



**HAL**  
open science

## On some mathematical aspects of sparse modeling

Rémi Gribonval

► **To cite this version:**

Rémi Gribonval. On some mathematical aspects of sparse modeling. Mathematics [math]. Université Rennes 1, 2007. tel-00564045

**HAL Id: tel-00564045**

**<https://theses.hal.science/tel-00564045>**

Submitted on 7 Feb 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

présentée devant

**L'Université de Rennes 1**  
**Spécialité : Mathématiques**

par

Rémi Gribonval

Sur quelques problèmes mathématiques de modélisation parcimonieuse.

**soutenue le 24 octobre 2007**  
**devant le jury suivant :**

M.	Jean-Jacques Fuchs	Président
MM	Patrick Flandrin	Rapporteur
	Christian Jutten	Rapporteur
	Karlheinz Gröchenig	Rapporteur
M.	Pierre Vandergheynst	Examineur

---

---

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Audio source separation</b>	<b>7</b>
1.1	Introduction	7
1.2	Evaluation of audio source separation algorithms	8
1.2.1	Performance measures	8
1.2.2	Oracle source separation estimators	9
1.3	Multichannel separation by sparse decomposition	10
1.3.1	Identification of a mixing matrix	10
1.3.2	Separation by sparse decomposition, given the mixing matrix	11
1.3.3	Dictionary design	11
1.4	Single-channel source separation	12
1.4.1	"Morphological" source diversity through sparsity ?	13
1.4.2	Gaussian Mixture Models	13
1.5	Conclusion and perspectives	14
<b>2</b>	<b>Sparse approximation with redundant dictionaries</b>	<b>17</b>
2.1	Introduction	17
2.2	Example : approximation with an orthonormal basis	19
2.3	Jackson and Bernstein inequalities	20
2.4	Approximation with general redundant dictionaries	21
2.4.1	Sparsity spaces	21
2.4.2	Approximation spaces	23
2.4.3	General Jackson type embeddings	25
2.5	A quest for Bernstein inequalities	25
2.5.1	Approximation with framelet systems	26
2.5.2	Approximation with localized frames ?	26
2.5.3	Approximation with decomposable incoherent dictionaries	27
2.6	Conclusion	28
<b>3</b>	<b>Algorithms for sparse approximation</b>	<b>31</b>
3.1	Introduction	32
3.2	Recovery of sparse representations by global optimization	33
3.2.1	Recovery in arbitrary incoherent dictionaries	34
3.2.2	Simultaneous recovery with $\ell^r$ representations	34
3.2.3	From representations to approximations : stable recovery	35

---

3.3	Matching Pursuit . . . . .	36
3.3.1	The Matching Pursuit ToolKit (MPTK) . . . . .	36
3.3.2	Stable recovery with Matching Pursuit . . . . .	37
3.4	Bridging the gap between theory and practice . . . . .	37
3.4.1	How incoherent are real-life dictionaries ? . . . . .	38
3.4.2	Why is incoherence too pessimistic a tool ? . . . . .	38
3.4.3	Structured approximation . . . . .	39
3.4.4	Recovery with high probability . . . . .	39
3.5	Conclusion and perspectives . . . . .	42
<b>A</b>	<b>Séparation de sources basée sur la parcimonie</b>	<b>45</b>
A.1	Introduction . . . . .	45
A.2	Représentations parcimonieuses de signaux . . . . .	48
A.2.1	Notions de parcimonie . . . . .	49
A.2.2	Dictionnaires . . . . .	50
A.2.3	Transformées linéaires . . . . .	51
A.2.4	Représentations adaptatives . . . . .	52
A.3	Représentations parcimonieuses conjointes de mélanges . . . . .	52
A.3.1	Principe . . . . .	53
A.3.2	Transformées linéaires . . . . .	54
A.3.3	Principe de la minimisation de critères $\ell^\tau$ . . . . .	55
A.3.4	Interprétation Bayésienne des critères $\ell^\tau$ . . . . .	56
A.3.5	Effet du choix du critère $\ell^\tau$ . . . . .	57
A.3.6	Algorithmes d'optimisation de critères $\ell^\tau$ . . . . .	59
A.3.7	<i>Matching pursuit</i> . . . . .	63
A.3.8	Récapitulatif . . . . .	64
A.4	Estimation de la matrice de mélange à partir du diagramme de dispersion . . . . .	65
A.4.1	Algorithmes de catégorisation globaux . . . . .	66
A.4.2	Utilisation de diagrammes de dispersion locaux . . . . .	67
A.5	Séparation à matrice de mélange connue . . . . .	68
A.5.1	Séparation linéaire de mélanges (sur)déterminés . . . . .	70
A.5.2	Masquage binaire en supposant une seule source active . . . . .	70
A.5.3	Masquage binaire en supposant $M < P$ sources actives . . . . .	71
A.5.4	Séparation locale par minimisation $\ell^\tau$ . . . . .	72
A.5.5	Principe de la séparation globale par minimisation $\ell^\tau$ . . . . .	72
A.5.6	Liens formels avec l'approximation parcimonieuse classique monocanal . . . . .	73
A.5.7	Algorithmes de séparation globale par minimisation $\ell^\tau$ . . . . .	74
A.5.8	Séparation globale itérative : <i>demixing pursuit</i> . . . . .	75
A.6	Conclusion . . . . .	76
A.7	Perspectives . . . . .	77
A.8	Remerciements . . . . .	80

---

*A Véréne, Alice, Solange et Elvire, avec une pensée pour Ariane.*



---

# Remerciements

Je tiens d'abord à remercier les membres du jury, en particulier Patrick Flandrin, Directeur de Recherche du CNRS à l'Ecole Normale Supérieure de Lyon, Karlheinz Gröchenig, Professeur à l'Université de Vienne, et Christian Jutten, Professeur à l'Université Joseph Fourier de Grenoble qui ont accepté la lourde tâche de rapporteurs. Je remercie ensuite Jean-Jacques Fuchs, Professeur à l'Université de Rennes 1 pour avoir accepté de présider ce jury et Pierre Vandergheynst, Professeur Assistant à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, pour sa participation à ce jury.

J'adresse ensuite un grand merci à Emmanuel Bacry, avec qui j'ai commencé il y a quelques années déjà l'étude des aspects mathématiques du traitement du signal audio, et à Stéphane Mallat, avec qui j'ai eu la chance d'effectuer ma thèse et dont les idées pionnières sur les décompositions parcimonieuses dans des dictionnaires redondants ont servi de terreau aux recherches que j'ai menées depuis. Un vigoureux merci également à Ron de Vore, Vladimir Temlyakov et Pensho Petrushev, de l'Université de Caroline du Sud, qui m'ont accueilli si chaleureusement lorsque j'étais jeune post-doc et grâce auxquels j'ai mis le pied, la taille et tout le reste dans le monde passionnant de l'approximation non-linéaire.

Merci à Alexey Ozerov, Sylvain Lesage, Simon Arberet et Boris Mailhé, qui reconnaîtront dans ce manuscrit des aspects de leur travail de thèse, et qui ont surtout réussi l'exploit de me supporter pendant toutes ces années, et merci à Morten Nielsen, Pierre Vandergheynst et Bruno Torrèsani, précieux complices avec lesquels j'ai tant de plaisir à collaborer encore et encore !

Merci encore et surtout à tous les membres de l'équipe METISS, stagiaires, doctorants, ingénieurs, assistantes, chercheurs, avec qui j'ai eu le plaisir de travailler toutes ces années, avec une note particulière à Sacha Krstulovic pour son enthousiasme et son amitié, à Gilles Gonon pour ses merveilleuses démonstrations, et à Frédéric Bimbot, pour son accueil, ses conseils amicaux et avisés, un exemple en termes de qualités humaines, de méthode et de démarche scientifique.





---

# Avant Propos

Mathématiques, traitement du signal et applications sonores sont au coeur de mon activité scientifique, avec pour domaine d'application privilégié la séparation aveugle de sources sonores et la modélisation de signaux multicanaux. La notion de représentation parcimonieuse, fil conducteur qui sous-tend mes travaux, permet d'aborder très efficacement certains problèmes de séparation de sources sonores et soulève de nombreuses questions mathématiques et algorithmiques.

L'interaction simultanée avec la communauté mathématique et celle du traitement du signal offre une diversité de points de vue qui s'avère scientifiquement fructueuse : l'analyse des problèmes applicatifs et algorithmiques permet en effet d'identifier des modèles mathématiques et des problèmes théoriques originaux et pertinents ; réciproquement, l'étude mathématique de ces modèles et problèmes, qui permet de s'abstraire du contexte parfois très spécifique d'une application donnée, peut offrir des approches algorithmiques nouvelles et génériques pour une large gamme de problèmes.

A l'interface entre mathématiques et traitement du signal, je prendrais comme un honneur d'être considéré à part entière comme un mathématicien ou comme un "ingénieur" (au sens anglo-saxon du terme, le traitement du signal faisant partie de l'*Electrical Engineering*, ou au sens du Département "Sciences et Technologies de l'Information et de l'Ingénierie" du CNRS). Bien entendu, cette position assumée à mi-chemin donne parfois l'impression à qui s'y trouve de n'être ni véritablement l'un ni l'autre, ce qui n'est pas toujours intellectuellement confortable !

J'espère être parvenu à illustrer dans ce document, autour des thématiques qui me sont chères, la fertilité de ce dialogue entre mathématiques et applications. Je suis en effet profondément convaincu que ce type de fécondation mutuelle est un élément clé pour l'avancée simultanée des connaissances et des techniques, bien au-delà du simple domaine du traitement du signal mathématique dont je me revendique. C'est en tout cas une grande chance que d'avoir la liberté de travailler à l'interface de ces deux domaines, et si j'en suis redevable avant tout à l'INRIA, qui offre la possibilité de traiter des sujets sur un large spectre, je dois également beaucoup à Frédéric Bimbot ainsi qu'à Claude Labit, Albert Benveniste et Michèle Basseville, qui m'ont encouragé à ne pas fléchir dans l'exercice des versants mathématiques de ma recherche, même lorsque la concurrence s'est avérée rude.

Lorsqu'en 2000, j'ai rejoint l'INRIA pour intégrer le projet de recherche SIGMA2 à l'IRISA, j'y ai accompagné Frédéric Bimbot dans la création du projet de recherche METISS qui a passé avec succès en 2006 sa première évaluation quadriennale. Au cours de ces années, j'ai déjà par deux fois eu la chance de pouvoir effectuer un séjour sabbatique

de quelques mois, d'abord au Département de Mathématiques de l'Université d'Aalborg en 2003 pour y collaborer avec Morten Nielsen, puis au Laboratoire de Traitement des Signaux de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne l'été 2006 pour une collaboration avec Pierre Vandergheynst.

Tout en développant mon programme de recherche au sein de METISS, j'ai également découvert les nombreux autres volets du travail de chercheur. En encadrant les thèses<sup>1</sup> d'Alexey Ozerov, de Sylvain Lesage, de Simon Arberet et de Boris Mailhé, j'espère leur avoir transmis quelques bribes de ce crédo scientifique dont j'hérite de Stéphane Mallat et Emmanuel Bacry, avec qui j'avais moi-même effectué ma thèse de doctorat de l'Université Paris IX Dauphine au Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polytechnique. Grâce au GDR ISIS du CNRS, j'ai pris goût à l'animation d'une petite équipe, à l'occasion d'un projet "jeunes chercheurs" mené conjointement avec l'Equipe Analyse-Synthèse de l'IRCAM et l'équipe ADTS de l'IRCCyN sur le thème de l'évaluation des performances en séparation aveugle de sources sonores. J'ai renouvelé avec plaisir l'expérience grâce à un projet MathSTIC du CNRS pour collaborer avec l'équipe de Bruno Torrèsani au LATP de l'Université de Provence et celle de Laurent Daudet au LAM de l'Université Paris 6 sur la représentation parcimonieuse structurée de signaux sonores, ce qui m'a permis de tester ma résistance à l'adrénaline en organisant le workshop international SPARS'05 –premier du nom consacré exclusivement aux modèles parcimonieux en traitement du signal. L'expérience s'étant révélée concluante je prépare aujourd'hui la prochaine édition (SPARS'09 ?) dans le cadre de l'Equipe Associée INRIA SPARS que je co-dirige depuis janvier 2007 avec Pierre Vandergheynst de l'EPFL.

Ce document est organisé en quatre chapitres dont trois rédigés en anglais et une annexe en français. Le premier chapitre décrit mes contributions dans le domaine de la séparation de sources audio, qui constituent certainement le volet le plus appliqué de mon activité scientifique, volet auquel ont contribué significativement plusieurs doctorants et collaborateurs. Les deux chapitres suivants sont consacrés aux aspects plus mathématiques de mon travail, le premier sur les approximations non-linéaires avec des dictionnaires redondants, en collaboration étroite avec Morten Nielsen, le second sur l'analyse des performances des algorithmes de décomposition parcimonieuse, avec le concours notamment de Pierre Vandergheynst. Dans ces trois chapitres, j'ai adopté un style sans doute peu conventionnel dans la littérature scientifique : j'y ai opté pour le "je" plus que le "nous" et j'ai choisi d'agrémenter le texte de divers éléments de contexte. L'annexe, dans un style plus traditionnel, reproduit le chapitre de synthèse « Séparation de sources basée sur la parcimonie » que j'ai écrit pour l'ouvrage « Séparation de Sources » coordonné par Pierre Comon et Christian Jutten dans la collection IC2 publié par Hermès.

---

<sup>1</sup>sous la direction de Frédéric Bimbot

---

# Chapitre 1

## Audio source separation

I would probably have chosen to study the audio source separation problem during my Master's degree at IRCAM in 1995 if Emmanuel Bacry had not convinced me to join him and Stéphane Mallat at Ecole Polytechnique for a Ph.D. project related to nonlinear approximation and sparse models of audio signals. At the time, I did not imagine yet that I would later figure out how to use nonlinear approximations and sparse representations to tackle blind audio source separation problems! Nonlinear approximation, which more or less corresponds to what is today more commonly called sparse representation, was primarily intended for signal compression and denoising. It was quite a good surprise indeed when around 2000 the independent work of Zibulevsky and Pearlmutter [161] and Jourjine, Rickard and Yilmaz [102] revealed that sparsity could also be exploited for source separation.

### 1.1 Introduction

A large part of my Ph.D. thesis was dedicated to modeling and analyzing audio signals with redundant dictionaries. The goal was to identify and define redundant dictionaries of basis parametric waveforms called atoms (Gabor, chirplets, harmonic molecules . . .) that would be adapted to represent some specific structures of audio signals : transients, steady parts, vibrato, and the harmonic structures of musical notes. To decompose audio signals in these dictionaries, I proposed several variants of the Matching Pursuit algorithm [74, 79]. The analysis of a single channel musical signal with these algorithms made it possible to extract parameters related to the fundamental frequency and duration of the notes, the variations of the instantaneous frequency, as well as the transients, etc. During my postdoc in the Industrial Mathematics Institute (IMI) at the University of South Carolina, I started to study theoretical problems raised by the algorithms I had proposed, with a particular emphasis on convergence issues [84, 73, 75]. I will come back on this story in Chapters 2-3. At the IMI, I began to think about a stereophonic (two channel) version of Matching Pursuit that would allow the separation of sources based on the intensity difference and delay between channels. When Özgür Yılmaz visited the IMI in 2000, I learned he had been following a similar path to come up with the DUET algorithm [102] together with Scott

Rickard and Alexander Jourjine. Well, obviously there can be a huge gap between ideas and their actual implementation ! At the time, my daily (and nightly) obsession, in collaboration with Morten Nielsen, was to prove a Bernstein inequality for nonlinear approximation with redundant dictionaries (see Chapter 2), and I did let my ideas on source separation aside for a while.

It is only when I joined INRIA in 2000 that I eventually began to actively work on blind source separation (BSS), with a special interest for so-called under-determined BSS problems – where the number of channels of the mixture is smaller than the number of sources – such as monophonic or stereophonic musical recordings with at least three instruments playing together. A large part of my contributions to this domain was done in collaboration with Ph.D students, first with Laurent Benaroya, who was preparing his Ph.D. under the supervision of Frédéric Bimbot on single-channel separation, then with Emmanuel Vincent and Cédric Févotte within a joint workgroup funded by GDR ISIS (CNRS) between IRISA, IRCAM and IRCCyN (see Section 1.2), last but not least, in the framework of the Ph.D. of Alexey Ozerov [122], Sylvain Lesage [107], Boris Mailhé and Simon Arberet whose scientific work I co-supervise(d)<sup>1</sup>. The intent of this chapter is to give an overview of these contributions. The interested reader will find in Appendix A –which I wrote for a book on source separation edited by P. Comon and C. Jutten [78]– a more detailed survey (in French) of how sparse models and sparse approximation algorithms can be used to tackle the blind audio source separation problem. The main notions and notations relevant to source separation are detailed in this Appendix.

## 1.2 Evaluation of audio source separation algorithms

Soon after starting to work on the BSS problem, I realized that there were few agreed-upon objective criteria and few available datasets to evaluate and compare the quality of the output of source separation algorithms. Because the success or failure of an algorithm for a practical task such as BSS cannot be assessed without agreed upon, pre-specified objective criteria, I have lead a workgroup [4] which goal was to “identify common denominators specific to the different problems related to audio source separation, in order to propose a toolbox of numerical criteria and test signals of calibrated difficulty suited for assessing the performance of existing and future algorithms”. Our workgroup has released online a prototype of a database of test signals together with the evaluation toolbox BSS\_EVAL [24].

### 1.2.1 Performance measures

In [80, 158], we proposed several measures of distortion that take into account the intrinsic gain and filtering indeterminacies of BSS algorithms : with no prior information on the sources or the mixing system, the sources can at best be estimated up to a arbitrary gain (for linear instantaneous mixtures) or an arbitrary filter (for convolutive mixtures). For each estimated source, the total distortion consists of *interference* from the other sources

---

<sup>1</sup>Thesis director : Frédéric Bimbot.

as well as background *noise* and algorithmic *artifacts* (« musical noise »). We defined performance criteria that measure separately these contributions, namely the SIR (Source to Interferences Ratio), SNR (Sources to Noise Ratio) and SAR (Sources to Artefacts Ratio). In the case where the sources are estimated from an under-determined multichannel mixture signal by applying a demixing matrix, we proved that there are upper bounds on the achievable SIR, and proposed these bounds as benchmarks to assess how well a (linear or nonlinear) BSS algorithm performs on a given mixture signal. We demonstrated on examples how to use these figures of merit to evaluate and compare the performance of BSS algorithms. A recent study [58] showed good correlation of these performance measures with human perception of similarity between the reference sources and the estimated ones. These measures and the corresponding toolbox BSS\_EVAL have been used in several evaluation campaigns on audio source separation at the occasion of international conferences<sup>2</sup>.

### 1.2.2 Oracle source separation estimators

Source separation of under-determined and/or convolutive mixtures is a difficult problem that has been addressed by many algorithms, which may include parametric source models, mixing models, linear or nonlinear separation systems, etc. Their separation performance is usually limited by several factors, including badly designed source models or local maxima of the function to be optimized. But also, performance may be limited by constraints on the function used to estimate the source signals, such as the length of the demixing filters or the number of frequency bins of the time-frequency masks. The best possible source signals that can be estimated under these constraints (in the ideal case where source models and optimization algorithms are perfect) are called oracle estimates of the sources. Their actual computation, when possible, always requires the availability of the reference source signals. In order to study the performance of some families of source separation algorithms in an evaluation framework where reference sources are available, Emmanuel Vincent and I expressed and implemented oracle estimators for two classes of algorithms (stationary filtering separation algorithms and time-frequency masking separation algorithms) and studied their performance on a few audio mixture examples [156, 157], leading to two different kinds of conclusions. Firstly, we confirmed and extended the results of previous performance studies based on other types of estimators, such as blind algorithms or near-optimal estimators. In particular, we showed that convolutive mixing with reverberation time  $RT = 250$  ms can decrease the maximal performance of stationary filtering on determined mixtures by up to 20 dB compared to anechoic mixing, and that the best window length for single-channel time-frequency masking equals about 55 ms for speech and 190 ms for music. Secondly, we reported a few results markedly different from those of previous studies. For instance, we proved that taking into account two active sources per time-frequency point in generalized time-frequency masking actually increases the oracle performance on reverberant mixtures by 7 dB compared to only allowing a single active source, provided the window length is large enough. We also showed that, even in case of source movements, separating filters of about a thousand taps remain preferable to

<sup>2</sup>MLSP 2005 and 2006 Data Analysis Competition (Problem 1) <http://mlsp2006.conwiz.dk/> and Stereo Audio Source Separation Evaluation Campaign <http://sassec.gforge.inria.fr> at ICA 2007.

shorter filters for the separation of reverberant mixtures. Comparison of the estimators showed that oracle generalized time-frequency masking with a free number of active sources per time-frequency point outperformed both stationary filtering and binary masking (with one active source per point) on determined and under-determined convolutive mixtures, by at least 4 dB and 8 dB respectively. This suggests that performance advances in blind source separation may be possible by developing generalized masking algorithms relaxing the common assumption of a single active source per time-frequency point. The main difficulty is to determine blindly which sources are active at a given time-frequency point. The approaches that I describe further in this chapter can provide relevant information to perform this decoding, for example with the help of prior statistical models on the sources (e.g., sparse models of Gaussian Mixture Models).

### 1.3 Multichannel separation by sparse decomposition

Traditionally, the blind source separation problem is approached in two steps : a first step consists in estimating the parameters of the mixing system, which in the simplest model of a linear instantaneous mixture coincides with a mixing matrix ; the second step is the estimation of the sources by "inversion" of the mixing system. In the under-determined case, this inversion is not directly possible and can be seen as an ill-posed inverse problem. The traditional approach to BSS exploits the so-called *spatial diversity* between the sources, which in the linear instantaneous stereophonic case means that each source is characterized by a specific intensity difference between channels.

#### 1.3.1 Identification of a mixing matrix

The estimation of the mixing system is a delicate problem, in particular when the number of mixed sources is unknown or when they are mixed in reverberant conditions, which leads to a convolutive mixing system. In the framework of Simon Arberet's Ph.D., we used simple source models (typically Gaussian Mixture Models in a time-frequency domain) to build robust methods which estimate the number of sources and the corresponding mixing matrix in increasingly realistic contexts : first for linear instantaneous mixtures [7], which accurately model audio recordings mixed using a mixing table, then for anechoic mixtures [8], which take into account possible delays between channels and can model natural acoustic mixing in the open air or in rooms with a low level of reverberation.

The methods are based on multiple scales Short Time Fourier Transforms (STFT), and rely on the assumption that at some (unknown) scales and time-frequency points, only one source contributes to the mixture. Such points provide estimates of the corresponding intensity and/or phase difference between channels, which are related to the source direction. Our main contribution was a new method to detect points where this assumption is valid, along with a confidence measure. We also proposed a new clustering algorithm called DEMIX to estimate the number of sources and their directions. In contrast to DUET or other similar sparsity-based algorithms, which rely on a global scatter plot, our algorithm exploits the new confidence measure to weight the influence of each time-frequency point in the estimated directions. The proposed DEMIX algorithm is inspired from work by Yannick Deville [130, 50], based on a confidence measure that reflects the level of persistence

of the activity/inactivity of each source in local time-frequency regions. We assessed the accuracy of DEMIX to count the sources and estimate the mixing directions on stereophonic mixtures and compared it to several algorithms. In addition to the fact that DEMIX is, to our knowledge, the only algorithm that can count the number of sources, our experiments showed that it provides more accurate source direction estimates than all the algorithms we compared it to, including the technique used in the DUET algorithm. In particular, we observed that a crucial improvement was obtained by using the local confidence measure instead of the raw energy to weight the direction estimated in each time-frequency region.

### 1.3.2 Separation by sparse decomposition, given the mixing matrix

When at least two sensors are available, I proposed several separation algorithms [76, 77, 94] for the "inversion" step, which are based on sparse decomposition of the mixture into multichannel atoms. These algorithms fit into a general framework that I formalized for degenerate blind source separation (BSS), which consists in finding a joint decomposition of the mixtures so that the number of "active" sources on each component of the decomposition does not exceed the number of mixtures. The choice of the appropriate decomposition is equivalent to the choice of a signal dictionary and a sparse approximation algorithm, and I will come back in Section 1.3.3 on some aspects of this issue. More generally, the algorithms I proposed can be used to decompose and analyze multichannel signals such as color images, where the red / green / blue channels have correlated content. Besides a theoretical analysis of the properties of these algorithms [94, 96, 83], I investigated variants of these algorithms with Sylvain Lesage and compared them with reference algorithms for degenerate mixtures [109, 110]. One of the approaches is based on joint sparse decomposition of all channels of the mixture by Matching Pursuit, followed by separation in the sparse domain using the mixing matrix ; the other approach, called *Demixing Pursuit*, includes the knowledge of the mixing matrix in the decomposition process.

All the above methods performed similarly to DUET [160] and Bofill-Zibulevski's algorithm [20], two reference methods, for source separation of audio data. However the second method we considered is directly transposable to convolutive mixtures if the mixing filters are known, which is a work in progress. Moreover, Sylvain Lesage's Ph.D. thesis investigated the possibility of using adapted dictionaries (learnt from training data) for these methods instead of analytically designed atoms (such as Gabor atoms), showing the potential of the approach and the difficulties which remain. Last but not least, together with Sacha Krstulovic, I initiated a software project (The Matching Pursuit ToolKit) [105, 82] which aim is to provide a portable, flexible and efficient implementation of several variants of Matching Pursuit including Demixing Pursuit, allowing large scale deployment of these algorithms for real-world data (see also Chapter A and Section 3.3.1).

### 1.3.3 Dictionary design

The dictionary learning problem, which consists in inferring from training data which "typical" waveforms should be gathered to build a dictionary in which the sources admit sparse representations, is somehow dual to the mixing matrix identification problem. Both problems are related to vector quantizing. The main difference between these dual problems



is their dimension : for stereophonic audio data, estimating a mixing matrix consists in estimating its columns, that is to say a few two-dimensional real-valued vectors ; in contrast, the typical waveforms which should be learned and gathered in a dictionary are rather vectors of a few hundred to a few thousand samples. While it is reasonable to estimate a mixing matrices from a small dataset, learning a dictionary intrinsically requires much more training data and poses the problem of the statistical significance of the resulting dictionary.

I contributed to a huge body of theoretical work –which I will describe further in Chapter 3– showing that  $\ell^1$ -minimization or Matching Pursuit techniques can recover highly sparse representations of signals from incoherent redundant dictionaries, or structured (rather than sparse) representations from structured dictionaries such as unions of orthonormal bases. To exploit these results, we started a research project dedicated to the design of structured dictionaries, in the framework of Sylvain Lesage’s Ph.D. [107].

Imposing structural constraints to the dictionary is the answer to several complementary needs. First, given the large number of parameters of each waveform of the dictionary, learning unstructured dictionaries is an ill-posed statistical problem where the number of free parameters could easily exceed the size of the training set. Then, the very nature of the data on which learning is performed imposes some invariance structures to the dictionary : for example, time series are often acquired through some sensor which is not synchronized with the physical phenomena underlying the data (e.g., note onsets in musical data), hence the dictionary must display some sort of temporal shift invariance ; similarly for images one would need to incorporate spatial translation and rotation invariance. State-of-the-art dictionary learning methods which do not incorporate these invariances waste a lot of computational and modeling resources to learn several occurrences of approximately the same few patterns at different orientations or positions, which contributes to limiting the size of dictionary they can learn. To the opposite, the approach introduced in Sylvain Lesage’s Ph.D. using so-called elementary *motifs* [101, 107] allowed us to learn structured dictionaries of much larger dimension without excessively increasing their number of parameters.

More recently, in the framework of Boris Mailhé’s Ph.D. which I co-supervise together with Pierre Vandergheynst from EPFL, we started investigating how to extend these techniques to learn dictionaries of multimodal (e.g., audio-video) and / or multichannel atoms [119, 120].

## 1.4 Single-channel source separation

In the multichannel setting, the difference in spatial location of the sources makes it possible to discriminate between them based on their respective time-difference or intensity-difference between channels. This is usually referred to as the use of *spatial diversity*. Together with Frederic Bimbot and Laurent Benaroya, as well as later in the Ph.D. of Alexey Ozerov and Sylvain Lesage, we looked at the problem of separating audio sources from only one mixture, which is a problem apparented to signal denoising. The single-channel source separation problem is particularly difficult since such spatial information is not available. In this context, other clues must be used to discriminate between sources, which requires stronger source models. In his Ph.D. thesis, Laurent Benaroya [11], who was supervised by Frédéric Bimbot, proposed several approaches based on different mo-

dels of the "morphological" diversity between sources, in the sense that different sources display temporal or spectral patterns of only a few typical shapes. This is similar in spirit to the notion of Morphological Component Analysis proposed by Jean-Luc Starck *et al* [141].

#### 1.4.1 "Morphological" source diversity through sparsity ?

We first proposed [14] a strategy based on sparse representation of the mixture in a union of incoherent bases, assuming that each source has a sparse representation in one of the bases but not in the other. When the problem is to separate, *e.g.*, transient sounds (drums, attack of a note) from stationary ones (violin, resonance of a note), it is indeed reasonable to assume that one can find two significantly different bases to provide sparse representations of the two sources. Then, the theoretical results on the recovery of sparse representations from incoherent bases (see Chapter 3) predict that separation is possible, which is actually observed on simple artificial examples or very specific audio data such as the *glockenspiel* sound from the EBU Sound Quality Assessment Material [45] using a time-frequency basis with a short window size to represent the transient part of the sound and a time-frequency basis with a long window size for the steady part. A pitfall of such an approach is the need to know in advance a pair of incoherent bases adapted to the mixed sources. While any generic time-frequency basis generally provides sparse representations of most audio sources, taking two time-frequency bases corresponding to two window sizes does not allow much more than the separation of short audio events from longer ones, as in the *glockenspiel* data.

Using the structured dictionary learning approach, Sylvain Lesage and I [107] made further experiments with this approach and extended it to the multichannel case, where it is possible to exploit simultaneously the spatial diversity and the morphological diversity between the sources. Even if the resulting techniques can perform source separation, several difficulties seem to limit their direct applicability and require further investigation. The main difficulty is naturally that the dictionaries learned for different sources might not differ enough, but an additional challenge comes from the variability of the morphology of each source between the training data – which is used to learn a representative structured dictionary – and the test data where the sources are mixed and should be separated.

#### 1.4.2 Gaussian Mixture Models

In [12, 15, 13] we proposed a two stage probabilistic approach for single channel source separation. During a learning stage, a (complex circular) Gaussian Mixture Model of the Short Time Fourier Transform coefficients of each source is estimated on training samples consisting of this source only. During the separation phase, for a given mixture signal, the models are first used to compute adaptive Wiener filters, corresponding to non-binary time-frequency masks. The masks are eventually applied to the mixture signal in order to recover estimates of the sources.

This approach turned out to be much more successful and robust than the one purely based on sparsity. However, if the results are very satisfying when the source models are trained on data very similar to the sources to be separated, performance degrades significantly in the more realistic situation where the models are learned on more "generic" audio

data. During Alexey Ozerov's Ph.D. [122], we considered the problem of *adapting* generic models using the observed mixture. We proposed to combine several techniques that learn models from incomplete data (the mixture) with Maximum A Posteriori adaptation techniques. This allowed us to define a tradeoff between the use of generic models of the sources –learned on large databases which diverse typical spectral shapes are well represented by the models, but with the risk of being poorly representative of the sources to be separated – and that of models completely trained on the mixture itself – which incur a heavy risk of overfitting due to the limited availability of relevant training data.

In [123, 124] we applied these techniques to the problem of singing voice extraction in single-channel musical recordings. Assuming that the processed recording is segmented into vocal and non-vocal parts, the music model is learned on the non-vocal parts and the general voice model is adapted on the vocal parts. For voice model adaptation we introduced two constrained adaptation techniques : filter adaptation and Power Spectral Density (PSD) gains adaptation. Joint filter and PSD gains adaptation gave the best performance. Finally, we showed that the singing voice extraction system can also be used for singing voice pitch estimation in polyphonic music.

## 1.5 Conclusion and perspectives

Be it in the single-channel case or the multi-channel one, my contributions to blind source separation rely on the assumption that the different sources have essentially disjoint time-frequency representations. Under this assumption, it is sufficient to identify proper time-frequency masks to recover the separated sources. The main issue becomes to determine these masks, which is essentially a clustering problem. The separation of multichannel linear instantaneous mixtures of possibly more sources than mixtures is now essentially solved, using the difference in spatial location of the sources as a clue to distinguish between different clusters. However, many real-world audio mixtures cannot be separated with these techniques, since they combine one or several difficulties : the mixture might be reverberant ; some sources might not spatially well-localized ; two or more sources might be in the same spatial direction ; some sources might be moving, etc.

**From time-frequency masking to multimodal clustering problems.** For example, in the difficult setting of single channel mixtures, it is no longer possible to simply exploit the value of the mixture at a given time-frequency point to estimate the activity level of each source at this point ; other clues must therefore be used to determine which time-frequency components correspond to which source. Relying on more structured models of the sources makes it possible to exploit the values of the mixture in a whole time-frequency neighborhood (e.g., a whole time frame for Gaussian Mixture Models) of the considered point.

Thanks to the oracle estimators that we proposed with Emmanuel Vincent [157], it is possible to check that time-frequency masking can in principle remain a viable tool in even more difficult and realistic settings, provided that the contributions of the different sources to each microphone have disjoint time-frequency supports. Examples of this difficult settings include mobile audio sources moving in a reverberant room, even if the sources emit

sound from spatially non-localized regions (e.g., a piano which has a large size compared to a flute) and / or with non omnidirectional directivity patterns which may vary with frequency. Even though it is theoretically possible to separate such sources by time-frequency masking, it remains a real challenge to figure out which clues actually provide enough information to "blindly" cluster time-frequency points.

In the context of audiovisual convolutive source separation, visual clues [134] can efficiently complement audio clues with this purpose. More generally, when an audiovisual scene such as a meeting with several speakers is recorded using multiple cameras and microphones, some basic clues such as synchronous temporal activities or similar spatial locations can indeed relate the contributions of a single source to the different sensors. In a sense, these clues open the possibility of propagating a flow of information between modalities : for example, if a model of the voice of a speaker is available –which relates the audio content to the identity of the speaker–, the audio content can be used to locate video patches where the speaker’s face is visible, making it possible to train a statistical model of this face. Vice-versa, visual information such as the 3D-location of a speaker –which can be reconstructed from multiple cameras– could be used to help separate the sound of the voice of the speaker from disturbing sounds produced at other spatial locations. Exploiting the full fledge of this flow of information will require new multimodal statistical models which merge spatial diversity, morphological diversity and visual information. In practical settings such as ad-hoc networks of laptops equipped with a camera and a stereophonic microphone, additional challenges are raised by the fact that the geometry of the network (the laptops positions and orientations) is not known a priori, and the sensors need to be synchronized.

