uns de autres par des parois de Bloch à 180° : c'est le modèle de Pry et Bean [Pry et Bean, 1958]. Lorsque le matériau est à l'état désaimanté, les domaines ont une largeur égale à $2L$ (voir la figure 2.33). Lors de l'application du champ magnétique $H_a(t)$, les murs se déplacent alors d'une distance $\pm x_W$, à une vitesse $\pm v_W$. L'amplitude du déplacement est égale à $x_W(t) = \pm \frac{J(t)}{J_S}$, où $J(t)$ est la polarisation moyenne de la tôle, confondue, nous l'avons dit, avec l'induction moyenne imposée $B(t)$.

En reprenant l'équation 2.93, qui avait été déterminée pour une seule paroi, et en additionnant les effets de toutes les parois, on obtient le résultat suivant :

– Pour $0 < x < L + x_W$:

$$\begin{aligned} j_x(x, y) &= \frac{2\sigma}{d} \frac{d\Phi}{dt} \sum_{n \text{ impair}} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n\pi} \sin \frac{n\pi y}{d} \frac{\cosh\left(\frac{n\pi x}{d}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi(L+x_W)}{d}\right)} \\ j_y(x, y) &= \frac{2\sigma}{d} \frac{d\Phi}{dt} \sum_{n \text{ impair}} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n\pi} \cos \frac{n\pi y}{d} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi x}{d}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi(L+x_W)}{d}\right)} \end{aligned} \quad (2.96)$$

– Pour $L + x_W < x < 2L$:

$$\begin{aligned} j_x(x, y) &= \frac{2\sigma}{d} \frac{d\Phi}{dt} \sum_{n \text{ impair}} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n\pi} \sin \frac{n\pi y}{d} \frac{\cosh\left(\frac{n\pi(x-2L)}{d}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi(L-x_W)}{d}\right)} \\ j_y(x, y) &= \frac{2\sigma}{d} \frac{d\Phi}{dt} \sum_{n \text{ impair}} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n\pi} \cos \frac{n\pi y}{d} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi(x-2L)}{d}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi(L-x_W)}{d}\right)} \end{aligned} \quad (2.97)$$

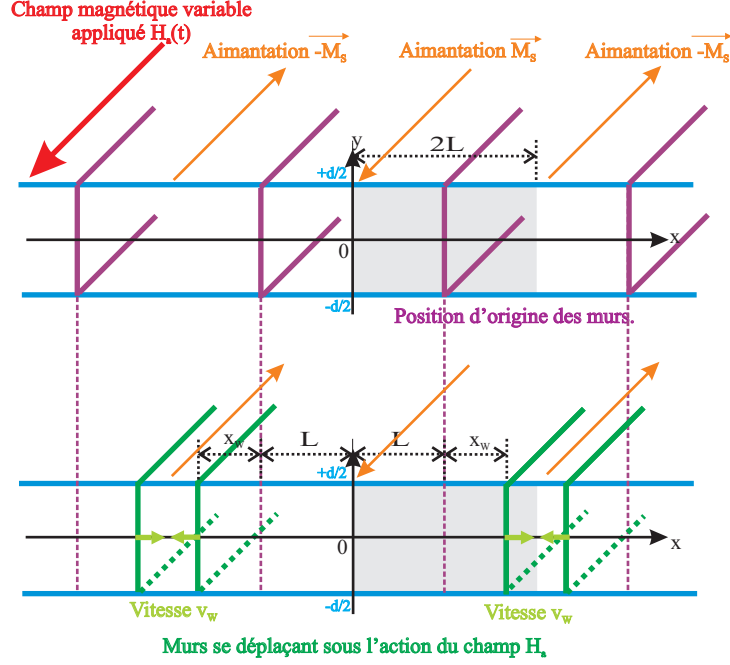


FIGURE 2.33: Le modèle de Pry et Bean.

Nous calculons l'intégrale de la quantité $\frac{j_x^2 + j_y^2}{\sigma}$ sur la surface de la tôle, dans le plan (Oxy), puis nous divisons par la surface $2Ld$ sur laquelle évolue un seul domaine, pour obtenir la puissance perdue par unité de volume dans la tôle dans le modèle de Pry et Bean, noté $p_{PB}(t)$:

$$p_{PB}(t) = \frac{\sigma}{2Ld} \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)^2 \frac{2}{\pi^3} \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^3} \left[\coth \left(\frac{n\pi(L+x_W)}{d} \right) + \coth \left(\frac{n\pi(L-x_W)}{d} \right) \right] \quad (2.98)$$

Nous allons nous limiter au cas où nous demeurons très loin de la saturation du matériau, donc pour lequel nous avons $x_W \ll L$. Nous allons alors obtenir, en négligeant x_W par rapport à L :

$$p_{PB}(t) = \frac{\sigma}{2Ld} \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)^2 \frac{4}{\pi^3} \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^3} \coth \left(\frac{n\pi x_W}{d} \right) \quad (2.99)$$

Deux cas sont à distinguer:

1. La taille des domaines est très inférieure à l'épaisseur d de la tôle, c'est-à-dire que $2L \ll d$, et, par un développement limité de la fonction \coth au voisinage de zéro, nous obtenons le résultat:

$$p_{PB}(t) = \frac{\sigma}{L^2} \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)^2 \frac{2}{\pi^4} \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^4} = \frac{\sigma d^2}{12} \left(\frac{dJ}{dt} \right)^2 \quad (2.100)$$

En nous servant du fait que $\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2Ld} \frac{d\Phi}{dt}$, nous trouvons le résultat suivant:

$$p_{PB}(t) = p_{cl}(t) \quad (2.101)$$

Ceci s'explique en remarquant que lorsque les domaines sont très rapprochés, la tôle apparaît comme homogène (les courants du côté droit d'une paroi donnée se compensent avec les courants du côté gauche de la paroi suivante), et on retrouve les pertes classiques.

2. Dans le cas où les domaines sont très larges par rapport à l'épaisseur d de la tôle, c'est-à-dire que l'on a la condition $d \ll 2L$, la fonction \coth a un argument infini, donc prend une valeur égale à l'unité, et on obtient alors l'expression des pertes volumiques par le modèle de Pry et Bean :

$$p_{PB}(t) = \left(\frac{4}{\pi^3} \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^3} \right) \frac{\sigma}{2Ld} \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)^2 = \frac{\sigma G}{2Ld} \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)^2 \quad (2.102)$$

Donc, au final, les pertes volumiques par le modèle de Pry et Bean $p_{PB}(t)$ s'expriment, en fonction des pertes $p_W(t)$ par unité de longueur dans la tôle lorsque cette dernière ne comporte qu'une seule paroi :

$$p_{PB}(t) = \frac{1}{2Ld} p_W(t) \quad (2.103)$$

Lorsque les parois de Bloch sont très espacées, les pertes dans une zone rectangulaire de surface $2Ld$ dans laquelle évolue une paroi se réduisent aux pertes dues à un seul mur. En nous servant de l'équation 2.82, nous pouvons en outre écrire, toujours dans le cas où $d \ll 2L$, cette relation sous la forme suivante, pour trouver la valeur des pertes volumiques par le modèle de Pry et Bean $p_{PB}(t)$ en fonction des pertes volumiques classiques $p_{cl}(t)$:

$$p_{PB}(t) = \left(\frac{48}{\pi^3} \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^3} \right) \frac{2L}{d} p_{cl}(t) \approx 1,63 \frac{2L}{d} p_{cl}(t) \quad (2.104)$$

Vu que nous sommes dans le cas de parois très larges par rapport à la tôle, le rapport $\frac{2L}{d} \gg 1$, et donc nous concluons que, dans ce cas, $p_{PB}(t) \gg p_{cl}(t)$.

Le modèle de Pry et Bean a donc mis en lumière les points suivants :

- Pour que les pertes dans un matériau soient les plus proches possibles des pertes classiques, il faut que les domaines soient les plus fins possibles, c'est-à-dire que le matériau paraisse le plus homogène possible.
- Cependant, lorsque la structure en domaines, à cause de la grande largeur de ces derniers, ne peut plus être ignorée, les pertes que l'on obtient sont beaucoup plus importantes que les pertes classiques. Mais, à ce stade, rien ne permet de décomposer ces pertes en un terme de pertes classiques, et un terme de pertes excédentaires. C'est l'introduction d'un point de vue probabiliste, dans la section qui suit, qui va permettre d'effectuer cette décomposition, en même temps que de trouver une expression pour ces pertes excédentaires.

Apport d'une correction probabiliste au modèle de Pry et Bean. La correction statistique du modèle de Pry et Bean consiste à considérer, comme cela semble d'ailleurs plus réaliste, que la position, ainsi que la vitesse des parois ne sont plus fixes, mais au contraire, peuvent prendre des valeurs aléatoires. Notons, comme sur la figure 2.34, x_k la position de chaque paroi, et v_k sa vitesse de déplacement. La variation de flux induite par la paroi considérée est reliée à la vitesse par la simple relation de proportionnalité suivante :

$$\frac{d\Phi_k}{dt} = 2J_S d v_k \quad (2.105)$$

Nous pouvons écrire les courants induits sous la forme d'une somme de courants dus à chaque mur :

$$j_x(x, y) = \sum_k j_{W,x} \left(x - x_k, y; \frac{d\Phi_k}{dt} \right) \quad (2.106)$$

$$j_y(x, y) = \sum_k j_{W,y} \left(x - x_k, y; \frac{d\Phi_k}{dt} \right)$$

Qui plus est, pour simplifier notre étude, nous supposons que les parois sont statistiquement indépendantes l'une de l'autre, et, qu'en plus, les variables aléatoires x_k et $\frac{d\Phi_k}{dt}$ sont également indépendantes. Notons λ le nombre moyen de parois par unité de longueur, donc $\frac{1}{\lambda}$ représente l'espacement moyen entre les murs. Les pertes par unité de volume sont, comme auparavant, obtenues en intégrant la quantité $\frac{j_x^2 + j_y^2}{\sigma}$ sur la surface de la tôle, dans le plan

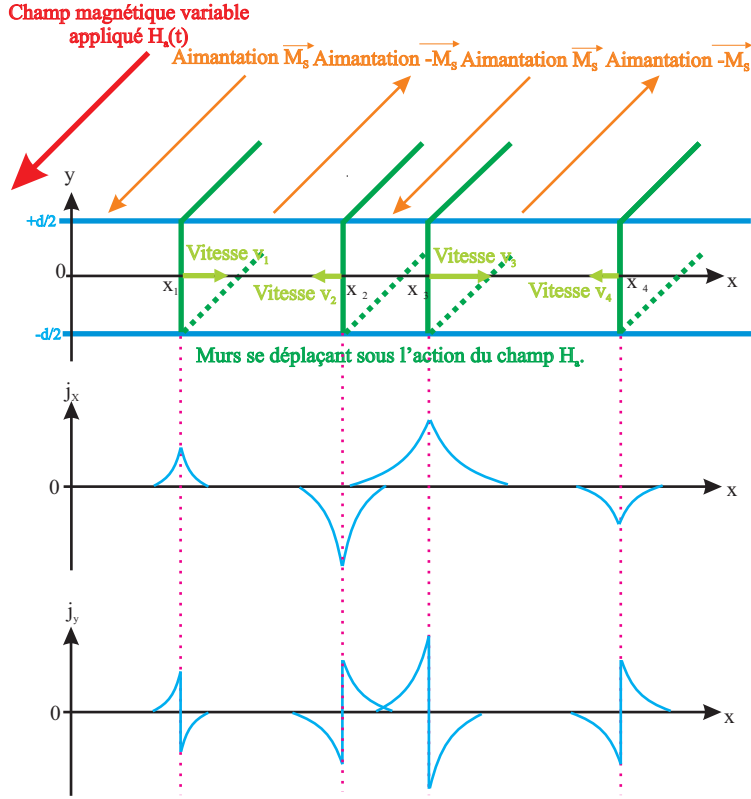


FIGURE 2.34: Correction statistique du modèle de Pry et Bean.

($0xy$), mais aussi en en prenant l'espérance mathématique, ce qui revient à en faire une moyenne sur l'ensemble des événements aléatoires possibles.

Les composantes $j_{W,x}$ et $j_{W,y}$ des densités de courants dues au déplacement d'un seul mur sont données par l'équation 2.93. D'après ces expressions, nous pouvons calculer leurs espérances mathématiques, pour une ordonnée y fixée, sachant que l'espérance de la variation de flux pour chaque paroi est simplement reliée au taux de variation de la polarisation imposée par la relation $\frac{dJ}{dt} = \frac{\lambda}{d} \langle \frac{d\Phi}{dt} \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle j_{W,x} \rangle &= 4\sigma \left\langle \frac{d\Phi}{dt} \right\rangle \sum_{n \text{ impair}} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2\pi^2} = \left\langle \frac{d\Phi}{dt} \right\rangle \frac{\sigma y}{d} = \frac{dJ}{dt} \frac{\sigma y}{\lambda} \\ \langle j_{W,y} \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2.107)$$

Compte-tenu de toutes les hypothèses que nous venons de faire, les pertes volumiques instantanées dans le cas d'une distribution aléatoire des murs $p_{RW}(t)$ sont données par la formule suivante :

$$\begin{aligned} p_{RW}(t) &= \frac{1}{\sigma d} \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\Delta} \int_{-\Delta}^{\Delta} \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} (j_x^2 + j_y^2) dx dy \\ &= \frac{1}{\sigma d} \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} [\lambda^2 \langle j_{W,x} \rangle^2 + \lambda \langle j_{W,x}^2 \rangle + \lambda^2 \langle j_{W,y} \rangle^2 + \lambda \langle j_{W,y}^2 \rangle] dy \\ &= \frac{\sigma}{d} \left(\frac{dJ}{dt} \right)^2 \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} y^2 dy + \frac{\lambda}{\sigma d} \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} [\langle j_{W,x}^2 \rangle + \langle j_{W,y}^2 \rangle] dy \end{aligned} \quad (2.108)$$

Le premier terme fait apparaître les pertes classiques, et le second donne les pertes dues à la répartition en domaines. En effet, on peut écrire que :

$$p_{RW}(t) = p_{cl}(t) + \frac{\lambda}{d} \langle p_W(t) \rangle \quad (2.109)$$

Grâce à cette correction probabiliste du modèle de Pry et Bean, nous sommes à présent en mesure de séparer les pertes, l'un des termes se trouvant être le terme de pertes classiques, et l'autre un terme pertes dû à la structure en domaines, que nous appellerons « pertes excédentaires ». L'expression 2.109 montre le fait important suivant : grâce aux propriétés statistiques du mouvement des parois de Bloch, supposées en mouvement indépendant, les pertes excédentaires peuvent être calculées en s'intéressant uniquement à une seule paroi (la notion de paroi sera généralisée à celle d'objet magnétique au paragraphe suivant), l'effet des autres parois pouvant être ramené à l'action du champ classique $H_{cl}(t)$, qui apparaît alors comme un champ « d'arrière-plan » [Bertotti, 1983], [Bertotti, 1985c, Bertotti, 1985e].

Expression des pertes excédentaires dans le cas général. Le modèle que l'on vient d'étudier est restrictif : en effet, l'image de parois verticales, suivant l'axe y , se déplaçant horizontalement suivant l'axe x est trop idéalisée pour être réaliste, et dépeindre fidèlement ce qui se passe réellement dans le matériau magnétique. En réalité, la répartition en domaines est beaucoup plus complexe : les domaines s'enchevêtrent de manière compliquée, de façon à minimiser l'énergie magnétostatique totale. Néanmoins, le concept de parois du modèle de Pry et Bean demeure utile pour traiter ce genre de cas. En effet, le matériau réel peut être envisagé comme ce qui est montré au niveau de la figure 2.35 : les parois du modèle de Pry et Bean ont été remplacées par des régions actives, qui sont chacune le siège de sauts de Barkhausen corrélés entre eux (dans l'article [Bertotti, 1983], l'auteur introduit la notion de saut de Barkhausen élémentaire ayant lieu dans ces régions, saut qui peut être vu comme une inversion de l'aimantation qui passe brutalement de $\pm M_S$ à $\mp M_S$ dans une zone réduite circulaire de rayon a , et pendant un temps τ très faible, ce modèle permettant de déduire une expression des pertes dues à chaque saut élémentaire). Chaque région active joue exactement le même rôle qu'une paroi du modèle de Pry et Bean, bien que la géométrie en soit plus complexe. Ces régions actives, qui généralisent en quelque sorte la notion de paroi, ont été nommées « objets magnétiques » [Bertotti, 1985c]. Cette assimilation est justifiée d'un point de vue probabiliste, une paroi qui se déplaçant dans une tôle comme dans le modèle de Pry et Bean générant un ensemble de sauts de Barkhausen spatialement très fortement corrélés entre eux. Une autre manière de concevoir cette notion de séparation des pertes a été proposée dans [Bertotti, 1983] : notons $\vec{j}_i(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}, t; \vec{r}_i, t_i)$ la densité de courant causée en (\vec{r}, t) par un saut de Barkhausen se produisant en (\vec{r}_i, t_i) . Les variations de l'aimantation moyenne du matériau étant dues à des sauts de Barkhausen successifs, nous pouvons écrire la somme des courants induits sous la forme :

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^{N_{sauts}} \vec{j}_i(\vec{r}, t) \quad (2.110)$$

Les pertes obtenues en chaque position \vec{r} sont proportionnelles à l'espérance temporelle sur la période du carré de cette densité de courant, en considérant que le nombre de sauts élémentaire N_{sauts} est très grand (on considère le cas général où les variables aléatoires des densités de courant \vec{j}_i ne sont pas indépendantes) :

$$p(\vec{r}) \propto \langle \vec{j}^2 \rangle = N_{sauts} \langle |\vec{j}_i|^2 \rangle + \langle N_{sauts} \vec{j}_i \rangle^2 + N_{sauts}^2 \left(\langle \vec{j}_i \cdot \vec{j}_j \rangle - \langle \vec{j}_i \rangle \langle \vec{j}_j \rangle \right) \quad (2.111)$$

Le premier terme représente les pertes dues à chaque saut pris individuellement, et est donc analogue aux pertes par hystérésis. Le second terme représente les pertes dues à la densité de courant globale $\langle N_{sauts} \vec{j}_i \rangle$ qui est vue dans l'échantillon si les sauts étaient statistiquement indépendants, analogue aux pertes classiques. Enfin, le troisième terme suggère la présence d'un accroissement des pertes à cause de la corrélation statistique entre les différents sauts, qui peut s'interpréter comme les pertes excédentaires dont nous parlons.

En réécrivant les équations 2.109 et 2.94 fournies par le modèle de Pry et Bean aléatoire, discuté au paragraphe précédent, nous avons trouvé l'expression des pertes excédentaires suivantes :

$$p_{exc}(t) = \frac{\lambda}{d} \sigma G \left\langle \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)^2 \right\rangle \quad (2.112)$$

Sachant que l'espérance du carré d'une variable aléatoire est toujours plus grande que le carré de son espérance, nous pouvons introduire le coefficient $\alpha > 0$, qui mesure la dispersion des vitesses des différents murs, défini par :

$$\left\langle \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)^2 \right\rangle = (1 + \alpha) \left\langle \frac{d\Phi}{dt} \right\rangle^2 \quad (2.113)$$

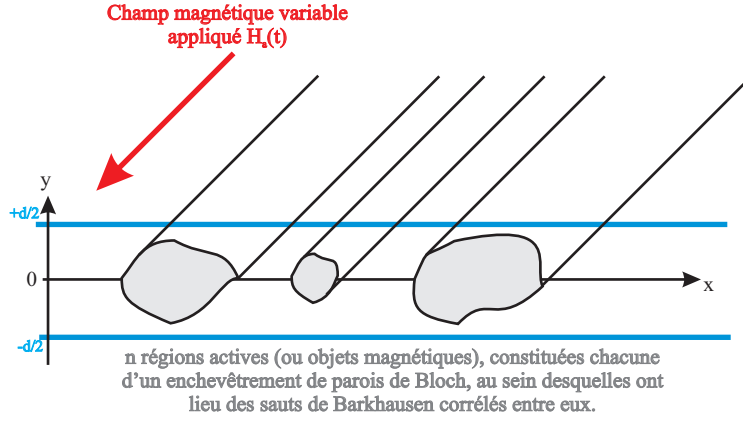


FIGURE 2.35: Les régions actives, ou objets magnétiques.

Les pertes excédentaires deviennent donc :

$$p_{exc}(t) = \frac{\lambda}{d} \sigma G (1 + \alpha) \left\langle \frac{d\Phi}{dt} \right\rangle^2 \quad (2.114)$$

Cette expression permet d'écrire les pertes supplémentaires sous la forme suivante :

$$p_{exc}(t) = H_{exc}(t) \frac{dJ}{dt} \quad (2.115)$$

où le champ excédentaire H_{exc} , analogue à une pression de réaction dynamique exercée le matériau pour s'opposer à l'excitation $H_a(t)$, a pour expression :

$$H_{exc}(t) = \sigma G (1 + \alpha) \left\langle \frac{d\Phi}{dt} \right\rangle \quad (2.116)$$

Le champ $H_{exc}(t)$ mesure l'élargissement du cycle d'hystérésis dû aux pertes excédentaires (voir la figure 2.36), par analogie avec le raisonnement sur les pertes classiques. Nous pouvons exprimer ce champ excédentaire sous la forme suivante, qui va nous être utile pour passer du modèle de parois de Pry et Bean, à celui plus général des objets magnétiques :

$$H_{exc}(t) = (1 + \alpha) \frac{\sigma G S}{n_W} \frac{dJ}{dt} \quad (2.117)$$

où $n_W = \lambda l$ est le nombre actif de parois qui se déplacent et qui produisent une variation effective de flux (l est la longueur de la tôle suivant l'axe ($0x$)), et $S = ld$ est la surface de la tôle étudiée.

L'équation 2.117 se généralise au cas des objets magnétiques de forme quelconque distribués sur la surface transverse de la tôle. Dans ce cas, le facteur G , caractéristique des parois de forme verticale, devient le facteur G' , tenant compte de la distribution naturellement plus complexe des parois dans le cas des objets magnétiques. Quant au facteur α , il tient compte de la distribution statistique des vitesses des parois. Dans le cas des objets magnétiques, le nombre de parois actives n_W des équations précédentes doit être remplacé par le nombre n_C d'objets magnétiques actifs.

Pour simplifier, nous allons écrire le champ excédentaire H_{exc} dans le cas des objets magnétiques répartis sur la surface transverse de la tôle sous la forme suivante :

$$H_{exc} = \frac{H_W}{n} \quad (2.118)$$

où :

– $H_W = \sigma G S \frac{dJ}{dt}$ est le champ excédentaire qui serait obtenu si la tôle n'avait comporté qu'une paroi verticale.

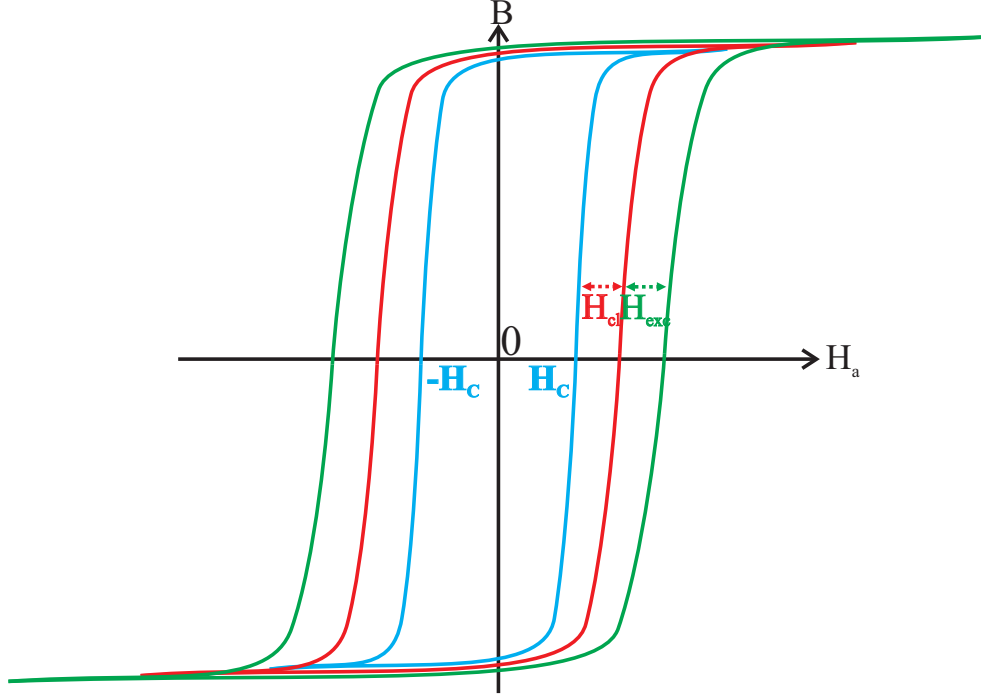


FIGURE 2.36: Elargissement du cycle d'hystérésis à cause des pertes excédentaires.

- $n = \frac{G}{G'} \frac{n_c}{1+\alpha}$ est un paramètre, nommé « nombre effectif d'objets magnétiques actifs », et qui traduit à la fois la complexité de la géométrie des parois réelles avec le coefficient sans dimension G' , et celle de leurs mouvements aléatoires, avec le paramètre α .

Le champ H_{exc} est un des termes, avec H_{hyst} et H_{cl} , de contre-pression dynamique exercée par le matériau en réponse à l'application d'un champ d'excitation H_a . Ce champ excédentaire, résultant du mouvement des objets magnétiques actifs, va agir comme une pression supplémentaire sur ceux qui ne se sont pas encore activés, et ainsi donc en activer une partie. Le nombre d'objets magnétiques actifs est donc lié au champ excédentaire par une relation, qui limitée au premier ordre, va donner (on ne compte pas les autres termes de champ, car ces derniers peuvent être vus, ici, comme des champs « d'arrière-plan » [Bertotti, 1984]

$$n(H_{exc}) = n_o + \frac{H_{exc}}{V_o} + \dots \quad (2.119)$$

Dans ce développement, n_o représente le nombre d'objets magnétiques actifs en champ nul, et V_o peut être vu comme l'incrément de champ magnétique nécessaire pour faire augmenter d'une unité le nombre d'objets magnétiques actifs. Avec ce développement, le champ magnétique excédentaire devient :

$$H_{exc}(t) = \frac{n_o V_o}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4|H_W|}{n_o^2 V_o}} - 1 \right) = \frac{n_o V_o}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4\sigma GS}{n_o^2 V_o} \left| \frac{dJ}{dt} \right|} - 1 \right) \quad (2.120)$$

En fait, généralement, dès que la présence de fonctionnement devient un peu importante, la relation $\frac{4\sigma GS}{n_o^2 V_o} \left| \frac{dJ}{dt} \right| \gg 1$ se trouve vérifiée (c'est déjà le cas pour les fréquences industrielles pour de nombreux matériaux), et alors, sous cette hypothèse, l'expression du champ excédentaire H_{exc} se simplifie en :

$$H_{exc}(t) \approx \sqrt{\sigma GS V_o} \left| \frac{dJ}{dt} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (2.121)$$

Les pertes volumiques excédentaires instantanées sont donc données par l'expression suivante :

$$p_{exc}(t) = \frac{n_o V_o}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4\sigma GS}{n_o^2 V_o} \left| \frac{dJ}{dt} \right|} - 1 \right) \left| \frac{dJ}{dt} \right| \quad (2.122)$$

Sachant que pour des fréquences suffisamment grandes, cette expression devient :

$$p_{exc}(t) \approx \sqrt{\sigma GSV_o} \left| \frac{dJ}{dt} \right|^{\frac{3}{2}} \quad (2.123)$$

2.2.2 Identification des différents paramètres des pertes en champ alternatif.

Après avoir introduit les concepts de séparation des pertes, nous nous intéressons ici à la manière d'identifier des différents paramètres mis en jeu dans les formulations des pertes à partir des valeurs données par l'expérience. Nous continuons à supposer l'onde d'induction alternative, de fréquence f , sans cycle mineur, et de confondre la polarisation $J(t)$ avec l'induction $B(t)$, ce qui suppose d'être loin de la saturation du matériau. L'amplitude de la polarisation $J(t)$ est notée J_p . L'objectif est de montrer que [Appino *et al.*, 2004], à partir de deux essais à différentes fréquences, et sous une forme quelconque, on peut en déduire facilement les pertes par hystérésis, classiques, et excédentaires pour n'importe quelles forme et fréquence de polarisation (à amplitude constante J_p).

2.2.2.1 Les pertes classiques.

Sous réserve que l'effet de peau puisse être négligé, les pertes classiques par cycle sont données par la formule :

$$w_{cl} = \frac{\sigma d^2}{12} \left(\frac{dJ}{dt} \right)_{eff}^2 \quad (2.124)$$

Pour une excitation sinusoïdale $J(t) = J_p \cos(2\pi ft)$, on trouve en particulier :

$$w_{cl} = \frac{\pi^2}{6} \sigma d^2 f J_p^2 \quad (2.125)$$

2.2.2.2 Les pertes par hystérésis et excédentaires.

Supposons qu'un dispositif expérimental soit en mesure de nous renseigner sur les pertes : pour une onde de polarisation donnée, d'amplitude J_p , sans cycles mineurs, et de fréquence f , nous avons accès à l'énergie volumique perdue par cycle $w(J_p, f)$. Nous pouvons donc en déduire, par calcul, connaissant l'épaisseur d de la tôle, la part d'énergie volumique due aux pertes classiques $w_{cl}(J_p, f)$. Par différence, nous avons la somme des pertes par hystérésis et excédentaires :

$$w_{diff}(J_p, f) = w(J_p, f) - w_{cl}(J_p, f) = w_{hyst}(J_p) + w_{exc}(J_p, f) \quad (2.126)$$

Le point fondamental est de supposer que les pertes par hystérésis demeurent indépendantes de la fréquence f , ainsi que de la forme d'onde de polarisation imposée, pour ne dépendre que de la polarisation maximale J_p . Les pertes excédentaires, quant à elles, dépendent non seulement de la polarisation maximale J_p , de la forme de cette dernière, et bien sûr de la fréquence f d'excitation. La théorie montre que l'énergie excédentaire perdue sur un cycle de fonctionnement de période $T = \frac{1}{f}$ est donnée, à fréquence assez élevée, par l'intégrale :

$$w_{exc} = \int_0^T \sqrt{\sigma GSV_o} \left| \frac{dJ}{dt} \right|^{\frac{3}{2}} dt \quad (2.127)$$

Pour séparer formellement les trois effets que sont l'amplitude J_p de la polarisation, sa forme, et sa fréquence, il est possible de procéder au changement de variable suivant, dans l'expression de la polarisation instantanée $J(t)$:

$$J(t) = J_p j(t'T) \quad (2.128)$$

Alors la formule de l'énergie volumique excédentaire perdue par cycle est :

$$w_{exc} = \left(\int_0^1 \left| \frac{dj}{dt'} \right|^{\frac{3}{2}} dt' \right) \sqrt{\sigma GSV_o} J_p^{\frac{3}{2}} f^{\frac{1}{2}} \quad (2.129)$$

où :

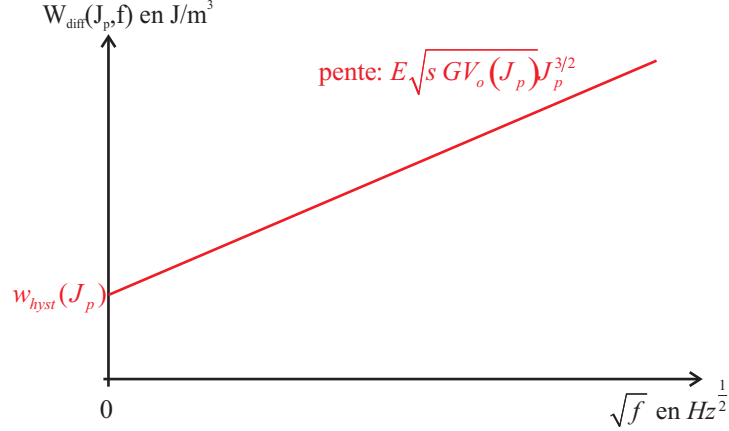


FIGURE 2.37: Evolution des pertes en fonction de la racine carrée de la fréquence.

- $E = \int_0^1 \left| \frac{dj}{dt'} \right|^{vis} dt'$ est le coefficient multiplicateur de l'équation précédente. Il concentre toute l'information sur la forme de la polarisation. Comme souvent, nous réalisons des essais avec des inductions sinusoïdales, nous pouvons calculer ce coefficient, qui vaut : $E^{SIN} \approx 8,76$. Dans le cas d'un signal triangulaire, nous aurions une valeur plus faible : $E^{TRI} \approx 8$.
- Le champ magnétique V_o s'avère dépendre de la polarisation maximale J_p , suivant une fonction croissante, notamment à cause de certains paramètres que l'étude théorique n'avait pas pris en compte, comme les effets démagnétisants locaux. C'est aussi le cas du nombre d'objets magnétiques n_o à polarisation nulle (mais si la fréquence est suffisante, ce dernier ne va pas intervenir).

Il suffit donc d'identifier les deux paramètres que sont les pertes par hystérésis $w_{hyst}(J_p)$, et le champ magnétique $V_o(J_p)$, ces deux paramètres tous deux dépendant uniquement de l'amplitude de polarisation J_p .

Ayant deux paramètres à identifier, il suffit, pour chaque polarisation maximale J_p , de faire deux essais à deux fréquences f_1 et f_2 , avec des ondes temporelles quelconques, sous réserve qu'elles ne comportent pas de cycles mineurs. Notons E_1 et E_2 les facteurs de forme de ces ondes (si les essais sont menés en excitation sinusoïdale, on aura $E_1 = E_2 = E^{SIN}$ mais ce n'est pas une condition nécessaire). Les deux grandeurs recherchées satisfont le système :

$$\begin{cases} w_{hyst}(J_p) + E_1 \sqrt{\sigma G S V_o(J_p)} J_p^{\frac{3}{2}} f_1^{\frac{1}{2}} = w_{diff}(J_p, f_1) \\ w_{hyst}(J_p) + E_2 \sqrt{\sigma G S V_o(J_p)} J_p^{\frac{3}{2}} f_2^{\frac{1}{2}} = w_{diff}(J_p, f_2) \end{cases} \quad (2.130)$$

La solution est :

$$\begin{cases} V_o(J_p) = \frac{1}{\sigma G S J_p^3} \left(\frac{w_{diff}(J_p, f_1) - w_{diff}(J_p, f_2)}{E_1 f_1^{\frac{1}{2}} - E_2 f_2^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \\ w_{hyst}(J_p) = \frac{w_{diff}(J_p, f_2) E_1 \sqrt{f_1} - w_{diff}(J_p, f_1) E_2 \sqrt{f_2}}{E_1 \sqrt{f_1} - E_2 \sqrt{f_2}} \end{cases} \quad (2.131)$$

Sous les hypothèses énoncées auparavant, l'énergie volumique $w_{diff}(J_p, f)$ évolue en fonction de la racine carrée de la fréquence \sqrt{f} , à amplitude et à de polarisation donnée. La valeur à l'origine de cette droite représente les pertes par hystérésis $w_{hyst}(J_p)$, et la pente est à une valeur $E \sqrt{\sigma G S V_o(J_p)} J_p^{\frac{3}{2}}$ (figure 2.37).

Dans un autre papier [Bertotti, 1985a], il a été donné une interprétation directe de la signification du paramètre V_o , en le reliant au champ d'hystérésis H_{hyst} : le champ V_o étant l'incrément de champ nécessaire pour activer un objet magnétique supplémentaire, on peut supposer que les objets magnétiques possèdent une distribution de champ d'activation uniforme de densité $\frac{1}{V_o}$. Par conséquent, lorsque l'on applique un certain champ H , le nombre \tilde{N} d'objets magnétiques activés par ce champ H est donné par la relation : $\tilde{N} = \frac{H}{V_o}$. L'idée du modèle est de postuler que la variation du champ magnétique local appliqué pendant une demi-période d'aimantation est de l'ordre de

$2H_{hyst}$, ce qui veut dire que le nombre d'objets magnétiques actifs est donné par :

$$\tilde{N} = \frac{2H_{hyst}}{V_o} \quad (2.132)$$

D'autre part, ce sont les objets magnétiques actifs qui participent à l'inversion de l'aimantation moyenne, durant une demi-période au sein du matériau, donc on peut écrire que :

$$\tilde{N} = \frac{2I_{max}}{\Delta I} = \tilde{N}_o \frac{I_{max}}{\langle I_S \rangle} \quad (2.133)$$

Dans l'équation 2.133, \tilde{N}_o est le nombre total d'objets magnétiques disponibles, objets qui sont en général supposés confondus avec le grain du matériau. Par conséquent, pour un matériau donné, \tilde{N}_o est évalué par le quotient $\frac{S}{s^2}$, s étant la dimension moyenne des grains. ΔI représente la variation d'aimantation induite par un objet magnétique dans la direction d'aimantation, et $\langle I_S \rangle$ est la polarisation à saturation du matériau, qui est moyennée pour tenir compte de la répartition spatiale isotrope des grains dans l'espace (on aura alors $\Delta I = \frac{2\langle I_S \rangle}{N_o}$). En égalant les expressions 2.132 et 2.133, on peut alors obtenir :

$$V_o = \frac{2\langle I_S \rangle H_{hyst}}{\tilde{N}_o I_{max}} \quad (2.134)$$

Cette dernière expression, intéressante car ne nécessitant aucune mesure additionnelle, a été vérifiée avec divers matériaux magnétiques utilisés en électrotechnique.

2.2.2.3 Prise en compte du comportement des pertes excédentaires en basse fréquence.

Pour des fréquences faibles, il n'y a plus de simplification de la formule des pertes excédentaires. L'énergie volumique perdue par cycle est donnée par l'intégrale, pour une polarisation maximale J_p donnée :

$$w_{exc}(J_p, f) = \frac{n_o(J_p) V_o(J_p)}{2} \int_0^T \left(\sqrt{1 + \frac{4\sigma GS}{n_o^2(J_p) V_o(J_p)} \left| \frac{dJ}{dt} \right|} - 1 \right) \left| \frac{dJ}{dt} \right| .dt \quad (2.135)$$

Par exemple, pour une polarisation sinusoidale $J(t) = J_p \cos(2\pi ft)$, l'intégrale ne se calcule pas explicitement, et, après un changement de variable angulaire, nous trouvons l'expression suivante, qui doit être calculée de façon numérique :

$$w_{exc}(J_p, f) = 2n_o(J_p) V_o(J_p) J_p \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{1 + \frac{8\sigma GS}{n_o^2(J_p) V_o(J_p)} \pi f J_p \cos(\Phi)} - 1 \right) \cos(\Phi) dt \quad (2.136)$$

Pour un signal triangulaire, en revanche, on peut calculer de façon analytique l'intégrale, et on obtient l'expression :

$$w_{exc}(J_p, f) = 2n_o(J_p) V_o(J_p) J_p \left(\sqrt{1 + \frac{16\sigma GS}{n_o^2(J_p) V_o(J_p)} f J_p} - 1 \right) \quad (2.137)$$

Cette-fois, il faut non pas deux, mais trois essais à polarisation J_p donnée, afin de trouver les trois coefficients dépendant de la polarisation maximale J_p que sont $w_{hyst}(J_p)$, $V_o(J_p)$, et $n_o(J_p)$. L'effet de cette amélioration du modèle est de prévoir une déformation de la droite de la figure 2.37 qui s'observe expérimentalement [Appino *et al.*, 2004], à des fréquences de quelques Hertz. Dès que la fréquence devient plus importante, la simplification de la section précédente devient valable. La figure 2.38 montre l'effet de la déformation en basse fréquence. Pour tenir compte de la distorsion : on trace l'asymptote à la courbe réelle à fréquence importante. Cette asymptote croise l'axe des ordonnées pour la valeur $w_{hyst}(J_p) - 2n_o(J_p) V_o(J_p) J_p$ appelée $w_{hyst1}(J_p)$. On peut tenir compte de la distorsion à l'origine en assimilant la courbe à son asymptote, et en remarquant que la distorsion à l'origine est responsable du fait que cette droite coupe l'axe des ordonnées non plus en $w_{hyst}(J_p)$, mais en $w_{hyst1}(J_p) = w_{hyst}(J_p) - 2n_o(J_p) V_o(J_p) J_p$.

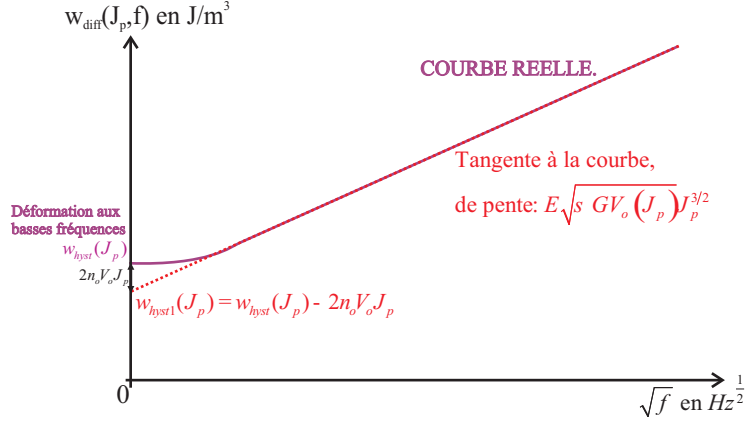


FIGURE 2.38: Amélioration de la prise en compte du comportement aux basses fréquences.

L'auteur de [Bertotti, 1985c, Bertotti, 1985e] a proposé une interprétation, qu'il a appelé « plan de pertes dynamiques » des notions précédemment développés. Le champ excédentaire H_{exc} étant égal à $\frac{H_W}{n}$, on peut écrire l'équation :

$$H_{exc} \left(n_o + \frac{H_{exc}}{V_o} \right) = H_W \quad (2.138)$$

Nous introduisons les champs normalisés suivants, par rapport à H_W : $\widehat{V}_o = \frac{V_o}{H_W}$ et $\widehat{H}_{exc} = \frac{H_{exc}}{H_W}$. L'équation précédente peut alors être écrite sous la forme :

$$n_o = \frac{1}{\widehat{H}_{exc}} - \frac{\widehat{V}_o}{\widehat{H}_{exc}} \quad (2.139)$$

En paramétrant les valeurs du champ normalisé \widehat{H}_{exc} , on peut alors tracer le réseau de courbes correspondant dans le plan (\widehat{V}_o, n_o) : on obtient les courbes représentées en pointillés au niveau de la figure 2.39. La zone qui se situe au niveau de la partie supérieure du plan est considérée comme une zone dans laquelle le champ classique H_{cl} prédomine sur le champ excédentaire H_{exc} . En effet, étant donné que le champ classique est proportionnel à d^2 et que le champ H_W est proportionnel à la surface de l'échantillon $S = d \cdot l$, on en déduit que $H_W \sim \frac{1}{d} H_{cl}$, ce qui signifie que $H_W \gg H_{cl}$, de l'ordre de $H_W \approx 10^2 \cdot H_{cl}$. Par conséquent, si on veut, pour pouvoir dire que $H_{cl} \gg H_{exc}$, il faut que l'on ait au moins $\frac{H_{exc}}{H_{cl}} \leq 10^{-1}$, et donc en fait $\widehat{H}_{exc} = \frac{H_{exc}}{H_W} \leq 10^{-3}$. De même, la zone $n_o < 1$ est aussi interdite, car $n_o = 1$ apparaît comme la condition minimale pour magnétiser l'échantillon (c'est le plus fort degré d'inhomogénéité du matériau). Dans la zone I, on voit que les pertes ne dépendent quasiment que du paramètre n_o (on vérifie la condition $n \approx n_o$ car $\frac{H_{exc}}{V_o} \ll n_o$), alors que dans la zone II, c'est l'inverse : les pertes ne dépendent quasiment que du paramètre V_o car on vérifie $\frac{H_{exc}}{V_o} \gg n_o$. Aux fréquences industrielles, les matériaux utilisés en électrotechnique se situent pour la plupart dans la Zone II. On voit que si la fréquence est augmentée d'un certain facteur, il en est de même pour le champ H_W . Par conséquent, le paramètre réduit \widehat{V}_o est diminué, et on bascule vers la gauche (vers la Zone II). A l'inverse, si on diminue la fréquence, le paramètre \widehat{V}_o augmente, et alors on bascule vers la Zone I (vers le côté droit), où le paramètre n_o intervient, ce qui est en conformité avec ce qui a été dit auparavant. Le papier [Bertotti, 1985e] montre que, même aux fréquences industrielles, l'application de contraintes mécaniques au matériau magnétique est susceptible de le faire basculer dans la Zone I.

2.2.2.4 Présence de cycles mineurs.

Lorsque l'onde d'induction que l'on applique se trouve pourvue de cycles mineurs d'hystérésis, phénomène que nous n'avions jusque là pas considéré, les formulations doivent être modifiées et deviennent nécessairement plus approximatives. La seule façon de prendre en compte rigoureusement le problème des cycles mineurs est d'utiliser les modèles de Preisach [Mayergoyz, 1986a], mais alors, l'avantage de disposer de formules analytiques relativement simples disparaît. Néanmoins, le cas des cycles mineurs se présente assez souvent en pratique, comme nous le

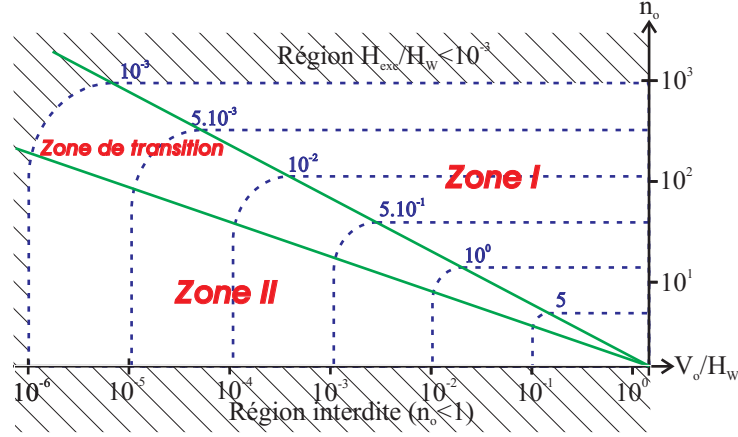


FIGURE 2.39: Représentation dans le plan (\widehat{V}_o, n_o)

voyons à la référence [Barbisio *et al.*, 2004] où les ondes d'induction relevées en différents endroits des parties ferromagnétiques d'une machine synchrone reflètent l'effet de la modulation de largeur d'impulsions utilisée pour alimenter cette machine. L'aimantation maximale du cycle principal est notée J_p , et celle de chaque cycle mineur est notée J_m , plus précisément $J_{m,i}$ (i est l'indice d'un cycle mineur sur la demi-période de fonctionnement). Notons N le nombre de cycles mineurs d'hystérésis sur une demi-période d'induction. Ce raisonnement est tenu pour une demi-période, car, de toute façon, par antisymétrie de l'onde d'induction, nous retrouvons chaque cycle mineur, opposé, à la demi-période suivante.

Pertes classiques. Les pertes classiques en présence des cycles mineurs vont s'évaluer par une formule similaire au cas sans cycle mineur, la formule 2.83 développée au paragraphe précédent restant valable.

Pertes par hystérésis. La méthode proposée par [Barbisio *et al.*, 2004], pour tenir compte des pertes par hystérésis dans le cas de cycles mineurs, est d'additionner les pertes par hystérésis que nous aurions dans le cas où le cycle principal de polarisation, d'amplitude J_p , serait seul, avec les pertes par hystérésis obtenues si les cycles mineurs étaient seuls, et qui plus est centrés sur l'origine, ce qui constitue l'hypothèse simplificatrice.

L'énergie volumique perdue de manière quasi-statique dans le cas où nous n'aurions que le cycle principal est notée $w_{hyst}(J_p)$, et celle due aux cycle mineurs (dans le cas où chaque cycle mineur serait seul et centré) est : $2 \sum_{i=1}^N w_{hyst}(J_{m,i})$, le facteur deux provenant du fait que pour avoir les pertes sur une période entière à partir de celles obtenues sur une demi-période, il suffit de multiplier par deux. Au final, on obtient :

$$w_{hyst_{TOT}} = w_{hyst}(J_p) + 2 \sum_{i=1}^N w_{hyst}(J_{m,i}) \quad (2.140)$$

Pertes excédentaires. De même que pour les pertes par hystérésis, la référence [Barbisio *et al.*, 2004] formule l'hypothèse que les pertes excédentaires peuvent être séparées en pertes dues au cycle d'hystérésis principal, notées $w_{exc}(J_p)$, et celles dues aux cycles mineurs, qui sont : $2 \sum_{i=1}^N w_{exc}(J_{m,i})$. Encore une fois, nous supposons, pour simplifier, que la position des cycles mineurs dans le cycle majeur ne va pas influencer sur le niveau des pertes excédentaires provoquées par ces cycles, ce qui constitue bien sûr une forte hypothèse simplificatrice. Au final, nous allons obtenir les pertes excédentaires suivantes, pour ce cycle majeur, en reprenant les formules précédentes, avec une fréquence de fonctionnement suffisamment grande pour que la distorsion à l'origine des pertes excédentaires puisse être négligée :

$$w_{exc_p} = \sqrt{\sigma G S V_o}(J_p) \int_{[T_p]} \left| \frac{dJ}{dt} \right|^{\frac{3}{2}} dt \quad (2.141)$$

où T_p est la durée de la période T pour laquelle nous nous trouvons sur le cycle majeur : $T_p = T - 2 \cdot \sum_{i=1}^N T_{m,i}$. Le dernier terme de cette équation est, au contraire, l'intervalle de temps sur la période T , noté T_m , que l'on passe

à parcourir les cycles mineurs : $T_m = 2 \cdot \sum_{i=1}^N T_{m,i}$. Les pertes excédentaires dues aux cycles mineurs sont par conséquent données par la formule :

$$w_{exc_m} = 2 \sum_{i=1}^N \sqrt{\sigma GSV_o(J_{m,i})} \int_{[T_{m,i}]} \left| \frac{dJ}{dt} \right|^{\frac{3}{2}} dt \quad (2.142)$$

On remarque que le paramètre V_o est évalué pour l'amplitude maximale J_p du cycle majeur pour le calcul des pertes relatives à ce dernier, et au niveau $J_{m,i}$ de chaque cycle mineur en ce qui concerne les pertes excédentaires que ceux-ci provoquent.

Au final, les pertes excédentaires, en présence de cycles mineurs, seront données par la formule :

$$w_{exc_{TOT}} = w_{exc_p} + w_{exc_m} \quad (2.143)$$

2.2.3 Etude des pertes en champ bidimensionnel.

L'objectif de cette partie concerne l'étude des pertes fer lorsque le champ appliqué ne comporte non pas une seule composante, mais deux. En effet, l'expérience montre que ce cas est fréquent en électrotechnique. Les culasses des machines électriques, ou alors même les joints en forme de T des transformateurs triphasés sont soumis à des sollicitations d'induction comportant deux composantes. Hélas, contrairement à la partie qui précède sur les pertes en champ unidirectionnel, il n'existe pas de méthodes systématique afin de modéliser ces phénomènes de champs bidirectionnels. En revanche, nous allons montrer qu'après avoir appréhendé de manière phénoménologique les phénomènes, il est tout-à-fait possible, au prix d'un nombre réduit de caractérisations expérimentales, de déterminer les pertes pour des formes elliptiques, voire même quelconques, de lieux d'induction. Dans un premier temps, nous nous proposons de présenter un modèle phénoménologique permettant de comprendre la problématique des pertes en champ tournant. Une fois ceci fait, nous nous proposerons de donner des méthodes permettant de calculer ces pertes dans le cas de lieux d'induction bidirectionnels quelconques. Enfin, bien entendu, nous allons présenter plus particulièrement les méthodes de mesures que nous avons utilisées.

2.2.3.1 Une étude simplifiée : le modèle de Stoner et Wohlfarth (1948)

Nous allons ci, en guise d'introduction, exposer le modèle de Stoner et Wohlfarth [Stoner et Wohlfarth, 1948, Bertotti, 1998]. Ce modèle mathématique se fonde sur un matériau très simplifié, constitué de particules sans domaine magnétique, et indépendantes les unes des autres, les mécanismes d'inversion de l'aimantation se faisant par rotation cohérente. Il permet de mettre en lumière certains aspects concernant l'hystérésis en champ tournant en comparaison de celui observé en champ alternatif, comme la réduction des pertes lorsque le champ appliqué est important.

On considère une particule isolée mono-domaine (figure 2.40), d'aimantation à saturation M_S , possédant une anisotropie uniaxiale. La seule variable d'état du système est l'angle θ que fait l'axe d'aimantation de la particule avec l'axe de facile aimantation. On suppose que son énergie libre suit la loi suivante :

$$f(\theta) = K \sin^2(\theta) \quad (2.144)$$

La constante K traduit l'anisotropie de la particule étudiée. L'énergie libre de cette dernière, dont le volume est noté V , va alors s'écrire, en notant \vec{H}_a le champ magnétique appliqué :

$$G_L(\theta, \vec{H}_a) = V \left[K \sin^2(\theta) - \mu_0 \vec{M}_S \vec{H}_a \right] = V \left[K \sin^2(\theta) - \mu_0 M_S H_a \cos(\theta - \theta_H) \right] \quad (2.145)$$

On introduit la normalisation : $g_L = \frac{G_L}{2KV}$, et $\vec{h}_a = \frac{\vec{H}_a}{H_{AN}}$, où $H_{AN} = \frac{2K}{\mu_0 M_S}$ (H_{AN} étant le champ d'anisotropie, c'est-à-dire le champ magnétique nécessaire à appliquer suivant l'axe de difficile aimantation pour faire passer l'aimantation de l'axe de facile aimantation vers le petit axe). L'énergie libre normalisée devient donc :

$$g_L(\theta, \vec{h}_a) = \frac{1}{2} \sin^2(\theta) - \vec{m} \vec{h}_a = \frac{1}{2} \sin^2(\theta) - h_a \cos(\theta - \theta_H) = \frac{1}{2} \sin^2(\theta) - h_{\perp} \sin(\theta) - h_{//} \cos(\theta) \quad (2.146)$$

Etant donné la forme de l'énergie libre, qui possède deux minima si $h_a = 0$, il est clair que, en champ faible, g_L possède encore deux minima, alors que, comme nous l'avons vu lors de la présentation sur l'hystérésis, un de ces

minima disparaît lorsque le champ est augmenté, provoquant un saut de Barkhausen si le système se trouvait dans cet état d'énergie métastable. La limite entre la présence des deux minima et d'un seul minimum se caractérise par la relation suivante :

$$\begin{cases} \frac{dg_L}{d\theta} = 0 \\ \frac{d^2g_L}{d\theta^2} = 0 \end{cases} \quad (2.147)$$

En résolvant le système précédent, on va trouver les solutions suivantes :

$$\begin{cases} h_{\perp} = \sin^3(\theta) \\ h_{//} = -\cos^3(\theta) \end{cases} \quad (2.148)$$

L'équation précédente est exactement la courbe paramétrée d'une astroïde dans le plan $(h_{\perp}, h_{//})$ (figure 2.41) : à l'intérieur de l'astroïde, il y a deux minima d'énergie, et seulement un à l'extérieur. Stoner et Wohlfarth [Stoner et Wohlfarth, 1948] ont montré que, pour trouver les états stables (pour lesquels l'énergie g_L est minimale) pour une combinaison $(h_{\perp}, h_{//})$ de champ magnétique appliqué donnée, il suffisait, à partir du point considéré dans le plan $(h_{\perp}, h_{//})$, de tracer les tangentes à l'astroïde qui passent par ce point. Qui plus est, grâce aux propriétés mathématiques de l'astroïde, il est remarquable que l'angle θ que fait l'aimantation \vec{m} avec l'axe de facile aimantation est directement la valeur du paramètre de la courbe au niveau du point de contact avec la tangente, et cet angle est également celui que fait la dite tangente avec l'axe $(0h_{//})$ (voir la figure 2.41). Cependant, il est important de prendre garde au fait que, comme montré également sur la figure 2.41, le point caractéristique de l'excitation $(h_{\perp}, h_{//})$ et les points d'intersection entre la courbe et ses tangentes passant par ce point doivent se situer du même côté de l'axe vertical $(0h_{//})$, sans quoi nous obtiendrons des états d'énergie instables (en fait, ce sont des maxima d'énergie libre). Connaissant ces règles, on peut ainsi déterminer de manière géométrique (figure 2.42) les deux états d'énergies stables lorsque le point $(h_{\perp}, h_{//})$ se situe à l'intérieur de l'astroïde (car deux tangentes stables peuvent alors être tracées), ainsi que le seul état d'énergie stable lorsque le point $(h_{\perp}, h_{//})$ se situe à l'extérieur de l'astroïde (car une seule tangente stable peut être tracée dans ce cas). Lorsque le point $(h_{\perp}, h_{//})$ est localisé à l'intérieur de l'astroïde, l'état stable qui est réalisé dépend en fait de l'histoire du matériau. Si on augmente alors l'amplitude du champ de telle manière à traverser l'astroïde, l'état métastable qui correspond à un vecteur \vec{m} tangent à la courbe au moment où on la traverse (figure 2.42) disparaît, et si le système était dans cet état, un saut de Barkhausen irréversible, avec dissipation d'énergie, se produit alors.

A partir de ce formalisme, il est possible de déterminer de manière qualitative le comportement en champ alternatif (figure 2.43) : si l'amplitude du champ est trop faible (elle n'atteint pas l'astroïde), l'état du système dépend de son histoire, et il n'y a aucun saut de Barkhausen. En revanche, si l'amplitude du champ alternatif appliqué dans la direction considérée dépasse l'astroïde, alors des sauts de Barkhausen vont se produire deux fois par cycle (figure 2.43). Ceci va se traduire par des dissipations d'énergie, et une inversion d'aimantation dans la direction considérée. En effet, l'aimantation normalisée vue dans la direction d'application du champ \vec{H}_a est directement donnée par la quantité $m_H = \cos(\theta - \theta_H)$.

Afin d'étudier la forme des cycles d'hystérésis obtenus en champ alternatif en fonction de l'angle d'application θ_H du champ d'excitation, l'auteur de [Bertotti, 1998] a exprimé l'énergie libre en fonction de m_H .

$$g_L(m_H; h_a, \theta_H) = f_{\pm}(m_H; \theta_H) - h_a m_H = \frac{1}{4} + \frac{1 - 2m_H^2}{4} \cos(2\theta_H) \pm \frac{1}{2} m_H \sqrt{1 - m_H^2} \sin(2\theta_H) - h_a m_H \quad (2.149)$$

où le signe \pm justifie la présence de deux branches (figure 2.44). Afin de trouver le cycle $m_H(h_a)$, on résout l'équation $h_a = \frac{\partial f_{\pm}}{\partial m_H}$, ce qui est fait graphiquement à la figure 2.44 pour $\theta_H = \frac{\pi}{3}$. Le saut de Barkhausen a lieu sur l'autre courbe à lieu afin de ne pas entrer dans les parties instables. Une intégration de l'aire du cycle donnerait l'énergie perdue par cycle [Bertotti, 1998]. Il est frappant de constater que l'aire change en fonction de l'angle θ_H (figure 2.45) : l'aire est maximale pour $\theta_H = 0$ (le cycle est alors carré), et s'annule pour $\theta_H = \frac{\pi}{2}$. Les pertes par hystérésis en champ alternatif seront donc d'autant plus grandes que le champ est fort. En revanche, nous voudrions souligner le fait que malgré les hypothèses simplificatrices de ce modèle, il prévoit un comportement pour le champ tournant circulaire sur lequel nous reviendrons largement par la suite. Le cas du champ tournant circulaire est illustré sur la figure 2.46 : à condition que le champ appliqué \vec{H}_a atteigne un niveau suffisant, il y a intersection du lieu circulaire du champ dans le plan $(h_{\perp}, h_{//})$ avec l'astroïde, ce qui produit, d'après les règles énoncées auparavant, deux sauts de Barkhausen par cycle (figure 2.46). En revanche, avec cette explication on peut voir que si le module du champ

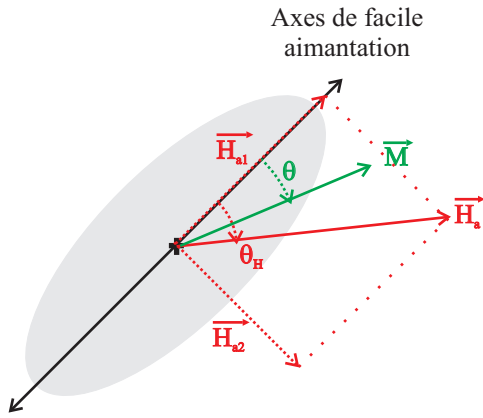


FIGURE 2.40: La particule étudiée avec anisotropie uniaxiale du modèle de Stoner et Wohlfarth

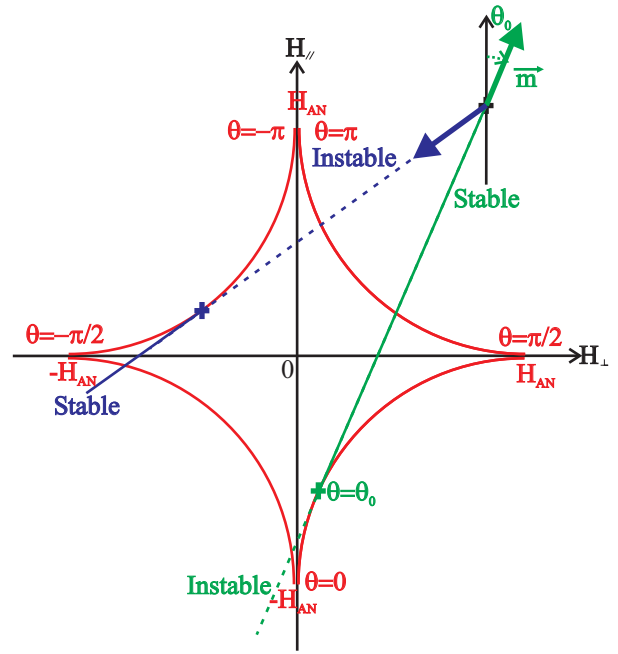


FIGURE 2.41: La stabilité des positions d'équilibre pour la particule uniaxiale

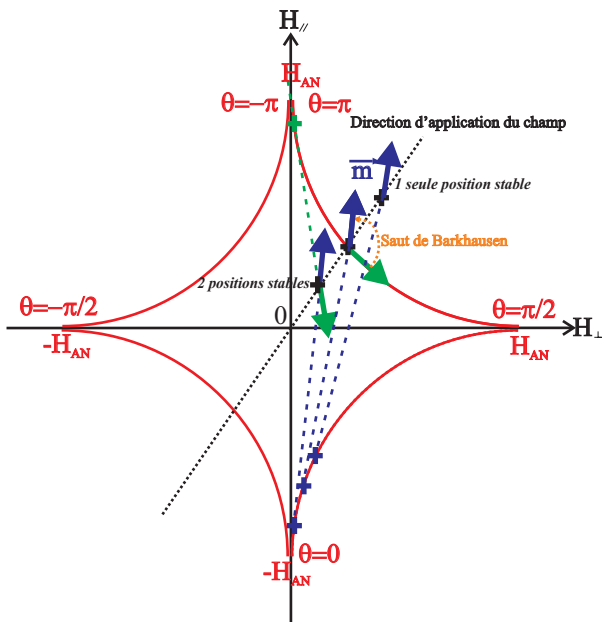


FIGURE 2.42: La stabilité des positions d'équilibre pour la particule uniaxiale

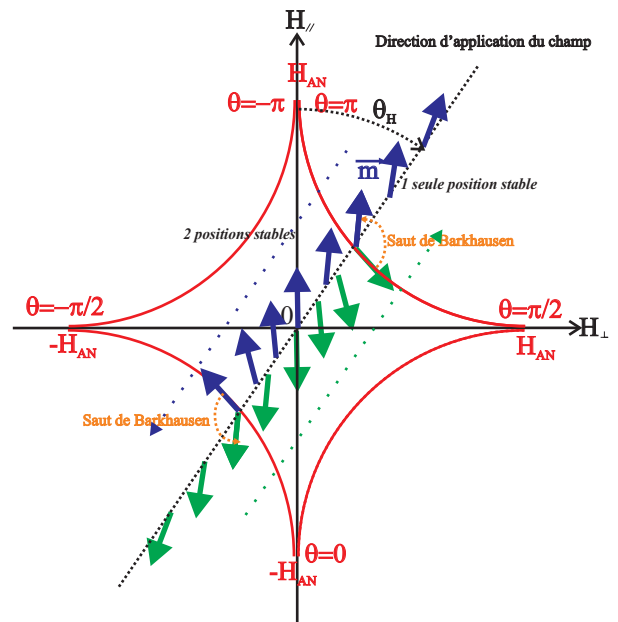


FIGURE 2.43: La stabilité des positions d'équilibre pour la particule uniaxiale

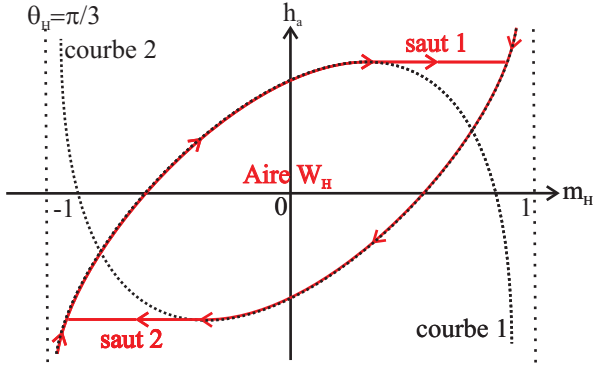


FIGURE 2.44: Cycle d'hystérésis pour $\theta_H = \frac{\pi}{3}$

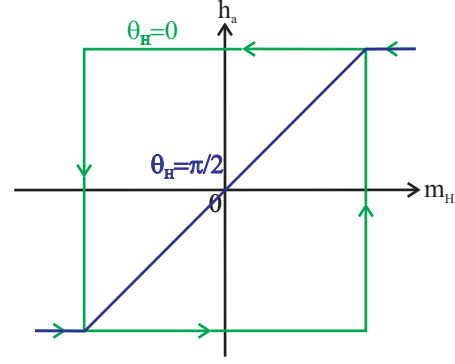


FIGURE 2.45: Cycle d'hystérésis pour $\theta_H = 0$ et $\theta_H = \frac{\pi}{2}$

appliqué \vec{H}_a devenait supérieur au champ d'anisotropie H_{AN} , alors, contrairement au cas du champ alternatif, le lieu circulaire de grand rayon ne va plus rencontrer l'astroïde. Par conséquent, en champ fort circulaire, ce modèle suggère que l'on peut s'attendre à une annulation des pertes par hystérésis. Cette conclusion se verra généralisée au cas de systèmes plus complexes, avec des domaines. Néanmoins, l'étude en champ tournant de ces systèmes ne peut se faire avec la même rigueur mathématique. Pour cette raison, une étude phénoménologique a été entreprise.

2.2.3.2 Le modèle phénoménologique des pertes en champ tournant.

Des travaux ont été entrepris dans les références [Fiorillo et Rietto, 1993, Fiorillo, 1993], afin de proposer un modèle phénoménologique des pertes par hystérésis en champ tournant, plus précisément le rapport $R_h = \frac{W_{hr}}{W_{ha}}$ entre les pertes par hystérésis en champ tournant W_{hr} et en champ alternatif W_{ha} . L'idée est de décomposer les mécanismes de magnétisation en champ tournant dans le matériau en trois catégories, suivant le niveau du champ d'excitation (bas, moyen, ou fort). En champ faible, on suppose que le mécanisme de magnétisation du matériau est dû au mouvement, dans chaque grain, de parois de Bloch à 180° , la direction de l'aimantation dans chaque grain restant invariante et fixée suivant la direction de facile aimantation qui est restée active après la démagnétisation du matériau. Pour des niveaux de champ moyen, on admet qu'un champ d'excitation tournant est susceptible de provoquer une activation séquentielle des axes de facile aimantation, par des mouvements de parois à 90° , pour tenter d'aligner le champ magnétique avec l'axe de facile aimantation. Pour les niveaux de champ fort, un troisième mécanisme intervient : celui de la rotation cohérente de l'aimantation en suivant le champ magnétique appliqué. Auquel cas, ce phénomène est réversible, et cela n'induit aucune perte quasi-statique. On note W_{wr} les pertes par hystérésis dues aux murs à 180° , et W_{sr} les pertes par hystérésis dues aux réarrangements des domaines suivant les axes de facile aimantation. Par conséquent, nous avons la relation :

$$R_h = \frac{W_{hr}}{W_{ha}} = n_w \frac{W_{wr}}{W_{ha}} + n_s \frac{W_{sr}}{W_{ha}} \quad (2.150)$$

Dans la relation précédente, on a noté n_w la contribution relative des murs à 180° dans les mécanismes d'inversion d'aimantation, n_s celle des parois à 90° , et on appelle n_c celle due aux rotations cohérentes (qui ne provoquent pas de pertes par hystérésis). Etant donné qu'il s'agit de contributions relatives, la somme de ces différents paramètres est égale à 1. Le mouvement des murs à 180° intervenant pour des niveaux de champs faibles, et les rotations cohérentes se manifestant pour les niveaux de champs forts, l'hypothèse est faite que ces deux mécanismes ne sont jamais présents en même temps, de sorte qu'en fait on vérifie en champ faible la relation $n_w + n_s = 1$, et en champ fort $n_s + n_c = 1$ (sur la figure 2.47, on a schématisé les proportions de ces mécanismes d'inversion d'aimantation en fonction de la polarisation maximale J_p).

Dans l'article [Fiorillo et Rietto, 1993], la proportion n_s de rotations séquentielles est identifiée par le biais du spectre du bruit de Barkhausen. Par différence, il est alors possible d'en déduire les autres proportions n_w et n_c . La proportion n_c de processus réversibles d'aimantation est analogue à la fonction $g(J_p)$ définie par $dJ_{p,rev} = g(J_p) dJ_p$, qui quantifie la part de la contribution réversible lors d'une variation de polarisation. Dans le cas d'un champ tournant, la polarisation maximale J_p est constante, et on a directement alors $n_c(J_p) = g(J_p)$.

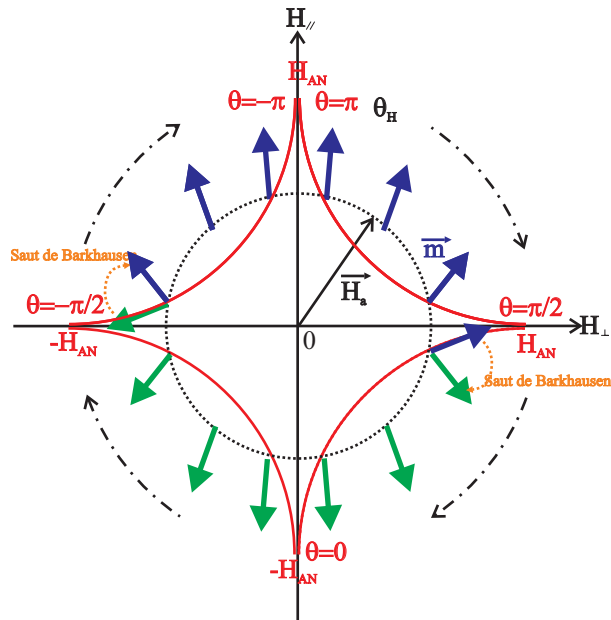


FIGURE 2.46: Excitation en champ tournant avec $|H_a| < H_{AN}$

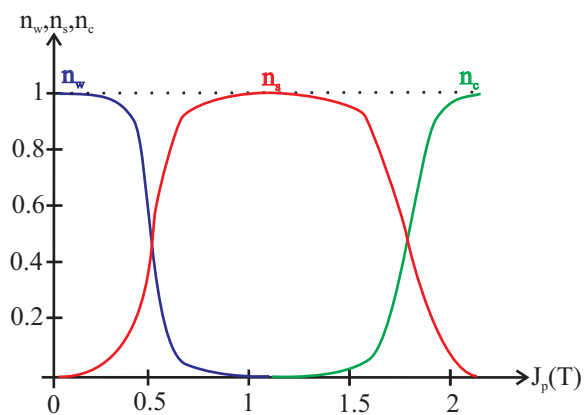


FIGURE 2.47: Les différentes proportions des phénomènes d'inversion de l'aimantation en fonction de l'induction J_p

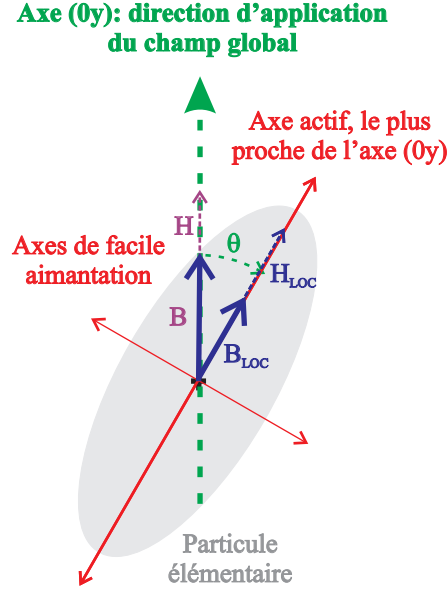


FIGURE 2.48: Comportement local d'un grain de matériau ferromagnétique polycristallin

Cas des niveaux de polarisation faibles. En champ faible, nous supposons donc que les mécanismes d'aimantation en champ tournant sont uniquement dus aux parois à 180° . La référence [Chikazumi, 1997] propose, lorsque le champ est faible, de modéliser ce cas par des courbes de Rayleigh, ce qui consiste à considérer que les cycles d'hystérésis quasi-statiques possèdent une forme parabolique. On considère que le dispositif étudié est une tôle constituée d'un matériau magnétique polycristallin isotrope. Le procédé métallurgique a permis de placer les axes de facile aimantation de manière isotrope dans le plan de la tôle, plan d'application du champ alternatif ou circulaire. Chaque grain, orienté dans une direction quelconque, est le siège d'une boucle d'hystérésis locale en forme de cycle de Rayleigh.

Sous cette hypothèse, il s'agit de calculer le rapport théorique entre pertes par hystérésis en champ circulaire et alternatif.

- Dans un premier temps, on calcule les pertes par hystérésis en champ alternatif, sous l'hypothèse des champs faibles. Nous allons supposer que l'axe d'application du champ alternatif est l'axe (Oy) . A cause du passé du matériau magnétique, qui est supposé avoir déjà été aimanté suivant cet axe (Oy) , la répartition des polarisations locales pour chaque particule est distribuée suivant un angle $\pm\Theta_0$ autour de l'axe (Oy) . D'ailleurs, la théorie des matériaux magnétiques polycristallins prévoit, pour cet angle Θ_0 , une valeur particulière de 55° ([Chikazumi, 1997]), sous l'hypothèse que les directions de facile aimantation sont réparties dans l'intégralité de l'espace en trois dimensions. Évidemment, ici, avec notre système plan, la situation est quelque peu différente, et notre angle Θ_0 sera considéré comme une valeur à identifier par la mesure. Le principe des courbes de Rayleigh est de supposer que le comportement local (figure 2.48) d'un grain du matériau, suivant l'axe de l'aimantation, est décrit par des équations paraboliques. Notons H_{pLOC} le champ magnétique maximal appliqué suivant l'axe d'aimantation d'une particule donnée. Alors l'induction B_{LOC} provoquée par ce champ magnétique local H_{LOC} est déduite par l'expression suivante :

$$B_{LOC} = (a + bH_{pLOC}) H_{LOC} \pm \frac{b}{2} (H_{pLOC}^2 - H_{LOC}^2) \quad (2.151)$$

où les constantes a et b seront appelées « constantes de Rayleigh locales », car elles servent à décrire le comportement d'une particule donnée, en champ faible. Nous avons représenté, sur la figure 2.49, l'allure du cycle d'hystérésis local ainsi décrit.

L'idée du calcul est, à partir de ces boucles locales pour chaque particule, de déduire la boucle de Rayleigh globale pour l'ensemble du matériau, suivant l'axe (Oy) d'application du champ magnétique. Le champ magnétique, appliqué suivant l'axe (Oy) , a une valeur maximale notée H_p . Pour calculer la boucle globale, on considère la figure 2.50. Nous considérons un ensemble de particules élémentaires dont d'axe d'aimantation est décalé d'un angle θ

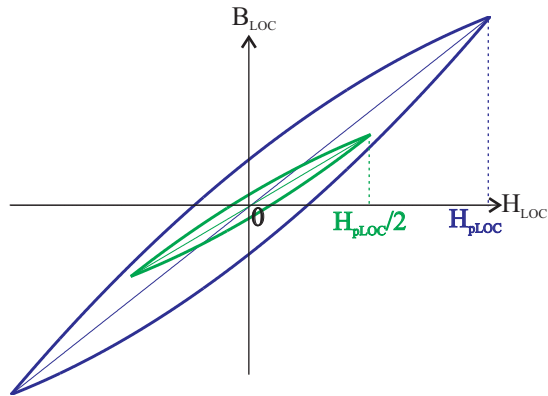


FIGURE 2.49: Allure d'un cycle de Rayleigh.

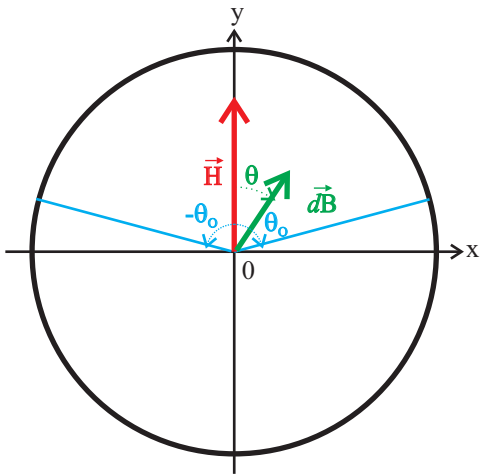


FIGURE 2.50: Principe du calcul pour le cas du champ alternatif

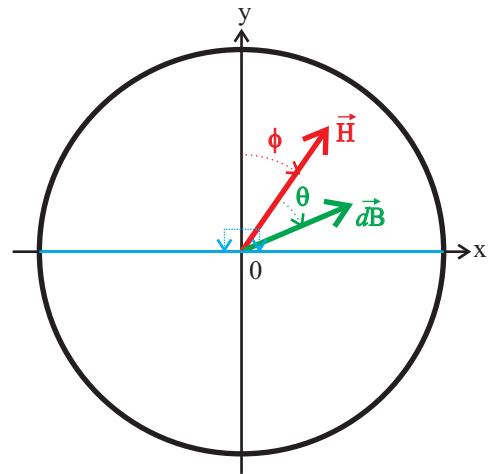


FIGURE 2.51: Principe du calcul pour le cas du champ tournant

suivant l'axe (Oy), avec une ouverture angulaire élémentaire $d\theta$. Dans ce cas, la contribution en induction suivant l'axe (Oy) de ces boucles est, en supposant que les axes d'aimantation des particules sont répartis selon une loi de probabilité uniforme $p(\theta) = \frac{1}{2\theta_0}$ sur l'intervalle angulaire $[-\theta_0; \theta_0]$:

$$dB_y(\theta) = \left[(a + bH_p \cos(\theta)) H_y \cos(\theta) \pm \frac{b}{2} (H_p^2 - H_y^2) \cos(\theta) \right] p(\theta) d\theta \quad (2.152)$$

On intègre cette expression entre les limites $-\theta_0$ et θ_0 , pour obtenir la boucle de Rayleigh globale :

$$B_y = (a_S + b_S H_p) H_y \pm \frac{b_S}{2} (H_p^2 - H_y^2) \quad (2.153)$$

où les coefficients de Rayleigh globaux sont reliées aux coefficients locaux par les relations :

$$\begin{aligned} a_S &= a \frac{(2\theta_0 + \sin(2\theta_0))}{4\theta_0} \\ b_S &= b \frac{(\cos^2(\theta_0) + 2) \sin(2\theta_0)}{3\theta_0} \end{aligned} \quad (2.154)$$

L'aire de la boucle de Rayleigh globale, donnant l'énergie perdue par cycle de manière quasi-statique en champ alternatif W_{ha} , est donnée par la relation :

$$W_{ha} = \frac{4}{3} b_S H_p^3 \quad (2.155)$$

- Dans le cas du champ tournant, il faut en déduire, en champ faible, les cycles suivant les deux axes (Ox) et (Oy), avec l'approximation des courbes de Rayleigh. Puis, d'après le théorème de Poynting, les pertes en champ tournant seront obtenues en sommant les aires des cycles suivant les deux axes. Si le matériau a déjà été excité sous un champ circulaire, les axes d'évolution de la polarisation se trouvent uniformément répartis sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, c'est-à-dire dans l'intégralité de la partie supérieure du plan de la figure. Nous supposons toujours cette répartition équiprobable, avec une densité de probabilité $p(\theta) = \frac{1}{\pi}$. Considérons un champ magnétique tournant, d'amplitude toujours H_p , qui se trouve, à un instant donné, dans une position ϕ par rapport à l'axe (Oy) (figure 2.51), et qui tourne dans le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre. Les particules considérées ont elles-mêmes leur axe de polarisation dans un angle θ par rapport au champ H_p . Auquel cas, d'après le formalisme précédent, la contribution en induction suivant l'axe (Oy) des particules décalées d'un angle θ par rapport au champ H_p , et comprises dans un angle d'ouverture élémentaire $d\theta$, est :

$$dB_y(\theta) = \left[(a + b.H_p) H_p \cos(\theta) \cos(\phi + \theta) \pm \frac{b}{2} (1 - \cos^2(\theta)) \cos(\phi + \theta) H_p^2 \right] p(\theta) .d\theta \quad (2.156)$$

Nous intégrons alors, pour un angle θ variant entre $-\frac{\pi}{2} - \phi$ et $\frac{\pi}{2} - \phi$, et nous allons obtenir l'induction $B_y(\phi)$. Néanmoins, nous devons prendre en compte le fait suivant : étant donné le sens de rotation anti-horaire du champ magnétique, les particules situées sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2} - \phi; 0]$ voient un champ magnétique décroissant : elles sont donc dans une phase descendante pour leur cycle d'hystérésis local, et l'équation 2.156 doit être considérée avec un signe $+$ au niveau du second membre, lors de l'intégration. A l'inverse, les particules situées sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2} - \phi]$ voient un champ magnétique croissant : elles sont donc dans une phase ascendante pour leur cycle d'hystérésis local, et l'équation 2.156 doit être considérée avec un signe $-$ au niveau du second membre, lors de l'intégration. En divisant l'intervalle d'intégration en deux parties à cause de ce problème, nous allons obtenir, pour l'induction suivant d'axe(Oy), notée $B_y(\phi)$:

$$\begin{cases} B_y(\phi) &= \frac{1}{2} (a + bH_p) H_p \cos(\phi) \pm \frac{2}{3\pi} bH_p^2 \sin(\phi) \\ H_y(\phi) &= H_p \cos(\phi) \end{cases} \quad (2.157)$$

Nous éliminons l'angle ϕ entre les deux relations précédentes, pour obtenir la relation entre B_y et H_y :

$$B_y = \frac{1}{2} (a + bH_p) H_y \pm \frac{2}{3\pi} bH_p \sqrt{H_p^2 - H_y^2} \quad (2.158)$$

Un résultat équivalent s'obtiendrait suivant l'axe (Ox).

Le résultat remarquable est que, dans le cas d'un champ tournant, la relation entre l'induction et le champ

magnétique suivant chacun des axes n'est plus un cycle de Rayleigh, mais une ellipse, dont l'aire est donnée par la formule : $\frac{2}{3}.b.H_p^3$. En multipliant par deux cette aire (pour tenir compte des deux axes), nous trouvons des pertes par hystérésis en champ tournant données par :

$$W_{hr} = \frac{4}{3}bH_p^3 \quad (2.159)$$

En conclusion, on peut en déduire, en champ faible, le rapport entre pertes par hystérésis en champ tournant et en champ alternatif :

$$R_{hra} = \frac{W_{hr}}{W_{ha}} = \frac{b_S}{b} = \frac{(\cos^2(\theta_0) + 2) \sin(2\theta_0)}{3\theta_0} \quad (2.160)$$

Pour les tôles Fe-Si courantes, en champ faible, nous trouvons des rapports entre pertes par hystérésis en champ circulaire et en champ alternatif compris entre trois et quatre, ce qui demande de prendre un angle θ_0 voisin de 70° . Néanmoins, l'hypothèse de rapports entre pertes par hystérésis en champ circulaire et pertes en champ alternatif constants (indépendants du champ magnétique maximal appliqué H_p) est en contradiction avec l'expérience, puisque les pertes en champ circulaire, qui, bien qu'importantes en champ faible, tendent à diminuer, et même à s'annuler pour des états voisins de la saturation du matériau. En effet, non seulement les approximations des cycles à des boucles de Rayleigh ne sont plus valables, mais surtout l'hypothèse d'une polarisation figée suivant un seul axe n'est plus réaliste. L'explication des phénomènes pour les niveaux de champ plus importants va être donnée ci-dessous, en introduisant notamment les rotations séquentielles des parois à 90° ainsi que les rotations cohérentes d'aimantation.

Cas des niveaux de polarisation moyens. Par opposition à ce que l'on vient de considérer précédemment, nous allons, dans cette partie, supposer que cette fois, il peut y avoir un mouvement des axes d'aimantation au sein du matériau, et proposer une approche qualitative du phénomène. Pour ceci, nous allons adopter un modèle schématique du matériau constitué de domaines de Weiss séparés par des parois à 180° et à 90° , mais en supposant que, cette fois, les parois à 90° peuvent se déplacer.

Les axes de facile aimantation sont les axes (Ox) et (Oy) (figure 2.52). Les murs de domaines à 180° se situent suivant ces axes de facile aimantation. Par contre, comme suggéré à la figure 2.52, l'aimantation globale du matériau s'aligne sur le champ tournant d'amplitude H_p par déplacement des parois à 90° . L'analyse du cycle d'hystérésis suivant chaque axe de facile aimantation montre la forme schématique de la figure 2.53. Nous voyons ainsi que le cycle suivant chaque axe de facile aimantation est très modifié, par rapport à son allure en champ strictement alternatif. On conçoit que l'aire du cycle d'hystérésis sur chaque composante d'axe (Ox) et (Oy) en champ circulaire est bien plus faible que l'aire que l'on aurait si un champ purement alternatif, de même amplitude, était appliqué selon cet axe. Par contre, il faut, pour obtenir l'intégralité de la puissance perdue de manière quasi-statique, multiplier l'aire dessinée par deux, pour tenir compte de l'aspect bidimensionnel du problème. On en déduit le résultat qualitatif suivant : en champ circulaire, pour des niveaux de champ moyen, la mise en mouvement des parois à 90° permet de diminuer l'aire du cycle d'hystérésis parcouru par chaque composante du champ. De ce fait, le rapport entre les pertes en champs circulaire et alternatif dans ce cas va vérifier la relation suivante, pour un niveau de champ moyen :

$$R_{hra} = \frac{W_{hr}}{W_{ha}} < 2 \quad (2.161)$$

(si on approxime, au niveau de la figure 2.53, l'aire du cycle suivant un axe en champ circulaire à la moitié de l'aire du cycle en champ alternatif, que ce rapport tend vers l'unité).

Cas des niveaux de polarisation importants. Nous qualifions de niveaux de polarisation importants ceux qui amènent le matériau à des états voisins de la saturation. Auquel cas, il convient de se demander que deviennent les pertes par hystérésis en champ circulaire. D'un point de vue qualitatif, si on applique un champ dont l'amplitude sature le matériau, les domaines vont disparaître (figure 2.54). Si ce champ se met à tourner, en conservant la même amplitude au cours de la rotation, l'aimantation va tourner de manière cohérente pour suivre la rotation du champ magnétique, et les domaines ne se reformeront pas. Eventuellement, comme le montre la figure 2.54, lorsque le champ ne sera plus dans l'axe de facile aimantation du matériau, il va y avoir un décalage angulaire entre les deux vecteurs, qui va s'annuler lorsque le champ va passer de nouveau dans un axe de facile aimantation.

En conséquence, en champ tournant fort, l'absence de reformation des domaines va considérablement réduire, et même annuler les pertes non-maxwelliennes. Il ne restera plus que les pertes classiques à considérer, pour lesquelles le découplage des axes fonctionne correctement.

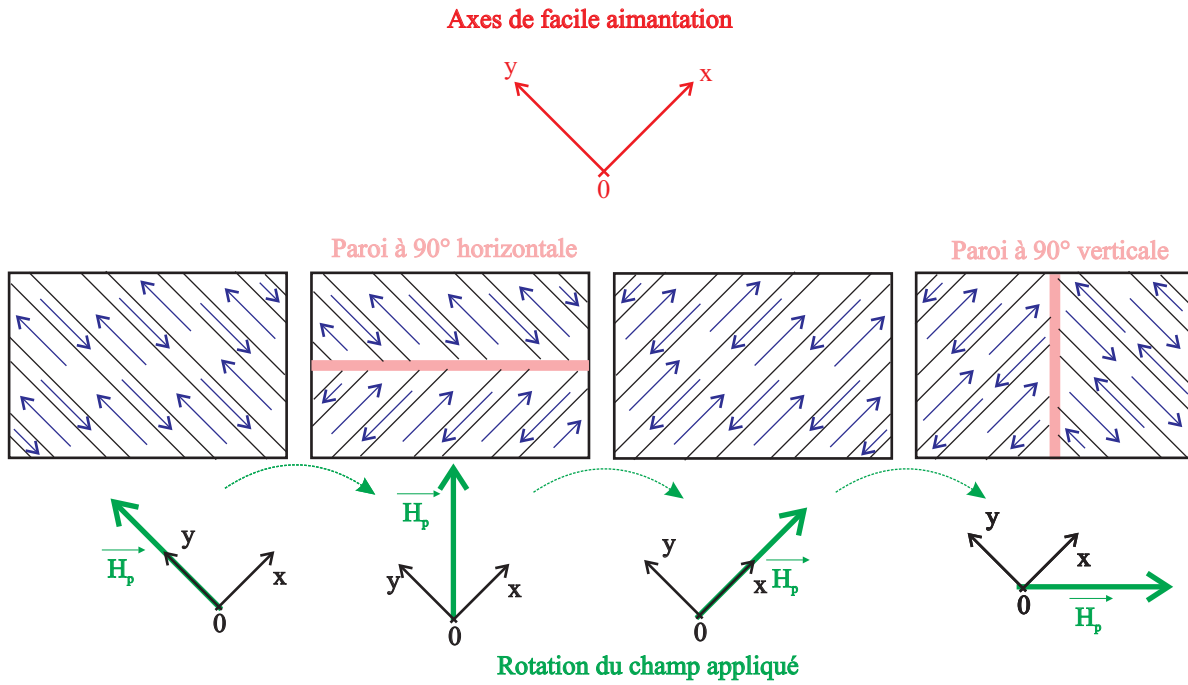


FIGURE 2.52: Le déplacement des parois à 90° lors de la rotation du champ H_p .

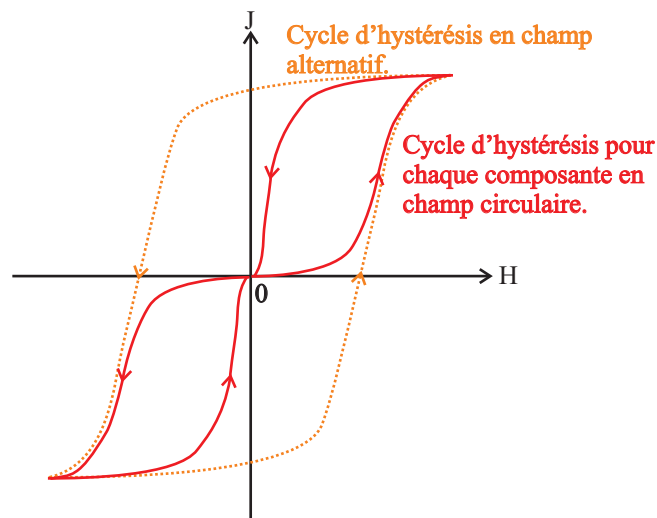


FIGURE 2.53: Le cycle d'hystérésis sur chaque composante d'axe (Ox) et (Oy) en champ circulaire.

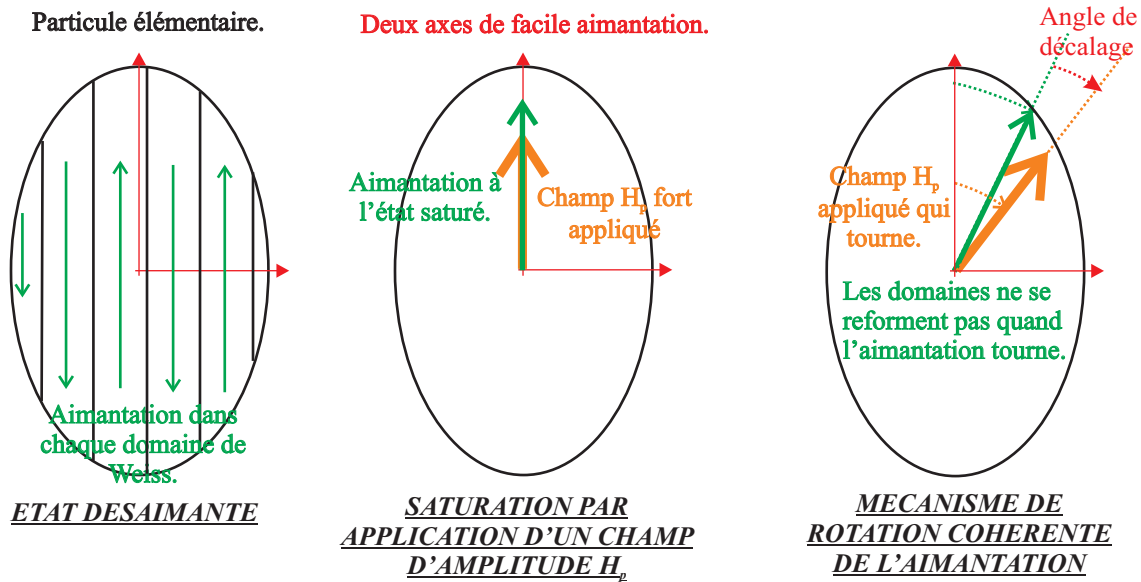


FIGURE 2.54: Annulation des pertes par hystérésis en champ fort à cause de la disparition des domaines de Weiss.

Pour montrer le bien-fondé de ces explications phénoménologiques, nous terminons en montrant à la figure 2.55 l'allure du rapport entre les pertes par hystérésis en champ circulaire et alternatif sur une tôle fer-silicium 3% à grains non-orientés de 0.35mm d'épaisseur (référence [Appino *et al.*, 2007, Ragusa *et al.*, 2007]). Sur la figure 2.55, les pertes par hystérésis ont été déduites de mesures en champ alternatif et en champ circulaire à une fréquence de 50Hz pour différentes inductions maximales B_p , puis ont fait l'objet d'une procédure de séparation des pertes afin d'en déduire la composante quasi-statique (voir partie suivante). Comme nous l'avons signalé lors de la rubrique consacrée aux mesures des pertes, nous pouvons y voir des pertes trouvées par deux méthodes de mesure : d'une part, en champ faible, la méthode fondée sur la mesure du champ magnétique, et, d'autre part, en champ fort, la méthode thermométrique.

2.2.3.3 Les modèles de déduction des pertes en champ tournant à partir de mesures.

L'objectif de cette partie est de montrer que, à partir d'un nombre restreint de mesures de pertes en champ alternatif et en champ circulaire, il est possible d'en déduire les pertes pour un lieu bidimensionnel d'induction quelconque. Dans une première partie, nous allons donc nous intéresser à la caractérisation des pertes en champ circulaire, qui est le point de départ de cette théorie. Ensuite, nous allons voir comment nous pouvons en déduire les pertes pour des lieux d'inductions elliptiques. Enfin, nous généraliserons à un lieu bidimensionnel quelconque d'induction.

Hypothèse de la décomposition des pertes en champ bidimensionnel. Considérons une tôle, et excitons cette dernière au moyen d'une onde d'induction bidimensionnelle circulaire, située dans le plan de cette tôle. Notons f la fréquence de rotation de cette onde circulaire, et J_p l'amplitude de la polarisation, que nous confondons, comme auparavant, avec l'induction. Nous supposons, comme toujours auparavant, que la fréquence demeure assez faible pour que l'effet de peau puisse être négligé. Nous faisons l'hypothèse que la théorie de la décomposition des pertes, bien connue pour des excitations par induction alternative, est toujours valable en champ bidimensionnel. En particulier, l'énergie perdue par cycle et par unité de masse en champ circulaire est donnée par la formule :

$$w^{circ}(f, J_p) = w_{hyst}^{circ}(J_p) + w_{exc}^{circ}(f, J_p) + w_{class}^{circ}(f, J_p) \quad (2.162)$$

On détaille tous les termes de pertes précédents.

Les pertes classiques. Les pertes classiques en champ circulaire, que nous avons notées $w_{class}^{circ}(f, J_p)$, sont parfaitement connues du moment que l'effet de peau est effectivement négligeable. On donne directement leur

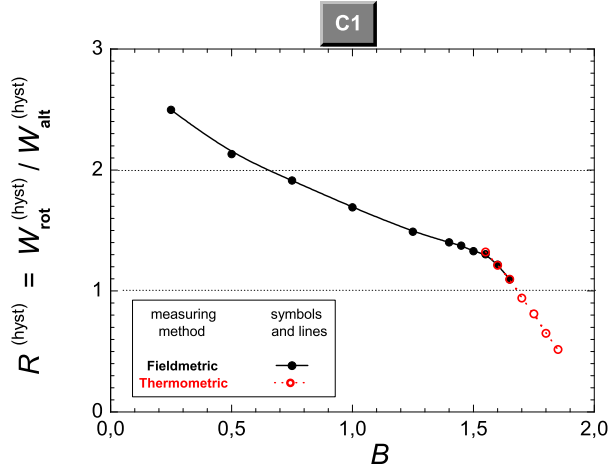


FIGURE 2.55: Rapport entre les pertes par hystérésis en champ circulaire et alternatif sur une tôle fer-silicium 3% à grains non-orientés de 0.35mm d'épaisseur

expression pour un lieu d'induction elliptique, tournant à la fréquence f , avec un grand axe d'ellipse dont la polarisation maximale est notée J_p , tandis que cette dernière sera notée J_m pour le petit axe. Nous pouvons aussi appeler a le rapport entre ces polarisations maximales suivant le petit axe et suivant le grand axe : $a = \frac{J_m}{J_p}$. Nous avons aussi vu que, pour les pertes classiques, le découplage des axes est toujours valable. Par conséquent, si on a :

$$\vec{J}(t) = \begin{cases} J_p \cos(2\pi f.t) & \text{sur l'axe (Ox)} \\ J_m \sin(2\pi f.t) & \text{sur l'axe (Oy)} \end{cases} \quad (2.163)$$

où le grand axe de l'ellipse est l'axe (Ox) , le petit axe est (Oy) , tous deux dans le plan de la tôle. Alors, d'après la formule 2.85 vue précédemment, nous pouvons donner les pertes classiques pour le lieu d'induction dont nous parlons (références [Appino *et al.*, 2007, Ragusa *et al.*, 2007]) :

$$w_{class}^{2D} = \frac{\pi^2}{6} \sigma d^2 J_p^2 f^2 (1 + a^2) \quad (2.164)$$

Dans le cas particulier d'un lieu d'induction circulaire de fréquence f et de polarisation d'amplitude J_p , nous vérifions la condition $a = 1$, et l'énergie perdue par cycle devient alors :

$$w_{class}^{circ} = \frac{\pi^2}{3} \sigma d^2 B_p^2 f^2 \quad (2.165)$$

Ainsi, le rapport obtenu entre les pertes en champ circulaire et alternatif est constant, et vaut exactement :

$$R_{class}^{circ} = 2 \quad (2.166)$$

Les pertes par hystérésis. Nous avons vu qu'en l'absence d'effet de peau, les pertes par hystérésis $w_{hyst}^{alt}(J_p)$ sont indépendantes de la fréquence. Nous faisons l'hypothèse que ceci reste vrai pour les pertes par hystérésis $w_{hyst}^{circ}(J_p)$ en champ circulaire. Le rapport entre ces deux quantités sera donc aussi indépendant de la fréquence. D'après l'étude précédente, nous avons mis en évidence, par un modèle phénoménologique, une décroissance du rapport entre pertes en champ circulaire et en champ alternatif $R_{hyst}^{circ}(J_p) = \frac{w_{hyst}^{circ}(J_p)}{w_{hyst}^{alt}(J_p)}$ en fonction de l'amplitude J_p de la polarisation : ce rapport est supérieur à deux pour les niveaux de polarisation faible, passe au voisinage de l'unité pour une polarisation d'amplitude moyenne, et s'annule rigoureusement pour une polarisation voisine de la saturation. Ce phénomène sera totalement décrit si nous dressons, par des méthodes expérimentales, une table des rapports $R_{hyst}^{circ}(J_p)$, comme ce qui a été montré au niveau de la figure 2.55.

Les pertes excédentaires. Nous avons vu que les pertes excédentaires, en champ alternatif, trouvent leur origine dans un phénomène de couplages statistiques lors du déplacement des parois de Bloch. L'expression analytique de ces pertes, pour une polarisation d'excitation sinusoïdale d'amplitude J_p , est donnée, quelle que soit la fréquence (y compris pour les fréquences les plus basses), par la formule 2.136. Sous réserve que la fréquence est assez grande, il est possible de simplifier cette formule, pour faire apparaître une dépendance simple en fonction de la fréquence d'excitation : l'énergie perdue par cycle devient le produit de deux termes, le premier reflétant une dépendance complexe en fonction de l'induction maximale J_p , et le second étant la racine carré de la fréquence \sqrt{f} :

$$w_{exc}^{alt}(J_p, f) = 8,76 \sqrt{\sigma G S V_o(J_p)} \cdot J_p^{\frac{3}{2}} \cdot f^{\frac{1}{2}} \quad (2.167)$$

Nous rappelons que cette simplification n'est valable que pour des fréquences suffisamment grandes (c'est le cas pour les fréquences industrielles qui nous intéressent), quitte à corriger éventuellement ces pertes par un facteur de décalage constant, par le remplacement dans l'expression des pertes par hystérésis de $w_{hyst}(J_p)$ par $w_{hyst1}(J_p) = w_{hyst}(J_p) - 2n_o(J_p) V_o(J_p) J_p$.

Quant à l'évaluation des pertes excédentaires dans le cas d'une excitation circulaire de fréquence f et d'amplitude J_p , il n'est pas possible de proposer un modèle statistique rigoureux. Tout au plus pouvons nous dire que, à cause de la disparition des parois dues à la rotation cohérente de l'aimantation, les pertes excédentaires vont, elles aussi, s'annuler pour des polarisations voisines de la saturation du matériau. Nous allons faire l'hypothèse que les pertes excédentaires, en champ circulaire, sont données, pour des fréquences suffisamment importantes, par une formule similaire à celle des pertes en champ alternatif, c'est-à-dire que nous aurons (références [Fiorillo, 1993] et [Appino *et al.*, 2007, Ragusa *et al.*, 2007]) :

$$w_{exc}^{circ}(J_p, f) = E^{circ} \sqrt{\sigma G S^{circ}(J_p) V_o^{circ}(J_p)} J_p^{\frac{3}{2}} f^{\frac{1}{2}} \quad (2.168)$$

En effet, dans le cas du champ circulaire, la section active du matériau pour les pertes dépend à priori de la polarisation pic J_p , la définition de cette section n'étant plus aussi triviale que dans le cas alternatif (référence [Fiorillo, 1993]). Le champ magnétique $V_o^{circ}(J_p)$ lui aussi, va être bien sûr modifié, de manière à transcrire la forte décroissance puis l'annulation des pertes en champ circulaire pour des inductions d'excitation fortes, ce qui diffère du cas des champs alternatifs. En fait, toutes ces différences par rapport au cas du champ alternatif sinusoïdal peuvent se trouver, d'un point de vue phénoménologique, regroupées dans le terme $V_o^{circ}(J_p)$, et les auteurs de la référence [Appino *et al.*, 2007, Ragusa *et al.*, 2007] retiennent simplement la formule, pour les pertes excédentaires en champ circulaire :

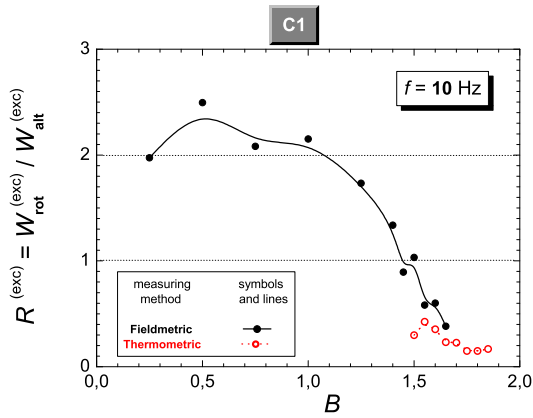
$$w_{exc}^{circ}(J_p, f) = 8.76 \sqrt{\sigma G V_o^{circ}(J_p)} J_p^{\frac{3}{2}} f^{\frac{1}{2}} \quad (2.169)$$

Nous voyons que le paramètre important, afin de décrire l'évolution des pertes en champ circulaire, est encore une fois le rapport entre les pertes en champ circulaire, et en champ alternatif :

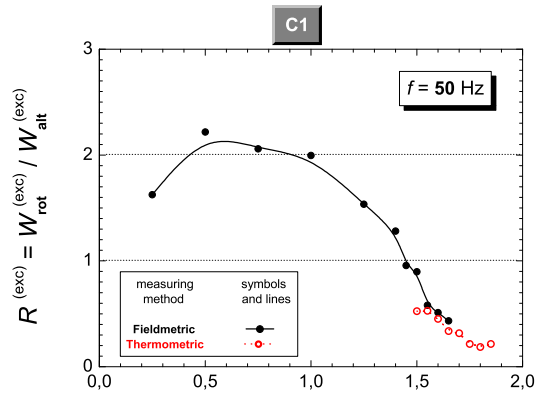
$$R_{exc}^{circ}(J_p) = \frac{w_{exc}^{circ}(J_p, f)}{w_{exc}^{alt}(J_p, f)} = \sqrt{\frac{V_o^{circ}(J_p)}{V_o(J_p)}} \quad (2.170)$$

Le fait que ce rapport soit indépendant de la fréquence de fonctionnement est fondamental pour le calcul pratique des pertes : en effet, il est possible de tabuler, à partir de mesures expérimentales, ce rapport en fonction de l'amplitude de la polarisation J_p , et la composante de pertes excédentaires pour toute fréquence s'en déduira automatiquement. Cette indépendance en fonction de la fréquence n'est plus vraie en basse fréquence, l'influence de cette dernière ne se résumant plus à un facteur multiplicatif se simplifiant lors du rapport. Cette hypothèse d'indépendance du rapport des pertes excédentaires en fonction de la fréquence a été montrée expérimentalement dans la référence [Appino *et al.*, 2007, Ragusa *et al.*, 2007] : sur la figure 2.56, nous avons représenté le rapport entre les pertes excédentaires en champ circulaire et alternatif provenant des mesures effectuées à 10Hz, 50Hz, ainsi que 100Hz. L'observation des résultats montre que l'hypothèse semble véridique.

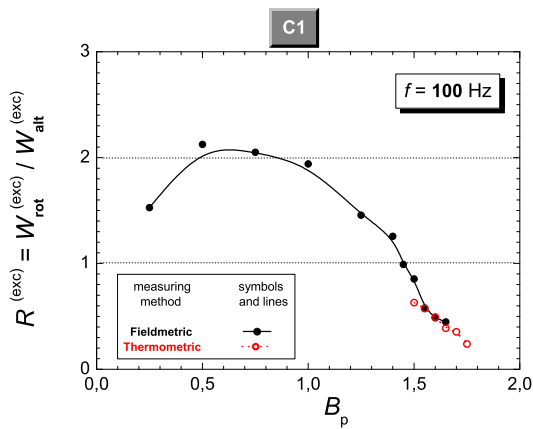
Extension de la méthode pour les champs de type elliptique. Dans la partie précédente, nous avons mis en évidence le fait que, pour caractériser les pertes en champ circulaire pour une amplitude J_p de polarisation, il suffisait de calculer théoriquement les pertes en champ alternatif sinusoïdal, plus précisément les trois types de pertes : classiques, par hystérésis, et excédentaires. Ensuite, connaissant, d'après une étude expérimentale, le



(a) Pour $f = 10 \text{ Hz}$



(b) Pour $f = 50 \text{ Hz}$



(c) Pour $f = 100 \text{ Hz}$

FIGURE 2.56: Représentation d'après les références [Appino *et al.*, 2007, Ragusa *et al.*, 2007] du rapport des pertes excédentaires en champ circulaire et alternatif pour différentes fréquences

rapport entre les pertes en champ circulaire et en champ alternatif pour chaque terme de pertes (qui, on l'a vu, est indépendant de la fréquence), nous pouvons trouver chaque composante de pertes en champ circulaire. Néanmoins, il se pose la question de savoir comment procéder, si l'excitation considérée n'est pas rigoureusement circulaire, mais, plus généralement, elliptique. L'équation de la polarisation est donc donnée par l'équation 2.163, où l'axe (Ox) est le grand axe de l'ellipse, selon lequel l'amplitude de la polarisation vaut J_p , et le petit axe de l'ellipse est (Oy), qui voit une polarisation d'amplitude $J_m \leq J_p$. Nous appelons a le rapport entre le petit axe et les grand axe : $a = \frac{J_m}{J_p}$. Les pertes classiques, comme on l'a déjà dit, sont données par la formule 2.164.

Les pertes par hystérésis. La référence [Appino *et al.*, 2007, Ragusa *et al.*, 2007] propose une formule d'interpolation entre pertes par hystérésis en champ alternatif, et pertes en champ circulaire, afin de trouver les pertes en champ elliptique. Il faut, si le rapport a est nul, retrouver les pertes par hystérésis en champ alternatif sinusoïdal avec une amplitude J_p , et, si le rapport a est unitaire, retrouver les pertes par hystérésis en champ circulaire. Il s'agit de :

$$w_{hyst}^{2D}(J_p) = w_{hyst}^{alt}(J_p) + [w_{hyst}^{circ}(J_p) - w_{hyst}^{alt}(J_p)] a^r \quad (2.171)$$

où le paramètre r est déterminé par l'expérience. Cette formule peut être aussi vue comme une généralisation de la formule 2.164 pour les pertes classiques. Nous pouvons aussi écrire cette formule sous la forme suivante, pour faire apparaître le rapport entre pertes en champ circulaire et champ alternatif, que nous avons introduit précédemment :

$$w_{hyst}^{2D}(J_p) = w_{hyst}^{alt}(J_p) \{1 + [R_{hyst}^{circ}(J_p) - 1] a^r\} \quad (2.172)$$

Par exemple, dans le cas des tôles FeSi, $r \approx 1,8$. Généralement, on admet que $w_{hyst}^{alt}(J_p) \propto J_p^r$, donc, sachant que $J_m = a.J_p$, on peut écrire la relation :

$$w_{hyst}^{2D}(J_p) = w_{hyst}^{alt}(J_p) + w_{hyst}^{alt}(J_m) [R_{hyst}^{circ}(J_p) - 1] \quad (2.173)$$

Les pertes excédentaires. Les références [Appino *et al.*, 2007, Ragusa *et al.*, 2007] proposent la même formule d'interpolation qu'auparavant, en rappelant, que, même si les pertes excédentaires dépendent de la fréquence, d'après l'équation 2.170, le rapport entre les pertes excédentaires en champ circulaire et en champ alternatif, quant à lui, en est indépendant, sous réserve que la fréquence soit assez grande. On écrit donc, pour les pertes excédentaires en champ elliptique :

$$w_{exc}^{2D}(J_p, f) = w_{exc}^{alt}(J_p, f) + [w_{exc}^{circ}(J_p, f) - w_{exc}^{alt}(J_p, f)] a^q \quad (2.174)$$

où q est le paramètre empirique pour les pertes excédentaires. Pour faire apparaître le rapport entre les pertes excédentaires en champ circulaire et en champ alternatif, nous allons écrire cette équation sous la forme :

$$w_{exc}^{2D}(J_p, f) = w_{exc}^{alt}(J_p, f) \{1 + [R_{exc}^{circ}(J_p) - 1] a^q\} \quad (2.175)$$

Pour le cas des tôles FeSi, $q \approx 1,8$. Généralement, on admet que $w_{exc}^{alt}(J_p, f) \propto J_p^q$. On peut écrire la relation :

$$w_{exc}^{2D}(J_p, f) = w_{exc}^{alt}(J_p, f) + w_{exc}^{alt}(J_m, f) [R_{exc}^{circ}(J_p) - 1] \quad (2.176)$$

Cas des lieux d'induction quelconques. Nous verrons au chapitre suivant, chapitre au cours duquel nous réinvestirons à des fins d'optimisation les formulations des pertes précédentes, que dans les applications du génie électrique, les lieux d'induction rencontrés ne sont pas circulaires, ni même elliptiques, mais, en réalité, quelconques. Il importe donc de généraliser les formules précédentes, données pour des loci d'induction elliptiques, à des loci bidimensionnels quelconques. Cette utile généralisation a été donnée dans la référence [Appino *et al.*, 1997]. La démarche proposée est la suivante. On suppose que le vecteur polarisation $\vec{J}(t)$ s'écrit à présent :

$$\begin{cases} J_x(t) = \sum_{n \geq 1} J_{x_n} \cos(2\pi ft + \phi_{x_n}) & \text{suivant l'axe } x(\text{grand axe}) \\ J_y(t) = \sum_{n \geq 1} J_{y_n} \cos(2\pi ft + \phi_{y_n}) & \text{suivant l'axe } y(\text{petit axe}) \end{cases} \quad (2.177)$$

On note toujours $J_p = \max(J_x(t))$ ainsi que $J_m = \max(J_y(t))$. On suppose que l'axe (Ox) est le grand axe : $a = \frac{J_m}{J_p} \leq 1$. Nous allons présenter les formulations proposées par la référence [Appino *et al.*, 1997]. Dans un

premier temps, les pertes classiques sont déterminées par la validité des formules de découplage des axes pour ce type de pertes, ainsi que l'égalité de Parseval. Ceci mène à la formule suivante, pour les pertes classiques :

$$w_{cl}^{(2D,dist)} = \frac{\pi^2}{6} \sigma d^2 f \sum_{n \geq 1} n^2 (J_{x_n}^2 + J_{y_n}^2) \quad (2.178)$$

Pour les pertes par hystérésis en locus distordu, la formule 2.173 est généralisée de telle manière à prendre en compte les distorsions. Les pertes par hystérésis ne dépendent, jusque là, uniquement du maximum de polarisation et non pas de la forme de cette dernière, hypothèse est faite que cette propriété reste inchangée pour un locus de polarisation bidimensionnel quelconque, et la formule 2.173 conserve la même forme en locus distordu :

$$w_{hyst}^{(2D,dist)}(J_p) = w_{hyst}^{alt}(J_p) + w_{hyst}^{alt}(J_m) [R_{hyst}^{circ}(J_p) - 1] \quad (2.179)$$

Quant aux pertes excédentaires, les auteurs de [Appino *et al.*, 1997] proposent d'adopter la formule suivante, inspirée de celle utilisée en locus d'induction elliptique (formule 2.176) :

$$w_{exc}^{(2D,dist)}(J_p, f) = w_{exc}^{alt}(J_p, f) + w_{exc}^{alt}(J_m, f) [R_{exc}^{circ}(J_p) - 1] \quad (2.180)$$

A noter que dans la dernière formule, les pertes excédentaires $w_{exc}^{alt}(J_p, f)$ sont évaluées en tenant compte de la forme temporelle réelle de l'induction d'axe (0x) notée $J_x(t) = J_p \cdot j(t'T)$, soit à partir de la formule :

$$w_{exc}^{alt}(J_p, f) = \left(\int_0^1 \left| \frac{dj}{dt'} \right|^{\frac{3}{2}} dt' \right) \sqrt{\sigma G S V_o(J_p) J_p^{\frac{3}{2}} f^{\frac{1}{2}}} \quad (2.181)$$

Dans le cas de l'excitation elliptique, le coefficient intégral $E^{dist} = \int_0^1 \left| \frac{dj}{dt'} \right|^{\frac{3}{2}} dt'$ de la dernière formule était pris égal à $E^{SIN} \approx 8.76$, ce n'est plus le cas si l'onde d'induction d'axe (0x) est distordue. Cette remarque est également valable pour le petit axe (0y).

2.2.3.4 Autres méthodes présentes dans la littérature pour déduire les pertes en champ tournant à partir de mesures.

Nous avons, dans la partie précédente, présenté des méthodes de déduction des pertes en champ tournant à partir des données des pertes en champ alternatif, ainsi qu'en champ circulaire. Ces méthodes sont issues des publications du laboratoire INRIM situé à Turin. Néanmoins, dans d'autres laboratoires, comme celui de l'Université de technologie de Sydney, d'autres chercheurs ont mis au point des formulations phénoménologiques différentes afin de déduire les pertes fer des mesures. Dans cette partie, nous allons détailler ces autres formulations possibles pour ce problème d'importance cruciale dans les applications de l'électrotechnique, où l'évaluation des pertes est fondamentale.

Méthode de séparation des pertes en champ circulaire Les auteurs de [Zhu *et al.*, 1999, Zhu et Ramsden, 1993b] ont postulé que la méthode de séparation des pertes, bien connue en champ alternatif, était toujours valable en champ tournant. Ainsi ces auteurs proposent-ils la formule suivante en champ tournant, pour la puissance dissipée :

$$P_r = P_{hr} + P_{er} + P_{ar} \quad (2.182)$$

La signification des différents termes est :

- P_{hr} sont les pertes par hystérésis en champ rotationnel, qui, comme on l'a signalé, ont une allure non monotone (figure 2.57), en fonction de l'induction maximale. Etant donné que la courbe de la figure 2.57 s'annule pour une induction nulle, croît, puis s'annule de nouveau pour l'induction à saturation, elle évoque la courbe de couple d'un moteur asynchrone monophasé. Par conséquent, les auteurs proposent, pour les pertes par hystérésis en champ tournant, la formule suivante, avec une amplitude d'aimantation M donnée :

$$\frac{P_{hr}}{f} = a_1 \left[\frac{1/s}{(a_2 + 1/s)^2 + a_3^2} - \frac{1/(2-s)}{(a_2 + 1/(2-s))^2 + a_3^2} \right] \quad (2.183)$$

où $s = 1 - \frac{M}{M_S} \sqrt{1 - \frac{1}{a_2^2 + a_3^2}}$. Les coefficients a_1 , a_2 , et a_3 sont donnés par une procédure de fitting de courbe avec les données expérimentales. Ces pertes par hystérésis sont obtenues par extrapolation des pertes mesurées à fréquence nulle.

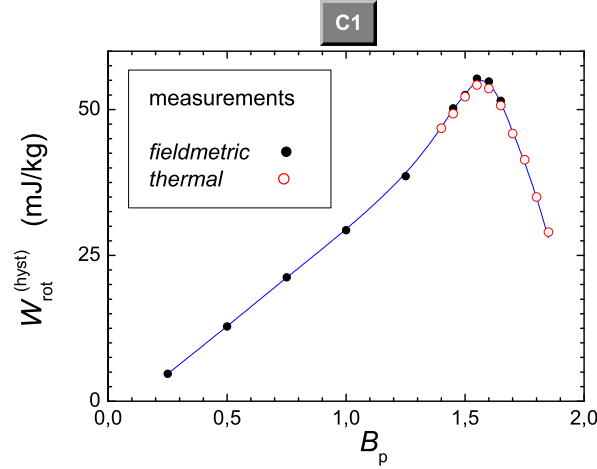


FIGURE 2.57: Les pertes par hystérésis en champ circulaire mesurées pour un matériau de type FeSi 3% de 0.35mm d'épaisseur

- P_{er} sont les pertes classiques, et les auteurs proposent une formule du type :

$$P_{er} = 2C_e (fB)^2 \quad (2.184)$$

où B est l'amplitude maximale de l'induction appliquée.

- P_{ar} sont les pertes par excès, obtenues en soustrayant les pertes par hystérésis et classiques aux pertes totales. La formule suivante est proposée :

$$P_{ar} = C_{ar} (fB)^{3/2} \quad (2.185)$$

Le coefficient C_{ar} a été trouvé, avec ce type de formule, constant sur une large gamme de valeurs d'induction, sauf aux inductions proches de la saturation.

Méthode de séparation en champ elliptique Les auteurs des références [Zhu *et al.*, 1999, Zhu et Ramsden, 1993b] ont également développé des formulations pour en déduire les pertes en champ elliptique à partir de données en champs circulaire et alternatif. Le théorème de Poynting donne les pertes volumiques totales P_t dans une tôle soumise à un champ magnétique en surface \vec{H} et une induction moyenne \vec{B} , par la formule suivante :

$$P_t = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{H} \frac{d\vec{B}}{dt} dt \quad (2.186)$$

En supposant que le vecteur induction moyenne \vec{B} ait ses deux composantes sinusoïdales de telle manière à obtenir un lieu elliptique d'induction moyenne dans la tôle, et en réduisant les composantes du champ magnétique \vec{H} à leur premier harmonique, les auteurs obtiennent, après calcul, la formule suivante :

$$P_t = R_B P_r + (1 - R_B)^2 P_{alt} \quad (2.187)$$

où $R_B = \frac{B_{min}}{B_{max}}$ est le rapport des inductions maximales du petit axe B_{min} et du grand axe B_{max} . P_r est la puissance dissipée en champ rotationnel d'amplitude B_{max} , et P_{alt} est la puissance dissipée en champ alternatif d'amplitude également égale à B_{max} . Cette formule 2.187 est donc appliquée aux trois types de pertes.

Méthode de séparation des pertes pour un lieu d'induction bidimensionnel quelconque Les auteurs des références [Zhu *et al.*, 1999, Zhu et Ramsden, 1993b], constatant la diversité des loci d'induction dans les culasses des machines électriques, ont généralisé ces formules à des lieux d'induction bidimensionnels de forme quelconque. Leur méthode se fonde encore sur une méthode de séparation des pertes, en disant que les pertes totales P_t sont la

somme d'un terme de pertes par hystérésis, d'un terme de pertes classiques, et d'un terme de pertes excédentaires, soit :

$$P_t = P_{th} + P_{te} + P_{ta} \quad (2.188)$$

Pour le terme de pertes par hystérésis, l'approche consiste à sommer les pertes dues à tous les harmoniques d'induction considérés séparément, c'est-à-dire que l'on écrit la formule 2.187 pour tous les harmoniques :

$$P_{th} = \sum_{n \geq 1} \left[R_{B_n} P_{rh_n} + (1 - R_{B_n})^2 P_{ah_n} \right] \quad (2.189)$$

où R_{B_n} est le rapport entre l'amplitude de l'harmonique n d'induction du petit axe sur celui du grand axe. A noter que les pertes par hystérésis en champ alternatif que l'on obtient avec un harmonique n d'induction d'amplitude B_{max_n} sont données par la formule : $P_{ah_n} = C_h n f B_{max_n}^h$, C_h étant la constante des pertes par hystérésis en champ alternatif, et la constante h étant comprise entre 1 et 2.

Les pertes classiques sont données par une formule du type :

$$P_{te} = C_e \sum_{n \geq 1} (n f)^2 (B_{max_n}^2 + B_{min_n}^2) \quad (2.190)$$

La formule proposée pour les pertes excédentaires est alors donnée par une intégration temporelle des dérivées des deux composantes d'induction :

$$P_{ta} = \frac{C_{ar}}{(2\pi)^{3/2} T} \int_0^T \left[\left(\frac{dB_x(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dB_y(t)}{dt} \right)^2 \right]^{3/4} dt \quad (2.191)$$

Les formulations précédentes ont ensuite été appliquées aux matériaux en poudre de fer [Guo *et al.*, 2006b]. Ces formules ont aussi été généralisées, pour ces matériaux composites, pour des loci d'induction tridimensionnels, afin de tenir compte du comportement isotrope de ces derniers (Référence [Guo *et al.*, 2006a]). L'application de telles formulations dans les machines à griffes [Huang *et al.*, 2007a] semble avoir donné de bonnes prévisions des pertes pour ce type de machines, où les loci d'induction sont fondamentalement tridimensionnels.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différents dispositifs de mesure des pertes en champ tournant présents dans la littérature. Cette connaissance nous sera utile au chapitre 5, où, nous inspirant de l'un de ces dispositifs, nous allons concevoir un appareillage de mesure des pertes en champ tournant dans les matériaux doux composites. Dans un second temps, nous avons présenté la théorie des pertes dans les matériaux laminés. Nous avons en premier lieu rappelé le modèle en champ unidirectionnel fondé sur la séparation des pertes en trois termes : les pertes par hystérésis, les pertes classiques, ainsi que les pertes excédentaires. Cette dernière composante s'est vue interprétée en utilisant la théorie statistique de Bertotti. Puis, par la suite, nous avons exposé les différents modèles de pertes dans les matériaux laminés en champ tournant, en insistant sur les différences obtenues avec le cas alternatif. Enfin, sur la base de formules d'interpolation entre le cas du champ alternatif et celui du champ circulaire, nous avons présenté les différentes méthodes présentes dans la littérature afin d'en déduire les pertes en champ bidimensionnel quelconque. Après avoir, dans le chapitre 3, mis au point des méthodes de calcul analytique bidimensionnel de l'induction dans les parties ferromagnétiques de la machine à flux axial, nous allons déterminer, au chapitre 6, en nous fondant sur ces modèles, les pertes dans la machine électrique, avant de chercher, par une optimisation sur le jeu de paramètres géométriques, à minimiser ces pertes. Nous verrons qu'effectivement, dans la machine, les loci d'induction rencontrés, sont non seulement bidimensionnels, mais de forme quelconque, ce qui rend nécessaire les extensions des modèles de pertes que nous avons présentés. Les concepts fondamentaux de la théorie de séparation des pertes seront, quant à eux, réinvestis dans le chapitre 5, afin d'investiguer, en utilisant les mêmes principes, les pertes dans les matériaux doux composites.

Bibliographie

- [Appino *et al.*, 2007] APPINO, C., FIORILLO, F. et RAGUSA, C. (2007). Loss decomposition under two-dimensional flux loci in non-oriented steel sheets. *Przeglad Elektrotechniczny*, 83:25–30.
- [Appino *et al.*, 2009a] APPINO, C., FIORILLO, F. et RAGUSA, C. (2009a). One-dimensional/two-dimensional loss measurements up to high inductions. *Journal of Applied Physics*, 105:07E718.
- [Appino *et al.*, 2004] APPINO, C., FIORILLO, F., RAGUSA, C. et XIE, C. (2004). Magnetic losses at high flux densities in non-oriented fesi alloys. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 10:316–319.
- [Appino *et al.*, 1997] APPINO, C., FIORILLO, F. et RIETTO, A. (1997). The energy loss components under alternating, elliptical and circular flux in non-oriented alloys. *Proceedings of the 2DM*, 1:55–61.
- [Barbisio *et al.*, 2004] BARBISIO, E., FIORILLO, F. et RAGUSA, C. (2004). Predicting loss in magnetic steels under arbitrary induction waveform and with minor hysteresis loops. *IEEE transactions on magnetics*, 40:1810–1819.
- [Basak et Moses, 1978] BASAK, A. et MOSES, A. (1978). Influence of stress on rotational loss in silicon iron. *Proceedings of IEE*, 125(2):165–168.
- [Bertotti, 1983] BERTOTTI, G. (1983). Space-time correlation properties of the magnetization process and eddy current losses : Theory. *Journal of Applied Physics*, 54:5293.
- [Bertotti, 1984] BERTOTTI, G. (1984). A general statistical approach to the problem of eddy current losses. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 41(1-3):253–260.
- [Bertotti, 1985a] BERTOTTI, G. (1985a). Direct relation between hysteresis and dynamic losses in soft magnetic materials. *Le Journal de Physique Colloques*, 46(C6):389–392.
- [Bertotti, 1985c] BERTOTTI, G. (1985c). Physical interpretation of eddy current losses in ferromagnetic materials. i. theoretical considerations. *Journal of applied Physics*, 57:2110.
- [Bertotti, 1985e] BERTOTTI, G. (1985e). Physical interpretation of eddy current losses in ferromagnetic materials. ii. analysis of experimental results. *Journal of Applied Physics*, 57:2118.
- [Bertotti, 1998] BERTOTTI, G. (1998). *Hysteresis in magnetism*. Academic Press San Diego.
- [Brissonneau, 1974] BRISSONNEAU, P. (1974). Les domaines magnétiques. *Revue de Physique Appliquée*, 9(5):783–792.
- [Brissonneau, 1997] BRISSONNEAU, P. (1997). *Magnétisme et matériaux magnétiques pour l'électrotechnique*. Hermes.
- [Brix *et al.*, 1982] BRIX, W., HEMPEL, K. et SCHROEDER, W. (1982). Method for the measurement of rotational power loss and related properties in electrical steel sheets. *IEEE Transactions on Magnetics*, 18(6):1469–1471.
- [Brown, 1962] BROWN, J. (1962). *Magnetostatic principles in ferromagnetism*. Amsterdam.
- [Chikazumi, 1997] CHIKAZUMI, S. (1997). *Physics of Ferromagnetism*. Graham, C. D.
- [de Lacheisserie, 2000] de LACHEISSERIE, E. (2000). *Magnétisme : Fondements*. EDP Sciences.
- [Enokizono et Sievert, 1990] ENOKIZONO, M. et SIEVERT, J. (1990). Numerical analysis of accuracy of rotational magnetic loss measurement apparatus. *IEEE Translation Journal on Magnetics in Japan*, 5(9):742–748.
- [Feynman *et al.*, 1979] FEYNMAN, R., LEIGHTON, R. et SANDS, M. (1979). *Le cours de physique de Feynman, électromagnétisme 2*. Dunod.
- [Fiorillo, 1993] FIORILLO, F. (1993). A phenomenological approach to rotational power losses in soft magnetic laminations. *PT. Bericht on two-dimensionnal magnetisation experiments*, 1:11–23.
- [Fiorillo, 2004] FIORILLO, F. (2004). *Measurement and characterization of magnetic materials*. Academic Press.
- [Fiorillo et Mazaleytrat, 2008] FIORILLO, F. et MAZALEYTRAT, F. (2008). *Mesures Magnétiques*. Ed. Techniques Ingénieur.
- [Fiorillo et Rietto, 1993] FIORILLO, F. et RIETTO, A. (1993). Rotational versus alternating hysteresis losses in nonoriented soft magnetic laminations. *Journal Applied Physics*, 10:6615–6617.
- [Guo *et al.*, 2006a] GUO, Y., ZHU, J., LIN, Z. et ZHONG, J. (2006a). 3d vector magnetic properties of soft magnetic composite material. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 302(2):511–516.

- [Guo *et al.*, 2006b] GUO, Y., ZHU, J. et ZHONG, J. (2006b). Measurement and modelling of magnetic properties of soft magnetic composite material under 2d vector magnetisations. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 302(1):14–19.
- [Guo *et al.*, 2008] GUO, Y., ZHU, J., ZHONG, J., LU, H. et JIN, J. (2008). Measurement and modeling of rotational core losses of soft magnetic materials used in electrical machines : A review. *IEEE Transactions on Magnetics*, 44(2):279–291.
- [Huang *et al.*, 2007a] HUANG, Y., ZHU, J., GUO, Y. et HU, Q. (2007a). Development of a high-speed claw pole motor with soft magnetic composite core. In *IEEE International Electric Machines & Drives Conference*, volume 2.
- [Jiles, 1998] JILES, D. (1998). *Introduction to magnetism and magnetic materials*. CRC.
- [Kedous-Lebouc *et al.*, 1992] KEDOUS-LEBOUC, A., ZOUZOU, S. et BRISSONNEAU, P. (1992). Anisotropy influence on the rotational and alternating field behavior of soft magnetic materials. *IEEE Transactions on Magnetics*, 28(5 Part 2):2796–2798.
- [Landau et Lifchitz, 1969] LANDAU, L. et LIFCHITZ, E. (1969). *Electrodynamique des milieux continus*. Mir Moscow.
- [Lebouc, 2006a] LEBOUC, A. (2006a). *Matériaux magnétiques en génie électrique 1 (Traité EGEM, série Génie électrique)*. Lavoisier.
- [Lebouc, 2006b] LEBOUC, A. (2006b). *Matériaux magnétiques en génie électrique 2 (Traité EGEM, série Génie électrique)*. Lavoisier.
- [Leibovic, 1963a] LEIBOVIC, K. (1963a). Contraction mapping with application to control processes. *International Journal of Electronics*, 15(1):81–96.
- [Leibovic, 1963b] LEIBOVIC, K. (1963b). Contraction mapping with application to control processes. *International Journal of Electronics*, 15(1):81–96.
- [Mayergoz, 1986a] MAYERGOZ, I. (1986a). Mathematical models of hysteresis. *Physical review letters*, 56(15):1518–1521.
- [Nencib *et al.*, 1995] NENCIB, N., KEDOUS-LEBOUC, A. et CORNUT, B. (1995). 2d analysis of rotational loss tester. *IEEE Transactions on Magnetics*, 31(6 Part 1):3388–3390.
- [Pry et Bean, 1958] PRY, R. et BEAN, C. (1958). Calculation of the energy loss in magnetic sheet material using a domain model. *Journal Applied Physics*, 29:532–533.
- [Ragusa *et al.*, 2007] RAGUSA, C., APPINO, C. et FIORILLO, F. (2007). Magnetic losses under two-dimensional flux loci in fesi laminations. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 316(2):454–457.
- [Ragusa et Fiorillo, 2006] RAGUSA, C. et FIORILLO, F. (2006). A three-phase single sheet tester with digital control of flux loci based on the contraction mapping principle. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 304(2):568–570.
- [Ragusa *et al.*, 2008] RAGUSA, C., ZUREK, S., APPINO, C. et MOSES, A. (2008). An intercomparison of rotational loss measurements in non-oriented fesi alloys. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 51:1016–1019.
- [Sasaki *et al.*, 1985] SASAKI, T., IMAMURA, M., TAKADA, S. et SUZUKI, Y. (1985). Measurement of rotational power losses in silicon-iron sheets using wattmeter method. *IEEE Transactions on Magnetics*, 21(5):1918–1920.
- [Sievert, 1990] SIEVERT, J. (1990). Recent advances in the one-and two-dimensional magnetic measurement technique for electrical sheet steel. *IEEE Transactions on Magnetics*, 26(5):2553–2558.
- [Sievert *et al.*, 1989] SIEVERT, J., XU, J., RAHF, L., ENOKIZONO, M. et AHLERS, H. (1989). Studies on the rotational power loss measurement problem. In *SMM19*.
- [Stoner et Wohlfarth, 1948] STONER, E. et WOHLFARTH, E. (1948). A mechanism of magnetic hysteresis in heterogeneous alloys. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 240(826):599.
- [Zhu et Ramsden, 1993a] ZHU, J. et RAMSDEN, V. (1993a). Two dimensional measurement of magnetic field and core loss using a square specimen tester. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29(6 Part 2):2995–2997.
- [Zhu et Ramsden, 1993b] ZHU, J. et RAMSDEN, V. (1993b). Two dimensional measurement of magnetic field and core loss using a square specimen tester. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29(6 Part 2):2995–2997.
- [Zhu et Ramsden, 1998] ZHU, J. et RAMSDEN, V. (1998). Improved formulations for rotational core losses in rotating electrical machines. *IEEE Transactions on Magnetics*, 34(4 Part 2):2234–2242.

- [Zhu *et al.*, 1999] ZHU, J., ZHONG, J., RAMSDEN, V. et GUO, Y. (1999). Power losses of soft magnetic composite materials under two-dimensional excitation. *Journal of Applied Physics*, 85:4403.
- [Zouzou *et al.*, 1992] ZOUZOU, S., KEDOUS-LEBOUC, A. et BRISSONNEAU, P. (1992). Magnetic properties under unidirectional and rotational field. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 112(1-3):106–108.

Chapitre 3

Modèles analytiques 2D des machines synchrones à flux axial à aimants enterrés

Introduction

L'objectif de ce chapitre est le développement de modèles analytiques électromagnétiques bidimensionnels (2D) de la structure de machine à flux axial à aimants permanents. En effet, il est nécessaire, afin de déterminer une topologie optimale de machine pour une application donnée, de disposer de modèles analytiques suffisamment précis et rapides, afin de répondre aux exigences d'une procédure d'optimisation systématique, nécessitant un grand nombre d'évaluations du modèle. L'hypothèse 2D apparaît naturelle lorsque l'on travaille sur la modélisation analytique des machines électriques, car elle permet de faciliter de manière considérable la mise en équation du problème. Dans une première partie du chapitre, nous allons présenter en détail la topologie de la machine à flux axial que nous allons modéliser, qui est à aimants insérés, ainsi que les différentes méthodes de modélisation rencontrées dans la littérature électrotechnique. Puis, au cours des deuxième et troisième parties de ce chapitre, nous détaillerons les méthodes que nous avons mises au point afin de résoudre notre problème, avec un degré de complexité croissant, comme la prise en compte ou non des encoches du stator. Ces méthodes sont fondées sur la résolution analytique formelle des équations de Maxwell. Nous n'oublierons pas non plus de présenter les hypothèses simplificatrices inhérentes à ce type de modèles, comme la linéarité des matériaux, ainsi que d'opérer des vérifications des modèles par éléments finis¹.

3.1 Présentation de la topologie à modéliser, et état de l'art sur les modèles

Avant d'entrer dans les détails de l'exposé, il convient sans doute de se poser la question de l'objectif que l'on poursuit lorsque l'on cherche à faire un modèle d'une structure électromagnétique quelconque : il s'agit de relier ses paramètres géométriques, considérés comme les données du problème, à ses performances, qui peuvent être vues comme les sorties. Ensuite, ce sera la phase d'optimisation qui inversera le problème, en déterminant les paramètres géométriques qui assurent les performances souhaitées (figure 3.1). Comme ce problème est bien souvent sous-contraint (il existe une infinité de combinaisons de paramètres qui permettent d'obtenir les performances souhaitées), il faut, afin de pouvoir aboutir à une solution, se fixer, en plus des performances à atteindre, un (ou plusieurs) critère à optimiser, ce qui permet de comprendre le recours à des algorithmes d'optimisation afin d'inverser le problème.

Pour une machine électrique, la performance fondamentale à atteindre est souvent le couple : par conséquent, l'objectif de la modélisation est donc, connaissant les paramètres de la structure (géométrie, alimentation), de calculer ce couple. La figure 3.2 illustre cette démarche. On voit sur cette figure que, avant d'avoir accès aux grandeurs intégrales que sont les flux ou les inductances qui donnent le couple, il est nécessaire de passer par des grandeurs locales, qui sont les inductions dans l'entrefer. De plus, puisque l'on doit pratiquer une optimisation de

1. Dans tout ce chapitre, le logiciel éléments finis utilisé est FEMM, un produit gratuit de la société Foster-Miller, téléchargeable à l'adresse www.femm.info/wiki/Download.

la structure pour un (ou plusieurs) critère, il semble naturel de prendre les pertes comme critère à optimiser (ou comme l'un des critères). De toute manière, les pertes devront être calculées, car elles interviennent dans l'expression de la contrainte thermique, qui est une contrainte cruciale de dimensionnement. Par conséquent, on va profiter du calcul des inductions dans l'entrefer qui servent à calculer le couple, pour en déduire aussi les inductions dans le fer, utiles pour le calcul des pertes fer (le calcul des pertes cuivre, est, en première approximation, plus aisé). Cette démarche est également montrée au niveau de la figure 3.2. Le modèle électromagnétique apparaît donc comme la clef de voûte de la procédure de conception. C'est pour cela que beaucoup d'auteurs se sont attaqués à ce problème, comme l'a montré le premier chapitre, où nous avons fait un état de l'art des modèles existants (analytique formel comme ce qui nous intéresse ici, mais aussi schéma réductant, éléments finis...). Notons cependant que le modèle électromagnétique n'est pas obligatoirement le seul modèle utilisé : il peut être simplement une maille d'une modélisation multiphysique de l'actionneur. Ainsi se sert-on des pertes comme entrée d'un modèle thermique, qui renverra la contrainte de température à ne pas dépasser. En toute rigueur, il faudrait même prévoir un rebouclage entre les modèles multiphysiques, car la température change les propriétés magnétiques des matériaux, ce qui modifie les pertes. Nous éviterons, pour des raisons de temps de calcul, ce type d'interactions. Nous reviendrons sur ce point lors du chapitre dédié à l'optimisation.

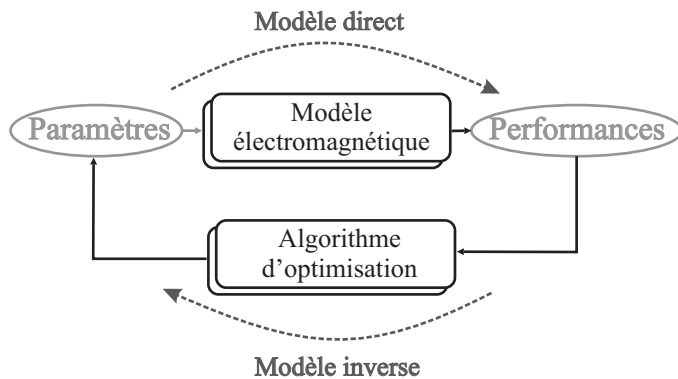


FIGURE 3.1: Démarche de conception à partir d'un modèle et d'un algorithme d'optimisation

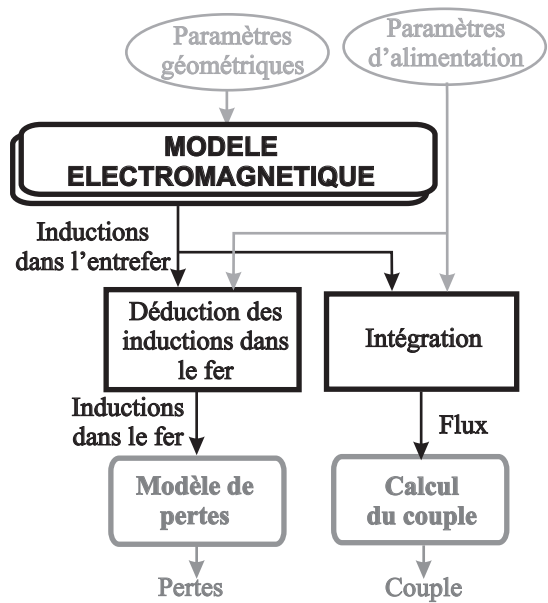


FIGURE 3.2: Démarche générale de la modélisation des machines électriques

Nous allons, en première étape, montrer la topologie de la machine à flux axial choisie. Puis, dans un second temps, nous allons exposer les différents modèles électromagnétiques présents dans la littérature concernant la modélisation par résolution des équations de Maxwell, afin de situer le contenu de notre travail.

3.1.1 La topologie étudiée

La topologie de machine synchrone à aimants à flux axial a montré son intérêt dans les applications de traction hybride [Patterson, 1995, Oh et Emadi, 2004] du fait principalement de sa forme discoïde, qui peut être plus facile à intégrer dans la chaîne de traction. Néanmoins, l'un des inconvénients des structures à pôles lisses réside dans la difficulté de défluxer efficacement la machine, ce qui est gênant pour atteindre des points de fonctionnement en haute vitesse. On pourrait conserver la topologie à pôles lisses, et augmenter plus ou moins l'entrefer par un dispositif mécanique [Patterson, 1995, Lipo et Aydin, 2004b]. Néanmoins, étant donné [Azzouzi, 2007] que le stator que la machine à flux axial est susceptible de subir des déformations mécaniques à cause de l'interaction axiale rotor-stator, il est plus aisé de fixer l'entrefer à une valeur fixe assez grande, et de ne pas descendre en deçà. L'adjonction d'un système mécanique supplémentaire de réglage de la largeur de l'entrefer serait complexe,

coûteux, et risquerait de se payer sur la plan de la fiabilité. Voilà pourquoi nous choisissons d'utiliser une topologie à entrefer fixe, mais avec des pôles saillants, qui ont prouvé leur efficacité en ce qui concerne les capacités de défluxage [Multon *et al.*, 1995, Morimoto *et al.*, 1990, Morimoto *et al.*, 1994c]. Nous choisissons d'utiliser la structure simple face à aimants insérés, avec bobinage statorique à petites dents (le dessin 3D de la structure est représenté au niveau de la figure 3.3).

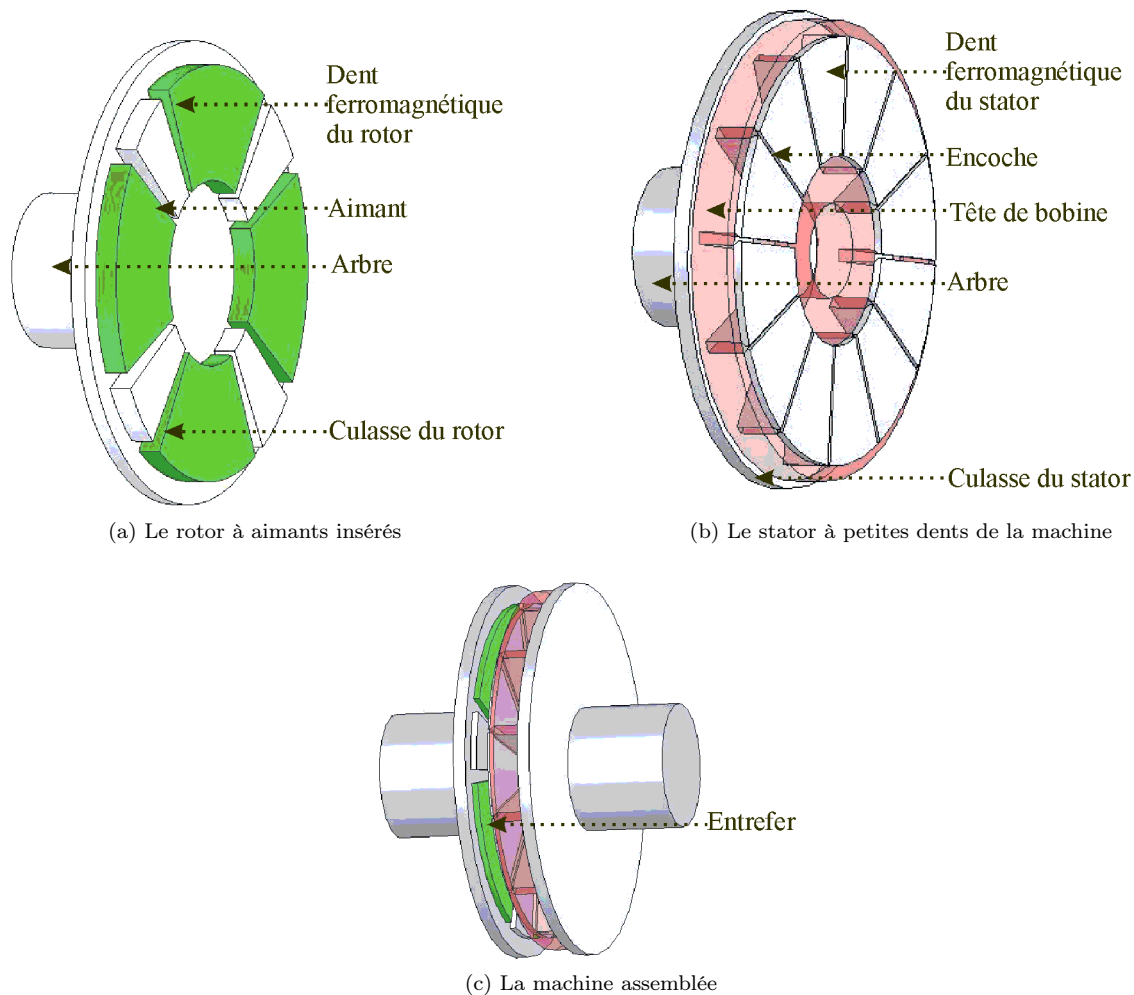


FIGURE 3.3: Topologie de la machine simple face à aimants insérés

3.1.2 État de l'art sur les différents modèles présents dans la littérature

3.1.2.1 Le calcul de la distribution du champ magnétique dans l'entrefer

Le cas du calcul du champ magnétique créé par les aimants permanents d'une machine à pôles lisses est un problème classiquement traité dans la littérature électrotechnique. Dans la référence [Zhu *et al.*, 1993], les auteurs résolvent directement l'équation de Poisson dans la zone des aimants, alors que dans l'article [Boules, 1984], un modèle ampérien par couches de l'aimant est adopté, afin d'éviter d'avoir à résoudre l'équation de Poisson. Dans les deux cas, les hypothèses de calcul sont les mêmes : l'encoche statorique à petites dents est lissée par le biais du coefficient de Carter [Carter, 1901], et les matériaux magnétiques sont supposés présenter une perméabilité infinie, de telle manière à imposer des conditions de Neumann homogènes au niveau des frontières entrefer-culasses. Qui plus est, l'hypothèse 2D, qui permet de réduire le potentiel vecteur magnétique à un simple scalaire, s'est naturellement imposée.

La méthode a été généralisée au calcul du champ magnétique dans l'entrefer dû aux courants d'induit [Zhu et Howe, 1993a,

Polinder, 1998]. Afin de conserver les mêmes hypothèses simplificatrices qu'auparavant, le stator est toujours lissé par le coefficient de Carter, et les courants sont réduits à la présence d'une densité linéique équivalente à la surface du stator. L'effet des encoches est introduit en prenant en compte le fait que cette densité linéique comporte des harmoniques d'espace (effet de discrétisation du bobinage), sans toutefois considérer la modulation de la largeur de l'entrefer par l'encoche, qui est l'effet de denture. Cette méthode possède l'inconvénient de faire disparaître, par l'opération de lissage du stator, tous les phénomènes propres à l'encoche, tels que par exemple les inductances de fuites.

D'autres auteurs ([Sargos, 1991, Kauffmann, 1975, Zhu *et al.*, 1994, Wang *et al.*, 1999]) ont souhaité modéliser le cas important des machines synchrones à pôles saillants rotoriques, en utilisant des développements en séries de fonctions harmoniques. Certains chercheurs ont utilisé la théorie des transformations conformes pour tenir compte de la saillance ([Kauffmann, 1974, Markovic, 2004]), mais il s'est avéré que de telles méthodes, bien que séduisantes car évitant les décompositions en séries, obligeaient à recourir à des traitements numériques lourds pour résoudre les équations transcendantes.

Enfin, concernant la prise en compte des encoches statoriques, des méthodes de calcul existent. Dans le but de calculer les pertes par courants induits dans les aimants dues aux encoches statoriques, les auteurs de la référence [Boules *et al.*, 1980] ont mis au point une méthode de calcul fondée sur une approximation unidimensionnelle du champ magnétique dans les encoches. Zhu [Zhu et Howe, 1993b] a réinvesti la même transformation conforme que Carter pour trouver, après avoir calculé le champ dans l'entrefer sans tenir compte des encoches, une fonction de modulation de la composante d'induction entrant dans le stator. Cela signifie que ce calcul souffre des mêmes approximations que le calcul du coefficient de Carter, à savoir que les encoches doivent être supposées infiniment profondes, et que l'interaction des encoches entre elles est négligeable. Markovic [Markovic et Perriard, 2008] a corrigé ce problème, en tenant compte de l'interaction des encoches entre elles, mais ceci se paie par une transformation conforme plus compliquée, et des outils numériques doivent impérativement être employés pour résoudre le problème. Notons bien que ces méthodes sont utilisées pour moduler après coup la composante d'induction normale au stator, qui a été calculée au départ en négligeant l'effet d'encoche. C'est pourquoi d'autres auteurs ont cherché à pallier à ce défaut, pour calculer la perturbation introduite par les encoches non pas sur une seule, mais sur les deux composantes de l'induction. Ceci est nécessaire, par exemple, pour le calcul du couple de détente. Cette tâche nécessite donc de déduire le potentiel directement dans la structure encochée. Certains auteurs [Kumar et Bauer, 2008, Kim et Lieu, 1998] ont choisi une méthode que l'on peut qualifier de mixte : l'induction sans effet d'encoche voit sa composante normale modulée par une des fonctions de modulation dont nous parlions auparavant, et ensuite, les auteurs se servent de l'induction ainsi modulée pour remonter au potentiel dans l'entrefer, en utilisant la composante d'induction modulée comme d'une condition de passage. Les auteurs de la référence [Kumar et Bauer, 2008] invoquent même la possibilité d'appliquer leur méthode lorsque la perméabilité des parties ferromagnétiques est constante, mais non infinie. Néanmoins, cette méthode, bien qu'intuitive et efficace, n'est pas forcément mathématiquement tout à fait satisfaisante. Kramer a donc tenté, dans sa thèse [Kramer, 1983], de résoudre le problème de manière rigoureuse. Néanmoins, sa solution, donnée en potentiel scalaire, et fondée sur des développements en séries harmoniques, ne prend en compte qu'une seule encoche. La référence [Dubas, 2009] a étendu la méthode donnée à l'ensemble des encoches et de l'entrefer. Azzouzi [Azzouzi, 2007] a utilisé une méthode similaire pour en déduire le couple de détente de sa machine à grosses dents. Cependant, dans ces développements, l'entrefer considéré était lisse, la structure considérée étant à aimants en surface. Dans cette thèse, nous allons être amené, après avoir négligé les encoches du stator et mis en lumière les défauts d'une telle approximation, à considérer l'effet d'encoche statorique par des développements en séries harmoniques, et en tenant compte en plus de la saillance du rotor.

3.1.2.2 Le calcul de la distribution du champ magnétique dans les parties ferromagnétiques, et calcul des pertes fer associées

Comme on l'a signalé auparavant, le calcul de l'induction dans les culasses apparaît nécessaire pour en déduire le degré de saturation de ces dernières, et surtout d'évaluer les pertes fer dont elles sont l'objet au cours du fonctionnement de la machine. La plupart des auteurs procèdent en utilisant des méthodes numériques de type éléments finis (le plus souvent en magnétostatique) qui leur permettent de calculer l'induction en chaque point des culasses, pour différentes positions du rotor au cours du fonctionnement de la machine. Ensuite, un modèle de pertes fer local est appliqué, et une intégration spatiale permet de trouver les pertes totales. Par exemple, la référence [Atallah *et al.*, 1992] suit cette méthode. L'avantage de cette manière de procéder est de pouvoir, grâce à des calculs

par éléments finis, prendre en compte la saturation du matériau magnétique. Ensuite, les formulations utilisées pour les pertes sont assez diverses : les auteurs des références [Tseng et Wee, 1999, Mi *et al.*, 2003] prennent en compte les formes non sinusoïdales d'induction, mais ne considèrent que deux termes de pertes : les pertes par hystérésis, ainsi que les pertes par courants de Foucault. Les auteurs de [Atallah *et al.*, 1992] utilisent des formules de pertes prenant en compte l'aspect non-sinusoïdal des ondes d'induction, ainsi que les pertes excédentaires. Ces auteurs constatent que les loci d'induction au sein de la culasse du stator sont bidirectionnels. Néanmoins, pour le calcul des pertes fer, ils considèrent chaque composante d'induction de manière indépendante, et appliquent pour chacune de ces composantes la formule des pertes en champ alternatif. Le chapitre précédent a mis en lumière le fait que cela pouvait mener à des résultats erronés, en particulier en ce qui concerne les pertes par hystérésis pour des inductions voisines de la saturation, qui diminuent avec l'induction en champ tournant, alors qu'elles augmentent en champ alternatif. C'est pour corriger ce défaut que d'autres auteurs [Bertotti *et al.*, 1991], pour déterminer les pertes fer dans le stator d'une machine asynchrone, ont calculé par éléments finis les loci d'inductions, et ont appliqué les modèles de pertes fer bidimensionnels décrits dans [Appino *et al.*, 1997], dont nous avons exposé la teneur dans le chapitre qui précède. D'autres auteurs [Bottauscio *et al.*, 2002a, Ragusa et Repetto, 2000] vont plus loin pour évaluer les pertes fer de manière numérique : critiquant le fait que les pertes dans les machines électriques soient déterminées a posteriori, c'est-à-dire une fois l'induction calculée dans le fer du stator en supposant une loi constitutive dépourvue d'hystérésis, il a été décidé de prendre en compte directement une loi hystérétique pour le calcul de l'induction sur une période de fonctionnement en chaque point du stator. La loi constitutive hystérétique a été implantée numériquement à l'aide des modèles de Preisach [Mayergoyz, 1986b], car c'est la seule méthode qui autorise une modélisation rigoureuse des cycles mineurs dans le matériau, ce qui permet en outre de calculer les pertes dues à l'alimentation de la machine avec un onduleur piloté en modulation de largeur d'impulsions [Boglietti *et al.*, 1998]. Ensuite, les pertes ont pu être évaluées grâce aux formules présentées dans le livre [Mayergoyz, 2003]. Une extension à l'hystérésis dynamique ou vectorielle a d'ailleurs été proposée dans [Bottauscio *et al.*, 2000] et [Bottauscio et Chiampi, 2001]. De telles méthodes, qui réclament des chercheurs une réflexion approfondie sur les outils numériques à mettre en oeuvre, se révèlent intéressantes par les résultats très proches de l'expérience qu'elles fournissent, mais peuvent être pénalisantes en ce qui concerne le temps de calcul requis. Signalons aussi que le problème de telles méthodes n'est pas seulement théorique, mais aussi expérimental, afin d'identifier les paramètres du modèle à mettre en oeuvre.

C'est pour pallier à ce problème du temps de calcul que d'autres auteurs cherchent à calculer de manière analytique, en utilisant les approximations convenables, le champ dans les culasses des machines électriques, puis d'en déduire ensuite les pertes fer. Les méthodes proposées sont le plus souvent fondées sur des méthodes de conservation et de concentration du flux d'entrefer dans la culasse du stator (on effectue en fait un moyennage par zone de l'induction dans le stator de la machine). Ainsi les auteurs de la référence [Slemon et Liu, 1990] proposent-ils un modèle d'induction en négligeant toute fuite entre aimants, l'onde d'induction dans l'entrefer due aux aimants se trouvant donc approximée à un créneau. Cette induction est supposée passer entièrement par les dents et la culasse, ce qui donne une estimation de la densité de flux, supposée uniforme et unidimensionnelle dans les dents et la culasse du stator. A partir de cette densité de flux dans le fer, les pertes sont calculées par une formule en champ alternatif, sans tenir compte des pertes excédentaires. L'article [Deng, 1999] propose une amélioration de ce modèle : l'induction dans l'entrefer est calculée en prenant en compte sa forme trapézoïdale. Ensuite, des formules pour calculer l'induction dans les dents du stator, fondées sur des considérations de concentration de flux de l'onde trapézoïdale d'induction, sont proposées. Il en est de même pour l'induction dans la culasse du stator, qui résulte de la concentration de tout le flux sous un pôle. Cette étude ne prend pas en compte l'aspect bidimensionnel des loci d'induction dans la culasse du stator, mais des formules utilisées pour les pertes fer tiennent compte des pertes excédentaires. Par le biais de la méthode suggérée dans [Lavers *et al.*, 1978], les cycles mineurs sont pris en considération. Le travail analytique le plus avancé sur la question du calcul analytique des inductions dans les parties ferromagnétiques du stator en vue de la déduction des pertes fer se trouve, à notre connaissance, dans les références [Chin et Soulard, 2003, Soulard *et al.*, 2002, Chin, 2004]. Dans ces documents, l'onde d'induction dans l'entrefer résultante est calculée en sommant l'induction à vide supposée trapézoïdale, avec celles de la réaction magnétique d'induit, supposée, quant à elle, parfaitement sinusoïdale. L'onde d'induction résultante dans l'entrefer est intégrée sur un pas dentaire afin d'être concentrée dans les dents. L'effet des inductances de fuite des encoches du stator, qui a pour conséquence de rajouter progressivement un flux de fuites dans la dent du stator, augmentant par là même l'induction ainsi que les pertes dans la dent au fur et à mesure que l'on se rapproche de la culasse, est pris en compte par un schéma réticent de modélisation des fuites. Ce modèle est assez fin pour en déduire des éventuels cycles mineurs dans les dents, qui ne sont cependant pas pris en compte, pour des raisons de simplicité, lors du calcul des pertes. L'induction dans la culasse est également déduite par concentration du flux magnétique

sous un pôle du stator. Néanmoins, les auteurs tiennent compte du caractère bidimensionnel de l'induction dans la partie de culasse du stator qui surplombe la dent. Cette seconde composante d'induction, est déduite, quant à elle, au moyen d'études éléments finis, et d'une formule d'interpolation. Les formulations de pertes fer utilisées prennent en compte le caractère non sinusoïdal des inductions ainsi que les pertes excédentaires, mais sans utiliser de formulation spécifique au cas des inductions bidimensionnelles. L'étude se révèle suffisamment précise pour prédire avec précision les pertes fer, même dans des conditions délicates telles que le fonctionnement en régime de défluxage.

3.1.2.3 Apport du travail de modélisation présenté

L'apport du travail présenté ici va consister à mettre en évidence la nécessité de disposer de modèles analytiques 2D prenant en compte les encoches du stator afin de pouvoir évaluer avec précision les niveaux d'induction dans le stator de la machine électrique : dans un premier temps, un modèle sans effet d'encoches statorique (mais en considérant tout de même la saillance du rotor) sera présenté, qui se révélera suffisant pour calculer le couple, mais ses limites seront mises en évidence en ce qui concerne le calcul des inductions dans le fer en vue de l'évaluation des pertes fer. C'est pour cela que dans un second temps, un modèle original, avec prise en compte de la double saillance, sera présenté, et son apport pour le calcul des pertes fer sera mis en évidence. Ce modèle étend la méthode de résolution analytique présentée dans la référence [Dubas, 2009] qui prend en compte les encoches du stator d'une machine à aimants à pôles lisses pour le flux à vide. Il y rajoute la prise en compte des courants statoriques afin d'évaluer le flux de fuites dans les encoches, qui peut avoir une importance capitale au niveau des pertes dans le fer. Surtout la résolution se veut plus générale, en prenant en compte la double saillance stator-rotor, qui apparaît nécessaire dans notre situation.

A partir de ce modèle précis de l'induction dans l'entrefer, nous proposerons un calcul analytique simplifié de l'induction dans les dents et la culasse de la machine, mais sans pour autant renoncer au caractère bidimensionnel des loci dans cette culasse, et sans avoir recours, pour le calcul, à des formules empiriques déduites des éléments finis. Ce travail nous servira de base à l'évaluation des pertes fer lors du chapitre dédié à l'optimisation, en appliquant réellement un modèle bidimensionnel de pertes fer dans la culasse.

3.2 Modèles sans effet d'encoche statorique

Nous allons détailler dans ce paragraphe les modèles analytiques 2D qui, pour la simplicité du calcul, ne prennent pas en compte les encoches statoriques : la culasse du stator sera donc lissée par l'utilisation du coefficient de Carter. En revanche, la saillance du rotor, à aimants insérés, va être considérée. Détaillons les hypothèses simplificatrices de l'étude :

- Comme nous le disions, aucun effet de saturation des parties ferromagnétiques n'est pris en compte. Cette hypothèse permet d'assimiler, lors du calcul des composantes d'induction dans l'entrefer, les frontières air-fer à des conditions de Neumann homogènes.
- Le modèle est un modèle bidimensionnel. Donc, par définition, tout effet de bord dans la direction perpendiculaire au plan de modélisation est négligé. Cependant, dans l'introduction, nous avons vu que la notion de modèle 2D pour une machine à flux axial pouvait avoir plusieurs sens : soit il s'agit d'un modèle 2D après développement de l'actionneur au rayon moyen, ou bien il s'agit d'un modèle 2D par couches élémentaires, qui tient donc compte de l'effet de l'augmentation de longueurs orthoradiales au fur et à mesure que le rayon augmente (l'effet de courbure est donc pris en compte). Par simplicité, nous avons opté pour un modèle développé au rayon moyen. L'étude des effets de courbure sera abordé au chapitre 4, dans lequel nous étudierons en détail ces hypothèses de calcul, en prenant en plus en compte les effets de bord radiaux. La topologie à flux axial de la figure 3.3, une fois développée au rayon moyen a donc l'aspect montré au niveau de la figure 3.4 (les encoches sont encore représentées sur la figure 3.4, bien qu'elles seront par la suite négligées dans cette partie).

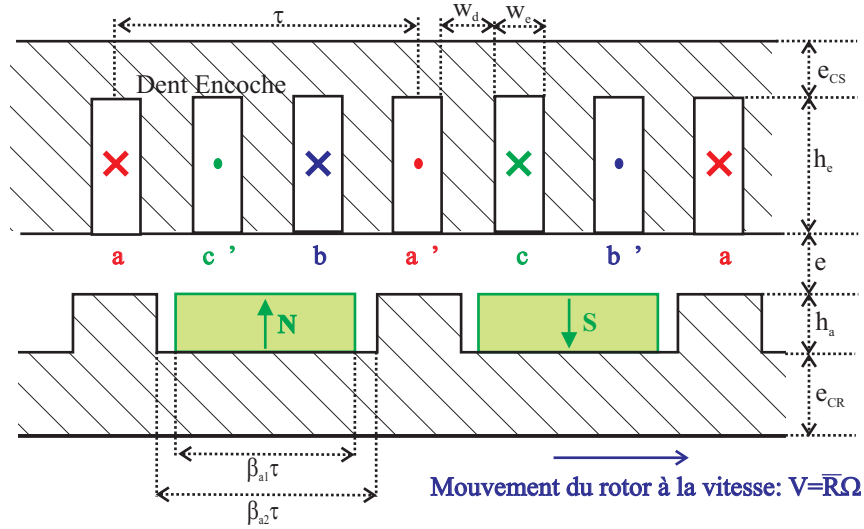


FIGURE 3.4: La machine à flux axial de la figure 3.3 développée au rayon moyen, avant le lissage des encoches par le coefficient de Carter k_c

- Nous allons lisser le stator à petites dents par le coefficient de Carter, ce dernier étant noté k_c et calculé comme dans la référence [Carter, 1901]. Or ce coefficient s’applique normalement sur tout l’entrefer équivalent de la machine, formé ici de la somme de la hauteur h_a des aimants, et de la valeur e de l’entrefer, que nous allons fixer ici pour des raisons mécaniques, et prendre $e = 2mm$. Par conséquent, l’entrefer équivalent corrigé par le coefficient de Carter est donc : $k_c (h_a + e)$. Nous allons faire l’hypothèse abusive, ainsi qu’il est fait dans [Parviainen, 2005], que ceci revient alors à prendre un entrefer corrigé, de valeur $e_c > e$, donnée par la relation : $e_c = k_c (h_a + e) - h_a$. De plus, puisque le stator est lissé, se pose alors la question de savoir, dans ce contexte, ce que deviennent les courants statoriques, qui, en réalité, sont localisés dans les encoches. Nous allons ramener ces derniers à une densité linéique d’épaisseur infiniment faible à la surface du stator. Par simplicité, cette densité sera restreinte à son premier harmonique spatial.
- Dans les modèles, nous négligeons également tous les phénomènes transitoires électromagnétiques : le régime permanent est supposé atteint, et la machine est alimentée par des courants parfaitement sinusoïdaux équilibrés. Cette hypothèse nous autorise, si on travaille dans le repère de Park, à considérer que les grandeurs de commande de la machine sont constantes, et sont au nombre de deux : le courant d’axe d ainsi que le courant d’axe q .

La première hypothèse, qui consiste à supposer idéaux les matériaux ferromagnétiques, est fondamentale, car elle nous permet de découpler le problème du calcul du champ dans l’entrefer de celui des culasses statorique et rotorique. Voilà pourquoi nous allons, dans une première section, présenter le calcul du champ dans l’entrefer, avec les conditions aux limites qui conviennent sur le pourtour du domaine de l’entrefer (ce seront des conditions de Neumann homogènes au niveau des frontières fer-air). Ensuite, nous allons nous servir de ce résultat afin d’en déduire les composantes des inductions dans les parties ferromagnétiques, ce qui nous sera nécessaire pour le calcul des pertes. De plus, l’avantage de cette hypothèse de linéarité sera de pouvoir superposer, afin d’obtenir l’état magnétique de la machine en charge, les effets des inductions dues aux aimants à vide, ainsi que ceux dûs aux courants, indépendamment les uns des autres.

Nous détaillons ici tous les paramètres qui seront utilisés pour décrire les dimensions géométriques de la machine étudiée.

- Grandeurs orthoradiales
 - Le nombre de paires de pôles de la machine est noté p .
 - Le pas polaire au niveau du rayon moyen (figure 3.4), noté τ .
 - L’ouverture relative de l’aimant par rapport au pas polaire (figure 3.4) notée β_{a1} . La longueur orthoradiale des aimants au niveau du rayon moyen est donc $\beta_{a1}\tau$.
 - L’ouverture relative de l’espace inter-dents par rapport au pas polaire (figure 3.4), notée β_{a2} . La longueur orthoradiale des pôles ferromagnétiques rotoriques au niveau du rayon moyen est donc $(1 - \beta_{a2})\tau$.

- L'ouverture orthoradiale de l'encoche du stator (figure 3.4), supposée parfaitement rectangulaire pour simplifier les calculs, notée w_e .
- L'ouverture orthoradiale de la dent du stator (figure 3.4), notée w_d .
- Le pas dentaire au niveau du stator, noté τ_s , vérifiant $\tau_s = w_e + w_d$.
- Le nombre d'encoches par pôle ($\tau = q_s \tau_s$), noté q_s . Nous prenons ici le bobinage triphasé le plus simple qu'il soit, avec une encoche par pôles et par phase, sans répartition, ni distribution ou raccourcissement. Par conséquent, nous avons ici $q_s = 3$.
- Les grandeurs axiales.
 - L'épaisseur axiale de la culasse du stator (figure 3.4), notée e_{cs} .
 - La hauteur axiale de la zone d'encoche (figure 3.4), notée h_e .
 - La hauteur axiale de la zone d'aimants (figure 3.4), notée h_a .
 - L'épaisseur réelle de l'entrefer (figure 3.4), fixée à $2mm$ pour des raisons mécaniques, notée e .
 - L'entrefer corrigé par le coefficient de Carter k_c , égal à $e_c = k_c (e + h_a) - h_a$, utile lorsque le stator est lissé, notée e_c . Nous rappelons l'expression du coefficient de Carter k_c , dont la démonstration, qui est fondée sur la transformation conforme, est détaillée dans l'article [Carter, 1901]. Notons w_i la largeur de l'ouverture des encoches statoriques. Ici, il s'agit de w_e puisque l'encoche est de forme rectangulaire, mais, en cas de forme plus complexe (avec un isthme), l'ouverture w_i peut être plus petite que la largeur d'encoche w_e . Le calcul se fait en deux étapes, en passant par une variable auxiliaire γ définie par :

$$\gamma = \frac{4}{\pi} \left[\frac{w_i}{2g} \arctan \left(\frac{w_i}{2g} \right) - \ln \sqrt{1 + \left(\frac{w_i}{2g} \right)^2} \right] \quad (3.1)$$

où g est l'entrefer magnétique équivalent, pris égal ici à $g = h_a + e$. A partir de là, l'entrefer magnétique équivalent est donné par la formule suivante :

$$k_c = \frac{\tau_s}{\tau_s - \gamma g} \quad (3.2)$$

- L'épaisseur axiale de la culasse du rotor (figure 3.4), notée e_{cr} .
- Grandeurs radiales
 - Rayon actif interne de la machine à flux axial, noté R_i .
 - Rayon actif externe de la machine à flux axial, noté R_o .
 - Rayon actif moyen \bar{R} de la machine à flux axial, au niveau duquel on fait l'étude, et $\bar{R} = \frac{R_i + R_o}{2}$.
 - Excursion des parties actives de la machine autour du rayon moyen \bar{R} : $\Delta R = R_o - R_i$.
 - Rayon externe de la machine à flux axial, noté R_{ext} , caractérisé par $R_{ext} = R_o + W_{cu}$, W_{cu} étant l'épanouissement radial des têtes de bobines.

3.2.1 Le calcul de l'induction dans l'entrefer

3.2.1.1 Calcul de l'induction à vide

Exposé de la méthode analytique Dans cette partie, nous allons exposer la méthode de calcul de l'induction à vide avec stator lissé. La géométrie dans laquelle le calcul est mené est montrée à la figure 3.5 : le domaine de calcul est celui représenté en bleu, noté $[ABCDEFGH]$. Ce dernier est muni du repère $(0xyz)$ tel que représenté au niveau de la figure 3.5. L'aimant est modélisé par un milieu de perméabilité μ_0 égale à celle de l'air, et par une induction rémanente $B_r = \mu_0 M$, M étant l'aimantation correspondant. Cette aimantation est dirigée suivant l'axe $(0y)$. La fonction aimantation $M_y(x)$ dans la zone 1 de la figure 3.5 est donnée à la figure 3.6.

