



HAL
open science

Dynamique de milieux réticulés non contreventés : application aux bâtiments.

Céline Chesnais

► **To cite this version:**

Céline Chesnais. Dynamique de milieux réticulés non contreventés : application aux bâtiments.. Autre. Ecole Centrale de Lyon, 2010. Français. NNT : 2010ECDL0013 . tel-00564489

HAL Id: tel-00564489

<https://theses.hal.science/tel-00564489>

Submitted on 9 Feb 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'École Centrale de Lyon

École doctorale : MEGA
(Mécanique, Énergétique, Génie civil, Acoustique)
Spécialité : génie civil

par

Céline CHESNAIS

DYNAMIQUE DE MILIEUX RÉTICULÉS NON CONTREVENTÉS APPLICATION AUX BÂTIMENTS

Soutenue à l'ENTPE le 29 juin 2010

Composition du jury

François SIDOROFF	École Centrale de Lyon	Président
Denis CAILLERIE	Institut National Polytechnique de Grenoble	Rapporteur
Patrice CARTRAUD	École Centrale de Nantes	Rapporteur
Pierre-Yves BARD	Laboratoire Central des Ponts et Chaussées	Examinateur
Samuel FOREST	École Nationale Supérieure des Mines de Paris	Examinateur
Claude BOUTIN	École Nationale des Travaux Publics de l'État	Directeur de thèse
Stéphane HANS	École Nationale des Travaux Publics de l'État	Directeur de thèse

Thèse préparée au Département Génie Civil et Bâtiment
de l'École Nationale des Travaux Publics de l'État

Remerciements

Je tiens à commencer ce mémoire en adressant mes remerciements les plus sincères à toutes les personnes qui ont permis la réussite de ce travail.

Je veux témoigner toute ma gratitude aux membres du jury pour avoir accepté de consacrer du temps à l'évaluation de cette thèse. Leurs remarques judicieuses ont apporté un éclairage nouveau et ont suscité d'autres réflexions.

Je souhaite également exprimer ma reconnaissance à mes directeurs de thèse, Claude Boutin et Stéphane Hans, pour m'avoir proposé un sujet aussi intéressant et pour leurs précieux conseils tout au long de ces quatre années. De plus, j'ai beaucoup apprécié leur disponibilité et leur gentillesse.

Je profite aussi de cette occasion pour remercier toute l'équipe du Département Génie Civil et Bâtiment pour son accueil et mes nouveaux collègues du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées pour m'avoir laissée achever la rédaction de ce mémoire dans d'excellentes conditions.

Enfin, un grand merci à tous ceux dont la relecture attentive a permis de corriger la plupart des fautes de frappe.

Résumé

Les comportements dynamiques d'une famille de structures réticulées, c'est-à-dire constituées d'un réseau de poutres, sont étudiés à l'aide de la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques discrets. Cette dernière permet de construire, de façon rigoureuse et en lien avec la microstructure, un milieu continu équivalent à l'échelle macroscopique lorsque la taille de la cellule de base est très petite par rapport à la longueur d'onde. Le domaine d'application de cette méthode est également étendu à des fréquences plus élevées pour lesquelles les éléments de la cellule peuvent entrer en résonance en flexion. Cela se traduit à l'échelle macroscopique par des propriétés apparentes qui dépendent de la fréquence et par des bandes de fréquences interdites associées aux modes de flexion des éléments.

Les structures considérées sont constituées par la répétition périodique de portiques non contreventés. Contrairement aux milieux massifs, ces structures présentent une déformabilité beaucoup plus grande en cisaillement qu'en traction-compression et leur cinématique locale est très riche. Ainsi, il est possible de générer une grande variété de comportements en jouant sur les ordres de grandeur des propriétés des éléments et celui de la fréquence. Cette approche permet de construire différents modèles de milieux continus (ou poutres) généralisé(e)s.

Ce travail apporte un cadre d'analyse pour l'étude de milieux tels que les mousses, les matières végétales, les os... mais aussi pour concevoir de nouveaux matériaux avec des propriétés atypiques. Ici, les modèles de poutres généralisées servent à comprendre le fonctionnement des bâtiments. Dans ce cas, la difficulté réside dans la prise en compte du cisaillement dans les murs voiles.

Mots-clés : dynamique, structure discrète, homogénéisation périodique, propagation d'ondes, résonance interne, masse apparente, modes atypiques, bâtiment, portique, mur voile

Abstract

The dynamic behaviours of a class of reticulated structures - that is to say made up of interconnected beams - are studied with the homogenization method of periodic discrete media. It enables to derive, rigorously and in relation with the microstructure, an equivalent continuous medium at the macroscopic scale when the cell size is much smaller than the wavelength. The scope of application of the method is also extended to higher frequencies for which cell elements can be in resonance for bending. Consequently, at the macroscopic scale, the effective properties can depend on the frequency and there are frequency band gaps associated with the bending modes of the elements.

Studied structures are made up of the periodic repetition of unbraced frames. Contrary to massive media, those structures have a shear deformability much higher than traction-compression deformability and their local kinematics is very rich. Thus, it is possible to generate a large diversity of behaviours by changing the orders of magnitude of the element properties and of the frequency. This approach enables to build several generalized continuous media (or beams).

This work brings a framework for the study of media such as foams, vegetable tissue, bones... but also for the design of new materials with atypical properties. Here, generalized beam models are used to understand the behaviour of buildings. In that case, the difficulty consists in taking into account the shear mechanism in the shear walls.

Keywords : dynamics, discrete structure, periodic homogenization, wave propagation, inner resonance, effective mass, atypical modes, building, frame, shear wall

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Intérêt de l'étude	3
1.2	Choix de la méthode	4
1.3	Présentation de la méthode HMPD	8
1.4	Présentation du mémoire	11
2	Propagation des ondes dans des milieux réticulés	13
2.1	Mise en œuvre de la méthode HMPD	15
2.1.1	Structures étudiées et notations	15
2.1.2	Discrétisation de l'équilibre dynamique	17
2.1.3	Séparation d'échelles	20
2.1.4	Normalisation	24
2.1.5	Exploitation des résultats	28
2.2	1 ^{er} cas : murs et planchers similaires	32
2.2.1	Milieu continu équivalent hors résonance interne	32
2.2.2	$\omega = O(\epsilon \omega_r)$: ondes de cisaillement	49
2.2.3	$\omega = O(\omega_r)$: ondes de compression	53
2.2.4	Résumé	79
2.3	2 ^e cas : murs plus épais que les planchers	81
2.3.1	Milieu continu équivalent hors résonance interne	82
2.3.2	$\omega = O(\epsilon^2 \omega_r)$: flexion locale des planchers	89
2.3.3	$\omega = O(\epsilon^{3/2} \omega_r)$: ondes de flexion dans les murs	93
2.3.4	$\omega = O(\epsilon^{1/2} \omega_r)$: compression des planchers	97
2.3.5	Résumé	104
2.4	Comment utiliser ces résultats lors de l'étude d'un milieu donné?	106
2.4.1	Définition du problème	106
2.4.2	Étude des ondes de cisaillement pur	113
2.4.3	Quelles ondes avec la résonance interne?	121
2.4.4	Calcul des fréquences admissibles	127
2.5	Conclusion et perspectives	137
3	Modes de vibrations de poutres réticulées	141
3.1	Mise en œuvre de la méthode HMPD	143
3.1.1	Structures étudiées et notations	143
3.1.2	Discrétisation de l'équilibre dynamique	145
3.1.3	Changement de variables	148
3.1.4	Séparation d'échelles	149

3.1.5	Normalisation	151
3.1.6	Résolution	152
3.2	Modes transversaux à basses fréquences	154
3.2.1	Un exemple : poutre de Timoshenko élancée	154
3.2.2	Études précédentes	157
3.2.3	Généralisation	171
3.3	Modes transversaux à plus hautes fréquences	195
3.3.1	Sans résonance interne	195
3.3.2	Résonance interne aux ordres supérieurs	217
3.3.3	Résonance interne à l'ordre 0	225
3.3.4	Résumé	236
3.4	Modes longitudinaux	238
3.4.1	Sans résonance interne	238
3.4.2	Résonance interne aux ordres supérieurs	239
3.4.3	Résonance interne à l'ordre 0	244
3.4.4	Résumé	252
3.5	Conclusion et perspectives	253
4	Modélisation des bâtiments	259
4.1	Introduction	261
4.1.1	Intérêt des modèles simplifiés	261
4.1.2	Travaux antérieurs	263
4.1.3	Transposition des modèles homogénéisés	264
4.2	Modélisation des murs voiles	267
4.2.1	Calcul des paramètres en présence de murs voiles	269
4.2.2	Modèles macroscopiques avec cisaillement des murs	279
4.3	Modélisation d'un bâtiment à murs voiles	292
4.4	Conclusion et perspectives	308
	Conclusion générale	311
A	Résolution du modèle générique	315
A.1	Statique	315
A.2	Dynamique	318
B	Étude des structures constituées de doubles portiques	323
B.1	Poutre de Timoshenko élancée	323
B.2	Double flexion et cisaillement	325
B.3	Liste des structures étudiées	327
C	Expression analytique de la rigidité K	329
D	Figures en couleur	333
	Bibliographie	343

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1	Intérêt de l'étude	3
1.2	Choix de la méthode	4
1.3	Présentation de la méthode HMPD	8
1.4	Présentation du mémoire	11

1.1 Intérêt de l'étude

L'objet de ce travail est la caractérisation du comportement dynamique d'une famille de structures réticulées périodiques. Celles-ci sont toutes formées par la répétition de la même cellule de base : un portique non contreventé. Les différents éléments qui constituent le portique sont des poutres encastées entre elles, pas forcément identiques. Deux cas ont été considérés (figure 1.1) :

- soit la cellule est répétée selon une seule direction, ce qui génère une poutre réticulée,
- soit la cellule est répétée selon deux directions, ce qui génère un matériau réticulé.

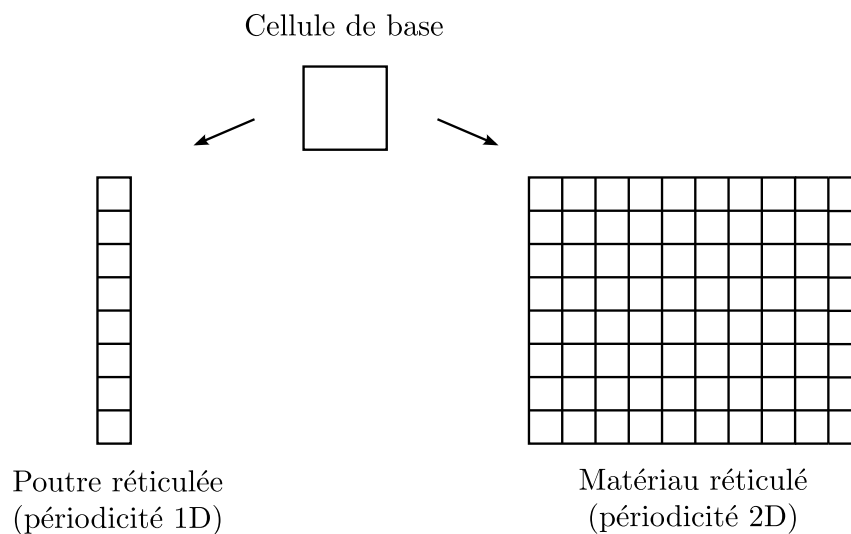


FIGURE 1.1 – Structures étudiées

Ce type de structures peut représenter des bâtiments idéalisés. Dans ce cas, la compréhension de leur comportement dynamique permet de prévoir leur réponse sous l'effet du vent et des séismes. C'est l'application qui sera envisagée à la fin de cette thèse. Mais, à plus petite échelle, ces structures peuvent également modéliser les voies ferrées (Kerr et Accorsi, 1985; Kerr et Zarembski, 1981), les plaques renforcées utilisées en aéronautique ou en construction navale (Buannic *et al.*, 2003), les mousses (Pradel, 1998), certains tissus vivants tels que les os ou le bois (Gibson, 2005), etc.

D'un point de vue mécanique, ces structures creuses présentent un certain nombre de spécificités qui rendent leur cinématique particulièrement riche. Tout d'abord, elles possèdent plus de degrés de liberté que les milieux pleins. Ensuite, les éléments résistants ne sont orientés que selon deux directions. Le matériau réticulé est donc anisotrope même lorsque toutes les poutres constituant les cellules sont identiques. D'autre part, les poutres sont beaucoup plus souples en flexion qu'en traction-compression. Comme la cellule n'est pas contreventée, les structures se déforment très facilement en cisaillement. Enfin, en jouant sur les contrastes entre les propriétés mécaniques des différents éléments, nous verrons qu'il est possible de générer une grande variété de comportements.

1.2 Choix de la méthode

Après une présentation des méthodes habituellement utilisées pour étudier la dynamique des structures réticulées, nous décrivons dans ce paragraphe la démarche que nous avons adoptée pour ce travail.

La technique la plus directe pour déterminer le comportement d'une structure consiste à réaliser des simulations numériques grâce à la méthode des éléments finis. Lorsque le nombre de cellules n'est pas trop important, celle-ci donne des résultats précis et permet d'obtenir des informations de détail telles que les efforts dans les différentes poutres. Néanmoins, c'est une méthode très générale qui ne tient pas compte de la périodicité de la structure. Comme cette dernière est fortement hétérogène, les cellules doivent être discrétisées finement et les temps de calcul peuvent devenir très longs, notamment en dynamique. Cet inconvénient est d'autant plus pénalisant dans les phases de dimensionnement où de nombreuses études de sensibilité doivent être réalisées. Malgré tout, elle est souvent utilisée comme référence pour évaluer la précision des autres méthodes.

Pour les problèmes de propagation d'ondes, des techniques spécifiques ont été mises au point (voir la revue bibliographique de Mead (1996)). Dans ce cas, la périodicité peut être prise en compte grâce au théorème de Bloch. Ces méthodes ont d'abord été développées en physique du solide pour étudier les électrons dans les cristaux puis ont été généralisées à tous les types d'ondes (Brillouin et Parodi, 1956). Un exposé de ces principes dans le contexte des matériaux réticulés peut être trouvé dans (Srikantha Phani *et al.*, 2006). Le théorème de Bloch indique que la variation de l'amplitude complexe lorsque l'onde passe d'un côté à l'autre de la cellule de base ne dépend pas de la position de la cellule dans la structure. Ainsi, la modélisation d'une seule cellule suffit pour comprendre la propagation des ondes dans l'ensemble de la structure. Pour les structures unidimensionnelles, les efforts et les déplacements de part et d'autre de la cellule sont reliés par une matrice transfert (Yong et Lin, 1989; Langley, 1996). Dans le cas des structures bidimensionnelles, c'est un modèle éléments finis de la cellule qui est utilisé (Langley *et al.*, 1997; Srikantha Phani *et al.*, 2006). Notons qu'une méthode similaire a également été utilisée pour étudier des problèmes de vibrations libres (Anderson, 1982) et de flambement (Anderson, 1981).

Les structures périodiques sont connues pour l'existence de bandes de fréquences interdites dans lesquelles les ondes ne sont pas transmises (Brillouin et Parodi, 1956; Mead, 1996). Ce phénomène est dû à la diffraction lorsque la longueur d'onde devient du même ordre de grandeur que la taille de la cellule. Les autres gammes de fréquences constituent les bandes passantes. Mais là encore, la propagation des ondes est limitée à des directions privilégiées qui dépendent de la fréquence (Langley *et al.*, 1997; Ruzzene *et al.*, 2003; Srikantha Phani *et al.*, 2006). Ainsi, ces structures peuvent être considérées comme des filtres fréquentiels et spatiaux. Ce domaine de la recherche est très actif et une liste de références peut être trouvée sur le site Internet :

<http://www.phys.uoa.gr/phononics/PhononicDatabase.html>

La majorité des publications vise à mettre en évidence l'existence des bandes interdites (par exemple (Martinsson et Movchan, 2003)). Les études sur les mécanismes de propagation des ondes dans les bandes passantes sont beaucoup plus rares (Srikantha Phani *et al.*, 2006).

Une autre approche consiste à remplacer la structure réticulée par un milieu continu équivalent. Cela est possible à basses fréquences, lorsque la longueur d'onde est bien plus grande que la cellule de base (Auriault, 1991). Une fois que le milieu continu équivalent est construit, le comportement global de la structure (par exemple les fréquences propres et les déformées modales) peut être obtenu avec relativement peu de calculs. Par contre, selon la méthode utilisée, le comportement local, c'est-à-dire celui des différentes poutres, peut être perdu. Des revues bibliographiques sur le sujet ont été réalisées par Noor (1988), Abrate (1985, 1988), Verna (1991), Tollenaere (1994). Différentes techniques existent pour obtenir le milieu continu équivalent et nous les avons regroupées en trois catégories.

Dans le premier cas, le milieu continu est supposé *a priori*. Les paramètres du modèle peuvent alors être déterminés à l'aide des matrices transfert ((Lee, 1998) ou (Stephen, 1999) avec la méthode présentée dans (Stephen et Wang, 1996)) ou à l'aide de tests numériques sur la cellule de base (Sun et Juang, 1986; Sun et Liebbe, 1990; Anthoine, 1995; Buannic *et al.*, 2003). Mais l'école la plus répandue consiste à utiliser une équivalence énergétique (par exemple, (Bažant et Christensen, 1972; Noor et Nemeth, 1980; Noor, 1988; McCallen et Romstad, 1988, 1990; Pradel et Sab, 1998; Burgardt et Cartraud, 1999; Kumar et McDowell, 2004) pour les structures réticulées et (Forest et Sab, 1998; Michel *et al.*, 1999; Laudarin, 2007) pour les milieux continus). Le milieu choisi peut être un milieu classique, c'est-à-dire un milieu de Cauchy ou, pour les structures unidimensionnelles, une poutre de Timoshenko avec éventuellement des couplages entre traction-compression, flexion et cisaillement (Sun et Juang, 1986; Sun et Liebbe, 1990; Lee, 1998; Anthoine, 1995; Michel *et al.*, 1999; Stephen, 1999; Burgardt et Cartraud, 1999; Laudarin, 2007). Les structures réticulées avec des nœuds rigides sont souvent modélisées par un milieu de Cosserat (Bažant et Christensen, 1972; Noor et Nemeth, 1980; Pradel et Sab, 1998; Kumar et McDowell, 2004). Dans ce cas, la particule élémentaire dispose de degrés de liberté de rotation indépendants, en plus des habituels degrés de liberté de translation (Cosserat et Cosserat, 1909; Eringen, 1966). Il s'agit d'un cas particulier des milieux micromorphes dans lesquels la particule peut également subir des déformations (Eringen et Suhubi, 1964; Suhubi et Eringen, 1964; Mindlin, 1964). Une revue détaillée sur les applications des milieux généralisés a été réalisée par Forest (2006). En plus du choix du milieu continu équivalent, la détermination de la cinématique et des conditions aux limites à imposer à la cellule de base pour trouver les paramètres du modèle est une question délicate. Les méthodes d'homogénéisation décrites plus loin peuvent aider à y répondre (comme dans (Anthoine, 1995; Michel *et al.*, 1999; Burgardt et Cartraud, 1999; Buannic *et al.*, 2003; Laudarin, 2007)).

Une autre façon de procéder, qui a surtout été développée par Renton, consiste à partir des équations d'équilibre des nœuds d'une cellule de base. Ces équations dépendent non seulement des déplacements des nœuds de la cellule étudiée mais

également de ceux des nœuds des cellules adjacentes. Le comportement de la structure est donc décrit par des équations aux différences finies. Ces dernières peuvent être résolues directement (Renton, 1984) ou transformées en équations différentielles grâce à des développements en séries de Taylor (Renton, 1970; Kerr et Zarembski, 1981). La méthode employée dans (Martinsson et Babuška, 2007) est très similaire. La différence est que les équations d'équilibre sont écrites dans l'espace de Fourier avant d'être développées. Le premier ordre des développements donne les équations d'équilibre du milieu continu équivalent. Notons que celles-ci sont obtenues sans faire d'hypothèses *a priori*. Par contre, les ordres supérieurs des développements ne sont pas exploitables. En effet, avec ces méthodes, les développements portent uniquement sur les opérateurs (c'est-à-dire les équations d'équilibre) et pas sur les solutions. Dans ces conditions, les différents ordres de grandeur ne sont pas correctement pris en compte.

Les méthodes dans lesquelles les développements concernent à la fois les opérateurs et les solutions sont appelées méthodes d'homogénéisation et constituent la troisième catégorie. Ces méthodes sont basées sur la coexistence de deux échelles de grandeur spatiale : l'échelle « micro » qui est définie par une taille ℓ_c caractéristique de la cellule et l'échelle « macro » qui correspond à la taille L caractéristique du phénomène étudié. Pour un problème de dynamique, L est liée à la longueur d'onde. Lorsque le comportement de la structure est homogénéisable, le ratio d'échelles $\epsilon = \ell_c/L$ est un petit paramètre ($\epsilon \ll 1$). Comme dans le cas précédent, les relations d'équilibre entre les cellules sont développées mais cette fois-ci, en faisant apparaître ϵ . De plus, ce dernier est utilisé pour écrire les inconnues sous la forme d'un développement asymptotique (Bensoussan *et al.*, 1978; Sanchez-Palencia, 1980). Ainsi, les différents ordres de grandeur sont bien pris en compte et il est possible d'étudier les termes correctifs d'ordres supérieurs. Par exemple, cette méthode a permis de justifier et de généraliser les modèles de poutre d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko dans le cas des poutres homogènes (Trabucho et Viano, 1987) et celui des poutres périodiques (Kolpakov, 1991; Buannic et Cartraud, 2001a,b).

Bakhvalov et Panasenko (1984, 1989) sont parmi les premiers à avoir homogénéisé des structures réticulées. Ces structures ont également été étudiées par Cioranescu et Saint Jean Paulin (1999) qui les ont considérées comme des milieux perforés. Dans ce cas, le comportement des éléments est décrit à l'aide de la mécanique des milieux continus et un deuxième petit paramètre intervient : l'épaisseur des barres δ . La convergence des solutions lorsque ϵ et δ tendent vers 0 a été prouvée. Par contre, la méthode étant difficile à mettre en œuvre, les auteurs n'ont pu étudier que les équations à l'ordre dominant. Pour les structures qui nous intéressent (figure 1.1), la rigidité en cisaillement est très faible et elle apparaît dans les équations d'ordre supérieur. Dans ce cas, la méthode fournit une information incomplète (Cioranescu et Saint Jean Paulin, 1999; Chiheb *et al.*, 1998).

Pour contourner cette difficulté, le comportement des éléments peut être modélisé à l'aide de la théorie des poutres de la résistance des matériaux. C'est le cas avec la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques discrets (appelée méthode HMPD par la suite). Celle-ci a été mise au point par Caillerie et Verna en statique (Caillerie *et al.*, 1989; Verna, 1991; Tollenaere et Caillerie, 1998), Tol-

lenaere (1994) en dynamique et Moreau pour les grands déplacements (Moreau, 1996; Moreau et Caillerie, 1998). Les avantages suivants rendent cette méthode particulièrement intéressante :

- C’est une méthode rigoureuse qui permet de déduire le comportement global de la structure à partir des caractéristiques géométriques et mécaniques de la cellule de base. Aucune hypothèse *a priori* n’est nécessaire si ce n’est la condition de séparation d’échelles (ϵ petit) pour pouvoir remplacer la structure par un milieu continu équivalent.
- La méthode est entièrement analytique, ce qui permet une compréhension fine des mécanismes et du rôle des différents paramètres.
- Les équations d’équilibre aux différents ordres sont obtenues relativement facilement.
- Une fois que le comportement global de la structure est connu, il est toujours possible de revenir à l’échelle locale pour connaître les efforts dans les éléments.

Ainsi, cette méthode permet d’étudier en détail le comportement d’une classe de structures ayant la même géométrie. Par contre, lorsque la géométrie varie, elle s’adapte moins facilement que les méthodes qui supposent le milieu continu équivalent *a priori*. En effet, elle nécessite beaucoup de calculs formels qui doivent être recommencés pour chaque type de structure.

Notons que Pradel (1998) a déjà appliqué une méthode d’homogénéisation similaire sur le matériau réticulé de la figure 1.1. Il a montré que selon l’ordre de grandeur de la rigidité en flexion des éléments qui relient les nœuds, le milieu continu équivalent peut être un milieu de Cauchy ou un milieu de Cosserat. De plus, lorsque les éléments sont des poutres d’Euler-Bernoulli, cette rigidité n’est pas suffisante pour obtenir un milieu généralisé. Mais son étude concerne des structures dont tous les éléments sont identiques et elle est limitée à la statique.

Dans cette thèse, nous avons choisi de construire le milieu continu équivalent aux structures réticulées. De plus, nous avons voulu tirer parti des avantages de la méthode HMPD et des méthodes de la première catégorie où le milieu est supposé *a priori*. Pour les différents types de vibrations étudiés, nous suivons toujours la même démarche :

1. Nous commençons par réaliser une étude rigoureuse avec la méthode HMPD sur les structures de la figure 1.1. Nous supposons que tous les éléments sont réalisés dans le même matériau (ce qui est souvent le cas dans la réalité) et nous faisons varier leurs propriétés mécaniques en jouant sur leurs épaisseurs. Cela permet de générer différents comportements. L’objectif de cette première phase est de traiter un nombre suffisant de cas afin d’observer tous les mécanismes possibles.
2. À cause des contraintes géométriques, il arrive que les différents mécanismes ne puissent pas apparaître simultanément. C’est pourquoi, nous construisons ensuite un modèle plus général qui englobe tous les phénomènes et qui peut dégénérer en chacun des modèles obtenus pendant la première phase. Grâce à ce modèle général, une analyse dimensionnelle peut être réalisée sur les paramètres macroscopiques de la structure. Cela permet de construire

des critères pour identifier directement le comportement d'une structure sans repasser par l'homogénéisation.

3. Enfin, nous faisons l'hypothèse que ces modèles s'appliquent à des structures plus complexes (par exemple des bâtiments). Ainsi, la caractérisation de leur comportement dynamique revient à calculer les paramètres macroscopiques. La technique retenue est celle des tests numériques sur une cellule (un étage pour un bâtiment). La méthode proposée est validée d'une part, sur les structures étudiées lors de la première phase pour lesquelles nous disposons d'une solution analytique et d'autre part, par des simulations par éléments finis.

Cette thèse est la suite des travaux que Hans et Boutin ont menés sur la poutre réticulée de la figure 1.1. Leur étude correspond aux étapes 1 et 2 de la démarche précédente (Hans, 2002; Boutin et Hans, 2003; Hans et Boutin, 2008). À partir de cette base, le travail a été poursuivi dans trois directions. Tout d'abord, la méthode HMPD a été mise en œuvre sur des structures plus complexes afin de vérifier que tous les mécanismes avaient bien été identifiés. Les structures que nous avons considérées sont d'une part, le matériau réticulé de la figure 1.1 et d'autre part, des poutres réticulées constituées par l'empilement de doubles portiques. Ensuite, nous avons étendu le domaine d'application de la méthode HMPD à des fréquences plus élevées pour lesquelles les éléments de la structure peuvent entrer en résonance. Pour que le comportement de la structure soit encore homogénéisable, il faut que la longueur d'onde soit bien plus grande que la taille de la cellule. Même s'il existe des similitudes, c'est donc un phénomène différent de la diffraction. Enfin, nous avons réfléchi à la transposition de ces résultats aux bâtiments, ce qui correspond à l'étape 3 de la méthode.

1.3 Présentation de la méthode HMPD

Nous venons de voir que la méthode HMPD constitue l'outil de base de ce travail. Ce paragraphe résume les principales étapes de sa mise en œuvre : la discrétisation de l'équilibre dynamique de la structure puis le processus d'homogénéisation proprement dit. Une présentation plus détaillée se trouve au début du chapitre 2.

Pour la première phase, la structure est considérée comme un réseau périodique de poutres dont le comportement obéit aux lois de la résistance des matériaux. Les nœuds sont repérés par des indices entiers n . Les connexions entre les éléments étant supposées parfaitement rigides, les mouvements de toutes les extrémités des poutres reliées à un même nœud sont identiques et définissent les variables cinématiques discrètes U_n . Le comportement des éléments en régime harmonique est intégré sur leur longueur en prenant comme conditions aux limites les mouvements inconnus des nœuds. Nous obtenons ainsi les expressions des efforts aux extrémités des éléments en fonction des variables cinématiques discrètes. Maintenant que l'équilibre de chaque poutre est pris en compte, il ne reste plus qu'à écrire l'équilibre des forces appliquées sur les nœuds. Cette façon de discrétiser le problème n'entraîne aucune perte d'information. En effet, une

fois que les mouvements des nœuds sont connus, la théorie des poutres de la résistance des matériaux permet de retrouver le comportement des éléments.

La deuxième phase est basée sur la séparation d'échelles. Cela signifie que la taille caractéristique L des déformations de la structure pendant les vibrations est très grande par rapport à la taille caractéristique de la cellule ℓ_c . La longueur L est inconnue pour l'instant mais le ratio d'échelles $\epsilon = \ell_c/L$ est supposé très petit. Lorsque cette hypothèse est vérifiée, les déplacements varient peu d'un nœud à l'autre et les variables cinématiques discrètes peuvent être considérées comme les valeurs particulières prises au niveau des nœuds par des fonctions continues inconnues :

$$U(\epsilon, \vec{x} = \vec{x}_n) = U_n$$

Contrairement aux méthodes d'homogénéisation des milieux continus, il n'y a ici qu'un seul type de variable spatiale : la variable macroscopique \vec{x} .

Les fonctions inconnues sont supposées indéfiniment dérivables et convergentes lorsque ϵ tend vers 0. Elles sont recherchées sous la forme de développements asymptotiques en fonction des puissances de ϵ :

$$U(\epsilon, \vec{x}) = U^0(\vec{x}) + \epsilon U^1(\vec{x}) + \epsilon^2 U^2(\vec{x}) + \dots$$

où U^j désigne la fonction relative à l'ordre j . Notons que toutes les autres inconnues doivent également être écrites sous la forme d'un développement asymptotique. Pour un problème de recherche de modes propres, cela s'applique à la fréquence et pour un problème de propagation d'onde, c'est le nombre d'onde qui doit être développé.

La distance qui sépare deux nœuds voisins est très petite par rapport à la taille macroscopique L . Il est donc possible d'utiliser des développements en séries de Taylor pour exprimer le mouvement des nœuds adjacents à celui qui est étudié. C'est à ce moment qu'apparaissent les dérivées macroscopiques.

Si la fréquence des vibrations de l'ensemble de la structure est très inférieure aux fréquences propres des éléments, ces derniers ont un comportement quasi-statique à l'échelle locale. Il est alors possible de faire un développement limité de tous les efforts nodaux en fonction des puissances de ϵ . Il peut également arriver que la gamme de fréquences d'un type de vibrations de l'ensemble de la structure coïncide avec certaines fréquences propres de certains éléments. Un des apports de cette thèse est d'avoir étendu le domaine d'application de la méthode HMPD à ces situations avec résonance interne. Dans ce cas, les développements limités ne concernent plus que quelques efforts. Pour les autres, il faut garder les expressions complètes.

Ensuite, les ordres de grandeur de tous les paramètres physiques du problème sont estimés en fonction des puissances de ϵ . Cette étape de normalisation est essentielle pour la prise en compte de la physique locale. En effet, le processus d'homogénéisation est basé sur la séparation des ordres de grandeur et le modèle continu équivalent est obtenu en faisant tendre ϵ vers 0. Il faut donc que les différents termes conservent la même importance relative quelle que soit la valeur de ϵ . Les paramètres physiques à estimer sont les contrastes de rigidité entre les éléments et la fréquence des vibrations. Pour faire varier les contrastes

et ainsi générer plusieurs comportements, nous jouons sur les ordres de grandeur des épaisseurs. Celles-ci sont estimées en fonction de puissances entières ou rationnelles de ϵ afin de traiter toutes les possibilités. En conséquence, les développements asymptotiques des inconnues doivent être réalisés selon les puissances entières ou rationnelles de ϵ selon les cas. L'ordre de grandeur de la fréquence est fixé de telle sorte que les forces d'inertie équilibrent les forces de rappel élastique. Néanmoins, il y a plusieurs possibilités et le choix dépend du mécanisme étudié.

Pour finir, tous les développements et les estimations sont introduits dans les équations d'équilibre des nœuds et les termes sont réorganisés en fonction des puissances de ϵ . Le système d'équations différentielles est supposé converger lorsque ϵ tend vers 0. Il est donc possible de séparer les différents ordres de grandeur. La résolution s'effectue ensuite par ordre croissant. L'ordre 0 donne le milieu continu équivalent et les ordres supérieurs sont des termes correcteurs.

La mise en œuvre de la méthode HMPD est résumée sur la figure 1.2. Tous les calculs de cette thèse ont été réalisés avec le logiciel de calcul formel Mathematica.

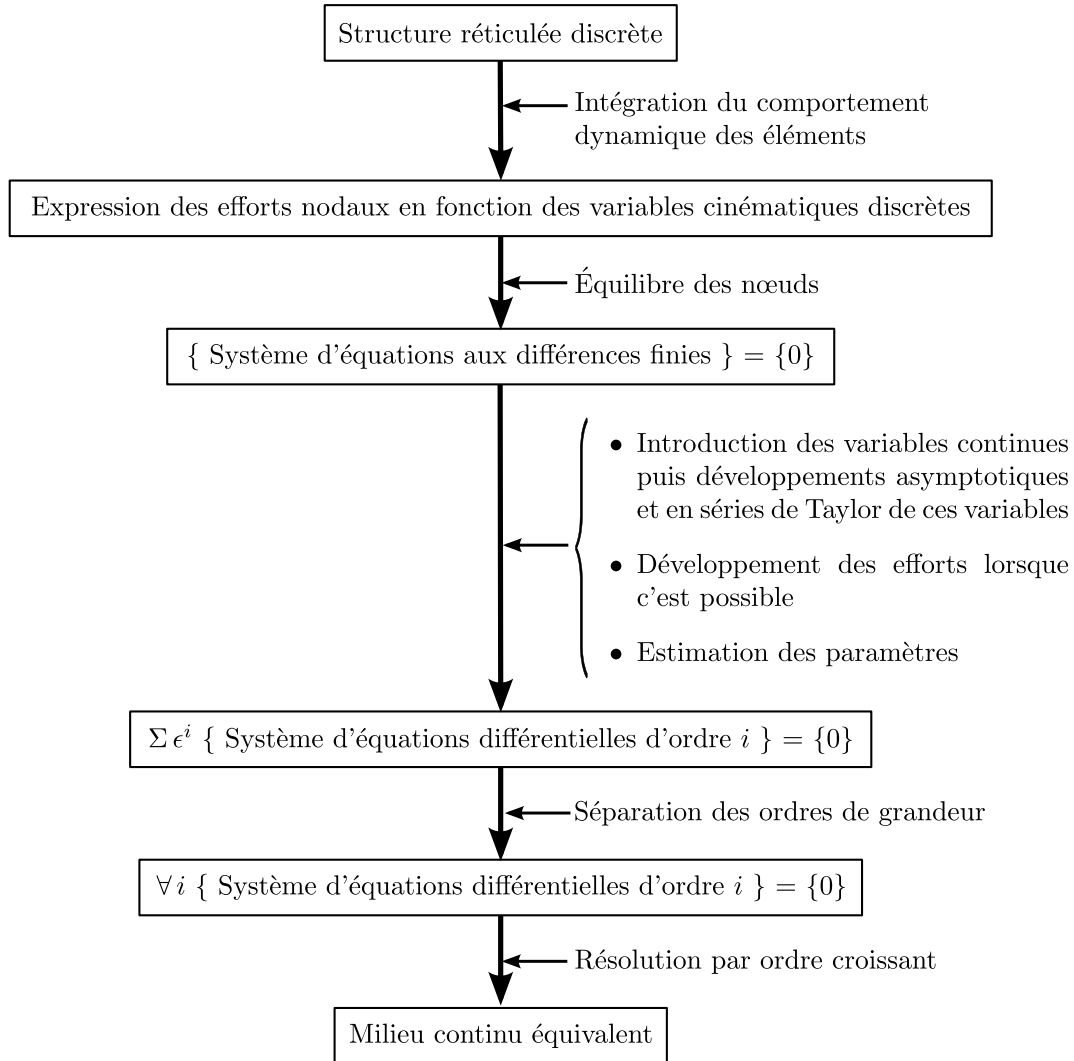


FIGURE 1.2 – Mise en œuvre de la méthode HMPD

1.4 Présentation du mémoire

Ce mémoire est divisé en trois parties.

Le chapitre 2 est consacré à l'étude de la propagation des ondes dans le milieu réticulé de la figure 1.1. Il démarre par une description détaillée de la mise en œuvre de la méthode HMPD dans ce cas. La méthode est ensuite appliquée sur deux types de structures : pour la première, tous les éléments sont similaires alors que pour la seconde, certains éléments sont plus épais. À chaque fois, les propriétés du milieu continu équivalent sont analysées. Selon les cas, il s'agit d'un milieu de Cauchy ou d'un milieu généralisé. Puis les différents mécanismes de propagation des ondes sont présentés. En particulier, nous nous intéressons aux effets de l'anisotropie et de la résonance interne. Finalement, la question de l'exploitation de ces résultats est discutée : pour une structure réelle donnée, comment choisir le milieu continu équivalent et dans quelles gammes de fréquences se propagent les différents types d'ondes ?

Le chapitre 3 décrit les modes de vibrations des poutres réticulées constituées par l'empilement de portiques. La mise en œuvre de la méthode HMPD est présentée rapidement en insistant surtout sur les spécificités des structures poutres. Puis les travaux de Hans et Boutin sur les modes transverses des structures constituées de portiques simples sont résumés. La méthode HMPD est ensuite appliquée sur des structures constituées de doubles portiques. Même si la cellule de base est plus complexe, nous retrouvons les mêmes modèles. Les résultats sont alors généralisés à des structures portiques quelconques et une méthode est proposée pour le calcul des paramètres macroscopiques. Enfin, nous revenons aux structures constituées de portiques simples et nous étudions les modes de vibration à plus hautes fréquences pour lesquels il peut y avoir résonance interne.

Le chapitre 4 traite des problèmes posés par la modélisation des bâtiments. Dans les deux chapitres précédents, les nœuds sont considérés comme ponctuels et les éléments sont modélisés par des poutres d'Euler-Bernoulli. Clairement, ces deux hypothèses ne s'appliquent pas aux murs voiles. Des simulations numériques montrent que la méthode proposée pour le calcul des paramètres macroscopiques reste valable lorsque les nœuds ne sont pas ponctuels. Pour évaluer le rôle du cisaillement local dans les murs voiles, nous appliquons de nouveau la méthode HMPD à une structure poutre constituée de portiques simples mais cette fois-ci, les éléments sont des poutres de Timoshenko épaisses. Finalement, nous utilisons les modèles issus de l'homogénéisation pour calculer les fréquences propres d'un bâtiment réel. Les résultats sont comparés avec des mesures expérimentales et un calcul par éléments finis.

Le mémoire se termine par un chapitre de conclusion et des perspectives.

Remarque : Pour faciliter l'impression, toutes les figures en couleur ont été reproduites dans l'annexe D.

Chapitre 2

Propagation des ondes dans des milieux réticulés

Sommaire

2.1	Mise en œuvre de la méthode HMPD	15
2.1.1	Structures étudiées et notations	15
2.1.2	Discrétisation de l'équilibre dynamique	17
2.1.3	Séparation d'échelles	20
2.1.4	Normalisation	24
2.1.5	Exploitation des résultats	28
2.2	1^{er} cas : murs et planchers similaires	32
2.2.1	Milieu continu équivalent hors résonance interne	32
2.2.2	$\omega = O(\epsilon\omega_r)$: ondes de cisaillement	49
2.2.3	$\omega = O(\omega_r)$: ondes de compression	53
2.2.4	Résumé	79
2.3	2^e cas : murs plus épais que les planchers	81
2.3.1	Milieu continu équivalent hors résonance interne	82
2.3.2	$\omega = O(\epsilon^2\omega_r)$: flexion locale des planchers	89
2.3.3	$\omega = O(\epsilon^{3/2}\omega_r)$: ondes de flexion dans les murs	93
2.3.4	$\omega = O(\epsilon^{1/2}\omega_r)$: compression des planchers	97
2.3.5	Résumé	104
2.4	Comment utiliser ces résultats lors de l'étude d'un milieu donné ?	106
2.4.1	Définition du problème	106
2.4.2	Étude des ondes de cisaillement pur	113
2.4.3	Quelles ondes avec la résonance interne ?	121
2.4.4	Calcul des fréquences admissibles	127
2.5	Conclusion et perspectives	137

2.1 Mise en œuvre de la méthode HMPD

Les grands principes de la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques discrets (HMPD) ont été présentés en introduction et ils sont résumés sur la figure 1.2 page 10. Dans cette partie, nous exposons en détail sa mise en œuvre dans le cas de structures réticulées *bidimensionnelles*.

2.1.1 Structures étudiées et notations

Les structures étudiées sont périodiques dans le plan d'étude et sont constituées d'une infinité d'éléments horizontaux soutenus par une infinité d'éléments verticaux. Par la suite, les éléments horizontaux seront appelés « planchers » et les éléments verticaux « murs ». Les éléments sont des poutres ou des plaques, c'est-à-dire que leur épaisseur dans le plan d'étude est faible devant leur longueur. Les murs peuvent être différents des planchers. Pour cette étude, les cellules sont supposées « à peu près carrées ». Nous préciserons plus tard ce que nous entendons par là. L'influence d'un éventuel élancement sera discuté à la fin dans la partie 2.4. Les nœuds sont encastres. Deux exemples de structures possibles sont représentés sur la figure 2.1.

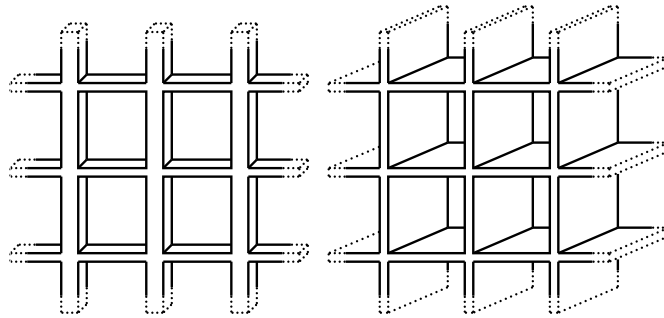


FIGURE 2.1 – Exemples de structures

Ces treillis présentent deux particularités importantes qui rendent leur cinématique plus riche que celle des milieux continus usuels. Premièrement, ce sont des milieux anisotropes même lorsque les murs et les planchers sont identiques. Deuxièmement, ils se déforment plus facilement en cisaillement qu'en traction. En effet, il s'agit de milieux creux dans lesquels les éléments résistants ne sont orientés que selon deux directions. De plus, ces éléments sont plus souples en flexion qu'en traction-compression.

Afin de faire apparaître différents types de comportement, deux cas seront étudiés : une structure où tous les éléments ont la même épaisseur et une structure où les murs sont plus épais que les planchers.

Les notations sont présentées sur la figure 2.2. Nous définissons tout d'abord un repère global dont l'axe des abscisses (x) correspond à l'axe horizontal et l'axe des ordonnées (y) à l'axe vertical. En plus de ce système de coordonnées continues, nous utiliserons des coordonnées discrètes pour repérer la position des nœuds. Ainsi, le nœud correspondant à l'intersection du m -ième mur et du p -ième plancher peut être désigné soit par ses coordonnées discrètes, le couple

d'entiers (m, p) , soit par ses coordonnées continues, le couple de réels (x, y) où $x = m \ell_p$ et $y = p \ell_m$. ℓ_m et ℓ_p sont respectivement la longueur des murs et celle des planchers.

Les connexions entre les éléments sont supposées parfaitement rigides. Ainsi, les mouvements des extrémités des éléments connectés à un même nœud sont identiques et définissent les variables cinématiques. Seuls les mouvements dans le plan (x, y) sont étudiés. Il y a donc trois variables par nœud :

$$\begin{aligned} U_x^{(m,p)} & : \text{déplacement horizontal du nœud } (m,p) \\ U_y^{(m,p)} & : \text{déplacement vertical du nœud } (m,p) \\ \theta^{(m,p)} & : \text{rotation du nœud } (m,p) \end{aligned}$$

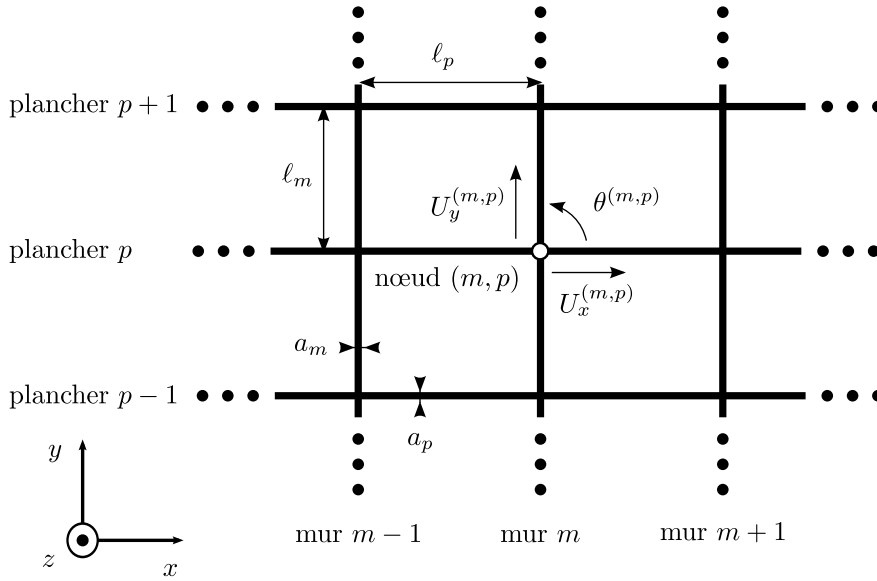


FIGURE 2.2 – Notations (structure)

Les caractéristiques des éléments sont résumées ci-dessous. Les symboles seront indexés par « m » pour les murs et par « p » pour les planchers.

$$\begin{array}{ll} a : \text{épaisseur} & I = a^3 h / 12 : \text{inertie par rapport à l'axe } z \\ \ell : \text{longueur} & \rho : \text{masse volumique} \\ h : \text{profondeur (selon } z) & \bar{\rho} = \rho A : \text{masse linéique} \\ A = ah : \text{section} & E : \text{module d'élasticité} \end{array}$$

Pour cette étude, nous supposons que la structure reste dans le domaine des petites déformations et que le matériau a un comportement élastique linéaire. Nous considérons également que l'épaisseur des éléments a est suffisamment faible ($a \ll \ell$) pour que leur comportement dans le plan (x, y) soit correctement modélisé par des poutres d'Euler-Bernoulli. Si de plus, leur profondeur h selon l'axe z est petite par rapport à leur longueur ℓ ($h \ll \ell$) alors les éléments sont réellement des poutres et le module d'élasticité E est égal au module d'Young du matériau E_{young} . À l'opposé, pour une profondeur grande par rapport à la longueur ($h \gg \ell$), l'élément doit être modélisé par une plaque. Dans ce cas, E désigne un module corrigé correspondant à un état de déformation plane ($\epsilon_{zz} = 0$). Son

expression est alors $E = E_{young}/(1 - \nu^2)$ où ν est le coefficient de Poisson du matériau.

Comme nous nous intéressons au comportement de la structure à une fréquence f fixée, toutes les variables peuvent se mettre sous la forme :

$X(x, y, t) = \text{Re}(X(x, y)e^{i\omega t})$ où $\omega = 2\pi f$ désigne la pulsation et t le temps. Le problème étant linéaire, nous raisonnerons directement sur $X(x, y)$ et omettrons le terme $e^{i\omega t}$. Remarquons que, lorsqu'une onde se propage, les différents points de la structure ne vibrent pas en phase donc $X(x, y)$ est un nombre complexe.

2.1.2 Discrétisation de l'équilibre dynamique

L'objectif de cette première phase est de condenser aux nœuds les équations d'équilibre dynamique du système. Cela nécessite tout d'abord **d'intégrer le comportement dynamique des éléments** sur leur longueur afin d'exprimer les efforts en fonction des déplacements nodaux.

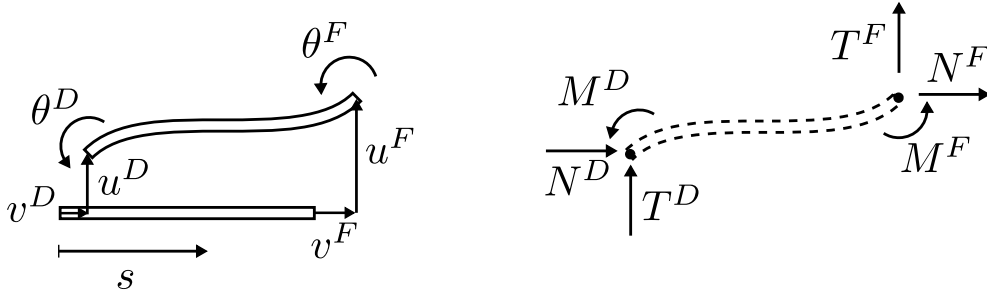


FIGURE 2.3 – Notations (élément)

Pour cela, nous considérons un élément de longueur totale ℓ . Nous nous plaçons dans le repère local de cet élément (figure 2.3) et s représente l'abscisse curviligne. Les extrémités sont notées D pour l'origine ($s = 0$) et F pour la fin ($s = \ell$). $u(s)$, $v(s)$ et $\theta(s)$ correspondent respectivement aux déplacements transversal, longitudinal et à la rotation de la section. L'effort normal, l'effort tranchant et le moment fléchissant sont notés N , T et M . Par convention, ces efforts sont exercés par la partie gauche de l'élément sur la partie droite. Il n'y a pas de charges extérieures en partie courante. Le comportement de la poutre d'Euler-Bernoulli, en régime harmonique, est décrit par les équations suivantes :

Vibrations longitudinales :

$$\text{Équation d'équilibre : } \frac{dN}{ds}(s) = \rho A \omega^2 v(s)$$

$$\text{Loi de comportement : } N(s) = -EA \frac{dv}{ds}(s)$$

$$\Rightarrow \text{Équation d'onde : } \frac{d^2v}{ds^2}(s) = -\chi^2 v(s) \text{ où } \chi = \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{E}} = \frac{2\pi}{\lambda_c}$$

Vibrations transversales :

$$\begin{aligned} \text{Équations d'équilibre : } & \begin{cases} \frac{dT}{ds}(s) = \rho A \omega^2 u(s) \\ \frac{dM}{ds} = -T(s) \end{cases} \\ \text{Loi de comportement : } & M(s) = -EI \frac{d^2 u}{ds^2}(s) \\ \Rightarrow \text{Équation d'onde : } & \frac{d^4 u}{ds^4} = \beta^4 u(s) \text{ où } \beta = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{EI}} = \frac{2\pi}{\lambda_f} \end{aligned}$$

λ_c désigne la longueur de l'onde de compression et λ_f la longueur de l'onde de flexion dans l'élément considéré pour la pulsation ω . Les deux longueurs d'onde sont reliées par l'équation suivante.

$$\lambda_f^2 = \lambda_c 2\pi \sqrt{\frac{I}{A}} = \lambda_c 2\pi \frac{a}{\sqrt{12}}$$

Or, la description des vibrations par un modèle de poutre d'Euler-Bernoulli n'est valable que si les longueurs d'onde sont significativement plus grandes que les épaisseurs donc $\lambda_f \gg a$. Ainsi, pour une fréquence donnée, la longueur de l'onde de flexion est beaucoup plus courte que celle de l'onde de compression.

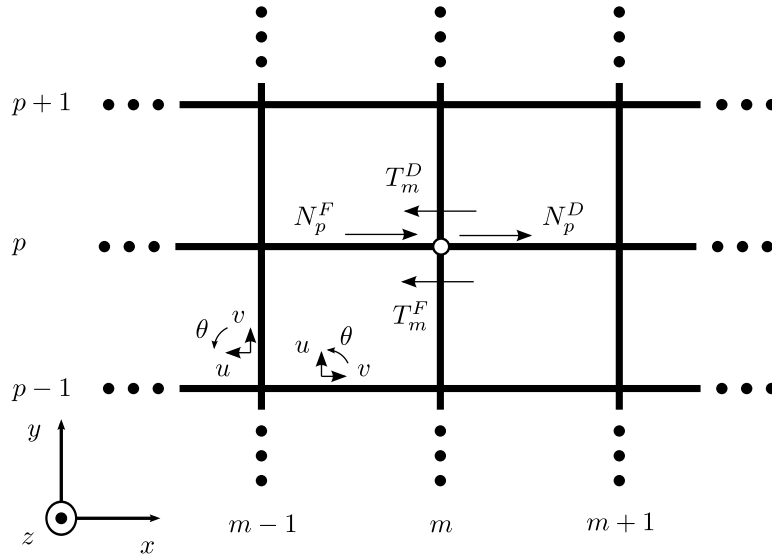
$$\frac{\lambda_f}{\lambda_c} = O\left(\frac{a}{\lambda_f}\right) \ll 1$$

Les équations de la poutre d'Euler-Bernoulli sont intégrées sur la longueur de l'élément en prenant comme conditions aux limites les valeurs inconnues des déplacements et rotations aux nœuds : $u^D, u^F, v^D, v^F, \theta^D, \theta^F$. Cela permet d'écrire les expressions des efforts nodaux dans le repère local :

$$\begin{cases} N^D = \frac{EA\chi}{\sin(\chi\ell)} (v^D \cos(\chi\ell) - v^F) \\ N^F = \frac{EA\chi}{\sin(\chi\ell)} (v^D - v^F \cos(\chi\ell)) \end{cases} \quad (2.1a)$$

$$\begin{cases} T^D = \frac{EI\beta^3}{1 - \cos(\beta\ell) \operatorname{ch}(\beta\ell)} \left(u^D (\operatorname{ch}(\beta\ell) \sin(\beta\ell) + \operatorname{sh}(\beta\ell) \cos(\beta\ell)) \right. \\ \quad \left. - u^F (\sin(\beta\ell) + \operatorname{sh}(\beta\ell)) + \frac{\theta^D}{\beta} \sin(\beta\ell) \operatorname{sh}(\beta\ell) - \frac{\theta^F}{\beta} (\cos(\beta\ell) - \operatorname{ch}(\beta\ell)) \right) \\ T^F = \frac{EI\beta^3}{1 - \cos(\beta\ell) \operatorname{ch}(\beta\ell)} \left(-u^F (\operatorname{ch}(\beta\ell) \sin(\beta\ell) + \operatorname{sh}(\beta\ell) \cos(\beta\ell)) \right. \\ \quad \left. + u^D (\sin(\beta\ell) + \operatorname{sh}(\beta\ell)) + \frac{\theta^F}{\beta} \sin(\beta\ell) \operatorname{sh}(\beta\ell) - \frac{\theta^D}{\beta} (\cos(\beta\ell) - \operatorname{ch}(\beta\ell)) \right) \end{cases} \quad (2.1b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M^D = \frac{EI\beta^2}{1 - \cos(\beta\ell) \operatorname{ch}(\beta\ell)} \left(u^D \sin(\beta\ell) \operatorname{sh}(\beta\ell) + u^F (\cos(\beta\ell) - \operatorname{ch}(\beta\ell)) \right. \\ \quad \left. + \frac{\theta^D}{\beta} (\operatorname{ch}(\beta\ell) \sin(\beta\ell) - \operatorname{sh}(\beta\ell) \cos(\beta\ell)) - \frac{\theta^F}{\beta} (\sin(\beta\ell) - \operatorname{sh}(\beta\ell)) \right) \\ M^F = \frac{EI\beta^2}{1 - \cos(\beta\ell) \operatorname{ch}(\beta\ell)} \left(u^F \sin(\beta\ell) \operatorname{sh}(\beta\ell) + u^D (\cos(\beta\ell) - \operatorname{ch}(\beta\ell)) \right. \\ \quad \left. - \frac{\theta^F}{\beta} (\operatorname{ch}(\beta\ell) \sin(\beta\ell) - \operatorname{sh}(\beta\ell) \cos(\beta\ell)) + \frac{\theta^D}{\beta} (\sin(\beta\ell) - \operatorname{sh}(\beta\ell)) \right) \end{array} \right. \quad (2.1c)$$


 FIGURE 2.4 – Équilibre en forces du nœud (m, p) selon la direction x

Maintenant que l'équilibre dynamique de chaque élément est vérifié, l'étape suivante consiste à **écrire l'équilibre des nœuds** de la structure. Comme leur masse est négligée et qu'il n'y a pas de chargement extérieur, cela revient à faire la somme des efforts appliqués sur chacun des nœuds par les éléments qui y sont connectés. *C'est à ce moment qu'est introduite la géométrie de la structure.* Dans notre cas, chaque nœud correspond à la jonction entre deux murs et deux planchers (figure 2.4). Les équations d'équilibre en forces et en moments du nœud (m, p) sont données ci-dessous. Elles sont écrites dans le repère global associé à la structure. De plus, nous avons considéré que les efforts sont exercés par la partie gauche sur la partie droite de l'élément. Remarquons que ces équations font intervenir les variables cinématiques du nœud (m, p) mais également celles des quatre nœuds adjacents $((m-1, p), (m+1, p), (m, p-1)$ et $(m, p+1)$).

Équilibre en forces selon x :

$$\begin{aligned} T_m^F (U_x^{(m,p-1)}, U_x^{(m,p)}, -\theta^{(m,p-1)}, -\theta^{(m,p)}) + N_p^F (U_x^{(m-1,p)}, U_x^{(m,p)}) \\ - T_m^D (U_x^{(m,p)}, U_x^{(m,p+1)}, -\theta^{(m,p)}, -\theta^{(m,p+1)}) - N_p^D (U_x^{(m,p)}, U_x^{(m+1,p)}) = 0 \end{aligned} \quad (2.2a)$$

Équilibre en forces selon y :

$$N_m^F (U_y^{(m,p-1)}, U_y^{(m,p)}) + T_p^F (U_y^{(m-1,p)}, U_y^{(m,p)}, \theta^{(m-1,p)}, \theta^{(m,p)}) - N_m^D (U_y^{(m,p)}, U_y^{(m,p+1)}) - T_p^D (U_y^{(m,p)}, U_y^{(m+1,p)}, \theta^{(m,p)}, \theta^{(m+1,p)}) = 0 \quad (2.2b)$$

Équilibre en moments :

$$M_m^F (-U_x^{(m,p-1)}, -U_x^{(m,p)}, \theta^{(m,p-1)}, \theta^{(m,p)}) + M_p^F (U_y^{(m-1,p)}, U_y^{(m,p)}, \theta^{(m-1,p)}, \theta^{(m,p)}) - M_m^D (-U_x^{(m,p)}, -U_x^{(m,p+1)}, \theta^{(m,p)}, \theta^{(m,p+1)}) - M_p^D (U_y^{(m,p)}, U_y^{(m+1,p)}, \theta^{(m,p)}, \theta^{(m+1,p)}) = 0 \quad (2.2c)$$

Cette manière de discrétiser l'équilibre dynamique total du système est parfaitement rigoureuse et n'entraîne aucune perte d'information. En effet, après avoir déterminé les variables nodales, il est toujours possible de calculer les efforts et les déplacements à l'intérieur de chaque élément.

Ce système de trois équations décrivant l'équilibre de la structure sous forme discrète va maintenant subir un certain nombre de transformations afin d'obtenir les équations d'équilibre du milieu continu équivalent. Pour illustrer ce processus, nous allons prendre l'équation (2.2a) décrivant l'équilibre en forces dans la direction x comme exemple.

2.1.3 Séparation d'échelles

Nous allons maintenant utiliser l'idée maîtresse de l'homogénéisation, à savoir la séparation d'échelles. Cela signifie que la taille caractéristique L des déformations de la structure globale pendant les vibrations (échelle macroscopique ou globale) doit rester grande par rapport à la taille de la cellule de base ℓ_c (échelle microscopique ou locale). La cellule ayant des dimensions similaires selon les directions x et y , ℓ_c peut indifféremment représenter la longueur des murs ℓ_m ou celle des planchers ℓ_p . Ici, c'est ℓ_m qui a été retenue. L est inconnue pour l'instant. Elle ne pourra être déterminée qu'*a posteriori*, après le calcul des longueurs d'onde macroscopiques. Nous reviendrons sur ce point au paragraphe 2.4 lorsque nous chercherons à prédire le comportement d'une structure à partir de la connaissance de sa géométrie et des caractéristiques du matériau.

Si la fréquence des vibrations de l'ensemble de la structure est très inférieure aux fréquences propres des éléments, alors ces derniers ont un comportement quasi-statique à l'échelle locale et la condition de séparation d'échelles est forcément vérifiée. De plus, les expressions des efforts nodaux se simplifient. Mais cette condition de quasi-statisme local n'est qu'une condition suffisante. Nous verrons aux paragraphes 2.2.3 et 2.3.4 que des situations avec résonance interne peuvent parfois être homogénéisées.

Lorsque la condition de séparation d'échelles est vérifiée, le ratio d'échelles $\epsilon = \ell_c/L$ est très petit ($\epsilon \ll 1$). Il est utilisé pour écrire les variables cinématiques sous forme de développements asymptotiques et pour estimer l'ordre de grandeur des paramètres physiques du problème. Le modèle homogénéisé est ensuite obtenu

en faisant tendre ϵ vers 0 ce qui revient à ne considérer que les premiers termes non nuls des développements.

Nous commençons par le **développement des efforts nodaux**. Celui-ci n'est possible que si la condition de quasi-statisme local est vérifiée. En effet, pour des faibles fréquences d'oscillation d'ensemble, les longueurs des ondes de compression (λ_c) et de flexion (λ_f) générées dans les éléments sont très supérieures à la longueur ℓ de ces derniers. Dans ce cas, les paramètres $\beta\ell = 2\pi\ell/\lambda_f$ et $\chi\ell = 2\pi\ell/\lambda_c$ qui interviennent dans les expressions des efforts nodaux (équations (2.1)) sont très petits :

$$\ell \ll \frac{\lambda_f}{2\pi} \ll \frac{\lambda_c}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \beta\ell \ll 1 \quad \text{et} \quad \chi\ell \ll 1$$

Il est alors possible de faire des développements limités des efforts. À l'origine des éléments, nous obtenons :

$$N^D = \frac{EA}{\ell} \left((v^D - v^F) - \frac{(\chi\ell)^2}{6} (2v^D + v^F) - \frac{(\chi\ell)^4}{360} (8v^D + 7v^F) \right) + O((\chi\ell)^6)$$

$$T^D = -\frac{12EI}{\ell^3} \left((u^D - u^F) + \frac{\ell}{2} (\theta^D + \theta^F) - \frac{(\beta\ell)^4}{840} (26u^D + 9u^F) - \frac{(\beta\ell)^4}{5040} \ell (22\theta^D - 13\theta^F) \right) + O((\beta\ell)^8)$$

$$M^D = \frac{6EI}{\ell^2} \left((u^D - u^F) + \frac{\ell}{3} (2\theta^D + \theta^F) - \frac{(\beta\ell)^4}{2520} (22u^D + 13u^F) - \frac{(\beta\ell)^4}{2520} \ell (4\theta^D - 3\theta^F) \right) + O((\beta\ell)^8)$$

Lorsque la fréquence augmente, les longueurs d'onde λ_c et λ_f diminuent. De plus, nous avons vu page 18, qu'à une fréquence donnée, la longueur de l'onde de flexion dans l'élément est beaucoup plus courte que celle de l'onde de compression. Ainsi, il arrive un moment où la condition de quasi-statisme local n'est plus valable pour le mécanisme de flexion, par contre elle reste valable pour le mécanisme de compression. Autrement dit, λ_f devient du même ordre de grandeur que la longueur de l'élément mais λ_c reste bien plus grande :

$$\ell \approx \frac{\lambda_f}{2\pi} \ll \frac{\lambda_c}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \beta\ell = O(1) \quad \text{et} \quad \chi\ell \ll 1$$

À cette fréquence, il est toujours possible de développer l'effort normal en fonction des puissances de $\chi\ell$. Mais, comme l'effort tranchant et le moment fléchissant dépendent de $\beta\ell$, il faut garder telles quelles les équations (2.1b) et (2.1c). Comme les longueurs d'onde associées aux deux mécanismes mis en jeu sont différentes, le comportement de la structure peut encore être homogénéisé alors que certains éléments sont déjà entrés en résonance.

Si la fréquence augmente encore, alors la longueur de l'onde de flexion λ_f devient du même ordre de grandeur que l'épaisseur des éléments ($\beta\ell \gg 1$).

Dans ce cas, le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli n'est plus adapté pour décrire les vibrations transversales des éléments. Tant que la résonance des éléments en compression n'est pas atteinte, le comportement de la structure est probablement homogénéisable mais la méthode proposée ici ne convient plus.

Pour l'exposé de la méthode, nous nous plaçons dans le cas où la condition de quasi-statisme local est vérifiée pour les deux mécanismes. Voici ce que devient l'équation (2.2a) décrivant l'équilibre des nœuds dans la direction x lorsque l'effort normal et l'effort tranchant sont développés (pour ne pas surcharger l'équation, seuls les deux premiers ordres non nuls sont indiqués) :

$$\begin{aligned}
 & \frac{E_m I_m}{\ell_m^3} \left((U_x^{(n-1,p)} + U_x^{(n+1,p)}) \left(12 + \frac{9}{70} (\beta_m \ell_m)^4 \right) + U_x^{(m,p)} \left(-24 + \frac{26}{35} (\beta_m \ell_m)^4 \right) \right) \\
 & + \frac{E_m I_m}{\ell_m^2} (\theta^{(n+1,p)} - \theta^{(n-1,p)}) \left(6 + \frac{13}{420} (\beta_m \ell_m)^4 \right) \\
 & + \frac{A_p E_p}{\ell_p} \left((U_x^{(n,p-1)} + U_y^{(n,p+1)}) \left(1 + \frac{(\chi_p \ell_p)^2}{6} \right) + 2 U_x^{(n,p)} \left(-1 + \frac{(\chi_p \ell_p)^2}{3} \right) \right) \\
 & = O((\beta_m \ell_m)^8) + O((\chi_p \ell_p)^4)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

À ce niveau, nous ne disposons encore que d'une description discrète de la structure. Or notre objectif est de construire un milieu continu équivalent. Le passage du discret au continu se produit lors du **développement des variables**. Pour cela, nous considérons que les variables cinématiques discrètes sont des valeurs particulières prises par des fonctions continues indéfiniment dérivables :

$$\begin{aligned}
 U_x^{(m,p)} &= U_x(\epsilon, x = m \ell_p, y = p \ell_m) \\
 U_y^{(m,p)} &= U_y(\epsilon, x = m \ell_p, y = p \ell_m) \\
 \theta^{(m,p)} &= \theta(\epsilon, x = m \ell_p, y = p \ell_m)
 \end{aligned}$$

Ces nouvelles fonctions n'ont de sens physique qu'aux nœuds où elles coïncident avec les valeurs discrètes. Comme toutes les inconnues du problème, elles sont supposées converger lorsque ϵ tend vers 0 et sont écrites sous la forme de développements asymptotiques :

$$X(\epsilon, x, y) = X^0(x, y) + \epsilon X^1(x, y) + \epsilon^2 X^2(x, y) + \epsilon^3 X^3(x, y) + \dots$$

où X représente indifféremment les fonctions U_x , U_y , ou θ . Soulignons que, dans ces expressions, X^j n'est ni une dérivée ni une puissance de la fonction X mais une fonction continue indéfiniment dérivable relative à l'ordre ϵ^j . Pour la présentation des résultats, les grandeurs physiquement observables seront indiquées par un « \sim » :

$$\tilde{X}^j(x, y) = \epsilon^j X^j(x, y)$$

L'importance relative des différents mouvements est un des résultats de l'homogénéisation. Initialement, tous les développements commencent à l'ordre 0 puis la résolution du problème fournit les ordres de grandeurs appropriés.

D'autre part, dans les équations d'équilibre des nœuds ((2.2) et (2.3)) apparaissent également les variables cinématiques des quatre nœuds adjacents au nœud étudié. Grâce à la condition de séparation d'échelles, ces variables évoluent peu d'un nœud à l'autre. De plus, la structure étant périodique, les distances entre les nœuds sont constantes et valent ℓ_p dans la direction horizontale et ℓ_m dans la direction verticale. Comme les longueurs des éléments sont des petits incréments pour les variables continues x et y , il est possible d'utiliser des développements en séries de Taylor pour exprimer les déplacements des nœuds adjacents. C'est ainsi que sont introduites les dérivées macroscopiques. L'homogénéisation est basée sur la séparation des différents ordres de grandeur donc il est intéressant de remplacer ℓ_m par ϵL et ℓ_p par $\epsilon \ell^* L$ où $\ell^* = \ell_p / \ell_m$. Avec les hypothèses retenues pour la géométrie de la structure, nous avons $\ell^* = O(\epsilon^0)$. C'est la définition de ce que nous avons appelé une cellule « à peu près carrée » au tout début de ce chapitre. Les mouvements des nœuds adjacents sont donc donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} X^{(m,p+1)} &= X^0(m \ell_p, p \ell_m) + \epsilon \left(X^1(m \ell_p, p \ell_m) + L \frac{\partial X^0}{\partial y}(m \ell_p, p \ell_m) \right) \\ &+ \epsilon^2 \left(X^2(m \ell_p, p \ell_m) + L \frac{\partial X^1}{\partial y}(m \ell_p, p \ell_m) + \frac{L^2}{2} \frac{\partial^2 X^0}{\partial y^2}(m \ell_p, p \ell_m) \right) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X^{(m,p-1)} &= X^0(m \ell_p, p \ell_m) + \epsilon \left(X^1(m \ell_p, p \ell_m) - L \frac{\partial X^0}{\partial y}(m \ell_p, p \ell_m) \right) \\ &+ \epsilon^2 \left(X^2(m \ell_p, p \ell_m) - L \frac{\partial X^1}{\partial y}(m \ell_p, p \ell_m) + \frac{L^2}{2} \frac{\partial^2 X^0}{\partial y^2}(m \ell_p, p \ell_m) \right) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X^{(m+1,p)} &= X^0(m \ell_p, p \ell_m) + \epsilon \left(X^1(m \ell_p, p \ell_m) + \ell^* L \frac{\partial X^0}{\partial x}(m \ell_p, p \ell_m) \right) \\ &+ \epsilon^2 \left(X^2(m \ell_p, p \ell_m) + \ell^* L \frac{\partial X^1}{\partial x}(m \ell_p, p \ell_m) + \frac{\ell^{*2} L^2}{2} \frac{\partial^2 X^0}{\partial x^2}(m \ell_p, p \ell_m) \right) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X^{(m-1,p)} &= X^0(m \ell_p, p \ell_m) + \epsilon \left(X^1(m \ell_p, p \ell_m) - \ell^* L \frac{\partial X^0}{\partial x}(m \ell_p, p \ell_m) \right) \\ &+ \epsilon^2 \left(X^2(m \ell_p, p \ell_m) - \ell^* L \frac{\partial X^1}{\partial x}(m \ell_p, p \ell_m) + \frac{\ell^{*2} L^2}{2} \frac{\partial^2 X^0}{\partial x^2}(m \ell_p, p \ell_m) \right) + \dots \end{aligned}$$

Cette façon de faire les développements contient implicitement une estimation de l'ordre de grandeur des dérivées macroscopiques. En effet, les équations donnant $X^{(m,p+1)}$ et $X^{(m+1,p)}$ imposent :

$$\begin{aligned} \ell_m \frac{\partial X^0}{\partial y} &= O(\epsilon X^0) = O\left(\frac{\ell_m}{L} X^0\right) \Rightarrow \frac{\partial X^0}{\partial y} = O\left(\frac{X^0}{L}\right) \\ \ell_p \frac{\partial X^0}{\partial x} &= \ell^* \ell_m \frac{\partial X^0}{\partial x} = O\left(\frac{\ell_m}{L} X^0\right) \Rightarrow \frac{\partial X^0}{\partial x} = O\left(\frac{X^0}{\ell^* L}\right) = O\left(\frac{X^0}{L}\right) \end{aligned}$$

Cela est cohérent avec le fait que L est la taille caractéristique des variations à l'échelle macroscopique.

Tous ces développements sont ensuite injectés dans les équations d'équilibre des nœuds ((2.2) et (2.3)). Ainsi, l'équation (2.3) décrivant l'équilibre en forces dans la direction x devient :

$$\begin{aligned}
 & U_x^0 \left(\frac{E_m I_m}{\ell_m^3} (\beta_m \ell_m)^4 + \frac{E_p A_p}{\ell_p} (\chi_p \ell_p)^2 + O((\beta_m \ell_m)^8) + O((\chi_p \ell_p)^4) \right) \\
 & + \epsilon \left(U_x^1 \left(\frac{E_m I_m}{\ell_m^3} (\beta_m \ell_m)^4 + \frac{E_p A_p}{\ell_p} (\chi_p \ell_p)^2 \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial \theta^0}{\partial y} 2L \frac{E_m I_m}{\ell_m^2} \left(6 + \frac{13(\beta_m \ell_m)^4}{420} \right) + O((\beta_m \ell_m)^8) + O((\chi_p \ell_p)^4) \right) \\
 & + \epsilon^2 \left(U_x^2 \left(\frac{E_m I_m}{\ell_m^3} (\beta_m \ell_m)^4 + \frac{E_p A_p}{\ell_p} (\chi_p \ell_p)^2 \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial \theta^1}{\partial y} 2L \frac{E_m I_m}{\ell_m^2} \left(6 + \frac{13(\beta_m \ell_m)^4}{420} \right) + \frac{\partial^2 U_x^0}{\partial y^2} L^2 \frac{E_m I_m}{\ell_m^3} \left(12 + \frac{9(\beta_m \ell_m)^4}{70} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial^2 U_x^0}{\partial x^2} L^2 \ell^{*2} \frac{E_p A_p}{\ell_p} \left(1 + \frac{(\chi_p \ell_p)^2}{6} \right) + O((\beta_m \ell_m)^8) + O((\chi_p \ell_p)^4) \right) = O(\epsilon^3)
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Cette équation différentielle et celles obtenues à partir des équations d'équilibre en forces selon y et en moments sont valables en chaque nœud de la structure, c'est-à-dire en tout point dont les coordonnées (x, y) vérifient $(x, y) = (m \ell_p, p \ell_m)$ avec m et p deux entiers. Comme nous voulons une représentation continue, nous allons chercher les solutions qui vérifient ces équations *en n'importe quel point* $((x, y)$ quelconque).

2.1.4 Normalisation

Enfin, la dernière étape avant la résolution est l'**estimation des paramètres physiques** du problème, c'est-à-dire les propriétés de la cellule de base et la fréquence de vibration de la structure. Cette étape est essentielle pour la prise en compte de la physique locale. En effet, tout le processus d'homogénéisation est basé sur la séparation des différents ordres de grandeur. De plus, le modèle homogénéisé est obtenu en faisant tendre ϵ vers 0. Pour que les mécanismes conservent la même importance relative quelle que soit la valeur de ϵ , *les contrastes doivent être pesés en fonction des puissances de ϵ* .

Commençons par les propriétés de la cellule de base. Le comportement de la structure est piloté par les contrastes de rigidité entre les éléments. Pour faire varier ces derniers et ainsi générer différents types de milieux continus équivalents, nous avons choisi de jouer sur les épaisseurs des éléments plutôt que sur les caractéristiques mécaniques des matériaux. Deux raisons expliquent cette décision. La première est que dans la réalité, les murs et les planchers sont souvent réalisés avec le même matériau. C'est notamment le cas des bâtiments récents. Deuxièmement, la rigidité d'un élément en traction est proportionnelle au module

d'élasticité multiplié par la section $EA = Eah$ alors que sa rigidité en flexion est proportionnelle au module d'élasticité multiplié par l'inertie $EI = Ea^3h/12$. Si la géométrie est fixée et que seul le module d'élasticité varie, la rigidité en traction et la rigidité en flexion évoluent de la même manière tandis que si ce sont les épaisseurs qui varient, le rapport entre les deux rigidités change. Au début, les ordres de grandeur des épaisseurs des éléments sont choisis de façon arbitraire. Afin d'explorer les différents comportements possibles, deux types de milieux sont considérés dans ce travail. La partie 2.2 présente les résultats pour des structures avec des murs et des planchers similaires et la partie 2.3 présente les résultats pour des structures avec des murs plus épais que les planchers. D'autre part, les longueurs ℓ des murs et des planchers sont du même ordre, ainsi que leurs profondeurs h . Les contrastes retenus sont résumés ci-dessous :

$$\frac{E_p}{E_m} = O(1) \quad \frac{\rho_p}{\rho_m} = O(1) \quad \frac{\ell_p}{\ell_m} = O(1) \quad \text{et} \quad \frac{h_p}{h_m} = O(1) \quad (2.5a)$$

$$\frac{a_m}{\ell_m} = O(\epsilon) \quad \frac{a_p}{\ell_m} = O(\epsilon) \quad \text{pour la partie 2.2} \quad (2.5b)$$

$$\frac{a_m}{\ell_m} = O(\epsilon^{1/2}) \quad \frac{a_p}{\ell_m} = O(\epsilon^{3/2}) \quad \text{pour la partie 2.3} \quad (2.5c)$$

Pour illustrer la mise en œuvre de la méthode, nous traitons le cas de la structure avec des murs et des planchers similaires. Par la suite, toutes les épaisseurs sont donc d'ordre $O(\epsilon \ell_m)$.

L'ordre de grandeur de la fréquence détermine l'importance des forces d'inertie. Un régime de propagation d'onde macroscopique correspond à des forces inertielles d'ensemble équilibrant les forces de rappel élastique d'ensemble. Pour les fréquences trop basses, les forces élastiques sont plus importantes que les forces d'inertie et la structure a un comportement quasi-statique. À l'inverse, il n'existe pas de mode de propagation macroscopique avec des forces d'inertie supérieures aux forces élastiques car l'exigence d'équilibre annule l'inertie et donc les déplacements. Ainsi, c'est l'ordre de grandeur des forces élastiques qui fixe la gamme de fréquences à étudier. Cette dernière n'est pas forcément incluse dans la gamme de fréquences accessibles avec la méthode HMPD. En effet, nous avons vu que la fréquence maximale qu'il est possible d'étudier, est de l'ordre de la fréquence de résonance des éléments les plus fins en flexion.

La pulsation ω est pesée par rapport à la pulsation de référence ω_r :

$$\omega_r = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{E_m}{\rho_m}}$$

Cela revient à mesurer l'écart entre la longueur d'onde macroscopique Λ et la longueur de l'onde de compression dans les murs λ_{cm} . En effet, pour une pulsation ω donnée, cette dernière vaut :

$$\lambda_{cm} = \frac{2\pi}{\chi_m} = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{E_m}{\rho_m}} = 2\pi L \frac{\omega_r}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega}{\omega_r} = \frac{\Lambda}{\lambda_{cm}}$$

car nous démontrerons dans la partie 2.4.1 que $L = \Lambda/(2\pi)$. Pour les deux structures étudiées, l'épaisseur des murs est soit du même ordre, soit supérieure à

l'épaisseur des planchers. Dans ce cas, le mécanisme de compression des murs est le mécanisme le plus rigide et donc celui qui a la plus grande longueur d'onde. Le choisir comme référence permet d'avoir des ordres de grandeur des pulsations positifs :

$$\omega \leq \omega_r \quad \Rightarrow \quad \omega = O(\epsilon^{e_f} \omega_r) \quad \text{avec} \quad e_f \geq 0$$

Regardons maintenant, sur l'exemple de la structure avec des murs et des planchers similaires, comment est déterminé l'ordre de grandeur de la fréquence. Pour cela, reprenons l'équation (2.4) décrivant l'équilibre dans la direction x et faisons apparaître explicitement la pulsation en remplaçant χ et β par leurs expressions qui sont rappelées ci-dessous.

$$\chi = \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{E}} \quad \text{et} \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{EI}}$$

$$\begin{aligned} & U_x^0 \left((\ell_m \rho_m A_m + \ell_p \rho_p A_p) \omega^2 + O((\beta_m \ell_m)^8) + O((\chi_p \ell_p)^4) \right) \\ & + \epsilon \left(U_x^1 (\ell_m \rho_m A_m + \ell_p \rho_p A_p) \omega^2 + \frac{\partial \theta^0}{\partial y} 2L \left(\frac{6E_m I_m}{\ell_m^2} + \frac{13 \ell_m^2 \rho_m A_m \omega^2}{420} \right) \right. \\ & \quad \left. + O((\beta_m \ell_m)^8) + O((\chi_p \ell_p)^4) \right) \\ & + \epsilon^2 \left(U_x^2 (\ell_m \rho_m A_m + \ell_p \rho_p A_p) \omega^2 + \frac{\partial \theta^1}{\partial y} 2L \left(\frac{6E_m I_m}{\ell_m^2} + \frac{13 \ell_m^2 \rho_m A_m \omega^2}{420} \right) \right. \\ & \quad + \frac{\partial^2 U_x^0}{\partial y^2} L^2 \left(\frac{12E_m I_m}{\ell_m^3} + \frac{9 \ell_m \rho_m A_m \omega^2}{70} \right) + \frac{\partial^2 U_x^0}{\partial x^2} L^2 \ell^{*2} \left(\frac{E_p A_p}{\ell_p} + \frac{\ell_p \rho_p A_p \omega^2}{6} \right) \\ & \quad \left. + O((\beta_m \ell_m)^8) + O((\chi_p \ell_p)^4) \right) = O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Dans cette équation, le terme d'inertie dominant est :

$$(\ell_m \rho_m A_m + \ell_p \rho_p A_p) \omega^2 U_x^0 = O \left(E_m (\ell_m A_m + \ell_p \frac{\rho_p}{\rho_m} A_p) \left(\frac{\omega}{\omega_r} \right)^2 \frac{U_x^0}{L^2} \right) \quad (2.7)$$

Il y a deux termes élastiques dominants correspondant à deux mécanismes différents : le terme (2.8), proportionnel à l'inertie des murs, est lié à leur fonctionnement en flexion et le terme (2.9), proportionnel à la section des planchers, est lié à leur fonctionnement en traction-compression.

$$\frac{12E_m I_m}{\ell_m^3} \left(\epsilon L \ell_m \frac{\partial \theta^0}{\partial y} + \epsilon^2 L^2 \frac{\partial^2 U_x^0}{\partial y^2} \right) = O \left(E_m A_m \ell_m \left(\frac{a_m}{\ell_m} \right)^2 \frac{\partial^2 U_x^0}{\partial y^2} \right) \quad (2.8)$$

$$\frac{E_p A_p}{\ell_p} \epsilon^2 L^2 \ell^{*2} \frac{\partial^2 U_x^0}{\partial x^2} = O \left(E_p A_p \ell_p \frac{\partial^2 U_x^0}{\partial x^2} \right) \quad (2.9)$$

Comme les murs et les planchers ont des caractéristiques similaires et que les épaisseurs sont d'ordre $O(\epsilon \ell_m)$ (équations (2.5a) et (2.5b)), il est évident que ces

deux termes n'ont pas le même ordre de grandeur. Ainsi, il y a deux possibilités pour l'ordre de grandeur de la fréquence qui correspondent à deux types d'onde différents.

Dans le premier cas, le terme (2.7) est du même ordre que le terme (2.8) et les ondes macroscopiques sont générées par la flexion locale des murs. Comme $\partial_y^2 U_x^0 = O(U_x^0/L^2)$, cela se produit lorsque $\omega = O(\epsilon \omega_r)$. Cette pulsation est suffisamment faible pour que la condition de quasi-statisme local soit vérifiée. En effet, l'introduction des ordres de grandeur dans l'expression de $\beta_m \ell_m$ donne :

$$\begin{aligned} \beta_m \ell_m &= \ell_m \sqrt[4]{\frac{\rho_m A_m \omega^2}{E_m I_m}} = O\left(\sqrt[4]{\frac{\ell_m^4 \rho_m A_m}{E_m I_m} \frac{\epsilon^2 E_m}{L^2 \rho_m}}\right) \\ &= O\left(\sqrt[4]{\frac{\ell_m^4 \epsilon^2}{a_m^2 L^2}}\right) = O(\sqrt{\epsilon}) \ll 1 \end{aligned}$$

Les murs et les planchers étant similaires, nous avons également :

$$\beta_p \ell_p = O(\sqrt{\epsilon}) \ll 1$$

Dans le second cas, le terme (2.7) est du même ordre que le terme (2.9) et les ondes macroscopiques sont générées par la traction-compression des planchers. L'ordre de grandeur de la pulsation correspondant est $\omega = O(\omega_r)$. Alors, nous avons :

$$\beta_m \ell_m = O\left(\sqrt[4]{\frac{\ell_m^4 \rho_m A_m}{E_m I_m} \frac{E_m}{L^2 \rho_m}}\right) = O\left(\sqrt[4]{\frac{\ell_m^4}{a_m^2 L^2}}\right) = O(1) \quad \text{et} \quad \beta_p \ell_p = O(1)$$

Les éléments n'ont donc plus un comportement quasi-statique pour la flexion. Comme le terme élastique qui a permis de déterminer la fréquence est issu du développement de l'effort normal, cette estimation reste valable. Par contre, il faut réécrire les équations d'équilibre de la structure sans développer l'effort tranchant et le moment fléchissant.

Pour l'instant, nous n'avons regardé que l'équation d'équilibre en forces de la structure dans la direction x (équation (2.2a)). Dans l'équation d'équilibre dans la direction y (équation (2.2b)), les rôles des murs et des planchers sont inversés. Les termes élastiques dominants sont donc liés soit au fonctionnement en flexion des planchers, soit au fonctionnement en traction-compression des murs. Comme les murs et les planchers de la structure étudiée sont similaires, les ordres de grandeurs sont les mêmes et il n'y a pas de changement pour la fréquence. Si nous appliquons sur l'équation d'équilibre en moments (équation (2.2c)) le même raisonnement que sur l'équation selon x , alors nous constatons que les forces d'inertie équilibrent les forces élastiques lorsque la pulsation ω est d'ordre ω_r . Pour cette structure, l'étude de l'équation d'équilibre dans la direction x suffit pour déterminer les ordres de grandeur de la fréquence.

Pour l'exposé de la méthode, nous traitons le cas où les éléments ont un comportement quasi-statique donc $\omega = O(\epsilon \omega_r)$. Mais la partie 2.2 présente les résultats pour les deux fréquences.

Toutes ces estimations en fonction du ratio d'échelles $\epsilon = \ell_c/L$ sont relatives. En effet, à cette étape du processus, la taille macroscopique L est inconnue. Comme les épaisseurs des éléments sont pesées en fonction de ϵ , la géométrie exacte de la structure étudiée est donc également inconnue. Elle ne pourra être établie qu'à la fin des calculs après avoir déterminé L . De plus, lorsque la fréquence change, la nature des ondes macroscopiques dans la structure change également et cela modifie L . Ainsi, même si l'estimation des contrastes en fonction des puissances de ϵ reste identique, il ne s'agit plus de la même structure car l'unité de mesure a varié.

C'est pourquoi il est délicat d'étudier directement par homogénéisation une structure avec une géométrie donnée. Pour avoir une bonne compréhension des différents mécanismes mis en jeu, il faut commencer par traiter un nombre suffisant de cas. C'est l'objet des parties 2.2 et 2.3. Le point important est que tous les résultats sont *analytiques*. Une fois que les paramètres clés ont été identifiés, il est possible de prédire l'évolution du comportement de la structure lorsque ses caractéristiques sont modifiées. Les modèles obtenus par homogénéisation peuvent alors être appliqués à une plus grande variété de structures comme nous le verrons dans la partie 2.4.

Cet inconvénient apparent est compensé par le fait que la méthode HMPD est un outil efficace pour générer différents comportements. Elle fournit ainsi un cadre général pour l'étude des structures réticulées.

2.1.5 Exploitation des résultats

Pour la **résolution**, tous les développements et les ordres de grandeur des paramètres sont introduits dans les trois équations d'équilibre du système (équations (2.2)). Puis les termes sont réorganisés en fonction des puissances de ϵ . Dans le cas de la structure avec des murs et des planchers similaires et pour $\omega = O(\epsilon \omega_r)$, l'équilibre dans la direction x est décrit par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & \epsilon^0 \left(E_p A_p \ell_p \frac{\partial^2 U_x^0}{\partial x^2} \right) + \epsilon^1 \left(E_p A_p \ell_p \frac{\partial^2 U_x^1}{\partial x^2} \right) + \epsilon^2 \left(E_p A_p \ell_p \frac{\partial^2 U_x^2}{\partial x^2} \right) \\ & + 12 \frac{E_m I_m}{\epsilon^2 \ell_m} \left(\frac{\partial \theta^0}{\partial y} + \frac{\partial^2 U_x^0}{\partial y^2} \right) + (\rho_m A_m \ell_m + \rho_p A_p \ell_p) \omega^2 U_x^0 \\ & + O \left(\epsilon^3 E_p A_p \ell_p \frac{\partial^2 U_x^3}{\partial x^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Notons que, les épaisseurs des éléments étant d'ordre $O(\epsilon \ell_m)$, il y a un facteur ϵ^2 entre $A_p \ell_p$ et $(I_m/\ell_m) = A_m \ell_m (a_m/\ell_m)^2$.

Le système de trois équations différentielles est supposé converger lorsque ϵ tend vers 0. En conséquence, les équations sont valables pour toute valeur de ϵ suffisamment petite. Il est donc possible de séparer les différents ordres de grandeur (équations (2.11) pour la direction x). Cette méthode permet de passer d'un système d'équations discrètes décrivant l'équilibre des nœuds de la structure à un système d'équations différentielles par ordre décrivant l'équilibre du milieu continu équivalent. Le système complet avec les trois équations d'équilibre est présenté dans la partie suivante (page 33).

$$\left\{ \begin{array}{l} E_p A_p \ell_p \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^0}{\partial x^2} = 0 \\ E_p A_p \ell_p \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^1}{\partial x^2} = 0 \\ E_p A_p \ell_p \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^2}{\partial x^2} + 12 \frac{E_m I_m}{\ell_m} \left(\frac{\partial \tilde{\theta}^0}{\partial y} + \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^0}{\partial y^2} \right) + (\rho_m A_m \ell_m + \rho_p A_p \ell_p) \omega^2 \tilde{U}_x^0 = 0 \\ \dots \end{array} \right. \quad (2.11)$$

La résolution s'effectue ensuite par ordre croissant. Le premier ordre non nul, noté conventionnellement ordre 0, est appelé ordre macroscopique. Il prend en compte les mécanismes prépondérants dans la structure. Les ordres supérieurs interviennent comme des termes correctifs. Plus la séparation d'échelles est mauvaise, plus leur contribution est importante. Dans cette thèse, seul l'ordre macroscopique a été étudié. En effet, les travaux précédents réalisés sur des structures unidimensionnelles par Hans et Boutin (2008) ont montré qu'il décrit correctement leur comportement même dans des cas où la séparation d'échelles est relativement faible. Ces travaux sont résumés dans le chapitre suivant (partie 3.2.2).

Pour chacune des structures étudiées, l'**exploitation des résultats** se fait en deux étapes : tout d'abord, la caractérisation du milieu continu équivalent puis l'étude des ondes proprement dite.

Pour la première étape, l'idée maîtresse consiste à se ramener au cadre connu de la mécanique des milieux continus pour interpréter les équations d'équilibre obtenues grâce à la méthode HMPD. En effet, les deux équations d'équilibre en forces jouent le même rôle que les équations indéfinies du mouvement. En l'absence de forces extérieures, ces dernières s'écrivent simplement :

$$\operatorname{div} \sigma + \rho \omega^2 \vec{U} = \vec{0}$$

avec σ le tenseur des contraintes et ρ la masse volumique du milieu. Par analogie, des contraintes sont définies et la loi de comportement est écrite. Notons que dans notre structure bidimensionnelle chaque nœud a trois degrés de liberté : deux en translation et un en rotation. Ce dernier n'existe pas dans les milieux continus classiques. Il est donc probable que nous obtenions un milieu généralisé.

L'étude de la propagation des ondes macroscopiques nécessite de résoudre les équations d'équilibre. Pour cela, le champ de déplacement \vec{U} , est recherché sous la forme :

$$\vec{U} = \operatorname{grad} \hat{\varphi} + \operatorname{rot} \vec{\psi} \quad \text{avec} \quad \operatorname{div} \vec{\psi} = 0$$

Cette décomposition est unique d'après le théorème d'Helmholtz. Elle permet de séparer la composante volumique de l'onde $\hat{\varphi}$ (liée à la compression) de sa composante rotationnelle $\vec{\psi}$ (liée au cisaillement). Comme le milieu étudié est bidimensionnel, le vecteur $\vec{\psi}$ a une seule composante non nulle :

$$\vec{\psi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{\psi} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} = 0$$

et le champ de déplacement est donné par l'équation (2.12).

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Dans cette étude, nous nous sommes intéressés aux ondes planes car toute onde peut être considérée comme la superposition d'ondes planes. En conséquence, $\hat{\varphi}$ et $\hat{\psi}$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \hat{\varphi} &= \varphi \exp[-i k(\vec{n}_\alpha) \vec{n}_\alpha \cdot \vec{x}] \\ \hat{\psi} &= \psi \exp[-i k(\vec{n}_\alpha) \vec{n}_\alpha \cdot \vec{x}] \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}$$

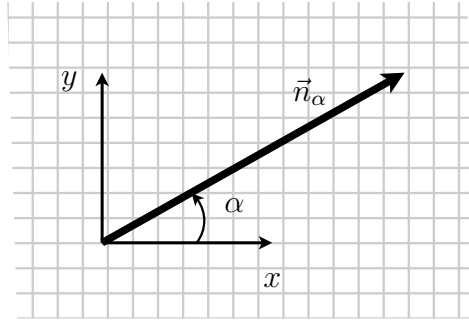


FIGURE 2.5 – Direction de propagation \vec{n}_α

Nous rappelons que nous travaillons en régime harmonique et que, pour toutes les variables, la multiplication par $e^{i\omega t}$ est sous-entendue. Par la suite, nous omettrons également le terme $\exp[-i k(\vec{n}_\alpha) \vec{n}_\alpha \cdot \vec{x}]$. Dans ce dernier, \vec{n}_α est la direction de propagation des ondes (figure 2.5) et k le nombre d'onde. Le milieu étant anisotrope, k dépend de \vec{n}_α .

Comme toutes les inconnues du problème, k , φ et ψ doivent être recherchées sous la forme d'un développement asymptotique :

$$k(\vec{n}_\alpha) = \sum \epsilon^j k^j(\vec{n}_\alpha) \quad \varphi = \sum \epsilon^j \varphi^j \quad \psi = \sum \epsilon^j \psi^j$$

Normalement, le développement du nombre d'onde devrait s'accompagner du développement de l'exponentielle $\exp[-i k(\vec{n}_\alpha) \vec{n}_\alpha \cdot \vec{x}]$, afin d'avoir, à chaque ordre, une expression du champ de déplacement \vec{U}^j qui ne dépend que de \vec{x} et pas du ratio d'échelles ϵ . Cependant, comme dans cette étude nous considérons uniquement l'ordre 0, nous pouvons garder l'exponentielle telle quelle sans modifier les résultats. Notons également que ces derniers ne sont valables que pour une distance de propagation limitée. En effet, pour que la solution obtenue à l'ordre 0 soit une bonne approximation du comportement de la structure, il faut que les termes correctifs décrits par les ordres supérieurs soient réellement négligeables et donc $\epsilon k^1(\vec{n}_\alpha) \vec{n}_\alpha \cdot \vec{x} \ll 1$. Si la distance de propagation est plus grande, la nature de l'onde est différente (Boutin et Auriault, 1993).

Après introduction des développements de k , φ et ψ , l'équation (2.12) devient :

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} -i k(\vec{n}_\alpha) \cos(\alpha) \varphi - i k(\vec{n}_\alpha) \sin(\alpha) \psi \\ -i k(\vec{n}_\alpha) \sin(\alpha) \varphi + i k(\vec{n}_\alpha) \cos(\alpha) \psi \end{pmatrix}$$

$$\vec{U} = (-i) \begin{pmatrix} \sum_a \sum_b \epsilon^{a+b} k^b(\vec{n}_\alpha) (\varphi^a \cos(\alpha) + \psi^a \sin(\alpha)) \\ \sum_a \sum_b \epsilon^{a+b} k^b(\vec{n}_\alpha) (\varphi^a \sin(\alpha) - \psi^a \cos(\alpha)) \end{pmatrix}$$

(À chaque fois, le terme $\exp[-i k(\vec{n}_\alpha) \vec{n}_\alpha \cdot \vec{x}]$ est sous-entendu.)

Pour alléger les notations, nous posons $\tilde{k}^j = \epsilon^j k^j$ ainsi que :

$$\begin{cases} \tilde{u}_x^j = \tilde{\varphi}^j \cos(\alpha) + \tilde{\psi}^j \sin(\alpha) \\ \tilde{u}_y^j = \tilde{\varphi}^j \sin(\alpha) - \tilde{\psi}^j \cos(\alpha) \end{cases} \quad \text{où} \quad \tilde{\varphi}^j = \epsilon^j \varphi^j \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}^j = \epsilon^j \psi^j$$

Les différents ordres du champ de déplacement sont alors donnés par :

$$\begin{cases} \tilde{U}_x^0 = (-i) \tilde{k}^0 \tilde{u}_x^0 & \begin{cases} \tilde{U}_x^1 = (-i) (\tilde{k}^0 \tilde{u}_x^1 + \tilde{k}^1 \tilde{u}_x^0) \\ \tilde{U}_y^1 = (-i) (\tilde{k}^0 \tilde{u}_y^1 + \tilde{k}^1 \tilde{u}_y^0) \end{cases} \\ \tilde{U}_y^0 = (-i) \tilde{k}^0 \tilde{u}_y^0 & \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} \tilde{U}_x^2 = (-i) (\tilde{k}^0 \tilde{u}_x^2 + \tilde{k}^1 \tilde{u}_x^1 + \tilde{k}^2 \tilde{u}_x^0) \\ \tilde{U}_y^2 = (-i) (\tilde{k}^0 \tilde{u}_y^2 + \tilde{k}^1 \tilde{u}_y^1 + \tilde{k}^2 \tilde{u}_y^0) \end{cases} \quad \dots$$

Les résultats sont présentés dans la partie 2.2 pour des structures avec des murs et des planchers similaires et dans la partie 2.3 pour des structures avec des murs plus épais que les planchers. Chaque partie décrit tout d'abord la caractérisation du milieu continu équivalent puis l'étude détaillée de la propagation des ondes. Les principaux résultats sont résumés à la fin (pages 79 et 104).

2.2 1^{er} cas : murs et planchers similaires

Cette partie décrit le comportement de structures dont les murs et les planchers ont des caractéristiques similaires (figure 2.6). Les ordres de grandeur choisis sont rappelés ci-dessous.

$$\begin{array}{lll} \frac{E_p}{E_m} = O(1) & \frac{\rho_p}{\rho_m} = O(1) & \frac{\ell_p}{\ell_m} = O(1) \\ \frac{h_p}{h_m} = O(1) & \frac{a_m}{\ell_m} = O(\epsilon) & \frac{a_p}{\ell_m} = O(\epsilon) \end{array}$$

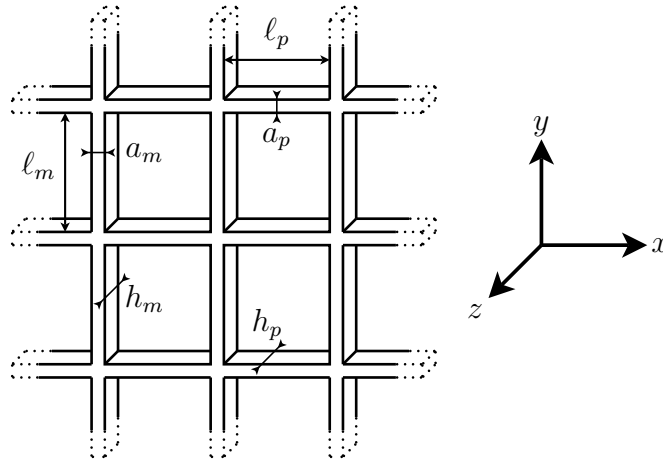


FIGURE 2.6 – Exemple de structure et rappel des notations

2.2.1 Milieu continu équivalent hors résonance interne

L'objectif de cette partie est de construire une analogie entre le milieu continu équivalent à la structure discrète et la mécanique des milieux continus. Mais avant cela, faisons deux remarques. La première est que nous reprenons le formalisme de la mécanique des milieux continus alors que le milieu étudié est bidimensionnel. C'est pourquoi, les paramètres et les contraintes définis par la suite n'ont pas tout à fait les unités habituelles. Ils ont été intégrés sur l'épaisseur de la structure (dans la direction z). La deuxième est que nous traitons le cas où $\omega = O(\epsilon\omega_r)$. Mais la loi de comportement donnée ici sera valable tant que la condition de quasi-statisme local est vérifiée, en particulier dans le cas statique.

Loi de comportement macroscopique

L'application de la méthode HMPD décrite dans la partie précédente fournit les équations d'équilibre ci-dessous. Par rapport à celles présentées au paragraphe 2.1.5, elles ont été divisées par $\ell_m\ell_p$ afin de faire apparaître des grandeurs surfaciques. Les équations sont désignées par la direction des efforts (x pour les efforts horizontaux, y pour les efforts verticaux et m pour les moments) et par leur ordre.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E_p A_p}{\ell_m} \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^0}{\partial x^2} = 0 \quad (x\ 0) \\ \frac{E_p A_p}{\ell_m} \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^1}{\partial x^2} = 0 \quad (x\ 1) \\ \frac{E_p A_p}{\ell_m} \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^2}{\partial x^2} + 12 \frac{E_m I_m}{\ell_m^2 \ell_p} \left(\frac{\partial \tilde{\theta}^0}{\partial y} + \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^0}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\bar{\rho}_m}{\ell_p} + \frac{\bar{\rho}_p}{\ell_m} \right) \omega^2 \tilde{U}_x^0 = 0 \quad (x\ 2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E_m A_m}{\ell_p} \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^0}{\partial y^2} = 0 \quad (y\ 0) \\ \frac{E_m A_m}{\ell_p} \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^1}{\partial y^2} = 0 \quad (y\ 1) \\ \frac{E_m A_m}{\ell_p} \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^2}{\partial y^2} + 12 \frac{E_p I_p}{\ell_p^2 \ell_m} \left(-\frac{\partial \tilde{\theta}^0}{\partial x} + \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^0}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\bar{\rho}_m}{\ell_p} + \frac{\bar{\rho}_p}{\ell_m} \right) \omega^2 \tilde{U}_y^0 = 0 \quad (y\ 2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ 12 \frac{E_m I_m}{\ell_m^2 \ell_p} \left(\tilde{\theta}^0 + \frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial y} \right) - 12 \frac{E_p I_p}{\ell_p^2 \ell_m} \left(-\tilde{\theta}^0 + \frac{\partial \tilde{U}_y^0}{\partial x} \right) = 0 \quad (m\ 0) \right.$$

Par rapport au formalisme de la mécanique des milieux continus, ces équations contiennent deux types d'informations : la description de l'équilibre du milieu et sa loi de comportement. En effet, les équations selon les directions x et y jouent, pour la structure étudiée, le même rôle que les équations indéfinies du mouvement. Pour un état de déformation plane, ces dernières s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \rho \omega^2 U_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \rho \omega^2 U_y = 0 \end{array} \right.$$

Par analogie, les contraintes macroscopiques sont définies de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx}(\vec{U}^0) &= \frac{E_p A_p}{\ell_m} \frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial x} = \frac{E_p A_p}{\ell_m} \epsilon_{xx}(\vec{U}^0) : \text{contrainte normale dans la direction } x, \\
 \sigma_{yy}(\vec{U}^0) &= \frac{E_m A_m}{\ell_p} \frac{\partial \tilde{U}_y^0}{\partial y} = \frac{E_m A_m}{\ell_p} \epsilon_{yy}(\vec{U}^0) : \text{contrainte normale dans la direction } y, \\
 \left. \begin{aligned}
 \sigma_{xy}(\tilde{\theta}^0, \vec{U}^0) &= 12 \frac{E_m I_m}{\ell_m^2 \ell_p} \left(\tilde{\theta}^0 + \frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial y} \right) \\
 \sigma_{yx}(\tilde{\theta}^0, \vec{U}^0) &= 12 \frac{E_p I_p}{\ell_m \ell_p^2} \left(-\tilde{\theta}^0 + \frac{\partial \tilde{U}_y^0}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \right\} : \text{contraintes tangentielles.}
 \end{aligned}$$

Pour alléger les notations, des modules macroscopiques sont définis ainsi que la masse surfacique du milieu :

$$\begin{aligned}
 M_s &= \frac{\bar{\rho}_m}{\ell_p} + \frac{\bar{\rho}_p}{\ell_m} : \text{masse surfacique macroscopique en kg/m}^2 \\
 E_x &= \frac{E_p A_p}{\ell_m} : \text{module macroscopique d'extension dans la direction } x \\
 &\quad \text{en N/m} \\
 E_y &= \frac{E_m A_m}{\ell_p} : \text{module macroscopique d'extension dans la direction } y \\
 &\quad \text{en N/m} \\
 G_p &= 12 \frac{E_p I_p}{\ell_m \ell_p^2} : \text{module de cisaillement macroscopique lié à la rigidité de} \\
 &\quad \text{flexion des planchers en N/m} \\
 G_m &= 12 \frac{E_m I_m}{\ell_m^2 \ell_p} : \text{module de cisaillement macroscopique lié à la rigidité de} \\
 &\quad \text{flexion des murs en N/m}
 \end{aligned}$$

La masse surfacique M_s correspond tout simplement à la masse d'une cellule divisée par sa surface. Le module d'extension dans la direction x , E_x , est égal à la rigidité des planchers en traction-compression $E_p A_p / \ell_p$ multipliée par ℓ_p / ℓ_m . De même, le module de cisaillement G_p est égal à la rigidité des planchers en flexion lorsqu'ils sont bi-encastés $12 E_p I_p / \ell_p^3$ multipliée par ℓ_p / ℓ_m . Inversement, les modules E_y et G_m se déduisent respectivement des rigidités des murs en traction-compression et en flexion multipliées par ℓ_m / ℓ_p .

Mis à part l'existence de deux modules d'extension, il s'agit de la définition habituelle des contraintes normales. Ce n'est apparemment pas le cas des contraintes tangentielles puisqu'elles dépendent ici de la rotation des nœuds. Cependant, comme en mécanique des milieux continus, l'équation d'équilibre en moment (m_0) impose l'égalité des contraintes tangentielles :

$$\sigma_{xy}(\tilde{\theta}^0, \vec{U}^0) = \sigma_{yx}(\tilde{\theta}^0, \vec{U}^0)$$

Elle fournit également l'expression de la rotation des nœuds en fonction des gradients des déplacements :

$$\tilde{\theta}^0 = \frac{G_p}{G_m + G_p} \frac{\partial \tilde{U}_y^0}{\partial x} - \frac{G_m}{G_m + G_p} \frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial y} \quad (2.14)$$

L'introduction de cette expression dans la définition des contraintes tangentielles donne la définition habituelle et permet de déterminer le module de cisaillement macroscopique G :

$$\sigma_{xy}(\tilde{\theta}^0, \vec{U}^0) = \sigma_{yx}(\tilde{\theta}^0, \vec{U}^0) = G \left(\frac{\partial \tilde{U}_y^0}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial y} \right) = 2 G \epsilon_{xy}(\vec{U}^0) \quad \text{où} \quad G = \frac{G_m G_p}{G_m + G_p}$$

En résumé, le milieu continu équivalent à la structure discrète à l'échelle macroscopique est un milieu *anisotrope* caractérisé par trois modules différents.

Sa loi de comportement dans le repère (x, y) lié aux directions des éléments est donnée par :

$$\sigma(\vec{U}^0) = \begin{bmatrix} E_x \epsilon_{xx}(\vec{U}^0) & 2G \epsilon_{xy}(\vec{U}^0) \\ 2G \epsilon_{xy}(\vec{U}^0) & E_y \epsilon_{yy}(\vec{U}^0) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Cette matrice regroupe les premiers termes non nuls de chaque type de contrainte (contraintes normales dans les directions x et y et contrainte de cisaillement) mais ces contraintes ne sont pas du même ordre de grandeur. Ce point sera commenté par la suite. L'équilibre du milieu est alors décrit par les équations suivantes qui sont l'équivalent des équations indéfinies du mouvement :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}(\vec{U}^0)}{\partial x} = 0 & (x 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}(\vec{U}^2)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}(\vec{U}^0)}{\partial y} + M_s \omega^2 \tilde{U}_x^0 = 0 & (x 2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{yy}(\vec{U}^0)}{\partial y} = 0 & (y 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{yy}(\vec{U}^2)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yx}(\vec{U}^0)}{\partial x} + M_s \omega^2 \tilde{U}_y^0 = 0 & (y 2) \end{cases}$$

Les équations à l'ordre 1 n'ont pas été réécrites car elles ont exactement la même forme que celles à l'ordre 0. Le terme d'inertie apparaît dans les équations d'ordre 2 mais en réalité, sa position dépend du choix de l'ordre de grandeur de la fréquence.

Le premier point qui ressort de cette analogie est que le milieu macroscopique est un *milieu continu habituel* dans le sens où seule la cinématique de translation émerge à l'ordre 0. Ce résultat se trouve déjà dans la thèse de Pradel (1998). Notons que les définitions des contraintes tangentielles données page 33 ressemblent aux définitions des contraintes tangentielles dans les milieux de Cosserat ((Eringen, 1966), (Kumar et McDowell, 2004) en deux dimensions). Mais ici, il n'y a pas de moments internes à l'ordre macroscopique et l'équation d'équilibre en moments impose la symétrie du tenseur des contraintes. Finalement, nous retrouvons la définition classique des contraintes tangentielles et l'équilibre du milieu est complètement décrit par les équations ci-dessus dans lesquelles la rotation des nœuds $\tilde{\theta}^0$ n'intervient pas. Par contre, pour revenir à l'échelle locale et étudier le comportement des éléments, il faut calculer $\tilde{\theta}^0$ à partir de l'équation (2.14) qui décrit l'équilibre interne de la cellule.

Le deuxième point important est que la méthode HMPD est entièrement analytique. Ainsi tous les paramètres qui apparaissent dans la loi de comportement ou les équations d'équilibre s'expriment en fonction des caractéristiques de la cellule de base. Cela permet de comprendre le rôle des différents éléments et de remonter au fonctionnement de la structure à l'échelle microscopique. De plus, la condition de quasi-statisme local étant vérifiée, les modules macroscopiques ne dépendent que des propriétés élastostatiques des murs et des planchers.

Regardons maintenant plus en détail le fonctionnement de la structure à l'échelle microscopique. Pour cela, examinons sa réponse aux déformations élémentaires ϵ_{xx} , ϵ_{yy} et ϵ_{xy} . Une déformation d'extension macroscopique dans la direction x , ϵ_{xx} , correspond à une déformation en extension des planchers. De même, une déformation en extension de la structure dans la direction y , ϵ_{yy} , fait travailler les murs en extension. Comme ce ne sont pas les mêmes éléments qui sont sollicités selon la direction, le milieu a deux modules d'extension différents. Lorsque les murs et les planchers sont rigoureusement identiques, ces modules deviennent égaux. Le mécanisme de cisaillement qui apparaît à l'échelle macroscopique ne peut pas être généré par du cisaillement à l'échelle microscopique puisque tous les éléments ont été modélisés par des poutres d'Euler-Bernoulli. En réalité, l'application d'une distorsion $\gamma = 2\epsilon_{xy}$ à l'ensemble de la structure fait travailler localement les éléments en flexion. Remarquons que la rigidité en cisaillement de la cellule G est obtenue par l'association en série de la rigidité en flexion des murs G_m avec celle des planchers G_p (figure 2.7). En conséquence, si les rigidités des murs et des planchers sont différentes, ce sont les éléments les plus souples qui se déforment.

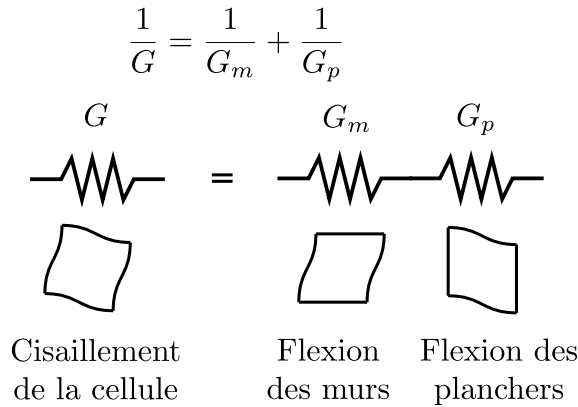


FIGURE 2.7 – Cisaillement de la cellule

Il y a donc deux manières différentes de faire travailler les éléments à l'échelle microscopique : en extension et en flexion. Cela se traduit à l'échelle macroscopique par l'existence de deux types de modules. Les modules d'extension sont proportionnels à la section A des éléments alors que les modules de cisaillement sont proportionnels à leur inertie I . Or A et I ont des ordres de grandeur différents. Pour les épaisseurs choisies, les contrastes sont donnés par :

$$\frac{G}{E_x} = O(\epsilon^2) \quad \text{et} \quad \frac{G}{E_y} = O(\epsilon^2) \quad (2.16)$$

Cela explique pourquoi, dans les équations d'équilibre, les contraintes tangentielles générées par \vec{U}^0 sont équilibrées par les contraintes normales générées par \vec{U}^2 . Cela est également en accord avec les observations faites lors de la détermination de l'ordre de grandeur de la fréquence (page 26). Nous avons alors constaté que les ondes macroscopiques peuvent être dues à deux mécanismes correspondant à des forces élastiques d'ordre différent.

Lorsque la structure est sollicitée de façon quelconque, la déformation macroscopique est une combinaison des déformations élémentaires et les éléments

travaillent à la fois en extension et en flexion. Si les déformations d'extension et de flexion sont du même ordre, alors la rigidité de la flexion étant très faible, sa contribution au champ de contraintes est négligeable. Dans ce cas, la connaissance des deux modules d'extension est suffisante. Par contre, si les déformations d'extension sont petites, la contribution de la flexion peut devenir prépondérante dans le champ de contraintes. De même, lorsque les efforts sont connus et que la grandeur cherchée est la déformation, la flexion ne peut pas être négligée. Il est donc nécessaire de connaître le module de cisaillement du milieu macroscopique.

Pour les structures non contreventées, ce dernier ne peut être déterminé qu'à partir des équations d'équilibre d'ordres supérieurs (ordre 2 dans notre cas). C'est un des grands avantages de la méthode HMPD que de donner facilement accès à ces équations. Ce n'est pas le cas avec la méthode utilisée par Cioranescu et Saint Jean Paulin qui est basée sur l'homogénéisation des milieux périodiques continus et l'introduction de plusieurs petits paramètres. Dans (Chiheb *et al.*, 1998; Cioranescu et Saint Jean Paulin, 1999), elles étudient le même type de structures mais ne décrivent que les équations d'ordre 0. Elles obtiennent une loi de comportement incomplète où le module de cisaillement est nul. Alors, le problème n'est pas coercitif et il est plus difficile de prouver la convergence du champ de déplacement. L'idée consistant à aller chercher dans les équations d'ordres supérieurs les informations manquantes lorsque le problème d'ordre 0 n'est pas coercitif se trouve déjà dans la thèse de Moreau (1996).

Propriétés du milieu macroscopique

Dans cette partie, nous poursuivons l'analogie avec la mécanique des milieux continus en nous intéressant aux notions de module d'extension et de coefficient de Poisson. Plus précisément, nous allons étudier l'évolution de ces paramètres avec la direction de la sollicitation pour caractériser l'anisotropie du milieu.

Pour cela, nous réalisons sur la structure étudiée un essai de traction pure d'intensité σ selon la direction \vec{n}_α . Cet essai est schématisé sur la figure 2.8.

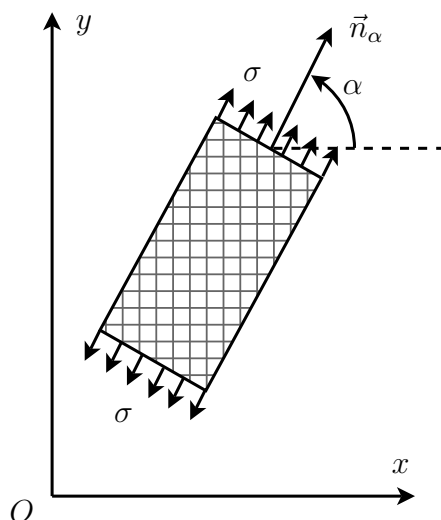


FIGURE 2.8 – Essai de traction pure sur la structure

Nous définissons deux repères. Le premier, noté R , coïncide avec les directions des murs et des planchers. Le second, noté R_α , correspond à la direction de la sollicitation. La matrice de passage associée est P_α .

$$R = (\vec{x}, \vec{y}) \quad , \quad R_\alpha = (\vec{n}_\alpha, \vec{n}_{\alpha+\pi/2}) \quad \text{où} \quad \vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$P_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Le tenseur des contraintes s'écrit simplement dans R_α : $\underline{\sigma}_\alpha = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Son expression dans R est :

$$\underline{\sigma}_R = P_\alpha \cdot \underline{\sigma}_\alpha \cdot P_\alpha^{-1} = \sigma \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) \end{bmatrix}$$

La loi de comportement trouvée au paragraphe précédent (équation (2.15)) donne le tenseur des déformations dans le repère R :

$$\underline{\epsilon}_R = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{xx}}{E_x} & \frac{\sigma_{xy}}{2G} \\ \frac{\sigma_{yx}}{2G} & \frac{\sigma_{yy}}{E_y} \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} \frac{\cos^2(\alpha)}{E_x} & \frac{\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{2G} \\ \frac{\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{2G} & \frac{\sin^2(\alpha)}{E_y} \end{bmatrix}$$

Ce qui permet de trouver les déformations selon les directions \vec{n}_α et $\vec{n}_{\alpha+\pi/2}$:

$$\begin{aligned} \epsilon(\alpha) &= \vec{n}_\alpha \cdot \underline{\epsilon}_R \cdot \vec{n}_\alpha \\ \epsilon(\alpha) &= \frac{\sigma}{4} \left[\frac{1}{E_x} + \frac{1}{E_y} + \frac{1}{G} + 2 \cos(2\alpha) \left(\frac{1}{E_x} - \frac{1}{E_y} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cos^2(2\alpha) \left(\frac{1}{E_x} + \frac{1}{E_y} - \frac{1}{G} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.17a)$$

$$\begin{aligned} \epsilon\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) &= \vec{n}_{\alpha+\pi/2} \cdot \underline{\epsilon}_R \cdot \vec{n}_{\alpha+\pi/2} \\ \epsilon\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\sigma}{4} \sin^2(2\alpha) \left(\frac{1}{E_x} + \frac{1}{E_y} - \frac{1}{G} \right) \end{aligned} \quad (2.17b)$$

Le module d'extension du milieu dépend de la direction \vec{n}_α et est défini par :

$$E(\alpha) = \frac{\sigma}{\epsilon(\alpha)} = \frac{4}{\frac{1}{E_x} + \frac{1}{E_y} + \frac{1}{G} + 2 \cos(2\alpha) \left(\frac{1}{E_x} - \frac{1}{E_y} \right) + \cos^2(2\alpha) \left(\frac{1}{E_x} + \frac{1}{E_y} - \frac{1}{G} \right)}$$

Il est facile de vérifier que ce module est égal aux rigidités en traction des éléments lorsque la structure est sollicitée dans les directions x et y :

$$E(0) = E_x \quad \text{et} \quad E\left(\frac{\pi}{2}\right) = E_y$$

Pour les autres directions, le module d'extension $E(\alpha)$ est réécrit en mettant le module de cisaillement G en facteur :

$$E(\alpha) = \frac{4G}{\sin^2(2\alpha)} \frac{1}{1 + \frac{1}{\sin^2(2\alpha)} \left[\left(\frac{G}{E_x} + \frac{G}{E_y} \right) (1 + \cos^2(2\alpha)) + 2 \cos(2\alpha) \left(\frac{G}{E_x} - \frac{G}{E_y} \right) \right]}$$

D'après les relations (2.16), les termes G/E_x et G/E_y sont d'ordre ϵ^2 . Si $\sin^2(2\alpha)$ n'est pas trop petit, alors il est possible de faire un développement limité de cette expression :

$$\begin{aligned} \sin^2(2\alpha) &> \max \left(\frac{G}{E_x}, \frac{G}{E_y} \right) \\ &\Downarrow \\ E(\alpha) &= \frac{4G}{\sin^2(2\alpha)} \left(1 - \frac{1}{\sin^2(2\alpha)} \left[\left(\frac{G}{E_x} + \frac{G}{E_y} \right) (1 + \cos^2(2\alpha)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \cos(2\alpha) \left(\frac{G}{E_x} - \frac{G}{E_y} \right) \right] + o \left(\frac{G}{E_x} \right) \right) \end{aligned}$$

Ainsi pour la plupart des directions, cette structure est très souple et son module d'extension est du même ordre de grandeur que le module de cisaillement ($E(\alpha) \approx 4G/\sin^2(2\alpha)$) avec un terme correctif d'ordre $O(G/E_x) = O(\epsilon^2)$. Le module d'extension est minimal pour la direction $\alpha = \pi/4$. Il n'y a qu'au voisinage des directions x et y que le module d'extension est du même ordre que les rigidités de traction des éléments E_x et E_y . La figure 2.9 représente l'évolution de $E(\alpha)$ pour une structure avec des murs et des planchers identiques ($E_x = E_y$) et un ratio $E_x/G = 1\,000$. Nous verrons dans la partie 2.4.4 que ce contraste peut être atteint dans des structures réelles.

La notion de coefficient de Poisson ne peut pas être transposée telle quelle à une structure bidimensionnelle. En effet, lorsque ce type de milieu subit un effort de traction, il se déforme selon la direction de la sollicitation et selon une seule direction transversale. En fonction du matériau qui les constitue, les éléments peuvent éventuellement se déformer selon la direction z mais seules les déformations de la cellule sont visibles à l'échelle macroscopique. Au contraire, la définition du coefficient de Poisson dans un milieu continu classique suppose que ce dernier se déforme selon la direction de la sollicitation et selon les deux directions transversales. Pour pouvoir comparer les propriétés de ces deux milieux, nous définissons un nouveau coefficient ν' qui est l'équivalent du coefficient de Poisson dans un état de déformation plane ($\epsilon_{zz} = 0$).

Commençons par calculer ν' pour un matériau élastique linéaire homogène isotrope de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν . Celui-ci est confiné de telle sorte que $\epsilon_{zz} = 0$ et il est soumis à un essai de traction pure d'intensité σ dans le plan (x, y) . Le matériau étant isotrope, la direction de la sollicitation n'a aucune importance et nous choisissons pour simplifier la direction x (figure 2.10).

La loi de comportement ainsi que les tenseurs des contraintes et des déformations sont donnés ci-dessous.

$$\text{Loi de Hooke : } \quad \underline{\epsilon} = \frac{1 + \nu}{E} \underline{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\underline{\sigma}) \underline{\delta} \quad \text{avec } \underline{\delta} \text{ la matrice identité}$$

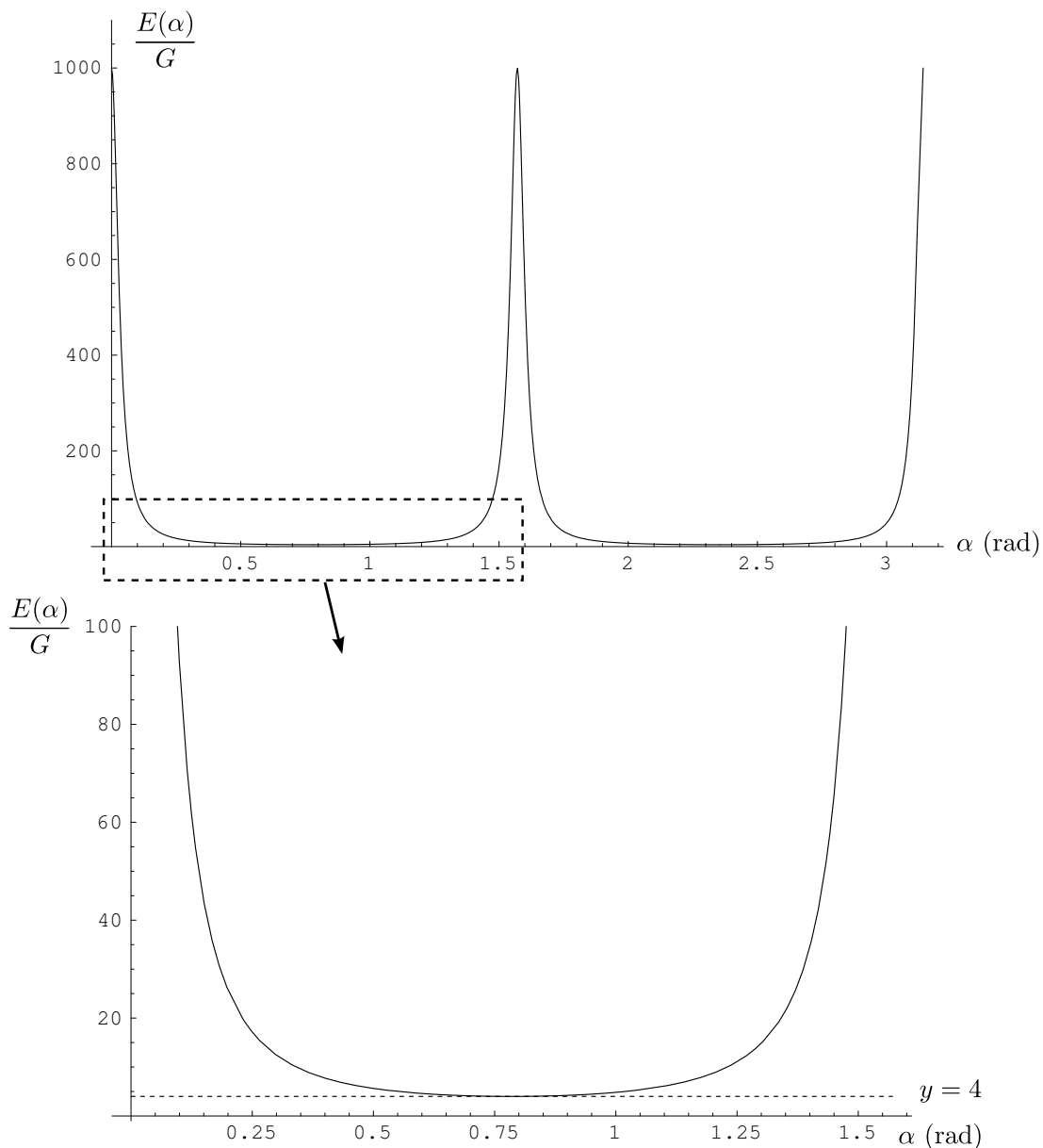


FIGURE 2.9 – Module d’extension en fonction de la direction de la sollicitation pour $E_x/G = E_y/G = 1\ 000$ et zoom sur les faibles valeurs du module

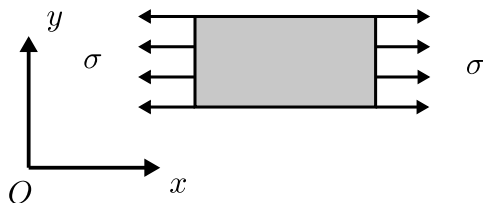


FIGURE 2.10 – Essai de traction pure sur un milieu classique

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu\sigma \end{bmatrix} \quad \underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \sigma \frac{1-\nu^2}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma \frac{\nu(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, le coefficient ν' est défini par :

$$\nu' = -\frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{xx}} = \frac{\nu}{1-\nu} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \nu = 1/2 & \Leftrightarrow \nu' = 1 \\ \nu = 0 & \Leftrightarrow \nu' = 0 \end{cases}$$

Nous disposons maintenant d'un point de comparaison pour le coefficient ν' de la structure étudiée. Celle-ci étant anisotrope, ν' dépend de la direction de la sollicitation \vec{n}_α . La structure est soumise à l'essai de traction pure schématisé sur la figure 2.8. D'après les équations (2.17), l'expression de ν' est :

$$\nu'(\alpha) = -\frac{\epsilon(\alpha + \pi/2)}{\epsilon(\alpha)}$$

$$\nu'(\alpha) = -\frac{\sin^2(2\alpha) \left(\frac{1}{E_x} + \frac{1}{E_y} - \frac{1}{G} \right)}{\frac{1}{E_x} + \frac{1}{E_y} + \frac{1}{G} + 2 \cos(2\alpha) \left(\frac{1}{E_x} - \frac{1}{E_y} \right) + \cos^2(2\alpha) \left(\frac{1}{E_x} + \frac{1}{E_y} - \frac{1}{G} \right)}$$

Lorsque \vec{n}_α coïncide avec les directions des éléments, c'est-à-dire $\alpha = n\pi/2$ avec n entier, alors $\nu' = 0$. Dans ce cas, les efforts de traction sont repris soit uniquement par les planchers, soit uniquement par les murs et la cellule n'est déformée que dans la direction \vec{n}_α . Pour les directions où $\sin^2(2\alpha)$ est suffisamment grand, nous pouvons faire un développement limité de ν' :

$$\sin^2(2\alpha) > \max \left(\frac{G}{E_x}, \frac{G}{E_y} \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\nu'(\alpha) = 1 - \frac{2G}{\sin^2(2\alpha)} \left(\frac{1}{E_x} + \frac{1}{E_y} + \cos(2\alpha) \left(\frac{1}{E_x} - \frac{1}{E_y} \right) \right) + o \left(\frac{G}{E_x} \right)$$

Le premier terme de ce développement vaut 1 ce qui est équivalent à un coefficient de Poisson de 1/2. De plus, il est indépendant de la direction de la sollicitation \vec{n}_α pour tout le domaine de validité du développement limité. L'anisotropie du milieu se manifeste dans le terme correctif qui est d'ordre ϵ^2 . Le coefficient ν' est représenté sur la figure 2.11 pour une structure avec des murs et des planchers identiques et $E_x/G = E_y/G = 1\,000$.

Conditions aux limites

Pour que l'analogie avec la mécanique des milieux continus soit complète, il reste à définir les conditions aux limites. Ces dernières peuvent porter soit sur les déplacements, soit sur les efforts. Par contre, les variables cinématiques étant définies à partir des variables nodales, le milieu continu équivalent ne peut vérifier que des conditions au niveau des nœuds et pas au niveau des éléments. C'est une première différence par rapport à la structure discrète. Dans ce paragraphe, nous construisons les conditions aux limites pour un échantillon rectangulaire dont les

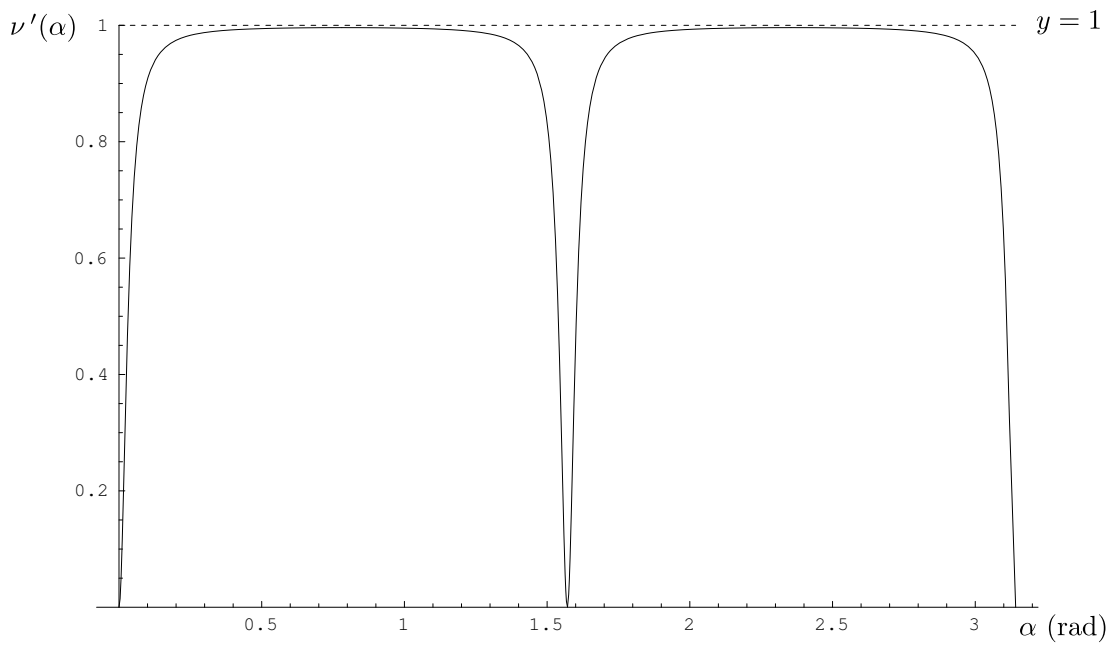
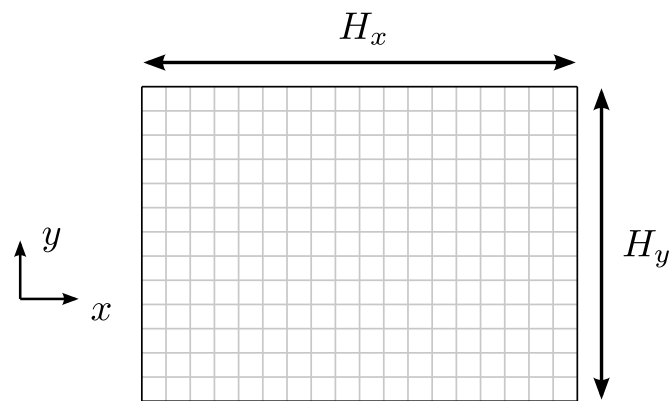
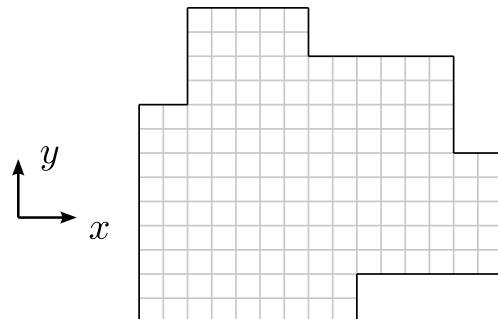


FIGURE 2.11 – Pseudo coefficient de Poisson en fonction de la direction de la sollicitation pour $E_x/G = E_y/G = 1\ 000$



(a) Échantillon étudié



(b) Autre échantillon possible

FIGURE 2.12 – Géométries pour lesquelles sont définies les conditions aux limites

frontières sont parallèles aux directions des éléments. Les dimensions de l'échantillon sont H_x dans la direction x et H_y dans la direction y (figure 2.12(a)). Les résultats se généralisent aisément à des géométries plus compliquées du moment que les frontières sont parallèles aux directions des éléments (figure 2.12(b)).

Comme dans (Hans et Boutin, 2008), les conditions aux limites à appliquer au milieu continu équivalent à l'échelle macroscopique sont obtenues en écrivant son équilibre énergétique. Pour cela, nous repartons des équations d'équilibre fournies par la méthode HMPD. Nous traitons de nouveau le cas où $\omega = O(\epsilon \omega_r)$ mais les conditions aux limites ne dépendent que des propriétés du milieu macroscopique et pas de la fréquence. Les résultats sont donc valables pour toutes les fréquences qui vérifient la condition de quasi-statisme local. Lorsque $\omega = O(\epsilon \omega_r)$, les termes d'inertie apparaissent dans les équations d'ordre 2. Si les conditions aux limites sont les mêmes pour les ordres 0 et 1, ces deux ordres sont décrits par les mêmes équations. Il n'est donc pas nécessaire de les distinguer et l'ordre 1 ne sera plus évoqué pas la suite. Les équations de bilans des ordres 0 et 2 sont rappelées ci-dessous. L'équation de bilan des moments a été utilisée pour remplacer la rotation des nœuds $\tilde{\theta}^0$ par son expression en fonction des gradients des déplacements.

$$\begin{cases} E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^0}{\partial x^2} = 0 & (x\ 0) \\ E_y \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^0}{\partial y^2} = 0 & (y\ 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^2}{\partial x^2} + G \left(\frac{\partial^2 \tilde{U}_y^0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^0}{\partial y^2} \right) + M_s \omega^2 \tilde{U}_x^0 = 0 & (x\ 2) \\ E_y \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^2}{\partial y^2} + G \left(\frac{\partial^2 \tilde{U}_y^0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^0}{\partial x \partial y} \right) + M_s \omega^2 \tilde{U}_y^0 = 0 & (y\ 2) \end{cases}$$

L'énergie à l'ordre 0 est obtenue en multipliant l'équation (x 0) par $\frac{1}{2} \tilde{U}_x^0$ et l'équation (y 0) par $\frac{1}{2} \tilde{U}_y^0$ puis en intégrant sur la surface Σ du milieu. Après intégration par parties, l'équation (x 0) devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^0}{\partial x^2} \tilde{U}_x^0 \, dx \, dy \\ = \frac{1}{2} \int_{y=0}^{H_y} \left[E_x \frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial x} \tilde{U}_x^0 \right]_{x=0}^{H_x} dy - \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} E_x \left(\frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial x} \right)^2 \, dx \, dy = 0 \end{aligned}$$

De même, l'équation (y 0) devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} E_y \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^0}{\partial y^2} \tilde{U}_y^0 \, dx \, dy \\ = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{H_x} \left[E_y \frac{\partial \tilde{U}_y^0}{\partial y} \tilde{U}_y^0 \right]_{y=0}^{H_y} dx - \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} E_y \left(\frac{\partial \tilde{U}_y^0}{\partial y} \right)^2 \, dx \, dy = 0 \end{aligned}$$

Finalement, la somme des deux équations donne :

$$\begin{aligned}
 & \text{énergie élastique} \\
 & \overbrace{\frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \left(E_x \left(\frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial x} \right)^2 + E_y \left(\frac{\partial \tilde{U}_y^0}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy} \\
 & \quad - \underbrace{\frac{1}{2} \int_{y=0}^{H_y} \left[E_x \frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial x} \tilde{U}_x^0 \right]_{x=0}^{H_x} dy - \frac{1}{2} \int_{x=0}^{H_x} \left[E_y \frac{\partial \tilde{U}_y^0}{\partial y} \tilde{U}_y^0 \right]_{y=0}^{H_y} dx}_{\text{travail des conditions aux limites}} = 0 \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

Nous obtenons l'équilibre entre l'énergie élastique due aux déformations d'extension dans les axes des éléments et le travail des conditions aux limites. Sans surprise, la contrainte normale dans la direction x travaille avec \tilde{U}_x^0 et la contrainte normale dans la direction y travaille avec \tilde{U}_y^0 . Il n'y a pas d'énergie cinétique car le mécanisme de traction-compression est en quasi-statique pour la gamme de fréquences étudiées.