**Connections between sparse source separation and learning theory.** Sparse signal models express a signal as a sparse linear combination of basic building blocks taken from a signal dictionary which, in the specific context of source separation, is the unknown mixing system. Choosing the appropriate dictionary to model a class of data is currently between an art and expert knowledge, but the dictionary design problem is becoming a crucial problem when new types of data are to be analyzed, such as new brain imaging modalities, astrophysical observation data, etc. In this context, it becomes crucial to develop and understand dictionary learning algorithms, which build a signal dictionary from a set of training data. The neural network and independent component analysis communities have proposed algorithms [113] with this particular purpose, which somehow generalize standard clustering algorithms such as K-means. However, the theoretical behaviour of these algorithms remains to be fully understood and their computational complexity makes it difficult to apply them to large size problems.

Another difficulty lies in the structural constraints that one may want to enforce in the dictionary, such as group invariances that reflect the invariances of the class of signal of interest (scale or shift invariance for example). This area of research is essentially a vast unexplored land which exploration can help "industrialize" the use of sparse models for new data classes. Even though I proposed a few algorithms to learn structured dictionaries [101, 108, 119, 120, 107], these are certainly not definitive answers. Many questions remain open, the main one being to understand mild enough conditions which guarantee the identifiability of a dictionary in the presence of noise, beyond the theoretical results of

Mikael Elad [5] for noiseless models.

Last, but not least, dictionary learning is deeply related with data mining problems since it can help uncover the underlying structure of a given class of data. Formal connections have been established between sparse models and statistical learning through kernel methods and support vector machines [70], which show that the choice of a dictionary is equivalent to the choice of a kernel function to build classifiers. I believe that much can be gained by exploring further this analogy, for example by examining what would be the equivalent of dictionary learning : data-adaptive kernel selection.

---

## Chapitre 2

# Sparse approximation with redundant dictionaries

In contrast to the algorithmic and applied approach to nonlinear approximation I had developed with Stéphane Mallat and Emmanuel Bacry at Ecole Polytechnique during my Ph.D thesis, I developed a research program on rather theoretical aspects of signal processing when I joined the Industrial Mathematics Institute of the University of South Carolina as a post-doctoral fellow in the years 1999-2000. The intense year I spent there was the occasion to study several mathematical problems, some of which were raised by the observed behavior of algorithms I had introduced in my Ph.D. It turned out that the IMI was the ideal place to discover and explore the fundamental questions and tools of approximation theory. This year was also a unique chance to meet a number of characters (Ron DeVore, Vladimir Temlyakov, Pensho Petrushev and Morten Nielsen, just to name a few ...) who certainly had as much influence as Stéphane and Emmanuel on the research subjects I later chose to study and the way I tackled them. Since this year in South Carolina, I have been pursuing together with Morten Nielsen of the Dept. of Math. Sciences at the University of Aalborg an ongoing research program dedicated to  $m$ -term approximation with redundant dictionaries in Hilbert spaces or more generally in Banach spaces. The goal of this research program was to understand the structure of the spaces of functions that can be approximated at a given "rate" by  $m$ -term expansions using various families of practical or theoretical approximation algorithms. This chapter intends to set the landscape and the main landmarks of this part of my work.

### 2.1 Introduction

In signal processing (seen as a discipline at large which includes image and video processing) a signal  $x$ , be it analog or digital, can be seen as an element of some linear space  $\mathcal{H}$ . For example, a finite length digital signal, which corresponds to a set of  $N$  scalar values, can be identified with a vector in  $\mathbb{R}^N$ , while in Shannon sampling theory the considered analog signals belong to the space of band-limited functions.

For many signal processing applications, it is often desirable to replace a given signal  $x \in \mathcal{H}$  with an alternate "simpler" signal  $\hat{x}$ . This is particularly important if the original signal space  $\mathcal{H}$  is high-dimensional (or even infinite dimensional), in which case replacing  $x$  with an approximation  $\hat{x}$  can significantly decrease the cost of processing / transmitting / storing it, provided that the approximation can be described with only a small number  $m$  of free scalar parameters. In practice, for signal coding, one cannot even handle free scalar parameters, but quantization is also needed to get an approximation with *few bits* rather than *few parameters*. The signal coding problem raises the question of characterizing how well  $x$  can be *approximated* with a simpler signal  $\hat{x}$  given a constraint on the "complexity"  $m$  of the description of the latter.

Approximation theory formalizes this problem by considering a family of nested subsets

$$X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_m \subset \dots \subset \mathcal{H}$$

of simple signals and defining for each input signal  $x$ , the error of best approximation as

$$\sigma_m(x) := \inf_{\hat{x} \in X_m} d(x, \hat{x}) \quad (2.1)$$

where  $d(\cdot, \cdot)$  is a measure of the distortion between two signals : the larger  $d(x, \hat{x})$ , the worse the quality of the approximation ; the distortion can be zero only if the two signals coincide. Commonly, one considers as distortion measure a norm  $d(x, \hat{x}) = \|\hat{x} - x\|$  on the space  $\mathcal{H}$ . Since the approximating sets  $X_m$  are nested, the error of best approximation decays with  $m$  :

$$\sigma_1(x) \geq \sigma_2(x) \geq \dots \geq \sigma_m(x)$$

It is generally assumed that the union  $\cup_{m \geq 0} X_m$  is dense in  $\mathcal{H}$  with respect to the distortion measure, which means that for any input signal  $x$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m(x) = 0$ .

If an input signal is "simple", that is to say if there is some integer  $m$  such that  $x \in X_m$ , then  $\sigma_m(x) = 0$ . Conversely, if  $\sigma_m(x) = 0$  for some integer  $m$ , then  $x \in X_m$  is a simple signal<sup>1</sup>. The smallest integer  $m$  such that  $\sigma_m(x) = 0$  characterizes the complexity of  $x$ . More generally, a central goal in approximation theory is to relate the speed at which the best approximation error  $\sigma_m(x)$  decays to zero for large  $m$  with properties of the input signal which generalize the notion of "complexity" of its description.

Approximation spaces<sup>2</sup> specify a precise notion of speed of convergence of the best approximation error to zero, by comparing it to polynomial rates of convergence  $m^{-\alpha}$ . A signal  $x$  belongs to the approximation space  $\mathcal{A}_\infty^\alpha$  if there exists a constant  $C < \infty$  such that  $\sigma_m(x) \leq Cm^{-\alpha}$  for all  $m$ . The smallest admissible constant  $C$  is given by

$$|x|_{\mathcal{A}_\infty^\alpha} := \sup_{m \geq 1} m^\alpha \sigma_m(x),$$

and  $\|x\|_{\mathcal{A}_\infty^\alpha} := \|x\| + |x|_{\mathcal{A}_\infty^\alpha}$  defines a (quasi)norm on  $\mathcal{A}_\infty^\alpha$ . More subtle approximation spaces  $\mathcal{A}_q^\alpha$  equipped with the (quasi)norm  $\|x\|_{\mathcal{A}_q^\alpha} := \|x\| + |x|_{\mathcal{A}_q^\alpha}$  are similarly defined for

<sup>1</sup>Formally, one must assume that  $X_m$  is closed with respect to the metrics induced by the distortion measure.

<sup>2</sup>Note that approximation "spaces" are not always *linear* spaces since they may not be stable by summation.

$0 < q < \infty$  as the sets of signals  $x$  such that

$$|x|_{\mathcal{A}_q^\alpha} := \left( \sum_{m \geq 1} [m^\alpha \sigma_m(x)]^q \frac{1}{m} \right)^{1/q} < \infty.$$

The central goal of approximation theory becomes to find alternate characterization of approximation spaces in terms of well-known or more directly described spaces of signals. The main tools to address this goal are the theory of interpolation of function spaces, and the so-called Jackson and Bernstein inequalities. Before introducing them formally, it is better to consider a simple yet instructive example.

## 2.2 Example : approximation with an orthonormal basis

Suppose that we are given an orthonormal basis  $\Phi = [\varphi_k]$  of a Hilbert space  $\mathcal{H}$ . This is a special case of the notion of *dictionary* for this space, and the elements  $\varphi_k$  of the basis will be called *atoms*. Each signal  $x$  admits a representation as the (possibly infinite) sum  $x = \sum_k \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k$  where  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denotes the inner product between two signals. In *nonlinear approximation*, a signal  $\hat{x}$  has complexity  $m$  if it is a linear combination of  $m$  arbitrary atoms from the basis, yielding the definition

$$X_m(\Phi) := \left\{ \hat{x} = \sum_{k \in I_m} c_k \varphi_k, c_k \in \mathbb{R}, \#I_m \leq m \right\} \quad (2.2)$$

with  $\#I$  the cardinality of an index set  $I$ . Since the basis  $\Phi$  is orthonormal, an optimal approximation of  $x$  from  $X_m(\Phi)$  can easily be computed using the so-called *greedy algorithm*, or *thresholding algorithm*, which determines a set  $I_m(x)$  with  $m$  indexes associated to the largest absolute inner products

$$\min_{k \in I_m(x)} |\langle x, \varphi_k \rangle| \geq \sup_{k \notin I_m(x)} |\langle x, \varphi_k \rangle|.$$

and builds the approximant as  $\hat{x} = \sum_{k \in I_m(x)} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k$ . It yields the best approximation error  $\sigma_m(x, \Phi) = \sqrt{\sum_{k \notin I_m(x)} |\langle x, \varphi_k \rangle|^2}$ .

In this setting, Stechkin, DeVore and Temlyakov have derived a nice characterization of the approximation spaces.

**Theorem 1 ([142, 35])** *If  $\Phi$  is an orthonormal basis in a Hilbert space  $\mathcal{H}$ , then for any  $\alpha > 0$  and  $0 < q \leq \infty$ , we have the identity*

$$\mathcal{A}_q^\alpha(\Phi) = \left\{ x, \|\langle x, \varphi_k \rangle\|_{\ell_q^\tau} < \infty \right\} \quad (2.3)$$

where  $\|\cdot\|_{\ell_q^\tau}$  is the Lorentz (quasi)norm (see e.g. [36]) and  $0 < \tau = (\alpha + 1/2)^{-1} < 2$ . Moreover, the (quasi)norm  $\|x\|_{\mathcal{A}_q^\alpha(\Phi)}$  is equivalent to  $\|\langle x, \varphi_k \rangle\|_{\ell_q^\tau}$ .



For  $q = \tau = (\alpha + 1/2)^{-1}$ , the Lorentz space  $\ell_\tau^\tau$  is simply the standard  $\ell^\tau$ -space, and we get the spectacularly simple characterization

$$x \in \mathcal{A}_\tau^\alpha(\Phi) \Leftrightarrow \sum_k |\langle x, \varphi_k \rangle|^\tau < \infty$$

which shows that the *sparsity of the coefficients*  $\langle x, \varphi_k \rangle$ , measured by their  $\ell^\tau$  norm, completely characterizes the decay of the best approximation error.

Extending this result to more general dictionaries, including non-orthogonal bases, redundant dictionaries, and general Banach spaces, was the central goal of the research project I started with Morten Nielsen in South Carolina. There, under the impulsion of Ron DeVore and in interaction with Vladimir Temlyakov, Pensho Petrushev, Bob Sharpley, I learned the basics of approximation theory and its connections to the theory of the interpolation of function spaces, using Jackson and Bernstein inequalities, and so will you dear reader if you dare. Don't be afraid, I will hide the gory details with a prude blanket.

## 2.3 Jackson and Bernstein inequalities

Consider two continuously embedded spaces  $Y \hookrightarrow \mathcal{H}$  equipped with (quasi)norms  $|\cdot|_Y$  and  $\|\cdot\|$ , where the notation  $\hookrightarrow$  means that  $Y \subset \mathcal{H}$  and  $|\cdot|_Y \geq C\|\cdot\|$  for some constant  $C > 0$ , or in short  $|\cdot|_Y \gtrsim \|\cdot\|$ . Given  $\alpha > 0$ , the Jackson inequality and the Bernstein inequality

$$\sigma_m(x) \leq Cm^{-\alpha} \cdot |x|_Y, \forall x \in Y, \forall m \geq 0 \quad (2.4)$$

$$|\hat{x}|_Y \leq C'm^\alpha \cdot \|\hat{x}\|, \forall \hat{x} \in X_m \quad (2.5)$$

(with some constants  $C, C'$  independent of  $x, \hat{x}$  and  $m$ ) imply [36], respectively, the continuous embedding

$$(\mathcal{H}, Y)_{\theta, q} \hookrightarrow \mathcal{A}_q^{\theta\alpha} \quad (2.6)$$

$$(\mathcal{H}, Y)_{\theta, q} \hookleftarrow \mathcal{A}_q^{\theta\alpha} \quad (2.7)$$

for all  $0 < \theta < 1$  and  $0 < q \leq \infty$ . Defining real interpolation spaces  $(\mathcal{H}, Y)_{\theta, q}$  [17, 16] would reach far beyond the scope of this manuscript, but an operational point of view will turn out to be sufficient for our needs : if  $f$  is a continuous linear function from  $X_1$  to  $X_2$  and from  $Y_1$  to  $Y_2$ , then it is also a continuous linear function from  $(X_1, Y_1)_{\theta, q}$  to  $(X_2, Y_2)_{\theta, q}$ , for every pair  $\theta, q$ .

Characterizing the approximation spaces becomes a matter of identifying a good candidate space  $Y$ , proving Jackson and Bernstein inequalities ... and characterizing the interpolation space  $(\mathcal{H}, Y)_{\theta, q}$ . At first sight, characterizing  $\mathcal{A}_q^{\theta\alpha}$  as an interpolation space  $(\mathcal{H}, Y)_{\theta, q}$  might not seem such a pleasant perspective since, after all, this is just another even more abstract space. The good news is that there are pairs  $\mathcal{H}, Y$  for which the interpolation spaces are perfectly known. In particular ... Lorentz spaces are stable by interpolation and satisfy the identity  $(\ell_{q_1}^{\tau_1}, \ell_{q_2}^{\tau_2})_{\theta, q} = \ell_q^\tau$  with  $\tau^{-1} = (1 - \theta)\tau_1^{-1} + \theta\tau_2^{-1}$ .

In the case of an orthonormal basis, the space  $Y := \{x, |x|_Y < \infty\}$  with  $|x|_Y := (\sum_k |\langle x, \varphi_k \rangle|^\tau)^{1/\tau}$ , which is isometric to  $\ell^\tau$ , is therefore a perfect candidate, and proving the Jackson and Bernstein inequalities is a reasonably difficult task.

With general dictionaries, Jackson inequalities are relatively straightforward to obtain for natural extensions of  $Y$ , but Bernstein inequalities have been a much harder byte and still raise many questions.

## 2.4 Approximation with general redundant dictionaries

I contributed [85] to the extension [37, 103] of Theorem 1 to other (non-orthogonal) bases  $\Phi$  in more general Banach spaces  $\mathcal{H}$ . In addition, I characterized [85] the space of functions that can be approximated at a given rate by the greedy algorithm in so-called quasi-greedy and democratic Schauder bases.

With more general *redundant* dictionaries, additional facts made the generalization task more complex :

1. each input signal  $x$  has infinitely many possible representations  $x = \sum_k c_k \varphi_k$  ;  
This first fact suggested to adapt the definition of the candidate space  $Y$  before even trying to prove any inequality.
2. finding an optimal approximation of an arbitrary input signal from  $X_m(\Phi)$  is NP-hard [121, 34] ;  
This second fact lead us to consider *several approximation spaces* corresponding to different families of  $m$ -term approximation algorithms (see also Chapter 3).

### 2.4.1 Sparsity spaces

When  $\Phi$  is a basis of the signal space  $\mathcal{H}$ , each input signal  $x$  is indeed uniquely associated to a coefficient sequence  $\mathbf{c}(x) = \{c_k(x)\}$  such that  $x = \Phi \cdot \mathbf{c}(x) = \sum_k c_k(x) \varphi_k$  (with a proper definition of the possibly infinite sum). Therefore the (quasi)norms  $\|x\|_{\ell_q^\tau(\Phi)} := \|\mathbf{c}(x)\|_{\ell_q^\tau}$  are perfectly well defined, and so are the spaces  $\ell_q^\tau(\Phi)$  of signals for which  $\|x\|_{\ell_q^\tau(\Phi)}$  is finite.

When  $\Phi$  is a redundant dictionary, there is generally an infinite number of possible representations of each input signal, so DeVore and Temlyakov [44] proposed to adapt the definition of the (quasi)norm  $\|\cdot\|_{\ell_q^\tau(\Phi)}$  and the spaces  $\ell_q^\tau(\Phi)$  for arbitrary dictionaries. While their general definition is somehow involved, I identified in [90] a property of the dictionary  $\Phi$  which implies much simpler expressions of these quantities

$$\ell_q^\tau(\Phi) := \{\Phi \cdot \mathbf{c}, \mathbf{c} \in \ell_q^\tau\} \quad (2.8)$$

$$\|x\|_{\ell_q^\tau(\Phi)} := \min_{\mathbf{c}|x=\Phi \cdot \mathbf{c}} \|\mathbf{c}\|_{\ell_q^\tau} \quad (2.9)$$

where there is at least one representation  $\mathbf{c}_{\ell_q^\tau}(x)$  which achieves the minimum<sup>3</sup> in Eq. (2.9). The crucial property is that there must exist two constants  $C < \infty$  and  $p > 1$  such that, for every finite index set  $I$  and every choice of signs we must have

$$\left\| \sum_{k \in I} \pm \varphi_k \right\| \leq C(\#I)^{1/p}. \quad (2.10)$$

<sup>3</sup>I will discuss in the next chapter another branch of my work which analyzes whether  $\mathbf{c}_{\ell_q^\tau}(x)$  depends on  $\tau$  or not.

Dictionaries that satisfy this property are said to be  $\ell_1^p$ -Hilbertian, and we will see that they necessarily satisfy Jackson inequalities with  $Y = \ell^\tau(\Phi)$  and  $\alpha = 1/\tau - 1/p$ . For example, when  $\Phi$  is a frame [29] in a Hilbert space, it is  $\ell_1^2$ -Hilbertian and satisfies a Jackson inequality with  $\alpha = 1/\tau - 1/2$ , which gives one half of the extension of Theorem 1 from orthonormal bases to arbitrary frames. Unfortunately, the other half, related to a Bernstein inequality, will prove to be much more difficult to generalize.

The space  $\ell_q^\tau(\Phi)$  is made of signals which admit a *sparse* representation, with sparsity measured by the  $\ell_q^\tau$  norm. The extreme case of a sparse representation is a sequence  $\mathbf{c}$  with finitely many nonzero coefficients, and by convention the  $\ell^0$  "norm"  $\|\mathbf{c}\|_0$  measures the number of nonzero elements of such a sequence. The  $\ell^1$  norm is another popular measure of sparsity, which is minimized by algorithms of the Basis Pursuit family [28]. In finite dimension  $N$ , a representation of minimum  $\ell^1$  norm of a signal  $x$  from a redundant dictionary  $\Phi$  has the nice property that it has at most  $N$  nonzerocomponents [104]. On the contrary, the minimum  $\ell^2$  norm representation generically has as many nonzero components as the number of atoms in the dictionary, hence the  $\ell^2$  norm is generally not considered as a measure of sparsity. As a rule of thumb, the smaller the  $\tau$ , the smaller the space  $\ell_q^\tau(\Phi)$ , and the sparser the signals in the space. The justification of this rule of thumb is precisely the object of the current investigation, since its goal is to relate the smallest value  $\tau(x)$  such that  $x \in \ell^\tau(\Phi)$  to the largest  $\alpha(x)$  such that  $x$  can be approximated at rate  $m^{-\alpha}$  by "simple" signals  $\hat{x}_m := \Phi \mathbf{c}$  with sparse representations  $\mathbf{c}$  where  $\|\mathbf{c}\|_0 = m$ .

Even though they are redundant, many standard dictionaries are frames of the signal space, and therefore associated with an analysis tool which provides a specific "canonical" representation  $x = \Phi \cdot \mathbf{c}(x)$ . Indeed, for all frames [29], the canonical representation  $\mathbf{c}(x)$  is given by the inner products of the signal with the atoms  $\tilde{\varphi}_k$  of the *canonical dual frame*  $\tilde{\Phi}$ , i.e.  $\mathbf{c}(x) := \tilde{\Phi}^* x = \{\langle x, \tilde{\varphi}_k \rangle\}$ , where  $(\cdot)^*$  denotes the adjoint operator. As an alternative to the sparsity space  $\ell_q^\tau(\Phi)$ —which is defined in terms of the  $\ell_q^\tau$ -sparsity of the  $\ell_q^\tau$ -sparsest representation—one can define a more restricted space and its associated (quasi)norm

$$\tilde{\ell}_q^\tau(\tilde{\Phi}) := \left\{ x, \tilde{\Phi}^* x \in \ell_q^\tau \right\} \quad (2.11)$$

$$\|x\|_{\tilde{\ell}_q^\tau(\tilde{\Phi})} := \|\tilde{\Phi}^* x\|_{\ell_q^\tau}. \quad (2.12)$$

Since the canonical representation is just a specific, not necessarily sparsest representation of  $x$ , the two spaces satisfy the embedding

$$\tilde{\ell}_q^\tau(\tilde{\Phi}) \hookrightarrow \ell_q^\tau(\Phi). \quad (2.13)$$

To distinguish the *names* of the two sparsity spaces,  $\ell_q^\tau(\Phi)$  will sometimes be referred to as a *synthesis* sparsity space while  $\tilde{\ell}_q^\tau(\tilde{\Phi})$  will be referred to as an *analysis* sparsity space, since the first measures the sparsity of optimally sparse synthesis coefficients while the second captures the sparsity of analysis coefficients.

We will see that for so called *localized frames* [97, 98, 99], the analysis and synthesis spaces happen to coincide, i.e., there is an exact converse to the above embedding.

## 2.4.2 Approximation spaces

With an orthonormal basis, an optimal  $m$ -term approximation of an input signal  $x$  is simply given by thresholding its representation  $x = \sum_k \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k$  to keep the  $m$  largest components. With general dictionaries, it is not clear whether and when greedy approximation / thresholding and best  $m$ -term approximation coincide. I proposed in [90] to introduce and study several approximation spaces that correspond to various families of approximation algorithms, which range from essentially theoretical to (almost) practically implementable.

The principle is to consider approximation algorithms as sequences  $\{A_m(\cdot)\}_{m \geq 1}$  which associate to each input signal an  $m$ -term approximant

$$A_m(x) = \Phi_{I_m(x)} \cdot \mathbf{c}_m(x) \in X_m(\Phi)$$

where  $\Phi_I$  denotes the sub-dictionary  $\{\varphi_k\}_{k \in I}$ . An algorithm is therefore determined by the function which maps an input signal to a sequence of index sets  $\{I_m(x)\}$  and the one which maps it to a sequence of coefficients  $\{\mathbf{c}_m(x)\}$ . I describe below the main families of constrained approximation algorithms.

1. **Best  $m$ -term approximation.** For a given index set  $I$ , the best coefficients are defined as

$$\mathbf{c}(x, I) := \arg \min_{\mathbf{c}} \|x - \Phi_I \cdot \mathbf{c}\|, \quad (2.14)$$

yielding the projection  $P_{\Phi_I}(x) := \Phi_I \cdot \mathbf{c}(x, I)$ . For a given  $m$  the best index set is

$$I_m(x) := \arg \min_{I, \#I \leq m} \|x - \Phi_I \cdot \mathbf{c}(x, I)\|. \quad (2.15)$$

When the complexity  $m$  of the approximant varies, there may be no special relation between the selected index, and the best  $(m+1)$ -term approximant of  $x$  may involve completely different atoms with different coefficients compared to the best  $m$ -term approximant. Computing a best  $m$ -term approximant is an NP-hard problem : for a given  $m$ , there seems to be no generic efficient alternative<sup>4</sup> to the exhaustive search over all admissible index sets  $I$  with  $\#I \leq m$  expressed in Eq. (2.15). Moreover, changing the desired complexity  $m$  makes it necessary to start over the search. Approximation spaces corresponding to best  $m$ -term approximation are denoted  $\mathcal{A}_q^\alpha(\Phi)$ .

2. **Chebyshev approximation.** Instead of choosing the index set  $I_m(x)$  independently for each  $m$ , the index set  $I_{m+1}(x)$  can be constrained to extend the previous one  $I_m(x)$ . In other words, the sequence of index sets is characterized by

$$I_m(\pi) := \{\pi(k), 1 \leq k \leq m\} \quad (2.16)$$

where  $\pi$  is an enumeration of (a subset of) the dictionary which is allowed to depend on the input signal  $x$ . The  $m$ -term approximation of  $x$  is given by its projection  $P_{\Phi_{I_m(x)}}(x)$ . A signal  $x$  belongs to the corresponding approximation space  $\mathcal{C}_\infty^\alpha(\Phi)$  if

$$|x|_{\mathcal{C}_\infty^\alpha(\Phi)} := \inf_{\pi} \sup_{m \geq 1} m^\alpha \|x - P_{\Phi_{I_m(\pi)}}(x)\| < \infty \quad (2.17)$$

<sup>4</sup>I will come back in Chapter 3 on conditions which guarantee that more efficient algorithms recover the best  $m$ -term representation of  $x$ .

The spaces  $\mathcal{C}_q^\alpha(\Phi)$ ,  $0 < q < \infty$  are defined similarly. In practice, adaptively selecting the "ideal" enumeration  $\pi_x$  for an input signal  $x$  seems quite difficult and may depend on the considered rate of approximation  $\alpha$ . Several practical algorithms such as Orthonormal Matching Pursuit [125] use various heuristics to construct this enumeration sequentially, hence they can be seen as suboptimal instances of this family of approximation algorithms.

3. **Thresholding approximation.** In addition to the nested structure (see Eq. (2.16)) on the index sets  $I_m(x)$ , the coefficients  $\mathbf{c}_m(x)$  can be constrained to be nested with non increasing entries. Consider  $\mathbf{c} = \{c_k\}$  any coefficient sequence such that  $x = \Phi \cdot \mathbf{c}$ . Given  $\pi_{\mathbf{c}}(\cdot)$  an enumeration such that  $\{|c_{\pi(k)}|\}$  is non-increasing, the index sets are given by  $I_m(\pi_{\mathbf{c}})$  and the coefficients  $\mathbf{c}_m$  by the restriction of  $\mathbf{c}$  to the index set  $I_m(\pi_{\mathbf{c}})$ . The resulting approximants  $A_m(x) := \sum_{k=1}^m c_{\pi(k)} \cdot \varphi_{\pi(k)}$  are therefore thresholded version of a full representation  $x = \sum_k c_k \varphi_k$ . A signal  $x$  belongs to the corresponding approximation space  $\mathcal{T}_q^\alpha(\Phi)$  for  $q = \infty$  if

$$\|x\|_{\mathcal{T}_\infty^\alpha(\Phi)} := \inf_{\mathbf{c}} \sup_{m \geq 1} m^\alpha \|x - \sum_{k=1}^m c_{\pi_{\mathbf{c}}(k)} \cdot \varphi_{\pi_{\mathbf{c}}(k)}\| < \infty \quad (2.18)$$

with straightforward modifications for  $0 < q < \infty$ . Once again, adaptively selecting the "ideal" coefficient sequence  $\mathbf{c}_x$  for an input signal  $x$  is not easy and might depend on  $\alpha$ .

4. **Thresholding of a specific representation.** For frames in Hilbert spaces, the dictionary  $\Phi$  can be associated to an analysis dictionary  $\tilde{\Phi}$  which provides a "canonical" representation  $\mathbf{c}(x) := \tilde{\Phi}^* x$ . Therefore restricted, more concrete, versions  $\tilde{\mathcal{T}}_q^\alpha(\Phi, \tilde{\Phi})$  of the thresholding approximation spaces can be defined by fixing the representation  $\mathbf{c} = \tilde{\Phi}^* x$  in Eq.(2.18).

If a signal can be approximated at a rate  $m^{-\alpha}$  by thresholding its canonical frame representation ( $x \in \tilde{\mathcal{T}}_q^\alpha(\Phi, \tilde{\Phi})$ ) then it can also be approximated at this rate with less constrained algorithms, so  $x \in \mathcal{T}_q^\alpha(\Phi)$ ,  $x \in \mathcal{C}_q^\alpha(\Phi)$  and  $x \in \mathcal{A}_q^\alpha(\Phi)$ . Indeed, since each approximation space is defined by adding more constraints to the approximation algorithm compared to the previously defined ones, one has the continuous embeddings

$$\tilde{\mathcal{T}}_q^\alpha(\Phi, \tilde{\Phi}) \hookrightarrow \mathcal{T}_q^\alpha(\Phi) \hookrightarrow \mathcal{C}_q^\alpha(\Phi) \hookrightarrow \mathcal{A}_q^\alpha(\Phi). \quad (2.19)$$

In other words the most constrained space  $\tilde{\mathcal{T}}_q^\alpha(\Phi, \tilde{\Phi})$  is a subset of all other spaces and the least constrained one  $\mathcal{A}_q^\alpha(\Phi)$  contains all the other ones.

When the dictionary  $\Phi$  is indeed an orthonormal basis, the "miracle" is that all these spaces coincide

$$\tilde{\ell}_q^\tau(\Phi) = \ell_q^\tau(\Phi) = \tilde{\mathcal{T}}_q^\alpha(\Phi, \tilde{\Phi}) = \mathcal{T}_q^\alpha(\Phi) = \mathcal{C}_q^\alpha(\Phi) = \mathcal{A}_q^\alpha(\Phi), \quad \tau = (\alpha + 1/2)^{-1}$$

with equivalent (quasi)norms, which means that for any analyzed signal  $x$ , all the theoretical algorithms that I have just defined provide the very same rate of approximation  $\alpha$  which is characterized by the sparsity of the coefficients  $\langle x, \varphi_k \rangle$  of the signal in the basis. Redundant dictionary for which the above characterization remains valid enjoy the desirable property that very simple thresholding algorithms achieve the optimal rate of best

$m$ -term approximation, which is *a priori* only achievable through NP-hard combinatorial optimization.

### 2.4.3 General Jackson type embeddings

Since the best  $m$ -term approximation spaces  $\mathcal{A}_q^\alpha(\Phi)$  form an interpolation family [36], the standard approach of approximation theory (Jackson and Bernstein inequalities) seemed a reasonable strategy to characterize them, even though Pensho Petrushev had warned us that Bernstein inequalities can be quite hard to prove. However, it was not clear *a priori* whether these tools can also be used to characterize the other constrained approximation spaces.

In [90] I obtained a fairly complete characterization of the conditions needed on a dictionary to get Jackson type embeddings between the sparsity spaces  $Y = \ell_q^\tau(\Phi)$  and the best  $m$ -term approximation spaces  $\mathcal{A}_q^\alpha(\Phi)$ . It turns out that these are the same conditions ( $\ell^{p,1}$ -hilbertianity of  $\Phi$ , see Eq. (2.10)) which provide the simple characterization of the sparsity space that I described earlier, and I had the good surprise to realize that they also provide a Jackson embedding of  $\ell_q^\tau(\Phi)$  into the more constrained approximation spaces. Namely, if  $\Phi$  is  $\ell_1^p$ -Hilbertian, then we have

$$\ell_q^\tau(\Phi) \hookrightarrow \mathcal{T}_q^\alpha(\Phi) \tag{2.20}$$

$$\tilde{\ell}_q^\tau(\tilde{\Phi}) \hookrightarrow \tilde{\mathcal{T}}_q^\alpha(\Phi, \tilde{\Phi}) \tag{2.21}$$

with  $\alpha = 1/\tau - 1/p$ .

## 2.5 A quest for Bernstein inequalities

At this point, half of my research program on theoretical nonlinear approximation was fulfilled and summarized in the series of embeddings given by Eqs. (2.13)-(2.19)-(2.20)-(2.21). The second half of the program consisted in (hopefully) getting converse embeddings of the type  $\mathcal{A}_q^\alpha(\Phi) \hookrightarrow \ell_q^\tau(\Phi)$ , or better  $\mathcal{A}_q^\alpha(\Phi) \hookrightarrow \tilde{\ell}_q^\tau(\tilde{\Phi})$ , through Bernstein inequalities.

Before telling you dear reader about the difficulties, disappointments and surprises this quest for Bernstein inequalities has lead us to, let us stop for a moment to see why the quest is worth it. Had it been only a question of characterizing best  $m$ -term approximation spaces  $\mathcal{A}(\Phi)$ , the game would probably not have been worth the difficulty, at least from the point of view of the signal processing practitioner (letting aside the interest of the intellectual challenge itself). However, for any nice dictionary  $\Phi$  which satisfies the Jackson embedding (2.20) or (2.21), proving the converse embedding would imply that all the abstract approximation spaces I have defined so far would collapse to just one space. Mathematically this would just mean that I defined several spaces too many. However, one should not overlook what it would mean more practically. *If a signal can be approximated at the rate  $m^{-\alpha}$  with the ideal, NP-hard, best  $m$ -term approximation strategy, then the same rate of approximation can be achieved with a two step thresholding strategy :*

1. select a (sparse) representation  $\mathbf{c}$  of the input signal ;

2. *threshold it to keep only the  $m$  largest components.*

In particular, if one could prove the embedding  $\mathcal{A}_q^\alpha(\Phi) \hookrightarrow \tilde{\ell}_q^\tau(\tilde{\Phi})$ , then even the first step would be perfectly well-specified and the overall approximation strategy would be *much* less costly to implement than a full search best  $m$ -term approximation, and even less costly than Chebyshev approximation which requires reprojecting the signal on the selected atom for each  $m$ . It would therefore be quite significant to know that, compared to potentially much better performing approximation strategies, this simple approach is only marginally sub-optimal.

### 2.5.1 Approximation with framelet systems

After several attempts at getting general sufficient conditions to get the desired Bernstein embedding for large families of dictionaries, Morten Nielsen and I joined with Lasse Borup, from the University of Aalborg, to study what could be done in a more specific setting with wavelet frames. The main reason of this choice was that we could use very general results of Jia [100] to get a Bernstein inequality for free, however using a Besov space as the space  $Y$  (cf. Eq.(2.5)) and not directly one of the sparsity spaces.

In [92, 22, 21] I considered redundant systems of framelets based on Multi Resolution Analyses (MRA-based framelets, a generalization of wavelets built through translations and dilations of a few basis functions). I showed that with such systems, just as in the standard wavelet case :

- the best  $m$ -term, Chebyshev and thresholding (of the frame representation) approximation spaces are characterized by the sparsity of the frame expansion ;
- the sparsity of the frame expansion measures the Besov regularity ;
- even though those systems are redundant, the optimal rate of approximation can be achieved by a simple thresholding algorithm applied to a (non-adaptive and linear) frame representation.

The characterization using the canonical frame expansion is restricted to a range of Besov smoothness/rate of approximation/degree of sparseness that is limited by the number of vanishing moments [116] of the functions in the canonical dual frame  $\tilde{\Phi}$ . However I proved that, for twice over-sampled MRA-based framelets, the same results hold true *with no restriction on the number of vanishing moments of the canonical dual frame, provided that we replace the canonical frame expansion with another appropriate linear expansion*. The trick was to prove a Jackson inequality by building a “nice” wavelet which has a highly sparse linear expansion in the twice over-sampled framelet system.

