



**HAL**  
open science

# Analyse non-linéaire des instabilités multiples aux interfaces frottantes : application au crissement de frein

Nicolas Coudeyras

► **To cite this version:**

Nicolas Coudeyras. Analyse non-linéaire des instabilités multiples aux interfaces frottantes : application au crissement de frein. Sciences de l'ingénieur [physics]. Ecole Centrale de Lyon, 2009. Français. NNT : 2009ECDL0035 . tel-00564493

**HAL Id: tel-00564493**

**<https://theses.hal.science/tel-00564493>**

Submitted on 9 Feb 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT**  
**de L'École Centrale de Lyon**

PRÉSENTÉE À  
**L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON**

SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE

PAR  
**Nicolas COUDEYRAS**

**ANALYSE NON-LINÉAIRE DES INSTABILITÉS MULTIPLES AUX INTERFACES  
FROTTANTES : APPLICATION AU CRISSEMENT DE FREIN**

Présentée et soutenue publiquement le 18 décembre 2009, devant le jury d'examen :

X. BOUTILLON, Directeur de recherche au CNRS, Laboratoire LMS, Ecole Polytechnique	Examineur
R. OHAYON, Professeur, Laboratoire MSSC, CNAM de Paris	Rapporteur
D. AUBRY, Professeur, Laboratoire MSSMat, École Centrale Paris	Rapporteur
S. NACIVET, Ingénieur modélisation numérique, PSA Peugeot Citroën	Examineur
L. BEAUNE, Resp. service modélisation numérique, PSA Peugeot Citroën	Membre invité
L. JÉZÉQUEL, Professeur, Laboratoire LTDS, École Centrale de Lyon	Directeur de thèse
J-J. SINOÛ, Maître de Conférences HDR, Laboratoire LTDS, École Centrale de Lyon	Directeur de thèse





## ECOLE CENTRALE DE LYON

DIRECTION DE LA RECHERCHE

### Liste des personnes Habilitées à Diriger des Recherches en poste à l'Ecole Centrale de Lyon

Nom-Prénom	Corps grade	Laboratoire ou à défaut département ECL	Etablissement
AURIOL Philippe	professeur	AMPERE	ECL
BEROUAL Abderrahmane	professeur	AMPERE	ECL
BURET François	maître de conférences	AMPERE	ECL
JAFFREZIC-RENAULT Nicole	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
KRÄHENBÜHL Laurent	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
MARTELET Claude	professeur	AMPERE	ECL
NICOLAS Alain	professeur	AMPERE	ECL
NICOLAS Laurent	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
SIMONET Pascal	chargé de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
THOMAS Gérard	professeur	AMPERE	ECL
VOLLAIRE Christian	maître de conférences	AMPERE	ECL

**Nbre Ampère 11**

HELLOUIN Yves	maître de conférences	DER EEA	ECL
LE HELLEY Michel	professeur	DER EEA	ECL

**Nbre DER EEA 2**

GUIRALDENQ Pierre	professeur émérite	DER STMS	ECL
VINCENT Léo	professeur	DER STMS	ECL

**Nbre DER STMS 2**

LOHEAC Jean-Pierre	maître de conférences	ICJ	ECL
MAITRE Jean-François	professeur émérite	ICJ	ECL
MARION Martine	professeur	ICJ	ECL
MOUSSAOUI Mohand	professeur	ICJ	ECL
MUSY François	maître de conférences	ICJ	ECL
ROUY MIRONESCU Elisabeth	professeur	ICJ	ECL
ZINE Abdel-Malek	maître de conférences	ICJ	ECL

**Nbre ICJ 7**

DAVID Bertrand	professeur	ICTT	ECL
----------------	------------	------	-----

**Nbre ICTT 1**

CALLARD Anne-Ségolène	maître de conférences	INL	ECL
CLOAREC Jean-Pierre	maître de conférences	INL	ECL
GAFFIOT Frédéric	professeur	INL	ECL
GAGNAIRE Alain	maître de conférences	INL	ECL
GARRIGUES Michel	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
GENDRY Michel	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
GRENET Geneviève	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
HOLLINGER Guy	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL



JOSEPH Jacques	professeur	INL	ECL
KRAWCZYK Stanislas	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
LETARTRE Xavier	chargé de recherche	INL	CNRS/ECL
MARTIN Jean-René	professeur émérite	INL	ECL
O'CONNOR Ian	maître de conférences	INL	ECL
PHANER-GOUTORBE Magali	professeur	INL	ECL
ROBACH Yves	professeur	INL	ECL
SAINT-GIRONS Guillaume	chargé de recherche	INL	CNRS/ECL
SEASSAL Christian	chargé de recherche	INL	CNRS/ECL
SOUTEYRAND Eliane	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
TARDY Jacques	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
VIKTOROVITCH Pierre	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL

**Nbre INL 20**

CHEN Liming	professeur	LIRIS	ECL
-------------	------------	-------	-----

**Nbre LIRIS 1**

BAILLY Christophe	professeur	LMFA	ECL
BERTOGLIO Jean-Pierre	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
BLANC-BENON Philippe	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
BOGEY Christophe	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CAMBON Claude	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CARRIERE Philippe	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CHAMPOUSSIN J-Claude	professeur émérite	LMFA	ECL
COMTE-BELLOT genevièvre	professeur émérite	LMFA	ECL
FERRAND Pascal	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
GALLAND Marie-Annick	maître de conférences	LMFA	ECL
GODEFERD Fabien	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
GOROKHOVSKI Mikhail	professeur	LMFA	ECL
HENRY Daniel	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
JEANDEL Denis	professeur	LMFA	ECL
JUVE Daniel	professeur	LMFA	ECL
LE RIBAUT Catherine	chargée de recherche	LMFA	CNRS/ECL
LEBOEUF Francis	professeur	LMFA	ECL
PERKINS Richard	professeur	LMFA	ECL
ROGER Michel	professeur	LMFA	ECL
SCOTT Julian	professeur	LMFA	ECL
SHAO Liang	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
SIMOENS Serge	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
TREBINJAC Isabelle	maître de conférences	LMFA	ECL

**Nbre LMFA 23**

BENAYOUN Stéphane	professeur	LTDS	ECL
CAMBOU Bernard	professeur	LTDS	ECL
COQUILLET Bernard	maître de conférences	LTDS	ECL
DANESCU Alexandre	maître de conférences	LTDS	ECL
FOUVRY Siegfried	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
GEORGES Jean-Marie	professeur émérite	LTDS	ECL
GUERRET Chrystelle	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
HERTZ Dominique	past	LTDS	ECL
ICHCHOU Mohamed	maître de conférences	LTDS	ECL
JEZEQUEL Louis	professeur	LTDS	ECL
JUVE Denyse	ingénieur de recherche	LTDS	ECL
KAPSA Philippe	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
LE BOT Alain	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL

<i>LOUBET Jean-Luc</i>	<i>directeur de recherche</i>	LTDS	CNRS/ECL
<i>MARTIN Jean-Michel</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ECL
<i>MATHIA Thomas</i>	<i>directeur de recherche</i>	LTDS	CNRS/ECL
<i>MAZUYER Denis</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ECL
<i>PERRET-LIAUDET Joël</i>	<i>maître de conférences</i>	LTDS	ECL
<i>SALVIA Michelle</i>	<i>maître de conférences</i>	LTDS	ECL
<i>SIDOROFF François</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ECL
<i>SINOUE Jean-Jacques</i>	<i>maître de conférences</i>	LTDS	ECL
<i>STREMSDOERFER Guy</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ECL
<i>THOUVEREZ Fabrice</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ECL
<i>TREHEUX Daniel</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ECL
<i>VANNES André-Bernard</i>	<i>professeur émérite</i>	LTDS	ECL

**Nbre LTDS 25**

Total Hdr ECL

91



« [...] car ce qui est difficile, est aussi beau, bon et grand. »

*Ludwig van Beethoven*



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de thèse, Monsieur Louis Jézéquel pour m'avoir proposé ce travail de recherche et Monsieur Jean-Jacques Sinou pour son implication sans faille et sa contribution scientifique significative au cours de cette thèse transformant ainsi les difficultés rencontrées en opportunités.

J'adresse également mes profonds remerciements à Monsieur Samuel Nacivet pour m'avoir encadré au sein de la société PSA Peugeot Citroën, de son soutien et de ses conseils avisés qui m'ont guidés tout au long de cette thèse.

J'adresse toute ma reconnaissance à Monsieur Xavier Boutillon pour avoir accepté d'être le président de ce jury.

J'exprime également mes remerciements à Monsieur Denis Aubry et Monsieur Roger Ohayon pour avoir été les rapporteurs de ce mémoire.

Je ne saurais oublier Monsieur Laurent Beaune, chef du service modélisation numérique de la société PSA Peugeot Citroën, qui m'a accueilli dans son service et a suivi le déroulement des travaux durant trois ans. De même, je désire exprimer un grand merci à l'ensemble des membres du service de modélisation numérique qui a contribué à l'excellente atmosphère de travail et a su m'apporter une aide ponctuelle fructueuse lors de nos échanges.

Enfin, je souhaite remercier ma famille et les personnes qui me sont chères pour leur soutien continu au cours de cette thèse.



# Résumé

Le crissement des freins à disque est un phénomène sonore indésirable dû au frottement des garnitures sur le disque. Ce système dynamique autonome non-linéaire génère des vibrations auto-entretenues responsables d'émissions sonores pouvant atteindre 110dB. Les études actuelles se limitent principalement à l'analyse de stabilité qui surestime généralement le domaine d'instabilité.

L'objectif de cette thèse est donc d'étendre l'étude du crissement de frein au domaine non-linéaire à l'aide de méthodes moins coûteuses numériquement que les traditionnelles méthodes temporelles.

Dans un premier temps, nous nous sommes tout d'abord intéressé à la modélisation simplifiée d'un système de frein composé d'une garniture et d'un disque de frein. Nous avons réduit ces éléments aux interfaces de contact permettant ainsi de garder les non-linéarités tout en traitant des modèles de plus petite taille.

Dans un second temps, nous avons développé une méthode non-linéaire originale qui, basée sur les méthodes classiques de balance harmonique, permet de calculer la réponse dynamique des systèmes autonomes non-linéaires. Cette méthode, applicable sur des systèmes soumis à un ou plusieurs modes instables, est capable de calculer des réponses périodiques ou pseudo-périodiques.

Enfin nous avons appliqué cette méthode sur le modèle réduit de frein et montré son avantage en terme de coût numérique. Cette étude a également permis de mettre en avant des phénomènes non-linéaires complexes tels que l'augmentation des amplitudes avec l'ajout d'amortissement ou encore la disparition d'un mode instable dans la réponse dynamique.

**Mots clés :** crissement de frein, stabilité, contact unilatéral avec frottement, méthode non-linéaire, cycle limite, multi-fréquentiel.





# Abstract

Disc brake squeal is an undesirable noise generated by the friction at the disc/pad contact interfaces. This nonlinear autonomous dynamic system is subjected to self-excited vibrations that are responsible for squeal noise up to 110dB. Disc brake squeal phenomenon is generally investigated by a stability analysis only, that has a tendency to over-estimate the instability domain.

In this view, the objective of this thesis is thus to extend the brake squeal study to the nonlinear domain using less time consuming nonlinear methods than the traditional temporal methods.

Initially, we were interested in a simplified modeling of a brake system made up of a pad and a disc brake. Both elements were reduced on their contact interfaces thus allowing to keep nonlinearities while treating moreover small size models.

Secondly, we spread an original nonlinear method based on the common harmonic balance methods. It makes it possible to compute periodic or pseudo-periodic dynamic responses of an autonomous nonlinear system depend upon it is subjected to one or more unstable modes.

Finally, we applied this method to the reduced brake model and showed its computational advantage compared to temporal methods. This study has thrown light on complex nonlinear phenomena such as the growing vibration amplitudes while damping increases or the disappearance of an unstable mode in the dynamic response.

**Keywords :** brake squeal, stability, unilateral contact with friction, nonlinear method, limit cycle, multi-frequency.



# Introduction

## Contexte industriel et scientifique

Le crissement des freins à disque est un sérieux challenge pour les constructeurs automobiles et les fournisseurs de systèmes de frein. Avec d'une part des performances de freinage sans cesse en progression et d'autre part des critères de confort acoustique de plus en plus contraignants, le crissement de frein génère un coût de garantie non négligeable et détériore la qualité perçue et l'image de marque. La clientèle a en effet tendance à associer le crissement à un défaut de freinage impactant la sécurité du véhicule. Néanmoins, malgré le niveau sonore élevé atteignant parfois 110 dB, le crissement de frein n'a pas d'incidence sur les performances de freinage car l'énergie en jeu est infime comparée à l'énergie de dissipation thermique.

La problématique du crissement des freins à disque n'est pas nouvelle dans la communauté scientifique et dans le domaine des transports ferroviaire, aéronautique ou automobile. Un nombre considérable de travaux de modélisation et expérimentaux ont été menés ces dernières décennies pour tenter de comprendre le mécanisme du crissement de frein. Cela reste un sujet d'actualité étant donné le renforcement des contraintes environnementales d'une part et la nécessité d'améliorer la qualité perçue d'autre part. De part la diversité des modèles de frein et des multiples configurations sur les véhicules, il est nécessaire de réaliser des études quasi-systématiques en phase de conception.

Classiquement, le crissement est perçu comme une manifestation acoustique résultant de vibrations auto-entretenues des composants du système de frein dues à la présence d'une position d'équilibre instable induite par le frottement qui a lieu à l'interface des plaquettes de frein et du disque. Si le frottement a pour fonction de dissiper l'énergie cinétique en énergie thermique, il a un effet sur la dynamique vibratoire du système en générant des instabilités capables de mobiliser des modes de vibration responsables du crissement. Les nombreux essais expérimentaux et les travaux de modélisation mettent en avant l'origine du crissement comme étant une instabilité géométrique ou un couplage de modes du système. Ainsi une position d'équilibre rendue instable va se mettre à osciller avec une croissance exponentielle de ses vibrations jusqu'à atteindre un régime dynamique stationnaire appelé *cycle limite*.

Aussi, avec la puissance des ordinateurs toujours croissante et la capacité de modélisation de nombreux logiciels, l'analyse des vibrations par frottement ne se résume plus à des systèmes dynamiques à seulement quelques degrés de libertés (ddl) résolus analytiquement mais à des modèles plus complexes et plus riches. Ainsi, la modélisation par Éléments Finis (EF) d'un système de frein automobile est monnaie courante, chaque composant pouvant être représenté finement en termes de géométrie et de caractéristique matériau. Aussi, les lois régissant le contact et le frottement ont la possibilité de tenir

compte des phénomènes thermo-mécaniques, d'usure et de considérer la présence de troisième corps sur les surfaces frottantes.

Généralement, l'analyse du crissement consiste à étudier la stabilité de l'équilibre glissant *via* le calcul des modes propres complexes. Cependant, la richesse modale des modèles EF génère une multitude de couplages de modes. Or, certains seulement vont significativement générer des vibrations responsables du crissement et leur identification est impossible. Ainsi cette première étape d'analyse linéaire peut être complétée par une analyse transitoire qui tient compte des non-linéarités du système et renseigne à la fois sur les fréquences caractéristiques de la solution dynamique, les amplitudes de vibration et sur le mécanisme de sélection des modes. L'analyse plus fine permise par la combinaison des deux méthodes (études des modes couplés et analyse transitoire) rend les méthodes numériques capitales pour prédire le crissement de frein. Néanmoins, une analyse transitoire effectuée sur des systèmes dynamiques qui sont non-linéaires, autonomes et de taille importante est très consommatrice de temps CPU. C'est une des raisons de sa faible diffusion dans l'industrie où seule l'analyse de stabilité est privilégiée.

C'est pourquoi des étapes de corrélation-recalage avec des essais physiques sont effectuées permettant l'identification des fréquences qui ressortent effectivement lors d'une phase de freinage. Ces essais, bien qu'indispensables avant toute mise en production d'une définition finale d'un système de freinage, sont relativement coûteux et longs à mettre en place. De plus, ils nécessitent la disponibilité des pièces physiques ce qui n'est pas toujours possible lors de la phase de conception.

Ainsi il semble aujourd'hui indispensable de poursuivre le développement d'outils d'aide à la conception permettant une meilleure prédictivité du crissement de frein pour d'une part limiter les essais et d'autre part itérer plus rapidement sur les solutions à mettre en place afin de réduire voire de supprimer de façon robuste le crissement de frein dans un contexte global de réduction des coûts de développement et d'accélération des projets. C'est dans ce cadre que s'inscrit cette thèse qui a pour but d'étendre l'analyse du crissement de frein dans le domaine non-linéaire et ainsi, tenter de répondre à la problématique suivante : prédire et caractériser rapidement et efficacement la réponse stationnaire d'un système autonome non-linéaire *via* une méthode non-linéaire spécifique.

L'objectif de ce travail est donc de développer une méthodologie numérique rendant accessible le calcul de l'état dynamique stationnaire d'un système de frein en situation d'instabilité. Pour cela deux leviers sont identifiés pour permettre la réduction des temps de calculs : la réduction des modèles numériques et l'utilisation de méthodes non-linéaires qui donnent une solution approchée avec des temps de calculs réduits.

## Plan du mémoire

Ce mémoire se décompose en six chapitres. Tout d'abord, le système de frein automobile est présenté au chapitre 1 où les différentes technologies sont exposées.

Au chapitre 2, une synthèse des études faites sur les systèmes frottants et des mécanismes d'instabilité qui mènent aux vibrations est exposée. Les modélisations numériques et les essais expérimentaux montrent que le crissement de frein est dû à un couplage de mode suite à la perte de l'équilibre d'une solution statique.

---

Le chapitre 3 définit le cadre mathématique du modèle de frein. Nous nous intéressons à la discrétisation spatiale par la méthode éléments finis des équations des milieux continus déformables avec la prise en compte du contact unilatéral et du frottement. Puis nous nous intéressons aux méthodes de réduction et nous étudions leur adéquation avec la gestion du contact unilatéral et du frottement entre les différents composants. Enfin, nous définissons le modèle de frein tel qu'il sera utilisé tout au long de ce mémoire.

Le chapitre 4 présente le concept de stabilité des solutions des systèmes autonomes non-linéaires, qu'elles soient de type points-fixes ou dynamiques. On aborde la stabilité au sens de Lyapunov puis la notion de bifurcation qui correspond à la transition entre un équilibre stable et un équilibre instable. Ces notions sont fondamentales dans l'étude du crissement de frein puisqu'il s'agit d'une transformation où la solution passe d'un équilibre instable de type point fixe à une orbite bifurquée. On aborde également la méthode des multiplicateurs de Floquet et les sections de Poincaré qui permettent la caractérisation des solutions dynamiques. Enfin, nous étudions la stabilité du modèle présenté au chapitre 3 et montrons qu'un ou deux modes instables sont exacerbés selon les paramètres du système.

Dans le chapitre 5 nous exposons une méthode originale de balance harmonique qui permet le calcul des cycles limites des systèmes autonomes non-linéaires soumis à un unique mode instable. Cette méthode, qui est basée sur les méthodes de balance harmonique traditionnelles, se distingue par l'ajout d'une contrainte et d'une inconnue supplémentaires qui permettent de calculer systématiquement la solution périodique du système. Les résultats et les performances numériques de cette méthode sont comparés à des analyses temporelles classiques. Enfin des analyses paramétriques sont effectuées et montrent le comportement non-linéaire relativement complexe des systèmes autonomes non-linéaires.

L'objet du chapitre 6 est une généralisation de la méthode originale de balance harmonique vue au chapitre précédent et permet de calculer la réponse pseudo-périodique d'un système autonome non-linéaire sujet à plusieurs modes instables. Cette méthode généralisée est appliquée sur le modèle de frein comportant deux modes instables vu au chapitre 4.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Présentation du système de freinage</b>	<b>9</b>
1.1 Bref historique . . . . .	9
1.2 Freins à tambour . . . . .	9
1.3 Freins à disque . . . . .	12
1.3.1 Étrier . . . . .	13
1.3.2 Disque . . . . .	14
1.3.3 Plaquettes . . . . .	15
1.4 Conclusion . . . . .	15
<b>2 Etat de l'art des systèmes frottants - Application au crissement de frein</b>	<b>17</b>
2.1 Définition du crissement de frein . . . . .	17
2.2 Étude des bruits engendrés par le frottement . . . . .	19
2.2.1 Analyse expérimentale . . . . .	21
2.2.2 Phénoménologie et modélisation des vibrations induites par le frottement . . . . .	24
2.2.3 Modélisation éléments finis du crissement et analyse mathématique de l'instabilité . . . . .	31
2.3 Synthèse . . . . .	35
<b>3 Modélisation du système de frein en présence de contact frottant</b>	<b>37</b>
3.1 Modélisation . . . . .	37
3.1.1 Formulation continue . . . . .	37
3.1.2 Formulation variationnelle du problème dynamique . . . . .	40
3.1.3 Construction de l'amortissement . . . . .	44
3.2 Réduction de modèle . . . . .	46
3.2.1 Méthode de Ritz . . . . .	47
3.2.2 Troncature modale . . . . .	48
3.2.3 Condensation statique de Guyan . . . . .	48
3.2.4 Méthodes à interfaces fixes : Réduction de Craig & Bampton . . . . .	49
3.2.5 Méthodes à interfaces libres . . . . .	51
3.2.6 Autres méthodes . . . . .	53
3.2.7 Choix de la méthode de réduction . . . . .	54
3.2.8 Validité des modèles réduits . . . . .	54
3.3 Application à la modélisation du système de frein . . . . .	55



3.3.1	Modèle Éléments Finis . . . . .	55
3.3.2	Réduction de modèle : Choix des ddls d'interface . . . . .	56
3.3.3	Gestion du contact . . . . .	61
3.3.4	Synthèse de la réduction de modèle . . . . .	62
3.4	Conclusion . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Systèmes dynamiques en situation de glissement : analyse de la stabilité</b>	<b>65</b>
4.1	Nature des solutions . . . . .	65
4.2	Stabilité des points fixes . . . . .	66
4.3	Bifurcation des points fixes . . . . .	70
4.4	Stabilité des solutions périodiques . . . . .	71
4.4.1	Théorie de Floquet . . . . .	73
4.4.2	Section de Poincaré . . . . .	76
4.5	Synthèse . . . . .	77
4.6	Application au système de frein . . . . .	78
4.6.1	Modèle à 1 mode instable . . . . .	80
4.6.2	Modèle à 2 mode instable . . . . .	84
4.7	Conclusion . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Analyse non-linéaire des systèmes frottants autonomes</b>	<b>87</b>
5.1	Panorama des méthodes de résolution des systèmes dynamiques . . . . .	87
5.2	Méthode de la balance harmonique . . . . .	88
5.2.1	Mise en équations . . . . .	88
5.2.2	Traitement des efforts non-linéaires . . . . .	90
5.2.3	Synthèse de la méthode HBM . . . . .	92
5.3	Contrainte d'optimisation pour les systèmes autonomes . . . . .	93
5.3.1	Equation supplémentaire . . . . .	94
5.3.2	Inconnue supplémentaire . . . . .	96
5.3.3	Synthèse de la HBM adaptée aux systèmes autonomes . . . . .	96
5.4	Définition des conditions initiales . . . . .	98
5.4.1	Initialisation des coefficients de Fourier . . . . .	98
5.4.2	Initialisation de la fréquence . . . . .	98
5.5	Condensation sur les nœuds non-linéaires du système . . . . .	98
5.6	Condensation sur les nœuds en vis-à-vis . . . . .	99
5.7	Résultats numériques . . . . .	100
5.7.1	Validation des calculs et influence du nombre d'harmoniques . . . . .	100
5.7.2	Évolutions paramétriques . . . . .	108
5.7.3	Conclusion des analyses paramétriques . . . . .	118
5.8	Conclusion . . . . .	120
<b>6</b>	<b>Balance harmonique contrainte appliquée aux systèmes multi-fréquentiels</b>	<b>121</b>
6.1	Concepts généraux . . . . .	121
6.2	Adaptation aux systèmes autonomes . . . . .	126

---

6.2.1	Initialisation . . . . .	126
6.3	Résultats . . . . .	127
6.4	Évolution de la réponse dynamique en fonction du frottement . . . . .	134
6.5	Conclusion . . . . .	137
<b>Conclusion</b>		<b>139</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>151</b>
<b>Publications</b>		<b>154</b>
<b>A Méthodes itératives de résolution</b>		<b>157</b>
A.1	Méthode du gradient . . . . .	157
A.2	Méthode du gradient conjugué . . . . .	158
A.3	Méthodes de Newton et Quasi-Newton . . . . .	158
A.4	Méthode de Gauss-Newton . . . . .	160
A.5	Méthode des Régions de Confiance (Trust-Region) . . . . .	161
A.6	Synthèse des méthodes d'optimisations . . . . .	163
<b>B Méthodes temporelles</b>		<b>165</b>
B.1	Équations différentielles du premier ordre . . . . .	166
B.1.1	Méthodes à pas unique . . . . .	166
B.1.2	Méthodes à pas multiples . . . . .	167
B.2	Équations différentielles du deuxième ordre . . . . .	168
B.3	Synthèse . . . . .	170



# Chapitre 1

## Présentation du système de freinage

Le système de freinage automobile a pour principale fonction de transformer l'énergie cinétique du véhicule en énergie thermique. Si le véhicule est naturellement ralenti par les résistances aérodynamiques et de roulement ainsi que par les frictions dans ses organes mécaniques (moteur, transmission), elles sont insuffisantes pour stopper brusquement le véhicule en cas d'urgence. L'obtention d'un arrêt total et d'une décélération maximale nécessite un système mécanique à friction agissant sur les éléments en rotation, même s'il existe, dans le domaine aéronautique notamment, d'autres moyens de ralentissement, efficaces uniquement à haute vitesse, comme les parachutes, les inverseurs de poussées ou encore les volets aérodynamiques.

Dans le passé, quelques véhicules disposaient d'un système de freinage directement sur la transmission, mais aujourd'hui, les freins sont exclusivement placés dans chaque roue (Figure 1.1), même si exceptionnellement on peut trouver quelques véhicules où le frein est situé sur l'arbre de transmission en sortie de différentiel afin de réduire les masses non suspendues.

### 1.1 Bref historique

Les premiers véhicules ont repris des véhicules hippomobiles les freins à sabots garnis de cuir, de bois ou de caoutchouc agissant à la périphérie des roues afin de bénéficier d'un diamètre de frottement maximal. Ce système existe encore aujourd'hui dans le domaine ferroviaire où certains wagons sont équipés de sabots métalliques qui frottent sur la piste de roulement de la roue. Néanmoins ces systèmes sont peu compatibles avec des roues automobiles garnies de pneumatiques et/ou de bande en caoutchouc. Ce type de freinage a inspiré les freins à tambours tels que nous les connaissons aujourd'hui. Il a fallu attendre les années 1950 pour que les freins à disques apparaissent, entraînant de meilleures performances de freinage. A partir des années 1970, les premiers disques en carbone ont été utilisés par l'industrie aéronautique puis par la compétition automobile, notamment en Formule 1.

### 1.2 Freins à tambour

Les freins à tambours étaient utilisés sur quasiment tous les véhicules pendant plus d'un demi-siècle jusqu'à l'apparition des freins à disque. Ils sont néanmoins toujours d'actualité sur les essieux arrières de petits véhicules à faible coût. Ce type de frein est inséré à l'intérieur de la roue et a l'avantage

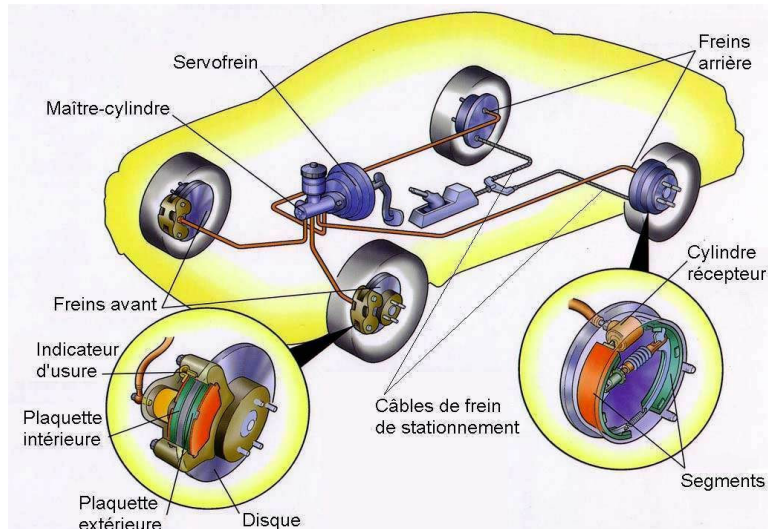


FIGURE 1.1 – Système de freinage automobile

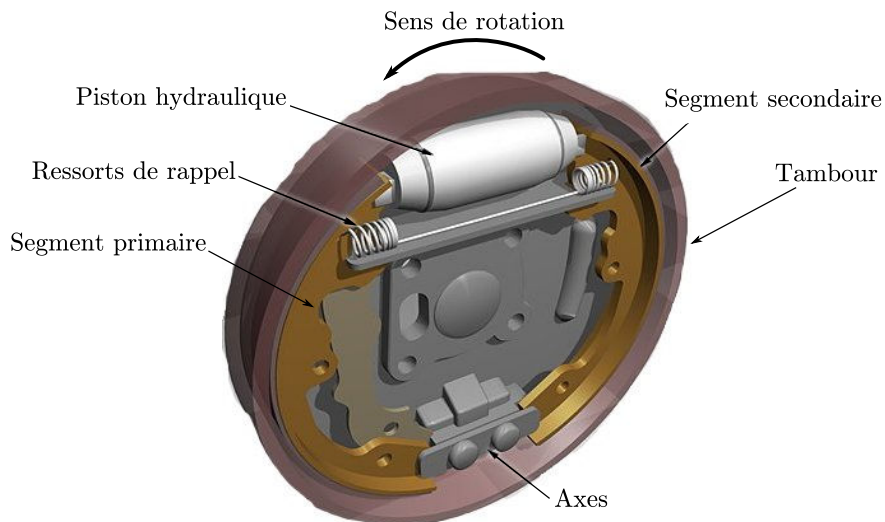


FIGURE 1.2 – Vue 3D d'un frein à tambour

de maintenir les surfaces de friction à l'abri des projections d'eau et de boue. Grâce à sa capacité d'auto-serrage, il ne nécessite qu'une force modérée d'actionnement et peut donc être utilisé sur des véhicules légers sans dispositif d'assistance. De plus, il est parfaitement adapté à la fonction de frein de stationnement.

### Principe de fonctionnement

Le tambour est solidaire du moyeu de roue et tourne avec lui. Les segments et les composants qui génèrent la force de freinage sont généralement montés sur un plateau circulaire en tôle emboutie nommé *flasque* qui ferme le tambour et est fixé rigidement au porte-moyeu. Des ressorts hélicoïdaux travaillant en traction connectent les deux segments et les empêchent de frotter contre la couronne du tambour lorsque les freins ne sont pas actionnés (Figure 1.2).

Différentes façons d'articuler et de commander les deux segments sont possibles. Suivant la confi-

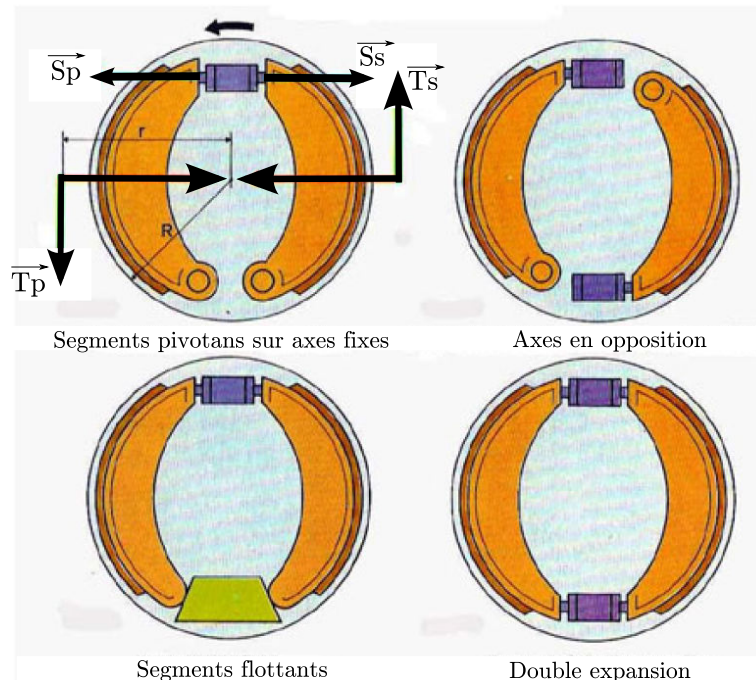


FIGURE 1.3 – Différentes technologies

guration adoptée, l'effet d'auto-serrage est : plus ou moins fort, obtenu dans un seul sens de rotation ou dans les deux, sur une seule des mâchoires ou sur les deux (Figure 1.3). Les deux segments sont actionnés par un piston qui génère une force de serrage  $\vec{S}_p = -\vec{S}_s$ . Une force tangentielle  $\vec{T}_p$  due à la rotation du tambour qui agit sur le segment amont (primaire) engendre un moment sur son axe de pivotement qui est dans le même sens que la force de serrage  $\vec{S}_p$  : c'est l'auto-serrage. Sur le segment aval (ou secondaire), la force tangentielle  $\vec{T}_s$  s'oppose à l'action de la force de serrage  $\vec{S}_s$  : c'est l'auto-desserrage. Le serrage de la mâchoire secondaire est donc plus faible que le serrage de la mâchoire primaire ce qui entraîne une usure inégale puisque les freins sont généralement utilisés en marche avant. Ainsi il existe d'autres configurations permettant de rendre l'usure égale et une puissance de freinage accrue. Si les axes des segments sont intervertis, l'auto-serrage agit sur les deux mâchoires, mais n'est effectif que dans un seul sens de rotation du tambour. On peut également remplacer les pivots des deux segments par un palier flottant. Au freinage, l'extrémité aval du segment primaire s'appuie sur le palier et pousse l'extrémité amont du segment secondaire, qui devient auto-serrant lui aussi. Ce montage est valable pour les deux sens de rotation et est la technique la plus répandue aujourd'hui. Une autre configuration consiste également à serrer les deux mâchoires à l'aide de deux cylindres hydrauliques à leur extrémité, mais ce type de frein est très peu employé en raison de son rapport efficacité/prix peu favorable.

Les tambours actuels montés sur l'essieu arrière sont généralement en fonte. Quant aux mâchoires, elles sont en tôle d'acier soudée ou en aluminium, et revêtues d'une garniture de frottement à base de laine d'acier, de cuivre et de coke en poudre ou encore d'oxyde de fer. La principale caractéristique requise est un coefficient de frottement relativement constant avec la température et assez élevé, de l'ordre de 0.5.

Les freins à tambour sont encore bien répandus aujourd'hui sur l'essieu arrière des véhicules légers, aux performances modestes.