A priori, l'énergie d'ordre 2 est obtenue en faisant la somme des équations d'ordre 0 multipliées par $\frac{1}{2} \vec{U}^2$ et de celles d'ordre 2 multipliées par $\frac{1}{2} \vec{U}^0$. Mais comme chacune de ces contributions est nulle, elles peuvent être étudiées de façon indépendante. La somme des équations d'ordre 0 donne :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \left(E_x \frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial x} \frac{\partial \tilde{U}_x^2}{\partial x} + E_y \frac{\partial \tilde{U}_y^0}{\partial y} \frac{\partial \tilde{U}_y^2}{\partial y} \right) dx dy \\
 & \quad - \frac{1}{2} \int_{y=0}^{H_y} \left[E_x \frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial x} \tilde{U}_x^2 \right]_{x=0}^{H_x} dy - \frac{1}{2} \int_{x=0}^{H_x} \left[E_y \frac{\partial \tilde{U}_y^0}{\partial y} \tilde{U}_y^2 \right]_{y=0}^{H_y} dx = 0 \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

Après intégration par parties, la somme des équations d'ordre 2 devient :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} M_s \omega^2 (\vec{U}^0)^2 dx dy - \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} G \left(\frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{U}_y^0}{\partial x} \right)^2 dx dy \\
 & \quad + \frac{1}{2} \left(\int_{y=0}^{H_y} \left[G \left(\frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{U}_y^0}{\partial x} \right) \tilde{U}_y^0 \right]_{x=0}^{H_x} dy + \int_{x=0}^{H_x} \left[G \left(\frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{U}_y^0}{\partial x} \right) \tilde{U}_x^0 \right]_{y=0}^{H_y} dx \right) \\
 & \quad - \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \left(E_x \frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial x} \frac{\partial \tilde{U}_x^2}{\partial x} + E_y \frac{\partial \tilde{U}_y^0}{\partial y} \frac{\partial \tilde{U}_y^2}{\partial y} \right) dx dy \\
 & \quad + \frac{1}{2} \left(\int_{y=0}^{H_y} \left[E_x \frac{\partial \tilde{U}_x^2}{\partial x} \tilde{U}_x^0 \right]_{x=0}^{H_x} dy + \int_{x=0}^{H_x} \left[E_y \frac{\partial \tilde{U}_y^2}{\partial y} \tilde{U}_y^0 \right]_{y=0}^{H_y} dx \right) = 0
 \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (2.19) pour éliminer la contribution croisée de \vec{U}^0 et \vec{U}^2 à

l'énergie élastique, nous obtenons :

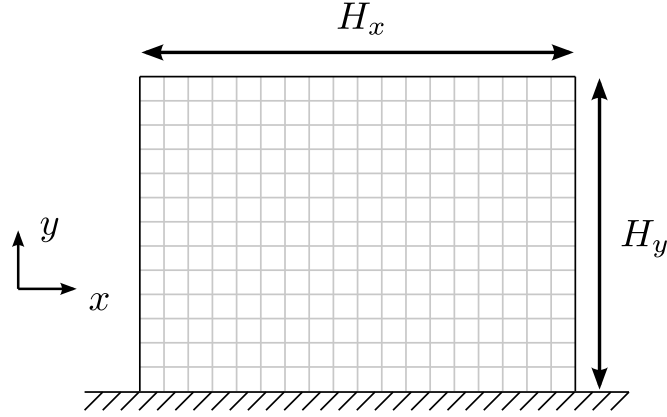
$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} M_s \omega^2 (\vec{U}^0)^2 dx dy - \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} G \left(\frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{U}_y^0}{\partial x} \right)^2 dx dy \\
 & + \frac{1}{2} \left(\int_{y=0}^{H_y} \left[G \left(\frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{U}_y^0}{\partial x} \right) \tilde{U}_y^0 \right]_{x=0}^{H_x} dy + \int_{x=0}^{H_x} \left[G \left(\frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{U}_y^0}{\partial x} \right) \tilde{U}_x^0 \right]_{y=0}^{H_y} dx \right) \\
 & + \frac{1}{2} \left(\int_{y=0}^{H_y} \left[E_x \frac{\partial \tilde{U}_x^2}{\partial x} \tilde{U}_x^0 - E_x \frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial x} \tilde{U}_x^2 \right]_{x=0}^{H_x} dy \right. \\
 & \quad \left. + \int_{x=0}^{H_x} \left[E_y \frac{\partial \tilde{U}_y^2}{\partial y} \tilde{U}_y^0 - E_y \frac{\partial \tilde{U}_y^0}{\partial y} \tilde{U}_y^2 \right]_{y=0}^{H_y} dx \right) = 0 \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

Il s'agit de l'équilibre entre l'énergie cinétique due à \vec{U}^0 , l'énergie élastique due à la distorsion et le travail des conditions aux limites. Celui-ci regroupe le travail de \vec{U}^0 avec les contraintes tangentielles générées par \vec{U}^0 , le travail de \vec{U}^0 avec les contraintes normales générées par \vec{U}^2 et le travail de \vec{U}^2 avec les contraintes normales générées par \vec{U}^0 .

Les conditions aux limites que doit vérifier le milieu macroscopique sont celles qui apparaissent dans son équilibre énergétique. Ainsi, ce sont soit des conditions en déplacement qui portent sur les différents ordres de \vec{U} , soit des conditions en contraintes qui portent sur les dérivées de \vec{U} . Dans toutes ces expressions, la rotation des nœuds θ n'intervient pas. En effet, nous avons constaté qu'il s'agit d'une variable cachée qui n'émerge pas dans la description macroscopique. Grâce à l'équation d'équilibre en moments (m_0) qui décrit l'équilibre interne de la cellule, $\tilde{\theta}^0$ est complètement déterminée à partir de \vec{U}^0 . Il est donc impossible pour le milieu macroscopique de vérifier des conditions spécifiques sur θ .

Il est courant en homogénéisation d'obtenir des modèles qui ne peuvent pas vérifier toutes les conditions aux limites (Buannic et Cartraud, 2001b; Verna, 1991). Cela vient du fait que le milieu macroscopique ne prend en compte que les mécanismes prépondérants dans la structure et a moins de degrés de liberté que la réalité. Dans notre cas, cela signifie que, quelles que soient les conditions aux limites réelles sur θ , elles n'influencent pas le comportement global de la structure. Par contre, elles jouent à l'échelle locale sur les déformations des cellules situées sur le pourtour de la structure. Si le but de l'étude est de déterminer le comportement global, le modèle homogénéisé et les conditions aux limites définies par l'équation (2.20) sont suffisants. Mais pour pouvoir revenir à l'échelle locale, toutes les conditions aux limites doivent être prises en compte. Cela n'est possible qu'en ajoutant des couches limites qui affectent la structure sur une faible profondeur.

Nous allons maintenant montrer sur un exemple comment utiliser ces conditions aux limites. Nous traitons le cas d'un échantillon encastré en $y = 0$ et libre sur les trois autres côtés (figure 2.13). Comme il n'y a pas de forces extérieures, ce problème consiste à trouver les modes propres de la structure. La pulsation est donc une inconnue qui doit être cherchée sous la forme d'un développement


 FIGURE 2.13 – Exemple traité : encastrement en $y = 0$ et trois bords libres

asymptotique :

$$\omega = \omega_0 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots \quad \text{avec} \quad \omega_0 = O(\epsilon \omega_r)$$

Nous nous intéressons toujours à la gamme de pulsations telle que $\omega_0 = O(\epsilon \omega_r)$. Ainsi, le premier terme d'inertie apparaît dans les équations d'ordre 2. Les équations d'ordres 0 et 2 qui servent à trouver le champ de déplacement macroscopique ne sont pas modifiées par le développement de la pulsation.

La forme générale de \vec{U}^0 se déduit des équations d'ordre 0 :

$$\begin{cases} E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^0}{\partial x^2} = 0 \\ E_y \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^0}{\partial y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{U}^0 = \begin{pmatrix} A(y) x + B(y) \\ C(x) y + D(x) \end{pmatrix}$$

Les fonctions $A(y)$, $B(y)$, $C(x)$ et $D(x)$ dépendent des conditions aux limites. D'après l'équation (2.18), les conditions sur les bords horizontaux portent soit sur \tilde{U}_y^0 , soit sur $\sigma_{yy}(\vec{U}^0) = E_y \partial_y \tilde{U}_y^0 = E_y C(x)$:

$$\begin{aligned} y = 0 : \text{encastrement} &\Rightarrow \forall x \quad \tilde{U}_y^0 = 0 &\Rightarrow D(x) = 0 \\ y = H_y : \text{bord libre} &\Rightarrow \forall x \quad \sigma_{yy}(\vec{U}^0) = 0 &\Rightarrow C(x) = 0 \end{aligned}$$

Donc en tout point du milieu continu équivalent, nous avons $\tilde{U}_y^0 = 0$. De la même manière, les conditions sur les bords verticaux portent soit sur \tilde{U}_x^0 , soit sur $\sigma_{xx}(\vec{U}^0) = E_x \partial_x \tilde{U}_x^0 = E_x A(y)$. Pour la structure étudiée, les deux bords verticaux sont des bords libres donc $A(y) = 0$. Dans ce cas, les équations d'ordre 0 ne suffisent pas pour déterminer complètement \vec{U}^0 mais elles lui imposent une forme particulière :

$$\vec{U}^0 = \begin{pmatrix} B(y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Cela permet de simplifier énormément l'équation (2.20) qui exprime l'équilibre

énergétique de la structure à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} M_s \omega^2 (\tilde{U}_x^0)^2 dx dy - \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} G \left(\frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial y} \right)^2 dx dy \\ & + \frac{1}{2} \left(\int_{x=0}^{H_x} \left[G \frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial y} \tilde{U}_x^0 \right]_{y=0}^{H_y} dx + \int_{y=0}^{H_y} \left[E_x \frac{\partial \tilde{U}_x^2}{\partial x} \tilde{U}_x^0 \right]_{x=0}^{H_x} dy \right) = 0 \quad (2.22) \end{aligned}$$

Nous retrouvons l'énergie cinétique, l'énergie élastique due à la distorsion mais le nombre de conditions aux limites qui travaillent a diminué. La contribution de \tilde{U}_y^2 a disparu et surtout, la contrainte tangentielle sur les bords verticaux ne travaille plus. La contrainte tangentielle n'a donc pas besoin de vérifier les conditions aux limites sur les bords verticaux, ce qui de toute façon est impossible car elle ne dépend que de y :

$$\sigma_{xy}(\vec{U}^0) = G(\partial_x \tilde{U}_y^0 + \partial_y \tilde{U}_x^0) = G B'(y)$$

Il n'y a plus qu'à vérifier que les équations d'équilibre d'ordre 2 et les conditions aux limites restantes permettent effectivement de déterminer \tilde{U}_x^0 . D'après l'équation (2.22), les conditions doivent porter :

- sur la contrainte normale $\sigma_{xx}(\vec{U}^2) = E_x \partial_x \tilde{U}_x^2$ pour les bords verticaux,
- soit sur \tilde{U}_x^0 , soit sur la contrainte tangentielle $\sigma_{xy}(\vec{U}^0) = G B'(y)$ pour les bords horizontaux.

En utilisant (2.21), l'équation (x 2) s'écrit :

$$E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^2}{\partial x^2} + G B''(y) + M_s \omega_0^2 B(y) = 0$$

Nous en déduisons que $\partial_x^2 \tilde{U}_x^2$ ne dépend que de y donc la contrainte normale générée par \vec{U}^2 est de la forme : $\sigma_{xx}(\vec{U}^2) = E_x \partial_x \tilde{U}_x^2 = E_x (F(y)x + G(y))$. Les deux bords verticaux étant des bords libres, cette contrainte doit s'annuler en $x = 0$ et en $x = H_x$. Elle est donc nulle partout et $\partial_x^2 \tilde{U}_x^2 = 0$. Ainsi, l'équation (x 2) est une équation différentielle de degré 2 en $B(y)$:

$$G B''(y) + M_s \omega_0^2 B(y) = 0 \quad (2.23)$$

Elle a besoin de deux conditions aux limites pour sa résolution :

$$\begin{aligned} y = 0 : \text{encastrement} & \quad \Rightarrow \quad \tilde{U}_x^0 = 0 & \quad \Rightarrow \quad B(0) = 0 \\ y = H_y : \text{bord libre} & \quad \Rightarrow \quad \sigma_{xy}(\vec{U}^0) = 0 & \quad \Rightarrow \quad B'(H_y) = 0 \end{aligned}$$

La résolution de ce problème ne pose aucune difficulté. Nous nous arrêtons ici car cela sort du cadre du chapitre 2 qui est consacré à la propagation des ondes plutôt qu'à la recherche des modes propres. Nous verrons dans le chapitre 3 que l'équation (2.23) a la même forme que l'équation qui décrit les vibrations transversales des poutres de cisaillement.

Cette étude montre une nouvelle fois que les modèles homogénéisés ne peuvent pas vérifier toutes les conditions aux limites mais seulement celles qui pilotent le

comportement global. L'écriture de l'équilibre énergétique du milieu macroscopique est un outil efficace pour les identifier.

L'originalité du milieu étudié est que les conditions aux limites à prendre en compte dépendent du cas traité. Cela est dû au fort contraste entre les rigidités des deux mécanismes (traction-compression dans les axes des éléments et cisaillement) qui oblige à résoudre des équations d'ordres différents pour obtenir le champ de déplacement macroscopique. Les conditions aux limites à prendre en compte à l'ordre 0 sont toujours les mêmes mais celles qui travaillent dans les équations d'ordre supérieur se déduisent de la résolution des ordres inférieurs.

2.2.2 $\omega = O(\epsilon \omega_r)$: ondes de cisaillement

Après avoir utilisé les équations d'équilibre fournies par la méthode HMPD pour construire une analogie avec la mécanique des milieux continus, nous allons maintenant les résoudre. Pour cela, nous faisons abstraction des conditions aux limites et nous nous intéressons à la propagation des ondes dans une structure infinie. Lors de la mise en œuvre de la méthode HMPD, nous avons constaté qu'un régime de propagation d'ondes macroscopiques peut être obtenu pour deux ordres de grandeur de la pulsation différents (page 26). Nous commençons par la gamme de pulsations la plus basse, c'est-à-dire :

$$\omega = O(\epsilon \omega_r) \quad \text{avec} \quad \omega_r = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{E_m}{\rho_m}}$$

Équations d'équilibre

Les équations d'équilibre ont déjà été présentées dans la partie 2.2.1. Les bilans des efforts selon les directions x et y pour les ordres 0, 1, et 2 sont rappelés ci-dessous en utilisant les notations qui avaient alors été introduites. L'équation de bilan des moments a été utilisée pour remplacer la rotation des nœuds θ^0 par son expression en fonction des gradients des déplacements.

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^0}{\partial x^2} = 0 \end{array} \right. \quad (x0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^1}{\partial x^2} = 0 \end{array} \right. \quad (x1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^2}{\partial x^2} + G \left(\frac{\partial^2 \tilde{U}_y^0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^0}{\partial y^2} \right) + M_s \omega^2 \tilde{U}_x^0 = 0 \end{array} \right. \quad (x2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_y \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^0}{\partial y^2} = 0 \end{array} \right. \quad (y0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_y \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^1}{\partial y^2} = 0 \end{array} \right. \quad (y1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_y \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^2}{\partial y^2} + G \left(\frac{\partial^2 \tilde{U}_y^0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^0}{\partial x \partial y} \right) + M_s \omega^2 \tilde{U}_y^0 = 0 \end{array} \right. \quad (y2)$$

Ces équations sont réécrites en utilisant la décomposition d'Helmholtz introduite dans la partie 2.1.5 (équations (2.13) page 31) puis simplifiées par i . Les nouvelles équations reprennent le nom des équations dont elles sont issues muni d'un « ' ».

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x (\tilde{k}^0)^3 \cos^2(\alpha) \tilde{u}_x^0 = 0 \end{array} \right. \quad (x0)'$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_y (\tilde{k}^0)^3 \sin^2(\alpha) \tilde{u}_y^0 = 0 \end{array} \right. \quad (y0)'$$

$$\begin{cases} E_x \cos^2(\alpha) \left[(\tilde{k}^0)^3 \tilde{u}_x^1 + 3 (\tilde{k}^0)^2 \tilde{k}^1 \tilde{u}_x^0 \right] = 0 & (x1)' \\ E_y \sin^2(\alpha) \left[(\tilde{k}^0)^3 \tilde{u}_y^1 + 3 (\tilde{k}^0)^2 \tilde{k}^1 \tilde{u}_y^0 \right] = 0 & (y1)' \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_x \cos^2(\alpha) \left[(\tilde{k}^0)^3 \tilde{u}_x^2 + 3 (\tilde{k}^0)^2 \tilde{k}^1 \tilde{u}_x^1 + \left(3 \tilde{k}^0 (\tilde{k}^1)^2 + 3 (\tilde{k}^0)^2 \tilde{k}^2 \right) \tilde{u}_x^0 \right] \\ \quad + G \sin(\alpha) (\tilde{k}^0)^3 \left[\cos(\alpha) \tilde{u}_y^0 + \sin(\alpha) \tilde{u}_x^0 \right] - M_s \omega^2 \tilde{k}^0 \tilde{u}_x^0 = 0 & (x2)' \\ E_y \sin^2(\alpha) \left[(\tilde{k}^0)^3 \tilde{u}_y^2 + 3 (\tilde{k}^0)^2 \tilde{k}^1 \tilde{u}_y^1 + \left(3 \tilde{k}^0 (\tilde{k}^1)^2 + 3 (\tilde{k}^0)^2 \tilde{k}^2 \right) \tilde{u}_y^0 \right] \\ \quad + G \cos(\alpha) (\tilde{k}^0)^3 \left[\cos(\alpha) \tilde{u}_x^0 + \sin(\alpha) \tilde{u}_y^0 \right] - M_s \omega^2 \tilde{k}^0 \tilde{u}_y^0 = 0 & (y2)' \end{cases}$$

Remarquons que des termes d'ordre différent, c'est-à-dire \tilde{u}^0 , \tilde{u}^1 et \tilde{u}^2 peuvent apparaître dans la même équation. Ce phénomène a deux causes. La première est formelle. À cause du développement du nombre d'onde, les termes des équations d'ordre 0 et 1 réapparaissent dans les équations d'ordre supérieur. La seule différence est que \tilde{k}^0 est remplacé par une combinaison des différents \tilde{k}^j . Comme nous n'avons pas développé le terme $\exp[-i k(\vec{n}_\alpha) \vec{n}_\alpha \cdot \vec{x}]$, la combinaison des différents \tilde{k}^j est probablement incorrecte. Cependant, les équations d'ordre 0 et 1 étant nulles indépendamment de la valeur de \tilde{k}^0 , les termes des équations d'ordre supérieur sont automatiquement nuls et il n'est pas nécessaire de connaître l'expression exacte de leur coefficient. La deuxième cause est liée à la nature de la structure et a déjà été commentée au paragraphe précédent : le module de cisaillement étant petit par rapport aux modules d'extension, les contraintes de cisaillement générées par \vec{U}^0 sont équilibrées par les contraintes normales générées par \vec{U}^2 . Cependant, nous verrons que les différents ordres se découpent à la résolution.

Nous allons maintenant chercher les solutions de ces équations en fonction de la direction de propagation \vec{n}_α (figure 2.5 page 30). Nous rappelons que l'axe x du repère correspond à la direction des planchers et l'axe y à la direction des murs.

Propagation en dehors des axes du repère

Dans ce cas, $\cos(\alpha) \neq 0$ et $\sin(\alpha) \neq 0$. Les équations $(x0)'$ et $(y0)'$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_x^0 &= \tilde{\varphi}^0 \cos(\alpha) + \tilde{\psi}^0 \sin(\alpha) = 0 & (x0)' \\ \tilde{u}_y^0 &= \tilde{\varphi}^0 \sin(\alpha) - \tilde{\psi}^0 \cos(\alpha) = 0 & (y0)' \end{aligned}$$

Le déterminant de ce système étant égal à -1 , la seule possibilité est $\tilde{\varphi}^0 = \tilde{\psi}^0 = 0$. Donc aucune onde ne peut se propager en diagonale dans ce type de milieu pour une pulsation d'ordre $\omega = O(\epsilon \omega_r)$. La structure a encore un comportement quasi-statique.

Propagation selon l'axe y

Ce cas correspond à $\alpha = \pi/2 + n\pi$ avec n entier donc :

$$\cos(\alpha) = 0 \quad \sin(\alpha) = \pm 1 \quad \tilde{u}_x^0 = \pm \tilde{\psi}^0 \quad \tilde{u}_y^0 = \pm \tilde{\varphi}^0$$

L'équation $(x0)'$ est alors trivialement vérifiée et l'équation $(y0)'$ impose $\tilde{\varphi}^0 = 0$. Ainsi, seules des ondes de cisaillement pur peuvent exister à cette fréquence : la propagation se fait selon l'axe y et les déplacements sont parallèles à l'axe x .

$$\tilde{u}_x^0 = \tilde{\psi}^0 \sin(\alpha) \quad \text{et} \quad \tilde{u}_y^0 = 0$$

De même, l'équation $(x1)'$ est trivialement vérifiée et l'équation $(y1)'$ impose $\tilde{\varphi}^1 = 0$:

$$\tilde{u}_x^1 = \tilde{\psi}^1 \sin(\alpha) \quad \text{et} \quad \tilde{u}_y^1 = 0$$

Les caractéristiques de ce mode de propagation sont établies à partir des équations d'ordre 2 :

$$\tilde{\psi}^0 \tilde{k}^0 \left[G (\tilde{k}^0)^2 - M_s \omega^2 \right] = 0 \quad (x2)'$$

$$E_y (\tilde{k}^0)^3 \tilde{\varphi}^2 = 0 \quad (y2)'$$

Cet exemple illustre bien le découplage entre les différents ordres puisque l'équation $(x2)'$ ne contient plus que des termes d'ordre 0 et l'équation $(y2)'$ que des termes d'ordre 2. L'équation $(y2)'$ impose de nouveau $\tilde{\varphi}^2 = 0$:

$$\tilde{u}_x^2 = \tilde{\psi}^2 \sin(\alpha) \quad \text{et} \quad \tilde{u}_y^2 = 0$$

L'équation $(x2)'$ permet de calculer le nombre d'onde : $\tilde{k}^0 = \omega \sqrt{\frac{M_s}{G}}$ où M_s est la masse surfacique et G le module de cisaillement définis dans le paragraphe 2.2.1 :

$$G = \frac{G_m G_p}{G_m + G_p} \quad \text{avec} \quad G_p = 12 \frac{E_p I_p}{\ell_m \ell_p^2} \quad \text{et} \quad G_m = 12 \frac{E_m I_m}{\ell_m^2 \ell_p}$$

Vérifions au passage que, pour une fréquence plus basse, il n'y a plus de propagation d'onde à l'échelle macroscopique. En effet, si le terme inertiel $M_s \omega^2$ de l'équation $(x2)'$ est relégué à un ordre supérieur alors le terme élastique n'est plus équilibré et $\tilde{\psi}^0 = 0$.

Propagation selon l'axe x

Les résultats sont similaires à ceux du paragraphe précédent en inversant les rôles de x et y .

Ce cas correspond à $\alpha = n\pi$ avec n entier donc :

$$\cos(\alpha) = \pm 1 \quad \sin(\alpha) = 0 \quad \tilde{u}_x^0 = \pm \tilde{\varphi}^0 \quad \tilde{u}_y^0 = \pm \tilde{\psi}^0$$

Les équations $(y0)'$ et $(y1)'$ sont trivialement vérifiées et les équations $(x0)'$, $(x1)'$ et $(x2)'$ imposent $\tilde{\varphi}^0 = \tilde{\varphi}^1 = \tilde{\varphi}^2 = 0$. Là encore, seules des ondes de cisaillement pur peuvent se propager et les déplacements sont parallèles à l'axe y .

$$\tilde{u}_x^0 = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{u}_y^0 = -\tilde{\psi}^0 \cos(\alpha)$$

$$\tilde{u}_x^1 = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{u}_y^1 = -\tilde{\psi}^1 \cos(\alpha)$$

$$\tilde{u}_x^2 = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{u}_y^2 = -\tilde{\psi}^2 \cos(\alpha)$$

L'équation $(y2)'$ donne la même valeur du nombre d'onde que dans l'autre direction de propagation :

$$\tilde{\psi}^0 \tilde{k}^0 \left[-G (\tilde{k}^0)^2 + M_s \omega^2 \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{k}^0 = \omega \sqrt{\frac{M_s}{G}}$$

Conclusion

À basses fréquences, il ne peut exister dans ce type de milieu que des ondes de *cisaillement pur* qui se propagent *soit dans la direction des planchers* (figure 2.14), *soit dans la direction des murs*. Cela n'est pas surprenant car le cisaillement est le mécanisme le plus souple dans ce matériau. Malgré l'anisotropie, le nombre d'onde k et la vitesse de propagation c sont identiques dans les deux directions. De plus, leur expression a la même forme que dans le cas d'un milieu continu usuel, c'est-à-dire que le carré de la vitesse est égal au module de cisaillement divisé par la masse surfacique.

$$\tilde{k}^0 = \omega \sqrt{\frac{M_s}{G}} = \frac{\omega}{c} \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{\frac{G}{M_s}}$$

$$G = \frac{G_m G_p}{G_m + G_p} \quad \text{avec} \quad G_p = 12 \frac{E_p I_p}{\ell_m \ell_p^2} \quad \text{et} \quad G_m = 12 \frac{E_m I_m}{\ell_m^2 \ell_p}$$

Ces ondes de cisaillement, observées à l'échelle macroscopique, sont dues à la *flexion locale des éléments* (figure 2.7 page 36).

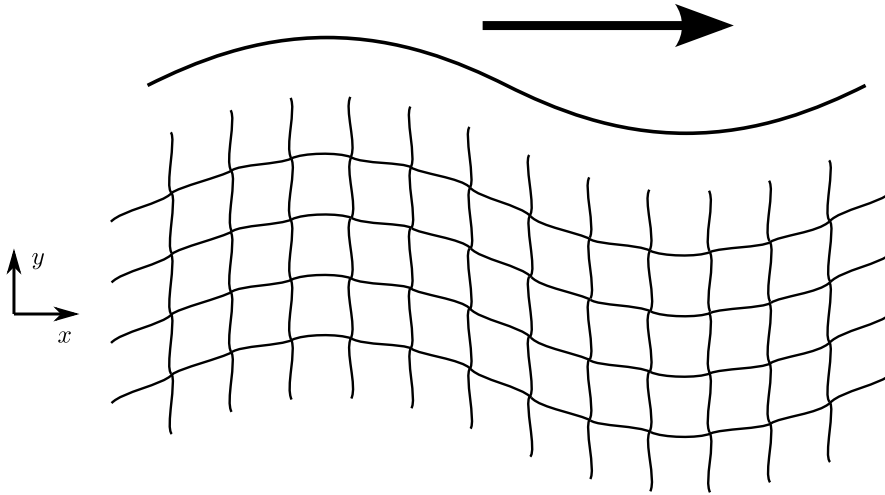


FIGURE 2.14 – Onde de cisaillement se propageant selon x

Examinons maintenant la propagation des ondes à une fréquence plus élevée permettant d'exciter le mécanisme de compression des éléments.

2.2.3 $\omega = O(\omega_r)$: ondes de compression

Nous étudions ici la deuxième gamme de pulsations que nous avons trouvée lors de la mise en œuvre de la méthode HMPD (page 26) :

$$\omega = O(\omega_r) \quad \text{avec} \quad \omega_r = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{E_m}{\rho_m}}$$

Dans ce cas, les forces d'inertie équilibrent les forces de traction-compression dans les éléments. De plus, la condition de quasi-staticisme local n'est plus vérifiée pour la flexion. Nous rappelons ci-dessous ce que cela signifie et les modifications à apporter à la méthode HMPD.

Dans la partie 2.1.2, nous avons vu que les efforts nodaux (équations (2.1) page 18) s'écrivent avec des fonctions trigonométriques qui dépendent de $\chi\ell$ pour l'effort normal et de $\beta\ell$ pour l'effort tranchant et le moment fléchissant. Rappelons que ℓ est la longueur de l'élément et que les paramètres χ et β sont définis par :

$$\chi = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{E}} = \frac{2\pi}{\lambda_c} \quad \text{et} \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{EI}} = \frac{2\pi}{\lambda_f}$$

λ_c désigne la longueur de l'onde de compression et λ_f la longueur de l'onde de flexion dans un élément pour une pulsation donnée.

Or, pour une pulsation d'ordre $O(\omega_r)$, nous avons $\beta\ell = O(1)$ et $\chi\ell = O(\epsilon)$. Dans les éléments sollicités en flexion, la longueur d'onde λ_f est donc du même ordre de grandeur que leur longueur ℓ et ces éléments peuvent entrer en résonance. Par contre, dans les éléments qui sont sollicités en compression, la longueur d'onde λ_c reste bien plus grande que leur longueur. Sur les deux mécanismes qui coexistent dans ce type de structures, il y en a donc un qui est en équilibre dynamique à l'échelle locale alors que l'autre est encore en équilibre quasi-statique. Cela est suffisant pour appliquer la méthode HMPD. Ainsi le comportement de la structure est encore homogénéisable à cette fréquence pour tout ce qui concerne le mécanisme de compression. Par contre, il n'est plus possible de remplacer la structure par un milieu continu équivalent lorsqu'elle est sollicitée en cisaillement pur.

Remarquons qu'à cette fréquence, la traction-compression des éléments provoque obligatoirement la résonance en flexion. En effet, la propagation d'ondes de compression dans les planchers excite les modes de flexion des murs et vice versa (figures 2.15). Il va donc falloir tenir compte de ce phénomène de résonance interne dans la mise en œuvre de la méthode HMPD.

Même si la longueur d'onde en flexion λ_f est de l'ordre de grandeur de la longueur des éléments ℓ , elle reste très supérieure à leur épaisseur a . Dans ces conditions, il est toujours possible de modéliser les éléments par des poutres. La première étape de discrétisation de l'équilibre dynamique du système n'est donc pas modifiée : les équations d'équilibre de la structure discrète sont encore valables.

Par contre, la condition de quasi-staticisme local n'est que partiellement vérifiée, et il faut en tenir compte lors du développement des efforts nodaux. Pour l'effort

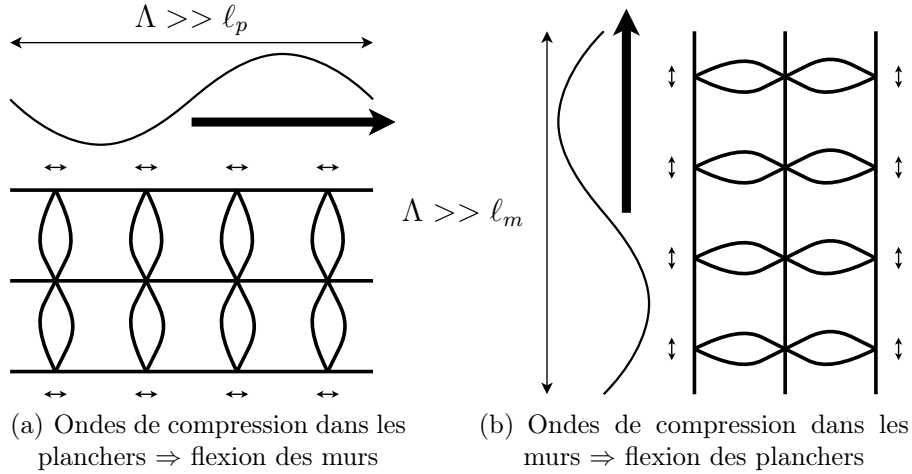


FIGURE 2.15 – Mise en résonance des éléments par des ondes de compression

tranchant et le moment fléchissant, $\beta\ell = O(1)$ donc il n'est plus possible de remplacer les fonctions trigonométriques par leur développement limité. Nous sommes obligés de garder telles quelles les expressions de la page 18. Pour l'effort normal, $\chi\ell = O(\epsilon)$ donc les développements restent valables. Les efforts à l'origine des éléments deviennent :

$$N^D = \frac{EA}{\ell} \left((v^D - v^F) - \frac{(\chi\ell)^2}{6} (2v^D + v^F) - \frac{(\chi\ell)^4}{360} (8v^D + 7v^F) \right) + O((\chi\ell)^6)$$

$$T^D = \frac{EI\beta^3}{1 - \cos(\beta\ell) \operatorname{ch}(\beta\ell)} \left(u^D (\operatorname{ch}(\beta\ell) \sin(\beta\ell) + \operatorname{sh}(\beta\ell) \cos(\beta\ell)) \right. \\ \left. - u^F (\sin(\beta\ell) + \operatorname{sh}(\beta\ell)) + \frac{\theta^D}{\beta} \sin(\beta\ell) \operatorname{sh}(\beta\ell) - \frac{\theta^F}{\beta} (\cos(\beta\ell) - \operatorname{ch}(\beta\ell)) \right)$$

$$M^D = \frac{EI\beta^2}{1 - \cos(\beta\ell) \operatorname{ch}(\beta\ell)} \left(u^D \sin(\beta\ell) \operatorname{sh}(\beta\ell) + u^F (\cos(\beta\ell) - \operatorname{ch}(\beta\ell)) \right. \\ \left. + \frac{\theta^D}{\beta} (\operatorname{ch}(\beta\ell) \sin(\beta\ell) - \operatorname{sh}(\beta\ell) \cos(\beta\ell)) - \frac{\theta^F}{\beta} (\sin(\beta\ell) - \operatorname{sh}(\beta\ell)) \right)$$

La suite de la méthode est inchangée. Elle utilise le ratio d'échelles $\epsilon = \ell_c/L$ où ℓ_c est la taille caractéristique de la cellule et L est la taille caractéristique des déformations macroscopiques. Tant que nous n'avons pas résolu les équations d'équilibre du milieu continu équivalent, L est inconnue. Mais nous supposons que le ratio d'échelles ϵ est un petit paramètre et nous l'utilisons pour définir les différents ordres de grandeur. Ainsi, les trois variables cinématiques sont remplacées par des fonctions continues qui sont écrites sous la forme de développements asymptotiques. Puis les mouvements des quatre nœuds adjacents au nœud étudié sont exprimés grâce à des développements en séries de Taylor. Les caractéristiques des éléments et la pulsation sont ensuite pesées en fonction du ratio d'échelles ϵ . Finalement, tous les développements et les estimations des paramètres sont introduits dans les trois équations d'équilibre de la structure et les différents ordres de grandeur sont séparés.

Comme dans le cas précédent, l'équilibre du milieu continu équivalent est décrit par un système de trois équations différentielles par ordre. Pour cette fréquence plus élevée, le mécanisme de traction-compression des éléments atteint le régime dynamique et c'est lui qui pilote le comportement de la structure. D'autre part, avec la résonance des éléments en flexion, le mécanisme de cisaillement que nous avons identifié à basses fréquences n'a plus de sens à l'échelle macroscopique. Les équations d'ordre 0 sont donc suffisantes pour étudier la propagation des ondes. De plus, certains efforts n'ayant pas été développés, les équations deviennent vite très compliquées. C'est pourquoi, seules les équations d'ordre 0 sont présentées.

Équations d'équilibre

Pour cette fréquence, les trois équations d'équilibre du milieu continu équivalent sont :

$$E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^0}{\partial x^2} + \left(\frac{\bar{\rho}_p}{\ell_m} + \frac{\bar{\rho}_m}{\ell_p} f(\beta_m \ell_m) \right) \omega^2 \tilde{U}_x^0 = 0 \quad (x\ 0)$$

$$E_y \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^0}{\partial y^2} + \left(\frac{\bar{\rho}_m}{\ell_p} + \frac{\bar{\rho}_p}{\ell_m} f(\beta_p \ell_p) \right) \omega^2 \tilde{U}_y^0 = 0 \quad (y\ 0)$$

$$\begin{aligned} & \frac{G_m \beta_m \ell_m}{12 f_P(\beta_m \ell_m)} \left(4 \sin \left(\frac{\beta_m \ell_m}{2} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\beta_m \ell_m}{2} \right) \tilde{\theta}^0 \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \beta_m \ell_m \frac{\operatorname{ch}(\beta_m \ell_m) - \cos(\beta_m \ell_m)}{f_I(\beta_m \ell_m)} \frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial y} \right) \\ & - \frac{G_p \beta_p \ell_p}{12 f_P(\beta_p \ell_p)} \left(-4 \sin \left(\frac{\beta_p \ell_p}{2} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\beta_p \ell_p}{2} \right) \tilde{\theta}^0 \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \beta_p \ell_p \frac{\operatorname{ch}(\beta_p \ell_p) - \cos(\beta_p \ell_p)}{f_I(\beta_p \ell_p)} \frac{\partial \tilde{U}_y^0}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (m\ 0)$$

avec

$$f(\beta \ell) = \frac{4}{\beta \ell f_I(\beta \ell)} \sin \left(\frac{\beta \ell}{2} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\beta \ell}{2} \right)$$

$$f_I(\beta \ell) = \sin \left(\frac{\beta \ell}{2} \right) \operatorname{ch} \left(\frac{\beta \ell}{2} \right) + \operatorname{sh} \left(\frac{\beta \ell}{2} \right) \cos \left(\frac{\beta \ell}{2} \right)$$

$$f_P(\beta \ell) = \sin \left(\frac{\beta \ell}{2} \right) \operatorname{ch} \left(\frac{\beta \ell}{2} \right) - \operatorname{sh} \left(\frac{\beta \ell}{2} \right) \cos \left(\frac{\beta \ell}{2} \right)$$

Le seul paramètre qui n'est pas fixé dans l'expression de β est ω donc en réalité, il s'agit de fonctions qui dépendent de la fréquence de vibrations de la structure. De plus, les fonctions f_I et f_P indiquent que les fréquences des modes propres de flexion des éléments vont jouer un rôle particulier. En effet, l'équation

aux fréquences propres pour les vibrations transversales d'une poutre bi-encastree est :

$$0 = 1 - \cos(\beta\ell) \operatorname{ch}(\beta\ell) = 2 f_I(\beta\ell) \times f_P(\beta\ell) \quad (2.24)$$

où la fonction f_I s'annule pour les fréquences des modes impairs et la fonction f_P s'annule pour les fréquences des modes pairs.

Commençons par regarder les équations d'équilibre $(x0)$ et $(y0)$. Le premier terme est le terme élastique lié à la traction-compression des éléments que nous avons déjà identifié à basses fréquences. Le deuxième terme est le terme d'inertie. Comme prévu, il est remonté dans les équations d'ordre 0 mais il n'a plus tout à fait la même expression que dans le paragraphe 2.2.2. À cause de la résonance des éléments en flexion, une partie de la masse est multipliée par une fonction qui dépend de la fréquence. Dans l'équation $(x0)$, la fonction f intervient dans la contribution des murs. Cela n'est pas surprenant car cette équation traduit l'équilibre entre la traction-compression des planchers et la flexion des murs. De même, l'équation $(y0)$ décrit l'équilibre entre la traction-compression des murs et la flexion des planchers donc c'est la masse des planchers qui est multipliée par f . Il est toujours possible d'écrire le terme d'inertie sous la forme $M\omega^2\vec{U}^0$. Mais maintenant, M n'est plus égal à la masse réelle de la structure. Il s'agit d'une *masse apparente matricielle qui varie avec la fréquence des vibrations*. Dans le repère (x, y) lié aux directions des éléments, la masse apparente s'écrit :

$$M(\omega) = \begin{bmatrix} M^m(\omega) & 0 \\ 0 & M^p(\omega) \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} M^m(\omega) = \frac{\bar{\rho}_p}{\ell_m} + \frac{\bar{\rho}_m}{\ell_p} f(\beta_m \ell_m) \\ M^p(\omega) = \frac{\bar{\rho}_m}{\ell_p} + \frac{\bar{\rho}_p}{\ell_m} f(\beta_p \ell_p) \end{cases}$$

En conséquence, dans le domaine fréquentiel la vitesse des ondes n'est plus constante et dans le domaine temporel le milieu continu équivalent a un comportement à mémoire.

Examinons à présent l'équation d'équilibre en moments $(m0)$. Comme dans le cas précédent, il s'agit d'une équation d'équilibre interne de la cellule qui permet de calculer la rotation des nœuds $\tilde{\theta}^0$ à partir de leur déplacement \vec{U}^0 . À basses fréquences, cette équation exprimait l'égalité des contraintes de cisaillement dans le milieu macroscopique équivalent. Sans surprise, elle est très affectée par la résonance des éléments en flexion : tous les termes sont multipliés par des fonctions qui dépendent de la fréquence. De plus, maintenant les termes élastiques et les termes d'inertie sont du même ordre mais ils ne peuvent plus être dissociés. Néanmoins, la forme générale de l'équation est conservée. C'est la différence entre un terme proportionnel à la rigidité en flexion des murs G_m et un terme proportionnel à la rigidité en flexion des planchers G_p . De plus, lorsque la fréquence tend vers 0 (c'est-à-dire lorsque β_m et β_p tendent vers 0), nous retrouvons l'équation de la partie 2.2.2 :

$$G_m \left(\tilde{\theta}^0 + \frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial y} \right) - G_p \left(-\tilde{\theta}^0 + \frac{\partial \tilde{U}_y^0}{\partial x} \right) = 0$$

Dans un premier temps, nous allons laisser de côté cette équation d'équilibre en moments. En effet, la propagation des ondes est entièrement décrite par les

deux équations d'équilibre en forces (x_0) et (y_0) dans lesquelles la rotation des nœuds $\tilde{\theta}^0$ n'intervient pas. Nous allons supposer les masses apparentes $M^m(\omega)$ et $M^p(\omega)$ positives et résoudre ces équations de façon formelle pour déterminer le type d'onde et l'influence de la direction de propagation α . Puis nous nous intéresserons aux propriétés de la masse apparente. Enfin, nous reviendrons sur l'équation (m_0) qui impose des conditions cinématiques supplémentaires.

Effet de l'anisotropie

Pour étudier la propagation des ondes à cette fréquence, nous utilisons la décomposition d'Helmholtz présentée dans la partie 2.1.5 (page 30). Avec les notations qui avaient été introduites, les déplacements des nœuds s'écrivent :

$$\begin{aligned}\tilde{U}_x^0 &= -i \tilde{k}^0 \left(\tilde{\varphi}^0 \cos(\alpha) + \tilde{\psi}^0 \sin(\alpha) \right) \\ \tilde{U}_y^0 &= -i \tilde{k}^0 \left(\tilde{\varphi}^0 \sin(\alpha) - \tilde{\psi}^0 \cos(\alpha) \right)\end{aligned}$$

et les équations (x_0) et (y_0) deviennent :

$$\begin{aligned}-i \tilde{k}^0 \left(E_x (\tilde{k}^0)^2 \cos^2(\alpha) - M^m(\omega) \omega^2 \right) \left(\tilde{\varphi}^0 \cos(\alpha) + \tilde{\psi}^0 \sin(\alpha) \right) &= 0 & (x_0)' \\ -i \tilde{k}^0 \left(E_y (\tilde{k}^0)^2 \sin^2(\alpha) - M^p(\omega) \omega^2 \right) \left(\tilde{\varphi}^0 \sin(\alpha) - \tilde{\psi}^0 \cos(\alpha) \right) &= 0 & (y_0)'\end{aligned}$$

Comme dans le cas précédent, il ne peut y avoir une solution non nulle que si le déterminant de ce système est nul, c'est-à-dire si :

$$E_x (\tilde{k}^0)^2 \cos^2(\alpha) - M^m(\omega) \omega^2 = 0 \quad (2.25a)$$

$$\text{ou} \quad E_y (\tilde{k}^0)^2 \sin^2(\alpha) - M^p(\omega) \omega^2 = 0 \quad (2.25b)$$

Lorsque c'est l'équation (2.25a) qui est vérifiée, alors $\tilde{U}_y^0 = 0$ et tous les nœuds se déplacent uniquement dans la direction des planchers (figure 2.16(a)). Inversement, lorsque c'est l'équation (2.25b), alors $\tilde{U}_x^0 = 0$ et les déplacements se font exclusivement dans la direction des murs (figure 2.16(b)). Ainsi, quelle que soit la direction de propagation des ondes, la polarisation est imposée par le matériau : soit selon x , soit selon y . Nous parlerons du mode (Px) pour le premier cas et du mode (Py) pour le second.

Il est également possible que les deux équations (2.25) soient vérifiées en même temps. Alors, les déplacements des nœuds peuvent être orientés selon une direction quelconque et il n'y a plus de polarisation des ondes. Les variables $\tilde{\varphi}^0$ et $\tilde{\psi}^0$ peuvent être choisies indépendamment l'une de l'autre. L'onde correspondante est donc soit une onde de compression pure, soit une onde de cisaillement pur, soit une onde de compression-cisaillement. Cela se produit, par exemple, lorsque les murs et les planchers sont rigoureusement identiques et que l'onde se propage dans la direction $\alpha = \pi/4$ (figure 2.17). Dans ce cas, $E_x = E_y$, $M^m(\omega) = M^p(\omega)$ et les équations (2.25) sont identiques.

Cette dernière situation peut aussi être interprétée comme la superposition de deux ondes se propageant dans la même direction α et étant parfaitement

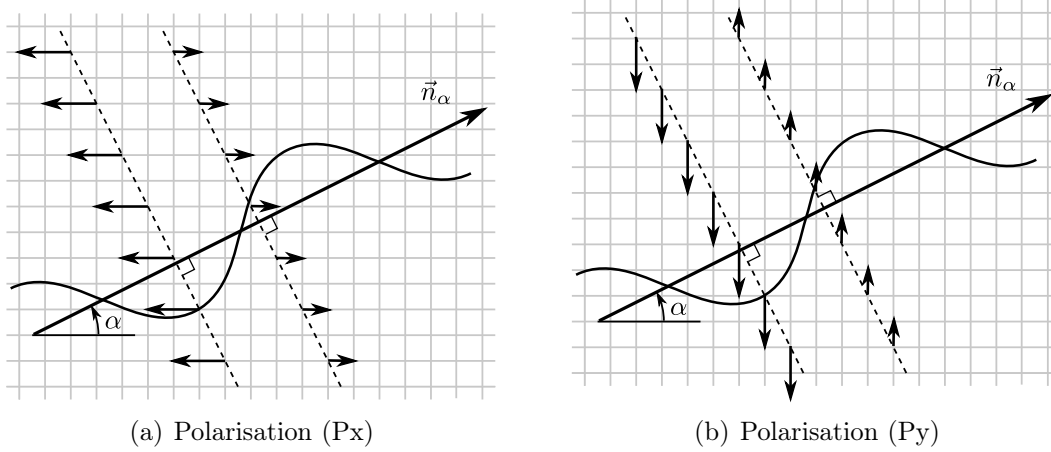


FIGURE 2.16 – Déplacements nodaux pour les deux modes de polarisation

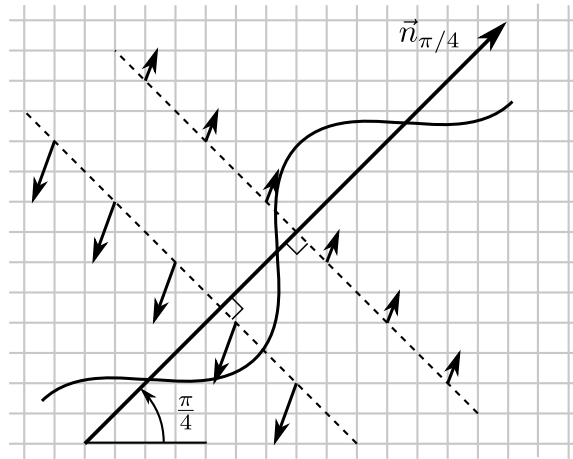


FIGURE 2.17 – Perte de la polarisation : orientation quelconque des déplacements

en phase. La première est polarisée selon le mode (Px) et la seconde selon le mode (Py). C'est pourquoi, nous ne reviendrons pas sur ce cas particulier. De plus, la seule différence entre les modes (Px) et (Py) est la permutation des rôles des murs et des planchers. L'étude détaillée du mode (Px) est donc suffisante pour comprendre le fonctionnement de la structure.

Le mode (Px) correspond au cas où l'équation (2.25a) est vérifiée. Il peut donc exister pour toutes les directions de propagation \vec{n}_α sauf pour la direction des murs ($\cos(\alpha) = 0$). L'expression du nombre d'onde est :

$$\tilde{k}^0 = \frac{\omega}{|\cos(\alpha)|} \sqrt{\frac{M^m(\omega)}{E_x}} \quad \text{avec} \quad E_x = \frac{E_p A_p}{\ell_m}$$

L'équation $(x0)'$ est trivialement vérifiée et l'équation $(y0)'$ impose la nullité de \tilde{U}_y^0 :

$$\tilde{\varphi}^0 \sin(\alpha) - \tilde{\psi}^0 \cos(\alpha) = 0$$

Deux cas sont possibles :

- soit $\sin(\alpha) = 0 \Rightarrow \tilde{\psi}^0 = 0$: onde de compression pure
- soit $\sin(\alpha) \neq 0 \Rightarrow \tilde{\psi}^0 = \tilde{\varphi}^0 \tan(\alpha) \neq 0$: onde de compression-cisaillement

Dans le premier cas, l'onde macroscopique est une onde de compression pure qui se propage dans la direction des planchers ($\alpha = 0$). Le nombre d'onde, la vitesse de propagation et la longueur d'onde sont notés respectivement k_0 , c_0 , Λ_0 .

$$k_0 = \omega \sqrt{\frac{M^m(\omega)}{E_x}} = \frac{\omega}{c_0} = \frac{2\pi}{\Lambda_0}$$

$$\Rightarrow c_0 = \sqrt{\frac{E_x}{M^m(\omega)}} \quad \text{et} \quad \Lambda_0 = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{E_x}{M^m(\omega)}}$$

Ces expressions sont similaires à celles obtenues pour un milieu continu usuel. En effet, la vitesse est égale à la racine carrée d'un module d'extension divisé par une masse. Mais, à cause de la résonance interne, c'est la masse apparente qu'il faut prendre en compte. Comme elle dépend de la fréquence, ce mode de propagation est *dispersif*. En ce qui concerne le fonctionnement de la structure à l'échelle microscopique, la présence du module $E_x = E_p A_p / \ell_m$ indique que les planchers travaillent en traction-compression et la masse $M^m(\omega)$ montre que les murs sont à la résonance en flexion. Nous sommes donc dans la situation de la figure 2.15(a) page 54. Les ondes macroscopiques sont générées par des ondes de compression pure qui se propagent dans les planchers.

Pour l'instant, nous n'avons pas encore étudié les propriétés de la masse apparente $M^m(\omega)$. Mais cette description des ondes n'est valable que si la condition de séparation d'échelles est respectée. Il faut donc se placer dans une gamme de fréquences telle que la longueur d'onde soit bien plus grande que la longueur des planchers, c'est-à-dire $\Lambda_0 \gg \ell_p$.

Le deuxième cas est plus complexe. Les ondes macroscopiques se propageant en dehors des axes du repère sont des ondes de compression-cisaillement. Cela est courant dans les milieux anisotropes. Le nombre d'onde, la vitesse de propagation et la longueur d'onde sont notés respectivement k_α , c_α , Λ_α . Ils dépendent non seulement de la fréquence mais également de la direction de propagation \vec{n}_α .

$$k_\alpha = \frac{k_0(\omega)}{|\cos(\alpha)|} \quad , \quad c_\alpha = |\cos(\alpha)| c_0(\omega) \quad , \quad \Lambda_\alpha = |\cos(\alpha)| \Lambda_0(\omega)$$

Le fonctionnement de la structure à l'échelle microscopique est schématisé sur la figure 2.18. Le quadrillage gris représente la structure avant déformation. L'équation $(y_0)'$ impose $\tilde{U}_y^0 = 0$. Ainsi, tous les déplacements nodaux se font selon la direction x (flèches rouges). Là encore, nous avons des ondes de compression pure qui se propagent dans les planchers. Mais cette fois-ci, elles sont déphasées verticalement de telle sorte que tous les points situés sur des droites perpendiculaires à la direction \vec{n}_α subissent les mêmes déplacements. C'est pourquoi, à l'échelle macroscopique, nous voyons une onde se propager dans la direction \vec{n}_α . L'amplitude des ondes de compression dans les planchers est dessinée en rouge.

Leur longueur d'onde est encore Λ_0 et la longueur d'onde apparente Λ_α est la projection de Λ_0 sur la direction \vec{n}_α . La longueur d'onde et la vitesse apparentes sont donc maximales lorsque l'onde macroscopique se propage dans la direction des planchers (figure 2.19(a)). De plus, ce mécanisme ne permet pas de générer une onde macroscopique se propageant dans la direction des murs.

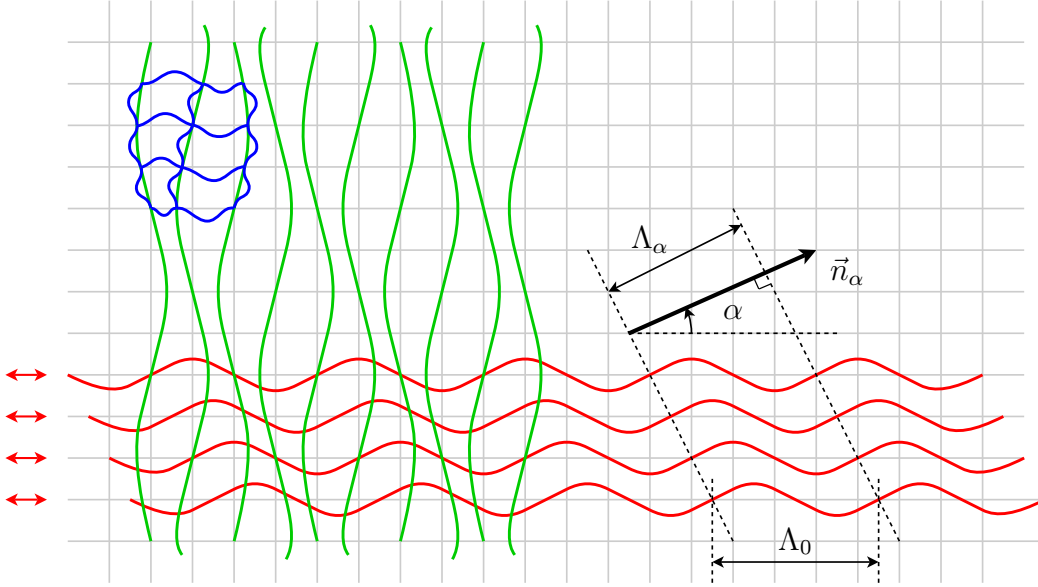


FIGURE 2.18 – Onde dans la direction \vec{n}_α pour la polarisation (Px)
(Version en couleur : figure D.1 page 334)

Sur la figure 2.18, nous avons également représenté la déformation des murs. Ces derniers sont sollicités en flexion d'une part à cause du déphasage des ondes dans les planchers (en vert) et d'autre part à cause de la résonance interne (en bleu). Les planchers, quant à eux, travaillent en traction-compression. Comme la cellule est cisailée par le déphasage des ondes dans les planchers, il est probable que ces derniers se déforment aussi en flexion et qu'ils soient en résonance. Pour répondre à cette question, il faut examiner l'équation d'équilibre en moments (m_0) et déterminer la rotation des nœuds $\tilde{\theta}^0$. Comme $\tilde{U}_y^0 = 0$, l'équation (m_0) se simplifie :

$$\begin{aligned} \frac{G_m \beta_m \ell_m}{12 f_P(\beta_m \ell_m)} \left(4 \sin\left(\frac{\beta_m \ell_m}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\beta_m \ell_m}{2}\right) \tilde{\theta}^0 + \beta_m \ell_m \frac{\operatorname{ch}(\beta_m \ell_m) - \cos(\beta_m \ell_m)}{f_I(\beta_m \ell_m)} \frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial y} \right) \\ + \frac{G_p \beta_p \ell_p}{3 f_P(\beta_p \ell_p)} \sin\left(\frac{\beta_p \ell_p}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\beta_p \ell_p}{2}\right) \tilde{\theta}^0 = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Pour les fréquences qui n'annulent aucune des fonctions présentes dans cette équation, la rotation des nœuds $\tilde{\theta}^0$ est proportionnelle à la déformation de cisaillement $\partial_y \tilde{U}_x^0$. Le coefficient de proportionnalité dépend de la fréquence et des caractéristiques de la cellule. Si l'onde macroscopique se propage dans la direction des planchers (onde de compression pure), il n'y a pas de déphasage : $\partial_y \tilde{U}_x^0 = 0$. Dans ce cas, la rotation des nœuds est nulle à l'ordre 0 et les planchers travaillent

uniquement en traction-compression. Par contre, pour les ondes de compression-cisaillement qui se propagent en dehors des axes du repère, la rotation des nœuds est non nulle. Les planchers sont donc en résonance en flexion. Leur déformation est également représentée en bleu sur la figure 2.18. Les fréquences particulières qui annulent les fonctions présentent dans l'équation (2.26) seront étudiées à la fin de cette partie.

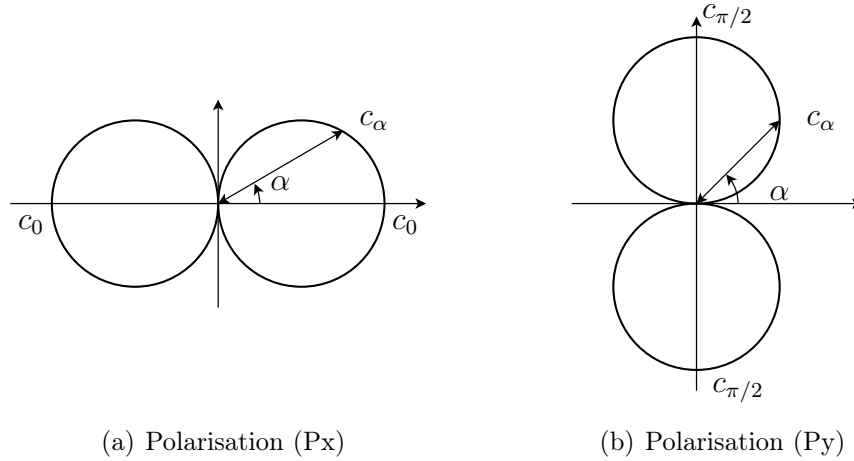


FIGURE 2.19 – Influence de la direction α sur la vitesse apparente de l'onde

Pour la polarisation (Py), les rôles des murs et des planchers sont inversés : dans l'expression de la masse apparente, c'est la contribution des planchers qui dépend de la fréquence et c'est le module d'extension $E_y = E_m A_m / \ell_p$ qui apparaît dans les équations. Les ondes macroscopiques sont maintenant générées par des ondes de compression pure dans les murs et les déplacements se font tous dans la direction y . Lorsque toutes les ondes sont en phase, l'onde macroscopique est une onde de compression pure dans la direction y . Si les ondes sont déphasées, nous avons une onde de compression-cisaillement qui se propage en diagonale. Les relations entre les caractéristiques des ondes dans la direction des murs ($\alpha = \pi/2$) et celles des ondes en dehors des axes du repère sont rappelées ci-dessous. Pour cette polarisation, la longueur d'onde et la vitesse sont maximales dans la direction des murs et la propagation est impossible dans la direction des planchers (figure 2.19(b)).

Propagation dans la direction des murs :

$$k_{\pi/2} = \omega \sqrt{\frac{M^p(\omega)}{E_y}} = \frac{\omega}{c_{\pi/2}} = \frac{2\pi}{\Lambda_{\pi/2}}$$

$$\Rightarrow c_{\pi/2} = \sqrt{\frac{E_y}{M^p(\omega)}} \quad \text{et} \quad \Lambda_{\pi/2} = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{E_y}{M^p(\omega)}}$$

Propagation en dehors des axes du repère :

$$k_\alpha = \frac{k_{\pi/2}(\omega)}{|\sin(\alpha)|} \quad , \quad c_\alpha = |\sin(\alpha)| c_{\pi/2} \quad , \quad \Lambda_\alpha = |\sin(\alpha)| \Lambda_{\pi/2}$$

Effet de la résonance interne

Nous regardons maintenant l'influence de la pulsation ω des vibrations de la structure. Pour simplifier l'étude de la masse apparente, nous nous plaçons dans le cas où les murs et les planchers sont rigoureusement identiques : les indices « m » et « p » sont alors inutiles. De plus, nous n'avons plus besoin d'introduire une masse apparente matricielle puisque $M^m(\omega) = M^p(\omega) = M(\omega)$ avec :

$$M(\omega) = \frac{\bar{\rho}}{\ell}(1 + f(\beta\ell))$$

où f est la fonction définie page 55.

Par la suite, nous raisonnerons sur des quantités adimensionnelles. C'est pourquoi nous introduisons la fonction $m(\omega)$ qui correspond au ratio entre la masse apparente $M(\omega)$ et la masse surfacique réelle $M_s = 2\bar{\rho}/\ell$:

$$m(\omega) = \frac{M(\omega)}{M_s} = \frac{1}{2}(1 + f(\beta\ell))$$

La pulsation des vibrations de la structure est pesée par rapport à la première pulsation propre de flexion des éléments lorsqu'ils sont bi-encastés. Pour une poutre d'Euler-Bernoulli, la pulsation du $k^{\text{ième}}$ mode propre est donnée par :

$$\omega_{fk} \approx (2k + 1)^2 \left(\frac{\pi}{2\ell}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{\rho}}} \quad (2.27)$$

Nous appelons $\hat{\omega}$ la nouvelle variable :

$$\hat{\omega} = \omega \left(\frac{2\ell}{3\pi}\right)^2 \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{EI}} \approx \frac{\omega}{\omega_{f1}}$$

et la fonction $f(\beta\ell)$ peut être remplacée par la fonction $\hat{f}(\hat{\omega})$ définie par :

$$\begin{aligned} \beta\ell &= \ell^4 \sqrt{\frac{\bar{\rho}\omega^2}{EI}} = \frac{3\pi}{2} \sqrt{\hat{\omega}} \\ &\Downarrow \\ \hat{f}(\hat{\omega}) &= \frac{8}{3\pi\sqrt{\hat{\omega}} \hat{f}_I(\hat{\omega})} \sin\left(\frac{3\pi}{4}\sqrt{\hat{\omega}}\right) \text{sh}\left(\frac{3\pi}{4}\sqrt{\hat{\omega}}\right) \end{aligned}$$

$$\hat{f}_I(\hat{\omega}) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\sqrt{\hat{\omega}}\right) \text{ch}\left(\frac{3\pi}{4}\sqrt{\hat{\omega}}\right) + \text{sh}\left(\frac{3\pi}{4}\sqrt{\hat{\omega}}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{4}\sqrt{\hat{\omega}}\right)$$

Nous rappelons que $\hat{f}_I(\hat{\omega})$ s'annule pour les fréquences des modes propres de flexion impairs des éléments.

L'allure de la masse apparente $m(\hat{\omega})$ est représentée sur la figure 2.20. D'après l'équation (2.27), les pulsations propres des éléments suivent la suite des carrés des nombres impairs donc elles correspondent aux abscisses suivantes :

$$\hat{\omega}_1 \approx 1 \quad \hat{\omega}_2 \approx \frac{5^2}{3^2} \approx 2,78 \quad \hat{\omega}_3 \approx \frac{7^2}{3^2} \approx 5,44 \quad \hat{\omega}_4 \approx \frac{9^2}{3^2} = 9 \quad \text{etc}$$

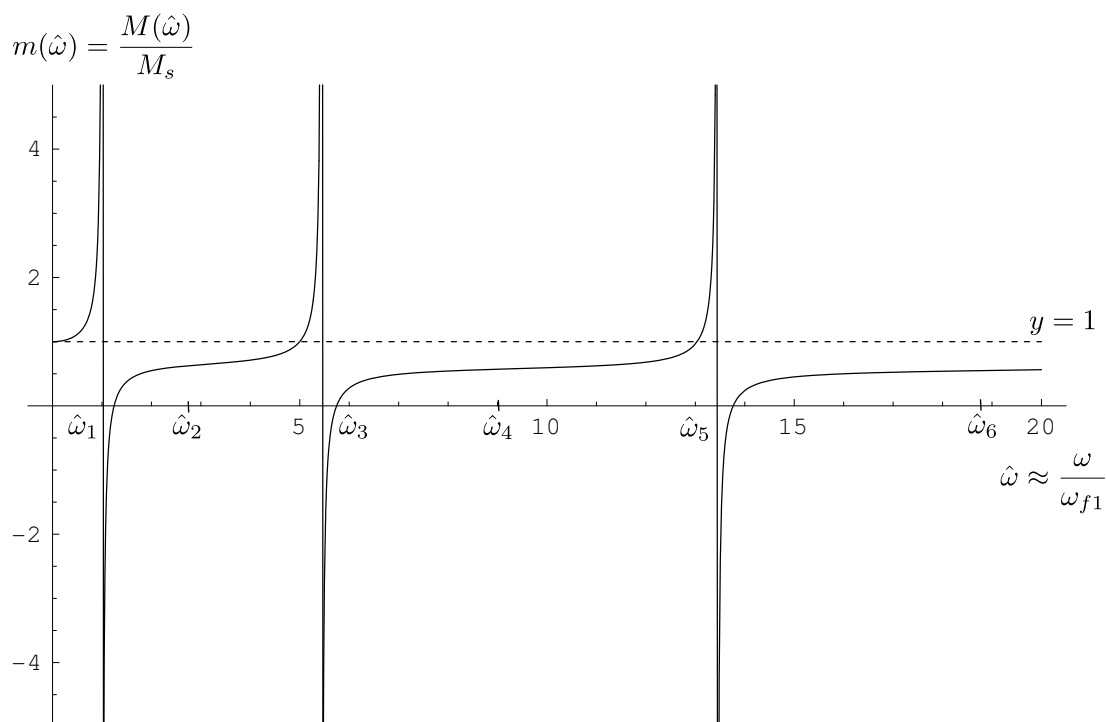


FIGURE 2.20 – Allure de la masse apparente en fonction de la fréquence

Tout d'abord, remarquons que $m(\hat{\omega})$ tend bien vers 1 lorsque $\hat{\omega}$ tend vers 0, c'est-à-dire, qu'en quasi-statique, la masse apparente est égale à la masse réelle. Nous observons également que, pour la majorité des fréquences supérieures à la fréquence du premier mode propre de flexion des éléments, cette fonction est comprise entre 0 et 1. Ainsi, grâce à la résonance des éléments en flexion, la structure semble plus légère que ce qu'elle est en réalité. Par contre, au voisinage des fréquences correspondant aux modes de flexion impairs des éléments, la masse apparente tend vers l'infini par valeurs positives et négatives. Aucun comportement atypique n'est observé au voisinage des fréquences des modes pairs.

Essayons de comprendre l'origine physique de ces variations. Dans un corps rigide, tous les points subissent le même mouvement et toute la masse est entraînée de la même façon. C'est pourquoi les forces d'inertie sont proportionnelles à la masse réelle. La structure étudiée ici présente plus de degrés de liberté, ce qui autorise les différents points à bouger les uns par rapport aux autres. Il y a un mouvement global défini par la propagation de l'onde macroscopique auquel se superpose, à l'échelle microscopique, les vibrations en flexion des éléments. Certains points de la structure peuvent donc avoir un mouvement très différent du mouvement global. L'existence de la masse apparente traduit le fait que, dans une cellule, toute la masse n'est pas entraînée dans la même direction. Pour expliquer l'allure de cette masse apparente, il faut donc étudier le comportement en flexion des éléments à différentes fréquences.

Pour cela, nous prenons l'exemple de la polarisation (Px) et nous supposons que l'onde macroscopique se propage dans la direction des planchers. Ainsi, toutes les ondes de compression dans les planchers sont en phase et d'après l'équation

d'équilibre en moment (2.26) la rotation des nœuds est nulle à l'ordre 0. En conséquence, seuls les murs travaillent en flexion. Pour la suite, nous raisonnons dans le repère local associé à un mur (figure 2.3 page 17) : $s \in [0, \ell_m]$ est l'abscisse curviligne, $u(s)$ le déplacement transversal et $\theta(s)$ la rotation de la section. Les vibrations transversales sont décrites par le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli dont les équations sont rappelées page 17. Nous en déduisons la forme de $u(s)$ et de $\theta(s)$:

$$\frac{d^4 u}{ds^4} = \beta_m^4 u(s) \Rightarrow u(s) = A \cos(\beta_m s) + B \sin(\beta_m s) + C \operatorname{ch}(\beta_m s) + D \operatorname{sh}(\beta_m s)$$

$$\theta(s) = \frac{du}{ds}(s) = \beta_m \left(-A \sin(\beta_m s) + B \cos(\beta_m s) + C \operatorname{sh}(\beta_m s) + D \operatorname{ch}(\beta_m s) \right)$$

où A , B , C et D sont quatre constantes qui dépendent des conditions aux limites. Ces dernières sont données par :

$$u(0) = u(\ell_m) = \hat{U} \quad \theta(0) = \theta(\ell_m) = 0 \quad (e^{i\omega t} \text{ est sous-entendu})$$

$\hat{U} = -\tilde{U}_x^0$ car le repère local lié au mur et le repère global lié à la structure ne sont pas dans le même sens (figure 2.4 page 19). Nous en déduisons l'expression de la déformée du mur pour une pulsation ω donnée :

$$u(s, \omega) = \frac{\hat{U}}{f_I(\beta_m \ell_m)} \left(\operatorname{ch} \left(\beta_m \left(\frac{\ell_m}{2} - s \right) \right) \sin \left(\frac{\beta_m \ell_m}{2} \right) + \cos \left(\beta_m \left(\frac{\ell_m}{2} - s \right) \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\beta_m \ell_m}{2} \right) \right) \quad (2.28)$$

où ω est cachée dans le paramètre β .

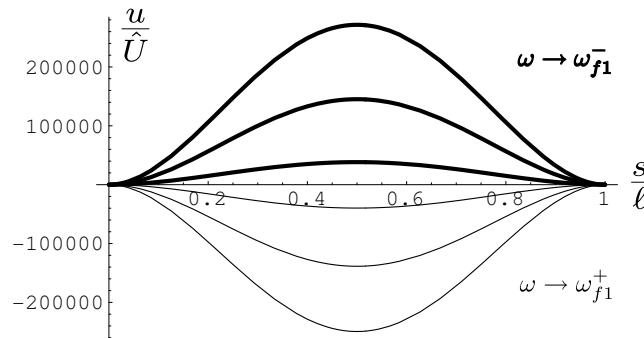


FIGURE 2.21 – Déformées d'un mur au voisinage de sa 1^{re} pulsation de flexion ω_{f1}

La figure 2.21 donne quelques déformées du mur au voisinage de sa première pulsation propre de flexion ω_{f1} . Nous constatons que plus la pulsation est proche de ω_{f1} , plus l'amplitude est importante. De plus, lors du passage de ω_{f1} , il y a une brusque inversion du sens de la déformée. Lorsque ω tend vers ω_{f1} par valeurs inférieures ($\omega \rightarrow \omega_{f1}^-$), la déformée u est en phase avec le mouvement des nœuds \hat{U} . Mais lorsque ω tend vers ω_{f1} par valeurs supérieures ($\omega \rightarrow \omega_{f1}^+$), alors la déformée du mur est en opposition de phase par rapport aux nœuds. Cela est

cohérent avec le comportement de la masse apparente au voisinage des modes impairs des éléments qui tend vers l'infini et change brusquement de signe.

Regardons maintenant le comportement du mur pour les fréquences des modes pairs de flexion. La figure 2.22 représente la déformée à la fréquence du deuxième mode propre pour les conditions aux limites considérées. Elle est très différente de la déformée associée à ce mode (figure 2.29 page 74). De plus, l'amplitude est du même ordre de grandeur que le déplacement des nœuds \hat{U} donc il n'y a pas résonance. Même si la structure vibre à une fréquence propre du mur, la façon dont celui-ci est sollicité ne permet pas d'exciter le mode.

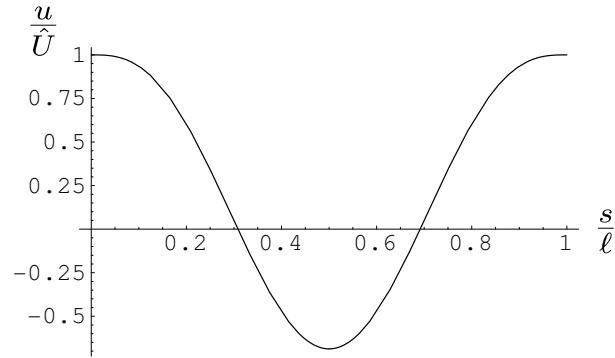


FIGURE 2.22 – Déformée d'un mur à la fréquence de son 2^e mode de flexion

Pour une pulsation quelconque, la force d'inertie $F_{im}(\omega)$ qui s'exerce sur toute la longueur du mur vaut, dans le repère local :

$$F_{im}(\omega) = - \int_0^{\ell_m} \bar{\rho}_m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(s, \omega) ds = \bar{\rho}_m \omega^2 \int_0^{\ell_m} u(s, \omega) ds$$

Ce qui donne grâce à l'équation (2.28) et aux définitions de la page 55 :

$$F_{im}(\omega) = \bar{\rho}_m \omega^2 \ell_m f(\beta_m \ell_m) \hat{U}$$

Après un changement de signe pour passer du repère local au repère global et une division par $\ell_m \ell_p$ pour avoir une grandeur surfacique, nous obtenons exactement la contribution du mur au terme d'inertie de l'équation (x 0) qui décrit l'équilibre en force dans la direction x :

$$\frac{\bar{\rho}_m}{\ell_p} f(\beta_m \ell_m) \omega^2 \tilde{U}_x^0$$

En ce qui concerne les planchers, ils travaillent en traction-compression dans la direction x . Comme nous étudions des fréquences bien inférieures à la première fréquence propre associée à ce mécanisme, au premier ordre, ils se déplacent d'un seul bloc. La force d'inertie qui s'exerce sur un plancher est donc :

$$F_{ip}(\omega) = \bar{\rho}_p \ell_p \omega^2 \tilde{U}_x^0$$

En divisant par $\ell_m \ell_p$, nous obtenons la contribution des planchers au terme d'inertie de l'équation (x 0). Si au lieu de considérer une onde macroscopique de compression pure qui se propage dans la direction x , nous nous intéressons à une onde

de compression-cisaillement dans une direction quelconque, alors la rotation des nœuds devient non nulle et les planchers vibrent également en flexion. Ce mouvement de flexion se fait selon la direction y . La force d'inertie sur un plancher a donc une composante supplémentaire selon l'axe y , par contre sa composante selon l'axe x n'est pas modifiée. C'est pourquoi la masse apparente qui apparaît dans l'équation (x0) a la même expression pour les ondes macroscopiques de compression pure et celles de compression-cisaillement.

Le terme d'inertie qui apparaît dans l'équation (x0) est donc la projection sur l'axe x de la somme des forces d'inertie qui s'exercent sur toute la cellule. De même, le terme qui apparaît dans l'équation (y0) est la projection sur l'axe y des forces d'inertie de la cellule. Il prend en compte la flexion des planchers et la traction-compression des murs.

Maintenant que nous avons compris l'origine de la masse apparente, examinons les conséquences de ses variations sur la propagation des ondes. Tant qu'elle reste positive, les mécanismes mis en évidence au paragraphe précédent sont valables. Les différentes valeurs de la masse jouent uniquement sur la vitesse des ondes. Le problème est de savoir à quoi correspond une masse négative et si la structure est stable au voisinage des fréquences des modes de flexion impairs. Pour répondre à cette question, nous traitons le cas plus réaliste d'une structure avec un peu d'amortissement. Il est introduit en considérant que le matériau a un module d'élasticité complexe :

$$E = |E| e^{i\eta} \quad \text{avec} \quad \eta > 0 \text{ et petit}$$

Dans le cas de la polarisation (Px), le nombre d'onde est donné par la résolution de l'équation (2.25a) qui est rappelée ci-dessous :

$$E_x(\tilde{k}^0)^2 \cos^2(\alpha) - M^m(\omega) \omega^2 = 0 \quad (2.29)$$

À cause de l'amortissement, le module d'extension dans la direction x , E_x , et la masse apparente $M^m(\omega)$ deviennent complexes. En effet, E_x est proportionnel au module du matériau :

$$E_x = \frac{EA_p}{\ell_m} = |E_x| e^{i\eta}$$

Dans le cas où les murs et les planchers sont rigoureusement identiques, $M^m(\omega) = M(\omega)$. L'expression de $M(\omega)$ est donnée page 62 et le module du matériau intervient dans le paramètre β . La figure 2.23 montre le module et l'argument de la fonction $m(\hat{\omega})$ pour un amortissement $\eta = 2.10^{-2}$. $m(\hat{\omega}) = M(\hat{\omega})/M_s$ est le ratio entre la masse apparente et la masse surfacique réelle et $\hat{\omega} \approx \omega/\omega_{f1}$ celui entre la pulsation des vibrations de la structure et la première pulsation propre de flexion des éléments. Au voisinage des modes de flexion impairs, les deux courbes présentent des pics dont l'amplitude diminue avec la fréquence. Mais le module et l'argument n'atteignent pas leur extremum pour la même valeur de $\hat{\omega}$. Cela se voit mieux sur les figures 2.24 et 2.25. La première est un zoom sur la partie réelle et la partie imaginaire de $m(\hat{\omega})$ autour de la première fréquence propre de flexion. La seconde représente $m(\hat{\omega})$ dans le plan complexe. À chaque passage d'un mode impair de flexion, la masse apparente décrit un cercle. En dehors des

pics au voisinage des fréquences des modes de flexion impairs, l'argument de la masse apparente est très petit. De plus, il est toujours négatif donc la masse apparente peut se mettre sous la forme :

$$M(\omega) = |M(\omega)| e^{-i\mu(\omega)} \quad \text{avec} \quad \mu(\omega) \geq 0$$

Finalement, l'équation (2.29) devient :

$$(\tilde{k}^0)^2 = \frac{|M(\omega)| \omega^2}{|E_x| \cos^2(\alpha)} e^{-i(\eta+\mu(\omega))} = \frac{|M(\omega)| \omega^2}{|E_x| \cos^2(\alpha)} e^{-i\phi(\omega)} \quad \text{avec} \quad \phi(\omega) > 0$$

Elle admet deux solutions :

$$k_+(\omega) = + \frac{\omega}{|C_\alpha(\omega)|} e^{-i\phi(\omega)/2} \quad \text{et} \quad k_-(\omega) = - \frac{\omega}{|C_\alpha(\omega)|} e^{-i\phi(\omega)/2}$$

où $C_\alpha(\omega) = |\cos(\alpha)| \sqrt{\frac{|E_x|}{|M(\omega)|}} e^{i\phi(\omega)/2}$

Pour savoir à quel type d'onde correspondent ces solutions, nous les introduisons dans le terme $e = \exp [i(\omega t - k \vec{n}_\alpha \cdot \vec{x})]$ qui exprime la propagation dans la direction \vec{n}_α .

$$k = k_+ \Rightarrow e = \exp \left[i\omega \left(t - \frac{\vec{n}_\alpha \cdot \vec{x}}{|C_\alpha|} \cos \left(\frac{\phi}{2} \right) \right) \right] \exp \left[- \frac{\omega}{|C_\alpha|} \vec{n}_\alpha \cdot \vec{x} \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \right] \quad (2.30a)$$

$$k = k_- \Rightarrow e = \exp \left[i\omega \left(t + \frac{\vec{n}_\alpha \cdot \vec{x}}{|C_\alpha|} \cos \left(\frac{\phi}{2} \right) \right) \right] \exp \left[\frac{\omega}{|C_\alpha|} \vec{n}_\alpha \cdot \vec{x} \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \right] \quad (2.30b)$$

D'après la figure 2.23, nous avons $\mu(\omega) \in [0; 3]$ donc $\phi(\omega) = \eta + \mu(\omega) \in [0; \pi]$. D'où $\cos(\phi/2) \geq 0$ et $\sin(\phi/2) \geq 0$. Ainsi, la solution k_+ correspond à une onde progressive alors que la solution k_- correspond à une onde régressive. Le point important est que, dans les deux cas, il s'agit d'ondes amorties. La structure est donc stable pour ces fréquences puisque l'introduction de l'amortissement permet bien d'obtenir des ondes amorties.

La vitesse de propagation des ondes macroscopiques $c_\alpha(\omega)$ se déduit des équations 2.30 :

$$c_\alpha(\omega) = \frac{|C_\alpha(\omega)|}{\cos(\phi(\omega)/2)} = \frac{|C_\alpha(\omega)|^2}{Re(C_\alpha(\omega))}$$

et nous définissons la fonction $\hat{c}_\alpha(\omega)$ par le ratio entre cette vitesse et celle qu'aurait l'onde s'il n'y avait pas cet effet de résonance interne en flexion :

$$\hat{c}(\omega) = \frac{c_\alpha(\omega)}{c_\alpha^*} \quad \text{avec} \quad c_\alpha^* = |\cos(\alpha)| \sqrt{\frac{E_x \ell}{2\bar{\rho}}}$$

L'amortissement par longueur d'onde δ_Λ est donné par $\delta_\Lambda(\omega) = 2\pi \tan(\phi(\omega)/2)$. L'allure de la vitesse et l'amortissement par longueur d'onde en fonction de la fréquence sont dessinés sur la figure 2.26 où les deux courbes ont la même échelle.

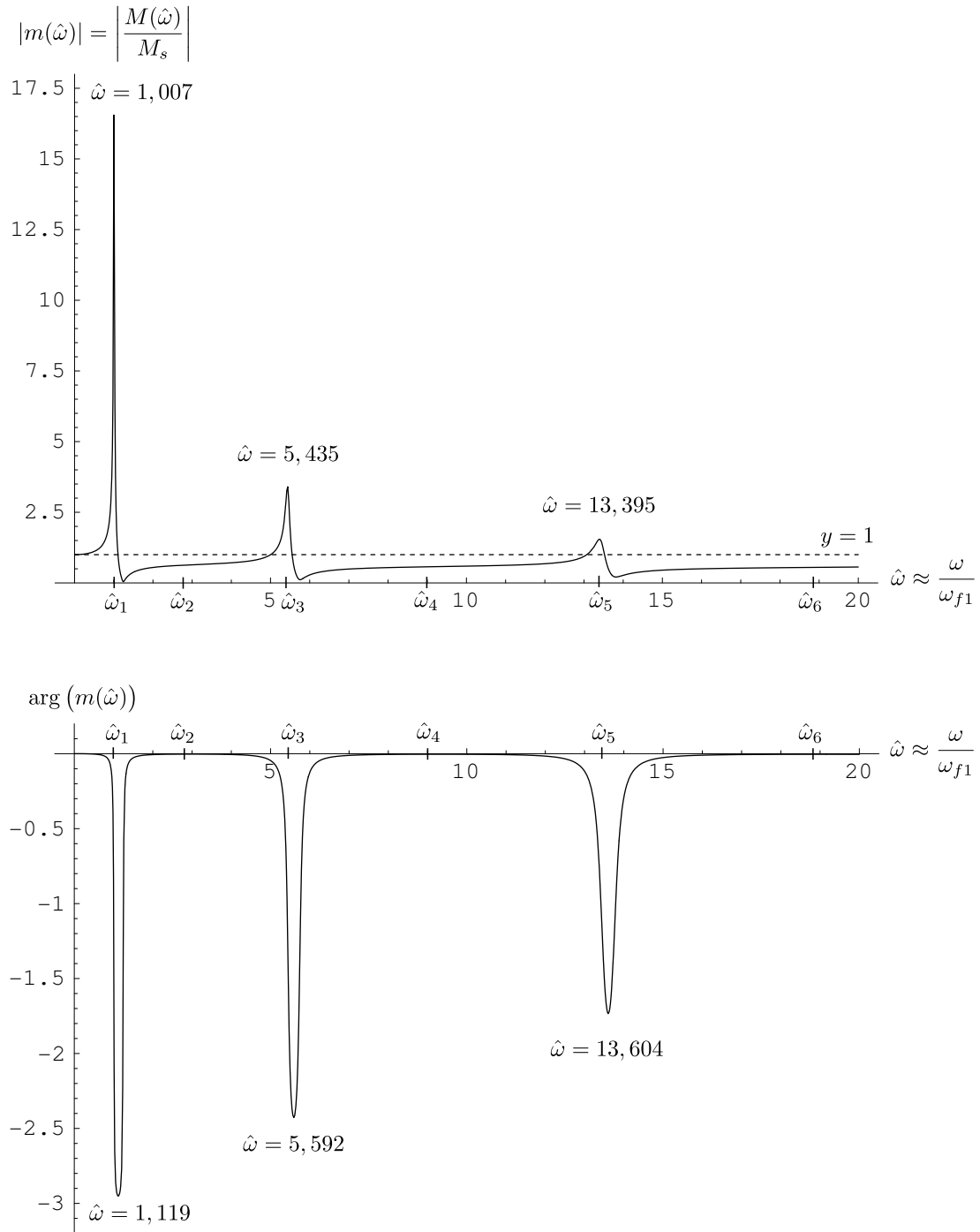


FIGURE 2.23 – Module et argument de la masse apparente pour $\eta = 2.10^{-2}$

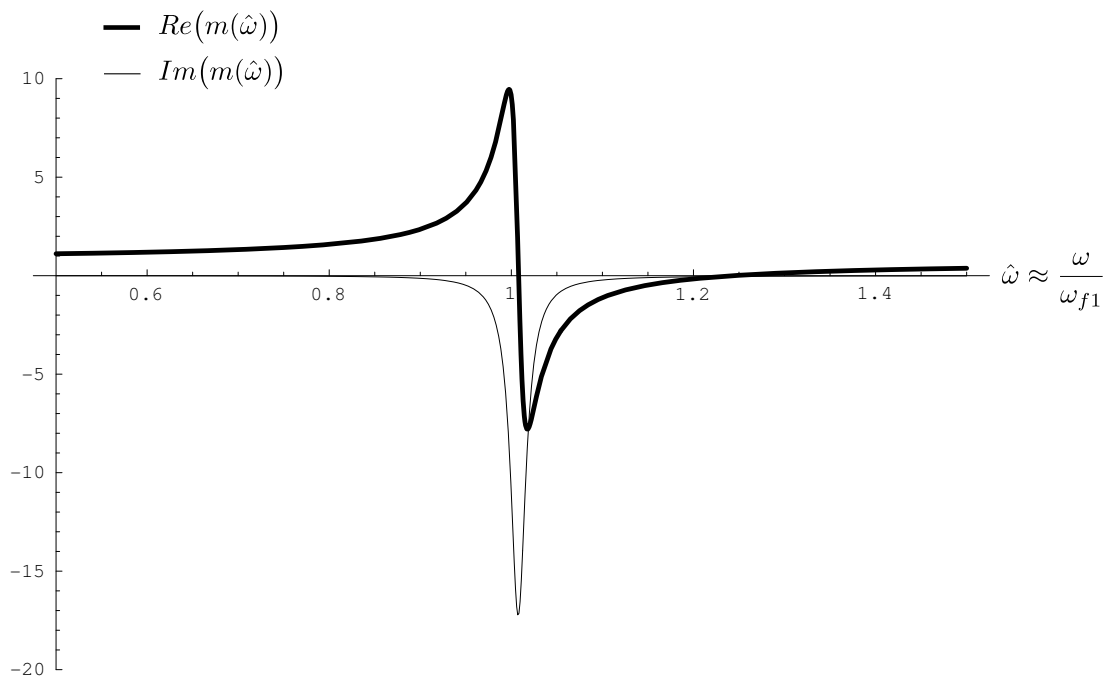


FIGURE 2.24 – Parties réelle (trait gras) et imaginaire (trait fin) de la masse apparente au voisinage du premier mode propre de flexion pour $\eta = 2.10^{-2}$

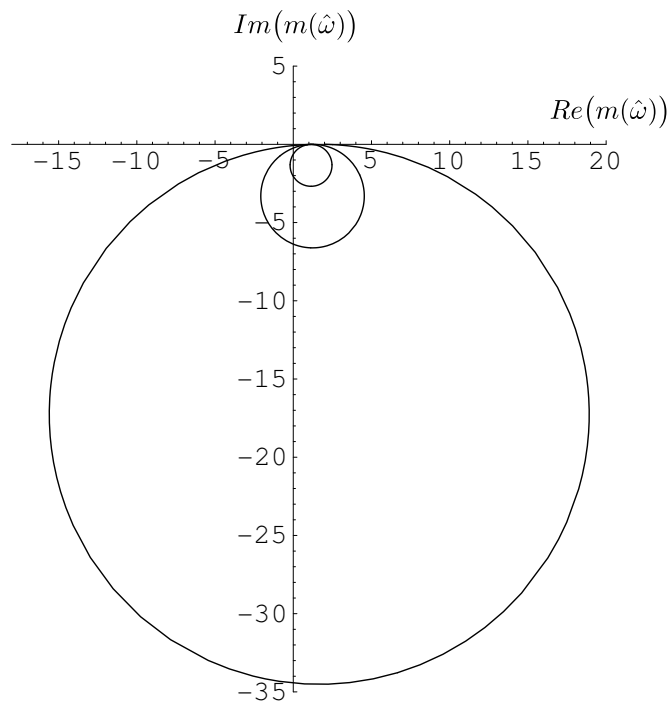


FIGURE 2.25 – Masse apparente dans le plan complexe paramétrée par la fréquence pour $\eta = 2.10^{-2}$ (le plus grand cercle est décrit au passage du 1^{er} mode de flexion, le 2^e cercle au passage du 3^e mode, etc...)

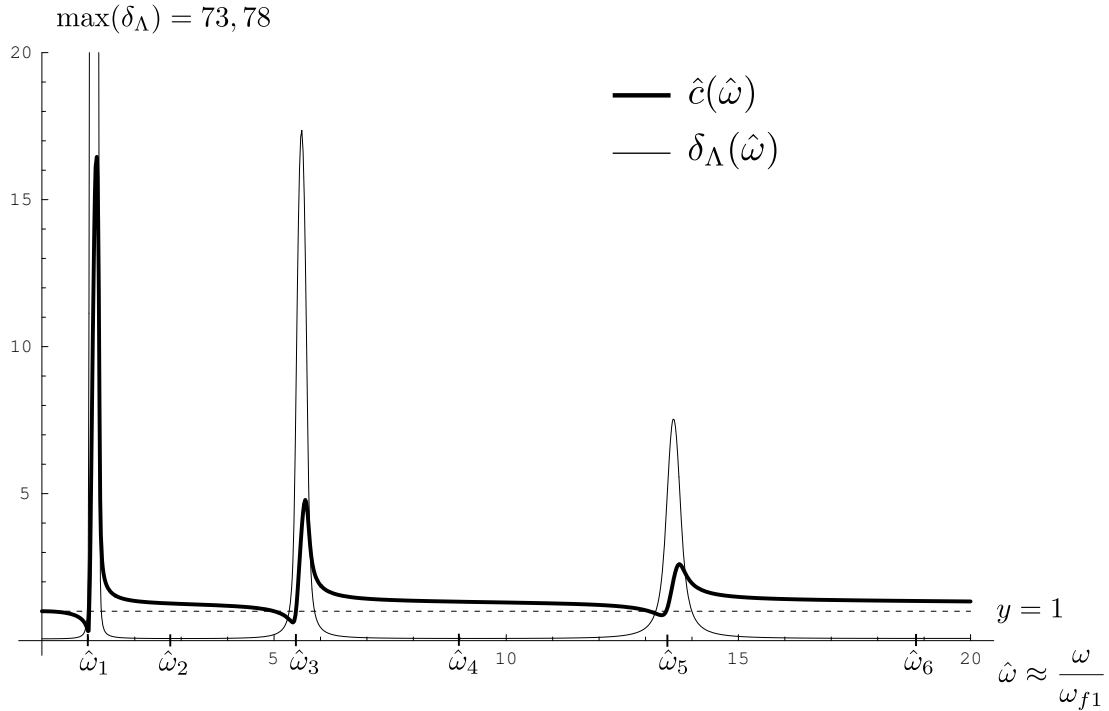


FIGURE 2.26 – Vitesse (trait gras) et amortissement (trait fin) fonction de la fréquence pour $\eta = 2 \cdot 10^{-2}$

La figure 2.27 représente la vitesse en fonction de l'amortissement. Elle est paramétrée par la fréquence et les ovales sont décrits lors du passage des modes de flexion impairs. Comme pour les courbes représentant la masse apparente, nous avons choisi la valeur $\eta = 2 \cdot 10^{-2}$.

Lorsque $\omega \rightarrow 0$, nous avons $\hat{c}(\omega) \rightarrow 1$ et $\delta_\Lambda(\omega) \rightarrow 2\pi \tan(\eta/2) \approx 2\pi \cdot 10^{-2}$. Donc, pour les basses fréquences, l'effet de la résonance interne disparaît : la vitesse des ondes vaut c_α^* et nous retrouvons uniquement l'amortissement η qui a été introduit dans le matériau.

À plus hautes fréquences, ce mode de propagation des ondes devient dispersif. Au voisinage des fréquences des modes de flexion impairs des éléments, la vitesse commence par diminuer puis elle augmente de façon importante : elle est multipliée par 16,55 au voisinage du premier mode. Parallèlement, l'atténuation par longueur d'onde δ_Λ devient considérable. Pour les trois modes représentés sur la figure 2.26, elle dépasse largement 2π qui est la valeur de δ_Λ pour une onde de diffusion. Donc la longueur de pénétration des ondes dans la structure est négligeable, ce qui correspond à des bandes de fréquences interdites. Malgré tout, comme les pics de vitesse et d'atténuation ne coïncident pas, l'amortissement des ondes décroît plus vite que leur vitesse. Par exemple, après le premier mode de flexion des éléments, lorsque la vitesse est encore multipliée par 2, δ_Λ ne vaut plus que 0,29. Cela signifie qu'entre deux points distants d'une longueur d'onde, l'amplitude diminue de 25 %. De plus, pour la majorité des fréquences, $\hat{c}(\omega) > 1$ donc les ondes se propagent plus vite grâce à la résonance interne en flexion. Ce résultat est cohérent avec le fait que la masse apparente est souvent inférieure à la masse réelle.

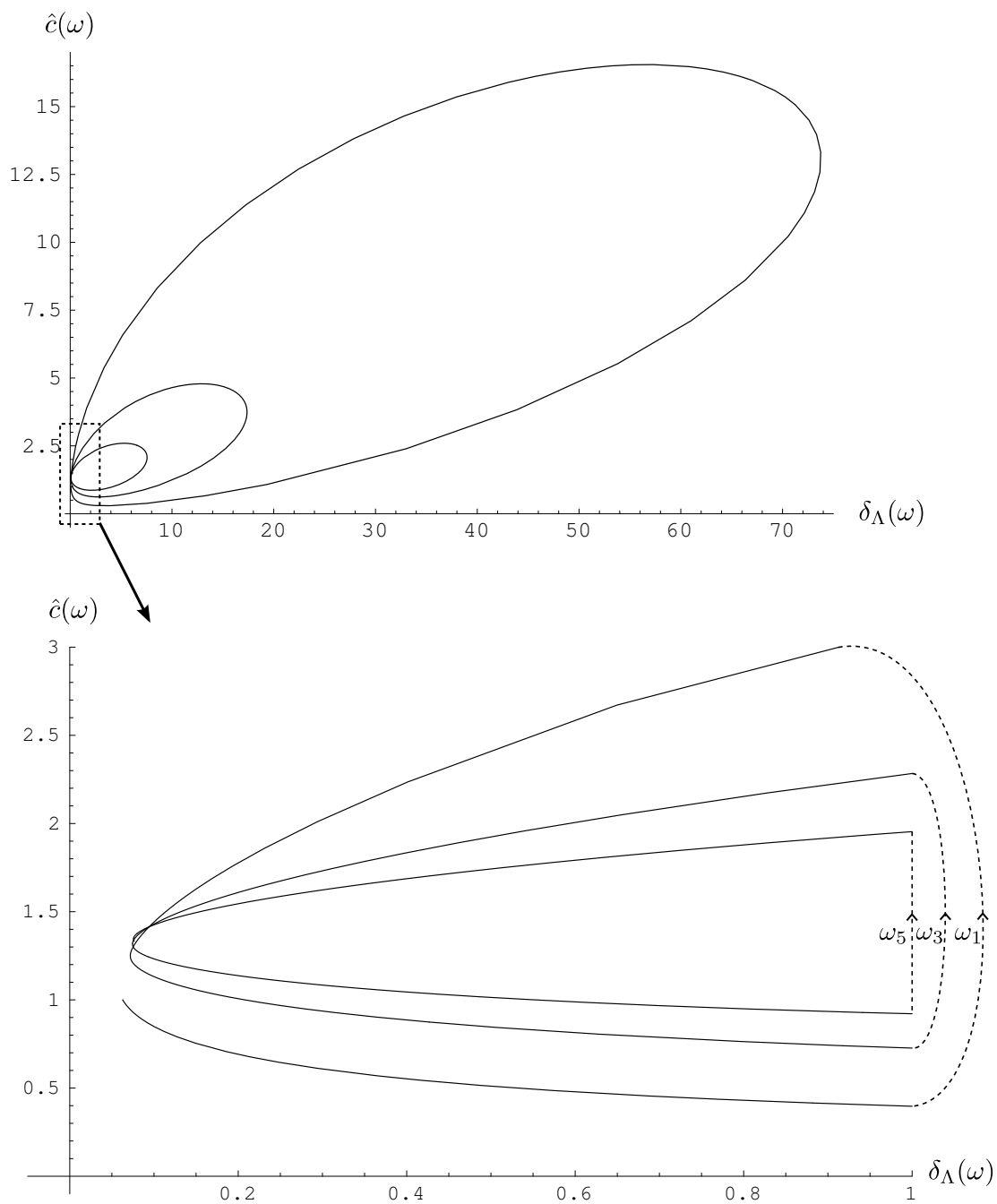


FIGURE 2.27 – Vitesse en fonction de l’amortissement paramétrés par la fréquence et zoom à l’origine pour $\eta = 2.10^{-2}$

À l'échelle microscopique, les ondes amorties sont générées par les mêmes mécanismes que les ondes non amorties étudiées au paragraphe précédent (page 60). Elles sont dues à des ondes de compression pures qui se propagent soit dans les planchers (polarisation (Px)), soit dans les murs (polarisation (Py)). C'est le déphasage de ces ondes qui donne l'impression que l'onde macroscopique est dirigée selon \vec{n}_α . La seule différence est que maintenant, l'amplitude des déplacements décroît le long de la direction \vec{n}_α (figure 2.28).

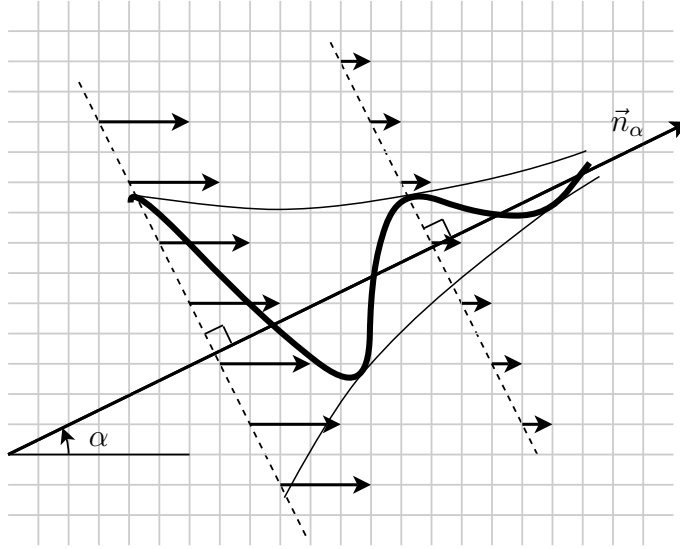


FIGURE 2.28 – Onde de compression-cisaillement amortie dans la direction \vec{n}_α

Équilibre interne de la cellule

Ce paragraphe est consacré à l'étude détaillée de l'équation d'équilibre en moments (m_0) qui exprime l'équilibre interne de la cellule. Elle a été laissée de côté jusqu'à présent car elle ne décrit pas la propagation des ondes macroscopiques. Pour faciliter l'exposé nous nous plaçons dans le cas de la polarisation (Px) mais le fonctionnement est similaire pour le mode (Py) (il suffit d'inverser les rôles des murs et des planchers). Nous avons donc $\tilde{U}_y^0 = 0$ et l'équation (m_0) se simplifie :

$$\begin{aligned} \frac{G_m \beta_m \ell_m}{12 f_P(\beta_m \ell_m)} \left(4 \sin\left(\frac{\beta_m \ell_m}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\beta_m \ell_m}{2}\right) \tilde{\theta}^0 + \beta_m \ell_m \frac{\operatorname{ch}(\beta_m \ell_m) - \cos(\beta_m \ell_m)}{f_I(\beta_m \ell_m)} \frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial y} \right) \\ + \frac{G_p \beta_p \ell_p}{3 f_P(\beta_p \ell_p)} \sin\left(\frac{\beta_p \ell_p}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\beta_p \ell_p}{2}\right) \tilde{\theta}^0 = 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Nous avons déjà constaté que, pour la majorité des fréquences, la rotation des nœuds $\tilde{\theta}^0$ est proportionnelle à la déformation de cisaillement $\partial_y \tilde{U}_x^0$. Ce qui nous intéresse ici, ce sont les fréquences particulières qui annulent les fonctions présentes dans cette équation. La limite lorsque ω tend vers 0 a déjà été calculée. C'est l'équation de la partie 2.2.1 qui impose l'égalité des contraintes tangentielles lorsque la condition de quasi-statisme local est vérifiée.

Les autres situations singulières sont au nombre de quatre :

1. $f_I(\beta_m \ell_m) = 0$: fréquences des modes impairs des murs
2. $f_P(\beta_p \ell_p) = 0$: fréquences des modes pairs des planchers
3. $f_P(\beta_m \ell_m) = 0$: fréquences des modes pairs des murs
4. fréquences qui annulent le coefficient de $\tilde{\theta}^0$

Au voisinage des fréquences des modes de flexion impairs des murs, les ondes ne sont pas transmises pour le mode (Px). Donc $\tilde{U}_x^0 = 0$ et les équations d'équilibre sont trivialement vérifiées.

Le deuxième cas concerne les fréquences des modes de flexion pairs des planchers. Le dénominateur du moment dans les planchers est alors égal à 0. La seule manière d'empêcher ce moment de devenir infini est d'avoir $\tilde{\theta}^0 = 0$. Mais le moment dans les murs n'étant plus équilibré, il s'annule aussi. En conséquence, $\partial_y \tilde{U}_x^0 = 0$. Les ondes dans les planchers ne peuvent pas être déphasées ce qui oblige les ondes macroscopiques à se propager dans la direction x . Tout se passe comme si la rigidité des planchers était devenue infinie.

Pour comprendre l'origine de ce phénomène, nous revenons à l'échelle des éléments et nous étudions le comportement du plancher situé entre les nœuds (m, p) et $(m + 1, p)$. Nous raisonnons dans le repère local associé à ce plancher (figure 2.3 page 17) : $s \in [0, \ell_p]$ est l'abscisse curviligne, $u(s)$ le déplacement transversal et $\theta(s)$ la rotation de la section. Pour une poutre d'Euler-Bernoulli, $u(s)$ et $\theta(s)$ ont la forme suivante :

$$u(s) = A \cos(\beta_p s) + B \sin(\beta_p s) + C \operatorname{ch}(\beta_p s) + D \operatorname{sh}(\beta_p s)$$

$$\theta(s) = \frac{du}{ds}(s) = \beta_p \left(-A \sin(\beta_p s) + B \cos(\beta_p s) + C \operatorname{sh}(\beta_p s) + D \operatorname{ch}(\beta_p s) \right)$$

où A , B , C et D sont quatre constantes qui dépendent des conditions aux limites. Comme nous étudions la polarisation (Px), les déplacements verticaux des nœuds sont nuls. Les conditions aux limites pour le plancher sont donc :

$$u(0) = u(\ell_p) = 0 \quad \theta(0) = \theta^{(m,p)} \quad \theta(\ell_p) = \theta^{(m+1,p)}$$

Les trois premières conditions permettent d'exprimer les constantes B , C et D en fonction de A et $\theta^{(m,p)}$. La dernière fournit la relation suivante entre les rotations des deux nœuds d'extrémité :

$$\theta^{(m+1,p)} = 2A\beta_p \frac{-1 + \cos(\beta_p \ell_p) \operatorname{ch}(\beta_p \ell_p)}{\sin(\beta_p \ell_p) - \operatorname{sh}(\beta_p \ell_p)} + \theta^{(m,p)} \frac{E(\beta_p \ell_p)}{\sin(\beta_p \ell_p) - \operatorname{sh}(\beta_p \ell_p)}$$

$$\text{avec} \quad E(\beta_p \ell_p) = \operatorname{ch}(\beta_p \ell_p) \sin(\beta_p \ell_p) - \cos(\beta_p \ell_p) \operatorname{sh}(\beta_p \ell_p)$$

Nous rappelons que $-1 + \cos(\beta_p \ell_p) \operatorname{ch}(\beta_p \ell_p) = 0$ est l'équation aux fréquences propres du plancher lorsqu'il est bi-encasté. Pour les fréquences des modes pairs de flexion, le coefficient de A dans l'expression de $\theta^{(m+1,p)}$ est donc nul. Cela est normal puisque l'amplitude A de la déformée est indéterminée à la résonance des planchers. Pour l'étude du deuxième terme, nous utilisons les formules de trigonométrie afin de faire apparaître $f_P(\beta_p \ell_p)$ dans l'expression de $E(\beta_p \ell_p)$.

$$E(\beta_p \ell_p) = 4 \operatorname{ch} \left(\frac{\beta_p \ell_p}{2} \right) \cos \left(\frac{\beta_p \ell_p}{2} \right) f_P(\beta_p \ell_p) - \sin(\beta_p \ell_p) + \operatorname{sh}(\beta_p \ell_p)$$

Ainsi, pour les fréquences qui annulent $f_P(\beta_p \ell_p)$, nous obtenons :

$$\theta^{(m+1,p)} = -\theta^{(m,p)} \quad (2.32)$$

Remarque : La déformée du plancher est alors donnée par l'équation suivante :

$$u(x) = A \left(\cos(\beta_p x) - \text{ch}(\beta_p x) + \left(\text{ch}(\beta_p \ell_p) - \cos(\beta_p \ell_p) \right) \frac{\sin(\beta_p x) - \text{sh}(\beta_p x)}{\sin(\beta_p \ell_p) - \text{sh}(\beta_p \ell_p)} \right) \\ + \theta^{(m,p)} \frac{\sin(\beta_p \ell_p) \text{sh}(\beta_p x) - \sin(\beta_p x) \text{sh}(\beta_p \ell_p)}{\beta_p \left(\sin(\beta_p \ell_p) - \text{sh}(\beta_p \ell_p) \right)}$$

Il s'agit de la superposition d'un de ses modes propres pairs de flexion pour lequel $\theta^{(m+1,p)} = \theta^{(m,p)} = 0$ avec une amplitude A indéterminée et de la déformée liée à la rotation opposée des deux nœuds (figure 2.29 pour le deuxième mode de flexion).

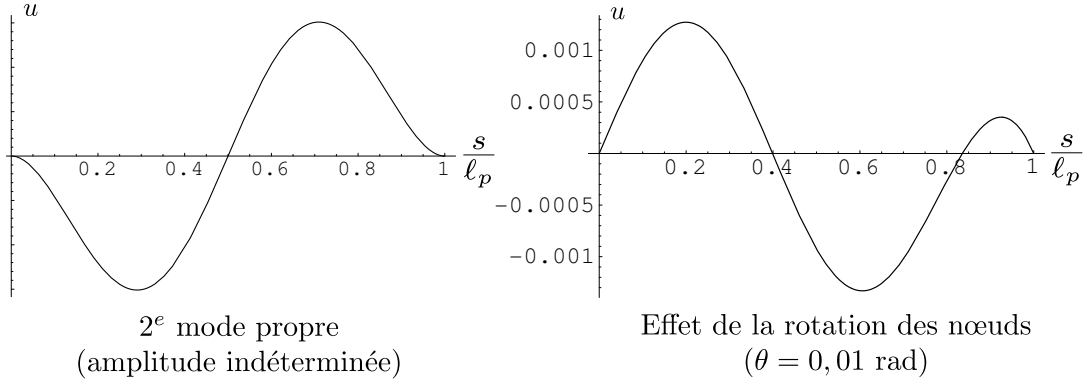


FIGURE 2.29 – Les deux composantes de la déformée d'un plancher à la fréquence du deuxième mode propre de flexion

Or, pour homogénéiser le comportement de la structure, nous supposons que les variables cinématiques évoluent peu d'un nœud à l'autre et que ces variations peuvent être représentées par des séries de Taylor :

$$\theta^{(m,p)} = \theta^0(m \ell_p, p \ell_m) + \epsilon \theta^1(m \ell_p, p \ell_m) + \epsilon^2 \theta^2(m \ell_p, p \ell_m) + \dots \\ \theta^{(m+1,p)} = \theta^0(m \ell_p, p \ell_m) + \epsilon \left(\theta^1(m \ell_p, p \ell_m) + \ell^* L \frac{\partial \theta^0}{\partial x}(m \ell_p, p \ell_m) \right) + \dots$$

Ce qui impose au premier ordre :

$$\theta^{(m+1,p)} \approx +\theta^{(m,p)} \quad (2.33)$$

Clairement, les équations (2.32) et (2.33) sont incompatibles et la seule solution possible est $\theta^0 = 0$ ce qui interdit le déphasage des ondes dans les planchers.

Le comportement apparemment atypique de la structure à cette fréquence est donc une conséquence des hypothèses prises pour l'homogénéisation. En effet,

nous imposons une condition cinématique supplémentaire qui restreint l'ensemble dans lequel nous cherchons les solutions. Pour les fréquences où cette condition cinématique est en contradiction avec le fonctionnement naturel de la structure, la rigidité apparente tend vers l'infini. Mais si nous choisissons une autre hypothèse compatible avec la déformation des éléments, les fréquences des modes pairs ne devraient plus être des fréquences singulières. Par exemple, nous pourrions chercher les solutions dans l'ensemble des champs de déplacement où la rotation des nœuds est antipériodique. Dans ce cas, les fréquences singulières seraient probablement les fréquences des modes impairs. En effet, $E(\beta_p \ell_p)$ peut également se mettre sous la forme suivante :

$$E(\beta_p \ell_p) = 4 \operatorname{sh} \left(\frac{\beta_p \ell_p}{2} \right) \sin \left(\frac{\beta_p \ell_p}{2} \right) f_I(\beta_p \ell_p) + \sin(\beta_p \ell_p) - \operatorname{sh}(\beta_p \ell_p)$$

Donc $\theta^{(m+1,p)} = +\theta^{(m,p)}$ pour les fréquences des modes impairs (figure 2.30).

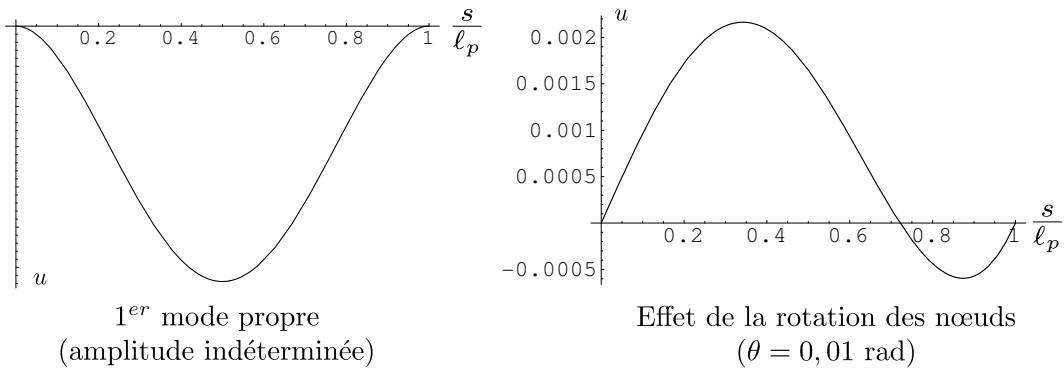


FIGURE 2.30 – Les deux composantes de la déformée d'un plancher à la fréquence du premier mode propre de flexion

Le troisième cas ressemble au deuxième. Cette fois-ci, c'est la rigidité des murs qui tend vers l'infini au voisinage des fréquences de leurs modes pairs de flexion. Cela impose la nullité de la contribution des murs dans l'équation (m 0) :

$$4 \sin \left(\frac{\beta_m \ell_m}{2} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\beta_m \ell_m}{2} \right) \tilde{\theta}^0 + \beta_m \ell_m \frac{\operatorname{ch}(\beta_m \ell_m) - \cos(\beta_m \ell_m)}{f_I(\beta_m \ell_m)} \frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial y} = 0$$

Le moment dans les planchers n'est plus équilibré donc il s'annule et $\tilde{\theta}^0 = 0$. La nullité du moment dans les murs entraîne de nouveau $\partial_y \tilde{U}_x^0 = 0$. Là encore, les ondes macroscopiques sont obligées de se propager dans la direction des planchers.

Le quatrième cas se produit en dehors des fréquences propres des éléments. Il correspond aux fréquences où la somme des rigidités apparentes des murs et des planchers s'annule. C'est donc un mode de l'ensemble de la cellule. Dans ces conditions, la rotation des nœuds $\tilde{\theta}^0$ disparaît de l'équation (m 0) et le moment généré par $\partial_y \tilde{U}_x^0$ n'est plus équilibré, ce qui interdit le déphasage des ondes à l'ordre 0. Pour déterminer la rotation des nœuds, il faudrait regarder les équations d'ordre supérieur.

Pour cette situation, les mécanismes de propagation des ondes sont complètement décrits par les deux équations d'équilibre en forces dans lesquelles la rotation des nœuds n'intervient pas. Néanmoins, l'équation d'équilibre en moments exprime l'équilibre interne de la cellule et cela peut se traduire par des conditions cinématiques supplémentaires. Il faut donc bien vérifier que tous les modes de propagation des ondes sont compatibles avec cette équation. De plus, il faut garder présent à l'esprit que nous avons dû faire des hypothèses pour pouvoir homogénéiser le comportement de la structure, ce qui a restreint l'ensemble dans lequel nous cherchons les solutions. Nous avons donc décrit les modes de propagation des ondes macroscopiques compatibles avec nos hypothèses mais d'autres modes peuvent éventuellement exister.

Conclusion

Dans cette partie, nous avons étudié le comportement de la structure à des fréquences suffisamment élevées pour que les éléments travaillent en traction-compression. Pour cette gamme de fréquences, les éléments ne sont plus en équilibre quasi-statique à l'échelle locale pour le mécanisme de flexion et ils peuvent même entrer en résonance. Néanmoins, la longueur des ondes de traction-compression étant bien supérieure à la taille de la cellule, il est encore possible d'appliquer la méthode HMPD. Dans les équations d'équilibre, la résonance interne des éléments en flexion se traduit par l'apparition d'une *masse apparente matricielle qui dépend de la fréquence*. Cette dernière présente des pics pour les fréquences des modes de flexion impairs des éléments mais pour la majorité des fréquences, elle est plus faible que la masse surfacique réelle.

La résolution montre que les ondes macroscopiques peuvent se propager dans *toutes les directions*. Ce sont des *ondes de compression-cisaillement* qui dégènerent en des ondes de compression pure dans la direction des murs et dans celle des planchers. Les ondes de compression-cisaillement sont courantes dans les milieux anisotropes. La particularité de cette structure est que, quelle que soit la direction de propagation des ondes, il n'existe que *deux directions de polarisation* imposées par les directions des éléments. Pour le mode (Px), tous les déplacements se font dans la direction des planchers et pour le mode (Py), les nœuds se déplacent dans la direction des murs. À cause de la résonance interne en flexion et de la masse apparente variable, la vitesse des ondes dépend de la fréquence : ce mode de propagation est *dispersif*. Pour la majorité des fréquences supérieures à la fréquence du premier mode propre de flexion des éléments, la vitesse des ondes est supérieure à celle qu'elles auraient sans la résonance interne. Par contre, pour les fréquences proches de celles des *modes de flexion impairs*, les ondes ne sont pas transmises. La vitesse dépend également du mode de polarisation et de la direction de propagation \vec{n}_α selon les formules suivantes.

mode (Px) :

$$c = |\cos(\alpha)| \sqrt{\frac{E_x}{M^m(\omega)}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} E_x = E_p A_p / \ell_m \\ M^m(\omega) = \frac{\bar{\rho}_p}{\ell_m} + \frac{\bar{\rho}_m}{\ell_p} f(\beta_m \ell_m) \end{cases}$$

mode (Py) :

$$c = |\sin(\alpha)| \sqrt{\frac{E_y}{M^p(\omega)}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} E_y = E_m A_m / \ell_p \\ M^p(\omega) = \frac{\bar{\rho}_m}{\ell_p} + \frac{\bar{\rho}_p}{\ell_m} f(\beta_p \ell_p) \end{cases}$$

Pour une fréquence donnée, la vitesse est maximale dans la direction des planchers pour le mode (Px) et dans celle des murs pour le mode (Py).

À l'échelle microscopique, il n'y a que des ondes de compression pure qui se propagent dans les planchers pour le mode (Px) et dans les murs pour le mode (Py). C'est leur *déphasage* qui donne l'impression d'une onde macroscopique dans une direction \vec{n}_α quelconque. Mais en réalité, les ondes sont *canalisées* et elles suivent les directions des éléments. C'est un mécanisme spécifique des structures creuses. Pour le mode (Px), la propagation des ondes de compression dans les planchers sollicite les murs en flexion et c'est leur contribution à la masse apparente $M^m(\omega)$ qui dépend de la fréquence. Mais cela ne veut pas forcément dire qu'il n'y a pas de flexion dans les planchers. Lorsque les ondes microscopiques sont déphasées, c'est toute la cellule qui est cisailée.

L'extension du domaine d'application de la méthode HMPD aux fréquences avec résonance interne a permis d'établir un certain nombre de résultats qui sont résumés ci-dessus. Cela a également soulevé de nouveaux problèmes. En effet, supposer les champs de déplacement périodiques sur une seule cellule est une hypothèse cinématique naturelle mais restrictive. Pour cette première étude, nous avons décrit les modes de propagation des ondes compatibles avec cette hypothèse. Il en existe probablement d'autres. En particulier, nous avons constaté que cette hypothèse cinématique n'est pas adaptée au voisinage des fréquences des modes de flexion pairs des éléments.

Nous avons pu nous en rendre compte grâce à un des avantages essentiels de la méthode HMPD qui est la possibilité de revenir à l'échelle des éléments et d'étudier leur comportement. Cela nous a également permis de comprendre l'origine physique de la masse apparente : à cause de la résonance interne en flexion, toute la masse de la cellule n'est pas entraînée dans la même direction. Lorsque la plus grande partie de la masse vibre en phase avec l'onde macroscopique, la masse apparente est positive. Mais lorsque la majorité de la masse vibre en opposition de phase, alors, à l'échelle macroscopique, la masse semble négative. De plus, au voisinage des fréquences de résonance des éléments, les forces d'inertie deviennent très importantes et la masse apparente tend vers l'infini. Dans ce cas, l'onde macroscopique n'est pas transmise.

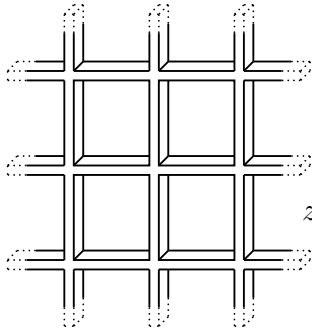
Il est à noter que d'autres études, aussi bien théoriques qu'expérimentales, ont également montré l'existence d'une masse apparente qui dépend de la fréquence dans les matériaux composites. Parmi les premiers à avoir mis en évidence ce phénomène, citons Auriault et Bonnet (1985). Ces auteurs ont homogénéisé le comportement dynamique d'un composite périodique dont un des constituants est beaucoup plus souple que le second. Ávila *et al.* (2005) ont réalisé une étude similaire. Milton et Willis (2007), quant à eux, se sont intéressés aux propriétés inertielles d'une structure contenant des cavités où se trouve une masse attachée

par des ressorts. L'atténuation des ondes par des phénomènes de résonance interne a été mesurée grâce à l'expérience présentée dans (Liu *et al.*, 2000; Sheng *et al.*, 2003). Le composite étudié était constitué de billes rigides, recouvertes d'un matériau plus souple et dispersées dans une matrice rigide. L'interprétation de cette expérience se trouve dans (Liu *et al.*, 2005). Le modèle de Milton et Willis a également été réalisé expérimentalement (Shanshan *et al.*, 2008). Là encore, l'atténuation des ondes à cause de la résonance interne a pu être observée. Tous les milieux étudiés ont en commun d'être constitués d'une matrice rigide dans laquelle les longueurs d'onde sont bien plus grandes que la taille de la cellule et d'inclusions pouvant entrer en résonance à basses fréquences. Dans cette thèse, c'est la structure elle-même qui entre en résonance sans qu'il soit nécessaire d'ajouter d'autres éléments.

Les matériaux avec résonance interne font actuellement l'objet de nombreuses recherches. Celles-ci sont motivées par l'existence, en électromagnétisme, de « métamatériaux » ayant à la fois une permittivité et une perméabilité négatives et donc un indice de réfraction négatif. L'équivalent en mécanique serait un matériau avec une masse apparente et des modules apparents négatifs (Wu *et al.*, 2007).

2.2.4 Résumé

Structure discrète étudiée



Les murs et les planchers sont similaires :

$$\frac{a_m}{\ell_m} = O(\epsilon) \quad \frac{a_p}{\ell_m} = O(\epsilon) \quad \frac{h_p}{h_m} = O(1)$$

$$\frac{\ell_p}{\ell_m} = O(1) \quad \frac{E_p}{E_m} = O(1) \quad \frac{\rho_p}{\rho_m} = O(1)$$

Milieu continu équivalent hors résonance

C'est un milieu continu *usuel* anisotrope. Dans le repère (x, y) , la loi de comportement s'écrit :

$$\sigma(\vec{U}^0) = \begin{bmatrix} E_x \epsilon_{xx}(\vec{U}^0) & 2G \epsilon_{xy}(\vec{U}^0) \\ 2G \epsilon_{xy}(\vec{U}^0) & E_y \epsilon_{yy}(\vec{U}^0) \end{bmatrix}$$

$E_x \neq E_y$ en général et il y a un *fort contraste* entre les modules d'extension et le module de cisaillement :

$$\frac{E_x}{E_y} = O(1) \quad \frac{G}{E_x} = O(\epsilon^2)$$

Propagation d'onde

$\omega < O(\epsilon \omega_r)$	Cisaillement : quasi-statique Compression : quasi-statique } Pas de propagation d'onde
$\omega = O(\epsilon \omega_r)$	Cisaillement : propagation Compression : quasi-statique Description de l'onde : <ul style="list-style-type: none"> - propagation seulement dans les directions x ou y - onde de cisaillement pur (générée par la <i>flexion locale</i> des éléments) - même vitesse dans les deux directions - vitesse <i>indépendante</i> de la fréquence Commentaire : La propagation en dehors des axes du repère nécessite de solliciter les éléments en compression ce qui n'est pas possible à cette fréquence.

$\omega = O(\omega_r)$	<p>Cisaillement : résonance des éléments en flexion</p> <p>Compression : propagation (homogénéisable)</p> <p>Description de l'onde :</p> <ul style="list-style-type: none"> – propagation dans toutes les directions mais la vitesse dépend de la direction – onde de compression pure dans la direction x ou y, ondes de compression-cisaillement sinon – masse apparente variable et matricielle : <ul style="list-style-type: none"> \Rightarrow mode de propagation <i>dispersif</i> \Rightarrow bandes de fréquences interdites \Rightarrow onde plus rapide que si la masse était constante <p>Commentaire : À l'échelle microscopique, les ondes sont canalisées. Elles sont générées par des <i>ondes de compression pure</i> dans les murs ou les planchers qui peuvent être déphasées.</p>
$\omega > O(\omega_r)$	non homogénéisable

2.3 2^e cas : murs plus épais que les planchers

Nous venons d'étudier la propagation des ondes dans une structure dont tous les éléments étaient similaires. Or le comportement dynamique d'un treillis dépend également des contrastes de rigidité entre les éléments. C'est pourquoi nous allons maintenant regarder le cas où $a_p = O(\epsilon a_m)$, c'est-à-dire un cas où les murs sont plus épais que les planchers (figure 2.31). Pour cette nouvelle structure, nous avons retenu les ordres de grandeur suivants :

$$\begin{array}{lll} \frac{E_p}{E_m} = O(1) & \frac{\rho_p}{\rho_m} = O(1) & \frac{\ell_p}{\ell_m} = O(1) \\ \frac{h_p}{h_m} = O(1) & \frac{a_m}{\ell_m} = O(\epsilon^{1/2}) & \frac{a_p}{\ell_m} = O(\epsilon^{3/2}) \end{array}$$

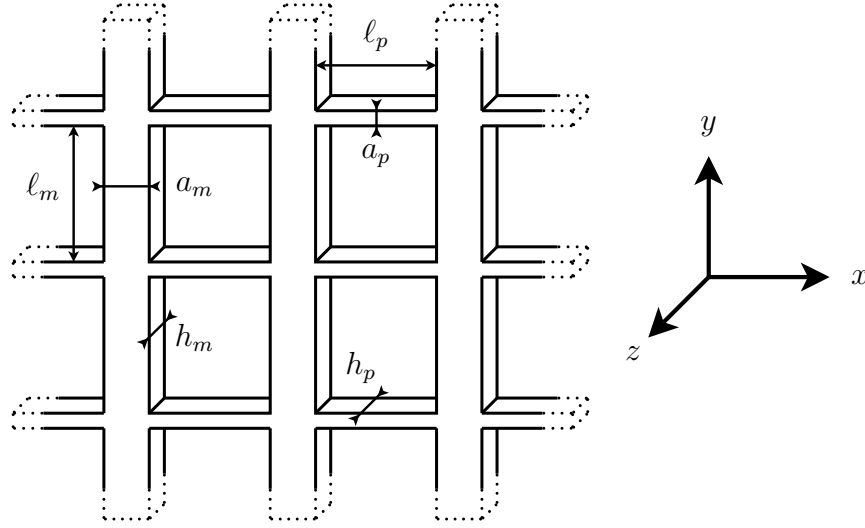


FIGURE 2.31 – Exemple de structure et rappel des notations

La démarche est la même que pour la structure précédente. La méthode HMPD décrite dans la partie 2.1 fournit les équations d'équilibre du milieu continu équivalent à l'échelle macroscopique. Les propriétés de ce dernier sont étudiées grâce à une analogie avec la mécanique des milieux continus. Cette fois-ci, il s'agit d'un milieu généralisé. Puis les fréquences correspondant à des modes de propagation d'ondes macroscopiques sont déterminées. Enfin nous résolvons les équations d'équilibre pour étudier les mécanismes de propagation des ondes.

Ainsi, nous verrons que cette méthode permet d'étudier trois types d'ondes qui correspondent aux gammes de pulsations suivantes :

$$\frac{\omega}{\omega_r} = O(\epsilon^2) \quad \text{ou} \quad \frac{\omega}{\omega_r} = O(\epsilon^{3/2}) \quad \text{ou} \quad \frac{\omega}{\omega_r} = O(\epsilon^{1/2})$$

Pour les pulsations inférieures, la structure a un comportement quasi-statique et les pulsations supérieures ne sont plus homogénéisables. Ces différents sous-cas sont traités dans l'ordre des pulsations croissantes.

2.3.1 Milieu continu équivalent hors résonance interne

Dans cette partie, nous allons construire l'analogie entre la mécanique des milieux continus et les équations d'équilibre obtenues par la méthode HMPD. Mais avant d'examiner en détail ces équations, il est déjà possible de prédire un certain nombre de changements sur les coefficients du fait des nouveaux ordres de grandeur des épaisseurs.

En effet, dans le cas précédent, la masse surfacique du milieu était la somme de deux termes : la masse des murs et la masse des planchers. Maintenant que les planchers sont plus fins que les murs, leur contribution devient négligeable et la masse surfacique dégénère. Définissons les notations suivantes :

$$M_m = \frac{\bar{\rho}_m}{\ell_p} \quad : \quad \text{contribution des murs à la masse surfacique macroscopique en kg/m}^2$$

$$M_p = \frac{\bar{\rho}_p}{\ell_m} \quad : \quad \text{contribution des planchers à la masse surfacique macroscopique en kg/m}^2$$

Le contraste entre les deux masses surfaciques est :

$$\frac{M_p}{M_m} = O(\epsilon) \quad \text{donc} \quad M_s = M_m + M_p \approx M_m$$

La contribution des planchers n'apparaît plus qu'à l'ordre suivant.

Il y a aussi des changements pour les ordres de grandeur des modules E_x , E_y , G_p et G_m dont les définitions sont rappelées ci-dessous :

$$E_x = \frac{E_p A_p}{\ell_m} \quad : \quad \text{module macroscopique d'extension dans la direction } x \text{ en N/m}$$

$$E_y = \frac{E_m A_m}{\ell_p} \quad : \quad \text{module macroscopique d'extension dans la direction } y \text{ en N/m}$$

$$G_p = 12 \frac{E_p I_p}{\ell_m \ell_p^2} \quad : \quad \text{module de cisaillement macroscopique lié à la rigidité de flexion des planchers en N/m}$$

$$G_m = 12 \frac{E_m I_m}{\ell_m^2 \ell_p} \quad : \quad \text{module de cisaillement macroscopique lié à la rigidité de flexion des murs en N/m}$$

Comme les murs et les planchers sont différents, les modules d'extension macroscopiques n'ont plus le même ordre de grandeur dans la direction x et dans la direction y . De même, l'ordre de grandeur des modules de cisaillement macroscopiques varie selon qu'il s'agit de la flexion des murs ou de celle des planchers. Le module dominant est E_y et le classement des autres par ordre décroissant donne :

$$\frac{E_x}{E_y} = O(\epsilon) \quad , \quad \frac{G_m}{E_y} = O(\epsilon) \quad \text{et} \quad \frac{G_p}{E_y} = O(\epsilon^4)$$

Regardons maintenant les conséquences de ces nouveaux contrastes sur les caractéristiques du milieu macroscopique. Cette étude est valable pour toutes les fréquences pour lesquelles les éléments sont en équilibre quasi-statique à l'échelle

locale. Ici, les équations sont écrites pour le cas où $\omega = O(\epsilon^2 \omega_r)$. Comme précédemment, elles sont désignées par la direction des efforts (x pour les efforts horizontaux, y pour les efforts verticaux et m pour les moments) et par leur ordre.

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^0}{\partial x^2} + G_m \left(\frac{\partial \tilde{\theta}^0}{\partial y} + \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^0}{\partial y^2} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (x 0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^1}{\partial x^2} + G_m \left(\frac{\partial \tilde{\theta}^1}{\partial y} + \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^1}{\partial y^2} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (x 1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^2}{\partial x^2} + G_m \left(\frac{\partial \tilde{\theta}^2}{\partial y} + \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^2}{\partial y^2} \right) - \frac{E_m I_m}{\ell_p} \frac{\partial^4 \tilde{U}_x^0}{\partial y^4} = 0 \end{array} \right. \quad (x 2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^3}{\partial x^2} + G_m \left(\frac{\partial \tilde{\theta}^3}{\partial y} + \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^3}{\partial y^2} \right) - \frac{E_m I_m}{\ell_p} \frac{\partial^4 \tilde{U}_x^1}{\partial y^4} + M_m \omega^2 \tilde{U}_x^0 = 0 \end{array} \right. \quad (x 3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_y \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^0}{\partial y^2} = 0 \end{array} \right. \quad (y 0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_y \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^1}{\partial y^2} = 0 \end{array} \right. \quad (y 1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_y \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^2}{\partial y^2} = 0 \end{array} \right. \quad (y 2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_y \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^3}{\partial y^2} = 0 \end{array} \right. \quad (y 3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_y \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^4}{\partial y^2} + G_p \left(-\frac{\partial \tilde{\theta}^0}{\partial x} + \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^0}{\partial x^2} \right) + M_m \omega^2 \tilde{U}_y^0 = 0 \end{array} \right. \quad (y 4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_m \left(\tilde{\theta}^0 + \frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial y} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (m 0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_m \left(\tilde{\theta}^1 + \frac{\partial \tilde{U}_x^1}{\partial y} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (m 1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_m \left(\tilde{\theta}^2 + \frac{\partial \tilde{U}_x^2}{\partial y} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (m 2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_m \left(\tilde{\theta}^3 + \frac{\partial \tilde{U}_x^3}{\partial y} \right) - G_p \left(-\tilde{\theta}^0 + \frac{\partial \tilde{U}_y^0}{\partial x} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (m 3)$$

Dans chacun de ces trois groupes d'équations, le premier ordre non nul est appelé ordre 0 par convention. Ainsi, les termes qui se trouvent dans deux équations portant le même numéro mais décrivant l'équilibre selon des directions différentes n'ont pas forcément le même ordre de grandeur. Cela est évident si l'on compare les équations des directions x et y puisqu'il y a un facteur ϵ entre les deux modules d'extension. Remarquons également que ces équations sont en accord avec les estimations des contrastes données plus haut. En effet, nous avons établi que les modules E_x et G_m ont le même ordre de grandeur et ils interviennent bien tous les deux dans les mêmes équations. Par contre, le ratio G_p/E_y est d'ordre ϵ^4 ce qui explique que E_y apparaît dans l'équation (y 0) alors que G_p apparaît dans l'équation (y 4). Le même raisonnement s'applique à l'équation d'équilibre en moments. Comme prévu, c'est la masse des murs qui domine dans la masse surfacique du milieu.

Comparons maintenant les équations selon les directions x et y avec les équations indéfinies du mouvement de la mécanique des milieux continus. Le premier constat est l'existence dans les équations (x 2) et (x 3) d'un terme qui ne rentre pas dans ce cadre. En effet, une dérivée quatrième du déplacement ne peut pas être interprétée comme une contrainte. Ce point sera commenté plus loin. Nous commençons par examiner les autres termes. Les définitions des contraintes sont les mêmes que pour la structure précédente (partie 2.2.1) :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(\vec{U}^0) &= E_x \frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial x} = E_x \epsilon_{xx}(\vec{U}^0) : \text{contrainte normale dans la direction } x, \\ \sigma_{yy}(\vec{U}^0) &= E_y \frac{\partial \tilde{U}_y^0}{\partial y} = E_y \epsilon_{yy}(\vec{U}^0) : \text{contrainte normale dans la direction } y, \\ \left. \begin{aligned} \sigma_{xy}(\tilde{\theta}^0, \vec{U}^0) &= G_m \left(\tilde{\theta}^0 + \frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial y} \right) \\ \sigma_{yx}(\tilde{\theta}^0, \vec{U}^0) &= G_p \left(-\tilde{\theta}^0 + \frac{\partial \tilde{U}_y^0}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} : \text{contraintes tangentielles.} \end{aligned}$$

D'après les contrastes entre les deux modules de cisaillement, il y a un facteur ϵ^3 entre $\sigma_{xy}(\tilde{\theta}^0, \vec{U}^0)$ et $\sigma_{yx}(\tilde{\theta}^0, \vec{U}^0)$. Mais là encore, les équations d'équilibre en moments imposent la symétrie du tenseur des contraintes. En effet, les équations (m 0) à (m 2) montrent que σ_{xy} est nulle jusqu'à l'ordre 2 et l'équation (m 3) indique l'égalité des premiers termes non nuls. Par contre, la contrainte σ_{yx} est générée par les déplacements d'ordre 0 alors que la contrainte σ_{xy} est générée par les déplacements d'ordre 3.

L'expression de la rotation $\tilde{\theta}^0$ se déduit de l'équation (m 0) :

$$\tilde{\theta}^0 = -\frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial y} \quad (2.34)$$

Ce qui permet de retrouver la définition habituelle des contraintes tangentielles :

$$\sigma_{xy}(\tilde{\theta}^3, \vec{U}^3) = \sigma_{yx}(\tilde{\theta}^0, \vec{U}^0) = G_p \left(\frac{\partial \tilde{U}_y^0}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial y} \right) = 2 G_p \epsilon_{xy}(\vec{U}^0)$$

Ici, le module de cisaillement macroscopique a dégénéré et seule la contribution des planchers est visible. En effet, nous avons vu (figure 2.7 page 36) que le module de cisaillement macroscopique G correspond à l'association en série de la rigidité en flexion des murs G_m avec celle des planchers G_p . Donc, lorsque le contraste entre les rigidités est important, ce sont les éléments les plus souples qui pilotent la déformation de la cellule.

$$G_p \ll G_m \quad \Rightarrow \quad G = \frac{G_m G_p}{G_m + G_p} \approx G_p$$

La loi de comportement du milieu continu équivalent est ainsi parfaitement définie. Dans le repère (x, y) lié aux directions des éléments, elle s'écrit :

$$\sigma(\vec{U}^0) = \begin{bmatrix} E_x \epsilon_{xx}(\vec{U}^0) & 2 G_p \epsilon_{xy}(\vec{U}^0) \\ 2 G_p \epsilon_{xy}(\vec{U}^0) & E_y \epsilon_{yy}(\vec{U}^0) \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Comme dans le cas précédent, il s'agit d'un milieu anisotrope caractérisé par trois modules. Mais les deux modules d'extension n'ont plus le même ordre de grandeur et le contraste de rigidité entre le comportement en traction-compression dans les axes du repère et celui en cisaillement est encore plus fort. À l'échelle microscopique, les mécanismes mis en jeu sont quasiment les mêmes : traction-compression des éléments et flexion locale des planchers. Les murs sont maintenant trop rigides pour travailler en flexion locale. L'équilibre du milieu est décrit par une équation d'équilibre interne (équation (2.34)) qui donne la rotation des nœuds $\tilde{\theta}^0$ en fonction de leur déplacement \vec{U}^0 et les équations d'équilibre selon les directions x et y . Ces dernières sont réécrites en éliminant la variable $\tilde{\theta}^0$ et en utilisant la définition des contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xx}(\vec{U}^0)}{\partial x} = 0 \quad (x\ 0) \\ \frac{\partial \sigma_{xx}(\vec{U}^2)}{\partial x} - \frac{E_m I_m}{\ell_p} \frac{\partial^4 \tilde{U}_x^0}{\partial y^4} = 0 \quad (x\ 2) \\ \frac{\partial \sigma_{xx}(\vec{U}^3)}{\partial x} - \frac{E_m I_m}{\ell_p} \frac{\partial^4 \tilde{U}_x^1}{\partial y^4} + \frac{\partial \sigma_{yx}(\vec{U}^0)}{\partial y} + M_m \omega^2 \tilde{U}_x^0 = 0 \quad (x\ 3) \\ \frac{\partial \sigma_{yy}(\vec{U}^0)}{\partial y} = 0 \quad (y\ 0) \\ \frac{\partial \sigma_{yy}(\vec{U}^4)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yx}(\vec{U}^0)}{\partial x} + M_m \omega^2 \tilde{U}_y^0 = 0 \quad (y\ 4) \end{array} \right.$$

Les équations (x 1), (y 1), (y 2) et (y 3) n'ont pas été réécrites car elles ont exactement la même forme que les équations d'ordre 0.

Penchons nous maintenant sur la principale différence entre cette structure et la structure précédente, à savoir l'apparition d'un nouveau terme dans l'équation (x 2) :

$$- \frac{E_m I_m}{\ell_p} \frac{\partial^4 \tilde{U}_x^0}{\partial y^4}$$

Il s'agit d'une dérivée quatrième du déplacement qui n'existe pas en mécanique des milieux continus classique. Cette structure présente donc un degré de liberté supplémentaire. Même s'il apparaît dans une équation d'ordre 2, notons bien que ce nouveau terme n'est pas un terme correctif et que nous obtenons *un milieu généralisé dès l'ordre 0*. En effet, l'ordre de l'équation n'a pas d'importance en soi. Ce qui compte, c'est d'identifier le premier terme non nul associé à chacun des mécanismes possibles. Pour la structure précédente, nous étions obligés d'aller chercher les termes de cisaillement dans les équations d'ordre supérieur afin d'obtenir la loi de comportement complète et de pouvoir étudier tous les modes de propagation des ondes. De la même manière, ce nouveau terme est essentiel à la description du comportement macroscopique de la structure. Son existence montre que le comportement des structures creuses est plus riche que celui des milieux pleins.

Mis à part la présence de ℓ_p au dénominateur, ce terme est identique à celui qui décrit le comportement des poutres en flexion. Le degré de liberté supplémentaire correspond donc à un degré de liberté de déformation interne des murs en flexion. Mais il ne faut pas confondre ce type de flexion avec la flexion locale associée au cisaillement de la cellule (figure 2.32). La flexion locale est la réponse d'un élément à un déplacement différentiel et/ou à une rotation de ses extrémités. L'élément travaille alors en flexion sur la longueur ℓ qui sépare deux nœuds consécutifs. Ici, chacun des murs se comporte comme une poutre qui travaille en flexion sur toute la hauteur de la structure. Ce sont eux qui imposent aux nœuds leur déplacement et leur rotation. Les murs sont synchronisés entre eux par les planchers qui sont beaucoup plus souples en flexion mais très rigides en extension. Ces deux mécanismes avaient déjà été mis en évidence sur des structures unidimensionnelles par Hans et Boutin (Hans, 2002; Boutin et Hans, 2003; Hans et Boutin, 2008).

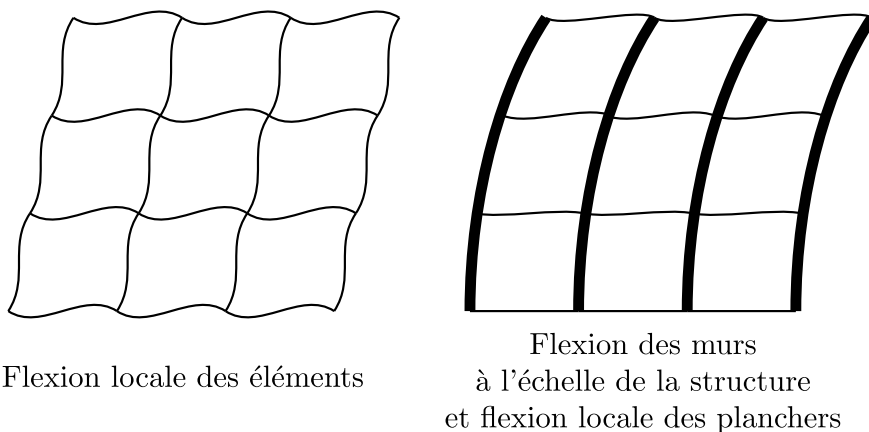


FIGURE 2.32 – Comparaison des deux types de flexions

Les conditions aux limites que doit vérifier ce milieu généralisé s'obtiennent, comme pour la structure précédente (partie 2.2.1 page 41), en écrivant l'équilibre énergétique pour les premiers ordres. Par contre, les calculs sont plus fastidieux car les premiers termes non nuls correspondant aux différents mécanismes sont répartis dans un plus grand nombre d'équations. De plus, les conditions aux limites

associées aux contraintes « classiques » de la mécanique des milieux continus sont semblables à celles de la partie 2.2.1. C'est pourquoi, nous allons nous contenter de multiplier l'équation (x 2) par $\frac{1}{2}\tilde{U}_x^0$ pour mettre en évidence les conditions aux limites associées au nouveau degré de liberté.