### 2.5.2 Approximation with localized frames ?

After the complete characterization of the approximation spaces with framelet dictionaries, I was rather hopeful to discover a general condition to get a Bernstein inequality for large spaces of dictionaries, or at least of frames. At that time, I had discussions with Karlheinz Gröchenig who was building his theory of localized frames [97, 98, 99]. Gröchenig had long been interested in proving Bernstein inequalities for Gabor frames (which, among many classical frames, are generally localized) and conjectured that the localization of a frame could imply a Bernstein inequality.

As a sort of first step, Gröchenig had showed [98, 99] that, in localized frames, the canonical frame expansion (which has minimum  $\ell^2$  norm among all possible expansions) provides a near-sparsest representation of any  $x$  in the  $\ell^\tau$  sense,  $r < \tau \leq 2$ , where  $r$  depends on the degree  $s$  of localization/decay of the frame. In other words the synthesis and analysis sparsity spaces coincide whenever  $\Phi$  is localized and  $\tilde{\Phi}$  is its canonical dual

$$\ell^\tau(\Phi) = \tilde{\ell}^\tau(\tilde{\Phi}). \quad (2.22)$$

When this identity holds, the desired Bernstein inequality can be expressed indifferently with the native norm of  $Y := \ell^\tau(\Phi)$  or that of  $Y := \tilde{\ell}^\tau(\tilde{\Phi})$ . Since the latter is easier to handle, the objective becomes to prove

$$\left( \sum_k |\langle \hat{x}, \tilde{\varphi}_k \rangle|^\tau \right)^{1/\tau} \leq Cm^\alpha \|\hat{x}\|, \quad \forall \hat{x} \in X_m(\Phi) \quad (2.23)$$

with  $\alpha = 1/\tau - 1/2$ .

In the case of framelet dictionaries, which are localized frames [99], this was successfully done using a Besov space  $B$  as an intermediate space to get a generic Bernstein inequality from Jia's powerful results [100]

$$\|\hat{x}\|_B \leq Cm^\alpha \|\hat{x}\|, \quad \forall \hat{x} \in X_m(\Phi),$$

before characterizing  $B$  in terms of the framelet coefficients  $\|\hat{x}\|_B \asymp \|\tilde{\Phi}^* \hat{x}\|_{\ell^\tau}$ .

For more general localized frames, the proof of (2.23) turned out to be impossible, and I realized that the result for framelets heavily relied on the underlying MRA structure (and Jia's results) rather than the localization only. In [91] I built a simple example which not only disproved Gröchenig's conjecture on the relation between localized frames and the Bernstein inequality, but also illustrated how fragile the Bernstein inequality is with respect to perturbations of the dictionary, unlike the Jackson inequality which is robust to small enough perturbations. In this example, I considered  $\Phi = \mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_2$  a union of two wavelet bases. On the one hand, if the two bases are "nice" wavelet bases built from two (possibly different) multi-resolution analyses, then by Jia's result the approximation space is a Besov space and  $\tilde{\ell}^\tau(\Phi) = \tilde{\ell}^\tau(\tilde{\mathbf{B}}_i) = \mathcal{A}_\tau^\alpha(\mathbf{B}_i) = B = \mathcal{A}_\tau^\alpha(\Phi)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\alpha = 1/\tau - 1/2$ . On the other hand, if the first basis  $\mathbf{B}_1$  is a nice MRA-based wavelet basis, but the second one  $\mathbf{B}_2$  is obtained by a slight but naughty perturbation of the first one, the relations  $\tilde{\ell}^\tau(\Phi) = \tilde{\ell}^\tau(\tilde{\mathbf{B}}_i) = \mathcal{A}_\tau^\alpha(\mathbf{B}_i) = B \leftrightarrow \mathcal{A}_\tau^\alpha(\Phi)$ ,  $i = 1, 2$  are preserved, but the last approximation space fails to embed in any sparsity space, or equivalently in any Besov space.

### 2.5.3 Approximation with decomposable incoherent dictionaries

In parallel to the analysis of approximation with framelet systems, I had been working on approximation properties of "incoherent" dictionaries. From the theoretical point of view, I was motivated by the early results of Donoho and Huo [41] on sparse representations in unions of two "mutually incoherent bases". Soon, the use of unions of wavelets and Gabor dictionaries by Torrèsani and Daudet [32] for audio signal processing, and the fact



that such hybrid dictionaries can be approximately seen as unions of incoherent "blocks" increased my curiosity. In [86] I considered the problem of getting Bernstein inequalities for a fairly large class of dictionaries in Hilbert spaces. I proved that for *decomposable* Hilbertian dictionaries made up of *incoherent* pieces, a Bernstein inequality holds which is written

$$\|\hat{x}\|_{\ell^\tau(\Phi)} \leq Cm^{2\alpha} \|\hat{x}\|, \quad \hat{x} \in X_m(\Phi), \quad \alpha = 1/\tau - 1/2. \quad (2.24)$$

In a word, a dictionary is decomposable if it is the union  $\Phi = \cup_j \Phi_j$  of (possibly infinitely many) sub-dictionaries which span  $\mathcal{V}_j := \text{span}(\Phi_j)$  are pairwise orthogonal. The above Bernstein inequality holds if each  $\Phi_j$  is finite, contains an orthonormal basis of  $\mathcal{V}_j$ , and has low coherence in the sense that  $\sup_j (\sqrt{N_j} \cdot \max_{\varphi \neq \varphi' \in \Phi_j} |\langle \varphi, \varphi' \rangle|) < \infty$  where  $N_j := \dim(\mathcal{V}_j)$ .

## 2.6 Conclusion

I described in this chapter the research program I performed with Morten Nielsen to try to better understand the approximation properties of several spaces of (more or less realistic) approximation algorithms with redundant dictionaries.

With very structured dictionaries (wavelet frames based on a multi-resolution analysis), we were able to show that all these approximation algorithms indeed provide the very same asymptotic rate of approximation, which is directly characterized by the "sparsity" of the frame coefficients of the considered signal in an appropriate dual frame. Such positive results are certainly the most satisfying mathematically speaking : they readily provide sharp connections between mathematical objects which *a priori* may have been quite distinct. Numerically speaking too, these results imply that, for the corresponding dictionaries, the NP-hard best  $m$ -term approximation problem can be handily replaced with a simple "represent and threshold" two-step strategy, which only requires choosing adequately the dual frame.

With less structured dictionaries, we encountered much more difficulties. After several attempts, we had to face (and prove) the hard reality that in some cases it is simply impossible to obtain a Jackson and a Bernstein inequality with matching exponent. With decomposable incoherent dictionaries we proved that a Bernstein inequality holds, but its exponent  $2\alpha$  *does not match* the exponent  $\alpha$  in the corresponding Jackson inequality

$$\sigma_m(x, \Phi) \leq Cm^{-\alpha} \|f\|_{\ell^\tau(\Phi)}, \quad \alpha = 1/\tau - 1/2. \quad (2.25)$$

Hence, we did not get a complete characterization of all approximation spaces in terms of sparsity spaces. However, if we compare this result to the case of localized frames (where we built a simple example for which no Bernstein inequality at all can hold), it seems remarkable that the whole family of decomposable incoherent dictionaries satisfy a Bernstein inequality. Indeed, we proved that this Bernstein inequality is sharp, in the sense that there is at least one decomposable incoherent dictionary for which the exponent  $2\alpha$  *cannot be improved*. Since the Jackson inequality cannot be improved either [90], this is perhaps mathematically discouraging at first sight, since it indicates that there is no hope of fully characterizing  $m$ -term approximation spaces in terms of sparsity spaces. However, if we

look at it more closely we may realize that very optimistic news come along with this result. In particular, if one could prove that the exponent  $2\alpha$  of the Bernstein inequality is sharp for a (decomposable and incoherent) union of two orthonormal bases  $\Phi = \mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_2$ , this would imply that by taking the two bases together yields an approximation space which is strictly larger than the sum of the individual approximation spaces :

$$\mathcal{A}_r^\alpha(\mathbf{B}_1) + \mathcal{A}_r^\alpha(\mathbf{B}_2) = \ell^r(\mathbf{B}_1) + \ell^r(\mathbf{B}_2) = \ell^r(\Phi) \hookrightarrow \mathcal{A}_r^\alpha(\Phi) \not\hookrightarrow \ell^r(\Phi)$$

In other words, using the two bases together to approximate a signal  $x$  is more efficient than decomposing it into two components  $x = x_1 + x_2$  and approximating  $x_i$  from the basis  $\mathbf{B}_i$ . In practice, one has to worry about the feasibility of this improved approximation, and it remains an open question whether reasonably efficient algorithms can achieve the optimal asymptotic approximation rate. In contrast, in the next chapter I will discuss questions related with the non-asymptotic behaviour of practical sparse approximation algorithm, which corresponds to the low bitrate regime in signal compression.



---

## Chapitre 3

# Algorithms for sparse approximation

The « quest for Bernstein inequalities » which I described in chapter 2 started when "wavelets" were a major buzzword within the signal processing community, and "Besov spaces" and "nonlinear approximation" major buzzwords within the wavelet community. At that time, many (not to say most) people in the community argued that Besov spaces, which coincide with the approximation spaces associated to wavelet dictionaries, were the natural spaces to which natural images belonged. This was considered a good argument to explain why wavelet dictionaries were *the* right tool for image coding and denoising.

Wavelets actually had nice applicative successes such as the image coding standard JPEG-2000, which yields better rate-distortion curves than standard JPEG but failed to actually get a large consumer market, seemingly because it is hard to implement it efficiently on low consumption embedded devices such as digital cameras. However, many former "waveleteers" today rather argue that wavelets fail to sparsely represent some essential features of natural images such as contours and lines, because of their intrinsic isotropy. Alternate dictionaries (bases or redundant systems) of atoms, such as the union of a wavelet basis and curvelet frame, can provide richer families which make it possible to approximate images more efficiently with linear combinations of a few atoms by adapting the type of atoms to the nature of the local image feature to approximate : wavelets will be good at representing textures and point-wise singularities, curvelets might be better for line singularities such as contours.

While the theoretical approximation problems considered in chapter 2 shed light on the nature of sparse signal/image approximations with  $m$ -term expansions from redundant dictionaries, they leave open a number of questions of crucial practical importance regarding the choice of an *algorithm* to actually compute an  $m$ -term sparse approximation. We have seen that, thanks to general Jackson inequalities, if one can compute a sparse representation  $\mathbf{c} \in \ell^\tau$  of a signal  $x$ , thresholding it will generally guarantee some rate of approximation  $m^{-\alpha}$  depending on the sparsity of  $\mathbf{c}$ , that is to say<sup>1</sup> the exponent  $\tau$  such that  $\mathbf{c} \in \ell^\tau$ . Ho-

---

<sup>1</sup>Sparsity spaces are naturally embedded with the relation  $\ell^\tau \hookrightarrow \ell^\eta$  as soon as  $\tau \leq \eta$ , hence the sparser  $\mathbf{c}$ , the smaller the exponent  $\tau$  such that  $\mathbf{c} \in \ell^\tau$

wever, since in general  $x$  admits infinitely many representations, it is not easy *a priori* to choose the right one, that is to say the "sparsest" one.

For (sufficiently) localized frames such as Gabor frames, we have seen that the canonical frame representation is essentially as sparse as it can be, so choosing it should not hurt too much<sup>2</sup>. However, many simple and yet interesting frames are not localized. This is the case, for example, of the union of a wavelet basis and a local Fourier basis, which can be used in audio signal processing [32] to model audio transients (with wavelets) as well as stationary parts such as steady sinusoids (with local Fourier atoms). Still, it is worth computing sparse decompositions of arbitrary functions in such dictionaries, because thresholding these expansions will in turn lead to good approximants.

To compute a sparse representation  $x = \Phi \cdot c$  (or more generally a sparse approximation  $x \approx \Phi \cdot c$ ) of a signal, several approaches are possible. One can simply attempt to find the sparsest representation in the sense of some global sparsity measure  $\ell^\tau$ , which is a convex problem if  $\tau \geq 1$  but becomes a non-convex problem for  $\tau < 1$  and even an *a priori* completely intractable NP-hard problem for  $\tau = 0$ . Other more heuristic algorithms such as Matching Pursuit or Orthonormal Matching Pursuit are also available, and this proliferation of possibilities raises a natural question : *does the resulting representation depend significantly on the specific algorithm chosen to compute it ?*

Quite surprisingly, the answer to this question is essentially « no » : *if the signal  $x$  admits a sufficiently sparse representation (in the strong sense, meaning that the representation has few enough nonzero coefficients), then it is also the sparsest  $\ell^\tau$ -representation for all  $0 \leq \tau \leq 1$ , and can also be recovered by Matching Pursuits.* This result, which Morten Nielsen and I proved [88] in a slightly more general setting, generalized the pioneering work of Fuchs [63, 64] and Donoho and Huo [41] who had shown that  $\ell^1$ -minimization can recover sufficiently sparse signal representations.

Initial results of this type were essentially theoretical, because the assumptions on the dictionary (incoherence) and the ideal representation of the analysed signal (exact and highly sparse) were much too strong to be satisfied for real signals. However, intense activity along this thread of research has rapidly reduced this gap thanks to the work of many talented researchers such as David Donoho, Joel Tropp, Michael Elad, Emmanuel Candès and the Fields' medalist Terence Tao, to name only a few . . . The story is still being written, and one of its unexpected outcomes was the renewed perspective it offered on old signal processing problems such as sampling, through the notion of *Compressed Sensing*, also known as *compressive sampling*. Let me tell briefly in this second chapter how I participated to the scenario, together with Morten Nielsen and Pierre Vandergheynst, from the Signal Processing Group of the Swiss Federal Institute of Technology (EPFL) in Lausanne.

### 3.1 Introduction

Since his work on denoising by wavelet thresholding together with Ian Johnstone in the early 1990's [42], David Donoho had consistently argued about the virtues of  $\ell^1$  minimization to compute adaptive signal representations. In parallel, Jean-Jacques Fuchs

<sup>2</sup>Thresholding the canonical frame representation could still yield a significantly suboptimal rate of approximation compared to the *ideal* best  $m$ -term approximation, if the localized frame fails to satisfy a Bernstein inequality.

[59, 60, 62]<sup>3</sup> was applying these techniques for source localization applications and high-resolution estimation of sinusoids in noise. Extensive experimental results with these  $\ell^1$ -minimization approaches indicated that, in many cases, they provide very sparse signal representations. This property, which was successfully used in geophysics for signal deconvolution, was also extensively tested on synthetic data, and the surprising observation was that in many cases, if the signal was constructed as  $x = \Phi \cdot \mathbf{c}_0$  with  $\mathbf{c}_0$  a known, sparse representation, then the minimum  $\ell^1$ -norm representation  $\mathbf{c}_1(x)$  which solves the optimization problem

$$\min_{\mathbf{c}} \|\mathbf{c}\|_1 \quad \text{subject to} \quad x = \Phi \cdot \mathbf{c} \quad (3.1)$$

exactly recovered the "ideal" representation  $\mathbf{c}_0$ .

In two conference papers [63, 64], Jean-Jacques Fuchs proposed what was probably the first mathematical analysis of this phenomenon. He described, in algebraic and geometric terms, necessary and sufficient conditions on the *support*  $\text{support}(\mathbf{c}_0)$  of the representation  $\mathbf{c}_0$  (which indexes the set of atoms with nonzero coefficients) which imply that  $\mathbf{c}_1(x) = \mathbf{c}_0$  (in the noiseless case), and his analysis even handled the noisy case  $x \approx \Phi \cdot \mathbf{c}_0$ . It seems that Fuchs was annoyed by the fact that his results depend on the support of the *unknown* representation  $\mathbf{c}_0$ , because this seemed to prevent any possibility of knowing whether the approach actually recovers the "true" representation or not. Even though he expressed [63] his intuition that *in most cases* the conditions are satisfied, this probably explains why he did not consider it worth publishing a journal version of his result [66] until the independent work of Donoho and Huo [41] gave a sudden rise to the interest of the community for these issues.

## 3.2 Recovery of sparse representations by global optimization

The main result of Donoho and Huo [41] was striking because the recovery condition they exhibited was very simple to check. They proved that, for  $\Phi = \mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_2$  a union of two *mutually incoherent* orthonormal bases  $\mathbf{B}_i = \{\varphi_k^i\}$ , that is to say two bases with small coherence

$$\mu(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2) = \max_{k,l} |\langle \varphi_k^1, \varphi_l^2 \rangle|, \quad (3.2)$$

the minimum  $\ell^1$ -norm representation of any signal  $x = \Phi \cdot \mathbf{c}_0$  with  $\|\mathbf{c}_0\|_0 < (1 + 1/\mu)/2$  was indeed unique and coincided with  $\mathbf{c}_0$ . This nice result implied that a given signal can only have one "sufficiently sparse" representation  $\mathbf{c}_0$  (since two such representations must both coincide with the same unique representation  $\mathbf{c}_1(x)$ ), in other words if  $x = \Phi \cdot \mathbf{c}_0$  with  $\|\mathbf{c}_0\|_0 \leq (1 + 1/\mu)/2$ , then  $\mathbf{c}_0$  not only coincides with  $\mathbf{c}_1(x)$ , it is also the unique solution of the minimum  $\ell^0$ -optimization problem

$$\min_{\mathbf{c}} \|\mathbf{c}\|_0 \quad \text{subject to} \quad x = \Phi \cdot \mathbf{c}. \quad (3.3)$$

<sup>3</sup>Fuchs early conference papers [59, 62] were later published as journal papers [61, 65]

For two arbitrary orthonormal bases in  $\mathbb{R}^N$  or  $\mathbb{C}^N$ , the coherence  $\mu$  is at most one and at least  $1/\sqrt{N}$ . The Dirac and Fourier bases achieve the minimum value  $1/\sqrt{N}$ , and other bases with this property are called maximally mutually incoherent bases. In such pairs of bases, the results shows that all highly sparse signal representations can be recovered, where *highly sparse* means  $\|\mathbf{c}_0\|_0 < (1 + \sqrt{N})/2$ .

### 3.2.1 Recovery in arbitrary incoherent dictionaries

The result of Donoho and Huo for pairs of bases was sharpened by Elad and Bruckstein [49] who replaced the sparsity constraint  $(1 + 1/\mu)/2$  with a slightly larger, less restrictive estimate, which was in turn proved to be sharp by Feuer and Nemirovski [51]. The next step was to extend the result to general dictionaries, which was achieved independently by Donoho and Elad [40] and Morten Nielsen and I [89], by defining the coherence of an arbitrary dictionary  $\Phi = \{\varphi_k\}$

$$\mu(\Phi) = \max_{k \neq l} |\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle|. \quad (3.4)$$

Yet, coherence is a rather crude tool to study the identifiability of sparse representations when the dictionary is somewhat structured. In [89] we studied in details the special case where the dictionary is given by a union of several orthonormal bases, getting slightly finer recovery conditions.

### 3.2.2 Simultaneous recovery with $\ell^\tau$ representations

In between the  $\ell^0$  and the  $\ell^1$  sparsity measures lie the  $\ell^\tau$  "norms", and it seemed only natural that by some sort of interpolation, the coincidence of the minimum  $\ell^1$ -norm and minimum  $\ell^0$ -norm representations should extend to simultaneous uniqueness of the minimum  $\ell^\tau$ -norm representations for  $x$  with a sufficiently sparse representation  $\mathbf{c}_0$ . It turned out that the interpolation could be done and extended to a much larger setting. This was the main result of our paper [88], where we introduced a large class  $\mathcal{M}$  of admissible sparseness measures  $f$  (which includes all  $\ell^\tau$  norms,  $0 \leq \tau \leq 1$ ), and gave sufficient conditions for having a unique sparse representation of a signal from the dictionary w.r.t. such a sparseness measure, in finite or infinite dimension. Moreover, we gave sufficient conditions on the  $\ell^0$  sparseness of a signal such that the minimum  $\ell^1$ -norm solution, which is the solution of a convex programming problem, simultaneously solves all the non-convex (and generally hard combinatorial) problems of sparsest representation of the signal w.r.t. arbitrary admissible sparseness measures.

For that, we considered a characteristic number of the dictionary  $m_1(\Phi)$  defined as the supremum of all integers  $m$  with the following property : *for every element  $y \in X_m(\Phi)$ , any representation  $x = \Phi \mathbf{c}$  with  $\|\mathbf{c}\|_0 \leq m$  is the (unique) sparsest  $\ell^1$ -representation of  $x$  ; that is to say, there is no other representation  $\mathbf{c}'$  of  $x$  with smaller (or equal)  $\ell^1$ -norm of the coefficient sequence  $\|\mathbf{c}'\|_1 \leq \|\mathbf{c}\|_1$ .* Our main result was the following theorem, which generalizes naturally the series of results [63, 64, 66, 41, 49, 51, 89, 40, 87].

**Theorem 2 ([88])** *Let  $\Phi$  be an arbitrary dictionary in a separable finite or infinite dimensional Banach space  $\mathcal{H}$  and  $m \leq m_1(\Phi)$  an integer. Then, for any  $x \in X_m(\Phi)$  and any*

representation  $x = \Phi \cdot \mathbf{c}$  with  $\|\mathbf{c}\|_0 \leq m$ ,  $\mathbf{c}$  is simultaneously the (unique)  $f$ -sparsest representation of  $x$  for all sparseness measures  $f \in \mathcal{M}$ . In particular it is the  $\ell^\tau$ -sparsest representation for all  $0 \leq \tau \leq 1$ .

Thus, if  $x$  has a *highly sparse representation*  $\mathbf{c}$  (with at most  $m_1(\Phi)$  elements from the dictionary), this representation must indeed be the  $f$ -sparsest representation for *all* sparseness measures. The interesting consequence is that the combinatorial, highly nonlinear search for the highly sparse representation of such vectors  $x$  can be replaced with a polynomial time computation based, for example, on linear programming [18, 138], which solves the  $\ell^1$ -optimization problem. In recent advances, specific algorithms [46, 128, 115] have been developed which solve the  $\ell^1$ -optimization problem more efficiently than generic linear programming tools.

### 3.2.3 From representations to approximations : stable recovery

Signals with an exact and highly sparse representation in a given dictionary are merely of a theoretical nature, and will essentially never be met in real data. A key step in bridging the gap between the theoretical recovery results and practice was therefore to study how *stable* the recovery results were to approximations in the sparse model  $x = \Phi \cdot \mathbf{c}$ . In other words, if  $x = \Phi \cdot \mathbf{c} + e$ , the problem is to identify how small the error term  $e$  should be, in conjunction with properties of the sparse coefficients  $\mathbf{c}$ , so that such or such algorithm applied to  $x$  can recover a good approximation to  $\mathbf{c}$ .

Several parallel contributions were obtained by the group of Donoho [38], as well as Tropp [149], Fuchs [67] and the group of Candès [25] for  $\ell^1$ -penalized approximation algorithms which can be cast to solving the optimization problem

$$\mathbf{c}_1^*(x) := \arg \min_{\mathbf{c}} \frac{1}{2} \|x - \Phi \cdot \mathbf{c}\|^2 + \lambda \cdot \|\mathbf{c}\|_1 \quad (3.5)$$

for an appropriate Lagrange multiplier  $\lambda$ .

At the same time, I considered with Pierre Vandergheynst and his student Rosa Figueras i Ventura [81] the extension to the noisy case of the results on general  $\ell^\tau$  optimization previously obtained in the noiseless case with Morten Nielsen. We obtained results on the identifiability of sparse over-complete models in the presence of noise, for a fairly large class of sparse priors : if a signal is sufficiently well approximated by a sufficiently sparse expansion, then each penalized approximation problems

$$\mathbf{c}_\tau^*(x) := \arg \min_{\mathbf{c}} \frac{1}{2} \|x - \Phi \cdot \mathbf{c}\|^2 + \lambda_\tau \cdot \|\mathbf{c}\|_\tau, \quad (3.6)$$

with suitably tuned Lagrange multiplier  $\lambda_\tau$ , can be used to recover the right support.

More specifically, in this work we emphasized the fact that, instead of simply predicting the output of a given (family of) sparse approximation algorithms given a signal model, the results can also be used to check *a posteriori* the near optimality of the output of an *arbitrary* sparse approximation algorithm, in the sense that no significantly different linear expansion  $\mathbf{c}'$  from the dictionary can provide both a smaller approximation error  $\|x - \Phi \cdot \mathbf{c}'\| \leq \|x - \Phi \cdot \mathbf{c}\|$  and a better sparsity  $\|\mathbf{c}'\|_\tau \leq \|\mathbf{c}\|_\tau$ , unless  $\mathbf{c}' \approx \mathbf{c}$ . From the



*a posteriori* point of view, it is possible to check whether the output of a "black box" sparse approximation algorithm is close to  $c_r^*(x)$  *without actually computing*  $c_r^*(x)$ . I am currently investigating how this could be used to define adaptive computational strategies which apply computationally intensive algorithms only if less demanding ones did not provide a good enough output.

### 3.3 Matching Pursuit

Being able to recover highly sparse expansions by  $\ell^1$ -penalized optimization is nice. However, due to the generally high dimension of the signal space, solving the convex problem (3.5), or even worse the often non-convex problems (3.6) remains a computationally intensive task. Indeed, despite recent algorithmic breakthrough such as the homotopy method [46, 128, 115], the largest problem dimensions that can currently be addressed with standard software and hardware are for signals of dimension  $N \approx 1000$  and dictionaries with  $\#\Phi \approx 10000$ , which is far from the dimension of real life images (several million pixels). A much easier and faster but also somehow more heuristic approach is the greedy approach or Matching Pursuit which was introduced by Mallat and Zhang [117]. Matching Pursuit is an iterative algorithm which recursively builds  $m$ -term approximants to an input signal  $x$ . After  $m$  steps, Matching Pursuit provides a decomposition of the signal as

$$x = \sum_{i=1}^m \langle e_{i-1}, \varphi_{k_i} \rangle \cdot \varphi_{k_i} + e_m \quad (3.7)$$

where  $e_m$  is called a residual. Several variants of Matching Pursuit have been introduced, such as Orthonormal Matching Pursuit [125] and Weak Matching Pursuits also known in the mathematical literature under the name of Weak Greedy Algorithms [143]. Under weak conditions on the dictionary, the energy of the residual decays to zero when the number of iterations goes to infinity, and I studied in [84] under which conditions a variant known as Approximate Weak Greedy Algorithms still converges.

#### 3.3.1 The Matching Pursuit ToolKit (MPTK)

In contrast to global  $\ell^r$  optimization techniques, Matching Pursuit is an iterative algorithm which can be applied to large scale data such as audio signals. In the Matching Pursuit ToolKit (MPTK) which I developed together with Sacha Krstulovic [82, 105], using appropriate data structures, we were able to implement a version of Matching Pursuit where the computational cost of each iteration, is essentially  $\mathcal{O}(\log N)$  operations, while previous implementations rather had a cost  $\mathcal{O}(N)$  per iteration. For example, with this implementation, it is possible to obtain in about twenty minutes<sup>4</sup> an approximation of a signal of dimension  $N \approx 60'000'000$  using  $m = 1'500'000$  atoms from a multi-scale Gabor dictionary of size  $\#\Phi \approx 3N$ . This example, corresponding to the "real time" analysis of a twenty-minute long audio signal sampled at CD quality (44.1 kHz), provides a reconstruction of the analyzed signal with a relative signal to distortion ratio  $20 \log_{10}(\|x_m - x\|/\|x\|) = 15$  dB. Such a

<sup>4</sup>On a Pentium IV at 2.4 GHz with 2 Gbytes of memory.

computational speedup is currently changing the status of sparse approximation techniques from an object of investigation to a real tool by making them available to explore the possible applications (feature extraction and classification, source separation, etc.) of sparse representations on databases of real life signals. In collaboration with the groups of Laurent Daudet at Université Paris 6 and Pierre Vandergheynst at EPFL, we are currently investigating the use of sparse decompositions for audio signal classification. MPTK allowed us to obtain sparse decompositions of more than two thousand 30-second excerpts from musical pieces in just a few days of computations. I am currently leading a two-year INRIA-funded software development project (ODL, Opération de Développement Logiciel) dedicated to MPTK. With the aim of Benjamin Roy, who was recruited for this project, the aim is to strengthen MPTK in terms of portability, robustness, reusability, versatility and ease of deployment.

### 3.3.2 Stable recovery with Matching Pursuit

The good news about Matching Pursuit is that it is not only amenable to fast implementations, but also has provable recovery properties. This fact was first analysed in the work of Joel Tropp and his colleagues Anna Gilbert, Martin Strauss, S. Muthukrishnan, who essentially showed that, despite its rather heuristic definition, Matching Pursuit is also a *provably good* sparse approximation algorithm [69, 147].

In a joint work with Pierre Vandergheynst [95] (see also [87]) we extended to the case of the "plain" Matching Pursuit the original results by Tropp and his colleague about exact recovery with Orthogonal Matching Pursuit (OMP) and some other variants of Matching Pursuit. In particular, in incoherent dictionaries, our result extends a result by Villemoes [155] about Matching Pursuit in the Haar-Walsh wave-packet dictionary : if we start with a linear combination of sufficiently few atoms of an incoherent dictionary, Matching Pursuit will pick up at each step a "correct" atom and the residual will converge exponentially fast to zero. The rate of exponential convergence is controlled by the number of atoms in the initial expansion. We also obtained stability results of Matching Pursuit similar to those obtained by Tropp for OMP when the analyzed signal is sufficiently well approximated by such a linear combination of few atoms.

## 3.4 Bridging the gap between theory and practice

Even though global  $\ell^r$  optimization as well as greedy algorithms can be proved to stably recover sparse signal representations in the presence of moderate noise, there remains a gap between theory and practice because of the strength of the conditions which an "ideal" representation  $x = \Phi \cdot c_0 + e$  must satisfy to guarantee that the output  $\hat{c}$  of a chosen algorithm will be "close" to  $c_0$ . Typical recovery conditions combine the assumption that the noise level is "small" compared to the magnitude of the nonzero coefficients with the key hypothesis that the representation  $c_0$  is "sufficiently sparse". In equations

$$\|c_0\|_0 \leq m(\Phi) \tag{3.8}$$

and

$$|e| \leq C(\Phi) \cdot \min_{k \in \text{support}(c_0)} |c_k|, \quad (3.9)$$

with  $|e|$  a measure of the noise level which may depend on how we measure the quality of the approximation of  $x$  by  $\Phi \cdot \hat{c}$ , see [81]. Of these two assumptions (3.8)-(3.9), until the most recent developments of the theory of Compressed Sensing, the first one (3.8) contributed most to the gap between theory and practice.

### 3.4.1 How incoherent are real-life dictionaries ?

Along with many other researchers in the domain, I have put much efforts in the last few years trying to bridge this gap. At first, the mere existence of provable recovery conditions was somehow hiding the fact that they were practically useless due to their coarseness. Indeed, while early recovery conditions based on the coherence seemed reasonable for ideal incoherent dictionaries such as unions of a few incoherent bases, the game completely changed when one realized that most classical dictionaries are very coherent.

The coarsest tool to estimate a sparsity condition number  $m(\Phi)$  is the coherence  $\mu(\Phi)$  which provides a recovery condition with  $m(\Phi) := \lfloor (1 + 1/\mu(\Phi))/2 \rfloor$ . With the slightly more refined *cumulative coherence*  $\mu_1(m, \Phi)$  (see, e.g. [147]), which satisfies  $\mu_1(m) \leq m \cdot \mu$ , the recovery condition (for  $\ell^1$ -minimization as well as greedy algorithms) is obtained with

$$m(\Phi) := \max\{ m, \mu_1(m) + \mu_1(m-1) < 1 \}.$$

For incoherent unions of a few bases, such recovery conditions allow the recovery of  $\sqrt{N}/2$ -sparse expansions in dimension  $N$ , which seems reasonable when the dimension is large. However, incoherent unions of bases are not the most classical signal dictionaries. Unfortunately, with more standard dictionaries such as redundant wavelet frames, wavelet packets dictionaries or Gabor frames, none of these tools can yield a nontrivial recovery condition : the best one can prove is that  $m$ -term expansions can be stably recovered ... when  $m = 1$  or, in some rare lucky examples, when  $m = 2$  !

### 3.4.2 Why is incoherence too pessimistic a tool ?

A detailed study of the early recovery results of Fuchs [63, 64] for  $\ell^1$ -penalized approximation shows that they are not expressed in terms of the *sparsity*  $\|c_0\|_0$  of the ideal representation, but rather in terms of its *support*  $\text{support}(c_0)$  (and even in terms of the sign of the nonzero coefficients). A similar observation holds for the "exact recovery condition" exhibited by Tropp [147, 149]. Morten Nielsen and I emphasized this type of recovery condition in the "structured" to signal recovery we proposed in [94].

Fuchs noted that it seems difficult in practice to exploit subtle recovery conditions which depend on the detailed *structure of the support* of an ideal but *unknown* representation  $c_0$ . From this point of view, recovery conditions merely expressed with the *size*  $\|c_0\|_0 = \#\text{support}(c_0)$  of the ideal representation seemed much easier to handle, which probably explains the wide impact of this type of results.

However, the major drawback of recovery conditions expressed as  $\|c_0\|_0 \leq m(\Phi)$  is that they are pessimistic by nature. Indeed, they are necessarily based on a *worst case analysis* among all possible supports of a given size : if one can find *at least* one representation  $c_0$  of size  $m$  which cannot be recovered, then  $m(\Phi) < m$ , even if *most* representations of size  $m$  can be recovered. An extreme case illustrating this situation would be the situation where the considered dictionary  $\Phi$  is almost the orthonormal basis  $\mathbf{B} = \{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ , except that the first atom  $\varphi_1$  has been duplicated and appears twice in the dictionary. In such a dictionary, any representation which does not involve the first atom and its copy, no matter how sparse it is, can be stably recovered. However, any representation which involves the first atom is essentially ambiguous, since there is no way to choose between the original and its copy. This illustrates the strong limitations of worst case analysis, and I have developed a much more optimistic *average case recovery analysis* with Holger Rauhut, Karin Schnass and Pierre Vandergheynst in the special case of multichannel sparse approximation [96, 83].

### 3.4.3 Structured approximation

To bridge the gap between theory and practice, one needs to get more optimistic recovery results by avoiding as much as possible the pitfalls of worst case analysis. One way around consists in finding a compromise between subtle recovery conditions –which fully depend on the support of the representation but remain quite abstract– and coarse but easy to check ones merely based on sparsity. This is the "structured" approach Morten and I proposed in [94]. It is mostly applicable with "structured" dictionaries such as time-frequency or time-scale dictionaries [23], and we have also shown how it can help analyze the sparse approach to degenerate source separation [94].

In [94] we defined general identifiable structures that support signals that can be recovered exactly by  $\ell^1$  minimization and greedy algorithms. In addition, we obtained that if the output of an arbitrary decomposition algorithm is supported on an identifiable structure, then the representation is optimal within the class of representations supported by the structure. As an application of the theoretical results, we gave a detailed study of a family of multichannel dictionaries with a special structure often used in under-determined source separation problems or in multichannel signal processing. The theoretical results obtained in this framework have served as an inspiration for new source separation algorithms which I briefly describe in Sections 1.3 and A.5.8. More recently, we used these theoretical framework to characterize wide classes of structured "hybrid" wavelet / Gabor representations [23] which are perfectly recovered with standard algorithms.