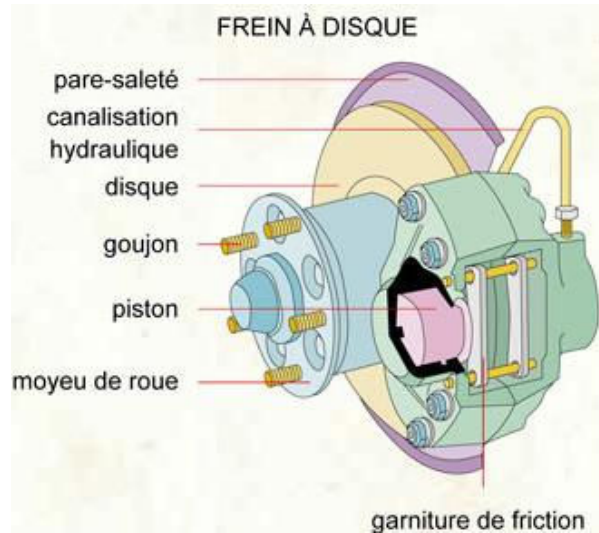
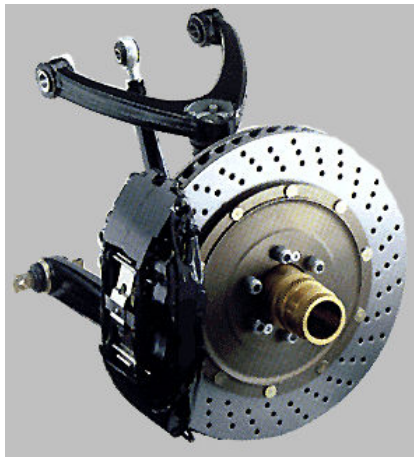


FIGURE 1.4 – Éléments d'un frein à disque



(a) Frein à disque automobile



(b) Frein à disque aéronautique

FIGURE 1.5 – Exemples de freins à disque

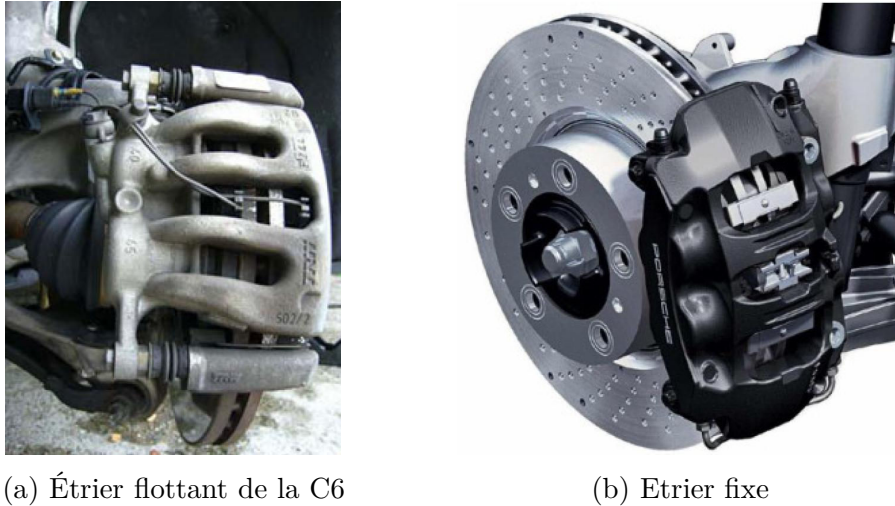
### 1.3 Freins à disque

Les freins à disque sont le seul moyen de stopper efficacement des véhicules dont la masse devient de plus en plus importante avec des performances pures en constante augmentation et où les exigences de sécurité se renforcent régulièrement. Typiquement, la puissance de freinage est généralement au moins 10 fois supérieure à celle du moteur. De plus, ces systèmes permettent de mieux contrôler la puissance de freinage nécessaire et sont maintenant utilisés pour l'assistance au contrôle du véhicule (système ESP) en combinaison avec d'autres composants du véhicule (moteur, direction...).

Un frein à disque est composé d'un étrier vissé rigidement au porte-moyeu et d'un disque, inséré entre le moyeu et la roue. L'étrier supporte les plaquettes qui, sous l'action de cylindres hydrauliques, pincent le disque et freinent sa rotation (Figure 1.4).

Après un freinage, le rappel des pistons est ordinairement assuré par l'élasticité de leur joint annulaire d'étanchéité en caoutchouc. Comme il n'y a pas d'effet d'autoserrage, les micro-vibrations et micro-mouvements transversaux du disque, induits notamment par le jeu des roulements de roue,





(a) Étrier flottant de la C6

(b) Etrier fixe

FIGURE 1.6 – Types d'étriers

suffisent à repousser les plaquettes contre leur piston. Elles frôlent donc toujours le disque de très près, ce qui peut dans certains cas générer des vibrations ressenties par le conducteur, connues sous l'appellation de bourdonnement ou ronflement (*hum, moan*). Si les systèmes de frein à disque sont utilisés dans tous les domaines du transport (automobile, ferroviaire et aéronautique), les caractéristiques techniques dépendent des exigences de freinage ce qui donne des technologies différentes (Figure 1.5).

### 1.3.1 Étrier

L'étrier peut être fixe ou flottant. Un étrier fixe doit forcément comporter au moins un piston de chaque côté du disque alors qu'un seul piston est nécessaire avec un étrier flottant (Figure 1.6). Dans ce dernier cas, la plaquette côté extérieur est solidaire de l'étrier, étant plaquée contre le disque par le coulisement de l'étrier lui-même dans un porte-étrier. Lorsque le cylindre hydraulique est mis en pression, le piston pousse la plaquette côté intérieur contre le disque. A son contact, la réaction tire l'étrier et donc la plaquette extérieure contre l'autre face du disque. Le coulisement de l'étrier dans le porte-étrier s'effectue sur des axes (bielles) ou dans des glissières. Les différents jeux de l'ensemble étrier-bielles-plaquettes permettent d'assurer un contact franc entre la plaquette et le disque et une répartition de la pression la plus uniforme possible.

L'étrier flottant est plus léger et moins large vers l'extérieur du véhicule, ce qui facilite son montage dans la roue. C'est une solution économique et ce type de montage est donc massivement répandu dans la production automobile actuelle. Seuls les véhicules de compétition ou associés à de très hautes performances bénéficient d'étriers fixes.

Naturellement, les étriers, comme tous les composants non suspendus, doivent être le plus léger possible. Ils sont habituellement coulés en alliage d'aluminium, parfois en alliage de magnésium ou en fonte. Le porte-étrier peut être en fonte et l'étrier en alliage léger.

Le diamètre des pistons récepteurs hydrauliques dans les étriers est plus grand que celui des pistons actionnant les segments des freins à tambour et la pression dans le circuit hydraulique peut dépasser 100 bars alors que 15 bars suffisent avec des freins à tambour.





FIGURE 1.7 – Disque carbone-céramique

### 1.3.2 Disque

Le disque de frein est fixé solidairement sur le moyeu et tourne avec lui. Le disque est généralement d'une seule matière, la plupart du temps en fonte grise qui est très résistante à l'usure. Il existe néanmoins dans le cas de véhicules à hautes performances des disques bi-matière avec un moyeu (ou bol) en aluminium ou acier et une piste de freinage (couronne) en carbone-céramique vissée ou rivetée (Figure 1.7). Ces disques sont particulièrement coûteux mais plus légers et plus résistants à l'usure, à la corrosion et aux hautes températures. Un disque comporte une face de fixation au centre qui vient au contact du moyeu de la roue. A la périphérie, se trouve la piste de freinage où les plaquettes viennent frotter pour générer la force de freinage. Pour les véhicules qui ne nécessitent pas des puissances de freinage importantes, le disque est généralement plein. Néanmoins, il est courant de trouver sur le train avant des disques ventilés, où des canaux internes aspirent l'air par le centre et le refoulent à la périphérie ce qui améliore la capacité de refroidissement du système de freinage. En effet, malgré la simplicité apparente d'un disque, ce dernier doit être capable de supporter de forts gradients de température tout en ayant une longévité proche de celle du véhicule. Une accumulation trop importante de chaleur à la surface du disque peut non seulement le déformer, entraînant un voile et donc un effort de freinage moins uniforme, mais aussi une perte d'efficacité du freinage due à la chute du coefficient de frottement avec l'échauffement (*fading*). Enfin, le phénomène de *vapeur-lock* peut intervenir lorsque le liquide de frein qui actionne le piston atteint son point d'ébullition et se traduit par un enfoncement prononcé de la pédale de frein. On peut également trouver des disques perforés qui permettent de diminuer la masse tout en assurant une meilleure évacuation de l'eau et des poussières.

Les disques en carbone sont quasiment uniquement réservés aux véhicules de compétition : ils ne sont efficaces qu'à de très hautes températures et par conséquent, pour des puissances de freinage importantes, ce qui est peu conciliable avec une utilisation quotidienne. De plus ils sont économiquement incompatibles avec une production de masse.

### 1.3.3 Plaquettes

Les plaquettes de frein sont composées d'une plaque en métal relativement rigide sur laquelle est collée une garniture, semblable à celle que l'on peut trouver dans les freins à tambour. Elle est toutefois soumise à des pressions plus élevées, la surface de contact étant plus réduite. La garniture est l'élément d'usure d'un système de frein et sa périodicité de changement est plus courte que celle du disque. La surface d'une garniture est très réduite comparativement à la puissance de freinage qu'elle doit fournir. Elle doit avoir de bonnes propriétés thermo-mécaniques et également fournir un coefficient de frottement relativement stable avec la température afin d'assurer un freinage le plus constant possible. Si la rigidité de la garniture est relativement faible, de l'ordre de quelques  $GPa$ , la plaque métallique au dos de la garniture se doit d'être relativement rigide d'une part pour transmettre l'effort provenant du piston hydraulique et d'autre part pour répartir la pression le plus uniformément possible sur l'ensemble de la surface de la garniture. Cela permet une usure uniforme de la garniture, rendant le freinage constant au cours du temps et une répartition optimale du flux de chaleur.

## 1.4 Conclusion

Ce chapitre a permis de montrer les principales technologies de frein couramment utilisées sur les véhicules de tourisme. Les freins à tambour ont été largement répandus au début du siècle mais les freins à disque les ont supplantés dans la majorité de la production automobile actuelle en raison de leur performances beaucoup plus importantes, gage de sécurité active accrue. Si cette technologie est bien maîtrisée aujourd'hui, elle engendre de part sa nature des problèmes environnementaux. Un des plus connus et des plus courants est la génération de bruit lors des phases de freinage, qui touche aussi bien le domaine automobile que le domaine ferroviaire (crissement des freins de TGV) ou bien encore le domaine aéronautique. Ces problèmes font toujours l'objet de recherches approfondies dans les milieux scientifique et industriel.



## Chapitre 2

# Etat de l'art des systèmes frottants - Application au crissement de frein

Ce chapitre fait une synthèse des travaux menés sur les bruits engendrés par le frottement en se focalisant sur la problématique du crissement de frein.

### 2.1 Définition du crissement de frein

Le système de frein présente une certaine complexité mécanique incluant de nombreuses pièces entraînant des jeux de fonctionnement, des contacts ponctuels ou surfaciques et du frottement. Ceci implique une grande richesse dynamique et en fait un bon candidat pour être générateur du bruit. Les différents types de bruit de freinage que l'on peut rencontrer sur des véhicules industriels sont nombreux et ne se résument pas au seul crissement de frein à disque. On distingue deux catégories regroupant les différentes nuisances sonores. La première catégorie considère les bruits à basse fréquence où les modes de corps rigides (vibrations forcées) des principaux constituants entrent en jeu. L'autre catégorie concerne les bruits à haute fréquence faisant intervenir les modes de vibration des éléments du système de frein et tombe dans la classe des vibrations auto-entretenues.

La nomenclature trouvée dans la littérature pour la caractérisation des bruits est très variée et permet de distinguer chaque type de bruit ainsi que son origine. Le schéma de la Figure 2.1 classe les différentes définitions des bruits de frein en fonction de la fréquence et de leur intensité sonore. La liste suivante donne la définition des principaux bruits de frein rencontrés sur les véhicules légers.

**Bourdonnement, ronflement (*hum moan*)** Le bourdonnement fait partie des bruits basses fréquences de forte amplitude dans une gamme de 100 à 500 Hz. Il est engendré par une rotation rigide de l'étrier autour d'un axe orthogonal à la surface de frottement du disque et un déplacement dans l'axe normal du disque. Ce couplage est assuré par un contact non franc entre la plaquette et le disque, comme par exemple un mauvais retrait des plaquettes ou une très faible pression de freinage. Les vibrations engendrées peuvent nuire à la sécurité du freinage et peuvent être ressenties par le conducteur. Ce type de bruit fait référence au phénomène de *sprag-slip* ou arc-boutement-glisement.

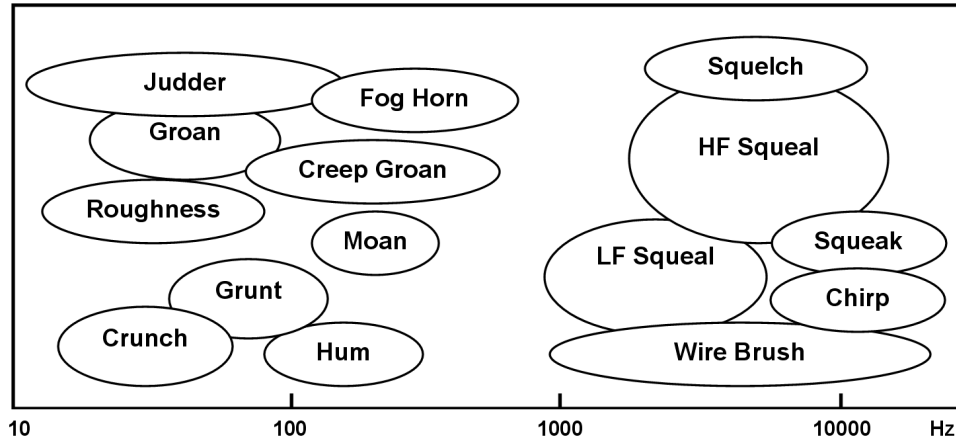


FIGURE 2.1 – Classification des bruits de frein [Aka02]

**Broutement (*groan*)** Le broutement se situe également dans la gamme des basses fréquences avec des vibrations inférieures à 100 Hz. Ce bruit a pour origine la dépendance du coefficient de frottement avec la vitesse relative entre deux corps frottants et apparaît à très faible vitesse. Lorsque le coefficient de frottement statique est supérieur au coefficient de frottement dynamique ou bien que le coefficient de frottement dynamique décroît avec la vitesse relative de glissement, on a un phénomène d'adhérence-glissement plus connu sous le nom de *stick-slip*. Les mouvements de corps rigide des éléments de freinage sont transmis *via* le châssis à la structure du véhicule et les vibrations sont ressenties par le conducteur. L'efficacité du freinage est amoindrie puisque le frein passe en permanence d'un état collant à un état glissant.

**Trépidations (*judder*)** Ces bruits se caractérisent par des vibrations inférieures à 500 Hz. Une déformation sur la surface du disque entraîne une force de frottement variable responsable des vibrations de la structure. Leur fréquence est donc liée à la vitesse de rotation du disque. Il existe deux types de déformation pour lesquelles les trépidations peuvent intervenir. Les déformations à froid (*cold judder*) où un défaut de planéité du disque entraîne un "obstacle" pour la garniture et donc un effort de frottement localement plus important de façon périodique. L'autre type de déformation est obtenue à chaud (*hot judder*) où le frottement des plaquettes sur le disque entraîne des phénomènes thermo-mécaniques du type bandes chaudes et hot spots où les conditions locales de contact sont modifiées (dilatations, caractéristiques matériaux) entraînant des variations de l'effort de frottement. Le hot judder est obtenu pour des freinages à haute vitesse et sur de longues périodes.

**Crissement de frein (*squeal*)** Le crissement tombe dans la classe des bruits hautes fréquences supérieures à 1 kHz. Il n'y a pas de définition exacte quant à sa caractérisation mais il est communément admis qu'il s'agit d'un bruit ayant un spectre de raies distinctes de forte intensité émises à haute fréquence par la vibration des différents composants du système de frein pendant une phase de freinage. On différencie le crissement basse fréquence lorsque la longueur de la garniture est inférieure à l'espace inter-diamètres nodaux du disque du crissement haute fréquence où la garniture vient se superposer à un des diamètres nodaux. Le crissement apparaît pour des freinages dits de type parking c'est à dire à faible vitesse (< 50 km/h) et faible pression de freinage (< 25 bars). Le crissement a un caractère



FIGURE 2.2 – Classification des bruits de frein [HOP98]

fugitif et les conditions d'occurrence sont très dépendantes d'une multitude de paramètres (structure et environnement). Il s'agit de phénomènes qui se produisent aux échelles micro- et macroscopique et qui affectent le crissement de frein. La caractérisation expérimentale et la modélisation numérique de ces événements ne sont pas triviales aujourd'hui. Contrairement aux manifestations sonores citées précédemment, le crissement n'affecte pas la sécurité du freinage. La part d'énergie dissipée par le crissement est extrêmement faible comparée à la puissance du freinage [KOP03]. D'après North [Nor72], le crissement serait même une preuve de l'efficacité de freinage.

## 2.2 Étude des bruits engendrés par le frottement

Le crissement de frein est intimement lié au phénomène de frottement qui a lieu entre les surfaces du disque et des plaquettes. Ce n'est en fait qu'une manifestation sonore parmi l'ensemble des bruits générés par le frottement de deux surfaces élastiques. Ce que l'on appelle le phénomène de vibrations induites par le frottement (*friction-induced vibration*) a intéressé nombre de chercheurs depuis des décennies et reste un sujet d'actualité. Akay [Aka02] fait une synthèse des bruits induits par le frottement. Ces derniers sont nombreux et vont des sons d'instruments de musique tels que le violon aux bruits provoquant de la gêne sonore comme par exemple l'extraction d'un clou dans une planche de bois (Figure 2.2). Il distingue un faible régime de contact où les éléments en contact vibrent à une de leur fréquence de résonance indépendamment des autres éléments d'un fort régime de contact générant un couplage entre les différents éléments et aboutissant à un nouveau système dynamique. Ainsi le cas du contact frottant peut être générateur d'instabilités et engendrer le phénomène de couplage de mode (*mode lock-in*) et la réponse dynamique associée est généralement une fréquence fondamentale du système couplé.

Les vibrations induites par le frottement sont relativement complexes à étudier et requièrent à la fois des connaissances en tribologie et en dynamique des structures. En effet, les deux disciplines sont fortement liées et permettent à la fois de comprendre le mécanisme des vibrations générées et l'interaction qu'il peut y avoir entre les différents composants mis en jeu. Le dynamiqueur s'intéresse à la réponse globale du système ainsi qu'aux paramètres macroscopiques clés permettant de réduire voire de supprimer les vibrations. Le tribologiste quant à lui se préoccupe des paramètres microscopiques au niveau de l'interface de contact et étudie la manière dont se déforment, s'usent et s'arrachent les différents constituants des matériaux pendant le glissement, de la nature de l'interface de contact, de sa topologie, etc. Le contact frottant engage des phénomènes à des échelles très diverses (Figure 2.3)

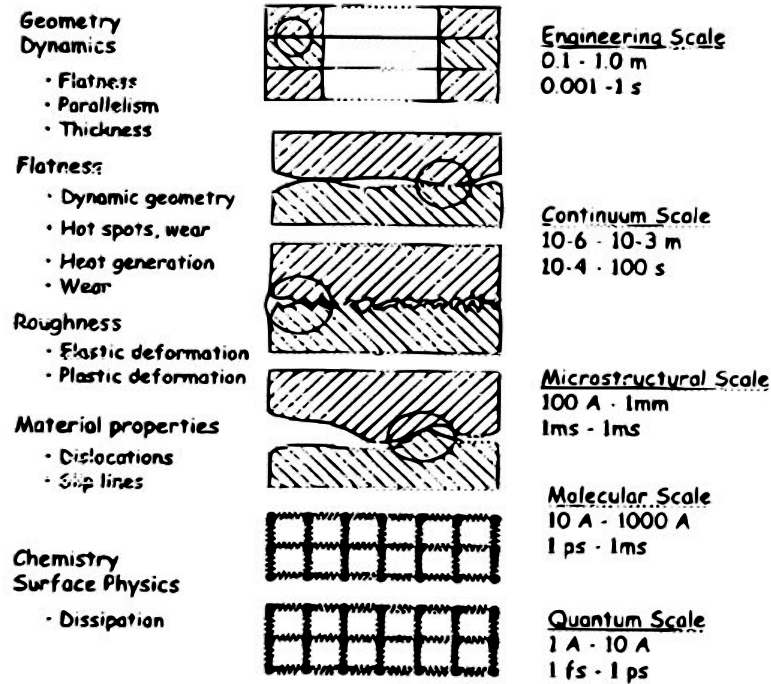


FIGURE 2.3 – Les différentes échelles de contact [Aka02]

et la modélisation ainsi que l'analyse phénoménologique est une tâche considérable.

L'étude du frottement sec (*dry friction*) n'est pas nouvelle et les premiers travaux remontent en 1699 avec les travaux d'Amontons et les lois de Coulomb en 1785. C'est alors que le concept de la force de frottement proportionnelle à la force normale  $F_f = \mu F_n$  a été établi quelque soit la vitesse de glissement ou de la surface de contact apparente. On sait aujourd'hui que cette loi n'est pas exhaustive de toutes les conditions de frottement. Les états de contact tels que les aspérités, les points durs, les déformations élastiques et plastiques à l'interface, les conditions environnementales comme l'humidité de l'air ou la température ambiante, l'usure des matériaux et la présence de poussières considérées parfois comme un troisième corps [God84] modifient les conditions de frottement. Les lois sous-jacentes régissant efforts de contact et de frottement sont donc loin d'être triviales. La garniture est composée d'une vingtaine de composants dont une matrice organique où sont inclus des fibres métalliques et autres additifs [EBJ02]. Ainsi le contact s'établit non pas sur toute la surface de la plaquette mais plutôt sur les fibres qui forment ce que l'on appelle des plateaux (*hard patch*) et représentent 15 à 20% de la surface totale de la garniture (Figure 2.4). La création de débris, l'usure, la température, l'historique du freinage sont autant d'éléments qui influencent directement le régime de contact et de frottement et rendent sa compréhension et sa modélisation complexe.

Les vibrations induites par le frottement ont motivé de très nombreux travaux de recherche depuis des décennies impliquant à la fois des scientifiques et des industriels. Il existe un grand nombre de publication traitant des vibrations induites par le frottement, citons à titre d'exemple Ibrahim [Ibr94a, Ibr94b] qui fait la synthèse des théories associées aux mécanismes frottants générant du bruit et présente des exemples où ces phénomènes apparaissent. Plus récemment Kinkaid et al. [KOP03] pro-

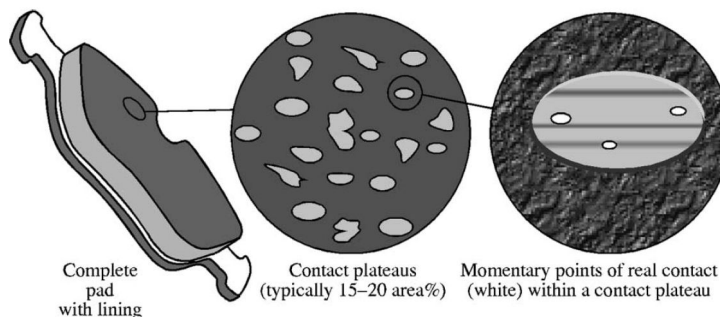


FIGURE 2.4 – Etat de surface d'une garniture à différentes échelles [EBJ02]

posent une revue détaillée sur le crissement des frein à disque et Ouyang et al. [ONYC05] se focalisent plus particulièrement sur les méthodes numériques associées.

### 2.2.1 Analyse expérimentale

L'analyse expérimentale du crissement des freins à disque a pour objectif de caractériser les occurrences de crissement en fonction des paramètres du système d'une part et d'étudier les vibrations des composants d'autre part. La mesure du crissement s'effectue soit sur un véhicule roulant avec un microphone et des accéléromètres placés sur les différents éléments du frein soit sur un banc dynamométrique reproduisant les conditions de roulement. L'intérêt de la seconde méthode est d'une part d'instrumenter plus finement le système en utilisant l'interférométrie ou la vibrométrie laser et d'autre part d'avoir des mesures plus facilement reproductibles. Pour les bancs les plus complets, le dispositif comprend 1/4 de train avant de véhicule où le frein complet est monté sur le moyeu, lui même relié aux éléments de suspension, et le freinage peut s'effectuer soit contre l'inertie soit à vitesse constante. Enfin une enceinte climatique recouvre le tout permettant de contrôler la température et l'hygrométrie des essais.

Il semble que les premières mesures de crissement remontent aux années 1960 avec les travaux de Fosberry et Holubecki [FH59, FH61] montrant que les occurrences de crissement coïncident généralement lorsque le coefficient de frottement décroît avec la vitesse relative de glissement. De plus ils obtiennent un nombre fini de fréquences de crissement pour un système de frein donné. Felske [FHM78] introduit l'usage de l'interférométrie laser qui permet de visualiser et mesurer les déformées opérationnelles du système de frein dans les 3 dimensions. L'image est obtenue sous forme de franges d'interférence et la forme du mode ainsi que les vitesses ou déplacements peuvent être mesurés. Cette technique, combinée avec des mesures accélérométriques, sera largement employée par la suite pour l'analyse des vibrations de freinage. Citons par exemple les travaux de Nishiwaki et al. [NHO89], Fieldhouse et Newcomb [FN91, FN93] ou encore Dunlap et al. [DRL99].

#### 2.2.1.1 Origine des vibrations et du bruit

Le crissement est dû à un couplage de modes par le frottement du système assemblé. L'augmentation de ce dernier favorise l'apparition du crissement et dans [BEJ99] ou [FHM78], les auteurs observent que l'usure de la plaquette augmente le frottement et donc les occurrences de crissement. L'ensemble du frein vibre de façon périodique à des fréquences discrètes. Le disque a une déformation proche d'un



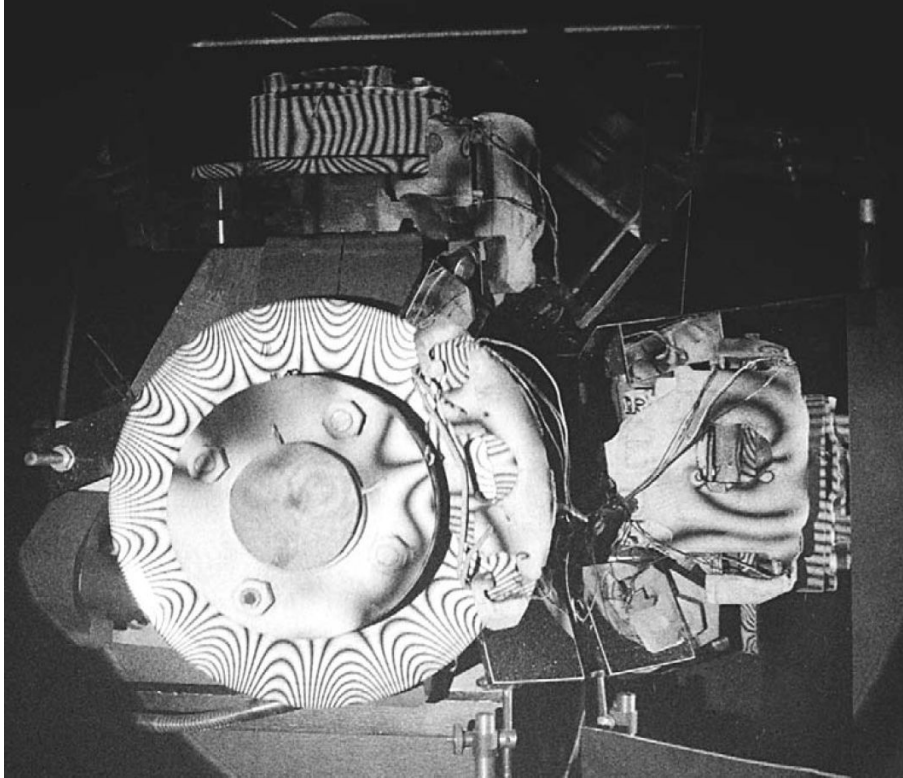


FIGURE 2.5 – Franges d'interférence d'un disque de frein crissant à 10750Hz et présentant 8 diamètres nodaux. Les ondes tournent dans le même sens que le disque à la fréquence de 1344 Hz environ [FN91]

de ses modes libres, qu'il s'agisse soit d'un mode de flexion composé de diamètres nodaux ou d'un mode dans le plan de la surface de contact du disque. Lorsque le disque exhibe des diamètres nodaux, l'onde peut être stationnaire ou instationnaire. Dans le cas de la Figure 2.5, l'onde de vibration se propage autour de l'axe du disque dans le même sens que la rotation à une fréquence de  $f_t = f/n$  avec  $f$  la fréquence de crissement et  $n$  le nombre de diamètres nodaux. Reeves et al. [RTE00] reprennent les résultats précédents et définissent le terme de *modes complexes* pour caractériser l'instationnarité de l'onde qui peut alors s'écrire comme la superposition de deux ondes stationnaires. Il est à noter que l'onde est instationnaire à la fois par rapport au disque tournant et par rapport à un observateur fixe.

Quant aux garnitures, elles vibrent selon un mode de corps rigide pour les crissements à basse fréquence (généralement inférieurs à 7kHz [IN93]), ce qui correspond à une longueur de garniture plus faible que l'espace inter-diamètre nodal du disque, ou bien présentent une déformation de flexion et de torsion pour les fréquences supérieures à 7kHz. Le mécanisme de crissement semble être soit le couplage d'un mode de flexion du disque avec un mode transversal de la garniture [IN93, GAM06] ou bien d'un mode plan du disque avec un mode de flexion et/ou de torsion de la plaquette [MI93]. Dans tous les cas, les accélérations des deux modes couplés présentent un déphasage de  $90^\circ$ , ce qui permet d'expliquer un transfert d'énergie entre les deux modes et donc l'existence de vibrations malgré l'absence de source d'excitation.

L'origine du bruit fut l'objet de nombreuses conclusions contradictoires. Felske et al. [FHM78]

établissent qu'aucune vibration du disque n'est visible lors du crissement (ni diamètre nodaux, ni cercles nodaux correspondant à des vibrations dans le plan) et que la principale contribution au bruit provient des vibrations des garnitures et de l'étrier, de l'ordre de  $3\mu m$  ce qui est en contradiction avec les observations de Fosberry et Holubecki [FH59, FH61] qui montrent que les vibrations du disque sont beaucoup plus importantes que celles de l'étrier, de l'ordre de  $20\mu m$ . Matsuzaki et Izumihara [MI93] ainsi que Dunlap et al. [DRL99] observent également que les fréquences de crissement sont plus facilement associables aux modes de vibration longitudinaux du disque (*in-plane*) et qu'elles correspondent à un crissement haute fréquence. Récemment, McDaniel et al. [MMC99] montrent par un couplage essai/calcul avec la méthode des éléments de frontière que le disque est la source principale de bruit.

De plus, la connaissance des fréquences naturelles de chaque composant du frein n'est pas suffisante pour caractériser les occurrences de crissement même si leur rapprochement augmente la propension à crisser. En fait, le crissement est très influencé par les fréquences naturelles du disque mais ce n'est pas le cas de l'ensemble garnitures/étrier. Il se dégage que la proximité des fréquences naturelles du système couplé favorise la coalescence des modes. Néanmoins, certains modes des composants pris seuls étant peu sensibles au couplage structurel (couplage faible), il ressort que ces modes peuvent parfois être impliqués dans les occurrences de crissement. La modification structurelle des composants permettant la réduction ou la suppression du crissement nécessite à la fois l'analyse modale des fréquences propres de chaque élément du frein et des fréquences propres du système couplé. Il semble difficile de clarifier le composant le plus bruyant et la contribution de chacun est spécifique au système de frein étudié et dépend de la bande de fréquence considérée.

### 2.2.1.2 Dépendance du crissement aux paramètres

Ichiba et Nagasawa [IN93] établissent que la variation du coefficient de frottement avec la pression de contact semble avoir une plus grande influence sur les occurrences de crissement que la dépendance à la vitesse de glissement. Ces conclusions rejoignent les travaux expérimentaux de Shérif et al. [SBC89] qui montrent que le niveau sonore et la fréquence de crissement augmente avec la pression de contact. L'écrasement des aspérités de la surface de la garniture et du disque est équivalent à une raideur de contact non-linéaire et a donc une influence sur le régime de contact et de frottement. De même, il semble que la vitesse n'ait pas d'influence sur le crissement (fréquence et niveau sonore) lorsqu'elle atteint un certain seuil. Pour de très faibles vitesses (jusqu'à l'arrêt du véhicule), la diminution de la vitesse du disque entraîne l'augmentation du niveau sonore qui peut être expliquée par la décroissance du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement. Notons que la position d'application de la pression, la forme de l'étrier, l'angle d'attaque de la plaquette sur le disque ou encore les conditions climatiques impactent l'occurrence et le niveau du crissement de façon spécifique à chaque système de frein.

Même si l'origine du crissement est bien identifiée comme un couplage de modes quelque soit le type de frein, il n'existe pas de règles universelles pour atténuer ou supprimer cette nuisance sonore. Chaque système de frein est unique et la multitude de paramètres nécessite de mener de nombreux essais. Cela semble difficile dans un contexte industriel d'autant plus que dans la phase de développement du système de frein, les pièces physiques ne sont pas toujours disponibles. C'est pourquoi la modélisation du phénomène de crissement devient une étape nécessaire pour étudier et identifier les configurations

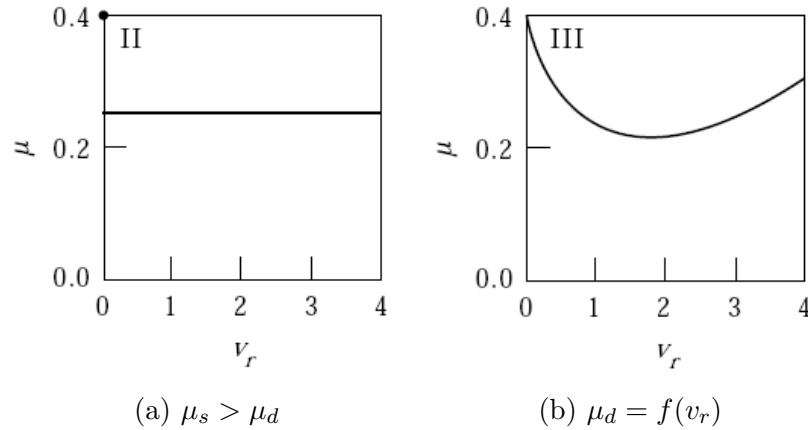


FIGURE 2.6 – Variation du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement [HOP98]

optimales minimisant le crissement de frein.