Comme pour la structure précédente, nous considérons un échantillon rectangulaire avec des frontières parallèles aux directions des éléments. Les dimensions sont H_x dans la direction x et H_y dans la direction y (figure 2.12(a) page 42). Après intégrations par parties sur la surface Σ de l'échantillon, l'équation (x 2) devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \left(E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^2}{\partial x^2} - \frac{E_m I_m}{\ell_p} \frac{\partial^4 \tilde{U}_x^0}{\partial y^4} \right) \tilde{U}_x^0 dx dy &= \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^2}{\partial x^2} \tilde{U}_x^0 dx dy \\ &+ \frac{1}{2} \left(\int_{x=0}^{H_x} \left(- \left[\frac{E_m I_m}{\ell_p} \frac{\partial^3 \tilde{U}_x^0}{\partial y^3} \tilde{U}_x^0 \right]_{y=0}^{H_y} + \left[\frac{E_m I_m}{\ell_p} \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^0}{\partial y^2} \frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial y} \right]_{y=0}^{H_y} \right) dx \right. \\ &\quad \left. - \iint_{\Sigma} \frac{E_m I_m}{\ell_p} \left(\frac{\partial^2 \tilde{U}_x^0}{\partial y^2} \right)^2 dx dy \right) = 0 \end{aligned}$$

Nous n'avons pas intégré le terme avec \tilde{U}_x^2 car il a déjà été rencontré dans la partie 2.2.1. L'intégration par parties du terme correspondant au nouveau degré de liberté donne sa contribution à l'énergie élastique et les conditions aux limites associées. Ces dernières sont un moment interne $\mathcal{M} = -(E_m I_m / \ell_p) \partial_y^2 \tilde{U}_x^0$ qui travaille avec la distorsion $\partial_y \tilde{U}_x^0$ et un effort tranchant interne $-\mathcal{M}'$ qui travaille avec le déplacement \tilde{U}_x^0 . En plus des conditions aux limites habituelles portant sur les contraintes et les déplacements, il faut donc prendre en compte sur les bords horizontaux trois conditions atypiques : \mathcal{M} , $-\mathcal{M}'$ et $\partial_y \tilde{U}_x^0$. Ce sont les conditions aux limites pour les murs qui travaillent en flexion sur toute la hauteur de la structure.

Ces conditions aux limites s'utilisent de la même manière que dans la partie 2.2.1. Les équations d'équilibre doivent être résolues dans l'ordre croissant. Les premières équations donnent la forme du champ de déplacement macroscopique et permettent de savoir quelles sont les conditions aux limites qui travaillent aux ordres supérieurs.

Revenons maintenant à l'objet de ce chapitre qui est la propagation des ondes dans ce type de milieu. Un régime de propagation d'onde macroscopique est obtenu lorsque les forces d'inertie équilibrent les forces élastiques. Or, l'analyse des différents termes des équations d'équilibre a montré qu'il existe quatre mécanismes associés à quatre rigidités avec quatre ordres de grandeur différents. En allant du plus souple au plus rigide, ces mécanismes sont : la flexion locale des planchers, la flexion des murs à l'échelle de la structure, la traction-compression des planchers et la traction-compression des murs. Il y a donc quatre possibilités pour l'ordre de grandeur de la pulsation.

Flexion locale des planchers :

$$M_m \omega^2 \tilde{U}_y^0 = O \left(G_p \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^0}{\partial x^2} \right) \Rightarrow \omega = O(\epsilon^2 \omega_r)$$

Flexion des murs à l'échelle de la structure :

$$M_m \omega^2 \tilde{U}_x^0 = O \left(-\frac{E_m I_m}{\ell_p} \frac{\partial^4 \tilde{U}_x^0}{\partial y^4} \right) \Rightarrow \omega = O(\epsilon^{3/2} \omega_r)$$

Traction-compression des planchers :

$$M_m \omega^2 \tilde{U}_x^0 = O \left(E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^0}{\partial x^2} \right) \Rightarrow \omega = O(\epsilon^{1/2} \omega_r)$$

Traction-compression des murs :

$$M_m \omega^2 \tilde{U}_y^0 = O \left(E_y \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^0}{\partial y^2} \right) \Rightarrow \omega = O(\omega_r)$$

Pour les deux premières pulsations ($\omega = O(\epsilon^2 \omega_r)$ et $\omega = O(\epsilon^{3/2} \omega_r)$), la condition de quasi-statisme local est vérifiée et la méthode HMPD peut être appliquée sans problème. Le cas où $\omega = O(\epsilon^{1/2} \omega_r)$ correspond à la résonance des planchers en flexion. L'ordre de grandeur de la fréquence est correct car il a été déterminé à partir du mécanisme de traction-compression des planchers. De plus, ce mécanisme est en équilibre quasi-statique à l'échelle locale donc le comportement de la structure est encore homogénéisable. Par contre, l'étude des ondes nécessite de réécrire les équations d'équilibre des nœuds sans faire les développements limités de l'effort tranchant et du moment fléchissant dans les planchers. L'effort normal dans les planchers et les trois efforts dans les murs peuvent quant à eux être développés normalement. Dans le dernier cas ($\omega = O(\omega_r)$), la pulsation est supérieure à la pulsation critique des planchers. La longueur des ondes de flexion générées par les vibrations de la structure dans les planchers est très inférieure à la longueur de ces derniers ($\lambda_{fp} \ll \ell_p$) donc la modélisation des planchers par des poutres n'est plus adaptée. Même si nous savons qu'il existe un mode de propagation d'onde à cette fréquence, il n'est pas possible de l'étudier avec la méthode proposée ici.

Nous allons maintenant regarder en détail les trois premiers modes de propagation des ondes dans l'ordre des fréquences croissantes.

2.3.2 $\omega = O(\epsilon^2 \omega_r)$: flexion locale des planchers

Nous commençons par étudier la propagation des ondes correspondant à la gamme de pulsations la plus basse, c'est-à-dire :

$$\omega = O(\epsilon^2 \omega_r) \quad \text{avec} \quad \omega_r = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{E_m}{\rho_m}}$$

Équations d'équilibre

Les équations d'équilibre ont déjà été présentées dans la partie 2.3.1. Les bilans des efforts selon les directions x et y sont rappelés ci-dessous. Les équations de bilan en moments ont été utilisées pour simplifier les équations selon x et pour remplacer la rotation des nœuds $\tilde{\theta}^0$ par son expression en fonction des gradients des déplacements. Les équations (x 1), (y 1), (y 2) et (y 3) ne sont pas réécrites car elles ont exactement la même forme que les équations d'ordre 0. Néanmoins, nous en tiendrons compte au moment de la résolution.

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^0}{\partial x^2} = 0 \end{array} \right. \quad (x 0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^2}{\partial x^2} - \frac{E_m I_m}{\ell_p} \frac{\partial^4 \tilde{U}_x^0}{\partial y^4} = 0 \end{array} \right. \quad (x 2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^3}{\partial x^2} - \frac{E_m I_m}{\ell_p} \frac{\partial^4 \tilde{U}_x^1}{\partial y^4} + G_p \left(\frac{\partial^2 \tilde{U}_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^0}{\partial y \partial x} \right) + M_m \omega^2 \tilde{U}_x^0 = 0 \end{array} \right. \quad (x 3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_y \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^0}{\partial y^2} = 0 \end{array} \right. \quad (y 0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_y \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^4}{\partial y^2} + G_p \left(\frac{\partial^2 \tilde{U}_x^0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^0}{\partial x^2} \right) + M_m \omega^2 \tilde{U}_y^0 = 0 \end{array} \right. \quad (y 4)$$

L'étude des ondes planes pouvant se propager dans ce milieu se fait grâce à la décomposition d'Helmholtz introduite dans la partie 2.1.5 page 30. Les équations sont réécrites en remplaçant le déplacement \vec{U} par les expressions (2.13) puis simplifiées par i .

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x (\tilde{k}^0)^3 \cos^2(\alpha) \tilde{u}_x^0 = 0 \\ E_y (\tilde{k}^0)^3 \sin^2(\alpha) \tilde{u}_y^0 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (x 0)' \\ (y 0)' \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x \cos^2(\alpha) \left[(\tilde{k}^0)^3 \tilde{u}_x^1 + 3 (\tilde{k}^0)^2 \tilde{k}^1 \tilde{u}_x^0 \right] = 0 \\ E_y \sin^2(\alpha) \left[(\tilde{k}^0)^3 \tilde{u}_y^1 + 3 (\tilde{k}^0)^2 \tilde{k}^1 \tilde{u}_y^0 \right] = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (x 1)' \\ (y 1)' \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x \cos^2(\alpha) \left[(\tilde{k}^0)^3 \tilde{u}_x^2 + 3 (\tilde{k}^0)^2 \tilde{k}^1 \tilde{u}_x^1 + 3 \left(\tilde{k}^0 (\tilde{k}^1)^2 + (\tilde{k}^0)^2 \tilde{k}^2 \right) \tilde{u}_x^0 \right] \\ \quad + \frac{E_m I_m}{\ell_p} (\tilde{k}^0)^5 \sin^4(\alpha) \tilde{u}_x^0 = 0 \quad (x 2)' \\ E_y \sin^2(\alpha) \left[(\tilde{k}^0)^3 \tilde{u}_y^2 + 3 (\tilde{k}^0)^2 \tilde{k}^1 \tilde{u}_y^1 + 3 \left(\tilde{k}^0 (\tilde{k}^1)^2 + (\tilde{k}^0)^2 \tilde{k}^2 \right) \tilde{u}_y^0 \right] = 0 \quad (y 2)' \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x \cos^2(\alpha) \left[(\tilde{k}^0)^3 \tilde{u}_x^3 + 3 (\tilde{k}^0)^2 \tilde{k}^1 \tilde{u}_x^2 + 3 \left(\tilde{k}^0 (\tilde{k}^1)^2 + (\tilde{k}^0)^2 \tilde{k}^2 \right) \tilde{u}_x^1 \right. \\ \quad \left. + \left((\tilde{k}^1)^3 + 3 \tilde{k}^0 \tilde{k}^1 \tilde{k}^2 + 3 (\tilde{k}^0)^2 \tilde{k}^3 \right) \tilde{u}_x^0 \right] \\ \quad + \frac{E_m I_m}{\ell_p} \sin^4(\alpha) \left[(\tilde{k}^0)^5 \tilde{u}_x^1 + 5 (\tilde{k}^0)^4 \tilde{k}^1 \tilde{u}_x^0 \right] \\ \quad + G_p \sin(\alpha) (\tilde{k}^0)^3 \left[\sin(\alpha) \tilde{u}_x^0 + \cos(\alpha) \tilde{u}_y^0 \right] - M_m \omega^2 \tilde{k}^0 \tilde{u}_x^0 = 0 \quad (x 3)' \\ E_y \sin^2(\alpha) \left[(\tilde{k}^0)^3 \tilde{u}_y^3 + 3 (\tilde{k}^0)^2 \tilde{k}^1 \tilde{u}_y^2 + 3 \left(\tilde{k}^0 (\tilde{k}^1)^2 + (\tilde{k}^0)^2 \tilde{k}^2 \right) \tilde{u}_y^1 \right. \\ \quad \left. + \left((\tilde{k}^1)^3 + 3 \tilde{k}^0 \tilde{k}^1 \tilde{k}^2 + 3 (\tilde{k}^0)^2 \tilde{k}^3 \right) \tilde{u}_y^0 \right] = 0 \quad (y 3)' \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} E_y \sin^2(\alpha) \left[(\tilde{k}^0)^3 \tilde{u}_y^4 + 3 (\tilde{k}^0)^2 \tilde{k}^1 \tilde{u}_y^3 + 3 \left(\tilde{k}^0 (\tilde{k}^1)^2 + (\tilde{k}^0)^2 \tilde{k}^2 \right) \tilde{u}_y^2 \right. \\ \quad \left. + \left((\tilde{k}^1)^3 + 3 \tilde{k}^0 \tilde{k}^1 \tilde{k}^2 + 3 (\tilde{k}^0)^2 \tilde{k}^3 \right) \tilde{u}_y^1 \right. \\ \quad \left. + 3 \left(\tilde{k}^0 (\tilde{k}^2)^2 + \tilde{k}^0 \tilde{k}^1 \tilde{k}^3 + (\tilde{k}^1)^2 \tilde{k}^2 + (\tilde{k}^0)^2 \tilde{k}^4 \right) \tilde{u}_y^0 \right] \\ \quad + G_p \cos(\alpha) (\tilde{k}^0)^3 \left[\sin(\alpha) \tilde{u}_x^0 + \cos(\alpha) \tilde{u}_y^0 \right] - M_m \omega^2 \tilde{k}^0 \tilde{u}_y^0 = 0 \quad (y 4)' \end{aligned}$$

Là encore, certaines équations contiennent des termes d'ordres différents mais ils se découpent à la résolution. Nous allons maintenant chercher les solutions de ces équations en fonction de la direction de propagation \vec{n}_α . Nous rappelons que l'axe x du repère correspond à la direction des planchers et l'axe y à la direction des murs.

Propagation en dehors des axes du repère

Dans ce cas, $\cos(\alpha) \neq 0$ et $\sin(\alpha) \neq 0$. Les équations $(x 0)'$ et $(y 0)'$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_x^0 &= \tilde{\varphi}^0 \cos(\alpha) + \tilde{\psi}^0 \sin(\alpha) = 0 & (x 0)' \\ \tilde{u}_y^0 &= \tilde{\varphi}^0 \sin(\alpha) - \tilde{\psi}^0 \cos(\alpha) = 0 & (y 0)' \end{aligned}$$

Le déterminant de ce système étant égal à -1 , la seule possibilité est $\tilde{\varphi}^0 = \tilde{\psi}^0 = 0$. Donc aucune onde ne peut se propager en diagonale dans ce type de milieu pour une pulsation d'ordre $\omega = O(\epsilon^2 \omega_r)$. La structure a encore un comportement quasi-statique.

Propagation selon l'axe y

Ce cas correspond à $\alpha = \pi/2 + n\pi$ avec n entier donc :

$$\cos(\alpha) = 0 \quad \sin(\alpha) = \pm 1 \quad \tilde{u}_x^0 = \pm \tilde{\psi}^0 \quad \tilde{u}_y^0 = \pm \tilde{\varphi}^0$$

L'équation $(x0)'$ est alors trivialement vérifiée et l'équation $(y0)'$ impose $\tilde{\varphi}^0 = 0$:

$$\tilde{u}_x^0 = \tilde{\psi}^0 \sin(\alpha) \quad \text{et} \quad \tilde{u}_y^0 = 0$$

De même, l'équation $(x1)'$ est trivialement vérifiée et l'équation $(y1)'$ impose $\tilde{\varphi}^1 = 0$:

$$\tilde{u}_x^1 = \tilde{\psi}^1 \sin(\alpha) \quad \text{et} \quad \tilde{u}_y^1 = 0$$

Finalement, l'équation $(x2)'$ donne :

$$\frac{E_m I_m}{l_p} (\tilde{k}^0)^5 \sin^5(\alpha) \tilde{\psi}^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\psi}^0 = 0$$

Donc la structure est encore en régime quasi-statique et il n'y a pas de propagation d'onde selon l'axe y à cette fréquence.

Propagation selon l'axe x

Ce cas correspond à $\alpha = n\pi$ avec n entier donc :

$$\cos(\alpha) = \pm 1 \quad \sin(\alpha) = 0 \quad \tilde{u}_x^0 = \pm \tilde{\varphi}^0 \quad \tilde{u}_y^0 = \pm \tilde{\psi}^0$$

Les équations $(y0)'$, $(y1)'$, $(y2)'$ et $(y3)'$ sont trivialement vérifiées et les équations $(x0)'$, $(x1)'$, $(x2)'$ et $(x3)'$ imposent $\tilde{\varphi}^0 = \tilde{\varphi}^1 = \tilde{\varphi}^2 = \tilde{\varphi}^3 = 0$. Ainsi, seules des ondes de cisaillement pur peuvent exister à cette fréquence : la propagation se fait selon l'axe x et les déplacements sont parallèles à l'axe y .

$$\begin{aligned} \tilde{u}_x^0 &= 0 & \text{et} & & \tilde{u}_y^0 &= -\tilde{\psi}^0 \cos(\alpha) \\ \tilde{u}_x^1 &= 0 & \text{et} & & \tilde{u}_y^1 &= -\tilde{\psi}^1 \cos(\alpha) \\ \tilde{u}_x^2 &= 0 & \text{et} & & \tilde{u}_y^2 &= -\tilde{\psi}^2 \cos(\alpha) \\ \tilde{u}_x^3 &= 0 & \text{et} & & \tilde{u}_y^3 &= -\tilde{\psi}^3 \cos(\alpha) \end{aligned}$$

L'équation $(y4)'$ permet de calculer le nombre d'onde \tilde{k}^0 :

$$\tilde{\psi}^0 \tilde{k}^0 \left[-G_p (\tilde{k}^0)^2 + M_m \omega^2 \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{k}^0 = \omega \sqrt{\frac{M_m}{G_p}}$$

où M_m est la contribution des murs à la masse surfacique du milieu et G_p est la rigidité en flexion des planchers.

Remarquons que pour une fréquence plus basse, le terme inertiel $M_m \omega^2$ est relégué à un ordre supérieur et le terme élastique n'est plus équilibré. Dans ce cas, $\tilde{\psi}^0 = 0$ donc il n'y a plus de propagation d'onde à l'échelle macroscopique.

Conclusion

Pour une pulsation d'ordre $\omega = O(\epsilon^2 \omega_r)$, il ne peut exister dans ce type de milieu que des ondes de *cisaillement pur* qui se propagent *uniquement dans la direction x* (figure 2.33). Le nombre d'onde k et la vitesse de propagation c sont donnés par les expressions suivantes :

$$\tilde{k}^0 = \omega \sqrt{\frac{M_m}{G_p}} = \frac{\omega}{c} \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{\frac{G_p}{M_m}} \quad \text{avec} \quad G_p = 12 \frac{E_p I_p}{\ell_m \ell_p^2}$$

Ces expressions ont la même forme que pour des ondes de cisaillement pur dans un milieu continu usuel ou dans la structure précédente (partie 2.2.2 page 52). Mais, comme les planchers sont plus fins que les murs, la masse surfacique et le module de cisaillement ont dégénéré. Au premier ordre, la masse des planchers est négligeable et seule la masse des murs intervient. Pour le module de cisaillement, les éléments étant associés en série, la rigidité de la cellule est égale à la rigidité des éléments les plus souples.

À l'échelle de la cellule, ces ondes sont générées par le mécanisme le plus souple : la *flexion locale des planchers*. Les murs étant plus rigides, ils restent en régime quasi-statique à cette fréquence. C'est pourquoi les ondes ne se propagent que dans une seule direction. L'anisotropie est encore plus marquée que dans la structure précédente.

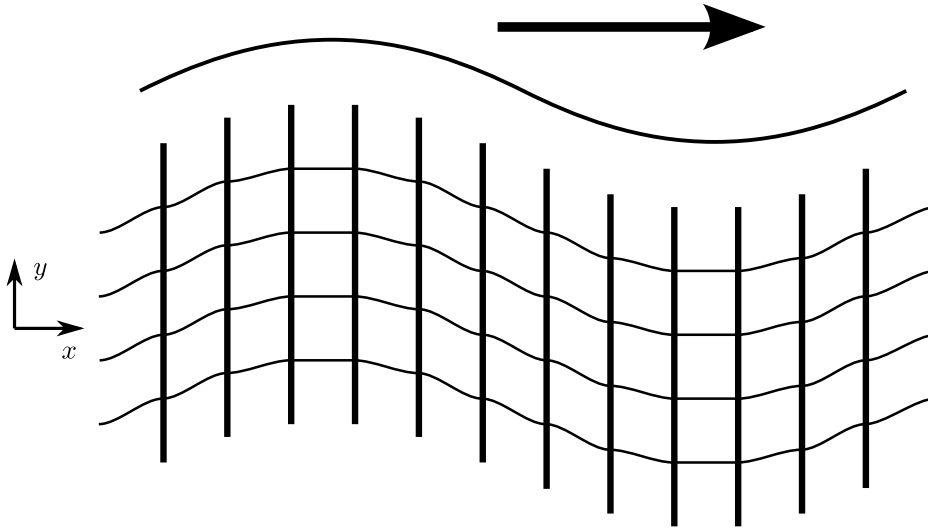


FIGURE 2.33 – Cisaillement macroscopique selon x = flexion locale des planchers

Nous allons maintenant augmenter la fréquence pour que les murs atteignent le régime dynamique.

2.3.3 $\omega = O(\epsilon^{3/2}\omega_r)$: ondes de flexion dans les murs

Dans cette partie, nous présentons le mode de propagation des ondes macroscopiques pour des pulsations légèrement supérieures :

$$\omega = O(\epsilon^{3/2}\omega_r) \quad \text{avec} \quad \omega_r = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{E_m}{\rho_m}}$$

Équations d'équilibre

Les équations de bilan des efforts selon les directions x et y sont présentées ci-dessous. Les équations de bilan des moments sont identiques à celles présentées dans la partie 2.3.1 (page 83) et ont été utilisées pour remplacer la rotation des nœuds θ^0 par son expression en fonction des gradients des déplacements.

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^0}{\partial x^2} = 0 \quad (x\ 0) \\ E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^1}{\partial x^2} = 0 \quad (x\ 1) \\ E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^2}{\partial x^2} - \frac{E_m I_m}{\ell_p} \frac{\partial^4 \tilde{U}_x^0}{\partial y^4} + M_m \omega^2 \tilde{U}_x^0 = 0 \quad (x\ 2) \\ E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^3}{\partial x^2} - \frac{E_m I_m}{\ell_p} \frac{\partial^4 \tilde{U}_x^1}{\partial y^4} + M_m \omega^2 \tilde{U}_x^1 \\ \quad + G_p \left(\frac{\partial^2 \tilde{U}_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^0}{\partial y \partial x} \right) + M_p \omega^2 \tilde{U}_x^0 = 0 \quad (x\ 3) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_y \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^0}{\partial y^2} = 0 \quad (y\ 0) \\ E_y \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^1}{\partial y^2} = 0 \quad (y\ 1) \\ E_y \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^2}{\partial y^2} = 0 \quad (y\ 2) \\ E_y \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^3}{\partial y^2} + M_m \omega^2 \tilde{U}_y^0 = 0 \quad (y\ 3) \\ E_y \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^4}{\partial y^2} + M_m \omega^2 \tilde{U}_y^1 + G_p \left(\frac{\partial^2 \tilde{U}_x^0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^0}{\partial x^2} \right) + M_p \omega^2 \tilde{U}_y^0 = 0 \quad (y\ 4) \end{array} \right.$$

La seule différence par rapport au paragraphe 2.3.2 est le changement d'ordre de grandeur du terme inertiel qui passe dans l'équation d'ordre immédiatement

inférieur. Notons au passage que même si la masse des planchers est négligeable au premier ordre, elle réapparaît à l'ordre suivant.

Dans cette gamme de fréquences, la description de la propagation des ondes à l'ordre 0 nécessite de résoudre les équations (x 0) à (x 2) et (y 0) à (y 3). Celles-ci sont réécrites en utilisant la décomposition d'Helmholtz introduite dans la partie 2.1.5 (page 30) puis simplifiées par i :

$$\begin{cases} E_x(\tilde{k}^0)^3 \cos^2(\alpha) \tilde{u}_x^0 = 0 & (x 0)' \\ E_y(\tilde{k}^0)^3 \sin^2(\alpha) \tilde{u}_y^0 = 0 & (y 0)' \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_x \cos^2(\alpha) \left[(\tilde{k}^0)^3 \tilde{u}_x^1 + 3 (\tilde{k}^0)^2 \tilde{k}^1 \tilde{u}_x^0 \right] = 0 & (x 1)' \\ E_y \sin^2(\alpha) \left[(\tilde{k}^0)^3 \tilde{u}_y^1 + 3 (\tilde{k}^0)^2 \tilde{k}^1 \tilde{u}_y^0 \right] = 0 & (y 1)' \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_x \cos^2(\alpha) \left[(\tilde{k}^0)^3 \tilde{u}_x^2 + 3 (\tilde{k}^0)^2 \tilde{k}^1 \tilde{u}_x^1 + 3 \left(\tilde{k}^0 (\tilde{k}^1)^2 + (\tilde{k}^0)^2 \tilde{k}^2 \right) \tilde{u}_x^0 \right] \\ + \frac{E_m I_m}{\ell_p} (\tilde{k}^0)^5 \sin^4(\alpha) \tilde{u}_x^0 - M_m \omega^2 \tilde{k}^0 \tilde{u}_x^0 = 0 & (x 2)' \\ E_y \sin^2(\alpha) \left[(\tilde{k}^0)^3 \tilde{u}_y^2 + 3 (\tilde{k}^0)^2 \tilde{k}^1 \tilde{u}_y^1 + 3 \left(\tilde{k}^0 (\tilde{k}^1)^2 + (\tilde{k}^0)^2 \tilde{k}^2 \right) \tilde{u}_y^0 \right] = 0 & (y 2)' \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E_y \sin^2(\alpha) \left[(\tilde{k}^0)^3 \tilde{u}_y^3 + 3 (\tilde{k}^0)^2 \tilde{k}^1 \tilde{u}_y^2 + 3 \left(\tilde{k}^0 (\tilde{k}^1)^2 + (\tilde{k}^0)^2 \tilde{k}^2 \right) \tilde{u}_y^1 \right. \\ \left. + \left((\tilde{k}^1)^3 + 3 \tilde{k}^0 \tilde{k}^1 \tilde{k}^2 + 3 (\tilde{k}^0)^2 \tilde{k}^3 \right) \tilde{u}_y^0 \right] - M_m \omega^2 \tilde{k}^0 \tilde{u}_y^0 = 0 \end{aligned} \quad (y 3)'$$

Propagation en dehors des axes du repère

Dans ce cas, $\cos(\alpha) \neq 0$ et $\sin(\alpha) \neq 0$. Les équations (x 0)' et (y 0)' sont identiques à celles du cas précédent :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_x^0 &= \tilde{\varphi}^0 \cos(\alpha) + \tilde{\psi}^0 \sin(\alpha) = 0 & (x 0)' \\ \tilde{u}_y^0 &= \tilde{\varphi}^0 \sin(\alpha) - \tilde{\psi}^0 \cos(\alpha) = 0 & (y 0)' \end{aligned}$$

Le déterminant de ce système vaut -1 donc la seule possibilité est $\tilde{\varphi}^0 = \tilde{\psi}^0 = 0$. La pulsation n'est pas assez élevée pour permettre la propagation des ondes en diagonale et nous sommes encore en régime quasi-statique.

Propagation selon l'axe y

Ce cas correspond à $\alpha = \pi/2 + n\pi$ avec n entier donc :

$$\cos(\alpha) = 0 \quad \sin(\alpha) = \pm 1 \quad \tilde{u}_x^0 = \pm \tilde{\psi}^0 \quad \tilde{u}_y^0 = \pm \tilde{\varphi}^0$$

Les équations $(x0)'$ et $(x1)'$ sont trivialement vérifiées et les équations $(y0)'$ et $(y1)'$ imposent $\tilde{\varphi}^0 = \tilde{\varphi}^1 = 0$. Ainsi, seules des ondes de cisaillement pur peuvent se propager à cette fréquence et les déplacements sont parallèles à l'axe x :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_x^0 &= \tilde{\psi}^0 \sin(\alpha) & \text{et} & & \tilde{u}_y^0 &= 0 \\ \tilde{u}_x^1 &= \tilde{\psi}^1 \sin(\alpha) & \text{et} & & \tilde{u}_y^1 &= 0 \end{aligned}$$

L'équation $(x2)'$ permet de calculer le nombre d'onde \tilde{k}^0 :

$$\tilde{\psi}^0 \tilde{k}^0 \left[\frac{E_m I_m}{\ell_p} (\tilde{k}^0)^4 - M_m \omega^2 \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{k}^0 = \sqrt[4]{\frac{M_m \ell_p \omega^2}{E_m I_m}} = \sqrt[4]{\frac{\bar{\rho}_m \omega^2}{E_m I_m}}$$

où $\bar{\rho}_m$ est la masse linéique d'un mur.

Propagation selon l'axe x

Ce cas correspond à $\alpha = n\pi$ avec n entier donc :

$$\cos(\alpha) = \pm 1 \quad \sin(\alpha) = 0 \quad \tilde{u}_x^0 = \pm \tilde{\varphi}^0 \quad \tilde{u}_y^0 = \pm \tilde{\psi}^0$$

Les équations $(y0)'$, $(y1)'$, et $(y2)'$ sont trivialement vérifiées et les équations $(x0)'$, $(x1)'$, et $(x2)'$ imposent $\tilde{\varphi}^0 = \tilde{\varphi}^1 = \tilde{\varphi}^2 = 0$.

$$\begin{aligned} \tilde{u}_x^0 &= 0 & \text{et} & & \tilde{u}_y^0 &= -\tilde{\psi}^0 \cos(\alpha) \\ \tilde{u}_x^1 &= 0 & \text{et} & & \tilde{u}_y^1 &= -\tilde{\psi}^1 \cos(\alpha) \\ \tilde{u}_x^2 &= 0 & \text{et} & & \tilde{u}_y^2 &= -\tilde{\psi}^2 \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Finalement, l'équation $(y3)'$ donne :

$$\tilde{\psi}^0 \cos(\alpha) \tilde{k}^0 M_m \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\psi}^0 = 0$$

Donc la propagation des ondes selon l'axe x n'est plus possible à cette fréquence.

Conclusion

Pour une pulsation d'ordre $\omega = O(\epsilon^{3/2}\omega_r)$, les ondes macroscopiques sont des ondes de *cisaillement pur* qui se propagent *uniquement dans la direction y* (figure 2.34). Le nombre d'onde k et la vitesse de propagation c sont donnés par les expressions suivantes :

$$\tilde{k}^0 = \sqrt[4]{\frac{\bar{\rho}_m \omega^2}{E_m I_m}} = \frac{\omega}{c} \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{\omega} \sqrt[4]{\frac{E_m I_m}{\bar{\rho}_m}}$$

où $\bar{\rho}_m$ est la masse linéique d'un mur. Même si la vitesse des ondes est proportionnelle à la racine carrée de la pulsation, elle ne peut pas s'annuler car cette expression n'est pas valable à basses fréquences. En effet, ce type d'onde n'existe que pour $\omega = O(\epsilon^{3/2}\omega_r)$.

À l'échelle macroscopique il s'agit encore d'une onde de cisaillement pur mais les expressions ci-dessus sont très différentes de celles trouvées jusqu'à présent,

indiquant que le mécanisme local a changé. Maintenant, la vitesse des ondes c dépend de la fréquence : c'est donc un mode de propagation *dispersif*. De plus, la longueur de l'onde macroscopique Λ est égale à la longueur des ondes de flexion dans les murs :

$$\Lambda = \frac{2\pi}{\tilde{k}^0} = 2\pi \sqrt[4]{\frac{E_m I_m}{\rho_m A_m \omega^2}} = \frac{2\pi}{\beta_m} = \lambda_{fm}$$

L'onde de cisaillement macroscopique est donc générée à l'échelle locale par des *ondes de flexion* qui se propagent dans les murs. C'est pourquoi elle ne peut exister que dans une seule direction. Les ondes de cisaillement dans la direction x que nous avons mises en évidence à une fréquence plus basse ne se propagent plus macroscopiquement car les forces d'inertie sont devenues trop importantes par rapport aux forces élastiques.

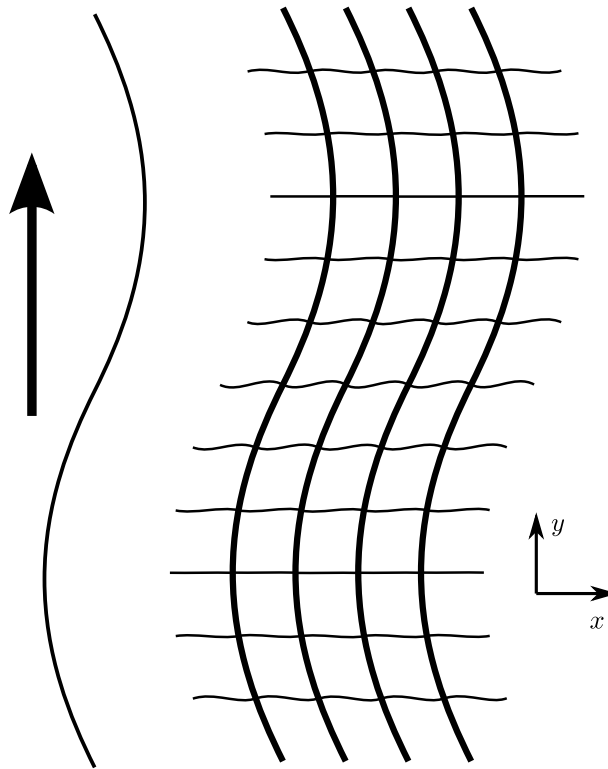


FIGURE 2.34 – Cisaillement macroscopique selon y
= ondes de flexion dans les murs

Après avoir étudié les mécanismes de flexion des planchers et des murs, il nous reste à examiner un cas mettant en jeu la compression.

2.3.4 $\omega = O(\epsilon^{1/2}\omega_r)$: compression des planchers

Nous regardons maintenant la propagation des ondes à l'échelle macroscopique pour la dernière gamme de pulsations qu'il est possible d'étudier avec la méthode HMPD :

$$\omega = O(\epsilon^{1/2}\omega_r) \quad \text{avec} \quad \omega_r = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{E_m}{\rho_m}}$$

Dans ce cas, les planchers sont en résonance en flexion, c'est-à-dire que la longueur de l'onde de flexion λ_{fp} dans les planchers est du même ordre de grandeur que leur longueur ℓ_p . Par contre, la longueur de l'onde de traction-compression dans les planchers λ_{cp} reste bien plus grande que ℓ_p . En ce qui concerne les murs, ils sont plus rigides et toutes les longueurs d'onde (λ_{fm} et λ_{cm}) sont plus grandes que leur longueur ℓ_m . Nous sommes donc dans la situation où la condition de quasi-staticisme local n'est que partiellement vérifiée mais, nous avons vu dans la partie 2.2.3 que nous pouvons encore homogénéiser le comportement de la structure. La seule différence dans la mise en œuvre de la méthode HMPD est que les efforts nodaux ne sont que partiellement développés.

Les expressions des efforts aux extrémités des éléments sont donnés par les équations (2.1) page 18. L'effort normal dépend de $\chi\ell$ alors que l'effort tranchant et le moment fléchissant dépendent de $\beta\ell$. Dans notre cas, nous avons :

$$\begin{aligned} \chi_m \ell_m &= 2\pi \frac{\ell_m}{\lambda_{cm}} \ll 1 & \beta_m \ell_m &= 2\pi \frac{\ell_m}{\lambda_{fm}} \ll 1 \\ \chi_p \ell_p &= 2\pi \frac{\ell_p}{\lambda_{cp}} \ll 1 & \beta_p \ell_p &= 2\pi \frac{\ell_p}{\lambda_{fp}} = O(1) \end{aligned}$$

En conséquence, l'effort tranchant et le moment fléchissant dans les planchers ne peuvent plus être développés selon les puissances de $\beta_p \ell_p$ et il faut garder les expressions (2.1b) et (2.1c). Mais pour les autres efforts, les développements de la page 21 sont toujours valables. Le reste de la méthode n'est pas modifié.

Équations d'équilibre

Les équations d'équilibre sont présentées ci-dessous. Les équations de bilan des moments ont déjà été utilisées pour simplifier les équations de bilan des efforts selon x .

$$\left\{ \begin{aligned} E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^0}{\partial x^2} + M_m \omega^2 \tilde{U}_x^0 &= 0 & (x\ 0) \\ E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^1}{\partial x^2} + M_m \omega^2 \tilde{U}_x^1 + M_p \omega^2 \tilde{U}_x^0 &= 0 & (x\ 1) \\ E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^2}{\partial x^2} + M_m \omega^2 \tilde{U}_x^2 + M_p \omega^2 \tilde{U}_x^1 \\ &\quad - \frac{E_m I_m}{\ell_p} \frac{\partial^4 \tilde{U}_x^0}{\partial y^4} + \frac{(\ell_m M_m \omega^2)^2}{60 G_m} \tilde{U}_x^0 + \frac{E_x \ell_p^2}{12} \frac{\partial^4 \tilde{U}_x^0}{\partial x^4} = 0 & (x\ 2) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_y \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^0}{\partial y^2} = 0 \quad (y 0) \\ E_y \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^1}{\partial y^2} + M_m \omega^2 \tilde{U}_y^0 = 0 \quad (y 1) \\ E_y \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^2}{\partial y^2} + M_m \omega^2 \tilde{U}_y^1 + M_p f(\beta_p \ell_p) \omega^2 \tilde{U}_y^0 = 0 \quad (y 2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_m \left(\tilde{\theta}^0 + \frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial y} \right) = 0 \quad (m 0) \\ G_m \left(\tilde{\theta}^1 + \frac{\partial \tilde{U}_x^1}{\partial y} \right) = 0 \quad (m 1) \\ G_m \left(\tilde{\theta}^2 + \frac{\partial \tilde{U}_x^2}{\partial y} \right) + \frac{\ell_m^2}{15} M_m \omega^2 \frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial y} = 0 \quad (m 2) \\ G_m \left(\tilde{\theta}^3 + \frac{\partial \tilde{U}_x^3}{\partial y} \right) + \frac{\ell_m^2}{15} M_m \omega^2 \frac{\partial \tilde{U}_x^1}{\partial y} \\ - \frac{G_p \beta_p \ell_p}{12 f_P(\beta_p \ell_p)} \left(-4 \sin \left(\frac{\beta_p \ell_p}{2} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\beta_p \ell_p}{2} \right) \tilde{\theta}^0 \right. \\ \left. + \beta_p \ell_p \frac{\operatorname{ch}(\beta_p \ell_p) - \cos(\beta_p \ell_p)}{f_I(\beta_p \ell_p)} \frac{\partial \tilde{U}_y^0}{\partial x} \right) = 0 \quad (m 3) \end{array} \right.$$

avec $\beta = \sqrt[4]{\rho A \omega^2 / EI}$

$$f(\beta \ell) = \frac{4}{\beta \ell f_I(\beta \ell)} \sin \left(\frac{\beta \ell}{2} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\beta \ell}{2} \right)$$

$$f_I(\beta \ell) = \sin \left(\frac{\beta \ell}{2} \right) \operatorname{ch} \left(\frac{\beta \ell}{2} \right) + \operatorname{sh} \left(\frac{\beta \ell}{2} \right) \cos \left(\frac{\beta \ell}{2} \right)$$

$$f_P(\beta \ell) = \sin \left(\frac{\beta \ell}{2} \right) \operatorname{ch} \left(\frac{\beta \ell}{2} \right) - \operatorname{sh} \left(\frac{\beta \ell}{2} \right) \cos \left(\frac{\beta \ell}{2} \right)$$

La fonction f_I s'annule pour les fréquences des modes de flexion impairs des éléments alors que la fonction f_P s'annule pour les fréquences des modes pairs de flexion.

Par rapport aux deux cas précédents, l'importance des forces d'inertie a encore augmenté. En conséquence, les termes inertiels se trouvent dans des équations d'ordre inférieur et nous découvrons la suite de leur développement. Dans l'équation (x 2), apparaît également un nouveau terme proportionnel à $\partial_x^4 \tilde{U}_x^0$. En fait, ce terme était déjà présent auparavant mais, comme les forces d'inertie étaient plus faibles, l'équation (x 0) imposait $\partial_x^2 \tilde{U}_x^0 = 0$ et ce terme était nul.

Le point le plus important est l'apparition d'un terme inertiel dans les équations de bilan des moments qui brise la symétrie du tenseur des contraintes. Les définitions des contraintes σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} qui ont été données page 84 restent valables. Seule la contrainte σ_{yx} est modifiée par la résonance des planchers en flexion et elle dépend maintenant de la fréquence des vibrations à travers le paramètre β_p :

$$\sigma_{yx} = \frac{G_p \beta_p \ell_p}{12 f_P(\beta_p \ell_p)} \left(-4 \sin\left(\frac{\beta_p \ell_p}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\beta_p \ell_p}{2}\right) \tilde{\theta}^0 + \beta_p \ell_p \frac{\operatorname{ch}(\beta_p \ell_p) - \cos(\beta_p \ell_p)}{f_I(\beta_p \ell_p)} \frac{\partial \tilde{U}_y^0}{\partial x} \right)$$

Cependant, elle garde le même ordre de grandeur. Ainsi, il y a toujours un facteur ϵ^3 entre les deux contraintes tangentielles $\sigma_{xy}(\tilde{\theta}^0, \tilde{U}^0)$ et $\sigma_{yx}(\tilde{\theta}^0, \tilde{U}^0)$. La différence est que maintenant, σ_{xy} démarre à l'ordre 2 au lieu de l'ordre 3 car elle est équilibrée par un terme d'inertie dans l'équation (m 2). Non seulement il n'y a plus égalité des premiers termes non nuls des contraintes tangentielles mais en plus, ils n'ont plus le même ordre de grandeur.

Revenons sur la nouvelle définition de la contrainte σ_{yx} . Nous avons déjà rencontré ce terme lors de l'étude de la structure précédente avec des murs et des planchers similaires. Il regroupe les forces élastiques et les forces d'inertie. À basses fréquences, il converge vers la définition de σ_{yx} donnée page 84. *A priori*, cette contrainte devient infinie pour les fréquences des modes de flexion des planchers car elles annulent les dénominateurs. Cependant lors de la résolution, nous verrons que toutes les ondes macroscopiques sont polarisées selon x et que $\tilde{U}_y^0 = 0$. Donc les fréquences des modes impairs de flexion ne sont pas problématiques. Pour les fréquences des modes pairs, la rigidité des planchers semble devenir infinie. Mais nous avons vu page 73 que cela vient de nos hypothèses cinématiques qui ne sont pas adaptées au fonctionnement des éléments pour ces fréquences.

Examinons maintenant les autres conséquences de la résonance des planchers en flexion. Dans la première structure avec des murs et des planchers similaires, la résonance interne jouait un rôle capital dans la propagation des ondes. En effet, nous avions une masse apparente matricielle qui variait de façon importante et cela créait des bandes de fréquences interdites. Ici, la situation est bien différente. À l'ordre dominant, la masse surfacique dégénère et seule la contribution des murs apparaît dans les équations. Comme les murs ne sont pas en résonance, il n'est pas nécessaire d'introduire une masse apparente.

Cependant, si nous regardons les ordres supérieurs pour affiner le modèle, nous constatons que, dans les équations d'équilibre selon les directions x et y , la contribution des planchers dans les termes inertiels n'est pas la même. Les équations de bilan selon x décrivent l'équilibre entre l'effort tranchant dans les murs et l'effort normal dans les planchers. Ces deux efforts ont été développés normalement donc c'est la masse réelle des planchers qui apparaît même aux ordres supérieurs. Au contraire, dans les équations de bilan selon y , la masse des planchers est multipliée par la même fonction f que pour la structure précédente. Nous retrouvons la masse apparente qui dépend de la fréquence. Mais en réalité, les ondes macroscopiques sont polarisées selon x . Pour les premiers ordres, $\tilde{U}_y^j = 0$ et les forces d'inertie n'ont pas de composante selon y . Il faut donc aller assez

loin dans les ordres supérieurs pour voir l'influence de la résonance des planchers en flexion.

L'étude de la propagation des ondes planes à l'ordre 0 fait appel aux équations $(x 0)$, $(y 0)$ et $(y 1)$. Celles-ci sont réécrites en utilisant la décomposition d'Helmholtz introduite dans la partie 2.1.5 (page 30) puis simplifiées par i .

$$\begin{cases} \left(E_x(\tilde{k}^0)^2 \cos^2(\alpha) - M_m \omega^2 \right) \tilde{k}^0 \tilde{u}_x^0 = 0 & (x 0)' \\ E_y(\tilde{k}^0)^3 \sin^2(\alpha) \tilde{u}_y^0 = 0 & (y 0)' \end{cases}$$

$$E_y(\tilde{k}^0)^3 \sin^2(\alpha) \tilde{u}_y^1 + \left(3E_y(\tilde{k}^0)^2 \tilde{k}^1 \sin^2(\alpha) - M_m \omega^2 \tilde{k}^0 \right) \tilde{u}_y^0 = 0 \quad (y 1)'$$

Comme dans les cas précédents, il ne peut y avoir de solution non nulle que si le déterminant du système constitué par les équations $(x 0)'$ et $(y 0)'$ est nul, c'est-à-dire si :

$$\sin(\alpha) = 0 \quad \text{ou} \quad E_x(\tilde{k}^0)^2 \cos^2(\alpha) - M_m \omega^2 = 0$$

De plus, pour :

$$\sin(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad E_x(\tilde{k}^0)^2 \cos^2(\alpha) - M_m \omega^2 \neq 0$$

l'équation $(x 0)'$ impose $\tilde{u}_x^0 = 0$ et l'équation $(y 1)'$ impose $\tilde{u}_y^0 = 0$:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_x^0 = \tilde{\varphi}^0 \cos(\alpha) + \tilde{\psi}^0 \sin(\alpha) = 0 & \Rightarrow \tilde{\varphi}^0 = 0 \\ \tilde{u}_y^0 = \tilde{\varphi}^0 \sin(\alpha) - \tilde{\psi}^0 \cos(\alpha) = 0 & \Rightarrow \tilde{\psi}^0 = 0 \end{aligned}$$

Dans ce cas, aucune onde ne se propage. Il faut donc toujours avoir :

$$E_x(\tilde{k}^0)^2 \cos^2(\alpha) - M_m \omega^2 = 0$$

et l'expression du nombre d'onde est :

$$\tilde{k}^0 = \frac{\omega}{|\cos(\alpha)|} \sqrt{\frac{M_m}{E_x}} \quad \text{avec} \quad E_x = \frac{E_p A_p}{\ell_m}$$

En conséquence, la propagation des ondes est impossible dans la direction des murs ($\cos(\alpha) = 0$). L'équation $(x 0)'$ est toujours trivialement vérifiée. En ce qui concerne la nature des ondes, deux cas sont possibles selon la direction de propagation \vec{n}_α .

Propagation selon l'axe x

Ce cas correspond à $\alpha = n\pi$ avec n entier donc :

$$\cos(\alpha) = \pm 1 \quad \sin(\alpha) = 0 \quad \tilde{u}_x^0 = \pm \tilde{\varphi}^0 \quad \tilde{u}_y^0 = \pm \tilde{\psi}^0$$

L'équation $(y 0)'$ est trivialement vérifiée et l'équation $(y 1)'$ impose $\tilde{\psi}^0 = 0$. Nous avons des ondes de compression pure avec des déplacements parallèles à l'axe x .

$$\tilde{u}_x^0 = \tilde{\varphi}^0 \cos(\alpha) \quad \text{et} \quad \tilde{u}_y^0 = 0$$

Propagation en dehors des axes du repère

Dans ce cas, $\cos(\alpha) \neq 0$ et $\sin(\alpha) \neq 0$. Les équations $(y_0)'$ et $(y_1)'$ imposent $\tilde{u}_y^0 = \tilde{u}_y^1 = 0$. Donc là encore, les déplacements sont parallèles à l'axe x et nous avons une onde de compression-cisaillement. Les variables φ et ψ ne sont pas indépendantes : $\tilde{\psi}^0 = \tilde{\varphi}^0 \tan(\alpha)$.

Conclusion

Pour une pulsation d'ordre $O(\epsilon^{1/2}\omega_r)$, les ondes macroscopiques peuvent se propager dans toutes les directions *sauf celle des murs*. Ce sont des ondes de *compression-cisaillement* qui dégènèrent en des ondes de compression pure dans la direction x . Quelle que soit leur direction de propagation, elles sont polarisées de telle sorte que tous les déplacements se font dans la direction des planchers. Ce comportement correspond au *mode (Px)* que nous avons décrit au cours de l'étude de la structure avec des murs et des planchers similaires (partie 2.2.3). L'expression du nombre d'onde a la même forme que dans l'autre structure :

$$\tilde{k}^0 = \frac{\omega}{|\cos(\alpha)|} \sqrt{\frac{M_m}{E_x}} = \frac{\omega}{c} \quad \Rightarrow \quad c = |\cos(\alpha)| \sqrt{\frac{E_x}{M_m}}$$

La seule différence est que la masse *réelle* des murs remplace la masse apparente. En conséquence, même si nous sommes à la fréquence de résonance des planchers en flexion, la vitesse *ne dépend pas* de la fréquence mais seulement de la direction de propagation \vec{n}_α (figure 2.35).

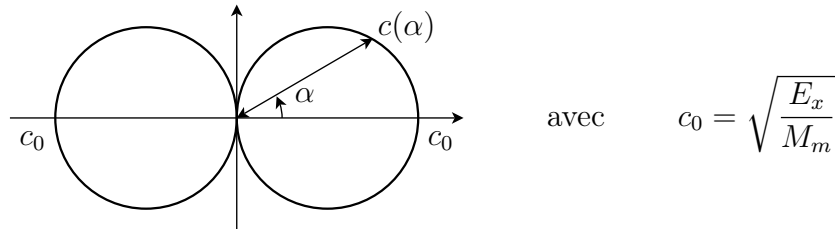


FIGURE 2.35 – Influence de la direction α sur la vitesse de l'onde

Le fonctionnement de la structure à l'échelle microscopique est schématisé sur la figure 2.36. Le quadrillage gris représente la structure avant déformation. Les déplacements nodaux se font selon la direction x comme indiqué par les flèches rouges. Toutes les ondes macroscopiques sont générées par des *ondes de compression pure qui se propagent dans les planchers*. Leur amplitude est dessinée en rouge et leur longueur d'onde est $\Lambda_0 = (2\pi/\omega)c_0$. Ces ondes sont *déphasées verticalement* de telle sorte que les points situés sur des droites orthogonales à la direction \vec{n}_α subissent le même déplacement ce qui donne l'impression que l'onde macroscopique se propage dans la direction \vec{n}_α . La longueur d'onde apparente Λ_α est la projection de Λ_0 sur \vec{n}_α : $\Lambda_\alpha = |\cos(\alpha)|\Lambda_0$. C'est pourquoi la longueur d'onde et donc la vitesse sont maximales dans la direction des planchers. De plus, ce mécanisme ne permet pas de générer une onde macroscopique se propageant dans la direction des murs.

À cause du déphasage, il y a distorsion des cellules qui, cette fois-ci, sont constituées par des murs beaucoup plus rigides que les planchers. Pour reprendre cette distorsion, les murs se déforiment en flexion à l'échelle de la structure. C'est ce qui est dessiné en vert sur la figure 2.36. Il s'agit de la déformation totale des murs car ils sont trop rigides pour entrer en résonance dans cette gamme de fréquences. À l'échelle de la cellule, les murs ont quasiment un mouvement de corps rigide et ce sont eux qui imposent la rotation des nœuds. En effet, l'équation (m 0) s'écrit :

$$G_m \left(\tilde{\theta}^0 + \frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial y} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\theta}^0 = - \frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial y}$$

La distorsion de la cellule est donc entièrement reprise par la flexion locale des planchers (en bleu) qui sont éventuellement en résonance. Comme ce mouvement est perpendiculaire au mouvement des nœuds dû à la propagation des ondes macroscopiques, il ne joue pas sur les forces d'inertie. C'est pourquoi il n'y a pas de masse apparente dans les ordres supérieurs du nombre d'onde.

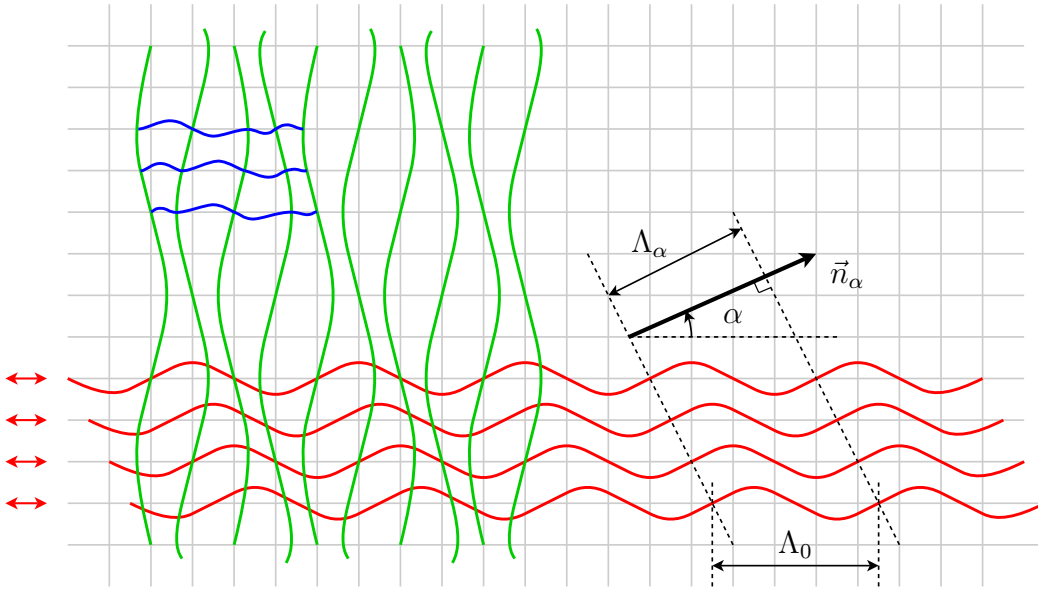


FIGURE 2.36 – Onde dans la direction \vec{n}_α
(Version en couleur : figure D.2 page 334)

Cette description est valable pour toutes les pulsations d'ordre $O(\epsilon^{1/2}\omega_r)$ sauf au voisinage des modes de flexion pairs des planchers. En tenant compte du fait que $\tilde{U}_y^0 = 0$, l'équation (m 3) s'écrit :

$$G_m \left(\tilde{\theta}^3 + \frac{\partial \tilde{U}_x^3}{\partial y} \right) + \frac{\ell_m^2}{15} M_m \omega^2 \frac{\partial \tilde{U}_x^1}{\partial y} + \frac{G_p \beta_p \ell_p}{3 f_P(\beta_p \ell_p)} \sin \left(\frac{\beta_p \ell_p}{2} \right) \text{sh} \left(\frac{\beta_p \ell_p}{2} \right) \tilde{\theta}^0 = 0 \quad (m 3)$$

Pour les fréquences des modes de flexion pairs des planchers, le coefficient devant $\tilde{\theta}^0$ tend vers l'infini donc $\tilde{\theta}^0 = 0$. L'équation (m 1) impose alors $\partial_y \tilde{U}_x^0 = 0$ ce qui interdit le déphasage des ondes de compression dans les planchers et donc

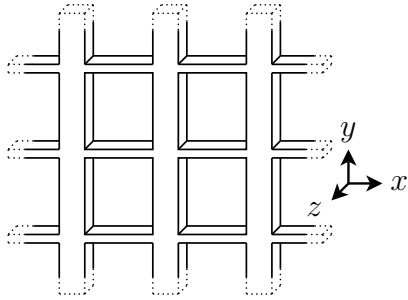
la propagation des ondes de compression-cisaillement en dehors des axes du repère. Tout se passe comme si la rigidité de la cellule était devenue trop grande pour qu'elle puisse être cisailée. Nous avons vu, lors de l'étude de la structure précédente (page 73), que ce phénomène est une conséquence des hypothèses cinématiques que nous avons faites pour homogénéiser le comportement de la structure. En effet, nous avons supposé que les variables cinématiques évoluent peu d'un nœud à l'autre alors que, au voisinage des fréquences des modes de flexion pairs, les nœuds adjacents tournent dans des sens opposés.

Sur l'autre structure avec des murs et des planchers similaires, nous avons observé un deuxième mode de polarisation, le mode (Py). Dans ce cas, les ondes macroscopiques étaient générées par la propagation d'ondes de compression dans les murs. Maintenant que les murs sont plus épais que les planchers, les deux modes de polarisation n'apparaissent plus aux mêmes fréquences. Lorsque les planchers atteignent le régime dynamique en traction-compression, pour des pulsations d'ordre $O(\epsilon^{1/2}\omega_r)$, les murs sont encore en régime quasi-statique. Pour qu'ils atteignent à leur tour le régime dynamique il faut augmenter la fréquence des vibrations. À la fin de la partie 2.3.1 (page 88), nous avons calculé que cela se produit pour une pulsation d'ordre $O(\omega_r)$.

Mais dans ce cas, la longueur de l'onde de flexion dans les planchers devient très inférieure à leur longueur : le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli n'est plus adapté pour décrire les vibrations des planchers et nous ne pouvons plus appliquer la méthode HMPD. Malgré tout, nous pouvons supposer l'existence à cette fréquence d'un mode de propagation d'ondes macroscopiques semblable au mode (Py) de l'autre structure. De plus, la masse des planchers étant beaucoup plus faible que celle des murs, le comportement des planchers ne devrait quasiment pas jouer sur les ondes macroscopiques. Remarquons enfin que, pour une pulsation d'ordre $O(\omega_r)$, les murs atteignent le régime dynamique en traction-compression mais ils sont suffisamment épais pour ne pas être en résonance pour la flexion. Donc les ondes de compression ne coïncident pas systématiquement avec les phénomènes de résonance interne.

2.3.5 Résumé

Structure discrète étudiée



Les murs sont plus épais que les planchers :

$$\begin{aligned} \frac{a_m}{\ell_m} &= O(\epsilon^{1/2}) & \frac{a_p}{\ell_m} &= O(\epsilon^{3/2}) & \frac{h_p}{h_m} &= O(1) \\ \frac{\ell_p}{\ell_m} &= O(1) & \frac{E_p}{E_m} &= O(1) & \frac{\rho_p}{\rho_m} &= O(1) \end{aligned}$$

Milieu continu équivalent hors résonance

C'est un milieu continu *généralisé* anisotrope. Nous pouvons néanmoins définir un tenseur des contraintes. Dans le repère (x, y) , celui-ci s'écrit :

$$\sigma(\vec{U}^0) = \begin{bmatrix} E_x \epsilon_{xx}(\vec{U}^0) & 2G_p \epsilon_{xy}(\vec{U}^0) \\ 2G_p \epsilon_{xy}(\vec{U}^0) & E_y \epsilon_{yy}(\vec{U}^0) \end{bmatrix}$$

De plus, il y a un *fort contraste* entre tous les modules :

$$\frac{E_x}{E_y} = O(\epsilon) \quad \frac{G_p}{E_y} = O(\epsilon^4)$$

Les équations d'équilibre comportent maintenant un terme source :

$$\text{div } \sigma + \rho \omega^2 \vec{U} - \frac{E_m I_m}{\ell_p} \frac{\partial^4 \tilde{U}_x^0}{\partial y^4} \vec{x} = \vec{0}$$

Ce nouveau terme apparaît dans l'équation d'ordre 2. Il correspond à la déformation interne des murs en flexion sur toute leur hauteur.

Propagation d'onde

$\omega < O(\epsilon^2 \omega_r)$	Direction	x	y
	Cisaillement	quasi-statique	quasi-statique
	Compression	quasi-statique	quasi-statique
\Rightarrow Pas de propagation d'onde			

$\omega = O(\epsilon^2 \omega_r)$	<table border="1" data-bbox="587 271 1272 389"> <thead> <tr> <th>Direction</th> <th>x</th> <th>y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Cisaillement</td> <td>propagation</td> <td>quasi-statique</td> </tr> <tr> <td>Compression</td> <td>quasi-statique</td> <td>quasi-statique</td> </tr> </tbody> </table> <p>Description de l'onde :</p> <ul style="list-style-type: none"> - propagation seulement dans la direction x - onde de cisaillement pur (générée par la <i>flexion locale</i> des planchers) - mode de propagation <i>non</i> dispersif 	Direction	x	y	Cisaillement	propagation	quasi-statique	Compression	quasi-statique	quasi-statique
Direction	x	y								
Cisaillement	propagation	quasi-statique								
Compression	quasi-statique	quasi-statique								
$\omega = O(\epsilon^{3/2} \omega_r)$	<table border="1" data-bbox="552 672 1307 790"> <thead> <tr> <th>Direction</th> <th>x</th> <th>y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Cisaillement</td> <td>pas de propagation</td> <td>propagation</td> </tr> <tr> <td>Compression</td> <td>quasi-statique</td> <td>quasi-statique</td> </tr> </tbody> </table> <p>Description de l'onde :</p> <ul style="list-style-type: none"> - propagation seulement dans la direction y - onde de cisaillement pur (générée par des <i>ondes de flexion</i> dans les murs) - mode de propagation <i>dispersif</i> 	Direction	x	y	Cisaillement	pas de propagation	propagation	Compression	quasi-statique	quasi-statique
Direction	x	y								
Cisaillement	pas de propagation	propagation								
Compression	quasi-statique	quasi-statique								
$\omega = O(\epsilon^{1/2} \omega_r)$	<table border="1" data-bbox="564 1077 1294 1196"> <thead> <tr> <th>Direction</th> <th>x</th> <th>y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Cisaillement</td> <td>résonance</td> <td>pas de propagation</td> </tr> <tr> <td>Compression</td> <td>propagation</td> <td>quasi-statique</td> </tr> </tbody> </table> <p>Description de l'onde :</p> <ul style="list-style-type: none"> - propagation dans toutes les directions sauf y - onde de compression pure dans la direction x, ondes de compression-cisaillement sinon - mode de propagation <i>non</i> dispersif mais la vitesse dépend de la direction <p>Commentaire : À l'échelle microscopique, les ondes sont canalisées. Elles sont générées par des <i>ondes de compression pure</i> dans les planchers qui peuvent être déphasées.</p>	Direction	x	y	Cisaillement	résonance	pas de propagation	Compression	propagation	quasi-statique
Direction	x	y								
Cisaillement	résonance	pas de propagation								
Compression	propagation	quasi-statique								
$\omega = O(\omega_r)$	<table border="1" data-bbox="612 1688 1246 1883"> <thead> <tr> <th>Direction</th> <th>x</th> <th>y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Cisaillement</td> <td>???</td> <td>pas de propagation</td> </tr> <tr> <td>Compression</td> <td>pas de propagation</td> <td>propagation</td> </tr> </tbody> </table> <p>⇒ Mode de propagation inaccessible avec cette méthode</p>	Direction	x	y	Cisaillement	???	pas de propagation	Compression	pas de propagation	propagation
Direction	x	y								
Cisaillement	???	pas de propagation								
Compression	pas de propagation	propagation								

2.4 Comment utiliser ces résultats lors de l'étude d'un milieu donné ?

2.4.1 Définition du problème

Tout ce qui a été présenté jusqu'à présent correspond à une phase d'exploration du comportement dynamique de structures réticulées non contreventées. La méthode HMPD a été appliquée sur des structures avec des caractéristiques différentes afin d'identifier les modèles de comportement possibles à l'échelle macroscopique. Nous avons également cherché à comprendre les phénomènes qui se produisent à l'échelle de la cellule. En particulier, nous avons constaté que les ondes macroscopiques de cisaillement peuvent avoir deux origines : soit la flexion locale des éléments entre deux nœuds consécutifs, soit la propagation d'ondes de flexion. Selon le mécanisme mis en jeu, les ondes macroscopiques ont des propriétés très différentes. Pour une structure réticulée réelle, comment déterminer le mécanisme prépondérant et le modèle qui décrit le mieux son comportement ?

Avant de répondre à cette question, commençons par regarder comment est construit le modèle macroscopique avec la méthode HMPD. Dans ce cas, les paramètres physiques du problème, notamment les épaisseurs des éléments, sont définis par leur ordre de grandeur. Ce dernier est exprimé en fonction des puissances du ratio d'échelles $\epsilon = \ell_m/L$ où ℓ_m est la longueur des murs et L la taille caractéristique des déformations macroscopiques. Le modèle homogénéisé est ensuite obtenu en faisant tendre ϵ vers 0. Il décrit donc le comportement limite de la structure lorsque la taille de la cellule devient infiniment petite par rapport à la taille macroscopique. Comme tous les paramètres du problème sont pesés en fonction de ϵ , ils deviennent également des infiniment petits. Néanmoins, leur importance relative a été conservée. La physique du problème initial est donc contenue dans les ordres de grandeur exprimés en fonction des puissances de ϵ .

Pour une structure réelle, les paramètres géométriques et mécaniques ont des valeurs numériques données. Une première idée pour trouver le modèle macroscopique est présentée sur la figure 2.37. Elle consiste à introduire un ratio d'échelles réel ϵ_r . La difficulté réside dans l'estimation de la taille macroscopique L mais, supposons pour l'instant qu'elle ait été surmontée. Il est alors possible de convertir les valeurs numériques des paramètres en ordres de grandeur exprimés en fonction des puissances de ϵ_r . L'homogénéisation revient à remplacer le ratio ϵ_r , qui a une signification physique, par un ratio ϵ mathématique et à faire tendre ce dernier vers 0. Comme les estimations des paramètres en fonction des puissances de ϵ sont conservées, les caractéristiques de la structure initiale sont bien prises en compte dans le modèle macroscopique.

La connaissance du ratio d'échelles réel ϵ_r présente un deuxième intérêt. Nous avons vu que le modèle obtenu par homogénéisation correspond à la limite lorsque ϵ tend vers 0. Or, dans la structure réelle, la cellule a une taille finie et, même s'il est petit, le ratio réel ϵ_r ne tend pas vers 0. Le modèle homogénéisé est donc une description imparfaite du comportement de la structure réelle. À chaque fois, nous avons étudié le champ de déplacement à l'ordre 0 et l'erreur commise en assimilant le comportement réel au comportement homogénéisé est d'ordre ϵ_r .

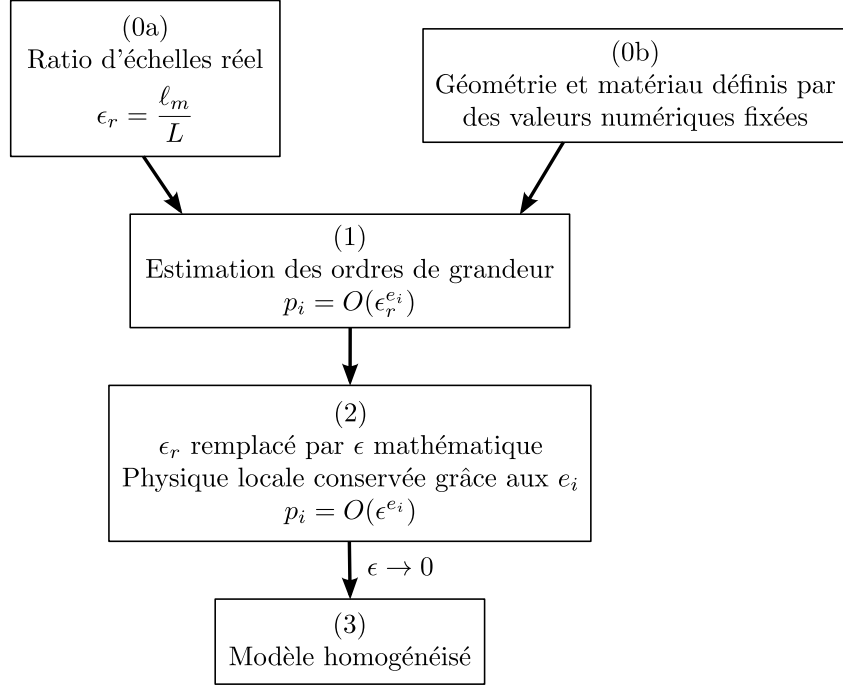


FIGURE 2.37 – Construction du modèle homogénéisé à partir de la structure réelle

Ainsi, aussi bien pour trouver le modèle macroscopique que pour estimer l'erreur commise, il est nécessaire d'évaluer le ratio d'échelles réel ϵ_r et donc la taille macroscopique L . Pour cela, nous adaptons au cas de l'homogénéisation discrète la méthode proposée par Boutin et Auriault (1990). Lors de la mise en œuvre de la méthode HMPD, nous supposons que les variables cinématiques évoluent peu d'un nœud à l'autre et qu'il est possible d'utiliser des développements en séries de Taylor pour exprimer les mouvements des nœuds adjacents au nœud étudié. Par exemple, le mouvement du nœud juste au-dessus est donné par :

$$X^{(m,p+1)} = X^0(m \ell_p, p \ell_m) + \epsilon \left(X^1(m \ell_p, p \ell_m) + L \frac{\partial X^0}{\partial y}(m \ell_p, p \ell_m) \right) + \dots$$

où X peut désigner indifféremment U_x , U_y ou θ . Implicitement, cette façon de faire contient une hypothèse sur l'ordre de grandeur des dérivées macroscopiques :

$$\epsilon L \frac{\partial X^0}{\partial y} = O(\epsilon X^0) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial X^0}{\partial y} = O\left(\frac{X^0}{L}\right)$$

En réalité, il s'agit plutôt d'un majorant que d'une estimation. En effet, si des termes sont sous-estimés lors des développements alors le modèle homogénéisé est faux car il écarte des phénomènes pourtant non négligeables. Au contraire, si des termes sont sur-estimés, le modèle obtenu reste valide mais il est rendu plus complexe par la prise en compte de phénomènes secondaires.

Le même raisonnement mené sur l'équation donnant le mouvement du nœud situé à droite du nœud étudié donne le même majorant pour les dérivées par rapport à la variable x . Finalement, nous avons :

$$\frac{\partial X^0}{\partial x} \leq O\left(\frac{X^0}{L}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial X^0}{\partial y} \leq O\left(\frac{X^0}{L}\right) \quad (2.36)$$

Soient $L_x(X^0)$ et $L_y(X^0)$ les tailles caractéristiques des variations de la variable X^0 selon les directions x et y :

$$L_x(X^0) = \left| \frac{X^0}{\partial_x X^0} \right| \quad \text{et} \quad L_y(X^0) = \left| \frac{X^0}{\partial_y X^0} \right|$$

Pour que les conditions (2.36) soient vérifiées, il faut :

$$\forall X^0 \quad L \leq \min(L_x(X^0), L_y(X^0))$$

De plus, pour un problème de propagation d'ondes, toutes les variables X^0 peuvent se mettre sous la forme $X^0 = \hat{X}^0 \exp[i(\omega t - k \vec{n}_\alpha \cdot \vec{x})]$ donc :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X^0}{\partial x} = -i k \cos(\alpha) X^0 &\Rightarrow L_x = \frac{1}{k |\cos(\alpha)|} \\ \frac{\partial X^0}{\partial y} = -i k \sin(\alpha) X^0 &\Rightarrow L_y = \frac{1}{k |\sin(\alpha)|} \end{aligned} \right\} \min(L_x, L_y) \geq \frac{1}{k} = \frac{\Lambda}{2\pi}$$

où Λ est la longueur de l'onde macroscopique. Comme $\epsilon_r = \ell_m/L$ est une mesure de la précision du modèle homogénéisé, il vaut mieux le prendre le plus petit possible et donc L la plus grande possible. D'où la définition de L :

$$L = \frac{\Lambda}{2\pi} \tag{2.37}$$

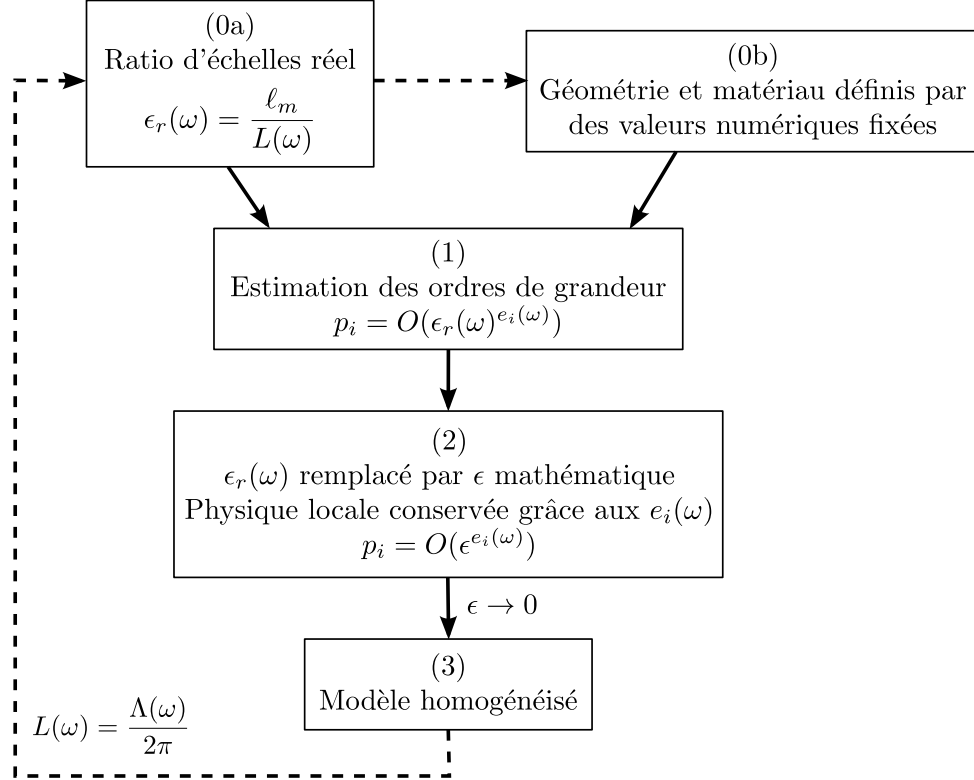
À cause de la présence de la longueur d'onde macroscopique, cette estimation est délicate à utiliser pour trois raisons que nous commenterons par la suite :

1. L est connue *a posteriori*,
2. L dépend de la fréquence,
3. L dépend de la nature des ondes (traction-compression ou cisaillement).

La première raison est illustrée sur la figure 2.38. Le problème est que la longueur d'onde macroscopique est un des résultats de l'homogénéisation. Cela oblige à démarrer le raisonnement à l'étape (1) en choisissant les ordres de grandeur de façon arbitraire. Puis il faut appliquer la méthode HMPD (étapes (2) et (3)) pour obtenir le milieu continu équivalent et la longueur d'onde macroscopique. Connaissant L , il est alors possible de revenir à l'étape (0) pour calculer le ratio réel ϵ_r et construire une structure correspondant à ce modèle. Ainsi, l'estimation (2.37) ne permet pas de répondre à la question de départ qui était : « connaissant la structure réelle, quel est le milieu continu équivalent ? » Par contre, elle répond à la question : « connaissant le modèle macroscopique, quelles sont les structures réelles qui ont ce type de comportement ? » De plus, elle permet d'estimer la précision du modèle.

Par exemple, les deux parties 2.2 et 2.3 correspondent aux étapes (1), (2) et (3) et il est maintenant possible de construire des structures dont le comportement est décrit par ces modèles. C'est ce que nous allons faire pour le premier cas, lorsque les murs et les planchers sont similaires. Dans la partie 2.2, les épaisseurs de ces derniers étaient d'ordre $O(\epsilon \ell_m)$:

$$\frac{a_m}{\ell_m} = O(\epsilon) \quad \frac{a_p}{\ell_m} = O(\epsilon)$$


 FIGURE 2.38 – L est connu *a posteriori*

Pour une pulsation d'ordre $\omega = O(\epsilon\omega_r)$, l'application de la méthode HMPD donne des ondes de cisaillement pur générées par la flexion locale des éléments. Leur longueur d'onde est :

$$\Lambda_{FL} = \frac{2\pi}{\omega}c = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{G}{M_s}} \quad (2.38)$$

avec $M_s = \frac{\bar{\rho}_m}{\ell_p} + \frac{\bar{\rho}_p}{\ell_m}$ $G = \frac{G_m G_p}{G_m + G_p}$ $G_p = 12 \frac{E_p I_p}{\ell_m \ell_p^2}$ $G_m = 12 \frac{E_m I_m}{\ell_m^2 \ell_p}$

Lorsque les murs et les planchers sont rigoureusement identiques, les expressions se simplifient :

$$M_s = 2 \frac{\bar{\rho}}{\ell} \quad \text{et} \quad G = 6 \frac{EI}{\ell^3} \quad \Rightarrow \quad \Lambda_{FL} = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{Ea^2}{4\rho \ell^2}}$$

L'introduction de $L = \Lambda_{FL}/(2\pi)$ dans l'estimation des épaisseurs donne :

$$a = O(\epsilon_r \ell) = O\left(\frac{\ell^2}{L}\right) = O\left(\ell^2 \omega \sqrt{\frac{4\rho \ell^2}{Ea^2}}\right) \quad \Rightarrow \quad a^2 = O\left(2\ell^3 \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}\right)$$

Pour observer de telles ondes de cisaillement dans une structure en béton ($E = 30\,000$ MPa et $\rho = 2\,300$ kg/m³) avec des éléments de longueur $\ell = 3$ m à une fréquence $f = 1$ Hz, il faut donc que l'épaisseur des éléments a soit de l'ordre

de 31 cm. Dans ce cas, la longueur d'onde macroscopique vaut $\Lambda_{FL} \approx 185$ m donc $L \approx 29$ m et $\epsilon_r \approx 0,102$.

Remarquons que cette estimation adimensionnelle des épaisseurs des éléments fait intervenir la pulsation. En conséquence, « une structure homogénéisée » dont les éléments ont une épaisseur d'ordre $O(\epsilon_r \ell_m)$ correspond à plusieurs structures physiques avec des éléments plus ou moins épais selon la fréquence. Sur l'exemple de la structure en béton, une épaisseur d'ordre $O(\epsilon_r \ell_m)$ à la fréquence $f = 5$ Hz se traduit par des murs et des planchers d'environ 67 cm.

Une autre conséquence des variations du ratio d'échelles réel est la diminution de la précision du modèle homogénéisé avec la fréquence. Pour les ondes de cisaillement générées par la flexion locale, ϵ_r est proportionnel à $\sqrt{\omega}$:

$$\epsilon_r = O\left(\frac{2\pi\ell}{\Lambda_{FL}}\right) = O\left(2\omega\frac{\ell^2}{a}\sqrt{\frac{\rho}{E}}\right) = O\left(\sqrt[4]{\frac{4\ell^2\omega^2\rho}{E}}\right)$$

Ainsi à $f = 5$ Hz pour la structure dont les éléments font 67 cm d'épaisseur, la longueur d'onde macroscopique vaut $\Lambda_{FL} \approx 83$ m donc $L \approx 13$ m et $\epsilon_r \approx 0,228$.

Inversement, nous considérons maintenant une structure réelle et nous recherchons le milieu continu équivalent. Dans ce cas, le passage des valeurs numériques des paramètres aux estimations en fonction de ϵ_r dépend de la fréquence et *le milieu continu équivalent peut changer*. Lorsque la pulsation augmente, la longueur d'onde Λ et donc L diminuent. Le ratio d'échelles ϵ_r devient alors de plus en plus grand tout en restant inférieur à 1. Comme les ratios a_m/ℓ_m et a_p/ℓ_m ont des valeurs numériques fixes, il faut que les ordres de grandeur e_m et e_p définis de la façon suivante augmentent.

$$\frac{a_m}{\ell_m} = O(\epsilon_r(\omega)^{e_m(\omega)}) \quad \frac{a_p}{\ell_m} = O(\epsilon_r(\omega)^{e_p(\omega)})$$

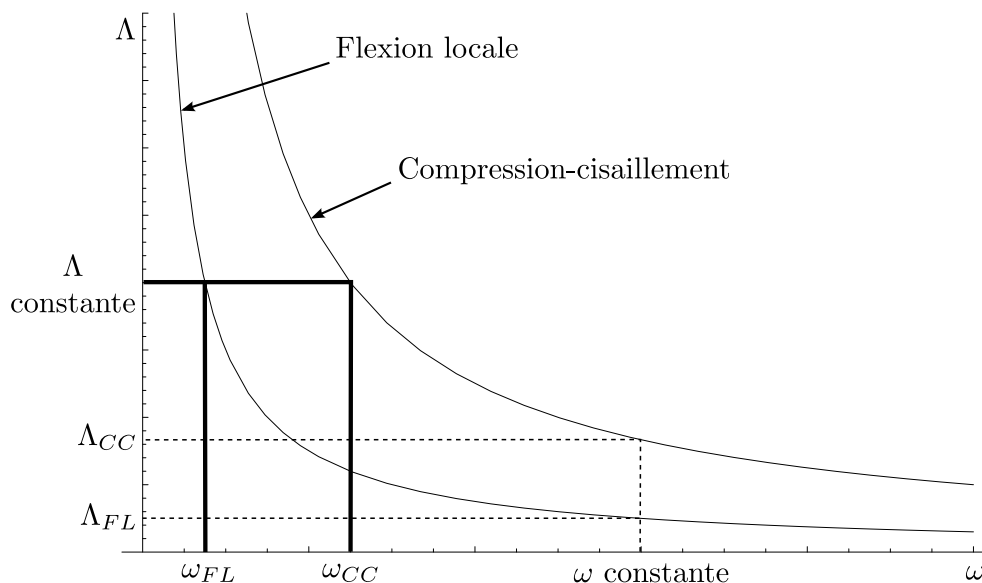
$$\omega \nearrow \Rightarrow \Lambda \text{ et } L \searrow \Rightarrow \epsilon_r \nearrow (0 < \epsilon_r < 1) \Rightarrow e_m \text{ et } e_p \nearrow$$

Enfin, l'expression de la longueur d'onde n'est pas la même selon la nature de l'onde. Nous venons de regarder les ondes de cisaillement pur générées par la flexion locale des éléments. Or dans les structures avec des murs et des planchers identiques, nous pouvons aussi avoir des ondes de compression-cisaillement. Pour une onde qui se propage dans la direction x , la longueur d'onde est :

$$\Lambda_{CC} = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{E_x}{M^m(\omega)}} \quad (2.39)$$

avec $E_x = \frac{E_p A_p}{\ell_m}$ et $M^m(\omega) = \frac{\bar{\rho}_p}{\ell_m} + \frac{\bar{\rho}_m}{\ell_p} f(\beta_m \ell_m)$

L'expression (2.39) est complètement différente de l'expression (2.38). Dans le plan (Λ, ω) , les deux modes de propagation des ondes sont donc représentés par deux courbes distinctes. C'est ce qui est schématisé sur la figure 2.39 en négligeant la résonance interne.

FIGURE 2.39 – Les deux modes de propagation dans le plan (Λ, ω)

Imaginons que nous ayons une structure réelle dont les épaisseurs des éléments sont d'ordre $O(\epsilon_r \ell_m)$ par rapport au premier type d'onde au voisinage de la pulsation ω_{FL} . Pour que les épaisseurs des éléments aient le même ordre de grandeur par rapport au deuxième type d'onde, il faut que l'unité de mesure ϵ_r soit identique et donc que la longueur d'onde soit la même : $\Lambda_{CC} = \Lambda_{FL}$. Cela se produit au voisinage de la pulsation ω_{CC} qui est différente de ω_{FL} (traits gras sur la figure 2.39). Comme le mécanisme de traction-compression à l'origine des ondes de compression-cisaillement est plus rigide que la flexion locale, nous avons $\omega_{CC} > \omega_{FL}$. C'est pour cette raison, que ces deux types d'onde apparaissent dans des gammes de fréquences différentes lors de l'étude par homogénéisation.

Mais cela ne signifie pas qu'elles ne peuvent pas coexister à la même fréquence. Pour s'en rendre compte, il faut raisonner à pulsation constante (pointillés sur la figure 2.39) au lieu de raisonner à longueur d'onde constante. Dans ce cas, les deux modes de propagation sont associés à deux longueurs d'onde différentes et donc à deux valeurs de ϵ_r . La même structure réelle est alors représentée par deux « structures homogénéisées » définies par des ordres de grandeur différents.

En conclusion, l'estimation des ordres de grandeur des paramètres en fonction des puissances de ϵ est une étape indispensable lors de l'homogénéisation. Cela permet de prendre en compte la physique locale du problème en conservant l'importance relative des différents phénomènes physiques lorsque ϵ tend vers 0. C'est un aspect de la méthode HMPD qui a été exploité dans la thèse de Hans (2002). Si cette étape de normalisation est oubliée, alors implicitement tous les paramètres sont d'ordre ϵ^0 et il ne reste plus qu'un seul modèle macroscopique possible.

Par contre, la transposition de cette démarche à l'étude des structures réelles est délicate. Même s'il est possible d'évaluer le ratio d'échelles réel ϵ_r , il n'est connu qu'à la fin du processus. De plus, il dépend de nombreux paramètres, notamment la fréquence et la nature des ondes. La connaissance de ϵ_r est donc

intéressante pour évaluer l'erreur commise en approximant le comportement réel par le comportement homogénéisé mais il faut utiliser une autre approche pour identifier le bon modèle. Pour cela, nous construisons des critères dimensionnels qui s'appuient sur les caractéristiques de la cellule plutôt que sur celles des éléments.

Les deux cas traités par homogénéisation dans les parties 2.2 et 2.3 ont permis de trouver quatre mécanismes intervenant dans la propagation des ondes macroscopiques :

- la flexion locale des éléments,
- la propagation d'ondes de flexion,
- la propagation d'ondes de compression,
- la résonance interne en flexion.

Selon la structure, les ondes de cisaillement pur peuvent être générées soit par le premier mécanisme, soit par le deuxième. Même si à chaque fois les éléments travaillent en flexion, les propriétés des ondes sont très différentes. Nous verrons dans la partie 2.4.2 comment déterminer le modèle approprié sans repasser par l'homogénéisation. Pour les ondes de compression-cisaillement, nous n'avons identifié qu'un seul mécanisme et il semble exister dans tous les types de structure. Dans les deux cas que nous avons étudiés, ces ondes étaient associées à la résonance interne des éléments en flexion. En est-il toujours ainsi ? La résonance interne peut-elle se produire avec d'autres types d'onde ? Ces questions seront abordées dans la partie 2.4.3. Enfin, la partie 2.4.4 est consacrée au calcul de la gamme des fréquences admissibles pour chaque onde. Elle est illustrée par un exemple numérique.

2.4.2 Étude des ondes de cisaillement pur

Les ondes macroscopiques de cisaillement pur peuvent être générées par deux mécanismes de flexion différents : la flexion locale des éléments et la propagation d'ondes de flexion. Pour ces deux mécanismes, le fonctionnement de la structure à l'échelle microscopique est schématisé sur la figure 2.32 page 86. La flexion locale est la réponse des éléments à la distorsion de la cellule : ils travaillent en flexion sur la distance ℓ qui sépare deux nœuds consécutifs. Dans ce cas, la vitesse des ondes est indépendante de la fréquence. Pour le deuxième mécanisme, les éléments travaillent en flexion sur toute la hauteur de la structure. La vitesse des ondes dépend alors de la fréquence comme pour les ondes de flexion dans les poutres. Nous avons vu que le premier type d'onde se propage dans des structures avec des éléments similaires alors que le deuxième type nécessite un fort contraste de rigidité entre les murs et les planchers. Mais où se situe la frontière entre ces deux mécanismes et que se passe-t-il dans les cas intermédiaires ?

Comparaison des deux mécanismes de flexion

Nous supposons qu'il n'y a pas de résonance interne dans la structure et nous nous intéressons aux conditions d'existence des ondes de flexion dans les murs. À partir des deux cas traités par homogénéisation, nous pouvons identifier les termes liés à la flexion locale (FL) et aux ondes de flexion (OF) pour les murs dans les équations d'équilibre en force selon la direction x :

$$\left. \begin{aligned} FL &= 12 \frac{E_m I_m}{\ell_m^2 \ell_p} \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^0}{\partial y^2} = O \left(12 \frac{E_m I_m}{\ell_m^2 \ell_p} \frac{\tilde{U}_x^0}{L^2} \right) \\ OF &= \frac{E_m I_m}{\ell_p} \frac{\partial^4 \tilde{U}_x^0}{\partial y^4} = O \left(\frac{E_m I_m}{\ell_p} \frac{\tilde{U}_x^0}{L^4} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{OF}{FL} = O(\epsilon^2)$$

Logiquement, la flexion locale est plus rigide que la flexion à l'échelle de la structure. Comme il y a un facteur ϵ^2 entre ces deux termes, FL apparaît dans l'équation (xj) et OF apparaît dans l'équation ($x[j+2]$) où j est déterminé par le contraste de rigidité entre la flexion locale des murs et la traction-compression des planchers. Les équations d'équilibre en force selon la direction x ont donc la forme suivante :

$$E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^0}{\partial x^2} = 0 \quad (x0)$$

$$E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^j}{\partial x^2} + G_m \left(\frac{\partial \tilde{\theta}^0}{\partial y} + \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^0}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (xj)$$

$$E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^{j+2}}{\partial x^2} + G_m \left(\frac{\partial \tilde{\theta}^2}{\partial y} + \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^2}{\partial y^2} \right) - \frac{E_m I_m}{\ell_p} \frac{\partial^4 \tilde{U}_x^0}{\partial y^4} = 0 \quad (x[j+2])$$

$$\text{où } E_x = \frac{E_p A_p}{\ell_m} \quad \text{et} \quad G_m = 12 \frac{E_m I_m}{\ell_m^2 \ell_p}$$

Nous n'avons indiqué que les équations dans lesquelles apparaît un nouveau terme qui n'est pas présent dans les équations d'ordre inférieur. De plus, il manque le terme d'inertie $M_s \omega^2 \tilde{U}_x^0$ qui peut se trouver dans n'importe laquelle de ces équations selon l'ordre de grandeur de la pulsation. Il faut néanmoins que cette dernière soit suffisamment faible pour que les éléments restent en équilibre quasi-statique à l'échelle locale.

Nous allons étudier l'évolution du comportement de la structure en fonction des ordres de grandeur des épaisseurs des murs et des planchers. Ceux-ci sont notés respectivement e_m et e_p :

$$\frac{a_m}{\ell_m} = O(\epsilon^{e_m}) \quad \text{et} \quad \frac{a_p}{\ell_m} = O(\epsilon^{e_p})$$

Pour un contraste négligeable, c'est-à-dire lorsque $e_m = e_p$, nous avons vu dans la partie 2.2.1 que l'équation d'équilibre en moments s'écrit :

$$G_m \left(\tilde{\theta}^0 + \frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial y} \right) - G_p \left(-\tilde{\theta}^0 + \frac{\partial \tilde{U}_y^0}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{où} \quad G_p = 12 \frac{E_p I_p}{\ell_p^2 \ell_m}$$

Cette équation apporte deux types d'information. Tout d'abord, elle permet d'exprimer la rotation des nœuds $\tilde{\theta}^0$ en fonction de leur déplacement \tilde{U}^0 et de trouver le module de cisaillement macroscopique G :

$$G = \frac{G_m G_p}{G_m + G_p}$$

Celui-ci correspond à l'association en série de la rigidité en flexion des murs avec celle des planchers (figure 2.7 page 36). Pour des murs et des planchers similaires, les trois rigidités G , G_m et G_p ont le même ordre de grandeur.

Le deuxième point est que l'équation d'équilibre en moments indique l'ordre de grandeur des contraintes tangentielles. Ici, elles démarrent toutes les deux à l'ordre 0. En conséquence, le terme lié à la flexion locale dans l'équation ($x j$) est non nul. La résolution (partie 2.2.2) montre qu'il faut fixer l'ordre de grandeur de la pulsation de telle sorte que le terme d'inertie soit dans l'équation ($x j$) et les ondes macroscopiques sont alors des ondes de cisaillement pur générées par la flexion locale des éléments. Si nous choisissons une pulsation plus basse pour que le terme d'inertie se trouve dans l'équation ($x [j + 2]$) alors l'équation ($x j$) impose $\psi^0 = 0$ et le mécanisme de cisaillement reste en quasi-statique. Pour cette géométrie, le mécanisme de flexion des murs à l'échelle de la structure ne peut pas s'exprimer à l'ordre 0.

Regardons maintenant ce qui se passe lorsque les planchers deviennent de plus en plus fins, c'est-à-dire lorsque e_p augmente. Dans les équations d'équilibre selon x , le contraste entre la flexion locale des murs et la traction-compression des planchers diminue donc j diminue. Par contre, le contraste entre les deux types de flexion des murs est inchangé. En ce qui concerne l'équation d'équilibre en moments, les deux contraintes tangentielles n'ont plus le même ordre de grandeur. Le terme proportionnel à la rigidité en flexion des murs G_m reste dans l'équation

d'ordre 0 mais celui qui est proportionnel à la rigidité des planchers G_p est relégué à un ordre supérieur. Le contraste entre les deux termes est donné par :

$$\frac{G_p}{G_m} = \frac{E_p I_p}{\ell_p^2 \ell_m} \frac{\ell_m^2 \ell_p}{E_m I_m} = O\left(\left(\frac{a_p}{a_m}\right)^3\right) = O(\epsilon^{3(e_p - e_m)})$$

Soit $n = 3(e_p - e_m)$. Les équations d'équilibre en moments ont donc la forme suivante :

$$G_m \left(\tilde{\theta}^0 + \frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial y} \right) = 0 \quad (m\ 0)$$

$$G_m \left(\tilde{\theta}^n + \frac{\partial \tilde{U}_x^n}{\partial y} \right) - G_p \left(-\tilde{\theta}^0 + \frac{\partial \tilde{U}_y^0}{\partial x} \right) = 0 \quad (m\ n)$$

Le module de cisaillement du milieu continu équivalent G dégénère et devient égal à la rigidité en flexion des planchers G_p . Même si nous n'avons modifié que l'épaisseur des planchers, c'est la rigidité de l'ensemble de la cellule qui a diminué. Cela est cohérent avec l'association en série. Pour les contraintes tangentielles, les premiers termes non nuls restent égaux mais, cette fois-ci, il y en a une qui est générée par les déplacements d'ordre 0 et une qui est générée par les déplacements d'ordre n . Si $n > 2$ alors les équations d'équilibre selon x se simplifient :

$$E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^0}{\partial x^2} = 0 \quad (x\ 0)$$

$$E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^j}{\partial x^2} = 0 \quad (x\ j)$$

$$E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^{j+2}}{\partial x^2} - \frac{E_m I_m}{\ell_p} \frac{\partial^4 \tilde{U}_x^0}{\partial y^4} = 0 \quad (x\ [j + 2])$$

$$E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^{j+n}}{\partial x^2} - \frac{E_m I_m}{\ell_p} \frac{\partial^4 \tilde{U}_x^{n-2}}{\partial y^4} + G_p \left(-\tilde{\theta}^0 + \frac{\partial \tilde{U}_y^0}{\partial x} \right) = 0 \quad (x\ [j + n])$$

Dans ce cas, la résolution (partie 2.3.3) montre que le terme d'inertie doit apparaître dans l'équation $(x\ [j + 2])$ pour obtenir des ondes macroscopiques de cisaillement pur. Celles-ci sont générées par des ondes de flexion qui se propagent dans les murs. Pour les pulsations plus basses, le mécanisme de cisaillement reste en quasi-statique.

Ces exemples montrent, que parmi les deux mécanismes de cisaillement possibles, c'est le plus rigide qui domine. Cela suggère une association en parallèle (figure 2.40). Pour obtenir des ondes de flexion dans les murs, il faut donc assouplir le mécanisme de cisaillement de la cellule. Comme le contraste de rigidité entre la flexion locale des murs et leur flexion à l'échelle de la structure est constant, la seule possibilité est de diminuer la rigidité des planchers G_p . Cela se traduit par la condition suivante sur les ordres de grandeur :

$$\begin{aligned} 3(e_p - e_m) < 2 &\quad \Rightarrow \quad \text{cisaillement de la cellule} \\ 3(e_p - e_m) > 2 &\quad \Rightarrow \quad \text{ondes de flexion dans les murs} \end{aligned}$$

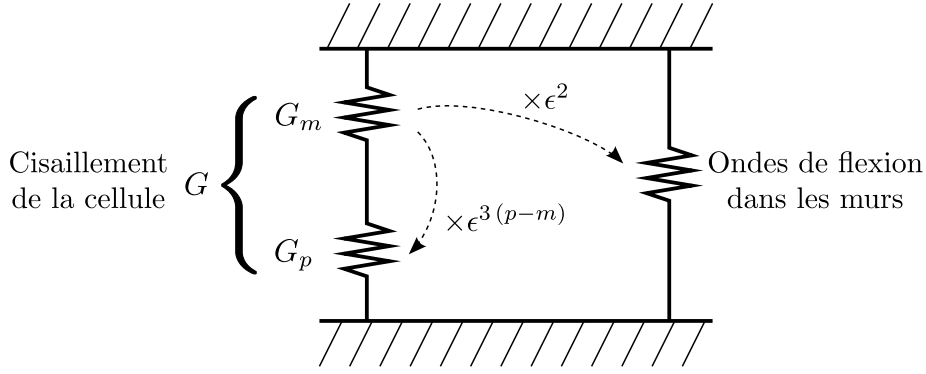


FIGURE 2.40 – Comparaison des rigidités des mécanismes de cisaillement

La condition pour avoir des ondes de flexion dans les planchers s'obtient en inversant e_m et e_p .

Cas où les deux mécanismes ont la même importance

Il reste à étudier le comportement d'une structure où les deux mécanismes ont la même importance, c'est-à-dire : $3(e_p - e_m) = 2$. Les ordres de grandeur retenus sont résumés ci-dessous :

$$\frac{a_m}{\ell_m} = O(\epsilon) \quad \frac{a_p}{\ell_m} = O(\epsilon^{5/3}) \quad \omega = O(\epsilon^2 \omega_r) \quad \text{avec} \quad \omega_r = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{E_m}{\rho_m}}$$

L'ordre de grandeur de la pulsation a été choisi de manière à obtenir des ondes de cisaillement pur à la résolution. La différence par rapport aux deux cas traités auparavant est que le contraste entre les épaisseurs des murs et des planchers n'est plus une puissance entière de ϵ . Pour que tous les termes soient équilibrés, il faut maintenant faire les développements asymptotiques des variables cinématiques selon les puissances de $\epsilon^{1/3}$:

$$X(\epsilon, x, y) = X^0(x, y) + \epsilon^{1/3} X^{1/3}(x, y) + \epsilon^{2/3} X^{2/3}(x, y) + \epsilon X^1(x, y) + \dots$$

où X représente indifféremment les fonctions U_x , U_y , ou θ .

Les équations d'équilibre sont présentées ci-dessous. Les équations de bilan des moments ont été utilisées pour remplacer la rotation des nœuds θ^0 par son expression en fonction du déplacement \tilde{U}^0 et pour simplifier les équations d'équilibre dans la direction x . Seules les équations avec des nouveaux termes sont indiquées.

$$\begin{cases} E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^0}{\partial x^2} = 0 & (x \ 0) \\ E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^{10/3}}{\partial x^2} + G_p \left(\frac{\partial^2 \tilde{U}_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^0}{\partial y \partial x} \right) - \frac{E_m I_m}{\ell_p} \frac{\partial^4 \tilde{U}_x^0}{\partial y^4} + M_m \omega^2 \tilde{U}_x^0 = 0 & (x \ \frac{10}{3}) \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_y \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^0}{\partial y^2} = 0 \end{array} \right. \quad (y 0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_y \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^4}{\partial y^2} + G_p \left(\frac{\partial^2 \tilde{U}_x^0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^0}{\partial x^2} \right) + M_m \omega^2 \tilde{U}_y^0 = 0 \end{array} \right. \quad (y 4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_m \left(\tilde{\theta}^0 + \frac{\partial \tilde{U}_x^0}{\partial y} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (m 0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_m \left(\tilde{\theta}^2 + \frac{\partial \tilde{U}_x^2}{\partial y} \right) - G_p \left(-\theta^0 + \frac{\partial \tilde{U}_y^0}{\partial x} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (m 2)$$

Comme prévu, les termes liés au cisaillement de la cellule et aux ondes de flexion dans les murs sont du même ordre de grandeur. Ils apparaissent tous les deux dans l'équation $(x \frac{10}{3})$. Remarquons également que la masse surfacique a dégénéré : c'est la contribution des murs $M_m = \bar{\rho}_m / \ell_p$ qui domine au premier ordre.

Les équations d'équilibre sont réécrites en utilisant la décomposition d'Helmholtz introduite dans la partie 2.1.5 (page 30). Notons que le nombre d'onde k est également développé selon les puissances de $\epsilon^{1/3}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x (\tilde{k}^0)^3 \cos^2(\alpha) \tilde{u}_x^0 = 0 \end{array} \right. \quad (x 0)'$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_y (\tilde{k}^0)^3 \sin^2(\alpha) \tilde{u}_y^0 = 0 \end{array} \right. \quad (y 0)'$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x \cos^2(\alpha) \left[(\tilde{k}^0)^3 \tilde{u}_x^{10/3} + \text{combinaison de } \tilde{k}^j \text{ et } \tilde{u}_x^j \text{ avec } j \leq \frac{10}{3} \right] \\ \quad + G_p (\tilde{k}^0)^3 \sin(\alpha) [\sin(\alpha) \tilde{u}_x^0 + \cos(\alpha) \tilde{u}_y^0] \\ \quad + \frac{E_m I_m}{\ell_p} (\tilde{k}^0)^5 \sin^4(\alpha) \tilde{u}_x^0 - M_m \omega^2 \tilde{k}^0 \tilde{u}_x^0 = 0 \end{array} \right. \quad (x \frac{10}{3})'$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_y \sin^2(\alpha) \left[(\tilde{k}^0)^3 \tilde{u}_y^4 + \text{combinaison de } \tilde{k}^j \text{ et } \tilde{u}_y^j \text{ avec } j \leq 4 \right] \\ \quad + G_p (\tilde{k}^0)^3 \cos(\alpha) [\sin(\alpha) \tilde{u}_x^0 + \cos(\alpha) \tilde{u}_y^0] - M_m \omega^2 \tilde{k}^0 \tilde{u}_y^0 = 0 \end{array} \right. \quad (y 4)'$$

Là encore, la propagation des ondes en dehors des axes du repère est impossible. En effet, il faut que le déterminant du système constitué par les équations $(x 0)'$ et $(y 0)'$ soit nul donc $\sin(\alpha) = 0$ ou $\cos(\alpha) = 0$.

Dans le premier cas, les ondes se propagent dans la direction des planchers et $\sin(\alpha) = 0$. Les équations $(y 0)'$ à $(y \frac{11}{3})'$ qui ont toutes la même forme sont trivialement vérifiées. Les équations $(x 0)'$ à $(x \frac{10}{3})'$ imposent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_x^0 = 0 \\ \tilde{u}_x^{1/3} = 0 \\ \vdots \\ \tilde{u}_x^{10/3} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varphi}^0 = 0 \\ \tilde{\varphi}^{1/3} = 0 \\ \vdots \\ \tilde{\varphi}^{10/3} = 0 \end{array} \right.$$

Ainsi, il s'agit d'ondes de cisaillement pur et tous les déplacements sont parallèles

à l'axe y . L'équation $(y 4)'$ permet de calculer le nombre d'onde \tilde{k}^0 :

$$\tilde{k}^0 \tilde{u}_y^0 \left[G_p (\tilde{k}^0)^2 - M_m \omega^2 \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{k}^0 = \omega \sqrt{\frac{M_m}{G_p}}$$

Nous retrouvons l'expression de \tilde{k}^0 pour des ondes générées par le cisaillement de la cellule. Comme les planchers sont plus fins que les murs, il ne peut pas y avoir d'ondes de flexion dans cette direction.

Dans le second cas, les ondes se propagent dans la direction des murs et $\cos(\alpha) = 0$. Les équations $(x 0)'$ à $(x 3)'$ sont trivialement vérifiées. Les équations $(y 0)'$ à $(y 4)'$ imposent :

$$\begin{cases} \tilde{u}_y^0 = 0 \\ \tilde{u}_y^{1/3} = 0 \\ \vdots \\ \tilde{u}_y^4 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \tilde{\varphi}^0 = 0 \\ \tilde{\varphi}^{1/3} = 0 \\ \vdots \\ \tilde{\varphi}^4 = 0 \end{cases}$$

Il s'agit encore d'ondes de cisaillement pur et tous les déplacements se font selon la direction x . Mais l'expression du nombre d'onde \tilde{k}^0 est différente. L'équation $(x \frac{10}{3})'$ se simplifie :

$$\tilde{k}^0 \tilde{u}_x^0 \left[G_p (\tilde{k}^0)^2 + \frac{E_m I_m}{\ell_p} (\tilde{k}^0)^4 - M_m \omega^2 \right] = 0$$

Pour avoir une onde qui se propage, il faut que $(\tilde{k}^0)^2$ soit un réel positif donc la seule solution possible est :

$$(\tilde{k}^0)^2 = \frac{\ell_p G_p}{2 E_m I_m} \left(\sqrt{1 + 4 \frac{M_m \omega^2}{G_p^2} \frac{E_m I_m}{\ell_p}} - 1 \right)$$

Cette nouvelle expression du nombre d'onde prend en compte les deux mécanismes de cisaillement. Selon la valeur du terme qui se trouve sous la racine carrée, elle dégénère et redonne bien les expressions que nous avons obtenues pour les deux structures précédentes.

Cas 1 : ondes de flexion dans les murs

$$4 \frac{M_m \omega^2}{G_p^2} \frac{E_m I_m}{\ell_p} \gg 1 \quad \Rightarrow \quad (\tilde{k}^0)^2 \approx \sqrt{\frac{M_m \omega^2 \ell_p}{E_m I_m}}$$

Cas 2 : cisaillement de la cellule

$$4 \frac{M_m \omega^2}{G_p^2} \frac{E_m I_m}{\ell_p} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad (\tilde{k}^0)^2 \approx \frac{M_m \omega^2}{G_p}$$

Le premier cas se produit soit lorsque la rigidité des ondes de flexion est grande par rapport à celle du cisaillement de la cellule, soit à hautes fréquences. Inversement, le deuxième cas se produit soit lorsque c'est le cisaillement de la cellule qui est le plus rigide, soit à basses fréquences.

Conclusion

Grâce à l'étude des deux structures précédentes par homogénéisation, nous savons que les ondes de cisaillement pur peuvent être générées par deux mécanismes : le cisaillement de la cellule et la propagation d'ondes de flexion dans les éléments. De plus, ces mécanismes sont associés *en parallèle*, c'est-à-dire que c'est le plus rigide qui domine. Le cisaillement de la cellule est lui-même la combinaison de la flexion locale des murs et de la flexion locale des planchers. Cette fois-ci, il s'agit d'une association *en série* donc c'est le plus souple qui domine. L'analyse des termes des équations d'équilibre associés à tous ces mécanismes a permis de construire un critère pour trouver le modèle approprié directement à partir des ordres de grandeur des épaisseurs des éléments.

Nous en avons déduit une structure, difficile à construire autrement, pour laquelle les deux mécanismes ont la même importance. Nous avons choisi de regarder le cas où les murs sont plus épais que les planchers. Ainsi, les ondes de cisaillement dans la direction x sont générées uniquement par le cisaillement de la cellule alors que celles dans la direction y font intervenir le cisaillement de la cellule et la propagation d'ondes de flexion dans les murs. Les ondes macroscopiques se propagent dans les deux directions pour la même gamme de fréquences car la rigidité du cisaillement de la cellule est indépendante de la direction.

Ce nouveau cas correspond au *modèle le plus riche* pour les ondes de cisaillement. Les deux structures que nous avons étudiées auparavant sont des situations dégénérées qui se déduisent du modèle complet. Nous connaissons maintenant l'expression générale du nombre d'onde :

Direction y : ondes de flexion dans les murs

$$\tilde{k}^0 = \sqrt{\frac{\ell_p G}{2 E_m I_m} \left(\sqrt{1 + 4 \frac{M_s \omega^2}{G^2} \frac{E_m I_m}{\ell_p}} - 1 \right)} \quad (2.40a)$$

Direction x : ondes de flexion dans les planchers

$$\tilde{k}^0 = \sqrt{\frac{\ell_m G}{2 E_p I_p} \left(\sqrt{1 + 4 \frac{M_s \omega^2}{G^2} \frac{E_p I_p}{\ell_m}} - 1 \right)} \quad (2.40b)$$

$$\text{où } G = \frac{G_m G_p}{G_m + G_p} \quad \text{avec } G_m = 12 \frac{E_m I_m}{\ell_m^2 \ell_p} \quad G_p = 12 \frac{E_p I_p}{\ell_p^2 \ell_m}$$

$$M_s = M_m + M_p = \frac{\bar{\rho}_m}{\ell_p} + \frac{\bar{\rho}_p}{\ell_m}$$

Selon le contraste entre les murs et les planchers, le module de cisaillement G et la masse surfacique M_s dégénèrent :

- murs plus épais que les planchers : $G \approx G_p$ $M_s \approx M_m$
- murs plus fins que les planchers : $G \approx G_m$ $M_s \approx M_p$

Grâce aux expressions (2.40), il est maintenant possible d'identifier le modèle approprié sans faire de nouveau appel à la méthode HMPD. En effet, il suffit de regarder l'ordre de grandeur, *par rapport à 1*, du terme qui se trouve sous la deuxième racine carrée :

$$4 \frac{M_s \omega^2}{G^2} \frac{E_m I_m}{\ell_p} \quad \text{pour la direction } y \quad , \quad 4 \frac{M_s \omega^2}{G^2} \frac{E_p I_p}{\ell_m} \quad \text{pour la direction } x \quad (2.41)$$

Lorsqu'il est petit (c'est-à-dire $\leq O(\epsilon_r)$), la propagation des ondes macroscopiques est pilotée par le cisaillement de la cellule et le modèle dégénéré des parties 2.2.2 et 2.3.2 est assez précis. Dans ce cas, la vitesse des ondes ne dépend pas de la fréquence au premier ordre. Lorsque le terme (2.41) est proche de 1, les deux mécanismes ont la même importance et il faut utiliser le modèle complet. Enfin lorsque ce terme est grand (c'est-à-dire $\geq O(\epsilon_r)$), la propagation des ondes de flexion dans les murs domine : le modèle de la partie 2.3.3 est suffisant. Dans les deux derniers cas, la vitesse des ondes dépend de la fréquence.

La définition de ce critère nous amène à faire deux remarques importantes. La première est qu'*il dépend de la fréquence*. Ainsi, pour une même structure, il est possible d'avoir des ondes générées par le cisaillement de la cellule à basses fréquences et des ondes de flexion à hautes fréquences. Ce comportement s'explique par le fait que le ratio d'échelles réel ϵ_r dépend de la fréquence. Soit e_c l'ordre de grandeur du contraste entre les épaisseurs des éléments :

$$\frac{a_p}{a_m} = \epsilon_r^{e_c} \quad \Rightarrow \quad e_c = \frac{\ln(a_p/a_m)}{\ln(\epsilon_r)}$$

Pour une structure avec des murs plus épais que les planchers, e_c est un réel positif car les deux logarithmes sont négatifs. Lorsque la fréquence augmente, la longueur d'onde macroscopique Λ diminue donc $\epsilon_r = 2\pi\ell_m/\Lambda$ augmente et $|\ln(\epsilon_r)|$ diminue. En conséquence, le contraste e_c augmente ce qui provoque le passage du cisaillement de la cellule à la flexion à l'échelle de la structure.

Ce changement de comportement peut aussi s'expliquer de façon plus physique en raisonnant sur les rigidités des deux mécanismes. Le cisaillement de la cellule fait travailler les éléments en flexion sur la longueur ℓ qui sépare deux nœuds consécutifs donc sa rigidité est indépendante de la fréquence. La propagation des ondes de flexion sollicite les éléments sur une longueur qui est de l'ordre de leur longueur d'onde. Comme cette dernière diminue avec la fréquence, la rigidité de ce deuxième mécanisme augmente. Lorsqu'elle dépasse la valeur du module de cisaillement macroscopique, il y a changement de la nature des ondes.

La seconde remarque concerne la généralisation de ce travail. Jusqu'à présent, nous avons toujours supposé les murs et les planchers réalisés dans des matériaux avec des propriétés semblables et la cellule à peu près carrée. Les seuls paramètres qui pouvaient varier étaient les épaisseurs. Or ce critère d'identification pèse le contraste entre les rigidités des mécanismes plutôt qu'entre les épaisseurs des éléments. Comme il est entièrement *analytique*, il peut également être utilisé pour étudier l'influence des autres paramètres. La seule condition à respecter est qu'il faut une structure réticulée périodique constituée par un assemblage de murs et de planchers. Cette remarque est valable pour toutes les expressions que nous avons présentées : longueurs d'onde, masse apparente, etc.

2.4.3 Quelles ondes avec la résonance interne ?

Dans le paragraphe précédent, nous avons construit un critère adimensionnel pour identifier la nature des ondes de cisaillement pur dans une structure donnée. Faisons la même chose pour la résonance interne. Celle-ci apparaît lorsque l'onde de flexion générée dans les éléments par les vibrations de l'ensemble de la structure a une longueur λ_f du même ordre que la taille des éléments ℓ . Il faut donc s'intéresser au paramètre $\beta\ell$:

$$\beta\ell = 2\pi \frac{\ell}{\lambda_f} = \ell \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{EI}} \quad (2.42)$$

Lorsque $\beta\ell \ll 1$, les éléments ont un comportement quasi-statique à l'échelle locale. $\beta\ell = O(1)$ correspond à la résonance interne. Pour $\beta\ell \gg 1$, la modélisation des éléments par des poutres n'est plus valable. Remarquons que ce critère dépend du matériau mais également de la géométrie des éléments. Ainsi, il est possible de jouer sur les épaisseurs ou sur les longueurs pour que les effets dynamiques apparaissent dans une gamme de fréquences prédéfinie. Pour un matériau donné, plus les éléments sont fins, plus la résonance interne se produit à basses fréquences.

Cependant, est-il nécessaire de calculer le paramètre $\beta\ell$ dans tous les cas ? Ou existe-t-il des types d'onde incompatibles avec la résonance interne ? Inversement, y a-t-il des ondes qui sont systématiquement associées à ces effets dynamiques ?

Ondes de compression-cisaillement

Nous commençons par regarder les ondes de compression-cisaillement qui coïncidaient avec la résonance interne pour les deux cas que nous avons étudiés avec la méthode HMPD. Afin de simplifier la démonstration, nous reprenons les mêmes hypothèses sur les contrastes que lors de l'homogénéisation et nous raisonnons sur les ordres de grandeur des épaisseurs plutôt que sur les rigidités. Comme dans les paragraphes précédents, les ordres de grandeur des épaisseurs des murs et des planchers sont notés respectivement e_m et e_p . Celui de la pulsation est appelé e_f . De plus, nous supposons que les murs et les planchers sont réalisés dans des matériaux aux propriétés similaires, que leurs profondeurs selon l'axe z sont du même ordre et que la cellule est à peu près carrée. Les notations et les hypothèses sont résumées ci-dessous :

$$\begin{aligned} \frac{a_m}{\ell_m} = O(\epsilon^{e_m}) & \quad \frac{a_p}{\ell_m} = O(\epsilon^{e_p}) & \quad \frac{\omega}{\omega_r} = O(\epsilon^{e_f}) & \quad \omega_r = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{E_m}{\rho_m}} \\ \frac{E_p}{E_m} = O(1) & \quad \frac{\rho_p}{\rho_m} = O(1) & \quad \frac{h_p}{h_m} = O(1) & \quad \frac{\ell_p}{\ell_m} = O(1) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Ainsi, l'ordre de grandeur de $\beta_j \ell_j$ où j peut désigner m ou p est donné par :

$$\beta_j \ell_j = O \left(\ell_j \sqrt[4]{\frac{\rho_j \epsilon^{2e_f} E_m}{E_j a_j^2 L^2 \rho_m}} \right) = O \left(\sqrt[4]{\frac{\ell_j^4 \epsilon^{2e_f}}{a_j^2 L^2}} \right) = O \left(\sqrt{\frac{\epsilon^{e_f+1}}{\epsilon^{e_j}}} \right)$$

La condition à vérifier pour que les éléments aient un comportement quasi-statique à l'échelle locale est donc :

$$e_f + 1 > e_j \quad (2.44)$$

Le cas limite $e_f + 1 = e_j$ correspond à la résonance interne.

Les ondes de compression-cisaillement apparaissent lorsque le terme d'inertie (I) équilibre le terme élastique lié à la traction-compression des éléments (CC). Par exemple pour le mode (Px), les expressions de ces deux termes sont :

$$CC = E_x \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^0}{\partial x^2} = \frac{E_p A_p}{\ell_m} \frac{\partial^2 \tilde{U}_x^0}{\partial x^2} = O\left(\frac{E_p A_p}{\ell_m} \frac{\tilde{U}_x^0}{L^2}\right)$$

$$I = M_s \omega^2 \tilde{U}_x^0 = \left(\frac{\rho_m A_m}{\ell_p} + \frac{\rho_p A_p}{\ell_m}\right) \omega^2 \tilde{U}_x^0$$

L'ordre de grandeur du terme d'inertie dépend du contraste entre les éléments. Lorsque les planchers sont plus épais que les murs ou lorsque les éléments sont similaires, la masse surfacique est du même ordre que la masse des planchers.

$$I = O\left(\frac{\rho_p A_p}{\ell_m} \omega^2 \tilde{U}_x^0\right) = O\left(\frac{\rho_p A_p}{\ell_m} \epsilon^{2e_f} \frac{E_m}{\rho_m} \frac{\tilde{U}_x^0}{L^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{I}{CC} = O(\epsilon^{2e_f})$$

Pour avoir des ondes de compression-cisaillement polarisées selon le mode (Px), il faut donc que l'ordre de grandeur e_f de la pulsation soit nul. Dans ce cas, la gamme de pulsations des ondes macroscopiques se situe autour de ω_r et elle ne dépend que du matériau. Au contraire, la condition pour que les éléments aient un comportement quasi-statique à l'échelle locale (équation (2.44)) ne dépend que de la géométrie. Donc toutes les situations peuvent se présenter. Si les éléments sont suffisamment épais ($e_j < 1$), leurs fréquences propres en flexion sont plus élevées que la gamme de fréquences correspondant à la propagation des ondes de compression-cisaillement et il n'y a pas d'effets dynamiques à l'échelle locale. Lorsque l'épaisseur des éléments diminue, la gamme de fréquences des ondes macroscopiques reste la même mais les fréquences propres de flexion des éléments diminuent. Le cas limite où la propagation des ondes coïncide avec la résonance interne ($e_j = 1$) a été étudié dans la partie 2.2.3. Pour des éléments trop fins ($e_j > 1$), la gamme de fréquences des ondes n'est plus dans le domaine de validité de la méthode HMPD. Pour ce type d'onde, il est donc nécessaire de calculer le paramètre $\beta\ell$ afin d'identifier la bonne situation.

Lorsque les murs sont plus épais que les planchers, leur contribution domine dans l'expression de la masse surfacique :

$$I = O\left(\frac{\rho_m A_m}{\ell_p} \omega^2 \tilde{U}_x^0\right) = O\left(\frac{\rho_m A_m}{\ell_p} \epsilon^{2e_f} \frac{E_m}{\rho_m} \frac{\tilde{U}_x^0}{L^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{I}{CC} = O\left(\frac{A_m}{A_p} \epsilon^{2e_f}\right) = O(\epsilon^{e_m - e_p + 2e_f})$$

Maintenant l'ordre de grandeur de la pulsation des ondes macroscopiques dépend du matériau et du contraste entre les éléments : $e_f = (e_p - e_m)/2 > 0$ car les

planchers sont plus fins que les murs. L'application de la condition (2.44) donne deux critères : un pour éviter la résonance des murs et un pour éviter la résonance des planchers.

$$\begin{aligned} \beta_p \ell_p \ll 1 &\quad \Rightarrow \quad \frac{e_p - e_m}{2} + 1 > e_p &\quad \Rightarrow \quad 2 - e_m - e_p > 0 \\ \beta_m \ell_m \ll 1 &\quad \Rightarrow \quad \frac{e_p - e_m}{2} + 1 > e_m &\quad \Rightarrow \quad 2 - 3e_m + e_p > 0 \end{aligned}$$

Les planchers étant les plus fins, c'est le premier critère qui est le plus restrictif. Là encore toutes les situations sont possibles selon les ordres de grandeur des épaisseurs :

- soit les ondes de compression-cisaillement se propagent à des fréquences où tous les éléments ont un comportement quasi-statique,
- soit les ondes coïncident avec la résonance des planchers en flexion,
- soit les planchers et les murs sont en résonance,
- soit la gamme de fréquences des ondes n'est plus dans le domaine de validité de la méthode HMPD.

Néanmoins, lorsque les effets dynamiques ne concernent que les planchers, leur impact sur la propagation des ondes reste faible. En effet, il s'agit de la même situation que dans la partie 2.3.4. La masse des planchers est beaucoup plus petite que celle des murs donc à l'ordre 0, la masse surfacique dégénère et elle ne dépend pas de la fréquence. De plus, le comportement des planchers en flexion n'intervient pas sur les propriétés des ondes pour le mode (Px).

Le raisonnement est similaire pour les ondes polarisées selon le mode (Py) : il suffit d'inverser les rôles des murs et des planchers. Pour ce type d'onde, la grande variété des comportements rend nécessaire le calcul de $\beta\ell$ afin d'identifier la bonne situation.

Ondes de cisaillement pur

Pour l'étude des ondes de cisaillement pur, nous raisonnons directement sur les rigidités plutôt que sur les épaisseurs afin que la démonstration soit valable pour toutes les structures, même celles qui ne respectent pas les hypothèses (2.43). De plus, nous supposons que le module de cisaillement du milieu continu équivalent G est du même ordre de grandeur que la rigidité en flexion des planchers G_p . Cela recouvre deux situations : soit les rigidités en flexion des murs et des planchers sont du même ordre, soit les planchers sont plus souples que les murs.

$$\begin{aligned} G = \frac{G_m G_p}{G_m + G_p} \quad \text{avec} \quad G_m = 12 \frac{E_m I_m}{\ell_m^2 \ell_p} \quad \text{et} \quad G_p = 12 \frac{E_p I_p}{\ell_m \ell_p^2} \\ G = O(G_p) \quad \Leftrightarrow \quad G_p \leq G_m \quad \Leftrightarrow \quad \frac{E_p I_p}{\ell_p} \leq \frac{E_m I_m}{\ell_m} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Ainsi, l'étude des ondes selon les deux directions x et y englobe tous les cas possibles : propagation dans une structure dont les éléments sont similaires, propagation dans la direction des éléments les plus souples en flexion et propagation dans la direction des éléments les plus rigides.

Remarquons que le fait que les planchers soient les plus souples en flexion n'est pas une condition suffisante pour affirmer qu'ils vont entrer les premiers en résonance. En effet, le ratio $(\beta_m \ell_m)/(\beta_p \ell_p)$ dépend non seulement des rigidités mais aussi de la masse des éléments :

$$\left(\frac{\beta_m \ell_m}{\beta_p \ell_p}\right)^4 = \frac{\ell_m^4 \rho_m A_m \omega^2}{E_m I_m} \times \frac{E_p I_p}{\ell_p^4 \rho_p A_p \omega^2} = \frac{E_p I_p \ell_m}{E_m I_m \ell_p} \times \frac{\rho_m A_m \ell_m^3}{\rho_p A_p \ell_p^3}$$

D'après la condition (2.45), la première fraction est inférieure ou égale à 1 mais en jouant sur les densités des murs et des planchers, il est possible de rendre la deuxième fraction plus grande que 1. Pour s'assurer qu'il n'y a pas d'éléments en résonance, il faut donc vérifier les ordres de grandeur de $\beta_p \ell_p$ et de $\beta_m \ell_m$.

Nous commençons par regarder la propagation des ondes dans la direction des planchers. Cela correspond soit à la propagation dans une structure où les éléments ont des rigidités similaires, soit à la propagation dans la direction des éléments les plus souples. Dans la partie 2.4.2, nous avons vu que dans ces deux cas, les ondes de cisaillement pur sont générées par la flexion locale et l'ordre de grandeur du terme élastique est donné par :

$$FL = O\left(G_p \frac{\partial^2 \tilde{U}_y^0}{\partial x^2}\right) = O\left(\frac{E_p I_p}{\ell_m \ell_p^2} \frac{\tilde{U}_y^0}{L^2}\right)$$

L'ordre de grandeur du terme d'inertie $I = M_s \omega^2 \tilde{U}_y^0$ dépend du contraste entre les masses des éléments. Si elles sont du même ordre ou si les planchers sont les plus lourds alors la masse surfacique est du même ordre que la masse des planchers :

$$\frac{\rho_m A_m}{\ell_p} \leq \frac{\rho_p A_p}{\ell_m} \quad \Rightarrow \quad I = O\left(\frac{\rho_p A_p}{\ell_m} \omega^2 \tilde{U}_y^0\right)$$

Pour obtenir un régime de propagation d'ondes macroscopiques, il faut que les forces d'inertie équilibrent les forces élastiques. Nous en déduisons l'ordre de grandeur de la pulsation :

$$I = O(FL) \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = O\left(\frac{E_p I_p}{\rho_p A_p \ell_p^2 L^2}\right)$$

Pour savoir s'il y a des éléments en résonance, nous introduisons cette expression dans $\beta_p \ell_p$ et $\beta_m \ell_m$:

$$(\beta_p \ell_p)^4 = \frac{\ell_p^4 \rho_p A_p \omega^2}{E_p I_p} = O\left(\frac{\ell_p^2}{L^2}\right) = O(\epsilon_r^2) \ll 1$$

$$(\beta_m \ell_m)^4 = \frac{\ell_m^4 \rho_m A_m \omega^2}{E_m I_m} = O\left(\frac{\rho_m A_m \ell_m}{\rho_p A_p \ell_p} \times \frac{E_p I_p \ell_m}{E_m I_m \ell_p} \times \frac{\ell_m^2}{L^2}\right) \leq O(\epsilon_r^2) \ll 1$$

Les modèles obtenus par homogénéisation ne sont valables que si la condition de séparation d'échelles est respectée donc $\beta_p \ell_p \ll 1$. Pour $\beta_m \ell_m$, la masse des murs est inférieure à celle des planchers et les murs sont les plus rigides en flexion. En conséquence, les deux premières fractions sont inférieures ou égales à 1. La

troisième fraction est très petite à cause de la condition de séparation d'échelles donc $\beta_m \ell_m \ll 1$. Dans ce cas, il ne peut pas y avoir d'éléments en résonance.

Le même raisonnement s'applique au cas où les murs sont les plus lourds :

$$\begin{aligned} \frac{\rho_m A_m}{\ell_p} \geq \frac{\rho_p A_p}{\ell_m} &\Rightarrow I = O\left(\frac{\rho_m A_m}{\ell_p} \omega^2 \tilde{U}_y^0\right) \\ I = O(FL) &\Rightarrow \omega^2 = O\left(\frac{E_p I_p}{\rho_m A_m \ell_m \ell_p L^2}\right) \\ (\beta_p \ell_p)^4 = \frac{\ell_p^4 \rho_p A_p \omega^2}{E_p I_p} &= O\left(\frac{\rho_p A_p \ell_p}{\rho_m A_m \ell_m} \times \frac{\ell_p^2}{L^2}\right) \leq O(\epsilon_r^2) \ll 1 \\ (\beta_m \ell_m)^4 = \frac{\ell_m^4 \rho_m A_m \omega^2}{E_m I_m} &= O\left(\frac{E_p I_p \ell_m}{E_m I_m \ell_p} \times \frac{\ell_m^2}{L^2}\right) \leq O(\epsilon_r^2) \ll 1 \end{aligned}$$

Là non plus, les éléments ne peuvent pas entrer en résonance.

La direction y correspond à la direction des éléments les plus rigides en flexion. Selon le contraste entre les murs et les planchers, les ondes de cisaillement pur sont générées par le cisaillement de la cellule (flexion locale des éléments) et/ou des ondes de flexion dans les murs. La rigidité du premier mécanisme est indépendante de la direction donc, lorsque la flexion locale intervient dans la propagation des ondes, la gamme de fréquences est la même pour les deux directions. Or, nous venons de voir que celle-ci est toujours très inférieure aux fréquences propres des éléments : il n'y a jamais de résonance interne pour les ondes générées par la flexion locale.

Il reste à examiner le cas où le contraste entre les murs et les planchers est suffisamment important pour que les ondes soient dues uniquement à la propagation d'ondes de flexion dans les murs. Pour que la condition de séparation d'échelles soit respectée, la longueur des ondes de flexion doit être bien plus grande que la longueur des murs donc ces derniers ne peuvent pas entrer en résonance. Pour les planchers, les fréquences de résonance ne dépendent que des propriétés des planchers. D'autre part, la gamme de fréquences des ondes macroscopiques est déterminée par les caractéristiques des murs. Ainsi, ces deux gammes de fréquences sont fixées de façon indépendante : elles peuvent se chevaucher ou être complètement disjointes.

Cela se voit très bien en raisonnant sur les épaisseurs des éléments dans le cadre des hypothèses (2.43). D'après les résultats de la partie 2.4.2, l'existence des ondes de flexion nécessite $e_m + (2/3) < e_p$. Comme nous supposons les murs et les planchers réalisés dans des matériaux similaires, la masse surfacique est du même ordre que la masse des murs. Les ordres de grandeur du terme élastique (OF) et du terme d'inertie (I) sont donc :

$$\begin{aligned} OF &= \frac{E_m I_m}{\ell_p} \frac{\partial^4 \tilde{U}_x^0}{\partial y^4} = O\left(\frac{E_m I_m}{\ell_p} \frac{\tilde{U}_x^0}{L^4}\right) \\ I &= O\left(\frac{\rho_m A_m}{\ell_p} \omega^2 \tilde{U}_x^0\right) = O\left(\frac{\rho_m A_m}{\ell_p} \epsilon^{2e_f} \frac{E_m}{\rho_m} \frac{\tilde{U}_x^0}{L^2}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{I}{OF} = O\left(\frac{A_m L^2}{I_m} \epsilon^{2e_f}\right) = O\left(\frac{L^2}{a_m^2} \epsilon^{2e_f}\right) = O(\epsilon^{2e_f - 2e_m - 2})$$

Comme prévu, l'ordre de grandeur de la pulsation ne dépend que de l'épaisseur des murs : $e_f = e_m + 1$. Pour que les planchers restent dans le domaine quasi-statique, e_p doit vérifier la condition (2.44) :

$$e_f + 1 > e_p \quad \Rightarrow \quad e_m + 2 > e_p$$

Lorsque les planchers sont suffisamment épais, il n'y a pas d'effets dynamiques à l'échelle locale. Pour $e_p = e_m + 2$ la propagation des ondes macroscopiques coïncide avec la résonance des planchers en flexion et si les planchers sont encore plus fins, la gamme de fréquences des ondes n'est plus dans le domaine de validité de la méthode HMPD.

Malgré tout, la résonance des planchers en flexion n'a qu'une influence limitée sur la propagation des ondes macroscopiques. Lorsque tous les éléments sont réalisés dans le même matériau, la masse des planchers est négligeable par rapport à celle des murs. De plus, si les planchers sont constitués d'un matériau très dense, les effets inertiels se manifestent dans les équations d'équilibre selon la direction y alors que les propriétés des ondes macroscopiques sont déterminées par les équations d'équilibre selon la direction x . Dans tous les cas, la vitesse des ondes est calculée à partir de la masse réelle de la structure.

La seule conséquence de la résonance des planchers visible à l'ordre 0 provient des conditions cinématiques supplémentaires imposées par l'équilibre interne de la cellule. En effet, les équations d'équilibre en moments sont alors similaires à celles de la partie 2.3.4. La contribution des murs est inchangée mais celle des planchers dépend de la fréquence et devient infinie au voisinage de leurs modes de flexion pairs. Pour ces fréquences, la rotation des nœuds est nulle (car $\tilde{U}_y^0 = 0$) ce qui interdit la propagation des ondes de flexion dans les murs. Le fait que la rigidité apparente des planchers devienne infinie est une conséquence de nos hypothèses cinématiques qui imposent la périodicité des variables sur une cellule. Mais si nous abandonnons cette hypothèse pour autoriser un déphasage des ondes de flexion dans les murs, les planchers seront sollicités en traction-compression, ce qui est également un mécanisme très rigide. Il est donc probable que, pour ce type d'onde, il existe des bandes de fréquences interdites au voisinage des fréquences des modes de flexion pairs des planchers.

En conclusion, les seules ondes qui peuvent être affectées par les effets dynamiques à l'échelle locale sont les ondes de compression-cisaillement. Cela n'est pas systématique et il faut calculer le paramètre $\beta\ell$ pour les murs et les planchers afin de savoir s'il y a résonance interne. Dans le cas des ondes de cisaillement pur générées par la flexion locale, les éléments ont obligatoirement un comportement quasi-statique à l'échelle locale. Pour les ondes dues à des ondes de flexion, les éléments perpendiculaires à la direction de propagation peuvent éventuellement être en résonance. Cela ne joue pas sur les propriétés des ondes macroscopiques à l'ordre 0 mais elles peuvent ne plus exister au voisinage des fréquences des modes pairs des éléments en résonance.

2.4.4 Calcul des fréquences admissibles

Nous disposons maintenant d'une liste (non exhaustive) de modèles de comportement et de critères adimensionnels pour identifier celui qui convient le mieux. Il reste à définir le domaine de validité de ces modèles. La première condition à respecter est évidemment la condition de séparation d'échelles, c'est-à-dire $\ell_c < L$. $\ell_c = \max(\ell_m, \ell_p)$ est la taille caractéristique de la cellule et est parfaitement connue. L est la taille caractéristique des déformations de la structure. Nous avons montré dans la partie 2.4.1 que L est liée à la longueur d'onde macroscopique Λ : $L = \Lambda/(2\pi)$. Pour chacun des modèles, nous disposons d'une expression analytique de la longueur d'onde. Il est donc possible de calculer la fréquence maximale correspondant au cas limite $L = \ell_c$. À l'inverse, à basses fréquences, L devient très grande et peut dépasser la taille de la structure H . Dans ce cas, la taille macroscopique n'est plus définie par la longueur d'onde mais par les dimensions de la structure. Cette dernière a alors un comportement quasi-statique. Le cas limite $L = H$ donne la fréquence minimale pour observer un effet dynamique.

Les critères limites retenus sont les moins restrictifs qui existent. Si ces deux conditions ne sont pas respectées, alors nous sommes sûrs que les modèles homogénéisés ne s'appliquent pas. Par contre, dans la gamme de fréquences correspondant à $\ell_c < L < H$, la précision n'est pas constante. Il est possible d'être plus sévère et de ne retenir que les fréquences garantissant un niveau de précision minimal. Nous ne le faisons pas ici car l'objectif est de présenter la méthode générale et elle ne dépend pas du choix des critères. De plus, des études numériques réalisées sur des structures poutres par Hans et Boutin (2008) ont montré que les modèles homogénéisés d'ordre 0 donnent de bons résultats même avec une faible séparation d'échelles.

La suite de cette partie est un exemple d'utilisation de tous ces critères sur un cas concret. Le choix de la structure a été motivé par les considérations suivantes. La première est qu'il faut des murs et des planchers avec des rigidités différentes pour voir l'influence de la propagation des ondes de flexion dans les éléments. La seconde est qu'une des applications envisagées pour ce travail est l'étude du comportement dynamique des bâtiments. C'est pourquoi la structure est réalisée en béton et ses éléments ont des dimensions proches de celles qui existent dans les constructions réelles. Habituellement, la caractérisation du comportement dynamique d'un immeuble consiste à calculer ses fréquences propres et ses modes propres plutôt que d'étudier la propagation des ondes dans la structure. Mais les fréquences propres se trouvant parmi les fréquences admissibles pour les ondes, c'est une autre manière d'obtenir des ordres de grandeur des fréquences associées aux différents mécanismes.

Une partie de la structure étudiée est représentée sur la figure 2.41. Les éléments sont des plaques qui ont toutes la même longueur ℓ et la même profondeur h selon l'axe z . Par contre, les murs sont plus épais que les planchers. Comme les éléments sont des plaques, le module d'élasticité E est un module corrigé correspondant à un état de déformation plane. Il est différent du module d'Young du béton noté E_{young} . Les valeurs numériques des différents paramètres sont données ci-dessous.

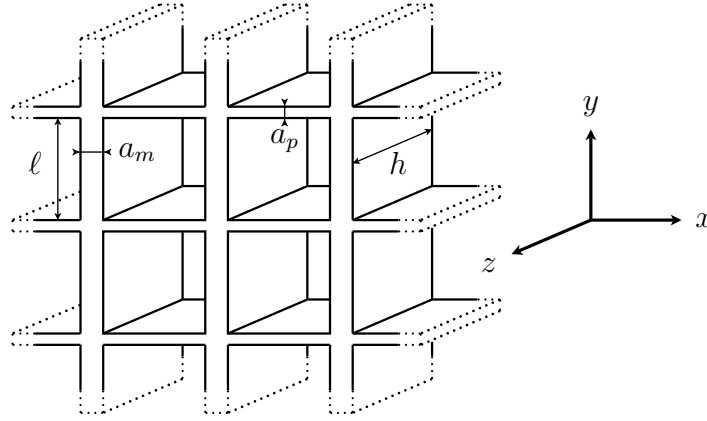


FIGURE 2.41 – Structure étudiée

Caractéristiques du béton

$$\rho = 2\,300 \text{ kg/m}^3 \quad E_{\text{young}} = 30\,000 \text{ MPa} \quad \nu = 0,2$$

$$\Rightarrow E = \frac{E_{\text{young}}}{1 - \nu^2} = 31\,250 \text{ MPa}$$

Géométrie

$$h_m = h_p = h = 1 \text{ m} \quad \ell_m = \ell_p = \ell = 3 \text{ m} \quad a_m = 21 \text{ cm} \quad a_p = 15 \text{ cm}$$

Notons que nous raisonnons sur une tranche de profondeur $h = 1 \text{ m}$ mais, tous les éléments ayant la même largeur, ce paramètre n'intervient pas dans le calcul des fréquences.

La masse et les modules du milieu continu équivalent sont calculés grâce aux formules fournies par la méthode HMPD.

Masse surfacique

$$M_m = \frac{\rho_m A_m}{\ell_p} = 161 \text{ kg/m}^2 \quad M_p = \frac{\rho_p A_p}{\ell_m} = 115 \text{ kg/m}^2$$

$$\Rightarrow M_s = M_m + M_p = 276 \text{ kg/m}^2$$

Modules d'extension

$$E_x = \frac{E_p A_p}{\ell_m} = 1\,563 \text{ MN/m} \quad E_y = \frac{E_m A_m}{\ell_p} = 2\,188 \text{ MN/m}$$

Module de cisaillement

$$G_m = 12 \frac{E_m I_m}{\ell_m^2 \ell_p} = 10,72 \text{ MN/m} \quad G_p = 12 \frac{E_p I_p}{\ell_p^2 \ell_m} = 3,91 \text{ MN/m}$$

$$\Rightarrow G = \frac{G_m G_p}{G_m + G_p} = 2,86 \text{ MN/m}$$

Les valeurs numériques confirment le fort contraste entre les modules d'extension et le module de cisaillement. Ici, il y a un facteur 1 000.

Les caractéristiques de la cellule de base, données ci-dessus, déterminent complètement les mécanismes de propagation des ondes et la fréquence maximale au-delà de laquelle la condition de séparation d'échelles n'est plus respectée. Le

nombre de cellules sert uniquement à calculer la fréquence minimale en-dessous de laquelle la structure a un comportement quasi-statique. Pour avoir des ordres de grandeur de fréquences réalistes pour les bâtiments, nous considérons une structure carrée de 20 cellules de côté.

Cisaillement pur selon x

Nous commençons par l'étude des ondes de cisaillement pur dans la direction x . Les planchers étant plus souples en flexion que les murs, ces ondes sont générées par la flexion locale des éléments. Les fréquences admissibles sont calculées grâce à l'expression de la longueur d'onde trouvée dans la partie 2.2.2 :

$$\Lambda_{FL} = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{G}{M_s}} = 2\pi L \quad \text{donc} \quad \begin{cases} L = \ell & \Rightarrow f_{max}^{FL} = 5,40 \text{ Hz} \\ L = H & \Rightarrow f_{min}^{FL} = 0,27 \text{ Hz} \end{cases}$$

Cisaillement pur selon y

Nous regardons maintenant les ondes de cisaillement pur dans la direction des éléments les plus rigides en flexion. Nous avons donc le choix entre trois modèles : la flexion locale des éléments, la propagation d'ondes de flexion dans les murs et l'association de ces deux mécanismes. Le dernier modèle est toujours valable mais il nécessite plus de calculs. Pour déterminer le modèle le mieux adapté à la structure étudiée, nous utilisons le critère de la partie 2.4.2 et nous calculons la fréquence pour laquelle les deux mécanismes ont la même importance.

$$4 \frac{M_s \omega^2}{G^2} \frac{E_m I_m}{\ell_p} = 1 \quad \Rightarrow \quad f^{FF} = 4,84 \text{ Hz}$$

La comparaison de f^{FF} avec les fréquences calculées pour la direction x renseigne sur le modèle à utiliser. En effet lorsque la flexion locale domine, les fréquences admissibles sont les mêmes pour les deux directions. Si $f^{FF} > f_{max}^{FL}$, alors la flexion locale est prépondérante. Au contraire, $f^{FF} < f_{min}^{FL}$ indique que le principal mécanisme est la propagation d'ondes de flexion dans les murs. Ici, $f_{min}^{FL} < f^{FF} < f_{max}^{FL}$ donc il faut utiliser le modèle complet. Comme la flexion locale intervient dans la propagation des ondes, nous savons qu'aucun élément n'est en résonance et il ne peut pas y avoir de bandes de fréquences interdites.