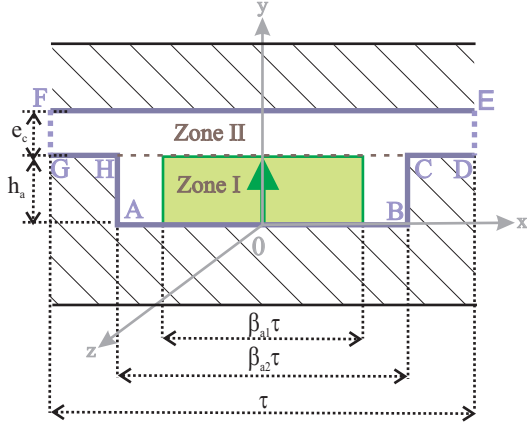


FIGURE 3.5: Géométrie considérée pour le calcul de l'induction à vide

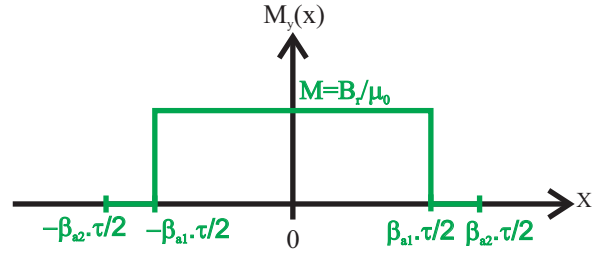


FIGURE 3.6: Fonction aimantation considérée pour le calcul de l'induction dans l'entrefer due aux aimants

L'hypothèse 2D permet d'écrire le potentiel-vecteur magnétique comme un vecteur ne dépendant que des coordonnées (x, y) , et dirigée suivant $(0z)$:

$$\vec{A}(x, y) = A(x, y) \vec{u}_z \quad (3.3)$$

Le problème est résolu en magnétostatique, ce qui permet de dire que l'équation régissant la fonction scalaire $A(x, y)$ se solde par une équation de Laplace dans l'air, et une équation de Poisson dans l'aimant. On rappelle que l'hypothèse d'un matériau ferromagnétique de perméabilité infinie se traduit par des conditions de Neumann au niveau des frontières fer-air. La symétrie du problème (considérant qu'un pas polaire ayant un aimant de polarité inversé succède à celui représenté sur la figure 3.5) permet de dire que les conditions d'anti-périodicité entre les segments $[ED]$ et $[FG]$ se simplifient en des conditions de Neumann. Le problème à résoudre pour obtenir le potentiel $A(x, y)$ devient donc :

$$\begin{cases} \Delta A = \mu_0 \frac{\partial M_y}{\partial x} & \text{dans la Zone 1} \\ \Delta A = 0 & \text{dans la Zone 2} \\ \frac{\partial A}{\partial n} = 0 & \text{sur le contour } [ABCDEFGH] \end{cases} \quad (3.4)$$

L'aimantation dans la zone I (celle des aimants) $M_y(x)$ est développable en séries de Fourier sous la forme :

$$M_y(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} M_k \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{\beta_{a2}\tau} x\right) \quad (3.5)$$

où les coefficients M_k sont données par la formule suivante :

$$M_k = \frac{4 B_r}{\pi \mu_0} \frac{1}{2k-1} \sin\left((2k-1) \frac{\beta_{a1}}{\beta_{a2}} \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.6)$$

Dans la zone I, les segments $[AH]$ et $[BC]$ comportant des conditions de Neumann nulles, il nous est autorisé de la considérer comme des plans d'antisymétrie. Ceci nous autorise à rechercher les solutions au problèmes du potentiel-vecteur sous la forme suivante, qui sépare les variables :

$$A^{(I)}(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(y) \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{\beta_{a2}\tau} x\right) \quad (3.7)$$

où pour tout entier k , $a_k(y)$ est une fonction inconnue de la variable y . L'injection de cette expression dans l'équation de Poisson permet de trouver ces fonctions $a_k(y)$. En tenant compte de la conditions de Neumann sur le segment $[AB]$, on obtient alors l'expression :

$$A^{(I)}(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k^{(I)} \cosh\left(\frac{(2k-1)\pi}{\beta_{a2}\tau} y\right) - \mu_0 \frac{\beta_{a2}\tau}{\pi} \frac{M_k}{2k-1} \right] \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{\beta_{a2}\tau} x\right) \quad (3.8)$$

Ici, $a_k^{(I)}$ est une suite de constantes caractérisant le potentiel dans la zone I. Par un raisonnement similaire, l'expression du potentiel-vecteur peut être trouvée dans la zone II où $M_k = 0$:

$$A^{(II)}(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^{(II)} \cosh\left(\frac{(2k-1)\pi}{\tau}(y - h_a - e_c)\right) \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{\tau}x\right) \quad (3.9)$$

Les constantes $a_k^{(I)}$ et $a_k^{(II)}$ seront calculées grâce aux conditions aux limites entre les deux zones, au niveau de la frontière $[GHCD]$.

– Sur le segment $[HC]$, à la fois le potentiel et sa dérivée normale sont continus :

$$\forall x \in \left[-\beta_{a_2} \frac{\tau}{2}, \beta_{a_2} \frac{\tau}{2}\right], \begin{cases} A^{(I)}(x, y = h_a) & = A^{(II)}(x, y = h_a) \\ \frac{\partial A^{(I)}}{\partial y} \Big|_{y=h_a} & = \frac{\partial A^{(II)}}{\partial y} \Big|_{y=h_a} \end{cases} \quad (3.10)$$

La relation de continuité du potentiel donne :

$$\begin{aligned} \forall x \in \left[-\beta_{a_2} \frac{\tau}{2}, \beta_{a_2} \frac{\tau}{2}\right], \\ \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k^{(I)} \cosh\left(\frac{(2k-1)\pi}{\beta_{a_2}\tau} h_a\right) - \mu_0 \frac{\beta_{a_2}\tau}{\pi} \frac{M_k}{2k-1} \right] \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{\beta_{a_2}\tau} x\right) \\ = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^{(II)} \cosh\left(\frac{(2k-1)\pi}{\tau} e_c\right) \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{\tau} x\right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Tandis que la continuité de la dérivée normale mène à :

$$\begin{aligned} \forall x \in \left[-\beta_{a_2} \frac{\tau}{2}, \beta_{a_2} \frac{\tau}{2}\right], \\ \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^{(I)} \frac{(2k-1)}{\beta_{a_2}} \sinh\left(\frac{(2k-1)\pi}{\beta_{a_2}\tau} h_a\right) \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{\beta_{a_2}\tau} x\right) \\ = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^{(II)} (2k-1) \sinh\left(\frac{(2k-1)\pi}{\tau} e_c\right) \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{\tau} x\right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

– Sur les portions $[GH]$ et $[CD]$, les conditions de Neumann entre le fer et l'air imposent alors la relation :

$$\forall x \in \left[-\frac{\tau}{2}, -\beta_{a_2} \frac{\tau}{2}\right] \cup \left[\beta_{a_2} \frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right], \frac{\partial A^{(II)}}{\partial y} \Big|_{y=h_a} = 0 \quad (3.13)$$

Cette relation s'explique en :

$$\forall x \in \left[-\frac{\tau}{2}, -\beta_{a_2} \frac{\tau}{2}\right] \cup \left[\beta_{a_2} \frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right], \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^{(II)} (2k-1) \sinh\left(\frac{(2k-1)\pi}{\tau} e_c\right) \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{\tau} x\right) = 0 \quad (3.14)$$

On multiplie l'équation 3.11 par $\sin\left(\frac{(2q-1)\pi}{\beta_{a_2}\tau} x\right)$, où q est un certain entier naturel supérieur à 1, et on intègre sur l'intervalle $\left[-\beta_{a_2} \frac{\tau}{2}, \beta_{a_2} \frac{\tau}{2}\right]$. En tenant compte des relations suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{-\beta_{a_2}\tau}^{\beta_{a_2}\tau} \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{\beta_{a_2}\tau} x\right) \sin\left(\frac{(2q-1)\pi}{\beta_{a_2}\tau} x\right) dx &= \beta_{a_2}\tau \delta_{k,q} \\ \int_{-\beta_{a_2}\tau}^{\beta_{a_2}\tau} \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{\tau} x\right) \sin\left(\frac{(2q-1)\pi}{\beta_{a_2}\tau} x\right) dx &= \beta_{a_2}\tau \alpha_{k,q} \end{aligned} \quad (3.15)$$

où nous avons introduit le coefficient suivant :

$$\alpha_{k,q} = \sin_C((2k-1)\beta_{a_2} - (2q-1)) \frac{\pi}{2} - \sin_C((2k-1)\beta_{a_2} + (2q-1)) \frac{\pi}{2} \quad (3.16)$$

Il est alors possible d'obtenir l'équation :

$$a_q^{(I)} \cosh\left(\frac{(2q-1)\pi}{\beta_{a_2}\tau} h_a\right) - \mu_0 \frac{\beta_{a_2}\tau}{\pi} \frac{M_q}{2q-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{k,q} a_k^{(II)} \cosh\left(\frac{(2k-1)\pi}{\tau} e_c\right) \quad (3.17)$$

De même, en multipliant les équations 3.12 et 3.14 par $\sin\left(\frac{(2q-1)\pi}{\tau}x\right)^2$, il est alors possible d'obtenir la relation suivante :

$$a_q^{(II)} (2q-1) \sinh\left(\frac{(2q-1)\pi}{\tau}e_c\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^{(I)} (2k-1) \sinh\left(\frac{(2k-1)\pi}{\beta_{a_2}\tau}h_a\right) \alpha_{q,k} \quad (3.18)$$

Afin de déterminer des deux séries de coefficients inconnus $a_q^{(I)}$ et $a_q^{(II)}$, nous allons écrire les deux équations 3.17 et 3.18 sous forme matricielle. Dans ce but, le nombre d'harmoniques est considéré non pas comme infini, mais égal à un certain nombre entier N , supposé assez grand. Nous reviendrons sur le choix de ce nombre par la suite. Nous introduisons les vecteurs suivants :

$$[\mathcal{A}^{(I)}] = \begin{pmatrix} a_1^{(I)} \\ \vdots \\ a_q^{(I)} \\ \vdots \\ a_N^{(I)} \end{pmatrix}, \quad [\mathcal{A}^{(II)}] = \begin{pmatrix} a_1^{(II)} \\ \vdots \\ a_q^{(II)} \\ \vdots \\ a_N^{(II)} \end{pmatrix}, \quad \text{et } [\mathcal{M}] = \mu_0 \frac{\beta_{a_2}\tau}{\pi} \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ \frac{M_q}{2q-1} \\ \vdots \\ \frac{M_N}{2N-1} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Ainsi que les matrices diagonales :

$$[\mathcal{D}_1] = \begin{pmatrix} \ddots & & & 0 \\ & \cosh\left(\frac{(2q-1)\pi}{\beta_{a_2}\tau}h_a\right) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad [\mathcal{D}_2] = \begin{pmatrix} \ddots & & & 0 \\ & \cosh\left(\frac{(2q-1)\pi}{\tau}e_c\right) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

$$[\mathcal{D}_3] = \begin{pmatrix} \ddots & & & 0 \\ & (2q-1) \sinh\left(\frac{(2q-1)\pi}{\tau}e_c\right) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad [\mathcal{D}_4] = \begin{pmatrix} \ddots & & & 0 \\ & (2q-1) \sinh\left(\frac{(2q-1)\pi}{\beta_{a_2}\tau}h_a\right) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Nous utiliserons aussi la matrice $[\alpha] = (\alpha_{k,q})_{(k,q) \in [1,q]^2}$. L'équation 3.17 s'exprime ainsi :

$$[\mathcal{D}_1] [\mathcal{A}^{(I)}] = [\alpha]^T [\mathcal{D}_2] [\mathcal{A}^{(II)}] + [\mathcal{M}] \quad (3.21)$$

Alors que l'équation 3.18 devient, quant à elle :

$$[\mathcal{D}_3] [\mathcal{A}^{(II)}] = [\alpha] [\mathcal{D}_4] [\mathcal{A}^{(I)}] \quad (3.22)$$

Le système d'équations matriciel formé des équations 3.21 et 3.22 peut se résoudre par substitution pour trouver des vecteurs des coefficients $[\mathcal{A}^{(I)}]$ ainsi que $[\mathcal{A}^{(II)}]$. Pour ce faire, il est nécessaire d'inverser une matrice de taille N , car après substitution de l'équation 3.22 dans 3.21, on va obtenir le système suivant à résoudre :

$$\left([\mathcal{D}_1] - [\alpha]^T [\mathcal{D}_2] [\mathcal{D}_3]^{-1} [\alpha] [\mathcal{D}_4]\right) [\mathcal{A}^{(I)}] = [\mathcal{M}] \quad (3.23)$$

Le choix de ce nombre N d'harmoniques à retenir est délicat. En effet, il dépend entre autres de la géométrie considérée. Une première option serait de choisir ce nombre le plus grand possible afin de garder un temps de calcul raisonnable. Néanmoins, cette option ne nous apparaît guère satisfaisante. Une autre méthode est possible : après avoir trouvé la solution triviale lorsque $N = 1$, on procède par récurrence : supposons que l'on connaisse la solution pour un certain nombre N d'harmoniques, on va résoudre le système de dimension $N + 1$ par une méthode itérative de type Gauss-Seidel. Afin de réduire le nombre d'itérations au minimum, on va initialiser la solution avec la solution trouvée pour le système de taille N , en rajoutant une ligne $N + 1$ nulle à ce vecteur. On arrête d'augmenter la taille du vecteur lorsque les coefficients obtenus sont semblables à une certaine tolérance près lorsque l'on ajoute un harmonique, ce qui permet d'adapter le nombre N souhaité à la géométrie et à la tolérance souhaitée.

Une fois le potentiel vecteur obtenu, les deux composantes d'induction s'obtiennent par dérivation du potentiel :

$$\begin{cases} B_x &= \frac{\partial A}{\partial y} \\ B_y &= -\frac{\partial A}{\partial x} \end{cases} \quad (3.24)$$

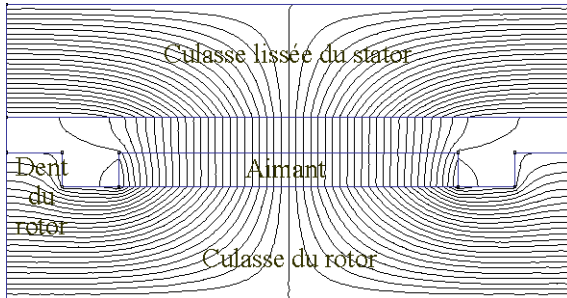
2. L'équation 3.12 intervient sur l'intervalle $[-\beta_{a_2}\frac{\tau}{2}, \beta_{a_2}\frac{\tau}{2}]$, et l'équation 3.14 intervient sur $[-\frac{\tau}{2}, -\beta_{a_2}\frac{\tau}{2}] \cup [\beta_{a_2}\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}]$

Vérification numérique du modèle Nous allons procéder à une vérification numérique du modèle ci-dessus. Nous allons considérer la géométrie de machine consignée dans le tableau 3.1, où on note μ_r la perméabilité relative du matériau magnétique constituant le stator ainsi que le rotor de la machine, qui doit être très grand devant l'unité afin de respecter l'hypothèse des matériaux ferromagnétiques idéaux énoncée lors du calcul.

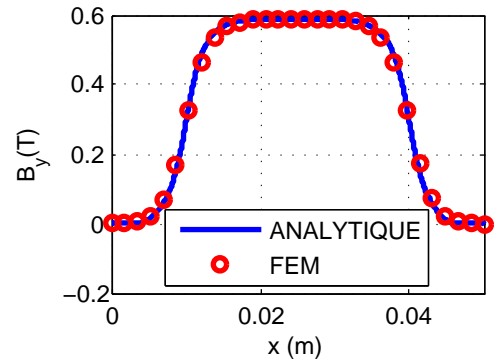
Paramètre	Valeur adoptée pour le test
B_r	$1.2T$
μ_r	1000
h_a	$3mm$
e_{cs}	$1cm$
e_{cr}	$1cm$
β_e	$\frac{2}{3} \Rightarrow e_c = 3.1mm$
h_e	$3cm$
τ	$6cm$
β_{a1}	0.6
β_{a2}	0.8
p	5
\bar{R}	$10cm$
ΔR	$8cm$

TABLE 3.1: Géométrie de la machine testée par éléments finis

Nous nous proposons de calculer l'induction normale entrant dans le stator $B_y(x, y = h_a + e)$, à la fois analytiquement, et par éléments finis, la variable x variant sur un pas polaire entier de longueur τ . Dans un premier temps, afin de vérifier le bon fonctionnement du calcul analytique, nous nous proposons de faire le calcul par éléments finis en prenant un stator également lissé par le coefficient de Carter, exactement la même hypothèse que le calcul analytique. Les lignes de champ obtenues par éléments finis dans ce cas sont montrées à la figure 3.8a. Le résultat est montré à la figure 3.7b, et semble satisfaisant.



(a) Lignes de champ obtenues lors de la vérification par éléments finis du modèle analytique

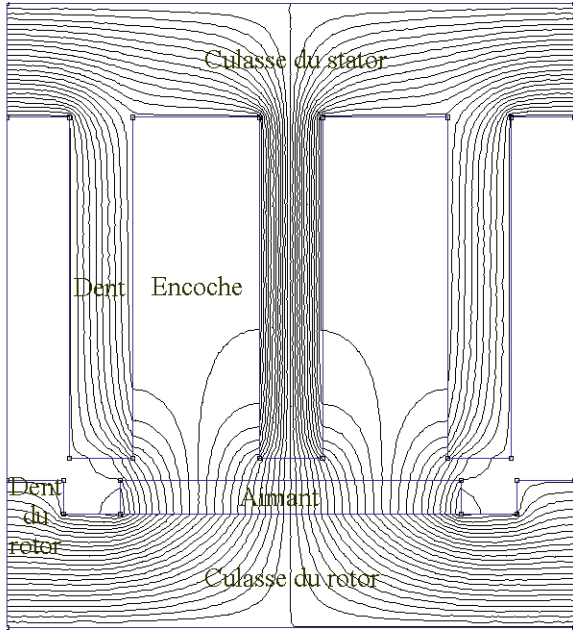


(b) Induction $B_y(x, y = h_a + e)$ entrant dans le stator de la machine sur un pas polaire (analytiquement et par éléments finis)

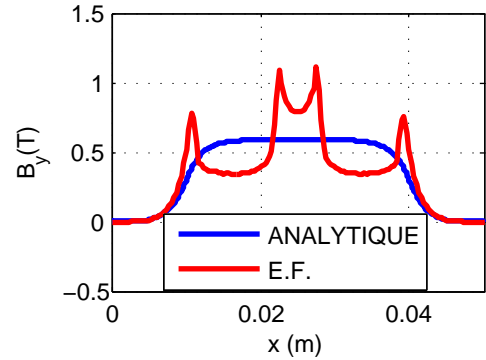
FIGURE 3.7: Vérification du calcul analytique pour les aimants par éléments finis en lissant le stator comme dans le calcul

Puis, dans un second temps, on relance le calcul par éléments finis, en mettant les encoches statoriques ainsi que le vrai entrefer. Les lignes de champ obtenues par éléments finis avec stator encoché sont montrées à la figure 3.8a. La comparaison entre le modèle analytique et ce modèle par éléments finis est donnée à la figure 3.8b. Il est important de dire que dans ce cas, le calcul est différent pour chaque position donnée du rotor par rapport au stator, et donc que ce calcul n'est valable que pour une position donnée. Ici, par mesure de symétrie, on a fait en sorte

qu'une dent statorique se trouve au milieu de l'aimant.



(a) Lignes de champ obtenues lors de la vérification par éléments finis du modèle analytique



(b) Induction $B_y(x, y = h_a + e)$ entrant dans le stator de la machine sur un pas polaire, analytiquement et par éléments finis

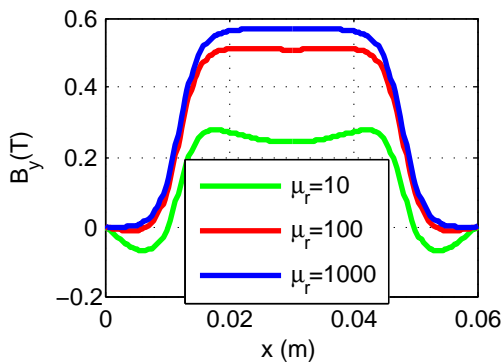
FIGURE 3.8: Vérification du calcul analytique pour les aimants par éléments finis, en prenant un stator encoché pour la simulation numérique, pour une position donnée du stator par rapport au rotor

On peut en déduire que le fait de négliger les encoches conduit à un modèle très éloigné de la réalité en ce qui concerne la forme de l'induction d'entrefer. Néanmoins, en ce qui concerne les grandeurs intégrales, on peut calculer une induction moyenne de $0.35T$ dans l'entrefer lissé (avec le modèle analytique), et $0.33T$ dans l'entrefer réel encoché, soit une erreur de 6%, ce qui semble acceptable. En effet, c'est l'induction moyenne sous un pôle qui détermine le flux, qui est la grandeur qui conditionne le couple. Ce résultat était prévisible, dans le sens où le coefficient de Carter (formule 3.2) avait été déterminé justement sur la base que l'induction moyenne sous une encoche soit conservée lorsque l'encochage statorique se trouve lissé. L'erreur obtenue peut s'expliquer par le fait que, dans la démonstration du coefficient de Carter, trois hypothèses sont faites, qui ne sont pas vérifiées dans la topologie que l'on étudie :

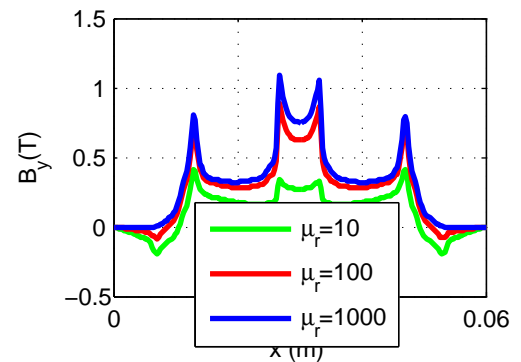
- d'une part, le coefficient de Carter est calculé en négligeant l'interaction entre encoches successives, ce qui peut fort bien se révéler faux, dès lors que les dents sont fines (la référence [Markovic et Perriard, 2008] a cependant montré qu'il fallait prendre des dents vraiment très fines pour que cet effet se fasse sentir, ce qui n'est pas le cas dans la géométrie considérée, qui est voulue assez conventionnelle).
- Le rotor, dans la démonstration du coefficient de Carter, est supposé lisse, alors qu'ici, ce n'est pas le cas puisque la machine est à aimants insérés.
- Et surtout, dans la démonstration du coefficient de Carter, la période spatiale de l'excitation est supposée infiniment grande par rapport au pas dentaire, et de plus cette excitation est supposée localisée uniquement sur les parois. En effet, le coefficient de Carter est calculé en portant l'intégralité du stator à un potentiel scalaire unitaire, alors que le potentiel scalaire du rotor est supposé nul, puis en rendant les inductions moyennes avec et sans encoches égales. Ces hypothèses ne sont pas vérifiées ici : d'une part, l'excitation est constante uniquement sur la longueur de l'aimant, qui prend 60% du pas polaire, ce qui n'est pas du tout très grand par rapport au pas dentaire, qui lui prend 33% du pas polaire, puisque l'on a trois encoches par pôle. Qui plus est, avec un aimant, l'excitation est répartie de manière uniforme dans la zone allouée à ce dernier, et n'est donc pas localisée uniquement sur les parois de l'entrefer magnétique équivalent de la machine.

Enfin, nous nous posons le problème suivant. Il est clair que l'hypothèse d'une perméabilité magnétique infinie du fer du stator et du rotor est indispensable au bon déroulement du calcul analytique, car elle nous procure les

conditions de Neumann homogènes au niveau des frontières entre l'air et le fer, conditions qui sont à la base de l'écriture des potentiels sous forme de séries harmoniques tel que nous l'avons fait. C'est pour cela que lors des vérifications par éléments finis, nous nous sommes permis, comme montré dans le tableau 3.1, d'affecter au fer une perméabilité magnétique très largement supérieure à l'unité (on a pris une perméabilité magnétique relative du fer égale à $\mu_r = 1000$), afin de nous placer dans les hypothèses du calcul analytique que nous voulions vérifier. Ceci semble d'ailleurs chose faite, car la figure 3.7b avait montré que l'écart entre le modèle analytique qui suppose que la perméabilité magnétique relative tend vers l'infini, et la vérification par éléments finis où $\mu_r = 1000$, était négligeable. Il n'y a donc aucun besoin d'augmenter encore le paramètre μ_r pour nous placer dans l'hypothèse du calcul analytique. Néanmoins, par éléments finis, il est toujours possible de diminuer cette perméabilité magnétique relative μ_r , afin d'évaluer les changements sur l'induction ou le flux lorsque cette grandeur n'est plus infiniment grande par rapport à l'unité. Ainsi avons nous divisé la valeur l'origine $\mu_r = 1000$ par 10 (cas où $\mu_r = 100$), puis par 100 (cas où $\mu_r = 10$). Les résultats sont montrés au niveau de la figure 3.9, pour le modèle à stator lisse, puis pour celui avec encoches réelles. Pour le cas $\mu_r = 100$, les composantes d'inductions dans l'entrefer sont peu changées, avec et sans les encoches, et ceci malgré une division par un facteur 10 de la perméabilité magnétique relative des parties ferromagnétiques. Ceci est dû au fait que l'entrefer magnétique équivalent, dans une machine à aimant, est déjà très important, et que sa réluctance reste très supérieure à celle des parties ferromagnétiques. Pour le cas $\mu_r = 10$, ce n'est manifestement plus le cas, car la diminution des composantes d'induction devient très importante. Une remarque particulière peut être faite pour le cas avec encoches. Auparavant, pour les situations où $\mu_r = 1000$ et $\mu_r = 100$, la dent centrale créait un pic d'induction élevé au-dessus de l'aimant, en captant la plupart du flux de ce dernier. Pour le cas $\mu_r = 10$, ce pic est très diminué, au point de ne pas être supérieur à celui ayant cours sous les deux autres dents. Ceci est dû au fait que le parcours dans le stator qui relie la dent centrale aux bords du domaine (considérés comme des frontières équipotentielles nulles) est plus réluctant que celui reliant les dents latérales à ces mêmes bords. En conséquence, bien que la source de flux d'aimant pouvant débiter dans la dent centrale soit plus importante que celle débitant dans les dents latérales, la réluctance offerte par le parcours entrefer-dent est plus élevée, et donc, à cause de la réluctance d'aimant en parallèle sur la source de flux d'aimant, les flux effectifs traversant l'entrefer pour les dents centrales et latérales sont semblables.



(a) Sans prise en compte de l'encoche statorique



(b) Avec prise en compte de l'encoche statorique

FIGURE 3.9: Ondes d'induction $B_y(x, y = h_a + e)$ que l'on obtiendrait dans l'entrefer de la machine en divisant la perméabilité magnétique relative $\mu_r = 1000$ par 10, puis par 100

3.2.1.2 Calcul de l'induction due aux courants statoriques

Exposé de la méthode analytique Nous allons calculer analytiquement le champ de réaction magnétique d'induit, en tenant compte de la saillance rotorique, mais en négligeant l'effet de denture statorique. Par conséquent, les courants sont réduits à une densité linéique à la surface du stator lissé. Nous passons dans le repère de Park, afin, en régime permanent, de pouvoir considérer les courants comme constants, l'hypothèse de l'alimentation en courants sinusoïdaux étant retenue. Le diagramme de Fresnel pour une phase en régime permanent au premier harmonique,

dans le cas d'une machine à pôles saillants, est rappelé au niveau de la figure 3.10³. Dans les conventions que nous adopterons dans la suite de ce travail, le courant I_d d'axe d (référence des angles) est la projection de la valeur efficace du courant sinusoïdal d'alimentation de la phase sur l'axe d , et de même pour le courant I_q d'axe q .

Nous restreignons les densités linéiques de courant à leur premier harmonique spatial. Étant donné la géométrie du problème ainsi posé (figure 3.11), la densité de courant d'axe $(0z)$ à introduire aura pour expression, dans l'axe d :

$$K_{z_d}(x) = -K_{1m_d} \sin\left(\frac{\pi}{\tau}x\right) \quad (3.25)$$

Quant à l'axe q , la densité linéique de courant d'axe $(0z)$ aura pour expression :

$$K_{z_q}(x) = K_{1m_q} \cos\left(\frac{\pi}{\tau}x\right) \quad (3.26)$$

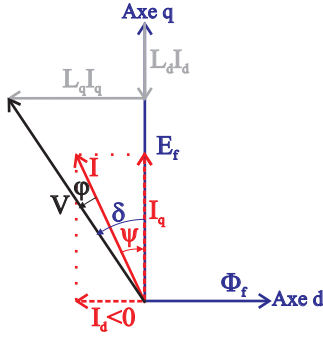


FIGURE 3.10: Diagramme de Fresnel pour une phase en régime permanent au premier harmonique, les grandeurs étant des valeurs efficaces par phase (toutes les pertes sont négligées)

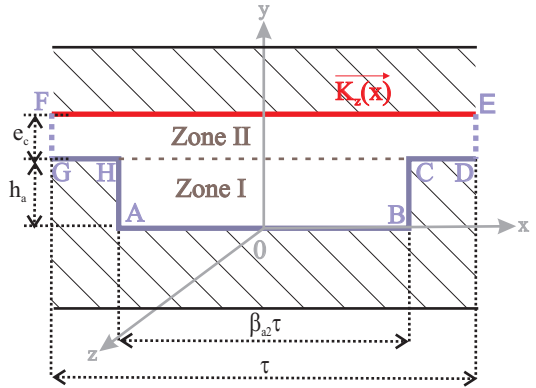


FIGURE 3.11: Géométrie considérée pour le calcul de l'induction due aux courants

Afin de calculer les amplitudes des densités linéiques de courant d'axe d et d'axe q en fonction des ampères-tours dans les encoches, on considère que le bobinage réparti possède $2n$ conducteurs par encoche (ce qui fait n conducteurs par pôle et par phase). Auquel cas, l'amplitude du premier harmonique de densité linéique de courant d'axe d va avoir l'expression suivante, en considérant l'action des trois phases :

$$K_{1m_d} = \frac{3}{2} \frac{4}{\tau} n I_d \sqrt{2} k_{b_1} \quad (3.27)$$

Et de même pour l'amplitude du premier harmonique de densité linéique de courant d'axe q :

$$K_{1m_q} = \frac{3}{2} \frac{4}{\tau} n I_q \sqrt{2} k_{b_1} \quad (3.28)$$

Le coefficient k_{b_1} est le coefficient de bobinage pour le premier harmonique. Étant donné la simplicité du bobinage que l'on a jusque là considéré, le seul phénomène à prendre en compte est l'ouverture de l'encoche, de largeur w_e , ce qui permet de dire [Lipo, 2004] que ce coefficient est égal à :

$$k_{b_1} = \text{sin}_C\left(\frac{\pi w_e}{2\tau}\right) \quad (3.29)$$

Nous allons uniquement exposer le principe pour le calcul du courant d'axe d , le calcul du courant d'axe q étant très semblable, à quelques variantes près. Le point de départ est la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique au niveau de la frontière lissée du stator. En effet, sachant que la perméabilité infinie du fer

3. les grandeurs sont des valeurs efficaces par phase, la valeur efficace du flux des aimants par phase est notée Φ_f , et la force électromotrice à vide correspondante est notée E_f

permet de dire que le champ magnétique dans le fer du stator est nul, on peut écrire, au niveau de l'ordonnée $y = h_a + e_c$, la condition de passage suivante :

$$-H_{x_{AIR}}(x, y = h_a + e_c) = K_{z_d}(x) = -K_{1m_d} \sin\left(\frac{\pi}{\tau}x\right) \quad (3.30)$$

En potentiel, ceci devient :

$$\left. \frac{\partial A^{(II)}}{\partial y} \right|_{y=h_a+e_c} = \mu_0 K_{1m_d} \sin\left(\frac{\pi}{\tau}x\right) \quad (3.31)$$

Entre les zones I et II, sur le segment $[HC]$, on doit vérifier la continuité du potentiel et de sa dérivée normale, et, sur les segments $[GH]$ et $[CD]$, le potentiel-vecteur dans la zone II vérifiera la condition de Neumann nulle : $\left. \frac{\partial A^{(II)}}{\partial y} \right|_{y=h_a}$. L'équation de Laplace à l'intérieur du domaine est vérifiée dans les deux zones : $\Delta A = 0$. De même qu'auparavant, les conditions de périodicité au niveau des segments $[ED]$ et $[FG]$ se simplifient en des conditions de Neumann nulles. Par conséquent, le problème à résoudre pour déterminer le potentiel-vecteur dans le domaine d'étude est donc :

$$\begin{cases} \Delta A = 0 & \text{dans les Zones I et II} \\ \frac{\partial A}{\partial n} = 0 & \text{sur le contour } [FGHABCDE] \\ \frac{\partial A}{\partial n} = \mu_0 K_{1m_d} \sin\left(\frac{\pi}{\tau}x\right) & \text{sur le segment } [EF] \end{cases} \quad (3.32)$$

Afin de résoudre le problème ainsi posé, nous choisissons de décomposer le potentiel dans la zone II en deux termes de potentiel-vecteur :

$$A^{(II)}(x, y) = A_1^{(II)}(x, y) + A_2^{(II)}(x, y) \quad (3.33)$$

Et nous choisissons que le premier terme de potentiel doit vérifier :

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial A_1^{(II)}}{\partial y} \right|_{y=h_a+e_c} = \mu_0 K_{1m_d} \sin\left(\frac{\pi}{\tau}x\right) & \text{sur le segment } [FE] \\ \left. \frac{\partial A_1^{(II)}}{\partial y} \right|_{y=h_a} = 0 & \text{sur le segment } [HC] \end{cases} \quad (3.34)$$

Alors que le second terme vérifiera :

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial A_2^{(II)}}{\partial y} \right|_{y=h_a+e_c} = 0 & \text{sur le segment } [FE] \\ \left. \frac{\partial A_2^{(II)}}{\partial y} \right|_{y=h_a} = \left. \frac{\partial A^{(I)}}{\partial y} \right|_{y=h_a} & \text{sur le segment } [HC] \end{cases} \quad (3.35)$$

Le potentiel $A_1^{(II)}$ est donné par la série :

$$A_1^{(II)}(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k,1}^{(II)} \cosh\left((2k-1)\frac{\pi}{\tau}(y-h_a)\right) \sin\left((2k-1)\frac{\pi}{\tau}x\right) \quad (3.36)$$

La condition sur la segment $[FE]$ donne :

$$\begin{cases} \frac{\pi}{\tau} a_{1,1}^{(II)} \sinh\left(\frac{\pi}{\tau} \cdot k_C \cdot e\right) = K_{1m} \Rightarrow a_{1,1}^{(II)} = \frac{K_{1m}}{\frac{\pi}{\tau} \sinh\left(\frac{\pi}{\tau} \cdot k_C \cdot e\right)} \\ \forall k \geq 2 & a_{k,1}^{(II)} = 0 \end{cases} \quad (3.37)$$

Quant au potentiel $A_2^{(II)}$, il est donné par la série suivante :

$$A_2^{(II)}(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k,2}^{(II)} \cosh\left((2k-1)\frac{\pi}{\tau}(y-(h_a+e_c))\right) \sin\left((2k-1)\frac{\pi}{\tau}x\right) \quad (3.38)$$

D'autre part, dans la zone I, les conditions de Neumann sur les segments $[HA]$, $[AB]$ et $[BC]$ permettent d'écrire le potentiel dans la zone I sous la forme suivante :

$$A^{(I)}(x, y) = \sum_{q=1}^{+\infty} a_q^{(I)} \cosh \left((2q-1) \frac{\pi}{\beta_{a_2} \tau} y \right) \sin \left((2q-1) \frac{\pi}{\beta_{a_2} \tau} x \right) \quad (3.39)$$

En appliquant les mêmes techniques de raccord entre les zones I et II que pour le calcul du flux à vide, et en se rappelant la condition de Neumann à vérifier sur les segments $[GH]$ et $[CD]$, nous pouvons aboutir aux équations suivantes :

– Pour le raccord en continuité du potentiel :

$$a_q^{(I)} \cosh \left((2q-1) \frac{\pi}{\beta_{a_2} \tau} h_a \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{k,q} a_{k,2}^{(II)} \cosh \left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} k_c \cdot e \right) + a_{1,1}^{(II)} \alpha_{1,q} \quad (3.40)$$

– Pour le raccord sur la dérivée normale du potentiel :

$$-(2k-1) a_{k,2}^{(II)} \sinh \left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} k_c \cdot e \right) = \sum_{q=1}^{+\infty} \alpha_{k,q} (2q-1) a_q^{(I)} \sinh \left((2q-1) \frac{\pi}{\beta_{a_2} \tau} h_a \right) \quad (3.41)$$

Le système peut être mis sous forme matricielle, en posant les vecteurs de coefficients recherchés, pour une certaine taille N de coefficients :

$$[\mathcal{A}^{(I)}] = \begin{pmatrix} a_1^{(I)} \\ \vdots \\ a_q^{(I)} \\ \vdots \\ a_N^{(I)} \end{pmatrix}, \quad [\mathcal{A}_2^{(II)}] = \begin{pmatrix} a_{1,2}^{(II)} \\ \vdots \\ a_{q,2}^{(II)} \\ \vdots \\ a_{N,2}^{(II)} \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad [\alpha_1] = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} \\ \vdots \\ \alpha_{N,1} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

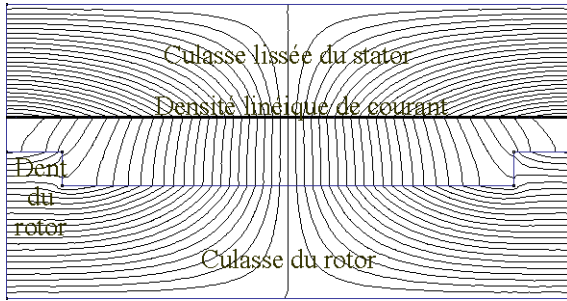
On va alors obtenir le système :

$$\begin{cases} [D_1] [\mathcal{A}^{(I)}] &= [\alpha]^T [D_2] [\mathcal{A}_2^{(II)}] + a_{1,1}^{(II)} [\alpha_1] \\ -[D_3] [\mathcal{A}_2^{(II)}] &= [\alpha] [D_4] [\mathcal{A}^{(I)}] \end{cases} \quad (3.43)$$

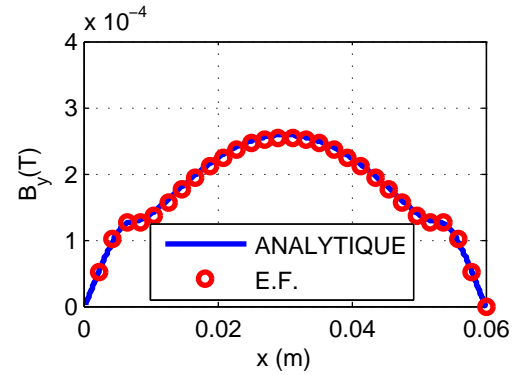
Ce système est résolu par la méthode de Gauss-Seidel, comme exposé plus haut.

En ce qui concerne le calcul avec la densité de courant d'axe q , le calcul est totalement semblable. A noter cependant que, dans la géométrie de la figure 3.11, les conditions d'antipériodicité au niveau des segments $[ED]$ et $[FG]$, lorsque l'on applique une densité linéique de courant d'axe q , vont cette fois se simplifier en des conditions de Dirichlet nulles, ce qui exige une certaine réadaptation des équations, notamment le changement des fonctions sinus en fonctions cosinus.

Vérification par éléments finis Comme auparavant pour le flux à vide, une vérification des résultats par éléments finis est proposée. Nous reprenons la géométrie du tableau 3.1. Plaçons-nous dans l'axe d . Étant donné l'hypothèse de linéarité, il suffit d'imposer un nombre d'ampères-tours par bobine de $nI_d = 1A$, car, de cette manière, la perméance d'entrefer sera directement trouvée par intégration de l'induction d'entrefer. Ceci correspond à une amplitude de densité linéique spatiale de courant de $K_{1m_d} = 80A/m$. Nous nous intéressons à la composante $B_y(x, y = h_a + e)$ de l'induction entrant dans le stator, qui sert, par intégration, à obtenir la perméance d'entrefer. Comme auparavant, nous allons, par éléments finis, faire une simulation avec un stator lissé comme dans le calcul pour vérifier le résultat fourni par la méthode analytique. Les lignes de champ obtenues dans ce cas du stator lisse, et une densité linéique de courant d'axe d sont montrées à la figure 3.12a. Le tracé de l'induction obtenue, aussi bien analytiquement que par éléments finis dans le cas sans encoche, est montré à la figure 3.12b.

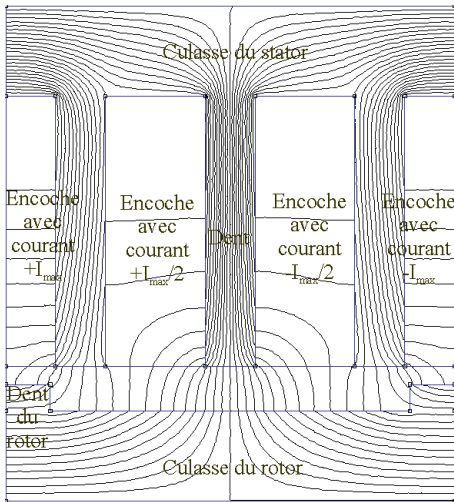


(a) Lignes de champ obtenues lors de la vérification par éléments finis du modèle analytique

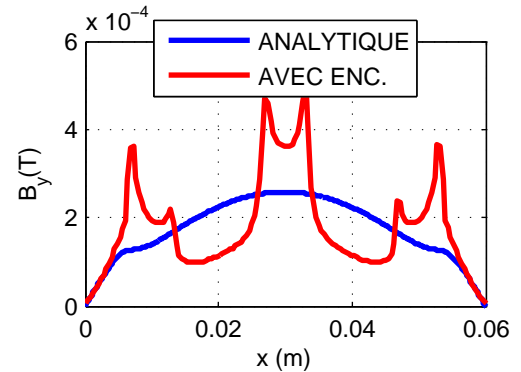


(b) Induction $B_y(x, y = h_a + e)$ entrant dans le stator de la machine sur un pas polaire (analytiquement et par éléments finis)

FIGURE 3.12: Vérification du calcul analytique pour le courant d'axe d ($nI_d = 1A$) par éléments finis en lissant le stator comme dans le calcul



(a) Lignes de champ obtenues lors de la vérification par éléments finis du modèle analytique



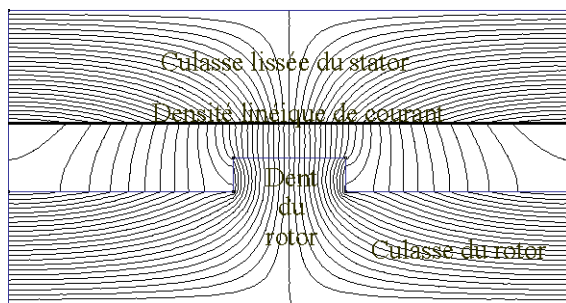
(b) Induction $B_y(x, y = h_a + e)$ entrant dans le stator de la machine sur un pas polaire, analytiquement et par éléments finis

FIGURE 3.13: Vérification du calcul analytique pour le courant d'axe d ($nI_d = 1A$) par éléments finis, en prenant un stator encoché pour la simulation numérique

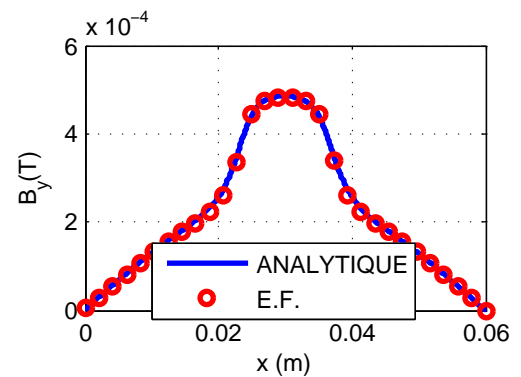
Dans un second temps, afin d'évaluer l'erreur commise par l'approximation du coefficient de Carter, nous avons placé, lors de la vérification par éléments finis, les encoches avec les courants réels d'axe d ($nI_d = 1A$), afin de comprendre l'effet du lissage du stator, ainsi que celui de l'approximation des courants à des densités linéiques. La figure 3.13a représente les lignes de champ obtenues dans un tel cas. La figure 3.13b montre, quant à elle, la composante d'induction $B_y(x, y = h_a + e)$ en entrée du stator. Nous observons de même que pour les aimants une différence importante entre la forme d'onde d'induction à stator lisse, et celle obtenue avec le stator réel, et les courants volumiques. Néanmoins, on trouve une différence de 7% entre l'induction moyenne dans l'entrefer avec et sans encoches, ce qui suggère bien que la perméance d'entrefer, qui intervient dans le calcul du couple réactant, sera peu modifiée par l'approximation. Cette constatation est importante, car l'approximation réalisée est assez forte, car elle comporte, en plus du lissage de l'entrefer par le biais du coefficient de Carter, l'approximation de la densité linéique de courant à son premier harmonique. Comme auparavant, l'application du coefficient de Carter est

discutable, à cause de la saillance du rotor, de la longueur d'onde spatiale de l'excitation qui n'est pas infinie, et de l'interaction entre encoches. Soulignons le point important suivant : bien que la perméance d'entrefer d'axe d puisse donc être calculée avec une certaine précision par l'approximation des courants à une densité linéique, il est clair que la méthode ne pourra en aucun cas permettre de trouver l'inductance de fuites à placer en série avec la perméance d'axe d pour en déduire le schéma équivalent électrique de la machine. Ceci peut être gênant, car cette perméance de fuites intervient dans le défluxage de la machine. Ce flux de fuites crée un flux supplémentaire circulant dans le stator, qui va intervenir dans l'état magnétique de ce dernier. Nous reviendrons sur ce point important concernant le calcul de la perméance de fuites, ainsi que son importance dans le dimensionnement par la suite.

Les mêmes remarques peuvent être faites en ce qui concerne le flux d'axe q de la machine. Nous avons, pour des ampères-tours par bobine d'axe q égaux à $nI_q = 1A$, effectué la même étude. Le cas sans encoche est montré à la figure 3.14a pour la carte de champ, et à la figure 3.14b pour la composante d'induction.

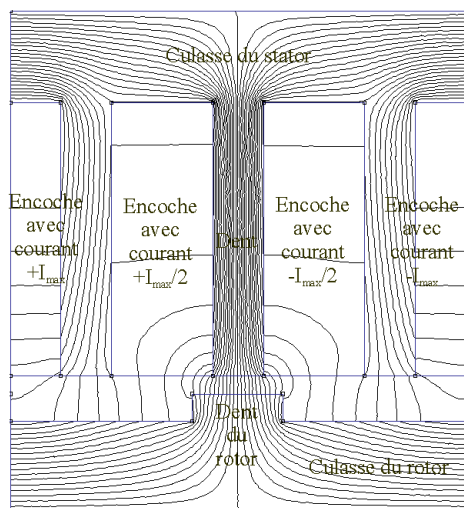


(a) Lignes de champ obtenues lors de la vérification par éléments finis du modèle analytique

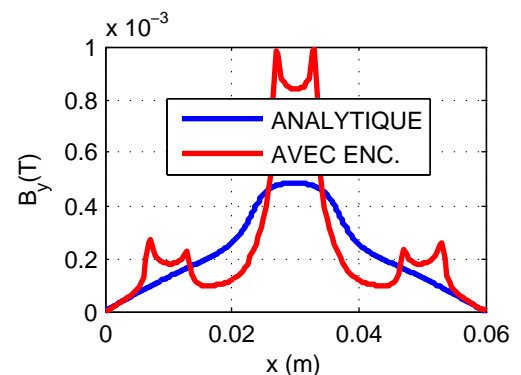


(b) Induction $B_y(x, y = h_a + e)$ entrant dans le stator de la machine sur un pas polaire (analytiquement et par éléments finis)

FIGURE 3.14: Vérification du calcul analytique pour le courant d'axe q ($nI_q = 1A$) par éléments finis en lissant le stator comme dans le calcul



(a) Lignes de champ obtenues lors de la vérification par éléments finis du modèle analytique



(b) Induction $B_y(x, y = h_a + e)$ entrant dans le stator de la machine sur un pas polaire, analytiquement et par éléments finis

FIGURE 3.15: Vérification du calcul analytique pour le courant d'axe q ($nI_q = 1A$) par éléments finis, en prenant un stator encoché pour la simulation numérique

Nous avons relancé les simulations en plaçant la véritable densité volumique de courant d'axe q dans les encoches de la machine pour la simulation éléments finis. Les lignes de champ obtenues par éléments finis sont données à la figure 3.15a, et la composante d'induction $B_y(x, y = h_a + e)$ en entrée du stator est montrée à la figure 3.15b.

On se rend compte que, pour les mêmes ampères-tours injectés par encoche, les inductions, et par conséquent le flux d'axe q , sont plus importants que ceux d'axe d . Ceci est normal, et vient confirmer que les machines à aimants insérés sont bien des structures à saillance inversée ($L_q > L_d$). En effet, dans l'axe q , l'axe du flux correspondant à celui de la dent ferromagnétique rotorique, le parcours est bien moins réloquent que celui d'axe d , pour lequel l'axe du flux correspond à celui de l'aimant, dont la perméabilité relative a été prise égale à l'unité. Remarquons qu'au niveau de la figure 3.15b, l'écart entre le pic d'induction avec et sans encoches apparaît important, au point d'ailleurs qu'une étude sur les valeurs moyennes des inductions avec et sans encoches suggère un écart de 10%, ce qui est plus élevé que les 7% observés dans l'axe d sur la figure 3.13b. Ceci est dû au fait que l'axe du flux injecté dans la phase q coïncide avec la dent du rotor, ce qui rend le coefficient de Carter, calculé en partant d'un entrefer équivalent lisse égal à $e + h_a$ d'autant plus approximatif.

Ceci étant, nous allons montrer que l'effet de la saillance, même si l'inductance L_q d'axe q sera toujours plus grande que celle L_d d'axe d , va tout de même augmenter l'inductance d'axe d par rapport à celle de la machine à pôles lisses sans saillance. Dans cette perspective, nous proposons de réaliser une étude des perméances d'axe d et q obtenues pour la machine dont la géométrie est consignée dans le tableau 3.1, en faisant varier la largeur relative de la dent rotorique par rapport au pas polaire, qui vaut $1 - \beta_{a2}$, comme ce qui a été fait dans [Sargos, 1981] pour les machines à réluctance variable. Le résultat obtenu, par nombre de paires de pôles, et par unité de longueur de machine suivant l'axe ($0z$), est montré au niveau de la figure 3.16, où, pour chaque valeur de largeur relative de la dent, on a calculé la perméance d'axe d , celle d'axe q , et on a aussi fait figurer la perméance cyclique de la machine à pôles lisses (si on enlevait la dent), qui, bien sûr est constante. On constate bien que la perméance d'axe d est inférieure à celle d'axe q , la perméance d'axe d augmentant significativement lorsque la dent devient plus large. Lorsque l'ouverture relative de la dent tend vers 1, les deux perméances se rejoignent à leur valeur maximale, car ceci correspond à une machine à pôles lisses dont l'entrefer équivalent serait égal à l'entrefer e réel.

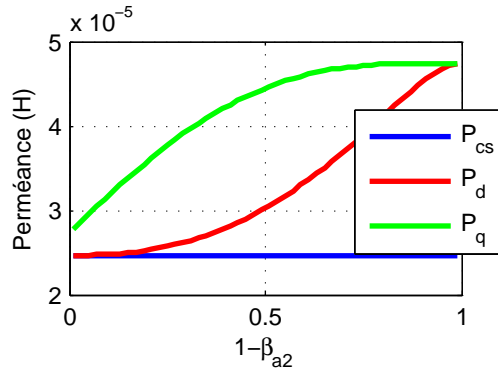


FIGURE 3.16: Perméances d'entrefer par paire de pôles par unité de profondeur de machine suivant l'axe ($0z$) (pour l'axe d , l'axe q , ainsi que pour la machine à pôles lisses)

Il est logique que lorsque la dent a sa largeur quasiment nulle, l'inductance d'axe d tende vers l'inductance de la machine à pôles lisses. En revanche, le fait que l'inductance d'axe q ne tende pas vers cette valeur, mais reste tout de même supérieure, mérite une explication. En effet, l'injection d'un courant d'axe q , avec une dent rotorique de largeur infiniment mince (on parle de pale magnétique), peut être très schématiquement représentée au niveau de la figure 3.17a, et vérifiée par éléments finis non saturés au niveau de la figure 3.17b. En effet, dans ce cas, d'un point de vue mathématique, l'axe q est à la fois, pour des raisons de symétrie, le siège d'une condition de Dirichlet nulle, alors que, au niveau de la pale, qui est infiniment fine et donc également située sur l'axe q , on a une condition de Neumann nulle. Ceci implique que si l'induction le long de la pale est à la fois parallèle et perpendiculaire à cette dernière, alors elle est nulle. Ceci peut s'expliquer par le fait qu'alors, le haut de la pale infiniment fine va capter la plupart des lignes de champ magnétique. Il est clair que cette singularité va alors engendrer une inductance plus grande que la machine à pôles lisses. Précisons cependant que même si cette remarque était intéressante à formuler d'un point de vue mathématique (une machine à pôles saillants avec des pôles infiniment fins ne tend pas, en ce

qui concerne l'axe q , vers la machine à pôles lisses), elle n'a guère de sens d'un point de vue physique : en effet, une induction intense circulant dans la pale d'épaisseur très fine aurait pour effet de saturer cette dernière de manière sévère, annulant ainsi l'effet dont nous venons de parler. Mais cela nous fait prendre conscience que l'hypothèse de non-saturation des parties ferromagnétiques doit obligatoirement être vérifiée en calculant le flux dans ces dernières : ce sera l'objet de la partie suivante.

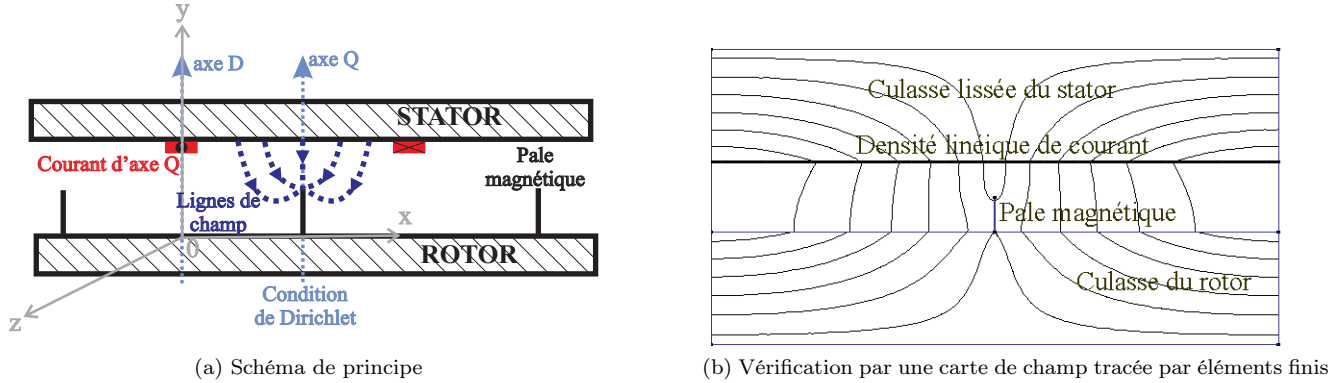


FIGURE 3.17: Injection d'un courant d'axe q dans le cas d'un rotor à pales magnétiques

Pour résumer, nous venons de calculer les valeurs des inductions magnétiques en tout point de l'entrefer, en utilisant certaines hypothèses simplificatrices de linéarité des matériaux, ainsi que le lissage du stator à petites dents. Nous sommes donc en mesure de calculer le couple moyen fourni par la machine, en tenant compte aussi bien du couple hybride que du couple réluctant. Ainsi avons-nous la formule, en raisonnant par ampère-tours par bobine nI_d ou nI_q , en flux par spire dû aux aimants φ_f obtenu par intégration de l'induction à vide entrant dans le stator des figures 3.7b et 3.7b, et en perméance d'axe d et d'axe q :

$$C_{em} = 3p\varphi_f nI_q + 3p(P_d - P_q) nI_d nI_q \quad (3.44)$$

Dans la suite, nous verrons qu'avec un modèle de l'induction d'entrefer capable de prendre en compte les encoches du stator, on sera en mesure de calculer le couple instantané, avec toutes ses ondulations.

3.2.2 Le calcul de l'induction dans les parties ferromagnétiques de la machine

À présent, nous allons profiter des calculs d'induction dans l'entrefer afin de déduire les densités de flux dans les parties ferromagnétiques statoriques et rotoriques. Ce travail nous sera utile lorsqu'il s'agira, dans une problématique d'optimisation de la structure, d'évaluer les pertes fer. Connaître les valeurs des inductions n'est également pas sans utilité pour contraindre ces dernières à des valeurs raisonnables, de manière que l'hypothèse de linéarité reste valable. Dans un premier temps, nous allons voir la méthode que nous préconisons pour le stator. Puis, dans un second temps, le cas du rotor sera traité.

3.2.2.1 Calcul des inductions dans les parties ferromagnétiques statoriques

Exposé du principe de calcul Le principal problème auquel nous sommes confrontés pour déduire l'induction magnétique dans la culasse statorique réside dans le fait que cette dernière est en réalité munie de dents. Il semble en effet indispensable de prendre en compte ce phénomène lorsque l'on cherche à évaluer l'induction magnétique dans cette dernière, car, à cause de la concentration de flux qui s'opère au niveau des dents, la condition de non-saturation, ainsi que le niveau des pertes magnétiques, sont totalement modifiés par rapport aux résultats que l'on obtiendrait pour un stator lisse. Étant donné la complexité intrinsèque de la géométrie dentée, il est illusoire de penser développer un modèle analytique exact de cette dernière. Nous proposons donc la démarche simplifiée suivante, consistant, en quelques mots, à reprendre les valeurs de flux obtenues par le modèle analytique que nous avons présenté à la section précédente, et à raisonner par concentration de flux pour en déduire les inductions dans la culasse et les dents du stator. Plus précisément, nous faisons les hypothèses simplificatrices suivantes :

- Le flux d'entrefer sur un pas dentaire (de longueur τ_s), calculé à la section précédente sur la base d'un stator lissé par le coefficient de Carter, n'est pas changé si on introduit la structure encochée réelle. En effet, on a montré à la section précédente que même si les inductions d'entrefer sont fortement modifiées par la présence des encoches, les flux, qui sont des grandeurs intégrales, ne sont quasiment pas changés (c'est d'ailleurs l'intérêt de l'utilisation du coefficient de Carter).
- Tout le flux d'entrefer présent sous un pas dentaire est entièrement concentré dans la dent correspondante (figure 3.18), et nous faisons l'hypothèse que la densité de flux dans la dent est homogène dans toute la section de cette dernière. Ceci revient donc à considérer une induction en créneaux dans la zone d'encoches et de dents : le créneau est à la valeur nulle dans les encoches, tandis la valeur constante prise au niveau des dents permet de conserver le flux total présent sous un pas dentaire. Comme le montre la figure 3.19 où le flux à vide a été étudié par éléments finis en tenant compte des encoches, on voit que cette hypothèse de concentration du flux sous un pas dentaire dans la dent correspondante semble fondée. En revanche, il est clair que l'hypothèse d'un flux entrant entièrement à la base de la dent ne semble pas totalement exacte. Pour l'instant, ce phénomène sera négligé.

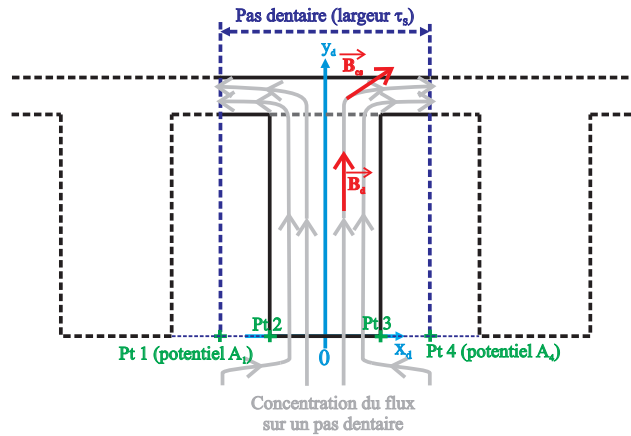


FIGURE 3.18: Concentration du flux présent sous un pas dentaire dans la dent correspondante

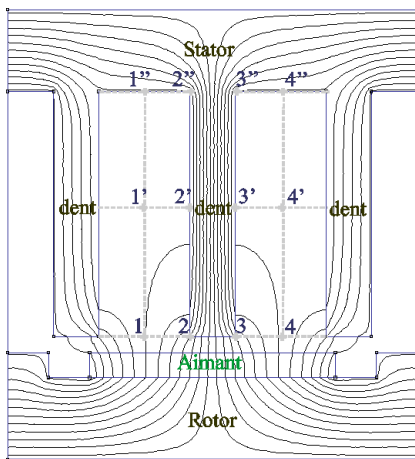


FIGURE 3.19: Tracé des lignes de champ à vide dans l'entrefer de la machine à pôles saillants avec stator denté

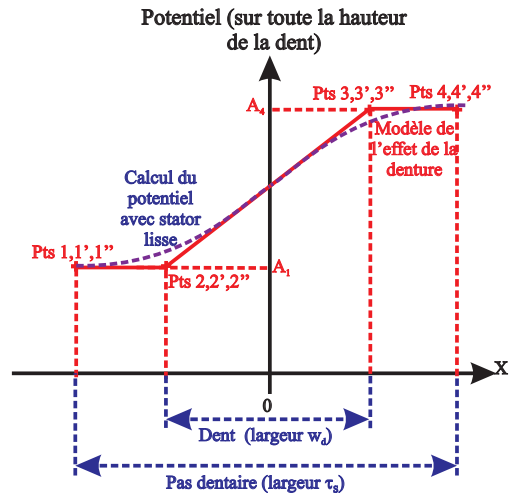


FIGURE 3.20: Évolution supposée du potentiel sur toute la hauteur de la dent du stator avec les hypothèses de concentration du flux

- Nous faisons l’hypothèse que dans la dent du stator, le flux est unidirectionnel, dirigé selon l’axe $(0y)$.
- Une fois le flux entré dans la dent, nous négligeons toute fuite le long de cette dernière, ce qui revient à supposer que le flux qui entre dans la dent aboutit entièrement dans la culasse.

Ces hypothèses sont faites aussi bien pour le calcul de l’induction à vide dans le stator, que celle causée par les courants. Il est possible de voir que de telles hypothèses de concentration de flux reviennent, lorsque l’on a calculé analytiquement dans l’entrefer deux potentiels A_1 et A_4 de part et d’autre de la dent statorique qui nous intéresse (figure 3.18), à supposer que l’évolution du potentiel-vecteur pour toute ordonnée dans la dent a la forme représentée à la figure 3.20. Supposons, en un instant t donné, que l’on connaisse, par le biais du modèle analytique d’entrefer, les potentiels $A_1(t)$ et $A_4(t)$ au niveau des deux points 1 et 4 éloignés d’un pas dentaire τ_s (situés au milieu de deux encoches consécutives : figure 3.18). L’induction dans la dent est alors donnée par la formule :

$$B_D(t) = \frac{A_1(t) - A_4(t)}{w_d} \quad (3.45)$$

En répétant le calcul pour chaque instant t , l’évolution temporelle de l’induction de dent $B_D(t)$ peut être obtenue.

A présent, généralisons cette méthode de concentration du flux d’entrefer déterminé par le modèle analytique pour calculer l’induction au niveau de la culasse du stator. De nombreux auteurs [Bottauscio *et al.*, 2002a] ont mis en évidence que, surtout dans les zones de jointure avec les dents, cette induction de culasse n’avait pas une seule, mais deux composantes $(B_x(t), B_y(t))$. C’est pourquoi les auteurs de [Chin, 2004] ont évalué la composante $B_x(t)$ par les mêmes considérations de concentration de flux que pour la dent du stator, puis ont rajouté une composante $B_y(t)$ calculée par éléments finis. Afin de nous affranchir des calculs éléments finis, nous souhaiterions développer un modèle certes approché, mais suffisamment précis et en plus totalement analytique pour les contraintes de l’optimisation. Ce modèle servira de base à l’application d’un modèle de pertes fer prenant en compte l’aspect bidimensionnel des lieux d’induction comme exposé dans l’introduction.

Nous développons le modèle suivant (figure 3.21) : supposons, comme auparavant, que le modèle analytique sans encoche nous ait donné les potentiels A_1 , A_2 , et A_3 au centre des trois encoches d’un pôle donné.

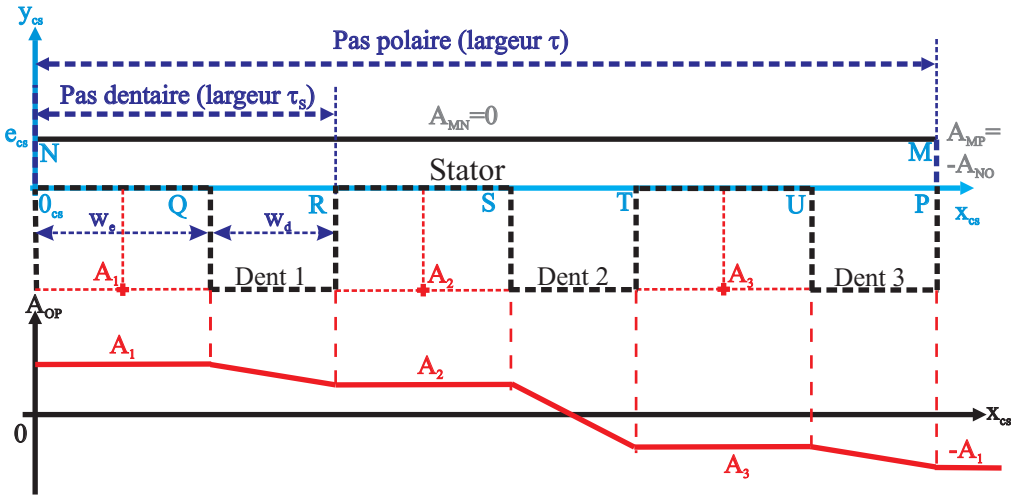


FIGURE 3.21: Calcul des composantes d’induction dans la culasse du stator en ramenant le problème à un problème de Dirichlet

Comme on vient de le voir, l’effet des encoches consiste à concentrer dans la dent correspondante le flux présent sous un pas dentaire. En admettant que l’induction entrant dans une dent y est uniforme, et qu’il n’y a aucune fuite sur la hauteur de cette dernière, ceci revient à supposer que le potentiel sur le segment $[OP]$ de la frontière entre culasse et zone de denture est constant par morceaux au niveau des encoches et égal aux valeurs des potentiels A_1 , A_2 , et A_3 , et décroît linéairement entre les encoches, c’est-à-dire au niveau des dents. Cette remarque est conceptuellement intéressante, car elle suggère qu’introduire une structure dentée revient à prendre le potentiel calculé dans une structure lisse, le rendre constant au niveau des encoches à la valeur prise au milieu de l’encoche, et relier les valeurs constantes dans la zone des dents par des segments de droites. Cette procédure simple est

illustrée au niveau de la figure 3.22. Elle semble vérifiée pour le flux au niveau de la figure 3.23, où nous avons tracé d'une part le potentiel-vecteur calculé analytiquement au niveau de la frontière du stator lissé, et d'autre part le potentiel sur le segment $[OP]$ (figure 3.21) dans une structure encochée obtenu par éléments finis.

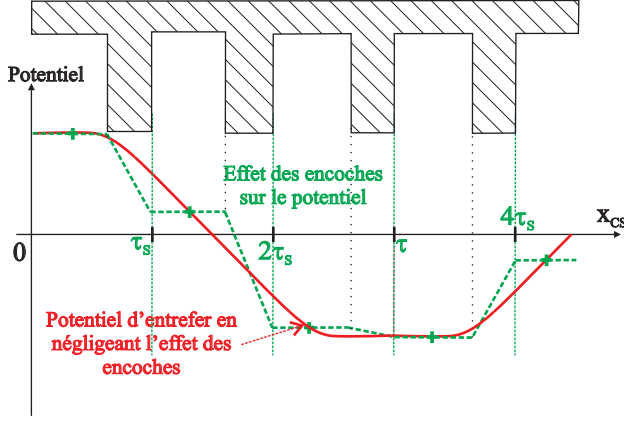


FIGURE 3.22: Représentation de l'effet de la structure encochée sur le potentiel d'entrefer

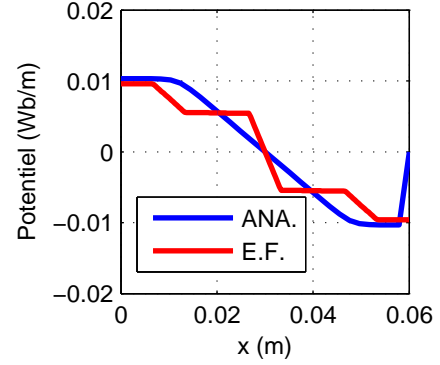


FIGURE 3.23: Vérification de l'effet des encoches sur le potentiel d'entrefer à vide, en traçant analytiquement le potentiel à la frontière du stator lissé, et celui sur le segment $[OP]$ de la figure 3.21 (éléments finis)

Une fois que nous avons cette condition de Dirichlet au niveau du segment $[OP]$, il suffit d'imposer, sur les autres segments du rectangle de culasse statorique $[OPMN]$, les conditions suivantes :

- une condition d'anti-périodicité au niveau des segments $[NO]$ et $[MP]$.
- une condition de Dirichlet nulle au niveau du segment $[NM]$.

Ensuite, il suffit de résoudre l'équation de Laplace $\Delta A = 0$ dans le rectangle de culasse statorique en tenant compte des conditions aux limites introduites. La dérivation du potentiel en fonction des deux coordonnées spatiales mène alors aux deux composantes d'induction en tout point de la culasse. La méthode de résolution de l'équation de Laplace dans le rectangle est la suivante : la condition de Dirichlet nulle sur le segment $[NM]$, ainsi que l'anti-périodicité au niveau de $[NO]$ et $[MP]$ invitent à rechercher une solution du type :

$$A(x, y) = \sum_{k \geq 1} a_{C_k} \sinh\left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} (y - e_{CS})\right) \cos\left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} x\right) + \sum_{k \geq 1} a_{S_k} \sinh\left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} (y - e_{CS})\right) \sin\left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} x\right) \quad (3.46)$$

stipule que nous avons à développer en séries de Fourier la forme du potentiel que l'on a adopté sur le segment $[OP]$:

$$A_{OP}(x) = \sum_{k \geq 1} K_{C_k} \cos\left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} x\right) + \sum_{k \geq 1} K_{S_k} \sin\left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} x\right) \quad (3.47)$$

Les coefficients recherchés s'écrivent donc :

$$\forall k \geq 1, \begin{cases} a_{C_k} &= -\frac{K_{C_k}}{\sinh\left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} e_{CS}\right)} \\ a_{S_k} &= -\frac{K_{S_k}}{\sinh\left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} e_{CS}\right)} \end{cases} \quad (3.48)$$

A partir de là, une dérivation donne, en tout point de la culasse (x, y) , pour un instant t donné, les inductions (B_x, B_y) dans cette dernière. Leur évolution temporelle est donnée par répétition du modèle en chaque instant, rendant possible l'application d'un modèle de pertes en champ bidimensionnel.

Vérification par éléments finis Nous allons confirmer le modèle proposé ici par éléments finis, afin de vérifier que les formes temporelles et lieux d'inductions prédéterminés par le calcul sont bien semblables à ceux que donnerait un modèle éléments finis sans saturation. La linéarité permet, comme auparavant, d'étudier les effets des sources séparément (aimants, axe d et axe q), le fonctionnement en charge pouvant être déduit par simple addition des potentiels ou des formes d'onde d'induction. Afin de mener à bien ce travail, nous proposons de reprendre la géométrie présentée dans le tableau 3.1. Nous allons, aussi bien analytiquement que par éléments finis, faire défiler le rotor sur un double pas polaire afin d'acquérir une période temporelle entière des inductions dans la culasse du stator. Les vérifications seront menées au niveau des points P_1 , P_2 et P_3 de la dent statorique, ainsi que des points P_4 et P_5 de la cuspide queulasse statorique (voir la figure 3.24).

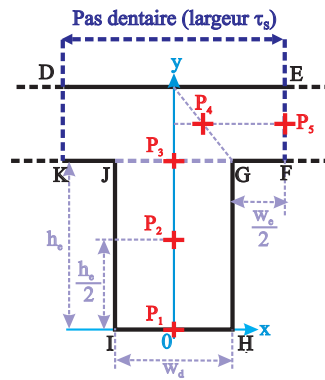
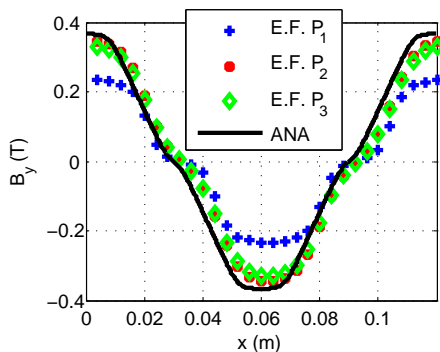
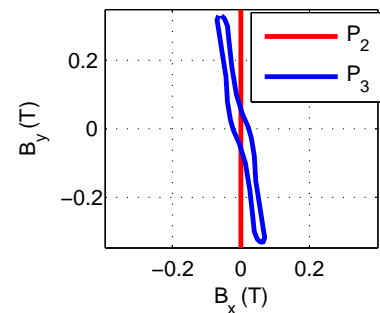


FIGURE 3.24: Les points de vérification du modèle par éléments finis

On effectue d'abord le test pour l'induction à vide. Les résultats des calculs d'inductions dans la dent sont montrés au niveau des figures 3.25a et 3.25b. Sur la figure 3.25a, on a montré que le modèle analytique proposé permettrait de prévoir correctement l'induction dans cette dernière, tant en amplitude qu'en forme. Notons cependant que le modèle analytique surestime l'induction au niveau du point P_1 à la base de la dent. Ceci est dû, comme nous le disions, au fait que tout le flux n'entre pas par la base des dents, mais aussi par les côtés, comme montré à la figure 3.19. Enfin, il nous est apparu important de vérifier, au niveau de la figure 3.25b, l'hypothèse consistant à supposer l'induction dans la dent monodimensionnelle, dirigée suivant l'axe vertical. Nous avons donc tracé, sur la période de simulation, le locus d'induction ($B_x(t)$, $B_y(t)$) calculé par éléments finis, tant au niveau des points P_2 au milieu de la dent, qu'au niveau du point P_3 à la frontière avec la culasse du stator. Bien que l'hypothèse soit bien vérifiée pour le milieu de la dent, ceci est plus discutable pour les points près de la culasse, où l'induction commence à « tourner » quelque peu.



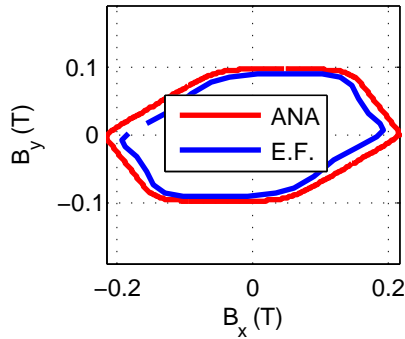
(a) Évolution de l'induction dans la dent en fonction du déplacement du rotor par le modèle analytique, puis par le modèle éléments finis au niveau des points P_1 , P_2 et P_3 pour le flux à vide



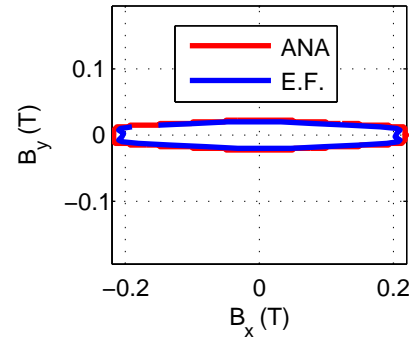
(b) Tracé des loci d'induction obtenus par le modèle éléments finis au niveau des points P_2 et P_3 pour le flux à vide

FIGURE 3.25: Tracé des résultats des calculs d'induction au niveau des points des dents P_1 , P_2 , et P_3

En ce qui concerne les inductions de culasse, qui, comme on l'a dit, sont bidimensionnelles, nous avons tracé les loci d'induction $(B_x(t), B_y(t))$ sur la période de fonctionnement, par éléments finis et analytiquement. Les résultats sont donnés au niveau du point P_4 de la culasse statorique à la figure 3.26a, et au niveau du point P_5 de la culasse statorique à la figure 3.26b. Nous nous apercevons que les loci obtenus par les deux méthodes semblent en bonne adéquation, aussi bien en forme qu'en amplitude. Nous nous permettons d'insister sur la forme réellement quelconque de ces loci bidimensionnels d'induction au sein de la culasse obtenus au cours d'une période de fonctionnement. A noter que le locus au niveau du point P_5 est très allongé suivant l'axe $(0x)$, ce qui est logique dans le sens où ce point se situe au milieu de la dent, la direction de l'induction ayant quasiment changé de sens entre la culasse et les dents.

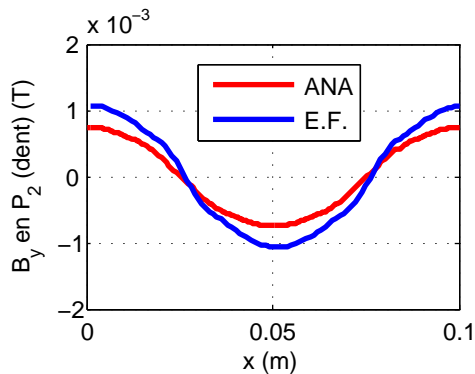


(a) Tracé des loci d'induction obtenus par le modèle analytique puis éléments finis au niveau du point P_4 pour le flux à vide

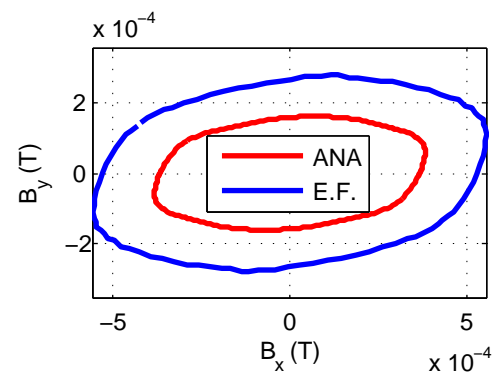


(b) Tracé des loci d'induction obtenus par le modèle analytique puis éléments finis au niveau du point P_5 pour le flux à vide

FIGURE 3.26: Tracé des loci d'induction au niveau des points de la culasse du stator P_4 et P_5



(a) Tracé de l'évolution de l'induction B_y dans la dent (point P_2) en fonction de la position, causée par des ampères-tours d'axe d égaux à $nI_d = 1$



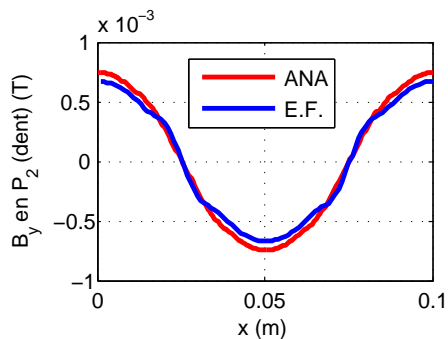
(b) Tracé du locus d'inductions (B_x, B_y) dans la culasse du stator (point P_4), causée par des ampères-tours d'axe d égaux à $nI_d = 1$

FIGURE 3.27: Tracé des loci d'induction au niveau des points de la culasse du stator Q et R

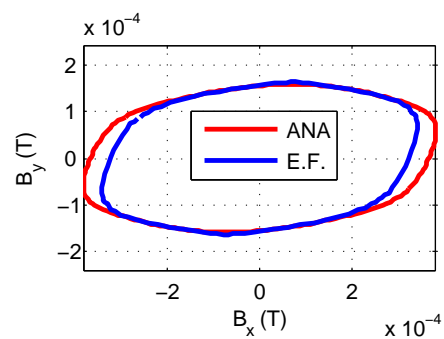
Le modèle proposé semble être pertinent pour le calcul de l'induction à vide dans les culasses. Testons à présent sa validité en ce qui concerne la prévision de l'induction dans le stator causée par les courants. Dans cette perspective, on enlève donc l'induction rémanente des aimants, et on alimente les bobinages présents dans les encoches de la machine avec des courants variant sinusoïdalement dans le temps, formant un système triphasé équilibré, le rotor denté se déplaçant à la même vitesse que le champ ainsi créé (ceci correspond à un mode de fonctionnement autopiloté). L'axe du champ tournant est donc immobile par rapport au rotor. On parlera de courant d'axe d si l'axe du champ coïncide avec le centre de l'aimant, et de courant d'axe q si l'axe du champ coïncide avec le centre de

la dent du rotor. On étudie par exemple ici le cas du courant d'axe d . Comme auparavant, on injecte des ampères-tours par bobine $nI_d = 1$, car l'hypothèse de linéarité permet de déduire les inductions pour n'importe quelle valeur d'ampères-tours. On compare avec le modèle analytique fondé sur un premier calcul à stator lisse avec densité de courant équivalente limitée à son premier harmonique, puis une concentration de flux pour en déduire les valeurs des inductions dans les culasses. Par exemple, la composante verticale d'induction causée par le courant d'axe d au centre de la dent au point P_2 est montrée à la figure 3.27a, tandis que le locus d'induction dû aux courants d'axe d au niveau du point P_4 de la culasse est montré à la figure 3.27b.

Nous voyons que pour la prédiction de l'induction dans la culasse causée par les courants statoriques, le modèle proposé n'est pas applicable, car il conduit à une grave sous-estimation des niveaux d'induction dans les dents ainsi que la culasse du stator. Nous pensons que cette erreur est due au fait que le modèle présenté ici est fondé sur le postulat que seul le flux présent dans l'entrefer va ensuite se concentrer dans le stator. C'est bien sûr vrai pour le flux à vide, qui est obligé de traverser l'entrefer pour atteindre le stator. En revanche, pour les inductions causées par les courants statoriques, en plus de l'induction dans l'entrefer, il faut tenir compte du flux de fuite au niveau des encoches, qui, lui, ne traverse pas l'entrefer, et donc n'est pas prévu par le modèle donné jusque là. Pour prouver cette hypothèse sur l'erreur observée, nous nous sommes permis de placer, lors du calcul par éléments finis, le matériau constitutif des encoches à une perméabilité magnétique relative $\mu_{renc} = 0.1$. Bien que cette expérience n'ait guère de sens d'un point de vue physique, elle est toujours possible pour un calcul par éléments finis, et a pour effet d'interdire quasiment les fuites au niveau des encoches de la machine. Donc, si notre hypothèse qui stipule que c'est le flux de fuites qui est responsable de l'écart observé sur les figures 3.27a et 3.27b, avec un calcul sans fuite au niveau des encoches, est bonne, les courbes d'induction obtenues devraient être à nouveau en concordance. C'est effectivement ce que l'on observe au niveau des figures 3.28a et 3.28b, où les mêmes études ont été faites qu'au niveau des figures 3.27a et 3.27b, mais avec $\mu_{renc} = 0.1$. Nous en concluons que le modèle proposé ici fonctionne correctement pour l'induction due aux aimants, mais pas pour celle causée par les courants, car on ne prend pas en compte l'inductance de fuite qui est fondamentale. Ceci justifie pourquoi nous avons éprouvé, à partir de tels résultats, le besoin de repenser totalement notre modèle d'induction dans l'entrefer, en prenant cette fois en compte les encoches du stator. Dans ce cas, le flux de fuites sera automatiquement pris en compte par un tel modèle.



(a) Tracé de l'évolution de l'induction B_y dans la dent (point P_2) en fonction de la position, causée par des ampères-tours d'axe d égaux à $nI_d = 1$, pour une perméabilité magnétique relative des encoches $\mu_{renc} = 0.1$



(b) Tracé du locus d'inductions (B_x, B_y) dans la culasse du stator (point P_4), causée par des ampères-tours d'axe d égaux à $nI_d = 1$, pour une perméabilité magnétique relative des encoches $\mu_{renc} = 0.1$

FIGURE 3.28: Tracé des loci d'induction au niveau des points de la culasse du stator P_4 et P_5

3.2.2.2 Calcul des inductions dans les parties ferromagnétiques rotoriques

Méthode de modélisation Nous allons proposer une méthode de calcul de l'induction dans les parties ferromagnétiques rotoriques. En effet, bien que, dans ce chapitre, les pertes au rotor seront négligées, il est important de connaître tout de même les niveaux d'induction dans les culasses, afin de pouvoir s'assurer, dans une optique d'optimisation de la structure, que ces dernières ne saturent pas, tant au niveau des dents que de la culasse proprement dite. Nous proposons, comme dans le stator, de calculer les niveaux d'induction dans le rotor en procédant par des conditions de Dirichlet assurant la continuité avec le potentiel calculé dans l'entrefer. Néanmoins, la relative

simplicité de la structure du rotor permet d'envisager un calcul local plus précis que ne le permet le stator à petites dents. Nous ferons encore usage de la linéarité du matériau ferromagnétique, en calculant séparément les influences dans le rotor du champ magnétique dû aux aimants, celui dû aux courants d'axe d , et enfin celui causé par les courants d'axe q . Quoiqu'il en soit, une fois le champ magnétique dans l'entrefer calculé, le problème posé peut toujours être réduit à celui de la figure 3.29 : en effet, sur la frontière $[ABCDEF]$ avec l'entrefer, le calcul du champ d'entrefer a imposé le potentiel. Sur la frontière entre la culasse rotorique et l'extérieur de la machine, le potentiel est supposé nul. Quant aux segments verticaux $[AH]$ et $[FG]$, on les munit soit d'une condition de Neumann nulle dans le cas du calcul pour le flux à vide ou d'axe d , soit d'une condition de Dirichlet dans le cas du calcul du flux d'axe q . L'équation à résoudre dans la culasse, formulée en potentiel-vecteur, est $\Delta A = 0$.

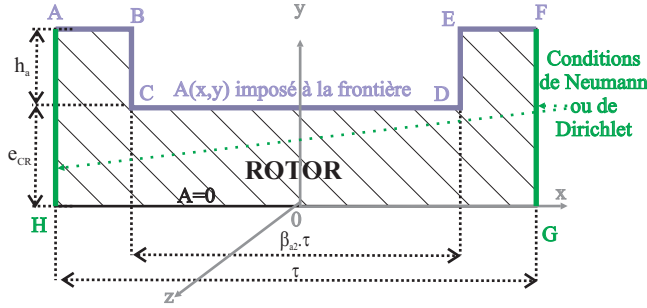


FIGURE 3.29: Problème général du calcul de champ dans le rotor par solution du problème de Dirichlet à partir du potentiel d'entrefer

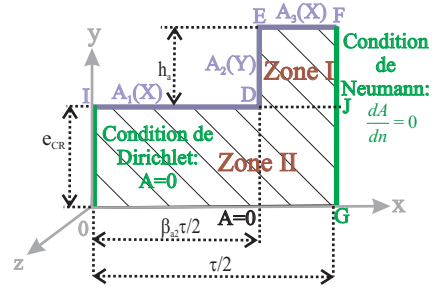


FIGURE 3.30: Exemple du calcul du champ magnétique dans la culasse du rotor causé par les aimants

Parlons par exemple de la méthode de calcul de l'induction dans le rotor causée par les aimants, situation représentée au niveau de la figure 3.30. La symétrie permet de ne s'intéresser qu'à la moitié du pas polaire, de longueur $\frac{\tau}{2}$. La symétrie du problème impose que le potentiel est nul sur l'axe des ordonnées (segment $[OI]$). Pour faciliter le calcul, la condition de Dirichlet sur le segment $[IDEF]$ est décomposé en trois parties : le potentiel $A_1(x)$ sur le segment $[ID]$, $A_2(y)$ sur le segment $[DE]$, et $A_3(x)$ sur le segment $[EF]$. Étant donné le caractère non-homogène des conditions aux limites, nous faisons la résolution en trois étapes : nous résolvons en appliquant le potentiel $A_1(x)$ sur le segment $[ID]$, les autres potentiels $A_2(y)$ et $A_3(x)$ étant considérés comme nuls. Puis nous allons appliquer le potentiel $A_2(y)$ en supposant nuls $A_1(x)$ et $A_3(x)$, et enfin résoudre pour $A_3(x)$ en annulant $A_1(x)$ et $A_2(y)$. Nous allons ici seulement expliquer comment résoudre le problème de Dirichlet avec conditions aux limites inhomogènes avec le potentiel $A_1(x)$ sur le segment $[ID]$, les autres potentiels étant pris nuls.

Sur le rectangle $[EFJD]$, grâce aux conditions aux limites simples quand les deux potentiels $A_2(y)$ et $A_3(x)$ sont nuls, le potentiel s'écrit, en prenant en compte l'équation de Laplace :

$$A^{(I)}(x, y) = \sum_{k \geq 1} a_k^{(I)} \sinh \left((2k-1) \frac{\pi}{(1-\beta_{a_2})\tau} (y - (h_a + e_{CR})) \right) \sin \left((2k-1) \frac{\pi}{(1-\beta_{a_2})\tau} \left(x - \beta_{a_2} \frac{\tau}{2} \right) \right) \quad (3.49)$$

Sur le rectangle $[IJGO]$ (zone II), le potentiel $A^{(II)}(x, y)$ est décomposé en deux termes :

$$A^{(II)}(x, y) = A_1^{(II)}(x, y) + A_2^{(II)}(x, y) \quad (3.50)$$

Le terme $A_1^{(II)}(x, y)$ garantit la condition de Dirichlet sur le segment $[ID]$ et vaut par contre zéro sur le segment $[DJ]$, et le potentiel $A_2^{(II)}(x, y)$, qui est pris nul sur le segment $[ID]$, assure la continuité avec le potentiel $A^{(I)}(x, y)$ de la zone I sur le segment $[DJ]$. Les expressions de ces deux potentiels de la zone II sont :

$$A_1^{(II)}(x, y) = \sum_{n \geq 1} a_{n,1}^{(II)} \sinh \left(n \frac{\pi}{\tau} y \right) \sin \left(n \frac{\pi}{\tau} x \right) \quad (3.51)$$

Et :

$$A_2^{(II)}(x, y) = \sum_{n \geq 1} a_{n,2}^{(II)} \sinh \left(n \frac{\pi}{\tau} y \right) \sin \left(n \frac{\pi}{\tau} x \right) \quad (3.52)$$

Pour la détermination du potentiel $A_1^{(II)}(x, y)$, la condition de Dirichlet sur le segment $[ID]$ $A^{(I)}(x, y = e_{cr})$ (obtenue par le calcul précédent, dans l'entrefer de la machine) est décomposée en série de Fourier, de telle manière :

$$A_1(x) = \sum_{n \geq 1} a_{IDn} \sin\left(\frac{\pi}{\tau} x\right) \quad (3.53)$$

Nous en déduisons donc les coefficients du potentiel $A_1^{(II)}(x, y)$:

$$\forall n \geq 1, a_{n,1}^{(II)} = \frac{a_{IDn}}{\sinh\left(n \frac{\pi}{\tau} e_{CR}\right)} \quad (3.54)$$

Les conditions de passage sur le segment $[DJ]$ sont :

– Pour la continuité du potentiel :

$$A_2^{(II)}(x, y = e_{CR}) = \begin{cases} A^{(I)}(x, y = e_{CR}) & \text{sur le segment } [DJ] \\ 0 & \text{sur le segment } [ID] \end{cases} \quad (3.55)$$

– Pour la continuité de la dérivée normale du potentiel-vecteur :

$$\left. \frac{\partial A^{(I)}}{\partial y} \right|_{y=e_{CR}} = \left. \frac{\partial A_1^{(II)}}{\partial y} \right|_{y=e_{CR}} + \left. \frac{\partial A_2^{(II)}}{\partial y} \right|_{y=e_{CR}} \quad \text{sur le segment } [DJ] \quad (3.56)$$

Nous nous servons des deux équations précédentes pour en déduire des relations, après avoir réduit les sommes infinies à un certain nombre de termes N assez grand, entre les coefficients de Fourier dans les différentes zones. Nous allons en déduire que, pour l'équation de continuité du potentiel :

$$\forall n \geq 1, a_{n,2}^{(II)} = \frac{1 - \beta_{a_2}}{\sinh\left(n \frac{\pi}{\tau} e_{CR}\right)} \sum_{k=1}^N \gamma_{n,k} \sinh\left((2k-1) \frac{\pi}{(1 - \beta_{a_2}) \tau} h_a\right) a_k^{(I)} \quad (3.57)$$

En ce qui concerne la continuité des dérivées normales, il s'agit de :

$$\forall k \geq 1, a_k^{(I)} = \frac{1 - \beta_{a_2}}{(2k-1) \cosh\left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} h_a\right)} \sum_{k=1}^N \gamma_{n,k} n \cosh\left(n \frac{\pi}{(1 - \beta_{a_2}) \tau} e_{CR}\right) (a_{k,1}^{(II)} + a_{k,2}^{(II)}) \quad (3.58)$$

Les coefficients $\gamma_{n,k}$ sont donnés par la formule suivante :

$$\gamma_{n,k} = \frac{4}{(1 - \beta_{a_2}) \tau} \int_{\beta_{a_2} \tau/2}^{\tau/2} \sin\left[n \frac{\pi}{\tau} y\right] \sin\left[(2k-1) \frac{\pi}{(1 - \beta_{a_2}) \tau} \left(y - \beta_{a_2} \frac{\tau}{2}\right)\right] dy \quad (3.59)$$

Un raisonnement identique est tenu pour le potentiel $A_2(y)$ sur le segment $[DE]$, et $A_3(x)$ sur le segment $[EF]$. Par la suite, le calcul est répété au cas où les sources ne sont pas seulement le flux des aimants, mais aussi les courants d'axe d et d'axe q , au prix de modifications des conditions aux limites sur les segments $[OI]$ et $[FG]$.

Vérification par éléments finis Nous allons vérifier le calcul précédent sur le champ causé par les aimants dans la culasse du rotor (nous allons mettre un aimant de hauteur $h_a = 5mm$ pour la lisibilité des résultats). Nous traçons, pour cela, les lignes de champ causées par les aimants dans l'entrefer et dans la culasse du rotor, aussi bien analytiquement que par éléments finis. Au niveau de la figure 3.31, on donne le résultat du tracé des lignes d'induction par éléments finis, et, sur la figure 3.32, on peut voir les résultats obtenus analytiquement, qui semblent en bon accord. Dans une optique d'optimisation, il suffit de prendre les deux composantes d'induction, d'en déterminer le module, et d'écrire la contrainte de ne pas dépasser, en aucun endroit, le champ à saturation du matériau afin de vérifier l'hypothèse de linéarité.

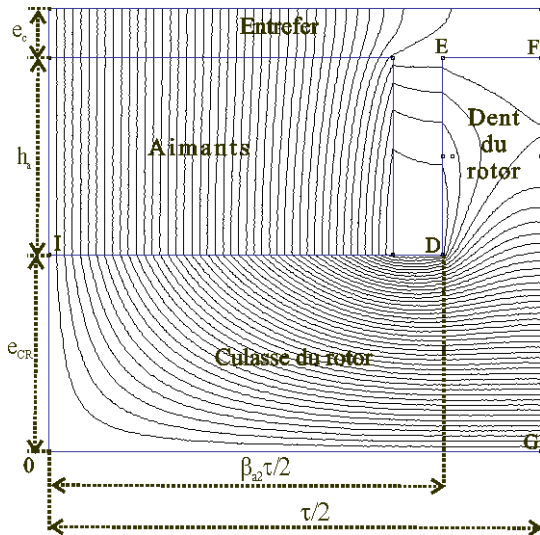


FIGURE 3.31: Lignes de champ dans l'entrefer lissé et le rotor, obtenues par éléments finis

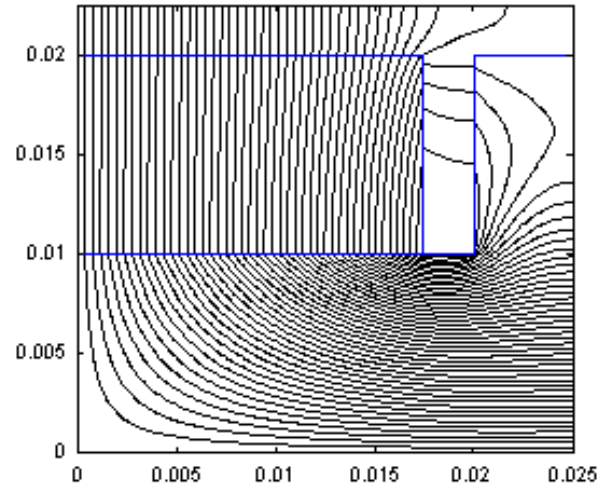


FIGURE 3.32: Lignes de champ dans l'entrefer lissé et le rotor, obtenues par la méthode analytique (entrefer et rotor)

3.3 Modèles avec effet d'encoche statorique

Nous allons à présent nous consacrer au calcul des inductions dans l'entrefer de la machine en tenant compte des effets d'encoche. En effet, bien qu'un modèle à entrefer lissé soit suffisant pour le calcul du couple moyen de l'actionneur, il ne permet pas de calculer correctement les inductions dans les parties ferromagnétiques statoriques, et donc se révèle insatisfaisant si on souhaite évaluer les pertes fer dans le stator de la machine. Nous allons développer un modèle de calcul des inductions dans l'entrefer prenant en compte l'effet d'encoche, ce qui donnera accès directement, entre autres, aux inductances de fuites. Nous verrons en outre que cette fois, un calcul instantané du couple électromagnétique devient possible.

3.3.1 Le calcul de l'induction dans l'entrefer

3.3.1.1 Exposé de la méthode analytique

Les hypothèses simplificatrices de l'étude sont :

- Comme auparavant, nous négligeons tout effet de saturation magnétique : les frontières air-fer sont des conditions de Neumann homogènes.
- Le modèle est encore bidimensionnel, de type développé au rayon moyen sans tenir compte des effets de bord.
- Afin d'avoir accès à l'état magnétique de la machine à chaque instant, nous munissons le domaine d'étude d'un repère fixe $(0xyz)$, et nous supposons qu'à l'instant d'étude t , le rotor s'est déplacé d'une certaine distance $X_d(t)$ par rapport à l'origine du repère principal $(0xyz)$ (voir figure 3.33 pour la définition du déplacement $X_d(t)$). En outre, chaque encoche est repérée par un indice l ($l \in \llbracket 1, q_s \rrbracket$) sur le pas polaire τ d'étude. Les sources considérées sont d'une part l'induction rémanente B_r des aimants, et d'autre part les densités volumiques de courant $j_l(t)$ dans l'encoche l ($l \in \llbracket 1, q_s \rrbracket$). Les encoches sur un pas polaire τ sont au nombre de $q_s = 3$. On a vu que le bobinage triphasé à petites dents utilisé (figure 3.4) impliquait que l'on doit avoir : $j_1(t) = \frac{2ni_a(t)}{w_e h_e}$, $j_2(t) = -\frac{2ni_c(t)}{w_e h_e}$, ainsi que $j_3(t) = \frac{2ni_b(t)}{w_e h_e}$.

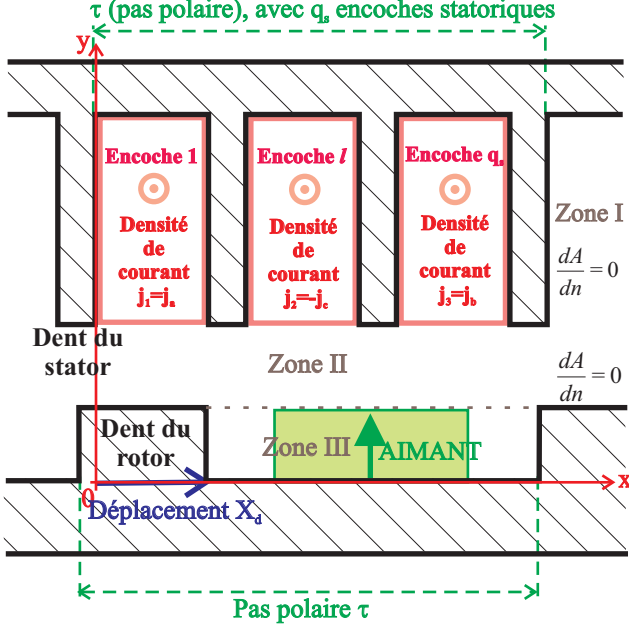


FIGURE 3.33: Calcul des inductions dans l'entrefer en tenant compte des encoches statoriques

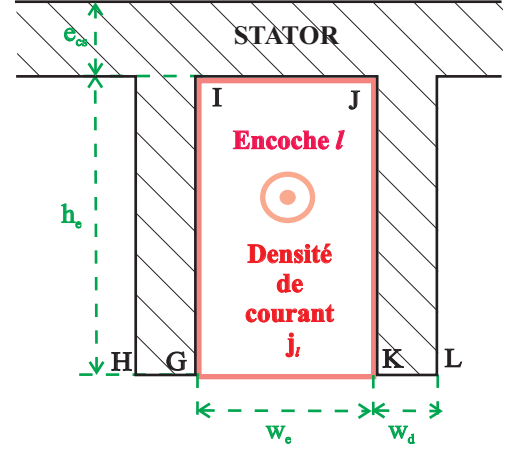


FIGURE 3.34: Zoom sur l'encoche du stator, avec une densité volumique de courant dans l'encoche l égale à j_l

L'approximation 2D permet d'écrire le potentiel-vecteur suivant la direction suivante :

$$\vec{A}(x, y) = A(x, y)\vec{u}_z \quad (3.60)$$

Dans la zone III du rotor (celle de l'espace inter-dents rotoriques dans lequel est placé l'aimant), le potentiel est régi par l'équation de Poisson suivante :

$$\Delta A^{(III)} = \mu_0 \frac{\partial M}{\partial x} \quad (3.61)$$

où la fonction $M(x)$, qui dépend du déplacement du rotor $X_d(t)$, sera développée en série de Fourier :

$$M(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} M_n \sin\left(n \frac{\pi}{\beta_{a2}\tau} (x - X_d(t))\right) \quad (3.62)$$

Une solution à l'équation homogène, vérifiant $\Delta A_h^{(III)} = 0$, est trouvée en tenant compte des conditions de Neumann suivantes : $\frac{\partial A_h^{(III)}}{\partial x} \Big|_{x=X_d(t)} = \frac{\partial A_h^{(III)}}{\partial x} \Big|_{x=X_d(t)+\beta_{a2}\tau} = 0$ ainsi que $\frac{\partial A_h^{(III)}}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$:

$$A_h^{(III)}(x, y) = c_0 + \sum_{n \geq 1} c_n \cosh\left(n \frac{\pi}{\beta_{a2}\tau} y\right) \cos\left(n \frac{\pi}{\beta_{a2}\tau} (x - X_d(t))\right) \quad (3.63)$$

Une solution particulière à l'équation de Poisson dans la zone III respectant les conditions aux limites peut être trouvée selon :

$$A_p^{(III)}(x, y) = \mu_0 \frac{\beta_{a2}\tau}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{M_n}{n} \cos\left(n \frac{\pi}{\beta_{a2}\tau} (x - X_d(t))\right) \quad (3.64)$$

La solution finale dans la zone III va donc s'écrire :

$$A^{(III)}(x, y) = c_0 + \sum_{n \geq 1} \left[c_n \cosh\left(n \frac{\pi}{\beta_{a2}\tau} y\right) - \mu_0 \frac{\beta_{a2}\tau}{\pi} \frac{M_n}{n} \right] \cos\left(n \frac{\pi}{\beta_{a2}\tau} (x - X_d(t))\right) \quad (3.65)$$

Dans la zone II, l'équation du potentiel se réduit à une équation de Laplace. En tenant compte de l'anti-périodicité de longueur τ , nous allons trouver l'expression suivante :

$$A^{(II)}(x, y) = \sum_{k \geq 1} \left[b_k^{(1)} \cosh \left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} y \right) + b_k^{(2)} \sinh \left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} y \right) \right] \cos \left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} x \right) \\ + \sum_{k \geq 1} \left[b_k^{(3)} \cosh \left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} y \right) + b_k^{(4)} \sinh \left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} y \right) \right] \sin \left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} x \right) \quad (3.66)$$

Pour la zone I (celle des encoches), on considère une encoche quelconque d'indice l , avec $l \in \llbracket 1, q_s \rrbracket$ (voir figure 3.34), qui est le siège d'une densité volumique de courant de valeur j_l . Le potentiel-vecteur dans cette encoche d'indice l est alors régi par l'équation : $\Delta A^{(I,l)} = -\mu_0 j_l$. La solution homogène à l'équation homogène $\Delta A_h^{(I,l)} = 0$ est alors donnée par la formule suivante, compte-tenu des conditions aux limites :

$$A_h^{(I,l)}(x, y) = a_0^{(l)} + \sum_{m \geq 1} a_m^{(l)} \cosh \left(m \frac{\pi}{w_e} (y - (h_a + e + h_e)) \right) \cos \left(m \frac{\pi}{w_e} (x - (l-1)(w_e + w_d)) \right) \quad (3.67)$$

La solution particulière peut être cherchée sous la forme :

$$A_p^{(I,l)}(X_l, Y_l) = -\frac{1}{2} \mu_0 j_l (y - (h_a + e + h_e))^2 \quad (3.68)$$

On peut alors sommer les deux solutions pour obtenir la solution générale :

$$A^{(I,l)}(x, y) = a_0^{(l)} + \sum_{m \geq 1} a_m^{(l)} \cosh \left(m \frac{\pi}{w_e} (y - (h_a + e + h_e)) \right) \cos \left(m \frac{\pi}{w_e} (x - (l-1)(w_e + w_d)) \right) \\ - \frac{1}{2} \mu_0 j_l (y - (h_a + e + h_e))^2 \quad (3.69)$$

Toutes les constantes inconnues des équations 3.65, 3.66, et 3.69 sont déterminées par des raccords entre les zones I, II, et III de la machine à stator denté. Le calcul étant assez long, nous nous permettons de renvoyer le lecteur à l'annexe 1 afin d'en connaître les détails.

Les inductions peuvent alors être calculées par le rotationnel du potentiel-vecteur.

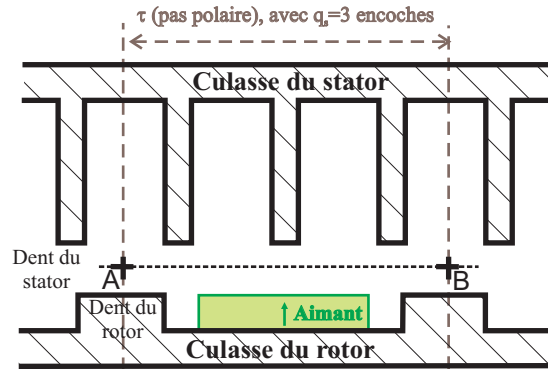


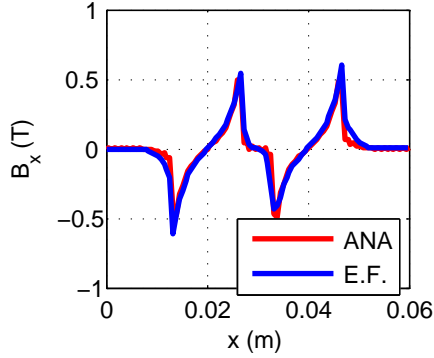
FIGURE 3.35: La configuration simulée pour le calcul du flux à vide sur le segment $[AB]$

3.3.1.2 Vérification par éléments finis des résultats

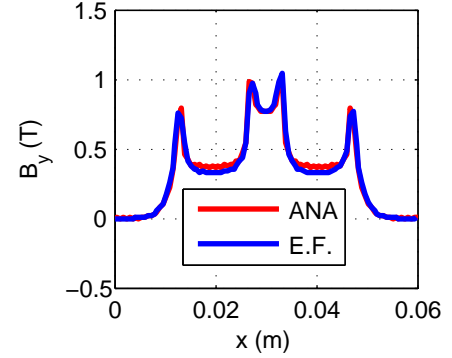
Vérification des résultats concernant les inductions Nous allons maintenant proposer une vérification par éléments finis du calcul des composantes d'induction, par le modèle exposé auparavant qui tient compte des encoches du stator. Nous allons également montrer la capacité du modèle à prévoir le couple instantané.

Nous reprenons la géométrie de machine montrée dans le tableau 3.1. Pour l'instant, on n'injecte aucun courant dans les encoches ($nI_a = nI_b = nI_c = 0$), et on ne s'intéresse qu'au flux à vide de la machine. On simule donc, à la

fois analytiquement et par éléments finis, la géométrie suggérée au niveau de la figure 3.35. On trace les composantes d'induction à mi-entrefer, sur le segment $[AB]$, alors obtenues. Au niveau de la figure 3.36, on peut vérifier la bonne adéquation pour les deux composantes des inductions dans l'entrefer B_x et B_y entre les résultats donnés par le modèle analytique et les éléments finis.



(a) Induction d'entrefer B_x sur le segment $[AB]$ due aux aimants



(b) Induction d'entrefer B_y sur le segment $[AB]$ due aux aimants

FIGURE 3.36: Composantes d'induction due aux aimants pour une position donnée du rotor par rapport au stator

Par la suite, on va opérer les mêmes vérifications en ce qui concerne les inductions dans l'entrefer données par les courants. On supprime donc l'induction rémanente B_r . On distingue deux cas, par analogie avec ce qui a été fait dans la base de Park lorsque le stator était lisse : on qualifie de courant d'axe d les ampères-tours nI_d qui créent un flux tournant dans l'entrefer dont l'axe coïncide avec le milieu de l'espace inter-dents du rotor qui se déplace à la même vitesse. Une façon de simuler ce cas est, en prenant un courant $nI_d = 1$ (la linéarité du système étudié rend l'étude de ce cas suffisant), d'injecter dans l'encoche 1 la densité de courant $j_1 = j_a = +\frac{2nI_d}{w_e h_e}$, dans l'encoche 2 la densité de courant $j_2 = -j_c = +\frac{1}{2}\frac{2nI_d}{w_e h_e}$, et dans l'encoche 3 la densité de courant $j_3 = j_b = -\frac{1}{2}\frac{2nI_d}{w_e h_e}$, puis de placer le centre de l'espace inter-aimants suivant le même axe que le champ ainsi créé (figure 3.37). Les résultats obtenus à la fois par éléments finis et analytiquement sont exposés au niveau de la figure 3.39, et suggèrent une bonne concordance. On appelle courant d'axe q le courant qui va, quant à lui, créer un champ dont l'axe se situe au niveau du centre de la dent rotorique (figure 3.38). La même étude montrerait la même adéquation entre les résultats fournis analytiquement et par éléments finis.

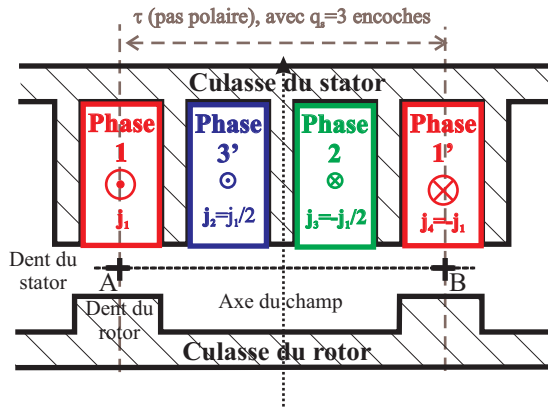


FIGURE 3.37: La configuration simulée pour le calcul de l'induction d'axe d sur le segment $[AB]$

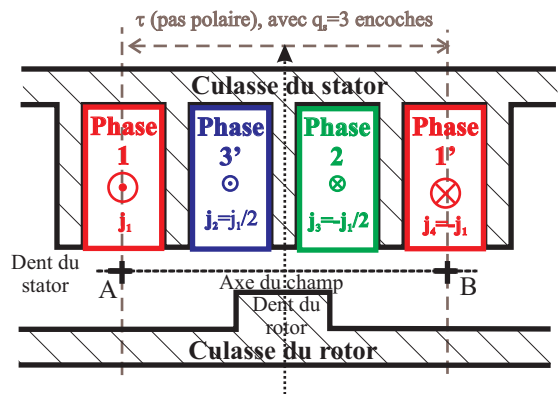
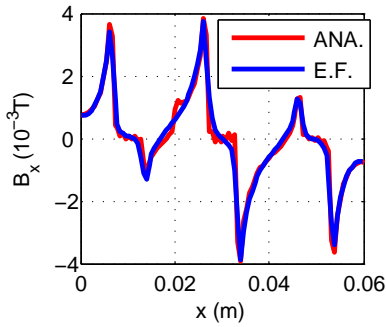
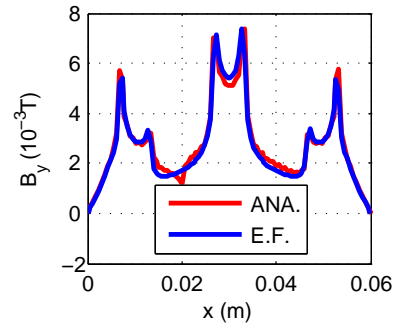


FIGURE 3.38: La configuration simulée pour le calcul de l'induction d'axe q sur le segment $[AB]$



(a) Induction d'entrefer B_x sur le segment [AB] due à un ampère-tour d'axe d ($nI_d = 1$)



(b) Induction d'entrefer B_y sur le segment [AB] due à un ampère-tour d'axe d ($nI_d = 1$)

FIGURE 3.39: Composantes d'induction due à un ampère-tour d'axe d ($nI_d = 1$) pour une position donnée du rotor par rapport au stator

A présent que nous sommes en mesure de calculer la perméance de la machine quelque soit la position relative X_d du rotor par rapport au stator, nous nous proposons d'étudier la variation de cette perméance en fonction de la position X_d . Dans ce but, nous alimentons les encoches avec des courants constants dans le temps. Soient $nI = 1Atr$ les ampères-tours constants injectés par pôle et par phase. Nous injectons, de même qu'auparavant, dans l'encoche 1 la densité de courant $j_1 = +\frac{2nI}{w_e h_e}$, dans l'encoche 2 la densité de courant $j_2 = +\frac{1}{2}\frac{2nI}{w_e h_e}$, et dans l'encoche 3 la densité de courant $j_3 = -\frac{1}{2}\frac{2nI}{w_e h_e}$. Ceci va créer un champ magnétique dans l'axe représenté au niveau des figures 3.37 et 3.38. Nous commençons à nous placer dans la position d , représentée à la figure 3.37, qui correspond au minimum de perméance. Puis, en maintenant cette alimentation constante, nous allons faire défiler le rotor par rapport au stator sur un pas polaire entier, et observer alors la variation de la perméance de la machine qui résulte de ce déplacement (comme les ampères-tours sont unitaires, le flux dans la phase 1 donne directement la perméance). Le résultat est montré à la figure 3.40.

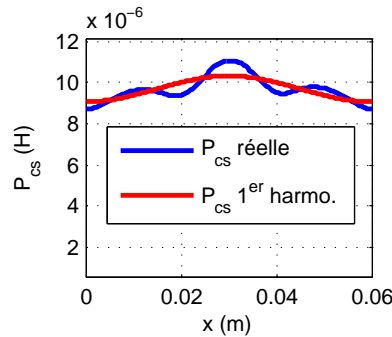


FIGURE 3.40: Variation de la perméance de la machine alimentée en courants constants en fonction de la position relative du rotor par rapport au stator, notée X_d

Le maximum observé lorsque le déplacement X_d est égal au demi-pas polaire $\tau/2$ correspond à la position d'axe q , représentée à la figure 3.38. Sur cette figure, nous nous sommes également permis de faire figurer la variation du premier harmonique de cette perméance en fonction de la position X_d . En effet, comme nous l'avons exposé lors de la partie concernant le modèle analytique sans encoche statorique, il est tentant, afin d'éviter de faire un calcul pour chaque position élémentaire du rotor par rapport à l'axe du champ magnétique, de faire un calcul uniquement pour les positions d et q (figures 3.37 et 3.38). Les perméances d'axe d et q sont alors directement identifiées comme étant les perméances calculées pour les deux positions. Ce raisonnement est approximatif, car, en toute rigueur, la théorie de Park, que nous comptons ensuite utiliser pour le calcul du couple moyen, stipule que les perméances d'axes d et q ne sont pas simplement le minimum et le maximum de la fonction perméance, mais les valeurs extrêmes du premier

harmonique de cette fonction. De cette manière, en comparant les valeurs extrêmes de la fonction perméance et celles de son premier harmonique, nous pouvons évaluer l'amplitude de l'erreur commise par l'approximation. Pour la perméance d'axe d , que nous observons pour un déplacement $X_d = 0$, il est clair que la valeur minimale de la fonction et celle de son premier harmonique sont quasiment confondues (l'erreur relative ne dépasse pas 3%). En revanche, en ce qui concerne la perméance d'axe q , lue en $X_d = \tau/2$, l'erreur relative entre la fonction perméance et son premier harmonique est un peu plus élevée, puisqu'elle atteint 7%. En effet, la présence de la dent statorique au voisinage de l'axe du champ, correspondant à la position q , crée un maximum assez localisé de la fonction perméance autour de la position $X_d = \tau/2$, qui se répercute de manière limitée sur le premier harmonique de cette fonction. Par conséquent, l'identification directe de la perméance d'axe q par lecture de la perméance dans la position q mène à une surestimation de la grandeur, en regard de celle obtenue en prenant le maximum du premier harmonique. Néanmoins, dans le cas simulé, l'erreur reste dans une tranche raisonnable.

Nous proposons à présent l'étude suivante : nous avons vu, lors de la section précédente consacrée à la modélisation de la machine en lissant le stator, que l'application du coefficient de Carter était discutable dans notre situation, du fait que la détermination de ce coefficient repose sur des hypothèses fortes non vérifiées dans la machine réelle. En particulier, les principales hypothèses de la démonstration du coefficient de Carter sont que la machine est à pôles rotoriques lisses d'une part, et d'autre part que la longueur d'onde de l'onde d'excitation est très grande par rapport au pas dentaire.

Intéressons-nous au flux à vide. L'hypothèse sur la longueur d'onde de l'excitation est clairement fautive pour des aimants d'ouverture relative par rapport au pas dentaire β_{a_1} faible, car alors l'aimant prend une largeur comparable, voir même plus petite, que le pas dentaire. À présent que nous disposons d'un modèle de la machine tenant compte des encoches du stator, il est possible de calculer le coefficient de Carter réel. Nous procéderons comme suit : pour une géométrie donnée de machine, et pour une position relative fixée du stator par rapport au rotor, on calcule, grâce à notre modèle avec stator encoché, le flux à vide réel. Ensuite, en nous souvenant que le coefficient de Carter, par définition, doit assurer l'égalité entre le flux à vide avec stator encoché, et le flux à vide avec stator lisse et entrefer corrigé, nous allons utiliser le modèle de la machine à pôles lisses développé dans la section précédente pour trouver, par dichotomie (en effet, les modèles analytiques développés ne donnent pas de formule explicite du flux en fonction des dimensions), quelle doit être l'épaisseur de l'entrefer corrigé afin que les flux moyens avec et sans encoches soient égaux. Ceci donnera la valeur véritable du coefficient de Carter, en tenant compte du fait que la largeur des aimants n'est pas infiniment grande par rapport au pas dentaire. Par exemple, plaçons-nous dans le cas où le centre de l'aimant coïncide avec le centre d'une dent statorique (nous appellerons cette position relative « position de conjonction »). Nous laissons la largeur de la dent statorique à une valeur faible par rapport au pas dentaire ($1 - \beta_{a_2} = 5\%$), car le but n'est pas ici d'évaluer l'effet de la saillance rotorique sur le coefficient de Carter, mais plutôt l'effet de la longueur de l'aimant par rapport au pas dentaire. Nous allons faire varier l'ouverture relative de l'aimant β_{a_1} de 5% à 95%. Pour chacune de ces valeurs, nous allons calculer comme expliqué le coefficient de Carter réel, puis le comparer avec la formule analytique classique. Le résultat est montré au niveau de la figure 3.41. Lorsque l'aimant a une ouverture très faible, et qu'il se trouve sous la dent du stator (position de conjonction), alors l'entrefer « vu » par l'aimant n'est ni plus ni moins que l'entrefer réel, et alors le coefficient de Carter tend vers 1.

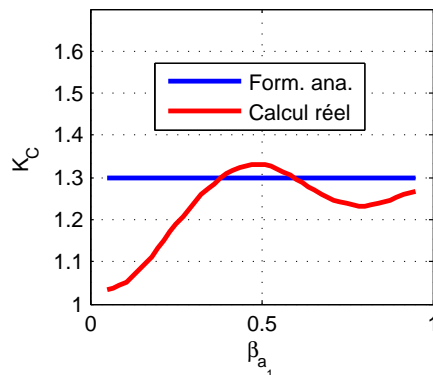


FIGURE 3.41: Coefficient de Carter réel, ainsi que celui donné par la formule analytique classique, en faisant un calcul dans la position de conjonction

Pour des ouvertures plus importantes de l'aimant (la longueur d'onde d'excitation apparaît grande par rapport au pas dentaire), le coefficient de Carter calculé se rapproche, comme attendu, du coefficient de Carter prévu par la formule analytique. Les oscillations observées sur le coefficient de Carter réel sont dues à des interactions complexes entre la denture statorique et les bords de l'aimant, chose que ne prévoit bien entendu pas le modèle analytique. Par exemple, pour des valeurs voisines de $\beta_{a_1} = 0.5$, il semble que le coefficient de Carter réel soit supérieur à celui donné par la formule analytique classique. En simulant ce cas par éléments finis à la figure 3.42a, nous voyons que ceci est dû à un surcroît de lignes de flux au niveau des bords de l'aimant qui interagissent avec les bords des dents statoriques. A contrario, si, pour la valeur $\beta_{a_1} = 0.9$, le coefficient de Carter calculé est plus faible que pour le calcul analytique, c'est que, pour les grandes largeurs d'aimants, il commence à apparaître des fuites importantes entre les aimants, comme montré à la figure 3.42b.

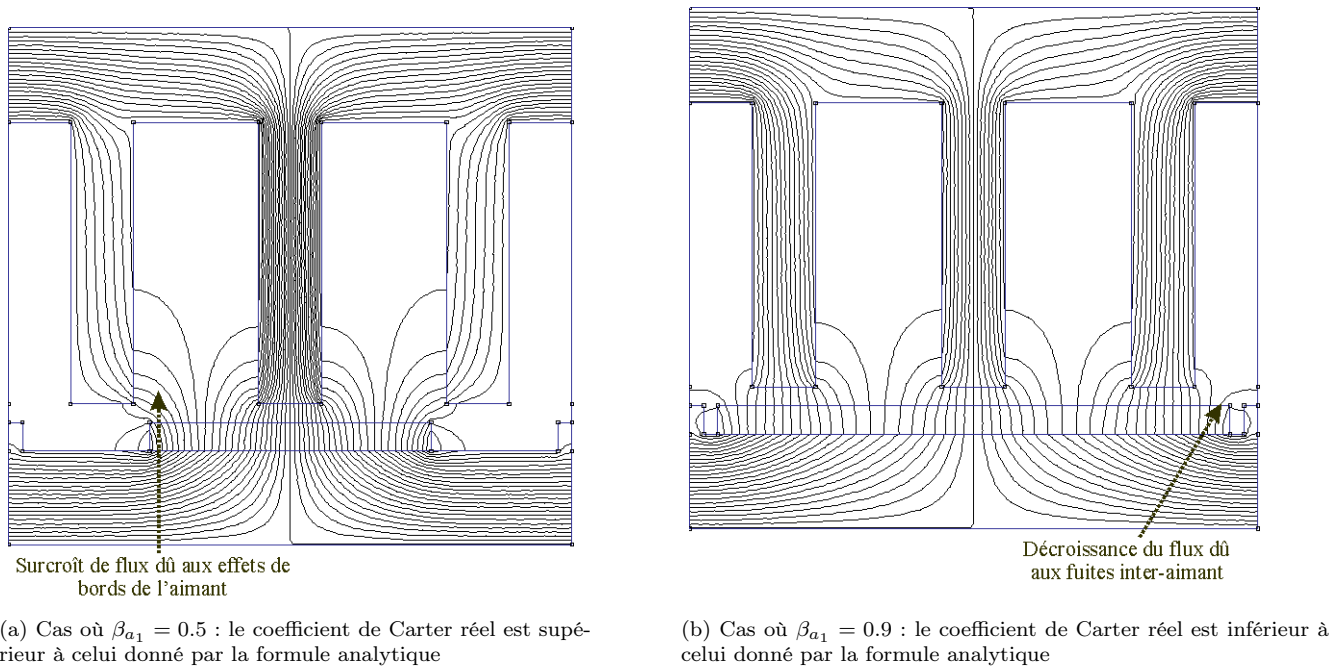


FIGURE 3.42: Simulations par éléments finis dans la position de conjonction pour expliquer les oscillations du coefficient de Carter réel autour de la valeur déterminée par la formule analytique

Insistons sur le fait que cette conclusion est très liée au fait que nous avons fait les simulations en prenant le centre de l'aimant en face du centre d'une dent statorique (nous avons appelé ceci la position de conjonction). Dans le cas extrême inverse, on pourrait placer le centre de l'aimant de telle manière qu'il coïncide avec le centre de l'encoche (nous appellerons ceci la « position d'opposition »). Dans une telle position, on comprend que pour des largeurs d'aimants faibles ($\beta_{a_1} \rightarrow 0$), l'entrefer équivalent vu par l'aimant sera très important, et que l'on peut s'attendre à un coefficient de Carter important dans ce dernier cas. C'est ce que montre la figure 3.43, où nous avons superposé les coefficients de Carter obtenus pour la position de conjonction, la position d'opposition, et une position intermédiaire. Or, le coefficient de Carter ne peut pas dépendre de la position relative du rotor par rapport au stator denté : il faut prendre la valeur moyenne des courbes obtenues pour toutes les positions relatives de la figure 3.43. Ce coefficient de Carter moyenné pour toutes les positions est montré au niveau de la figure 3.44. Auquel cas, on voit que la formule analytique coïncide avec le coefficient de Carter réel moyenné sur toutes les positions relatives, quelque soit la dimension de l'aimant. Ainsi il s'avère que, pour le cas étudié, même si l'application du coefficient de Carter pour des aimants peu larges par rapport aux encoches n'est pas justifiée, la formule analytique du coefficient de Carter peut tout de même donner un résultat satisfaisant, à cause de l'opération de moyennage du flux sur toutes les positions relatives du rotor par rapport au stator.

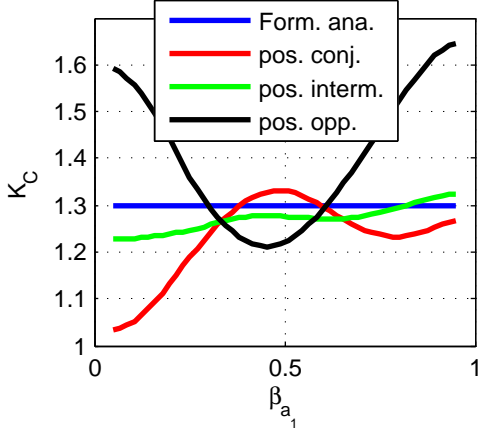


FIGURE 3.43: Coefficients de Carter réels obtenus en fonction de β_{a_1} , pour les positions de conjonction, d'opposition, et intermédiaires

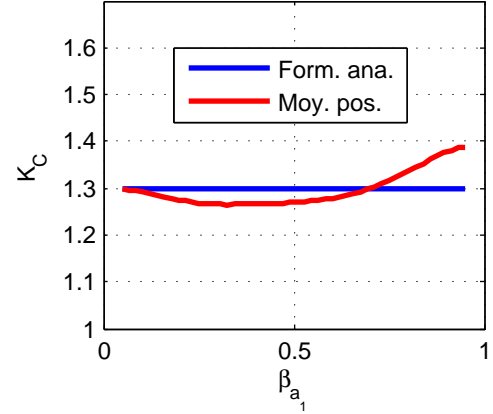


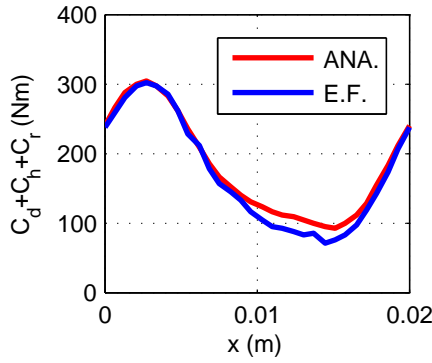
FIGURE 3.44: Moyenne sur toutes les positions des coefficients de Carter réels obtenus en fonction de β_{a_1}

Vérification des résultats concernant le couple de la machine Nous voudrions à présent montrer que notre modèle est capable de prévoir le couple instantané dans la machine. Pour ce faire, nous reprenons le motif polaire élémentaire suggéré au niveau du tableau 3.1. Nous le périodisons de telle manière à créer $p = 10$ paires de pôles. Sachant que le pas polaire a une longueur de $\tau = 5\text{cm}$, ceci donne un rayon moyen de la machine à flux axial égal à $\bar{R} = \frac{p\tau}{\pi} \approx 16\text{cm}$. Le différentiel de rayon autour du rayon moyen est pris égal à $\Delta R = R_e - R_i = 10\text{cm}$. La machine est commandée en mode autopiloté, et alimentée en courant sinusoïdal, décomposé, comme vu auparavant en deux composantes dans la base de Park : une composante d'ampères-tours dans l'axe direct d , notée nI_d , et une composante d'axe en quadrature q , notée nI_q . Afin de calculer le couple instantané, il est indispensable de répéter le calcul pour chaque position élémentaire du rotor par rapport au stator. Le couple électromagnétique instantané est calculé en utilisant la formule du tenseur de Maxwell sur le segment $[AB]$ qui se trouve à mi-entrefer :

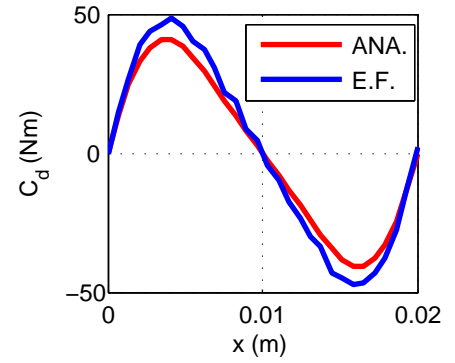
$$C_{em} = 2p\bar{R}\Delta R \int_{[AB]} H_x B_y dx \quad (3.70)$$

Par ailleurs, la même formule est aussi utilisée dans la procédure de calcul du logiciel de résolution par éléments finis que nous utilisons, à la différence que, bien entendu, le calcul de l'intégrale est exécuté numériquement. Nous appliquons des ampères-tours efficaces d'axe q par bobine $nI_q = 800A$, ainsi que des ampères-tours efficaces d'axe d par bobine $nI_d = -100A$.

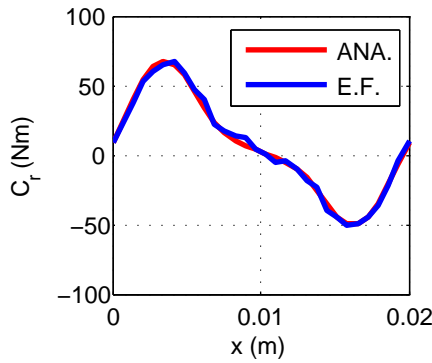
La période du couple est le pas dentaire. Les couples instantanés sur un pas dentaire obtenus par la méthode analytique et la méthode éléments finis sont présentés au niveau des figures 3.45a pour le couple total, 3.45b pour la composante de couple de détente (interaction aimants-saillance statorique), 3.45c pour la composante de couple réductant (interaction courants-saillance rotorique), et enfin 3.45d pour la composante de couple hybride (interaction aimants-courant). Le couple de détente est obtenu en répétant le calcul en mettant tous les courants à des valeurs nulles (ce couple est bien de valeur moyenne nulle au final). Le couple réductant est obtenu en conservant les courants, mais en annulant l'induction rémanente B_r des aimants. Enfin, le couple hybride est calculé par soustraction des deux dernières composantes au couple total obtenu. La forme instantanée des couples, ainsi que l'amplitude de leurs oscillations, semblent correctement prévisibles par le modèle analytique. Leur valeur moyenne, qui vaut approximativement $170Nm$, ne connaît pas de variation excédant 5% en valeur relative entre les deux méthodes. Le gain en temps de calcul relatif apporté par la méthode analytique est de l'ordre de 40%.



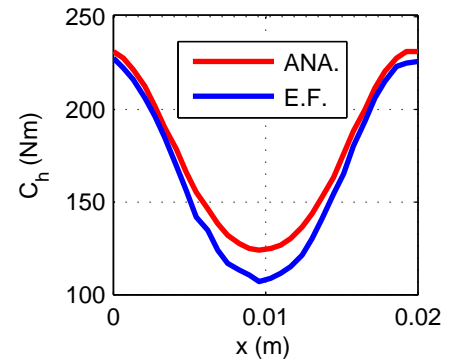
(a) Couple total instantané sur un pas dentaire τ_s ($nI_q = 800A$, et $nI_d = -100A$)



(b) Composante de couple de détente instantané sur un pas dentaire τ_s



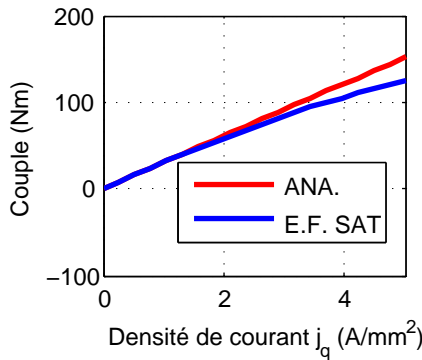
(c) Composante de couple réductant instantané sur un pas dentaire τ_s ($nI_q = 800A$, et $nI_d = -100A$)



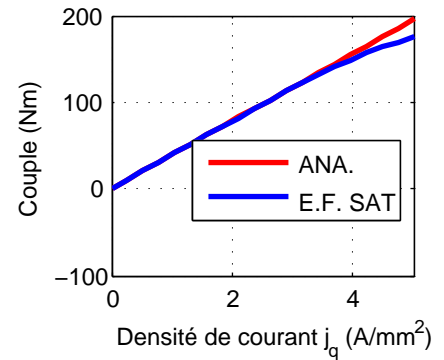
(d) Composante de couple hybride instantané sur un pas dentaire τ_s ($nI_q = 800A$, et $nI_d = -100A$), obtenue par différence entre le couple total (figure 3.45a), et la somme des couples de détente et réductants (figures 3.45b et 3.45c)

FIGURE 3.45: Tracé des composantes du couple instantané lors d'un déplacement sur un pas dentaire de longueur τ_s

Nous souhaitons profiter de cette étude sur les couples pour discuter de la validité de l'hypothèse de non-saturation du matériau faite jusque là. Dans cette perspective, nous nous permettons, par éléments finis, d'attribuer au fer une caractéristique non-linéaire, de type matériau fer-silicium 3%. Le calcul analytique suppose bien entendu toujours un fer idéal. Nous allons mener un calcul de couple par éléments finis en utilisant la méthode du tenseur de Maxwell à mi-entrefer tenant compte de la saturation des parties ferromagnétiques. Nous considérons toujours la géométrie donnée dans le tableau 3.1. Dans un premier temps, nous n'allons injecter qu'un courant d'axe q , de telle manière que la densité efficace de courant injectée, notée j_q , soit comprise entre la valeur nulle et la valeur limite de $j_{qMAX} = 5A/mm^2$ (pour des raisons thermiques). Le couple moyen obtenu dans ce cas, en fonction de la densité efficace j_q de courant d'axe q , est montré au niveau de la figure 3.46a, aussi bien pour le cas linéaire (calculé grâce au modèle analytique), que pour le cas saturé. D'autre part, nous pouvons refaire l'étude du couple moyen en fonction de la densité efficace de courant d'axe q notée j_q en linéaire et en non-linéaire, mais cette fois en injectant une densité de courant efficace d'axe d constante négative égale à $j_d = -5A/mm^2$. Nous pouvons constater que la situation reste toujours acceptable d'un point de vue thermique, car, au maximum, la densité de courant efficace totale sera égale à $\sqrt{j_d^2 + j_{qMAX}^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} \approx 7,07A/mm^2$. Le résultat est montré à la figure 3.46b.



(a) Couple moyen en fonction de la densité efficace de courant d'axe q notée j_q , pour des courants d'axe d nuls



(b) Couple moyen en fonction de la densité efficace de courant d'axe q notée j_q , en maintenant une densité efficace de courant d'axe d $j_d = -5A/mm^2$

FIGURE 3.46: Tracé des composantes des couples moyens obtenus en fonction de la densité de courant d'axe q , notée j_q , sans et avec un courant d'axe d , pour des matériaux magnétiques linéaires idéaux (modèle analytique), puis saturables (modèle éléments finis)

La première remarque, tout à fait prévisible, est que le couple moyen disponible augmente moins vite en fonction du courant d'axe q lorsque la saturation est prise en compte. Ceci justifie la nécessité, si on utilise le modèle linéaire analytique dans un processus d'optimisation, d'introduire une contrainte à respecter sur l'induction maximale à ne pas dépasser dans le fer de la machine pour que l'approximation linéaire demeure effectivement valide. Dans le cas contraire, on court le risque de commettre une importante surestimation du couple développé par l'actionneur. De telles contraintes, qui n'ont pas de justification physique à proprement parler, mais qui permettent simplement que le modèle reste dans sa plage de validité, seront appelées « contraintes de modèle ». La seconde remarque concerne les aspects bénéfiques de l'injection d'un courant d'axe d en plus du courant d'axe q . En effet, en comparant la figure 3.46b, où un courant d'axe d est superposé au courant d'axe q , par rapport à la figure 3.46a où le courant d'axe q est injecté seul, nous pouvons constater que le couple est plus élevé. En effet, la machine étant saillante, le courant d'axe d négatif permet la génération d'une composante de couple réductant (au prix certes de pertes plus importantes dans le cuivre). D'autre part, par la diminution globale du flux dans la machine qui en résulte, ce courant d'axe d retarde la diminution du couple due à la saturation magnétique, permettant ainsi de rester dans la zone linéaire sur une plus large plage de courants d'axe q . Nous verrons dans le chapitre dédié à l'optimisation que cette diminution du flux peut aussi réduire les pertes magnétiques à haute vitesse (ce qui peut compenser l'augmentation des pertes cuivre), ainsi qu'avoir un aspect bénéfique sur le facteur de puissance.

Peut-être pourrions-nous objecter que la comparaison entre les figures 3.46a et 3.46b est quelque peu biaisée par le fait que, dans chaque cas, la densité de courant efficace totale dans les encoches n'est pas conservée. En effet, dans le cas de la figure 3.46a, la densité de courant d'axe d , j_d , est nulle, et la densité de courant d'axe q , j_q , varie de 0 à $5A/mm^2$, ce qui fait que la densité totale de courant $j_{tot} = \sqrt{j_d^2 + j_q^2}$ varie également 0 à $5A/mm^2$. Or, dans le cas de la figure 3.46b, on injecte une densité de courant constante d'axe d $j_d = -5A/mm^2$, et la densité de courant d'axe q varie toujours de 0 à $5A/mm^2$. Ceci implique que la densité de courant totale j_{tot} varie cette fois de $5A/mm^2$ à $\sqrt{5^2 + 5^2} \approx 7,07A/mm^2$. On peut donc penser que puisque la densité de courant totale est supérieure dans le cas 3.46b à celle du cas 3.46a, il n'est pas surprenant que le couple avec courant d'axe d (figure 3.46b) soit supérieur à celui obtenu sans ce courant d'axe d (figure 3.46a). Par conséquent, afin de réaliser une comparaison plus équitable entre les cas avec et sans courant d'axe d , il peut sembler plus approprié de relancer le calcul sans courant d'axe d ($j_d = 0$), et en injectant un courant d'axe q variant entre $j_q = 5A/mm^2$ et $j_q = \sqrt{5^2 + 5^2} \approx 7,07A/mm^2$. Le résultat est montré à la figure 3.47. Même si le couple au départ n'est pas nul (puisque la densité de courant de $5A/mm^2$ est injectée dans l'axe q), le couple obtenu pour la densité de courant maximale de $7.07A/mm^2$ est plus petit dans le cas où toute la densité de courant est injectée dans l'axe q que dans le cas où la même densité est répartie entre les deux axes d et q , que le régime soit linéaire ou saturé. En effet, il se trouve que le fait de profiter des deux composantes de couple, dans le cadre de l'étude développée ici, est plus efficace que de ne profiter que du

couple hybride, à densité de courant totale constante. D'autre part, l'effet de la saturation, lorsque le courant est injecté uniquement dans l'axe q , a des conséquences dramatiques sur le couple obtenu, car les densités de courant sont fortes. Cette étude montre donc clairement qu'à pertes cuivre constantes, la commande avec courant d'axe d est avantageuse à tous les égards (d'autant qu'avec des niveaux d'induction plus faibles procurés par un courant d'axe d négatif, on est en droit de penser que les pertes fer sont inférieures).

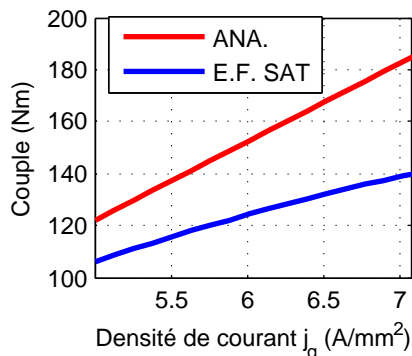


FIGURE 3.47: Couple moyen en fonction de la densité efficace de courant d'axe q notée j_q , en maintenant une densité efficace de courant d'axe d nulle et en gardant la même densité de courant efficace totale qu'à la figure 3.46b, pour des matériaux magnétiques linéaires idéaux (modèle analytique), puis saturables (modèle éléments finis)

3.3.2 Le calcul de l'induction dans les parties ferromagnétiques de la machine sur la base du calcul des inductions dans l'entrefer en tenant compte des encoches

A présent que nous avons calculé l'induction d'entrefer en tenant compte de l'effet des encoches statoriques, il nous est permis de revenir au problème du calcul des inductions dans le stator de la machine. En effet, nous rappelons que ce qui avait motivé la mise au point d'un modèle analytique prenant en compte les encoches était l'incapacité du modèle utilisant le coefficient de Carter à évaluer le flux de fuite au niveau de ces encoches, ce qui se payait par une sous-estimation des inductions dans les parties statoriques. A présent, nous n'avons plus ce problème, et une évaluation encore plus précise du flux dans les parties ferromagnétiques est permise.

3.3.2.1 Calcul de l'induction dans les dents du stator

L'induction dans les dents sera calculée de la manière suivante : nous supposons toujours que l'induction dans la dent est unidirectionnelle, dirigée suivant l'axe $(0y)$ (figure 3.24). De plus, nous supposons également que cette induction de dent est uniforme sur toute la section de la dent. En revanche, nous n'allons pas supposer que le flux entre uniquement par la base de la dent, et que ce dernier est alors entièrement canalisé par celle-ci, ce qui nous permet de prendre maintenant en compte les épanouissements des lignes de champ sur les côtés de la dent (figure 3.19) dans le calcul de l'induction à vide, et les flux de fuites des encoches pour l'induction de réaction magnétique d'induit. Le principe de calcul de l'induction dans la dent statorique est exposé à la figure 3.48 : il suffit d'utiliser le fait que le flux qui traverse une surface est égale à la circulation du potentiel-vecteur sur le contour de cette surface : par conséquent, pour chaque ordonnée Y dans la dent, en notant $A_1(Y)$ le potentiel-vecteur calculé dans l'entrefer sur le côté gauche de la dent, et $A_2(Y)$ le potentiel-vecteur sur son côté droit, l'induction $B_d(Y)$ dans la dent de largeur w_d est alors donnée par la formule :

$$B_d(Y) = \frac{A_1(Y) - A_2(Y)}{w_d} \quad (3.71)$$

Cette formulation est bien plus précise que celle que nous avons développée à partir du calcul électromagnétique avec stator lisse, car elle permet de prendre en compte les lignes de flux de fuites qui arrivent dans la dent après être passé par l'encoche, ainsi que les épanouissements des lignes sur la base de la dent, comme le montre la figure 3.49 où nous avons rappelé les lignes de champ dues aux courants d'axe d par éléments finis.

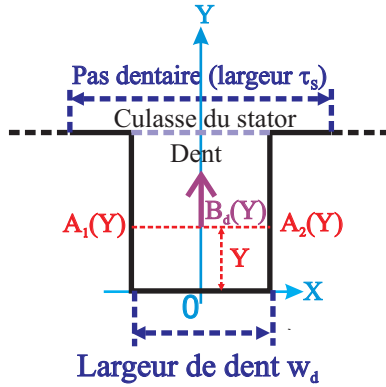


FIGURE 3.48: Principe du calcul de l'induction dans les dents statoriques à partir d'un modèle magnétique d'entrefer prenant en compte les encoches du stator

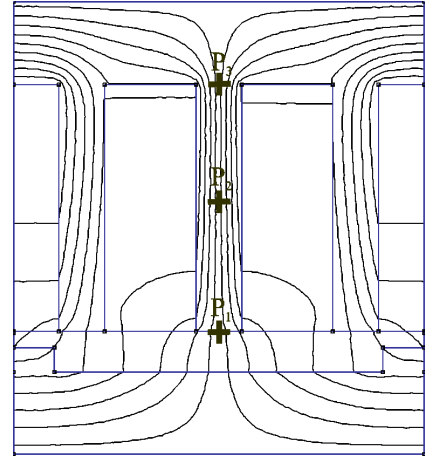


FIGURE 3.49: Résultat de la simulation par éléments finis des lignes de champ dans la machine lorsque l'on injecte un courant d'axe $d nI_d = 1$

Par conséquent, nous pouvons tracer les ondes d'induction au centre de la dent obtenues sur une période de fonctionnement (en injectant des ampères-tours d'axe $d nI_d = 1$), et comparer les résultats obtenus analytiquement et par éléments finis au niveau des points P_1 , P_2 , et P_3 au centre de la dent du stator. Le résultat est montré à la figure 3.50, et démontre la bonne adéquation entre les prédictions analytiques et les résultats numériques, tant en forme d'onde qu'en amplitude, et ceci quelque soit la position du point pour lequel le test est réalisé dans la dent du stator. La capacité du modèle à prendre en compte à la fois les épanouissements des lignes de champ autour des dents ainsi que les flux de fuites dans les encoches est alors démontrée. Nous nous devons ceci étant de préciser que ce modèle n'est pas capable de prendre en compte les flux dits de « zig-zag » [Qu et Lipo, 2004], mais, dans la géométrie choisie pour le test, leur effet semble être très réduit. Nous avons vérifié, pour ce cas des courants d'axe d , l'hypothèse du caractère unidirectionnel de l'induction dans la dent du stator. Par exemple, à la figure 3.51, nous avons tracé le locus d'induction au niveau du point P_2 au cours d'une période de fonctionnement dans le dent. On y voit que l'hypothèse consistant à supposer cette induction unidirectionnelle d'axe $(0y)$ est fondée. La faible composante d'axe $(0x)$ observée est en fait due à l'adjonction des lignes de fuites au fur et à mesure que l'on s'approche de la culasse du stator.

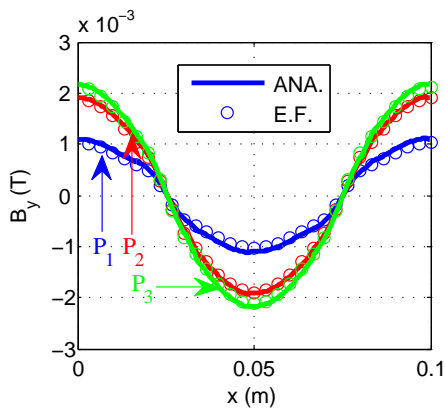


FIGURE 3.50: Tracé des inductions au niveau des points P_1 , P_2 , et P_3

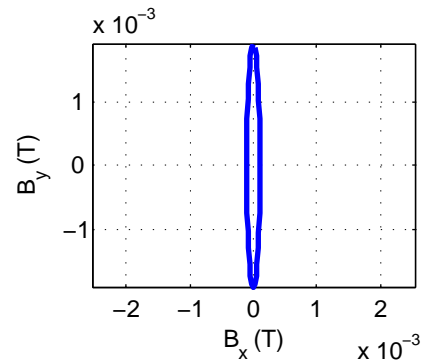


FIGURE 3.51: Tracé du locus d'induction au niveau du point P_2 par éléments finis

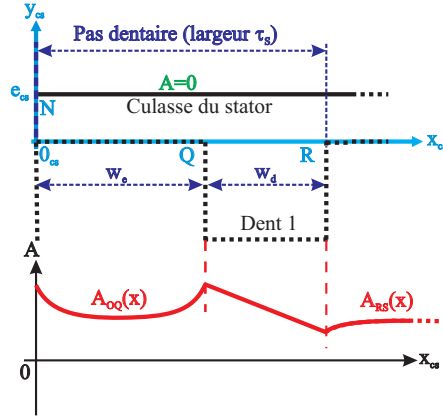
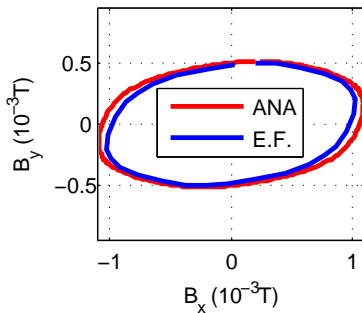


FIGURE 3.52: Schéma du principe de résolution du problème de Dirichlet dans la culasse du stator à partir d'un calcul du champ dans l'entrefer en tenant compte des encoches du stator

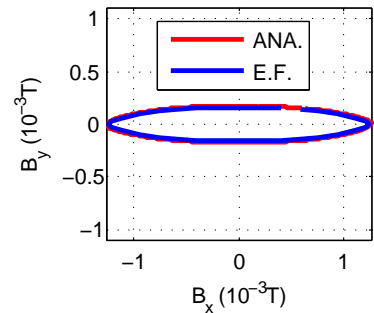
3.3.2.2 Calcul de l'induction dans la culasse du stator

Le modèle que nous proposons, lorsque nous connaissons le potentiel sur les frontières de l'entrefer avec prise en compte des encoches statoriques, consiste, comme auparavant, en la résolution du problème de Dirichlet dans le rectangle de culasse s'étendant sur un pas dentaire $[OPMN]$ (figure 3.21). Sur le segment $[NM]$, qui se trouve à l'extérieur de la culasse, on continue à imposer un potentiel nul. Sur les segments $[NO]$ et $[MP]$, on applique des conditions d'anti-périodicité. Sur le segment $[OP]$, on applique également une condition de Dirichlet provenant du potentiel dans l'entrefer de la machine. Néanmoins, au lieu de supposer que le potentiel est constant sur les segments de frontière avec les encoches, nous pouvons imposer au niveau de la frontière avec les encoches et la culasse la vraie évolution de potentiel que nous avons dans l'entrefer sur ces segments (comme illustré sur la figure 3.52). Sur les segments de frontière entre les dents et la culasse, l'hypothèse d'uniformité de l'induction impose une variation de potentiel linéaire (voir le segment $[QR]$ de frontière entre la dent et la culasse au niveau de la figure 3.52). Ensuite, le problème de Dirichlet est résolu dans la culasse comme exposé plus haut, afin d'obtenir les deux composantes de l'induction (B_x, B_y) .

Nous avons représenté au niveau des figures 3.53a et 3.53b les loci d'induction obtenus respectivement pour les points P_4 et P_5 , en injectant un courant d'axe d égal à $nI_d = 1A$. Les résultats semblent en bon accord avec les éléments finis, ce qui semble résoudre le problème que nous avons auparavant avec les inductances de fuites à travers les encoches, qui nous empêchaient de calculer précisément les inductions dans les culasses.



(a) Locus d'induction obtenu au niveau du point P_4 de la culasse du stator en injectant des ampères-tours d'axe d valant $nI_d = 1A$



(b) Locus d'induction obtenu au niveau du point P_5 de la culasse du stator en injectant des ampères-tours d'axe d valant $nI_d = 1A$

FIGURE 3.53: Tracé des loci d'induction en divers points de la culasse du stator en considérant les ampères-tours d'axe d

Pour conclure, la méthode proposée ici, bien que donnant des résultats qui semblent satisfaisants aussi bien pour le champ dans l'entrefer que pour celui dans les parties ferromagnétiques statoriques, soulève le problème suivant : la quantité de calcul semble relativement importante, étant donné qu'il faut répéter le calcul du champ dans l'entrefer pour chaque position élémentaire X_d du rotor par rapport au stator (chaque calcul, pour une position donnée, dure environ une seconde). Cette stratégie permet également, on l'a vu, de calculer le couple instantané. En réalité, nous ne sommes intéressés que par le couple moyen (la réduction des ondulations de couple peut se faire a posteriori). Donc, pour gagner en temps de calcul, nous continuons de ne faire que trois calculs : un à vide (figure 3.35), un pour le rotor dans la position d avec $nI_d = 1A$ (figure 3.37), et l'autre pour le rotor dans la position q avec $nI_q = 1A$ (figure 3.38). Ces trois calculs permettent de trouver respectivement le flux à vide des aimants, ainsi que les perméances d'axe d et d'axe q (cette fois indissociables des perméances de fuite des encoches du stator). Ces données nous renseignent sur le couple moyen. A noter cependant que, comme lors des calculs avec surface du stator lisse, nous supposons que les perméances d'axe d et d'axe q sont les valeurs extrêmes de la fonction perméance, alors qu'en toute rigueur, dans la théorie de Park, il s'agit des valeurs extrêmes de la fonction perméance développée à son premier harmonique. Nous avons vu, lors de la présentation du modèle d'entrefer avec encoches, que ceci pouvait générer une erreur non négligeable sur l'évaluation de ces perméances.

Nous allons également nous contenter de ces trois calculs pour en déduire les ondes d'induction dans le fer. En effet, ce qui se passe dans une dent pour une position donnée X_d est exactement ce qui se passait dans la dent précédente pour la position $X_d - \frac{\tau}{6}$. Par ce raisonnement, chaque calcul ne donne pas seulement l'induction en chaque point pour une position donnée, mais en fait, en exploitant les trois dents par pas dentaire, on peut considérer que l'on acquiert l'induction en chaque point d'un motif dentaire pour trois positions équi-réparties sur une demi-période. Ceci suffit, par une méthode des moindres carrés, à interpoler l'onde d'induction en chaque point de la culasse et de la dent sur une période de déplacement τ par un polynôme trigonométrique, ce qui évite de relancer le calcul pour chaque position élémentaire.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons posé les bases d'un modèle électromagnétique 2D de la topologie de machine à flux axial qui nous intéresse. Bien que la machine à flux axial soit fondamentalement une structure 3D, l'étude 2D a été rendue possible grâce au développement de la structure au niveau de son rayon moyen d'une part, et l'hypothèse de négliger les effets de bords radiaux ainsi que les effets de courbure d'autre part.

Le modèle électromagnétique 2D proposé est un modèle fondé sur la résolution analytique formelle des équations de Maxwell. Les hypothèses inhérentes à cette stratégie de modélisation sont assez fortes. En premier lieu, les formes géométriques de la machine se doivent d'être très simplifiées : en fait, il faut pouvoir décomposer les domaines dans lesquels le calcul est effectué en domaines rectangulaires élémentaires. D'autre part les matériaux magnétiques doivent être linéaires et à perméabilité magnétique infinie, afin de pouvoir mener les calculs d'induction dans l'entrefer de manière découplée de ceux dans le fer (les frontières air-fer, vues de l'entrefer, se réduisent à des conditions de Neumann homogènes). Cette modélisation exclut donc de fait toute prise en compte des effets de la saturation magnétique, ou même simplement la considération d'une perméabilité magnétique finie pour le fer.

Dans un premier temps, un modèle électromagnétique fondé sur l'utilisation du coefficient de Carter a été repris dans la littérature. Ce modèle permet de calculer le couple moyen de la machine. Néanmoins, comme nous le verrons au cours du chapitre dédié à l'optimisation, le calcul des pertes ferromagnétiques est fondamental. Il donne en effet accès au rendement de la machine, qui est souvent un des objectifs à maximiser lors de l'optimisation. Qui plus est, les pertes sont la grandeur d'entrée du modèle thermique de la machine, qui permet, quant à lui, le calcul de la contrainte de température à ne pas dépasser pour ne pas endommager les isolants du bobinage. Or, afin de déduire les pertes magnétiques de manière précise, une connaissance locale des inductions en chaque point des parties ferromagnétiques est indispensable. Nous avons essayé, par des considérations de concentration de flux entre l'entrefer et le stator de la machine, d'utiliser les résultats de calcul du champ dans l'entrefer en supposant le stator lisse, pour évaluer l'induction dans les culasses et les dents de la machine. Cette stratégie a été mise en échec pour le calcul de l'induction due aux courants de réaction magnétique d'induit, à cause de l'impossibilité de prendre en compte les inductances de fuite lorsque l'on néglige les encoches du stator. C'est pourquoi il nous est apparu utile de mettre au point un modèle de calcul d'induction dans l'entrefer avec prise en compte de la double saillance du rotor et du stator. Ce calcul a été validé par éléments finis, tant pour l'évolution spatiale des inductions dans l'entrefer que pour le calcul du couple instantané. A partir de ce modèle avec encoches, nous avons recalculé le coefficient de Carter en tenant compte de la longueur finie de l'aimant, puis comparé le résultat à la formule

analytique classique donnée dans la littérature électrotechnique. Il a été montré que le coefficient de Carter donné par les formules classiques, dans le cas étudié, pouvait mener à une valeur relativement précise du flux à vide de la machine, quelque soit la largeur relative de l'aimant par rapport au pas polaire, grâce à l'opération de moyennage du flux pour toutes les positions du rotor par rapport au stator. Nous avons également profité de cette étude pour introduire, par éléments finis, une courbe de saturation pour le matériau magnétique, et tester l'erreur résultante sur le couple moyen. Cette étude montre qu'une autre utilité du calcul des inductions dans les parties ferromagnétiques de la machine, outre la prédiction des pertes dans ces dernières, réside dans l'écriture de contraintes dites de modèle, comme la non-saturation du fer, de telle sorte que le modèle linéaire proposé reste dans sa zone de validité, sous peine de commettre une erreur sur le couple calculé.

A partir de cette induction d'entrefer, une stratégie de calcul analytique des inductions dans les parties ferromagnétiques du rotor et du stator a été proposée, fondée sur des considérations de concentration de flux dans les dents du stator, et sur le calcul analytique du potentiel dans la culasse du stator, ainsi que dans les parties rotoriques. Une telle méthode a pour avantage de permettre le calcul analytique des deux composantes d'induction dans ces culasses, ce qui est original par rapport aux approches développées dans la littérature. En effet, on a vu dans l'état de l'art que les modèles analytiques fondés sur la résolution des équations de Maxwell se limitaient en général à l'entrefer, le cas des inductions dans les culasses n'étant soit pas traité, soit traité avec des modèles de concentration de flux unidirectionnels, ce qui est à notre sens gênant dans une optique de calcul précis des pertes fer. Grâce à ce calcul précis et local des inductions en charge dans le stator de la machine, nous appliquerons au cours du chapitre dédié à l'optimisation le modèle des pertes fer prenant en compte les loci bidimensionnels d'induction dans la culasse du stator, modèle dont nous avons exposé la teneur au cours du chapitre précédent. Nous pourrions également écrire les contraintes de non-saturation dans les parties ferromagnétiques de la machine. Dans l'immédiat, le chapitre qui suit va se consacrer à l'approfondissement des modèles électromagnétiques développés, où nous allons étudier les effets tridimensionnels, comme les effets de bord de l'actionneur, que nous avons négligés ici, à cause de l'hypothèse de modélisation bidimensionnelle.

Bibliographie

- [Appino *et al.*, 1997] APPINO, C., FIORILLO, F. et RIETTO, A. (1997). The energy loss components under alternating, elliptical and circular flux in non-oriented alloys. *Proceedings of the 2DM*, 1:55–61.
- [Atallah *et al.*, 1992] ATALLAH, K., ZHU, Z. et HOWE, D. (1992). An improved method for predicting iron losses in brushless permanent magnet dc drives. *IEEE Transactions on magnetics*, 28(5 Part 2):2997–2999.
- [Azzouzi, 2007] AZZOUZI, J. (2007). *Contribution à la modélisation et à l'optimisation des machines synchrones à aimants à flux axial. Application au cas de l'aérogénérateur*. Thèse de doctorat, Université du Havre.
- [Bertotti *et al.*, 1991] BERTOTTI, G., BOGLIETTI, A., CHIAMPI, M., CHIARABAGLIO, D., FIORILLO, F. et LAZZARI, M. (1991). An improved estimation of iron losses in rotating electrical machines. *IEEE Transactions on magnetics*, 27(6 Part 2):5007–5009.
- [Boglietti *et al.*, 1998] BOGLIETTI, A., CHIAMPI, M., REPETTO, M., BOTTAUSCIO, O., CHIARABAGLIO, D. et IND, D. (1998). Loss separation analysis in ferromagnetic sheets under pwm invertersupply. *IEEE Transactions on Magnetics*, 34(4 Part 1):1240–1242.
- [Bottauscio *et al.*, 2002a] BOTTAUSCIO, O., CANOVA, A., CHIAMPI, M. et REPETTO, M. (2002a). Iron losses in electrical machines : influence of different material models. *IEEE Transactions on Magnetics*, 38(2 Part 1):805–808.
- [Bottauscio et Chiampi, 2001] BOTTAUSCIO, O. et CHIAMPI, M. (2001). Laminated core modeling under rotational excitations including eddy currents and hysteresis. *Journal of Applied Physics*, 89:6728.
- [Bottauscio *et al.*, 2000] BOTTAUSCIO, O., CHIAMPI, M., FIORILLO, F. et REPETTO, M. (2000). Dynamic hysteresis and voltage driven solution of a ferromagnetic laminated core. *IEEE Transactions on Magnetics*, 36(4 Part 1):1238–1241.
- [Boules, 1984] BOULES, N. (1984). Two-dimensional field analysis of cylindrical machines with permanent magnet excitation. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 20(5):1267–1277.
- [Boules *et al.*, 1980] BOULES, N., CANDERS, W. et WEH, H. (1980). Analytische bestimmung des nutungseinflusses auf die feldverteilung und die wirbelstromverluste in dauermagneteregten synchronmaschinen. *Electrical Engineering (Archiv fur Elektrotechnik)*, 62(4):283–293.
- [Carter, 1901] CARTER, F. (1901). Airgap induction. *Elect. World*, 38:884.
- [Chin, 2004] CHIN, Y. (2004). *A Permanent Magnet Synchronous Motor For An Electric Vehicle -Design Analysis*. Thèse de doctorat, Electrical Machines And Power Electronics Department Of Electrical Engineering Royal Institute Of Technology Sweden.
- [Chin et Soulard, 2003] CHIN, Y. et SOULARD, J. (2003). Modeling of iron losses in permanent magnet synchronous motors with field weakening capability for electric vehicles. *International Journal of Automotive Technology*, 4(2):87–94.
- [Deng, 1999] DENG, F. (1999). An improved iron loss estimation for permanent magnet brushlessmachines. *IEEE Transaction on Energy Conversion*, 14(4):1391–1395.
- [Dubas, 2009] DUBAS, F. ; Espanet, C. (2009). Analytical solution of the magnetic field in permanent-magnet motors taking into account slotting effect : No-load vector potential and flux density calculation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 45:2097–2109.
- [Kauffmann, 1975] KAUFFMANN, J. M. ; Gudefin, E. S. F. (1975). Méthode analytique de calcul des inductances d'une machine à pôles saillants. *Compte-rendu Académie des Sciences de Paris*, 281:583.
- [Kauffmann, 1974] KAUFFMANN, J. (1974). *Contribution au calcul des inductances d'une machine à pôles saillants*. Thèse de doctorat, INPL de Nancy.
- [Kim et Lieu, 1998] KIM, U. et LIEU, D. (1998). Magnetic field calculation in permanent magnet motors with rotoeccentricity : with slotting effect considered. *IEEE Transactions on Magnetics*, 34(4 Part 2):2253–2266.
- [Kramer, 1983] KRAMER, C. (1983). *Auslegung und Optimierung eines permanenterregten hochdynamischen Synchron-Stellmotors mittels numerischer und analytischer Feldberechnung*. Thèse de doctorat, Technische Hochschule Darmstadt.
- [Kumar et Bauer, 2008] KUMAR, P. et BAUER, P. (2008). Improved analytical model of a permanent-magnet brushless dc motor. *IEEE Transactions on Magnetics*, 44(10):2299–2309.

- [Lavers *et al.*, 1978] LAVERS, J., BIRINGER, P. et HOLLITSCHER, H. (1978). A simple method of estimating the minor loop hysteresis loss in thin laminations. *IEEE Transactions on magnetics*, 14(5):386–388.
- [Lipo, 2004] LIPO, T. (2004). *Introduction to AC machine design*. Wisconsin power electronics research center : University of Wisconsin, Madison.
- [Lipo et Aydin, 2004b] LIPO, T. et AYDIN, M. (2004b). Field weakening of permanent magnet machines—design approaches. In *EPE Power Electronics and Motion Control Conference*.
- [Markovic, 2004] MARKOVIC, M. (2004). *Magnetic field analysis in electric motors using conformal mapping*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique fédérale de Lausanne.
- [Markovic et Perriard, 2008] MARKOVIC, M. et PERRIARD, Y. (2008). A simplified determination of the permanent magnet (pm) eddy current losses due to slotting in a pm rotating motor. In *International Conference on Electrical Machines and Systems*, pages 309–313.
- [Mayergoyz, 1986b] MAYERGOYZ, I. (1986b). Mathematical models of hysteresis. *Physical review letters*, 56(15):1518–1521.
- [Mayergoyz, 2003] MAYERGOYZ, I. D. (2003). *Mathematical models of hysteresis and their applications*. Academic Press.
- [Mi *et al.*, 2003] MI, C., SLEMON, G. et BONERT, R. (2003). Modeling of iron losses of permanent-magnet synchronous motors. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 39(3):734–742.
- [Morimoto *et al.*, 1990] MORIMOTO, S., TAKEDA, Y., HIRASA, T. et TANIGUCHI, K. (1990). Expansion of operating limits for permanent magnet motor by current vector control considering inverter capacity. *IEEE transactions on industry applications*, 26(5):866–871.
- [Morimoto *et al.*, 1994c] MORIMOTO, S., TONG, Y., TAKEDA, Y. et HIRASA, T. (1994c). Loss minimization control of permanent magnet synchronous motordrives. *IEEE transactions on industrial electronics*, 41(5):511–517.
- [Multon *et al.*, 1995] MULTON, B., LUCIDARME, J. et PRÉVOND, L. (1995). Analyse des possibilités de fonctionnement en régime des désexcitation des moteurs à aimants permanents. *J. Phys. III France*, 5:623–640.
- [Oh et Emadi, 2004] OH, S. et EMADI, A. (2004). Test and simulation of axial flux-motor characteristics for hybrid electric vehicles. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 53(3):912–919.
- [Parviainen, 2005] PARVIAINEN, A. (2005). *Design of axial-flux permanent-magnet low-speed machines and performance comparison between radial-flux and axial-flux machines*. Thèse de doctorat, Lappeenranta University of Technology.
- [Patterson, 1995] PATTERSON, D. (1995). An efficiency optimized controller for a brushless dc machine, and loss measurement using a simple calorimetric technique. In *Power Electronics Specialists Conference, 1995. PESC'95 Record., 26th Annual IEEE*, volume 1.
- [Polinder, 1998] POLINDER, H. (1998). *On the losses in a high-speed permanent-magnet generator with rectifier*. Thèse de doctorat, Technische Universiteit Delft.
- [Qu et Lipo, 2004] QU, R. et LIPO, T. (2004). Analysis and modeling of air-gap and zigzag leakage fluxes in a surface-mounted permanent-magnet machine. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 40(1):121–127.
- [Ragusa et Repetto, 2000] RAGUSA, C. et REPETTO, M. (2000). Accurate analysis of magnetic devices with anisotropic vector hysteresis. *Physica B : Condensed Matter*, 275(1-3):92–98.
- [Sargos, 1991] SARGOS, F. M. ; Rezzoug, A. (1991). Calcul analytique du champ engendré par des aimants dans l'entrefer d'une machine à rotor denté. *Journal de Physique III*, 1(1):103–110.
- [Sargos, 1981] SARGOS, F. (1981). *Etude théorique des Performances des Machines à réluctance variable*. Thèse de doctorat, INPL de Nancy.
- [Slemon et Liu, 1990] SLEMON, G. et LIU, X. (1990). Core losses in permanent magnet motors. *IEEE Transactions on Magnetics*, 26(5):1653–1655.
- [Souillard *et al.*, 2002] SOULARD, J., MEIER, S. et CHIN, Y. (2002). Modelling of iron losses in permanent magnet motors with field-weakening capability. In *Proceedings of the Nordic Workshop on Power and Industrial Electronics, Stockholm, Sweden*.
- [Tseng et Wee, 1999] TSENG, K. et WEE, S. (1999). Analysis of flux distribution and core losses in interior permanent magnet motor. *IEEE Transaction on Energy Conversion*, 14(4):969–975.

- [Wang *et al.*, 1999] WANG, J., JEWELL, G. et HOWE, D. (1999). A general framework for the analysis and design of tubular linear permanent magnet machines. *IEEE Transactions on Magnetics*, 35(3 (Part 2)):1986–2000.
- [Zhu et Howe, 1993a] ZHU, Z. et HOWE, D. (1993a). Instantaneous magnetic field distribution in brushless permanent magnet dc motors, part ii : Armature-reaction field. *IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS MAG*, 29:136–136.
- [Zhu et Howe, 1993b] ZHU, Z. et HOWE, D. (1993b). Instantaneous magnetic field distribution in brushless permanentmagnet dc motors. iii. effect of stator slotting. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 29(1 Part 2):143–151.
- [Zhu *et al.*, 1993] ZHU, Z., HOWE, D., BOLTE, E. et ACKERMANN, B. (1993). Instantaneous magnetic field distribution in brushless permanentmagnet dc motors. i. open-circuit field. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 29(1):124–135.
- [Zhu *et al.*, 1994] ZHU, Z., HOWE, D. et XIA, Z. (1994). Prediction of open-circuit airgap field distribution in brushless machines having an inset permanent magnet rotor topology. *IEEE Transactions on Magnetics*, 30(1):98–107.

Chapitre 4

Les modèles analytiques 3D des machines synchrones à flux axial à aimants permanents en surface

Introduction

L'objectif de ce chapitre est le développement de modèles analytiques 3D, fondés sur la résolution formelle des équations de Maxwell, de la structure de machine à flux axial à aimants permanents en surface. Le chapitre précédent, concernant les modèles 2D, a présenté une modélisation de topologies plus générale, incluant le cas important des machines à aimants insérés, mais qui fonctionne bien entendu pour le cas particulier des machines à aimants en surface, en annulant la largeur des dents rotoriques. D'ailleurs, nous allons nous servir de ce modèle pour optimiser, au chapitre 6, la machine à pôles saillants, puis celle à pôles lisses, et comparer les machines optimales obtenues pour les objectifs masse et pertes. Néanmoins, en ce qui concerne les modèles 3D développés au sein de ce chapitre, nous choisissons de ne considérer aucune saillance. En effet, la complexité relative accrue des modèles 3D par rapport aux modèles 2D, ainsi que le manque évident concernant les modèles tri-dimensionnels dans la littérature électrotechnique, nous conduit à traiter dans l'immédiat le cas plus simple des machines à aimants déposés. Le besoin de s'intéresser aux modèles tri-dimensionnels est né des considérations suivantes. Comme nous l'avons précisé au chapitre 2, les modèles 2D sont fondés sur l'hypothèse du développement au rayon moyen, ainsi que sur l'hypothèse fondamentale que le différentiel de rayons actifs est très important par rapport au pas dentaire. Même si cette dernière hypothèse est très commode, car elle permet de réduire le potentiel-vecteur à une seule composante, elle n'a hélas aucune raison d'être justifiée en pratique. Nous verrons d'ailleurs à ce sujet, dans le chapitre 6, où nous proposerons des optimisations de topologies à partir des modèles 2D, que l'on tend même à observer la tendance inverse. En effet, vu que la décroissance de l'induction au niveau des bords n'est pas prise en compte en 2D, le flux, et donc le couple se trouvent surestimés, et, pour réduire la masse, l'outil d'optimisation n'hésite pas à diminuer à outrance le différentiel de rayons actifs. Qui plus est, l'hypothèse du développement au rayon moyen effectuée pour les modèles 2D du chapitre précédent, qui néglige par conséquent les effets de courbure de la machine à flux axial, doit être discutée.

Le présent chapitre, centré sur les effets tri-dimensionnels dans les machines et leur modélisation analytique, sera organisé de la manière suivante. Dans un premier temps, nous allons présenter un état de l'art des stratégies de modélisation des effets tri-dimensionnels fournies par la littérature électrotechnique. En second lieu, restant fidèles à notre stratégie de développement de la structure de la machine à flux axial au niveau de son rayon moyen, nous allons proposer une modélisation analytique tri-dimensionnelle de la machine linéaire équivalente, résultant du développement de la structure au niveau de son rayon moyen. En particulier, nous allons comparer deux stratégies de modélisation analytique des effets de bords de l'actionneur développé au rayon moyen : l'une quasi-3D, avec découplage du plan de modélisation 2D et de celui des effets de bords, et l'autre réellement 3D. Bien que les résultats sur le flux s'avèrent assez semblables pour les deux modèles avec des aimants de forme carrée, nous mettrons en lumière l'intérêt du modèle 3D, en montrant qu'il peut s'appliquer à des machines comportant des formes d'aimants singulières, comme le cas des aimants circulaires. Après avoir fait ce travail pour le flux à vide,

nous le ferons également pour le calcul de l'inductance cyclique.

Dans un troisième temps, nous nous affranchirons de l'hypothèse du développement de la machine au niveau de son rayon moyen, en modélisant analytiquement en trois dimensions la machine à flux axial réelle, en coordonnées cylindriques, ce qui permet de prendre en compte les effets de courbure. Cette étude ne sera menée que pour le flux à vide. A l'issue de ce travail, nous disposerons donc de différents modèles de la machine à flux axial, d'une complexité variée. Il nous semble donc intéressant de terminer ce chapitre par une étude comparative de tous ces modèles, afin d'en évaluer les apports respectifs. Nous comparerons le modèle 3D développé au rayon moyen, avec le modèle 3D de la machine à flux axial réelle tenant compte de l'effet de courbure. Il sera même utile de rappeler les résultats fournis par les modèles 2D, certes déjà exposés au chapitre précédent, afin de les comparer aux modèles 3D. Ces modèles 2D seront de deux types : d'une part ceux développés au rayon moyen, ce qui est exactement le travail du chapitre précédent, et d'autre part un modèle 2D trouvé dans la littérature [Azzouzi, 2007], qui, bien que ne prenant pas en compte les effets de bords par définition même du modèle 2D, permet tout de même de considérer l'effet de courbure grâce à un développement de l'actionneur en couches successives.

Etant donné la variété assez importante des modèles que ce chapitre va présenter, nous nous permettons, pour clarifier la situation, de les rappeler de manière succincte dans le tableau 4.1.

Nature du modèle	Variantes d'application	Utilisation
Modèle 3D avec développement au rayon moyen	Modèle quasi-3D	Flux à vide
	Modèle 3D avec aimants carrés	Flux à vide, inductance cyclique
	Modèle 3D avec aimants circulaires	Flux à vide, inductance cyclique
Modèle 3D en coordonnées cylindriques	Modèle 3D avec aimants radiaux	Flux à vide
Modèle 2D	Modèle 2D développé au rayon moyen	Flux à vide
	Modèle 2D par couches	Flux à vide

TABLE 4.1: Détail des différents modèles étudiés dans ce chapitre, et leur utilisation

4.1 Revue des méthodes de modélisation analytique tri-dimensionnelles des machines électriques présentes dans la littérature

Dans un premier temps, nous allons exposer les différentes méthodes présentes dans la littérature électrotechnique afin de prendre en compte les effets électromagnétiques tri-dimensionnels, quelque soit le type d'actionneur considéré. Dans un second temps, nous allons nous attarder plus spécifiquement sur le cas de la machine à flux axial à aimants permanents.