## 2.2.2 Phénoménologie et modélisation des vibrations induites par le frottement

### 2.2.2.1 Stick-Slip

Le stick-slip est intimement lié à la variation du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement. On distingue notamment la présence d'un coefficient de frottement statique supérieur au coefficient de frottement dynamique  $\mu_s > \mu_d$  ou un coefficient de frottement dynamique dépendant de la vitesse relative de glissement  $\mu_d = f(v_r)$  (Figure 2.6 (a-b)). Ibrahim [Ibr94a] présente des régimes de frottement suivant que l'on considère un frottement sec, visqueux ou fluide. Les oscillations de stick-slip au cours du temps se caractérisent par une courbe en forme de dents de scie qui traduit un enchaînement d'états macroscopiques adhérents et glissants (Figure 2.7 (a)).

**Variation du coefficient de frottement  $\mu$  due à la nature des matériaux** Le stick-slip ou phénomène de glissement-adhérence fut observé pour la première fois par Wells lors de la mesure du coefficient de frottement dynamique. Sinclair et Mainville [SM55] étudient dès 1955 la relation entre le crissement de frein et un modèle mathématique mettant en évidence le phénomène de stick-slip. La dépendance du coefficient de frottement à la vitesse de glissement due aux états de surfaces des éléments en contact frottant est à l'origine des vibrations. La présence d'un coefficient de frottement statique supérieur au coefficient de frottement dynamique ou bien la diminution du coefficient de frottement en fonction de la vitesse de glissement sont attribuées aux caractéristiques intrinsèques des surfaces en contact. Ainsi, ils montrent expérimentalement qu'un traitement de surface produisant un coefficient de frottement augmentant avec la vitesse de glissement réduit les vibrations. Néanmoins la reproduction de cet essai mené en laboratoire sur un système de frein n'a pas permis d'obtenir ce résultat étant donné les contraintes mécaniques subies à l'interface de contact. Les origines de la dépendance du coefficient de frottement à la vitesse de glissement sont abordées dans [Ibr94a]. Notons également les articles de Basford et Twiss [BT58] qui développent un modèle excité par des vibrations de stick-slip où la variation du coefficient de frottement  $\partial\mu_d/\partial v_r$  est identifié comme le facteur principal dans la génération de vibration.

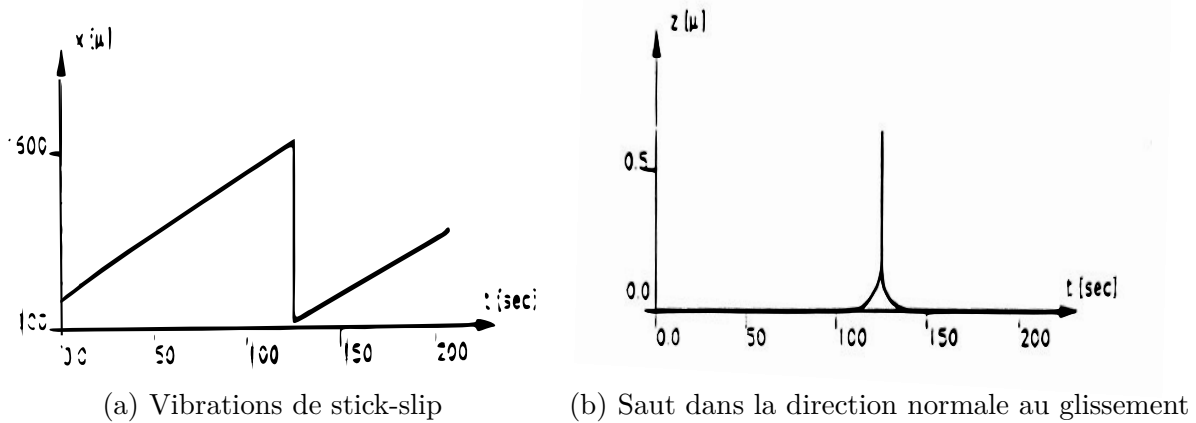


FIGURE 2.7 – Vibrations à l'interface de contact [TBG71]

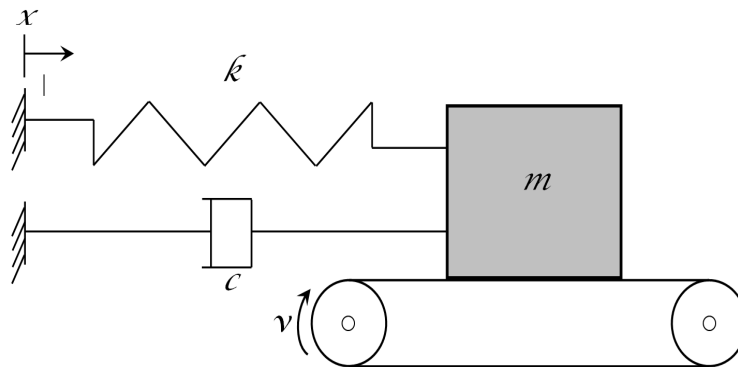


FIGURE 2.8 – Modèle de stick-slip à 1 ddl

**Variation du coefficient de frottement  $\mu$  due aux vibrations à l'interface de contact** Tolstoy [Tol67] et Tolstoy et al. [TBG71] montrent que la présence d'un coefficient de frottement variable avec la vitesse de glissement n'est pas liée aux caractéristiques des surfaces mais plutôt à l'influence du degré de liberté orthogonal au contact par un saut dans la direction normale au frottement (Figure 2.7 (b)) et qu'un amortissement dans cette direction permet d'annihiler les vibrations rendant  $\mu$  indépendant de la vitesse de glissement. D'autres expériences [God67, ADKS84] mènent aux mêmes conclusions et montrent que le frottement engendre des micro-vibrations entraînant une réduction apparente du coefficient de frottement dynamique. Ainsi la variation du coefficient de frottement n'est pas une cause mais bien une conséquence des instabilités.

**Modélisation du stick-slip** Un modèle classique à 1ddl est représenté à la Figure 2.8 où une masse  $m$  reliée à un système ressort-amortisseur respectivement  $k$  et  $c$  repose sur un tapis animé d'une vitesse constante  $v$ . Les résultats présentés ci-dessous s'inspirent des travaux de Moirot [Moi98, chap 1]

- Cas  $\mu_s > \mu_d$

Le premier cas considère un frottement statique supérieur au frottement dynamique avec une discontinuité au passage entre les deux états. En posant la vitesse de glissement relative  $v_r = v - \dot{x}$ ,

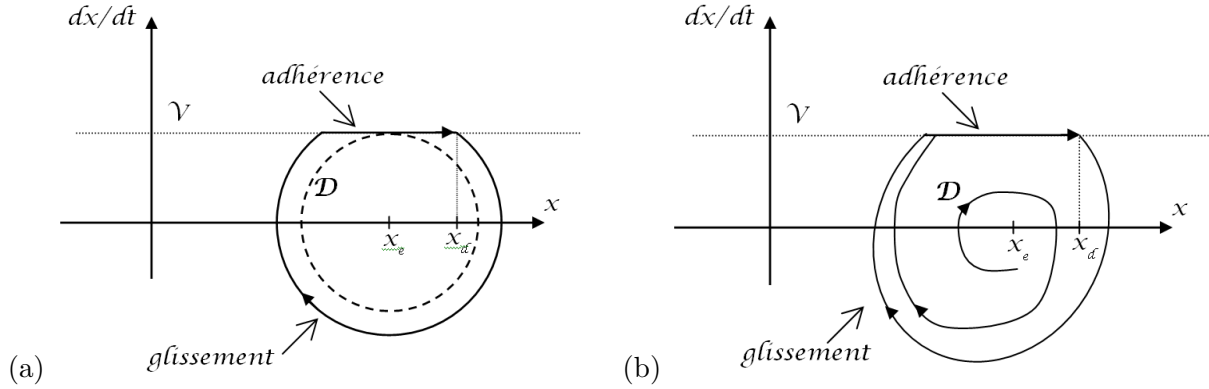


FIGURE 2.9 – Trajectoire dans l'espace des phases pour : (a)  $\mu_s > \mu_d$ ; (b)  $\mu_d = f(v_r)$  [Moi98]

l'équation du mouvement s'écrit :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(v_r) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} F(0) < \mu_s mg & (\text{adhérence}) \\ F(v_r) = \mu_d mg, v_r > 0 & (\text{glissement positif}) \\ F(v_r) = -\mu_d mg, v_r < 0 & (\text{glissement négatif}) \end{cases} \quad (2.1)$$

avec  $x$  le déplacement longitudinal de la masse par rapport à l'équilibre. Le tracé des solutions dans l'espace des phases est présenté à la Figure 2.9 (a).

La position d'équilibre  $x_e$  est stable pour toute perturbation incluse dans le domaine  $\mathcal{D}$ . Si le système est perturbé hors du domaine  $\mathcal{D}$ , la masse oscille selon un cycle limite périodique de type adhérence-glissement. Ce cycle limite est borné grâce à l'unique non-linéarité de ce système qui est l'adhérence de la masse sur le tapis. La position  $x_d$  définit la limite d'adhérence de la masse sur le tapis.

- **Cas**  $\mu_d = f(v_r)$

Cette fois-ci, le coefficient de frottement dynamique varie en fonction de la vitesse de glissement. En notant  $\mu_d = \mu(1 - \alpha(v - \dot{x}))$  avec  $\alpha$  un coefficient dépendant de la vitesse de glissement, l'équation du mouvement devient :

$$m\ddot{x} + (c - \alpha\mu mg)\dot{x} + kx = mg\mu(1 - \alpha v) \quad (2.2)$$

La position d'équilibre est toujours unique. Néanmoins, pour  $(c - \alpha\mu mg) < 0$ , la moindre perturbation autour de cette position d'équilibre aussi petite soit-elle entraîne des oscillations croissantes jusqu'à atteindre un cycle limite attracteur (Figure 2.9 (b)). On parle d'instabilité par frottement car la perturbation de la position d'équilibre entraîne une augmentation continue des vibrations jusqu'à atteindre un régime stationnaire. La décroissance du coefficient de frottement en fonction de la vitesse relative de glissement est équivalent à introduire un amortissement négatif comme on le voit dans l'équation (2.2) et revient à introduire de l'énergie dans le système. Ainsi certains auteurs dont [FH61] estiment que **la variation de l'effort de frottement** est responsable des vibrations de crissement par le phénomène de stick-slip. Néanmoins, si la théorie de variation du coefficient de frottement est encore utilisée aujourd'hui pour modéliser les phénomènes de broutement et de grondement [LS93], de

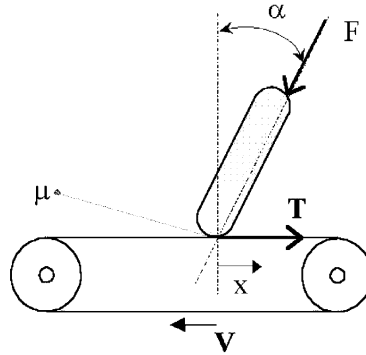


FIGURE 2.10 – Modèle de sprag-slip à 1 ddl

nombreux travaux ont démontré qu'elle n'est pas suffisante pour modéliser le crissement de frein. Par exemple, Chambrette [Cha91] montre dans ses travaux expérimentaux que la vitesse de vibration est bien inférieure à la vitesse de rotation du disque et donc, que le phénomène de stick-slip à l'échelle macroscopique ne peut pas expliquer les instabilités observées. Les travaux d'Eriksson et Jacobson [EJ01] comparent des couples de matériaux ayant un coefficient de frottement dépendant de la vitesse avec des systèmes de frein crissants mais aucune corrélation entre les deux n'est trouvée. De même Basford et Twiss [BT58] font la mesure du coefficient de frottement à basse vitesse et concluent que le stick-slip ne peut pas être tenu responsable des vibrations lorsque la vitesse de glissement est importante.

### 2.2.2.2 Sprag-slip

Dès 1961, Spurr [Spu62] étudie les bruits de couinement générés par le contact roue-rail des trains et les bruits de crissement des freins à disque et à tambour. Il développe un modèle analytique rendant compte du couplage cinématique du ddl de frottement et du ddl normal. Un modèle est présenté Figure 2.10.

La barre flexible est en contact glissant le long de la surface. Si on suppose que l'effort normal  $N = F \cos \alpha$  et l'effort tangentiel  $T$  sont liés par le frottement  $\mu$  tel que  $T = \mu N$ , on peut écrire :

$$T = \frac{\mu N}{1 - \mu \tan \theta} \quad (2.3)$$

où  $\theta = \pi/2 - \alpha$ . Lorsque  $\theta \rightarrow \tan^{-1}(1/\mu)$ ,  $F \rightarrow +\infty$ . Ce cas critique est dénommé *spragging*. Concrètement, l'effort de frottement augmente de façon importante au point de contact et la barre s'arc-boute due à sa flexibilité en emmagasinant de l'énergie potentielle. Puis l'effort de flexion devenant plus important que l'effort de frottement, la barre libère l'énergie stockée et revient à sa position initiale en glissant : un nouveau cycle commence. Durant cette phase, l'effort de frottement apparent est plus faible malgré un coefficient de frottement constant. L'instabilité de la position stationnaire provient d'un couplage cinématique qui relie les variations des forces de frottement et des forces normales de contact.

### 2.2.2.3 Couplage de modes

Par la suite, Jarvis et Mills [JM64] développent un modèle de pion frottant sur disque et montrent que la combinaison de deux modes du disque permet la génération d'ondes stationnaires et de propagation. De plus, ils concluent que les instabilités ne sont pas dues à la variation du coefficient de frottement mais dépendent de la configuration géométrique des deux éléments. De nombreux auteurs dont Earles et al. [EL84, EB76] ont développé des modèles de pions frottants à plusieurs ddl basés sur la théorie du sprag-slip et montrent des vibrations avec  $\mu$  constant. Le phénomène de sprag-slip met en lumière de façon générale l'interaction entre le ddl normal et le ddl tangent dans la génération des instabilités obtenue avec un coefficient de frottement constant. Cette interaction amène à considérer les instabilités de frottement comme un couplage des ddl normaux et tangents et non comme la dépendance du coefficient de frottement à la vitesse de glissement. North développe en 1972 un modèle linéaire à 8 ddl tenant compte de la relation entre les déplacements normaux et tangentiels et utilise le critère de la valeur propre complexe comme indicateur de la perte de stabilité de la position d'équilibre [Nor72]. Par la suite, il développe un modèle simplifié à 2 ddl reprenant le comportement du modèle à 8 ddl où une barre rigide à 2 ddl représente deux modes du disque. Le mécanisme responsable des oscillations y est décrit comme une instabilité flottante (*binary flutter*) des deux modes du disque. Pour la première fois, les efforts de frottement sont considérés comme des forces suiveuses et donc déstabilisantes. Millner [Mil78] développe un modèle à 6 ddl et étudie les effets des différentes configurations du couple disque-garniture-étrier. Il conclue que les conditions d'instabilité dépendent principalement du coefficient de frottement ainsi que de la masse et de la raideur des différents constituants, notamment de l'étrier, ainsi que de la configuration de contact entre la garniture et le disque. Différents auteurs utilisent le même critère d'instabilité sur des modèles analytiques, citons à titre d'exemple les travaux de Flint et Hulten [FH02].

Des modèles dit "minimaux" tentent de représenter le phénomène du crissement de frein en utilisant seulement deux ou trois ddl avec un coefficient de frottement constant. Bengisu et Akay [BA94] développent un modèle à seulement 3 ddl et définissent le terme de couplage de modes lorsqu'une ou plusieurs bifurcations sont détectées. L'analyse dynamique les conduit à considérer selon les paramètres des réponses périodiques, pseudo-périodiques ou même chaotiques suivant le nombre d'instabilités du modèle et ils remarquent que le spectre fréquentiel des vibrations est relié aux fréquences fondamentales du système. Wagner et al. [vWHH07] passent en revue les modèles minimaux développés pour modéliser le crissement de frein. Ils développent un nouveau modèle minimal comportant un disque "vacillant" en contact avec deux garnitures et ils y intègrent deux modes dans la direction normale au contact et 3 diamètres nodaux d'un disque réel. Les paramètres clés responsables du crissement sont analysés avec notamment la propension au crissement de frein qui augmente avec le coefficient de frottement ainsi que la pression de freinage.

### 2.2.2.4 Exemples de couplage de modes

Pour illustrer le phénomène de couplage, nous présentons à la Figure 2.11 le modèle relativement simple d'Hoffmann et al. [HFAG02] qui permet de générer des oscillations auto-entretenues avec seulement deux ddl en considérant cette fois la déformabilité tangentielle et normale au sens de glissement.

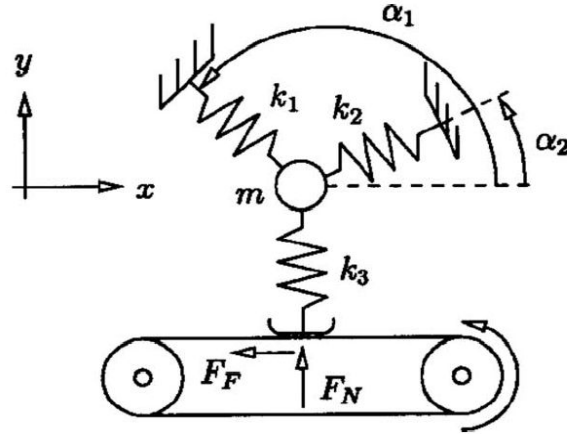
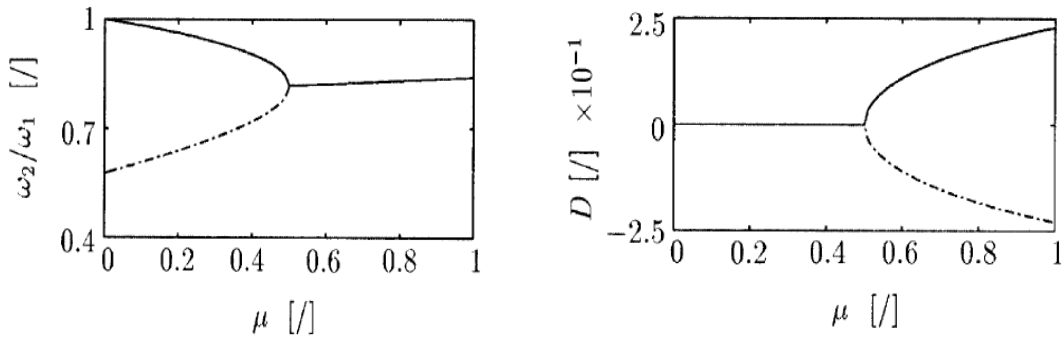


FIGURE 2.11 – Modèle minimal à deux ddl [HFAG02]



(a) Couplage de modes

(b) Séparation des parties réelles

FIGURE 2.12 – Évolution des parties imaginaires et réelles en fonction de  $\mu$ 

Les équations à l'équilibre peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} - \mu k_3 \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

Où  $\mu$  est le coefficient de frottement constant et les  $k_i$  représentent les raideurs de couplage dépendant des angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . Selon les paramètres du modèle et compte tenu de la dissymétrie de la matrice de raideur, ce modèle présente une instabilité géométrique où le frottement couple le ddl normal et le ddl tangentiel. Sur la Figure 2.12 (a) est tracée l'évolution des deux fréquences propres du système en fonction du coefficient de frottement.

Avec l'augmentation du coefficient de frottement, les deux modes se rapprochent en fréquence et coalescent en devenant égaux en un point appelé bifurcation de Hopf. On observe alors le verrouillage des modes (*mode lock-in*) et la séparation des parties réelles dont une devient positive (2.12 (b)). La position d'équilibre statique devient alors instable pour toute perturbation, même infinitésimale. La réponse dynamique ainsi générée est de la forme  $[x \ y]^T = \varphi e^{(\lambda t)}$  avec  $\varphi$  un mode propre de l'équation (2.4) associé à la valeur propre complexe  $\lambda = a + i\omega$ . Ainsi, pour une partie réelle  $a < 0$ , le système est stable pour toute perturbation autour de la position d'équilibre glissante et génère des oscillations évanescents tandis qu'une partie réelle  $a > 0$  génère des oscillations qui croissent de façon exponen-



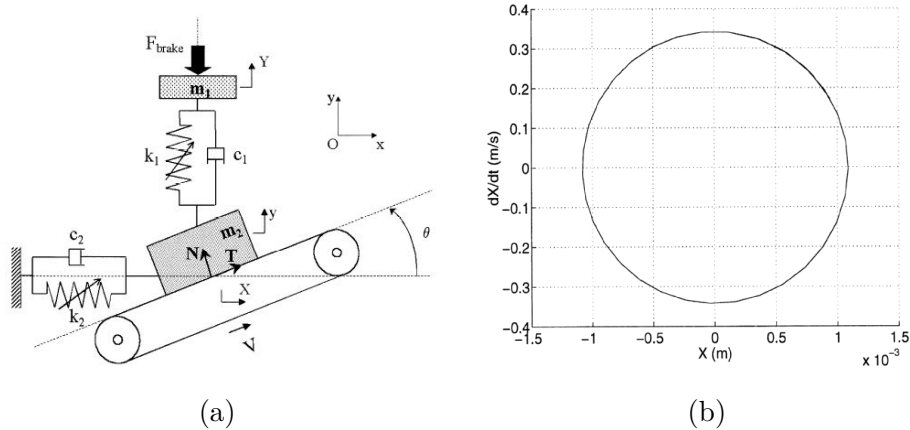


FIGURE 2.13 – (a) Modèle minimal non-linéaire; (b) Cycle limite dans l'espace des phases [STJ04]

tielle au cours du temps. Étant donné qu'il n'y a pas de non-linéarité dans ce modèle (raideur cubique ou décollement de la zone de contact par exemple), rien ne borne la croissance des oscillations dont l'amplitude tend vers l'infini pour  $t \rightarrow \infty$ , ce qui n'a aucun sens physique. La présence d'oscillations malgré l'absence d'une excitation extérieure est due au mécanisme de *feed-back*. Il existe en effet un déphasage de  $90^\circ$  entre les oscillations normales et tangentielles ce qui traduit l'échange d'énergie mécanique entre les deux directions. C'est le caractère non-symétrique (non-autoadjoint) de la loi de Coulomb dans l'équation du mouvement qui entraîne le couplage asymétrique en agissant uniquement dans la direction de glissement (l'effort de frottement est généré par l'effort de contact mais la réciproque n'est pas vraie, c'est une relation univoque).

Sinou et al. [STJ04] étudient un modèle similaire présentant le même phénomène de *feed-back* mais en employant des raideurs cubiques ce qui introduit des non-linéarités dans le système (Figure 2.13 (a)) et permet ainsi d'obtenir des cycles limites dans l'espace des phases (Figure 2.13 (b)). La fréquence des vibrations correspond à celle obtenue dans l'analyse de stabilité. Notons au passage qu'une méthode de réduction non-linéaire est proposée permettant d'obtenir directement les cycles limites et ainsi de réduire les temps de calculs d'un facteur au moins égal à 10.

Il est à noter que des modèles analytiques sont également utilisés pour modéliser les instabilités induites par le frottement. Moirot [Moi98] étudie la stabilité de deux cylindres coaxiaux emboîtés frottant l'un sur l'autre et montre l'instabilité de la solution stationnaire glissante dès que  $\mu > 0$  (Figure 2.14). Le frottement a pour effet de coupler le mode sinus et le mode cosinus des tubes. Les vibrations s'écrivent comme la superposition de deux ondes et le frottement a pour effet d'amortir l'une d'entre elles et d'amplifier l'autre jusqu'à atteindre un état dynamique stationnaire sous forme d'onde de *stick-slip*. Une remarque importante concerne la présence de modes doubles due à l'axisymétrie du problème qui joue un rôle néfaste sur la stabilité puisque les modes se couplent pour tout  $\mu > 0$ . Ainsi, l'éloignement des modes non-couplés augmente le frottement critique à partir duquel des instabilités apparaissent. Ouestlati et al. [ONB03] étudient également la génération d'ondes à la surface de contact de deux tubes emboîtés en contact frottant et exhibent différents régimes de vibration suivant les paramètres du système, notamment des ondes de glissement-adhérence-décollement dans le sens de la vitesse de rotation ou dans le sens contraire. Adams [Ada95] rend compte de l'instabilité dynamique

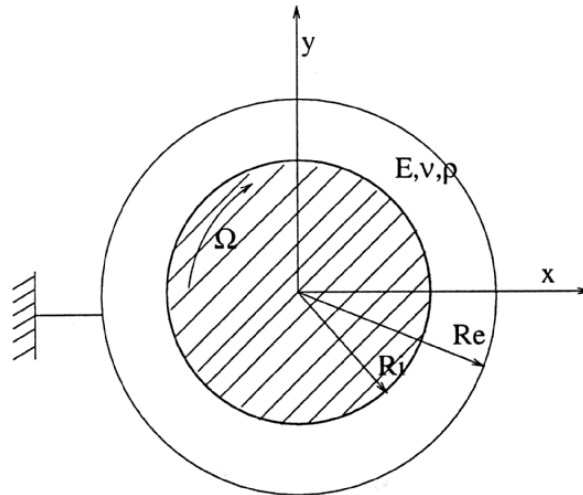


FIGURE 2.14 – Modèle de tubes emboîtés [Moi98]

de deux massifs élastiques frottant l'un sur l'autre pour  $\mu$  constant et montre la propagation d'ondes de cisaillement (ondes S) à la surface des massifs, générant un phénomène de glissement-adhérence-décollement.

### 2.2.2.5 Déstabilisation de l'équilibre par le concept de force suiveuse

Les forces suiveuses se définissent comme la charge générée par le changement de la direction de la force de frottement dû à la rotation et à la déformation du disque. Cela crée des variations de l'effort de frottement qui sont responsables des instabilités. Ce concept trouve son origine dans l'étude des instabilités de systèmes dynamiques incluant un disque annulaire où les forces suiveuses sont intrinsèquement liées aux modes de déformation *in plane* du disque. Les ondes de cisaillement dans le plan du disque génèrent des efforts qui varient et déstabilisent le système mécanique. Ouyang et al. [OMB<sup>+</sup>00] développent un modèle de frein composé des plaquettes, du piston et de l'étrier discrétisés par la méthode des éléments finis et un disque dérivé d'un modèle analytique de plaque. Ils montrent que pour un coefficient de frottement constant, les régions d'instabilité sont dépendantes de la vitesse de rotation et que plus elle est grande, plus le modèle est instable. De façon implicite c'est l'effet de la force suiveuse de frottement qui est à l'origine des instabilités. Néanmoins, dans [FH02], Flint et Hulten montrent sur un modèle continu où le disque est modélisé par une poutre à symétrie cyclique en contact avec deux garnitures sans masse que la contribution des efforts suiveurs due à la flexion du disque est négligeable. Notons au passage que l'instabilité est due au couplage de deux modes doubles du disque.

### 2.2.3 Modélisation éléments finis du crissement et analyse mathématique de l'instabilité

Nombre d'études emploient des systèmes masses-ressorts-amortisseurs ou des systèmes continus pour analyser les systèmes de frein et tenter d'identifier les paramètres des modèles étudiés aux valeurs physiques d'un système de freinage. Wagner et al. [vWJV<sup>+</sup>03] modélisent de façon relativement complexe un disque de frein, les plaquettes et l'étrier sous forme de corps rigides reliés par des res-

sorts et des amortisseurs. Les paramètres de ce modèle sont estimés par des essais expérimentaux et une étude de stabilité est menée, suivi d'une analyse non linéaire. Néanmoins, le recalage réaliste des paramètres du système de frein reste une tâche difficile. Tworzydło et al. [TBO94] modélisent un système de pion frottant et trouvent une bonne corrélation entre les résultats numériques et expérimentaux. Citons également les travaux d'Oden et Martins [OM85], Dweib and D'Souza [DD90b] ou encore Aronov et al. [ADKS84]. Malgré la relative complexité des modèles multi-corps avec la prise en compte de certains modes d'un système réel, ils restent trop pauvres pour modéliser la complexité que représente un système de frein réel. En effet, au delà de la richesse modale contenue dans un système de frein, la modélisation des interfaces disque/plaquette revêt une grande importance étant donné le caractère extrêmement non-linéaire de la loi de contact unilatéral. De plus, la présence de jeux mécaniques, les grands déplacements et grandes déformations et le caractère éventuellement non-linéaire des matériaux est difficilement abordable dans le cadre de systèmes à seulement quelques ddls.

### 2.2.3.1 Analyse des modes propres complexes

L'enrichissement des modèles numériques a été obtenu grâce à la modélisation par éléments finis et la capacité de calcul croissante des ordinateurs. L'un des avantages majeur de cette méthode est sa capacité à modéliser finement des systèmes continus tout en discrétisant les équations du mouvement associées. La modélisation des interfaces de contact, des conditions aux limites, des chargements, des matériaux etc. est prise en compte de manière plus réaliste que dans les modèles paramétriques ou analytiques. Liles [Lil89] est l'un des premiers à travailler sur une modélisation EF de frein comprenant le disque, les deux plaquettes et l'étrier. La modélisation de l'ensemble est corrélée avec des analyses modales expérimentales et la réduction de l'ensemble est rendue possible par l'emploi de la synthèse modale. Les connexions entre les différents composants sont d'abord étudiées par des fonctions de réponse en fréquence (FRF) sur l'assemblage réel et ces dernières sont comparées à celle du modèle EF dont les connexions (bilatérales) ont été placées de façon intuitive. La modification ou la suppression des connexions permet de corréliser les deux FRF et ainsi disposer d'un modèle couplé de bonne qualité. Le contact est géré grâce à l'utilisation de ressorts à l'interface de contact dans la direction normale au frottement. L'ajout de ces ressorts revient à ajouter une pénalité dans les équations. Le frottement est intégré comme un couplage géométrique et génère une matrice de friction asymétrique  $\mathbf{K}_f$  qui s'ajoute à la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$ . Le problème aux valeurs propres a donc la forme classique suivante :

$$\left[ \mathbf{M}\lambda^2 + [\mathbf{K} - \mathbf{K}_f] \right] \Phi = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

où  $\lambda$  est la matrice diagonale des valeurs propres complexes associées aux modes propres complexes  $\Phi$ . L'instabilité de l'équilibre statique est qualifiée au sens de Lyapunov où le critère sur le signe de la partie réelle des valeurs propres permet de statuer de la stabilité du modèle. La présence d'une partie réelle positive indique un mode instable dont la pulsation est la partie imaginaire associée et fait référence à une bifurcation de Hopf. Une analyse paramétrique met en avant l'influence du coefficient de frottement et de l'usure des plaquettes sur l'occurrence du crissement.

Citons en exemple les travaux de Nack [Nac00] détaillant la construction de la matrice de couplage et de frottement par l'utilisation de ressorts à l'interface de contact. Les fréquences instables calculées par l'analyse de stabilité sont corrélées avec celles obtenues dans les essais. Il propose ainsi une modification de la géométrie du frein permettant de découpler les modes et supprimer le crissement.

Plus récemment, Fritz et al. [FSDJ07a] étendent les conclusions d'Hoffmann et Gaul [HG03] et mettent en avant la déstabilisation de l'équilibre stationnaire d'un frein automobile par une mauvaise distribution de l'amortissement modal.

La prise en compte du contact et du frottement entre deux éléments est obtenue le plus généralement par l'ajout de ressorts linéaires ou non-linéaires à l'interface de contact. La définition de ces raideurs est délicate et conditionne grandement la validité et la stabilité du modèle. Une forte raideur permet de rapprocher les conditions de contact de la formulation exacte mais entraîne le mauvais conditionnement de la matrice de rigidité et pose des problèmes numériques. La contrainte de couplage peut être imposée exactement en considérant une formulation bilatérale du contact [Yua96, Moi98, BTW00]. L'hypothèse forte retenue est que les nœuds en contact à l'équilibre stationnaire glissant restent collés lors des oscillations auto-entretenues. Ainsi il en résulte des matrices de plus petite taille et ne contenant pas de termes liés aux raideurs de contact. Moiro [Moi98] montre que la stabilité (ou l'instabilité) de l'équilibre stationnaire est vérifiée avec les équations bilatérales de contact si elle est vérifiée pour les équations unilatérales de contact.

Dans le domaine ferroviaire, Lorang [Lor07] propose d'utiliser cette démarche pour étudier le crissement de frein du TGV. Le système de frein est spécifique puisqu'il s'agit non plus de plaquettes mais d'une multitude de plots frottants qui viennent au contact du disque, recouvrant ce dernier sur environ 1/4 de sa surface.

### 2.2.3.2 Analyse transitoire

L'analyse des modes propres complexes sur des modèles EF est la méthode la plus répandue dans l'industrie automobile pour étudier les instabilités des modes et déterminer les paramètres de premier ordre agissant sur la propension à crisser. La vision "modale" du système crissant permet de hiérarchiser les composants du frein dans leur participation au crissement et ainsi de procéder à une modification des différents composants. Mais qu'en est-il des vibrations générées, tant en terme d'amplitude que de fréquence ?

L'analyse de modes propres complexes est intrinsèquement liée à la linéarisation des équations de mouvement autour d'une position d'équilibre statique. Ces équations linéarisées ne sont valables que pour des solutions proches de l'équilibre stationnaire et une instabilité flottante qui génère des oscillations dont la croissance est exponentielle autour de la position d'équilibre stationnaire va exacerber les non-linéarités présentes dans le système. Le modèle linéaire associé n'est donc plus valable. La hiérarchisation des modes couplés *via* un critère  $\zeta = 200 \times Re(\lambda_i)/Im(\lambda_i)$  est peu pertinente puisque la valeur de la partie réelle indique uniquement la vitesse de croissance des oscillations [Lil89, SJ07].

L'existence de solutions dynamiques est conditionnée par la présence ou non de modes couplés dans l'analyse de stabilité ayant une partie réelle positive. Ainsi, il est naturel d'imaginer la suppression du crissement en empêchant de façon systématique tout couplage dès l'analyse de stabilité. Néanmoins, il semble peu probable d'éliminer totalement toutes les coalescences possibles sur un système de frein complet présentant une variété importante de paramètres dont la plage peut être très étendue (température, valeur du frottement...).

Enfin, l'identification du ou des quelques modes qui vont générer des vibrations est délicate étant donné que les équations linéarisées donnent tous les couplages de modes dus au frottement. Enfin une des limites de l'utilisation du critère sur la partie réelle des valeurs propres complexes réside dans la

surestimation des frontières du domaine d'instabilité [MBGS07].

Ainsi l'analyse transitoire apparaît nécessaire dans une démarche numérique prédictive du crissement de frein car le mécanisme de sélection des modes pendant la croissance des oscillations et les amplitudes de vibration peuvent être analysés. Ces résultats permettent de valider un modèle numérique en comparant par exemple la déformée du disque à des résultats de vibrométrie laser et de conduire des analyses paramétriques pertinentes pour satisfaire les prestations acoustiques demandées.