### 3.4.4 Recovery with high probability

Another strategy to obtain "optimistic" recovery conditions is somehow more drastic : instead of *guaranteeing* that such or such algorithm will recover a representation, the principle is to accept possible failures, but with (very) low probability. This approach can lead to much more optimistic recovery conditions, but necessitates a careful choice of the underlying probabilistic model since the computed probability of failure can be completely

irrelevant if the chosen random model does not fit sufficiently well the nature of the analyzed data.

The major advantage of the random approach is the often considerably more optimistic, yet simply expressed, recovery conditions. One of its difficulties is that estimating the probability of failure can involve deep results on the geometry of high-dimensional Banach spaces, random matrices and concentration of measure.

I noted two families of random approaches to sparse signal recovery. The first one, probably the most advocated one in the context of Compressed Sensing, puts a random model on the dictionary. The second one, which I believe is more relevant in many applicative contexts, puts the random model on the sparse signal coefficients for a fixed dictionary. This is the approach I developed with Holger Rauhut, Karin Schnass and Pierre Vandergheynst for an average case analysis of multichannel sparse approximation [96, 83].

### Random dictionaries

In the context of  $\ell^1$ -minimization approaches, Emmanuel Candès, Justin Romberg and Terence Tao [25] identified the role of so-called restricted isometry constants in the recoverability of sparse expansions. Given a dictionary  $\Phi$ , its restricted isometry constants  $\delta_m$  are the smallest real numbers such that for every subset  $I$  of size at most  $m$  and every vector of coefficients :

$$(1 - \delta_m) \cdot \|\mathbf{c}_I\|_2^2 \leq \|\Phi \mathbf{c}_I\|_2^2 \leq (1 + \delta_m) \|\mathbf{c}_I\|_2^2$$

where  $\mathbf{c}_I$  is the restriction of  $\mathbf{c}$  to the support  $I$ . If  $\delta_{3m} + 3\delta_{4m} < 2$  then  $\ell^1$  minimization recovers all  $m$ -sparse signals [25, Theorem 1], so one gets a theoretical estimate of a valid sparsity condition number

$$m(\Phi) := \max\{ m, \delta_{3m} + 3\delta_{4m} < 2 \}.$$

This is a very nice characterization but, in practice, the computation of the restricted isometry constants of a given dictionary seems to be a combinatorial problem. This is the point where random dictionary models come into play : if we assume that  $\Phi$  is drawn at random according to some distribution  $P(\Phi)$ , we can define the probability  $\epsilon(m)$  that the condition  $\delta_{3m} + 3\delta_{4m} < 2$  fails. For several distributions (Gaussian, Bernoulli, partial Fourier matrix, ...), it has been proved that if  $m$  is small enough then this probability of failure  $\epsilon(m)$  is very small. For example, in the case of partial Fourier matrices [135], the probability of failure is below  $\epsilon$  as soon as

$$m \leq N \cdot \frac{C}{(\log^4 K) \cdot (\log \epsilon^{-1})}.$$

For a fixed probability of failure, if the dictionary size  $K$  is of the order of the signal dimension  $N$ , recovery can therefore be guaranteed "with high probability" for  $m$  up to  $m(\Phi) \asymp C'N/\log^4 N$ . In comparison, using the coherence typically yields guaranteed recovery for  $m \leq m(\Phi) \asymp \sqrt{N}/2$ , which is obviously much more restrictive when the signal dimension is large.

Random dictionary models have been successfully used to show that *most* dictionaries drawn at random according to a provably good distribution  $P(\Phi)$  will have well-behaved

restricted isometry constants. Therefore, with *most* of these dictionaries,  $\ell^1$ -minimization algorithms will successfully recover *all*  $m$ -sparse expansions for a non trivial range of values of  $m$  which may be of the order of the ambient dimension  $N$ .

Compared to what can be typically proved with coherence arguments for deterministic dictionaries and deterministic coefficients, this is a significant improvement. Indeed, these results are at the basis of the developments in random sampling for Compressed Sensing [39]. The key point is that, in random sampling, *one has enough freedom in the design of a "dictionary"  $\Phi$*  (which is indeed a sampling system) to choose it with good properties. Even though it is difficult to build a good dictionary using a deterministic construction, choosing it at random according to a provably good distribution  $P(\Phi)$  is a strategy which will most likely be successful.

### Random sparse signal models

Unfortunately, there are many application domains where there is no or not much freedom in the design of the dictionary. In particular, for many signal or image processing applications, it is common to consider very structured dictionaries such as wavelet or Gabor frames. It is hard to consider such dictionaries as "typical" realizations of a random variable drawn from a provably good distribution  $P(\Phi)$ , hence it would not be reasonable to rely on generic random dictionary models to derive recovery results for such dictionaries. Similar issues arise in (blind) deconvolution [43] or (blind) source separation problems (see e.g. Chapter A), which are often addressed with sparse decomposition techniques: in these settings, the dictionary is determined by the filters that must be "inverted": relying on a random dictionary model that does not match well the typical properties of the actual filters could lead to overly optimistic recovery results, while the structured approach I proposed [94] might still remain overly pessimistic [23].

Another potential drawback of recovery results based on random dictionaries is that even if most dictionaries drawn according to the distribution  $P(\Phi)$  are well-behaved, a few of them have significantly poorer properties, leading to *systematic poor recovery performance* of sparse approximation algorithms. In some applicative contexts, the chosen dictionary is used over and over to recover various sets of sparse coefficients, thus it is perhaps more desirable to guarantee that, for a given dictionary and *most instances of sparse coefficients*, recovery will be achieved. In this context, given  $\Phi$  and a probability model  $P(\mathbf{c})$  on the sparse coefficients, a viable strategy is to characterize the probability that a given algorithm recovers the right coefficients from  $x = \Phi \cdot \mathbf{c} + e$ .

In this framework, I showed, together with Holger Rauhut, Karin Schnass and Pierre Vandergheynst [83, 96], that by replacing *worst case analysis* with an *average case analysis*, it is indeed possible to obtain significantly more optimistic recovery results for the problem of simultaneous sparse representation of multichannel signals. Even if the dictionary is given in advance (with no freedom of design) the key is to exploit the randomness carried by the analyzed signals themselves, which allows even simple algorithms such as multichannel thresholding to have reasonably good performance when the number  $L$  of channels –which drives the level of randomness in the signals– is sufficiently large.

To illustrate the strength of the improvement compared to worst case analysis, consider  $L$  signals  $x_i = \Phi \mathbf{c}_i$ ,  $1 \leq i \leq L$  where the coefficient vectors  $\mathbf{c}_i$  share the same support of

size  $m$  with independent standard Gaussian entries on their support. We proved that multichannel thresholding, which consists in keeping the  $m$  atoms  $\varphi_k$  yielding the  $m$  largest values of  $|\sum_i \langle x_i, \varphi_k \rangle|$ , will recover the atoms of the common support of the coefficient vectors with probability exceeding  $1 - C \exp(-L\gamma^2/\pi)$ , where  $C$  is the number of atoms in the dictionary and  $\gamma \geq (1 - \mu\sqrt{m})/(1 + m\sqrt{m})$ . Provided that  $m < 1/\mu^2$ , the probability of failure of thresholding in this setting decreases exponentially fast to zero when the number of channels  $L$  increases. This allows the recovery of up to  $m \lesssim \mu^{-2}$  atoms with thresholding, and should be compared with the much more pessimistic worst case result  $m < (1 + 1/\mu)/2$ . In practice, our results rely on an improved cumulative coherence  $\mu_2(m)$  which must be estimated for each specific dictionary. In [23], I estimated it for a union of a wavelet (time-scale) basis and a Wilson (time-frequency) basis and showed how these results could be used to predict which multichannel sparse representations can be recovered with high probability in such hybrid time-frequency dictionaries.

### 3.5 Conclusion and perspectives

The analysis of sparse signal models has become an increasingly active subject of research in the last few years, and several international workshops and special sessions in major international conferences are dedicated every year to the multiple applications and fundamental issues related with the notion of sparsity. Initially, the development of sparse signal models was motivated by their applications to denoising and low bitrate coding, and was a continuation of the success of wavelets and other time-frequency or time-scale methods for such applications. Today, sparsity is clearly established as a key property on its own to address several signal and image processing problems, such as inverse problems (e.g., deconvolution or blind source separation). Moreover, the use of sparse models within the framework of "Compressed Sensing" [39, 25] has opened the way to a promising but still challenging new perspective on the sampling problem.

**Adaptation to multichannel / multimodal data.** A major challenge raised by the new distributed data acquisition technologies is the processing of new data types, such as multimodal or multichannel data. Taking full care of these data requires the notion of sparse signal model itself to be revisited, to incorporate a notion of "joint" sparse representation of the data. Simultaneous sparse signal models start to be defined and understood for multichannel data [151, 150, 27, 83], but much work remains to be done to propose appropriate models and the corresponding decomposition algorithms for multimodal data [119]. In the context of data measured by sensor networks, it is particularly important and interesting to study how joint sparse approximation algorithms can be adapted to a distributed computing framework [10], since this would allow part of the processing to be performed independently on each sensor, therefore limiting the transmission cost to a central processing unit.

**Algorithms for large scale sparse decomposition problems.** One of the main bottlenecks which prevents the wide exploration of potential applications of sparse signal models with overcomplete signal dictionaries is the computational complexity of the optimization

algorithms it involves. In the last fifteen years, several sparse approximation algorithms have been proposed. Among them,  $\ell^1$  optimisation principles and greedy algorithms have been quite extensively studied in a huge body of recent work [89, 149, 94, 38, 81] initiated by Donoho and Huo [41]. These techniques have good decomposition performance –in some precise mathematical sense– provided that the sparse signal model is satisfied with good accuracy. From a computational point of view,  $\ell^1$  minimization typically relies on generic convex programming techniques, which unfortunately remains computationally very demanding for large problem sizes, but more recent algorithms such as iterative thresholding [55, 31, 47] or the homotopy method [46] are very promising. A significant gap remains before the most efficient techniques can be applied to high-resolution images of several million pixels. Iterative algorithms such as Matching Pursuit [117] provide an alternative with a much lower computational complexity to tackle large size problems [105] but can suffer from somewhat degraded decomposition performance. In the framework of an INRIA partner team (Equipe Associée) I am currently investigating with Pierre Vandergheynst the promising use of adaptive computational strategies, which consist in running first a fast but relatively inefficient algorithm to select a small subset of a large dictionary on which a more complex algorithm will then be run.

**Provably good algorithms, numerically efficient algorithms.** The main challenge here is to design new sparse approximation algorithms that would ideally combine, with an adjustable tradeoff, two properties : a provably good “quality” of the resulting decomposition under mild assumptions on the analyzed sparse signal, and numerically efficient design (in terms of moderate usage of computation resources such as flops and memory for large-scale problems). Current mathematical know-how has shown that the worst case analysis of the algorithms, which can be used to guarantee their success, often leads to too strong assumptions on the analyzed signal. Probabilistic analyses, based on the geometry of high dimensional Banach spaces, random matrices and concentration of measure, can provide much milder recovery conditions under a probabilistic model on the signal and the dictionary, to the price of a slight but nonzero probability of failure of the algorithms. Much is still to be done to understand the full fledge of how random models can help design and analyze new algorithms. I have started to investigate promising research directions which include randomizing the algorithms themselves, and drawing further the connections that have recently been established between sparse approximation techniques and the fundamental tools used to handle large databases.

**Robustness to dictionary mismatch.** Last, but not least, of the desirable properties of sparse approximation algorithms comes their robustness to an approximate knowledge of the dictionary. In other words, if the analyzed signal can be expressed as  $x \approx \Phi \mathbf{c}$  but is indeed decomposed as  $x \approx \hat{\Phi} \hat{\mathbf{c}}$ , how close can we expect  $\hat{\mathbf{c}}$  to be to  $\mathbf{c}$  depending on the similarity between  $\hat{\Phi}$  and  $\Phi$ ? While this aspect of sparse approximation algorithms is almost ignored in the literature [96], it is of utmost importance to design robust algorithms be it for sparse blind source separation, where the dictionary is blindly estimated from the data, or Compressed Sensing, where the dictionary is necessarily an inaccurate model of the physical sampling system. I obtained preliminary results on the effect of dictionary mismatch on some multichannel sparse approximation algorithms [96, 83]. This work is



still in progress, one of the main challenges being to handle single channel models and other types of recovery algorithms to compare not only their recovery performance but also their stability to noise and robustness to dictionary mismatch. Eventually, I believe that these tools will make it possible to study theoretical aspects of the dictionary learning problem, where the goal is to estimate both the dictionary and the sparse representation from a set of training signals.

---

## Annexe A

# Séparation de sources basée sur la parcimonie

... extrait de :

Séparation de sources 2

C. JUTTEN, P. COMON (coordonnateurs)

© Lavoisier, 2007

### A.1 Introduction

Les techniques de décomposition parcimonieuse de signaux et d'images ont connu un essor considérable à l'occasion du développement enthousiaste, au début des années 1990, des techniques de compression et de débruitage basées sur les ondelettes [116]. Ce n'est qu'une dizaine d'années plus tard environ que leur usage dans le cadre de la séparation aveugle de sources [114, 153, 106, 113, 102, 161, 20, 160] a commencé à être pleinement exploité. Leur impact principal est certainement qu'elles fournissent un cadre relativement simple qui permet la séparation d'un nombre de sources plus grand que le nombre d'observations disponibles.

L'idée de base est fondée sur une hypothèse essentiellement géométrique [146], sensiblement différente de l'hypothèse classique d'indépendance des sources [26]. Illustrons-la à partir du modèle simplifié de parole discuté par Van Hulle [153]. On cherche à identifier la matrice de mélange et à extraire les sources à partir du mélange observé :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{b}(t), \quad 1 \leq t \leq T \quad (\text{A.1})$$

Pour cela, on fait l'hypothèse qu'à chaque instant  $t$  (la variable  $t$  désigne un instant pour des signaux temporels, un pixel pour des images, etc.) une seule source est significativement plus active que les autres. Si  $\Lambda_n \subset \{1, \dots, T\}$  désigne l'ensemble des instants où la source d'indice  $n$  est la plus active (on parlera du *support* temporel de la source  $n$ ), alors pour tout  $t \in \Lambda_n$  on a par définition  $|s_n(t)| \gg |s_m(t)|$  pour  $m \neq n$ , et par conséquent :

$$\mathbf{x}(t) \approx s_n(t)\mathbf{A}_n, \quad t \in \Lambda_n \quad (\text{A.2})$$

où  $\mathbf{A}_n = (A_{pn})_{1 \leq p \leq P}$  est la  $n$ -ième colonne (inconnue) de la matrice de mélange. Il s'ensuit que l'ensemble des points  $\{\mathbf{x}(t) \in \mathbb{C}^P, t \in \Lambda_n\}$  est à peu près aligné le long de la droite passant par l'origine et dirigée par le vecteur  $\mathbf{A}_n$ . Comme illustré sur la figure A.1(a) pour un mélange stéréophonique ( $P = 2$ ) de trois sources audio ( $N = 3$ ), cet alignement peut être observé en pratique sur le *diagramme de dispersion* (en anglais *scatter plot*)  $\{\mathbf{x}(t) \in \mathbb{C}^P, 1 \leq t \leq T\}$ . Sur cette figure en dimension  $P = 2$ , le diagramme de dispersion est le nuage de points représentant les couples de valeurs  $(x_1(t), x_2(t))$  observés sur l'ensemble des échantillons  $t$  du signal de mélange.

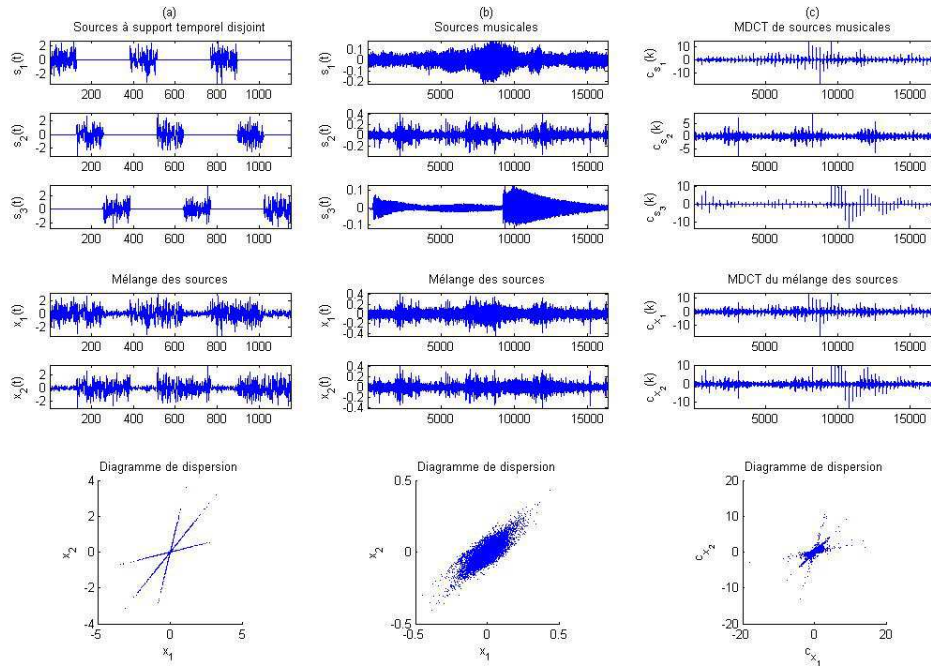


FIG. A.1 – Principe «géométrique» de la séparation de sources par la parcimonie. Les sources (en haut), leur mélange (au milieu) et le diagramme de dispersion correspondant (en bas). (a) – Pour des sources à supports temporels disjoints, le diagramme de dispersion temporel fait apparaître des alignements le long des colonnes de la matrice de mélange. (b) – Pour des signaux plus complexes tels que des signaux musicaux (au centre), le diagramme de dispersion temporel n'est pas lisible. (c) – Une transformée temps-fréquence orthogonale appropriée (la MDCT) des mêmes signaux (à droite) permet de retrouver un diagramme de dispersion où les directions des colonnes de la matrice de mélange sont discernables à vue d'oeil.

Il est donc concevable d'estimer la matrice de mélange  $\hat{\mathbf{A}}$  à l'aide d'un algorithme de *categorisation* (en anglais *clustering*) [159] : il s'agit de partager le diagramme de dispersion en  $N$  amas de points  $\{\mathbf{x}(t), t \in \hat{\Lambda}_n\}$ , et d'estimer la direction  $\hat{\mathbf{A}}_n$  de chaque amas. Si

le mélange est (sur)déterminé ( $N \leq P$ ) on peut estimer les sources avec la pseudo-inverse [71] de la matrice de mélange estimée  $\hat{\mathbf{s}}(t) := \hat{\mathbf{A}}^\dagger \mathbf{x}(t)$ , mais l'intéressant est que même dans le cas de mélange *sous-déterminé* ( $N > P$ ), l'hypothèse selon laquelle les sources ont des supports disjoints permet de les estimer aux moindres carrés<sup>1</sup> à partir des amas obtenus :

$$\hat{\mathbf{s}}_n(t) := \begin{cases} \langle \mathbf{x}(t), \hat{\mathbf{A}}_n \rangle / \|\hat{\mathbf{A}}_n\|_2^2 & \text{si } t \in \hat{\Lambda}_n, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour simple et attractive qu'elle soit, la technique proposée par Van Hulle ne peut généralement pas être appliquée telle quelle, comme l'illustre la figure A.1(b) où l'on a affiché le diagramme de dispersion temporel d'un mélange stéréophonique ( $P = 2$ ) de  $N = 3$  sources musicales. A l'évidence, les sources ne peuvent être considérées comme ayant des supports temporels disjoints, et le diagramme de dispersion temporel ne permet pas à vue d'oeil de discerner les directions des colonnes de la matrice de mélange.

C'est ici que les représentations parcimonieuses de signaux (aussi appelées représentations creuses) entrent en scène. La figure A.1(c) montre les coefficients  $c_{s_n}(k)$  d'une transformée temps-fréquence orthogonale des sources (la MDCT [129]), ceux  $c_{x_p}(k)$  du mélange, et enfin le diagramme de dispersion temps-fréquence des points  $(c_{x_1}(k), c_{x_2}(k))$ ,  $1 \leq k \leq T$ . Sur ce dernier, on peut de nouveau observer les directions des colonnes de la matrice de mélange et appliquer la stratégie d'estimation de  $\mathbf{A}$  décrite précédemment. L'observation des coefficients de la MDCT des sources originales, sur la même figure, permet d'expliquer ce "miracle" : les coefficients des MDCT des différentes sources ont (essentiellement) des supports disjoints, car pour chaque source seul un faible nombre de coefficients MDCT est d'amplitude significative. L'approche précédente permet donc de nouveau d'estimer  $\hat{\mathbf{A}}$  et les coefficients de la transformée temps-fréquence des sources. Les sources elle-mêmes sont estimées par application d'une transformée inverse.

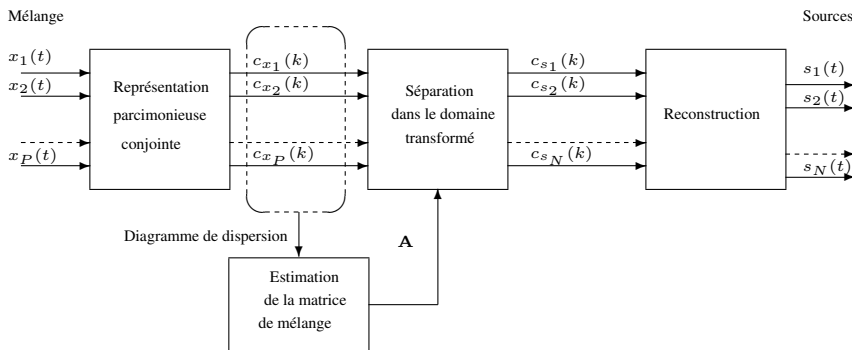


FIG. A.2 – Schéma de principe des méthodes de séparation de sources basées sur la parcimonie

Le schéma A.2 illustre la structure des méthodes de séparation de sources basées sur la parcimonie, dont nous venons d'introduire les principaux ingrédients :

<sup>1</sup>La notation  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire entre deux vecteurs, par exemple pour des vecteurs colonne  $\langle \mathbf{x}(t), \hat{\mathbf{A}}_n \rangle := \mathbf{x}(t) \hat{\mathbf{A}}_n^H = \sum_{p=1}^P x_p(t) \hat{A}_{pn}$ , et pour des vecteurs ligne  $\langle s_n, s_{n'} \rangle = \sum_{t=1}^T s_n(t) s_{n'}^*(t)$ .

1. une étape de changement de représentation du mélange observé est effectuée, de façon à ce que les coefficients des sources dans la nouvelle représentation aient des supports aussi disjoints que possible. On emploie pour cela des techniques de *représentation parcimonieuse conjointe*.
2. les directions des colonnes de la matrice de mélange sont estimées à partir de la représentation du mélange. Outre des algorithmes classiques d'ICA, on peut notamment faire appel à des *algorithmes de catégorisation* appliqués au *diagramme de dispersion*.
3. enfin, l'*estimation des représentations (parcimonieuses) des sources* permet la *reconstruction* de ces dernières.

### Guide de lecture.

La suite de ce chapitre est consacrée à une discussion détaillée des principales approches possibles pour réaliser chacune des étapes de la séparation par la parcimonie. La notion de représentation parcimonieuse de signaux et le concept de dictionnaire sont introduits en section A.2 avec quelques exemples. Le formalisme et les principaux algorithmes permettant de calculer des représentations parcimonieuses conjointes de mélanges  $\mathbf{x}(t)$  sont décrits dans la section A.3. La section est conclue par un récapitulatif des principales caractéristiques, avantages et inconvénients de ces algorithmes dont la portée dépasse largement la séparation de sources. L'exploitation proprement dite de la parcimonie de ces représentations conjointes du mélange pour la seconde étape de séparation de sources, à savoir l'estimation de la matrice de mélange à partir d'un diagramme de dispersion, fait l'objet de la section A.4. Enfin, la section A.5 est dédiée aux algorithmes permettant de réaliser l'étape de séparation proprement dite dans le domaine "transformé", afin d'estimer les sources une fois la matrice de mélange estimée. Un récapitulatif des choix possibles pour réaliser les différentes étapes de séparation de sources par la parcimonie est proposé en section A.6, accompagné d'une discussion des éléments qui peuvent déterminer ces choix. Nous dressons finalement en section A.7 un bilan des perspectives et défis ouverts par les approches basées sur la parcimonie pour la séparation de sources, telles que l'exploitation de nouveaux facteurs de diversité entre sources, l'estimation aveugle de dictionnaires adaptés, et la séparation de mélanges convolutifs sous-déterminés.

## A.2 Représentations parcimonieuses de signaux

L'hypothèse de base sous-jacente à toutes les méthodes de séparation de sources basées sur la parcimonie est que chacune des sources admet une représentation (approchée) telle que pour une certaine famille de signaux élémentaires  $\varphi_k$  appelés *atomes*<sup>2</sup> et souvent

<sup>2</sup>Bien que les notations  $\varphi$  (respectivement  $\psi$ ) et  $\Phi$  (respectivement  $\Psi$ ) soient utilisées dans le reste de cet ouvrage pour désigner les fonctions score marginales (respectivement la fonction score jointe) des sources et la première (respectivement seconde) fonction caractéristique, elles seront employées dans ce chapitre pour désigner les atomes relatifs à l'analyse et à la synthèse du signal et les dictionnaires / matrices correspondants.

supposés d'énergie unité, chaque signal source inconnu s'écrit :

$$s(t) = \sum_{k=1}^K c(k) \varphi_k(t) \quad (\text{A.3})$$

où seuls quelques coefficients  $c(k)$  du vecteur  $\mathbf{c}$  sont significatifs, tandis que la plupart sont négligeables. Dans le cas du modèle de parole simplifié proposé par Van Hulle [153], les atomes sont simplement des fonctions de Dirac  $\varphi_k(t) = \delta(t - k)$ , c'est-à-dire les échantillons temporels. Pour beaucoup d'applications dans le domaine du traitement de signal audio, il peut s'agir de la transformée de Fourier à court terme (TFCT, aussi appelée transformée de Gabor ou spectrogramme) [116] où l'indice  $k = (n, f)$  désigne un point temps-fréquence,  $c(k)$  est la valeur de la TFCT du signal  $s$  en ce point, et (A.3) correspond à la formule de reconstruction de  $s$  à partir de sa TFCT par la méthode *overlap-add* (OLA) [131]. Il est possible d'employer d'autres familles d'atomes, appelées *dictionnaires*, plus adaptées à la représentation de tel ou tel type de signaux. Dans le cadre qui nous intéresse, c'est la plus ou moins grande parcimonie de la représentation d'un signal dans un dictionnaire qui détermine la pertinence de ce dernier.

### A.2.1 Notions de parcimonie

Informellement, on considère qu'un jeu de coefficients  $c(k)$  est parcimonieux si la majorité des coefficients sont nuls ou très petits, tandis que seuls quelques coefficients sont significatifs. En termes statistiques (ou probabilistes), on a coutume de dire que les coefficients  $c(k)$  ont une distribution parcimonieuse ou supergaussienne si leur histogramme (ou leur densité de probabilité) présente un fort pic à l'origine avec des queues lourdes, comme illustré sur la figure A.3.

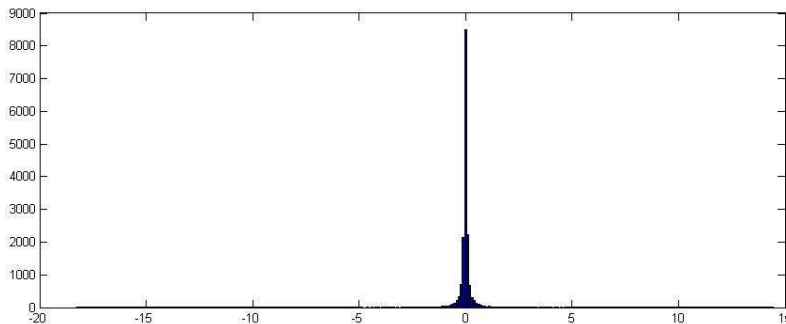


FIG. A.3 – Histogramme des coefficients MDCT de la première source dans le mélange de signaux musicaux de la figure A.1(c)

Le modèle le plus commun de distribution parcimonieuse est certainement la famille des distributions Gaussiennes généralisées :

$$p_c(c) \propto \exp(-\alpha |c|^\tau) \quad (\text{A.4})$$

pour  $0 < \tau \leq 1$ , le cas  $\tau = 1$  correspondant à la distribution de Laplace. Certaines techniques Bayésiennes de séparation de sources reposant sur l'hypothèse de parcimonie font appel aux distributions Student- $t$  pour exploiter leur expression analytique en termes de mélange de lois Gaussiennes [53]. Pour les mêmes raisons, le modèle bi-gaussien, avec une Gaussienne de petite variance et l'autre de grande variance, est également souvent employé [33].

Dans le cadre du modèle Gaussien généralisé, un jeu de coefficients  $\mathbf{c} = \{c(k)\}_{k=1}^K$  supposés statistiquement indépendants a pour distribution  $p_{\mathbf{c}}(\mathbf{c}) \propto \exp(-\alpha \|\mathbf{c}\|_{\tau}^{\tau})$  où  $\|\mathbf{c}\|_{\tau}$  désigne la "norme"<sup>3</sup>  $\ell^{\tau}$  :

$$\|\mathbf{c}\|_{\tau} := \left( \sum_{k=1}^K |c(k)|^{\tau} \right)^{1/\tau} \quad (\text{A.5})$$

Un jeu de coefficients est alors d'autant plus vraisemblable que sa norme  $\ell^{\tau}$  est faible. La norme  $\|\mathbf{c}\|_{\tau}^{\tau}$  peut alors servir à quantifier la parcimonie d'une représentation  $\mathbf{c}$ , et  $\mathbf{c}$  est la vision adoptée dans la suite de ce chapitre.

## A.2.2 Dictionnaires

En général, on s'intéresse à des dictionnaires qui permettent de reconstruire l'ensemble des signaux  $s \in \mathbb{C}^T$ , c'est-à-dire que l'espace engendré par les atomes du dictionnaire est  $\mathbb{C}^T$  tout entier<sup>4</sup>. En notant  $\Phi$  la matrice de taille  $K \times T$  dont les  $K$  lignes sont constituées des atomes  $\varphi_k(t)$ ,  $1 \leq t \leq T$ , le modèle parcimonieux (A.3) des sources peut s'écrire matriciellement<sup>5</sup> :

$$s = c_s \cdot \Phi \quad (\text{A.6})$$

où  $c_s = (c_s(k))_{k=1}^K$  est un vecteur de  $K$  coefficients.

Si le dictionnaire choisi est une base,  $K = T$  et il y a correspondance univoque entre le signal source  $s$  et ses coefficients  $c_s = s \cdot \Phi^{-1}$  ( $c_s = s \cdot \Phi^H$  pour une base orthonormale). C'est par exemple le cas pour un dictionnaire correspondant à une base orthogonale d'ondelettes discrètes, ou bien à la base orthogonale de Fourier discrète [116], ou bien encore à une base de type MDCT (*Modified Discrete Cosine Transform* [129]).

Si au contraire le dictionnaire est redondant ( $K > T$ ) alors il existe une infinité de jeux possibles de coefficients qui permettent de reconstruire chaque source. C'est le cas par exemple d'un dictionnaire de Gabor, constitué d'atomes de la forme :

$$\varphi_{n,f}(t) = w(t - nT) \exp(2j\pi ft) \quad (\text{A.7})$$

– où  $w$  est appelée fenêtre d'analyse – et utilisé pour calculer la TFCT d'un signal sous la forme  $TFCT_s(n, f) = \langle s, \varphi_{n,f} \rangle$ . La construction et l'étude de dictionnaires redondants

<sup>3</sup>Il ne s'agit à proprement parler d'une norme que pour  $1 \leq \tau \leq \infty$ , avec la modification usuelle  $\|\mathbf{c}\|_{\infty} = \sup_k |c(k)|$ . Par abus de langage, nous parlerons également de norme pour  $0 < \tau < 1$ . Pour  $\tau = 0$ , avec la convention  $c^0 = 1$  si  $c > 0$  et  $0^0 = 0$ , la norme  $\ell^0$  est le nombre de coefficients non nuls de  $\mathbf{c}$ .

<sup>4</sup>La restriction de l'approche présentée dans ce chapitre au cas de signaux réels ne pose pas de difficulté particulière.

<sup>5</sup>Avec les notations habituelles de la séparation de sources, la matrice de mélange  $\mathbf{A}$  agit à gauche sur la matrice des signaux sources  $\mathbf{s}$ , c'est pourquoi le dictionnaire doit agir à droite sur les coefficients  $c_s$  pour la synthèse d'un signal. Cette notation sera utilisée tout au long de ce chapitre.

pour la représentation parcimonieuse de signaux est précisément motivée par l'idée qu'il est possible de choisir, parmi cette infinité de représentations possible, une représentation particulièrement bien adaptée à la tâche à accomplir pour la classe de signaux considérés.

La construction de dictionnaires est depuis le début des années 1990 et aujourd'hui encore l'objet de nombreux travaux en analyse harmonique, ce qui a donné lieu à la construction de nombreuses familles d'ondelettes, de bibliothèques de bases orthogonales de paquets d'ondelettes ou de fonctions trigonométriques locales [116], ainsi que de nombreuses autres constructions plus sophistiquées (curvelets, etc. [139]) qu'il serait trop long de toutes citer ici. Plus près du coeur de la problématique de la séparation de sources, le codage parcimonieux [54, 113, 112, 1] a également pour objet l'apprentissage d'un dictionnaire (redundant ou non) maximisant la parcimonie des représentations d'un jeu de données d'entraînement.

### A.2.3 Transformées linéaires

Dans un dictionnaire donné  $\Phi$ , l'approche traditionnelle pour calculer une représentation de  $s$ , consiste à calculer une *transformée* linéaire :

$$c_s^\Psi := s \cdot \Psi \quad (\text{A.8})$$

et les coefficients calculés sont donc les valeurs des corrélations :

$$c_s^\Psi(k) = \langle s, \psi_k \rangle \quad (\text{A.9})$$

de  $s$  avec un jeu d'atomes duaux  $\psi_k(t)$ , qui forment les colonnes de la matrice  $\Psi$ . On peut donc considérer les atomes  $\varphi_k(t)$  comme des atomes relatifs à la synthèse du signal, par opposition aux atomes relatifs à son analyse  $\psi_k(t)$ .

Afin que la transformée d'un signal  $s$  (analyse, (A.8)), suivie de sa reconstruction (synthèse, (A.6)), en permette la reconstruction parfaite, il faut que la transformée satisfasse  $s \cdot \Psi \Phi = s$  pour tout signal  $s$ , c'est-à-dire  $\Psi \Phi = \mathbf{I}$  ( $\mathbf{I}$  est la matrice identité, ici de taille  $T \times T$ ). Par exemple, dans le cas d'un dictionnaire de Gabor (A.7), un jeu d'atomes duaux compatible avec la condition de reconstruction (A.8) prend la forme :

$$\psi_{n,f}(t) = w'(t - nT) \exp(2j\pi ft), \quad (\text{A.10})$$

où les fenêtres d'analyse  $w'(t)$  et de reconstruction  $w(t)$  doivent satisfaire la condition  $\sum_n w'w(t - nT) = 1$  pour tout  $t$ . L'analyse d'un signal avec les atomes d'analyse  $\psi_{n,f}$  revient alors à calculer sa TFCT avec la fenêtre  $w'$ , tandis que la reconstruction avec les atomes de synthèse  $\varphi_{n,f}$  correspond à la reconstruction par *overlap-add* à partir de la TFCT [131].