4.1.1 Méthodes générales de prise en compte des effets tri-dimensionnels dans les machines électriques

Méthode éléments finis 3D De nombreux auteurs, lorsqu'ils se trouvent confrontés au problème de la prise en compte des effets électromagnétiques tri-dimensionnels, optent pour l'utilisation de la méthode éléments finis 3D, comme par exemple la référence [Gonzalez-Lopez *et al.*, 2008], où le flux à vide d'une machine à flux axial à bobinage réparti est étudié par un modèle éléments finis sur un pas polaire, à l'aide du logiciel FLUX3D de l'entreprise Cédrat (figure 4.1). Les plans situés aux extrémités du pas polaire voient leurs noeuds couplés par anti-périodicité, afin de réduire le temps de calcul par rapport à une modélisation de la machine entière.

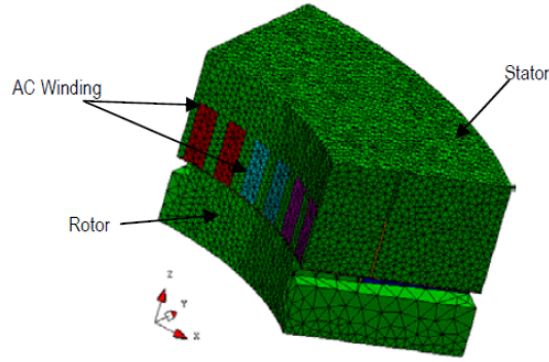
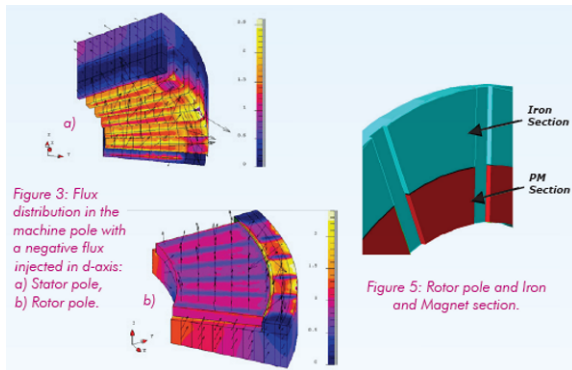
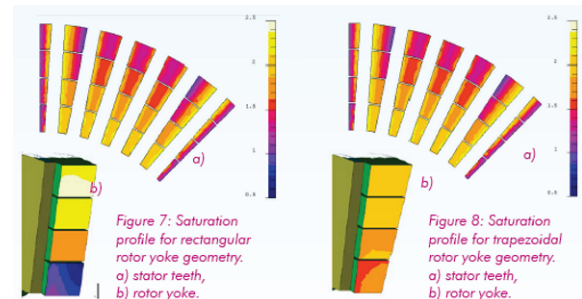


FIGURE 4.1: Représentation et maillage de la machine à flux axial à bobinage réparti étudiée dans la référence [Gonzalez-Lopez *et al.*, 2008], par représentation et calcul sur un pas polaire

Cette méthode de modélisation numérique présente l'avantage d'être applicable à la plupart des structures [Gonzalez *et al.*, 2004], quelque soit leur degré de complexité géométrique (à condition de pouvoir en réaliser le dessin pour le fournir à l'outil de maillage du logiciel), et en tenant compte des non-linéarités, comme la saturation magnétique. A la figure 4.2, on reprend les images de l'article [Gonzalez *et al.*, 2004], où une machine à flux axial à bobinage réparti est de nouveau étudiée. La forme des parties ferromagnétiques rotoriques est un peu particulière, et a été déjà présentée dans le chapitre 1 consacré à l'état de l'art : des pièces ferromagnétiques sont rajoutées dans le prolongement radial des aimants, afin d'améliorer les capacités de désexcitation de la machine en question. Dans l'article, une étude des niveaux de saturation des parties ferromagnétiques est menée, avec le souci d'étudier l'influence de la forme des pièces de la culasse ferromagnétique du rotor choisie sur cette saturation. L'objectif est de déterminer la forme des pôles ferromagnétiques rotoriques maximisant le flux à vide de la machine, et donc son couple.



(a) Présentation de la topologie étudiée

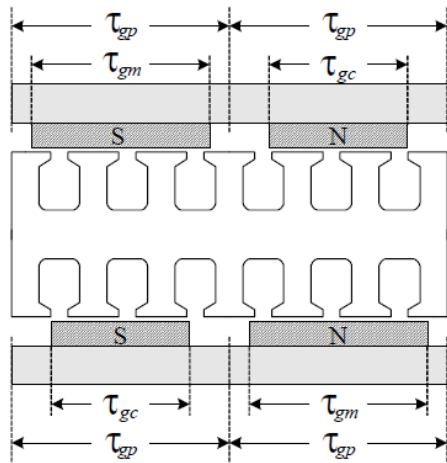


(b) Etude de la saturation magnétique en fonction de la forme de la culasse du rotor

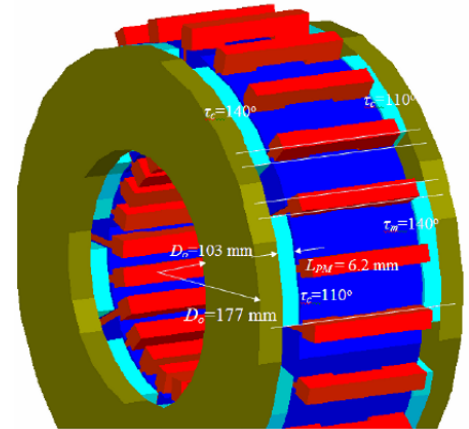
FIGURE 4.2: Machine à flux axial étudiée à la référence [Gonzalez *et al.*, 2004], et analyse des niveaux de saturation des parties ferromagnétiques en fonction de la forme des parties ferromagnétiques rotoriques

Certains outils permettent aussi de calculer le couple instantané en trois dimensions, ce qui en fait une méthode des plus utiles pour la prise en compte des ondulations de couple des machines électriques. Par exemple, la référence [Aydin *et al.*, 2003] propose une méthode originale de réduction des ondulations dues au couple de détente dans les topologies à flux axial à stator interne, et à double rotor externe à aimants. Le principe est illustré au niveau de la figure 4.3a pour le rayon moyen, et au niveau de la figure 4.3b en trois dimensions, les aimants étant supposés radiaux. Très brièvement, ce procédé consiste à placer des aimants consécutifs pour chaque rotor dont les largeurs relatives par rapport au pas polaire, notées respectivement $\alpha_m = \tau_m/\tau_p$ et $\alpha_c = \tau_c/\tau_p$ (τ_p est le pas polaire), sont différentes. En introduisant un décalage d'un pas polaire entre les rotors, les auteurs espèrent générer un déphasage entre les composantes de couple de détente produites par chacune des faces, de manière à réduire le couple de

détente de la machine totale. Les grandeurs α_m et α_c peuvent être optimisées de manière à réduire l'ondulation de couple de chaque face prise séparément.



(a) Représentation du principe de réduction du couple de détente au niveau du rayon moyen



(b) Représentation du principe de réduction du couple de détente en trois dimensions

FIGURE 4.3: Principe de réduction du couple de détente d'une machine à flux axial avec double rotor à aimants externe, exposé dans la référence [Aydin *et al.*, 2003]

La machine maillée grâce au logiciel FLUX3D de Cédrat est représentée à la figure 4.4 (cette machine a été ici modélisée entièrement, sans utilisation de conditions de périodicité) :

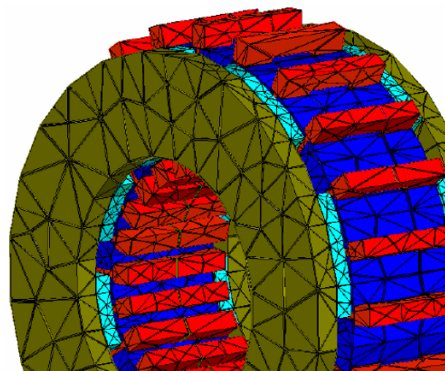
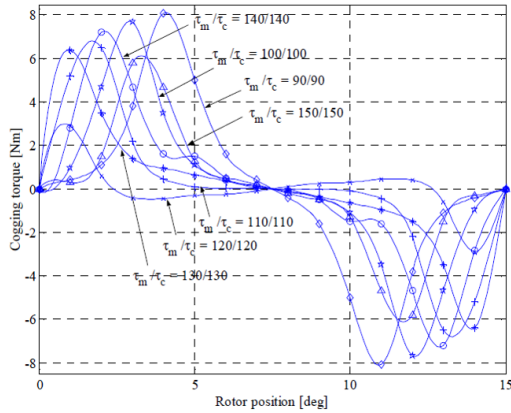
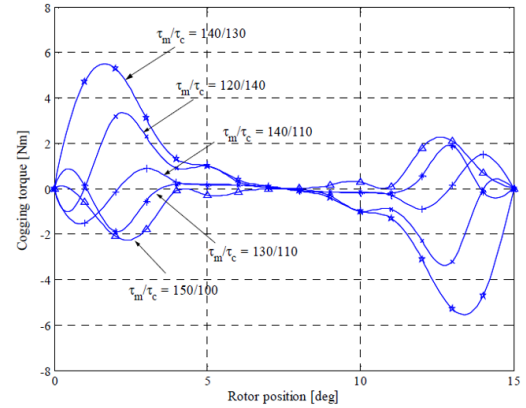


FIGURE 4.4: Représentation et maillage de la machine à flux axial à aimants à double face à stator interne et à double rotor externe étudiée dans la référence [Aydin *et al.*, 2003], en utilisant le logiciel FLUX3D de Cédrat

Les résultats sur l'ondulation du couple de détente instantané calculé en trois dimensions par éléments finis ont été repris au niveau de la figure 4.5a pour le cas conventionnel ($\alpha_m = \alpha_p$), et sur la figure 4.5b pour la méthode proposée dans l'article ($\alpha_m \neq \alpha_p$), ce qui permet bien de réduire le couple de détente, à condition de bien choisir les valeurs de α_m et de α_p . Remarquons que les rapports τ_m/τ_c (représentés aux figures 4.5a et 4.5b) et α_m/α_c sont égaux, car on rappelle que $\alpha_m = \tau_m/\tau_p$ et $\alpha_c = \tau_c/\tau_p$.



(a) Résultats sur l'ondulation de couple obtenue pour la méthode conventionnelle, lorsque les ouvertures τ_m et τ_c sont identiques (les ouvertures τ_m et τ_c sont ici des angles électriques)



(b) Résultats sur l'ondulation de couple obtenue avec la méthode proposée, préconisant de prendre les ouvertures τ_m et τ_c à des valeurs différentes

FIGURE 4.5: Résultats tirés de la référence [Aydin *et al.*, 2003] en ce qui concerne la réduction du couple de détente grâce à la technique proposée

Néanmoins, même si ces méthodes numériques de modélisation sont très utiles à un stade avancé du processus de conception (comme la détermination de la forme optimale des encoches qui minimise l'ondulation du couple [Aydin, 2003]), il est clair pour de nombreux auteurs [Aydin, 2004] que la méthode n'est pas adaptée, car trop gourmande en temps de calcul, à une première optimisation de la structure, durant laquelle il faut pouvoir explorer rapidement un nombre important de possibilités. Selon notre propre expérience de modélisation, l'étude par éléments finis tri-dimensionnels d'un pas polaire de machine à flux axial, en utilisant des conditions d'antipériodicité pour ne modéliser que le motif élémentaire, nécessite à peu près 120000 noeuds pour obtenir un résultat précis, et donc génère un système linéaire de la même dimension. Avec un ordinateur de bureau moderne, la résolution en régime linéaire prend une trentaine de minutes. Cela est considérablement plus important que le maillage d'à peu près 800 noeuds de la même machine modélisée en 2D par développement au rayon moyen (comme au chapitre précédent), qui nécessitait, sur le même ordinateur, seulement quelques secondes de calcul en régime linéaire.

A cause de ce temps dissuasif pour un pré-dimensionnement où un intervalle de solutions le plus large possible doit être exploré, des modèles analytiques sont recherchés. Bien que moins précis que les méthodes numériques, et de surcroît fondés sur des hypothèses de modélisation beaucoup plus restrictives, ils permettent néanmoins de pouvoir mener les premières optimisations des structures de manière rapide et souple.

Méthode par réseaux de perméances tri-dimensionnels Afin de résoudre ce problème de modélisation, certains auteurs [Hlioui *et al.*, 2008], lorsqu'ils se trouvent confrontés à des structures dont le principe de fonctionnement est tri-dimensionnel (comme c'est le cas pour les machines synchrones pourvues d'une double excitation), optent pour une extension des schémas réductants 2D dans la troisième dimension. Dans l'article [Hlioui *et al.*, 2008], la topologie à double excitation étudiée est de type flux radial à concentration de flux, que l'on a pourvue dans la troisième dimension d'un bobinage de double-excitation alimenté en courant continu (figure 4.6). D'autres topologies comportant une double-excitation existent, comme c'est le cas des machines à flux axial à stator central et à double rotor externe à aimants de la référence [Aydin *et al.*, 2002b], dont le bobinage de double excitation se localise au milieu du stator (figure 4.7).

Cette méthode présente l'énorme avantage de pouvoir continuer à prendre en compte la saturation magnétique, ce qui est capital lorsque les structures incluent cette dernière dans leur principe de fonctionnement. C'est le cas de la machine à commutation de flux présentée dans la référence [Hlioui *et al.*, 2008], dont les aimants ne peuvent générer de flux que lorsque les parties ferromagnétiques centrales, qui, pour des raisons mécaniques, court-circuitent ces aimants, se trouvent saturées. Dans ce type de topologie à double excitation, fondamentalement tri-dimensionnelle, les réductances de la troisième dimension (ainsi que les sources représentant les bobines de double excitation) viennent se connecter aux noeuds du schéma réductant plan. Nous donnons un exemple de la complexité du schéma réductant proposé dans la référence [Hlioui *et al.*, 2008] au niveau de la figure 4.8 (c'est le schéma d'axe d , car la référence

[Hlioui *et al.*, 2008] propose de travailler dans le repère de Park). Nous y voyons figurer dans le plan de modélisation 2D de la machine à concentration de flux (plan représenté en bleu au niveau du schéma réductant de la figure 4.8) les forces magnétomotrices des aimants \mathcal{E}_{pm} et des courants d'axe $d \mathcal{N}_{i_d}$, alors que dans les branches situées dans la troisième dimension (en noir et en vert à la figure 4.8) comportent les forces magnétomotrices des bobines de double excitation $\mathcal{N}_{i_{ex}}$.

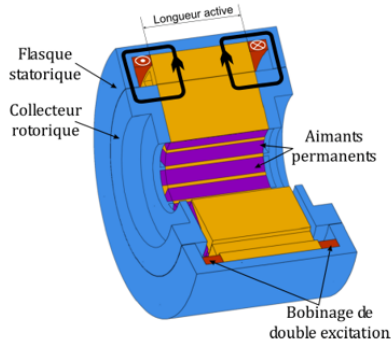


FIGURE 4.6: Machine à double excitation de la référence [Hlioui *et al.*, 2008], constituée d'une machine à flux radial à concentration de flux au niveau de laquelle un bobinage de double excitation est adapté dans la troisième dimension

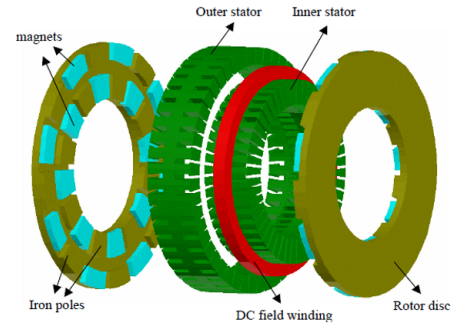


FIGURE 4.7: Machine à flux axial à aimants permanents à double excitation de la référence [Aydin *et al.*, 2002b] avec un stator interne et à double rotor externe, dont le bobinage de double excitation est localisé au milieu du stator

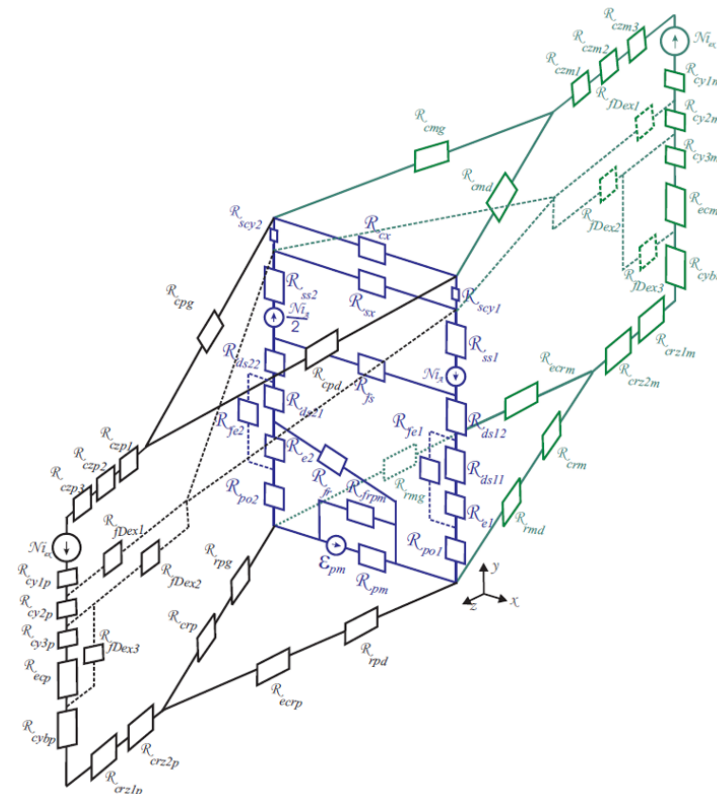


FIGURE 4.8: Schéma réductant tri-dimensionnel utilisé pour modéliser la topologie à double excitation de l'article [Hlioui *et al.*, 2008] qui a été représentée à la figure 4.6

Cela dit, il est clair au niveau de la figure 4.8 que de telles méthodes, bien que possibles et ayant fait leurs preuves sur des structures diverses et complexes (comme les alternateurs à griffes [Albert *et al.*, 2003] qui sont réellement tri-dimensionnels), peuvent s'avérer coûteuses en termes de temps de développement. En effet, l'obtention de résultats précis repose sur une discrétisation fine de la structure en réductances élémentaires, qui sont d'autant plus nombreuses dans le cas 3D. L'expression analytique des réductances dépend elle-même de la géométrie étudiée, ce qui oblige à modéliser un grand nombre de cas géométriques afin de disposer d'un modèle général, utilisable dans une procédure d'optimisation systématique.

Méthode analytique pour l'actionneur linéaire asynchrone Les méthodes fondées sur la résolution analytique formelle des équations de Maxwell peuvent résoudre ce problème. En effet, lors de la partie consacrée à l'optimisation, nous verrons que les modèles développés dans le cas bi-dimensionnel au chapitre précédent, une fois que l'on a mis au point la méthode de calcul pour la topologie qui nous intéresse, sont valables quelque soit le jeu de paramètres géométriques de la machine, même pour les configurations les plus extrêmes. Ceci représente un confort certain dans le cadre d'une procédure d'optimisation systématique. L'inconvénient auquel il faut néanmoins consentir réside dans l'impossibilité de prendre en compte les non-linéarités des matériaux magnétiques, qui ne sont pas compatibles avec les calculs analytiques à mener. Ceci explique donc pourquoi des auteurs se sont consacrés à la prise en compte des effets tri-dimensionnels des machines électriques de manière analytique, en étendant au cas 3D les méthodes développées en 2D. Le cas le plus couramment étudié concerne le moteur asynchrone linéaire. En effet, dans un tel cas, la prise en compte des effets tri-dimensionnels est cruciale, étant donné que l'on est confronté à la fois aux effets de bords et d'extrémités. Dans l'article [Jufer, 1970], un moteur asynchrone linéaire comportant deux armatures statoriques est étudié analytiquement, le but étant d'en déduire la force, ainsi que les éléments du schéma électrique équivalent. Le schéma de principe de l'actionneur, donné dans [Jufer, 1970], a été rappelé à la figure 4.9. Le mover est constitué d'une plaque d'aluminium pouvant se déplacer suivant l'axe ($0y$).

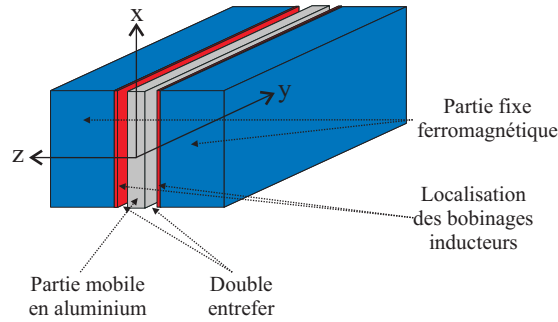


FIGURE 4.9: Schéma de principe de l'actionneur linéaire asynchrone dont la partie mobile est en aluminium

Ce système a l'avantage de présenter une très faible inertie mécanique, au prix cependant d'un fort entrefer magnétique équivalent. Cette étude est menée de la manière suivante : dans un premier temps, une modélisation en deux dimensions (ce qui revient à supposer les surfaces des armatures et du mover infinies dans les directions x et y de la figure 4.9) est réalisée, en trouvant analytiquement le potentiel-vecteur \vec{A}_{2D} , qui se réduit dans ce cas à un scalaire car dirigé uniquement suivant l'axe ($0x$) :

$$\vec{A}_{2D} = A_{2D}(y, z, t) \vec{u}_x \quad (4.1)$$

Dans cette dernière formule, le vecteur \vec{u}_x est le vecteur directeur de l'axe ($0x$). Dans l'entrefer, nous obtenons une équation de Laplace :

$$\Delta A_{2D_e} = 0 \quad (4.2)$$

Dans le mover conducteur, il s'agit d'une équation de diffusion (on note σ_a la conductivité électrique de l'aluminium, et on se souvient que la perméabilité magnétique de l'aluminium est égale à celle du vide μ_0) :

$$\Delta A_{2D_m} = \mu_0 \sigma_a \frac{\partial A_{2D_m}}{\partial t} \quad (4.3)$$

La dépendance en fonction du temps est traitée par le formalisme des nombres complexes. L'excitation provient de la force magnétomotrice des courants statoriques. Notons ω la pulsation de cette force magnétomotrice, et τ son pas polaire. Cette force magnétomotrice s'exprime sous forme complexe de la manière suivante :

$$\theta_{s_2D} = \hat{\theta}_{s_2D} \exp j \left(\frac{\pi}{\tau} y - \omega t \right) \quad (4.4)$$

Il est donné dans la référence [Jufér, 1970] une relation de proportionnalité entre l'amplitude $\hat{\theta}_s$ de la force magnétomotrice, et le courant injecté dans une phase, en tenant compte du nombre de spires et du coefficient de bobinage. Les auteurs de cette référence ont montré que cette force magnétomotrice, compte-tenu du fait que la perméabilité magnétique des culasses du stator ferromagnétique est supposée infinie, se réduit à une condition aux limites sur le champ magnétique aux frontières entrefer-stator du type :

$$H_y = - \frac{\partial \theta_{s_2D}}{\partial y} \quad (4.5)$$

Après séparation des variables pour résoudre les équations aux dérivées partielles 4.2 et 4.3, les auteurs déduisent les expressions des potentiels-vecteurs sous forme complexe dans l'entrefer ainsi que dans la partie mobile. Posons s le glissement de la machine. Si la vitesse de la partie mobile par rapport à la partie fixe est notée v , le glissement est défini ainsi, pour un moteur asynchrone linéaire :

$$v = (1 - s) \omega \frac{\pi}{\tau} \quad (4.6)$$

On définit la grandeur suivante, utile pour résoudre l'équation de diffusion :

$$\xi = \sqrt{\left(\frac{\pi}{\tau} \right)^2 - j s \omega \mu_0 \sigma_a} \quad (4.7)$$

Les potentiels-vecteurs dans l'entrefer ainsi que dans la partie mobile sont alors donnés par :

$$\begin{cases} A_{2D_e} &= [D_1 \exp \left(\frac{\pi}{\tau} z \right) + D_2 \exp \left(-\frac{\pi}{\tau} z \right)] \exp j \left(\frac{\pi}{\tau} y - \omega t \right) \\ A_{2D_m} &= 2M \cosh (\xi z) \exp j \left(\frac{\pi}{\tau} y - \omega t \right) \end{cases} \quad (4.8)$$

Les différentes constantes présentes dans ces équations sont déterminées en tenant compte des conditions de passage classiques entre les différentes zones. Une fois le potentiel déterminé, on en déduit les inductions et le champ magnétique dans l'entrefer, en prenant le rotationnel du potentiel-vecteur. Puis l'application du vecteur de Poynting à mi-entrefer est utilisée afin d'en déduire la puissance complexe fournie au mover :

$$\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H} \quad (4.9)$$

où \vec{E} est le champ électrique, déterminé par une dérivation temporelle du potentiel-vecteur. La connaissance des puissances actives et réactives absorbées par la partie mobile donne accès aux éléments respectivement actifs et réactifs du schéma électrique équivalent d'une phase de l'actionneur, et bien sûr à la force développée par l'actionneur linéaire.

L'auteur de la référence [Jufér, 1970] décide ensuite en premier lieu de prendre en compte les effets de bords des armatures et de la partie mobile, dans la direction $(0x)$ perpendiculaire au mouvement. Pour cela, il suppose, au niveau des bords de l'actionneur, que le potentiel-vecteur s'annule, ce qui est, d'après la méthode des images, équivalent à placer des plans d'anti-périodicité sur les bords de la machine. Mathématiquement, l'anti-périodicité introduite autorise un développement en séries de Fourier du potentiel suivant la direction perpendiculaire au mouvement : on module donc la force magnétomotrice suivant l'axe $(0x)$ par une fonction de modulation $f_1(x)$, en créneaux de demi-période h justement égale à l'épaisseur de l'actionneur suivant l'axe $(0x)$, comme représenté à la figure 4.10.

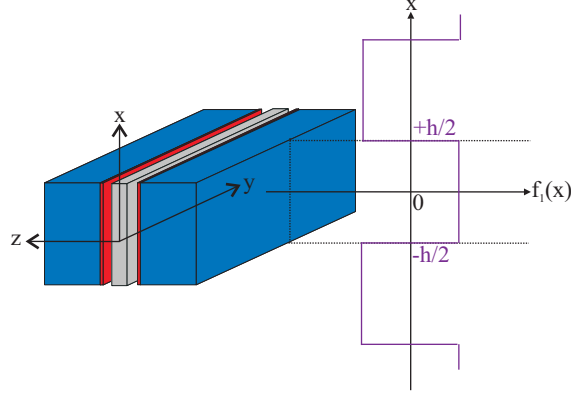


FIGURE 4.10: Modulation de la force magnétomotrice par une fonction de modulation en créneaux $f_1(x)$ de demi-période h égale à l'épaisseur de l'actionneur suivant l'axe $(0x)$

L'expression de la force magnétomotrice tenant compte des effets de bords de l'actionneur est donc, après développement du créneau $f_1(x)$ en séries de Fourier :

$$\theta_{s_{3D\text{bords}}} = \hat{\theta}_{s_{2D}} \exp j \left(\frac{\pi}{\tau} y - \omega t \right) f_1(x) = \frac{4}{\pi} \hat{\theta}_{s_{2D}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos \left((2n+1) \frac{\pi}{\tau} x \right) \exp j \left(\frac{\pi}{\tau} y - \omega t \right) \quad (4.10)$$

La méthode de séparation des variables est donc de nouveau utilisable dans le cas des effets de bords. Le potentiel-vecteur possède à présent deux composantes, et s'écrit sous la forme :

$$\vec{A}_{3D} = \begin{pmatrix} A_{3Dx}(x, y, z, t) \\ A_{3Dy}(x, y, z, t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Néanmoins, il suffit, grâce à la Jauge de Coulomb qui lie ces deux composantes, de n'en déterminer qu'une seule, par exemple $A_{3Dx}(x, y, z)$. L'équation de Laplace dans l'entrefer permet de chercher le potentiel A_{3Dx_e} sous la forme suivante :

$$A_{3Dx_e}(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} [D_{1n} \exp(\lambda_n z) + D_{2n} \exp(-\lambda_n z)] \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos \left((2n+1) \frac{\pi}{\tau} x \right) \exp j \left(\frac{\pi}{\tau} y - \omega t \right) \quad (4.12)$$

où $\lambda_n^2 = (2n+1)^2 \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{\tau} \right)^2$. De même pour l'équation de diffusion dans la partie mobile :

$$A_{3Dx_m}(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2M_n \cosh(\xi_n z) \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos \left((2n+1) \frac{\pi}{\tau} x \right) \exp j \left(\frac{\pi}{\tau} y - \omega t \right) \quad (4.13)$$

avec $\xi_n^2 = (2n+1)^2 \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{\tau} \right)^2 - j s \omega \mu_0 \sigma_a$. Les conditions de passage sur l'induction normale et le champ magnétique tangentiel donnent accès à toutes les familles de constantes inconnues. Ensuite, le vecteur de Poynting est utilisé pour calculer la force et les éléments du schéma électrique équivalent avec effets de bords. L'auteur signale également que les bords de l'actionneur ne se caractérisent pas seulement par la fin de la force magnétomotrice, mais aussi par la fin des parties ferromagnétiques (et de la partie mobile, en aluminium). Ce phénomène est pris en compte par une modulation de la composante d'induction perpendiculaire aux parties ferromagnétiques, au moyen d'une fonction de modulation supposée, de manière arbitraire, polynomiale (le polynôme en question a un degré pair). En effet, en notant $m_1(x)$ cette fonction de modulation de la composante d'induction d'axe z , l'auteur de la référence [Jufer, 1970] propose l'expression analytique suivante :

$$m_1(x) = \left[\left(2 \frac{x}{h} \right)^n + 1 \right]^{-\frac{1}{m}} \quad (4.14)$$

Les paramètres m et n (n est pair) doivent être trouvés en fonction de la géométrie de la machine. Néanmoins, l'auteur de [Jufer, 1970] ne donne guère plus de détails sur le sujet. Nous avons représenté la fonction $m_1\left(\frac{x}{h}\right)$ à la

figure 4.11, en prenant par exemple $m = 10$ et $n = 1$. Cette fonction connaît effectivement une chute progressive de la valeur 1 à la valeur nulle au voisinage de $x/h = \pm 1$.

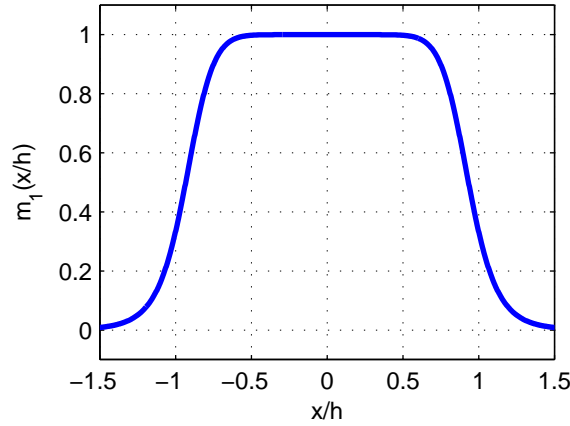


FIGURE 4.11: Fonction de modulation $m_1(x)$ (référence [Jufer, 1970]) prenant en compte les dimensions finies des parties ferromagnétiques selon l'axe $(0x)$, avec $m = 10$ et $n = 1$

L'auteur de [Jufer, 1970] modélise les effets d'extrémités de l'actionneur dans la direction $(0y)$, en multipliant l'induction d'axe z obtenue par le modèle 2D au moyen d'une autre fonction de modulation. Nous noterons cette nouvelle fonction $m_2(y)$. Le principe est montré à la figure 4.11.

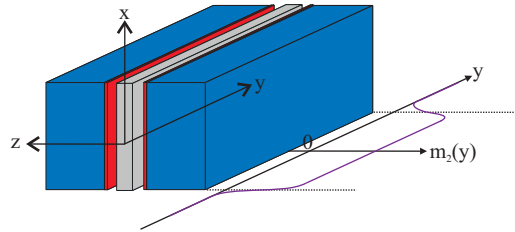


FIGURE 4.12: Fonction de modulation (référence [Jufer, 1970]) proposée pour la composante d'induction d'axe $(0z)$ calculée par le modèle 2D afin de prendre en compte les effets d'extrémités suivant la direction $(0y)$

Une expression similaire à celle de l'équation 4.14 est proposée, c'est-à-dire un polynôme de degré pair de la forme suivante, en notant l la longueur de l'actionneur suivant la direction $(0y)$:

$$m_2(y) = \left[\left(2 \frac{y}{l} \right)^n + 1 \right]^{-\frac{1}{m}} \quad (4.15)$$

Néanmoins, aucune méthode systématique du choix des coefficients de cette fonction n'est encore une fois donnée. Il est également important de noter que dans la référence [Jufer, 1970], les modélisations de ces effets tri-dimensionnels, aussi bien pour les effets de bords que d'extrémités, sont menées séparément l'une de l'autre. Dans chaque cas, des coefficients pondérateurs de la force développée, et des éléments du schéma électrique équivalent, sont trouvés par rapport au cas où tout effet tri-dimensionnel est négligé. Ensuite, dans l'actionneur réel où les effets de bords et d'extrémités sont présents simultanément, l'auteur multiplie entre eux les coefficients pondérateurs obtenus dans chaque cas pris séparément, afin d'obtenir le coefficient pondérateur global.

Dans un autre article [Jufer et Wavre, 1972], l'auteur a perfectionné la modélisation des effets d'extrémités. En effet, sur le modèle de ce qui a été fait pour les effets de bords dans [Jufer, 1970], avant la prise en compte de la fin des parties ferromagnétiques dans la direction $(0y)$ par la fonction de modulation polynomiale $m_2(y)$, la force magnétomotrice due aux courants inducteurs a été fictivement périodisée dans la direction $(0y)$ des effets d'extrémités, d'une période L très grande par rapport à la longueur réelle l de l'actionneur : $l \ll L$. Ceci est

équivalent à la multiplication de la force magnétomotrice dans la direction $(0y)$ par une fonction de modulation en créneaux notée $f_2(y)$, égale à 1 sur la longueur l de l'actionneur dans la direction $(0y)$ des effets d'extrémités, et zéro sur le reste de la longueur fictive L de périodisation. Cette nouvelle fonction est montrée à la figure 4.13.

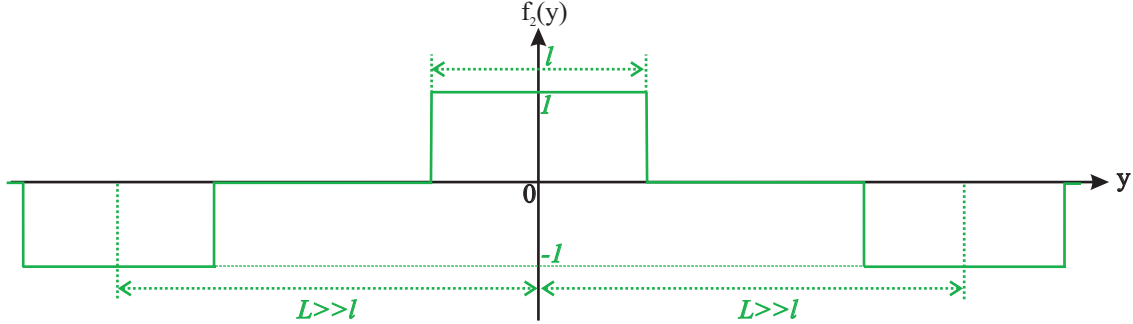


FIGURE 4.13: Fonction de modulation $f_2(y)$ proposée dans l'article [Jufer et Wavre, 1972] pour améliorer la prise en compte des effets d'extrémités dans la direction $(0y)$ par périodisation de la force magnétomotrice d'une longueur $L \gg l$

La longueur de périodisation L est choisie très importante par rapport à celle de l'actionneur dans la direction des effets d'extrémités, afin que les actionneurs fictivement rajoutés ne s'influencent pas mutuellement. Cette périodisation fictive permet l'utilisation des séries de Fourier pour quantifier l'affaiblissement du potentiel-vecteur à cause de la fin de la nappe de courant d'excitation. En suivant l'exemple développé dans la référence [Jufer, 1970] déjà fait pour les effets de bords avec la variable x , on en déduit une expression de la force magnétomotrice sous la forme d'une série de Fourier de la variable y . Cette fois, on utilise les séries de Fourier complexes pour faciliter les calculs, et on note f_{2n} les coefficients du développement en séries de Fourier complexes de la fonction de modulation $f_2(y)$:

$$\theta_{s_{3Dextrem}} = \hat{\theta}_{s_{2D}} \exp j \left(\frac{\pi}{\tau} y - \omega t \right) f_2(y) = \hat{\theta}_{s_{2D}} \sum_{n=0}^{+\infty} f_{2n} \exp \left(j \left(\frac{\pi}{\tau} y - \omega t \right) \right) \exp \left(j n \frac{\pi}{L} y \right) \quad (4.16)$$

Le déroulement des calculs menant au potentiel vecteur, fondés sur la séparation des variables et le raccordement entre zones, est le même qu'auparavant. Ensuite, la fonction de modulation polynomiale $m_2(y)$ est appliquée sur l'induction, pour tenir compte de l'affaiblissement de cette dernière à cause de la fin des parties ferromagnétiques, comme fait auparavant.

Dans un autre article [Jufer et Mattatia, 1974], l'auteur a récapitulé ces méthodes de prise en compte des effets de bords et d'extrémité pour les actionneurs linéaires asynchrones, en développant une méthode de calcul permettant de considérer, en même temps, les effets de bords et d'extrémités. Les calculs sont bien évidemment plus complexes, car ils font intervenir des doubles séries de Fourier (à cause de la superposition conjointe des deux effets). Néanmoins, cette méthode est plus satisfaisante d'un point de vue mathématique, car elle évite de recourir au jeu des coefficients correcteurs par rapport à un cas bi-dimensionnel idéal, et qui sont supposés multiplicatifs lorsque les deux effets sont combinés.

Il faut d'ailleurs noter que le même auteur, dans sa thèse [Jufer, 1968], avait déjà modélisé la machine asynchrone classique à flux radial sur un principe similaire, ce qui menait à des calculs plus simples, étant donné que l'on se trouvait dispensé des effets d'extrémités dans ce type d'actionneur cylindrique (seuls les effets de bords étaient à prendre en compte).

D'autres auteurs [Burrel *et al.*, 2007, Dang *et al.*, 2010] se sont inspirés de la méthode développée dans les références précédentes, afin de l'étendre au cas de l'actionneur asynchrone linéaire de forme tubulaire. L'application visée concerne les systèmes de cogénération utilisant des moteurs Stirling, produisant naturellement un mouvement linéaire. Le schéma de cet actionneur asynchrone tubulaire a été repris à la figure 4.14. La partie mobile est encore en aluminium, mais cette fois-ci, au lieu d'être une plaque, c'est un tube.

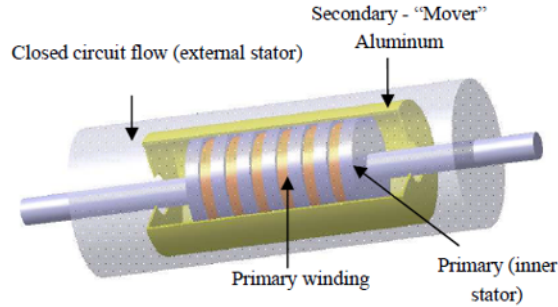


FIGURE 4.14: Schéma de principe de l'actionneur asynchrone tubulaire étudié dans les références [Burrel *et al.*, 2007, Dang *et al.*, 2010]

Pour ce type d'actionneur, au contraire de l'actionneur asynchrone classique à flux radial, ce sont les effets d'extrémités qu'il faut prendre en compte, les effets de bords n'existant pas. Néanmoins, ce cas axi-symétrique pose des problèmes plus ardu du point de vue mathématique pour résoudre les équations de Laplace et de diffusion, en faisant intervenir, en coordonnées cylindriques, des équations dont les solutions sont des fonctions de Hankel. Cela mis à part, le principe de la périodisation de la densité linéique de courant de l'actionneur d'une période fictive très grande par rapport à sa longueur réelle reste inchangé, et la fonction de modulation f_2 représentée à la figure 4.13 demeure identique. Les bords ferromagnétiques de l'actionneur ont quant à eux été considérés au moyen d'une fonction de modulation m_2 de la composante d'induction radiale. Cela étant, dans ce cas, les auteurs n'ont pas choisi un polynôme de degré pair pour m_2 , mais ont préféré tronquer le développement en séries de Fourier d'une fonction en créneaux, dont la demi-largeur est justement la longueur des parties ferromagnétiques de l'actionneur.

En outre, contrairement aux cas évoqués auparavant, les auteurs ont choisi, afin d'améliorer la précision de leur modèle, de prendre en compte les harmoniques spatiaux-temporels de la densité linéique de courant d'excitation. Au niveau de la figure 4.15, on montre le modèle sans prise en compte des harmoniques, qui ne s'est pas avéré satisfaisant. La densité linéique de courant du stator est supposée spatialement sinusoïdale, et se déplace à la vitesse de synchronisme. A la figure 4.16, nous avons représenté la densité linéique de courant réelle prise en compte.

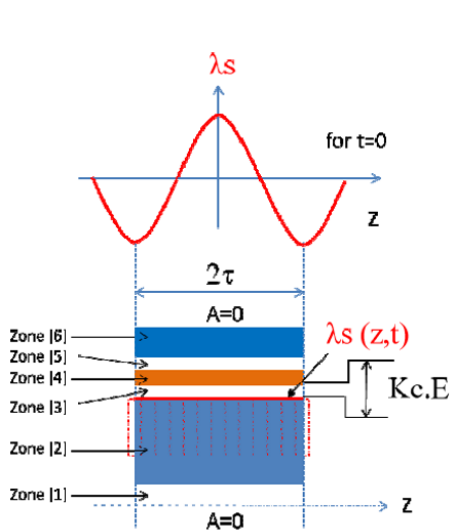


FIGURE 4.15: Modèle de l'actionneur linéaire tubulaire des références [Burrel *et al.*, 2007, Dang *et al.*, 2010] sans prise en compte des harmoniques spatiaux temporels de la densité linéique de courant statorique

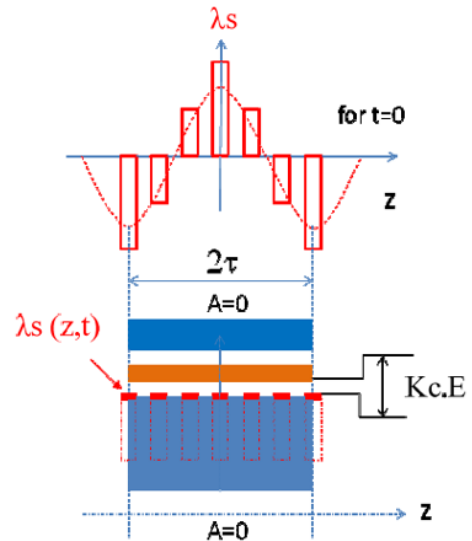


FIGURE 4.16: Modèle de l'actionneur linéaire tubulaire des références [Burrel *et al.*, 2007, Dang *et al.*, 2010] avec prise en compte des harmoniques spatiaux temporels de la densité linéique de courant statorique (effet d'encoche)

Ce travail ayant été effectué récemment, les auteurs ont pu confronter les résultats fournis par leurs modèles aux éléments finis en régime harmonique. Cette étude a mis en évidence le bien fondé du modèle des effets d'extrémités étendu au cas de l'actionneur linéaire tubulaire : dans le sens des effets d'extrémités, l'actionneur s'est vu périodisé d'une période très grande par rapport à la longueur réelle de l'excitation, afin de pouvoir prendre en compte par un développement en séries de Fourier, la longueur finie de cette dernière. La densité linéique de courant choisie traduit l'emplacement des encoches réelles de la machine, et c'est pour cela que les auteurs qualifient le phénomène d'« effet d'encoches », bien que la modulation de la perméance superficielle d'entrefer par les encoches ne soit ici pas prise en compte. En faisant le calcul du développement en séries de Fourier de la densité linéique de courant $\lambda_s(z, t)$, les auteurs ont montré que ce développement prenait la forme suivante (si le courant d'alimentation est sinusoïdal, de pulsation ω) :

$$\lambda_s(z, t) = \sum_{n=1,5,7,\dots} \lambda_{s_n} \exp\left(n\frac{\pi}{\tau}z + \chi_n\omega t\right) \quad (4.17)$$

où $\chi_n = -1$ si $n = 1, 7, 13, \dots$ et $\chi_n = 1$ si $n = 5, 11, \dots$. Ceci montre que les harmoniques de densités linéiques de courants sont des harmoniques de champ rampants, allant dans le sens du premier harmonique pour $n = 7, 13, \dots$ dans le sens inverse si $n = 5, 11, \dots$. Les auteurs ont mis en évidence le fait que cette prise en compte des harmoniques spatiaux-temporels de la densité linéique de courant d'excitation était nécessaire à l'obtention de résultats proches des éléments finis. De plus, une vérification expérimentale, sur un prototype construit, a été effectuée, et s'est avérée en bon accord avec les calculs, tant analytiques que par éléments finis.

Méthode analytique pour l'actionneur plan à aimants permanents En ce qui concerne les machines linéaires synchrones à aimants déposés, certains auteurs [Xiong et Nasar, 1989] ont proposé une méthode fondée sur l'utilisation des images magnétiques, comme nous l'avons déjà signalé dans le chapitre d'introduction. Le stator est lissé par le biais du coefficient de Carter. Les plans ferromagnétiques idéaux du stator et du rotor sont alors vus, d'après la méthode des images, comme des plans de symétrie. Il est alors possible de les supprimer, au prix d'une périodisation des charges dans leur direction. La modélisation étant menée en potentiel magnétique scalaire, les aimants sont alors considérés comme des densités de charges magnétiques fictives au niveau de leur surface. Nous rappelons à la figure 4.17 le principe de ce procédé, que nous avons déjà présenté au chapitre 1. Nous renvoyons le lecteur à ce chapitre, où nous avons donné le principe des calculs attachés à cette méthode.

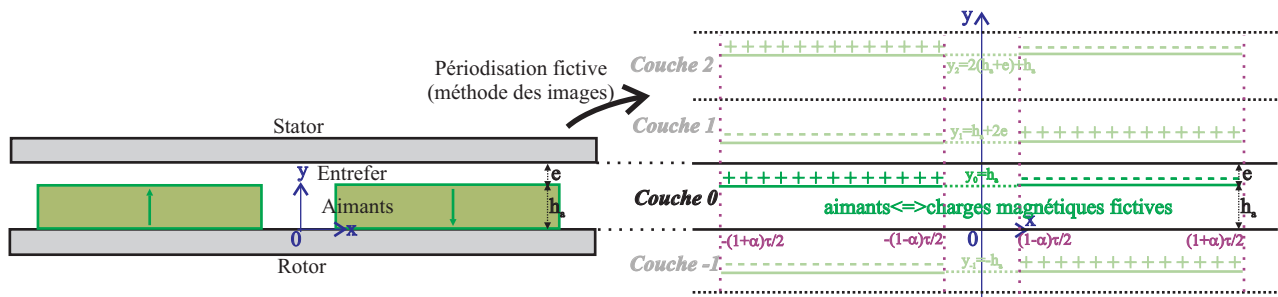
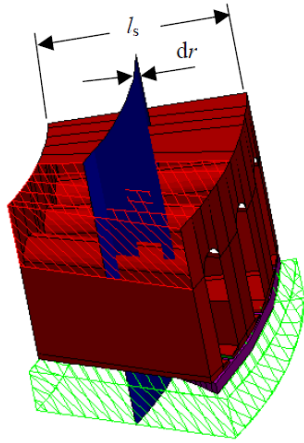


FIGURE 4.17: Méthode des images magnétiques, consistant à périodiser de manière fictive l'actionneur par rapport aux plans statoriques et rotoriques

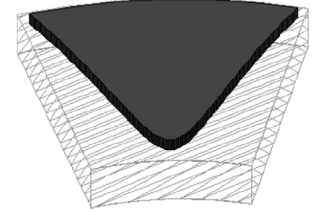
Dans l'article [Xiong et Nasar, 1989], les auteurs modélisent en premier abord l'actionneur en deux dimensions, puis étendent la méthode au cas tri-dimensionnel, pour prendre à la fois et en même temps en compte les effets de bords et d'extrémités. Le point positif de cette méthode est que le passage du cas 2D au cas 3D se fait sans difficulté de principe. Néanmoins, il faut signaler que même si les longueurs finies des aimants dans les directions des effets de bords et d'extrémités sont prises en compte, le caractère fini des parties ferromagnétiques n'est par principe pas considéré, étant donné que le fondement de la méthode des images réside dans la vision de ces parties comme des plans de symétrie infinis. Qui plus est, dans le cas tri-dimensionnel, les intégrales surfaciques à calculer peuvent se révéler très complexes, et le recours à des méthodes numériques n'est pas exclu.

4.1.2 Méthodes propres à l'actionneur à flux axial

En ce qui concerne l'actionneur à flux axial, très peu d'auteurs ont développé des méthodes analytiques de prise en compte des effets de bords. En effet, à cause de l'effet de courbure intrinsèque de la machine, ce travail est considérablement complexifié. La plupart des travaux de recherche sur cette machine, que ce soit par schéma réductants [Parviainen *et al.*, 2004, Parviainen, 2005], ou bien analytiquement [Virtic *et al.*, 2009, Marignetti *et al.*, 2006] se bornent à la prise en compte des effets de courbure de l'actionneur, en appliquant un modèle bidimensionnel par couche, mais sans prise en compte des effets d'affaiblissement du flux à vide des aimants à cause des effets de bords radiaux. Pour cette raison, nous ne qualifierons pas ces modèles de tri-dimensionnels comme on peut le voir dans la littérature, mais simplement de modèles 2D par couches. En effet, dans chaque plan orthoradial, le modèle appliqué est bien bi-dimensionnel. Nous représentons à la figure 4.18a le principe de la modélisation de la machine à flux axial par couches successives pour chaque rayon, proposé dans les références [Parviainen *et al.*, 2004, Parviainen, 2005]. L'avantage de cette méthode est que, vu que les couches successives sont indépendantes, rien n'empêche de prendre en compte des forme d'aimants complexes, comme par exemple les aimants triangulaires de la figure 4.18b.



(a) Discrétisation de la machine à flux axial en différentes couches, pour chaque rayon (référence [Parviainen, 2005])



(b) Forme des aimants triangulaires prise en compte dans la référence [Parviainen *et al.*, 2004]

FIGURE 4.18: Principe de la modélisation 2D par couches pour chaque rayon

A la figure 4.19, nous montrons le schéma réductant développé dans les références [Parviainen *et al.*, 2004, Parviainen, 2005] pour chaque rayon.

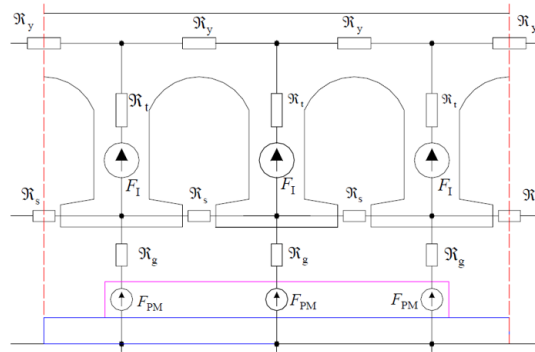


FIGURE 4.19: Schéma réductant développé pour chaque couche de la machine à flux axial dans les références [Parviainen *et al.*, 2004, Parviainen, 2005]

Nous montrons à la figure 4.20 la machine modélisée analytiquement par couches successives par la référence

[Marignetti *et al.*, 2006]. Notons que pour un tel travail, il n'est pas nécessaire de répéter explicitement le calcul pour chaque couche orthoradiale de l'actionneur : on peut faire un seul calcul analytique pour un rayon générique r , supposer l'épaisseur de la couche élémentaire correspondante de largeur dr , et ensuite intégrer formellement le flux élémentaire généré par une telle couche du rayon interne au rayon externe. On y gagne donc en temps de calcul, mais la contrepartie par rapport aux schémas réductants est de ne pas pouvoir prendre en compte la saturation magnétique.

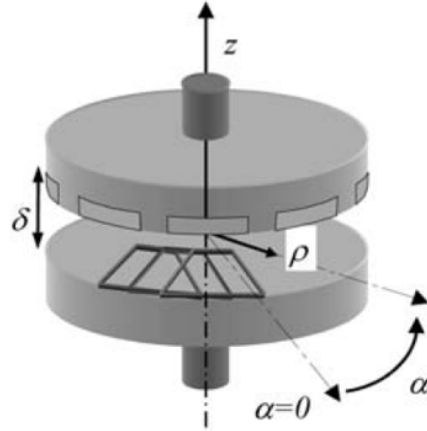


FIGURE 4.20: Machine à flux axial modélisée analytiquement par couches successives dans la référence [Marignetti *et al.*, 2006]

A noter que dans une machine à flux axial, les effets tri-dimensionnels sont complexes, et ne se limitent pas seulement aux effets de bords des aimants. Par exemple, dans les modèles 2D par couches, nous faisons l'hypothèse que lorsque les effets de bords sont négligeables (car l'excursion entre les rayons actifs internes et externes est supposée grande), les lignes de fuites inter-aimants se propagent de manière orthoradiale. Or, cette hypothèse n'est pas justifiée d'un point de vue physique : une ligne de fuite entre deux aimants alternés successifs, d'après le principe de minimisation de l'énergie magnétique stockée dans l'air, va se propager en ligne droite, et non de manière orthoradiale. Nous voyons donc que même si nous nous permettons de négliger les effets de bords dans le sens radial, la machine à flux axial n'en demeure pas moins une structure fondamentalement tri-dimensionnelle. Dans ce contexte, il est clair qu'un vrai défi de modélisation existe dans le cas particulier de la machine à flux axial, qui n'a, à notre connaissance, été abordé que de manière très succincte dans la littérature électrotechnique.

Méthode quasi-3D Les auteurs de la référence [Azzouzi *et al.*, 2005a, Azzouzi, 2007] ont mis au point une méthode analytique quasi-3D de prise en compte des effets de bord de la machine à flux axial. Cette méthode est qualifiée de quasi-3D pour la raison suivante : dans un premier temps, la modélisation 2D par couches est appliquée à la machine à flux axial, en tenant compte de manière analytique des encoches du stator, afin de pouvoir calculer le couple de détente de la machine. Les auteurs en déduisent par dérivation la composante d'induction normale au stator, qui, intégrée sur un pas polaire, donnera le flux de la machine. En seconde étape, ces auteurs font ensuite une simulation par éléments finis tri-dimensionnelle de leur machine, et s'aperçoivent que du fait des effets de bords dans la direction radiale, la composante d'induction normale au stator est réduite au niveau des bords de l'actionneur par rapport à sa valeur initialement prévue par le calcul analytique en deux dimensions. Les auteurs se servent de cette étude éléments finis 3D afin d'en déduire une fonction de modulation sans dimension ne dépendant que de la coordonnée radiale, égale quasiment à l'unité au centre de l'actionneur et décroissante sur les bords de ce dernier, afin de prendre en compte ces effets de bords de la machine à flux axial. Pour pouvoir multiplier aisément l'induction en deux dimensions donnée par le modèle analytique et la fonction de modulation déduite, cette dernière est interpolée par une fonction analytique de la coordonnée radiale en arctangente. L'expression analytique de cette fonction de modulation est :

$$g(r) = \frac{1}{\pi} \left[\arctan \left(\frac{r - R_1}{a} \right) - \arctan \left(\frac{r - R_2}{a} \right) \right] \quad (4.18)$$

Dans cette formule, R_1 est le rayon actif interne, R_2 est la rayon actif externe, et a est un paramètre permettant d'ajuster la rapidité de la décroissance de la fonction de modulation $g(r)$ au voisinage des bords en fonction des résultats fournis par les éléments finis 3D. Nous nous sommes fixés $R_1 = 0.05\text{cm}$, $R_2 = 0.15\text{cm}$, et, à la figure 4.21, nous avons tracé la fonction de modulation $g(r)$ obtenue pour différentes valeurs du paramètre a . On voit que plus le paramètre a grandit, plus on peut tenir compte d'un plus fort affaiblissement de l'induction à cause des effets de bords, ce qui est le cas, par exemple, si l'actionneur est très fin. Malheureusement, le fait de devoir identifier pour chaque géométrie le paramètre a par éléments finis 3D limite l'utilisation de la méthode dans le cadre d'une procédure d'optimisation.

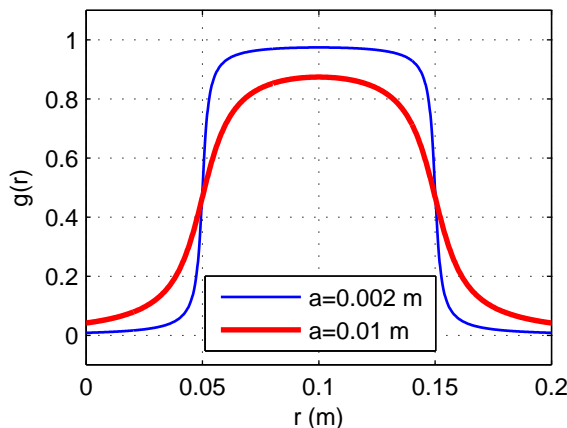


FIGURE 4.21: Tracé de la fonction de modulation $g(r)$ dans la direction radiale proposée par la référence [Azzouzi *et al.*, 2005a], pour différentes valeurs du paramètre a ($a = 0.002\text{m}$ et $a = 0.01\text{m}$)

La dénomination « quasi-3D » vient de l'hypothèse fondamentale du découplage entre les effets 2D déterminés par le modèle analytique par couches, et les effets 3D de bords qui sont pris en compte après-coup par multiplication par la fonction de modulation $g(r)$ ne dépendant que de la coordonnée radiale (et déterminée numériquement). Ce découplage est bien entendu une hypothèse simplificatrice forte, car en réalité, il est clair qu'un modèle 3D ne peut se réduire en l'application de deux modèles 2D dans chacune des directions de l'espace. Nous allons largement revenir sur ce point. En outre, les effets de fuites sont supposés identiques aussi bien au niveau du rayon interne que du rayon externe de la machine (le même paramètre a est utilisé au niveau du rayon interne et au niveau du rayon externe), ce qui constitue une autre hypothèse simplificatrice.

Méthode des images magnétiques Certains auteurs [Jennane *et al.*, 2004b] ont souhaité résoudre le problème de la prise en compte des effets tri-dimensionnels de la machine à flux axial en reprenant la méthode des images magnétiques exposée à la section précédente dans l'article [Xiong et Nasar, 1989]. Dans ce but, ils ont transformé les plans ferromagnétiques du rotor et du stator (supposé, quant à lui, lisse) par des plans d'anti-symétrie. Les aimants sont modélisés par des densités de charges magnétiques fictives surfaciques, afin de travailler en potentiel magnétique scalaire. Le champ magnétique dans l'entrefer est alors déduit par intégration du champ magnétique élémentaire créé par chaque surface élémentaire des aimants. Cette méthode, si on néglige les effets de bords dus aux parties ferromagnétiques (ces dernières doivent être des plans ferromagnétiques idéaux pour pouvoir appliquer la méthode des images), apparaît comme attrayante, car elle permet de prendre en compte des diverses formes possibles des aimants d'une machine à flux axial, comme les structures de Halbach. La figure 4.22 montre les trois types de dispositions d'aimants pour lesquels le modèle a été appliqué. La première est une machine classique, à aimants alternés magnétisés dans la direction de l'axe de la machine. La deuxième topologie concerne des aimants disposés en structure de Halbach. La troisième est la même que la deuxième à ceci près que le stator ne comporte pas de culasse ferromagnétique (on a vu dans l'introduction qu'il existait des structures de machines à flux axial sans fer au stator).

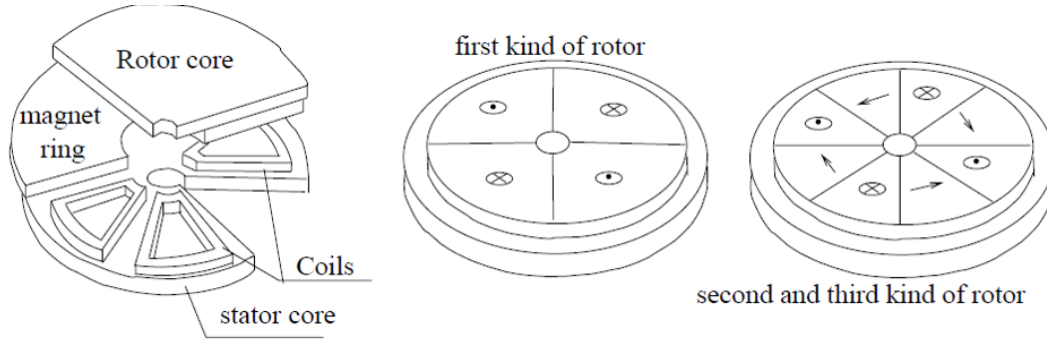


FIGURE 4.22: Les différentes topologies pour lesquelles la méthode des images magnétiques a été appliquée dans la référence [Jennane *et al.*, 2004b]

Alors que le cas des machines sans fer au stator apparaît comme délicat à traiter par une autre méthode (schémas réductants, modèle analytique), l’extension de la méthode des images magnétiques à ce cas non moins important est tout-à-fait naturelle, et donne même lieu à une méthode plus simple que lorsque l’on a une culasse ferromagnétique statorique. En effet, comme montré à la figure 4.23, dans le cas du stator sans fer, on se trouve dispensé d’effectuer toute symétrie par rapport au plan statorique, et le système de charges obtenu est bien plus simple que lorsque le rotor et le stator sont tous deux ferromagnétiques, donnant naissance à un réseau infini de charges dans la direction axiale de la machine.

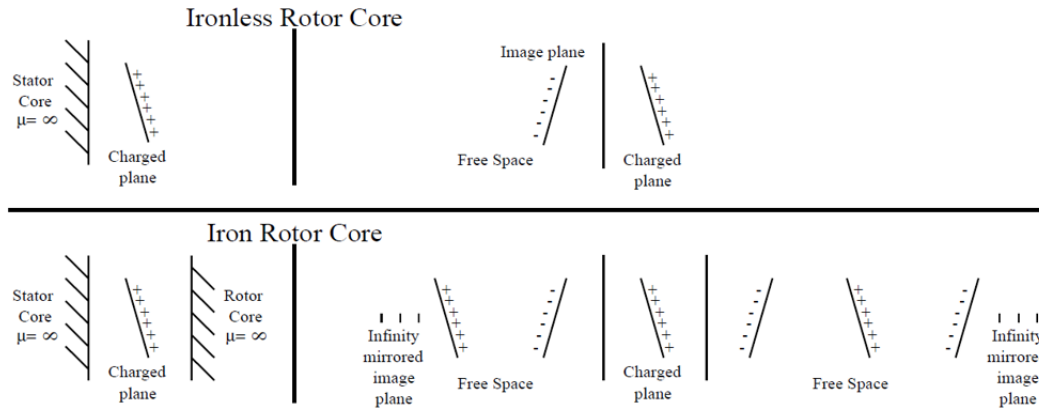


FIGURE 4.23: La méthode des images magnétiques expliquée dans la référence [Jennane *et al.*, 2004b], avec et sans culasse statorique ferromagnétique

Nous nous souvenons qu’en un point P de l’entrefer de la machine, l’induction \vec{B}_P créée par une surface chargée (S) est donnée par la formule suivante, d’après la loi de Coulomb (en notant P_S un point générique de la surface chargée (S), et σ^* la densité surfacique de charges magnétiques fictives au niveau de cette surface) :

$$\vec{B}_P = \iint_{(S)} \frac{\sigma^*}{4\pi} \frac{\vec{P}_S \vec{P}}{P_S P^3} dS \quad (4.19)$$

Cette intégrale, lorsque l’on a périodisé la structure pour tenir compte des plans ferromagnétiques, doit être étendue sur tous les plans de charges fictives rajoutés. Néanmoins, même dans les cas les plus simples de formes d’aimants, il est impossible de calculer analytiquement les intégrales de surface, obligeant les auteurs à faire un calcul numérique. C’est pour cela qu’ils qualifient leur méthode de « semi-analytique ». Les résultats et le temps de calcul sont très convaincants en comparaison des éléments finis 3D.

4.1.3 Apport du travail proposé dans ce chapitre

Dans ce chapitre, nous allons tenter de perfectionner les modélisations tri-dimensionnelles de la machine à flux axial à aimants permanents déposés. Ce sujet, on l'a vu, semble assez peu traité dans la littérature électrotechnique. En particulier, notre objectif est de développer un modèle de détermination du flux à vide de la machine de manière analytique, et capable de prendre en compte rigoureusement aussi bien les effets de bords dans le sens radial, que les effets 3D dont nous parlions lorsque nous signalions que les lignes de fuites inter-aimants n'étaient pas forcément orthoradiales. Le but de ce travail de modélisation analytique est de disposer de modèles offrant un compromis précision-temps de calcul attractif par rapport aux méthodes numériques qui restent trop lourdes pour être utilisées telles qu'elles par un algorithme d'optimisation. Notons à ce sujet que ce travail de modélisation analytique, mené dans le but de réduire le temps de calcul par rapport aux éléments finis, et d'autant plus nécessaire pour les modèles électromagnétiques tri-dimensionnels que pour les modèles bi-dimensionnels. En effet, au cours du chapitre précédent, nous avons montré qu'un modèle 2D analytique, comparé au modèle éléments finis 2D correspondant, autorisait une économie d'environ 30% du temps de calcul. Nous verrons qu'entre un modèle 3D analytique et le modèle éléments finis 3D correspondant, l'économie de temps de calcul est en revanche bien plus importante, puisqu'elle dépasse les 90%. Ce travail de modélisation analytique tri-dimensionnelle trouve, par cette constatation, toute sa justification.

Nous rappelons la démarche exposée dans l'introduction de ce chapitre, ainsi que dans le tableau 4.1. Les étapes suivies seront les suivantes :

1. Dans un premier temps, nous reprendrons l'hypothèse du développement de l'actionneur axial au niveau de son rayon moyen pour en faire un actionneur linéaire. Le fait de négliger les effets de courbure simplifie grandement les calculs.
 - Sous cette hypothèse, nous allons reprendre le principe de modélisation quasi-3D de la référence [Azzouzi *et al.*, 2005a] pour tenir compte des effets de bords de la machine linéaire étudiée. Cette fois, au lieu de déterminer par éléments finis la fonction de modulation à appliquer dans la troisième dimension pour tenir compte des effets de bords, une formulation analytique sera développée. Ce travail sera fait pour le calcul du flux à vide de l'actionneur.
 - Puis nous allons développer un modèle analytique réellement 3D de la machine linéaire. Nous utiliserons la méthode de la fonction de modulation afin de prendre en compte les bords des parties ferromagnétiques. Nous allons d'ailleurs proposer une méthode de détermination plus exacte de cette fonction, qui dispense de faire appel, comme dans [Jufer, 1970], à des fonctions arbitraires polynomiales, dont les coefficients ne sont pas facilement déterminables. Ce travail sera fait pour le flux à vide, puis une extension pour la prise en compte de la réaction magnétique d'induit de la machine étudiée sera proposée.
 - Nous mettrons en lumière l'intérêt de la méthode analytique 3D par rapport à la méthode quasi-3D en prenant une forme d'aimant un peu plus complexe que les aimants de forme rectangulaire, comme par exemple les aimants de forme circulaire, pour lesquels l'approche quasi-3D est impossible. Nous verrons qu'en revanche, la méthode 3D résout le problème du calcul du flux à vide d'une telle machine. A chaque fois, une vérification par éléments finis 3D sera effectuée¹.
2. L'étape suivante sera de s'affranchir de l'hypothèse du développement au rayon moyen qui nous autorisait à transformer l'actionneur à flux axial réel en une machine linéaire équivalente. Nous allons donc proposer une méthode analytique visant à modéliser l'actionneur à flux axial réel, en prenant en compte l'effet de courbure de la machine. Cette étude sera menée uniquement pour le calcul du flux à vide. Les résultats seront contrôlés par éléments finis.
3. Disposant à présent de divers modèles pour le calcul du flux à vide de la machine à flux axial, nous les comparerons entre eux, pour comprendre leur apports respectifs, en discutant particulièrement le problème de la nécessité de prendre en compte ou non l'effet de courbure de la machine à flux axial, ou, ce qui est équivalent, nous poserons la question de la validité de l'hypothèse du développement au rayon moyen. Pour cela, nous ferons appel aux modèles suivants :
 - D'une part, le modèle 3D analytique de l'actionneur linéaire développé au niveau du rayon moyen, comportant bien les effets de bords, mais pas d'effet de courbure.
 - D'autre part, le modèle analytique 3D de la machine à flux axial réelle, incluant à la fois les effets de bords et de courbure.

1. Dans tout ce chapitre, c'est le logiciel de calcul par éléments finis ANSYS qui sera utilisé.

- Et, bien que ce ne soit pas le sujet du présent chapitre, nous ferons appel aux modèles 2D développés au chapitre précédent. D’une part, le modèle 2D développé au niveau du rayon moyen, qui ne comporte ni effet de courbure, ni effets de bords. Et d’autre part un modèle 2D par couches de l’actionneur à flux axial, qui prend par compte en compte l’effet de courbure, mais bien sûr aucun effet de bords.

De cette manière, nous serons en mesure de comprendre les influences respectives de chaque phénomène (effet de courbure et effet de bords), en les découplant l’un de l’autre.

L’étude sera centrée sur le calcul du flux d’entrefer, principalement le flux à vide, bien que la question du flux de réaction magnétique d’induit en 3D pour l’actionneur linéaire sera abordée. Nous ne nous intéresserons donc pas, comme dans le chapitre précédent, au problème des inductions de culasse et aux pertes fer, ni au calcul du couple.

4.2 Le modèle analytique 3D de l’actionneur résultant du développement de la machine à flux axial au niveau du rayon moyen

Dans cette partie, nous allons reprendre l’hypothèse fondamentale de modélisation du chapitre précédent, qui consiste à dire que l’actionneur à flux axial est équivalent à un actionneur linéaire résultant du développement de la machine à flux axial au niveau de son rayon moyen. Néanmoins, puisque nous sommes ici préoccupés par une modélisation 3D de la structure prenant en compte les effets de bords de cette dernière, nous ne supposons plus, comme au chapitre précédent, que le différentiel entre rayon externe et rayon interne actifs $\Delta R = R_2 - R_1$ est très grand par rapport aux autres dimensions, comme le pas polaire, que nous notons toujours τ . Nous signalerons d’ailleurs que cette hypothèse est gênante dans une optique d’optimisation de la topologie, car l’optimiseur profite en quelque sorte de l’absence des effets de bords résultants de l’hypothèse $\Delta R \rightarrow \infty$ pour surestimer le flux réel dans la machine, et proposer au final, dans une perspective de minimisation de la masse, des machines avec un différentiel entre rayons actifs externe et interne plutôt faible.

Nous nous trouvons donc à devoir modéliser de manière tri-dimensionnelle (c’est-à-dire en prenant en compte les effets de bord) un actionneur linéaire, résultant du développement de la machine à flux axial au niveau de son rayon moyen. Nous précisons que, contrairement au chapitre précédent, les machines à aimants que nous considérerons seront supposées à pôles lisses. En effet, ce type de topologie, à cause de sa simplicité, fait partie de nos centres d’intérêt. La complexité relative plus grande des modèles 3D par rapport aux modèles 2D, ainsi que le manque évident dans la littérature électrotechnique sur le sujet, nous conduit à traiter en priorité le cas des actionneurs à pôles lisses, en renvoyant en perspectives le cas intéressant, mais à coup sûr très complexe, des actionneurs saillants.

4.2.1 Cadre de l’étude

4.2.1.1 Hypothèses simplificatrices pour la modélisation analytique

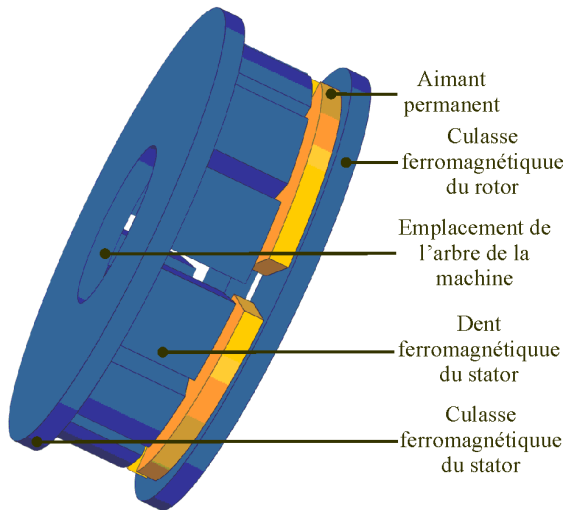
Nous souhaitons donc proposer un modèle analytique 3D, fondé sur la résolution formelle des équations de Maxwell, de l’actionneur linéaire équivalent à la machine à flux axial simple face étudiée. Comme on l’a vu au chapitre précédent pour les modèles 2D, il est alors nécessaire de faire des hypothèses simplificatrices assez fortes afin de pouvoir proposer une formulation analytique du champ électromagnétique dans l’actionneur.

Ces hypothèses sont :

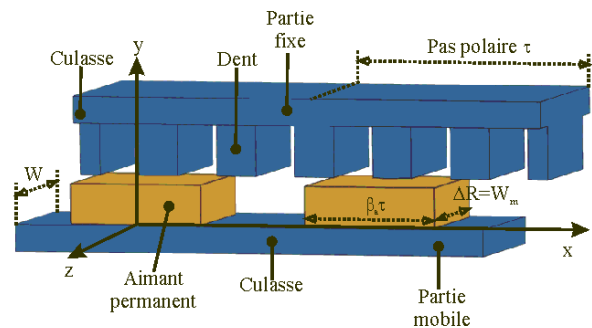
- Aucun effet de saturation des parties ferromagnétiques n’est pris en compte, et ces dernières sont supposées posséder une perméabilité magnétique infinie. Cette hypothèse, comme nous l’avons expliqué au chapitre précédent, permet de découpler les phénomènes électromagnétiques se produisant dans l’entrefer de la machine, fondamentaux pour le calcul du couple de cette dernière, de ceux qui interviennent dans les culasses, qui sont importants pour la vérification du niveau des inductions, ainsi que pour le calcul des pertes fer. En effet, vu de l’entrefer, lorsque le fer est supposé avoir une perméabilité magnétique infinie, ce dernier se réduit à une simple condition de Neumann homogène au niveau de la frontière fer-air. Cela étant, les conditions de Neumann homogènes, en 2D, portaient sur des segments de frontière fer-air. A présent, en 3D, elles mettent en jeu des plans.
- Nous allons, dans toute cette étude, lisser le stator à petites dents par le coefficient de Carter, ce dernier étant noté k_c et calculé comme dans la référence [Carter, 1901]. Nous avons signalé que l’application de ce coefficient revenait à considérer un entrefer lisse corrigé $e_c = k_c (h_a + e) - h_a$, où e est la valeur de l’entrefer réel, et h_a est la hauteur des aimants. Nous avons dit que la méthode de calcul de ce coefficient obligeait à considérer

que la longueur d'onde spatiale des sources était très grande par rapport au pas dentaire, et que ces sources étaient localisées sur les parois ferromagnétiques, hypothèse discutable dans le cadre des machines à aimants (même si le fait que la machine soit à pôles rotoriques lisses est un point positif pour pouvoir appliquer ce coefficient de Carter k_c). De plus, utiliser ce coefficient de Carter pour une modélisation tri-dimensionnelle constitue une approximation supplémentaire.

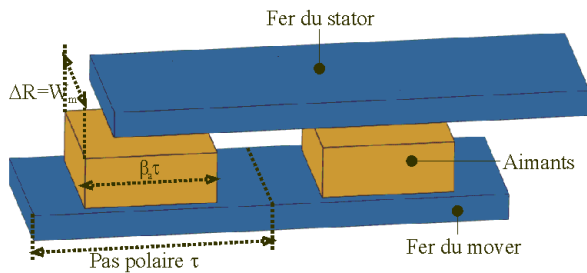
- Tout phénomène transitoire électromagnétique est négligé. Nous résolvons le problème en magnétostatique. Pour le calcul de l'inductance, nous allons considérer que les bobines, qui sont en réalité placées dans les encoches du stator, sont assimilables à une densité linéique de courant sans épaisseur, déposée à la surface du stator lissé.



(a) Représentation tri-dimensionnelle de la machine à flux axial à aimants déposés simple face avec encoches



(b) Représentation tri-dimensionnelle de l'actionneur linéaire équivalent obtenu par développement de la machine à flux axial de la figure 4.24a à son rayon moyen



(c) Représentation tri-dimensionnelle de l'actionneur linéaire obtenu en négligeant les encoches de l'actionneur linéaire de la figure 4.24b

FIGURE 4.24: Etapes de la simplification de l'actionneur à flux axial vers l'actionneur effectivement étudié (linéaire et sans encoches)

4.2.1.2 Récapitulatif de la structure étudiée

Grâce aux hypothèses simplificatrices émises ici, il est possible de donner un aperçu de la machine linéaire étudiée, résultant de l'approximation de la machine à flux axial au niveau de son rayon moyen. Au niveau de la figure 4.24a, nous montrons l'actionneur à flux axial au départ, avant toute simplification. En développant ce dernier au niveau de son rayon moyen, nous obtenons la machine représentée à la figure 4.24b : il s'agit de l'actionneur linéaire le plus simple possible : une partie mobile non saillante, sur laquelle sont déposés des aimants parallélépipédiques, peut se mettre en mouvement relatif par rapport à une partie fixe, comportant des dents afin d'y loger le bobinage. Nous allons encore simplifier la structure de la figure 4.24b, en négligeant, pour faciliter le calcul, ces dents statoriques.

La machine linéaire que nous allons effectivement modéliser sera donc celle représentée à la figure 4.24c, où le stator a été lissé grâce au coefficient de Carter.

Les principales notations introduites sont les suivantes (nous avons représenté la figure 4.24b) en deux dimensions dans le plan $(0xy)$ à la figure 4.25, afin de faciliter la présentation des notations introduites :

- Les grandeurs axiales (figure 4.25), telles que l'épaisseur e_{cs} de la culasse du stator, la hauteur d'encoche h_e , la hauteur d'aimants h_a , l'entrefer réel e , ainsi que l'épaisseur e_{cr} de la culasse du rotor. Nous rappelons que l'entrefer corrigé par le coefficient de Carter est noté $e_c > e$. Les épaisseurs de culasse n'interviennent pas à proprement parler dans les modèles analytiques, mais en revanche sont utiles pour les simulations éléments finis des actionneurs, ce qui explique que nous introduisons ces notations.
- Les grandeurs orthoradiales (figure 4.25) : le nombre de paires de pôles p , le pas polaire au niveau du rayon moyen τ , l'ouverture relative des aimants par rapport au pas dentaire β_a , le pas dentaire $\tau_s = w_e + w_d$, où w_e est la largeur des encoches, w_d celle des dents. Il y a q_s encoches par pôle, donc $\tau = q_s \tau_s$.
- Les grandeurs radiales utilisées ici sont le rayon interne actif de la machine à flux axial, noté R_1 , le rayon externe actif R_2 de la machine à flux axial. Le rayon moyen auquel on effectue le développement de la machine pour obtenir l'actionneur linéaire est donc $\bar{R} = \frac{R_1 + R_2}{2}$. Qui plus est, on introduit aussi le différentiel entre rayon actif externe et rayon actif interne $\Delta R = R_2 - R_1$. Ce différentiel est justement égal à l'épaisseur des aimants suivant l'axe $(0z)$ que nous avons introduite au niveau des figures 4.24b et 4.24c, et que nous avons notée $W_m = \Delta R$. Nous avons d'ailleurs illustré le fait que, sur ces mêmes figures, l'épaisseur suivant l'axe $(0z)$ des parties ferromagnétiques, notée W , n'était pas forcément égale à l'épaisseur des aimants (à cause des têtes de bobines, l'épaisseur du fer peut dépasser quelque peu de l'épaisseur active des aimants, et on aurait alors $W > W_m$).

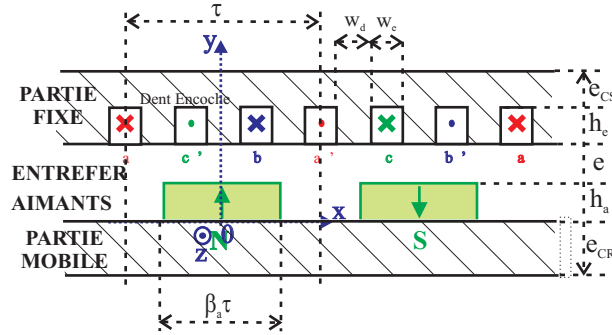


FIGURE 4.25: Représentation 2D de l'actionneur linéaire équivalent de la figure 4.24b

4.2.2 Méthode de calcul analytique du flux à vide avec prise en compte des effets de bord

Nous allons, dans un premier temps, reprendre la méthode de modélisation développée dans l'article [Azzouzi *et al.*, 2005a], pour tenir compte des effets de bord de l'actionneur à flux axial. Cette méthode est qualifiée de méthode quasi-3D, car elle revient à pondérer la composante d'induction permettant de calculer le flux, déterminée grâce à un calcul 2D dans le plan $(0xy)$, par une fonction dépendant uniquement de la troisième dimension z , qui s'atténue au voisinage des bords de l'actionneur, afin de tenir compte des effets de bord sur le flux total de la machine. Dans l'article [Azzouzi *et al.*, 2005a], cette méthode a été développée pour une machine à flux axial, et la fonction de pondération de la troisième dimension tenant compte des effets de bord a été déterminée par éléments finis. Le principe de cette méthode nous semble très intéressant, car il consiste à découpler, pour considérer les effets 3D, les phénomènes électromagnétiques ayant cours dans le plan des calculs 2D, de ceux qui se produisent dans la troisième dimension. En fait, cela revient à se poser la question de savoir si une modélisation 3D peut se résumer à deux modèles 2D dans deux plans perpendiculaires. Ceci explique pourquoi nous allons, dans un premier temps, adapter cette méthode dite « quasi-3D » dans le cas de notre actionneur linéaire développé au rayon moyen, mais en menant les calculs analytiquement (et non par éléments finis), afin de tenir compte des effets de bords suivant la direction $(0z)$. Dans un second temps, nous allons exposer une méthode de calcul analytique réellement 3D. Les résultats entre quasi-3D et 3D seront alors comparés entre eux, et aussi avec ceux donnés par un calcul éléments finis 3D.

4.2.2.1 Modèle de l'actionneur développé au rayon moyen

Comme vu au chapitre précédent, il est possible, étant donné la structure 2D de la figure 4.25, de faire un calcul analytique du flux à vide de la machine. Cette tâche est d'autant plus aisée que la structure considérée est dépourvue de toute saillance. Nous rappelons que le calcul 2D est fondé sur l'hypothèse que les effets de bords suivant l'axe $(0z)$ sont négligeables, car l'épaisseur des aimants suivant cette direction est supposée infinie, du moins très grande par rapport au pas polaire τ : $W_m \gg \tau$. Auquel cas, le potentiel-vecteur se réduit à une seule composante, dirigée suivant l'axe $(0z)$ ² :

$$\vec{A}^{[xy]}(x, y) = A^{[xy]}(x, y) \vec{u}_z \quad (4.20)$$

Dans ce cas, l'induction $\vec{B}^{[xy]}(x, y)$ est située dans le plan $(0xy)$, et est obtenue par dérivation du potentiel-vecteur :

$$\begin{cases} B_x^{[xy]} &= \frac{\partial A^{[xy]}}{\partial y} \\ B_y^{[xy]} &= -\frac{\partial A^{[xy]}}{\partial x} \end{cases} \quad (4.21)$$

L'intégration sur un pas polaire de longueur τ de la composante d'induction $B_y^{[xy]}$ donne le flux maximal à vide par spire dans la machine entrant dans le stator, en 2D :

$$\hat{\phi}^{[xy]} = pW_m \int_{-\tau/2}^{\tau/2} B_y^{[xy]}(x, y = h_a + e_c) dx \quad (4.22)$$

Pour tenir compte des effets de bords dans la direction $(0z)$, qui induisent des fuites au voisinage du bord de l'aimant conduisant inmanquablement à une diminution du flux par rapport au flux $\hat{\phi}^{[xy]}$, la modélisation quasi-3D consiste à dire que les fuites causées par ces effets de bord dont nous parlons, qui ont lieu dans le plan $(0yz)$, sont indépendantes des fuites inter-aimants quantifiées par le modèle analytique 2D que nous avons exposé. Par conséquent, pour tenir compte des effets de bords dans la direction $(0z)$ de la machine, il suffit de multiplier la composante d'induction $B_y^{[xy]}(x, y)$ déterminée avec le modèle 2D par une fonction de modulation dépendant uniquement des coordonnées y et z , notée $f^{[yz]}(y, z)$, valant 1 loin des bords, et traduisant l'affaiblissement de la composante d'induction d'axe $(0y)$ (utile pour le calcul du flux à vide) lorsque l'on s'approche des bords des aimants :

$$B_y^{[xy]-[yz]}(x, y, z) = B_y^{[xy]}(x, y) f^{[yz]}(y, z) \quad (4.23)$$

La fonction de modulation $f^{[yz]}(y, z)$ peut être calculée, selon l'hypothèse du modèle quasi-3D, en utilisant un autre modèle 2D, mais cette fois dans le plan $(0yz)$, indépendamment du premier modèle 2D dans le plan $(0xy)$. L'hypothèse de supposer les lignes de fuites des effets de bords uniquement dans le plan $(0yz)$ et indépendantes des fuites 2D dans le plan $(0xy)$ n'est pas totalement mathématiquement satisfaisante. Néanmoins, comme le montre la figure 4.26, elle est sans doute bien justifiée pour les aimants carrés, sauf au niveau des coins de l'aimant, où les lignes de fuites, comme la ligne 3 sur la figure 4.26, n'appartiennent ni au plan $(0xy)$, ni au plan $(0yz)$, et sont réellement tri-dimensionnelles. L'hypothèse quasi-3D va approximer la ligne de fuites 3 au niveau du coin de l'aimant comme la superposition d'une ligne de fuite 2D dans le plan $(0xy)$ (numérotée 1' à la figure 4.26), et d'une ligne de fuite quasi-3D dans le plan $(0yz)$ (numérotée 2' à la figure 4.26). Bien entendu, cette approximation ne peut pas être exacte, car le trajet 3 d'une part, et l'association des trajets 1' et 2' d'autre part, ne présentent pas la même réluctance. Néanmoins, on peut penser que, dans le cas d'aimants de forme carrée, ces lignes de fuites tri-dimensionnelles n'interviennent qu'au niveau des coins des aimants, et sont donc marginales.

-
2. Nous proposons, pour tout le reste de ce chapitre, la notation générique suivante. Soit un vecteur \vec{X} (potentiel, induction...) :
- Si ce vecteur a été déterminé par un modèle 2D, nous le noterons $\vec{X}^{[xy]}$: cela signifie que le vecteur \vec{X} a été déterminé par un modèle 2D dans le plan $(0xy)$.
 - Si ce vecteur a été déterminé par un modèle 3D, nous le noterons $\vec{X}^{[xyz]}$: cela signifie que le vecteur \vec{X} a été déterminé par un modèle 3D dans l'espace muni d'une base cartésienne $(0xyz)$. Comme nous le verrons par la suite, les modèles 3D de la machine disque seront, quant à eux, menés dans une base de coordonnées cylindriques $(0r\theta z)$. Nous noterons les vecteurs relatifs à cette base de la manière suivante : $\vec{X}^{[r\theta z]}$.
 - Pour les modèles quasi-3D, qui consistent à réduire la problème de la modélisation 3D à deux problèmes de modélisation 2D dans des plans perpendiculaires, les vecteurs seront notés sous la forme suivante : $\vec{X}^{[xy]-[yz]}$. Cela signifie que le vecteur \vec{X} a été déterminé par un modèle quasi-3D reposant sur une modélisation 2D dans le plan $(0xy)$, combiné avec une autre modélisation 2D dans le plan $(0yz)$.

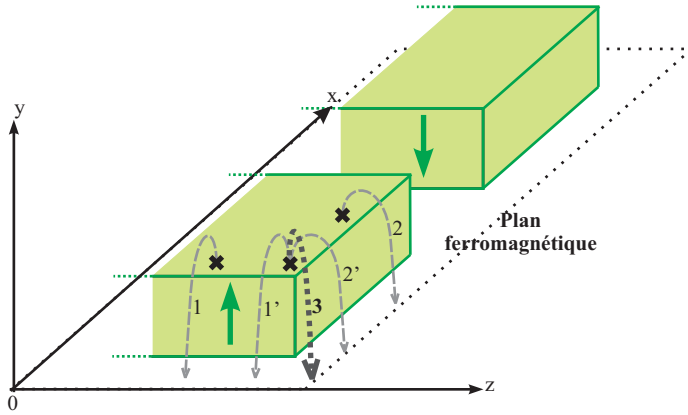


FIGURE 4.26: Découplage entre les lignes de fuite 2D dans le plan $(0xy)$ et les lignes de fuite traduisant les effets de bord dans le plan $(0yz)$ pour le modèle quasi-3D

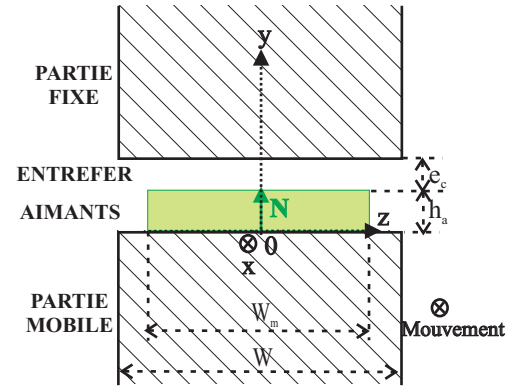


FIGURE 4.27: Problème à résoudre dans le plan $(0yz)$ pour le calcul de la fonction de modulation quasi-3D $f^{[yz]}(y, z)$ traduisant les effets de bord

Si on admet la validité de cette approximation quasi-3D, la méthode de calcul que nous proposons afin de calculer la fonction de modulation $f^{[yz]}(y, z)$ est la suivante. La figure 4.27 représente le problème à résoudre dans le plan $(0yz)$. Nous allons résoudre le problème de calcul de l'induction dans ce plan de manière analytique : nous cherchons la composante verticale d'induction, que nous notons $B_y^{[yz]}(y, z)$. Ensuite, afin d'obtenir une grandeur sans dimension compatible avec une fonction de modulation, nous allons diviser cette induction d'axe $(0y)$ par la valeur que nous aurions obtenue si les effets de bord se trouvaient négligés, qui est $\frac{h_a}{h_a + e_c} B_r$ (sans phénomène de concentration de flux), B_r étant l'induction rémanente. La fonction de modulation quasi-3D sera alors calculée par la formule :

$$f^{[yz]}(y, z) = \frac{B_y^{[yz]}(y, z)}{\frac{h_a}{h_a + e_c} B_r} \quad (4.24)$$

Pour calculer la composante d'induction $B_y^{[yz]}(y, z)$ dans la géométrie de la figure 4.27, la méthode utilisée sera celle développée dans la référence [Burrel *et al.*, 2007]. En effet, afin de pouvoir utiliser le formalisme des séries de Fourier, nous allons périodiser la structure suivant l'axe $(0z)$, comme montré au niveau de la figure 4.28. Pour faire en sorte que les machines rajoutées de manière fictive par cette périodisation ne s'influencent pas l'une l'autre, la longueur de périodisation L_z est choisie très grande par rapport à l'épaisseur W de la machine suivant l'axe $(0z)$: $L_z \gg W$. Les machines rajoutées possèdent des aimants avec une polarité alternée suivant l'axe $(0z)$, afin de s'affranchir d'avoir à traiter d'une valeur moyenne d'aimantation. Nous pouvons remarquer que, d'après la méthode des images, ceci revient à rajouter entre les machines, au niveau des coordonnées suivant l'axe $(0z)$ multiples de $\pm L_z/2$, des plans caractérisés par une condition de Neumann homogène $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$, ce qui traduit une condition de flux perpendiculaire. Ceci peut sembler quelque peu contradictoire avec les conditions aux limites généralement admises dans l'étude des systèmes électromagnétiques, où il est coutume d'imposer, à grande distance du dispositif étudié, un potentiel nul (qui est donc une condition de flux parallèle). Cette condition plus naturelle pourrait être obtenue en périodisant le système avec des aimants de même polarité suivant l'axe $(0z)$. Néanmoins, nous pensons que si effectivement la longueur L_z est très grande par rapport à la largeur W_m de l'aimant suivant l'axe $(0z)$ (nous prendrons un facteur 10), on peut se permettre d'imposer une condition de Neumann nulle au niveau des coordonnées $\pm L_z/2$, sans que cela ne perturbe le système en déviant du flux magnétique. Du moins, nous pensons que ceci est un moindre mal par rapport au fait de rajouter une valeur moyenne d'aimantation si nous n'alternons par la polarité des aimants fictivement rajoutés suivant l'axe $(0z)$. C'est aussi l'avis des auteurs des références [Jufer, 1970, Jufer et Wavre, 1972, Jufer et Mattatia, 1974, Jufer, 1968].

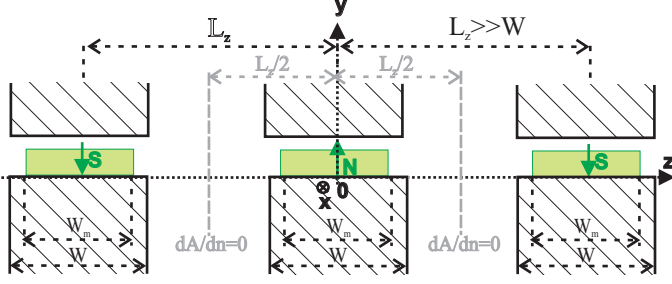


FIGURE 4.28: Périodisation de la structure de la figure 4.27 utilisée pour la modélisation quasi-3D dans le plan $(0yz)$

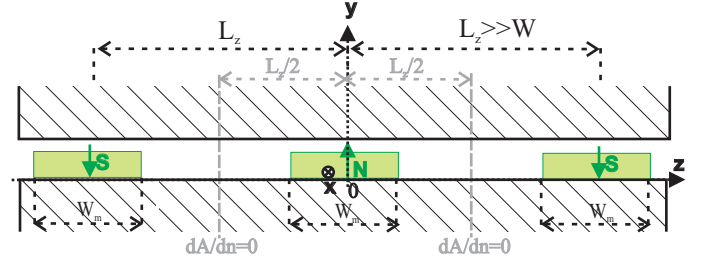


FIGURE 4.29: Découplage entre le problème de la longueur finie des aimants W_m et la problème de la longueur finie du fer W suivant l'axe $(0z)$

Etant donné qu'il n'est pas aisé de résoudre directement le problème posé à la figure 4.28, nous allons procéder en deux étapes, comme cela est suggéré dans la référence [Burrel *et al.*, 2007, Jufer, 1970]. La méthode consiste en effet à découpler, pour le calcul de la composante d'induction $B_y^{[yz]}$ (y, z) cherchée dans la figure 4.28, les effets dus à l'épaisseur finie de l'aimant W_m , et ceux dus à l'épaisseur finie W des parties de fer. Dans un premier temps, seule l'épaisseur finie de l'aimant W_m est considérée, l'épaisseur du fer W étant supposée infinie. Nous nous trouvons dans le cas de la figure 4.29. Notons³ $B_y^{[yz]'}(y, z)$ l'induction d'axe $(0y)$ obtenue dans le cadre de l'hypothèse de parties ferromagnétiques infinies. Il s'avère que ce cas est exactement le problème traité de nombreuses fois dans la littérature [Zhu *et al.*, 1993] de l'actionneur linéaire à aimants à pôles lisses et sans encoche statorique, localisé dans le plan $(0yz)$, avec un pas polaire égal à L_z , et un aimant de largeur W_m , très faible relativement au pas polaire. Le calcul en 2D se fait en potentiel-vecteur, supposé dirigé suivant l'axe $(0x)$ et ne dépendant que des coordonnées y et z . Ensuite, une dérivation permet d'en déduire la composante d'induction $B_y^{[yz]'}(y, z)$ recherchée. Ce problème étant classique, nous ne donnerons ici que le résultat du calcul. Pour la zone d'entrefer (qui nous intéresse pour en déduire le flux entrant dans la partie fixe), le résultat est obtenu par la formule ci-après :

$$B_y^{[yz]'}(y, z) = -\pi \frac{W_m}{L_z} \sum_{k=1}^{+\infty} (2k-1) c_k \cosh \left((2k-1) \pi \frac{W_m}{L_z} (y - h_a - e_c) \right) \sin \left((2k-1) \pi \frac{W_m}{L_z} z \right) \quad (4.25)$$

Les coefficients c_k sont donnés par la formule suivante, après application des conditions de passage entre l'entrefer et la zone des aimants :

$$c_k = -\frac{1}{\pi} \frac{L_z}{W_m} \frac{B_{r_k}}{(2k-1) \operatorname{sh} \left((2k-1) \pi \frac{W_m}{L_z} e_c \right)} \frac{\operatorname{th} \left((2k-1) \pi \frac{W_m}{L_z} e_c \right) \operatorname{th} \left((2k-1) \pi \frac{W_m}{L_z} h_a \right)}{\operatorname{th} \left((2k-1) \pi \frac{W_m}{L_z} e_c \right) + \operatorname{th} \left((2k-1) \pi \frac{W_m}{L_z} h_a \right)} \quad (4.26)$$

où les coefficients $B_{r_k} = \frac{4}{\pi} B_r \frac{1}{2k-1} \sin \left((2k-1) \frac{W_m}{L_z} \frac{\pi}{2} \right)$ résultent du développement en séries de Fourier de la fonction induction rémanente.

Une fois la composante d'induction $B_y^{[yz]'}(y, z)$ calculée, on va tenir compte de la longueur finie du fer W par multiplication de cette composante d'induction par une fonction perméance relative, notée $m(z)$, calculée au niveau de l'ordonnée $y = h_a + e_c/2$, et traduisant l'atténuation de la composante d'axe $(0y)$ d'induction causée par les effets de bords spécifiques au fer. Cette fonction de modulation prend l'allure montrée à la figure 4.30. Elle est voisine de l'unité au centre de l'actionneur, et décroît au niveau des bords, afin de transcrire l'affaiblissement de l'induction au voisinage des bords ferromagnétiques de cet actionneur.

3. Dans la suite de ce document, nous notons avec un symbole « ' » les inductions calculées sans prendre en compte les bords des parties ferromagnétiques ($W \rightarrow \infty$) comme dans la figure 4.29, mais en considérant en revanche la largeur finie des aimants W_m .

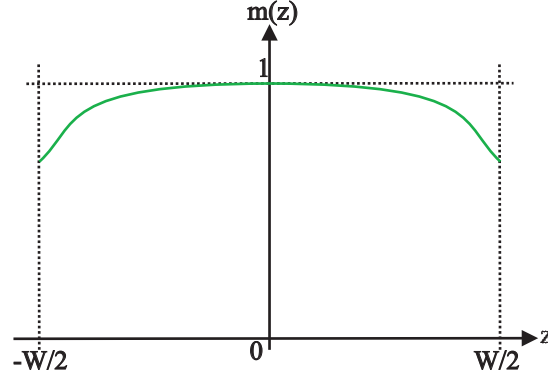


FIGURE 4.30: Allure de la fonction de modulation $m(z)$ utilisée pour tenir compte des effets de bords des parties ferromagnétiques

Dans les références [Burrel *et al.*, 2007, Jufer, 1970], une décroissance polynomiale de cette fonction perméance relative $m(z)$ au niveau des bords en fer, alors qu'elle était supposée valoir 1 au centre de la machine, est supposée. Néanmoins, ce choix semble logique mais arbitraire, et le problème de l'identification des coefficients de cette parabole se pose. C'est pour cela que nous développons, au paragraphe suivant, une méthode originale de détermination de cette fonction perméance relative tenant compte de l'affaiblissement de la composante verticale d'induction en bordure du fer. Au final, la composante d'induction d'axe $(0y)$ recherchée à la figure 4.27 est identifiée par la formule suivante :

$$B_y^{[yz]}(y, z) = B_y^{[yz]'} \cdot m(z) \quad (4.27)$$

Et de là, la fonction de modulation $f^{[yz]}(y, z)$ est déterminée par division par l'induction $\frac{h_a}{h_a + e_c} B_r$ (formule 4.24). Lorsque cette fonction de modulation traduisant les effets de bords suivant la troisième dimension (axe $(0z)$ de l'actionneur) est connue, l'induction d'axe $(0y)$ dans l'actionneur linéaire, selon l'hypothèse quasi-3D notée $B_y^{[xy]-[yz]}(x, y, z)$ peut alors être évaluée, par simple multiplication de $f^{[yz]}(y, z)$ par l'induction $B_y^{[xy]}(x, y)$ trouvée lors d'un calcul 2D (formule 4.23). Eventuellement, ce type de raisonnement peut être étendu lorsque la machine est à rotor saillant et que les encoches d'entrefer sont prises en compte, en déterminant l'induction 2D d'entrefer $B_y^{[xy]}(x, y)$ comme au chapitre précédent. On fait l'hypothèse que la fonction de modulation $f^{[yz]}(y, z)$ traduisant les effets de bords selon l'axe $(0z)$ n'est pas changée par la présence de la saillance. Néanmoins, ce n'est pas ce que nous ferons ici, car nous souhaitons avant tout comparer les modélisations quasi-3D et 3D, et, pour ce dernier type de modèles, ce genre de généralisation apparaît difficilement réalisable.

Sachant que la force développée par l'actionneur est proportionnelle au flux magnétique maximal entrant dans sa partie fixe, on va calculer ce flux maximal selon l'hypothèse quasi-3D par la formule suivante :

$$\hat{\varphi}^{[xy]-[yz]} = p \iint_{(x,z) \in [-\frac{\tau}{2}; \frac{\tau}{2}] \times [-\frac{W_m}{2}; \frac{W_m}{2}]} B_y^{[xy]-[yz]}(x, y = h_a + e_c, z) dx dz \quad (4.28)$$

Par la suite, afin de quantifier l'affaiblissement du flux magnétique à cause des effets de bords pris en compte grâce à l'hypothèse quasi-3D, et donc de la force développée par l'actionneur linéaire, il est utile d'introduire le coefficient suivant, rapport entre le flux obtenu par le modèle quasi-3D et le modèle 2D :

$$K_{\varphi}^{[xy]-[yz]/[xy]} = \frac{\hat{\varphi}^{[xy]-[yz]}}{\hat{\varphi}^{[xy]}} \quad (4.29)$$

Une présentation et analyse des résultats ainsi obtenus sera présentée au paragraphe 4.2.2.4.

4.2.2.2 Modèle 3D de l'actionneur développé au rayon moyen

Pour pallier au défaut de principe de la méthode quasi-3D, sans pour autant avoir recours aux méthodes de type éléments finis 3D, il nous est apparu important de développer un modèle analytique réellement tri-dimensionnel de

la structure d'actionneur linéaire qui nous intéresse ici. Cela évitera d'avoir à découpler les phénomènes électromagnétiques ayant cours dans le plan $(0xy)$ de ceux traduisant les effets de bords dans le plan $(0yz)$. Les hypothèses simplificatrices sont les mêmes que précédemment. Comme pour la méthode quasi-3D, afin de pouvoir utiliser le formalisme des séries de Fourier, nous allons périodiser l'actionneur suivant l'axe $(0z)$, en alternant les aimants, et en choisissant la longueur de périodisation L_z très grande par rapport à l'épaisseur de la machine W afin que les machines fictivement rajoutées ne s'influencent pas l'une l'autre. Nous avons vu que, d'après le principe des images magnétiques, cette périodisation pouvait être interprétée comme le fait de rajouter, à une distance $L_z/2$ de l'actionneur, un plan caractérisé par une condition de Neumann homogène sur le potentiel $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$. Nous avons dit que ce type de condition n'était pas la condition de potentiel nul à l'infini généralement admise en électromagnétisme, et que sa validité tenait uniquement au fait que la longueur de périodisation L_z soit très importante en regard des autres dimensions suivant l'axe $(0z)$.

Comme auparavant, nous allons, dans un premier temps, négliger l'épaisseur finie W du fer selon l'axe $(0z)$, en corrigeant ensuite l'induction par une fonction de modulation (la même que celle de la section précédente, notée $m(z)$). Les parties ferromagnétiques seront donc des plans infinis, caractérisés par des conditions de Neumann sur le potentiel-vecteur (celui correspondant à la partie mobile se situe en la coordonnée $y = 0$, et celui correspondant à la partie fixe se situe en $y = h_a + e_c$). Le système tri-dimensionnel périodisé à présent considéré est représenté à la figure 4.31. Nous y voyons que dans la direction $(0z)$ de périodisation, la périodisation fictive des aimants se fait en alternant la polarité de l'aimantation, de telle manière à éviter d'avoir à considérer une valeur moyenne dans le développement en séries de Fourier de l'aimantation.

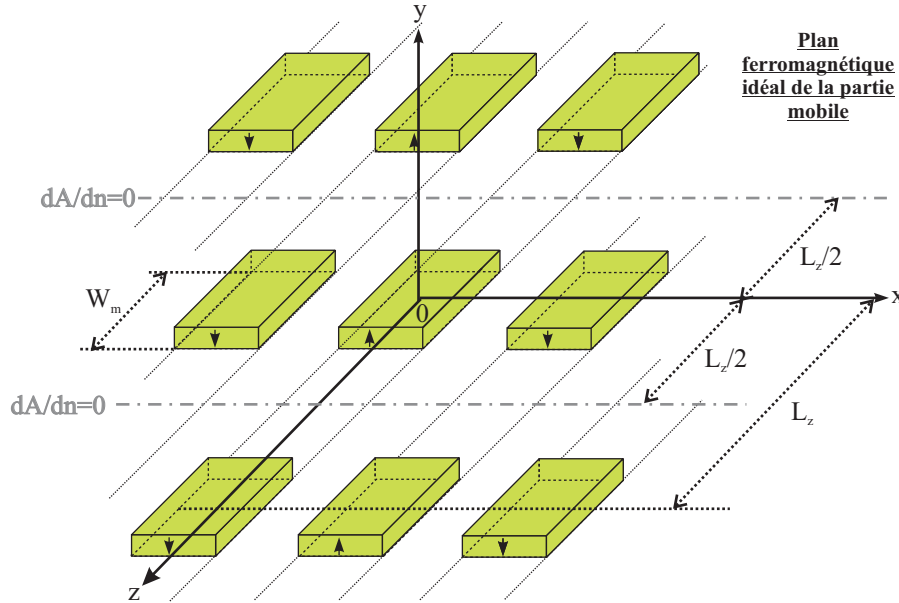


FIGURE 4.31: Les aimants de la machine linéaire périodisée en trois dimensions, avec une longueur de périodisation $L_z \gg W$, et en négligeant l'épaisseur finie W des parties ferromagnétiques

Il est approprié, dans ce cas, d'utiliser un développement en séries de Fourier bi-dimensionnel de la fonction induction rémanente dans le plan $(0xz)$ représenté à la figure 4.31. La forme mathématique proposée est la suivante :

$$B_r(x, z) = \sum_{k \geq 1, q \geq 1} B_{r_{k,q}} \cos\left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} x\right) \cos\left((2q-1) \frac{\pi}{L_z} z\right) \quad (4.30)$$

Pour chaque couple d'entiers strictement positifs (k, q) , le coefficient $B_{r_{k,q}}$ est donné par la formule suivante :

$$B_{r_{k,q}} = \frac{4}{L_z \tau} \iint_{(x,z) \in [-\frac{\tau}{2}; \frac{\tau}{2}] \times [-\frac{L_z}{2}; \frac{L_z}{2}]} B_r(x, z) dx dz \quad (4.31)$$

Pour la géométrie étudiée, dans laquelle les aimants sont rectangulaires, le résultat du calcul de l'intégrale précédente

est donné par :

$$B_{r_{k,q}} = \frac{16}{\pi^2} B_r \frac{\sin\left((2k-1)\beta_a \frac{\pi}{2}\right) \sin\left((2q-1)\frac{W_m}{L_z} \frac{\pi}{2}\right)}{2k-1} \quad (4.32)$$

La zone des aimants sera appelée la zone I, alors que celle de l'entrefer la zone II. Dans chacune de ces zones, le potentiel-vecteur a deux composantes, et est de la forme, dans la base cartésienne orthonormée $(0xyz)$ de l'espace représenté à la figure 4.31 :

$$\vec{A}^{[xyz]}(x, y, z) = \begin{bmatrix} A_x^{[xyz]}(x, y, z) \\ 0 \\ A_z^{[xyz]}(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

La jauge de Coulomb $\text{div } \vec{A}^{[xyz]} = 0$ évite d'avoir à calculer les deux composantes de ce vecteur. En effet, cette dernière fournit une relation directe entre les deux composantes, qui s'exprime ainsi :

$$\frac{\partial A_x^{[xyz]}}{\partial x} + \frac{\partial A_z^{[xyz]}}{\partial z} = 0 \quad (4.34)$$

Par conséquent, nous nous contenterons de calculer une seule composante, par exemple la composante $A_x^{[xyz]}$, et la composante $A_z^{[xyz]}$ pourra alors être connue par dérivation et intégration. Dans la zone I (celle des aimants), l'équation de Poisson à respecter sera donc :

$$\Delta A_x^{[xyz](I)} = \mu_0 \frac{\partial B_r}{\partial z} \quad (4.35)$$

La composante de potentiel-vecteur $A_x^{[xyz]}$ dans la zone (I) sera cherchée sous la forme :

$$A_x^{[xyz](I)}(x, y, z) = \sum_{k \geq 1, q \geq 1} a_{x0_{k,q}}^{(I)}(y) \cos\left((2k-1)\frac{\pi}{\tau}x\right) \sin\left((2q-1)\frac{\pi}{L_z}z\right) \quad (4.36)$$

Si nous ré-introduisons cette dernière équation, ainsi que le développement en séries de Fourier 2D de l'aimantation donné par l'équation 4.30, dans l'équation de Poisson 4.35 régissant la composante $A_x^{[xyz](I)}$ du potentiel-vecteur dans la zone I des aimants, nous allons obtenir alors les équations différentielles suivantes, pour chaque couple d'entiers naturels strictement positifs (k, q) :

$$\frac{\partial^2 a_{x0_{k,q}}^{(I)}}{\partial y^2} - \lambda_{k,q}^2 a_{x0_{k,q}}^{(I)} = - (2q-1) \frac{\pi}{L_z} B_{r_{k,q}} \quad (4.37)$$

Les nombres $\lambda_{k,q}$, pour chaque couple d'entiers (k, q) strictement positifs, sont donnés par la relation suivante :

$$\lambda_{k,q}^2 = (2k-1)^2 \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 + (2q-1)^2 \left(\frac{\pi}{L_z}\right)^2 \quad (4.38)$$

Les solutions à l'équation différentielle 4.37 sont données par la formule suivante, en tenant compte de la condition de dérivée normale nulle au niveau du plan $y = 0$, pour tout couple (k, q) d'entiers strictement positifs :

$$a_{x0_{k,q}}^{(I)}(y) = a_{x_{k,q}}^{(I)} \cosh(\lambda_{k,q}y) + (2q-1) \frac{\pi}{L_z \lambda_{k,q}^2} B_{r_{k,q}} \quad (4.39)$$

où $a_{x_{k,q}}^{(I)}$ est une constante. Dans la zone II, l'équation régissant la composante $A_x^{[xyz](II)}$ du potentiel-vecteur se réduit à une équation de Laplace $\Delta A_x^{[xyz](II)} = 0$, pour laquelle une solution peut être trouvée par la méthode de séparation des variables sous la forme :

$$A_x^{[xyz](II)}(x, y, z) = \sum_{k \geq 1, q \geq 1} a_{x0_{k,q}}^{(II)}(y) \cos\left((2k-1)\frac{\pi}{\tau}x\right) \sin\left((2q-1)\frac{\pi}{L_z}z\right) \quad (4.40)$$

L'introduction de l'expression précédente dans l'équation de Laplace donne alors l'équation différentielle à vérifier, pour les fonctions $a_{x0_{k,q}}^{(II)}(y)$, pour chaque couple d'entiers (k, q) :

$$\frac{\partial^2 a_{x0_{k,q}}^{(II)}}{\partial y^2} - \lambda_{k,q}^2 a_{x0_{k,q}}^{(II)} = 0 \quad (4.41)$$

Cette équation différentielle se résout ainsi, en tenant compte de la condition de Neumann homogène entre l'entrefer et la partie fixe, au niveau de la coordonnée $y = h_a + e_c$:

$$a_{x0_{k,q}}^{(II)}(y) = a_{x_{k,q}}^{(II)} \cosh(\lambda_{k,q}(y - h_a - e_c)) \quad (4.42)$$

Les constantes $a_{x_{k,q}}^{(I)}$ et $a_{x_{k,q}}^{(II)}$ sont trouvées, pour chaque couple d'entiers (k, q) , en écrivant la continuité du potentiel entre les zones I et II en la coordonnée $y = h_a$, ainsi que la continuité de la dérivée du potentiel par rapport à la normale à cette surface. Ces deux conditions aboutissent au système linéaire suivant, qui permet, pour chaque couple (k, q) , de déterminer les constantes $a_{x_{k,q}}^{(I)}$ et $a_{x_{k,q}}^{(II)}$:

$$\begin{cases} a_{x_{k,q}}^{(I)} \cosh(\lambda_{k,q}h_a) - a_{x_{k,q}}^{(II)} \cosh(\lambda_{k,q}e_c) &= - (2q - 1) \frac{\pi}{L_z \lambda_{k,q}^2} B_{r_{k,q}} \\ a_{x_{k,q}}^{(I)} \sinh(\lambda_{k,q}h_a) + a_{x_{k,q}}^{(II)} \sinh(\lambda_{k,q}e_c) &= 0 \end{cases} \quad (4.43)$$

Une fois la composante $A_x^{[xyz]}$ du potentiel-vecteur connue dans chaque zone, la composante $A_z^{[xyz]}$ est trouvée par la jauge de Coulomb, selon la formule :

$$A_z^{[xyz]} = - \int \frac{\partial A_x^{[xyz]}}{\partial x} dz \quad (4.44)$$

Par la suite, la composante d'axe $(0y)$ d'induction, nommée $B_y^{[xyz]'}(x, y, z)$ ⁴, qui permet le calcul du flux, est déterminée par dérivation du potentiel-vecteur selon la formule suivante :

$$B_y^{[xyz]'}(x, y, z) = \frac{\partial A_x^{[xyz]}}{\partial z} - \frac{\partial A_z^{[xyz]}}{\partial x} \quad (4.45)$$

Cette composante d'induction tri-dimensionnelle n'est en réalité qu'un intermédiaire de calcul, car, pour obtenir la véritable composante d'induction tri-dimensionnelle d'axe $(0y)$, il faut tenir compte de la longueur finie W du fer, via la fonction perméance $m(z)$, dont l'allure a été donnée à la figure 4.30 :

$$B_y^{[xyz]}(x, y, z) = B_y^{[xyz]'}(x, y, z) \cdot m(z) \quad (4.46)$$

Par la suite, le flux maximal calculé via le modèle analytique 3D qui entre dans la partie mobile, et qui est directement proportionnel à la force développée, est évalué par l'intégrale suivante :

$$\hat{\varphi}^{[xyz]} = p \iint_{(x,z) \in [-\frac{\tau}{2}; \frac{\tau}{2}] \times [-\frac{W_m}{2}; \frac{W_m}{2}]} B_y^{[xyz]}(x, y = h_a + e_c, z) dx dz \quad (4.47)$$

Enfin, comme pour le modèle quasi-3D, il est légitime de chercher à quantifier, lorsque l'on utilise ce modèle 3D analytique, l'affaiblissement du flux dû aux effets de bord de l'actionneur. Nous introduirons donc, de manière similaire, le coefficient sans dimension suivant, rapport entre le flux maximal calculé en trois dimensions et celui que l'on obtiendrait par un modèle 2D :

$$K_{\varphi}^{[xyz]/[xy]} = \frac{\hat{\varphi}^{[xyz]}}{\hat{\varphi}^{[xy]}} \quad (4.48)$$

4. Nous rappelons que le symbole « ' » est utilisé car nous avons calculé l'induction des aimants en 3D, sans tenir compte pour l'instant de la longueur finie W des parties ferromagnétiques, puisque que ces dernières ont jusque là été considérées comme des plans ferromagnétiques parfaits. Ce problème sera pris en compte une fois que nous aurons multiplié l'induction que nous venons de déterminer par la fonction de modulation $m(z)$ qui prend en compte les effets de bords du fer.

4.2.2.3 Méthode originale pour le calcul de la fonction perméance $m(z)$ tenant compte de la longueur finie du fer W

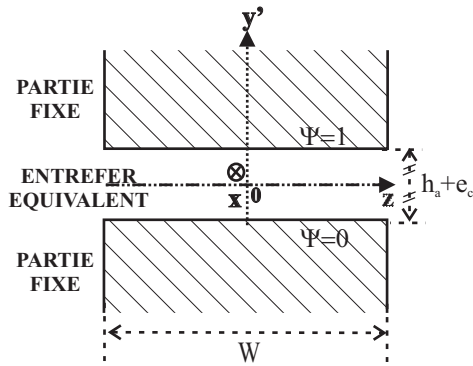


FIGURE 4.32: Représentation de la géométrie des parties ferromagnétiques dans le plan $(0yz)$, afin d'illustrer le calcul de la fonction perméance relative $m(z)$

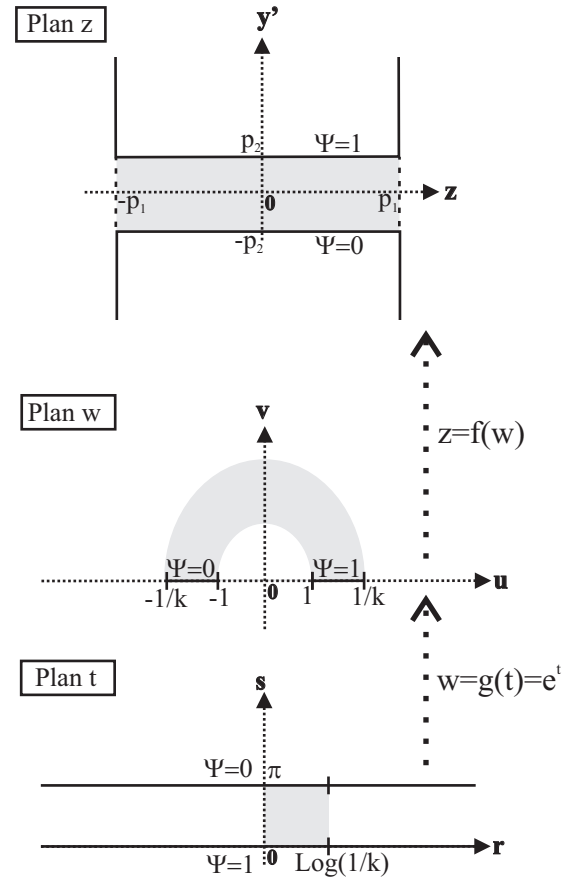


FIGURE 4.33: Détail des transformations conformes mises en oeuvre pour résoudre le problème de la détermination de la fonction perméance $m(z)$

Dans les références [Burrel *et al.*, 2007, Jufer, 1970, Dang *et al.*, 2010], des expressions mathématiques de la fonction perméance relative $m(z)$, traduisant la décroissance de l'induction à cause des effets de bords du fer de l'actionneur, ont été proposées. Les expressions mathématiques sont choisies de manière à être égales à l'unité au centre de la machine, et décroissent au niveau des bords. Ces expressions sont quelque peu arbitraires : la référence [Jufer, 1970] propose une décroissance polynomiale, alors que les références [Burrel *et al.*, 2007, Dang *et al.*, 2010] suggèrent de prendre une série de Fourier d'un créneau, tronquée après quelques harmoniques. Dans tous les cas, le problème d'identification des paramètres se pose de manière critique. Nous souhaitons, dans cette partie, proposer une méthode de calcul permettant, en s'appuyant sur des considérations électromagnétiques, de s'affranchir des aspects arbitraires des calculs précédents. Cette méthode est fondée sur l'utilisation des transformations conformes, et utilise la transformation suggérée dans la référence [Markovic, 2004]. Nous allons, pour le calcul, considérer la géométrie des parties ferromagnétiques représentée à la figure 4.32, où nous avons représenté le dessin des parties ferromagnétiques dans le plan $(0yz)$. La raison de ce choix est que, étant donné que l'on néglige les effets d'extrémités de l'actionneur linéaire (en effet, ce dernier résulte du développement de la machine à flux axial au rayon moyen), les parties ferromagnétiques sont supposées infinies et invariantes selon l'axe $(0x)$. Par conséquent, les paramètres d'importance sont ceux du plan $(0yz)$, et l'épaisseur W du fer de la machine suivant l'axe $(0z)$, ou alors la largeur de l'entrefer magnétique équivalent $h_a + e_c$, jouent un rôle fondamental ici. A la figure 4.32, nous avons centré l'axe $(0y)$ au centre de l'entrefer magnétique équivalent, afin de faciliter le calcul (on appelle $y' = y - \frac{h_a + e_c}{2}$).

Les épaisseurs de culasse, aussi bien de la partie fixe que de la partie mobile, seront supposées infinies dans ce calcul, de sorte que nous n'aurons pas à considérer, dans la géométrie, d'autres angles que ceux de la figure 4.32. Nous excitons le fer de la partie fixe, supposé de perméabilité infinie, par un potentiel scalaire unitaire $\Psi = 1$, alors que le fer de la partie mobile est maintenu à un potentiel scalaire $\Psi = 0$ (figure 4.32). Nous allons ensuite calculer le champ magnétique suivant la direction $(0y')$, nommé $H_y(z)$, sur la ligne horizontale localisée au milieu de l'entrefer magnétique équivalent (axe $(0z)$ de la figure 4.32, caractérisé par $y' = 0$). Grâce à la théorie des transformations conformes, qui assimile le plan $(0y'z)$ de la figure 4.32 à un plan complexe, il est possible d'effectuer des transformations, dont le détail est donné à la figure 4.33, qui vont permettre de simplifier la géométrie de telle manière à pouvoir calculer aisément le champ magnétique recherché. Pour plus de simplicité, nous appelons :

- $p_1 = \frac{W}{2}$ la demi-épaisseur selon l'axe $(0z)$ des parties ferromagnétiques.
- $p_2 = \frac{h_a + e_c}{2}$ le demi-entrefer magnétique.

Le théorème de Schwartz-Christoffel assure que la fonction complexe f permettant de passer du plan réel des nombres \bar{z} au plan des nombres \bar{w} représenté à la figure 4.33 est donnée par l'intégrale suivante :

$$z = f(w) = S \int_0^w \frac{\sqrt{1-w^2}\sqrt{1-k^2w^2}}{w^2} + C \quad (4.49)$$

où les constantes S (aussi appelé « module conforme »), $k < 1$, et C sont à déterminer. Il est heureux qu'une telle intégrale soit calculable à l'aide des fonction elliptiques :

$$z = S \left(k'^2 F(w, k) - 2E(w, k) - \frac{\sqrt{1-w^2}\sqrt{1-k^2w^2}}{w} \right) + C \quad (4.50)$$

où le nombre $k' = \sqrt{1-k^2}$ est appelé le module complémentaire du nombre k . Les fonctions $F(w, k)$ ainsi que $E(w, k)$ sont respectivement les fonctions elliptiques de première et de seconde espèce. Nous choisissons d'imposer $f(1) = p_1 + i \cdot p_2$, $f(1/k) = -p_1 + i \cdot p_2$, et $f(0) = p_1$. Par des considérations de symétrie, la fonction f vérifie aussi $f(-1) = p_1 - i \cdot p_2$, et $f(-1/k) = -p_1 - i \cdot p_2$. De la condition $f(0) = p_1$, il est possible d'en déduire que $C = p_1$. Les deux autres conditions sur $f(1)$ et $f(1/k)$ permettent de déterminer un système de deux équations à deux inconnues, qui, bien que non-linéaire, rend possible le calcul des deux constantes S et k . Nous introduisons les intégrales elliptiques complètes de première et de seconde espèces $K(k) = F(1, k)$ et $E(k) = E(1, k)$. Qui plus est, on introduit aussi, conformément à l'usage mathématique [Nikiforov *et al.*, 1988], ces fonctions pour le module complémentaire k' , au moyen des définitions : $K'(k) = K(k')$ and $F'(k) = F(k')$. Nous rappelons deux relations utiles sur les intégrales elliptiques de première et de seconde espèce [Markovic, 2004] :

$$\begin{cases} F\left(\frac{1}{k}, k\right) &= K(k) + i \cdot K'(k) \\ E\left(\frac{1}{k}, k\right) &= E(k) + i \cdot (K'(k) - E'(k)) \end{cases} \quad (4.51)$$

Les conditions $f(1) = p_1 + i \cdot p_2$ et $f(1/k) = -p_1 + i \cdot p_2$ permettent de trouver la relation :

$$\frac{2(k'^2 K - 2E)}{k'^2 K' - 2(K' - E')} = \frac{p_2}{p_1} \quad (4.52)$$

Une résolution par dichotomie va alors permettre de calculer le rapport $k < 1$. Une fois ce nombre connu, la deuxième inconnue, qui est le module conforme S de la transformation, peut être déterminée par la relation suivante :

$$S = i \frac{2p_1}{k'^2 K' - 2(K' - E')} \quad (4.53)$$

Il est possible de faire une seconde transformation conforme du plan des nombres complexes \bar{w} au plan des nombres complexes \bar{t} (figure 4.33), telle que $\bar{w} = g(\bar{t})$. Il s'agit de la fonction exponentielle $g(\bar{t}) = \exp(\bar{t})$. La fonction complexe composée, permettant de passer directement du plan des nombres complexes \bar{t} au plan des nombres \bar{z} , est notée $h = f \circ g$. Dans ce nouveau plan des nombres complexes \bar{t} , l'avantage est que le calcul du champ magnétique est immédiat : ce dernier est uniforme, et égal à $H_S = -1/\pi$. Par conséquent, le champ magnétique réel recherché dans le plan des nombres complexes \bar{z} est donné par la formule, d'après la théorie du potentiel [Schinzinger et Laura, 2003] :

$$H_y = \text{Im} \left(\frac{i}{\pi} \frac{1}{h'(\bar{t})^*} \right) \quad (4.54)$$

À présent, le champ magnétique sur l'axe ($0z$) de la figure 4.32 est connu. Pour passer de ce champ magnétique $H_y(z)$ à la fonction perméance relative $m(z)$ traduisant les effets de bords du fer, il suffit de normaliser le champ magnétique par la valeur de ce dernier si tout effet de bord du fer était négligeable, égal à $1/h_a+e_c$.

Nous nous proposons de valider par éléments finis cette méthode de calcul de la perméance relative $m(z)$. En effet, le calcul de la décroissance du champ magnétique au voisinage des bords de la partie en fer peut être effectué en simulant, par éléments finis 2D en potentiel magnétique scalaire, la géométrie montrée à la figure 4.32, puis en calculant le champ magnétique sur la ligne se situant au milieu de l'entrefer, et en le divisant par la quantité $1/h_a+e_c$. Nous prenons pour cette simulation :

- une épaisseur W suivant l'axe ($0z$) du fer égale à 0.1m.
- un entrefer équivalent $h_a + e_c$ suivant l'axe ($0y$) égal à 0.04m.

Le tracé des lignes de champ obtenu par éléments finis est donné à la figure 4.34. Afin d'apprécier la concordance entre les résultats fournis par la méthode éléments finis, nous autorisons la coordonnée z à varier au delà des parties ferromagnétiques, entre $-3W/2$ et $3W/2$. La comparaison entre les résultats obtenus par éléments finis et analytiques est montrée à la figure 4.35. Nous y voyons une bonne concordance entre les résultats des deux méthodes.

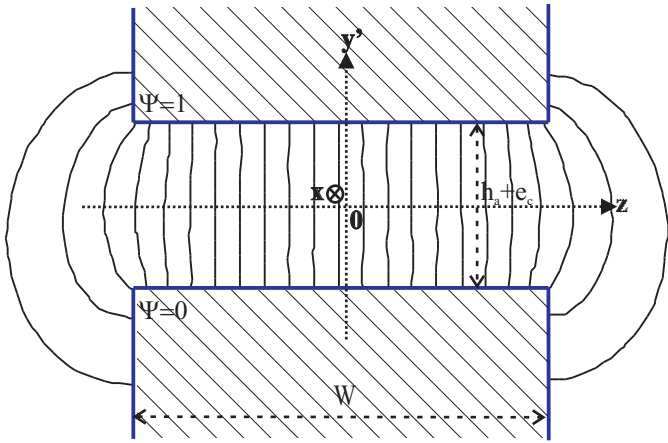


FIGURE 4.34: Lignes de champ obtenues par la simulation éléments finis bi-dimensionnelle effectuée pour vérifier le calcul de la fonction perméance relative $m(z)$ traduisant les effets de bords du fer

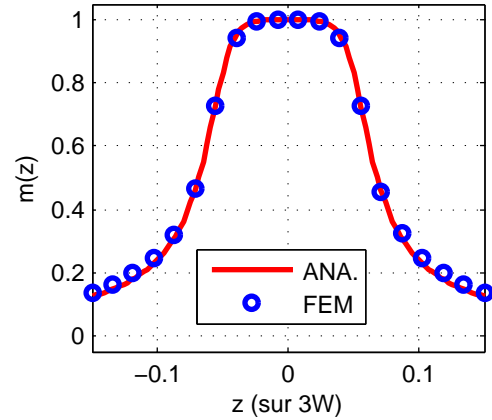


FIGURE 4.35: Tracé de la perméance relative $m(z)$ par éléments finis, et par la méthode analytique

Une fois la perméance relative connue, il est alors possible de l'appliquer, comme on l'a vu, pour pondérer les inductions obtenues par la méthode 3D et quasi-3D, afin de tenir compte de l'épaisseur finie W suivant la troisième dimension des parties ferromagnétiques.

4.2.2.4 Comparaison des modèles quasi-3D et 3D entre eux, et avec la méthode des éléments finis 3D

Dans cette partie, nous nous proposons de comparer les modèles analytiques entre eux, et avec la modélisation par éléments finis 3D. Dans ce but, nous allons prendre les dimensions suivantes pour les machines étudiées :

- Une hauteur d'aimants $h_a = 0.003\text{m}$.
- Un entrefer $e = 0.002\text{m}$.
- Un pas polaire $\tau = 0.05\text{m}$.
- Une épaisseur de culasses de parties mobiles et fixes égales, et valant $e_{cs} = e_{cr} = 0.01\text{m}$ (ceci est inutile pour le modèle analytique, mais doit en revanche être défini pour construire le modèle éléments finis qui servira pour vérifier les résultats).
- Une profondeur d'encoche égale à $h_e = 0.03\text{m}$. L'ouverture relative des dents par rapport au pas dentaire est égale à $\beta_e = 1/2$, ce qui signifie que la largeur des encoches w_e est égale à la largeur des dents w_d , et que l'on a $w_e = w_d = \tau_s/2$, où τ_s est le pas dentaire. On prend en outre trois encoches par pôles, donc $\tau_s = \tau/3$. Avec cette

géométrie des encoches de la partie lisse, l'entrefer corrigé par le coefficient de Carter vaut approximativement $e_c = 0.0024\text{m}$.

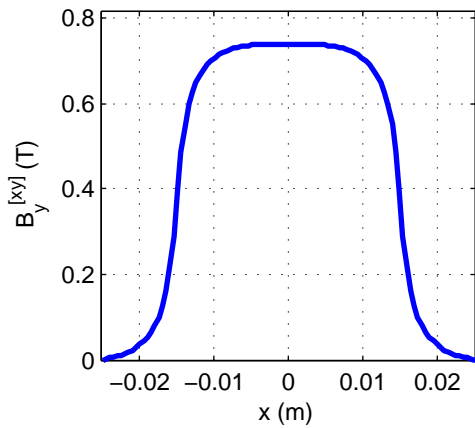
- L'ouverture relative des aimants par rapport au pas dentaire τ est prise égale à $\beta_a = 0.8$. Une autre valeur plus petite pourra être envisagée, avec $\beta_a = 0.1$, afin de tester la validité du coefficient de Carter lorsque la largeur de l'aimant est plus petite que le pas dentaire.
- Nous utilisons des aimants de type NdFeB, pourvus d'une induction rémanente de $B_r = 1.2\text{T}$ à une température de 25°C .
- Nous allons faire varier le rapport W/τ (rapport entre l'épaisseur des parties ferromagnétiques W et le pas polaire τ), afin de mettre plus ou moins en défaut l'hypothèse de modélisation 2D, qui est fondée sur l'hypothèse d'un ratio W/τ infini.
- La largeur W_m de l'aimant est prise égale à 80% de l'épaisseur des parties ferromagnétiques W .

Cartographie d'induction obtenue Nous proposons, dans cette section, de donner une représentation des allures des inductions d'axe ($0y$) en la coordonnée $y = h_a + e_c$ trouvées pour les différents modèles analytiques, qui, après intégration, donnent le flux qui traverse l'entrefer de l'actionneur, grandeur directement proportionnelle à la force développée par ce dernier.

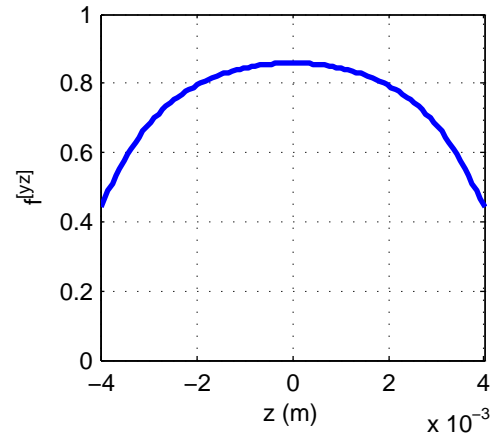
Cas où $W/\tau = 0.2$ Nous allons prendre un rapport W/τ égal à 0.2. Cette valeur, choisie volontairement petite, va nous permettre d'augmenter les effets de bords que nous souhaitons modéliser par les modèles 3D. Au niveau de la figure 4.36, nous avons fait figurer les fonctions intervenant dans la modélisation quasi-3D de l'actionneur linéaire, à savoir l'onde d'induction $B_y^{[xy]}(x, y = h_a + e_c)$ sur un pas polaire τ calculée par le modèle 2D négligeant toute saillance, ainsi que la fonction $f^{[yz]}(y = h_a + e_c, z)$ sur l'intervalle $z \in [-W_m/2; W_m/2]$ (utile pour en déduire le flux par intégration) qui multiplie l'induction $B_y^{[xy]}(x, y = h_a + e_c)$ dans l'hypothèse quasi-3D de découplage des plans ($0xy$) et ($0yz$). Nous y voyons que, à cause de la finesse de l'actionneur suivant l'axe ($0z$) (on a choisi $W/\tau = 0.2 \ll 1$), la fonction $f^{[yz]}(y = h_a + e_c, z)$, même en $z = 0$ (centre de l'actionneur), n'est jamais égale à 1, ce qui signifie que la décroissance de la composante d'induction $B_y^{[xy]-[yz]}$ à cause des effets de bords se fait sentir dans toute la mince épaisseur de l'actionneur, même au centre. Bien sûr, c'est au voisinage des bords des aimants, en $z = \pm W_m/2$, que cette décroissance due aux effets de bords se fait le plus sentir, diminuant alors presque de moitié l'induction obtenue. Au niveau de la figure 4.37, nous avons représenté la composante d'axe ($0y$) obtenue $B_y^{[xyz]}(x, y = h_a + e_c, z)$ par le modèle analytique réellement tri-dimensionnel, sur l'intervalle $(x, z) \in [-\tau/2; \tau/2] \times [-W_m/2; W_m/2]$ d'intégration du flux. Afin de comparer de manière locale les inductions entrant dans le stator obtenues par les modèles quasi-3D et 3D, on se propose de tracer la fonction suivante, rapport entre ces deux composantes d'induction :

$$K_B^{[xyz]/[xy]-[yz]}(x, y, z) = \frac{B_y^{[xyz]}(x, y, z)}{B_y^{[xy]-[yz]}(x, y, z)} \quad (4.55)$$

Sur la figure 4.38, on a tracé $K_B^{[xyz]/[xy]-[yz]}(x, y = h_a + e_c, z)$ sur l'intervalle $(x, z) \in [-\tau/2; \tau/2] \times [-W_m/2; W_m/2]$ d'intégration pour en déduire le flux. Nous y voyons que, dans la zone au-dessus de l'aimant ($x \in [-\beta_a\tau/2; \beta_a\tau/2]$), la décroissance de la composante d'induction d'axe ($0y$) de l'aimant à cause des effets de bords est la même quelque soit le modèle utilisé. En revanche, au voisinage des bords des aimants, où, comme signalé, les lignes de fuites des inductions sont réellement tri-dimensionnelles, ce rapport devient légèrement supérieur à l'unité, montrant que le modèle quasi-3D tend à surestimer légèrement les fuites, ces dernières étant comptées doublement (une fois dans le plan ($0xy$) avec le modèle 2D, une autre fois dans le plan ($0yz$) de la modélisation quasi-3D, et donc le trajet des lignes de fuites en bordure d'aimant avec le modèle quasi-3D est moins réticent que pour le modèle 3D, comme suggéré par la figure 4.26). La figure 4.38 montre aussi l'échec du modèle quasi-3D à prédire l'induction dans la zone inter-aimants. Cet effet vient bien entendu du principe même du modèle quasi-3D, qui suppose, lors du calcul de la fonction $f^{[yz]}(y, z)$, que l'aimant est uniforme et infini suivant l'axe ($0x$), donc est incapable de prédire le comportement de la topologie au voisinage des bords de l'aimant, et encore moins dans la zone inter-aimants. Cela étant, nous verrons, dans la partie suivante, que cette erreur n'a pas de conséquence flagrante sur le flux de la machine estimé par le modèle quasi-3D, l'espace inter-aimants étant une partie passive qui ne contribue pas à la génération de flux dans le stator.



(a) Induction $B_y^{[xy]}(x, y = h_a + e_c)$ sur un pas polaire τ obtenue en appliquant le modèle 2D à l'actionneur considéré



(b) Fonction de modulation $f^{[yz]}(y = h_a + e_c, z)$ sur l'intervalle $[-W_m/2; W_m/2]$ multipliant l'induction $B_y^{[xy]}(x, y = h_a + e_c)$ pour tenir compte des effets de bords

FIGURE 4.36: Les fonctions impliquées dans la modélisation quasi-3D de l'actionneur linéaire, pour une valeur de rapport $W/\tau = 0.2$

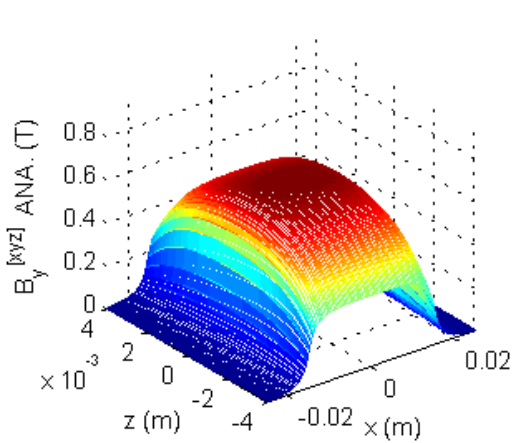


FIGURE 4.37: Induction $B_y^{[xyz]}(x, y = h_a + e_c, z)$ obtenue par application du modèle analytique 3D, pour une valeur de rapport $W/\tau = 0.2$

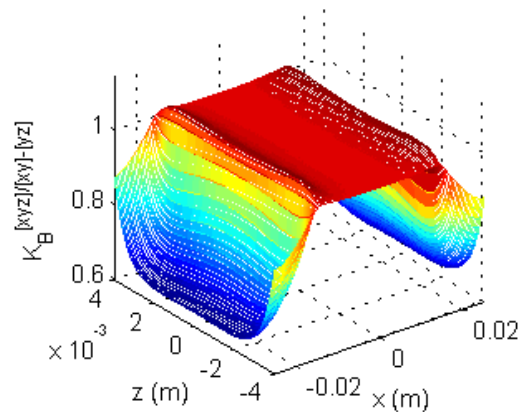


FIGURE 4.38: Rapport $K_B^{[xyz]/[xy]-[yz]}(x, y = h_a + e_c, z)$ entre les inductions obtenues en 3D en quasi-3D, pour une valeur de rapport $W/\tau = 0.2$

Cas où $W/\tau = 2$ Après avoir donné un aperçu du cas où les effets de bords sont prépondérants du fait de la faible valeur du rapport W/τ , nous pouvons aussi montrer les allures des courbes obtenues lorsque, au contraire, le rapport W/τ est plus important, de telle manière à pouvoir reléguer les effets de bords à des effets parasites. Nous allons ainsi prendre une valeur $W/\tau = 2$. La composante d'induction issue du modèle 2D $B_y^{[xy]}(x, y)$ reste bien entendu inchangée. La fonction de modulation $f^{[yz]}(y = h_a + e_c, z)$, dans ce cas, est montrée à la figure 4.39. Quant à la cartographie bi-dimensionnelle d'induction obtenue en appliquant le modèle analytique 3D $B_y^{[xyz]}(x, y = h_a + e_c, z)$, cette dernière est montrée à la figure 4.40. Comme attendu, nous voyons, sur ces figures, que les effets de bords sont beaucoup moins perceptibles que dans le cas précédent : mis à part au niveau des extrémités de l'aimant en la coordonnée $\pm W_m/2$, la fonction de modulation $f^{[yz]}(y = h_a + e_c, z)$ est quasiment égale à 1, alors que l'onde bi-dimensionnelle

$B_y^{[xyz]}(x, y = h_a + e_c, z)$ est très semblable, pour toute coordonnée z , à l'onde $B_y^{[xy]}(x, y = h_a + e_c, z)$ montrée à la figure 4.36(a). Il apparaît donc que l'approximation 2D, dans le cas de rapports W/τ valant quelques unités, semble légitime, l'erreur sur le flux ne devant pas être considérable. L'étude qui suit va nous aider à préciser ces notions sur l'importance relative des effets de bords sur le flux en fonction du rapport W/τ représentant l'épaisseur de l'actionneur relativement au pas polaire, afin d'apprécier la validité de l'hypothèse 2D.

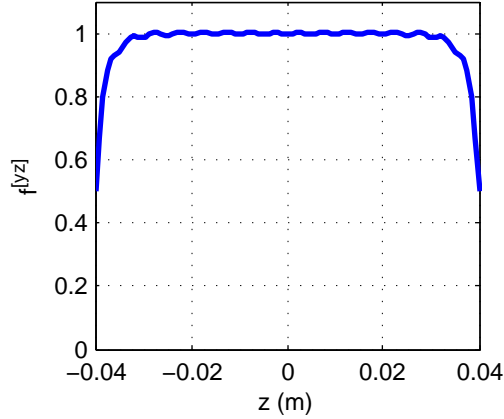


FIGURE 4.39: Fonction de modulation $f^{[yz]}(y = h_a + e_c, z)$ sur l'intervalle $z \in [-W_m/2; W_m/2]$ multipliant l'induction $B_y^{[xy]}(x, y = h_a + e_c)$ pour tenir compte des effets de bords, pour une valeur de rapport $W/\tau = 2$

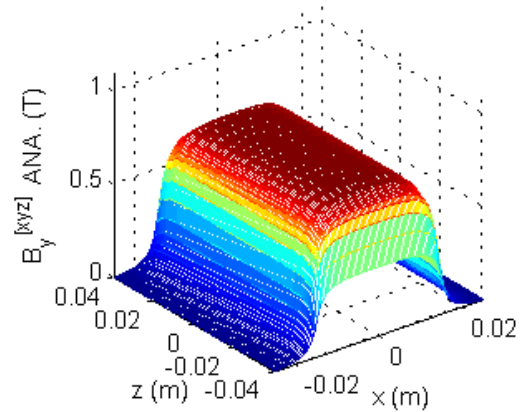
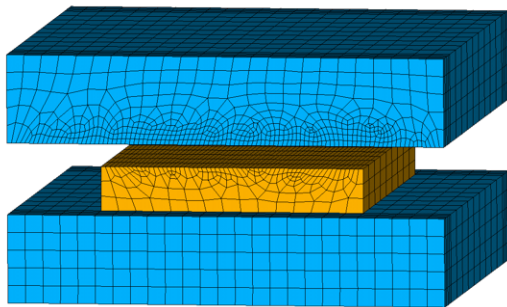
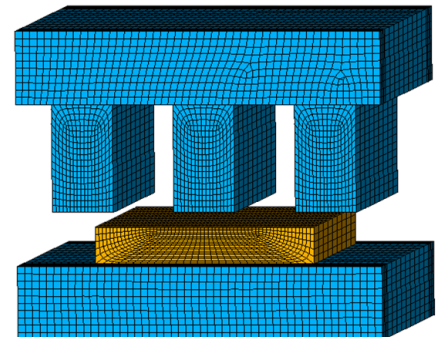


FIGURE 4.40: Induction $B_y^{[xyz]}(x, y = h_a + e_c, z)$ obtenue par application du modèle analytique 3D, pour une valeur de rapport $W/\tau = 2$ entre l'épaisseur W du fer suivant ($0z$) et le pas polaire τ

Etude des ratios de flux obtenus par les différents modèles Dans cette partie, nous allons étudier l'évolution des ratios $K_\varphi^{[xy]-[yz]/[xy]}$ et $K_\varphi^{[xyz]/[xy]}$ entre les flux obtenus par les deux modèles présentés ci-dessus, et le flux 2D, afin d'apprécier l'erreur introduite par le modèle 2D du chapitre précédent sur le flux, donc sur la force de l'actionneur. Cette étude sera faite en fonction du ratio W/τ qui quantifie l'épaisseur relative de l'actionneur par rapport au pas polaire τ . Les résultats sur le flux seront aussi vérifiés par éléments finis. Dans un premier temps, nous allons utiliser un modèle éléments finis négligeant, comme le modèle analytique, les encoches, grâce à l'utilisation du coefficient de Carter. La même étude sera faite en introduisant, par éléments finis, les encoches réelles de l'actionneur, puisque ceci est possible par éléments finis. Les deux modèles éléments finis 3D de l'actionneur linéaire sont schématisés à la figure 4.41.



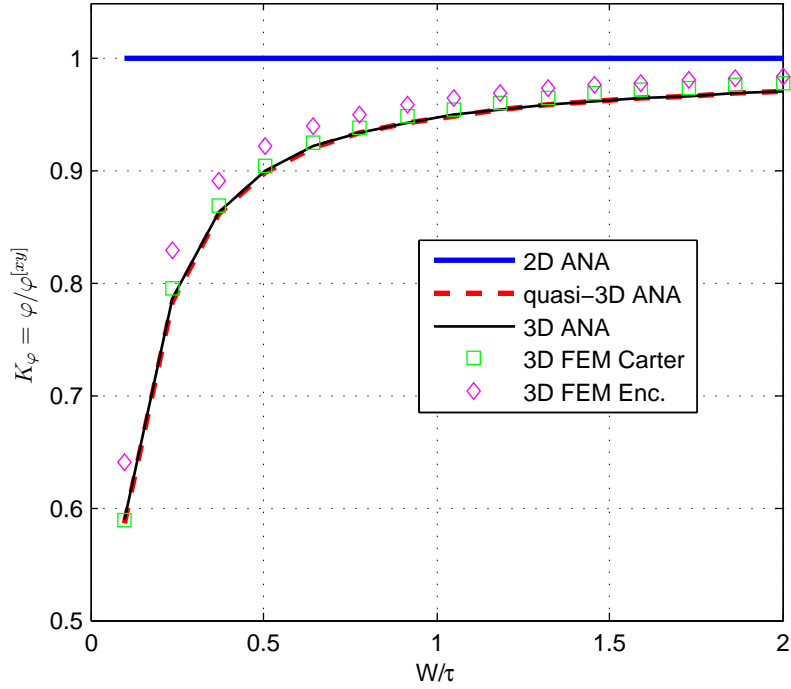
(a) La machine linéaire équivalente simulée par éléments finis, en négligeant l'effet des encoches grâce au coefficient de Carter, comme dans le modèle analytique



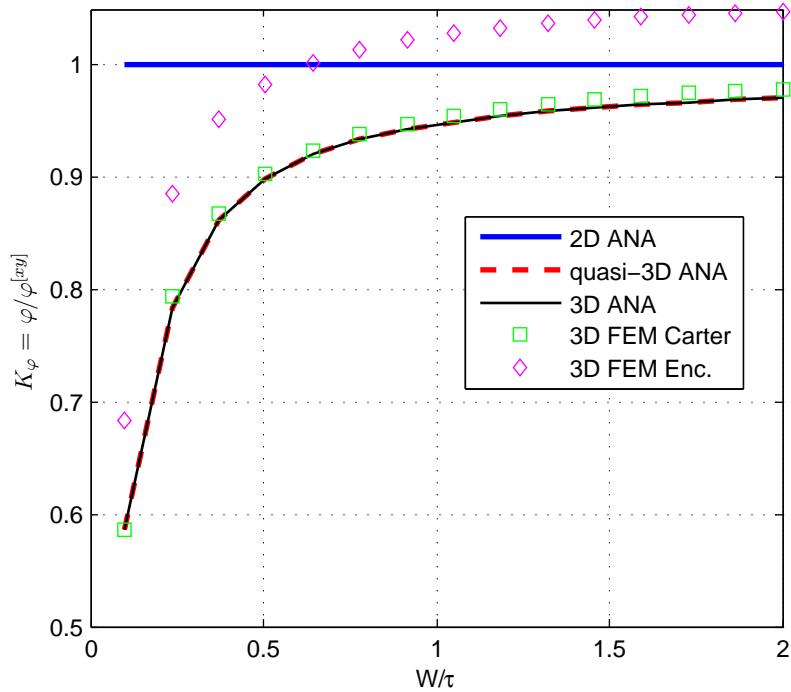
(b) La machine linéaire équivalente simulée par éléments finis, en faisant figurer les encoches

FIGURE 4.41: La machine linéaire équivalente simulée par éléments finis

Au niveau des figures 4.42a et 4.42b, nous avons tracé le rapport $K_\varphi = \hat{\varphi}/\hat{\varphi}^{[xy]}$ entre les flux maximaux entrant dans le stator donnés par les différents modèles, et les flux maximaux $\hat{\varphi}^{[xy]}$ donnés par un modèle 2D de l'actionneur, en fonction de l'épaisseur relative W/τ du fer par rapport au pas polaire τ . La figure 4.42a donne le résultat de la simulation pour une largeur relative de l'aimant par rapport au pas polaire grande ($\beta_a = 0.8$), alors que la figure 4.42b donne le même résultat pour une largeur relative de l'aimant par rapport au pas polaire faible ($\beta_a = 0.1$). L'épaisseur relative W/τ du fer par rapport au pas polaire τ varie de 0.1 (actionneur très mince) à 2 (actionneur épais, pour lequel l'hypothèse 2D est valable). Les résultats trouvés confirment, pour les deux cas, l'évolution attendue au paragraphe précédent : plus l'actionneur est fin, plus l'hypothèse 2D surestime le flux, et une erreur pouvant atteindre un facteur 2 sur le flux est observée pour les plus minces valeurs d'actionneurs ($W = 0.1 \cdot \tau$). En revanche, il semble, pour les topologies étudiées que dès que l'épaisseur W du fer atteint la moitié de celle du pas polaire ($W \geq 0.5 \cdot \tau$), l'erreur sur le flux est inférieure à 10%. Sur les deux figures (figure 4.42a avec $\beta_a = 0.8$, et figure 4.42b, avec $\beta_a = 0.1$), il semble que les résultats numériques fournis par les modèles quasi-3D et 3D soient totalement confondus. Le cas $\beta_a = 0.1$ a été introduit dans l'espoir, du fait que l'on prend un aimant très fin par rapport au pas polaire, d'augmenter artificiellement la part du flux de fuites sur les bords de l'aimant, flux que le modèle quasi-3D n'arrive pas à prévoir correctement. Ceci étant, cette tentative s'est tout de même avérée infructueuse pour tenter d'observer un écart significatif entre les deux types de modélisation, le flux de fuites au niveau des coins de l'aimant restant tout de même marginal. Qui plus est, dans les deux cas, les résultats fournis par les modèles analytiques sont très proches de ceux fournis par les modèles éléments finis 3D sans encoche (où on utilise le coefficient de Carter), ce qui valide, sous les hypothèses formulées, la méthode de calcul. En revanche, la comparaison avec les éléments finis 3D prenant en compte l'encoche réel du stator appelle certains commentaires. En effet, nous avons signalé, lors de l'énoncé des hypothèses simplificatrices, que l'utilisation du coefficient de Carter dans ce cas était abusive, et ce pour plusieurs raisons : d'une part, cette méthode est discutable dans les machines à aimants, même si l'hypothèse de modélisation 2D fonctionne, car la période spatiale de l'excitation n'est jamais très grande par rapport au pas dentaire, ce que suppose pourtant le coefficient de Carter. Cette erreur est tout-à-fait visible sur les figures de résultats, où on peut voir que pour le cas de la figure 4.42a ($\beta_a = 0.8$), l'écart entre les modèles 3D sans encoches, et le modèle éléments finis avec encoches est bien plus réduit que dans le cas d'une largeur d'aimant $\beta_a = 0.1$ fine en regard du pas polaire (figure 4.42b). En effet, si l'aimant occupe une part importante du pas polaire, il est a fortiori bien plus grand que le pas dentaire, et alors l'hypothèse du coefficient de Carter où l'excitation a une période spatiale très grande par rapport au pas dentaire est assez réaliste. En revanche, dans le cas où la largeur relative de l'aimant par rapport au pas polaire τ est égale à $\beta_a = 0.1$, l'aimant, situé au centre du pas dentaire, est même moins large qu'une dent statorique (il se trouve au centre du pas polaire, et donc, d'après la figure 4.41, juste sous une dent statorique qui est plus large que lui). Par conséquent l'entrefer équivalent vu par l'aimant ne serait pas l'entrefer corrigé par le coefficient de carter e_c , mais plutôt l'entrefer réel $e < e_c$. Ceci explique pourquoi le modèle à entrefer lissé, à la figure 4.42b, tend à sous-estimer le flux réel traversant l'entrefer (d'ailleurs, dans ce cas extrême, il est tout-à-fait étonnant de s'apercevoir que modèle éléments finis 3D réel avec encoches mène à des valeurs de flux supérieures à celles que l'on obtient avec le modèle 2D à entrefer lissé, bien que ce dernier, par principe même, n'intègre aucun effet de bord). D'autre part, il est clair que l'application du coefficient de Carter souffre également du fait que son utilisation n'est pas valide en trois dimensions : par exemple, à la figure 4.42a où l'application du coefficient de Carter est assez légitime à cause de la longueur de l'aimant, on voit que les résultats sur les flux en comparaison du cas où le stator est lissé sont presque confondus pour des valeurs importantes du ratio W/τ , alors que l'écart se creuse pour des valeurs de ratio W/τ faibles, où les parcours de lignes de champ sont, pour une part essentielle, tri-dimensionnels. Nous pouvons en outre préciser que, même si l'application du coefficient de Carter donne de bons résultats sur le flux (cas où la longueur de l'aimant est grande $\beta_a = 0.8$, et où le ratio $W/\tau = 2$ est important pour justifier l'hypothèse 2D), la concordance n'a lieu que sur les flux, qui sont des grandeurs intégrales, et non sur la forme locale d'induction $B_y^{[xyz]}(x, y = h_a + e_c, z)$, comme le montre la figure 4.43, où on a simulé par éléments finis l'onde d'induction entrant dans le stator de la machine par éléments finis en tenant compte des encoches. Cette dernière n'a rien à voir localement avec l'onde calculée analytiquement à la figure 4.40 (c'est la même géométrie) en lissant le stator, bien que la figure 4.42a montre une parfaite similitude sur les flux obtenus.



(a) Cas où la largeur relative de l'aimant par rapport au pas polaire est prise égale à $\beta_a = 0.8$



(b) Cas où la largeur relative de l'aimant par rapport au pas polaire est prise égale à $\beta_a = 0.1$

FIGURE 4.42: Tracé des rapports K_φ des flux maximaux $\hat{\varphi}$ obtenus au moyen des différents modèles par rapport au flux maximal 2D $\hat{\varphi}^{[xy]}$ en fonction de l'épaisseur relative de l'actionneur par rapport au pas dentaire W/τ

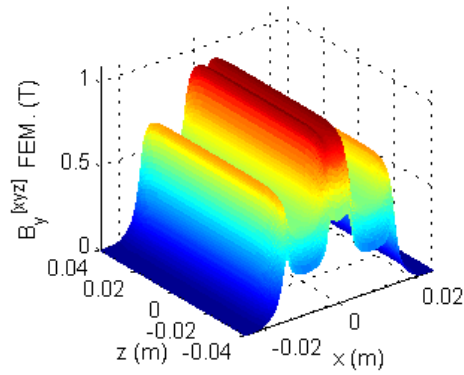


FIGURE 4.43: Tracé de la forme d'induction $B_y^{[xyz]}(x, y = h_a + e_c, z)$ obtenue après un calcul élément finis 3D prenant en compte les encoches du stator, avec un ratio $W/\tau = 2$, et une longueur relative des aimants de $\beta_a = 0.8$ (correspond au cas calculé analytiquement à la figure 4.40)

Etude de l'influence de la fonction de modulation $m(z)$ prenant en compte l'épaisseur finie du fer du stator Nous allons, dans ce paragraphe, étudier la nécessité de l'utilisation de la fonction de modulation $m(z)$ prenant en compte la longueur finie W des parties ferromagnétiques de la machine. En effet, on peut se poser la question de savoir dans quelle mesure le fait de négliger ce phénomène nous conduit à surestimer la valeur du flux dans la machine. Nous allons, dans cette étude, considérer le cas où le ratio $K_W = W/\tau$ est égal à 0.4 (cela signifie que l'on a, puisque $\tau = 0.05\text{m}$, $W = 0.02\text{m}$). Afin d'augmenter plus ou moins l'influence de l'effet de bord du fer, nous faisons varier, à W fixé, la hauteur de l'entrefer équivalent magnétique $h_a + e_c = k_c(h_a + e)$, par le biais d'une variation sur la hauteur h_a des aimants. Nous avons montré, lorsque nous calculions la fonction perméance relative $m(z)$ à l'aide des transformations conformes, que le rapport $K_{p_1/p_2} = p_1/p_2 = \frac{W}{h_a + e_c}$ (nous avons introduit les notations $p_1 = \frac{W}{2}$ et $p_2 = \frac{h_a + e_c}{2}$) jouait un rôle important dans la détermination de la fonction perméance relative $m(z)$. C'est pour cela que nous nous proposons d'étudier les rapports des flux $K_\varphi^{[xyz]/[xy]} = \frac{\varphi^{[xyz]}}{\varphi^{[xy]}}$ pour le modèle 3D analytique en fonction du rapport K_{p_1/p_2} qui varie à cause des variations de la hauteur des aimants h_a , avec et sans la prise en compte de la fonction perméance relative $m(z)$. Nous rappelons que si nous ne prenons pas en compte cette fonction perméance relative, la longueur finie des aimants W_m étant prise en compte intrinsèquement dans le modèle 3D, cela revient à supposer que ces aimants sont posés sur un plan ferromagnétique infini comme dans la figure 4.31 ($W/W_m \rightarrow \infty$).

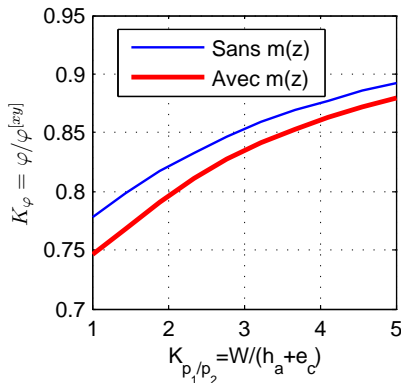


FIGURE 4.44: Effet de la prise en compte de la fonction perméance relative $m(z)$ sur le rapport des flux $K_\varphi^{[xyz]/[xy]}$ en fonction de K_{p_1/p_2}

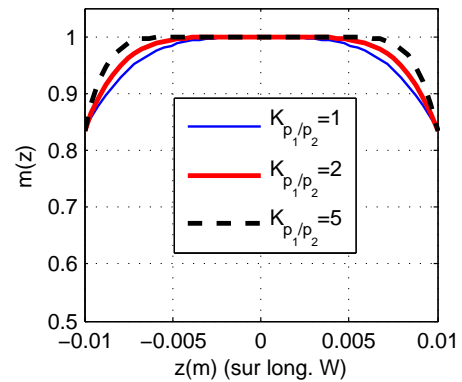


FIGURE 4.45: Allure de la fonction perméance relative $m(z)$ sur l'intervalle $z \in [-\frac{W_m}{2}; \frac{W_m}{2}]$ pour différentes valeurs du rapport K_{p_1/p_2}

Le résultat, qui est le rapport du flux $K_\varphi^{[xyz]/[xy]}$ en fonction de K_{p_1/p_2} , est montré au niveau de la figure 4.44 : on voit qu'effectivement, le fait de ne pas prendre en compte les effets de bords du fer peut être la cause d'une certaine surestimation du flux dans la machine. Néanmoins, même pour $K_{p_1/p_2} = 1$, ce qui signifie que $W = h_a + e_c$, cette surestimation ne dépasse jamais 3%, tendant à prouver que la non-prise en compte de $m(z)$ n'introduit pas d'erreur trop considérable. Toutefois, l'idée intuitive que les effets de bords dus au fer sont d'autant plus négligeables que la largeur du fer W est grande par rapport à l'entrefer équivalent $h_a + e_c$ est confirmée par la figure 4.44, où les deux rapports $K_\varphi^{[xyz]/[xy]}$ avec ou sans $m(z)$ se rapprochent si K_{p_1/p_2} devient grand. La raison en est d'ailleurs expliquée à la figure 4.45, où on voit l'évolution de la perméance relative $m(z)$ sur l'intervalle $z \in [-\frac{W_m}{2}; \frac{W_m}{2}]$: la décroissance de la perméance relative est plus rapide au voisinage des bords pour les épaisseurs de fer W faibles devant l'entrefer magnétique équivalent $h_a + e_c$. Néanmoins, cette décroissance (par rapport à l'unité) reste très restreinte, et ne dépasse jamais 20%.

4.2.3 Extension du modèle 3D au cas d'aimants de forme plus complexe

L'étude précédente a mis en évidence le fait que, bien que le modèle analytique 3D soit plus satisfaisant d'un point de vue mathématique, il ne semble pas offrir, au niveau des résultats numériques, d'amélioration notable sur la prise des effets de bords de l'actionneur, en comparaison du modèle quasi-3D. Ce dernier est pourtant beaucoup plus simple, car il permet un découplage entre le plan de modélisation 2D classique, et le plan dans lequel s'exercent les effets de bords. Néanmoins, nous allons montrer qu'il existe certaines topologies pour lesquelles le découplage entre le plan de modélisation 2D ($0xy$), et le plan ($0yz$) pour la modélisation des fuites et des effets de bords n'est pas toujours possible. C'est notamment le cas des aimants de forme plus complexe que ceux envisagés plus haut (qui sont de forme rectangulaire), comme par exemple le cas des aimants de forme circulaire dans le plan ($0xz$). Bien que cette solution puisse paraître quelque peu étrange et non optimale car elle ne permet pas un remplissage satisfaisant de l'espace alloué aux aimants, certains auteurs [Aydin *et al.*, 2007] ont cependant signalé, justement dans le cadre de la machine à flux axial, qu'une forme ronde pour les aimants pouvait se révéler intéressante sur le plan de la minimisation du couple de détente. Si on développe la machine à flux axial de la référence [Aydin *et al.*, 2007] au niveau de son rayon moyen, il devient légitime de s'intéresser à la machine linéaire à aimants ronds. Nous montrons, au niveau de la figure 4.46, la machine linéaire à aimants ronds considérée, en faisant figurer les encoches du stator, la partie fixe étant sans saillance comme auparavant.

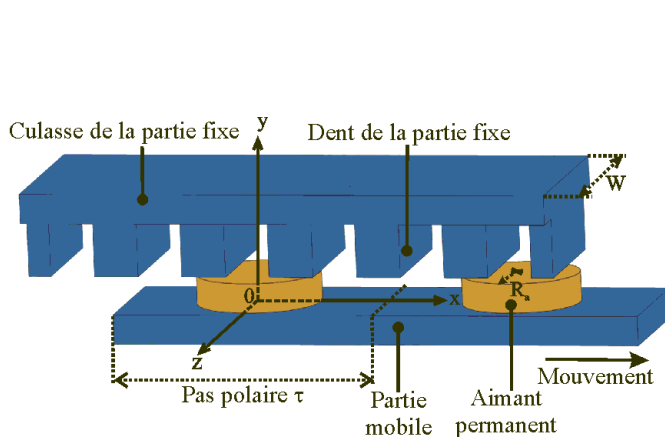


FIGURE 4.46: Représentation de la machine linéaire à aimants de forme circulaire

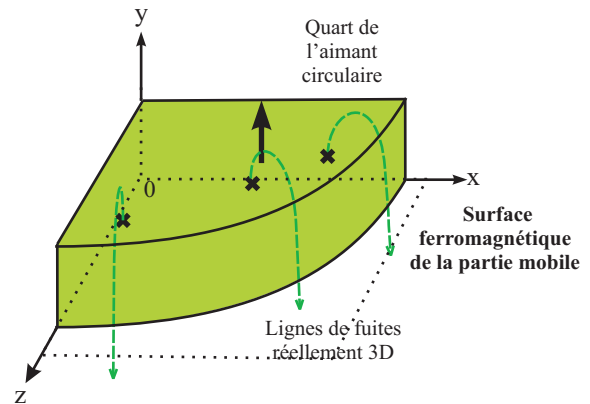


FIGURE 4.47: Schéma des lignes de fuites, nécessairement 3D, qui ont lieu au niveau des aimants de la machine linéaire à aimants circulaires

De simples considérations qualitatives sur les lignes de fuites ayant cours dans le cas de la machine linéaire à aimants circulaires, comme représenté à la figure 4.47, montre que les lignes de fuites ne sont alors, dans leur grande majorité, situées ni dans le ($0xy$), et ni dans le plan ($0yz$) : il est donc impossible de différencier les lignes de fuite dues aux fuites inter-aimants 2D, et celles dues aux effets de bord. Par conséquent, il est donc impossible d'appliquer la méthode quasi-3D, qui est justement fondée sur ce découplage entre lignes de fuites 2D et effets de bords, en les modélisant respectivement dans les plans ($0xy$) et ($0yz$) par des modèles électromagnétiques bi-dimensionnels.

Néanmoins, nous allons démontrer que dans ce cas où la modélisation analytique quasi-3D est inopérante, le modèle analytique 3D proposé, peut, au prix de quelques modifications, être utilisé avec succès.

4.2.3.1 Extension du modèle analytique 3D au cas des aimants circulaires

Dans cette partie, nous allons calculer analytiquement le flux à vide de la machine linéaire à aimants circulaires de la figure 4.46 par notre méthode analytique 3D. La démarche, pour la machine à aimants circulaires, se déduit très simplement de celle précédemment exposée concernant la machine à aimants rectangulaires. Les mêmes hypothèses simplificatrices sont adoptées, à savoir des parties ferromagnétiques idéales, une absence de saillance rotorique, ainsi que l'utilisation d'un entrefer lisse de largeur e_c , tenant compte du coefficient de Carter. Nous notons R_a le rayon des aimants, et $\beta_a = \frac{2R_a}{\tau}$ le coefficient d'occupation du pas polaire τ par les aimants.

Afin d'utiliser le formalisme des séries de Fourier 2D, nous allons, comme auparavant, périodiser fictivement la structure selon l'axe $(0z)$, d'une période $L_z \gg 2R_a$ pour que les structures ne s'influencent pas, et en alternant les polarités des aimants selon l'axe $(0z)$ pour éviter d'avoir une valeur moyenne d'aimantation. Nous adoptons toujours une largeur des parties ferromagnétiques de l'actionneur selon l'axe $(0z)$ égale à W , qui peut éventuellement être supérieure au diamètre $2R_a$ des aimants. Cependant, nous avons vu qu'il n'était pas nécessaire de prendre en compte, dans un premier temps, cette longueur finie W des parties ferromagnétiques de la machine. Nous pouvons en effet calculer la composante d'induction d'axe $(0y)$, notée $B_y^{[xyz]_c}(x, y, z)$ ⁵ en supposant la largeur W infinie, ce qui revient à considérer les parties ferromagnétiques du stator et du rotor comme des plans infinis imposant chacun une condition de Neumann nulle au potentiel vecteur, puis prendre en compte la largeur finie des parties ferromagnétiques W après calcul, par le biais de la multiplication par la perméance relative $m(z)$ calculée auparavant par la transformation conforme. Nous pouvons voir alors la fonction induction rémanente fictivement périodisée dans le plan $(0xz)$ comme représenté à la figure 4.48. Cette série de Fourier s'écrit, comme lors du paragraphe précédent, sous la forme suivante :

$$B_r(x, z) = \sum_{k \geq 1, q \geq 1} B_{r_{k,q}} \cos\left((2k-1)\frac{\pi}{\tau}x\right) \cos\left((2q-1)\frac{\pi}{L_z}z\right) \quad (4.56)$$

Les coefficients $B_{r_{k,q}}$ de la série de Fourier bi-dimensionnelle ci-dessus sont donnés par la formule, pour tout couple d'entiers (k, q) :

$$B_{r_{k,q}} = \frac{1}{\tau L_z} B_r \iint_{D(R_a)} \cos\left((2k-1)\frac{\pi}{\tau}x\right) \cos\left((2q-1)\frac{\pi}{L_z}z\right) dx dz \quad (4.57)$$

Le domaine $D(R_a)$ est le disque de rayon R_a représenté à la figure 4.49, qui représente le domaine occupé par un aimant dans le plan $(0xz)$. L'intégrale 4.57 peut être calculée numériquement, mais cela risquerait d'allonger le temps de calcul, étant donné qu'il s'agit d'intégrer une fonction de deux variables, et qu'il faut refaire le travail pour tout couple d'entiers (k, q) . Un calcul analytique serait donc bien plus intéressant. Afin de calculer donc analytiquement l'intégrale 4.57, nous allons passer en coordonnées polaires (figure 4.49) :

$$\begin{cases} x &= r \cdot \cos \theta \\ y &= r \cdot \sin \theta \end{cases} \quad (4.58)$$

5. Dans cette partie, nous adopterons les notations suivantes. Pour un vecteur \vec{X} , par exemple une induction, calculée en 3D dans la base cartésienne $(0xyz)$, nous noterons, comme dans la partie précédente, toujours ce vecteur $\vec{X}^{[xyz]}$. Cependant, pour rappeler qu'il s'agit d'une induction causée par des aimants circulaires et non rectangulaires, nous nous permettons de noter en indice du symbole « $[xyz]$ » la lettre « c », de sorte que l'on obtient $\vec{X}^{[xyz]_c}$.

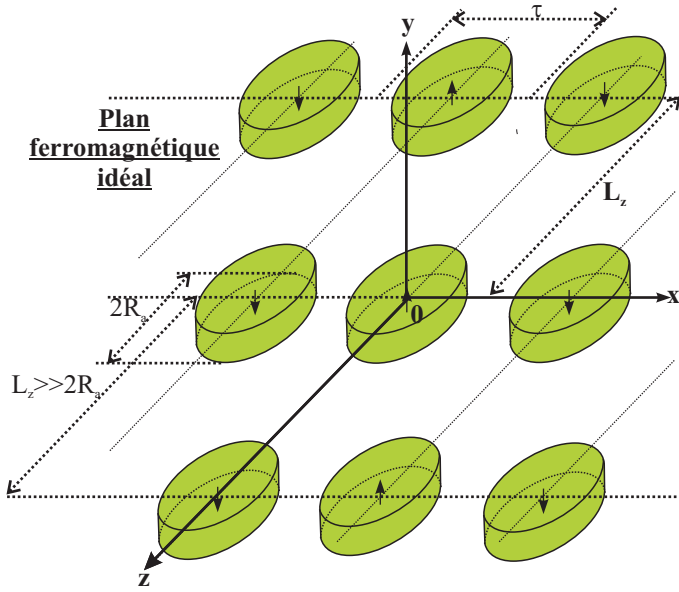


FIGURE 4.48: Périodisation fictive des aimants dans le plan $(0xz)$ dans le cas de la machine à aimants circulaires, afin de pouvoir utiliser le formalisme des séries de Fourier 2D

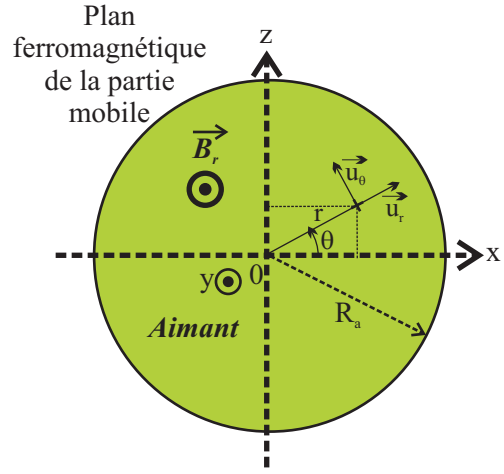


FIGURE 4.49: Calcul des séries de Fourier 2D de l'aimantation dans le cas de la machine à aimants circulaires, en coordonnées polaires

L'intégrale de l'équation 4.57, sur le disque $D(R_a)$ s'écrit, en utilisant les coordonnées polaires :

$$B_{r_{k,q}} = \frac{4}{\tau L_z} B_r \int_{r=0}^{R_a} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \cos\left((2k-1)\frac{\pi}{\tau} r \cos\theta\right) \cos\left((2q-1)\frac{\pi}{L_z} r \sin\theta\right) r dr d\theta \quad (4.59)$$

Dans la référence [Watson, 1995], il est donné les développements en séries de Fourier suivants :

$$\cos\left((2k-1)\frac{\pi}{\tau} r \cos\theta\right) = J_0\left((2k-1)\frac{\pi}{\tau} r\right) + 2 \sum_{m \geq 1} (-1)^m J_{2m}\left((2k-1)\frac{\pi}{\tau} r\right) \cos m\theta \quad (4.60)$$

Ainsi que :

$$\cos\left((2q-1)\frac{\pi}{L_z} r \sin\theta\right) = J_0\left((2q-1)\frac{\pi}{L_z} r\right) + 2 \sum_{n \geq 1} J_{2n}\left((2q-1)\frac{\pi}{L_z} r\right) \cos n\theta \quad (4.61)$$

(les fonctions J_λ , où λ est un réel quelconque, sont les fonctions de Bessel de première espèce d'ordre λ). Avec ces développements, l'intégrale 4.59 va alors s'écrire :

$$\begin{aligned} B_{r_{k,q}} &= \frac{8\pi}{\tau L_z} B_r \int_{r=0}^{R_a} J_0\left((2k-1)\frac{\pi}{\tau} r\right) J_0\left((2q-1)\frac{\pi}{L_z} r\right) r dr \\ &+ \frac{16\pi}{\tau L_z} B_r \sum_{m \geq 1} (-1)^m \int_{r=0}^{R_a} J_{2m}\left((2k-1)\frac{\pi}{\tau} r\right) J_{2m}\left((2q-1)\frac{\pi}{L_z} r\right) r dr \end{aligned} \quad (4.62)$$

Qui plus est, il est aussi démontré, dans la référence [Watson, 1995], que, étant donné trois nombres réels quelconques λ , α et β , on avait le calcul d'intégrale suivant :

$$\int_{r=0}^{R_a} J_\lambda(\alpha r) J_\lambda(\beta r) r dr = R_a \frac{\alpha J'_\lambda(\alpha R_a) J_\lambda(\beta R_a) - \beta J_\lambda(\alpha R_a) J'_\lambda(\beta R_a)}{\beta^2 - \alpha^2} \quad (4.63)$$

On a noté J'_λ la dérivée de la fonction de Bessel de première espèce J_λ , définie par, toujours selon la référence [Watson, 1995] :

$$J'_\lambda = \frac{J_{\lambda-1} - J_{\lambda+1}}{2} \quad (4.64)$$

Les formules 4.63 et 4.64 permettent alors de calculer des coefficients $B_{r_{k,q}}$ pour tout couple d'entiers (k, q) .