Si des analyses transitoires ont pu facilement être menées sur des systèmes masses-ressorts à quelques ddls [DD90a, vWJV<sup>+</sup>03, SJ07, SL07, STJ04], le calcul de solutions dynamiques stationnaires sur des systèmes dynamiques autonomes EF de grande taille comportant des phénomènes très non-linéaires tels le contact et le frottement est très consommateur de temps CPU et peut être sujet à des difficultés numériques (convergence et stabilisation, problèmes d'impacts, oscillations de contact dues au maillage...).

Nagy et al. [NCH94] semblent être les premiers à mener une analyse transitoire sur un système EF de frein. Ils introduisent une non-linéarité de friction et montrent que la stabilité dépend principalement du coefficient de frottement. Hu et Nagy [HN97] étudient le comportement transitoire d'un système de frein et montrent que les fréquences obtenues dans la réponse temporelle correspondent à des fréquences obtenues par expérience. En terme de modélisation, le coefficient de frottement est dépendant de la pression de contact et est recalé avec des essais sur banc dynamométrique. Ils utilisent des multiplicateurs de Lagrange pour assurer les conditions de contact ce qui en fait une formulation exacte.

Chargin et al. [CDH97] réalisent une analyse transitoire sur un modèle EF représentant un système de frein extrêmement simplifié. Les conditions de contact et de frottement à l'équilibre stationnaire sont reconduites tel quel dans l'analyse transitoire. La non-linéarité de contact n'est donc pas prise en compte dans le modèle, ce qui génère des oscillations qui croissent indéfiniment. La prise en compte de la vitesse de glissement avec l'orientation de l'effort de friction (*follower forces*) rend la zone d'instabilité plus grande au fur et à mesure de l'augmentation de la vitesse mais l'étude transitoire associée n'est pas effectuée ce qui rend son influence difficilement identifiable.

Plus récemment, Abubakar et Ouyang [AO06] mènent consécutivement une analyse de modes propres complexes et une analyse transitoire dans ABAQUS et testent les 3 régimes de contact que propose le logiciel. Alors que l'analyse des modes complexes exhibe plusieurs modes à partie réelle positive, la réponse dynamique ne contient qu'une seule fréquence et ce pour un seul régime de contact, les deux autres montrant la stabilité du système. Cette étude montre deux choses, d'une part la surestimation des modes crissants par l'analyse de stabilité et d'autre part la difficulté de modélisation du contact qui influe sur la stabilité du modèle.

Dans [BDL06], Baillet et al. étudient les vibrations d'un parallélépipède en situation de glissement sur une poutre et mettent en avant l'influence de la raideur et des dimensions du parallélépipède ainsi que la vitesse de glissement de la poutre à l'aide d'un code maison, Plast3D. Un régime d'adhérence-glissement-décollement du parallélépipède est obtenu et la fréquence des vibrations correspond à un mode instable. Il est à noter que l'instabilité est due au couplage d'un mode normal et transverse (dans la direction de glissement) du parallélépipède. Le cycle limite est obtenu grâce aux non-linéarités de contact qui génèrent du décollement et des impacts apparaissent entraînant des vibrations à harmo-

riques multiples de la fréquence fondamentale. L'analyse des instabilités en fonction de la vitesse montre un phénomène intéressant : pour de très faibles vitesses, seul le stick-slip apparaît ; puis, à partir d'un seuil de vitesse le décollement apparaît. Les accélérations des ddls du cube augmentent en fonction de la vitesse et se stabilisent à partir d'une certaine valeur et restent constantes au delà.

Meziane et al. [MDBL07] analysent un parallélépipède glissant sur un disque et retrouvent le même phénomène d'adhérence-glisement-décollement qui génère des impacts produisant des vibrations dont le spectre contient les harmoniques de la fréquence fondamentale instable. Ces résultats sont comparés à des essais et les vitesses de vibration montrent une bonne corrélation.

Massi et al. [MBGS07] modélisent un banc d'essai contenant un disque et une poutre sur laquelle est fixé un échantillon de plaquette de frein et qui vient en contact avec le disque. Les analyses de stabilité et non-linéaire montrent la même fréquence instable qui est celle obtenue lors des essais expérimentaux. Il est à noter que l'analyse de stabilité surestime le nombre d'instabilités puisque d'autres modes complexes ont une partie réelle positive. Il est montré que c'est le phénomène de couplage de modes qui est responsable des instabilités. L'analyse dynamique de la déformation de la garniture montre une onde de flexion perpendiculaire à la direction de frottement générant une variation des efforts de contact le long de la garniture au cours du temps, ce qui correspond tout à fait au phénomène de *feed-back* analysé par Hoffmann [HFAG02].

Citons pour finir les travaux de Vermont des Roches et al. [dRBL08] où un système de frein est modélisé de façon très détaillée en tenant compte du disque, des plaquettes, de l'étrier et du pivot. Une méthode originale de réduction de modèle est développée permettant de diminuer la taille du système final en ne considérant que les interfaces de contact en EF et en réduisant les autres parties du modèle sur une base de modes propres couplés sans frottement et du mode de déformation statique. Le contact est géré par une loi exponentielle provenant de mesures d'essai rendant compte probablement de l'écrasement des aspérités à la surface des garnitures. La fréquence du cycle limite correspond là aussi à un mode à partie réelle positive.

## 2.3 Synthèse

Le nombre considérable de travaux menés dans le cadre du crissement de frein montre à quel point ce sujet revêt une grande importance dans le milieu scientifique et industriel. Les essais expérimentaux sont indispensables pour étudier le crissement de frein en conditions réelles mais leur relative complexité à mettre en oeuvre, le temps nécessaire à leur mise en place et donc leurs coûts engendrés sont autant d'éléments qui motivent la simulation numérique du crissement de frein. Au cours des dernières décennies, les modèles sont passés de quelques ddls sur des systèmes masses-ressorts ou des systèmes analytiques à des modèles éléments finis plus complets et tenant compte de géométries et de lois de comportement pouvant être complexes. Le mécanisme principal du crissement de frein est maintenant acquis comme étant un couplage de modes du système de frein assemblé et les instabilités sont abordées sous l'angle de la bifurcation de Hopf. Étant donné la diversité des systèmes de frein, il n'existe pas de règles universelles pour la suppression du crissement de frein et il est nécessaire de prendre en compte ce phénomène dès la conception. Si l'analyse transitoire permet de mieux caractériser les instabilités, sa faible diffusion dans l'industrie s'explique par sa relative complexité à mettre en oeuvre et surtout son coût numérique élevé étant donné la taille des modèles éléments finis, la nature

du système dynamique et les fortes non-linéarités rencontrées. Les études se limitent donc généralement à l'analyse des modes propres complexes et à des campagnes d'essais permettant de valider une définition de frein.

## Chapitre 3

# Modélisation du système de frein en présence de contact frottant

Comme nous l'avons vu dans l'état de l'art, une modélisation pertinente du crissement de frein nécessite de se placer dans le cadre de la mécanique des milieux continus. Ce chapitre établit la formulation mathématique du problème, des équations analytiques au problème discrétisé par éléments finis pour la résolution d'un problème de dynamique non linéaire. Nous verrons comment aborder la formulation du contact et du frottement aux interfaces et nous justifierons les choix retenus. Au regard de la taille des systèmes, nous envisageons une stratégie de réduction de modèle pour limiter les temps de calcul tout en conservant le maximum d'information sur le comportement dynamique des modèles complets.

### 3.1 Modélisation

#### 3.1.1 Formulation continue

On considère un solide élastique  $\Omega$  défini dans  $\mathbb{R}^3$  en situation de contact frottant sur un support indéformable (Figure 3.1).  $\partial\Omega$  est la surface continûment différentiable de  $\Omega$  et  $\vec{n}$  la normale sortante. Il est soumis à des déplacements imposés  $\vec{u}_d$  sur une zone  $\Gamma_u \subset \partial\Omega$  ainsi qu'à des efforts imposés  $\vec{F}_d$  sur une zone  $\Gamma_F \subset \partial\Omega$  et des forces de volume  $\vec{f}_v$ . Les équations classiques du problème d'élasticité en dynamique s'écrivent sous la forme suivante [Gau06] :

$$\vec{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} + \vec{f}_v = \rho \cdot \ddot{u} \quad \text{dans } \Omega \quad (3.1)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{A} : \underline{\underline{\epsilon}} \quad \text{dans } \Omega \quad (3.2)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{F}_d \quad \text{sur } \Gamma_F \quad (3.3)$$

$$\vec{u} = \vec{u}_d \quad \text{sur } \Gamma_u \quad (3.4)$$

L'équation (3.1) est l'équation fondamentale de la dynamique des milieux continus élastiques. L'équation (3.2) traduit la relation de comportement entre le champ de déformation  $\underline{\underline{\epsilon}}$  et le champ de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$  reliés par le tenseur de Hooke  $\mathbf{A}$  d'ordre 4. Enfin les équations (3.3) et (3.4) désignent respectivement les conditions aux limites en force et en déplacement. On définit également la surface



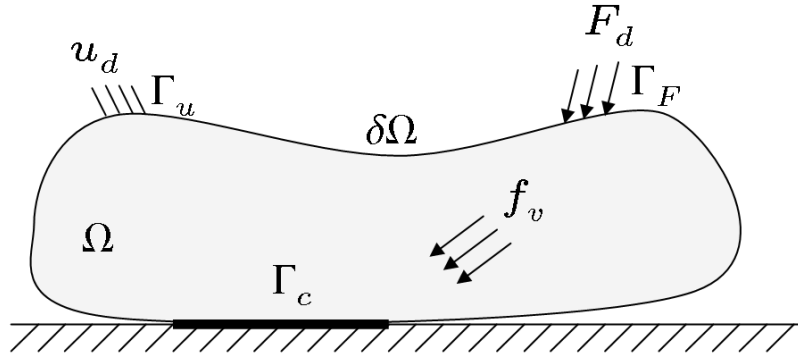


FIGURE 3.1 – Système mécanique

de contact  $\Gamma_c \subset \partial\Omega$  en contact avec le support et on introduit des équations supplémentaires régissant l'interaction à l'interface.

### 3.1.1.1 Contact unilatéral sans frottement - Problème de Signorini

Le problème de Signorini (ou conditions de Kuhn-Tucker) établit la relation qu'il existe sur la surface de contact entre les efforts normaux et le mouvement relatif des deux corps dans la direction normale. Sur l'interface  $\Gamma_c$ , les conditions de contact unilatéral s'écrivent [Dhi03] :

$$\delta_n \geq 0 \quad (3.5)$$

$$\|\vec{F}_n\| \leq 0 \quad (3.6)$$

$$\delta_n \cdot \|\vec{F}_n\| = 0 \quad (3.7)$$

$\delta_n$  est l'interférence de contact, c'est à dire la distance entre un point de  $\Gamma_c$  et son projeté orthogonal sur la surface rigide et  $\vec{F}_n$  les efforts normaux à la surface de contact  $\Gamma_c$ . L'équation (3.5) indique qu'il ne peut pas y avoir d'interpénétration entre le solide déformable et la surface rigide mais que le décollement est autorisé, l'équation (3.6) indique que les efforts normaux sont des efforts de compression dirigés à l'intérieur de  $\Omega$  et enfin l'équation de *complémentarité linéaire* (3.7) indique qu'en un point situé sur la surface  $\Gamma_c$  il y a soit contact ( $\delta_n = 0$ ), soit décollement ( $\vec{F}_n = \vec{0}$ ). Le graphe de la loi de contact est présenté sur la Figure 3.2 (a). On remarque le caractère non dérivable, multivoque et extrêmement non-linéaire de la loi de Signorini.

### 3.1.1.2 Gestion du frottement - Modèle de Coulomb

Le contact sans frottement présenté précédemment n'a que peu de réalité physique et on utilise généralement la loi de Coulomb pour décrire les phénomènes physiques dans l'espace tangent au contact. Cette loi traduit une complémentarité entre les forces tangentes  $\vec{F}_t$  et la vitesse de glissement  $\vec{v}_t$  avec les efforts normaux  $\vec{F}_n$  selon :

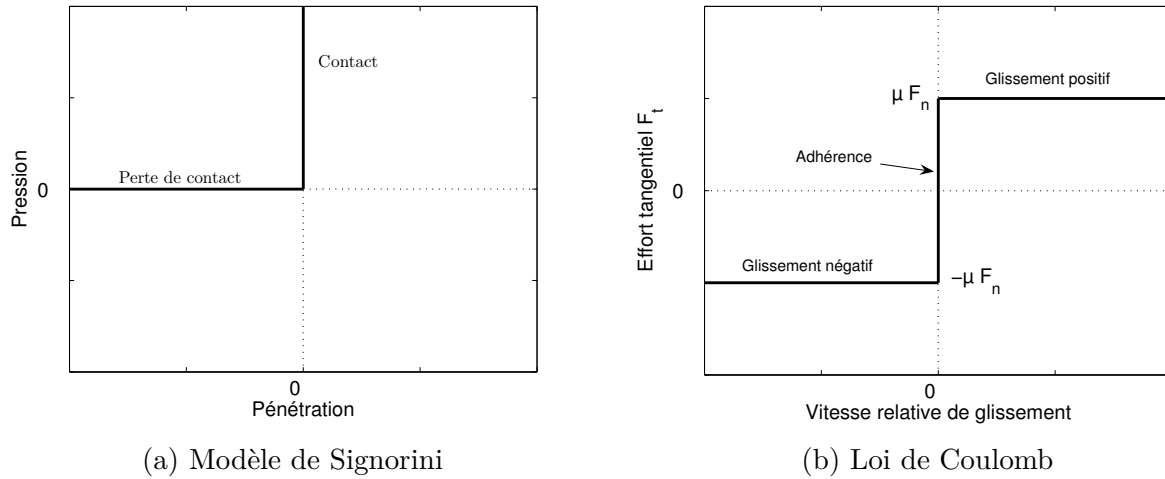


FIGURE 3.2 – Modèles de contact et de frottement

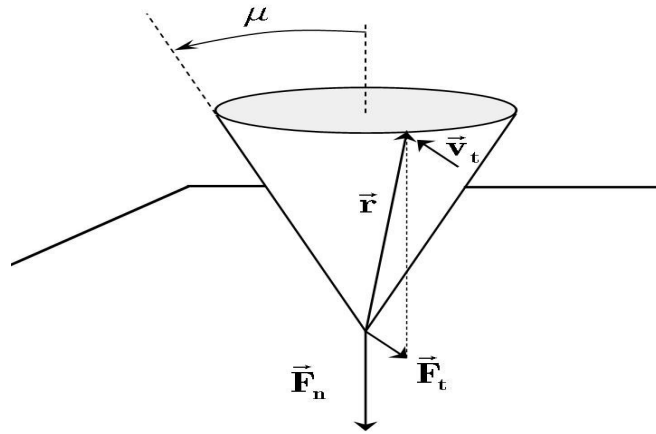


FIGURE 3.3 – Cône de Coulomb

$$\begin{cases} \|\vec{F}_t\| \leq \mu \|\vec{F}_n\| \\ \|\vec{F}_t\| = \mu \|\vec{F}_n\| \exists \lambda \geq 0 | v_t = -\lambda F_t & \text{(glissement)} \\ \|\vec{F}_t\| < \mu \|\vec{F}_n\| \Rightarrow \|\vec{v}_t\| = 0 & \text{(adhérence)} \end{cases} \quad (3.8)$$

$\mu$  est le coefficient de frottement de Coulomb qui dépend de la nature des matériaux et des états de surfaces des deux objets en contact. On remarque que  $0 \leq \mu \leq 1$ . Cette loi est schématisée par un cône qui représente la résultante  $\vec{r}$  du contact frottant sur un point de la surface  $\Gamma_c$  suivant les deux états (Figure 3.3). Si la force de réaction se situe à l'intérieur du cône, il y a adhérence au niveau du contact et  $\|\vec{v}_t\| = 0$ . Par contre si la force de réaction est située sur les bords du cône alors il y a un glissement frottant au niveau du contact et l'effort de frottement  $\vec{F}_t$  est lié à l'effort normal  $\vec{F}_n$  par le coefficient de frottement  $\mu$ . On peut également définir un frottement anisotrope où le coefficient de frottement dépend de la direction de glissement, avec dans ce cas, une représentation elliptique du cône de Coulomb. Comme pour le modèle de Signorini, les lois de Coulomb sont non-linéaires, non-différentiables et présentent un caractère multivoque (Figure 3.2 (b)).

En faisant l'analogie avec la plasticité, les lois de Coulomb sont de type non associées car le

glissement ne se fait pas normalement au cône de Coulomb mais dans la direction des efforts de frottement. Ainsi, l'effort de frottement est régi par le principe de dissipation maximale et Jean [Jea99] propose une formulation alternative du frottement qui s'écrit :

$$\vec{F}_t = Proj_{D(\mu F_n)}(\vec{F}_t - \rho \vec{v}_t) \quad \forall \rho > 0 \quad (3.9)$$

où  $D(\mu F_n)$  est un disque de centre 0 et de rayon  $\mu F_n$ .

### 3.1.2 Formulation variationnelle du problème dynamique

L'ensemble des équations de la dynamique et des équations traduisant les contraintes à l'interface permettent de définir parfaitement le cas d'un solide en contact unilatéral frottant. La résolution analytique de ces équations est très difficile voire impossible pour des systèmes dont la géométrie est complexe. On va donc traiter le problème avec la méthode classique des éléments finis (EF).

Le passage d'un milieu continu à un milieu discrétisé utilise une formulation variationnelle qui permet *d'affaiblir* les équations d'équilibre précédentes et dérive du principe des travaux ou puissances virtuelles [ZT94]. Pour cela, on définit un champ de fonctions vectorielles cinématiquement admissibles  $v^* \in C_0$  tel que  $C_0 = \{v^* \in C \mid v^* = 0 \text{ sur } \Gamma_u\}$ . Nous appelons  $C$  l'espace convexe formé par l'ensemble des fonctions  $v^*$ . Cet espace doit être suffisamment régulier dans le sens de la différentiabilité des champs virtuels. On remarque que l'espace  $C_0 \subset C$  restreint le champ des fonctions admissibles en imposant un déplacement nul sur  $\Gamma_u$ . En multipliant l'équation (3.1) par  $v^*$  et en intégrant sur le domaine  $\Omega$ , on obtient :

$$\int_{\Omega} v^* \cdot (\overrightarrow{div} \underline{\underline{\sigma}} + f_v - \rho \ddot{u}) d\Omega = 0 \quad (3.10)$$

En utilisant la formule de Stokes et en remarquant la symétrie du tenseur des contraintes, on développe l'équation précédente :

$$\int_{\Omega} v^* \cdot f_v d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(u) : \underline{\underline{\epsilon}}(v^*) d\Omega - \int_{\Omega} \rho \ddot{u} \cdot v^* d\Omega - \int_{\partial\Omega_F} v^* \cdot F_d dS - \int_{\Gamma} v^* \cdot R dS = 0 \quad (3.11)$$

Le problème (3.11) s'interprète de la façon suivante : Trouver  $u \in C_0 \forall v^* \in C_0$ . La résolution de la formulation précédente peut être réalisée par la méthode classique des éléments finis. On utilise la méthode de Ritz-Galerkin qui consiste à rechercher une solution approchée de (3.11) dans un sous-espace  $C^h \in \mathbb{R}^n$  dans  $C_0$ . En posant  $u_i$ ,  $i \in [1, n]$  une base vectorielle de  $C^h$ , tout élément  $u^h \in C^h$  s'écrit sous la forme :

$$u^h = \sum_{i=1}^n \zeta_i u_i \quad (3.12)$$

$\zeta_i$  correspond aux fonctions d'interpolation d'un déplacement admissible  $u^h$  sur la base vectorielle  $u_i$ . Concrètement on vient décomposer le domaine  $\Omega$  en  $n$  sous-domaines  $\Omega_n$  dont l'assemblage forme une discrétisation spatiale (appelée également maillage) de  $\Omega$ . Ainsi, si les  $u_i$  représentent les nœuds du maillage, tout point  $u^h$  du domaine discrétisé  $\Omega$  peut être approché par des fonctions de forme (ou fonctions d'interpolation) et la forme variationnelle (3.11) se met sous la forme matricielle suivante, en négligeant les efforts de volume  $f_v$  :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} + \mathbf{R}_\Gamma = \mathbf{F} \quad (3.13)$$

Classiquement  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  représentent respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de raideur du système.  $\ddot{\mathbf{U}}$ ,  $\dot{\mathbf{U}}$  et  $\mathbf{U}$  sont respectivement les champs d'accélération, de vitesse et de déplacement aux nœuds du maillage,  $\mathbf{R}_\Gamma$  les efforts de réaction à l'interface  $\Gamma_c$  et  $\mathbf{F}$  les efforts extérieurs au système. On remarque que la proposition (3.13) tient compte de l'amortissement  $\mathbf{C}$  qui n'est pourtant pas défini dans la formulation variationnelle (3.11). On verra par la suite les différentes méthodes de construction de la matrice  $\mathbf{C}$  *a posteriori* de la discrétisation. Volontairement, la construction du champ  $\mathbf{R}_\Gamma = \{\mathbf{F}_n, \mathbf{F}_t\}^T$  sur  $\Gamma_c$  tenant compte des conditions de Signorini et de la loi de Coulomb n'a pas encore été définie et fait l'objet de la partie suivante.

### 3.1.2.1 Gestion du contact frottant

La résolution du contact unilatéral frottant dans le cadre des éléments finis n'est pas triviale et est à l'origine de nombreux travaux de recherche. Dans la littérature, deux approches principales se distinguent : la première introduit un facteur de pénalité sur les contraintes, la seconde utilise les multiplicateurs de Lagrange [DT84] ou sa variante, les lagrangiens augmentés qui consistent à combiner les avantages des deux méthodes précédentes [SL92]. Néanmoins d'autres méthodes permettent de traiter le contact tel que l'élimination des contraintes ou encore la méthode du double potentiel proposée par De Saxcé [Sax98] que nous n'aborderons pas ici. Nous étudions les méthodes de pénalité et des multiplicateurs de Lagrange dans le cas quasi-statique.

En reprenant l'équation (3.11) et en négligeant les efforts de volume et d'inertie, on aboutit à l'équation variationnelle suivante décrivant un problème quasi-statique :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(u) : \underline{\underline{\epsilon}}(v^*) \, d\Omega = \int_{\partial\Omega_F} v^* \cdot F_d \, dS + \int_{\Gamma} v^* \cdot R \, dS \quad (3.14)$$

A cette équation, on va rajouter les conditions de Signorini qui imposent  $R \leq 0$  et on obtient l'inéquation variationnelle suivante :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(u) : \underline{\underline{\epsilon}}(v^*) \, d\Omega - \int_{\partial\Omega_F} v^* \cdot F_d \, dS \leq 0 \quad (3.15)$$

Cette inéquation variationnelle traduit la non-linéarité de contact et n'est pas adaptée pour la formulation éléments finis. On va donc relaxer la condition de Signorini et transformer l'inéquation variationnelle en un problème d'optimisation. En notant  $a(u, v^*) = \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(u) : \underline{\underline{\epsilon}}(v^*) \, d\Omega$  et  $b(v^*) = \int_{\partial\Omega_F} v^* \cdot F_d \, dS$ , l'équivalence de (3.15) s'écrit comme l'infimum d'une fonctionnelle énergétique  $J$  :

$$\begin{aligned} \forall v^* \in C_0 : \\ \text{Inf } J(v^*) \text{ avec } J(v^*) = \frac{1}{2}a(u, v^*) - b(v^*) \end{aligned} \quad (3.16)$$

La minimisation de la fonctionnelle ci-dessus n'est pas possible en présence de l'inégalité et on va donc la supprimer en complexifiant l'énergie c'est à dire que l'on associe à  $J(v^*)$  des termes englobant la contribution des efforts de réaction.

### Méthode de pénalité

Cette méthode consiste à ajouter une énergie quadratique de pénalité à la fonctionnelle énergétique (3.16) :

$$\forall v^* \in C_0 : \quad \text{Inf} \left\{ J(v^*) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left[ \kappa_n \left( \delta_n(v^*)^+ \right)^2 + \kappa_t \delta_t(v^*)^2 \right] dS \right\} \quad (3.17)$$

On note que l'expression  $\delta_n(v^*)^+$  représente la partie positive de l'interférence de contact alors que  $\delta_t(v^*)$  désigne le champ de déplacement tangentiel.  $\kappa_n, \kappa_t$  sont respectivement les pénalités associées à  $\delta_n(v^*)^+$  et  $\delta_t(v^*)$ . L'ajout de cette expression permet de rendre la fonctionnelle  $J(v^*)$  dérivable et ainsi trouver le minimum de l'énergie potentielle qui correspond à la solution d'équilibre du système :

$$\forall v^* \in C_0 : \quad \nabla J(v^*) + \int_{\Gamma} \left( \kappa_n \delta_n(v^*)^+ \partial \delta_n + \kappa_t \delta_t(v^*)^+ \partial \delta_t \right) dS = 0 \quad (3.18)$$

Ce qui donne en écriture matricielle :

$$[\mathbf{K} + \mathbf{K}_{\kappa}] \mathbf{U} = \mathbf{F}_d \quad (3.19)$$

$\mathbf{K}_{\kappa}$  est la matrice de rigidité associée aux contacts frottants actifs du modèle, c'est à dire que les conditions de contact ( $\delta_n = 0, F_n \leq 0$ ) sont vérifiées. Elle est symétrique et ne comporte que des termes localisés sur les zones actives de contact frottant. On remarque que dans le cas du glissement, le terme lié au frottement est modifié et en considérant un frottement de Coulomb, l'expression (3.18) s'écrit :

$$\forall v^* \in C_0 : \quad \nabla J(v^*) + \int_{\Gamma} \left( \kappa_n \left( \delta_n(v^*)^+ \right) \partial \delta_n + \mu \kappa_n \left( \delta_n(v^*)^+ \right) \partial \delta_t \right) dS = 0 \quad (3.20)$$

avec  $\mu$  le coefficient de frottement. Ainsi les termes liés au frottement ne dépendent plus du déplacement tangentiel mais seulement de la contrainte normale et l'orientation des efforts de frottement est assurée par la direction de vitesse de glissement. L'écriture matricielle de (3.20) diffère de celle de (3.19) du fait de la dépendance des efforts de frottement aux efforts normaux. La matrice de rigidité associée au contact frottant  $\mathbf{K}_{\kappa}$  devient alors asymétrique avec des termes extra-diagonaux indiquant le caractère univoque du frottement glissant (les efforts de frottement dépendent des efforts normaux mais la réciproque est fautive). C'est cette asymétrie due au frottement glissant qui est responsable des instabilités que l'on retrouve dans les systèmes frottants.

Concrètement, l'introduction d'un facteur de pénalité sur la loi de contact revient à dire que l'on autorise une interpénétration et que l'effort de réaction ne prend qu'une seule valeur en fonction de  $\delta_n \in \mathbb{R}^+$ , c'est une relation bi-univoque (Figure 3.4 (a)). On se rend compte que plus la valeur de  $\kappa_n$  est grande plus on se rapproche de la loi de Signorini en diminuant la violation de contrainte sur l'interférence entre les deux solides.

Le principal intérêt de cette méthode est sa facilité d'implémentation dans les codes numériques et le fait qu'elle ne rajoute pas d'inconnues supplémentaires. Cependant, le choix de la raideur de contact n'est pas toujours bien défini et une valeur trop faible de  $\kappa_n$  entraîne de trop grandes approximations dans les déplacements et donc une méconnaissance des statuts de contact alors qu'une valeur

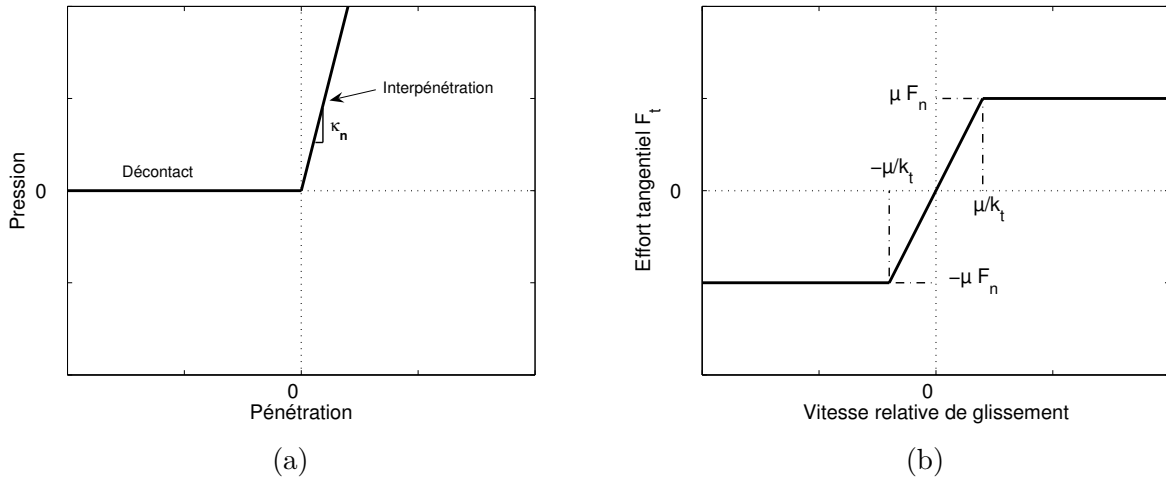


FIGURE 3.4 – Régularisation du modèle de Signorini (a) et de la loi de Coulomb(b)

trop importante de  $\kappa_n$  se rapproche d'une modélisation de contact idéal mais engendre un mauvais conditionnement du système et des problèmes de convergence dans les processus itératifs. Il existe des méthodes permettant d'améliorer le choix du coefficient de pénalité, citons la plus intuitive proposée par Chamoret et al. [CSRB04] qui proposent un ajustement automatique de la pénalité en fonction de l'interpénétration désirée.

### Méthode des multiplicateurs de Lagrange

La méthode des multiplicateurs de Lagrange permet d'imposer exactement les conditions de contact entre les solides déformables. Pour cela, on ajoute dans la fonctionnelle énergétique (3.16) les termes suivants :

$$\begin{aligned} \forall v^* \in C_0 : \\ \text{Inf} \{ J(v^*) + \int_{\Gamma} [\lambda_n \delta_n(v^*) + \lambda_t \delta_t(v^*)] dS \} \end{aligned} \quad (3.21)$$

$\lambda_n, \lambda_t$  sont les multiplicateurs de Lagrange et  $\delta_n$  et  $\delta_t$  sont les champs de déplacement normaux et tangentiels qui vérifient les conditions de Signorini (3.5,3.6,3.7) et la loi de Coulomb (3.8). La minimisation de la fonctionnelle (3.21) donne ainsi une expression satisfaisant exactement les conditions de contact et de frottement des contraintes actives :

$$\begin{aligned} \forall v^* \in C_0 : \\ \nabla J(v^*) + \int_{\Gamma_c} [\lambda_n \partial \delta_n(v^*) + \lambda_t \partial \delta_t(v^*)] dS + \int_{\Gamma_c} [\partial \lambda_n \delta_n + \partial \lambda_t \delta_t] dS = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Le multiplicateur de Lagrange  $\lambda_n$  représente l'effort de contact dans la direction normale alors que  $\lambda_t$  est l'effort dans la direction tangentielle en absence de glissement, c'est à dire  $\delta_t = 0$ . Dans le cas du glissement, l'effort tangent est directement déterminé par la contrainte normale et la minimisation de (3.21) se met sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \forall v^* \in C_0 : \\ \nabla J(v^*) + \int_{\Gamma_c} [\lambda_n \partial \delta_n(v^*) + \mu \lambda_n \partial \delta_t(v^*)] dS + \int_{\Gamma_c} \partial \lambda_n \delta_n dS = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

L'écriture matricielle de la minimisation de (3.21) donne le problème d'optimisation sous contraintes suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{K}\mathbf{U} + \mathbf{G}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{F} \\ \mathbf{G}\mathbf{U} \leq \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.24)$$

où  $\mathbf{G}$  est la matrice globale des contraintes de contact en déplacement. La résolution de ces équations permet de satisfaire exactement le problème de Signorini et du frottement de Coulomb tout en s'affranchissant du choix arbitraire des coefficients de pénalité. Un inconvénient majeur réside dans l'augmentation du nombre d'inconnues à résoudre (déplacements nodaux et multiplicateurs de Lagrange). De même, une boucle itérative supplémentaire est généralement nécessaire pour connaître le statut des contraintes actives.

### 3.1.3 Construction de l'amortissement

L'amortissement représente un levier technologique de premier ordre dans la réduction des vibrations des systèmes mécaniques et a fait l'objet de nombreux travaux de recherche. Le lecteur intéressé pourra consulter les ouvrages de [Bea96, NM95, Jon01] qui font une synthèse du phénomène d'amortissement des structures mécaniques. Nous nous attachons dans cette section à présenter de façon succincte les différentes formes d'amortissement existantes, associées à leur écriture mathématique et le choix retenu pour le système de frein étudié au cours de ce mémoire.

Si un apport d'amortissement a des effets bénéfiques en terme de réduction d'amplitude de vibration - citons comme exemple l'ajout classique de sandwichs visco-élastiques (*shims*) au dos des plaquettes pour diminuer ou supprimer le crissement - un choix inapproprié peut entraîner des effets inattendus comme par exemple une augmentation des instabilités dans le cas des systèmes autonomes non-linéaires. Nous aborderons cette problématique dans les chapitres suivants.

Les efforts qui dépendent de la vitesse sont des efforts d'amortissement et ont des origines très variées. L'amortissement structural est le plus intuitif à appréhender. Lorsqu'un matériau se déforme, des mécanismes internes associés à des dislocations et reconstructions moléculaires, des variations de contrainte entre grains génèrent une dissipation interne. Ces phénomènes sont fortement non-linéaires et peuvent dépendre de la fréquence et du niveau d'excitation ou encore des paramètres environnementaux (température, hygrométrie, etc.) et une modélisation théorique simple n'est pas triviale. A titre d'exemple, les garnitures de frein sont composées d'une mixture complexe contenant une vingtaine d'éléments dont les propriétés d'amortissement changent en fonction de la température, de l'usure, de la charge appliquée sur la garniture, de l'historique des sollicitations, etc. L'amortissement d'un matériau est principalement caractérisé par son facteur de perte  $\eta$  obtenu généralement de façon expérimentale. Soit un système masse-ressort-amortisseur à 1 ddl :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (3.25)$$

où  $c$  définit l'amortissement visqueux. Si l'on suppose un mouvement harmonique, tel que :

$$f(t) = Fe^{i\omega t} \text{ et } x(t) = Xe^{i\omega t} \quad (3.26)$$

L'équation (3.25) devient alors :

$$\left(-\omega^2 m + i\omega c + k\right) X = F \quad (3.27)$$

Et en introduisant le terme d'amortissement sous forme de rigidité imaginaire, nous obtenons la formule suivante :

$$\left(-\omega^2 m + k \left(1 + \frac{i\omega c}{k}\right)\right) X = F \quad (3.28)$$

Ce qui fait apparaître la rigidité complexe  $\tilde{k}$  :

$$\tilde{k} = k(1 + i\eta) \quad \text{avec } \eta = \frac{\omega c}{k} \quad (3.29)$$

avec  $\eta$  le facteur de perte intrinsèque au matériau considéré. L'effort de rigidité de la structure à un déplacement imposé s'écrit alors :

$$f = k(1 + i\eta)x \quad (3.30)$$

La quantité  $i\eta kx$  représente l'effet de l'amortissement, déphasé de  $90^\circ$  par rapport au déplacement (amortissement hystérique). La force d'amortissement est donc proportionnelle au déplacement, et l'amortissement visqueux équivalent  $c$  s'écrit :

$$c = \frac{k\eta}{\omega} \quad (3.31)$$

d'où le système masse-ressort-amortisseur de l'équation (3.25) :

$$m\ddot{x} + \frac{k\eta}{\omega}\dot{x} + kx = f(t) \quad (3.32)$$

La dissipation générée par un amortissement structural est donc dépendante de la fréquence. Plus le facteur de perte sera important, plus l'amortissement sera grand. L'expression du taux d'amortissement  $\zeta$  est :

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_0} = \frac{k\eta}{2m\omega_0\omega} = \frac{\omega_0\eta}{2\omega} \quad (3.33)$$

On remarque que le taux d'amortissement décroît de façon inversement proportionnelle à la fréquence d'excitation. A la résonance, le taux d'amortissement est la moitié du facteur de perte. On trouve dans la littérature les valeurs usuelles des facteurs de pertes pour des matériaux courants tels que les aciers et les caoutchoucs.