Lorsque le dictionnaire  $\Phi$  est une base de l'espace des signaux, telle que la base de Fourier discrète (orthonormale) ou une base d'ondelettes bi-orthogonales[116], la seule transformée  $\Psi$  permettant la reconstruction parfaite est  $\Psi = \Phi^{-1}$ , et correspond à une transformée de Fourier discrète rapide ou une transformée en ondelettes rapide. Pour de tels dictionnaires non redondants qui correspondent à des transformées "critiques", on a alors également  $\Phi \Psi = \mathbf{I}$ , c'est-à-dire que la synthèse d'un signal à partir d'une représentation  $c_s$ , suivie de son analyse, permet de retrouver exactement les coefficients utilisés. Il n'en est



pas de même dans le cas de transformées redondantes, telles que la TFCT ou la transformée en ondelettes continues.

Dans le cas de dictionnaires redondants quelconques, il existe une infinité de matrices “duales”  $\Psi$  qui satisfont la condition de reconstruction  $\Psi\Phi = \mathbf{I}$ , mais aucun ne satisfait l’identité  $\Phi\Psi = \mathbf{I}$ . La pseudo-inverse [71]  $\Psi = \Phi^\dagger = (\Phi^H\Phi)^{-1}\Phi^H$  de  $\Phi$  offre un choix particulier de transformée linéaire qui permet de calculer la solution aux moindres carrés du problème de représentation  $s = c_s\Phi$ , soit :

$$c_s^{\Phi^\dagger} = \arg \min_{c_s | c_s\Phi = s} \sum_{k=1}^K |c_s(k)|^2. \quad (\text{A.11})$$

#### A.2.4 Représentations adaptatives

Si l’on a recours à un dictionnaire redondant, c’est avec l’espoir de trouver, parmi l’infinité de représentations possibles d’un signal donné avec ce dictionnaire, une représentation particulièrement parcimonieuse : la redondance du dictionnaire a pour but d’offrir une large palette d’atomes susceptibles de bien représenter les structures typiques du signal, de sorte que celui-ci puisse être bien approché par une combinaison linéaire d’un petit ensemble bien choisi d’atomes du dictionnaire.

Paradoxalement, plus le dictionnaire est redondant, plus la représentation obtenue par une transformée linéaire a de coefficients non nuls. Ainsi, pour la TFCT associée à un dictionnaire de Gabor, la redondance croît avec le recouvrement entre fenêtres adjacentes (qui augmente le nombre de trames d’analyse) et le *zero-padding* (qui augmente le nombre de fréquences discrètes d’analyse), mais puisque les atomes “voisins” en temps-fréquence d’un atome donné lui sont très corrélés, le nombre de coefficients non négligeables observés à l’occasion de l’analyse d’un atome de Gabor (A.7) croît également avec la redondance de la transformée.

Pour pleinement profiter du potentiel des dictionnaires redondants et véritablement obtenir des représentations parcimonieuses de signaux, il faut donc abandonner les transformées linéaires au profit de techniques adaptatives. Le principe de ces dernières, apparues dans les années 1990, est de sélectionner en fonction du signal analysé un sous-ensemble restreint  $\Lambda$  d’atomes du dictionnaire. Seuls les atomes sélectionnés se voient alors affecter un coefficient non nul, et la représentation ou l’approximation du signal ainsi obtenue est donc bien parcimonieuse. Les principales techniques de représentation adaptative de signaux sont décrites dans la section qui suit. On se place dans le cadre un peu plus général des représentations parcimonieuses conjointes de mélanges, première étape pour la séparation de sources par la parcimonie.

### A.3 Représentations parcimonieuses conjointes de mélanges

La première étape d’un système de séparation de sources par la parcimonie (voir la figure A.2) consiste à calculer une représentation parcimonieuse conjointe du mélange observé  $\mathbf{x}$ , afin d’obtenir une représentation facilitant à la fois l’estimation de la matrice de mélange et celle des sources par des algorithmes de catégorisation. S’il est possible de recourir à des transformées linéaires (TFCT, transformée en ondelettes, etc.) pour obtenir de

telles représentations, il peut s'avérer plus payant en termes de parcimonie de la représentation obtenue d'avoir recours à des algorithmes de décomposition adaptative conjointe du mélange.

### A.3.1 Principe

Une représentation parcimonieuse approchée d'un mélange  $\mathbf{x}$  prend la forme  $\mathbf{x} \approx C_{\mathbf{x}}\Phi$ , où :

$$C_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} c_{x_1} \\ \dots \\ c_{x_P} \end{bmatrix} = [ C_{\mathbf{x}}(1) \quad \dots \quad C_{\mathbf{x}}(K) ] \quad (\text{A.12})$$

est une matrice de dimensions  $P \times K$  dont chaque ligne  $c_{x_p}$  est un vecteur constitué des  $K$  coefficients  $c_{x_p}(k)$  représentant l'un des  $P$  canaux du mélange. Le calcul de  $C_{\mathbf{x}}$  pour un mélange  $\mathbf{x} \approx \mathbf{A}\mathbf{s}$  a pour but de se ramener à un problème de séparation  $C_{\mathbf{x}} \approx \mathbf{A}C_{\mathbf{s}}$ , celui-ci étant supposé plus facile à résoudre si  $C_{\mathbf{s}}$  est parcimonieux.

En effet, en combinant le modèle parcimonieux des sources (voir (A.3) ou (A.6)) avec le modèle du mélange linéaire instantané bruité (A.1), on obtient un modèle parcimonieux global du mélange :

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}C_{\mathbf{s}}\Phi + \mathbf{b}, \quad \text{où} \quad C_{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} c_{s_1} \\ \dots \\ c_{s_N} \end{bmatrix} = [ C_{\mathbf{s}}(1) \quad \dots \quad C_{\mathbf{s}}(K) ] \quad (\text{A.13})$$

est une matrice de taille  $N \times K$  dont chaque ligne  $c_{s_n}$  est un vecteur parcimonieux constitué des  $K$  coefficients  $c_{s_n}(k)$  représentant l'une des  $N$  sources, et chaque colonne  $C_{\mathbf{s}}(k)$ ,  $1 \leq k \leq K$  indique le degré d' "activité" des différentes sources pour un atome donné. S'il existe une telle représentation  $C_{\mathbf{s}}$  des sources où elles ont des supports disjoints (chaque atome n'est activé que pour au plus une source), alors  $C_{\mathbf{x}} := \mathbf{A}C_{\mathbf{s}}$  est une représentation (approchée) admissible du mélange (bruité)  $\mathbf{x}$  qui doit en permettre la séparation *via* le diagramme de dispersion.

Lorsque  $\Phi$  est une base orthonormée telle que la MDCT, le mélange (et les sources) admettent une unique représentation, qui peut donc être calculée simplement par transformée et satisfait nécessairement  $C_{\mathbf{x}} \approx \mathbf{A}C_{\mathbf{s}}$ . Nous en avons vu un exemple pour des sources musicales, où le diagramme de dispersion de la représentation  $C_{\mathbf{x}}$  obtenue par transformée linéaire avec une base orthonormale  $\Phi$  de type MDCT fait clairement apparaître (voir la figure A.1(c)) les directions des colonnes de la matrice de mélange, et permet donc d'effectuer les étapes suivantes de la séparation. En revanche, lorsque  $\Phi$  est un dictionnaire redondant, la représentation  $C_{\mathbf{x}}$  calculée dépend de l'algorithme employé et ne satisfait plus forcément l'identité  $C_{\mathbf{x}} \approx \mathbf{A}C_{\mathbf{s}}$ , qui s'avère cruciale pour les étapes ultérieures de la séparation basée sur la parcimonie.

La pertinence du choix d'un algorithme d'approximation parcimonieuse conjointe du mélange repose donc notamment sur sa capacité à fournir une représentation qui satisfasse avec suffisamment de précision l'approximation  $C_{\mathbf{x}} \approx \mathbf{A}C_{\mathbf{s}}$ , dès que les sources admettent une représentation  $C_{\mathbf{s}}$  où elles ont des supports suffisamment disjoints. Ce point important sera donc discuté pour chacun des algorithmes d'approximation parcimonieuse conjointe de mélanges décrits, avec ses propriétés majeures, au cours de cette section.

### A.3.2 Transformées linéaires

La représentation conjointe la plus simple d'un mélange est certainement obtenue en appliquant la même transformée linéaire (par exemple une TFCT) à tous les canaux. Formellement, par juxtaposition des transformées  $c_{x_p}^\Psi := x_p \Psi$  de chacune des composantes  $x_p$ ,  $1 \leq p \leq P$  du mélange, on obtient une matrice :

$$C_x^\Psi := \mathbf{x} \Psi \quad (\text{A.14})$$

qu'on appelle la transformée du mélange  $\mathbf{x}$ . Son calcul numérique est particulièrement simple mais, ainsi qu'on l'a déjà discuté, de telles transformées ne permettent pas nécessairement de tirer pleinement parti de la redondance du dictionnaire pour obtenir des représentations très parcimonieuses.

#### Algorithmes

Les transformées linéaires  $\Psi$  à appliquer à un mélange sont souvent associées à des algorithmes rapides : transformée de Fourier, TFCT, transformée en ondelettes orthogonales, etc. Il arrive également [32] que le dictionnaire  $\Phi$  soit constitué de l'union d'un certain nombre de bases orthonormales à transformée rapide (ondelettes, cosinus locaux ...)  $\Phi = [\Phi_1 \dots \Phi_J]$ , au quel cas la pseudo-inverse  $\Phi^\dagger = J^{-1} \Phi^H$  fournit une transformée duale  $\Psi := \Phi^\dagger$  simple et rapide que l'on peut appliquer en calculant chacune des transformées rapides élémentaires et en concaténant les coefficients obtenus. Il est également possible, par exemple, de calculer simultanément deux TFCT du même mélange, l'une avec une petite fenêtre d'analyse et l'autre avec une grande fenêtre, pour obtenir une sorte de transformée multifenêtre [126].

#### Propriétés et limitations

Par linéarité de la transformée, le problème initial de séparation de sources (A.1) se traduit par un problème exactement analogue dans le domaine transformé (voir (A.8) et (A.14)) :

$$C_x^\Psi = \mathbf{A} C_s^\Psi + C_b^\Psi. \quad (\text{A.15})$$

La séparation dans le domaine transformé, pour estimer les transformées  $\widehat{C}_s$  des sources à partir de  $C_x$  et finalement reconstruire  $\widehat{\mathbf{s}} := \widehat{C}_s \Phi$ , est donc pertinente si les supports des sources dans le domaine transformé  $C_s^\Psi$  sont raisonnablement disjoints.

Malgré tout l'intérêt d'une mise en œuvre numérique simple et efficace, les transformées ne constituent cependant pas la panacée en termes de parcimonie des représentations obtenues lorsque le dictionnaire est redondant. Notamment, la représentation aux moindres carrés  $C_x^{\Phi^\dagger} := \mathbf{x} \Phi^\dagger$  est génériquement moins parcimonieuse (elle a plus de coefficients non nuls) que les représentations minimisant d'autres critères plus appropriés à la notion de parcimonie, tels que les critères  $\ell^\tau$ , avec  $0 \leq \tau \leq 1$ . C'est pourquoi des approches adaptatives par minimisation de norme  $\ell^\tau$  avec  $0 \leq \tau \leq 1$  ont fait l'objet d'un intérêt intense depuis le début des années 1990 environ [72, 28], dans un cadre qui dépasse largement celui de la séparation de sources [127, 56, 132, 32, 140]. Le gros des efforts s'est jusqu'ici concentré sur les méthodes de représentation parcimonieuse adaptative d'un signal ou d'une image

donnée, et l'intérêt pour l'équivalent de ces méthodes pour la représentation conjointe de plusieurs signaux est plus récent [76, 111, 77, 30, 151, 150]. Nous discutons ci-après ces dernières approches, d'abord dans le cas général des critères  $\ell^\tau$  pour  $0 \leq \tau \leq \infty$ , puis en détaillant plus spécifiquement les algorithmes correspondants pour des valeurs de  $\tau \leq 2$  qui permettent d'obtenir des représentations parcimonieuses.

### A.3.3 Principe de la minimisation de critères $\ell^\tau$

Au lieu d'utiliser des transformées linéaires, on peut en effet définir des *représentations parcimonieuses conjointes* minimisant un critère  $\ell^\tau$ , pour  $0 \leq \tau \leq \infty$ . Avant d'entrer dans le détail de leur définition, commençons par rappeler celle des représentations parcimonieuses "monocanal" correspondantes : parmi toutes les représentations admissibles d'un signal  $x_1$  (c'est-à-dire qui satisfont l'égalité  $x_1 = c_{x_1} \Phi$ ), il s'agit de choisir celle  $c_{x_1}^\tau$  de plus petite norme  $\ell^\tau$ , ce qui revient à sélectionner la représentation la plus vraisemblable au sens d'une distribution Gaussienne généralisée supposée des coefficients (A.4).

Dans le cas multicanal, le critère optimisé prend la forme :

$$C_{\mathbf{x}}^\tau := \arg \min_{C_{\mathbf{x}} | C_{\mathbf{x}} \Phi = \mathbf{x}} \sum_{k=1}^K \left( \sum_{p=1}^P |c_{x_p}(k)|^2 \right)^{\tau/2} \quad (\text{A.16})$$

pour  $0 < \tau < \infty$ , avec une modification évidente pour  $\tau = \infty$ . Pour  $\tau = 0$ , avec la convention  $c^0 = 1$  si  $c > 0$  et  $0^0 = 0$ , la norme  $\ell^0$  intervenant dans les critères (A.16) est le nombre de colonnes  $C_{\mathbf{x}}(k)$  non nulles, c'est-à-dire le nombre d'atomes utilisés dans la représentation. Minimiser la norme  $\ell^0$ , c'est donc tout simplement chercher à représenter le mélange en utilisant le moins possible d'atomes, ce qui correspond bien à la notion intuitive de recherche d'une représentation parcimonieuse.

Cette forme particulière du critère optimisé a pour effet de définir une représentation de  $x$  qui prend véritablement en compte des propriétés *conjointes* des différents canaux  $x_p$ , au contraire d'un critère peut-être plus intuitif tel que  $\sum_k \sum_p |c_{x_p}|^\tau$ , qui au contraire découple l'optimisation sur les différents canaux. Nous reviendrons également en section A.3.4 sur une interprétation Bayésienne expliquant la forme prise par le critère (A.16).

Pour tenir compte de la part de bruit  $\mathbf{b}$  intrinsèque au modèle de mélange (A.1), et également en raison de la possible inexactitude du modèle parcimonieux des sources (A.6), il est souvent plus intéressant de rechercher une représentation parcimonieuse approchée – aussi appelée *approximation parcimonieuse conjointe* – via l'optimisation du critère :

$$C_{\mathbf{x}}^{\tau, \lambda} := \arg \min_{C_{\mathbf{x}}} \left\{ \|\mathbf{x} - C_{\mathbf{x}} \Phi\|_F^2 + \lambda \sum_{k=1}^K \left( \sum_{p=1}^P |c_{x_p}(k)|^2 \right)^{\tau/2} \right\} \quad (\text{A.17})$$

où  $\|\mathbf{y}\|_F^2 := \sum_{pt} |y_p(t)|^2$  désigne la norme de Fröbenius de la matrice  $\mathbf{y}$ , c'est-à-dire la somme des énergies de ses lignes. Le premier terme du critère est un terme d'attache aux données qui mesure la qualité de l'approximation obtenue au sens des moindres carrés. Le second terme mesure la parcimonie "conjointe" de la représentation multicanal  $C_{\mathbf{x}}$ , au sens du critère (A.16), et le paramètre  $\lambda$  détermine l'importance respective accordée à la qualité d'approximation et à la parcimonie. Lorsque  $\lambda$  tend vers zéro, la solution obtenue  $C_{\mathbf{x}}^{\tau, \lambda}$  se rapproche de  $C_{\mathbf{x}}^\tau$ , tandis que lorsque  $\lambda$  est suffisamment grand  $C_{\mathbf{x}}^{\tau, \lambda}$  tend vers zéro.

### A.3.4 Interprétation Bayésienne des critères $\ell^\tau$

La forme spécifique du critère  $\ell^\tau$  utilisé pour sélectionner une représentation conjointe multicanal (A.16)-(A.17), qui couple la sélection des coefficients pour différents canaux, n'est pas due au hasard. L'objectif des lignes qui suivent est de montrer dans les grandes lignes comment elle peut être dérivée dans un cadre Bayésien. Le lecteur plus intéressé par les aspects algorithmiques et pratiques pourra donc se diriger sans hésiter vers la section A.3.6.

Qu'il s'agisse d'une approche adaptative ou par transformée, l'optimisation des critères (A.11), (A.16) ou (A.17) admet une interprétation Bayésienne : l'optimisation (A.11) correspond au calcul des coefficients les plus vraisemblables permettant de reconstruire  $\mathbf{x} = C_{\mathbf{x}}\Phi$  sous l'hypothèse d'une distribution  $p_{C_{\mathbf{x}}}(\cdot)$  Gaussienne *i.i.d* de variance  $\sigma_{\mathbf{x}}^2$ . En effet, sous cette hypothèse la distribution de  $C_{\mathbf{x}}$  s'écrit (voir l'équation (A.4) pour  $\tau = 2$ ) :

$$p_{C_{\mathbf{x}}}(C_{\mathbf{x}}) \propto \exp\left(-\frac{\|C_{\mathbf{x}}\|_F^2}{2\sigma_{\mathbf{x}}^2}\right) = \exp\left(-\frac{\sum_{k=1}^K \|C_{\mathbf{x}}(k)\|_2^2}{2\sigma_{\mathbf{x}}^2}\right) \quad (\text{A.18})$$

Dans le cadre spécifique de la séparation de sources, la distribution  $p_{C_{\mathbf{x}}}(C_{\mathbf{x}})$  de  $C_{\mathbf{x}} = \mathbf{A}C_{\mathbf{s}}$  est fonction de celle  $p_{C_{\mathbf{s}}}(C_{\mathbf{s}})$  des coefficients des sources  $C_{\mathbf{s}}$  ainsi que de celle  $p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})$  de la matrice de mélange. En l'absence de connaissance *a priori* sur la matrice de mélange, pour de la séparation aveugle il est naturel de supposer que sa distribution est invariante par des rotations spatiales arbitraires, c'est-à-dire que pour toute matrice unitaire  $\mathbf{U}$  on a l'égalité  $p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = p_{\mathbf{A}}(\mathbf{U}\mathbf{A})$ . C'est le cas par exemple si les colonnes  $\mathbf{A}_n$  sont normées  $\|\mathbf{A}_n\|_2 = 1$ , indépendantes et uniformément distribuées sur la sphère unité de  $\mathbb{C}^P$ . Cette seule hypothèse implique que la distribution *a priori* des coefficients  $C_{\mathbf{x}}$  du mélange non-bruité pour tout atome  $k$  est radiale, c'est-à-dire que pour toute matrice unitaire  $\mathbf{U}$  on a :

$$p(C_{\mathbf{x}}(k)) = p(\mathbf{U}C_{\mathbf{x}}(k)) = r_k(\|C_{\mathbf{x}}(k)\|_2) \quad (\text{A.19})$$

où  $r_k(\cdot) \geq 0$  est une fonction qui dépend des distributions  $p_{C_{\mathbf{s}}(k)}(C_{\mathbf{s}}(k))$  et  $p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})$ .

Si les coefficients  $C_{\mathbf{s}}(k)$  sont *i.i.d* pour différents  $k$ , on en déduit la forme de la distribution *a priori* de  $C_{\mathbf{x}}$  :

$$p(C_{\mathbf{x}}) = \prod_{k=1}^K r(\|C_{\mathbf{x}}(k)\|_2). \quad (\text{A.20})$$

Une approche au *maximum de vraisemblance* (MV) permet de définir une décomposition du mélange non bruité comme :

$$C_{\mathbf{x}}^r := \arg \max_{C_{\mathbf{x}}|C_{\mathbf{x}}\Phi=\mathbf{x}} p(C_{\mathbf{x}}) = \arg \min_{C_{\mathbf{x}}|C_{\mathbf{x}}\Phi=\mathbf{x}} \sum_{k=1}^K -\log r(\|C_{\mathbf{x}}(k)\|_2). \quad (\text{A.21})$$

Dans le cas bruité, en supposant le bruit  $\mathbf{b}$  Gaussien *i.i.d* de variance  $\sigma_{\mathbf{b}}^2$ , une approche au *maximum a posteriori* (MAP) conduit à maximiser la probabilité *a posteriori*, c'est-à-dire à minimiser :

$$-\log p(C_{\mathbf{x}}|\mathbf{x}) = \frac{1}{2\sigma_{\mathbf{b}}^2} \|\mathbf{x} - C_{\mathbf{x}}\Phi\|_F^2 + \sum_{k=1}^K -\log r(\|C_{\mathbf{x}}(k)\|_2). \quad (\text{A.22})$$

La fonction  $r$ , calculable en théorie à partir des distributions  $p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})$  de la matrice de mélange et  $p_c(c)$  des coefficients parcimonieux des sources, se prête parfois difficilement à la résolution du problème d'optimisation correspondant. Les distributions dont elle dépend n'étant elles-mêmes pas nécessairement bien connues, il est raisonnable de résoudre le problème d'optimisation globale (A.21) ou (A.22) avec une forme particulière supposée de la fonction  $r$ , telle que  $r(z) := \exp(-\alpha |z|^\tau)$  pour un exposant  $0 \leq \tau \leq 2$ , ce qui ramène aux approches adaptatives (A.16)- (A.17).

### A.3.5 Effet du choix du critère $\ell^\tau$

Le choix de la norme  $\ell^\tau$  utilisée est *a priori* important, car il peut influencer sensiblement la parcimonie de la solution obtenue. La figure A.4 a pour but d'illustrer schématiquement ce fait. Les figures A.4(a)-(b)-(c) montrent, en dimension 2, l'allure des courbes de niveau des normes  $\ell^\tau$  pour  $\tau = 2$ ,  $\tau = 1$ ,  $\tau = 0.5$ . Sur la figure A.4(d), une ligne en trait plein schématise l'ensemble des représentations admissibles ( $C_{\mathbf{x}}\Phi = \mathbf{x}$ ) d'un mélange  $\mathbf{x}$ , qui forme un sous-espace affine de l'espace  $\mathbb{C}^K$  de toutes les représentations possibles. La représentation de  $\mathbf{x}$  de moindre norme  $\ell^\tau$  est l'intersection de cette ligne avec la "plus petite" ligne de niveau de la norme  $\ell^\tau$  qui l'intersecte. On a indiqué ces intersections pour  $\tau = 2$ ,  $\tau = 1$  et  $\tau = 0$  (pour  $\tau = 0$  il s'agit des intersections avec les axes). On observe qu'aucune des coordonnées de la solution aux moindres carrés ( $\tau = 2$ ) n'est nulle, alors que les solutions de moindre norme  $\ell^0$  ou  $\ell^1$  sont situées sur les axes. Ici, la solution de moindre norme  $\ell^1$ , qui est unique, coïncide également avec les solutions de moindre norme  $\ell^\tau$  pour  $0 < \tau \leq 1$ . Géométriquement, cela s'explique par le fait que les courbes de niveau des normes  $\ell^\tau$ , pour  $0 < \tau \leq 1$  ont des "coins" sur les axes, au contraire des lignes de niveau de la norme  $\ell^2$  (et des normes  $\ell^\tau$ , pour  $1 < \tau \leq 2$ ) qui sont convexes et arrondies.

De fait, dans le contexte monocanal, toute représentation  $C_{\mathbf{x}}^\tau \in \mathbb{C}^K$  (respectivement  $C_{\mathbf{x}}^{\tau,\lambda}$ ) solution du problème d'optimisation (A.16) (respectivement (A.17)) pour  $0 \leq \tau \leq 1$ , est *vraiment parcimonieuse* au sens où elle a au plus  $T$  coefficients non nuls, où  $T$  est la dimension du signal analysé  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^T$ . Cette propriété est due à la "concavité" de la norme  $\ell^\tau$  [104] pour  $0 \leq \tau \leq 1$ , que l'on peut observer sur la figure A.4(c). Il s'agit d'une notion à laquelle nous ferons appel de façon récurrente au cours de ce chapitre, y compris dans le cas multicanal, ce qui donne lieu à la définition suivante :

**Definition 1** *On dira que la représentation  $C_{\mathbf{x}}^\tau$  (respectivement  $C_{\mathbf{x}}^{\tau,\lambda}$ ) est une représentation vraiment parcimonieuse si elle implique au plus  $T$  atomes du dictionnaire (où  $T$  est la dimension des signaux), c'est-à-dire s'il existe au plus  $T$  indices  $k$  tels que la colonne  $C_{\mathbf{x}}(k)$  soit non nulle.*

Cette définition est ici donnée dans le cas multicanal, mais généralise une notion équivalente initialement proposée dans le cas monocanal par Kreutz-Delgado *et al.* [104].

Pour  $\tau > 1$ , la norme  $\ell^\tau$  étant une vraie norme au sens mathématique du terme, elle est convexe, et sa minimisation ne conduit plus à des représentations vraiment parcimonieuses, comme illustré sur la figure A.4(a). Cependant, la convexité des critères correspondants, qui facilite grandement leur optimisation, peut jouer en faveur de leur utilisation en pratique.

Des résultats théoriques récents, initiés par les travaux de Donoho et Huo [41], ont par ailleurs montré dans le cas monocanal que le choix précis de la norme  $\ell^\tau$  optimisée avec

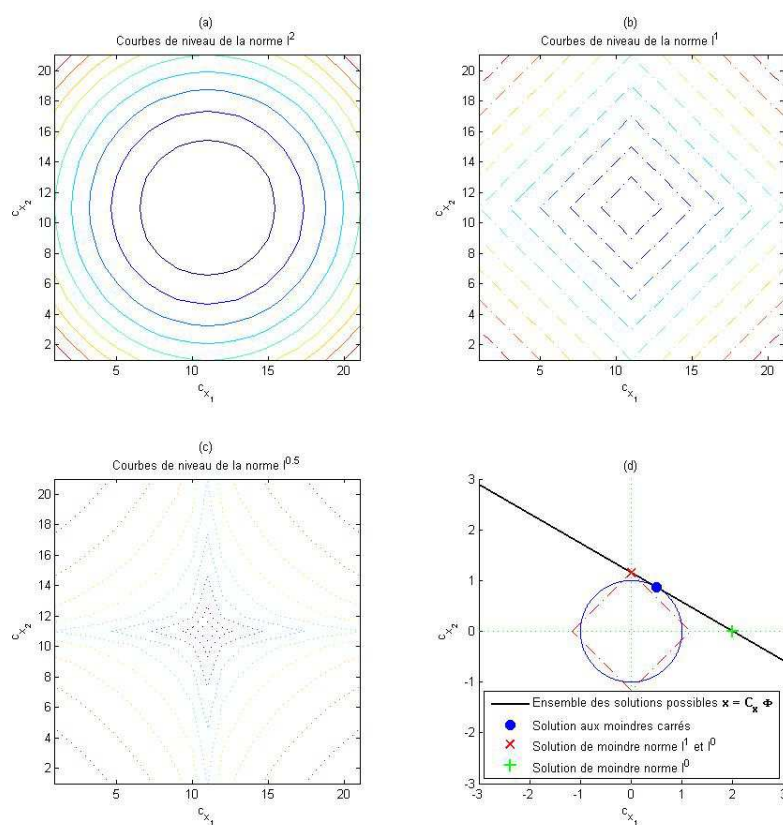


FIG. A.4 – Comparaison schématique de la parcimonie de représentations obtenues aux moindres carrés (transformées) et par minimisation de norme  $\ell^1$  ou  $\ell^0$  (représentations adaptatives) en petite dimension.

La ligne continue symbolise l'ensemble des représentations  $\mathbf{C}_x = (c_{x_1}, c_{x_2})$  possibles d'un mélange  $\mathbf{x}$  donné. L'intersection entre cette ligne et le cercle centré à l'origine qui lui est tangent fournit la solution aux moindres carrés. Ses intersections avec les axes des abscisses (symbole '+' ) et des ordonnées (symbole 'x') correspondent à deux solutions admettant un unique coefficient non nul, et donc de norme  $\ell^0$  minimale. Celle de ces solutions qui est sur l'axe des ordonnées est également l'unique intersection entre l'ensemble des représentations possibles et le plus petit carré "oblique" centré à l'origine (en pointillés) qui l'intersecte, c'est donc également la solution de moindre norme  $\ell^1$ . On observe que la solution aux moindres carrés a plus de coefficients non nuls que les solutions de moindre norme  $\ell^0$  ou  $\ell^1$ .

$0 \leq \tau \leq 1$  a peu (voire pas) d'influence sur la représentation obtenue [88, 93, 81] lorsque le signal analysé  $\mathbf{x}$  admet une suffisamment bonne approximation avec des coefficients suffisamment parcimonieux  $C_{\mathbf{x}}$ . Des résultats similaires dans le cas multicanal montrent [150] que, sous les mêmes hypothèses, des critères  $\ell^0$  et  $\ell^1$  mènent essentiellement aux mêmes représentations. L'extension de ces résultats aux critères  $\ell^\tau$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$  permettra sans doute d'aboutir à la même conclusion.

A la lumière de ces résultats théoriques, le choix d'un critère  $\ell^\tau$  particulier à optimiser pour  $0 \leq \tau \leq 1$  repose donc avant tout sur les caractéristiques des algorithmes disponibles pour l'optimisation et leur propriétés numériques. La description d'algorithmes d'optimisation pour la gamme un peu plus large  $0 \leq \tau \leq 2$  fait l'objet de la section qui suit.

### A.3.6 Algorithmes d'optimisation de critères $\ell^\tau$

Les algorithmes de calcul de représentations adaptatives optimisant un critère (A.17) ou (A.16) pour  $0 \leq \tau \leq 2$  ont reçu beaucoup d'attention, aussi bien du point de vue de l'analyse théorique que des algorithmes et des applications.

Alors que pour  $\tau = 2$  la résolution de (A.16) comme de (A.17) fait simplement appel à l'algèbre linéaire, pour  $\tau = 0$  il s'agit d'un problème combinatoire [34, 121] *a priori* impraticable. Toute une famille de résultats théoriques récents initiés tendant à montrer que sa solution est souvent égale ou proche de celle des problèmes correspondants avec  $0 < \tau \leq 1$ , les algorithmes permettant d'optimiser ces derniers critères présentent un intérêt particulier, malgré les difficultés spécifiques liées à la non-convexité de l'optimisation pour  $\tau < 1$ . Les algorithmes d'optimisation de critères strictement convexes  $\ell^\tau$  avec  $1 < \tau \leq 2$ , enfin, ont l'avantage de la simplicité même s'il manque aujourd'hui d'éléments théoriques reliant les représentations qu'ils fournissent à celles obtenues avec des critères  $\ell^\tau$  pour  $0 \leq \tau \leq 1$ . Leur principal avantage, dû à la stricte convexité du critère optimisé, est certainement la garantie de convergence vers l'unique optimum global du critère, alors que pour  $\tau \leq 1$  le risque de tomber sur un optimum local existe.

Pour tous les algorithmes présentés ci-après, le choix de l'ordre de grandeur du paramètre de régularisation  $\lambda$  reste également une question délicate à régler en aveugle. Une valeur excessive de ce paramètre aura pour effet de trop privilégier la parcimonie de la représentation  $C_{\mathbf{x}}^{\tau, \lambda}$  obtenue, au détriment de la qualité de reconstruction  $\|\mathbf{x} - C_{\mathbf{x}}^{\tau, \lambda}\|_2$ . Une valeur trop faible reviendra à supposer le modèle parcimonieux des sources comme exact et le mélange sans bruit, ce qui pourra mener à des artefacts. Le choix des paramètres  $\tau$  et  $\lambda$  qui définissent le critère optimisé doit donc se fonder sur un compromis entre parcimonie de la représentation obtenue et complexité numérique de la minimisation à mettre en œuvre.

#### Algorithme pour $\tau = 2$ : moindres carrés pondérés

Pour  $\tau = 2$ , la représentation exacte  $C_{\mathbf{x}}^2$  est solution du problème aux moindres carrés  $\min \|C_{\mathbf{x}}\|_F^2$  sous la contrainte  $C_{\mathbf{x}}\Phi = \mathbf{x}$  et s'obtient analytiquement par transformée linéaire, en utilisant la pseudo-inverse du dictionnaire, i.e.  $C_{\mathbf{x}}^2 = C_{\mathbf{x}}^{\Phi^\dagger} = \mathbf{x}\Phi^\dagger$ . Comme illustré sur la figure A.4,  $C_{\mathbf{x}}^2$  n'est généralement pas une représentation "vraiment parcimonieuse". Les représentations approchées  $C_{\mathbf{x}}^{2, \lambda}$ , solutions des problèmes aux moindres



carrés pondérés  $\min \|\mathbf{x} - C_{\mathbf{x}} \Phi\|_F^2 + \lambda \|C_{\mathbf{x}}\|_F^2$  pour  $\lambda > 0$ , s'obtiennent également de façon linéaire sous la forme  $C_{\mathbf{x}}^{2,\lambda} = \mathbf{x} \Psi_{\lambda}$ , où  $\Psi_{\lambda}$  admet deux expressions équivalentes :

$$\Psi_{\lambda} := (\Phi^H \Phi + \lambda \mathbf{I}_T)^{-1} \Phi^H = \Phi^H (\Phi \Phi^H + \lambda \mathbf{I}_K)^{-1} \quad (\text{A.23})$$

avec  $\mathbf{I}_M$  la matrice identité de taille  $M \times M$ . Lorsque  $\lambda$  tend vers zéro  $\Psi_{\lambda}$  tend vers la pseudo-inverse  $\Phi^{\dagger}$  du dictionnaire, et pour toute valeur de  $\lambda$  la linéarité de la représentation garantit l'égalité  $C_{\mathbf{x}}^{2,\lambda} = \mathbf{A} C_{\mathbf{s}}^{2,\lambda} + C_{\mathbf{b}}^{2,\lambda}$ .