Une fois les coefficients du développement en séries de Fourier bi-dimensionnel de la fonction induction rémanente connus, la procédure de calcul du potentiel vecteur, fondée sur la prise en compte des conditions aux limites de Neumann au niveau des plans ferromagnétiques, puis du raccord entre la zone (I) (celle des aimants) et la zone (II) (celle de l'entrefer), pour finir par la jauge de Coulomb pour le calcul des deux composantes de potentiel, est exactement identique à celle mise au point pour l'aimant de forme rectangulaire. Nous ne la détaillerons donc pas une seconde fois. Nous calculons ensuite par dérivation la composante $B_y^{[xyz]'}(x, y, z)$ d'induction d'axe $(0y)$ (en supposant que la largeur des parties ferromagnétiques W est infinie) par dérivation des composantes de potentiel-vecteur :

$$B_y^{[xyz]'}(x, y, z) = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (4.65)$$

Par la suite, la multiplication par la fonction perméance relative $m(z)$ donne la véritable composante d'induction d'axe $(0y)$ à considérer pour le calcul du flux dans la machine :

$$B_y^{[xyz]_c}(x, y, z) = B_y^{[xyz]'}(x, y, z) \cdot m(z) \quad (4.66)$$

Ensuite, une intégration au niveau de la coordonnée $y = h_a + e_c$ permet de calculer le flux maximal à vide de la machine à aimants circulaires :

$$\hat{\phi}^{[xyz]_c} = p \iint_{(x,z) \in [-\frac{\tau}{2}; \frac{\tau}{2}] \times [-\frac{w}{2}; \frac{w}{2}]} B_y^{[xyz]_c}(x, y = h_a + e_c, z) dx dz \quad (4.67)$$

Dans les résultats, nous allons prendre pour flux de normalisation le flux maximal que l'on obtiendrait par une modélisation 1D du flux de l'actionneur linéaire à aimants circulaires. Dans un modèle électromagnétique 1D, l'induction est localisée suivant l'axe $(0y)$, et donnée par l'équation bien connue suivante, au-dessus de l'aimant :

$$B_y^{[y]_c} = \frac{h_a}{h_a + e_c} B_r \quad (4.68)$$

Le flux maximal obtenu par un modèle 1D s'obtient par multiplication de cette induction par la surface d'aimants :

$$\hat{\phi}^{[y]_c} = p \frac{h_a}{h_a + e_c} B_r \pi R_a^2 \quad (4.69)$$

Nous pouvons alors introduire le rapport des flux suivant :

$$K_\phi^{[xyz]_c/[y]_c} = \frac{\hat{\phi}^{[xyz]_c}}{\hat{\phi}^{[y]_c}} \quad (4.70)$$

Ce rapport quantifie, en quelque sorte, la décroissance du flux total à vide de l'actionneur à aimants ronds à cause des fuites que permet de prévoir le modèle 3D, comparativement au flux 1D obtenu en négligeant toute fuite.

Nous pouvons, à titre de comparaison, proposer une méthode simplifiée de calcul du flux à vide de l'actionneur linéaire à aimants circulaires, au moyen d'un modèle 2D. Néanmoins, l'actionneur est fondamentalement une structure tri-dimensionnelle, et la notion de modèle 2D ne peut prendre qu'un sens approximatif. Nous choisissons de définir le flux 2D de référence comme suit : imaginons que nous avons un aimant carré de côté dans le plan $(0xz)$ égal au diamètre de l'aimant rond, c'est-à-dire $2R_a$. Auquel cas, il est possible d'appliquer un modèle 2D à cette structure à aimants carrés. Le flux maximal 2D donné par un tel aimant carré, conformément aux notations précédentes pour le modèle à aimants rectangulaires, est noté $\hat{\phi}^{[xy]}$, et trouvé par l'intégrale suivante :

$$\hat{\phi}^{[xy]} = p 2R_a \int_{x \in [-\frac{\tau}{2}; \frac{\tau}{2}]} B_y^{[xy]}(x, y = h_a + e_c, z) dx \quad (4.71)$$

Cependant, on ne peut pas utiliser directement cette valeur de flux, car un aimant carré ayant le même côté que le diamètre d'un aimant circulaire possède nécessairement une surface plus importante, ce qui aboutit à une surestimation trop importante de la valeur du flux réel. Nous allons donc corriger ce flux maximal 2D dans la machine à aimants carrés de côté $2R_a$ par le rapport entre les surfaces de l'aimant rond et de l'aimant carré. Le flux maximal 2D avec correction de surface, pour la machine à aimants circulaires, sera alors défini comme suit :

$$\hat{\varphi}^{[xy]_c} = \frac{\pi R_a^2}{(2R_a)^2} \hat{\varphi}^{[xy]} \quad (4.72)$$

Nous présenterons le résultat sous la forme normalisée suivante, qui quantifie en fait l'apport du modèle 2D proposé ici dans la prise en compte des fuites ayant lieu dans la machine :

$$K_{\varphi}^{[xy]_c/[y]_c} = \frac{\hat{\varphi}^{[xy]_c}}{\hat{\varphi}^{[y]_c}} \quad (4.73)$$

4.2.3.2 Présentation des résultats

Dans cette partie, nous allons exposer les résultats obtenus concernant le flux à vide de la machine linéaire à aimants circulaires. La géométrie adoptée sera la suivante :

- Une hauteur d'aimants $h_a = 0.003\text{m}$.
- Un entrefer $e = 0.002\text{m}$.
- Un pas polaire $\tau = 0.05\text{m}$.
- Une épaisseur de culasses de parties mobiles et fixes égales, et valant $e_{cs} = e_{cr} = 0.01\text{m}$.
- Une profondeur d'encoche égale à $h_e = 0.03\text{m}$. L'ouverture relative des dents par rapport au pas dentaire est égale à $\beta_e = 1/2$, ce qui signifie que la largeur des encoches w_e est égale à la largeur des dents w_d , et que l'on a $w_e = w_d = \tau_s/2$, où τ_s est le pas dentaire. On prend en outre trois encoches par pôles, donc $\tau_s = \tau/3$. Avec cette géométrie des encoches de la partie lisse, l'entrefer corrigé par le coefficient de Carter vaut approximativement $e_c = 0.0024\text{m}$.
- Nous allons faire varier le rapport entre le diamètre des aimants $2R_a$ et le pas polaire τ sur l'intervalle $[0; 1]$.
- Nous utilisons des aimants de type NdFeB, pourvus d'une induction rémanente de $B_r = 1.2\text{T}$ à une température de 25°C .
- L'épaisseur W des parties ferromagnétiques de la machine s'adapte en fonction du rayon R_a des aimants, de sorte que l'on ait toujours $\frac{2R_a}{W} = 80\%$.

Carte d'induction obtenue par le modèle 3D Fixons le rapport $2R_a/\tau = 0.8$. Nous allons effectuer un tracé de la carte d'induction magnétique entrant dans la partie fixe, nommée $B_y^{[xyz]_c}(x, y = h_a + e_c, z)$, qui, après intégration, nous donnera le flux à vide dans la machine à aimants circulaires. Le résultat est montré à la figure 4.50, sur un pas polaire. L'induction tracée démontre clairement la capacité du modèle à prendre en compte la forme circulaire des aimants. La chute progressive de l'induction de sa valeur maximale au centre de l'aimant (que l'on pourrait calculer par un modèle 1D, au moyen de la formule $\frac{h_a}{h_a + e_c} B_r$), est due aux fuites ayant lieu au voisinage des bords de ce dernier. Par conséquent, si nous réduisons le diamètre de l'aimant $2R_a/\tau \rightarrow 0$, on s'attend à trouver une proportion de fuites plus importante, car la zone de diminution de l'induction due aux fuites au voisinage des bords de l'aimant va alors prendre une proportion plus importante relativement à la surface totale de ce dernier. Nous allons mettre ce phénomène en évidence lors du paragraphe suivant.

Vérification par éléments finis du flux Nous allons tracer le rapport $K_{\varphi}^{[xy]_c/[y]_c} = \frac{\hat{\varphi}^{[xy]_c}}{\hat{\varphi}^{[y]_c}}$ entre les flux maximaux obtenus par le modèle 2D de la machine à aimants circulaires, et le flux de référence 1D, ainsi que le rapport $K_{\varphi}^{[xyz]_c/[y]_c} = \frac{\hat{\varphi}^{[xyz]_c}}{\hat{\varphi}^{[y]_c}}$, quotient entre le flux maximal à vide calculé pour la machine à aimants circulaires avec le modèle 3D, et le flux de référence 1D. Nous faisons varier, le rapport $2R_a/\tau$, soit à τ fixé, le rayon R_a des aimants. Ce rapport est également tracé par une étude éléments finis 3D. La géométrie maillée est représentée à la figure 4.51. Les résultats sont montrés à la figure 4.52. Le modèle éléments finis 3D sera lui aussi construit en utilisant un stator lisse (comme montré à la figure 4.51), car on a vu que, spécialement pour les aimants fins (ici, avec un rayon R_a petit), l'application abusive du coefficient de Carter pouvait fausser les résultats par rapport à la machine réelle encochée. Ce n'est pas ce phénomène que nous souhaitons mettre ici en évidence, mais plutôt la chute du flux

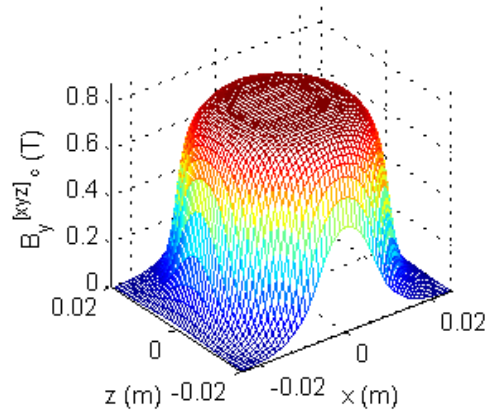


FIGURE 4.50: Carte d'induction à vide $B_y^{[xyz]}_c(x, y = h_a + e_c, z)$ entrant dans la partie fixe, pour la machine à aimants circulaires

à vide due aux effets de bord dans la machine à aimants circulaires, ce qui explique ce choix de modélisation par éléments finis 3D. Les résultats entre le modèle analytique 3D, ainsi que le modèle éléments finis 3D semblent en bon accord. Le calcul prend une dizaine de secondes pour le modèle analytique 3D, contre 5 minutes en moyenne pour le modèle éléments finis 3D, ce qui suggère bien l'intérêt de ce modèle lors d'un processus d'optimisation. Comme prévu, les fuites dues aux effets de bord font sentir leur effet sur la réduction du flux de la machine de manière d'autant plus prononcée que l'aimant est de taille modeste relativement au pas polaire, car la zone de fuites du bord de l'aimant qui subit donc la décroissance d'induction utile prend une proportion d'autant plus conséquente. Cela étant, l'erreur par rapport à un modèle 1D ne dépasse jamais les 20% pour la géométrie considérée. Alors que le modèle analytique 3D et le modèle éléments finis 3D semblent être en parfait accord pour les valeurs du rapport $2R_a/\tau$ les plus importants, une petite erreur (4%) est visible pour les plus petits ratios $2R_a/\tau$. Ceci est dû au fait que lorsque le rapport $2R_a/\tau \ll 1$, la fonction aimantation $B_r(x, z)$, dont les coefficients $B_{r_{k,q}}$ de la série de Fourier bi-dimensionnelle sont donnés par la formule 4.57, nécessite un nombre plus important d'harmoniques, du fait de l'allure impulsionnelle de cette fonction pour un aimant étroit. Nous pourrions donc utiliser un nombre plus important d'harmoniques (pour l'instant, le nombre d'harmoniques utilisé sur le doublet $(k, q) \in [1; N_{inf}]^2$ est pris égal à $N_{inf} = 50$), mais ce serait au détriment du temps de calcul. De plus, il serait à craindre que, pour les indices (k, q) d'ordre élevé, les fonctions de Bessel de la formule 4.59, dont l'ordre sera lui aussi élevé, ne deviennent difficiles à évaluer numériquement, ce qui mènerait à des résultats faussés.

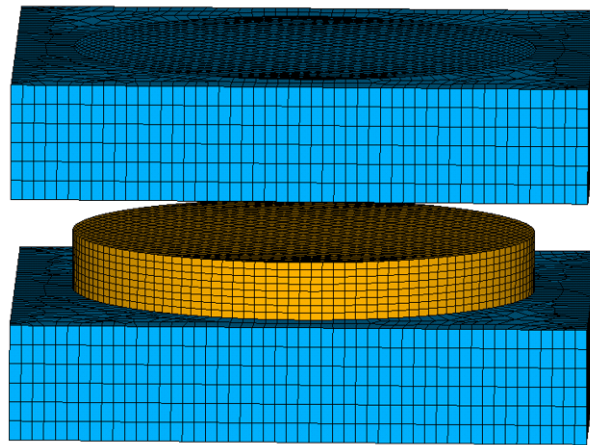


FIGURE 4.51: La machine linéaire maillée avec aimants circulaires simulée par éléments finis 3D, le stator étant lissé par le coefficient de Carter

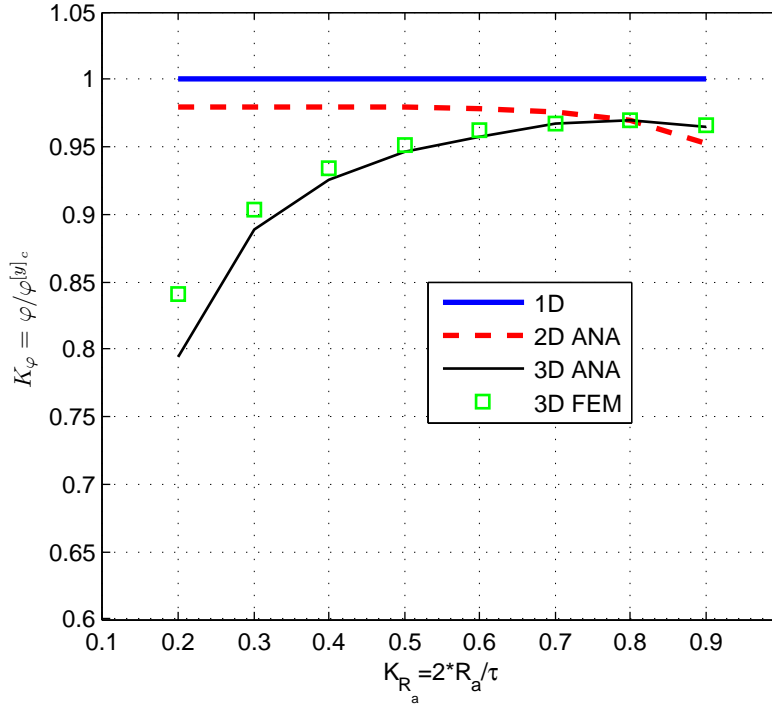


FIGURE 4.52: Rapport $K_\varphi = \frac{\hat{\varphi}}{\hat{\varphi}^{[y]_c}}$ entre des flux obtenus par les modèles 1D, 2D et 3D (analytique et éléments finis) de la machine à aimants circulaires, et le flux 1D $\hat{\varphi}^{[y]_c}$ de la machine à aimants circulaires

Le modèle 2D proposé, quant à lui, semble incapable, du fait de l’hypothèse que les fuites sont localisées uniquement dans le plan (Oxy), de prendre en compte la plupart des effets de bords qui sont réellement tri-dimensionnels, et mène donc à une large surestimation du flux, spécialement dans la zone où les aimants sont minces et que les fuites sont en proportion importantes. A noter cependant que l’on peut observer, sur la figure 4.52, lorsque la largeur des aimants devient importante ($2R_a/\tau \rightarrow 1$), que le flux 2D semble rattraper, et même passer légèrement au-dessous des flux 3D en valeur relative. Ceci est explicable de la manière suivante : le flux des aimants, en 2D, est fondé sur un calcul de flux 2D en prenant des aimants carrés, de côté égal au diamètre des aimants circulaires, le passage à des aimants circulaires n’étant effectué que par multiplication par le rapport des surfaces entre aimant circulaire et aimant carré. Or, pour des valeurs relatives d’occupation des aimants importantes ($2R_a/\tau \rightarrow 1$), les fuites sont augmentées de manière importante, car, en plus des lignes de fuites qui partent directement vers le fer comme on l’a représenté jusqu’à présent, on aura, à cause de la proximité des aimants successifs de polarité alternée, des fuites inter-aimants. Ceci est un processus bien plus pénalisant pour le flux que les fuites directes vers le fer de la partie mobile (en fait, à cause de la proximité de l’aimant voisin de polarité alternée, on peut considérer que chaque trajet de fuites inter-aimants est moitié moins réticent qu’un trajet n’impliquant pas l’aimant voisin de polarité alternée). Or, comme représenté à la figure 4.53, il est clair que, pour des aimants dont le diamètre $2R_a$ est proche du pas polaire τ , les fuites inter-aimants pour la forme carrée sont bien plus importantes que celles de l’aimant circulaire, car elles ont lieu sur toute la longueur du côté de l’aimant (qui vaut $2R_a$), alors que pour l’aimant circulaire (représenté en vert sur la figure 4.53), les fuites inter-aimants restent très ponctuelles, n’ayant lieu qu’au niveau du grand diamètre. Ceci explique pourquoi, à cause des fuites inter-aimants, pour des valeurs du rapport $2R_a/\tau \rightarrow 1$, le modèle 2D, fondé sur la considération de l’aimant carré équivalent, surestime quelque peu les fuites par rapport au modèle 3D, qui bien que plus précis sur les effets de fuite en bordure, ne comporte pas, et à juste titre, autant de fuites inter-aimants. Par conséquent, la difficulté de développer un modèle 2D de ce type de machine nous conforte donc dans l’idée que cette dernière est fondamentalement tri-dimensionnelle.

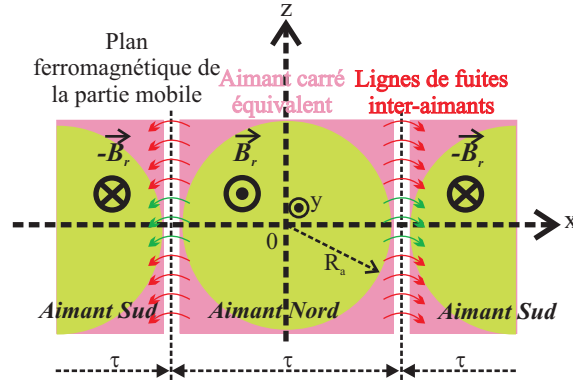


FIGURE 4.53: Lignes de fuites inter-aimants pour des valeurs du $2R_a/\tau \rightarrow 1$, pour les aimants ronds, et pour les aimants carrés de côté égal au diamètre des aimants ronds, qui servent pour le modèle 2D équivalent

Effet de la saturation du matériau ferromagnétique Profitons de cette étude pour apprécier la validité de l'hypothèse de non-saturation des parties ferromagnétiques de la machine. A cet effet, nous nous proposons de refaire l'étude précédente par éléments finis 3D, en introduisant, au lieu de caractéristiques idéales pour les matériaux ferromagnétiques, des caractéristiques saturables. Nous allons abaisser à 5mm les épaisseurs des culasses des parties fixes et mobiles e_{cs} et e_{cr} , afin d'augmenter l'effet de la saturation magnétique. Nous avons utilisé, lors de nos simulations par éléments finis 3D, des caractéristiques $B(H)$ de tôles Fer-Silicium 3%, ainsi que de Fer-Cobalt, matériau reconnu pour avoir une induction à saturation élevée. Les caractéristiques $B(H)$ en question sont montrées à la figure 4.54. Les rapports entre les flux maximaux obtenus, et le flux maximal 1D, pour la machine à aimants circulaires, sont montrés au niveau de la figure 4.55, pour les quatre modèles 3D que sont le modèle analytique 3D, le modèle par éléments finis en supposant les matériaux ferromagnétiques idéaux, ainsi que les modèles éléments finis 3D avec les matériaux FeSi et FeCo. Nous y voyons que le fait de négliger la saturation magnétique, pour des aimants volumineux et donc des flux importants, conduit à une certaine sur-estimation du flux, donc de la force, fournis par l'actionneur. Pour les faibles flux, au contraire, le phénomène de saturation magnétique est évité, car l'induction produite par l'aimant se répartit uniformément dans les culasses pour en éviter la saturation. Nous pouvons voir que, comme on peut s'y attendre, le Fer-Silicium 3% connaît la saturation, le résultat étant un ralentissement de l'augmentation du flux par rapport au cas non-saturé pour des valeurs de rapports $2R_a/\tau \approx 0.5$, soit bien avant les machines en matériau Fer-Cobalt, qui maintiennent quasiment la valeur des flux des machines non saturées, même pour les machines à aimants à grand rayon R_a . Ainsi, pour des valeurs $2R_a/\tau = 0.9$, le ralentissement de l'augmentation du flux par rapport au cas non saturé pour le matériau Fer-Silicium atteint 12%, alors pour pour le Fer-Cobalt, cette valeur est seulement de 3%.

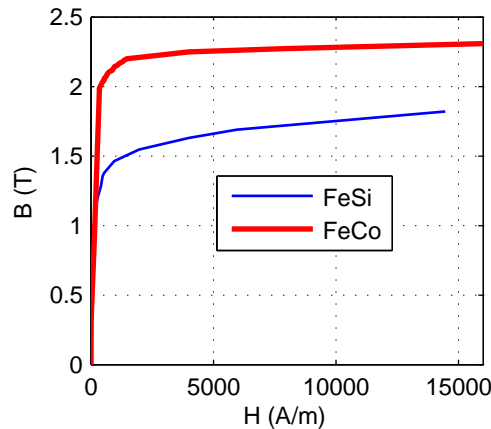


FIGURE 4.54: Courbe $B(H)$ non idéales utilisées pour étudier l'effet de la saturation magnétique

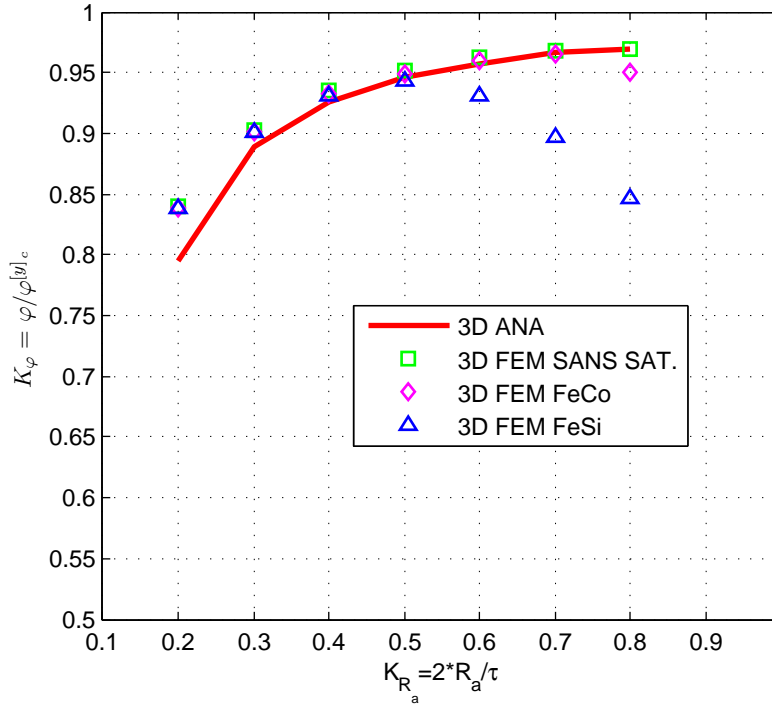


FIGURE 4.55: Rapport $K_\varphi = \frac{\varphi}{|\varphi|_c}$ entre des flux obtenus par les modèles 3D analytique, 3D éléments finis sans saturation, 3D éléments finis avec matériau FeSi, ainsi que 3D éléments finis avec matériau FeCo

4.2.4 Méthode pour le calcul de l'inductance cyclique de la machine

Nous allons ici étendre le modèle du calcul du flux à vide dans l'actionneur linéaire équivalent, afin d'évaluer son inductance cyclique en trois dimensions. En effet, bien que le calcul du couple ne fasse pas intervenir explicitement l'inductance d'un actionneur sans saillance rotorique, la connaissance de l'inductance cyclique est nécessaire pour connaître les performances en régime de défluxage du système électromagnétique. La prise en compte des effets tri-dimensionnels, dans le calcul de cette inductance, va permettre d'améliorer la précision de l'évaluation de cette dernière. Dans un premier paragraphe, nous détaillerons les hypothèses de travail, en faisant ressortir les enjeux de la modélisation tri-dimensionnelle dans le cadre d'un calcul d'inductance. Puis nous détaillerons les calculs analytiques. Nous finirons par l'exposé des résultats obtenus.

4.2.4.1 Hypothèses de travail et enjeux de la modélisation 3D de l'inductance cyclique de la machine linéaire

Nous allons travailler avec la même topologie et les mêmes hypothèses simplificatrices que pour le calcul du flux à vide. La topologie est la machine linéaire à rotor lisse résultant du développement de la machine à flux axial au niveau de son rayon moyen, et nous rappelons les hypothèses simplificatrices :

- l'absence de saturation des matériaux magnétiques, et une perméabilité magnétique infinie pour ces matériaux.
- un entrefer sans encoches, lissé par le biais du coefficient de Carter, qui permet d'obtenir la largeur $e_c > e$ de l'entrefer corrigé.
- une résolution en magnétostatique, sans prise en compte des effets transitoires.

Néanmoins, le calcul d'une inductance cyclique réclame d'autres hypothèses simplificatrices que celles réalisées pour le calcul du flux à vide. En effet, dans le cas de l'aimant, la forme géométrique véritable de ce dernier a pu être prise en compte. Pour le bobinage, avec notre hypothèse de lisser le stator par le biais du coefficient de Carter, le problème est plus compliqué, car les bobines statoriques sont, en réalité, bobinées autour des dents du stator. Comme dans le chapitre précédent, pour les modèles 2D sans prise en compte des encoches au niveau de stator, nous allons donc réduire l'excitation fournie par les courants statoriques à une densité linéique de courant à la surface

interne du stator. Nous pouvons d'ailleurs dire tout de suite que l'inconvénient d'une telle modélisation sera de ne pas prendre en compte les inductances de fuites, qui sont intimement liées à la répartition des bobines d'excitation dans les encoches. La forme réelle de cette densité de courant est obtenue simplement en répartissant, à la surface interne de la partie fixe, une densité linéique de courant, dirigée suivant l'axe ($0z$), dont la forme est imposée par la position géométrique réelle des encoches, et telle que le courant total mis ainsi en jeu soit égal au courant réel dans les bobines de la machine. La figure 4.56 montre cette densité linéique de courant présente à la surface de la partie fixe de la machine. Pour calculer l'inductance cyclique de cette machine sans saillance rotorique, nous injectons, dans la phase « a » de la machine, un courant continu $i_a = I_{max}$, et des courants dans les phases « b » et « c » égaux à $i_b = i_c = -I_{max}/2$. En se rappelant que chaque encoche possède $2n$ conducteurs, et a une largeur w_e , la densité linéique de courant obtenue en chaque position de la paroi de la partie fixe de la machine est montrée à la figure 4.57. Dans le but de se plier aux exigences de la modélisation de Park fondée sur la modélisation linéaire au premier harmonique de la machine électrique, nous sommes amenés à ne considérer que le premier harmonique de cette densité linéique spatiale de courant, comme montré à la figure 4.57. De toute manière, on peut penser qu'en construisant la machine, il sera fait usage de techniques de bobinage plus évoluées, par exemple en répartissant les courants d'une même phase dans plusieurs encoches, ce qui va améliorer la forme sinusoïdale de la densité linéique de courant, par rapport au cas d'une encoche par pôle et par phase que l'on étudie ici. Etant donné la position du repère choisi au niveau des figures 4.56 et 4.57, il est clair que cette densité linéique de courant, dirigée suivant l'axe ($0z$) perpendiculaire au plan de représentation, va s'écrire sous la forme suivante :

$$K_z(x) = -K_{1m} \sin\left(\frac{\pi}{\tau}x\right) \quad (4.74)$$

Nous allons relier l'amplitude K_{1m} du premier harmonique de densité linéique de courant au courant continu de valeur I_{max} que l'on injecte dans la phase « a » (sachant que dans la phase « b » et « c », on injecte le courant $-I_{max}/2$). Dans cette perspective, nous introduisons la fonction de densité linéique algébrique de conducteurs de la phase « a », notée $n_{c_a}(x)$, et égale à :

$$n_{c_a}(x) = -N_{1m} \sin\left(\frac{\pi}{\tau}x\right) \quad (4.75)$$

où, vu que l'on a $2n$ conducteurs par encoche, on a : $N_{1m} = \frac{4n}{\tau}k_{b_1}$, où k_{b_1} est le coefficient de bobinage pour le premier harmonique de répartition des conducteurs. Le quotient $\frac{4n}{\tau}$ serait l'amplitude du premier harmonique de la distribution de conducteurs s'il n'y avait qu'une encoche par pôle et par phase (ce qui est de toute façon le cas ici), mais aussi si la répartition des $2n$ conducteurs par encoche était ponctuelle, en d'autres termes si la fonction de répartition des conducteurs $n_{c_a}(x)$ était formée de masses de Dirac de poids $2n$ au niveau de la position des encoches. Ce n'est pas le cas ici, car la largeur des encoches w_e n'a pas été considérée comme infiniment mince. L'amplitude de la densité linéique de conducteurs $n_{c_a}(x)$ au niveau de la phase « a » n'est donc pas infinie, mais vaut $\frac{2n}{w_e}$. Le coefficient de bobinage au premier harmonique doit prendre en compte ce phénomène d'ouverture de l'encoche de largeur w_e (c'est le seul phénomène à considérer, le raccourcissement ou bien la répartition étant supposés ici inexistants). La référence [Lipo, 2004] a démontré que dans ce cas, le coefficient de bobinage se réduisait à l'expression :

$$k_{b_1} = \text{sin}_C\left(\frac{\pi w_e}{2\tau}\right) \quad (4.76)$$

De manière analogue, le décalage des bobines d'un tiers de pas polaire de la phase « b », puis de la phase « c », permettent d'écrire les répartitions de densités linéiques de conducteurs de ces deux phases, respectivement $n_{c_b}(x)$ et $n_{c_c}(x)$, sous la forme suivante :

$$\begin{cases} n_{c_b}(x) &= -N_{1m} \sin\left(\frac{\pi}{\tau}x - \frac{2\pi}{3}\right) \\ n_{c_c}(x) &= -N_{1m} \sin\left(\frac{\pi}{\tau}x + \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases} \quad (4.77)$$

Si on alimente en même temps les trois phases, avec un courant dans la phase « a » de I_{max} , et dans la phase « b » et « c » de $-I_{max}/2$, alors la densité linéique de courant recherchée va donc être donnée par la relation :

$$K_z(x, t) = -i_a(t) n_{c_a}(x) - i_b(t) n_{c_b}(x) - i_c(t) n_{c_c}(x) \quad (4.78)$$

Dans notre cas, nous aurons :

$$K_z(x) = -I_{max}N_{1m} \sin\left(\frac{\pi}{\tau}x\right) + \frac{I_{max}}{2}N_{1m} \sin\left(\frac{\pi}{\tau}x - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{I_{max}}{2}N_{1m} \sin\left(\frac{\pi}{\tau}x + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2}I_{max}N_{1m} \sin\left(\frac{\pi}{\tau}x\right) \quad (4.79)$$

La relation cherchée entre K_{1m} (densité linéique de courant résultant de l'action des trois phases), et le courant continu injecté dans la phase « a » est donc :

$$K_{1m} = \frac{3}{2} I_{max} N_{1m} = \frac{3}{2} I_{max} \frac{4n}{\tau} \sin_C \left(\frac{\pi w_e}{2\tau} \right) \quad (4.80)$$

Nous nous trouvons donc avec une densité linéique de courant sinusoïdale d'amplitude K_{1m} à la surface du stator, comme montré à la figure 4.58.

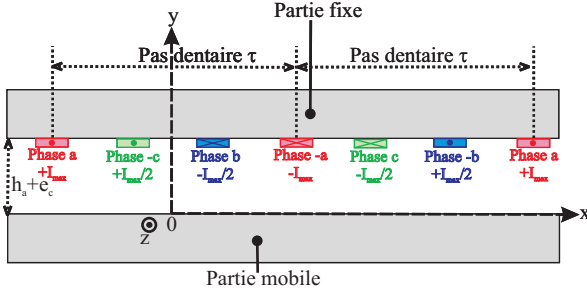


FIGURE 4.56: Densité linéique de courant réelle en 2D dans la machine linéaire

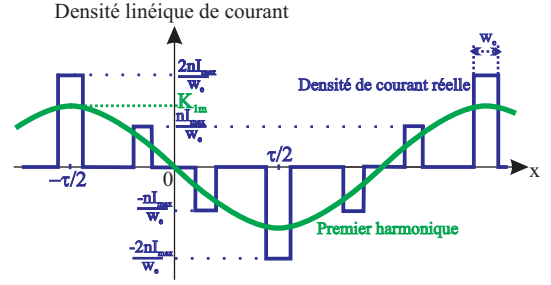


FIGURE 4.57: Développement de la densité linéique de courant à son premier harmonique d'espace

L'application d'un modèle électromagnétique 2D permet alors d'en déduire l'induction due à la densité linéique de courant en tout point de l'entrefer équivalent d'épaisseur $h_a + e_c$ de la figure 4.58, notée $B_{yRMI}^{[xy]}(x, y)$. Au chapitre précédent, nous avons fait ceci pour la machine à pôles saillants. Pour la machine à pôles lisses, l'expression de l'induction peut être donnée explicitement, sans série, chose que nous ferons dans la partie suivante consacrée au modèle. Quoiqu'il en soit, une fois l'induction connue, on peut remonter au flux total maximal dans la phase « a » par l'intégration suivante, en supposant que la bobine, dans la direction $(0z)$ perpendiculaire à la direction de modélisation, possède la même largeur active W_m que l'aimant :

$$\hat{\phi}_{RMI}^{[xy]} = p W_m \int_{-\tau}^0 n_{c_a}(x) \left(\int_x^{x+\tau} B_{yRMI}^{[xy]}(x', y = h_a + e_c) dx' \right) dx \quad (4.81)$$

On peut d'ailleurs faire la remarque suivante : puisque la densité linéique de courant est sinusoïdale, et que la machine est à pôles lisses, l'induction de réaction magnétique d'induit $B_{yRMI}^{[xy]}(x, y = h_a + e_c)$ sera aussi sinusoïdale. Si nous effectuons la modélisation dans une machine à pôles saillants, comme au chapitre précédent, cette composante d'induction ne le serait pas. En revanche, à cause, de la multiplication, dans la formule 4.81, par la fonction $n_{c_a}(x)$ qui elle est sinusoïdale, puis de l'intégration sur le pas polaire qui s'en suit, seul le fondamental de l'induction $B_{yRMI}^{[xy]}(x, y = h_a + e_c)$ interviendra dans l'expression du flux total maximal de réaction magnétique d'induit de la machine $\hat{\phi}_{RMI}^{[xy]}$. Remarquons aussi que l'expression 4.81 aurait été plus compacte en utilisant directement le potentiel-vecteur (cela aurait évité la seconde intégration). Néanmoins, dans le cas 3D, à cause de la multiplication par une fonction perméance, nous n'aurons pas directement accès au potentiel-vecteur, ce qui explique le choix fait ici. Ensuite, une simple division du flux maximal par le courant I_{max} va permettre de trouver l'inductance cyclique $L_{cs}^{[xy]}$ (si on cherche la perméance cyclique $P_{cs}^{[xy]}$, il suffira en plus de diviser par n^2) :

$$L_{cs}^{[xy]} = \frac{\hat{\phi}_{RMI}^{[xy]}}{I_{max}} \quad (4.82)$$

A présent, une question va se poser : à quoi peut servir une modélisation non pas bi-dimensionnelle, mais tri-dimensionnelle de la machine en vue d'un calcul de perméance cyclique ? Il est clair que, en restant dans le cas 3D sur la vision simplifiée d'une nappe de courant spatialement sinusoïdale suivant l'axe $(0x)$ pour l'excitation, le fait de considérer que la densité linéique de courant représentée à la figure 4.58 n'est pas infinie suivant l'axe $(0z)$, mais possède au contraire une longueur finie suivant cette direction (que nous prenons égale à celle des aimants carrés, c'est-à-dire W_m), va induire des effets de bords dus à des épanouissements tri-dimensionnels des lignes de champ.

Néanmoins, comme représenté en trois dimensions sur la figure 4.59, le changement le plus important qui d'après nous intervient en passant au cas tri-dimensionnel est la nécessité de prendre en compte, aux extrémités de la nappe, les courants de rebouclage dirigés suivant la direction $(0x)$, qui assurent que la densité de courant demeure adivergencielle. Nous constaterons que, pour la commodité du calcul analytique, nous allons être contraints de supposer que ce rebouclage a une épaisseur nulle (c'est une masse de Dirac). Pour cette raison, nous ne prétendons pas modéliser, dans cette partie, l'inductance des têtes de bobine. Néanmoins, comme nous le verrons, l'introduction de ce courant de rebouclage va induire obligatoirement un flux magnétique qui va tourner autour, et, en ceci, nous pouvons peut-être parler d'effet « tête de bobine ».

Nous pouvons donc expliquer, et nous le montrerons dans les résultats que la prise en compte des effets tri-dimensionnels pour le calcul de l'inductance, à cause du terme supplémentaire de flux rajouté par ces courants de rebouclage, va conduire à une augmentation (et non une diminution, comme on aurait pu le penser après l'analyse du flux à vide) de l'inductance par rapport au cas 2D. Il est à notre sens important d'ailleurs de signaler que la prise en compte des effets de bords tend à diminuer le flux à vide par rapport au cas 2D, mais à augmenter l'inductance cyclique. Par conséquent, si nous ne prenons pas en compte ces effets, nous risquons de sur-estimer le couple (proportionnel au flux à vide), mais de sous-estimer les capacités de défluxage (dépendant, d'après le concept d'inductance réduite, du rapport $\frac{L_{cs}}{\phi_A}$ ⁶).

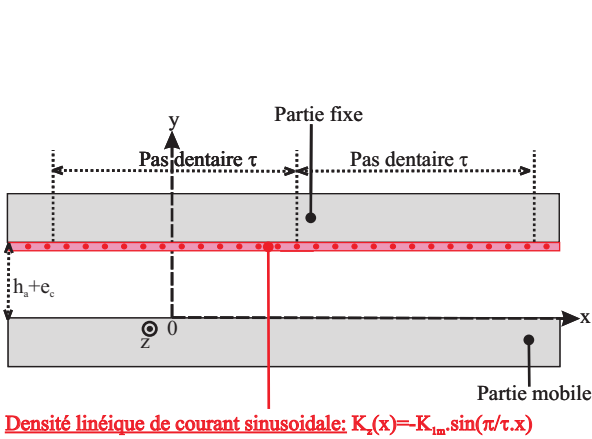


FIGURE 4.58: Densité linéique de courant réduite à son premier harmonique spatial en 2D dans la machine linéaire

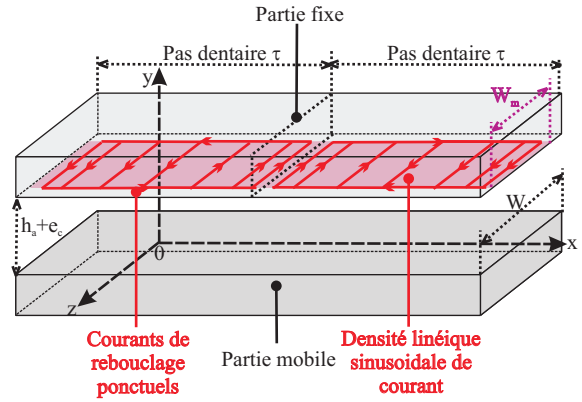


FIGURE 4.59: Densité linéique de courant réduite à son premier harmonique spatial en 3D dans la machine linéaire, en tenant compte des courants de rebouclage

4.2.4.2 Détail du modèle analytique réalisé

Rappel du modèle 2D Le modèle 2D du problème schématisé à la figure 4.58 donne le potentiel-vecteur suivant, en tenant compte des conditions aux limites (réduit à un seul harmonique, étant donné que l'excitation est spatialement sinusoïdale, et que la machine est à pôles lisses) :

$$A_z^{[xy]}(x, y) = \frac{-\mu_0 K_{1m}}{\frac{\pi}{\tau} \sinh\left(\frac{\pi}{\tau}(h_a + e_c)\right)} \cosh\left(\frac{\pi}{\tau} y\right) \sin\left(\frac{\pi}{\tau} x\right) \quad (4.83)$$

L'induction $B_y^{[xy]}$ se déduit par dérivation :

$$B_y^{[xy]}(x, y) = -\frac{\partial A_z^{2D}}{\partial x} = \frac{\mu_0 K_{1m}}{\sinh\left(\frac{\pi}{\tau}(h_a + e_c)\right)} \cosh\left(\frac{\pi}{\tau} y\right) \cos\left(\frac{\pi}{\tau} x\right) \quad (4.84)$$

Ensuite, l'application de la formule 4.81 permet d'en déduire le flux de réaction magnétique d'induit, et, par là même, l'inductance cyclique de la machine en question. On trouvera alors, tous calculs faits, l'expression suivante,

6. Dans cette partie, nous nous permettons de noter avec un indice « A » les flux des aimants, afin de ne pas de confondre avec le flux de réaction magnétique d'induit.

pour le flux de réaction magnétique d'induit maximal en deux dimensions :

$$\hat{\phi}_{RMI}^{[xy]} = \frac{3}{2} p W_m \frac{\mu_0 8 n^2 k_{b1}^2}{\pi \tanh\left(\frac{\pi}{\tau} (h_a + e_c)\right)} I_{max} \quad (4.85)$$

Et, en ce qui concerne l'inductance cyclique en 2D, l'expression est alors donnée par la formule :

$$L_{cs}^{[xy]} = \frac{3}{2} p W_m \frac{\mu_0 8 n^2 k_{b1}^2}{\pi \tanh\left(\frac{\pi}{\tau} (h_a + e_c)\right)} \quad (4.86)$$

Modèle 3D de calcul de l'inductance Nous allons à présent effectuer le calcul de l'inductance en trois dimensions, en tenant compte des courants de rebouclage. Nous allons utiliser la même technique qu'auparavant : dans un premier temps, seule l'épaisseur finie de la nappe de courant d'excitation suivant l'axe (0z) de la machine, qui est prise égale à la même épaisseur W_m que l'aimant, sera prise en compte. L'épaisseur finie du fer W sera considérée a posteriori : une fois la composante d'induction $B_{yRMI}^{[xyz]}(x, y, z)$ connue en prenant en compte l'épaisseur finie W_m de la nappe de courant, mais en supposant que les parties ferromagnétiques sont des plans infinis ($W \rightarrow \infty$), la valeur réelle de W interviendra, comme pour le calcul du flux à vide, par le biais de la fonction perméance relative $m(z)$, afin de trouver la véritable composante d'induction d'axe (0y) en trois dimensions $B_{yRMI}^{[xyz]}$, qui interviendra dans le calcul du flux de réaction magnétique d'induit en trois dimensions $\hat{\phi}_{RMI}^{[xyz]}$, et par suite, dans le calcul de l'inductance cyclique $L_{cs}^{[xyz]}$.

Nous allons également, afin de pouvoir utiliser le formalisme de Fourier suivant la troisième dimension (0z), effectuer une périodisation de la nappe de courant suivant la direction (0z). L'espacement entre les nappes fictives rajoutées suivant l'axe (0z) sera notée L_z , supposée très grande devant l'épaisseur d'une nappe, égale quant à elle à W_m , afin que les nappes fictives rajoutées ne s'influencent pas l'une l'autre. Nous nous sommes donc ramenés au calcul du champ magnétique dans l'entrefer de la structure représentée à la figure 4.60, constituée de deux plans ferromagnétiques parallèles espacés de $h_a + e_c$. Sur le plan supérieur sont appliquées les densités linéiques de courants, sinusoïdales suivant l'axe (0x) du mouvement, et périodisées fictivement suivant (0z). Sur cette figure 4.60, nous voyons que les densités linéiques de courants successives rajoutées suivant l'axe (0z) possèdent des sens de circulation de courant alternés, afin d'annuler toute valeur moyenne des courants suivant l'axe (0z), et ce qui a pour effet de rajouter des plans à condition de Neumann homogènes $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$ pour les coordonnées multiples de $\frac{L_z}{2}$. Grâce à toutes ces hypothèses, on peut écrire la densité linéique de courant d'axe (0z), nommée $K_z(x, z)$, sous la forme suivante :

$$K_z(x, z) = \sum_{q \geq 1} K_{zq} \cos\left[(2q-1) \frac{\pi}{L_z} z\right] \sin\left(\frac{\pi}{\tau} x\right) \quad (4.87)$$

Les coefficients K_{zq} se trouvent en disant que pour tout entier $q \geq 1$, on aura :

$$K_{zq} = \frac{4}{\tau L_z} \int_{x=-\frac{\tau}{2}}^{x=\frac{\tau}{2}} \int_{z=-\frac{L_z}{2}}^{z=\frac{L_z}{2}} K_z(x, z) \cos\left[(2q-1) \frac{\pi}{L_z} z\right] \sin\left(\frac{\pi}{\tau} x\right) dx dz \quad (4.88)$$

Cette intégrale est calculée par observation de la densité de courant périodisée de la figure 4.60. On fait la remarque que, suivant l'axe (0z), la densité est non nulle uniquement sur l'intervalle $[-W_m/2; W_m/2]$. On obtient alors :

$$\forall q \geq 1, K_{zq} = -\frac{4}{\pi} K_{1m} \frac{1}{2q-1} \sin\left[(2q-1) \frac{W_m \pi}{L_z 2}\right] \quad (4.89)$$

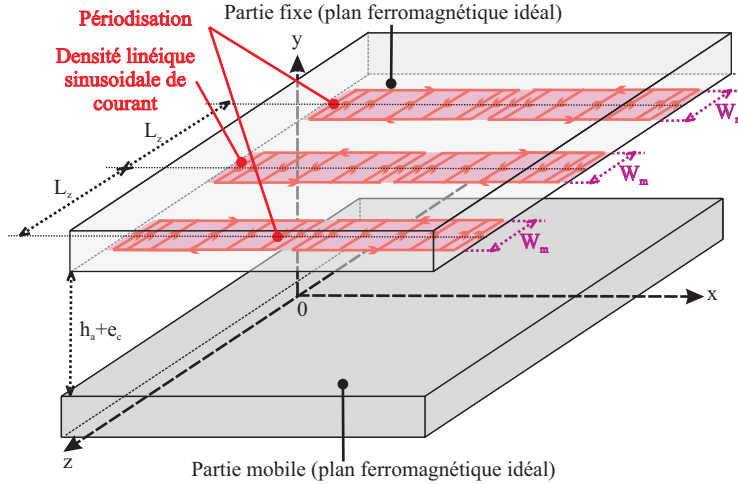


FIGURE 4.60: Représentation de la structure dans laquelle le calcul électromagnétique est mené, en supposant que les parties ferromagnétiques sont des plans infinis, et que les densités linéiques de courants collées sur la face interne du stator sont périodisées suivant l'axe ($0z$)

La géométrie du problème implique que seules deux composantes de potentiel-vecteur sont non nulles. Le potentiel-vecteur de réaction magnétique d'induit est alors cherché sous la forme suivante :

$$\overrightarrow{A}_{RMI}^{[xyz]}(x, y, z) = \begin{bmatrix} A_{xRMI}^{[xyz]}(x, y, z) \\ 0 \\ A_{zRMI}^{[xyz]}(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

La jauge de Coulomb évite d'avoir à calculer les deux composantes de ce vecteur. En effet, cette dernière fournit une relation directe entre les deux composantes, qui s'exprime ainsi :

$$\frac{\partial A_{xRMI}^{[xyz]}}{\partial x} + \frac{\partial A_{zRMI}^{[xyz]}}{\partial z} = 0 \quad (4.91)$$

Par conséquent, nous nous contenterons donc de calculer une seule composante, par exemple la composante $A_{zRMI}^{[xyz]}$. L'équation vérifiée par cette composante est directement l'équation de Laplace :

$$\Delta A_{zRMI}^{[xyz]} = 0 \quad (4.92)$$

La composante de potentiel-vecteur $A_{zRMI}^{[xyz]}$ sera cherchée sous la forme :

$$A_{zRMI}^{[xyz]}(x, y, z) = \sum_{q \geq 1} a_{z0_q}(y) \cos\left((2q-1)\frac{\pi}{L_z}z\right) \sin\left(\frac{\pi}{\tau}x\right) \quad (4.93)$$

L'injection dans l'équation de Laplace donne alors les équations différentielles, pour tout entier $q \geq 1$:

$$\forall q \geq 1, \frac{\partial^2 a_{z0_q}}{\partial y^2} - \lambda_{1,q}^2 a_{z0_q} = 0 \quad (4.94)$$

Où les nombres $\lambda_{1,q}$ sont définis, pour tout entier $q \geq 1$, de la manière suivante :

$$\lambda_{1,q}^2 = (2q-1)^2 \left(\frac{\pi}{L_z}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 \quad (4.95)$$

La fonction $a_{z0_q}(y)$ est donc donnée, pour tout entier $q \geq 1$, par la formule, en tenant compte de la condition de Neumann en $y = 0$:

$$\forall q \geq 1, a_{z0_q}(y) = a_q \cosh(\lambda_{1,q}y) \quad (4.96)$$

La constante a_q , pour tout entier $q \geq 1$, se trouve en utilisant la condition aux limites sur l'induction en $y = h_a + e_c$. Les composantes d'induction de réaction magnétique d'induit seront données par le rotationnel du potentiel-vecteur, qui est égal à :

$$\begin{cases} B_{xRMI}^{[xyz]'} &= \frac{\partial A_{zRMI}^{[xyz]}}{\partial y} \\ B_{yRMI}^{[xyz]'} &= \frac{\partial A_{xRMI}^{[xyz]}}{\partial z} - \frac{\partial A_{zRMI}^{[xyz]}}{\partial x} \\ B_{zRMI}^{[xyz]'} &= -\frac{\partial A_{xRMI}^{[xyz]}}{\partial y} \end{cases} \quad (4.97)$$

La condition de passage en $y = h_a + e_c$ sur le champ magnétique va s'écrire ainsi :

$$H_{xRMI}^{[xyz]'}(x, y = h_a + e_c, z) = K_z(x, z) \quad (4.98)$$

Et alors cette condition peut être écrite sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\mu_0} \left. \frac{\partial A_{zRMI}^{[xyz]}}{\partial y} \right|_{y=h_a+e_c} = K_z(x, z) \quad (4.99)$$

Ceci mène alors à la formule des coefficients a_q inconnus :

$$\forall q \geq 1, a_q = \frac{\mu_0 K_{zq}}{\lambda_{1,q} \sinh(\lambda_{1,q}(h_a + e_c))} \quad (4.100)$$

La composante de potentiel-vecteur $A_{xRMI}^{[xyz]}$ sera alors donnée par :

$$A_{xRMI}^{[xyz]} = -\int^x \frac{\partial A_{zRMI}^{[xyz]}}{\partial z} dx = -\frac{\tau}{L_z} \sum_{q \geq 1} a_q \cosh(\lambda_{1,q}y) \sin\left((2q-1)\frac{\pi}{L_z}z\right) \cos\left(\frac{\pi}{\tau}x\right) \quad (4.101)$$

Une question néanmoins se pose : nous avons dit que nous allions prendre en compte, dans ce modèle tri-dimensionnel, les courants de retour des bobines (représentés sur les figures 4.59 et 4.60), qui se propagent suivant l'axe $(0x)$, sous la forme de parcours infiniment fins à l'extrémité des densités de courant (ce sont des masses de Dirac de courants au niveau des coordonnées $y = \pm W_m/2$). Ceci impose donc de définir une densité linéique de courant d'axe $(0x)$, nommée $K_x(x, z)$, et donnée par la relation :

$$\operatorname{div}(\vec{K}) = \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_z}{\partial z} = 0 \quad (4.102)$$

Ensuite, nous aurons à vérifier la condition de passage en $y = h_a + e_c$, pour le champ magnétique :

$$H_{zRMI}^{[xyz]'}(x, y = h_a + e_c, z) = -K_x(x, z) \quad (4.103)$$

Ce qui se traduit en termes de potentiel-vecteur :

$$\frac{1}{\mu_0} \left. \frac{\partial A_{xRMI}^{[xyz]}}{\partial y} \right|_{y=h_a+e_c} = K_x(x, z) \quad (4.104)$$

La composante de potentiel-vecteur A_{xRMI} a cependant déjà été déterminée par la jauge de Coulomb. On peut montrer que sous cette condition, le caractère adivergenciel de la densité linéique de courant est automatiquement respecté. En effet, en dérivant par rapport à la variable y la jauge de Coulomb de la relation 4.91, et en multipliant par $\frac{1}{\mu_0}$, on obtient alors la relation :

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A_{xRMI}^{[xyz]}}{\partial y} + \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial A_{zRMI}^{[xyz]}}{\partial y} = 0 \quad (4.105)$$

En évaluant cette relation en la coordonnée $y = h_a + e_c$, on obtient alors la relation $\operatorname{div}(\vec{K}) = 0$. Par conséquent, avec la méthode de déterminer la composante de potentiel-vecteur $A_{xRMI}^{[xyz]}$ par la jauge de Coulomb d'après l'expression de la composante $A_{zRMI}^{[xyz]}$, la condition de passage 4.104 est automatiquement respectée, sans qu'il ne soit

besoin d'écrire explicitement la densité linéique de courant $K_x(x, z)$ (à l'aide de masses de Dirac), qui assurent le retour des courants de la nappe $K_z(x, z)$. Le modèle développé tient donc « naturellement » compte du retour des courants, et donc, par suite, de ce que nous avons appelé l'effet « têtes de bobines ».

La composante d'induction recherchée sera alors donnée par la formule suivante :

$$B_{yRMI}^{[xyz]'} = \frac{\partial A_{xRMI}^{[xyz]}}{\partial z} - \frac{\partial A_{zRMI}^{[xyz]}}{\partial x} \quad (4.106)$$

Et, en tenant compte de la fonction perméance relative $m(z)$ pour considérer la largeur finie des parties ferromagnétiques W :

$$B_{yRMI}^{[xyz]}(x, y, z) = B_{yRMI}^{[xyz]'}(x, y, z) \cdot m(z) \quad (4.107)$$

Le flux de réaction magnétique d'induit, en trois dimensions et tenant compte des courants de retour, va alors s'écrire comme suit :

$$\hat{\phi}_{RMI}^{[xyz]} = p \int_{-\tau}^0 n_{ca}(x) \left(\iint_{(x,z) \in [x; x+\tau] \times [-\frac{W_m}{2}; \frac{W_m}{2}]} B_{yRMI}^{[xyz]}(x', y = h_a + e_c, z) dx' dz \right) dx \quad (4.108)$$

Par la suite, l'inductance cyclique en 3D $L_{cs}^{[xyz]}$ peut alors être évaluée par division du flux précédent par le courant maximal dans la phase « a », noté I_{max} . Nous allons voir qu'à cause du flux supplémentaire causé par les courants de rebouclage, cette inductance cyclique en 3D est plus grande que celle en 2D $L_{cs}^{[xy]}$ ⁷.

4.2.4.3 Présentation des résultats obtenus

Afin de présenter les résultats, nous allons adopter la même géométrie qu'auparavant, dont nous rappelons les principales caractéristiques utiles pour le calcul de l'inductance cyclique :

- Une hauteur d'aimant de $h_a = 0.003\text{m}$, et une hauteur d'entrefer corrigé de $e_c = 0.0024\text{m}$, ce qui donne un entrefer magnétique équivalent total $h_a + e_c = 0.0054\text{m}$.
- Un pas polaire $\tau = 0.05\text{m}$.
- Nous nous intéressons au rapport W/τ , rapport entre l'épaisseur des parties ferromagnétiques W et le pas polaire τ . Nous allons faire varier ce ratio, afin de mettre plus ou moins en défaut l'hypothèse de modélisation 2D, qui est fondée sur l'hypothèse d'un ratio W/τ infini.
- La largeur W_m de l'aimant est prise égale à 80% de l'épaisseur des parties ferromagnétiques W .
- On va en outre injecter des ampères-tours par bobine polaire égaux à $nI_{max} = 1\text{Atr}$.

L'onde de réaction magnétique d'induit entrant dans le stator $B_{yRMI}^{[xy]}(x, y = h_a + e_c)$, sur l'intervalle $x \in [-\frac{\tau}{2}; \frac{\tau}{2}]$, obtenue en deux dimensions, est montrée au niveau de la figure 4.61. Nous illustrons aussi la géométrie 2D dans laquelle le calcul est effectué (ainsi que les lignes de champ obtenues dans cette géométrie simulée par éléments finis) à la figure 4.62.

7. L'intervention de la fonction perméance relative $m(z)$, qui s'exprime avec des fonctions elliptiques dont on ne peut pas calculer explicitement les primitives, empêchent de donner en 3D une expression explicite du flux de réaction magnétique d'induit $\hat{\phi}_{RMI}^{[xyz]}$ à l'image de celle que nous avons obtenue en 2D à l'équation 4.85. En revanche, si nous négligeons $m(z)$ (nous prenons $m(z) = 1$ sur l'intervalle $[-\frac{W_m}{2}; \frac{W_m}{2}]$), une expression explicite, quoi que compliquée, peut être donnée pour $\hat{\phi}_{RMI}^{[xyz]}$. Il s'agit de, tous calculs faits :

$$\hat{\phi}_{RMI}^{[xyz]} = \frac{3}{2} p \left(\frac{4}{\pi} \right)^3 4n^2 k_{b1}^2 \mu_0 I_{max} \sum_{q \geq 1} \frac{\sin^2 \left[(2q-1) \frac{W_m}{L_z} \frac{\pi}{2} \right]}{\lambda_{1,q} \tanh \left(\frac{\pi}{\tau} (h_a + e_c) \right)} \left[1 + \left(\frac{L_z}{\tau} \right)^2 \frac{1}{2q-1} \right]$$

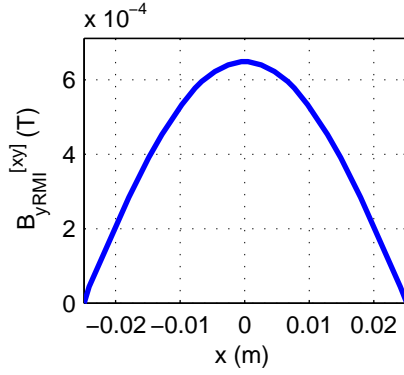


FIGURE 4.61: Représentation de l'induction en deux dimensions entrant dans le stator, notée $B_{yRMI}^{[xy]}(x, y = h_a + e_c)$, sur un pas polaire τ , pour un courant de $nI_{max} = 1Atr$

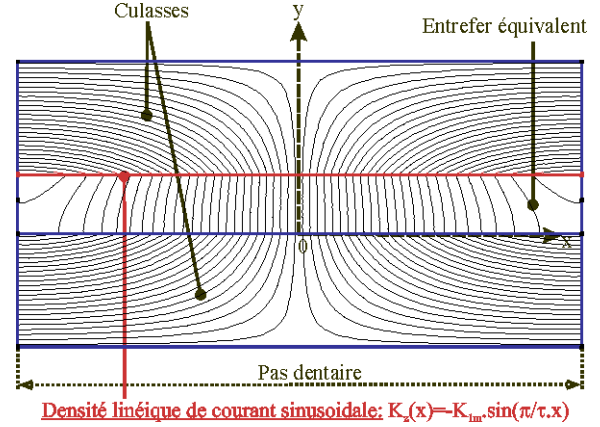


FIGURE 4.62: Représentation, à l'aide d'un logiciel éléments finis, de la géométrie dans laquelle on mène le calcul (et représentation des lignes de champ)

On se donne à présent un rapport $W/\tau = 0.2$. Nous montrons la carte d'induction de réaction magnétique d'induit $B_{yRMI}^{[xyz]}(x, y = h_a + e_c, z)$ entrant dans le stator en trois dimensions, qui, par intégration, permet d'obtenir l'inductance cyclique de la machine (figure 4.63). Le tracé est effectué sur l'intervalle $(x, z) \in [-\frac{\tau}{2}; \frac{\tau}{2}] \times [-\frac{W_m}{2}; \frac{W_m}{2}]$. Le surcroît d'inductance dû aux courants de rebouclage sur les bords de la nappe est clairement mis en évidence. D'ailleurs, cet effet est prépondérant, du fait que la machine a une épaisseur W courte par rapport au pas polaire. En effet, nous avons tracé sur la figure 4.64, pour chaque point de l'intervalle $(x, z) \in [-\frac{\tau}{2}; \frac{\tau}{2}] \times [-\frac{W_m}{2}; \frac{W_m}{2}]$, le rapport entre les inductions 3D et 2D. Même si ce rapport est maximal sur les bords de la machine, il reste tout de même clairement supérieur à l'unité au centre de cette dernière, ce qui prouve que les effets de bord se font partout sentir.

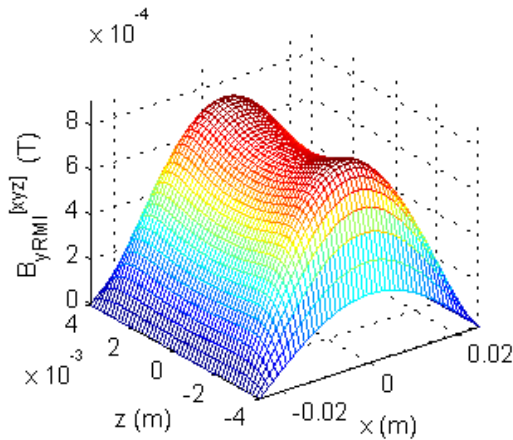


FIGURE 4.63: Représentation de l'induction en trois dimensions entrant dans le stator, notée $B_{yRMI}^{[xyz]}(x, y = h_a + e_c, z)$, sur un pas polaire τ , pour $z \in [-W_m/2; -W_m/2]$, pour un courant de $nI_{max} = 1Atr$, avec un rapport $W/\tau = 0.2$

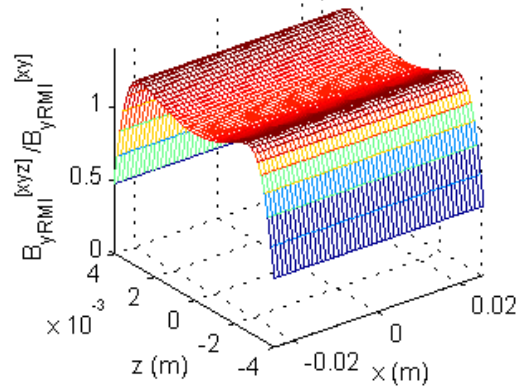


FIGURE 4.64: Représentation du quotient des inductions $B_{yRMI}^{[xyz]}/B_{yRMI}^{[xy]}$ des inductions entrant dans le stator, sur un pas polaire τ , pour $z \in [-W_m/2; -W_m/2]$, et pour un rapport $W/\tau = 0.2$

Il n'en est pas de même lorsque nous prenons une épaisseur de machine W grande en regard du pas polaire τ , comme c'est par exemple le cas si on prend un ratio $W/\tau = 2$. La figure 4.65 montre, dans ce cas, la composante d'induction de réaction magnétique d'induit en 3D entrant dans le stator sur l'intervalle $(x, z) \in [-\frac{\tau}{2}; \frac{\tau}{2}] \times [-\frac{W_m}{2}; \frac{W_m}{2}]$.

L'augmentation de la composante d'induction à cause des effets de bords se fait toujours sentir, et semble d'ailleurs d'amplitude similaire à celle trouvée à la figure 4.63. Néanmoins, du fait que la longueur W est importante par rapport au pas polaire τ , il est clair que cet effet apparaît comme marginal sur les bords de l'actionneur. D'ailleurs, on voit bien, sur la figure 4.66, que le rapport entre induction de réaction magnétique d'induit en 3D et en 2D est unitaire sur la plus grande partie de l'épaisseur de la machine, sauf sur les bords où les courants de retour augmentent le flux magnétique.

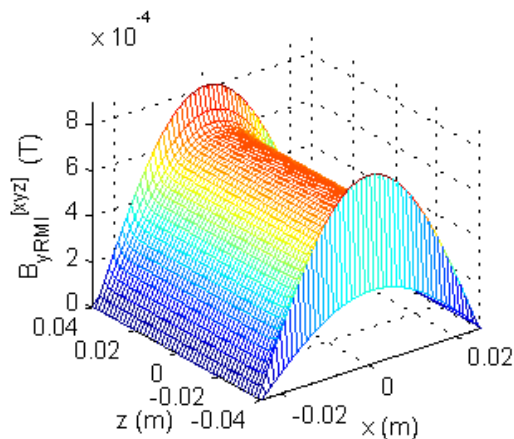


FIGURE 4.65: Représentation de l'induction en trois dimensions entrant dans le stator, notée $B_{yRMI}^{[xyz]}(x, y = h_a + e_c, z)$, sur un pas polaire τ , pour $z \in [-W_m/2; -W_m/2]$, pour un courant de $nI_{max} = 1Atr$, avec un rapport $W/\tau = 2$

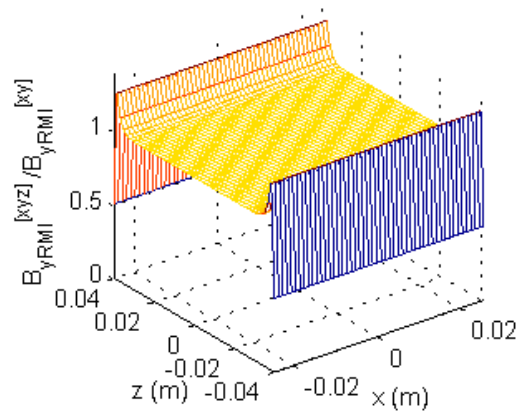


FIGURE 4.66: Représentation du quotient des inductions $B_{yRMI}^{[xyz]}/B_{yRMI}^{[xy]}$ des inductions entrant dans le stator, sur un pas polaire τ , pour $z \in [-W_m/2; -W_m/2]$, et pour un rapport $W/\tau = 2$

Enfin, pour finir, une courbe permettant de quantifier l'augmentation de l'inductance cyclique due à ce que nous avons appelé l'effet « têtes de bobine » est montrée à la figure 4.67, qui donne le rapport $L_{cs}^{[xyz]}/L_{cs}^{[xy]}$. Les effets 3D, particulièrement l'effet « têtes de bobine », avec les courants de retour, lorsque l'actionneur est mince, mènent à une sous-estimation de l'inductance assez importante si on se contente du modèle 2D (de l'ordre de 20%). Conjugué avec les effets de bords sur le flux à vide, qui tendent au contraire à diminuer le flux des aimants, donc le couple de la machine, il devient clair que le modèle 2D peut se tromper gravement sur les capacités de défluxage d'un actionneur linéaire. Dans cette perspective, nous avons tracé, sur la figure 4.68, les ratios des inductances réduites en trois dimensions, sur celles obtenues en deux dimensions $r^{[xyz]}/r^{[xy]}$ (en supposant, bien entendu, que les courants maximaux sont égaux⁸). Pour des actionneurs très minces ($W/\tau = 0.1$), l'augmentation de l'inductance, et la diminution du flux à vide causées par les effets de bords, sont telles que l'inductance réduite peut être sous-estimée d'un rapport deux. A l'inverse, il apparaît clairement que, pour des rapports $W/\tau \geq 1$, le modèle 2D apparaît comme étant valable.

8. On rappelle la définition de l'inductance réduite d'une machine à pôles lisses dont la courant maximal admissible est I_{max} : $r = \frac{L_{cs} I_{max}}{\hat{\phi}_A}$, où $\hat{\phi}_A$ est le flux à vide maximal totalisé dans une phase.

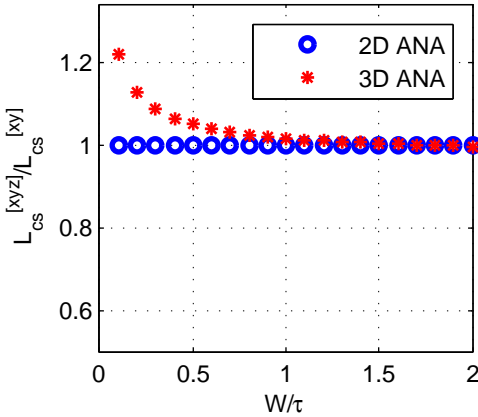


FIGURE 4.67: Rapport des inductances cycliques calculées par le modèle 3D et 2D, noté $L_{cs}^{[xyz]}/L_{cs}^{[xy]}$

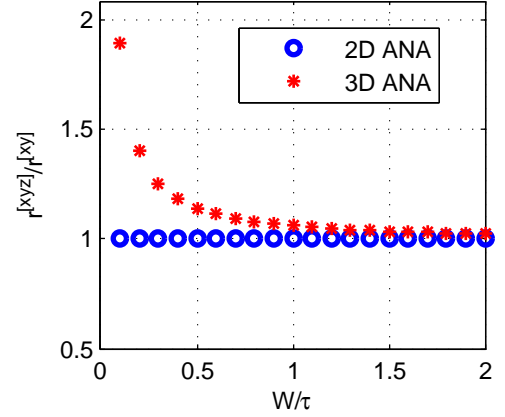


FIGURE 4.68: Rapport des inductances réduites (utiles pour le défluxage) calculées par le modèle 3D et 2D, noté $r^{[xyz]}/r^{[xy]}$

Vu que nous ne ferons pas de modèle du flux de réaction magnétique d'induit pour la machine disque (nous nous contenterons de calculer le flux à vide), nous admettrons que l'inductance calculée dans cette section à partir d'un actionneur linéaire résultant du développement de la machine disque au niveau de son rayon moyen demeure inchangée si on considère la machine disque réelle avec effet de courbure.

4.3 Le modèle analytique 3D de l'actionneur à flux axial à aimants permanents

Nous allons, dans cette partie, proposer un modèle analytique 3D de la machine synchrone à flux axial, sans nécessiter la lourde hypothèse du développement au niveau du rayon moyen, et donc en prenant en compte l'effet de courbure de l'actionneur considéré. Dans un premier temps, nous allons préciser le cadre de l'étude, en détaillant les hypothèses simplificatrices de la modélisation réalisée, puis en montrant la structure réelle de l'actionneur mis en oeuvre. Dans un second temps, la méthodologie de modélisation sera détaillée, et les résultats seront montrés, par comparaison avec les éléments finis 3D. Nous insisterons sur l'effet de courbure, pour comprendre l'apport d'un tel modèle en comparaison de celui de l'actionneur linéaire équivalent développé au rayon moyen. Une vérification expérimentale des résultats sera également proposée.

4.3.1 Cadre de l'étude

4.3.1.1 Hypothèses simplificatrices

Dans cette partie, nous rappelons les hypothèses simplificatrices mises en oeuvre pour mener à bien cette étude sur la machine à flux axial à aimants permanents à pôles rotoriques lisses. Ces hypothèses sont les mêmes que celles formulées pour la machine linéaire équivalente, excepté, bien entendu, le développement au niveau du rayon moyen. Nous les rappelons très brièvement :

- Les matériaux ferromagnétiques sont idéaux, munis d'une perméabilité magnétique infinie.
- Les encoches statoriques seront négligées, par le biais du coefficient de Carter. L'utilisation de ce coefficient nécessite une hypothèse simplificatrice supplémentaire par rapport au cas de la machine linéaire traité auparavant. En effet, à cause de l'effet de courbure, le pas dentaire τ_s change évidemment en fonction du rayon auquel on se place (il est proportionnel au rayon). Cependant, pour des raisons pratiques, il y a fort à parier que la solution technologique retenue consiste à ménager des encoches de largeur constante en fonction du rayon. Par voie de conséquence, la largeur relative de l'ouverture d'encoche par rapport au pas dentaire devient variable en fonction du rayon. Il en est donc de même du coefficient de Carter calculé pour la machine à flux axial, qui, en toute rigueur, dépendra du rayon auquel on se place. Ceci rend d'autant discutable l'application

de ce coefficient. Nous nous permettrons, par simplification, de lisser le stator, en corrigeant l'entrefer par le coefficient de Carter k_c calculé au niveau du rayon moyen de la machine. L'entrefer corrigé est pris constant quelque soit le rayon égal à $e_c = k_c (h_a + e) - h_a$.

- Le calcul électromagnétique, comme dans la partie précédente, sera mené en magnétostatique, en négligeant donc tout effet transitoire ou temporel d'un point de vue électromagnétique.

4.3.1.2 Structure de l'actionneur étudié

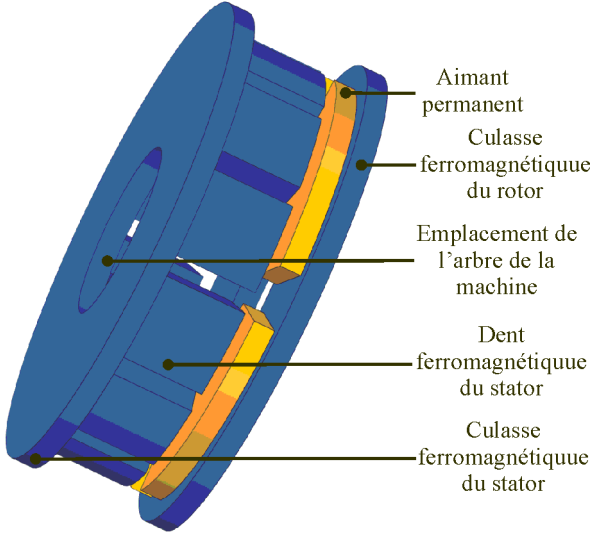


FIGURE 4.69: Représentation en trois dimensions des parties actives de la machine à flux axial, en faisant figurer la zone d'encoches statoriques

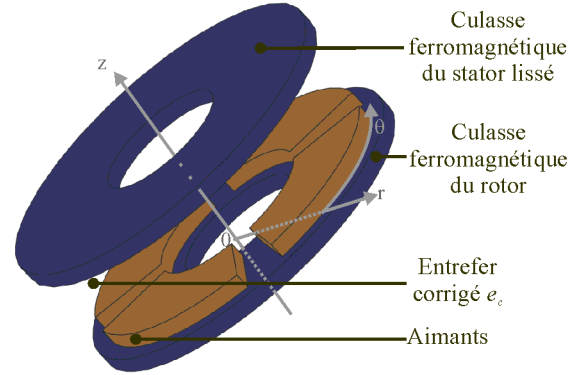


FIGURE 4.70: Représentation en trois dimensions des parties actives de la machine à flux axial, en lissant la culasse du stator grâce au coefficient de Carter calculé au niveau du rayon moyen

Nous allons, dans cette partie, présenter de manière détaillée la géométrie des parties actives de la machine à flux axial dans laquelle nous menons le calcul d'induction à vide. A la figure 4.69, nous avons représenté les parties actives de la machine à flux axial en trois dimensions, avec les encoches ferromagnétiques du stator, mais sans les bobinages. Etant donné que l'arbre de la machine est non magnétique, il ne fait pas partie des parties actives, et nous ne l'avons pas représenté. La figure 4.70 montre la géométrie 3D avec stator lissé grâce au coefficient de Carter que nous allons considérer pour la modélisation. Nous avons muni la machine d'un repère cylindrique $(0r\theta z)$, naturel dans ce type de problème mettant en jeu des géométries circulaires. Comme on peut le voir, l'axe $(0z)$ coïncide avec l'axe de symétrie de révolution de la machine (dans la direction définie par l'arbre de cette dernière). Le plan $(0r\theta)$ coïncide en $z = 0$ avec la surface du rotor de la machine, sur laquelle sont collés les aimants. Nous allons détailler les principales notations géométriques utilisées par la suite :

- les grandeurs axiales, montrées à la figure 4.71, sont :
 - les épaisseurs des culasses du stator lissé et du rotor sont $e_{cs} = e_{cr} = 0.01\text{m}$.
 - la hauteur h_a des aimants. La zone des aimants est appelée la zone (I), pour laquelle $z \in [0; h_a]$.
 - l'entrefer corrigé par le coefficient de Carter, noté e_c . On prendra toujours un entrefer réel e égal à 0.002m (la raison de cette importante valeur est guidée par des considérations mécaniques), et, avec une ouverture relative d'encoche par rapport au pas dentaire (on précise bien que ceci n'est valable qu'au rayon moyen) égale à $\beta_e = 1/2$, afin de pouvoir comparer les résultats de l'actionneur à flux axial, et de l'actionneur linéaire résultant du développement au rayon moyen), on trouvera un entrefer corrigé au niveau du rayon moyen par le coefficient de Carter égal à 0.0024m . La zone de l'entrefer corrigé est appelée la zone (II), pour laquelle $z \in [h_a; h_a + e_c]$.
- les grandeurs radiales, montrées à la figure 4.72 sont constituées des rayons actifs internes et externes, respectivement appelés R_1 et R_2 . Le rayon moyen est défini $\bar{R} = \frac{R_1 + R_2}{2}$. On note, comme auparavant, la différence entre les rayons actifs internes et externes : $\Delta R = W_m = R_2 - R_1$. Ce différentiel de rayons concerne les parties

actives, c'est-à-dire la zone des aimants. Les parties ferromagnétiques peuvent fort bien dépasser ces rayons actifs interne et externe, notamment au niveau du rayon interne pour se connecter à l'arbre non magnétique de la machine. Ainsi notons-nous $R_{int} < R_1$ le rayon interne des parties ferromagnétiques, et $R_{ext} > R_2$ le rayon externe de ces culasses ferromagnétiques. Cette différence de rayons extrêmes des parties ferromagnétiques sera notée, de manière analogue à la notation utilisée pour la machine linéaire équivalente de la rubrique précédente : $W = R_{ext} - R_{int} > W_m$.

- les grandeurs orthoradiales, également montrées à la figure 4.72, sont, quant à elles :
 - le nombre de paires de pôles p (choisi égal à 4 sur la figure 4.72).
 - L'ouverture relative des aimants par rapport au pas dentaire est notée β_a .

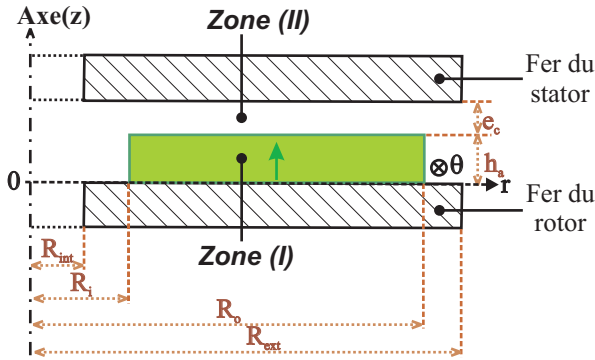


FIGURE 4.71: Représentation en deux dimensions des parties actives de la machine à flux axial, en coupe axiale

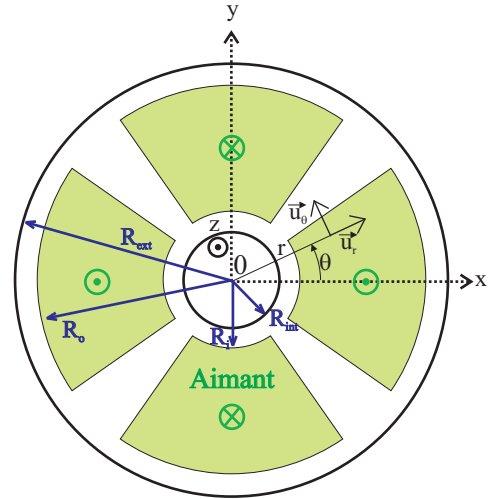


FIGURE 4.72: Représentation en deux dimensions des parties actives de la machine à flux axial

La définition de l'ouverture relative des aimants par rapport au pas dentaire, notée β_a , appelle une remarque. Si cette notion semblait évidente concernant la machine linéaire, il n'en est pas de même pour la machine à flux axial. Dans notre cas, les aimants sont choisis comme étant « radiaux ». Nous voulons dire par là que c'est l'ouverture angulaire relative des aimants par rapport au pas polaire qui est constante en fonction du rayon considéré, égale au nombre β_a . Cela signifie que la longueur orthoradiale effective des aimants augmente, comme le pas polaire, proportionnellement au rayon r au niveau duquel on se place. A noter que ce choix d'aimants radiaux est guidé par la simplicité. Néanmoins, d'autres solutions existent. Ainsi les références [Brisset *et al.*, 2006], ou alors [Derks, 2004] évoquent-t-elles une solution dans laquelle c'est la distance inter-aimants qui est constante (et très petite) quelque soit le rayon, afin de maximiser l'occupation de la zone d'occupation de la zone d'aimants. D'autres articles [Aydin *et al.*, 2007] vont plus loin, en proposant une étude par éléments finis visant à rechercher la forme optimale des aimants de la machine à flux axial qui minimise les ondulations du couple de détente. Différentes solutions y sont évoquées comme les classiques inclinaisons des aimants sur un pas dentaire, solutions inspirées des machines à flux radial. Il y est même évoqué la possibilité des aimants circulaires, ce qui nous avait suggéré l'étude menée auparavant sur les aimants circulaires, afin de mettre en évidence, pour l'actionneur linéaire développé au rayon moyen, l'intérêt de la modélisation analytique tri-dimensionnelle. Nous souhaitons signaler par là que la solution des aimants radiaux est loin d'être la seule possible, et certainement pas la meilleure en ce qui concerne le remplissage de la zone des aimants, ou bien encore le couple de détente. Il est possible de prendre en compte, dans le cas d'un modèle 2D par couches de la machine à flux axial (voir le cas de la référence [Marignetti *et al.*, 2006]) cette variation de l'ouverture angulaire relative des aimants par rapport au pas polaire en fonction du rayon, car il s'agit simplement d'appliquer le modèle 2D de la machine linéaire à chaque couche élémentaire de manière indépendante, et une prise en compte de telles variations ne pose pas de problème particulier. Cela étant, dans le cadre d'une modélisation 3D, nous allons voir que nous sommes obligés de considérer la zone des aimants comme un tout, et alors une variation de l'ouverture angulaire relative des aimants par rapport au pas polaire en fonction du rayon, bien que possible, pourrait compliquer de manière importante le calcul, surtout si nous voulons un calcul totalement

analytique, sans calcul numérique d'intégrales.

Cela dit, ce choix est propice à notre dessein, qui est ici de comparer le modèle de la machine à flux axial réel, en prenant en compte l'effet de courbure, et le modèle de l'actionneur linéaire développé au rayon moyen. En effet, afin de pouvoir établir sagement une comparaison sur les valeurs de flux, il n'est pas mauvais que les surfaces actives des aimants entre l'actionneur à flux axial et la machine linéaire équivalente résultant du développement au niveau du rayon moyen soient conservées (et même les volumes d'aimants, à même hauteur des aimants h_a donnée). En effet, la surface active des aimants, pour la machine à flux axial, sera donnée par la formule, avec une ouverture angulaire relative des aimants par rapport au pas dentaire β_a constante en fonction du rayon) :

$$S_{aim} = \beta_a \pi (R_2^2 - R_1^2) = \beta_a \pi 2 \frac{R_1 + R_2}{2} (R_2 - R_1) = \beta_a 2\pi \bar{R} \Delta R \quad (4.109)$$

On retrouve alors la surface active des aimants de la machine linéaire équivalente résultant du développement au rayon moyen.

4.3.2 Méthode de calcul du flux à vide de la machine

Nous allons proposer dans cette partie une méthode analytique de calcul du flux à vide de la machine à flux axial, en coordonnées cylindriques, afin de prendre en compte l'effet de courbure de l'actionneur. Nous comparerons par la suite avec l'actionneur linéaire résultant du développement au niveau du rayon moyen, dans la perspective d'apprécier la validité de cette approximation souvent utilisée dans la modélisation des machines à flux axial. D'autre part, des vérifications du modèle par des méthodes éléments finis 3D, et aussi expérimentalement, seront proposées, afin de montrer le bon fonctionnement de la méthode analytique.

4.3.2.1 Présentation du problème, démarche, et conditions aux limites

Afin de réaliser une véritable résolution analytique tri-dimensionnelle dans la structure de la machine à flux axial, il est crucial de bien définir les conditions aux limites à introduire. En ce qui concerne les conditions aux limites à appliquer au niveau du rotor (en l'abscisse $z = 0$), ainsi qu'au niveau du stator lissé (en l'abscisse $z = h_a + e_c$), il s'agit bien entendu, du fait que l'on a supposé les matériaux ferromagnétiques idéaux, d'une condition de nullité de la composante tangentielle du champ magnétique. En raisonnant en termes de potentiel-vecteur, ceci aboutit à des conditions de Neumann homogènes. Néanmoins, pour des raisons que nous allons justifier ultérieurement, nous allons utiliser, dans cette étude, le potentiel scalaire, ce qui est légitime pour un calcul de flux à vide, pour lequel il n'y a pas à considérer de répartition volumique de courant. En potentiel scalaire, la condition aux limites à appliquer au niveau des parties ferromagnétiques idéales est la duale de celle à appliquer en potentiel-vecteur, ce qui donne donc une condition de Dirichlet nulle. Ces conditions aux limites au niveau des parties ferromagnétiques sont celles utilisées en modélisation 2D des machines à flux axial [Marignetti *et al.*, 2006, Virtic *et al.*, 2009] au niveau des frontières entrefer-stator ou rotor, et peuvent être considérées comme classiques.

Les auteurs de la référence [Azzouzi, 2007] signalent que l'un des freins à la modélisation tri-dimensionnelle réside en revanche dans la définition de conditions aux limites simples dans la direction radiale, afin de pouvoir prendre en compte les effets de bord des aimants. Nous proposons de résoudre le problème de la manière suivante. Concernant la modélisation des effets de bords de l'actionneur linéaire, nous avons proposé, afin de pouvoir mener le calcul simplement, de périodiser la structure de manière fictive suivant la direction des effets de bord, avec une période spatiale L_z supposée très importante en regard des autres dimensions de la machine, afin que les actionneurs fictivement rajoutés ne s'influencent pas l'un l'autre. Cette stratégie a permis d'introduire le formalisme des séries de Fourier 2D, qui est à la base de la résolution entreprise. Ensuite, nous avons considéré les parties ferromagnétiques comme des plans infinis, en prenant en compte les effets de leur longueur finie par une modulation de la composante d'induction entrant dans le stator au moyen d'une fonction perméance relative notée m . Réfléchissons à la manière d'adapter cette démarche à la machine à flux axial. Le dernier point semble totalement réutilisable : sur le schéma de la figure 4.72, nous pouvons fort bien supposer le rayon interne R_{int} des parties ferromagnétiques nulles, le rayon externe R_{ext} de ces parties infini, de manière à disposer de plans infinis de matériau ferromagnétiques idéaux. Par la suite, nous modulerons la composante $B_z^{[r\theta z]}$ ($r, \theta, z = h_a + e_c$) d'induction obtenue, qui, par intégration, donne le flux, par la même fonction de modulation $m(r)$ tenant compte des rayons finis des parties ferromagnétiques, calculée en supposant que la largeur W des parties ferromagnétiques est justement égale au différentiel de rayons des parties ferromagnétiques : $W = R_{ext} - R_{int}$. Le calcul en deux dimensions de la fonction perméance relative

par la méthode de la transformation conforme nous semble également légitime : dans le cas de l'actionneur linéaire, le fait de négliger les effets d'extrémités de la machine justifiait le recours au calcul 2D pour la détermination de cette fonction perméance relative, et, dans le cas présent, la géométrie des parties ferromagnétiques est de type axisymétrique, ce qui est propre à justifier également le caractère bi-dimensionnel du calcul.

En revanche, l'idée de périodiser la structure dans la direction radiale afin de considérer les effets de bords n'est bien évidemment pas directement réutilisable dans la structure qui nous intéresse ici. Cela étant, nous avons aussi fait la remarque que cette méthode, dans le cas de l'actionneur linéaire, était équivalente, d'après la méthode des images magnétiques, au placement de plans de type condition de Neumann homogène $\frac{\partial \vec{A}}{\partial n} = \vec{0}$ sur le potentiel-vecteur entre les machines rajoutées par le processus de périodisation fictive. Nous avons d'ailleurs insisté sur le fait que cette condition n'était pas celle utilisée couramment en électromagnétisme, qui consiste plutôt à rendre le potentiel-vecteur nul $\vec{A} = \vec{0}$ à grande distance (voir la référence [Capri et Panat, 2002] par exemple). Néanmoins, la condition de Neumann offre certaines facilités calculatoires, comme l'absence de valeur moyenne dans la série de Fourier de l'aimantation. Qui plus est, si la longueur de périodisation est vraiment conséquente, la nature de la condition aux limites aura peu d'influence sur le résultat du calcul.

Envisager la méthode adoptée pour modéliser l'actionneur linéaire non pas comme une périodisation, mais comme une condition de Neumann homogène $\frac{\partial \vec{A}}{\partial n} = \vec{0}$ appliquée sur un plan à grande distance de la machine, nous permet d'étendre la stratégie de prise en compte des effets de bords pour l'actionneur linéaire au cas de l'actionneur à flux axial. En effet, il nous suffit alors de rajouter, au niveau d'un certain rayon R_p très grand par rapport au rayon externe de la machine ($R_p \gg R_{ext}$) une condition de Neumann nulle sur le potentiel-vecteur. Ce rayon R_p sera certes choisi très grand par rapport au rayon externe R_{ext} , mais pas infini, afin de pouvoir faire intervenir des développements en séries suivant la direction radiale (ces séries, on le verra, ne seront pas les séries de Fourier, mais celles de Bessel à cause de la forme prise par les équations en coordonnées cylindriques).

Pour finir, précisons que nous n'allons pas travailler en potentiel-vecteur, mais cette fois en potentiel scalaire. La raison en est la suivante : nous savons, depuis la partie sur le calcul analytique quasi-3D dans le cas de l'actionneur linéaire, que la résolution des problèmes de potentiel passe nécessairement, d'un point de vue mathématique, par la résolution d'une équation de Poisson ou de Laplace. Si, en coordonnées cartésiennes, le laplacien-vectoriel se résumait au laplacien de chaque coordonnée, il n'en est pas de même en coordonnées cylindriques, dont l'expression est, étant donné le vecteur de potentiel $\vec{A} = [A_r \ A_\theta \ A_z]^T$:

$$\Delta \vec{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{A_r}{r^2} \\ \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{r^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (4.110)$$

Les deux premières composantes sont des expressions complexes, qui couplent toutes les coordonnées (A_r, A_θ) entre elles. Par conséquent, résoudre une équation de Poisson dans les aimants, ou bien de Laplace dans la zone d'entrefer, avec de telles expressions, nous apparaît complexe. Pour rendre le problème traitable plus facilement sur le plan mathématique, nous nous proposons donc de travailler en potentiel scalaire $\psi^{[r\theta z]}(r, \theta, z)$, donc le laplacien prend la forme bien connue suivante :

$$\Delta \psi^{[r\theta z]} = \frac{\partial^2 \psi^{[r\theta z]}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^{[r\theta z]}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi^{[r\theta z]}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi^{[r\theta z]}}{\partial z^2} \quad (4.111)$$

Cette équation peut être résolue, comme on va le voir, grâce au recours à la méthode de séparation des variables, et à des familles de fonctions appropriées comme solutions des équations différentielles sur chaque variable. Qui plus est, le fait de se fixer une condition de Neumann sur le potentiel-vecteur de type $\frac{\partial \vec{A}}{\partial n} = \vec{0}$ en $r = R_p \gg R_{ext}$, demande, par dualité, d'imposer une condition de Dirichlet nulle sur le potentiel scalaire, c'est-à-dire $\psi^{[r\theta z]}(r = R_p, \theta, z) = 0$.

Les sources, qui sont les aimants dont la forme a été décrite ci-dessus, seront prises en compte par un modèle coulombien, qui consiste à placer, sur les surfaces des aimants perpendiculaires à la direction de l'aimantation, une densité surfacique de charges magnétiques fictives. Dans notre cas, la surface chargée est le plan situé en $z = h_a$, qui se voit muni d'une densité surfacique de charges magnétiques fictives $\sigma^*(r, \theta)$ définie de la manière suivante, d'après la référence [de Lacheisserie, 2000] :

$$\sigma^*(r, \theta) = \begin{cases} + \frac{B_r}{\mu_0} & \text{pour les aimants de polarité Nord} \\ - \frac{B_r}{\mu_0} & \text{pour les aimants de polarité Sud} \\ 0 & \text{dans les espaces inter-aimants} \end{cases} \quad (4.112)$$

L'avantage d'utiliser ce type de formulation avec la charge magnétique est de réduire l'influence des sources que sont les aimants (figure 4.71) à une condition de passage en $z = h_a$ entre les zones (I) et (II). Par voie de conséquence, dans la zone (I) des aimants, l'équation à résoudre se réduit également à une équation de Laplace sur le potentiel scalaire comme dans l'entrefer de la machine, ce qui est avantageux, car la résolution d'une équation de Laplace est toujours plus aisée qu'une équation de Poisson. En conséquence, en potentiel scalaire, en supposant les plans des parties ferromagnétiques infinis, le problème se réduit comme ci-dessous :

$$\begin{cases} \Delta\psi^{[r\theta z](I)} = 0 & \text{pour } z \in [0; h_a] \\ \Delta\psi^{[r\theta z](II)} = 0 & \text{pour } z \in [h_a; h_a + e_c] \end{cases} \quad (4.113)$$

Dans l'équation précédente, les laplaciens s'entendent en coordonnées cylindriques, comme dans l'équation 4.111. Au niveau des frontières avec les plans ferromagnétiques, nous aurons :

$$\begin{cases} \psi^{[r\theta z](I)} = 0 & \text{en } z = 0 \\ \psi^{[r\theta z](II)} = 0 & \text{en } z = h_a + e_c \end{cases} \quad (4.114)$$

Pour un rayon $r = R_p$, choisi très grand par rapport au rayon externe R_{ext} , nous avons dit que nous nous donnons une condition de potentiel scalaire nul. Cette condition est schématisable au niveau de la figure 4.73, dans le plan $(0r\theta)$:

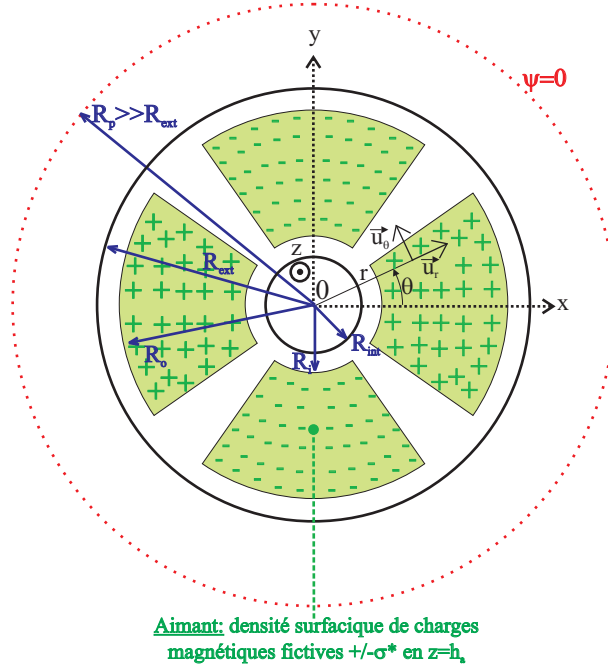


FIGURE 4.73: Potentiel scalaire nul sur un rayon $r = R_p \gg R_{ext}$, dans le plan $(0r\theta)$

En ce qui concerne la continuité entre les deux zones en $z = h_a$, les analogies classiques, vu que nous sommes en potentiel-scalaire [de Lacheisserie, 2000], avec la théorie de l'électrostatique, mènent aux relations suivantes :

$$\begin{cases} -\frac{\partial\psi^{[r\theta z](II)}}{\partial z}\Big|_{z=h_a} + \frac{\partial\psi^{[r\theta z](I)}}{\partial z}\Big|_{z=h_a} = \sigma^*(r, \theta) \\ \psi^{[r\theta z](II)}(r, \theta, z = h_a) - \psi^{[r\theta z](I)}(r, \theta, z = h_a) = 0 \end{cases} \quad (4.115)$$

4.3.2.2 Détail du modèle analytique 3D

Nous allons détailler, dans cette partie, le modèle analytique 3D de la machine à flux axial. Afin de résoudre le problème posé précédemment (figure 4.73), nous allons avoir recours à la méthode de la séparation des variables, en

coordonnées cylindriques. Que ce soit dans la zone (I) (celle des aimants), ou bien la zone (II) (celle de l'entrefer), nous pouvons alors, d'après le principe de la séparation des variables, écrire le potentiel scalaire sous la forme suivante, en tenant compte du fait que la dépendance en la coordonnée orthoradiale (l'angle θ) de ce potentiel est évidente :

$$\psi^{[r\theta z]}(r, \theta, z) = \sum_{k \geq 1} Z_k(z) R_k(r) \cos[(2k-1)p\theta] \quad (4.116)$$

Vu que le potentiel, que se soit dans la zone (I) ou bien la zone (II), est régi par une équation de Laplace, l'introduction de l'expression précédente dans l'expression du laplacien en coordonnées cylindriques (équation 4.111) conduit, après quelques manipulations algébriques, à l'expression suivante :

$$\forall k \geq 1, \frac{1}{R_k} \frac{d^2 R_k}{dr^2} + \frac{1}{R_k r} \frac{dR_k}{dr} - \frac{[(2k-1)p]^2}{r^2} = -\frac{1}{Z_k} \frac{d^2 Z_k}{dz^2} \quad (4.117)$$

De part et d'autre du signe d'égalité de l'équation précédente, nous avons respectivement des fonctions de deux variables d'espace indépendantes, que sont respectivement les coordonnées r et z . Par conséquent, ces deux termes sont égaux à une même constante. Pour des raisons physiques, il est clair que pour tout entier k , la fonction $Z_k(z)$ ne peut pas être périodique. Elle ne peut donc être qu'hyperbolique, ce qui impose que la constante (dépendant de l'entier k considéré) soit positive. Nous notons alors K_k^2 cette constante (pour tout entier $k \geq 1$). De ce fait, l'équation précédente permet d'aboutir au couple d'équations différentielles suivant :

$$\forall k \geq 1, \begin{cases} \frac{d^2 Z_k}{dz^2} - K_k^2 Z_k & = 0 \\ \frac{d^2 R_k}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_k}{dr} - \left\{ K_k^2 - \frac{[(2k-1)p]^2}{r^2} \right\} R_k & = 0 \end{cases} \quad (4.118)$$

Les constantes K_k restent bien entendu à déterminer. La solution de l'équation sur la fonction $Z_k(z)$ est hyperbolique, alors que celle de la seconde équation admet pour solution des fonctions de Bessel. La présence de solutions à cette équation en fonctions de Bessel de seconde espèce est interdite, car, pour des raisons physiques, le potentiel est forcément fini en la coordonnée $r = 0$. Il ne reste alors plus qu'à considérer des solutions en fonctions de Bessel de première espèce. La solution cherchée, pour tout entier $k \geq 1$, est donc donnée par l'expression suivante :

$$R_k(r) = J_{(2k-1)p}(K_k r) \quad (4.119)$$

La constante K_k , pour tout entier $k \geq 1$, est déterminée de telle manière à vérifier la condition aux limites au niveau du rayon $r = R_p$ très grand par rapport au rayon externe de la machine R_{ext} , consistant à imposer que le potentiel scalaire soit nul. Il est donc clair que la constante K_k prend la forme suivante :

$$K_k = \frac{x_{(2k-1)p}}{R_p} \quad (4.120)$$

où on a noté $x_{(2k-1)p}$ un zéro de la fonction de Bessel de première espèce d'ordre $(2k-1)p$. Or, la théorie des fonctions de Bessel [Watson, 1995] nous apprend que les fonctions de Bessel de première espèce, quelque soit leur ordre, possèdent chacune une infinité de zéros. Ces zéros sont tabulés [Andrews *et al.*, 2000]. Notons $x_{(2k-1)p,m}$ le m -ème zéro de la fonction de Bessel de première espèce d'ordre $(2k-1)p$, notée $J_{(2k-1)p}$. Définissons, pour tout couple (k, m) d'entiers, la famille des nombres $K_{k,m}$, par la formule suivante :

$$\forall (k, m) \geq 1, K_{k,m} = \frac{x_{(2k-1)p,m}}{R_p} \quad (4.121)$$

Par conséquent, l'expression finale du potentiel scalaire est donc donnée, que ce soit dans la zone (I) (celle des aimants), ou la zone (II) (celle de l'entrefer), par l'équation suivante :

$$\psi^{[r\theta z]}(r, \theta, z) = \sum_{k \geq 1, m \geq 1} Z_{k,m}(z) J_{(2k-1)p}(K_{k,m} r) \cos[(2k-1)p\theta] \quad (4.122)$$

La fonction $Z_{k,m}(z)$ est par conséquent régie par l'équation différentielle suivante :

$$\forall (k, m) \geq 1, \frac{d^2 Z_{k,m}}{dz^2} - K_{k,m}^2 Z_{k,m} = 0 \quad (4.123)$$

D'après les conditions de potentiel scalaire nul au niveau des plan ferromagnétiques du rotor et du stator (afin de les lignes d'induction y entrent de manière normale), nous pouvons donc écrire de manière explicite les expressions des potentiels scalaires dans les zones (I) (celle des aimants), et (II) (celle de l'entrefer corrigé) :

– dans la zone (I) (les aimants), nous avons :

$$\psi^{[r\theta z]^{(I)}}(r, \theta, z) = \sum_{k \geq 1, m \geq 1} \xi_{k,m}^{(I)} \sinh(K_{k,m} z) J_{(2k-1)p}(K_{k,m} r) \cos[(2k-1)p\theta] \quad (4.124)$$

– dans la zone (II) (l'entrefer), nous avons :

$$\psi^{[r\theta z]^{(II)}}(r, \theta, z) = \sum_{k \geq 1, m \geq 1} \xi_{k,m}^{(II)} \sinh(K_{k,m}(z - h_a - e_c)) J_{(2k-1)p}(K_{k,m} r) \cos[(2k-1)p\theta] \quad (4.125)$$

A présent, le problème est de déterminer, pour tout couple d'entiers (k, m) , les constantes $\xi_{k,m}^{(I)}$ et $\xi_{k,m}^{(II)}$ dans les zones (I) et (II). Pour cela, nous nous proposons de décomposer en séries la densité de charges magnétiques équivalentes $\sigma^*(r, \theta)$ au niveau de la coordonnée $z = h_a$. Dans le but d'aboutir à des systèmes linéaires découplés pour chaque couple d'entiers (k, m) , nous choisissons un développement en séries de Fourier-Bessel de la densité surfacique de charges magnétiques en $z = h_a$, de la forme :

$$\sigma^*(r, \theta) = \sum_{k \geq 1, m \geq 1} \sigma_{k,m}^* J_{(2k-1)p}(K_{k,m} r) \cos[(2k-1)p\theta] \quad (4.126)$$

D'après [Watson, 1995], un tel développement existe, étant donné que pour tout entier $k \geq 1$, la famille des fonctions de Bessel $(J_{(2k-1)p}(K_{k,1}r), J_{(2k-1)p}(K_{k,2}r), \dots)$ forme un système générateur orthogonal pour les fonctions de l'intervalle $[0; R_p]$ s'annulant en $r = 0$ et $r = R_p$, pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^{R_p} f(r) \cdot g(r) r dr$ (f et g sont deux fonctions arbitraires de l'intervalle $[0; R_p]$, s'annulant au niveau des bornes). Cette propriété est à la base des développements en séries de Fourier-Bessel. Toujours d'après [Watson, 1995], la norme des fonctions de la base est donnée par, pour tout couple d'entiers (k, m) :

$$\begin{aligned} |J_{(2k-1)p}(K_{k,m}r)|^2 &= \langle J_{(2k-1)p}(K_{k,m}r), J_{(2k-1)p}(K_{k,m}r) \rangle \\ &= \int_0^{R_p} J_{(2k-1)p}^2(K_{k,m}r) r dr = R_p^2 J_{(2k-1)p+1}^2(x_{(2k-1)p,m}) \end{aligned} \quad (4.127)$$

Même une fonction discontinue sur l'intervalle $[0; R_p]$ (et s'annulant au niveau des bornes), ce qui sera le cas dans notre situation, vu que l'aimantation est non nulle uniquement dans l'intervalle $[R_1; R_2]$, peut se voir développée en séries de Fourier-Bessel, un analogue du théorème de Dirichlet pour les séries de Fourier, sur la convergence vers le point moyen en cas de discontinuité ayant été prouvé (livre [Watson, 1995]).

En considérant les propriétés d'orthogonalité précédentes, et en se rappelant bien sûr celles existant sur les séries de Fourier, on peut, en multipliant l'équation 4.126 par le produit de fonctions $J_{(2k-1)p}(K_{k,m}r) \cos[(2k-1)p\theta]$, obtenir l'expression du coefficient $\sigma_{k,m}^*$ pour tout couple d'entiers (k, m) en fonction de la densité de charges magnétiques fictives $\sigma^*(r, \theta)$. Nous allons alors obtenir l'expression :

$$\sigma_{m,k}^* = \frac{2}{R_p^2 J_{(2k-1)p+1}^2(x_{(2k-1)p,m})} \frac{1}{\pi} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \int_{r=R_1}^{R_2} \sigma^*(r, \theta) J_{(2k-1)p}(K_{k,m}r) \cos[(2k-1)p\theta] r dr d\theta \quad (4.128)$$

En considérant la forme de la densité surfacique fictive de charges $\sigma^*(r, \theta)$ définie par l'équation 4.112, et en calculant la première intégrale en cosinus, nous allons obtenir l'expression suivante :

$$\sigma_{m,k}^* = \frac{2}{R_p^2 J_{(2k-1)p+1}^2(x_{(2k-1)p,m})} \frac{4 B_r \sin[(2k-1)\beta_a \frac{\pi}{2}]}{\pi \mu_0 (2k-1)} \int_{R_1}^{R_2} J_{(2k-1)p}(K_{k,m}r) r dr \quad (4.129)$$

Le problème est le calcul des coefficients précédents, faisant intervenir des intégrales de fonctions de Bessel. Une première solution serait de les calculer numériquement. Néanmoins, cette stratégie nécessite de nombreuses évaluations des fonctions de Bessel, ce qui est dissuasif du point de vue du temps de calcul, car nous aurions, si on appelle N_{inf} le nombre d'harmoniques choisi, à répéter le calcul N_{inf}^2 fois, pour toutes les combinaisons d'entiers (k, m) . Un calcul analytique nous semble bien plus pertinent. Nous proposons la méthode développée en annexe B. Nous

déduisons de cette étude que l'expression analytique des coefficients $\sigma_{m,k}^*$ pour un nombre de paires de pôles p pair est donnée alors par l'expression analytique suivante, pour tout couple (k, m) d'entiers :

$$\sigma_{m,k}^* = \frac{2}{R_p^2 J_{(2k-1)p+1}^2(x_{(2k-1)p,m})} \frac{4 B_r \sin[(2k-1)\beta_a \frac{\pi}{2}]}{\pi \mu_0 (2k-1)} \left\{ \frac{1}{K_{k,m}} R_2 J_0(K_{k,m} R_2) + \frac{(2k-1)p}{K_{k,m}^2} [J_0(K_{k,m} R_2) - 2(J_0(K_{k,m} R_2) + J_2(K_{k,m} R_2) + \dots + J_{(2k-1)p}(K_{k,m} R_2))] - \frac{1}{K_{k,m}} R_1 J_0(K_{k,m} R_1) - \frac{(2k-1)p}{K_{k,m}^2} [J_0(K_{k,m} R_1) - 2(J_0(K_{k,m} R_1) + J_2(K_{k,m} R_1) + \dots + J_{(2k-1)p}(K_{k,m} R_1))] \right\} \quad (4.130)$$

Une fois le développement en séries de Fourier-Bessel de la densité surfacique de charges fictive des aimants connu, il est possible, en tenant compte des conditions de passage énoncées à l'équation 4.115, d'en déduire, pour chaque couple d'entiers (k, m) , les constantes $\xi_{k,m}^{(I)}$ et $\xi_{k,m}^{(II)}$ du potentiel dans les zones (I) et (II). En effet, nous allons obtenir le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} K_{m,k} \xi_{k,m}^{(I)} \cosh(K_{m,k} h_a) - K_{m,k} \xi_{k,m}^{(II)} \cosh(K_{m,k} e_c) = \sigma_{m,k}^* \\ \xi_{k,m}^{(I)} \sinh(K_{m,k} h_a) + \xi_{k,m}^{(II)} \sinh(K_{m,k} e_c) = 0 \end{cases} \quad (4.131)$$

La résolution de ce système linéaire autorise donc la détermination des constantes du potentiel recherchées. Le potentiel scalaire dans la machine est donc à présent connu. A partir de là, la composante $B_z^{[r\theta z]}(r, \theta, z = h_a + e_c)$ d'induction entrant dans le stator de la machine peut être déterminée, par la formule suivante :

$$B_z^{[r\theta z]}(r, \theta, z = h_a + e_c) = \mu_0 H_z^{[r\theta z]}(r, \theta, z = h_a + e_c) \quad (4.132)$$

La composante $H_z^{[r\theta z]}(r, \theta, z = h_a + e_c)$ du champ magnétique normal au stator s'obtient par dérivation du potentiel scalaire que l'on vient de déterminer, sans oublier de multiplier par la fonction perméance relative $m(r)$ tenant compte des rayons interne R_{int} et externe R_{ext} des parties ferromagnétiques :

$$H_z^{[r\theta z]}(r, \theta, z = h_a + e_c) = - \left. \frac{\partial \psi^{[r\theta z](II)}}{\partial z} \right|_{z=h_a+e_c} m(r) \quad (4.133)$$

Le maximal flux entrant dans le stator, qui donne le couple de la machine, s'obtient alors par intégration de l'induction sous un pôle Nord de la machine :

$$\hat{\varphi}^{[r\theta z]} = p \iint_{(r,\theta) \in [R_1; R_2] \times [-\frac{\pi}{2p}; \frac{\pi}{2p}]} B_z^{[r\theta z]}(r, \theta, z = h_a + e_c) r dr d\theta \quad (4.134)$$

4.3.2.3 Mise en oeuvre du modèle, vérification par éléments finis et étude de l'effet de courbure

Tracé de la carte d'induction obtenue, et vérification du flux par éléments finis 3D Dans cette partie, nous allons montrer la carte d'induction entrant dans la machine obtenue sous un pôle Nord d'aimant. Puis nous allons effectuer le calcul d'intégrale donnant le flux total dans la machine, flux que nous allons comparer avec les résultats fournis par un modèle éléments finis 3D de la machine à flux axial. Nous nous donnons la géométrie de machine suivante pour effectuer la vérification :

- Pour les dimensions axiales :
 - Une hauteur d'aimants $h_a = 0.005\text{m}$.
 - Une profondeur d'encoche égale à $h_e = 0.05\text{m}$. L'ouverture relative des dents par rapport au pas dentaire est égale à $\beta_e = 1/2$, ce qui signifie que la largeur des encoches w_e est égale à la largeur des dents w_d . Insistons sur le fait que cette définition n'est valable qu'au niveau du rayon moyen de la machine, car la largeur w_e des encoches est constante quelque soit le rayon, et la largeur w_d des dents s'adapte afin de garantir que l'occupation angulaire du pas d'encoche soit conservée quelque soit le rayon considéré. On prend en outre trois encoches par pôle (une encoche par pôle et par phase). Le coefficient de Carter calculé au niveau du rayon moyen va donner un entrefer corrigé de valeur approximative $e_c = 0.0024\text{m}$.

- Une épaisseur de culasses de parties mobiles et fixes égales, et valant $e_{cs} = e_{cr} = 0.01\text{m}$.
- Pour les grandeurs radiales :
 - Un rayon actif interne $R_1 = 0.03\text{m}$, un rayon actif externe $R_2 = 0.2\text{m}$, ce qui donne un rayon moyen de $\bar{R} = \frac{R_1+R_2}{2} = 0.115\text{m}$.
 - Un rayon interne des parties ferromagnétiques égal à $R_{int} = 0.02\text{m}$, un rayon externe des parties ferromagnétiques de $R_{ext} = 0.21\text{m}$.
 - Un rayon R_p au niveau duquel le potentiel doit s'annuler égal à $10 \cdot R_{ext}$.
- Pour les grandeurs orthoradiales :
 - Une ouverture relative des aimants par rapport au pas polaire égale à $\beta_a = 0.8$.
 - Un nombre de paires de pôles variant entre $p = 4$ et $p = 12$.
- Nous utilisons des aimants de type NdFeB, pourvus d'une induction rémanente de $B_r = 1.2\text{T}$ à une température de 25°C .

Nous montrons, à la figure 4.74, la carte d'induction obtenue sous un pôle Nord d'aimant au moyen du modèle analytique tri-dimensionnel que nous venons de présenter. Il s'agit de la composante d'induction $B_z^{[r\theta z]}(r, \theta, z = h_a + e_c)$ qui entre dans le stator (le plan (oxy) de la figure 4.74 représente de plan $(0r\theta)$ en coordonnées cartésiennes). Par intégration sur le pas polaire de cette induction, et multiplication par le nombre de paires de pôles p de la machine, on obtient le flux à vide de la machine, directement proportionnel au couple généré. Nous y voyons apparaître la forme radiale des aimants choisie, malgré l'affaiblissement de l'induction sur les bords de l'aimant à cause des fuites.

Sur la figure 4.75, nous avons représenté justement le flux total dans la machine à flux axial en fonction du nombre de paires de pôles p . Le flux de référence choisi est le flux dans la machine s'il n'y avait aucune fuite au niveau des aimants (calculé par un modèle 1D). Ce flux est donné par l'expression suivante :

$$\hat{\phi}^{[z]} = B_r \frac{h_a}{h_a + e_c} \beta_a \cdot \Delta R \cdot 2\pi R_{moy} \quad (4.135)$$

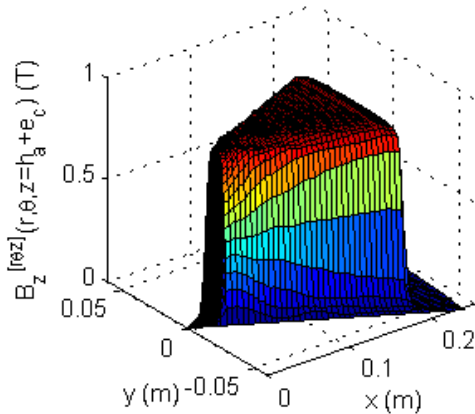


FIGURE 4.74: Carte d'induction obtenue $B_z^{[r\theta z]}(r, \theta, z = h_a + e_c)$ sous un pôle Nord de la machine à flux axial

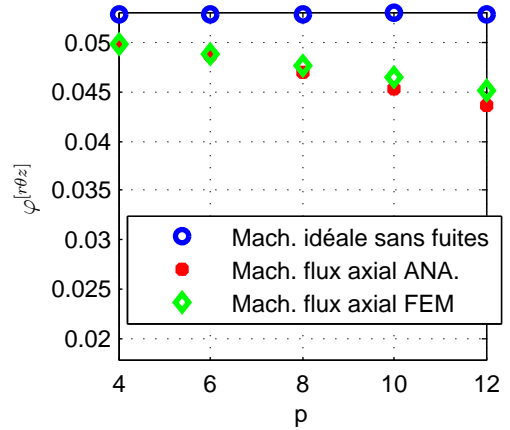


FIGURE 4.75: Flux maximal entrant dans le stator de la machine à flux axial, obtenu par un modèle 1D, par le modèle analytique 3D, puis par éléments finis 3D en fonction du nombre p de paires de pôles

Bien entendu, vu qu'aucune fuite n'est prise en compte dans ce modèle, ce flux total ne dépend pas du nombre de paires de pôles p , et apparaît en points bleus sur la figure 4.75. Nous y faisons aussi figurer le flux résultant du calcul analytique 3D que l'on vient d'exposer, ainsi que les résultats issus d'un modèle éléments finis 3D de la machine à flux axial (le modèle éléments finis 3D utilisé ne tient pas compte des encoches réelles de la machine, mais utilise le coefficient de Carter, le but n'étant pas d'étudier l'effet du lissage de l'entrefer sur les résultats, mais plutôt de valider la justesse du modèle analytique proposé). La machine maillée et simulée par le logiciel éléments finis est montré au niveau de la figure 4.76 sur un pas polaire. Nous voyons que les flux obtenus analytiquement, puis par éléments finis 3D, semblent en bon accord. Nous nous apercevons que l'augmentation du nombre de paires de

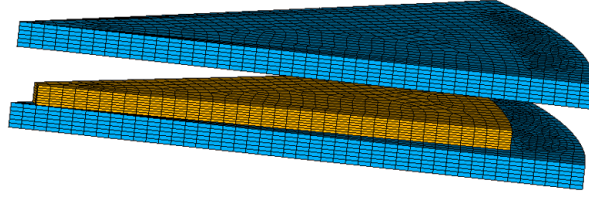


FIGURE 4.76: Machine à flux axial maillée et simulé par éléments finis pour le calcul du flux à vide, sans encoches au stator, et représentée sur un pas polaire

pôles augmente, dans la machine réelle, les fuites inter-aimants, et donc vient diminuer le flux total de la machine, jusqu'à 15% pour un nombre de paires de pôles $p = 12$.

Etude de l'effet de courbure de la machine à flux axial L'expression du flux $\hat{\varphi}^{[z]}$, fournie par l'équation 4.135, appelle la remarque suivante : on a vu que cette expression serait inchangée si, au lieu de considérer la machine à flux axial, on s'intéressait à la machine linéaire équivalente développée au niveau du rayon moyen. En effet, on s'est aperçu que, grâce à la forme radiale des aimants choisie pour la machine à flux axial, la surface des aimants de la machine à flux axial, et celle de la machine linéaire développée au niveau du rayon moyen, sont identiques. Par conséquent, lorsque l'on néglige les fuites inter-aimants, les deux flux, calculés par un modèle analytique 1D, sont donc égaux. On peut donc se poser la question de savoir si, lorsque l'on prend en compte les fuites inter-aimants et les effets de bords pour la machine à flux axial grâce à la modélisation 3D, cette égalité des flux entre les deux machines est toujours valide. Ceci revient à se demander si les mécanismes de fuites dans la machine à flux axial et dans la machine linéaire équivalente développée au rayon moyen sont identiques. En d'autres termes, est-il vraiment légitime de développer, pour simplifier la modélisation, la machine à flux axial au niveau de son rayon moyen pour en faire un actionneur linéaire ? Ou bien l'effet de courbure, propre à la machine à flux axial et négligé par principe dans l'actionneur linéaire équivalent, induit-il des phénomènes particuliers sur les fuites inter-aimants, de telle manière que son influence sur le flux total dans la machine ne peut être négligé ? Pour répondre à ces questions qui nous paraissent importantes pour le modélisateur de machine, nous allons comparer le rapport des flux à vide en 3D pour les deux machines, qui est $\frac{\hat{\varphi}^{[r\theta z]}}{\hat{\varphi}^{[z]}}$ pour la machine à flux axial, et $\frac{\hat{\varphi}^{[xyz]}}{\hat{\varphi}^{[z]}}$ pour la machine linéaire équivalente développée au rayon moyen. En effet, ce rapport, inférieur à l'unité, permet de quantifier directement, dans chaque cas, la perte de flux à vide due aux fuites inter-aimants et aux effets de bord. L'étude sera faite en fonction d'une variable géométrique bien choisie, image de la courbure de la machine. Une vérification par éléments finis 3D sera effectuée.

Nous souhaiterions aller plus loin dans la comparaison. En effet, avec le chapitre précédent, où nous proposons un modèle 2D de la machine à flux axial développé au niveau de son rayon moyen, nous disposons à présent de différents modèles analytiques, d'une complexité différente, du flux à vide de la machine à flux axial : des modèles 3D avec et sans effet de courbure, et un modèle 2D sans effet de courbure. A cela, nous pouvons rajouter le modèle proposé dans la référence [Azzouzi, 2007], qui prend en compte les effets de courbure par décomposition en couches élémentaires de l'actionneur pour chaque rayon. Dans chaque couche élémentaire, une modélisation 2D analytique est effectuée. On pourrait donc qualifier ce modèle de 2D (car les effets de bords ne sont pas pris en compte), mais avec effet de courbure. Nous récapitulons au niveau du tableau 4.2 les quatre différents modèles analytiques du flux à vide de la machine à flux axial que nous allons comparer, en les classant par niveau de complexité croissant.

Nom du modèle	Dimension du modèle	Présence de l'effet de courbure	Description et origine du modèle
Modèle 1	2D	Non	Modèle 2D avec développement au rayon moyen du chapitre 2
Modèle 2	2D	Oui	Modèle 2D par couches présenté dans la référence [Azzouzi, 2007]
Modèle 3	3D	Non	Modèle 3D de l'actionneur linéaire avec aimants rectangulaires présenté à la section 4.2.2.2 de ce chapitre
Modèle 4	3D	Oui	Modèle 3D de la machine disque présenté à la section 4.3 de ce chapitre

TABLE 4.2: Les différents modèles analytiques du flux à vide de la machine à flux axial, avec un niveau de complexité croissant

L'étude comparative au niveau des flux des quatre modèles présentés dans le tableau 4.2 permettra de découpler les différents phénomènes que sont les effets de bord des actionneurs, et les effets de courbure, et d'étudier leurs influences respectives dans le flux à vide maximal obtenu, qui est directement proportionnel au couple estimé. Le modèle 4 (modèle analytique 3D de la machine disque) fera l'objet de vérifications éléments finis 3D, à partir du motif maillé de la figure 4.76. Nous proposerons, après avoir exposé les résultats, une interprétation des données obtenues concernant l'effet de courbure de la machine à flux axial sur la base d'un schéma réductant simplifié.

Résultats de comparaison des différents modèles de la machine à flux axial D'un point de vue physique, il est clair que trois paramètres interviennent sur la courbure de la machine : le rayon moyen \bar{R} , l'excursion ΔR des rayons actifs interne et externe autour du rayon moyen \bar{R} (sachant que $R_1 = \bar{R} - \Delta R/2$, et $R_2 = \bar{R} + \Delta R/2$), ainsi que le nombre de paires de pôles p de la machine à flux axial. Par exemple, à nombre de paires de pôles p fixe, et à rayon moyen \bar{R} fixe (par conséquent, le pas polaire τ au niveau du rayon moyen, qui vaut $\tau = \pi/p\bar{R}$, est donc lui aussi fixé), il est clair que la machine apparaît d'autant plus courbée que le rapport $\Delta R/\tau$ est grand, le cas extrême intervenant lorsque les aimants de la machine à flux axial se rejoignent au centre de cette dernière ($\Delta R = 2\bar{R}$). Pour au contraire un rapport $\Delta R/\tau$ faible, la machine, localement, va tendre vers un actionneur linéaire. Grâce à ces constatations, nous choisissons de mener l'étude comme suit : nous allons fixer le rayon moyen \bar{R} , ainsi que le nombre de paires de pôles p de la machine à flux axial. De cette manière, le pas polaire τ au niveau du rayon moyen sera lui aussi fixé. Puis nous allons faire varier, pour augmenter plus ou moins l'effet de courbure de la machine, le rapport $\Delta R/\tau$, de la valeur nulle, et jusqu'à ce que l'aimant atteigne le centre de la machine, cas correspondant à l'effet de courbure maximal.

Néanmoins le rapport $\Delta R/\tau$ n'est pas le seul paramètre qui influence l'effet de courbure. En effet, on peut remarquer que si nous maintenons le pas polaire τ au niveau du rayon moyen constant, quelque soit l'excursion de rayons actifs ΔR choisie, la valeur du rayon moyen \bar{R} elle-même influence l'effet de courbure. Si, à pas polaire τ fixé, le rayon moyen \bar{R} diminue, la machine apparaîtra d'autant plus courbée. Bien entendu, diminuer le rayon moyen \bar{R} en maintenant fixe le pas polaire τ au niveau de ce rayon moyen demande de réadapter (en le diminuant) le nombre de paires de pôles p , en vertu de l'équation suivante : $p = \frac{\pi}{\tau}\bar{R}$.

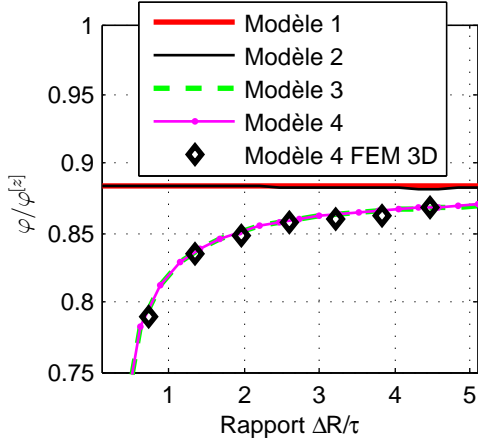
Nous proposerons donc l'étude suivante. Nous allons fixer une fois pour toutes le pas polaire au niveau du rayon moyen τ . Nous allons choisir ensuite trois cas avec un rayon moyen \bar{R} différent. Le nombre de paires de pôles sera donc réadapté à chaque fois grâce à l'équation $p = \frac{\pi}{\tau}\bar{R}$. Plus le rayon moyen \bar{R} sera faible (donc à τ fixé, ceci implique de diminuer aussi le nombre de paires de pôles p), plus la machine apparaîtra courbée. Pour chaque cas, nous allons ensuite répéter l'étude consistant à faire varier l'excursion des parties actives autour du rayon moyen $\Delta R/\tau$.

Voici la configuration de machine étudiée ici :

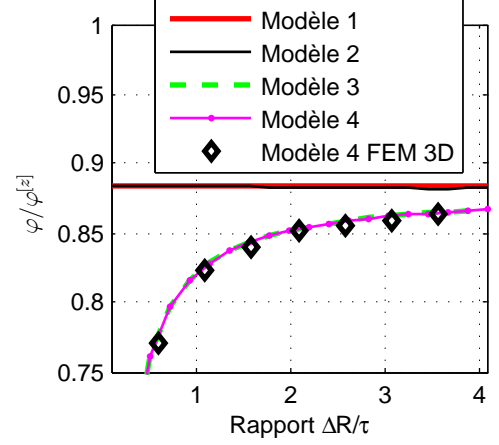
- La hauteur d'aimant sera $h_a = 0.005\text{m}$, un entrefer corrigé par le coefficient de Carter est égal à $e_c = 0.0024\text{m}$, et des épaisseurs de culasses statoriques et rotoriques sont égales à $e_{cs} = e_{cr} = 0.01\text{m}$.
- Nous nous donnons un pas polaire au niveau du rayon moyen $\tau = 0.031\text{m}$. Nous étudions les trois cas suivants :
 - Cas 1 : $\bar{R} = 0.1\text{m}$, donc $p = \frac{\pi}{\tau}\bar{R} = 10$.

- Cas 2 : $\bar{R} = 0.08\text{m}$, donc $p = \frac{\pi}{\tau}\bar{R} = 8$.
- Cas 3 : $\bar{R} = 0.04\text{m}$, donc $p = \frac{\pi}{\tau}\bar{R} = 4$.
- Dans chaque cas, le ratio $\Delta R/\tau$ variera de la valeur nulle à la valeur $(\Delta R/\tau)_{LIM} = 2^{p/\pi}$, qui correspond au cas où les aimants se rejoignent au centre de la machine.

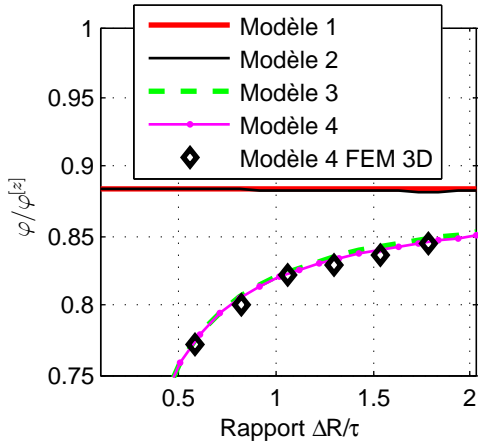
Les résultats sont montrés au niveau des figures 4.77a, 4.77b, et 4.77c, respectivement pour les cas 1 ($\bar{R} = 0.1\text{m}$, donc $p = 10$), 2 ($\bar{R} = 0.08\text{m}$, donc $p = 8$), et 3 ($\bar{R} = 0.04\text{m}$, donc $p = 4$).



(a) Rapport des flux maximaux $\frac{\hat{\phi}}{\hat{\phi}[z]}$ en fonction du ratio $\Delta R/\tau$ pour les différents modèles de la machine à flux axial du tableau 4.2, pour le cas 1 ($\bar{R} = 0.1\text{m}$, donc $p = 10$), l'entrefer corrigé valant $e_c = 0.0024\text{m}$



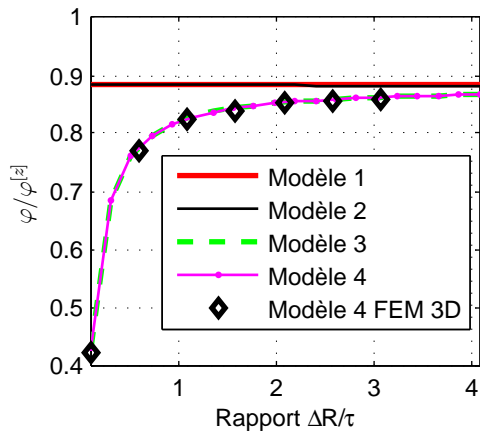
(b) Rapport des flux maximaux $\frac{\hat{\phi}}{\hat{\phi}[z]}$ en fonction du ratio $\Delta R/\tau$ pour les différents modèles de la machine à flux axial du tableau 4.2, pour le cas 2 ($\bar{R} = 0.08\text{m}$, donc $p = 8$), l'entrefer corrigé valant $e_c = 0.0024\text{m}$



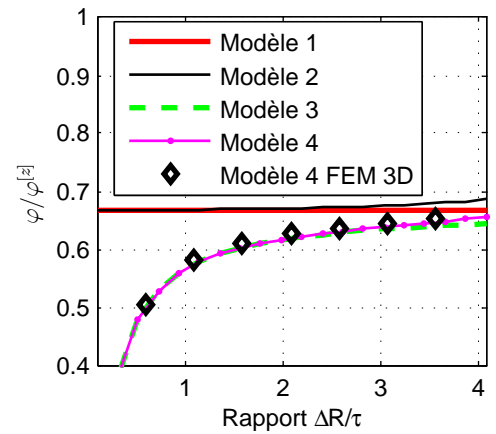
(c) Rapport des flux maximaux $\frac{\hat{\phi}}{\hat{\phi}[z]}$ en fonction du ratio $\Delta R/\tau$ pour les différents modèles de la machine à flux axial du tableau 4.2, pour le cas 3 ($\bar{R} = 0.04\text{m}$, donc $p = 4$), l'entrefer corrigé valant $e_c = 0.0024\text{m}$

FIGURE 4.77: Rapport des flux $\frac{\hat{\phi}}{\hat{\phi}[z]}$ en fonction du ratio $\Delta R/\tau$, l'entrefer corrigé valant $e_c = 0.0024\text{m}$

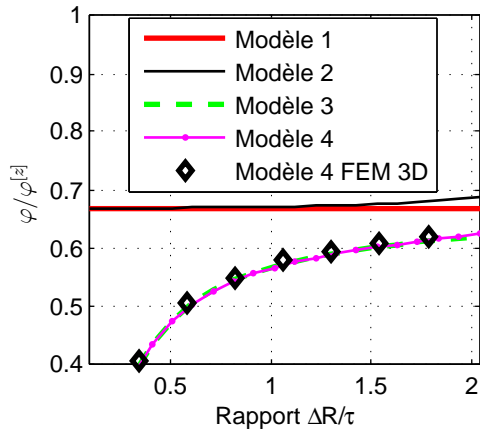
Afin d'augmenter les fuites et d'obtenir ainsi des diminutions de flux plus significatives, nous avons relancé tous les calculs, mais en augmentant la valeur de l'entrefer corrigée, qui passe à présent à $e_c = 0.01\text{m}$. Les résultats sont montrés au niveau des figures 4.78a, 4.78b, et 4.78c, respectivement pour les cas 1 ($\bar{R} = 0.1\text{m}$, donc $p = 10$), 2 ($\bar{R} = 0.08\text{m}$, donc $p = 8$), et 3 ($\bar{R} = 0.04\text{m}$, donc $p = 4$).



(a) Rapport des flux maximaux $\frac{\hat{\varphi}}{\varphi_{[z]}}$ en fonction du ratio $\Delta R/\tau$ pour les différents modèles de la machine à flux axial du tableau 4.2, pour le cas 1 ($\bar{R} = 0.1\text{m}$, donc $p = 10$), l'entrefer corrigé valant $e_c = 0.01\text{m}$



(b) Rapport des flux maximaux $\frac{\hat{\varphi}}{\varphi_{[z]}}$ en fonction du ratio $\Delta R/\tau$ pour les différents modèles de la machine à flux axial du tableau 4.2, pour le cas 2 ($\bar{R} = 0.08\text{m}$, donc $p = 8$), l'entrefer corrigé valant $e_c = 0.01\text{m}$



(c) Rapport des flux maximaux $\frac{\hat{\varphi}}{\varphi_{[z]}}$ en fonction du ratio $\Delta R/\tau$ pour les différents modèles de la machine à flux axial du tableau 4.2, pour le cas 3 ($\bar{R} = 0.04\text{m}$, donc $p = 4$), l'entrefer corrigé valant $e_c = 0.01\text{m}$

FIGURE 4.78: Rapport des flux $\frac{\hat{\varphi}}{\varphi_{[z]}}$ en fonction du ratio $\Delta R/\tau$, l'entrefer corrigé valant $e_c = 0.01\text{m}$

Interprétation des résultats de comparaison des flux fournis par les différents modèles de machines

Sur les six figures de résultats des flux obtenus (4.77a, 4.77b, 4.77c, 4.78a, 4.78b, et 4.78c), la première remarque à faire est que les modèles de la machine à flux axial d'une part, et ceux de la machine linéaire équivalente d'autre part, fournissent des résultats de flux très semblables, que ce soit pour le modèle 2D, ou bien pour le modèle 3D. Le développement de la structure à flux axial au niveau du rayon moyen, qui permet de simplifier grandement le processus de modélisation analytique, est donc pleinement justifié, les différences sur les flux se situant au niveau du pourcentage. En ce qui concerne les modèles 3D, les valeurs de flux obtenues analytiquement sont de manière satisfaisante validées par éléments finis.

En revanche, ces figures montrent clairement l'apport d'un modèle 3D prenant en compte les effets de bord des actionneurs, en comparaison des modèles 2D. En effet, il semble capital, que ce soit pour un modèle de machine disque réel, ou bien pour un actionneur linéaire équivalent développé au rayon moyen, de considérer ces effets de bords, sous peine de surestimer de manière grave les valeurs de flux, et donc de couple fourni par la machine. C'est pour les actionneurs pour lesquels l'épaisseur des aimants ΔR tend vers la valeur nulle que ces effets de

bords sont les plus sensibles : alors que pour les modèles 2D, les valeurs des ratios de flux maximaux $\hat{\varphi}/\hat{\varphi}^{[2]}$ restent constantes, les effets de bords deviennent prépondérants dans le cas 3D, au point de faire tendre le ratio vers la valeur nulle. L'intérêt de la prise en compte du phénomène dans une optique d'optimisation est évidente, si on veut éviter que l'algorithme, en tentant de minimiser la masse, ne tombe « dans le piège du modèle 2D » en suggérant des actionneurs très fins en pensant pouvoir disposer d'assez de flux pour atteindre le couple, alors qu'en fait, le couple n'est pas du tout atteint, à cause des effets de bords.

Nous remarquons que les différences dues aux effets de courbure sont bien moins importantes, dans notre cas d'étude, que celles causées par les effets de bords de l'actionneur. Néanmoins, de menues différences sur les flux obtenus, à cause de l'effet de courbure, pour les modèles 2D et 3D, sont tout de même observables lorsque la courbure est importante. Les flux obtenus pour la machine à flux axial, et pour la machine linéaire équivalente, que se soit pour les modèles 2D ou 3D, semblent confondus lorsque l'effet de courbure est peu prononcé, par exemple pour les cas 1 ($\bar{R} = 0.1\text{m}$, donc $p = 10$) et 2 ($\bar{R} = 0.08\text{m}$, donc $p = 8$) pour un entrefer corrigé $e_c = 0.0024\text{m}$ (figures 4.77a et 4.77b), et pour le cas 1 ($\bar{R} = 0.1\text{m}$, donc $p = 10$) pour un entrefer corrigé $e_c = 0.01\text{m}$ (figure 4.78a). En revanche, lorsque l'effet de courbure devient plus important, comme pour les cas 3 ($\bar{R} = 0.04\text{m}$, donc $p = 4$), lorsque le rapport $\Delta R/\tau$ est grand, pour les deux valeurs d'entrefer (figures 4.77c et 4.78c), des différences sur les flux obtenus, surtout sensibles pour les modèles 2D, mais confirmées, certes dans une moindre mesure, par les modèles 3D, semblent avoir lieu. Pour un entrefer corrigé $e_c = 0.0024\text{m}$ (figure 4.77c), il semble que le flux de la machine à flux axial, concernant les grandes valeurs du rapport $\Delta R/\tau$, devienne légèrement inférieur à celui de la machine linéaire équivalente, passe par un minimum, et ensuite, pour les valeurs extrêmes du ratio $\Delta R/\tau$, lorsque les aimants de la machine à flux axial atteignent le centre de la machine, le flux de la machine à flux axial rattrape celui de la machine linéaire équivalente. Pour des entrefer corrigés de valeur plus importante (pour $e_c = 0.01\text{m}$, concernant les figures 4.78b et 4.78c), il semble même que le flux de la machine à flux axial finisse par devenir plus important que celui de la machine linéaire équivalente.

Nous pensons, que ces phénomènes, étant donné qu'ils semblent visibles aussi bien pour les modèles 2D que 3D (et même plus pour les modèles 2D), sont dus aux effets de fuites inter-aimants, et non pas aux effets de bords (car sinon, on ne les verrait pas au niveau des modèles 2D des machines : ils sont même sans doute plus visibles en 2D, car non masqués par les phénomènes propres au cas 3D). Afin d'expliquer ces différences, nous allons dresser un modèle réducteur 2D très simplifié des fuites inter-aimants. Ce modèle sera inspiré du modèle de fuites inter-aimants proposé dans la référence [Qu et Lipo, 2004]. Il consiste à supposer que les lignes de fuites sont orthoradiales (comme dans le modèle électromagnétique 2D par couches élémentaires de la machine à flux axial, sauf qu'à présent, la résolution se fonde sur des réductances de fuites pour chaque couche, et non sur la résolution analytique). On va calculer la réductance de fuites élémentaire pour chaque couche d'actionneur, localisée au niveau d'un rayon r quelconque, et d'épaisseur élémentaire dr . Comme dans l'article [Qu et Lipo, 2004], la zone d'aimant où les fuites ont lieu est supposée localisée au niveau du bord de l'aimant, et de largeur égale à l'entrefer corrigé e_c . En supposant de tels parcours de flux, et en négligeant les réductances des parties ferromagnétiques, il est possible de dresser le schéma réducteur équivalent montré au niveau de la figure 4.80. La valeur de la source de flux élémentaire $d\varphi_r$ est donnée par la relation :

$$d\varphi_r = B_r \beta_a \frac{\pi}{p} r dr \quad (4.136)$$

Et, en supposant, pour donner les formules les plus simples possibles, que les lignes de flux de la figure 4.79 sont des segments, nous pouvons donner les expressions des perméances suivantes :

$$\begin{cases} dP_a &= \mu_0 \beta_a \frac{\pi}{2p} \frac{r}{h_a} dr = K \frac{r}{h_a} dr \\ dP_e &= \mu_0 \beta_a \frac{\pi}{2p} \frac{r}{e_c} dr = K \frac{r}{e_c} dr \\ dP_f &= \frac{\mu_0}{(1-\beta_a)} \frac{\pi}{2p} \frac{e_c}{r} dr = K_f \frac{e_c}{r} dr \end{cases} \quad (4.137)$$

Le flux élémentaire arrivant dans le stator émis par la couche de largeur dr au rayon r est donc donné par la formule :

$$d\hat{\varphi} = \frac{dP_e}{dP_e + dP_a + dP_f} d\varphi_r = \frac{\frac{K}{e_c} r^2}{\left(\frac{K}{e_c} + \frac{K}{h_a}\right) r^2 + K_f e_c} B_r \beta_a \frac{\pi}{p} r dr \quad (4.138)$$

Pour la machine à flux axial, le flux à vide total maximal entrant dans le stator $\hat{\varphi}^{[\theta z]}$ ⁹ s'obtient par intégration du

9. S'agissant ici d'un modèle 2D par couches (donc un modèle 2D prenant en compte l'effet de courbure), pour nous plier aux notations introduites auparavant, nous appellerons le flux maximal entrant dans le stator $\hat{\varphi}^{[\theta z]}$.

flux élémentaire précédent, du rayon interne actif R_1 au rayon externe actif R_2 . En divisant par le flux maximal trouvé si on n'avait aucune fuite, noté $\hat{\varphi}^{[z]}$, on aboutit, tous calculs faits, à l'expression :

$$\frac{\hat{\varphi}^{[\theta z]}}{\hat{\varphi}^{[z]}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{K_f}{K} \frac{1}{1 + e_c/h_a} \left(\frac{\Delta R}{\bar{R}} \right)^{-1} \left(\frac{e_c}{\bar{R}} \right)^2 \log \left\{ 1 - \frac{2}{1 + \frac{1}{4} \frac{\Delta R}{\bar{R}} + \left(\frac{\Delta R}{\bar{R}} \right)^{-1} \left[1 + \frac{K_f}{K} \frac{1}{1 + e_c/h_a} \left(\frac{\Delta R}{\bar{R}} \right)^{-1} \left(\frac{e_c}{\bar{R}} \right)^2 \right]} \right\} \quad (4.139)$$

Alors que pour la machine linéaire, nous allons simplement remplacer, dans l'expression du flux élémentaire, le rayon r quelconque par le rayon moyen \bar{R} . On va trouver un quotient indépendant du ratio $\Delta R/\bar{R}$. Le résultat est, en notant $\hat{\varphi}^{[xy]}$ le flux maximal en 2D pour la machine linéaire entrant dans le stator de la machine :

$$\frac{\hat{\varphi}^{[xy]}}{\hat{\varphi}^{[z]}} = \frac{1}{1 + \frac{K_f}{K} \frac{1}{1 + e_c/h_a} \left(\frac{\Delta R}{\bar{R}} \right)^{-1} \left(\frac{e_c}{\bar{R}} \right)^2} \quad (4.140)$$

Le calcul de l'équation 4.140 est une expression simplifiée, obtenue par des ré reluctances, du modèle 1 du tableau 4.2 (en 2D, sans effet de courbure). De même, le calcul de l'équation 4.139 est un modèle ré reluctant simplifié du modèle 2 du tableau 4.2 (en 2D, mais avec effet de courbure).

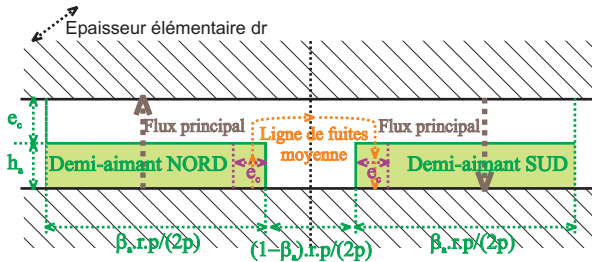


FIGURE 4.79: Schéma ré reluctant élémentaire pour une couche d'actionneur située au niveau d'un rayon r et d'épaisseur élémentaire dr , afin de modéliser les fuites inter-aimants

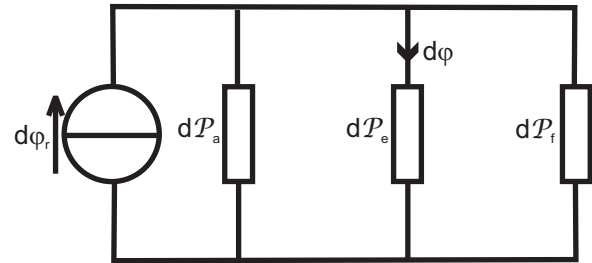


FIGURE 4.80: Schéma ré reluctant élémentaire de la couche d'actionneur localisée au niveau du rayon r de la machine à flux axial, et d'épaisseur dr

Les expressions mathématiques 4.139 et 4.140 sont intéressantes, car elles permettent, malgré leur niveau de simplification, de retrouver les tendances de variation dont on vient de parler. En effet, lorsque l'on prend un entrefer corrigé $e_c = 0.0024\text{m}$, pour le cas 3 ($\bar{R} = 0.04\text{m}$, donc $p = 4$), on obtient graphiquement la représentation de la figure 4.81, qui traduit clairement, pour le modèle 2D, celle de la figure 4.77c. Alors que pour un entrefer corrigé $e_c = 0.01\text{m}$, pour le cas 3 ($\bar{R} = 0.04\text{m}$, donc $p = 4$), on obtient l'allure représentée à la figure 4.82. Ceci nous conforte dans l'idée que l'origine des légères distorsions observées entre le modèle de la machine à flux axial, et celui développé au niveau du rayon moyen, a bien son origine dans les fuites inter-aimants modélisables en 2D, et non dans les effets de bords 3D.

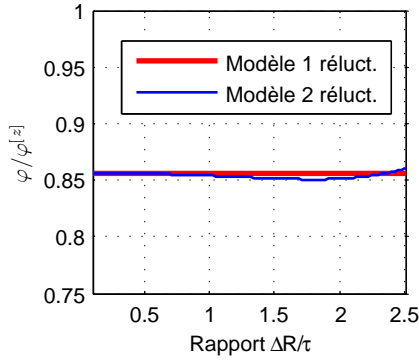


FIGURE 4.81: Tracé des rapports de flux maximaux $\frac{\hat{\varphi}}{\hat{\varphi}^{[z]}}$ obtenus pour les modèles 1 et 2 étudiés au moyen d'un schéma réductant simplifié, en fonction du rapport $\Delta R/\tau$, pour $e_c = 0.0024\text{m}$ et pour le cas 3 ($\bar{R} = 0.04\text{m}$, donc $p = 4$)

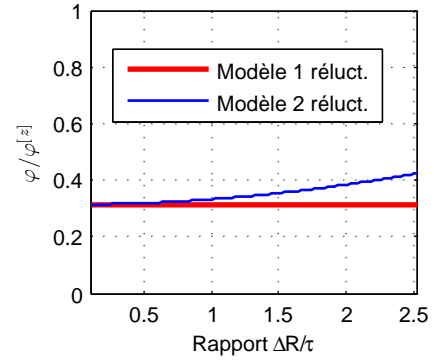


FIGURE 4.82: Tracé des rapports de flux maximaux $\frac{\hat{\varphi}}{\hat{\varphi}^{[z]}}$ obtenus pour les modèles 1 et 2 étudiés au moyen d'un schéma réductant simplifié, en fonction du rapport $\Delta R/\tau$, pour $e_c = 0.01\text{m}$ et pour le cas 3 ($\bar{R} = 0.04\text{m}$, donc $p = 4$)

Expliquons l'origine de la diminution du flux total généré par la machine à flux axial par rapport au flux de la machine linéaire équivalente pour $e_c = 0.0024\text{m}$ (figures 4.77c ou 4.81), son passage par un minimum pour les valeurs de ratios $\Delta R/\tau$ importantes, puis le fait que les deux flux se rejoignent lorsque l'effet de courbure est extrême, lorsque les aimants se rejoignent au centre de la machine. Raisonnons, pour simplifier, avec le ratio $\Delta R/\bar{R}$, qui est directement proportionnel à la variable $\Delta R/\tau$ pour un nombre de paires de pôles p fixe, et qui est plus intuitif (lorsque les aimants se rejoignent au centre de la machine, on a simplement $\Delta R/\bar{R} = 2$). Pour des valeurs de rapport $\Delta R/\bar{R}$ faibles, on va trouver, en utilisant les équations 4.139 et 4.140, le développement limité suivant :

$$\frac{\hat{\varphi}^{[\theta z]}}{\hat{\varphi}^{[z]}} \approx \frac{\hat{\varphi}^{[xy]}}{\hat{\varphi}^{[z]}} - 2 \frac{K_f}{K} \frac{1}{1 + e_c/h_a} \left(\frac{e_c}{\bar{R}} \right)^2 \left(\frac{\Delta R}{\bar{R}} \right) \text{ si } \left(\frac{\Delta R}{\bar{R}} \right) \ll 1 \quad (4.141)$$

Il est clair que si le ratio $\Delta R/\bar{R}$ tend vers zéro, alors la machine se rapproche localement d'une machine linéaire équivalente, et les deux ratios sont égaux. La dernière expression suggère bien qu'au départ, la droite traduisant la différence entre les rapports des flux $\frac{\hat{\varphi}^{[xy]}}{\hat{\varphi}^{[z]}}$ et $\frac{\hat{\varphi}^{[\theta z]}}{\hat{\varphi}^{[z]}}$ a une pente négative, montrant bien le fait qu'au début, lorsque $\Delta R/\bar{R}$ est petit, le flux de la machine à flux axial tend à diminuer par rapport au flux de la machine linéaire équivalente. Ceci s'explique par le fait qu'au départ, lorsque l'aimant est encore mince, ce dernier se comporte comme une source de flux unique, débitant dans les réductances mises en parallèle de chaque couche élémentaire de machine, comme représenté à la figure 4.83, où la réductance de fuite d'une couche élémentaire d'indice n de machine est notée R_n . Or, il est bien évident que lorsque l'on met plusieurs réductances en parallèle, c'est la plus faible, qui est celle localisée au niveau du rayon interne, qui impose la valeur de la réductance totale. Par conséquent, cela justifie pourquoi on a un plus grand flux de fuites pour la machine à flux axial, et donc finalement moins de flux utile. Néanmoins, lorsque $\Delta R/\bar{R}$ devient plus grand, un autre phénomène entre en jeu, qui s'oppose à cette réduction de flux de la machine à flux axial, et, au contraire, tend à faire augmenter ce dernier, expliquant ainsi l'origine du minimum de flux de la machine à flux axial observé sur la figure 4.77c. En effet, si $\Delta R/\bar{R} \rightarrow 2$, c'est-à-dire que les aimants se rencontrent au centre de la machine, le modèle de la figure 4.83, avec une unique source de flux pour les aimants débitant dans des réductances de fuites en parallèle, devient faux : il faut obligatoirement considérer que les sources de flux, pour chaque couche élémentaire, sont distinctes, comme sur le schéma réductant infinitésimal de la figure 4.80. De cette façon, même si la réductance de fuites diminue lorsque l'on s'approche du centre de la machine, la source de flux élémentaire qui alimente la couche correspondante tend elle aussi à s'annuler, et donc l'effet de la diminution de la réductance de fuites pour les petits rayons est masqué par l'annulation du flux pour ces mêmes petits rayons. Cela explique alors la remontée du flux de la machine à flux axial pour les effets de courbure extrêmes. Il semble même que, pour des valeurs d'entrefer élevées (par exemple, le cas $e_c = 0.01\text{m}$ de la figure 4.78c et confirmé par la figure 4.82), ce phénomène de relèvement du flux de la machine à flux axial prend plus d'importance au point que le flux de la machine à flux axial semble plus important que celui de la machine linéaire pour les entrefers importants. Ceci peut s'expliquer de la manière suivante : le modèle réductant mis en oeuvre suppose que les zones

de fuites au niveau des aimants se localisent dans une bande de largeur égale à l'entrefer corrigé en bordure des aimants. Lorsque l'entrefer corrigé n'a plus une dimension négligeable par rapport aux dimensions orthoradiales des aimants, comme c'est le cas lorsque l'on prend $e_c = 0.01m$, pour les situations où le rapport $\Delta R/\bar{R} \rightarrow 2$ (les aimants se rejoignent au centre de la machine), les zones inactives de fuite (de largeur e_c) des aimants se rejoignent et se superposent au centre de la machine, comme montré au niveau de la figure 4.84. Par conséquent, au centre de la machine, il n'y a que des fuites. Néanmoins, comme les zones inactives se superposent, la zone active totale de l'aimant est plus importante que pour la machine linéaire, où les zones inactives (celles de fuite) ne se superposent pas. Ceci justifie alors l'augmentation du flux de la machine à flux axial pour des entrefers importants, et des valeurs conséquentes de ratio $\Delta R/\bar{R}$: lorsque le ratio $\Delta R/\bar{R} = 2$, le dépassement du flux de la machine à flux axial par rapport à celui de la machine linéaire est significatif pour le cas du grand entrefer. On peut retrouver d'ailleurs analytiquement que pour des valeurs d'entrefer e_c significatives, le flux de la machine à flux axial dépasse celui de la machine linéaire. En effet, pour des effets de courbure importants ($\Delta R/\bar{R} = 2$), on peut, en utilisant les expressions 4.139 et 4.140, résoudre l'inéquation suivante, pour obtenir, numériquement :

$$\left(\frac{\hat{\varphi}^{[\theta z]}}{\hat{\varphi}^{[z]}}\right)_{\Delta R/\bar{R}=2} \geq \left(\frac{\hat{\varphi}^{[xy]}}{\hat{\varphi}^{[z]}}\right)_{\Delta R/\bar{R}=2} \Leftrightarrow \frac{K_f}{K} \frac{1}{1 + e_c/h_a} \left(\frac{e_c}{\bar{R}}\right)^2 \geq \varepsilon = 0.113 \quad (4.142)$$

Ce résultat démontre bien que si l'entrefer corrigé e_c atteint une dimension non négligeable par rapport aux autres dimensions de la machine, alors, pour des effets de courbure importants ($\Delta R/\bar{R} = 2$), le flux de la machine à flux axial sera avantagé par rapport à celui de la machine linéaire équivalente. Le rôle du rayon moyen est aussi clair : plus ce dernier sera faible, plus le dépassement de flux de la machine à flux axial sera important (il est normal que lorsque le rayon moyen \bar{R} est faible, les effets de courbure soient d'autant plus prononcés).

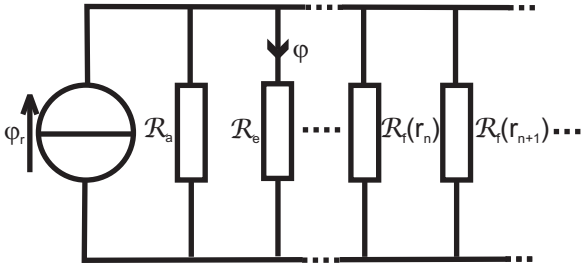


FIGURE 4.83: Schéma réducteur équivalent de la machine à flux axial pour des aimants minces ($\Delta R \rightarrow 0$), où l'aimant est une source unique de flux débitant dans les réductances de fuite de chaque couche, notées R_n , et mises en parallèle

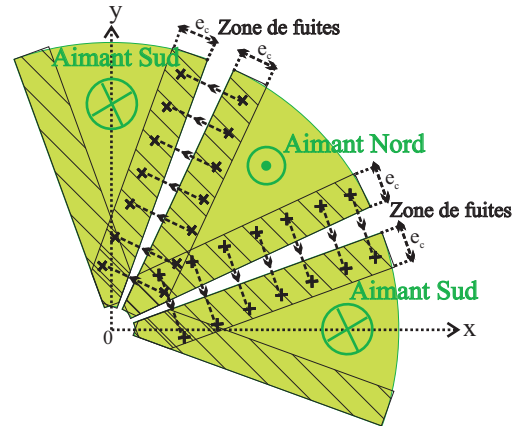


FIGURE 4.84: Réunion des zones de fuites de part et d'autre des aimants, dans le cas d'entrefer corrigés grands, et pour un ratio $\Delta R/\bar{R} \rightarrow 2$

Les modèles 3D, comme par exemple au niveau de la figure 4.78c, traduisent les tendances exposées précédemment des modèles 2D, mais de manière moins évidente. En effet, les variations dont nous parlons sont alors « noyées » par les effets de bords. Qui plus est, il faut prendre en compte le fait que, même pour les fuites inter-aimants, le modèle 2D surestime les réductances de fuites, donc sous-estime le flux de fuites réel, ce qui explique que le relèvement du flux de la machine à flux axial par rapport à la machine linéaire lorsque $\Delta R/\bar{R} = 2$ pour des grands entrefers soit moins important pour le modèle 3D que pour le modèle 2D. La raison est que la machine à flux axial est fondamentalement une structure tridimensionnelle. En effet, alors que le modèle 2D suppose les fuites strictement orthoradiales, on peut vérifier, de manière intuitive, par des considérations de minimisation de l'énergie magnétique stockée dans l'air, que ce sont en fait des lignes droites plutôt que des arcs de cercle (figure 4.85). Bien entendu, même si ces phénomènes sont pris en compte dans le modèle analytique 3D, il est impossible d'en rendre compte dans les modèles 2D.

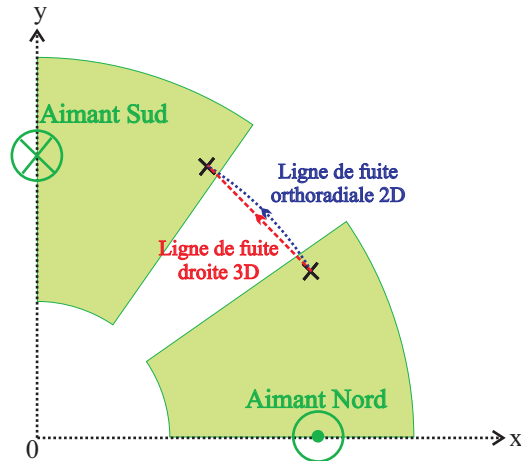


FIGURE 4.85: Véritable forme des lignes de fuite inter-aimants dans la machine à flux axial

4.3.2.4 Vérification expérimentale du modèle du flux à vide

Pour cette partie, nous souhaiterions remercier vivement Messieurs Frédéric Gillon et Pascal Brochet, Enseignants-Chercheurs au Laboratoire d'Electrotechnique et l'Electronique de Puissance de Lille, d'avoir gracieusement mis à notre disposition des relevés de force électromotrice d'une machine à flux axial qu'ils ont eu l'opportunité de construire lors de leurs travaux de recherche, afin que nous puissions confronter le modèle présenté à des données expérimentales. Le modèle que nous souhaitons tester est le modèle 4 du tableau 4.2 (modèle 3D de la machine disque, avec effets de courbure et effets de bord).

La machine mise en oeuvre par l'équipe Optimisation du L2EP de Lille a été initialement prévue pour les applications de pompage de produit corrosif, rendant nécessaire l'utilisation d'un entrefer très important afin d'enfermer totalement le rotor dans une enceinte hermétique (référence [Brisset *et al.*, 2006]). La structure est détaillée dans les références [Derks, 2004], et [Derks *et al.*, 2003]. Il faut signaler que cette machine comporte quelques différences avec celle que nous avons modélisée :

- Dans la machine construite, pour des raisons de simplicité et de remplissage optimal de la zone d'aimants, l'espace inter-aimants a été maintenu constant quelque soit le rayon de la machine considéré, et égal à une valeur petite. Par conséquent, les aimants ne peuvent pas être considérés comme radiaux, ce qui ne correspond pas à la machine modélisée analytiquement. Pour surmonter cette difficulté, nous prendrons une ouverture angulaire β_a des aimants, lors du paramétrage de notre modèle, égale à l'ouverture angulaire prise par les aimants du prototype au niveau du rayon actif moyen $\bar{R} = \frac{R_1 + R_2}{2}$.
- Surtout, la machine du prototype est à grosses dents. Les raisons invoquées dans la référence [Brisset *et al.*, 2006] sont le problème de l'entrelacement des têtes de bobines dans le cas de la machine à petites dents. Dans une machine à grosses dents, le nombre de pôles du rotor p_r est différent de celui du stator p_s (et ces grandeurs ne sont pas multiples l'une de l'autre, si on veut être capable de produire un couple moyen). On définit l'occupation relative β_s d'une bobine de la machine à grosses dents par rapport au pas polaire angulaire statorique $\frac{2\pi}{p_s}$. La machine du prototype est montrée en 3D au niveau de la figure 4.86, figure que nous nous sommes permis d'emprunter à la référence [Derks *et al.*, 2003]. Cette différence entre la machine modélisée, que nous avons supposée à petites dents pour appliquer le coefficient de Carter, et la machine construite à grosses dents (on rappelle que dans ce cas, le coefficient de Carter ne s'applique pas), apparaît comme fondamentale. Désireux néanmoins de confronter notre modèle à l'expérience, nous allons négliger la présence des grosses dents, et prendre, pour appliquer notre modèle, une valeur pour l'entrefer corrigé e_c égale à l'entrefer réel de la machine à grosses dents. Mais alors comment calculer analytiquement le flux à travers chaque bobine du stator de la machine à grosses dents, si ce dernier est supposé lisse ? Nous proposons la méthode suivante. Nous supposons le stator lisse, et nous calculons l'induction dans l'entrefer de la machine, en tenant compte du nombre de pôles p_r des aimants du rotor. Puis, pour connaître le flux au travers d'une bobine du stator, nous considérons que cette dernière est d'épaisseur axiale comme orthoradiale nulle, et qu'elle est déposée à la surface du stator considéré comme lisse. Chaque bobine se réduit donc à un contour sur la surface du stator lisse, chaque contour ayant, comme le montre la figure 4.87, une ouverture angulaire égale à $\beta_s \frac{2\pi}{p_s}$. Pour connaître le flux au travers

d'une spire d'une bobine donnée, nous intégrons l'onde d'induction due aux aimants arrivant à la surface du stator sur le contour délimitant la bobine en question. Ensuite, afin d'en déduire le flux dans toute une phase de la machine, nous n'oublions pas de multiplier le flux à travers le contour délimitant la bobine par le nombre de spires en série de cette dernière (noté N_s), et enfin nous multiplions le résultat par le nombre de bobines par phase, qui vaut $\frac{p_s}{3}$, vu que la machine est triphasée.

- La raison pour laquelle l'occupation angulaire relative β_s d'une bobine par rapport au pas polaire statorique $\frac{2\pi}{p_s}$ ne peut pas être prise égale à 1 réside dans la présence, entre chaque bobine, de dents auxiliaires ferromagnétiques (figure 4.86). Ces dents auxiliaires permettent de lisser les variations d'induction dans l'entrefer entre la zone se situant au-dessous des dents principales, et celle au-dessous des encoches, qui sont nécessairement importantes dans le cas d'une machine à grosses dents. Elles ont donc pour utilité principale de réduire le couple de détente de la machine (référence [Derks, 2004]). Par contre, leur inconvénient est de réduire le volume bobinable, ainsi que d'augmenter les pertes harmoniques dans les aimants dues à la saillance statorique, en faisant varier plus rapidement l'induction d'entrefer. Néanmoins, ces plots ferromagnétiques auxiliaires permettent, en atténuant l'effet de saillance dû aux grosses dents, de justifier d'autant mieux notre hypothèse d'un stator lisse pour le calcul analytique.

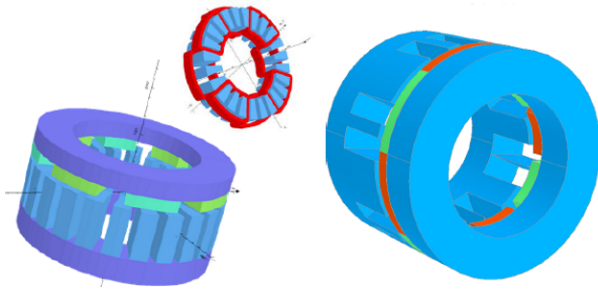


FIGURE 4.86: Représentation 3D de la machine à flux axial à grosses dents de la référence [Derks, 2004], avec dents ferromagnétiques auxiliaires

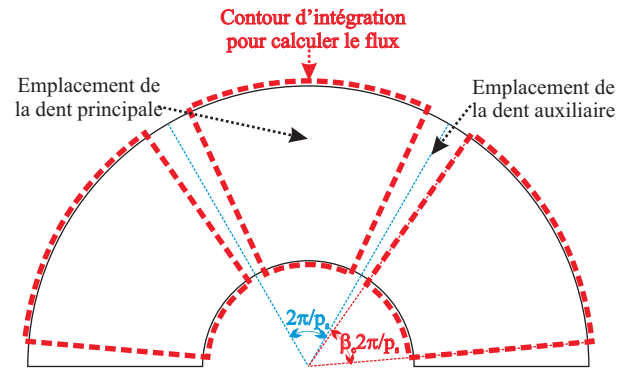


FIGURE 4.87: Contour d'intégration pour le calcul du flux, localisé à la surface du stator supposé lisse, à l'emplacement du contour de la bobine statorique

Les valeurs numériques des paramètres de la machine construite, que nous avons utilisées dans notre programme de prédiction de la force électromotrice, sont consignées dans le tableau 4.3.

Nom du paramètre	Notation	Valeur
Nombre de paires de pôles statorique	p_s	3
Nombre de paires de pôles rotorique	p_r	4
Ouverture relative de l'aimant moyenne	β_a	0.95
Ouverture relative de la bobine du stator	β_e	0.7
Rayon actif interne	R_1	3.1cm
Rayon actif externe	R_2	8.5cm
Largeur radiale des parties ferromagnétiques	W/W_m	1
Hauteur des aimants	h_a	12mm
Hauteur de l'entrefer	$e = e_c$	7mm
Nombre de spires en série par bobine	N_s	35

TABLE 4.3: Les valeurs numériques utilisées pour le calcul du flux dans chaque phase de la machine

Fixons une vitesse de rotation N_t de la machine égale à 4000tr/min. La figure 4.88 montre le flux dans une spire d'une bobine de la machine, obtenu par intégration de la composante d'induction $B_z(r, \theta, z = h_a + e_c)$ calculée analytiquement à travers le contour montré à la figure 4.87, représentant l'emplacement réel d'une bobine statorique.

Pour obtenir le flux total dans une phase de la machine, il suffit de multiplier le flux de la figure 4.88 par $\frac{p_s}{3} N_t$, car on a N_t spires par bobine, et $\frac{p_s}{3}$ bobines par phase. Ensuite, ce flux total est dérivé numériquement pour en déduire la force électromotrice à vide de la machine. La FEM obtenue est ensuite comparée à la mesure de FEM à vide, comme montré à la figure 4.89. Les résultats théoriques et expérimentaux sont en bon accord, ce qui montre tant la validité du calcul analytique mené que le bien fondé des hypothèses simplificatrices mises en oeuvre (lissage du stator à grosses dents, réduction des bobines à des contours d'intégration sans dimension). Tout au plus une petite différence est-elle obtenue dans les zones de plus forte pente de la FEM, à cause de l'hypothèse de supposer les aimants radiaux lors du calcul, alors que ces derniers ne le sont pas en réalité (l'écart inter-aimants est en fait constant en distance quelque soit le rayon considéré).

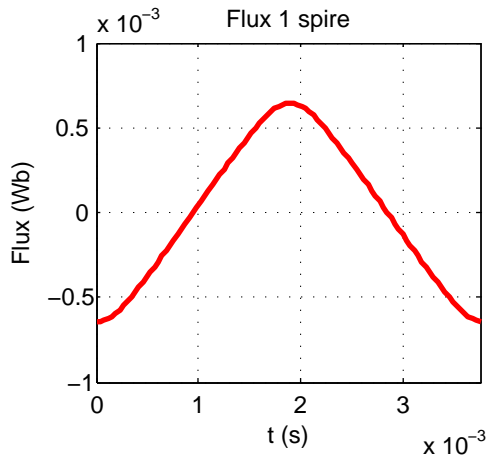


FIGURE 4.88: Flux obtenu analytiquement dans une spire d'une bobine du stator calculée par intégration sur le contour de la figure 4.87 de la composante d'induction $B_z(r, \theta, z = h_a + e_c)$, grâce au modèle 4 du tableau 4.2

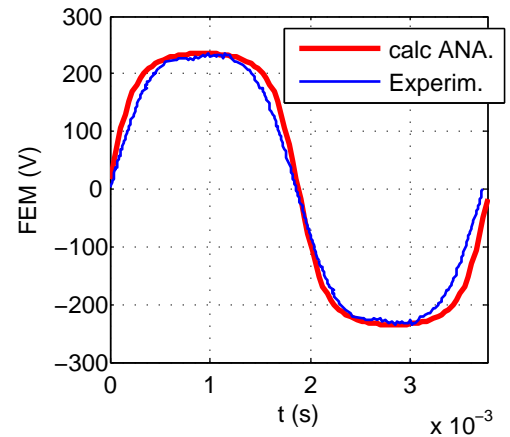


FIGURE 4.89: Comparaison entre la FEM mesurée à vide pour une vitesse de rotation $N_t = 4000 \text{tr/min}$, et celle obtenue analytiquement par dérivation du flux de la figure 4.88

Conclusion

La problématique de modélisation tri-dimensionnelle posée par ce chapitre a été motivée par le fait que l'hypothèse 2D, fondamentale au chapitre précédent, peut facilement être mise en défaut par un algorithme d'optimisation systématique, qui, sous couvert de minimiser la masse, pourrait être amené à proposer des machines dont les dimensions radiales ne seraient pas très grandes par rapport au pas polaire moyen. Si un modèle 2D est utilisé dans ce travail d'optimisation, alors l'absence de prise en compte des effets de bord peut surestimer le flux à vide, et par conséquent, le couple de l'actionneur. Au final, la machine proposée risquerait de ne pas vérifier le cahier des charges pour laquelle elle a été conçue. Nous allons rappeler dans cette conclusion les principaux modèles développés dans ce chapitre et consignés dans le tableau 4.1, et souligner les principales conclusions que nous en avons tirées lors de cette étude.

La première partie, présentant certaines références sur la question dans la littérature électrotechnique, est bien plus mince que celle que nous avons présentée au chapitre précédent sur les modèles 2D. En effet, il est important de constater que ces points n'ont été que rarement traités dans la littérature, et qui plus est de manière assez succincte, ce qui montre l'intérêt de ce thème de recherche. Bien que la plupart des logiciels éléments finis actuels offrent la possibilité de réaliser des modélisations 3D, l'introduction d'une dimension supplémentaire vient faire augmenter de manière prohibitive, dans une optique d'optimisation de structure, le temps de calcul. Le développement de méthodes analytiques apparaît alors nécessaire. La méthode de résolution formelle des équations de Maxwell, qui nous avait permis de prendre en compte des phénomènes de denture complexes en deux dimensions au chapitre précédent, nous semble la plus appropriée pour ce travail.

La plupart des références existantes fondent leur modélisation sur des méthodes de type quasi-3D, qui permettent,

après avoir repris les résultats obtenus lors des études 2D, de multiplier ces derniers par une certaine fonction de modulation tenant compte des bords de l'actionneur dans la troisième dimension. Cette méthode nous est apparue attrayante, permettant de réinvestir les modèles 2D du chapitre précédent. C'est pour cela, que, dans un premier temps, nous avons souhaité développer une méthode de calcul analytique de la fonction de modulation dans la troisième dimension, prenant en compte les effets de bord de l'actionneur : ceci nous a amené à ce que nous avons appelé le modèle quasi-3D du calcul du flux à vide. Néanmoins, nous nous sommes rendus compte que ce principe de modélisation, qui consiste à découpler les phénomènes électromagnétiques ayant cours dans le plan 2D de ceux qui interviennent dans la troisième dimension, n'est pas satisfaisant d'un point de vue mathématique : il est clair qu'en réalité, tous les phénomènes sont couplés, et qu'une modélisation 3D ne peut en aucun cas se réduire à deux modèles 2D indépendants. Cela étant, lorsque l'on développe la machine à flux axial au niveau de son rayon moyen, on obtient un actionneur linéaire à aimants parallélépipédiques, et alors cette approximation apparaît largement justifiée, si on omet de modéliser les parcours des lignes de flux sur les bords de l'aimant, qui, sont, en revanche, réellement tri-dimensionnels, mais qui heureusement interviennent fort peu dans le flux total. Ces raisons expliquent pourquoi, pour combler les lacunes de principe du modèle quasi-3D, nous avons été amenés à développer un modèle du flux à vide de l'actionneur linéaire résultant du développement au rayon moyen à aimants parallélépipédiques. Ce modèle est fondé sur la séparation des effets de bords de l'aimant, et celle de la largeur finie des parties ferromagnétiques : une fois les effets de bords de l'aimant pris en compte, on multiplie l'induction trouvée par une fonction perméance relative tenant compte de l'épaisseur finie des parties ferromagnétiques. D'ailleurs, afin de déterminer de manière précise cette fonction, il nous est apparu utile de développer une méthode de calcul systématique de cette dernière, fondée sur la méthode de la transformation conforme. Pour finir, la méthode de modélisation analytique 3D développée a été comparée d'une part avec le modèle quasi-3D, et d'autre part aux éléments finis 3D. Le principe des modélisations a ainsi pu être validé. Néanmoins, il reste encore un travail conséquent à faire pour prendre en compte analytiquement les effets des saillances des parties ferromagnétiques. En effet, afin de gérer les difficultés inhérentes au passage d'une modélisation 2D à une modélisation réellement tri-dimensionnelle, nous avons dû consentir à nous limiter à des géométries exemptes de toute saillance, aussi bien statoriques que rotoriques. L'absence de saillance rotorique est fâcheux, étant donné leur importance au chapitre précédent sur les capacités de défluxage de la machine. Quant au lissage des encoches statoriques, effectué grâce au coefficient de Carter, son application est extrêmement discutable dans la modélisation 3D, ou bien pour des aimants fins. De plus, un modèle avec saillance nous donnerait accès au couple instantané, qui est souvent un critère d'importance dans nombre d'applications. A notre sens, dans une optique de prise en compte des saillances en trois dimensions, une des principales difficultés à surmonter serait la définition de conditions aux limites dans la troisième dimension assez simples pour pouvoir appliquer la méthode de résolution fondée sur la séparation des variables, dans un nombre de domaines raisonnable.