Un autre mécanisme de dissipation a pour origine le frottement de Coulomb, phénomène mis en oeuvre dans l'amortissement des turbines de turbo-réacteurs [Nac02]. La dissipation est due au frottement qui génère des forces s'opposant au mouvement relatif. Couplé à un comportement de type *stick-slip*, l'amortissement devient hystérique (l'excitation et la réponse ne sont jamais en phase) et entraîne des phénomènes de raidissement ou d'assouplissement lorsqu'un des paramètres du système varie.

Citons également l'amortissement généré par la viscosité des fluides que l'on retrouve dans les amortisseurs de véhicule par exemple ou bien l'amortissement d'un fluide acoustique en champ infini



sur un élément rayonnant. Ces amortissements sont caractérisés par un comportement linéaire ou non-linéaire suivant les propriétés du fluide (viscosité, nombre de Reynolds, etc.).

En raison de la méconnaissance des mécanismes d'amortissement et des taux d'amortissement internes dans certains assemblages mécaniques complexes dont les constituants sont reliés par des soudures, des joints ou encore des contacts ponctuels, il est courant de construire la matrice diagonale d'amortissement modal à partir de valeurs expérimentales obtenues par des essais sur la structure. Cette hypothèse simplificatrice n'est adoptée que si le système considéré est faiblement amorti et que ses fréquences propres sont séparées de manière satisfaisante. Cela amène donc à un découplage des équations dynamiques. Lorsqu'aucune information expérimentale n'est disponible, on considère généralement un taux d'amortissement  $\zeta_i$  sur chaque mode, proportionnel à la fréquence :

$$\zeta_i = 2\xi\omega_i \quad (3.34)$$

où  $\xi$  est le pourcentage d'amortissement et  $\zeta_i$  le taux d'amortissement du mode associé à  $\omega_i$ .

On peut aussi construire une matrice d'amortissement de Rayleigh, proportionnelle à la matrice de raideur et de masse :

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \quad (3.35)$$

où le choix des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  est conditionné par le taux d'amortissement désiré sur deux modes  $\omega_1$  et  $\omega_2$  définis *a priori* tel que :

$$\alpha = 2\omega_1\omega_2 \frac{\zeta_2\omega_1 - \zeta_1\omega_2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \quad (3.36)$$

$$\beta = \frac{2(\zeta_1\omega_1 - \zeta_2\omega_2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \quad (3.37)$$

avec  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$  les taux d'amortissement des modes  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . Malgré sa simplicité et son utilisation courante, un tel modèle a pourtant comme inconvénient majeur d'exagérer la dissipation pour les modes à très basses et très hautes fréquences.

Dans le cadre de ce mémoire nous considérerons un amortissement modal étant donné le manque d'information quant à la caractérisation en amortissement de la structure. Ce choix a l'avantage de permettre l'analyse fine de l'influence du comportement dynamique du système de frein en situation d'instabilité en fonction de l'amortissement des modes instables. La construction de la matrice modale sera abordée dans la section suivante.

## 3.2 Réduction de modèle

Le temps de résolution d'un problème dynamique est fonction à la fois de la nature du problème mécanique (non linéarité de contact et de frottement, grands déplacements et grandes transformations, comportement élasto-plastique...) et surtout de sa taille. Dans le cadre d'une discrétisation par éléments

finis, la taille des modèles peut rapidement augmenter si le raffinement du maillage est important et si des éléments à interpolation non linéaire sont utilisés. Ces modèles sont donc très pénalisants dans un cadre d'analyse dynamique des structures comme l'extraction de valeurs propres ou bien le calcul d'un état dynamique stationnaire. Ainsi, il existe toute une classe de méthodes de synthèse modale permettant de réduire la taille des modèles tout en gardant l'information nécessaire à leur description dynamique.

Une structure complexe comme un système de frein peut être vue comme un assemblage de sous-structures interconnectées entre elles dont on connaît le comportement dynamique de chacune et le type de liaison qui les relie à leur interface. Ces entités, prises séparément, sont réassemblées dans le système global dont la taille finale est réduite par rapport au modèle initial. L'avantage de cette démarche est de pouvoir par exemple changer un composant sans modifier le reste du système. La question est maintenant de savoir comment réaliser la réduction des sous-structures en assurant un minimum de perte d'information c'est à dire en décrivant suffisamment finement la dynamique du système afin que la réponse soit très bien approximée dans un sous-espace représentant le modèle et défini *a priori*. Cette réduction suppose néanmoins que les déformations dans chaque sous-structure soient faibles pour que l'on considère un comportement purement élastique.

### 3.2.1 Méthode de Ritz

Les méthodes d'approximation des déplacements, aussi appelées méthodes de Ritz-Galerkin, ont pour but de faire correspondre un espace  $C^N$  de  $N$  ddl  $\mathbf{q}_N(t)$  (associés à un modèle éléments finis en règle générale) et un sous-espace  $C^{NR}$  de  $NR$  ddl généralisés  $\mathbf{q}_{NR}(t)$ , décrit par une base  $\mathbf{T}$  de  $NR$  vecteurs linéairement indépendants de taille  $N \times NR$ . Ainsi le vecteur des déplacements  $\mathbf{q}_N(t)$  décrivant le comportement du système mécanique global est relié aux ddl généralisés  $\mathbf{q}_{NR}(t)$  par :

$$\mathbf{q}_N(t) = \mathbf{T}\mathbf{q}_{NR}(t) \quad (3.38)$$

$\mathbf{T}$  est la base des déplacements admissibles de taille  $N \times NR$  et, pour rendre cette écriture avantageuse, on doit assurer  $NR \ll N$ . La multiplication à gauche par  $\mathbf{T}^T$  de l'expression matricielle (3.13) donne :

$$\mathbf{T}^T\mathbf{M}\mathbf{T}\ddot{\mathbf{q}}_{NR}(t) + \mathbf{T}^T\mathbf{C}\mathbf{T}\dot{\mathbf{q}}_{NR}(t) + \mathbf{T}^T\mathbf{K}\mathbf{T}\mathbf{q}_{NR}(t) + \mathbf{T}^T\mathbf{R}_\Gamma\mathbf{T} = \mathbf{T}^T\mathbf{F} \quad (3.39)$$

où l'exposant  $T$  désigne la transposée. Pour les problèmes statiques, l'équilibre correspond au minimum de l'énergie potentielle du champ  $\mathbf{q}_{NR}$  au sein du sous espace généré par  $\mathbf{T}$ . Cette base donne donc la connaissance du mouvement de chaque ddl de la structure EF lorsque le champ  $\mathbf{q}_{NR}$  est connu. On voit donc que les déplacements "physiques"  $\mathbf{q}_N$  seront d'autant mieux approximés que la base  $\mathbf{T}$  est capable de décrire ces mouvements. Tout l'objet des méthodes de réduction est donc de construire un sous espace approprié contenant une certaine connaissance *a priori* des réponses recherchées. Pour des raisons de simplicité, on considère ici une base  $\mathbf{T}$  réelle ce qui permet de simplifier l'écriture des équations tout en n'introduisant pas de limitations fondamentales. De plus, on souhaite préserver la réciprocity de la méthode et c'est la raison pour laquelle on multiplie à gauche par  $\mathbf{T}^T$  plutôt que par une autre base.

### 3.2.2 Troncature modale

La méthode de troncature modale est la plus intuitive à comprendre. On part du principe que la solution d'un système dynamique est basée sur la combinaison linéaire de ses modes de vibration et que son spectre fréquentiel est contenu dans une certaine bande. Ainsi seules les fréquences d'intérêt sont retenues et la base de sous espace  $\mathbf{T}$  s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{T} = [\varphi_1 \dots \varphi_{NM}] \quad (3.40)$$

où  $\varphi_i$  sont les vecteurs propres de la structure appartenant aux  $NM$  premières fréquences propres du système. La question des conditions aux limites pour le calcul de ces modes se pose ici et fait l'objet de diverses approches, le cas le plus général consistant à imposer sur les interfaces des conditions de raideur et d'inertie approchant au mieux celles des sous-structures adjacentes. On parle de modes à interfaces chargées, méthode proposée par Benfield et Hruda [BH71]. Les cas extrêmes de cette méthode sont les modes de vibration à interfaces fixes ou interfaces libres.

Si ces techniques sont très utiles dans le cas de structures linéaires où le statut des interfaces est identique durant l'analyse, elles ne sont d'aucun intérêt lorsque l'on souhaite connaître la position des ddls aux interfaces dans une gestion de contact par exemple. En effet, la modification des liaisons entre deux sous-structures (contact ou décontact) modifie les modes propres associés à ces deux sous-structures et cela imposerait donc à chaque changement de statut des ddls d'interface de procéder à une nouvelle condensation et on perdrait l'intérêt de la réduction de modèle.

### 3.2.3 Condensation statique de Guyan

L'idée est donc de traiter avec des modèles réduits qui contiennent des ddls physiques d'intérêt où il est par exemple nécessaire de gérer du contact. De tels ddls se situent généralement sur les surfaces des modèles, aux interfaces communes avec les autres sous-structures. Pour cela, on partitionne l'ensemble des ddls de la structure en deux sous-ensembles : le sous-ensemble des  $n_B$  ddls actifs  $\mathbf{q}_B$  (avec  $n_B \ll n$ ) qui décrivent à eux seuls le comportement de la structure et le sous-ensemble des  $n_I$  ddls complémentaires  $\mathbf{q}_I$  aussi appelés ddls internes. La partition du vecteur déplacement et des matrices de raideur et de masse est telle que :

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_B \\ \mathbf{q}_I \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BB} & \mathbf{K}_{BI} \\ \mathbf{K}_{IB} & \mathbf{K}_{II} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{BB} & \mathbf{M}_{BI} \\ \mathbf{M}_{IB} & \mathbf{M}_{II} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

L'hypothèse sous-jacente de la réduction de Guyan est de considérer que les efforts inertiels des ddls complémentaires puissent être négligés et que les efforts extérieurs soient uniquement appliqués aux ddls actifs. En posant  $\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}$  et  $\mathbf{F} = \omega^2\mathbf{M}\mathbf{q}$ , on obtient :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BB} & \mathbf{K}_{BI} \\ \mathbf{K}_{IB} & \mathbf{K}_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle \mathbf{q}_B \rangle \\ \mathbf{q}_I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_B \\ \langle \mathbf{0} \rangle \end{Bmatrix} \quad (3.42)$$

Les  $\langle \rangle$  dénotent des quantités imposées. On peut en déduire la relation de dépendance linéaire entre les ddls actifs  $\mathbf{q}_B$  et les ddls complémentaires  $\mathbf{q}_I$  :

$$\mathbf{K}_{IB}\mathbf{q}_B + \mathbf{K}_{II}\mathbf{q}_I = \mathbf{0} \quad (3.43)$$

d'où

$$\mathbf{q}_I = \mathbf{K}_{II}^{-1} \mathbf{K}_{IB} \mathbf{q}_B \quad (3.44)$$

On a donc la transformation suivante :

$$\mathbf{q} = \mathbf{T} \mathbf{q}_B \quad (3.45)$$

Où  $\mathbf{T}$  est la matrice des modes statiques :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_{II}^{-1} \mathbf{K}_{IB} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$\mathbf{T}$  est construite de façon itérative en appliquant un déplacement unitaire sur chaque ddl actif tout en maintenant les autres ddls actifs fixés. Chaque colonne représente donc la déformée statique pour un déplacement unitaire imposé sur un ddl et l'ensemble des colonnes sont appelées **modes de contrainte** ou **complément de Schur**.  $\mathbf{I}$  désigne la matrice identité et sa taille dépend du nombre de ddls  $\mathbf{q}_B$  retenus. La condensation de Guyan génère un modèle réduit qui représente exactement la déformation du modèle complet associé puisque les efforts d'inertie sont strictement nuls. Lorsque la fréquence d'intérêt  $f$  est supérieure à la première fréquence propre où les effets inertiels ne peuvent plus être négligés, une technique consiste à ajouter des modes de déformation statique dans la matrice  $\mathbf{T}$  afin d'augmenter la fréquence de coupure  $f_c$  du modèle réduit. Cela impose de considérer des ddls actifs  $\mathbf{q}_B$  supplémentaires ce qui n'est pas une solution optimale : le coût de la condensation et la taille du modèle réduit deviennent trop important vis-à-vis de l'augmentation toute relative de la fréquence de coupure. Nous allons voir dans la suite d'autres techniques tenant compte de la synthèse modale pour augmenter significativement et à plus faible coût la validité des modèles réduits en haute fréquence.

### 3.2.4 Méthodes à interfaces fixes : Réduction de Craig & Bampton

La méthode introduite par Craig et Bampton [CB68] est une méthode de Ritz dont les vecteurs de la base de réduction sont composés des modes statiques de liaison  $\mathbf{T}$  et d'une troncature de modes propres à interfaces fixes. La relation liant les ddls complémentaires  $\mathbf{q}_I$  aux ddls actifs  $\mathbf{q}_B$  et au vecteur des coordonnées modales  $\boldsymbol{\eta}_g$  également appelées ddls généralisés s'écrit :

$$\mathbf{q}_I = \boldsymbol{\Phi}_{IB} \mathbf{q}_B + \boldsymbol{\Phi}_{NM} \boldsymbol{\eta}_g \quad (3.47)$$

avec  $\boldsymbol{\Phi}_{IB} = -\mathbf{K}_{II}^{-1} \mathbf{K}_{IB}$  la matrice des modes statiques de liaison et  $\boldsymbol{\Phi}_{NM} = [\boldsymbol{\varphi}_1 \dots \boldsymbol{\varphi}_{NM}]$  la matrice des modes propres  $\boldsymbol{\varphi}_i$  à interfaces fixes, calculés pour  $\mathbf{q}_B = \mathbf{0}$ .  $NM$  correspond à la troncature modale définie par l'utilisateur et la fréquence de coupure du modèle réduit est donc située après la dernière fréquence retenue dans le modèle,  $f_c = f_{NM+1}$ . Les coordonnées du modèle complet s'écrivent donc en fonction de celles du modèle réduit selon la transformation :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{q}_B \\ \mathbf{q}_I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \boldsymbol{\Phi}_{IB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Phi}_{NM} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_B \\ \boldsymbol{\eta}_g \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_{CB} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_B \\ \boldsymbol{\eta}_g \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

où  $\mathbf{T}_{CB}$  est la base de Craig & Bampton. La matrice réduite de raideur s'écrit alors :

$$\mathbf{K}_{NR} = \mathbf{T}_{CB}^T \mathbf{K} \mathbf{T}_{CB} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{BB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_\varphi \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

On retrouve la matrice de rigidité condensée statiquement sur les ddls actifs,  $\bar{\mathbf{K}}_{BB} = \mathbf{K}_{BB} - \mathbf{K}_{IB}^T \mathbf{K}_{II}^{-1} \mathbf{K}_{IB}$  et la matrice diagonale des rigidités généralisées  $\mathbf{K}_\varphi$ , constituée par les valeurs propres du système sur sa diagonale  $\mathbf{K}_\varphi = \Phi_{NM}^T \mathbf{K}_{II} \Phi_{NM} = \text{diag}(\omega)$  dans le cas où les modes propres sont normalisés en masse.

De la même façon, on a la matrice de masse réduite :

$$\mathbf{M}_{NR} = \mathbf{T}_{CB}^T \mathbf{M} \mathbf{T}_{CB} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{BB} & \bar{\mathbf{M}}_{BI} \\ \bar{\mathbf{M}}_{IB} & \boldsymbol{\mu}_g \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Dans cette expression on retrouve la matrice de masse condensée aux interfaces  $\bar{\mathbf{M}}_{BB} = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T}$  et la matrice des masses généralisées  $\boldsymbol{\mu}_g = \Phi_{NM}^T \mathbf{M}_{II} \Phi_{NM}$ . On note que  $\boldsymbol{\mu}_g = \mathbf{I}$  si les modes propres sont normalisés en masse. Enfin, il existe une matrice de couplage de masse entre les modes statiques d'interface et les modes propres à interface fixe,  $\bar{\mathbf{M}}_{BI} = \bar{\mathbf{M}}_{IB}^T = \Phi_{IB}^T \mathbf{M} \Phi_{NM}$ .

Dans le cas d'un assemblage de deux sous-structures  $s_1$  et  $s_2$ , les équations de compatibilité des déplacements d'interface s'écrivent :

$$\mathbf{q}_B^{s_1} = \mathbf{q}_B^{s_2} = \mathbf{q}_B^s \quad (3.51)$$

Le champ des déplacements du modèle réduit assemblé prend la forme suivante :

$$\zeta = \left\{ \mathbf{q}_B^s \quad \boldsymbol{\eta}_g^{s_1} \quad \boldsymbol{\eta}_g^{s_2} \right\}^T \quad (3.52)$$

Le problème aux valeurs propres du système couplé réduit donne le système :

$$\omega^2 \bar{\mathbf{M}} \zeta = \bar{\mathbf{K}} \zeta \quad (3.53)$$

ou, sous forme développée :

$$\omega^2 \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{BB}^s & \bar{\mathbf{M}}_{BI}^{s_1} & \bar{\mathbf{M}}_{BI}^{s_2} \\ & \mathbf{m}_g^{s_1} & \mathbf{0} \\ SYM. & & \mathbf{m}_g^{s_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_B^s \\ \boldsymbol{\eta}_g^{s_1} \\ \boldsymbol{\eta}_g^{s_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{BB}^s & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{K}_\varphi^{s_1} & \mathbf{0} \\ SYM. & & \mathbf{K}_\varphi^{s_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_B^s \\ \boldsymbol{\eta}_g^{s_1} \\ \boldsymbol{\eta}_g^{s_2} \end{Bmatrix} \quad (3.54)$$

où les matrices de masses et raideurs  $\bar{\mathbf{M}}_{BB}^s$  et  $\bar{\mathbf{K}}_{BB}^s$  sont issues de l'assemblage des matrices des sous-structures  $s_1$  et  $s_2$  condensées aux interfaces :

$$\bar{\mathbf{M}}_{BB}^s = \bar{\mathbf{M}}_{BB}^{s_1} \bar{\mathbf{M}}_{BB}^{s_2} \text{ et } \bar{\mathbf{K}}_{BB}^s = \bar{\mathbf{K}}_{BB}^{s_1} \bar{\mathbf{K}}_{BB}^{s_2} \quad (3.55)$$

Cette méthode est très bien conditionnée du point de vue cinématique et la précision sur les premières fréquences propres et modes propres associés est excellente. De plus, les modes de vibration n'ont aucune influence sur les déplacements aux interfaces et sont propres à la sous-structure. Ainsi, les modèles générés par cette méthode peuvent être assemblés de façon indépendante au reste de la structure, c'est pourquoi on parle généralement de *superéléments*. On note que cette méthode permet d'accéder directement aux ddls actifs des modèles qui sont présents dans le vecteur d'état, autorisant ainsi de gérer du contact nœud à nœud en travaillant uniquement avec les modèles réduits.

On remarque tout de même que cette méthode n'a un intérêt que lorsque la zone d'interface est "petite" devant la taille du modèle EF complet. En effet, les matrices de raideur et de masse réduites sont pleines sur les ddls associés à la réduction statique de Guyan. Notons au passage que la méthode de réduction par modes d'interface (Component Mode Synthesis) [Bal96] permet d'améliorer significativement la réduction dans le cas de structures couplées. Néanmoins cela impose d'avoir des interfaces couplées tout au long de l'analyse ce qui n'est pas le cas ici.

### 3.2.5 Méthodes à interfaces libres

Ces méthodes reposent sur une base de modes libres et une base de correction de flexibilité résiduelle. Leur large diffusion dans les problèmes de synthèse modale doit beaucoup aux développements de Mac Neal [Nea71], d'où elles tirent généralement leurs noms. Elles se différencient des méthodes de Craig & Bampton par une combinaison d'un ensemble de modes normaux où les ddls d'interfaces sont libres avec un ensemble de modes statiques résiduels, qui s'interprète comme étant ce qu'il manque aux modes de vibration pour représenter exactement la déformée statique correspondante. Le mouvement des ddls actifs  $\mathbf{q}_B$  de chaque sous-structure peut se caractériser par une combinaison linéaire d'une base tronquée  $\Phi_B$  de ses modes libres  $\Phi$  :

$$\mathbf{q}_B \approx \Phi_B \boldsymbol{\eta}_g \quad (3.56)$$

Le calcul des modes élastiques  $\Phi$  est classique et ne pose pas de problème particulier :

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \Phi = \mathbf{0} \quad (3.57)$$

Les matrices de masse et de raideur réduites s'écrivent alors :

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \omega^2 \boldsymbol{\mu}_E \end{bmatrix} \quad \Phi^T \mathbf{M} \Phi = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\mu}_E \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mu} \quad (3.58)$$

avec  $\boldsymbol{\mu}$  la matrice diagonale des masses modales généralisées et  $\omega$  la matrice diagonale des pulsations propres. Les  $n$  premiers modes normaux calculés correspondent aux modes libres de la sous-structure dont on distingue  $m$  modes de corps rigide, soit  $n - m$  modes élastiques. Vu que le nombre de modes libres retenus  $r$  est limité ( $r < n$ ), le comportement dynamique des sous-structures réduites peut être erroné et on va alors considérer la contribution des modes résiduels non pris en compte dans la base des modes libres. Soit l'équation dynamique soumise à une charge harmonique aux interfaces  $\mathbf{F}_B$  à la pulsation  $\omega$  :

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_B \\ \mathbf{q}_I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_B \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.59)$$

La résolution de  $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_B \ \mathbf{q}_I]^T$  donne le système suivant :

$$\mathbf{q} = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_B \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \mathbf{Y}(\omega^2) \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_B \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.60)$$

Où  $\mathbf{Y}(\omega^2)$  est la matrice *d'admittance*. L'expression générale du déplacement  $\mathbf{q}_B$  dans le système (3.60), en considérant les conditions d'orthogonalité des modes propres (3.58), donne :

$$\mathbf{q}_B = \mathbf{Y}_{BB}(\omega)\mathbf{F}_B = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_{Bi}\varphi_{Bi}^T}{(\omega_i^2 - \omega^2)\mu_i} \mathbf{F}_B \quad (3.61)$$

Il s'agit de l'expansion modale de la matrice *d'admittance réduite* aux ddls d'interface  $\mathbf{Y}_{BB}(\omega)$ . On note que lorsque  $\omega \rightarrow 0$ , le champ de déplacement  $\mathbf{q}_B$  n'est fini que si  $\varphi_{Bi}^T \mathbf{F}_B = 0$ ,  $i = [1, m]$ , autrement dit, le vecteur des efforts d'interfaces doit être *auto-équilibré* pour que la solution statique d'un système existe même en présence de modes de corps rigide. Une solution statique se met donc sous la forme :

$$\mathbf{q}_B = \sum_{i=m+1}^n \frac{\varphi_{Bi}\varphi_{Bi}^T}{\omega_i^2\mu_i} \mathbf{F}_B = \mathbf{G}_{iso}\mathbf{F}_B \quad (3.62)$$

$\mathbf{G}_{iso}$  est la matrice de flexibilité généralisée puisque la matrice  $\mathbf{K}$  est singulière. Un moyen de rendre  $\mathbf{G}_{iso}$  unique est d'ajouter des appuis temporaires [GR97] ou de réaliser un shift en masse sur la matrice  $\mathbf{K}$ . Puis, la matrice de *flexibilité résiduelle* est obtenue en ôtant à la matrice de flexibilité généralisée la somme des flexibilités effectives des modes retenus :

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_{iso} - \sum_{i=m+1}^r \frac{\varphi_{Bi}\varphi_{Bi}^T}{\omega_i^2\mu_i} \quad (3.63)$$

La matrice  $\mathbf{G}$  permet donc d'obtenir la contribution des modes de vibration négligés pour toute sollicitation statique. Le champ de déplacement aux interfaces prend la forme suivante :

$$\mathbf{q}_B = \Phi_B \boldsymbol{\eta}_g + \mathbf{G}\mathbf{F}_B \quad (3.64)$$

On peut donc exprimer les énergies de déformation et les énergies cinétiques en fonction des coordonnées réduites  $[\boldsymbol{\eta}_g \ \mathbf{F}_B]^T$ . On remarque qu'il s'agit d'une formulation *hybride* puisqu'elle contient à la fois des termes d'amplitude modale  $\boldsymbol{\eta}_g$  et des termes d'effort aux interfaces  $\mathbf{F}_B$ . Il est possible d'homogénéiser cette écriture en reformulant les efforts aux interfaces en termes de paramètre de déplacement [TRGF95].

L'assemblage des sous-structures se fera donc en assurant la compatibilité des déplacements à l'interface :

$$\mathbf{q}_B^{s1} = \mathbf{q}_B^{s2} \quad (3.65)$$

et aussi de l'équilibre des forces à l'interface :

$$\mathbf{F}_B^{s1} = -\mathbf{F}_B^{s2} \quad (3.66)$$

En injectant l'équation (3.66) dans l'équation (3.64) pour les deux sous-structures, on obtient la relation suivante :

$$\mathbf{F}_B^{s1} = [\mathbf{G}^{s1} + \mathbf{G}^{s2}]^{-1} [\varphi_B^{s2} \boldsymbol{\eta}_g^{s2} - \varphi_B^{s1} \boldsymbol{\eta}_g^{s1}] \quad (3.67)$$

Si l'on considère l'équation modale du mouvement de chaque sous-structure prise sans amortissement et sans force extérieure :

$$\left[ \omega^2 \bar{\mathbf{M}}^{s_i} + \bar{\mathbf{K}}^{s_i} \right] \boldsymbol{\eta}_g^{s_i} = \boldsymbol{\Phi}_B^{s_i T} \mathbf{F}_B^{s_i} \quad (3.68)$$

En y injectant l'écriture (3.67), on obtient, sans développer les calculs intermédiaires, le problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{11} & \bar{\mathbf{K}}_{12} \\ \bar{\mathbf{K}}_{21} & \bar{\mathbf{K}}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}_g^{s_1} \\ \boldsymbol{\eta}_g^{s_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}^{s_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{M}}^{s_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}_g^{s_1} \\ \boldsymbol{\eta}_g^{s_2} \end{Bmatrix} \quad (3.69)$$

Avec les matrices blocs de raideur :

$$\bar{\mathbf{K}}_{11} = \bar{\mathbf{K}}^{s_1} + \boldsymbol{\Phi}_B^{s_1 T} \bar{\mathbf{K}}^s \boldsymbol{\Phi}_B^{s_1} \quad (3.70)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{22} = \bar{\mathbf{K}}^{s_2} + \boldsymbol{\Phi}_B^{s_2 T} \bar{\mathbf{K}}^s \boldsymbol{\Phi}_B^{s_2} \quad (3.71)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{12} = \bar{\mathbf{K}}_{21}^T = -\bar{\mathbf{K}}^{s_1} + \boldsymbol{\Phi}_B^{s_1 T} \bar{\mathbf{K}}^s \boldsymbol{\Phi}_B^{s_2} \quad (3.72)$$

Où  $\bar{\mathbf{K}}^s$  est la matrice de raideur obtenue par l'assemblage des matrices d'admittance des deux sous-structures aux interfaces :

$$\bar{\mathbf{K}}^s = [\mathbf{G}^{s_1} + \mathbf{G}^{s_2}]^{-1} \quad (3.73)$$

On constate alors que la formulation de l'assemblage final des sous-structures ne fait intervenir que les coordonnées modales des sous-structures ce qui présente un certain avantage puisque la taille du modèle réduit assemblé ne dépend que de la troncature modale et est indépendant des ddls d'interfaces, contrairement à la formulation de Craig & Bampton. De plus, on note que la matrice de masse réduite est diagonale ce qui présente un intérêt majeur lorsque l'on considère une intégration temporelle explicite (voir Annexe B). Notons au passage que la méthode présentée ici considère une réduction par rapport aux déplacements aux interfaces uniquement ce qui résulte en une approximation des matrices du système. Rubin [Rub75] propose une réduction en terme de déplacement global (modes d'attaches et modes libres) en considérant les coordonnées réduites homogènes ce qui offre une meilleure approximation des matrices du système mais donne une matrice de masse réduite contenant des termes de couplage.

### 3.2.6 Autres méthodes

Les deux méthodes présentées précédemment sont les plus usuelles et couramment rencontrées dans le cadre de la synthèse modale. Il existe d'autres méthodes spécifiquement adaptées à certains problèmes et qui sont des variantes des méthodes principales vues ci-dessus.

Citons la méthode duale de Craig & Bampton proposée par Rixen [Rix04] qui se base sur la méthode des modes libres et des flexibilités résiduelles où l'assemblage des sous-structures est réalisé en considérant les efforts d'interfaces et non les déplacements.

Notons également la méthode de substitution modale ou méthode à interfaces chargées proposée par Benfield et Hruda [BH71] et qui généralise les travaux de Gladwell [Gla64] sur les *branch modes*. Ce type de méthode est particulièrement adapté dans le cas d'une sous-structure principale sur laquelle sont rattachées des sous-structures secondaires (cas d'un satellite sur un lanceur par exemple). Elle autorise le choix des modes propres de la sous-structure principale : modes à interfaces libres ou



chargées, cette dernière option autorisant une meilleure convergence des modes propres du modèle réduit.

Enfin Craig et Chang [CC76] proposent une méthode générale de couplage de sous-structures en utilisant comme base un ensemble tronqué de modes normaux à interfaces libres de chaque sous-structure et un ensemble de modes d'attache résiduels construit en appliquant un chargement unitaire sur chaque ddls actifs en maintenant les autres ddls actifs libres. Il s'agit également d'une formulation *hybride* puisque le vecteur d'état du modèle réduit est composé des amplitudes modales et des efforts d'interface.

### 3.2.7 Choix de la méthode de réduction

Le choix d'une méthode plutôt qu'une autre est donc guidé par le type d'analyse que l'on souhaite faire et la précision désirée sur les fréquences et modes propres du système, sur les forces d'interface, le type d'analyse, etc. Contrairement à la réduction de Craig & Bampton où les modes de vibration sont à interfaces fixes, les modes de la méthode de Mac Neal sont à interfaces libres ce qui induit une matrice de passage plus petite entre les ddls physiques et les ddls généralisés car elle contient les modes naturels d'interface. Pour une même précision, il faut donc inclure plus de modes à interfaces fixes dans la méthode de Craig & Bampton. Néanmoins, la prise en compte du contact entre les différents composants nécessite la connaissance des déplacements aux interfaces à chaque itération de calcul ce qui est directement possible avec la méthode à interfaces fixes mais qui demande de passer du modèle réduit au modèle complet à chaque itération pour calculer les déplacements physiques, rendant la méthode à interfaces libres prohibitive. Dans la suite de la thèse, nous utiliserons donc une réduction de type Craig & Bampton car c'est la méthode qui nous semble la plus pertinente pour la gestion du contact. De plus, cette méthode est implémentée dans ABAQUS et NASTRAN qui feront partie de la future filière crissement mise en place à PSA Peugeot Citroën.

### 3.2.8 Validité des modèles réduits

Il existe différents outils permettant de "mesurer l'erreur" d'un modèle réduit par rapport à son modèle original. Dans la suite, nous présentons deux indicateurs d'erreur couramment utilisés, la comparaison des fréquences propres en calculant leur différence absolue ou relative et la mesure de la corrélation de leur modes propres *via* le critère de MAC (Modal Assurance Criterion [AB82]). Ainsi, pour deux modes propres  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  exprimés dans la même base, le MAC est le coefficient de corrélation entre deux vecteurs défini comme :

$$MAC(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \frac{|\mathbf{U}^H \mathbf{V}|^2}{|\mathbf{U}^H \mathbf{U}| |\mathbf{V}^H \mathbf{V}|} \quad (3.74)$$

où l'exposant  $^H$  désigne la matrice Hermitienne dans le cas de vecteurs propres complexes. Le critère de MAC est un scalaire qui prend la valeur unité lorsque les deux vecteurs  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  sont parfaitement colinéaires et est nul lorsque les deux vecteurs sont orthogonaux. En pratique, on peut considérer que les modes ayant une valeur de MAC supérieure à 0.9 sont corrélés.

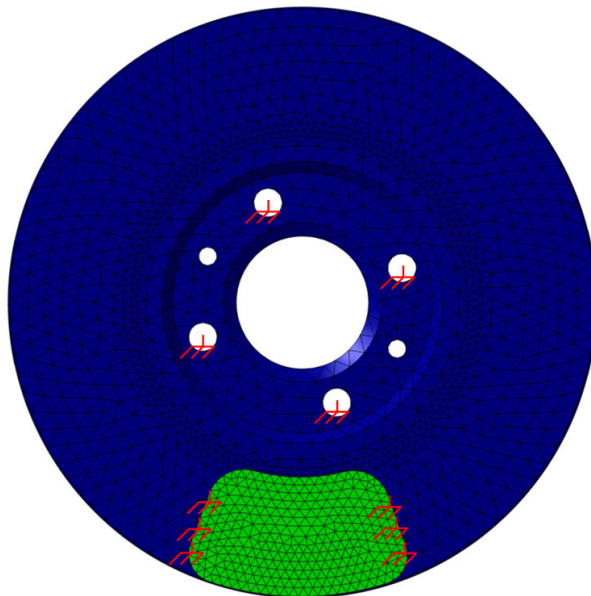


FIGURE 3.5 – Modèles éléments finis du disque et de la garniture en configuration encastrée

### 3.3 Application à la modélisation du système de frein

Cette section présente le modèle numérique du système de frein tel qu'il sera considéré au cours du mémoire et utilisé pour l'étude de stabilité et le développement des méthodes non-linéaires.