### Algorithme pour $0 < \tau \leq 2$ : M-FOCUSS

Pour  $0 < \tau \leq 2$  l'algorithme *M-FOCUSS* [30] (une forme de *moindres carrés pondérés itérés*, en anglais *iterated reweighted least squares* ou IRLS) et sa version régularisée sont des techniques itératives qui convergent extrêmement vite vers un minimum local du critère à optimiser. Cet algorithme est dérivé de l'algorithme FOCUSS initialement défini dans le cas monocanal [72]. A cause de la nature non-convexe du critère optimisé, il est difficile de prédire si l'optimum global est atteint, ce qui dépend en tout état de cause de l'initialisation choisie. Il n'existe pas de preuve à ce jour (sauf dans le cas monocanal  $P = 1$ ) que l'algorithme converge toujours vers une solution "vraiment parcimonieuse", même si c'est bien le cas expérimentalement [30]. A partir d'une initialisation  $C_{\mathbf{x}}^{(0)}$  dont la valeur peut avoir une influence décisive sur le point de convergence de l'algorithme, on minimise itérativement un critère quadratique pondéré :

$$C_{\mathbf{x}}^{(m)} := \arg \min_{C_{\mathbf{x}}} \left\{ \|\mathbf{x} - C_{\mathbf{x}} \Phi\|_F^2 + \frac{\lambda |\tau|}{2} \|C_{\mathbf{x}} (W^{(m)})^{-1}\|_F^2 \right\} \quad (\text{A.24})$$

où la matrice diagonale de pondération :

$$W^{(m)} := \text{diag} \left( \|C_{\mathbf{x}}^{(m-1)}(1)\|_2^{1-\tau/2}, \dots, \|C_{\mathbf{x}}^{(m-1)}(K)\|_2^{1-\tau/2} \right) \quad (\text{A.25})$$

tend à forcer à zéro les colonnes dont l'énergie  $\|C_{\mathbf{x}}^{(m-1)}(k)\|_2$  est faible. En pratique, comme on l'a vu en section A.3.6, chaque itération consiste donc à mettre à jour la matrice diagonale de pondération  $W^{(m)}$  et le dictionnaire pondéré  $\Phi^{(m)} := W^{(m)} \Phi$  pour obtenir :

$$C_{\mathbf{x}}^{(m)} := \mathbf{x} \left( (\Phi^{(m)})^H \Phi^{(m)} + \frac{\lambda |\tau|}{2} \mathbf{I}_T \right)^{-1} \Phi^{(m)H} W^{(m)}. \quad (\text{A.26})$$

Si l'algorithme M-FOCUSS converge très vite vers un minimum local du critère optimisé [30] et produit souvent des représentations très parcimonieuses, il est difficile de déterminer quand la convergence a lieu vers le minimum global, en fonction du choix de l'initialisation. L'initialisation la plus couramment choisie, et qui donne en pratique des résultats satisfaisants, est la représentation aux moindres carrés, obtenue en utilisant la pseudo-inverse  $\Phi^{\dagger}$  du dictionnaire. Par ailleurs, même si le nombre d'itérations nécessaires avant convergence est faible, chaque itération peut être numériquement assez coûteuse à cause de l'inversion d'une matrice carrée de taille au moins  $T$  qu'elle implique (A.26).

A cause de la nature globalement non linéaire de l'algorithme, il est difficile *a priori* de déterminer si la représentation  $C_{\mathbf{x}}$  du mélange qu'il fournit satisfait avec une précision

raisonnable l'identité  $C_x \approx \mathbf{A}C_s$ . Des résultats théoriques [81, 150] relatifs à des critères d'optimisation similaires à (A.17) laissent supposer que c'est bien le cas dès lors que les sources admettent des représentations suffisamment parcimonieuses et disjointes, mais il reste à en faire la preuve effective en ce qui concerne d'une part l'optimum  $C_x^{\tau, \lambda}$  du critère (A.17), et d'autre part la solution numérique approchée  $\lim_{m \rightarrow \infty} C_x^{(m)}$  calculée par M-FOCUSS.

### Algorithmes pour $\tau = 1$ (cas monocanal)

L'optimisation de (A.16) dans le cas monocanal ( $P = 1$ ) pour  $\tau = 1$  est appelée *Basis Pursuit* et celle de (A.17) *Basis Pursuit Denoising* [28]. Proposés par Donoho et ses collaborateurs, Basis Pursuit et Basis Pursuit Denoising constituent plus des principes que des algorithmes effectifs puisque la méthode d'optimisation n'est pas nécessairement spécifiée. De nombreuses études expérimentales ainsi qu'une intense activité théorique initiée par Donoho et Huo [41] ont montré tout l'intérêt des représentations parcimonieuses obtenues à l'aide du critère  $\ell^1$ , qui permettent notamment de garantir l'identité  $C_x \approx \mathbf{A}C_s$  lorsque  $C_s$  est suffisamment parcimonieuse [150].

Cependant, les méthodes génériques d'optimisation numérique (*programmation linéaire, programmation quadratique, programmation conique, etc.* [18]) permettant de les calculer (aussi bien dans le cas réel que complexe et monocanal que multicanal) restent très coûteuses à mettre en œuvre. Des algorithmes tels que LARS (*Least Angle Regression*) [46] qui prennent en compte plus spécifiquement la nature du problème d'optimisation [152, 46, 115, 128, 68] restent nécessaires pour sensiblement simplifier et accélérer le calcul de telles représentations. Un défi supplémentaire consiste à adapter ces algorithmes efficaces au cas multicanal.

### Algorithmes pour $1 \leq \tau \leq 2$ : *seuillage itératif* (cas monocanal)

Pour des valeurs  $1 \leq \tau \leq 2$ , le critère à optimiser (A.17) est convexe. Des méthodes numériques itératives efficaces ont récemment été proposées [31, 48, 55] pour en calculer l'optimum  $c_x^{\lambda, \tau}$ , dans le cas monocanal  $P = 1$ . A partir d'une initialisation arbitraire  $c_x^{(0)}$  (typiquement  $c_x^{(0)} = 0$ ), leur principe est d'itérer l'étape de seuillage suivante :

$$c_x^{(m)}(k) = S_{\lambda, \tau} \left( c_x^{(m-1)}(k) + \langle x - c_x^{(m-1)} \Phi, \varphi_k \rangle \right), \quad 1 \leq k \leq K \quad (\text{A.27})$$

où  $S_{\lambda, \tau}$  est une fonction de *seuillage*, dont l'allure est illustrée sur la figure A.5 pour  $\lambda = 1$  et quelques valeurs de  $1 \leq \tau \leq 2$ .

Pour  $\tau = 1$ , il s'agit de la fonction de seuillage doux :

$$S_{\lambda, 1}(t) := \begin{cases} t + \frac{\lambda}{2}, & \text{si } t \leq -\frac{\lambda}{2} \\ 0, & \text{si } |t| < \frac{\lambda}{2} \\ t - \frac{\lambda}{2}, & \text{si } t \geq \frac{\lambda}{2} \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

tandis que pour  $\tau > 1$  :

$$S_{\lambda, \tau}(t) := u, \text{ où } u \text{ satisfait } u + \frac{\lambda \cdot \tau}{2} \cdot \text{sign}(u) \cdot |u|^{\tau-1} = t. \quad (\text{A.29})$$

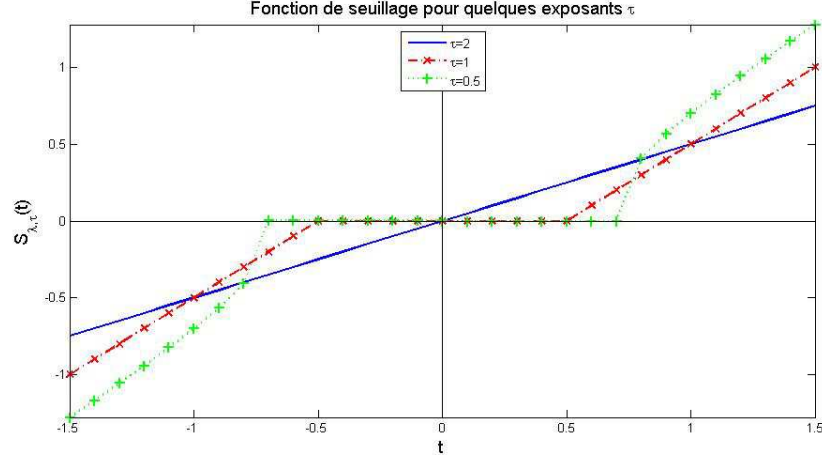


FIG. A.5 – Allure de la fonction de seuillage  $S_{\lambda, \tau}(t)$  sur l'intervalle  $t \in [-1.5, 1.5]$  pour  $\lambda = 1$  et quelques valeurs de  $\tau$

Cette fonction de seuillage trouve son origine dans l'optimisation du critère (A.17) lorsque  $\Phi$  est une base orthonormée (rappelons que le seuillage itératif est défini dans le cas monocanal  $P = 1$ ), car alors il s'agit d'optimiser indépendamment chaque coordonnée :

$$\min_{c(k)} |\langle x, \varphi_k \rangle - c(k)|^2 + \lambda |c(k)|^\tau$$

Lorsque la valeur de l'optimum  $c_x^{\lambda, \tau}(k)$  est non nulle, la dérivée du critère optimisé existe et s'y annule, ce qui implique :

$$2(c_x^{\lambda, \tau}(k) - \langle x, \varphi_k \rangle) + \lambda \cdot \text{sign}(c_x^{\lambda, \tau}(k)) \cdot |c_x^{\lambda, \tau}(k)|^{\tau-1} = 0$$

c'est-à-dire, d'après l'expression de la fonction de seuillage, (A.29) :

$$c_x^{\lambda, \tau}(k) = S_{\lambda, \tau}(\langle x, \varphi_k \rangle).$$

Pour  $1 \leq \tau \leq 2$ , Daubechies, DeFrise et De Mol ont prouvé [31, théorème 3.1] que, si le dictionnaire satisfait  $\|\Phi c\|_2^2 \leq \|c\|_2^2$  pour tout  $c$ , alors  $c^{(m)}$  converge fortement vers un minimiseur  $c_x^{\lambda, \tau}$  de (A.17), quelle que soit l'initialisation. Si de plus  $\Phi$  est une base (non nécessairement orthonormée), alors ce minimiseur est unique, et il en est de même par stricte convexité si  $\tau > 1$ . Cependant, ce minimiseur n'est en général une solution "vraiment parcimonieuse" que pour  $\tau = 1$ . Par ailleurs, lorsque le dictionnaire est constitué d'atomes d'énergie unité on a au mieux  $\|\Phi c\|_2^2 \leq \mu \|c\|_2^2$  pour un certain nombre  $\mu < \infty$ . Il faut alors modifier légèrement l'algorithme pour garantir la convergence, en itérant le seuillage suivant :

$$c_x^{(m)}(k) = S_{\frac{\lambda}{\mu}, \tau} \left( c_x^{(m-1)}(k) + \frac{\langle x - c_x^{(m-1)} \Phi, \varphi_k \rangle}{\mu} \right). \quad (\text{A.30})$$

A défaut d'analyse connue à ce jour de la vitesse de convergence de cet algorithme, il suffit souvent de peu d'itérations pour obtenir une excellente approximation de la solution. Par ailleurs, chaque itération est relativement peu coûteuse dans la mesure où il n'est pas nécessaire d'inverser de matrice, au contraire de l'algorithme M-FOCUSS que l'on verra plus loin. Ces algorithmes de seuillage itératif peuvent être étendus au cas multicanal [57]. Pour leur application à la séparation de sources par la parcimonie, il reste notamment à vérifier si ces algorithmes garantissent bien l'identification approximative  $C_{\mathbf{x}} \approx \mathbf{A}C_s$ .

### A.3.7 Matching pursuit

Le *Matching Pursuit* propose une solution au problème d'approximation parcimonieuse conjointe  $\mathbf{x} \approx C_{\mathbf{x}}\Phi$  en s'appuyant non pas sur l'optimisation globale d'un critère, mais sur un *algorithme glouton* (en anglais *greedy algorithm*) itératif. Chaque étape de l'algorithme consiste à trouver l'atome du dictionnaire dont l'ajout à l'ensemble des atomes déjà sélectionnés permettra de diminuer le plus l'erreur d'approximation. On suppose ici que les atomes du dictionnaire sont d'énergie unité. Pour approcher le signal multicanal  $\mathbf{x}$ , on initialise un résidu  $\mathbf{r}^{(0)} := \mathbf{x}$ , puis on répète les étapes suivantes en commençant à  $m = 1$  :

1. sélection de l'atome le plus corrélé :

$$k_m := \arg \max_k \sum_{p=1}^P |\langle \mathbf{r}_p^{(m-1)}, \varphi_k \rangle|^2 \quad (\text{A.31})$$

2. mise à jour du résidu :

$$\mathbf{r}_p^{(m)} := \mathbf{r}_p^{(m-1)} - \langle \mathbf{r}_p^{(m-1)}, \varphi_{k_m} \rangle \varphi_{k_m}, \quad 1 \leq p \leq P. \quad (\text{A.32})$$

Après  $M$  itérations, on obtient la décomposition :

$$\mathbf{x} = \sum_{m=1}^M \begin{pmatrix} c_1(m)\varphi_{k_m} \\ \dots \\ c_P(m)\varphi_{k_m} \end{pmatrix} + \mathbf{r}^{(M)} \quad (\text{A.33})$$

avec  $c_p(m) := \langle \mathbf{r}_p^{(m-1)}, \varphi_{k_m} \rangle$ .

Cet algorithme a été initialement introduit en traitement du signal monocanal par Mallat et Zhang [117]. La généralisation au cas multicanal [76, 77, 30, 111] que nous présentons ici converge de la même manière que la version monocanal originale [76, 77] au sens où la norme du résidu tend vers zéro lorsque le nombre d'itérations tend vers l'infini. La vitesse de convergence, que ce soit en monocanal ou multicanal, n'est par contre pas bien connue [111]. Parmi les variantes à noter, il est possible de mettre à jour les résidus à chaque étape par projection orthogonale du signal analysé sur l'ensemble des atomes sélectionnés (on parle alors de *matching pursuit* orthogonal). Par ailleurs, la sélection du meilleur atome à chaque étape peut s'effectuer selon d'autres critères [111, 30, 151].

Le *matching pursuit* présenté ici, qui ne fait intervenir aucune inversion de matrice, peut être mis en œuvre sous forme assez rapide en exploitant la structure du dictionnaire utilisé et des algorithmes rapides de calcul et de mise à jour de  $\mathbf{r}^{(m)}\Phi^H$  [82, 105]. Le

principal paramètre à régler est le choix du critère d'arrêt, pour lequel les deux principales approches sont de fixer *a priori* d'une part le nombre d'itérations, d'autre part l'erreur d'approximation  $\|\mathbf{r}^{(m)}\|_F$  visée.

De même que les approches par minimisation de norme  $\ell^1$  [150], le *matching pursuit* a fait l'objet de nombreuses études expérimentales et théoriques. Celles-ci ont notamment montré [151] qu'il peut garantir l'identité  $C_x \approx \mathbf{A}C_s$  lorsque  $C_s$  est suffisamment parcimonieux.

### A.3.8 Récapitulatif

Le tableau A.1 récapitule les principales caractéristiques numériques des algorithmes de représentation parcimonieuse conjointe de signaux présentés dans cette section. Le champ d'application de ces algorithmes dépasse de loin celui de la séparation de sources, car la nécessité de représenter de façon conjointe plusieurs signaux apparaît dans bien des domaines. Par exemple, les images couleurs sont constituées de trois canaux rouge-vert-bleu dont les intensités sont corrélées, et l'utilisation de techniques de représentation parcimonieuse conjointe (à base de *matching pursuit* [56]) s'est avérée performante pour leur compression à bas débit. Le lecteur intéressé par plus de détails sur ces algorithmes trouvera dans les références bibliographiques indiquées la définition originale des algorithmes ainsi que, le cas échéant, une analyse de certaines de leurs propriétés théoriques aujourd'hui prouvées.

Méthode	Transformée	M-FOCUSS	Basis Pursuit	Seuillage itératif	Matching Pursuit
Critère	(A.17)	(A.17)	(A.17)	(A.17)	(A.31)-(A.32)
Paramètres	$\tau = 2$ $\lambda$	$0 \leq \tau \leq 2$ $\lambda$	$\tau = 1$ $\lambda$	$1 \leq \tau \leq 2$ $\lambda$	$M$ itérations
Avantages	très rapide	forte parcimonie ( $\tau \leq 1$ )	forte parcimonie	rapide bonne parcimonie	rapide bonne parcimonie
Inconvénients et difficultés	-réglage de $\lambda$ -faible parcimonie	-réglage de $\lambda$ -initialisation -coût mémoire -temps de calcul (inversion de grandes matrices)	-réglage de $\lambda$ -coût mémoire -temps de calcul (progr. linéaire, quadratique, conique)	-réglage de $\lambda$	-réglage de $M$
Bibliographie					
$P = 1$		[72] [88] [81]	[28] [41] [148]	[31]	[117] [147] [95]
$P > 1$		[30]	[150]	[57]	[76] [151]

TAB. A.1 – Comparaison récapitulative des algorithmes de représentation parcimonieuse conjointe de mélanges discutés en section A.3

En pratique, la représentation parcimonieuse conjointe d'un mélange implique deux choix :

1. le choix d'un dictionnaire  $\Phi$  dans lequel les canaux du mélange sont susceptibles d'admettre une représentation conjointement suffisamment parcimonieuse ;
2. le choix d'un algorithme et de ses paramètres pour le calcul d'une représentation.

Par exemple, pour des signaux audio, le dictionnaire de Gabor (A.7) est fréquemment utilisé afin de rendre compte des différentes composantes fréquentielles qui peuvent apparaître à différents instants dans le mélange, et la représentation la plus employée est la TFCT, transformée linéaire. Si nous avons tenté dans cette section de rassembler des éléments pour aider le lecteur à choisir un algorithme, la question du choix du dictionnaire repose aujourd'hui le plus souvent sur une connaissance experte de la nature des signaux analysés.

## A.4 Estimation de la matrice de mélange à partir du diagramme de dispersion

Les algorithmes discutés ci-dessus permettent d'analyser un mélange  $\mathbf{x}$  afin d'en calculer une représentation (ou une approximation) parcimonieuse conjointe  $C_{\mathbf{x}}$ , ce qui constitue la première étape d'un système de séparation de sources basé sur la parcimonie, tel que décrit sur la figure A.2. La seconde étape de ce système, pour la séparation de mélanges linéaires instantanés, consiste à estimer la matrice de mélange  $\mathbf{A}$  en s'aidant du diagramme de dispersion des coefficients  $\{C_{\mathbf{x}}(k)\}_{1 \leq k \leq K}$ .

Pour des mélanges déterminés, il est naturellement possible de recourir à n'importe quelle méthode d'ICA pour estimer  $\mathbf{A}$ , et les techniques décrites dans le reste de cet ouvrage peuvent ainsi être mises à profit. Nous allons donc ici nous concentrer sur les approches reposant spécifiquement sur la parcimonie supposée des sources.

Sans faire d'hypothèse particulière sur la nature – déterminée ou non – du mélange, mais plutôt sur la parcimonie supposée des sources, deux grandes familles d'approches sont utilisées. L'une, fondée sur une interprétation Bayésienne (ou variationnelle), a pour objectif de maximiser la vraisemblance de la matrice estimée et passe par l'optimisation (approchée) de critères globaux ; la seconde, d'inspiration plus géométrique, repose sur des algorithmes de catégorisation.

Les approches variationnelles [113] font généralement intervenir une optimisation itérative alternée de la matrice et des représentations des sources. Nous ne les décrirons pas ici, pour nous concentrer uniquement sur l'approche géométrique, certainement plus intuitive et qui permet d'estimer le nombre de sources [7]. Certaines variantes d'algorithmes de catégorisation s'affranchissent de plus de l'hypothèse forte de parcimonie pour permettre l'estimation de la matrice de mélange, par des algorithmes simples, même quand les représentations des sources ne sont quasiment pas disjointes [2, 7].

La plupart des approches présentées ci-dessous sont en théorie applicables quel que soit le nombre de capteurs  $P \geq 2$  [154, 146, 2, 7]. Cependant, nous nous contenterons dans ce qui suit d'expliquer ces méthodes dans le cas où  $P = 2$ , qui correspond par exemple aux mélanges audio stéréophoniques, car l'intuition géométrique y est plus naturelle et simple. La généralisation au cas  $P \geq 3$  ne pose pas de problème conceptuel particulier et nous la laissons donc au lecteur. Il faut cependant noter qu'en pratique le coût de calcul devient excessif pour certaines méthodes, en particulier celles basées sur le calcul d'histogrammes.

### A.4.1 Algorithmes de catégorisation globaux

La figure A.6(a), agrandissement du diagramme de dispersion de la figure A.1(c), illustre l'aspect typique du diagramme de dispersion des coefficients  $\{C_x(k)\} \subset \mathbb{R}^2$  pour un mélange stéréophonique ( $P = 2$ ).

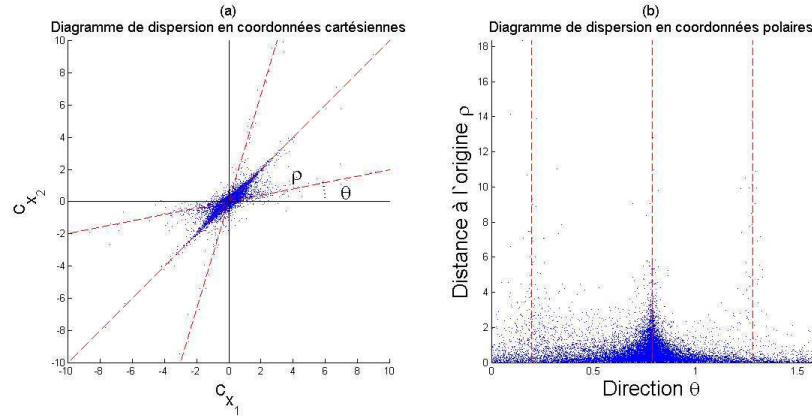


FIG. A.6 – Diagramme de dispersion des coefficients MDCT du mélange de droite de la figure A.1, en coordonnées cartésiennes (a) et en coordonnées polaires (b). On observe des accumulations de points le long des directions des colonnes de la matrice de mélange (indiquées par des lignes pointillées)

On y observe des alignements de points le long des droites engendrées par les colonnes  $\mathbf{A}_n$  de la matrice de mélange. Pour cet exemple, on peut aussi représenter chaque point  $C_x(k) = \rho(k)[\cos \theta(k), \sin \theta(k)]^T \in \mathbb{R}^2$  en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \rho(k) & := & (-1)^\varepsilon \sqrt{|c_{x_1}(k)|^2 + |c_{x_2}(k)|^2}, \\ \theta(k) & := & \arctan(c_{x_2}(k)/c_{x_1}(k)) + \varepsilon\pi, \end{cases} \quad (\text{A.34})$$

où  $\varepsilon \in \{0, 1\}$  est choisi de sorte que  $0 \leq \theta(k) < \pi$ , comme illustré sur la figure A.6(b). Les points sont alors accumulés autour des angles  $\theta_n$  correspondant aux directions des colonnes  $\mathbf{A}_n$ . Une idée naturelle [145, 20] consiste à exploiter cette structure géométrique particulière du diagramme de dispersion pour y trouver les directions  $\hat{\theta}_n$ , ce qui permet d'estimer  $\hat{\mathbf{A}}_n := [\cos \hat{\theta}_n \sin \hat{\theta}_n]^T$ .

#### Histogramme brut

Une approche naïve consiste à calculer un histogramme des angles  $\theta(k)$ , en supposant qu'on observera des pics à l'endroit des directions cherchées à cause de l'accumulation des

points correspondants. L'histogramme brut ainsi obtenu, illustré sur la figure A.7(a) à partir des points de la figure A.6(b), permet certes de voir (et de détecter par seuillage) l'une des directions cherchées, mais il semble illusoire de l'utiliser pour trouver les autres.

De fait, le diagramme de dispersion contient souvent de nombreux points de faible amplitude  $\rho(k)$  et dont la direction  $\theta(k)$  n'est pas représentative des directions des colonnes de la matrice de mélange. Ces points, qui correspondent aux nombreux atomes (ici, des points temps-fréquence) où toutes les sources sont approximativement inactives, ont pour effet d'"aplatir" l'histogramme des directions, le rendant impropre à la détection des directions des sources.

### Histogrammes pondérés

De façon plus efficace, il est possible de calculer un histogramme pondéré, et éventuellement lissé avec des "fonctions de potentiel" aussi appelées fenêtres de Parzen. La pondération est choisie de façon à ce que l'histogramme obtenu dépende plus des quelques points de grande amplitude que de la majorité de points d'amplitude négligeable. Il s'agit de calculer (pour un ensemble discret d'angles sur un grille  $\theta_\ell = \ell\pi/L$ ,  $0 \leq \ell \leq L$ ), une fonction :

$$H(\theta_\ell) := \sum_{k=1}^K f(|\rho(k)|) \cdot w(\theta_\ell - \theta(k)) \quad (\text{A.35})$$

où  $f(\rho)$  est une fonction de pondération qui donne un rôle différent aux points du diagramme de dispersion en fonction de leur distance à l'origine  $|\rho(k)|$ , et  $w(\cdot)$  est une fenêtre de lissage, aussi appelée fonction de potentiel [20] ou fenêtre de Parzen.

Les figures A.7(b)-(c) illustrent les histogrammes ainsi obtenus avec une fenêtre de lissage rectangulaire de taille  $\pi/L$  (correspondant de fait à un histogramme *non lissé*) et respectivement  $f(|\rho|) = |\rho|$  ou  $f(|\rho|) = |\rho|^2$ . La prise en compte de  $\rho$  pour pondérer l'histogramme s'avère essentielle sur cet exemple pour le succès de techniques basées sur un histogramme, puisqu'elle permet de faire apparaître des pics dans l'histogramme aux alentours des angles correspondants aux directions effectives des sources présentes dans le mélange. Une pondération en fonction de l'"énergie"  $|\rho(k)|^2 = \|C_{\mathbf{x}}(k)\|_2^2$  est ici plus satisfaisante qu'en fonction de la distance à l'origine  $|\rho(k)|$ , car elle fait mieux ressortir lesdits pics. D'autres formes de pondération sont possibles [160], cependant il ne semble pas exister à ce jour d'étude comparative, théorique ou expérimentale, de l'effet du choix de la fenêtre de lissage et de la fonction de pondération sur la qualité de l'estimation de  $\mathbf{A}$ .

### A.4.2 Utilisation de diagrammes de dispersion locaux

Malgré la présence visible dans le diagramme de dispersion global d'alignements le long des colonnes de la matrice de mélange, les algorithmes de catégorisation les plus classiques tels que K-means [159] peuvent s'avérer d'utilisation délicate pour estimer celle-ci en pratique. Si la mise en œuvre d'un algorithme de K-means est particulièrement simple, les résultats dépendent d'une bonne initialisation et d'une détermination correcte a priori du nombre de sources en présence. La difficulté d'utilisation du diagramme de dispersion global est d'autant plus forte que les sources mélangées contribuent avec des intensités très diverses au mélange, ou que leurs représentations ne sont pas assez fortement disjointes,



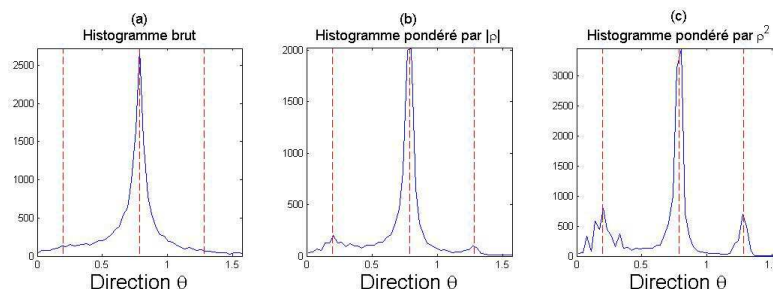


FIG. A.7 – Histogrammes construits à partir du diagramme de dispersion en coordonnées polaires de la figure A.6(b) : (a) histogramme brut mesurant les fréquences d’apparition à un angle  $\theta$  donné ; (b) histogramme pondéré par la distance à l’origine  $|\rho|$  ; (c) histogramme pondéré par l’énergie  $|\rho|^2$ . La pondération par l’énergie fait apparaître des pics marqués aux alentours des directions des vraies sources (indiquées par des lignes pointillées) alors que seule un pic est visible sur l’histogramme brut, et que la pondération par la distance à l’origine fait apparaître des pics modérés.

comme lorsque plusieurs instruments de musique jouent en synchronie et en harmonie, produisant donc à certains temps et certaines fréquences une activité simultanée.

La figure A.8 illustre ce phénomène : elle montre les représentations temps-fréquence (MDCT) de chacun des canaux d’un mélange stéréophonique, ainsi que des *diagrammes de dispersion locaux*  $\{C_{\mathbf{x}}(k)\}_{k \in \Lambda}$  où  $\Lambda$  correspond à un sous-ensemble d’atomes temps-fréquence jouxtant un temps et une fréquence centrale. Dans le premier diagramme de dispersion local, aucun alignement distinct le long d’une colonne de la matrice de mélange sous-jacente n’est clairement visible. Dans le second, au contraire, *tous* les points sont distinctement alignés autour d’*une seule* direction de mélange, celle de la source dont l’activité est dominante dans toute la zone temps-fréquence correspondante. La direction correspondant à cette source peut donc être identifiée à partir de ce diagramme de dispersion local.

A condition de détecter de telles zones, on peut donc estimer **A**. C’est le principe des méthodes proposées par Deville *et al.* [3, 50, 2, 130] : la variance du rapport  $c_{x_1}(k)/c_{x_2}(k)$  est calculée pour chaque région considérée, puis les régions de plus faible variance sont sélectionnées afin d’estimer les directions des colonnes de **A** correspondantes. Une approche similaire mais qui accorde un rôle plus symétrique aux différents canaux consiste à effectuer une analyse en composantes principales (ACP) sur le diagramme de dispersion local, et à sélectionner les zones dont la direction principale est la plus dominante par rapport aux autres [7]. Les techniques à base de sélection d’ “auto-termes simples” de transformées temps-fréquence bilinéaires [52] sont également très proches de ce principe.

## A.5 Séparation à matrice de mélange connue

Les deux premières étapes d’un système de séparation de sources par la parcimonie (figure A.2) aboutissent au calcul :

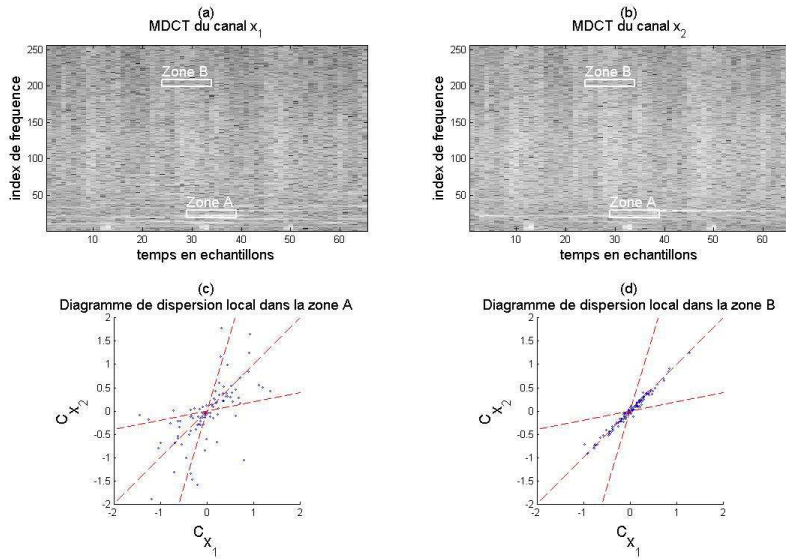


FIG. A.8 – En haut : MDCT  $c_{x_1}$  et  $c_{x_2}$  des deux canaux  $x_1, x_2$  du mélange stéréophonique non-bruité de trois sources représenté sur la figure A.1(c), l'intensité étant indiquée en niveaux de gris (du noir pour les zones temps-fréquence de faible énergie au blanc pour les zones de plus forte énergie). Deux zones temps-fréquence (Zone A et Zone B) sont indiquées. En bas : diagrammes de dispersion locaux correspondants. (a) pour la Zone A, où plusieurs sources sont simultanément actives ; (b) pour la Zone B, où une source est dominante. En moyenne les points de la zone A sont plus énergétiques que ceux de la zone B, et contribuent donc plus aux histogrammes pondérés. Cependant l'estimation de direction obtenue à partir des points de la zone B est plus fiable.

- d’une représentation/approximation parcimonieuse  $C_{\mathbf{x}}$  telle que  $\mathbf{x} \approx C_{\mathbf{x}}\Phi$  ;
- d’une estimation de la matrice de mélange  $\hat{\mathbf{A}}$ .

La dernière étape consiste enfin à séparer les sources. Selon la nature (déterminée ou non) du mélange, plusieurs approches sont possibles, qui reposent plus ou moins sur le caractère parcimonieux et disjoint des représentations des sources.

### A.5.1 Séparation linéaire de mélanges (sur)déterminés

Lorsque  $\hat{\mathbf{A}}$  est une matrice carrée inversible, il suffit d’appliquer son inverse  $\mathbf{B} := \hat{\mathbf{A}}^{-1}$  au mélange supposé non-bruité  $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s}$  pour obtenir  $\hat{\mathbf{s}} := \hat{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{x} = \hat{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{s}$ . Une alternative consiste à estimer d’abord une représentation des sources  $C_{\hat{\mathbf{s}}} := \hat{\mathbf{A}}^{-1}C_{\mathbf{x}}$  puis à estimer les sources par reconstruction  $\hat{\mathbf{s}} := C_{\hat{\mathbf{s}}}\Phi$ . Dans le cas surdéterminé où le nombre de capteurs excède celui des sources, on peut utiliser la pseudo-inverse  $\mathbf{B} := \hat{\mathbf{A}}^\dagger$ . Ces deux alternatives (séparation du mélange initial ou de sa représentation) sont strictement équivalentes à la condition que  $C_{\mathbf{x}}$  soit une *représentation exacte* du mélange  $\mathbf{x}$ . Il n’en est pas de même lorsque  $C_{\mathbf{x}}$  est seulement une *approximation parcimonieuse* du mélange  $\mathbf{x} \approx C_{\mathbf{x}}\Phi$ , car tandis que la première approche garantit l’égalité  $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{s}}$ , avec la seconde approche on n’a plus que l’approximation  $\mathbf{x} \approx C_{\mathbf{x}}\Phi = \hat{\mathbf{A}}C_{\hat{\mathbf{s}}}\Phi = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{s}}$ . Pour des problèmes de séparation (sur)déterminés, la séparation dans le domaine parcimonieux n’est donc potentiellement intéressante que lorsque le mélange à séparer est bruité, auquel cas le fait d’obtenir une approximation  $\mathbf{x} \approx \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{s}}$  peut correspondre à un débruitage effectif du mélange.