L'expression de L et les valeurs des fréquences limites sont alors :

$$k_{FF} = \sqrt{\frac{\ell_p G}{2 E_m I_m} \left(\sqrt{1 + 4 \frac{M_s \omega^2}{G^2} \frac{E_m I_m}{\ell_p}} - 1 \right)} = \frac{1}{L}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} L = \ell & \Rightarrow f_{max}^{FF} = 6,19 \text{ Hz} \\ L = H & \Rightarrow f_{min}^{FF} = 0,27 \text{ Hz} \end{cases}$$

Ces fréquences sont légèrement supérieures à celles obtenues pour la direction x . Cela est cohérent avec l'association en parallèle des deux mécanismes car dans ce cas, leurs rigidités s'ajoutent.

Par curiosité, regardons la gamme de fréquences obtenue avec le modèle qui ne considère que les ondes de flexion dans les murs :

$$\Lambda_{OF} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega}} \sqrt[4]{\frac{E_m I_m}{\rho_m A_m}} = 2\pi L \quad \text{donc} \quad \begin{cases} L = \ell & \Rightarrow f_{max}^{OF} = 3,95 \text{ Hz} \\ L = H & \Rightarrow f_{min}^{OF} = 9,87 \cdot 10^{-3} \text{ Hz} \end{cases}$$

Là encore, la prise en compte d'un seul mécanisme donne des fréquences inférieures à celles du modèle complet.

Compression-cisaillement

Les ondes de compression-cisaillement ont un comportement plus complexe. Nous commençons par considérer des ondes polarisées selon le mode (Px) qui se propagent dans la direction x ($\alpha = 0$). Dans ce cas, nous savons que les ondes macroscopiques sont générées par des ondes de compression pure dans les planchers qui sont toutes en phase. En fonction des épaisseurs des éléments, ces ondes peuvent être associées ou non à des phénomènes dynamiques à l'échelle locale. Dans un premier temps, nous négligeons la résonance interne pour avoir un ordre de grandeur de la gamme de fréquences concernée. Il faut alors remplacer la masse apparente par la masse réelle dans l'expression de la longueur d'onde trouvée dans la partie 2.2.3.

$$\Lambda_{Px0} = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{E_x}{M_s}} = 2\pi L \quad \text{donc} \quad \begin{cases} L = \ell & \Rightarrow f_{max}^{Px0} = 126 \text{ Hz} \\ L = H & \Rightarrow f_{min}^{Px0} = 6,31 \text{ Hz} \end{cases}$$

Les fréquences à partir desquelles les effets dynamiques dans les murs et les planchers doivent être pris en compte sont déterminées grâce au critère de la partie 2.4.3 :

$$\begin{aligned} (\beta_m \ell_m)^4 = \frac{\ell_m^4 \rho_m A_m \omega^2}{E_m I_m} = 1 & \quad \Rightarrow \quad f_{\beta m} = 3,95 \text{ Hz} \\ (\beta_p \ell_p)^4 = \frac{\ell_p^4 \rho_p A_p \omega^2}{E_p I_p} = 1 & \quad \Rightarrow \quad f_{\beta p} = 2,82 \text{ Hz} \end{aligned}$$

Ces valeurs suggèrent plusieurs remarques. La première est que, les planchers étant plus souples que les murs, nous avons bien $f_{\beta p} < f_{\beta m}$. La deuxième est que $f_{\beta m} = f_{max}^{OF}$. En effet, f_{max}^{OF} est la fréquence pour laquelle la longueur de l'onde de flexion dans les murs Λ_{OF} vaut $2\pi\ell_m$ et par définition $\beta_m \ell_m = 2\pi\ell_m/\Lambda_{OF}$. Ensuite, les deux fréquences f_{β} sont inférieures aux fréquences maximales pour les ondes de cisaillement pur, f_{max}^{FL} et f_{max}^{FF} . Cela peut paraître surprenant car ces ondes sont générées par la flexion locale et nous avons démontré qu'il n'y a jamais résonance interne avec ce mécanisme. Mais ce résultat est valable pour le modèle limite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ alors que les fréquences f_{max}^{FL} et f_{max}^{FF} correspondent aux situations où la séparation d'échelles disparaît. Néanmoins, les fréquences f_{max}^{FL} et f_{max}^{FF} sont du même ordre de grandeur que les fréquences f_{β} qui marquent le début des effets dynamiques à l'échelle locale. Il est donc probable que ces derniers restent limités. Notons au passage que ces effets dynamiques apparaissent bien

avant la résonance des éléments en flexion.

$$\begin{aligned} 1^{\text{ère}} \text{ fréquence propre des murs :} & \quad f_{m1} = 88 \text{ Hz} \\ 1^{\text{ère}} \text{ fréquence propre des planchers :} & \quad f_{p1} = 63 \text{ Hz} \end{aligned}$$

Finalement, la gamme de fréquences correspondant au mode (Px) se trouve bien au-dessus des fréquences f_β donc la résonance interne n'est pas négligeable pour ce type d'ondes.

Pour étudier son effet sur la propagation des ondes macroscopiques, nous introduisons un peu d'amortissement dans la structure en rendant le module d'élasticité complexe :

$$E_a = E e^{i\eta} \quad \text{avec} \quad \eta = 2.10^{-2}$$

En conséquence, la masse apparente est également un nombre complexe. Pour le mode de polarisation (Px), c'est la contribution des murs qui est modifiée :

$$M^m(\omega) = M_p + M_m f(\beta_m \ell_m)$$

où $f(\beta_m \ell_m)$ est la fonction définie page 55. D'après les résultats de la partie 2.2.3, le nombre complexe $C_0(\omega) = \omega/k_0(\omega)$ et la vitesse réelle des ondes $c_0(\omega)$ sont donnés par :

$$C_0(\omega) = \sqrt{\frac{E_x}{M^m(\omega)}} \quad \text{et} \quad c_0(\omega) = \frac{|C_0(\omega)|^2}{\text{Re}(C_0(\omega))}$$

La figure 2.42 représente le ratio entre $c_0(\omega)$ et la vitesse c_0^* qu'auraient les ondes s'il n'y avait pas ces effets dynamiques :

$$c_0^* = \sqrt{\frac{E_x}{M_s}} = 2\,379 \text{ m/s}$$

Cette courbe ressemble beaucoup à la figure 2.26 page 70 et ce mode de propagation est clairement dispersif. À basses fréquences, lorsque les éléments ont un comportement quasi-statique, $c_0(\omega)$ tend bien vers c_0^* . L'influence des effets dynamiques à l'échelle locale est visible vers 40 Hz. Cette fréquence est supérieure à celle que nous avons obtenue à partir de l'ordre de grandeur de $\beta_m \ell_m$ ($f_{\beta m} = 3,95$ Hz) mais elle reste inférieure à la première fréquence propre des murs ($f_{m1} = 88$ Hz). Lorsque la fréquence augmente, la vitesse commence par diminuer et elle atteint son minimum pour la première fréquence propre des murs qui correspond au maximum de la masse apparente. Ensuite la vitesse augmente considérablement : vers 106 Hz, elle est quasiment multipliée par 21. Cette augmentation est plus importante que celle que nous avons constatée dans la partie 2.2.3. En effet, nous avons étudié une structure dont la masse était répartie à parts égales entre les murs et les planchers. Ici, les murs sont plus lourds et c'est leur contribution qui est modifiée dans la masse apparente pour le mode (Px). Lorsque la fréquence augmente encore, la vitesse des ondes diminue puis elle atteint un deuxième pic juste après la troisième fréquence propre des murs.

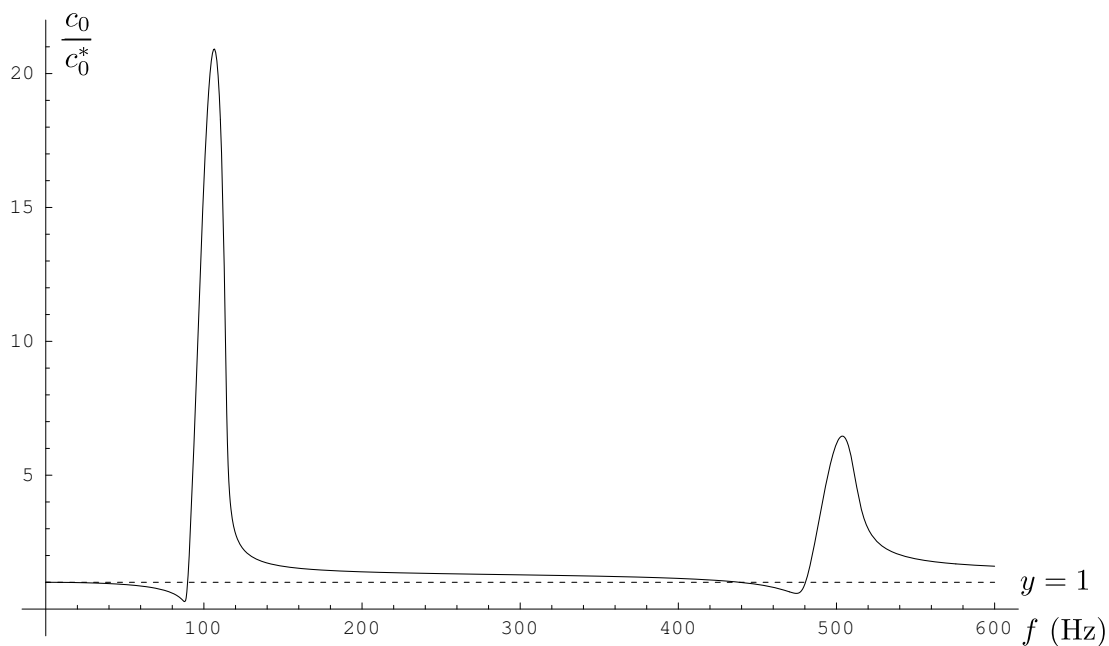


FIGURE 2.42 – Vitesse en fonction de la fréquence pour le mode (Px) et $\eta = 2.10^{-2}$

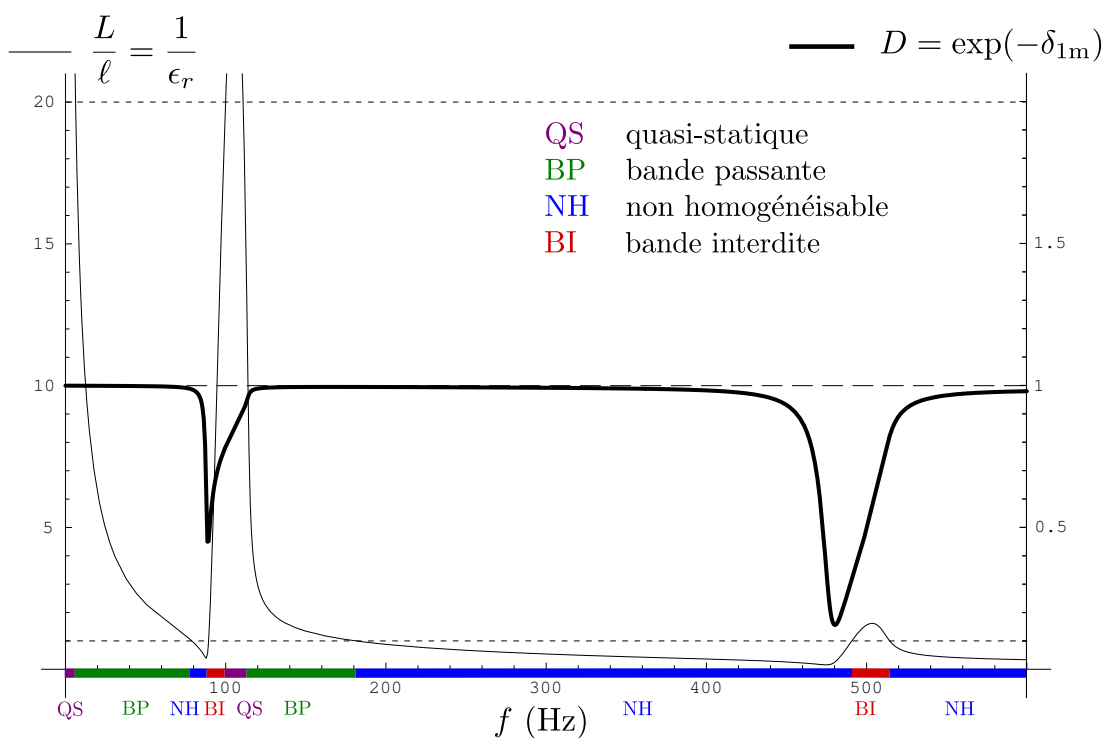


FIGURE 2.43 – Ratio L/ℓ (trait fin) et atténuation (trait gras) pour le mode (Px) en fonction de la fréquence pour $\eta = 2.10^{-2}$ et $\alpha = 0$ (Version en couleur : figure D.3 page 335)

Les variations de la vitesse se répercutent sur la longueur d'onde et donc sur L . Le ratio $L/\ell = 1/\epsilon_r$ est représenté par un trait fin sur la figure 2.43. Pour que le modèle soit valable, L doit être comprise entre ℓ et la taille de la structure $H = 20\ell$. Ces deux bornes sont indiquées par des pointillés sur la figure 2.43. Il y a donc quatre bandes de fréquences homogénéisables :

- avant la première fréquence propre des murs : $6,31 \text{ Hz} < f < 79 \text{ Hz}$
- juste après la première fréquence propre : $89 \text{ Hz} < f < 100 \text{ Hz}$
- après le premier pic : $111 \text{ Hz} < f < 181 \text{ Hz}$
- au niveau du deuxième pic vers 500 Hz.

D'autre part, nous savons qu'il existe des bandes de fréquences interdites au voisinage des fréquences des modes impairs des murs. Il faut donc s'intéresser à l'atténuation des ondes. Comme il y a de grandes variations de la longueur d'onde, nous avons regardé l'amortissement par mètre δ_{1m} plutôt que l'amortissement par longueur d'onde δ_Λ . Leurs définitions sont données ci-dessous :

$$\delta_\Lambda = 2\pi \tan[\arg(C(\omega))] \quad \text{et} \quad \delta_{1m} = \frac{\delta_\Lambda}{\Lambda}$$

Sur la figure 2.43, la courbe en gras représente $D = \exp(-\delta_{1m})$ qui correspond au ratio des amplitudes entre deux points distants de 1 m. Comme ce facteur est toujours inférieur à 1, la courbe a été dilatée pour la rendre plus lisible. Elle n'a donc pas la même échelle que le ratio L/ℓ . Voici les valeurs de D pour les quatre bandes de fréquences homogénéisables :

- $6,31 \text{ Hz} < f < 79 \text{ Hz} \Rightarrow 0,987 < D < 1$ bande passante
- $89 \text{ Hz} < f < 100 \text{ Hz} \Rightarrow 0,450 < D < 0,784$ bande interdite
- $111 \text{ Hz} < f < 181 \text{ Hz} \Rightarrow 0,910 < D < 0,995$ bande passante
- $491 \text{ Hz} < f < 514 \text{ Hz} \Rightarrow 0,317 < D < 0,822$ bande interdite

Il y a donc deux gammes de fréquences, appelées bandes interdites, où les ondes de compression-cisaillement sont fortement atténuées et deux bandes passantes où les ondes sont peu amorties. La fréquence inférieure des bandes passantes (6,31 Hz) est la même que celle que nous avons calculée en négligeant la résonance interne, par contre la fréquence supérieure est plus élevée (181 Hz au lieu de 126 Hz). Remarquons enfin que les pics d'amortissement n'évoluent pas de la même manière en fonction de la fréquence sur la figure 2.26 page 70 et la figure 2.43. La première représente l'amortissement par longueur d'onde δ_Λ . Les pics sont de plus en plus étalés et de plus en plus petits mais ils correspondent à l'amortissement sur une distance de plus en plus courte. Au contraire, la courbe 2.43 donne l'amortissement sur une distance constante. Le deuxième pic est, lui aussi, plus étalé que le premier mais il correspond à un amortissement plus grand.

Cette étude a permis de déterminer les gammes de fréquences admissibles pour les ondes de compression-cisaillement polarisées selon le mode (Px) et se propageant dans la direction des planchers ($\alpha = 0$). Pour les autres directions \vec{n}_α , les ondes de compression pure dans les planchers sont déphasées verticalement (figure 2.18 page 60) et la longueur d'onde macroscopique est plus courte. Plus précisément, $C_\alpha(\omega) = |\cos(\alpha)|C_0(\omega)$ donc la vitesse et la longueur d'onde sont

multipliées par $|\cos(\alpha)|$. Il s'agit d'un effet purement géométrique qui ne modifie pas le ratio entre la vitesse réelle et la vitesse calculée en négligeant la résonance interne. Par contre, les fréquences délimitant les bandes passantes sont plus faibles. La deuxième conséquence concerne l'atténuation des ondes. L'amortissement par longueur d'onde est inchangé mais, comme les longueurs d'onde sont plus courtes, l'amortissement par mètre est plus important.

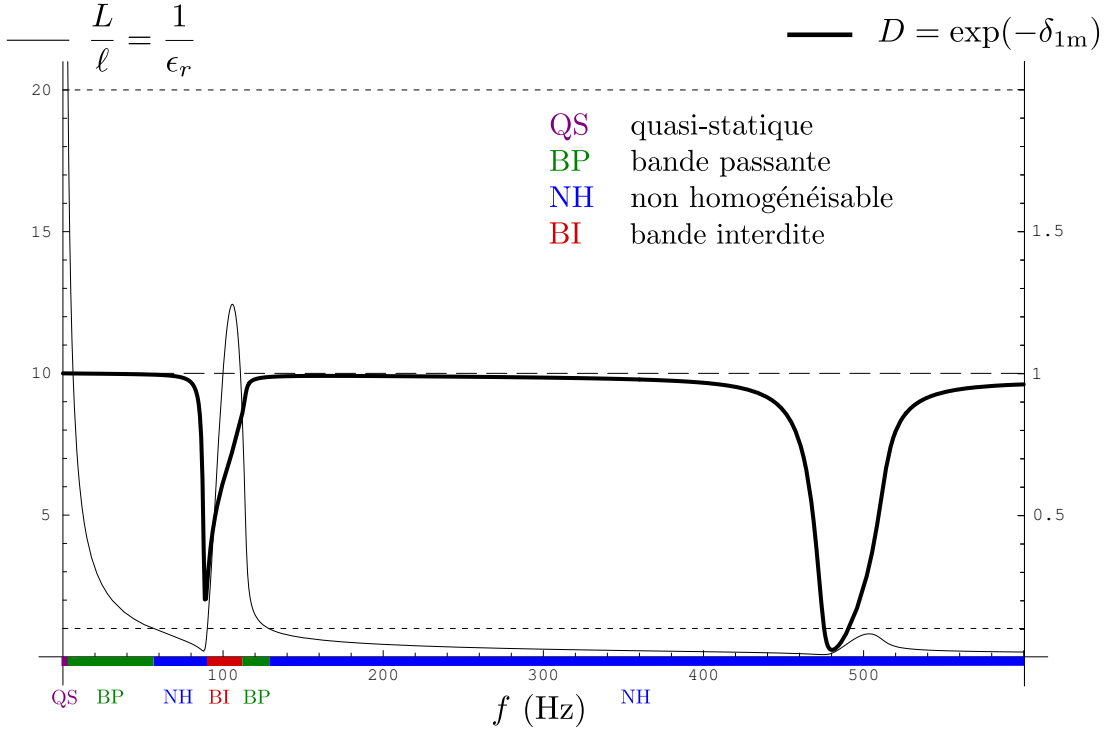


FIGURE 2.44 – Ratio L/l (trait fin) et atténuation (trait gras) pour le mode (Px) en fonction de la fréquence pour $\eta = 2.10^{-2}$ et $\alpha = \pi/3$ (Version en couleur : figure D.4 page 335)

Regardons l'ampleur des modifications pour une onde qui se propage dans la direction $\alpha = \pi/3$, c'est-à-dire pour des longueurs d'onde divisées par 2. Le ratio L/l ainsi que $D = \exp(-\delta_{1m})$ sont dessinés sur la figure 2.44. Maintenant, le pic de vitesse ne correspond plus à un comportement quasi-statique de la structure et il y a deux gammes de fréquences dans le domaine homogénéisable. En prenant le critère $D \geq 0,9$ pour définir les bandes passantes, nous obtenons :

- $3,16 \text{ Hz} < f < 56 \text{ Hz} \Rightarrow 0,995 < D < 1$ bande passante
- $90 \text{ Hz} < f < 113 \text{ Hz} \Rightarrow 0,263 < D < 0,900$ bande interdite
- $113 \text{ Hz} < f < 128 \text{ Hz} \Rightarrow 0,900 < D < 0,987$ bande passante

Comme pour la direction $\alpha = 0$, il y a deux bandes passantes. Mais les fréquences minimale et maximale sont plus basses et la bande interdite est plus large (57 Hz au lieu de 32 Hz). L'augmentation de l'amortissement est également bien visible. Si l'angle α grandit encore, les longueurs d'onde deviennent de plus en plus courtes et tout le spectre sort du domaine homogénéisable au voisinage de $\alpha = \pi/2$ pour le mode (Px).

Pour le mode de polarisation (Py), les ondes de compression pure se propagent dans les murs et c'est la contribution des planchers à la masse apparente qui est affectée par la résonance interne. Le fonctionnement de la structure est similaire à celui observé pour le mode (Px) mais, les murs étant plus épais que les planchers, les valeurs numériques sont différentes. En ce qui concerne la vitesse des ondes, il serait logique qu'elle soit plus élevée puisque ce mécanisme est plus rigide. C'est effectivement le cas à basses fréquences lorsque les effets dynamiques locaux sont négligeables. Pour une onde dans la direction $\alpha = \pi/2$, nous avons :

$$c_{\pi/2}^* = \sqrt{\frac{E_y}{M_s}} = 2\,816 \text{ m/s}$$

Mais lorsque la résonance interne intervient, cela n'est plus vrai pour toutes les fréquences. En effet, la proportion de masse affectée par les effets dynamiques est plus faible que pour le mode (Px) donc les pics de vitesse sont plus petits. Après le premier mode propre des planchers, la vitesse des ondes est inférieure à $13c_{\pi/2}^*$. D'autre part, les pics se trouvent maintenant au voisinage des modes de flexion impairs des planchers et ils ne coïncident pas avec les pics du mode (Px). Les vitesses pour le mode (Px) dans la direction $\alpha = 0$ et le mode (Py) dans la direction $\alpha = \pi/2$ sont dessinées sur la figure 2.45.

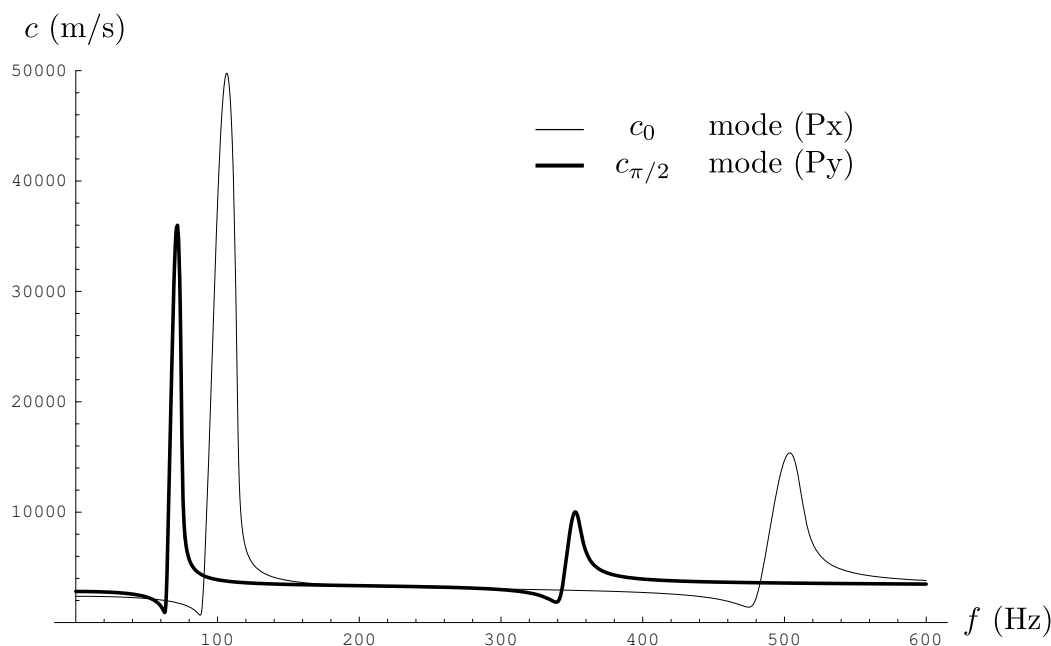


FIGURE 2.45 – Comparaison des vitesses pour le mode (Px) avec $\alpha = 0$ et le mode (Py) avec $\alpha = \pi/2$

La figure 2.46 représente le ratio L/ℓ et l'atténuation $D = \exp(-\delta_{1m})$. Comme pour le mode (Px), il y a quatre gammes de fréquences homogénéisables et seulement deux bandes passantes :

- $7,45 \text{ Hz} < f < 61 \text{ Hz} \Rightarrow 0,944 < D < 1$ bande passante
- $63 \text{ Hz} < f < 68 \text{ Hz} \Rightarrow 0,667 < D < 0,859$ bande interdite
- $74 \text{ Hz} < f < 179 \text{ Hz} \Rightarrow 0,954 < D < 0,996$ bande passante
- $347 \text{ Hz} < f < 359 \text{ Hz} \Rightarrow 0,511 < D < 0,903$ bande interdite

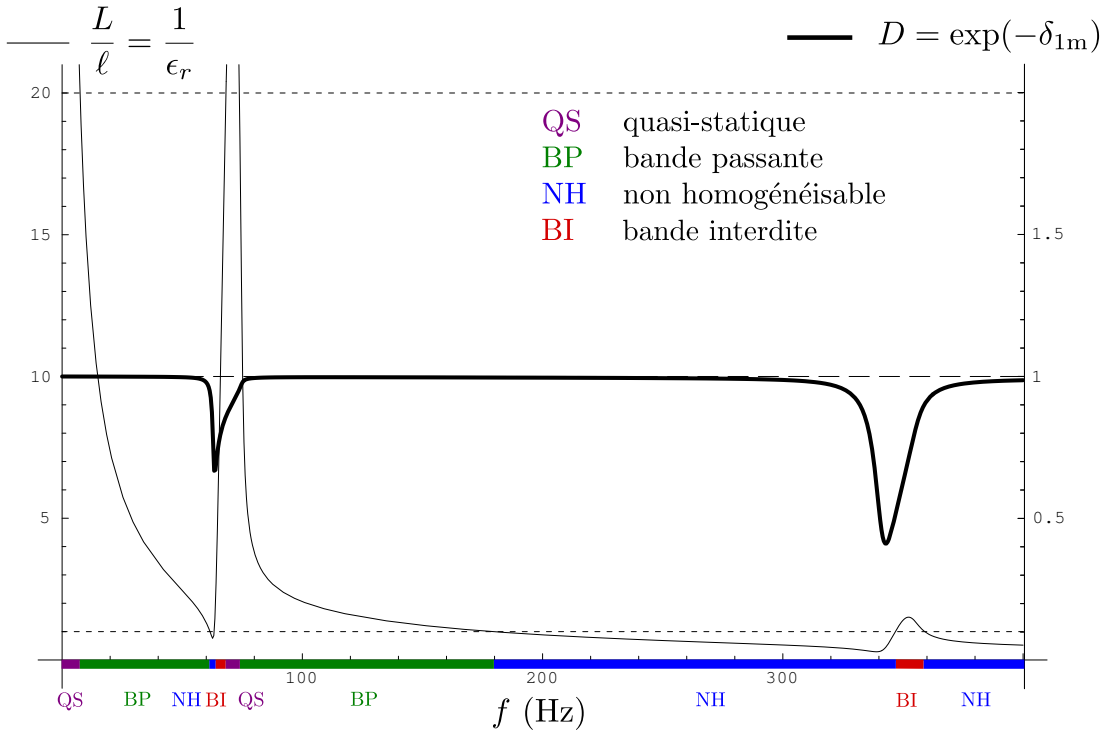


FIGURE 2.46 – Ratio L/ℓ (trait fin) et atténuation (trait gras) pour le mode (Py) en fonction de la fréquence pour $\eta = 2.10^{-2}$ et $\alpha = \pi/2$ (Version en couleur : figure D.5 page 336)

Mais, l'effet de la résonance interne est moins marqué que sur la figure 2.43 : l'amortissement est moins important et la bande interdite moins large (13 Hz au lieu de 32 Hz).

Conclusion

Dans ce paragraphe, nous avons montré comment étudier la propagation des ondes dans une structure sans faire de nouveau appel à la méthode HMPD. Cette approche, basée sur des critères adimensionnels, est très générale et elle peut être appliquée à une grande variété de structures. Ici, nous avons choisi des murs et des planchers en béton avec des dimensions proches de celles qui existent dans les bâtiments car c'est une des applications envisagées pour ce travail. Cela permet d'obtenir l'ordre de grandeur des fréquences correspondant aux phénomènes que nous avons mis en évidence par homogénéisation. Ces résultats numériques font ressortir deux points importants. Contrairement à ce que suggère l'étude par homogénéisation des parties précédentes, les fréquences des ondes de compression-cisaillement ne sont pas très éloignées de celles des ondes de cisaillement pur. Si nous avons choisi une structure avec plus de cellules, il y aurait même eu des fréquences communes. La deuxième observation est que les effets dynamiques à l'échelle locale sont visibles bien avant d'avoir atteint la résonance des éléments.

2.5 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques discrets (HMPD) a été présentée en détail. Elle a été appliquée sur des structures réticulées bidimensionnelles constituées d'une infinité de murs soutenant une infinité de planchers. Pour comprendre le fonctionnement de ces structures, nous avons regardé la propagation des ondes planes dans le milieu continu équivalent. La nouveauté dans cette thèse est que la méthode HMPD a été adaptée à l'étude des fréquences plus élevées pour lesquelles les éléments peuvent entrer en résonance. Cela est rendu possible par la coexistence dans les éléments de deux mécanismes avec des rigidités différentes : la flexion et la traction-compression. Lorsque le premier entre en résonance, le second est encore en équilibre quasi-statique à l'échelle locale ce qui permet de définir une taille macroscopique. Néanmoins, pour pouvoir appliquer la méthode HMPD, il faut que les éléments en résonance puissent être modélisés par des poutres, c'est-à-dire que la longueur de l'onde de flexion reste bien plus grande que leur épaisseur.

Cette étude a mis en évidence trois mécanismes de base à l'échelle de la cellule : le cisaillement de la cellule provoqué par la flexion locale des éléments, la propagation d'ondes de flexion et la propagation d'ondes de compression. Ces dernières peuvent éventuellement être déphasées. Cela se traduit à l'échelle de la structure par, respectivement, des ondes de cisaillement pur dont la vitesse ne dépend pas de la fréquence, des ondes de cisaillement pur dont la vitesse dépend de la fréquence et des ondes de compression-cisaillement. Les ondes de cisaillement pur ne peuvent pas se propager en diagonale et les ondes de compression-cisaillement dégènèrent en ondes de compression pure dans les directions des éléments. De plus, quelle que soit la direction de propagation des ondes de compression-cisaillement, il n'y a que deux directions de polarisation possibles qui correspondent aux directions des éléments. Pour un mode de polarisation donné, la vitesse des ondes dépend de la direction.

À chacun de ces trois mécanismes est associée une rigidité qui peut éventuellement être différente pour les directions x et y . La méthode HMPD étant entièrement analytique, nous connaissons leurs expressions. Elles intègrent toutes les caractéristiques de la structure : géométrie et matériau. Pour les structures non-contreventées que nous avons étudiées, le cisaillement est beaucoup plus souple que la traction-compression dans les axes des éléments. Plus que les épaisseurs des éléments, les rigidités des mécanismes sont les paramètres clés qui pilotent le comportement de la structure. En effet, nous avons vu que les deux mécanismes de cisaillement sont associés en parallèle donc c'est le plus rigide qui domine. De plus, c'est l'ordre de grandeur des rigidités qui fixe la gamme de fréquences des ondes. Lorsque celle-ci coïncide avec les fréquences propres de flexion des éléments, ces derniers peuvent entrer en résonance. Selon la nature des ondes et la façon dont la masse de la structure est répartie, l'impact sur la propagation de l'onde macroscopique est plus ou moins important.

Les ondes de cisaillement générées par la flexion locale se propagent à des fréquences suffisamment faibles pour qu'il n'y ait pas de résonance interne. Lorsque les ondes de cisaillement sont dues à la propagation d'ondes de flexion dans les élé-

ments les plus rigides alors les éléments perpendiculaires peuvent éventuellement être en résonance. Cela ne modifie pas les propriétés des ondes macroscopiques mais peut restreindre leur domaine d'existence. En effet, les conditions cinématiques imposées par l'équilibre interne de la cellule interdisent ce type d'onde au voisinage des fréquences des modes de flexion pairs des éléments en résonance.

Pour les ondes de compression-cisaillement, il y a une plus grande variété de comportements. Si les éléments sont suffisamment épais, ils n'entrent pas en résonance. Alors, la vitesse des ondes ne dépend pas de la fréquence. C'est encore vrai lorsque la masse des éléments en résonance est négligeable à l'ordre 0. Enfin, les effets inertiels dus à la résonance peuvent être d'ordre 0 et dans ce cas, il faut prendre en compte une masse apparente matricielle qui dépend de la fréquence. En conséquence, dans le domaine fréquentiel la vitesse des ondes n'est plus constante et dans le domaine temporel le milieu continu équivalent a un comportement à mémoire. Dans tous les cas, il y a des comportements atypiques au voisinage des modes de flexion des éléments en résonance. Pour les modes impairs, la masse apparente devient infinie et la longueur de pénétration des ondes dans la structure est négligeable. Pour les modes pairs, l'équilibre interne de la cellule interdit le déphasage des ondes de compression dans les éléments, ce qui oblige l'onde macroscopique à se propager selon les directions des éléments.

Ces résultats illustrent la richesse du comportement des structures creuses. Ils confirment la forte anisotropie des treillis carrés et sont un exemple supplémentaire des propriétés de filtre spatial et fréquentiel des milieux périodiques. Il est à noter que, souvent, les bandes de fréquences interdites sont dues à la diffraction et apparaissent lorsque les longueurs d'ondes deviennent du même ordre de grandeur que la période. Ce n'est pas le cas ici : la résonance interne affecte des ondes dont la longueur est bien plus grande que la taille de la cellule.

Nous avons ensuite appliqué ces résultats sur une structure en béton dont les éléments avaient des épaisseurs proches de celles des murs et des planchers des bâtiments réels. Cela a donné des ordres de grandeur des fréquences correspondant aux trois mécanismes. Le point important est que les effets dynamiques à l'échelle locale doivent être pris en compte bien avant que les éléments entrent en résonance.

Cette étude sur la propagation des ondes dans des structures réticulées représente une avancée par rapport à Cioranescu et Saint Jean Paulin (1999) car nous avons pris en compte les effets de cisaillement qui apparaissent dans les équations d'ordres supérieurs. Elle a permis d'identifier les modes compatibles avec la périodicité des variables cinématiques sur une seule cellule. Cette hypothèse semblait naturelle au départ mais certains indices suggèrent l'existence d'autres modes de propagation. Tout d'abord, nous avons constaté que cette hypothèse n'est pas adaptée au voisinage des fréquences des modes de flexion pairs des éléments, ce qui se traduit par une rigidité apparente infinie. De plus, l'étude des propriétés du milieu continu équivalent montre que la structure est très rigide en traction-compression dans les axes des éléments mais est très souple en traction-compression hors axes. Il doit donc exister des ondes de compression hors axes à basses fréquences. Or les seules ondes de compression que nous avons trouvées se propagent à des fréquences assez élevées dans les directions les plus rigides. Enfin

des simulations numériques font apparaître une plus grande diversité de modes (Srikantha Phani *et al.*, 2006). L'existence d'autres modes de propagation plus souples soulève de nouvelles questions :

- Les modes que nous avons trouvés sont-ils tous observables ? Ce n'est probablement pas le cas au voisinage des modes de flexion pairs des éléments.
- Lorsque la condition de périodicité des variables cinématiques porte sur plusieurs cellules, le milieu continu équivalent est-il le même ?

Dans le cadre de nos hypothèses cinématiques, il y a deux milieux continus équivalents possibles selon les rigidités en flexion des éléments et la fréquence des ondes. Lorsque le contraste entre les éléments est faible ou à basses fréquences, seule la cinématique de translation émerge à l'ordre 0 et nous avons un milieu continu habituel. Pour un contraste plus important ou à hautes fréquences, un nouveau degré de liberté apparaît : la déformation en flexion à l'échelle macroscopique des éléments les plus rigides. Le milieu continu équivalent est alors un milieu généralisé. Notons que pour tous les cas traités, la rotation des nœuds $\tilde{\theta}^0$ est une variable cachée qui se déduit du déplacement \vec{U}^0 grâce à une équation d'équilibre interne de la cellule. Un changement d'hypothèse cinématique pourrait peut-être faire apparaître des modes pilotés par la variable $\tilde{\theta}^0$.

Chapitre 3

Modes de vibrations de poutres réticulées

Sommaire

3.1	Mise en œuvre de la méthode HMPD	143
3.1.1	Structures étudiées et notations	143
3.1.2	Discrétisation de l'équilibre dynamique	145
3.1.3	Changement de variables	148
3.1.4	Séparation d'échelles	149
3.1.5	Normalisation	151
3.1.6	Résolution	152
3.2	Modes transversaux à basses fréquences	154
3.2.1	Un exemple : poutre de Timoshenko élancée	154
3.2.2	Études précédentes	157
3.2.3	Généralisation	171
3.3	Modes transversaux à plus hautes fréquences	195
3.3.1	Sans résonance interne	195
3.3.2	Résonance interne aux ordres supérieurs	217
3.3.3	Résonance interne à l'ordre 0	225
3.3.4	Résumé	236
3.4	Modes longitudinaux	238
3.4.1	Sans résonance interne	238
3.4.2	Résonance interne aux ordres supérieurs	239
3.4.3	Résonance interne à l'ordre 0	244
3.4.4	Résumé	252
3.5	Conclusion et perspectives	253

Dans ce chapitre, nous poursuivons l'étude du comportement dynamique des structures réticulées non contreventées. La cellule de base est la même que dans le chapitre 2 mais maintenant, elle n'est répétée que dans une seule direction. Là encore, nous utilisons la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques discrets (HMPD). La structure continue équivalente est une poutre et nous nous intéressons à ses modes de vibrations. Ce problème a été amplement étudié par Hans et Boutin (Hans, 2002; Boutin et Hans, 2003; Hans et Boutin, 2008). Leurs résultats sont le point de départ de ce travail. Ils sont présentés en détail dans la partie 3.2 car ils seront utilisés dans le chapitre 4. Les apports de cette thèse se trouvent dans les parties 3.2.3 et suivantes. L'objectif était de répondre à deux questions :

- Comment généraliser les résultats précédents à des structures plus complexes ?
- Que se passe-t-il à plus hautes fréquences ?

Mais avant cela, nous allons revenir sur la mise en œuvre de la méthode HMPD. Cette dernière a été présentée de façon très détaillée dans la partie 2.1. Ce nouvel exposé insiste surtout sur les spécificités des structures poutres qui sont au nombre de trois :

- La structure n'est périodique que selon une seule direction.
- L'interprétation des résultats est basée sur une analogie avec la théorie des poutres de la résistance des matériaux.
- Nous recherchons les modes propres de la structure.

3.1 Mise en œuvre de la méthode HMPD

3.1.1 Structures étudiées et notations

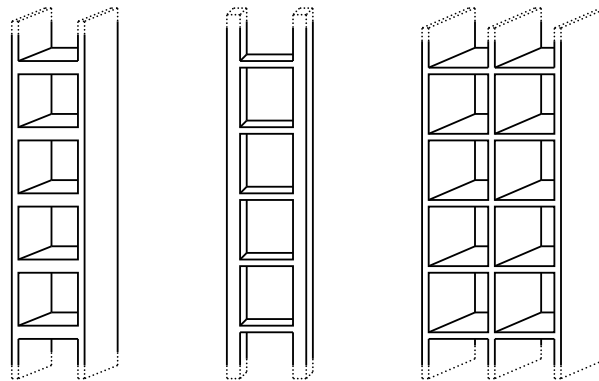


FIGURE 3.1 – Exemples de structures

Les structures étudiées sont constituées par l'empilement de portiques et ne sont périodiques que selon la direction verticale. Pour la majorité des cas traités dans ce chapitre, il s'agit de portiques simples faits de deux murs identiques soutenant un plancher. Ce dernier peut être différent des murs. Quelques structures réalisées à partir de doubles portiques comprenant trois murs et deux planchers ont également été étudiées. Dans ce cas, le mur du milieu peut être différent des

deux murs extérieurs mais toutes les structures sont symétriques. Nous nous intéressons aux vibrations dans le plan du portique. Les différents comportements sont générés en faisant varier les épaisseurs des éléments dans le plan d'étude. Néanmoins, les éléments sont des poutres ou des plaques et leurs épaisseurs restent petites devant leur longueur. Les nœuds sont encastrés. Des exemples de structures possibles sont représentés sur la figure 3.1.

La mise en œuvre de la méthode est présentée dans le cas des portiques simples. Les notations sont indiquées sur la figure 3.2. Par rapport au chapitre précédent, nous inversons les axes du repère global afin que l'axe x coïncide avec l'axe de la structure. Ainsi, l'axe x devient l'axe vertical et l'axe y l'axe horizontal. Cette inversion est justifiée par le fait que le modèle continu équivalent sera un modèle de poutre ne dépendant que de la coordonnée verticale. Les différents niveaux sont également repérés par des entiers. L'abscisse du niveau n est le réel $x = n \ell_m$ où ℓ_m est la longueur des murs. Le niveau n contient deux nœuds : celui de gauche est appelé n_1 et celui de droite n_2 .

Comme nous étudions le mouvement de la structure dans le plan (x, y) , il y a trois variables cinématiques par nœud :

- u_{n_i} : déplacement horizontal du nœud n_i
- v_{n_i} : déplacement vertical du nœud n_i
- θ_{n_i} : rotation du nœud n_i

Maintenant que la périodicité latérale a disparu, les nœuds de gauche et de droite ne se comportent plus de la même façon. Au total, nous avons donc *six variables cinématiques* par niveau.

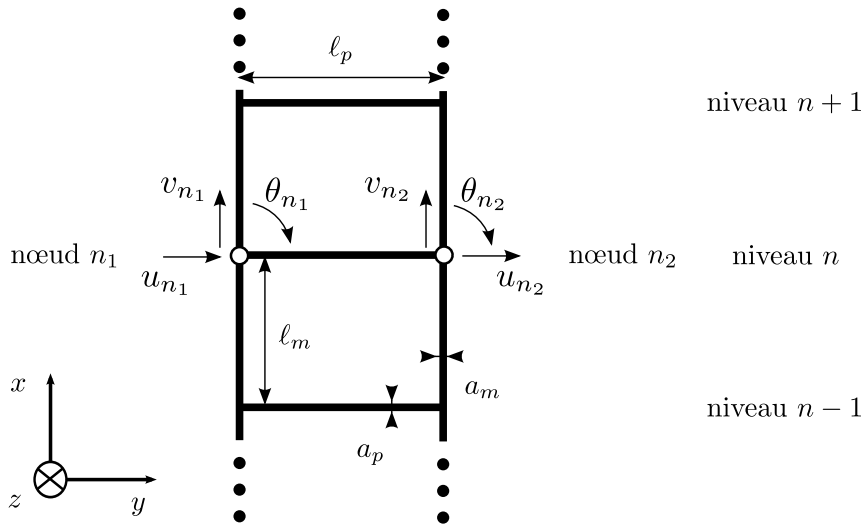


FIGURE 3.2 – Notations (structure)

Les caractéristiques des éléments sont rappelées ci-dessous. Les symboles seront indexés par « m » pour les murs et par « p » pour les planchers.

- | | |
|-------------------------------------|--|
| a : épaisseur | $I = a^3 h / 12$: inertie par rapport à l'axe z |
| ℓ : longueur | ρ : masse volumique |
| h : profondeur (selon l'axe z) | $\bar{\rho} = \rho A$: masse linéique |
| $A = ah$: section | E : module d'élasticité |

Pour cette étude, nous supposons que la structure reste dans le domaine des petites déformations et que le matériau a un comportement élastique linéaire. Nous considérons également que l'épaisseur des éléments a est suffisamment faible ($a \ll \ell$) pour que leur comportement dans le plan (x, y) soit correctement modélisé par des poutres d'Euler-Bernoulli. Si les éléments sont réellement des poutres ($h \ll \ell$), alors le module d'élasticité E est égal à E_{young} , le module d'Young du matériau. Si les éléments sont des plaques ($h \gg \ell$), E désigne un module corrigé correspondant à un état de déformation plane ($\epsilon_{zz} = 0$). Son expression est alors $E = E_{young}/(1 - \nu^2)$ où ν est le coefficient de Poisson du matériau.

Comme nous nous intéressons au comportement de la structure à une fréquence f fixée, toutes les variables peuvent se mettre sous la forme :

$X(x, y, t) = \text{Re}(X(x, y)e^{i\omega t})$ où $\omega = 2\pi f$ désigne la pulsation et t le temps. Le problème étant linéaire, nous raisonnerons directement sur $X(x, y)$ et omettrons le terme $e^{i\omega t}$. Remarquons que, lorsque la condition de quasi-staticisme locale est respectée, les différents points de la structure vibrent en phase et $X(x, y)$ est un nombre réel.

3.1.2 Discrétisation de l'équilibre dynamique

La première étape qui consiste à intégrer le comportement dynamique des éléments sur leur longueur n'est pas modifiée par le changement de structure. Les expressions des efforts en fonction des déplacements nodaux sont toujours valables. Nous les rappelons brièvement ci-dessous ainsi que les notations. Par contre, la deuxième étape d'écriture de l'équilibre des nœuds prend en compte la géométrie de la structure et doit être recommencée.

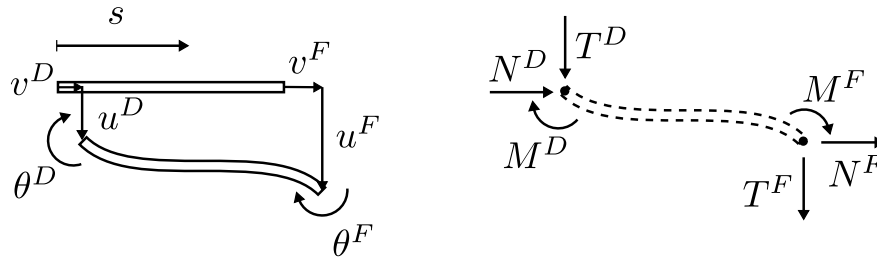


FIGURE 3.3 – Notations (élément)

Pour déterminer les expressions des efforts nodaux, nous nous plaçons dans le repère local associé à un élément. Les notations sont rappelées sur la figure 3.3. La longueur de l'élément est ℓ et s représente l'abscisse curviligne. Les extrémités sont notées D pour l'origine ($s = 0$) et F pour la fin ($s = \ell$). $u(s)$, $v(s)$ et $\theta(s)$ correspondent respectivement aux déplacements transversal, longitudinal et à la rotation de la section. L'effort normal, l'effort tranchant et le moment fléchissant sont notés N , T et M . Par convention, ces efforts sont exercés par la partie gauche de l'élément sur la partie droite. Il n'y a pas de charges extérieures en partie courante. Les équations de la poutre d'Euler-Bernoulli, en régime harmonique, sont intégrées sur la longueur de l'élément en prenant comme conditions aux limites les valeurs inconnues des déplacements et rotations aux nœuds : u^D , u^F , v^D , v^F , θ^D , θ^F . Nous en déduisons les expressions des efforts nodaux dans le

repère local :

$$\begin{cases} N^D = \frac{EA\chi}{\sin(\chi\ell)} (v^D \cos(\chi\ell) - v^F) \\ N^F = \frac{EA\chi}{\sin(\chi\ell)} (v^D - v^F \cos(\chi\ell)) \end{cases} \quad (3.1a)$$

$$\begin{cases} T^D = \frac{EI\beta^3}{1 - \cos(\beta\ell) \operatorname{ch}(\beta\ell)} \left(u^D (\operatorname{ch}(\beta\ell) \sin(\beta\ell) + \operatorname{sh}(\beta\ell) \cos(\beta\ell)) \right. \\ \quad \left. - u^F (\sin(\beta\ell) + \operatorname{sh}(\beta\ell)) + \frac{\theta^D}{\beta} \sin(\beta\ell) \operatorname{sh}(\beta\ell) - \frac{\theta^F}{\beta} (\cos(\beta\ell) - \operatorname{ch}(\beta\ell)) \right) \\ T^F = \frac{EI\beta^3}{1 - \cos(\beta\ell) \operatorname{ch}(\beta\ell)} \left(-u^F (\operatorname{ch}(\beta\ell) \sin(\beta\ell) + \operatorname{sh}(\beta\ell) \cos(\beta\ell)) \right. \\ \quad \left. + u^D (\sin(\beta\ell) + \operatorname{sh}(\beta\ell)) + \frac{\theta^F}{\beta} \sin(\beta\ell) \operatorname{sh}(\beta\ell) - \frac{\theta^D}{\beta} (\cos(\beta\ell) - \operatorname{ch}(\beta\ell)) \right) \end{cases} \quad (3.1b)$$

$$\begin{cases} M^D = \frac{EI\beta^2}{1 - \cos(\beta\ell) \operatorname{ch}(\beta\ell)} \left(u^D \sin(\beta\ell) \operatorname{sh}(\beta\ell) + u^F (\cos(\beta\ell) - \operatorname{ch}(\beta\ell)) \right. \\ \quad \left. + \frac{\theta^D}{\beta} (\operatorname{ch}(\beta\ell) \sin(\beta\ell) - \operatorname{sh}(\beta\ell) \cos(\beta\ell)) - \frac{\theta^F}{\beta} (\sin(\beta\ell) - \operatorname{sh}(\beta\ell)) \right) \\ M^F = \frac{EI\beta^2}{1 - \cos(\beta\ell) \operatorname{ch}(\beta\ell)} \left(u^F \sin(\beta\ell) \operatorname{sh}(\beta\ell) + u^D (\cos(\beta\ell) - \operatorname{ch}(\beta\ell)) \right. \\ \quad \left. - \frac{\theta^F}{\beta} (\operatorname{ch}(\beta\ell) \sin(\beta\ell) - \operatorname{sh}(\beta\ell) \cos(\beta\ell)) + \frac{\theta^D}{\beta} (\sin(\beta\ell) - \operatorname{sh}(\beta\ell)) \right) \end{cases} \quad (3.1c)$$

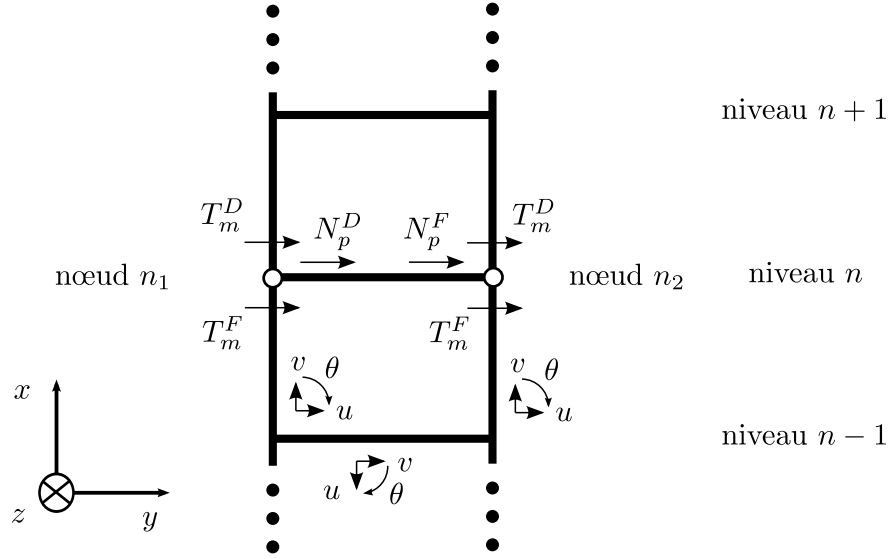
Les paramètres χ et β sont définis par :

$$\chi = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{E}} = \frac{2\pi}{\lambda_c} \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{EI}} = \frac{2\pi}{\lambda_f}$$

λ_c désigne la longueur de l'onde de compression et λ_f la longueur de l'onde de flexion dans l'élément considéré pour la pulsation ω . Pour une pulsation donnée, nous avons toujours :

$$\lambda_f \ll \lambda_c$$

La géométrie de la structure est introduite lors de l'écriture de l'équilibre des nœuds. Comme leur masse est négligée et qu'il n'y a pas de chargement extérieur, cela revient à faire la somme des efforts appliqués sur chacun des nœuds par les éléments qui y sont connectés. La différence par rapport au chapitre 2 est qu'*il faut distinguer les nœuds situés à gauche des nœuds situés à droite*. L'équilibre de la structure est donc décrit par deux systèmes de trois équations. De plus, chaque nœud correspond à la jonction entre deux murs et un seul plancher (figure 3.4). Les équations d'équilibre des nœuds n_1 et n_2 sont données ci-dessous. Remarquons qu'elles font intervenir les variables cinématiques des niveaux $n - 1$, n et $n + 1$.


 FIGURE 3.4 – Équilibre en forces des nœuds n_1 et n_2 selon la direction y

Nœud n_1

Équilibre en forces selon y :

$$T_m^F(u_{(n-1)_1}, u_{n_1}, \theta_{(n-1)_1}, \theta_{n_1}) - T_m^D(u_{n_1}, u_{(n+1)_1}, \theta_{n_1}, \theta_{(n+1)_1}) - N_p^D(u_{n_1}, u_{n_2}) = 0 \quad (n_1 y)$$

Équilibre en forces selon x :

$$N_m^F(v_{(n-1)_1}, v_{n_1}) - N_m^D(v_{n_1}, v_{(n+1)_1}) + T_p^D(-v_{n_1}, -v_{n_2}, \theta_{n_1}, \theta_{n_2}) = 0 \quad (n_1 x)$$

Équilibre en moments :

$$M_m^F(u_{(n-1)_1}, u_{n_1}, \theta_{(n-1)_1}, \theta_{n_1}) - M_m^D(u_{n_1}, u_{(n+1)_1}, \theta_{n_1}, \theta_{(n+1)_1}) - M_p^D(-v_{n_1}, -v_{n_2}, \theta_{n_1}, \theta_{n_2}) = 0 \quad (n_1 m)$$

Nœud n_2

Équilibre en forces selon y :

$$T_m^F(u_{(n-1)_2}, u_{n_2}, \theta_{(n-1)_2}, \theta_{n_2}) - T_m^D(u_{n_2}, u_{(n+1)_2}, \theta_{n_2}, \theta_{(n+1)_2}) + N_p^F(u_{n_1}, u_{n_2}) = 0 \quad (n_2 y)$$

Équilibre en forces selon x :

$$N_m^F(v_{(n-1)_2}, v_{n_2}) - N_m^D(v_{n_2}, v_{(n+1)_2}) - T_p^F(-v_{n_1}, -v_{n_2}, \theta_{n_1}, \theta_{n_2}) = 0 \quad (n_2 x)$$

Équilibre en moments :

$$M_m^F(u_{(n-1)_2}, u_{n_2}, \theta_{(n-1)_2}, \theta_{n_2}) - M_m^D(u_{n_2}, u_{(n+1)_2}, \theta_{n_2}, \theta_{(n+1)_2}) + M_p^F(-v_{n_1}, -v_{n_2}, \theta_{n_1}, \theta_{n_2}) = 0 \quad (n_2 m)$$

3.1.3 Changement de variables

Cette étape est spécifique des structures poutres et n'existait pas dans le chapitre 2. Pour l'instant, l'équilibre de la structure est décrit par six équations faisant intervenir six variables cinématiques par niveau. L'intérêt d'un changement de variable est double. D'une part, les structures étudiées étant symétriques, cela permet de découpler les mouvements transversaux des mouvements longitudinaux. Pour chaque direction, il ne reste alors que trois équations d'équilibre avec trois variables par niveau. D'autre part, pour construire une analogie avec la théorie des poutres de la résistance des matériaux, nous avons besoin de variables qui décrivent le mouvement de la « section ». Nous remplaçons donc les variables nodales par trois variables associées au mouvement de corps rigide du niveau n (U_n , α_n et V_n) et trois variables associées à sa déformation (θ_n , Δ_n et Φ_n). Les expressions des nouvelles variables sont :

Cinématique transversale :

$$\begin{aligned}
 U_n &= \frac{u_{n1} + u_{n2}}{2} && \text{déplacement transversal moyen (selon } y) \\
 \alpha_n &= \frac{v_{n1} - v_{n2}}{\ell_p} && \text{rotation du niveau } n \\
 \theta_n &= \frac{\theta_{n1} + \theta_{n2}}{2} && \text{rotation moyenne des nœuds}
 \end{aligned}$$

Cinématique longitudinale :

$$\begin{aligned}
 V_n &= \frac{v_{n1} + v_{n2}}{2} && \text{déplacement longitudinal moyen (selon } x) \\
 \Delta_n &= u_{n2} - u_{n1} && \text{dilatation transversale} \\
 \Phi_n &= \theta_{n2} - \theta_{n1} && \text{rotation différentielle des nœuds}
 \end{aligned}$$

L'interprétation physique des nouvelles variables est représentée sur la figure 3.5 pour la cinématique transversale et la figure 3.6 pour la cinématique longitudinale.

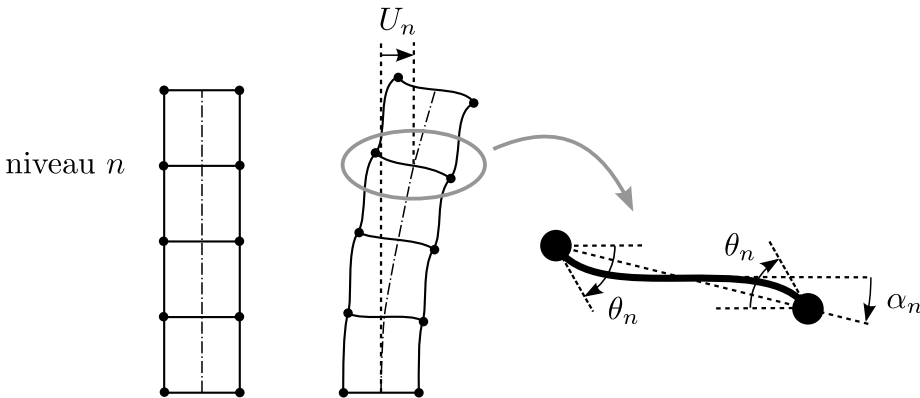


FIGURE 3.5 – Interprétation des variables de la cinématique transversale

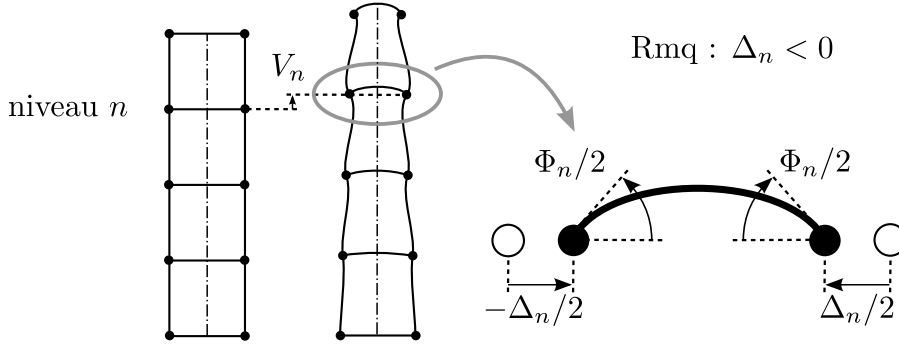


FIGURE 3.6 – Interprétation des variables de la cinématique longitudinale

Pour découpler les vibrations longitudinales et transversales, il faut faire le même type de manipulation sur les équations d'équilibre des nœuds :

Cinématique transversale	Cinématique longitudinale
$(T_t^n) = (n_1 y) + (n_2 y)$	$(T_d^n) = (n_2 y) - (n_1 y)$
$(M^n) = (n_2 x) - (n_1 x)$	$(N_t^n) = (n_1 x) + (n_2 x)$
$(\mathcal{M}_t^n) = (n_1 m) + (n_2 m)$	$(\mathcal{M}_d^n) = (n_2 m) - (n_1 m)$

L'équation (T_t^n) est la somme de toutes les forces transversales qui s'exercent sur le niveau n . Pour la structure discrète, elle joue le même rôle qu'une équation d'équilibre d'effort tranchant pour une poutre continue. De même, l'équation (N_t^n) est la somme de toutes les forces longitudinales et est l'équivalent d'une équation d'équilibre d'effort normal. Les équations (\mathcal{M}_t^n) (somme des moments aux nœuds), (T_d^n) (différence des forces transversales) et (\mathcal{M}_d^n) (différence des moments aux nœuds) n'ont pas d'équivalent dans les modèles classiques de poutres. Elles correspondent à des efforts internes à la cellule. Par contre, la différence des efforts longitudinaux (équation (M^n)) s'apparente à une équation d'équilibre en moments à l'échelle de la structure.

3.1.4 Séparation d'échelles

Maintenant que nous disposons des équations d'équilibre de la structure sous forme discrète et du changement de variables adéquat, nous pouvons démarrer le processus d'homogénéisation proprement dit. Pour cela, il faut que la condition de séparation d'échelles soit vérifiée, c'est-à-dire que le ratio d'échelles soit très petit : $\epsilon = \ell_c/L \ll 1$. ℓ_c est la taille caractéristique de la cellule dans la direction de la périodicité donc $\ell_c = \ell_m$. L est la taille caractéristique des déformations macroscopiques et est inconnue pour l'instant. Lorsque cette condition est respectée, le développement des efforts nodaux et des variables cinématiques est réalisé selon les mêmes principes que dans le chapitre 2.

Le développement des efforts nodaux dépend de l'ordre de grandeur des paramètres $\beta\ell$ et $\chi\ell$ dont les définitions sont rappelées ci-dessous :

$$\beta\ell = \ell^4 \sqrt{\frac{\rho A \omega^2}{EI}} = 2\pi \frac{\ell}{\lambda_f} \quad \chi\ell = \ell \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{E}} = 2\pi \frac{\ell}{\lambda_c}$$

λ_f et λ_c désignent respectivement la longueur de l'onde de flexion et celle de l'onde de compression dans l'élément considéré pour la pulsation ω . La différence par rapport au chapitre 2 est que nous recherchons les modes propres de la structure au lieu d'étudier la propagation des ondes. La pulsation des vibrations est donc une inconnue qu'il faut écrire sous la forme d'un développement asymptotique :

$$\omega = \epsilon^{e_f} (\omega_0 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots)$$

Nous expliquerons plus tard comment sont déterminés ω_0 et l'ordre de grandeur e_f . Le point important pour le développement des efforts nodaux est que $\beta\ell$ et $\chi\ell$ sont maintenant des développements asymptotiques selon les puissances de ϵ :

$$\beta\ell = \ell (\beta^0 + \epsilon\beta^1 + \epsilon^2\beta^2 + \dots) \quad \chi\ell = \ell (\chi^0 + \epsilon\chi^1 + \epsilon^2\chi^2 + \dots)$$

À basses fréquences, la condition de quasi-statisme local est vérifiée, c'est-à-dire que les longueurs d'onde λ_f et λ_c sont bien plus grandes que la longueur ℓ de l'élément. Dans ces conditions, nous avons :

$$\beta\ell \ll 1 \quad \text{et} \quad \chi\ell \ll 1$$

Dans les expressions des efforts nodaux (équations (3.1)), il est alors possible de remplacer les fonctions trigonométriques par leur développement limité au voisinage de 0. Les développements de $\beta\ell$ et $\chi\ell$ sont ensuite introduits dans ces nouvelles expressions des efforts.

Lorsque la fréquence augmente, les longueurs d'onde λ_c et λ_f diminuent. Comme $\lambda_f \ll \lambda_c$, il arrive un moment où la condition de quasi-statisme local n'est plus valable pour le mécanisme de flexion alors qu'elle l'est toujours pour le mécanisme de compression. Nous avons alors :

$$\beta\ell = O(1) \quad \text{et} \quad \chi\ell \ll 1$$

Cette situation est encore homogénéisable mais l'effort tranchant et le moment fléchissant sont maintenant développés au voisinage de la constante non nulle $\beta^0\ell$. Par contre, l'effort normal peut toujours être développé au voisinage de 0. Pour des fréquences encore plus élevées, le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli n'est plus adapté pour décrire les vibrations transversales des éléments. La méthode HMPD ne s'applique plus.

Le développement des variables cinématiques est indépendant de la fréquence des vibrations. Nous commençons par considérer que les six variables discrètes définies pour chaque niveau de la structure sont des valeurs particulières prises par des fonctions continues indéfiniment dérivables :

$$\begin{array}{l|l} U_n = U(\epsilon, x = n \ell_m) & V_n = V(\epsilon, x = n \ell_m) \\ \alpha_n = \alpha(\epsilon, x = n \ell_m) & \Delta_n = \Delta(\epsilon, x = n \ell_m) \\ \theta_n = \theta(\epsilon, x = n \ell_m) & \Phi_n = \Phi(\epsilon, x = n \ell_m) \end{array}$$

Comme la structure n'est périodique que dans une seule direction, ces fonctions ne dépendent que de la coordonnée verticale x . Nous supposons qu'elles convergent

lorsque ϵ tend vers 0 et nous les écrivons sous forme de développements asymptotiques :

$$X(\epsilon, x) = X^0(x) + \epsilon X^1(x) + \epsilon^2 X^2(x) + \epsilon^3 X^3(x) + \dots$$

où X représente indifféremment une des six variables. Dans cette équation, les X^j sont des fonctions continues indéfiniment dérivables relatives à l'ordre ϵ^j . De plus, les fonctions physiquement observables sont indiquées par un « \sim » :

$$\tilde{X}^j(x, y) = \epsilon^j X^j(x, y)$$

L'importance relative des différentes variables est un des résultats de l'homogénéisation. Initialement, tous les développements commencent à l'ordre 0 puis la résolution du problème fournit les ordres de grandeurs appropriés.

Les mouvements des niveaux immédiatement inférieur et supérieur au niveau étudié sont exprimés à l'aide de développements en séries de Taylor. Cela est possible car, grâce à la condition de séparation d'échelles, les variables cinématiques évoluent peu d'un niveau à l'autre. De plus, la distance entre les niveaux est constante. Elle vaut $\ell_m = \epsilon L$ qui est un petit incrément pour la coordonnée continue x . Cette étape permet de faire apparaître les dérivées macroscopiques par rapport à la variable d'espace x . Elles sont indiquées par des « \prime ».

$$\begin{aligned} X_{n+1} = & X^0(n \ell_m) + \epsilon \left(X^1(n \ell_m) + L X^{0'}(n \ell_m) \right) \\ & + \epsilon^2 \left(X^2(n \ell_m) + L X^{1'}(n \ell_m) + \frac{L^2}{2} X^{0''}(n \ell_m) \right) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{n-1} = & X^0(n \ell_m) + \epsilon \left(X^1(n \ell_m) - L X^{0'}(n \ell_m) \right) \\ & + \epsilon^2 \left(X^2(n \ell_m) - L X^{1'}(n \ell_m) + \frac{L^2}{2} X^{0''}(n \ell_m) \right) + \dots \end{aligned}$$

Tous ces développements sont ensuite injectés dans les équations d'équilibre de la structure ((T_t^n) , (M^n) , (\mathcal{M}_t^n) , (T_d^n) , (N_t^n) et (\mathcal{M}_d^n) définies page 149). Nous obtenons six équations différentielles valables à chaque niveau, c'est-à-dire pour tout x vérifiant $x = n \ell_m$ avec n entier. Nous allons chercher les solutions qui vérifient ces équations en n'importe quel point (x quelconque). Il est alors inutile de préciser le numéro du niveau dans les noms des équations.

3.1.5 Normalisation

Cette étape consiste à peser les paramètres du problème en fonction des puissances du ratio d'échelles ϵ . Elle est essentielle pour la prise en compte de la physique locale car elle permet de conserver l'importance relative des mécanismes lorsque ϵ tend vers 0. De plus, c'est en jouant sur les ordres de grandeur des contrastes que sont générés les différents comportements.

Pour les propriétés de la cellule, nous reprenons les mêmes hypothèses qu'au chapitre 2. Les murs et les planchers sont réalisés dans des matériaux similaires.

De plus, leurs longueurs ℓ sont du même ordre, ainsi que leurs profondeurs h . Les seuls paramètres qui varient sont les épaisseurs des éléments. Les contrastes retenus sont résumés ci-dessous :

$$\begin{aligned} \frac{E_p}{E_m} = O(1) & \quad \frac{\rho_p}{\rho_m} = O(1) & \quad \frac{\ell_p}{\ell_m} = O(1) & \quad \text{et} & \quad \frac{h_p}{h_m} = O(1) \\ \frac{a_m}{\ell_m} = O(\epsilon^{e_m}) & \quad \frac{a_p}{\ell_m} = O(\epsilon^{e_p}) & \quad \text{où } e_m \text{ et } e_p \text{ varient} \end{aligned}$$

L'ordre de grandeur de la fréquence est déterminé par l'ordre de grandeur des forces élastiques. En effet, pour que des modes de vibration de l'ensemble de la structure puissent exister, il faut que les forces d'inertie équilibrent les forces de rappel élastique. Pour des fréquences trop faibles, la structure a un comportement quasi-statique. À l'inverse, pour des fréquences trop élevées, l'exigence d'équilibre annule l'inertie et donc les déplacements. D'autre part, les fréquences maximales accessibles avec la méthode HMPD sont de l'ordre de la fréquence de résonance des éléments les plus fins en flexion. Au-delà, le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli n'est plus adapté pour décrire le comportement de ces éléments. La pulsation ω des vibrations de la structure est pesée par rapport à la pulsation de référence ω_r qui est la première pulsation propre des murs en compression :

$$\omega_r = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{E_m}{\rho_m}}$$

Cela signifie que le développement asymptotique de la pulsation est de la forme :

$$\omega = \epsilon^{e_f} (\omega_0 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots) \quad \text{où} \quad \omega_0 = O(\omega_r)$$

Comme pour les variables cinématiques, les grandeurs physiquement observables sont indiquées par un « $\tilde{}$ » :

$$\tilde{\omega}_j = \epsilon^{e_f+j} \omega_j$$

Toutes ces estimations en fonction du ratio d'échelles ϵ sont relatives car, à cette étape du processus, la taille macroscopique L est inconnue.

3.1.6 Résolution

Pour la résolution, les développements et les ordres de grandeur des paramètres sont introduits dans les six équations d'équilibre de la structure. Puis les termes sont réorganisés en fonction des puissances de ϵ . Le système d'équations différentielles est supposé converger lorsque ϵ tend vers 0. En conséquence, les équations sont valables pour toute valeur de ϵ suffisamment petite et il est possible de séparer les différents ordres de grandeur. Cette méthode permet de passer d'un système d'équations discrètes décrivant l'équilibre des niveaux de la structure à un système d'équations différentielles par ordre décrivant l'équilibre de la poutre continue équivalente. La résolution s'effectue ensuite par ordre croissant. Dans cette thèse, seul l'ordre 0 a été étudié.

Afin de rendre les équations d'équilibre plus lisibles, des paramètres macroscopiques sont introduits. Pour les structures constituées de portiques simples, leurs définitions sont données ci-dessous.

$$\Lambda_m = 2\rho_m A_m \quad : \text{contribution des deux murs à la masse linéique macroscopique en kg/m}$$

$$\Lambda_p = \rho_p A_p \frac{\ell_p}{\ell_m} \quad : \text{contribution du plancher à la masse linéique macroscopique en kg/m}$$

$$\Lambda = \Lambda_m + \Lambda_p \quad : \text{masse linéique macroscopique en kg/m}$$

$$J_m = \rho_m A_m \frac{\ell_p^2}{2} \quad : \text{contribution des deux murs au moment d'inertie macroscopique en kg.m}$$

$$J_p = \frac{\rho_p A_p \ell_p^3}{12\ell_m} \quad : \text{contribution du plancher au moment d'inertie macroscopique en kg.m}$$

$$J = J_m + J_p \quad : \text{moment d'inertie macroscopique en kg.m}$$

$$K_m = 24 \frac{E_m I_m}{\ell_m^2} \quad : \text{rigidité macroscopique en cisaillement liée à la flexion locale des murs en N}$$

$$K_p = 12 \frac{E_p I_p}{\ell_m \ell_p} \quad : \text{rigidité macroscopique en cisaillement liée à la flexion locale des planchers en N}$$

$$K = \frac{K_m K_p}{K_m + K_p} \quad : \text{rigidité macroscopique en cisaillement en N}$$

$$I = A_m \frac{\ell_p^2}{2} \quad : \text{inertie macroscopique de la section en m}^4$$

La partie 3.2 présente les modes de vibrations transverses lorsque les éléments ne sont pas en résonance. Ce problème a été systématiquement étudié par Hans et Boutin pour les structures constituées par l'empilement de portiques simples. Nous commençons par traiter un exemple dans la partie 3.2.1 pour montrer comment est construit le modèle de poutre macroscopique. Puis leurs résultats sont résumés dans la partie 3.2.2. La partie 3.2.3 aborde le problème de la généralisation à des structures plus complexes. Enfin, les parties 3.3 et 3.4 sont consacrées à l'étude des autres modes de vibrations à plus hautes fréquences. Les principaux résultats sont résumés à la fin (pages 236 et 252).

3.2 Modes transversaux à basses fréquences

3.2.1 Un exemple : poutre de Timoshenko élancée

Cette partie montre la construction du modèle de poutre équivalent à partir des équations d'équilibre fournies par la méthode HMPD. Nous prenons comme exemple une structure dont les murs sont plus fins que les planchers. Pour la géométrie choisie, les modes de vibrations transverses correspondent à des pulsations d'ordre $O(\epsilon^{5/4}\omega_r)$.

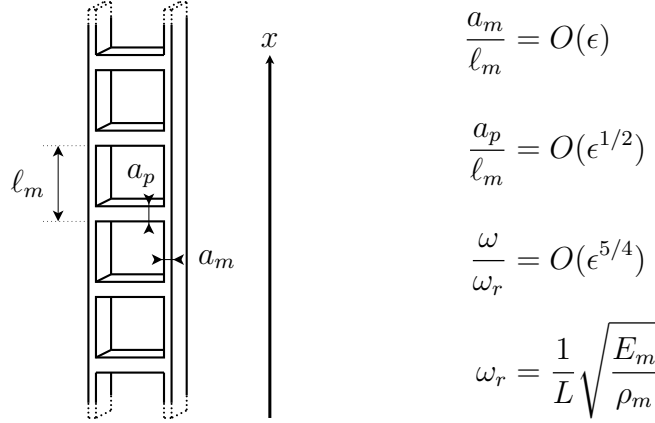


FIGURE 3.7 – Structure étudiée

Équations d'équilibre

Comme le rapport des épaisseurs des éléments n'est pas une puissance entière de ϵ , les développements asymptotiques des inconnues doivent être réalisés selon les puissances de $\epsilon^{1/2}$:

$$\omega = \epsilon^{\epsilon_f} (\omega_0 + \epsilon^{1/2} \omega_{1/2} + \epsilon \omega_1 + \epsilon^{3/2} \omega_{3/2} + \epsilon^2 \omega_2 + \dots)$$

$$X(\epsilon, x) = X^0(x) + \epsilon^{1/2} X^{1/2}(x) + \epsilon X^1(x) + \epsilon^{3/2} X^{3/2}(x) + \epsilon^2 X^2(x) + \dots$$

où X représente indifféremment les fonctions U , α , ou θ . Le reste de la méthode HMPD est inchangée. Les vibrations transverses de la structure sont décrites par les variables U , α , θ et par les équations (T_t) , (M) , (\mathcal{M}_t) qui sont données ci-dessous. Elles sont écrites avec les paramètres macroscopiques définis à la page précédente et sont désignées par leur nom et leur ordre. Pour obtenir le comportement macroscopique, il faut prendre en compte les équations d'ordres 0 et 3/2. Les équations intermédiaires (ordres 1/2 et 1) ne sont pas écrites car elles ont exactement la même forme que les équations d'ordre 0.

$$K_m (\tilde{U}^{0''} - \tilde{\theta}^{0'}) + \Lambda_p \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^0 = 0 \quad (T_t 0)$$

$$\begin{cases} K_p (\tilde{\alpha}^0 - \tilde{\theta}^0) = 0 & (M 0) \\ K_p (\tilde{\alpha}^{3/2} - \tilde{\theta}^{3/2}) - E_m I \tilde{\alpha}^{0''} = 0 & (M \frac{3}{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_p (\tilde{\alpha}^0 - \tilde{\theta}^0) = 0 & (\mathcal{M}_t 0) \\ K_p (\tilde{\alpha}^{3/2} - \tilde{\theta}^{3/2}) + K_m (\tilde{U}^{0'} - \tilde{\theta}^0) = 0 & (\mathcal{M}_t \frac{3}{2}) \end{cases}$$

Les équations $(M 0)$ et $(\mathcal{M}_t 0)$ sont identiques dans ce cas. Elles décrivent l'équilibre interne de la cellule et permettent de calculer la rotation des nœuds $\tilde{\theta}^0$. De plus, les variables d'ordre $3/2$ s'éliminent facilement en combinant les équations $(M \frac{3}{2})$ et $(\mathcal{M}_t \frac{3}{2})$. L'équilibre de la structure à l'ordre 0 est donc décrit par le système suivant qui dépend de la rotation de la section $\tilde{\alpha}^0$ et du déplacement transversal moyen \tilde{U}^0 :

$$\begin{cases} K_m (\tilde{U}^{0''} - \tilde{\alpha}^{0'}) + \Lambda_p \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^0 = 0 \\ K_m (\tilde{U}^{0'} - \tilde{\alpha}^0) + E_m I \tilde{\alpha}^{0''} = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Finalement, la combinaison de ces deux équations donne :

$$E_m I \left(\tilde{U}^{0(4)} + \frac{\Lambda_p \tilde{\omega}_0^2}{K_m} \tilde{U}^{0''} \right) - \Lambda_p \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^0 = 0 \quad (3.5)$$

où $\tilde{U}^{0(4)}$ désigne la dérivée quatrième de \tilde{U}^0 . Les deux autres variables se déduisent de \tilde{U}^0 grâce aux expressions suivantes :

$$\tilde{\alpha}^0 = \tilde{U}^{0'} + \frac{E_m I}{K_m} \left(\tilde{U}^{0'''} + \frac{\Lambda_p \tilde{\omega}_0^2}{K_m} \tilde{U}^{0'} \right) \quad \tilde{\theta}^0 = \tilde{\alpha}^0$$

Modèle de poutre équivalent

L'équation (3.5) ressemble beaucoup à l'équation décrivant les vibrations des poutres de Timoshenko. Cette observation conduit à introduire un effort tranchant \tilde{T}^0 et un moment fléchissant global \tilde{M}^0 . Ils sont définis à partir du système (3.4) :

$$\tilde{T}^0 = -K_m (\tilde{U}^{0'} - \tilde{\alpha}^0) \quad \tilde{M}^0 = -E_m I \tilde{\alpha}^{0'} \quad (3.6)$$

Alors, le système (3.4) devient :

$$\tilde{T}^{0'} = \Lambda_p \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^0 \quad \tilde{M}^{0'} = -\tilde{T}^0 \quad (3.7)$$

Les variations de l'effort tranchant sont équilibrées par les forces d'inertie et les variations du moment fléchissant sont équilibrées par l'effort tranchant comme dans les modèles de poutres classiques. D'autre part, les planchers étant plus épais que les murs, la masse linéique a dégénéré dans le terme d'inertie :

$$\Lambda \approx \Lambda_p \quad \text{avec} \quad \Lambda_p = \rho_p A_p \frac{\ell_p}{\ell_m}$$

L'effort tranchant macroscopique est généré par le mécanisme de cisaillement de la cellule qui est le même que pour les structures bidimensionnelles du chapitre 2. Il s'agit de la flexion locale des éléments. Pour la structure étudiée, les

murs sont plus souples que les planchers. C'est pourquoi la rigidité de la cellule a dégénéré et seule la rigidité des murs K_m apparaît dans les équations. Cela est cohérent avec l'association en série des murs et des planchers que nous avons déjà constatée au chapitre 2. De plus, $K_m = 24E_m I_m / \ell_m^2$ prend en compte les rigidités des deux murs associées en parallèle. Le moment fléchissant global est dû à un nouveau mécanisme qui n'existait pas dans les structures bidimensionnelles à cause de la périodicité latérale. Il s'agit de la traction-compression, en opposition de phase, des deux murs. La rigidité associée à ce mécanisme est $E_m I$ où le moment d'inertie macroscopique I est égal à celui d'une poutre constituée par les deux murs distants de ℓ_p : $I = A_m \ell_p^2 / 2$. Dans cette formule, les inerties propres des murs sont négligées. Notons que \tilde{T}^0 et \tilde{M}^0 ne sont pas égaux respectivement à la somme des efforts tranchants et à la différence des efforts normaux dans les murs. En effet, les efforts macroscopiques ne prennent en compte que la composante élastique alors que les efforts dans les éléments comprennent également les forces d'inertie.

Ce modèle de poutre macroscopique est décrit par une équation différentielle de degré quatre. Il faut donc quatre conditions aux limites pour la résolution. Celles-ci peuvent être exprimées soit avec les variables cinématiques \tilde{U}^0 et $\tilde{\alpha}^0$, soit avec les efforts macroscopiques \tilde{T}^0 et \tilde{M}^0 . Par rapport à la structure discrète initiale, le nombre de degrés de liberté a diminué. La rotation des nœuds $\tilde{\theta}^0$ est une variable cachée qui n'apparaît plus dans la description macroscopique. Elle se déduit des variables pilotantes à partir des équations d'équilibre interne de la cellule. Cela signifie que les conditions aux limites réelles sur la variable $\tilde{\theta}^0$ n'ont pas d'influence sur le comportement global de la structure. Si les informations cherchées sont, par exemple, les fréquences propres de la structure, il n'est pas nécessaire de se préoccuper des conditions aux limites sur $\tilde{\theta}^0$. Par contre, pour revenir à l'échelle locale et calculer les efforts dans les éléments, il faut vérifier toutes les conditions aux limites. Cela n'est possible qu'en rajoutant des couches limites qui ne concernent qu'une faible profondeur.

Ce modèle a été baptisé poutre de Timoshenko élancée car il ne correspond pas tout à fait au modèle de poutre de Timoshenko classique qui décrit le comportement des poutres pleines. La première différence est que, habituellement, le cisaillement doit être pris en compte lorsque l'élancement est faible. Au contraire, pour les poutres creuses non contreventées, le mécanisme de cisaillement est très souple et ses effets apparaissent même dans des structures très élancées. La seconde différence est que le modèle de poutre de Timoshenko classique inclut également une correction due à l'inertie de rotation. Ici, cette inertie existe mais, dans la gamme de fréquences des vibrations transversales, elle est très petite et n'apparaît que dans les équations d'ordres supérieurs.

Si l'épaisseur des murs est modifiée, les rigidités K_m et $E_m I$ de la poutre macroscopique ne vont pas évoluer de la même façon. En effet, K_m est proportionnelle à l'inertie des murs alors que $E_m I$ est proportionnelle à leur section. En conséquence, \tilde{T}^0 et \tilde{M}^0 ne seront plus du même ordre de grandeur. Un des deux efforts va devenir prépondérant par rapport à l'autre et le modèle de poutre équivalent sera différent. Nous allons maintenant présenter les autres modèles possibles.

3.2.2 Études précédentes

Cette partie résume les résultats de Hans et Boutin qui ont systématiquement exploré l'évolution du comportement des structures à base de portiques simples lorsque les épaisseurs des éléments varient. Elle s'appuie sur (Hans, 2002; Boutin et Hans, 2003; Hans et Boutin, 2008).

Les modèles possibles

Ces études ont montré que les différents modèles sont obtenus par la combinaison des trois mécanismes schématisés sur la figure 3.8. Le premier est le cisaillement de la cellule qui provient de la flexion locale des éléments. Le deuxième est le mécanisme de flexion de l'ensemble de la structure que nous avons mis en évidence sur l'exemple de la partie 3.2.1. À l'échelle locale les deux murs travaillent en traction-compression et ils sont en opposition de phase. Le dernier mécanisme est la flexion interne des deux murs. C'est l'équivalent pour les structures poutres de la propagation d'ondes de flexion dans les éléments des structures bidimensionnelles du chapitre 2. Dans ce cas, chaque mur se comporte comme une poutre qui travaille en flexion sur toute la hauteur de la structure. Ils sont synchronisés par les planchers, très souples en flexion locale mais très rigides en extension.

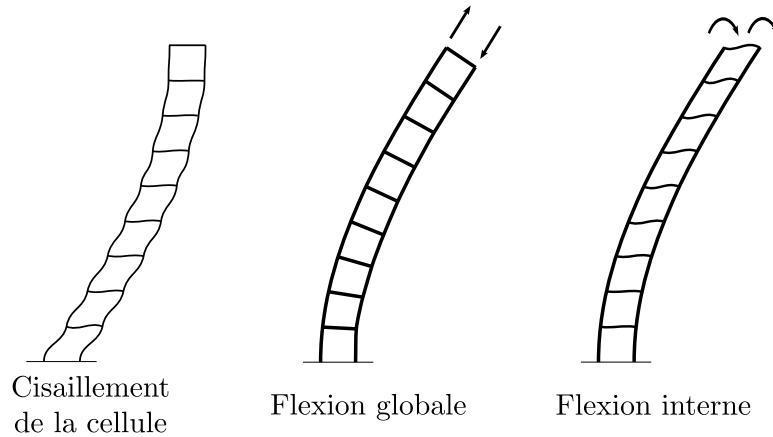


FIGURE 3.8 – Les trois mécanismes de base

À chacun de ces mécanismes sont associés une rigidité et un effort macroscopique. Pour le cisaillement, la rigidité de la cellule K s'obtient par l'association en série des rigidités en flexion locale des murs K_m et des planchers K_p . De plus, K_m correspond à l'association en parallèle des deux murs du portique. La distorsion de la cellule génère un effort tranchant macroscopique.

$$K_m = 24 \frac{E_m I_m}{\ell_m^2} \quad K_p = 12 \frac{E_p I_p}{\ell_m \ell_p} \quad \frac{1}{K} = \frac{1}{K_m} + \frac{1}{K_p}$$

La rigidité de la flexion globale $E_m I$ a déjà été présentée au paragraphe précédent. Ce mécanisme est associé à un moment fléchissant global. Enfin, la rigidité de la flexion interne est la somme des rigidités des murs en flexion à l'échelle de la structure : $2E_m I_m$. L'effort macroscopique correspondant est un moment interne qui n'existe pas dans les modèles de poutre classiques. Selon les ordres de

grandeur de ces rigidités, certains mécanismes peuvent devenir prépondérants et le comportement de la structure est décrit par différents modèles. Ceux-ci sont résumés sur la figure 3.9 du plus compliqué aux plus simples.

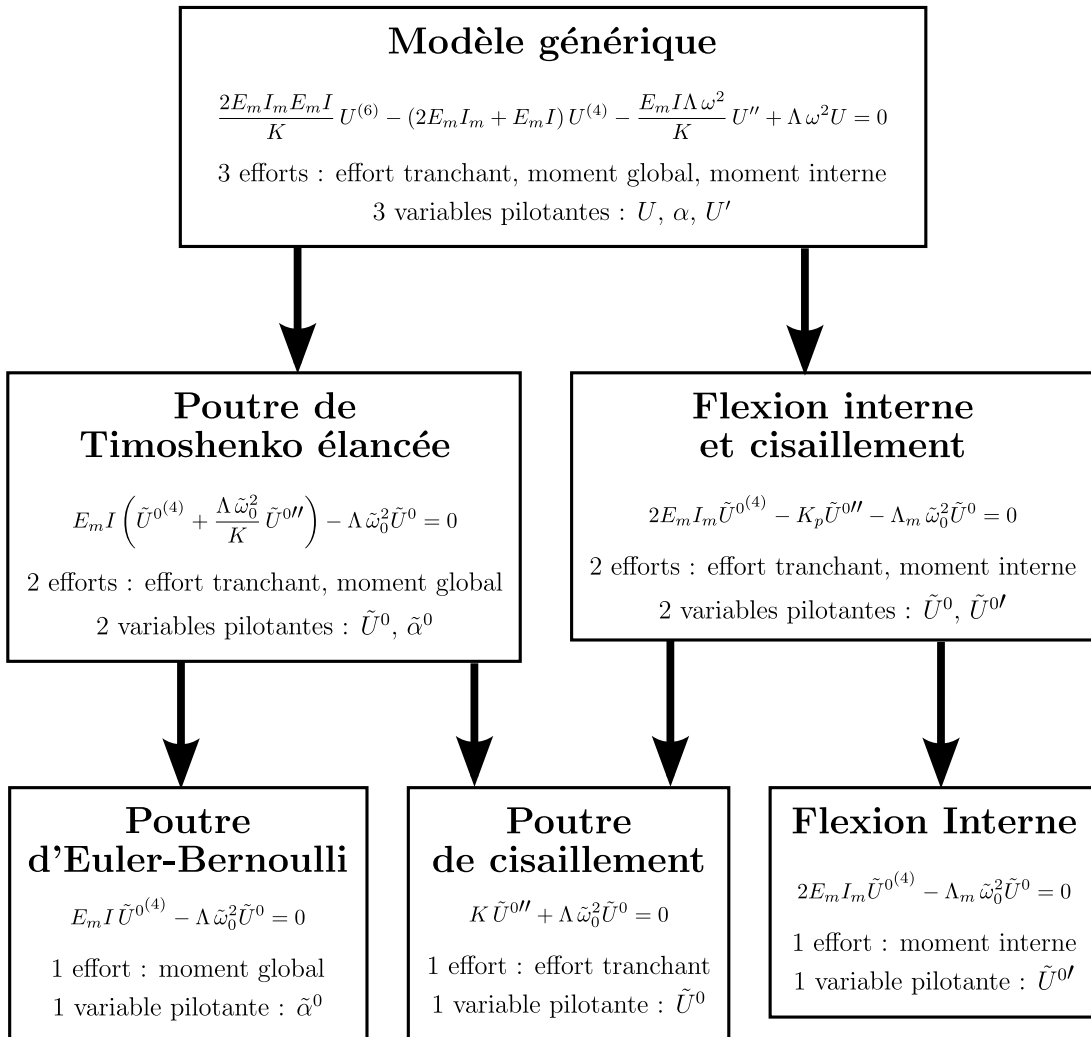


FIGURE 3.9 – Les différents modèles possibles pour les vibrations transversales

Lorsque la flexion interne est négligeable, nous retrouvons les modèles habituels de poutre d'Euler-Bernoulli et de poutre de Timoshenko (avec les réserves de la partie 3.2.1). Le modèle de poutre de cisaillement est l'équivalent continu du modèle « brochette » couramment utilisé en génie parasismique. Les modèles avec flexion interne sont plus originaux. Lorsque c'est le seul mécanisme prépondérant, les vibrations de la structure sont décrites par une équation différentielle semblable à celle de la poutre d'Euler-Bernoulli, mais la signification physique des coefficients n'est pas la même. Par contre, pour les modèles avec flexion interne et cisaillement, nous obtenons une équation différentielle différente de celle de la poutre de Timoshenko élancée. En particulier, l'inertie n'apparaît plus dans le terme d'ordre 2. Cela vient du fait que, dans ces deux modèles, cisaillement et flexion ne sont pas associés de la même façon. Pour la poutre de Timoshenko, ils sont en série. Au contraire, nous avons vu dans le chapitre 2, que la flexion des murs à l'échelle de la structure et le cisaillement de la cellule sont associés

en parallèle. Une autre conséquence de cette association en parallèle est que la flexion interne ne peut émerger à l'ordre macroscopique que si le contraste entre les murs et les planchers est suffisant. C'est pourquoi, dans les équations des modèles correspondants, la rigidité de la cellule en cisaillement et la masse linéique apparaissent toujours sous une forme dégénérée : $K \approx K_p$ et $\Lambda \approx \Lambda_m$. Pour les modèles sans flexion interne, nous avons donné l'équation la plus générale mais toutes les variantes sont possibles en fonction des épaisseurs des éléments.

Selon la complexité du modèle, le nombre de conditions aux limites nécessaires est plus ou moins important. Pour la poutre d'Euler-Bernoulli et le modèle avec la flexion interne seule, nous n'avons indiqué qu'un seul effort macroscopique et une seule variable pilotante pour insister sur le fait qu'il n'y a qu'un seul mécanisme prépondérant. Mais ces modèles étant décrits par des équations de degré quatre, cela n'est pas suffisant pour définir les conditions aux limites. Il faut également prendre en compte le déplacement transversal \tilde{U}^0 et un effort tranchant qui équilibre la dérivée du moment fléchissant (global ou interne).

Lorsque les trois mécanismes ont la même importance, les vibrations transversales de la poutre sont décrites par une équation différentielle de degré six. Pour les structures constituées par l'empilement de portiques simples, cela ne se produit que dans un seul cas : $a_m/\ell_m = O(\epsilon^0)$ et $a_p/\ell_m = O(\epsilon^{2/3})$. Comme les murs sont plus épais que les planchers, la rigidité K et la masse Λ dégènèrent.

Le modèle générique présenté sur la figure 3.9 a été obtenu en donnant artificiellement le même ordre de grandeur à tous les termes. C'est pourquoi, les « \sim » et les ordres de grandeur ont disparu des variables cinématiques. Le but était de construire un modèle pouvant dégénérer en n'importe lequel des autres modèles. La poutre correspondante est définie de la façon suivante.

Lois de comportement :

$$\begin{aligned} \text{effort tranchant} \quad T &= -K(U' - \alpha) \\ \text{moment global} \quad M &= -E_m I \alpha' \\ \text{moment interne} \quad \mathcal{M} &= -2E_m I_m U'' \end{aligned} \quad (3.8a)$$

Équations d'équilibre :

$$\mathcal{T}' = (T - \mathcal{M}')' = \Lambda \omega^2 U \quad M' = -T \quad (3.8b)$$

$$K_p(\alpha - \theta) + K_m(U' - \theta) = 0 \quad (3.8c)$$

La combinaison de toutes ces équations (annexe A page 318) permet de décrire les vibrations transversales de la poutre à l'aide d'une équation différentielle de degré 6 :

$$\frac{2E_m I_m E_m I}{K} U^{(6)} - (2E_m I_m + E_m I) U^{(4)} - \frac{E_m I \Lambda \omega^2}{K} U'' + \Lambda \omega^2 U = 0 \quad (3.9)$$

Les deux équations (3.8b) sont quasiment les équations d'équilibre habituelles des poutres. La différence est que les forces d'inertie équilibrent les variations de l'effort tranchant *total* \mathcal{T} qui prend en compte l'effort tranchant dû au cisaillement de la cellule et les effets du moment interne : $\mathcal{T} = T - \mathcal{M}'$. Dans cette

définition, nous avons préféré laisser la dérivée du moment interne plutôt que de définir un effort tranchant interne. En effet, les murs ayant été modélisés par des poutres d'Euler-Bernoulli, l'effort tranchant interne ne peut pas être une variable indépendante.

Les équations (3.8b) et les lois de comportement (3.8a) définissent complètement l'équilibre de la structure à l'échelle macroscopique. Dans cette description, la variable θ n'intervient pas. Comme les murs sont modélisés par des poutres d'Euler-Bernoulli, le moment interne \mathcal{M} est proportionnel à la courbure macroscopique U'' plutôt qu'à la dérivée de la rotation de la section θ' . Pour les usages courants de la poutre d'Euler-Bernoulli, cette distinction n'est pas importante. Mais ici, les murs étant connectés à des planchers, la rotation θ peut être différente de U' ! En effet, θ est calculée à partir d'une équation d'équilibre interne à la cellule (équation (3.8c)) et dépend des rigidités des murs et des planchers en flexion locale. Pour les cas particuliers où les murs sont plus rigides que les planchers, l'équation (3.8c) dégénère et $\theta \approx U'$. Il est alors possible d'utiliser la définition habituelle du moment à partir de la rotation de la section. Mais ce n'est pas vrai dans le cas général. Ainsi θ est une variable cachée qui n'apparaît pas dans la description macroscopique. Pour la déterminer, il faut ajouter une équation d'équilibre interne qui n'existe pas dans les modèles de poutre classiques. Cela est nécessaire pour pouvoir revenir à l'échelle locale et calculer les efforts dans les éléments.

La cohérence de ce modèle de poutre peut être vérifiée en écrivant son équilibre énergétique. Pour cela, la première équation d'équilibre (3.8b) est multipliée par $\frac{1}{2}U$ et intégrée par parties sur toute la hauteur de la structure H :

$$\frac{1}{2} \int_0^H \Lambda \omega^2 U^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^H \mathcal{T}' U dx = \frac{1}{2} \left([\mathcal{T}U]_0^H - \int_0^H (T - \mathcal{M}') U' dx \right)$$

En utilisant la deuxième équation (3.8b) et en intégrant encore par parties, la dernière intégrale devient :

$$\begin{aligned} \int_0^H (T - \mathcal{M}') U' dx &= \int_0^H T(U' - \alpha) dx - \int_0^H M' \alpha dx - \int_0^H \mathcal{M}' U' dx \\ &= \int_0^H (T(U' - \alpha) + M \alpha' + \mathcal{M} U'') dx - [M \alpha]_0^H - [\mathcal{M} U']_0^H \end{aligned}$$

En réinjectant dans la première équation et en utilisant les lois de comportement (3.8a), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^H \Lambda \omega^2 U^2 dx &= \frac{1}{2} \int_0^H \left(\frac{T^2}{K} + \frac{M^2}{E_m I} + \frac{\mathcal{M}^2}{2 E_m I_m} \right) dx + \frac{1}{2} \left([\mathcal{T}U]_0^H + [M \alpha]_0^H + [\mathcal{M} U']_0^H \right) \end{aligned}$$

Cette équation indique que l'énergie cinétique est équilibrée par l'énergie élastique et le travail des conditions aux limites. Notons que l'effort tranchant qui contribue à l'énergie élastique est T alors que c'est l'effort tranchant total \mathcal{T} qui travaille aux extrémités. Ainsi, les six conditions aux limites nécessaires à la résolution de

ce modèle doivent être exprimées soit en fonction des efforts \mathcal{T} , M et \mathcal{M} , soit en fonction des variables cinématiques U , α et U' .

Le fait que l'effort tranchant total \mathcal{T} soit la somme des efforts tranchants générés par le cisaillement de la cellule T et par la flexion interne $-\mathcal{M}'$ confirme l'association en parallèle de ces deux mécanismes, déjà identifiée au chapitre 2. De plus, dans une poutre de Timoshenko, le cisaillement et la flexion globale sont associés en série. Le fonctionnement de ce type de structures peut donc être représenté par la figure 3.10. Nous rappelons également comment la rigidité en cisaillement de la cellule se déduit des rigidités des murs et des planchers.

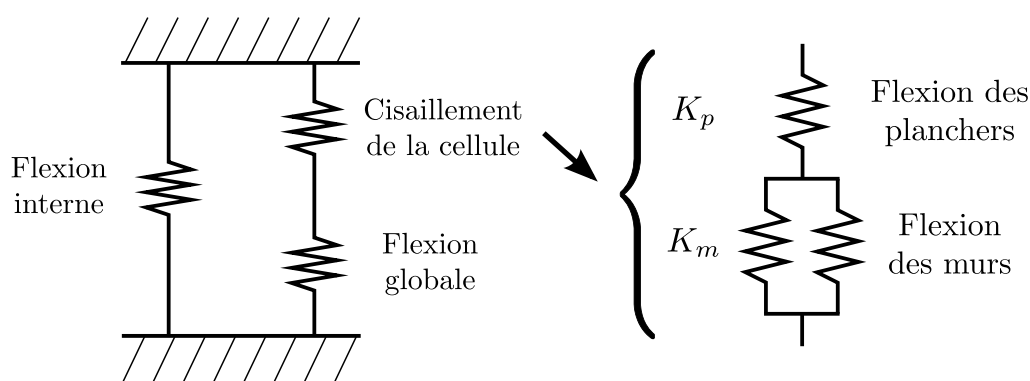


FIGURE 3.10 – Représentation schématique de l'association des mécanismes

Cependant, le schéma 3.10 est très simpliste. Son seul intérêt est de fournir rapidement l'évolution du comportement de la structure lorsque des paramètres sont modifiés. Par exemple, les structures du chapitre 2 ont une extension latérale infinie et donc une inertie globale infinie. Le schéma 3.10 permet d'expliquer la disparition de la flexion globale dans ce cas. Par contre, il n'apporte aucune information quantitative. En particulier, il ne peut pas être utilisé pour calculer la rigidité totale de la poutre équivalente. Pour cela, il faut repartir des équations d'équilibre et des lois de comportement.

C'est ce que nous allons faire pour chacun des modèles identifiés. Nous considérons une poutre bi-encastree de hauteur H et nous appliquons, en statique, un déplacement différentiel ΔU entre ses deux extrémités (figure 3.11). La rigidité totale de la poutre \mathcal{K} est alors le coefficient de proportionnalité entre l'effort tranchant total \mathcal{T} et le déplacement ΔU : $\mathcal{T} = -\mathcal{K} \Delta U$. Les résultats obtenus pour chacun des modèles sont résumés dans le tableau 3.1. Les calculs sont présentés dans l'annexe A pour la poutre générique.

Nous retrouvons bien la rigidité statique de la poutre d'Euler-Bernoulli. Celle de la poutre de Timoshenko est obtenue par l'association en série des rigidités des poutres d'Euler-Bernoulli et de cisaillement et celle de la poutre avec flexion interne seule par l'association en parallèle des deux murs. Par contre, les choses se compliquent lorsque la flexion interne est combinée avec un autre mécanisme. Les rigidités des deux derniers modèles ne correspondent pas à une loi de composition de ressorts. Néanmoins, pour le modèle avec flexion interne et cisaillement, cela s'apparente à une association en parallèle dans le sens où c'est le mécanisme le

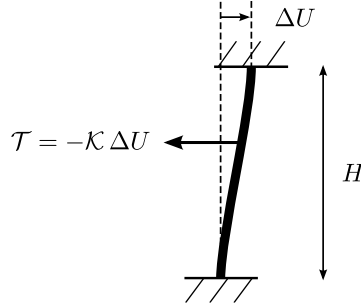


FIGURE 3.11 – Calcul de la rigidité totale de la poutre équivalente

Modèle de poutre	Expression de \mathcal{K}
Poutre de cisaillement	$\mathcal{K}_{cis} = \frac{K}{H}$
Poutre d'Euler-Bernoulli	$\mathcal{K}_{EB} = \frac{12E_m I}{H^3}$
Poutre de Timoshenko	$\frac{1}{\mathcal{K}_{Tim}} = \frac{1}{\mathcal{K}_{cis}} + \frac{1}{\mathcal{K}_{EB}}$
Flexion interne	$\mathcal{K}_{FI} = \frac{24E_m I_m}{H^3}$
Flexion interne et cisaillement	$\mathcal{K}_{FIC} = \frac{1}{\frac{H}{K} \left(1 - \frac{2}{rH} \operatorname{th} \left(\frac{rH}{2}\right)\right)}$ avec $r^2 = \frac{K}{2E_m I_m}$
Modèle générique	$\mathcal{K}_{gen} = \frac{1}{\frac{H}{K} \left(\frac{E_m I}{2E_m I_m + E_m I}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{rH} \operatorname{th} \left(\frac{rH}{2}\right)\right) + \frac{H^3}{24E_m I_m + 12E_m I}}$ avec $r^2 = \frac{K}{E_m I} + \frac{K}{2E_m I_m}$

TABLE 3.1 – Rigidité de la poutre équivalente pour les différents modèles

plus rigide qui domine. Dans ce cas, $r = \sqrt{K/(2E_m I_m)}$ et nous avons :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2}{rH} \operatorname{th} \left(\frac{rH}{2}\right) = 0 \quad \text{donc } K \gg 2E_m I_m \Rightarrow \mathcal{K}_{FIC} \approx \mathcal{K}_{cis}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(1 - \frac{2}{rH} \operatorname{th} \left(\frac{rH}{2}\right)\right) = \frac{r^2 H^2}{12} \quad \text{donc } K \ll 2E_m I_m \Rightarrow \mathcal{K}_{FIC} \approx \mathcal{K}_{FI}$$

Le même type de raisonnement peut être mené sur le modèle générique. Selon les ordres de grandeur de K , $E_m I$ et $2E_m I_m$, la rigidité \mathcal{K}_{gen} peut dégénérer en n'importe laquelle des autres rigidités. En conséquence, les paramètres clés qui pilotent le comportement de la structure sont les ordres de grandeur des rigidités des trois mécanismes plutôt que ceux des épaisseurs.

Comportement des structures réelles

Après cette description qualitative du fonctionnement des structures, nous présentons des critères quantitatifs permettant d'identifier le modèle le mieux approprié. Remarquons que le modèle générique est valable dans tous les cas mais il nécessite beaucoup de calculs. Ce que nous appelons le modèle le mieux approprié est celui qui décrit correctement le comportement de la structure avec le minimum de calculs.

Les critères sont construits grâce à une analyse dimensionnelle réalisée sur le modèle générique. L'équation (3.9) décrivant le comportement de la poutre est réécrite avec le changement de variable $\hat{x} = x/L$:

$$C\gamma U^{*(6)} - (1 + \gamma)U^{*(4)} - \Omega^2 U^{*''} + \frac{\Omega^2}{C} U^* = 0 \quad (3.10)$$

où
$$C = \frac{E_m I}{KL^2} \quad \gamma = \frac{2E_m I_m}{E_m I} = \frac{2I_m}{I} \quad \Omega^2 = \frac{\Lambda\omega^2 L^2}{K}$$

Le paramètre C mesure l'importance de la flexion globale par rapport au cisaillement de la cellule et γ compare la flexion interne avec la flexion globale. Par construction, la nouvelle fonction U^* est du même ordre de grandeur que ses dérivées successives. Ainsi, la façon dont l'équation (3.10) dégénère dépend uniquement des ordres de grandeur de C et γ . Par exemple, si $C = O(1)$ et $\gamma = O(\epsilon)$ alors les termes contenant $C\gamma$ et γ disparaissent :

$$U^{*(4)} + \Omega^2 U^{*''} - \frac{\Omega^2}{C} U^* = 0$$

Le modèle correspondant est la poutre de Timoshenko élancée. Un raisonnement similaire permet de retrouver les autres modèles de poutre.

Les paramètres C et γ peuvent donc être utilisés comme critères pour identifier le comportement des structures. Une étude systématique permet de délimiter les domaines de validité des différents modèles. Ceux-ci sont représentés sur la figure 3.12 où x et y ne désignent plus les coordonnées spatiales mais les ordres de grandeur de C et γ :

$$C = \epsilon^x \quad \text{et} \quad \gamma = \epsilon^y$$

Notons que la figure 3.12 est cohérente avec le schéma 3.10.

À ce stade, il pourrait être objecté que les critères d'identification dépendent du ratio d'échelles ϵ et de la taille macroscopique L alors que nous avons vu au chapitre 2 que ces paramètres ne sont pas pratiques à utiliser sur des structures réelles. En réalité, il y a moins de variations de L dans le cas des vibrations des poutres que dans les problèmes de propagation d'ondes.

Nous avons démontré dans la partie 2.4.1 que l'ordre de grandeur de L est donné par :

$$L = O\left(\left|\frac{U}{\partial_x U}\right|\right) \quad (3.11)$$

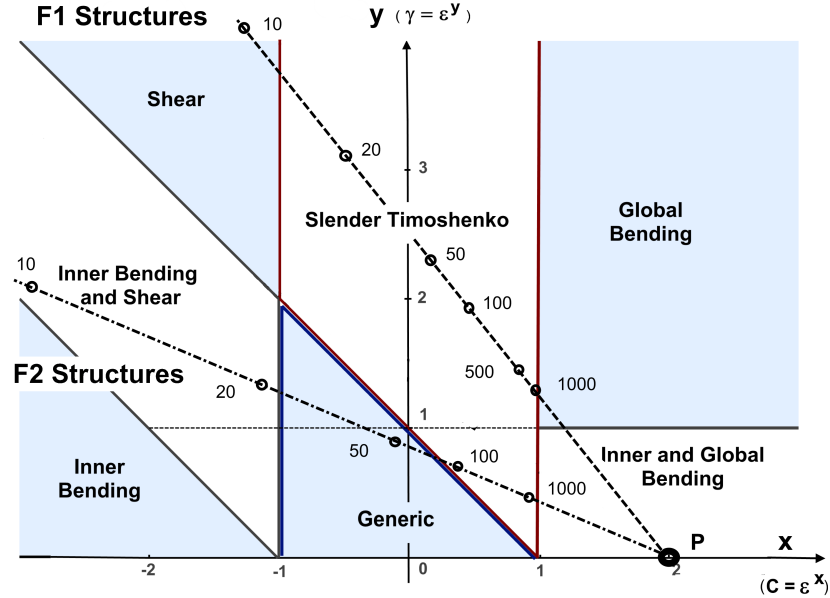


FIGURE 3.12 – Domaines de validité des différents modèles.
Source : Hans et Boutin (2008)

Pour une poutre, la déformée $U(x)$ dépend des conditions aux limites et du mode de vibrations. Dans le chapitre 4, les différents modèles seront utilisés pour décrire le comportement des bâtiments. C'est pourquoi, ce résultat est appliqué au $k^{\text{ième}}$ mode propre d'une poutre de hauteur H encastree à la base et libre en tête :

- Si c'est une poutre de cisaillement, l'analyse modale montre que les déformées propres sont une combinaison des deux exponentielles e^{ix/L_k} et e^{-ix/L_k} où L_k est une solution de $\cos(H/L_k) = 0$. Donc $L_k = 2H/(\pi(2k - 1))$ et, d'après l'estimation (3.11), c'est la taille macroscopique caractéristique du $k^{\text{ième}}$ mode propre.
- Si c'est une poutre d'Euler-Bernoulli, les déformées propres s'expriment en fonction des quatre exponentielles e^{ix/L_k} , e^{-ix/L_k} , e^{x/L_k} et e^{-x/L_k} où L_k vérifie $\cos(H/L_k) = 1/\text{ch}(H/L_k)$. Là encore, les solutions sont proches de $L_k \approx 2H/(\pi(2k - 1))$. D'après (3.11), L_k est la taille macroscopique associée au $k^{\text{ième}}$ mode propre.
- Les autres modèles de poutre combinent le cisaillement avec un ou deux types de flexion. Les déformées propres se décomposent alors dans une base d'exponentielles où apparaissent deux ou trois constantes spatiales. Il est possible de démontrer que la plus petite d'entre elles, qui définit la taille macroscopique, est toujours proche de $L_k = 2H/(\pi(2k - 1))$.

Ainsi, en bonne approximation, la taille macroscopique L ne dépend que du mode considéré et pas du modèle. Pour une structure de N cellules (donc $H = N\ell_m$) encastree à la base et libre en tête, la taille caractéristique du $k^{\text{ième}}$ mode L_k et le ratio d'échelles réel associés ϵ_k sont donnés par :

$$L_k \approx \frac{2H}{\pi(2k - 1)} \quad \epsilon_k = \frac{\ell_m}{L_k} \approx \frac{\pi(2k - 1)}{2N} \quad (3.12)$$

Notons que le ratio d'échelles réel augmente avec le numéro du mode, c'est-à-

dire avec la fréquence comme au chapitre 2. La première conséquence est que la précision du modèle homogénéisé diminue. Le cas limite $\epsilon_r \approx 1$ est atteint pour $k \approx N/3$. Pour les modes supérieurs, la condition de séparation d'échelles n'est pas vérifiée et le comportement de la structure ne peut plus être homogénéisé. La deuxième conséquence est que les différents modes d'une même structure ne sont pas forcément décrits par le même modèle. En effet, les ordres de grandeur de C et γ changent lorsque l'unité de mesure ϵ_r varie. Pour prédire l'évolution du comportement de la structure, le paramètre B est introduit :

$$B = \frac{E_m I}{K \ell_m^2} = \frac{E_m I}{K L^2} \left(\frac{L}{\ell_m} \right)^2 = C \epsilon_r^{-2} = \epsilon_r^{x-2}$$

B et γ sont deux paramètres intrinsèques de la cellule. Les ordres de grandeur x et y qui permettent de positionner une structure sur la figure 3.12 dépendent de ces paramètres et de ϵ_r :

$$(x - 2) \ln(\epsilon_r) = \ln(B) \quad \text{et} \quad y \ln(\epsilon_r) = \ln(\gamma)$$

L'élimination de ϵ_r donne une équation de droite :

$$(x - 2) \ln(\gamma) - y \ln(B) = 0$$

Les caractéristiques de la cellule jouent sur la pente de cette droite qui passe nécessairement par le point P de coordonnées $(x = 2, y = 0)$. Pour une structure donnée, lorsque le numéro du mode augmente, ϵ_r augmente. Le point représentatif de la structure se déplace sur la droite en s'éloignant du point P . Inversement, pour un mode donné, si le nombre de cellules augmente alors ϵ_r diminue et le point associé à la structure se rapproche de P . Par exemple, une structure se comportant comme une poutre de Timoshenko élancée devient une poutre d'Euler-Bernoulli ou une poutre associant les deux types de flexion lorsque le nombre de cellules augmente. Si ce dernier diminue ou si le numéro du mode augmente, alors c'est le cisaillement qui devient prépondérant. Ce comportement s'apparente aux effets de l'élancement bien connus dans les poutres pleines.

Afin d'évaluer la précision des modèles homogénéisés et la pertinence des critères d'identification, des simulations numériques ont été réalisées (Hans et Boutin, 2008). Deux types de portiques ont été considérés :

- le portique $F1$ dont les murs et les planchers sont identiques et font 10 cm d'épaisseur,
- le portique $F2$ dont les murs sont plus épais que les planchers :
 $a_m = 1$ m et $a_p = 15$ cm.

Dans les deux cas, les murs et les planchers font 3 m de longueur et le module d'élasticité du matériau vaut $E = 200$ GPa. La diversité des comportements a été introduite en faisant varier le nombre de cellules entre 5 et 1 000. Toutes les structures sont encastées à la base et libres en tête. Pour chaque cas, les quatre premiers modes propres ont été déterminés de trois manières différentes. Tout d'abord, ils ont été calculés avec le logiciel d'éléments finis RDM6. Les murs et les planchers étaient modélisés par des éléments de poutre. Puis, les rigidités associées aux trois mécanismes ont été estimées à partir des formules

analytiques fournies par la méthode HMPD. Dans un premier temps, elles ont été utilisées comme paramètres dans le modèle générique. La résolution de ce dernier est présentée dans l'annexe A. Dans un second temps, les rigidités ont servi à déterminer les paramètres C et γ . Par comparaison avec le ratio d'échelles du premier mode $\epsilon_1 = \pi/(2N)$, le modèle reflétant le fonctionnement de la structure a été identifié puis utilisé pour calculer les fréquences propres.

Les droites correspondant aux portiques $F1$ et $F2$ ont été dessinées sur la figure 3.12. Les structures constituées par des portiques $F1$ sont toujours correctement modélisées par des poutres de Timoshenko élancées. Mais les modèles plus simples sont parfois suffisants : la poutre de cisaillement pour un petit nombre de cellules et la poutre d'Euler-Bernoulli pour un grand nombre de cellules. Les comportements des structures faites avec des portiques $F2$ sont plus diversifiés. Ces structures commencent par être des poutres avec flexion interne et cisaillement puis des poutres génériques et enfin des poutres de Timoshenko élancées. Cette évolution du fonctionnement des structures est illustrée par l'évolution des déformées modales (figure 3.13).

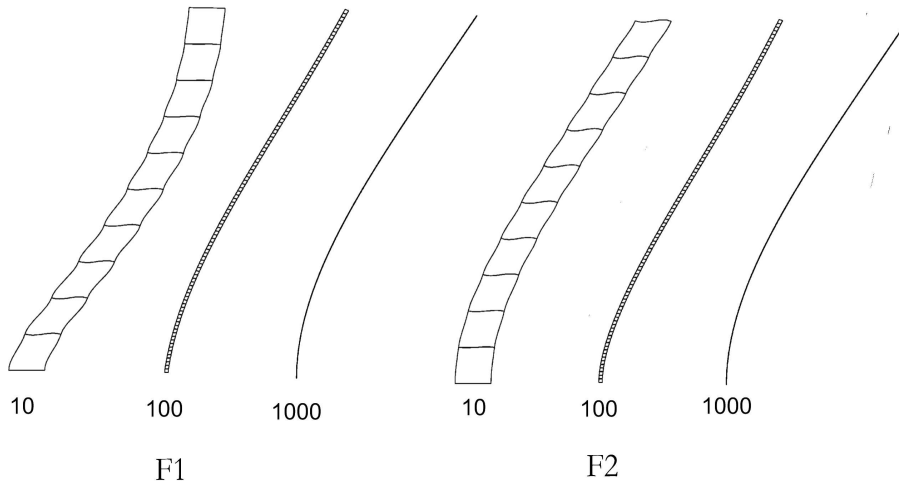


FIGURE 3.13 – Évolution de la première déformée modale en fonction du nombre de cellules (10, 100 ou 1000) pour les structures constituées de portiques $F1$ (à gauche) et $F2$ (à droite). Source : Hans et Boutin (2008)

Pour vérifier la précision des modèles homogénéisés, la poutre générique a d'abord été comparée avec les calculs par éléments finis. Sur la figure 3.14, sont représentées les quatre premières fréquences propres obtenues par les deux méthodes. Les courbes sont quasiment superposées même pour une faible séparation d'échelles. L'erreur relative maximum est de l'ordre de 10 %. Compte tenu de la grande variété de cas testés, la poutre générique peut être considérée comme une modélisation fiable du comportement de ces structures. Par la suite, elle est utilisée comme référence pour évaluer la précision des autres modèles.

La figure 3.15 compare les fréquences propres calculées avec les modèles simplifiés et avec la poutre générique. Pour ne pas surcharger la figure, seules les fréquences des premier et quatrième modes ont été représentées. Il apparaît que les modèles simplifiés donnent de bons résultats dans leur domaine de validité.

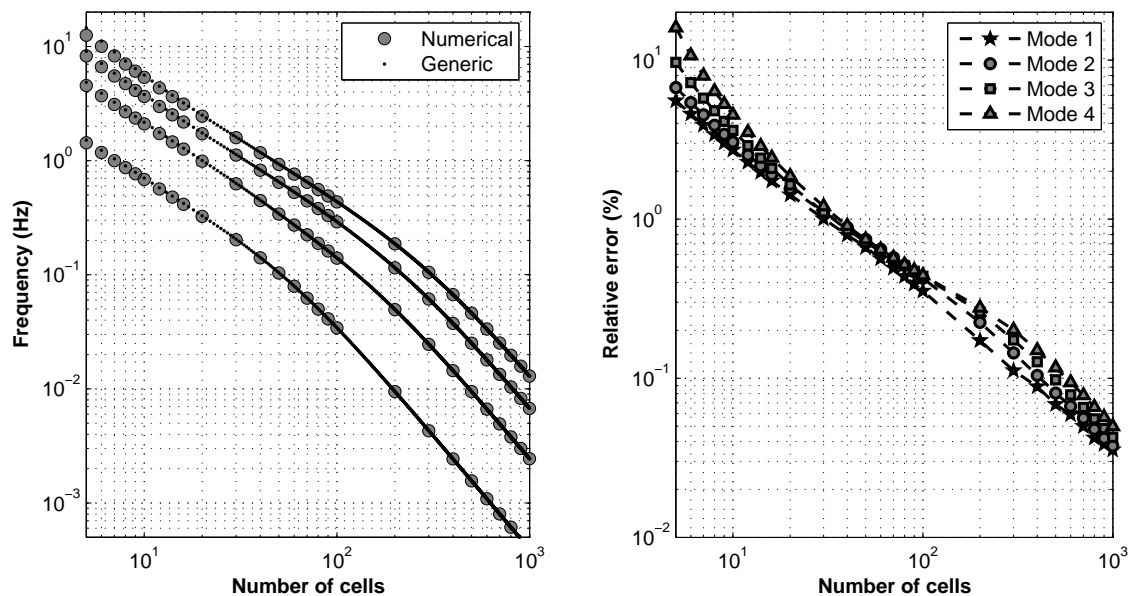
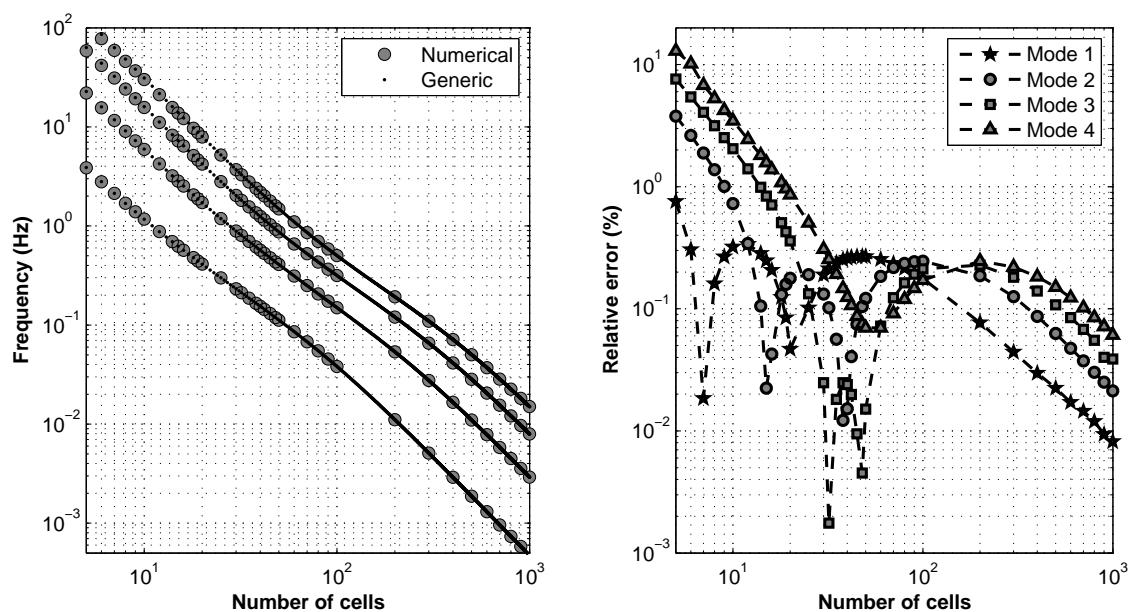
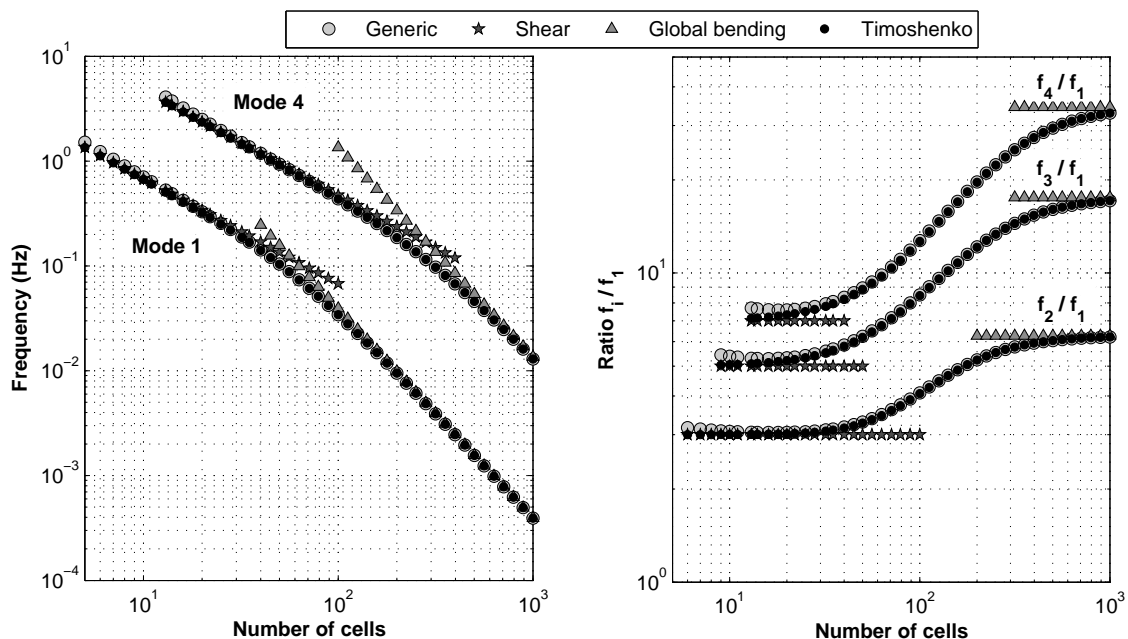
Portiques $F1$ Portiques $F2$ 

FIGURE 3.14 – Évolution des quatre premières fréquences propres en fonction du nombre de cellules. À gauche : comparaison du modèle générique avec le calcul par éléments finis, à droite : pourcentage d'erreur. Source : Hans et Boutin (2008)

Portiques $F1$



Portiques $F2$

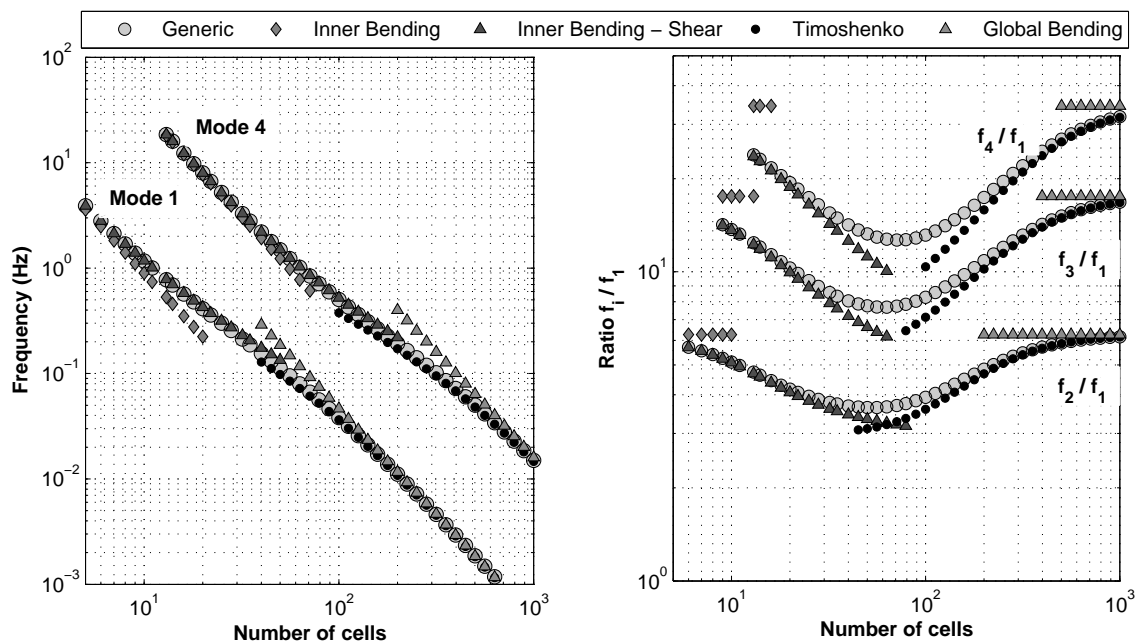


FIGURE 3.15 – Comparaison du modèle générique avec les modèles plus simples. À gauche : évolution de la 1^{re} et de la 4^e fréquence propre en fonction du nombre de cellules, à droite : évolution des ratios de fréquences f_i/f_1 . Source : Hans et Boutin (2008)

C'est un point intéressant car ces modèles nécessitent beaucoup moins de calculs que la poutre générique. Néanmoins, il existe des situations où seul le modèle complet est satisfaisant. La figure 3.15 illustre également l'évolution continue du comportement de la structure et permet de valider les critères d'identification proposés.

Enfin, les ratios des fréquences propres f_i/f_1 ont été représentés car ils présentent un double intérêt. D'une part, ce sont des paramètres facilement accessibles expérimentalement et d'autre part, ils reflètent bien le comportement des structures. Pour une poutre de cisaillement, ils suivent la suite des nombre impairs (1 ; 3 ; 5 ; 7 ; ...) et pour une poutre d'Euler-Bernoulli la suite (1 ; 6,25 ; 17,36 ; 34,03 ; ...). Pour les autres modèles qui associent la flexion et le cisaillement, les ratios de fréquences ont des valeurs intermédiaires.

Conclusion

Dans cette partie, nous avons résumé les travaux qui ont précédé cette thèse et en constituent le point de départ. Il s'agit d'une étude systématique du comportement dynamique des structures périodiques constituées par l'empilement de portiques simples. Elle a montré que les vibrations transversales de ces structures sont dues à trois mécanismes : le cisaillement de la cellule, la flexion globale et la flexion interne. Ces mécanismes ne sont pas nouveaux en soi. Ils étaient connus de longue date par les ingénieurs qui conçoivent les bâtiments, par exemple Asanchev (1980a,b); Bouvard *et al.* (1985); Zalka (2001). L'intérêt de cette étude est qu'elle apporte des justifications théoriques aux hypothèses habituelles des ingénieurs et qu'elle précise leur domaine de validité. En particulier, la flexion globale est souvent négligée dans les modèles simplifiés de bâtiments car les planchers sont supposés infiniment souples en dehors de leur plan.

Ces travaux ont également permis de construire une liste des modèles possibles. Celle-ci contient notamment un modèle générique qui prend en compte les trois mécanismes et est décrit par une équation différentielle de degré 6. Certains auteurs (Skattum, 1971; Basu *et al.*, 1979) avaient déjà établi que le comportement des murs voiles couplés peut être représenté par une telle équation différentielle et l'avaient résolue. Les murs voiles couplés sont constitués de deux gros murs reliés par des poutres horizontales. Lors de la modélisation, les poutres horizontales sont supposées infiniment rigides en traction et sont remplacées par un milieu continu équivalent qui transmet le même type d'efforts aux murs voiles (figure 3.16). Cette façon de procéder a été baptisée « continuous connection method ». Ici, le modèle générique a été retrouvé sans avoir connaissance de ces travaux antérieurs et par une approche complètement différente. Dans la littérature, ce modèle est parfois appelé « poutre sandwich » (Potzta et Kollár, 2003). En effet, les équations qui décrivent le comportement des poutres constituées d'un matériau léger emprisonné entre deux faces plus fines et plus rigides ont la même forme (Skattum, 1971).

Cependant, même si ce modèle était déjà connu, son utilisation est assez rare. Ce point sera traité plus en détail dans le chapitre 4 lorsque nous présenterons les différents modèles qui ont servi à représenter les bâtiments. Signalons néanmoins que la plupart des auteurs trouvent le modèle générique trop compliqué et pré-

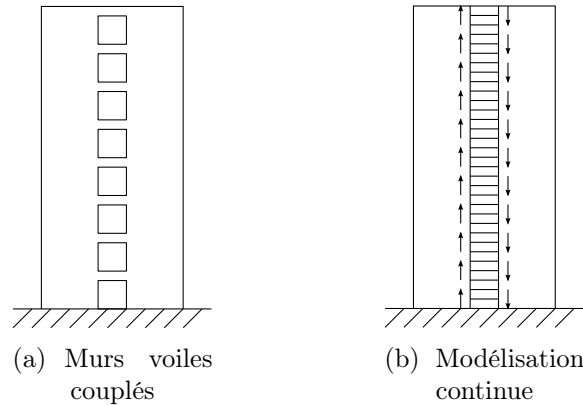


FIGURE 3.16 – Modélisation des murs voiles couplés

fèrent employer une résolution approchée (Stafford Smith et Crowe, 1986; Tarján et Kollár, 2004; Zalka, 2001). Pour cela, ils s'appuient sur les théorèmes de Dunkerley, Southwell et Föppl (rappelés dans Tarján et Kollár (2004)) qui permettent de découpler les trois mécanismes lors du calcul des fréquences propres. Un des inconvénients de cette approche est qu'elle ne donne pas les déformées associées. C'est pourquoi la démarche proposée ici est différente. Elle consiste à identifier les mécanismes prépondérants dans la structure puis à utiliser la solution exacte du modèle correspondant. Ainsi, l'emploi du modèle le plus compliqué est limité aux situations où aucun autre modèle ne convient. Notons que l'identification du comportement des structures est également un problème qui se pose aux ingénieurs (Chaallal *et al.*, 1996).

Un aspect qui n'a été abordé dans aucune des études précédant cette thèse est la possibilité de résonance des éléments en flexion. Lorsque les éléments sont très fins, est-il possible que ce phénomène apparaisse dans la gamme de fréquences des vibrations transversales? Les résultats de la partie 2.4.3 permettent de répondre négativement à cette question. En effet, nous savons qu'il n'y a jamais de résonance interne lorsque le mécanisme prépondérant est le cisaillement de la cellule. Le mécanisme de flexion globale, généré par la traction-compression en opposition de phase des deux murs, est associé en série avec le mécanisme de cisaillement. En conséquence, il ne peut piloter les vibrations de la structure que s'il est plus souple que ce dernier. Alors, la flexion globale atteint le régime dynamique dans une gamme de fréquences plus basse que celle du cisaillement et il ne peut pas y avoir de résonance interne. La seule situation où ce phénomène peut exister est donc celle où les vibrations transversales sont pilotées par la flexion interne des murs uniquement. Mais nous avons vu dans la partie 2.4.3 que, dans ce cas, la résonance des planchers a des conséquences très limitées à l'échelle macroscopique. En particulier, c'est toujours la masse réelle de la structure qui apparaît.

Ainsi, la liste des modèles de comportement établie par Hans et Boutin est bien exhaustive. Mais les structures étudiées étaient très simples et la généralisation de ces résultats à des structures plus complexes nécessite d'examiner les points suivants. Le premier est de savoir si d'autres modèles sont possibles. Pour les portiques simples, la cinématique transversale fait intervenir trois variables à l'échelle locale et le modèle macroscopique est de degré 6. L'augmentation du

nombre de variables locales peut-elle faire apparaître des modèles plus riches ? Deuxièmement, nous avons vu que les paramètres qui pilotent le comportement de la structure sont les rigidités des trois mécanismes. Nous disposons de formules analytiques pour les portiques simples mais comment calculer ces rigidités pour d'autres géométries ?

3.2.3 Généralisation

La suite de ce chapitre présente les apports de cette thèse sur les modes de vibrations des poutres creuses périodiques. Pour étudier l'évolution du comportement global lorsque la géométrie de la cellule de base devient plus complexe, une étude similaire à celle de la partie 3.2.2 a été menée sur des structures constituées par l'empilement de doubles portiques. L'exposé démarre par les spécificités de la mise en œuvre de la méthode HMPD dans ce cas. Le point crucial est le changement de variables pour découpler les cinématiques longitudinale et transversale. Puis les résultats obtenus sont résumés. Enfin, la question de la généralisation à des structures portiques quelconques est discutée. Le problème sous-jacent est le calcul des rigidités.

Structures constituées de doubles portiques

Les **structures étudiées** sont maintenant constituées de doubles portiques comprenant trois murs et deux planchers. Il s'agit de structures symétriques, c'est-à-dire que les deux planchers sont identiques, de même pour les murs extérieurs. Par contre, le mur du milieu peut être différent des autres murs. Les éléments sont des poutres ou des plaques et les nœuds sont encastrés.

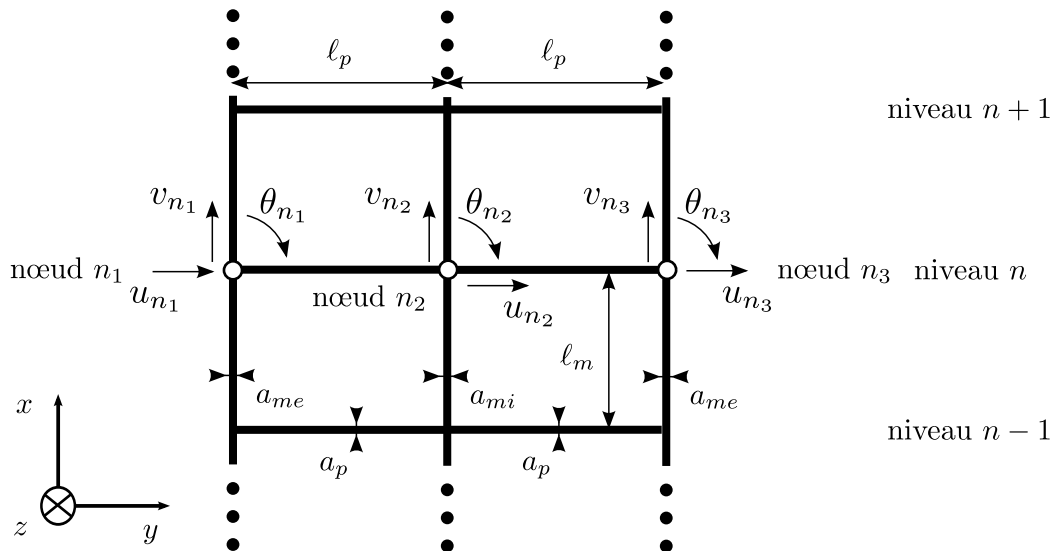


FIGURE 3.17 – Notations (doubles portiques)

Les notations sont indiquées sur la figure 3.17. L'axe x du repère global est l'axe vertical et l'axe y l'axe horizontal. Les différents niveaux sont repérés par un entier. Le niveau n est situé à l'abscisse $x = n \ell_m$ où ℓ_m est la longueur des murs.

Maintenant, le niveau n comporte trois nœuds notés n_1 pour celui de gauche, n_2 pour celui du milieu et n_3 pour celui de droite. Il y a toujours trois variables cinématiques par nœud :

- u_{n_i} : déplacement horizontal du nœud n_i
- v_{n_i} : déplacement vertical du nœud n_i
- θ_{n_i} : rotation du nœud n_i

Au total cela fait *neuf* variables cinématiques par niveau.

Les caractéristiques des éléments sont rappelées ci-dessous. Les symboles seront indexés par « *me* » pour les murs extérieurs, par « *mi* » pour le mur intérieur et par « *p* » pour les planchers. La seule exception est la longueur ℓ_m qui est identique pour les trois murs.

- a : épaisseur
- ℓ : longueur
- h : profondeur (selon l'axe z)
- $A = ah$: section
- $I = a^3h/12$: inertie par rapport à l'axe z
- ρ : masse volumique
- $\bar{\rho} = \rho A$: masse linéique
- E : module d'élasticité

Les hypothèses sont les mêmes que pour les études précédentes :

- petites déformations,
- matériau élastique linéaire,
- les éléments se comportent comme des poutres d'Euler-Bernoulli dans le plan (x, y) ,
- régime harmonique avec omission du terme $e^{i\omega t}$.

Les expressions des efforts en fonction des déplacements nodaux, données par les équations (3.1) page 146, sont toujours valables. Les notations sont indiquées sur la figure 3.3. Par contre, la géométrie ayant changé, **l'équilibre des nœuds** doit être réécrit. Maintenant, il y a trois nœuds par niveau donc trois systèmes de trois équations.