#### 3.3.1 Modèle Éléments Finis

On s'intéresse à un mécanisme simplifié de frein à disque dont la représentation éléments finis est donnée Figure 3.5. On considère un disque en fonte ventilé et une garniture de frein qui constituent le système de freinage d'un véhicule particulier. Le choix de ne considérer que ces deux éléments est motivé par la simplicité du modèle final qui sera utilisé dans le cadre du développement de la méthode non-linéaire proposée; il contient néanmoins les éléments nécessaires à la génération d'instabilités, c'est à dire l'interface frottante entre le disque et la garniture.

Les composants sont maillés avec des éléments tétraédriques quadratiques qui offrent une bonne approximation des fréquences propres contrairement aux éléments à interpolation linéaire. En contrepartie la gestion du contact n'est pas optimale puisque la formulation intrinsèque de cet élément génère un effort nul aux nœuds sommets lorsque l'élément est soumis à une pression uniforme [Aba08]. Toutefois, nous n'allons pas traiter le contact sur le modèle éléments finis mais sur le modèle réduit avec une gestion du contact nœud à nœud. Cette formulation d'élément sera donc satisfaisante en première approche. Une telle gestion du contact suggère une discrétisation spatiale dans laquelle les nœuds à l'interface disque/plaquette sont en vis-à-vis. Ceci permet de traiter directement avec les ddls actifs du superélément sans considérer un maillage surfacique intermédiaire. Les caractéristiques matériaux de la garniture et du disque sont récapitulées dans le Tableau 3.1.

<b>Garniture</b>		
Module de Young $E$	( $GPa$ )	2
Coefficient de Poisson $\nu$		0.1
Densité $\rho$	( $kg.m^{-3}$ )	2500
<b>Disque</b>		
Module de Young $E$	( $GPa$ )	125
Coefficient de Poisson $\nu$		0.3
Densité $\rho$	( $kg.m^{-3}$ )	7200

TABLE 3.1 – Caractéristiques matériaux

### Conditions aux limites

Le disque est encastré sur les 4 perçages au niveau du bol de fixation qui permettent de maintenir le disque sur le moyeu dans les 3 directions de l'espace. Pour simuler les efforts de freinage, on imposera alors une vitesse "fictive" sur chaque ddl de contact dans le plan de frottement. La garniture est encastrée sur ses bords dans le plan orthogonal à la surface de contact, autorisant ainsi un mouvement de corps rigide dans la direction normale au contact tel que l'on peut le trouver dans un montage de frein automobile (voir Figure 3.5).

### 3.3.2 Réduction de modèle : Choix des ddls d'interface

Aux vues des méthodes de synthèse modale dont nous disposons, nous nous orientons sur la réduction de Craig & Bampton puisque c'est celle qui offre à nos yeux la plus grande facilité pour la gestion du contact tout en ayant de bonnes propriétés de conditionnement et de convergence. Dans ce cadre, il convient de déterminer les ddls que nous allons retenir aux interfaces. Intuitivement, on vient retenir des nœuds à l'interface disque/plaquette afin d'appliquer les conditions de contact et de frottement. Le choix du nombre de nœuds à conserver est guidé par le compromis à faire entre la précision de la description de la surface de contact désirée, en supposant que plus le nombre de nœuds conservé est important, meilleure est la description et la taille du modèle réduit final qui conditionne les performances de calcul. Dans le cadre du développement de la méthode numérique, nous retiendrons 9 nœuds de contact uniformément répartis sur les surfaces en contact de chaque sous-structures (Figure 3.6 (a)) ce qui représente un total de 54 ddls non-linéaires (27 pour chaque sous-structure) puisque l'on dispose d'un modèle volumique à 3 ddls par nœud. De plus, pour simuler l'effort provenant du piston qui permet d'imposer un contact entre la plaquette et le disque, nous retenons 4 nœuds supplémentaires au dos de la plaquette (Figure 3.6 (b)), localisés autour du centre et simulant une répartition uniforme de l'effort. Puisque l'effort du piston est uniquement orienté dans la direction normale à la surface de contact, on ne retient que le ddl actif dans cette direction pour chaque nœud. Le modèle réduit de la garniture comporte donc 4 ddls linéaires d'interface liés à l'application de la pression du piston et 27 ddls non-linéaires d'interface liés à la discrétisation de la zone de contact avec le disque. Quant au modèle réduit de ce dernier, il est également composé de 27 ddls non-linéaires d'interface, en vis à vis des ddls non-linéaires de la garniture. Maintenant que les ddls d'interface sont définis (condensation de Guyan), il reste à déterminer les ddls généralisés liés au nombre de modes à

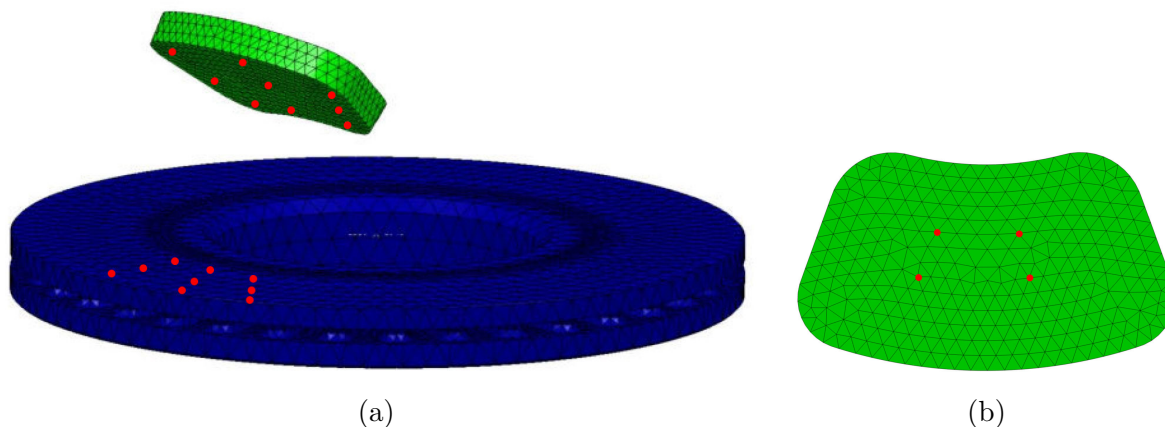


FIGURE 3.6 – (a) Modèle éclaté du disque et de la garniture. Les points rouges indiquent les nœuds de condensation; (b) Dos de la plaquette

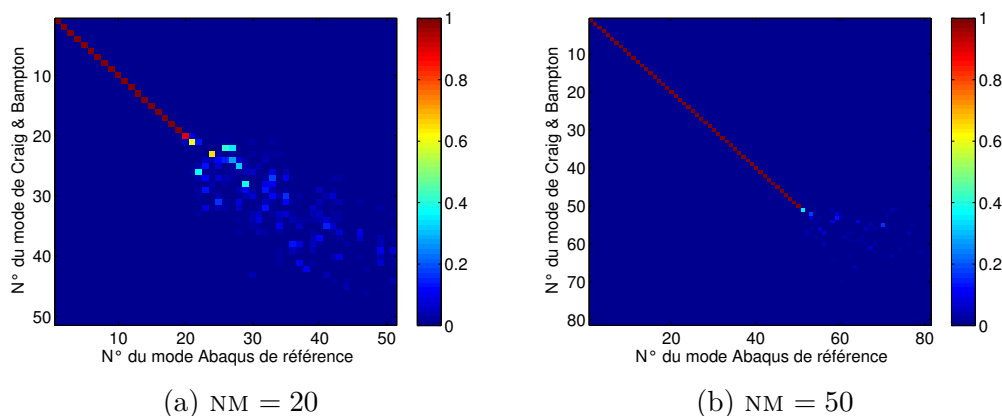


FIGURE 3.7 – Critère de MAC de la garniture

interfaces fixes retenus dans le modèle réduit afin que la description dynamique des modèles réduits soit cohérente avec le modèle éléments finis.

Pour déterminer le nombre de modes à conserver dans le modèle réduit, on va utiliser le critère de MAC et comparer les modes propres du modèle éléments finis aux modes propres du modèle réduit. Un rapide coup d’œil sur le critère de MAC de la garniture Figure 3.7 montre que les modes sont corrélés jusqu’à  $N_R$ , soit le nombre de modes retenus dans le modèle réduit. En retenant 50 modes à interfaces fixes, la fréquence de coupure du modèle réduit atteint environ 13kHz ce qui est suffisant en première approche pour l’étude du crissement de frein. Sur les Figures 3.8 (a), on se rend compte de l’intérêt de conserver un nombre de modes suffisamment grand si on veut approcher les hautes fréquences (voir l’erreur commise sur les modes supérieurs à 43 quand seulement 40 modes sont présents dans le modèle réduit).

Concernant le disque, nous remarquons sur la Figure 3.9 que les modes sont parfaitement corrélés jusqu’au n° 39 puis du n° 45 à 49 pour  $N_M = 50$ . Ce que l’on observe en 40 et 41 correspond en fait à une permutation des modes propres dans les matrices puisqu’ils sont doubles (modes de flexion - *out*

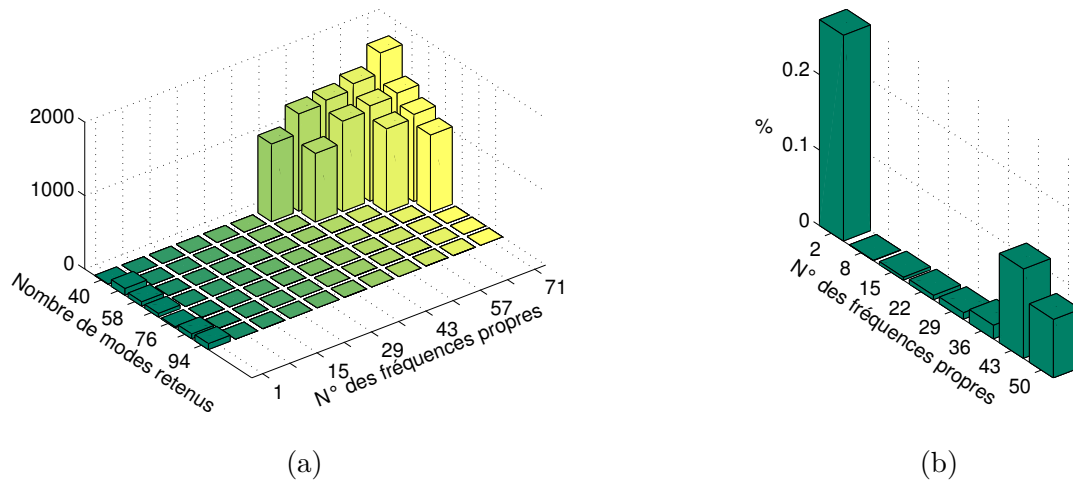


FIGURE 3.8 – Erreur relative des fréquences de la garniture en fonction du nombre de modes retenus dans le modèle réduit. Sur la Figure (b), on a l'erreur relative lorsque  $NM = 50$ .

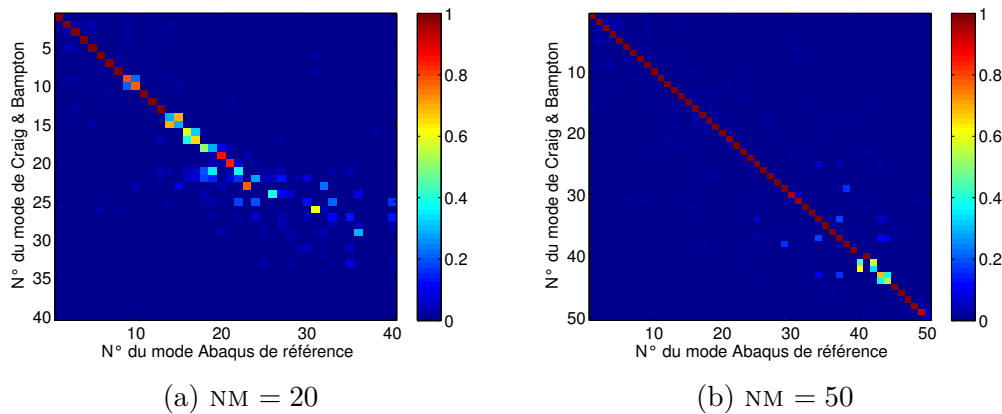


FIGURE 3.9 – Critère de MAC du disque

*of plane* - du disque, Figure 3.10) et se distinguent uniquement par un déphasage de  $90^\circ$ , ils sont donc orthogonaux d'où l'absence totale de corrélation sur la diagonale.

Concernant les modes 42, 43 et 44 on observe une très faible corrélation. Il s'agit là de modes du bol de fixation qui présentent un intérêt limité. Hormis ces 3 modes mal représentés par le modèle réduit, tous les autres modes présentent une excellente corrélation avec ceux du modèle élément finis jusqu'au mode n°50 (pour  $NM = 50$ ) soit une fréquence de coupure  $f_c = 11kHz$  environ. L'erreur relative en fréquence (Figure 3.11) très faible confirme les résultats du critère de MAC.

Pour chaque sous-structure, on va donc conserver 50 modes propres calculés à interfaces fixes ce qui représente un total de 50 ddls généralisés linéaires. Au final, le modèle réduit de la garniture est composé de 81 ddls dont 27 sont non-linéaires et liés à l'interface de contact et 54 sont linéaires dont 4 sont liés à l'application de l'effort de piston, les 50 autres sont les ddls généralisés liés aux modes propres. Le modèle réduit du disque comporte un total de 77 ddls dont 27 ddls non-linéaires sont également associés à l'interface de contact et en vis à vis avec les ddls non-linéaires de la garniture et

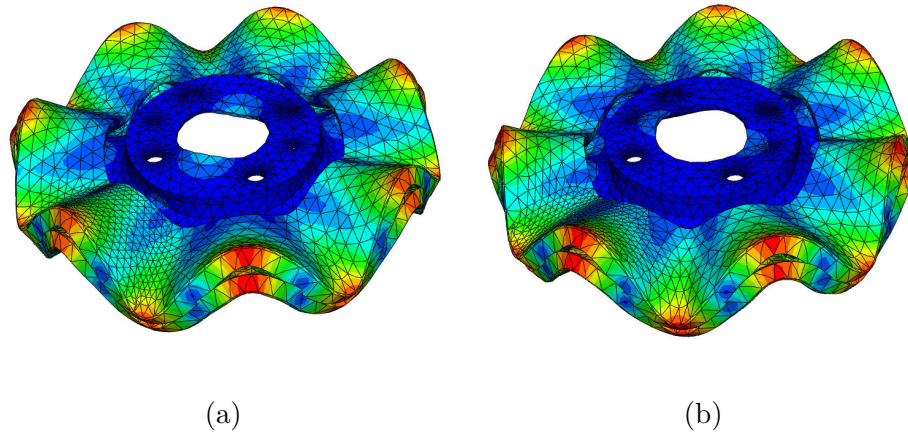


FIGURE 3.10 – Modes doubles du disque à 9.4 kHz : (a) mode 40, (b) mode 41

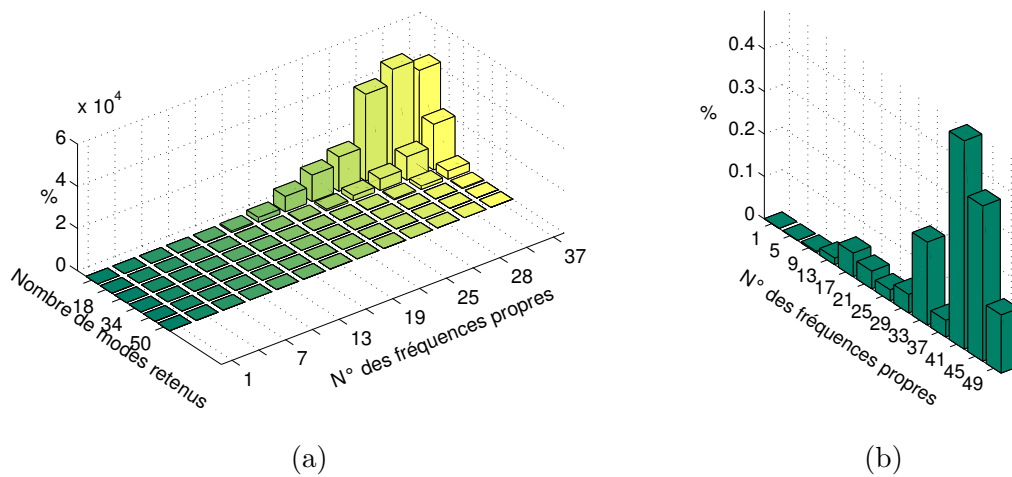


FIGURE 3.11 – Erreur relative des fréquences du disque en fonction du nombre de modes retenus dans le modèle réduit. Sur la Figure (b), on a l'erreur relative lorsque  $NM = 50$ .

50 sont les ddls généralisés. Le modèle complet disque et plaquette contient donc un total de 158 ddls dont 54 sont non-linéaires et 104 sont linéaires.

### 3.3.2.1 Construction de la matrice d'amortissement

La matrice d'amortissement réduite peut être obtenue selon différentes méthodes. La première est de considérer tout d'abord une matrice d'amortissement  $\mathbf{C}$  spécifique pour chaque modèle éléments finis puis de calculer la matrice d'amortissement réduite *via* la matrice de passage  $\mathbf{T}_{CB}$  (3.48) :

$$\mathbf{C}_{NR} = \mathbf{T}_{CB}^T \mathbf{C} \mathbf{T}_{CB} \quad (3.75)$$

*Remarque* : On peut directement construire la matrice d'amortissement de chaque composant dans l'espace du modèle réduit, les matrices résultantes étant indépendantes du choix de l'espace de construction.

L'autre méthode consiste à considérer le système global comme une structure unique couplée aux interfaces. Ainsi on ne raisonne plus en terme d'amortissement pour chaque structure prise séparément mais plutôt sur la structure dans son ensemble où l'on vient amortir les modes du système couplé. Le choix de cette méthode se justifie ici car d'une part nous ne disposons pas de l'information quant à l'amortissement spécifique de chaque sous-structure et d'autre part nous verrons dans les chapitres 4 et 5 l'influence de l'amortissement sur la stabilité du système et sur le niveau vibratoire. Puisque les modes du système couplé sont ceux impliqués dans le crissement, il paraît judicieux de travailler directement avec l'amortissement de ces modes. La construction de la matrice d'amortissement du système couplé se déroule selon plusieurs étapes. Tout d'abord, on considère le problème aux valeurs propres du système réduit couplé :

$$\left( \bar{\mathbf{K}} + \bar{\mathbf{J}}_c - \Omega^2 \bar{\mathbf{M}} \right) \Phi = \mathbf{0} \quad (3.76)$$

avec

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_g & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_d \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_g & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_d \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

où  $\mathbf{K}_g$  et  $\mathbf{K}_d$  sont respectivement les matrices de raideur réduites de la garniture et du disque. De la même façon,  $\mathbf{M}_g$  et  $\mathbf{M}_d$  sont respectivement les matrices de masse réduites de la garniture et du disque. Dorénavant, nous ferons implicitement référence au modèle réduit assemblé de la garniture et du disque et omettrons donc la barre au dessus des matrices et des vecteurs dans la suite du mémoire. La matrice  $\mathbf{J}_c$  est la matrice de couplage entre les différentes sous-structures (ici le disque et la garniture) et sa construction sera abordée au chapitre 4. Notons tout de même qu'elle ne contient que des termes de couplages liés au contact sans frottement, elle est donc symétrique. A partir du problème aux valeurs propres (3.76) on obtient une matrice diagonale  $\Omega^2 = \text{diag}(\omega^2)$  de valeurs propres et une matrice  $\Phi$  dont les colonnes sont composées des vecteurs propres. Puisque le système (3.76) est symétrique, les deux matrices calculées précédemment sont réelles. Puisque les vecteurs propres sont normalisés en masse, on obtient :

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Omega^2 \quad (3.78)$$

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I} \quad (3.79)$$

En considérant un amortissement modal sur chaque mode du système couplé, la matrice d'amortissement réduite s'écrit :

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}\Phi \mathbf{C}_\Phi \Phi^T \mathbf{M} \quad (3.80)$$

Avec  $\mathbf{C}_\Phi$  la matrice d'amortissement modal dont les termes de la diagonale s'écrivent :

$$C_{\Phi_i} = 2\xi\omega_i \quad (3.81)$$

Classiquement nous considérons un amortissement modal de  $\xi = 1\%$  sur chaque mode *sauf* sur les modes qui seront impliqués dans le crissement, où nous appliquerons un amortissement modal spécifique. Nous reviendrons en détail sur ce point dans l'analyse de stabilité et l'analyse non-linéaire.

### 3.3.3 Gestion du contact

Nous considérons une méthode de pénalité pour la gestion du contact plutôt que l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange. Plusieurs arguments motivent ce choix. En premier lieu, c'est une méthode simple à adapter et elle ne génère pas d'inconnues supplémentaires. D'autre part, les mesures de compression de la garniture considérées ici sur un support rigide (Figure 3.12) montrent un comportement non-linéaire, principalement dû aux aspérités des surfaces de contact et/ou au comportement élastique non-linéaire du matériau de garniture. Une loi de Signorini (et donc l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange) simule un contact "dur" entre les aspérités, la méthode de pénalité non-linéaire simule un contact plus souple entre les aspérités et la véracité d'une méthode plutôt qu'une autre est difficilement évaluable tant que l'on ne dispose pas de données expérimentales de référence. D'autres auteurs [dRBL08] utilisent une méthode de pénalité pour la simulation du contact dans le cadre de la simulation temporelle de crissement.

Nous reportons donc cette non linéarité sur les éléments de contact en interpolant la courbe en rouge et en ne gardant que les termes linéaire et cubique de la courbe d'interpolation. L'effort de contact sans frottement  $F_c$  au niveau d'un élément de contact  $i$  s'écrit alors :

$$F_{c,i} = \begin{cases} k_1\delta_n + k_3(\delta_n)^3 & \forall \delta_n \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.82)$$

Dans la suite de l'étude, prendra les valeurs suivantes :  $k_1 = 1.8e^7 \text{ N.m}^{-1}$  et  $k_3 = 5.1e^{14} \text{ N.m}^{-1}$ . Pour la gestion du frottement, nous choisissons également de régulariser la loi de Coulomb en pénalisant les faibles vitesses de glissement par une raideur  $k_t$  comme on peut le voir sur la Figure 3.4. Soit une loi régularisée :

$$\begin{cases} \|\vec{F}_t\| = k_t \|\vec{v}_t\| & \text{si } \|\vec{v}_t\| < \frac{\mu}{k_t} \\ \|\vec{F}_t\| = \mu \|\vec{F}_n\| & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.83)$$

Nous choisissons  $k_t$  arbitrairement que nous fixons à  $k_t = 60 \text{ s}^{-1}$ . Cette méthode donne une approximation de l'effort tangent lorsque la vitesse de glissement est faible et considère qu'il est nul à vitesse nulle. On peut remarquer ici que le frottement est formulé en vitesse contrairement à la proposition (3.18) où le frottement est géré en terme de déplacement relatif dans la phase non glissante (*stick*).



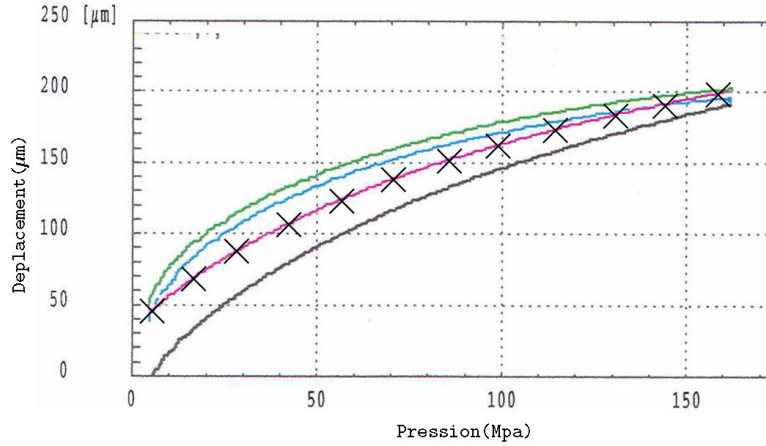


FIGURE 3.12 – Mesure de compression de la garniture

### 3.3.4 Synthèse de la réduction de modèle

La formulation mathématique du modèle réduit du système disque/garniture s'écrit finalement :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, t) = \mathbf{F}_{ext} \quad (3.84)$$

$\mathbf{F}_{ext}$  est le vecteur des efforts extérieurs et représente dans le cas du système de frein l'effort appliqué sur la garniture dans la direction normale de contact dû à l'application d'une pression sur le piston. On note que cet effort n'est pas une excitation harmonique mais un effort constant au cours d'une phase de freinage. Il peut néanmoins varier de façon quasi-statique (variation de la pression appliquée sur le piston au cours du freinage).  $\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, t)$  est le vecteur des efforts non-linéaires du modèle regroupant le vecteur des efforts de contact  $\mathbf{F}_c(\mathbf{U}, t)$  et le vecteurs des efforts de frottement  $\mathbf{F}_t(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, t)$ .

#### 3.3.4.1 Problème quasi-statique

Le système quasi-statique à résoudre est de la forme suivante, en négligeant les effets inertiels et d'amortissement :

$$\mathbf{K}\mathbf{U} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{U}) = \mathbf{F}_{ext} \quad (3.85)$$

Avec  $\mathbf{F}_{nl} = [\mathbf{F}_c, \mathbf{F}_t]^T$ . Cette équation non-linéaire peut se résoudre de différentes manières. On peut utiliser la méthode des statuts qui résout l'équation (3.85) en supposant que les contacts soient fermés ( $\delta_n = 0$ ) et relâxe ou contraint les conditions suivant qu'elle détecte un effort normal positif  $F_n > 0$  (relaxation) ou une interpénétration  $\delta_n < 0$ . Cette procédure est poursuivie jusqu'à ce que les mêmes statuts de contact soient obtenus entre deux itérations successives. La convergence de cette méthode est prouvée lorsqu'un unique changement de statut opère à chaque itération mais est néanmoins très lente, surtout en présence de frottement.

Dans notre cas, nous utiliserons des méthodes itératives de type Newton dont un exposé est fait en Annexe A. La recherche de l'équilibre stationnaire glissant est donc un problème d'optimisation de la forme :

$$\min_{U \in \mathbb{R}^n} \{ \mathbf{K}U + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{U}) - \mathbf{F}_{ext} \} \quad (3.86)$$

### 3.3.4.2 Problème dynamique

La résolution approchée de l'équation différentielle du second ordre (3.84) nécessite l'utilisation de schémas d'intégration numérique pas à pas qui estiment les trois quantités inconnues à savoir le déplacement, la vitesse et l'accélération. Une synthèse des méthodes temporelles est présentée en Annexe B. On note qu'en présence de contact frottant, l'écriture des algorithmes temporels nécessite quelques précautions puisque des impacts aux interfaces de contact peuvent apparaître, entraînant une discontinuité des déplacements et des vitesses générant alors des instabilités numériques (voir notamment les travaux de Jean [Jea99]).

Dans le cadre de la thèse, nous nous orientons sur des méthodes fréquentielles plutôt que sur des méthodes temporelles. Ces dernières seront sollicitées à titre de comparaison et de validation et l'analyse dynamique non-linéaire sera abordée aux chapitres 5 et 6.

## 3.4 Conclusion

Nous avons établi dans ce chapitre le cadre mathématique de la modélisation du système de frein avec notamment une étape de discrétisation éléments finis puis une étape de réduction par la méthode de Craig & Bampton avec une condensation sur les nœuds aux interfaces de contact et sur la zone d'application de l'effort normal. Le nombre de modes à interfaces fixes retenu est suffisant pour décrire la dynamique du système jusqu'à 11kHz. Le contact frottant est géré par une méthode de pénalité dont les coefficients sont extraits des courbes expérimentales de compression de la plaquette. La non-linéarité du modèle provient du phénomène de contact/perte de contact et de la loi de pénalité qui a un comportement de type cubique. Nous verrons dans le prochain chapitre les cas où le disque et la plaquette en situation de frottement glissant génèrent des instabilités qui sont à l'origine des vibrations auto-entretenu.



## Chapitre 4

# Systemes dynamiques en situation de glissement : analyse de la stabilite

L'objectif de ce chapitre est de definir la notion de stabilite d'une solution, qu'elle soit de type point fixe ou periodique, d'un systeme autonome non-lineaire. En effet, ce type de systeme peut comporter plusieurs solutions, disposant d'un bassin d'attraction ou non. Dans ce dernier cas, un changement qualitatif du type de solution est envisageable lorsqu'un parametre de controle varie. Une solution de type point fixe peut devenir instable et entrainer l'emergence spontanee de vibrations. Ce changement qualitatif est une *bifurcation* dont nous etudions mathematiquement les conditions d'apparition. Puis nous abordons les strategies numeriques d'etude de stabilite des solutions periodiques et les bifurcations qui peuvent apparaître. Enfin, nous etudions la stabilite des points fixes du modele de frein developpe dans le chapitre precedent en fonction du coefficient de frottement et de l'amortissement du systeme.

### 4.1 Nature des solutions

La nature des solutions conditionne le type d'analyse de stabilite qui va pouvoir être conduit. Soit un systeme dynamique non-lineaire :

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mu) \quad (4.1)$$

où  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ . Dans cette expression, le point denote la derivation par rapport au temps et  $\mu$  est un parametre de controle. Le systeme est dit non-autonome si le parametre de temps  $t$  apparaît explicitement dans (4.1), sinon, il est autonome. Quelle que soit sa nature, les solutions generatees se distinguent en quatre categories :

- **Solution de type point fixe, point d'equilibre ou stationnaire.** Soit  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{2n}$  un point fixe si :

$$f(\mathbf{x}_0, \mu_0) = \mathbf{0} \quad (4.2)$$

La solution de type point fixe correspond au comportement statique des structures. On suppose dans la suite que la solution  $\mathbf{x}_0$  est obtenue à  $t = t_0 = 0$ .

- **Solution périodique.**  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$  est une solution périodique de (4.1) si :

$$\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t) \text{ et } \mathbf{x}\left(t + \check{T}\right) \neq \mathbf{x}(t) \text{ pour } 0 < \check{T} < T \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (4.3)$$

La visualisation de ce type de solution dans l'espace des phases donne des trajectoires fermées appelées *cycles limites*.

- **Solution quasi-périodique ou pseudo-périodique.** Le spectre de ce type de solution dynamique est caractérisé par la présence d'au moins deux fréquences incommensurables (c'est à dire que leur rapport ne donne pas un nombre rationnel). La caractérisation de ce type de solution nécessite de passer par un portrait de phase ou bien d'employer une section de Poincaré ce que nous verrons par la suite.
- **Solution chaotique.** Ce type de solution, relativement difficile à identifier, est généralement caractérisé par les exposants de Lyapounov [NB95]. Les systèmes dynamiques associés ont la particularité d'avoir une grande sensibilité aux conditions initiales et présentent une infinité de bassins attracteurs.

## 4.2 Stabilité des points fixes

La stabilité des points fixes est généralement caractérisée au sens de Lyapunov, mathématicien russe qui en a donné les bases théoriques et qui porte maintenant son nom :

**Définition 1 (Stabilité d'un point fixe au sens de Lyapunov)** *L'équilibre  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  de (4.1) est :*

- *stable si  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta, \delta(\varepsilon) > 0$  tel que  $\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$ .*
- *asymptotiquement stable si  $\mathbf{x}_0$  est stable et que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ .*
- *instable sinon.*

Cette définition formalise la notion de stabilité. La caractéristique d'un équilibre stable est qu'une trajectoire qui démarre dans un voisinage  $\delta$  autour de cet équilibre stable restera indéfiniment dans le voisinage  $\varepsilon$  ou convergera sur l'équilibre stable dans le cas de la stabilité asymptotique (Figure 4.1). Par opposition, une perturbation aussi infime soit-elle entraîne une perte de stabilité dans le cas d'un équilibre instable qui se traduira soit par une fuite de l'équilibre sans retour (structure soumise à un chargement au delà de son point de flambage) soit par une solution dynamique dépendante du temps.

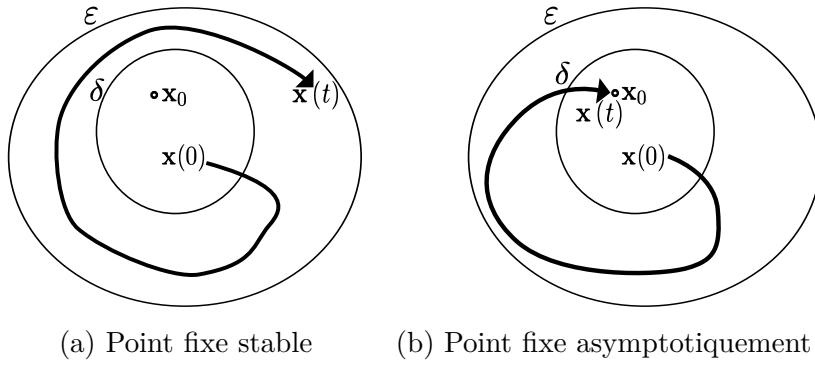
L'étude de la stabilité globale est très difficile à montrer [NB95] et la caractérisation de l'état d'une solution  $(\mathbf{x}_0, \mu_0)$  se ramène donc à l'étude de sa stabilité locale, obtenue en injectant une perturbation  $\delta\mathbf{x}$  telle que la solution s'écrive  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}$ . Le système (4.1) devient alors :

$$\dot{\delta\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}, \mu_0) \quad (4.4)$$

En supposant que  $f$  est de classe  $C^1$ , un développement en série de Taylor au premier ordre donne :

$$\dot{\delta\mathbf{x}} = \mathbf{J}_{\mathbf{x}_0, \mu_0}(f) \delta\mathbf{x} \quad (4.5)$$

où  $\mathbf{J}_{\mathbf{x}_0, \mu_0}$  est la matrice Jacobienne de  $f$  au point fixe  $(\mathbf{x}_0, \mu_0)$  qui s'écrit :



(a) Point fixe stable (b) Point fixe asymptotiquement stable

FIGURE 4.1 – Schématisation de la stabilité des points fixes

$$\mathbf{J}_{\mathbf{x}_0, \mu_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{2n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{2n}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{2n}}{\partial x_{2n}} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

La solution du système (4.5) passant par une condition initiale  $\tilde{\mathbf{x}}_0$  en  $t_0 = 0$  s'écrit :

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}_0 e^{\mathbf{J}_{\mathbf{x}_0, \mu_0} t} = \tilde{\mathbf{x}}_0 \Phi e^{(\lambda t)} \Phi^{-1} \quad (4.7)$$

Le remplacement de l'exponentielle de matrice  $e^{\mathbf{J}_{\mathbf{x}_0, \mu_0} t}$  n'est valable que si  $\mathbf{J}$  est diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une matrice  $\Phi$  telle que  $\Phi^{-1} \mathbf{J} \Phi = \boldsymbol{\lambda}$  où  $\boldsymbol{\lambda}$  est une matrice diagonale dont les éléments sont les valeurs propres  $\lambda_i$  de  $\mathbf{J}$ , également appelées exposants caractéristiques associés à  $f$  en  $(\mathbf{x}_0, \mu_0)$  et  $\Phi$  est la matrice des vecteurs propres associés. Dans le cas où les valeurs propres de  $\mathbf{J}$  ne sont pas toutes distinctes, on peut utiliser la décomposition qui transforme  $\mathbf{J}$  dans sa forme de Jordan, c'est à dire  $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{J} \mathbf{P} = \boldsymbol{\Lambda} = \text{bloc diag} [\boldsymbol{\Lambda}_1, \dots, \boldsymbol{\Lambda}_r]$  où  $\boldsymbol{\Lambda}_i$  est le bloc de Jordan associé à la valeur propre  $\lambda_i$  de  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{P}$  la matrice des vecteurs propres généralisés. Par définition, un bloc de Jordan d'ordre 1 prend la forme  $\boldsymbol{\Lambda}_i = \lambda_i$  alors qu'un bloc de Jordan d'ordre  $m > 1$  prend la forme suivante :

$$\boldsymbol{\Lambda}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Ces valeurs propres vont permettre de classifier le point d'équilibre  $(\mathbf{x}_0, \mu_0)$  et d'en connaître la stabilité. Classiquement, on distingue les points d'équilibre hyperbolique des points d'équilibre non hyperbolique selon que  $\mathbf{J}$  ne possède pas de valeur propre  $\lambda_i$  à partie réelle nulle ou possède au moins une valeur propre  $\lambda_i$  à partie réelle nulle, respectivement. Dans le cas où  $(\mathbf{x}_0, \mu_0)$  est un point d'équilibre hyperbolique, il peut être classifié selon trois types :

- *Puit* : Si les valeurs propres ont toutes des parties réelles négatives, les composantes  $e^{(\lambda t)} = \sum e^{(a_i t)} e^{(\omega_i t)}$  de (4.7) décroissent et  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$  pour  $t \rightarrow +\infty$ .  $\mathbf{x}_0$  est alors qualifié de *puit* et est

asymptotiquement stable. De plus, si  $\mathbf{J}$  n'a que des valeurs propres réelles,  $\mathbf{x}_0$  est un *nœud stable* alors que si  $\mathbf{J}$  possède des valeurs propres complexes  $\mathbf{x}_0$  est un *foyer stable*.