La séparation de sources par la parcimonie s’avère particulièrement intéressante pour séparer des mélanges sous-déterminés où le nombre de sources  $N$  excède celui des capteurs  $P$ . Elle s’avère alors souvent bien plus efficace que toute méthode de séparation linéaire qui estimerait les sources avec l’aide d’une matrice de séparation  $\mathbf{B}$  sous la forme  $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{B}\mathbf{x}$ . En effet, des arguments de simple algèbre linéaire montrent qu’il n’est pas possible de séparer parfaitement les sources de façon linéaire dans le cas sous-déterminé, et plus précisément [80] l’estimation d’au moins une des sources subit nécessairement un niveau d’interférences résiduelles des autres sources de l’ordre de  $10 \log_{10}(N/P - 1)$  déciBels [80, Lemme 1]. Dans ce qui suit nous mettons donc l’accent sur quelques méthodes basées sur la parcimonie qui permettent de dépasser les limites de la séparation linéaire. Toutes commencent par estimer une représentation  $C_{\hat{\mathbf{s}}}$  des sources avant de reconstruire les sources estimées comme  $\hat{\mathbf{s}} = C_{\hat{\mathbf{s}}}\Phi$ . Suivant les cas, cette représentation est obtenue directement à partir du mélange initial  $\mathbf{x}$  et de la matrice estimée  $\hat{\mathbf{A}}$  (sections A.5.5 à A.5.8), ou bien à partir de  $\hat{\mathbf{A}}$  et de la représentation parcimonieuse conjointe  $C_{\mathbf{x}}$  du mélange (sections A.5.2 à A.5.4), ce qui suppose que l’identité  $C_{\mathbf{x}} \approx \hat{\mathbf{A}}C_{\mathbf{s}}$  est raisonnablement vérifiée.

### A.5.2 Masquage binaire en supposant une seule source active

Le modèle de sources à représentations de supports disjoints présenté dans l’introduction de ce chapitre, correspond à estimer la représentation de chaque source par masquage, à partir de la représentation calculée du mélange  $C_{\mathbf{x}}$  :

$$c_{\hat{\mathbf{s}}_n}(k) := \chi_n(k) \cdot \frac{\hat{\mathbf{A}}_n^H C_{\mathbf{x}}(k)}{\|\hat{\mathbf{A}}_n\|_2^2} \quad (\text{A.36})$$

où le masque  $\chi_n(k)$  est défini comme :

$$\chi_n(k) := \begin{cases} 1 & \text{si } n = n(k); \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{avec } n(k) := \arg \max_n \frac{|\widehat{\mathbf{A}}_n^H C_{\mathbf{x}}(k)|}{\|\widehat{\mathbf{A}}_n\|_2^2}; \quad (\text{A.37})$$

c'est-à-dire que seule la source la plus active se voit affecter un coefficient non nul, tandis que les coefficients des autres sources sont mis à zéro, ou "masqués". Le degré d'activité d'une source, qui détermine le masque, est mesuré la corrélation entre la colonne correspondante  $\widehat{\mathbf{A}}_n$  de la matrice de mélange estimée et la composante  $C_{\mathbf{x}}(k)$  du mélange.

Le succès du masquage suppose que les sources ont bien des représentations essentiellement disjointes, grâce à laquelle on a bien l'approximation  $C_{\mathbf{x}}(k) \approx \widehat{\mathbf{A}}_{n(k)c_{s_n}(k)}$ . Bien qu'elle soit très forte, cette hypothèse est vérifiée pour de nombreux mélanges audiophoniques [9] dans le domaine temps-fréquence. C'est la principale raison des bonnes performances de l'algorithme DUET [160] qui effectue une variante de masquage dans le domaine temps-fréquence où le masque  $\chi_n(k)$  est appliqué sur l'un des canaux  $c_{x_p}$  du mélange, au lieu d'être appliqué sur la combinaison linéaire de tous les canaux  $\widehat{\mathbf{A}}_n^H C_{\mathbf{x}}$ . A l'inverse, le masquage de  $\widehat{\mathbf{A}}_n^H C_{\mathbf{x}}$  présente l'avantage de garantir que la source à estimer est bien présente sur le "canal virtuel" masqué, alors qu'une source absente d'un canal donné ne peut être estimée par masquage de celui-ci.

### A.5.3 Masquage binaire en supposant $M < P$ sources actives

Lorsque le nombre de sources mélangées  $N$  est important, le nombre moyen de sources simultanément actives peut excéder un, malgré la parcimonie de la représentation de chacune des sources. En supposant que le nombre de sources actives n'excède pas  $M$ , où  $M < P$ , une approche [77, 6] qui généralise le masquage binaire décrit ci-dessus consiste à :

1. déterminer l'ensemble  $I_M(k) \subset \{1, \dots, N\}$  des indices des  $M$  sources actives sur la composante  $C_{\mathbf{x}}(k)$  ;
2. calculer les composantes des sources actives aux moindres carrés.

En notant  $\widehat{\mathbf{A}}_I$  la matrice constituée des colonnes de  $\widehat{\mathbf{A}}$  d'indice  $k \in I$ , si l'ensemble des sources actives est  $I$  alors les composantes estimées des sources sont :

$$c_{\widehat{s}_n}(k) := 0, \quad k \notin I, \quad (\text{A.38})$$

$$(c_{\widehat{s}_n}(k))_{k \in I} := \widehat{\mathbf{A}}_I^\dagger C_{\mathbf{x}}. \quad (\text{A.39})$$

Le choix de l'ensemble  $I_M(k)$  des sources actives est donc effectué de façon à minimiser l'erreur quadratique de reconstruction de  $C_{\mathbf{x}}$  :

$$I_M(k) := \arg \min_{I | \text{card}(I) \leq M} \|C_{\mathbf{x}} - \widehat{\mathbf{A}}_I \widehat{\mathbf{A}}_I^\dagger C_{\mathbf{x}}\|_2^2 \quad (\text{A.40})$$

$$= \arg \max_{I | \text{card}(I) \leq M} \|\widehat{\mathbf{A}}_I \widehat{\mathbf{A}}_I^\dagger C_{\mathbf{x}}\|_2^2. \quad (\text{A.41})$$

Lorsque  $M = 1$  on retrouve exactement le principe du masquage binaire décrit plus haut.

#### A.5.4 Séparation locale par minimisation $\ell^\tau$

Lorsque le nombre de sources supposées actives peut atteindre  $M = P$ , il n'est plus possible de définir l'ensemble  $I(k)$  des sources actives par minimisation de l'erreur quadratique, puisque génériquement avec n'importe quel sous-ensemble  $I$  de  $P$  sources actives on obtient une reconstruction parfaite  $C_{\mathbf{x}} = \widehat{\mathbf{A}}_I \widehat{\mathbf{A}}_I^{-1} C_{\mathbf{x}}$ .

Une alternative consiste alors à exploiter la parcimonie des sources par une approche au maximum de vraisemblance sous l'hypothèse d'une distribution Gaussienne généralisée des coefficients des sources :

$$C_{\mathbf{s}}(k) := \arg \min_{C_{\mathbf{s}}(k) | \widehat{\mathbf{A}} C_{\mathbf{s}}(k) = C_{\mathbf{x}}(k)} \sum_{n=1}^N |c_{\mathbf{s}_n}(k)|^\tau. \quad (\text{A.42})$$

ce qui pour  $0 \leq \tau \leq 1$  aboutit à l'estimation d'une représentation des sources où, pour chaque atome  $\varphi_k$ , au plus  $P$  sources sont "actives" [104]. En pratique, plutôt que de faire appel à l'artillerie lourde des algorithmes itératifs d'optimisation de norme  $\ell^\tau$  (FOCUSS, etc.) pour résoudre (A.42), on peut employer en petite dimension une approche combinatoire, qui consiste à sélectionner le meilleur ensemble de  $P$  sources actives comme :

$$I(k) := \arg \min_{I | \text{card}(I) = P} \|\widehat{\mathbf{A}}_I^{-1} C_{\mathbf{x}}\|_\tau. \quad (\text{A.43})$$

Pour une plus grande efficacité numérique, les  $\binom{N}{P}$  matrices inverses possibles  $\widehat{\mathbf{A}}_I^{-1}$  peuvent être pré-calculées dès la matrice de mélange estimée.

Cette approche est très utilisée en pratique notamment pour la séparation de sources audio à partir de leurs TFCT, et donne globalement de bons résultats. Ainsi, pour des mélanges audio stéréophoniques, Bofill et Zibulevsky [20] ont proposé une telle optimisation locale pour  $\tau = 1$ , et Saab *et al.* [136] ont étudié expérimentalement l'influence du choix de  $\tau$  sur la qualité des résultats, sur des mélanges sonores. Sur les exemples considérés par ces auteurs, les résultats obtenus sont satisfaisants en terme de qualité de séparation, et ne varient pas très sensiblement en fonction de l'exposant  $\tau$  choisi.

Pour des mélanges bruités, le critère de séparation (A.46) peut avantageusement être remplacé par le suivant, où le paramètre  $\lambda$  sert à régler le compromis entre fidélité de reconstruction des coefficients du mélange et parcimonie des sources estimées :

$$C_{\mathbf{s}}(k) := \arg \min_{C_{\mathbf{s}}(k)} \left\{ \frac{1}{2\sigma_{\mathbf{b}}^2} \|C_{\mathbf{x}}(k) - \widehat{\mathbf{A}} C_{\mathbf{s}}(k)\|_F^2 + \lambda \sum_{n=1}^N |c_{\mathbf{s}_n}(k)|^\tau \right\} \quad (\text{A.44})$$

Suivant la valeur de  $\lambda$ , le nombre de sources estimées actives variera de zéro à  $P$ . Le lecteur aura peut-être remarqué que pour un exposant  $\tau = 0$ , on retrouve ainsi le système de masquage présenté en section A.5.3, mais où le nombre de sources actives peut varier pour chaque composante.

#### A.5.5 Principe de la séparation globale par minimisation $\ell^\tau$

Lorsque le dictionnaire  $\Phi$  est une base orthonormée et qu'on a calculé la représentation conjointe du mélange par simple transformée orthogonale, l'estimation indépendante des

composantes des sources selon le critère (A.44) correspond en fait à l'optimisation d'un critère plus global :

$$C_{\hat{\mathbf{s}}} := \arg \min_{C_{\mathbf{s}}} \left\{ \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{A}}C_{\mathbf{s}}\Phi\|_F^2 + \lambda \sum_{nk} |c_{s_n}(k)|^\tau \right\} \quad (\text{A.45})$$

En effet, on a alors l'égalité :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{A}}C_{\mathbf{s}}\Phi\|_F^2 &= \|\mathbf{x}\Phi^H - \hat{\mathbf{A}}C_{\mathbf{s}}\|_F^2 = \|C_{\mathbf{x}}^{\Phi^H} - \hat{\mathbf{A}}C_{\mathbf{s}}\|_F^2 \\ &= \sum_{k=1}^K \|C_{\mathbf{x}}^{\Phi^H}(k) - \hat{\mathbf{A}}C_{\mathbf{s}}(k)\|_2^2, \end{aligned}$$

Pour un dictionnaire arbitraire, le calcul des sources via le critère (A.45) revient à une estimation au *maximum a posteriori* (MAP) sous l'hypothèse que la distribution des coefficients des sources est une Gaussienne généralisée (A.4). Dans le même esprit, Zibulevsky et Pearlmutter [161] ont popularisé la séparation de mélanges sous-déterminés en s'appuyant sur un modèle parcimonieux des sources et une estimation MAP :

$$C_{\hat{\mathbf{s}}} := \arg \max_{C_{\mathbf{s}}} p(C_{\mathbf{s}}|\mathbf{x}, \hat{\mathbf{A}}) = \arg \min_{C_{\mathbf{s}}} \left\{ \frac{1}{2\sigma_{\mathbf{b}}^2} \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{A}}C_{\mathbf{s}}\Phi\|_F^2 + \sum_{nk} h(c_{s_n}(k)) \right\} \quad (\text{A.46})$$

avec  $h(c) = -\log p_c(c)$  où  $p_c(\cdot)$  est la distribution commune des coefficients des sources, supposés indépendants. On note que l'estimation de  $C_{\hat{\mathbf{s}}}$  ne fait pas intervenir la représentation  $C_{\mathbf{x}}$  du mélange calculée dans une première étape (voir la figure A.2). Dans ce cadre, celle-ci sert donc uniquement à l'estimation de la matrice de mélange. L'optimisation d'un critère tel que (A.46) ou (A.45) ne constituant qu'un principe, nous allons maintenant donner quelques détails sur des algorithmes qui permettent de le mettre en pratique.

### A.5.6 Liens formels avec l'approximation parcimonieuse classique monocanal

De façon peut-être surprenante, les problèmes d'optimisation de la forme (A.45) se ramènent formellement à des questions plus classiques que les problèmes de représentation parcimonieuse conjointe de mélanges (A.16)-(A.17) évoqués en section A.3. Ce lien formel, qui n'est pas indispensable pour comprendre la définition des algorithmes de seuillage itératif ou de *Matching Pursuit* pour la séparation, est plus crucial pour décrire l'algorithme FOCUSS dans ce contexte. Le lecteur plus intéressé par la description des algorithmes conceptuellement et numériquement les plus simples pourra donc sans hésiter se diriger vers la section A.5.7.

Etant donné que :

$$\hat{\mathbf{A}}C_{\mathbf{s}}\Phi = \sum_{nk} c_{s_n}(k) \hat{\mathbf{A}}_n \varphi_k,$$

l'optimisation (A.45) consiste à approcher le mélange  $\mathbf{x}$  (vu comme une matrice de taille  $P \times T$ ) avec une combinaison linéaire parcimonieuse de matrices  $P \times T$  de la forme  $\{\hat{\mathbf{A}}_n \varphi_k\}_{nk}$ .

Dans l'espace vectoriel des matrices de taille  $P \times T$ , il s'agit donc d'un problème d'approximation parcimonieuse du "vecteur"  $\mathbf{x}$  à partir du dictionnaire  $\Phi$ <sup>6</sup> constitué des  $N \times K$  "atomes multicanaux"  $\{\widehat{\mathbf{A}}_n \varphi_k\}_{nk}$ . On peut donc formellement écrire sans modification substantielle les algorithmes d'optimisation dédiés à l'approximation parcimonieuse d'un signal *monodimensionnel* : des techniques de seuillage itératif [31, 48] pour  $1 \leq \tau \leq 2$ , de programmation linéaire, quadratique ou conique [28, 18] pour  $\tau = 1$ , de moindres carrés repondérés itérés (tels que FOCUSS) pour  $0 < \tau \leq 2$ . Les détails de la description de ces algorithmes reprennent les éléments décrits en section A.3 en y considérant le cas particulier  $P = 1$ , c'est-à-dire que l'aspect *conjoint* des représentations disparaît.

### A.5.7 Algorithmes de séparation globale par minimisation $\ell^\tau$

Si les choses sont simples sur le papier, il n'en est pas forcément de même numériquement : alors que les algorithmes de seuillage restent abordables parce qu'ils n'impliquent aucune inversion de matrice, les minimisations de norme  $\ell^1$  (*basis pursuit*) ou de norme  $\ell^\tau$  (FOCUSS) deviennent vite impraticables à cause des inversions répétées de matrices carrées de taille  $(P \times T) \times (P \times T)$  qu'elles impliquent. Nous verrons par contre que *matching pursuit* s'applique sans difficulté, avec un algorithme efficace en pratique.

#### Algorithme pour $0 < \tau \leq 2$ : FOCUSS et basis pursuit

L'algorithme FOCUSS de minimisation du critère (A.45) procède de façon itérative. Apartir d'une initialisation  $C_s^{(0)}$  dont la valeur peut avoir une influence décisive sur le point de convergence de l'algorithme, il s'agit de minimiser itérativement le critère quadratique pondéré :

$$C_s^{(m)} := \arg \min_{C_s} \left\{ \|\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{A}} C_s \Phi\|_F^2 + \frac{\lambda |\tau|}{2} \sum_{nk} \left| (w_{nk}^{(m)})^{-1} c_{s_n}(k) \right|^2 \right\} \quad (\text{A.47})$$

où  $w_{nk}^{(m)} := |c_{s_n}^{(m-1)}(k)|^{1-\tau/2}$ . En notant  $\mathcal{W}^{(m)}$  la matrice de pondérations, carrée de taille  $(N \times K) \times (N \times K)$  et dont les éléments diagonaux sont les  $N \times K$  coefficients  $w_{nk}^{(m)}$ , chaque itération consiste à mettre à jour  $\mathcal{W}^{(m)}$  ainsi que le dictionnaire pondéré  $\Phi^{(m)}$  dont les  $N \times K$  atomes sont les signaux multicanaux  $w_{nk}^{(m)} \widehat{\mathbf{A}}_n \varphi_k$ , chacun de taille  $P \times T$ . Reprenant la description de l'algorithme M-FOCUSS dans le cas monocanal, section A.3.6, on est alors amené à calculer

$$C_s^{(m)} := \mathcal{X} \left( (\Phi^{(m)})^H \Phi^{(m)} + \frac{\lambda |\tau|}{2} \mathbf{I}_{P \times T} \right)^{-1} \Phi^{(m)H} \mathcal{W}^{(m)}. \quad (\text{A.48})$$

où  $\mathcal{X}$  n'est autre que le vecteur colonne de taille  $P \times T$  obtenu en réorganisant les coefficients de  $\mathbf{x}$ , et  $\mathcal{C}$  est un vecteur colonne de taille  $N \times K$  dont la réorganisation sous forme de matrice est précisément  $C_s^{(m)}$ . Cet algorithme, qui nécessite *a priori* l'inversion d'une

<sup>6</sup>On utilise ici une notation italique  $\Phi$  pour distinguer ce dictionnaire de matrices du dictionnaire d'atomes  $\Phi$  à partir duquel il est construit. Alors que  $\Phi$  est une matrice  $K \times T$ , il faudra dans la suite considérer  $\Phi$  comme une matrice  $(N \times K) \times (P \times T)$ .

matrice carrée de taille  $(P \times T) \times (P \times T)$  à chaque itération, n'est utilisable en pratique qu'à la condition que le dictionnaire utilisé soit suffisamment structuré pour que l'inversion puisse se faire par blocs, ce qui est par exemple le cas lorsque  $\Phi$  est une base orthonormale. Les algorithmes de programmation quadratique employés pour le *basis pursuit* soulèvent les mêmes difficultés.

### Algorithmes pour $1 \leq \tau \leq 2$ : seuillage itératif

Etant donné la matrice de mélange estimée  $\hat{\mathbf{A}}$  et le dictionnaire  $\Phi$  considéré, il faut commencer par déterminer un réel  $\mu < \infty$  tel que, pour toute matrice  $C_s$  de taille  $N \times K$ ,  $\|\hat{\mathbf{A}}C_s\Phi\|_F^2 \leq \mu\|C_s\|_F^2$ . On définit alors itérativement, à partir d'une initialisation quelconque  $C_s^{(0)}$  (souvent choisie égale à zéro) :

$$c_{s_n}(k)^{(m)} = S_{\frac{\Delta}{\mu}, \tau} \left( c_{s_n}^{(m-1)}(k) + \frac{\langle \hat{\mathbf{A}}_n^H (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{A}}C_s^{(m-1)}\Phi), \varphi_k \rangle}{\mu} \right) \quad (\text{A.49})$$

et la séquence ainsi produite converge nécessairement vers un minimiseur de (A.45) dès que  $1 \leq \tau \leq 2$  [31]. Si  $\tau > 1$  ou bien si  $\Phi$  et  $\hat{\mathbf{A}}$  sont *toutes les deux* des matrices carrées inversibles, ce minimiseur est par ailleurs unique [31].

### A.5.8 Séparation globale itérative : *demixing pursuit*

Les algorithmes permettant de résoudre les problèmes d'optimisation  $\ell^\tau$  globaux tels que (A.45) pour  $0 < \tau \leq 1$  sont extrêmement gourmands en temps et en mémoire, surtout si la dimension des données à séparer est élevée et les contraintes de temps ou de puissance de calcul sont importantes. Une approche alternative bien plus rapide est le *demixing pursuit* [94, 110], un *matching pursuit* appliqué directement au "vecteur"  $\mathbf{x}$  avec le dictionnaire d'atomes  $\{\hat{\mathbf{A}}_n \varphi_k\}_{nk}$ . La définition de cet algorithme suppose que les atomes sont d'énergie unité, ce qui correspond simplement à supposer que les atomes monocanal  $\varphi_k$  sont d'énergie unité et que les colonnes  $\hat{\mathbf{A}}_n$  de la matrice de mélange estimée sont également de norme unité. Cette dernière hypothèse n'est pas restrictive puisqu'elle est compatible avec les indéterminations naturelles de la séparation de sources [26]. Des travaux théoriques récents indiquent [94] que si (A.45) admet une solution suffisamment parcimonieuse, alors *demixing pursuit*, de même que la minimisation de norme  $\ell^1$ .

Plus explicitement, pour décomposer et séparer un mélange multicanal avec *Demixing Pursuit*, on commence par initialiser un résidu  $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{x}$  puis l'on itère les étapes suivantes en débutant par  $m = 1$  :

1. sélection de la colonne de la matrice de mélange et de l'atome les plus corrélés :

$$(n_m, k_m) := \arg \max_{nk} |\langle \hat{\mathbf{A}}_n^H \mathbf{r}_p^{(m-1)}, \varphi_k \rangle| \quad (\text{A.50})$$

2. mise à jour du résidu :

$$\mathbf{r}^{(m)} := \mathbf{r}^{(m-1)} - \langle \hat{\mathbf{A}}_{n_m}^H \mathbf{r}_p^{(m-1)}, \varphi_{k_m} \rangle \hat{\mathbf{A}}_{n_m} \varphi_{k_m} \quad (\text{A.51})$$



Après  $M$  itérations, on obtient la décomposition :

$$\mathbf{x} = \sum_{m=1}^M c(m) \widehat{\mathbf{A}}_{n_m} \varphi_{k_m} + \mathbf{r}^{(M)} \quad (\text{A.52})$$

avec  $c(m) := \langle \widehat{\mathbf{A}}_{n_m} \mathbf{r}^{(m-1)}, \varphi_{k_m} \rangle$ .

Des variantes similaires au *matching pursuit* orthogonal sont possibles, et en termes de calcul numérique *demixing pursuit* peut être mis en œuvre de façon très efficace en exploitant la structure du dictionnaire et des mises à jour rapides pour la recherche du plus grand produit scalaire d'une itération à la suivante. Une mise en œuvre libre et rapide est disponible [82, 105].

## A.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit les principales étapes des méthodes de séparation de sources basées sur la parcimonie, dont l'un des principaux intérêts est la possibilité qu'elles offrent de séparer des mélanges sous-déterminés. Pour cela, la plupart des méthodes fonctionnent en deux étapes indépendantes [144] : a) estimation de la matrice de mélange ; b) séparation à matrice de mélange connue. En pratique, comme illustré sur la figure A.2, il s'agit plutôt de méthodes en quatre temps :

1. représentation parcimonieuse conjointe  $C_{\mathbf{x}}$  des canaux du mélange  $\mathbf{x}$  ;
2. estimation de  $\mathbf{A}$  à partir du diagramme de dispersion  $\{C_{\mathbf{x}}(k)\}$  ;
3. séparation par la parcimonie dans le domaine transformé ;
4. reconstruction des sources.

La mise en œuvre d'une méthode de séparation de sources basée sur la parcimonie nécessite un certain nombre de choix de diverses natures.

*Choix du dictionnaire  $\Phi$ .* Il s'agit d'un choix essentiellement basé sur des connaissances expertes sur la nature de la classe de signaux considérés. Un choix typique pour des mélanges audio, ou des signaux sismiques sera un dictionnaire temps-fréquence de type Gabor, ou bien temps-échelle de type ondelettes, également pour des signaux biologiques tels que les signaux cardiaques ou d'électro-encéphalogrammes. Pour des images naturelles, on fera appel généralement à des dictionnaires d'ondelettes, de curvelets ou bien d'atomes de Gabor anisotropes. La mise en place de méthodes de choix automatique d'un dictionnaire reste un problème assez ouvert, même si des techniques d'apprentissage de dictionnaires à partir de jeux de données de référence sont aujourd'hui disponibles. La notion même de bonne adéquation d'un dictionnaire à une classe de signaux reste à clarifier.

*Choix de l'algorithme de représentation parcimonieuse conjointe  $C_{\mathbf{x}}$  du mélange.* Ce choix dépend *a priori* de nombreux facteurs. Notamment puissance de calcul disponible peut être un facteur empêchant le recours à certains algorithmes tels que M-FOCUSS ou *basis pursuit* lorsque le mélange est de grande dimension (beaucoup de capteurs  $P$  ou beaucoup d'échantillons / de pixels / de voxels / etc.  $T$ ). Par ailleurs, suivant le niveau de bruit  $\mathbf{b}$  ajouté au mélange, suivant la distribution des coefficients des sources dans le dictionnaire choisi, etc., les paramètres (exposant  $\tau$ , facteur de pénalité  $\lambda$ , critère d'arrêt

pour *matching pursuit*, etc.) avec lesquels un algorithme donne des performances optimales peuvent varier. La facilité de leur réglage, *via* un jeu de données de développement, peut alors entrer en ligne de compte.

*Choix de la méthode de séparation.* Toutes les méthodes de séparation n’ont pas la même robustesse à une estimation imprécise de la matrice de mélange. Ainsi, une comparaison de plusieurs méthodes [110] basées sur des dictionnaires temps-fréquence et des mélanges audio stéréophoniques ( $P = 2$ ) a montré que la séparation par masquage binaire en supposant une seule source active (section A.5.2), moins performante que celle où l’on suppose  $P$  sources actives (section A.5.4) lorsque la matrice de mélange  $\mathbf{A}$  est parfaitement connue, s’avère plus robuste et, de fait, plus performante que celle-ci lorsque seule une estimation imparfaite de  $\mathbf{A}$  est disponible.

*Choix de l’algorithme d’estimation de  $\mathbf{A}$ .* Ce choix est sans doute le plus délicat, car si tout choix “raisonnable” du dictionnaire, de l’algorithme de représentation parcimonieuse conjointe du mélange ou de la méthode de séparation permet quoi qu’il arrive de séparer *grosso modo* les sources lorsque la matrice de mélange, même sous-déterminée, est connue, au contraire une erreur trop grande sur l’estimation de la matrice de mélange a des conséquences catastrophiques sur les résultats obtenus qui deviennent fantaisistes. En particulier, si le nombre de sources n’est pas connu à l’avance, il faut absolument recourir à un algorithme qui l’estime avec une grande robustesse, ce qui a tendance à éliminer les approches basées sur la détection de pics dans un histogramme au profit de celles, comme l’algorithme DEMIX [7], qui exploitent des redondances (par exemple, persistance temporelle et fréquentielle dans une TFCT) dans la représentation du mélange pour rendre plus robuste (avec une mesure de fiabilité) l’estimation des directions des colonnes de  $\mathbf{A}$ . Si les sources ont des supports trop peu disjoints, le recours nécessaire aux approches de la section A.5.4, peu robuste à une imprécision sur l’estimation de  $\mathbf{A}$ , rend d’autant plus critique l’estimation robuste de la matrice de mélange.

## A.7 Perspectives

A ce jour, la plupart des techniques de séparation aveugle de sources basées sur la parcimonie s’appuient sur un modèle parcimonieux de toutes les sources dans un dictionnaire commun, ce qui permet d’exploiter leur *diversité spatiale* pour les séparer. Leur principe consiste à décomposer le mélange en composantes élémentaires, à regrouper celles-ci par similitude de leurs caractéristiques spatiales, puis à finalement les recombinaison pour reconstruire les sources. Ce principe est susceptible d’être appliqué à des décompositions plus générales [141], pourvu qu’un critère de similitude approprié permette de regrouper les composantes d’une même source. Nous discutons ci-dessous quelques possibilités qui commencent à être étudiées.

*Diversité spatiale et diversité morphologique : chercher la diversité des sources.* Si les sources ont des décompositions parcimonieuses dans des dictionnaires *différents*, il est aussi possible d’exploiter la parcimonie pour les séparer. C’est d’ailleurs une approche valable y compris pour séparer des sources à partir d’un seul canal, lorsqu’aucune diversité spatiale n’est disponible. Une telle approche, appelée analyse en composantes morphologiques (ACM) [141] puisqu’elle repose sur les différences de *formes d’ondes* des sources pour les séparer, a pu être appliquée avec succès pour la séparation de “couches” tonales

et transitoires dans des sons musicaux [32] pour la compression, ainsi que pour la séparation de textures et de contenu plus régulier dans les images [140]. Il est également possible d'exploiter conjointement la diversité spatiale et la *diversité morphologique* des sources [19], ce qui correspond à chercher une décomposition du mélange sous la forme :

$$\mathbf{x} = \sum_{n=1}^N \mathbf{A}_n \cdot c_{s_n} \cdot \Phi^{(n)} + \mathbf{b} = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K c_{s_n}(k) \mathbf{A}_n \varphi_k^{(n)} + \mathbf{b} \quad (\text{A.53})$$

où  $c_{s_n} \cdot \Phi^{(n)}$  est une approximation parcimonieuse de  $s_n$  dans un dictionnaire spécifique  $\Phi^{(n)}$ . Les sources estimées sont alors reconstruites sous la forme  $\widehat{s}_n := \sum_k c_{s_n}(k) \varphi_k^{(n)}$ . La validité d'une telle approche hors d'un cadre purement académique repose sur l'existence effective de diversité morphologique entre sources. Plus que sa mise en œuvre, c'est la détermination des dictionnaires spécifiques aux sources (par des connaissances expertes ou par apprentissage) qui constitue le véritable défi de l'ACM.

*Séparation de mélanges convolutifs sous-déterminés.* Jusqu'ici, nous avons essentiellement évoqué la séparation de mélanges linéaires instantanés, mais la parcimonie permet également de traiter des formes simples de mélanges convolutifs, les mélanges anéchoïques (c'est-à-dire avec un délai) [160, 130]. L'analyse de mélanges réels soulève en fait des problèmes de séparation convolutive, éventuellement sous-déterminés  $\mathbf{x} = \mathbf{A} \star \mathbf{s} + \mathbf{b}$ . Pour adapter et étendre les techniques basées sur la parcimonie à ce contexte, il faut d'une part identifier les conditions de mélange  $\mathbf{A}$ , d'autre part effectuer la séparation lorsque  $\mathbf{A}$  est connue ou estimée. Le premier problème soulève des défis difficiles, malgré quelques approches récentes [118], mais le second est plus facile à aborder et devrait pouvoir être traité dans l'esprit des méthodes de déconvolution basées sur la minimisation de norme  $\ell^1$  [137, 43]. Formellement, une fois  $\mathbf{A}$  estimée, il s'agit de chercher une décomposition du mélange sous la forme :

$$\mathbf{x} = \sum_{n=1}^N \mathbf{A}_n \star (c_n \cdot \Phi^{(n)}) + \mathbf{b} = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K c_n(k) \cdot \mathbf{A}_n \star \varphi_k^{(n)} + \mathbf{b} \quad (\text{A.54})$$

et de reconstruire les sources  $\widehat{s}_n := \sum_k c_{s_n}(k) \varphi_k^{(n)}$ . Le succès d'une telle approche, qui reste à démontrer en pratique, dépend certainement de la diversité globale (diversités morphologiques et spatiales combinées) des formes d'ondes multicanal  $\mathbf{A}_n \star \varphi_k^{(n)}$ .

L'exploration du large potentiel d'applications des méthodes basées sur la parcimonie pour la séparation de sources est aujourd'hui encore fortement limitée par la complexité algorithmique des optimisations qu'elles impliquent. Il est donc essentiel de parvenir à concevoir et mettre en œuvre de nouveaux algorithmes qui devraient idéalement combiner trois propriétés cruciales :

- une propension à fournir, assurément ou avec une forte probabilité, des approximations parcimonieuses performantes ;
- une grande efficacité numérique, en termes d'usage économe des ressources de calcul (mémoire, opérations arithmétiques, etc.) ;
- une robustesse à l'estimation approchée de la matrice de mélange.

*Des algorithmes à la performance "certifiable".* Ces dix dernières années, de nombreux algorithmes de décomposition parcimonieuse ont été proposés, et nous avons décrit

dans ce chapitre les principaux d'entre eux. Parmi eux, les algorithmes itératifs de la famille du *matching pursuit* et les techniques basées sur la minimisation de critères  $\ell^1$  ont fait l'objet ces dernières années d'une somme considérable de travaux initiés par Donoho et Huo [41] (voir par exemple [148, 94, 38, 81] et les références qui s'y trouvent). Ces algorithmes ont de bonnes performances – en un sens mathématique précis qui permet de “certifier” leur performance – pourvu que les sources satisfassent avec suffisamment de précision un modèle parcimonieux. L'analyse mathématique des techniques d'optimisation  $\ell^\tau$ ,  $0 < \tau < 1$ , qui sont non-convexes, est à ce jour entamée [81], mais de façon quelque peu surprenante, celle de techniques convexes d'optimisation  $\ell^\tau$  pour  $1 < \tau \leq 2$  est moins explorée. La “certification” par des théorèmes de la qualité du résultat d'algorithmes d'approximation conjointe (voir la section A.3) ou de séparation (voir la section A.5) est donc un domaine où de nombreuses questions restent ouvertes.

Dans le cas monocanal, Gribonval et Nielsen [93, 88] ont prouvé que s'il existe un représentation très parcimonieuse (impliquant un nombre d'atomes suffisamment petit), alors c'est l'unique solution commune à tous les problèmes d'optimisation (A.16) pour  $0 \leq \tau \leq 1$ . Des résultats similaires [81] permettent de conclure à la forte similarité des solutions de tous les problèmes d'approximation parcimonieuse monocanal (A.17) pour  $0 \leq \tau \leq 1$ , dès lors que le signal analysé peut être bien approché (en termes d'erreur quadratique) par une combinaison de suffisamment peu d'atomes du dictionnaire. Les travaux de Tropp *et al.* [151, 150] ont montré que pour  $\tau = 1$  ces résultats s'étendent au cas multicanal bruité.

*Des algorithmes efficaces numériquement.* Du point de vue numérique, nous avons discuté les difficultés liées aux techniques de résolution des problèmes d'optimisation (A.17) ou (A.45) pour  $0 \leq \tau \leq 1$ , qui peuvent notamment impliquer l'inversion de matrices de grande taille. D'autres approches, telles que la famille du *matching pursuit*, offrent une alternative intéressante en termes de complexité algorithmique, à la fois pour l'approximation conjointe et la séparation à matrice de mélange connue. Une mise en œuvre rapide de complexité  $\mathcal{O}(T \log T)$ , appelée MPTK (*the matching pursuit toolkit*), a été récemment proposée et est librement disponible [82, 105]. Avec des dictionnaires redondants tels que les dictionnaires de Gabor multi-échelle, il devient alors possible de calculer de bonnes approximations parcimonieuses en un temps proche de la durée du signal, même lorsque celui-ci devient très grand. Des algorithmes plus récemment suggérés tels que le seuillage itératif [31, 55, 48, 57] sont également extrêmement prometteurs en terme d'efficacité numérique.