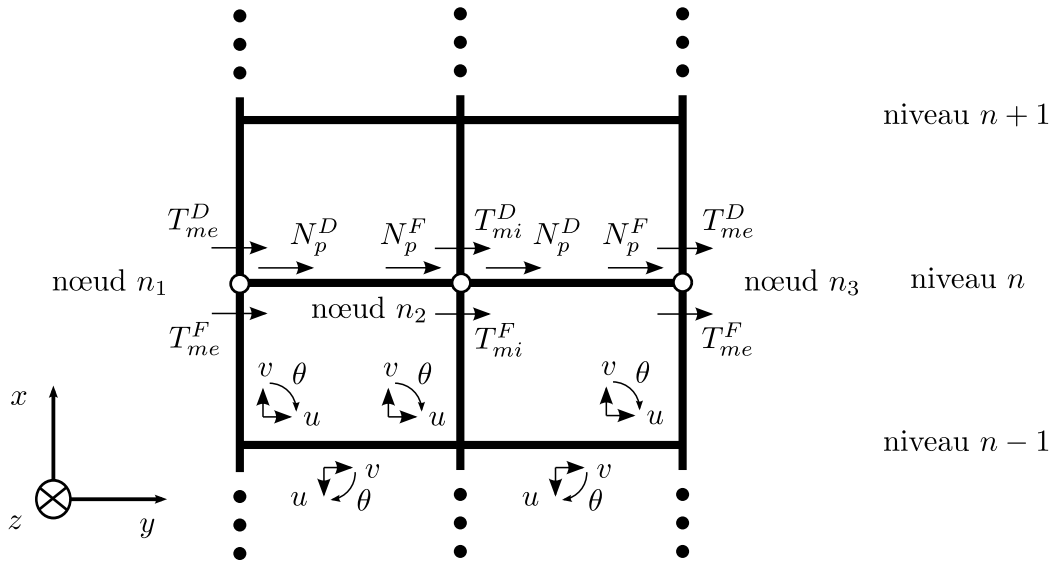


FIGURE 3.18 – Équilibre en forces des nœuds n_1 , n_2 et n_3 selon la direction y

Nœud n_1

Équilibre en forces selon y :

$$T_{me}^F(u_{(n-1)1}, u_{n1}, \theta_{(n-1)1}, \theta_{n1}) - T_{me}^D(u_{n1}, u_{(n+1)1}, \theta_{n1}, \theta_{(n+1)1}) - N_p^D(u_{n1}, u_{n2}) = 0 \quad (n_1 y)$$

Équilibre en forces selon x :

$$N_{me}^F(v_{(n-1)1}, v_{n1}) - N_{me}^D(v_{n1}, v_{(n+1)1}) + T_p^D(-v_{n1}, -v_{n2}, \theta_{n1}, \theta_{n2}) = 0 \quad (n_1 x)$$

Équilibre en moments :

$$M_{me}^F(u_{(n-1)1}, u_{n1}, \theta_{(n-1)1}, \theta_{n1}) - M_{me}^D(u_{n1}, u_{(n+1)1}, \theta_{n1}, \theta_{(n+1)1}) - M_p^D(-v_{n1}, -v_{n2}, \theta_{n1}, \theta_{n2}) = 0 \quad (n_1 m)$$

Nœud n_2

Équilibre en forces selon y :

$$T_{mi}^F(u_{(n-1)2}, u_{n2}, \theta_{(n-1)2}, \theta_{n2}) - T_{mi}^D(u_{n2}, u_{(n+1)2}, \theta_{n2}, \theta_{(n+1)2}) + N_p^F(u_{n1}, u_{n2}) - N_p^D(u_{n2}, u_{n3}) = 0 \quad (n_2 y)$$

Équilibre en forces selon x :

$$N_{mi}^F(v_{(n-1)2}, v_{n2}) - N_{mi}^D(v_{n2}, v_{(n+1)2}) - T_p^F(-v_{n1}, -v_{n2}, \theta_{n1}, \theta_{n2}) + T_p^D(-v_{n2}, -v_{n3}, \theta_{n2}, \theta_{n3}) = 0 \quad (n_2 x)$$

Équilibre en moments :

$$M_{mi}^F(u_{(n-1)2}, u_{n2}, \theta_{(n-1)2}, \theta_{n2}) - M_{mi}^D(u_{n2}, u_{(n+1)2}, \theta_{n2}, \theta_{(n+1)2}) + M_p^F(-v_{n1}, -v_{n2}, \theta_{n1}, \theta_{n2}) - M_p^D(-v_{n2}, -v_{n3}, \theta_{n2}, \theta_{n3}) = 0 \quad (n_2 m)$$

Nœud n_3

Équilibre en forces selon y :

$$T_{me}^F(u_{(n-1)3}, u_{n3}, \theta_{(n-1)3}, \theta_{n3}) - T_{me}^D(u_{n3}, u_{(n+1)3}, \theta_{n3}, \theta_{(n+1)3}) + N_p^F(u_{n2}, u_{n3}) = 0 \quad (n_3 y)$$

Équilibre en forces selon x :

$$N_{me}^F(v_{(n-1)3}, v_{n3}) - N_{me}^D(v_{n3}, v_{(n+1)3}) - T_p^F(-v_{n2}, -v_{n3}, \theta_{n2}, \theta_{n3}) = 0 \quad (n_3 x)$$

Équilibre en moments :

$$M_{me}^F(u_{(n-1)3}, u_{n3}, \theta_{(n-1)3}, \theta_{n3}) - M_{me}^D(u_{n3}, u_{(n+1)3}, \theta_{n3}, \theta_{(n+1)3}) + M_p^F(-v_{n2}, -v_{n3}, \theta_{n2}, \theta_{n3}) = 0 \quad (n_3 m)$$

Pour les structures constituées de doubles portiques, l'équilibre sous forme discrète est décrit par un système de *neuf* équations avec *neuf* variables cinématiques par niveau. La difficulté consiste à trouver un **changement de variables** qui découple ces équations. Nous savons qu'un tel changement existe car les structures sont symétriques. Il est donc possible de séparer les vibrations transversales des vibrations longitudinales. Mais combien de variables contiennent ces deux groupes ? Y a-t-il d'autres groupes ?

Comme notre objectif est de construire une analogie avec la théorie des poutres de la résistance des matériaux, nous répartissons les neuf variables du niveau n de la façon suivante : trois variables décrivant son mouvement de corps rigide et six variables décrivant sa déformation. D'autre part, la structure est symétrique donc les variables relatives aux nœuds n_1 et n_3 doivent jouer des rôles symétriques. Toutes ces considérations nous ont amenés à proposer le changement de variables suivant.

Mouvement de corps rigide du niveau n :

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{u_{n_1} + u_{n_2} + u_{n_3}}{3} && \text{déplacement transversal moyen (selon } y) \\ V_n &= \frac{v_{n_1} + v_{n_2} + v_{n_3}}{3} && \text{déplacement longitudinal moyen (selon } x) \\ \alpha_n &= \frac{v_{n_1} - v_{n_3}}{2\ell_p} && \text{rotation du niveau } n \end{aligned}$$

Déformation du niveau n :

$$\begin{aligned} \Delta_n &= u_{n_3} - u_{n_1} && \text{dilatation transversale} \\ \delta_n &= u_{n_2} - \frac{u_{n_1} + u_{n_3}}{2} && \text{déplacement transversal relatif du nœud } n_2 \\ \Psi_n &= v_{n_2} - \frac{v_{n_1} + v_{n_3}}{2} && \text{déplacement longitudinal relatif du nœud } n_2 \\ \Phi_n &= \theta_{n_3} - \theta_{n_1} && \text{rotation différentielle des nœuds } n_1 \text{ et } n_3 \\ \Theta_n &= \frac{\theta_{n_1} + \theta_{n_3}}{2} && \text{rotation moyenne des nœuds } n_1 \text{ et } n_3 \\ \theta_n &= \theta_{n_2} && \text{rotation du nœud } n_2 \end{aligned}$$

Le changement de variables a une forme différente pour les rotations des nœuds car cela s'est avéré plus pratique à l'usage. Le même type de manipulation est appliqué sur les équations d'équilibre des nœuds.

$$\begin{aligned} (T_t^n) &= (n_1 y) + (n_2 y) + (n_3 y) & (N_t^n) &= (n_1 x) + (n_2 x) + (n_3 x) \\ (T_d^n) &= (n_3 y) - (n_1 y) & (M^n) &= (n_3 x) - (n_1 x) \\ (T_r^n) &= (n_2 y) - \frac{(n_1 y) + (n_3 y)}{2} & (N_r^n) &= (n_2 x) - \frac{(n_1 x) + (n_3 x)}{2} \\ & & (\mathcal{M}_t^n) &= (n_1 m) + (n_2 m) + (n_3 m) \\ & & (\mathcal{M}_d^n) &= (n_3 m) - (n_1 m) \\ & & (\mathcal{M}_r^n) &= (n_2 m) - \frac{(n_1 m) + (n_3 m)}{2} \end{aligned}$$

Pour la structure discrète, les équations (T_t^n) , (N_t^n) et (M^n) jouent, respectivement, les rôles des équations d'équilibre d'effort tranchant, d'effort normal et de moment fléchissant. Les six autres équations sont des équations de bilan des efforts internes à la cellule et n'ont pas d'équivalent dans les poutres continues.

Intéressons-nous plus particulièrement à l'équation (\mathcal{M}_t^n) . *A priori*, avec les définitions des équations $(n_1 m)$, $(n_2 m)$ et $(n_3 m)$ données page 173, cette équation dépend des neuf variables cinématiques. Or, les expressions (3.1) page 146 sont linéaires donc, dans une combinaison d'efforts relatifs à un même type d'éléments, les variables cinématiques peuvent être factorisées. De plus, nous remarquons que :

$$M^D(u_1, u_2, \theta_1, \theta_2) = M^F(u_2, u_1, -\theta_2, -\theta_1)$$

Ainsi, l'équation (\mathcal{M}_t^n) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & M_{me}^F [(u_{(n-1)_1} + u_{(n-1)_3}) - (u_{(n+1)_1} + u_{(n+1)_3}), 0, \\ & \quad (\theta_{(n-1)_1} + \theta_{(n-1)_3}) + (\theta_{(n+1)_1} + \theta_{(n+1)_3}), 2(\theta_{n_1} + \theta_{n_3})] \\ & + M_{mi}^F [u_{(n-1)_2} - u_{(n+1)_2}, 0, \theta_{(n-1)_2} + \theta_{(n+1)_2}, 2\theta_{n_2}] \\ & + M_p^F [v_{n_3} - v_{n_1}, v_{n_1} - v_{n_3}, \theta_{n_1} + 2\theta_{n_2} + \theta_{n_3}, \theta_{n_1} + 2\theta_{n_2} + \theta_{n_3}] = 0 \end{aligned}$$

D'autre part, avec le changement de variables proposé, nous avons :

$$u_{n_1} + u_{n_3} = 2U_n - \frac{2}{3}\delta_n \quad \text{et} \quad u_{n_2} = U_n + \frac{2}{3}\delta_n$$

Donc en réalité, l'équation (\mathcal{M}_t^n) ne dépend que de cinq variables : U_n , δ_n , Θ_n , θ_n et α_n (plus leurs équivalents pour les niveaux $n-1$ et $n+1$).

De même, l'équation (\mathcal{M}_d^n) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} & M_{me}^F [(u_{(n-1)_3} - u_{(n-1)_1}) - (u_{(n+1)_3} - u_{(n+1)_1}), 0, \\ & \quad (\theta_{(n-1)_3} - \theta_{(n-1)_1}) + (\theta_{(n+1)_3} - \theta_{(n+1)_1}), 2(\theta_{n_3} - \theta_{n_1})] \\ & + M_p^F [-2v_{n_2}, -(v_{n_1} + v_{n_3}), 0, \theta_{n_3} - \theta_{n_1}] = 0 \end{aligned}$$

Cette équation fait intervenir les quatre variables restantes : Δ_n , Φ_n , Ψ_n et V_n .

Le même raisonnement s'applique sur les sept autres équations d'équilibre. Il apparaît alors que les équations et les variables se répartissent en deux groupes :

Cinématique transversale	Cinématique longitudinale
$(T_t^n) (T_r^n) (M^n) (\mathcal{M}_t^n) (\mathcal{M}_r^n)$	$(T_d^n) (N_t^n) (N_r^n) (\mathcal{M}_d^n)$
$U_n \delta_n \Theta_n \theta_n \alpha_n$	$V_n \Psi_n \Delta_n \Phi_n$

Ces nouvelles variables et les efforts nodaux sont ensuite développés comme dans la partie 3.1.4. Pour générer les différents comportements macroscopiques, nous continuons à jouer sur les ordres de grandeur des épaisseurs : e_{mi} , e_{me} et e_p . Les éléments sont tous réalisés dans des matériaux similaires et ont des longueurs

du même ordre. Nous avons donc :

$$\begin{array}{cccc}
 \frac{E_{me}}{E_{mi}} = O(1) & \frac{\rho_{me}}{\rho_{mi}} = O(1) & \frac{E_p}{E_{mi}} = O(1) & \frac{\rho_p}{\rho_{mi}} = O(1) \\
 \frac{\ell_p}{\ell_m} = O(1) & \frac{h_{me}}{h_{mi}} = O(1) & \frac{h_p}{h_{mi}} = O(1) & \\
 \frac{a_{mi}}{\ell_m} = O(\epsilon^{e_{mi}}) & \frac{a_{me}}{\ell_m} = O(\epsilon^{e_{me}}) & \frac{a_p}{\ell_m} = O(\epsilon^{e_p}) &
 \end{array}$$

La pulsation de référence ω_r est maintenant la première pulsation propre du mur intérieur en compression :

$$\omega_r = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{E_{mi}}{\rho_{mi}}}$$

Comme nous étudions les modes propres de la structure, la pulsation est une inconnue et doit être cherchée sous la forme d'un développement asymptotique :

$$\omega = \epsilon^{ef} (\omega_0 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots) \quad \text{où} \quad \omega_0 = O(\omega_r)$$

Ces estimations ainsi que les développements des efforts et des variables sont introduits dans les neuf équations d'équilibre de la structure discrète. Puis les termes sont réorganisés en fonction des puissances de ϵ et les différents ordres de grandeur sont séparés. L'équilibre de la structure est maintenant décrit par un système de neuf équations différentielles par ordre.

La suite de cet exposé est un **résumé des résultats**. Les équations d'équilibre obtenues grâce à la méthode HMPD et la construction du modèle de poutre équivalent sont présentées dans l'annexe B pour deux structures. Cette annexe contient également la liste des huit cas traités pour arriver à ces conclusions.

Le principal résultat de cette étude est que le comportement des structures constituées de doubles portiques est décrit par *les mêmes modèles* que celui des structures constituées de portiques simples. Ainsi, l'ajout d'un mur intérieur ne génère pas de nouveaux mécanismes. Les modifications se situent au niveau des paramètres macroscopiques qu'il faut adapter à la géométrie étudiée. Pour les structures constituées de doubles portiques, leurs définitions sont données ci-dessous.

$$\Lambda_{me} = 2\rho_{me}A_{me} \quad : \text{contribution des deux murs extérieurs à la masse linéique macroscopique en kg/m}$$

$$\Lambda_{mi} = \rho_{mi}A_{mi} \quad : \text{contribution du mur intérieur à la masse linéique macroscopique en kg/m}$$

$$\Lambda_m = \Lambda_{me} + \Lambda_{mi} \quad : \text{contribution des trois murs à la masse linéique macroscopique en kg/m}$$

$$\Lambda_p = 2\rho_p A_p \frac{\ell_p}{\ell_m} \quad : \text{contribution des deux planchers à la masse linéique macroscopique en kg/m}$$

$$\Lambda = \Lambda_m + \Lambda_p \quad : \text{masse linéique macroscopique en kg/m}$$

$$\begin{aligned}
 K_{me} &= 24 \frac{E_{me} I_{me}}{\ell_m^2} : \text{rigidité macroscopique en cisaillement liée à la flexion} \\
 &\quad \text{locale des deux murs extérieurs en N} \\
 K_{mi} &= 12 \frac{E_{mi} I_{mi}}{\ell_m^2} : \text{rigidité macroscopique en cisaillement liée à la flexion} \\
 &\quad \text{locale du mur intérieur en N} \\
 K_p &= 12 \frac{E_p I_p}{\ell_m \ell_p} : \text{rigidité macroscopique en cisaillement liée à la flexion} \\
 &\quad \text{locale des planchers en N} \\
 I &= 2A_{me} \ell_p^2 : \text{inertie macroscopique de la section pour la flexion glo-} \\
 &\quad \text{bale en m}^4
 \end{aligned}$$

La rigidité de la flexion globale est $E_{me} I$. Ce type de flexion correspond donc à la traction-compression en opposition de phase des deux murs extérieurs. L'inertie macroscopique I est égale à l'inertie d'une poutre formée par les trois murs sans les planchers. Mais, comme le mur intérieur se trouve au milieu de la structure et que les inerties propres des éléments sont négligées au premier ordre, sa contribution est nulle. La rigidité de la flexion interne est la somme des rigidités des murs en flexion : $2E_{me} I_{me} + E_{mi} I_{mi}$. La différence par rapport aux structures constituées de portiques simples est que, selon les ordres de grandeur des épaisseurs, la flexion interne peut être due soit à la flexion des trois murs, soit uniquement à la flexion des deux murs extérieurs, soit uniquement à la flexion du mur intérieur.

La rigidité du cisaillement s'exprime en fonction des rigidités des éléments en flexion locale :

$$K = \frac{K_p \left(K_p (K_{me} + K_{mi}) + 6 K_{me} K_{mi} \right)}{K_p^2 + 2 K_p (K_{me} + K_{mi}) + 3 K_{me} K_{mi}} \quad (3.16)$$

Cette formule, obtenue grâce à la méthode HMPD, sera appelée K_H par la suite. Elle est différente de celles qui existent dans la littérature. En effet, la méthode la plus répandue (Stafford Smith *et al.*, 1981, 1984; Stafford Smith et Crowe, 1986; Bouvard *et al.*, 1985; Zalka, 2001; Potzta et Kollár, 2003) pour calculer la rigidité d'un portique consiste à associer d'une part, tous les murs en parallèle puis d'autre part, tous les planchers en parallèle. Ensuite, ces deux ensembles sont associés en série. Cela coïncide avec les résultats de l'homogénéisation dans le cas des portiques simples symétriques mais, pour le double portique étudié ici et avec les notations introduites précédemment, cela conduit à une formule différente :

$$K_L = \frac{1}{\frac{1}{2K_p} + \frac{1}{K_{me} + K_{mi}}} = \frac{2K_p (K_{me} + K_{mi})}{2K_p + K_{me} + K_{mi}} \quad (3.17)$$

Les hypothèses simplificatrices permettant d'obtenir cette expression sont rappelées dans (Bouvard *et al.*, 1985). Une autre méthode de calcul de cette rigidité a été proposée par Basu et Nagpal (1980) et elle est rappelée dans (Basu *et al.*, 1984). Pour un double portique, cette méthode donne une expression K_B qui a

la même forme que K_H mais avec des coefficients numériques différents :

$$K_B = K_p \left(\frac{K_{me}}{K_{me} + K_p} + \frac{K_{mi}}{K_{mi} + K_p} \right) = \frac{K_p (K_p (K_{me} + K_{mi}) + 2K_{me}K_{mi})}{K_p^2 + K_p (K_{me} + K_{mi}) + K_{me}K_{mi}} \quad (3.18)$$

La comparaison de ces trois formules montre que celles de la littérature surestiment systématiquement la rigidité du double portique mais que l'expression K_B est plus précise. En effet, nous avons :

$$K_B - K_H = \frac{K_p^3 (K_{me} - K_{mi})^2}{(K_p^2 + 2K_p (K_{me} + K_{mi}) + 3K_{me}K_{mi})(K_p^2 + K_p (K_{me} + K_{mi}) + K_{me}K_{mi})} > 0$$

$$K_L - K_B = \frac{K_p^2 (K_{me} - K_{mi})^2}{(2K_p + K_{me} + K_{mi})(K_p^2 + K_p (K_{me} + K_{mi}) + K_{me}K_{mi})} > 0$$

$$\Rightarrow K_H < K_B < K_L$$

Afin de voir si, dans certains cas, ces trois formules peuvent donner le même résultat, nous avons étudié comment elles dégénèrent lorsque certains éléments sont beaucoup plus souples ou beaucoup plus rigides que les autres. Comme à chaque fois, les murs extérieurs et le mur intérieur jouent des rôles identiques, nous n'avons considéré que les situations où les murs extérieurs sont rigides et le mur intérieur souple. En effet, dans ce cas particulier, le comportement du double portique devrait se rapprocher de celui d'un portique simple constitué des deux murs extérieurs et d'un grand plancher de longueur $2\ell_p$ et de rigidité $K_p/2$. Les résultats sont résumés dans le tableau 3.3. Les * indiquent les situations où les trois formules donnent le même résultat.

	K_H (formule (3.16))	K_L (formule (3.17))	K_B (formule (3.18))
* $K_p \ll K_{me}, K_{mi}$	$2K_p$	$2K_p$	$2K_p$
* $K_{me}, K_{mi} \ll K_p$	$K_{me} + K_{mi}$	$K_{me} + K_{mi}$	$K_{me} + K_{mi}$
$K_p, K_{mi} \ll K_{me}$	$\frac{K_p(K_p + 6K_{mi})}{2K_p + 3K_{mi}}$	$2K_p$	$\frac{K_p(K_p + 2K_{mi})}{K_p + K_{mi}}$
* $K_p \ll K_{mi} \ll K_{me}$	$2K_p$	$2K_p$	$2K_p$
$K_{mi} \ll K_p \ll K_{me}$	$K_p/2$	$2K_p$	K_p
$K_{mi} \ll K_{me}, K_p$	$\frac{(K_p/2)K_{me}}{(K_p/2) + K_{me}}$	$\frac{2K_p K_{me}}{2K_p + K_{me}}$	$\frac{K_p K_{me}}{K_p + K_{me}}$

TABLE 3.3 – Évolution des trois formules pour calculer K en fonction des rigidités des éléments

Nous constatons alors que, même si la formule donnée dans (Basu et Nagpal, 1980; Basu *et al.*, 1984) est plus précise que la formule couramment admise, K_B et K_L coïncident avec K_H pour les mêmes gammes de rigidité des éléments : soit lorsque les planchers sont très souples, soit lorsqu'ils sont très rigides, soit lorsque $K_{mi} = K_{me}$. Si nous supposons que la seule différence entre les murs extérieurs et le mur intérieur est leur épaisseur, alors la dernière situation correspond à un mur intérieur légèrement plus épais :

$$\begin{aligned} K_{mi} = K_{me} &\Rightarrow \frac{12E_{mi}I_{mi}}{\ell_m^2} = \frac{24E_{me}I_{me}}{\ell_m^2} \Rightarrow I_{mi} = 2I_{me} \\ &\Rightarrow a_{mi}^3 = 2a_{me}^3 \Rightarrow a_{mi} \approx 1,26 a_{me} \end{aligned}$$

Les deux dernières lignes du tableau 3.3 montrent également qu'aucune des formules de la littérature ne permet de retrouver la rigidité du portique simple lorsque le mur intérieur est très souple.

Pour conclure sur la rigidité du cisaillement, remarquons que la formule (3.16), obtenue grâce à la méthode HMPD, ne peut pas être interprétée avec des associations de ressorts en série ou en parallèle. En effet, les deuxième et troisième lignes du tableau 3.3 montrent que, lorsqu'un type d'éléments est beaucoup plus rigide que les autres, sa contribution disparaît. Mais ensuite, si les deux rigidités restantes ne sont pas du même ordre, il n'y a pas de règle pour dire si c'est la plus petite ou la plus grande qui disparaît. Par exemple, dans le cas où les murs extérieurs sont très rigides ($K_p, K_{mi} \ll K_{me}$), alors K_H dégénère et ne dépend plus que de K_p et K_{mi} . Si en plus, K_p et K_{mi} ne sont pas du même ordre ($K_{mi} \ll K_p \ll K_{me}$ ou $K_p \ll K_{mi} \ll K_{me}$), K_H dégénère de nouveau mais K_{mi} disparaît dans les deux cas. Par contre, selon le contraste de rigidité entre le mur intérieur et les planchers, nous obtenons $K_p/2$ ou $2K_p$. Tous ces développements montrent que le calcul de la rigidité en cisaillement d'une structure portique est un problème compliqué et que la méthode HMPD est un outil efficace pour y parvenir.

Revenons maintenant à l'étude des vibrations transversales des structures constituées par l'empilement de doubles portiques. Dans un premier temps, nous avons traité quelques cas afin d'identifier les paramètres macroscopiques que nous venons de présenter. Dans un deuxième temps, nous avons utilisé les critères C et γ pour construire des structures où les trois mécanismes ont la même importance.

C et γ ont été définis page 163 pour les structures constituées de portiques simples. Ce sont des paramètres qui pèsent l'importance relative des différents mécanismes. Nous donnons ci-dessous leurs expressions adaptées aux structures constituées de doubles portiques :

$$C = \frac{E_{me}I}{KL^2} = \epsilon^x \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{2E_{me}I_{me} + E_{mi}I_{mi}}{E_{me}I} = \epsilon^y$$

D'après la figure 3.12 page 164, le modèle générique correspond à $C = O(1)$ et $\gamma = O(1)$. Nous avons donc exprimé les ordres de grandeur x et y en fonction de ceux des épaisseurs des éléments e_{me} , e_{mi} et e_p . Puis nous avons résolu le système $x = 0$ et $y = 0$ en supposant les ordres de grandeur des épaisseurs positifs. Cela

signifie que les éléments ont une épaisseur plus faible que leur longueur, ce qui est cohérent avec la modélisation par des poutres. Nous obtenons alors une infinité de solutions :

- murs extérieurs plus épais que le mur intérieur :

$$e_{me} \leq e_{mi} \quad \Rightarrow \quad e_{me} = e_p - \frac{2}{3} = 0$$

- murs extérieurs plus fins que le mur intérieur :

$$e_{me} > e_{mi} \quad \Rightarrow \quad e_{me} = 3e_p - 2 \geq 0 \quad \text{et} \quad e_{mi} = \frac{e_{me}}{3}$$

Nous en avons sélectionnées trois : un cas où les trois murs ont la même épaisseur, un cas où le mur intérieur est plus épais que les murs extérieurs et un cas où ce sont les murs extérieurs les plus épais.

Pour ces trois cas, le modèle de poutre équivalent est bien décrit par une équation différentielle de degré six, ce qui valide l'utilisation des critères C et γ pour ce type de structures. D'autre part, lorsque le mur intérieur est très fin, le double portique devient quasiment un portique simple. Alors, comme dans la partie 3.2.2, il n'y a plus qu'une seule possibilité pour obtenir le modèle avec les trois mécanismes : $e_{me} = 0$ et $e_p = 2/3$. Par contre, dans le cas des doubles portiques, ce modèle correspond à une infinité de situations. Il est donc plus courant que ce que la première étude laissait penser.

Nous allons maintenant présenter le modèle générique pouvant dégénérer en n'importe lequel des autres modèles. Là encore, c'est un modèle théorique obtenu en mettant artificiellement tous les termes au même ordre de grandeur. Il n'est pas possible de l'obtenir directement avec la méthode HMPD car, lorsque tous les éléments ont la même épaisseur, les trois mécanismes ne peuvent pas être du même ordre. En réalité, la rigidité du cisaillement K et la masse linéique Λ apparaissent toujours sous une forme dégénérée.

Le comportement de la poutre générique à l'échelle macroscopique est décrit par des équations très proches de celles de la partie 3.2.2. La seule différence concerne les définitions des rigidités macroscopiques.

Lois de comportement :

$$\begin{aligned} \text{effort tranchant} \quad T &= -K(U' - \alpha) \\ \text{moment global} \quad M &= -E_{me}I \alpha' \\ \text{moment interne} \quad \mathcal{M} &= -(2E_{me}I_{me} + E_{mi}I_{mi})U'' \end{aligned} \quad (3.19a)$$

Équations d'équilibre :

$$\mathcal{T}' = (T - \mathcal{M}')' = \Lambda \omega^2 U \quad M' = -T \quad (3.19b)$$

La combinaison de toutes ces équations permet de décrire les vibrations transversales de la poutre à l'aide d'une équation différentielle de degré 6 :

$$\begin{aligned} \frac{E_{me}I(2E_{me}I_{me} + E_{mi}I_{mi})}{K} U^{(6)} - (E_{me}I + 2E_{me}I_{me} + E_{mi}I_{mi}) U^{(4)} \\ - \frac{E_{me}I\Lambda \omega^2}{K} U'' + \Lambda \omega^2 U = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Sa résolution nécessite six conditions aux limites qui peuvent être exprimées soit en fonction des efforts \mathcal{T} , M et \mathcal{M} , soit en fonction des variables cinématiques U , α et U' . L'homogénéisation du comportement de la structure a permis de passer d'un système avec cinq variables cinématiques et donc *a priori* dix conditions aux limites à un système avec au plus six conditions aux limites.

Pour déterminer les trois variables cinématiques Θ , θ et δ qui n'apparaissent pas dans la description macroscopique, il faut rajouter trois équations d'équilibre interne à la cellule :

$$\Theta = \frac{K_p (K_p + 3 K_{mi}) \alpha + \left(K_p (2 K_{me} - K_{mi}) + 3 K_{me} K_{mi} \right) U'}{K_p^2 + 2 K_p (K_{me} + K_{mi}) + 3 K_{me} K_{mi}}$$

$$\theta = \frac{K_p (K_p + 3 K_{me}) \alpha + \left(K_p (2 K_{mi} - K_{me}) + 3 K_{me} K_{mi} \right) U'}{K_p^2 + 2 K_p (K_{me} + K_{mi}) + 3 K_{me} K_{mi}}$$

$$6 \frac{E_p A_p}{\ell_m \ell_p} \delta - 2 K_{mi} (U'' - \theta') - 2 E_{mi} I_{mi} (U^{(4)} - 2 \theta''') + K_{me} (U'' - \Theta')$$

$$+ 2 E_{me} I_{me} (U^{(4)} - 2 \Theta''') - (2 \Lambda_{mi} - \Lambda_{me} + \frac{\Lambda_p}{2}) \omega^2 U = 0$$

Les expressions de Θ et θ ont la même forme mais les rôles de K_{me} et K_{mi} sont inversés. Nous donnons également l'équation générale qui permet de calculer δ même si en première approximation cette variable peut être négligée. En effet, pour les huit cas traités, elle est nulle au moins jusqu'à l'ordre 3 inclus.

En **conclusion**, à l'échelle macroscopique, le comportement des structures constituées de doubles portiques est décrit par les mêmes équations que celui des structures constituées de portiques simples. Il faut juste adapter les paramètres macroscopiques. De plus, les critères C et γ peuvent encore être utilisés pour identifier le comportement de ces structures. Les trois nouvelles variables cinématiques introduites par l'ajout du mur intérieur sont des variables cachées qui n'apparaissent pas dans la description macroscopique. Par contre, pour revenir à l'échelle locale, nous avons maintenant besoin de trois équations d'équilibre interne de la cellule contre une seule pour les structures constituées de portiques simples.

Ces résultats sont encourageants pour la généralisation des modèles macroscopiques à des structures encore plus complexes.

Structures constituées de portiques quelconques

Pour obtenir le comportement macroscopique d'une structure portique quelconque, il n'est pas envisageable d'appliquer la méthode HMPD à chaque fois. En effet, sa mise en œuvre devient vite fastidieuse lorsque le nombre de murs augmente. D'autre part, à partir de l'étude menée sur les structures constituées de doubles portiques, il semble raisonnable d'étendre l'utilisation des modèles macroscopiques et des critères d'identification aux autres structures portiques symétriques. Le cas des structures dissymétriques sera discuté à la fin de ce paragraphe. Dans ces conditions, la caractérisation du comportement dynamique

d'une structure revient à déterminer les paramètres macroscopiques qui interviennent dans les modèles. Il s'agit de la masse linéique Λ et des rigidités des trois mécanismes. Ces dernières sont notées EI_M pour la flexion globale, $EI_{\mathcal{M}}$ pour la flexion interne et K pour le cisaillement de la cellule. L'objet de ce paragraphe est de proposer une méthode de calcul alternative qui évite de repasser par l'homogénéisation.

Nous commençons par les paramètres les plus faciles à calculer. Les formules obtenues pour les structures constituées de portiques simples (page 153) et celles constituées de doubles portiques (page 176) montrent que la masse linéique Λ est tout simplement la masse d'un étage divisée par sa hauteur ℓ_m . De même, la rigidité de la flexion interne $EI_{\mathcal{M}}$ est la somme des rigidités en flexion des murs. Si chaque mur est repéré par un indice j , l'expression de $EI_{\mathcal{M}}$ est :

$$EI_{\mathcal{M}} = \sum_{\text{murs}} E_j I_j \quad (3.21)$$

Lors de l'étude par homogénéisation, nous avons vu que Λ et $EI_{\mathcal{M}}$ pouvaient dégénérer. Cela permettait d'identifier les éléments de la structure qui pilotent son comportement dynamique. Mais le comportement homogénéisé correspond au cas limite lorsque le ratio d'échelles ϵ tend vers 0. Dans la réalité, la séparation des ordres est moins nette et il est plus précis de tenir compte des contributions de tous les éléments.

Pour la rigidité de la flexion globale EI_M , les études précédentes par homogénéisation montrent que les planchers servent uniquement à maintenir l'écartement des murs et que leurs propriétés mécaniques n'interviennent pas. La situation que nous avons traitée avec la méthode HMPD et qui est également celle qui nous intéresse pour les applications correspond aux structures dont les murs sont tous réalisés dans le même matériau. Dans ce cas, EI_M est égale au module d'élasticité des murs E_m multiplié par une inertie macroscopique. Celle-ci est obtenue en ne considérant que les murs et en négligeant leur inertie propre, qui est prise en compte par ailleurs dans $EI_{\mathcal{M}}$. Si nous appelons d_j la distance du mur j au centre de gravité de la poutre constituée par l'ensemble des murs, l'expression de EI_M est :

$$EI_M = E_m I = E_m \sum_{\text{murs}} A_j d_j^2 \quad (3.22)$$

Lorsque les murs sont réalisés dans des matériaux différents, il faut prendre en compte les différents modules d'élasticité E_j . La rigidité de la flexion globale est alors calculée de la même façon que dans les poutres hétérogènes (par exemple les poutres en béton armé) :

$$EI_M = \sum_{\text{murs}} E_j A_j d_j^2$$

Le point délicat est le calcul de la rigidité du cisaillement K . Nous connaissons les formules analytiques pour les deux types de structures étudiées par homogénéisation et nous avons constaté qu'elles peuvent être différentes de celles données

dans la littérature. De plus, ces expressions ne sont pas intuitives et il semble difficile d'en tirer une règle générale. Néanmoins, pour ces modèles sans résonance interne, les paramètres macroscopiques ne dépendent que des propriétés statiques de la cellule de base. Il est donc possible d'obtenir cette rigidité en réalisant un test statique sur une cellule. Cela consiste à appliquer une déformation macroscopique sur un modèle numérique de la cellule et à calculer les efforts résultants (ou inversement).

De telles méthodes numériques existent déjà pour déterminer les propriétés macroscopiques des milieux périodiques continus (par exemple (Anthoine, 1995; Michel *et al.*, 1999; Burgardt et Cartraud, 1999; Buannic *et al.*, 2003; Laudarin, 2007)). Dans ce cas, il y a deux difficultés à surmonter. La première est que, pour les milieux continus, les contraintes et les déformations macroscopiques sont définies par des moyennes sur la cellule. Le chargement est donc l'intégrale d'un champ. La deuxième difficulté consiste à trouver puis à mettre en œuvre dans un code de calcul les bonnes conditions aux limites. Celles-ci doivent permettre à l'unique cellule modélisée de se comporter comme si elle se trouvait à l'intérieur d'une structure comprenant un grand nombre de cellules. Les méthodes d'homogénéisation montrent qu'il s'agit de conditions périodiques.

Essayons maintenant de construire une telle méthode de calcul pour trouver la rigidité du cisaillement K dans les structures discrètes. Le point de départ est le modèle de poutre générique, rappelé ci-dessous :

Lois de comportement :

$$\begin{aligned} \text{effort tranchant} \quad T &= -K(U' - \alpha) \\ \text{moment global} \quad M &= -EI_M \alpha' \\ \text{moment interne} \quad \mathcal{M} &= -EI_{\mathcal{M}} U'' \end{aligned} \tag{3.23a}$$

Équations d'équilibre :

$$\mathcal{T}' = (T - \mathcal{M}')' = \Lambda \omega^2 U \tag{3.23b}$$

$$M' = -T \tag{3.23c}$$

Notons que ce modèle n'est valable que pour les structures qui contiennent un grand nombre de cellules et pas pour le modèle numérique avec une seule cellule que nous voulons utiliser. Nous allons donc commencer par raisonner à l'échelle macroscopique sur la structure complète pour construire un chargement qui donne facilement accès à K . Puis, nous reviendrons à l'échelle microscopique pour étudier le comportement des cellules sous ce chargement. Pour cela, nous avons besoin de relier les déplacements et les efforts macroscopiques qui apparaissent dans le modèle générique aux déplacements et aux efforts dans les éléments.

Les définitions des variables cinématiques ont été présentées lors de la mise en œuvre de la méthode HMPD (page 148 pour les structures constituées de portiques simples et page 174 pour les structures constituées de doubles portiques). Elles sont construites à partir des mouvements des nœuds de la cellule. Nous pouvons faire trois remarques au sujet de ces variables. La première est qu'il est plus facile d'appliquer une déformation macroscopique sur une structure discrète

que dans un milieu continu. Dans le premier cas, il suffit d'imposer le mouvement des nœuds alors que dans le second, il faut imposer le champ de déplacement en chaque point de la cellule.

La deuxième remarque est que les variables cinématiques peuvent être réparties en deux groupes avec des propriétés différentes. Le premier groupe contient les variables qui décrivent le mouvement de corps rigide des niveaux. Nous les appellerons variables macroscopiques par la suite. Pour l'étude des vibrations de la structure dans le plan du portique, il y en a trois quelle que soit la géométrie de la cellule : le déplacement transversal moyen U , le déplacement longitudinal moyen V et la rotation du niveau α . Ce sont elles qui apparaissent dans les modèles de poutre macroscopiques. Le second groupe contient les variables microscopiques, c'est-à-dire celles qui décrivent la déformation des niveaux. Leur nombre et leur définition dépendent de la géométrie de la cellule. Dans les parties précédentes, nous les avons également appelées variables cachées pour insister sur le fait qu'elles n'interviennent pas dans les modèles macroscopiques. Cette distinction montre que les propriétés généralisables à d'autres géométries sont celles décrites par les variables macroscopiques alors que les propriétés décrites par les variables microscopiques ne sont valables que pour une structure particulière. En conséquence, pour que la méthode de calcul de K soit transposable aux structures multiporiques quelconques, il faut que le chargement macroscopique soit exprimé en fonction des variables macroscopiques U , V et α .

Enfin, la dernière remarque est que, pour les structures symétriques, les cinématiques longitudinales et transversales sont découplées. Comme le cisaillement de la cellule est un des mécanismes de la cinématique transversale, ce sont les conditions sur U et α qui sont importantes. La variable V peut être choisie de façon arbitraire et nous prendrons $V = 0$.

Le passage des efforts macroscopiques, qui apparaissent naturellement dans les équations d'équilibre fournies par la méthode HMPD, aux efforts dans les éléments est moins évident. Notons que cela n'est possible qu'en statique car les efforts macroscopiques ne prennent en compte que la composante élastique des efforts dans la structure et pas les forces d'inertie. Pour trouver la rigidité du cisaillement, nous avons surtout besoin de la définition de l'effort tranchant macroscopique. Mais, les équations d'équilibre de la poutre générique (équations (3.23b) et (3.23c)) montrent qu'il existe deux types d'effort tranchant : T qui est généré par le cisaillement de la cellule et l'effort tranchant total \mathcal{T} qui contient en plus les effets de la flexion interne. Celui qui nous intéresse pour déterminer K est T .

D'après l'équation (3.23c), T est également l'effort qui équilibre les variations du moment global. Parmi les équations d'équilibre fournies par la méthode HMPD (par exemple, celles de la partie 3.2.1 page 154 pour les structures constituées de portiques simples), il faut donc le chercher dans les équations d'équilibre du moment global (M). Nous rappelons que ces équations correspondent à la différence des efforts longitudinaux : efforts normaux dans les murs et effort tranchant du plancher. Ainsi, nous constatons que, pour les structures constituées de portiques simples, T est égal à l'effort tranchant dans le plancher. Néanmoins, cette observation semble difficile à utiliser pour construire une méthode de calcul générale valable également pour les structures complexes avec plusieurs planchers.

Nous abandonnons donc cette piste et nous nous intéressons plutôt à la somme des efforts tranchants dans les murs ΣT_m . Celle-ci intervient dans l'équation (T_t) qui joue, pour la structure discrète, le même rôle que l'équation d'équilibre d'effort tranchant dans la poutre continue macroscopique. C'est donc l'équivalent de l'équation (3.23b) et la somme des efforts tranchants dans les murs ΣT_m est égale à l'effort tranchant total \mathcal{T} . Mais si la structure est sollicitée de telle sorte que la dérivée du moment interne soit nulle, alors nous avons : $\Sigma T_m = \mathcal{T} = T$.

Pour trouver un tel chargement, examinons les lois de comportement de la poutre générique (équations (3.23a)). Une solution possible est :

$$U' \text{ constante} \quad \text{et} \quad \alpha = 0$$

Dans ce cas, $M = \mathcal{M} = 0$ et K est le coefficient de proportionnalité (au signe près) entre U' et l'effort tranchant total donné par la somme des efforts tranchants dans les murs. Lorsque U' est constante, la déformée de la structure est une droite d'équation : $U(x) = U'x + U_0$. Par définition, les variables cinématiques n'ont de sens physique que pour les valeurs discrètes $x_n = n \ell_m$ avec n entier. Ce type de chargement correspond donc, à chaque niveau n , à un déplacement transversal et à une rotation imposés :

$$U_n = nU'\ell_m + U_0 \quad \text{et} \quad \alpha_n = 0 \quad (3.24)$$

Ainsi, toutes les cellules sont sollicitées par la même distorsion :

$$\Delta U = U_{n+1} - U_n = U'\ell_m$$

ce qui génère des efforts macroscopiques constants sur toute la hauteur de la poutre équivalente. Il s'agit donc d'un chargement uniforme (à l'exception des effets de bord qui ne sont pas pris en compte dans ce modèle).

Nous nous intéressons maintenant à la déformation des cellules sous ce chargement. Celle-ci est décrite par les variables microscopiques et dépend fortement de la géométrie de la cellule. Nous commençons par étudier les structures constituées de portiques simples, puis celles constituées de doubles portiques avant de tirer une règle générale applicable à toutes les structures portiques symétriques.

Pour les structures constituées de portiques simples, il n'y a qu'une seule variable microscopique associée à la cinématique transversale : la rotation moyenne des nœuds θ . Elle est déterminée grâce à l'équation d'équilibre interne de la cellule qui s'écrit dans le cas générique :

$$K_p(\alpha - \theta) + K_m(U' - \theta) = 0$$

Pour le chargement choisi, la variable θ est donc constante :

$$\theta = \frac{K_m}{K_m + K_p} U'$$

Nous obtenons un résultat similaire pour les structures constituées de doubles portiques. Dans ce cas, il y a trois variables microscopiques associées à la cinématique transversale (définitions page 174) : δ qui désigne le déplacement transversal

relatif du nœud n_2 , Θ qui correspond à la rotation moyenne des nœuds n_1 et n_3 , θ qui est égale à la rotation du nœud n_2 . Les trois équations d'équilibre interne qui permettent de calculer ces variables sont données page 181 pour le modèle général. Pour le chargement statique choisi, ces trois variables sont constantes.

Les équations d'équilibre interne utilisées pour montrer que les variables microscopiques sont constantes ont été obtenues par homogénéisation et elles ne décrivent que l'ordre dominant. En réalité, ce résultat est valable pour tous les ordres et il peut être démontré en raisonnant directement sur la structure discrète. C'est ce que nous allons faire pour les structures constituées de portiques simples.

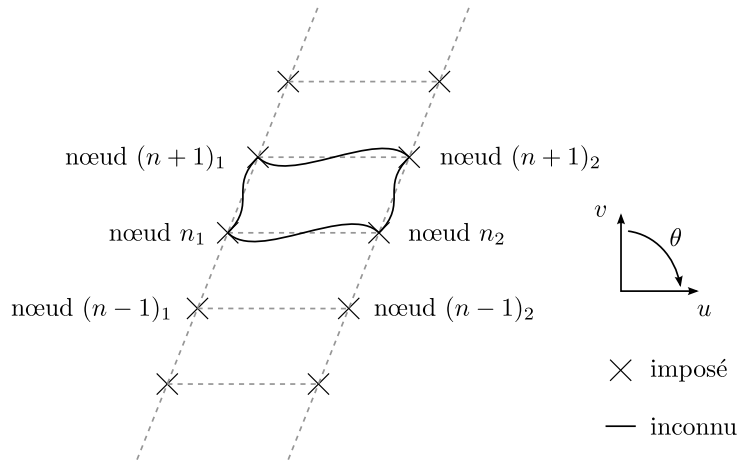


FIGURE 3.19 – Chargement de la structure étudiée

Nous considérons la structure de la figure 3.19 dont le déplacement longitudinal et vertical de chaque nœud est tel que les conditions (3.24) sont vérifiées. Par contre, la rotation des nœuds est laissée libre. Pour imposer les déplacements des nœuds, des forces extérieures sont appliquées sur la structure donc seules les équations d'équilibre en moments sont encore utilisables. En statique, les équations (3.1c) (page 146) qui donnent les expressions des moments aux extrémités des éléments deviennent :

$$M^D = \frac{6EI}{\ell^2} \left(u^D - u^F + \frac{\ell}{3} (2\theta^D + \theta^F) \right)$$

$$M^F = -\frac{6EI}{\ell^2} \left(u^D - u^F + \frac{\ell}{3} (\theta^D + 2\theta^F) \right)$$

L'équation $(\mathcal{M}_t^n) = (n_1 m) + (n_2 m)$ correspondant à la somme des moments s'exerçant sur les nœuds du niveau n s'écrit alors :

$$M_m^F(u_{(n-1)1}, u_{n1}, \theta_{(n-1)1}, \theta_{n1}) + M_m^F(u_{(n-1)2}, u_{n2}, \theta_{(n-1)2}, \theta_{n2})$$

$$- M_m^D(u_{n1}, u_{(n+1)1}, \theta_{n1}, \theta_{(n+1)1}) - M_m^D(u_{n2}, u_{(n+1)2}, \theta_{n2}, \theta_{(n+1)2})$$

$$- M_p^D(-v_{n1}, -v_{n2}, \theta_{n1}, \theta_{n2}) + M_p^F(-v_{n1}, -v_{n2}, \theta_{n1}, \theta_{n2}) = 0$$

Après introduction des expressions de M^D et M^F en statique et du changement de variables (défini page 148), cette équation devient :

$$\frac{12E_m I_m}{\ell_m^2} \left(U_{n+1} - U_{n-1} - \frac{\ell_m}{3} (\theta_{n+1} + 4\theta_n + \theta_{n-1}) \right) + \frac{12E_p I_p}{\ell_p} (\alpha_n - \theta_n) = 0$$

Pour le chargement choisi ($U_{n+1} - U_{n-1} = 2\Delta U$ et $\alpha_n = 0$), la suite $\theta_n = \theta$ où θ désigne une constante est solution de cette équation. De plus, l'expression de θ est identique à celle obtenue par homogénéisation :

$$\theta = \frac{K_m}{K_m + K_p} \frac{\Delta U}{\ell_m}$$

En conclusion, pour ce type de chargement uniforme, les variables microscopiques associées à la cinématique transversale sont constantes sur toute la hauteur de la structure. Les variables associées à la cinématique longitudinale peuvent être choisies de façon arbitraire. En particulier, elles peuvent également être constantes sur toute la hauteur de la structure. Dans ces conditions, toutes les cellules se déforment exactement de la même manière et ont la même répartition des efforts. Cela est cohérent avec les résultats classiques sur les milieux composites périodiques continus, à savoir que les champs de déformation et de contrainte sont périodiques lorsque le chargement macroscopique est uniforme (par exemple, (Anthoine, 1995)).

Revenons au problème initial qui est le calcul de la rigidité K . Nous connaissons une façon de charger une structure comprenant un grand nombre de cellules pour laquelle la somme des efforts tranchants dans les murs est proportionnelle à K et pour laquelle toutes les cellules ont la même déformation. Il suffit donc de calculer la déformation d'une seule cellule. Pour cela, il faut lui imposer la déformation macroscopique, c'est-à-dire un déplacement transversal différentiel ΔU et $\alpha = V = 0$, ainsi que des conditions périodiques au niveau des interfaces avec les autres cellules pour les variables microscopiques. La rigidité K se déduit alors grâce à la formule :

$$\Sigma T_m = -K \frac{\Delta U}{\ell_m}$$

Nous allons maintenant appliquer cette méthode sur un portique simple et un double portique. Cela permettra de comparer les résultats avec les formules analytiques obtenues par homogénéisation et d'illustrer la mise en œuvre de ces conditions aux limites. Puis nous calculerons K pour une structure avec 10 murs. Cette fois-ci, les résultats sont validés en comparant les fréquences propres obtenues avec le modèle de poutre équivalent et avec un modèle éléments finis de toute la structure.

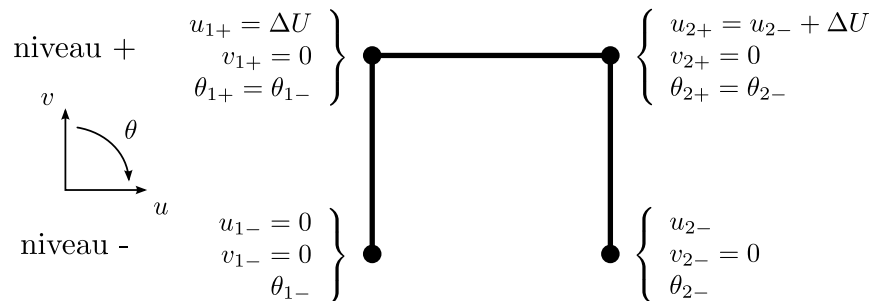


FIGURE 3.20 – Conditions aux limites pour un portique simple

La mise en œuvre de ces conditions aux limites sur un portique simple est présentée sur la figure 3.20. La cellule de base est située entre deux niveaux,

notés + et -, et comprend deux nœuds par niveau. Comme nous travaillons en deux dimensions, il faut définir 12 conditions aux limites. Nous commençons par celles du niveau inférieur. Tout d'abord, nous bloquons le mouvement de corps rigide de la cellule en imposant $u_{1-} = v_{1-} = 0$. Pour empêcher la rotation α du niveau inférieur, il faut également bloquer le déplacement vertical d'un deuxième point. Pour un portique simple, nous n'avons pas le choix et $v_{2-} = 0$. Ensuite, nous imposons le déplacement différentiel ΔU entre les deux niveaux :

$$u_{1+} = u_{1-} + \Delta U = \Delta U \quad \text{et} \quad u_{2+} = u_{2-} + \Delta U$$

Les autres conditions aux limites du niveau supérieur se déduisent par périodicité :

$$\begin{array}{ccc} v_{1+} = v_{1-} = 0 & \text{et} & v_{2+} = v_{2-} = 0 \\ \theta_{1+} = \theta_{1-} & & \theta_{2+} = \theta_{2-} \end{array}$$

Pour les structures portiques, les calculs de rigidité ont été réalisés avec le logiciel RDM6 qui ne permet pas d'imposer des conditions périodiques. Mais, ce type de chargement génère, à mi-hauteur des murs, un point de moment nul ($M_m = 0$) qui peut être remplacé par une rotule. Nous avons donc choisi une autre cellule de base et nous avons appliqué les conditions représentées sur la figure 3.21.

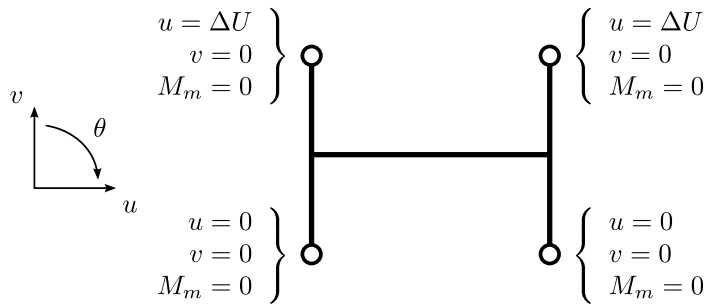


FIGURE 3.21 – Conditions aux limites pour un portique simple dans RDM6

Ces conditions ne sont pas tout à fait équivalentes à celles de la figure 3.20, puisque nous imposons le même déplacement transversal aux deux nœuds d'un niveau ce qui interdit la déformation en extension du plancher. Ce choix se justifie d'une part, par le fait que le plancher étant très rigide en traction-compression, le déplacement u_{2-} de la figure 3.20 est négligeable et d'autre part, par le fait que la dilatation transversale est une variable associée à la cinématique longitudinale et que sa valeur n'influence pas le calcul de K .

Les conditions aux limites utilisées pour calculer la rigidité d'un double portique avec RDM6 sont présentées sur la figure 3.22. La rotation α des niveaux est empêchée en bloquant la translation verticale des deux nœuds d'extrémité. Le déplacement vertical du nœud du milieu n'intervient pas dans le calcul de K car la variable Ψ (définition page 174) est associée à la cinématique longitudinale. Pour le vérifier, nous avons fait trois calculs dans RDM6 : un en bloquant le déplacement vertical du mur du milieu, un en le laissant libre et un en imposant un déplacement de 10 cm. Les deux premiers calculs donnent exactement le même

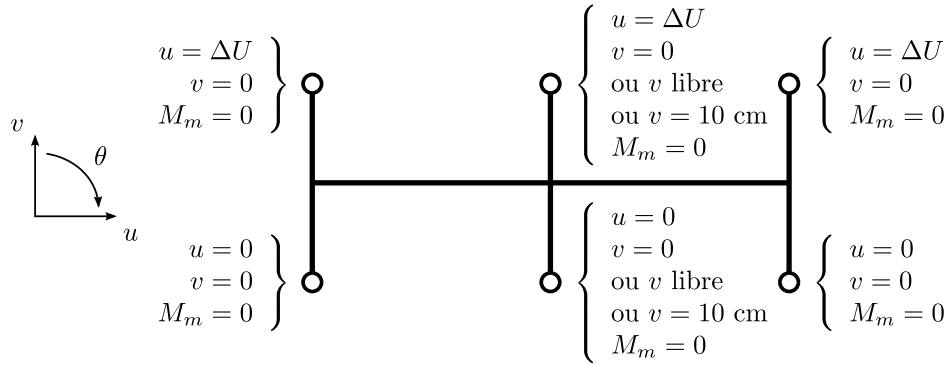


FIGURE 3.22 – Conditions aux limites pour un double portique dans RDM6

résultat. Le troisième redonne la même valeur de K mais la répartition des efforts entre les éléments est différente.

Les conditions aux limites des figures 3.21 et 3.22 ont été mises en œuvre sur deux structures en béton dont les caractéristiques mécaniques et géométriques sont résumées ci-dessous. Les éléments ont été modélisés par des poutres d'Euler-Bernoulli. Nous avons pris $\Delta U = \ell_m$ donc nous avons directement $K = |\Sigma T_m|$. Les valeurs de K sont ensuite comparées avec celles obtenues par les formules analytiques données par l'homogénéisation. Les deux méthodes donnent le même résultat.

Caractéristiques du béton

$$\rho = 2\,300 \text{ kg/m}^3$$

$$E = 30\,000 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0,2$$

Géométrie du portique simple

	a (cm)	h (m)	ℓ (m)	K (MN)
murs	20	1	3	53,336
plancher	30	1	3	90

Géométrie du double portique

	a (cm)	h (m)	ℓ (m)	K (MN)
murs extérieurs	20	1	3	53,336
mur intérieur	50	1	3	416,667
plancher	30	1	3	90

Valeurs de K (N)

	analytique	RDM6	erreur (%)
portique simple	33 489 423	33 395 176	0,28
double portique	99 187 896	99 981 828	0,21

Nous utilisons maintenant cette méthode dans la situation la plus intéressante, c'est-à-dire le calcul de K lorsque nous ne disposons pas d'une formule analytique. La structure étudiée est représentée sur la figure 3.23. La cellule de base, c'est-à-dire un étage, comporte dix murs numérotés de 1 à 10 et neuf planchers. Tous

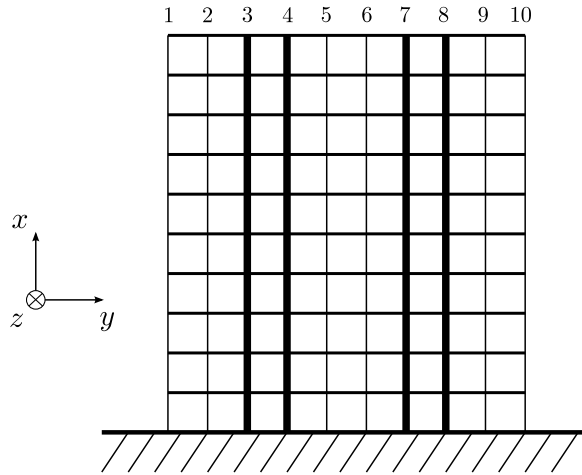


FIGURE 3.23 – Structure étudiée

les planchers sont identiques et font 30 cm d'épaisseur. Par contre, il existe deux types de murs : ceux qui portent les numéros 3, 4, 7 et 8 font 50 cm d'épaisseur alors les autres ne font que 20 cm d'épaisseur. Tous les éléments ont une longueur de 3 m et font 1 m de profondeur dans la direction z . La structure est encastree à la base et libre en tête. Le nombre de niveaux est volontairement limité à dix pour que le cisaillement soit le mécanisme prépondérant. Ainsi, la précision du calcul des fréquences propres dépend directement de la précision de l'estimation de K . En contrepartie, la séparation d'échelles est mauvaise pour les modes supérieurs et la précision du modèle de poutre équivalent diminue.

Sur cet exemple, nous avons testé deux techniques pour empêcher la rotation des niveaux α lors du calcul de K . Pour les conditions A (figure 3.24), le déplacement vertical des nœuds est bloqué uniquement pour les deux murs d'extrémité (1 et 10). Ce sont les conditions suggérées par l'homogénéisation : la rotation macroscopique est bloquée et la déformation interne périodique. Dans le cas B (figure 3.25), le déplacement vertical est bloqué pour tous les murs et la cellule subit une déformation de cisaillement pur. Dans RDM6, tous les éléments sont modélisés par des poutres d'Euler-Bernoulli et nous avons pris $\Delta U = \ell_m$. L'écart entre les deux valeurs de K est de l'ordre de 15 %. Les rigidités des deux autres mécanismes sont calculées grâce aux formules analytiques (3.21) et (3.22). Nous en avons déduit les ordres de grandeur des paramètres C et γ en fonction des puissances du ratio d'échelles réel pour le premier mode ϵ_1 pour les deux valeurs de K . Le report de ces ordres de grandeur sur le graphe 3.12 page 164 donne, à chaque fois, une poutre de cisaillement comme modèle macroscopique. Pour une poutre de cisaillement de hauteur H encastree à la base et libre en tête, les fréquences propres sont données par :

$$f_k = \frac{2k-1}{4H} \sqrt{\frac{K}{\Lambda}}$$

Notons que les ratios de fréquences suivent la suite des nombres impairs. Les trois premières fréquences propres de la structure sont ensuite estimées avec ce modèle de poutre pour les deux valeurs de K . Elles sont également calculées avec un modèle éléments finis de la structure complète dans le logiciel RDM6.

Les caractéristiques mécaniques et géométriques de la structure sont résumées ci-dessous. Puis les résultats sont présentés et commentés.

Caractéristiques du béton

$\rho = 2\,300 \text{ kg/m}^3$

$E = 30\,000 \text{ MPa}$

$\nu = 0,2$

Géométrie

	a (cm)	h (m)	ℓ (m)
murs 3, 4, 7 et 8	50	1	3
murs 1, 2, 5, 6, 9 et 10	20	1	3
planchers	30	1	3

$N = 10 \Rightarrow \epsilon_1 = \frac{\pi}{2N} = 0,157$

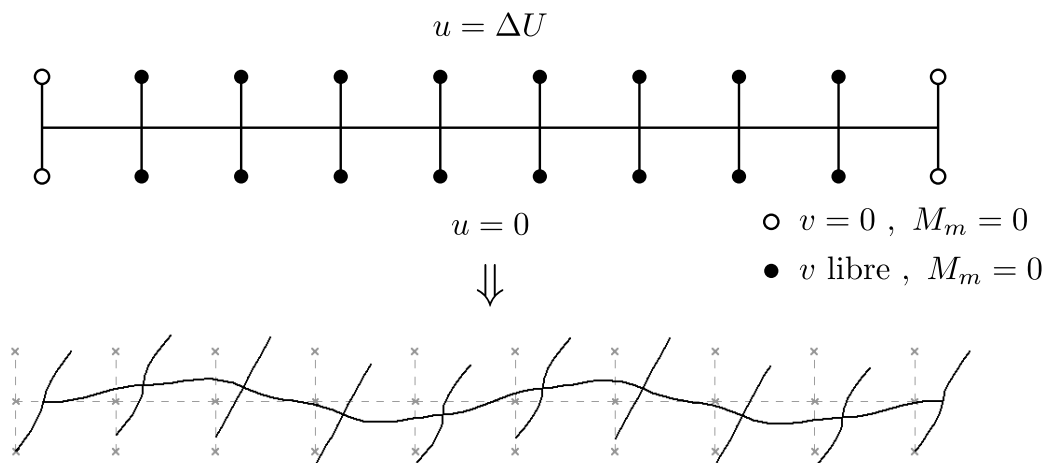


FIGURE 3.24 – Conditions aux limites A : seuls les murs 1 et 10 sont bloqués

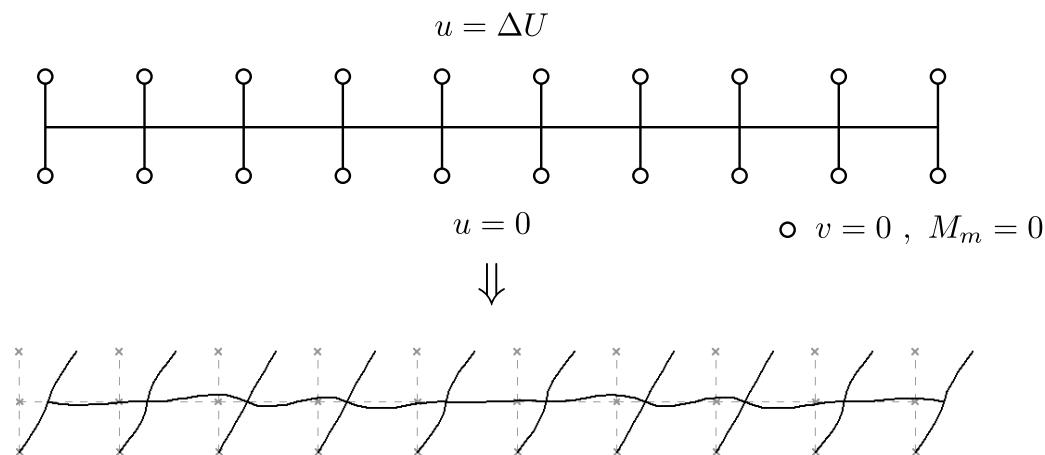


FIGURE 3.25 – Conditions aux limites B : tous les murs sont bloqués

Paramètres macroscopiques

$$EI_{\mathcal{M}} = 1\,370 \text{ MN.m}^2 \quad EI_M = 5\,832\,000 \text{ MN.m}^2 \quad \Lambda = 13\,570 \text{ kg/m}$$

	K (N)	C	x ($C = \epsilon_1^x$)	γ	y ($\gamma = \epsilon_1^y$)
Conditions A	325 636 510	49,103	-2,10	$2,35 \cdot 10^{-4}$	4,51
Conditions B	383 904 274	41,65	-2,02	$2,35 \cdot 10^{-4}$	4,51

Calcul des fréquences propres

Mode	RDM6		Conditions A		Conditions B	
	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	erreur (%)	f_i (Hz)	erreur (%)
1	1,428	1	1,291	9,59	1,402	1,82
2	4,424	3,098	3,873	12,5	4,205	4,95
3	7,849	5,496	6,454	17,8	7,008	10,7

Les ratios des fréquences propres calculées avec le logiciel RDM6 sont proches de la suite (1 ; 3 ; 5 ; ...). Cela confirme que la poutre de cisaillement est une bonne approximation du comportement macroscopique de la structure pour les premiers modes. L'estimation des fréquences propres avec ce modèle montre que c'est le K obtenu en bloquant tous les déplacements (conditions B) qui donne les meilleurs résultats. La précision est très bonne pour le premier mode et, comme prévu, elle diminue pour les modes supérieurs.

Il peut paraître surprenant que la meilleure estimation de K soit celle obtenue avec les conditions B. En effet, il est bien connu que l'effort tranchant provoque le gauchissement de la section dans les poutres continues. Néanmoins, les déformées modales calculées avec RDM6 (figure 3.26) indiquent que le fonctionnement de la structure est plus proche du cas B. Le « gauchissement » des niveaux n'est visible qu'au sommet de la structure pour les modes supérieurs. Une explication possible est que ce phénomène est dû aux conditions aux limites que nous étudions. À la base, la structure est encastree et tous les déplacements verticaux sont bloqués. Comme les murs sont très rigides en extension, cela se répercute sur les autres niveaux. Peut-être que pour une structure comprenant beaucoup plus de cellules, l'effet des conditions aux limites disparaît et les conditions A donnent la meilleure estimation de K . Mais pour un nombre d'étages comparable à ce qui existe dans les bâtiments courants, ce n'est pas le cas. De plus, dans la réalité les fondations ne sont pas infiniment rigides donc nous avons une situation intermédiaire entre A et B.

Avant de conclure cette partie sur la généralisation des modèles aux structures plus complexes, évoquons le cas des structures dissymétriques. La principale différence avec les structures symétriques est que les cinématiques transversales et longitudinales sont couplées. Lors de son master, Dang (2009) a appliqué la méthode HMPD sur des structures constituées de portiques simples dissymétriques. Son étude montre que les vibrations transversales sont décrites par les mêmes équations différentielles en U que dans le cas symétrique. De plus, les méthodes de calcul des trois rigidités macroscopiques sont toujours valables. La rigidité de la flexion interne $EI_{\mathcal{M}}$ reste égale à la somme des rigidités des murs en flexion. La rigidité de la flexion globale est donnée par le produit du module d'élasticité des

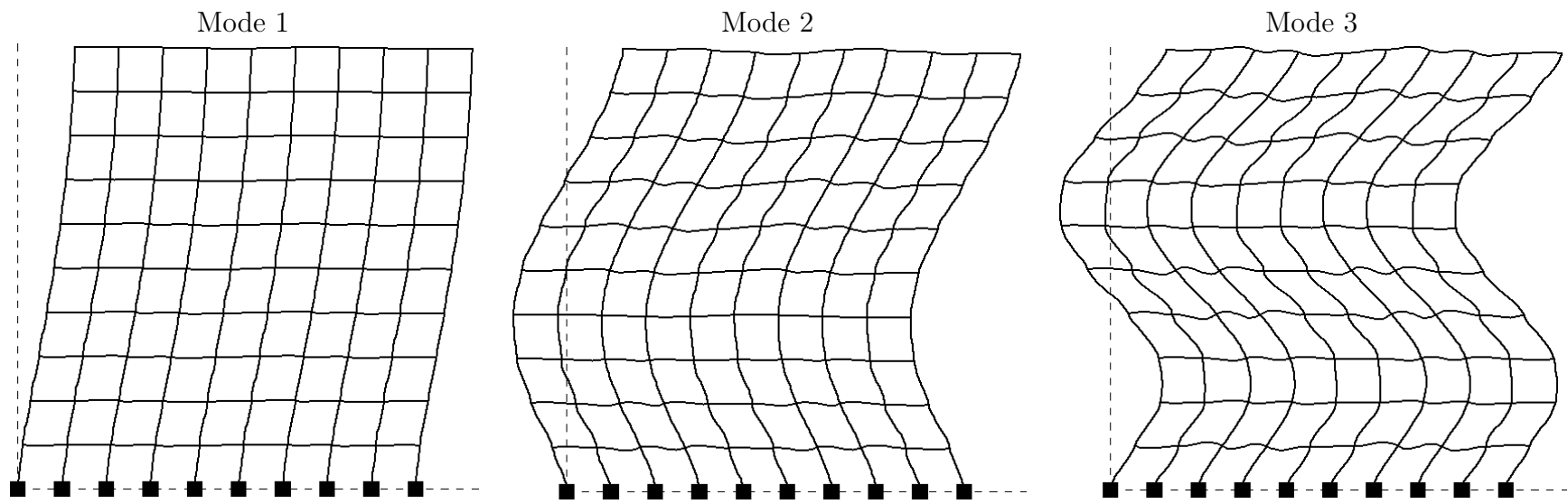


FIGURE 3.26 – Déformées modales

murs par une inertie macroscopique. Celle-ci est toujours obtenue en ne considérant que les murs et en négligeant leur inertie propre. La seule différence avec le cas symétrique est que l'inertie est calculée par rapport au centre de gravité des deux murs et plus par rapport au milieu des planchers. Enfin, même si la formule analytique de la rigidité du cisaillement K est beaucoup plus compliquée que dans le cas symétrique, la méthode de calcul que nous venons de proposer permet de la retrouver. Il est donc probable que les résultats concernant les structures symétriques soient généralisables aux structures dissymétriques.

Conclusion

L'objectif de cette partie était de déterminer si les résultats obtenus par Hans et Boutin sur les structures constituées de portiques simples peuvent être généralisés à des structures portiques quelconques. Pour cela, nous avons commencé par appliquer la méthode HMPD sur des structures constituées de doubles portiques. Cette étude a montré que les modèles de comportement et les critères d'identification restent valables à condition d'adapter les paramètres macroscopiques. De plus, nous avons constaté que l'expression de la rigidité du cisaillement K est différente de celles données dans la littérature. C'est pourquoi nous nous sommes intéressés au problème du calcul des rigidités des trois mécanismes. La méthode HMPD est un outil efficace mais sa mise en œuvre peut être fastidieuse. Nous avons donc proposé une méthode alternative et l'analyse du comportement dynamique d'une structure portique quelconque peut se ramener à :

- des calculs d'inertie élémentaires pour trouver EI_M et $EI_{\mathcal{M}}$,
- un calcul statique sur un modèle éléments finis d'une cellule pour estimer K ,
- l'identification du modèle de comportement à l'échelle macroscopique,
- et des calculs dynamiques uniquement sur le modèle de poutre équivalent.

À cause du fort contraste de rigidité entre l'extension des murs et le cisaillement de la cellule, il semblerait que les conditions aux limites à imposer à la cellule lors du calcul de la rigidité K dépendent des conditions aux limites aux extrémités de la structure.

3.3 Modes transversaux à plus hautes fréquences

Dans cette partie et la suivante, nous considérons de nouveau des structures constituées de portiques simples mais nous nous intéressons à d'autres modes de vibrations qui se produisent à des fréquences plus élevées. L'augmentation de la fréquence a deux conséquences. La première est que le terme d'inertie $\Lambda \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^0$ change d'ordre de grandeur. Il devient plus important et ne peut plus être équilibré par les forces élastiques donc $\tilde{U}^0 = 0$. Néanmoins, nous verrons qu'il peut exister des modes liés à la cinématique transversale. Ce sont des modes de giration pilotés par la variable $\tilde{\alpha}^0$ (figure 3.28 page 200). Dans son étude des vibrations des murs voiles couplés, Skattum (1971) avait déjà constaté l'existence de ce type de modes. Mais il n'avait considéré les forces d'inertie verticales que dans les murs et il avait supposé que tous les éléments étaient en équilibre quasi-statique à l'échelle locale. Or, la deuxième conséquence de l'augmentation de la fréquence est que les éléments peuvent entrer en résonance en flexion. Nous commençons donc par étudier les propriétés de ces nouveaux modes sur des structures avec des éléments suffisamment épais pour éviter la résonance. Puis nous diminuons progressivement les épaisseurs afin d'observer l'influence des effets dynamiques à l'échelle locale.

3.3.1 Sans résonance interne

Un exemple

Nous reprenons l'exemple de la partie 3.2.1. Il s'agit d'une structure dont les murs sont plus fins que les planchers. La géométrie est rappelée sur la figure 3.27. Dans ce cas, les modes de giration apparaissent pour des pulsations d'ordre $O(\epsilon^{1/4} \omega_r)$ et tous les éléments ont un comportement quasi-statique à l'échelle locale.

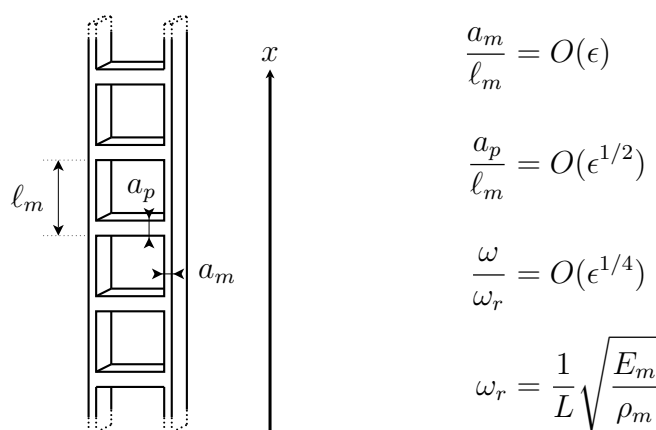


FIGURE 3.27 – Structure étudiée

Nous rappelons que, pour cette structure, les inconnues sont développées selon les puissances de $\epsilon^{1/2}$. Les équations d'équilibre fournies par la méthode HMPD sont données ci-dessous. La cinématique transverse est décrite par les

équations (T_t) , (M) , (\mathcal{M}_t) et par les variables U , α , θ . Les définitions des paramètres macroscopiques sont données page 153. Nous n'avons indiqué que les équations nécessaires pour étudier le comportement de la structure à l'ordre 0 mais les équations intermédiaires ont la même forme que les équations d'ordre 0.

$$\begin{cases} \Lambda_p \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^0 = 0 & (T_t 0) \\ \Lambda_p \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^2 - K_m \tilde{\theta}^{0'} = 0 & (T_t 2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_p (\tilde{\alpha}^0 - \tilde{\theta}^0) = 0 & (M 0) \\ K_p (\tilde{\alpha}^{3/2} - \tilde{\theta}^{3/2}) - E_m I \tilde{\alpha}^{0''} - \frac{\bar{\rho}_p \ell_p^3}{140 \ell_m} \tilde{\omega}_0^2 (17 \tilde{\alpha}^0 - 3 \tilde{\theta}^0) = 0 & (M \frac{3}{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_p (\tilde{\alpha}^0 - \tilde{\theta}^0) = 0 & (\mathcal{M}_t 0) \\ K_p (\tilde{\alpha}^{3/2} - \tilde{\theta}^{3/2}) + K_m (\tilde{U}^{0'} - \tilde{\theta}^0) - \frac{\bar{\rho}_p \ell_p^3}{420 \ell_m} \tilde{\omega}_0^2 (9 \tilde{\alpha}^0 - 2 \tilde{\theta}^0) = 0 & (\mathcal{M}_t \frac{3}{2}) \end{cases}$$

La seule différence par rapport aux équations de la partie 3.2.1 est l'augmentation de l'importance des termes d'inertie. Cela entraîne la nullité du déplacement transversal moyen \tilde{U}^0 et l'apparition de nouveaux termes dans les équations $(M \frac{3}{2})$ et $(\mathcal{M}_t \frac{3}{2})$. La rotation des nœuds $\tilde{\theta}^0$ est encore une variable cachée qui se déduit des équations d'équilibre interne $(M 0)$ ou $(\mathcal{M}_t 0)$. La combinaison des équations $(M \frac{3}{2})$ et $(\mathcal{M}_t \frac{3}{2})$ permet d'éliminer les variables d'ordre 3/2. Finalement, le comportement macroscopique de la structure est décrit par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} J_p \tilde{\omega}_0^2 \tilde{\alpha}^0 - K_m \tilde{\alpha}^0 + E_m I \tilde{\alpha}^{0''} = 0 \quad \text{avec} \quad J_p = \frac{\bar{\rho}_p \ell_p^3}{12 \ell_m} & (3.25) \\ \tilde{\theta}^0 = \tilde{\alpha}^0 \quad \text{et} \quad \tilde{U}^0 = 0 & \end{aligned}$$

Il n'y a plus qu'une seule variable pilotante : la rotation de la section $\tilde{\alpha}^0$. Les modes de vibrations correspondants sont donc des modes de giration pure, c'est-à-dire qu'il y a rotation des planchers sans déplacement transversal. Le premier terme non nul pour le déplacement est celui d'ordre 2. Il est donné par l'équation $(T_t 2)$:

$$\tilde{U}^2 = \frac{K_m}{\Lambda_p \tilde{\omega}_0^2} \tilde{\alpha}^{0'}$$

Les modes de giration sont décrits par une équation différentielle de degré 2 en $\tilde{\alpha}^0$ mais elle n'a pas tout à fait la même forme que l'équation qui décrit le comportement des poutres de cisaillement. En effet, il existe un terme élastique proportionnel à $\tilde{\alpha}^0$ alors que dans tous les autres modèles, les termes élastiques sont proportionnels à des dérivées. D'où provient cette singularité ?

Dans la partie 3.2.1, nous avons constaté que la poutre équivalente à cette structure est une poutre de Timoshenko élancée et nous avons défini les lois de comportement suivantes :

$$\tilde{T}^0 = -K_m (\tilde{U}^{0'} - \tilde{\alpha}^0) \quad \text{et} \quad \tilde{M}^0 = -E_m I \tilde{\alpha}^{0'}$$

Ainsi, l'équation (3.25) s'écrit :

$$J_p \tilde{\omega}_0^2 \tilde{\alpha}^0 - \tilde{T}^0 - \tilde{M}^{0'} = 0$$

C'est l'équation habituelle d'équilibre des moments dans une poutre de Timoshenko. Nous voyons ici que l'équilibre des moments dans les poutres de Timoshenko élancées est donné par le même type d'équation que celui des poutres de Timoshenko classiques décrivant le comportement des poutres pleines. La différence est que les termes n'ont pas le même ordre de grandeur. Pour les poutres de Timoshenko classiques, les variables U et α atteignent le régime dynamique dans la même gamme de fréquences et elles vérifient toutes les deux la même équation différentielle de degré 4. Les modes pilotés par U et ceux pilotés par α sont donc confondus. Pour les poutres de Timoshenko élancées, la variable α est encore en régime quasi-statique lorsque U atteint le régime dynamique. Les modes pilotés par U et ceux pilotés par α apparaissent donc dans des gammes de fréquences différentes. À basses fréquences, les modes pilotés par U sont décrits par l'équation de la poutre de Timoshenko sans l'inertie de rotation. À hautes fréquences, nous avons les modes de giration pure décrits par l'équation (3.25) dans laquelle U n'intervient plus. Il y a donc une plus grande variété de modes dans les poutres creuses que dans les poutres pleines.

Analyse modale

Nous allons maintenant résoudre l'équation (3.25) qui est rappelée ci-dessous et étudier les propriétés de ces nouveaux modes.

$$J_p \tilde{\omega}_0^2 \tilde{\alpha}^0 - K_m \tilde{\alpha}^0 + E_m I \tilde{\alpha}^{0''} = 0 \quad (3.26)$$

Pour cela, nous avons besoin de définir les conditions aux limites. Comme l'équation (3.26) est une équation différentielle de degré 2, la poutre ne peut vérifier qu'une seule condition à chacune de ses extrémités : soit un déplacement imposé, soit un effort imposé. Or l'équation (3.26) fait intervenir deux efforts. Pour savoir si les conditions aux limites doivent porter sur le moment global, sur l'effort tranchant ou sur une combinaison des deux, nous écrivons l'équilibre énergétique de la poutre. L'équation (3.26) est multipliée par $\frac{1}{2} \tilde{\alpha}^0$ et intégrée par parties sur la hauteur H de la structure :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^H J_p \tilde{\omega}_0^2 (\tilde{\alpha}^0)^2 dx &= \frac{1}{2} \int_0^H \left(K_m (\tilde{\alpha}^0)^2 - E_m I \tilde{\alpha}^{0''} \tilde{\alpha}^0 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^H K_m (\tilde{\alpha}^0)^2 dx - \left[E_m I \tilde{\alpha}^{0'} \tilde{\alpha}^0 \right]_0^H + \int_0^H E_m I (\tilde{\alpha}^{0'})^2 dx \right) \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons l'équation traduisant l'équilibre entre l'énergie cinétique, l'énergie élastique et le travail des conditions aux limites :

$$\frac{1}{2} \int_0^H J_p \tilde{\omega}_0^2 (\tilde{\alpha}^0)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^H \left(\frac{(\tilde{T}^0)^2}{K_m} + \frac{(\tilde{M}^0)^2}{E_m I} \right) dx + \frac{1}{2} \left[\tilde{M}^0 \tilde{\alpha}^0 \right]_0^H \quad (3.27)$$

Les seules conditions aux limites qui travaillent sont le moment global \tilde{M}^0 et la rotation de la section $\tilde{\alpha}^0$. Ce sont elles qui doivent être utilisées pour résoudre le

modèle de poutre équivalent à l'échelle macroscopique. Pour ce modèle, l'effort tranchant intervient uniquement dans l'énergie de déformation élastique. Une fois que l'équation (3.26) a été résolue, l'effort tranchant est complètement déterminé par $\tilde{\alpha}^0$ et il ne peut pas vérifier les conditions aux limites réelles. Cela signifie que ces dernières n'influencent pas le comportement global de la structure. Par contre, pour revenir à l'échelle locale, il faudrait vérifier toutes les conditions en introduisant des couches limites.

Nous pouvons maintenant résoudre l'équation (3.26). Pour cela, nous supposons que la poutre est encastree en $x = 0$ et libre en $x = H$. D'après l'équation (3.27) et les lois de comportement, les conditions aux limites s'écrivent :

$$\tilde{\alpha}^0(0) = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\alpha}^{0'}(H) = 0 \quad (3.28)$$

L'équation (3.26) peut se mettre sous la forme :

$$\tilde{\alpha}^{0''} = -\mathbb{D} \tilde{\alpha}^0 \quad \text{avec} \quad \mathbb{D} = \frac{J_p \tilde{\omega}_0^2 - K_m}{E_m I} \quad (3.29)$$

De plus, nous posons $D = 1/\sqrt{|\mathbb{D}|}$.

À basses fréquences, \mathbb{D} est un nombre négatif donc la solution générale de cette équation s'écrit :

$$\tilde{\alpha}^0(x) = A \operatorname{ch}\left(\frac{x}{D}\right) + B \operatorname{sh}\left(\frac{x}{D}\right)$$

où A et B sont deux constantes qui dépendent des conditions aux limites (3.28). Dans ce cas, la seule solution possible est $\tilde{\alpha}^0 = 0$ sur toute la hauteur de la poutre. Le cas où $\mathbb{D} = 0$ entraîne également $\tilde{\alpha}^0 = 0$ pour tout x . Pour avoir une solution non triviale, il faut donc que \mathbb{D} soit strictement positif ce qui impose une fréquence minimale.

Lorsque \mathbb{D} est positif la solution générale de l'équation (3.29) est :

$$\tilde{\alpha}^0(x) = A \cos\left(\frac{x}{D}\right) + B \sin\left(\frac{x}{D}\right)$$

Les conditions aux limites (3.28) imposent $A = 0$ et $(B/D) \cos(H/D) = 0$. Les solutions non triviales correspondent à :

$$\cos(H/D) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} D_k = \frac{2H}{(2k-1)\pi} \\ \alpha_k(x) = B \sin(x/D_k) \\ \omega_k^2 = \frac{1}{J_p} \left(E_m I \frac{(2k-1)^2 \pi^2}{4H^2} + K_m \right) \end{cases} \quad (3.30)$$

Le même type de raisonnement que celui mené pour les modes pilotés par U (partie 3.2.2 page 163) montre que D_k est la taille macroscopique caractéristique du $k^{\text{ième}}$ mode propre donc $D_k = L_k$. De plus, D_k est donnée par la même formule que dans la partie 3.2.2. Ainsi, les estimations de L_k et ϵ_k sont toujours valables pour les modes de giration. La déformée modale α_k est donnée par la même fonction que la déformée modale U_k pour une poutre de cisaillement. Ce qui change,

c'est la répartition des fréquences propres qui ne sont plus proportionnelles à la suite des nombres impairs.

Avant d'étudier les autres propriétés des modes de giration, utilisons ces formules pour une application numérique. Maintenant que nous disposons d'une estimation du ratio d'échelles réel, nous pouvons construire une structure constituée de portiques simples correspondant à l'exemple du début. Nous avons choisi une structure en béton de $N = 15$ niveaux dont les éléments font tous 3 m de longueur. Les caractéristiques mécaniques et géométriques de la structure sont données ci-dessous.

Caractéristiques du béton

$$\rho = 2\,500 \text{ kg/m}^3 \quad E_{\text{young}} = 30\,000 \text{ MPa} \quad \nu = 0,2$$

$$\Rightarrow E = \frac{E_{\text{young}}}{1 - \nu^2} = 31\,250 \text{ MPa}$$

Géométrie

$$N = 15 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_1 = \frac{\pi}{2N} = 0,105$$

$$\ell_m = \ell_p = 3 \text{ m} \quad H = 45 \text{ m} \quad h_m = h_p = 10 \text{ m}$$

$$a_m = \epsilon_1 \ell_m = 31,4 \text{ cm} \quad a_p = \sqrt{\epsilon_1} \ell_m = 97,1 \text{ cm}$$

Pour les propriétés de la poutre équivalente, nous devons anticiper sur la suite. En effet dans ce cas, la contribution des murs à l'inertie de rotation J_m n'est pas négligeable. Nous la calculons grâce à la formule obtenue en appliquant la méthode HMPD sur d'autres structures (partie 3.3.2). De plus, nous remplaçons K_m par la rigidité du cisaillement de l'ensemble de la cellule K afin d'augmenter la précision du modèle.

Poutre équivalente

$$K_p = \frac{12EI_p}{\ell_m \ell_p} = 31\,788 \text{ MN} \quad K_m = \frac{24EI_m}{\ell_m^2} = 2\,150 \text{ MN}$$

$$\Rightarrow K = \frac{K_p K_m}{K_p + K_m} = 2\,104 \text{ MN}$$

$$I = A_m \frac{\ell_p^2}{2} = 14,13 \text{ m}^4$$

$$J = J_m + J_p = \rho \left(A_m \frac{\ell_p^2}{2} + A_p \frac{\ell_p^3}{12\ell_m} \right) = 35\,325 + 18\,206 = 53\,531 \text{ kg.m}$$

Les fréquences des quatre premiers modes de giration sont calculées grâce aux expressions (3.30) et grâce à une modélisation par éléments finis. Cette dernière est réalisée avec le logiciel RDM6 et les éléments sont modélisés par des poutres d'Euler-Bernoulli. Les fréquences sont comparées dans le tableau 3.4 et les déformées sont représentées sur la figure 3.28. Pour les quatre premiers modes, l'erreur commise en utilisant le modèle homogénéisé est inférieure à 8 %.

Revenons maintenant à l'étude des propriétés des modes de giration et notamment leurs propriétés d'orthogonalité. Pour cela, nous repartons de l'équation

Mode	Homogénéisation	Éléments finis	Erreur
1	34,75	33,09	5,0 %
2	56,96	53,61	6,3 %
3	85,54	80,13	6,8 %
4	115,88	107,66	7,6 %

TABLE 3.4 – Comparaison des fréquences propres (en Hz) obtenues par homogénéisation et par éléments finis

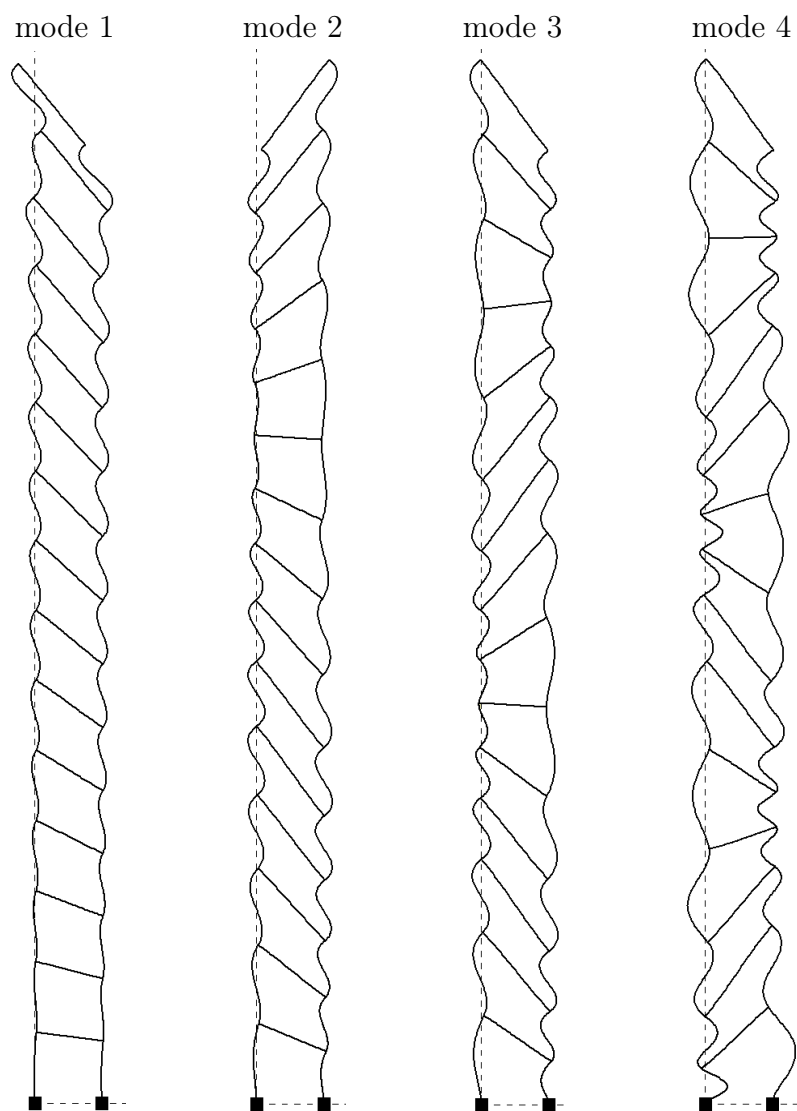


FIGURE 3.28 – Déformées des quatre premiers modes de giration calculées par le logiciel RDM6

vérifiée par chacun des α_k :

$$(J_p \omega_k^2 - K_m) \alpha_k + E_m I \alpha_k'' = 0$$

La multiplication par α_ℓ et l'intégration sur la hauteur H de la poutre donne :

$$\begin{aligned} \int_0^H (J_p \omega_k^2 - K_m) \alpha_k \alpha_\ell dx &= - \int_0^H E_m I \alpha_k'' \alpha_\ell dx \\ &= - \left[E_m I \alpha_k' \alpha_\ell \right]_0^H + E_m I \int_0^H \alpha_k' \alpha_\ell' dx \end{aligned}$$

Pour une poutre encastrée à la base et libre en tête, les conditions aux limites ne travaillent pas donc nous avons :

$$(J_p \omega_k^2 - K_m) \int_0^H \alpha_k \alpha_\ell dx = E_m I \int_0^H \alpha_k' \alpha_\ell' dx$$

Le même raisonnement s'applique à l'équation vérifiée par α_ℓ multipliée par α_k :

$$(J_p \omega_\ell^2 - K_m) \int_0^H \alpha_k \alpha_\ell dx = E_m I \int_0^H \alpha_k' \alpha_\ell' dx$$

Ainsi :

$$J_p (\omega_k^2 - \omega_\ell^2) \int_0^H \alpha_k \alpha_\ell dx = 0$$

Si $k \neq \ell$, alors $\omega_k^2 \neq \omega_\ell^2$ et les modes α_k et α_ℓ vérifient les propriétés d'orthogonalité suivantes :

$$\int_0^H \alpha_k \alpha_\ell dx = \int_0^H \alpha_k' \alpha_\ell' dx = 0$$

Il est donc possible de découpler les différents modes pour étudier la réponse de la structure. Supposons que celle-ci soit excitée par un moment harmonique d'amplitude S à la pulsation ω . La rotation de la section $\tilde{\alpha}^0$ est alors solution de l'équation suivante :

$$(J_p \omega^2 - K) \tilde{\alpha}^0 + E_m I \tilde{\alpha}^{0''} = S$$

Après décomposition de $\tilde{\alpha}^0$ dans la base modale ($\tilde{\alpha}^0(x, \omega) = \sum q_k(\omega) \alpha_k(x)$), cette équation devient :

$$(J_p \omega^2 - K_m) \sum (q_k \alpha_k) + E_m I \sum (q_k \alpha_k'') = S$$

$$\text{Or } E_m I \alpha_k'' = -(J_p \omega_k^2 - K_m) \alpha_k \quad \text{donc} \quad \sum (q_k \alpha_k J_p (\omega^2 - \omega_k^2)) = S$$

L'équation est ensuite multipliée par α_ℓ et intégrée sur la hauteur de la poutre. Grâce à l'orthogonalité des modes propres, il ne reste que la contribution de α_ℓ :

$$q_\ell(\omega) = \frac{1}{\omega^2 - \omega_\ell^2} \frac{\int_0^H S \alpha_\ell dx}{J_p \int_0^H \alpha_\ell^2 dx}$$

Ainsi, $q_\ell(\omega)$ est le produit du facteur de participation modale et de $1/(\omega^2 - \omega_\ell^2)$ qui est la fonction de transfert habituelle d'un oscillateur non amorti à un degré de liberté. Les développements précédents montrent que, lorsque les modes de giration existent, l'analyse modale s'applique de la même manière que pour les autres types de vibrations.

Modèle générique

Dans les paragraphes précédents, nous avons appliqué la méthode HMPD sur une structure avec des planchers plus épais que les murs car nous voulions éviter que les éléments entrent en résonance. En contrepartie, nous obtenons une équation où le moment d'inertie et la rigidité du cisaillement ont dégénéré : $J \approx J_p$ et $K \approx K_m$. Nous allons maintenant construire le modèle générique pouvant redonner tous les autres modèles possibles pour les structures constituées de portiques simples. Dans ce cas, nous ne nous préoccupons plus des ordres de grandeur et les « \sim » sur les variables cinématiques ne sont plus nécessaires.

D'autre part, nous avons vu dans la partie 3.2.3 que les résultats obtenus pour les portiques simples peuvent être généralisés à des portiques quelconques. Le comportement macroscopique, qui ne dépend que des variables U et α , est toujours décrit par le même type d'équations. Il suffit d'adapter les expressions des paramètres. Leur mode de calcul pour une structure constituée de portiques quelconques a été présenté dans la partie 3.2.3. C'est pourquoi, le modèle générique est construit en raisonnant directement sur les paramètres macroscopiques et notamment les trois rigidités K (cisaillement), EI_M (flexion globale) et $EI_{\mathcal{M}}$ (flexion interne) sans faire d'hypothèses sur leurs expressions. Il est donc valable pour une grande variété de structures. Par contre, le comportement local, qui est décrit par les variables cachées et les équations d'équilibre interne, dépend fortement de la géométrie de la cellule de base. Par la suite, nous donnons l'équation d'équilibre interne du portique simple et nous indiquons systématiquement quels sont les points spécifiques à ces structures. Lorsqu'aucune précision n'est donnée, les résultats sont valables pour des structures portiques quelconques.

Pour construire ce modèle générique des vibrations de giration, nous repartons du modèle générique défini pour les vibrations pilotées par U dans la partie 3.2.2 page 159. Nous gardons les lois de comportement inchangées mais nous ajoutons l'inertie de rotation dans l'équation d'équilibre des moments. Pour que le modèle soit applicable, il faut être capable de calculer cette inertie de rotation. Dans le cas des portiques simples, la contribution des planchers J_p au moment d'inertie est donnée par l'exemple précédent et celle des murs J_m par l'étude d'autres structures que nous présenterons dans la partie 3.3.2 :

$$\text{Portiques simples : } J = J_m + J_p = \bar{\rho}_m \frac{\ell_p^2}{2} + \bar{\rho}_p \frac{\ell_p^3}{12\ell_m}$$

Ainsi, le moment d'inertie total J est égal au moment d'inertie de la cellule divisé par sa longueur ℓ_m et peut facilement être calculé pour différents types de structures. La cinématique transversale de la poutre est alors décrite par les équations suivantes :

Lois de comportement :

$$\begin{aligned} \text{effort tranchant} \quad T &= -K(U' - \alpha) \\ \text{moment global} \quad M &= -EI_M \alpha' \\ \text{moment interne} \quad \mathcal{M} &= -EI_{\mathcal{M}} U'' \end{aligned}$$

Équations d'équilibre :

$$\Lambda \omega^2 U = \mathcal{T}' = (T - \mathcal{M}')' \quad J\omega^2 \alpha = T + M'$$

$$\left(\text{Équilibre interne du portique simple : } K_p(\alpha - \theta) + K_m(U' - \theta) = 0 \right)$$

Pour que des modes de *giration pure* puissent exister, il faut que la rotation de la section α soit la seule variable pilotante. Une condition nécessaire est que le déplacement transversal U soit négligeable dans la gamme de fréquences où les modes de giration sont susceptibles d'apparaître. Cela se produit lorsque l'inertie de translation devient très importante par rapport aux forces de rappel élastique. Ainsi, la condition U négligeable a deux conséquences. La première est que les modes de giration pure ne peuvent apparaître qu'à des fréquences suffisamment élevées. Lors de la résolution de l'équation décrivant ce type de modes, nous avons déjà constaté l'existence d'une fréquence minimale. Cependant, ces deux conditions ne sont pas identiques. La deuxième conséquence est que la structure doit avoir des caractéristiques particulières pour que U soit effectivement négligeable lorsque α atteint le régime dynamique.

Nous commençons par rechercher ces caractéristiques particulières. Pour cela, nous déterminons l'ordre de grandeur des pulsations ω_α où les modes de giration sont susceptibles d'apparaître, c'est-à-dire les pulsations où l'inertie de rotation équilibre les variations du moment global.

$$J\omega_\alpha^2 \alpha = O(M') = O(EI_M \alpha'') = O\left(EI_M \frac{\alpha}{L^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \omega_\alpha^2 = O\left(\frac{EI_M}{JL^2}\right)$$

Nous voulons que, pour ces pulsations, les forces d'inertie de translation dépassent les forces de rappel élastique :

$$\Lambda \omega_\alpha^2 U \gg -K(U'' - \alpha') + EI_{\mathcal{M}} U^{(4)}$$

$$\Rightarrow \quad O\left(\Lambda \frac{EI_M}{JL^2} U\right) \gg \max\left(O\left(K \frac{U}{L^2}\right), O\left(EI_{\mathcal{M}} \frac{U}{L^4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad O\left(\frac{\Lambda}{J}\right) \gg \max\left(O\left(\frac{K}{EI_M}\right), O\left(\frac{EI_{\mathcal{M}}}{EI_M L^2}\right)\right) \quad (3.31)$$

Nous obtenons ainsi une condition sur la répartition de la masse dans la structure. Si celle-ci est vérifiée, alors les gammes de fréquences ω_U et ω_α pour lesquelles les variables U et α atteignent le régime dynamique sont différentes et nous avons $\omega_U \ll \omega_\alpha$. Au contraire, si la condition (3.31) n'est pas vérifiée, alors U et α atteignent le régime dynamique en même temps : $\omega_U \approx \omega_\alpha$. Notons que cette condition a été obtenue en supposant que les forces d'inertie de translation sont équilibrées par les forces de cisaillement. Cela n'est pas vrai pour les poutres d'Euler-Bernoulli, donc la condition (3.31) ne peut pas être utilisée dans ce cas. Nous reviendrons sur les poutres d'Euler-Bernoulli plus tard.

Il est possible de démontrer que la condition (3.31) est toujours vérifiée pour les structures constituées de portiques simples dont les éléments sont suffisamment fins pour pouvoir être assimilés à des poutres. Des modes de giration pure

peuvent donc exister dans ces structures. La condition (3.31) n'est jamais vérifiée pour les poutres pleines. En effet, dans ce cas nous avons :

$$\frac{\Lambda}{J} = O\left(\frac{A}{I}\right) = O\left(\frac{K}{EI_M}\right)$$

Cela explique pourquoi il faut prendre en compte l'inertie de rotation dans le modèle de poutre de Timoshenko classique qui décrit le comportement des poutres épaisses.

Lorsque la condition (3.31) est vérifiée, au voisinage de ω_α , le déplacement transversal U est négligeable par rapport à la rotation α . Dans ce cas, l'effort tranchant T dégénère et \mathcal{M}' est négligeable par rapport à T donc $\mathcal{T} \approx T$. Alors la cinématique transversale de la poutre est décrite par les équations suivantes :

Lois de comportement :

$$\begin{aligned} \text{effort tranchant} \quad T &= K\alpha \\ \text{moment global} \quad M &= -EI_M \alpha' \\ \text{moment interne} \quad \mathcal{M} &= -EI_{\mathcal{M}} U'' \end{aligned}$$

Équations d'équilibre :

$$\begin{aligned} \Lambda \omega^2 U = T' = K \alpha' \quad \quad \quad J \omega^2 \alpha = T + M' \\ \left(\text{Équilibre interne du portique simple : } \theta = \frac{K_p}{K_p + K_m} \alpha \right) \end{aligned}$$

L'introduction des lois de comportement dans l'équation d'équilibre des moments donne l'équation décrivant les modes de giration :

$$J \omega^2 \alpha - K \alpha + EI_M \alpha'' = 0 \quad (3.32)$$

Nous pouvons vérifier que ce modèle dégénère bien en celui donné par la méthode HMPD pour l'exemple du début. En effet, lorsque les planchers sont plus épais que les murs, nous avons : $J \approx J_p$, $K \approx K_m$ et $\theta \approx \alpha$. De plus, cette équation a exactement la même forme que l'équation (3.26) que nous avons déjà résolue. En conséquence, toutes les propriétés que nous avons mises en évidence sont valables dans le cas général : conditions aux limites, déformées modales, estimations des ϵ_k et découplage des modes.

Conditions d'existence des modes de giration

Dans les paragraphes précédents, nous avons identifié deux conditions nécessaires à l'existence des modes de giration pure. La première (équation (3.31)) porte sur la façon dont la masse est répartie. Elle permet de s'assurer que les variables U et α n'atteignent pas le régime dynamique dans la même gamme de fréquences. Plus précisément, lorsque cette condition est vérifiée, nous avons : $\omega_U \ll \omega_\alpha$ où ω_U et ω_α sont respectivement les ordres de grandeur des pulsations des modes pilotés par U et de ceux pilotés par α . La seconde condition porte

sur la rigidité du cisaillement : il faut que $J\omega^2 - K$ soit strictement positif au voisinage de ω_α pour que l'équation (3.32) ait des solutions non triviales.

Dans ce paragraphe, nous précisons le rôle de ces deux conditions. La question de l'existence des modes de giration est reprise sous un angle un peu différent afin de faire le lien avec les critères d'identification proposés dans la partie 3.2.3 pour les modes pilotés par U . Nous balayons les différents modèles de poutres et nous regardons s'ils peuvent donner des modes de giration à plus hautes fréquences.

Commençons par rappeler les définitions des critères d'identification C et γ . Le paramètre C mesure l'importance de la flexion globale par rapport au cisaillement de la cellule et γ compare la flexion interne avec la flexion globale. Leurs expressions sont données ci-dessous ainsi que les domaines de validité des différents modèles qui décrivent les vibrations pilotées par U (figure 3.29).

$$C = \frac{EI_M}{KL^2} = \epsilon^x \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{EI_{\mathcal{M}}}{EI_M} = \epsilon^y$$

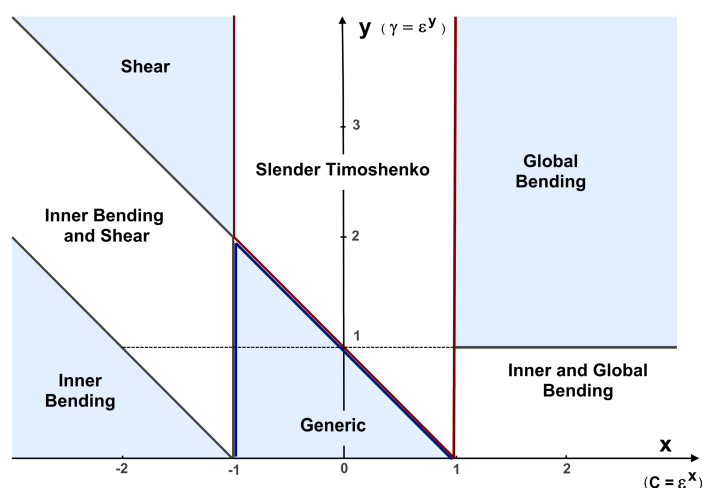


FIGURE 3.29 – Domaines de validité des différents modèles qui décrivent les vibrations pilotées par U . Source : Hans et Boutin (2008)

Ces paramètres peuvent également être utilisés pour réécrire les deux conditions nécessaires :

- répartition de la masse :

$$\frac{\Lambda L^2}{J} \gg \max\left(\frac{1}{C}, \gamma\right) \quad (3.33)$$

- $0 < J\omega^2 - K$ au voisinage de ω_α :

$$\omega_\alpha^2 = O\left(\frac{EI_M}{JL^2}\right) \quad \Rightarrow \quad C \geq O(1)$$

Nous voyons ici que le paramètre déterminant l'existence des modes de giration est C . Cela est cohérent avec le fait que l'équation (3.32) décrivant ces modes fait intervenir l'effort tranchant T et le moment global M . Nous allons maintenant

étudier l'évolution de l'équation (3.32) en fonction de l'ordre de grandeur de C et décrire les comportements possibles.

Le cas où C est petit ($C \leq O(\epsilon)$) correspond soit aux poutres d'Euler-Bernoulli, soit aux poutres avec les deux types de flexion (figure 3.29). Nous avons vu que la condition (3.33) n'est pas adaptée dans ce cas mais supposons que nous ayons bien $\omega_U \ll \omega_\alpha$. Cela est cohérent avec le fait qu'habituellement, l'inertie de rotation est négligée dans les poutres d'Euler-Bernoulli. Alors, au voisinage de ω_α , le déplacement U est négligeable. L'effort tranchant dégénère ($T \approx K\alpha$) et nous pouvons écrire l'équation (3.32). Lorsque C est petit, le cisaillement est beaucoup plus rigide que la flexion globale, donc T et M' ne sont pas du même ordre de grandeur. Dans l'équation (3.32), l'effort tranchant est très important et il remonte dans une équation d'ordre inférieur où il n'est plus équilibré. En conséquence, $\alpha = 0$ et il ne peut pas y avoir de modes de giration quelle que soit la fréquence. C'est pourquoi ces modes ne peuvent exister que si le cisaillement est suffisamment souple.

Si $C = O(1)$, alors le cisaillement et la flexion globale ont la même importance. D'après la figure 3.29, cela correspond soit aux poutres de Timoshenko, soit aux poutres génériques. Implicitement, c'est le cas que nous avons présenté dans les paragraphes précédents puisque nous sommes partis du modèle générique pour construire l'équation (3.32). Lorsque la condition (3.33) est vérifiée, le comportement à basses fréquences de la structure est décrit par le modèle générique ou le modèle de poutre de Timoshenko élancée et, à hautes fréquences, nous avons des modes de giration pure. Si la condition (3.33) n'est pas vérifiée, les variables U et α atteignent le régime dynamique dans la même gamme de fréquences. Alors le comportement de la poutre est décrit :

– soit par le modèle de poutre de Timoshenko classique :

$$\begin{cases} \Lambda \omega^2 U = -K(U'' - \alpha') \\ J\omega^2 \alpha = -K(U' - \alpha) - EI_M \alpha'' \end{cases}$$

$$\Rightarrow EI_M X^{(4)} + \left(J\omega^2 + \frac{EI_M}{K} \Lambda \omega^2 \right) X'' - \left(1 - \frac{J\omega^2}{K} \right) \Lambda \omega^2 X = 0$$

avec $X = U$ ou α

– soit par un modèle de poutre générique avec inertie de rotation :

$$\begin{cases} \Lambda \omega^2 U = -K(U'' - \alpha') + EI_{\mathcal{M}} U^{(4)} \\ J\omega^2 \alpha = -K(U' - \alpha) - EI_M \alpha'' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{EI_{\mathcal{M}} EI_M}{K} X^{(6)} - \left(EI_M + EI_{\mathcal{M}} \left(1 - \frac{J\omega^2}{K} \right) \right) X^{(4)} - \left(J\omega^2 + \frac{EI_M}{K} \Lambda \omega^2 \right) X'' + \left(1 - \frac{J\omega^2}{K} \right) \Lambda \omega^2 X = 0$$

avec $X = U$ ou α

Dans les deux cas, les variables U et α vérifient la même équation différentielle. Il n'y a donc qu'un seul type de modes qui combinent déplacement transversal et rotation de la section.

Le cas où C est grand ($C \geq O(\epsilon^{-1})$) est le plus complexe. D'après la figure 3.29, il correspond soit aux poutres de cisaillement, soit aux poutres avec flexion interne seule, soit aux poutres combinant ces deux mécanismes. Pour les grandes valeurs de C , le cisaillement est beaucoup plus souple que la flexion globale donc $T \ll M'$. Dans ce cas, l'équation d'équilibre des moments dégénère :

$$J\omega^2\alpha + EI_M\alpha'' = 0 \quad (3.34)$$

Comme l'effort tranchant n'apparaît plus dans cette équation, elle est toujours valable même si U n'est pas négligeable. Plusieurs situations sont alors possibles en fonction du type de poutre équivalente et des ordres de grandeurs de ω_U et ω_α .

Pour les trois modèles, si la condition (3.33) est vérifiée, alors α est encore en régime quasi-statique lorsque U atteint le régime dynamique. Au voisinage de ω_U , l'équation (3.34) dégénère : $EI_M\alpha'' = 0$, ce qui impose $\alpha = 0$ avec les conditions aux limites (par exemple, poutre encastree à la base et libre en tête). Le déplacement transversal U est alors donné par l'équation d'équilibre de l'effort tranchant total \mathcal{T} :

$$\Lambda\omega^2U = \mathcal{T}' = -K(U'' - \alpha') + EI_{\mathcal{M}}U^{(4)} = -KU'' + EI_{\mathcal{M}}U^{(4)}$$

Nous retrouvons l'équation de la poutre avec flexion interne et cisaillement. Celle-ci peut éventuellement dégénérer en un des modèles plus simples selon l'ordre de grandeur de γ . À plus hautes fréquences, l'inertie de translation devient très importante et le déplacement U très petit. Lorsque α atteint le régime dynamique, nous avons des modes de giration pure décrit par l'équation (3.34).

Imaginons maintenant que la condition (3.33) ne soit pas vérifiée. Dans ce cas, les variables U et α atteignent le régime dynamique pour les mêmes gammes de fréquences et le comportement de la structure dépend du type de poutre équivalente. Nous commençons par raisonner sur une poutre avec flexion interne seule puis nous nous intéresserons aux poutres de cisaillement. Les poutres avec flexion interne et cisaillement ont un comportement intermédiaire.

Pour une poutre avec flexion interne seule, les vibrations sont décrites par le système suivant :

$$\begin{cases} J\omega^2\alpha + EI_M\alpha'' = 0 \\ \Lambda\omega^2U - EI_{\mathcal{M}}U^{(4)} = 0 \end{cases}$$

Ici, les variables U et α vérifient des équations différentielles différentes et complètement indépendantes. Il y a donc deux séries de modes : des modes de translation pure pilotés par U et des modes de giration pure pilotés par α . Le fait que la condition (3.33) soit vérifiée ou non n'influence pas les déformées modales mais joue seulement sur la répartition des modes. Lorsque la condition est vérifiée, nous avons tous les modes de translation à basses fréquences puis tous les modes de giration à plus hautes fréquences. Si elle n'est pas vérifiée, il y a alternance de ces deux types de modes dans la même gamme de fréquences.

La situation est différente pour les poutres de cisaillement. Dans ce cas, le comportement de la structure est décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} J\omega^2\alpha + EI_M\alpha'' = 0 & (a) \\ \Lambda\omega^2U + K(U'' - \alpha') = 0 & (b_0) \end{cases}$$

De nouveau, les variables U et α ne vérifient pas la même équation différentielle et nous avons deux séries de modes. Par contre maintenant, les équations sont couplées de façon dissymétrique.

La résolution de l'équation (a) donne les pulsations propres ω_k et les rotations $\alpha_k(x)$ pour les modes de giration. L'introduction de ce terme source dans l'équation (b₀) permet ensuite de calculer le déplacement transversal associé U_k . Donc il ne s'agit plus de modes de giration pure mais de *modes qui combinent α et U* . Recherchons maintenant les modes pilotés par la variable U . L'équation (b₀) permet d'exprimer α' en fonction de U :

$$\alpha' = \frac{\Lambda \omega^2}{K} U + U''$$

L'introduction de cette expression dans la dérivée de l'équation (a) donne :

$$J\omega^2 \left(\frac{\Lambda \omega^2}{K} U + U'' \right) + EI_M \left(\frac{\Lambda \omega^2}{K} U'' + U^{(4)} \right) = 0 \quad (b_1)$$

Cette équation admet deux types de solutions :

$$\begin{array}{ll} J\omega^2 \alpha' + EI_M \alpha^{(3)} = 0 & \Rightarrow \text{modes de giration} \\ \text{ou } \Lambda \omega^2 U + KU'' = 0 & \Rightarrow \text{modes de translation} \end{array}$$

Les premières solutions correspondent aux modes pilotés par α que nous avons déjà décrits. Les modes pilotés par U sont les solutions de la deuxième équation, c'est-à-dire de l'équation habituelle pour la poutre de cisaillement. Dans ce cas, $\alpha' = 0$ ce qui impose $\alpha = 0$ avec les conditions aux limites. Nous avons donc des modes de *translation pure* sans rotation de la section.

Pour cette situation, il y a alternance, dans la même gamme de fréquences, de modes de translation pure et de modes où la rotation et la translation sont couplées. L'apparente dissymétrie du couplage vient du fait que nous n'avons considéré que l'ordre dominant. Les équations d'ordres supérieurs contiennent probablement le couplage complémentaire entre les modes pilotés par U et la giration.

L'existence de ces comportements atypiques est confirmée par des simulations par éléments finis réalisées avec le logiciel RDM6. Nous considérons toujours des structures portiques car, dans ce cas, nous connaissons les expressions analytiques des paramètres macroscopiques. Pour que les modes de giration et de translation apparaissent dans la même gamme de fréquences, il faut excentrer au maximum la masse de la structure. C'est pourquoi nous avons modélisé des doubles portiques et augmenté la longueur des planchers ($\ell_p = 6$ m). De plus, nous avons modifié les densités des matériaux : la masse volumique des murs extérieurs est $\rho_{me} = 10\,000$ kg/m³ alors que celle du mur intérieur et des planchers vaut $\rho_{mi} = \rho_p = 500$ kg/m³. Les autres caractéristiques des matériaux sont identiques pour tous les éléments et nous avons retenu celles du béton.

Trois structures ont été modélisées. Pour la première (structure S1), tous les éléments sont identiques et ont une épaisseur de 20 cm. Le modèle macroscopique équivalent est la poutre de cisaillement. Pour la structure S2, nous avons

augmenté les épaisseurs des murs ($a_{me} = a_{mi} = 80$ cm) afin que le comportement macroscopique soit piloté par la flexion interne. Enfin, nous avons modélisé une structure (S3) dont tous les éléments font 60 cm d'épaisseur pour voir l'influence du couplage entre rotation et translation. Toutes les structures comportent 15 niveaux. Leurs caractéristiques géométriques et mécaniques sont résumées ci-dessous. Les expressions des paramètres macroscopiques pour les doubles portiques sont données page 176. Pour l'inertie de rotation, nous calculons sa valeur sur un étage et nous la divisons par la hauteur ℓ_m :

$$J = J_{me} + J_p = 2\bar{\rho}_{me}\ell_p^2 + \bar{\rho}_p \frac{(2\ell_p)^3}{12\ell_m}$$

Caractéristiques du béton

$$E_{young} = 30\,000 \text{ MPa} \quad \nu = 0,2 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{E_{young}}{1 - \nu^2} = 31\,250 \text{ MPa}$$

Géométrie

$$N = 15 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_1 = \frac{\pi}{2N} = 0,105$$

$$\ell_m = 3 \text{ m} \quad \ell_p = 6 \text{ m} \quad H = 45 \text{ m} \quad h_m = h_p = 10 \text{ m}$$

Structure	a_{me} (cm)	a_{mi} (cm)	a_p (cm)
S1	20	20	20
S2	80	80	20
S3	60	60	60

Poutres équivalentes

Structure	K (MN)	EI_M (MN.m ²)	$EI_{\mathcal{M}}$ (MN.m ²)	Λ (kg/m)	J (kg.m)
S1	203	$4,5 \cdot 10^6$	625	45 000	1 488 000
S2	276	$18 \cdot 10^6$	40 000	168 000	5 808 000
S3	5 473	$13,5 \cdot 10^6$	16 875	135 000	4 464 000

Structure	C	x ($C = \epsilon_1^x$)	γ	y ($\gamma = \epsilon_1^y$)	$\Lambda L_1^2 / J$
S1	27	-1,46	$1,4 \cdot 10^{-4}$	3,94	24,82
S2	79	-1,94	$2,2 \cdot 10^{-3}$	2,71	23,74
S3	3	-0,49	$1,25 \cdot 10^{-3}$	2,96	24,82

Pour chacune des trois structures, nous avons calculé les paramètres C et γ et placé le point représentatif sur la figure 3.30. Ces points donnent le comportement macroscopique pour le premier mode de translation *et* le premier mode de giration puisque L a le même ordre de grandeur dans les deux cas. Pour les modes supérieurs, le point représentatif se déplace sur une droite passant par le point P(2,0) en s'éloignant de P. Ainsi, la valeur du paramètre C augmente avec le numéro du mode et les phénomènes que nous avons décrits deviennent de plus en plus marqués. Par contre, la séparation d'échelles devient de moins en moins bonne et la précision des modèles macroscopiques diminue.

Une partie des déformées modales obtenues avec le logiciel RDM6 est représentée sur les figures 3.31, 3.32 et 3.33. À chaque fois, nous avons donné les modes de giration et les modes de translation voisins pour voir s'il y a des couplages. Pour la poutre de cisaillement (structure S1, figure 3.31), le calcul par

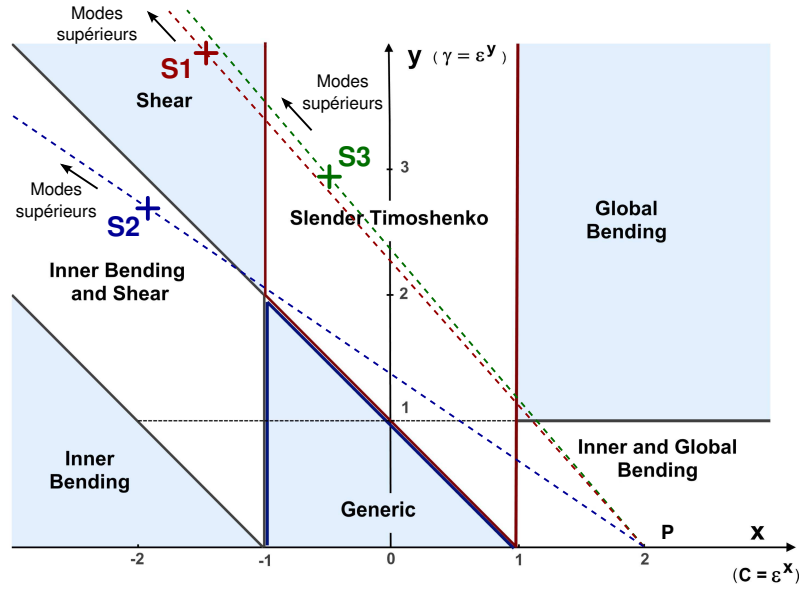


FIGURE 3.30 – Modèles macroscopiques décrivant le premier mode des trois structures étudiées.

éléments finis confirme le couplage dissymétrique. Le premier mode de giration est clairement associée à de la translation alors que pour les modes T9 et T10 la rotation des planchers est très faible (mais non nulle). Comme prévu, l'augmentation des épaisseurs des murs (structure S2, figure 3.32) augmente l'importance de la flexion interne et permet de découpler complètement translation et rotation. Au contraire, l'augmentation des épaisseurs de tous les éléments (structure S3, figure 3.33) renforce ce couplage. Dans ce cas, aussi bien les modes pilotés par α que ceux pilotés par U combinent translation et rotation. Il devient difficile de distinguer le mode G1 des modes T4 et T5. Pour le deuxième mode de giration, la valeur de C augmente et le comportement de la structure se rapproche de celui d'une poutre de cisaillement. Numériquement, nous constatons bien la diminution du couplage. Pour les fréquences supérieures à celle du quinzième et dernier mode de translation, nous observons un mode de giration pure (G4).

L'existence de modes qui combinent translation et rotation pose la question de la taille macroscopique L . En effet, pour les exemples précédents, les tailles caractéristiques L_U et L_α des variations de U et α sont différentes. Considérer la plus petite des deux, c'est-à-dire L_U dans notre cas, est une approche très restrictive. Comme les modes de giration apparaissent à des fréquences relativement élevées, U ne vérifie déjà plus la condition de séparation d'échelles pour le premier mode de giration. Néanmoins, les modes de giration sont pilotés par la rotation α et par l'équation (3.34) dans laquelle U n'apparaît pas. Le calcul des pulsations propres ω_k et des déformées α_k peut donc être mené même si U ne respecte plus la condition de séparation d'échelles. Par contre, l'équation donnant la déformée U_k n'est probablement plus valable. De même, pour les modes pilotés par la translation U , nous avons forcément $L = L_U$.

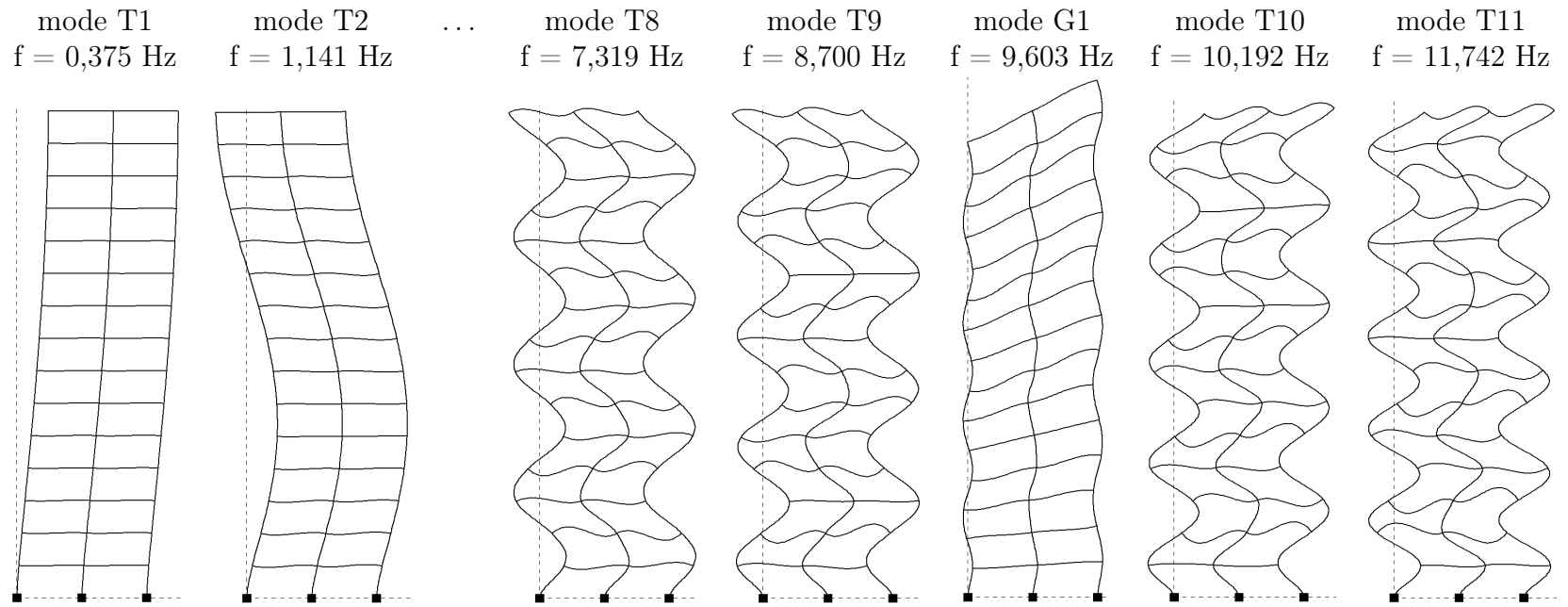


FIGURE 3.31 – Déformées modales calculées avec le logiciel RDM6 pour la structure S1 (cisaillement)
 T : mode transverse, G : mode de giration (Les modes T3, T4, T5, T6 et T7 ne sont pas représentés.)

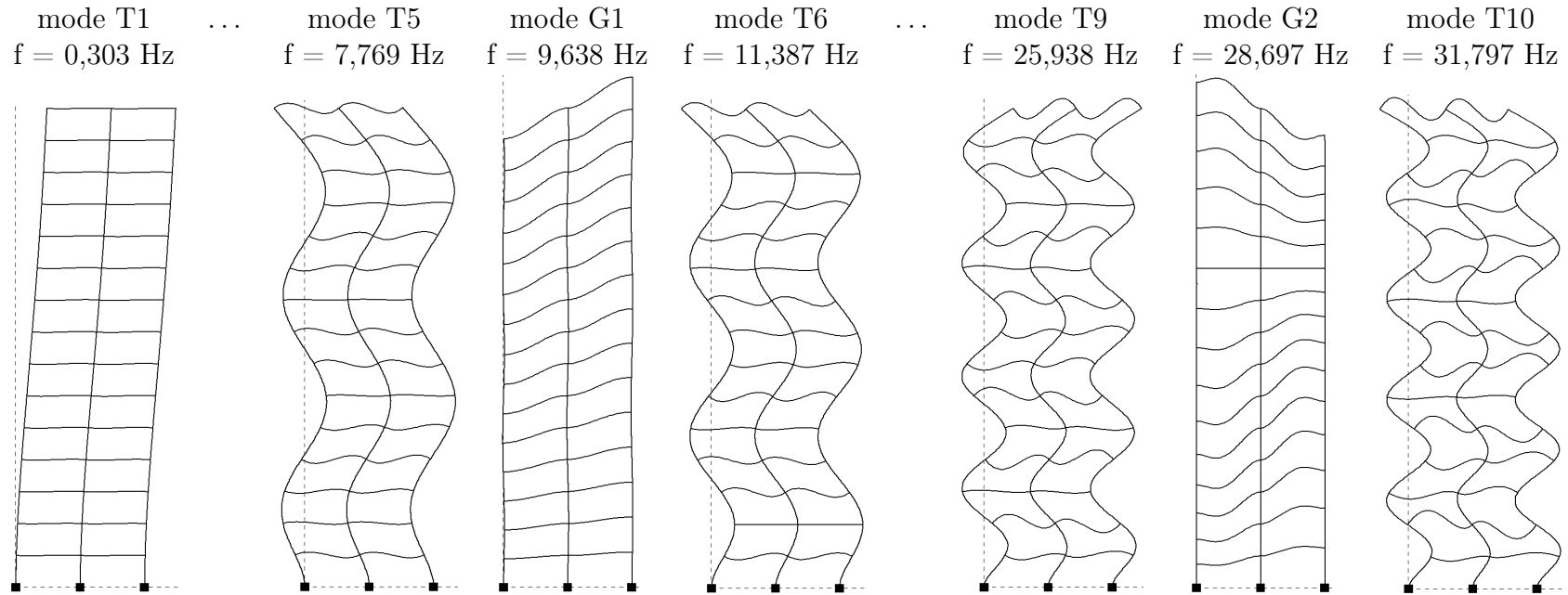


FIGURE 3.32 – Déformées modales calculées avec le logiciel RDM6 pour la structure S2 (flexion interne)
T : mode transverse, G : mode de giration (Les modes T2, T3, T4, T7 et T8 ne sont pas représentés.)

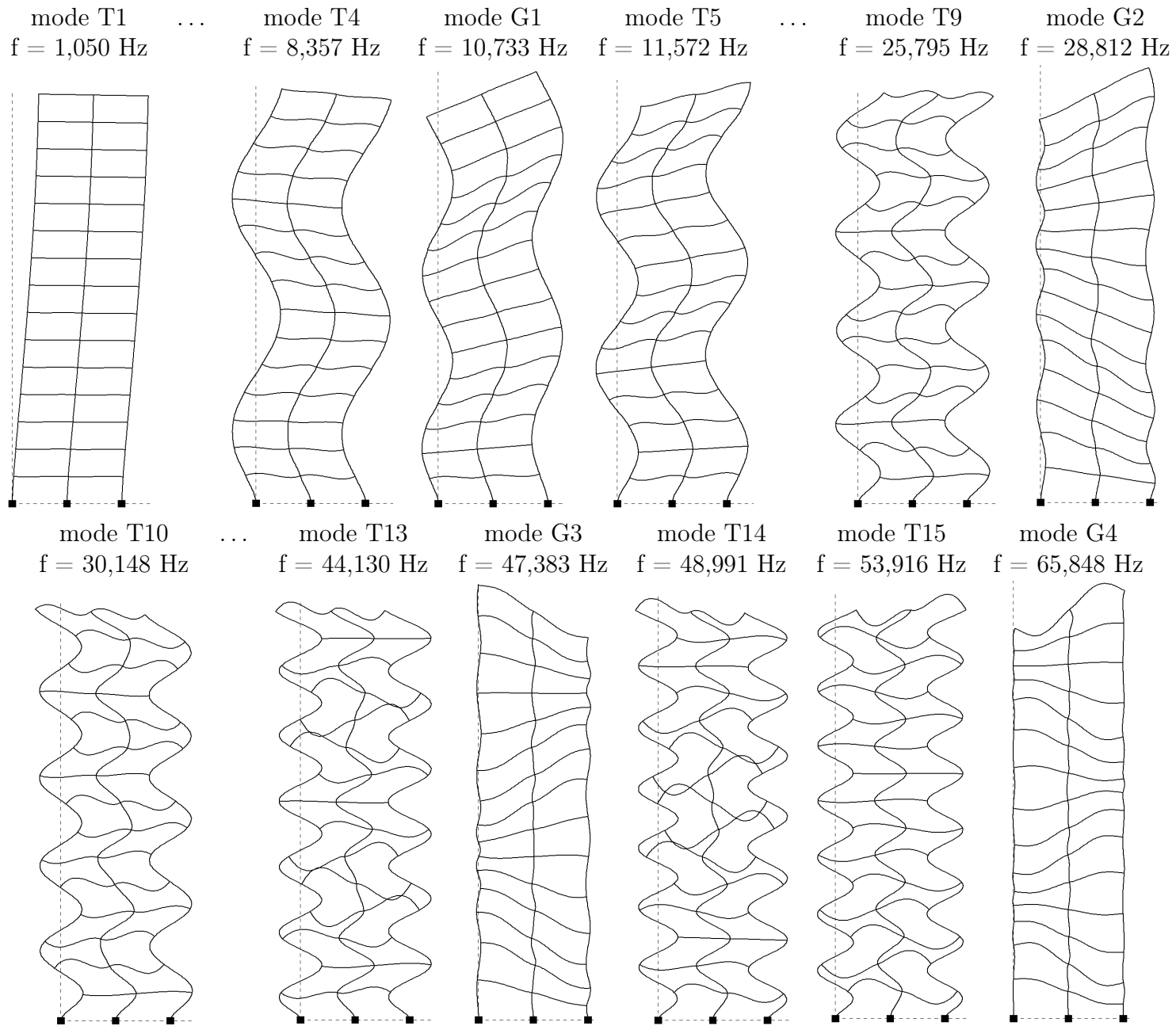


FIGURE 3.33 – Déformées modales calculées avec le logiciel RDM6 pour la structure S3
 T : mode transverse, G : mode de giration (Les modes T2, T3, T6, T7, T8, T11 et T12 ne sont pas représentés.)

Vérifions sur les structures précédentes qu'il est possible de calculer les fréquences des modes de giration même lorsque U ne respecte plus la condition de séparation d'échelles. Pour cela, nous résolvons l'équation (3.34) et nous en déduisons l'expression des pulsations propres pour une poutre encastrée à la base et libre en tête :

$$\omega_k^2 = \frac{EI_M}{J} \left(\frac{(2k-1)\pi}{2H} \right)^2 \quad (3.35)$$

Cette formule néglige l'effet du cisaillement et est valable pour les structures S1, S2 et les modes supérieurs de la structure S3 pour lesquels les valeurs de C sont suffisamment élevées. Pour le premier mode de la structure S3, le point représentatif sur la figure 3.30 se trouve dans la zone de la poutre de Timoshenko élançée donc le cisaillement n'est pas négligeable. En première approximation, nous utilisons la solution de l'équation (3.32) page 204 pour estimer cette fréquence :

$$\omega_1^2 = \frac{1}{J} \left(EI_M \left(\frac{\pi}{2H} \right)^2 + K \right) \quad (3.36)$$

L'équation (3.32) prend en compte l'effet du cisaillement mais néglige le couplage entre U et α donc, en toute rigueur, nous ne sommes pas dans son domaine de validité.

Mode	S1	S2	S3 (3.35)	S3 (3.36)
G1	9,661 Hz 0,61 %	9,780 Hz 1,5 %	9,661 Hz 10 %	11,153 Hz 3,9 %
G2		29,341 Hz 2,2 %	28,984 Hz 0,60 %	
G3			48,306 Hz 1,9 %	
G4			67,629 Hz 2,7 %	

TABLE 3.5 – Fréquences des modes de giration calculées grâce aux modèles macroscopiques et erreur par rapport aux simulations par éléments finis

Les valeurs des fréquences propres calculées grâce aux formules (3.35) et (3.36) pour les modes de giration des trois structures et les pourcentages d'erreur par rapport aux simulations par éléments finis sont indiqués dans le tableau 3.5. L'expression (3.35) donne de très bons résultats dans son domaine de validité. Malgré les réserves que nous avons émises, l'expression (3.36) fournit également une bonne estimation du premier mode de la structure S3. Il faudrait étudier d'autres structures pour voir si ce résultat est général. Le changement de comportement de la structure S3 prédit grâce au paramètre C apparaît clairement dans ce tableau. En effet, la formule (3.35) donne de meilleurs résultats pour les modes supérieurs que pour le premier mode.

Même s'il est toujours possible d'estimer les fréquences propres, l'existence de deux tailles macroscopiques L_U et L_α pose des problèmes pour définir des critères faisant intervenir à la fois la translation et la rotation. En particulier,

il faut relativiser la portée du critère (3.33) sur la répartition de la masse dans la structure. Celui-ci a été construit en supposant que les tailles caractéristiques des variations de U et α sont identiques. Il permet donc de comparer les ordres de grandeur des fréquences propres des modes de translation et de giration qui portent le *même numéro* : ω_{Uk} et $\omega_{\alpha k}$. Cela indique une tendance mais ce n'est pas suffisant pour savoir si les gammes de fréquences des modes de translation et de giration sont complètement disjointes ou si elles se recouvrent partiellement. Pour cela, il faudrait pouvoir comparer la pulsation du dernier mode de translation, c'est-à-dire ω_{UN} pour une structure de N niveaux, avec celle du premier mode de giration $\omega_{\alpha 1}$. Cela explique pourquoi les modes de giration apparaissent au milieu des modes de translation pour les trois structures modélisées alors que la condition (3.33) est respectée. Néanmoins, à chaque fois, la fréquence du premier mode de giration est bien supérieure à la fréquence du premier mode de translation.

Malgré tout, l'emploi de ce critère reste intéressant lorsque $C = O(1)$. S'il n'est pas respecté, alors U et α vérifient la même équation différentielle et il n'y a qu'une seule série de modes comme dans les poutres pleines. Au contraire, si la condition (3.33) est respectée, il y a une série de modes pilotée par U et une série pilotée par α comme pour la structure S3. Par contre, nous ne savons pas s'il existe des couplages ou si nous avons tous les modes de translation à basses fréquences puis des modes de giration pure à hautes fréquences.

Conclusion

Après avoir constaté l'existence de modes de giration pure dans les poutres de Timoshenko élancées à hautes fréquences, nous avons étudié leurs propriétés. Nous en avons conclu que les estimations des ratios d'échelles réels ϵ_k données pour les modes pilotés par U sont toujours valables, ainsi que les méthodes habituelles d'analyse modale.

Puis nous nous sommes intéressés aux conditions d'existence des modes de giration et nous avons montré qu'elles dépendent de deux facteurs. Le premier est le contraste de rigidité entre le cisaillement de la cellule et la flexion globale qui est mesuré à l'aide du paramètre C . Le deuxième est la répartition de la masse dans la structure qui détermine l'ordre des trois pulsations ω_{U1} , ω_{UN} et $\omega_{\alpha 1}$. La pulsation ω_{U1} est celle du premier mode piloté par la translation U , ω_{UN} celle du dernier mode piloté par U pour une structure avec N niveaux et $\omega_{\alpha 1}$ celle du premier mode piloté par la rotation des niveaux α . Les différents comportements possibles en fonction de ces paramètres sont résumés dans le tableau 3.6.

Ce tableau permet d'expliquer pourquoi ces modes n'existent pas dans les poutres pleines. Pour les poutres fines, le cisaillement est trop rigide par rapport à la flexion ($C \leq O(\epsilon)$). Pour les poutres épaisses, nous avons bien $C = O(1)$ mais ω_{U1} et $\omega_{\alpha 1}$ sont du même ordre de grandeur. Dans les autres cas, il existe toujours deux séries de modes : l'une est pilotée par la rotation α , l'autre par la translation U . Les deux mouvements peuvent être complètement indépendants ou couplés. Pour les grandes valeurs de C et les petites valeurs de γ , le couplage est dissymétrique et ce comportement atypique est confirmé par des simulations par éléments finis. Pour $C = O(1)$, nous avons écrit les équations pour les deux cas

$C \leq O(\epsilon)$	Pas de modes de giration
$C = O(1)$	$\omega_{U1} \approx \omega_{\alpha 1}$: les modes pilotés par U et α sont confondus $\omega_{U1} < \omega_{\alpha 1} < \omega_{UN}$: deux séries de modes qui couplent fortement translation et giration $\omega_{UN} < \omega_{\alpha 1}$: deux séries de modes sans couplage, translation pure puis giration pure
$C \geq O(\epsilon^{-1})$	<p>Flexion interne seule ($\gamma > 1/(C\epsilon)$) : deux séries de modes sans couplage, translation pure et giration pure</p> <p>Flexion interne et cisaillement ou cisaillement seul : $\omega_{U1} < \omega_{\alpha 1} < \omega_{UN}$: deux séries de modes avec couplage dissymétrique, translation pure et giration-translation $\omega_{UN} < \omega_{\alpha 1}$: deux séries de modes sans couplage, translation pure puis giration pure</p>

TABLE 3.6 – Existence des modes de giration en fonction du paramètre C et des pulsations ω_{U1} , ω_{UN} et $\omega_{\alpha 1}$

extrêmes : soit les gammes de fréquences des modes de giration et de translation sont complètement disjointes, soit il n'y a pas de distinction entre ces deux types de modes. Cependant, la modélisation de la structure S3 montre l'existence d'une situation intermédiaire pour laquelle les gammes de fréquences des modes de giration et de translation se recouvrent partiellement. Dans ce cas, nous avons deux séries de modes qui couplent fortement les deux mouvements.

Ce tableau montre également que les critères adimensionnels C et γ qui servent à caractériser les modes pilotés par U peuvent être utilisés pour faire un premier tri parmi les types de modes de giration possibles. Mais ils ne suffisent pas pour séparer tous les cas. Pour les compléter, nous avons proposé un critère sur la répartition de la masse qui permet de comparer les ordres de grandeur des pulsations ω_{U1} et $\omega_{\alpha 1}$. Cela est intéressant lorsque $C = O(1)$ car le critère indique si les modes de giration et de translation sont confondus ou s'il existe deux séries de modes. Par contre, il ne dit pas s'il y a des couplages. Pour cela, il faudrait pouvoir comparer les pulsations ω_{UN} et $\omega_{\alpha 1}$. Le problème est que, dans ce cas, les tailles caractéristiques des variations de U et α sont différentes. De plus, la variable U ne vérifie plus la condition de séparation d'échelles et les modèles homogénéisés ne sont plus valables.

Le fait que, pour toutes les poutres, C augmente pour les modes supérieurs laisse à penser que ces comportements atypiques sont relativement fréquents et qu'une étude plus approfondie serait nécessaire. D'autre part, nous avons établi l'équation différentielle de degré six qui tient compte des trois mécanismes ainsi que des effets inertiels de translation et de rotation. Mais cette équation n'a pas été résolue et il n'y a pas eu d'étude systématique des cas dégénérés. En particulier, à partir des observations sur les portiques simples et les poutres pleines, nous avons supposé que la variable α atteint le régime dynamique à des fréquences su-

périeures ou égales à celles où U atteint le régime dynamique. En est-il toujours ainsi ou est-il possible de concevoir des poutres où ces deux gammes de fréquences sont inversées ? De même, existe-t-il des poutres dont le mécanisme dominant est la flexion globale et où l'inertie de rotation n'est pas négligeable ?

3.3.2 Résonance interne aux ordres supérieurs

Nous étudions maintenant l'effet de la résonance interne en flexion sur les modes de giration. Pour cela, nous appliquons de nouveau la méthode HMPD sur des structures constituées de portiques simples, mais avec des éléments plus fins que dans l'exemple précédent. Deux cas sont considérés : un où ce sont les murs qui entrent en résonance et un où ce sont les planchers. Pour qu'il n'y ait qu'un seul type d'éléments en résonance, il faut qu'ils aient des épaisseurs d'ordres différents. C'est donc une situation similaire à celle de la partie 2.3.4 : les équations d'ordre 0 ont une forme dégénérée et les effets dynamiques à l'échelle locale apparaissent aux ordres supérieurs. Le cas où les effets de la résonance interne sont d'ordre 0 est traité dans la partie suivante.

Les deux structures étudiées se comportent comme une poutre de cisaillement à basses fréquences. Nous sommes donc dans la situation où C est grand. Le cisaillement est plus souple que la flexion globale et, à l'ordre dominant, l'effort tranchant n'apparaît pas dans l'équation décrivant les modes de giration.

Résonance des murs en flexion

Nous commençons par considérer une structure avec des murs plus fins que les planchers. Les ordres de grandeur des épaisseurs sont donnés sur la figure 3.34. Les modes de giration apparaissent pour des pulsations d'ordre $O(\epsilon^{1/2} \omega_r)$ ce qui coïncide avec la résonance des murs en flexion.