Cela étant, sur l'actionneur linéaire résultant du développement au rayon moyen, aucune amélioration significative sur les valeurs numériques des résultats par le modèle 3D en regard de ceux obtenus au moyen du modèle quasi-3D n'a pu être détectée. Afin de mettre tout de même en évidence l'apport de notre travail de modélisation, nous nous sommes donc permis d'étudier le cas de l'actionneur linéaire à aimants ronds, au motif que certains auteurs (référence [Aydin *et al.*, 2007]) avaient signalé l'intérêt de la topologie dans le cadre d'une étude de couple de détente. Or, contrairement au cas des aimants parallélépipédiques, rien ne justifie alors le recours, pour cette structure fondamentalement tri-dimensionnelle, au modèle quasi-3D, alors que le modèle analytique 3D mis au point permet de traiter le problème avec succès, comparativement aux résultats fournis par le modèle éléments finis, et pour un temps de calcul bien plus court.

Par la suite, toujours pour l'actionneur linéaire développé au rayon moyen, la méthode a été étendue au calcul de l'inductance cyclique. Le principe de modélisation est le même : supposer que les parties ferromagnétiques idéales sont des plan infinis, et traiter le problème en considérant l'épaisseur finie des sources. Ensuite, une modulation par la fonction perméance relative obtenue par transformation conforme permet de prendre en compte l'épaisseur finie des parties ferromagnétiques. Le défi le plus important dans la modélisation tri-dimensionnelle du flux de réaction magnétique d'induit réside dans la prise en compte des courants de retour. Cette tâche a pu être menée en supposant que les trajets de retour des courants statoriques, aux extrémités des nappes de courant statoriques, avaient une épaisseur infiniment fine (la densité linéique de courant de retour est une masse de Dirac). Nous avons appelé ceci l'effet « tête de bobine ». L'augmentation de l'inductance cyclique qui résulte de ces trajets de retour a été clairement montrée sur les résultats numériques. En plus du travail sur la prise en compte des saillances statoriques et rotorique qui reste, dans le cas du calcul de la réaction magnétique d'induit, une question ouverte, il faudrait prévoir une vérification par éléments finis 3D de la théorie développée ici, afin d'apprécier non seulement la justesse de la méthode, ainsi que le fait d'approximer l'excitation statorique à une densité linéique de courant en

négligeant les encoches, mais surtout confronter les résultats fournis analytiquement par les courants de retour avec ceux que l'on obtient par éléments finis 3D avec de véritables têtes de bobines.

La partie suivante concerne la détermination du flux à vide de la machine à flux axial, mais en s'affranchissant de l'hypothèse du développement de la machine au niveau de son rayon moyen : la véritable structure, avec son effet de courbure, est prise en compte. La difficulté de ce nouveau calcul est la résolution du problème en 3D, en coordonnées cylindriques. Il s'est alors avéré nécessaire de passer en potentiel scalaire pour résoudre le problème ainsi posé, et une modélisation des aimants par un modèle coulombien a permis d'éviter la résolution d'une équation de Poisson. La prise en compte des effets de bords fait intervenir un développement du potentiel scalaire en double série de Fourier-Bessel. Une vérification du calcul par éléments fins a été effectuée. La section consacrée à l'exposé des résultats nous a donné l'occasion de présenter une sorte de benchmark des différents modèles utilisables pour le calcul du flux à vide d'une machine à flux axial : d'une part les modèles 2D, qu'ils soient appliqués à la machine linéaire équivalente, ou bien à chaque couche élémentaire de l'actionneur pour prendre en compte l'effet de courbure de ce dernier, et d'autre part les modèles 3D : celui de l'actionneur linéaire développé au rayon moyen dont nous venons de parler, ainsi que le modèle analytique de la machine à flux axial. Il est apparu, par comparaison avec un modèle éléments finis 3D, que le passage du modèle 2D au modèle 3D est une étape importante à franchir, si on ne veut pas surestimer de manière trop importante le flux de la machine, et donc son couple. Ce travail sur les modèles analytiques 3D trouve donc pleinement sa justification, d'autant plus que le gain de temps de calcul apporté par un modèle analytique comparé par rapport au modèle éléments finis est bien plus important, comparativement, pour les structures 3D que 2D (pour information, les modèles analytiques 2D développés au chapitre précédent permettaient de gagner 30% du temps de calcul par rapport à une modélisation de type éléments finis, alors que les modèles 3D analytiques permettent, proportionnellement, une économie de plus de 90% du temps de calcul). En revanche, il est apparu que mis à part quelques menues différences (que nous avons d'ailleurs cherché à justifier), le développement de l'actionneur au rayon moyen pour en faire un actionneur linéaire, aussi bien en 2D qu'en 3D, est pleinement justifié. Cette conclusion est sans doute aussi à tempérer, car nous pensons que même si, au niveau du flux, donc du couple moyen, les résultats sont similaires, la forme des encoches réelles de la machine à flux axial, qui ne sont pas radiales pour des raisons technologiques, va faire en sorte que les couples de détente des deux actionneurs seront sans doute assez différents. Pour vérifier cette hypothèse, il faudrait, en guise de perspective, faire pour la machine à flux axial un travail de modélisation de l'encochage, pour le calcul du couple instantané, et ensuite mener cette intéressante comparaison. Pour finir, nous avons jugé utile de comparer le flux à vide, par le biais de la force électromotrice à vide induite dans la phases de la machine, à celui obtenu expérimentalement sur un prototype, correspondant ceci étant, à une topologie légèrement différente. Malgré les différences, la comparaison a donné un résultat encourageant.

Nous avons en outre été amenés à admettre que la modélisation du flux de réaction magnétique d'induit réalisée dans le cas de l'actionneur linéaire développé au rayon moyen s'étendait sans difficulté à la machine disque avec effet de courbure. Un travail intéressant serait de généraliser la résolution en coordonnées cylindriques entreprise pour l'actionneur à flux axial pour le cas du flux à vide au flux de réaction magnétique d'induit, pour vérifier l'hypothèse que l'effet de courbure a peu d'influence sur le flux de réaction magnétique d'induit.

Ce chapitre tente donc de mettre en lumière l'importance des effets tri-dimensionnels des machines à flux axial, avec le souci de développer de nouveaux modèles analytiques afin de prendre en compte ces effets dans une optique d'optimisation. Il pourrait être intéressant, pour mener le travail à son terme, d'utiliser les nouveaux modèles développés ici pour lancer les calculs d'optimisation, afin d'évaluer pleinement leur impact sur les machines optimales générées, et de pouvoir ainsi mettre en évidence, comme nous le disions dans le chapitre d'introduction, l'impact du modèle utilisé sur les résultats d'optimisation. Des travaux pourraient aussi être menés afin de rendre plus rapides ces calculs d'optimisation : comme le proposent certains auteurs [Tran, 2009], il serait peut-être approprié d'utiliser la stratégie dite du « Space-Mapping » : on utilise un modèle 2D pour l'optimisation, et on vient corriger, quelques fois, les valeurs des fonctions objectifs obtenues au moyen du modèle 2D par les résultats fournis par le modèle 3D, ce qui éviterait une utilisation trop fréquente du modèle 3D. Bien que fort intéressante, cette question de l'optimisation ne sera pas traitée par la suite, car nous avons préféré nous tourner vers un autre point de modélisation au moins aussi important que ces effets de bords : l'évaluation et le calcul des pertes dans les matériaux magnétiques de l'actionneur.

Bibliographie

- [Albert *et al.*, 2003] ALBERT, L., CHILLET, C., JAROSZ, A. et WURTZ, F. (2003). Analytic modelling of automotive claw-pole alternator for design and constrained optimization. *In European Conference on Power Electronics and Applications, Toulouse.*
- [Andrews *et al.*, 2000] ANDREWS, G., ASKEY, R., ROY, R., ROY, R. et ASKEY, R. (2000). *Special functions.* Cambridge University Press Cambridge.
- [Aydin, 2004] AYDIN, M. (2004). *Axial flux surface mounted PM machines for smooth torque traction drive applications.* Thèse de doctorat, University of Wisconsin-Madison.
- [Aydin *et al.*, 2002b] AYDIN, M., HUANG, S. et LIPO, T. (2002b). A new axial flux surface mounted permanent magnet machine capable of field control. *In Industry Applications Conference, 2002. 37th IAS Annual Meeting. Conference Record of the,* volume 2.
- [Aydin *et al.*, 2003] AYDIN, M., QU, R. et LIPO, T. (2003). Cogging torque minimization technique for multipole rotor, axial-flux, surface-mounted-pm motors : Alternating magnet pole-arcs in facing rotors. *In IEEE Industry Applications Society Annual Meeting.*
- [Aydin *et al.*, 2007] AYDIN, M., ZHU, Z., LIPO, T. et HOWE, D. (2007). Minimization of cogging torque in axial-flux permanent-magnet machines : Design concepts. *IEEE Transactions on Magnetics*, 43(9 Part 1):3614–3622.
- [Aydin, 2003] AYDIN, M.; Huang, S. L. T. (2003). Performance evaluation of an axial flux consequent pole pm motor using finite element analysis. *In IEMDC.*
- [Azzouzi, 2007] AZZOUZI, J. (2007). *Contribution à la modélisation et à l'optimisation des machines synchrones à aimants à flux axial. Application au cas de l'aérogénérateur.* Thèse de doctorat, Université du Havre.
- [Azzouzi *et al.*, 2005a] AZZOUZI, J., BARAKAT, G. et DAKYO, B. (2005a). Quasi-3-d analytical modeling of the magnetic field of an axial flux permanent-magnet synchronous machine. *IEEE Transaction on Energy Conversion*, 20(4):746–752.
- [Brisset *et al.*, 2006] BRISSET, S., GILLON, F., BROCHET, P. et DHELFT, R. (2006). Conception d'une motopompe synchrone à flux axial et à bobinages concentrés : Application à une pompe étanche. *Revue internationale de génie électrique*, 9(2-3):185–208.
- [Burrel *et al.*, 2007] BURREL, I., FRANCOIS, P., BEN AHMED, H., MONMASSON, E. et MULTON, B. (2007). Optimization of a linear induction oscillatory machine in a stirling cogeneration system. *In European Conference on Power Electronics and Applications.*
- [Capri et Panat, 2002] CAPRI, A. et PANAT, P. (2002). *Introduction to electrodynamics.* Alpha Science Intl Ltd.
- [Carter, 1901] CARTER, F. (1901). Airgap induction. *Elect. World*, 38:884.
- [Dang *et al.*, 2010] DANG, T., FRANÇOIS, P., PRÉVOND, L. et BEN AHMED, H. (2010). Theoretical and experimental results of linear tubular induction generator for stirling cogeneration system. *In International Conference on Electrical Machines.*
- [de Lacheisserie, 2000] de LACHEISSERIE, E. (2000). *Magnétisme : Fondements.* EDP Sciences.
- [Derks *et al.*, 2003] DERKS, D., GILLON, F. et BROCHET, P. (2003). Modelling of an axial synchronous 3 phase motor. *Electromotion*, 10:359–364.
- [Derks, 2004] DERKS, D., G. F. . B. P. (2004). Influence of the inserted tooth in axial ac synchronous machine. *In ICEM.*
- [Gonzalez *et al.*, 2004] GONZALEZ, D., TAPIA, J., WALLACE, R. et ANIBAL, M. (2004). Magnetic design considerations for an axial flux pm machine with field control capability. *In 49th Annual Conference on Magnetism and Magnetic Materials.*
- [Gonzalez-Lopez *et al.*, 2008] GONZALEZ-LOPEZ, D., TAPIA, J., WALLACE, R. et VALENZUELA, A. (2008). Design and test of an axial flux permanent-magnet machine with field control capability. *IEEE Transactions on Magnetics*, 44(9):2168–2173.
- [Hlioui *et al.*, 2008] HLIOUI, S., VIDO, L., AMARA, Y., GABSI, M., MIRAOUI, A. et LECRIVAIN, M. (2008). Magnetic equivalent circuit model of a hybrid excitation synchronous machine. *COMPEL*, 27:1000–1015.

- [Jennane *et al.*, 2004b] JENNANE, J., FADLI, N., CHARPENTIER, J. et QUESADA, J. (2004b). Semi-analytical study of 3 kinds of axial flux pm actuator. *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, 19(1):299–302.
- [Jufer, 1968] JUFER, M. (1968). *Démarrage asynchrone des machines synchrones à pôles saillants massifs*. Thèse de doctorat, EPUL.
- [Jufer, 1970] JUFER, M. (1970). Détermination des caractéristiques spécifiques du moteur linéaire. *In Journées SFE*.
- [Jufer et Mattatia, 1974] JUFER, M. et MATTATIA, S. (1974). Le moteur linéaire à inducteur, caractéristiques et applications. *Bulletin ASE/UCS 65*, 12:880–891.
- [Jufer et Wavre, 1972] JUFER, M. et WAVRE, N. (1972). Le moteur linéaire, développement théorique et applications. *Bulletin ASE 63*, 15:844–856.
- [Lipo, 2004] LIPO, T. (2004). *Introduction to AC machine design*. Wisconsin power electronics research center : University of Wisconsin, Madison.
- [Marignetti *et al.*, 2006] MARIGNETTI, F., TOMASSI, G. et BUMBY, J. (2006). Electromagnetic modelling of permanent magnet axial flux motors and generators. *Compel*, 25(2):510–522.
- [Markovic, 2004] MARKOVIC, M. (2004). *Magnetic field analysis in electric motors using conformal mapping*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique fédérale de Lausanne.
- [Nikiforov *et al.*, 1988] NIKIFOROV, A., UVAROV, V. et BOAS, R. (1988). *Special functions of mathematical physics*. Birkhauser Basel.
- [Parviainen, 2005] PARVIAINEN, A. (2005). *Design of axial-flux permanent-magnet low-speed machines and performance comparison between radial-flux and axial-flux machines*. Thèse de doctorat, Lappeenranta University of Technology.
- [Parviainen *et al.*, 2004] PARVIAINEN, A., NIEMELA, M. et PYRHONEN, J. (2004). Modeling of axial flux permanent-magnet machines. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 40(5):1333–1340.
- [Qu et Lipo, 2004] QU, R. et LIPO, T. (2004). Analysis and modeling of air-gap and zigzag leakage fluxes in a surface-mounted permanent-magnet machine. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 40(1):121–127.
- [Schinzinger et Laura, 2003] SCHINZINGER, R. et LAURA, P. (2003). *Conformal mapping : methods and applications*. Dover Publications.
- [Tran, 2009] TRAN, T. V. (2009). *Problèmes Combinatoires et Modèles Multi-Niveaux pour la Conception Optimale des Machines Electriques*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lille.
- [Virtic *et al.*, 2009] VIRTIC, P., PISEK, P., HADZISELIMOVIC, M., MARCIC, T. et STUMBERGER, B. (2009). Torque analysis of an axial flux permanent magnet synchronous machine by using analytical magnetic field calculation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 45(3):1036–1039.
- [Watson, 1995] WATSON, G. (1995). *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge Univ Press.
- [Xiong et Nasar, 1989] XIONG, G. et NASAR, S. (1989). Analysis of fields and forces in a permanent magnet linear synchronous machine based on the concept of magnetic charge. *IEEE Transactions on Magnetics*, 25(3):2713–2719.
- [Zhu *et al.*, 1993] ZHU, Z., HOWE, D., BOLTE, E. et ACKERMANN, B. (1993). Instantaneous magnetic field distribution in brushless permanentmagnet dc motors. i. open-circuit field. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 29(1):124–135.

Chapitre 5

Etude approfondie des pertes magnétiques

Introduction

Le premier chapitre, consacré à l'état de l'art sur les machines à flux axial, tant sur les différentes topologies que sur leur comparaison avec les classiques machines à flux radial, avait révélé le point suivant. La machine à flux axial surclasse la machine à flux radial en termes de couple massique lorsque le nombre de paires de pôles est important. Nous nous permettons de rappeler que ceci vient du fait que l'augmentation du nombre de paires de pôles dans le cadre de la machine à flux axial permet une réduction conjointe des épaisseurs de culasses statoriques et rotoriques, et donc de la hauteur axiale de la machine. En revanche, concernant la machine à flux radial, l'augmentation du nombre de paires de pôles réduit l'épaisseur de la culasse du stator, mais à rayon d'entrefer fixé (donc à couple fixé), le volume interne au rotor devient inactif, mais compte malheureusement toujours dans le volume occupé par la machine, ce qui explique la moindre réduction du couple volumique avec le nombre de paires de pôles. Or, à vitesse fixée par le cahier des charges, l'augmentation du nombre de paires de pôles signifie par conséquent que les inductions dans la machine vont varier avec une fréquence importante. Par conséquent, le concepteur de machine à flux axial doit s'attendre à être confronté à des fréquences de fonctionnement élevées pour les ondes d'inductions d'excitation. Nous verrons dans le chapitre suivant consacré à l'optimisation sur la base des modèles 2D que cette tendance se confirme sur un cahier des charges de type véhicule hybride : le nombre de paires de pôles généré par l'optimiseur est assez important, et les fréquences de fonctionnement atteignent plusieurs kilohertz. Pour de telles fréquences, dans les matériaux laminés conventionnels, les modèles de pertes présentés au chapitre 2 aussi bien en champ alternatif qu'en champ tournant ne sont plus valables, à cause de l'effet de peau qui apparaît dans l'épaisseur de chaque tôle.

Voilà pourquoi, dans une première partie de ce chapitre, nous souhaiterions présenter et discuter d'une méthode de calcul analytique de la répartition du champ électromagnétique dans les matériaux laminés en tenant compte de l'effet de peau qui empêche l'uniformité de l'induction à travers l'épaisseur de la tôle magnétique. Ce modèle de diffusion du champ électromagnétique à travers la tôle sera mené dans le cas où chaque tôle est excitée par un locus moyen d'induction bi-dimensionnel. Comme les niveaux d'inductions moyens d'excitation sont importants, la non-linéarité du matériau doit être prise en compte. Un modèle de diffusion du champ électromagnétique avec deux composantes en régime non-linéaire est tiré d'ouvrages et d'articles sur la question (section 5.1.2.2). La résolution est faite de manière analytique, qui est une voie intéressante afin de proposer des modèles suffisamment rapides pour être inclus dans un processus d'optimisation de machines. Ensuite, une fois la répartition du champ magnétique trouvée à travers la tôle, nous proposerons une procédure originale de détermination des différentes composantes de la théorie de la séparation des pertes, en utilisant le calcul précédent comme point de départ (section 5.1.3).

Après avoir étudié le comportement des matériaux laminés conventionnels dans le cas d'inductions d'excitation de haute fréquence, nous nous pencherons, dans une seconde partie, sur le comportement d'un autre type de matériau dont la structure a été spécialement conçue pour fonctionner à des fréquences importantes : il s'agit des matériaux doux composites (SMC). Ces derniers, relativement nouveaux, sont formés de particules de quelques dizaines de micromètres de diamètre, isolées les unes des autres, dans le but de réduire les courants induits, et compactées entre elles pour ne pas diminuer de manière trop drastique la perméabilité magnétique du matériau. Cette étude sera d'autre part motivée par le fait que, comme nous l'avons démontré au chapitre 4, la structure de machine à flux axial est fondamentalement tri-dimensionnelle. Ceci laisse à penser que les matériaux laminés, anisotropes par nature,

ne sont pas bien adaptés à ce type de machines. Dans ce contexte, ces matériaux granulaires, par leur isotropie, peuvent prendre un avantage décisif sur les matériaux laminés, avantage qui se cumule à la réduction des pertes qu'ils peuvent procurer. Cet intéressant potentiel des SMC n'a hélas d'égal que le manque, à notre connaissance, de caractérisation tant théorique qu'expérimentale entreprise, dans le but de comprendre les pertes dans les matériaux en question. L'étude sera menée de la manière suivante : nous prendrons deux échantillons commerciaux de forme torique fournis par la société Höganas, l'un à gros grains destiné aux machines électriques, et l'autre à plus petits grains pour des applications en électronique de puissance. Ces deux échantillons seront caractérisés sur une large plage de fréquence, et les résultats vont être donnés pour plusieurs niveaux de polarisation maximale (section 5.2.2.3), avec une attention particulière sur le dispositif de mesure (section 5.2.2.1). Puis un modèle de pertes classiques sera mis au point, en observant les échantillons au microscope électronique à balayage (section 5.2.2.2). Grâce à ce modèle de pertes classiques, il devient possible de séparer les pertes, et d'isoler pour chaque matériau les pertes excédentaires. Par la suite, ces pertes excédentaires seront analysées en utilisant la théorie de Bertotti, et les conclusions sur la microstructure du matériau seront confirmées par de nouvelles observations au microscope (section 5.2.2.4). Enfin, nous envisagerons la conception d'un nouveau système de mesure des pertes dans les SMC, en champ bi-dimensionnel et non alternatif comme auparavant (section 5.2.3).

5.1 Les pertes dans les matériaux laminés en haute fréquence

Nous avons vu, au chapitre 1 concernant l'état de l'art sur les machines électriques, que les machines à flux axial ne pouvaient donner tous leurs avantages en termes de couple massique par rapport aux machines à flux radial que lorsque le nombre de paires de pôles de ces machines est important. Cela signifie qu'à vitesse donnée, la fréquence de fonctionnement est conséquente, et peut atteindre, comme on le verra au chapitre suivant dédié à l'optimisation, plusieurs kilohertz. Le matériau magnétique doux utilisé pour le stator de la machine à flux axial sera, pour l'instant, constitué de tôles laminées Fer-Silicium classiques, d'épaisseur $\Delta = 0.5$ mm. La tôle sera considérée comme roulée, ainsi que suggéré à la référence [Anpalahan et Lamperth, 2006]. Nous allons nous intéresser au cas du calcul des pertes en champ tournant dans la culasse du stator de la machine, soumise, nous l'avons montré au chapitre 3, à des loci d'inductions quelconques. Cette problématique des loci bi-dimensionnels d'induction dans les culasses du stator dépasse d'ailleurs le cadre des machines à flux axial, et, dans les machines synchrones conventionnelles à flux radial, ou bien les joints dits en « T » des transformateurs, il est classique d'observer de tels loci d'induction bi-dimensionnels [Bottauscio *et al.*, 2002b].

Au chapitre 3, nous avons dit que nous allions, pour tenir compte du champ tournant dans la culasse du stator, appliquer le modèle de calcul local des pertes développé dans les références [Appino *et al.*, 2007, Appino *et al.*, 2009b], qui étend la théorie de Bertotti [Bertotti, 1988] au cas du champ tournant. Les modèles présents dans ces références ont été conçus pour prédire les pertes dans les matériaux laminés classiques, soumis à des excitations bi-dimensionnelles. Néanmoins, ils se limitent à des fréquences d'excitation proches de 50 Hz, la fréquence limite étant 200 Hz. L'hypothèse fondamentale consiste à supposer l'induction d'excitation homogène dans la tôle, en négligeant tout effet de peau. Nous verrons au chapitre 6 dédié à l'optimisation que cette hypothèse n'est malheureusement pas exacte pour les machines générées par l'outil d'optimisation, dont la fréquence de fonctionnement peut atteindre plusieurs kilohertz. Il est donc gênant d'appliquer tel quel le modèle à nos machines, à cause de ce problème de la fréquence de fonctionnement bien trop élevée pour garantir la validité des hypothèses simplificatrices effectuées. Nous allons par conséquent modifier le modèle de pertes en champ tournant présenté dans les références [Appino *et al.*, 2007, Appino *et al.*, 2009b], afin de tenir compte de l'effet de peau, non négligeable pour les fréquences de fonctionnement importantes. Les non-linéarités, étant donné les niveaux d'induction toujours conséquents, seront prises en compte. Tout cela sera fait en souhaitant conserver une démarche totalement analytique, qui est intéressante par sa souplesse de mise en oeuvre.

5.1.1 Etat de l'art sur les pertes en haute fréquence dans les matériaux laminés

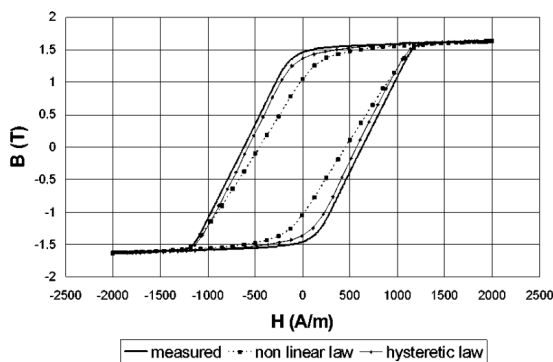
5.1.1.1 Exposé des différentes méthodes de calcul des pertes dans les tôles soumises à des inductions de fréquences élevées

Nous allons commencer cette section par un bref état de l'art concernant le calcul des pertes dans les matériaux laminés pour des fréquences importantes.

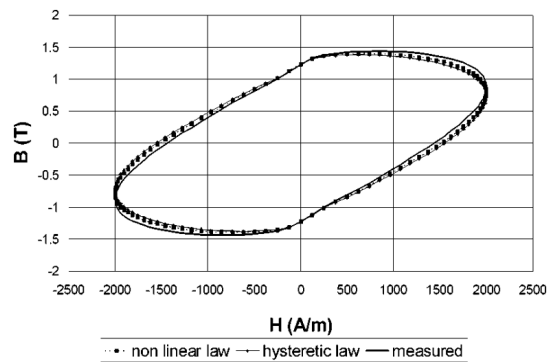
Certains auteurs, afin de traiter le problème des pertes dans les matériaux laminés soumis à des inductions magnétiques haute fréquence, utilisent des méthodes numériques implantant les modèles de Preisach [Mayergoyz, 1986b]. Le cas des loci d'inductions bi-dimensionnels se fait par une extension de ces modèles, que l'on appelle alors les modèles de Preisach vectoriels, car mettant en jeu plusieurs composantes pour les champs électromagnétiques [Saitz, 2000]. De tels modèles peuvent donner des résultats en accord avec les valeurs expérimentalement mesurées, et constituent de plus une méthode efficace de prise en compte des cycles mineurs des inductions d'excitation. Néanmoins, un des inconvénients potentiels de ce type de méthode numérique implantant des caractéristiques complexes pour les matériaux peut se trouver dans la lourdeur des calculs à mettre en oeuvre. Notons que d'autres auteurs se sont attaqués à ce problème de temps de calcul des modèles de Preisach [Dlala, 2009], en proposant des méthodes numériques alternatives. Dans cette référence, l'équation de diffusion du champ électromagnétique dans la tôle est résolue numériquement en adoptant une caractéristique $B(H)$ pour le matériau saturable, mais non hystérétique. Ensuite, connaissant la répartition locale de l'induction dans la tôle sous cette hypothèse, il est possible, après coup, par les formulations fondées sur la séparation des pertes, de calculer l'énergie perdue dans le matériau. Cette formulation par éléments finis non linéaires, mais négligeant l'hystérésis, permet de gagner un temps appréciable de calcul par rapport aux modèles de Preisach, pour des résultats de pertes assez proches. Néanmoins, la résolution de l'équation non-linéaire reste numérique, et le temps de calcul, bien que réduit, demeure significatif, ce qui peut être prohibitif dans un travail d'optimisation de machines électriques.

La référence [Gollee et Gerlach, 2000] a suivi un processus de raisonnement identique, en comparant l'effet du choix d'une caractéristique magnétique locale $B(H)$ pour le matériau ferromagnétique laminé saturable, mais non hystérétique, à une caractéristique magnétique locale réellement hystérétique. Dans le second cas, le cycle d'hystérésis est modélisé par une formule analytique qui change suivant le sens de variation du champ magnétique H . Cette formule ne modélise que les effets d'hystérésis statiques. Un champ magnétique $H_S(t)$ sinusoïdal est ensuite appliqué à la surface de la tôle. Par une résolution de l'équation de diffusion sur la section de la tôle, le cycle d'hystérésis global liant l'induction moyenne $B_m(t)$ à travers la tôle au champ magnétique en surface $H_S(t)$ peut être trouvé. Les résultats de simulation avec et sans hystérésis, et les résultats issus de la mesure, sont ensuite comparés. Les conclusions sont les suivantes :

- A basse fréquence (voisine de 50 Hz), le fait de négliger l'hystérésis magnétique mène à une erreur importante, car les effets statiques prennent une part considérable, alors qu'à plus haute fréquence (voisine de 500 Hz), cette approximation anhystérétique n'amène guère d'erreur, vu que la plus importante part de l'hystérésis est apportée par les effets dynamiques. Cette tendance est illustrée au niveau de la figure 5.1, dans laquelle on montre les cycles d'hystérésis obtenus par les deux modes de calculs, et expérimentalement, pour deux fréquences.



(a) Courbes d'hystérésis globales obtenues $B_m(H_S)$ à la fréquence de 50 Hz



(b) Courbes d'hystérésis globales obtenues $B_m(H_S)$ à la fréquence de 500 Hz

FIGURE 5.1: Erreur entre les cycles d'hystérésis globaux des tôles évalués par résolution de l'équation de diffusion avec une loi locale $B(H)$ anhystérétique saturable, hystérétique, et vérification expérimentale (référence [Gollee et Gerlach, 2000])

- A noter que pour le modèle hystérétique, même si l'erreur relative sur les pertes par rapport à la mesure est bien moins importante que pour le modèle anhystérétique saturable (figure 5.2), surtout, comme on l'a

dit, aux basses fréquences, la courbe d'erreur relative sur les pertes du modèle hystérétique présente un maximum vers 50 Hz. Les auteurs interprètent ce résultat comme une conséquence des pertes en excès pour les fréquences intermédiaires, qui nécessiterait l'utilisation des modèles locaux $B(H)$ prenant en compte les aspects dynamiques.

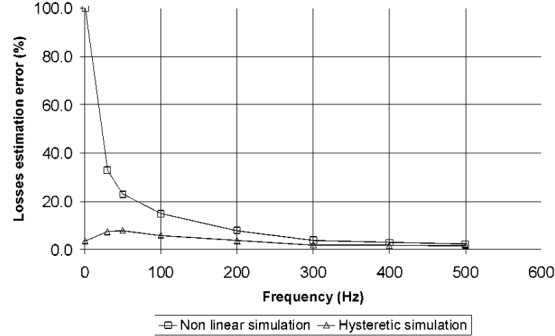


FIGURE 5.2: Erreur relative sur les pertes obtenues par les deux modèles (anhystérétique saturable et hystérétique) par rapport à la mesure (référence [Gollee et Gerlach, 2000])

La référence [Chevalier *et al.*, 2000a] a réutilisé l'étude en régime saturé anhystérétique présentée dans l'article [Gollee et Gerlach, 2000] afin d'étudier l'effet de la largeur de la tôle. Pour cela, à la fréquence de 500 Hz fixée, il est appliqué différentes amplitudes de champ H_S sinusoïdal à la surface de la tôle. Pour des amplitudes de champ éloignées de la saturation, il est montré, comme en régime linéaire, que les pertes volumiques augmentent lorsque l'on augmente l'épaisseur de la tôle. En revanche, pour des amplitudes de champ magnétique plus importantes, lorsque le matériau approche de la saturation, il est montré que la non-linéarité du matériau peut provoquer une diminution des pertes volumiques lorsque l'épaisseur de la tôle augmente. Ceci est, d'après les auteurs, dû au fait que la diminution de la perméabilité magnétique au voisinage de la saturation est la cause d'une diminution des pertes par courants induits.

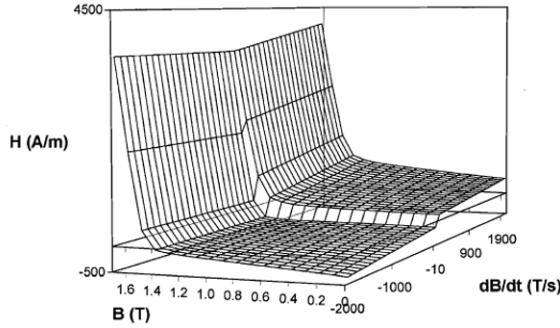
Dans la référence [Chevalier *et al.*, 1999], les auteurs présentent un nouveau modèle d'hystérésis qui leur sert à calculer les pertes, qu'ils ont appelé « modèle loss surface ». L'idée de base est de dire que le champ magnétique à la surface du matériau laminé, noté H_S (d'où le nom du modèle), dépend, en plus de l'induction moyenne B_m dans cette tôle, de la dérivée de cette grandeur par rapport au temps : $H_S = f(B_m, \frac{dB_m}{dt})$. L'intervention de la dérivée par rapport au temps permet de prendre en compte le phénomène d'hystérésis magnétique, en tenant compte des aspects dynamiques. La méthode s'avère être capable de prendre aussi en considération les cycles mineurs avec une précision satisfaisante. La surface $f(B_m, \frac{dB_m}{dt})$ est identifiée expérimentalement. Pour cela, les auteurs imposent dans le matériau une induction triangulaire, dont la dérivée $\frac{dB_m}{dt}$ prend une valeur absolue constante, et puis effectuent les relevés de champ H_S pour chaque valeur d'induction B_m . Le procédé de mesure est automatisé, de telle manière à balayer régulièrement de nombreuses valeurs possibles du plan $(B_m, \frac{dB_m}{dt})$. La surface $H_S = f(B_m, \frac{dB_m}{dt})$ est ensuite stockée dans un fichier informatique. Grâce à ce modèle global, pour chaque forme d'onde $B_m(t)$ appliquée, même si cette dernière comporte des cycles mineurs, il est possible de prédire le champ magnétique H_S de surface. La connaissance des formes d'onde $H_S(t)$ et $B_m(t)$ donne alors accès aux pertes dans la tôle. Ce modèle est purement scalaire, et, à la fin de l'article, les auteurs proposent une extension vectorielle dans le cas où on applique un locus bi-dimensionnel d'induction moyenne, en découplant le problème d'hystérésis vectoriel suivant deux axes perpendiculaires. Un des axes est choisi comme étant localisé suivant le grand axe du locus d'induction imposé.

Ces mêmes auteurs, dans la référence [Chevalier *et al.*, 2000b] ont perfectionné le modèle de la manière suivante. Ils se sont aperçus que la surface $H_S = f(B_m, \frac{dB_m}{dt})$ était susceptible de présenter une discontinuité vers les faibles valeurs de variation d'induction (si $\frac{dB_m}{dt} \rightarrow 0$), comme le montre la figure 5.3a, ce qui est dû à une difficulté du modèle à prendre en compte l'hystérésis statique du matériau. Pour pallier à ce problème, les auteurs décident, dans l'article [Chevalier *et al.*, 2000b], de décomposer le champ magnétique de surface H_S en deux composantes :

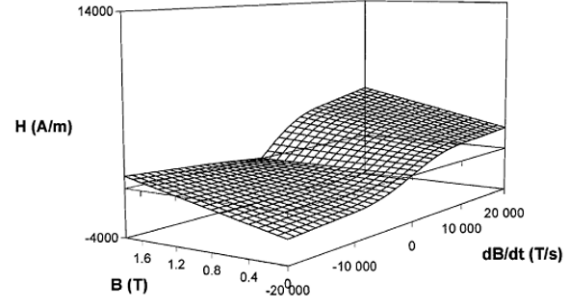
- une composante statique, notée $H_{S_{stat}}$, chargée, comme son nom l'indique, de modéliser l'hystérésis statique du matériau. C'est cette composante qui posait problème, en générant la discontinuité de la surface $H_S = f(B_m, \frac{dB_m}{dt})$. A présent, cette composante se trouve modélisée séparément, par un modèle de Preisach statique, tel que celui mis au point par Mayergoyz [Mayergoyz, 1986b].

- une composante dynamique, notée $H_{S_{dyn}}$, qui prend en charge exclusivement la modélisation des aspects dynamiques. Cette composante est nulle à fréquence nulle, ce qui permet d’obtenir la surface continue représentée à la figure 5.3b.

Lors de l’identification du modèle par essais en induction triangulaire au moyen d’un cadre d’Epstein, la composante dynamique de champ $H_{S_{dyn}}$ est évaluée en faisant la différence $H_{S_{dyn}} = H_S - H_{S_{stat}}$, le champ H_S étant le champ mesuré, et $H_{S_{stat}}$ le champ statique estimé par le modèle de Mayergoyz. Lorsque l’on applique le modèle, il suffit de sommer les deux composantes $H_S = H_{S_{dyn}} + H_{S_{stat}}$. Afin de faciliter la modélisation, la surface $H_{S_{dyn}} = f(B_m, \frac{dB_m}{dt})$ est évaluée par interpolation avec des polynômes du premier et second degré en $\frac{dB_m}{dt}$. Les coefficients de ces polynômes dépendent de la variable B_m . Une très bonne concordance entre le modèle et la mesure est montrée dans l’article [Chevalier *et al.*, 2000b], même avec des ondes d’induction possédant des cycles mineurs nombreux.



(a) Exemple de surface $H_S = f(B_m, \frac{dB_m}{dt})$ obtenue, présentant une discontinuité



(b) Exemple de surface $H_{S_{dyn}} = f(B_m, \frac{dB_m}{dt})$ obtenue, quasiment continue

FIGURE 5.3: Surfaces obtenues $H_S = f(B_m, \frac{dB_m}{dt})$ avant et après la décomposition $H_S = H_{S_{stat}} + H_{S_{dyn}}$ (référence [Chevalier *et al.*, 2000b])

La thèse [Gautreau, 2005] a ensuite appliqué ce modèle de pertes global à l’étude des pertes magnétiques dans un moteur synchrone à aimants permanents, en donnant des résultats avec une erreur relative inférieure à 20% par rapport à la mesure, ce qui est appréciable, compte tenu des difficultés expérimentales que pose la mesure des pertes magnétiques dans un système complexe comme la machine électrique (il faut estimer, et soustraire, les pertes mécaniques). A ce propos, il est signalé dans cette référence que, même si l’induction dans les dents de la machine est alternative, les loci d’inductions dans la culasse statorique sont bel et bien bi-dimensionnels et de surcroît distordus, ainsi que remarqué également dans le chapitre 3 de cette thèse. Ce problème est résolu, comme signalé dans la référence [Chevalier *et al.*, 1999], en découplant, pour chaque locus de champ, les deux composantes d’induction, dans un repère local orthogonal avec un des axes situé suivant le grand axe du locus d’induction considéré. Les pertes suivant les deux axes sont ensuite additionnées, et cela donne des résultats peu éloignés des mesures en champ tournant.

A ce propos de l’hystérésis vectoriel, les mêmes auteurs, dans la référence [Vernescu-Spornic *et al.*, 2000], ont proposé une méthode plus poussée que le découplage des axes. En effet, il est suggéré dans cette référence de modéliser les mécanismes d’aimantation vectoriels comme étant dus à la combinaison de phénomènes hystérétiques, et de rotations cohérentes. Les phénomènes de reversement d’aimantation d’origine hystérétique sont modélisés par un modèle de Preisach statique, et ceux dus aux rotations cohérentes de l’aimantation sont décrits par un modèle de type Stoner-Wohlfarth (voir le chapitre 2 de cette thèse).

D’autres auteurs [Ionel *et al.*, 2007], quant à eux fidèles aux formulations locales des pertes, se sont rendus compte que les formulations de pertes qu’ils utilisaient en basse fréquence ne fonctionnent pas en haute fréquence à cause de l’effet de peau, et ont proposé diverses corrections des formules qu’ils utilisaient en basse fréquence pour prendre en compte le phénomène de l’effet de peau. Par exemple, la formule de Steinmetz suivante était utilisée en basse fréquence pour prédire l’énergie volumique perdue par cycle dans la tôle, notée w_{Fe} , soumise à une induction sinusoïdale d’amplitude B_m et de fréquence f :

$$w_{Fe} = k_h f B_m^2 + k_e f^2 B_m^2 \quad (5.1)$$

La correction consiste à dire qu'à plus haute fréquence, ces pertes sont données par la formule suivante :

$$\frac{w_{Fe}}{fB_m^2} = k_h(f, B_m) + k_e(f, B_m)f \quad (5.2)$$

Comme illustré à la formule précédente, les coefficients k_h et k_e sont à présent des fonctions des variables (f, B_m) , dans la plage de fréquence dite importante (supérieure à 400 Hz, d'après l'article [Ionel *et al.*, 2007]). La dépendance des coefficients en fonction de ces variables est supposée polynomiale, et les coefficients de ces polynômes sont ensuite identifiés par une procédure de « fitting » de courbe. Néanmoins, il nous semble que de telles méthodes possèdent l'inconvénient de demander un travail expérimental important, à cause du nombre de coefficients relativement conséquent à déterminer.

Afin de remédier à cela, certains auteurs se sont orientés vers une formulation analytique de l'effet de peau dans les tôles ferromagnétiques [Boglietti et Cavagnino, 2007]. L'idée est de résoudre l'équation de diffusion dans la tôle, en supposant le matériau linéaire, avec une perméabilité magnétique relative constante. L'avantage de cette méthode est la possibilité d'obtenir une solution analytique à la fois compacte et exacte à l'équation de diffusion. Qui plus est, la linéarité permet de prendre en compte sans complication supplémentaire par rapport au cas uni-dimensionnel les effets des inductions bi-dimensionnelles, en découplant les phénomènes électromagnétiques ayant cours dans les deux directions. Nous reviendrons sur cette méthode de résolution linéaire dans la suite de ce travail. Cela étant, l'hypothèse de la linéarité du matériau peut être discutée, surtout pour des niveaux d'inductions importants, comme ceux que l'on trouve dans les machines électriques. Les pertes par courants induits sont calculées ensuite par la méthode du vecteur de Poynting. Ensuite, l'induction moyenne à travers la tôle est utilisée afin de calculer la composante de pertes par hystérésis, ainsi que la composante de pertes excédentaires.

Enfin, d'autres chercheurs [Mayergoyz, 1998, Mayergoyz *et al.*, 1984] se sont attaqués au problème de la résolution analytique de l'équation de diffusion dans un milieu non linéaire saturable, mais non hystérétique. Il est donc possible de connaître ainsi la répartition locale de l'induction dans une tôle, ou plutôt dans un demi-espace, dans lequel on force soit le champ magnétique, soit le flux magnétique. Comme auparavant, une application du théorème de Poynting permet de trouver les pertes par courants induits. La question des composantes de pertes non maxwelliennes (hystérésis ou excédentaires) ne peut pas être traitée de manière directe, la caractéristique du milieu n'étant pas hystérétique. Singulièrement, le cas des inductions circulaires, ou plus généralement bi-dimensionnelles, s'avère plus facile à traiter d'un point de vue mathématique dans un milieu non-linéaire saturable que le cas des inductions purement alternatives, pour lesquelles une solution analytique exacte n'est pas possible.

5.1.1.2 Apport du travail présenté ici

L'objectif du travail présenté ici est, en reprenant les méthodes analytiques développées dans les références [Mayergoyz, 1998, Mayergoyz *et al.*, 1984], de calculer la répartition locale des composantes d'induction dans une tôle magnétique soumise à un flux d'excitation bi-dimensionnel lorsque l'effet de peau ne peut plus être négligé, en tenant compte de la caractéristique saturable du matériau magnétique. Les pertes classiques seront alors calculées, comme dans les références [Mayergoyz, 1998, Mayergoyz *et al.*, 1984], en utilisant le vecteur de Poynting. Notre apport se situera dans l'utilisation des résultats concernant la répartition locale d'induction dans la tôle afin de prédire la composante de pertes statique et excédentaire dans cette dernière. Une comparaison avec les résultats fournis par un modèle de diffusion linéaire sera effectuée.

5.1.2 Calcul de la répartition locale de l'induction dans une tôle laminée soumise à une induction moyenne d'excitation bi-directionnelle

5.1.2.1 Hypothèses de travail

Nous allons lister dans cette partie les hypothèses de travail qui sont nécessaires afin de mener à bien le calcul des loci d'induction locaux dans la tôle :

- La tôle ferromagnétique est d'épaisseur Δ . Dans les directions perpendiculaires à cette épaisseur, la tôle est supposée être un plan de dimensions infinies : tout effet de bord est donc négligé dans ce calcul.
- Les flux magnétiques dans les directions perpendiculaires à l'épaisseur Δ de la tôle sont imposés. En effet, ce cas correspond, en première approximation, aux conditions d'excitation des matériaux ferromagnétiques dans les machines électriques. On représente la géométrie étudiée à la figure 5.4.

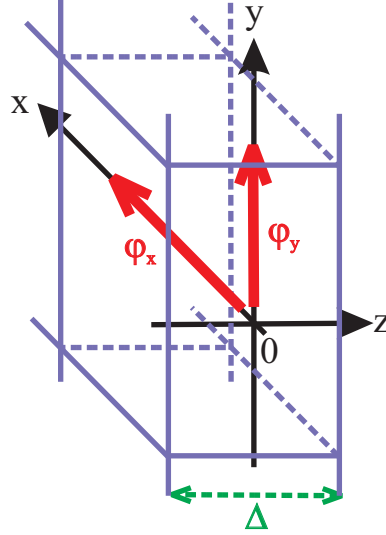


FIGURE 5.4: Flux magnétiques par unité de longueur imposés dans la tôle ferromagnétique d'épaisseur Δ

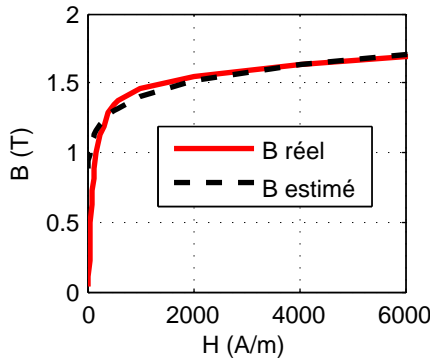
Au niveau de cette figure, on a représenté le flux magnétique imposé $\varphi_x(t)$ dans la direction x , et le flux $\varphi_y(t)$ dans la direction y . Comme la tôle est supposée de dimensions infinies dans le plan xy , ces flux sont en réalité des flux par unité de longueur imposés à travers l'échantillon. La relation entre ces flux par unité de longueur, et les inductions moyennes ($B_{xMOY}(t)$, $B_{yMOY}(t)$) dans la tôle d'épaisseur Δ , est donnée par l'équation :

$$\begin{cases} B_{xMOY}(t) &= \frac{\varphi_x(t)}{\Delta} \\ B_{yMOY}(t) &= \frac{\varphi_y(t)}{\Delta} \end{cases} \quad (5.3)$$

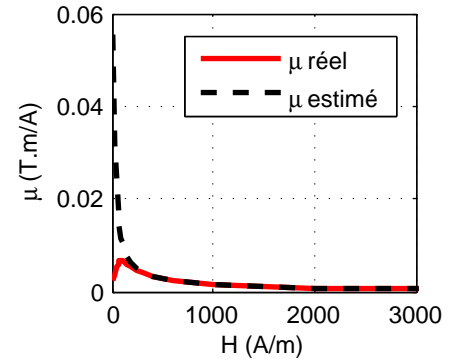
Il est intéressant de montrer que le fait d'imposer un flux (ou une induction moyenne) dans une tôle est équivalent à imposer un champ électrique en surface de cette dernière. Notons que l'hypothèse de la tôle infinie dans le plan xy implique que la seule coordonnée spatiale dont dépendent les inductions est la coordonnée z . On obtient, d'après l'équation de Maxwell-Faraday, une relation entre les flux par unité de longueur dans la tôle, et les champs électriques à la surface de la tôle :

$$\begin{cases} E_x(z = \Delta/2, t) = -E_x(z = -\Delta/2, t) &= \Delta \frac{d\varphi_y(t)}{dt} \\ E_y(z = \Delta/2, t) = -E_y(z = -\Delta/2, t) &= -\Delta \frac{d\varphi_x(t)}{dt} \end{cases} \quad (5.4)$$

- Comme suggéré dans les références [Mayergoyz, 1998, Mayergoyz *et al.*, 1984], nous allons adopter un modèle pour le matériau non-linéaire saturable de la forme $B = K \cdot H^{1/n}$, où K est une constante, et le nombre n est un entier. Les deux paramètres K et n sont identifiés à partir de la courbe de première aimantation saturable du matériau, par une méthode de moindres carrés. Intéressons-nous, dans cette étude, aux tôles Fer-Silicium 3%. Nous avons mené le relevé de la courbe de première aimantation de ce matériau représentée au niveau de la figure 5.5a. Grâce à cette figure, on peut juger de la qualité de l'approximation de la courbe $B(H)$ par la formule proposée. Les paramètres de cette courbe sont $K = 0.76$, et $n = 7$. En divisant par le champ magnétique, on peut évaluer la fonction $\mu(H)$, réelle et estimée, qui est égale à $\mu(H) = K \cdot H^{1/n-1}$. Nous voyons l'erreur introduite par l'approximation analytique de la courbe $B(H)$ adoptée. Le problème est que comme $1/n - 1 < 0$ vu que $n > 1$, la perméabilité magnétique est infinie en champ nul. Or ceci va à l'encontre des principes physiques prévoyant, comme montré au niveau de la figure 5.5b, une perméabilité partant d'une valeur faible, présentant un maximum, puis décroissant de nouveau à cause de la saturation magnétique.



(a) Courbes de première aimantation $B(H)$ réelle et approximée ($K = 0.76$, et $n = 7$) du Fer-Silicium



(b) Courbes $\mu(H)$ réelle et approximée du Fer-Silicium

FIGURE 5.5: Approximation de la courbe de première aimantation par une formule du type $B = K \cdot H^{1/n}$

Il faudra donc s'attendre à ce que la répartition de l'induction déterminée en champ faible soit erronée. Peut-être cela n'est-il pas trop grave, étant donné que dans les circuits ferromagnétiques des machines électriques, les inductions sont naturellement importantes afin d'utiliser au mieux le fer de la machine. A noter d'ailleurs que la référence [Mayergoyz, 1998] prévoit d'ailleurs une méthodologie particulière pour la résolution de l'équation de diffusion en champ faible, mais, pour la raison que nous venons d'évoquer, c'est plutôt le mécanisme de saturation qui nous intéresse ici.

- Comme montré dans les références [Mayergoyz, 1998, Mayergoyz *et al.*, 1984], un champ électromagnétique appliqué à la surface d'un demi-espace, lorsque le modèle de diffusion non-linéaire est adopté, conduit à l'existence d'une profondeur de pénétration du champ électromagnétique finie, notée z_0 . Cette profondeur de pénétration z_0 est d'autant plus faible que la fréquence est importante. Nous allons dans ce travail supposer que la fréquence est suffisante, de manière à ce que la profondeur de pénétration z_0 du champ électromagnétique soit inférieure à la demi-épaisseur de la tôle $\Delta/2$. De cette manière, il est légitime de supposer chaque face de la tôle comme un demi-espace infini, en négligeant l'interaction entre les champs électromagnétiques provenant des deux faces.

5.1.2.2 Cas non-linéaire

Nous allons utiliser le modèle de diffusion non-linéaire des champs électromagnétiques bi-dimensionnels présenté dans les références [Mayergoyz, 1998, Mayergoyz *et al.*, 1984] dans un demi-espace ferromagnétique saturable de courbe d'aimantation $B = K \cdot H^{1/n}$. Pour résoudre l'équation de diffusion, nous prenons une conductivité électrique du Fer-Silicium égale à $\sigma = 1.79 \cdot 10^6 \text{ Sm}^{-1}$. S'agissant juste du rappel du modèle des références [Mayergoyz, 1998, Mayergoyz *et al.*, 1984], nous n'allons guère donner de détails concernant ce calcul.

Calcul pour une induction d'excitation moyenne circulaire La première étape, selon les références [Mayergoyz, 1998, Mayergoyz *et al.*, 1984], est de calculer analytiquement la répartition locale de l'induction dans une tôle ferromagnétique soumise à un locus d'induction moyenne bi-dimensionnelle. Nous allons nous intéresser au demi-espace commençant en la coordonnée $z = -\Delta/2$. La résolution pour le demi-espace situé en $z < \Delta/2$ est analogue. Pour faciliter la résolution, on introduit la coordonnée $z' = z + \Delta/2$. On commence par appliquer un champ magnétique circulaire à la surface du demi-espace :

$$\begin{cases} H_x(z' = 0, t) = H_m \cos(\omega t) \\ H_y(z' = 0, t) = H_m \sin(\omega t) \end{cases} \quad (5.5)$$

On prend en compte la dépendance en fonction du temps par la méthode des phaseurs complexes, ce qui donne, pour le champ magnétique appliqué à la surface de la tôle, l'expression analytique suivante :

$$\begin{cases} \overline{H}_x(z' = 0) &= H_m \\ \overline{H}_y(z' = 0) &= -iH_m \end{cases} \quad (5.6)$$

Dans les références [Mayergoyz, 1998, Mayergoyz *et al.*, 1984], il est montré que si le champ magnétique à la surface de la tôle est circulaire, il en est de même du champ magnétique en toute coordonnée z' du demi-espace. On peut alors écrire que :

$$\begin{cases} \overline{H}_x(z') &= H(z') \cdot \exp(i\theta(z')) \\ \overline{H}_y(z') &= -iH(z') \cdot \exp(i\theta(z')) \end{cases} \quad (5.7)$$

L'expression de la perméabilité magnétique relative est écrite sous la forme :

$$\mu(|H|) = KH(z')^{\frac{1}{n}-1} = \mu_m \left(\frac{H(z')}{H_m} \right)^{\frac{1}{n}-1} \quad (5.8)$$

où la perméabilité μ_m est donc égale à $\mu_m = K \cdot H_m^{1/n-1}$. L'équation de diffusion est identique pour chaque composante. Pour la composante d'axe x , cette équation prend la forme :

$$\frac{\partial^2 \overline{H}_x}{\partial z'^2} = i\omega\sigma\mu_m \left(\frac{H(z')}{H_m} \right)^{\frac{1}{n}-1} \overline{H}_x \quad (5.9)$$

La solution suivante peut être proposée :

$$\overline{H}_x(z') = \begin{cases} H_m \left(1 - \frac{z'}{z_0}\right)^\alpha & \text{for } z' < z_0 \\ 0 & \text{for } z' > z_0 \end{cases} \quad (5.10)$$

Il est possible de montrer que l'expression précédente est solution de l'équation de diffusion respectant la condition aux limites $\overline{H}_x(z' = 0) = H_m$, à condition de prendre :

$$\begin{cases} \alpha &= \frac{2n}{n-1} + i \cdot \frac{\sqrt{2n(n+1)}}{n-1} \\ z_0 &= \frac{[2n(n+1)(3n+1)^2]^{1/4}}{\sqrt{\omega\sigma\mu_m(n-1)}} \end{cases} \quad (5.11)$$

Ainsi, la profondeur de pénétration finie z_0 de l'onde électromagnétique dans le matériau est trouvée en fonction des caractéristiques du matériau. Il est tout-à-fait caractéristique que cette profondeur de pénétration en régime non-linéaire dépend de l'amplitude du champ magnétique H_m appliqué à la surface du matériau, via la perméabilité magnétique μ_m . En identifiant le module et l'argument de l'expression précédente, on en déduit l'onde d'induction circulaire :

$$\begin{cases} H_x(z', t) &= H_m \left(1 - \frac{z'}{z_0}\right)^{\frac{2n}{n-1}} \cos\left(\omega t + \frac{\sqrt{2n(n+1)}}{n-1} \ln\left(1 - \frac{z'}{z_0}\right)\right) \\ H_y(z', t) &= H_m \left(1 - \frac{z'}{z_0}\right)^{\frac{2n}{n-1}} \sin\left(\omega t + \frac{\sqrt{2n(n+1)}}{n-1} \ln\left(1 - \frac{z'}{z_0}\right)\right) \end{cases} \quad (5.12)$$

Cela étant, dans notre cas où le flux est forcé, ce n'est pas le champ magnétique qui est imposé à la surface de la tôle, mais plutôt le champ électrique. Afin de passer du cas où le champ magnétique est imposé à la surface de la tôle vers le cas où c'est le champ électrique, on raisonne en termes d'impédance d'onde complexe. En effet, la relation de Maxwell-Ampère appliquée à la surface de la tôle $z' = 0$ donne :

$$\overline{E}_y(z' = 0) = -\frac{1}{\sigma} \left(\frac{d\overline{H}_x}{dz'} \right)_{z'=0} = \frac{\alpha}{z_0\sigma} H_m \quad (5.13)$$

L'impédance d'onde à la surface de la tôle est donc donnée par la relation :

$$\overline{\eta} = \frac{\overline{E}_y(z' = 0)}{\overline{H}_x(z' = 0)} = -\frac{\overline{E}_x(z' = 0)}{\overline{H}_y(z' = 0)} = \frac{\alpha}{z_0\sigma} \quad (5.14)$$

Le concept d'impédance d'onde fournit une méthode commode afin de passer du champ magnétique imposé à la surface de la tôle au champ électrique, et vice-versa. Il suffit donc de répéter le calcul, mais en prenant à présent, au bord du matériau, le champ magnétique complexe suivant, qui permet d'assurer le flux tournant φ_m à la pulsation ω voulu dans le matériau :

$$\begin{cases} \bar{H}_x(z'=0) &= \frac{\bar{E}_y(z'=0)}{\bar{\eta}} = -i\frac{1}{\bar{\eta}}\frac{\omega}{2}\varphi_m \\ \bar{H}_y(z'=0) &= -\frac{\bar{E}_x(z'=0)}{\bar{\eta}} = \frac{1}{\bar{\eta}}\frac{\omega}{2}\varphi_m \end{cases} \quad (5.15)$$

Calcul pour un locus d'induction moyenne quelconque Les références [Mayergoz, 1998, Mayergoz *et al.*, 1984] indiquent comment, à partir des résultats sur la diffusion de l'onde circulaire à travers le milieu magnétique, on peut étendre la méthode au champ bi-dimensionnel de forme quelconque. Nous avons montré qu'il est possible de raisonner en champ magnétique appliqué à la surface de la tôle en $z' = 0$, et que le concept d'impédance d'onde permettait de toute manière de repasser au champ électrique, et vice-versa. Nous allons donc considérer que le champ magnétique à la surface de la tôle peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} H_x(z'=0, t) &= H_m \cos(\omega t) + \epsilon H_m f_x(t) \\ H_y(z'=0, t) &= H_m \sin(\omega t) + \epsilon H_m f_y(t) \end{cases} \quad (5.16)$$

Dans la formule précédente, le nombre ϵ est supposé vérifier $\epsilon \ll 1$. Dans ces conditions, il est légitime de chercher le champ magnétique pour toute coordonnée z' sous la forme suivante :

$$\begin{cases} H_x(z', t) &= H_x^0(z', t) + \epsilon h_x(z', t) \\ H_y(z', t) &= H_y^0(z', t) + \epsilon h_y(z', t) \end{cases} \quad (5.17)$$

Dans la formule précédente, le champ $(H_x^0(z', t), H_y^0(z', t))$ est la réponse à l'excitation circulaire d'amplitude H_m , déterminée au niveau de la rubrique précédente. En substituant l'équation précédente dans l'équation de diffusion, et en isolant les termes en ϵ , il est possible d'obtenir le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{z'}{z_0}\right)^2 \frac{\partial^2 h_x}{\partial z'^2} &= \sigma\mu_m \frac{\partial}{\partial t} \left\{ h_x \left[\frac{1+n}{2n} + \frac{1-n}{2n} \cos(2\omega t + 2\theta(z')) \right] + h_y \frac{1-n}{2n} \sin(2\omega t + 2\theta(z')) \right\} \\ \left(1 - \frac{z'}{z_0}\right)^2 \frac{\partial^2 h_y}{\partial z'^2} &= \sigma\mu_m \frac{\partial}{\partial t} \left\{ h_x \frac{1-n}{2n} \sin(2\omega t + 2\theta(z')) + h_y \left[\frac{1+n}{2n} - \frac{1-n}{2n} \cos(2\omega t + 2\theta(z')) \right] \right\} \end{cases} \quad (5.18)$$

Pour résoudre ce système différentiel couplé, les références [Mayergoz, 1998, Mayergoz *et al.*, 1984] proposent d'effectuer le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} \phi(z', t) &= h_x(z', t) + i \cdot h_y(z', t) \\ \psi(z', t) &= h_x(z', t) - i \cdot h_y(z', t) \end{cases} \quad (5.19)$$

Le système différentiel devient, avec ces nouvelles variables :

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{z'}{z_0}\right)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2} &= \sigma\mu_m \frac{1-n}{2n} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1+n}{1-n} \phi(z', t) + \left(1 - \frac{z'}{z_0}\right)^{i2\frac{\sqrt{2n(n+1)}}{n-1}} \exp(i2\omega t) \psi(z', t) \right\} \\ \left(1 - \frac{z'}{z_0}\right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z'^2} &= \sigma\mu_m \frac{1-n}{2n} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1+n}{1-n} \psi(z', t) + \left(1 - \frac{z'}{z_0}\right)^{-i2\frac{\sqrt{2n(n+1)}}{n-1}} \exp(-i2\omega t) \phi(z', t) \right\} \end{cases} \quad (5.20)$$

Le problème est résolu en développant les fonctions inconnues ϕ et ψ en séries de Fourier bilatérales en fonction du temps, de la forme :

$$\begin{cases} \phi(z', t) &= \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \phi_k(z') \exp(ik\omega t) \\ \psi(z', t) &= \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \psi_k(z') \exp(ik\omega t) \end{cases} \quad (5.21)$$

On substitue dans le système différentiel précédent pour en déduire le système suivant, pour tout entier k , en posant $\chi_k = k\omega\sigma\mu_m \frac{1-n}{2n}$ et $a = \frac{1+n}{1-n}$, et en changeant k en $k-2$ dans la seconde équation :

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{z'}{z_0}\right)^2 \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial z'^2} &= i\chi_k \left[a\phi_k(z') + \left(1 - \frac{z'}{z_0}\right)^{i2\frac{\sqrt{2n(n+1)}}{n-1}} \psi_{k-2} \right] \\ \left(1 - \frac{z'}{z_0}\right)^2 \frac{\partial^2 \psi_{k-2}}{\partial z'^2} &= i\chi_{k-2} \left[a\psi_{k-2}(z') + \left(1 - \frac{z'}{z_0}\right)^{-i2\frac{\sqrt{2n(n+1)}}{n-1}} \phi_k \right] \end{cases} \quad (5.22)$$

La solution précédente est donnée par :

$$\begin{cases} \phi_k(z') &= A_k \left(1 - \frac{z'}{z_0}\right)^{\beta_k} \\ \psi_{k-2}(z') &= B_{k-2} \left(1 - \frac{z'}{z_0}\right)^{\beta_{k-2} - i2 \frac{\sqrt{2n(n+1)}}{n-1}} \end{cases} \quad (5.23)$$

Les constantes β_k sont trouvées par substitution dans le système différentiel, et A_k et B_k sont déterminées grâce aux conditions aux limites. A partir de la connaissance des fonctions $\phi(z', t)$ et $\psi(z', t)$, on remonte aux perturbations $h_x(z', t)$ et $h_y(z', t)$.

Pour finir, l'impédance d'onde permet de passer du champ magnétique imposé à la surface du matériau au cas du champ électrique imposé, directement proportionnel au flux dans l'échantillon.

5.1.2.3 Cas linéaire

La résolution dans le cas linéaire est plus classique que celle dans le cas du matériau saturable. En plus, il est possible de découpler les deux axes du repère cartésien de la tôle. Nous allons donc rappeler les formules uniquement pour un seul axe, comme par exemple la direction x . Appelons μ la perméabilité magnétique de la tôle considérée (en pratique, en prend une perméabilité magnétique relative de 2000). Dans la direction x , l'équation de diffusion en linéaire devient :

$$\frac{\partial^2 \bar{H}_x}{\partial z'^2} = i\omega\sigma\mu\bar{H}_x \quad (5.24)$$

On impose en outre un champ magnétique donné à la surface de la tôle : $\bar{H}_x(z = \Delta/2) = \bar{H}_x(-z = \Delta/2) = H_m$. En posant $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}}$ la profondeur de pénétration en linéaire (indépendante du niveau H_m puisque l'on est en régime linéaire), la solution au problème de diffusion linéaire est donnée par :

$$\bar{H}_x(z) = H_m \frac{\cosh\left(\frac{1+i}{\delta}z\right)}{\cosh\left(\frac{1+i}{\delta}\frac{\Delta}{2}\right)} \quad (5.25)$$

On peut faire le calcul du flux par unité de longueur dans la tôle suivant l'axe x :

$$\bar{\varphi}_x = 2 \int_0^{\Delta/2} \mu \bar{H}_x(z) dz = 2\mu H_m \frac{\delta}{1+i} \tanh\left(\frac{1+i}{\delta}\frac{\Delta}{2}\right) \quad (5.26)$$

Si c'est le flux $\bar{\varphi}_x$ que l'on impose, par unité de longueur dans la tôle, on refait le calcul en imposant en surface de cette dernière un champ magnétique \bar{H}_x complexe obéissant à la condition aux limites suivante :

$$\bar{H}_x = \frac{\bar{\varphi}_x}{2\mu \frac{\delta}{1+i} \tanh\left(\frac{1+i}{\delta}\frac{\Delta}{2}\right)} \quad (5.27)$$

Il est ensuite possible de refaire de manière indépendante ce calcul pour l'axe y . Enfin, dans le cas d'ondes d'induction distordues, il suffit de superposer chaque harmonique de contribution du champ magnétique

5.1.2.4 Comparaison des résultats de diffusion du champ magnétique

Nous allons comparer les résultats fournis par le modèle de diffusion linéaire avec ceux donnés par le modèle de diffusion non-linéaire, la tôle étant soumise à un locus d'induction moyenne bi-dimensionnel. Nous allons en premier lieu étudier le cas important du locus d'induction moyenne circulaire, qui permet un traitement rigoureux, notamment parce que le lieu demeure circulaire quelque soit la profondeur au niveau de laquelle on se situe dans la tôle. Puis nous examinerons le cas du locus quelconque, nécessitant en non-linéaire le recours à la méthode des perturbations réduite au premier ordre.

Locus d'induction moyen circulaire Il nous semble intéressant de comparer les résultats obtenus concernant la répartition locale de l'induction magnétique à travers la demi-épaisseur de tôle $\Delta/2 = 0.25$ mm, en forçant une induction moyenne circulaire de la forme :

$$\begin{cases} B_{x_{MOY}}(t) &= B_{m_{MOY}} \cos(2\pi ft) \\ B_{y_{MOY}}(t) &= B_{m_{MOY}} \sin(2\pi ft) \end{cases} \quad (5.28)$$

On fixe une amplitude d'onde tournante $B_{m_{MOY}} = 1$ T. Nous pouvons montrer qu'à partir de la fréquence $f = 8$ kHz et pour l'amplitude d'induction moyenne $B_{m_{MOY}}$, on atteint la limite telle que la profondeur de pénétration z_0 devient inférieure à la demi-épaisseur de la tôle $\Delta/2$, ce qui nous place dans les hypothèses de la modélisation non-linéaire, afin de considérer chaque face de la tôle comme un demi-espace infini. Nous traçons à la figure 5.6 l'amplitude $B_m(z')$ de l'onde circulaire à travers la demi-épaisseur de la tôle magnétique ($z' \in [0, \Delta/2]$) :

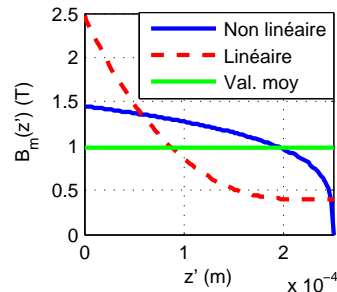


FIGURE 5.6: Diffusion de l'amplitude de l'onde d'induction circulaire dans la demi-épaisseur $\Delta/2$ de la tôle (pour $z' \in [0, \Delta/2]$)

Cette figure illustre bien l'apport du modèle de diffusion non-linéaire par rapport au cas de la diffusion linéaire. En effet, même pour un niveau d'induction moyen raisonnable ($B_{m_{MOY}} = 1$ T), le modèle de diffusion linéaire peut, à haute fréquence, aboutir à un niveau d'induction local en bordure de la tôle très important ($B_m(z' = 0) = 2.5$ T pour une fréquence de $f = 8$ kHz), ce qui ne semble pas réaliste pour ce type de matériau. Le modèle de diffusion non linéaire abaisse l'amplitude de l'onde d'induction circulaire à 1.5 T en surface de la tôle, ce qui est plus raisonnable. La décroissance à cause de l'effet de peau est moins rapide. Le fait d'obtenir une profondeur de pénétration finie de l'amplitude d'induction dans la tôle peut s'interpréter de la manière suivante : plus l'amplitude de l'induction décroît lorsque l'on s'approche du centre de la tôle, plus la perméabilité magnétique croît. On sait, dans un modèle de diffusion linéaire, que la perméabilité magnétique tend à réduire la profondeur de pénétration. Avec le modèle adopté, la perméabilité magnétique tend vers l'infini lorsque l'amplitude de l'induction tend vers la valeur nulle, ce qui justifie par là même l'existence d'une profondeur de pénétration finie dans le modèle de diffusion non-linéaire. Bien évidemment, ceci est dû au modèle, et n'est pas exact physiquement, car la perméabilité magnétique relative du matériau en champ faible n'augmente pas indéfiniment, et tend même, en champ très faible, à diminuer de nouveau (figure 5.5b). Une discussion à ce sujet est donnée dans les références [Mayergoyz, 1998, Mayergoyz *et al.*, 1984] : il est montré que la profondeur de pénétration z_0 existe réellement, mais, après cette profondeur, le champ magnétique obtenu n'est pas rigoureusement nul, mais est réduit à une valeur négligeable, ce qui permet d'ignorer ce problème dans une optique de calcul de pertes.

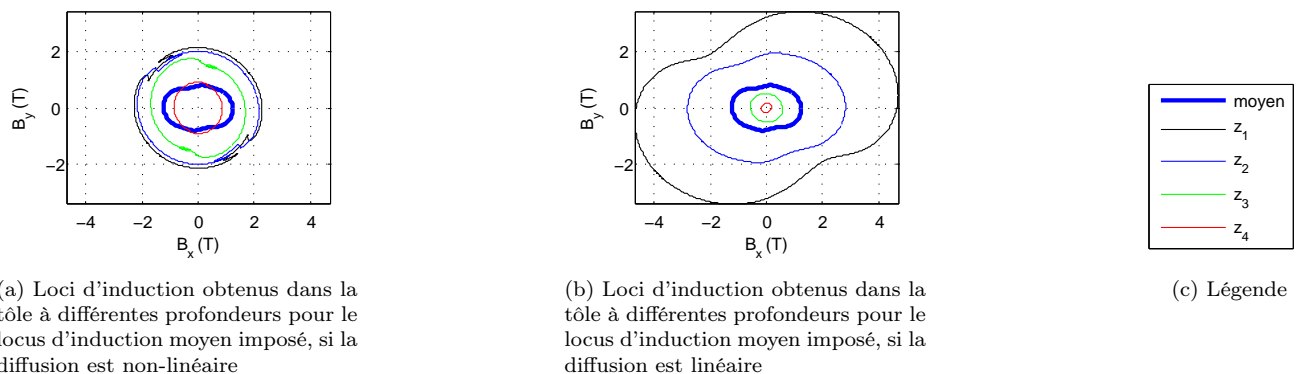


FIGURE 5.7: Comparaison entre la diffusion non linéaire et la diffusion linéaire pour le même locus d'induction moyen dans une tôle Fer-Silicium, pour différentes profondeurs dans la tôle FeSi (z_1 : surface, $z_2 = 0,2 \cdot \Delta/2$, $z_3 = 0,6 \cdot \Delta/2$ and $z_4 = 0,9 \cdot \Delta/2$)

Locus d'induction de forme quelconque A présent, nous allons utiliser le modèle en prenant un locus moyen d'induction à travers la tôle distordu, comme montré au niveau des figures 5.7a et 5.7b. Pour ces figures, nous avons tracé les loci d'inductions obtenus pour différentes profondeurs de la demi-épaisseur de la tôle, allant de la surface ($z' = 0$) à quasiment la demi-épaisseur de la tôle ($z' = 0.9 \cdot \Delta/2$). Le même locus moyen d'induction distordu a été appliqué. Le résultat avec la théorie non-linéaire est montré à la figure 5.7a, et celui obtenu au moyen de la théorie de diffusion linéaire est montré à la figure 5.7b. La fréquence vaut $f = 8$ kHz.

Comme auparavant pour le champ circulaire, on peut voir que la théorie de la diffusion non-linéaire empêche une augmentation non réaliste des niveaux d'induction près de la surface de la tôle. Néanmoins, il est clair que les loci issus de la théorie de la diffusion non-linéaire semblent bien plus distordus, ce qui ne manquera pas, on le verra, d'avoir un effet sur les pertes classiques obtenues.

5.1.3 Calcul des pertes dans la tôle à fréquence élevée

Nous allons, dans cette section, proposer une méthode se fondant sur le calcul précédent, afin de calculer les pertes dans le matériau laminé en haute fréquence. Ce calcul des pertes en champ bi-dimensionnel se fondera sur les méthodes développées dans les références [Appino *et al.*, 2007, Appino *et al.*, 2009b], avec une adaptation à la non-homogénéité de l'induction dans la tôle à cause de l'effet de peau.

5.1.3.1 Calcul de la composante de pertes classiques

Comme proposé dans les références [Mayergoyz, 1998, Mayergoyz *et al.*, 1984], les pertes classiques volumiques sont calculées par la méthode du vecteur de Poynting à la surface de la tôle. En notation complexe, et en tenant compte des deux composantes d'induction, le vecteur de Poynting, qui est aussi le flux surfacique de puissance complexe entrant dans le matériau, est :

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \bar{E}_x(z' = 0) \times \bar{H}_y(z' = 0) - \frac{1}{2} \bar{E}_y(z' = 0) \times \bar{H}_x(z' = 0) \quad (5.29)$$

Il suffit d'en prendre la valeur réelle afin de connaître le flux de puissance active entrant dans le matériau par unité de surface. L'énergie perdue par cycle en pertes classiques est donc donnée par :

$$W_{clasTOT} = \frac{1}{f} \frac{2}{\Delta} \text{Re}(\bar{S}) \quad (5.30)$$

5.1.3.2 Calcul de la composante de pertes par hystérésis

Nous proposons d'effectuer le calcul des pertes par hystérésis de la manière suivante. Bien que le phénomène d'hystérésis n'ait pas été pris en compte dans la caractéristique saturable (mais non hystérétique) du matériau, les loci d'inductions calculés en chaque coordonnée z' de la demi-épaisseur de la tôle serviront de départ à un calcul des pertes par hystérésis, selon la méthode des références [Appino *et al.*, 2007, Appino *et al.*, 2009b], qui prend en compte le caractère bi-dimensionnel de l'induction. Nous procéderons ainsi : pour chaque coordonnée z' dans la demi-épaisseur de la tôle, nous allons évaluer localement les pertes volumiques par hystérésis, en tenant compte du locus d'induction obtenu en la coordonnée z' grâce au modèle de diffusion adopté. Il est d'ailleurs montré dans les références [Appino *et al.*, 2007, Appino *et al.*, 2009b] que les pertes par hystérésis, pour un locus donné, ne dépendent que des amplitudes des inductions du locus. Si, en un point d'abscisse z' , nous avons le couple d'inductions d'amplitudes $(B_{m_x}(z'), B_{m_y}(z'))$, nous pouvons calculer l'énergie volumique perdue en pertes par hystérésis par la méthode des références [Appino *et al.*, 2007, Appino *et al.*, 2009b], notée $W_{hyst}(B_{m_x}(z'), B_{m_y}(z'))$. Ensuite, l'intégration sur toute la demi-épaisseur de tôle donne les pertes par hystérésis totales :

$$W_{hystTOT} = \frac{2}{\Delta} \int_0^{\Delta/2} W_{hyst}(B_{m_x}(z'), B_{m_y}(z')) dz' \quad (5.31)$$

5.1.3.3 Calcul de la composante de pertes excédentaires

Les pertes excédentaires sont calculées d'une manière très similaire aux pertes par hystérésis. La demi-épaisseur de la tôle $\Delta/2$ est subdivisée en un nombre N_i de couches. Au sein de chaque couche, le locus d'induction calculé par le modèle de diffusion au centre de cette couche peut, raisonnablement, être considéré comme uniforme. Par

conséquent, pour chaque couche d'indice i , nous allons appliquer le modèle de pertes excédentaires en champ bi-directionnel détaillé toujours dans les références [Appino *et al.*, 2007, Appino *et al.*, 2009b]. Si le locus d'induction dans la couche i est appelé $(B_{x_i}(t), B_{y_i}(t))$, la composante de pertes excédentaires volumiques dans cette couche est notée $W_{exc}(B_{x_i}(t), B_{y_i}(t))$. Les pertes excédentaires totales volumiques sont donc données par la formule suivante, effectuant un moyennage sur toutes les couches :

$$W_{excTOT} = \frac{1}{N_l} \sum_{i=1}^{N_l} W_{exc}(B_{x_i}(t), B_{y_i}(t)) \quad (5.32)$$

Un commentaire est sans doute à ce stade nécessaire. Une telle méthode suppose que les différentes couches dans la demi-épaisseur de la tôle soient indépendantes les unes des autres. Or ceci n'est pas forcément évident, vu que la référence [Bertotti, 1998] envisage les pertes excédentaires comme étant reliées d'un point de vue physique à des sauts de Barkausen corrélés entre eux au sein d'une même zone, appelée « objet magnétique ». Plus précisément, la théorie suppose que le champ excédentaire H_{exc} responsable des pertes est uniforme sur une échelle comportant un nombre conséquent d'objets magnétiques, afin de pouvoir appliquer un modèle statistique pour décrire l'activation de ces objets à cause du champ excédentaire. Nous en concluons que la démarche de décomposition en couches ne peut s'avérer exacte que si chaque couche est assez large pour contenir un grand nombre d'objets magnétiques. Dans la référence [Bertotti, 1998], une valeur numérique de 20 nm est avancée pour l'objet magnétique dans les tôles Fer-Silicium à grains non-orientées, l'objet magnétique étant confondu avec le grain. Nous en déduisons que pour une tôle d'épaisseur $\Delta = 0.5$ mm, la condition à vérifier sur le nombre de couches N_l est $N_l \ll \frac{1}{2} \frac{\Delta}{20nm} = 12.5 \cdot 10^3$. Si nous prenons $N_l = 10$ pour ne pas allonger le temps de calcul, la condition d'application du modèle statistique est largement vérifiée.

Par la suite, les pertes totales sont obtenues par simple sommation des différents termes de pertes que l'on vient d'obtenir :

$$W_{TOT} = W_{clasTOT} + W_{hystTOT} + W_{excTOT} \quad (5.33)$$

5.1.3.4 Résultats obtenus

Nous excitons la tôle avec le locus d'inductions moyennes bi-directionnelles représenté au niveau des figures 5.7a et 5.7b. Nous rappelons ce locus d'induction moyenne à la figure 5.8.

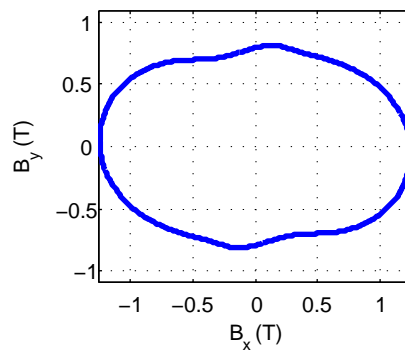


FIGURE 5.8: Rappel du locus moyen d'induction bi-directionnel distordu appliqué dans la tôle pour réaliser les études de pertes présentées ci-dessous

Les fréquences d'excitation varient dans la plage $f \in [6 \text{ kHz}, 10 \text{ kHz}]$ (afin de vérifier, pour la diffusion non-linéaire, la condition $z_0 \leq \Delta/2$).

Nous représentons au niveau de la figure 5.9 les pertes totales obtenues pour le locus d'induction considéré, sur la plage de fréquence voulue, pour les deux modèles de diffusion linéaire et non-linéaire.

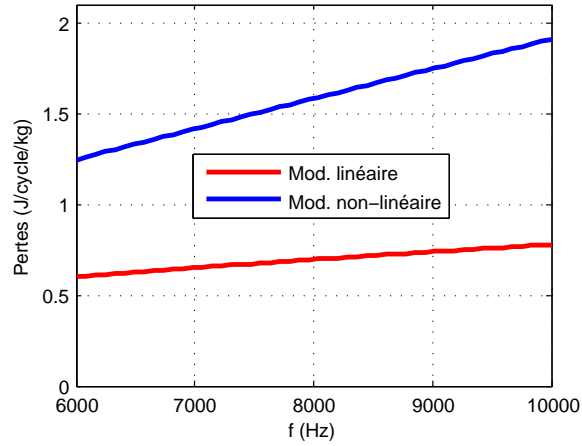
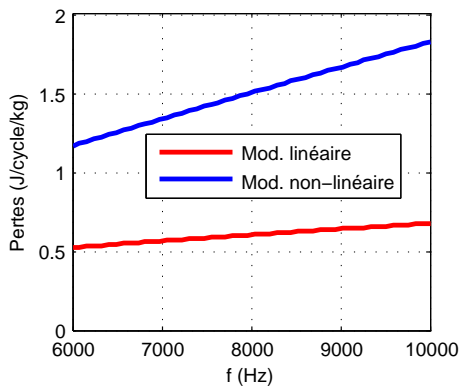
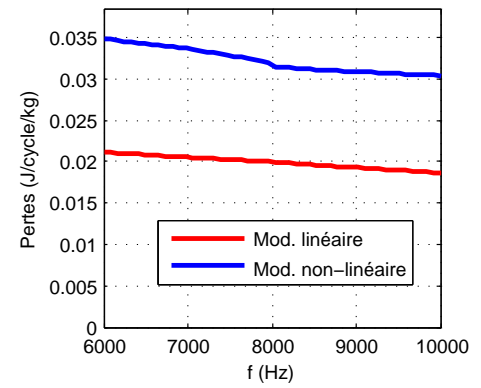


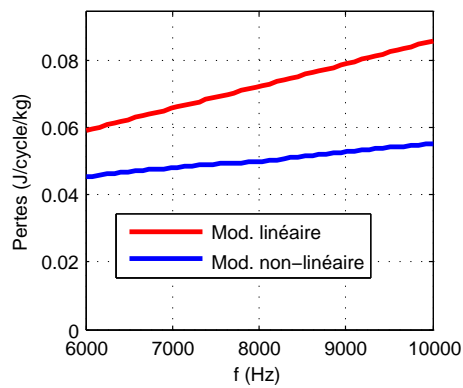
FIGURE 5.9: Energie totale W_{TOT} perdue par cycle dans la tôle pour les modèles de diffusion linéaire et non-linéaire



(a) Energie classique $W_{clasTOT}$ perdue par cycle dans la tôle pour les modèles de diffusion linéaire et non-linéaire



(b) Energie $W_{hystTOT}$ perdue par hystérésis pour un cycle dans la tôle pour les modèles de diffusion linéaire et non-linéaire



(c) Energie excédentaire W_{excTOT} perdue par cycle dans la tôle pour les modèles de diffusion linéaire et non-linéaire

FIGURE 5.10: Détail des différents termes d'énergie perdue de la figure 5.9

Les différents termes contribuant aux pertes totales (terme de pertes classiques, par hystérésis, et excédentaires), dont la somme donne les pertes totales de la figure 5.9, sont représentés au niveau des figures 5.10a pour les pertes classiques, 5.10b pour les pertes par hystérésis, ainsi que 5.10c pour les pertes excédentaires, ceci pour les deux modèles de diffusion (linéaires et non-linéaires).

La première remarque à formuler est que, en comparant les figures 5.9 et 5.10a, quelque soit le modèle de diffusion adopté, la composante de pertes classiques est de loin la principale composante de pertes obtenue. Une telle conclusion ne semble guère surprenante, car nous nous situons dans une zone de fréquence élevée, favorable à l'apparition d'une composante de pertes dynamiques prépondérante.

La deuxième remarque à déduire de ces figures est l'importance du modèle de diffusion utilisé. Alors qu'elles seraient identiques si on négligeait toute diffusion (cas usuel sans effet de peau), les pertes sont plus importantes si on adopte le modèle de diffusion non-linéaire, modèle plus réaliste au niveau des profils d'induction obtenus dans la tôle dont l'amplitude est ainsi limitée. La différence observée au niveau de la composante de pertes classiques (figure 5.10a) s'explique par le fait que les loci dans le cas de la diffusion non-linéaire sont très distordus (figure 5.7a), ce qui augmente leur contenu harmonique, et par suite les pertes classiques peuvent devenir plus conséquentes que dans le cas de la diffusion linéaire (l'égalité de Parseval visant à superposer les effets des différents harmoniques d'induction est en effet vraie pour le calcul du terme de pertes classique). Concernant le terme de pertes par hystérésis (figure 5.10c), il est important de signaler que l'énergie perdue par cette voie décroît en fonction de la fréquence, pour les deux modes de diffusion : nous expliquons ceci par le fait que lorsque la fréquence augmente, l'effet de peau s'accroît, ce qui tend à augmenter les amplitudes d'inductions en périphérie de la tôle, mais diminue en revanche les inductions en son centre. Or, les pertes par hystérésis ne dépendent que des amplitudes des inductions (pas de leur forme d'onde, ni de la fréquence, s'agissant de pertes par cycle). Il s'avère que le phénomène de décroissance des inductions au centre l'emporte sur leur accroissement en périphérie, puisque les pertes par hystérésis sont globalement décroissantes. Ce taux de décroissance est d'ailleurs plus important dans le cas de la diffusion non-linéaire que linéaire, car on a vu que pour la diffusion non-linéaire, la saturation freinait l'augmentation des amplitudes d'inductions sur les bords de la tôle. Néanmoins, pour les pertes excédentaires (figure 5.10c), les pertes dans le cas de la diffusion linéaire sont plus importantes que dans le cas de la diffusion non-linéaire. Nous expliquons ce phénomène par le fait que ces pertes, en première approximation, dépendent de la valeur maximale du locus d'induction suivant la loi $W_{exc} \propto B_m^{3/2}$. Cette dépendance forte des pertes excédentaires en fonction de l'amplitude d'induction explique pourquoi les pertes excédentaires sont plus importantes dans le cas linéaire que non-linéaire. En effet, le modèle linéaire génère des loci d'induction d'amplitude très importante au voisinage de la surface de la tôle, qui, avec la dépendance forte des pertes excédentaires en $B_m^{3/2}$, sont susceptibles de l'emporter sur la diminution également plus importante de l'induction au centre de la tôle avec le modèle linéaire.

Comme nous le dirons en conclusion du chapitre, il faudrait, en perspective, prévoir une vérification expérimentale de ce modèle.

5.2 Etude des pertes magnétiques dans les matériaux doux composites

Dans ce paragraphe, nous allons poursuivre notre travail concernant la caractérisation des matériaux magnétiques soumis à des conditions d'excitation exigeantes, avec des inductions de valeur importante et de fréquence élevée. A la partie précédente, nous avons étudié le cas des matériaux laminés classiques soumis à des inductions et à des fréquences pour lesquelles les non-linéarités et l'effet de peau ne pouvaient plus être négligés, ce qui nous a amené à proposer un modèle fondé sur la résolution de l'équation de diffusion non linéaire, puis à l'application d'un modèle de pertes non-maxwelliennes par couches élémentaires. Dans cette partie, nous allons à présent étudier un autre type de matériau magnétique qui semble, par sa structure granulaire, plus adapté à de telles conditions d'excitation difficiles : le cas des matériaux magnétiques doux composites, souvent désignés par leur acronyme anglais (SMC) dans la littérature sur le sujet. Un des intérêts de ces matériaux réside en outre dans leur isotropie, magnétique bien entendu, mais aussi thermique. Cette propriété les autorise à répondre aux exigences des nouvelles structures de machines, comme celles à double excitation [Hlioui *et al.*, 2008, Aydin *et al.*, 2002b], ou bien les alternateurs à griffes [Albert *et al.*, 2003], pour lesquels les flux d'excitation prennent réellement un caractère tri-dimensionnel. Dans un premier temps, nous allons présenter les différents travaux présents dans la littérature concernant ces nouveaux types de matériaux. Cet état de l'art se composera de deux parties. Une première étape sera de détailler, après une présentation générale de la fabrication de ces matériaux, les travaux visant à étudier les caractéristiques de ceux-ci, tant statiques qu'au niveau des pertes. Un second point sera, étant donné le caractère relativement

nouveau de ces matériaux, de présenter les différentes réalisations ayant recours à ces derniers. Dans un deuxième temps, nous entrerons dans le vif du sujet, en montrant comment, à partir d'une caractérisation expérimentale des pertes magnétiques dans ce type de matériaux sur une large plage de fréquence, nous avons pu étendre la démarche de séparation des pertes classiquement utilisée dans le cas des matériaux laminés [Fiorillo et Novikov, 1990] à ces matériaux granulaires. Nous insisterons sur les informations concernant la microstructure du matériau qui ont été déduites de cette étude. Pour finir, nous ouvrirons le sujet vers une caractérisation plus générale, en proposant un dispositif de caractérisation en champ bi-dimensionnel pour ce type de matériaux pour de futures caractérisations expérimentales.

5.2.1 Etat de l'art sur les matériaux doux composites (SMC)

5.2.1.1 Présentation générale des SMC, fabrication, état de l'art sur les caractérisations statiques et dynamiques

Dans un premier temps, nous allons donner un aperçu général sur les matériaux doux composites, en parlant de leur constitution, ainsi que de leur procédé de fabrication. Ensuite, nous passerons en revue les travaux qui ont été menés afin de proposer un modèle des caractéristiques statiques de ces derniers. Cette caractérisation statique est fondamentale pour déterminer les performances d'un système électromagnétique conçu à base de tels matériaux. Puis nous entrerons dans le vif du sujet, en parlant des modèles de pertes déjà développés dans la littérature pour de tels matériaux granulaires. Les pertes sont en effet un critère primordial dans les applications, car elles déterminent le rendement du système, qui est le plus souvent un critère à maximiser.

Présentation générale des SMC, et fabrication

Principe des SMC Les matériaux magnétiques doux composites sont des matériaux magnétiques doux granulaires. La fin du XIX^e siècle, grâce à des progrès importants dans le domaine du magnétisme, a vu la mise au point des machines électriques au sens large (machines tournantes, transformateurs). Ces machines électriques nécessitent, afin de réduire leur masse et leur puissance apparente, des matériaux magnétiques capables de canaliser le flux magnétique. Néanmoins, dans nombre de dispositifs du génie électrique (transformateurs, machines alternatives), le flux magnétique varie en fonction du temps. Or ce flux magnétique variable est la cause de courants induits, qui, par effet Joule, chauffent la matière magnétique. Ce principe est d'ailleurs utilisé en électrothermie : c'est le chauffage par induction [Orfeuill, 1981, Develey, 2000]. Cela étant, dans les applications en électrotechnique, un tel échauffement est considéré comme un phénomène parasite, dégradant aussi bien le rendement que la durée de vie de l'appareil électrique, soumis à des contraintes thermiques plus ou moins sévères [Belicova et Hrabovcova, 2007]. Par conséquent, il est apparu que le défi auquel se trouvaient confrontés les concepteurs de matériel électrique résidait dans la conception de matériaux magnétiques à la fois très perméables, mais les plus électriquement résistifs possible. Or, malheureusement, ces deux contraintes se sont avérées très difficiles à concilier. En effet, le matériau magnétique le plus abondant n'est autre que le fer, qui est un métal pourvu d'une bonne conductivité électrique (le fer à l'état pur possède une conductivité de $9.93 \cdot 10^6 \text{ Sm}^{-1}$, et, pour information, celle du cuivre, utilisé justement pour ses bonnes propriétés conductrices, atteint $59.6 \cdot 10^6 \text{ Sm}^{-1}$). Par conséquent, les concepteurs de matériaux pour le génie électrique n'ont eu de cesse, depuis plus d'un siècle, que de tenter d'augmenter la résistivité du matériau magnétique utilisé pour les applications électrotechniques sans pour autant dégrader de manière importante ses propriétés magnétiques. D'où la naissance des alliages, dont le plus connu est le fer-silicium, afin d'augmenter la résistivité du matériau (si on adjoint 3.1% de silicium dans le fer pur, la résistivité augmente d'un facteur 4). La polarisation à saturation passe de $J_S = 2.155 \text{ T}$ pour le fer pur à $J_S = 2.035 \text{ T}$, correspondant à une diminution relative de seulement 5.56%. Cela étant, ceci ne diminue pas de manière suffisante les pertes dans les matériaux magnétiques : afin d'obtenir des rendements acceptables, il est nécessaire de fractionner le matériau magnétique en entités isolées, afin de confiner les courants induits à une échelle locale. Cette idée du fractionnement pour gêner les parcours des courants induits est ancienne, puisqu'elle remonte à la fin du XIX^e siècle, où les culasses des machines électriques et les circuits magnétiques des transformateurs ont commencé à être feuilletés : les matériaux magnétiques sont des tôles que l'on veut les plus fines possibles, isolées entre elles. De cette manière, les pertes sont uniquement un phénomène local. Sous cette hypothèse, il est montré dans [Bertotti, 1998] que la composante de pertes maxwelliennes en ne prenant pas en compte l'effet de peau dans une tôle d'épaisseur d soumise une induction

sinusoïdale notée $B(t)$ est donnée par :

$$P_{cl} = \frac{\sigma d^2}{12} \left(\frac{dB}{dt} \right)_{eff}^2 \quad (5.34)$$

(dans la formule précédente, σ est la conductivité du matériau, et le symbole *eff* représente la valeur efficace). La dépendance quadratique en l'épaisseur d démontre bien l'effet du fractionnement sur la réduction des pertes dynamiques. Néanmoins, ce fractionnement en tôles élémentaires souffre de certaines lacunes inhérentes au procédé. D'une part, il est difficile et onéreux de réaliser des machines avec des tôles dont l'épaisseur d est inférieure à $200 \mu\text{m}$, ce qui peut ne pas s'avérer suffisant dans les machines haute vitesse actuelles [Aydin *et al.*, 2002b]. En plus, les tôles ne sont pas isotropes en ce qui concerne leur perméabilité magnétique : alors que cette dernière est très élevée dans le plan de laminage, elle chute de manière drastique dans la direction perpendiculaire au paquet de tôles (selon notre expérience, la perméabilité magnétique relative ne dépasse alors pas la trentaine). Cette anisotropie peut s'avérer gênante dans les nouvelles structures de machines, où les parcours de flux sont réellement 3D [Hlioui *et al.*, 2008, Aydin *et al.*, 2002b, Albert *et al.*, 2003]. Qui plus est, des études récentes sur l'éco-conception ont mis en évidence l'impact pitoyable des matériaux laminés sur l'environnement : l'énergie nécessaire au processus de laminage est très importante, sans oublier qu'en fin de vie, la machine est difficilement démantelable [Debusschère, 2009].

Les matériaux doux composites apportent de nos jours une autre réponse que les matériaux laminés à ce problème du fractionnement des matériaux magnétiques pour réduire les pertes. Il s'agit de prendre des particules de matériau magnétique (nous allons revenir sur les procédés d'obtention des particules, ainsi que sur leur composition), de taille réduite (la dimension caractéristique de ces grains est comprise entre $20 \mu\text{m}$ et $200 \mu\text{m}$). Ces particules sont enrobées d'une fine couche d'un isolant. Ensuite, un pressage du matériau permet d'obtenir la forme souhaitée pour la pièce fabriquée. La pression de compaction est importante, afin de donner au matériau magnétique une densité proche de celle du matériau magnétique pur, et donc de ne pas dégrader de manière trop sévère la perméabilité magnétique relative de l'ensemble. Par conséquent, comme montré à la représentation schématique 5.11 tirée de l'article [Atkinson *et al.*, 2009], les particules de fer subissent des déformations plastiques, afin de s'adapter l'une à l'autre. Comme on le voit sur la figure 5.11, la surface du matériau doux composite, au niveau de chaque grain, n'est malheureusement pas exempte de défauts et de porosités, qui apparaissent lors du processus de compaction. Nous verrons comment les fabricants de tels matériaux procèdent afin de réduire de tels défauts, du moins partiellement, pour ne pas amplifier à outrance les pertes par hystérésis. Cette solution autorise cela étant une réduction des pertes classiques par un fractionnement très fin du matériau, tout en offrant une certaine isotropie des propriétés magnétiques et thermiques dans les trois dimensions de l'espace. De plus, au niveau du recyclage des actionneurs usagés, il est permis de penser, bien que cela n'a pas encore à notre connaissance été étudié, que la séparation des culasses et des bobinages d'une machine électrique fabriquée avec de tels matériaux se fera assez simplement, en broyant la structure pour réduire de nouveau ses parties à l'état de poudre ferromagnétique.

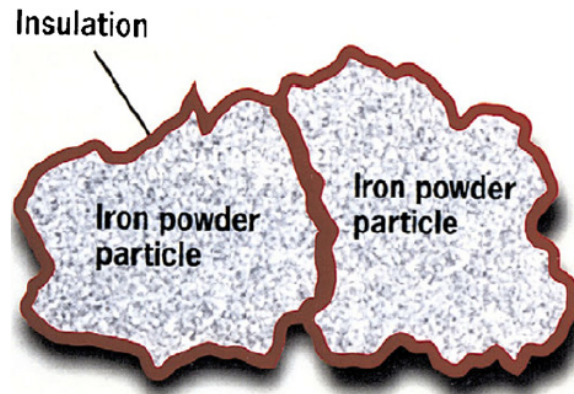


FIGURE 5.11: Représentation schématique de deux particules d'un matériau magnétique doux composite séparées par un isolant (référence [Atkinson *et al.*, 2009])

D'après la référence [Shokrollahi et Janghorban, 2007c], la fabrication de tels matériaux composites suit trois étapes principales, représentées au niveau de la figure 5.12. Il s'agit de :

1. la production de la poudre à partir du matériau magnétique d'origine. A la figure 5.12, nous avons sous-entendu que cette production se faisait par atomisation d'eau sous pression au niveau du matériau préalablement chauffé de manière à être en fusion. Nous allons voir que ce procédé n'est pas le seul à pouvoir être utilisé.
2. la compaction. Une fois la poudre obtenue, cette dernière doit être compactée de manière à obtenir un matériau dont la densité s'approche de celle du matériau massif d'origine. La poudre est mélangée à un liant afin d'assurer la cohésion de l'ensemble. Un isolant a été au préalable disposé autour des grains.
3. le recuit. Cette étape est fondamentale, car elle permet de relâcher une partie des contraintes résiduelles dans le matériau provenant des déformations plastiques qui ont lieu lors du processus de compaction. Cela étant, un contrôle strict de la température de recuit doit être effectué, sous peine de détériorer la qualité de l'isolement entre les grains de poudre.

Nous allons à présent détailler chacune de ces trois étapes.

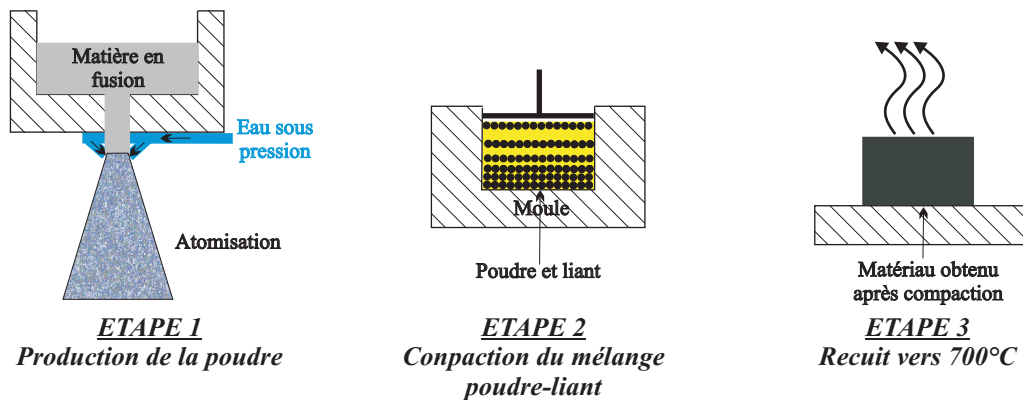


FIGURE 5.12: Processus de fabrication du matériau doux composite décomposé en trois étapes principales (référence [Shokrollahi et Janghorban, 2007c])

Constitution et obtention des particules de la poudre Le choix du matériau constitutif de la poudre doit être fait avec la plus grande attention. En effet, à l'image des matériaux laminés, il est important, afin de réduire les pertes dynamiques, que la résistivité intrinsèque du matériau constitutif des grains soit la plus élevée possible. Ceci peut conduire à utiliser les mêmes alliages que ceux utilisés pour la fabrication des matériaux laminés. Ainsi la référence [Shokrollahi et Janghorban, 2007c] évoque-t-elle la possibilité d'utiliser pour les particules les alliages fer-silicium, qui, malgré une dégradation des performances en ce qui concerne l'induction de saturation par rapport au fer pur, augmentent de manière importante sa résistivité, ainsi que sa dureté mécanique. Cela étant, dans une optique de compaction, cette dernière caractéristique n'est pas un avantage, car des particules mécaniquement plus dures conduisent à une usure plus rapide du matériel de pressage. Qui plus est, les propriétés mécaniques insuffisantes du fer pur ne sont pas un problème dans le cas de ces matériaux, où la cohésion mécanique de l'ensemble est surtout assurée par le liant. C'est pour cela que dans les matériaux commerciaux que nous étudierons par la suite, le matériau choisi pour les particules est le fer pur, souvent à plus de 99,99%, qui possède, en plus d'une polarisation à saturation de $J_S = 2.2 \text{ T}$, une anisotropie magnétocristalline relativement faible, ainsi qu'une magnétostriction peu prononcée, qui sont des avantages indéniables dans ce genre d'applications. La référence [Shokrollahi et Janghorban, 2007c] évoque aussi la possibilité d'utiliser des alliages fer-nickel ou fer-cobalt dans le but d'utiliser leurs propriétés respectives en termes de perméabilité magnétique, ou bien d'induction à saturation. De telles particules sont généralement produites par le procédé d'atomisation d'eau sous pression dans une coulée de matériau magnétique en fusion, afin d'obtenir des particules de matériau plus ou moins fines suivant la pression de l'eau. Ce procédé est expliqué dans la référence [Cyr, 2007], et schématisé à la figure 5.12.

Deux autres références [Yagi *et al.*, 2000, Berkowitz *et al.*, 2003] relatent aussi la production de poudres dont les matériaux de base sont des matériaux doux amorphes, afin de profiter des avantages de ces matériaux en ce qui concerne la réduction des pertes. La référence [Yagi *et al.*, 2000] envisage une production par atomisation, alors que la référence [Berkowitz *et al.*, 2003] relate un autre procédé, appelé « spark erosion » (figure 5.13). Le principe de base est de plonger deux électrodes du matériau dans un diélectrique. Ces deux électrodes sont les anodes et cathodes

d'une source de tension pulsatoire. Lorsque la tension appliquée dépasse la tension de claquage du diélectrique, un arc électrique apparaît entre les deux électrodes. Il y a alors formation d'un plasma, dont la température est de l'ordre de 10^4 K. Les électrodes sont alors fondues en leur surface, et la matière passe sous forme ionisée à travers le plasma d'une électrode à l'autre. Etant donné le caractère pulsatoire de l'alimentation, pendant les intervalles de temps au cours desquels la source est coupée, le diélectrique contribue au refroidissement rapide de l'arc électrique. Par conséquent, la matière en fusion qui était présente au niveau des régions surchauffées des électrodes s'amalgame alors en particules plus ou moins petites avant de tomber au fond de la cuve de diélectrique liquide. L'avantage de cette méthode est de pouvoir contrôler de manière précise la taille des particules produites, suivant la nature du diélectrique et le niveau de tension appliquée. Cette taille peut varier de quelques nanomètres, à quelques centaines de micromètres.

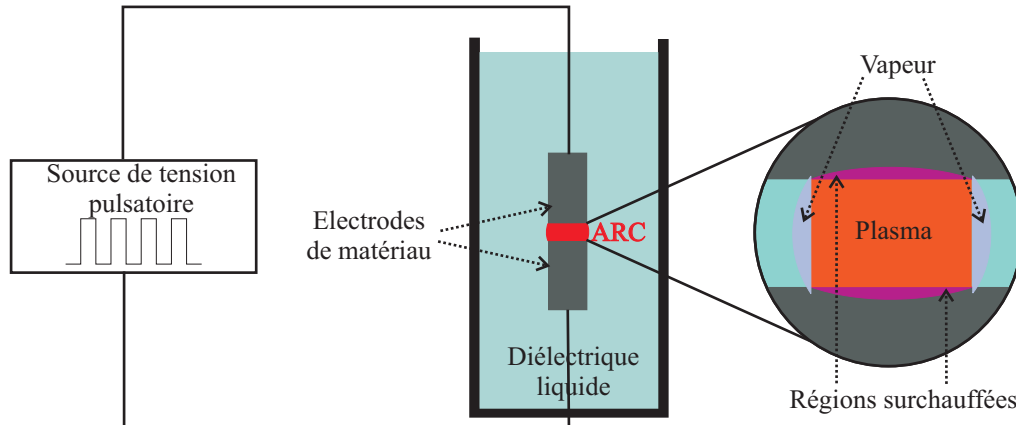


FIGURE 5.13: Obtention de la poudre par le procédé dit de « spark erosion » (référence [Berkowitz *et al.*, 2003])

Ceci nous amène à parler de la taille des particules à produire. En effet, puisque la taille des particules permet, si elle est réduite, de diminuer de manière importante la composante de pertes classiques, on peut penser qu'on aurait intérêt à réduire au maximum cette taille. En réalité, comme rappelé dans la référence [Shokrollahi et Janghorban, 2007c], il faut se souvenir que le champ coercitif H_C possède une dépendance forte en fonction de la taille des particules. Appelons D la taille caractéristique des particules. Il est connu [O'Handley, 2000] que la distribution du champ coercitif en fonction de la dimension D des particules suit une loi du type de celle représentée à la figure 5.14, si la température est inférieure à la température de Curie T_C . Pour une particule très petite (de l'ordre de 15 à 20nm pour le fer), la particule, perd son comportement ferromagnétique : on parle de superparamagnétisme. Nous serons bien au-dessus de cette taille, puisque la plupart des matériaux commerciaux ont des particules de taille allant de $20\ \mu\text{m}$ à $200\ \mu\text{m}$, et le comportement sera magnétique. Il a été étudié dans [Bertotti, 1998] que, pour une particule magnétique, suivant sa taille, l'aimantation pouvait prendre diverses configurations (aimantation uniforme, vortex,...), dans le souci constant de minimiser la somme des différentes énergies évoquées au chapitre 2. Un pas important est franchi lorsque la particule devient de taille assez importante ($D \geq D_C$) pour qu'il soit énergétiquement favorable d'y former des domaines de Weiss, ce qui sera notre cas pour les particules de dimensions importantes qui nous intéressent (un ordre de grandeur pour D_C est de l'ordre du micromètre pour le fer pur). Une fois cette taille critique D_C dépassée, le champ coercitif diminue en fonction de la taille D . En effet, d'une manière phénoménologique, ceci se conçoit dans la mesure où l'énergie résultant de la tension d'une paroi formée se trouve être proportionnelle à la surface de paroi, donc varie selon D^2 . Alors que le terme d'énergie magnétostatique, qui dépend du volume, peut diminuer en $1/D^3$ lorsqu'une nouvelle paroi va se former. Par conséquent l'énergie nécessaire pour former la paroi est grossièrement proportionnelle à $1/D$, ce qui diminue lorsque la taille augmente. Il est donc énergétiquement plus difficile de former une paroi dans une particule petite, ce qui explique de manière qualitative le plus grand champ coercitif observé, à matériau donné. Voilà pourquoi une diminution trop importante de la taille de la particule serait préjudiciable au niveau des pertes par hystérésis observées, même si cela est bien sûr favorable aux pertes classiques. Nous étudierons par la suite différents matériaux de la société Höganäs. L'un deux sera un matériau conçu pour des applications dans le domaine des machines électriques, avec des tailles de grains de l'ordre de la centaine de micromètres, et un autre pour l'électronique de puissance, avec des grains plus petits (quelques dizaines de micromètres).

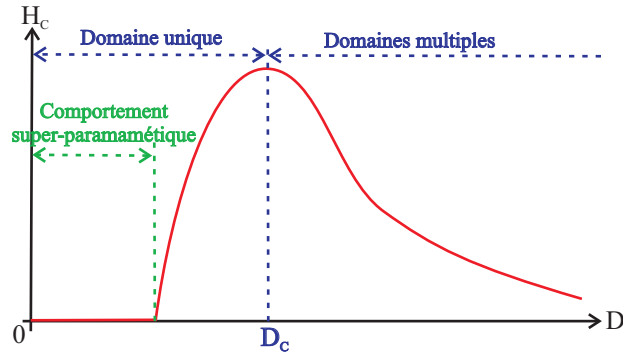


FIGURE 5.14: Distribution du champ coercitif H_C , pour des températures T inférieures à la température de Curie T_C (référence [Shokrollahi et Janghorban, 2007c])

Enrobage et compression Une fois la poudre obtenue, il convient, avant compaction, de déposer un enrobage très fin de matière isolante autour des particules, de telle manière à les isoler électriquement les unes des autres. La qualité principale d'un matériau utilisé pour l'enrobage est, outre ses capacités isolantes, sa faculté à résister aux déformations plastiques que va subir la particule lors de la phase de compaction. On distingue deux grands types différents de matériaux utilisés pour l'enrobage des particules [Shokrollahi et Janghorban, 2007c] :

- En premier lieu, les enrobages organiques. Il s'agit de polymères, comme l'époxy, qui viennent recouvrir les particules de fer avant le processus de compaction. De tels matériaux, bien que très isolants, sont néanmoins préjudiciables sur le plan de la perméabilité magnétique de l'ensemble du matériau, ainsi que sur les aspects importants de la cohésion mécanique qui se trouve diminuée, comme montré à la référence [Narasimhan et Marucci, 2003]. Aussi convient-il de faire une étude [Shokrollahi et Janghorban, 2007c] sur la proportion optimale de polymère à placer pour diminuer les pertes, sans pour autant dégrader les caractéristiques magnétiques statiques et les caractéristiques mécaniques de l'ensemble. Généralement, on ne dépasse guère les 6.5% en volume. Les méthodes utilisées pour l'enrobage des particules dans le polymère isolant sont les suivantes [Shokrollahi et Janghorban, 2007c] :

- les particules sont dispersées dans un mélange d'un polymère et d'un solvant. Ensuite, le solvant est séché, et le polymère recouvre les particules.
- effectuer la polymérisation du polymère directement à la surface des particules.

D'autres méthodes existent, comme les thermoplastiques ou autres matériaux isolants thermodurcissables [Shokrollahi et Janghorban, 2007c]. Citons par exemple les mélanges à base de polyester. De tels procédés sont aujourd'hui considérés avec intérêt, car ils permettent de réduire le temps de fabrication par rapport à un procédé chimique. En outre, ces méthodes sont moins toxiques, et demandent un investissement moindre en termes de matériel.

- En second lieu, les enrobages inorganiques. Le plus simple est de créer des oxydes de fer à la surface de la poudre (de type Fe_2O_3), ou alors appliquer des composés à base de sulfate ou bien de phosphate. La première méthode d'application consiste à pulvériser les additifs du composé qui précipite sur les particules, en contrôlant la température et le temps d'application afin d'obtenir le dépôt voulu. La seconde méthode, plus simple, consiste à laisser les particules s'oxyder dans un four avec l'atmosphère et la température voulue afin de former l'oxyde souhaité.

Une fois l'enrobage des particules effectué, il convient de passer à l'étape fondamentale du processus de fabrication : la compression. Cette compression, comme représenté au niveau de la figure 5.12, s'effectue en plaçant la poudre de fer dans un moule ayant la forme de la pièce que l'on veut donner. On place la poudre enrobée dans le moule, avec un produit que l'on appelle le liant. Ce liant n'est autre qu'une résine dissoute dans un solvant afin de lui donner une texture liquide : cette résine va assurer la cohésion du matériau après compaction. Les références [Shokrollahi et Janghorban, 2007b] et [Oliver, 1995] ont mis en évidence le fait qu'il fallait, afin d'obtenir un matériau uniformément compacté, recouvrir au préalable les parois du moule d'une substance lubrifiante. Dans la référence [Shokrollahi et Janghorban, 2007b], cette substance lubrifiante est le graphite, alors que dans le cas de l'article [Oliver, 1995], il s'agit de la glycérine. Les matériaux commerciaux possèdent des densités comprises entre $7100 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $7600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, ce qui est quasiment la densité du fer pur $7700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ([Jack *et al.*, 2000a, Gelinat *et al.*, 2004]). Ceci est obtenu par des pressions de compaction variant entre 400 MPa

et 800 MPa, suivant la perméabilité magnétique relative voulue, qui est un critère contradictoire avec la qualité de l'isolation inter-grains, et donc la réduction des pertes, que l'on souhaite obtenir.

Il est important de signaler que la compression peut être faite à température ambiante, ou bien à chaud, jusqu'à des températures de 550°C ([Shokrollahi et Janghorban, 2007b]). Les auteurs de cette référence ont en effet mené une campagne d'essais de compaction d'une poudre donnée en se fixant une pression de 800 MPa pour différentes températures, allant de la température ambiante jusqu'à 550°C (il n'est pas possible d'augmenter cette température, car le risque serait de détruire l'isolant enrobant les particules, qui est un polymère en époxy). Les conclusions quant à l'effet de la compaction à chaud sont les suivantes :

- l'effet observé sur des micrographies d'échantillons de la compaction à chaud est de réduire les porosités du matériau. Par conséquent, la densité du matériau est plus importante. Et donc la perméabilité relative du matériau se trouve augmentée. L'article [Oliver, 1995] a mis en évidence que la polarisation à saturation du matériau se trouvait augmentée, ce qui est un point favorable.
- la réduction des porosités entraîne la réduction des pertes par hystérésis, ce qui est favorable pour les utilisations basse fréquence du matériau, où le terme de pertes par hystérésis domine.
- Cela étant, élever la température lors de la compaction a pour effet de réduire la résistivité du matériau, à cause du rapprochement des grains qui résulte de la densité plus élevée. Ceci se paie par une augmentation des pertes en haute fréquence, qui dépendent fortement des pertes dynamiques engendrées par les parcours de courant de Foucault dits « macroscopiques », car ils s'établissent à l'échelle de la taille macroscopique de l'échantillon étudié en profitant d'une résistivité réduite de ce dernier. L'article [Oliver, 1995] remarque d'ailleurs que même si la perméabilité magnétique initiale d'un matériau compacté à chaud est plus importante à cause de la densité plus importante, la chute de la résistivité et les courants de Foucault qui en résultent provoquent une chute plus rapide de la perméabilité magnétique relative équivalente en fonction de la fréquence.

Recuit La dernière étape est le recuit éventuel après compaction du matériau magnétique composite. Ce processus de recuit est très utile, afin de réduire les contraintes résiduelles et les défauts subsistant dans le matériau après et du fait du processus de compaction. Le recuit autorise une recristallisation partielle du matériau, ce qui permet, en réduisant la densité de défauts, d'augmenter la perméabilité magnétique, et de réduire les pertes par hystérésis, qui dépendent directement de cette densité. Le problème posé par le recuit réside dans le fait de ne pas dégrader, en chauffant, la couche d'isolant ainsi que la résine liante des particules de matériau magnétique. Ceci se traduirait par une augmentation de la conductivité globale du matériau magnétique, donc une augmentation des pertes dynamiques par courants induits dans l'échantillon, ce que l'on veut éviter. La résine liante et l'isolant se trouvant être des matériaux organiques, ces derniers sont sensibles à la température, et si celle-ci est trop importante, peuvent être sévèrement dégradés. C'est pour cela que le recuit ne se fait pas à des températures excédant les 500°C, pendant des temps compris entre une trentaine de minutes et une heure [Shokrollahi et Janghorban, 2007a].

L'article [Shokrollahi et Janghorban, 2007a] expose, examine et compare différentes méthodes de recuit des matériaux magnétiques composites. A cet effet, un matériau magnétique composite est préparé à l'aide d'une poudre de fer pur, recouverte d'un isolant, puis mixée avec un liant organique à base d'époxy. Les échantillons sont tous compactés de manière identique avec une pression de 800MPa. Puis les traitements suivants sont mis en oeuvre sur les différents échantillons obtenus :

- le recuit thermique à 550°C pendant 1 heure.
- le double recuit thermique. Ce processus consiste à effectuer deux recuits pendant 1 heure chacun à 550°C, en laissant l'échantillon refroidir entre les deux opérations.
- un recuit magnétique a été effectué. Ce processus consiste, à température ambiante, à soumettre l'échantillon dans une de ses directions à une induction magnétique constante de 0.5T.
- deux recuits appelés magnéto-thermiques, l'un à basse température (180°C), et l'autre à haute température (280°C). Ce processus de recuit magnéto-thermique consiste à chauffer l'échantillon à la température indiquée pendant 5 minutes, en lui appliquant, suivant une direction, une induction de 0.5T.

Il est montré que la résistivité est 5% inférieure pour l'échantillon ayant subi le recuit thermique simple par rapport à l'échantillon sans recuit, et 10% inférieure pour l'échantillon ayant subi le double recuit thermique. Ceci vient du fait que plus le recuit est intense et long, plus les porosités, les déformations, les distorsions et les dislocations, sont réduites. La réduction de ces imperfections réduit la résistivité de l'échantillon. Qui plus est, le recuit dégrade la qualité de la résine isolante, ce qui favorise l'apparition de contacts grain à grain, dont nous parlerons plus tard. Néanmoins, la perméabilité magnétique est augmentée par la suppression des défauts, autant que par l'apparition de contacts (voir l'étude de la référence [Yanhong et Kliman, 2004]). La suppression partielle des impuretés diminue

les pertes par hystérésis, qui sont prépondérantes à basse fréquence. Ainsi, sur la plage 0-10kHz, le double recuit peut faire baisser les pertes observées jusqu'à 20% en valeur relative. Néanmoins, sur la plage 10kHz-100kHz, ce sont les pertes dynamiques qui deviennent prépondérantes. Les pertes de l'échantillon recuit deviennent supérieures à celles de l'échantillon non recuit, car les pertes par courants induits sont augmentées, à la fois à l'échelle de la particule qui possède moins de défauts comme les porosités, qu'à l'échelle de l'échantillon lui-même, à cause des contacts inter-grains qui interviennent à travers la résine dont les propriétés isolantes ont été dégradées.

Le recuit magnétique, quant à lui, qu'il soit accompagné d'un recuit thermique ou non, est surtout utilisé pour constituer une anisotropie dans le matériau, dans la direction d'application de l'induction magnétique, appelée « anisotropie induite ». En effet, ce recuit magnétique permet de privilégier l'apparition des domaines magnétiques dans la direction d'application de l'induction. La figure 5.15, donnée dans la référence [Shokrollahi et Janghorban, 2007c], illustre bien l'anisotropie observée dans la direction d'application de l'induction lors du recuit magnétique. En effet, la courbe, référencée (Z), est le cycle d'hystérésis statique observé dans la direction dans laquelle le recuit magnétique est effectué. La différence est évidente par rapport au cycle d'hystérésis (F), observé sur le même échantillon, mais dans un plan perpendiculaire au recuit magnétique. Si seul un recuit thermique est effectué, les caractéristiques magnétiques du matériau sont isotropes, et le cycle d'hystérésis obtenu est le cycle (R).

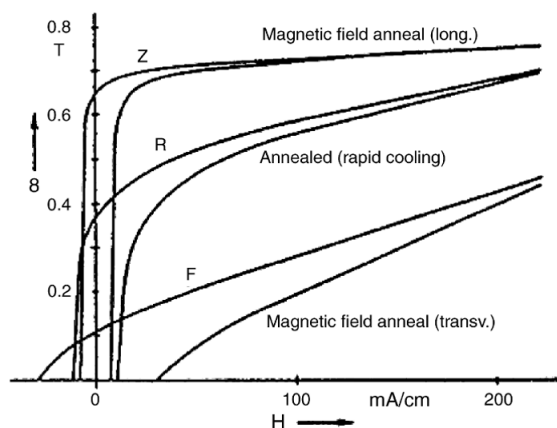
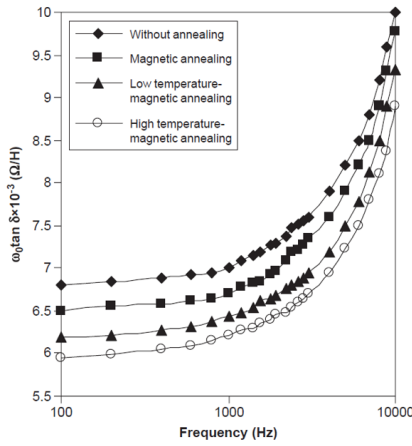
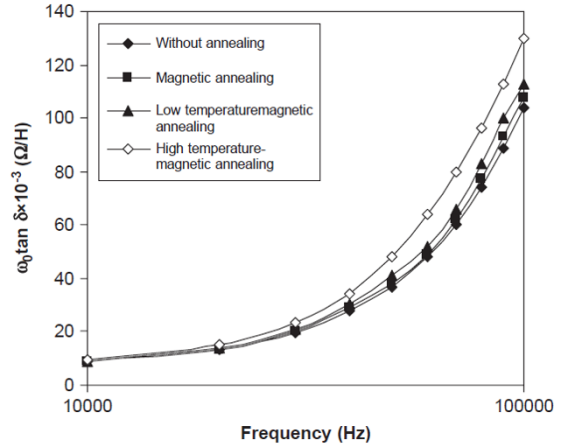


FIGURE 5.15: Effet d'anisotropie induite dans la direction de recuit magnétique (référence [Shokrollahi et Janghorban, 2007c])

La référence [Shokrollahi et Janghorban, 2007a] donne plus de détails, en comparant le recuit magnétique au recuit thermo-magnétique, à basse (180°C), et à haute température (280°C). Il est montré que l'application du champ magnétique, même à froid, permet de réduire les pertes par hystérésis dans la direction du recuit, en augmentant dans le matériau la proportion des domaines orientés dans le sens d'application de l'induction. Cette réduction des pertes par hystérésis est encore amplifiée si l'application de l'induction se double d'un échauffement thermique, qui permet de relaxer les contraintes résiduelles. Il est montré que la réduction des pertes obtenue à basse fréquence (de 0 à 10 kHz) lors d'un recuit magnéto-thermique (280°C pendant 5min, avec une induction de 0.5T) était équivalente à un double recuit thermique à 550°C pendant 1 heure. Malheureusement, le recuit magnéto-thermique possède les mêmes effets concernant la baisse de la résistivité de l'échantillon, et ceci d'autant plus que la température est importante. Ceci est justifié par le fait que l'application de l'induction génère des forces magnétiques. Si en plus le matériau est chauffé, ceci ramollit la résine, et donc favorise les contacts entre les gains à cause des forces magnétiques entre ces derniers. Par conséquent, en basse fréquence, sur la plage [0, 10 kHz], les pertes sont diminuées par le recuit magnétique à cause de la diminution des pertes par hystérésis, mais en haute fréquence, sur la plage [10 kHz, 100 kHz], le recuit magnétique favorise les pertes par courants induits, ce qui détériore les performances du matériau en termes de pertes. Ces résultats sur les pertes, tirés de la référence [Shokrollahi et Janghorban, 2007a], sont exposés au niveau des figures 5.16a et 5.16b.



(a) Effet du recuit magnétique en basse fréquence



(b) Effet du recuit magnétique en haute fréquence

FIGURE 5.16: Effet du recuit magnétique sur les pertes obtenues en haute et en basse sur les pertes d'après la référence [Shokrollahi et Janghorban, 2007a]

Nous retiendrons que suivant le procédé de recuit, on peut soit améliorer les propriétés statiques (perméabilité, pertes en basse fréquence) en recuisant le matériau, soit les propriétés dynamiques (pertes pour les fréquences importantes) en ne recuisant pas ou peu le matériau, afin de ne pas dégrader l'isolation entre grains, garante de la réduction des pertes par courants induits. On peut même créer des anisotropies dans un matériau, qui, à l'origine, est isotrope, par ce que l'on appelle le recuit magnétique. La plupart des matériaux commerciaux sont isotropes, car c'est justement un des grands intérêts de ces matériaux en poudre compactée par rapport aux matériaux laminés classiques. Les matériaux de la société Höganäs, sont, à notre connaissance, isotropes. Ils sont généralement recuits (voir catalogue en ligne [Höganäs, 2009]), afin de limiter les pertes par hystérésis.

Caractérisation statique des SMC L'étude des caractéristiques statiques des matériaux magnétiques doux composites est fondamentale dans la conception de matériel électrique utilisant ces matériaux. En effet, la perméabilité magnétique relative du matériau doux utilisé pour fabriquer l'actionneur détermine directement les ampères-tours nécessaires pour magnétiser ce dernier. Dans la référence [Lundmark et Hamdi, 2004], un bref récapitulatif sur les propriétés statiques des matériaux doux composites est donné : pour le matériau SOMALOY 500 de la société Höganäs (matériau de base proposé pour la fabrication des actionneurs électriques), la perméabilité magnétique relative initiale est de 500. Pour le matériau ATOMET EM1 de la société QMP, cette perméabilité magnétique est de 290. Ceci n'a rien à voir avec la perméabilité magnétique relative des tôles Fer-Silicium de base utilisées d'ordinaire pour la fabrication des machines électriques, qui dépasse 2000. En ce qui concerne l'induction à saturation, les tôles laminées Fer-Silicium sont encore une fois bien supérieures : pour un champ magnétique appliqué de $10 \text{ kA} \cdot \text{m}^{-1}$, on atteint une induction de 1.4T pour le matériau SOMALOY 500, 1.3T pour le matériau ATOMET EM1, et 1.8T pour les tôles Fer-Silicium. Ces données sont récapitulées dans le tableau 5.1 :

	SOMALOY 500	ATOMET EM1	Tôle Fer-Silicium
Perméabilité magnétique relative	500	290	≥ 2000
Comportement au voisinage de la saturation (Induction pour un champ appliqué de $10 \text{ kA} \cdot \text{m}$)	1.4T	1.3T	1.8T

TABLE 5.1: Performances statiques comparées des SMC utilisées pour les machines électriques, et des tôles Fer-Silicium (référence [Lundmark et Hamdi, 2004])

A titre d'illustration, le fabricant Höganäs a eu la gentillesse de nous fournir la courbe de première aimantation

tation qu'il a mesurée pour son matériau SOMALOY 500. Nous nous permettons, à la figure 5.17, de superposer cette dernière avec la courbe de première aimantation des tôles Fer-Silicium mesurée dans le plan de laminage au laboratoire SATIE. La différence des performances statiques entre les deux matériaux, tant en perméabilité initiale qu'en induction à saturation, est sans appel.

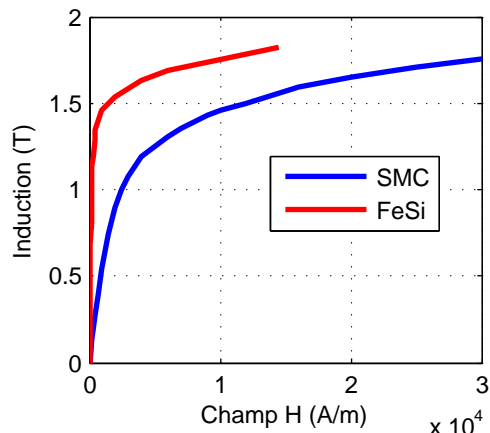


FIGURE 5.17: Superposition de la courbe de première aimantation $B(H)$ pour les tôles Fer-Silicium (mesure faite au laboratoire SATIE) et pour les SMC (matériau SOMALOY 500, courbe gracieusement fournie par la société Höganäs)

Doit-on pour autant en conclure que les matériaux doux composites ne peuvent pas rivaliser avec les matériaux classiques ? D'après la référence [Lundmark et Hamdi, 2004], aucune conclusion ne peut être tirée à ce stade, car bien qu'inférieure, la perméabilité magnétique relative des matériaux doux composites est isotrope dans les trois directions de l'espace. Ceci n'est pas le cas bien entendu pour les matériaux laminés, où, d'après nos mesures, la perméabilité magnétique relative dans la direction perpendiculaire à la direction de laminage est médiocre (nous avons mesuré que cette dernière n'excède pas 30). Nous reviendrons sur ces propriétés d'isotropie des matériaux magnétiques composites, qui autorisent des applications intéressantes, lors de la partie sur les applications. Disons que cette propriété peut amener le concepteur de machine à préférer les matériaux magnétiques composites aux matériaux laminés pour certaines applications, malgré la perméabilité magnétique bien moindre de ces derniers, à condition cependant de repenser totalement la topologie de la machine de telle manière à exploiter cette isotropie. Par exemple, l'article [Jack et Mecrow, 1999] propose une topologie de machine synchrone à aimants avec un stator torique en SMC, qui est à la fois à flux axial et à flux radial, représentée à la figure 5.18. Une telle topologie augmente le couple massique de l'actionneur en se servant de presque toutes les faces du tore statorique pour générer du couple. Il est clair qu'un tel actionneur ne pourrait pas être réalisable avec des matériaux laminés, incapables de conduire de manière efficace un flux magnétique dans une direction perpendiculaire à la direction de laminage. Par conséquent, si de telles topologies deviennent possibles, il n'est pas trivial quel tel matériau permettra de réaliser les actionneurs moins performants pour un critère donné, simplement parce que sa perméabilité magnétique relative est plus faible. D'autant plus que selon l'auteur de la référence [Jack et Mecrow, 1999], la perméabilité magnétique relative n'a pas toujours une importance aussi cruciale qu'on pourrait le croire. Pour certaines machines (machines asynchrones, machines à réluctance), ce critère est important, car l'énergie magnétisante provient des courants du bobinage d'induit. En conséquence, une perméabilité magnétique relative faible dégrade le facteur de puissance de manière importante. En revanche, pour des machines telles que les machines synchrones à aimants permanents, ce n'est pas le cas : pour ce type de machine, l'entrefer magnétique relatif est de toute façon important, et une baisse de perméabilité magnétique des culasses revêt une importance moindre.

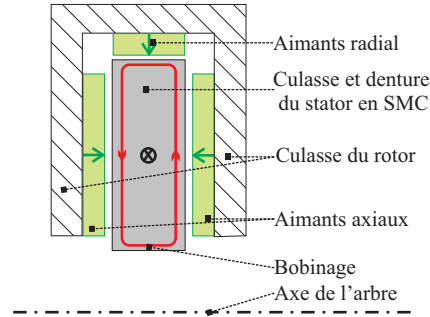


FIGURE 5.18: Coupe axiale de la machine à stator torique en SMC de la référence [Jack et Mecrow, 1999], avec des aimants à la fois axiaux et radiaux

La raison de ces performances statiques moins bonnes pour les matériaux doux composites vient du fait que la couche d'isolant et de résine séparant les grains n'est pas magnétique, et agit comme un entrefer, qui, à cause du champ démagnétisant local que cela crée, tend à réduire la perméabilité magnétique relative globale de l'échantillon. Un modèle pour décrire ce phénomène dans un autre contexte, celui des ferrites, est devenu célèbre sous le nom de « modèle de Visser », et mérite d'être rappelé ici. Sur la figure 5.19 tirée de la référence [Johnson et Visser, 1990], nous avons représenté le principe de modélisation proposé par Visser pour rendre compte de la diminution de la perméabilité magnétique équivalente dans un matériau magnétique granulaire à grains isolés. Comme on le voit sur la figure 5.19, le principe est de rendre équivalent le matériau comportant des grains de forme irrégulière à un réseau périodique formé de cubes. La période de ce réseau équivalent est notée D , qui est la taille moyenne d'un grain de matériau. La perméabilité magnétique intrinsèque du matériau magnétique constituant les grains est appelée μ_i . La perméabilité magnétique relative de l'isolant est considérée comme unitaire. Ce dernier possède une épaisseur autour du grain notée δ .

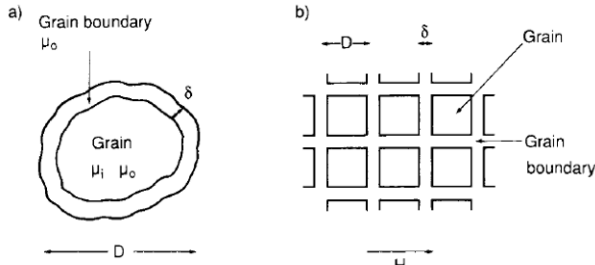


Figure 2.
a) Ferrite grain surrounded by a non magnetic grain boundary.
b) Schematic representation of a polycrystalline ferrite.

FIGURE 5.19: Modèle proposé par Visser (référence [Johnson et Visser, 1990]) pour rendre compte de la perméabilité magnétique équivalente d'un matériau à grains isolés

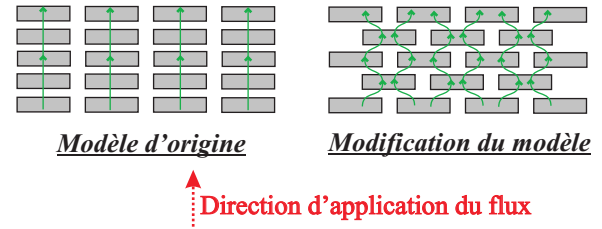


FIGURE 5.20: Perfectionnement du modèle de Visser selon la méthode proposée dans la référence [Mazaleyrat *et al.*, 2002] en prenant en compte le décalage des grains entre couches successives

L'application du théorème d'Ampère permet de trouver la relation donnant la perméabilité magnétique relative équivalente du matériau composite, notée μ_e , grâce à la relation (référence [Johnson et Visser, 1990]), si une induction B est appliquée au matériau :

$$\frac{\delta B}{\mu_0} + \frac{DB}{\mu_i \mu_0} = \frac{(D + \delta) B}{\mu_e \mu_0} \quad (5.35)$$

Dans la limite, presque toujours vérifiée en pratique, où $\delta \ll D$, on obtient alors :

$$\mu_e = \frac{\mu_i}{1 + \mu_i \delta / D} \quad (5.36)$$

Cette expression justifie bien la décroissance de la perméabilité magnétique équivalente obtenue μ_e par rapport à la perméabilité intrinsèque du matériau magnétique μ_i .

A noter que d'autres auteurs [Mazaleyrat *et al.*, 2002] ont par la suite perfectionné ce modèle, en proposant de décaler des couches successives de particules les unes par rapport aux autres dans la direction d'application du flux magnétique, comme montré à la figure 5.20. La modélisation est cette fois plus compliquée, et est menée dans la référence [Mazaleyrat *et al.*, 2002] en termes de ré reluctances inter-couches. La difficulté est de prendre en compte la courbure des lignes de champ qui apparaît alors entre les particules de chaque couche. Ceci est mené de manière analytique, en calculant la longueur du parcours moyen d'une ligne de champ. Les auteurs sont satisfaits de ce modèle, qui, à leurs dires, décrit mieux la perméabilité magnétique équivalente que la formule 5.36. En effet, le défaut de cette dernière était de surestimer la diminution de la perméabilité magnétique effective du matériau μ_e par rapport à la perméabilité magnétique intrinsèque du matériau magnétique pur μ_i .

D'autres références se sont attaquées au problème du calcul de la perméabilité magnétique des matériaux doux composites en pratiquant des calculs numériques. La référence [Yanhong et Kliman, 2004] modélise les grains de fer par des hexagones, de perméabilité magnétique intrinsèque μ_i . Entre ces hexagones est placé un isolant de perméabilité magnétique relative unitaire, comme montré à la figure 5.21. Entre les grains, on dispose, au travers de l'isolant, pour chaque face des hexagones, un contact constitué de fer pur. ce contact modélise les contacts aléatoires apparaissant entre les grains lors du processus de compaction, dont nous reparlerons à la partie consacrée aux pertes par courants induits. La modélisation est effectuée par éléments finis en deux dimensions. Un champ magnétique est appliqué dans une direction du réseau hexagonal périodique avec contacts. Le flux magnétique moyen dans cette direction est ensuite calculé grâce aux éléments finis, et par là l'induction moyenne à travers le réseau hexagonal dans la direction considérée. La perméabilité magnétique équivalente s'en déduit par quotient de l'induction magnétique moyenne par le champ magnétique appliqué. La grandeur variable est le pourcentage d'occupation du contact sur le segment d'une face de l'hexagone. Il est montré que pour des contacts inter-particules occupant 15% en longueur des segments des côtés des hexagones, la perméabilité magnétique relative de l'ensemble pouvait être multipliée par 2.5 par rapport au cas sans contacts entre grains. L'effet de ces contacts inter-grains sera encore étudié au paragraphe suivant, car les auteurs se sont servis du même réseau, pour calculer, toujours par éléments finis, les pertes par courants induits. En perspective, les auteurs ont indiqué envisager des simulations par éléments finis tri-dimensionnels, plus proches de la réalité.

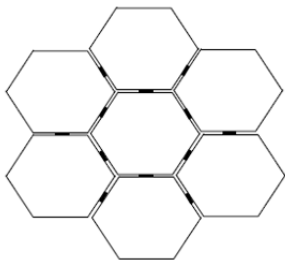


FIGURE 5.21: Structure hexagonale des particules suggérée par la référence [Yanhong et Kliman, 2004] avec des contacts inter-particules au niveau de chaque face

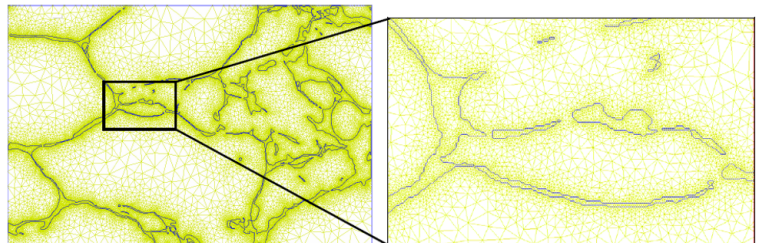


FIGURE 5.22: Méthode proposée dans les références [Cyr, 2007, Cyr *et al.*, 2009] pour calculer numériquement la perméabilité magnétique équivalente du matériau doux composite

Le travail le plus évolué sur la question concerne la méthode inventée par les auteurs des références [Cyr, 2007, Cyr *et al.*, 2009]. Comme montré à la figure 5.22, il s'agit d'exporter les micrographies réalisées dans un logiciel éléments finis 2D. Les grains, comme l'espace inter-grains, sont alors maillés de manière automatique. On affecte à l'intérieur des grains la perméabilité magnétique relative intrinsèque du fer pur. La résine, quant-à-elle, possède une perméabilité magnétique relative unitaire. Ensuite, comme dans la référence précédente, la perméabilité magnétique relative est calculée en appliquant un champ magnétique, et en calculant ensuite par éléments finis l'induction moyenne qui en découle. Une moyenne est réalisée sur plusieurs micrographies d'un même matériau. L'avantage d'une telle méthode est de prendre en compte la forme quelconque des grains qui ont subi des déformations plastiques

lors de la compaction. Néanmoins, un tel modèle, au dire des auteurs, est coûteux en termes de calculs, car chaque micrographie comporte un grand nombre d'éléments. Qui plus est, on perd la souplesse et le caractère explicite des formulations analytiques telles que la relation de Visser, qui permettent d'appréhender la dépendance du résultat en fonction des différents paramètres du problème (équation 5.36).

D'autres auteurs [Benabou, 2002] ont vu le problème de la modélisation statique des matériaux magnétiques composites sous l'angle de l'implémentation de modèles de l'hystérésis statique et dynamique dans un code de calcul éléments finis, afin de prédire avec précision le comportement magnétique du système utilisant ces matériaux. Ceci les a conduits à appliquer les modèles de Preisach [Mayergoyz, 1986b] ou de Jiles-Atherton [Jiles et Atherton, 1986] à ces matériaux en poudre de fer. Le problème de l'identification expérimentale des modèles a été discuté, et une extension dynamique a été proposée.

Modèles de pertes dans les SMC De nombreux auteurs [Magnussen *et al.*, 2004, Lefebvre *et al.*, 1997], afin de disposer d'un modèle de pertes dans un matériau doux composite soumis à une induction donnée, utilisent les formulations empiriques de Steinmetz sur le modèle de ce qui est fait dans le cadre des matériaux laminés. Il s'agit d'interpoler les pertes relevées expérimentalement en régime sinusoïdal par une fonction polynomiale comprenant deux termes, l'un traduisant grossièrement les pertes par hystérésis, et l'autre traduisant les pertes classiques. La formule proposée dans la référence [Magnussen *et al.*, 2004] est de la forme, pour la puissance volumique perdue p_{tot} en un point qui est le siège d'une induction sinusoïdale d'amplitude B_m variant à une fréquence f :

$$p_{tot}(B_m, f) = k_h B_m^2 f + k_{cf} B_m^2 f^2 \quad (5.37)$$

Les coefficients k_h et k_{cf} sont obtenus par identification d'après les mesures réalisées. Certains auteurs [Huang *et al.*, 2007a] compliquent la formule afin de tenir compte d'un terme de pertes excédentaires, au prix d'une augmentation du nombre de paramètres à identifier :

$$p_{tot}(B_m, f) = k_h B_m^h f + k_{cf} B_m^2 f^2 + k_{exc} (B_m f)^{3/2} \quad (5.38)$$

Les paramètres à identifier sont alors k_h , k_{cf} , k_{exc} et h . Cette méthode a pour avantage sa simplicité de mise en oeuvre, mais possède en revanche le gros inconvénient suivant : étant donné que la formule précédente est décorrélée de certains fondements physiques, il est impossible de prédire l'évolution des pertes pour une induction d'excitation distordue à partir de coefficients identifiés dans le cas sinusoïdal. Qui plus est, comme on va le voir, cette méthode, directement inspirée de la formule de Steinmetz mise au point dans le cas des tôles laminées, suppose que les pertes sont uniquement un phénomène local. Ceci est certainement vérifié dans le cas des tôles laminées, qui peuvent être considérées, dans un empilage, comme parfaitement isolées l'une de l'autre. Nous allons voir que ce n'est pas malheureusement le cas du matériau granulaire, pour lequel la résistivité globale (ou « macroscopique ») de l'échantillon n'est pas infinie.

D'autres chercheurs, au motif qu'un des intérêts de tels matériaux était leur isotropie, ont étendu ce genre de méthode fondée sur l'identification des coefficients d'une formule empirique de pertes au cas des excitations multidimensionnelles d'induction. Ainsi l'article [Zhu *et al.*, 1999] propose-t-il une caractérisation expérimentale des pertes dans les matériaux composites en 2D, alors que l'article [Guo *et al.*, 2006a] étend la méthode en 3D, au moyen d'un dispositif de mesure approprié représenté au niveau de la figure 5.23. Par exemple, dans le cas d'une polarisation circulaire d'amplitude J_p et de fréquence f , la formule d'interpolation suivante est proposée pour les pertes par hystérésis volumiques p_{hc} en champ circulaire qui, au-dessus d'une certaine valeur de polarisation, se mettent à décroître pour s'annuler de manière rigoureuse lorsque l'on atteint la polarisation de saturation du matériau J_S :

$$\frac{p_{hc}}{f} = a_1 \left[\frac{1/s}{(a_2 + 1/s)^2 + a_3^2} - \frac{1/(2-s)}{(a_2 + 1/(2-s))^2 + a_3^2} \right] \quad (5.39)$$

où il est posé $s = 1 - \frac{J_p}{J_S} \sqrt{1 - \frac{1}{a_2^2 + a_3^2}}$. Les coefficients a_1 , a_2 et a_3 doivent être identifiés par l'expérience. Autrement, les termes de pertes classiques et excédentaires en champ circulaire sont supposés avoir la même expression mathématique qu'en champ alternatif. Par la suite, pour un locus de champ elliptique, des formules d'interpolation entre pertes en champ circulaire et pertes en champ alternatif sont proposées.

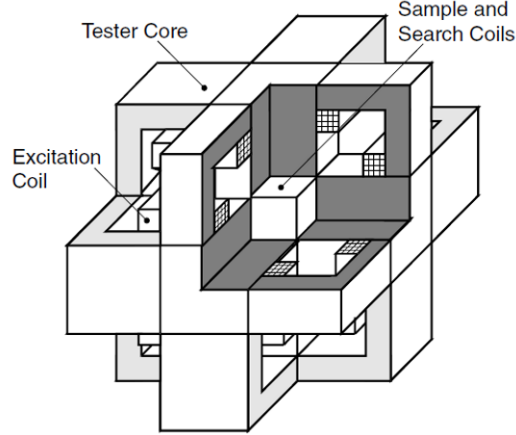


FIGURE 5.23: Dispositif expérimental de caractérisation des SMC soumises à des excitations d'induction tri-dimensionnelles (référence [Guo *et al.*, 2006a])

Jusque là, les formulations et les démarches sont semblables à celles utilisées pour les tôles laminées classiques, pour lesquelles le phénomène de pertes est purement local. D'autres chercheurs [Lefebvre *et al.*, 1997] se sont aperçus que la résistivité globale des échantillons constitués de matériau doux composite, même si elle est fort heureusement très supérieure en regard de celle du matériau doux massif qui constitue les particules (ici, le fer pur), est cependant loin de prendre une valeur infinie. Ainsi l'article [Cyr *et al.*, 2007] propose-t-il une discussion sur la mesure de la résistivité de tels matériaux. L'auteur attire l'attention sur la difficulté à mesurer expérimentalement cette résistivité : la méthode de l'ohmmètre à quatre points ne donne pas des résultats précis et répétables, à cause des résidus de liant et de lubrifiant à la surface des échantillons. Un ponçage s'avère nécessaire, mais il doit être fait, selon les auteurs, dans la direction perpendiculaire à la mesure de la résistivité, afin de ne pas créer des parcours conducteurs à la surface de l'échantillon qui fausseraient la mesure de la résistance de ce dernier. Les mesures étant menées sur des barres de matériaux, il est à craindre que les courants injectés afin de mesurer la résistivité ne se répartissent pas uniformément à travers la section des échantillons, et restent localisés à la surface de la face sur laquelle on dispose les pointes de l'ohmmètre. Un procédé pour contourner ce problème a été mis au point, en répétant les mesures sur des barreaux de différentes sections, et en déduisant à chaque fois la résistivité, puis en extrapolant cette donnée pour une section voisine de zéro. Une autre méthode pour mesurer la conductivité a été mise au point, par induction d'une force électromotrice dans un tore de matériau, puis par mesure du courant induit. Cette méthode permet de bien répartir la force électromotrice dans l'intégralité de l'échantillon. Nous reviendrons plus tard pour expliquer en détail une telle méthode, car nous l'avons utilisée afin de mesurer la résistivité de nos échantillons. quelque soit le dispositif de mesure, la résistivité mesurée s'échelonne alors entre des valeurs de $200 \cdot 10^{-6} \Omega\text{m}$ et $300 \cdot 10^{-6} \Omega\text{m}$.

Cela étant, cette résistivité grande par rapport à celle du fer pur qui constitue les particules, mais non infinie, va poser un problème conceptuel. En effet, cela signifie qu'en plus des courants de Foucault que nous pourrions qualifier de locaux ou de « microscopiques », car circulant à l'échelle de la particule élémentaire, il se superpose un autre terme de courants induits, circulant à l'échelle de l'échantillon tout entier à cause de la résistivité globale non infinie de ce dernier. Pour cette raison, il est sans doute approprié de qualifier de « macroscopique » ce terme de courants de Foucault. Qui plus est, la légitimité de la superposition de ces deux termes est posée par les travaux présentés dans la référence [Bottauscio *et al.*, 2006]. Le modèle le plus simple que l'on puisse trouver qui tienne compte de ce délicat problème est sans doute présenté dans la référence [Miljavec *et al.*, 2004]. La stratégie des auteurs est la suivante : ils font l'hypothèse qu'il est possible de superposer un terme de courants induits microscopiques et un terme de courants induits macroscopiques pour obtenir les pertes classiques totales. La puissance volumique totale perdue prend alors la forme suivante :

$$p_{tot} = f \int_0^T H dB + f \int_0^T k_{ed} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 dt \quad (5.40)$$

Dans le premier terme de l'équation précédente, qui représente selon les auteurs les pertes par hystérésis, le cycle d'hystérésis a été identifié de manière statique au moyen d'un modèle de Jiles-Atherton [Jiles et Atherton, 1986]. De

cette façon, la formule est valable en régime non-sinusoïdal. En ce qui concerne le coefficient des pertes classiques k_{ed} du second terme, les auteurs proposent la formule suivante :

$$k_{ed} = \frac{1}{8} \left(c_b \frac{r_e^2}{\rho_{bulk}} + c_p \frac{r_p^2}{\rho_{Fe}} \right) \quad (5.41)$$

Dans la formule précédente, le terme $\frac{1}{8} \frac{r_e^2}{\rho_{bulk}}$ représente la composante de pertes dite « macroscopique », car ce sont les pertes que l'on aurait si l'échantillon, dont la résistivité globale du substrat est ρ_{bulk} , était un cylindre de rayon r_e . Le coefficient correctif c_b sert à prendre en compte le fait que la forme de l'échantillon n'est pas obligatoirement un cylindre parfait. A ce terme, on superpose un terme de pertes classiques dites « microscopiques », car ayant lieu à l'échelle de la particule. Auquel cas, la résistivité à prendre en compte est celle du fer pur ρ_{Fe} , qui est bien plus faible que la résistivité du substrat ρ_{bulk} . Le rayon r_p est le rayon moyen des particules supposées de forme cylindrique, et on a bien sûr $r_p \ll r_e$. Le coefficient c_p sert à prendre en compte le fait que les particules ne sont pas bien entendu des cylindres parfaits. Le calcul du coefficient k_{ed} demande donc l'identification expérimentale des termes ρ_{bulk} , c_b et c_p . Cette formulation a le mérite de la simplicité. En effet, la formule proposée pour chaque terme de pertes néglige tout effet de peau, que ce soit au niveau des pertes locales dans chaque particule, ou bien des pertes microscopiques.

Même si cette hypothèse semble naturelle pour les pertes classiques à l'échelle de la particule, d'autres auteurs [Nord *et al.*, 2004] ont critiqué l'absence de prise en compte de l'effet de peau au niveau des courants de Foucault « macroscopiques » ayant lieu à l'échelle de l'échantillon, au motif que la taille de ce dernier peut devenir importante. Afin de tenir compte des courants de Foucault à l'échelle macroscopique dans l'échantillon, ces chercheurs mènent d'abord une étude à l'aide d'un logiciel éléments finis en magnétodynamique sur la géométrie de l'échantillon supposée homogène, avec une résistivité égale à celle mesurée ρ_{bulk} . Les échantillons choisis ayant une forme torique, un modèle 2D axisymétrique s'avère suffisant. Il est bien entendu trouvé que l'amplitude de l'induction décroît au fur et à mesure que l'on s'approche du centre du tore à cause de l'effet de peau. Puis un modèle local de pertes (pertes par hystérésis et pertes classiques locales) est appliqué en chaque point de l'échantillon convenablement discrétisé. Les pertes causées par les courants de Foucault macroscopiques dans l'échantillon supposé avec une résistivité électrique homogène sont simplement additionnées aux pertes locales. Ce modèle est ensuite appliqué à différents tores de taille et de forme de section variables. L'inconvénient d'un tel modèle est de nécessiter un temps de calcul plus important, et de faire perdre les relations quantitatives apportées par des formules analytiques. Qui plus est, un tel procédé induit un changement important quant à la manière d'envisager la conception des actionneurs à base de poudre de fer, comparativement aux machines réalisées avec les matériaux classiques laminés. En effet, pour ces derniers, le dimensionnement n'imposait que des simulations en magnétostatique ([Hlioui *et al.*, 2008]), les pertes fer étant calculées en évaluant les inductions en chaque point des parties ferromagnétiques de l'actionneur. Leur évolution en fonction du temps était trouvée en répétant la simulation pour chaque position relative du rotor par rapport au stator. Par contre, si on utilise les matériaux en poudre de fer, il peut devenir nécessaire de pratiquer, dès la phase de conception, une étude en magnétodynamique en affectant une résistivité homogène ρ_{bulk} aux parties ferromagnétiques. Ceci complexifie de manière importante les modèles à utiliser lors de la phase de conception, avec la nécessité de prendre en compte le mouvement relatif du rotor en régime magnétodynamique. Ensuite, il est possible de déterminer par intégration les pertes volumiques par courants de Foucault macroscopiques par intégration des courants induits sur le cycle de fonctionnement dans la culasse de la machine. Cela ne dispense pas ensuite d'une application locale d'un modèle de pertes fer pour évaluer les pertes non-maxwelliennes, ainsi que les pertes classiques à l'échelle des particules. Bien que nous n'allions pas dans cette thèse jusqu'à la conception d'actionneurs en poudre de fer, il nous semblait important de signaler que l'utilisation de tels matériaux pouvait être susceptible de changer totalement la démarche de conception par rapport aux actionneurs en matériaux laminés classiques.

Dans la référence [Yanhong et Kliman, 2004], les auteurs ont donné une interprétation physique de cette conductivité : elle serait due à des contacts aléatoires entre grains. Pour modéliser une telle configuration, un modèle est proposé, avec des grains de forme hexagonale d'une centaine de micromètres de diamètre, qui permettent de remplir totalement l'espace. En effet, étant donné la densité importante des échantillons en poudre de fer, l'hypothèse consistant à modéliser les grains en leur donnant des formes circulaires n'apparaît pas réaliste. Les contacts entre grains ne sont pas modélisés de manière aléatoire, mais, pour simplifier, on dispose un contact en fer au milieu de chaque côté des hexagones avec la particule directement voisine. On obtient un réseau infiniment périodique, simulé par éléments finis 2D. Une première étude est menée en magnétostatique afin de déduire la perméabilité magnétique

équivalente d'un tel réseau périodique. Puis une simulation est menée en magnétodynamique afin de calculer les pertes par courants induits dans le réseau. La saturation magnétique est tenue en compte. Il a été vérifié que l'effet de peau local à l'intérieur des particules était effectivement négligeable à des fréquences industrielles (60 Hz), ce qui est une conclusion logique étant donné la taille de ces dernières. Mais la conclusion la plus remarquable est que l'effet des contacts entre grains, responsable de la conductivité globale ρ_{bulk} du matériau, ne semble pas modifier de manière importante les pertes dans le matériau par rapport au modèle des particules parfaitement isolées l'une de l'autre. Une explication possible est sans doute que ces contacts quasi-ponctuels, bien que responsables d'une chute de la résistivité, ne semblent pas en mesure de permettre la circulation d'une composante de courants macroscopiques conséquents dans l'échantillon. Les auteurs signalent d'ailleurs qu'il serait intéressant de mener une étude similaire sur un réseau tri-dimensionnel de particules.

Un autre travail à nos yeux d'importance concernant la modélisation des pertes dans les matériaux doux composites est proposé dans la référence [De Wulf *et al.*, 2002]. Les auteurs se sont proposés, après une caractérisation expérimentale des pertes dans un matériau magnétique doux composite, d'appliquer une procédure de séparation de pertes connue depuis fort longtemps dans les matériaux laminés [Cullity et Graham, 2008]. Un modèle de pertes classique a été proposé. Il faut remarquer que les seules pertes classiques considérées sont les pertes par courants de Foucault « macroscopiques », c'est-à-dire à l'échelle de l'échantillon. Le matériau étant un barreau de forme rectangulaire, les pertes classiques sont calculées par résolution numérique de l'équation de diffusion sur tout l'échantillon (donc en prenant en compte l'effet de peau). Les pertes par hystérésis sont évaluées par extrapolation pour des fréquences voisines de zéro. Puis, sur le modèle de ce qui a été fait dans le cas des matériaux laminés dans [Bertotti, 1985d], les pertes excédentaires, obtenues par différence entre les pertes classiques et par hystérésis, et les pertes totales, ont été étudiées avec le modèle de Bertotti, faisant intervenir les paramètres n_o et V_o , caractéristiques du processus de magnétisation, dont les définitions se trouvent dans le deuxième chapitre d'introduction. Après une procédure de « fitting » de courbe sur les pertes mesurées (partant de fréquences quasi-statiques et allant jusqu'à 100Hz, pour une induction maximale $B_m = 1$ T), les paramètres des pertes excédentaires n_o et V_o ont pu être identifiés. À noter que la résistivité homogène de l'échantillon, notée ρ_{bulk} , n'est pas mesurée au préalable, mais est aussi identifiée lors de la procédure de « fitting » de courbe. Il faut d'ailleurs noter que la résistivité calculée de cette manière est différente de celle mesurée par une méthode d'ohmmètre à quatre pointes (il y a une erreur d'un facteur quatre). Les auteurs soupçonnent en premier lieu une anisotropie du matériau, en disant que la conductivité est mesurée par l'ohmmètre dans la direction du flux, alors que les courants de Foucault se propagent dans la direction perpendiculaire au flux magnétique. Ils finissent également par se demander si l'hypothèse de négliger les courants induits locaux au niveau de chaque particule n'induit pas une certaine erreur.

5.2.1.2 Utilisations des matériaux doux composites

Nous allons détailler les différentes utilisations que nous avons recensées dans la littérature de ces nouveaux matériaux. Bien qu'encore assez marginalement utilisés, il est cependant possible de signaler un certain nombre d'applications. Un des principaux obstacles à une utilisation plus massive réside sans doute dans le manque de travaux sur le sujet, tant sur le plan expérimental que théorique, pour fournir aux ingénieurs les moyens de prédéterminer les performances des dispositifs utilisant de tels matériaux en comparaison de ceux existants pour les matériaux classiques. Cette remarque justifie bien l'intérêt de ce thème de recherche. Il sera intéressant de montrer que bien que les principales utilisations rencontrées actuellement concernent le domaine de l'électrotechnique (qui est également celui qui nous intéresse), de tels matériaux ont des capacités qui dépassent largement ce domaine, et touchent d'autres disciplines du génie électrique. Parmi ces dernières, on liste l'électronique de puissance, et d'instrumentation. Afin de montrer le potentiel de tels matériaux, il nous semble pertinent de reprendre (figure 5.24) une courbe maintes fois donnée dans la littérature, et représentée par exemple dans la référence [Shokrollahi et Janghorban, 2007c]. Nous y voyons que les matériaux magnétiques doux composites, au prix d'une réduction en induction maximale disponible par rapport aux tôles (à cause de l'entrefer réparti entre les grains de la poudre), permettent d'atteindre des fréquences allant jusqu'à plusieurs dizaines de kilohertz (comme c'est le cas, par exemple, pour les matériaux magnétiques utilisés en électronique de puissance). Bien entendu, comme nous le verrons par la suite, les grains des matériaux destinés à être utilisés en électronique de puissance à plusieurs dizaines de kilohertz sont bien plus petits en taille que ceux destinés aux machines électriques, où la fréquence est de l'ordre du kilohertz, mais pour lesquelles on a clairement besoin d'inductions élevées afin de réduire le volume des culasses. C'est pour cela que les fabricants, comme par exemple la société Högånäs, proposent toute une gamme de matériaux à base de poudre de fer ([Högånäs, 2009]) pour ces différentes applications. En Electrotechnique, il est coutume d'ailleurs, pour traduire

la nécessité d'offrir le meilleur compromis entre fréquence f et l'induction maximale B_m , d'introduire le facteur de mérite des matériaux (référence [Bernard *et al.*, 2005]), qui n'est autre que le produit $B_m f$, et de tracer son évolution en fonction de la fréquence. Pour une application à fréquence f donnée, on choisit le matériau qui a le plus grand facteur de mérite, si on veut minimiser la masse des parties ferromagnétiques de la machine.

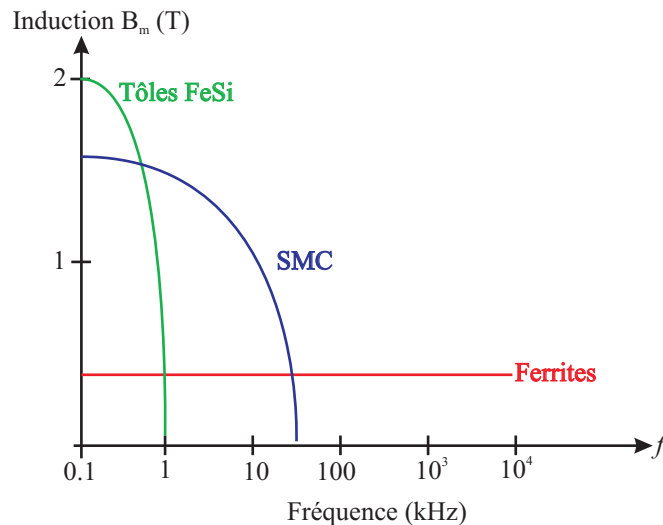
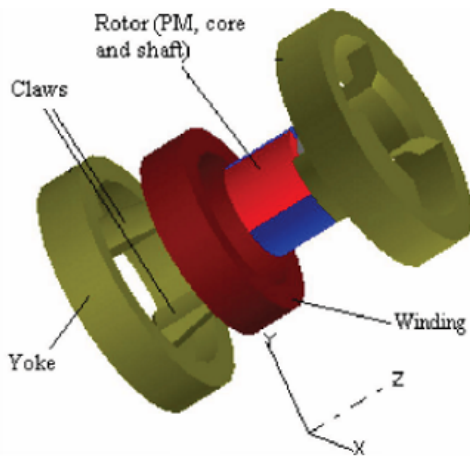


FIGURE 5.24: Zone d'utilisation des ferrites, des tôles, et des SMC dans le plan (B_m, f) (référence [Shokrollahi et Janghorban, 2007c])

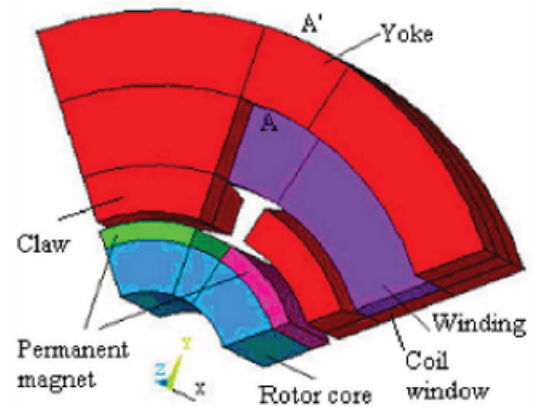
Applications en électrotechnique Les matériaux en poudre de fer compactée avec grains isolés intéressent les concepteurs de machines électriques pour deux raisons principales : d'une part, pour leur isotropie, tant magnétique, que thermique, qui autorise la fabrication de structures qui n'étaient pas envisageables, ou peu performantes en utilisant les matériaux laminés classiques. Il est possible d'envisager des structures avec des parcours de flux réellement tri-dimensionnels. D'autre part, ce choix peut s'avérer pertinent dans le cas de machines haute vitesse, à cause de la réduction des pertes que peut procurer la structure granulaire du matériau. Néanmoins, l'inconvénient principal de ces matériaux, qui réside dans leur faible perméabilité magnétique relative à cause des entrefers répartis procurés par la structure granulaire, empêche leur utilisation dans des dispositifs où il est important d'avoir des perméabilités magnétiques relatives des matériaux importantes, comme les machines asynchrones ou bien à réductance, sous peine d'augmenter de manière prohibitive le courant magnétisant. En revanche, ce choix est bien adapté dans les structures à aimants haute-vitesse, car, dans ce type de topologie, la présence des aimants permanents impose déjà un entrefer relatif conséquent, et donc on ne craint guère le détériorer de manière raisonnable la perméabilité magnétique relative des parties ferromagnétiques [Lundmark et Hamdi, 2004].

Applications utilisant l'isotropie magnétique et thermique des poudres de fer Un exemple type de machine fondamentalement tri-dimensionnelle est donné par les alternateurs à griffes, utilisés depuis fort longtemps comme démarreurs et alternateurs dans l'industrie automobile [Albert *et al.*, 2003], en partie pour leur faible coût de fabrication dû à la simplicité de leur bobinage. Le principe de fonctionnement est montré au niveau de la figure 5.25a. Le rotor est un rotor à aimants permanents déposés classique. Le stator comporte en revanche certaines spécificités. Il est constitué de bobines circulaires, comme celle représentée à la figure 5.25a. En réalité, sur cette figure, on ne représente qu'une seule phase pour la simplicité, mais il faut imaginer en fait trois phases identiques emboîtées l'une sur l'autre axialement, déphasées spatialement d'un tiers de pas polaire pour permettre la création du couple. Le bobinage apparaît donc très élémentaire, ce qui justifie le coût attractif de ces structures. On voit sur les figures 5.25a et 5.25b que chacune des bobines statoriques est agencée dans une structure comportant des pôles ferromagnétiques alternés, afin de produire une onde d'induction pulsante dans l'entrefer. L'action combinée des trois phases alimentées par un système de courants triphasé crée alors un champ tournant. A cause de ces pôles que l'on désigne sous le nom de griffes, il est compréhensible que les parcours de flux circulant autour des bobines statoriques dans les griffes soient réellement tri-dimensionnels. Lorsque ce circuit magnétique à griffes est fabriqué

en tôles laminées, la direction perpendiculaire au plan des tôles présente toujours une réluctance importante, ce qui augmente le courant nécessaire pour créer le flux. Pour résoudre ce problème, la référence [Huang *et al.*, 2007a] (d'où sont tirées les figures 5.25a et 5.25b), ainsi que l'article [Atkinson *et al.*, 2009], proposent d'utiliser pour le stator le matériau commercial nommé « SOMALOY 500 » produit par la société Höganäs [Höganäs, 2009], qui est annoncé comme étant le matériau de base pour les machines électriques, et qui possède une perméabilité magnétique relative de 500 dans toutes les directions. Qui plus est, la fabrication de ces pièces relativement complexes devient aisée et rapide (il suffit de disposer du moule approprié). L'article [Huang *et al.*, 2007a], après avoir déterminé par éléments finis la répartition des inductions dans les culasses et griffes de la machine, applique les modèles de pertes fer locaux développés dans la référence [Guo *et al.*, 2006a], tenant compte du caractère multi-dimensionnel des inductions. Il est montré que même pour des fréquences voisines de 700Hz, les pertes restent acceptables. L'utilisation des matériaux doux confère donc des avantages évidents dans ce type de structure fondamentalement tri-dimensionnelle.



(a) Principe de la machine à griffes (représentation d'une seule phase)



(b) Détail des griffes pour créer une onde alternative d'induction dans l'entrefer

FIGURE 5.25: Principe de fonctionnement de la machine à griffes (référence [Huang *et al.*, 2007a])

L'isotropie magnétique des matériaux doux est donc un avantage indéniable dans les structures réellement tri-dimensionnelles comme les alternateurs à griffes. Néanmoins, on peut objecter que de tels avantages ne sont réels que pour ce type d'actionneur particulier, et que pour la plupart des actionneurs qui ont des parcours de flux bi-dimensionnels, les avantages des poudres ne sont pas manifestes en regard de leurs inconvénients, comme la diminution de la perméabilité des parties ferromagnétiques. Nous allons montrer qu'il n'en est rien, car la facilité de mise en forme des pièces en matériaux magnétiques doux composites permet d'envisager des formes nouvelles impossibles à concevoir avec des matériaux laminés classiques. Combinées à l'isotropie thermique de ces matériaux, ces dernières permettent des gains significatifs sur les performances des actionneurs, au prix néanmoins d'un travail important pour le concepteur qui doit totalement repenser les formes de sa machine dans le but de tirer parti des avantages de ces nouveaux matériaux. Qui plus est, il est possible de concevoir des méthodes de fabrication plus efficaces, ce qui est toujours important d'un point de vue industriel. Des références qui illustrent de manière pertinente ces idées sont données par les articles [Jack *et al.*, 2000b] et [Atkinson *et al.*, 2009]. Il est question d'une machine synchrone à aimants permanents déposés au rotor, et avec un bobinage statorique à grosses dents. Il est montré que si on remplace simplement, sans repenser la forme, le matériau laminé par un matériau en poudre, il y a une dégradation des performances, à cause de la perméabilité moindre des matériaux composites, ainsi que leurs pertes par hystérésis plus importantes, ce qui est pénalisant pour des fréquences inférieures au kilohertz. En revanche, si on repense la forme des dents, en plaçant, comme suggéré par les références [Jack *et al.*, 2000b, Atkinson *et al.*, 2009] une dent de forme arrondie (figure 5.26), il est possible de réduire, à surface de dent identique, les excursions de têtes de bobines, car ces dernières épousent alors la forme de la dent. Cet avantage permet une amélioration du rendement de la machine, non pas par les pertes fer qui demeurent plus importantes à des vitesses de rotation relativement faibles, mais grâce à une diminution des pertes cuivre dues à la réduction des têtes de bobine. En outre, l'évacuation de ces pertes cuivre est bien meilleure, car les têtes de bobines « collent » à la dent sur toute

sa circonférence. Les auteurs de la référence [Jack *et al.*, 2000b] insistent aussi sur le fait qu'ils ont réussi, dans le cas de la machine en matériau ferromagnétique doux, à diminuer la hauteur axiale des dents ferromagnétiques en conservant leur surface constante par une augmentation de leur largeur. Selon eux, cette augmentation de largeur des dents est possible grâce à une augmentation du facteur de bobinage, qui diminue le volume des bobines, laissant plus de place pour la dent. En effet, comme montré à la figure 5.27 tirée de la référence [Persson *et al.*, 2004], il est possible, avec les matériaux doux composites, de concevoir des pièces de culasse séparables des pièces dentaires. Le montage est ainsi simplifié : on fabrique séparément les dents, le bobinage, et la culasse, et il ne reste plus qu'à emboîter le tout. La bobine peut être ainsi enroulée de manière séparée du stator de la machine, ce qui autorise un procédé à la fois plus rapide, moins onéreux et plus précis, d'où une augmentation du coefficient de bobinage. Comme montré à la figure 5.27, la référence [Persson *et al.*, 2004] va même plus loin, en profitant de cette nouvelle possibilité de montage pour proposer des épanouissements dentaires avec une hauteur et une largeur toutes deux plus importantes que celles de la dent. Cette possibilité, qui permet de mieux utiliser les aimants du rotor en captant mieux leur flux, exploite les propriétés magnétiques isotropes des matériaux en poudre afin de concentrer le flux capté par les épanouissements dentaires dans la dent correspondante. D'une manière générale, on retiendra qu'il peut être nécessaire, afin d'améliorer les performances des systèmes conçus avec des matériaux doux composites, de repenser totalement non seulement le procédé de fabrication, mais aussi la forme de ces derniers, si on veut profiter des avantages de ces matériaux par rapport aux matériaux laminés classiques.

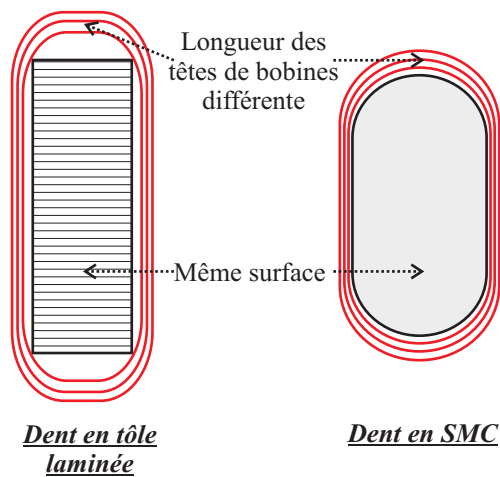


FIGURE 5.26: Comparaison des formes des dents statoriques suivant le matériau magnétique utilisé pour une machine à bobinages concentré (références [Jack *et al.*, 2000b, Atkinson *et al.*, 2009])

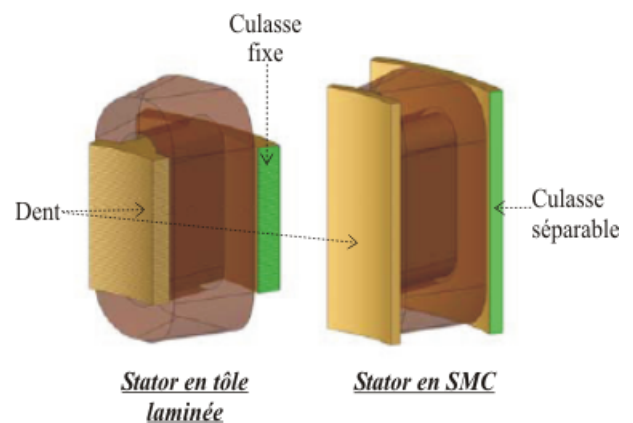


FIGURE 5.27: Comparaison en 3D de la forme des encoches d'une machine à bobinage concentré suivant le matériau utilisé (tirée de la référence [Persson *et al.*, 2004])

Sans doute un des meilleurs exemples de la nécessité de repenser totalement la forme d'un système afin de profiter de l'isotropie des matériaux en poudre de fer est-il fourni par la référence [Viarouge *et al.*, 2002]. Dans cet article, les auteurs ont souhaité comparer les performances d'une inductance pour un ballast de puissance destiné à fonctionner à des fréquences industrielles. Depuis des décennies, ce genre d'appareillage, très répandu, utilise pour circuit magnétique un circuit laminé. Les auteurs de la référence [Viarouge *et al.*, 2002] se posent la question de la possibilité d'utiliser le matériau magnétique composite commercial nommé « ATOMET EM1 », et fabriqué par la société QMP. Il est montré qu'en proposant une forme géométrique novatrice tirant partie des propriétés isotropes magnétiques et thermiques de ce matériau, il est possible de compenser les propriétés locales à priori moins attractives de ce dernier en termes de perméabilité et de pertes en basse fréquence. La réduction de la perméabilité magnétique relative n'est pas très importante pour la réalisation d'inductances (on fait alors une inductance à entrefer réparti), alors que l'on est obligé, en utilisant les matériaux laminés à haute perméabilité, de ménager un entrefer. La géométrie choisie pour cette inductance est montrée au niveau de la figure 5.28. On voit que cette géométrie d'inductance en poudre de fer est très différente de celle utilisant les tôles laminées, les bobinages étant enroulés séparément, puis placés autour d'une colonne centrale de matériau magnétique. Le retour de flux

est tri-dimensionnel, étant donné que le tout est enfermé dans un cylindre de matériau magnétique. Sur les faces extérieures du cylindre, la capacité d'évacuation thermique est exploitée, en prévoyant des cannelures améliorant la surface d'échange avec l'air ambiant. Les dimensions optimales du système sont trouvées à l'aide d'un algorithme d'optimisation minimisant les pertes, et qui utilise la méthode du Lagrangien. Le modèle fourni à l'algorithme est un modèle multiphysique magnéto-thermique tenant compte de la saturation magnétique. Le gain en volume est évident quand on voit le système représenté à la figure 5.29, qui est comparé avec la solution classique utilisant les matériaux laminés. Cette dernière nécessite un radiateur pour dissiper les pertes. Ces pertes optimisées sont elles aussi améliorées pour le système en matériau composite, surtout grâce aux pertes cuivre, car le bobinage de l'inductance dans ce cas est de meilleure qualité.