*Estimer la matrice de mélange ... et le dictionnaire!* Le problème de l'identifiabilité (et de l'identification) de la matrice de mélange sous l'hypothèse de parcimonie n'est pas anodin, car il est directement relié à la question de la robustesse des algorithmes de séparation en fonction de la précision de l'estimation de la matrice de mélange. Si aujourd'hui on commence à savoir analyser et “certifier” la performance des algorithmes d'approximation parcimonieuse, les premiers résultats analogues pour des algorithmes d'identification de matrice de mélange [5], bien qu'encourageants, ne sont valables que sous des modèles parcimonieux restrictifs ne tolérant pas la présence de bruit. Le choix du/des dictionnaire(s)  $\Phi/\Phi^{(n)}$  constitue en quelque sorte un problème dual, dont l'influence sur les performances de séparation reste à comprendre. En effet, si la pratique courante consiste à choisir le(s) dictionnaire(s) d'analyse dans une bibliothèque de dictionnaires classiques, en fonction de connaissances *a priori* disponibles sur les sources, son *apprentissage* sur les données à

séparer, ou *sparse coding* est formellement équivalent au problème de l'estimation de  $\mathbf{A}$  (à transposition près puisque  $\mathbf{x}^H = \mathbf{\Phi}^H \mathbf{C}_s^H \mathbf{A}^H + \mathbf{b}^H$ ). En pratique, les approches pourront s'avérer sensiblement différentes en raison notamment de la différence substantielle de dimension des matrices à estimer ( $\mathbf{A}$  est de taille  $P \times N$ ,  $\mathbf{\Phi}$  de taille  $K \times T$ , et l'on a généralement  $K \geq T \gg N \approx P$ ), qui changent fondamentalement la géométrie du problème et l'intuition que l'on peut s'en faire.

L'idée de représenter un mélange dans un domaine où il est parcimonieux afin d'en faciliter la séparation a permis de s'attaquer avec succès au problème de la séparation de mélanges linéaires instantanés sous-déterminés. Les méthodes aujourd'hui les plus employées [133] reposent sur des dictionnaires classiques (Gabor, ondelettes) identiques pour toutes les sources, et des représentations basées sur des transformées linéaires (TFCT, etc.). Pour aller plus loin et savoir si l'idée de parcimonie, *a priori* prometteuse pour traiter des problèmes plus complexes et plus réaliste de séparation de source, permettra de franchir en pratique ce cap, il faut certes surmonter un certain nombre des verrous techniques identifiés ci-dessus. Mais surtout, une véritable entreprise d'évaluation et d'analyse comparative des approches rendues possible par la parcimonie est plus que jamais indispensable.

## A.8 Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement Gilles Gonon, Sacha Krsulović et Sylvain Lesage pour leur relecture attentive d'une première version de ce chapitre et leurs nombreuses suggestions, commentaires et critiques pertinents qui m'ont permis de substantiellement améliorer l'organisation de ce chapitre.

---

# Bibliographie

- [1] S.A. Abdallah and M.D. Plumbley. If edges are the independent components of natural images, what are the independent components of natural sounds? In *Proc. Int. Conf. Indep. Component Anal. and Blind Signal Separation (ICA2001)*, pages 534–539, San Diego, California, December 2001.
- [2] F. Abrard and Y. Deville. A time-frequency blind signal separation method applicable to underdetermined mixtures of dependent sources. *Signal Processing*, 85(7) :1389–1403, July 2005.
- [3] F. Abrard, Y. Deville, and P. White. From blind source separation to blind source cancellation in the underdetermined case : a new approach based on time-frequency analysis. In *Proc. Int. Workshop on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation (ICA 2001)*, San Diego, California, December 2001.
- [4] Action Jeunes Chercheurs du GDR ISIS (CNRS). Ressources pour la séparation de signaux audiophoniques. [http ://www.ircam.fr/anasyn/ISIS/](http://www.ircam.fr/anasyn/ISIS/).
- [5] M. Aharon, M. Elad, and A.M. Bruckstein. On the uniqueness of overcomplete dictionaries, and a practical way to retrieve them. *Journal of Linear Algebra and Applications.*, 416 :48–67, July 2006.
- [6] A. Aïssa-El-Bey, K. Abed-Meraim, and Y. Grenier. Underdetermined blind source separation of audio sources in time-frequency domain. In *Proc. First Workshop on Signal Processing with Sparse/Structured Representations (SPARS'05)*, Rennes, France, November 2005.
- [7] S. Arberet, R. Gribonval, and F. Bimbot. A robust method to count and locate audio sources in a stereophonic linear instantaneous mixture. In J.C. Príncipe J. Rosca, D. Erdogmus and S. Haykin, editors, *Proc. of the Int'l. Workshop on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation (ICA 2006)*, volume 3889 of *LNCS Series*, pages 536–543, Charleston, South Carolina, USA, March 2006. Springer.
- [8] S. Arberet, R. Gribonval, and F. Bimbot. A robust method to count and locate audio sources in a stereophonic linear anechoic mixture. In *Proc. IEEE Intl. Conf. Acoust. Speech Signal Process (ICASSP'07)*, avril 2007.
- [9] R. Balan and J. Rosca. Statistical properties of STFT ratios for two channel systems and applications to blind source separation. In *Proc. Int. Workshop on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation (ICA 2000)*, pages 429–434, Helsinki, Finland, June 2000.

- 
- [10] D. Baron, M.F. Duarte, S. Sarvotham, M.B. Wakin, and R.G. Baraniuk. An information-theoretic approach to distributed compressed sensing. In *Proc. 45rd Conference on Communication, Control, and Computing*, 2005.
  - [11] L. Benaroya. *Séparation de plusieurs sources sonores avec un seul microphone*. PhD thesis, Université de Rennes I, Rennes, France, June 2003.
  - [12] L. Benaroya and F. Bimbot. Wiener-based source separation with HMM/GMM using a single sensor. In *Proc. 4th Int. Symp. on Independent Component Anal. and Blind Signal Separation (ICA2003)*, Nara, Japan, April 2003.
  - [13] L. Benaroya, F. Bimbot, and R. Gribonval. Audio source separation with a single sensor. *IEEE Trans. Audio, Speech and Language Processing*, 14(1) :191–199, January 2006.
  - [14] L. Benaroya, R. Gribonval, and F. Bimbot. Représentations parcimonieuses pour la séparation de sources avec un seul capteur. In *GRETSI 2001*, Toulouse, France, 2001. Article # 434.
  - [15] L. Benaroya, L. McDonagh, F. Bimbot, and R. Gribonval. Non negative sparse representation for wiener based source separation with a single sensor. In *Proc. IEEE Intl. Conf. Acoust. Speech Signal Process (ICASSP'03)*, volume 6, pages VI/613–VI/616, Hong-Kong, April 2003.
  - [16] Colin Bennett and Robert Sharpley. *Interpolation of operators*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1988.
  - [17] J. Bergh and J. Löfström. *Interpolation Spaces, an introduction*. Number 223 in Comprehensive Studies in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1976.
  - [18] D. Bertsekas. *Non-Linear Programming*. Athena Scientific, Belmont, MA, 2nd edition, 1995.
  - [19] J. Bobin, Y. Moudden, J-L. Starck, and M. Elad. Multichannel morphological component analysis. In *Proc. First Workshop on Signal Processing with Sparse/Structured Representations (SPARS'05)*, Rennes, France, November 2005.
  - [20] P. Bofill and M. Zibulevsky. Underdetermined blind source separation using sparse representations. *Signal Processing*, 81 :2353–2362, 2001.
  - [21] L. Borup, R. Gribonval, and M. Nielsen. Bi-framelet systems with few vanishing moments characterize Besov spaces. *Appl. Comp. Harmonic Anal.*, 17(1) :3–28, 2004.
  - [22] L. Borup, R. Gribonval, and M. Nielsen. Tight wavelet frames in Lebesgue and Sobolev spaces. *J. Function Spaces and Applications*, 2(3) :227–252, 2004.
  - [23] L. Borup, R. Gribonval, and M. Nielsen. Beyond coherence : recovering structured time-frequency representations. Technical Report 1833, IRISA, feb 2007.
  - [24] R. Gribonval C. Févotte and E. Vincent. BSS\_EVAL toolbox user guide – revision 2.0. Technical Report 1706, IRISA, Rennes, France, April 2005.
  - [25] E. J. Candès, J. Romberg, and Terence Tao. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. *Comm. Pure Appl. Math*, 59 :1207–1223, 2006.

- 
- [26] J.-F. Cardoso. Blind signal separation : statistical principles. *Proceedings of the IEEE. Special issue on blind identification and estimation*, 9(10) :2009–2025, October 1998.
- [27] J. Chen and X. Huo. Theoretical results on sparse representations of multiple measurement vectors. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54(12) :4634–4643, December 2006.
- [28] S. Chen, D.L. Donoho, and M.A. Saunders. Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 20(1) :33–61, January 1999.
- [29] Ole Christensen. *An introduction to frames and Riesz bases*. Birkhauser, Boston, MA, 2003.
- [30] S.F. Cotter, B. Rao, K. Engan, and K. Kreutz-Delgado. Sparse solutions to linear inverse problems with multiple measurement vectors. *IEEE Trans. Signal Proc.*, 53(7) :2477–2488, July 2005.
- [31] I. Daubechies, M. Defrise, and C. De Mol. An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 57(11) :1413–1457, August 2004.
- [32] L. Daudet and B. Torrèsani. Hybrid representations for audiophonic signal encoding. *Signal Processing, special issue on Image and Video Coding Beyond Standards*, 82(11) :1595–1617, 2002.
- [33] M.E. Davies and N. Mitianoudis. A sparse mixture model for overcomplete ica. *IEE Proceedings - Vision Image and Signal Processing*, 151(1) :35–43, 2004. special issue on Nonlinear and Non-Gaussian Signal Processing.
- [34] G. Davis, S. Mallat, and M. Avellaneda. Adaptive greedy approximations. *Constr. Approx.*, 13(1) :57–98, 1997.
- [35] R. A. DeVore and V. N. Temlyakov. Some remarks on greedy algorithms. *Adv. Comput. Math.*, 5(2-3) :173–187, 1996.
- [36] Ronald A. DeVore and George G. Lorentz. *Constructive approximation*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [37] S.J. Dilworth, D. Kutzurova, N.J. Kalton, and V. Temlyakov. The thresholding greedy algorithm, greedy bases, and duality. *Constr. Approx.*, 19 :575–597, 2003.
- [38] D. Donoho, M. Elad, and V. Temlyakov. Stable recovery of sparse overcomplete representations in the presence of noise. *IEEE Trans. Inf. Th.*, 52(1) :6–18, January 2006.
- [39] David L. Donoho. Compressed sensing. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 52(4) :1289–1306, 2006.
- [40] D.L. Donoho and M. Elad. Maximal sparsity representation via  $\ell^1$  minimization. *Proc. Nat. Aca. Sci.*, 100(5) :2197–2202, March 2003.
- [41] D.L. Donoho and Xiaoming Huo. Uncertainty principles and ideal atomic decompositions. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 47(7) :2845–2862, November 2001.
- [42] D.L. Donoho and I.M. Johnstone. Ideal denoising in an orthonormal basis chosen from a library of bases. *C. R. Acad. Sci. ParisSérie I*, 319 :1317–1322, 1994.



- 
- [43] C. Dossal. *Estimation de fonctions géométriques et déconvolution*. PhD thesis, École Polytechnique, Palaiseau, France, 2005.
- [44] S. Dubnov and N. Tishby. Influence of frequency modulating jitter on higher order moments of sound residual with applications to synthesis and classification. In *Proc. Int. Computer Music Conf. (ICMC'96)*, page 378–385, Hong-Kong, 1996.
- [45] EBU. SQAM - Sound Quality Assessment Material. online at <http://sound.media.mit.edu/mpeg4/audio/sqam/>.
- [46] B. Efron, T. Hastie, I. Johnstone, and R. Tibshirani. Least angle regression. *Annals of Statistics*, 32(2) :407–499, April 2004.
- [47] M. Elad. Shrinkage for redundant representations. In *Proc. SPARS'05*, IRISA, Rennes, France, November 2005. <http://spars05.irisa.fr>.
- [48] M. Elad. Why simple shrinkage is still relevant for redundant representations ? Technical report, The Technion - Israel Institute of Technology, December 2005. Submitted to the IEEE Trans. On Information Theory on January 2005.
- [49] M. Elad and A.M. Bruckstein. A generalized uncertainty principle and sparse representations in pairs of bases. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 48(9) :2558–2567, September 2002.
- [50] Y. Deville F. Abrard. Blind separation of dependent sources using the “time-frequency ratio of mixtures” approach. In *ISSPA 2003*, Paris, France, July 2003. IEEE.
- [51] A. Feuer and A. Nemirovsky. On sparse representations in pairs of bases. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 49(6) :1579–1581, June 2003.
- [52] C. Févotte and C. Doncarli. Two contributions to blind source separation using time-frequency distributions. *IEEE Signal Processing Letters*, 11(3) :386–389, March 2004.
- [53] C. Févotte and S. J. Godsill. A bayesian approach for blind separation of sparse sources. *IEEE Trans. Audio, Speech and Language Processing*, 14(6) :2174–2188, nov 2006.
- [54] D.J. Field and B.A. Olshausen. Emergence of simple-cell receptive field properties by learning a sparse code for natural images. *Nature*, 381 :607–609, 1996.
- [55] M.A. Figueiredo and R.D. Nowak. An EM algorithm for wavelet-based image restoration. *IEEE Trans. Image Process.*, 12(8) :906–916, August 2003.
- [56] Vanderghyest P Figueras i Ventura R and Frossard P. Low rate and flexible image coding with redundant representations. *IEEE Transactions on Image Processing*, 15(3) :726 – 739, March 2006.
- [57] M. Fornasier and H. Rauhut. Recovery algorithms for vector valued data with joint sparsity constraints. Technical Report 27, Johns Radon Institute for Computational and Applied Mathematics, Austrian Academy of Sciences, 2006.
- [58] Brendan Fox, Andrew Sabin, Bryan Pardo, and Alec Zopf. Modeling perceptual similarity of audio signals for blind source separation evaluation. In Mike E. Davies, Christopher J. James, Samer A. Abdallah, and Mark D Plumbley, editors, *Independent Component Analysis and Signal Separation*, volume 4666 of *LNCS*, pages 454–461. Springer, 2007.

- 
- [59] J.-J. Fuchs. Extension of the Pisarenko method to sparse linear arrays. In *Proc. IEEE Conf. on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics (ICASSP'95)*, volume 3, pages 2100–2103, Detroit, mai 1995.
- [60] J.-J. Fuchs. Linear programming in spectral estimation. application to array processing. In *Proc. IEEE Intl. Conf. Acoust. Speech Signal Process (ICASSP'96)*, volume 6, pages 3161–3164, Atlanta, GA, mai 1996.
- [61] J.-J. Fuchs. Extension of the Pisarenko method to sparse linear arrays. *IEEE Trans. Signal Process.*, 45 :2413–2421, octobre 1997.
- [62] J.-J. Fuchs. Multipath time-delay estimation. In *Proc. IEEE Intl. Conf. Acoust. Speech Signal Process (ICASSP'97)*, volume 1, pages 527–530, Munich, 1997.
- [63] J.-J. Fuchs. Une approche à l'estimation et l'identification simultanées. In *Actes du seizième colloque GRETSI*, volume 2, pages 1273–1276, Grenoble, September 1997. association GRETSI.
- [64] J.-J. Fuchs. Detection and estimation of superimposed signals. In *Proc. Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process. (ICASSP'98)*, volume III, pages 1649–1652, Seattle, 1998. IEEE.
- [65] J.-J. Fuchs. Multipath time-delay detection and estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47(1) :237–243, jan 1999.
- [66] J.-J. Fuchs. On sparse representations in arbitrary redundant bases. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 50(6) :1341–1344, June 2004.
- [67] J.-J. Fuchs. Recovery of exact sparse representations in the presence of bounded noise. *IEEE Trans. Information Theory*, 51(10) :3601–3608, October 2005.
- [68] J.-J. Fuchs. Some further results on the recovery algorithms. In *Proc. First Workshop on Signal Processing with Sparse/Structured Representations (SPARS'05)*, pages 67–70, Rennes, France, November 2005.
- [69] A.C. Gilbert, S. Muthukrishnan, M.J. Strauss, and J. Tropp. Improved sparse approximation over quasi-incoherent dictionaries. In *Int. Conf. on Image Proc. (ICIP'03)*, pages 37–40, Barcelona, Catalonia, Spain, September 2003. IEEE.
- [70] F. Girosi. An equivalence between sparse approximation and Support Vector Machines. *Neural Comput.*, 10(6) :1455–1480, 1998.
- [71] G. H Golub and C.F. Van Loan. *Matrix Computations*. The John Hopkins University Press, Baltimore and London, 2nd edition, 1989.
- [72] I. F. Gorodnitsky and B. D. Rao. Sparse signal reconstruction from limited data using focuss : a reweighted norm minimization algorithm. *IEEE Trans. Signal Proc.*, 45(3) :600–616, March 1997.
- [73] R. Gribonval. A counter-example to the general convergence of partially greedy algorithms. *J. Approx. Theory*, 111 :128–138, 2001. doi :10.1006/jath.2001.3556.
- [74] R. Gribonval. Fast matching pursuit with a multiscale dictionary of Gaussian chirps. *IEEE Trans. Speech and Audio Process.*, 49(5) :994–1001, May 2001.
- [75] R. Gribonval. Partially greedy algorithms. In K. Kopotun, T. Lyche, and M. Neamtu, editors, *Trends in Approximation Theory*, pages 143–148, Nashville, TN, September 2001. Vanderbilt University Press.

- 
- [76] R. Gribonval. Sparse decomposition of stereo signals with matching pursuit and application to blind separation of more than two sources from a stereo mixture. In *Proc. Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process. (ICASSP'02)*, volume 3, pages III/3057 – III/3060, Orlando, Florida, May 2002. IEEE.
- [77] R. Gribonval. Piecewise linear source separation. In M.A. Unser, A. Aldroubi, and A.F. Laine, editors, *Proc. SPIE '03*, volume 5207 Wavelets : Applications in Signal and Image Processing X, pages 297–310, San Diego, CA, August 2003.
- [78] R. Gribonval. Parcimonie. In P. Comon and C. Jutten, editors, *Séparation de sources 2 – au delà de l'aveugle et applications*, Information–Commande–Communication (IC2), chapter 10, pages 395–441. Hermès-Sciences, 2007.
- [79] R. Gribonval and E. Bacry. Harmonic decomposition of audio signals with matching pursuit. *IEEE Trans. Speech and Audio Process.*, 51(1) :101–111, jan 2003.
- [80] R. Gribonval, L. Benaroya, E. Vincent, and C. Févotte. Proposals for performance measurement in source separation. In *Proc. 4th Int. Symp. on Independent Component Anal. and Blind Signal Separation (ICA2003)*, pages 763–768, Nara, Japan, April 2003.
- [81] R. Gribonval, R. M. Figueras i Ventura, and P. Vandergheynst. A simple test to check the optimality of sparse signal approximations. *EURASIP Signal Processing, special issue on Sparse Approximations in Signal and Image Processing*, 86(3) :496–510, March 2006.
- [82] R. Gribonval and S. Krstulović. MPTK, The Matching Pursuit Toolkit, 2005.
- [83] R. Gribonval, B. Mailhe, H. Rauhut, K. Schnass, and P. Vandergheynst. Average case analysis of multichannel thresholding. In *Proc. IEEE Intl. Conf. Acoust. Speech Signal Process (ICASSP'07)*, avril 2007.
- [84] R. Gribonval and M. Nielsen. Approximate weak greedy algorithms. *Advances in Computational Mathematics*, 14(4) :361–378, May 2001.
- [85] R. Gribonval and M. Nielsen. Some remarks on nonlinear approximation with Schauder bases. *East J. Approx.*, 7(3) :267–285, 2001.
- [86] R. Gribonval and M. Nielsen. Nonlinear approximation with dictionaries. II. Inverse estimates. Technical Report R-02-2019, Aalborg Univ., Dept of Math., November 2002. published in *Constructive Approximation*.
- [87] R. Gribonval and M. Nielsen. Approximation with highly redundant dictionaries. In M. Unser, A. Aldroubi, and A .F. Laine, editors, *Proc. SPIE '03*, volume 5207 Wavelets : Applications in Signal and Image Processing X, pages pp. 216–227, San Diego, CA, August 2003. SPIE.
- [88] R. Gribonval and M. Nielsen. Highly sparse representations from dictionaries are unique and independent of the sparseness measure. Technical Report R-2003-16, Dept of Math. Sciences, Aalborg University, October 2003.
- [89] R. Gribonval and M. Nielsen. Sparse representations in unions of bases. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 49(12) :3320–3325, December 2003.
- [90] R. Gribonval and M. Nielsen. Nonlinear approximation with dictionaries. I. Direct estimates. *J. Fourier Anal. and Appl.*, 10(1) :51–71, 2004.

- 
- [91] R. Gribonval and M. Nielsen. On a problem of Gröchenig about nonlinear approximation with localized frames. *J. Fourier Anal. and Appl.*, 10(4) :433–437, 2004.
- [92] R. Gribonval and M. Nielsen. On approximation with spline generated framelets. *Constr. Approx.*, 20(2) :207–232, January 2004.
- [93] R. Gribonval and M. Nielsen. On the strong uniqueness of highly sparse expansions from redundant dictionaries. In *Proc. Int Conf. Independent Component Analysis (ICA'04)*, LNCS, Granada, Spain, September 2004. Springer-Verlag.
- [94] R. Gribonval and M. Nielsen. Beyond sparsity : recovering structured representations by  $\ell^1$ -minimization and greedy algorithms. *Advances in Computational Mathematics*, 2006. accepted.
- [95] R. Gribonval and P. Vandergheynst. On the exponential convergence of Matching Pursuits in quasi-incoherent dictionaries. *IEEE Trans. Information Theory*, 52(1) :255–261, January 2006.
- [96] Rémi Gribonval, H. Rauhut, K. Schnass, and P. Vandergheynst. Atoms of all channels, unite ! average case analysis of multi-channel sparse recovery using greedy algorithms. Preprint PI 1848, IRISA, mai 2007.
- [97] K. Gröchenig. Localized frames are finite unions of riesz sequences. *Adv. Comp. Math.*, 18(2–4) :149–157, 2003.
- [98] K. Gröchenig. Localization of frames, Banach frames, and the invertibility of the frame operator. *J. Fourier Anal. Appl.*, 10(2) :105–132, March 2004.
- [99] K. Gröchenig and E. Cordero. Localization of frames II. *Appl. Comp. Harm. Anal.*, 2004. to appear.
- [100] Rong Qing Jia. A Bernstein-type inequality associated with wavelet decomposition. *Constr. Approx.*, 9(2-3) :299–318, 1993.
- [101] P. Jost, P. Vandergheynst, S. Lesage, and R. Gribonval. Motif : an efficient algorithm for learning translation invariant dictionaries. In *Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process. (ICASSP'06)*, Toulouse, France, May 2006.
- [102] A. Jourjine, S. Rickard, and O. Yilmaz. Blind separation of disjoint orthogonal signals : Demixing n sources from 2 mixtures. In *Proc. Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process. (ICASSP'00)*, volume 5, pages 2985–2988, Istanbul, Turkey, June 2000.
- [103] G. Kerkyacharian and D. Picard. Entropy, universal coding, approximation and bases properties. Preprint 663, Universities Paris 6 & 7, 2001.
- [104] K. Kreutz-Delgado, B.D. Rao, K. Engan, T-W. Lee, and T.J. Sejnowski. Convex/schur-convex (csc) log-priors and sparse coding. In *6th Joint Symposium on Neural Computation*, pages 65–71, Institute for Neural Computation, May 1999.
- [105] S. Krstulovic and R. Gribonval. MPTK : Matching Pursuit made tractable. In *Proc. Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process. (ICASSP'06)*, volume 3, pages III–496 – III–499, Toulouse, France, May 2006.
- [106] T.-W. Lee, M. S. Lewicki, M. Girolami, and T. J. Sejnowski. Blind source separation of more sources than mixtures using overcomplete representations. *IEEE Signal Processing Letters*, 6(4) :87–90, April 1999.

- 
- [107] S. Lesage. *Apprentissage de dictionnaires structurés pour la modélisation parcimonieuse des signaux multicanaux*. PhD thesis, Université de Rennes I, avril 2007.
- [108] S. Lesage, R. Gribonval, F. Bimbot, and L. Benaroya. Learning unions of orthonormal bases with thresholded singular value decomposition. In *Proc. ICASSP'05 (IEEE Conf. on Acoustics, Speech and Signal Proc.)*, volume V, pages V/293–V/296, Philadelphia, PN, USA, March 2005.
- [109] S. Lesage, S. Krstulovic, and R. Gribonval. Séparation de sources dans le cas sous-déterminé : comparaison de deux approches basées sur des décompositions parcimonieuses. In *Proc. 20ème colloque GRETSI sur le traitement du signal et des images*, Louvain-la-Neuve, Belgique, September 2005.
- [110] S. Lesage, S. Krstulovic, and R. Gribonval. Under-determined source separation : comparison of two approaches based on sparse decompositions. In J.C. Principe J. Rosca, D. Erdogmus and S. Haykin, editors, *Proc. of the Int'l. Workshop on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation (ICA 2006)*, volume 3889 of *LNCS Series*, pages 633–640, Charleston, South Carolina, USA, March 2006. Springer.
- [111] D. Leviatan and V.N. Temlyakov. Simultaneous approximation by greedy algorithms. Technical Report 0302, IMI, Dept of Mathematics, University of South Carolina, Columbia, SC 29208, 2003.
- [112] M.S. Lewicki. Efficient coding of natural sounds. *Nature Neuosci.*, 5(4) :356–363, 2002.
- [113] M.S. Lewicki and T.J. Sejnowski. Learning overcomplete representations. *Neural Computation*, 12(2) :337–365, 2000.
- [114] J. Lin, D. Grier, and J. Cowan. Faithful representation of separable distributions. *Neural Computation*, 9(6) :1305–1320, 1997.
- [115] D.M. Malioutov, M. Cetin, and A.S. Willsky. Homotopy continuation for sparse signal representation. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, (ICASSP'05)*, volume V, pages 733–736, March 2005.
- [116] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, San Diego, CA, 1998.
- [117] S. Mallat and Z. Zhang. Matching pursuit with time-frequency dictionaries. *IEEE Trans. Signal Process.*, 41(12) :3397–3415, December 1993.
- [118] T. Melia and S. Rickard. Extending the DUET blind source separation technique. In *Proc. First Workshop on Signal Processing with Sparse/Structured Representations (SPARS'05)*, pages 67–70, Rennes, France, November 2005.
- [119] G. Monaci, P. Jost, P. Vandergheynst, B. Mailhe, S. Lesage, and R. Gribonval. Learning multi-modal dictionaries : Application to audiovisual data. In *Proc. of International Workshop on Multimedia Content Representation, Classification and Security (MCRCS'06)*, volume 4105 of *LNCS*, pages 538–545. Springer-Verlag, September 2006.

- 
- [120] G. Monaci, P. Jost, P. Vandergheynst, B. Mailhe, S. Lesage, and R. Gribonval. Learning multi-modal dictionaries. *IEEE Trans. Image Processing*, 16(9) :2272–2283, septembre 2007.
- [121] B. Natarajan. Sparse approximate solutions to linear systems. *SIAM J. Computing*, 25(2) :227–234, 1995.
- [122] A. Ozerov. *Adaptation de modèles statistiques pour la séparation de sources mono-capteur. Application à la séparation voix / musique dans les chansons*. PhD thesis, Université de Rennes I, December 2006.
- [123] A. Ozerov, R. Gribonval, P. Philippe, and F. Bimbot. Séparation voix / musique à partir d’enregistrements mono : quelques remarques sur le choix et l’adaptation des modèles. In *Proc. 20ème colloque GRETSI sur le traitement du signal et des images*, Louvain-la-Neuve, Belgique, September 2005.
- [124] A. Ozerov, P. Philippe, R. Gribonval, and F. Bimbot. One microphone singing voice separation using source-adapted models. In *Proc. 2005 IEEE Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics (WASPAA’05)*, pages 90–93, Mohonk Mountain House, New Paltz, New York, USA, October 2005.
- [125] Y.C. Pati, R. Rezaifar, and P.S. Krishnaprasad. Orthonormal matching pursuit : recursive function approximation with applications to wavelet decomposition. In *Proceedings of the 27th Annual Asilomar Conf. on Signals, Systems and Computers*, November 1993.
- [126] E. Pearson. *The Multiresolution Fourier Transform and its application to Polyphonic Audio Analysis*. PhD thesis, University of Warwick, September 1991.
- [127] Granai L Peotta L and Vandergheynst P. Image compression using an edge adapted redundant dictionary and wavelets. *Signal Processing*, 86(3) :444–456, March 2006.
- [128] M. Plumbley. Geometry and homotopy for  $\ell^1$  sparse signal representations. In *Proc. First Workshop on Signal Processing with Sparse/Structured Representations (SPARS’05)*, pages 67–70, Rennes, France, November 2005.
- [129] J.P. Princen and A.B. Bradley. Analysis/synthesis filter bank design bases on time domain aliasing cancellation. *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Proc.*, ASSP-34(5) :1153–1161, October 1986.
- [130] M. Puigt and Y. Deville. Time-frequency ratio-based blind separation methods for attenuated and time-delayed sources. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 19 :1348–1379, 2005.
- [131] L.R. Rabiner and R.W. Schafer. *Digital Processing of Speech Signals*. Prentice Hall, 1978.
- [132] Vandergheynst P Rahmoune A and Frossard P. Flexible motion-adaptive video coding with redundant expansions. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 16(2) :178–190, February 2006.
- [133] S. Rickard, R. Balan, and J. Rosca. Real-time time-frequency based blind source separation. In *3rd International Conference on Independent Component Analysis and Blind Source Separation (ICA2001)*, San Diego, CA, December 2001.

- 
- [134] Bertrand Rivet, Laurent Girin, and Christian Jutten. Mixing audiovisual speech processing and blind source separation for the extraction of speech signals from convolutive mixtures. *IEEE Transactions on Audio, Speech and Languages Processing*, 15(1) :96–108, jan 2007.
- [135] M Rudelson and R. Vershynin. Sparse reconstruction by convex relaxation : Fourier and Gaussian measurements. In *Proc. CISS 2006 (40th Annual Conference on Information Sciences and Systems)*. others, 2006.
- [136] R. Saab, Ö. Yilmaz, M.J. McKeown, and R. Abugharbieh. Underdetermined sparse blind source separation with delays. In *Proc. First Workshop on Signal Processing with Sparse/Structured Representations (SPARS'05)*, pages 67–70, Rennes, France, November 2005.
- [137] F. Santosa and W.W. Symes. Linear inversion of band-limited reflection sismograms. *SIAM J. Sci. Statistic. Comput.*, 7 :1307–1330, 1986.
- [138] A. Shrijver. *Theory of Linear and Integer Programming*. John Wiley, 1998.
- [139] J. L. Starck, E. J. Candès, and D. L. Donoho. The curvelet transform for image denoising. *IEEE Transactions on Image Processing*, 11(6) :670–684, jun 2002.
- [140] J.-L. Starck, M. Elad, and D.L. Donoho. Image decomposition : Separation of textures from piecewise smooth content. In M.A. Unser, A. Aldroubi, and A.F. Laine, editors, *Wavelet : Applications in Signal and Image Processing X, Proc, SPIE '03*, volume 5207, pages 571–582, San Diego, CA, August 2003. SPIE (The International Society for Optical Engineering).
- [141] J.-L. Starck, Y. Moudden, J. Bobin, M. Elad, and D.L. Donoho. Morphological component analysis. In *Proceedings of the SPIE conference wavelets*, volume 5914, July 2005.
- [142] S. B. Stechkin. On absolute convergence of orthogonal series. *Dok. Akad. Nauk SSSR*, 102 :37–40, 1955.
- [143] V.N. Temlyakov. Weak greedy algorithms. *Advances in Computational Mathematics*, 12(2,3) :213–227, 2000.
- [144] F. J. Theis and E. W. Lang. Formalization of the two-step approach to overcomplete BSS. In *Proc. SIP 2002*, pages 207–212, Kauai, Hawaii, USA, 2002.
- [145] F. J. Theis, C. Puntonet, and E. W. Lang. A histogram-based overcomplete ICA algorithm. In *Proc. 4th Int. Symp. on Independent Component Anal. and Blind Signal Separation (ICA2003)*, pages 1071–1076, Nara, Japan, April 2003.
- [146] F.J. Theis, A. Jung, C.G. Puntonet, and Lang E.W. Linear geometric ICA : Fundamentals and algorithms. *Neural Computation*, 15(2) :419–439, February 2003.
- [147] J. Tropp. Greed is good : Algorithmic results for sparse approximation. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 50(10) :2231–2242, October 2004.
- [148] J. Tropp. Just relax : Convex programming methods for subset selection and sparse approximation. Technical Report ICES Report 04-04, UT-Austin, February 2004.
- [149] J. Tropp. Just relax : Convex programming methods for identifying sparse signals in noise. *IEEE Trans. Information Theory*, 52(3) :1030–1051, March 2006.

- 
- [150] J.A. Tropp. Algorithms for simultaneous sparse approximation. part ii : Convex relaxation. *Signal Processing*, 86(3) :589–602, March 2006. special issue on Sparse Approximations in Signal and Image Processing.
- [151] J.A. Tropp, A.C. Gilbert, and M.J. Strauss. Algorithms for simultaneous sparse approximation. part i : Greedy pursuit. *Signal Processing*, 86(3) :572–588, March 2006. special issue on Sparse Approximations in Signal and Image Processing.
- [152] B.A. Turlach. On algorithms for solving least squares problems under an  $\ell^1$  penalty or an  $\ell^1$  constraint. In *2004 Proc. of the American Statistical Association*, volume Statistical Computing Section [CDROM], pages 2572–2577, Alexandria, VA, 2005. American Statistical Association.
- [153] M. Van Hulle. Clustering approach to square and non-square blind source separation. In *IEEE Workshop on Neural Networks for Signal Processing (NNSP99)*, pages 315–323, August 1999.
- [154] L. Vielva, D. Erdogmus, and J.C. Principe. Underdetermined blind source separation using a probabilistic source sparsity model. In *Proc. Int. Conf. on ICA and BSS (ICA2001)*, pages 675–679, San Diego, California, December 2001.
- [155] L. Villemoes. Nonlinear approximation with walsh atoms. In A. Le M’ehaut’e, C. Rabut, and L.L. Schumaker, editors, *Proceedings of “Surface Fitting and Multi-resolution Methods”, Chamonix 1996*, pages 329–336. Vanderbilt University Press, 1997.
- [156] E. Vincent and R. Gribonval. Construction d’estimateurs oracles pour la séparation de sources. In *Proc. 20ème colloque GRETSI sur le traitement du signal et des images*, Louvain-la-Neuve, Belgique, September 2005.
- [157] E. Vincent, R. Gribonval, and M. D. Plumbley. Oracle estimators for the benchmarking of source separation algorithms. *Signal Processing*, 87(8) :1933–1950, August 2007.
- [158] Emmanuel Vincent, Rémi Gribonval, and Cédric Févotte. Performance measurement in blind audio source separation. *IEEE Trans. Speech, Audio and Language Processing*, 14(4) :1462–1469, juillet 2006.
- [159] Rui Xu and Donald Wunsch II. Survey of clustering algorithms. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 16(3) :645–678, May 2005.
- [160] O. Yilmaz and S. Rickard. Blind separation of speech mixtures via time-frequency masking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 52(7) :1830–1847, July 2004.
- [161] M. Zibulevsky and B.A. Pearlmutter. Blind source separation by sparse decomposition in a signal dictionary. *Neural Computation*, 13(4) :863–882, 2001.