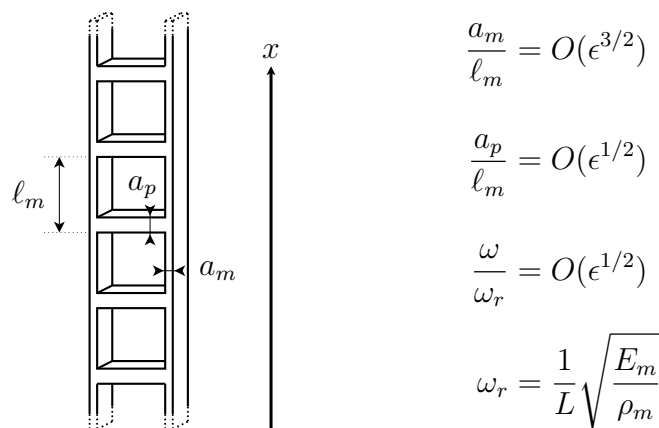


FIGURE 3.34 – Structure étudiée

Les équations d'équilibre fournies par la méthode HMPD sont données ci-dessous. La cinématique transverse est décrite par les équations (T_t) , (M) , (\mathcal{M}_t) et par les variables U , α , θ . Les définitions des paramètres macroscopiques se

trouvent page 153. Les équations des ordres intermédiaires ne sont pas mentionnées car elles ne contiennent pas de nouveaux termes. Par contre, elles ont été utilisées pour simplifier et rendre plus lisibles les autres équations.

Les effets dynamiques à l'échelle locale apparaissent dans les équations ($\mathcal{M}_t 3$) et ($T_t 1$). Nous n'avons pas recopié l'équation ($T_t 1$) car c'est le coefficient de \tilde{U}^0 qui est affecté. Comme l'équation ($T_t 0$) impose la nullité du déplacement transversal, cela n'apporte aucune information supplémentaire. L'équation (M) décrit l'équilibre entre l'effort normal dans les murs et l'effort tranchant dans les planchers. Tous ces efforts sont développés normalement et cette équation n'est jamais affectée par la résonance des murs quel que soit l'ordre considéré.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_p \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^0 = 0 \\ \Lambda_p \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^3 + \frac{K_m}{12} \frac{\cos(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m) - \text{ch}(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m)}{f_I(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m) f_P(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m)} (\tilde{\beta}_m^0 \ell_m)^2 \tilde{\theta}^{0'} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (T_t 0) \\ (T_t 3) \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_p (\tilde{\alpha}^0 - \tilde{\theta}^0) = 0 \\ K_p (\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\theta}^2) - E_m I \tilde{\alpha}^{0''} - \frac{\bar{\rho}_p \ell_p^3}{140 \ell_m} \tilde{\omega}_0^2 (17 \tilde{\alpha}^0 - 3 \tilde{\theta}^0) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (M 0) \\ (M 2) \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_p (\tilde{\alpha}^3 - \tilde{\theta}^3) - E_m I \tilde{\alpha}^{1''} - \frac{\bar{\rho}_m \ell_p^2}{2} \tilde{\omega}_0^2 \tilde{\alpha}^0 \\ - \frac{\bar{\rho}_p \ell_p^3}{140 \ell_m} \tilde{\omega}_0 (\tilde{\omega}_0 (17 \tilde{\alpha}^1 - 3 \tilde{\theta}^1) + 2 \tilde{\omega}_1 (17 \tilde{\alpha}^0 - 3 \tilde{\theta}^0)) = 0 \end{array} \right. \quad (M 3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_p (\tilde{\alpha}^0 - \tilde{\theta}^0) = 0 \\ K_p (\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\theta}^2) - \frac{\bar{\rho}_p \ell_p^3}{420 \ell_m} \tilde{\omega}_0^2 (9 \tilde{\alpha}^0 - 2 \tilde{\theta}^0) = 0 \\ K_p (\tilde{\alpha}^3 - \tilde{\theta}^3) - \frac{\bar{\rho}_p \ell_p^3}{420 \ell_m} \tilde{\omega}_0 (\tilde{\omega}_0 (9 \tilde{\alpha}^1 - 2 \tilde{\theta}^1) + 2 \tilde{\omega}_1 (9 \tilde{\alpha}^0 - 2 \tilde{\theta}^0)) \\ - \frac{K_m \tilde{\beta}_m^0 \ell_m}{12 f_P(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m)} \left(4 \sin \left(\frac{\tilde{\beta}_m^0 \ell_m}{2} \right) \text{sh} \left(\frac{\tilde{\beta}_m^0 \ell_m}{2} \right) \tilde{\theta}^0 \right. \\ \left. + \frac{\cos(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m) - \text{ch}(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m)}{f_I(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m)} \tilde{\beta}_m^0 \ell_m \tilde{U}^{0'} \right) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (\mathcal{M}_t 0) \\ (\mathcal{M}_t 2) \\ (\mathcal{M}_t 3) \end{array}$$

Dans ce chapitre, nous recherchons les modes propres de la structure. La fréquence est donc une inconnue qui doit être écrite sous la forme d'un développement asymptotique. En conséquence, les paramètres χ et β , définis page 146, prennent également la forme d'un développement selon les puissances de ϵ . Dans les équations précédentes, $\tilde{\beta}_m^0$ désigne le terme dominant de β_m :

$$\tilde{\beta}_m^0 = \sqrt[4]{\frac{\rho_m A_m \tilde{\omega}_0^2}{E_m I_m}}$$

f_I et f_P sont des fonctions que nous avons déjà rencontrées dans le chapitre 2 et

dont les définitions sont rappelées ci-dessous :

$$f_I(\beta\ell) = \sin\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta\ell}{2}\right)$$

$$f_P(\beta\ell) = \sin\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta\ell}{2}\right)$$

Ces deux fonctions permettent d'écrire l'équation aux fréquences propres pour les vibrations de flexion d'une poutre bi-encastree :

$$0 = 1 - \cos(\beta\ell) \operatorname{ch}(\beta\ell) = 2 f_I(\beta\ell) \times f_P(\beta\ell)$$

La fonction f_I s'annule pour les fréquences des modes impairs alors que la fonction f_P s'annule pour les fréquences des modes pairs.

L'équation $(T_t 0)$ impose $\tilde{U}^0 = 0$ donc pour cette structure, il n'y a pas de couplage entre les modes de giration et le déplacement transversal. La rotation des nœuds $\tilde{\theta}^0$ est une variable cachée qui se déduit des équations d'équilibre interne $(M 0)$ ou $(\mathcal{M}_t 0)$. La combinaison des équations $(M 2)$ et $(\mathcal{M}_t 2)$ permet d'éliminer les variables d'ordre 2 et d'obtenir l'équation $(G 0)$ qui décrit les modes de giration à l'ordre dominant. De la même façon, les équations $(M 3)$ et $(\mathcal{M}_t 3)$ donnent l'équation $(G 1)$ qui décrit les modes de giration à l'ordre suivant.

$$J_p \tilde{\omega}_0^2 \tilde{\alpha}^0 + E_m I \tilde{\alpha}^{0''} = 0 \quad (G 0)$$

$$\begin{aligned} J_p \tilde{\omega}_0^2 \tilde{\alpha}^1 + E_m I \tilde{\alpha}^{1''} + \tilde{\omega}_0 \left(2J_p \tilde{\omega}_1 + \bar{\rho}_m \frac{\ell_p^2}{2} \tilde{\omega}_0 \right) \tilde{\alpha}^0 \\ - \frac{K_m \tilde{\beta}_m^0 \ell_m}{3f_P(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m)} \sin\left(\frac{\tilde{\beta}_m^0 \ell_m}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\tilde{\beta}_m^0 \ell_m}{2}\right) \tilde{\alpha}^0 = 0 \end{aligned} \quad (G 1)$$

L'équation $(G 0)$ est l'équation que nous avons déjà étudiée dans le paragraphe 3.3.1 en l'absence de résonance interne. Comme les murs sont plus fins que les planchers, elle apparaît sous une forme dégénérée. La contribution des murs à l'inertie de rotation est négligeable ($J \approx J_p$), de même pour l'effort tranchant et ces deux termes sont relégués à l'ordre 1. Ainsi, l'équation $(G 1)$ permet d'obtenir l'expression de J_m que nous avons déjà utilisée dans le paragraphe précédent :

$$J_m = \bar{\rho}_m \frac{\ell_p^2}{2}$$

Notons que c'est la masse réelle des murs qui intervient. Cela vient du fait que le mouvement de flexion des murs est un mouvement horizontal qui ne crée pas de forces d'inertie dans la direction verticale.

Le seul terme affecté par la résonance est donc l'effort tranchant qui se trouve sur la deuxième ligne de l'équation $(G 1)$. En effet, ce dernier est généré par la flexion locale des murs. C'est pourquoi il dépend de la fréquence (à travers le paramètre $\tilde{\beta}_m^0$). Lorsque la fréquence tend vers 0 (c'est-à-dire lorsque $\tilde{\beta}_m^0$ tend

vers 0), nous retrouvons la définition habituelle de l'effort tranchant pour ces structures :

$$\lim_{\tilde{\omega}_0 \rightarrow 0} -\frac{K_m \tilde{\beta}_m^0 \ell_m}{3f_P(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m)} \sin\left(\frac{\tilde{\beta}_m^0 \ell_m}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\tilde{\beta}_m^0 \ell_m}{2}\right) \tilde{\alpha}^0 = -K_m \tilde{\alpha}^0$$

L'équation (G 0) décrit le comportement macroscopique de la structure. Sa résolution donne l'ordre dominant des fréquences $\tilde{\omega}_{0k}$ et des déformées $\tilde{\alpha}_k^0$ des modes de giration. L'introduction de ces termes sources dans l'équation (G 1) permet de calculer les termes correctifs d'ordre 1 : $\tilde{\omega}_{1k}$ et $\tilde{\alpha}_k^1$. Cependant, dans l'équation (G 1), le dénominateur de l'effort tranchant s'annule pour les fréquences des modes de flexion pairs des murs. Le seul moyen de l'empêcher de devenir infini est d'avoir $\tilde{\alpha}^0 = 0$, ce qui interdit l'existence des modes de giration au voisinage de ces fréquences. De même, dans l'équation (T_t 3), le dénominateur du coefficient devant $\tilde{\theta}^{0'}$ s'annule pour tous les modes de flexion des murs. Pour ces fréquences, nous avons donc :

$$\tilde{\theta}^{0'} = \tilde{\alpha}^{0'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\alpha}^0 = 0 \quad \text{avec les conditions aux limites}$$

Nous sommes ici dans une situation très particulière où l'équation d'ordre 0 est valable « presque partout », c'est-à-dire pour toutes les fréquences sauf au voisinage des fréquences de résonance en flexion des murs. Le domaine de validité est donné par les équations d'ordres supérieurs. Lorsqu'il y a des éléments en résonance et que les effets dynamiques n'apparaissent pas dans l'équation d'ordre 0, il est donc important de les rechercher dans les équations d'ordres supérieurs.

Il reste à expliquer pourquoi les modes de giration sont interdits au voisinage des fréquences des modes de flexion des murs. Comme dans le chapitre 2, ce phénomène est dû à des incompatibilités cinématiques entre le fonctionnement des éléments et les déformations de la structure provoquées par les modes de giration.

Pour s'en rendre compte, il faut revenir à l'échelle des éléments. Nous considérons un mur situé entre les niveaux n et $n+1$ et nous raisonnons dans le repère local associé à ce mur (figure 3.3 page 145) : $s \in [0, \ell_m]$ est l'abscisse curviligne, $u(s)$ le déplacement transversal et $\theta(s)$ la rotation de la section. D'après les équations d'équilibre obtenues grâce à la méthode HMPD, les conditions aux limites pour le mur s'écrivent :

$$\begin{cases} \tilde{U}^0(x) = 0 \\ \tilde{\theta}^0(x) = \tilde{\alpha}^0(x) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u(0) = u(\ell_m) = 0 \\ \theta(0) = \alpha_n \\ \theta(\ell_m) = \alpha_{n+1} \end{cases}$$

Nous avons démontré dans le chapitre 2 (page 73) que, pour ce type de conditions aux limites et pour les fréquences des modes de flexion pairs, les équations de la poutre d'Euler-Bernoulli donnent :

$$\theta(\ell_m) = -\theta(0)$$

Lors de la mise en œuvre de la méthode HMPD, nous supposons que les variables cinématiques évoluent peu d'un niveau à l'autre, ce qui impose au premier ordre :

$$\alpha_n \approx \alpha_{n+1}$$

Ces deux conditions étant incompatibles, la seule solution possible est :

$$\alpha_n = \alpha_{n+1} = 0$$

Le fait que la rigidité apparente du cisaillement devienne infinie pour les modes de flexion pairs est donc une conséquence de l'hypothèse cinématique utilisée lors de l'homogénéisation.

Pour les fréquences des modes de flexion impairs, nous avons démontré dans le chapitre 2 que, pour ce type de conditions aux limites, les équations de la poutre d'Euler-Bernoulli donnent :

$$\theta(\ell_m) = \theta(0)$$

Cela n'est pas en contradiction avec l'hypothèse cinématique de la méthode HMPD. Néanmoins, la variable macroscopique $\theta(x)$ étant définie à partir des rotations au niveau des nœuds, cela impose :

$$\theta(x) = \text{constante} \quad \Rightarrow \quad \theta'(x) = 0$$

Ainsi, le blocage pour les modes de flexion impairs provient du fonctionnement des éléments et pas de la méthode.

Résonance des planchers en flexion

Après avoir étudié les effets de la résonance des murs, nous nous intéressons à ceux de la résonance des planchers. Pour cela, nous appliquons la méthode HMPD sur une structure dont les planchers sont plus fins que les murs. Les ordres de grandeur des épaisseurs sont indiqués sur la figure 3.35. Les modes de giration apparaissent pour des fréquences d'ordre $O(\omega_r)$.

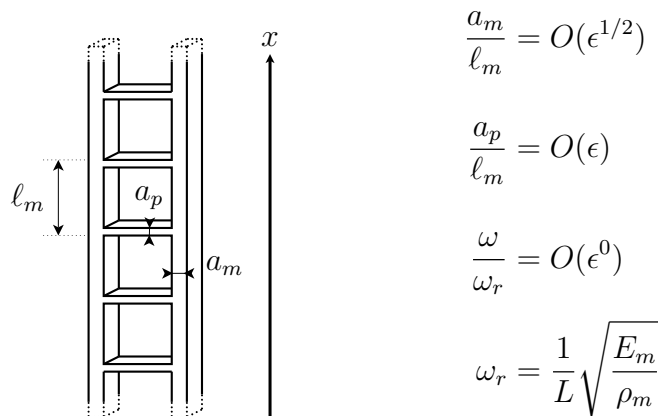


FIGURE 3.35 – Structure étudiée

Le rapport des épaisseurs des éléments étant d'ordre $O(\epsilon^{1/2})$, les développements asymptotiques des inconnues doivent être réalisés selon les puissances de $\epsilon^{1/2}$. Le reste de la méthode HMPD est inchangé. Nous donnons ci-dessous les équations d'équilibre correspondant à la cinématique transverse. Les définitions des paramètres macroscopiques se trouvent page 153. Ici non plus, nous n'avons pas recopié les équations des ordres intermédiaires mais nous les avons utilisées pour simplifier les autres équations.

$$\begin{aligned} \Lambda_m \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^0 &= 0 & (T_t 0) \\ \left\{ \begin{aligned} J_m \tilde{\omega}_0^2 \tilde{\alpha}^0 + E_m I \tilde{\alpha}^{0''} &= 0 & (M 0) \\ J_m \tilde{\omega}_0^2 \tilde{\alpha}^{1/2} + E_m I \tilde{\alpha}^{1/2''} + 2J_m \tilde{\omega}_0 \tilde{\omega}_{1/2} \tilde{\alpha}^0 \\ &- \frac{K_p (\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)^3}{12 f_P (\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_p^0 \ell_p}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\tilde{\beta}_p^0 \ell_p}{2}\right) \tilde{\alpha}^0 &= 0 & (M \frac{1}{2}) \end{aligned} \right. \\ \left\{ \begin{aligned} K_m (\tilde{U}^{0'} - \tilde{\theta}^0) &= 0 & (\mathcal{M}_t 0) \\ K_m \tilde{\theta}^{3/2} - \frac{K_p (\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)^2 f_I (\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)}{12 f_P (\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)} \tilde{\alpha}^0 &= 0 & (\mathcal{M}_t \frac{3}{2}) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Dans ces équations, f_I et f_P sont les fonctions définies page 219 et $\tilde{\beta}_p^0$ est le terme dominant du développement de β_p :

$$\tilde{\beta}_p^0 = \sqrt[4]{\frac{\rho_p A_p \tilde{\omega}_0^2}{E_p I_p}}$$

Les effets dynamiques à l'échelle locale apparaissent dans les équations $(M \frac{1}{2})$ et $(\mathcal{M}_t \frac{3}{2})$. L'équation (T_t) décrit l'équilibre entre l'effort normal dans les planchers et l'effort tranchant dans les murs. Comme tous ces efforts sont développés normalement, cette équation n'est jamais affectée par la résonance des planchers quel que soit l'ordre considéré.

L'équation $(T_t 0)$ impose $\tilde{U}^0 = 0$ donc pour cette structure, il n'y a pas de couplage entre les modes de giration et le déplacement transversal. La rotation des nœuds se déduit de l'équation d'équilibre interne $(\mathcal{M}_t 0)$: $\tilde{\theta}^0 = \tilde{U}^{0'} = 0$. Dans ce cas, les équations d'équilibre du moment macroscopique $(M 0)$ et $(M \frac{1}{2})$ donnent directement les équations décrivant les modes de giration.

L'équation d'ordre 0 a une forme dégénérée : $J \approx J_m$ et l'effort tranchant n'apparaît pas. Cette équation n'est pas affectée par la résonance des planchers en flexion contrairement à l'équation d'ordre 1/2. Dans celle-ci, le dernier terme correspond à l'effort tranchant et à la contribution des planchers à l'inertie de rotation. En effet, un développement limité autour de $\tilde{\omega}_0 = 0$ donne :

$$-\frac{K_p (\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)^2 f_I (\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)}{12 f_P (\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)} = -K_p + \frac{17 \bar{\rho}_p \ell_p^3}{140 \ell_m} \tilde{\omega}_0^2 + O\left(\left(\frac{\tilde{\beta}_p^0 \ell_p}{2}\right)^6\right)$$

Nous sommes dans la même situation qu'au paragraphe précédent. L'équation $(M 0)$ permet de trouver les fréquences et les déformées des modes de giration

mais son domaine de validité est donné par les équations d'ordres supérieurs. Dans les équations $(M \frac{1}{2})$ et $(\mathcal{M}_i \frac{3}{2})$, la fonction $f_P(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)$ apparaît aux dénominateurs des coefficients devant $\tilde{\alpha}^0$. En conséquence, les modes de giration ne peuvent pas exister au voisinage des fréquences des modes de flexion pairs des planchers. Pour les ordres que nous avons considérés, les fréquences des modes de flexion impairs des planchers ne semblent pas poser problème.

Pour comprendre pourquoi il y a une incompatibilité cinématique pour les fréquences des modes de flexion pairs des planchers, il faut revenir à l'échelle des éléments. Le raisonnement est identique à celui du chapitre 2 (page 73) mais les conditions aux limites sont différentes.

Nous considérons le plancher du niveau n et nous nous plaçons dans son repère local (figure 3.3 page 145) : $s \in [0, \ell_p]$ est l'abscisse curviligne, $u(s)$ le déplacement transversal et $\theta(s)$ la rotation de la section. Pour une poutre d'Euler-Bernoulli, $u(s)$ et $\theta(s)$ ont la forme suivante :

$$u(s) = A \cos(\beta_p s) + B \sin(\beta_p s) + C \operatorname{ch}(\beta_p s) + D \operatorname{sh}(\beta_p s)$$

$$\theta(s) = \frac{du}{ds}(s) = \beta_p \left(-A \sin(\beta_p s) + B \cos(\beta_p s) + C \operatorname{sh}(\beta_p s) + D \operatorname{ch}(\beta_p s) \right)$$

où A, B, C et D sont quatre constantes qui dépendent des conditions aux limites. Nous avons vu que les rotations des nœuds de la structure sont nulles. De plus, la rotation α_n du niveau n correspond aux déplacements verticaux en opposition de phase des deux nœuds. Ainsi, les conditions aux limites pour le plancher sont :

$$u(\ell_p) = -u(0) \quad \theta(0) = \theta(\ell_p) = 0$$

Les conditions sur θ et $u(0)$ permettent d'exprimer B, C et D en fonction de A et $u(0)$. En reportant dans $u(\ell_p)$, nous obtenons :

$$u(\ell_p) = 2A \frac{1 - \cos(\beta_p \ell_p) \operatorname{ch}(\beta_p \ell_p)}{\cos(\beta_p \ell_p) - \operatorname{ch}(\beta_p \ell_p)} + u(0) \frac{\cos(\beta_p \ell_p) \operatorname{ch}(\beta_p \ell_p) - 1 - \sin(\beta_p \ell_p) \operatorname{sh}(\beta_p \ell_p)}{\cos(\beta_p \ell_p) - \operatorname{ch}(\beta_p \ell_p)}$$

Nous rappelons que $1 - \cos(\beta_p \ell_p) \operatorname{ch}(\beta_p \ell_p) = 0$ est l'équation aux fréquences propres du plancher lorsqu'il est bi-encasté. Pour les fréquences des modes pairs de flexion, nous avons donc :

$$u(\ell_p) = -u(0) \frac{\sin(\beta_p \ell_p) \operatorname{sh}(\beta_p \ell_p)}{\cos(\beta_p \ell_p) - \operatorname{ch}(\beta_p \ell_p)}$$

Les formules de trigonométrie et le fait que $f_P(\beta_p \ell_p) = 0$ permettent de démontrer que $u(\ell_p) = +u(0)$ pour les fréquences des modes de flexion pairs, ce qui est incompatible avec l'existence de modes de giration. Dans ce cas, les hypothèses cinématiques utilisées pour l'homogénéisation ne sont pas en cause.

Conclusion

Dans cette partie, nous avons commencé à étudier les effets de la résonance interne sur les modes de giration. Nous nous sommes intéressés à des structures avec des éléments d'épaisseurs différentes pour qu'il n'y ait qu'un seul type d'éléments en résonance. En conséquence, à l'ordre 0, nous obtenons des équations dégénérées dans lesquelles les effets dynamiques à l'échelle locale n'interviennent pas.

L'originalité ici, est que les équations d'ordres supérieurs ne servent pas seulement à calculer les termes correctifs mais donnent également le domaine de validité des équations d'ordre 0. En effet, ces dernières sont valables « presque partout », c'est-à-dire pour toutes les fréquences sauf au voisinage (d'une partie ?) des fréquences de résonance des éléments. Pour celles-ci, il existe des incompatibilités cinématiques entre le fonctionnement des éléments et la déformation de la structure associée aux modes de giration. Contrairement au chapitre 2, ces incompatibilités ne proviennent pas forcément de l'hypothèse de périodicité utilisée lors de la mise en œuvre de la méthode HMPD.

Le fait que le domaine de validité des équations soit donné par les ordres supérieurs amène à se poser la question suivante : jusqu'où faut-il poursuivre les développements pour avoir une bonne compréhension du comportement de la structure ? Dans ces conditions, même si les ordres considérés ne montrent pas d'incompatibilité cinématique, les résultats doivent être considérés avec prudence au voisinage des fréquences de résonance. Ce problème se pose surtout pour les structures où l'amortissement est négligeable. En effet, dans ce cas, la masse et les rigidités apparentes peuvent devenir infinies et les termes remontent à l'ordre 0, quel que soit l'ordre de l'équation où ils apparaissent initialement. En présence d'amortissement, la masse et les rigidités apparentes peuvent devenir très importantes mais elles ne tendent plus vers l'infini. En conséquence, les termes correspondants ne remontent plus tous les ordres de grandeur.

3.3.3 Résonance interne à l'ordre 0

Après avoir considéré séparément les effets de la résonance des murs et ceux de la résonance des planchers, nous appliquons la méthode HMPD sur une structure dont tous les éléments entrent en résonance dans la même gamme de fréquences. Dans ce cas, les effets dynamiques à l'échelle locale apparaissent dans les équations d'ordre 0 et nous examinons les conséquences de ce phénomène sur l'analyse modale.

Équations d'équilibre

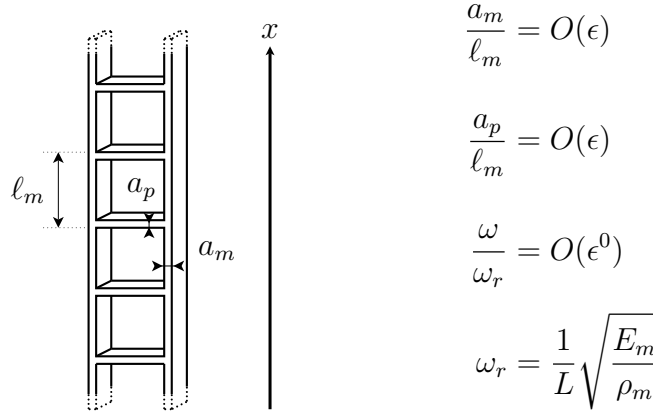


FIGURE 3.36 – Structure étudiée

La structure étudiée est présentée sur la figure 3.36. Tous les éléments ont une épaisseur d'ordre $O(\epsilon \ell_m)$ et nous avons : $C = O(1)$, $\gamma = O(\epsilon^2)$. À basses fréquences, cette structure se comporte donc comme une poutre de Timoshenko élancée. Le cisaillement et la flexion globale ont la même importance. S'il n'y avait pas d'effets dynamiques à l'échelle locale, les modes de giration seraient décrits par l'équation complète :

$$J\omega^2\alpha - K\alpha + E_m I \alpha'' = 0 \quad (3.38)$$

Mais les modes de giration apparaissent pour des pulsations d'ordre $O(\omega_r)$ ce qui coïncide avec la résonance des éléments en flexion.

Les équations d'équilibre décrivant la cinématique transverse sont données ci-dessous. Les définitions des paramètres macroscopiques se trouvent page 153 et celles des fonctions f_I et f_P page 219. De plus, $\tilde{\beta}_j^0$ est le terme dominant du développement de β_j :

$$\tilde{\beta}_j^0 = \sqrt[4]{\frac{\rho_j A_j \tilde{\omega}_0^2}{E_j I_j}} \quad \text{avec} \quad j = m \text{ ou } p$$

Maintenant, tous les éléments sont en résonance et les trois équations sont affectées par ce phénomène.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \left(\frac{4}{\tilde{\beta}_m^0 \ell_m f_I(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m)} \sin\left(\frac{\tilde{\beta}_m^0 \ell_m}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\tilde{\beta}_m^0 \ell_m}{2}\right) \Lambda_m + \Lambda_p \right) \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^0 = 0 \quad (T_t 0) \\
 \left(\frac{4}{\tilde{\beta}_m^0 \ell_m f_I(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m)} \sin\left(\frac{\tilde{\beta}_m^0 \ell_m}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\tilde{\beta}_m^0 \ell_m}{2}\right) \Lambda_m + \Lambda_p \right) \\
 \quad \left(\tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^1 + 2\tilde{\omega}_0 \tilde{\omega}_1 \tilde{U}^0 \right) \\
 - \left(\frac{4}{\tilde{\beta}_m^0 \ell_m f_I(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m)} \sin\left(\frac{\tilde{\beta}_m^0 \ell_m}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\tilde{\beta}_m^0 \ell_m}{2}\right) \right. \\
 \quad \left. + \frac{\cos(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m) - \operatorname{ch}(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m)}{f_I^2(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m)} \right) \frac{\Lambda_m}{2} \tilde{\omega}_0 \tilde{\omega}_1 \tilde{U}^0 = 0 \quad (T_t 1) \\
 \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{K_p (\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)^2 f_I(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)}{12 f_P(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)} \tilde{\theta}^0 + E_m I \tilde{\alpha}^{0''} \\
 + \left(J_m - \frac{12 J_p}{\tilde{\beta}_p^0 \ell_p f_P(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_p^0 \ell_p}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\tilde{\beta}_p^0 \ell_p}{2}\right) \right) \tilde{\omega}_0^2 \tilde{\alpha}^0 = 0 \quad (M 0)
 \end{array} \right. \\
 \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\operatorname{ch}(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m) - \cos(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m)}{\cos(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m) \operatorname{ch}(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m) - 1} (\tilde{\beta}_m^0 \ell_m)^2 \frac{K_m}{2} \tilde{U}^0 - \frac{K_p (\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)^2 f_I(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)}{4 f_P(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)} \tilde{\alpha}^0 \\
 + \left(\frac{K_p \tilde{\beta}_p^0 \ell_p}{f_P(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)} \operatorname{sh}\left(\frac{\tilde{\beta}_p^0 \ell_p}{2}\right) \sin\left(\frac{\tilde{\beta}_p^0 \ell_p}{2}\right) \right. \\
 \quad \left. + \frac{K_m \tilde{\beta}_m^0 \ell_m}{f_P(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m)} \operatorname{sh}\left(\frac{\tilde{\beta}_m^0 \ell_m}{2}\right) \sin\left(\frac{\tilde{\beta}_m^0 \ell_m}{2}\right) \right) \tilde{\theta}^0 = 0 \quad (\mathcal{M}_t 0)
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

L'équation $(T_t 0)$ ne contient que le terme d'inertie. La masse apparente a la même expression qu'au chapitre 2. Comme cette équation décrit l'équilibre des forces horizontales, c'est la masse des murs qui est multipliée par une fonction qui dépend de la fréquence (à travers le paramètre $\tilde{\beta}_m^0$). Dans la majorité des cas, l'équation $(T_t 0)$ impose $\tilde{U}^0 = 0$. Cependant, il existe quelques fréquences où la masse apparente s'annule. Il faut alors regarder l'équation d'ordre 1. Comme la masse apparente est nulle, \tilde{U}^1 disparaît. De plus, le coefficient devant \tilde{U}^0 n'est pas le même que dans l'équation $(T_t 0)$. Il est donc différent de 0 et nous avons $\tilde{U}^0 = 0$. Ainsi, le déplacement transversal est nul au premier ordre quelle que soit la fréquence.

L'examen des équations $(M 0)$ et $(\mathcal{M}_t 0)$ permet de trouver les fréquences pour lesquelles les modes de giration ne peuvent pas exister. Dans ces deux équations, la fonction $f_P(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)$ apparaît aux dénominateurs des coefficients de $\tilde{\alpha}^0$ et $\tilde{\theta}^0$. Ces coefficients deviennent donc infinis au voisinage des fréquences des modes de flexion pairs des planchers. Chacune des équations $(M 0)$ et $(\mathcal{M}_t 0)$ impose alors une relation de proportionnalité entre $\tilde{\alpha}^0$ et $\tilde{\theta}^0$. Mais, comme ces relations sont différentes, nous en déduisons que $\tilde{\alpha}^0 = \tilde{\theta}^0 = 0$. Cela est cohérent avec les

observations du paragraphe précédent. En effet, nous avons constaté que, lorsque les planchers sont en résonance, il ne peut pas y avoir de modes de giration au voisinage des fréquences de leurs modes de flexion pairs.

Dans l'équation $(\mathcal{M}_t 0)$, apparaît également la fonction $f_P(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m)$ au dénominateur du coefficient devant $\tilde{\theta}^0$. Au voisinage des fréquences des modes de flexion pairs des murs, nous avons donc $\tilde{\theta}^0 = 0$. Alors, le moment généré par $\tilde{\alpha}^0$ n'est plus équilibré, ce qui impose la nullité de la rotation de la section. Les modes de giration ne peuvent pas exister au voisinage des fréquences des modes de flexion pairs des murs. Dans le paragraphe précédent, nous avons constaté que, lorsque les murs sont en résonance, les modes de giration sont également interdits au voisinage des fréquences des modes de flexion impairs des murs. Mais pour obtenir ce résultat, nous avons dû regarder les ordres supérieurs de l'équation (T_t) . Ici, les équations sont beaucoup plus compliquées et nous n'avons pas mené les développements aussi loin. Nous avons donc une information incomplète. Il est probable que la poursuite des calculs donne un résultat équivalent à celui de la partie 3.3.2.

Enfin, le dernier cas où les modes de giration ne peuvent pas exister correspond aux fréquences qui annulent le coefficient de $\tilde{\theta}^0$ dans l'équation $(\mathcal{M}_t 0)$. Physiquement, cela signifie que la rigidité apparente de l'ensemble de la cellule est nulle. De nouveau, le moment généré par $\tilde{\alpha}^0$ n'est plus équilibré et nous avons $\tilde{\alpha}^0 = 0$. Notons que les fréquences des modes de flexion impairs des planchers, qui annulent le coefficient de $\tilde{\alpha}^0$, ne sont pas problématiques. Dans ce cas, nous avons $\tilde{\theta}^0 = 0$ et $\tilde{\alpha}^0$ est obtenue en résolvant l'équation $(M 0)$. De même, lorsque le coefficient de $\tilde{\alpha}^0$ dans l'équation $(M 0)$ s'annule, les variations du moment global sont toujours équilibrées par $\tilde{\theta}^0$ et il peut y avoir des modes de giration pour ces fréquences.

Après avoir étudié son domaine de validité, construisons l'équation (G 0) qui décrit les modes de giration à l'ordre dominant. L'équation d'équilibre interne $(\mathcal{M}_t 0)$ montre que $\tilde{\theta}^0$ est proportionnelle à $\tilde{\alpha}_0$. L'équation (G 0) est obtenue en reportant cette expression dans l'équation $(M 0)$. Les équations étant très compliquées, nous nous intéressons à une structure dont les murs et les planchers sont rigoureusement identiques. Dans ce cas, nous avons :

$$\begin{aligned} \ell_m = \ell_p = \ell & & \bar{\rho}_m = \bar{\rho}_p = \bar{\rho} & & E_m = E_p = E \\ I_m = I_p = I_e & & \tilde{\beta}_m^0 = \tilde{\beta}_p^0 = \tilde{\beta}^0 & & \\ K_m = 2K_p & \Rightarrow & K = \frac{K_m K_p}{K_m + K_p} = \frac{2}{3} K_p = \frac{8EI_e}{\ell^2} \end{aligned}$$

et l'équation (G 0) s'écrit :

$$\left(J_m + \frac{\bar{\rho} \ell^2}{12} \nu(\tilde{\beta}^0 \ell) \right) \tilde{\omega}_0^2 \tilde{\alpha}^0 + E_m I \tilde{\alpha}^{0''} = 0 \quad (\text{G } 0)$$

$$\text{avec} \quad \nu(\tilde{\beta}^0 \ell) = \frac{1}{2 \tilde{\beta}^0 \ell} \frac{\text{ch}(\tilde{\beta}^0 \ell) - \cos(\tilde{\beta}^0 \ell) - 5 \text{sh}(\tilde{\beta}^0 \ell) \sin(\tilde{\beta}^0 \ell)}{\sin(\tilde{\beta}^0 \ell / 2) \text{sh}(\tilde{\beta}^0 \ell / 2) f_P(\tilde{\beta}^0 \ell)}$$

Nous avons regroupé tous les termes qui dépendent de la fréquence dans le terme d'inertie. Mais en réalité, $\bar{\rho} \ell^2 \nu(\tilde{\beta}^0 \ell) \tilde{\omega}_0^2 / 12$ contient l'inertie des planchers

et l'effort tranchant. Un développement limité de $\bar{\rho} \ell^2 \nu(\tilde{\beta}^0 \ell) \tilde{\omega}_0^2 / 12$ au voisinage de $\tilde{\omega}_0 = 0$ donne :

$$-K + \frac{137 \bar{\rho} \ell^2}{1260} \tilde{\omega}_0^2 + O(\tilde{\omega}_0^4) \quad (3.39)$$

Notons que les fréquences qui annulent le dénominateur de $\nu(\tilde{\beta}^0 \ell)$ sont bien celles que nous avons identifiées précédemment. D'une part, il y a les fréquences des modes de flexion pairs des éléments et d'autre part, $\sin(\tilde{\beta}^0 \ell / 2) = 0$ correspond aux fréquences qui annulent la rigidité apparente de la cellule dans l'équation $(\mathcal{M}_t 0)$. Pour la suite, nous posons :

$$R(\tilde{\omega}_0) = \left(J_m + \frac{\bar{\rho} \ell^2}{12} \nu(\tilde{\beta}^0 \ell) \right) \tilde{\omega}_0^2$$

Analyse modale

Dans ce paragraphe, nous étudions les propriétés des solutions de l'équation (G 0). Le raisonnement est similaire à celui que nous avons mené dans la partie 3.3.1 page 197 et nous insistons surtout sur les effets de la résonance interne.

Les conditions aux limites sont inchangées : elles portent soit sur le moment global $\tilde{M}^0 = -E_m I \tilde{\alpha}^{0'}$, soit sur la rotation de la section $\tilde{\alpha}^0$. Pour une poutre de hauteur H encastree à la base et libre en tête, nous avons :

$$\tilde{\alpha}^0(0) = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\alpha}^{0'}(H) = 0$$

L'équation (G 0) peut se mettre sous la forme :

$$\tilde{\alpha}^{0''} = -\mathbb{D}_{res} \tilde{\alpha}^0 \quad \text{avec} \quad \mathbb{D}_{res} = \frac{R(\tilde{\omega}_0)}{E_m I}$$

Nous posons également $D_{res} = 1/\sqrt{|\mathbb{D}_{res}|}$. Une condition nécessaire pour que l'équation (G 0) ait des solutions non triviales est que \mathbb{D}_{res} soit strictement positif. De plus, si ces solutions existent, elles s'écrivent, pour les conditions aux limites considérées :

$$\alpha_{res k}(x) = B \sin\left(\frac{x}{D_{res k}}\right) \quad \text{avec} \quad D_{res k} = \frac{2H}{(2k-1)\pi}$$

Les déformées modales $\alpha_{res k}(x)$ ont exactement la même forme que dans le cas sans résonance interne. Elles vérifient donc les mêmes propriétés d'orthogonalité. En outre, l'expression de la taille macroscopique $D_{res k}$ étant inchangée, les estimations du ratio d'échelles réel ϵ_k restent valables. Notons que c'est uniquement le comportement à l'échelle macroscopique qui n'est pas modifié par la résonance interne. À l'échelle locale, la déformée des éléments est évidemment différente.

Pour trouver les fréquences propres, il faut résoudre l'équation suivante :

$$\left(\frac{1}{D_{res k}}\right)^2 = \frac{R(\tilde{\omega}_0)}{E_m I} = \left(\frac{(2k-1)\pi}{2H}\right)^2 \quad (3.40)$$

L'existence et l'unicité des solutions dépendent de l'allure de la fonction $R(\tilde{\omega}_0)$. Dans le chapitre 2, nous avons défini la pulsation adimensionnelle $\hat{\omega}$ par le ratio entre $\tilde{\omega}_0$, la pulsation des vibrations de la structure, et ω_{f1} , la première pulsation propre de flexion d'un élément lorsqu'il est bi-encasté :

$$\hat{\omega} = \tilde{\omega}_0 \left(\frac{2\ell}{3\pi} \right)^2 \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{EI_e}} \approx \frac{\tilde{\omega}_0}{\omega_{f1}}$$

Alors, $\tilde{\beta}^0 \ell$ s'écrit :

$$\tilde{\beta}^0 \ell = \ell \sqrt[4]{\frac{\bar{\rho} \tilde{\omega}_0^2}{EI_e}} = \frac{3\pi}{2} \sqrt{\hat{\omega}}$$

et la fonction $\nu(\tilde{\beta}^0 \ell)$ peut être remplacée par la fonction $\hat{\nu}(\hat{\omega})$ définie par :

$$\hat{\nu}(\hat{\omega}) = \frac{\text{ch}\left(\frac{3\pi}{2}\sqrt{\hat{\omega}}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2}\sqrt{\hat{\omega}}\right) - 5 \text{sh}\left(\frac{3\pi}{2}\sqrt{\hat{\omega}}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2}\sqrt{\hat{\omega}}\right)}{3\pi\sqrt{\hat{\omega}} \sin\left(\frac{3\pi}{4}\sqrt{\hat{\omega}}\right) \text{sh}\left(\frac{3\pi}{4}\sqrt{\hat{\omega}}\right) f_P\left(\frac{3\pi}{2}\sqrt{\hat{\omega}}\right)}$$

Avec ces notations, $R(\tilde{\omega}_0)$ s'écrit :

$$R(\tilde{\omega}_0) = \left(J_m + \frac{\bar{\rho} \ell^2}{12} \nu(\tilde{\beta}^0 \ell) \right) \tilde{\omega}_0^2 = \left(1 + \frac{1}{6} \hat{\nu}(\hat{\omega}) \right) \frac{\bar{\rho} \ell^2}{2} \tilde{\omega}_0^2$$

De plus, $\bar{\rho}$ s'exprime en fonction de $\tilde{\beta}^0 \ell$:

$$\bar{\rho} = (\tilde{\beta}^0 \ell)^4 \frac{EI_e}{\ell^4 \tilde{\omega}_0^2} = \left(\frac{3\pi}{2} \right)^4 \hat{\omega}^2 \frac{EI_e}{\ell^4 \tilde{\omega}_0^2} = \left(\frac{3\pi}{2} \right)^4 \frac{EI_e}{\ell^4 \omega_{f1}^2}$$

et finalement :

$$R(\tilde{\omega}_0) = \left(1 + \frac{1}{6} \hat{\nu}(\hat{\omega}) \right) \hat{\omega}^2 \left(\frac{3\pi}{2} \right)^4 \frac{EI_e}{2\ell^2}$$

La fonction $\hat{R}(\hat{\omega})$ est alors définie par :

$$\hat{R}(\hat{\omega}) = \frac{\ell^2}{EI_e} R(\tilde{\omega}_0) = \left(1 + \frac{1}{6} \hat{\nu}(\hat{\omega}) \right) \frac{\hat{\omega}^2}{2} \left(\frac{3\pi}{2} \right)^4$$

Résoudre l'équation (3.40) revient à chercher les solutions de l'équation suivante :

$$\hat{R}(\hat{\omega}) = \frac{EI \ell^2}{EI_e} \left(\frac{(2k-1)\pi}{2H} \right)^2 = R_k \quad (3.41)$$

Le terme de droite est une constante positive qui ne dépend que du numéro du mode. Nous la notons R_k .

La fonction $\hat{R}(\hat{\omega})$ est tracée sur la figure 3.37. Nous rappelons que les pulsations des modes de flexion des éléments suivent la suite des carrés des nombres impairs et qu'elles correspondent aux abscisses suivantes :

$$\hat{\omega}_1 \approx 1 \quad \hat{\omega}_2 \approx \frac{5^2}{3^2} \approx 2,78 \quad \hat{\omega}_3 \approx \frac{7^2}{3^2} \approx 5,44 \quad \hat{\omega}_4 \approx \frac{9^2}{3^2} = 9 \quad \text{etc}$$

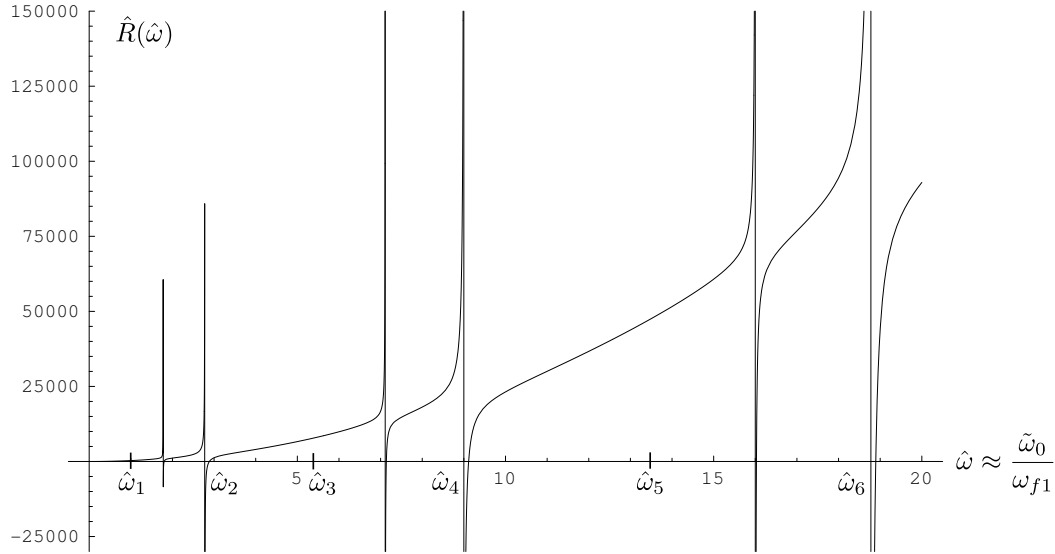


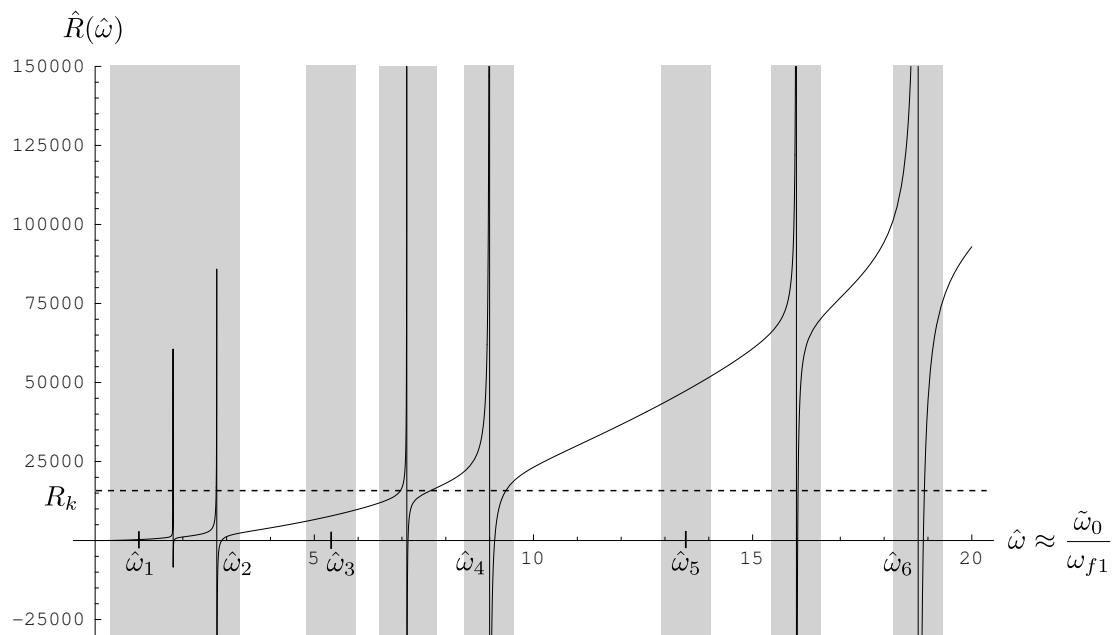
FIGURE 3.37 – Allure de la fonction \hat{R} en fonction de la fréquence. Rappel : les modes de giration ne peuvent pas exister au voisinage des fréquences propres des éléments et lorsque la rigidité apparente de la cellule est nulle

Lorsque $\hat{\omega}$ tend vers 0, $\hat{R}(\hat{\omega})$ tend vers -8 , c'est-à-dire vers $-K\ell^2/(EI_e)$. Cela est cohérent avec la limite à basses fréquences de $R(\tilde{\omega}_0^2)$ (équation (3.39)).

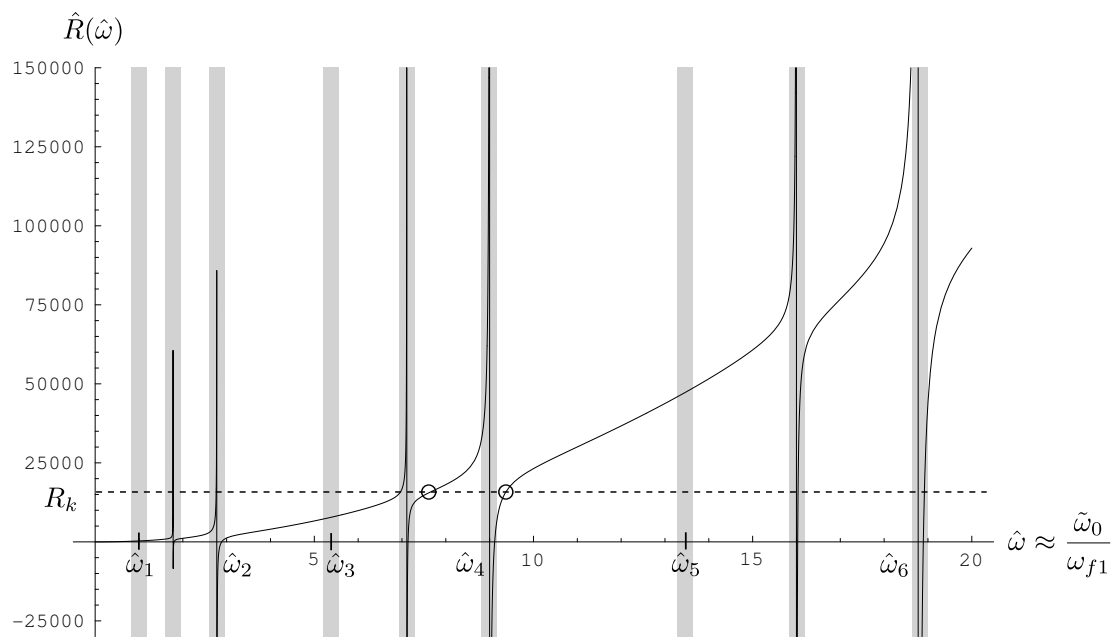
L'existence de plusieurs fréquences au voisinage desquelles la fonction $\hat{R}(\hat{\omega})$ tend vers $\pm\infty$ pose la question de l'unicité des fréquences propres. Cependant, nous avons vu que pour ces fréquences, les modes de giration ne peuvent pas exister à cause des incompatibilités cinématiques entre le fonctionnement de la structure et celui des éléments. Ainsi, seules les solutions en dehors des pics ont un sens physique. Les modes de giration sont également interdits au voisinage des fréquences des modes de flexion impairs des murs. En conséquence, la fonction $\hat{R}(\hat{\omega})$ doit plutôt être interprétée comme une fonction définie sur une suite d'intervalles disjoints.

Pour répondre de façon rigoureuse à la question de l'existence et de l'unicité des fréquences propres, il faudrait introduire de l'amortissement dans la structure afin d'évaluer la largeur des bandes interdites. La figure 3.38 montre de façon très schématique les différentes situations qui peuvent se produire. Pour un amortissement important, les bandes interdites sont très larges (figure 3.38(a)). Dans ce cas, l'image de la fonction $\hat{R}(\hat{\omega})$ ne contient pas tous les réels positifs et il existe des valeurs de R_k pour lesquelles l'équation (3.41) n'admet pas de solution. Physiquement, cela signifie que certains modes ne sont jamais excités. Au contraire, pour un amortissement faible, les bandes interdites sont étroites (figure 3.38(b)). Il peut alors arriver que pour certaines valeurs de R_k , l'équation (3.41) admette plusieurs solutions. Physiquement, cela signifie que plusieurs fréquences sont associées à la même déformée modale.

L'amortissement n'est pas le seul paramètre à jouer sur la réponse de la structure. L'allure de la fonction de transfert associée au mode k dépend également de la valeur de R_k . En effet, supposons que la structure soit excitée par un moment harmonique d'amplitude S à la pulsation ω . La rotation de la section $\tilde{\alpha}^0$ est alors



(a) Amortissement important



(b) Amortissement faible

FIGURE 3.38 – Représentation schématique du domaine d’existence des modes de giration en fonction de l’amortissement (en gris : bandes interdites)

solution de l'équation suivante :

$$R(\omega)\tilde{\alpha}^0 + E_m I \tilde{\alpha}^{0''} = S$$

Après décomposition de $\tilde{\alpha}^0$ dans la base modale ($\tilde{\alpha}^0(x, \omega) = \sum q_j(\omega)\alpha_j(x)$), cette équation devient :

$$R(\omega) \sum (q_j \alpha_j) + E_m I \sum (q_j \alpha_j'') = S$$

$$\text{Or } E_m I \alpha_j'' = -R(\omega_j) \alpha_j \quad \text{donc} \quad \sum (q_j \alpha_j (R(\omega) - R(\omega_j))) = S$$

L'équation est ensuite multipliée par α_k et intégrée sur la hauteur de la poutre. Grâce à l'orthogonalité des modes propres, il ne reste que la contribution de α_k :

$$q_k(\omega) = \frac{1}{R(\omega) - R(\omega_k)} \frac{\int_0^H S \alpha_k dx}{\int_0^H \alpha_k^2 dx} = \frac{EI_e / \ell^2}{\hat{R}(\hat{\omega}) - R_k} \frac{\int_0^H S \alpha_k dx}{\int_0^H \alpha_k^2 dx}$$

La fonction de transfert associée à ce type de modes est donc proportionnelle à $\hat{H}_k(\hat{\omega}) = 1/(\hat{R}_k(\hat{\omega}) - R_k)$.

L'allure de cette fonction est tracée sur la figure 3.39 pour deux valeurs de R_k en l'absence d'amortissement. Dans le premier cas ($R_k = 35\,000$), la fonction $\hat{H}_k(\hat{\omega})$ présente un pic principal très large vers $\hat{\omega} = 12$ et des pics secondaires très étroits. Les pics secondaires n'ont pas de signification physique puisqu'ils correspondent aux fréquences pour lesquelles les modes de giration ne peuvent pas exister. Il s'agit donc d'une fonction de transfert « classique » dans le sens où la réponse de la structure n'est amplifiée qu'au voisinage de la fréquence propre associée au mode k . Le deuxième cas est plus original. En effet, pour $R_k = 20\,000$, l'équation $\hat{R}(\hat{\omega}) - R_k = 0$ admet deux solutions situées de part et d'autre de la fréquence du deuxième mode propre des éléments. La fonction $\hat{H}_k(\hat{\omega})$ présente alors deux pics distincts.

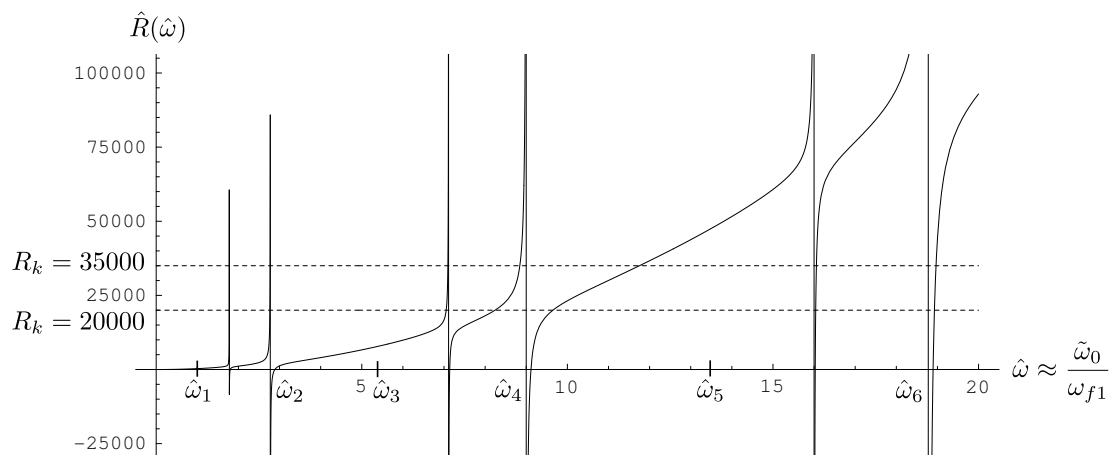
Supposons maintenant que la valeur de R_k soit telle que la fonction de transfert $\hat{H}_k(\hat{\omega})$ ne présente qu'un seul pic principal. Dans ce cas, il est possible d'associer une fréquence propre au mode k . La valeur de cette dernière est-elle très affectée par la résonance interne ?

Nous avons démontré dans la partie 3.3.1 page 197 que, lorsque les éléments ont un comportement quasi-statique à l'échelle locale, les pulsations propres sont les solutions de :

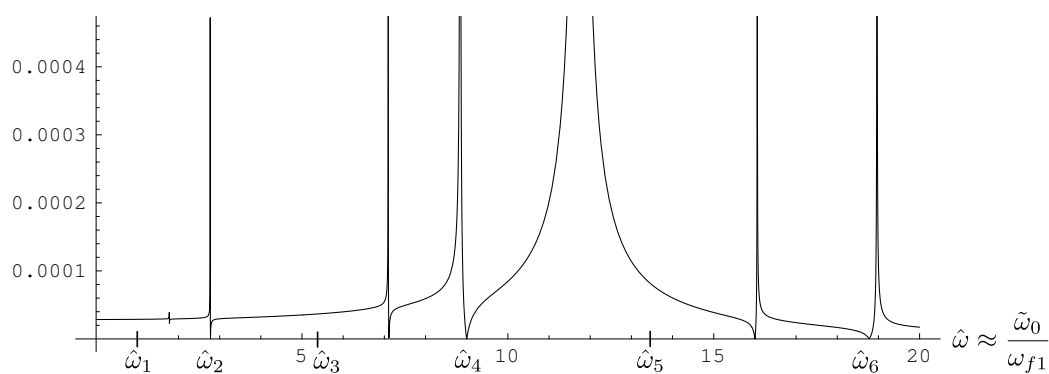
$$\frac{Q(\tilde{\omega}_0)}{E_m I} = \left(\frac{(2k-1)\pi}{2H} \right)^2 \quad \text{avec} \quad Q(\tilde{\omega}_0) = J\tilde{\omega}_0^2 - K$$

Nous considérons toujours le cas où les murs et les planchers sont rigoureusement identiques et nous réalisons sur la fonction $Q(\tilde{\omega}_0)$ le même type de manipulation que sur la fonction $R(\tilde{\omega}_0)$:

$$\begin{aligned} Q(\tilde{\omega}_0) &= \left(\bar{\rho}_m \frac{\ell_p^2}{2} + \bar{\rho}_p \frac{\ell_p^3}{12\ell_m} \right) \tilde{\omega}_0^2 - \frac{K_m K_p}{K_m + K_p} \\ &= \frac{7}{12} \bar{\rho} \ell^2 \tilde{\omega}_0^2 - \frac{8EI_e}{\ell^2} = \frac{EI_e}{\ell^2} \left(\frac{7}{12} \left(\frac{3\pi}{2} \right)^4 \tilde{\omega}^2 - 8 \right) \end{aligned}$$



$\hat{H}_k(\hat{\omega})$ pour $R_k = 35000$



$\hat{H}_k(\hat{\omega})$ pour $R_k = 20000$

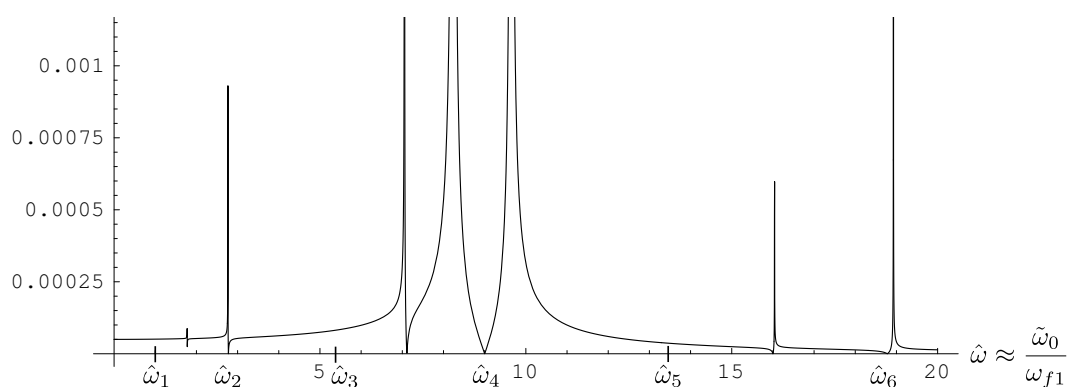


FIGURE 3.39 – En haut : $\hat{R}(\hat{\omega})$, au milieu et en bas : allure de la fonction de transfert $\hat{H}_k(\hat{\omega}) = 1/(\hat{R}_k(\hat{\omega}) - R_k)$ pour $R_k = 35\ 000$ et $R_k = 20\ 000$

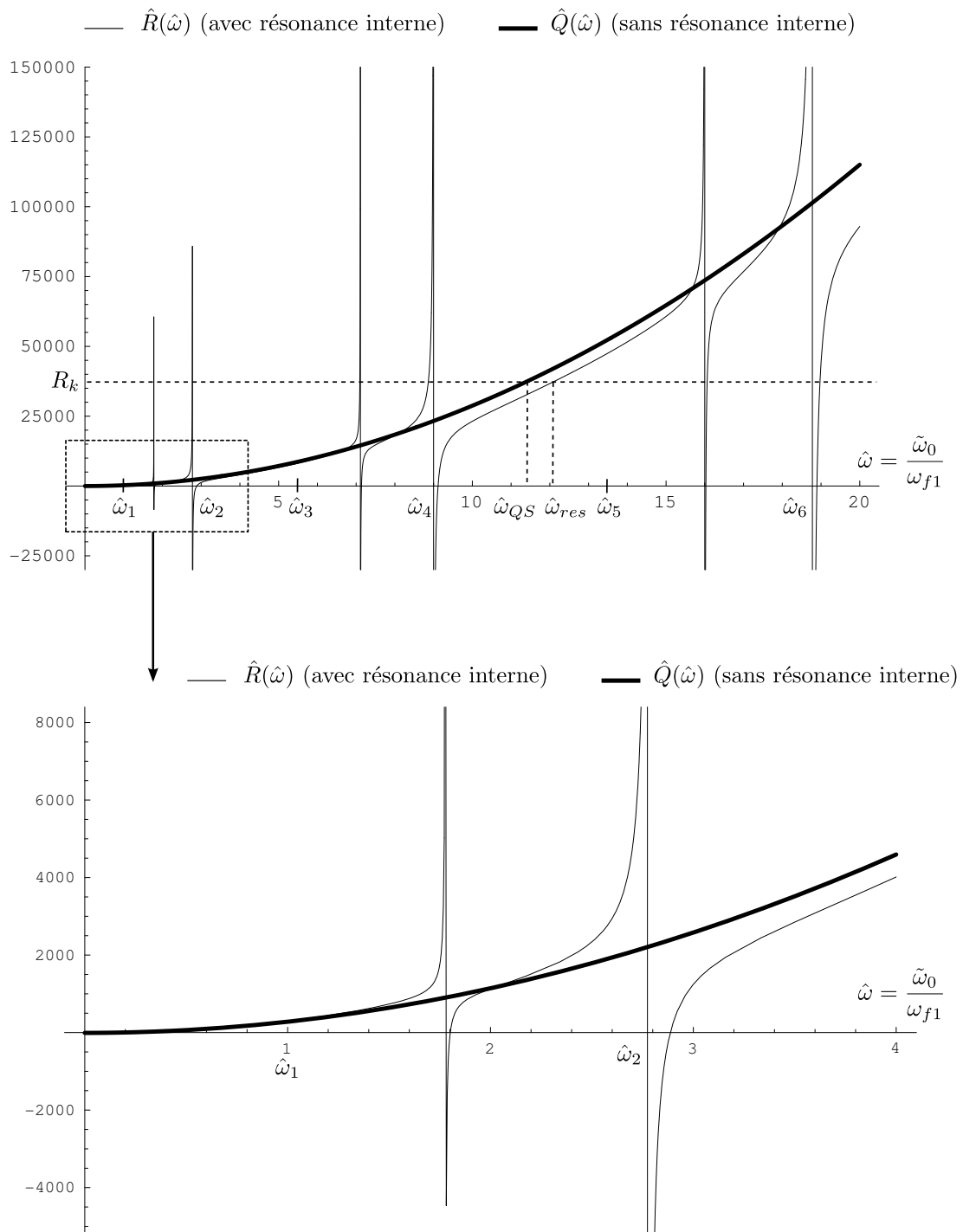


FIGURE 3.40 – $\hat{R}(\hat{\omega})$ (trait fin) et $\hat{Q}(\hat{\omega})$ (trait gras) en fonction de la fréquence et zoom à l'origine

La fonction $\hat{Q}(\hat{\omega})$ est alors définie par :

$$\hat{Q}(\hat{\omega}) = \frac{\ell^2}{EI_e} Q(\tilde{\omega}_0) = \frac{7}{12} \left(\frac{3\pi}{2} \right)^4 \hat{\omega}^2 - 8$$

et les pulsations propres sont les solutions de :

$$\hat{Q}(\hat{\omega}) = \frac{EI\ell^2}{EI_e} \left(\frac{(2k-1)\pi}{2H} \right)^2 = R_k \quad (3.42)$$

Le terme de droite est exactement le même que celui de l'équation (3.41). Pour évaluer l'effet de la résonance interne sur les pulsations propres, il suffit donc de comparer les fonctions $\hat{Q}(\hat{\omega})$ et $\hat{R}(\hat{\omega})$. Celles-ci sont tracées sur la figure 3.40, ainsi qu'un zoom sur les basses fréquences. Les deux courbes sont confondues à basses fréquences. À plus hautes fréquences, mis à part les pics de la fonction $\hat{R}(\hat{\omega})$, l'allure globale est la même. Par contre, la fonction $\hat{R}(\hat{\omega})$ peut être inférieure ou supérieure à la fonction $\hat{Q}(\hat{\omega})$. Selon les cas, les fréquences propres sont donc plus élevées ou plus basses à cause de la résonance interne.

Pour quantifier ce décalage, nous avons recherché les valeurs des pulsations $\hat{\omega}_{QS}$ et $\hat{\omega}_{res}$ pour différentes valeurs de R_k . La pulsation $\hat{\omega}_{QS}$ est la solution de l'équation (3.42), c'est-à-dire lorsque les effets dynamiques à l'échelle locale sont négligés, et $\hat{\omega}_{res}$ est une solution de l'équation (3.41) qui tient compte de la résonance interne. Pour obtenir $\hat{\omega}_{res}$, nous avons négligé les bandes interdites et nous avons retenu la solution la plus proche de $\hat{\omega}_{QS}$. Sur la figure 3.41, l'écart relatif, en pourcentages, entre $\hat{\omega}_{QS}$ et $\hat{\omega}_{res}$ est donné en fonction de $\hat{\omega}_{QS}$:

$$E(\hat{\omega}_{QS}) = 100 \frac{\hat{\omega}_{res} - \hat{\omega}_{QS}}{\hat{\omega}_{QS}}$$

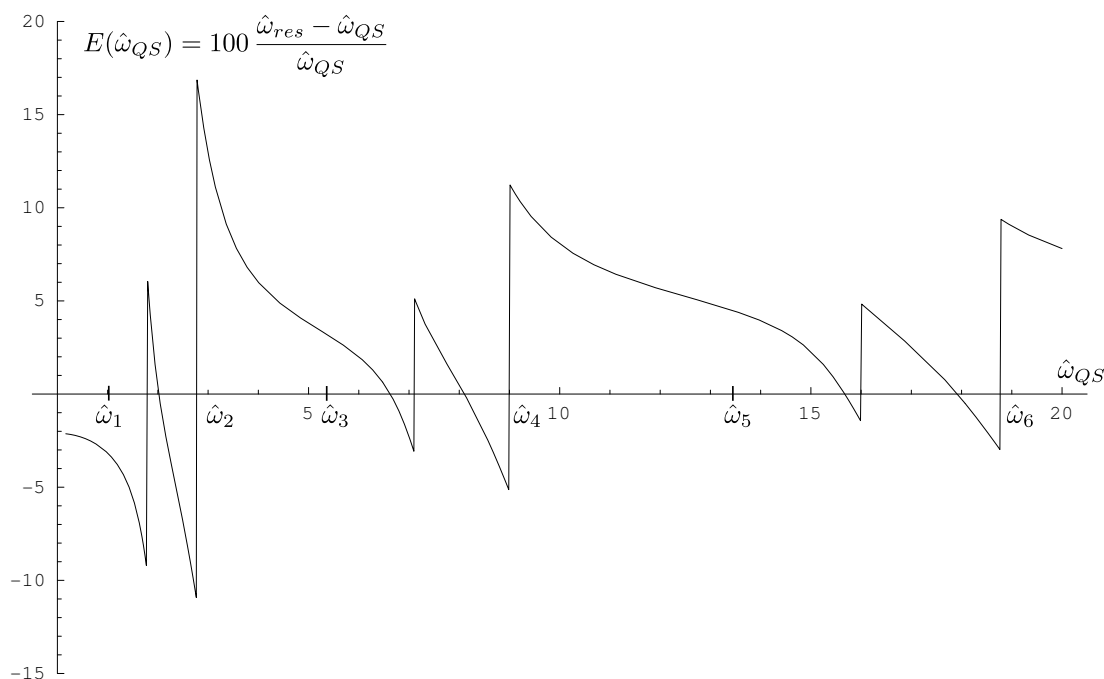


FIGURE 3.41 – Écart relatif, en pourcentages, entre $\hat{\omega}_{QS}$ et $\hat{\omega}_{res}$ en fonction de $\hat{\omega}_{QS}$

Lorsque $E(\hat{\omega}_{QS})$ est positif, la fréquence est plus élevée à cause de la résonance interne. Inversement, lorsque $E(\hat{\omega}_{QS})$ est négatif, la fréquence est plus basse. La fonction $E(\hat{\omega}_{QS})$ n'est pas définie au voisinage de 0 car les modes de giration ne peuvent pas exister en-dessous d'une fréquence minimale (il faut $\hat{Q}(\hat{\omega}) > 0$). La figure 3.41 montre que l'écart relatif maximal est de l'ordre de 15 % lorsqu'il n'y a pas d'amortissement.

Conclusion

Dans cette partie, nous avons étudié le comportement d'une structure dont tous les éléments sont en résonance. Dans ce cas, les modes de giration sont décrits, à l'ordre 0, par une équation différentielle de degré 2 où les termes d'inertie et l'effort tranchant dépendent de la fréquence. Leur somme est notée $R(\omega)\tilde{\alpha}^0$. Nous nous sommes alors intéressés aux conséquences de ce phénomène sur l'analyse modale.

Le premier résultat est que, à l'échelle de la structure, les déformées modales ne sont pas modifiées. Par contre, pour les fonctions de transfert associées aux différents modes, il y a deux possibilités. Dans le cas le plus simple, l'équation aux fréquences propres admet une solution loin des pics de la fonction R . Alors, la fonction de transfert ne présente qu'un seul pic et la valeur de la fréquence propre est peu affectée par la résonance interne. Mais si pour un mode, l'équation aux fréquences propres admet une solution proche des pics de la fonction R , alors cette solution n'est pas unique et la fonction de transfert présente deux pics. Tous ces résultats ont été établis en négligeant l'amortissement dans la structure.

Notons enfin que, quelle que soit l'allure des fonctions de transfert, il existe un certain nombre de fréquences au voisinage desquelles les modes de giration ne peuvent pas exister à cause des incompatibilités cinématiques entre ces modes et le fonctionnement des éléments. Il s'agit des fréquences des modes de flexion impairs des murs et des fréquences pour lesquelles la fonction R tend vers l'infini. Ces dernières correspondent aux modes de flexion pairs des éléments et à des modes de l'ensemble de la cellule pour lesquels la rigidité apparente s'annule dans l'équation d'équilibre en moments.

3.3.4 Résumé

Équation générale des modes de giration pure : $J\omega^2\alpha - K\alpha + EI_M\alpha'' = 0$

Analyse modale

Lorsque la condition de quasi-staticisme local est vérifiée, l'analyse modale peut être menée comme pour les modes de vibration plus classiques. En particulier, les estimations de L_k et ϵ_k données pour les modes pilotés par U restent valables.

Cela est toujours vrai lorsqu'il y a résonance interne car les déformées modales à l'échelle macroscopique ne sont pas modifiées. Par contre, les fonctions de transfert sont atypiques.

Conditions d'existence

$C \leq O(\epsilon)$	Pas de modes de giration
$C = O(1)$	$\omega_{U1} \approx \omega_{\alpha 1}$: les modes pilotés par U et α sont confondus $\omega_{U1} < \omega_{\alpha 1} < \omega_{UN}$: deux séries de modes qui couplent fortement translation et giration $\omega_{UN} < \omega_{\alpha 1}$: deux séries de modes sans couplage, translation pure puis giration pure
$C \geq O(\epsilon^{-1})$	Flexion interne seule ($\gamma > 1/(C\epsilon)$) : deux séries de modes sans couplage, translation pure et giration pure Flexion interne et cisaillement ou cisaillement seul : $\omega_{U1} < \omega_{\alpha 1} < \omega_{UN}$: deux séries de modes avec couplage dissymétrique, translation pure et giration-translation $\omega_{UN} < \omega_{\alpha 1}$: deux séries de modes sans couplage, translation pure puis giration pure

Lorsque la condition de quasi-statisme local n'est plus vérifiée, ce tableau reste valable mais il y a en plus des fréquences interdites pour lesquelles les modes de giration ne peuvent pas exister. Il faut alors distinguer deux situations.

1. Résonance interne aux ordres supérieurs

Cela se produit lorsque les épaisseurs des éléments ne sont pas du même ordre. À l'ordre 0, nous avons une équation dégénérée dans laquelle la résonance interne n'intervient pas. Par contre, cette équation est valable « presque partout » et son domaine de validité est donné par les équations d'ordre supérieur.

Résonance des murs : La rigidité apparente devient infinie au voisinage de leurs fréquences propres de flexion. Ces incompatibilités sont dues en partie à l'hypothèse de périodicité et en partie à la cinématique imposée par les modes de giration.

Résonance des planchers : La rigidité apparente devient infinie au voisinage des fréquences des modes de flexion pairs. Cela provient d'une incompatibilité cinématique entre le fonctionnement des planchers et les modes de giration.

2. Résonance interne à l'ordre 0

Cela se produit lorsque les murs et les planchers sont similaires. Dans l'équation d'ordre 0, le terme $J_p \omega^2 + K$ dépend de la fréquence. Il y a alors trois types de fréquences interdites : celles liées à la résonance des murs, celles liées à la résonance des planchers et celles liées à la résonance de l'ensemble de la cellule. Dans ce dernier cas, la rigidité apparente de la cellule s'annule dans l'équation d'équilibre en moments.

3.4 Modes longitudinaux

Cette partie est consacrée aux modes longitudinaux des structures constituées de portiques simples. L'étude de ces modes en l'absence de résonance interne se trouve déjà dans la thèse de Hans (2002) et dans (Boutin et Hans, 2003). Ces travaux ont montré que la cinématique longitudinale est moins riche que la cinématique transversale. En effet, elle ne fait intervenir qu'un seul mécanisme : la traction-compression des murs. Notons que les modes de giration sont également générés par la traction-compression des murs. La différence est que, pour les modes longitudinaux, tous les murs se déforment en phase alors que, pour les modes de giration, ils sont en opposition de phase. Malgré tout, les rigidités de ces deux mécanismes ont le même ordre de grandeur. Ainsi, ces deux types de modes apparaissent dans la même gamme de fréquences, c'est-à-dire des fréquences assez élevées pour lesquelles les éléments peuvent entrer en résonance. L'apport de cette thèse est l'étude des conséquences des effets dynamiques à l'échelle locale sur les modes longitudinaux.

Pour cela, nous reprenons la même démarche que pour les modes de giration. Nous commençons par appliquer la méthode HMPD sur une structure avec des éléments suffisamment épais pour qu'ils n'entrent pas en résonance. Cela permet de rappeler les résultats de Hans qui servent de référence pour la suite. Puis les épaisseurs des éléments sont diminuées progressivement et les effets de la résonance sont analysés. En particulier, les résultats sont comparés avec ceux du chapitre 2. Les modes longitudinaux sont l'équivalent du mode de polarisation (Py) pour les ondes de compression pure dans les milieux réticulés. La seule différence est la disparition de la périodicité de la structure dans la direction transversale.

3.4.1 Sans résonance interne

La structure étudiée est présentée sur la figure 3.42. Tous les éléments ont la même épaisseur, d'ordre $O(\epsilon^{1/2}\ell_m)$, afin de construire le modèle le plus général en l'absence de résonance. Dans ce cas, les modes longitudinaux apparaissent pour des pulsations d'ordre $O(\omega_r)$ et tous les éléments ont un comportement quasi-statique à l'échelle locale.

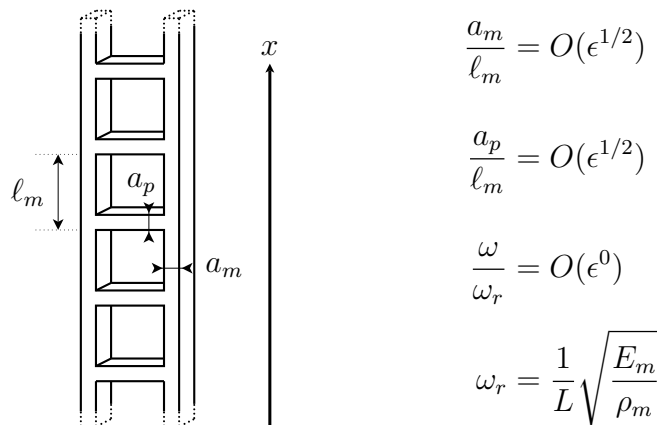


FIGURE 3.42 – Structure étudiée

Les équations d'équilibre fournies par la méthode HMPD sont données ci-dessous. Maintenant que nous étudions la cinématique longitudinale, nous avons besoin des équations (N_t) , (\mathcal{M}_d) , (T_d) et des variables V , Δ , Φ . Celles-ci sont définies dans la partie 3.1.3 page 148. Les définitions des paramètres macroscopiques se trouvent page 153.

$$\Lambda \tilde{\omega}_0^2 \tilde{V}^0 + 2E_m A_m \tilde{V}^{0''} = 0 \quad (N_t 0)$$

$$(K_p + 3K_m) \tilde{\Phi}^0 - \Lambda_p \ell_p \tilde{\omega}_0^2 \tilde{V}^0 = 0 \quad (\mathcal{M}_d 0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{12E_p A_p}{\ell_m \ell_p} \tilde{\Delta}^0 = 0 \quad (T_d 0) \\ \frac{12E_p A_p}{\ell_m \ell_p} \tilde{\Delta}^1 = 0 \quad (T_d 1) \\ \frac{12E_p A_p}{\ell_m \ell_p} \tilde{\Delta}^2 - (\Lambda_p + 3\Lambda_m) \tilde{\omega}_0^2 \tilde{\Delta}^0 = 0 \quad (T_d 2) \\ \frac{12E_p A_p}{\ell_m \ell_p} \tilde{\Delta}^3 - (\Lambda_p + 3\Lambda_m) \tilde{\omega}_0 \left(2\tilde{\omega}_1 \tilde{\Delta}^0 + \tilde{\omega}_0 \tilde{\Delta}^1 \right) + 3K_m \left(\tilde{\Phi}^{0'} - \tilde{\Delta}^{0''} \right) = 0 \quad (T_d 3) \end{array} \right.$$

Le comportement à l'échelle macroscopique est directement décrit par l'équation $(N_t 0)$ qui est l'équation habituelle pour les modes longitudinaux dans les poutres. Cette équation a la même forme que l'équation décrivant les modes transverses de la poutre de cisaillement. Les résultats sont donc transposables aux modes longitudinaux, notamment les estimations de L_k et ϵ_k . Ces modes sont pilotés par le déplacement longitudinal moyen \tilde{V}^0 . Les deux autres variables, Δ et Φ , sont des variables cachées dont le premier ordre non nul est déterminé grâce aux deux équations d'équilibre interne $(\mathcal{M}_d 0)$ et $(T_d 3)$. Cette dernière se simplifie de la façon suivante :

$$\frac{12E_p A_p}{\ell_m \ell_p} \tilde{\Delta}^3 + 3K_m \tilde{\Phi}^{0'} = 0 \quad (3.43)$$

En l'absence de résonance interne, ces modes sont toujours décrits par le même type d'équations. Les variations des épaisseurs des éléments ne jouent que sur les ordres de grandeur des paramètres. Ainsi, la masse linéique macroscopique Λ peut dégénérer en Λ_m ou Λ_p et les rigidités K_m et K_p n'ont pas toujours la même importance. Cela modifie également les ordres de grandeur des variables cachées.

3.4.2 Résonance interne aux ordres supérieurs

Nous nous intéressons maintenant à l'influence de la résonance interne en flexion sur les modes longitudinaux. Pour cela, nous reprenons les deux structures de la partie 3.3.2 et nous étudions séparément l'effet de la résonance des murs et celui de la résonance des planchers.

Résonance des murs en flexion

Nous commençons par considérer la structure avec des murs plus fins que les planchers (figure 3.43). Les modes longitudinaux apparaissent pour des pulsations

d'ordre $O(\epsilon^{1/2} \omega_r)$ ce qui correspond à la gamme de fréquences où les murs peuvent entrer en résonance en flexion. Même si les modes longitudinaux sont générés par la traction-compression des murs, ils peuvent exciter leurs modes de flexion car ils provoquent la rotation des nœuds.

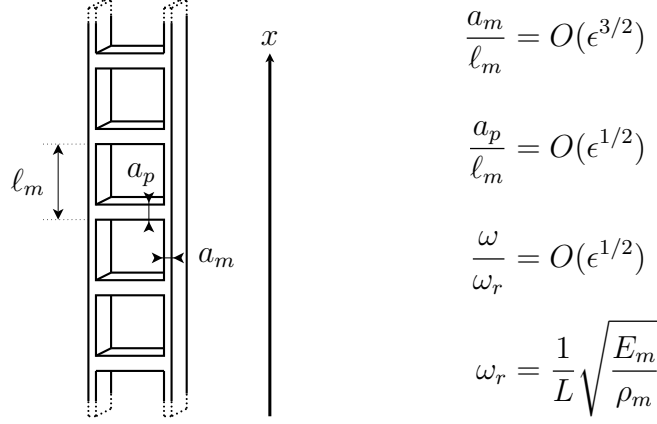


FIGURE 3.43 – Structure étudiée

Dans ce cas, la méthode HMPD fournit les équations suivantes pour la cinématique longitudinale.

$$\begin{cases}
 \Lambda_p \tilde{\omega}_0^2 \tilde{V}^0 + 2E_m A_m \tilde{V}^{0''} = 0 & (N_t 0) \\
 \Lambda_p \tilde{\omega}_0^2 \tilde{V}^1 + 2E_m A_m \tilde{V}^{1''} + (2\Lambda_p \tilde{\omega}_1 + \Lambda_m \tilde{\omega}_0) \tilde{\omega}_0 \tilde{V}^0 + \frac{\Lambda_p \ell_p}{12} \tilde{\omega}_0^2 \tilde{\Phi}^0 = 0 & (N_t 1) \\
 K_p \tilde{\Phi}^0 = 0 & (\mathcal{M}_d 0) \\
 K_p \tilde{\Phi}^1 - \Lambda_p \ell_p \tilde{\omega}_0^2 \tilde{V}^0 = 0 & (\mathcal{M}_d 1) \\
 K_p \tilde{\Phi}^2 - \Lambda_p \ell_p \tilde{\omega}_0 \left(2\tilde{\omega}_1 \tilde{V}^0 + \tilde{\omega}_0 \tilde{V}^1 \right) - \frac{\Lambda_p \ell_p^2}{10} \tilde{\omega}_0^2 \tilde{\Phi}^0 = 0 & (\mathcal{M}_d 2) \\
 K_p \tilde{\Phi}^3 - \Lambda_p \ell_p \left((2\tilde{\omega}_2 \tilde{\omega}_0 + \tilde{\omega}_1^2) \tilde{V}^0 + 2\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_0 \tilde{V}^1 + \tilde{\omega}_0^2 \tilde{V}^2 \right) \\
 - \frac{\Lambda_p \ell_p^2}{10} \tilde{\omega}_0 \left(2\tilde{\omega}_1 \tilde{\Phi}^0 + \tilde{\omega}_0 \tilde{\Phi}^1 \right) - \frac{3\Lambda_p^2 \ell_p^3}{140K_p} \tilde{\omega}_0^4 \tilde{V}^0 \\
 + \frac{K_m \tilde{\beta}_m^0 \ell_m}{4f_P(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m)} \left(4 \sin \left(\frac{\tilde{\beta}_m^0 \ell_m}{2} \right) \text{sh} \left(\frac{\tilde{\beta}_m^0 \ell_m}{2} \right) \tilde{\Phi}^0 \right. \\
 \left. - \frac{\tilde{\beta}_m^0 \ell_m \left(\text{ch}(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m) - \cos(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m) \right)}{f_I(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m)} \tilde{\Delta}^{0I} \right) = 0 & (\mathcal{M}_d 3) \\
 \frac{12E_p A_p}{\ell_m \ell_p} \tilde{\Delta}^0 = 0 & (T_d 0) \\
 \frac{12E_p A_p}{\ell_m \ell_p} \tilde{\Delta}^3 - \Lambda_p \tilde{\omega}_0^2 \tilde{\Delta}^0 = 0 & (T_d 3) \\
 \frac{12E_p A_p}{\ell_m \ell_p} \tilde{\Delta}^4 - \Lambda_p \tilde{\omega}_0 \left(2\tilde{\omega}_1 \tilde{\Delta}^0 + \tilde{\omega}_0 \tilde{\Delta}^1 \right) - 3\Lambda_m f(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m) \tilde{\omega}_0^2 \tilde{\Delta}^0 = 0 & (T_d 4)
 \end{cases}$$

L'expression de $\tilde{\beta}_m^0$ ainsi que celles des fonctions f_I et f_P se trouvent page 219. Nous rappelons que le paramètre $\tilde{\beta}_m^0$ dépend de la fréquence et que la fonction f_I s'annule pour les fréquences des modes de flexion impairs des éléments alors que la fonction f_P s'annule pour les fréquences des modes pairs. Nous réutilisons également la fonction f qui servait à définir la masse apparente dans le chapitre 2 :

$$f(\beta\ell) = \frac{4}{\beta\ell f_I(\beta\ell)} \sin\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\beta\ell}{2}\right)$$

Là encore, le comportement de la structure à l'échelle macroscopique est directement décrit par l'équation $(N_t 0)$. Il s'agit d'une forme dégénérée ($\Lambda \approx \Lambda_p$) de l'équation établie au paragraphe précédent en l'absence de résonance interne. L'inertie des murs est reléguée dans l'équation d'ordre 1 et c'est la masse *réelle* qui intervient. Cela n'est pas surprenant car les équations (N_t) expriment l'équilibre entre l'effort normal dans les murs et l'effort tranchant dans les planchers. Comme tous ces efforts sont développés normalement, ces équations ne sont pas affectées par les effets dynamiques à l'échelle locale même aux ordres supérieurs. Pour savoir si le domaine de validité de l'équation $(N_t 0)$ est limité par des incompatibilités cinématiques entre les modes macroscopiques et le fonctionnement des éléments, il faut étudier les ordres supérieurs des deux autres équations. Nous constatons alors que les effets de la résonance interne apparaissent dans les équations $(\mathcal{M}_d 3)$ et $(T_d 4)$.

Dans l'équation $(\mathcal{M}_d 3)$, ce sont les coefficients de $\tilde{\Phi}^0$ et $\tilde{\Delta}^{0'}$ qui dépendent de la fréquence. Ces variables sont toutes les deux nulles d'après les équations $(\mathcal{M}_d 0)$ et $(T_d 0)$. Néanmoins, si nous calculions l'équation $(\mathcal{M}_d 4)$, nous verrions réapparaître les mêmes termes mais avec les variables $\tilde{\Phi}^1$ et $\tilde{\Delta}^{1'}$. Ainsi, pour les fréquences des modes de flexion pairs des murs, le dénominateur du coefficient de $\tilde{\Phi}^1$ dans l'équation $(\mathcal{M}_d 4)$ s'annule, ce qui impose $\tilde{\Phi}^1 = 0$. Or, d'après l'équation $(\mathcal{M}_d 1)$, $\tilde{\Phi}^1$ est proportionnelle à \tilde{V}^0 donc nous avons également $\tilde{V}^0 = 0$.

De la même manière, il existe une équation d'ordre supérieur où le premier ordre non nul de la variable Δ , noté $\tilde{\Delta}^j$, a le même coefficient que $\tilde{\Delta}^0$ dans l'équation $(T_d 4)$. En conséquence, $\tilde{\Delta}^j$ est nulle pour les fréquences des modes de flexion impairs des murs. En l'absence de résonance interne, l'équation (3.43) montre que le premier ordre non nul de Δ est proportionnel à $\tilde{\Phi}^{k'}$ où k désigne le premier ordre non nul de la variable Φ (ici $k = 1$). Il est fort probable que ce soit toujours vrai pour les situations avec résonance interne. Dans ces conditions, pour les fréquences des modes de flexion impairs des murs, nous avons :

$$\tilde{\Delta}^j = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\Phi}^{1'} = \tilde{V}^{0'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{V}^0 = 0 \text{ avec les conditions aux limites}$$

Cette supposition n'a pas été vérifiée car la résonance interne complique énormément le calcul des ordres supérieurs. De plus, l'introduction de la géométrie de la structure étudiée dans l'équation (3.43) montre que $j = 7$, ce qui veut dire que les développements devraient être menés très loin.

Expliquons maintenant pourquoi les modes longitudinaux sont interdits pour les fréquences des modes de flexion des murs. Dans l'équation $(T_d 4)$, le coefficient de $\tilde{\Delta}^0$ est tout simplement la masse apparente dont les propriétés ont été

étudiées en détail au chapitre 2 (page 62). Dans l'équation ($\mathcal{M}_d 3$), c'est la rigidité apparente des murs qui est en cause. Nous avons démontré page 73 que, pour les fréquences des modes de flexion pairs, les équations de la poutre d'Euler-Bernoulli imposent $\theta(0) = -\theta(\ell_m)$ où θ désigne la rotation de la section dans le repère local associé à un mur (figure 3.3 page 145). Cela est en contradiction avec l'hypothèse utilisée pour homogénéiser le comportement de la structure, à savoir que les variables cinématiques évoluent peu d'un niveau à l'autre.

Résonance des planchers en flexion

Nous nous intéressons maintenant aux effets de la résonance des planchers. La structure considérée est présentée sur la figure 3.44 et les modes longitudinaux apparaissent pour des pulsations d'ordre $O(\omega_r)$.

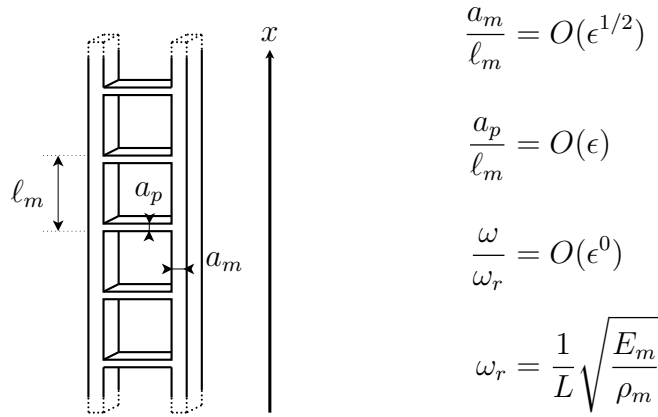


FIGURE 3.44 – Structure étudiée

Dans ce cas, les développements asymptotiques doivent être réalisés selon les puissances de $\epsilon^{1/2}$. La méthode HMPD fournit alors les équations suivantes pour les vibrations longitudinales.

$$\begin{cases} \Lambda_m \tilde{\omega}_0^2 \tilde{V}^0 + 2E_m A_m \tilde{V}^{0''} = 0 & (N_t 0) \\ \Lambda_m \tilde{\omega}_0^2 \tilde{V}^{1/2} + 2E_m A_m \tilde{V}^{1/2''} + 2\Lambda_m \tilde{\omega}_0 \tilde{\omega}_{1/2} \tilde{V}^0 + \Lambda_p f(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p) \tilde{\omega}_0^2 \tilde{V}^0 = 0 & (N_t \frac{1}{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3K_m (\tilde{\Phi}^0 - \tilde{\Delta}^{0'}) = 0 & (\mathcal{M}_d 0) \\ 3K_m (\tilde{\Phi}^{1/2} - \tilde{\Delta}^{1/2'}) - \frac{12\Lambda_p \ell_p f_P(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)}{(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)^2 f_I(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)} \tilde{\omega}_0^2 \tilde{V}^0 = 0 & (\mathcal{M}_d \frac{1}{2}) \end{cases}$$

Les équations (T_d) n'ont pas été recopiées car elles correspondent à l'équilibre entre l'effort tranchant dans les murs et l'effort normal dans les planchers. Tous ces efforts sont développés normalement et ces équations ne sont pas affectées par la résonance des planchers même aux ordres supérieurs. Elles ont donc une forme similaire aux équations (T_d) de la partie 3.4.1. Pour cette géométrie, la dilatation transversale Δ est nulle au moins jusqu'à l'ordre $5/2$.

Le comportement macroscopique de la structure est toujours décrit par l'équation ($N_t 0$). Comme les murs sont plus épais que les planchers, il s'agit d'une forme

dégénérée où seule la masse des murs apparaît. L'inertie des planchers est reléguée dans l'équation d'ordre $1/2$ et c'est la masse *apparente* qui intervient. Cette dernière devient infinie pour les fréquences des modes de flexion impairs des planchers donc les modes longitudinaux ne peuvent pas exister pour ces fréquences.

Dans l'équation ($\mathcal{M}_d 0$) de la partie 3.4.1, c'est-à-dire en l'absence de résonance interne, il y a deux termes susceptibles d'être affectés par les effets dynamiques à l'échelle locale : le terme d'inertie $-\Lambda_p \ell_p \tilde{\omega}_0^2 \tilde{V}^0$ et la rigidité K_p . La structure étudiée ici a des murs plus épais que les planchers donc les rigidités K_m et K_p n'ont plus le même ordre de grandeur :

$$\frac{K_p}{K_m} = O\left(\frac{I_p}{I_m}\right) = O\left(\frac{a_p^3}{a_m^3}\right) = O(\epsilon^{3/2})$$

Le terme proportionnel à K_p est alors relégué dans l'équation d'ordre $3/2$ et n'a pas été calculé ici. Cependant, dans la partie suivante nous étudierons une structure avec des murs et des planchers similaires pour laquelle ce terme est plus facile à obtenir. Nous pourrions alors savoir quelles sont les fréquences pour lesquelles il y a des incompatibilités cinématiques entre les modes macroscopiques et le fonctionnement des éléments. Le terme d'inertie se trouve dans l'équation ($\mathcal{M}_d \frac{1}{2}$). Il dépend de la fréquence comme prévu. Là encore, les modes longitudinaux sont interdits pour les fréquences des modes de flexion impairs des planchers.

Conclusion

L'étude des effets de la résonance interne est plus simple pour les modes longitudinaux que pour les modes de giration. En effet, l'effort tranchant n'apparaît pas dans l'équation générale qui décrit les modes longitudinaux au premier ordre. Ainsi, le seul terme qui peut être affecté par les effets dynamiques à l'échelle locale est le terme d'inertie. De plus, nous avons vu au chapitre 2 que, pour le mode de polarisation (Py), c'est la résonance des planchers qui a un impact sur les forces d'inertie. Nous retrouvons ce résultat pour les modes longitudinaux. Lorsque les murs sont en résonance, c'est la masse réelle qui intervient alors que pour la résonance des planchers, c'est la masse apparente. Cette dernière a la même expression qu'au chapitre 2 et les modes longitudinaux sont interdits pour les fréquences des modes de flexion impairs des planchers. Notons que, par rapport au mode (Py) dans les milieux réticulés, les effets de la résonance sont moins marqués car la proportion de la masse qui est modifiée est plus faible. En effet, chaque cellule contient deux murs et un seul plancher.

Néanmoins, lorsque les murs sont en résonance, il existe des fréquences interdites à cause des incompatibilités cinématiques entre les modes longitudinaux et le fonctionnement des éléments. Comme au chapitre 2, nous constatons que la rigidité apparente des murs devient infinie pour les fréquences de leurs modes de flexion pairs car l'hypothèse cinématique utilisée pour homogénéiser le comportement de la structure n'est pas adaptée. Cependant, dans le chapitre précédent, cela empêchait le déphasage des ondes mais n'interdisait pas la propagation des ondes de compression pure. Pour les modes longitudinaux, les murs se déforment en phase et pourtant, ces modes ne peuvent pas exister pour les fréquences des modes de flexion pairs des murs. Cela provient de la perte de la périodicité dans

la direction transversale, ce qui modifie les équations d'équilibre interne. Dans les milieux réticulés, les moments générés par la rotation des nœuds sont équilibrés par ceux générés par la distorsion de la cellule alors que, dans les structures constituées de portiques simples, ils sont équilibrés par un terme d'inertie.

Une autre conséquence de la perte de la périodicité dans la direction transversale est que les modes longitudinaux sont associés à la dilatation de la cellule Δ . Les murs subissent donc un mouvement dans la direction transversale en plus de la déformation en traction-compression. Pour ce nouveau mouvement, les forces d'inertie font intervenir la masse apparente des murs. Même si c'est leur masse réelle qui apparaît dans l'équation décrivant les modes longitudinaux à l'échelle macroscopique, les fréquences des modes de flexion impairs des murs peuvent donc être des fréquences interdites.

En ce qui concerne la résonance des planchers, l'exemple choisi ne permet pas d'étudier facilement les incompatibilités cinématiques qui peuvent exister entre les modes longitudinaux et le fonctionnement des éléments. Nous le ferons dans la partie suivante.

3.4.3 Résonance interne à l'ordre 0

Nous étudions maintenant le comportement d'une structure dont tous les éléments ont une épaisseur d'ordre $O(\epsilon \ell_m)$. Alors, les modes longitudinaux apparaissent pour des pulsations d'ordre $O(\omega_r)$. Dans cette gamme de fréquences, tous les éléments sont en résonance et les effets dynamiques à l'échelle locale sont visibles dans les équations d'ordre 0. Les caractéristiques de la structure sont résumées sur la figure 3.45.

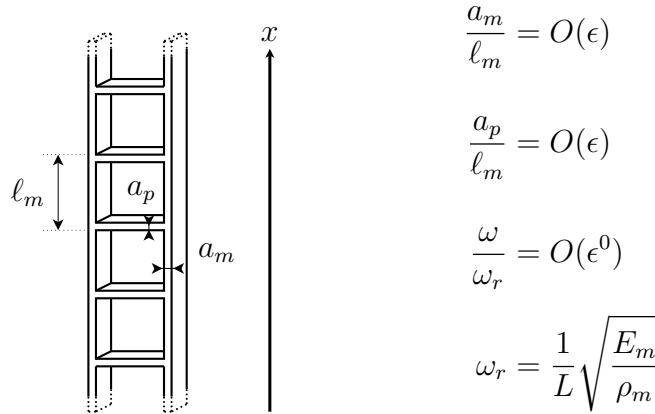


FIGURE 3.45 – Structure étudiée

Équations d'équilibre

Les définitions des paramètres macroscopiques se trouvent page 153 et nous rappelons les expressions des fonctions qui dépendent de la fréquence (à travers les paramètres $\tilde{\beta}_p^0$ et $\tilde{\beta}_m^0$) :

$$\tilde{\beta}_p^0 = \sqrt[4]{\frac{\rho_p A_p \tilde{\omega}_0^2}{E_p I_p}} \quad \tilde{\beta}_m^0 = \sqrt[4]{\frac{\rho_m A_m \tilde{\omega}_0^2}{E_m I_m}}$$

$$f(\beta\ell) = \frac{4}{\beta\ell f_I(\beta\ell)} \sin\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\beta\ell}{2}\right)$$

$$f_I(\beta\ell) = \sin\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta\ell}{2}\right)$$

$$f_P(\beta\ell) = \sin\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta\ell}{2}\right)$$

La fonction f_I s'annule pour les fréquences des modes de flexion impairs alors que la fonction f_P s'annule pour celles des modes de flexion pairs. Nous introduisons également les rigidités apparentes des murs et des planchers :

$$\mathcal{K}_p(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p) = \frac{K_p \tilde{\beta}_p^0 \ell_p}{f_I(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_p^0 \ell_p}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\tilde{\beta}_p^0 \ell_p}{2}\right)$$

$$\mathcal{K}_m(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m) = \frac{K_m \tilde{\beta}_m^0 \ell_m}{3f_P(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m)} \sin\left(\frac{\tilde{\beta}_m^0 \ell_m}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\tilde{\beta}_m^0 \ell_m}{2}\right)$$

La méthode HMPD fournit les équations d'équilibre suivantes pour les vibrations longitudinales.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{12E_p A_p}{\ell_m \ell_p} \tilde{\Delta}^0 = 0 \\ \frac{12E_p A_p}{\ell_m \ell_p} \tilde{\Delta}^1 = 0 \\ \frac{12E_p A_p}{\ell_m \ell_p} \tilde{\Delta}^2 - \left(\Lambda_p + 3\Lambda_m f(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m)\right) \tilde{\omega}_0^2 \tilde{\Delta}^0 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (T_d 0) \\ (T_d 1) \\ (T_d 2) \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\Lambda_m + \Lambda_p f(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)\right) \tilde{\omega}_0^2 \tilde{V}^0 + 2E_m A_m \tilde{V}^{0''} = 0 \\ \left(\Lambda_m + \Lambda_p f(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)\right) \tilde{\omega}_0^2 \tilde{V}^1 + 2E_m A_m \tilde{V}^{1''} + \frac{\Lambda_p \ell_p f_P(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)}{(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)^2 f_I(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)} \tilde{\omega}_0^2 \tilde{\Phi}^0 \\ + \left(\Lambda_m + \frac{\Lambda_p}{4} \left(3f(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p) + \frac{\operatorname{ch}(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p) - \cos(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)}{(f_I(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p))^2}\right)\right) 2\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_0 \tilde{V}^0 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (N_t 0) \\ (N_t 1) \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{12\Lambda_p \ell_p f_P(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)}{(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)^2 f_I(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)} \tilde{\omega}_0^2 \tilde{V}^0 = 0 \\ -\frac{12\Lambda_p \ell_p f_P(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)}{(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)^2 f_I(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)} \tilde{\omega}_0^2 \tilde{V}^1 + \left(\mathcal{K}_p(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p) + 3\mathcal{K}_m(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m)\right) \tilde{\Phi}^0 \\ + \left(\frac{\sin(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p) - \operatorname{sh}(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)}{\tilde{\beta}_p^0 \ell_p (f_I(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p))^2} - \frac{4f_P(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)}{(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)^2 f_I(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)}\right) 3\Lambda_p \ell_p \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_0 \tilde{V}^0 \\ + \frac{K_m (\tilde{\beta}_m^0 \ell_m)^2 \left(\operatorname{ch}(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m) - \cos(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m)\right)}{2 \left(\cos(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m) \operatorname{ch}(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m) - 1\right)} \tilde{\Delta}^{0'} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (\mathcal{M}_d 0) \\ (\mathcal{M}_d 1) \end{array}$$

Ces équations sont une nouvelle illustration des phénomènes constatés dans le paragraphe précédent et le chapitre 2. Dans les équations (T_d) , qui décrivent l'équilibre des forces horizontales, nous avons la masse réelle des planchers et la masse apparente des murs. Inversement, dans les équations (N_t) , qui décrivent l'équilibre des forces verticales, nous avons la masse apparente des planchers et la masse réelle des murs. Nous retrouvons également le fait que la rigidité apparente des murs devient infinie pour les fréquences de leurs modes de flexion pairs.

La nouveauté est l'expression de la rigidité apparente des planchers. Contrairement aux cas étudiés jusqu'à présent, cette dernière tend vers l'infini pour les fréquences des modes de flexion *impairs* des planchers. C'est encore une conséquence de la perte de la périodicité dans la direction transversale. En effet, pour les modes longitudinaux des structures constituées de portiques simples, les deux nœuds d'un même niveau tournent dans des sens opposés (figure 3.6 page 149). Cela correspond au fonctionnement naturel des planchers pour les fréquences des modes pairs mais est en contradiction avec leur fonctionnement pour les fréquences des modes impairs. La démonstration de ce résultat se trouve dans le chapitre 2 page 73.

Comportement de la structure

Les équations (T_d) montrent que la dilatation transversale est nulle au moins jusqu'à l'ordre 2. Pour le reste de la résolution, il faut distinguer trois situations : les fréquences des modes de flexion pairs des planchers, les fréquences en dehors de la résonance des planchers et enfin, les fréquences des modes de flexion impairs des planchers.

Nous commençons par les fréquences des modes de flexion pairs des planchers. Alors, le coefficient de \tilde{V}^0 dans l'équation $(\mathcal{M}_d 0)$ est nul et les modes longitudinaux sont directement décrits par l'équation $(N_t 0)$. Il s'agit de l'équation habituelle pour les modes longitudinaux mais la masse des planchers est remplacée par leur masse apparente. Cependant, cette équation est valable « presque nulle part », c'est-à-dire jamais sauf pour les fréquences des modes de flexion pairs des planchers et à condition qu'elles ne coïncident pas avec des fréquences pour lesquelles les modes longitudinaux ne peuvent pas exister. En particulier, nous avons vu dans le paragraphe précédent que les modes longitudinaux sont incompatibles avec le fonctionnement des murs pour les fréquences de leurs modes de flexion. Ainsi, lorsque les murs et les planchers sont identiques, les modes de flexion pairs des murs et des planchers correspondent aux mêmes fréquences et l'équation $(N_t 0)$ n'est jamais valable.

En dehors des fréquences de résonance des planchers, les moments d'inertie sont trop importants et l'équation $(\mathcal{M}_d 0)$ impose $\tilde{V}^0 = 0$. Il faut alors considérer les équations d'ordre 1 :

$$\left(\Lambda_m + \Lambda_p f(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)\right) \tilde{\omega}_0^2 \tilde{V}^1 + 2E_m A_m \tilde{V}^{1''} + \frac{\Lambda_p \ell_p f_P(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)}{(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)^2 f_I(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)} \tilde{\omega}_0^2 \tilde{\Phi}^0 = 0 \quad (N_t 1)$$

$$- \frac{12\Lambda_p \ell_p f_P(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)}{(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)^2 f_I(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)} \tilde{\omega}_0^2 \tilde{V}^1 + \left(\mathcal{K}_p(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p) + 3\mathcal{K}_m(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m)\right) \tilde{\Phi}^0 = 0 \quad (\mathcal{M}_d 1)$$

Dans ce cas, la variable d'ordre 0 n'est plus le déplacement longitudinal V mais la rotation différentielle des nœuds Φ . Cependant, \tilde{V}^1 et $\tilde{\Phi}^0$ vérifient la même équation différentielle et nous avons choisi de raisonner sur \tilde{V}^1 par la suite. L'équation ($\mathcal{M}_d 1$) permet d'exprimer $\tilde{\Phi}^0$ en fonction de \tilde{V}^1 . En reportant cette expression dans l'équation ($N_t 1$), nous obtenons l'équation différentielle qui décrit ce type de modes :

$$(\Lambda_m + \Lambda_p \mathcal{F}(\tilde{\omega}_0)) \tilde{\omega}_0^2 \tilde{V}^1 + 2E_m A_m \tilde{V}^{1''} = 0 \quad (3.44)$$

$$\text{avec} \quad \mathcal{F}(\tilde{\omega}_0) = f(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p) + \frac{K_p (f_p(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p))^2}{(f_I(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p))^2 (\mathcal{K}_p(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p) + 3\mathcal{K}_m(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m))}$$

Nous commençons par déterminer le domaine de validité de cette équation puis nous nous intéressons aux propriétés de ses solutions.

L'équation (3.44) est valable « presque partout » et les fréquences interdites correspondent :

1. aux fréquences des modes de flexion pairs des planchers,
2. aux fréquences des modes de flexion des murs,
3. aux fréquences qui annulent la rigidité apparente de la cellule,
4. aux fréquences des modes de flexion impairs des planchers.

Les deux premiers cas ont déjà été commentés. Pour le troisième cas, nous avons $\mathcal{K}_p(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p) + 3\mathcal{K}_m(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m) = 0$ et le moment d'inertie de l'équation ($\mathcal{M}_d 1$) n'est plus équilibré, ce qui impose $\tilde{V}^1 = 0$. Cette fois-ci, les fréquences interdites sont dues à un mode de l'ensemble de la cellule et pas à un mode des éléments. Le dernier cas sera examiné plus tard. Pour ces fréquences, la masse apparente des planchers et leur rigidité apparente tendent toutes les deux vers l'infini.

Pour étudier les propriétés des solutions, nous nous basons sur les résultats obtenus dans la partie 3.3.3 pour les modes de giration. En effet, l'équation (3.44) a la même forme que l'équation (G 0) de la page 227 qui décrit les modes de giration : c'est une équation différentielle de degré 2 où le terme d'inertie est multiplié par une fonction qui dépend de la fréquence. Par contre, il ne s'agit pas de la même fonction. Notons également que la fonction \mathcal{F} est différente de la fonction f qui définit habituellement la masse apparente. Comme l'équation (3.44) est construite à partir des équations d'ordre 1, la rigidité apparente intervient aussi.

Par analogie avec les modes de giration, nous savons que ce type d'équation redonne les déformées modales classiques à l'échelle macroscopique mais que les fonctions de transfert associées sont atypiques. Ces dernières dépendent des propriétés de la fonction \mathcal{F} . En ce qui concerne les fréquences propres, nous avons constaté, pour les modes de giration, qu'il n'est pas toujours possible de les définir. De plus, lorsqu'elles existent, elles sont légèrement décalées à cause de la résonance interne. Il est probable que ce décalage soit plus important pour les modes longitudinaux. En effet, les fréquences ne sont pas calculées à partir des mêmes équations selon qu'il y a résonance interne ou non. Ici, nous devons considérer les équations d'ordre 1 qui contiennent plus de termes que les équations d'ordre 0 utilisées en l'absence de résonance interne.

Nous étudions maintenant les propriétés de la fonction \mathcal{F} lorsque les murs et les planchers sont rigoureusement identiques. Dans ce cas, nous avons :

$$\begin{aligned} \ell_m = \ell_p = \ell & & \bar{\rho}_m = \bar{\rho}_p = \bar{\rho} & & \tilde{\beta}_m^0 = \tilde{\beta}_p^0 = \tilde{\beta}^0 \\ A_m = A_p = A & & I_m = I_p = I_e & & E_m = E_p = E \\ K_p = \frac{K_m}{2} = \frac{12EI_e}{\ell^2} & & & & \end{aligned}$$

et la fonction \mathcal{F} se simplifie :

$$\mathcal{F}(\tilde{\omega}_0) = 2 \frac{4(\operatorname{ch}(\tilde{\beta}^0 \ell) + \cos(\tilde{\beta}^0 \ell)) - 3 + 5 \operatorname{ch}(\tilde{\beta}^0 \ell) \cos(\tilde{\beta}^0 \ell)}{\tilde{\beta}^0 \ell (\sin(\tilde{\beta}^0 \ell) (3 \operatorname{ch}(\tilde{\beta}^0 \ell) - 1) + \operatorname{sh}(\tilde{\beta}^0 \ell) (1 - 3 \cos(\tilde{\beta}^0 \ell)))}$$

Nous introduisons ensuite la pulsation adimensionnelle $\hat{\omega}$ définie par le ratio entre $\tilde{\omega}_0$, la pulsation des vibrations de la structure, et ω_{f1} , la première pulsation propre de flexion d'un élément lorsqu'il est bi-encasté.

$$\hat{\omega} = \tilde{\omega}_0 \left(\frac{2\ell}{3\pi} \right)^2 \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{EI_e}} \approx \frac{\tilde{\omega}_0}{\omega_{f1}} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\beta}^0 \ell = \ell \sqrt[4]{\frac{\bar{\rho} \tilde{\omega}_0^2}{EI_e}} = \frac{3\pi}{2} \sqrt{\hat{\omega}}$$

La fonction obtenue à partir de \mathcal{F} après ce changement de variable est notée $\hat{\mathcal{F}}(\hat{\omega})$. Comme pour les modes de giration, nous définissons les fonctions $R(\tilde{\omega}_0)$ et $\hat{R}(\hat{\omega})$.

$$\begin{aligned} R(\tilde{\omega}_0) &= (\Lambda_m + \Lambda_p \mathcal{F}(\tilde{\omega}_0)) \tilde{\omega}_0^2 = (2 + \mathcal{F}(\tilde{\omega}_0)) \bar{\rho} \tilde{\omega}_0^2 \\ &= \left(2 + \hat{\mathcal{F}}(\hat{\omega}) \right) \left(\frac{3\pi}{2} \right)^4 \frac{EI_e}{\ell^4} \hat{\omega}^2 \\ \hat{R}(\hat{\omega}) &= \frac{\ell^4}{EI_e} R(\tilde{\omega}_0) = \left(2 + \hat{\mathcal{F}}(\hat{\omega}) \right) \left(\frac{3\pi}{2} \right)^4 \hat{\omega}^2 \end{aligned}$$

Les pulsations propres ω_k sont les solutions d'équations du type $\hat{R}(\hat{\omega}) = R_k$ où R_k est une constante positive qui ne dépend que du numéro du mode k . Les équivalents de $R(\tilde{\omega}_0)$ et $\hat{R}(\hat{\omega})$ en l'absence de résonance interne sont les fonctions $Q(\tilde{\omega}_0)$ et $\hat{Q}(\hat{\omega})$.

$$\begin{aligned} Q(\tilde{\omega}_0) &= (\Lambda_m + \Lambda_p) \tilde{\omega}_0^2 = 3\bar{\rho} \tilde{\omega}_0^2 = 3 \left(\frac{3\pi}{2} \right)^4 \frac{EI_e}{\ell^4} \hat{\omega}^2 \\ \hat{Q}(\hat{\omega}) &= \frac{\ell^4}{EI_e} Q(\tilde{\omega}_0) = 3 \left(\frac{3\pi}{2} \right)^4 \hat{\omega}^2 \end{aligned}$$

Les pulsations propres ω_k sont encore les solutions d'équations du type $\hat{Q}(\hat{\omega}) = R_k$ où la constante R_k est la même que dans le cas avec résonance interne.

Les deux fonctions $\hat{R}(\hat{\omega})$ et $\hat{Q}(\hat{\omega})$ sont tracées sur la figure 3.46. Nous rappelons que les pulsations des modes de flexion des éléments suivent la suite des carrés des nombres impairs et qu'elles correspondent aux abscisses suivantes :

$$\hat{\omega}_1 \approx 1 \quad \hat{\omega}_2 \approx \frac{5^2}{3^2} \approx 2,78 \quad \hat{\omega}_3 \approx \frac{7^2}{3^2} \approx 5,44 \quad \hat{\omega}_4 \approx \frac{9^2}{3^2} = 9 \quad \text{etc}$$

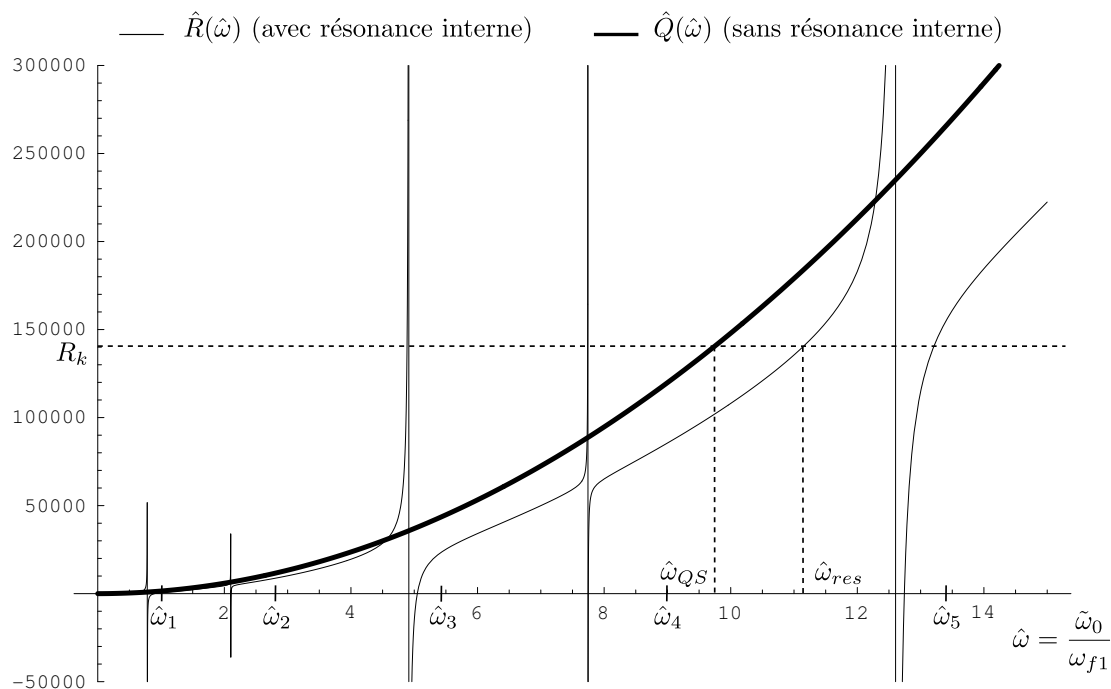


FIGURE 3.46 – $\hat{R}(\hat{\omega})$ (trait fin) et $\hat{Q}(\hat{\omega})$ (trait gras) en fonction de la fréquence

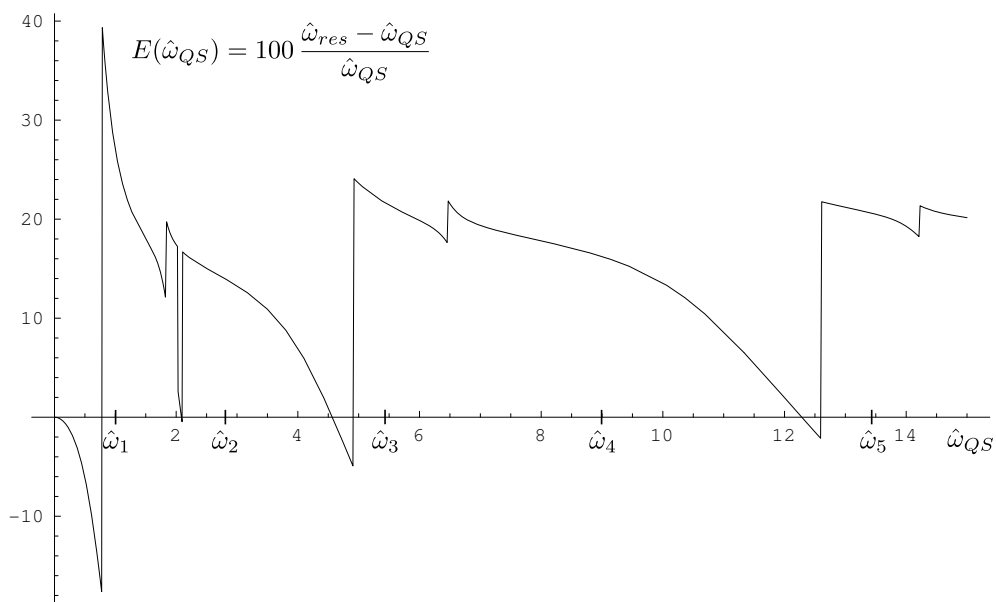


FIGURE 3.47 – Écart relatif, en pourcentages, entre $\hat{\omega}_{QS}$ et $\hat{\omega}_{res}$ en fonction de $\hat{\omega}_{QS}$

Comme pour les modes de giration, la fonction $\hat{R}(\hat{\omega})$ n'a pas de sens physique au voisinage des fréquences pour lesquelles elle tend vers $\pm\infty$. Il s'agit donc d'une fonction croissante définie sur une suite d'intervalles disjoints. Ainsi, nous retrouvons les problèmes d'existence et d'unicité des fréquences propres et les fonctions de transfert sont atypiques. Pour une valeur de R_k donnée, nous appelons $\hat{\omega}_{QS}$ la pulsation propre obtenue en négligeant la résonance interne, c'est-à-dire la solution de l'équation $\hat{Q}(\hat{\omega}) = R_k$. La pulsation $\hat{\omega}_{res}$ est une solution de l'équation $\hat{R}(\hat{\omega}) = R_k$ correspondant à la même valeur de R_k . Il s'agit de la solution la plus proche de $\hat{\omega}_{QS}$ et les bandes interdites sont négligées. L'écart relatif entre ces deux pulsations est représenté sur la figure 3.47. Le plus souvent, les fréquences propres sont plus élevées à cause des effets dynamiques à l'échelle locale et la comparaison avec la figure équivalente pour les modes de giration (figure 3.41 page 235) montre que le décalage est deux fois plus important pour les modes longitudinaux.

Revenons sur la figure 3.46. Les fréquences pour lesquelles la fonction $\hat{R}(\hat{\omega})$ tend vers l'infini ne coïncident avec aucun des modes de flexion des éléments. En réalité, il s'agit des fréquences pour lesquelles la rigidité apparente de la cellule $\mathcal{K}_p(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p) + 3\mathcal{K}_m(\tilde{\beta}_m^0 \ell_m)$ est nulle. Pour le cas particulier que nous avons traité, c'est-à-dire lorsque les murs et les planchers sont rigoureusement identiques, la fonction $f_I(\tilde{\beta}^0 \ell)$ se simplifie dans l'expression de la fonction $\mathcal{F}(\tilde{\omega}_0)$. C'est pourquoi, sur la figure 3.46, nous n'observons pas de pic pour les fréquences des modes de flexion impairs. Mais, même s'il est possible d'écrire l'équation (3.44) pour ces fréquences, cela ne veut pas dire qu'elle a un sens physique.

Les fréquences des modes de flexion impairs des planchers correspondent à une situation que nous n'avons pas encore rencontrée. Dans ce cas, la masse apparente et la rigidité apparente des planchers tendent simultanément vers l'infini. Pour déterminer le comportement de la structure à ces fréquences, il faut revenir aux équations d'équilibre ($N_t 1$) et ($\mathcal{M}_d 1$). Dans l'équation ($N_t 1$), la masse apparente des planchers et le terme d'inertie lié à la rotation des nœuds tendent tous les deux vers l'infini. Au voisinage de ces fréquences, ils n'ont donc plus le même ordre de grandeur que les autres termes de l'équation et ils remontent dans une équation d'ordre inférieur qui s'écrit :

$$\frac{\Lambda_p \tilde{\omega}_0^2}{\tilde{\beta}_p^0 \ell_p f_I(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)} \left(4 \sin \left(\frac{\tilde{\beta}_p^0 \ell_p}{2} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\tilde{\beta}_p^0 \ell_p}{2} \right) \tilde{V}^1 + \frac{f_P(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)}{\tilde{\beta}_p^0} \tilde{\Phi}^0 \right) = 0 \quad (3.45)$$

De même, dans l'équation ($\mathcal{M}_d 1$), le terme d'inertie et la rigidité apparente des planchers deviennent infinis, ce qui conduit à une deuxième relation entre \tilde{V}^1 et $\tilde{\Phi}^0$:

$$\begin{aligned} \frac{K_p \tilde{\beta}_p^0 \ell_p}{f_I(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)} \cos \left(\frac{\tilde{\beta}_p^0 \ell_p}{2} \right) \operatorname{ch} \left(\frac{\tilde{\beta}_p^0 \ell_p}{2} \right) \tilde{\Phi}^0 - \frac{12 \Lambda_p \ell_p \tilde{\omega}_0^2 f_P(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)}{(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)^2 f_I(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)} \tilde{V}^1 &= 0 \\ \Rightarrow \frac{K_p \tilde{\beta}_p^0 \ell_p}{f_I(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)} \left(\cos \left(\frac{\tilde{\beta}_p^0 \ell_p}{2} \right) \operatorname{ch} \left(\frac{\tilde{\beta}_p^0 \ell_p}{2} \right) \tilde{\Phi}^0 - \tilde{\beta}_p^0 f_P(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p) \tilde{V}^1 \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Nous en déduisons l'expression de \tilde{V}^1 en fonction de $\tilde{\Phi}^0$ et nous la reportons dans

l'équation (3.45) :

$$\frac{(f_I(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p))^2}{\tilde{\beta}_p^0 f_P(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p)} \tilde{\Phi}^0 = 0$$

Pour les fréquences des modes de flexion impairs des planchers, cette équation est trivialement vérifiée. Par contre, au voisinage de ces fréquences, le raisonnement qui nous a permis de construire les équations (3.45) et (3.46) est toujours valide et nous avons $f_I(\tilde{\beta}_p^0 \ell_p) \neq 0$. La seule solution possible est donc $\tilde{\Phi}^0 = 0$, ce qui signifie que les modes longitudinaux ne peuvent pas exister.

Conclusion

Même si les mécanismes de base sont les mêmes que pour le mode de polarisation (Py) du chapitre 2, c'est-à-dire traction-compression des murs et résonance en flexion des éléments, nous obtenons ici des résultats très différents. Cela provient de la perte de la périodicité de la structure dans la direction transversale. Le premier changement est que la rigidité apparente des planchers tend vers l'infini pour les fréquences de leurs modes de flexion impairs. Ainsi, la masse apparente et la rigidité apparente des planchers deviennent infinies pour les mêmes fréquences.

La deuxième différence est due à la modification des équations d'équilibre interne. Ici, les moments d'inertie sont trop importants et nous avons $\tilde{V}^0 = 0$ sauf pour les modes de flexion pairs des planchers. En conséquence, l'équation d'ordre 0 est valable « presque nulle part » et il faut regarder les équations d'ordre 1. Notons que ce phénomène n'est pas directement lié à la résonance des éléments mais au type de structure que nous avons étudié. En effet, les effets dynamiques à l'échelle locale modifient la forme des termes mais pas leur ordre de grandeur en dehors des fréquences de résonance.

Ce passage aux équations d'ordre 1 n'est pas anodin car elles contiennent plus de termes que les équations d'ordre 0. En particulier, l'équation différentielle décrivant les modes de la structure à l'échelle macroscopique dépend maintenant de la rigidité apparente des éléments en flexion. Malgré tout, elle reste une équation différentielle de degré 2 et elle a la même forme que l'équation décrivant les modes de giration avec résonance interne. Les résultats établis pour ces modes peuvent donc être réutilisés pour les modes longitudinaux. Nous savons ainsi que les déformées modales à l'échelle macroscopique ne sont pas affectées par les effets dynamiques à l'échelle locale mais que les fonctions de transfert associées sont atypiques. Par contre, lorsqu'il est possible de définir des fréquences propres, le décalage est plus important pour les modes longitudinaux que pour les modes de giration à cause des nouveaux mécanismes pris en compte dans les équations d'ordre 1.

L'équation différentielle obtenue à partir des équations d'équilibre d'ordre 1 est valable « presque partout ». Les fréquences interdites correspondent aux fréquences de résonance des éléments et aux fréquences qui annulent la rigidité apparente de l'ensemble de la cellule dans l'équation d'équilibre en moments. Tous ces résultats ont été établis en négligeant l'amortissement dans la structure.

3.4.4 Résumé

Équation générale des modes longitudinaux : $\Lambda \tilde{\omega}_0^2 \tilde{V}^0 + 2E_m A_m \tilde{V}^{0''} = 0$

Analyse modale

Les résultats sont les mêmes que pour les modes de giration. Les estimations de L_k et ϵ_k données pour les modes transverses restent valables. Lorsqu'il y a résonance interne, les déformées modales à l'échelle macroscopique ne sont pas modifiées mais les fonctions de transfert sont atypiques.

Conditions d'existence

Il n'y a pas de condition d'existence particulière lorsque la condition de quasi-staticisme local est vérifiée. Par contre, la résonance des éléments en flexion fait apparaître des fréquences interdites. Les résultats sont différents de ceux du chapitre 2 sur le mode de polarisation (Py) car, à cause de la perte de la périodicité de la structure dans la direction transversale, nous n'avons pas les mêmes équations d'équilibre interne.

1. Résonance interne aux ordres supérieurs

Cela se produit lorsque les épaisseurs des éléments ne sont pas du même ordre. À l'ordre 0, nous avons une équation dégénérée dans laquelle la résonance interne n'intervient pas. Pas contre, cette équation est valable « presque partout » et son domaine de validité est donné par les équations d'ordre supérieur.

Résonance des murs : La rigidité apparente devient infinie au voisinage des fréquences des modes de flexion pairs car l'hypothèse cinématique utilisée pour homogénéiser le comportement de la structure n'est pas adaptée. Pour les fréquences des modes impairs, c'est la masse apparente qui tend vers l'infini. Celle-ci apparaît dans le terme d'inertie associé à la dilatation transversale Δ dans les équations d'équilibre interne.

Résonance des planchers : La masse apparente et la rigidité apparente deviennent toutes les deux infinies au voisinage des fréquences des modes de flexion impairs. Pour la rigidité apparente, cela est dû à une incompatibilité cinématique entre le fonctionnement des planchers et les modes longitudinaux.

2. Résonance interne à l'ordre 0

Cela se produit lorsque les murs et les planchers sont similaires. Dans l'équation d'ordre 0, la masse apparente des planchers dépend de la fréquence. Mais cette équation est valable « presque nulle part » car les moments d'inertie ne sont pas équilibrés dans les équations d'équilibre interne. Il faut alors regarder les équations d'ordre 1 dans lesquelles la rigidité apparente des éléments intervient également. Il y a maintenant trois types de fréquences interdites : celles liées à la résonance des murs, celles liées à la résonance des planchers et celles liées à la résonance de l'ensemble de la cellule. Dans ce dernier cas, la rigidité apparente de la cellule s'annule dans l'équation d'équilibre en moments.

3.5 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à des structures constituées par la répétition périodique de portiques dans une seule direction. La méthode HMPD a été utilisée pour construire les modèles de poutre équivalents à l'échelle macroscopique et nous avons étudié leurs modes de vibrations. Ce chapitre a ainsi repris et complété les travaux de Hans et Boutin (Hans, 2002; Boutin et Hans, 2003; Hans et Boutin, 2008) sur les modes transverses et longitudinaux des structures constituées de portiques simples. Dans cette conclusion, nous commençons par rappeler les différents comportements observés puis nous revenons sur la démarche qui a été suivie.

La cellule de base étant la même qu'au chapitre 2, les deux types de structures ont des caractéristiques communes. Par la suite, les structures du chapitre 2, périodiques selon deux directions, sont appelées milieux (réticulés) et les structures du chapitre 3, périodiques selon une seule direction, sont appelées poutres réticulées ou structures poutres. Dans les milieux réticulés, nous avons mis en évidence quatre mécanismes de base : le cisaillement de la cellule, la propagation d'ondes de flexion, la propagation d'ondes de traction-compression et la résonance des éléments en flexion. Ces quatre mécanismes existent toujours dans les poutres réticulées. Le cisaillement de la cellule est encore généré par la flexion locale des éléments et il est bien plus souple que dans les poutres pleines. L'équivalent de la propagation des ondes de flexion dans les milieux est le mécanisme de flexion interne dans les structures poutres et celui des ondes de traction-compression dans les milieux est le mécanisme de traction-compression de la poutre réticulée. Enfin, les modes de vibration faisant intervenir les mécanismes les plus rigides des poutres réticulées peuvent provoquer la résonance des éléments en flexion.

Néanmoins, la disparition de la périodicité dans la direction transversale rend la cinématique des structures poutres plus riche que celle des milieux réticulés. En effet, pour l'homogénéisation, nous continuons à imposer aux variables cinématiques d'évoluer lentement dans la direction longitudinale mais il n'y a plus de contraintes dans la direction transversale. Cela autorise un nouveau mécanisme : la flexion globale générée par la traction-compression des murs en opposition de phase. Les équations d'équilibre des nœuds sont également modifiées. Maintenant, il n'y a que trois éléments connectés aux deux nœuds situés aux extrémités d'un niveau. En conséquence, le comportement à l'échelle locale est différent.

Toutes ces propriétés influencent le comportement des structures poutres à l'échelle macroscopique. Hans et Boutin ont montré que les modes de vibrations transverses peuvent être générés par trois mécanismes : le cisaillement, la flexion globale et la flexion interne. Comme dans les milieux réticulés, c'est l'ordre de grandeur des rigidités des mécanismes qui détermine le comportement de la structure. En première approximation, nous pouvons considérer que le cisaillement et la flexion globale sont associés en série et que cet ensemble est associé en parallèle avec la flexion interne. Dans le cas le plus général, lorsque les trois mécanismes ont la même importance, les vibrations sont décrites par une équation différentielle de degré 6 qui peut dégénérer en des modèles plus simples, notamment le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli. Les modèles avec flexion interne sont plus

originaux car ce mécanisme n'existe pas dans les poutres pleines. La combinaison du cisaillement et de la flexion globale donne un modèle qui a été baptisé poutre de Timoshenko élançée. La différence avec le modèle de poutre de Timoshenko habituel, qui décrit le comportement des poutres pleines, est qu'il ne prend pas en compte l'inertie de rotation.

En effet, cette dernière est très petite dans les structures portiques et pour qu'elle équilibre les variations du moment global, il faut que la fréquence soit plus élevée. À plus hautes fréquences, il existe donc des modes de giration pilotés par la rotation α des niveaux. Selon l'importance des trois mécanismes et du contraste entre l'inertie de rotation et celle de translation, ce sont des modes de giration pure ou des modes qui couplent translation et rotation. Dans cette thèse, nous avons mis en évidence les différents comportements mais les équations n'ont été résolues que pour les modes de giration pure. Comme ces modes apparaissent à des fréquences relativement élevées, ils peuvent être accompagnés de phénomènes de résonance interne si les éléments ne sont pas suffisamment épais. Cela est vrai également pour les modes longitudinaux puisqu'ils correspondent à la même gamme de fréquences.

Toujours à cause de la perte de la périodicité dans la direction transversale, les effets dynamiques à l'échelle locale n'ont pas tout à fait les mêmes conséquences qu'au chapitre 2. Ce qui reste vrai, c'est que la masse apparente des éléments tend vers l'infini pour les fréquences de leurs modes de flexion impairs. De même, l'hypothèse cinématique utilisée pour homogénéiser le comportement de la structure dans la direction longitudinale peut rendre la rigidité apparente des murs infinie pour leurs modes de flexion pairs. Par contre, il existe des situations où c'est la cinématique du mode considéré qui est en cause. C'est notamment le cas pour les planchers qui ne sont plus soumis à l'hypothèse de périodicité dans les structures poutres. Selon la cinématique du mode considéré, la rigidité apparente des planchers peut devenir infinie pour les fréquences des modes de flexion pairs ou impairs. En particulier, pour les modes longitudinaux, la masse apparente et la rigidité apparente des planchers tendent simultanément vers l'infini pour les fréquences des modes de flexion impairs. Les fréquences propres de flexion des éléments ne sont pas les seules fréquences pour lesquelles les modes macroscopiques ne peuvent pas exister. Lorsque les murs et les planchers sont similaires, il y a également des fréquences pour lesquelles la rigidité apparente de l'ensemble de la cellule s'annule.

Toutes ces propriétés ont été mises en évidence grâce à l'application de la méthode HMPD sur quelques cas particuliers. De plus, le choix initial de ne jouer que sur les épaisseurs des éléments limite le nombre de comportements qu'il est possible de générer. Ce chapitre est une illustration de la façon dont les résultats peuvent ensuite être généralisés à d'autres types de structures et de la façon dont ils peuvent être utilisés pour créer des nouveaux modèles. L'idée de base consiste à identifier les termes relatifs aux différents mécanismes et à étudier les effets de la modification de leur ordre de grandeur.

Pour les modes transverses, Hans et Boutin ont choisi d'imposer la même importance à tous les mécanismes afin de construire un modèle générique qui englobe tous les comportements observés. Ils ont ensuite étudié comment ce mo-

dèle dégénère. Cela leur a permis d'identifier les paramètres adimensionnels qui pilotent le comportement des structures et de proposer des critères pour identifier ce comportement sans utiliser la méthode HMPD. Pour les structures étudiées par homogénéisation, ces critères ont une expression analytique. Dans cette thèse, nous avons souhaité étendre le domaine d'application des modèles à des structures plus complexes pour lesquelles la mise en œuvre de la méthode HMPD est très fastidieuse. Nous avons alors proposé une méthode pour déterminer les paramètres macroscopiques qui peut être appliquée à n'importe quelle structure portique. Il s'agit de calculs d'inertie élémentaires et d'un calcul statique sur un modèle éléments finis d'une seule cellule. Ainsi, les calculs dynamiques ne sont plus réalisés sur l'ensemble de la structure mais uniquement sur le modèle de poutre équivalent. Cela permet d'obtenir le comportement global de la structure. Pour compléter la méthode, il faudrait ensuite revenir au niveau local et déterminer les contraintes et les déformations dans les éléments.

Pour les modes de giration, il y a un paramètre supplémentaire et le problème est plus compliqué. C'est pourquoi nous avons choisi une démarche légèrement différente. Nous avons fait varier les ordres de grandeur directement dans les équations d'équilibre et nous avons ensuite construit les modèles correspondants. Nous avons ainsi généré des comportements qui n'avaient pas été observés avec la méthode HMPD et qui ont été confirmés numériquement. Cependant, cette façon de procéder ne permet de construire que des modèles où la taille caractéristique des variations est la même pour toutes les variables non nulles. Les simulations numériques montrent que ce n'est pas toujours le cas.

Ce travail de généralisation n'a pas été réalisé pour les modes longitudinaux. En effet, les premières études ne considéraient que les situations où la condition de quasi-statisme local est vérifiée. Pour ces structures avec des éléments relativement épais, il n'y avait qu'un seul modèle possible et il n'était pas nécessaire de construire des critères d'identification. L'extension de la méthode HMPD aux situations avec résonance interne a permis d'étudier des structures avec des éléments plus fins. Il est alors apparu que la déformation de la cellule pouvait également intervenir à l'échelle macroscopique pour ce type de modes.

Une autre question soulevée par ce chapitre est le domaine de validité des méthodes d'homogénéisation. Même si certains travaux visent à construire des modèles continus capables de représenter le comportement des structures discrètes dans une large gamme de fréquences (Andrianov, 2002), la principale hypothèse de l'homogénéisation est que la condition de séparation d'échelles est vérifiée. Cela signifie qu'il existe une taille macroscopique bien plus grande que la taille de la cellule. L'étude des différents types de vibrations montre que cette condition n'est pas une condition absolue sur la fréquence mais une condition relative à chaque type de modes. En effet, à chaque fois, la taille macroscopique a la même expression et elle ne dépend que du numéro du mode. Par contre, la rigidité associée à chaque type de vibrations n'est pas la même et ils apparaissent dans des gammes de fréquences différentes. Ainsi, pour une structure donnée, il est possible d'avoir deux gammes de fréquences homogénéisables séparées par une gamme de fréquences non homogénéisables (figure 3.48). Les premières fréquences homogénéisables correspondent aux premiers modes transverses pilotés

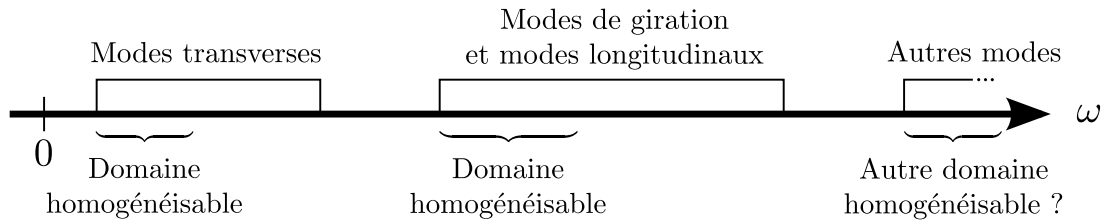


FIGURE 3.48 – Représentation très schématique des différents domaines homogénéisables

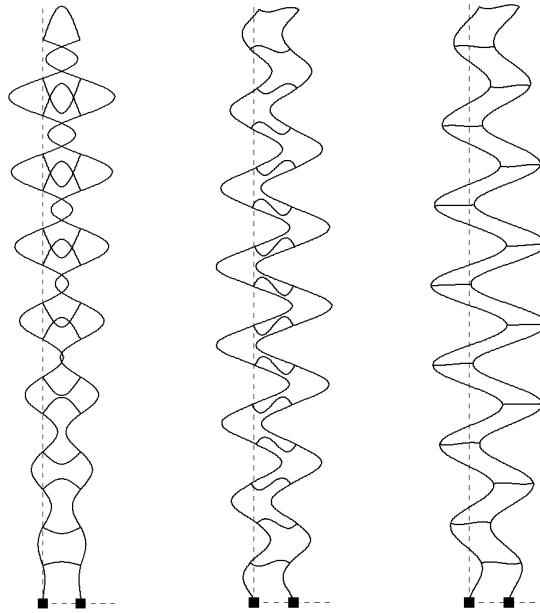
par la translation et les secondes aux premiers modes de giration et aux premiers modes longitudinaux. Entre ces deux gammes de fréquences se trouvent les modes transverses supérieurs qui ne sont pas homogénéisables.