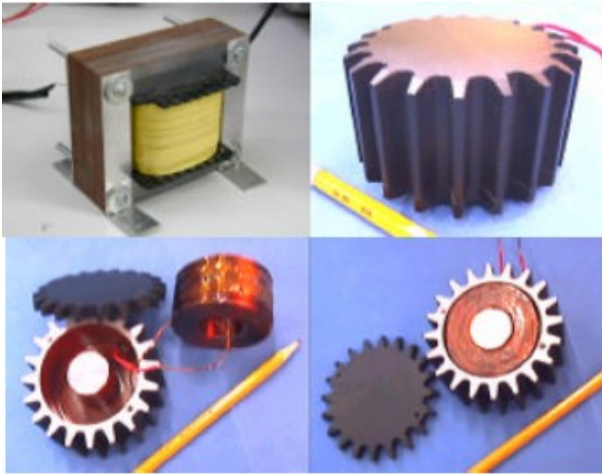


FIGURE 5.28: Comparaison des formes d'inductances du ballast fabriquées en matériau laminé (en haut, à gauche), et en matériau composite « ATOMET EM1 » de la société QMP (référence [Viarouge *et al.*, 2002])

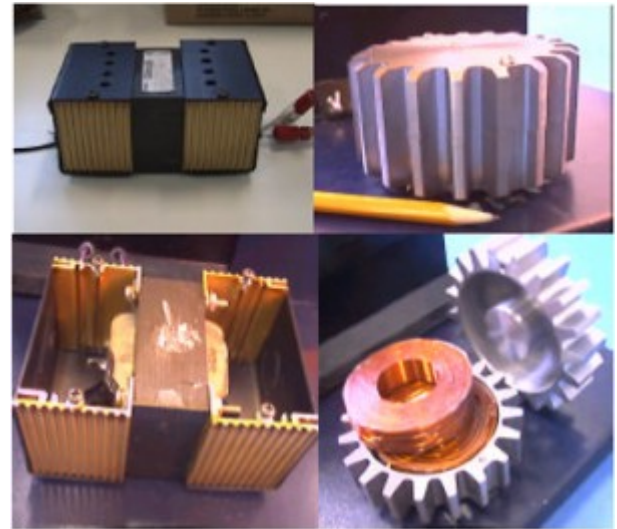


FIGURE 5.29: Comparaison des volumes finaux des inductances (le matériau laminé est à gauche, le matériau composite est à droite) (référence [Viarouge *et al.*, 2002])

D'autres applications du matériau commercial « EM1 » sont proposées dans la référence [Marignetti *et al.*, 2007]. Dans cette dernière, une machine à flux axial utilisant au stator ce matériau est envisagée. En effet, on a pu voir auparavant que la structure des machines à flux axial est fondamentalement tri-dimensionnelle, et que l'intérêt en terme de couple massique ne se révèle que si le nombre de paires de pôles utilisé est important, ce qui conduit à des fréquences conséquentes pour une vitesse à atteindre fixée. Un modèle thermique tri-dimensionnel, couplé à un modèle de mécanique des fluides également tri-dimensionnel pour modéliser avec précision l'effet du fluide de refroidissement utilisé à la surface du stator de la machine, a été mis au point. Cette étude, menée en prenant grand soin des aspects thermiques, permet à l'auteur d'insister sur les atouts de ces matériaux qui sont thermiquement isotropes.

Applications utilisant les poudres de fer pour réduire les pertes magnétiques en haute fréquence

Dans toutes les applications électrotechniques envisagées auparavant, les matériaux doux composites ont pu révéler leur intérêt, à condition de repenser totalement la conception du système. Le plus souvent, étant donné que les fréquences utilisées en électrotechnique demeurent raisonnables, les pertes magnétiques se trouvent même augmentées, car nous avons vu qu'à basse fréquence, les pertes dans les matériaux granulaires pouvaient être assez conséquentes à cause de la composante de pertes par hystérésis. Cette remarque, ceci étant, n'interdit pas l'amélioration globale du rendement du système, car les nouvelles possibilités offertes par les matériaux en poudre au niveau des géométries peuvent permettre la réduction des pertes cuivre, par exemple par une diminution de la longueur du bobinage.

Il existe des applications modernes, comme les machines destinées à fonctionner à haute vitesse, pour lesquelles les pertes fer dans les matériaux laminés deviennent prohibitives. Dans ce cas, la solution des matériaux doux

composites peut s'avérer intéressante pour réduire ces pertes, car leur structure granulaire fine leur permet de disposer de pertes dynamiques très réduites, ce qui est un avantage en haute fréquence. Nous allons lister dans cette partie quelques applications des matériaux composites qui ont été motivées par le besoin de réduction des pertes fer dynamiques.

Un exemple est fourni par la référence [Chebak *et al.*, 2009]. L'auteur conçoit une machine à aimants permanents déposés au rotor pour des applications haute vitesse (l'auteur entend par là des vitesses voisines de $20000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$). La machine, montrée au niveau de la figure 5.30, est unipolaire, afin de ne pas augmenter la fréquence de découpage. En outre, le choix est fait d'une structure sans encoches, au motif d'annuler la composante de couple de détente, en même temps que de réduire les pertes dans le rotor de la machine dues aux effets d'encoches. La machine tournant à vitesse importante, le stator est choisi en poudre de fer. La modélisation utilisée est de type analytique, l'absence d'encoche et l'invariance orthoradiale permettant une résolution aisée des équations de diffusion dans chaque zone sous forme de séries de Fourier, puis un raccord entre les différentes zones est effectué pour trouver les coefficients de ces séries. Le matériau rotorique n'est pas considéré, il est supposé que ce dernier possède une perméabilité magnétique infinie. Quant au stator en poudre de fer, ce dernier est modélisé en lui affectant une perméabilité magnétique μ_{bulk} non infinie, ainsi qu'une résistivité homogène ρ_{bulk} . Les pertes par courants induits sont calculées par application du vecteur de Poynting à l'entrée du stator, ou alors une intégration volumique des courants induits sur tout le volume de ce dernier (les deux méthodes sont présentées, et donnent un résultat identique). Ceci implique qu'il n'est considéré dans les pertes par courants induits que les courants de Foucault dits « macroscopiques », c'est-à-dire qui circulent dans toute l'épaisseur de la culasse, ce qui justifie la prise en compte du phénomène de diffusion. Les pertes par courants induits à l'échelle de la particule sont négligées. Seule une composante de pertes par hystérésis est rajoutée aux pertes par courants induits macroscopiques, par application en chaque point de la culasse d'une formule de pertes volumiques du type $k_h B_m^h f$, puis par intégration sur tout le volume de la culasse.

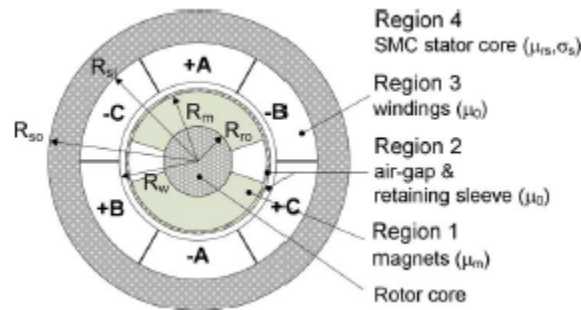


FIGURE 5.30: Représentation de la machine haute vitesse de la référence [Chebak *et al.*, 2009]

D'autres applications peuvent être trouvées dans la littérature électrotechnique, où des machines haute vitesse sont mises au point, toujours avec l'espoir que les matériaux doux granulaires vont permettre une réduction des pertes par courants induits pour des fréquences élevées en comparaison des matériaux laminés classiques. Ainsi peut-on citer l'application des paliers magnétiques relatée dans la référence [Mason *et al.*, 1998]. L'application visée est un dispositif de stockage d'énergie inertiel destiné à être utilisé dans les véhicules électriques ou hybrides, afin de stocker ou de fournir des pics de puissance au cours des cycles de fonctionnement. Dans cette application de stockage inertiel, le volant d'inertie est susceptible de tourner à haute vitesse (entre $30000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$ et $60000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$). Qui plus est, le stockage inertiel impose, afin de garder l'énergie stockée le plus longtemps possible, que la rotation du volant d'inertie se fasse avec des frottements négligeables. Ceci explique le recours à des paliers magnétiques. Encore faut-il qu'à ces vitesses rotations importantes, les pertes dans ces derniers soient faibles, expliquant le recours aux matériaux en poudre de fer pour la fabrication des parties tournantes des paliers.

Signalons aussi les travaux réalisés dans la thèse [Alhassoun, 2005]. L'objectif est de comparer les matériaux magnétiques que sont les tôles fer-silicium laminées et le matériau composite doux « ATOMET EM1 » de la société QMP, pour la conception d'une machine à réductance variable haute vitesse ($30000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$) de type 6/4. L'auteur a choisi une géométrie de machine, et a réalisé deux prototypes identiques, l'un utilisant le matériau laminé, et l'autre le matériau composite. Il n'y a donc pas eu de redimensionnement de la machine, contrairement aux références précédentes. La perméabilité inférieure du matériau en poudre de fer est la cause d'une inductance réduite dans la

position de conjonction de la machine. L'inductance d'opposition, quant à elle, du fait de la quantité d'air importante mise en jeu, n'est pas changée. Ceci aboutit à un différentiel d'inductances moindre, et donc au final à une perte de couple pour les solutions utilisant des matériaux composites par rapport à celles ayant recours aux tôles. Les pertes fer sont évaluées par une formule de Steinmetz dans les tôles, et, dans les poudres, la formulation des pertes totales p_{tot} volumique empirique suivante est utilisée :

$$p_{tot} = K f^x B_m^y \quad (5.42)$$

Cette formule empirique est donc exclusivement locale (aucun courant induit « macroscopique » n'est considéré), et regroupe tous les termes de pertes (par hystérésis et par courants induits). Les nombres K , x , et y doivent être identifiés par l'expérience. Après avoir ainsi calculé les pertes fer dans sa machine de cette manière (la distribution locale d'induction a été déterminée par éléments finis), l'auteur conclut que la fréquence imposée par le cahier des charges n'est pas suffisante pour que les poudres de fer puissent prendre l'avantage sur les matériaux laminés. En revanche, en augmentant la vitesse, il s'aperçoit que la solution en poudre de fer tend à rattraper la solution en tôles ferromagnétiques, laissant entrevoir une inversion possible de la tendance à vitesse plus élevée. Un complément d'étude thermique et mécanique est plus favorable aux poudres de fer. Ces dernières, du fait de leur isotropie thermique, permettent un meilleur refroidissement que les tôles classiques. En outre, sur le plan vibratoire, la structure massive du matériau en poudre compactée permet une réduction du bruit acoustique par rapport à la machine fabriquée en tôles. Ce critère de bruit est toujours important dans les machines à réluctance variable.

Applications des matériaux frittés Dans certaines applications, les matériaux en poudre magnétique sont volontairement frittés, chose qu'il est préférable, rappelons-le, d'éviter lorsque l'on souhaite réduire les pertes. Comme attendu, ces applications concernent surtout les cas où les pertes ne sont pas un critère important, mais où c'est la densité, et par conséquent la perméabilité, qui importent réellement. Ainsi peut-on citer la référence [Bularzik *et al.*, 1998], qui relate l'utilisation de matériaux formés de particules de fer frittées à haute température dans les applications pour lesquelles la fréquence de fonctionnement ne varie pas ou peu, comme les parties de l'inducteur des machines à courant continu. La température de frittage est de 1400°C pendant deux heures, que nous pouvons comparer avec le recuit des matériaux en poudre de fer isolée (la température ne dépasse pas 550°C). En revanche, la densité est très voisine de celle du matériau massif (7700 kg · m⁻³), la perméabilité magnétique relative atteint la valeur de 7000 (contre 800 pour les matériaux pressés fréquemment utilisés en électrotechnique), et l'induction pour un champ $H = 8000 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ est de 1.75T (contre 1.65T pour le matériau en poudre isolée).

Applications en électronique de puissance et dans le domaine des capteurs Par ce paragraphe, nous allons montrer que le domaine d'application des matériaux magnétiques doux composites ne se borne pas seulement à l'électrotechnique, mais s'étend à tous les domaines du génie électrique.

Exemple d'application en électronique de puissance La référence [Lefèvre, 2004] donne une application des matériaux en poudre de fer dans le domaine de l'électronique de puissance. L'application visée est la pile à combustible : ce système de génération d'énergie fait aujourd'hui l'objet de recherches approfondies, notamment à des fins d'applications dans le domaine de la traction automobile. Sans rentrer dans le détail du fonctionnement physique de la pile à combustible, disons seulement que l'inconvénient de ces dispositifs est de délivrer une tension de sortie continue de valeur très faible. Pour rendre la source d'énergie utilisable par un système de traction électrique, il convient de placer entre le système de traction et la pile à combustible un dispositif élévateur de tension, de type continu-continu. Le dispositif bien connu en électronique de puissance qui réalise cette fonction est le hacheur élévateur, encore dit « hacheur BOOST ». C'est pour cela que le convertisseur choisi est une structure de ce type (figure 5.31). Néanmoins, afin de réduire l'ondulation de courant, l'auteur opte pour des inductances entrelacées (présence sur le schéma de deux inductances L_1 et L_2). Le transformateur, étant choisi élévateur de tension, contribue aussi à l'augmentation de la tension entre sortie et entrée. La fréquence de découpage de cette structure est choisie égale à $f = 50 \text{ kHz}$. Le principe de ce type de hacheur est de stocker l'énergie à transférer à chaque cycle de la source vers le récepteur dans les inductances. Il faut donc que ces dernières comportent un entrefer, afin d'assurer ce stockage d'énergie. Comme montré au niveau de la figure 5.32, la manière classique de réaliser les inductances en électronique de puissance est la méthode de l'entrefer localisé : on bobine l'inductance autour d'un tore de matériau magnétique de perméabilité très grande, dans lequel on a préalablement ménagé un entrefer. Cette méthode possède l'inconvénient suivant : au voisinage de l'entrefer, les lignes de champ s'épanouissent, c'est-à-dire sortent du tore. Le

problème est que ces lignes de champ atteignent le bobinage, et induisent des pertes par courants de Foucault dans ce dernier. Qui plus est, au niveau du rayonnement CEM, ceci est très défavorable. C'est pour cela que dans notre situation, l'auteur choisit un matériau à perméabilité magnétique relativement faible : c'est la méthode de l'entrefer réparti, et l'énergie magnétique est directement stockée dans le tore, sans qu'il ne soit nécessaire de ménager un entrefer supplémentaire, ce qui supprime les inconvénients de l'entrefer localisé dont nous venons de parler.

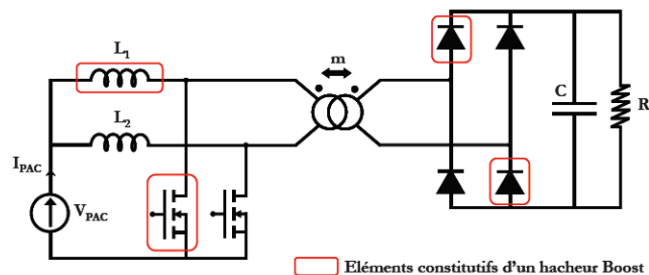


FIGURE 5.31: Structure de conversion en sortie de la pile à combustible, dérivée du hacheur élévateur (référence [Lefèvre, 2004])

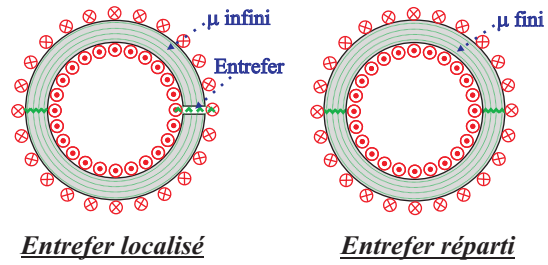


FIGURE 5.32: Comparaison entre les solutions à entrefer localisé et à entrefer réparti pour les inductances en électronique de puissance (référence [Lefèvre, 2004])

Bien que diverses solutions aient pu être envisagées pour le matériau constitutif de l'inductance (dont les ferrites), le choix des auteurs s'est finalement porté sur un matériau en poudre de type fer-nickel, spécialement conçu pour ce genre d'applications : un matériau à petits grains afin de limiter les pertes classiques à l'intérieur de chaque particule, et une pression de compaction faible (d'où une densité également faible) afin de limiter la conductivité globale de l'échantillon. Les pertes volumiques sont évaluées par des modèles phénoménologiques, de type Steinmetz : $p_{tot} = K f^x B_m^y$, les coefficients manquants étant trouvés expérimentalement. Comme bien souvent en électronique de puissance, les formes d'onde d'induction comportent des cycles mineurs, mais l'hypothèse est faite que les pertes dans ce cas s'obtiennent en superposant celles dues au cycle majeur à celles obtenues pour le cycle mineur centré. La perméabilité magnétique est ainsi fortement réduite (elle atteint 60 en valeur relative), mais, comme précisé, ceci est le but recherché pour cette application. Nous étudierons un matériau spécialement conçu pour les applications en électronique de puissance. Nous observerons au microscope la taille des grains, ainsi que la distance inter-grains, qui sera bien plus importante que celle des matériaux utilisés pour les machines électriques. C'est dans cet entrefer réparti que se stocke à présent l'énergie accumulée dans l'inductance.

Exemples d'applications dans le domaine des courants faibles (capteurs, radiofréquences...) Les matériaux en poudre de fer, frittés ou non, ont aussi de multiples applications dans le domaine de l'électronique des capteurs et du signal. Ainsi la référence [Bas *et al.*, 2003] relate-t-elle l'utilisation de matériaux en poudre frittés en tant que capteurs de position des roues des automobiles. Il s'agit de fournir l'information de rotation de la roue de l'automobile au système de freinage avec anti-blocage appelé couramment « ABS ». Pour cela, un disque en matériau ferromagnétique solidaire de l'axe des roues a été denté (figure 5.33). Un capteur électromagnétique fixe injecte un champ à la périphérie du disque, et est sensible aux variations de réluctance à chaque fois qu'une dent ferromagnétique du capteur passe dans l'axe du champ magnétique injecté. Ainsi, il est possible à un système électronique de traitement d'évaluer la vitesse de rotation des roues, et même de savoir lorsque cette vitesse s'annule, c'est-à-dire que la roue s'est bloquée. Le choix d'un matériau en poudre de fer frittée est dicté par l'impératif de disposer d'un matériau dur du point de vue mécanique, afin de pouvoir résister aux diverses projections de cailloux ou de gravier que subit de plancher d'un véhicule. Qui plus est, la haute perméabilité qui en résulte facilite le fonctionnement du capteur fondé sur les variations de réluctance. Dans cette application qui relève plus de l'électronique du signal que de puissance, les pertes n'ont guère d'importance. Le même article relate l'utilisation de matériaux identiques pour des capteurs de position situés sur l'axe des moteurs de pompe. Mais, pour de telles applications, la denture est asymétrique, de telle manière à fournir en plus une information sur le sens de rotation de l'axe de la pompe.



FIGURE 5.33: Capteur denté de position pour un système ABS (référence [Bas *et al.*, 2003])

L'article [Bas *et al.*, 2003] relate aussi l'utilisation de matériaux en poudre frittée pour des actionneurs de très petite puissance pour lesquels le rendement ne compte pas, comme par exemple les accessoires de l'industrie automobile ou alors les applications domotiques. En outre, ces matériaux sont à la base des actionneurs linéaires utilisés pour les têtes d'impression des imprimantes à aiguille.

Il existe des applications de matériaux composites non frittés dans le domaine de l'électronique haute fréquence. L'article [Lebourgeois *et al.*, 2003] relate l'utilisation de matériaux composites dans une gamme de fréquences allant de 1.5MHz à 500MHz, pour des applications en radio-communication. En effet, dans cette gamme de fréquences, la fabrication de matériaux magnétiques est assez délicate, à cause des pertes engendrées par le niveau de fréquences élevé. Le matériau magnétique est constitué d'un alliage contenant les éléments suivants : fer, nickel, molybdène, silicium, et bore. Il faut signaler que ce matériau n'est pas réduit en particules, mais est plutôt façonné sous la forme d'un fil de $8\ \mu\text{m}$ de diamètre. Le fil est ensuite isolé par de la silice, pour atteindre $15\ \mu\text{m}$ de diamètre. Le tore de matériau magnétique est ensuite fabriqué en bobinant du fil dans la direction de circulation du flux magnétique : de cette manière, le fractionnement du matériau en fils ne dégrade pas la perméabilité magnétique dans la direction de circulation du flux magnétique, mais gêne les courants induits dans le plan perpendiculaire à cette direction.

5.2.1.3 Apport du travail proposé dans cette thèse

La partie que nous venons de traiter sur les applications des poudres de fer a révélé le potentiel important de ces nouveaux matériaux, dans des domaines d'applications divers et variés, ce qui montre l'intérêt de ce thème de recherche. A l'inverse, il est flagrant de voir, dans la partie concernant la modélisation des pertes, que les modèles développés, principalement fondés sur la formule empirique de Steinmetz déclinée sous diverses formes, ne permettent pas de disposer d'une théorie unifiée des pertes dans ces matériaux. Ces modèles phénoménologiques s'opposent aux très importants travaux menés dans le cas des matériaux laminés ces dernières années [Fiorillo et Novikov, 1990], travaux qui, s'appuyant sur la théorie de la séparation de pertes, physiquement fondée [Bertotti, 1985d], ont permis d'aboutir à des résultats convaincants, notamment en ce qui concerne la prédiction des pertes pour des sollicitations en inductions les plus distordues. C'est le cas en pratique toujours rencontré dans les systèmes électrotechniques (voir le travail du chapitre 3 de cette thèse). Cette absence de travail de modélisation fondé sur des bases physiquement justifiées n'est pas à notre sens satisfaisant, car ce manque de connaissances pour décrire les mécanismes régissant les pertes dans de tels matériaux est sans doute un frein important à une utilisation plus généralisée. Du moins si on souhaite pouvoir choisir de manière raisonnée, pour une application donnée, le matériau le plus adapté (matériau laminé ou SMC), il faut pouvoir disposer de modèles d'une précision équivalente pour ces deux familles de matériaux, ce qui est, comme on a pu le voir, loin d'être le cas pour les SMC. D'autre part, comme on a pu le voir, ces matériaux sont intrinsèquement complexes, car les pertes par courants induits ont à priori lieu à deux échelles : les pertes classiques dites « microscopiques », à l'échelle de la particule, et les pertes « macroscopiques », à l'échelle de l'échantillon, à cause de l'isolation imparfaite des grains. Là encore, la littérature n'offre pas, à notre connaissance, de traitement unifié du problème : certains auteurs négligent un terme pour ne considérer que l'autre, ou vice versa, de sorte qu'il est assez difficile d'adopter une position claire.

Par conséquent, l'objectif de ce travail va être de proposer un début d'application de la théorie de la séparation des pertes dans ces matériaux, afin de disposer d'un modèle de pertes fondé sur des bases physiques, à l'image de celui dont on dispose pour le cas des matériaux laminés. Ceci devrait permettre de pouvoir prédire le comportement des pertes magnétiques pour diverses formes d'inductions d'excitations. Lors de ce travail, nous allons nous limiter, pour

l'instant, au cas des pertes en champ alternatif, pour lequel le manque est déjà flagrant. Qui plus est, en se servant de l'interprétation des pertes excédentaires au moyen de la théorie de Bertotti [Bertotti, 1985d], nous allons mieux comprendre les implications de la structure granulaire de ces matériaux sur les pertes mesurées. Comme tout travail de ce genre [Fiorillo et Novikov, 1990], il sera bien sûr indispensable de commencer par une campagne de mesures des pertes sur une large gamme de fréquences et d'inductions. Ces mesures seront menées dans plusieurs matériaux composites fournis par la société Höganäs. A cette fin, il convient aussi de disposer d'une procédure expérimentale de caractérisation fiable, afin de garantir la répétabilité des mesures : c'est ce que nous nous attacherons à définir dans la partie consacrée à la mesure des pertes dans les échantillons de forme torique. Pour séparer les pertes, un modèle de pertes classiques doit être développé. Nous allons donc obligatoirement nous heurter au problème des pertes par courants induits, dont on ne sait pas s'ils sont locaux ou globaux. Une procédure expérimentale devra donc être mise en oeuvre pour faire la lumière sur cette question.

Le but de notre travail est donc de fournir aux utilisateurs de tels matériaux une partie des outils qui leur manquent pour pouvoir faire une prédiction plus rigoureuse et plus fiable des pertes, afin de leur permettre de prédéterminer le comportement de ces matériaux dans les systèmes qu'ils doivent concevoir, ou, tout au moins, pouvoir comparer ce comportement avec celui des matériaux classiques laminés. De nombreuses perspectives subsisteront à la fin de cette partie, comme la caractérisation en champ bi-dimensionnel de ces mêmes matériaux granulaires.

5.2.2 Procédure de séparation des pertes dans les SMC

Après avoir présenté un état de l'art sur les SMC, aussi bien en ce qui concerne les modèles déjà développés que sur les applications de ces matériaux, nous allons à présent entrer dans le vif du sujet, en proposant une caractérisation expérimentale, ainsi qu'une analyse des pertes dans ces matériaux sur une large gamme de fréquences, allant de fréquences quasi-statiques à 10kHz. Différents niveaux d'inductions seront envisagés. L'étude sera menée sur des échantillons de matériaux commerciaux fournis par la société Höganäs (voir le catalogue sur la référence en ligne [Höganäs, 2009]). Nous nous concentrerons en particulier sur la comparaison de deux matériaux composites différents. L'un d'eux, désigné le nom « Prototyping » sur le catalogue d'Höganäs, est spécialement conçu pour les machines électriques. Il possède une perméabilité magnétique relative d'environ 450, une polarisation à saturation J_S voisine de 1.5T. Sa densité est importante, de l'ordre de $\delta_{proto} = 7450 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. D'après le catalogue, le constructeur recommande son utilisation pour des fréquences inférieures ou égales à 1kHz. Le nom de ce matériau vient du fait qu'il est conçu pour fabriquer des prototypes aisément, à savoir que ce matériau se découpe facilement en atelier. Il est livré en blocs cylindriques, de diamètre 80mm, et de hauteur 20mm. Nous nous servirons grandement par la suite de cette facilité à découper des échantillons toriques de différentes tailles dans ce matériau pour notre travail de caractérisation. Nous représentons au niveau de la photographie 5.34 le matériau « Prototyping », aussi bien le bloc avant découpe acheté auprès de la société Höganäs qu'un tore obtenu après découpe.



FIGURE 5.34: Photographie du bloc de matériau « Prototyping » acheté auprès de la société Höganäs, et d'un tore découpé dans un tel bloc

Nous allons comparer ce matériau avec un des matériaux du catalogue d'électronique de puissance, nommé

110i1P. La densité de ce matériau est plus faible, égale à $\delta_{110i} = 7260 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, traduisant une pression de compaction plus faible. La polarisation à saturation excède difficilement la valeur de 1 T. Le fabricant recommande son utilisation pour des fréquences de plusieurs dizaines de kilohertz. L'étude sera faite en champ alternatif, sur des échantillons toriques.

Dans une première partie, nous allons parler du dispositif expérimental utilisé afin de caractériser expérimentalement les échantillons au niveau des pertes. Une deuxième partie sera consacrée au calcul des pertes classiques, prélude indispensable pour effectuer la séparation des pertes. Le problème de conductivité « macroscopique » de l'échantillon sera discuté avec une attention particulière. La partie suivante sera consacrée aux résultats, pour les deux matériaux qui nous intéressent, de la procédure de séparation des pertes effectuée à partir des mesures. Enfin, une interprétation des pertes excédentaires en utilisant la théorie de Bertotti sera menée, en insistant sur les spécificités de ces matériaux granulaires.

5.2.2.1 Dispositif de caractérisation expérimental

Nous avons annoncé auparavant que le point de départ de cette étude de pertes était la caractérisation d'échantillons toriques. Nous allons détailler la procédure expérimentale de caractérisation, afin d'indiquer comment les valeurs de pertes qui nous seront par la suite utiles ont été mesurées. Nous allons présenter le synoptique du dispositif expérimental, puis la manière d'asservir l'induction dans le tore à une valeur sinusoïdale. Nous prêterons ensuite attention au problème de l'échauffement de l'échantillon, à cause des pertes cuivre dans le bobinage qui l'entoure et bien sûr de ses propres pertes fer. Nous verrons que l'élévation de température induit un changement dans la valeur des pertes mesurée, changement qui peut biaiser l'interprétation des résultats. Une méthode particulière devra donc être mise au point pour se prémunir de ce problème.

Présentation du dispositif expérimental de mesure des pertes Afin de pouvoir caractériser un matériau magnétique, il convient d'être capable d'imposer une induction dans celui-ci, aussi bien en fréquence f qu'en amplitude B_m . Nous avons en outre vu lors du chapitre 2 que les pertes dépendent de la forme d'onde de l'induction imposée (en particulier pour la composante de pertes par hystérésis et excédentaires). Dans une première étape de caractérisation, il convient sans doute d'imposer une forme d'onde sinusoïdale de la forme :

$$B(t) = B_m \cos(2\pi ft) \quad (5.43)$$

Comme nous l'avons dit, l'échantillon est de forme torique. La section du tore sera carrée, son côté est noté e . Notons \bar{D} le diamètre moyen de l'échantillon torique. Ces dimensions sont montrées à la figure 5.35. Vu que nous prendrons toujours un diamètre moyen \bar{D} très supérieur au côté e de la section du tore ($\bar{D} \gg e$), en pratique $\bar{D} = 10e$, il est légitime de penser qu'en l'absence d'effet de peau, le flux magnétique imposé à travers la section du tore crée une induction uniforme alternative à travers cette section.

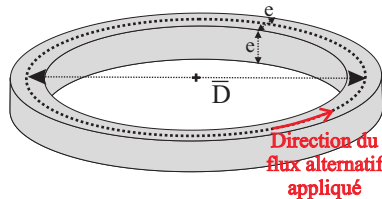


FIGURE 5.35: Représentation du tore de section carrée sur lequel on fait les mesures

Afin de créer le flux souhaité à travers la section du tore, il nous faut enrouler un bobinage autour de ce dernier, qui sera parcouru par un certain courant $i(t)$. Nous appellerons ce bobinage « bobinage primaire », constitué de N_{prim} spires. En se servant de l'hypothèse que le diamètre moyen \bar{D} est très supérieur au côté e de sa section, nous pouvons écrire le théorème d'Ampère qui lie le courant $i(t)$ au champ magnétique $H(t)$ de la manière suivante, vu que la longueur moyenne d'une ligne de champ peut être supposée égale au périmètre moyen $\bar{L} = \pi\bar{D}$ du tore :

$$H(t) = \frac{N_{prim}}{\bar{L}} i(t) \quad (5.44)$$

Il est facile, au moyen d'une sonde de courant, ou bien d'un capteur résistif, de connaître le courant $i(t)$, et par là même le champ magnétique $H(t)$ à travers la section du tore. Néanmoins, nous nous rappelons que nous ne souhaitons pas travailler à champ magnétique imposé, mais plutôt à induction magnétique imposée $B(t)$. Par conséquent, il nous faut concevoir un système d'asservissement qui calcule le courant $i(t)$ à injecter afin d'obtenir l'induction $B(t)$ voulue. Or, nous savons que la relation entre l'induction $B(t)$ et le champ magnétique $H(t)$ est non linéaire, et même hystérétique. La première étape d'un tel dispositif d'asservissement est donc de disposer d'un système captant l'induction $B(t)$ à travers la section du tore afin de pouvoir la contrôler (en fait un capteur de flux, car on suppose que l'induction $B(t)$ est homogène au travers de cette section). Nous choisissons un capteur inductif : nous bobinons un second enroulement, appelé « enroulement secondaire », constitué de N_{sec} spires autour du tore. Notons $v_{sec}(t)$ la tension mesurée aux bornes de cet enroulement. En notant $S = e^2$ la section du tore, cette tension secondaire est reliée à l'induction à travers la section par la relation suivante :

$$v_{sec}(t) = N_{sec} S \frac{dB}{dt} \quad (5.45)$$

Il est donc possible de déterminer l'induction par intégration lorsque l'on a mesuré la tension secondaire. Un exemple de tore muni de ces deux bobinages est montré à la photographie 5.36. Comme on peut le voir, la section du fil du bobinage secondaire, qui ne doit être parcouru par aucun courant, est bien plus fine que celle du bobinage primaire. Vu que les fils choisis sont de type émaillé, il serait dangereux de bobiner directement sur l'échantillon, dont les bords coupants risqueraient d'abîmer le vernis de nos fils, aboutissant à un court-circuit via la surface de l'échantillon. Pour se prémunir de ce danger, le tore est habillé d'une gaine de coton avant toute opération de bobinage.

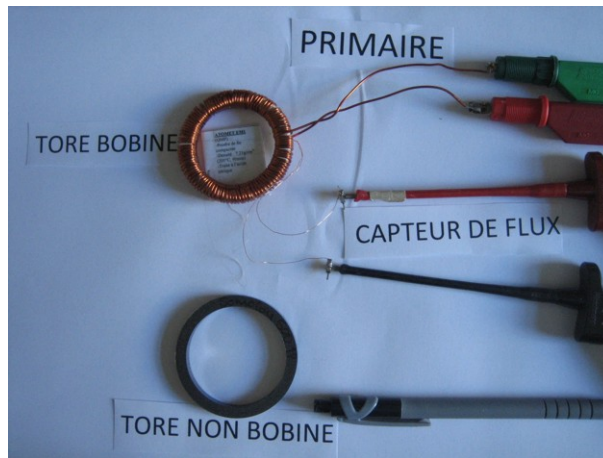


FIGURE 5.36: Photographie du tore avant bobinage, puis du tore bobiné

Le synoptique du dispositif de mesure est présenté au niveau de la figure 5.37. Expliquons en détail chaque élément de ce schéma. Nous voulons asservir l'induction $B(t)$ captée à travers la section du tore à une valeur de référence sinusoïdale du type $B^*(t) = B_m \cos(\omega t)$. Dans ce but, nous allons concevoir un système bouclé qui va comparer l'induction voulue $B^*(t)$ avec l'induction réellement obtenue $B(t)$, et va tenter d'annuler l'erreur entre ces deux grandeurs. La complexité de cette tâche vient du comportement non-linéaire et hystérétique du système à étudier. L'algorithme de contrôle implanté afin d'effectuer l'asservissement sera présenté à la section suivante, et tiendra compte des non-linéarités du système à étudier.

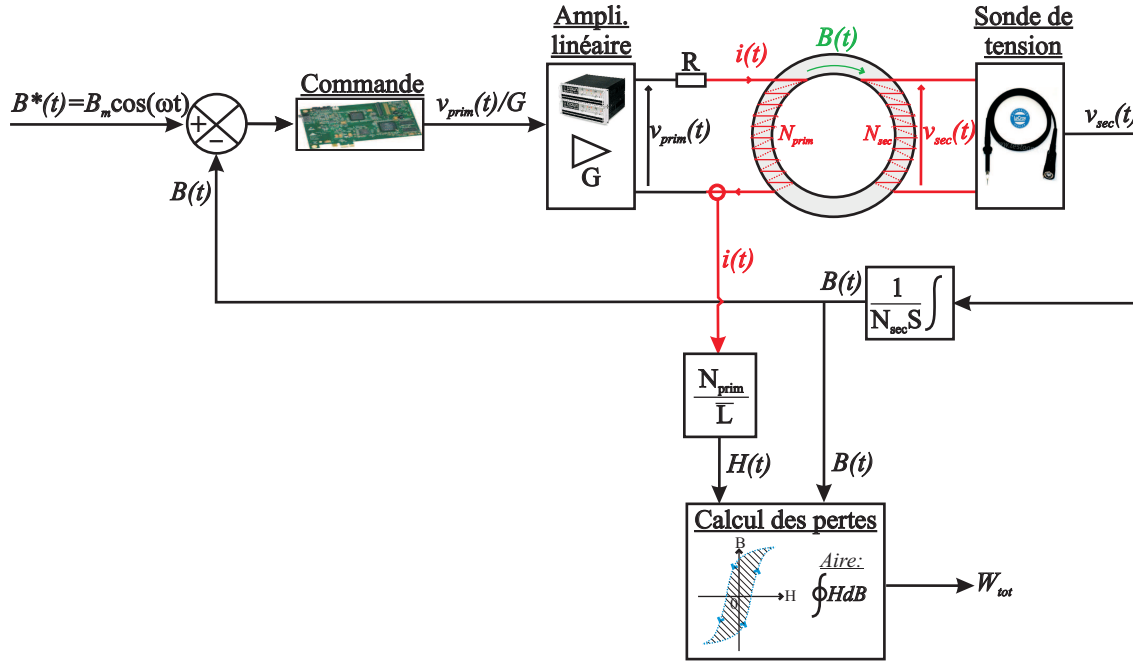


FIGURE 5.37: Synoptique du procédé de mesure des pertes avec contrôle de l'induction

Pour le moment, nous admettons que cet algorithme fonctionne correctement, et délivre l'image de la tension $v_{prim}(t)$ à appliquer aux bornes des enroulements du primaire afin de générer dans le tore l'induction $B(t)$ voulue. Il y a amplification en tension pour alimenter le primaire par un amplificateur linéaire de classe A, qui possède un rendement faible. Un amplificateur de classe D (avec découpage) n'est malheureusement pas envisageable à cause des cycles mineurs générés dans le matériau à la fréquence de découpage. L'amplificateur utilisé est de marque CROWN AUDIO, modèle MA 5000VA, délivrant un courant limite I_{LIM} allant jusqu'à 60A, pour une tension maximale V_{LIM} pic-à-pic de 170V, en limitant la puissance apparente à 5000VA. Le gain en tension, noté G , est égal à 20. Nous choisissons cependant de ne pas dépasser le courant limite $I_{LIM} = 20$ A, vu que la mesure de courant est une mesure résistive par une résistance mise en série au primaire, et qu'un fort courant risque d'endommager cette résistance en la faisant trop chauffer. Nous admettons que l'induction maximale voulue est $B_m = 1.25$ T. La fréquence maximale voulue est de 10kHz. Nous partirons sur des tores tels que ceux fournis par la société Höganäs afin de tester les échantillons standards tels que le matériau 110i1P (référence en ligne [Höganäs, 2009]), qui ont les dimensions suivantes :

- Un côté pour la section carrée du tore valant $e = 5$ mm.
- Un diamètre moyen \bar{D} égal à $10e$, donc valant $\bar{D} = 50$ mm.

Toutes ces données permettent de déduire le nombre de tours à donner au niveau du primaire N_{prim} . En effet, d'après la relation de Boucherot, on doit respecter, en régime sinusoïdal, la relation suivante, en négligeant toute chute de tension résistive devant la chute de tension inductive :

$$2\pi N_{prim} S f B_m \leq \frac{V_{LIM}}{2} \Rightarrow N_{prim} \leq 43 \quad (5.46)$$

Cette considération est valable aussi bien pour le matériau « Prototyping » que pour le matériau 110i1P. Nous pouvons rechercher, d'après le théorème d'Ampère, le nombre de spires minimal à donner pour chaque matériau, par une approximation linéaire de la relation $B(H)$. La catalogue du constructeur (référence en ligne [Höganäs, 2009]) nous renseigne sur le fait que la perméabilité magnétique relative du matériau « Prototyping » est $\mu_{r_{Proto}} = 455$, alors que celle du matériau 110i1P, est, comme attendu, bien plus faible : $\mu_{r_{110i1P}} = 110$. La relation dimensionnant le nombre de spires est alors :

$$N_{prim} \geq \frac{B_m}{\mu_r \mu_0} \frac{\bar{L}}{I_{LIM}} \quad (5.47)$$

Pour le matériau « Prototyping », on trouve $N_{prim} \geq 18$. Les contraintes 5.46 et 5.47 sont donc compatibles sur

toute la gamme de fréquence pour ce matériau. Pour limiter au maximum le courant appelé, nous prendrons, pour le matériau « Prototyping », $N_{prim_{Proto}} = 40$.

En revanche, pour le matériau 110i1P, la contrainte sur le courant appelé impose $N_{prim} \geq 71$. Les contraintes 5.46 et 5.47 sont donc incompatibles pour ce matériau. Nous allons donc procéder ainsi. Nous allons placer un bobinage primaire pour ce matériau de 80 spires, ce qui respecte la contrainte de courant maximal $I_{LIM} = 20$ A. Mais avec un point milieu situé à 40 spires. Avec un tel nombre de spires de $N_{prim} = 80$, on peut atteindre une fréquence de :

$$f_{max} = \frac{V_{LIM}/2}{2\pi N_{prim} S B_m} = 5.4 \text{ kHz} \quad (5.48)$$

Pour les mesures situées au delà de cette fréquence, jusqu'à 10kHz, nous n'avons guère d'autre choix que de passer à un nombre de spires $N_{prim} = 40$, pour ne pas dépasser la tension limite autorisée. Seulement, nous dépasserons alors de courant limite de $I_{LIM} = 20$ A (nous aurons un courant maximal $I_{max} = \frac{B_m \bar{L}}{\mu_r \mu_0 N_{prim}} = 35$ A). Ceci n'est pas très grave, car l'amplificateur linéaire peut en fait fournir jusqu'à 60A. Néanmoins, la caractérisation sera alors plus délicate qu'auparavant, car il faudra prendre garde à faire les mesures très rapidement, sous peine d'endommager la résistance de mesure du courant à cause d'une surchauffe.

En ce qui concerne le nombre de spires N_{sec} au niveau du secondaire des tores à placer, nous allons juste prendre garde que pour l'induction maximale $B_m = 1.25$ T, pour une fréquence $f = 10$ kHz, la tension de sortie respecte les contraintes de l'électronique de commande qui capte cette tension, sans être obligé d'effectuer un abaissement de tension. Or, s'agissant d'entrées d'amplificateurs opérationnels, la tension captée doit être comprise dans la plage ± 15 V. Ceci impose ainsi un nombre de spires au secondaire N_{sec} inférieur à :

$$2\pi N_{sec} S f B_m \leq 15 \text{ V} \Rightarrow N_{sec} \leq 7 \quad (5.49)$$

On se donne donc $N_{sec} = 7$ afin de perdre le moins possible en précision de tension captée. On récapitule les nombres de spires précédents au sein du tableau 5.2.

Nombre de spires	Matériau « Prototyping »	Matériau 110i1P	
		80 si $f \in [0, 5400 \text{ Hz}]$	40 si $f \in [5400 \text{ Hz}, 10 \text{ kHz}]$
N_{prim}	40		
N_{sec}	7		7

TABLE 5.2: Récapitulation des différents nombres de spires à utiliser pour les deux tores afin d'atteindre une induction $B_m = 1.25$ T, pour une fréquence maximale de 10kHz

A la figure 5.37, comme nous le disions, nous avons fait figurer une résistance R entre l'amplificateur linéaire, et le bobinage primaire. Cette résistance sert à la mesure du courant, ce qui a été déjà signalé. Il s'agit d'une résistance de 1Ω , formée de 50 résistances de 50Ω chacune. La raison de cette démultiplication est que les résistances utilisées sont des résistances de signal d'un demi-Watt chacune, afin de garantir la précision de la valeur de la résistance, ainsi que l'absence d'éléments parasites réactifs, qui peuvent être présents en utilisant les résistances de puissance. Qui plus est, cette résistance favorise, comme nous allons le voir au prochain paragraphe, les opérations de régulation, en permettant une stabilité des mesures réalisées.

Maintenant que nous avons décrit le système de puissance, nous allons parler à présent de la manière dont les pertes sont calculées. une fois la tension secondaire $v_{sec}(t)$ captée, l'opération permettant d'obtenir l'induction $B(t)$ est la suivante :

$$B(t) = \frac{1}{N_{prim} S} \int v_{sec} dt \quad (5.50)$$

Ensuite, le courant $i(t)$ étant connu, l'onde de champ magnétique $H(t)$, qui lui est directement proportionnelle, est elle aussi connue. Par conséquent, il est possible de tracer le cycle d'hystérésis dynamique, et par intégration, d'en déduire les pertes volumiques totales sur un cycle de fonctionnement, notées W_{tot} , selon la formule démontrée au chapitre 2 :

$$W_{tot} = \oint H dB \quad (5.51)$$

Faisons la remarque suivante. Au chapitre 2, nous avons vu qu'à haute induction, cette méthode fondée sur la mesure du champ magnétique était susceptible de ne pas être suffisamment précise, au motif que les matériaux

étant très doux, le cycle d'hystérésis peut se révéler trop étroit pour être intégré avec précision. Heureusement, dans notre situation, il est permis de penser que le matériau, du fait de ses pertes par hystérésis importantes à cause de sa structure granulaire, possède donc un champ coercitif relativement élevé, et il est par conséquent plus aisé d'appliquer cette méthode, vu que le cycle d'hystérésis est naturellement plus large. Notons que toutes ces opérations d'intégration sont réalisées numériquement, mais le nombre de points élevé par période (environ 5000), quelque soit la fréquence, autorise à penser que le bruit sur les mesures est négligeable.

Détail du dispositif de contrôle mis en oeuvre afin d'asservir l'induction $B(t)$ à une valeur sinusoïdale

Nous allons ici détailler la méthode d'asservissement numérique de l'induction à une valeur sinusoïdale. Dans l'article [Barbисio *et al.*, 2003], une méthode est proposée. Supposons que l'on veuille obtenir dans l'échantillon une induction $B^*(t)$. Par dérivation, ceci est équivalent à vouloir obtenir une tension secondaire $v_{sec}^*(t) = N_{sec} S \frac{dB^*}{dt}$. Notons $B(t)$ et $v_{sec}(t)$ respectivement les inductions et tensions secondaires effectivement obtenues, que l'on voudrait égales aux grandeurs de consigne. L'onde d'induction voulue $B^*(t)$ est discrétisée en N échantillons sur sa période T , avec une période d'échantillonnage T_e vérifiant $T_e \ll T$ (dans notre cas, on a $T/T_e = N = 5000$). On note $B_n^* = B^*(nT_e)$ l'échantillon d'induction d'indice $n \in [1, N]$ (figure 5.38). Cette discrétisation est valable pour toutes les autres grandeurs : $B(t)$, $v_{sec}^*(t)$, et $v_{sec}(t)$.

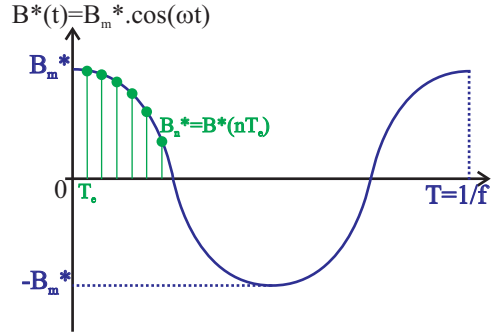


FIGURE 5.38: Discretisation de la forme d'onde de l'induction $B(t)$

L'algorithme [Barbисio *et al.*, 2003] assure la convergence des grandeurs réelles B et v_{sec} vers les grandeurs de consigne B^* et v_{sec}^* en un certain nombre d'itérations (notons k l'indice d'itération), si on applique l'algorithme suivant sur la tension primaire $v_{prim}(t)$ de commande :

$$(v_{prim_n})_{k+1} = (v_{prim_n})_k + \alpha (B_n^* - (B_n)_k) + \beta (v_{sec_n}^* - (v_{sec_n})_k) \quad (5.52)$$

La méthode du point fixe [Leibovic, 1963a] assure l'annulation des erreurs rapidement, pourvu que les constantes de correction α et β restent assez faibles pour garantir la stabilité du système. Il faut savoir que cette méthode peut s'appliquer avec succès même pour des formes d'onde d'induction très complexes, avec la présence de cycles mineurs.

Néanmoins, dans notre cas nous pensons que nous n'avons pas besoin d'une méthode aussi sophistiquée, vu que nous fixons une induction voulue $B^*(t)$ sinusoïdale. Nous allons donc procéder comme expliqué dans la référence [Bertotti *et al.*, 1993]. La méthode est rappelée ici :

- Pour commencer, on alimente le primaire de notre système (association tore et résistance R) en régime sinusoïdal. On tâtonne avec l'amplitude de la tension sinusoïdale primaire appliquée $v_{prim}(t)$ jusqu'à ce que cette dernière donne un cycle d'hystérésis dont l'amplitude d'induction coïncide avec l'amplitude voulue B_m^* . Bien entendu, étant donné la non-linéarité du système, il va de soit qu'avec une tension primaire sinusoïdale, l'induction obtenue $B(t)$, bien qu'elle puisse avoir la bonne amplitude B_m^* , n'est pas sinusoïdale. Qu'importe, on considère qu'en acquérant le cycle d'hystérésis dynamique $B(H)$ à la fréquence de travail f qui nous intéresse, cyclé possédant la bonne amplitude B_m^* , on a identifié le système. On va maintenant se servir de cette identification du cycle d'hystérésis dynamique pour trouver la forme d'onde de la tension primaire qui donne la forme d'onde sinusoïdale souhaitée : $B^*(t) = B_m^* \cos(2\pi ft)$.
- Pour ce faire, on va supposer que l'induction $B(t)$ est sinusoïdale à la fréquence f , d'amplitude B_m , comme l'est l'onde d'induction voulue $B^*(t)$ (figure 5.39). Ensuite, pour chaque échantillon de temps nT_e de la période

T pour lequel on veut un échantillon d'induction B_n^* , on va inverser le modèle d'hystérésis pour trouver l'échantillon de champ magnétique correspondant H_n . En faisant cette opération pour chaque échantillon nT_e on trouve la forme d'onde du champ magnétique $H(t)$ qu'il faudrait afin d'obtenir, à la fréquence f considérée, une induction $B(t)$ sinusoïdale, égale à la grandeur de consigne $B^*(t)$. Ce travail d'inversion du cycle d'hystérésis dynamique pour en déduire l'onde de champ magnétique à partir de l'induction est montré au niveau de la figure 5.39. Il est clair alors que le champ magnétique assurant une induction sinusoïdale $B^*(t)$ n'a rien de sinusoïdal, et ceci d'autant plus que l'induction est élevée, et que l'échantillon se sature. Il y a même un déphasage entre l'induction et le fondamental du champ magnétique, justifiant ainsi les pertes obtenues, et d'autant plus important que la fréquence est grande (donc que le cycle d'hystérésis est large). Ensuite, le courant à appliquer $i(t)$ afin d'obtenir le champ magnétique voulu $H(t)$ est obtenu par le théorème d'Ampère : $i(t) = \frac{L}{N_{prim}} H(t)$. Connaissant la résistance R rajoutée (somme de la résistance de mesure du courant, ainsi que de celle des fils du bobinage primaire, ce qui nécessite une mesure relativement précise), le modèle est inversé afin de trouver la tension primaire non sinusoïdale $v_{prim}(t)$ nécessaire pour obtenir l'induction sinusoïdale voulue $B^*(t)$, par l'application de la loi des mailles :

$$v_{prim}(t) = Ri(t) + N_{prim}S \frac{dB^*}{dt} \quad (5.53)$$

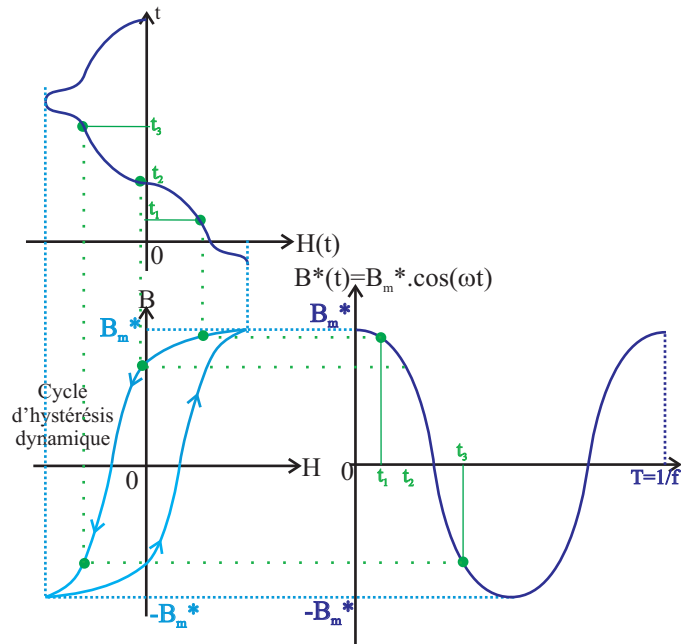


FIGURE 5.39: Inversion du modèle d'hystérésis dynamique $B(H)$

- Une dernière étape subsiste cependant. En effet, nous avons dit que l'on a identifié le cycle d'hystérésis dynamique $B(H)$ à la fréquence f souhaitée et à l'induction maximale B_m^* voulue lorsque l'induction $B(t)$ n'était pas sinusoïdale, puisque la tension primaire $v_{prim}(t)$ l'était. On s'est ensuite servi de ce cycle d'hystérésis pour rendre l'induction $B(t)$ sinusoïdale. On peut objecter que cette démarche n'est pas exacte, car la forme d'onde de l'induction, c'est-à-dire le fait qu'elle soit sinusoïdale ou non dans notre cas, influe sur le cycle d'hystérésis, même à amplitude d'induction B_m^* et à fréquence f donnée. Il peut donc être nécessaire de répéter plusieurs fois la procédure d'identification du cycle d'hystérésis ainsi que d'inversion du modèle, au fur et à mesure que l'induction obtenue se rapproche de plus en plus d'une forme sinusoïdale. En tout état de cause, c'est lorsque le facteur de forme de l'induction $B(t)$ se rapproche à $\pm 3\%$ près du facteur de forme idéal d'un signal sinusoïdal que, conformément aux usages de la métrologie, nous pouvons arrêter les itérations, et considérer que l'induction sinusoïdale souhaitée est atteinte. Nous rappelons que le facteur de forme d'un signal est la valeur efficace sur la valeur moyenne. Dans le cas d'un signal sinusoïdal, ce facteur de forme idéal est égal à $FdF_{sinus} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2}{\pi} \approx 1.1107$.

Problème de la température de l'échantillon sur la précision des mesures Nous allons parler ici d'un problème que nous avons découvert en tentant de réaliser une première série de mesures, et qui nous a conduit à modifier, ou plutôt à améliorer la procédure de mesure mise au point au paragraphe précédent. Il s'est avéré, après avoir fait les premières séries de mesures sur le matériau « Prototyping », que le tore découpé (de diamètre moyen $\bar{D} = 50$ mm, et de côté de section $e = 5$ mm), pour une induction sinusoïdale d'amplitude $B_m = 1$ T et pour des fréquences f allant des conditions quasi-statiques à 10kHz, présentait des courbes de pertes mesurées en fonction de la fréquence avec un comportement surprenant. En effet, il était possible d'observer une diminution importante des pertes à haute fréquence, lorsque l'énergie volumique perdue par cycle W_{tot} devenait importante. Cette diminution demeurait inexpliquée. Puis nous avons postulé que cette diminution des pertes volumiques mesurées dans l'échantillon était due à un échauffement, d'autant plus sensible à haute fréquence. Cet échauffement est dû à la fois aux pertes cuivre dans le bobinage inducteur, mais surtout aux pertes fer intrinsèques de l'échantillon que l'on souhaite caractériser. Nous savons que les pertes par courants induits dans un corps lorsque l'on impose l'induction appliquée et que l'on néglige l'effet de peau sont directement proportionnelles à la conductivité électrique σ de ce corps. En nous souvenant que la conductivité électrique des métaux comme le fer diminue (leur résistivité augmente) lorsque la température augmente, il est possible d'expliquer la diminution relative des pertes observées en fréquence élevée à cause de l'augmentation de la température, cette dernière diminuant la composante de pertes dynamiques. Qui plus est, pour ce matériau en poudre de fer enrobée dans une résine qui est sans doute un aussi bon isolant thermique qu'elle est un isolant électrique, la conductivité thermique de ces matériaux composites est probablement plus faible que la tôle laminée dans le plan de laminage, bien que nous ayons vu dans l'état de l'art que cette conductivité thermique avait l'avantage d'être isotrope dans tout l'espace dans le cas des poudres de fer.

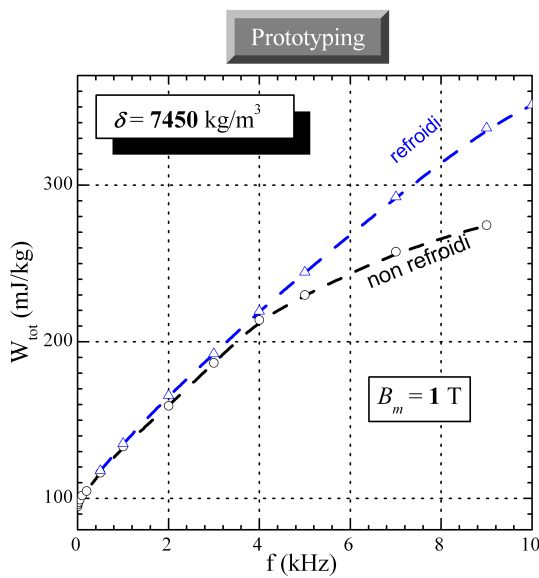


FIGURE 5.40: Pertes pour le matériau « Prototyping » pour une amplitude d'induction $B_m = 1$ T, pour un tore de dimensions $\bar{D} = 50$ mm, $e = 5$ mm

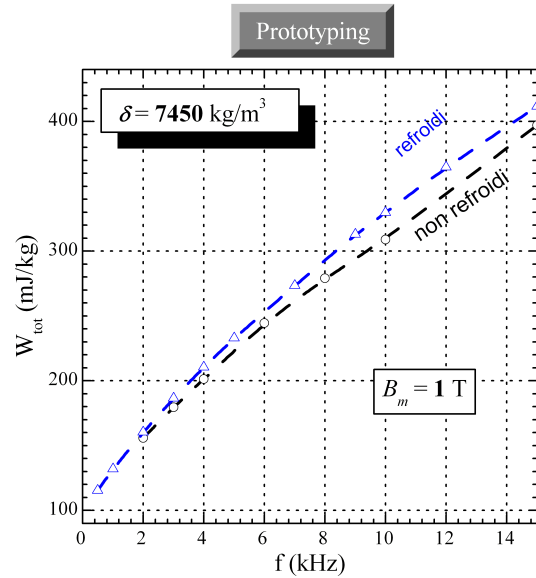


FIGURE 5.41: Pertes pour le matériau « Prototyping » pour une amplitude d'induction $B_m = 1$ T, pour un tore de dimensions $\bar{D} = 25$ mm, $e = 2.5$ mm

Afin de vérifier cette hypothèse sur l'influence de la température, il convenait donc de mettre au point un dispositif capable de limiter l'échauffement en cours de mesure. La première des choses à laquelle nous avons pensé a été de plonger l'échantillon en permanence dans de l'eau froide circulante au cours de la mesure, afin de refroidir efficacement le tore qui nous intéresse. Ceci limite en outre l'influence des pertes cuivre de l'inducteur sur l'échauffement de l'échantillon, et maintient en outre la température externe de l'échantillon à une température froide. Néanmoins, vu qu'il est permis de penser que la conductivité thermique de ce genre de matériau n'est pas élevée (nous n'avons néanmoins pas fait cette mesure pourtant intéressante, et la littérature sur le sujet ne présente guère de donnée à notre connaissance), il n'est pas à exclure que, surtout pour les hautes fréquences pour lesquelles les pertes sont importantes, les pertes ne provoquent, du moins au début de la mesure, un échauffement adiabatique de

l'échantillon. Auquel cas, le refroidissement à eau voit son utilité diminuée. Pour résoudre ce problème, nous nous fixons comme règle de toujours faire les mesures le plus rapidement possible, afin de ne pas laisser à l'échantillon le temps de s'échauffer. Typiquement, pour chaque point de mesure, on est obligé de faire quelques itérations afin de trouver la tension au primaire $v_{prim}(t)$ assurant une induction $B(t)$ sinusoïdale. Lorsque nous avons trouvé cette onde de tension $v_{prim}(t)$ assurant une induction sinusoïdale dans le tore, nous mémorisons cette onde, et laissons, avant de l'appliquer puis de mesurer les pertes, s'écouler un certain temps pendant lequel le système est débranché afin de pouvoir se refroidir dans l'eau. Puis nous appliquons la tension, et mesurons les pertes de manière quasi-instantanée. Avec cette procédure, nous avons refait les mêmes mesures pour le matériau « Prototyping » (tore avec un diamètre moyen $\bar{D} = 50$ mm, et de côté de section $e = 5$ mm), à induction sinusoïdale de valeur maximale $B_m = 1$ T. Nous montrons au niveau de la figure 5.40 les pertes obtenues sur la gamme de fréquences qui nous intéresse, avec et sans la tentative de réduction de la température en cours de mesure. Les résultats parlent d'eux-mêmes quant à la différence obtenue lorsque la fréquence est importante, nous exhortant à l'avenir à pratiquer, pour tous les échantillons, une mesure dans l'eau circulante et la plus rapide qu'il soit pour éviter les échauffements.

A noter que nous pourrions penser que les effets de l'échauffement sur les pertes ne sont pas un problème fondamental, les effets thermiques modifiant les résultats de la même façon pour tous les échantillons, ce qui ne fausserait pas la comparaison. C'est bien entendu faux, car les effets thermiques sont d'autant plus sensibles dans les échantillons pour lesquels les pertes sont importantes. Qui plus est, pour des raisons que nous ne manquerons pas d'expliquer par la suite, nous allons être amenés, pour le matériau « Prototyping », à effectuer des mesures dans des tores de taille différente, en conservant les mêmes niveaux d'induction sinusoïdaux, ainsi que les mêmes fréquences. Même s'il s'agit du même matériau, donc de pertes volumiques comparables, l'influence de la température se manifeste de manière différente suivant la taille de l'échantillon. En effet, la température en régime permanent dépend du ratio surface d'évacuation sur volume de production des pertes, donc est inversement à la dimension caractéristique du système. Par conséquent, pour un même matériau et une même excitation, l'effet de la température sera plus critique pour un gros tore que pour un petit tore. Ce phénomène est visible au niveau de la figure 5.41, où on a refait les mêmes mesures (en induction et en fréquence) pour un tore du même matériau « Prototyping ». Néanmoins, on a fait subir à ce tore une homothétie d'un facteur $1/2$, le diamètre moyen étant de $\bar{D} = 25$ mm, et de côté de section $e = 2.5$ mm. Il est évident que pour ce tore, bien qu'on ait pu mener des mesures à une fréquence maximale de 15 kHz, que l'effet de la diminution des pertes à cause de l'échauffement se fait bien moins sentir que pour le tore de dimensions plus importantes, bien que, et nous y reviendrons, les pertes volumiques soient très voisines. On peut expliquer ceci en disant que le petit tore s'échauffe moins, ayant un rapport surface d'évacuation sur volume de production de pertes plus important.

Nous retiendrons donc qu'il nous apparaît important, après cette partie, de mener les mesures de pertes en refroidissant le tore par l'utilisation des méthodes dont nous avons parlé auparavant, bien que celles-ci soient bien évidemment plus contraignantes d'un point de vue expérimental.

5.2.2.2 Calcul du terme de pertes classiques

Lors de l'étude des pertes dans les matériaux laminés conventionnels, le calcul du terme de pertes classiques est une tâche qui peut paraître relativement aisée : du moment que l'effet de peau est négligeable, l'énergie volumique dissipée par cycle à cause des courants induits à l'échelle de la tôle se calcule par la formule bien connue suivante, pour une tôle d'épaisseur d soumise dans son plan à une induction alternative $B(t)$ [Fiorillo et Novikov, 1990] :

$$W_{clas} = \frac{\sigma_{Fe} d^2}{12} \frac{1}{f} \left(\frac{dB}{dt} \right)_{eff}^2 \quad (5.54)$$

Dans le cas où l'induction en question est sinusoïdale d'amplitude B_m , c'est-à-dire $B(t) = B_m \cos(2\pi ft)$, nous rappelons la formule des pertes classiques volumiques suivantes :

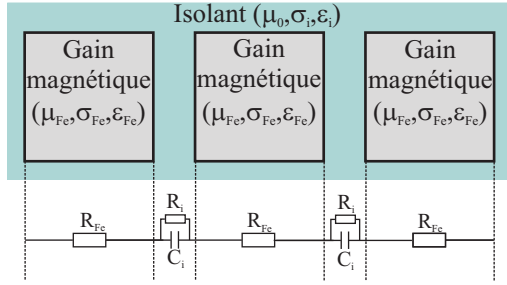
$$W_{clas}^{(sin)} = \frac{\pi^2}{6} \sigma_{Fe} d^2 f B_m^2 \quad (5.55)$$

Dans les matériaux magnétiques composites, le calcul des pertes classiques n'est malheureusement pas aussi trivial, à cause de la structure granulaire du matériau compressé, formé d'un grand nombre de petites particules de taille comme de forme irrégulières, que l'on voudrait isolées les unes des autres. Mais comme cette isolation des grains n'est pas parfaite, l'échantillon possède une conductivité globale, ou encore « macroscopique », qui est loin d'être nulle. Face à cette complexité intrinsèque du matériau, les réponses que l'on trouve dans la littérature ne sont pas

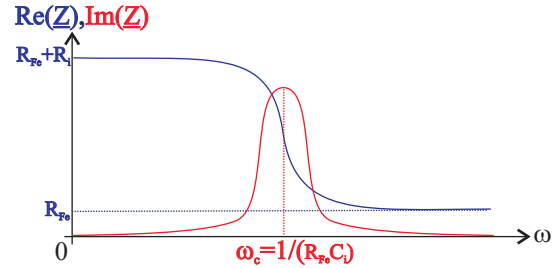
totallement satisfaisantes, et semblent parfois même en contradiction les unes avec les autres. En effet, on est en droit de penser que les pertes par courants induits sont la somme de deux termes distincts : un terme de pertes locales, ou « microscopique », généré par les courants induits à l'intérieur des particules, pour lesquelles la conductivité à prendre en compte est celle du fer pur σ_{Fe} . Un autre terme de pertes serait les pertes par courants induits « macroscopiques », à l'échelle de l'échantillon tout entier. La conductivité mise en jeu est celle de l'échantillon macroscopique, notée σ_{bulk} . Certains auteurs [Magnussen *et al.*, 2004, Lefebvre *et al.*, 1997], par leur décision d'appliquer des formules analogues aux formules de Steinmetz, font des pertes une grandeur strictement locale, au même titre que ce qui se passe dans les matériaux laminés. Cela signifie qu'ils ne considèrent que la composante locale de pertes, sans se préoccuper des courants « macroscopiques ». D'autres auteurs [De Wulf *et al.*, 2002, Chebak *et al.*, 2009] prennent le contrepied de cette démarche, en ne considérant que des pertes par courants induits globaux, en supposant le matériau homogène de conductivité σ_{bulk} , et ne considèrent aucun courant induit à l'échelle locale de la particule. D'ailleurs, une telle démarche complique notablement l'étude, car le fait de considérer des courants induits à l'échelle de l'échantillon oblige à ne plus négliger l'effet de peau, et donc à résoudre une équation de diffusion pour calculer les pertes classiques. Devant ces démarches diverses, il est difficile, pour le concepteur de machine qui recherche une formulation des pertes dans ce type de matériau, de savoir quel parti prendre. Un des objectifs de l'étude qui va être menée dans ce paragraphe dont le but est le calcul de la composante de pertes par courants induits, est d'éclaircir le point suivant : faut-il adopter un modèle de pertes par courants induits local, ou bien global, pour le calcul des pertes classiques ? Dans ce but, dans une première partie, nous allons nous concentrer sur la mesure de la résistivité globale de l'échantillon σ_{bulk} . Puis nous nous mettrons au point une méthode afin de déterminer si cette dernière a ou non une influence sur les pertes mesurées dans le cas de nos échantillons toriques. Forts des conclusions obtenues, nous pourrons, dans une seconde partie, proposer un modèle de la composante de pertes classiques. Ce calcul est un prélude nécessaire pour aller plus loin dans la séparation des pertes.

Les pertes classiques : phénomène local ou global ? La réponse que nous allons donner ici sur le caractère local ou bien global des pertes par courants induits dans les matériaux magnétiques composites ne concernera que le matériau « Prototyping » pour les machines électriques. En effet, nous verrons que pour apporter la réponse la question posée, nous avons été amenés à réaliser des expériences sur des tores de taille différente. De telles manipulations sont aisées avec un matériau que l'on peut couper à notre guise, comme le matériau « Prototyping », justement vendu en blocs destinés à être découpés. En revanche, pour le matériau de l'électronique de puissance 110i1P (comme tous les autres matériaux du catalogue [Höganäs, 2009]), la société Höganäs fournit des tores de diamètre moyen $\bar{D} = 50$ mm, et de côté de section carrée $e = 5$ mm. Il n'est pas possible de redimensionner ces tores, et une fabrication par pressage sur mesure serait très onéreuse. Pour ces raisons, nous n'avons pas pu mener le travail sur le matériau 110i1P, et nous demandons au lecteur de bien vouloir admettre que les conclusions se rapportant au matériau « Prototyping » se généralisent au matériau 110i1P.

Mesure de la résistivité macroscopique du matériau ρ_{bulk} Dans cette partie, nous allons nous attaquer à la mesure de la résistivité globale des échantillons de matériaux composites. Cette question a déjà été traitée dans la littérature [Cyr, 2007, Cyr *et al.*, 2007]. D'ailleurs nous allons réinvestir la méthode de mesure de la résistance d'un échantillon torique au moyen du secondaire d'un transformateur. Cela étant, nous allons y apporter un élément nouveau. En effet, la littérature existant sur les matériaux granulaires tels que les ferrites [Fiorillo *et al.*, 2006] a démontré que l'isolant séparant les grains pouvait, lorsque la fréquence augmentait de manière significative, être la cause d'un effet capacitif inter-grains. La référence [Snelling, 1988] a précisé cette notion, en modélisant de tels matériaux à grains isolés par une association de composants électriques, comme montré à la figure 5.42a. La cellule élémentaire de l'association de dipôle modélise un grain de matériau ferromagnétique, ainsi que l'isolant qui l'entoure. Le grain magnétique a une conductivité σ_{Fe} grande (celle du fer pur), une perméabilité magnétique $\mu_{Fe} \gg \mu_0$, et une permittivité diélectrique $\epsilon_{Fe} = \epsilon_0$. A l'inverse, l'isolant possède une conductivité $\sigma_i \ll \sigma_{Fe}$, une perméabilité magnétique $\mu_i = \mu_0$, et une permittivité diélectrique potentiellement plus grande que celle du vide $\epsilon_i \geq \epsilon_0$. Etant donné la géométrie simple des grains de la figure 5.42a, les éléments R_{Fe} (résistance du grain magnétique, très faible), C_i (capacité équivalente à la couche d'isolant), et R_i (résistance de la couche d'isolant, très grande), sont calculés par les relations classiques liant les grandeurs locales aux éléments équivalents du circuit (référence [Snelling, 1988]). Nous avons tracé une ébauche du diagramme de Bode de la cellule élémentaire d'impédance $\underline{Z} = R_{Fe} + \frac{R_i}{1+jR_iC_i\omega}$ à la figure 5.42b. Il correspond à l'idée intuitive qu'à basse fréquence, c'est la résistance de l'isolant R_i de conductivité σ_i très faible qui impose l'impédance du milieu. A haute fréquence, cette résistance très importante se trouve néanmoins court-circuitée par la capacité inter-grain, abaissant fortement l'impédance.



(a) Réseau équivalent aux grains isolés du matériau en ferrite (référence [Snelling, 1988])



(b) Courbe d'impédance Z d'une cellule élémentaire du réseau équivalent aux grains isolés du matériau en ferrite (référence [Snelling, 1988])

FIGURE 5.42: Le modèle proposé par la référence [Snelling, 1988]

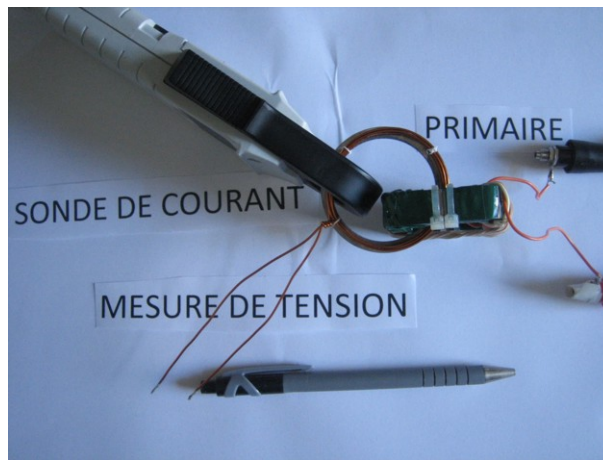


FIGURE 5.43: Dispositif de mesure d'impédance des matériaux en poudre des références [Cyr, 2007, Cyr *et al.*, 2007]

Dans la référence [Snelling, 1988], le matériau étudié était les ferrites, utilisées dans des gammes de fréquences potentiellement très importantes. Dans le cas du matériau composite, il serait tentant de dire d'emblée que vu la gamme de fréquences dans laquelle nous nous trouvons (on n'excède pas quelques dizaines de kilohertz), cette capacité intergrains n'a pas d'influence. Néanmoins, on peut objecter que ce n'est pas forcément le cas, étant donné que cette capacité est inversement proportionnelle à l'espace intergrains. Par conséquent, comme le taux de compression est important, l'espace inter-grains est très faible, et nous craignons donc que cette capacité, rendue très importante par cet espace inter-grains très faible, puisse prendre des valeurs élevées, et donc se manifester même en basse fréquence. Nous allons montrer que ce n'est pas le cas par une expérience sur le matériau « Prototyping ». Nous reprenons le dispositif des références [Cyr, 2007, Cyr *et al.*, 2007], que nous avons représenté à la photographie 5.43. Nous en rappelons le principe de fonctionnement. Nous allons alimenter le primaire d'un transformateur en matériau ferromagnétique (ici, le matériau est de l'orthonol, en vert sur la photographie 5.43), par un signal sinusoïdal en tension de fréquence variable. Afin que le flux généré dans ce transformateur soit lui aussi sinusoïdal, nous nous imposons de nous placer, quelque soit la fréquence, dans la zone de linéarité du transformateur. Pour chaque fréquence, nous trouverons, par la relation de Boucherot, l'amplitude de la tension sinusoïdale primaire à appliquer afin de générer une induction maximale de 1T dans le transformateur. Nous passons, au travers du circuit magnétique, le tore de matériau composite dont nous souhaitons connaître l'impédance. Une force électromotrice est alors induite dans ce tore par la circulation du flux magnétique dans le transformateur (en fait, ce tore se comporte comme le secondaire du transformateur qui ne comporterait qu'une seule spire). Afin de mesurer la force électromotrice induite dans ce tore, nous plaçons quelques spires de cuivre en circuit ouvert au plus proche du tore en question. Nous pouvons également connaître, à l'aide d'une simple sonde de courant, le courant dans le tore généré par cette force électromotrice. En faisant le quotient de la tension force électromotrice mesurée et du

courant induit, nous pouvons, en tenant compte à la fois de leurs amplitudes et du déphasage, connaître l'impédance complexe équivalente au tore. Cette méthode possède l'avantage, par rapport aux méthodes classiques par analyseur d'impédance, d'assurer une force électromotrice uniformément induite dans le tore, sans avoir besoin de créer des contact directs, plus ou moins bons, avec le matériau.

L'impédance équivalente totale du tore mesurée par cette méthode devrait donc être équivalente, d'après la référence [Snelling, 1988], à un grand nombre de circuits élémentaires comme ceux de la figure 5.42b, branchés en série. Si la capacité inter-particules se faisait sentir, nous assisterions par conséquent à la présence d'une partie imaginaire pour l'impédance mesurée, et une diminution de sa partie réelle.

La mesure d'impédance totale du tore obtenue pour le tore « Prototyping » (diamètre moyen $\bar{D} = 50$ mm, et côté de section $e = 5$ mm) est montrée à la figure 5.44.

Nous trouvons, par extrapolation aux fréquences nulles, une résistance totale statique pour le tore 1.66Ω , soit, étant donné les dimensions du tore, une résistivité statique de $\rho_{bulk} = 265 \mu\Omega \cdot m$. Cette valeur est en accord avec celle fournie dans le catalogue [Höganäs, 2009] de la société Höganäs pour ce matériau, de $280 \mu\Omega \cdot m$. Bien qu'intéressés uniquement par la gamme de fréquences allant jusqu'à 10kHz, nous avons tout de même poussé les mesures jusqu'à la fréquence de $f_{LIM} = 25$ kHz. En effet, pour cette fréquence, la profondeur de peau δ dans un matériau plan infini ayant la résistivité statique ρ_{bulk} de notre échantillon, et une perméabilité magnétique relative $\mu_r = 455$ d'après le catalogue d'Höganäs, est donnée par :

$$\delta = \sqrt{\frac{\rho_{bulk}}{\pi f_{LIM} \mu_r \mu_0}} = 2.5 \text{ mm} \quad (5.56)$$

Cette dimension est donc exactement la demi-épaisseur du tore. Nous pouvons donc, approximativement, considérer que les mesures sont valides jusqu'à 25 kHz car l'effet de peau demeure négligeable, mais plus après cette fréquence. Nous voyons d'ailleurs une légère tendance à l'augmentation de la partie réelle avant la fréquence limite, certainement due à un début d'augmentation de l'impédance à cause de l'effet de peau naissant. En tout cas, la figure 5.44 semble clairement démontrer que les effets capacitifs ne se manifestent pas aux fréquences auxquelles nous travaillons, la partie réelle ne diminuant pas, et la partie imaginaire ne devenant pas positive pour traduire une éventuelle avance des présumés effets capacitifs : la partie imaginaire reste, mis à part le bruit de calcul, toujours nulle. Cela nous confirme que cette résistivité statique ρ_{bulk} , bien qu'assez faible, n'est pas doublée d'effets réactifs à cause de la structure granulaire du matériau, sans doute principalement grâce au fait que l'on travaille à des fréquences basses.

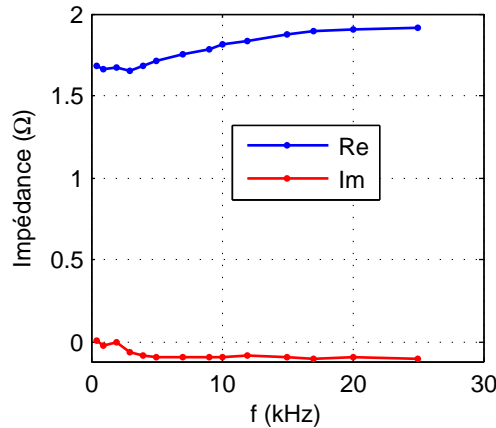


FIGURE 5.44: Résultat concernant l'impédance complexe obtenue pour le tore de matériau « Prototyping » par la méthode du transformateur exposée à la figure 5.43

À propos de résistivité statique ρ_{bulk} , nous avons tenté, après cette mesure, une mesure de résistivité statique au moyen de la méthode de l'ohmmètre à quatre pointes, en reprenant le même tore, en y faisant un trait de scie très fin, et en mesurant ensuite la résistance des deux côtés du trait de scie. Nous avons trouvé une résistivité près de trois fois supérieure à celle obtenue par la méthode du transformateur, et donc à celle donnée par le constructeur. Ce problème a été signalé dans la référence [Cyr *et al.*, 2007]. Il s'agit de la difficulté à assurer un contact de qualité entre les pointes et l'échantillon en matériau composite. Nous émettons l'hypothèse, comme signalé dans l'article

[Yanhong et Kliman, 2004], que cette conductivité n'est pas celle d'un matériau homogène, mais qu'elle est due à des contacts aléatoires entre grains : c'est une conductivité de percolation. Par conséquent, il est à craindre qu'en appliquant de manière ponctuelle les électrodes de l'ohmmètre, nous ne faisons participer à la conduction que la région proche de l'électrode, et non pas tout l'échantillon, ce qui explique la conductivité élevée mesurée par cette méthode. Mettre au point une expérience permettant de valider cette hypothèse fait partie des perspectives de ce travail. En tout cas, nous retiendrons que la méthode sans contact du transformateur permet d'induire lors des mesures une force électromotrice uniforme dans le tore, et donc de faire une mesure précise de la conductivité statique de l'échantillon torique.

Calcul des pertes dans des tores de taille différente La mesure de la résistivité statique ρ_{bulk} constitue un point important pour caractériser cet échantillon. Néanmoins, il serait prématuré de prétendre se servir de cette résistivité statique afin de calculer une composante de pertes statiques « macroscopique ». En effet, dans la référence [De Wulf *et al.*, 2002], la procédure de séparation des pertes proposée est fondée sur la démarche suivante. Il est postulé que les pertes sont uniquement dues au courants de Foucault globaux circulant à l'échelle de l'échantillon tout entier. La formulation de ces pertes classiques « macroscopiques » est trouvée en résolvant l'équation de diffusion dans l'échantillon et en supposant une résistivité globale de l'échantillon intervenant pour le calcul des pertes, notée ρ_{loss} . Cette résistivité globale pour les pertes est ensuite calculée en pratiquant un fitting de courbe afin de faire en sorte que les pertes excédentaires (calculées par différence entre les pertes totales d'une part, et la somme des pertes classiques et par hystérésis d'autre part) vérifient les formules prévues par la théorie de Bertotti [Bertotti, 1985d] (une distorsion à l'origine, et un comportement linéaire des pertes en fonction de la racine carrée de la fréquence \sqrt{f} pour des fréquences plus grandes). Il est remarqué que la résistivité globale de l'échantillon provenant de la mesure statique ρ_{bulk} est très différente de celle ρ_{loss} évaluée par la méthode d'analyse des pertes proposée (il existe une différence de presque un facteur 4 entre ces deux grandeurs). L'explication donnée dans l'article [De Wulf *et al.*, 2002] est que la mesure de la résistivité statique ρ_{bulk} de l'échantillon est menée dans la direction d'application de l'induction alternative, alors que les courants induits circulent dans le plan perpendiculaire à cette direction. Il n'y a donc pas de raison pour que la résistivité statique mesurée ρ_{bulk} soit semblable à celle intervenant pour les pertes ρ_{loss} . Nous faisons l'hypothèse que ce phénomène est encore dû à la conductivité de percolation, qui a des conséquences différentes dans le plan bi-dimensionnel de circulation des courants de Foucault, et dans le cas de la mesure de la résistivité statique ρ_{bulk} , pour laquelle les parcours suivis par le courant continu de mesure de la résistivité statique peuvent être bien plus complexes.

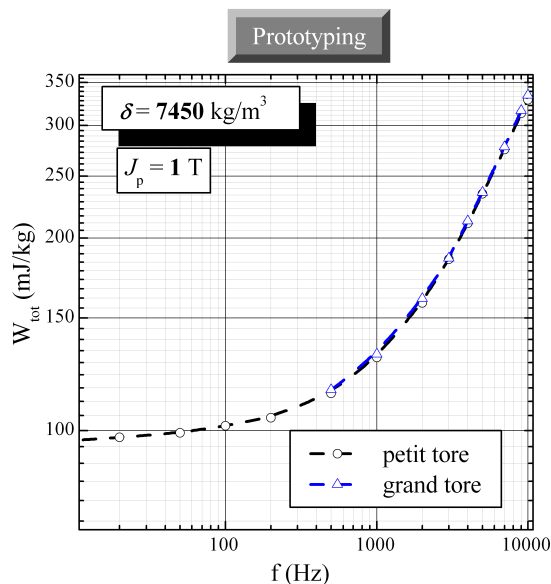


FIGURE 5.45: Comparaison entre l'énergie volumique perdue par cycle dans le grand tore ($\bar{D} = 50 \text{ mm}$ et $e = 5 \text{ mm}$), et l'énergie volumique perdue par cycle dans le petit tore ($\bar{D} = 25 \text{ mm}$ et $e = 2.5 \text{ mm}$), pour une polarisation sinusoïdale de valeur maximale $J_p = 1 \text{ T}$

Il importe donc de mettre au point une autre méthode que celle de la mesure de la résistivité statique ρ_{bulk} réalisée à la rubrique précédente pour en déduire l'ampleur de cette composante de pertes par courants induits « macroscopiques » dans les échantillons de matériau « Prototyping » qui nous intéressent. Nous proposons la démarche suivante. Nous pouvons remarquer que les pertes volumiques par courants induits à l'échelle de l'échantillon sont les seules pertes dépendant de la forme ou du volume de ce dernier. Les autres termes de pertes sont exclusivement locaux. Par conséquent, nous pensons qu'en prenant des échantillons de différentes tailles ou formes du même matériau « Prototyping », soumis à des inductions d'excitation alternatives de même amplitude B_m et de même fréquence f , et en comparant les énergies volumiques perdues dans ces différents échantillons, il devient possible d'évaluer l'ampleur de cette composante de pertes qui dépend de la géométrie de l'échantillon. C'est donc pour cela que nous allons découper, dans le matériau « Prototyping », un tore ayant toutes ses dimensions réduites d'un facteur $1/2$ par rapport au tore standard de diamètre moyen $\bar{D} = 50$ mm, et de côté de section carrée $e = 5$ mm (nous avons d'ailleurs déjà utilisé ce petit tore ayant pour dimensions $\bar{D} = 25$ mm, et $e = 2.5$ mm au paragraphe consacré aux problèmes thermiques). Nous menons les mesures de pertes dans les deux tores de taille différente, pour une induction sinusoïdale d'amplitude $B_m = 1$ T (la polarisation maximale J_p est aussi égale à 1 T, car nous confondons, pour un matériau doux, l'induction avec la polarisation), et pour des fréquences variant de 0 à 10 kHz. Nous superposons les résultats au niveau de la figure 5.45.

Nous pouvons remarquer au niveau de la figure 5.45 que les énergies volumiques perdues pour les deux tores de taille différente, mais excités par les mêmes inductions sont quasiment semblables. Par conséquent, il nous est autorisé de penser que les pertes sont exclusivement un phénomène local, et donc que les pertes par courants induits « macroscopiques » circulant à l'échelle de l'échantillon sont négligeables par rapport aux autres termes de pertes locales. Grâce à cette étude, nous savons que pour la suite du travail, le modèle de pertes classiques à développer, pour nos échantillons, est exclusivement un modèle local de pertes par courants induits dans chaque particule, et que nous sommes dispensés de nous intéresser aux courants induits à l'échelle de l'échantillon tout entier.

Précisons le point suivant. Nous ne sommes pas en train d'annoncer que dans les poudres de fer, les pertes classiques sont toujours exclusivement un phénomène local, et qu'il n'y a pas lieu de s'intéresser aux pertes par courants induits globaux. En effet, une telle conclusion irait à contre-courant du travail de nombreux auteurs [De Wulf *et al.*, 2002, Chebak *et al.*, 2009], et même à l'encontre des mesures de pertes rapportées par le fabricant Höganaäs lui-même, et consignées dans son catalogue en ligne [Höganaäs, 2009]. Dans ce catalogue, le fabricant a clairement constaté qu'il y avait une différence entre les pertes volumiques mesurées sur un tore de section carrée de côté $e = 5$ mm, et sur un tore de section carré $e = 15$ mm, les pertes volumiques étant plus importantes dans ce dernier cas, ce qui montre que le terme de pertes peut effectivement bel et bien dépendre des dimensions de l'échantillon. Nous sommes simplement en train de dire que si nous prenons un tore de section carrée $e = 5$ mm, cette dimension est assez petite pour pouvoir négliger les pertes par courants induits « macroscopiques », puisque, si nous prenons un tore plus petit ($e = 2.5$ mm dans le cas étudié), on n'observera plus de diminution significative des pertes. En revanche, nous sommes conscients que si nous prenons un tore de section plus importante, il se pourrait fort bien que l'effet dimensionnel se manifeste bel et bien, en changeant la valeur des pertes volumiques, comme observé par le fabricant. D'ailleurs le cas des courants de Foucault « macroscopiques » est certainement le cas le plus réaliste dans la pratique. En effet, les culasses des machines électriques ont généralement un volume important, avec des épaisseurs de plusieurs centimètres. Une procédure de séparation des pertes en prenant en compte un terme de courants de Foucault macroscopiques aurait donc un intérêt évident. Néanmoins, nous renvoyons ce point en perspective, pour deux raisons. D'une part, un échantillon de taille importante pose plus de difficultés pour être magnétisé, notamment en ce qui concerne la puissance de l'amplificateur linéaire, sans parler du fait que plus l'échantillon est grand, plus il est difficile à refroidir. D'autre part, il n'est pas mauvais de commencer avec un échantillon petit pour lequel le terme de pertes macroscopiques est négligeable, afin de nous focaliser sur le calcul et l'analyse du terme de pertes microscopiques. Ce dernier point sera le parti que nous prendrons au cours de ce travail.

Nous admettrons aussi que cette conclusion reste valide également pour le matériau 110i1P de l'électronique de puissance, bien que nous n'ayons pas pu vérifier l'hypothèse des pertes locales en prenant un tore plus petit, faute de pouvoir disposer de ce tore. Néanmoins, il ne nous semble pas absurde d'admettre cette hypothèse, car le matériau pour l'électronique de puissance est compacté avec une pression moindre que le matériau « Prototyping » (sa densité est plus faible), de manière à empêcher les contacts entre grains (la résistivité statique macroscopique de l'échantillon atteint $7600 \mu\Omega \cdot \text{m}$, contre $280 \mu\Omega \cdot \text{m}$ pour le matériau « Prototyping »). Par conséquent, si pour le matériau « Prototyping », on est parvenu à démontrer que pour le tore de diamètre moyen $\bar{D} = 50$ mm, et de côté de section carrée $e = 5$ mm, les pertes pouvaient être considérées comme locales, alors il est légitime de penser

que c'est a fortiori le cas pour un tore de matériau 110i1P de mêmes dimensions pour lequel les grains sont encore mieux isolés les uns des autres par une structure moins compacte.

Calcul des pertes classiques pour les deux échantillons

Principe de la modélisation A présent, nous allons développer un modèle de pertes classiques pour les deux matériaux doux composites que nous allons étudier. Nous savons que ce modèle de pertes par courants induits doit être local, c'est-à-dire à l'échelle de la particule. Il s'agit, pour parler simplement, de calculer les courants induits dans une particule. Le principal obstacle, dans cette tâche, réside justement dans la taille et la forme irrégulière de ces grains de fer, comme nous allons le voir sur les micrographies réalisées. La référence [Cyr, 2007] avait proposé de supposer, pour un tel travail, que tous les grains de fer sont des sphères de diamètre d_g (ce diamètre est le diamètre moyen observé des particules à partir de micrographies), et d'appliquer les formules des pertes par courants de Foucault données dans la référence [Bozorth, 1951], en négligeant l'effet de peau. En sinusoïdal, pour une induction d'amplitude B_m de fréquence f , en prenant la résistivité ρ_{Fe} du fer pur qui constitue les particules, les pertes classiques volumiques sont données par la formule suivante :

$$W_{clas}^{(sin)} = \frac{(\pi d_g B_m)^2}{20 \rho_{Fe}} f \quad (5.57)$$

Nous allons raisonnablement reprendre l'hypothèse consistant à négliger l'effet de peau à l'échelle des particules. Bien qu'en réalité, ces dernières sont de taille comme de forme irrégulières à cause de leur procédé de fabrication par atomisation ainsi que les déformations plastiques qu'elles subissent pendant le processus de compaction, il semble nécessaire de faire l'hypothèse d'une forme régulière afin de donner un modèle des pertes par courants induits qui demeure relativement simple et exploitable. Néanmoins, l'hypothèse des grains sphériques nous dérange quelque peu, car un empilement de sphères ne peut en aucun cas justifier le taux de compaction élevé obtenu. Nous proposons donc une forme géométrique capable de remplir tout l'espace à 100%, comme par exemple un empilement de parallélépipèdes rectangles.

Méthode de calcul Afin de développer un modèle des courants induits dans les grains supposés rectangulaires du matériau magnétique, nous allons à présent résoudre le problème bi-dimensionnel suivant de manière analytique. Le choix de la résolution analytique, par rapport aux méthodes numériques largement répandues [Nord *et al.*, 2004, De Wulf *et al.*, 2002], est dicté par le caractère explicite, la souplesse et la rapidité de calcul qu'offre ce genre de méthodes.

Nous allons calculer les pertes par courants de Foucault dans un rectangle de longueur L et de largeur l , soumis à une onde d'induction $B(t)$ supposée uniforme et connue en tout point du rectangle. La conductivité du rectangle est celle du fer pur, notée $\sigma_{Fe} = 9.93 \cdot 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$. Le problème est résolu dans la base cartésienne représentée au niveau de la figure 5.46.

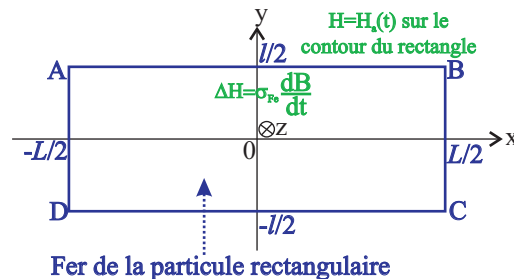


FIGURE 5.46: Résolution de l'équation de Poisson sur le champ magnétique dans un domaine de forme rectangulaire

L'équation de Maxwell-Faraday donne l'équation suivante :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.58)$$

L'équation de Maxwell-Ampère va quant à elle donner, en négligeant les courants de déplacement :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{H} = \overrightarrow{J} \quad (5.59)$$

Et la relation constitutive du milieu conducteur est bien entendu :

$$\overrightarrow{J} = \sigma_{Fe} \overrightarrow{E} \quad (5.60)$$

En combinant les équations 5.58 et 5.59 et en se servant de la relation constitutive du milieu, on obtient la relation :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{H} = -\sigma_{Fe} \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \quad (5.61)$$

En appliquant l'identité vectorielle du double rotationnel :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \overrightarrow{H} - \overrightarrow{\Delta} \overrightarrow{H} = -\sigma_{Fe} \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \quad (5.62)$$

L'hypothèse de négliger l'effet de peau consiste à ne pas tenir compte de la rétroaction des variations du champ magnétique \overrightarrow{H} sur l'induction \overrightarrow{B} , qui est supposée être constante sur tout le rectangle (elle ne dépend donc pas des coordonnées spatiales), et imposée par la source d'excitation extérieure. Par conséquent, dans l'équation précédente, le terme $\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$ est supposé être la source d'excitation connue. Le fait de négliger la rétroaction du champ magnétique \overrightarrow{H} sur l'induction \overrightarrow{B} permet de ne pas avoir à introduire la relation $\overrightarrow{B}(\overrightarrow{H})$ constitutive du matériau qui est non-linéaire, ce qui représente une simplification inestimable pour mener à bien le calcul analytique.

Utilisons à présent l'hypothèse 2D. Les grandeurs ne dépendent alors que des coordonnées du plan de la figure 5.46. L'induction magnétique est supposée orientée suivant l'axe z de la figure 5.46 : $\overrightarrow{B}(t) = B(t) \overrightarrow{u}_z$. Dans ces conditions, le champ magnétique $\overrightarrow{H}(x, y, t)$ est dirigé lui aussi suivant l'axe z . Il ne possède donc qu'une seule composante : $\overrightarrow{H}(x, y, t) = H(x, y, t) \overrightarrow{u}_z$. Cette hypothèse 2D permet de dire que la divergence du champ magnétique est nulle, et l'équation précédente devient une équation de Poisson scalaire à résoudre sur le rectangle de la figure 5.46 :

$$\Delta H = \sigma_{Fe} \frac{dB}{dt} \quad (5.63)$$

Vu que le champ magnétique ne possède qu'une seule composante, il est approprié de déterminer cette grandeur en résolvant l'équation 5.63. Par la suite, le vecteur densité de courant $\overrightarrow{J}(x, y, t)$, localisé dans le plan xy d'après l'hypothèse 2D, est obtenu par la relation de Maxwell-Ampère 5.59, qui, étant donné l'hypothèse 2D, devient :

$$\begin{cases} J_x &= \frac{\partial H}{\partial y} \\ J_y &= -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \quad (5.64)$$

Pour résoudre l'équation de Poisson dans le rectangle de la figure 5.46, il nous manque une condition aux limites aux frontières du rectangle. Il est naturel d'imposer une condition de Dirichlet sur la frontière, tel que le champ magnétique sur le contour du rectangle, du type : $H|_{\text{contour}} = H_a(t)$, où $H_a(t)$ est le champ magnétique imposé à la frontière du rectangle par les ampères-tours d'excitation qui créent l'induction magnétique $B(t)$. Ce champ $H_a(t)$ appliqué à la frontière du domaine n'est autre que les ampères-tours par unité de longueur suivant l'axe z appliqués autour du rectangle pour créer l'induction magnétique $B(t)$. Le problème à résoudre est donc :

$$\begin{cases} H|_{\text{contour}} = H_a(t) & \text{sur le contour du domaine rectangulaire} \\ \Delta H = \sigma_{Fe} \frac{dB}{dt} & \text{dans le domaine rectangulaire} \end{cases} \quad (5.65)$$

Cette équation sera résolue analytiquement par la méthode du développement en séries de fonctions propres. Plus précisément, nous choisissons une solution de la forme :

$$H(x, y, t) = H_a(t) + H_1(x, t) + H_2(x, y, t) + H_3(x, y, t) \quad (5.66)$$

La somme $H_1 + H_2 + H_3$ doit vérifier l'équation de Poisson sur le domaine, mais par contre une condition de Dirichlet nulle sur le contour. Nous allons à présent expliquer succinctement comment nous choisissons et déterminons chaque terme séparément.

-Champ H_1

C'est ce premier terme de champ magnétique qui est choisi de telle manière à vérifier l'équation de Poisson $\Delta H_1 = \sigma_{Fe} \frac{dB}{dt}$. Afin de simplifier la détermination de ce terme de champ magnétique, ce dernier est choisi comme ne dépendant que d'une variable spatiale, la coordonnée x par exemple. De plus, nous choisissons naturellement de respecter la condition de Dirichlet nulle sur les segments $[AD]$ et $[BC]$ de la figure 5.46. Nous avons donc à vérifier le problème :

$$\begin{cases} H_1(-L/2, t) = H_1(L/2, t) = 0 & \text{sur le contour du domaine rectangulaire} \\ \frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2} = \sigma_{Fe} \frac{dB}{dt} & \text{dans le domaine rectangulaire} \end{cases} \quad (5.67)$$

La solution à ce problème est donnée par :

$$H_1(x, t) = \frac{1}{2} \sigma_{Fe} \frac{dB}{dt} \left(x^2 - \frac{L^2}{4} \right) \quad (5.68)$$

-Champ H_2

Vu que le champ H_1 vérifie l'équation de Poisson, ce champ magnétique H_2 doit seulement vérifier l'équation de Laplace $\Delta H_2 = 0$. Etant donné que le champ H_1 est nul sur les segments $[AD]$ et $[BC]$, il doit en être de même pour le champ H_2 . En revanche, le champ H_2 doit être égal à l'opposé du champ H_1 au niveau du segment $[AB]$, afin que le champ magnétique résultant vérifie sur ce segment la condition de Neumann nulle. Nous choisissons le champ H_2 nul sur le segment $[CD]$, le champ H_3 étant le dual pour les conditions aux limites du champ H_2 : il est nul sur le segment $[AB]$, et égal à l'opposé du champ H_1 sur le segment $[CD]$. Nous récapitulons le problème à résoudre pour déterminer le champ H_2 sur le rectangle de la figure 5.46 :

$$\begin{cases} H_2(-L/2, y, t) = H_2(L/2, y, t) = 0 & \text{sur les segments } [AD] \text{ et } [BC] \\ H_2(x, -l/2, t) = 0 & \text{sur le segment } [CD] \\ H_2(x, l/2, t) = -H_1(x, t) & \text{sur le segment } [AB] \\ \Delta H_2 = 0 & \text{dans le domaine rectangulaire} \end{cases} \quad (5.69)$$

Une solution à ce problème est une série harmonique de la forme :

$$H_2(x, y, t) = \sum_{k \geq 1} h_{2k}(t) \sinh \left((2k-1) \frac{\pi}{L} \left(y + \frac{l}{2} \right) \right) \cos \left((2k-1) \frac{\pi}{L} x \right) \quad (5.70)$$

Pour déterminer, pour tout entier $k \geq 1$, les nombres $h_{2k}(t)$, on utilise la condition de Dirichlet sur le segment $[AB]$. On va développer l'équation parabolique du champ H_1 de l'équation 5.68 en séries de Fourier :

$$H_1(x, t) = \frac{1}{2} \sigma_{Fe} \frac{dB}{dt} \left(x^2 - \frac{L^2}{4} \right) = \sum_{k \geq 1} a_k(t) \cos \left((2k-1) \frac{\pi}{L} x \right) \quad (5.71)$$

Le coefficient a_k est donné par l'intégrale suivante :

$$a_k(t) = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} H_1(x, t) \cos \left((2k-1) \frac{\pi}{L} x \right) dx = -\sigma_{Fe} \frac{dB}{dt} (-1)^{k-1} \frac{4d^2}{(2k-1)^3 \pi^3} \quad (5.72)$$

Et donc par conséquent le coefficient h_{2k} est donc obtenu par l'équation :

$$h_{2k}(t) = -\frac{a_k(t)}{\sinh \left((2k-1) \frac{\pi l}{L} \right)} \quad (5.73)$$

-Champ H_3

Comme on l'a expliqué, le champ H_3 est le dual du champ H_2 en ce qui concerne les conditions aux limites sur les segments $[AB]$ et $[CD]$. Par conséquent, on obtient le champ H_3 par l'équation :

$$H_3(x, y, t) = H_2(x, -y, t) \quad (5.74)$$

Une fois le champ magnétique $H(x, y, t)$ connu, il est possible de calculer les composantes du vecteur densité de courant \vec{J} d'après l'équation 5.64. Ensuite, le calcul de l'énergie volumique perdue par cycle de période T à cause des courants induits est donnée par l'intégrale :

$$w_{clas} = \frac{1}{Ll} \int_0^T \iint_{[-L/2, L/2] \times [-l/2, l/2]} \frac{1}{\sigma_{Fe}} (J_x^2 + J_y^2) dx dy dt \quad (5.75)$$

Nous n'allons pas donner le détail de ce calcul fastidieux pour des raisons de place. Nous nous contenterons de donner simplement le résultat. Pour la simplicité d'utilisation de la formule proposée, nous souhaitons isoler au sein de cette dernière, les quantités ne dépendant uniquement que de la forme du rectangle indépendamment de ses dimensions réelles L et l , comme le quotient $R_l = l/L$. Les dimensions réelles seront concentrées dans la surface du rectangle $S_{rect} = Ll$. La formule obtenue sera la suivante :

$$w_{clas}(R_l, S_{rect}) = K(R_l) \sigma_{Fe} \frac{1}{f} \left\langle \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \right\rangle S_{rect} \quad (5.76)$$

Dans le cas particulier du régime sinusoïdal d'amplitude d'induction B_m , nous trouvons la formule :

$$w_{clas}^{(sin)}(R_l, S_{rect}) = K(R_l) \sigma_{Fe} 2\pi^2 f B_m^2 S_{rect} \quad (5.77)$$

Le coefficient $K(R_l)$ (sans dimension) ne dépend que du ratio R_l , image de l'aspect du rectangle indépendamment de ses dimensions :

$$K(R_l) = \frac{8}{\pi^4 R_l} \sum_{k \geq 1} \left\{ \frac{1}{(2k-1)^4} - \frac{2}{\pi R_l} \frac{1}{(2k-1)^5} \frac{[1 - \exp(-(2k-1)\pi R_l)]^2}{1 - \exp(-2(2k-1)\pi R_l)} \right\} \quad (5.78)$$

Nous traçons au niveau de la figure 5.47 le coefficient $K(R_l)$. Cette courbe montre qu'à surface de grain donnée, il vaut mieux, pour les pertes, que le grain soit le plus allongé possible, le pire cas correspondant à la forme carrée. En outre, au niveau de la figure 5.47, nous avons calculé le coefficient $K(R_l)$ par une méthode numérique (la méthode des différences finies a été mise en oeuvre pour résoudre l'équation de Poisson 5.63), afin de vérifier le bon fonctionnement du calcul, ce qui semble être acquis. Le temps de calcul est environ une dizaine de fois moindre, ce qui est d'importance lorsque la formule, dans le cadre de moyennes statistiques, doit être évaluée un grand nombre de fois.

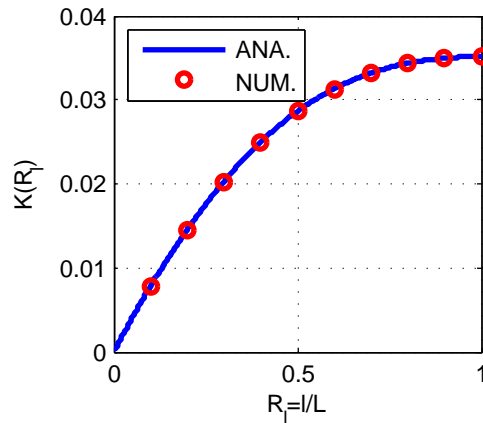


FIGURE 5.47: Tracé du coefficient $K(R_l)$ en fonction du ratio R_l

Pour information, au niveau des figures 5.48a et 5.48b, nous nous sommes permis de montrer les lignes de courant (qui, étant donné la relation $\text{rot } \vec{H} = \vec{J}$, ne sont autres que les isovaleurs de la fonction scalaire champ magnétique

$H(x, y, t)$ sur le domaine qui nous intéresse). La figure 5.48a montre les lignes de courants pour un carré ($R_l = 1$), et pour un rectangle ($R_l = 1/2$).

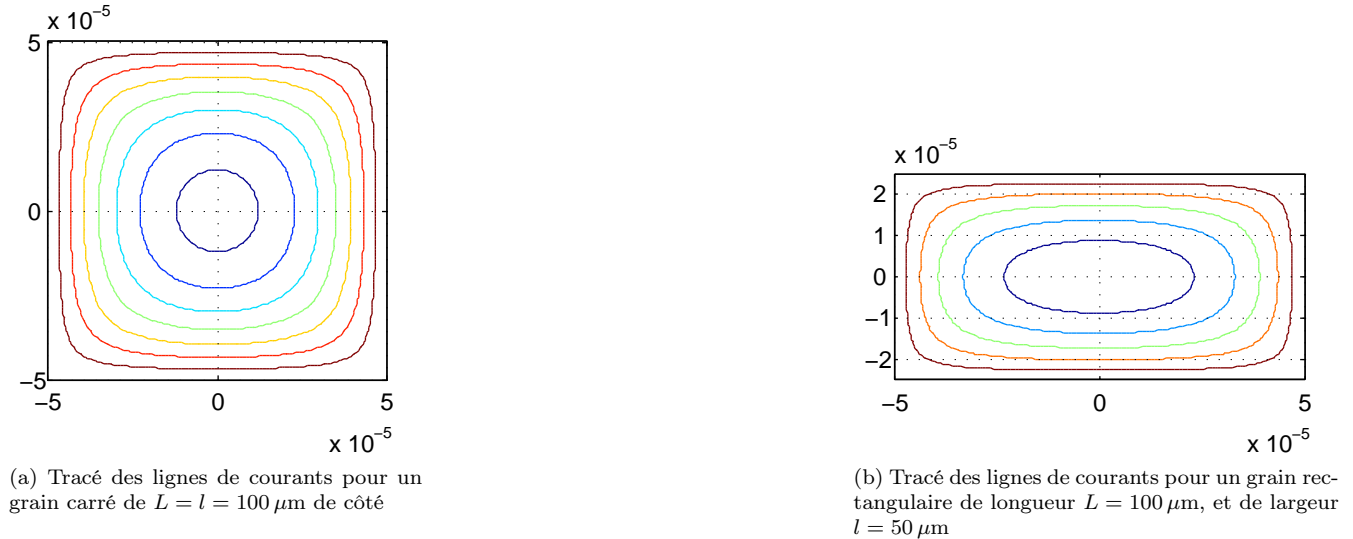


FIGURE 5.48: Exemple de tracé de lignes de courant

Calcul des pertes classiques pour les deux échantillons A présent que nous avons mis en oeuvre un modèle de pertes classiques pour des particules rectangulaires, il convient de se poser la question sur la manière de l'appliquer à nos deux matériaux. En effet, il nous faut connaître la taille des grains. Qui plus est, comme on va le voir sur les micrographies, ces grains sont de forme et de taille irrégulières. Il convient donc de trouver une manière de les rendre équivalents à des rectangles afin d'appliquer le modèle ci-dessus. Qui plus est, la dispersion statistique de taille et de forme entre les différents grains d'un même échantillon doit être tenue en compte.

Le point de départ de cette équivalence provient de l'observation de la structure granulaire des matériaux au microscope électronique à balayage. Les échantillons ont été soigneusement polis puis lustrés à leur surface, afin de rendre possibles les observations. Dans le cas du matériau « Prototyping », ce polissage a été effectué directement dans le plan de la section des tores découpés, qui est le plan dans lequel les courants induits circulent. Différentes micrographies ont été effectuées, afin de pouvoir faire une moyenne des observations. Ces micrographies effectuées directement dans le plan de circulation des courants induits sont faites afin de prévenir les problèmes causés par une éventuelle anisotropie suivant la direction de compaction, comme signalé dans la référence [Cyr, 2007].

En ce qui concerne les tores des échantillons du matériau 110i1P, ces derniers ne peuvent pas être découpés, ce qui est fort gênant, car, pour avoir accès au plan de circulation des courants induits, il est nécessaire de découper le tore suivant sa section. Hélas, en essayant une tel découpe, nous avons cassé l'échantillon. Par conséquent, bien que ce ne soit pas rigoureusement satisfaisant, nous sommes obligés d'effectuer un polissage en surface du tore, d'effectuer la micrographie, et d'admettre que les données déduites sont les mêmes que celles que nous aurions obtenues par une micrographie dans la section du tore.

Nous montrons au niveau de la figure 5.49 (pour le matériau « Prototyping ») et de la figure 5.50 (pour le matériau 110i1P) des exemples de micrographies obtenues. Nous pouvons distinguer clairement la structure granulaire du matériau composite. Les frontières noires entre les grains correspondent à la couche de résine qui sert de liant entre ces derniers (l'isolant recouvrant chaque grain a une épaisseur trop fine pour être visible). Ces joints ont d'ailleurs été révélés lors du polissage par une attaque au gel de silice. Ces micrographies confirment les données du fabricant : en effet, il est clair que les grains du matériau 110i1P pour l'électronique de puissance sont bien plus petits que ceux du matériau « Prototyping » (bien remarquer que l'échelle des micrographies, en bas à droite, n'est pas la même dans les deux cas). Ceci est fait pour limiter les pertes classiques à haute fréquence pour le matériau de l'électronique de puissance. Bien entendu, nous avons vu que la contre partie d'avoir des grains de taille plus petite est que le champ coercitif, donc les pertes par hystérésis, seront plus importantes. L'espacement des grains pour le matériau de l'électronique de puissance 110i1P est bien plus important que pour le matériau « Prototyping », ce

qui justifie la résistivité bien plus grande de ce matériau afin de limiter les éventuelles pertes par courants induits « macroscopiques », et aussi malheureusement la baisse drastique de la perméabilité magnétique.

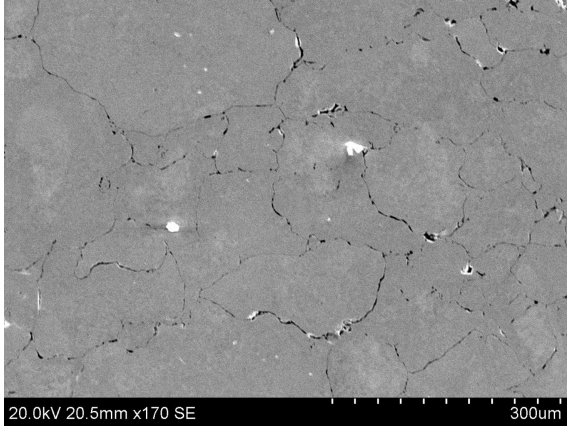


FIGURE 5.49: Micrographie réalisée au microscope électronique à balayage de la structure granulaire du matériau « Prototyping » d'Höganäs dans le plan de circulation des courants induits

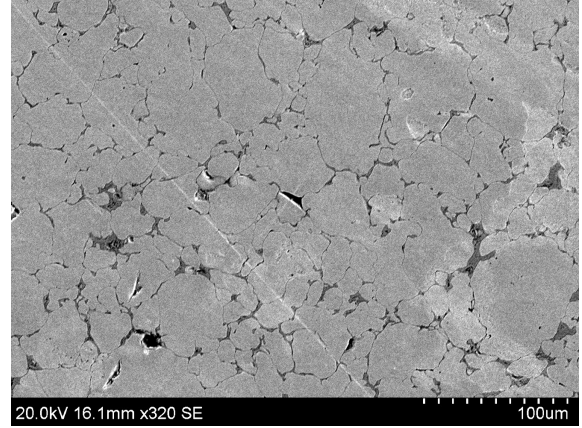


FIGURE 5.50: Micrographie réalisée au microscope électronique à balayage de la structure granulaire du matériau 110i1P d'Höganäs à la surface du tore

Nous allons à présent, avec ces micrographies (et d'autres encore, afin de pouvoir prétendre réaliser des statistiques fiables sur les données déduites de ces micrographies), effectuer l'étude suivante :

- A l'aide d'un logiciel approprié, nous allons détourer avec la souris de l'ordinateur les contours de chaque grain, déduire le nombre de pixels sélectionnés, et, par une règle de trois, trouver la surface de chaque grain, que nous noterons S_g . Répété sur de nombreux grains, ce travail permettra de considérer la variable S_g comme une variable aléatoire.
- Pour chaque grain, nous allons également en déduire une longueur caractéristique L_g et une largeur caractéristique l_g . La procédure de déduction de ces grandeurs est illustrée à la figure 5.51. Ensuite, pour chaque grain, il est possible de déterminer un rapport caractéristique de la forme de chaque particule, noté $R_{l_g} = l_g/L_g$. Répété sur un grand nombre de particules, ce ratio R_{l_g} peut être considéré comme une variable aléatoire.

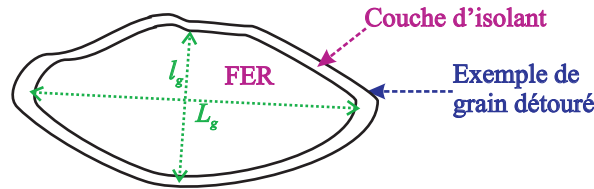


FIGURE 5.51: Détermination des dimensions caractéristiques L_g et l_g de chaque particule

Nous allons, comme c'est souvent le cas dans les sciences physiques [Muirhead, 2005], approximer la densité de répartition des variables aléatoires positives S_g et R_{l_g} à des distributions log-normales, c'est-à-dire dont les fonctions de répartition vérifient l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 - f_{S_g}(S_g) &= \frac{1}{S_g \sigma_{S_g} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln S_g - \mu_{S_g})^2}{2\sigma_{S_g}^2}\right). \\
 - f_{R_{l_g}}(R_{l_g}) &= \frac{1}{R_{l_g} \sigma_{R_{l_g}} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln R_{l_g} - \mu_{R_{l_g}})^2}{2\sigma_{R_{l_g}}^2}\right).
 \end{aligned}$$

Les paramètres μ_{S_g} , σ_{S_g} , $\mu_{R_{l_g}}$ et $\sigma_{R_{l_g}}$ sont identifiés en déterminant l'espérance et la variance vraie des variables aléatoires S_g et R_{l_g} , puis en appliquant les relations classiques sur les lois log-normales¹. On peut tracer ces densités

1. On rappelle que si une variable aléatoire X suit une loi log-normale, cela signifie que son logarithme $\ln(X)$ suit une loi normale.

pour les deux variables aléatoires S_g et R_{l_g} . On représente à la figure 5.52 la densité f_{S_g} , et à la figure 5.53 la densité $f_{R_{l_g}}$.

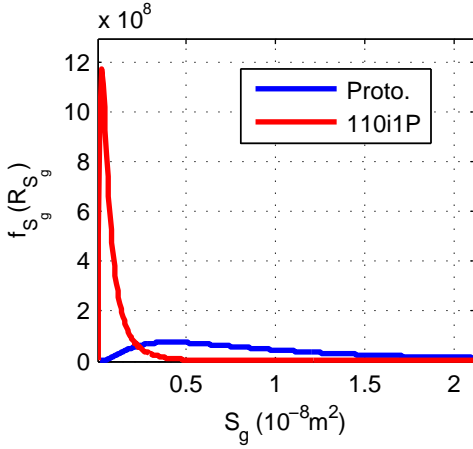


FIGURE 5.52: Densité de la variable aléatoire S_g , notée f_{S_g}

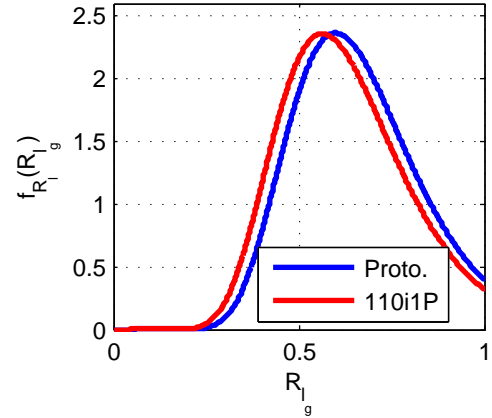


FIGURE 5.53: Densité de la variable aléatoire R_{l_g} , notée $f_{R_{l_g}}$

Dans les tableaux 5.3 et 5.4, nous récapitulons les espérances et variances des variables aléatoires S_g et R_{l_g} pour les deux matériaux. On remarque que, comme on l'avait dit lors des micrographies, la taille moyenne des surfaces des grains des matériaux est environ 15 fois plus grande pour le matériau « Prototyping » que pour le matériau 110i1P. Qui plus est, il est clair, en observant la figure 5.52 et les variances dans le tableau 5.3, que les grains du matériau 110i1P ont une taille bien plus uniforme que celle du matériau « Prototyping ». En revanche, en ce qui concerne la forme des particules, pour les deux échantillons, la plupart des grains semblent avoir une forme assez rectangulaire, avec un ratio des dimensions caractéristiques voisin de 0.65.

	Espérance (en m^2)	Variance (en m^4)
« Proto. »	$1.2921 \cdot 10^{-8}$	$1.9228 \cdot 10^{-16}$
110i1P	$8.706 \cdot 10^{-10}$	$1.0889 \cdot 10^{-18}$

TABLE 5.3: Paramètres statistiques de la variable aléatoire S_g

	Espérance	Variance
« Proto. »	0.6694	0.0342
110i1P	0.6384	0.0351

TABLE 5.4: Paramètres statistiques de la variable aléatoire R_{l_g}

Remarquons qu'en réalité, les variables aléatoires S_g et R_{l_g} ne sont pas indépendantes. En effet, de manière tout-à-fait intuitive, il est clair qu'une petite particule aura tendance à être moins déformée qu'une grande lors du processus de compaction. Il devient donc légitime de s'intéresser à la fonction de répartition bivariable du couple de variables aléatoires (S_g, R_{l_g}) . On suppose toujours, pour cette fonction, une loi log-normale bi-variable. Auquel

La densité de répartition d'une loi log-normale est donnée par : $f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$. En calculant l'espérance de la loi X , ainsi que sa variance vraie, on va trouver :

$$\begin{cases} E(X) &= \exp(\mu + \sigma^2/2) \\ Var(X) &= (\exp(\sigma^2) - 1) \exp(2\mu + \sigma^2) \end{cases} \quad (5.79)$$

Si à l'inverse on veut connaître μ et σ lorsque l'on a calculé l'espérance et la variance, alors on aura :

$$\begin{cases} \mu &= \ln(E(X)) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{Var(X)}{E(X)^2}\right) \\ \sigma^2 &= \ln\left(1 + \frac{Var(X)}{E(X)^2}\right) \end{cases} \quad (5.80)$$

cas, la fonction de répartition devient :

$$f_{S_g, R_{l_g}}(S_g, R_{l_g}) = \frac{1}{S_g R_{l_g}} \frac{1}{2\pi\sigma_{S_g}\sigma_{R_{l_g}}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(\ln S_g - \mu_{S_g})^2}{\sigma_{S_g}^2} + \frac{(\ln R_{l_g} - \mu_{R_{l_g}})^2}{\sigma_{R_{l_g}}^2} - \frac{2\rho(\ln S_g - \mu_{S_g})(\ln R_{l_g} - \mu_{R_{l_g}})}{\sigma_{S_g}\sigma_{R_{l_g}}} \right]\right\} \quad (5.81)$$

Le coefficient de corrélation ρ se calcule par la formule $\rho = \frac{\sigma_{S_g R_{l_g}}}{\sigma_{S_g}\sigma_{R_{l_g}}}$, où $\sigma_{S_g R_{l_g}}$ est la covariance estimée des variables aléatoires $\ln(S_g)$ et $\ln(R_{l_g})$.

L'idée naturelle qui peut venir à l'esprit afin de calculer les pertes classiques volumiques dans une particule du matériau est d'assimiler cette particule à un rectangle équivalent, ce qui permet d'utiliser la formule 5.76. Dans la formule 5.76, on remplace l'aire S_{rect} du rectangle dans lequel on a calculé les pertes de manière analytique par la surface S_g du grain que l'on considère, et le ratio largeur sur longueur R_l du rectangle par le ratio des grandeurs caractéristiques du grain R_{l_g} . Ceci revient donc à assimiler le grain de surface S_g et de ratio des grandeurs caractéristiques R_{l_g} à un rectangle équivalent, de même aire que la particule, et de même ratio largeur sur longueur. Nous allons présenter par la suite différentes manières de mener les calculs suivant la distribution statistique utilisée pour les variables aléatoires S_g et R_{l_g} .

-Modèle 1

La solution la plus simpliste qu'il soit est d'assimiler pour le calcul des pertes classiques tous les grains à des carrés (on prend donc $R_{l_g} = 1$), et de prendre une aire moyenne pour les carrés égale à la surface moyenne des grains $\overline{S_g} = E(S_g)$, sans prendre en compte le moment d'ordre 2 de cette variable aléatoire. Par conséquent, en prenant en compte le fait que la masse de la résine dans le matériau est négligeable par rapport à celle du fer, et en notant δ la masse volumique du matériau (égale à δ_{proto} ou δ_{110i} suivant le matériau considéré) et $\delta_{Fe} = 7700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ la masse volumique du fer pur, la formule 5.76 donne les pertes classiques volumiques suivantes :

$$W_{clas}^{(1)} = \frac{\delta}{\delta_{Fe}} K(1) \sigma_{Fe} \frac{1}{f} \left\langle \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \right\rangle \overline{S_g} \quad (5.82)$$

En reprenant l'hypothèse des grains carrés ($R_{l_g} = 1$), mais cette fois, en prenant en compte le fait que l'aire S_g des particules est une variable aléatoire suivant une loi que l'on admet être une loi log-normale comme au paragraphe précédent, les pertes classiques volumiques sous cette hypothèse deviennent donc :

$$W_{clas} = \frac{\delta}{\delta_{Fe}} K(1) \sigma_{Fe} \frac{1}{f} \left\langle \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \right\rangle \int_0^\infty S_g f_{S_g}(S_g) dS_g \quad (5.83)$$

Comme l'aire S_g des grains intervient de manière multiplicative dans la formule des pertes, la dernière intégrale n'est autre que l'espérance de la variable aléatoire S_g , notée $\overline{S_g}$, et la dernière expression est identiquement équivalente aux pertes $W_{clas}^{(1)}$ du modèle 1.

-Modèle 2

La seconde solution possible est de prendre en compte le fait que les grains ne sont pas de forme carrée, mais, quelque soit l'échantillon considéré, possèdent un ratio largeur sur longueur moyen $\overline{R_{l_g}} = E(R_{l_g})$ voisin de 0.65, ce qui en fait des rectangles. Nous prenons les valeurs moyennes des variables aléatoires S_g et R_{l_g} , sans pour autant considérer leurs moments d'ordre 2. Nous allons obtenir les pertes classiques volumiques suivantes par ce second modèle :

$$W_{clas}^{(2)} = \frac{\delta}{\delta_{Fe}} K(\overline{R_{l_g}}) \sigma_{Fe} \frac{1}{f} \left\langle \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \right\rangle \overline{S_g} \quad (5.84)$$

-Modèle 3

Une dernière solution consiste à prendre en compte la répartition corrélée des deux variables (S_g, R_{l_g}) dans le calcul des pertes classiques volumiques, selon la loi log-normale bivariable déterminée auparavant. Auquel cas, les pertes classiques deviennent donc, avec ce troisième modèle :

$$W_{clas}^{(3)} = \frac{\delta}{\delta_{Fe}} \sigma_{Fe} \frac{1}{f} \left\langle \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \right\rangle \int_0^\infty \int_0^\infty K(R_{l_g}) S_g \cdot f_{S_g, R_{l_g}}(S_g, R_{l_g}) dS_g \quad (5.85)$$

Cette dernière formulation des pertes classiques volumiques est un peu plus complexe, car elle nécessite une évaluation numérique de l'intégrale proposée, bien que le calcul soit quasiment instantané.

-Comparaison des différents modèles de pertes classiques volumiques

Nous allons comparer, pour les trois matériaux étudiés auparavant, les pertes classiques volumiques obtenues dans les différents cas. Nous allons nous fixer une induction sinusoïdale, d'amplitude $B_m = 1$ T. Nous allons appliquer des fréquences d'excitation comprises entre 0 et 10 kHz. Nous calculons l'énergie volumique perdue pour les trois modèles précédents, et ceci pour les deux matériaux (« Prototyping » et 110i1P). Afin de donner des résultats plus facilement interprétables, nous nous permettons de ne pas donner les résultats en termes d'énergie perdue par unité de volume, mais en termes d'énergie perdue par unité de masse (en $\text{mJ} \cdot \text{kg}^{-1}$). Les résultats sont montrés au niveau de la figure 5.54 pour le matériau « Prototyping », et au niveau de la figure 5.55 pour le matériau 110i1P. La première remarque à faire lorsque l'on compare les courbes obtenues est que les trois modèles donnent à peu près les mêmes valeurs de pertes classiques, montrant que l'on peut utiliser l'un ou l'autre sans beaucoup de distinction. Nous avons en outre dit que nous trouvons une surface moyenne de particule $\overline{S_g}$ environ 15 fois plus importante pour les particules du matériau « Prototyping » que pour les particules du matériau 110i1P. D'après la formule 5.76, les pertes volumiques évoluent proportionnellement à la surface du rectangle équivalent au grain. Il est donc normal que nous trouvons environ un facteur 15 de différence sur les pertes par courants induits dans ces deux matériaux. Qui plus est, il n'est pas surprenant que l'approximation, dans le modèle 1, des grains à des carrés mène, pour les deux matériaux, à des pertes volumiques classiques légèrement plus grandes. En effet, lorsque nous avons tracé la figure 5.47, nous avons dit que du fait de la monotonie du coefficient $K(R_l)$, à surface de grain fixée, les pertes étaient d'autant plus grandes que le grain se rapprochait d'une forme carrée. Vu que les grains sont clairement de forme rectangulaire, de ratio moyen entre largeur et longueur d'environ 0.65 pour les deux matériaux (tableau 5.4), il nous semble tout de même important de prendre en compte la forme rectangulaire et non carrée des particules, que ce soit par le modèle 2 avec les grandeurs moyennes ou le modèle 3, prenant en compte la statistique. En outre, nous voyons que puisque les grains du matériau 110i1P sont mieux calibrés que ceux du matériau « Prototyping » (la variance de leur surface est bien plus faible, ce qui signifie que les grains sont de taille plus régulière, comme montré au tableau 5.3), les modèles 2 et 3 pour le matériau 110i1P sont relativement un peu plus proches que les modèles 2 et 3 pour le matériau « Prototyping », matériau pour lequel la taille des grains est bien plus dispersée, et donc pour lequel le modèle statistique est un plus.

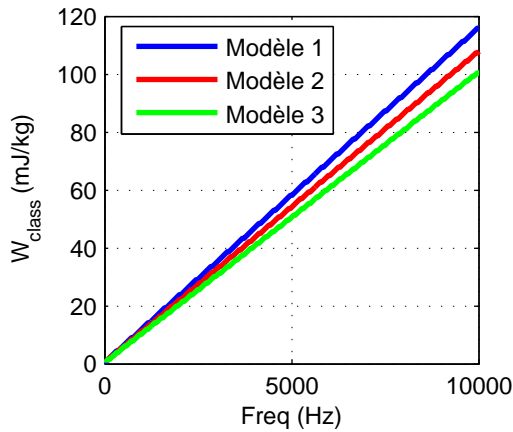


FIGURE 5.54: Comparaison de l'énergie volumique massique perdue par courants induits dans les grains en utilisant les différents modèles, pour le matériau « Prototyping »

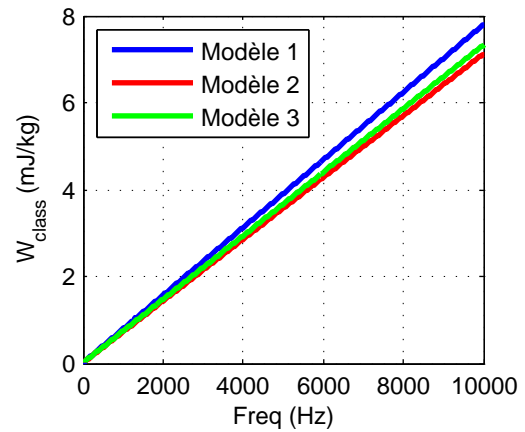


FIGURE 5.55: Comparaison de l'énergie volumique massique perdue par courants induits dans les grains en utilisant les différents modèles, pour le matériau 110i1P

Bref, pour conclure sur les modèles de pertes classiques, nous pouvons dire que les modèles 1 et 2 sont plus efficaces, car ils n'exigent pas de calcul d'intégrale numérique, et ne sont guère éloignés du modèle 4. Dans la suite de cette étude, puisque le temps de calcul ne nous pose pas de problème, nous utiliserons tout de même le modèle 4.

5.2.2.3 Résultats de l'application de la séparation des pertes dans les deux échantillons

La procédure de séparation des pertes sera la procédure classique exposée dans la référence [Cullity et Graham, 2008]. Nous allons dans un premier temps effectuer les mesures des pertes en régime sinusoïdal, en faisant attention de limiter les effets de la température, afin de ne pas fausser les résultats. L'énergie perdue par cycle mesurée est notée $W_{tot}(J_p, f)$, et est donnée en $\text{mJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. Les mesures seront menées sur une plage de fréquences f allant 0 à 10 kHz, pour trois polarisations maximales : $J_p = 0.5 \text{ T}$, $J_p = 1 \text{ T}$, et $J_p = 1.25 \text{ T}$.

Par la suite, le modèle 3 de calcul des pertes classiques est appliqué, afin d'isoler la composante des pertes classiques, notée $W_{clas}(J_p, f)$, pour chaque polarisation et chaque fréquence. A noter que le modèle de pertes classiques, dans la partie précédente, a été formulé en termes d'induction, et non pas de polarisation. Néanmoins, il suffit d'appliquer le fait que la polarisation $J(t)$, le champ magnétique $H(t)$, et l'induction $B(t)$ sont liés par la relation suivante :

$$B(t) = \mu_0 H(t) + J(t) \quad (5.86)$$

Le champ $H(t)$ est connu pour calculer les pertes, ce qui permet de relier la polarisation à l'induction. De toute manière, dans les matériaux doux, il est d'usage de dire que $J(t) \approx B(t)$ (car $\mu_0 H(t) \ll J(t)$).

Une fois la composante de pertes classiques isolée, les pertes par hystérésis massiques $W_{hyst}(J_p)$, qui ne dépendent que de la polarisation pic J_p , sont isolées, par extrapolation des pertes totales pour une fréquence nulle :

$$W_{hyst}(J_p) = \lim_{f \rightarrow 0} W_{tot}(J_p, f) \quad (5.87)$$

A noter que, dans l'article [Appino *et al.*, 2004], une autre définition des pertes par hystérésis est donnée (voir chapitre 2), dans le but de ne pas avoir à considérer la distorsion des pertes excédentaires pour des fréquences faibles, et considérer que la formule des pertes excédentaires dépend toujours de la racine carrée de la fréquence. Ce n'est pas la stratégie que nous utiliserons ici, car, comme nous le verrons, la distorsion des pertes excédentaires revêt ici un caractère important, et est présente sur une gamme de fréquences bien plus étendue. Par conséquent, c'est bien la formule 5.87 que nous allons utiliser.

Une fois les pertes classiques $W_{clas}(J_p, f)$ et par hystérésis $W_{hyst}(J_p)$ connues, la composante des pertes excédentaires $W_{exc}(J_p, f)$ est isolée par la différence suivante :

$$W_{exc}(J_p, f) = W_{tot}(J_p, f) - W_{clas}(J_p, f) - W_{hyst}(J_p) \quad (5.88)$$

Nous allons dans l'immédiat nous contenter d'exposer les résultats de la séparation des pertes pour les deux matériaux, pour les différentes polarisations et fréquences envisagées. Nous donnerons ensuite à la section suivante une interprétation des pertes excédentaires obtenues en utilisant la théorie de Bertotti, pour en déduire des informations sur la structure du matériau. Nous donnerons en outre les courbes d'hystérésis dynamiques mesurées à chaque cycle qui, par intégration, nous ont permis de mesurer les pertes obtenues.

Dans tout ce qui suit, les pertes données ont été mesurées dans les tores de dimensions $e = 5 \text{ mm}$ pour le côté de section, et de diamètre moyen $\bar{D} = 50 \text{ mm}$ pour nos deux matériaux. La section de l'échantillon est donc $S_{ech} = e^2 = 25 \text{ mm}^2$.

Matériau « Prototyping »

Polarisation maximale $J_p = 1 \text{ T}$ Les pertes obtenues pour une polarisation sinusoïdale maximale $J_p = 1 \text{ T}$ sont montrées à la figure 5.56. Les cycles d'hystérésis dynamiques qui ont été utilisés pour le calcul des pertes ont été représentés à la figure 5.57. Nous voyons que pour des fréquences en deçà du kilohertz, les pertes dynamiques sont extrêmement limitées par rapport aux pertes statiques, ce qui se traduit par des cycles d'hystérésis très proches du cycle statique en deçà de cette fréquence.

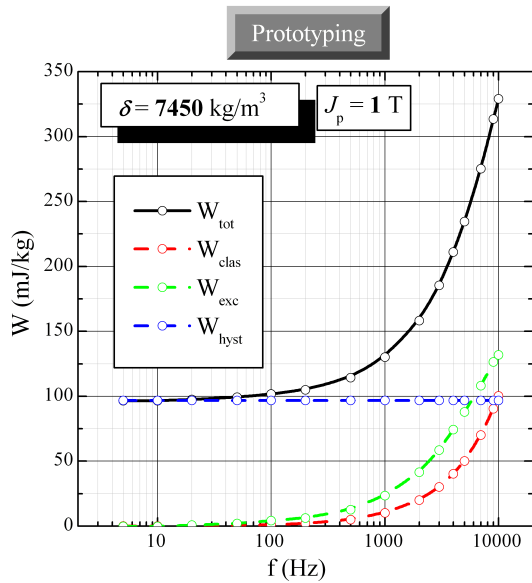


FIGURE 5.56: Séparation des pertes pour le matériau « Prototyping », pour une polarisation pic $J_p = 1$ T

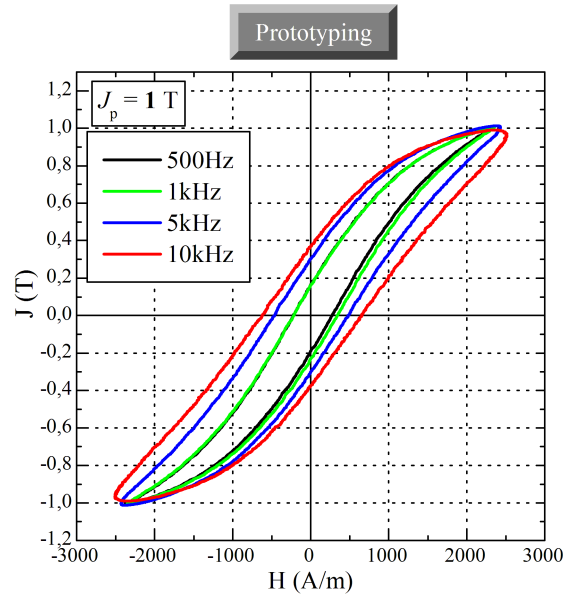


FIGURE 5.57: Cycle $B(H)$ pour le matériau « Prototyping » pour une polarisation pic $J_p = 1$ T

Polarisation maximale $J_p = 0.5$ T Les pertes obtenues pour une polarisation sinusoïdale maximale $J_p = 0.5$ T sont montrées à la figure 5.58, et les cycles d'hystérésis dynamiques ont été représentés à la figure 5.59.

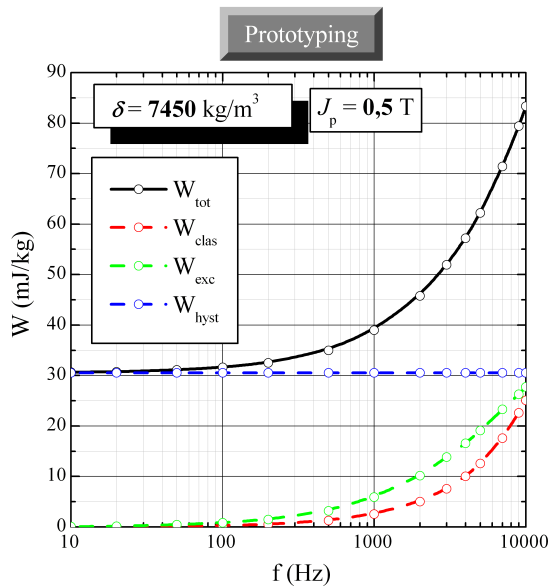


FIGURE 5.58: Séparation des pertes pour le matériau « Prototyping », pour une polarisation pic $J_p = 0.5$ T

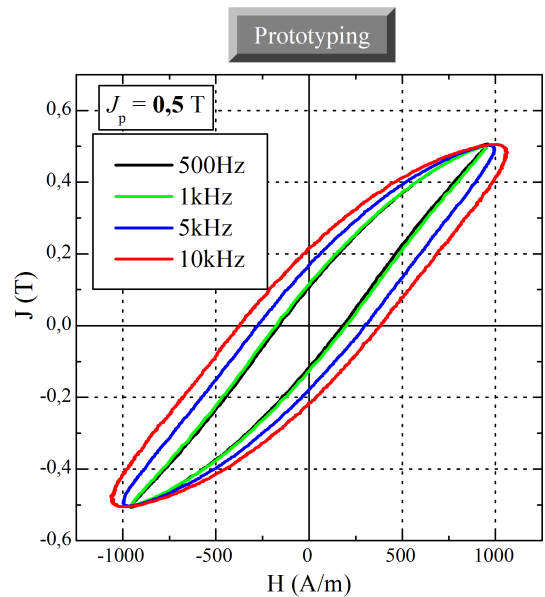


FIGURE 5.59: Cycle $B(H)$ pour le matériau « Prototyping » pour une polarisation pic $J_p = 0.5$ T

Polarisation maximale $J_p = 1.25$ T Les pertes obtenues pour une polarisation sinusoïdale maximale $J_p = 1.25$ T sont montrées à la figure 5.60, et les cycles d'hystérésis dynamiques ont été représentés à la figure 5.61.

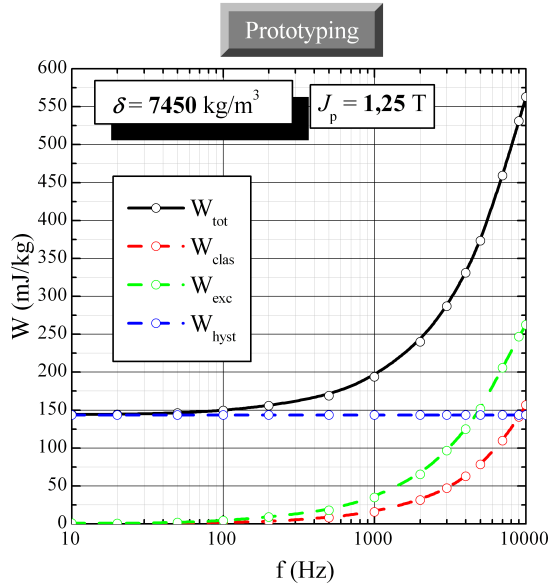


FIGURE 5.60: Séparation des pertes pour le matériau « Prototyping », pour une polarisation pic $J_p = 1.25 \text{ T}$

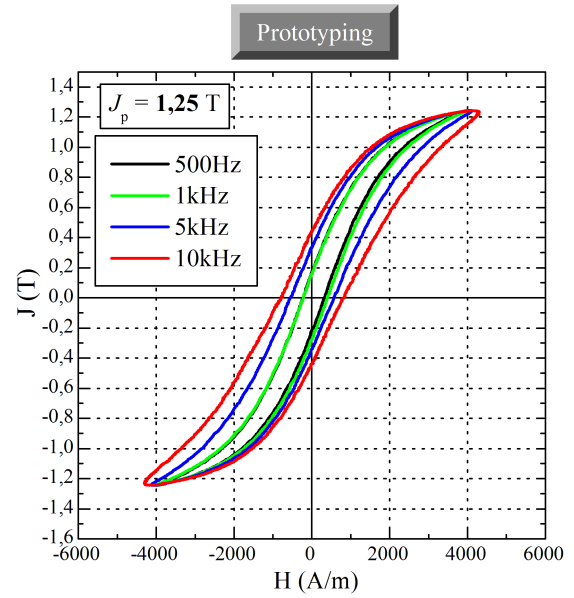


FIGURE 5.61: Cycle $B(H)$ pour le matériau « Prototyping » pour une polarisation pic $J_p = 1.25 \text{ T}$

Pour information, nous comparons les cycles d'hystérésis obtenus à une fréquence de 1 kHz (donc quasiment le cycle statique d'après les figures précédentes) pour les trois polarisations maximales $J_p = 1 \text{ T}$, $J_p = 0.5 \text{ T}$, et $J_p = 1.25 \text{ T}$. L'effet de la saturation du matériau se fait d'autant plus sentir que l'on augmente la polarisation maximale.

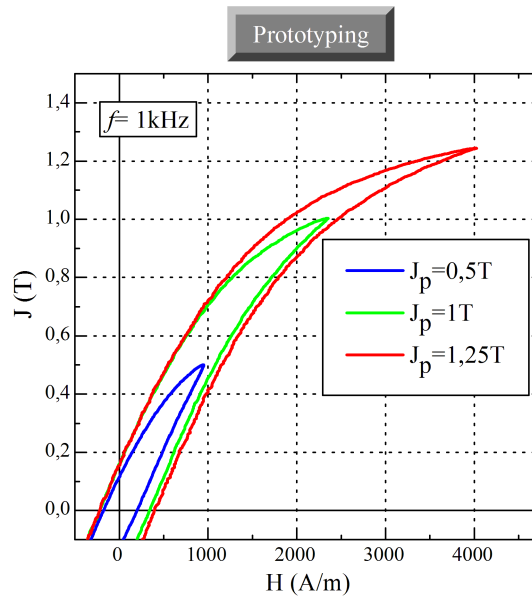


FIGURE 5.62: Cycle d'hystérésis dynamiques pour le matériau « Prototyping » pour différentes polarisations pic $J_p = 1.25 \text{ T}$, à fréquence $f = 1 \text{ kHz}$ donnée

Matériau 110i1P

Polarisation maximale $J_p = 1 \text{ T}$ Les pertes obtenues pour une polarisation sinusoïdale maximale $J_p = 1 \text{ T}$ sont montrées à la figure 5.63. Nous voyons que grâce aux grains de taille très réduite, les pertes dynamiques, surtout les pertes classiques, sont négligeables par rapport aux pertes par hystérésis sur quasiment l'intégralité de la gamme de fréquence. Ceci se voit aussi à la figure 5.64, où l'élargissement dynamique du cycle lorsque l'on augmente la fréquence est très limité.

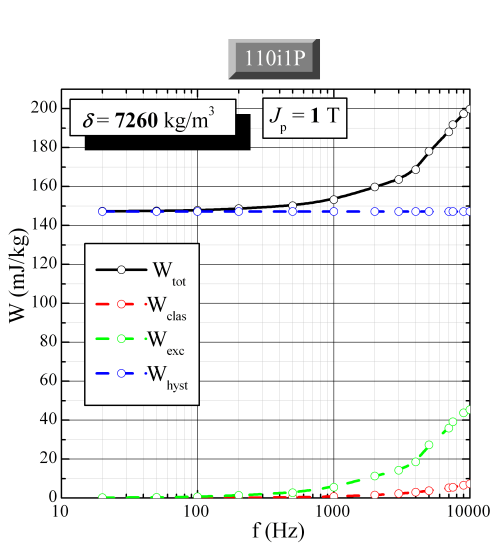


FIGURE 5.63: Séparation des pertes pour le matériau 110i1P, pour une polarisation pic $J_p = 1 \text{ T}$

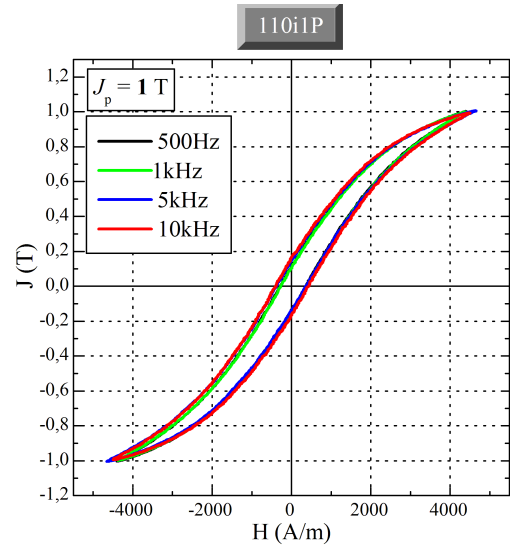


FIGURE 5.64: Cycle $B(H)$ pour le matériau 110i1P pour une polarisation pic $J_p = 1 \text{ T}$

Polarisation maximale $J_p = 0.5 \text{ T}$ Les pertes obtenues pour une polarisation sinusoïdale maximale $J_p = 0.5 \text{ T}$ sont montrées à la figure 5.65, et les cycles obtenus à la figure 5.66.

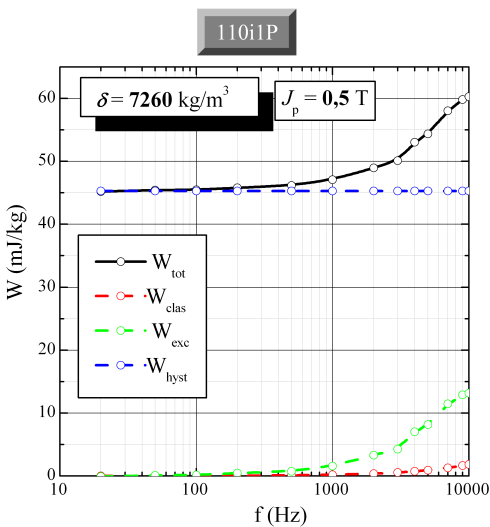


FIGURE 5.65: Séparation des pertes pour le matériau 110i1P, pour une polarisation pic $J_p = 0.5 \text{ T}$

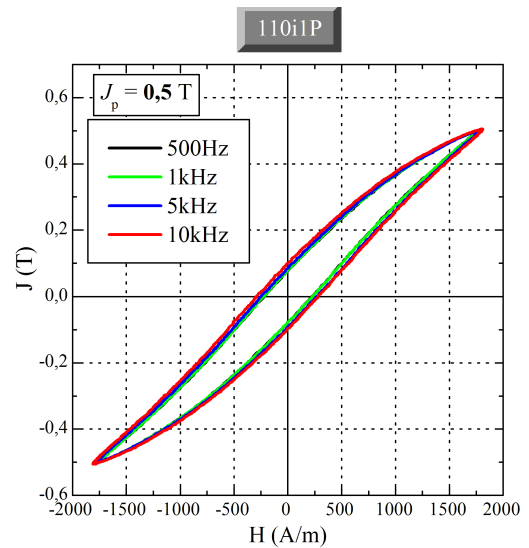


FIGURE 5.66: Cycle $B(H)$ pour le matériau 110i1P pour une polarisation pic $J_p = 0.5 \text{ T}$

Polarisation maximale $J_p = 1.25$ T Les pertes obtenues pour une polarisation sinusoïdale maximale $J_p = 1.25$ T sont montrées à la figure 5.67. Néanmoins, il ne nous fut pas possible, pour les mesures à ce niveau d'induction, d'atteindre la fréquence de 10kHz, pour des raisons de puissance à fournir par l'alimentation de puissance, qui devenait trop importante. En effet, le phénomène de saturation, pour ce matériau, est déjà sensiblement présent à ce niveau d'induction (voir les cycles de la figure 5.68). Dans ce cas, à fréquence élevée, l'importance des courants nécessaires nous empêche de faire la mesure souhaitée, et nous oblige à nous limiter en fréquence. Cette apparition du phénomène de saturation magnétique à cette induction s'explique par la densité relativement faible de ce matériau, qui est pressé avec une pression moins importante dans le but de restreindre sa résistivité globale.

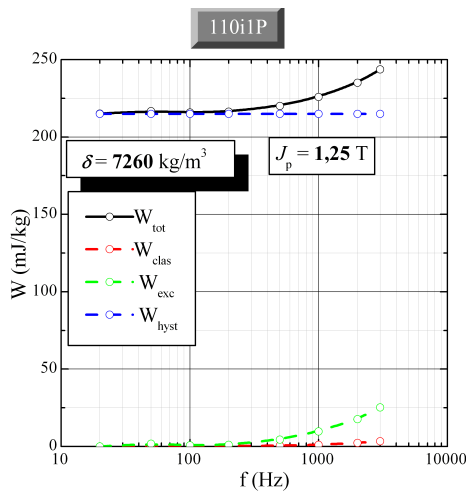


FIGURE 5.67: Séparation des pertes pour le matériau 110i1P, pour une polarisation pic $J_p = 1.25$ T

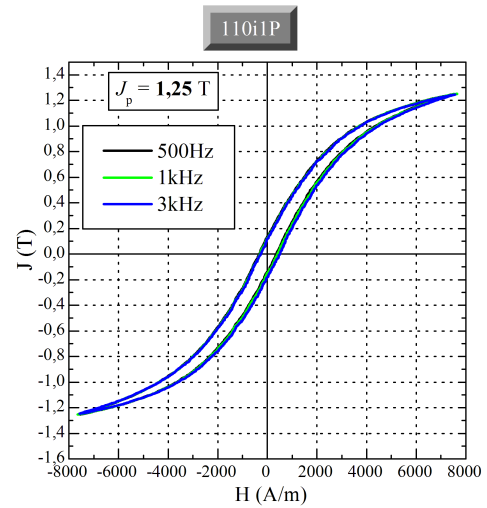


FIGURE 5.68: Cycle $B(H)$ pour le matériau 110i1P pour une polarisation pic $J_p = 1.25$ T

Nous avons en outre représenté au niveau de la figure 5.69 une comparaison des cycles obtenus à une fréquence de 1 kHz. La saturation se manifeste effectivement de manière plus prononcée que pour le matériau « Prototyping », pour des amplitudes J_p de polarisation identiques.

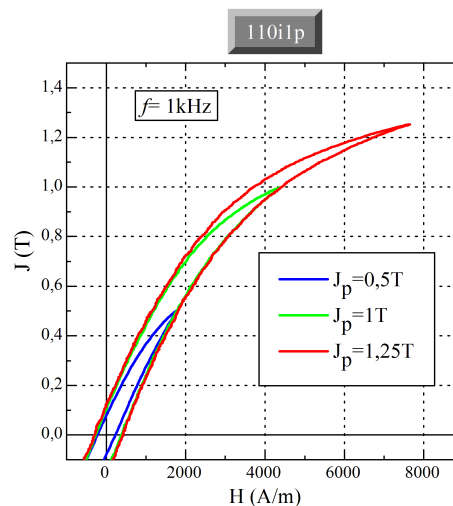


FIGURE 5.69: Cycle d'hystérésis dynamiques pour le matériau 110i1P pour différentes polarisations pic $J_p = 1.25$ T, à fréquence $f = 1$ kHz donnée

5.2.2.4 Interprétation des résultats en utilisant la théorie de Bertotti

Identification des paramètres n_0, V_0 de la théorie de Bertotti

Méthode de calcul des paramètres n_0, V_0 de la théorie de Bertotti -Bref rappel sur la théorie des pertes

Dans les articles [Bertotti, 1985d, Bertotti, 1985f], comme expliqué au chapitre 2, une interprétation statistique des pertes excédentaires est donnée.

Comme montré dans ces références, la perte dynamique d'énergie volumique obtenue si le processus d'inversion de la polarisation était uniquement dû à une seule paroi droite (le plus haut degré d'inhomogénéité du matériau) se déplaçant à travers l'échantillon serait, en notant J_p l'amplitude pic de la polarisation moyenne et \dot{J} la dérivée temporelle de cette polarisation moyenne :

$$W = \frac{1}{f} \sigma G^{(W)} S_{ech} \dot{J}^2 = \sigma G^{(W)} S_{ech} \dot{J} \cdot 4J_p \equiv H^{(W)} 4J_p \quad (5.89)$$

où $G^{(W)} = 0.1356$. Le champ $H^{(W)}$ est donc égal à $H^{(W)} = \sigma G^{(W)} S_{ech} \dot{J}$. En réalité, l'inversion de polarisation est prise en charge par n objets magnétiques qui sont simultanément actifs sur la surface de l'échantillon. L'étude statistique du chapitre 2 avait montré que si on considère le champ classique comme un champ d'arrière plan, on pouvait considérer les n objets magnétiques comme indépendants lors du calcul des pertes excédentaires, en notant $G^{(X)}$ la constante des pertes dues à la forme des objets magnétiques réels :

$$W_{exc} = n \frac{1}{f} \sigma G^{(X)} S_{ech} \left(\frac{\dot{J}}{n} \right)^2 = \sigma G^{(X)} S_{ech} \frac{\dot{J}}{n} \cdot 4J_p \equiv H_{exc} 4J_p \quad (5.90)$$

Nous déduisons, en identifiant les deux formules précédentes, que le champ excédentaire est lié au champ $H^{(W)} = \sigma G^{(W)} S_{ech} \dot{J}$ par la formule :

$$H_{exc} = \frac{H^{(W)}}{\tilde{n}} \quad (5.91)$$

où $\tilde{n} = \frac{G^{(W)}}{G^{(X)}} n$ est le nombre effectif d'objets magnétiques simultanément actifs. La théorie de Bertotti suppose que le nombre de ces objets magnétiques simultanément actifs est lui-même dépendant du champ excédentaire qui agit comme une pression supplémentaire sur les objets magnétiques inactifs, et pousse donc à l'activation de ces derniers. La fonction donnant le nombre effectifs d'objets magnétiques activés $\tilde{n}(H_{exc})$ en fonction du champ excédentaire H_{exc} peut être supposée en première approximation linéaire :

$$\tilde{n}(H_{exc}) = \tilde{n}_o + \frac{H_{exc}}{V_o} \quad (5.92)$$

\tilde{n}_o est le nombre d'objets magnétiques en régime quasi-statique, où H_{exc} est nul. V_o est l'incrément de champ excédentaire nécessaire pour activer un objet magnétique supplémentaire sur la surface de l'échantillon. Ce nombre d'objets magnétiques actifs sur toute la surface S_{ech} de l'échantillon n'est pas un paramètre intrinsèque, et dépend de la surface S_{ech} de l'échantillon. C'est le nombre \tilde{n}/S_{ech} qui est un paramètre intrinsèque, et par conséquent \tilde{n}_o/S_{ech} et $V_o S_{ech}$. C'est pour cela que dans toutes les formulations de pertes, c'est le produit $V_o S_{ech}$ qui intervient. Cette remarque nous sera utile par la suite.

Le champ excédentaire est déterminé par la relation :

$$H_{exc} \left(\tilde{n}_o + \frac{H_{exc}}{V_o} \right) = H^{(W)} \quad (5.93)$$

Par conséquent, le champ excédentaire est donné par la relation :

$$H_{exc} = \frac{\tilde{n}_o V_o}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4\sigma G^{(W)} S_{ech} \dot{J}}{\tilde{n}_o^2 V_o}} - 1 \right) \quad (5.94)$$

Et par suite les pertes excédentaires :

$$W_{exc} = 2J_p \tilde{n}_o V_o \left(\sqrt{1 + \frac{4\sigma G^{(W)} S_{ech} \bar{J}}{\tilde{n}_o^2 V_o}} - 1 \right) \quad (5.95)$$

Pour des fréquences importantes, on vérifie $\frac{H_{exc}}{V_o} \gg \tilde{n}_o$, et alors : $W_{exc} \approx 4J_p \sqrt{\sigma G^{(W)} V_o S_{ech} \bar{J}} = 8J_p^{3/2} \sqrt{\sigma G^{(W)} V_o S_{ech} f}$. Il y a donc en haute fréquence une dépendance des pertes en \sqrt{f} .

Si par contre nous avons $\tilde{n}_o \gg \frac{H_{exc}}{V_o}$, alors on a $W_{exc} = 16J_p^2 \frac{\sigma G^{(W)} S_{ech} f}{\tilde{n}_o}$. La dépendance des pertes excédentaires avec la fréquence f est alors linéaire. Pour information, c'est exactement l'hypothèse du modèle de Pry et Bean déterministe, où on suppose que toutes les parois (qui jouent le rôle des objets magnétiques) sont actives, dès les plus basses fréquences. Dans le modèle, une dépendance linéaire des pertes suivant la fréquence f est trouvée.

En réalité, il a été montré [Appino *et al.*, 2007] que dans les matériaux réels, le paramètre V_o exhibe une dépendance croissante en fonction de la polarisation maximale, et il a été estimé que $V_o \propto J_p^{0.3}$ pour les tôles Fer-Silicium.

-Méthode de calcul

Nous allons procéder pour l'analyse des pertes excédentaires comme suit. Pour chaque induction J_p et pour les deux matériaux :

- Nous allons calculer le champ excédentaire H_{exc} par la relation : $H_{exc} = \frac{W_{exc}}{4J_p}$. Le champ $H^{(W)}$ sera quant à lui calculé par la relation : $H^{(W)} = 4\sigma G^{(W)} S_{ech} J_p f$. Par la suite, le nombre effectif d'objets magnétiques simultanément actifs sur la section S_{ech} de l'échantillon est déduit par : $\tilde{n}(H_{exc}) = H^{(W)}/H_{exc}$.
- Nous apprécierons la possibilité d'interpoler la courbe tracée $\tilde{n}(H_{exc})$ pour chaque amplitude de polarisation J_p à une droite, puis par une méthode des moindres carrés, nous déterminerons les paramètres \tilde{n}_o et V_o , dépendants de l'induction pic dans un matériau réel. Nous superposerons, sur les pertes excédentaires réelles tracées en fonction de \sqrt{f} , la courbe des pertes excédentaires recalculées en prenant la formule linéarisée $\tilde{n}(H_{exc}) = \tilde{n}_o + H_{exc}/V_o$ pour le nombre effectif d'objets magnétiques simultanément actifs, afin de montrer la validité du modèle pour transcrire les pertes excédentaires observées.

Exposé des résultats pour le matériau « Prototyping » Etudions à présent le matériau « Prototyping ».

Au niveau des figures 5.70, 5.72, et 5.74, nous avons représenté la somme des pertes non maxwelliennes (par hystérésis et excédentaires) en fonction de la racine de la fréquence \sqrt{f} , pour les inductions respectives $J_p = 1$ T, $J_p = 0.5$ T, et $J_p = 1.25$ T. Pour ces mêmes inductions, au niveau des figures 5.71, 5.73 et 5.75, nous avons tracé la courbe du nombre effectif d'objets magnétiques simultanément actifs $\tilde{n}(H_{exc})$ en fonction du champ excédentaire H_{exc} , et identifié les paramètres \tilde{n}_o et V_o . Nous voyons que pour les trois cas, l'approximation linéaire semble vérifiée, l'identification de la fonction $\tilde{n}(H_{exc})$ à une droite se faisant sans beaucoup d'erreur. D'ailleurs, les tracés rouges au niveau des figures 5.70, 5.72, et 5.74, obtenus en recalculant les pertes excédentaires à partir du nombre $\tilde{n}(H_{exc})$ d'objets magnétiques linéarisé, montre bien la qualité de l'approximation réalisée. Nous voyons en outre que les paramètres \tilde{n}_o et V_o sont dépendants de la polarisation pic J_p , ce qui correspond au cas trouvé dans les matériaux laminés [Appino *et al.*, 2007], en particulier en ce qui concerne la croissance du paramètre V_o avec la polarisation pic J_p . Il y a trois faits singuliers, qui seront discutés à la section suivante consacrée à l'interprétation des résultats qu'il faut signaler dans ces trois résultats :

- l'importance de la composante de pertes par hystérésis W_{hyst} .
- l'importance du nombre d'objets magnétiques actifs \tilde{n}_o à fréquence, donc à champ excédentaire H_{exc} , nuls.
- la faiblesse du nombre V_o comparé à ce qui est trouvé dans les tôles laminées.

En effet, la référence [Bertotti, 1988] avait montré que l'on pouvait quasiment, pour les tôles, prendre $\tilde{n}_o = 1$ (le matériau est totalement inhomogène à fréquence nulle), et la pente $1/V_o$ est relativement grande. C'est ici le contraire, de sorte que la distorsion observée à fréquence faible où le rapport H_{exc}/V_o n'est pas encore très important devant le nombre \tilde{n}_o , qui restait confinée au niveau des fréquences très faibles pour les tôles, devient manifeste pour ces matériaux granulaires à des fréquences bien plus importantes, de l'ordre du kilohertz, et donc ne peut plus être négligée. Nous donnerons à la fin une interprétation possible de ce phénomène, sans doute lié à la structure granulaire du matériau. La zone pour laquelle de comportement est linéaire en fonction de la racine de la fréquence est donc rejeté vers les fréquences de plusieurs kilohertz.

-Polarisation $J_p = 1$ T

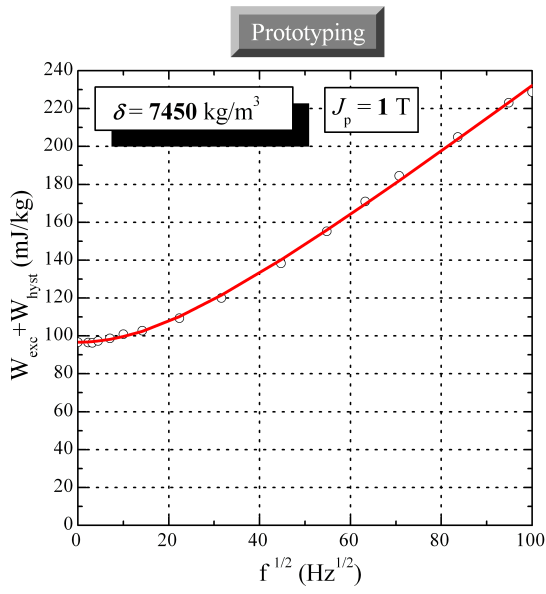


FIGURE 5.70: Pertes $W_{exc} + W_{hyst}$ pour le matériau « Prototyping » tracées en fonction de \sqrt{f} , pour $J_p = 1 \text{ T}$

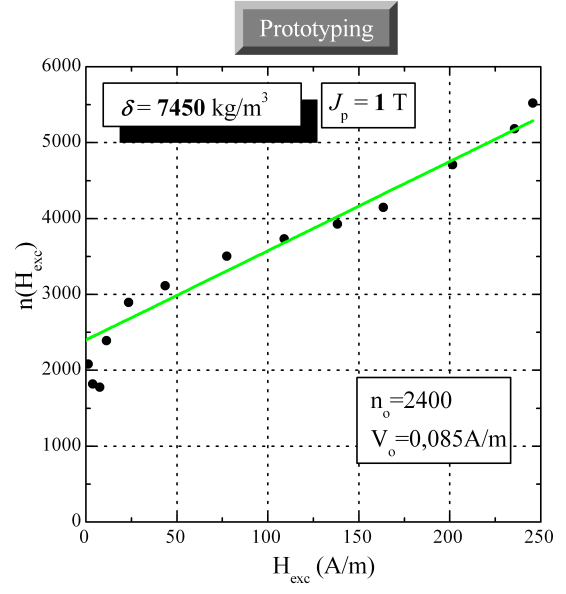


FIGURE 5.71: Nombre d'objets magnétiques $n(H_{exc})$ pour le matériau « Prototyping » pour $J_p = 1 \text{ T}$

-Polarisation $J_p = 0.5 \text{ T}$

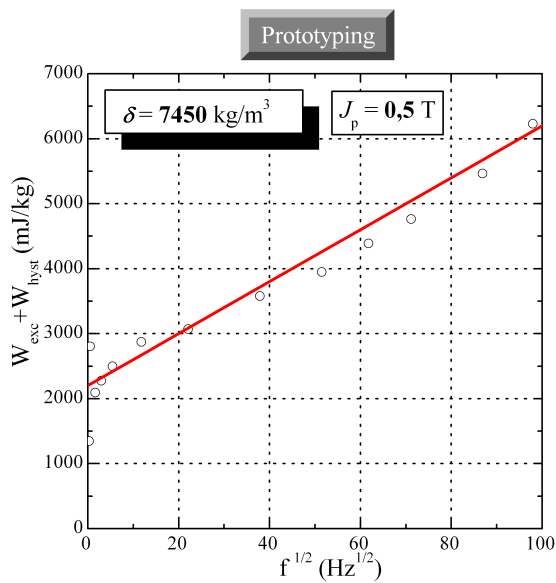


FIGURE 5.72: Pertes $W_{exc} + W_{hyst}$ pour le matériau « Prototyping » tracées en fonction de \sqrt{f} , pour $J_p = 0.5 \text{ T}$

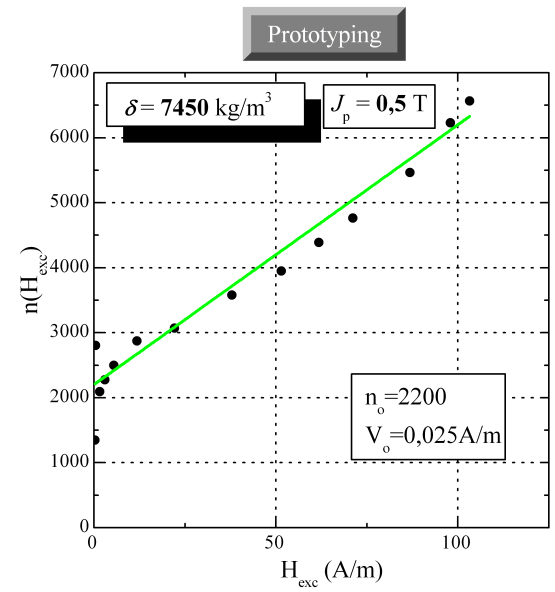


FIGURE 5.73: Nombre d'objets magnétiques $n(H_{exc})$ pour le matériau « Prototyping » pour $J_p = 0.5 \text{ T}$

-Polarisation $J_p = 1.25 \text{ T}$

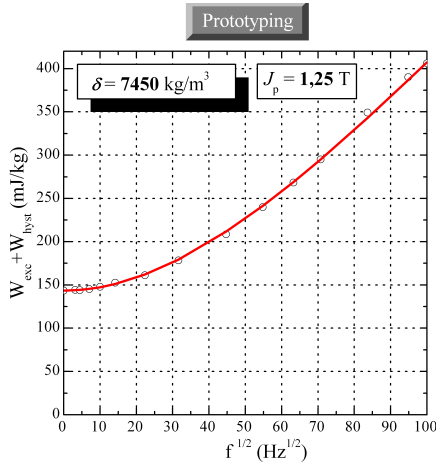


FIGURE 5.74: Pertes $W_{exc} + W_{hyst}$ pour le matériau « Prototyping » tracées en fonction de \sqrt{f} , pour $J_p = 1.25$ T

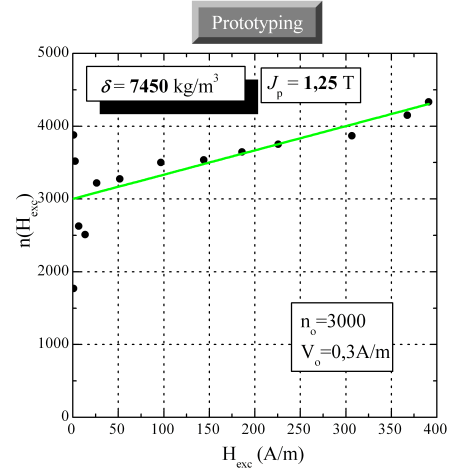


FIGURE 5.75: Nombre d'objets magnétiques $n(H_{exc})$ pour le matériau « Prototyping » pour $J_p = 1.25$ T

Exposé des résultats pour le matériau 110i1P Au niveau des figures 5.76, 5.78, et 5.80, nous avons représenté la somme des pertes non-maxwelliennes en fonction de la racine carrée de la fréquence \sqrt{f} pour les polarisations pic respectives $J_p = 1$ T, $J_p = 0.5$ T, et $J_p = 1.25$ T pour le matériau 110i1P. L'identification de la fonction $\tilde{n}(H_{exc})$ a été menée pour ces polarisations au niveau des figures 5.77, 5.79, et 5.81. L'approximation linéaire semble un peu plus difficile que pour le matériau « Prototyping ». Nous expliquons ceci par la difficulté accrue des mesures de pertes pour ce matériau, du fait de sa faible perméabilité magnétique relative. Qui plus est, par rapport au matériau « Prototyping », le matériau 110i1P semble présenter des pertes par hystérésis plus importantes, un nombre \tilde{n}_o accru, et un paramètre V_o plus faible, ce qui accentue encore les remarques faites pour le matériau précédent. Au niveau des figures 5.76, 5.78, et 5.80 où les courbes rouges représentent les pertes excédentaires recalculées avec l'approximation linéaire de la fonction $\tilde{n}(H_{exc})$, les résultats obtenus confortent tout de même le lecteur dans la validité de cette approximation linéaire du nombre effectif d'objets magnétiques.

-Polarisation $J_p = 1$ T

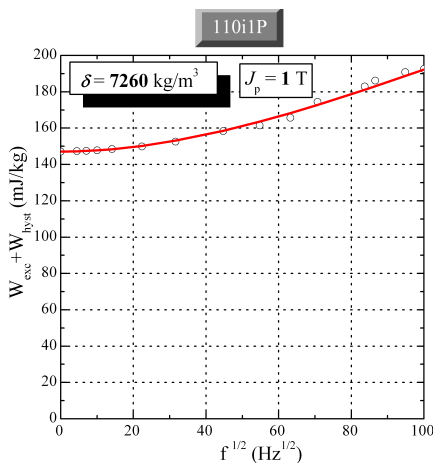


FIGURE 5.76: Pertes $W_{exc} + W_{hyst}$ pour le matériau 110i1P tracées en fonction de \sqrt{f} , pour $J_p = 1$ T

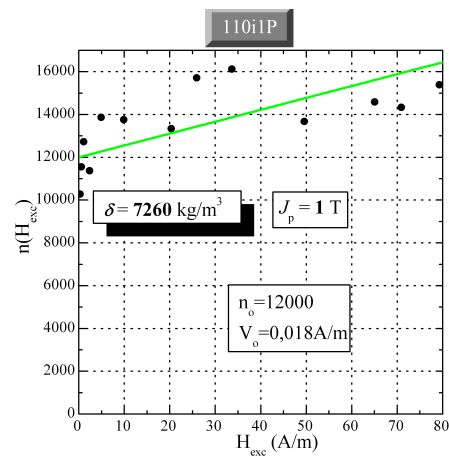


FIGURE 5.77: Nombre d'objets magnétiques $n(H_{exc})$ pour le matériau 110i1P pour $J_p = 1$ T

-Polarisation $J_p = 0.5$ T

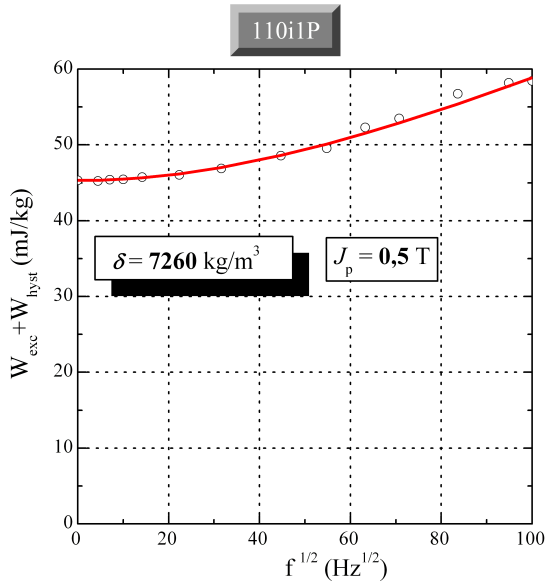


FIGURE 5.78: Pertes $W_{exc} + W_{hyst}$ pour le matériau 110i1P tracées en fonction de \sqrt{f} , pour $J_p = 0.5$ T

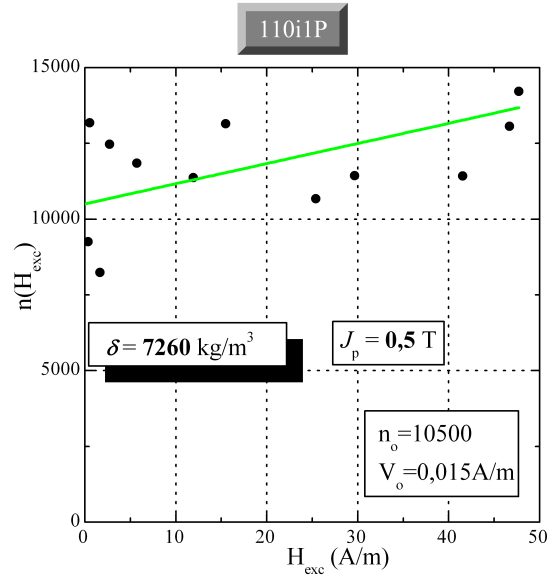


FIGURE 5.79: Nombre d'objets magnétiques $n(H_{exc})$ pour le matériau 110i1P pour $J_p = 0.5$ T

-Polarisation $J_p = 1.25$ T

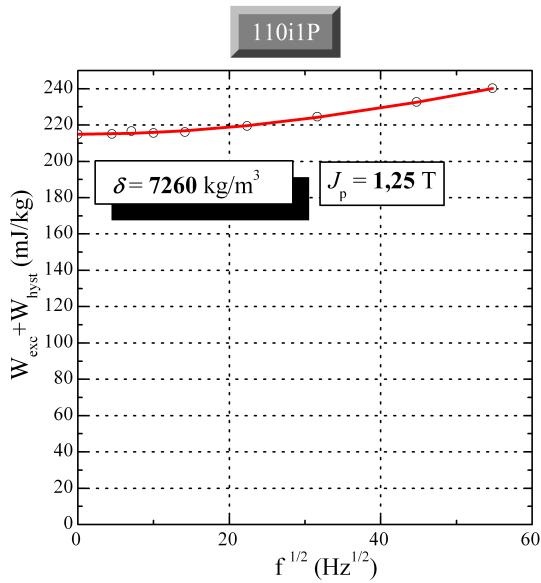


FIGURE 5.80: Pertes $W_{exc} + W_{hyst}$ pour le matériau 110i1P tracées en fonction de \sqrt{f} , pour $J_p = 1.25$ T

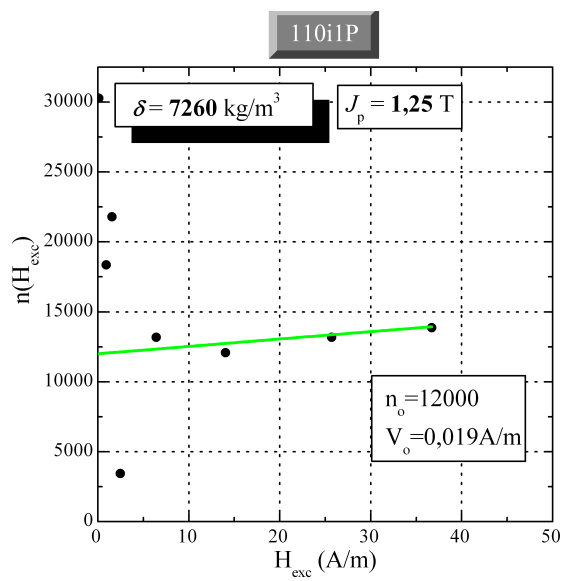


FIGURE 5.81: Nombre d'objets magnétiques $n(H_{exc})$ pour le matériau 110i1P pour $J_p = 1.25$ T

La distorsion obtenue à l'origine pour les pertes excédentaires est encore plus sensible pour ce matériau 110i1P que pour le matériau « Prototyping ». D'ailleurs, à l'observation des figures 5.76, 5.78, et 5.80, il est légitime de se demander si la fréquence limite de 10 kHz choisie pour la plage de mesure est suffisante pour observer réellement une croissance linéaire des pertes non-maxwelliennes en fonction de la racine carrée de la fréquence \sqrt{f} . En effet, il semble plus rationnel de conclure que la distorsion pour les fréquences faibles se poursuit sur quasiment toute

la plage de fréquence. Il ne semble pas illégitime de dire que le nombre d'objets magnétiques simultanément actifs $\tilde{n}(H_{exc})$ est quasiment constant, comme le montrent les figures 5.77, 5.79 et 5.81 où la pente semble très faible. Cette conclusion est importante d'un point de vue physique : en effet, si les objets magnétiques ne s'activent guère lorsque le champ magnétique excédentaire H_{exc} augmente, c'est-à-dire $\tilde{n}(H_{exc}) \approx n_o$, cela signifie que les pertes excédentaires évoluent de manière linéaire avec la fréquence sur la plage de fréquences considérée. Afin de confirmer cette tendance, nous nous permettons de tracer, au niveau des figures 5.82 et 5.83, les pertes excédentaires en fonction de la fréquence, en double échelle logarithmique. Les courbes obtenues, pour les deux polarisations $J_p = 0.5$ T et $J_p = 1$ T semblent avoir un coefficient directeur proche de l'unité, ce qui confirme ce comportement linéaire des pertes excédentaires en fonction de la fréquence, à cause du fort nombre d'objets magnétiques actifs au début, et le faible taux d'activation sur la plage de fréquence considérée.