- *Source* : Si au moins une des valeurs propres a sa partie réelle positive, alors  $\mathbf{x}_0$  est dénommé point *source* ou point *répulsif* et est instable. Dans le cas où  $\mathbf{J}$  possède uniquement des valeurs propres réelles alors  $\mathbf{x}_0$  est un *nœud instable* alors que si ces dernières sont complexes,  $\mathbf{x}_0$  est appelé *foyer instable*.
- *Selle* : Si  $\mathbf{J}$  possède des valeurs propres dont les parties réelles sont positives et négatives alors  $\mathbf{x}_0$  est un point *selle* et est instable.

Dans le cas où  $(\mathbf{x}_0, \mu_0)$  est un point d'équilibre non hyperbolique c'est à dire que  $\mathbf{J}$  possède des valeurs à parties réelles nulles, trois cas de figure se distinguent :

- Si  $\mathbf{J}$  possède au moins une valeur propre à partie réelle positive,  $\mathbf{x}_0$  est instable.
- Si  $\mathbf{J}$  possède certaines valeurs propres ayant des parties réelles négatives, les autres étant nulles,  $\mathbf{x}_0$  est dit *neutre* ou *marginale* et on ne peut pas conclure sur la stabilité de cet équilibre.
- Si  $\mathbf{J}$  possède uniquement des valeurs propres imaginaires pures non nulles,  $\mathbf{x}_0$  est un *centre*.

Dans le cadre des points d'équilibre hyperbolique, le théorème de Hartman-Grobman [Gro59] implique qu'au voisinage d'un équilibre hyperbolique, le comportement et donc la stabilité d'un système non-linéaire du type (4.1) sont liés à ceux de son linéarisé (4.5). Ainsi une position d'équilibre  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  du système (4.1) est stable si la position d'équilibre  $\tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}$  du système (4.5) est stable. De même,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  est une position d'équilibre instable si  $\tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}$  est instable.

*Remarque* : dans le cas de systèmes comportant un faible nombre de dds, il est possible de déterminer la stabilité de façon analytique sans avoir à calculer les valeurs propres du système linéarisé par l'utilisation des critères de Routh-Hurwitz [Mei86].

Les cas de stabilité des points d'équilibre non hyperbolique sont plus complexes à étudier et requièrent de prendre en compte les effets des termes d'ordre supérieur à 1 dans le développement de Taylor de l'équation (4.5) (Théorème de Shoshitaishvili [Sho72]). Dans le cadre de l'étude de la stabilité du système de frein à disque, nous nous intéressons à des phénomènes de bifurcation continue entre des états asymptotiquement stables et des états instables en fonction de l'évolution d'un ou plusieurs paramètres du système. L'observation des points d'équilibre non-hyperbolique a lieu aux bifurcations constituant la frontière de stabilité. L'étude de stabilité à cet endroit ne présente que peu d'intérêt et il est de plus très improbable d'obtenir le paramétrage exact qui donnerait ce point d'équilibre non hyperbolique. Nous n'aborderons donc pas dans ce mémoire les techniques d'étude de stabilité de ces équilibres et le lecteur intéressé pourra consulter les ouvrages de [NB95].

## Fonctions de Lyapunov

Si la linéarisation d'ordre 1 permet de statuer sur la stabilité des points d'équilibre hyperbolique, elle ne permet pas de connaître le domaine stable dans lequel les conclusions obtenues sur la stabilité d'un point d'équilibre  $(\mathbf{x}_0, \mu_0)$  restent valables. Les fonctions de Lyapunov sont donc introduites pour étudier le domaine de stabilité des attracteurs, c'est à dire l'ensemble des conditions initiales  $\tilde{\mathbf{x}}$  qui amènent le système  $f$  à tendre vers  $\mathbf{x}_0$  au bout d'un certain temps. Cet ensemble s'appelle un *bassin*

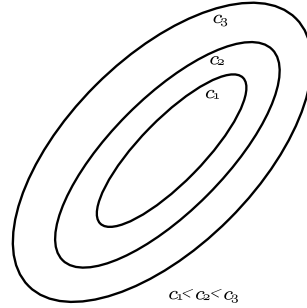


FIGURE 4.2 – Iso-surfaces des fonctions de Lyapunov

*d'attraction.* Les fonctions de Lyapunov sont également utilisées pour déterminer la stabilité des points d'équilibre non hyperbolique. En considérant le système autonome (4.1) dont un point d'équilibre est  $\mathbf{x}_0$ , on définit la fonction de Lyapunov  $V$  dans un ouvert  $U \in \mathbb{R}^{2n}$  de  $f$  en  $\mathbf{x}_0$  par :

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R}^{2n} &\mapsto \mathbb{R}, \in C^1(U) \\ \mathbf{x} &\mapsto \begin{cases} V(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in U, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0 \\ V(\mathbf{x}_0) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.9)$$

De plus, on note la dérivée de  $V$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V} : \mathbb{R}^{2n} &\mapsto \mathbb{R}, \in C^1(U) \\ \mathbf{x} &\mapsto \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Nous obtenons le théorème de stabilité de Hirsch et Smale [HS74] :

**Théorème 1 (Hirsch et Smale)** *Si il existe une application  $V$  de  $f$  au point  $\mathbf{x}_0$  définie dans un ouvert  $U \in \mathbb{R}^{2n}$  et contenant  $\mathbf{x}_0$  alors :*

- Si  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in U$ ,  $\mathbf{x}_0$  est stable.
- Si  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in U - \mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{x}_0$  est asymptotiquement stable.
- Si  $\dot{V}(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in U - \mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{x}_0$  est instable.

Les fonctions de Lyapunov peuvent être représentées plus intuitivement sous forme de surface,  $V(\mathbf{x}) = c \quad \forall c > 0$  dites *surface de Lyapunov* (Figure 4.2).

De manière générale, la condition  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$  implique qu'une trajectoire traversant la surface de Lyapunov  $V(\mathbf{x}) = c$  évolue dans un ouvert  $U_c = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n} | V(\mathbf{x}) \leq c\}$  et ne peut pas en sortir. La condition  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$  implique que la trajectoire  $\mathbf{x}$  évolue d'une surface de Lyapunov  $c_j$  à une autre surface de Lyapunov  $c_i$  telle que  $c_i \subset c_j$  et atteint la position d'équilibre  $\mathbf{x}_0$  dans un temps fini. Si  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$  uniquement, il est impossible d'être certain que la trajectoire approche l'origine pour tout  $t$  mais on peut tout de même conclure que cette dernière est stable puisqu'elle est contenue dans une boule  $B_\epsilon$  si on impose que le point fixe  $\mathbf{x}_0$  s'étende dans une surface de Lyapunov  $c_i$  contenue dans cette boule.

Généralement, l'étude de stabilité d'un système dynamique non-linéaire autonome ne se résume pas à l'étude d'un équilibre défini par une paramétrisation unique. En effet, on cherche généralement à savoir comment se comporte le système dynamique en fonction de l'évolution d'un ou plusieurs



paramètres et notamment de distinguer les zones de stabilité des zones d'instabilité dont leurs frontières forment ce que l'on dénomme des *bifurcations*. Nous allons voir dans la suite les différentes notions de ces bifurcations dont la principale qui est la bifurcation de Hopf.

### 4.3 Bifurcation des points fixes

Contrairement au théorème de Lyapunov, la notion de bifurcation concerne une courbe d'équilibre et désigne un changement qualitatif des caractéristiques d'un système, c'est-à-dire la nature des points fixes et des orbites périodiques, leur nombre et la nature de la stabilité associée lorsqu'un ou plusieurs paramètres de contrôle varient. La problématique est de déterminer si le système conserve son comportement qualitatif lorsqu'il est soumis à des variations auquel cas on parle de système structurellement stable. On distingue les bifurcations *continues* si l'état du système varie continuellement en fonction du paramètre de contrôle des bifurcations *discontinues* également appelées bifurcations *catastrophiques* subdivisées en bifurcations *dangereuses* et *explosives*. La bifurcation dangereuse se caractérise par la disparition soudaine de l'attracteur de la solution où le système effectue un saut vers un nouvel attracteur. Une bifurcation explosive ne génère pas un saut de la réponse mais "explose" en un attracteur plus grand et qui inclut l'ancien. C'est un phénomène réversible si le paramètre de contrôle varie en sens inverse.

Une bifurcation au point fixe  $(\mathbf{x}_c, \mu_c)$  se caractérise par :

1.  $f(\mathbf{x}_c, \mu_c) = \mathbf{0}$
2.  $\mathbf{J}_{\mathbf{x}_c, \mu_c}$  admet une paire de valeurs propres  $\lambda = \pm i\omega$  à parties imaginaires pures tandis que les autres valeurs propres ont une partie réelle non nulle.

Si au cours de la variation d'un paramètre de contrôle du système (4.1), un point fixe initialement hyperbolique (c'est à dire qu'il satisfait les deux conditions précédentes) devient non hyperbolique, et que le comportement qualitatif du système varie avant et après ce point, alors c'est un point de bifurcation. On distingue différents types de bifurcation :

- bifurcation col-nœud (*saddle-node*),
- bifurcation transcritique (*transcritical*),
- bifurcation *pitchfork* ou *symmetry-breaking* qui peut être sur- ou sous-critique,
- bifurcation de Hopf sur- ou sous-critique.

Ces bifurcations sont illustrées sur les Figures 4.3 et 4.4.

Les trois premiers types de bifurcation sont qualifiés de bifurcations statiques car seules des branches de points fixes se croisent. Le système passe alors d'un point d'équilibre  $(\mathbf{x}_c, \mu_c)$  à un autre point d'équilibre  $(\check{\mathbf{x}}_c, \mu_c)$ . Dans le cas d'une bifurcation de Hopf, il existe une orbite fermée c'est à dire un cycle limite pour  $\mu_0 > \mu_c$  si le comportement qualitatif du système passe de l'état stable à l'état instable au point d'équilibre non hyperbolique  $(\mathbf{x}_c, \mu_c)$ . Cela correspond à un croisement des branches associées à des points fixes et à des solutions périodiques, c'est donc une bifurcation *dynamique*. Elle se caractérise par :

1.  $f(\mathbf{x}_c, \mu_c) = \mathbf{0}$
2.  $\mathbf{J}_{\mathbf{x}_c, \mu_c}$  admet une paire de valeurs propres  $\lambda = \pm i\omega$  à parties imaginaires pures tandis que les autres valeurs propres ont une partie réelle non nulle.

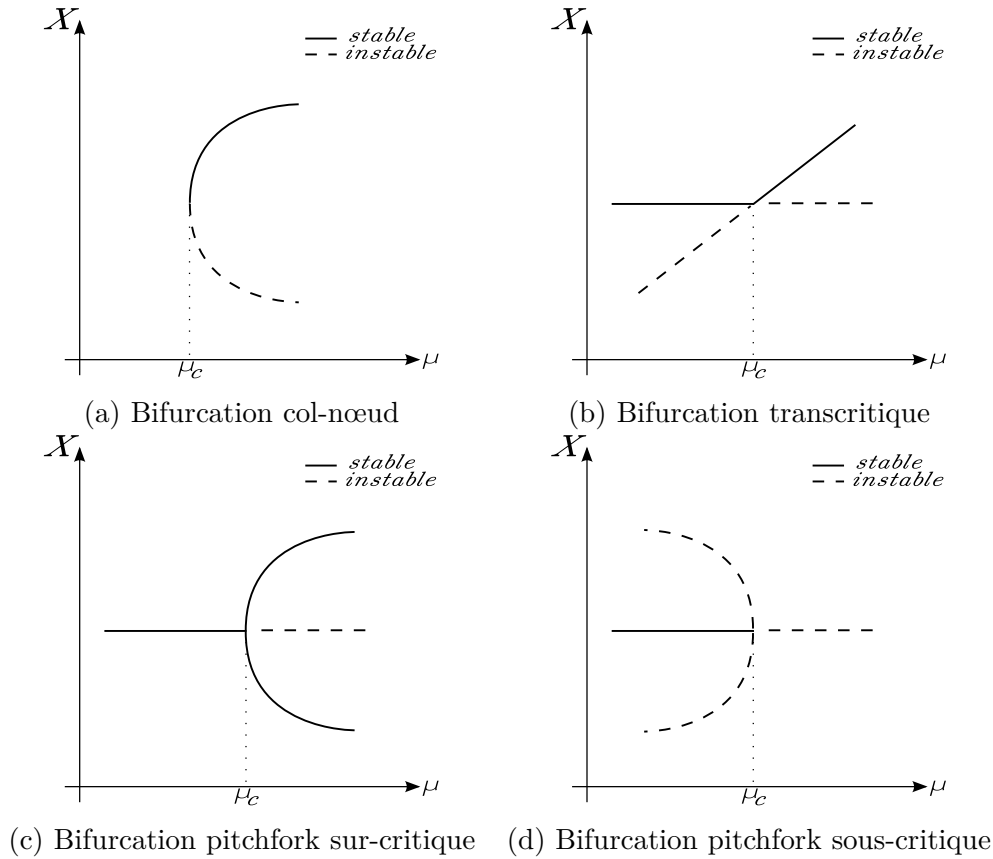


FIGURE 4.3 – Bifurcations statiques d'un point fixe hyperbolique

3. Pour  $\mu = \mu_c$  et  $\lambda = \pm i\omega$  qui désigne la paire de valeurs propres purement imaginaires conjuguées, il faut que  $\frac{\partial}{\partial \mu} \operatorname{Re}(\lambda(\mu))|_{\mu=\mu_c} \neq 0$ .

Cette dernière condition implique une condition de transversalité de l'axe des imaginaires de la partie réelle de la valeur propre  $\lambda$ . Ainsi elle traverse l'axe imaginaire à une vitesse non nulle alors que toutes les autres valeurs propres sont à parties réelles négatives, elle devient positive et il y a perte de stabilité asymptotique. Il s'agit d'une instabilité par flottement où les trajectoires initiées dans le voisinage de l'équilibre oscillent autour de cet équilibre et leur amplitudes croissent exponentiellement jusqu'à atteindre une solution périodique de période  $2\pi/\omega$  également appelée *cycle limite*. A noter que dans le cadre des systèmes autonomes linéaires, les amplitudes croissent infiniment. Une bifurcation de Hopf peut s'obtenir de plusieurs manières, comme par un amortissement négatif ou encore un couplage modal sur des systèmes comportant au moins deux dds. Selon que la bifurcation de Hopf est sous-critique (point d'équilibre stable pour  $\mu > \mu_c$ ) ou bien sur-critique (point d'équilibre instable pour  $\mu > \mu_c$ ), la solution périodique est stable ou instable (voir Figure 4.4). La détermination de sa stabilité nécessite d'autres techniques que nous allons aborder dans la suite.

## 4.4 Stabilité des solutions périodiques

Nous avons vu que la perte de stabilité asymptotique d'un système autonome non-linéaire dans le cadre d'une bifurcation de Hopf entraîne une vibration de type périodique. Tout comme pour le cas des points fixes, il existe des outils numériques pour en étudier la stabilité que nous allons aborder

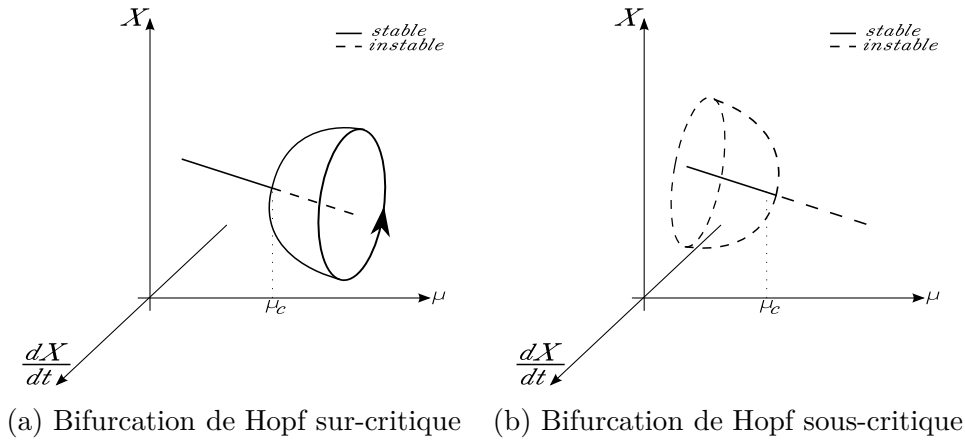


FIGURE 4.4 – Bifurcation de Hopf d’un point fixe

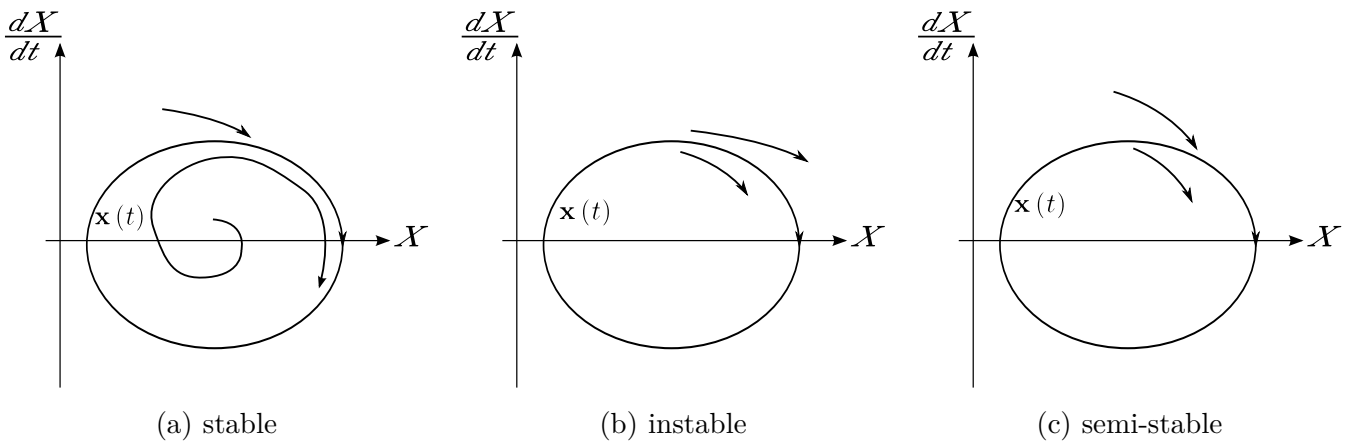


FIGURE 4.5 – Stabilité des trajectoires

brièvement dans la suite. Une solution périodique dont la définition est donnée à l’équation (4.3) prend le nom de *cycle limite* s’il n’y a pas d’autre solution périodique proche d’elle et correspond à une orbite fermée isolée dans l’espace des phases. Ainsi, un cycle limite est tel qu’aucune trajectoire commençant suffisamment proche soit aussi fermée. Un cycle limite est qualifié de stable si toute trajectoire initiée suffisamment proche converge vers ce dernier pour  $t \rightarrow +\infty$ . Si toutes les trajectoires initiées dans un de ces voisinages s’en éloignent, le cycle limite est qualifié d’instable. Enfin si les trajectoires s’éloignent du cycle d’un côté et s’en rapprochent de l’autre, le cycle limite est qualifié de semi-stable. Les trois cas sont illustrés à la Figure 4.5. Tout comme l’étude de stabilité des points fixes, la stabilité d’une solution périodique  $\mathbf{x}(t)$  peut être définie au sens de Lyapounov :

**Définition 2 (Stabilité d’une solution périodique au sens de Lyapounov)** Soit  $\mathbf{q}_t$  le flot associé à  $f$  :

- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tel que  $\forall \mathbf{x}_0, \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}(0)\| \leq \delta$ , si  $\|\mathbf{q}_t(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}(t)\| \leq \varepsilon, \forall t > 0$  alors  $\mathbf{x}(t)$  est stable.
- Si de plus,  $\exists \delta_0 > 0$  tel que,  $\forall \mathbf{x}_0, \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}(0)\| \leq \delta_0$ , on ait  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{q}_t(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}(t)\| = 0$  alors  $\mathbf{x}(t)$  est asymptotiquement stable.
- $\mathbf{x}(t)$  est instable si elle n’est pas stable.

Le flot  $\varrho_t$  est défini de la façon suivante :

**Définition 3 (Flot d'une équation différentielle)** Soit  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  tel que  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$  admette pour tout  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  une solution unique  $\mathbf{x}(t) : I \rightarrow \Omega$  définie sur un intervalle de temps  $I \ni t_0$  telle que  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , on appelle flot de l'équation différentielle ou flot associé à  $f$  l'application  $\varrho_t : \Omega \rightarrow \Omega$  paramétrée par  $t$  tel que  $\forall t \in I, \forall \mathbf{x}_0 \in \Omega, \varrho_t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t)$ .

Finalement, l'étude du comportement de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle revient à caractériser son flot. Si l'étude de la stabilité au sens de Lyapunov est adaptée pour l'étude des points d'équilibre, elle montre ses limites dans le cadre de l'étude des solutions périodiques. En effet, Nayfeh [NB95] a montré que deux trajectoires engendrées par des conditions initiales proches ( $< \delta$  si on prend la définition de Lyapunov) peuvent être très éloignées pour un temps très grand et donc être instables au sens de Lyapunov alors qu'elles convergent vers deux cycles limites stables. La notion de stabilité au sens de Poincaré est alors préférée :

**Définition 4 (Stabilité d'une solution périodique au sens de Poincaré)** Soit  $C$  un cycle limite du flot  $\varrho_t$  :

- Si pour toute solution  $T$  périodique  $\mathbf{x}(t)$  représentante de  $C$  on a  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tel que  $\forall \mathbf{x}_0, \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}(0)\| \leq \delta$ , on ait  $d(t) = \inf_{\tau \in [0, T[} \|\varrho_t - \mathbf{x}(\tau)\| \leq \varepsilon, \forall t > 0$ , alors  $C$  est stable.
- De plus, si  $C$  est l'ensemble  $\omega$ -limite de  $\varrho_t$  dans un voisinage de  $\mathbf{x}(t)$  alors  $C$  est asymptotiquement stable.
- On dit que  $C$  est instable s'il n'est pas stable.

*Remarque* : un ensemble  $\omega$ -limite est l'intersection des fermetures des semi-trajectoires positives :

$$\omega(x) = \bigcap_{y \in \gamma(x)} \overline{\gamma^+(y)} \text{ où } \gamma^+(y) = \bigcup_{t \geq 0} \varrho_t \quad (4.11)$$

Deux approches se distinguent pour l'étude de stabilité dans le domaine temporel. La première est liée à la théorie de Floquet [Kuc82] qui étudie la stabilité des équations différentielles linéaires, la deuxième est basée sur les applications de Poincaré qui se résument à l'étude de stabilité de points fixes.

#### 4.4.1 Théorie de Floquet

Cette théorie s'intéresse aux solutions de type périodique et permet à la fois de statuer sur leur stabilité mais aussi sur leur mode de bifurcation. Comme pour l'étude des points fixes, l'étude de stabilité consiste à injecter une perturbation  $\varepsilon$  sur une solution  $T$  périodique  $\mathbf{x}_0(t)$  de l'équation différentielle (4.1) à  $\mu = \mu_0$  telle que  $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \varepsilon$ . Un développement de Taylor de  $f$  au voisinage de  $\mathbf{x}_0(t)$ , donne, en ne conservant que les termes linéaires :

$$\dot{\varepsilon} \approx \mathbf{J}_f(t, \mu_0)\varepsilon \quad (4.12)$$

Cette approximation étant effectuée autour d'une position locale  $\mathbf{x}_0(t)$ , l'étude de stabilité sera également locale. La matrice Jacobienne  $\mathbf{J}_f(t, \mu_0)$  dépend du temps, et est  $T$  périodique même si cela peut ne pas être sa période minimale. En posant une base de solutions linéairement indépendantes  $\Phi(t) = [\varphi_1(t), \dots, \varphi_{2n}(t)]$  de l'équation (4.12), on peut montrer que  $\Phi(t+T)$  est également une matrice

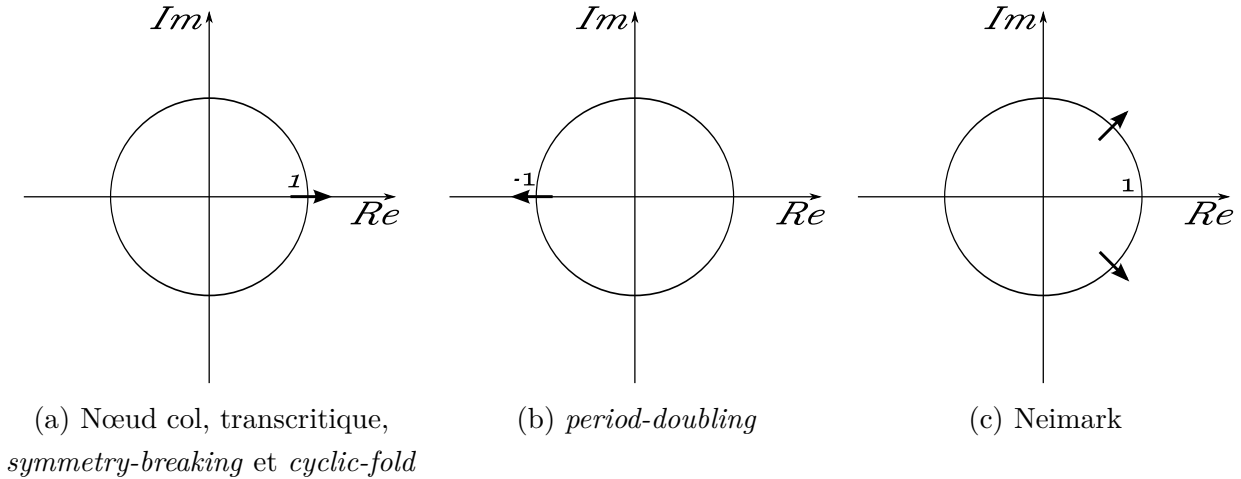


FIGURE 4.6 – Modes de bifurcation

de solutions et la périodicité de l'équation permet d'exprimer cette dernière comme une combinaison linéaire de  $\Phi(t)$  tel que :

$$\Phi(t + T) = \Xi \Phi(t) \quad (4.13)$$

où  $\Xi$  est la matrice de *monodromie* qui correspond à la transition entre l'instant  $t$  et l'instant  $t + T$  des solutions périodiques  $\Phi(t)$ . Une base de solutions admissibles de  $\Phi(t)$  est la matrice identité  $\mathbf{I}$ . En considérant l'instant initial  $t_0 = 0$ , l'équation (4.13) devient :

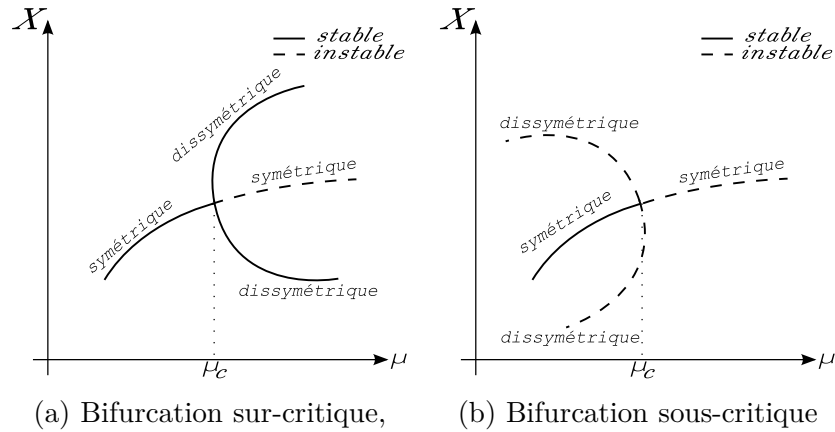
$$\Xi = \Phi(T) \quad (4.14)$$

La matrice de monodromie est alors composée des réponses temporelles à l'instant  $T$  de l'équation linéarisée (4.12) d'une perturbation unitaire sur chaque ddl. Les valeurs propres  $\lambda_{2n}$  de  $\Xi$ , également appelées *multipliateurs de Floquet* traduisent les "modes de perturbation" de la solution temporelle  $\mathbf{x}_0(t)$  de (4.1). Elles caractérisent alors l'état de divergence ou de convergence orbitale d'une perturbation apportée à la solution  $\mathbf{x}_0(t)$ . Elles sont généralement représentées dans un plan complexe et définies par rapport à un cercle unité.

Une solution  $T$  périodique possède un multiplicateur de Floquet toujours égal à 1. Si ce dernier est égal à  $-1$ , la solution est bi-périodique de période  $2T$ . La stabilité des solutions dépend de la position des multipliateurs par rapport au cercle unité. Ainsi :

- Le cycle limite est qualifié de stable ou *d'attracteur périodique* si tous les multipliateurs de Floquet sont à l'intérieur du cercle unité  $\|\lambda_i\| < 1, i \in [1, 2n]$ .
- Le cycle limite est qualifié instable de *type selle* si au moins un multiplicateur est à l'extérieur du cercle unité,  $\|\lambda_i\| > 1$ . Il est qualifié de *répulseur périodique* si tous les multipliateurs sont à l'extérieur du cercle unité (sauf celui qui se situe sur le cercle unité).

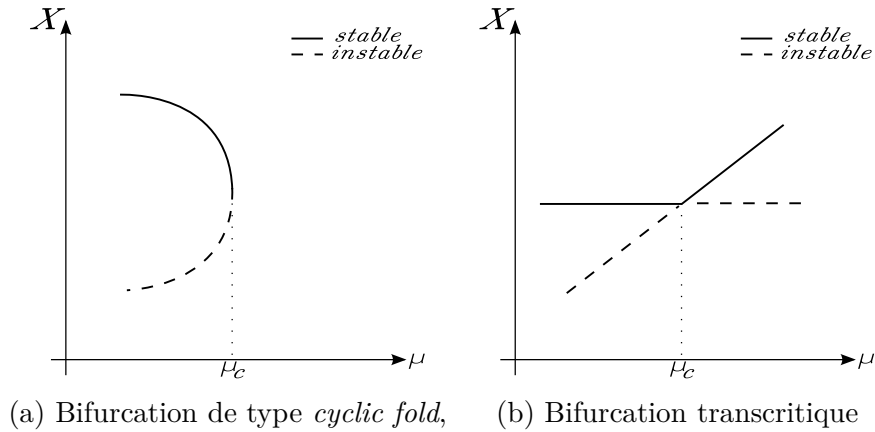
Si au moins deux multipliateurs sont sur le cercle unité, la solution est périodique non hyperbolique. Comme dans le cas de la solution périodique hyperbolique, si au moins un des multipliateurs est à l'extérieur du cercle, la solution est instable. Dans le cas où tous les multipliateurs sont à l'intérieur du cercle (exceptés ceux qui sont sur le cercle), il faut augmenter l'ordre du développement de Taylor

FIGURE 4.7 – Bifurcation de type *symmetry breaking*

de  $f$  dans l'équation (4.12) pour statuer sur la stabilité de la solution.

Si l'étude des multiplicateurs renseigne sur la stabilité des cycles limites, leur manière de quitter le cercle unité dans le cas de solutions initialement stables indique une perte de stabilité de la branche de cycle limite et le type de bifurcation associé (illustré sur la Figure 4.6). Trois scénarios se distinguent :

- Le franchissement du cercle en 1 correspond à une bifurcation de type nœud-col (*cyclic-fold*), transcritique ou *symmetry-breaking*. Elle est associée au croisement d'une branche de cycle limite stable à une autre branche de cycle limite instable. La nature de la bifurcation dépend des propriétés de la solution périodique. Si la solution possède des propriétés de symétrie avant le franchissement du cercle par les multiplicateurs et qu'elle les perde après, alors on a affaire à une bifurcation de type *symmetry-breaking* qui peut être sur-critique (bifurcation continue) ou sous-critique (bifurcation discontinue) (Figure 4.7). Dans le cas de la bifurcation de type *cyclic-fold*, une branche de solution périodique stable et une branche de solution périodique instable convergent à  $\mu = \mu_c$  et il n'existe plus de solution périodique stable à partir de ce point (Figure 4.8 (a)). C'est donc une bifurcation discontinue ou *catastrophique* qui peut être *dangereuse* ou *explosive*. La première regroupe les solutions bornées qui évoluent vers un nouvel attracteur de type ponctuel, périodique ou aperiodique. La seconde caractérise une explosion en un nouvel attracteur incluant l'ancien, appelé *cycle limite fantôme*. Enfin la bifurcation transcritique où des branches de solution stables et instables qui existent avant la bifurcation se prolongent après la bifurcation respectivement en des branches instables et stables. Il y a donc échange de la nature de la stabilité, Figure 4.8 (b).
- Le franchissement du cercle en  $-1$  correspond à une bifurcation de dédoublement de période (ou *flip*) où la réponse périodique présente des nouvelles composantes de période  $2T$ . La branche de solutions stables avant la bifurcation se prolonge en une branche de solutions instables après la bifurcation. On a alors affaire à une bifurcation sur-critique s'il existe une nouvelle branche de solution de période double après la bifurcation ou une bifurcation sous-critique s'il y a destruction d'une branche de solutions instables avant la bifurcation. Dans ce cas, on a alors une bifurcation de type *cyclic fold* où le système est attiré soit vers une autre solution (bifurcation dangereuse) soit il y a explosion en un nouvel attracteur qui englobe l'ancien (bifurcation explosive).