De plus, dans cette thèse, nous n'avons pas identifié toutes les gammes de fréquences homogénéisables. Nous avons étudié les modes de vibrations pilotés par les variables U , α et V qui correspondent aux mouvements de corps rigide des niveaux en deux dimensions. Ces modes sont particulièrement intéressants car ils sont susceptibles d'exister dans toutes les structures poutres sous réserve que les paramètres macroscopiques aient les bons ordres de grandeur. Néanmoins, les simulations numériques font apparaître d'autres types de vibrations pilotés par la déformation de la cellule (figure 3.49). À chaque fois, les premiers modes sont sûrement homogénéisables. Cela nécessiterait d'apporter deux modifications à la méthode HMPD. La première est que la périodicité des variables cinématiques n'est pas forcément la même que celle de la structure. Par exemple, pour les modes pilotés par la rotation des nœuds, cette dernière est périodique sur deux cellules. D'ailleurs, les auteurs qui ont commencé à travailler sur l'homogénéisation des modes modulés dans les structures périodiques continues (Manevitch et Oshmyan, 1999; Daya *et al.*, 2002; Moustaghfir *et al.*, 2007) considèrent la périodicité des variables cinématiques sur plusieurs cellules. Le deuxième problème est que ces modes apparaissent souvent à des fréquences assez élevées. La difficulté dans ce cas, est la modélisation du comportement des éléments.

Dans cette thèse, le domaine d'application de la méthode HMPD a été étendu aux situations où les éléments peuvent entrer en résonance. Ces derniers ont alors des propriétés apparentes qui dépendent de la fréquence. Comme les calculs sont beaucoup plus compliqués, il peut être intéressant d'étudier des situations où les effets de la résonance apparaissent dans les équations d'ordres supérieurs et des situations où ils apparaissent dans les équations d'ordre 0 afin d'identifier tous les termes. Un autre point délicat est que ces propriétés apparentes peuvent tendre vers l'infini. Dans ce cas, nous ne savons plus évaluer leur ordre de grandeur alors que la séparation des ordres constitue la base de la méthode. Le problème peut être contourné en introduisant de l'amortissement dans la structure et en le pesant par rapport au ratio d'échelles ϵ . Cela permet d'une part, d'éviter que les termes ne deviennent infinis et d'autre part, d'évaluer l'importance des pics des propriétés apparentes lors de la résonance. Par exemple, pour un oscillateur simple, nous savons que le pic de la fonction transfert est inversement proportionnel à l'amortissement. Ainsi, au voisinage de la résonance, les termes ne remontent plus toutes les équations quel que soit leur ordre de grandeur de départ.

Portiques simples

(Dernier mode
transverse
pour comparaison)



Doubles portiques

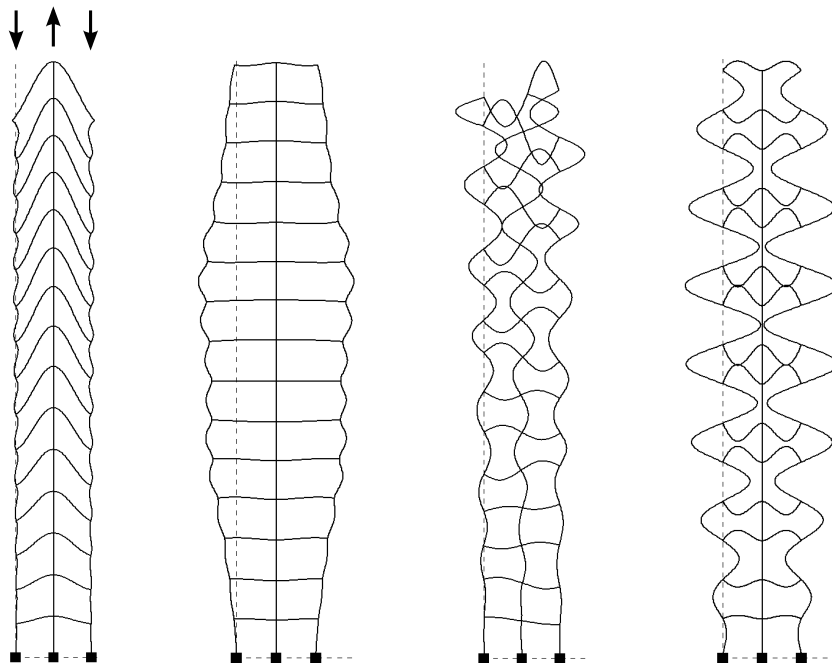


FIGURE 3.49 – Autres modes de vibrations des poutres réticulées
(Modes pilotés par la déformation de la cellule)

Chapitre 4

Modélisation des bâtiments

Sommaire

4.1	Introduction	261
4.1.1	Intérêt des modèles simplifiés	261
4.1.2	Travaux antérieurs	263
4.1.3	Transposition des modèles homogénéisés	264
4.2	Modélisation des murs voiles	267
4.2.1	Calcul des paramètres en présence de murs voiles	269
4.2.2	Modèles macroscopiques avec cisaillement des murs	279
4.3	Modélisation d'un bâtiment à murs voiles	292
4.4	Conclusion et perspectives	308

4.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques discrets (HMPD) a permis de construire des modèles analytiques continus qui décrivent le comportement macroscopique de structures réticulées périodiques. Nous proposons maintenant d'adapter ces modèles aux bâtiments afin d'étudier leur réponse au vent ou aux séismes. En effet, dans beaucoup d'immeubles, le plan des différents étages est identique, parfois à l'exception du rez-de-chaussée et/ou du dernier étage. Ils peuvent donc être assimilés à des structures creuses quasi-périodiques en élévation. Les modèles issus de l'homogénéisation n'ont pas le même objectif que les méthodes numériques de calcul des structures, telles que les éléments finis. Celles-ci sont mieux adaptées pour les phases finales de dimensionnement et de vérification. Ces modèles viennent plutôt en complément des méthodes existantes d'analyse de la dynamique des bâtiments, qu'elles soient numériques ou expérimentales. Dans cette introduction, nous commençons par donner des exemples de situations où des modèles simplifiés peuvent s'avérer utiles. Nous présentons ensuite les modèles employés dans la littérature. Enfin, nous précisons les hypothèses retenues pour la transposition des résultats précédents aux bâtiments et les nouveaux problèmes soulevés.

4.1.1 Intérêt des modèles simplifiés

Le principal intérêt des modèles issus de l'homogénéisation est qu'ils sont construits de façon analytique à partir des caractéristiques de la cellule de base. De plus, grâce à la séparation des différents ordres de grandeur, ils mettent en évidence les phénomènes prépondérants et négligent ceux qui sont secondaires. Cela permet d'avoir une bonne compréhension du fonctionnement de la structure et du rôle des éléments. En effet, dans les chapitres précédents, nous avons pu identifier les mécanismes mis en jeu et la façon dont ils sont associés. Nous avons également obtenu les paramètres qui pilotent le comportement de la structure. Ce type d'information n'est pas accessible avec les méthodes numériques qui permettent de traiter en détail un cas particulier, mais dont il est difficile de tirer ensuite des règles générales.

Pourtant, ces connaissances sont nécessaires pour interpréter les données expérimentales. Celles-ci proviennent d'enregistrements de la réponse des bâtiments à différents types de sollicitations : séismes (Bard *et al.*, 1992; Farsi, 1996; Goel et Chopra, 1997, 1998), excitations harmoniques avec un oscillateur à balourd (Hans, 2002; Hans *et al.*, 2005), chocs (Hans, 2002; Hans *et al.*, 2005) ou plus simplement le bruit ambiant (Farsi, 1996; Hans, 2002; Hans *et al.*, 2005; Michel, 2007; Michel *et al.*, 2008). Il est alors possible de déterminer les fréquences propres, les déformées modales et l'amortissement. Mais ensuite, pour relier ces données aux déformations des éléments, il faut faire des hypothèses sur le fonctionnement de la structure (Hans, 2002; Boutin *et al.*, 2005; Michel, 2007; Michel *et al.*, 2008). Ce travail est facilité par l'homogénéisation car cette méthode a permis de construire une liste des modèles possibles et des critères pour choisir entre ces modèles. En particulier, la répartition des fréquences propres change d'un modèle à l'autre.

Les modèles simplifiés, mais réalistes, de bâtiments représentent également une alternative intéressante lorsqu'il est impossible d'employer des méthodes numériques sophistiquées. C'est notamment le cas pour l'évaluation de la vulnérabilité sismique du bâti existant. En effet, le nombre de structures antérieures aux règles de construction parasismique est considérable et les données disponibles sont très limitées. Un autre exemple est le prédimensionnement des structures neuves ou du renforcement des structures existantes. Dans ce cas, il est nécessaire de tester rapidement les différentes possibilités. De plus, cette phase de conception peut être rendue plus efficace grâce à la meilleure compréhension du fonctionnement des bâtiments apportée par l'homogénéisation.

D'autre part, pour les bâtiments comportant beaucoup d'étages, la précision des modèles homogénéisés devient très bonne alors que celle des modèles numériques diminue à cause de la taille importante des calculs. Les modèles continus peuvent alors être utilisés soit pour vérifier les calculs plus complexes, soit pour diminuer leur taille. McCallen et Romstad (1988, 1990) et Chajes *et al.* (1993) ont développé un nouvel élément fini à partir d'une représentation continue du comportement des structures portiques. Cette méthode a été validée en comparant les résultats avec des enregistrements réalisés lors du séisme de Loma Prieta sur un bâtiment de 10 niveaux (Chajes *et al.*, 1996a) et un de 47 niveaux (Chajes *et al.*, 1996b). Des formulations par éléments finis basées sur des modèles continus ont également été proposées pour les murs voiles couplés et pour les murs voiles couplés associés à des portiques (Capuani *et al.*, 1996). Grâce à ce type d'approche, il est possible d'analyser des phénomènes aussi complexes que l'interaction sol-structure en présence de plusieurs sources de non-linéarités (McCallen et Romstad, 1994) ou d'incertitudes sur les données (Laudarin, 2007).

En ce qui concerne l'utilisation des modèles homogénéisés dans le cadre d'un diagnostic de vulnérabilité sismique, il pourrait être objecté qu'ils ne sont valables que dans le domaine quasi-élastique. En effet, l'endommagement est un phénomène local qui peut rompre la périodicité de la structure. De plus, il remet en cause l'hypothèse de linéarité. Or la résistance des bâtiments aux séismes dépend de leur ductilité, c'est-à-dire de leur capacité à se déformer dans le domaine plastique avant d'atteindre la ruine. Néanmoins, voici quelques pistes pour exploiter les informations disponibles sur le comportement élastique des bâtiments.

La première idée consiste à déterminer le domaine de validité de ce comportement. Dans ce but, Hans et Boutin (Hans, 2002; Boutin *et al.*, 2005) ont proposé la notion de seuil d'intégrité. Il s'agit du niveau d'accélération au sens des normes de construction parasismique qui cause les premiers dommages à la structure. Ce seuil ne dépend que des propriétés élastiques de la structure et d'un critère d'apparition de l'endommagement. Il peut donc être déterminé en utilisant les modèles homogénéisés. Pour les bâtiments stratégiques qui doivent rester opérationnels après les tremblements de terre (par exemple les hôpitaux et les casernes des pompiers), le seuil d'intégrité peut directement être comparé avec les niveaux d'accélération exigés par les normes. Cela est également vrai pour les structures réalisées avec des matériaux fragiles tels que la maçonnerie ou le béton peu armé. En effet, dans ce cas, la marge de sécurité une fois le seuil franchi est très faible. Pour les autres structures, le seuil d'intégrité permet d'estimer la

ductilité nécessaire pour respecter les exigences des normes et de faire un premier classement des bâtiments les plus vulnérables.

Ainsi, tant que le seuil d'intégrité n'est pas dépassé, les modèles homogénéisés sont suffisants pour étudier le comportement des bâtiments. En particulier, ils peuvent être utilisés pour prévoir la réponse à des petits séismes, ce qui est intéressant pour dimensionner les équipements (Miranda et Taghavi, 2005; Taghavi et Miranda, 2005). Ces derniers représentent souvent une part importante de la valeur des bâtiments et sont nécessaires pour la reprise de l'activité après un tremblement de terre. Notons que, dans ce cas, seule la réponse macroscopique de la structure est nécessaire et pas les efforts dans les éléments.

Enfin, même si les normes de construction parasismique (PS92 et Eurocode 8 (Bisch, 2002)) autorisent les incursions dans le domaine post-élastique, la méthode de référence est le calcul linéaire équivalent. Les fréquences propres et les déformées modales sont déterminées à partir d'un modèle élastique linéaire de la structure et les effets non linéaires sont intégrés dans le coefficient de comportement. Pour les bâtiments très réguliers, les normes autorisent également une méthode simplifiée pseudo-statique. Dans ce cas, la période et la déformée du premier mode sont données par des formules empiriques. Les mesures expérimentales (Bard *et al.*, 1992; Farsi, 1996; Goel et Chopra, 1997, 1998) montrent que ces formules reflètent assez bien le comportement des structures portiques mais qu'elles sont plus difficiles à caler pour les structures comportant des murs voiles. Les modèles issus de l'homogénéisation peuvent aider à améliorer ce dernier point en indiquant les paramètres qui pilotent le comportement des bâtiments.

4.1.2 Travaux antérieurs

Parmi les modèles simplifiés disponibles pour étudier la dynamique des bâtiments, le plus célèbre est le modèle « brochette ». Il s'agit d'un modèle discret où les masses sont concentrées au niveau du centre de gravité des planchers. Elles sont reliées par des tiges dont la rigidité est équivalente à celle d'un étage dans la direction considérée. Dans sa version la plus usuelle, ce modèle est l'équivalent discret de la poutre de cisaillement.

Les modèles continus ont d'abord été développés pour représenter les différents éléments qui constituent les bâtiments. Dans la partie 3.2.2 page 169, ont déjà été évoqués les travaux de Skattum (1971) et Basu *et al.* (1979) sur les murs voiles couplés. Ces auteurs avaient établi que le comportement de ces éléments peut être décrit par une équation différentielle de degré 6. Il s'agit de la même équation que celle du modèle générique obtenu par Hans et Boutin grâce à l'homogénéisation (Hans et Boutin, 2008). Ce modèle est parfois appelé « poutre sandwich » dans la littérature. Pour les structures constituées de murs voiles et de portiques, Heidebrecht et Stafford Smith (1973) ont proposé d'associer en parallèle une poutre d'Euler-Bernoulli et une poutre de cisaillement. Cela correspond au modèle appelé flexion interne et cisaillement dans le chapitre précédent. Ces travaux ont ensuite été repris par (Basu et Nagpal, 1980; Basu *et al.*, 1984) qui ont amélioré le calcul de la rigidité en cisaillement des portiques.

Stafford Smith *et al.* (1981) ont montré que le modèle (générique) développé pour les murs voiles couplés peut également s'appliquer aux autres types de

contreventement : murs voiles, portiques et portiques contreventés. Le point commun de tous ces éléments est que leur comportement dépend de trois paramètres : la rigidité du cisaillement, celle de la flexion globale et celle de la flexion interne. La différence réside dans la méthode de calcul de ces trois paramètres et leur ordre de grandeur. Puis, Stafford Smith *et al.* (1984) ont proposé d'étendre ce modèle aux bâtiments. Les rigidités sont d'abord estimées pour chacun des systèmes de contreventement et leurs sommes donnent celles de l'ensemble du bâtiment. Cette démarche ressemble à celle de Potzta et Kollár (2003). Ces auteurs commencent par modéliser chaque système de contreventement par une « poutre sandwich » en utilisant les formules de la littérature pour le calcul des rigidités. Puis ces poutres sont assemblées pour construire la « poutre sandwich » équivalente au bâtiment. Cette fois-ci, les rigidités sont obtenues par une approche énergétique. La résolution approchée de ce modèle se trouve dans (Tarján et Kollár, 2004).

Tous ces modèles ont en commun de supposer les planchers infiniment rigides dans leur plan et infiniment souples en dehors de leur plan. Mais, cette hypothèse de diaphragme rigide n'est pas toujours valable. Pour les bâtiments contreventés par deux murs voiles situés aux extrémités, Jain (1984) a proposé un modèle analytique qui tient compte de la déformation des planchers dans leur plan. Li (2000) a construit un modèle de plaque qui se déforme en flexion dans la direction verticale et en cisaillement dans la direction horizontale pour représenter les bâtiments étroits. Signalons enfin qu'il existe des modèles simplifiés tridimensionnels pour prendre en compte la torsion et les couplages qui peuvent apparaître entre les différentes directions, par exemple (Yoon et Stafford Smith, 1995; Ng et Kuang, 2000; Potzta et Kollár, 2003; Rafezy *et al.*, 2007).

4.1.3 Transposition des modèles homogénéisés

Dans cette thèse et les travaux de Hans et Boutin qui l'ont précédée, le problème de la modélisation simplifiée des bâtiments a été repris depuis le début et par une approche complètement différente. La méthode HMPD a été appliquée sur des structures portiques et leur comportement macroscopique a été obtenu sans faire d'hypothèses *a priori* sur le fonctionnement des planchers. Cela a permis de retrouver les modèles déjà utilisés par le passé pour représenter les bâtiments et de préciser leur domaine de validité. Des nouveaux phénomènes ont également été observés à plus hautes fréquences : les modes de giration et la résonance des éléments en flexion.

Il est fort probable que ces phénomènes se produisent aussi dans les bâtiments et que la gamme de fréquences des modes verticaux coïncide avec la résonance des planchers en flexion. Nous avons vu que l'importance de ces effets de résonance sur le comportement macroscopique dépend de la part de la masse qui est affectée. Dans les bâtiments, les planchers représentent souvent plus de la moitié de la masse. Néanmoins, les pièces ayant des dimensions différentes, tous les morceaux de planchers n'entrent pas en résonance exactement à la même fréquence. Ainsi, ces effets sont d'autant plus marqués que le plan du bâtiment est régulier. Mais il faudrait des investigations supplémentaires (notamment expérimentales) pour déterminer leur importance exacte.

Par la suite, nous nous intéressons uniquement aux vibrations transversales dans la gamme de fréquences excitée par les séismes. Ainsi, il n'est pas nécessaire de prendre en compte la résonance des éléments en flexion et nous nous appuyons sur les résultats de la partie 3.2. Même si les trois mécanismes mis en jeu et les modèles de comportement associés sont connus depuis longtemps, cette thèse se distingue des travaux antérieurs sur les points suivants. Le premier est que nous raisonnons directement sur l'ensemble du bâtiment sans passer par une étape intermédiaire de modélisation des différents systèmes de contreventement. Le deuxième point concerne le calcul de la rigidité du cisaillement K . Nous avons montré dans la partie 3.2.3 page 177 que les formules données dans la littérature peuvent être erronées et nous avons proposé une nouvelle méthode basée sur la cinématique identifiée par homogénéisation. Cette méthode ne nécessite la modélisation par éléments finis que d'un seul étage. Enfin, une fois que le comportement du bâtiment a été identifié et que les paramètres macroscopiques ont été calculés, le modèle continu est résolu de façon exacte. Dans la littérature, ces modèles sont souvent utilisés pour calculer les fréquences propres de façon approchée.

Ce type d'approche n'est valable que si le bâtiment étudié possède certaines caractéristiques. Tout d'abord, les étages doivent être construits selon le même plan pour que la structure soit périodique en élévation. Il faut également que la condition de séparation d'échelles soit respectée. Cela implique deux choses. La première est que les immeubles étudiés doivent comporter suffisamment d'étages. En pratique, les résultats semblent devenir acceptables à partir de cinq étages. La seconde est qu'il faut se limiter aux fréquences pour lesquelles la longueur d'onde est bien plus grande que la hauteur d'un étage. Dans ce chapitre, nous nous plaçons dans le cadre de l'analyse modale afin de pouvoir comparer les résultats avec des données expérimentales. Les estimations de la taille macroscopique L pour les différents modèles ont montré que, pour chaque type de vibrations, le nombre maximal de modes qu'il est possible d'étudier est de l'ordre de $N/3$ où N désigne le nombre de niveaux de la structure. Néanmoins, cela est suffisant pour estimer la réponse des bâtiments sous l'effet du vent ou d'un séisme, car ce type de sollicitations excite principalement les premiers modes. Ces deux premières limitations, à savoir que la structure doit être périodique et la condition de séparation d'échelles respectée, sont intrinsèques à la méthode.

Il existe d'autres restrictions qui proviennent des hypothèses simplificatrices adoptées lors de l'étude par homogénéisation. Mais elles peuvent être considérées comme provisoires car il est parfaitement possible de les abandonner pour améliorer les modèles continus. Parmi les limites actuelles, citons le fait que seules les vibrations dans le plan des portiques ont été considérées lors de la mise œuvre de la méthode HMPD. Les modèles disponibles sont donc bidimensionnels et ils ne permettent pas d'étudier les modes de torsion. Cela oblige à modéliser des bâtiments symétriques pour qu'il n'y ait pas de couplages entre les deux directions transversales et la torsion. D'autre part, les bâtiments contiennent souvent des murs voiles, ce qui remet en cause deux autres hypothèses. La première est que les épaisseurs des éléments ont toujours été négligées. Mais nous verrons par la suite qu'il ne s'agit pas d'une vraie difficulté car les épaisseurs peuvent être prises

en compte lors du calcul des paramètres macroscopiques. Le deuxième point est que les éléments ont été modélisés par des poutres d'Euler-Bernoulli alors que les murs voiles travaillent également en cisaillement. Pour intégrer ce nouveau mécanisme, il risque d'être nécessaire de modifier les modèles macroscopiques.

Dans ce chapitre, nous continuons à travailler en deux dimensions mais nous commençons à considérer la question des murs voiles. En effet, il s'agit d'un mode de construction très répandu en France et pour lequel le calage des formules empiriques pour estimer les fréquences propres est difficile. De plus, les murs voiles n'offrant pas la même ductilité que les portiques, leur capacité à résister aux séismes dépend essentiellement de leurs propriétés élastiques. La partie 4.2 présente l'état des réflexions sur ce sujet. Ces premiers résultats sont ensuite appliqués sur un exemple dans la partie 4.3. Il s'agit d'un bâtiment réel qui a fait l'objet d'une campagne expérimentale (Hans, 2002; Hans *et al.*, 2005).

4.2 Modélisation des murs voiles

La présence de murs voiles dans les bâtiments ne remet pas en cause les trois mécanismes identifiés dans la partie 3.2, à savoir la flexion globale, la flexion interne et le cisaillement de la cellule généré par la flexion locale des éléments (figure 3.8 page 157). Par contre, les méthodes proposées pour le calcul des rigidités doivent probablement être adaptées et il faut s'interroger sur l'apparition de nouveaux mécanismes.

Commençons par analyser ce problème de façon intuitive. Pour cela, nous considérons une structure portique dont les éléments sont suffisamment fins pour pouvoir être modélisés par des poutres d'Euler-Bernoulli et nous augmentons progressivement leur épaisseur. Au bout d'un moment, le cisaillement dans les éléments n'est plus négligeable et ils doivent être modélisés par des poutres de Timoshenko. Cela a surtout une influence sur les mécanismes qui sollicitent les éléments en flexion : la flexion interne et le cisaillement de la cellule. Comme le mécanisme de flexion globale correspond à la traction-compression des murs en opposition de phase, il n'est pas concerné par ce changement. Néanmoins, le moment où le cisaillement dans les éléments doit être pris en compte dépend de la longueur sur laquelle ils sont sollicités en flexion. Pour le mécanisme de cisaillement de la cellule, il s'agit de la distance ℓ qui sépare deux nœuds consécutifs alors que pour le mécanisme de flexion interne, il s'agit de la hauteur H de la structure. En conséquence, deux situations peuvent se présenter.

Dans le premier cas, les éléments sont trop épais pour que les effets du cisaillement soient négligés à l'échelle de la cellule mais ils sont encore suffisamment fins pour pouvoir être modélisés par des poutres d'Euler-Bernoulli à l'échelle de la structure. Alors, seul le mécanisme de cisaillement de la cellule est affecté. Maintenant, le cisaillement dans les éléments doit être pris en compte lors du calcul de la rigidité K . Cependant, les situations intéressantes en pratique correspondent à des murs épais et des planchers fins. Comme ce sont les éléments les plus souples qui pilotent le mécanisme de cisaillement de la cellule, le cisaillement dans les murs joue probablement un rôle négligeable. Par contre, nous verrons qu'il est important de tenir compte de l'épaisseur des nœuds.

Si l'épaisseur des murs augmente encore, le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli devient caduc même à l'échelle macroscopique. Pour les bâtiments de plus de cinq étages concernés par cette méthode, cela se produit surtout pour les modes supérieurs. Alors, lorsque le mécanisme de flexion interne est prédominant, les murs travaillent en flexion *et* en cisaillement à l'échelle de la structure. Cela suggère de rajouter un quatrième mécanisme sur le schéma 3.10 de la page 161. L'étude par homogénéisation qui sera présentée dans la partie 4.2.2 montre que ce quatrième mécanisme est associé en série avec les trois mécanismes déjà identifiés, comme indiqué sur le schéma de la figure 4.1.

Ainsi, il existe deux mécanismes de cisaillement dans la structure. La différence entre ces deux mécanismes est représentée sur la figure 4.2 dans le cas d'un portique simple dont les murs sont beaucoup plus épais que le plancher. Soulignons que le mécanisme de cisaillement de la cellule est spécifique des structures creuses et qu'il peut exister même lorsque le cisaillement dans les éléments est négligeable. Il provient de la façon dont ces éléments sont assemblés.

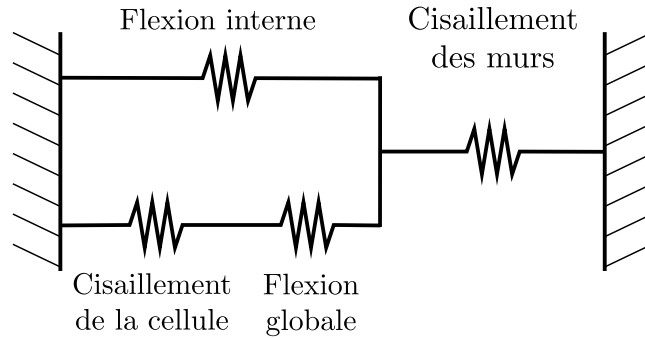


FIGURE 4.1 – Représentation schématique de l'association des mécanismes

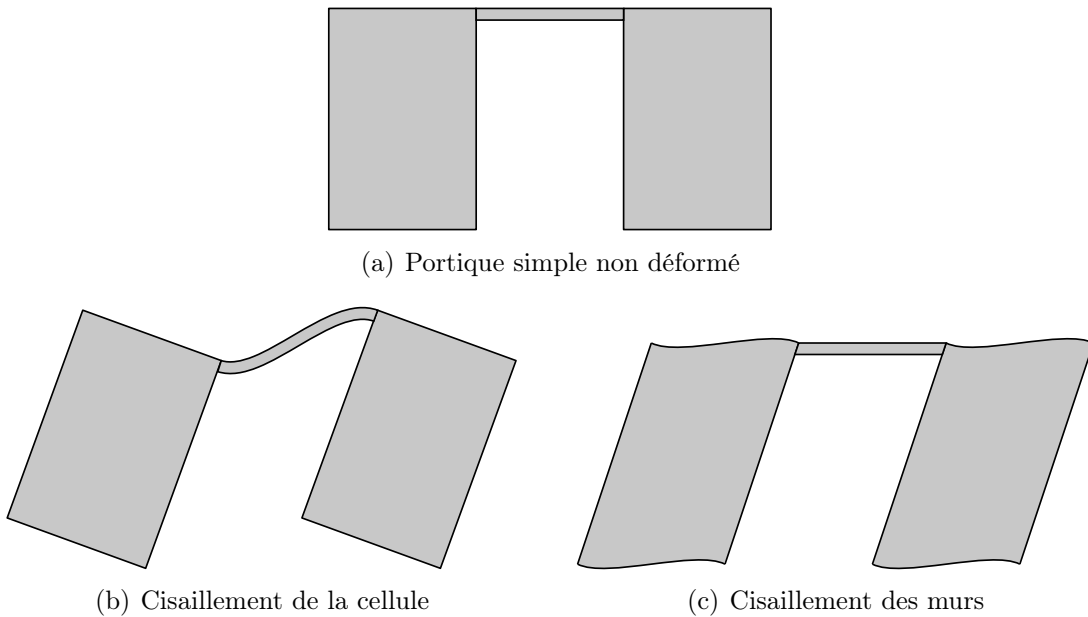


FIGURE 4.2 – Différence entre les deux mécanismes de cisaillement

Au contraire, le mécanisme de cisaillement des murs ne peut apparaître que si ces derniers sont suffisamment épais. Il s'agit du cisaillement classique dans les poutres pleines.

Dans cette partie, nous commençons par considérer la situation intermédiaire où les éléments doivent être modélisés par des poutres de Timoshenko à l'échelle de la cellule mais où le cisaillement dans les murs reste négligeable à l'échelle de la structure. Ainsi, le comportement macroscopique est encore correctement décrit par les modèles de la partie 3.2 et nous mettons au point, grâce à des exemples numériques, les méthodes de calcul des paramètres macroscopiques. Puis, nous augmentons encore les épaisseurs pour que le cisaillement dans les murs ne soit plus négligeable à l'échelle de la structure. Nous étudions alors comment les modèles de la partie 3.2 doivent être modifiés pour intégrer ce nouveau mécanisme. Pour cela, nous appliquons de nouveau la méthode HMPD sur des structures constituées de portiques simples et de doubles portiques. La différence est que les éléments sont maintenant des poutres de Timoshenko.

4.2.1 Calcul des paramètres en présence de murs voiles

Le but de ce paragraphe est de vérifier sur quelques exemples que les méthodes de calcul des paramètres macroscopiques sont fiables même en présence de murs voiles. Ces exemples sont des structures relativement simples mais construites pour pouvoir tester les différentes hypothèses. De plus, le nombre de cellules est assez élevé car il faut que les murs soient suffisamment élancés pour que le cisaillement soit négligeable à l'échelle de la structure. Ainsi, nous restons dans le domaine de validité des modèles de la partie 3.2 qui ne comprennent qu'un seul type de cisaillement : le cisaillement de la cellule (figure 4.2(b)).

Ces modèles dépendent de quatre paramètres macroscopiques : la masse linéique Λ et les rigidités des trois mécanismes. Ces dernières sont notées EI_M pour la flexion globale, $EI_{\mathcal{M}}$ pour la flexion interne et K pour le cisaillement de la cellule. La masse linéique Λ est tout simplement la masse d'un étage divisée par sa hauteur et son mode de calcul n'est pas modifié par la présence des murs voiles. De même, la rigidité de la flexion interne $EI_{\mathcal{M}}$ reste la somme des rigidités des murs en flexion.

Pour la rigidité K , nous disposons de formules analytiques pour les structures constituées de portiques simples ou de doubles portiques et d'une procédure numérique pour les autres géométries. Les formules analytiques ont été obtenues en négligeant les épaisseurs et le cisaillement dans les éléments. Elles ne sont donc pas adaptées pour les murs voiles. Par contre, la procédure numérique devrait automatiquement prendre en compte ces nouveaux effets.

Le dernier paramètre à déterminer est la rigidité de la flexion globale EI_M . Nous avons vu qu'elle est égale au module d'élasticité du matériau multiplié par une inertie macroscopique obtenue en ne considérant que les murs. De plus, lorsque les éléments sont fins, les inerties propres des murs sont négligées. Est-ce toujours le cas pour les murs voiles ? La réponse à cette question permettra de lever une ambiguïté sur la nature de ce mécanisme. En effet, la flexion globale peut soit correspondre à la flexion d'ensemble d'une poutre fictive qui ne serait constituée que des murs (figure 4.3(a)), soit correspondre à la différence d'extension entre les murs (figure 4.3(b)).

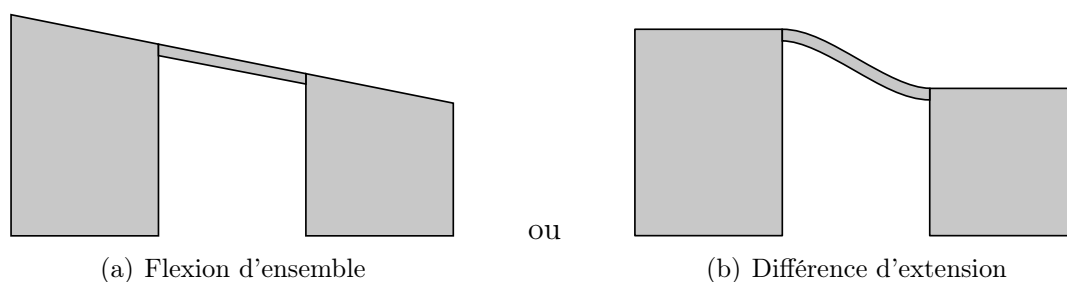


FIGURE 4.3 – Quelle est la nature de la flexion globale ?

Calcul de K

Nous commençons par tester la méthode de calcul de la rigidité K à partir d'un modèle éléments finis d'une cellule. Pour cela, deux structures constituées

de portiques simples sont modélisées. La première, appelée PS1, a des murs beaucoup plus épais que les planchers ($a_m = 2$ m et $a_p = 0,20$ m), ce qui correspond à la situation rencontrée dans les bâtiments. Néanmoins dans ce cas, le cisaillement de la cellule est piloté par la flexion des planchers. Pour montrer que cette technique permet également de prendre en compte le cisaillement dans les éléments, une deuxième structure dont tous les éléments font 1 m d'épaisseur a été étudiée. Celle-ci est appelée PS2. D'autre part, deux raisons expliquent le choix de travailler sur des portiques simples. Premièrement, pour ces structures, l'inertie propre des murs est négligeable par rapport à leur rigidité en traction-compression et l'incertitude sur le calcul de EI_M a peu d'influence sur le résultat final. Par la suite, seule la rigidité en traction-compression a été considérée. La deuxième raison est que ces structures sont suffisamment simples pour pouvoir calculer K de façon analytique. Ainsi, il est possible d'évaluer l'importance des deux nouveaux effets : le cisaillement des éléments et l'épaisseur des nœuds.

La validité du calcul de K est vérifiée en comparant plusieurs approches. Tout d'abord, ce paramètre est estimé de trois façons différentes : à partir d'un calcul statique sur un modèle éléments finis d'une cellule (méthode EF-cellule), de manière analytique et à partir d'un calcul statique sur un modèle éléments finis de la structure complète (méthode EF-structure). Ensuite, les fréquences propres obtenues avec les modèles homogénéisés sont comparées avec celles issues d'un calcul par éléments finis. Tous les calculs par éléments finis ont été réalisés avec le logiciel COMSOL Multiphysics. Les structures ont été modélisées en deux dimensions avec l'hypothèse des contraintes planes. Nous commençons par détailler ces différentes approches et les caractéristiques des structures. Puis, les résultats sont commentés.

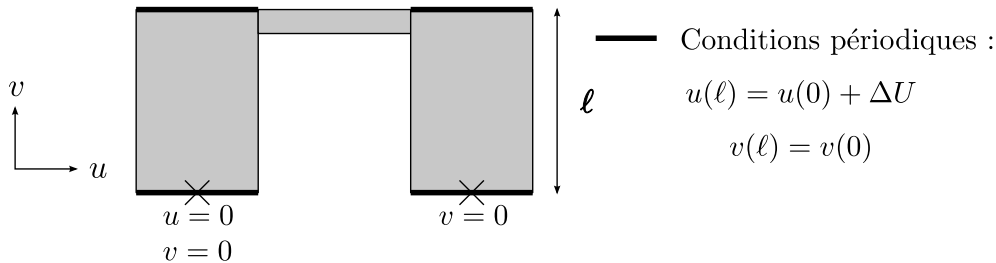


FIGURE 4.4 – Conditions aux limites pour la méthode EF-cellule

La première méthode de calcul, EF-cellule, est celle qui a été mise au point dans la partie 3.2.3 page 181 et que nous voulons tester. Elle utilise un modèle éléments finis d'une seule cellule et les conditions aux limites identifiées par homogénéisation. Celles-ci sont indiquées sur la figure 4.4. Sur ce schéma, u désigne le déplacement horizontal, v le déplacement vertical et ℓ la hauteur de la cellule. Le mouvement de corps rigide de la cellule est empêché en bloquant les deux translations au niveau du centre de gravité de la section inférieure du mur de gauche et en bloquant la translation verticale au niveau du centre de gravité de la section inférieure du mur de droite. Des conditions périodiques sont aussi imposées entre la base et le sommet des murs ainsi qu'un déplacement différentiel ΔU dans la direction horizontale. Ce type de conditions aux limites autorise la rota-

tion des murs comme sur la figure 4.2(b). Pour les deux structures, nous avons pris $\Delta U = 1$ mm. Ensuite, la rigidité K se déduit de l'effort tranchant dans les murs grâce à la formule suivante :

$$\Sigma T_m = -K \frac{\Delta U}{\ell} \quad (4.1)$$

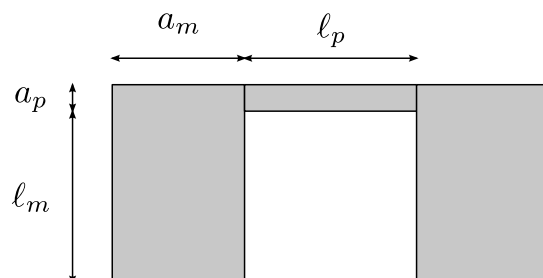


FIGURE 4.5 – Notations pour les éléments épais

La deuxième méthode de calcul est analytique. Pour cela, les murs et les planchers sont modélisés par des poutres de Timoshenko et les nœuds sont supposés indéformables, c'est-à-dire qu'ils ne subissent qu'un mouvement de corps rigide. Les notations sont présentées sur la figure 4.5. Là encore, une seule cellule est modélisée et la rigidité K est déduite de la formule (4.1) qui relie l'effort tranchant dans les murs au déplacement différentiel ΔU . Nous obtenons alors l'expression suivante :

$$K = \frac{K_m K_p \left(\frac{1+a_m/\ell_p}{1+a_p/\ell_m} \right)^2}{K_m + K_p \left(\frac{1+a_m/\ell_p}{1+a_p/\ell_m} \right)^2} \quad (4.2)$$

$$\text{avec } \frac{1}{K_m} = \frac{\ell_m^2}{24E_m I_m} + \frac{1}{2G_m A'_m} \quad \text{et} \quad \frac{1}{K_p} = \frac{\ell_m \ell_p}{12E_p I_p} + \frac{\ell_m}{\ell_p G_p A'_p}$$

G désigne le module de cisaillement du matériau et A' la section réduite d'effort tranchant. La démonstration de cette formule se trouve dans l'annexe C.

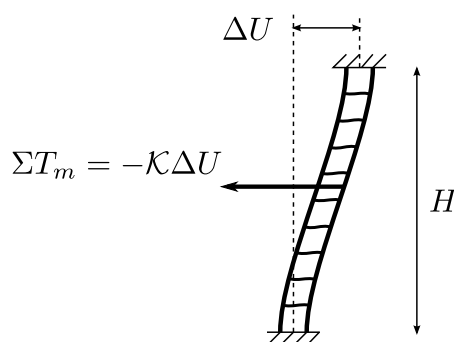


FIGURE 4.6 – Conditions aux limites pour la méthode EF-structure

La dernière méthode de calcul, EF-structure, utilise un modèle éléments finis de toute la structure. Celle-ci est encastée à chacune de ses extrémités et un déplacement différentiel ΔU est imposé entre la base et le sommet (figure 4.6).

Cette fois-ci, l'effort tranchant dans les murs permet de calculer la rigidité totale \mathcal{K} de la poutre équivalente. Pour une poutre générique de hauteur H , nous avons montré dans l'annexe A que l'expression de \mathcal{K} en fonction des rigidités des trois mécanismes est :

$$\mathcal{K} = -\frac{\Sigma T_m}{\Delta U} = \frac{1}{\frac{H}{K} \left(\frac{E_m I}{2E_m I_m + E_m I} \right)^2 \left(1 - \frac{2}{rH} \operatorname{th} \left(\frac{rH}{2} \right) \right) - \frac{H^3}{24E_m I_m + 12E_m I}} \quad (4.3)$$

avec $r^2 = \frac{K}{E_m I} + \frac{K}{2E_m I_m}$

Connaissant $EI_{\mathcal{M}}$ et EI_M , il est alors possible d'estimer K . Pour les deux types de portiques, des structures de vingt cellules ont été modélisées et nous avons pris $\Delta U = 1$ cm.

Les fréquences propres ont également été calculées pour des structures comprenant vingt cellules mais avec des conditions aux limites différentes. Maintenant, les structures sont encastées à la base et libres en tête. Les résultats obtenus par éléments finis sont comparés avec ceux donnés par les modèles de poutre issus de l'homogénéisation. Pour ces derniers, nous utilisons la valeur de K déterminée avec la méthode EF-cellule, c'est-à-dire à partir du modèle éléments finis d'une seule cellule. À chaque fois, deux calculs ont été réalisés : un avec le modèle de poutre générique et un avec le modèle identifié grâce aux paramètres C et γ qui pèsent l'importance des différents mécanismes. Les définitions de ces paramètres sont rappelées ci-dessous. Les domaines de validité des modèles sont tracés sur la figure 3.12 page 164.

$$\gamma = \frac{EI_{\mathcal{M}}}{EI_M} \quad C = \frac{EI_M}{KL^2} \quad \text{avec} \quad L = \frac{2H}{\pi}$$

Les propriétés mécaniques du béton sont données ci-dessous et les caractéristiques géométriques des deux structures sont indiquées sur les figures 4.7 et 4.9. Tous les éléments font 20 cm de profondeur. Les figures 4.8 et 4.10 représentent la déformée de la cellule obtenue lors de l'application de la méthode EF-cellule. Les couleurs correspondent aux contraintes de cisaillement. Pour mieux faire ressortir leur répartition, les valeurs extrêmes ont été tronquées. C'est pour cette raison que des trous apparaissent dans les zones de concentration de contraintes. Enfin, lors de la comparaison des modèles homogénéisés avec les éléments finis, les pourcentages d'erreur portent sur les fréquences propres et pas sur les ratios.

Caractéristiques du béton

$$\rho = 2\,300 \text{ kg/m}^3$$

$$E = 25\,000 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0,33$$

RÉSULTATS POUR LA STRUCTURE PS1

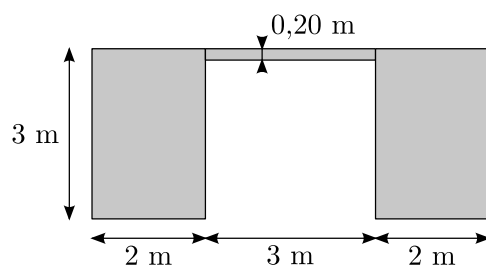
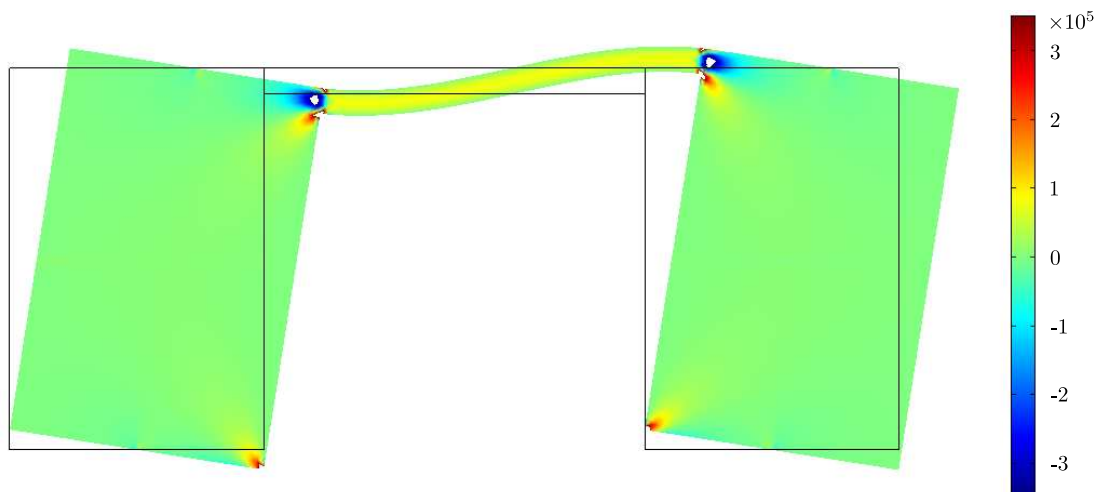


FIGURE 4.7 – Géométrie

FIGURE 4.8 – Répartition des contraintes de cisaillement (en Pa)
(Version en couleur : figure D.6 page 336)**Paramètres macroscopiques**

$$\Lambda = 1\,932 \text{ kg/m} \quad EI_{\mathcal{M}} = 2E_m I_m = 6\,667 \text{ MN.m}^2$$

$$EI_M = 2E_m A_m \left(\frac{\ell_p + a_m}{2} \right)^2 = 125\,000 \text{ MN.m}^2$$

Méthode	EF-cellule	analytique	EF-structure
K (MN)	10,5	10,81	10,6

Calcul des fréquences propres pour 20 cellules

$$K = 10,5 \text{ MN} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 0,053 = O(\epsilon^{1,15}) \quad \text{et} \quad C = 8,16 = O(\epsilon^{-0,83})$$

Modèle générique pour le premier mode,
modèle FIC (flexion interne et cisaillement) pour les modes supérieurs.

Mode	Éléments finis		Générique			FIC		
	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	erreur (%)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	erreur (%)	ratio f_i/f_1
1	0,481	1	0,476	-1,0	1	0,491	+2,1	1
2	2,108	4,38	2,104	-0,19	4,42	2,120	+0,57	4,32
3	5,287	11,0	5,346	+1,1	11,2	5,350	+1,2	10,9
4	9,945	20,7	10,198	+2,5	21,4	10,201	+2,6	20,8

RÉSULTATS POUR LA STRUCTURE PS2

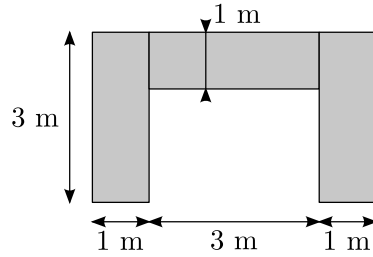


FIGURE 4.9 – Géométrie

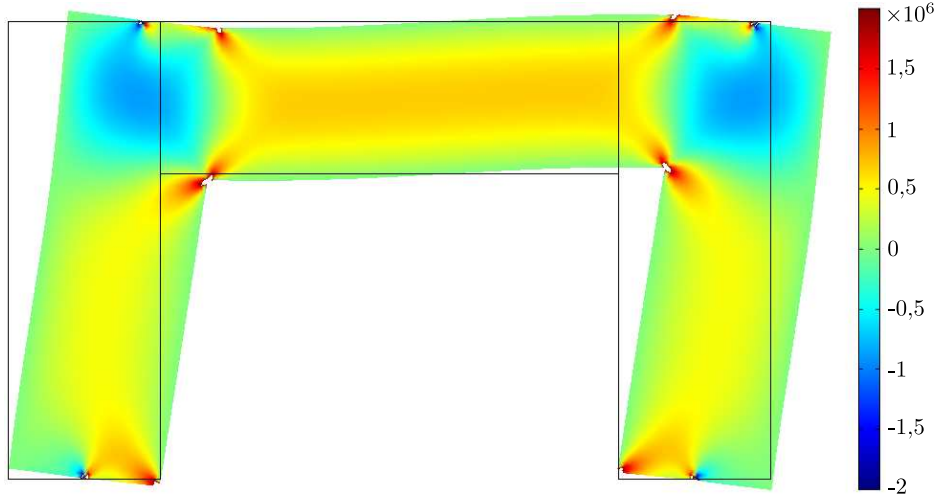


FIGURE 4.10 – Répartition des contraintes de cisaillement (en Pa)
(Version en couleur : figure D.7 page 337)

Paramètres macroscopiques

$$\Lambda = 1\,380 \text{ kg/m} \qquad EI_{\mathcal{M}} = 2E_m I_m = 833 \text{ MN.m}^2$$

$$EI_M = 2E_m A_m \left(\frac{\ell_p + a_m}{2} \right)^2 = 40\,000 \text{ MN.m}^2$$

Méthode	EF-cellule	analytique	EF-structure
K (MN)	372	360	407

Calcul des fréquences propres pour 20 cellules

$$K = 372 \text{ MN} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 0,021 = O(\epsilon^{1,52}) \quad \text{et} \quad C = 0,074 = O(\epsilon^{1,03})$$

Frontière entre la poutre de Timoshenko et la poutre d'Euler-Bernoulli

Mode	Éléments finis		Générique			Timoshenko		
	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	erreur (%)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	erreur (%)	ratio f_i/f_1
1	0,795	1	0,795	0	1	0,784	-1,4	1
2	3,904	4,91	3,879	-0,64	4,88	3,740	-4,2	4,77
3	8,786	11,1	8,693	-1,1	10,9	8,240	-6,2	10,5
4	14,012	17,6	13,836	-1,3	17,4	12,893	-8,0	16,4

Pour la structure PS1, les trois méthodes de calcul de la rigidité K donnent des valeurs très proches, ce qui valide la méthode EF-cellule. Cet exemple montre également qu'il n'est plus possible d'utiliser les formules de la partie 3.2. En effet, dans ce cas, elles sous-évaluent fortement la rigidité de la cellule :

$$\frac{K_p K_m}{K_p + K_m} \approx K_p \approx \frac{12E_p I_p}{\ell_m \ell_p} = 4,44 \text{ MN}$$

Cet écart vient du fait que les nœuds ne sont plus ponctuels. Commençons par regarder le rôle de l'épaisseur des murs. Pour cela, nous considérons la nouvelle expression analytique de K (équation (4.2)) et nous négligeons l'épaisseur du plancher.

$$K \approx K_p \left(\frac{1 + a_m/\ell_p}{1 + a_p/\ell_m} \right)^2 \approx \frac{12E_p I_p}{\ell_m \ell_p} \left(1 + \frac{a_m}{\ell_p} \right)^2 = 12,3 \text{ MN}$$

Nous retrouvons alors la formule donnée dans la littérature pour calculer la rigidité du cisaillement dans les murs voiles couplés (Stafford Smith *et al.*, 1981, 1984; Stafford Smith et Crowe, 1986; Zalka, 2001; Potzta et Kollár, 2003). Celle-ci donne le bon ordre de grandeur mais il reste une erreur de 17% par rapport à la valeur obtenue par éléments finis. Cela montre que, même si le plancher est dix fois plus fin que les murs, il faut tenir compte de son épaisseur.

$$K \approx \frac{12E_p I_p}{\ell_m \ell_p} \left(\frac{1 + a_m/\ell_p}{1 + a_p/\ell_m} \right)^2 = 10,84 \text{ MN}$$

Cette valeur est légèrement différente de celle de la page 273 car, pour cette dernière, nous n'avons pas négligé le cisaillement dans les murs.

En ce qui concerne les fréquences propres, les deux modèles de poutre donnent de très bons résultats. L'erreur est un peu plus élevée avec le modèle flexion interne et cisaillement pour le premier mode mais l'écart entre les deux modèles s'estompe pour les modes supérieurs. Cela est cohérent avec le comportement identifié grâce aux paramètres C et γ : l'importance de la flexion globale diminue pour les modes supérieurs.

Pour la structure PS2, les valeurs de K calculées avec la méthode EF-cellule et la formule analytique sont très proches. Par contre, la méthode EF-structure est moins performante : elle nécessite plus de calculs et il y a plus de 9 % d'erreur sur l'estimation de K . Nous l'avons utilisée ici car nous voulions avoir plusieurs points de comparaison pour valider la méthode EF-cellule, mais elle n'est pas intéressante en pratique. Le modèle de poutre de Timoshenko, identifié grâce à C et γ , donne de bons résultats pour les premières fréquences propres et l'erreur augmente pour les modes supérieurs. Pour le modèle de poutre générique, les fréquences propres sont vraiment très proches de celles obtenues par éléments finis.

Calcul de EI_M

Maintenant que nous disposons d'une méthode fiable pour calculer la rigidité du cisaillement de la cellule K , il est possible de tester les deux hypothèses sur l'expression de l'inertie macroscopique (figures 4.3 page 269). Pour cela, nous étudions une structure constituée de doubles portiques qui a été dimensionnée pour que la rigidité de la différence d'extension des murs extérieurs soit du même ordre que la rigidité des trois murs en flexion. Ainsi, selon l'hypothèse retenue, la rigidité EI_M varie du simple au double. De plus, la structure comporte 32 cellules pour que la flexion globale soit un des mécanismes prépondérants.

Les caractéristiques du béton sont les mêmes que pour les deux structures précédentes et elles sont rappelées ci-dessous. La géométrie du double portique et les notations sont indiquées sur la figure 4.11. Les éléments font toujours 20 cm de profondeur. La rigidité K est calculée avec la méthode EF-cellule. La déformée de la cellule et la répartition des contraintes de cisaillement sont représentées sur la figure 4.12. Là encore, les valeurs extrêmes ont été tronquées et des trous apparaissent dans les zones de concentration de contraintes. Pour la rigidité de la flexion globale, la valeur EI_{M1} est obtenue en négligeant l'inertie propre des murs alors que la valeur EI_{M2} la prend en compte.

$$EI_{M1} = 2E_{me}A_{me} \left(\frac{a_{mi} + a_{me}}{2} + \ell_p \right)^2$$

$$EI_{M2} = 2E_{me}I_{me} + E_{mi}I_{mi} + 2E_{me}A_{me} \left(\frac{a_{mi} + a_{me}}{2} + \ell_p \right)^2$$

Les paramètres C et γ sont déterminés pour les deux valeurs de EI_M . À chaque fois, le point représentatif de la structure sur le graphe 3.12 page 164 se trouve à la frontière entre le modèle générique, la poutre de Timoshenko et le modèle avec flexion globale et flexion interne. Les fréquences propres sont ensuite calculées avec le modèle générique pour les deux valeurs de EI_M et les résultats sont comparés avec ceux d'un modèle éléments finis de la structure complète. Les pourcentages d'erreur portent sur les fréquences propres et pas sur les ratios.

Les fréquences obtenues avec la rigidité EI_{M2} sont assez éloignées de celles calculées par éléments finis. De plus, l'erreur diminue lorsque le numéro du mode augmente, c'est-à-dire lorsque l'importance de la flexion globale diminue. Au contraire, l'utilisation de la rigidité EI_{M1} conduit à de très bons résultats. Dans ce cas, l'erreur augmente avec le numéro du mode à cause de la moins bonne séparation d'échelles. En conclusion, la bonne valeur de la rigidité de la flexion globale est celle qui ne tient pas compte des inerties propres des murs. Cela signifie que ce mécanisme correspond uniquement à la différence d'extension entre les murs (figure 4.3(b) page 269), ce qui est cohérent avec la distinction entre la flexion globale et la flexion interne. Ainsi, les inerties propres des murs ne doivent être comptées qu'une seule fois : lors du calcul de la rigidité de la flexion interne. La figure 4.3(a) représente en réalité l'association des deux types de flexion.

Caractéristiques du béton

$$\rho = 2\,300 \text{ kg/m}^3$$

$$E = 25\,000 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0,33$$

RÉSULTATS POUR LE DOUBLE PORTIQUE

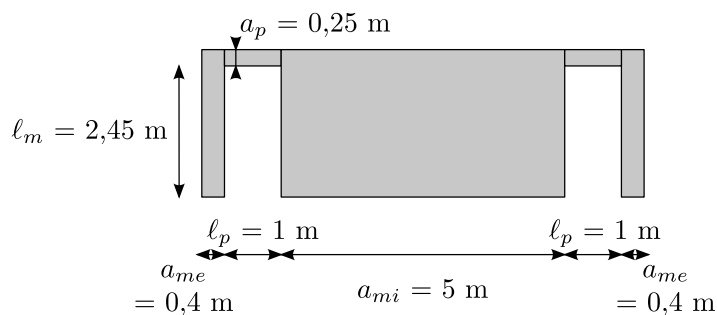
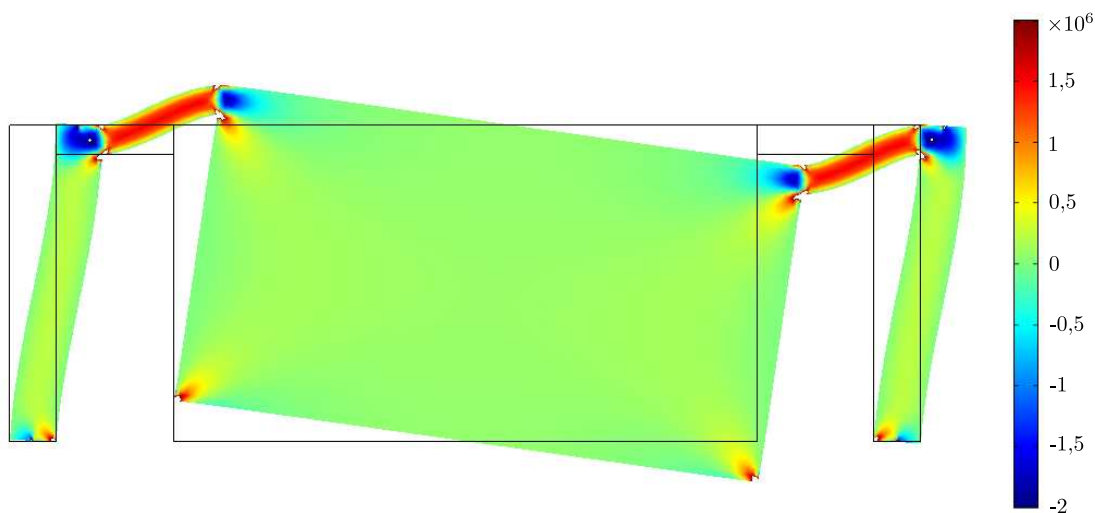


FIGURE 4.11 – Géométrie

FIGURE 4.12 – Répartition des contraintes de cisaillement (en Pa)
(Version en couleur : figure D.8 page 337)**Paramètres macroscopiques**

$$\Lambda = 2\,753 \text{ kg/m} \quad EI_{M1} = 54\,760 \text{ MN.m}^2 \quad EI_{M2} = 106\,897 \text{ MN.m}^2$$

$$EI_{\mathcal{M}} = 2E_{me}I_{me} + E_{mi}I_{mi} = 52\,137 \text{ MN.m}^2$$

Calcul des fréquences propres pour 32 cellules

	C	$x (C = \epsilon_1^x)$	γ	$y (\gamma = \epsilon_1^y)$
EI_{M1}	0,049	1,0	0,952	0,016
EI_{M2}	0,096	0,78	0,488	0,24

Mode	Éléments finis		EI_{M1}			EI_{M2}		
	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	erreur (%)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	erreur (%)	ratio f_i/f_1
1	0,458	1	0,458	0	1	0,544	+19	1
2	2,613	5,71	2,656	+1,6	5,80	2,912	+11	5,35
3	6,675	14,6	6,939	+4,0	15,2	7,281	+9,1	13,4
4	11,991	26,2	12,857	+7,2	28,1	13,152	+9,7	24,2

Les fréquences propres ont également été calculées pour une structure qui ne comporte que seize niveaux. Les résultats obtenus avec un modèle éléments finis et avec le modèle de poutre générique pour $EI_M = EI_{M1}$ sont présentés dans le tableau 4.1. La précision de la poutre générique est encore très bonne pour le premier mode mais l'erreur augmente beaucoup plus rapidement pour les modes supérieurs. Cette erreur est du même ordre que celle commise en modélisant le mur du milieu par une poutre d'Euler-Bernoulli au lieu d'une poutre de Timoshenko. En effet, le tableau 4.2 compare les fréquences propres du mur du milieu calculées avec ces deux modèles. Pour la poutre de Timoshenko, le cisaillement a été pris en compte mais pas l'inertie de rotation. Cela montre que le cisaillement dans le mur du milieu n'est pas négligeable pour les modes supérieurs.

Mode	Éléments finis		Poutre générique (EI_{M1})		
	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	erreur (%)	ratio f_i/f_1
1	1,744	1	1,761	+0,97	1
2	8,928	5,12	9,576	+7,3	5,44
3	21,686	12,4	25,006	+15	14,2
4	37,144	21,3	47,195	+27	26,8

TABLE 4.1 – Fréquences propres d'une structure de seize niveaux constituée de doubles portiques

MODÉLISATION DU MUR DU MILIEU

$$\Lambda = 2\,300 \text{ kg/m} \qquad EI = 52\,075 \text{ MN.m}^2 \qquad GA' = \frac{5}{6} GA = 7\,832 \text{ MN}$$

Mode	Timoshenko	Euler-Bernoulli	
	f_i (Hz)	f_i (Hz)	erreur (%)
1	1,415	1,427	+0,85
2	8,465	8,892	+5,0
3	22,175	25,041	+13
4	39,980	49,061	+23

TABLE 4.2 – Fréquences propres du mur du milieu

Le bâtiment que nous voulons modéliser comporte également 16 niveaux et certains murs sont encore plus larges que le mur du milieu du double portique. Nous avons donc besoin de modèles continus qui prennent en compte le cisaillement dans les murs. La construction de ces modèles est l'objet du paragraphe suivant.

4.2.2 Modèles macroscopiques avec cisaillement des murs

Pour construire ces nouveaux modèles de poutre qui tiennent compte du cisaillement dans les murs, la méthode HMPD est de nouveau appliquée sur des structures portiques. La différence avec le chapitre 3 est que les éléments sont maintenant des poutres de Timoshenko. Plus précisément, la correction due au cisaillement est prise en compte mais pas celle due à l'inertie de rotation. Pour les situations qui seront traitées par la suite, ces deux termes sont du même ordre de grandeur en ϵ . Par contre, numériquement, dans une poutre de section rectangulaire et constituée d'un matériau ordinaire, il existe un facteur trois entre l'effet du cisaillement et celui de l'inertie de rotation (Clough et Penzien, 1980). C'est pourquoi, pour cette première étude, nous étudions en priorité le cisaillement et nous négligeons l'inertie de rotation, ce qui simplifie grandement les calculs. De plus, tant que les éléments ont un comportement quasi-statique à l'échelle locale, les paramètres élastiques des modèles macroscopiques ne dépendent que des propriétés statiques de la cellule. Ils ne sont donc pas modifiés par cette approximation.

La mise en œuvre de la méthode HMPD est réalisée comme dans la partie 3.1. La seule différence est que les expressions de l'effort tranchant et du moment fléchissant aux extrémités des éléments sont réécrites car les lois de comportement ont changé. Pour cela, nous nous plaçons dans le repère local associé à un élément. Les notations sont résumées ci-dessous et sur la figure 4.13.

a : épaisseur	I : inertie
ℓ : longueur	ρ : masse volumique
A : section	E : module d'élasticité
A' : section réduite d'effort tranchant	G : module de cisaillement

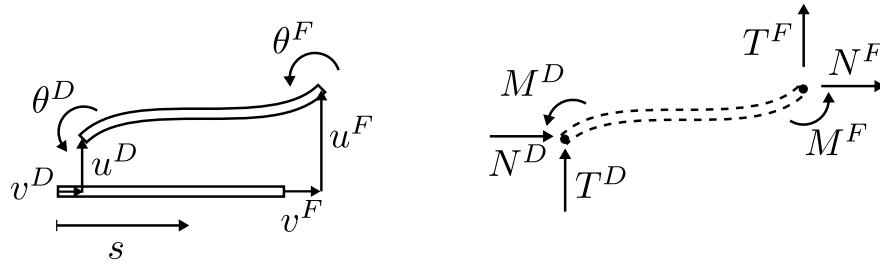


FIGURE 4.13 – Notations (élément)

Les vibrations transversales de la poutre de Timoshenko en régime harmonique sont décrites par les équations suivantes :

$$\begin{array}{l}
 \text{Équations d'équilibre :} \\
 \left\{ \begin{array}{l} \frac{dT}{ds}(s) = \rho A \omega^2 u(s) \\ \frac{dM}{ds}(s) = -T(s) \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Loi de comportement :} \\ \left\{ \begin{array}{l} T(s) = -GA' \left(\frac{du}{ds}(s) - \theta(s) \right) \\ M(s) = -EI \frac{d\theta}{ds}(s) \end{array} \right.
 \end{array} \right. \\
 \Rightarrow \text{Équation d'onde :} \quad \frac{d^4 u}{ds^4}(s) + \frac{\rho A \omega^2}{GA'} \frac{d^2 u}{ds^2}(s) - \frac{\rho A \omega^2}{EI} u(s) = 0
 \end{array}$$

Nous en déduisons les expressions des variables cinématiques :

$$\theta(s) = \frac{du}{ds}(s) + \frac{EI}{GA'} \left(\frac{\rho A \omega^2}{GA'} \frac{du}{ds}(s) + \frac{d^3u}{ds^3}(s) \right)$$

$$u(s) = B \cos(\beta_1 \ell) + C \sin(\beta_1 \ell) + D \operatorname{ch}(\beta_2 \ell) + F \operatorname{sh}(\beta_2 \ell)$$

Les paramètres β_1 et β_2 sont définis de la façon suivante :

$$\beta_1^2 - \beta_2^2 = \frac{\rho A \omega^2}{GA'} \quad \text{et} \quad \beta_1^2 \beta_2^2 = \frac{\rho A \omega^2}{EI}$$

Les constantes B , C , D et F dépendent des conditions aux limites :

$$u(0) = u^D \quad , \quad u(\ell) = u^F \quad , \quad \theta(0) = \theta^D \quad , \quad \theta(\ell) = \theta^F$$

Une fois que ces constantes ont été calculées, les expressions de u et θ sont introduites dans les lois de comportement pour déterminer les efforts nodaux.

$$T^D = \frac{\rho A \omega^2}{\Delta} (T_1 u^D + T_2 u^F + T_3 \theta^D + T_4 \theta^F)$$

$$T^F = \frac{\rho A \omega^2}{\Delta} (-T_2 u^D - T_1 u^F + T_4 \theta^D + T_3 \theta^F)$$

$$M^D = \frac{\rho A \omega^2}{\Delta} (M_1 u^D + M_2 u^F + M_3 \theta^D + M_4 \theta^F)$$

$$M^F = \frac{\rho A \omega^2}{\Delta} (M_2 u^D + M_1 u^F - M_4 \theta^D - M_3 \theta^F)$$

où les constantes sont définies par :

$$T_1 = -(\beta_1^2 + \beta_2^2) (\beta_1^3 \cos(\beta_1 \ell) \operatorname{sh}(\beta_2 \ell) + \beta_2^3 \sin(\beta_1 \ell) \operatorname{ch}(\beta_2 \ell))$$

$$T_2 = (\beta_1^2 + \beta_2^2) (\beta_1^3 \operatorname{sh}(\beta_2 \ell) + \beta_2^3 \sin(\beta_1 \ell))$$

$$T_3 = \beta_1 \beta_2 (\beta_1^2 - \beta_2^2) (1 - \cos(\beta_1 \ell) \operatorname{ch}(\beta_2 \ell)) - (\beta_1^4 + \beta_2^4) \sin(\beta_1 \ell) \operatorname{sh}(\beta_2 \ell)$$

$$T_4 = \beta_1 \beta_2 (\beta_1^2 + \beta_2^2) (\cos(\beta_1 \ell) - \operatorname{ch}(\beta_2 \ell))$$

$$M_1 = \beta_1 \beta_2 T_3$$

$$M_2 = -\beta_1 \beta_2 T_4$$

$$M_3 = (\beta_1^2 + \beta_2^2) (\beta_2^3 \cos(\beta_1 \ell) \operatorname{sh}(\beta_2 \ell) - \beta_1^3 \sin(\beta_1 \ell) \operatorname{ch}(\beta_2 \ell))$$

$$M_4 = (\beta_1^2 + \beta_2^2) (\beta_1^3 \sin(\beta_1 \ell) - \beta_2^3 \operatorname{sh}(\beta_2 \ell))$$

$$\Delta = -2 \beta_1^3 \beta_2^3 (1 - \cos(\beta_1 \ell) \operatorname{ch}(\beta_2 \ell)) - (\beta_1^6 - \beta_2^6) \sin(\beta_1 \ell) \operatorname{sh}(\beta_2 \ell)$$

Les expressions des efforts normaux n'ont pas été recopiées car elles sont identiques à celles de la page 146. De même, le reste de la méthode HMPD est inchangé. Sa mise en œuvre est expliquée dans la partie 3.1 pour les structures constituées de portiques simples et dans la partie 3.2.3 pour les structures constituées de doubles portiques. En particulier, les changements de variables sont indiqués pages 148 et 174 et les définitions des paramètres macroscopiques se trouvent pages 153 et 176. Nous présentons maintenant les différents modèles obtenus grâce à cette méthode.

Structures constituées de portiques simples

Les structures constituées de portiques simples dont les éléments sont des poutres de Timoshenko ont d'abord été étudiées par Rival (2004) lors de son DEA. Néanmoins, une des hypothèses de la méthode HMPD étant que les éléments se comportent comme des poutres, il s'est limité aux situations où l'épaisseur a des éléments est inférieure à leur longueur ℓ . Cela se traduit lors de l'étape de normalisation par le choix de valeurs positives pour les ordres de grandeur des épaisseurs, c'est-à-dire :

$$\frac{a_i}{\ell_m} = O(\epsilon^{e_i}) \quad \text{avec} \quad e_i \geq 0 \quad \text{et} \quad i = m \text{ ou } p$$

Comme les murs sont modélisés par des poutres de Timoshenko, il est possible de définir un paramètre C^m pour peser l'importance de la flexion par rapport au cisaillement. De plus, dans les structures portiques, les murs peuvent être sollicités en flexion de deux façons différentes. Deux paramètres sont donc introduits : C_μ^m qui pèse l'importance de la flexion locale par rapport au cisaillement et $C_{\mathcal{M}}^m$ qui pèse l'importance de la flexion interne par rapport au cisaillement.

$$C_\mu^m = \frac{E_m I_m}{G_m A'_m \ell_m^2} = O\left(\frac{a_m^2}{\ell_m^2}\right) \quad C_{\mathcal{M}}^m = \frac{E_m I_m}{G_m A'_m L^2} = O\left(\frac{a_m^2}{L^2}\right)$$

Nous rappelons que pour $C^m = O(1)$, les deux mécanismes ont la même importance alors que pour $C^m \leq O(\epsilon)$, la flexion domine et pour $C^m \geq O(\epsilon^{-1})$, c'est le cisaillement qui domine.

Pour le cas limite étudié par Rival, $e_m = 0$ donc les ordres de grandeur des deux paramètres C^m sont :

$$C_\mu^m = O(1) \quad C_{\mathcal{M}}^m = O(\epsilon^2)$$

Cela correspond à la situation intermédiaire où le cisaillement doit être pris en compte à l'échelle de la cellule lors du calcul de la rigidité K , mais où il reste négligeable à l'échelle de la structure. C'est pour cette raison que cette étude n'a pas donné de nouveaux modèles.

Dans cette thèse, nous voulons étudier l'effet du cisaillement lorsqu'il intervient à l'échelle macroscopique. Il faut donc avoir $C_{\mathcal{M}}^m \geq O(1)$. Pour cela, le travail de Rival est repris mais en donnant des valeurs négatives aux ordres de grandeur des épaisseurs :

$$\frac{a_i}{\ell_m} = O(\epsilon^{e_i}) \quad \text{avec} \quad e_i < 0 \quad \text{et} \quad i = m \text{ ou } p$$

Dans ce cas, l'épaisseur a est supérieure à la hauteur d'un étage ℓ_m . Cela est courant pour les murs voiles dans les bâtiments mais ne correspond pas au domaine d'application de la théorie des poutres. Donner de telles épaisseurs aux éléments serait aberrant s'ils étaient modélisés par des poutres d'Euler-Bernoulli. Par contre ici, nous utilisons des poutres de Timoshenko qui contiennent en plus le cisaillement. Pour cette situation, ce modèle dégénère et le cisaillement devient le mécanisme dominant, ce qui correspond bien au fonctionnement des murs voiles.

La deuxième conséquence de l'augmentation des épaisseurs est qu'il n'est plus possible de supposer les nœuds ponctuels. Cependant, les équations d'équilibre ne sont pas réécrites car nous avons vu que cet effet peut être pris en compte lors du calcul des paramètres des modèles macroscopiques. Ce qui est important ici, c'est surtout d'étudier comment la *forme des équations* décrivant ces modèles est affectée par le changement de loi de comportement des éléments. Ainsi, les structures considérées dans cette partie peuvent être vues comme des réseaux périodiques d'éléments d'épaisseur infinitésimale qui travaillent en flexion et en cisaillement et le paramètre a sert uniquement à fixer le ratio entre les rigidités de ces deux mécanismes.

Pour les structures constituées de portiques simples, cette façon de procéder ne permet d'obtenir qu'un seul nouveau modèle macroscopique. Nous présentons ici la situation la plus riche qui correspond aux ordres de grandeur suivants :

$$\begin{aligned} \frac{a_m}{\ell_m} &= O(\epsilon^{-1}) & \frac{\omega}{\omega_r} &= O(1) \\ \frac{a_p}{\ell_m} &= O(\epsilon^{1/3}) & \omega_r &= \frac{1}{L} \sqrt{\frac{E_m}{\rho_m}} \end{aligned}$$

Les ordres de grandeur des paramètres C pour les murs et les planchers sont :

$$C_\mu^m = O(\epsilon^{-2}) \quad C_{\mathcal{M}}^m = O(1) \quad C_\mu^p = \frac{E_p I_p}{G_p A'_p \ell_p^2} = O\left(\frac{a_p^2}{\ell_p^2}\right) = O(\epsilon^{2/3})$$

Ainsi, pour les murs, le cisaillement est dominant à l'échelle locale alors qu'à l'échelle macroscopique, le cisaillement et la flexion ont la même importance. Les planchers, quant à eux, ne sont sollicités qu'à l'échelle locale et ils travaillent essentiellement en flexion.

Lors de la mise en œuvre de la méthode HMPD, les inconnues, c'est-à-dire la pulsation et les variables cinématiques, sont développées selon les puissances de $\epsilon^{1/3}$. La cinématique transverse est décrite par les équations (T_t) , (M) , (\mathcal{M}_t) , qui sont données ci-dessous, et par les variables U , α , θ .

$$\Lambda_m \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^0 + 2 G_m A'_m (\tilde{U}^{0''} - \tilde{\theta}^{0'}) = 0 \quad (T_t 0)$$

$$J_m \tilde{\omega}_0^2 \tilde{\alpha}^0 - \frac{12 E_p I_p}{\ell_m \ell_p} (\tilde{\alpha}^0 - \tilde{\theta}^0) + E_m I \tilde{\alpha}^{0''} = 0 \quad (M 0)$$

$$2 G_m A'_m (\tilde{\theta}^0 - \tilde{U}^{0'}) - 2 E_m I_m \tilde{\theta}^{0''} = 0 \quad (\mathcal{M}_t 0)$$

Comme prévu, à l'échelle locale, les murs travaillent en cisaillement et les planchers en flexion. La principale nouveauté par rapport aux situations où les éléments sont modélisés par des poutres d'Euler-Bernoulli est l'apparition du terme $-2 E_m I_m \tilde{\theta}^{0''}$ dans l'équation $(\mathcal{M}_t 0)$. La combinaison des équations $(T_t 0)$ et $(\mathcal{M}_t 0)$ donne l'équation qui décrit le comportement de la poutre équivalente à l'échelle macroscopique :

$$2 E_m I_m \left(X^{(4)} + \frac{\Lambda_m \tilde{\omega}_0^2}{2 G_m A'_m} X'' \right) - \Lambda_m \tilde{\omega}_0^2 X = 0 \quad (4.4)$$

$$\text{avec } X = \tilde{U}^0 \text{ ou } \tilde{\theta}^0$$

Il s'agit d'une équation de type poutre de Timoshenko qui associe la flexion des murs à l'échelle de la structure et le cisaillement dans les murs. C'est donc l'équivalent du modèle avec flexion interne lorsque le cisaillement dans les murs n'est plus négligeable. Même si l'équation a la même forme, ce modèle est différent de la poutre de Timoshenko élançée obtenue dans la partie 3.2.1. En effet, pour cette dernière, les mécanismes mis en jeu sont la flexion globale et le cisaillement de la cellule. Par la suite, afin de ne pas confondre les deux types de poutre de Timoshenko, nous parlerons de Timoshenko interne pour ce nouveau modèle et de Timoshenko global pour le modèle de la partie 3.2.1.

Les deux types de poutre de Timoshenko obtenus avec la méthode HMPD sont des modèles « simplifiés » sans inertie de rotation, mais pour des raisons différentes. Pour le modèle de poutre de Timoshenko interne, l'inertie de rotation dans les murs a été supprimée dès le départ, lors de la modélisation de ces derniers. Néanmoins, nous savons que ce phénomène est du même ordre de grandeur que le cisaillement dans les murs pour la structure étudiée ici. Il est donc fort probable qu'il émerge à l'échelle macroscopique si cette hypothèse est abandonnée. Au contraire, pour le modèle de poutre de Timoshenko global, c'est un des résultats de l'homogénéisation. Cette méthode a montré, sans faire d'hypothèse *a priori*, que l'inertie de rotation associée à la flexion globale est négligeable dans la gamme de fréquences des modes pilotés par la translation. Elle apparaît à plus hautes fréquences et nous avons alors des modes de giration pure.

Ce résultat est valable pour les structures étudiées dans le chapitre 3, mais ce n'est plus le cas pour la structure considérée ici. En effet, l'inertie de rotation associée à la flexion globale apparaît dans l'équation (M0) pour la gamme de fréquences des modes pilotés par la translation \tilde{U}^0 . Cette équation est couplée aux deux autres par l'intermédiaire de l'effort tranchant qui dépend de la rotation des nœuds $\tilde{\theta}^0$:

$$\tilde{T}^0 = \frac{12E_p I_p}{\ell_m \ell_p} (\tilde{\alpha}^0 - \tilde{\theta}^0)$$

La résolution de l'équation (4.4) donne les pulsations propres ω_k et les déformées $\tilde{U}_k^0(x)$ et $\tilde{\theta}_k^0(x)$ pour les modes pilotés par la translation. Ensuite, l'introduction du terme source $\tilde{\theta}_k^0(x)$ dans l'équation (M0) permet de calculer la rotation de la section $\tilde{\alpha}_k^0(x)$. Ainsi, les modes de vibrations de cette structure sont pilotés par une équation de type Timoshenko interne mais ils combinent les trois variables cinématiques : la translation \tilde{U}^0 , la rotation des nœuds $\tilde{\theta}^0$ et la rotation de la section $\tilde{\alpha}^0$.

Une autre solution possible pour ce système est $\tilde{U}^0 = \tilde{\theta}^0 = 0$. Dans ce cas, la rotation de la section $\tilde{\alpha}^0$ est solution de l'équation suivante :

$$J_m \tilde{\omega}_0^2 \tilde{\alpha}^0 - \frac{12E_p I_p}{\ell_m \ell_p} \tilde{\alpha}^0 + E_m I \tilde{\alpha}^{0''} = 0$$

Cela correspond à des modes de giration pure comme ceux étudiés dans la partie 3.3.1 page 195. De nouveau, le couplage entre les modes de translation et les modes de giration est dissymétrique mais il s'agit de la situation inverse de celle de la partie 3.3.1 page 207. En effet, ici ce sont les modes pilotés par la translation qui sont couplés à la rotation de la section alors que les modes pilotés par la rotation sont des modes de giration pure.

Regardons maintenant comment évolue le comportement de cette structure lorsque les ordres de grandeur des paramètres a_m et a_p varient. Pour commencer, a_m est fixe et a_p diminue. Dans ce cas, les planchers deviennent plus souples et l'effort tranchant \tilde{T}^0 disparaît de l'équation (M 0). L'équation (4.4) qui décrit les modes pilotés par la translation n'est pas modifiée, mais il n'y a plus de couplage avec la rotation de la section $\tilde{\alpha}^0$. Les modes de translation et de giration sont complètement indépendants. Au contraire, si a_m est fixe et a_p augmente, les planchers deviennent très rigides. Alors, l'effort tranchant \tilde{T}^0 n'est plus équilibré par les autres termes de l'équation (M 0), ce qui impose $\tilde{\alpha}^0 = \tilde{\theta}^0$. Il ne peut plus y avoir de modes de giration. Notons que, si a_p augmente suffisamment pour avoir $e_m = e_p$, l'effort tranchant \tilde{T}^0 apparaît également dans l'équation (\mathcal{M}_t 0). Par contre, cela ne modifie pas le comportement de la structure car l'équation (M 0) impose toujours $\tilde{T}^0 = 0$.

Pour avoir un changement de modèle macroscopique, il faudrait que l'effort tranchant apparaisse dans l'équation (\mathcal{M}_t 0) tout en étant équilibré par la dérivée du moment fléchissant $-E_m I \tilde{\alpha}^{0''}$ dans l'équation (M 0). Cela n'est pas possible pour les structures constituées de portiques simples car, pour les valeurs négatives de e_m , la flexion globale est toujours plus souple que la flexion interne. En effet, le paramètre γ qui pèse l'importance de ces deux mécanismes est toujours supérieur à un.

$$\gamma = \frac{2E_m I_m}{E_m I} = \frac{2E_m I_m}{E_m A_m \ell_p^2 / 2} = O\left(\frac{a_m^2}{\ell_p^2}\right) = O(\epsilon^{2e_m}) > 1$$

Ce comportement est cohérent avec le schéma qui représente l'association des quatre mécanismes et qui est rappelé sur la figure 4.14. À cause de l'association en parallèle, ni la flexion globale, ni le cisaillement de la cellule ne peuvent émerger à l'échelle macroscopique lorsque la flexion globale est plus souple que la flexion interne. Ainsi, les seuls comportements possibles sont ceux qui combinent la flexion interne et le cisaillement des murs. Il s'agit du modèle de poutre de Timoshenko interne et des modèles dégénérés. En particulier, si le paramètre a_m augmente encore, les murs travaillent uniquement en cisaillement à l'échelle macroscopique et la structure peut être modélisée par une poutre de cisaillement.

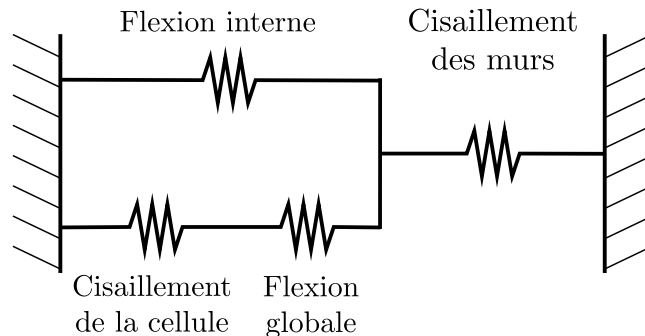


FIGURE 4.14 – Représentation schématique de l'association des mécanismes

Modèle générique avec cisaillement des murs

Malgré les limites qui viennent d'être mentionnées, l'étude de la structure précédente permet d'identifier tous les termes susceptibles d'intervenir à l'échelle macroscopique. Il est donc possible de construire un nouveau modèle générique en donnant artificiellement à tous ces termes le même ordre de grandeur. C'est pourquoi, par la suite, les « \sim » et les ordres de grandeur n'apparaissent plus sur les variables cinématiques. Ce nouveau modèle intègre les quatre mécanismes possibles : le cisaillement dans les murs, le cisaillement de la cellule, la flexion interne et la flexion globale. Par contre, pour cette première étude, les inerties de rotation associées à la flexion interne et à la flexion globale sont encore négligées même si cette hypothèse est discutable. Le modèle est d'abord construit pour les structures constituées de portiques simples puis nous regardons s'il est possible de le généraliser aux autres types de structures portiques.

La réécriture des équations d'équilibre des structures constituées de portiques simples en imposant le même ordre de grandeur pour tous les termes et en négligeant les inerties de rotation donne le système suivant :

$$\begin{aligned} \Lambda \omega^2 U + K_m(U'' - \theta') &= 0 & (T_t) \\ K_p(\alpha - \theta) - E_m I \alpha'' &= 0 & (M) \\ K_m(\theta - U') + K_p(\theta - \alpha) - 2E_m I_m \theta'' &= 0 & (\mathcal{M}_t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Les expressions de la masse linéique Λ et de l'inertie macroscopique I sont rappelées pour les situations où les épaisseurs des éléments sont négligeables :

$$\Lambda = \Lambda_m + \Lambda_p = 2\rho_m A_m + \rho_p A_p \frac{\ell_p}{\ell_m} \quad I = A_m \frac{\ell_p^2}{2}$$

Pour les contributions K_m et K_p des éléments à la rigidité en cisaillement, il faut maintenant tenir compte du fait qu'ils peuvent travailler en flexion locale et en cisaillement :

$$\frac{1}{K_m} = \frac{1}{2} \left(\frac{\ell_m^2}{12E_m I_m} + \frac{1}{G_m A'_m} \right) \quad \frac{1}{K_p} = \frac{\ell_m}{\ell_p} \left(\frac{\ell_p^2}{12E_p I_p} + \frac{1}{G_p A'_p} \right)$$

Si e_m est positif, le cisaillement est négligeable et cette expression de K_m dégénère en l'expression du chapitre 3 : $K_m \approx 24E_m I_m / \ell_m^2$. Au contraire, si e_m est négatif, c'est la flexion qui est négligeable et nous retrouvons l'expression du paragraphe précédent : $K_m \approx 2G_m A'_m$. Pour $e_m = 0$, les deux mécanismes ont la même importance à l'échelle locale et il faut conserver l'expression complète de K_m . Le même type de raisonnement peut être mené sur K_p .

Le système (4.5) suggère de définir quatre efforts macroscopiques et les lois de comportement suivantes :

$$\begin{aligned} \text{effort tranchant dans les murs :} & \quad \mathcal{T} = -\mathcal{K}_m(U' - \theta) \\ \text{effort tranchant dans les planchers :} & \quad T = \mathcal{K}_p(\alpha - \theta) \\ \text{moment global :} & \quad M = -EI_M \alpha' \\ \text{moment interne :} & \quad \mathcal{M} = -EI_{\mathcal{M}} \theta' \end{aligned} \quad (4.6)$$

avec $\mathcal{K}_m = K_m$, $\mathcal{K}_p = K_p$, $EI_M = E_m I$, $EI_{\mathcal{M}} = 2E_m I_m$

Les équations d'équilibre de la nouvelle poutre sont alors :

$$\mathcal{T}' = \Lambda \omega^2 U \quad M' = -T \quad \mathcal{T} = T - \mathcal{M}' \quad (4.7)$$

Ce sont les mêmes équations d'équilibre que celles du modèle construit dans la partie 3.2.2 page 159. Le deuxième point commun est que l'effort tranchant T , généré par le cisaillement de la cellule, est l'effort tranchant dans les planchers alors que l'effort tranchant dans les murs correspond à l'effort tranchant total \mathcal{T} . Par contre, l'effort tranchant total a maintenant sa propre loi de comportement et le moment interne est proportionnel à θ' au lieu de U'' . Ces deux différences sont du même type que celles qui existent entre la poutre d'Euler-Bernoulli et la poutre de Timoshenko. La loi de comportement de l'effort tranchant généré par le cisaillement de la cellule est également modifiée. Nous reviendrons sur ce dernier point plus tard.

Les équations (T_t) et (\mathcal{M}_t) du système (4.5) permettent d'exprimer d'une part, θ' en fonction de U et d'autre part, α en fonction de θ et U :

$$\begin{aligned} \theta' &= \frac{\Lambda \omega^2}{\mathcal{K}_m} U + U'' \\ \alpha &= \left(1 + \frac{\mathcal{K}_m}{\mathcal{K}_p}\right) \theta - \frac{EI_{\mathcal{M}}}{\mathcal{K}_p} \theta'' - \frac{\mathcal{K}_m}{\mathcal{K}_p} U' \end{aligned}$$

L'introduction de ces expressions dans la dérivée de l'équation (M) donne l'équation de degré 6 qui décrit les vibrations transversales de la poutre :

$$\begin{aligned} \frac{EI_{\mathcal{M}} EI_M}{\mathcal{K}_p} U^{(6)} - \left(EI_{\mathcal{M}} + EI_M - \Lambda \omega^2 \frac{EI_{\mathcal{M}} EI_M}{\mathcal{K}_m \mathcal{K}_p} \right) U^{(4)} \\ - \left(\frac{EI_{\mathcal{M}}}{\mathcal{K}_m} + EI_M \left(\frac{1}{\mathcal{K}_m} + \frac{1}{\mathcal{K}_p} \right) \right) \Lambda \omega^2 U'' + \Lambda \omega^2 U = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

La cohérence de ce modèle de poutre peut être vérifiée en écrivant son équilibre énergétique. Pour cela, l'équation (T_t) est multipliée par $\frac{1}{2}U$ et intégrée par parties sur toute la hauteur de la structure H :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^H \Lambda \omega^2 U^2 dx &= \frac{1}{2} \int_0^H \mathcal{T}' U dx = \frac{1}{2} \left([\mathcal{T}U]_0^H - \int_0^H \mathcal{T} U' dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left([\mathcal{T}U]_0^H - \int_0^H \mathcal{T} (U' - \theta) dx - \int_0^H \mathcal{T} \theta dx \right) \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (\mathcal{M}_t) et en intégrant encore par partie, la dernière intégrale devient :

$$\begin{aligned} - \int_0^H \mathcal{T} \theta dx &= - \int_0^H (T - \mathcal{M}') \theta dx \\ &= \int_0^H T(\alpha - \theta) dx - \int_0^H T \alpha dx + [\mathcal{M}\theta]_0^H - \int_0^H \mathcal{M} \theta' dx \end{aligned}$$

De la même façon, la deuxième intégrale est transformée grâce à l'équation (M) :

$$- \int_0^H T \alpha dx = \int_0^H M' \alpha dx = [M\alpha]_0^H - \int_0^H M \alpha' dx$$

Toutes ces expressions sont ensuite réinjectées dans la première équation :

$$\frac{1}{2} \int_0^H \Lambda \omega^2 U^2 dx = \int_0^H \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{T}^2}{\mathcal{K}_m} + \frac{T^2}{\mathcal{K}_p} + \frac{M^2}{EI_M} + \frac{\mathcal{M}^2}{EI_{\mathcal{M}}} \right) dx + \frac{1}{2} \left([\mathcal{T}U]_0^H + [M\alpha]_0^H + [\mathcal{M}\theta]_0^H \right)$$

Cette équation traduit l'équilibre entre l'énergie cinétique, l'énergie élastique et le travail des conditions aux limites. Notons que les quatre efforts macroscopiques contribuent à l'énergie élastique mais qu'il n'y en a que trois qui travaillent aux extrémités. Les six conditions aux limites nécessaires à la résolution de l'équation (4.8) doivent donc être exprimées soit en fonction des efforts \mathcal{T} , M et \mathcal{M} , soit en fonction des variables U , α et θ .

Une autre confirmation de la validité de ce modèle provient de l'étude réalisée par Jigorel (2009) lors de son master. Celui-ci s'est affranchi des restrictions mentionnées page 284 en fixant de façon indépendante les ordres de grandeur des rigidités des éléments en flexion, en cisaillement et en traction-compression sans passer par le paramètre a . Ainsi, il a pu obtenir ce modèle de poutre directement avec la méthode HMPD.

Maintenant que nous disposons d'une description améliorée du comportement des structures constituées de portiques simples, se pose la question de la généralisation des résultats aux autres structures portiques. Dans le chapitre 3, les modèles de poutre ne dépendaient que des variables U et α qui décrivent le mouvement de corps rigide des niveaux. Les autres variables, comme θ , correspondent à la déformation de la cellule. Leur nombre et leur nature est déterminé par la géométrie de la structure. Mais, pour les situations considérées dans le chapitre 3, il s'agissait toujours de variables cachées qui n'apparaissaient pas à l'échelle macroscopique. Ainsi, quelle que soit la géométrie de la cellule, les modes macroscopiques de translation étaient décrits par le même type d'équations et il suffisait d'adapter les paramètres.

Dans ce nouveau modèle, toutes les variables de la cinématique transversale interviennent, y compris θ . La généralisation des résultats aux autres types de structures portiques risque donc d'être plus délicate. Afin de comprendre comment évolue le comportement macroscopique lorsque la géométrie de la cellule devient plus complexe, nous considérons maintenant des structures constituées par l'empilement de doubles portiques.

Structures constituées de doubles portiques

L'étude de ces structures est réalisée de la même façon que celle des structures constituées de portiques simples. Les éléments sont modélisés par des poutres de Timoshenko dans lesquelles l'inertie de rotation est négligée. Afin de faire apparaître le cisaillement dans les murs à l'échelle macroscopique, les ordres de grandeur des paramètres a_{me} et a_{mi} sont négatifs. Les résultats présentés par la

suite correspondent aux valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{a_{me}}{\ell_m} &= O(\epsilon^{-1}) & \frac{\omega}{\omega_r} &= O(1) \\ \frac{a_{mi}}{\ell_m} &= O(\epsilon^{-1}) & \omega_r &= \frac{1}{L} \sqrt{\frac{E_m}{\rho_m}} \\ \frac{a_p}{\ell_m} &= O(\epsilon^{1/3}) \end{aligned}$$

Ce sont les mêmes ordres de grandeur que pour la structure constituée de portiques simples. À l'échelle locale, le cisaillement prédomine dans les murs et la flexion dans les planchers. Les expressions de K_{me} , K_{mi} et K_p sont donc :

$$K_{me} = 2G_{me}A'_{me} \quad K_{mi} = G_{mi}A'_{mi} \quad K_p = \frac{12E_p I_p}{\ell_m \ell_p} \quad (4.9)$$

Lors de la mise en œuvre de la méthode HMPD, les inconnues sont développées selon les puissances de $\epsilon^{1/3}$. Pour les structures constituées de doubles portiques, le changement de variable est présenté page 174. La cinématique transversale est décrite par les équations (T_t) , (T_r) , (M) , (\mathcal{M}_t) , (\mathcal{M}_r) et par les variables U , δ , Θ , θ , α . En particulier, θ désigne la rotation du nœud du milieu et Θ désigne celle des deux nœuds extérieurs. Les équations (T_r) montrent que la variable δ , c'est-à-dire le déplacement transversal relatif du nœud du milieu, est nulle pour les ordres 0 et 1/3. Les autres équations sont données ci-dessous et elles ont déjà été simplifiées.

$$\Lambda_m \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^0 + K_{me} (\tilde{U}^{0''} - \tilde{\Theta}^{0'}) + K_{mi} (\tilde{U}^{0''} - \tilde{\theta}^{0'}) = 0 \quad (T_t 0)$$

$$J_m \tilde{\omega}_0^2 \tilde{\alpha}^0 - K_p (2\tilde{\alpha}^0 - \tilde{\Theta}^0 - \tilde{\theta}^0) + E_{me} I \tilde{\alpha}^{0''} = 0 \quad (M 0)$$

$$K_{me} (\tilde{\Theta}^0 - \tilde{U}^{0'}) + K_{mi} (\tilde{\theta}^0 - \tilde{U}^{0'}) - 2E_{me} I_{me} \tilde{\Theta}^{0''} - E_{mi} I_{mi} \tilde{\theta}^{0''} = 0 \quad (\mathcal{M}_t 0)$$

$$\frac{K_{me}}{2} (\tilde{\Theta}^0 - \tilde{U}^{0'}) - K_{mi} (\tilde{\theta}^0 - \tilde{U}^{0'}) - E_{me} I_{me} \tilde{\Theta}^{0''} + E_{mi} I_{mi} \tilde{\theta}^{0''} = 0 \quad (\mathcal{M}_r 0)$$

Dans l'équation $(M 0)$, les expressions de J_m et I sont :

$$J_m = 2\rho_{me} A_{me} \ell_p^2 \quad I = 2E_{me} A_{me} \ell_p^2$$

Cette équation décrit les modes de giration. Comme pour les structures constituées de portiques simples, il existe un couplage dissymétrique entre les modes de giration et les modes de translation. Ces derniers sont pilotés par les équations $(T_t 0)$, $(\mathcal{M}_t 0)$ et $(\mathcal{M}_r 0)$. Leur combinaison donne l'équation différentielle de degré 6 suivante.

$$\begin{aligned} & 2E_{me} I_{me} E_{mi} I_{mi} \left(\frac{1}{K_{me}} + \frac{1}{K_{mi}} \right) \tilde{U}^{0(6)} \\ & - \left(2E_{me} I_{me} + E_{mi} I_{mi} - \Lambda_m \tilde{\omega}_0^2 \frac{2E_{me} I_{me} E_{mi} I_{mi}}{K_{me} K_{mi}} \right) \tilde{U}^{0(4)} \\ & - \left(\frac{2E_{me} I_{me}}{K_{me}} + \frac{E_{mi} I_{mi}}{K_{mi}} \right) \Lambda_m \tilde{\omega}^2 \tilde{U}^{0''} + \Lambda_m \tilde{\omega}^2 \tilde{U}^0 = 0 \end{aligned}$$

Les différents mécanismes qui interviennent dans cette équation sont la flexion des murs extérieurs à l'échelle de la structure, le cisaillement dans les murs extérieurs, la flexion du mur intérieur à l'échelle de la structure et le cisaillement dans le mur intérieur. Ce modèle a donc été baptisé double Timoshenko interne. Notons qu'il est décrit par une équation différentielle de degré 6 alors que ni la flexion globale, ni le cisaillement de la cellule n'émergent à l'échelle macroscopique. Cet exemple montre que l'ajout d'un deuxième type de mur se traduit par l'apparition d'une nouvelle variable indépendante et l'augmentation du degré de l'équation différentielle qui décrit les vibrations transversales.

Autres structures

Comme le laissaient pressentir les données expérimentales (Bard *et al.*, 1992; Farsi, 1996; Goel et Chopra, 1997, 1998), le comportement des structures avec des murs voiles est beaucoup plus complexe que celui des structures portiques. En effet, la nature du modèle macroscopique dépend du nombre de types de murs présents dans la structure. De plus, si ce nombre est important, les vibrations transversales sont décrites par une équation différentielle de degré élevé, difficile à résoudre. Or, l'objectif initial de ces travaux était de mettre au point une méthode simplifiée permettant d'obtenir le comportement global d'un bâtiment avec relativement peu de calculs. C'est pourquoi, nous n'avons pas été plus loin dans cette direction et nous proposons d'utiliser le nouveau modèle générique construit pour les structures constituées de portiques simples pour représenter les bâtiments. Cela revient à supposer que tous les murs voiles se déforment à peu près de la même façon. Cela doit être une situation assez usuelle, du fait des contraintes d'ingénierie qui limitent la diversité des éléments pour plus d'efficacité dans la réalisation. Si jamais les murs sont trop différents pour que cette hypothèse soit valable, il est plus efficace d'utiliser les méthodes numériques habituelles plutôt que de chercher à construire un modèle continu spécifique.

La généralisation du modèle continu construit pour les structures constituées de portiques simples à d'autres types de structures nécessite d'être capable de calculer les valeurs des paramètres Λ , EI_M , $EI_{\mathcal{M}}$, \mathcal{K}_m et \mathcal{K}_p . La masse linéique Λ reste égale à la masse d'un étage divisée par sa hauteur. La flexion globale correspondant à la différence d'extension entre les murs, ce mécanisme n'est pas affecté par le cisaillement dans les murs et le mode de calcul de la rigidité EI_M n'est pas modifié.

Afin de comprendre comment évoluent les expressions des trois autres rigidités $EI_{\mathcal{M}}$, \mathcal{K}_m et \mathcal{K}_p lorsque la géométrie de la cellule devient plus complexe, nous commençons par étudier la façon dont le modèle double Timoshenko interne de degré 6 dégénère en un modèle Timoshenko interne de degré 4. Pour un double portique, supposer que tous les murs se déforment à peu près de la même façon se traduit par la relation $\Theta \approx \theta$, c'est-à-dire pour le premier ordre non nul : $\tilde{\Theta}^0 = \tilde{\theta}^0$. La réécriture des équations d'équilibre de la structure étudiée dans le paragraphe précédent donne alors :

$$\Lambda_m \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^0 + (K_{me} + K_{mi}) (\tilde{U}^{0''} - \tilde{\theta}^{0'}) = 0 \quad (T_t 0)$$

$$J_m \tilde{\omega}_0^2 \tilde{\alpha}^0 - 2K_p (\tilde{\alpha}^0 - \tilde{\theta}^0) + E_{me} I \tilde{\alpha}^{0''} = 0 \quad (M0)$$

$$(K_{me} + K_{mi}) (\tilde{\theta}^0 - \tilde{U}^{0'}) - (2E_{me} I_{me} + E_{mi} I_{mi}) \tilde{\theta}^{0''} = 0 \quad (\mathcal{M}_t 0)$$

$$\left(\frac{K_{me}}{2} - K_{mi} \right) (\tilde{\theta}^0 - \tilde{U}^{0'}) - (E_{me} I_{me} - E_{mi} I_{mi}) \tilde{\theta}^{0''} = 0 \quad (\mathcal{M}_r 0)$$

Les vibrations transversales sont pilotées par les équations $(T_t 0)$ et $(\mathcal{M}_t 0)$. Leur combinaison permet bien d'obtenir une équation différentielle de degré 4 qui a la même forme que l'équation décrivant le modèle Timoshenko interne pour les structures constituées de portiques simples.

$$(2E_{me} I_{me} + E_{mi} I_{mi}) \left(X^{(4)} + \frac{\Lambda_m \tilde{\omega}_0^2}{K_{me} + K_{mi}} X'' \right) - \Lambda_m \tilde{\omega}_0^2 X = 0 \quad (4.10)$$

$$\text{avec } X = \tilde{U}^0 \text{ ou } \tilde{\theta}^0$$

L'équation $(M0)$ décrit les modes de giration et l'équation $(\mathcal{M}_r 0)$ donne une condition nécessaire pour pouvoir utiliser la relation $\tilde{\Theta}^0 = \tilde{\theta}^0$. En effet, la combinaison des équations $(\mathcal{M}_t 0)$ et $(\mathcal{M}_r 0)$ montre que :

$$\tilde{\theta}^{0''} \left(\left(\frac{K_{me}}{2} - K_{mi} \right) \frac{2E_{me} I_{me} + E_{mi} I_{mi}}{K_{me} + K_{mi}} - (E_{me} I_{me} - E_{mi} I_{mi}) \right) = 0$$

↓

$$\tilde{\theta}^{0''} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{2E_{me} I_{me}}{K_{me}} - \frac{E_{mi} I_{mi}}{K_{mi}} = 0$$

Les rigidités K_{me} et K_{mi} sont ensuite remplacées par les expressions (4.9) :

$$\frac{E_{me} I_{me}}{G_{me} A'_{me}} - \frac{E_{mi} I_{mi}}{G_{mi} A'_{mi}} = 0$$

Ainsi, pour que tous les murs se déforment de la même façon, il faut qu'il y ait égalité des ratios C' entre la rigidité en flexion et la rigidité en cisaillement. Par la suite, nous supposons que les modèles construits pour les structures constituées de portiques simples peuvent encore être utilisés si ces ratios ont des valeurs « pas trop différentes ». De plus, cette condition a été obtenue à partir d'un modèle dégénéré dans lequel la flexion globale et le cisaillement de la cellule n'interviennent pas. Les situations où les quatre mécanismes ont la même importance sont sûrement plus complexes.

Néanmoins, lorsque ces modèles sont valables, l'équation (4.10) montre comment calculer la rigidité de la flexion interne $EI_{\mathcal{M}}$ et celle du cisaillement dans les murs \mathcal{K}_m . La première, $EI_{\mathcal{M}}$, est toujours la somme des rigidités des murs en flexion et la seconde, \mathcal{K}_m , est la somme des contributions des murs à la rigidité en cisaillement.

$$EI_{\mathcal{M}} = \sum_{\text{murs}} E_j I_j$$

$$\mathcal{K}_m = \sum_{\text{murs}} K_j \quad \text{avec} \quad \frac{1}{K_j} = \frac{\ell_m^2}{12E_j I_j} + \frac{1}{G_j A'_j}$$

Ainsi, il ne reste plus qu'à déterminer la rigidité du plancher \mathcal{K}_p . D'après l'équation (M0), son expression pour une structure constituée de doubles portiques est : $\mathcal{K}_p = 2K_p$. Cependant dans les bâtiments, les planchers ont une géométrie complexe et il semble délicat d'employer une formule analytique. C'est pourquoi nous cherchons à réutiliser la procédure numérique mise au point dans la partie 3.2.3 page 181 pour calculer K . Pour cela, nous considérons une structure dont le comportement est décrit par le nouveau modèle générique et nous commençons par regarder à quoi correspond cette méthode de calcul.

Le nouveau modèle générique est défini par les équations (4.6) et (4.7) dont la combinaison donne le système suivant :

$$\Lambda \omega^2 U + \mathcal{K}_m (U'' - \theta') = 0 \quad (T_t)$$

$$\mathcal{K}_p (\alpha - \theta) - EI_M \alpha'' = 0 \quad (M)$$

$$\mathcal{K}_m (\theta - U') + \mathcal{K}_p (\theta - \alpha) - EI_{\mathcal{M}} \theta'' = 0 \quad (\mathcal{M}_t)$$

À partir des équations (T_t) et (M_t), nous déduisons l'expression de θ en fonction des autres variables :

$$\theta = \frac{1}{\mathcal{K}_m + \mathcal{K}_p} \left(\mathcal{K}_p \alpha + \mathcal{K}_m U' + EI_{\mathcal{M}} \left(U^{(3)} + \frac{\Lambda \omega^2}{\mathcal{K}_m} U' \right) \right)$$

L'effort tranchant dans les murs s'écrit donc :

$$\mathcal{T} = -\mathcal{K}_m (U' - \theta) = -\frac{\mathcal{K}_m \mathcal{K}_p}{\mathcal{K}_m + \mathcal{K}_p} (U' - \alpha) - \frac{\mathcal{K}_m EI_{\mathcal{M}}}{\mathcal{K}_m + \mathcal{K}_p} \left(U^{(3)} + \frac{\Lambda \omega^2}{\mathcal{K}_m} U' \right)$$

La méthode de calcul proposée dans la partie 3.2.3 consiste à appliquer une sollicitation statique telle que $\alpha = 0$ et U' est constante sur toute la hauteur de la structure. Dans ces conditions, l'effort tranchant dans les murs est :

$$\mathcal{T} = -\frac{\mathcal{K}_m \mathcal{K}_p}{\mathcal{K}_m + \mathcal{K}_p} U'$$

Donc cette méthode ne donne pas directement accès à la rigidité du plancher \mathcal{K}_p mais à la rigidité K de l'ensemble de la cellule. Cependant, la rigidité des murs \mathcal{K}_m étant connue, il est possible d'en déduire \mathcal{K}_p :

$$K = \frac{\mathcal{K}_m \mathcal{K}_p}{\mathcal{K}_m + \mathcal{K}_p} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\mathcal{K}_p} = \frac{1}{K} - \frac{1}{\mathcal{K}_m} \quad (4.11)$$

Finalement, l'équation (4.8) qui décrit les vibrations transversales de ce type de poutre est réécrite afin de faire apparaître les paramètres directement accessibles :

$$\begin{aligned} & EI_{\mathcal{M}} EI_M \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{\mathcal{K}_m} \right) U^{(6)} \\ & - \left(EI_{\mathcal{M}} + EI_M - \Lambda \omega^2 \frac{EI_{\mathcal{M}} EI_M}{\mathcal{K}_m} \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{\mathcal{K}_m} \right) \right) U^{(4)} \\ & - \left(\frac{EI_{\mathcal{M}}}{\mathcal{K}_m} + \frac{EI_M}{K} \right) \Lambda \omega^2 U'' + \Lambda \omega^2 U = 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Maintenant que nous sommes capables de calculer les cinq paramètres qui interviennent dans ce nouveau modèle, nous disposons de tous les outils nécessaires pour la modélisation d'un bâtiment avec des murs voiles.

4.3 Modélisation d'un bâtiment à murs voiles

L'objectif de cette partie est d'évaluer, sur des bâtiments réalistes, la précision des modèles continus présentés dans les parties 3.2 et 4.2.2. C'est pourquoi nous reprenons le plan d'un immeuble réel. Par commodité, les résultats des modèles continus sont comparés avec ceux d'un modèle éléments finis de la structure dont tous les paramètres sont parfaitement maîtrisés. En particulier, les propriétés des matériaux et la qualité des connexions entre les éléments sont connues. De plus, le modèle éléments finis est encastré à la base et il n'y a pas d'interaction sol-structure. Dans ces conditions, l'écart observé entre les deux types de modélisation ne provient pas d'incertitudes sur les données mais reflète vraiment la qualité des modèles. Afin de tester un plus grand nombre de situations, nous faisons également varier le nombre d'étages.

Cette partie démarre par la présentation de la structure réelle. Puis les hypothèses retenues pour le modèle éléments finis et les modélisations continues sont exposées. En particulier, le calcul des deux rigidités en cisaillement est détaillé. Enfin, les résultats sont commentés.

Structure réelle

Le bâtiment étudié (figure 4.15) a fait l'objet d'une campagne expérimentale juste avant sa démolition, alors qu'il était vide d'habitants (Hans, 2002; Hans *et al.*, 2005). Il s'agit du bâtiment G des références précédentes. Il était situé à Vaulx-en-Velin (Rhône) et a été construit au milieu des années 1970. Cet immeuble respecte bien les conditions requises pour pouvoir utiliser les modèles continus issus de l'homogénéisation. Il possède seize niveaux (R+15) et tous les étages sont construits selon le même plan, sans transparence mécanique au rez-de-chaussée. De plus, les données expérimentales montrent que les vibrations selon les deux directions horizontales ne sont pas couplées. Elles peuvent donc être étudiées de façon indépendante.

Le plan d'un étage courant est représenté sur la figure 4.16. Le bâtiment mesure 31,38 m de long et 16,15 m de large. La hauteur d'un niveau est 2,70 m et la hauteur totale du bâtiment 43,20 m. La structure est constituée de murs voiles internes et de planchers en béton armé coulés en place. Tous ces éléments ont une épaisseur de 14 cm. Des panneaux préfabriqués faiblement armés servent de façade. Ce bâtiment est bien contreventé dans les deux directions y et z grâce à la présence des murs voiles. La seule exception est constituée par les deux travées d'extrémité. Dans la direction y , ces dernières ne sont contreventées que par des panneaux de façade percés d'une fenêtre. Le bâtiment était en bon état au moment de la campagne expérimentale. Un immeuble identique mais avec cinq étages de moins était accolé sur un des côtés. Les deux bâtiments étaient séparés par un joint de 5 cm. Le sol est constitué de dépôts graveleux du Rhône, classés « bons à moyens », et le recours à des fondations profondes n'a pas été nécessaire.

Les modes verticaux n'étant pas considérés ici, la direction y sera appelée direction longitudinale et la direction z , direction transversale. Les fréquences propres mesurées expérimentalement dans ces deux directions sont indiquées dans les tableaux 4.3 et 4.4. Il s'agit des fréquences obtenues à partir des enregistre-



FIGURE 4.15 – Bâtiment étudié (Version en couleur : figure D.9 page 338)

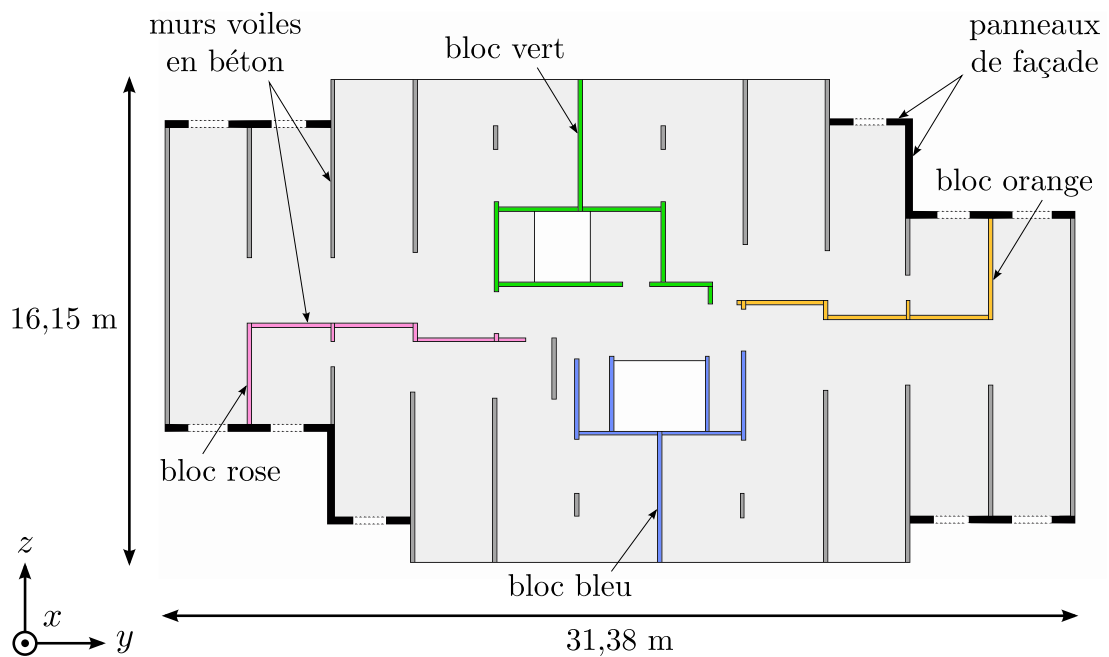


FIGURE 4.16 – Plan d'un étage courant (Version en couleur : figure D.10 page 338)

ments sous bruit de fond après extraction de l'interaction sol-structure (Hans, 2002; Hans *et al.*, 2005). Celles-ci sont données pour information car nous rappelons que la référence pour évaluer la précision des modèles continus n'est pas la structure réelle mais un modèle éléments finis.

Mode	Mesures expérimentales		Éléments finis		
	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	erreur (%)	ratio f_i/f_1
1	2,15	1	2,08	-3,3	1
2	7,25	3,37	7,26	+0,14	3,49
3	14	6,51	14,3	+2,1	6,88

TABLE 4.3 – Fréquences propres dans la direction longitudinale (y)

Mode	Mesures expérimentales		Éléments finis		
	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	erreur (%)	ratio f_i/f_1
1	1,56	1	1,8	+15	1
2	6,65	4,26	7,85	+18	4,36
3	14	8,97	15,91	+14	8,84

TABLE 4.4 – Fréquences propres dans la direction transversale (z)

Modèle éléments finis

Ce modèle a été réalisé avec le logiciel COMSOL Multiphysics. Tous les éléments ont été modélisés par des coques. Sur le plan du bâtiment, apparaissent quatre blocs de murs qui se touchent. Ils sont représentés en rose, bleu, vert et orange sur la figure 4.16. La qualité des connexions entre ces murs dans la structure réelle est inconnue. Néanmoins, nous avons considéré qu'ils sont au moins reliés par l'intermédiaire des planchers et qu'ils ne peuvent pas se comporter de façon indépendante. C'est pourquoi l'hypothèse des éléments parfaitement connectés a été retenue. Nous avons également supposé que les panneaux de façade préfabriqués ne participent pas à la réponse de la structure donc ils n'ont pas été modélisés. Le modèle est parfaitement encasté au niveau du rez-de-chaussée et les caractéristiques du béton sont données ci-dessous.

Caractéristiques du béton

$$\rho = 2\,300 \text{ kg/m}^3$$

$$E = 30\,000 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0,2$$

Les fréquences propres obtenues pour une structure de seize niveaux sont indiquées dans les tableaux 4.3 et 4.4. L'écart avec les fréquences expérimentales est faible pour la direction longitudinale et de l'ordre de 15 % pour la direction transversale. Par contre, les valeurs des ratios de fréquences sont très bonnes dans cette direction. Cela semble indiquer que la physique des vibrations transversales est bien décrite par ce modèle mais que le module d'élasticité choisi pour le béton est un peu trop élevé. Une valeur plus basse permettrait de mieux caler les fréquences transversales mais augmenterait l'erreur sur les fréquences longitudinales. Celle-ci peut s'expliquer par le fait que les panneaux de façade n'ont pas été

modélisés. En effet, ces panneaux sont principalement orientés selon la direction longitudinale. Cependant, le but premier de cette étude n'étant pas la reproduction du fonctionnement du bâtiment réel, nous n'avons pas cherché à améliorer le calage du modèle éléments finis et ces hypothèses n'ont pas été vérifiées.

Ainsi, les fréquences propres calculées par éléments finis dans les tableaux 4.3 et 4.4 constituent les références pour évaluer la précision des modèles continus. Les fréquences propres ont également été déterminées, avec ces mêmes hypothèses, pour des structures de six niveaux (R+5), onze niveaux (R+10) et trente niveaux (R+29). Comme les panneaux de façade ne sont pas modélisés, à chaque niveau se trouvent deux morceaux de planchers en porte-à-faux. Pour les bâtiments de six et onze niveaux, qui sont les plus rigides, les gammes de fréquences des modes horizontaux et de la résonance de ces morceaux de planchers coïncident. Nous observons alors de nombreux modes locaux. Afin de limiter le nombre de modes propres à calculer pour faire apparaître les modes macroscopiques, les morceaux de planchers en porte-à-faux ont été supprimés pour ces deux bâtiments et la masse est légèrement différente. Toutes les fréquences propres sont données dans les tableaux 4.6 et 4.7 après la présentation des modélisations continues.

Modèles continus

Les deux modèles continus utilisés ici sont le modèle générique de la partie 3.2.2 page 157 et le nouveau modèle générique de la partie 4.2.2 page 285 qui prend en compte le cisaillement dans les murs. Le but est de vérifier que l'ajout de ce mécanisme améliore bien la précision des calculs. Le premier modèle nécessite de déterminer quatre paramètres macroscopiques : la masse linéique Λ , la rigidité de la flexion globale EI_M , celle de la flexion interne $EI_{\mathcal{M}}$ et celle du cisaillement de la cellule K . Pour le second modèle, il faut rajouter un cinquième paramètre : la rigidité du cisaillement dans les murs \mathcal{K}_m . La masse linéique Λ est égale à la masse d'un étage, dans le modèle éléments finis, divisée par la hauteur de l'étage. Les caractéristiques du béton sont les mêmes que celles du modèle éléments finis. Les méthodes de calcul des rigidités sont détaillées ci-dessous et tous les paramètres macroscopiques sont rappelés à la fin dans le tableau 4.5.

Nous commençons par la rigidité de la flexion globale EI_M qui est égale au module d'élasticité du béton multiplié par une inertie macroscopique. Pour ce mécanisme, les planchers servent uniquement à maintenir l'écartement des murs et EI_M ne dépend que des propriétés de ces derniers en extension. Ainsi, les inerties macroscopiques pour chacune des directions y et z ne tiennent pas compte des inerties propres des murs. L'origine du repère est pris au centre de gravité de l'ensemble des murs. À quelques centimètres près, celui-ci se trouve au centre du bâtiment. Les expressions des inerties sont alors :

$$I_{Mz} = \sum_{\text{murs}} A_j y_j^2 \quad I_{My} = \sum_{\text{murs}} A_j z_j^2$$

où A_j désigne la section du mur j , z_j désigne la distance entre le centre de gravité du mur j et l'axe y et y_j désigne la distance entre le centre de gravité du mur j et l'axe z . En réalité, les axes principaux d'inertie de l'ensemble des murs sont

décalés d'un angle de $7,6^\circ$ par rapport aux directions y et z du repère. Mais, ce décalage a été négligé et les inerties macroscopiques ont été calculées par rapport aux directions y et z avec les formules données ci-dessus. Les murs étant supposés parfaitement connectés entre eux, chacun des blocs rose, bleu, vert et orange de la figure 4.16 a été considéré comme un seul élément. Nous obtenons alors les inerties suivantes :

direction longitudinale	direction transversale
$I_{Mz} = 1\,648 \text{ m}^4$	$I_{My} = 284 \text{ m}^4$

La rigidité de la flexion interne $EI_{\mathcal{M}}$ est égale au module d'élasticité du béton multiplié par une inertie microscopique. Cette dernière est donnée par la somme des inerties propres des murs dans la direction considérée. Pour les murs isolés, les axes principaux d'inertie coïncident avec les directions y et z . Ce n'est pas forcément le cas pour les blocs de murs et notamment les blocs rose et orange. Cela signifie que, dans la structure réelle, ces blocs ne fléchissent pas tout à fait dans la même direction que l'ensemble de la structure. Là encore, ce décalage a été négligé et toutes les inerties propres ont été calculées par rapport aux directions y et z . Les inerties microscopiques sont alors :

direction longitudinale	direction transversale
$I_{\mathcal{M}z} = \sum_{\text{murs}} I_{zj} = 56 \text{ m}^4$	$I_{\mathcal{M}y} = \sum_{\text{murs}} I_{yj} = 69 \text{ m}^4$

Les deux inerties, macroscopique et microscopique, ont été déterminées au moyen d'un tableau EXCEL. Pour la rigidité du cisaillement de la cellule K , il faut construire un modèle éléments finis d'un étage. Cette rigidité est calculée grâce à la procédure mise au point dans la partie 3.2.3 page 181. Les conditions aux limites à appliquer sur ce modèle d'un étage ont été identifiées par homogénéisation et sont données ci-dessous :

- le blocage de toutes les translations au niveau du centre de gravité d'un mur,
- pour les autres murs, le blocage de la translation verticale au niveau du centre de gravité,
- des conditions aux limites périodiques entre la base et le sommet de tous les murs,
- un déplacement différentiel $\Delta U = 1 \text{ mm}$ entre la base et le sommet de tous les murs dans la direction étudiée.

Dans la description ci-dessus, le mot « mur » est à prendre au sens large : il désigne soit un mur voile isolé, soit un des quatre blocs de murs connectés. Pour les blocs, il n'y a pas de matière au niveau du centre de gravité donc les translations sont bloquées au niveau des projections du centre de gravité sur les murs. Ce type de conditions aux limites empêche les mouvements de corps rigides de la cellule et le mouvement vertical des différents murs mais laisse ces derniers libres de pivoter autour de leur centre de gravité.

La déformation de l'étage sous ce chargement est représentée sur la figure 4.17 pour la direction longitudinale et la figure 4.19 pour la direction transversale. Pour

que la déformation des murs soit visible, ces figures correspondent à des modèles d'étage où le plancher se trouve à la base des murs. Par contre, les calculs de rigidités ont été réalisés sur des modèles où le plancher joue le rôle d'un plafond et est placé au sommet des murs. La différence entre les deux calculs est minime. À chaque fois, nous donnons, sous le même angle, une vue de l'étage non déformé et une vue de l'étage déformé. Une vue de profil de l'étage déformé a également été ajoutée. Pour mieux faire ressortir la rotation des murs, les couleurs indiquent le déplacement vertical. Ainsi, les zones rouges se soulèvent alors que les zones bleues s'abaissent. Il est intéressant de noter qu'en certains points, la valeur du déplacement vertical est supérieure à celle du déplacement différentiel imposé entre la base et le sommet des murs. Cela vient du fait que la longueur des murs est supérieure à leur hauteur. Enfin, pour que la géométrie de l'étage soit plus lisible, les arêtes ont été repassées en rouge indépendamment de leur déplacement vertical.

L'effort tranchant dans la direction étudiée est ensuite mesuré au milieu des murs et la rigidité de la cellule est déduite grâce à la formule suivante où ℓ désigne la hauteur de l'étage et vaut 2,7 m.

$$\Sigma T_m = -K \frac{\Delta U}{\ell} \quad (4.13)$$

direction longitudinale

$$K_y = 7\,841 \text{ MN}$$

direction transversale

$$K_z = 4\,641 \text{ MN}$$

Le dernier paramètre à déterminer est la rigidité des murs en cisaillement \mathcal{K}_m . Une première estimation est obtenue, avec le tableau EXCEL, en faisant la somme des rigidités en cisaillement des murs orientés selon la direction considérée.

direction longitudinale

$$\sum_{\text{murs selon } y} G_j A'_j = 49\,625 \text{ MN}$$

direction transversale

$$\sum_{\text{murs selon } z} G_j A'_j = 178\,340 \text{ MN}$$

Dans ces expressions, G désigne le module de cisaillement du béton et A' désigne la section réduite d'effort tranchant. Cette dernière vaut $(5/6)A$ pour une section rectangulaire. Cependant, cette façon de procéder suppose que tous les murs se déforment de façon indépendante. Or, dans le modèle éléments finis qui sert de référence, les murs des blocs sont parfaitement connectés entre eux. Nous cherchons donc à affiner le calcul de ce paramètre.

Pour cela, le modèle éléments finis d'un étage est réutilisé. Le plancher est supprimé et tous les murs sont encastrés à la base et au sommet. Un déplacement différentiel $\Delta U = 1 \text{ mm}$ est encore appliqué entre les extrémités des murs. La déformation de l'étage sous ce type de chargement est représentée sur la figure 4.18 pour la direction longitudinale et sur la figure 4.20 pour la direction transversale. Il s'agit des mêmes angles de vue que sur les figures 4.17 et 4.19. Les vues de profil sont également données. Cette fois-ci, l'étage déformé et l'étage non déformé ont été superposés sur la même figure. Les arêtes de l'étage non déformé sont noires alors que celles de l'étage déformé sont rouges. Les autres couleurs indiquent l'intensité des contraintes de cisaillement dans la direction étudiée. La rigidité \mathcal{K}_m

se déduit ensuite de la somme des efforts tranchants dans les murs grâce à la formule (4.13).

$$\begin{array}{l} \text{direction longitudinale} \\ \mathcal{K}_{my} = 59\,056 \text{ MN} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{direction transversale} \\ \mathcal{K}_{mz} = 175\,264 \text{ MN} \end{array}$$

L'écart entre les deux méthodes de calcul est très faible dans la direction transversale mais vaut presque 20 % dans la direction longitudinale. Cela vient du fait que, dans cette direction, le contreventement est principalement assuré par les quatre blocs de murs connectés. Pour le calcul des fréquences, ce sont les deuxièmes valeurs obtenues par éléments finis qui ont été utilisées.

Les valeurs de tous les paramètres macroscopiques sont rassemblées dans le tableau 4.5. Les fréquences propres ont ensuite été calculées pour les quatre structures avec les deux modèles génériques : celui de la partie 3.2.2 page 157 qui néglige le cisaillement dans les murs et celui de la partie 4.2.2 page 285 qui le prend en compte. Tous les résultats sont présentés dans les tableaux 4.6 pour la direction longitudinale et dans les tableaux 4.7 pour la direction transversale.

Caractéristiques du béton

$\rho = 2\,300 \text{ kg/m}^3$

$E = 30\,000 \text{ MPa}$

$\nu = 0,2$

Masse linéique Λ (t/m)	
6 et 11 niveaux	16 et 30 niveaux
98,12	100,28

Rigidités	Direction longitudinale (y)	Direction transversale (z)
EI_M (MN.m ²)	49 440 000	8 520 000
$EI_{\mathcal{M}}$ (MN.m ²)	1 680 000	2 070 000
K (MN)	7 841	4 641
\mathcal{K}_m (MN)	59 056	175 264
\mathcal{K}_p (MN)	9 041	4 767

TABLE 4.5 – Valeurs des paramètres macroscopiques

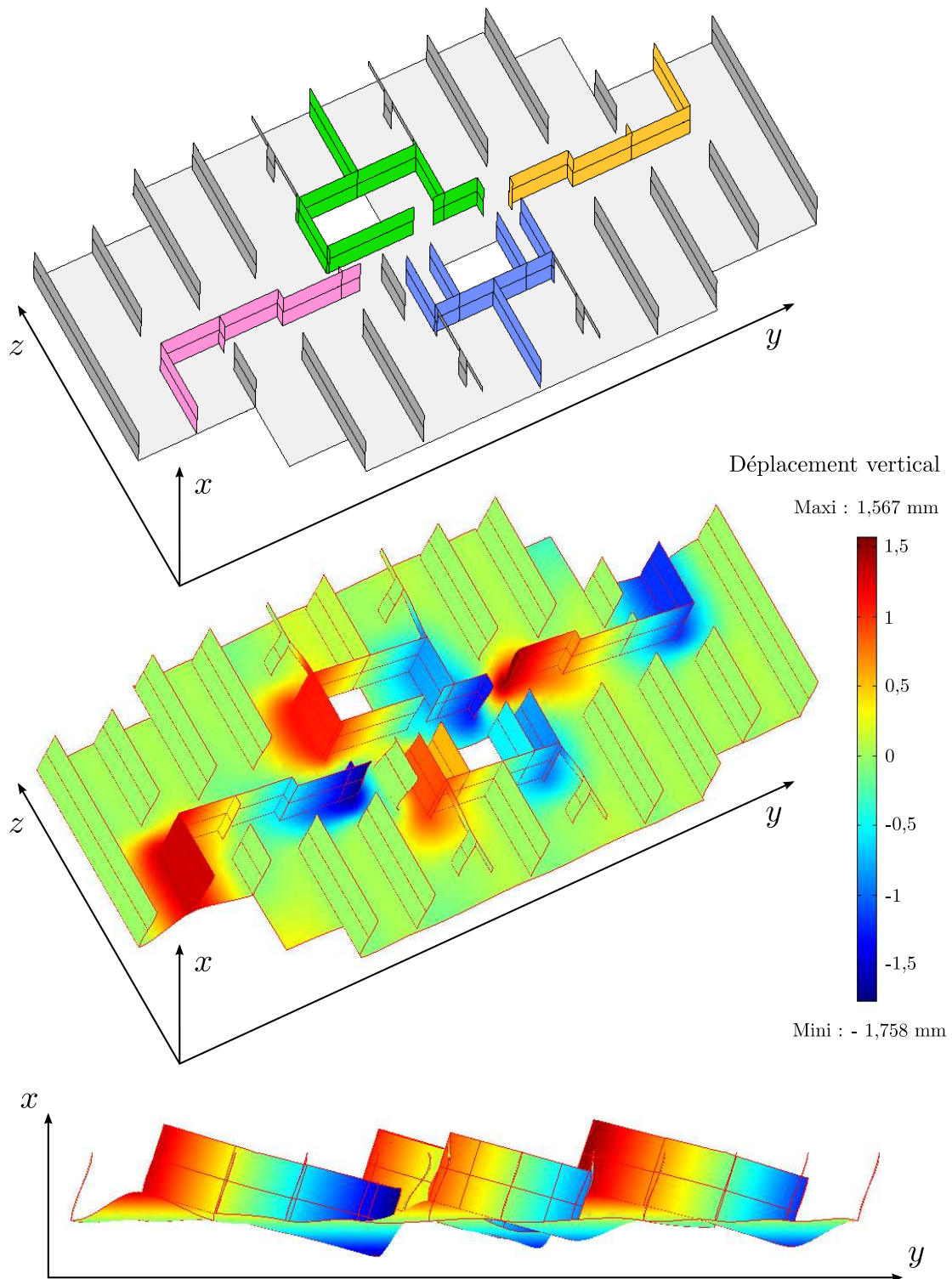


FIGURE 4.17 – Calcul de la rigidité K dans la direction longitudinale
(Version en couleur : figure D.11 page 339)

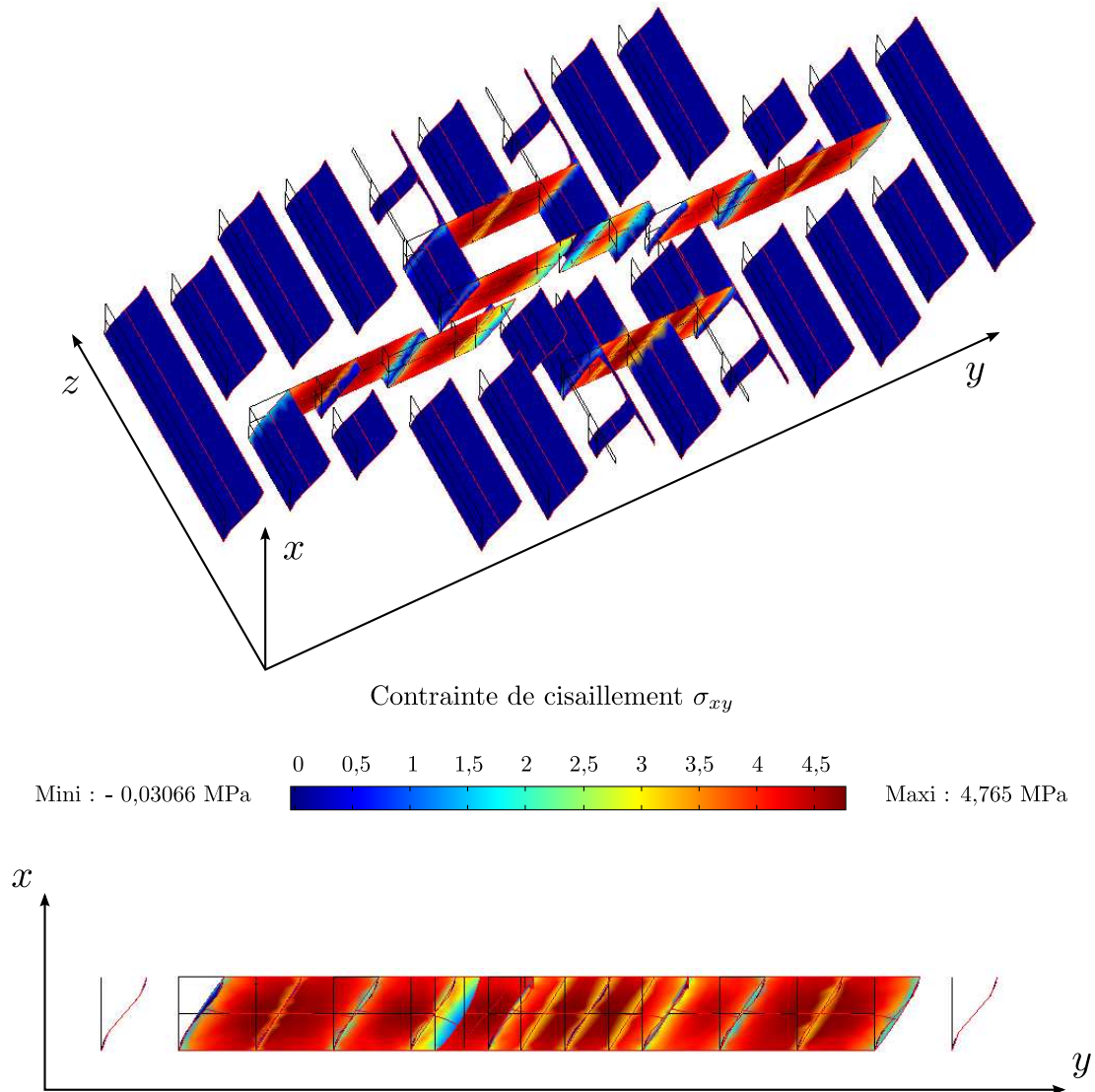


FIGURE 4.18 – Calcul de la rigidité \mathcal{K}_m dans la direction longitudinale
(Version en couleur : figure D.12 page 340)

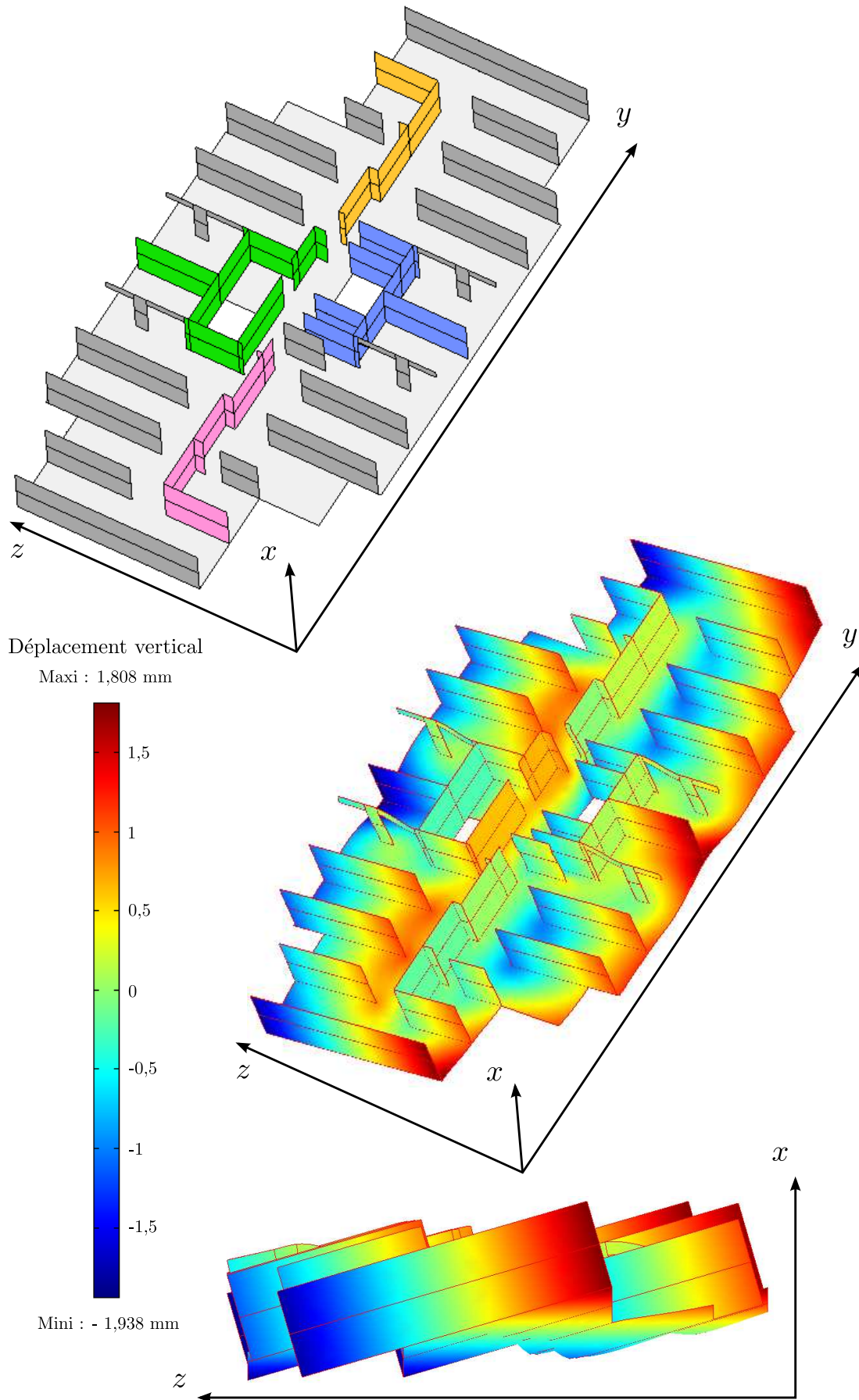


FIGURE 4.19 – Calcul de la rigidité K dans la direction transversale
(Version en couleur : figure D.13 page 341)

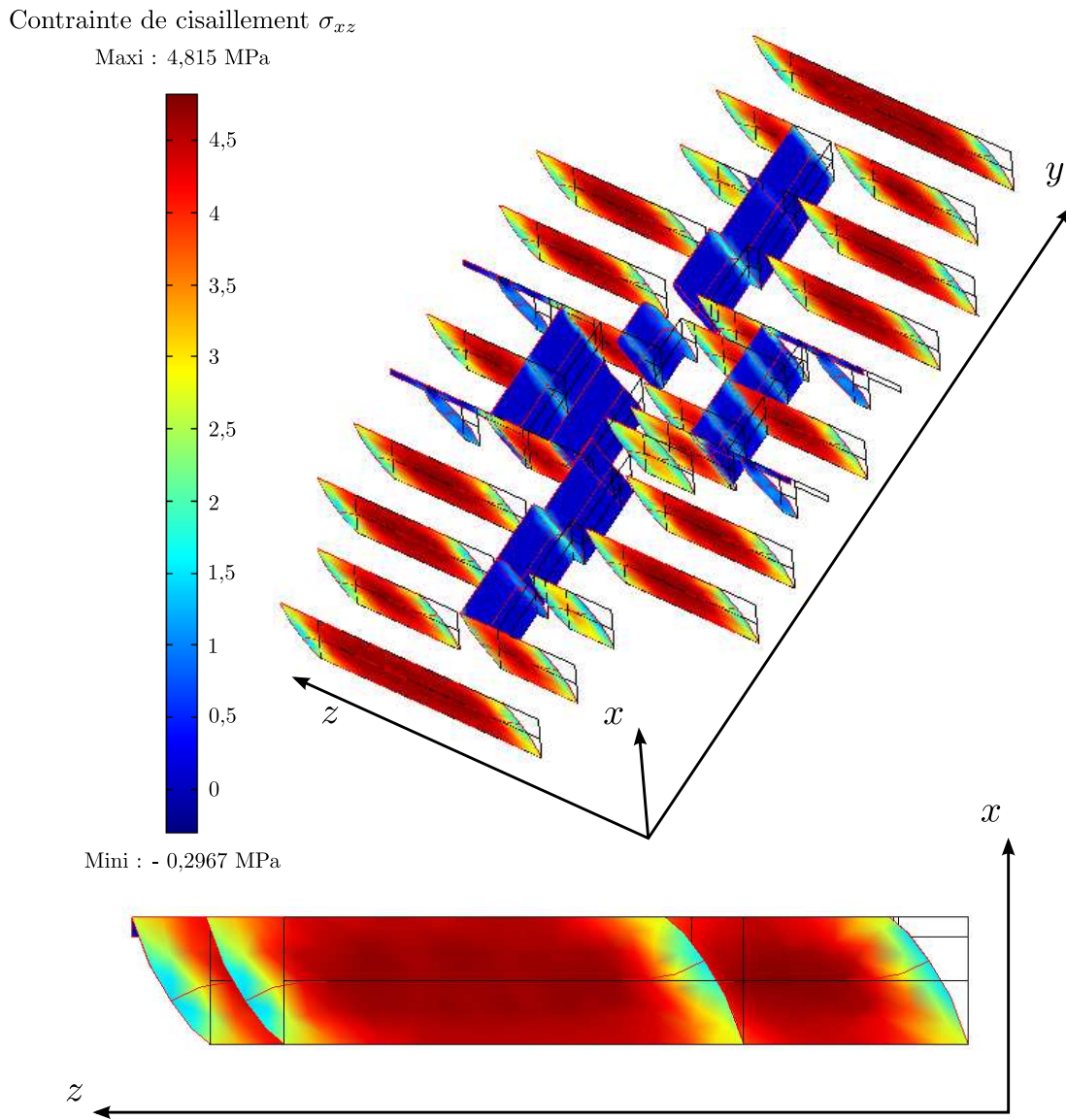


FIGURE 4.20 – Calcul de la rigidité \mathcal{K}_m dans la direction transversale
 (Version en couleur : figure D.14 page 342)

6 niveaux

Mode	Éléments finis		Générique sans \mathcal{K}_m			Générique avec \mathcal{K}_m		
	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	erreur (%)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	erreur (%)	ratio f_i/f_1
1	7,43	1	10,59	+ 42	1	8,10	+ 9,0	1
2	23,28	3,13	57,48	+ 147	5,43	27,79	+ 19	3,43

11 niveaux

Mode	Éléments finis		Générique sans \mathcal{K}_m			Générique avec \mathcal{K}_m		
	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	erreur (%)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	erreur (%)	ratio f_i/f_1
1	3,38	1	4,02	+ 19	1	3,54	+ 4,6	1
2	11,69	3,46	18,50	+ 58	4,60	12,81	+ 9,6	3,62
3	21	6,21	47,94	+ 128	11,93	25,88	+ 23	7,32

16 niveaux

Mode	Éléments finis		Générique sans \mathcal{K}_m			Générique avec \mathcal{K}_m		
	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	erreur (%)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	erreur (%)	ratio f_i/f_1
1	2,08	1	2,31	+ 11	1	2,13	+ 2,2	1
2	7,26	3,49	9,53	+ 31	4,13	7,63	+ 5,1	3,59
3	14,30	6,88	23,33	+ 63	10,10	15,61	+ 9,2	7,34

30 niveaux

Mode	Éléments finis		Générique sans \mathcal{K}_m			Générique avec \mathcal{K}_m		
	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	erreur (%)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	erreur (%)	ratio f_i/f_1
1	0,91	1	0,96	+ 5,4	1	0,92	+ 1,4	1
2	3,16	3,47	3,52	+ 11	3,67	3,21	+ 1,5	3,47
3	6,36	6,99	7,71	+ 21	8,04	6,49	+ 2,0	7,03

 TABLE 4.6 – Fréquences propres dans la direction longitudinale (y)

6 niveaux

Mode	Éléments finis		Générique sans \mathcal{K}_m			Générique avec \mathcal{K}_m		
	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	erreur (%)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	erreur (%)	ratio f_i/f_1
1	8,43	1	10,76	+ 28	1	9,61	+ 14	1
2	32,05	3,80	62,54	+ 95	5,81	39,96	+ 25	4,16

11 niveaux

Mode	Éléments finis		Générique sans \mathcal{K}_m			Générique avec \mathcal{K}_m		
	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	erreur (%)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	erreur (%)	ratio f_i/f_1
1	3,25	1	3,69	+ 13	1	3,52	+ 8,5	1
2	13,90	4,28	19,33	+ 39	5,24	16,03	+ 15	4,55
3	36,03	11,09	52,12	+ 45	14,14	36,56	+ 1,5	10,37

16 niveaux

Mode	Éléments finis		Générique sans \mathcal{K}_m			Générique avec \mathcal{K}_m		
	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	erreur (%)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	erreur (%)	ratio f_i/f_1
1	1,80	1	1,95	+ 8,4	1	1,90	+ 5,7	1
2	7,85	4,36	9,48	+ 21	4,86	8,56	+ 9,1	4,50
3	15,91	8,84	24,86	+ 56	12,74	20,24	+ 27	10,64

30 niveaux

Mode	Éléments finis		Générique sans \mathcal{K}_m			Générique avec \mathcal{K}_m		
	f_i (Hz)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	erreur (%)	ratio f_i/f_1	f_i (Hz)	erreur (%)	ratio f_i/f_1
1	0,65	1	0,68	+ 5,3	1	0,68	+ 4,3	1
2	2,85	4,38	3,09	+ 8,6	4,52	2,98	+ 4,6	4,40
3	6,72	10,34	7,64	+ 14	11,16	7,09	+ 5,5	10,46

TABLE 4.7 – Fréquences propres dans la direction transversale (z)

Commentaires

Le principal résultat qui ressort des tableaux 4.6 et 4.7 est que la prise en compte du cisaillement dans les murs permet bien d'augmenter la précision des modèles continus. En effet, le premier modèle, qui néglige ce phénomène, donne des fréquences assez éloignées de celles calculées par éléments finis, notamment pour les modes supérieurs. Pour ce type de bâtiment, il est donc nécessaire d'employer le deuxième modèle qui améliore significativement les résultats dans les huit situations considérées ici.