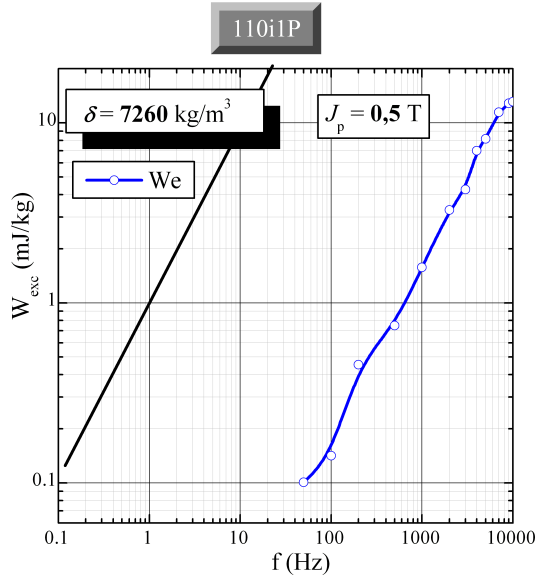


FIGURE 5.82: Tracé des pertes excédentaires W_{exc} en fonction de la fréquence pour le matériau 110i1P et pour la polarisation maximale $J_p = 0.5$ T

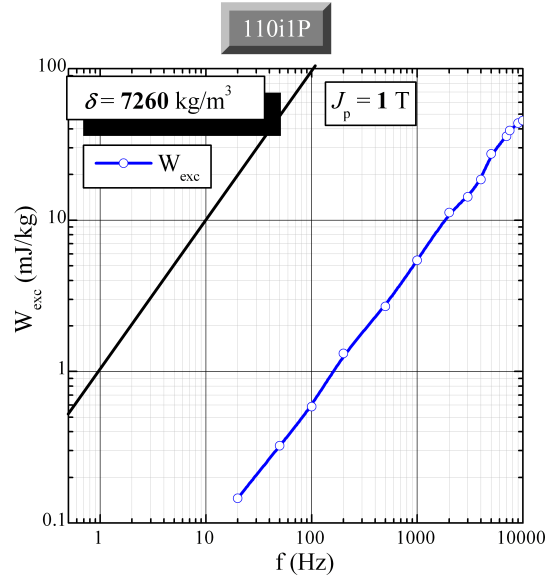


FIGURE 5.83: Tracé des pertes excédentaires W_{exc} en fonction de la fréquence pour le matériau 110i1P et pour la polarisation maximale $J_p = 1$ T

Récapitulatif des résultats Nous récapitulons tous les résultats obtenus en termes de pertes par hystérésis, le nombre effectif d'objets magnétiques actifs à fréquence nulle \tilde{n}_o , et de champ magnétique V_o nécessaire pour activer un objet magnétique en plus au niveau du tableau 5.5, pour tous les niveaux de polarisation et matériaux.

Matériau	Niveaux de polarisation	W_{hyst} (mJ · kg ⁻¹)	\tilde{n}_o	V_o (A · m ⁻¹)
Prototyping	$J_p = 1$ T	96.7	2400	0.085
	$J_p = 0.5$ T	30.55	2200	0.025
	$J_p = 1.25$ T	143.5	3000	0.3
110i1P	$J_p = 1$ T	147.14	12000	0.018
	$J_p = 0.5$ T	45.3	10500	0.015
	$J_p = 1.25$ T	215	12000	0.019

TABLE 5.5: Récapitulation des paramètres $W_{hyst}(J_p)$, $n_o(J_p)$, and $V_o(J_p)$ pour les deux matériaux, et des polarisations différentes

Discussion - Pertes par hystérésis importantes

Le premier élément à commenter est l'ampleur de la composante de pertes par hystérésis dans ces matériaux. Au niveau du tableau 5.5, nous voyons une composante de pertes par hystérésis de l'ordre de 100 mJ · kg⁻¹ pour le

matériau « Prototyping » à une polarisation $J_p = 1 \text{ T}$, et de $150 \text{ mJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ pour le matériau « 110i1P » pour cette même polarisation. Ces valeurs sont très supérieures à celles trouvées pour les matériaux laminés à grains non-orientés (tôle Fer-Silicium 3%), de l'ordre de $15 \text{ mJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ pour une polarisation $J_p = 1 \text{ T}$ (article [Bertotti, 1988]). Ce fait peut être relié à plusieurs causes possibles. D'une part, comme spécifié dans l'introduction, les matériaux magnétiques sont compactés afin de leur donner la forte densité que l'on observe. Nous avons dit que cette compaction, responsable de déformations plastiques des particules, génère des contraintes au niveau des grains se manifestant par une porosité accrue, des ruptures du cristal... Le recuit, effectué à des températures relativement limitées afin de ne pas endommager l'isolant entre les grains, ne parvient pas à supprimer ces dégradations. Ces obstacles sont autant de freins au déplacement des parois, ce qui peut justifier la valeur importante des pertes par hystérésis observée.

D'autre part, l'article [Shokrollahi et Janghorban, 2007c] propose une courbe, reprise à la figure 5.14 de l'état de l'art de cette partie, qui montre que le champ coercitif du matériau est une fonction décroissante de la taille des particules, pourvu que leur taille soit suffisante pour que des domaines magnétiques se forment. En effet, pour des raisons d'équilibre entre l'énergie de paroi et l'énergie magnétostatique des particules, il est plus difficile de former une paroi dans une petite particule, vu que l'énergie de paroi est grossièrement proportionnelle à D^2 (surface de paroi), et l'énergie magnétostatique d'une particule sans paroi est proportionnelle à D^3 . Par conséquent, pour une petite particule, l'énergie de paroi prend une proportion importante en comparaison de la diminution d'énergie magnétostatique procurée par cette paroi. Il est donc énergétiquement plus difficile de former une paroi dans une particule de faible taille. Ceci permet d'expliquer le fait que les pertes par hystérésis sont globalement plus importantes dans le cas du matériau 110i1P que dans le cas du matériau « Prototyping » : on rappelle que l'analyse des micrographies avait révélé des taille des surfaces de grains 15 fois plus faibles dans le cas du matériau 110i1P que dans le cas du matériau « Prototyping ».

Qui plus est, l'indépendance relative des particules séparées permet de penser qu'un mécanisme de renversement d'aimantation se produisant dans une particule ne se propage pas facilement aux autres particules, interdisant un mouvement d'ensemble comme dans les matériaux laminés homogènes, expliquant la coercitivité plus importante observée pour ces matériaux.

-Paramètre V_o

Le champ magnétique V_o dans le tableau 5.5 semble prendre des valeurs assez faibles, par rapport aux valeurs prises dans les matériaux laminés [Bertotti, 1988]. Cependant, nous nous rappelons qu'il s'agit d'un paramètre non intrinsèque : en réalité, c'est le produit $V_o S_{ech}$ qui est un paramètre intrinsèque. Et puisque la section du tore S_{ech} sur lequel on fait les mesures est relativement importante, il est normal que le paramètre V_o soit relativement faible. Néanmoins, nous allons montrer que le produit $V_o S_{ech}$ n'est pas si éloigné des valeurs trouvées dans les matériaux laminés conventionnels. Prenons par exemple le matériau laminé portant le nom « Armco » présenté à la référence [Bertotti, 1988], dont la taille de grain est de $38 \mu\text{m}$. L'article donne une valeur de $V_o = 0.12 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ pour ce matériau, la section de la tôle à travers laquelle la mesure est effectuée est de $3.6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$. Par conséquent le produit $V_o S_{ech}$ pour ce matériau est de l'ordre de $4.32 \cdot 10^{-7} \text{ A} \cdot \text{m}$. Pour le matériau 110i1P, le paramètre V_o est de l'ordre de $0.018 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ pour une polarisation de $J_p = 1 \text{ T}$, et ne change guère pour les autres polarisations. La section du tore est de $S_{ech} = 25 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$. Le produit $V_o S_{ech}$ est égal à $4.5 \cdot 10^{-7} \text{ A} \cdot \text{m}$, ce qui n'est guère éloigné de la valeur de $4.32 \cdot 10^{-7} \text{ A} \cdot \text{m}$ trouvée pour la tôle « Armco » de la référence [Bertotti, 1988].

A la limite, il semble même qu'il faille s'étonner que la valeur du paramètre V_o soit plus grande que les valeurs observées dans les tôles, en tenant compte de la différence des sections que nous venons de signaler. Une explication peut être imputée aux champs démagnétisants locaux dans ce matériau granulaire, contribuant à freiner l'activation des objets magnétiques.

-Paramètre \tilde{n}_o

La très grande valeur du paramètre \tilde{n}_o , qui est le nombre d'objets magnétiques actifs à champ excédentaire H_{exc} nul, constitue sans nul doute le point le plus important à signaler. On a vu que pour le matériau 110i1P, ce phénomène prend une telle ampleur qu'il est légitime de penser que $\tilde{n}_o \gg H_{exc}/V_o$, au point que le nombre d'objets magnétiques peut être vu comme constant, provoquant des pertes excédentaires évoluant linéairement avec la fréquence. La distorsion à l'origine de la courbe des pertes non-maxwelliennes en fonction de la racine de la fréquence \sqrt{f} n'est pas confinée aux fréquences très faibles comme pour les matériaux laminés. Dans ces cas, en effet, il est fréquent [Bertotti, 1985f] que le nombre d'objets magnétiques actifs à champ excédentaire nul \tilde{n}_o soit unitaire.

L'explication du phénomène est, à notre sens, à chercher dans la structure granulaire du matériau. Nous avançons l'explication suivante. Les particules, dans la section du tore, sont séparées par une couche d'isolant en résine,

donc non magnétique. Il semble donc probable que le comportement de ces particules soit assez indépendant, au contraire d'un matériau laminé qui possède un comportement bien plus homogène. De plus, l'existence des champs démagnétisants locaux va en quelque sorte gommer les différences de coercivité qui existent entre les particules du matériau. Par conséquent, à champ excédentaire H_{exc} nul, il est légitime de penser que le nombre d'objets magnétiques actifs par particule ne diffère guère d'une particule à l'autre. Nous avons donc, afin de permettre le renversement de l'aimantation, au moins un objet magnétique actif par particule en champ excédentaire H_{exc} nul. Comme toutes les particules ont sans doute un comportement identique, nous devrions donc avoir, à travers toute la section du tore, au moins autant d'objets magnétiques actifs en champ H_{exc} nul que de particules dans cette section. Cette explication est d'ailleurs en mesure de justifier pourquoi le matériau 110i1P, qui a de plus petits grains, donc plus de grains que le matériau « Prototyping » à travers la même section S_{ech} , possède aussi un nombre \widetilde{n}_o plus important que le matériau « Prototyping ». Néanmoins, comme nous le verrons dans la section suivante, il ne faut pas conclure que l'objet magnétique peut être directement identifié à la particule elle-même : nous verrons qu'il y a quelques objets magnétiques par grains, et nous donnerons une interprétation physique de ces objets magnétiques.

D'autre part, le processus d'homogénéisation du matériau en termes de régions actives qui a lieu à cause des courants de Foucault lorsque la fréquence augmente, processus expliquant l'augmentation du nombre d'objets magnétiques actifs dans les tôles homogènes, est ici bien plus restreint, car limité à l'intérieur de chaque particule.

Relation entre l'objet magnétique et le grain cristallographique

Prédiction du nombre moyen d'objets magnétiques par grains pour le matériau « Prototyping »

La référence [Bertotti, 1985b] a donné une relation directe entre la taille de l'objet magnétique localisé dans la section du matériau magnétique, les pertes par hystérésis, et les pertes excédentaires. Notons s la taille caractéristique de l'objet magnétique, qui possède donc une surface s^2 . Dans l'article que nous venons de citer, il est montré que, pourvu que la fréquence soit suffisante pour que le matériau exhibe une relation linéaire entre les pertes excédentaires et la racine carrée de la fréquence \sqrt{f} (on est à fréquence suffisante pour que la distorsion du début soit négligeable), la relation suivante peut être avancée :

$$W_{exc} = 8J_p \sqrt{2\sigma_{Fe} G^{(W)} \langle J_S \rangle s^2 \frac{W_{hyst}}{4J_p} f} \quad (5.96)$$

Dans la formule précédente, la quantité $\langle J_S \rangle$ est la polarisation à saturation du fer pur, en tenant compte de l'orientation isotrope des axes de facile aimantation dans l'espace. Pour le fer pur, la référence [Bertotti, 1985b] propose de prendre $\langle J_S \rangle = 1.7 \text{ T}$.

Il est à notre sens difficile d'appliquer ce modèle pour le matériau 110i1P, car comme nous l'avons dit, dans la plage de fréquences pour laquelle les essais ont été menés, le régime pour lequel les pertes dépendraient de la racine carrée \sqrt{f} de la fréquence (soit $H_{exc}/V_o \gg \widetilde{n}_o$) n'arrive pour ainsi dire jamais : il semble que même pour les fréquences les plus importantes, le nombre d'objets magnétiques activés est voisin de celui du départ : $\widetilde{n}(H_{exc}) \approx \widetilde{n}_o$. Néanmoins, ce fait nous permet de faire l'hypothèse que, dans ce matériau, sans doute, l'objet magnétique se confond avec la particule, de taille réduite.

Nous allons montrer que ce n'est pas le cas pour le matériau « Prototyping », dont les grains ont une surface environ 15 fois plus importante que celle du matériau 110i1P. Prenons par exemple le cas de la figure 5.70, où les pertes du matériau Prototyping ont été représentées en fonction de la racine carrée de la fréquence \sqrt{f} pour une polarisation maximale $J_p = 1 \text{ T}$. Pour des fréquences assez élevées comme par exemple pour $f = 7 \text{ kHz}$, il est manifeste qu'un nombre important d'objets magnétiques a commencé à s'activer sous l'effet du champ excédentaire H_{exc} , vu que la courbe $W_{exc}(\sqrt{f})$ pour $J_p = 1 \text{ T}$ est quasiment linéaire. Nous nous placerons donc, par exemple, à cette fréquence $f = 7 \text{ kHz}$, pour une polarisation pic $J_p = 1 \text{ T}$. L'application de la relation précédente entre les pertes par hystérésis et excédentaires permet d'aboutir, en lisant sur la courbe 5.70 que la valeur des pertes par hystérésis est $W_{hyst} = 96.7 \text{ mJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ et que la valeur des pertes excédentaires pour $f = 7 \text{ kHz}$ est $W_{exc} = 126.4 \text{ mJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, à la taille suivante pour la surface moyenne de l'objet magnétique : $s^2 = (50 \cdot 10^{-6})^2 \text{ m}^2$. La surface moyenne d'une particule, d'après l'analyse de la micrographie du matériau « Prototyping », est $\langle S_g \rangle = (100 \cdot 10^{-6})^2$. Nous en déduisons que nous aurions en moyenne, d'après ce calcul, environ 4 objets magnétiques par grain.

Connection entre l'objet magnétique et le grain cristallographique Afin de proposer une connexion entre la notion d'objet magnétique, qui est un outil mathématique utilisé dans la théorie des pertes, et la micro-

structure du matériau, nous nous sommes permis de reprendre l'échantillon poli qui nous avait permis de faire les micrographies au microscope électronique afin de trouver des informations sur la taille moyenne des particules, ainsi que sur leur forme. Nous avons attaqué la surface polie au nitral peu concentré, afin de faire ressortir certains reliefs à la surface du matériau. Nous avons ensuite effectué une observation au microscope optique muni d'un polariseur, qui peut faire ressortir certains reliefs à la surface du matériau « Prototyping ». Deux exemples de photographies obtenues sont montrés au niveau des photographies 5.84a et 5.84b.

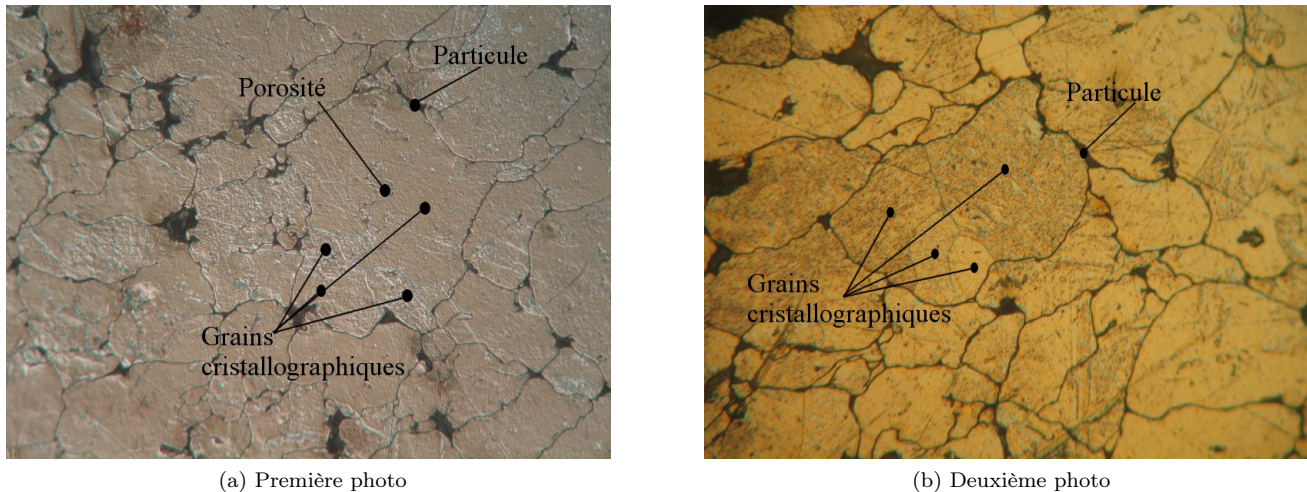


FIGURE 5.84: Observation au microscope optique des micrographies des échantillons après attaque au nitral pour voir les grains cristallographiques

Les photographies font apparaître, au sein des particules, des frontières de grains cristallographiques. C'est manifeste pour la particule centrale de la micrographie 5.84b, où on voit clairement, au sein de cette particule, les frontières de quatre grains cristallographiques. Sur la figure 5.84a, où la lumière a été fortement polarisée, nous ne voyons pas les frontières, mais nous voyons en revanche, après attaque au nitral peu concentré, des zones qui revêtent, éclairées à la lumière polarisée, un aspect différent. Nous voyons aussi des porosités, au coeur de certaines zones, qui peuvent, d'après la référence [Shokrollahi et Janghorban, 2007a], constituer des obstacles au déplacement des parois magnétiques, augmentant donc les pertes par hystérésis obtenues. Ces porosités seraient, toujours d'après la référence [Shokrollahi et Janghorban, 2007a], dues à des accidents que subit le réseau cristallin lors du processus de compaction.

Nous retiendrons donc que les particules du matériau « Prototyping » sont polycristallines (elles sont assez grandes pour ne pas être formées de monocristaux de fer). Qui plus est, le nombre de grains cristallographiques au coeur de chaque particule (qui est visiblement de 4 à 5 suivant les particules considérées) est cohérent avec le nombre moyen d'objets magnétiques par particule calculé en reliant les pertes excédentaires aux pertes par hystérésis. Il nous semble par conséquent raisonnable, comme fait dans les matériaux laminés classiques à grains non-orientés, de confondre le grain cristallographique avec l'objet magnétique pour le matériau « Prototyping », qui est un matériau à grosses particules destiné aux applications de machines électriques.

Enfin, il nous semble légitime de nous interroger sur l'origine de la structure polycristalline des particules du matériau magnétique. Cette dernière est-elle due au processus de compaction qui, à cause des forces exercées, créerait des fissures du réseau cristallin au niveau des particules au départ mono-cristallines, où bien cette structure polycristalline existerait-elle avant la compaction ? Pour répondre à cette question, nous avons observé les particules avant compaction du matériau. Nous avons pour cela pris de la poudre avant compaction. Malheureusement, nous n'avons pas réussi à nous procurer de la poudre du matériau « Prototyping » avant compaction. La société Högånäs a en revanche gentiment accepté de nous fournir gratuitement certains échantillons de poudre avant compaction. Parmi ces échantillons se trouvait le matériau 5001P, qui est le matériau de base pour les machines électriques (site internet d'Högånäs [Högånäs, 2009]), et dont les caractéristiques en termes de perméabilité et de pertes sont très voisines de celles du matériau « Prototyping ». Nous avons noyé la poudre dans une colle, et, une fois la colle solidifiée, nous avons poli la surface de cette colle, et donc les grains collés sur cette surface. Une attaque au nitral a

révélé les détails à la surface des grains. Le résultat est montré aux figures 5.85a et 5.85b. Il est clairement suggéré que même avant compaction, les grains de poudre sont polycristallins, et donc que ce n'est pas la compaction qui crée ces polycristaux.

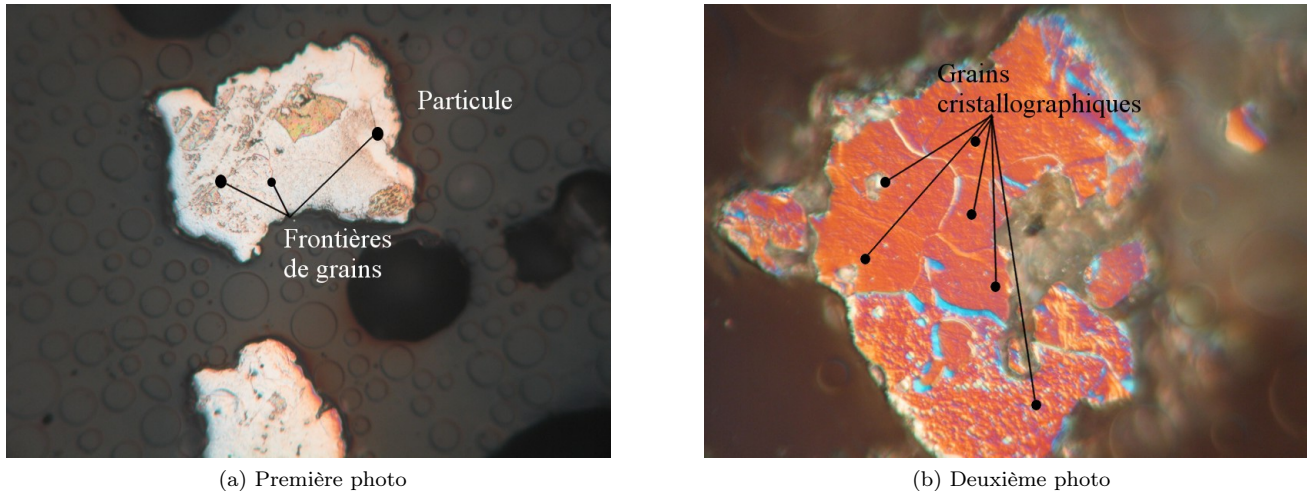


FIGURE 5.85: Observation au microscope optique de la poudre avant compaction après attaque au nitral pour voir les grains cristallographiques

5.2.3 Dimensionnement d'un système de caractérisation des matériaux magnétiques composites avec une excitation d'induction bi-directionnelle

Nous avons précisé que l'intérêt majeur des matériaux en poudre de fer résidait dans leur caractère isotrope, aussi bien magnétique que thermique. Par conséquent, il semble indispensable de ne pas se contenter de la caractérisation mono-dimensionnelle, et de refaire ce travail pour des excitations d'inductions multi-dimensionnelles. Certains auteurs ont proposé des solutions [Zhu *et al.*, 1999] pour caractériser les pertes dans les matériaux doux composites pour des inductions d'excitation bi-dimensionnelles, et même tri-dimensionnelles [Guo *et al.*, 2006a]. Ces systèmes sont fondés sur le dispositif de la figure 5.23. Néanmoins, nous avons dit, au cours du chapitre 2, que ce genre de système était susceptible de ne pas être satisfaisant, notamment en ce qui concerne l'homogénéité de l'induction magnétique générée au centre de l'échantillon. Ceci justifie que nous allons plutôt nous intéresser dans cette partie au dimensionnement d'un système inducteur de champ, bi-dimensionnel pour commencer, du type suggéré dans les références [Appino *et al.*, 2007, Fiorillo, 2004]. Ce système est constitué d'un stator triphasé de machine asynchrone, au centre duquel on place un échantillon circulaire d'épaisseur très fine. Dans le cas des références précédentes, les mesures sont faites en champ tournant sur les matériaux laminés de type Fer-Silicium. Par conséquent, l'échantillon placé au centre du stator de machine triphasée est directement une tôle de Fer-Silicium circulaire, d'épaisseur de 0.35mm, et de diamètre 14cm. La méthode de mesure est double :

- pour les inductions faibles, les pertes sont peu importantes, on utilise des bobines de capteurs de champ \vec{H} pour des champs bi-dimensionnels, comme montré à la première partie du chapitre 2. Ensuite, connaissant le vecteur des inductions \vec{B} et de champ magnétique \vec{H} , le vecteur de Poynting est appliqué, comme expliqué au chapitre 2. La procédure d'asservissement de l'induction circulaire au lieu voulu, fondée sur la méthode du point fixe pour des vecteurs d'inductions 2D, est également montrée au chapitre 2.
- pour les inductions fortes, le matériau étant très doux, le déphasage entre l'induction \vec{B} et de champ magnétique \vec{H} , caractéristique des pertes, est difficile à évaluer. C'est pour cela que l'on abandonne la méthode fondée sur la mesure du champ magnétique \vec{H} , au profit d'une méthode thermométrique, également détaillée au chapitre 2. On mesure l'échauffement que génèrent les pertes, et ensuite, par le biais d'un modèle thermique, on remonte à la valeur des pertes. A noter que les deux méthodes, que l'on utilise conjointement sur une plage d'inductions intermédiaires, donnent des valeurs de pertes identiques, ce qui conforte sur la validité du procédé de caractérisation.

Avec le stator de machine asynchrone triphasée utilisé dans la référence [Appino *et al.*, 2007], les inductions circulaires d'amplitude 1.8T, à des fréquences de 200Hz, ont été atteintes, en utilisant les amplificateurs linéaires CROWN AUDIO, modèle MA 5000VA, délivrant un courant limite $I_{LIM} = 60\text{ A}$ et une tension limite $V_{LIM} = 170\text{ V}$, tout en respectant une puissance apparente $S_{LIM} = 5000\text{ VA}$.

Principe et cahier des charges de la caractérisation en champ tournant Si on veut réutiliser ce principe de mesure pour caractériser en champ bi-dimensionnel des échantillons de matériaux magnétiques composites, plusieurs problèmes et remarques se doivent d'être signalés.

- Le matériau magnétique composite est, comme on l'a vu à la figure 5.17, bien moins magnétiquement perméable que les tôles de matériau Fer-Silicium. Par conséquent, il est à craindre que les ampères-tours à appliquer au niveau du stator pour magnétiser l'échantillon ne soient très importants. Pour des raisons physiques d'échauffement, nous limiterons ces ampères-tours de telle manière que la densité efficace de courant J_S dans les conducteurs en cuivre des encoches de l'inducteur soit inférieure à une valeur limite de $J_{S_{LIM}} = 10\text{ A} \cdot \text{mm}^{-2}$.
- Nous nous fixons pour objectif d'alimenter chaque phase du stator à l'aide d'un amplificateur linéaire de type CROWN AUDIO modèle MA 5000VA, ce qui fait trois amplificateurs de ce type à utiliser au total. Nous représentons au niveau de la figure 5.86 les limites de tension, de courant et de puissance apparente imposées dans le plan $V-I$ pour chaque phase lorsque l'on utilise l'amplificateur linéaire CROWN AUDIO MA 5000VA.

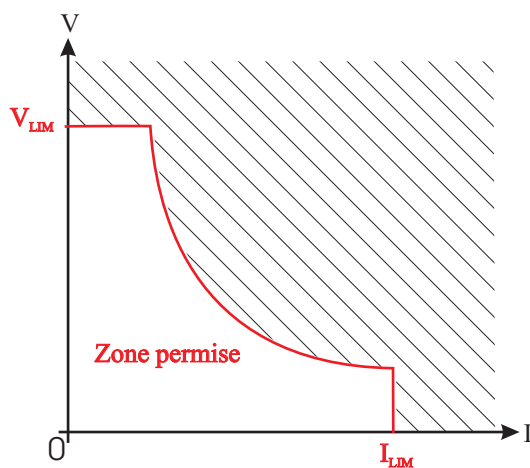


FIGURE 5.86: Limites d'alimentation de chaque phase de l'inducteur dans le plan $V-I$ dues à l'amplificateur linéaire CROWN AUDIO MA 5000VA

- A la difficulté précédente s'additionne la nécessité d'effectuer des mesures à fréquence relativement importante, car de part leur structure, les matériaux magnétiques composites ne peuvent délivrer tout leur potentiel que si la fréquence de fonctionnement est relativement élevée, sans quoi ils seraient sans peine surclassés par les tôles laminées qui possèdent des pertes par hystérésis bien inférieures. Qui plus est, pour des raisons évidentes, nous ne souhaitons pas que cette augmentation de la fréquence de fonctionnement se fasse au trop grand détriment de l'amplitude de l'onde d'induction circulaire obtenue. Nous voyons au niveau de la figure 5.17 qu'une saturation marquée a lieu entre une valeur maximale d'induction de 1.5 T et de 1.75 T. Nous pensons donc qu'il est illusoire de vouloir atteindre en régime dynamique cette induction de 1.75 T. En revanche, nous nous imposons de pouvoir l'atteindre en régime statique. En outre, nous nous fixons d'atteindre l'induction de 1.5 T à une fréquence de 1 kHz avec ce système. L'échantillon à tester est le matériau classique pour les machines électriques, de type SOMALOY 500.
- Le fait d'avoir un échantillon de matériau magnétique circulaire d'épaisseur axiale très fine situé au centre du stator de la machine asynchrone est un point important. En effet, seul ce fait garantit, par symétrie, d'obtenir que l'induction magnétique appliquée soit bi-dimensionnelle dans le plan de l'échantillon, exempte de composante d'induction parasite dans le sens axial. Si le matériau laminé, en ne prenant qu'une seule et unique tôle, satisfait naturellement cette condition, il n'en est pas de même d'un matériau magnétique doux composite. Il faut prévoir alors une découpe des échantillons en disque de rayon R_S , d'épaisseur axiale E_S très fine. Qui plus est, vu que le cycle d'hystérésis des SMC est plus large que celui des tôles Fer-Silicium, on peut

envisager d'utiliser la méthode de mesure des pertes par mesure du champ magnétique \vec{H} , et application du théorème de Poynting connaissant le vecteur d'induction \vec{B} voulue, sur toute la plage d'induction. Ceci évitera les inconvénients de la méthode thermique, imposant l'utilisation d'une enceinte adiabatique qui augmente la largeur magnétique de l'entrefer, et donc les ampères-tours nécessaires, déjà importants à cause de la nature du matériau en SMC et des niveaux d'induction voulus. Nous nous fixons une largeur d'entrefer entre l'échantillon et l'inducteur qui soit minimale, notée e , et égale à $e = 1$ mm.

- Par conséquent, il faudra disposer une bobine captant les deux composantes du champ magnétique \vec{H} au centre, sur une des faces, de l'échantillon circulaire. Rappelons en outre que la mesure des deux composantes de l'induction magnétique \vec{B} au centre de l'échantillon se fait en perçant quatre trous dans ce dernier. Tout ceci est représenté à la figure 5.87. Etant donné que les échantillons de la société Höganäs sont, d'après la photographie 5.34, vendus sous la forme de blocs cylindriques de 80 mm de diamètre, il semble naturel, afin de limiter le travail de découpe, de reprendre un tel diamètre : on impose donc un rayon d'échantillon $R_S = 40$ mm. En ce qui concerne l'épaisseur axiale E_S de l'échantillon, pour laquelle on doit adopter la valeur la plus faible possible, il nous semble, d'après les propriétés mécaniques de ces matériaux en poudre de fer compactée, que l'on peut difficilement choisir pour la découpe une épaisseur E_S inférieure à 3 mm. Nous choisirons donc $E_S = 3$ mm.
- Comme montré sur la figure 5.87, nous allons éloigner les quatre trous servant au bobinage des spires des capteurs d'inductions d'un rayon R_{HC} par rapport au centre C de l'échantillon. Ce rayon R_{HC} sera choisi égal à la moitié de R_S , soit 20 mm. Le choix de ce rayon R_{HC} est le fruit d'un compromis entre l'impératif de ménager la place suffisante au placement des bobines qui captent le champ magnétique \vec{H} , et la nécessité d'avoir une induction magnétique uniforme sur l'intervalle $r \in [0, R_{HC}]$. Si on choisit le rayon $R_{HC} = 20$ mm, on aura juste la place de disposer les bobines captant le champ magnétique \vec{H} (qui sont des bobines carrées de 40 mm de côté) entre les quatre trous, et nous verrons par des études éléments finis que le champ magnétique est alors uniforme dans toute cette zone de mesure. Concernant le capteur d'induction \vec{B} , étant donné qu'il y a environ cinq tours de fil à donner dans les deux directions, des trous de diamètre $d = 1$ mm suffisent largement.
- Le coefficient de remplissage des encoches (part du volume de cuivre sur le volume total d'encoche), noté k_{cu} , est pris égal à 0.3, d'après les valeurs communément admises par les fabricants de machines électriques.

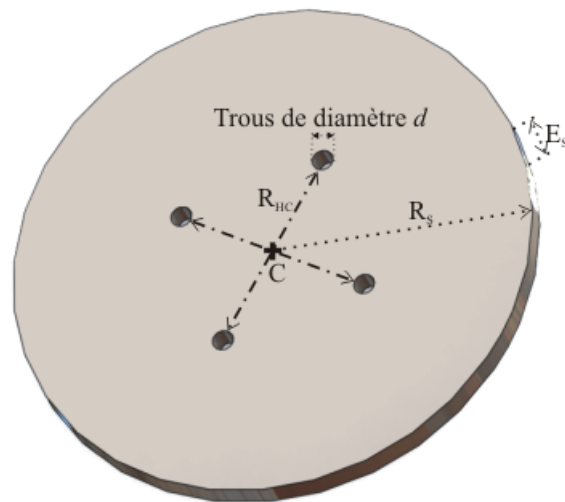
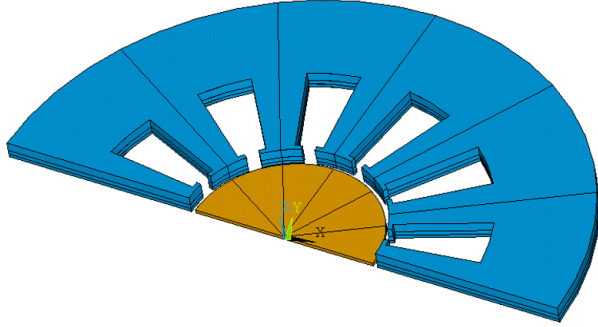
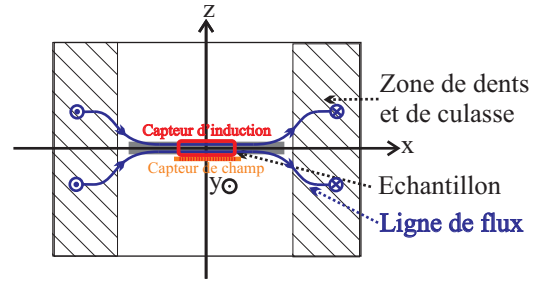


FIGURE 5.87: Représentation de l'échantillon circulaire utilisé pour la caractérisation des SMC en champ bidirectionnel

A titre d'illustration, nous montrons au niveau de la figure 5.88 la vue générale du dispositif, en vue 3D, puis en coupe axiale, avec les capteurs d'induction et de champ magnétique.



(a) Représentation du quart du dispositif inducteur en trois dimensions



(b) Coupe axiale du dispositif inducteur en montrant les capteurs d'induction

FIGURE 5.88: Représentation du dispositif inducteur en trois dimensions et en coupe axiale

Nous récapitulons au niveau du tableau 5.6a les contraintes de diverses natures imposées lors du dimensionnement de l'échantillon, et au niveau du tableau 5.6b les paramètres dont les valeurs ont été fixées a priori.

Nom de la contrainte	Détail	Valeur
Contrainte thermique	$J_S \leq J_{S_{LIM}}$	$J_{S_{LIM}} = 10 \text{ A} \cdot \text{mm}^{-2}$
Contrainte d'alimentation de chaque phase	$V \leq V_{LIM}$	$V_{LIM} = 170 \text{ V}$
	$I \leq I_{LIM}$	$I_{LIM} = 60 \text{ A}$
	$S \leq S_{LIM}$	$S_{LIM} = 5000 \text{ VA}$
Cahier des charges	Atteindre 1.75 T en statique	
	Atteindre 1.5 T à $f = 1 \text{ kHz}$	

(a) Récapitulation des contraintes à respecter lors du dimensionnement de l'inducteur

Paramètre	Détail	Valeur
Rayon de l'échantillon	R_S	40 mm
Rayon du capteur d'induction	R_{HC}	20 mm
Hauteur de l'échantillon	E_S	3 mm
Largeur de l'entrefer	e	1 mm
Coefficient de remplissage des encoches	k_{cu}	0.3

(b) Récapitulation des paramètres fixés pour le dimensionnement de l'inducteur

TABLE 5.6: Les contraintes et les paramètres fixés a priori

Détermination des paramètres géométriques optimaux de l'inducteur Le système électromagnétique considéré ici est un système fondamentalement tri-dimensionnel, où la saturation magnétique intervient de manière cruciale. Nous allons par conséquent, afin d'en faciliter la conception, faire un modèle éléments finis 3D non-linéaire. L'hystérésis magnétique n'est cependant pas pris en compte. L'hypothèse fondamentale de modélisation sera la formulation du problème en magnétostatique (aucun courant induit dans les matériaux n'est pris en compte).

Le matériau doux composite considéré sera le matériau de base utilisé pour les machines électriques, c'est-à-dire le Somaloy 500, dont la caractéristique $B(H)$ saturable, gracieusement fournie par la société Höganäs, a été représentée à la figure 5.89. L'inducteur doit être construit en matériau laminé classique, comme la tôle Fer-Silicium. Néanmoins, il nous est apparu, étant donné que les ampères-tours absorbés sont importants à cause de la perméabilité magnétique relativement faible du matériau composite, qu'il était sans doute préférable de prendre un matériau à perméabilité magnétique relative importante, et surtout à induction à saturation très grande, comme le Fer-Cobalt, de manière à ce que l'inducteur en lui-même ne consomme que le strict minimum d'ampères-tours possibles. Dans cette application où il n'y a qu'un exemplaire à réaliser, le prix élevé des tôles Fer-Cobalt n'est pas un problème de premier plan. Le gain en induction à saturation autorisé par la tôle Fer-Cobalt par rapport à la tôle Fer-Silicium a été représenté à la figure 5.89. Ce gain est manifeste, puisque la tôle Fer-Cobalt dépasse allègrement des inductions de plus de 2T pour un champ magnétique quasiment nul. Nous partons donc sur ce matériau afin de réaliser notre inducteur.

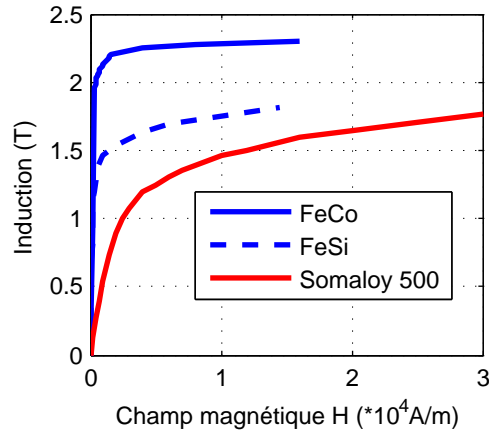


FIGURE 5.89: Courbes $B(H)$ du matériau Fer-Cobalt, du Fer-Silicium, et du Somaloy 500

La difficulté dans ce genre de problème tri-dimensionnel est le grand nombre de paramètres géométriques, tous interdépendants les uns des autres. Nous allons lister l'ensemble de ces paramètres géométriques. En premier lieu, afin d'assurer le meilleur compromis possible entre la simplicité de réalisation de l'inducteur et la plus grande homogénéité possible de l'induction magnétique dans l'échantillon, vu que le diamètre interne de l'inducteur est de l'ordre $2R_S = 80$ mm, il nous semble que choisir deux encoches par pôle et par phase constitue un choix de conception raisonnable. La représentation du stator de l'inducteur triphasé dans le plan xy (figure 5.88) est alors donnée à la figure 5.90. Il y aura alors une douzaine d'encoches sur le bord interne de l'actionneur, et l'ouverture angulaire d'un pas d'encoche est donc $\theta_S = \pi/6$.

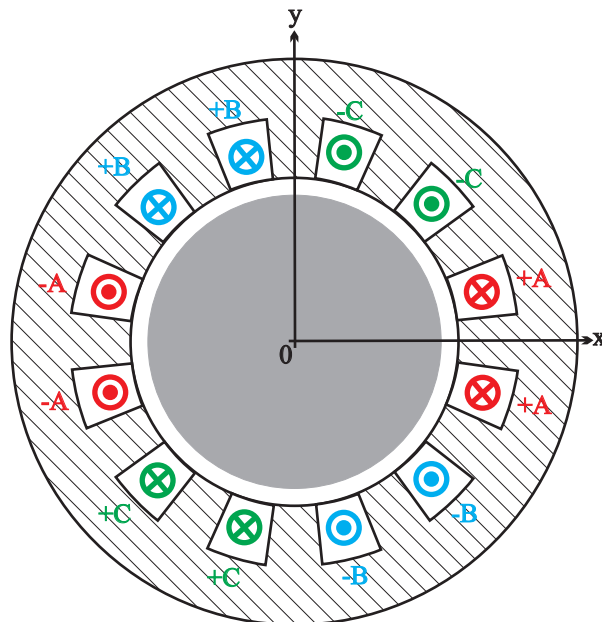


FIGURE 5.90: Représentation du stator de l'inducteur triphasé dans le plan xy

Afin de lister l'ensemble des paramètres géométriques, nous allons représenter le détail d'une dent statorique dans le plan xy à la figure 5.91 (sur un pas d'encoche angulaire θ_S), puis en coupe axiale à la figure 5.92.

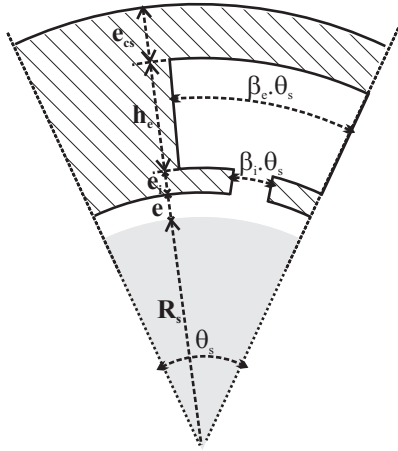


FIGURE 5.91: Paramètres géométriques du stator dans le plan xy sur un pas dentaire d'ouverture angulaire $\theta_S = \pi/6$

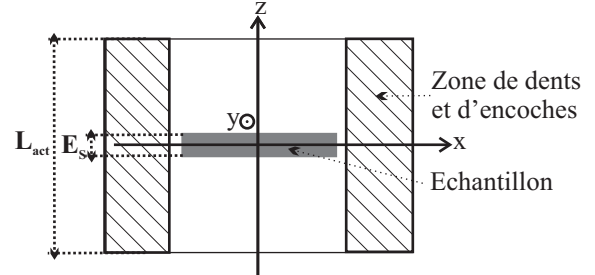


FIGURE 5.92: Paramètres géométriques du stator en coupe axiale

Les paramètres géométriques à trouver dans le plan xy sont récapitulés dans le tableau 5.7a, et le seul paramètre géométrique à trouver dans la direction axiale (tableau 5.7b) est la hauteur axiale active du stator, notée L_{act} .

Nature du paramètre	Nom	Description
Grandeurs radiales	e_i	Épaisseur de l'isthme
	h_e	Hauteur radiale d'encoche
	e_{cs}	Épaisseur de la culasse
Grandeurs orthoradiales	β_e	Ouverture relative de l'encoche par rapport au pas dentaire
	β_i	Ouverture relative de l'isthme par rapport au pas dentaire

(a) Paramètres géométriques dans le plan xy

Nom	Description
L_{act}	Hauteur axiale active du stator

(b) Paramètres géométriques dans la direction axiale

TABLE 5.7: Les paramètres géométriques à trouver

Les deux paramètres importants sont :

- L'ouverture relative β_e de l'encoche par rapport au pas dentaire angulaire θ_S , qui détermine la quantité de cuivre, donc la densité de courant, que l'on peut mettre dans les encoches.
- Le rapport $K_{act} = L_{act}/E_s$ est le rapport entre la hauteur axiale active du stator, et l'épaisseur axiale E_s de l'échantillon, qui détermine l'intensité du flux dans ce dernier.

Nous allons détailler le choix de ces deux paramètres.

Choix du rapport $K_{act} = L_{act}/E_s$ Pour choisir ce rapport, nous avons recours à une simulation par éléments finis tri-dimensionnelle du système. Nous allons prendre les autres paramètres du plan xy égaux à des valeurs arbitraires mais rationnelles, qui évitent la saturation du stator : $\beta_e = 0.5$, $h_e = 40$ mm, $e_{cs} = 40$ mm, et nous ne mettons pas d'isthme pour cette première étude. La densité de courant obtenue n'a pas d'importance pour l'instant. Nous allons alimenter les encoches de l'inducteur comme représenté à la figure 5.93, de manière à générer une induction suivant l'axe y : si on note n le nombre de spires par encoche, on injecte des ampères-tours maximaux nI_{MAX} dans la phase 'A', $-nI_{MAX}/2$ dans la phase 'B', et $-nI_{MAX}/2$ dans la phase 'C'.

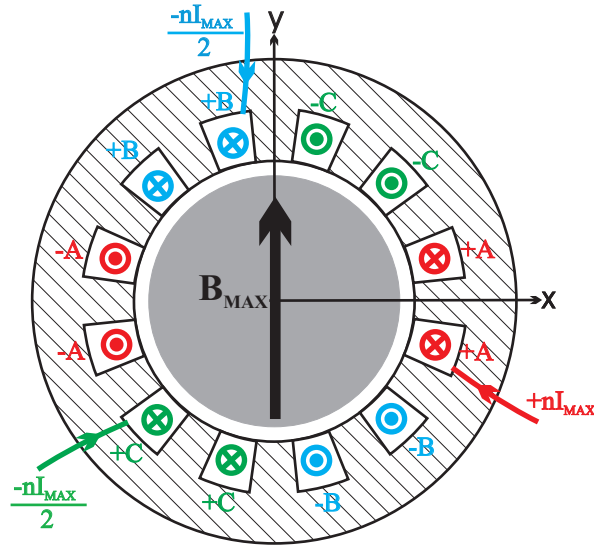


FIGURE 5.93: Alimentation du stator pour générer une induction magnétique suivant l'axe y

A l'aide d'une méthode de Newton, on trouve la valeur des ampères-tours maximaux, qui en tenant compte de la saturation magnétique de l'échantillon, permettent d'obtenir l'induction voulue B_{MAX} suivant l'axe y . Nous refaisons cette étude pour différents niveaux d'induction B_{MAX} ($B_{MAX} = 1.5\text{ T}$ et $B_{MAX} = 1.75\text{ T}$), et différents rapports $K_{act} = L_{act}/E_s$. Nous calculons également le flux maximal $\Phi_{A_{MAX}}$ dans la phase 'A', qui donnera, en première approximation, après multiplication par la pulsation temporelle des grandeurs, la force électromotrice induite dans le bobinage du stator, que l'on veut la plus faible possible afin de respecter la contrainte de tension $V \leq V_{LIM}$ imposée par l'amplificateur linéaire.

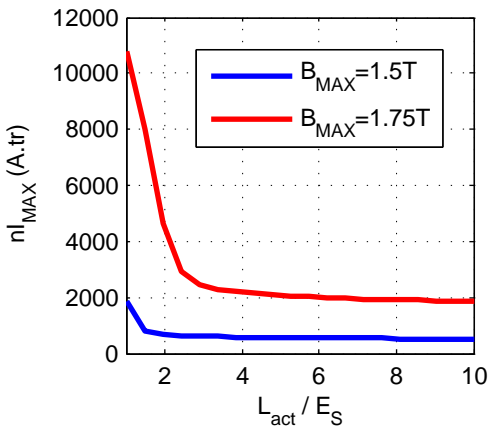


FIGURE 5.94: Ampères-tours maximaux nI_{MAX} à injecter par encoche pour atteindre les inductions maximales $B_{MAX} = 1.5\text{ T}$ et $B_{MAX} = 1.75\text{ T}$ en fonction du rapport $K_{act} = L_{act}/E_s$

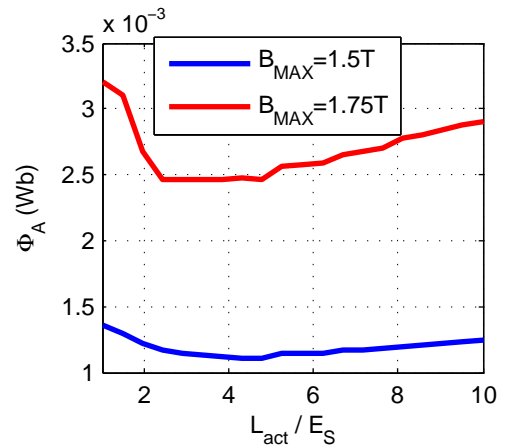


FIGURE 5.95: Flux maximal $\Phi_{A_{MAX}}$ obtenu dans la phase 'A' pour atteindre les inductions maximales $B_{MAX} = 1.5\text{ T}$ et $B_{MAX} = 1.75\text{ T}$ en fonction du rapport $K_{act} = L_{act}/E_s$

Nous voyons à la figure 5.94 que, lorsque l'on augmente la hauteur axiale L_{act} de valeur E_s (la même hauteur que l'échantillon), jusqu'à environ $5E_s$, ceci se solde par une diminution des ampères-tours nécessaires pour générer l'induction souhaitée au centre de l'échantillon. Ceci correspond physiquement à une concentration des lignes de champ fournies par toute la hauteur axiale L_{act} de l'inducteur dans l'échantillon d'épaisseur E_s , comme montré à la figure 5.96. Cette concentration est bénéfique, car elle réduit les ampères-tours nécessaires pour magnétiser

l'échantillon. En revanche, on voit sur la figure 5.94 qu'il ne sert à rien d'augmenter la hauteur active L_{act} au-dessus de $5E_S$, étant donné qu'il n'a plus de diminution significative des ampères-tours. En revanche, le flux dans la phase augmente à partir d'environ $L_{act} = 5E_S$, ce qui est bien entendu mauvais en ce qui concerne la chute de tension dans la phase de l'inducteur. Sans doute ceci correspond-il au cas de la figure 5.97, où les lignes d'induction loin du centre de la machine traversent directement l'entrefer sans passer par l'échantillon, et donc ne vont pas augmenter le niveau d'induction dans ce dernier. Il apparaît donc approprié de choisir $K_{act} = L_{act}/E_S = 5$, de telle manière à profiter des effets de la concentration du flux sans pour autant subir l'augmentation de tension induite à cause des lignes d'induction inutiles de la figure 5.97 qui traversent l'inducteur sans passer par l'échantillon si cet inducteur est axialement trop haut $L_{act} > 5E_S$. Nous prendrons par la suite toujours cette dernière valeur pour le rapport : $K_{act} = 5$.

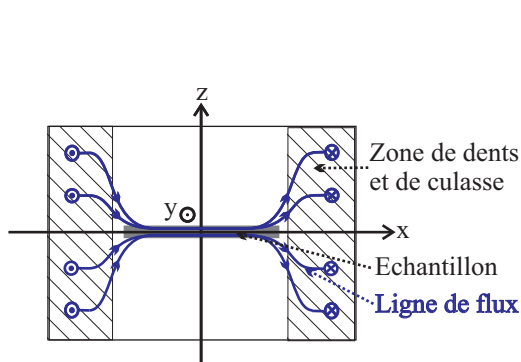


FIGURE 5.96: Concentration des lignes de champ dans l'échantillon pour $E_S < L_{act} \leq 5E_S$

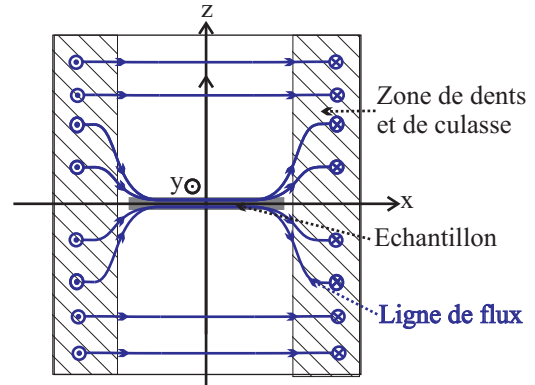


FIGURE 5.97: Lignes de champ si $L_{act} \geq 5E_S$

Choix du paramètre β_e A présent que le ratio $K_{act} = 5$ a été choisi, nous allons maintenant revenir dans le plan xy pour choisir l'ouverture relative de l'encoche par rapport au pas dentaire, notée β_e . Il est clair que le choix de cette ouverture relative relève d'un compromis entre deux phénomènes :

- Si l'ouverture relative d'encoche β_e est trop faible, alors la surface d'encoche est trop faible, et, étant donné les ampères-tours nI_{MAX} nécessaires pour atteindre une induction donnée au centre de l'échantillon, la densité efficace de courant dans l'encoche sera trop importante. Il serait alors difficile de respecter la contrainte de densité efficace maximale de courant $J_{SLIM} = 10 \text{ A} \cdot \text{mm}^{-2}$ admissible dans l'encoche.
- Si l'ouverture relative d'encoche β_e est importante, alors on peut penser qu'il est plus facile, à courant maximal fixé nI_{MAX} , de respecter la contrainte de densité de courant limite J_{SLIM} . En fait, si l'ouverture d'encoche est trop importante, et donc que l'ouverture de la dent de l'inducteur est trop faible, alors les dents vont se saturer. Or si les dents de l'inducteur elles-mêmes se saturent, ceci va inévitablement augmenter le courant nécessaire nI_{MAX} pour magnétiser l'échantillon à un niveau d'induction fixée. L'augmentation des ampères-tours causera alors une augmentation de la densité de courant.

Nous nous proposons donc de faire l'étude de sensibilité suivante : reprenons la situation de la figure 5.93. Nous allons, comme auparavant, chercher les ampères-tours maximaux par encoche nI_{MAX} à injecter afin d'obtenir au centre de la machine la valeur B_{MAX} d'induction d'axe y voulue. Nous faisons maintenant varier l'ouverture relative β_e des encoches de la machine. Comme prévu, la figure 5.98 montre que les ampères-tours maximaux absorbés nI_{MAX} sont une fonction monotone croissante de l'ouverture relative de l'encoche β_e par rapport au pas dentaire. L'augmentation importante de ces ampères-tours pour des valeurs d'ouvertures relatives des encoches importantes correspond à la saturation des dents de l'inducteur : il faut éviter ce phénomène si on veut garder des ampères-tours dans les encoches de valeur raisonnable. A noter que la forte augmentation des ampères-tours nécessaires entre les inductions $B_{MAX} = 1.65 \text{ T}$ et $B_{MAX} = 1.8 \text{ T}$ correspond à la saturation de l'échantillon en poudre de fer. Au niveau des densités de courant efficaces absorbées J_S (figure 5.99), ces fonctions présentent, comme prévu, un minimum : en effet, pour les faibles ouvertures d'encoche β_e , la densité de courant est naturellement grande, car la surface d'encoche est faible. Elle diminue lorsque β_e augmente, et avant la saturation des dents de l'inducteur : en effet, dans cette zone, les ampères-tours nI_{MAX} restent à peu près constants, alors que la surface d'encoche augmente. Lorsque la saturation des dents apparaît, on voit de nouveau une augmentation de la densité

de courant efficace J_S . Les pertes cuivre dans la machine, proportionnelles au produit du volume de cuivre par le carré de la densité efficace de courant J_S , sont montrées à la figure 5.100, et admettent aussi un minimum. Il est clair qu'étant donné les valeurs de densités efficaces de courant obtenues, il convient de prendre la valeur de l'ouverture relative β_e d'encoche minimisant la densité efficace de courant, qui se trouve être aussi celle qui minimise les pertes. On voit que ceci semble être réalisé pour des valeurs de β_e voisines de 0.6 : cette valeur diminue assez la densité de courant dans les encoches, sans pour autant provoquer la saturation des dents ferromagnétiques.

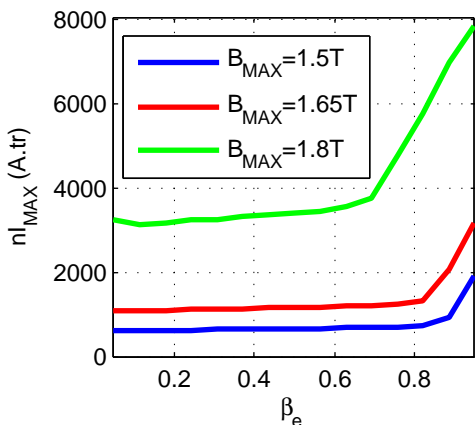


FIGURE 5.98: Ampères-tours maximaux nI_{MAX} à injecter par encoche pour atteindre les inductions maximales $B_{MAX} = 1.5 T$, $B_{MAX} = 1.65 T$ et $B_{MAX} = 1.8 T$, en fonction de l'ouverture relative β_e

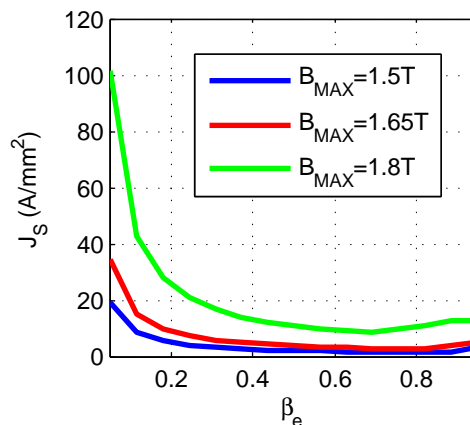


FIGURE 5.99: Densité de courant efficace J_S à injecter dans les encoches pour atteindre les inductions maximales $B_{MAX} = 1.5 T$, $B_{MAX} = 1.65 T$ et $B_{MAX} = 1.8 T$, en fonction de l'ouverture relative β_e

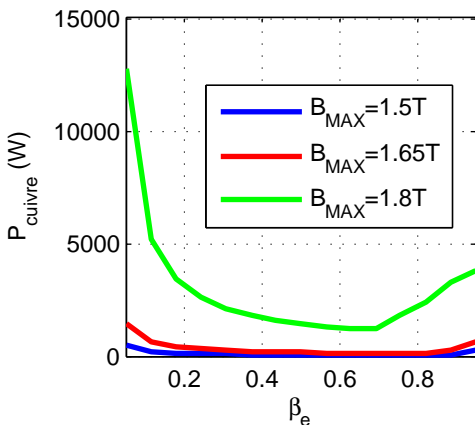


FIGURE 5.100: Pertes cuivre P_{cuivre} dans le cuivre des encoches pour atteindre les inductions maximales $B_{MAX} = 1.5 T$, $B_{MAX} = 1.65 T$ et $B_{MAX} = 1.8 T$, en fonction de l'ouverture relative β_e

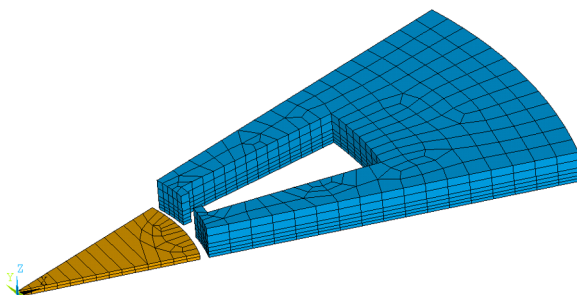


FIGURE 5.101: Représentation d'un pas dentaire d'ouverture angulaire $\theta_S = \pi/6$

Sans doute cette valeur $\beta_e = 0.6$ semble-t-elle être un peu importante aux yeux du concepteur de machines électriques. En fait, ceci vient de la structure tri-dimensionnelle de l'inducteur : le flux d'entrefer qui va magnétiser l'échantillon est canalisé par les dents statoriques. Néanmoins, ces dents statoriques qui véhiculent le flux magnétique ont une hauteur axiale L_{act} plus importante que celle de l'échantillon E_S . Le flux magnétique qui va magnétiser

l'échantillon se répartit donc sur toute la hauteur L_{act} de la dent, qui est plus importante que la hauteur E_S de l'échantillon. Cette répartition axiale de flux magnétique est montrée par l'équation de conservation du flux entre l'échantillon et l'inducteur, en notant B_S le niveau d'induction dans l'échantillon, et B_d le niveau d'induction dans la dent de l'inducteur :

$$B_S E_S = B_d (1 - \beta_e) L_{act} \implies 1 - \beta_e = \frac{B_S}{B_d} \frac{1}{K_{act}} \quad (5.97)$$

Le rapport K_{act} , intervenant au dénominateur de l'expression précédente, permet de diminuer l'ouverture angulaire relative $1 - \beta_e$ de la dent du stator, à même induction B_S dans l'échantillon, et B_d dans la dent statorique. Du fait de cette répartition axiale du flux magnétique, on peut se permettre de placer une ouverture relative d'encoche β_e plus importante (afin de diminuer la densité de courant dans ces encoches) que dans une machine classique, où stator et rotor ont à peu près la même hauteur.

Autres paramètres géométriques Les autres paramètres géométriques ont une influence mineure, et seront choisis de manière plus ou moins arbitraire.

- La hauteur radiale d'encoche h_e est fixée à 40 mm. Cette valeur peut être plus ou moins augmentée afin de réduire la densité efficace de courant dans les encoches. Il nous semble qu'une hauteur de 40 mm est suffisante afin de limiter la densité surfacique de courant à $J_{S_{LIM}} = 10 \text{ A} \cdot \text{mm}^{-2}$. A noter que des encoches trop étroites ou trop longues mènent à un flux de fuites important, flux qui provoque une chute de tension inductive dans la phase importante, sans contribuer bien évidemment à la création d'induction dans l'échantillon.
- L'épaisseur radiale de la culasse e_{cs} est réglée de manière à limiter l'induction dans cette dernière à 1.5 T, de manière à ne pas saturer le Fer-Cobalt (mais on en est loin, étant donné l'induction à saturation élevée dans ce matériau), mais aussi à ne pas provoquer dans l'échantillon de pertes dynamiques trop importantes en fonctionnement. Nous avons calculé que cela était équivalent à prendre $e_{cs} = 30 \text{ mm}$.
- L'ouverture de l'isthme caractérisée par le nombre β_i est choisie telle que l'ouverture de l'isthme soit la moitié de l'ouverture β_e de l'encoche. Ce paramètre permet d'améliorer le caractère homogène de l'induction dans l'échantillon, en limitant l'influence due aux effets d'encoches. Néanmoins, une valeur trop faible, qui ne serait pas très importante par rapport à l'entrefer, aurait pour effet de court-circuiter le flux généré par les encoches. Pour des raisons mécaniques, l'épaisseur radiale de l'isthme sera prise égale à $e_i = 2 \text{ mm}$.

Vérification de la capacité du système conçu à atteindre le cahier des charges souhaité La géométrie du système conçu est donc à ce stade fixée. Cette dernière est montrée à la figure 5.102, où un maillage pour la simulation numérique a été réalisé. Nous allons vérifier que les points de fonctionnement souhaités (1.75 T en condition quasi-statique, 1.5 T pour une fréquence $f = 1 \text{ kHz}$) sont effectivement atteignables, pour les contraintes d'alimentation concernant l'amplificateur linéaire que l'on utilise, et aussi pour la densité limite de courant efficace acceptée dans le cuivre des encoches.

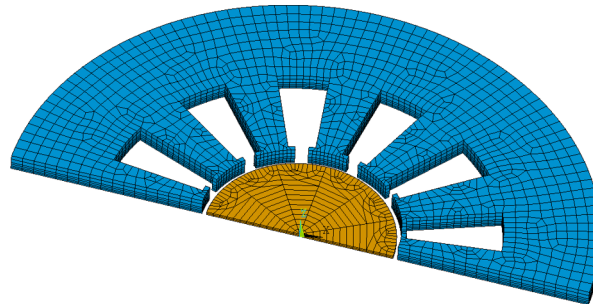


FIGURE 5.102: Représentation de la géométrie d'inducteur proposée, avec maillage pour la simulation numérique

Nous allons procéder de la manière suivante. Nous discrétisons l'onde circulaire souhaitée comme représenté à la figure 5.103. En effet, vouloir obtenir une onde circulaire d'amplitude B_{MAX} au centre de l'échantillon est équivalent

à vouloir obtenir sur chaque axe du plan $(0xy)$ les composantes d'inductions suivantes :

$$\begin{cases} B_x(t) = B_{MAX} \cos(2\pi ft) \\ B_y(t) = B_{MAX} \sin(2\pi ft) \end{cases} \quad (5.98)$$

On échantillonne ces ondes circulaires avec une période d'échantillonnage $T_e \ll T$. Chaque instant de temps est ainsi représenté par un entier k (figure 5.103).

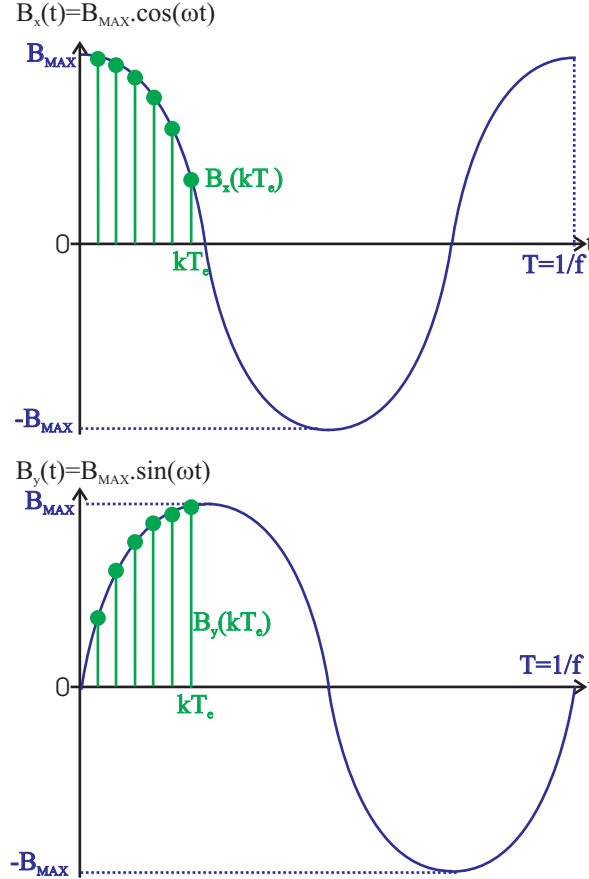


FIGURE 5.103: Discretisation des composantes de l'onde circulaire d'induction

Ensuite, pour chaque instant de temps k où on veut des inductions au centre de la machine $(B_x(kT_e), B_y(kT_e))$, on fait une résolution par la méthode de Newton-Raphson non-linéaire pour trouver les ampères-tours par encoche à injecter $(nI_A(kT_e), nI_B(kT_e), nI_C(kT_e))$. En fait, on n'a que deux courants indépendants à trouver, par exemple $(nI_a(kT_e), nI_b(kT_e))$, le troisième courant étant lié aux deux autres par la relation $nI_c(kT_e) = -(nI_a(kT_e) + nI_b(kT_e))$. On fait ce travail pour tous les instants de temps élémentaires présents sur une demi-période de rotation de l'induction. Il sera tout-à-fait remarquable de voir que, pour atteindre des inductions sinusoïdales au centre de la machine, le courant d'alimentation des phases, à cause des non-linéarités des matériaux saturables, ne sera pas lui sinusoïdal.

Nous pouvons ensuite calculer les tensions aux bornes des phases de la machine en calculant, par éléments finis, le flux total dans chaque phase pour chaque instant kT_e de calcul. Par exemple, pour la phase 'A', le flux total à l'instant kT_e est noté $\Phi_A(kT_e)$. Ensuite, la tension par spire dans la phase 'A', notée v_A , est calculée d'après la formule de dérivation numérique :

$$v_A(kT_e) = r \cdot nI_A(kT_e) + \frac{\Phi_A(kT_e) - \Phi_A((k-1)T_e)}{T_e} \quad (5.99)$$

La résistance r est la résistance spécifique d'une phase de l'inducteur. En pratique, nous prenons un nombre total d'échantillons par période égal à 50, afin de ne pas allonger de manière prohibitive ce calcul ayant recours aux éléments finis tri-dimensionnels non linéaires.

Connaissant, la tension et le courant d'alimentation de chaque phase, il convient à présent de calculer la puissance apparente, afin de vérifier que cette dernière ne dépasse pas la valeur maximale autorisée par l'amplificateur linéaire, par multiplication de la tension par spire d'alimentation de chaque phase et des ampères-tours par phase. Pour la phase 'A', il s'agit de :

$$S_A = \max_k (v_A(kT_e) nI_A(kT_e)) \quad (5.100)$$

Ensuite, il suffit de vérifier que cette puissance apparente reste inférieure à la puissance apparente S_{LIM} autorisée par l'amplificateur linéaire.

Premier point de fonctionnement : induction circulaire de 1.75 T pour des conditions quasi-statiques La forme du courant dans la phase 'A' nécessaire pour obtenir une induction de 1.75 T en champ circulaire est montrée à la figure 5.104. Les courants dans les autres phases sont décalés d'un tiers de période. Nous voyons que ce courant assurant une induction au centre de l'échantillon de forme circulaire est loin d'être sinusoïdal : l'ondulation de courant se produit à chaque fois que l'axe du champ passe en face d'une encoche du stator. On voit d'ailleurs que ces courants ont une valeur importante, car, pour ce niveau d'induction, l'échantillon est déjà bien saturé.

Au niveau de la figure 5.105, nous avons donné la tension par spire. Cette chute de tension est uniquement résistive, il n'y a pas de chute inductive vu que l'on est ici supposé être en régime quasi-statique. Cette chute de tension uniquement résistive étant très petite, on peut affirmer que le problème de tension maximale n'est pas une contrainte dimensionnante pour ce point de fonctionnement.

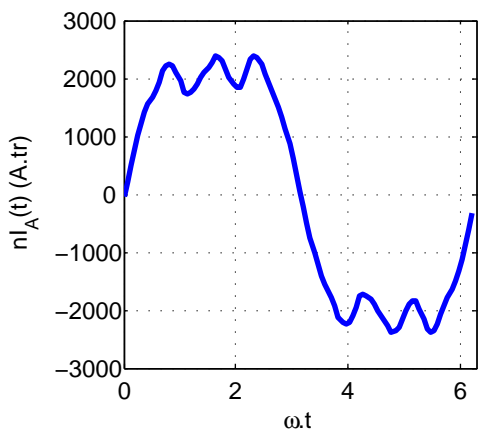


FIGURE 5.104: Evolution temporelle des ampères-tours $nI_A(t)$ dans la phase 'A' pour sur une période afin de générer une induction circulaire de 1.75 T

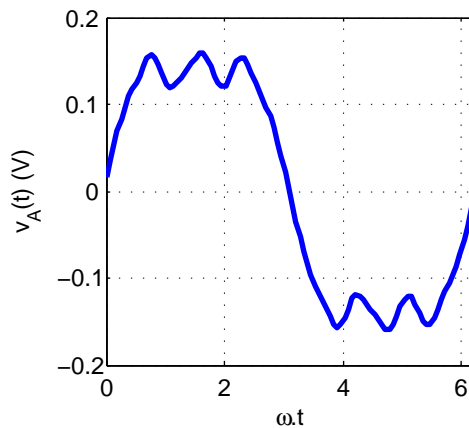


FIGURE 5.105: Evolution temporelle de la tension par spire $v_A(t)$ aux bornes de la phase 'A' pour sur une période afin de générer une induction circulaire de 1.75 T en fonctionnement quasi-statique

La puissance apparente instantanée est montrée à la figure 5.106. Cette puissance apparente, toujours positive, correspond uniquement aux pertes cuivre dans la phase 'A' considérée, dont l'expression est $r \cdot nI_A(t)^2$.

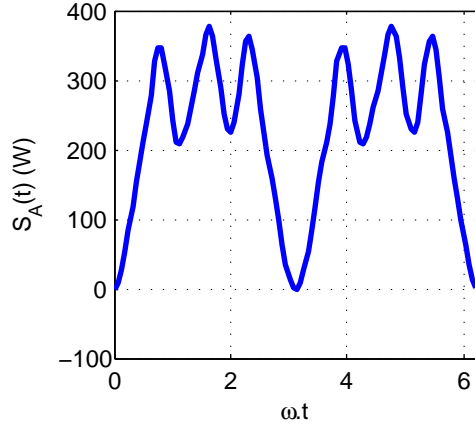


FIGURE 5.106: Evolution temporelle de la puissance apparente requise par la phase 'A' $S_A(t)$ sur une période afin de générer une induction circulaire de 1.75 T en fonctionnement quasi-statique

Les valeurs maximales de ces contraintes sont récapitulées au niveau du tableau 5.8. Nous voyons que les deux contraintes difficiles à respecter sont le courant maximal nI_{MAX} , et par suite la densité de courant maximale $J_{S_{MAX}}$, du fait de l'importance de l'amplitude d'induction à atteindre. Les contraintes de tension et de puissance apparente, grâce au fonctionnement quasi-statique, ne sont pas dimensionnantes. La densité de courant dans le cuivre $J_{S_{MAX}}$, avec la hauteur radiale importante des encoches choisie $h_e = 40$ mm, reste tout de même inférieure à $J_{S_{LIM}} = 10 \text{ A} \cdot \text{mm}^{-2}$. Quant à la valeur importante des ampères-tours nI_{MAX} obtenue, cette dernière impose de choisir un nombre de spires n vérifiant la relation $n \geq \frac{nI_{MAX}}{I_{LIM}}$, soit $n \geq 40$.

Définition des contraintes	Valeur des contraintes
Ampères-tours maximaux dans une phase	$nI_{MAX} = 2380 \text{ A} \cdot \text{tr}$
Tension par spire maximale aux bornes d'une phase	$v_{MAX} = 0.16 \text{ V}$
Puissance apparente maximale nécessitée par une phase	$S_{MAX} = 120 \text{ VA}$
Densité de courant efficace maximale dans le cuivre	$J_{S_{MAX}} = 6.76 \text{ A} \cdot \text{mm}^{-2}$
Pertes cuivre moyennes lors du fonctionnement	$P_{cuivre} = 669 \text{ W}$

TABLE 5.8: Récapitulation des contraintes maximales pour le premier point de fonctionnement (1.75 T en champ circulaire dans des conditions quasi-statiques)

Second point de fonctionnement : induction circulaire de 1.5 T à une fréquence $f = 1$ kHz La forme du courant dans la phase 'A' nécessaire pour obtenir une induction de 1.5 T en champ circulaire est montrée à la figure 5.107. Il est évident que ce courant est bien plus faible que celui de la figure 5.104 qui permettait d'atteindre 1.75 T. En effet, la courbe de première aimantation du matériau composite montrée à la figure 5.89 suggère qu'à cause de la saturation de l'échantillon, les ampères-tours nécessaires pour atteindre 1.75 T sont bien plus importants que ceux nécessaires pour atteindre 1.5 T. D'autre part, la forme d'onde des courants est bien plus sinusoïdale dans ce cas, où le système est plus linéaire.

Au niveau de la figure 5.108, la tension par spire est montrée. Etant donné la fréquence de fonctionnement élevée ($f = 1$ kHz), cette chute de tension est, contrairement au cas précédent, en grande partie inductive.

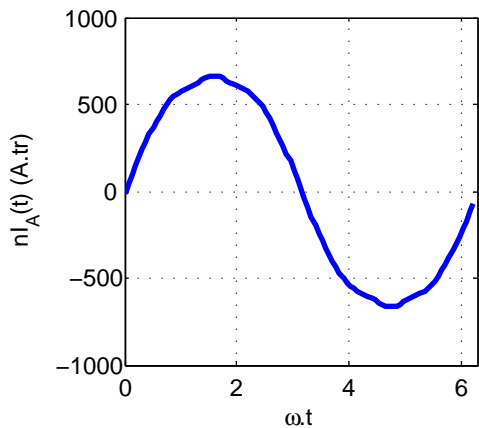


FIGURE 5.107: Evolution temporelle des ampères-tours $nI_A(t)$ dans la phase 'A' sur une période afin de générer une induction circulaire de 1.5 T

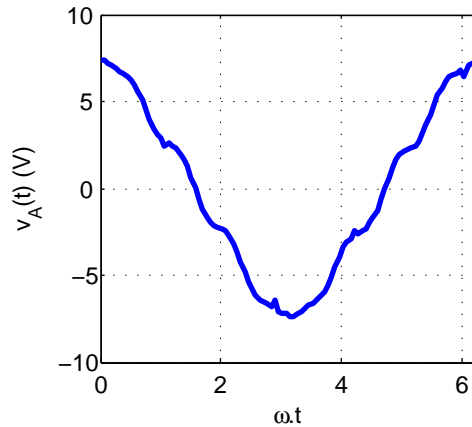


FIGURE 5.108: Evolution temporelle de la tension par spire $v_A(t)$ aux bornes de la phase 'A' sur une période afin de générer une induction circulaire de 1.5 T à une fréquence $f = 1$ kHz

La puissance apparente instantannée apparaît à la figure 5.109. Cette puissance apparente a bien une valeur moyenne quasiment nulle, ce qui justifie bien le caractère inductif de la chute de tension.

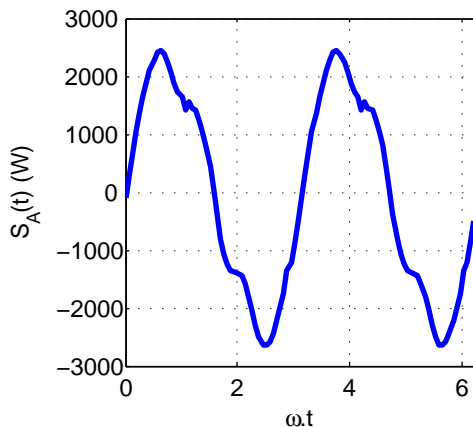


FIGURE 5.109: Evolution temporelle de la puissance apparente requise par la phase 'A' $S_A(t)$ sur une demi-période afin de générer une induction circulaire de 1.5 T à une fréquence $f = 1$ kHz

Les valeurs maximales de ces contraintes sont récapitulées au niveau du tableau 5.9 pour ce point de fonctionnement. Les ampères-tours sont très restreints pour cette induction, et de fait la contrainte de densité de courant est très aisément vérifiée. On peut voir aussi que la contrainte sur la puissance apparente est aussi vérifiée. En ce qui concerne la contrainte sur la tension et le courant d'onduleur, les contraintes sont vérifiées à condition que le nombre de spires par encoche n obéisse à l'inégalité :

$$\frac{nI_{MAX}}{I_{LIM}} \leq n \leq \frac{V_{LIM}}{v_{MAX}} \tag{5.101}$$

Numériquement, cette inégalité devient :

$$12 \leq n \leq 22 \tag{5.102}$$

Cette inégalité semble incompatible avec celle du paragraphe précédent pour le premier point de fonctionnement, où nous avons $n \geq 40$. Nous nous rappelons que n est le nombre de spires par encoche, que l'on a disposé par

phase 2 encoches en série. Une solution est de disposer 40 conducteurs par encoches, mais de prévoir un système qui permette de mettre les deux encoches d'une même phase en série ou en parallèle (le cas série correspond à la configuration nécessaire pour atteindre les inductions de 1.75 T dans des conditions statiques, le cas parallèle correspond à celle nécessaire pour atteindre 1.5 T à 1 kHz.)

Définition des contraintes	Valeur des contraintes
Ampères-tours maximaux dans une phase	$nI_{MAX} = 663 \text{ A} \cdot \text{tr}$
Tension par spire maximale aux bornes d'une phase	$v_{MAX} = 7.39 \text{ V}$
Puissance apparente maximale nécessitée par une phase	$S_{MAX} = 2635 \text{ VA}$
Densité de courant efficace maximale dans le cuivre	$J_{S_{MAX}} = 1.81 \text{ A} \cdot \text{mm}^{-2}$
Pertes cuivre moyennes lors du fonctionnement	$P_{cuivre} = 48 \text{ W}$

TABLE 5.9: Récapitulation des contraintes maximales pour le second point de fonctionnement (1.5 T en champ circulaire à une fréquence $f = 1 \text{ kHz}$)

Pour conclure, la géométrie proposée semble ainsi permettre d'atteindre le cahier des charges fixé, en respectant toutes les contraintes, aussi bien thermiques que d'alimentation, mais à condition de prévoir un système de commutation de branchement série-parallèle des deux bobines d'une même phase.

Vérification de l'homogénéité de l'induction magnétique au centre de l'échantillon A présent, il est possible de vérifier l'homogénéité de l'induction dans l'échantillon, ou tout du moins au centre de ce dernier, sur l'intervalle $r \in [0, R_{HC}]$, avec $R_{HC} = R_s/2$, puisque que c'est dans cette zone centrale que la mesure, aussi bien pour l'induction magnétique \vec{B} que pour le champ magnétique \vec{H} , est effectuée.

Nous allons refait une simulation avec la géométrie proposée, en prenant l'alimentation en courant représentée à la figure 5.104 en un instant de temps donné, de telle manière à atteindre au centre de l'échantillon une valeur d'induction de 1.75 T. Nous représentons à la figure 5.110 le champ des inductions dans le système formé des parties ferromagnétiques de l'inducteur et bien entendu de l'échantillon au centre. Le même résultat est montré à la figure 5.111, où le niveau d'induction dans le système est montré sous la forme de contours de niveaux portant sur le module de l'induction. Nous nous permettons à la figure 5.112 de montrer le zoom de la figure 5.110 sur l'échantillon.

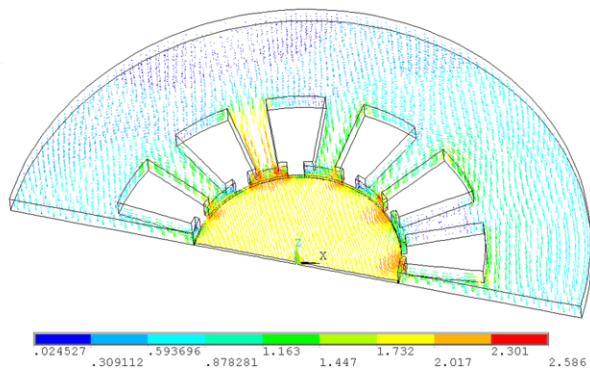


FIGURE 5.110: Tracé des inductions dans l'inducteur sous forme de champ de vecteur

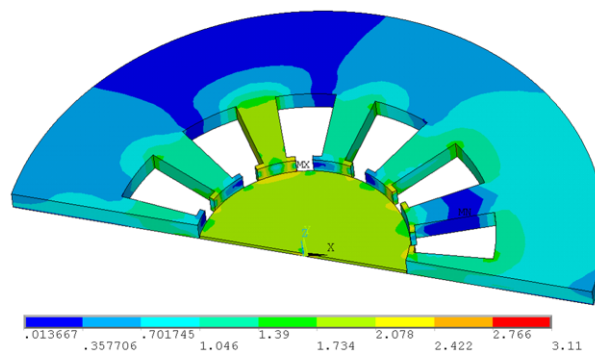


FIGURE 5.111: Tracé des inductions dans l'inducteur sous forme de contour de champ

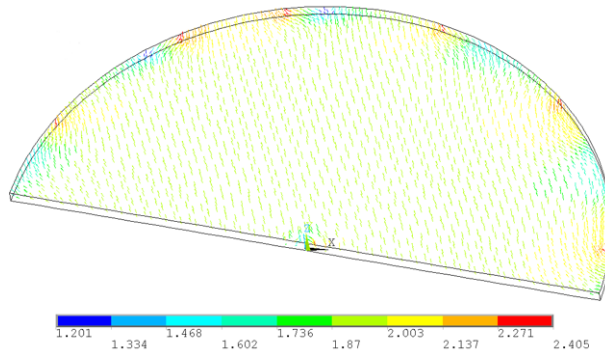


FIGURE 5.112: Zoom sur le tracé des inductions dans l'échantillon sous forme de champ de vecteur

Nous voyons sur ces figures de résultats que l'induction au centre de l'échantillon est homogène. L'effet d'encoche génère une ondulation d'induction au voisinage du bord de l'échantillon, mais ces ondulations sont très largement atténuées au centre de ce dernier, sur l'intervalle $r \in [0, R_{HC}]$, où les capteurs d'induction \vec{B} et de champ magnétique \vec{H} sont disposés. Par conséquent, on peut en déduire que le système proposé respecte le cahier des charges. Nous présentons au niveau du tableau 5.10 la récapitulation de tous les paramètres géométriques proposés pour l'inducteur.

Définition du paramètre	Notation	Valeur
Rayon d'échantillon	R_S	40 mm
Hauteur axiale d'échantillon	E_S	3 mm
Entrefer	e	1 mm
Rapport L_{act}/E_S (hauteur active de l'inducteur par rapport à l'échantillon)	K_{act}	5
Ouverture relative de l'encoche par rapport au pas dentaire	β_e	0.6
Hauteur radiale active d'encoche	h_e	40 mm
Epaisseur radiale de culasse	e_{cs}	30 mm
Epaisseur radiale de l'isthme	e_i	2 mm
Ouverture relative de l'isthme par rapport à l'encoche	β_i	0.5

TABLE 5.10: Récapitulation des paramètres géométriques retenus

Conclusion

Les études de ce chapitre, consacré à l'exposé d'un travail de recherche sur les matériaux magnétiques, se composent de deux parties distinctes. La première partie traite des pertes en haute fréquence dans les matériaux laminés conventionnels soumis à des inductions d'excitation moyennes bi-dimensionnelles. Nous avons vu, lors de l'état de l'art, que cette problématique a déjà été largement abordée dans la littérature sur le sujet, le plus souvent au moyen de calculs numériques par éléments finis intégrant des modèles d'hystérésis magnétique, comme les modèles de Preisach. Ces modèles peuvent s'avérer assez coûteux en terme de temps de calculs. C'est pourquoi il nous est apparu important de développer une méthode de modélisation analytique. La principale difficulté vient du fait que les niveaux moyens importants des inductions mises en jeu obligent à prendre en compte la non-linéarité du matériau magnétique. Nous avons alors réinvesti une méthode analytique présente dans la littérature afin de résoudre l'équation de diffusion en régime non-linéaire, pour des loci bi-dimensionnels d'inductions moyennes à travers la tôle. L'application du vecteur de Poynting donne la composante de pertes classiques dans la tôle. Ensuite, nous avons proposé une méthode d'évaluation des pertes non-maxwelliennes en discrétisant la tôle, et en appliquant localement, sur la base des loci d'inductions calculés de manière analytique, un modèle des pertes par

hystérésis et excédentaires. Nous avons également commenté les conditions d'application des formules des pertes non-maxwelliennes dans l'optique d'une discrétisation du matériau en couches élémentaires. Des conclusions ont pu être tirées sur l'importance de considérer la non-linéarité du matériau lors de la résolution de l'équation de diffusion. En particulier, la diffusion non-linéaire génère localement la présence d'harmoniques d'induction de fréquence élevée, se traduisant par une augmentation des pertes classiques par rapport au cas de la diffusion linéaire. Ce phénomène explique que la prise en compte de la diffusion non-linéaire engendre globalement plus de pertes qu'un modèle linéaire dans la tôle magnétique. Ce modèle théorique doit maintenant être confirmé expérimentalement, bien qu'il ne soit pas aisé de générer des champs tournants d'amplitude moyenne importante à des fréquences élevées, de l'ordre de plusieurs kilohertz. Une solution pourrait être de générer de manière artificielle un effet de peau en basse fréquence (de l'ordre de 100Hz) afin de faciliter la caractérisation expérimentale, en utilisant une tôle d'épaisseur très importante.

La seconde partie, qui est en termes de travail effectué la plus conséquente de ce chapitre, aspire à traiter de l'applicabilité de la théorie physiquement justifiée de la séparation des pertes dans les matériaux magnétiques doux composites. Le premier paragraphe a souhaité donner au lecteur une vision non exhaustive des travaux déjà effectués dans le domaine, les procédés de fabrication, ainsi que les utilisations de ces matériaux (section 5.2.1). La structure et les enjeux de la fabrication des matériaux composites est clairement ressortie : il s'agit de matériaux constitués de particules de fer, le plus souvent du fer pur. Ensuite, chaque particule est isolée électriquement par un isolant, qui peut être inorganique (par exemple une couche d'oxyde), ou au contraire organique (par exemple du polyester). Ensuite, les gains sont amalgamés dans une résine liante, qui assure la cohésion mécanique de l'ensemble, et renforce l'isolation entre les grains. Survient ensuite l'étape importante de la compaction, qui, par des déformations plastiques des grains, donne au matériau une densité importante. Cette pression de compaction est l'objet d'un compromis : en effet, une pression élevée est nécessaire afin de ne pas dégrader la perméabilité magnétique de manière rédhibitoire, mais en revanche rapproche les particules, et augmente la conductivité du matériau, ce qui risque de causer des pertes par courants induits. Ceci explique que la plupart des fabricants proposent différents matériaux offrant un compromis densité-résistivité différent suivant les contraintes de l'application visée. Ensuite vient l'étape du recuit, dont le but est de relaxer les contraintes apparaissant dans le matériau après compaction, source d'obstacles au déplacement des parois magnétiques. Ce recuit est incomplet, afin de ne pas porter atteinte à la qualité des isolants entre les particules du matériau. L'inconvénient est alors un taux de pertes par hystérésis hélas élevé. Le travail de modélisation de ces matériaux présent dans la littérature concerne surtout la modélisation de la perméabilité magnétique équivalente du matériau : quelque soit le modèle utilisé, le problème est toujours de trouver une solution pour modéliser l'entrefer réparti dans le matériau à cause de l'espace inter-grains électriquement isolant et non-magnétique. Il est frappant de constater qu'en ce qui concerne les pertes, peu de travaux existent, et la plupart des approches tentées sont empiriques. Nous pensons que ce manque de résultats de caractérisation est à l'origine d'une utilisation encore timide de ces matériaux par les concepteurs de machines électriques, manque auquel nous tentons de pallier dans ce travail de recherche, d'autant que les applications déjà réalisées semblent démontrer l'intérêt de ces matériaux, à condition toutefois de repenser les géométries des machines électriques, afin de pouvoir profiter de l'isotropie tant magnétique que thermique de ces matériaux granulaires.

Après cet état de l'art, nous avons abordé le travail concernant la séparation des pertes. Une première partie a concerné le problème de l'échelle de circulation (locale ou globale) des courants induits (section 5.2.2.1). Une mesure de la résistivité dynamique a été effectuée, en montrant notamment l'absence d'élément réactif. Une résistivité statique de valeur relativement faible a été trouvée. Néanmoins, il s'est avéré, en mesurant les pertes volumiques sur des échantillons de taille différente, que cette résistivité statique ne parvenait pas à générer des courants induits à l'échelle de l'échantillon. Ceci provient du fait que les sections des tores étudiés sont assez petites pour négliger ces phénomènes de courants induits globaux. Une perspective de ce travail serait de mener une nouvelle étude sur un tore de section plus importante, où ces courants induits macroscopiques ne pourraient plus être négligés, et de recommencer la séparation des pertes en prenant en compte, en plus des termes de pertes microscopiques, un terme de courants induits macroscopiques. En effet, ce cas est certainement le plus réaliste en pratique, les parties ferromagnétiques des culasses magnétiques ayant souvent des dimensions de plusieurs centimètres. Néanmoins, la manière de calculer ce terme de courants induits macroscopiques, avec ou sans diffusion, reste pour l'instant une question ouverte.

Ayant acquis l'assurance du caractère local des pertes dans le cadre de nos échantillons de petite section, nous sommes autorisés à développer un modèle de pertes classiques local, à l'échelle de chaque particule, en négligeant l'effet de peau (section 5.2.2.2). Nous avons observé au microscope électronique des échantillons préalablement polis de deux matériaux commerciaux de la société Högans, l'un à gros grains pour les applications en machines

électriques, l'autre à petits grains pour les fréquences plus importantes de l'électronique de puissance. Le modèle des pertes classiques a été réalisé, pour des raisons calculatoires, en supposant les particules de forme carrée, avec une surface équivalente égale à celle des particules réelles observées sur les micrographies des différents matériaux. Des raffinements de ce modèle de pertes classiques, avec notamment la prise en compte de particules de forme rectangulaire de surface équivalente aux grains réels, ou de taille statistiquement distribuée, ont également été proposés. Toutefois, les différences obtenues entre les différents modèles réalisés sont assez minimes, laissant à penser que le modèle des grains carrés avec équivalence des surfaces moyennes par rapport aux grains réels ne mérite pas forcément d'autres élaborations. En revanche, peut-être serait-il intéressant de reprendre le modèle des références [Cyr *et al.*, 2009, Cyr, 2007], où des micrographies réelles du matériau ont été importées dans un code éléments finis, puis maillées afin d'en déduire la perméabilité magnétique équivalente du matériau magnétique composite. Nous étendrions en magnétodynamique la méthode de modélisation numérique, afin d'analyser les pertes en régime dynamique dans le matériau réel modélisé à partir des micrographies. Tout ceci permettrait d'apprécier la validité de l'approximation des particules réelles de forme aléatoire à des carrés de surface équivalente pour le calcul des pertes.

Une fois les pertes classiques estimées, la séparation des pertes peut être effectuée pour chaque niveau d'induction, et pour chaque fréquence : les pertes par hystérésis sont trouvées par extrapolation aux fréquences nulles, et, par différence entre les pertes totales mesurées d'une part, et la somme des pertes par hystérésis et classiques d'autre part, il est possible d'estimer une composante de pertes excédentaires (section 5.2.2.3). Pour le matériau à gros grains, la composante de pertes excédentaires est voisine de celle des pertes en excès, pour toutes les inductions. En revanche, pour le matériau à petits grains, les pertes classiques sont très réduites, du fait justement de la petitesse de la taille des grains. Dans tous les cas, conformément aux craintes exprimées dans la littérature, la composante de pertes par hystérésis est importante, de l'ordre de $100 \text{ mJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ pour le matériau destiné aux machines électriques, et de l'ordre de $150 \text{ mJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ pour le matériau à petits grains, ces valeurs étant données pour une polarisation pic de 1 T. Ceci montre un compromis intéressant de fabrication des matériaux magnétiques granulaires : plus on diminue la taille des grains, plus les pertes par courants induits tendent à se réduire, mais alors les pertes par hystérésis deviennent plus importantes, ce qui oblige à utiliser les matériaux magnétiques à petits grains à des fréquences plus importantes.

L'analyse des pertes excédentaires est menée en utilisant la théorie statistique de Bertotti afin d'en déduire des informations sur la microstructure du matériau (section 5.2.2.4). On calcule le nombre effectif d'objets magnétiques actifs en fonction du champ excédentaire sur toute la section du matériau. Le fait le plus marquant est le nombre important d'objets magnétiques actifs à fréquence nulle sur la section du matériau magnétique. Il a été émis l'hypothèse que ce fait serait dû à la structure granulaire du matériau, qui rendrait les particules indépendantes les unes des autres et empêche un processus d'homogénéisation globale du matériau lorsque la fréquence augmente, alors que le champ démagnétisant tend à uniformiser les différences de champ coercitif entre les particules. Pour le matériau à gros grains, il a été montré que chaque particule comportait un certain nombre d'objets magnétiques. Cette constatation a été étayée par de nouvelles observations microscopiques du matériau magnétique, montrant la présence de plusieurs grains cristallographiques par particule. Cette structure polycristalline avérée des particules nous conduit à confondre le grain cristallographique avec l'objet magnétique, comme c'est le cas dans les tôles à grains non-orientés. Ces hypothèses devront être confirmées par d'autres observations sur des matériaux différents, comme par exemple le matériau à petits grains, qui n'a pas pu être encore observé pour en déduire la nature mono ou polycristalline des particules.

Le chapitre se termine par une ouverture sur le dimensionnement d'un inducteur de champ bi-directionnel afin de générer une induction d'excitation tournante au sein du matériau composite (section 5.2.3). Un tel dispositif permettra, une fois mis au point, de développer des modèles de pertes pour des inductions d'excitation 2D, plus réalistes dans le cas des matériaux isotropes qui nous intéressent. La principale difficulté est de créer une induction tournante de haute fréquence (1kHz) et d'amplitude significative (1.5 Tau coeur de ces matériaux composites peu perméables). La conception du dispositif a été menée au moyen d'un logiciel éléments finis 3D, prenant en compte les non-linéarités des caractéristiques du matériau magnétique à magnétiser. La fabrication de cet inducteur, et le commencement des premières campagnes de mesure, constituent l'objectif immédiat de ce travail sur les pertes dans les matériaux granulaires isotropes. Nous envisagerons à terme un second dispositif inducteur, capable, quant à lui, d'exploiter totalement l'isotropie des matériaux magnétiques en menant des caractérisations tri-dimensionnelles de tels matériaux.

Bibliographie

- [Albert *et al.*, 2003] ALBERT, L., CHILLET, C., JAROSZ, A. et WURTZ, F. (2003). Analytic modelling of automotive claw-pole alternator for design and constrained optimization. *In European Conference on Power Electronics and Applications, Toulouse*.
- [Alhassoun, 2005] ALHASSOUN, Y. (2005). *Etude et mise en oeuvre de machines à aimantation induite fonctionnant à haute vitesse*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse.
- [Anpalahan et Lamperth, 2006] ANPALAHAN, P. et LAMPERTH, M. (2006). Design of multi-stack axial flux permanent magnet generator for a hybrid electric vehicle. *In IEEE Vehicle Power and Propulsion Conference, 2006. VPPC*, pages 1–4.
- [Appino *et al.*, 2007] APPINO, C., FIORILLO, F. et RAGUSA, C. (2007). Loss decomposition under two-dimensional flux loci in non-oriented steel sheets. *Przeglad Elektrotechniczny*, 83:25–30.
- [Appino *et al.*, 2009b] APPINO, C., FIORILLO, F. et RAGUSA, C. (2009b). One-dimensional/two-dimensional loss measurements up to high inductions. *Journal of Applied Physics*, 105:07E718.
- [Appino *et al.*, 2004] APPINO, C., FIORILLO, F., RAGUSA, C. et XIE, C. (2004). Magnetic losses at high flux densities in non-oriented fesi alloys. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 10:316–319.
- [Atkinson *et al.*, 2009] ATKINSON, G., JACK, A., JENSEN, B. et WASHINGTON, J. (2009). Soft magnetic composite in optimised machine design. *In UKMAG one-day seminar Cutting Costs by Optimised Machine Design*, pages 18–19.
- [Aydin *et al.*, 2002b] AYDIN, M., HUANG, S. et LIPO, T. (2002b). A new axial flux surface mounted permanent magnet machine capable of field control. *In Industry Applications Conference, 2002. 37th IAS Annual Meeting. Conference Record of the*, volume 2.
- [Barbisio *et al.*, 2003] BARBISIO, E., FIORILLO, F. et RAGUSA, C. (2003). Accurate measurement of magnetic power losses ans hysteresis loops under generic induction waveforms with minor loops. *In Proceedings of SMM16*.
- [Bas *et al.*, 2003] BAS, J., CALERO, J. et DOUGAN, M. (2003). Sintered soft magnetic materials. properties and applications. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 254:391–398.
- [Belicova et Hrabovcova, 2007] BELICOVA, E. et HRABOVCOVA, V. (2007). Analysis of an axial flux permanent magnet machine (afpm) based on coupling of two separated simulation models (electrical and thermal ones). *Journal of Electrical Engineering*, 58(1):3–9.
- [Benabou, 2002] BENABOU, A. (2002). *Contribution à la caractérisation et à la modélisation de matériaux magnétiques en vue d'une implantation dans un code de calcul de champ*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lille.
- [Berkowitz *et al.*, 2003] BERKOWITZ, A., HANSEN, M., PARKER, F., VECCHIO, K., SPADA, F., LAVERNIA, E. et RODRIGUEZ, R. (2003). Amorphous soft magnetic particles produced by spark erosion. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 254:1–6.
- [Bernard *et al.*, 2005] BERNARD, N., DÉLINCHANT, B., BEN AHMED, H. et ZAIM, M. (2005). Influence du choix des matériaux magnetiques sur l'optimisation des machines synchrones. *In Congrès Electrotechnique du futur*.
- [Bertotti, 1985b] BERTOTTI, G. (1985b). Direct relation between hysteresis and dynamic losses in soft magnetic materials. *Le Journal de Physique Colloques*, 46(C6):389–392.
- [Bertotti, 1985d] BERTOTTI, G. (1985d). Physical interpretation of eddy current losses in ferromagnetic materials. i. theoretical considerations. *Journal of applied Physics*, 57:2110.
- [Bertotti, 1985f] BERTOTTI, G. (1985f). Physical interpretation of eddy current losses in ferromagnetic materials. ii. analysis of experimental results. *Journal of Applied Physics*, 57:2118.
- [Bertotti, 1988] BERTOTTI, G. (1988). General properties of power losses in soft ferromagnetic materials. *IEEE Transactions on magnetics*, 24(1):621–630.
- [Bertotti, 1998] BERTOTTI, G. (1998). *Hysteresis in magnetism*. Academic Press San Diego.
- [Bertotti *et al.*, 1993] BERTOTTI, G., FERRARA, E., FIORILLO, F. et PASQUALE, M. (1993). Loss measurements on amorphous alloys under sinusoidal and distorted induction waveform using a digital feedback technique. *Journal of Applied Physics*, 73:5375–5377.

- [Boglietti et Cavagnino, 2007] BOGLIETTI, A. et CAVAGNINO, A. (2007). Iron loss prediction with pwm supply : An overview of proposed methods from an engineering application point of view. *In Industry Applications Conference, 2007. 42nd IAS Annual Meeting. Conference Record of the 2007 IEEE*, pages 81–88.
- [Bottauscio *et al.*, 2002b] BOTTAUSCIO, O., CANOVA, A., CHIAMPI, M. et REPETTO, M. (2002b). Iron losses in electrical machines : influence of different material models. *IEEE Transactions on Magnetics*, 38(2 Part 1):805–808.
- [Bottauscio *et al.*, 2006] BOTTAUSCIO, O., MANZIN, A., PIAT, V., CODEGONE, M. et CHIAMPI, M. (2006). Electromagnetic phenomena in heterogeneous media : Effective properties and local behavior. *Journal of Applied Physics*, 100:044902.
- [Bozorth, 1951] BOZORTH, R. (1951). *Ferromagnetism*. Van Nostrand.
- [Bularzik *et al.*, 1998] BULARZIK, J., KRAUSE, R. et KOKAL, H. (1998). Properties of a new soft magnetic material for ac and dc motor applications. *J. Phys. IV France*, 8(1):998.
- [Chebak *et al.*, 2009] CHEBAK, A., VIAROUGE, P. et CROS, J. (2009). Analytical computation of the full load magnetic losses in the soft magnetic composite stator of high-speed slotless permanent magnet machines. *IEEE Transactions on Magnetics*, 45(3):952–955.
- [Chevalier *et al.*, 1999] CHEVALIER, T., KEDOUS-LABOUC, A., CORNUT, B. et CESTER, C. (1999). Estimation of magnetic loss in an induction motor fed with sinusoidal supply using a finite element software and a new approach to dynamic hysteresis. *IEEE Transactions on Magnetics*, 35(5):3400–3402.
- [Chevalier *et al.*, 2000a] CHEVALIER, T., KEDOUS-LEBOUC, A. et CORNUT, B. (2000a). Influence of electrical sheet width on dynamic magnetic properties. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 215:623–625.
- [Chevalier *et al.*, 2000b] CHEVALIER, T., KEDOUS-LEBOUC, A., CORNUT, B. et CESTER, C. (2000b). A new dynamic hysteresis model for electrical steel sheet. *Physica B : Condensed Matter*, 275(1-3):197–201.
- [Cullity et Graham, 2008] CULLITY, B. et GRAHAM, C. (2008). *Introduction to magnetic materials*. Wiley-IEEE Press.
- [Cyr, 2007] CYR, C. (2007). *Modélisation et caractérisation des matériaux magnétiques composites doux utilisés dans les machines électriques*. Thèse de doctorat, Laboratoire d'Electrotechnique et d'Electronique de Puissance de Lille.
- [Cyr *et al.*, 2009] CYR, C., VIAROUGE, P., CLÉNET, S. et CROS, J. (2009). Methodology to study the influence of the microscopic structure of soft magnetic composites on their global magnetization curve. *IEEE Transactions on Magnetics*, 45(3):1178–1181.
- [Cyr *et al.*, 2007] CYR, C., VIAROUGE, P., CROS, J. et CLÉNET, S. (2007). Resistivity measurement on soft magnetic composite materials. *Przeglad Elektrotechniczny*, 83(4):103–104.
- [De Wulf *et al.*, 2002] DE WULF, M., ANESTIEV, L., DUPRÉ, L., FROYEN, L. et MELKEBEEK, J. (2002). Magnetic properties and loss separation in iron powder soft magnetic composite materials. *Journal of applied physics*, 91:7845.
- [Debusschère, 2009] DEBUSSCHÈRE, V. (2009). *Contributions méthodologiques à l'éco-conception des convertisseurs électromagnétiques d'énergie*. Thèse de doctorat, Ens de Cachan, Antenne de Bretagne.
- [Develey, 2000] DEVELEY, G. (2000). *Chauffage par induction électromagnétique : technologie*. Ed. Techniques Ingénieur.
- [Dlala, 2009] DLALA, E. (2009). Comparison of models for estimating magnetic core losses in electrical machines using the finite-element method. *IEEE Transactions on Magnetics*, 45(2 Part 1):716–725.
- [Fiorillo, 2004] FIORILLO, F. (2004). *Measurement and characterization of magnetic materials*. Academic Press.
- [Fiorillo *et al.*, 2006] FIORILLO, F., BEATRICE, C., BOTTAUSCIO, O., MANZIN, A. et CHIAMPI, M. (2006). Approach to magnetic losses and their frequency dependence in mn–zn ferrites. *Applied Physics Letters*, 89:122513.
- [Fiorillo et Novikov, 1990] FIORILLO, F. et NOVIKOV, A. (1990). An improved approach to power losses in magnetic laminations under nonsinusoidal induction waveform. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 26(5):2904–2910.
- [Gautreau, 2005] GAUTREAU, T. (2005). *Estimation des pertes fer dans les machines électriques. Modèle d'hystérésis loss surface et application aux machines synchrones à aimants*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble.

- [Gelinas *et al.*, 2004] GELINAS, C., VIAROUGE, P. et CROS, J. (2004). Use of soft magnetic composite materials in industrial applications. *In Proceedings of Euro PM 2004 Conference*.
- [Gollee et Gerlach, 2000] GOLLEE, R. et GERLACH, A. (2000). An fem-based method for analysis of the dynamic behavior of accontactors. *IEEE Transactions on Magnetics*, 36(4 Part 1):1337–1340.
- [Guo *et al.*, 2006a] GUO, Y., ZHU, J., LIN, Z. et ZHONG, J. (2006a). 3d vector magnetic properties of soft magnetic composite material. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 302(2):511–516.
- [Höganäs, 2009] HÖGANÄS (2009). Catalogue hoganäs. <http://www.hoganas.com/en/Products-Applications/Soft-Magnetic-Composites/SMC-Brochures-Pics/>.
- [Hlioui *et al.*, 2008] HLIOUI, S., VIDO, L., AMARA, Y., GABSI, M., MIRAOUI, A. et LECRIVAIN, M. (2008). Magnetic equivalent circuit model of a hybrid excitation synchronous machine. *COMPEL*, 27:1000–1015.
- [Huang *et al.*, 2007a] HUANG, Y., ZHU, J., GUO, Y. et HU, Q. (2007a). Development of a high-speed claw pole motor with soft magnetic composite core. *In IEEE International Electric Machines & Drives Conference*, volume 2.
- [Ionel *et al.*, 2007] IONEL, D., POPESCU, M., MCGILP, M., MILLER, T., DELLINGER, S. et HEIDEMAN, R. (2007). Computation of core losses in electrical machines using improved models for laminated steel. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 43(6):1554–1564.
- [Jack et Mecrow, 1999] JACK, A. et MECROW, B. (1999). Combined radial and axial permanent magnet motors using soft magnetic composites. *In Ninth International Conference on Electric Machines and Drives*.
- [Jack *et al.*, 2000a] JACK, A., MECROW, B., DICKINSON, P., JANSSON, P. et HULTMAN, L. (2000a). Design and testing of a universal motor using a soft magnetic composite stator. *In IEEE Industry Applications Conference*.
- [Jack *et al.*, 2000b] JACK, A., MECROW, B., DICKINSON, P., STEPHENSON, D., BURDESS, J., FAWCETT, N. et EVANS, J. (2000b). Permanent-magnet machines with powdered iron cores and prepressed windings. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 36(4):1077–1084.
- [Jiles et Atherton, 1986] JILES, D. et ATHERTON, D. (1986). Theory of ferromagnetic hysteresis. *Journal of magnetism and magnetic materials*, 61(1-2):48–60.
- [Johnson et Visser, 1990] JOHNSON, M. et VISSER, E. (1990). A coherent model for the complex permeability in polycrystalline ferrites. *IEEE Transactions on Magnetics*, 26(5):1987–1989.
- [Lebourgeois *et al.*, 2003] LEBOURGEOIS, R., GANNE, J., PEYRESOUBES, G., REBERNAK, W., ADENOT, A. et ACHER, O. (2003). New ferromagnetic composites for radio-frequency applications. *Journal of Magnetism and magnetic Materials*, 254:608–611.
- [Lefebvre *et al.*, 1997] LEFEBVRE, L., PELLETIER, S. et GÉLINAS, C. (1997). Effect of electrical resistivity on core losses in soft magnetic iron powder materials. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 176(2-3):93–96.
- [Lefèvre, 2004] LEFÈVRE, G. (2004). *Conception de convertisseurs statiques pour l'utilisation de la pile à combustible*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier de Grenoble.
- [Leibovic, 1963a] LEIBOVIC, K. (1963a). Contraction mapping with application to control processes. *International Journal of Electronics*, 15(1):81–96.
- [Lundmark et Hamdi, 2004] LUNDMARK, S. et HAMDİ, E. (2004). Designs of claw-pole machines using smc cores. *WSEAS Transactions on Circuits and Systems*, 3(8):1729–1734.
- [Magnussen *et al.*, 2004] MAGNUSSEN, F., SVECHKARENKO, D., THELIN, P. et SADARANGANI, C. (2004). Development of a high-speed claw pole motor with soft magnetic composite core. *In Proceedings of the IEEE Vehicular Power and Propulsion Symposium*, volume 2.
- [Marignetti *et al.*, 2007] MARIGNETTI, F., COLLI, V. et COIA, Y. (2007). Design of axial flux pm synchronous machines through 3d coupled electromagnetic thermal and fluid dynamical finite elements analysis. *IEEE transactions on Industrial Electronics*, 55(10):3591–3601.
- [Mason *et al.*, 1998] MASON, P., HOWE, D. et ATALLAH, K. (1998). Soft magnetic composites in active magnetic bearings. *In Colloquium Digest-IEE*. IEE.
- [Mayergoyz, 1986b] MAYERGOYZ, I. (1986b). Mathematical models of hysteresis. *Physical review letters*, 56(15):1518–1521.
- [Mayergoyz, 1998] MAYERGOYZ, I. (1998). *Nonlinear diffusion of electromagnetic fields : with applications to eddy currents and superconductivity*. Academic Press.

- [Mayergoyz *et al.*, 1984] MAYERGOYZ, I., ABDEL-KADER, F. et EMAD, F. (1984). On penetration of electromagnetic fields into nonlinear conducting ferromagnetic media. *Journal of Applied Physics*, 55:618.
- [Mazaleyrat *et al.*, 2002] MAZALEYRAT, F., LEGER, V., LEBOURGEOIS, R. et BARRUE, R. (2002). Permeability of soft magnetic composites elaborated from flakes of nanocrystalline ribbons. In *INTERMAG Europe*.
- [Miljavec *et al.*, 2004] MILJAVEC, D., ZIDARIC, B. et ZAGIRNYAK, M. (2004). Soft magnetic composite in design of bldc motor. In *International Conference on Electrical Machines*.
- [Muirhead, 2005] MUIRHEAD, R. (2005). *Aspects of Multivariate Statistical Theory*. Wiley.
- [Narasimhan et Marucci, 2003] NARASIMHAN, K. S. et MARUCCI, M. L. (2003). Innovative electric devices using iron polymer materials. In *Proceedings of Euro PM 2003 Conference*, pages 207–212.
- [Nord *et al.*, 2004] NORD, G., PENNANDER, L. et JACK, A. (2004). Loss calculations for soft magnetic composites. In *International Conference on Electrical Machines*, pages 423–433. Springer.
- [O’Handley, 2000] O’HANDLEY, R. (2000). *Modern Magnetic Materials : Principles and Applications*. Wiley.
- [Oliver, 1995] OLIVER, C. (1995). Advances in powder metallurgy of soft magnetic materials. *IEEE Transactions on Magnetism*, 31(6):3982–3984.
- [Orfeuil, 1981] ORFEUIL, M. (1981). *Electrothermie industrielle*. Dunod.
- [Persson *et al.*, 2004] PERSSON, M., NORD, G. et JACK, A. (2004). Soft magnetic composite materials ac properties and their application in electrical machines. In *Proceedings of ICEMS Conference*.
- [Saitz, 2000] SAITZ, J. (2000). Computation of the core loss in an induction motor using the vectorpreisach hysteresis model incorporated in finite element analysis. *IEEE Transactions on Magnetism*, 36(4 Part 1):769–773.
- [Shokrollahi et Janghorban, 2007a] SHOKROLLAHI, H. et JANGHORBAN, K. (2007a). Different annealing treatments for improvement of magnetic and electrical properties of soft magnetic composites. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 317(1-2):61–67.
- [Shokrollahi et Janghorban, 2007b] SHOKROLLAHI, H. et JANGHORBAN, K. (2007b). Effect of warm compaction on the magnetic and electrical properties of fe-based soft magnetic composites. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 313(1):182–186.
- [Shokrollahi et Janghorban, 2007c] SHOKROLLAHI, H. et JANGHORBAN, K. (2007c). Soft magnetic composite materials (smcs). *Journal of Materials Processing Technology*, 189(1-3):1–12.
- [Snelling, 1988] SNELLING, C. (1988). *Soft ferrites : properties and applications*. Butterworths.
- [Vernescu-Spornic *et al.*, 2000] VERNESCU-SPORNIC, C., KEDOUS-LEBOUC, A., SPORNIC, S. et OSSART, F. (2000). Anisotropic and vector hysteresis model for magnetic materials application to a cubic textured nife sheet. *Physica B : Condensed Matter*, 275(1-3):99–102.
- [Viarouge *et al.*, 2002] VIAROUGE, P., CROS, J. et CLÉNET, S. (2002). Design of inductors and transformers with soft magnetic composites. In *Proceedings of the International Conference on Electrical Machines*.
- [Yagi *et al.*, 2000] YAGI, M., ENDO, I., OTSUKA, I., YAMAMOTO, H., OKUNO, R., KOSHIMOTO, H. et SHINTANI, A. (2000). Magnetic properties of fe-based amorphous powder cores produced by a hot-pressing method. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 215:284–287.
- [Yanhong et Kliman, 2004] YANHONG, C. et KLIMAN, G. (2004). Modeling of soft magnetic composites. In *Industry Applications Conference, 2004. 39th IAS Annual Meeting. Conference Record of the 2004 IEEE*.
- [Zhu *et al.*, 1999] ZHU, J., ZHONG, J., RAMSDEN, V. et GUO, Y. (1999). Power losses of soft magnetic composite materials under two-dimensional excitation. *Journal of Applied Physics*, 85:4403.

Chapitre 6

Etude des performances de la machine disque sur la base des modèles 2D

Introduction

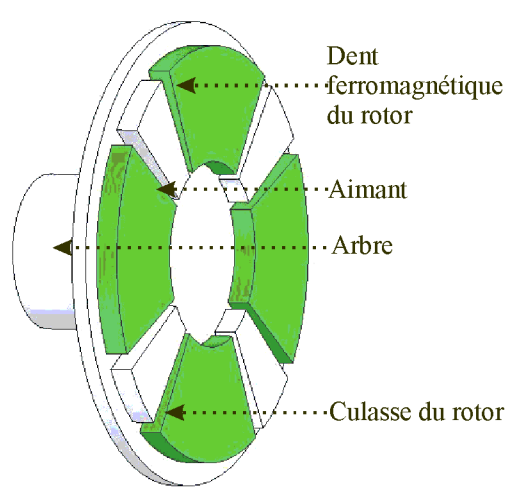
L'objectif de ce chapitre est l'étude des performances de la machine disque simple face à aimants permanents insérés. Dans ce but, nous souhaitons proposer une procédure de conception optimisée de ce type de topologie, en utilisant un algorithme d'optimisation de type stochastique évolutionnaire. Nous sommes, dans ce chapitre, surtout intéressés par la démarche, ainsi que la formalisation du problème de conception optimale des actionneurs à flux axial pour un cahier des charges donné. Nous avons donc choisi d'utiliser uniquement les modèles électromagnétiques 2D développés au troisième chapitre de cette thèse, qui sont très souples au niveau du temps de calcul. L'utilisation des modèles électromagnétiques 3D dans cette procédure de conception optimale, non moins intéressante afin d'étudier, comme nous le disions en introduction, l'influence du modèle sur les résultats optimisés, est renvoyée en perspectives.

La première étape à franchir est de proposer un modèle de comportement de la machine. Dans une première partie, nous allons donc détailler comment, à partir des modèles analytiques 2D de calcul local de l'induction magnétique développés au cours du troisième chapitre, aboutir au modèle du comportement électrique de la machine synchrone. La mise au point d'un modèle thermique simplifié, nécessaire dans le cadre d'une optimisation afin de vérifier la viabilité des géométries d'actionneurs proposées, sera également envisagée. Dans une seconde partie, nous allons nous concentrer sur le travail d'optimisation à proprement parler. Nous nous fixerons un cahier des charges d'une application de traction dans le plan couple-vitesse, que nous simplifierons afin de faciliter la procédure de dimensionnement. Nous présenterons en détail la méthodologie mise au point afin d'aboutir à une conception optimisée de la machine à flux axial pour le cahier des charges fixé. Enfin, il conviendra de détailler les résultats obtenus, et en chercher une interprétation.

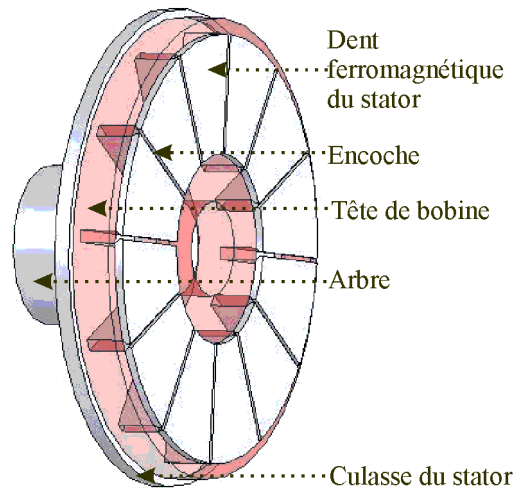
6.1 Modèle de comportement magnéto-thermo-électrique de l'actionneur à flux axial à aimants insérés

La topologie détaillée de la machine à flux axial étudiée, ainsi que les notations géométriques utilisées, ont été exposées au début du chapitre trois, préalablement aux études électromagnétiques bidimensionnelles menées. Nous nous permettons de rappeler cette structure de machine à flux axial simple face à aimants permanents insérés, au niveau des figures 6.1a, 6.1b et 6.1c. La machine développée au niveau du rayon moyen, que nous avons schématisée au chapitre trois pour développer les modèles électromagnétiques 2D que nous utilisons dans ce chapitre, est également rappelée à la figure 6.1d.

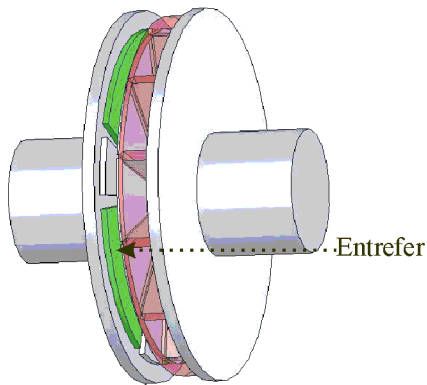
Nous rappelons également au tableau 6.1 les notations des paramètres géométriques utilisés pour décrire la machine à flux axial.



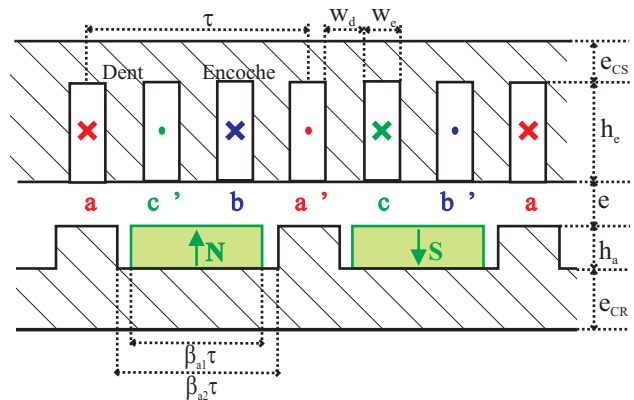
(a) Le rotor à aimants insérés



(b) Le stator à petites dents de la machine



(c) La machine assemblée



(d) La machine développée à son rayon moyen

FIGURE 6.1: Topologie de la machine simple face à aimants insérés

Nature	Notation	Description du paramètre
Grandeurs orthoradiales	p	Nombre de paires de pôles de la machine
	τ	Pas polaire au niveau du rayon moyen
	β_{a_1}	Ouverture relative de l'aimant par rapport au pas polaire
	β_{a_2}	Ouverture relative de l'espace inter-dents par rapport au pas polaire
	w_e	Ouverture orthoradiale de l'encoche du stator
	w_d	Ouverture orthoradiale de la dent du stator
	τ_s	Pas dentaire
	q_s	Nombre d'encoches par pôle, choisi égal à 3
Grandeurs axiales	e_{cs}	Epaisseur axiale de la culasse du stator
	h_e	Hauteur axiale de la zone d'encoche
	h_a	Hauteur axiale de la zone d'aimants
	e	Epaisseur réelle de l'entrefer, choisie égale à 2mm.
	e_c	Entrefer corrigé par le coefficient de Carter k_c , égal à $e_c = k_c (e + h_a) - h_a$
	e_{cr}	Epaisseur axiale de la culasse du rotor
Grandeurs radiales	R_1	Rayon actif interne de la machine à flux axial
	R_2	Rayon actif externe de la machine à flux axial
	\bar{R}	Rayon actif moyen de la machine à flux axial
	ΔR	Excursion des parties actives de la machine autour du rayon moyen \bar{R}
	R_{ext}	Rayon externe de la machine à flux axial

TABLE 6.1: Rappel des paramètres géométriques utilisés pour décrire la machine à flux axial

Nous nous permettons d'insister sur la topologie de la machine : cette dernière comporte un unique stator et un unique rotor à aimants permanents se faisant face. Le rotor est de type saillant à aimants insérés, afin de favoriser le fonctionnement en mode de désexcitation. Nous allons ici décrire comment, à partir de la connaissance des grandeurs magnétiques locales fournies par les modèles bidimensionnels du troisième chapitre, nous allons déduire, en nous aidant de la théorie de Park, le modèle électrique de la machine à flux axial à aimants insérés. Néanmoins, ces aspects électromagnétiques ne sont pas les seuls, loin de là, nécessaires afin d'aboutir au dimensionnement optimisé de la structure pour une application donnée. Par exemple, une évaluation, même simplifiée, des contraintes thermiques, semble indispensable. Dans cette perspective, nous allons développer un modèle thermique simplifié, dans le but de connaître l'élévation de température maximale de l'encoche, et ainsi vérifier la non-destruction des isolants.

6.1.1 Calcul des pertes et déduction du modèle électrique

A partir du modèle électromagnétique bidimensionnel de la machine développé dans le troisième chapitre, il semble opportun de s'intéresser aux pertes dans cette dernière. Cette étude va nous permettre de calculer le rendement. Qui plus est, elle va aussi nous permettre de déduire certains des éléments du schéma électrique équivalent de la machine, comme les résistances traduisant les pertes cuivre et les pertes fer.

6.1.1.1 Calcul des pertes dans la machine

Calcul des pertes cuivre En première approximation, les pertes cuivre dans la machine sont calculées en utilisant la formule classique suivante, en rappelant que, conformément à la théorie de Park, nous notons nI_d les ampères-tours par pôle et par phase d'axe d , et nI_q les ampères-tours par pôle et par phase d'axe q :

$$P_C = 3 \cdot 2p \cdot r (nI_d^2 + nI_q^2) \quad (6.1)$$

La résistance r est la résistance spécifique d'une bobine polaire (divisée par le nombre de spires au carré n^2 , afin de s'affranchir de ce problème du choix du nombre de spires), en tenant compte de la longueur des têtes de bobine. Si

on appelle k_{bob} le coefficient de remplissage de l'encoche, la résistance r va s'écrire, en supposant une encoche par pôle et par phase, et en appelant ρ_{cu} est la résistivité du cuivre :

$$r = \frac{2(R_2 - R_1) + \frac{\pi}{p}(R_1 + R_2)}{\rho_{cu} k_{bob} h_e \frac{w_e}{2}} \quad (6.2)$$

Calcul des pertes fer On va négliger, dans ce chapitre, les pertes magnétiques harmoniques dans le rotor. Par conséquent, les pertes magnétiques se situent uniquement dans le stator de la machine, et seront évaluées grâce aux méthodes développées dans l'article [Appino *et al.*, 2004] en ce qui concerne les pertes en champ unidirectionnel dans les dents de la machine, et dans l'article [Appino *et al.*, 1997] en ce qui concerne les loci d'induction quelconques de la culasse du stator. Toutes les formulations ont été rappelées lors du deuxième chapitre, l'épaisseur de la tôle choisie étant $d = 0.35mm$. Il suffit de calculer les pertes dans le fer dans un seul motif dentaire, formé d'une dent de largeur w_d , et de la partie de culasse qui la surplombe, de longueur τ_s . Afin de mieux préciser cette notion de motif dentaire élémentaire des parties ferromagnétiques statoriques, nous nous permettons de représenter à la figure 6.2 ce motif dentaire, formé d'une dent et de la partie de culasse qui la surplombe, de largeur égale au pas dentaire τ_s .

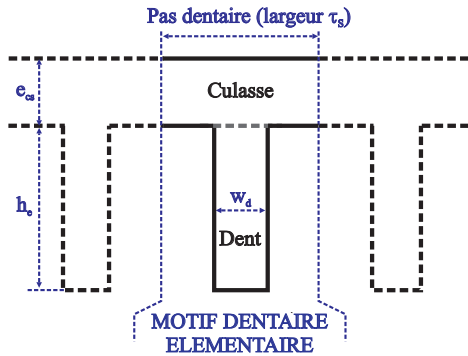


FIGURE 6.2: Définition du motif dentaire élémentaire de la culasse statorique

Paramètre	Valeur adoptée pour le test
B_r	0.3T (aimant ferrite choisi)
p	14
h_a	1.3cm
e	2mm
e_{cs}	1.2cm
e_{cr}	3.2mm
h_e	4.42cm
τ	3.1cm
β_e	0.58
β_{a1}	0.87
β_{a2}	0.9
R_1	9cm
R_2	18cm

(a) Paramètres géométriques de la machine

Commande	(100Nm, 2700tr/min)	(¹⁰⁰ /6Nm, 2700 · 6tr/min)
nI_d	-141.3Atr	-172.1Atr
nI_q	237.6Atr	37.8Atr
P_{fer}	716W	1200W

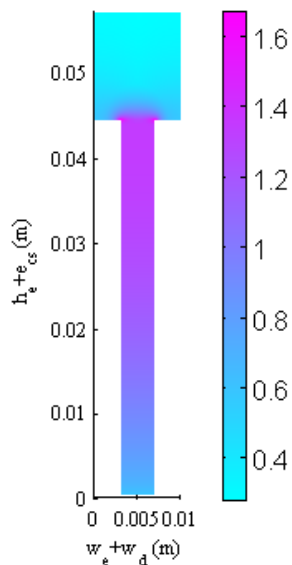
(b) Commande optimisée de la machine pour les deux points de fonctionnement souhaités

TABLE 6.2: Géométrie et commande de la machine retenue après étude paramétrique, afin d'atteindre les deux points de fonctionnement désirés

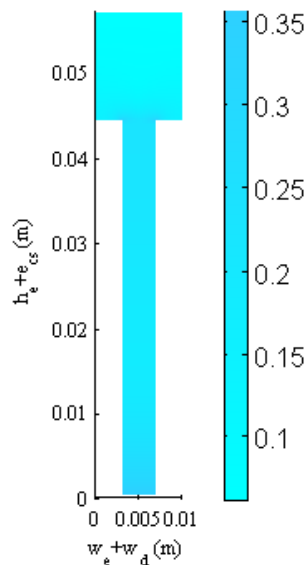
Ensuite, on multiplie les valeurs des pertes obtenues par le nombre total de dents de la machine. Nous avons mené une étude paramétrique de la machine électrique, sur la base des modèles de calcul du couple proposés au

troisième chapitre, afin de déterminer une géométrie de machine capable d'atteindre les deux points de fonctionnement suivants : $(100Nm, 2700tr/min)$ pour le point 1, et $(100/6Nm, 2700 \cdot 6tr/min)$ pour le point 2. Nous nous sommes imposés pour contrainte de dimensionnement de ne pas dépasser l'induction à saturation dans les parties ferromagnétiques du stator : $B_{max} \leq B_{SAT} = 1.7T$, afin de vérifier l'hypothèse de linéarité du modèle, pour que ce dernier demeure dans sa zone de validité. Nous avons, pour chacun des deux points de fonctionnement voulus, optimisé à l'aide d'un algorithme de descente du gradient, la commande (nI_d, nI_q) afin d'atteindre d'une part les couples voulus, tout en minimisant les pertes totales. La géométrie retenue après cette étude paramétrique, ainsi que sa commande, est montrée dans le tableau 6.2.

Nous y voyons que, pour le point de fonctionnement 1 $(100Nm, 2700tr/min)$, le courant est majoritairement injecté dans l'axe q , afin de profiter au maximum de la composante de couple hybride. Bien que la vitesse faible ne justifie pas l'injection d'un courant d'axe d pour réduire les pertes fer, un tel courant d'axe d est tout de même injecté, pour profiter aussi du couple réductant. Pour le point 2 $(100/6Nm, 2700 \cdot 6tr/min)$, qui est un point haute vitesse-faible couple, les choses sont différentes, le courant d'axe q étant réduit car le couple à atteindre est faible, et l'injection d'un courant d'axe d négatif va permettre de limiter les pertes fer, qui vont tout de même augmenter à cause de la fréquence de fonctionnement importante (sans courant d'axe d , les pertes fer atteindraient, à cette vitesse, plus de $4000W$ au lieu de $1200W$). De plus, comme le veut la théorie du défluxage, cette injection d'un courant d'axe d est aussi utile afin de réduire la puissance apparente nécessaire pour le point de haute vitesse. Les figures 6.3a et 6.3b illustrent bien cette réduction des niveaux d'induction entre le point de basse vitesse-fort couple, et le point de haute vitesse-bas couple, à cause du défluxage de la structure qui intervient en ce dernier point (on passe de $1.7T$ d'induction maximale pour le point 1, qui est la limite de saturation, à $0.35T$ d'induction maximale pour le point 2, grâce au courant d'axe d négatif). Les modèles utilisés pour calculer les niveaux maximaux d'induction dans les parties ferromagnétiques du stator sont les modèles analytiques exposés au troisième chapitre.



(a) Niveaux maximaux d'induction (en T) en charge dans le stator pour le point de fonctionnement 1 $(100Nm, 2700tr/min)$



(b) Niveaux maximaux d'induction (en T) en charge dans le stator pour le point de fonctionnement 2 $(100/6Nm, 2700 \cdot 6tr/min)$

FIGURE 6.3: Niveaux maximaux d'induction calculés grâce au modèle analytique du troisième chapitre dans le stator pour les différents points de fonctionnement

Les niveaux d'induction dans les dents sont bien plus importants que dans la culasse, à cause de la concentration de flux qui s'y opère. En outre, l'effet des fuites est clairement mis en évidence à la figure 6.3a : on voit que le niveau d'induction dans la dent augmente de manière importante lorsque l'on se rapproche de la culasse, à cause du flux de fuites qui se rajoute progressivement. Cette superposition dans la dent du flux des aimants, et du flux de fuites des encoches est schématiquement représentée à la figure 6.4.

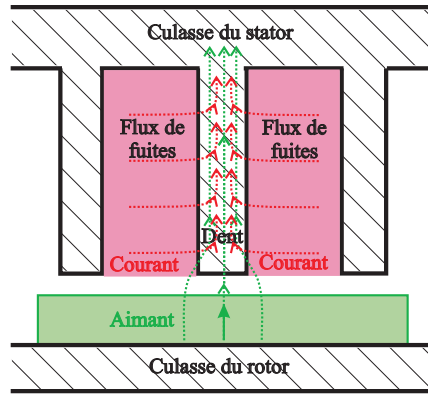
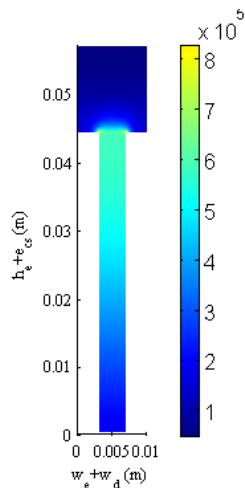
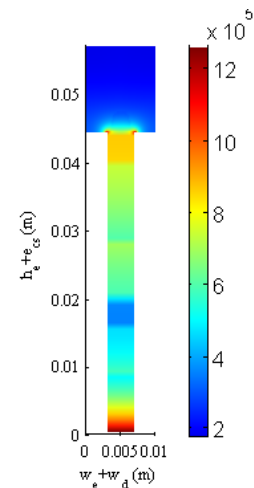


FIGURE 6.4: Superposition du flux d'aimant et du flux de fuites des encoches dans la dent

Il est à noter que le flux de fuites pour le point de fonctionnement 1, qui est principalement causé par le courant nI_q positif, vient s'ajouter au flux à vide dans les dents du stator, ce qui explique l'augmentation d'induction observée. Par conséquent, la densité de pertes dans la dent suit, pour le point de fonctionnement 1, la même répartition (figure 6.3a) : elle augmente lorsque l'on se rapproche de la culasse statorique. En revanche, ce n'est pas le cas pour le point de fonctionnement 2 (figure 6.5b), où le flux de fuites, causé principalement par le courant nI_d négatif, vient se soustraire algébriquement au flux à vide dans la dent. Ceci inverse la répartition de l'induction dans la dent pour le point 2, qui est alors plus importante du côté de l'entrefer. De ce fait, pour le point 2, la répartition des pertes fer dans la dent est également inversée, la zone de plus forte densité de pertes se situant à la base de la dent, du côté de l'entrefer (figure 6.5b). Mais comme la principale voie d'évacuation des pertes est la surface externe de la culasse statorique, les pertes fer sont plus difficiles à extraire au point de fonctionnement ($100/6Nm, 2700 \cdot 6tr/min$) qu'au point ($100Nm, 2700tr/min$), car il faut que le flux thermique traverse toute la dent pour rejoindre la culasse. Ce phénomène est aggravé par le fait qu'au point de fonctionnement 2, la puissance perdue est naturellement plus conséquente qu'au point 1, la vitesse étant bien plus élevée. Ceci étant, ce genre de considérations ne sera pas pris en compte lors du modèle thermique, du fait de la difficulté à considérer une densité de pertes non uniforme d'une part, d'autre part parce que le matériau ferromagnétique possède a priori, dans le plan de la modélisation, une conductivité thermique très bonne.



(a) Densité de pertes fer (en W/m^3) en charge dans le stator pour le point de fonctionnement 1 ($100Nm, 2700tr/min$)



(b) Densité de pertes fer (en W/m^3) en charge dans le stator pour le point de fonctionnement 2 ($100/6Nm, 2700 \cdot 6tr/min$)

FIGURE 6.5: Densité volumique de pertes fer en charge dans le stator pour les différents points de fonctionnement

Nous donnons en outre quelques informations sur le comportement magnétique de la culasse du stator au niveau du point de fonctionnement 1 ($100Nm, 2700tr/min$). En effet, puisque nous évaluons (référence [Appino *et al.*, 1997] et chapitre 2 pour les formulations détaillées) les pertes dans cette culasse en tenant compte du caractère bidimensionnel du champ magnétique dans cette dernière, nous avons représenté à la figure 6.7 les lignes de niveau dans la culasse ferromagnétique pour lesquelles le rapport entre le maximum de l'onde d'induction $B_x(t)$ et le maximum de l'onde $B_y(t)$, noté $\frac{B_{xMAX}}{B_{yMAX}}$, se trouve constant. Un rapport unitaire signifie un champ circulaire (pas parfaitement, étant donné que les ondes d'induction selon chaque axe ne sont pas sinusoïdales). La zone d'étude la figure 6.7, qui est constituée d'un motif élémentaire de culasse statorique de largeur $\tau_s = w_e + w_d$ (le pas dentaire) et de hauteur e_{cs} , a été représentée à la figure 6.6. On voit sur la figure 6.7 que lorsque l'on s'approche de la dent, où le champ a été considéré comme alternatif et vertical, ce rapport tend vers la valeur nulle. Plus nous approchons du milieu des encoches, et plus le rapport devient grand, étant donné qu'alors, le champ devient quasiment horizontal. Comme prévu, les valeurs voisines de l'unité se trouvent à la jointure de la dent et de la culasse. Nous nous sommes en outre permis de donner, au niveau des figures 6.8, 6.9, et 6.10 les valeurs des pertes par hystérésis, excédentaires, et classiques au niveau du point de fonctionnement 1. L'essentiel des pertes, même à faible vitesse, semble être, dans notre cas d'étude, dû aux pertes classiques.

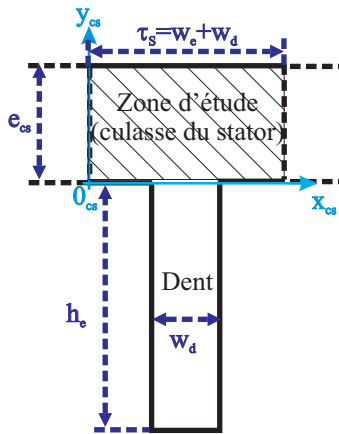


FIGURE 6.6: Localisation de la zone de culasse statorique représentée au niveau des figures 6.7, 6.8, 6.9, et 6.10

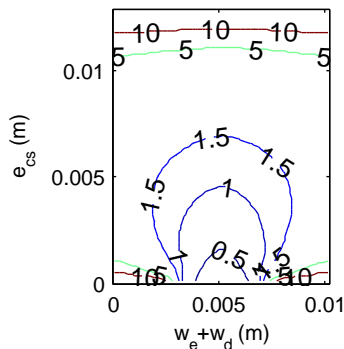


FIGURE 6.7: Rapport entre les maxima des ondes $B_x(t)$ et $B_y(t)$ $\frac{B_{xMAX}}{B_{yMAX}}$ en chaque point de la culasse du stator pour le point 1 ($100Nm, 2700tr/min$)

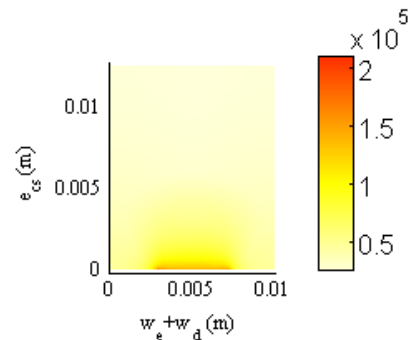


FIGURE 6.8: Densité de pertes par hystérésis en champ tournant dans la culasse du stator pour le point 1 ($100Nm, 2700tr/min$)

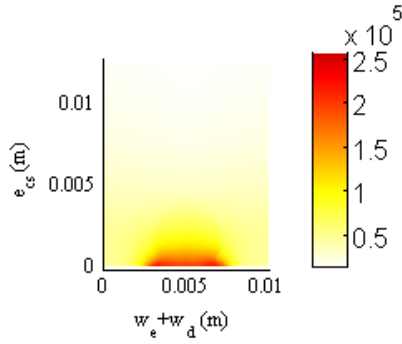


FIGURE 6.9: Densité de pertes excédentaires en champ tournant dans la culasse du stator pour le point 1 ($100Nm, 2700tr/min$)

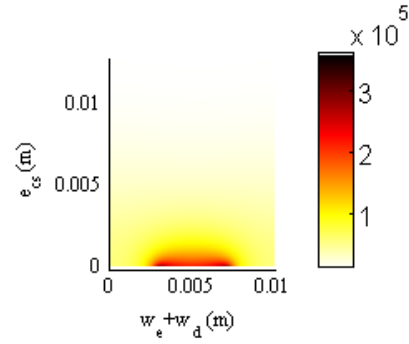
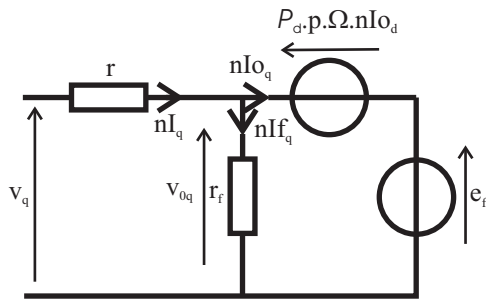


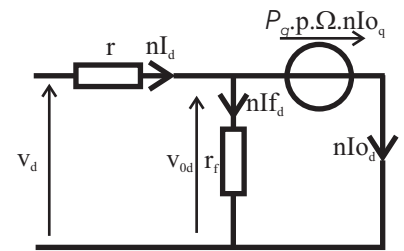
FIGURE 6.10: Densité de pertes classiques en champ tournant dans la culasse du stator pour le point 1 ($100Nm, 2700tr/min$)

6.1.1.2 Le modèle électrique de la machine

Le modèle électromagnétique développé au troisième chapitre, ainsi que le modèle de pertes ci-dessus, permet de dresser un modèle électrique simplifié de la machine électrique. Nous rappelons que nous faisons l'hypothèse d'un régime électromagnétique établi, d'une commande limitée au premier harmonique (aussi bien pour les flux que pour les courants, ce qui permet de supposer les grandeurs de la base de Park comme étant constantes), et d'une absence de saturation magnétique. Notons φ_f la valeur efficace du fondamental de l'onde de flux à vide qui traverse une spire de la bobine polaire du stator. Par conséquent, la valeur efficace de la force électromotrice dans une phase du stator va s'écrire $E_f = 2pn\varphi_f p\Omega$. De même, les calculs électromagnétiques ont permis de déterminer les inductances L_d et L_q d'axe d et d'axe q par intégration du premier harmonique des ondes d'induction causées par un ampère-tour d'axe d ou q . Nous choisissons, dans une problématique de conception, de raisonner en tension par spire, ainsi qu'en perméances. Nous introduisons donc le premier harmonique de tension à vide par spire dans la machine $e_f = \frac{E_f}{n}$, ainsi que les perméances d'axe d et d'axe q , notées $P_d = \frac{L_d}{n^2}$ et $P_q = \frac{L_q}{n^2}$. Nous avons en outre, lors de la partie sur les pertes cuivre, introduit une résistance réduite (appelée résistance spécifique) d'une phase de la machine $r = \frac{R}{n^2}$, R étant la résistance réelle mesurée aux bornes d'une phase. La théorie de Park permet alors de dresser les schémas équivalents par phase de la machine synchrone à pôles saillants, montrés au niveau de la figure 6.11a en ce qui concerne l'axe q , et la figure 6.11b en ce qui concerne l'axe d .



(a) Schéma électrique équivalent dans l'axe q



(b) Schéma électrique équivalent dans l'axe d

FIGURE 6.11: Schémas électriques équivalent au premier harmonique et en l'absence de saturation dans la base de Park pour une phase de la machine

Notons, comme nous l'avons précisé au troisième chapitre, que notre modèle électromagnétique prenant en compte les encoches du stator inclut directement les inductances de fuites cycliques. La résistance des pertes fer par spire introduite, notée r_f , mérite une explication : en effet, si on souhaite traduire dans le schéma électrique les pertes

fer constatées dans la machine, il est habituel, en électrotechnique, de placer une résistance équivalente transcrivant la puissance perdue à cause des pertes fer, aux bornes de la tension générée par le flux total de la machine, flux dont la variation est responsable des pertes fer observées. Néanmoins, cela appelle quelques commentaires dans la situation présente : généralement, en supposant que le flux est uniforme et sinusoïdal, et en appliquant la formule de Steinmetz, il est possible de montrer que cette résistance ne dépend pas de la tension à ses bornes, mais peut en revanche dépendre de la fréquence à cause du terme de pertes par hystérésis. Dans notre cas, les choses sont bien plus complexes, car la valeur des pertes fer est calculée par intégration des pertes fer locales, qui dépendent de la distribution du champ dans la machine. On a montré de plus que les loci d'induction pouvaient être de forme quelconque. En outre, notre modèle de pertes fer est complexe, à cause des pertes excédentaires en champ alternatif dans les dents et tournant dans la culasse, qui imposent la tabulation de certaines grandeurs (référence [Appino *et al.*, 1997]). Des auteurs [Polinder, 1998] ont souhaité, pour résoudre le problème des formes d'induction non sinusoïdales, dresser un schéma électrique équivalent par phase pour chaque harmonique. Néanmoins, la non-linéarité des modèles de pertes utilisés ici nous interdit cette stratégie. C'est pour cela que nous avons pris le parti de placer cette résistance de pertes fer dans le schéma équivalent électrique au premier harmonique en la calculant simplement par la formule :

$$r_f = 3 \frac{v_{0_d}^2 + v_{0_q}^2}{P_{fer}} \quad (6.3)$$

Ceci signifie donc que cette résistance des pertes fer r_f devra donc être recalculée pour chaque couple de courant actif (nI_{0_d}, nI_{0_q}) , et aussi pour chaque vitesse Ω . Il faut être conscient du fait que cette stratégie n'est pas exempte d'un certain paradoxe. En effet, les modèles électromagnétiques, notamment ceux utilisés pour le calcul des pertes fer dans la culasse et les dents du stator, tiennent compte des formes d'ondes locales réelles (c'est-à-dire non sinusoïdales) des loci d'inductions, ainsi que de la non-linéarité des phénomènes de pertes magnétiques. La résistance r_f tient compte de tous ces phénomènes. Cependant, cette dernière est placée, et d'ailleurs calculée d'après un schéma électrique équivalent (figures 6.11a et 6.11b) déduit de la théorie de Park classique, qui se limite au premier harmonique pour les impératifs de la commande.

6.1.2 Le modèle thermique de la machine en régime permanent

Le calcul des pertes est utile pour évaluer le rendement de l'actionneur qui nous intéresse. Cette donnée constitue le plus souvent un critère à maximiser au cours du processus de conception. Cela étant, les pertes sont directement liées à l'élévation de température dans la machine électrique. Une élévation de température trop importante du bobinage peut avoir un effet destructeur, en dégradant les isolants. Dans une optique d'optimisation de la machine électrique, il apparaît donc important de se servir du critère de température maximale du bobinage comme d'une contrainte de conception. Pour ce faire, il est indispensable de relier les valeurs des pertes, à la fois dans le cuivre et dans le fer, aux températures des différents points de la machine : c'est l'objet du modèle thermique que nous allons exposer dans ce paragraphe.

Certains auteurs [Azzouzi, 2007, Gieras *et al.*, 2008] ont fait des modèles thermiques évolués des machines à flux axial, fondés sur une méthode nodale, prenant en compte la propagation complexe du flux thermique dans l'entrefer de la machine, ou bien encore les aspects transitoires du fonctionnement. Il est sans doute également intéressant de considérer les pertes au rotor, qui, bien que normalement réduites, posent un réel problème d'évacuation. Notre modèle thermique sera ici bien plus simple, se bornant aux encoches et au fer du stator, en supposant que les pertes au rotor sont nulles, et en négligeant tout transfert thermique à travers l'entrefer de la machine. D'autre part, étant donné que la machine a pour finalité l'utilisation dans un véhicule hybride, il est raisonnable de penser que nous disposerons d'une source de refroidissement forcé à eau.

Les hypothèses de la modélisation thermique seront donc :

- Le régime thermique permanent est atteint, ce qui dispense de prendre en compte les capacités thermiques.
- La machine étant refroidie à eau, nous supposons que la circulation de ce liquide est le seul moyen de refroidissement. En particulier, tout autre transfert convectif, comme par exemple le refroidissement des têtes de bobine par l'air ambiant, est négligé. De plus, le système de refroidissement à eau est supposé être un serpentín collé contre la culasse du stator. Le contact thermique entre culasse et système de refroidissement est supposé parfait. La machine en coupe axiale avec son système de refroidissement est montrée à la figure 6.12.
- Le phénomène d'évacuation par rayonnement est aussi négligé.

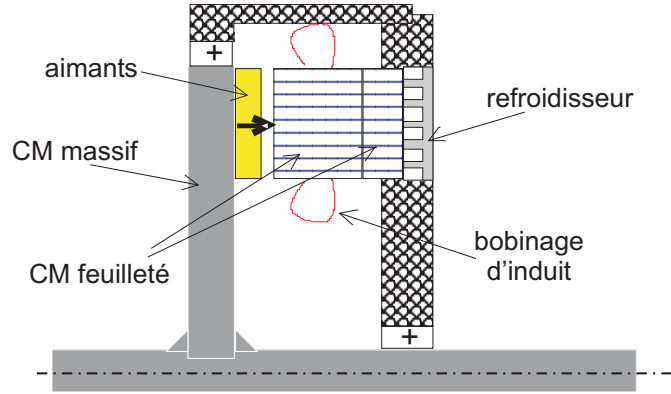


FIGURE 6.12: Coupe axiale de la machine à flux axial munie de son système de refroidissement

- Comme le modèle électromagnétique, le modèle thermique sera supposé bidimensionnel, et effectué au niveau du rayon moyen de la machine.
- Le transfert thermique dans la culasse ferromagnétique de la machine, qui a naturellement une bonne conductivité thermique (pour information, la conductivité thermique du fer utilisé pour la construction des machines électriques, dans la direction parallèle au feuilletage, a une conductivité thermique égale à $\lambda_{fer} = 72W/(Km)$), est supposé se faire de manière unidirectionnelle, selon la direction $(0y)$ (le système d'axes est le même que celui des calculs électromagnétiques). Cette hypothèse sera vérifiée par éléments finis pour diverses géométries.
- La zone d'encoche est supposée thermiquement homogène. La conductivité thermique homogénéisée de cette zone composée des fils, de l'isolant autour, ainsi que de l'air entre ces fils, a été mesurée expérimentalement au Laboratoire SATIE. Une valeur numérique de $\lambda_{enc} = 0.04W/(Km)$ a été déterminée.
- Nous supposons aussi que, les pertes dans le cuivre étant plus difficiles à évacuer à cause de la mauvaise conductivité thermique de la zone d'encoche, le point le plus chaud et le plus contraignant thermiquement à cause du risque de destruction des isolants inter-fils est localisé verticalement au centre de l'encoche, à la frontière avec l'entrefer (figure 6.13).
- Les pertes sont supposées uniformes dans la culasse ainsi que dans la dent ferromagnétiques, et seront prises égales à leur valeur moyenne dans chacune de ces deux zones.

A la figure 6.13, on représente le schéma thermique équivalent d'une demi-encoche et d'une demi-dent, qui, par symétrie, est suffisant pour en déduire les élévations maximales de température dans les différentes parties de la machine. On voit également, sur cette figure, que le cuivre est séparé du fer par une couche d'isolant très fine (épaisseur $e_{iso} = 0.2mm$), mais qui a son importance d'un point de vue thermique, ayant une conductivité thermique très faible $\lambda_{iso} = 0.143W/(Km)$. Nous rappelons que nous appelons respectivement R_2 et R_1 les rayons actifs externe et interne de la machine à flux axial. Étant donné que nous supposons le transfert thermique unidimensionnel suivant l'axe $(0y)$, la résistance thermique de la thermique $R_{TH_{cs}}$ de la culasse du stator peut être écrite comme suit :

$$R_{TH_{cs}} = \frac{e_{cs}}{1/2\lambda_{fer}(w_e + w_d)(R_2 - R_1)} \quad (6.4)$$

Nous allons, pour le calcul de la résistance thermique de la partie d'isolant notée $R_{TH_{i1}}$ sur la figure 6.13, supposer également un transfert monodimensionnel suivant l'axe $(0y)$, ce qui permet de donner la valeur suivante :

$$R_{TH_{i1}} = \frac{e_{iso}}{\lambda_{iso}(w_e/2 - e_{iso})(R_2 - R_1)} \quad (6.5)$$

En revanche, en ce qui concerne les autres résistances thermiques du schéma, leur détermination simple apparaît plus délicate, car le transfert thermique est bidimensionnel. Nous allons par conséquent suggérer la méthode suivante : on va résoudre l'équation de Poisson dans la zone d'encoche et dans la zone de dent, en appliquant dans la zone d'encoche une densité volumique de pertes égale à p_c , qui est directement donnée par la division des pertes cuivre P_c par le volume total de conducteur (qui comprend aussi celui des têtes de bobine de la machine), et la densité volumique de pertes p_d dans la dent, égale à la moyenne de la densité volumique de pertes fer dans la denture de la machine. En revanche, dans la partie verticale de l'isolant, il s'agit d'une simple équation de Laplace. On récapitule

(figure 6.14) les équations à résoudre dans les différentes zones où le transfert est bidimensionnel :

$$\begin{cases} \Delta T_c = -\frac{p_c}{\lambda_{enc}} & \text{dans l'encoche} \\ \Delta T_{iso} = 0 & \text{dans l'isolant} \\ \Delta T_{fer} = -\frac{p_d}{\lambda_{fer}} & \text{dans la dent} \end{cases} \quad (6.6)$$

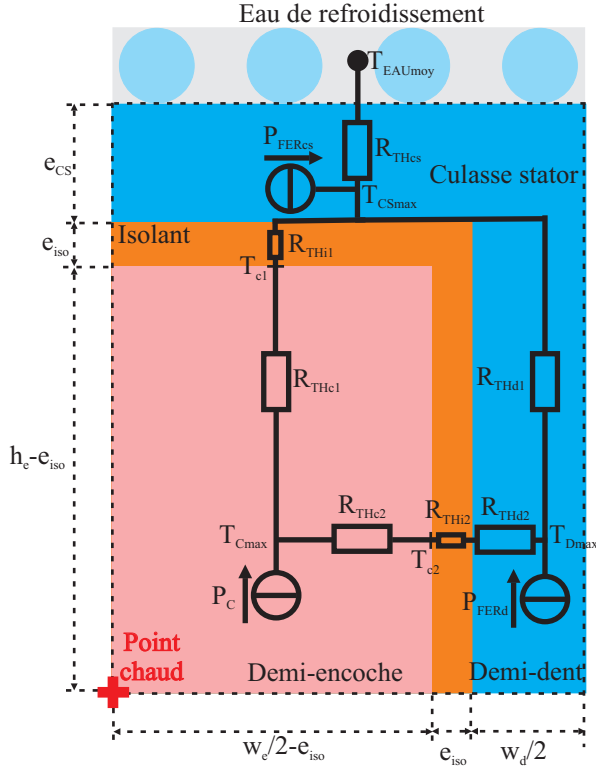


FIGURE 6.13: Modèle thermique en régime permanent proposé pour une demi-encoche

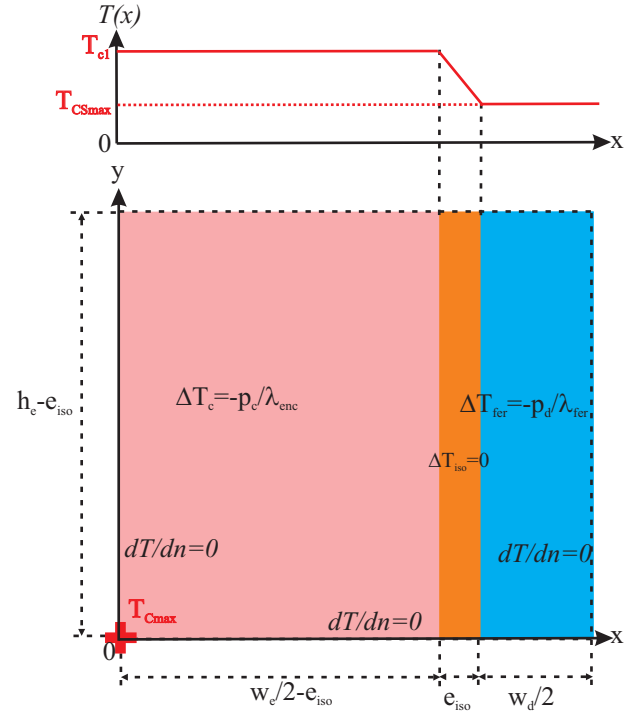


FIGURE 6.14: Résolution des équations de la thermique dans la zone d'encoche, de dent, et d'isolant

Les conditions aux limites choisies au milieu de l'encoche et au milieu de la dent sont de type $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$, car, par symétrie, le flux thermique est parallèle à ces axes. En outre, on prend aussi une condition de type $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ à la frontière avec l'entrefer, car on suppose qu'aucun flux thermique n'y transite. Au niveau du segment supérieur, la situation est plus compliquée, car il faut se connecter (figure 6.14) avec les résistances précédemment définies de la culasse statorique, et de la partie horizontale de l'isolant. C'est pour cela que nous choisissons une condition de type Dirichlet en température : au niveau du segment horizontal de frontière entre l'encoche et l'isolant, la température est prise constante, égale à T_{c1} qui est la température d'une des bornes de R_{THi1} . Pour la frontière entre la dent statorique et la culasse, cette température est justement égale à la température maximale de la culasse T_{CSmax} . Entre les deux températures (soit au niveau de l'épaisseur de l'isolant), l'évolution est supposée linéaire (la forme réelle a peu d'importance, l'épaisseur e_{iso} de l'isolant étant très fine).

Nous proposons, après avoir tenu compte des équations de Poisson et de Laplace, la solution suivante, pour la zone d'encoche :

$$T_c(x, y) = \sum_{k \geq 1} a_{ck} \cosh \left((2k-1) \frac{\pi}{2(h_e - e_{iso})} x \right) \cos \left((2k-1) \frac{\pi}{2(h_e - e_{iso})} y \right) - \frac{1}{2} \frac{p_c}{\lambda_{enc}} (y - (h_e - e_{iso}))^2 - \frac{p_c}{\lambda_{enc}} (h_e - e_{iso}) (y - (h_e - e_{iso})) + T_{c1} \quad (6.7)$$

En ce qui concerne la température dans le fer de la dent :

$$T_c(x, y) = \sum_{k \geq 1} a_{fer_k} \cosh \left((2k-1) \frac{\pi}{2(h_e - e_{iso})} (x - (w_e + w_d)) \right) \cos \left((2k-1) \frac{\pi}{2(h_e - e_{iso})} y \right) - \frac{1}{2} \frac{p_d}{\lambda_{fer}} (y - (h_e - e_{iso}))^2 - \frac{p_d}{\lambda_{fer}} (h_e - e_{iso}) (y - (h_e - e_{iso})) + T_{CS_{max}} \quad (6.8)$$

Et pour l'isolant :

$$T_{iso}(x, y) = \frac{T_{CS_{max}} - T_{c_1}}{e_{iso}} x + T_{CS_{max}} - \frac{w_e}{2e_{iso}} (T_{CS_{max}} - T_{c_1}) + \sum_{k \geq 1} \left[a_{iso_k} \cosh \left((2k-1) \frac{\pi}{2(h_e - e_{iso})} x \right) + a'_{iso_k} \sinh \left((2k-1) \frac{\pi}{2(h_e - e_{iso})} x \right) \right] \cos \left((2k-1) \frac{\pi}{2(h_e - e_{iso})} y \right) \quad (6.9)$$

Ensuite, pour chaque harmonique de rang $k \geq 1$, on écrit les relations, au niveau des frontières de chaque zone, de continuité de la température T , ainsi que celle du flux thermique $\varphi_{TH} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}$. Comme il y a deux frontières (une entre encoche et isolant, et une autre entre isolant et dent), cela fait quatre relations à écrire. Étant donné qu'il y a quatre coefficients inconnus pour tout rang d'harmonique $k \geq 1$ (a_{c_k} , a_{fer_k} , a_{iso_k} et a'_{iso_k}), nous pouvons alors déterminer tous ces coefficients inconnus. Remarquons que tous les harmoniques spatiaux de rang $k \geq 1$ sont indépendants, ce qui facilite grandement la résolution du problème. Une fois que l'on a la température en tout point (x, y) de la structure, il est aisé de déterminer, par dérivation, les flux thermiques en tout point (x, y) . Lorsque ce travail est effectué, on détermine les résistances thermiques de la figure 6.13, qui sont $R_{TH_{c1}}$, la somme des résistances $R_{TH_{c2}} + R_{TH_{i2}} + R_{TH_{d2}}$, ainsi que la résistance $R_{TH_{d1}}$. Cette détermination des résistances se fait en divisant la différence des températures à leurs bornes par le flux thermique les traversant. On est donc en mesure de connaître précisément toutes les résistances thermiques introduites dans la figure 6.13. Ensuite, la température maximale du cuivre $T_{C_{max}}$ peut alors être trouvée.

Notons que l'on a besoin de connaître la température moyenne $T_{EAU_{moy}}$ de l'eau du système de refroidissement. Connaissant la température d'entrée de l'eau de refroidissement $T_{EAU_{ent}}$, comme une donnée du problème, on peut écrire que la température de l'eau de sortie sera donnée par la relation suivante :

$$T_{EAU_{sort}} - T_{EAU_{ent}} = \frac{1}{\rho_{eau} c_{eau} Q_{eau}} (P_{fer_{cs}} + P_{fer_d} + P_c) \quad (6.10)$$

où ρ_{eau} est la densité volumique de l'eau de refroidissement, c_{eau} est la chaleur massique de ce liquide, et Q_{eau} est le débit de refroidissement, qui sont des données du problème. L'élévation moyenne est donc donnée par la relation :

$$T_{EAU_{moy}} = \frac{T_{EAU_{ent}} + T_{EAU_{sort}}}{2} = T_{EAU_{ent}} + \frac{1}{2\rho_{eau} c_{eau} Q_{eau}} (P_{fer_{cs}} + P_{fer_d} + P_c) \quad (6.11)$$

Il est possible d'écrire une contrainte sur l'élévation maximale de température que l'on admet pour le liquide du circuit de refroidissement du véhicule hybride.

Nous allons maintenant effectuer une vérification par éléments finis du modèle présenté ici. La géométrie simulée sera celle formée d'une demi-encoche, et d'une demi-dent, comme au niveau de la figure 6.13, conditions aux limites de type $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ sur les trois bords qui ne sont pas en contact avec le serpentin d'eau de refroidissement. La simulation sera faite avec les données suivantes :

- Une température d'eau d'entrée du système de refroidissement de $70^\circ C$, un débit d'eau de Q_{eau} de $3L/min$, une densité $\rho_{eau} = 1kg/L$, et une chaleur massique égale à $c_{eau} = 4205J/(kg \cdot K)$.
- Les densités de pertes dans la culasse, les dents et le cuivre de l'encoche sont respectivement égales à : $p_{cs} = 10^3 W/m^3$, $p_d = 10^4 W/m^3$, et $p_c = 10^5 W/m^3$.
- L'épaisseur de la culasse est $w_e = 1cm$.
- L'épaisseur de la feuille d'isolant est égale à $e_{iso} = 0.2mm$.
- Une largeur d'encoche $w_e = 2cm$, une largeur de dent $w_d = 0.5cm$, d'où un pas dentaire $\tau_s = w_e + w_d = 2.5cm$.
- Un ratio h_e/τ_s variant de 1 à 10, permettant de prendre des dents plus ou moins hautes par rapport au pas dentaire, et étudier la validité des modèles.

Nous allons faire un calcul analytique pour une conductivité du fer égale à $\lambda_{fer} = 72W/(Km)$, qui est grande, mais non infinie, puis un calcul où nous supposons réellement cette conductivité du fer infinie $\lambda_{fer} \rightarrow \infty$, pour évaluer l'erreur que l'on commet en négligeant la résistivité thermique du fer. Le résultat est montré au niveau de la figure 6.15, où les deux modèles sont comparés avec les résultats obtenus par éléments finis. On voit que lorsque la dent est courte, le modèle avec une conductivité thermique infinie est en bonne adéquation avec les résultats pour $\lambda_{fer} = 72W/(Km)$. En revanche, dans ce dernier cas, dès que le dent s'allonge, et étant donnée qu'elle est elle-même siège de pertes fer, elle ne peut plus rester à la même température que la culasse, et il y a apparition d'un gradient de température le long de cette dent en fer. Étant donné que la conductivité thermique $\lambda_{fer} = 72W/(Km)$ est bonne, cette élévation de température n'est pas trop importante (figure 6.16), mais la dent ne peut plus refroidir aussi efficacement le cuivre de l'encoche, qui, de surcroît, a plus de mal à évacuer les pertes dont il est le siège directement vers la culasse. La température maximale du cuivre est donc plus importante dans le cas où la conductivité du fer reste finie, comme le montre l'écart important observé sur la figure 6.15 lorsque le rapport h_e/τ_s est important. On remarque que si $\lambda_{fer} \rightarrow \infty$, la température se stabilise, car, lorsque h_e/τ_s est assez grand, l'évacuation des pertes du cuivre ne se fait plus que par la dent, et en faisant varier le rapport h_e/τ_s , on reste à capacité d'évacuation constante (on augmente la surface de pertes à même proportion que la surface d'évacuation). On voit sur la figure 6.15 que du moment que l'on prend une valeur de λ_{fer} finie, l'écart introduit par l'hypothèse d'une propagation unidirectionnelle du flux thermique dans la culasse n'introduit quasiment pas d'erreur (pour la géométrie testée ici). L'objet de cette étude était de montrer que le modèle thermique fonctionne même pour des dents très longues, ce qui est obligatoire dans une perspective d'optimisation systématique, où la géométrie choisie peut être, au début de la phase d'optimisation, prise de manière totalement aléatoire, et il faut alors que, dans tous les cas, les résultats donnés restent cohérents.

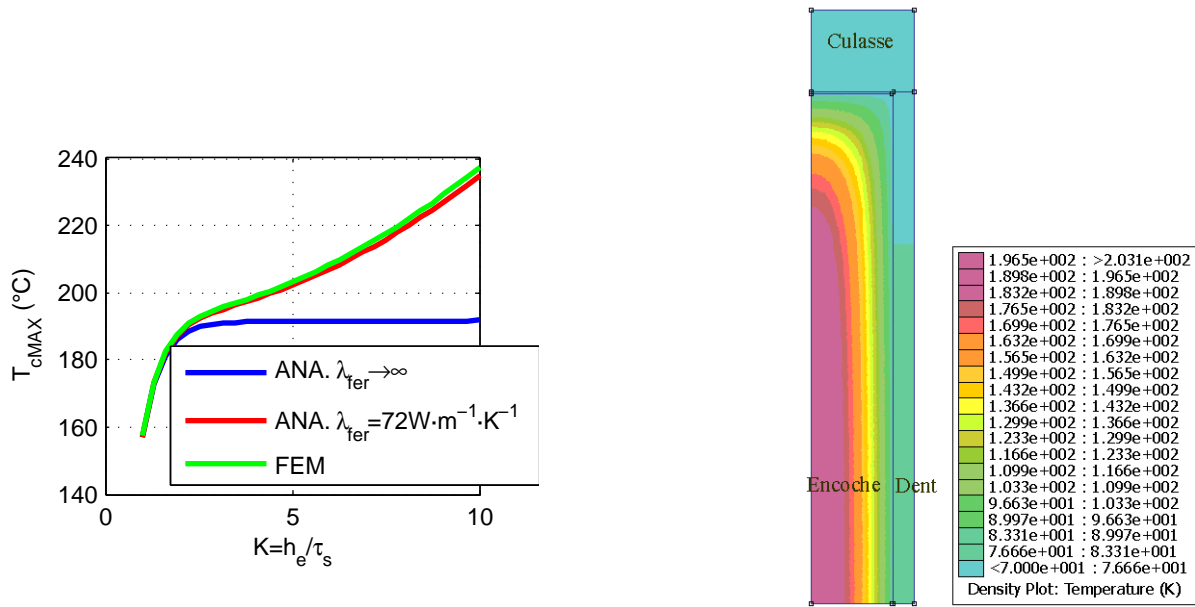


FIGURE 6.15: Vérification du modèle thermique à même densité volumique de pertes dans les différentes parties de la machine, et pour divers rapports h_e/τ_s

FIGURE 6.16: Lignes isopotentielle thermiques obtenues par éléments finis dans le cas d'une valeur h_e/τ_s grande

6.2 Optimisation de la machine à flux axial sur la base des modèles 2D développés

Dans cette partie, nous allons développer une stratégie d'optimisation de la machine synchrone à flux axial à aimants permanents et à pôles saillants en se servant des modèles électromagnétiques analytiques 2D développés au troisième chapitre, ainsi que des modèles électriques et thermiques de la partie précédente. Nous rappelons

que la topologie de machine étudiée est la machine disque de type synchrone avec un disque rotorique et un disque statorique. Le rotor de cette machine comporte des pôles ferromagnétiques insérés entre les aimants, afin de favoriser les applications en haute vitesse. Le stator est à bobinage réparti. Dans une première partie, nous allons présenter la stratégie d'optimisation que nous souhaitons utiliser afin d'optimiser la structure. Nous insisterons particulièrement sur la détermination des paramètres de commande optimaux pour chaque géométrie. Puis, dans une seconde partie, nous allons exposer les résultats d'optimisation, et nous les interpréterons.

6.2.1 La stratégie d'optimisation

Dans cette partie, nous allons parler de la stratégie d'optimisation de la machine que nous comptons mettre en oeuvre.

6.2.1.1 Le problème d'optimisation de la machine électrique

Comme tout problème d'optimisation, la conception optimale de la machine électrique doit être formulée en termes d'objectifs, de contraintes, sans oublier de détailler les différents paramètres indépendants caractérisant la géométrie de la machine.

Les objectifs choisis Comme on l'a dit, la machine est conçue dans le but d'être utilisée pour des applications en traction hybride. Par conséquent, s'agissant d'une application embarquée, il apparaît important de minimiser à la fois sa masse et ses pertes, qui sont bien entendu des critères contradictoires (ou tous autres critères, dont l'un reflète un coût de construction et l'autre un coût de fonctionnement). L'aspect multi-objectifs du problème est donc clairement avéré. Le résultat de l'optimisation sera donné sous la forme d'un front de Pareto, qui rassemble tous les individus offrant un compromis différent, mais optimal entre les deux critères contradictoires.

Les contraintes On peut lister différents types de contraintes : d'une part, celles qui sont liées au cahier des charges que l'on souhaite atteindre, et d'autre part les contraintes soit physiques, soit de faisabilité de la machine.