Dans l'ensemble, ce deuxième modèle conduit à de très bonnes estimations des fréquences propres même si leur précision diminue pour les modes supérieurs et les bâtiments avec peu d'étages. Ce phénomène, qui était prévisible, a deux causes. La première est que la séparation d'échelles devient mauvaise dans ces situations. La seconde est que ce modèle suppose que les éléments ont un comportement quasi-statique à l'échelle locale alors que la résonance des planchers en flexion démarre aux alentours de 20 Hz.

Il existe également des différences entre les deux directions. Le premier modèle, sans cisaillement dans les murs, donne des résultats moins bons dans le sens longitudinal que dans le sens transversal. Au contraire, le deuxième modèle est plus performant dans la direction y que dans la direction z . Essayons d'expliquer ces différences.

Le plan de la figure 4.16 montre que la direction longitudinale est contreventée par les quatre blocs de murs connectés et notamment les blocs rose et orange qui sont très longs. La part du cisaillement est donc importante, ce qui explique que le premier modèle soit moins adapté. Dans la direction transversale, le bâtiment est contreventé par l'ensemble des murs voiles. Ces derniers ont des dimensions variées mais la majorité est plus élancée que les blocs rose et orange. Il est donc probable que le cisaillement soit moins important dans cette direction.

Cette analyse intuitive est confirmée par le calcul des ratios $C' = EI_{\mathcal{M}}/K_m$ entre la rigidité de la flexion interne et celle du cisaillement dans les murs.

$$\begin{array}{ll} \text{direction longitudinale} & \text{direction transversale} \\ C'_y = 28,45 \text{ m}^2 & C'_z = 11,81 \text{ m}^2 \end{array} \quad (4.14)$$

Pour comparer les deux mécanismes, il faudrait diviser ces ratios par le carré de la longueur caractéristique sur laquelle les murs travaillent en flexion. Mais ici, nous cherchons plutôt à comparer les deux directions entre elles et cette longueur caractéristique est identique dans les deux cas. Ainsi, le contraste entre la flexion et le cisaillement des murs est plus important dans le sens longitudinal. Comme ces deux mécanismes sont associés en série, cela signifie que la part du cisaillement est plus importante dans la direction y . Cela est cohérent avec les résultats des tableaux 4.6 et 4.7.

Le deuxième modèle, qui tient compte du cisaillement dans les murs, a été construit sur des structures constituées de portiques simples qui ne comportent qu'un seul type de murs. De plus, nous avons vu que la condition pour pouvoir l'utiliser lorsqu'il existe plusieurs sortes de murs est que ces derniers aient des ratios C' « pas trop différents ». Ainsi, nous avons supposé implicitement que

tous les murs ont des ratios C' proches des valeurs moyennes (4.14). La moins bonne performance de ce modèle dans la direction transversale peut donc être le signe d'une plus grande diversité des ratios C' .

Pour le vérifier, ils ont été calculés dans les deux directions. Dans le sens longitudinal, le contreventement est assuré par les quatre blocs de murs connectés et les valeurs des ratios C' sont données dans le tableau 4.8, ainsi que leur moyenne. Pour la direction z , ce calcul doit être réalisé pour les quatre blocs et tous les murs voiles isolés. Les valeurs sont rassemblées dans le tableau 4.9. Pour déterminer la valeur moyenne, nous avons tenu compte de la symétrie de la structure et de l'existence de deux exemplaires de chaque type de mur voile isolé (sauf celui marqué d'une *). Comme prévu, les variations de ce ratio sont beaucoup plus faibles dans la direction longitudinale. De plus, la valeur moyenne est très proche de la valeur (4.14), alors qu'il existe un écart de 22 % dans la direction transversale.

Il est également intéressant de noter que des éléments avec une géométrie aussi différente que les blocs bleu et orange peuvent avoir des ratios C' et donc des comportements très proches dans les deux directions. Au contraire, les blocs bleu et vert ont des formes semblables mais un comportement différent. Cela montre que le calcul de ces ratios est indispensable.

Élément	I (m ⁴)	K (MN)	$C' = EI/K$ (m ²)	Écart avec (4.14)
bloc rose	18,11	15 400	35,28	+ 24 %
bloc bleu	10,35	10 024	30,98	+ 8,9 %
bloc vert	13,54	18 786	21,62	- 24 %
bloc orange	14,13	13 962	30,36	+ 6,7 %
Moyenne de l'étage			29,56	+ 3,9 %

TABLE 4.8 – Ratios C' dans la direction longitudinale (y)

Élément	I (m ⁴)	K (MN)	$C' = EI/K$ (m ²)	Écart avec (4.14)
bloc rose	2,06	5 695	10,85	- 8,1 %
bloc bleu	8,42	23 272	10,85	-8,1 %
bloc vert	12,78	16 491	23,25	+ 97 %
bloc orange	2,05	5 681	10,83	- 8,3 %
Murs voiles isolés	10,95	15 793	20,80	+ 76 %
	1,10	6 513	5,07	- 57 %
	0,09	2 013	1,34	- 89 %
	2,69	9 396	8,59	- 27 %
	2,37	8 898	7,99	- 32 %
	2,43	8 987	8,11	- 31 %
	2,14	8 699	7,38	- 38 %
	0,11*	2 316*	1,42*	- 88 %*
Moyenne de l'étage			9,25	- 22 %

TABLE 4.9 – Ratios C' dans la direction transversale (z)

4.4 Conclusion et perspectives

Ce chapitre était consacré à l'utilisation des modèles continus issus de l'homogénéisation pour représenter le comportement dynamique des bâtiments. Cela n'est possible qu'à deux conditions. La première est que la structure doit être périodique en élévation, c'est-à-dire que tous les étages doivent avoir le même plan. La seconde est que la condition de séparation d'échelles doit être respectée. Pour cela, il faut que le bâtiment possède au moins cinq étages et que le nombre de modes étudiés soit inférieur à $N/3$ où N désigne le nombre de cellules. Dans les chapitres précédents, les modèles continus ont été construits pour des structures portiques dont les éléments se comportent comme des poutres d'Euler-Bernoulli. De plus, leur épaisseur a été négligée systématiquement. Or, les bâtiments contiennent souvent des murs voiles et ces deux hypothèses semblent inappropriées. Nous avons donc cherché, dans ce chapitre, à adapter les modèles continus à la présence des murs voiles. Nous nous sommes intéressés aux modes horizontaux pilotés par la translation car ils correspondent à la gamme de fréquences excitée par les séismes. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de tenir compte de la résonance des éléments en flexion. Pour conclure, nous rappelons la démarche qui a été suivie et les avantages de ce type de modèles. Puis nous indiquons les suites qui pourraient être données à ce travail.

Au début, nous avons supposé que les modèles de poutre construits dans la partie 3.2 étaient toujours valables. Dans ces conditions, le comportement macroscopique de la structure est piloté par trois mécanismes : la flexion globale, la flexion interne et le cisaillement de la cellule. Nous avons alors regardé comment les méthodes de calcul des rigidités associées à ces mécanismes pouvaient être adaptées aux nouvelles propriétés des éléments. Pour le cisaillement de la cellule, les formules analytiques obtenues grâce à la méthode HMPD ne sont plus valables. Par contre, la méthode de calcul mise au point dans la partie 3.2.3 page 181 prend automatiquement en compte les nouveaux effets : le cisaillement dans les éléments et l'épaisseur des nœuds. Cette méthode utilise un modèle éléments finis d'une seule cellule et des conditions aux limites identifiées par homogénéisation. Pour la flexion globale, l'inertie macroscopique doit être calculée en considérant uniquement la rigidité en traction-compression des murs. Leur rigidité en flexion est prise en compte par ailleurs dans la rigidité de la flexion interne.

Le domaine de validité des modèles de la partie 3.2 a également été précisé. Tant que les murs sont suffisamment élancés pour se comporter comme des poutres d'Euler-Bernoulli à l'échelle de la structure, ces modèles donnent de très bons résultats. Par contre, dans les bâtiments, les murs voiles sont souvent trop larges pour respecter cette condition. Nous avons alors constaté numériquement que l'erreur peut devenir importante dans ces situations, ce qui a mis en évidence la nécessité de construire des nouveaux modèles. Dans les poutres pleines épaisses, il est bien connu que la correction due au cisaillement est plus importante que celle due à l'inertie de rotation. Comme notre but est d'avoir les modèles les plus simples possibles, tout en restant réalistes, nous avons cherché à intégrer le cisaillement des murs dans les modèles, mais nous continuons à négliger les inerties de rotation associées aux deux types de flexion, globale et interne.

Pour construire ces modèles, la méthode HMPD a de nouveau été appliquée sur des structures constituées par l'empilement de portiques. La différence par rapport aux chapitres précédents est que les éléments sont des poutres de Timoshenko dont les propriétés ont été choisies de telle façon que le cisaillement dans les murs émerge à l'échelle macroscopique. Cette étude a permis de proposer un nouveau modèle générique qui prend en compte quatre mécanismes : la flexion globale, la flexion interne, le cisaillement de la cellule qui dépend principalement de la rigidité du plancher et le cisaillement dans les murs. Ce modèle a ensuite été testé sur un bâtiment réel dont nous avons fait varier le nombre d'étages. Dans toutes les situations considérées, il améliore significativement les résultats par rapport aux modèles de la partie 3.2 qui négligent le cisaillement dans les murs.

Ce type de modélisation des bâtiments présente de nombreux intérêts. Le premier est qu'il permet un gain important au niveau des calculs par rapport à un modèle éléments finis de la structure complète. En effet, un tableau EXCEL suffit pour déterminer les inerties associées à la flexion globale et à la flexion interne. Ce tableau peut également servir à estimer la rigidité des murs en cisaillement lorsque les connexions entre les éléments sont négligées. Le point délicat est le calcul de la rigidité du cisaillement de la cellule qui nécessite la réalisation d'un modèle éléments finis d'un étage. En effet, cette rigidité est pilotée par la déformation du plancher qui peut être relativement complexe. Notons que dans les autres modèles simplifiés de bâtiments, les planchers sont toujours considérés comme infiniment souples en dehors de leur plan. La prise en compte de leur rigidité est un des apports de cette thèse. Celle-ci intervient surtout pour les bâtiments élevés à partir d'une dizaine d'étages. Ce modèle éléments finis d'un étage peut également servir à affiner le calcul de la rigidité des murs en cisaillement. Cela est intéressant pour les bâtiments où il existe des blocs de murs de forme complexe, comme celui qui a été étudié à la fin de ce chapitre.

Une fois que tous les paramètres macroscopiques ont été calculés, les fréquences propres et les déformées modales sont données par la résolution d'une équation différentielle. Celle-ci peut être assez compliquée si tous les mécanismes ont la même importance. Néanmoins, elle est résolue une fois pour toute et après, seules les valeurs des paramètres varient. Ainsi, ce type d'approche est particulièrement intéressant lorsque le nombre d'étages est important. Dans ce cas, le modèle éléments finis d'un étage peut être discrétisé beaucoup plus finement qu'un modèle de la structure complète. De plus, tous les calculs sur ce modèle tridimensionnel sont réalisés en statique. L'aspect dynamique est limité au modèle continu unidimensionnel qui est très précis grâce à la bonne séparation d'échelles.

Soulignons également que, pour le bâtiment étudié à la fin de ce chapitre, nous n'avons utilisé que le modèle le plus compliqué car nous voulions tester sa précision. Néanmoins, dans de nombreuses situations, certains mécanismes sont prépondérants et le modèle générique dégénère en des modèles plus simples. Par exemple, le modèle Timoshenko interne aurait été suffisant pour les bâtiments de six et onze niveaux. Cela met en évidence un deuxième avantage de cette approche, à savoir la compréhension du fonctionnement des bâtiments. En effet, il est possible d'identifier les mécanismes qui pilotent la dynamique de la structure

et de voir l'évolution de son comportement selon le numéro du mode. De plus, le calcul des paramètres macroscopiques renseigne sur le rôle des différents éléments car, pour chacun d'entre eux, ce calcul indique à quel type de rigidité il contribue le plus.

Les résultats obtenus à la fin de ce chapitre sur un bâtiment réel sont très encourageants. Néanmoins, le modèle utilisé a été construit pour des structures constituées par l'empilement de portiques simples dont les deux murs sont identiques. Nous avons considéré qu'il décrivait également la dynamique des structures avec des murs voiles « pas trop différents ». Il faudrait des investigations supplémentaires pour préciser son domaine de validité. En particulier, est-il possible de quantifier la différence de comportement entre les murs voiles ? D'autre part, même si nous avons fait varier le nombre d'étages, ce modèle n'a été testé que sur un seul type de bâtiment. La modélisation d'autres structures est nécessaire pour s'assurer de sa fiabilité. Par commodité, la précision des modèles continus a été évaluée en comparant les résultats avec ceux d'un calcul par éléments finis. Mais, une fois que la technique de modélisation sera bien au point, l'objectif final est de les utiliser pour interpréter les données expérimentales.

Celles-ci montrent que des phénomènes tels que l'interaction sol-structure ou la torsion jouent un rôle important sur la réponse dynamique des bâtiments. Les effets de l'interaction sol-structure peuvent être étudiés en remplaçant l'encastrement à la base des modèles continus par un sol plus souple. Pour modéliser la torsion, il est parfaitement possible d'appliquer la méthode HMPD sur des structures tridimensionnelles. Les couplages qui apparaissent entre les différentes directions dans les structures dissymétriques peuvent également représenter une autre piste de recherche.

En ce qui concerne les structures symétriques, les modèles continus actuels fournissent les fréquences propres et les déformées modales. La réalisation d'un diagnostic de vulnérabilité sismique nécessite en plus le calcul des contraintes ou des déformations dans les éléments. Ce retour à l'échelle locale est possible avec la méthode HMPD, car le comportement des poutres qui constituent les portiques est complètement déterminé par le mouvement des nœuds. Par contre, lors de la transposition des modèles à des structures plus complexes, le lien entre les variables cinématiques et les déformations locales est perdu. Néanmoins, le modèle éléments finis d'un étage qui sert à calculer la rigidité du cisaillement de la cellule peut être utilisé comme une carte des déformations dues à ce mécanisme. Tant que la structure reste dans le domaine linéaire, il est possible de combiner les déformations générées par les différents mécanismes pour obtenir la déformation totale des éléments. La seule difficulté est que tous les mécanismes ne sont pas associés de la même façon.

Conclusion générale

Cette thèse a permis d'améliorer la compréhension du comportement dynamique d'une famille de structures creuses périodiques. La stratégie adoptée a consisté à appliquer la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques discrets (HMPD) sur quelques structures constituées par la répétition d'un portique non contreventé. Bien que la cellule de base soit très simple, il est possible de générer une grande variété de comportements en ne jouant que sur les épaisseurs des éléments.

Tout au long de ce travail, la méthode HMPD s'est révélée être un outil très efficace et nous rappelons ici ses principaux avantages. Le premier est que le milieu continu équivalent à l'échelle macroscopique est construit de façon rigoureuse à partir des propriétés de la cellule de base. La seule hypothèse *a priori* est que la condition de séparation d'échelles est respectée. Le deuxième avantage est que cette méthode est entièrement analytique. De plus, il est toujours possible de revenir à l'échelle locale pour étudier le comportement des éléments. Cela permet d'avoir une compréhension fine des phénomènes et d'identifier les paramètres clés qui pilotent la dynamique de la structure. Enfin, les équations d'équilibre aux différents ordres sont obtenues relativement facilement. Cette dernière propriété est particulièrement intéressante pour les structures considérées ici, car leur rigidité en cisaillement est beaucoup plus petite que leur rigidité en traction-compression.

Un des apports de cette thèse est d'avoir étendu le domaine d'application de la méthode HMPD à des fréquences plus élevées pour lesquelles les éléments peuvent entrer en résonance. Les résultats obtenus s'articulent autour de trois grands thèmes : les différents types de comportements possibles, les effets de la résonance interne et la transposition des modèles à d'autres types de structures.

La méthode HMPD a été appliquée sur deux types de structures réticulées. Dans les premières, la cellule de base est répétée de façon périodique selon deux directions. Le milieu continu équivalent à l'échelle macroscopique peut être soit un milieu habituel, soit un milieu généralisé. Pour ce dernier, le degré de liberté supplémentaire correspond à la déformation des éléments en flexion à l'échelle de la structure. La nature du milieu continu équivalent dépend du contraste de rigidité entre les murs et les planchers et elle peut changer avec la fréquence. Dans tous les cas, le milieu est fortement anisotrope car les éléments résistants ne sont orientés que selon deux directions.

Ces structures possèdent des propriétés de filtre spatial et fréquentiel qui ont été mises en évidence lors de l'étude de la propagation des ondes planes dans le milieu continu équivalent. Nous avons alors constaté que les ondes macroscopiques peuvent être générées par trois mécanismes : le cisaillement de la cellule, la propagation d'ondes de flexion dans les éléments et la propagation d'ondes de traction-compression dans les éléments. L'existence des ondes de flexion n'est possible que dans les milieux généralisés et il s'agit d'un mode de propagation dispersif. Comme les trois mécanismes ont des rigidités d'ordre différent, ils n'apparaissent pas dans la même gamme de fréquences. En particulier, les ondes de traction-compression peuvent coïncider avec la résonance des éléments en flexion. Les conséquences de ce phénomène sont reprises dans le paragraphe suivant. Les ondes sont également canalisées par les éléments dont les axes constituent des directions de propagation et de polarisation privilégiées.

Dans le deuxième type de structures, la cellule de base n'est répétée que selon une seule direction. La mise en œuvre de la méthode HMPD permet alors de construire une poutre équivalente dont nous avons étudié les modes de vibrations. La disparition de la périodicité dans la direction transversale autorise un nouveau mécanisme : la flexion globale qui correspond à la traction-compression des murs en opposition de phase. Les modes transverses pilotés par la translation avaient déjà été étudiés de façon systématique et nous nous sommes intéressés à d'autres types de vibrations qui se produisent à plus hautes fréquences. Il s'agit des modes de giration (pure ou couplée avec la translation) et des modes longitudinaux. Ces deux sortes de modes apparaissent dans la même gamme de fréquences et ils peuvent être affectés par la résonance interne.

Les simulations numériques par éléments finis montrent qu'il existe d'autres types de vibrations pilotées par la déformation de la cellule, dont les premiers modes sont sûrement homogénéisables. Pour cela, il faudrait encore augmenter la fréquence et considérer que la périodicité des variables cinématiques peut être différente de celle de la structure.

Revenons sur les effets de la résonance interne. Celle-ci est due à la coexistence dans les éléments de deux mécanismes avec des rigidités différentes : la flexion et la traction-compression. Ainsi, il peut arriver que la gamme de fréquences pour laquelle la traction-compression atteint le régime dynamique à l'échelle macroscopique et celle pour laquelle les éléments entrent en résonance en flexion soient identiques. Même s'il existe des similitudes, ce phénomène est différent de la diffraction. En effet, dans le cas de la résonance interne, il existe une longueur d'onde bien plus grande que la taille de la cellule, ce qui permet d'homogénéiser le comportement de la structure.

À cause de la présence d'éléments en résonance, le milieu continu équivalent à l'échelle macroscopique a des propriétés apparentes qui dépendent de la fréquence. Plus précisément, ce phénomène affecte les termes qui agissent comme des sources de forces volumiques. Le premier est le terme résultant du cisaillement car ce mécanisme est généré par la flexion locale des éléments. Le second est la masse qui, en plus, devient matricielle à l'échelle macroscopique. En effet, à l'échelle locale, toute la masse de la cellule n'est plus entraînée dans la même direction et la résultante des forces d'inertie est modifiée. En conséquence, la vitesse des

ondes macroscopiques dépend de la fréquence. En ce qui concerne les modes de vibrations macroscopiques, les fonctions de transfert associées sont atypiques. Dans le domaine temporel, ce type de structure a un comportement à mémoire.

Il existe également des gammes de fréquences, appelées bandes interdites, pour lesquelles les ondes macroscopiques ne peuvent pas se propager et les modes de vibrations macroscopiques ne peuvent pas apparaître. Celles-ci ont trois origines. Au voisinage des fréquences des modes de flexion impairs des éléments en résonance, la masse apparente tend vers l'infini. Dans ce cas, la longueur de pénétration des ondes dans la structure est négligeable. Pour d'autres fréquences, c'est la rigidité apparente en cisaillement qui devient infinie. Cela se produit lorsqu'il existe des incompatibilités entre le fonctionnement des éléments en résonance et, soit l'hypothèse de périodicité des variables cinématiques utilisée pour homogénéiser le comportement de la structure, soit la cinématique du mode considéré. Enfin, pour les structures dont tous les éléments sont similaires, la rigidité apparente de l'ensemble de la cellule peut s'annuler.

Ce travail a aussi fait ressortir certaines limites de la méthode. Lorsque des termes des équations d'équilibre tendent vers l'infini, leur ordre de grandeur n'est plus évalué en fonction des puissances du ratio d'échelles ϵ , alors que la séparation des ordres constitue la base de la méthode. Pour y remédier, il faudrait introduire de l'amortissement dans la structure et le peser par rapport à ϵ . De plus, les effets de la résonance interne ont été étudiés sur des structures dont les éléments étaient modélisés par des poutres d'Euler-Bernoulli. Or, à hautes fréquences, lorsque la longueur de l'onde de flexion dans les éléments est du même ordre que leur épaisseur, le cisaillement devient le mécanisme prépondérant. La modélisation des éléments par des poutres de Timoshenko permettrait peut-être d'augmenter encore la fréquence.

La motivation initiale de cette recherche était la compréhension du comportement dynamique des bâtiments. L'homogénéisation a permis l'identification des mécanismes prépondérants dans les structures creuses et la construction d'une liste de modèles continus pouvant représenter leur comportement. Se pose ensuite la question de la transposition des modèles à des structures plus complexes. Ce travail a été réalisé pour les modes transverses pilotés par la translation, car ils correspondent à la gamme de fréquences excitée par les séismes.

Les études qui ont précédé cette thèse ont montré que, dans les structures constituées de portiques simples, ces modes font intervenir trois mécanismes : le cisaillement de la cellule, la flexion globale et la flexion interne. Selon l'importance relative de ces mécanismes, les vibrations transverses sont décrites par des modèles classiques, comme celui de la poutre d'Euler-Bernoulli, ou plus originaux, comme ceux avec la flexion interne. Lorsque les trois mécanismes ont la même importance, il faut utiliser un modèle générique piloté par une équation différentielle de degré 6. Des critères, basés sur les contrastes de rigidité entre les mécanismes, ont été proposés pour identifier le modèle décrivant correctement le comportement de ces structures avec le minimum de calcul.

Dans cette thèse, la transposition des modèles a été réalisée en deux étapes. Pour commencer, le comportement de structures constituées par l'empilement de doubles portiques a été homogénéisé. Il est décrit par les mêmes modèles que

celui des structures constituées de portiques simples et les critères d'identification restent valables. Nous en avons conclu que ces modèles sont généralisables à des structures portiques quelconques. Leur application nécessite de déterminer les rigidités associées aux trois mécanismes. Pour la flexion globale et la flexion interne, il s'agit de calculs d'inertie élémentaires. Le point délicat est l'évaluation de la rigidité du cisaillement de la cellule. Pour cela, nous avons proposé d'utiliser un modèle éléments finis d'une cellule et de lui imposer des conditions aux limites identifiées par homogénéisation.

La deuxième étape est le passage des structures portiques aux bâtiments. Cela n'est possible que si la structure est périodique en élévation et comporte au moins cinq étages. La difficulté est que les bâtiments contiennent souvent des murs voiles. Dans un premier temps, nous avons vérifié que les méthodes de calcul des rigidités étaient toujours valables. Par contre, lorsque les murs sont trop larges pour pouvoir être modélisés par des poutres d'Euler-Bernoulli à l'échelle de la structure, les modèles développés pour les structures portiques ne sont plus adaptés. Nous avons alors construit, toujours par homogénéisation, un nouveau modèle générique qui tient compte du cisaillement dans les murs. Il a été appliqué sur un bâtiment réel et les résultats sont très encourageants.

L'intérêt de ce type de modélisation pour les bâtiments est double. D'une part, il permet de diminuer considérablement la taille des calculs par rapport à un modèle éléments finis de la structure complète et d'autre part, il permet de comprendre le fonctionnement de la structure. Par la suite, ces modèles pourront servir à interpréter les données expérimentales. Il est également possible de les améliorer en intégrant l'interaction sol-structure ou en homogénéisant des structures tridimensionnelles pour pouvoir étudier la torsion. Enfin, il serait intéressant de recréer un lien entre la déformation de la structure à l'échelle macroscopique et le comportement des éléments à l'échelle locale. Ce passage était possible avec la méthode HMPD mais il a été partiellement perdu lors de la transposition des modèles.

Les bâtiments ne sont pas les seules structures qu'il est possible de modéliser de cette façon. En particulier, les résultats présentés dans ce mémoire s'appliquent aux mousses. Ils peuvent servir de guides pour concevoir puis réaliser des matériaux avec des comportements atypiques. Par exemple, dans cette thèse, les couplages dissymétriques entre les modes de giration et de translation ont d'abord été mis en évidence théoriquement pour certaines valeurs des paramètres macroscopiques. Puis, des structures ont été dimensionnées spécialement afin de confirmer numériquement leur existence. De la même manière, il est possible de construire des matériaux qui se comportent comme des milieux généralisés ou des « métamatériaux » avec résonance interne.

Annexe A

Résolution du modèle générique

A.1 Statique

Dans ce paragraphe, nous calculons la rigidité statique K_{gen} de la poutre générique. Pour cela, nous considérons une poutre bi-encastée de hauteur H et nous appliquons un déplacement différentiel ΔU entre ses deux extrémités (figure A.1). La rigidité \mathcal{K}_{gen} est le coefficient de proportionnalité entre l'effort tranchant total \mathcal{T} et le déplacement ΔU : $\mathcal{T} = -\mathcal{K}_{gen} \Delta U$.

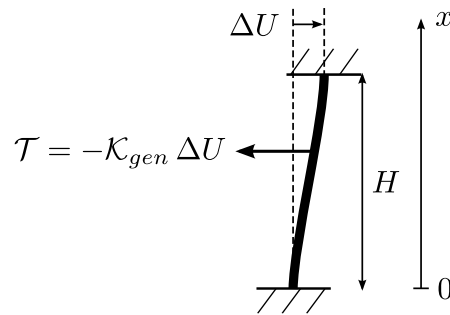


FIGURE A.1 – Calcul de la rigidité totale de la poutre générique

Les données du problème sont présentées ci-dessous. Elles sont constituées du modèle de poutre générique défini page 159 et des conditions aux limites.

Lois de comportement :

$$\begin{aligned} \text{effort tranchant} \quad T &= -K(U' - \alpha) \\ \text{moment global} \quad M &= -E_m I \alpha' \\ \text{moment interne} \quad \mathcal{M} &= -2E_m I_m U'' \end{aligned} \quad (\text{A.1a})$$

Équations d'équilibre :

$$\mathcal{T}' = 0 \quad \mathcal{T} = T - \mathcal{M}' \quad M' = -T \quad (\text{A.1b})$$

Conditions aux limites :

$$\begin{aligned} U(0) &= 0 & U(H) &= \Delta U \\ U'(0) &= 0 & U'(H) &= 0 \\ \alpha(0) &= 0 & \alpha(H) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.1c})$$

En statique, l'effort tranchant total \mathcal{T} est constant sur toute la hauteur de la poutre. Son expression est donnée par la combinaison des équations d'équilibre et des lois de comportement :

$$\mathcal{T} = -M' - \mathcal{M}' = E_m I \alpha'' + 2E_m I_m U'''$$

Nous en déduisons l'expression de U''' puis celle de U' par intégrations successives :

$$\begin{aligned} U''' &= -\frac{1}{\gamma} \alpha'' + t \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{2E_m I_m}{E_m I} \quad \text{et} \quad t = \frac{\mathcal{T}}{2E_m I_m} \\ \Rightarrow U' &= -\frac{1}{\gamma} \alpha + t \frac{x^2}{2} + u x + v \end{aligned}$$

où u et v sont des constantes qui dépendent des conditions aux limites.

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} U'(0) = 0 \\ \alpha(0) = 0 \end{array} \right\} v = 0 \\ \left. \begin{array}{l} U'(H) = 0 \\ \alpha(H) = 0 \end{array} \right\} t \frac{H^2}{2} + uH = 0 \quad \Rightarrow \quad u = -t \frac{H}{2} \end{aligned}$$

Finalement, l'expression de U' est :

$$U' = -\frac{1}{\gamma} \alpha + \frac{t x}{2} (x - H) \quad (\text{A.2})$$

Nous utilisons maintenant l'équation d'équilibre en moment :

$$M' = -T \quad \Rightarrow \quad -E_m I \alpha'' = K (U' - \alpha)$$

En remplaçant U' par l'expression (A.2) et en posant $\mathcal{C} = E_m I / K$, nous obtenons l'équation différentielle vérifiée par α :

$$\mathcal{C} \alpha'' - \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \alpha = \frac{tH}{2} x - \frac{t}{2} x^2 \quad (\text{A.3})$$

La solution générale de l'équation sans second membre est :

$$\alpha(x) = A \operatorname{ch}(r x) + B \operatorname{sh}(r x) \quad \text{avec} \quad r^2 = \frac{1 + \gamma}{\gamma \mathcal{C}} > 0$$

La solution particulière est recherchée sous la forme d'un polynôme de degré 2 :

$$\alpha(x) = \frac{t \gamma}{2(1 + \gamma)} x^2 - \frac{tH \gamma}{2(1 + \gamma)} x + \frac{t \mathcal{C} \gamma^2}{(1 + \gamma)^2}$$

L'expression de α est donc :

$$\alpha(x) = A \operatorname{ch}(r x) + B \operatorname{sh}(r x) + \frac{t \gamma}{2(1 + \gamma)} (x^2 - Hx) + \frac{t \mathcal{C} \gamma^2}{(1 + \gamma)^2}$$

et les constantes A et B sont déterminées grâce aux conditions aux limites :

$$\begin{aligned}\alpha(0) = 0 & \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{t\mathcal{C}\gamma^2}{(1+\gamma)^2} \\ \alpha(H) = 0 & \quad \Rightarrow \quad B = \frac{t\mathcal{C}\gamma^2}{(1+\gamma)^2} \operatorname{th}\left(\frac{rH}{2}\right)\end{aligned}$$

Finalement, la rotation de la section α est donnée par :

$$\alpha(x) = \frac{t\mathcal{C}\gamma^2}{(1+\gamma)^2} \left(1 - \operatorname{ch}(rx) + \operatorname{th}\left(\frac{rH}{2}\right) \operatorname{sh}(rx)\right) + \frac{t\gamma}{2(1+\gamma)} (x^2 - Hx) \quad (\text{A.4})$$

Cette expression est ensuite introduite dans celle de U' (équation (A.2)) et nous déduisons U par intégration :

$$\begin{aligned}U'(x) &= -\frac{t\mathcal{C}\gamma}{(1+\gamma)^2} \left(1 - \operatorname{ch}(rx) + \operatorname{th}\left(\frac{rH}{2}\right) \operatorname{sh}(rx)\right) + \frac{t\gamma}{2(1+\gamma)} (x^2 - Hx) \\ U(x) &= -\frac{t\mathcal{C}\gamma}{(1+\gamma)^2} \left(x - \frac{\operatorname{sh}(rx)}{r} + \operatorname{th}\left(\frac{rH}{2}\right) \frac{\operatorname{ch}(rx)}{r}\right) \\ &\quad + \frac{t\gamma}{2(1+\gamma)} \left(\frac{x^3}{3} - H\frac{x^2}{2}\right) + D\end{aligned}$$

La constante D est déterminée grâce à la condition en $x = 0$:

$$U(0) = -\frac{t\mathcal{C}\gamma}{r(1+\gamma)^2} \operatorname{th}\left(\frac{rH}{2}\right) + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = \frac{t\mathcal{C}\gamma}{r(1+\gamma)^2} \operatorname{th}\left(\frac{rH}{2}\right)$$

Nous reportons cette expression dans celle de $U(H)$:

$$U(H) = -\frac{t\mathcal{C}\gamma}{(1+\gamma)^2} \left(H - \frac{2}{r} \operatorname{th}\left(\frac{rH}{2}\right)\right) - \frac{t\gamma H^3}{12(1+\gamma)} = \Delta U$$

Puis les constantes γ , \mathcal{C} et t sont remplacées par leurs expressions :

$$\Delta U = -\frac{\mathcal{T}H}{K} \left(\frac{E_m I}{2E_m I_m + E_m \bar{I}}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{rH} \operatorname{th}\left(\frac{rH}{2}\right)\right) - \frac{\mathcal{T}H^3}{24E_m I_m + 12E_m \bar{I}}$$

Finalement, nous en déduisons la rigidité de la poutre :

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{gen} &= -\frac{\mathcal{T}}{\Delta U} = \frac{1}{\frac{H}{K} \left(\frac{E_m I}{2E_m I_m + E_m \bar{I}}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{rH} \operatorname{th}\left(\frac{rH}{2}\right)\right) - \frac{H^3}{24E_m I_m + 12E_m \bar{I}}} \\ &\quad \text{avec} \quad r^2 = \frac{K}{E_m I} + \frac{K}{2E_m I_m}\end{aligned}$$

A.2 Dynamique

Nous nous intéressons maintenant au calcul des fréquences propres d'une poutre générique de hauteur H encadrée à la base et libre en tête (figure A.2).

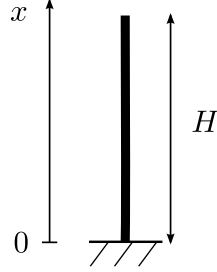


FIGURE A.2 – Calcul des fréquences propres d'une poutre générique

Les données du problème sont constituées du modèle de poutre générique en dynamique et des nouvelles conditions aux limites :

Lois de comportement :

$$\begin{aligned} \text{effort tranchant} \quad T &= -K(U' - \alpha) \\ \text{moment global} \quad M &= -E_m I \alpha' \\ \text{moment interne} \quad \mathcal{M} &= -2E_m I_m U'' \end{aligned} \quad (\text{A.5a})$$

Équations d'équilibre :

$$\mathcal{T}' = \Lambda \omega^2 U \quad \mathcal{T} = T - \mathcal{M}' \quad M' = -T \quad (\text{A.5b})$$

Conditions aux limites :

$$\begin{aligned} U(0) &= 0 & \mathcal{T}(H) &= 0 \\ U'(0) &= 0 & \mathcal{M}(H) &= 0 \\ \alpha(0) &= 0 & M(H) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.5c})$$

L'introduction des lois de comportement dans l'équation d'équilibre d'effort tranchant total donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}' = T' - \mathcal{M}'' &= -K(U'' - \alpha') + 2E_m I_m U^{(4)} = \Lambda \omega^2 U \\ \Rightarrow \quad \alpha' &= U'' + \frac{1}{K} (\Lambda \omega^2 U - 2E_m I_m U^{(4)}) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Pour obtenir l'équation différentielle décrivant les vibrations de la poutre, il faut ensuite remplacer α' par son expression en fonction de U dans la dérivée de l'équation d'équilibre des moments :

$$\begin{aligned} M'' = -T' &\quad \Rightarrow \quad K(U'' - \alpha') + E_m I \alpha''' = 0 \\ \Rightarrow \quad \frac{2E_m I_m E_m I}{K} U^{(6)} - (2E_m I_m + E_m I) U^{(4)} - \frac{E_m I \Lambda \omega^2}{K} U'' + \Lambda \omega^2 U &= 0 \end{aligned}$$

Le calcul des fréquences propres est mené à partir de l'équation (3.10) obtenue après le changement de variable $\hat{x} = x/L$:

$$C\gamma U^{*(6)} - (1 + \gamma)U^{*(4)} - \Omega^2 U^{*''} + \frac{\Omega^2}{C} U^* = 0$$

où $C = \frac{E_m I}{KL^2}$ $\gamma = \frac{2E_m I_m}{E_m I} = \frac{2I_m}{I}$ $\Omega^2 = \frac{\Lambda\omega^2 L^2}{K}$

Les solutions sont cherchées sous forme exponentielle : $U^*(\hat{x}) = \exp(b\hat{x})$. Nous devons donc résoudre une équation de degré 3 en B où $B = b^2$:

$$C\gamma B^3 - (1 + \gamma)B^2 - \Omega^2 B + \frac{\Omega^2}{C} = 0 \quad (\text{A.7})$$

Pour cela, nous utilisons la méthode de Cardan. Le changement de variable $\hat{B} = B - (1 + \gamma)/(3C\gamma)$ permet de se ramener à la forme :

$$\hat{B}^3 + p\hat{B} = q \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p = -\left(\frac{(1 + \gamma)^2}{3C^2\gamma^2} + \frac{\Omega^2}{C\gamma}\right) \\ q = \frac{2(1 + \gamma)^3}{27C^3\gamma^3} - \frac{\Omega^2}{C^2\gamma} \left(1 - \frac{1 + \gamma}{3\gamma}\right) \end{cases}$$

La nature des solutions dépend du signe du discriminant :

$$\Delta = q^2 + \frac{4}{27}p^3 = \frac{-4(1 + \gamma)^3\Omega^2 + C\Omega^4(-1 - 20\gamma + 8\gamma^2) - 4C^2\gamma\Omega^6}{27C^5\gamma^4}$$

C et γ étant des constantes positives, Δ a le même signe que le numérateur qui est un polynôme de degré 2 en C :

$$N(C) = -4(1 + \gamma)^3\Omega^2 + C\Omega^4(-1 - 20\gamma + 8\gamma^2) - 4C^2\gamma\Omega^6$$

$N(C)$ est une parabole qui tend vers $-\infty$ lorsque C tend vers $\pm\infty$ et dont le sommet correspond à :

$$N'(C) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = C_0 = \frac{8\gamma^2 - 20\gamma - 1}{8\gamma\Omega^2}$$

Étudions le signe de C_0 . Le dénominateur est positif et le numérateur est un polynôme de degré 2 en γ dont les racines sont :

$$\gamma_- = \frac{5 - \sqrt{27}}{4} \approx -0,2 \quad \gamma_+ = \frac{5 + \sqrt{27}}{4} \approx 2,55$$

Or, γ est une constante comprise entre 0 et 1 donc nous avons $\gamma_- < \gamma < \gamma_+$ et C_0 est toujours négatif. De plus, C étant une constante positive, nous n'avons besoin du signe de $N(C)$ que pour $C \in [0; +\infty[$. Sur cet intervalle, N est une fonction décroissante et son maximum est :

$$N(0) = -4\Omega^2(1 + \gamma)^3 < 0$$

Donc $N(C)$ et le discriminant Δ sont négatifs pour les valeurs admissibles des paramètres C et γ . Cela signifie que l'équation (A.7) possède trois solutions réelles, notées B_1 , B_2 et B_3 :

$$\begin{aligned} B_1 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{q}{2} \sqrt{-\frac{27}{p^3}} \right) + \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{1+\gamma}{3C\gamma} \\ B_2 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{q}{2} \sqrt{-\frac{27}{p^3}} \right) + \frac{4\pi}{3} \right) + \frac{1+\gamma}{3C\gamma} \\ B_3 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{q}{2} \sqrt{-\frac{27}{p^3}} \right) \right) + \frac{1+\gamma}{3C\gamma} \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{q}{2} \sqrt{-\frac{27}{p^3}} \right) \in [0; \pi/3]$, nous avons $B_1 < B_2 < B_3$. De plus, les solutions de l'équation (A.7) vérifient les relations suivantes :

$$B_1 + B_2 + B_3 = \frac{1+\gamma}{C\gamma} > 0 \quad \text{et} \quad B_1 B_2 B_3 = -\frac{\Omega^2}{C^2\gamma} < 0$$

Il y a donc une racine négative, B_1 , et deux racines positives, B_2 et B_3 . Nous posons :

$$b_1 = \sqrt{-B_1} \quad , \quad b_2 = \sqrt{B_2} \quad , \quad b_3 = \sqrt{B_3}$$

En conséquence, le déplacement transversal U^* est de la forme :

$$U^*(\hat{x}) = r \cos(b_1 \hat{x}) + s \sin(b_1 \hat{x}) + t \operatorname{ch}(b_2 \hat{x}) + u \operatorname{sh}(b_2 \hat{x}) + v \operatorname{ch}(b_3 \hat{x}) + w \operatorname{sh}(b_3 \hat{x}) \quad (\text{A.8})$$

où les constantes r , s , t , u , v et w dépendent des conditions aux limites.

Nous recherchons maintenant les expressions des conditions aux limites en fonction de U^* . Pour trouver α , nous introduisons l'expression de α' (équation (A.6)) dans l'équation d'équilibre des moments :

$$\begin{aligned} M' = -T &\quad \Rightarrow \quad K(U' - \alpha) + E_m I \alpha'' = 0 \\ \Rightarrow \quad \alpha = U' + \frac{E_m I}{K} \alpha'' &= \left(1 + \frac{E_m I}{K^2} \Lambda \omega^2 \right) U' + \frac{E_m I}{K} U^{(3)} - \frac{2E_m I_m E_m I}{K^2} U^{(5)} \end{aligned}$$

Puis nous réalisons le changement de variable $\hat{x} = x/L$:

$$\alpha^* = \frac{1}{L} \left((1 + C\Omega^2) U^{*'} + C U^{*(3)} - C^2 \gamma U^{*(5)} \right)$$

L'effort tranchant total est donné par l'expression suivante :

$$\mathcal{T} = -K(U' - \alpha) + 2E_m I_m U^{(3)}$$

dans laquelle nous introduisons l'expression de α et le changement de variable :

$$\mathcal{T}^* = K\alpha^* + \frac{K}{L} \left(-U^{*'} + C\gamma U^{*(3)} \right) = \frac{K}{L} \left(C\Omega^2 U^{*'} + C(1+\gamma) U^{*(3)} - C^2 \gamma U^{*(5)} \right)$$

En procédant de même pour les moments, nous obtenons :

$$M^* = -\frac{E_m I}{L} \alpha^{*'} = -\frac{E_m I}{L^2} \left((1 + C\Omega^2) U^{*''} + C U^{*(4)} - C^2 \gamma U^{*(6)} \right)$$

$$\mathcal{M}^* = -\frac{2E_m I_m}{L^2} U^{*''}$$

Pour simplifier le système d'équations correspondant aux conditions aux limites, nous utilisons les relations suivantes entre les racines de l'équation (A.7) :

$$B_1 + B_2 + B_3 = \frac{1 + \gamma}{C\gamma}$$

$$\left. \begin{aligned} B_1 B_2 + B_1 B_3 + B_2 B_3 &= -\frac{\Omega^2}{C\gamma} \\ B_1 B_2 B_3 &= -\frac{\Omega^2}{C^2 \gamma} \end{aligned} \right\} \Rightarrow C = \frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} + \frac{1}{B_3} \quad (\text{A.9})$$

Les trois conditions aux limites en $x = 0$ donnent le système suivant :

$$\begin{cases} U(0) = 0 \\ U'(0) = 0 \\ \alpha(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U^*(0) = 0 \\ U^{*'}(0) = 0 \\ \alpha^*(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r + t + v = 0 \\ sb_1 + ub_2 + wb_3 = 0 \\ \frac{1}{L} \left((1 + C\Omega^2)(sb_1 + ub_2 + wb_3) + C(-sb_1^3 + ub_2^3 + wb_3^3) \right. \\ \left. - C^2 \gamma (sb_1^5 + ub_2^5 + wb_3^5) \right) = 0 \end{cases}$$

Nous en déduisons :

$$r = -t - v \quad , \quad u = -s \frac{b_2 B_2 (B_3^2 - B_1^2)}{b_1 B_1 (B_2^2 - B_3^2)} \quad , \quad w = s \frac{b_3 B_3 (B_2^2 - B_1^2)}{b_1 B_1 (B_2^2 - B_3^2)}$$

Les conditions aux limites en $x = H$ s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathcal{T}(H) = 0 \\ \mathcal{M}(H) = 0 \\ M(H) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{L}{K} \mathcal{T}^* \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0 & (CL1) \\ -\frac{L^2}{2E_m I_m} \mathcal{M}^* \left(\frac{\pi}{2} \right) = U^{*''} \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0 & (CL2) \\ -\frac{L}{E_m I} M^* \left(\frac{\pi}{2} \right) = \alpha^{*'} \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0 & (CL3) \end{cases}$$

Après introduction des expressions de r , u et w et simplification grâce aux relations (A.9), nous obtenons :

$$t \left(\frac{\text{sh}(\pi b_2/2)}{b_2} - \frac{\sin(\pi b_1/2)}{b_1} \right) + v \left(\frac{\text{sh}(\pi b_3/2)}{b_3} - \frac{\sin(\pi b_1/2)}{b_1} \right)$$

$$+ s \left(-\frac{\cos(\pi b_1/2)}{b_1} + \text{ch} \left(\frac{\pi b_2}{2} \right) \frac{B_2 (B_1^2 - B_3^2)}{b_1 B_1 (B_2^2 - B_3^2)} + \text{ch} \left(\frac{\pi b_3}{2} \right) \frac{B_3 (B_2^2 - B_1^2)}{b_1 B_1 (B_2^2 - B_3^2)} \right) = 0 \quad (CL1)$$

$$\begin{aligned}
 & t \left(B_2 \operatorname{ch} \left(\frac{\pi b_2}{2} \right) - B_1 \cos \left(\frac{\pi b_1}{2} \right) \right) + v \left(B_3 \operatorname{ch} \left(\frac{\pi b_3}{2} \right) - B_1 \cos \left(\frac{\pi b_1}{2} \right) \right) \\
 & + s \left(B_1 \sin \left(\frac{\pi b_1}{2} \right) + \operatorname{sh} \left(\frac{\pi b_2}{2} \right) \frac{b_2 B_2^2 (B_1^2 - B_3^2)}{b_1 B_1 (B_2^2 - B_3^2)} + \operatorname{sh} \left(\frac{\pi b_3}{2} \right) \frac{b_3 B_3^2 (B_2^2 - B_1^2)}{b_1 B_1 (B_2^2 - B_3^2)} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{CL2}$$

$$\begin{aligned}
 & t \left(\operatorname{ch} \left(\frac{\pi b_2}{2} \right) (B_2 + C B_1 B_3) - \cos \left(\frac{\pi b_1}{2} \right) (B_1 + C B_2 B_3) \right) \\
 & \quad + v \left(\operatorname{ch} \left(\frac{\pi b_3}{2} \right) (B_3 + C B_1 B_2) - \cos \left(\frac{\pi b_1}{2} \right) (B_1 + C B_2 B_3) \right) \\
 & + s \left(\sin \left(\frac{\pi b_1}{2} \right) (B_1 + C B_2 B_3) + \operatorname{sh} \left(\frac{\pi b_2}{2} \right) \frac{b_2 B_2 (B_1^2 - B_3^2)}{b_1 B_1 (B_2^2 - B_3^2)} (B_2 + C B_1 B_3) \right. \\
 & \quad \left. - \operatorname{sh} \left(\frac{\pi b_3}{2} \right) \frac{b_3 B_3 (B_1^2 - B_2^2)}{b_1 B_1 (B_2^2 - B_3^2)} (B_3 + C B_1 B_2) \right) = 0
 \end{aligned} \tag{CL3}$$

Pour que ce système admette une solution non triviale, il faut que son déterminant soit nul. Après développement de ce dernier, nous obtenons l'équation aux fréquences propres donnée ci-dessous. Elle a été simplifiée par $C \operatorname{ch}(\pi b_2/2) \operatorname{ch}(\pi b_3/2)$ afin de manipuler des nombres moins grands et éviter les problèmes numériques.

$$\begin{aligned}
 & \cos \left(\frac{\pi b_1}{2} \right) (B_1^2 - B_2^2)(B_1^2 - B_3^2) \left(\frac{2B_2 B_3}{\operatorname{ch}(\pi b_2/2) \operatorname{ch}(\pi b_3/2)} \right. \\
 & \quad \left. + \operatorname{th} \left(\frac{\pi b_2}{2} \right) \operatorname{th} \left(\frac{\pi b_3}{2} \right) b_2 b_3 (B_2 + B_3) \right) \\
 & + (B_2^2 - B_1^2)(B_2^2 - B_3^2) \left(\frac{2B_1 B_3}{\operatorname{ch}(\pi b_3/2)} - \sin \left(\frac{\pi b_1}{2} \right) \operatorname{th} \left(\frac{\pi b_3}{2} \right) b_1 b_3 (B_1 + B_3) \right) \\
 & + (B_3^2 - B_1^2)(B_3^2 - B_2^2) \left(\frac{2B_1 B_2}{\operatorname{ch}(\pi b_2/2)} - \sin \left(\frac{\pi b_1}{2} \right) \operatorname{th} \left(\frac{\pi b_2}{2} \right) b_1 b_2 (B_1 + B_2) \right) \\
 & - \cos \left(\frac{\pi b_1}{2} \right) \left(B_1^2 (B_2^2 - B_3^2)^2 + B_3^2 (B_2^2 - B_1^2)^2 + B_2^2 (B_1^2 - B_3^2)^2 \right) = 0
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

Annexe B

Étude des structures constituées de doubles portiques

Pour obtenir les résultats sur les structures constituées de doubles portiques qui ont été présentés dans la partie 3.2.3, nous avons appliqué la méthode HMPD sur huit structures. Dans cette annexe, nous donnons les équations d'équilibre et nous construisons le modèle de poutre équivalent à l'échelle macroscopique pour deux des structures. Pour la première, tous les éléments ont des épaisseurs similaires. Pour la seconde, les trois mécanismes (cisaillement de la cellule, flexion globale et flexion interne) ont la même importance. Puis, nous donnons la liste des huit cas étudiés en indiquant à chaque fois l'équation qui décrit les modes transverses.

Pour cela, nous reprenons les notations introduites dans la partie 3.2.3. Les variables et les équations sont définies page 174 et les paramètres macroscopiques page 176. Les vibrations transversales sont décrites par les cinq variables U , α , δ , Θ , θ et par les cinq équations (T_t) , (T_r) , (M) , (\mathcal{M}_t) , (\mathcal{M}_r) .

B.1 Poutre de Timoshenko élancée

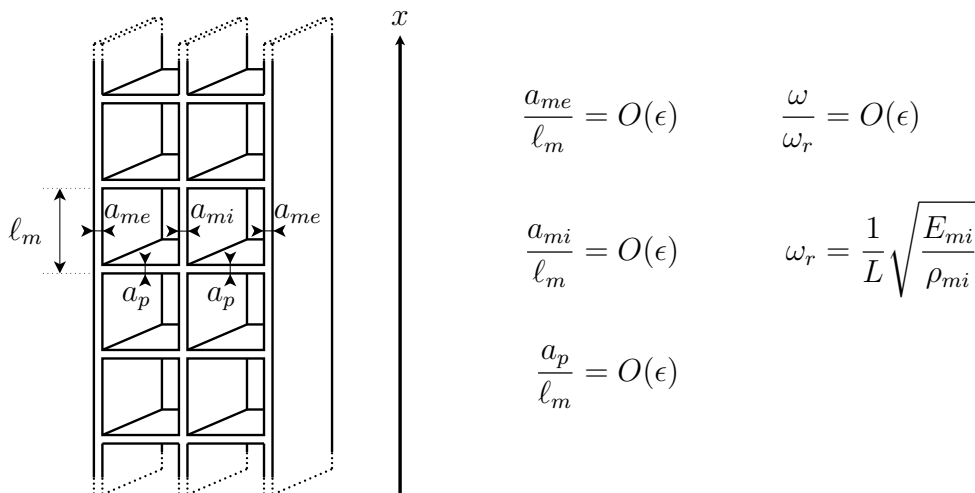


FIGURE B.1 – Structure étudiée

La structure étudiée est présentée sur la figure B.1. Tous les éléments ont la même épaisseur d'ordre $O(\epsilon \ell_m)$ et les vibrations transversales apparaissent pour des pulsations d'ordre $O(\epsilon \omega_r)$. Les équations d'équilibre fournies par la méthode HMPD sont données ci-dessous. Dans ce cas, les équations d'ordre 0 sont suffisantes pour construire le modèle de poutre équivalent à l'échelle macroscopique. Elles ont été simplifiées en utilisant $\tilde{\delta}^0 = 0$. Par contre, le premier ordre non nul du déplacement relatif $\tilde{\delta}^4$ du nœud du milieu est déterminé grâce à l'équation ($T_r 4$).

$$K_{me} \left(\tilde{U}^{0''} - \tilde{\Theta}^{0'} \right) + K_{mi} \left(\tilde{U}^{0''} - \tilde{\theta}^{0'} \right) + \Lambda \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^0 = 0 \quad (T_t 0)$$

$$K_p \left(2\tilde{\alpha}^0 - \tilde{\Theta}^0 - \tilde{\theta}^0 \right) - E_{me} I \tilde{\alpha}^{0''} = 0 \quad (M 0)$$

$$K_p \left(2\tilde{\alpha}^0 - \tilde{\Theta}^0 - \tilde{\theta}^0 \right) + K_{me} \left(\tilde{U}^{0'} - \tilde{\Theta}^0 \right) + K_{mi} \left(\tilde{U}^{0'} - \tilde{\theta}^0 \right) = 0 \quad (\mathcal{M}_t 0)$$

$$K_p \left(\tilde{\alpha}^0 - \tilde{\theta}^0 \right) - K_{me} \left(\tilde{U}^{0'} - \tilde{\Theta}^0 \right) + 2K_{mi} \left(\tilde{U}^{0'} - \tilde{\theta}^0 \right) = 0 \quad (\mathcal{M}_r 0)$$

$$6 \frac{E_p A_p}{\ell_m \ell_p} \tilde{\delta}^4 + K_{me} \left(\tilde{U}^{0''} - \tilde{\Theta}^{0'} \right) - 2K_{mi} \left(\tilde{U}^{0''} - \tilde{\theta}^{0'} \right) + \left(\Lambda_{me} - 2\Lambda_{mi} - \frac{\Lambda_p}{2} \right) \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^0 = 0 \quad (T_r 4)$$

Les équations ($\mathcal{M}_t 0$) et ($\mathcal{M}_r 0$) permettent d'exprimer les rotations des nœuds $\tilde{\Theta}^0$ et $\tilde{\theta}^0$ en fonction des variables $\tilde{\alpha}^0$ et $\tilde{U}^{0'}$:

$$\tilde{\Theta}^0 = \frac{K_p (K_p + 3 K_{mi}) \tilde{\alpha}^0 + \left(K_p (2 K_{me} - K_{mi}) + 3 K_{me} K_{mi} \right) \tilde{U}^{0'}}{K_p^2 + 2 K_p (K_{me} + K_{mi}) + 3 K_{me} K_{mi}}$$

$$\tilde{\theta}^0 = \frac{K_p (K_p + 3 K_{me}) \tilde{\alpha}^0 + \left(K_p (2 K_{mi} - K_{me}) + 3 K_{me} K_{mi} \right) \tilde{U}^{0'}}{K_p^2 + 2 K_p (K_{me} + K_{mi}) + 3 K_{me} K_{mi}}$$

L'introduction de ces expressions dans les équations ($T_t 0$) et ($M 0$) donne le système suivant :

$$\begin{cases} K \left(\tilde{U}^{0''} - \tilde{\alpha}^{0'} \right) + \Lambda \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^0 = 0 \\ K \left(\tilde{U}^{0'} - \tilde{\alpha}^0 \right) + E_{me} I \tilde{\alpha}^{0''} = 0 \end{cases} \quad (B.1)$$

$$\text{où } K = \frac{K_p \left(K_p (K_{me} + K_{mi}) + 6 K_{me} K_{mi} \right)}{K_p^2 + 2 K_p (K_{me} + K_{mi}) + 3 K_{me} K_{mi}} \quad (B.2)$$

Avec les lois de comportement définies ci-dessous, ce système correspond aux équations d'équilibre de la poutre de Timoshenko élançée. \tilde{T}^0 représente l'effort tranchant et \tilde{M}^0 le moment global.

$$\begin{aligned} \tilde{T}^0 &= -K \left(\tilde{U}^{0'} - \tilde{\alpha}^0 \right) & \tilde{M}^0 &= -E_{me} I \tilde{\alpha}^{0'} \\ (B.1) \quad \Leftrightarrow & \begin{cases} \tilde{T}^{0'} = \Lambda \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^0 \\ \tilde{M}^{0'} = -\tilde{T}^0 \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement, la combinaison des deux équations du système (B.1) donne l'expression de la rotation $\tilde{\alpha}^0$ des niveaux et l'équation (B.3) décrivant les modes transverses de la poutre de Timoshenko élançée.

$$\begin{aligned}
 \tilde{\alpha}^0 &= \tilde{U}^{0'} + \frac{E_{me}I}{K} \left(\tilde{U}^{0''''} + \frac{\Lambda \tilde{\omega}_0^2}{K} \tilde{U}^{0'} \right) \\
 E_{me}I \left(\tilde{U}^{0(4)} + \frac{\Lambda \tilde{\omega}_0^2}{K} \tilde{U}^{0''} \right) - \Lambda \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^0 &= 0
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

$\tilde{U}^{0(4)}$ désigne la dérivée quatrième de \tilde{U}^0 .

B.2 Double flexion et cisaillement

Nous présentons maintenant les résultats obtenus pour une structure dont les trois murs ont des épaisseurs similaires mais dont les planchers sont plus fins. La géométrie exacte est indiquée sur la figure B.2. Dans ce cas, les modes transverses apparaissent pour des pulsations d'ordre $O(\epsilon \omega_r)$.

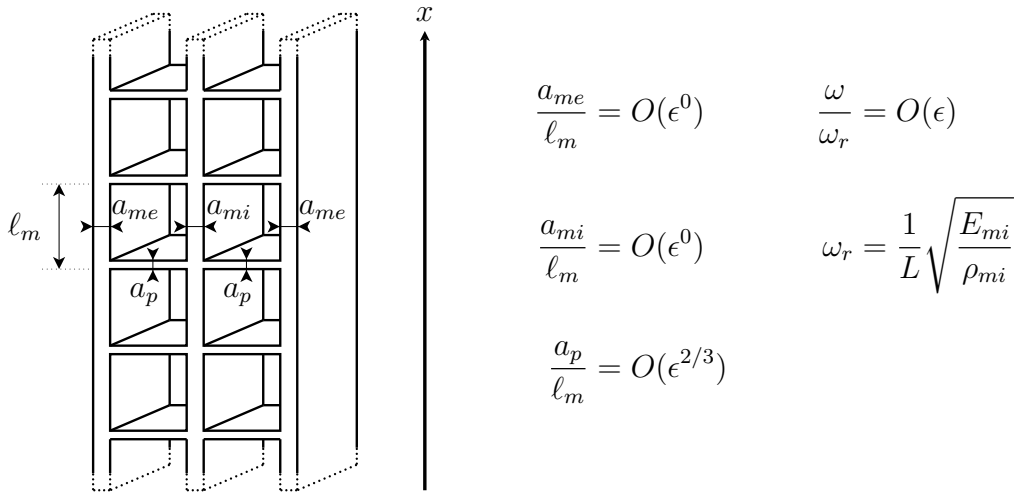


FIGURE B.2 – Structure étudiée

Les équations d'équilibre fournies par la méthode HMPD sont données ci-dessous. Les équations d'ordre intermédiaire ne sont pas écrites car elles ont la même forme que les équations d'ordre 0. De plus, nous avons utilisé le fait que le déplacement relatif δ du nœud du milieu est nul jusqu'à l'ordre 3 inclus.

$$\begin{cases}
 K_{me} \left(\tilde{U}^{0''} - \tilde{\Theta}^{0'} \right) + K_{mi} \left(\tilde{U}^{0''} - \tilde{\theta}^{0'} \right) = 0 & (T_t 0) \\
 K_{me} \left(\tilde{U}^{2''} - \tilde{\Theta}^{2'} \right) + K_{mi} \left(\tilde{U}^{2''} - \tilde{\theta}^{2'} \right) + 2 E_{me} I_{me} \left(\tilde{U}^{0(4)} - 2 \tilde{\Theta}^{0(3)} \right) \\
 \quad + E_{mi} I_{mi} \left(\tilde{U}^{0(4)} - 2 \tilde{\theta}^{0(3)} \right) + \Lambda_m \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^0 = 0 & (T_t 2) \\
 K_p \left(2 \tilde{\alpha}^0 - \tilde{\Theta}^0 - \tilde{\theta}^0 \right) - E_{me} I \tilde{\alpha}^{0''} = 0 & (M 0)
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 K_{me} (\tilde{U}^{0'} - \tilde{\Theta}^0) + K_{mi} (\tilde{U}^{0'} - \tilde{\theta}^0) = 0 & (\mathcal{M}_t 0) \\
 K_{me} (\tilde{U}^{2'} - \tilde{\Theta}^2) + K_{mi} (\tilde{U}^{2'} - \tilde{\theta}^2) + K_p (2\tilde{\alpha}^0 - \tilde{\Theta}^0 - \tilde{\theta}^0) \\
 + 4 E_{me} I_{me} (\tilde{U}^{0(3)} - \tilde{\Theta}^{0''}) + 2 E_{mi} I_{mi} (\tilde{U}^{0(3)} - \tilde{\theta}^{0''}) = 0 & (\mathcal{M}_t 2) \\
 -K_{me} (\tilde{U}^{0'} - \tilde{\Theta}^0) + 2K_{mi} (\tilde{U}^{0'} - \tilde{\theta}^0) = 0 & (\mathcal{M}_r 0) \\
 -K_{me} (\tilde{U}^{2'} - \tilde{\Theta}^2) + 2K_{mi} (\tilde{U}^{2'} - \tilde{\theta}^2) + K_p (\tilde{\alpha}^0 - \tilde{\theta}^0) \\
 - 4 E_{me} I_{me} (\tilde{U}^{0(3)} - \tilde{\Theta}^{0''}) + 4 E_{mi} I_{mi} (\tilde{U}^{0(3)} - \tilde{\theta}^{0''}) = 0 & (\mathcal{M}_r 2) \\
 6 \frac{E_p A_p}{\ell_m \ell_p} \tilde{\delta}^{10/3} + K_{me} (\tilde{U}^{2''} - \tilde{\Theta}^{2'}) - 2K_{mi} (\tilde{U}^{2''} - \tilde{\theta}^{2'}) \\
 + E_{me} I_{me} (\tilde{U}^{0(4)} - 2\tilde{\Theta}^{0(3)}) - E_{mi} I_{mi} (\tilde{U}^{0(4)} - 2\tilde{\theta}^{0(3)}) & (T_r \frac{10}{3}) \\
 + (\Lambda_{me} - 2\Lambda_{mi}) \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^0 = 0
 \end{cases}$$

La somme des équations $(\mathcal{M}_t 0)$ et $(\mathcal{M}_r 0)$ permet de montrer que $\tilde{\Theta}^0 = \tilde{\theta}^0 = \tilde{U}^{0'}$. Ce résultat est ensuite introduit dans les équations $(\mathcal{M}_t 2)$ et $(\mathcal{M}_r 2)$. Nous en déduisons :

$$K_{me} (\tilde{U}^{2'} - \tilde{\Theta}^2) = K_{mi} (\tilde{U}^{2'} - \tilde{\theta}^2) = K_p (\tilde{U}^{0'} - \tilde{\alpha}^0)$$

Ainsi, l'équation $(T_t 2)$ devient :

$$\Lambda_m \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^0 + 2K_p (\tilde{U}^{0''} - \tilde{\alpha}^{0'}) - (2 E_{me} I_{me} + E_{mi} I_{mi}) \tilde{U}^{0(4)} = 0 \quad (\text{B.4})$$

Cela permet de calculer $\tilde{\alpha}^{0'}$ et son expression est introduite dans la dérivée de l'équation $(M 0)$. Nous obtenons alors l'équation différentielle de degré 6 qui décrit les modes transverses de la structure.

$$\begin{aligned}
 \frac{E_{me} I}{2K_p} (2 E_{me} I_{me} + E_{mi} I_{mi}) \tilde{U}^{0(6)} - (E_{me} I + 2 E_{me} I_{me} + E_{mi} I_{mi}) \tilde{U}^{0(4)} \\
 - \frac{E_{me} I \Lambda_m \tilde{\omega}_0^2}{2K_p} \tilde{U}^{0''} + \Lambda_m \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^0 = 0
 \end{aligned}$$

L'équation $(M 0)$ permet également d'exprimer la rotation $\tilde{\alpha}^0$ en fonction des dérivées de \tilde{U}^0 :

$$\tilde{\alpha}^0 = \tilde{U}^{0'} + \frac{E_{me} I}{2K_p} \left(\tilde{U}^{0(3)} + \frac{1}{2K_p} \left(\Lambda_m \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^{0'} - (2 E_{me} I_{me} + E_{mi} I_{mi}) \tilde{U}^{0(5)} \right) \right)$$

Pour construire le modèle de poutre équivalent à l'échelle macroscopique, nous définissons trois efforts : un effort tranchant \tilde{T}^0 généré par le cisaillement de la cellule, un moment global \tilde{M}^0 et un moment interne $\tilde{\mathcal{M}}^0$. Les lois de comportement sont données ci-dessous :

$$\tilde{T}^0 = -2K_p (\tilde{U}^{0'} - \tilde{\alpha}^0) , \quad \tilde{M}^0 = -E_{me} I \tilde{\alpha}^{0'} , \quad \tilde{\mathcal{M}}^0 = -(2E_{me} I_{me} + E_{mi} I_{mi}) \tilde{U}^{0''}$$

Alors, les équations $(T_t 2)$ et $(M 0)$ correspondent aux équations d'équilibre de la poutre équivalente :

$$\Lambda_m \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^0 = \left(\tilde{T}^0 - \tilde{\mathcal{M}}^{0'} \right)' \quad \text{et} \quad \tilde{M}^{0'} = -\tilde{T}^0$$

Notons que lorsque les planchers sont plus fins que les murs, la rigidité du cisaillement K , dont l'expression complète est donnée par l'équation (B.2), dégénère bien en $2K_p$.

B.3 Liste des structures étudiées

Les tableaux B.1 et B.2 contiennent la liste des huit structures constituées de doubles portiques qui ont été étudiées avec la méthode HMPD. Pour illustrer l'évolution du comportement de ces structures en fonction des contrastes de rigidité entre les éléments, nous indiquons dans chaque cas :

- les ordres de grandeur des épaisseurs des éléments,
- l'équation différentielle décrivant les modes transverses,
- les mécanismes prépondérants (MP).

À la fin du tableau B.2, nous donnons également le modèle de poutre générique. Les trois mécanismes possibles sont désignés par les symboles suivants :

- C : Cisaillement de la cellule
- FG : Flexion globale
- FI : Flexion interne

Géométrie	Équation	MP
$a_{me} = O(\epsilon \ell_m)$ $a_{mi} = O(\epsilon \ell_m)$ $a_p = O(\epsilon \ell_m)$	$\Lambda \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^0 - \frac{E_{me} I}{K} \Lambda \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^{0''} - E_{me} I \tilde{U}^{0(4)} = 0$	C + FG
$a_{me} = O(\epsilon^{1/2} \ell_m)$ $a_{mi} = O(\epsilon^{1/2} \ell_m)$ $a_p = O(\epsilon^{1/2} \ell_m)$	$\Lambda \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^0 - E_{me} I \tilde{U}^{0(4)} = 0$	FG
$a_{me} = O(\epsilon^{1/2} \ell_m)$ $a_{mi} = O(\epsilon^{3/2} \ell_m)$ $a_p = O(\epsilon^{1/2} \ell_m)$	$(\Lambda_{me} + \Lambda_p) \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^0 - E_{me} I \tilde{U}^{0(4)} = 0$	FG
$a_{me} = O(\epsilon^{3/2} \ell_m)$ $a_{mi} = O(\epsilon^{1/2} \ell_m)$ $a_p = O(\epsilon^{3/2} \ell_m)$	$\Lambda_{mi} \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^0 - E_{mi} I_{mi} \tilde{U}^{0(4)} = 0$	FI

TABLE B.1 – Liste des structures étudiées avec la méthode HMPD

Géométrie	Équation	MP
$a_{me} = O(\epsilon^{2/3} \ell_m)$ $a_{mi} = O(\epsilon^{2/3} \ell_m)$ $a_p = O(\epsilon^{4/3} \ell_m)$	$\Lambda_m \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^0 + 2K_p \tilde{U}^{0''} - (2E_{me}I_{me} + E_{mi}I_{mi}) \tilde{U}^{0(4)} = 0$	C + FI
$a_{me} = O(\epsilon^0 \ell_m)$ $a_{mi} = O(\epsilon^0 \ell_m)$ $a_p = O(\epsilon^{2/3} \ell_m)$	$\Lambda_m \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^0 - \frac{E_{me}I}{2K_p} \Lambda_m \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^{0''} - (E_{me}I + 2E_{me}I_{me} + E_{mi}I_{mi}) \tilde{U}^{0(4)} + \frac{E_{me}I}{2K_p} (2E_{me}I_{me} + E_{mi}I_{mi}) \tilde{U}^{0(6)} = 0$	C + FG + FI
$a_{me} = O(\epsilon \ell_m)$ $a_{mi} = O(\epsilon^{1/3} \ell_m)$ $a_p = O(\epsilon \ell_m)$	$\Lambda_{mi} \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^0 - \frac{E_{me}I(3K_{me} + 2K_p)}{K_p(6K_{me} + K_p)} \Lambda_{mi} \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^{0''} - (E_{me}I + E_{mi}I_{mi}) \tilde{U}^{0(4)} + \frac{E_{me}I(3K_{me} + 2K_p)}{K_p(6K_{me} + K_p)} E_{mi}I_{mi} \tilde{U}^{0(6)} = 0$	C + FG + FI
$a_{me} = O(\epsilon^0 \ell_m)$ $a_{mi} = O(\epsilon \ell_m)$ $a_p = O(\epsilon^{2/3} \ell_m)$	$\Lambda_{me} \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^0 - \frac{2E_{me}I}{K_p} \Lambda_{me} \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^{0''} - (E_{me}I + 2E_{me}I_{me}) \tilde{U}^{0(4)} + \frac{2E_{me}I}{K_p} 2E_{me}I_{me} \tilde{U}^{0(6)} = 0$	C + FG + FI
Générique	$\Lambda \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^0 - \frac{E_{me}I}{K} \Lambda \tilde{\omega}_0^2 \tilde{U}^{0''} - (E_{me}I + 2E_{me}I_{me} + E_{mi}I_{mi}) \tilde{U}^{0(4)} + \frac{E_{me}I}{K} (2E_{me}I_{me} + E_{mi}I_{mi}) \tilde{U}^{0(6)} = 0$	C + FG + FI

TABLE B.2 – Liste des structures étudiées avec la méthode HMPD (suite)

Annexe C

Expression analytique de la rigidité K

Cette annexe contient la démonstration de la formule (4.2) donnée page 271 pour calculer la rigidité du cisaillement de la cellule K lorsque les éléments sont épais. Pour cela, deux hypothèses sont retenues. La première est que les nœuds sont indéformables et qu'ils ne subissent qu'un mouvement de corps rigide. La seconde est que les éléments se comportent comme des poutres de Timoshenko. La rigidité K est ensuite déterminée grâce à la méthode proposée dans la partie 3.2.3. Une distorsion et des conditions aux limites périodiques sont imposées à la cellule. Tous les nœuds ont donc la même rotation θ_0 et la somme des efforts tranchants dans les murs est proportionnelle à K . Les notations sont indiquées sur la figure C.1 et la cellule déformée est représentée sur la figure C.2.

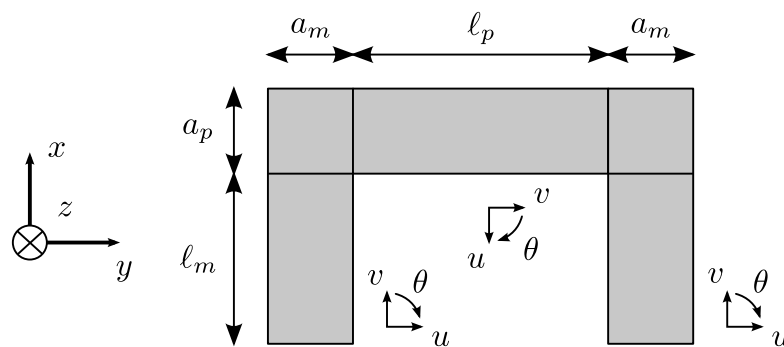


FIGURE C.1 – Notations

En statique, le comportement des poutres de Timoshenko est décrit par les équations suivantes.

$$\begin{aligned} \text{Équations d'équilibre :} & \quad T' = 0 & \quad M' = -T \\ \text{Lois de comportement :} & \quad T = -GA'(u' - \theta) & \quad M = -EI\theta' \end{aligned}$$

G désigne le module de cisaillement du matériau, A' la section réduite d'effort tranchant, E le module d'élasticité et I l'inertie de la section. Nous en déduisons les expressions de M , θ et u en fonction de l'abscisse s dans le repère local associé

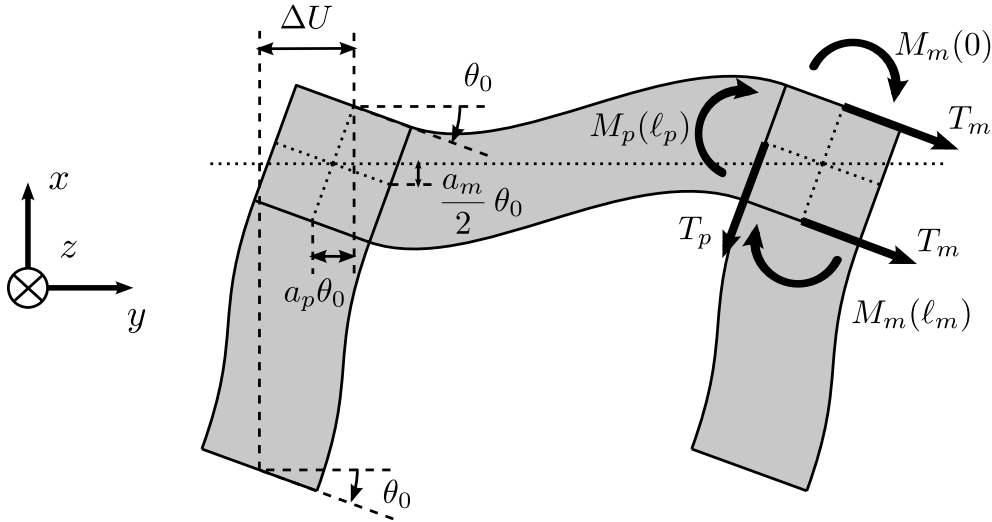


FIGURE C.2 – Cellule déformée

à la poutre :

$$M = -Ts + b \quad , \quad \theta = \frac{Ts^2}{2EI} - \frac{bs}{EI} + c \quad , \quad u = \frac{Ts^3}{6EI} - \frac{bs^2}{2EI} + \left(c - \frac{T}{GA'}\right)s + d$$

où b , c et d sont des constantes qui dépendent des conditions aux limites.

Pour les murs, ces dernières s'écrivent :

$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ \theta(\ell_m) = \theta_0 \\ u(0) = 0 \\ u(\ell_m) = \Delta U - a_p \theta_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{T\ell_m}{2} \\ c = \theta_0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Les expressions des efforts dans les murs sont donc :

$$T_m = -\frac{K_m}{2} \left(\frac{\Delta U}{\ell_m} - \theta_0 \left(1 + \frac{a_p}{\ell_m}\right) \right) \quad \text{et} \quad M_m(s) = T_m \left(\frac{\ell_m}{2} - s \right) \quad (\text{C.1})$$

avec $\frac{1}{K_m} = \frac{\ell_m^2}{24 E_m I_m} + \frac{1}{2 G_m A'_m}$

Pour les planchers, les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ \theta(\ell_p) = \theta_0 \\ u(0) = \theta_0 a_p / 2 \\ u(\ell_p) = -\theta_0 a_p / 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{T\ell_p}{2} \\ c = \theta_0 \\ d = \theta_0 \frac{a_p}{2} \end{cases}$$

et les expressions des efforts sont :

$$T_p = K_p \frac{\ell_p}{\ell_m} \theta_0 \left(1 + \frac{a_m}{\ell_p}\right) \quad \text{et} \quad M_p(s) = T_p \left(\frac{\ell_p}{2} - s \right) \quad (\text{C.2})$$

avec $\frac{1}{K_p} = \frac{\ell_m \ell_p}{12 E_p I_p} + \frac{\ell_m}{\ell_p G_p A'_p}$

Maintenant que les nœuds ne sont plus ponctuels, il faut également tenir compte de l'effort tranchant dans les éléments lors de l'écriture de l'équilibre des nœuds en moments (figure C.2). Nous obtenons ainsi :

Nœud de gauche :

$$M_m(\ell_m) - M_m(0) - T_m a_p - M_p(0) - T_p \frac{a_m}{2} = 0$$

Nœud de droite :

$$M_m(\ell_m) - M_m(0) - T_m a_p + M_p(\ell_p) - T_p \frac{a_m}{2} = 0$$

Après avoir remplacé les efforts par les expressions (C.1) et (C.2), la somme de ces deux équations donne :

$$K_m \left(\frac{\Delta U}{\ell_m} - \theta_0 \left(1 + \frac{a_p}{\ell_m} \right) \right) \left(1 + \frac{a_p}{\ell_m} \right) - K_p \theta_0 \left(1 + \frac{a_m}{\ell_p} \right)^2 = 0$$

et nous en déduisons la rotation des nœuds θ_0 :

$$\theta_0 = \frac{K_m(1 + a_p/\ell_m)}{K_m(1 + a_p/\ell_m)^2 + K_p(1 + a_m/\ell_p)^2} \frac{\Delta U}{\ell_m}$$

Finalement, cette expression est introduite dans l'équation (C.1) pour avoir la somme des efforts tranchants dans les murs :

$$\begin{aligned} 2T_m &= -K_m \frac{\Delta U}{\ell_m} \left(1 - \frac{K_m(1 + a_p/\ell_m)^2}{K_m(1 + a_p/\ell_m)^2 + K_p(1 + a_m/\ell_p)^2} \right) \\ &= -\frac{\Delta U}{\ell_m} \frac{K_m K_p \left(\frac{1+a_m/\ell_p}{1+a_p/\ell_m} \right)^2}{K_m + K_p \left(\frac{1+a_m/\ell_p}{1+a_p/\ell_m} \right)^2} \end{aligned}$$

La rigidité du cisaillement de la cellule est donc :

$$K = \frac{K_m K_p \left(\frac{1+a_m/\ell_p}{1+a_p/\ell_m} \right)^2}{K_m + K_p \left(\frac{1+a_m/\ell_p}{1+a_p/\ell_m} \right)^2} \quad (\text{C.3})$$

En toute rigueur, la distorsion de la cellule est égale au déplacement différentiel ΔU divisé par la hauteur totale $\ell_m + a_p$. L'expression (C.3) devrait donc être multipliée par $(1 + a_p/\ell_m)$. Néanmoins, sur les deux exemples numériques traités dans la partie 4.2.1 page 269, la formule (C.3) donne de très bons résultats avec une erreur de l'ordre de 3 % par rapport aux modèles éléments finis.

Annexe D

Figures en couleur

Pour faciliter l'impression, cette annexe reproduit toutes les figures en couleur de la thèse.

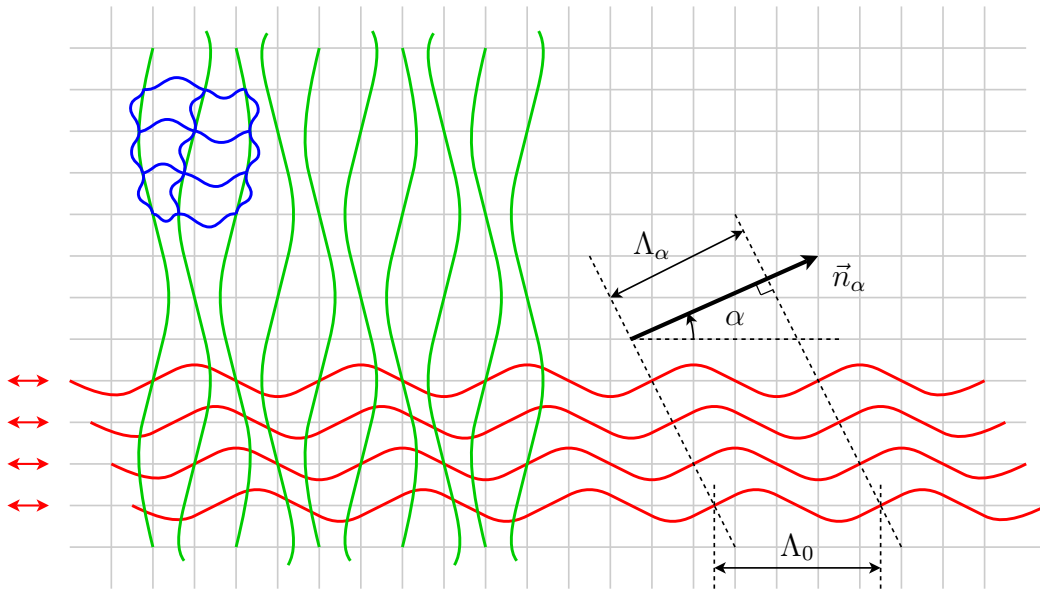


FIGURE D.1 – Onde dans la direction \vec{n}_α pour la polarisation (Px)
(Figure initiale page 60)

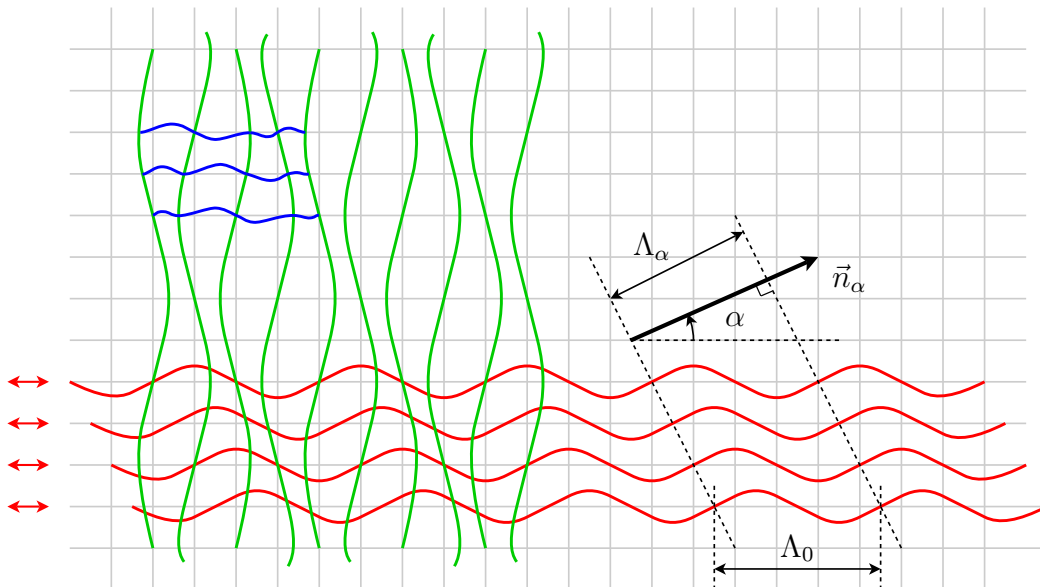


FIGURE D.2 – Onde dans la direction \vec{n}_α (Figure initiale page 102)

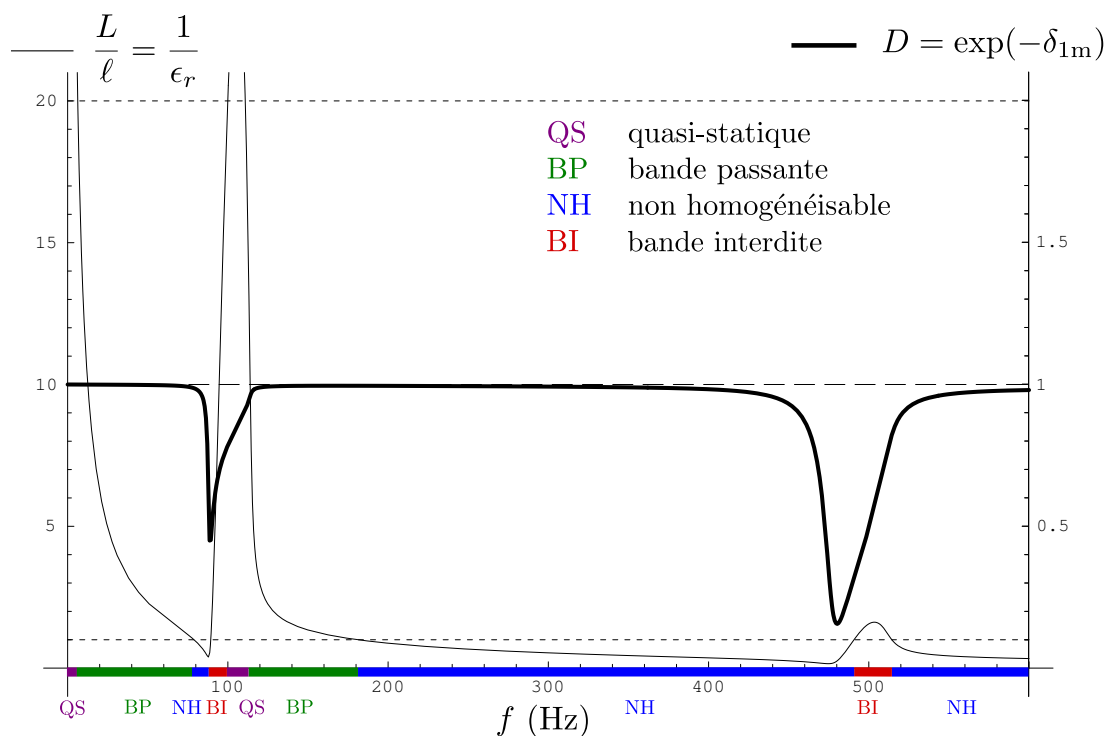


FIGURE D.3 – Ratio L/ℓ (trait fin) et atténuation (trait gras) pour le mode (Px) en fonction de la fréquence pour $\eta = 2.10^{-2}$ et $\alpha = 0$ (Figure initiale page 132)

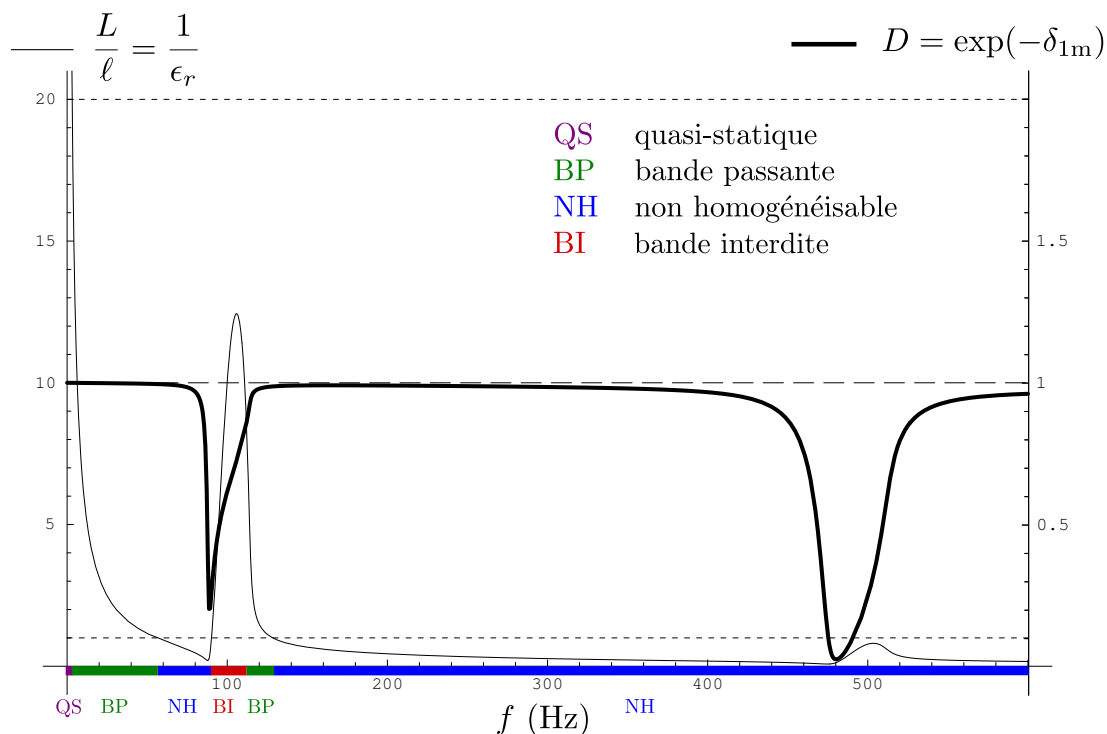


FIGURE D.4 – Ratio L/ℓ (trait fin) et atténuation (trait gras) pour le mode (Px) en fonction de la fréquence pour $\eta = 2.10^{-2}$ et $\alpha = \pi/3$ (Figure initiale page 134)

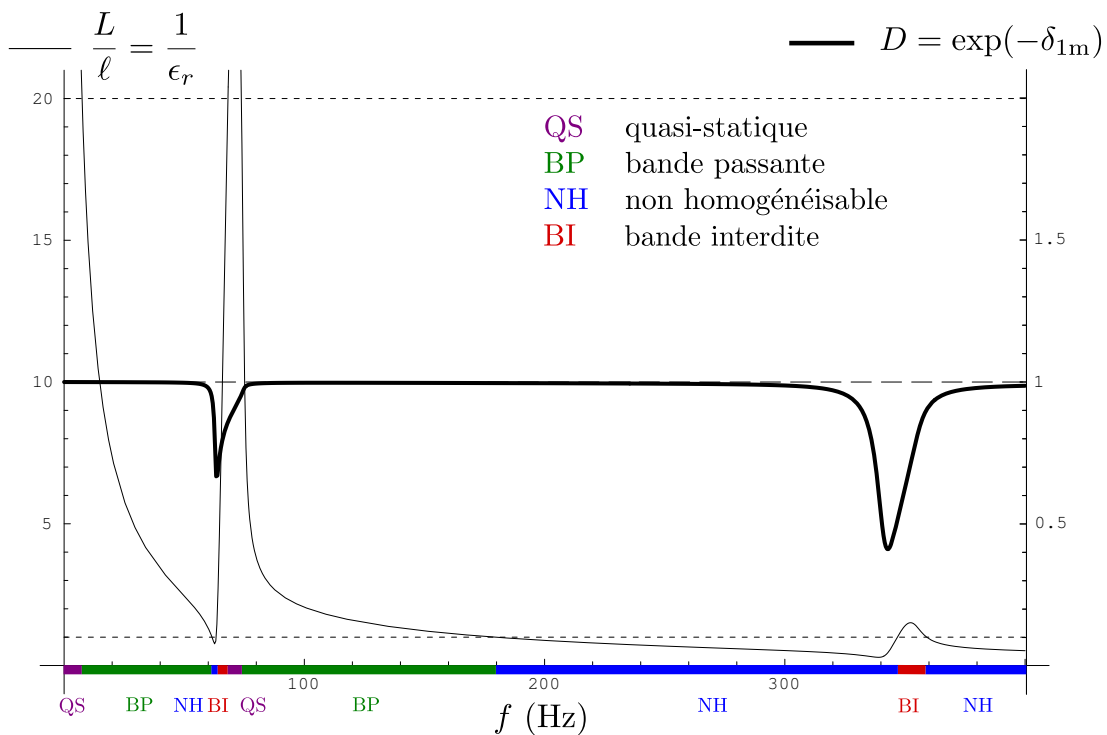


FIGURE D.5 – Ratio L/ℓ (trait fin) et atténuation (trait gras) pour le mode (Py) en fonction de la fréquence pour $\eta = 2 \cdot 10^{-2}$ et $\alpha = \pi/2$ (Figure initiale page 136)

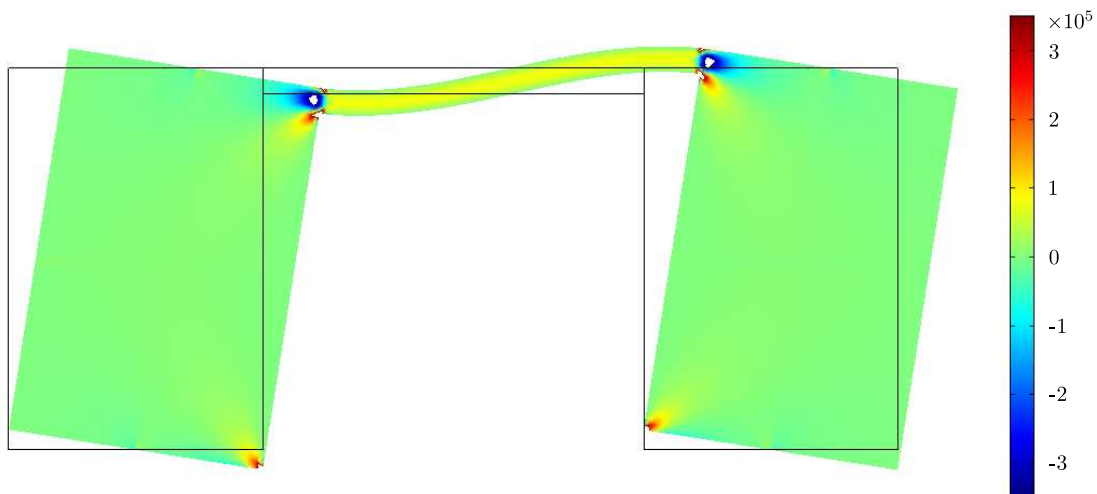


FIGURE D.6 – Répartition des contraintes de cisaillement (en Pa) (Figure initiale page 273)

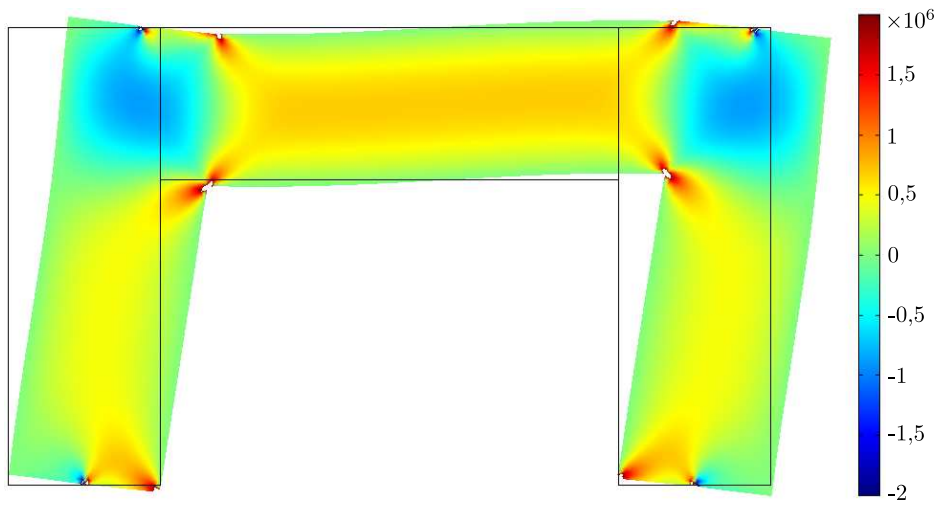


FIGURE D.7 – Répartition des contraintes de cisaillement (en Pa)
(Figure initiale page 274)

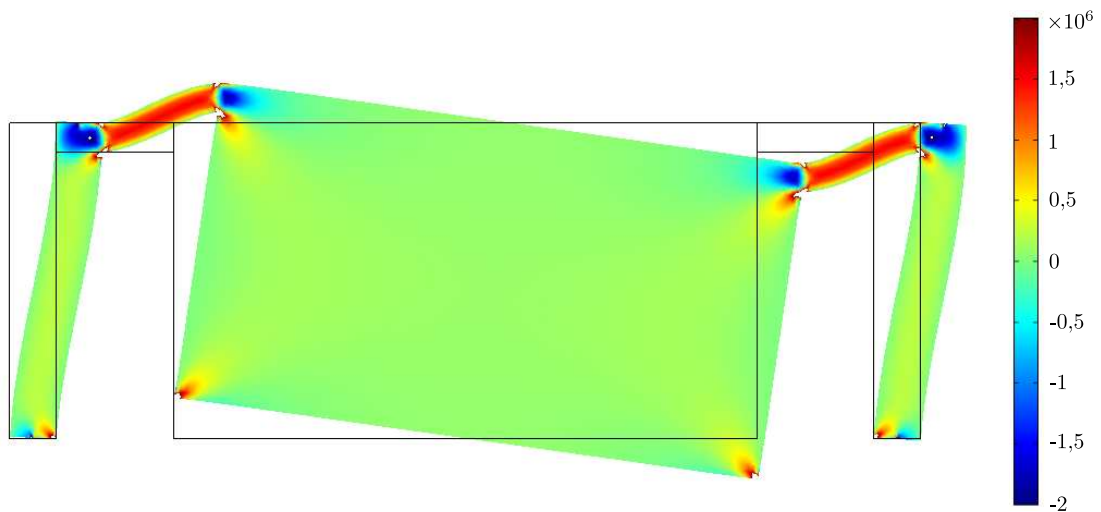


FIGURE D.8 – Répartition des contraintes de cisaillement (en Pa)
(Figure initiale page 277)



FIGURE D.9 – Bâtiment étudié (Figure initiale page 293)

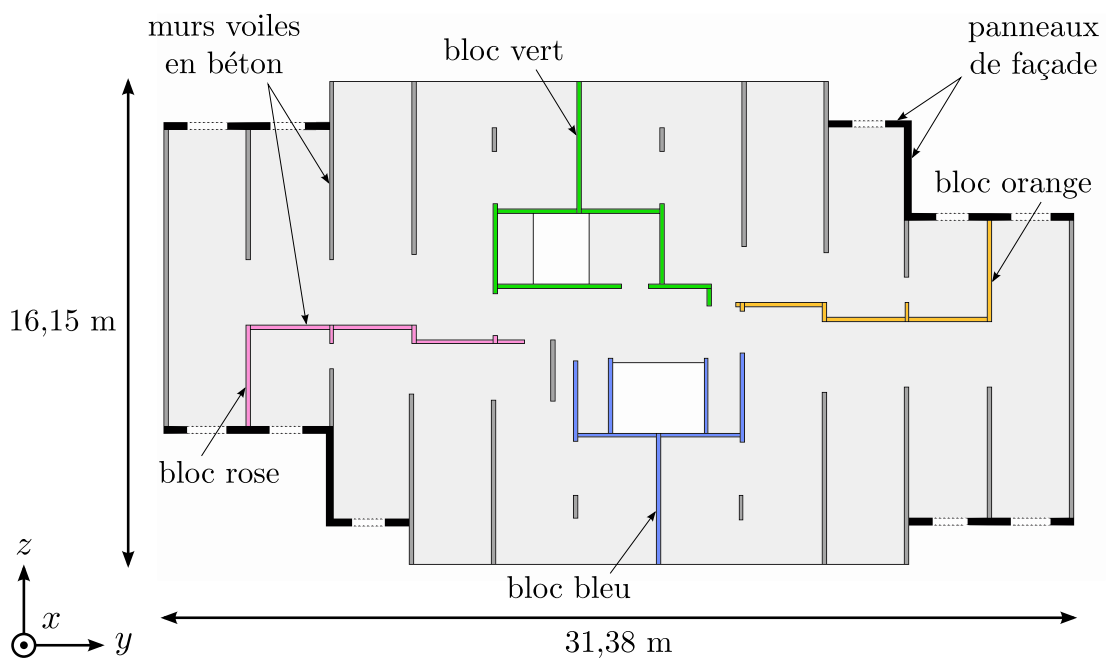


FIGURE D.10 – Plan d'un étage courant (Figure initiale page 293)

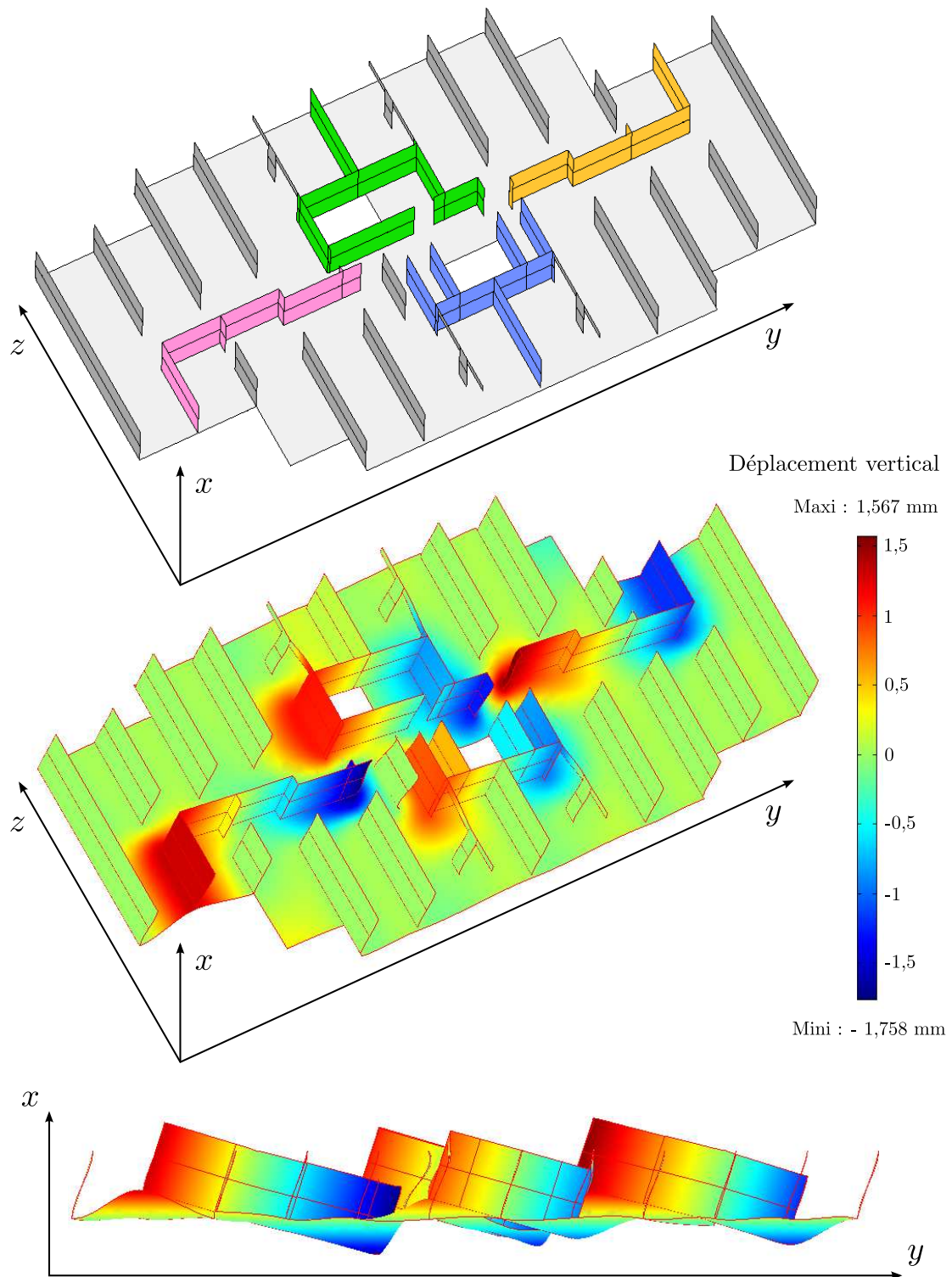


FIGURE D.11 – Calcul de la rigidité K dans la direction longitudinale
(Figure initiale page 300)

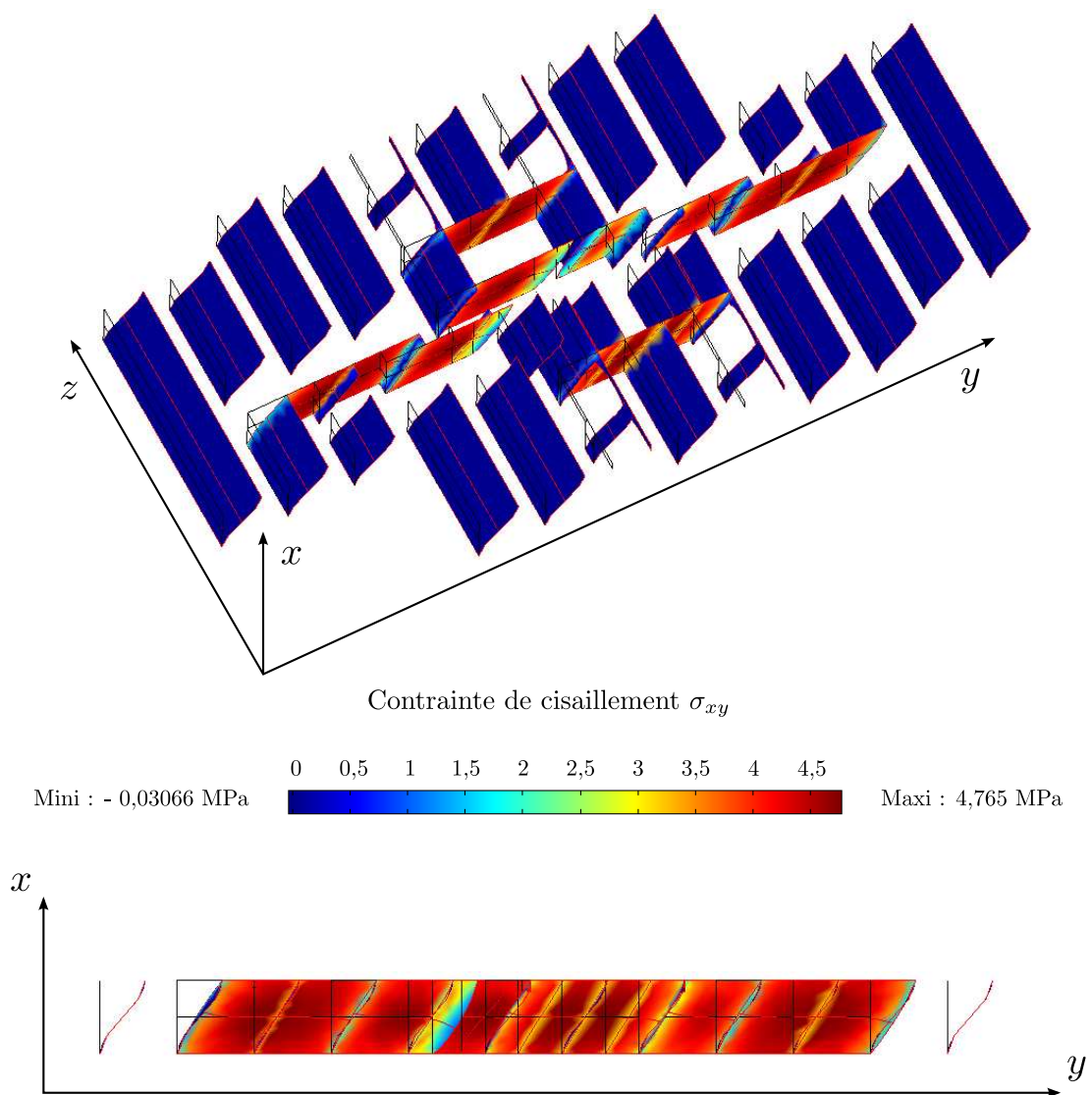


FIGURE D.12 – Calcul de la rigidité \mathcal{K}_m dans la direction longitudinale
(Figure initiale page 301)

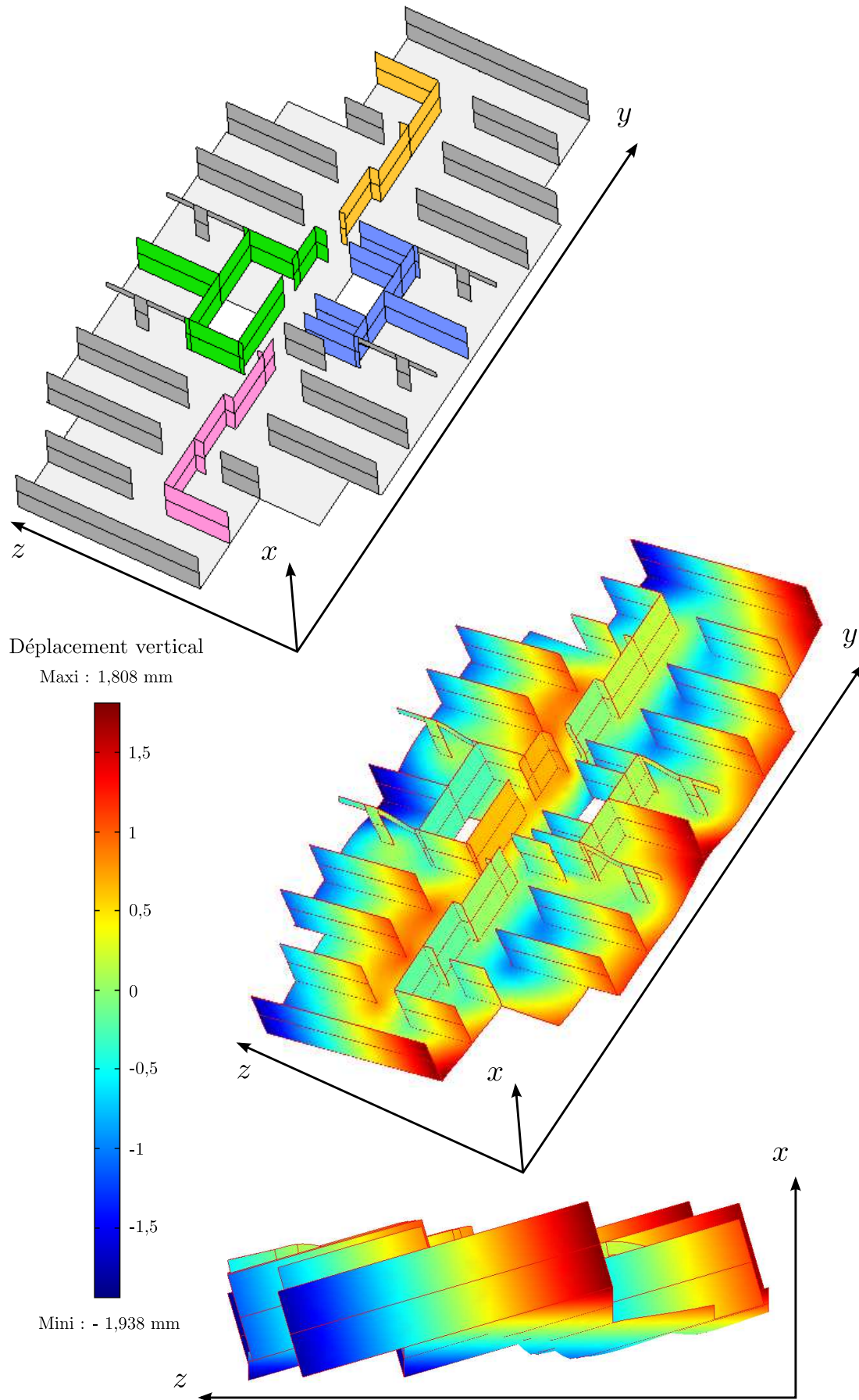


FIGURE D.13 – Calcul de la rigidité K dans la direction transversale
 (Figure initiale page 302)

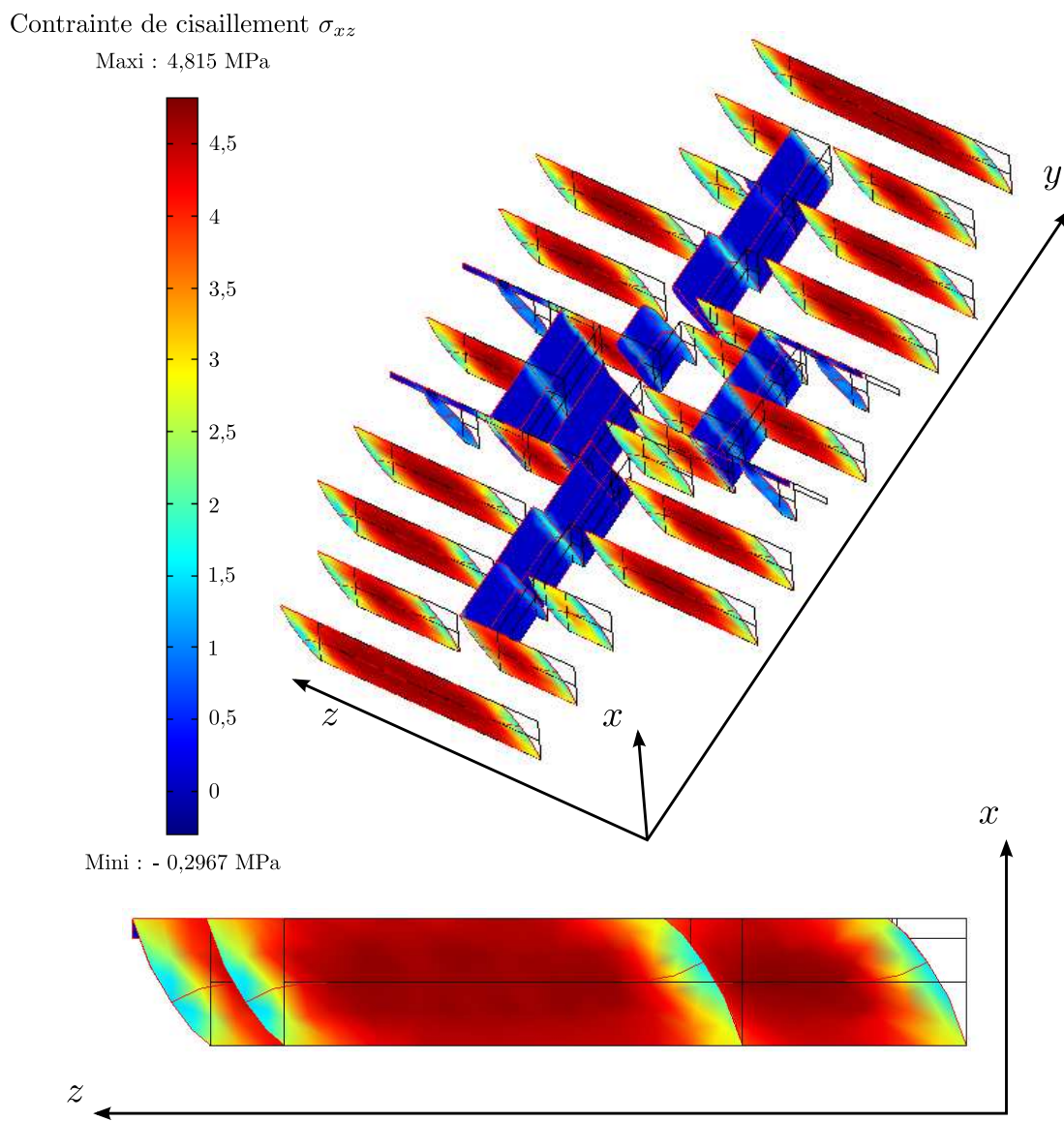


FIGURE D.14 – Calcul de la rigidité \mathcal{K}_m dans la direction transversale
(Figure initiale page 303)

Bibliographie

- ABRATE, S. (1985). Continuum modeling of latticed structures. *Shock and Vibration Digest*, 17(1):15–21.
- ABRATE, S. (1988). Continuum modeling of latticed structures. *Shock and Vibration Digest*, 20(10):3–8.
- ANDERSON, M. S. (1981). Buckling of periodic lattice structures. *AIAA journal*, 19(6):782–788.
- ANDERSON, M. S. (1982). Vibration of prestressed periodic lattice structures. *AIAA journal*, 20(4):551–555.
- ANDRIANOV, I. (2002). The specific features of the limiting transition from a discrete elastic medium to a continuous one. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 66(2):261–265.
- ANTHOINE, A. (1995). Derivation of the in-plane elastic characteristics of masonry through homogenization theory. *International Journal of Solids and Structures*, 32(2):137–163.
- ASANCHEYEV, B. (1980a). Calcul des structures de bâtiment. Cours, École Nationale des Travaux Publics de l'État. Tome 1 : statique.
- ASANCHEYEV, B. (1980b). Calcul des structures de bâtiment. Cours, École Nationale des Travaux Publics de l'État. Tome 2 : dynamique.
- AURIAULT, J-L. (1991). Heterogeneous medium. Is an equivalent macroscopic description possible? *International Journal of Engineering Science*, 29(7):785–795.
- AURIAULT, J-L. et BONNET, G. (1985). Dynamique des composites élastiques. *Archives of Mechanics*, 37(4-5):269–284.
- ÁVILA, A., GRISO, G. et MIARA, B. (2005). Bandes phononiques interdites en élasticité linéarisée. *Comptes Rendus - Mathématique*, 340(12):933–938.
- BAKHVALOV, N. S. et PANASENKO, G. P. (1984). *Homogenization : averaging processes in periodic media*. Nauka, Moscou. (en russe).
- BAKHVALOV, N. S. et PANASENKO, G. P. (1989). *Homogenization : averaging processes in periodic media*. Kluwer, Dordrecht.

- BARD, P-Y., AFRA, H. et ARGOUL, P. (1992). Dynamic behaviour of buildings : experimental results from strong motion data. *In* DAVIDOVICI, V., éditeur : *Recent Advances in Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, pages 441–478. Ouest Éditions.
- BASU, A. K. et NAGPAL, A. K. (1980). Frame-wall systems with rigidly jointed link beams. *Journal of the Structural Division*, 106(5):1175–1190.
- BASU, A. K., NAGPAL, A. K., BAJAJ, R. S. et GULIANI, A. K. (1979). Dynamic characteristics of coupled shear walls. *Journal of the Structural Division*, 105(8):1637–1652.
- BASU, A. K., NAGPAL, A. K. et KAUL, S. (1984). Charts for seismic design of frame-wall systems. *Journal of Structural Engineering*, 110(1):31–46.
- BAŽANT, Z. P. et CHRISTENSEN, M. (1972). Analogy between micropolar continuum and grid frameworks under initial stress. *International Journal of Solids and Structures*, 8(3):327–346.
- BENSOUSSAN, A., LIONS, J-L. et PAPANICOLAOU, G. (1978). *Asymptotic analysis for periodic structures*, volume 5 de *Studies in mathematics and its applications*. North Holland, Amsterdam.
- BISCH, P. (2002). Constructions parasismiques - Eurocode 8. *Techniques de l'Ingénieur, traité Construction*, C 3 292.
- BOUTIN, C. et AURIAULT, J-L. (1990). Dynamic behaviour of porous media saturated by a viscoelastic fluid. Application to bituminous concretes. *International Journal of Engineering Science*, 28(11):1157–1181.
- BOUTIN, C. et AURIAULT, J-L. (1993). Rayleigh scattering in elastic composite materials. *International Journal of Engineering Science*, 31(12):1669–1689.
- BOUTIN, C. et HANS, S. (2003). Homogenisation of periodic discrete medium : Application to dynamics of framed structures. *Computers and Geotechnics*, 30(4):303–320.
- BOUTIN, C., HANS, S. et CHESNAIS, C. (2010). Generalized beams and continua. Dynamics of reticulated structures. *In* MAUGIN, G. A. et METRIKINE, A. V., éditeurs : *Generalized Continuum Mechanics - one hundred years after the Cosserats*, pages 131–142, New York. Springer.
- BOUTIN, C., HANS, S., IBRAIM, E. et ROUSSILLON, P. (2005). In situ experiments and seismic analysis of existing buildings. Part II : Seismic integrity threshold. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 34(12):1531–1546.
- BOUVARD, A., CHATAIGNER, J. et JALIL, W. (1985). Analyse dynamique des structures - Techniques de modélisation, Redistribution des efforts. *In* DAVIDOVICI, V., éditeur : *Génie parasismique*, pages 385–391. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées.

- BRILLOUIN, L. et PARODI, M. (1956). *Propagation des ondes dans les milieux périodiques*. Masson/Dunod, Paris.
- BUANNIC, N. et CARTRAUD, P. (2001a). Higher-order effective modeling of periodic heterogeneous beams. I. Asymptotic expansion method. *International Journal of Solids and Structures*, 38(40-41):7139–7161.
- BUANNIC, N. et CARTRAUD, P. (2001b). Higher-order effective modeling of periodic heterogeneous beams. II. Derivation of the proper boundary conditions for the interior asymptotic solution. *International Journal of Solids and Structures*, 38(40-41):7163–7180.
- BUANNIC, N., CARTRAUD, P. et QUESNEL, T. (2003). Homogenization of corrugated core sandwich panels. *Composite Structures*, 59(3):299–312.
- BURGARDT, B. et CARTRAUD, P. (1999). Continuum modeling of beamlike lattice trusses using averaging methods. *Computers and Structures*, 73(1-5):267–279.
- CAILLERIE, D., TROMPETTE, P. et VERNA, P. (1989). Homogenisation of periodic trusses. In *IASS Symposium, 10 Years of Progress in Shell and Spatial Structures*, Madrid.
- CAPUANI, D., MERLI, M. et SAVOIA, M. (1996). Dynamic analysis of coupled shear wall-frame systems. *Journal of Sound and Vibration*, 192(4):867 – 883.
- CHAALLAL, O., GAUTHIER, D. et MALENFANT, P. (1996). Classification methodology for coupled shear walls. *Journal of Structural Engineering*, 122(12):1453–1458.
- CHAJES, M. J., FINCH JR., W. W. et KIRBY, J. T. (1996a). Dynamic analysis of a ten-story reinforced concrete building using a continuum model. *Computers and Structures*, 58(3):487–498.
- CHAJES, M. J., ROMSTAD, K. M. et MCCALLEN, D. B. (1993). Analysis of multiple-bay frames using continuum model. *Journal of Structural Engineering*, 119(2):522–546.
- CHAJES, M. J., ZHANG, L. et KIRBY, J. T. (1996b). Dynamic analysis of tall building using reduced-order continuum model. *Journal of Structural Engineering*, 122(11):1284–1291.
- CHESNAIS, C., HANS, S. et BOUTIN, C. (2007). Wave propagation and diffraction in discrete structures : Effect of anisotropy and internal resonance. *PAMM*, 7(1):1090401–1090402.
- CHESNAIS, C., HANS, S. et BOUTIN, C. (soumis). Dynamics of reticulated structures. Evidence of atypical gyration modes. *International Journal for Computational Engineering*.
- CHIHEB, R., CIORANESCU, D., EL JANATI, A. et PANASENKO, G. (1998). Reinforced reticulated structures in elasticity. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences - Series I : Mathematics*, 326(7):897–902.

- CIORANESCU, D. et SAINT JEAN PAULIN, J. (1999). *Homogenization of Reticulated Structures*, volume 136 de *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York.
- CLOUGH, R. W. et PENZIEN, J. (1980). *Dynamique des structures*. Éditions Pluralis, Paris. Tome 1 : Principes fondamentaux.
- COSSERAT, E. et COSSERAT, F. (1909). *Théorie des corps déformables*. A. Hermann et fils, Paris.
- DANG, V. H. (2009). Comportement dynamique de structures portiques dissymétriques - Approche par homogénéisation. Master recherche, École Nationale des Travaux Publics de l'État (ENTPE).
- DAYA, E. M., BRAIKAT, B., DAMIL, N. et POTIER-FERRY, M. (2002). Continuum modeling for the modulated vibration modes of large repetitive structures. *Comptes Rendus - Mécanique*, 330(5):333–338.
- ERINGEN, A. C. (1966). Linear theory of micropolar elasticity. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 15:909–923.
- ERINGEN, A. C. et SUHUBI, E. S. (1964). Nonlinear theory of simple micro-elastic solids-I. *International Journal of Engineering Science*, 2(2):189–203.
- FARSI, M. (1996). *Identification des structures de Génie Civil à partir de leurs réponses vibratoires. Vulnérabilité du bâti existant*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier - Grenoble I.
- FOREST, S. (2006). *Milieux continus généralisés et matériaux hétérogènes*. Presses de l'École des Mines de Paris.
- FOREST, S. et SAB, K. (1998). Cosserat overall modeling of heterogeneous materials. *Mechanics Research Communications*, 25(4):449–454.
- GIBSON, L. J. (2005). Biomechanics of cellular solids. *Journal of Biomechanics*, 38(3):377–399.
- GOEL, R. K. et CHOPRA, A. K. (1997). Period formulas for moment-resisting frame buildings. *Journal of Structural Engineering*, 123(11):1454–1461.
- GOEL, R. K. et CHOPRA, A. K. (1998). Period formulas for concrete shear wall buildings. *Journal of Structural Engineering*, 124(4):426–433.
- HANS, S. (2002). *Auscultation dynamique de bâtiments et modélisation par homogénéisation - Contribution à l'analyse de la vulnérabilité sismique*. Thèse de doctorat, ENTPE-INSA de Lyon.
- HANS, S. et BOUTIN, C. (2008). Dynamics of discrete framed structures : A unified homogenized description. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 3(9):1709–1739.

- HANS, S., BOUTIN, C., IBRAHIM, E. et ROUSSILLON, P. (2005). In situ experiments and seismic analysis of existing buildings. Part I : Experimental investigations. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 34(12):1513–1529.
- HEIDEBRECHT, A. C. et STAFFORD SMITH, B. (1973). Approximate analysis of tall wall-frame structures. *Journal of the Structural Division*, 99(ST2):199–221.
- JAIN, S. K. (1984). Continuum models for dynamics of buildings. *Journal of Engineering Mechanics*, 110(12):1713–1730.
- JIGOREL, S. (2009). Étude du comportement dynamique de structures périodiques par la méthode d’homogénéisation des milieux périodiques discrets. Master recherche, École Nationale des Travaux Publics de l’État (ENTPE).
- KERR, A. D. et ACCORSI, M. L. (1985). Generalization of the equations for frame-type structures ; a variational approach. *Acta Mechanica*, 56(1-2):55–73.
- KERR, A. D. et ZAREMBSKI, A. M. (1981). The response equations for a cross-tie track. *Acta Mechanica*, 40(3-4):253–276.
- KOLPAKOV, A. (1991). Calculation of the characteristics of thin elastic rods with a periodic structure. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 55(3):358–365.
- KUMAR, R. S. et MCDOWELL, D. L. (2004). Generalized continuum modeling of 2-D periodic cellular solids. *International Journal of Solids and Structures*, 41(26):7399–7422.
- LANGLEY, R. S. (1996). A transfer matrix analysis of the energetics of structural wave motion and harmonic vibration. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 452(1950):1631–1648.
- LANGLEY, R. S., BARDELL, N. S. et RUIVO, H. M. (1997). The response of two-dimensional periodic structures to harmonic point loading : A theoretical and experimental study of a beam grillage. *Journal of Sound and Vibration*, 207(4):521–535.
- LAUDARIN, F. (2007). *Réduction de modèles, techniques d’homogénéisation et méthodes probabilistes - Application à l’effet de l’interaction sol-structure sur la réponse dynamique des bâtiments*. Thèse de doctorat, Université Paris-est.
- LEE, U. (1998). Equivalent continuum representation of lattice beams : Spectral element approach. *Engineering Structures*, 20(7):587–592.
- LI, Q. S. (2000). Free vibration of flexural-shear plates. *Computers and Structures*, 76(5):663 – 674.
- LIU, Z., CHAN, C. T. et SHENG, P. (2005). Analytic model of phononic crystals with local resonances. *Physical Review B*, 71(1):014103.

- LIU, Z., ZHANG, X. X., MAO, Y. W., ZHU, Y. Y., YANG, Z. Y., CHAN, C. T. et SHENG, P. (2000). Locally resonant sonic materials. *Science*, 289(5485):1734–1736.
- MANEVITCH, I. L. et OSHMYAN, G. V. (1999). An asymptotic study of the linear vibrations of a stretched beam with concentrated masses and discrete elastic supports. *Journal of Sound and Vibration*, 223(5):679 – 691.
- MARTINSSON, P. G. et BABUŠKA, I. (2007). Homogenization of materials with periodic truss or frame micro-structures. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 17(5):805–832.
- MARTINSSON, P. G. et MOVCHAN, A. B. (2003). Vibrations of lattice structures and phononic band gaps. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 12(1):45–64.
- MCCALLEN, D. B. et ROMSTAD, K. M. (1988). A continuum model for the nonlinear analysis of beam-like lattice structures. *Computers and Structures*, 29(2):177–197.
- MCCALLEN, D. B. et ROMSTAD, K. M. (1990). A continuum model for lattice structures with geometric and material nonlinearities. *Computers and Structures*, 37(5):795–822.
- MCCALLEN, D. B. et ROMSTAD, K. M. (1994). Nonlinear model for building-soil systems. *Journal of Engineering Mechanics*, 120(5):1129–1152.
- MEAD, D. J. (1996). Wave propagation in continuous periodic structures : Research contributions from Southampton, 1964-1995. *Journal of Sound and Vibration*, 190(3):495–524.
- MICHEL, C. (2007). *Vulnérabilité sismique de l'échelle du bâtiment à celle de la ville - Apport des techniques expérimentales in situ - Application à Grenoble*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier - Grenoble I.
- MICHEL, C., GUÉGUEN, P. et BARD, P.-Y. (2008). Dynamic parameters of structures extracted from ambient vibration measurements : An aid for the seismic vulnerability assessment of existing buildings in moderate seismic hazard regions. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 28(8):593 – 604.
- MICHEL, J-C., MOULINEC, H. et SUQUET, P. (1999). Effective properties of composite materials with periodic microstructure : A computational approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 172(1-4):109–143.
- MILTON, G. W. et WILLIS, J. R. (2007). On modifications of Newton's second law and linear continuum elastodynamics. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 463(2079):855–880.
- MINDLIN, R. D. (1964). Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 16(1):51–78.

- MIRANDA, E. et TAGHAVI, S. (2005). Approximate floor acceleration demands in multistory buildings. I : Formulation. *Journal of Structural Engineering*, 131(2):203–211.
- MOREAU, G. (1996). *Homogénéisation de Structures Discrètes en Élasticité et en Incrémental*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- MOREAU, G. et CAILLERIE, D. (1998). Continuum modeling of lattice structures in large displacement applications to buckling analysis. *Computers and Structures*, 68(1-3):181–189.
- MOUSTAGHFIR, N., DAYA, E. M., BRAIKAT, B., DAMIL, N. et POTIER-FERRY, M. (2007). Evaluation of continuous modelings for the modulated vibration modes of long repetitive structures. *International Journal of Solids and Structures*, 44(21):7061–7072.
- NG, S. C. et KUANG, J. S. (2000). Triply coupled vibration of asymmetric wall-frame structures. *Journal of Structural Engineering*, 126(8):982–987.
- NOOR, A. K. (1988). Continuum modeling for repetitive lattice structures. *Applied Mechanics Reviews*, 41(7):285–296.
- NOOR, A. K. et NEMETH, M. P. (1980). Micropolar beam models for lattice grids with rigid joints. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 21(2):249–263.
- POTZTA, G. et KOLLÁR, L. P. (2003). Analysis of building structures by replacement sandwich beams. *International Journal of Solids and Structures*, 40(3):535–553.
- PRADEL, F. (1998). *Homogénéisation des milieux discrets périodiques orientés. Une application aux mousses*. Thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées.
- PRADEL, F. et SAB, K. (1998). Cosserat modelling of elastic periodic lattice structures. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences - Serie IIb : Mécanique, Physique, Chimie, Astronomie*, 326(11):699–704.
- PS92 (1995). *DTU Règles PS92. Règles de construction parasismique*.
- RAFEZY, B., ZARE, A. et HOWSON, W. (2007). Coupled lateral-torsional frequencies of asymmetric, three-dimensional frame structures. *International Journal of Solids and Structures*, 44(1):128 – 144.
- RENTON, J. D. (1970). General properties of space grids. *International Journal of Mechanical Sciences*, 12(9):801–810.
- RENTON, J. D. (1984). Beam-like behavior of space trusses. *AIAA journal*, 22(2):273–280.

- RIVAL, F. (2004). Étude du comportement de structures périodiques en génie civil par la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques discrets. Mémoire de DEA, École Nationale des Travaux Publics de l'État (ENTPE).
- RUZZENE, M., SCARPA, F. et SORANNA, F. (2003). Wave beaming effects in two-dimensional cellular structures. *Smart Materials and Structures*, 56(3):363–372.
- SANCHEZ-PALENCIA, E. (1980). *Non-homogeneous media and vibration theory*, volume 127 de *Lecture notes in physics*. Springer-Verlag, Berlin.
- SHANSHAN, Y., XIAOMING, Z. et GENGKAI, H. (2008). Experimental study on negative effective mass in a 1D mass-spring system. *New Journal of Physics*, 10(043020).
- SHENG, P., ZHANG, X. X., LIU, Z. et CHAN, C. T. (2003). Locally resonant sonic materials. *Physica B*, 338(1-4):201–205. Proceedings of the Sixth International Conference on Electrical Transport and Optical Properties of Inhomogeneous Media.
- SKATTUM, K. S. (1971). *Dynamic analysis of coupled shear walls and sandwich beams*. Thèse de doctorat, California Institute of Technology.
- SRIKANTHA PHANI, A., WOODHOUSE, J. et FLECK, N. A. (2006). Wave propagation in two-dimensional periodic lattices. *Journal of the Acoustical Society of America*, 119(4):1995–2005.
- STAFFORD SMITH, B. et CROWE, E. (1986). Estimating periods of vibration of tall buildings. *Journal of Structural Engineering*, 112(5):1005–1019.
- STAFFORD SMITH, B., KUSTER, M. et HOENDERKAMP, J. C. D. (1981). A generalized approach to the deflection analysis of braced frame, rigid frame and coupled wall structures. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 8(2):230–240.
- STAFFORD SMITH, B., KUSTER, M. et HOENDERKAMP, J. C. D. (1984). Generalized method for estimating drift in high-rise structures. *Journal of Structural Engineering*, 110(7):1549–1562.
- STEPHEN, N. G. (1999). On the vibration of one-dimensional periodic structures. *Journal of Sound and Vibration*, 227(5):1133–1142.
- STEPHEN, N. G. et WANG, P. J. (1996). On saint-venant's principle in pin-jointed frameworks. *International Journal of Solids and Structures*, 33(1):79–97.
- SUHUBI, E. S. et ERINGEN, A. C. (1964). Nonlinear theory of micro-elastic solids-II. *International Journal of Engineering Science*, 2(4):389–404.
- SUN, C. T. et JUANG, J. N. (1986). Modeling global structural damping in trusses using simple continuum models. *AIAA journal*, 24(1):144–150.
- SUN, C. T. et LIEBBE, S. W. (1990). Global-local approach to solving vibration of large truss structures. *AIAA journal*, 28(2):303–308.

- TAGHAVI, S. et MIRANDA, E. (2005). Approximate floor acceleration demands in multistory buildings. II : Applications. *Journal of Structural Engineering*, 131(2):212–220.
- TARJÁN, G. et KOLLÁR, L. P. (2004). Approximate analysis of building structures with identical stories subjected to earthquakes. *International Journal of Solids and Structures*, 41(5-6):1411–1433.
- TOLLENAERE, H. (1994). *Modèles bidimensionnels de tissés - Homogénéisation des treillis en vibrations libres*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- TOLLENAERE, H. et CAILLERIE, D. (1998). Continuous modeling of lattice structures by homogenization. *Advances in Engineering Software*, 29(7-9):699–705.
- TRABUCHO, L. et VIANO, J.M. (1987). Derivation of generalized models for linear elastic beams by asymptotic-expansion method. *Comptes Rendus de l'Académie des sciences Série I-Mathématique*, 304(11):303–306.
- VERNA, P. (1991). *Modélisation continue des structures discrètes par homogénéisation : cas des treillis*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- WU, Y., LAI, Y. et ZHANG, Z.-Q. (2007). Effective medium theory for elastic metamaterials in two dimensions. *Physical Review B*, 76(20):205313.
- YONG, Y. et LIN, Y. K. (1989). Propagation of decaying waves in periodic and piecewise periodic structures of finite length. *Journal of Sound and Vibration*, 129(1):99–118.
- YOON, Y.-S. et STAFFORD SMITH, B. (1995). Estimating period ratio for predicting torsional coupling. *Engineering Structures*, 17(1):52 – 62.
- ZALKA, K. A. (2001). A simplified method for calculation of the natural frequencies of wall-frame buildings. *Engineering Structures*, 23(12):1544–1555.