Les contraintes liées au cahier des charges Les contraintes liées au cahier des charges à atteindre sont directement formulées en termes de points à atteindre dans le plan couple-vitesse. Pour un véhicule hybride, le cycle de fonctionnement est très complexe [Ehsani *et al.*, 2009, Régnier, 2003] et s'exprime en fait non seulement en termes de couple-vitesse, mais aussi de temps, ce qui oblige à avoir un modèle qui tient compte des aspects transitoires, en particulier en ce qui concerne les aspects thermiques. Nous ne disposons pas de ce type de modèle. Par conséquent, nous allons simplifier le cycle de points de fonctionnement considéré réel (représenté à la figure 6.17) en seulement deux points, qui nous semblent représentatifs du fonctionnement (figure 6.18) : un point de basse vitesse-fort couple (C_b, Ω_b), et un point de haute vitesse-bas couple (C_d, Ω_d). Dans l'application visée, nous allons donner les valeurs numériques suivantes : $(C_b, \Omega_b) = (100Nm, 2700tr/min)$, et $(C_d, \Omega_d) = (100/6Nm, 6 \cdot 2700tr/min)$. Sur ce cycle simplifié, les pertes totales considérées seront la moyenne des pertes en chaque point du cycle, avec un poids identique affecté pour chaque point. Ceci revient à dire que chaque point de fonctionnement est atteint la moitié du temps.

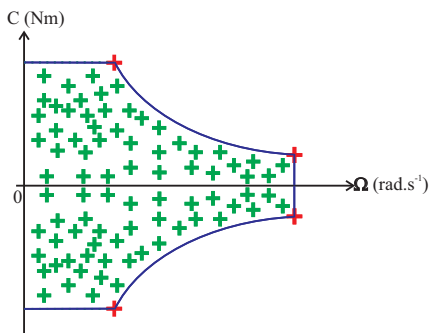


FIGURE 6.17: Exemple d'un cycle réel pour le cahier des charges d'un véhicule hybride

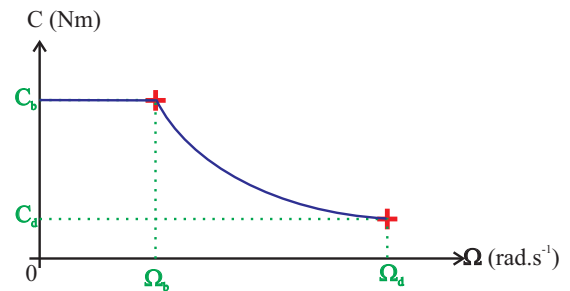


FIGURE 6.18: Simplification du cycle réel du véhicule hybride à deux points significatifs

En plus du cahier des charges dans le plan couple-vitesse, nous donnons une enveloppe de volume maximal à ne pas dépasser. Bien entendu, il convient de choisir, étant donné notre topologie à flux axial, une enveloppe de forme discoïde. Nous imposons les contraintes suivantes sur le volume cylindrique aplati alloué à la machine :

- une hauteur axiale active $L_a = e_{cr} + h_a + e + h_e + e_{cs}$ inférieure $L_{aMAX} = 7.5cm$.
- un rayon externe actif R_{eEXT} (tenant compte des têtes de bobine évaluées comme dans la référence [Huang *et al.*, 1999]), limité à $R_{eEXTMAX} = 20cm$.

Les contraintes de modèles, physiques, ou bien de faisabilité D'autres contraintes sont liées aux impératifs physiques, telles que la nécessité de maintenir une température raisonnable des bobinages pour éviter la destruction de leurs isolants. Il existe aussi des contraintes liées à la géométrie, afin que la machine reste mécaniquement viable et faisable (ce sont des contraintes de faisabilité). Certaines autres contraintes, comme la non-saturation des parties ferromagnétiques, ne sont pas des impératifs physiques, mais sont nécessaires afin de rester dans la limite de validité du modèle proposé. Nous listons toutes ces contraintes :

- une induction maximale dans les parties ferromagnétiques limitée : $B_{max} \leq B_{SAT} = 1.7T$.
- le champ magnétique dans les aimants doit être supérieur au champ causant une démagnétisation irréversible de l'aimant : $H_m \geq -H_k$, où $H_k = 2.5 \cdot 10^5 A/m$ pour les aimants en ferrite, et $H_k = 9 \cdot 10^5 A/m$ (à $25^\circ C$).
- une température limite du point chaud du cuivre limitée à $T_{cMAX} \leq T_{cLIM} = 180^\circ C$.
- l'élévation moyenne maximale de température du circuit d'eau de refroidissement est limitée : $T_{EAU_{moy}} - T_{EAU_{ent}} \leq 20^\circ C$.
- une épaisseur minimale des dents du stator égale à : $w_e \geq w_{eMIN} = 2mm$.

Nous sommes conscients du fait qu'en réalité, le problème est en fait un problème de type multiphysique couplé, car la température influe sur les caractéristiques magnétiques de l'aimant, ainsi que sur la résistivité du cuivre : il faudrait en toute rigueur faire des itérations entre les modèles magnétiques et thermiques. Ces phénomènes de couplages ont été pris en compte dans la référence [Kreuwawan *et al.*, 2008]. Dans la suite de ce travail, nous négligeons ce phénomène, et, afin de prendre en compte une certaine évolution de la température, nous choisissons, arbitrairement, d'évaluer toutes les caractéristiques magnétiques et électriques à $100^\circ C$. La référence [Multon, 2000] donne par exemple l'évolution des caractéristiques magnétiques des aimants (induction rémanente et champ démagnétisant) avec la température, en fonction de leurs caractéristiques à $25^\circ C$. Cette température sera aussi celle du cuivre.

Les paramètres du problème Les paramètres choisis pour l'optimisation sont les paramètres géométriques indépendants. Ces derniers sont au nombre de 10, et sont rappelés dans le tableau 6.3.

Nom et unité du paramètre	Notation
Épaisseur de la culasse statorique (m)	e_{cs}
Épaisseur de la culasse rotorique (m)	e_{cr}
Épaisseur de l'aimant (m)	h_a
Hauteur de la zone d'encoche (m)	h_e
Rayon externe actif du stator (m)	R_2
Rayon interne actif du stator (m)	R_1
Longueur relative de l'espace interpolaire	β_{a_2}
Longueur relative de l'aimant	β_{a_1}
Largeur d'une encoche (m)	w_e
Nombre de paires de pôles	p

TABLE 6.3: Les paramètres géométriques indépendants, utilisés pour l'optimisation de la structure à flux axial

6.2.1.2 Utilisation de l'algorithme génétique pour résoudre le problème

Les algorithmes évolutionnaires, comme l'a montré la référence [Azzouzi *et al.*, 2005c], sont très bien adaptés aux problématiques de la conception des machines électriques. En effet, étant donné les caractères non-convexes des fonctions objectif, une optimisation par algorithme déterministe ne semble pas recommandée. Nous allons par conséquent utiliser l'algorithme NSGA-II ([Dréo *et al.*, 2003, Deb *et al.*, 2002, Brisset, 2007]). Une population de N_{indiv} individus est initialisée de manière aléatoire au début, chaque individu étant en fait caractérisé par un vecteur

des 10 paramètres dont nous venons de parler. Alors la fonction objectif est calculée pour chacun de ces premiers individus, les « meilleurs » au regard de cette fonction objectif étant retenus pour la génération suivante. La diversité est garantie par des probabilités de croisement (prise ici égale à 0.5) entre ces individus, ainsi qu’une probabilité faible de mutation (prise ici égale à 0.1). Après un nombre suffisamment important de générations, il est permis de penser que les configurations optimales ont ainsi été atteintes. Le principe du fonctionnement de l’algorithme d’optimisation est suggéré à la figure 6.19.

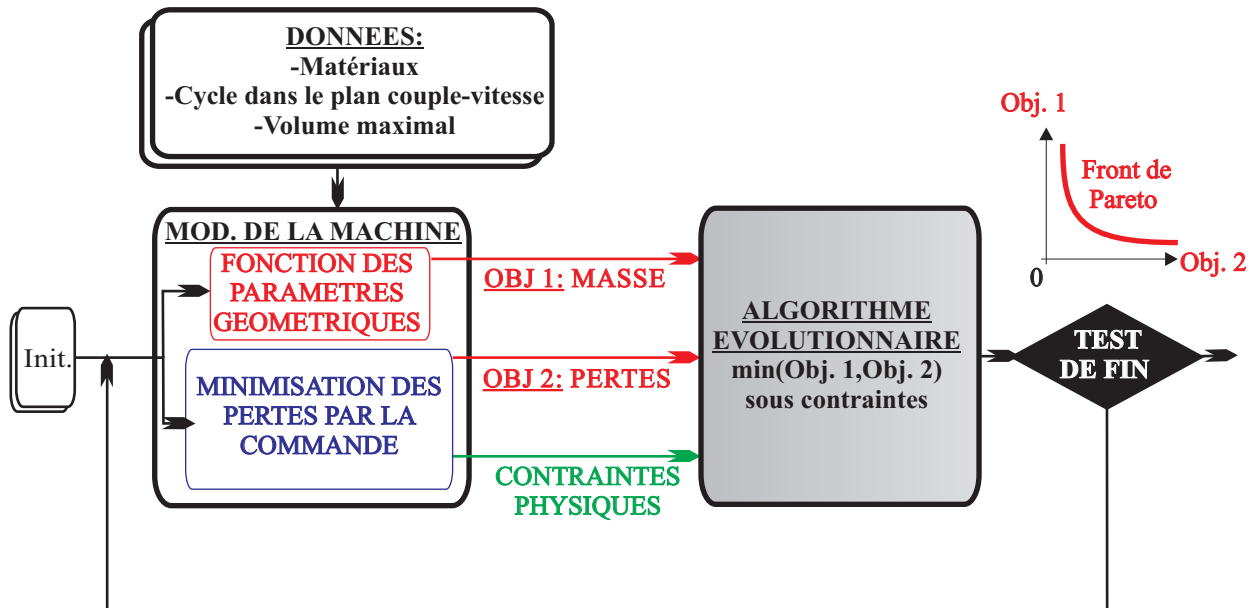


FIGURE 6.19: Schéma de principe de la boucle d’optimisation mise en oeuvre

Néanmoins, les choses sont un peu plus complexes qu’il n’y paraît. En effet, même si, une fois la géométrie connue, il est possible d’en déduire la masse qui est l’objectif 1, l’évaluation des pertes, qui est le second objectif, est plus problématique : ce critère suppose de connaître, pour chaque géométrie de machine, le doublet de commande (nI_{0_d}, nI_{0_q}) qui, tout en assurant les contraintes (couple à atteindre, contraintes magnétiques et thermiques...), minimise les pertes totales $P_{fer} + P_c$. Par conséquent, pour chaque géométrie de machine, une optimisation locale, sur les valeurs du doublet de commande, est nécessaire. Nous avons détaillé, sur l’organigramme de la figure 6.20, le principe de la boucle locale d’optimisation proposée, pour chaque géométrie. En effet, la connaissance des paramètres géométriques permet de calculer les résistances thermiques d’une part, et d’exécuter d’autre part le modèle électromagnétique, afin d’en déduire le flux à vide ainsi que les perméances, mais aussi les inductions dans le fer par ampère-tour, ainsi que le champ magnétique dans la zone d’aimant, toujours par ampère-tour. On est donc, avec ces dernières informations, en mesure de calculer rapidement les valeurs des contraintes (couple moyen, contraintes magnétiques...), et des pertes, pour chaque doublet (nI_{0_d}, nI_{0_q}) de commande. Ce modèle est ensuite inversé par un algorithme local d’optimisation, que nous détaillerons à la partie suivante, pour chaque point du plan couple-vitesse, sous réserve de s’être fixé une loi de commande (ce sera la minimisation des pertes totales $P_{fer} + P_c$, et on rappelle que vouloir minimiser uniquement les pertes cuivre P_c par la commande conduit à des expressions analytiques des courants de commande bien connus [Multon *et al.*, 1995], cette stratégie étant également étudiée par la suite). Alors la prise en compte des contraintes à respecter (thermiques et magnétiques) peut être envisagée comme une boucle itérative : si la commande déterminée ne permet pas de satisfaire les contraintes, on s’autorise à modifier la loi de commande, en permettant une certaine augmentation des pertes, de telle manière à ce que les contraintes soient au final respectées. Cette démarche est la même que celle adoptée dans la référence [Aubry *et al.*, 2010]. Une fois la commande minimisant les pertes sous contraintes déterminée, on retourne la valeur des pertes comme objectif 2 à l’algorithme génétique. Il est clair que cette optimisation locale sous contraintes de la commande doit être menée de manière rapide, afin de ne pas prolonger à outrance le temps de calcul. Nous allons discuter en détail à la partie suivante de la manière de procéder à cette optimisation locale des pertes totales sous respect des contraintes.

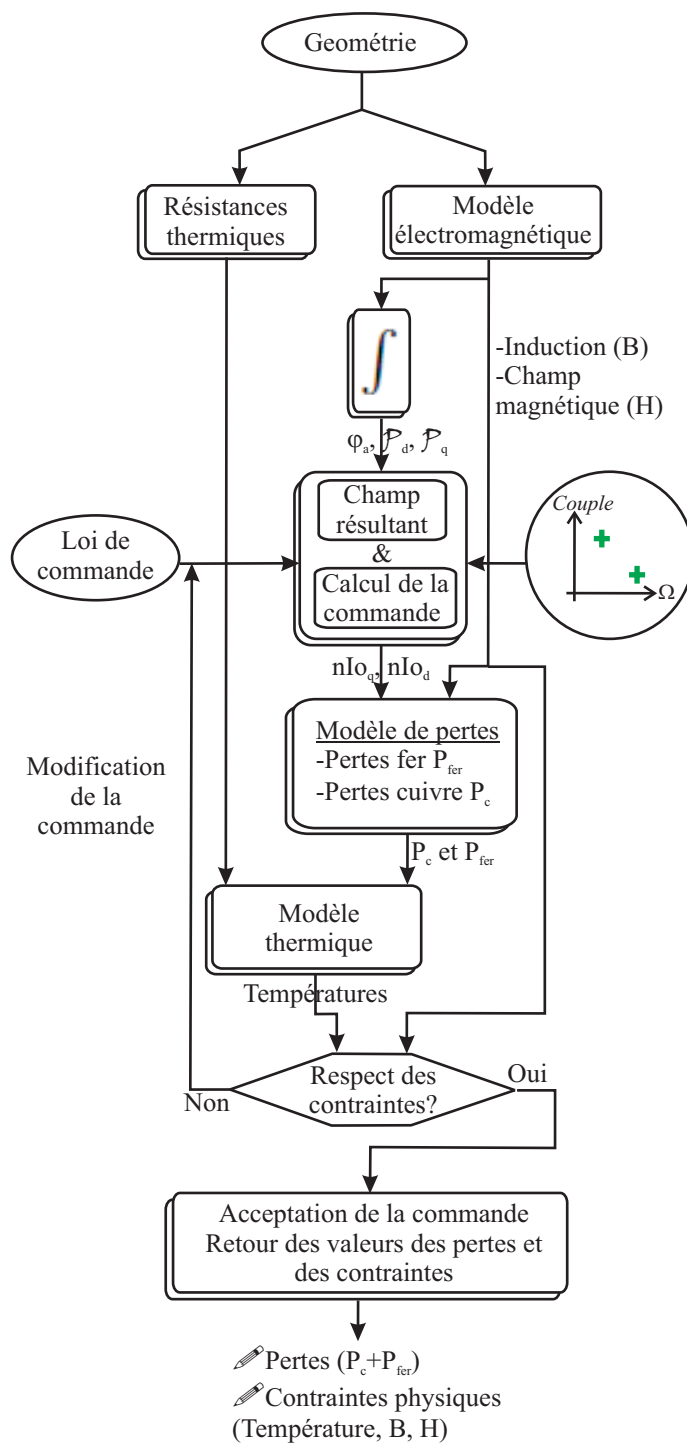


FIGURE 6.20: Organigramme montrant le détail de la boucle locale d'optimisation de la commande en régime permanent, à géométrie fixée

6.2.1.3 Détails concernant la détermination optimale de la commande à géométrie fixée

Procédure prenant en compte toute la complexité du problème Nous nous trouvons donc, pour chaque géométrie, et pour chaque point du plan (C, Ω) , dans la nécessité de déterminer le doublet de commande (nI_{0d}, nI_{0q}) minimisant les pertes totales $P_{fer} + P_c$, sous réserve de respecter les contraintes suivantes :

- le couple demandé doit être atteint.
- les températures maximales du cuivre et de l'eau de refroidissement autorisées ne doivent pas être dépassées.
- les inductions dans les culasses et les dents du stator et du rotor ne doivent pas dépasser, en aucun point, l'induction maximale de saturation autorisée.
- le champ magnétique dans l'aimant ne doit pas passer en-dessous du champ de démagnétisation $-H_k$ (remarquons que dans la convention choisie, le champ magnétique H_k traduisant la limite de démagnétisation est positif).

Lorsque l'on a la géométrie, on lance trois calculs électromagnétiques : un calcul du flux à vide d'entrefer φ_f , un calcul des perméances d'axe d et d'axe q , appelées respectivement P_d et P_q . Ces deux derniers calculs sont lancés pour un ampère-tour de courant d'axe d et d'axe q . En plus, il est possible de consigner, dans une matrice représentant chaque point des parties ferromagnétiques de la machine, les inductions, à la fois dues aux aimants, et à un ampère-tour d'axe d et d'axe q . On fait de même avec une matrice de points dans l'aimant, pour laquelle on détermine les champs magnétiques. Ainsi, avec la donnée d'un doublet de commande (nI_{0d}, nI_{0q}) on peut calculer le couple moyen, mais également les loci d'induction en chaque point des parties ferromagnétiques, et les pertes fer (avec la vitesse de rotation Ω). De même, le champ magnétique en charge dans l'aimant peut être déduit. Les valeurs de l'induction en charge nous servent d'une part à vérifier qu'en aucun point, le module de l'induction ne dépasse la valeur B_{SAT} autorisée, et d'autre part à calculer localement la valeur des pertes fer, que l'on transforme en une valeur globale par intégration. A partir des valeurs des pertes, le modèle thermique permet d'évaluer les élévations maximales de température du cuivre et de l'eau de refroidissement, pour vérifier que les contraintes en température ne sont pas dépassées.

Malheureusement, disposer d'un modèle complexe concernant les inductions de culasse (par un calcul local des loci d'induction), ainsi qu'un modèle complexe de pertes fer (on rappelle que les valeurs des pertes par hystérésis pour un locus circulaire sont tabulées) nous interdit de disposer d'estimations analytiques des inductions maximales et des pertes fer, en fonction du doublet de commande (nI_{0d}, nI_{0q}) . Ceci complexifie toute la procédure : les élévations de température dépendant des pertes fer, ne peuvent alors plus se voir exprimer analytiquement. En outre, même les pertes dans le cuivre, égales à l'expression $P_c = 3 \cdot 2p \cdot r (nI_d^2 + nI_q^2)$, dépendent elles-mêmes des pertes fer, car les courants (nI_d, nI_q) sont reliés aux courants actifs (nI_{0d}, nI_{0q}) par le biais des pertes fer, à cause de la résistance r_f (figures 6.11a et 6.11b).

La seule expression analytique dont nous disposons est l'expression du couple moyen. Nous pouvons nous en servir pour lier les variables (nI_{0d}, nI_{0q}) entre elles, et ainsi ne plus travailler qu'avec une seule variable indépendante. Pour un couple à atteindre C donné, la liaison entre les variables de commande est :

$$nI_{0q} = \frac{C}{3p\varphi_f + 3p(P_d - P_q)nI_{0d}} \quad (6.12)$$

Par conséquent, par le biais de la relation du couple, nous pouvons considérer le problème d'optimisation comme mono-variable, la seule grandeur à optimiser étant le courant actif nI_{0d} . Une méthode envisageable, pour résoudre le problème rigoureusement, est donc de discrétiser l'espace des courants actifs nI_{0d} (méthode dite de l'énumération exhaustive), puis de faire le calcul des pertes et des contraintes pour chaque point (grâce à la détermination des inductions pour un ampère-tour d'axe d et d'axe q , on est dispensé d'évaluer le modèle électromagnétique pour chaque combinaison de courants). Bien entendu, la linéarité est une hypothèse de travail fondamentale, à la fois pour l'utilisation de la relation sur le couple moyen et pour la superposition des effets des inductions causées par les aimants, et les courants d'axe d et d'axe q .

Ce raisonnement devra être répété pour les deux points du plan couple-vitesse à atteindre.

Procédure simplifiée de détermination de la commande optimale A titre d'information, nous proposons ici d'exposer une méthode simplifiée, fondée sur des expressions analytiques, de détermination de la commande optimale (nI_{0d}, nI_{0q}) minimisant les pertes totales $P_{fer} + P_c$, sous réserve de respecter les contraintes dont nous avons parlé auparavant. Nous allons nous inspirer des méthodes présentées dans la référence [Morimoto *et al.*, 1994c]. Néanmoins, cette référence ne traite pas des contraintes liées aux inductions et à la thermique, ni de la minimisation de la somme des pertes totales $P_{fer} + P_c$. Notons que ce travail de représentation des contraintes de conception et l'alimentation dans le plan (nI_{0d}, nI_{0q}) est relativement classique dans la littérature électrotechnique : les références [Jahns, 1987, Amara, 2001] ont travaillé à déterminer le lieu correspondant au courant thermique maximal supporté par la machine, ou bien le lieu de tension maximale imposée par l'onduleur. Il a été trouvé que le lieu correspondant au courant thermique maximal était un cercle centré sur l'origine dans le plan (nI_{0d}, nI_{0q}) (à

condition de négliger la résistance des pertes fer r_f), et le lieu de tension maximale n'était autre qu'une ellipse. Notre souhait est ici d'étendre ce travail de représentation des contraintes dans le plan (nI_{0d}, nI_{0q}) à des contraintes plus complexes, comme les conditions de non-saturation, de non-démagnétisation, ou bien les contraintes thermiques.

Expression du lieu du couple constant dans le plan (nI_{0d}, nI_{0q}) L'équation 6.12 peut en fait être interprétée, ainsi que spécifié dans l'article [Morimoto *et al.*, 1994c], comme l'équation d'une hyperbole isocouple dans le plan du doublet de commande (nI_{0d}, nI_{0q}) . La contrainte de couple à atteindre se traduit donc comme la contrainte de se situer sur cette hyperbole dans le plan (nI_{0d}, nI_{0q}) .

Expression du lieu d'inductions maximales dans le plan (nI_{0d}, nI_{0q}) Nous cherchons la zone du plan (nI_{0d}, nI_{0q}) pour laquelle les inductions dans les parties ferromagnétiques de la machine électrique sont inférieures ou égales à l'induction maximale B_{SAT} autorisée. La procédure exacte décrite plus haut, qui consiste à sommer localement les inductions dues à chaque source d'excitation, puis à prendre le maximum des modules d'induction dans la culasse pour s'assurer ensuite que l'induction à saturation B_{SAT} n'est dépassée en aucun point, ne peut se traduire par une formule analytique. En revanche, si nous consentons à simplifier le modèle mis en oeuvre, une vision élégante du problème de limite d'induction dans le plan de la commande (nI_{0d}, nI_{0q}) est autorisée. En effet, si nous réduisons l'évolution spatiale des inductions d'entrefer, aussi bien causées par les aimants, les courants d'axe d et les courants d'axe q à leurs fondamentaux, nous pouvons écrire (en notant B_{max_f} la valeur maximale du fondamental de l'induction due aux aimants dans l'entrefer, $B_{max_{1d}}$ celle du fondamental d'induction maximale pour 1Atr d'axe d , et $B_{max_{1q}}$ son analogue pour 1Atr d'axe q), la valeur maximale du fondamental d'induction B_{max_e} dans l'entrefer est alors donnée par :

$$B_{max_e}^2 = \left(B_{max_f} + B_{max_{1d}} nI_{0d} \sqrt{2} \right)^2 + \left(B_{max_{1q}} nI_{0q} \sqrt{2} \right)^2 \quad (6.13)$$

Abandonnons ensuite le modèle local d'induction dans les culasses, avec des loci bidimensionnels, pour supposer que l'induction dans les parties ferromagnétiques de la machine est unidimensionnelle, uniforme dans chaque partie, et que son amplitude est proportionnelle à celle de l'induction B_{max_e} dans l'entrefer de la machine, la constante de proportionnalité étant liée à des considérations de concentration de flux. Nous aurons donc :

- pour la culasse du rotor : $B_{max_{cr}} = K_{C_{cr}} B_{max_e}$
- pour la dent du rotor : $B_{max_{dr}} = K_{C_{dr}} B_{max_e}$
- pour la culasse du stator : $B_{max_{cs}} = K_{C_{cs}} B_{max_e}$
- pour la dent du stator : $B_{max_{ds}} = K_{C_{ds}} B_{max_e}$

où $K_{C_{cr}}$, $K_{C_{dr}}$, $K_{C_{cs}}$ et $K_{C_{ds}}$ sont les facteurs de concentration du flux d'entrefer dans respectivement la culasse du rotor, la dent du rotor, la culasse du stator, ainsi que les dents du stator. Les relations précédentes, ainsi que l'équation 6.13 démontrent que les courbes $B_{max} = B_{SAT}$ dans le plan (nI_{0d}, nI_{0q}) sont en fait des ellipses, comme représentées au niveau de la figure 6.21. En effet, d'un point de vue physique, il est clair qu'un courant d'axe d injecté à courant d'axe q nul contribue à diminuer les niveaux d'induction dans la machine (c'est le phénomène de défluxage), ce qui explique la position du centre de l'ellipse dans le demi-plan $nI_{0d} < 0$. De plus, le petit axe se situe suivant l'axe des ordonnées, et le grand suivant l'axe des abscisses, du fait que l'inductance d'axe q est plus grande, dans ce type de machines, que celle d'axe d .

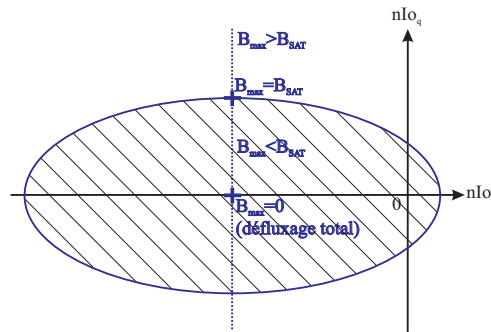


FIGURE 6.21: Ellipse du lieu d'induction $B_{max} = B_{SAT}$ dans les parties ferromagnétiques

Expression du lieu du champ magnétique minimal tolérable dans l'aimant dans le plan (nI_{0d}, nI_{0q})

De même, on va trouver une formule analytique du champ magnétique minimal dans l'aimant afin d'éviter la démagnétisation de ce dernier. En effet, dans un modèle très simplifié, où les distributions d'induction d'entrefer seraient sinusoïdales, nous pourrions écrire la relation suivante, pour le champ magnétique minimal dans l'aimant :

$$H_{min} = -\frac{h_a}{h_a + e_c} \frac{B_r}{\mu_0} - \frac{\sqrt{(B_{max1d} nI_{0d} \sqrt{2})^2 + (B_{max1q} nI_{0q} \sqrt{2})^2}}{\mu_0} \quad (6.14)$$

On doit vérifier, afin de ne pas démagnétiser l'aimant : $H_{min} \geq -H_k$. La relation de non démagnétisation de l'aimant s'écrit ainsi :

$$\left(B_{max1d} nI_{0d} \sqrt{2} \right)^2 + \left(B_{max1q} nI_{0q} \sqrt{2} \right)^2 \leq \left(\mu_0 H_k - \frac{h_a}{h_a + e_c} B_r \right)^2 \quad (6.15)$$

Cette dernière relation correspond à l'équation d'une ellipse, centrée sur l'origine du plan (nI_{0d}, nI_{0q}) .

Expression des pertes dans le plan (nI_{0d}, nI_{0q}) Dans cette étude simplifiée, nous allons négliger la résistance r_f des pertes fer. Par conséquent, les pertes cuivre sont données par la formule simplifiée :

$$P_C = 3 \cdot 2p \cdot r \left(nI_{0d}^2 + nI_{0q}^2 \right) \quad (6.16)$$

Pour les pertes fer (que nous localisons, pour cette étude au premier harmonique, uniquement dans le stator), nous avons supposé les inductions dans la culasse et dents statoriques sinusoïdales, et d'amplitudes uniformes B_{maxcs} et B_{maxds} , calculées en supposant qu'elles étaient proportionnelles à l'onde d'induction sinusoïdale d'entrefer. Nous admettons, pour simplifier une formule de type Steinmetz, dans laquelle l'amplitude de l'induction dans les parties ferromagnétiques intervient quadratiquement. Pour la culasse du stator :

$$P_{fercs} = k_H B_{maxcs}^2 \left(p \frac{\Omega}{2\pi} \right) + 2\pi^2 \alpha_p B_{maxcs}^2 \left(p \frac{\Omega}{2\pi} \right)^2 \quad (6.17)$$

où k_H et α_p sont des coefficients caractéristiques des pertes par hystérésis et courants de Foucault dans le matériau. Et pour les dents du stator, toujours avec le modèle simplifié :

$$P_{ferds} = k_H B_{maxds}^2 \left(p \frac{\Omega}{2\pi} \right) + 2\pi^2 \alpha_p B_{maxds}^2 \left(p \frac{\Omega}{2\pi} \right)^2 \quad (6.18)$$

Par conséquent, la somme des pertes totales $P_{fer} + P_c$ pourra s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} P_{fer} + P_c = & k_H \left[(K_{Ccs}^2 + K_{Cds}^2) \left((B_{maxf} + B_{max1d} nI_{0d} \sqrt{2})^2 + (B_{max1q} nI_{0q} \sqrt{2})^2 \right) \right] \left(p \frac{\Omega}{2\pi} \right) \\ & + 2\pi^2 \alpha_p \left[(K_{Ccs}^2 + K_{Cds}^2) \left((B_{maxf} + B_{max1d} nI_{0d} \sqrt{2})^2 + (B_{max1q} nI_{0q} \sqrt{2})^2 \right) \right] \left(p \frac{\Omega}{2\pi} \right)^2 \\ & + 3 \cdot 2p \cdot r \left(nI_{0d}^2 + nI_{0q}^2 \right) \quad (6.19) \end{aligned}$$

Le lieu des pertes totales données dans le plan (nI_{0d}, nI_{0q}) est donc clairement aussi une ellipse. Sans les pertes fer, les pertes cuivre sont un simple cercle [Morimoto *et al.*, 1994c]. Quant aux pertes fer, ces dernières sont une ellipse centrée, comme les lieux d'inductions maximales données dans le fer, sur le point $\left(-\frac{B_{maxf}}{B_{max1d} \sqrt{2}}, 0 \right)$. L'addition des deux types de pertes va modifier le centrage de l'ellipse résultante entre ce dernier point et l'origine $(0, 0)$. Notons que si la dépendance des pertes en fonction de l'induction maximale n'est pas quadratique, comme c'est le cas dans notre modèle de pertes fer où les pertes en champ circulaire décroissent avec l'induction lorsque cette dernière devient importante, ce raisonnement n'est plus valide.

Expression des courbes isothermes dans le plan (nI_{0d}, nI_{0q}) La dernière contrainte à exprimer est la contrainte d'iso-température maximale dans le plan (nI_{0d}, nI_{0q}) , aussi bien pour la température maximale du cuivre autorisée que pour la température de l'eau de refroidissement à ne pas dépasser.

Pour la température maximale du cuivre, nous pourrions déterminer les constantes de proportionnalité suivantes, en fonction des résistances thermiques de la figure 6.13 :

$$T_{cMAX} = A_{c1}P_c + A_{c2}P_{fer_d} + A_{c3}P_{fer_{cs}} + T_{EAU_{ent}} \quad (6.20)$$

D'un point de vue physique, il est clair que $A_{c1} \gg A_{c2} \geq A_{c3}$, vu que les pertes cuivre, étant donné la médiocre conductivité thermique de la zone d'encoche, sont bien plus difficiles à évacuer que les pertes fer. Quant à l'élévation de la température moyenne de l'eau, on peut l'écrire sous une forme semblable, à ceci près que toutes les constantes sont cette fois égales :

$$T_{EAU_{moy}} = \frac{1}{2\rho_{eau}c_{eau}Q_{eau}}P_c + \frac{1}{2\rho_{eau}c_{eau}Q_{eau}}P_{fer_d} + \frac{1}{2\rho_{eau}c_{eau}Q_{eau}}P_{fer_{cs}} + T_{EAU_{ent}} \quad (6.21)$$

Ces relations de proportionnalité permettent une fois de plus d'exprimer les deux contraintes de température dans le plan (nI_{0d}, nI_{0q}) comme des lieux elliptiques.

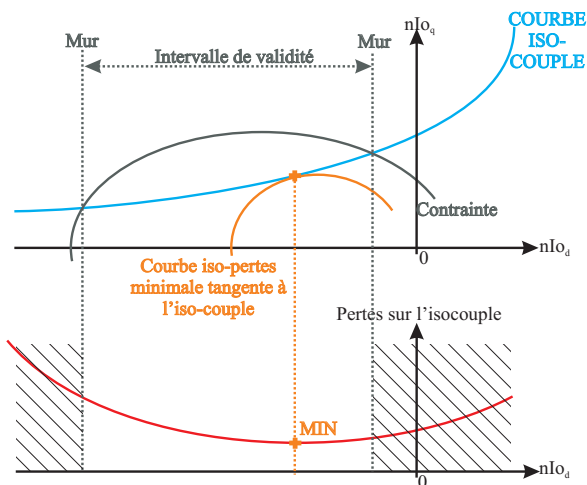


FIGURE 6.22: Schéma de principe de la minimisation des pertes dans le cas où le minimum absolu des pertes est inclus dans l'intervalle de validité

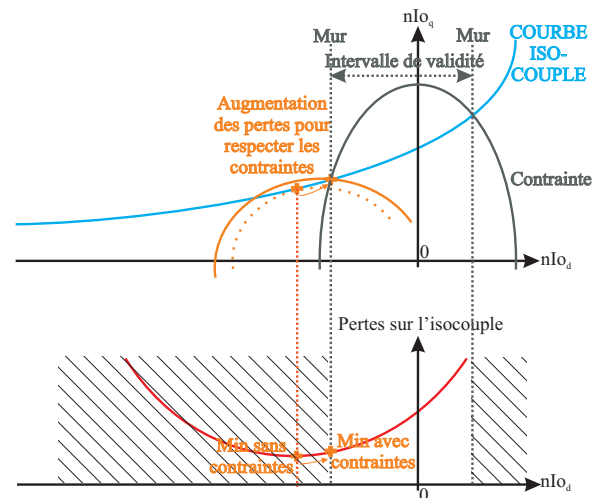


FIGURE 6.23: Résolution analytique du problème d'optimisation des pertes (on est obligé de dégrader les pertes pour respecter les contraintes)

Minimisation analytique des pertes en respectant les contraintes. Récapitulons les points précédents : grâce à des hypothèses simplificatrices supplémentaires, il a été possible de modéliser à la fois les contraintes et les objectifs par des ellipses dans le plan de commande (nI_{0d}, nI_{0q}) (voir la référence [Aubry *et al.*, 2010]). Seule l'équation du couple d'une machine à pôles saillants s'exprime par une hyperbole. Le problème de minimisation est représenté géométriquement au niveau des figures 6.22 et 6.23 : l'intervalle de validité d'une contrainte peut être vu comme l'intervalle pour lequel l'iso-couple se trouve incluse à l'intérieur de l'ellipse caractéristique du lieu de la contrainte. Remarquons que pour simplifier la représentation, nous n'avons fait figurer qu'une seule contrainte sur les figures 6.22 et 6.23. En réalité, étant donné que, comme on l'a vu, les contraintes sont multiples, l'intervalle de validité réel est en fait l'intersection des intervalles de validité de chaque contrainte. Cet intervalle de validité résultant, où toutes les contraintes sont vérifiées tout en atteignant le couple requis, est limité par deux bornes, que nous avons appelées « murs » au niveau des figures 6.22 et 6.23. En ce qui concerne la minimisation des pertes, deux cas peuvent se présenter : soit le minimum absolu des pertes totales (c'est-à-dire l'ellipse iso-pertes de plus petite valeur tangentant l'hyperbole isocouple) se situe dans l'intervalle de validité (figure 6.22) et il constitue alors la solution effective au problème, soit au contraire ce dernier se situe hors de l'intervalle de validité (figure 6.23), et

auquel cas il faut consentir à augmenter les pertes de telle manière à respecter les contraintes (la solution se trouve alors au niveau d'un mur, c'est-à-dire une des bornes de l'intervalle de validité, afin de dégrader le moins possible le rendement).

Bien entendu, cette étude de minimisation analytique des pertes sous contraintes se fonde sur des approximations incompatibles avec la précision recherchée ici, nous obligeant à avoir en fait recours, comme on l'a dit, à une énumération exhaustive, puis à des calculs numériques. Néanmoins, elle nous a permis de mieux comprendre le processus d'optimisation sous contraintes de la commande, qui, nous le rappelons, doit être répétée pour chaque géométrie et chaque point du plan (C, Ω) .

6.2.2 Présentation et analyse des résultats d'optimisation

Après avoir ici parlé en détail de la stratégie d'optimisation, en insistant pour chaque géométrie de machine sur la nécessité de minimiser les pertes par la commande, nous souhaitons à présent donner quelques résultats. En particulier, cette partie va s'organiser comme suit : puisque nous venons justement de parler de la minimisation des pertes par la commande à géométrie fixée, il apparaît opportun de faire en premier lieu une étude de sensibilité sur cette loi de commande afin de mieux appréhender son utilité : nous allons comparer la différence que l'on obtient sur les géométries de machines optimisées, si, localement, nous minimisons effectivement les pertes totales, ou si, par simplicité, nous nous contentons de la classique commande à couple par ampère maximal. Dans un second temps, nous mettrons en lumière l'influence du type des aimants choisi sur la géométrie. Dans un dernier temps, étant donné que nous n'avons, jusque là, utilisé aucune contrainte sur l'alimentation de la machine (que ce soit en tension ou en courant), et que ce dernier aspect apparaît néanmoins comme fondamental dans un processus de conception, nous allons nous permettre d'introduire une contrainte de puissance apparente nécessaire à l'alimentation de la machine. En effet, étant donné que nous raisonnons en termes de tension par spire et d'ampères-tours, il serait plus délicat d'imposer une contrainte de courant et de tension de manière séparée.

6.2.2.1 Influence de la loi d'optimisation locale de la commande

Nous allons, dans cette partie, étudier l'effet de la loi d'optimisation locale de la commande à géométrie fixée. En effet, nous avons décrit une méthode afin d'optimiser sous contraintes la somme des pertes totales : pertes cuivre et pertes fer. Néanmoins, cette optimisation locale de la commande apparaît assez compliquée, et coûteuse en temps de calcul. On peut trouver bien plus simple d'utiliser une loi de commande classique à couple par ampère maximal, qui conduit à une expression analytique de la loi de commande évaluable dès que l'on connaît le flux à vide, ainsi que les perméances d'entrefer ([Multon *et al.*, 1995, Morimoto *et al.*, 1994c]) : nous sommes donc dispensés de la stratégie d'optimisation locale coûteuse en temps de calcul dont nous avons parlé. Néanmoins, nous précisons que même si nous ne cherchons pas à les diminuer, nous continuons, une fois que nous connaissons la commande, à calculer les pertes fer, et à renvoyer ces dernières à l'algorithme génétique. Par conséquent, nous évitons, par simplicité, de minimiser localement par la commande les pertes totales dans la machine en nous bornant à la classique commande à couple par ampère maximal, mais, dans la boucle externe d'optimisation de la géométrie, les pertes fer sont calculées, et entrent en jeu dans l'optimisation (figure 6.24). Cette étude va permettre d'étudier l'influence de la loi de commande sur la géométrie optimale.

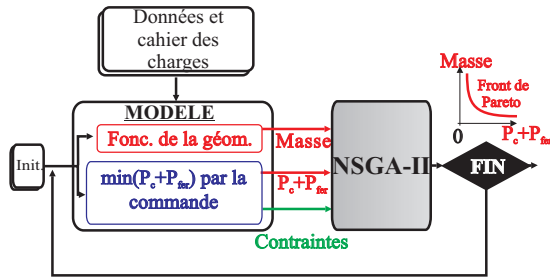
En plus, si on commande la machine à couple par ampère maximal y compris pour le point de haute vitesse-bas couple (C_d, Ω_d) , cela signifie que l'on s'interdit, pour ce point, le défluxage. Sans doute cette commande apparaît-elle irréaliste afin d'atteindre un point de ce type dans le plan couple-vitesse, car la puissance apparente, et en particulier la tension nécessaire, deviennent alors bien trop importantes. Néanmoins, dans notre cas, nous rappelons que pour l'instant, aucune contrainte de puissance apparente n'a été introduite (on dispose d'une puissance apparente infinie), ce qui rend ce fonctionnement théoriquement possible. Par conséquent, cette étude va permettre de comprendre l'influence intrinsèque du défluxage sur la géométrie de la machine, hors de toute contrainte de tension. Cette vision nous apparaît intéressante, car la commande en défluxage est le plus souvent présentée, une fois la géométrie fixée, comme une méthode pour atteindre des vitesses importantes au prix d'une diminution du couple, sans violer la contrainte de tension de l'onduleur.

Nous allons faire cette étude à la fois pour la machine à pôles saillants et pour la machine à pôles lisses. Les données permettant de faire un calcul des objectifs et des contraintes de l'optimisation sont montrées en détail dans le tableau 6.4 (les aimants étant pris arbitrairement à une température de 100°C lors du fonctionnement).

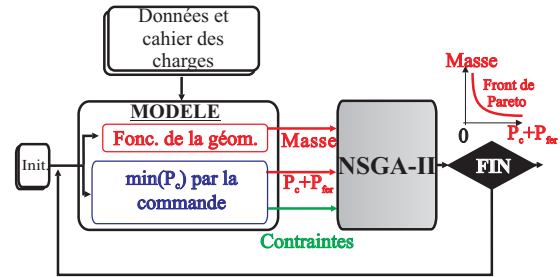
Nature du paramètre	Notation	Valeur numérique
Densité du fer (FeSi3%)	γ_{fer}	$7700kg/m^3$
Densité du cuivre	γ_{cu}	$8800kg/m^3$
Résistivité du cuivre à 25°C (+0.4% par degré)	ρ_{cu}	$1,72 \cdot 10^{-8}\Omega m$
Induction rémanente des aimants en ferrite à 25°C (-0.2% par degré)	B_{r0}	$300mT$
Champ démagnétisant des aimants ferrite à 25°C (+0.4% par degré)	H_k	$2,5 \cdot 10^5 A/m$
Densité des aimants en ferrite	γ_{aim}	$4900kg/m^3$
Point de fonctionnement fort couple-basse vitesse	(C_b, Ω_b)	$(100Nm, 2700tr/min)$
Point de fonctionnement faible couple-haute vitesse	(C_d, Ω_d)	$(\frac{100}{6}Nm, 6 \cdot 2700tr/min)$

TABLE 6.4: Les données du problème d'optimisation

Les fronts de Pareto résultants sont donnés à la figure 6.25, et les géométries extrêmes de ces fronts sont schématisées (au rayon moyen et en couple axiale) dans le tableau 6.5.



(a) Minimisation des pertes totales par la commande au niveau de la boucle locale d'optimisation



(b) Minimisation des pertes cuivre par la commande (pour des raisons de simplicité) au niveau de la boucle locale d'optimisation

FIGURE 6.24: Étude des conséquences sur les géométries obtenues de la loi de commande locale utilisée

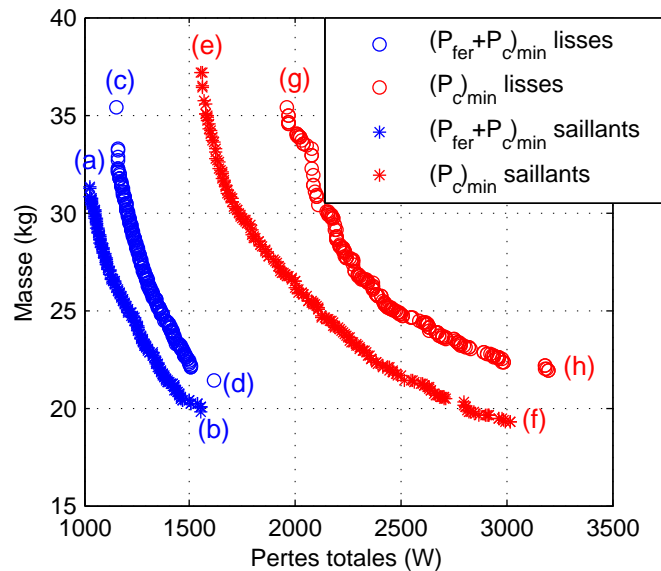


FIGURE 6.25: Fronts de Pareto obtenus pour l'étude de sensibilité sur la loi de commande (soit à pertes totales $P_{fer} + P_c$ minimales, soit à pertes cuivre P_c minimales)

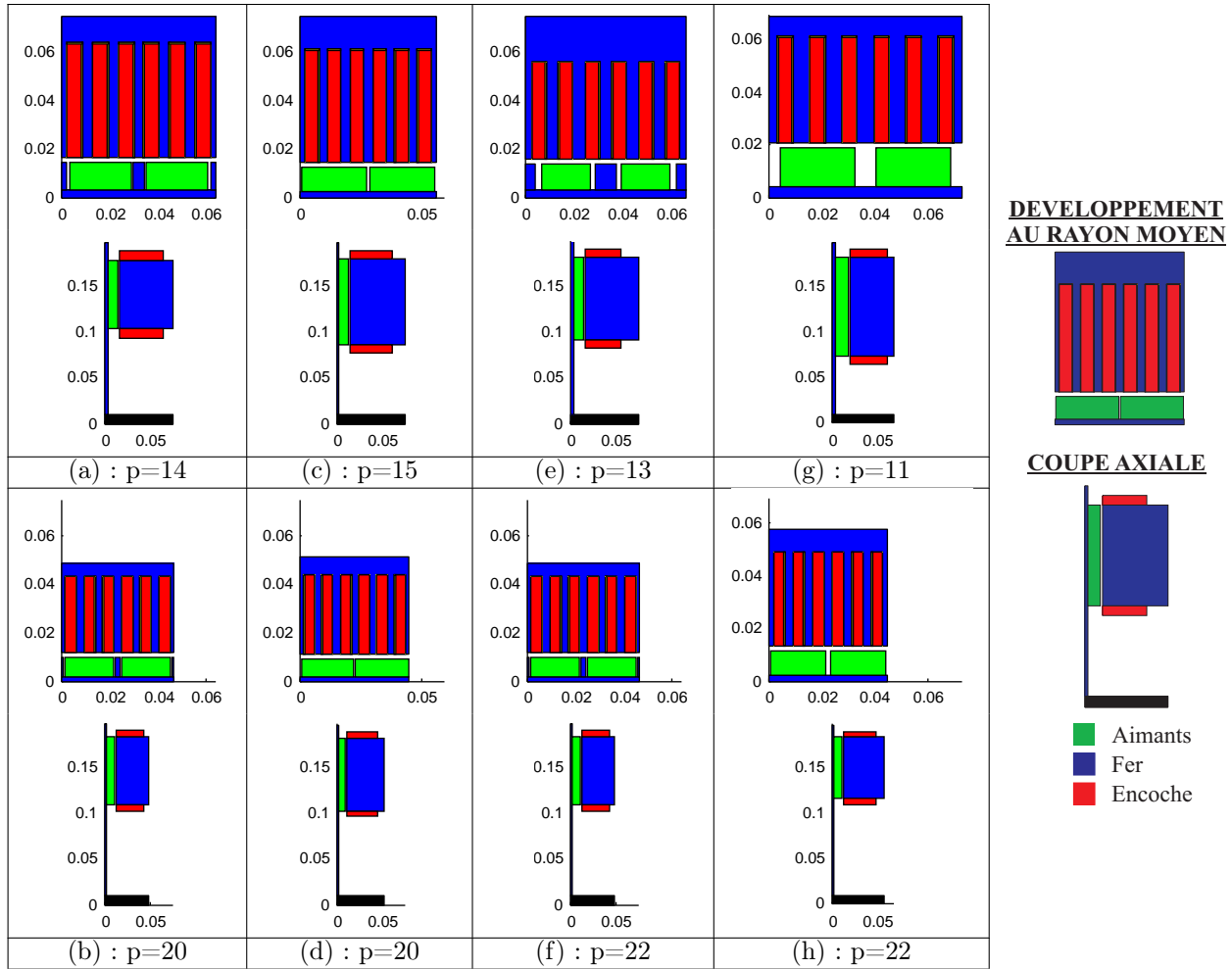


TABLE 6.5: Représentation des machines extrêmes des fronts de Pareto de la figure 6.25

Commentaires relatifs à la différence entre les deux stratégies de commande Comme on pouvait s’y attendre, minimiser localement la somme des pertes cuivre et des pertes fer donne un meilleur compromis entre les deux objectifs qu’une simple commande à pertes cuivre minimales. Ainsi, pour la machine à pôles saillants, la minimisation de $P_{fer} + P_c$ permet d’atteindre, dans le volume alloué de $9.4L$, un rendement optimal global pour les deux points de fonctionnement de $\eta_{opt} = 0,97$, alors que les machines obtenues par minimisation locale d’uniquement les pertes cuivre P_c ne permettent pas de dépasser $\eta_{opt} = 0,93$. Pour les deux stratégies de commande, le couple massique atteignable est de $(\frac{C}{M})_{opt} = 5Nm/kg$. Le nombre de paires de pôles est compris, grossièrement, entre 10 (pour les machines de masse importante, avec le meilleur rendement), et 20 (pour les machines présentant le couple massique le plus intéressant au prix de pertes élevées). Nous allons donner une explication aux différences observées sur les pertes : en effet, lorsque nous imposons à l’algorithme local de calcul du doublet de commande (nI_{o_d}, nI_{o_q}) de minimiser la somme des pertes cuivre et des pertes fer, ce dernier retrouve, pour le point (C_d, Ω_d) de haute vitesse-bas couple, la classique commande en défluxage, même en dehors de toute contrainte d’onduleur. Nous montrons sur la figure 6.26 les angles de commande $\psi_0 = \arctan(nI_{o_d}/nI_{o_q})$ obtenus pour la dernière génération de machines à pôles saillants pour le point (C_d, Ω_d) : alors que pour la commande à couple par ampère maximal se traduit par la présence d’un angle de commande légèrement négatif (dans le cas d’une machine à pôles saillants, il s’agit de maximiser la somme des couples hybride et réluctant), la commande $P_{fer} + P_c$ se traduit par un fort courant $nI_{o_d} < 0$ injecté, afin de réduire au maximum les pertes fer : le défluxage est donc intrinsèquement (en dehors de toute contrainte d’onduleur) utile pour la machine, car il permet de minimiser les pertes fer en haute vitesse. Ceci est possible grâce à la réduction du premier harmonique des inductions dans le fer du stator de la machine. Ces pertes fer pour le point (C_d, Ω_d) sont montrées, pour chaque machine, au niveau de la figure 6.27.

Remarquons bien qu'il puisse paraître surprenant que les pertes fer P_{fer} pour le point (C_d, Ω_d) (en ordonnée à la figure 6.27) soient supérieures aux pertes totales sur le cycle formé de deux points (en abscisse à la figure 6.27), qui constituent l'un des objectifs à minimiser. Ceci est dû au fait que les pertes totales sur le cycle sont trouvées d'après la formule $1/2(P_c + P_{fer})_{(C_b, \Omega_b)} + 1/2(P_c + P_{fer})_{(C_d, \Omega_d)}$. Le facteur $1/2$ vient du fait que chaque point est censé être atteint pendant 50% du temps. A cause de ce facteur $1/2$ introduit, il se peut donc fort bien que les pertes fer pour le point (C_d, Ω_d) soient supérieures aux pertes totales sur le cycle.

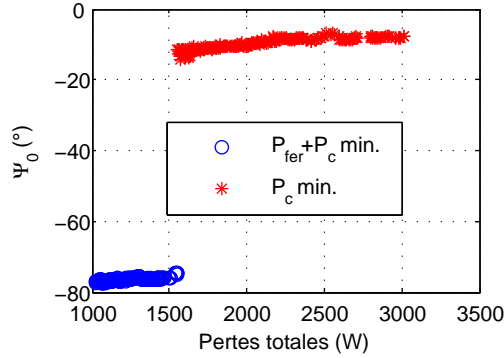


FIGURE 6.26: Angles $\psi_0 = \arctan(nI_{o_d}/nI_{o_q})$ pour le point (C_d, Ω_d) des machines à pôles saillants pour les deux stratégies de commande locales, en fonction de l'objectif pertes sur le cycle de deux points

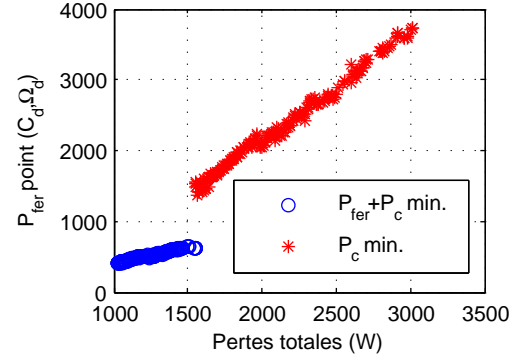


FIGURE 6.27: Pertes fer P_{fer} pour le point (C_d, Ω_d) des machines à pôles saillants pour les deux stratégies de commande locales, en fonction de l'objectif pertes sur le cycle

Il est surtout intéressant de comprendre en quoi la différence de loi de commande va influencer la géométrie des machines. Les machines (b) et (f) du tableau 6.5, qui sont les machines à pôles saillants de masse minimales pour les deux stratégies de commande, diffèrent très peu géométriquement : même si la machine (f), pour laquelle le défluxage est interdit, a quasiment sept fois plus de pertes fer au niveau du point (C_d, Ω_d) , ce problème des pertes n'influence pas ces géométries extrêmes, pour lesquelles seul le critère de masse compte. Comme les pertes fer ont un effet thermique très limité du fait de la facilité de leur évacuation (la conductivité thermique du fer est grande), ce problème des pertes fer n'a quasiment aucune influence sur ces géométries extrêmes générées par l'optimiseur, ce qui explique que le couple massique maximum (machines (b) et (f)) soit le même pour les deux types de commande. On a représenté, sur la figure 6.28 pour chaque géométrie des fronts de Pareto des machines à pôles saillants, le pourcentage de couple hybride et le pourcentage de couple réluctant (qui est son complémentaire) qui sont utilisés pour fournir le couple C_b . Pour les géométries de petites masses à fortes pertes, il s'agit principalement de couple hybride, permettant d'atteindre le couple voulu à moindre frais sur le courant injecté, qui lui a une influence thermique importante mais au prix de pertes fer importantes à cause des aimants au point (C_d, Ω_d) (il y a une dégradation du rendement, mais ceci a peu d'influence thermique, et donc n'empêche pas de réduire la taille).

En revanche, pour les géométries (a) et (e), qui sont les machines à pôles saillants de grande taille pour lesquelles seul le critère rendement compte, l'algorithme tente, par modification de la géométrie, de rattraper le surcroît de pertes fer au point (C_d, Ω_d) que l'on n'arrive pas à réduire par une stratégie de commande adaptée. D'une part, la culasse de la machine (e) est plus épaisse, afin de réduire les niveaux d'inductions, et donc les pertes fer, ce qui se traduit par une place inférieure pour les encoches, et donc des pertes dans le cuivre accrues au point de base. Il est aussi manifeste sur le tableau 6.5, que les aimants de la géométrie (e), contrairement à ce qui se passe pour la géométrie (a), ne remplissent pas l'intégralité de l'espace qui leur est alloué, la machine (e) possédant des aimants moins volumineux que la machine (a). Comme cela, les pertes fer au point (C_d, Ω_d) de la machine (e) (figure 6.27) demeurent raisonnables. Ceci étant, la diminution du flux à vide va réduire le couple hybride disponible pour atteindre le point de fort couple C_b , et donc oblige à compenser avec plus de couple réluctant (figure 6.28), qui va causer plus de pertes cuivre en ce point de fort couple (figure 6.29).

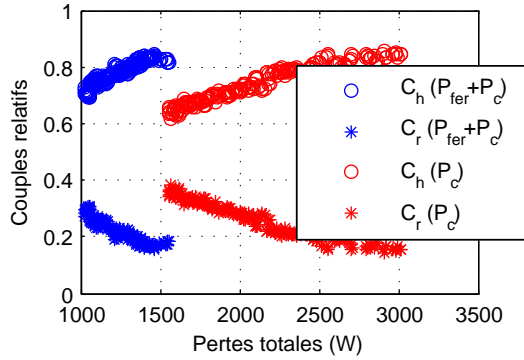


FIGURE 6.28: Pourcentage de couple hybride et de couple réductant (ou couples relatifs) pour atteindre le point de fort couple (C_b, Ω_b) pour les deux stratégies de commande locales, en fonction de l'objectif pertes sur le cycle

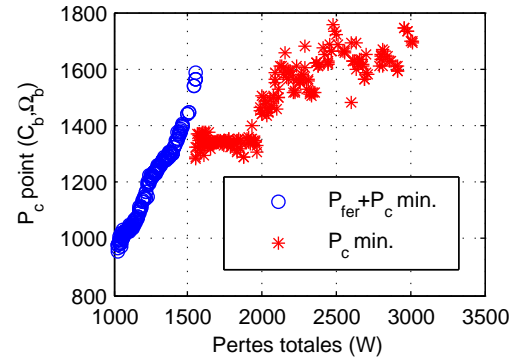


FIGURE 6.29: Pertes cuivre P_c pour le point (C_b, Ω_b) des machines à pôles saillants pour les deux stratégies de commande locales, en fonction de l'objectif pertes sur le cycle

Ceci montre clairement les bienfaits d'une stratégie de commande en défluxage sur la géométrie intrinsèque de la machine. Bien qu'aucune contrainte sur l'alimentation n'ait été imposée ici, on peut introduire la notion de puissance apparente de l'onduleur, définie comme le produit de la tension par spire maximale sur le cycle et des ampères-tours maximaux réclamés sur le cycle (qui ne sont donc pas absorbés forcément au même point du cycle)¹ :

$$S_{ond} = 3 \left(\frac{V}{n} \right)_{max} n I_{max} \quad (6.22)$$

Cette grandeur, pour les machines optimales à pôles saillants, est représentée à la figure 6.30. Il est manifeste, conformément à la théorie classique, que le défluxage permet de réduire la tension au point de haute vitesse-bas couple, et donc de limiter grandement la puissance apparente de l'onduleur requis. La raison en est donnée, très schématiquement, à la figure 6.31, elle-même tirée des investigations de la référence [Multon *et al.*, 1995], en supposant que le défluxage permette d'obtenir une zone de fonctionnement parfaitement à puissance constante.

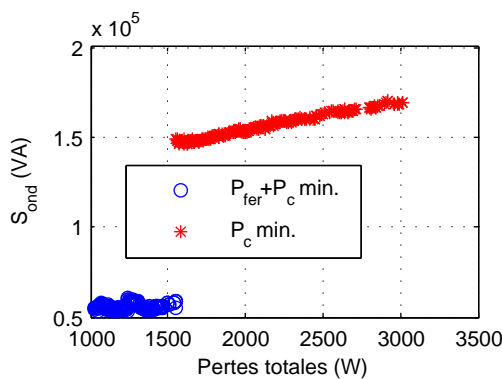


FIGURE 6.30: Puissance apparente onduleur S_{ond} des machines à pôles saillants pour les deux stratégies de commande locales, en fonction de l'objectif pertes sur le cycle

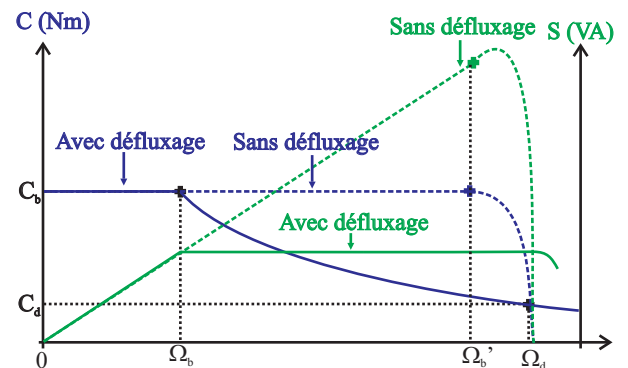


FIGURE 6.31: Schématisation de la puissance apparente onduleur S_{ond} des machines à pôles saillants pour les deux stratégies de commande locales, en fonction de l'objectif pertes sur le cycle

1. Nous rappelons que dans cette étude, cette grandeur de puissance apparente est simplement déduite : ce n'est ni une contrainte (ce sera néanmoins le cas dans une des études qui suit), et ni un objectif à optimiser

On voit que l'interdiction du défluxage revient à dimensionner l'onduleur pour pouvoir atteindre avec la machine le point (C_b, Ω'_b) , où la vitesse Ω'_b est très proche de la vitesse Ω_d . Ceci conduit à un très net surdimensionnement de l'onduleur par rapport au cas avec défluxage. Cette hypothèse est vérifiée au niveau des figures 6.32 et 6.33, où nous avons tracé le couple maximal que peuvent fournir les machines (b) et (f) sur toute la gamme de vitesse, sous réserve de respecter les contraintes physiques et de ne pas dépasser la puissance apparente onduleur maximale que ces deux machines consomment sur le cycle simplifié du cahier des charges (figure 6.30). On lit en effet sur la courbe 6.30 que cette limite de puissance apparente à ne pas dépasser pour la machine (b) est de $58kVA$, alors qu'elle vaut $169kVA$ pour la machine (f), une telle différence illustrant de manière manifeste l'apport du défluxage. Nous y voyons que la prédiction schématique réalisée au niveau de la figure 6.31 est vérifiée. Insistons sur le fait que la puissance apparente de l'onduleur est pour l'instant déduite : ce n'est ni une contrainte (pour l'instant), ni un objectif. D'ailleurs, les figures 6.30 et 6.33 montrent bien que pour une puissance de $30kW$, la puissance apparente réclamée par les machines, même lorsque le défluxage est autorisé, atteint plus de $50kVA$, ce qui donne un facteur de puissance inférieur à 0.6. Dans une partie qui suit consacrée à l'étude de la puissance apparente, nous donnerons une explication à ce mauvais facteur de puissance obtenu naturellement si aucune contrainte de puissance apparente n'est appliquée, et nous chercherons à corriger ce problème en appliquant des contraintes de puissances apparentes plus ou moins restrictives.

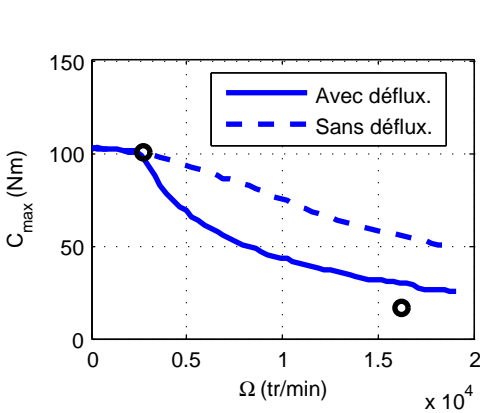


FIGURE 6.32: Couple maximal que peuvent fournir les machines (b) (défluxage permis) et (f) (défluxage interdit), avec la contrainte de ne pas dépasser la puissance apparente maximale calculée sur le cycle

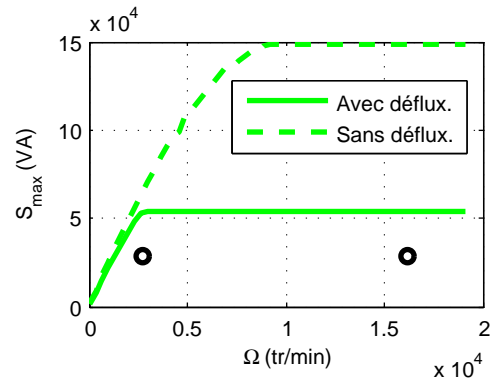


FIGURE 6.33: Puissance apparente maximale absorbée par les machines (b) (défluxage permis) et (f) (défluxage interdit), avec la contrainte de ne pas dépasser la puissance apparente maximale calculée sur le cycle

Commentaires relatifs à la différence entre la machine à pôles saillants et la machine à pôles lisses

Au niveau du front de Pareto, le défluxage par la commande étant autorisé, les pertes se trouvent diminuées grâce au degré de liberté supplémentaire offert par la machine à pôles saillants. Par contre, la masse, ainsi que la géométrie de la machine, restent à peu près constantes. La diminution des pertes s'explique par le fait que, pour une machine à pôles saillants, l'inductance d'axe d , plus grande que l'inductance cyclique de la machine à pôles lisses, permet, pour le point de haute vitesse-bas couple (C_d, Ω_d) de réduire les pertes fer, à moindre frais sur les pertes cuivre (figure 6.35). En revanche, pour le point de fort couple-basse vitesse (C_b, Ω_b) , l'introduction de dents ferromagnétiques rotoriques se révèle pénalisante, car elle réduit l'espace disponible pour les aimants, et augmente les fuites entre ces derniers. Bien sûr, il devient possible de générer un couple réductant, mais ce dernier est plus consommateur d'ampères-tours que le couple hybride, et les pertes dans le cuivre au point (C_b, Ω_b) ne sont pas diminuées (figure 6.34).

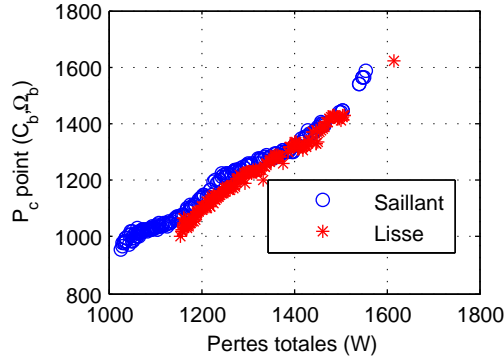


FIGURE 6.34: Pertes cuivre P_c pour le point (C_b, Ω_b) des machines à pôles saillants et à pôles lisses, en fonction de l'objectif pertes sur le cycle

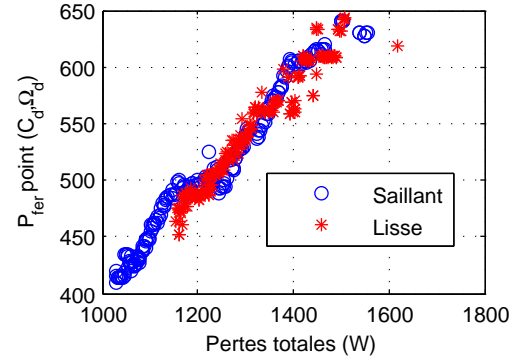


FIGURE 6.35: Pertes fer P_{fer} pour le point (C_d, Ω_d) des machines à pôles saillants et à pôles lisses, en fonction de l'objectif pertes sur le cycle

Nous pouvons voir l'angle de commande ψ_0 au niveau du point (C_b, Ω_b) à la figure 6.36 : alors que ce dernier est quasiment nul pour la machine à pôles lisses (la petite valeur négative correspond à la réduction du peu de pertes fer ayant lieu à cette vitesse), l'exploitation de la composante de couple réductant conduit à prendre des angles ψ_0 voisins de -30° pour la machine à pôles saillants. Pour le point de haute vitesse (C_d, Ω_d) , ces angles sont par contre assez voisins (figure 6.37), car le défluxage permet, dans les deux cas, de tenter de réduire les pertes fer. Cette réduction des pertes fer se fait à moindre frais sur les pertes cuivre dans le cas de la machine à pôles saillants, car l'inductance L_d est augmentée grâce à la saillance de la machine par rapport à l'inductance cyclique de la machine à pôles lisses. Néanmoins, ce gain sur les pertes grâce aux structures saillantes peut se payer au niveau du facteur de puissance au point (C_b, Ω_b) , à cause de la grande inductance d'axe q , qui, du fait de la saillance insérée, dépasse celle d'axe d ($s = \frac{L_q}{L_d} > 1$). Cela étant, ceci ne se voit pas ici, car au point de haute vitesse, une bonne capacité de défluxage réduit la puissance apparente absorbée.

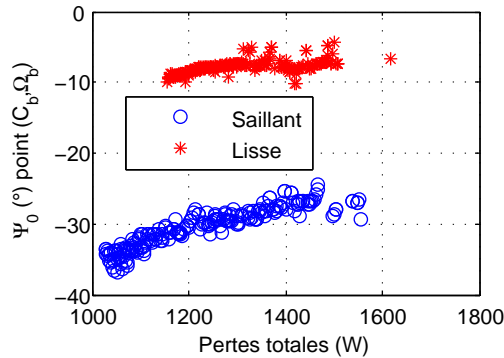


FIGURE 6.36: Angles $\psi_0 = \arctan(nI_{0d}/nI_{0q})$ pour le point (C_b, Ω_b) des machines à pôles saillants et à pôles lisses, en fonction de l'objectif pertes sur le cycle

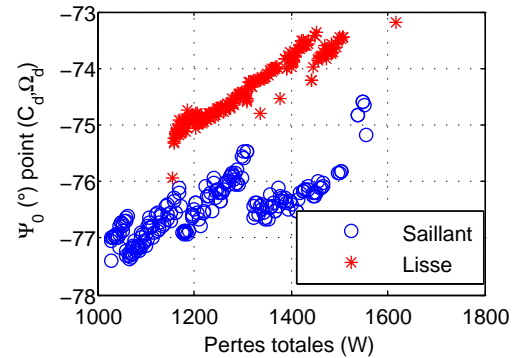


FIGURE 6.37: Angles $\psi_0 = \arctan(nI_{0d}/nI_{0q})$ pour le point (C_d, Ω_d) des machines à pôles saillants et à pôles lisses, en fonction de l'objectif pertes sur le cycle

Il est remarquable, au niveau de la figure 6.25, que l'écart entre les fronts de Pareto de la machine à pôles saillants et de la machine à pôles lisses n'est pas constant : en effet, les machines de plus faibles masses de chacun des fronts ont des performances plus proches que les machines de forte masse. D'ailleurs, sur toutes les figures de résultats (6.34, 6.35, 6.36 et 6.37), il est tout à fait remarquable que les topologies extrêmes à forte masse du front de Pareto correspondant à la structure saillante permettent d'aller plus loin dans l'amélioration du rendement que les topologies extrêmes du front de Pareto de la machine à pôles lisses. Ceci s'explique par le fait que pour les

machines de forte masse, où seul le rendement est important, les capacités de défluxage supérieures de la machine à pôles saillants permettent de réduire les pertes fer au point (C_d, Ω_d) sans nécessiter un trop fort courant d'axe d pour défluxer la machine, permettant alors un meilleur compromis sur les pertes totales pour les individus où seul le rendement est un critère important. Pour les machines de faible masse, où seul le couple massique importe, la problématique est différente : en effet, le couple massique est imposé par la contrainte thermique au niveau du point de fort couple (C_b, Ω_b) . Afin de réduire au maximum les courants injectés au niveau de ce point, l'optimiseur place les aimants les plus conséquents possibles, afin de miser sur le couple hybride. La machine obtenue est donc très peu défluxable, mais ceci n'a pas d'importance ici. En effet, on n'a introduit aucune contrainte de puissance apparente d'onduleur à ne pas dépasser. En plus, la très forte augmentation des pertes fer qui résulte au point (C_d, Ω_d) n'a que peu d'importance d'un point de vue thermique, et, pour ces machines extrêmes, le rendement n'est donc pas un problème. Par conséquent, les deux types de machines étant à égalité du point de vue du couple hybride, ceci explique que les individus extrêmes de faible masse soient très semblables. Nous venons en outre de justifier que plus une machine est de faible masse, plus elle aura tendance à miser sur le couple hybride, et être peu défluxable, et donc nécessiter une puissance apparente d'onduleur importante.

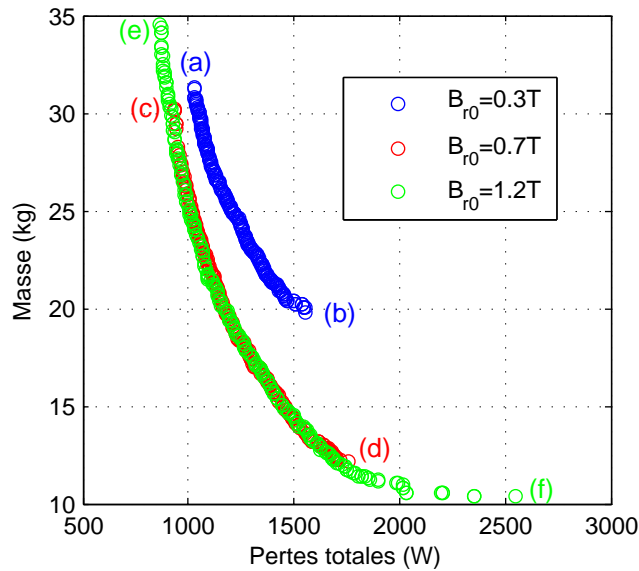


FIGURE 6.38: Fronts de Pareto obtenus pour l'étude de sensibilité sur l'induction rémanente B_{r0} des aimants

6.2.2.2 Etude de sensibilité sur la nature des aimants utilisés

Nous allons dans cette partie reprendre les cas de la machine à pôles saillants avec minimisation locale (par la commande) de la somme des pertes fer et des pertes cuivre $P_{fer} + P_c$. A l'origine, l'induction rémanente des aimants était fixée égale à $B_{r0} = 0.3T$ à $25^\circ C$ (aimants en ferrite). Nous faisons une étude de sensibilité sur cette valeur d'induction rémanente choisie, afin de quantifier l'utilité du changement d'induction rémanente. Nous partons toujours du fait que la température de fonctionnement des aimants du rotor est de $100^\circ C$, afin de ne pas avoir à développer un modèle thermique de ce rotor. Les trois types d'aimants que nous étudions sont donnés dans le tableau 6.6. Les données sont tirées de la référence [Multon, 2000].

Nature de l'aimant	Induction rémanente B_{r0} à 25°C	Dérive en température de B_{r0}
Ferrite	0.3T	-0,2% par degré
NdFeB 1	0.7T	-0,1% par degré
NdFeB 2	1.2T	-0,1% par degré

Nature de l'aimant	Champ coercitif H_k à 25°C	Dérive en température de H_k	Densité
Ferrite	$2,5 \cdot 10^5 A/m$	+0,4% par degré	4900kg/m ³
NdFeB 1	$9 \cdot 10^5 A/m$	-0,6% par degré	7700kg/m ³
NdFeB 2	$9 \cdot 10^5 A/m$	-0,6% par degré	7700kg/m ³

TABLE 6.6: Les aimants choisis pour l'étude de sensibilité sur l'induction rémanente B_r des aimants

Les fronts de Pareto obtenus pour les différents types d'aimants sont donnés à la figure 6.38, et les machines extrêmes de ces fronts sont représentées tant au rayon moyen qu'en coupe axiale dans le tableau 6.7.

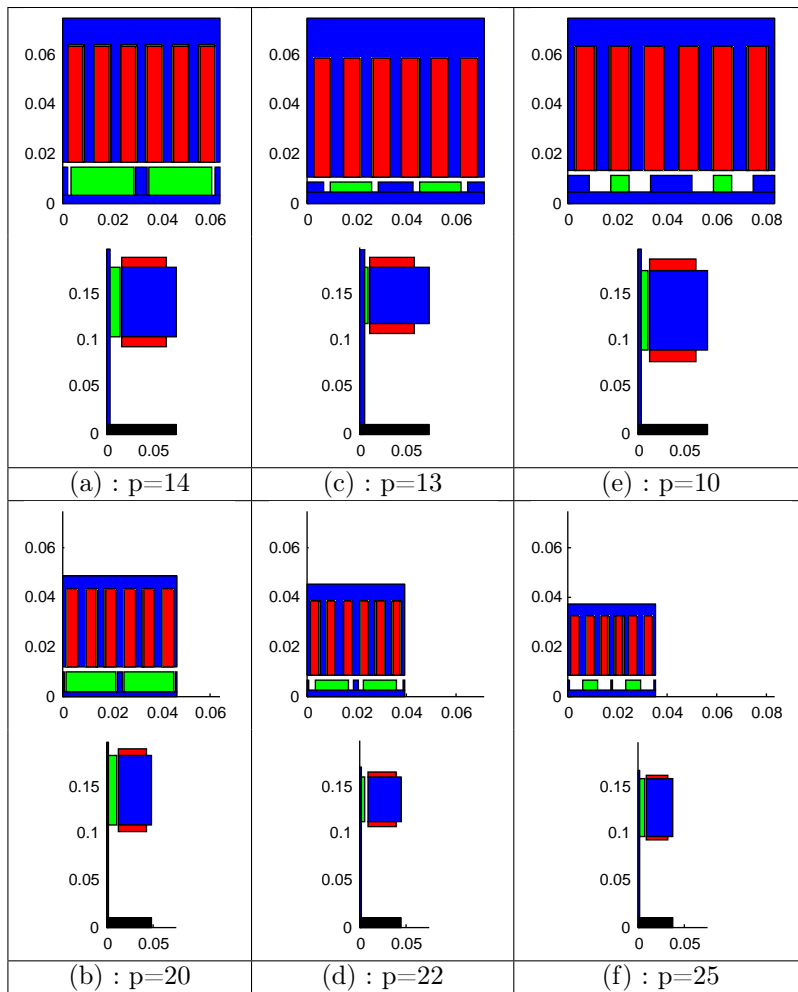


TABLE 6.7: Représentation des machines extrêmes des fronts de Pareto de la figure 6.38

La conclusion immédiate à tirer est qu'une augmentation de l'induction rémanente des aimants de $B_{r0} = 0.3T$ à $B_{r0} = 0.7T$ semble être un moyen efficace pour permettre de meilleurs compromis, tant au niveau du couple massique que pour le rendement. En effet, une induction rémanente plus importante permet d'augmenter le flux à vide, et donc de réduire, pour atteindre le couple C_b , le courant nécessaire. Ceci est utilisé soit pour diminuer les pertes cuivre en conservant une surface d'encoche importante pour les machines de grande taille, soit en permettant,

pour les petites machines dont la taille est liée à la contrainte thermique, de réduire les surfaces d’encoche, et donc au final, d’améliorer le couple massique. Cette réduction des pertes dans le cuivre pour le point de fort couple-basse vitesse (C_b, Ω_b) est visible à la figure 6.39. Cela étant, un flux d’aimant plus important est aussi synonyme de plus de pertes fer à haute vitesse pour le point (C_d, Ω_d), ainsi qu’une plus grande difficulté pour défluxer la machine. Un compromis doit donc être trouvé entre ces deux tendances contraires. C’est ainsi que l’on peut expliquer que, pour le cahier des charges que nous avons fixé, il est manifeste que le passage d’une induction rémanente de $B_{r0} = 0.7T$ à $B_{r0} = 1.2T$ ne semble pas apporter d’amélioration flagrante : pour limiter les pertes fer au point de haute vitesse-bas couple (C_d, Ω_d), l’optimiseur ne juge pas utile de profiter de l’induction rémanente accrue des aimants afin d’augmenter de manière significative le flux dans la machine, et alors diminuer le courant absorbé au point de fort couple (C_b, Ω_b). Cette constatation est confirmée par l’observation des pertes cuivre au point (C_b, Ω_b) (figure 6.39), ainsi que de la figure 6.40 donnant le pourcentage relatif de couple hybride utilisé dans la génération du couple C_b : il apparaît que les pertes cuivre pour l’aimant de plus forte induction rémanente $B_{r0} = 1.2T$ ne sont pas diminuées par rapport à celles observées pour l’aimant d’induction rémanente intermédiaire $B_{r0} = 0.7T$, de même que le couple hybride n’est pas plus utilisé lorsque l’aimant est doté de la plus forte induction rémanente.

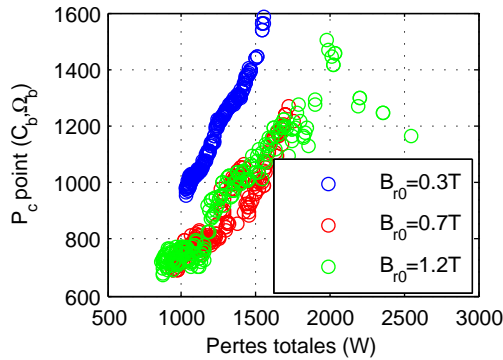


FIGURE 6.39: Pertes dans le cuivre pour les trois types d’aimants, au niveau du point (C_b, Ω_b), en fonction de l’objectif pertes sur le cycle

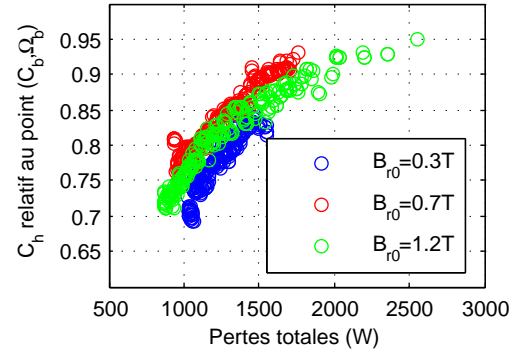


FIGURE 6.40: Couple hybride relatif C_h/C_b pour les trois types d’aimants, au niveau du point (C_b, Ω_b), en fonction de l’objectif pertes sur le cycle

Nous comprenons comment ceci est réalisé par l’observation des machines du tableau 6.7 : les machines à induction rémanente $B_{r0} = 1.2T$ ont une largeur d’aimant relative par rapport au pas dentaire très faible, et l’espace inter-dents rotorique est loin d’être totalement utilisé. Ceci laisse d’ailleurs la possibilité d’avoir des dents rotoriques très larges, dont l’avantage est double : d’une part, ces dents permettent de créer du couple réductant pour atteindre le point de fort couple C_b , et donc d’obtenir ce couple malgré le peu de quantité d’aimant placé, et d’autre part d’augmenter la capacité de défluxage de la machine. En effet, avec une inductance d’axe d grande, conjuguée avec un flux d’aimant peu important, le paramètre $P_d^* = \frac{P_d n I_{max}}{\varphi_f}$ (nI_{max} représente les ampères-tours maximaux injectables dans la bobine) de la référence [Multon *et al.*, 1995], qui est l’inductance réduite, est alors nécessairement élevé. Ici, la capacité de défluxage, vu qu’il n’y a pas de contrainte d’alimentation, est uniquement utile afin d’atteindre le point de haute vitesse (C_d, Ω_d) en diminuant les pertes fer, à moindre frais sur les pertes cuivre (le courant d’axe d à injecter pour défluxer la machine reste faible). Finissons en remarquant que, même si les machines du front de Pareto pour l’induction rémanente $B_{r0} = 1.2T$ ont des performances semblables à celles du front de Pareto correspondant à $B_{r0} = 0.7T$, le front de Pareto pour la plus grande induction rémanente est « plus étalé » (figure 6.38). Par exemple, la machine (f) tire partie de l’induction rémanente élevée de ses aimants afin de répondre au cahier des charges en termes de couple maximal C_b en diminuant à l’extrême les courants appelés, de manière à réduire la taille des encoches au minimum sans pour autant dépasser la température maximale autorisée pour le cuivre. On voit que cette machine extrême ne compte d’ailleurs (figure 6.40) que sur sa composante de couple hybride. La forme des encoches est d’ailleurs choisie très fine de manière à augmenter les capacités de refroidissement, mais aussi le nombre de paires de pôles (égal à 25), ce qui améliore le couple massique. Bien sûr, ceci se fait au prix de pertes fer énormes au point de haute vitesse (plus de 2kW, figure 6.41), mais on n’a vu que les pertes fer ont un effet thermique limité, et que pour cette machine extrême, le rendement ne compte pas (le seul

critère est le couple massique). Néanmoins, ce type de machine ne serait guère viable si une contrainte de puissance apparente se trouvait introduite, du fait de la difficulté à la défluxer.

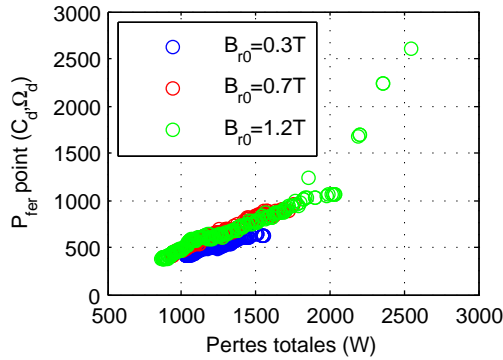


FIGURE 6.41: Pertes dans le fer pour les trois types d’aimants, au niveau du point (C_d, Ω_d) , en fonction de l’objectif pertes sur le cycle

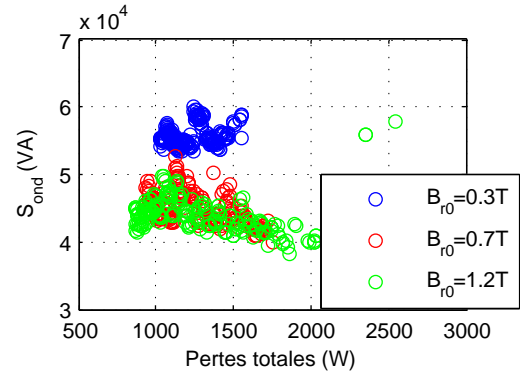


FIGURE 6.42: Puissance onduleur nécessaire, en fonction de l’objectif pertes sur le cycle

Ceci nous amène à parler de la puissance apparente onduleur nécessaire (figure 6.42). Mis à part les plus petites machines pour l’induction rémanente la plus élevée $B_{r0} = 1.2T$ qui ne sont pas défluxables, les machines à aimant NdFeB se doivent de posséder une inductance réduite P_d^* importante, afin de pouvoir limiter les pertes fer au niveau du point (C_d, Ω_d) , quitte à augmenter les pertes cuivre et à utiliser le couple réductant pour atteindre le point de fort couple (C_b, Ω_b) . Cette nécessité amène donc à une réduction de la puissance apparente nécessaire. Alors que pour la machine à aimants en ferrite, si aucune contrainte d’ondeur n’est appliquée, le défluxage sera moins utilisé car les problème des pertes fer en haute vitesse se révélera moins critique, conduisant à une puissance apparente au final plus grande.

6.2.2.3 Introduction d’une contrainte de puissance apparente

Nous allons maintenant reprendre la machine à aimants en ferrite, et appliquer une contrainte de puissance apparente maximale d’ondeur à ne pas dépasser. Notons que la prise en compte de ce critère important qu’est la puissance apparente absorbée par la machine sous forme de contrainte n’est pas la seule voie possible. Il serait envisageable, et intéressant, d’introduire cette considération dans la procédure d’optimisation sous la forme d’un troisième objectif. Ce n’est cependant pas la voie que nous avons choisie ici. En effet, il nous semble délicat d’interpréter les résultats d’une optimisation tri-objectifs (on obtiendrait une surface de Pareto, à représenter en trois dimensions). Qui plus est, la puissance apparente est en quelque sorte l’image du coût de l’ondeur nécessaire pour alimenter la machine. Il ne nous semble pas approprié de considérer le coût de l’ondeur dans l’un des objectifs, si d’autre part nous n’incluons pas ses pertes (ou coût de fonctionnement) dans un autre objectif. Voilà pourquoi nous nous contentons ici de voir la puissance apparente comme une simple contrainte. Comme toutes les autres contraintes, cette dernière sera prise en compte au niveau de la boucle locale d’optimisation : si, en cherchant, par une combinaison adéquate des paramètres de commande, à minimiser la somme des pertes fer et des pertes cuivre $P_{fer} + P_c$, nous nous apercevons que le doublet (nI_{0a}, nI_{0q}) choisi ne respecte pas la contrainte de puissance apparente maximale d’ondeur que nous fixons, nous nous autorisons à augmenter les pertes de la machine, afin que la contrainte de puissance apparente maximale se trouve respectée. Il est plus délicat de voir géométriquement à quoi correspond, dans le plan de commande (nI_{0a}, nI_{0q}) , un lieu à puissance apparente d’ondeur fixée, la puissance apparente étant le triple du produit du courant efficace dans une phase et de la tension efficace aux bornes de cette phase : vu que tension et courant efficaces sont en première approximation chacun des formes quadratiques des paramètres de commande (nI_{0a}, nI_{0q}) , le lieu de puissance apparente constante est un polynôme de degré 4 en (nI_{0a}, nI_{0q}) , dont la forme est variable et non forcément elliptique. Remarquons que les deux points choisis dans le plan couple-vitesse correspondent à la même puissance mécanique, $P_m = C_b \cdot \Omega_b = C_d \cdot \Omega_d$. On introduit le facteur

k ainsi défini :

$$k = \frac{P_m}{S_{ondLIM}} \quad (6.23)$$

Dans la formule précédente, S_{ondLIM} est la puissance apparente onduleur à ne pas dépasser. Le facteur k serait ainsi égal au produit du rendement par le facteur de puissance, s'il n'y avait qu'un seul point à atteindre dans le plan couple-vitesse (évidemment, dans notre situation, avec plusieurs points dans le plan couple-vitesse, les choses sont plus complexes, la puissance apparente dimensionnante pour l'onduleur étant le produit de la tension par spire maximale sur le cycle et des ampères-tours maximaux sur le cycle, ces deux grandeurs n'étant pas forcément maximales au même point). Par conséquent, on a alors $k \in [0, 1]$, le cas $k = 0$ correspondant à une absence de contrainte sur l'alimentation comme jusqu'à présent, et plus k se rapproche de 1, plus la contrainte d'onduleur est sévère. Le cas $k = 1$, impossible à réaliser, correspondrait à la fois à un rendement unitaire $\eta = 1$ et un facteur de puissance aussi unitaire $\cos \varphi = 1$. Les fronts de Pareto obtenus, ainsi que les géométries des machines extrêmes, sont donnés à la figure 6.43 et au tableau 6.8.

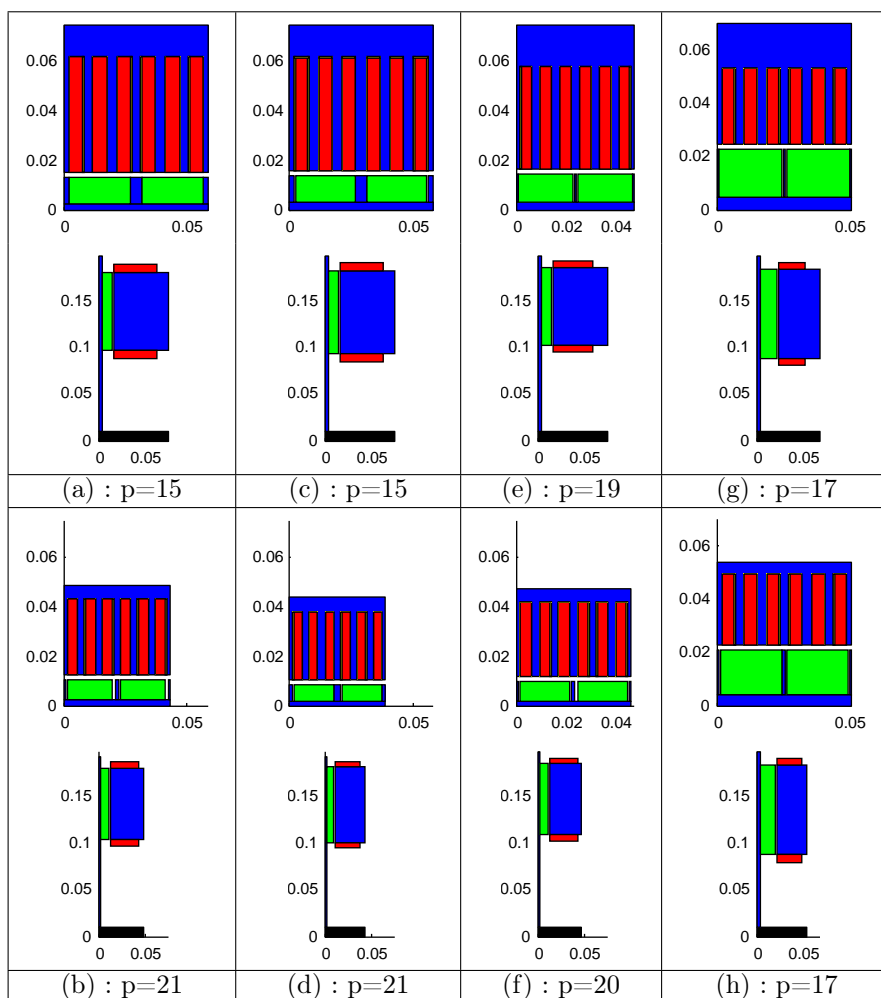


TABLE 6.8: Représentation des machines extrêmes des fronts de Pareto de la figure 6.43

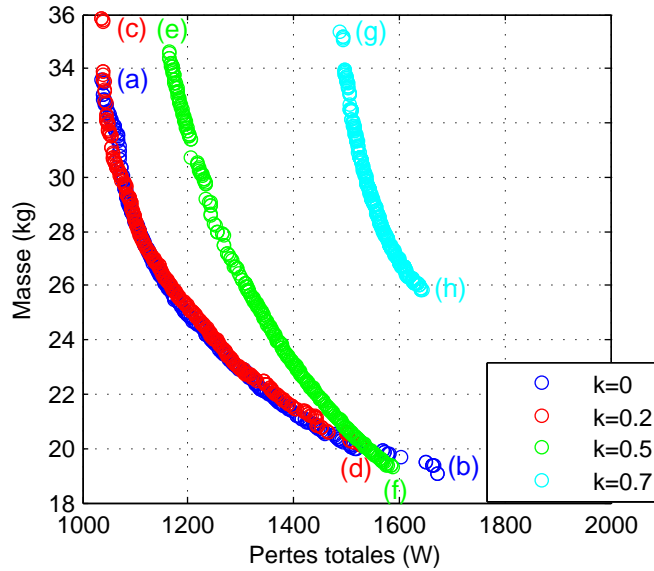


FIGURE 6.43: Front de Pareto obtenus lors de l'introduction d'une puissance apparente (on rappelle que le facteur k , représentant la contrainte de puissance apparente limite de l'onduleur à ne pas dépasser S_{ondLIM} , est défini par $k = \frac{P_m}{S_{ondLIM}}$)

La limite de puissance apparente d'onduleur est visible au niveau de la figure 6.44.

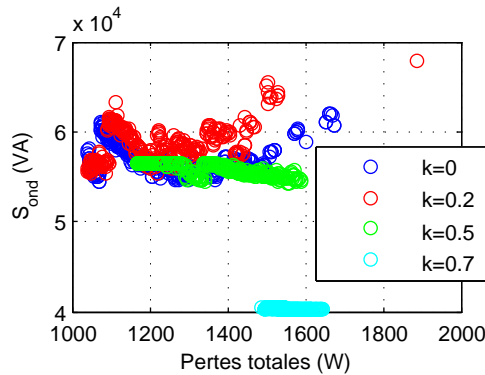


FIGURE 6.44: Puissance onduleur nécessaire, en fonction de l'objectif pertes sur le cycle

Nous pouvons voir (figure 6.43) que, aux problèmes de convergence près, dans le cas $k = 0.2$, la limite autorisée en terme de puissance apparente onduleur n'est jamais atteinte, et ce cas est sensiblement le même que celui pour lequel la puissance apparente de l'onduleur permise est infinie (cas $k = 0$: c'est le cas de référence). En revanche, il est manifeste que pour le cas $k = 0.5$, pour les machines de masse importante, cette limite de puissance apparente est atteinte. Ceci se traduit sur le front de Pareto (figure 6.43) par une dégradation des pertes par rapport au cas où la puissance apparente n'est pas contrainte. Il est clair (machine (e) du tableau 6.8) que cela se paie aussi par une augmentation du volume des aimants. Le cas le plus extrême est le cas $k = 0.7$, où les pertes sont bien plus élevées. On peut voir à la figure 6.44 que dans ce cas, toutes les machines du front sont alors en limite de puissance apparente d'onduleur autorisée. En plus, le tableau 6.8, ces machines ont un volume d'aimant considérable. Essayons d'expliquer ces phénomènes.

Rappelons la définition de la puissance apparente d'onduleur qui est ici une contrainte. Il s'agit de :

$$S_{ond} = 3 \cdot \max\left(\left(\frac{v}{n}\right)_b, \left(\frac{v}{n}\right)_d\right) \cdot \max((nI_0)_b, (nI_0)_d) \quad (6.24)$$

Nous voyons sur la figure 6.45, où nous avons représenté les ampères-tours actifs pour le point (C_b, Ω_b) , et sur la figure 6.46, où nous avons représenté les ampères-tours actifs (C_d, Ω_d) , que le point de fonctionnement dimensionnant en termes de courant (et donc aussi d'échauffement), est le point de fort couple-haute vitesse (C_b, Ω_b) .

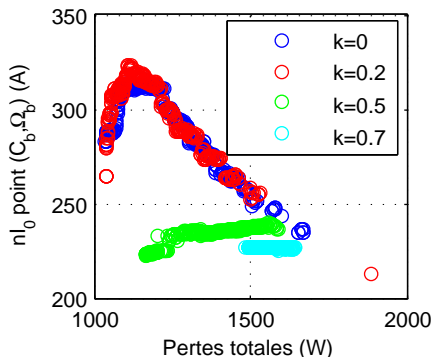


FIGURE 6.45: Module du courant nI_0 pour le point (C_b, Ω_b) , en fonction de l'objectif pertes sur le cycle

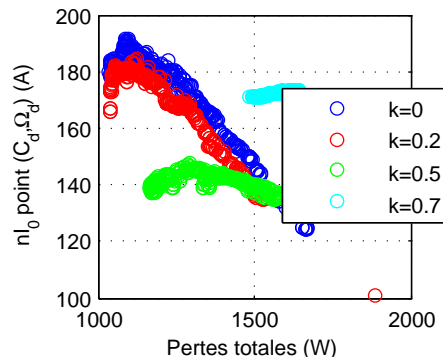


FIGURE 6.46: Module du courant nI_0 pour le point (C_d, Ω_d) , en fonction de l'objectif pertes sur le cycle

En effet, il est possible de se rendre compte sur ces deux figures que les ampères-tours pour le point de haute vitesse-bas couple (C_d, Ω_d) sont toujours inférieurs à ceux absorbés au niveau du point de basse vitesse-fort couple (C_b, Ω_b) . Il en est de même pour la tension par spire, qui est toujours plus importante au niveau du point de basse vitesse-fort couple (C_b, Ω_b) (sur la figure 6.47, nous avons fait figurer la tension par spire (v/n) pour le point de basse vitesse-fort couple (C_b, Ω_b) , et sur la figure 6.48 se trouve la tension par spire (v/n) pour le point de forte vitesse-bas couple (C_d, Ω_d)) : la tension par spire pour le point (C_d, Ω_d) est toujours inférieure ou égale à celle du point (C_b, Ω_b) .

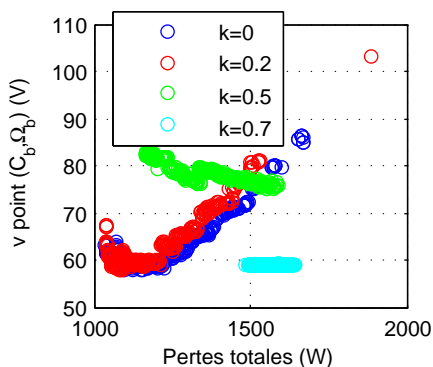


FIGURE 6.47: Tension par spire v/n pour le point (C_b, Ω_b) , en fonction de l'objectif pertes sur le cycle

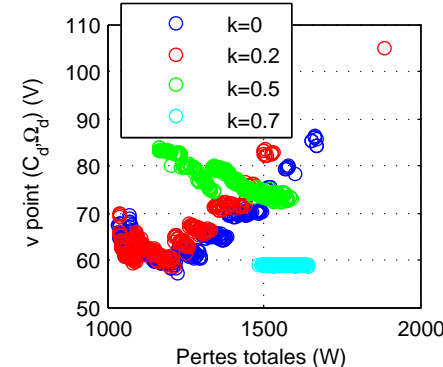


FIGURE 6.48: Tension par spire v/n pour le point (C_d, Ω_d) , en fonction de l'objectif pertes sur le cycle

Pour les cas où la puissance apparente n'est pas contrainte ($k = 0$ et $k = 0.2$), nous avons vu qu'un défluxage naturel au point de haute vitesse s'opérait, de manière à réduire les pertes dans le fer pour ce point, sans pour autant augmenter trop les pertes dans le cuivre. Pour les cas où l'on se trouve en butée de puissance apparente (cas $k = 0.5$ et cas $k = 0.7$), ce défluxage est forcé par l'impératif de respecter la contrainte de tension au point de haute vitesse-bas couple (C_d, Ω_d) . Auquel cas, l'équilibre assurant le minimum entre les pertes cuivre et les pertes fer en ce point de fonctionnement est rompu, et alors, pour pouvoir entrer dans le cercle limite de tension (voir les diagrammes de Fresnel de la référence [Soulard, 1998], repris à la figure 6.49), on augmente les ampères-tours nI_0 au point (C_d, Ω_d) , ce qui a l'inconvénient de créer des pertes cuivre plus grandes (figure 6.50).

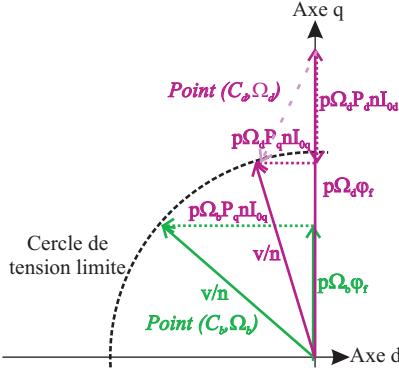


FIGURE 6.49: Diagramme de Fresnel illustrant le défluxage des machines à aimants permanents

L'avantage de ceci est de diminuer les pertes fer en ce point (C_d, Ω_d) (figure 6.51). En réalité, c'est le fait de rendre plus intense le défluxage au niveau du point (C_d, Ω_d) pour pouvoir respecter la limite de tension maximale imposée par le point de basse vitesse-fort couple (C_b, Ω_b) qui explique l'augmentation des pertes cuivre au point (C_d, Ω_d) , et par conséquent l'augmentation globale des pertes lorsque la puissance apparente est contrainte. Précisons de suite que cette constatation dépend bien sûr du cahier des charges : en effet, la contrainte de défluxage ici n'est pas très sévère, et le courant nécessaire pour se ramener dans le cercle de tension limite imposée par le point (C_b, Ω_b) reste inférieur au courant nécessaire pour atteindre ce point de fonctionnement, et donc au courant thermique de la machine. Ce fait pourrait très bien être remis en question avec une contrainte sur le point haute vitesse-fort couple plus forte, qui obligerait à sortir du cercle limite de tension imposée par le point (C_d, Ω_d) , et ce serait alors le point (C_d, Ω_d) qui serait dimensionnant pour la tension par spire. Quoi qu'il en soit, pour le cahier des charges présent, on peut écrire que :

$$S_{ond} = 3 \cdot \left(\frac{v}{n}\right)_b \cdot (nI_0)_b \quad (6.25)$$

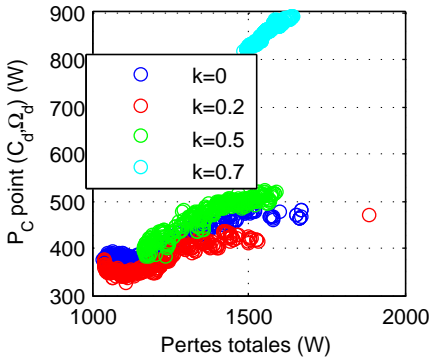


FIGURE 6.50: Pertes cuivre P_C pour le point (C_d, Ω_d) , en fonction de l'objectif pertes sur le cycle

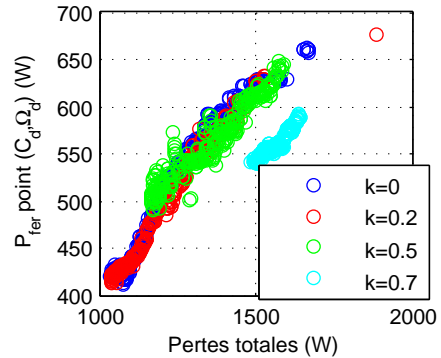


FIGURE 6.51: Pertes fer P_{fer} pour le point (C_d, Ω_d) , en fonction de l'objectif pertes sur le cycle

Moyennant les remarques précédentes sur l'aspect dimensionnant du point (C_b, Ω_b) pour l'onduleur, tant pour la tension que pour le courant pour le cahier des charges choisi, une question se pose donc : comment choisir le flux de l'aimant φ_f , ainsi que les ampères-tours actifs d'axe q , notés nI_{0q} , de telle manière que le couple soit atteint (si on néglige le terme de couple réactant, on a : $C_b \propto \varphi_f nI_{0q}$), et que la puissance apparente demeure raisonnable ? Sans contrainte de puissance apparente, le flux φ_f est choisi de manière à limiter le courant absorbé nI_{0q} , pour limiter les pertes cuivre au point basse vitesse-fort couple (C_b, Ω_b) . Néanmoins, il ne s'agit pas de prendre le flux φ_f le plus

grand possible, et les ampères-tours d'axe q pour le point (C_b, Ω_b) les plus faibles possibles. En effet, la présence de l'autre point à atteindre (C_d, Ω_d) , pour lequel les pertes fer sont un critère important, pousse l'optimiseur à trouver un compromis entre les pertes cuivre au point (C_b, Ω_b) , et les pertes fer au point (C_d, Ω_d) , notamment en diminuant le flux des aimants, afin que le défluxage, dont le but est de réduire les pertes fer, puisse être effectué aisément. Bien entendu, ce compromis dépend du cahier des charges, et aussi du pourcentage de présence en chacun des points de fonctionnement, qui est ici choisi égal à 50% pour chacun des deux points du plan couple-vitesse. Cette contrainte de défluxage pousse l'optimiseur à choisir, afin de limiter les pertes fer en haute vitesse, un flux des aimants relativement faible lorsqu'aucune contrainte de puissance apparente n'est présente. On voit en effet, sur les figures 6.52 et 6.53, où nous avons représenté les composantes d'axe d et d'axe q de la tension par spire v/n , que la composante d'axe q de tension par spire est inférieure à celle d'axe d , ce qui signifie, que, pour l'impératif de réduction des pertes en haute vitesse, on choisit généralement, au point de fort couple $\varphi_f \leq P_q n I_{0q}$.

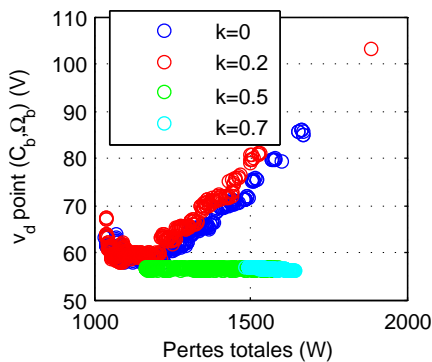


FIGURE 6.52: Composante de la tension par spire v/n d'axe d pour le point (C_b, Ω_b) , en fonction de l'objectif pertes sur le cycle

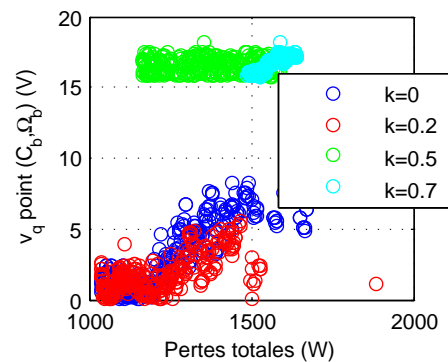


FIGURE 6.53: Composante de la tension par spire v/n d'axe q pour le point (C_b, Ω_b) , en fonction de l'objectif pertes sur le cycle

Cela signifie, comme représenté sur le digramme de Fresnel simplifié de la figure 6.54, que, sans contrainte de tension, le diagramme de Fresnel représenté en vert est très « allongé ». L'introduction d'une contrainte de puissance apparente change la situation : cette dernière se traduit inévitablement par une contrainte de tension, car on ne peut pas réduire infiniment le courant appelé. Ce cercle de tension maximale, bien que choisi le plus large possible, oblige à augmenter le flux des aimants φ_f , et à diminuer le courant d'axe q $n I_{0q}$ au point (C_b, Ω_b) , en faisant en sorte que le produit de ces deux quantités, proportionnel à l'aire représentée à la figure 6.54, demeure constant pour que le couple C_b soit atteint. Ce raisonnement simplifié néglige la présence du courant d'axe d au point (C_b, Ω_b) , qui, de toute façon, demeure très limité. Une autre façon de concevoir le problème est de se rappeler que, à l'image de ce qui est étudié d'ordinaire pour les compensateurs synchrones à rotor bobiné, l'amélioration du facteur de puissance passe par une augmentation du courant d'excitation de l'alternateur. Appliqué à notre situation du moteur synchrone à aimants, ce principe permet de comprendre pourquoi on est obligé d'augmenter le volume des aimants pour améliorer le facteur de puissance.

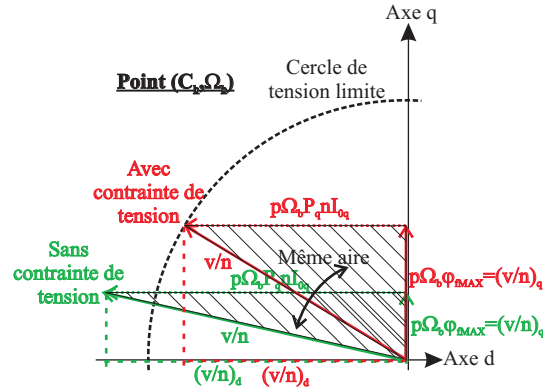


FIGURE 6.54: Représentation dans le plan de Fresnel de la méthode de réduction de la tension nécessaire pour atteindre le point (C_b, Ω_b)

En effet, on voit sur la figure 6.52 que la tension par spire d'axe d $(v/n)_d$ au point (C_b, Ω_b) sans contrainte est même plus grande que les modules de tensions par spire obtenus avec contrainte (figure 6.47). L'augmentation du flux des aimants qui en résulte ne se paie pas en termes de pertes fer au point de haute vitesse (C_d, Ω_d) , mais plutôt en termes de pertes cuivre en ce point, à cause de l'impératif de rester en haute vitesse dans le cercle de tension maximale (figures 6.51 et 6.50). Pour le cas $k = 0.5$, ce problème est surtout visible pour les machines de grande masse, car, naturellement, les machines de petite masse misent plus sur le flux des aimants pour atteindre le fort couple C_b sans dépasser la limite thermique autorisée. Il est clair que pour le cas $k = 0.7$, la limite de puissance apparente est si drastique qu'elle dégrade l'ensemble du front de Pareto, la seule différence entre les machines de petite et grande masse (machines (g) et (h) du tableau 6.8) se situant alors sur la hauteur de culasse stator, qui module ainsi les pertes fer.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons utilisé le modèle électromagnétique 2D de la topologie de machine à flux axial développé au troisième chapitre, pour mettre au point une procédure de conception optimale de ce type de topologie. Nous rappelons brièvement qu'il s'agit d'un modèle analytique fondé sur la résolution formelle des équations de Maxwell, prenant en compte aussi bien la saillance statorique que la saillance rotorique. L'hypothèse fondamentale est le caractère bidimensionnel du modèle réalisé, en négligeant les effets de bords, et en développant la structure au niveau du rayon moyen. L'hypothèse simplificatrice inhérente à ce type de modélisation analytique est la linéarité des matériaux magnétiques, qui sont également supposés de perméabilité infinie. Un modèle de calcul local des inductions dans les parties ferromagnétiques est également utilisé, afin de pouvoir calculer de manière précise les pertes fer, et aussi de vérifier l'hypothèse de linéarité de ces parties en fer.

La première partie de ce chapitre a consisté en l'utilisation de ce travail de modélisation électromagnétique afin de déduire un modèle électrique de l'actionneur, ainsi qu'un modèle thermique. Le calcul des pertes dans le fer du stator est nécessaire pour développer le modèle électrique, car il permet d'évaluer la valeur de la résistance traduisant les pertes ferromagnétiques que l'on doit inclure dans le schéma électrique équivalent d'une phase de la machine. Il a été signalé que cette résistance devait être recalculée pour chaque point de fonctionnement, étant donné la non-linéarité du modèle de pertes locales utilisé. L'hypothèse de linéarité des matériaux est également utile pour le développement du modèle électrique, car elle permet d'utiliser le classique formalisme de Park pour réaliser une commande de la machine au premier harmonique. En régime permanent, les grandeurs de commande, qui sont les courants d'axe d et d'axe q , sont supposées constantes. Nous avons d'ailleurs signalé que la simplicité relative de cette alimentation réduite au premier harmonique, pouvait sembler paradoxale en regard du modèle local et harmonique des pertes fer, qui sert pourtant à calculer la résistance due aux pertes fer dans le schéma électrique simplifié.

Le calcul des pertes est ensuite utilisé de manière à développer un modèle thermique simplifié, également 2D, de la machine électrique. Le modèle thermique concerne uniquement le stator, qui est supposé refroidi par convection forcée à eau.

Ces modèles de comportement fondés sur les modèles électromagnétiques analytiques ont pour objectif principal de proposer un outil de pré-dimensionnement rapide de ce type de structure, par optimisation systématique. Voilà pourquoi la seconde partie de ce chapitre s'est consacrée à l'optimisation de la structure, en utilisant un algorithme évolutionnaire. La stratégie d'optimisation se fonde sur la minimisation au sens de Pareto de deux objectifs contradictoires que sont la masse et les pertes. Le cahier des charges choisi, qui, bien que très simplifié car mettant en oeuvre seulement deux points de fonctionnement, se veut néanmoins représentatif du cahier des charges du véhicule hybride, avec un point fort couple-basse vitesse, et un autre bas couple-haute vitesse, le tout à puissance de fonctionnement constante. L'originalité de ce travail réside principalement dans la volonté, pour chaque géométrie de machine, d'optimiser par la commande les pertes totales, tout en respectant les contraintes liées au cahier des charges, de faisabilité, ou alors physiques. La représentation des contraintes dans le plan couple-vitesse, qui a déjà souvent été présentée dans la littérature, a été étendue aux contraintes spécifiques que nous avons dans ce problème, telles que les contraintes de non-saturation, de non-démagnétisation, ou bien alors la contrainte thermique. Le bien-fondé de cette stratégie de minimisation des pertes totales a été démontré lors de la première série d'optimisations, où la méthode proposée a été comparée avec une commande de type couple par ampère maximal classiquement rencontrée dans la littérature. Les résultats sont radicalement différents, du fait principalement de la présence d'un point haute vitesse, pour lequel la possibilité de défluxer apparaît fondamentale. Cette approche présente une originalité dans le sens où elle permet de faire ressortir l'intérêt du défluxage pour réduire les pertes fer, hors de toute contrainte de tension. Par la suite, d'autres études comparatives sur les machines optimales ont été menées, et ont permis de faire ressortir l'intérêt de la saillance lorsque le critère à optimiser est surtout le rendement, ou bien alors de montrer que l'augmentation de l'induction rémanente des aimants, qui est souvent coûteuse, n'est guère nécessaire au delà de $B_{r_0} = 0.7T$ (pour le cas traité). Ensuite, une contrainte plus ou moins forte sur la puissance apparente requise par la machine, image directe de la taille et du coût de l'onduleur, a été introduite, et l'impact sur la géométrie de la machine a été mise en évidence. En particulier, nous avons mis en évidence que la réduction de la puissance apparente nécessitait, pour atteindre le point de basse vitesse-fort couple, de placer un volume d'aimant plus important, tout en injectant des ampères-tours plus faibles par rapport au cas sans contrainte de puissance apparente. Cette augmentation du volume d'aimant permet de relever le facteur de puissance au niveau du point de basse vitesse-fort couple, mais se paie par des pertes cuivre accrues au niveau du point de haute vitesse, afin de revenir dans le cercle limite de tension. Nous sommes conscient de l'aspect assez restrictif de cette étude : peut-être faudrait-il considérer le problème de la puissance apparente non pas comme une contrainte, mais plutôt comme un objectif. Mais alors, si on s'intéresse à l'image de la masse de l'onduleur qu'est la puissance apparente, il nous semble indispensable de considérer aussi les pertes dans ce dernier, ce qui réclame un travail de modélisation supplémentaire, et délicat.

Au delà de l'outil d'optimisation ainsi que des conclusions que nous avons pu en tirer, l'étude présentée dans ce chapitre fait ressortir des défauts dans le modèle que nous ne pouvons ignorer. D'une part, l'hypothèse de linéarité et d'idéalité des matériaux utilisés, sur laquelle se fondent la plupart des raisonnements tenus dans ce chapitre est sclérosante, car elle biaise de manière évidente les résultats sur les couples massiques optimaux que l'on obtient. Bien que nous soyons conscients des limites de cette hypothèse de non-saturation, nous n'avons pas, dans cette thèse, étendu la modélisation dans le but de prendre en compte la saturation. En effet, nous jugeons plus utile, avant de franchir cette délicate étape, d'améliorer les modèles en régime linéaire. Le développement de la machine à son rayon moyen, ainsi que l'hypothèse de négliger les effets de bords radiaux, sont clairement mis en défaut lorsque l'on voit les coupes axiales des machines électriques générées par l'optimiseur : dans la plupart des cas, le différentiel entre rayons actifs externe et interne ne semble pas très grand par rapport au pas polaire, ce qui remet en cause la validité de l'hypothèse 2D. C'est pourquoi la principale perspective que nous envisageons à ce travail réside dans l'intégration à la procédure d'optimisation des modèles électromagnétiques tri-dimensionnels développés au chapitre 4. En effet, ces modèles permettent de se passer de l'hypothèse sur le caractère infini du différentiel entre les rayons actifs externe et interne de la machine, en prévoyant la diminution du flux à vide, et l'augmentation de l'inductance cyclique, du fait des effets de bord de l'actionneur. Une fois ces modèles électromagnétiques 3D intégrés, il serait intéressant de comparer les résultats optimisés alors obtenus avec ceux présentés dans ce chapitre, aussi bien dans le plan des objectifs, que des paramètres. Cette étude permettra d'appréhender réellement l'utilité du modèle tri-dimensionnel dans un processus de conception optimale, et, plus simplement, démontrera l'importance cruciale du modèle utilisé dans une procédure d'optimisation, importance que nous avons déjà pressentie au chapitre 1 d'introduction, et qui constitue la clef de voûte de ce travail de recherche, principalement dédié à la modélisation électromagnétique.

Bibliographie

- [Amara, 2001] AMARA, Y. (2001). *Contribution à la conception et à la commande des machines synchrones à double excitation. Application au véhicule hybride*. Thèse de doctorat, Ecole normale supérieure de Cachan.
- [Appino et al., 2004] APPINO, C., FIORILLO, F., RAGUSA, C. et XIE, C. (2004). Magnetic losses at high flux densities in non-oriented fesi alloys. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 10:316–319.
- [Appino et al., 1997] APPINO, C., FIORILLO, F. et RIETTO, A. (1997). The energy loss components under alternating, elliptical and circular flux in non-oriented alloys. *Proceedings of the 2DM*, 1:55–61.
- [Aubry et al., 2010] AUBRY, J., BEN AHMED, H. et MULTON, B. (2010). Bi-objective sizing optimization of a pm machine drive on an operating profile. In *The XIX International Conference on Electrical Machines*.
- [Azzouzi, 2007] AZZOUZI, J. (2007). *Contribution à la modélisation et à l'optimisation des machines synchrones à aimants à flux axial. Application au cas de l'aérogénérateur*. Thèse de doctorat, Université du Havre.
- [Azzouzi et al., 2005c] AZZOUZI, J., KARIM, N., BARAKAT, G. et DAKYO, B. (2005c). Axial flux pm synchronous generator design optimization : robustness test of the genetic algorithm approach. In *Power Electronics and Applications, 2005 European Conference on*, page 10.
- [Brisset, 2007] BRISSET, S. (2007). *Démarches et Outils pour la Conception Optimale des Machines Electriques*. Habilitation à diriger des recherches, Université des Sciences et Technologies de Lille.
- [Deb et al., 2002] DEB, K., PRATAP, A., AGARWAL, S. et MEYARIVAN, T. (2002). A fast and elitist multiobjective genetic algorithm : Nsga-ii. *IEEE transactions on evolutionary computation*, 6(2):182–197.
- [Dréo et al., 2003] DRÉO, J., PÉTROWSKI, A., SIARRY, P. et TAILLARD, E. (2003). *Métaheuristiques pour l'optimisation difficile*.
- [Ehsani et al., 2009] EHSANI, M., GAO, Y. et EMADI, A. (2009). *Modern electric, hybrid electric, and fuel cell vehicles : fundamentals, theory, and design*. CRC.
- [Gieras et al., 2008] GIERAS, J., WANG, R. et KAMPER, M. (2008). *Axial flux permanent magnet brushless machines*. Springer Verlag.
- [Huang et al., 1999] HUANG, S., LUO, J., LEONARDI, F. et LIPO, T. (1999). A comparison of power density for axial flux machines based on general purpose sizing equations. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 14:185–192.
- [Jahns, 1987] JAHNS, T. (1987). Flux-weakening regime operation of an interior permanent-magnet synchronous motor drive. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 23(4).
- [Kreuawan et al., 2008] KREUAWAN, S., GILLON, F. et BROCHET, P. (2008). Comparative study of design approach for electric machine in traction application. *The International Review Electrical Engineering (IREE)*, 3:455–465.
- [Morimoto et al., 1994c] MORIMOTO, S., TONG, Y., TAKEDA, Y. et HIRASA, T. (1994c). Loss minimization control of permanent magnet synchronous motordrives. *IEEE transactions on industrial electronics*, 41(5):511–517.
- [Multon, 2000] MULTON, B. (2000). Application des aimants aux machines électriques. *Revue 3EI, Antenne de Bretagne de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, Cachan*.
- [Multon et al., 1995] MULTON, B., LUCIDARME, J. et PRÉVOND, L. (1995). Analyse des possibilités de fonctionnement en régime des désexcitation des moteurs à aimants permanents. *J. Phys. III France*, 5:623–640.
- [Polinder, 1998] POLINDER, H. (1998). *On the losses in a high-speed permanent-magnet generator with rectifier*. Thèse de doctorat, Technische Universiteit Delft.
- [Régnier, 2003] RÉGNIER, J. (2003). *Conception de systèmes hétérogènes en Génie Electrique par optimisation évolutionnaire multicritère*. Thèse de doctorat, INPT.
- [Souillard, 1998] SOULARD, J. (1998). *Etude paramétriques des ensembles convertisseur-machine à aimants. Application à une structure électromagnétique monophasée hybride à aimants permanents et à alimentation électronique*. Thèse de doctorat, Université Paris 6.

Conclusion générale et perspectives

La conclusion générale de ces travaux de recherche s'organisera comme suit : dans un premier temps, nous insisterons sur la démarche générale qui nous a animés au cours de cette thèse, en faisant ressortir les points originaux par rapport aux travaux existants dans ce domaine. Puis nous récapitulerons en détail les différents résultats obtenus, en insistant sur les améliorations futures à apporter. Enfin, nous finirons par donner les perspectives générales que nous envisageons pour les travaux à venir dans le domaine.

Démarche suivie et originalité du travail

Les travaux présentés dans cette thèse concernent la modélisation en vue de l'optimisation des machines disques synchrones à aimants. Ils s'inscrivent dans la continuité des travaux de l'équipe SETE du laboratoire SATIE [Amara, 2001, Vido, 2004, Hlioui, 2008, Ben Ahmed, 2006, Gabsi, 1999, Multon, 1994], et de nombreuses autres équipes de recherche en électrotechnique [Azzouzi, 2007, Mester, 2007], dans le domaine de la modélisation et de la conception optimale des machines électriques. En effet, les applications actuelles, telles que le véhicule hybride, où une grande partie de l'énergie de propulsion transite par la chaîne électrique, rendent des plus souhaitables l'amélioration du rendement de la machine électrique. Ce problème de conception optimale est d'autant plus critique que la masse embarquée à bord du véhicule doit être réduite au maximum, pour des questions à la fois d'encombrement et de rendement global du système embarqué. D'autres auteurs vont même plus loin [Mester, 2007, Ruellan, 2007, Aubry *et al.*, 2010], en ne cherchant pas seulement à optimiser la machine électrique pour un cahier des charges donné, mais le système de traction, ou de production d'énergie, dans son ensemble. Il est à noter qu'une des difficultés soulevées par ces travaux d'optimisation réside dans le fait que les propriétés globales du système que l'on cherche à optimiser (rendement, masse, coût...) sont fondamentalement liées à des propriétés locales, telles que la densité de pertes fer en chaque point de la machine. Cette approche globale nécessite souvent une simplification des modèles locaux mis en œuvre, afin de disposer au final de modèles souples, propres à être évalués un grand nombre de fois dans une optique d'optimisation systématique. Ensuite, des études de sensibilité sur la complexité des modèles sont généralement menées, en s'intéressant à l'impact de la précision des modèles locaux sur les résultats finaux de l'optimisation. D'ailleurs, afin de réduire l'influence de la simplification des modèles locaux sur les résultats optimisés obtenus, d'autres travaux [Tran, 2009] proposent de corriger ponctuellement, à certaines étapes de l'optimisation, les fonctions-objectifs fournies au moyen de modèles simplifiés mais rapides, par les résultats obtenus par un modèle plus précis, mais plus lent : c'est la méthode dite du « Space-Mapping ».

La démarche proposée dans cette thèse est relativement différente : nous avons choisi d'approfondir les modèles électromagnétiques, que ce soient les modèles analytiques de calcul du flux dans la machine, ou les modèles de pertes dans les matériaux doux. Nous avons ensuite comparé les résultats fournis par ces modèles avec ceux donnés par des modèles simplifiés, comme par exemple les comparaisons des méthodes de calcul du flux à vide de l'actionneur à flux axial présentés au CHAPITRE 4, où nous avons étudié l'influence de l'effet de courbure et des effets de bords par des modèles de complexité progressive. De cette manière, même si nous étions obligés, dans une optique d'optimisation, de dégrader les modèles réalisés afin d'accélérer le temps de calcul, nous le ferions en connaissance de cause quant à la précision perdue. De plus, comme nous l'avons signalé à plusieurs reprises dans cette thèse, les contraintes électromagnétiques exigeantes des machines à flux axial, en termes de sollicitations d'induction (excitation tri-dimensionnelle, et de haute fréquence), ont de toute manière rendu indispensable un travail de fond sur la modélisation électromagnétique, sous peine d'utiliser des modèles trop grossiers et inadaptés à notre cas, ou bien des méthodes numériques lourdes et difficilement utilisables pour l'optimisation.

Conscients de ces difficultés, nous avons proposé d'apporter la contribution suivante. Les références que nous venons de citer suivent une démarche que nous qualifierons d'« ascendante », car allant du modèle local (par

exemple les formulations des pertes magnétiques) vers le modèle global (par exemple le calcul du rendement), afin d'évaluer les objectifs de l'optimisation. A l'inverse, nous avons souhaité proposer dans cette thèse une démarche que l'on peut qualifier de « descendante », allant du global vers le local. Nous sommes partis des modèles 2D du CHAPITRE 3, avec lesquels nous avons mené des optimisations. Les résultats obtenus ont clairement révélé que les effets tridimensionnels de la machine disque ne pouvaient être négligés, et d'autre part que les fréquences électriques importantes mises en jeu demandaient de revoir le modèle de pertes magnétiques utilisé, inadapté pour de telles fréquences. Forts de ces constatations, nous avons donc décidé de reprendre le travail de modélisation, en approfondissant les modèles électromagnétiques utilisés auparavant. Dans le CHAPITRE 4, nous nous sommes ainsi investis dans un travail de modélisation tri-dimensionnelle de la machine disque, qui a effectivement fait ressortir l'importance de la prise en compte des effets de bords radiaux, sous peine de sous-estimer gravement le flux, et donc le couple de la machine à flux axial. Dans le CHAPITRE 5, nous avons abordé le problème primordial des pertes magnétiques. Après avoir présenté un modèle de pertes en haute fréquence des matériaux laminés conventionnels, nous nous sommes intéressés au potentiel des nouveaux matériaux à base de poudre de fer compactée. Ces matériaux relativement nouveaux constituent une réponse élégante au problème des hautes fréquences des inductions mises en jeu, et sont magnétiquement isotropes, qualité nécessaire dans le cas des machines disques. Etant donné le peu d'études tant expérimentales que théoriques disponibles sur ces matériaux, il nous est alors apparu indispensable de mener un travail approfondi de caractérisation des pertes. Nous avons pour cela collaboré avec la branche matériaux de l'équipe IPEM du laboratoire SATIE, ainsi que l'institut IRIM (anciennement institut IEN Galileo Ferraris) de Turin. Ces deux structures de recherche possèdent en effet une grande expérience, tant expérimentale que théorique, dans ces domaines de la caractérisation des matériaux magnétiques. Il s'est avéré nécessaire, afin de permettre l'aboutissement de ce travail de caractérisation, de quitter le contexte trop compliqué de la machine électrique, et de reprendre le cas d'échantillons de forme simple, comme des tores, dans lesquels l'induction alternative est bien plus facilement contrôlable. La caractérisation expérimentale a été menée à l'INRIM, puis des observations microscopiques du matériau ont été réalisées au laboratoire SATIE, grâce aux ressources de l'institut d'Alembert. Ces travaux ont permis d'interpréter les mesures en reliant les résultats à la microstructure du matériau magnétique. Ce travail permet à présent de mieux appréhender le mécanisme des pertes magnétiques dans de tels matériaux, prélude nécessaire à toute utilisation ultérieure dans un système industriel aussi complexe qu'une machine électrique.

Synthèse des principaux résultats obtenus et travaux futurs

Après avoir souligné la démarche qui nous a motivés au cours de ces travaux de recherche, nous allons à présent récapituler en détail les principaux résultats obtenus, en insistant sur les améliorations qu'il conviendrait d'apporter pour chacun de ces points.

- Au cours du CHAPITRE 1 consacré à l'état de l'art sur les machines à flux axial, nous avons pu constater la grande diversité des structures qui sont offertes au concepteur. Les topologies de machines possibles, à stator interne et rotor externe, ou à rotor interne et à stator externe, simple face, double faces ou multi-faces, à bobinage torique avec ou sans encoches, avec ou sans culasse, avec ou sans fer... se déclinent à l'infini. Dans ce contexte, on peut concevoir qu'un travail épineux du concepteur envisageant l'utilisation d'une machine à flux axial réside dans la nécessité de choisir la bonne topologie. Ce choix est bien évidemment très dépendant de l'application envisagée, du cahier des charges souhaité, mais aussi du mode et des capacités de refroidissement dont on dispose. Ce délicat problème du choix de la topologie en fonction de l'application, bien qu'intéressant, n'a pas été abordé dans la suite de cette thèse, mais constitue à nos yeux un point fondamental pour des travaux futurs sur la machine à flux axial. Nous nous sommes contentés, au cours de ce chapitre d'introduction, de faire ressortir les potentialités de ce type de machine, en considérant des topologies les plus classiques, et en les comparant, pour le couple volumique et le facteur de forme, aux machines à flux radial. Dans les hypothèses retenues, il a été confirmé, comme on peut le penser de manière intuitive, que la machine à flux axial est bien mieux adaptée aux volumes aplatis que la machine à flux radial, dont le volume optimal pour le critère couple massique possède une forme bien plus cylindrique. La conclusion suivante, moins intuitive, a aussi pu être tirée : la machine à flux axial, grâce à son couple qui dépend du cube du diamètre externe, est bien mieux adaptée que la machine à flux radial aux cas où les pressions tangentielles d'entrefer possibles sont faibles. Ceci rend attractives les structures sans encoche, pour lesquelles l'entrefer magnétique est important, et les inductions d'entrefer faibles. En outre ces machines, qui possèdent des têtes de bobines importantes à faible nombre de paires de pôles, ne peuvent donner tout leur potentiel en termes de couple volumique par rapport aux machines à flux radial qu'à nombre de paires de pôles important, ce qui implique, à vitesse donnée, des

fréquences de fonctionnement conséquentes. Cette remarque justifie aussi le travail sur le développement de formulations de pertes magnétiques en haute fréquence à effectuer sur ce type de machines, et donc le travail entrepris au CHAPITRE 5 sur la formulation des pertes en haute fréquence dans les tôles, puis l'étude des matériaux en poudre de fer.

- Le CHAPITRE 2 a présenté une introduction sur la caractérisation des matériaux et un état de l'art sur le calcul des pertes magnétiques par la théorie physiquement justifiée de la séparation des pertes en excitation d'induction mono et bi-dimensionnelle, ainsi que l'interprétation des pertes excédentaires au moyen de la théorie de Bertotti. Cette étape a constitué un pré-requis indispensable à l'évaluation des pertes magnétiques sous l'hypothèse 2D, dont nous aurons besoin au CHAPITRE 6 pour calculer les pertes magnétiques dans la machine à partir des calculs locaux d'inductions dans les parties ferromagnétiques réalisés au CHAPITRE 3. Cette introduction nous a fourni les bases physiques de la théorie de la séparation des pertes dans les matériaux laminés, que nous réinvestirons au CHAPITRE 5 dans le cadre des matériaux granulaires.
- Le CHAPITRE 3 a proposé un modèle analytique électromagnétique bi-dimensionnel développé au rayon moyen de la machine à flux axial, fondé sur la résolution formelle des équations de Maxwell dans cette structure. Des hypothèses simplificatrices, comme la non-saturation, se sont avérées nécessaires. La machine étant de type synchrone à aimants insérés à bobinage réparti, une première étude a été réalisée en considérant la saillance du rotor, mais en négligeant celle du stator par le biais du coefficient de Carter. Cette étude, trouvée dans la littérature, a permis un calcul satisfaisant du couple moyen de la machine à flux axial. Néanmoins, ce modèle s'est révélé incapable de prédire les inductions en charge dans les parties ferromagnétiques de la machine à flux axial. Ceci s'est avéré gênant, car les inductions dans les parties ferromagnétiques constituent le point de départ du calcul des pertes magnétiques, qui interviennent dans le rendement de la machine. C'est pour cela qu'un second modèle électromagnétique original a été développé, qui prend en compte la double saillance rotor-stator. Ce modèle nous a permis de résoudre le problème précédent, par une évaluation précise des fuites dans la zone encochée. En outre, ce modèle intégrant la double saillance a permis de calculer le couple instantané, et de vérifier la formule analytique du coefficient de Carter. Cette dernière a démontré sa validité en ce qui concerne la prédiction de la valeur moyenne du flux entrant dans le stator dans ce cas de machine à pôles saillants, même si l'aimant possède une largeur petite par rapport au pas dentaire. Ce résultat est tout-à-fait notable, si on se rappelle du fait que le coefficient de Carter avait été calculé en négligeant toute saillance au rotor, et en supposant que l'excitation avait une longueur d'onde très importante par rapport au pas dentaire. A nos yeux, l'étape qu'il faudrait à présent franchir dans cette modélisation bi-dimensionnelle serait de développer une méthode prenant en compte la saturation magnétique. Doit-on pour autant abandonner les méthodes analytiques de résolution formelle des équations de Maxwell, et revenir à des méthodes de type schémas réductants ? A notre sens, l'idéal serait de mettre au point une méthode combinant les deux modèles. Il faudrait peut-être calculer les réductances d'entrefer sur la base des modèles analytiques développés, et ensuite faire un schéma réductant saturable pour le fer. Ce calcul des réductances d'entrefer pourrait se faire en potentiel scalaire, en excitant une dent statorique à un potentiel scalaire unitaire, et en calculant ensuite le flux d'entrefer résultant. Une telle méthode nous apparaît aujourd'hui comme la plus rationnelle pour coupler les schémas réductants et les modèles analytiques.
- Le CHAPITRE 4 a proposé un modèle analytique tri-dimensionnel de la machine à flux axial, afin d'étudier d'une part les effets de bords radiaux, et d'autre part l'effet de la courbure de la machine. Nous avons choisi, pour commencer, de découpler les deux phénomènes. Il nous a été nécessaire, pour mener à bien ce travail de modélisation analytique, de renoncer à la prise en compte de la saillance, aussi bien rotorique que statorique. Pour ne prendre en compte que les effets de bords radiaux sans l'effet de courbure, nous avons modélisé en trois dimensions la machine linéaire à aimants permanents résultant du développement au rayon moyen de la machine à flux axial. Après avoir repris dans la littérature un modèle dit « quasi-3D » car introduisant un découplage entre plan de modélisation 2D, et effets de bords radiaux, notre apport s'est situé dans la mise au point d'un modèle réellement 3D. Ce modèle, bien que mathématiquement plus exact, ne semble pas apporter un réel avantage au niveau des valeurs numériques de flux obtenues sur le modèle « quasi-3D ». En revanche, il s'applique avec succès aux formes d'aimants plus complexes, telles que le cas des aimants circulaires, pour lequel le découplage introduit par le modèle « quasi-3D » ne s'applique pas. La prise en compte des effets de bords radiaux s'avère importante pour prédire la décroissance de l'induction au voisinage des bords de l'actionneur, qui est responsable d'une diminution significative du flux magnétique obtenu. Par la suite, nous nous sommes affranchis de l'hypothèse du développement au rayon moyen de la machine, en résolvant en trois dimensions le problème du calcul analytique du flux à vide dans la machine à flux axial,

en coordonnées cylindriques. Ce nouveau modèle tri-dimensionnel autorise la prise en compte à la fois des effets de bords radiaux, et de l'effet de courbure. Afin de disposer d'un banc d'essai des différentes stratégies de modélisation possibles de la machine à flux axial, nous avons également implanté un autre calcul issu de la littérature, qui est un modèle 2D par couches, consistant à appliquer le modèle 2D pour chaque couche élémentaire de la machine localisée au niveau d'un rayon donné. Ce calcul prend en compte l'effet de courbure, mais pas les effets de bords. En appliquant tous ces modèles sur différentes géométries, il s'est avéré que la prise en compte de l'effet de courbure n'influe guère sur les résultats de flux. La conclusion est donc que le modèle analytique issu du développement au rayon moyen, pourvu qu'il soit tri-dimensionnel, est suffisant pour calculer le flux de la machine sans beaucoup d'erreur. Une vérification par éléments finis 3D a été effectuée. Comme perspective, nous imaginons qu'il faudrait trouver un moyen de prendre en compte la saillance des actionneurs en trois dimensions. Nous sommes convaincus que le principal obstacle réside dans la définition de conditions aux limites à la fois simples mais réalistes dans la direction radiale en présence de saillance. Une fois ce travail effectué, nous aurions alors accès aux ondulations de couple. Nous pensons qu'en ce qui concerne ces ondulations, à cause du caractère non-radial des encoches de la machine à flux axial, l'effet de courbure a un rôle bien plus important qu'il n'en a pour le calcul du flux, donc pour le couple moyen. Ceci, à nos yeux constituerait une étude intéressante et des plus utiles, la qualité du couple fourni étant aussi un critère de premier choix dans nombre d'applications.

- Le CHAPITRE 5 a abordé la question des modèles de matériaux magnétiques. Une première étude, se fondant sur une résolution d'équation de diffusion non-linéaire, a visé à étendre la procédure de séparation des pertes en champ bi-dimensionnel présentée au CHAPITRE 2 pour le cas où les loci d'induction possèdent une fréquence importante, de sorte que l'effet de peau ne soit plus négligeable dans de tels matériaux. Une fois l'équation de diffusion non-linéaire résolue analytiquement par un modèle saturable mais non-hystérétique au moyen d'une méthode présentée dans la littérature, le théorème de Poynting a permis d'obtenir la composante de pertes classiques. Notre apport s'est situé dans l'application d'un modèle de pertes non-maxwelliennes par couches élémentaires. Il a été conclu que la composante de pertes classiques constituait la part la plus importante des pertes, ce qui est normal dans la gamme de fréquences élevées qui nous intéresse. L'importance de la prise en compte d'un modèle de diffusion non-linéaire lorsque les niveaux d'inductions sont importants a été clairement mise en évidence, tant au niveau de la répartition d'induction que des pertes. Encore reste-t-il à présent à vérifier ce modèle, d'abord en utilisant un modèle numérique de type Preisach vectoriel dynamique, afin d'apprécier les effets de l'absence d'hystérésis lors de la phase de calcul du champ magnétique. Enfin, une vérification expérimentale sur un système de caractérisation en champ bi-directionnel semble indispensable, mais ne sera guère aisée à cause de la difficulté à générer des champs tournants de forte amplitude à des fréquences élevées. La seconde partie du CHAPITRE 5 a concerné l'étude des matériaux doux composites. Dans un premier temps, un état de l'art a illustré les potentialités de ces matériaux, aussi bien en termes d'isotropie que de comportements en haute fréquence, autorisant des structures novatrices et vraiment tri-dimensionnelles, malgré une perméabilité magnétique moindre. Néanmoins, la partie consacrée aux modèles de pertes a démontré que les travaux existants étaient le plus souvent fondés sur des modèles phénoménologiques, ne permettant malheureusement pas de prédire les pertes pour des inductions d'excitation distordues, comme dans le cas des machines électriques [Hoang, 1995]. Cet inconvénient est inacceptable dans une perspective d'application dans le cas des machines électriques, qui possèdent des loci d'induction dans leurs culasses très distordus. Afin de mener à bien ce travail de caractérisation des pertes dans les matériaux doux composites, nous avons proposé de sortir du contexte de la machine à flux axial, pour nous intéresser à des échantillons dans lesquels nous pouvons appliquer une induction uniforme alternative et relativement facilement contrôlable en forme. Souhaitant nous affranchir de tout effet démagnétisant, les échantillons ont été choisis de forme torique. Les tores des échantillons considérés étaient de section carrée, avec un côté égal à 5mm, très inférieur à leur diamètre moyen de 50mm. Dans ces conditions, l'induction à travers la section du tore a pu être considérée comme uniforme. Nous avons détaillé le dispositif expérimental, fondé sur l'utilisation d'un amplificateur linéaire, permettant d'imposer une onde d'induction de forme sinusoïdale et d'amplitude voulues à travers la section du tore. Il a été aussi mis en évidence la nécessité de refroidir en permanence l'échantillon lors des mesures de pertes, l'échauffement étant susceptible de fausser ces mesures. Grâce à ce système expérimental, les échantillons ont pu être caractérisés sur une large gamme de fréquences (de 0 à 10kHz), et pour trois amplitudes (0.5T, 1T, et 1.25T). Les échantillons étudiés, fournis par la société Höganäs, étaient au nombre de deux : un matériau destiné aux machines électriques, à grains de taille moyenne relativement importante (110 μ m) et de perméabilité relative voisine de 450, ainsi qu'un matériau destiné aux applications haute fréquence de

l'électronique de puissance, moins dense et à grains plus petits (30 μ m de taille moyenne). La première étape de l'application d'une théorie de séparation des pertes a été le développement d'un modèle de pertes classiques. Le point le plus important a consisté à montrer que les tores considérés avaient une taille suffisamment faible pour négliger les pertes causées par des courants induits circulant à l'échelle des échantillons. Cette hypothèse a pu être vérifiée en considérant un tore de taille inférieure aux tores qui nous intéressent (on a divisé toutes les dimensions par un facteur 2), et on a montré que les pertes volumiques obtenues pour une même sollicitation d'induction appliquée étaient très semblables, ce qui prouve qu'en première approximation, aucun terme de pertes ne dépend de la taille des échantillons. Grâce à cette conclusion, un modèle de pertes classiques à l'échelle de chaque particule a été déduit, en approximant ces particules à des rectangles dont la taille et la forme ont été données par l'analyse de micrographies du matériau. Les pertes par hystérésis ont pu aussi être trouvées, en extrapolant à fréquence nulle les pertes totales mesurées. Comme attendu, à cause du processus de compaction soumettant les particules à des contraintes mécaniques importantes, ces pertes par hystérésis prennent une valeur élevée, d'autant plus que la taille des particules est faible. On a ensuite pu calculer les pertes excédentaires en soustrayant aux pertes totales la somme des pertes par hystérésis et des pertes classiques estimées. L'analyse de ces pertes excédentaires à l'aide de la théorie de Bertotti a révélé un nombre d'objets magnétiques actifs sur la section du tore quasiment constant en fonction du champ H_{exc} , mis à part pour les fréquences importantes dans le cas du matériau à gros grains. Ceci implique que sur la plus grande partie de la plage de fréquences, les pertes excédentaires sont proportionnelles à la fréquence, comme les pertes classiques. Nous faisons l'hypothèse que ceci est dû à la relative indépendance des objets magnétiques dans les différentes particules du matériau. Enfin, la théorie de Bertotti nous a permis de mettre en évidence la structure polycristalline des particules, structure d'ailleurs confirmée par d'autres observations au microscope. Les travaux qui auront cours bientôt sur ce thème de recherche sont de deux natures. Il importe en premier lieu de prendre des tailles de tores plus importantes, afin d'étendre la théorie de la séparation des pertes lorsqu'il existe des courants induits à l'échelle de l'échantillon. Dans un second temps, nous caractériserons les échantillons en champ bi-dimensionnel, puisqu'un des intérêts de ces matériaux est leur isotropie magnétique. Le dispositif de caractérisation présenté et dimensionné par éléments finis 3D à la fin du CHAPITRE 5 constitue la première étape de ce travail.

- Le CHAPITRE 6 a présenté des résultats d'optimisation de la machine à flux axial à partir des modèles électromagnétiques 2D du CHAPITRE 3. Le cahier des charges, inspiré de celui rencontré pour les véhicules électriques ou hybrides, contenait deux points significatifs du plan couple-vitesse : un point fort couple-basse vitesse, ainsi qu'un point faible couple-haute vitesse, à atteindre en régime permanent. Une enveloppe maximale de forme discoïde a été fixée pour le moteur. Nous nous sommes consacrés, au début de ce CHAPITRE 6, à décrire la démarche de conception adoptée, par la formalisation du problème d'optimisation de l'actionneur à flux axial soumis à un tel cahier des charges. Nous avons utilisé un algorithme évolutionnaire. Il nous est en particulier apparu judicieux que cet algorithme soit cantonné à proposer les paramètres géométriques indépendants caractérisant les machines. Ensuite, une fois la géométrie proposée, le problème de la détermination des paramètres d'alimentation est géré par une boucle locale d'optimisation, qui s'attache à déterminer les ampères-tours d'axe d et q permettant d'atteindre chaque point de fonctionnement. Cette boucle locale d'optimisation a pour objectif la minimisation des pertes totales en chaque point de fonctionnement par l'alimentation, à condition d'atteindre le couple demandé, ainsi que de respecter les différentes contraintes physiques et de modèle (contrainte thermique, de non-démagnétisation des aimants, ou bien de non-saturation du fer de la machine). Dans le cas où les contraintes ne seraient pas satisfaites, il est possible de modifier la commande choisie de manière à respecter ces contraintes, au prix d'une dégradation des pertes totales (comme dans la référence [Aubry *et al.*, 2010]). De cette manière, on s'autorise ainsi à défluxer les machines, à condition que ceci permette une diminution des pertes sur le cycle simplifié considéré. Grâce à cette boucle locale d'optimisation sous contraintes, nous pouvons déterminer les pertes sur le cycle pour chaque géométrie, pertes qui sont ensuite renvoyées à l'algorithme évolutionnaire, qui gère l'optimisation des paramètres géométriques. L'optimisation ainsi menée était de type bi-objectif (minimisation des critères contradictoires que sont la masse et les pertes de la machine disque sur le cycle simplifié considéré). Dans un second temps, diverses études ont été réalisées, comme par exemple l'étude de la loi de commande de la machine. Il a été montré à ce propos qu'une commande pour laquelle le défluxage était autorisé permettait, hors de toute contrainte de tension, une réduction significative des pertes pour le point de haute vitesse, par rapport à une commande plus classique à pertes cuivre minimales. Cette possibilité de réduction des pertes par la commande permet de générer des géométries qui utilisent mieux l'espace alloué aux aimants permanents (car les pertes fer en haute vitesse

généérées par des aimants conséquents sont amoindries par l'injection d'un courant d'axe d), et qui minimisent les volumes des parties ferromagnétiques (la diminution des niveaux d'inductions liés aux pertes fer se fait grâce au courant d'axe d , et non par l'augmentation du volume de fer). Le point important à retenir réside dans l'aspect bénéfique du défluxage dans un but de minimisation des pertes, hors de toute contrainte de tension. Une autre étude de sensibilité sur la nature des aimants utilisés a suggéré que, lorsque le cahier des charges comportait un point de haute vitesse, l'augmentation trop importante de l'induction rémanente des aimants n'était pas forcément pertinente au regard des critères masse-pertes, à cause des pertes fer accrues en haute vitesse, ainsi que de la difficulté à défluxer la machine. Pour finir, l'introduction d'une contrainte de puissance apparente sur l'alimentation des machines a été étudiée : il en est ressorti que l'amélioration du facteur de puissance passait par des volumes d'aimants plus importants. Or ces volumes d'aimants importants ont augmenté à la fois la masse, ainsi que les pertes fer au niveau du point de haute vitesse, et les deux objectifs ont alors été dégradés. Ce travail d'optimisation nous a en outre fait appréhender, comme nous le disions en introduction, la nécessité de prendre en compte les effets de bords, car les machines générées à partir de ces modèles 2D apparaissent, dans le but de minimiser la masse, très minces en épaisseur radiale. Par conséquent, la non-prise en compte des effets de bords radiaux a donc mené à une surestimation importante du flux, donc du couple réel de ces machines. Cette remarque a justifié la prise en compte des effets 3D au CHAPITRE 4. En outre, de telles machines possédaient des nombres de paires de pôles importants, justifiant par un procédé d'optimisation systématique l'intuition que nous avons eue lors du CHAPITRE 1 d'introduction. Néanmoins, les fréquences obtenues pour les inductions dans les parties ferromagnétiques, surtout pour le point de haute vitesse, atteignaient alors plusieurs kilohertz. Il est apparu nécessaire dans ce contexte d'adapter les formulations des pertes magnétiques utilisées pour tenir compte de ces fréquences importantes, ce qui a déclenché le travail du CHAPITRE 5 sur les matériaux magnétiques.

Perspective générale

Nous ne pourrions terminer la présente conclusion sans parler à présent de la nécessité d'intégrer les modèles électromagnétiques tri-dimensionnels ainsi que les modèles de pertes magnétiques dont nous disposons à présent, à la procédure d'optimisation. Ceci permettra d'apprécier les changements sur les résultats obtenus par rapport aux optimisations que nous avons présentées au CHAPITRE 6, utilisant exclusivement les modèles bi-dimensionnels. Nous pourrions ainsi apprécier réellement l'importance du modèle utilisé sur les résultats d'optimisation, problème que nous avons déjà abordé dans le CHAPITRE 1 d'introduction, et qui, en quelque sorte, constituerait un aboutissement important de ce travail de recherche centré sur la modélisation électromagnétique des actionneurs. La première étape serait, à notre sens, d'intégrer les effets 3D dans la procédure d'optimisation, en espérant que les machines générées auront alors une épaisseur radiale plus réaliste. Ensuite, un second point serait une comparaison entre les résultats d'optimisation fournis en utilisant les matériaux laminés classiques, et les matériaux doux composites. Pour ce faire, il nous semble cependant qu'un important travail reste à faire : en premier lieu, nous devons disposer de modèles en champ multi-dimensionnel de ces matériaux, chose qui n'est encore, à ce stade, qu'une perspective. Qui plus est, le comportement thermique isotrope de ces matériaux rend nécessaire de repenser le modèle thermique à utiliser, en intégrant les aspects tri-dimensionnels des transferts thermiques : ce travail constitue à n'en point douter la perspective à long terme des travaux entrepris au cours de ces trois années de recherche.

Bibliographie

- [Amara, 2001] AMARA, Y. (2001). *Contribution à la conception et à la commande des machines synchrones à double excitation. Application au véhicule hybride*. Thèse de doctorat, Ecole normale supérieure de Cachan.
- [Aubry et al., 2010] AUBRY, J., BEN AHMED, H. et MULTON, B. (2010). Bi-objective sizing optimization of a pm machine drive on an operating profile. In *The XIX International Conference on Electrical Machines*.
- [Azzouzi, 2007] AZZOUZI, J. (2007). *Contribution à la modélisation et à l'optimisation des machines synchrones à aimants à flux axial. Application au cas de l'aérogénérateur*. Thèse de doctorat, Université du Havre.
- [Ben Ahmed, 2006] BEN AHMED, H. (2006). *Des procédés de conversion électro-magnéto-mécaniques non-conventionnels aux systèmes mécatroniques : Conception - Modélisation - Optimisation*. Habilitation à diriger des recherches, Université Paris 11.
- [Gabsi, 1999] GABSI, M. (1999). *Conception de machines spéciales et de leurs alimentations. Réduction du bruit d'origine électromagnétique*. Habilitation à diriger des recherches, Université Paris 11.
- [Hlioui, 2008] HLIOUI, S. (2008). *Etude d'une machine synchrone à double excitation. Contribution à la mise en place d'une plate-forme de logiciels en vue d'un dimensionnement optimal*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Belfort-Montbéliard.
- [Hoang, 1995] HOANG, E. (1995). *Etude, modélisation, et mesure des pertes magnétiques dans les moteurs à réluctance variable à double saillance*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- [Mester, 2007] MESTER, V. (2007). *Conception Optimale Systémique des Composants des Chaînes de Traction Electrique*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lille.
- [Multon, 1994] MULTON, B. (1994). *Conception et alimentation électronique des machines à réluctance variable à double saillance*. Habilitation à diriger des recherches, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- [Ruellan, 2007] RUELLAN, M. (2007). *Méthodologie de dimensionnement d'un système de récupération de l'énergie des vagues*. Thèse de doctorat, Ens de Cachan, Antenne de Bretagne.
- [Tran, 2009] TRAN, T. V. (2009). *Problèmes Combinatoires et Modèles Multi-Niveaux pour la Conception Optimale des Machines Electriques*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lille.
- [Vido, 2004] VIDO, L. (2004). *Etude d'actionneurs électriques à double excitation destinées au transport. Dimensionnement de structures synchrones*. Thèse de doctorat, Ecole normale supérieure de Cachan.

Appendices

Annexe A

Raccord entre les différentes zones pour le modèle 2D double saillance

A.1 Raccord entre la zone I (les encoches), et la zone II (l'entrefer)

A.1.1 Continuité du potentiel

On raccorde en continuité du potentiel entre la zone I (celle des encoches), et la zone II (celle de l'entrefer). On obtient alors l'équation :

$$\forall x \in \bigcup_{l=1}^{q_s} [(l-1)(w_e + w_d), (l-1)(w_e + w_d) + w_e], A^{(I,l)}(x, y = h_a + e) = A^{(II)}(x, y = h_a + e) \quad (\text{A.1})$$

Cette équation va mener, en extrayant les coefficients de Fourier de l'expression du potentiel $A^{(I,l)}$:

– Pour la valeur moyenne :

$$a_0^{(l)} - \frac{1}{2} \mu_0 j_l h_e^2 = \sum_{k \geq 1} \left[b_k^{(1)} \cosh \left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} (h_a + e) \right) + b_k^{(2)} \sinh \left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} (h_a + e) \right) \right] I_{C,k}^{(l)} + \sum_{k \geq 1} \left[b_k^{(3)} \cosh \left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} (h_a + e) \right) + b_k^{(4)} \sinh \left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} (h_a + e) \right) \right] I_{S,k}^{(l)} \quad (\text{A.2})$$

– Pour les harmoniques :

$$\forall m \geq 1, a_m^{(l)} = \frac{1}{\cosh \left(m \frac{\pi}{w_e} h_e \right)} \left\{ \sum_{k \geq 1} \left[b_k^{(1)} \cosh \left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} (h_a + e) \right) + b_k^{(2)} \sinh \left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} (h_a + e) \right) \right] \alpha_{C,(m,k)}^{(l)} + \sum_{k \geq 1} \left[b_k^{(3)} \cosh \left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} (h_a + e) \right) + b_k^{(4)} \sinh \left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} (h_a + e) \right) \right] \alpha_{S,(m,k)}^{(l)} \right\} \quad (\text{A.3})$$

où on a :

$$I_{C,k}^{(l)} = \frac{1}{w_e} \int_{(l-1)(w_e+w_d)}^{(l-1)(w_e+w_d)+w_e} \cos \left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} x \right) dx \quad \text{et} \quad I_{S,k}^{(l)} = \frac{1}{w_e} \int_{(l-1)(w_e+w_d)}^{(l-1)(w_e+w_d)+w_e} \sin \left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} x \right) dx \quad (\text{A.4})$$

et aussi :

$$\alpha_{C,(m,k)}^{(l)} = \frac{2}{w_e} \int_{(l-1)(w_e+w_d)}^{(l-1)(w_e+w_d)+w_e} \cos \left(m \frac{\pi}{w_e} (x - (l-1)(w_e + w_d)) \right) \cos \left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} x \right) dx$$

$$\alpha_{S,(m,k)}^{(l)} = \frac{2}{w_e} \int_{(l-1)(w_e+w_d)}^{(l-1)(w_e+w_d)+w_e} \cos \left(m \frac{\pi}{w_e} (x - (l-1)(w_e + w_d)) \right) \sin \left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} x \right) dx \quad (\text{A.5})$$

A.1.2 Raccord en dérivée normale du potentiel

On raccorde ensuite en dérivée normale du potentiel entre les zones I et II. Plus précisément, on écrit que :

$$\begin{aligned} \forall x \in \bigcup_{l=1}^{q_s} [(l-1)(w_e + w_d), (l-1)(w_e + w_d) + w_e], \quad \frac{dA^{(II)}}{dy} \Big|_{y=h_a+e} &= \frac{dA^{(I)}}{dy} \Big|_{y=h_a+e} \\ \forall x \in [0, \tau] - \left\{ \bigcup_{l=1}^{q_s} [(l-1)(w_e + w_d), (l-1)(w_e + w_d) + w_e] \right\}, \quad \frac{dA^{(II)}}{dy} \Big|_{y=h_a+e} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

On extrait de cette dernière équation les coefficients de Fourier des séries dans la zone II. On va alors obtenir :

$$\begin{aligned} \forall k \geq 1, b_k^{(1)} \cosh \left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} (h_a + e) \right) - b_k^{(2)} \sinh \left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} (h_a + e) \right) \\ = \frac{1}{2k-1} \sum_{l=1}^{q_s} \left\{ - \sum_{m \geq 1} m a_m^{(l)} K_{c_m}^{(I)} \cosh \left(m \frac{\pi}{w_e} h_e \right) \alpha_{C,(m,k)}^{(l)} + 2 \frac{\mu_0 h_e w_e j_l}{\pi} I_{C,k}^{(l)} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Ainsi que :

$$\begin{aligned} \forall k \geq 1, b_k^{(2)} \cosh \left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} (h_a + e) \right) - b_k^{(4)} \sinh \left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} (h_a + e) \right) \\ = \frac{1}{2k-1} \sum_{l=1}^{q_s} \left\{ - \sum_{m \geq 1} m a_m^{(l)} K_{c_m}^{(I)} \cosh \left(m \frac{\pi}{w_e} h_e \right) \alpha_{S,(m,k)}^{(l)} + 2 \frac{\mu_0 h_e w_e j_l}{\pi} I_{S,k}^{(l)} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

A.2 Raccord entre la zone II (l'entrefer), et la zone III (le rotor)

A présent, on va raccorder les zones II (entrefer) et III (rotor), tant en potentiel qu'en dérivée normale.

A.2.1 Continuité du potentiel

En ce qui concerne le raccord par continuité des potentiels, on aura :

$$\forall x \in [X_d, X_d + \beta_{a2}\tau], \quad A^{(III)}(x, y = h_a) = A^{(II)}(x, y = h_a) \quad (\text{A.9})$$

On peut extraire les coefficients de Fourier de cette équation, et obtenir :

– Pour la valeur moyenne :

$$\begin{aligned} c_0 = \sum_{k \geq 1} \left[b_k^{(1)} \cosh \left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} h_a \right) + b_k^{(2)} \sinh \left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} h_a \right) \right] J_{C,k} \\ + \sum_{k \geq 1} \left[b_k^{(3)} \cosh \left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} h_a \right) + b_k^{(4)} \sinh \left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} h_a \right) \right] J_{S,k} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

– Pour les harmoniques :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, c_n = \frac{1}{\cosh \left(n \frac{\pi}{\beta_{a2}\tau} h_a \right)} \left\{ \sum_{k \geq 1} \left[b_k^{(1)} \cosh \left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} h_a \right) + b_k^{(2)} \sinh \left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} h_a \right) \right] \beta_{C,(n,k)} \right. \\ \left. + \sum_{k \geq 1} \left[b_k^{(3)} \cosh \left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} h_a \right) + b_k^{(4)} \sinh \left((2k-1) \frac{\pi}{\tau} h_a \right) \right] \beta_{S,(n,k)} - \mu_0 \frac{\beta_{a2}\tau}{\pi} \frac{M_n}{n} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Les coefficients introduits ont pour valeur :

$$J_{C,k} = \frac{1}{\beta_{a_2}\tau} \int_{X_d}^{X_d+\beta_{a_2}\tau} \cos\left((2k-1)\frac{\pi}{\tau}x\right) dx \text{ et } J_{C,k} = \frac{1}{\beta_{a_2}\tau} \int_{X_d}^{X_d+\beta_{a_2}\tau} \cos\left((2k-1)\frac{\pi}{\tau}x\right) dx \quad (\text{A.12})$$

Ainsi que :

$$\begin{aligned} \beta_{C,(n,k)} &= \frac{2}{\beta_{a_2}\tau} \int_{X_d}^{X_d+\beta_{a_2}\tau} \cos\left(n\frac{\pi}{\beta_{a_2}\tau}(x-X_d)\right) \cos\left((2k-1)\frac{\pi}{\tau}x\right) dx \\ \beta_{S,(n,k)} &= \frac{2}{\beta_{a_2}\tau} \int_{X_d}^{X_d+\beta_{a_2}\tau} \cos\left(n\frac{\pi}{\beta_{a_2}\tau}(x-X_d)\right) \sin\left((2k-1)\frac{\pi}{\tau}x\right) dx \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

A.2.2 Raccord en dérivée normale du potentiel

Il faut aussi assurer la continuité des dérivées normales à travers la frontière entre les zones II et III. Il s'agit de :

$$\begin{aligned} \forall x \in [X_d, \tau + X_d], \quad \left. \frac{dA^{(II)}}{dy} \right|_{y=h_a} &= \left. \frac{dA^{(III)}}{dy} \right|_{y=h_a} \\ \forall x \in [\beta_{a_2}\tau + X_d, \tau + X_d], \quad \left. \frac{dA^{(II)}}{dy} \right|_{y=h_a} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

On extrait de cette dernière équation les coefficients de Fourier des séries dans la zone II. On va alors obtenir :

$$\forall k \geq 1, b_k^{(1)} \cosh\left((2k-1)\frac{\pi}{\tau}h_a\right) - b_k^{(2)} \sinh\left((2k-1)\frac{\pi}{\tau}h_a\right) = \frac{1}{2k-1} \sum_{n \geq 1} n c_n \cosh\left(n\frac{\pi}{\beta_{a_2}\tau}h_a\right) \beta_{C,(n,k)} \quad (\text{A.15})$$

Et aussi :

$$\forall k \geq 1, b_k^{(3)} \cosh\left((2k-1)\frac{\pi}{\tau}h_a\right) - b_k^{(4)} \sinh\left((2k-1)\frac{\pi}{\tau}h_a\right) = \frac{1}{2k-1} \sum_{n \geq 1} n c_n \cosh\left(n\frac{\pi}{\beta_{a_2}\tau}h_a\right) \beta_{S,(n,k)} \quad (\text{A.16})$$

A.3 Résolution du problème sous forme matricielle

On va maintenant écrire le problème de façon matricielle. Les sommes infinies sont remplacées par un nombre N assez grand. On introduit alors les vecteurs de coefficients suivants :

$$\forall l \in \llbracket 1, q_s \rrbracket, [a^{(l)}] = \begin{bmatrix} a_1^{(l)} \\ \vdots \\ a_N^{(l)} \end{bmatrix}, [b^{(1)}] = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ \vdots \\ b_N^{(1)} \end{bmatrix}, [b^{(2)}] = \begin{bmatrix} b_1^{(2)} \\ \vdots \\ b_N^{(2)} \end{bmatrix}, [b^{(3)}] = \begin{bmatrix} b_1^{(3)} \\ \vdots \\ b_N^{(3)} \end{bmatrix}, [b^{(4)}] = \begin{bmatrix} b_1^{(4)} \\ \vdots \\ b_N^{(4)} \end{bmatrix}, [c] = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

ainsi que les matrices :

$$[\mathcal{D}_1] = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \frac{1}{\cosh\left(m\frac{\pi}{w_e}h_e\right)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, [\mathcal{D}_2] = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \cosh\left((2k-1)\frac{\pi}{\tau}\right) & & \\ & (h_a + e) & & \\ & & \ddots & \end{bmatrix}, [\mathcal{D}_3] = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \sinh\left((2k-1)\frac{\pi}{\tau}\right) & & \\ & (h_a + e) & & \\ & & \ddots & \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

$$[\mathcal{D}_4] = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & m \cosh\left(m\frac{\pi}{w_e}h_e\right) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, [\mathcal{D}_5] = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \frac{1}{\cosh\left(n\frac{\pi}{\beta_{a2}\tau}h_a\right)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, [\mathcal{D}_6] = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \cosh\left((2k-1)\frac{\pi}{\tau}h_a\right) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

$$[\mathcal{D}_7] = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \sinh\left((2k-1)\frac{\pi}{\tau}h_a\right) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, [\mathcal{D}_8] = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & n \cosh\left(n\frac{\pi}{\beta_{a2}\tau}h_a\right) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, [\mathcal{IN}\mathcal{V}] = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \frac{1}{2k-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

Le système d'équations défini par les équations des harmoniques A.3, A.7, A.8, A.11, A.15 et A.16 est alors mis sous la forme matricielle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall l \in \llbracket 1, q_s \rrbracket, [a^{(l)}] = [\mathcal{D}_1] \left\{ [\alpha_C^{(l)}] ([\mathcal{D}_2] [b^{(1)}] + [\mathcal{D}_3] [b^{(2)}]) + [\alpha_S^{(l)}] ([\mathcal{D}_2] [b^{(3)}] + [\mathcal{D}_3] [b^{(4)}]) \right\} \\ [\mathcal{D}_2] [b^{(1)}] - [\mathcal{D}_3] [b^{(2)}] = -[\mathcal{IN}\mathcal{V}] \sum_{l=1}^{q_s} [\alpha_C^{(l)}]^T [\mathcal{D}_4] [a^{(l)}] + 2\frac{\mu_0 h_e w_e}{\pi} \sum_{l=1}^{q_s} j_l [I_C^{(l)}] \\ [\mathcal{D}_2] [b^{(3)}] - [\mathcal{D}_3] [b^{(4)}] = -[\mathcal{IN}\mathcal{V}] \sum_{l=1}^{q_s} [\alpha_S^{(l)}]^T [\mathcal{D}_4] [a^{(l)}] + 2\frac{\mu_0 h_e w_e}{\pi} \sum_{l=1}^{q_s} j_l [I_S^{(l)}] \\ [c] = [\mathcal{D}_5] \left\{ [\beta_C] ([\mathcal{D}_6] [b^{(1)}] + [\mathcal{D}_7] [b^{(2)}]) + [\beta_S] ([\mathcal{D}_6] [b^{(3)}] + [\mathcal{D}_7] [b^{(4)}]) \right\} \\ [\mathcal{D}_6] [b^{(1)}] - [\mathcal{D}_7] [b^{(2)}] = [\mathcal{IN}\mathcal{V}] [\beta_C]^T [\mathcal{D}_8] [c] \\ [\mathcal{D}_6] [b^{(3)}] - [\mathcal{D}_7] [b^{(4)}] = [\mathcal{IN}\mathcal{V}] [\beta_S]^T [\mathcal{D}_8] [c] \end{array} \right. \quad (\text{A.21})$$

par un jeu de substitutions, il est possible de mettre le système sous la forme suivante :

$$[\mathcal{M}] [\mathcal{B}] = [\mathcal{V}] \quad (\text{A.22})$$

où $[\mathcal{B}]$ est défini par :

$$[\mathcal{B}] = \begin{bmatrix} [b^{(1)}] \\ [b^{(2)}] \\ [b^{(3)}] \\ [b^{(4)}] \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

Le système A.22 ainsi déterminé est résolu par la méthode itérative de Gauss-Seidel décrite lors du calculs des coefficients du potentiel dans la machine à pôles lisses. Une fois les coefficients dans la zone II déterminés, il est possible de calculer les coefficients du potentiel dans la zone I (celle des encoches), et la zone III (celle de l'aimant). Les constantes des potentiels, aussi bien dans les zones I que III, sont alors déterminés grâce aux équations A.2 et A.10.

Annexe B

Calcul analytique des coefficients du développement en séries de Fourier-Bessel de la densité de charges magnétiques

Fixons deux entiers (k, m) . On veut évaluer de manière analytique le coefficient $\sigma_{m,k}^*$ de la densité surfacique de charge équivalente des aimants, donné par la formule :

$$\sigma_{m,k}^* = \frac{2}{R_p^2 J_{(2k-1)p+1}^2(x_{(2k-1)p,m})} \frac{4 B_r \sin \left[(2k-1) \beta_a \frac{\pi}{2} \right]}{\pi \mu_0 (2k-1)} \int_{R_1}^{R_2} J_{(2k-1)p}(K_{k,m}r) r dr \quad (\text{B.1})$$

Il nous faut donc calculer l'intégrale :

$$\int_{R_1}^{R_2} J_{(2k-1)p}(K_{k,m}r) r dr \quad (\text{B.2})$$

Afin de calculer analytiquement cette intégrale, on doit calculer la primitive suivante :

$$\int^r J_{(2k-1)p}(K_{k,m}r) r dr \quad (\text{B.3})$$

Une première intégration par parties va permettre de supprimer le terme multiplicatif en r . En effet, dans [Watson, 1995], on peut trouver, pour un nombre entier n arbitraire, la formule suivante (pour alléger les écritures, on pose r' la variable d'espace normalisée prise égale à $r' = K_{k,m}r$) :

$$\frac{d}{dr'} [r'^{n+1} J_{n+1}(r')] = r'^{n+1} J_n(r') \quad (\text{B.4})$$

On fait un changement de variable $r \mapsto r'$ dans la primitive recherchée :

$$\int^r J_{(2k-1)p}(K_{k,m}r) r dr = \frac{1}{K_{k,m}^2} \int^{r'} J_{(2k-1)p}(r') r' dr' = \frac{1}{K_{k,m}^2} \int^{r'} \frac{1}{r'^{(2k-1)p}} r'^{(2k-1)p+1} J_{(2k-1)p}(r') dr' \quad (\text{B.5})$$

Une intégration par parties, en utilisant la formule B.4, permet alors d'aboutir à la formule suivante :

$$\int^{r'} J_{(2k-1)p}(r') r' dr' = r' J_{(2k-1)p+1}(r') + (2k-1)p \int^{r'} J_{(2k-1)p+1}(r') dr' \quad (\text{B.6})$$

Grâce à la formule B.6, on a ramené le calcul de la primitive B.3 au calcul de primitives de la forme suivante (n étant un entier arbitraire) :

$$I_n(r') = \int^{r'} J_n(r') dr' \quad (\text{B.7})$$

Pour calculer les primitives définies par la suite $I_n(r')$, on va procéder par récurrence. Dans la référence [Watson, 1995], la relation suivante, sur la dérivée des fonctions de Bessel :

$$J_{n-1}(r') - J_{n+1}(r') = 2 \frac{dJ_n}{dr'} \quad (\text{B.8})$$

Si on intègre cette relation, on va trouver alors la relation :

$$I_{n+1}(r') = I_{n-1}(r') - 2J_n(r') \quad (\text{B.9})$$

On distingue alors deux cas :

- si l'entier n est impair. On écrit la relation pour chaque entier n jusqu'à la valeur nulle. On obtient alors :

$$\begin{cases} I_n(r') &= I_{n-2}(r') - 2J_{n-1}(r') \\ I_{n-2}(r') &= I_{n-4}(r') - 2J_{n-3}(r') \\ \dots & \\ I_1(r') &= -J_0(r') \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

En sommant toutes les égalités précédentes, on va alors obtenir :

$$I_n(r') = J_0(r') - 2(J_0(r') + J_2(r') + \dots + J_{n-1}(r')) \quad (\text{B.11})$$

- si l'entier n est pair. On va obtenir, par la même méthode qu'auparavant, le résultat :

$$I_n(r') = I_0(r') - 2(J_1(r') + J_3(r') + \dots + J_{n-1}(r')) \quad (\text{B.12})$$

Au final, la primitive B.3 à calculer sera alors donnée par la formule :

- si le nombre de paires de pôles p est pair, alors on aura :

$$\begin{aligned} \int_0^r J_{(2k-1)p}(K_{k,m}r) r dr &= \frac{1}{K_{k,m}} r J_{(2k-1)p+1}(K_{k,m}r) \\ &+ \frac{(2k-1)p}{K_{k,m}^2} [J_0(K_{k,m}r) - 2(J_0(K_{k,m}r) + J_2(K_{k,m}r) + \dots + J_{(2k-1)p}(K_{k,m}r))] \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

- si le nombre de paires de pôles p est impair, alors on aura :

$$\begin{aligned} \int_0^r J_{(2k-1)p}(K_{k,m}r) r dr &= \frac{1}{K_{k,m}} r J_{(2k-1)p+1}(K_{k,m}r) \\ &+ \frac{(2k-1)p}{K_{k,m}^2} [I_0(K_{k,m}r) - 2(J_1(K_{k,m}r) + J_3(K_{k,m}r) + \dots + J_{(2k-1)p}(K_{k,m}r))] \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Or la fonction I_0 , qui est la primitive de la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0 J_0 , est tabulée. Néanmoins, n'ayant pas réussi à nous procurer des tables de cette fonction, nous nous limiterons, pour cette raison, à des nombres de paires de pôles p pairs, pour lesquels l'expression de l'intégrale ne comporte que des fonctions de Bessel de première espèce.

Nous déduisons de cette étude que l'expression analytique des coefficients $\sigma_{m,k}^*$ pour un nombre de paires de pôles pair est donnée alors par l'expression analytique suivante, pour tout couple (k, m) d'entiers :

$$\begin{aligned} \sigma_{m,k}^* &= \frac{2}{R_p^2 J_{(2k-1)p+1}^2(x_{(2k-1)p,m})} \frac{4 B_r \sin[(2k-1)\beta_a \frac{\pi}{2}]}{\pi \mu_0 (2k-1)} \\ &\left\{ \frac{1}{K_{k,m}} R_2 J_0(K_{k,m}R_2) + \frac{(2k-1)p}{K_{k,m}^2} [J_0(K_{k,m}R_2) - 2(J_0(K_{k,m}R_2) + J_2(K_{k,m}R_2) + \dots + J_{(2k-1)p}(K_{k,m}R_2))] \right. \\ &\left. - \frac{1}{K_{k,m}} R_1 J_0(K_{k,m}R_1) - \frac{(2k-1)p}{K_{k,m}^2} [J_0(K_{k,m}R_1) - 2(J_0(K_{k,m}R_1) + J_2(K_{k,m}R_1) + \dots + J_{(2k-1)p}(K_{k,m}R_1))] \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Il est clair qu'une forme plus complexe des aimants, en particulier si les aimants n'étaient pas radiaux, bien que théoriquement traitable, compliquerait beaucoup de calcul d'intégrale, au point sans doute de nécessiter un calcul numérique, ce que nous souhaiterions éviter.

Bibliographie

[Watson, 1995] WATSON, G. (1995). *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge Univ Press.