FIGURE 4.8 – Bifurcations de type *cyclic fold* et transcritique

- Le franchissement simultané par une paire de multiplicateurs conjugués correspond à une bifurcation dite de Neimark-Sacker-Hopf ou bifurcation secondaire de Hopf. Cette bifurcation correspond au croisement de la branche de solutions périodiques avec une branche de solutions périodiques à une autre période. Il y a donc l'apparition d'une seconde fréquence, en plus de la première et la nouvelle solution peut être périodique, bi-périodique ou pseudo-périodique si les deux fréquences sont incommensurables. Tout comme dans le cas d'une bifurcation de Hopf d'un point fixe, il existe des bifurcations sur- et sous-critiques.

#### 4.4.2 Section de Poincaré

Les sections de Poincaré constituent une interprétation géométrique de la théorie de Floquet et ramènent l'étude de stabilité d'une solution périodique à l'étude d'un point fixe dans l'application de Poincaré. De plus, elles permettent également l'étude des solutions pseudo-périodiques et constituent ainsi une généralisation de la théorie de Floquet. On définit une variété différentielle (ou hyper-surface)  $\Sigma$  de dimension  $2n - 1$  à  $f$ , comme :

$$\Sigma = \{\mathbf{x} \in U : g(\mathbf{x}) = 0\} \quad (4.15)$$

où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^{2n}$  et  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continûment différentiable satisfaisant :

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in U \quad (4.16)$$

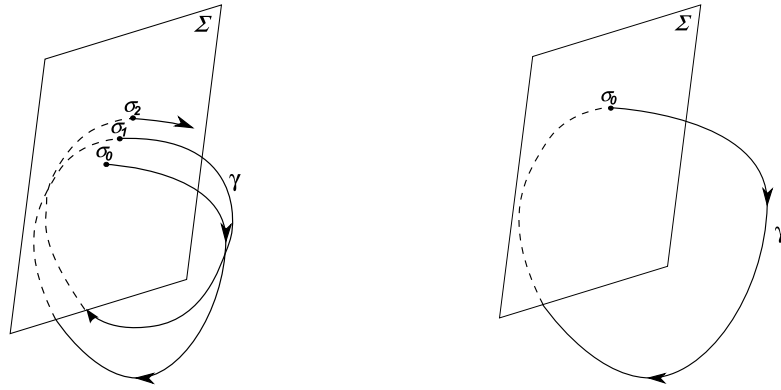
Autrement dit,  $f$  est transverse à la variété. Une application de Poincaré (ou de premier retour) est définie comme :

$$\sigma_0 = \mathbf{P}(\tau, \sigma_1) \quad \text{avec } (\sigma_0, \sigma_1) \in \mathbb{R}^{2n} \quad (4.17)$$

tel que :

$$g(\sigma_0) = g(\sigma_1) = 0 \quad (4.18)$$

Autrement dit, il existe une solution  $\sigma_0$  issue de  $\Sigma$  qui revient à  $\Sigma$  en  $\sigma_1$  au temps  $\tau$  (Figure 4.9 (a)). L'application  $\sigma \mapsto \mathbf{P}(\tau(\sigma), \sigma)$  de  $\Sigma$  de dimension  $2n - 1$  dans  $\Sigma$  est appelée application de



(a) Portrait d'une solution quelconque (b) Portrait d'une solution périodique

FIGURE 4.9 – Sections de Poincaré de deux solutions dynamiques

Poincaré ou de premier retour. Plutôt que de s'intéresser à la solution  $\mathbf{x}_0(t)$  comme dans le cas de la théorie de Floquet, on considère l'ensemble des points  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$  correspondant aux intersections de la trajectoire  $\gamma$  avec  $\Sigma$ .

Dans le cadre d'un système  $T$  périodique, si la surface est construite en  $t = 0$  et que  $\tau \rightarrow T$ ,  $P(\sigma) = \sigma$ , la section de Poincaré est un unique point (Figure 4.9 (b)). Dans le cas de systèmes multi-périodiques, la section de Poincaré est constituée d'un ensemble fini de points si les fréquences sont commensurables (et on parle de section de Poincaré d'ordre  $p$  avec  $p$  le nombre de fréquences), sinon, en présence d'au moins deux fréquences incommensurables, la section de Poincaré forme une courbe fermée. Si aucun de ces portraits n'est obtenu, la solution temporelle ne peut être caractérisée. Il peut s'agir d'un attracteur étrange ou d'un mouvement chaotique.

## 4.5 Synthèse

Nous avons présenté les notions de stabilité d'un point fixe des systèmes autonomes non-linéaires selon la définition de Lyapunov qui est la plus couramment utilisée. Nous avons également abordé les modes de bifurcation lorsqu'il y a perte de l'équilibre et obtention d'un nouvel attracteur qui peut être statique ou dynamique. Pour ce dernier, on a affaire à une bifurcation de Hopf et existence de nouvelles solutions dépendantes du temps qui peuvent être périodiques, pseudo-périodiques ou chaotiques. Leurs stabilités peuvent également être définies au sens de Lyapunov mais celle-ci n'est pas robuste et leur caractérisation par les multiplicateurs de Floquet et l'application de Poincaré est généralement préférée.

Dans le cadre des systèmes de frein à disque, on cherche généralement à connaître le seuil d'instabilité lorsqu'un ou plusieurs paramètres varient afin de se donner un espace de conception "robuste" vis-à-vis du crissement de frein. Cela revient donc à étudier la stabilité d'un glissement stationnaire en situation de contact unilatéral pour une multitude de configurations, ce qui a fait l'objet de nombreux travaux aussi bien dans le cas de systèmes continus [Ngu03] que dans le cas de systèmes éléments finis [Moi98]. Dans la suite nous allons étudier la stabilité du modèle de frein à disque présenté au chapitre précédent et le type de bifurcation associé.



## 4.6 Application au système de frein

Pour rappel, les équations du système de frein en situation de contact frottant unilatéral s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, t) = \mathbf{F}_{ext} \quad (4.19)$$

Tout d'abord, on détermine l'équilibre stationnaire glissant du système de frein en procédant à une mise en charge quasi-statique de la garniture de frein sur le disque sous l'effet de la pression de freinage (effort imposé). Cette étape correspond tout simplement à une action de freinage où le conducteur vient appliquer une pression hydraulique sur le piston de frein par l'intermédiaire de la pédale de freinage. Le point d'équilibre  $\mathbf{U}_0$  est obtenu en résolvant l'équation suivante :

$$\mathbf{K}\mathbf{U}_0 + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{U}_0) = \mathbf{F}_{ext} \quad (4.20)$$

La stabilité locale est étudiée en introduisant une perturbation tel que :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \bar{\mathbf{U}} \quad (4.21)$$

L'injection de cette équation dans le système (4.19) donne :

$$\mathbf{M}\ddot{\bar{\mathbf{U}}} + \mathbf{C}\dot{\bar{\mathbf{U}}} + \mathbf{K}(\mathbf{U}_0 + \bar{\mathbf{U}}) + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{U}_0 + \bar{\mathbf{U}}, \dot{\bar{\mathbf{U}}}) = \mathbf{F}_{ext} \quad (4.22)$$

L'étude de stabilité nécessite la linéarisation de cette équation ce qui n'est pas trivial au premier abord étant donné la présence de la non-linéarité non-régulière de contact unilatéral. Dans sa thèse, Moïrot [Moi98] définit une perturbation glissante comme une perturbation qui ne modifie pas la configuration des contraintes de contact à l'équilibre et montre qu'il y a équivalence des perturbations glissantes entre la stabilité des équations unilatérales (4.20) et des équations bilatérales, obtenues en rendant bilatérales les contraintes unilatérales actives à l'équilibre. Cette hypothèse rend régulières localement les non-linéarités à la condition qu'il n'y ait pas de contact affleurant et la linéarisation devient triviale.

On se place donc dans le cas de perturbations glissantes autour de la position d'équilibre  $\mathbf{U}_0$ . La linéarisation du terme  $\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}})$  de l'équation (4.22) est obtenue par un développement de Taylor en négligeant les termes d'ordre supérieur à 1 :

$$\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{U}) = \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{U}_0) + \mathbf{J}_{nl}(\bar{\mathbf{U}}, \dot{\bar{\mathbf{U}}}) + \mathcal{O}^2(\bar{\mathbf{U}}) \quad (4.23)$$

où  $\mathbf{J}_{nl}(\bar{\mathbf{U}}, \dot{\bar{\mathbf{U}}})$  est la Jacobienne du vecteur d'effort non-linéaire autour du point d'équilibre  $\mathbf{U}_0$  et se compose de la Jacobienne  $\mathbf{J}_c$  pour l'effort normal  $\mathbf{F}_c$  et la Jacobienne  $\mathbf{J}_t$  pour l'effort tangent  $\mathbf{F}_t$  :

$$\mathbf{J}_{nl}(\bar{\mathbf{U}}, \dot{\bar{\mathbf{U}}}) = \mathbf{J}_c(\bar{\mathbf{U}}) + \mathbf{J}_t(\bar{\mathbf{U}}, \dot{\bar{\mathbf{U}}}) \quad (4.24)$$

L'écriture de  $\mathbf{J}_c$  ne pose pas de problème et s'écrit à un élément de contact actif  $i$  comme la dérivée de l'expression (3.82) :

$$\mathbf{J}_c(\bar{\mathbf{U}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_{c_i}}{\partial \delta_i} \Big|_{\mathbf{U}_0} & 0 & 0 & -\frac{\partial F_{c_i}}{\partial \delta_i} \Big|_{\mathbf{U}_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial F_{c_i}}{\partial \delta_i} \Big|_{\mathbf{U}_0} & 0 & 0 & \frac{\partial F_{c_i}}{\partial \delta_i} \Big|_{\mathbf{U}_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{U}} \quad (4.25)$$

On note que cette matrice est symétrique. La linéarisation du terme de l'effort tangent  $\mathbf{F}_t$  dépend de la dimension du problème. Dans le cas  $2D$  (frottement rectiligne), la direction de vitesse est fixée et la linéarisation ne dépend que des termes des efforts normaux :

$$\mathbf{J}_t(\bar{\mathbf{U}}) = \begin{bmatrix} 0 & -\mu \frac{\partial F_{c_i}}{\partial \delta_i} \Big|_{\mathbf{U}_0} & 0 & 0 & \mu \frac{\partial F_{c_i}}{\partial \delta_i} \Big|_{\mathbf{U}_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu \frac{\partial F_{c_i}}{\partial \delta_i} \Big|_{\mathbf{U}_0} & 0 & 0 & -\mu \frac{\partial F_{c_i}}{\partial \delta_i} \Big|_{\mathbf{U}_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{U}} \quad (4.26)$$

Dans le cas  $3D$ , la direction de la vitesse de glissement est inconnue et peut parcourir tout le plan de frottement. La direction de frottement donnée par le terme  $V/\|V\|$  est donc une fonction non-linéaire régulière de  $V$ . La Jacobienne de  $\mathbf{J}_t$  dans le cas  $3D$  fait alors apparaître un terme d'amortissement dans la direction orthogonale au glissement imposé :

$$\mathbf{J}_t(\bar{\mathbf{U}}, \dot{\bar{\mathbf{U}}}) = \begin{bmatrix} 0 & -\mu \frac{\partial F_{c_i}}{\partial \delta_i} \Big|_{\mathbf{U}_0} & 0 & 0 & \mu \frac{\partial F_{c_i}}{\partial \delta_i} \Big|_{\mathbf{U}_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu \frac{\partial F_{c_i}}{\partial \delta_i} \Big|_{\mathbf{U}_0} & 0 & 0 & -\mu \frac{\partial F_{c_i}}{\partial \delta_i} \Big|_{\mathbf{U}_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{U}} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \frac{F_{c_i}}{\|V\|} & 0 & 0 & -\mu \frac{F_{c_i}}{\|V\|} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \frac{F_{c_i}}{\|V\|} & 0 & 0 & \mu \frac{F_{c_i}}{\|V\|} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{U}}} \quad (4.27)$$

Ce terme d'amortissement est d'autant plus grand que le coefficient de frottement et l'effort normal sont grands et que la vitesse de glissement est faible. Moiro [Moi98] montre que dans le cas d'un point de contact frottant sur une piste, la nature de l'instabilité est différente selon que le frottement soit rectiligne ou plan. Dans la suite, nous négligerons la contribution de ces termes à la matrice d'amortissement globale afin de clairement identifier l'influence de l'amortissement modal sur la stabilité des points fixes. Nous retiendrons donc uniquement l'écriture (4.26).

La substitution de l'équation (4.23) dans (4.22) donne le système linéarisé final :

$$\mathbf{M}\ddot{\bar{\mathbf{U}}} + \mathbf{C}\dot{\bar{\mathbf{U}}} + (\mathbf{K} + \mathbf{J}_{nl})\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{0} \quad (4.28)$$

Ce système étant régularisé et linéarisé autour du point fixe  $\mathbf{U}_0$ , l'application du théorème de Lyapunov est valide et consiste à étudier le problème aux valeurs propres suivant :

Garniture		
Module de Young $E$	(GPa)	2
Coefficient de Poisson $\nu$		0.1
Densité $\rho$	(kg.m <sup>-3</sup> )	2500
Disque		
Module de Young $E$	(GPa)	125
Coefficient de Poisson $\nu$		0.3
Densité $\rho$	(kg.m <sup>-3</sup> )	7200

Paramètres Modèle		
$k_1$	(N.m <sup>-1</sup> )	$1.77e^7$
$k_3$	(N.m <sup>-3</sup> )	$5.07e^{14}$
$F_{ext}$	(N)	$2.2e^4$
$\zeta_1 = \zeta_2$		10
$\xi$	(%)	1

TABLE 4.1 – Caractéristiques matériaux et données du modèle

$$\left(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + (\mathbf{K} + \mathbf{J}_{nl})\right) \Phi = \mathbf{0} \quad (4.29)$$

Pour  $\mu > 0$ , ce système est un problème non symétrique et les valeurs propres  $\lambda$  et vecteurs propres  $\Phi$  sont donc complexes. Une valeur propre  $\lambda_j$  peut alors se mettre sous la forme :

$$\lambda_j = a + i\omega_j \quad (4.30)$$

où  $a$  est la partie réelle et  $\omega_j$  représente la pulsation du mode associé  $\varphi_j$ . Une valeur négative de  $a$  indique la stabilité du point fixe alors qu'une valeur positive de  $a$  indique l'instabilité du point fixe. Dans ce cas, si  $\omega_j = 0$  est nul, il y a instabilité par divergence alors que pour  $\omega_j \neq 0$ , la perturbation quitte l'équilibre en oscillant. On a alors affaire à une bifurcation de Hopf où la solution passe d'un point fixe à une orbite bifurquée. De manière générale, l'évolution de la stabilité d'un point fixe est étudiée en fonction de la variation du coefficient de frottement où les diagrammes de stabilité montrent l'évolution des fréquences d'instabilité et des parties réelles associées.

#### 4.6.1 Modèle à 1 mode instable

Tout d'abord, on étudie la stabilité du modèle présenté au chapitre 3 qui a la particularité de présenter un unique mode instable. Les données de ce modèle sont rassemblées dans le tableau 4.1.

Pour information,  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$  sont les amortissements modaux des deux modes qui se couplent lorsque le coefficient de frottement augmente. Les diagrammes de stabilité des parties réelles et des fréquences sont présentés respectivement Figure 4.10 (a) et (b).

A  $\mu = 0$ , on distingue clairement deux fréquences  $f_1 = 1639\text{Hz}$  et  $f_2 = 1646\text{Hz}$  qui sont liées à deux modes propres du système couplé aux interfaces de contact, sans frottement, nommés respectivement  $m_1$  et  $m_2$ . Pour ce frottement, leurs parties réelles sont toutes les deux négatives (Figure 4.10 (a)), comme toutes les parties réelles des autres modes du système non représentées ici, signifiant que le point fixe associé est stable. Puis les deux fréquences  $f_1$  et  $f_2$  se rapprochent avec l'augmentation du coefficient de frottement jusqu'à ce qu'une des parties réelles franchisse l'axe des imaginaires (Figure 4.10 (a)) et devienne positive à  $\mu = \mu_0$ . On remarque que ce coefficient de frottement est appelé point de bifurcation de Hopf car la partie réelle est nulle (point d'équilibre non hyperbolique) et que le franchissement de l'axe des imaginaires se fait à vitesse non-nulle (changement de l'état de stabilité avant et après ce point). Pour  $\mu_0 < \mu < 1$ , la position d'équilibre du système est instable et la solution

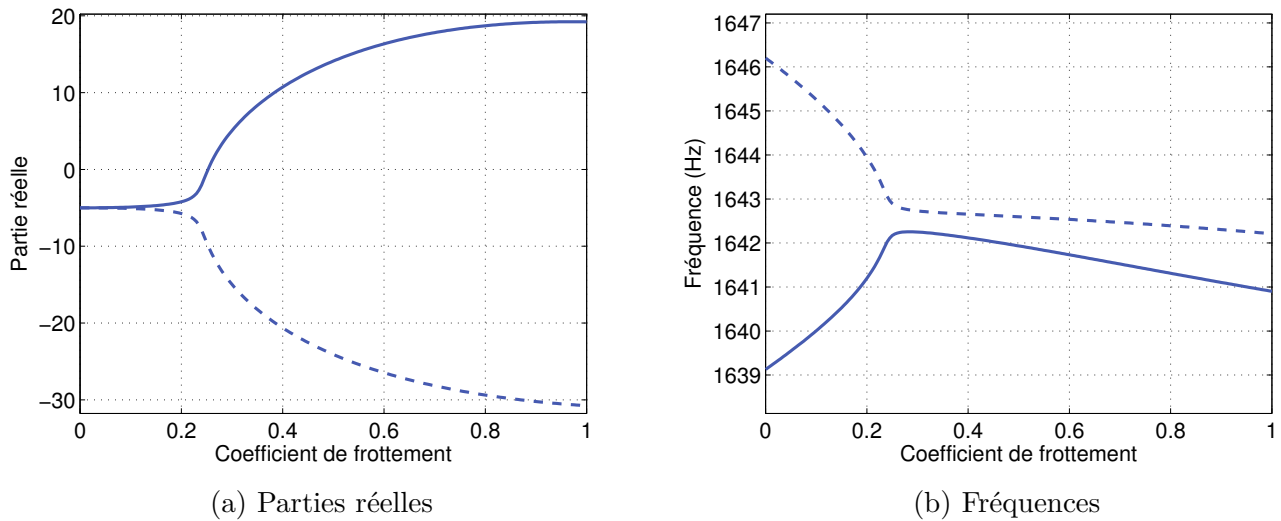


FIGURE 4.10 – Evolution des parties réelles et des fréquences en fonction du frottement

devient oscillante à une fréquence qui se situe autour de la valeur du couplage de  $f_1$  et  $f_2$  à  $\mu = \mu_0$ . A ce propos, on remarque que les deux fréquences ne sont pas parfaitement couplées et donc identiques au point de bifurcation mais qu'elles suivent la même tendance pour  $\mu_0 < \mu < 1$ . Cette différence est due à l'amortissement dans le modèle qui modifie les fréquences des modes. Ainsi pour un amortissement nul nous aurions eu une coalescence parfaite entre les deux modes à  $\mu = \mu_0$ . Cela explique également les parties réelles négatives lorsque le système est stable : l'absence d'amortissement conduirait à avoir des parties réelles nulles. On constate que le mode couplé  $m_1$  est instable car c'est celui qui a sa partie réelle positive alors que le mode  $m_2$  est stable puisque sa partie réelle est négative sur l'intervalle  $\mu \in [0, 1]$ .

Ce type de diagramme permet alors d'étudier la stabilité des systèmes de frein selon une multitude de paramètres de conception afin de discriminer les zones stables des zones instables pour tenter de rendre robuste une définition de système de frein vis-à-vis du crissement. Dans notre cas, nous nous limiterons à l'analyse de stabilité suivant la variation des paramètres d'amortissement modaux  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$  associés aux fréquences  $f_1$  et  $f_2$  et également de l'amortissement proportionnel des autres modes qui présentent tous des parties réelles négatives et qui sont donc stables.

#### 4.6.1.1 Étude de la stabilité en fonction de l'amortissement

L'amortissement est un paramètre fondamental dans la réduction du crissement de frein à disque. En effet, la réduction voire la suppression du crissement est généralement obtenue en ajoutant des sandwichs visco-élastiques ou *shims* au dos des plaquettes de frein. Néanmoins, l'influence de l'amortissement des systèmes autonomes non-linéaires sur la stabilité est relativement complexe. Les travaux d'Hofmann et Gaul [HG03] sur un modèle à deux ddls montrent que l'ajout d'amortissement peut déstabiliser le système (augmentation de la zone d'instabilité) ce qui peut sembler paradoxal. Fritz [FSDJ07b] étend ces conclusions à un modèle éléments finis de frein à disque et montre que le rapport des amortissements  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$  est un paramètre clé pour le contrôle de la stabilité du système dynamique. Sinou [SJ07] examine l'influence de l'amortissement sur les cycles limites et montre qu'un amortissement dissymétrique ( $\zeta_1 \neq \zeta_2$ ) sur les modes instables déstabilise le système et augmente

Cas	1	2	3	4	5	6	7
$\zeta_1$	1	2	10	1	2	1	10
$\zeta_2$	1	2	10	2	1	10	1
$\mu$	$0.71\mu_0$	$0.85\mu_0$	$\mu_0$	$0.69\mu_0$	$0.85\mu_0$	$0.57\mu_0$	$0.85\mu_0$

TABLE 4.2 – Répartition de l'amortissement modal

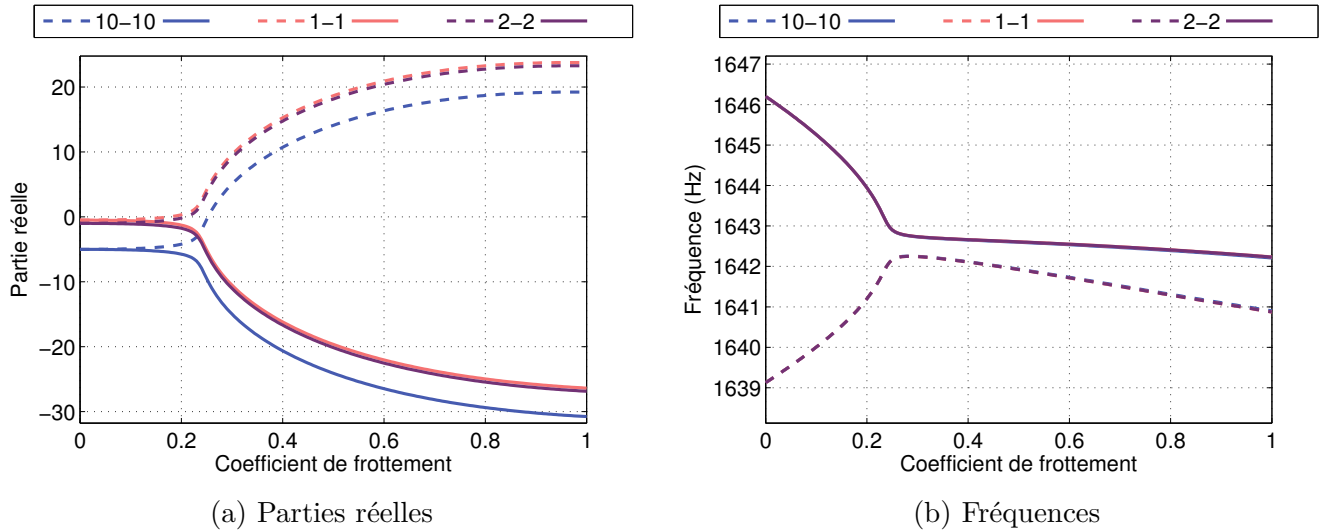


FIGURE 4.11 – Diagramme de stabilité à amortissement modal réparti symétriquement

l'amplitude des cycles limites. Enfin, Shin [SBOH02] montre sur un système à deux ddl que l'ajout d'amortissement sur un seul mode uniquement augmente l'amplitude de la réponse dynamique.

Dans ce cadre nous étudions l'influence de l'amortissement modal des modes couplés sur la stabilité du système. De plus, nous analysons l'influence de l'amortissement proportionnel sur les autres modes qui ont leur partie réelle positive. Les cas d'étude sont répertoriés dans le tableau 4.2.

### Amortissement modal réparti symétriquement

La Figure 4.11 présente l'évolution des parties réelles (a) et des fréquences (b) en fonction du frottement pour les cas n°1, 2 et 3 où  $\zeta_1 = \zeta_2$ . D'après la Figure 4.11 (a), plus l'amortissement des modes augmente, plus la bifurcation de Hopf intervient tard et l'ajout d'amortissement a donc un effet stabilisateur. Ainsi, si  $\mu_0$  est le point de bifurcation du cas n°3 où  $\zeta_1 = \zeta_2 = 10$ , la bifurcation intervient à  $\mu = 0.85\mu_0$  pour le cas n°2 ( $\zeta_1 = \zeta_2 = 2$ ) et  $\mu = 0.71\mu_0$  pour le cas n°1 ( $\zeta_1 = \zeta_2 = 1$ ) soit beaucoup plus tôt. L'augmentation de l'amortissement modal identiquement réparti a un effet "abaissant" sur les parties réelles, phénomène observé par Hofmann et Gaul [HG03], ce qui retarde le seuil d'apparition de l'instabilité. L'évolution des fréquences n'est pas impactée par la modification de l'amortissement et présente le même comportement pour les trois cas (Figure 4.11 (b)).

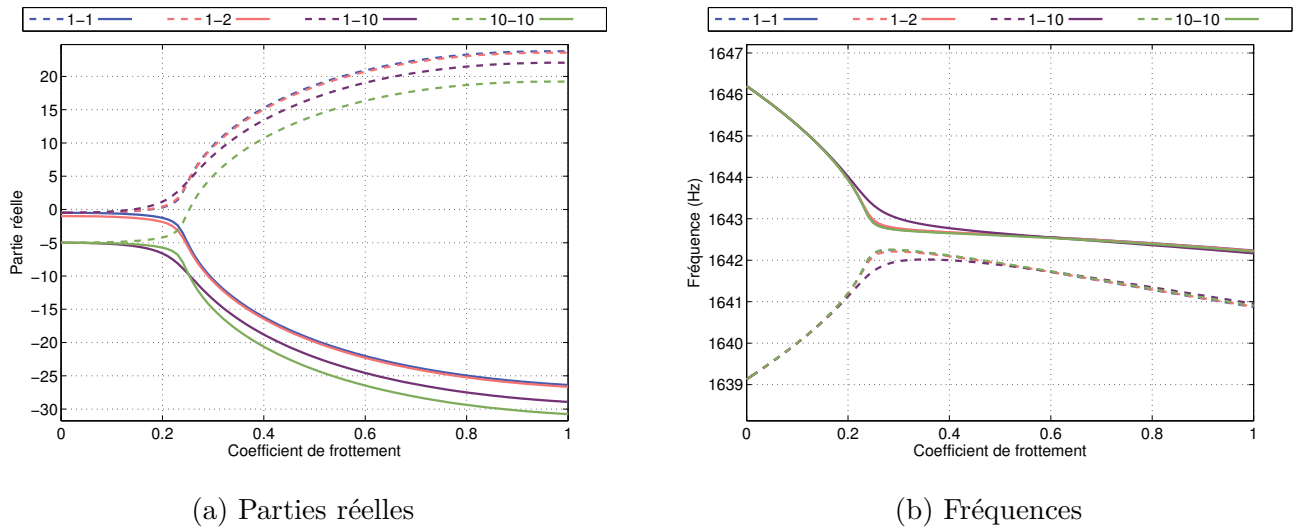


FIGURE 4.12 – Diagramme de stabilité à amortissement modal réparti asymétriquement

### Amortissement modal réparti asymétriquement

La Figure 4.12 présente l'évolution des parties réelles (a) et des fréquences (b) en fonction du frottement pour les cas n°4, 6 où  $\zeta_1 \neq \zeta_2$ . Les cas n°1 et n°10 à iso-amortissement sont également tracés à titre de comparaison. D'après l'évolution des parties réelles, le cas n°6 ( $\zeta_1 = 1, \zeta_2 = 10$ ) est le plus défavorable puisque le point de bifurcation de Hopf se situe à  $\mu = 0.57\mu_0$  soit bien avant le cas n°1 ( $\zeta_1 = \zeta_2 = 1$ ) qui se situe à  $\mu = 0.71\mu_0$ , c'est à dire que l'ajout d'amortissement sur le mode couplé stable  $m_2$  (sa partie réelle est négative pour  $\mu \in [0, 1]$ ) augmente la zone d'instabilité du modèle. La même remarque peut être faite concernant le cas n°4 puisque le point de bifurcation intervient à  $\mu = 0.69\mu_0$ . On constate également que la partie réelle du mode instable  $m_1$  n'est pas impactée par l'augmentation de l'amortissement sur le mode  $m_2$  à  $\mu = 0$  puisqu'elle prend la même valeur pour les cas n°1, 4 et 6, soit respectivement  $\zeta_1 = \zeta_2 = 1$ ,  $\zeta_1 = 1\zeta_2 = 2$  et  $\zeta_1 = 1\zeta_2 = 10$ . En revanche les parties réelles du mode  $m_2$  sont d'autant plus diminuées que l'amortissement augmente sur ce mode. Ainsi l'effet "abaissant" vu précédemment existe toujours sur la partie réelle du mode dont l'amortissement augmente (ici  $m_2$ ) mais n'impacte pas la partie réelle du mode dont l'amortissement reste fixe (ici  $m_1$ ). L'effet principal est surtout un effet "lissant" avec l'augmentation de l'amortissement dissymétrique où la séparation des parties réelles est moins net (exemple pour le cas n°3 et n°6 où la partie réelle négative du cas n°6 se sépare plus tôt que le cas iso-amorti n°3).

Cet effet lissant s'observe très bien sur la Figure 4.12 (b) montrant l'évolution des fréquences : dans la zone de bifurcation, le rapprochement des fréquences pour les cas n°4 et n°6 sont plus progressifs.

A titre d'information on observe à  $\mu = 0.25$  le croisement des branches instables des cas n°1, 4 et 6 où le cas n°1 présente la plus grande partie réelle positive. Nous verrons au chapitre 5 si cela influence l'amplitude des cycles limites.

On poursuit l'étude de l'amortissement dissymétrique avec cette fois l'analyse des cas n°5 et 7 où l'on inverse les ratios d'amortissement des modes  $m_1$  et  $m_2$ . Le mode instable  $m_1$  devient alors le mode le plus amorti. Ces cas sont comparés aux cas n°1 et n°10. Les résultats sont présentées sur la Figure 4.13. L'augmentation de l'amortissement du mode instable  $m_1$  tend à stabiliser le système puisque le

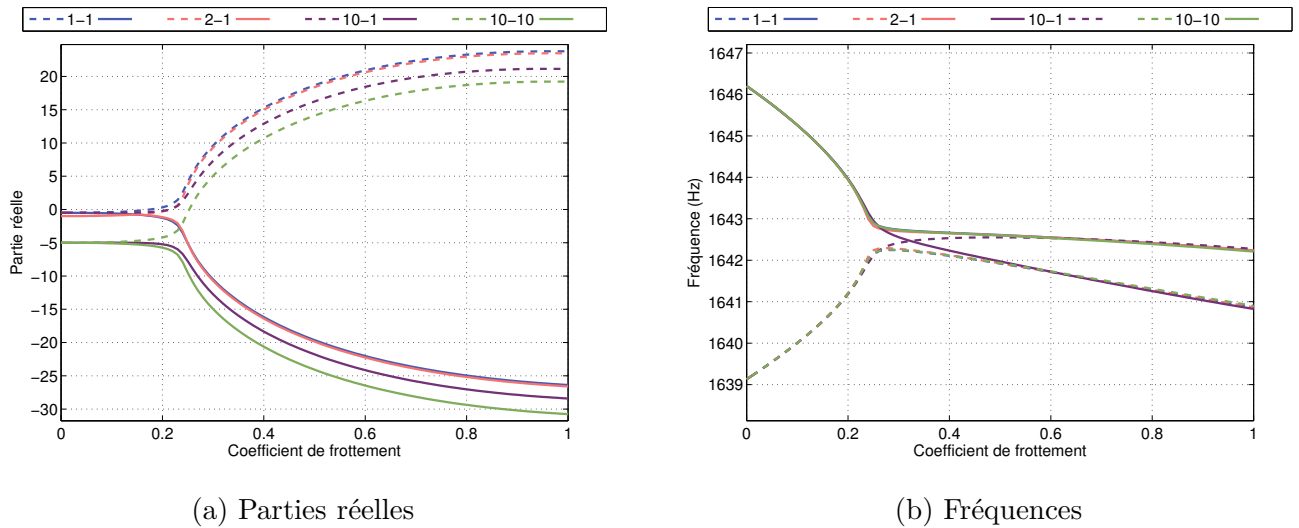


FIGURE 4.13 – Diagramme de stabilité à amortissement modal réparti asymétriquement

seuil d'instabilité intervient plus tard ( $\mu = 0.85\mu_0$ ) dans le cas n°5 ( $\zeta_1 = 2, \zeta_2 = 1$ ) que dans le cas n°1 ( $\zeta_1 = 1, \zeta_2 = 1$  et  $\mu = 0.71\mu_0$ ), voir Figure 4.13 (a). Néanmoins, le cas n°7 ( $\zeta_1 = 10, \zeta_2 = 1$ ) ne semble pas favorable puisque l'instabilité intervient plus tôt que le cas n°5. L'évolution des fréquences Figure 4.13 montre une tendance similaire pour tous les cas étudiés si ce n'est pour le cas n°7 où l'on peut observer un croisement de la fréquence des modes  $m_1$  et  $m_2$  autour de  $\mu = 0.32$ .

### Amortissement proportionnel des modes stables

Nous étudions l'influence de l'amortissement des modes stables sur la stabilité du système. Ces modes ne participent pas à l'instabilité du système de frein et ont donc tous des valeurs propres à partie réelle négative. Pour mémoire, nous avons appliqué un amortissement proportionnel  $\xi = 1\%$  sur ces modes et un amortissement modal  $\zeta$  sur les modes  $m_1$  et  $m_2$  qui se couplent. Ici, les résultats sont tracés Figure 4.14 pour  $\zeta_1 = \zeta_2 = 10$  et l'amortissement des modes stables est étudié pour  $\xi = 1\%$ ,  $\xi = 2\%$  et  $\xi = 3\%$ .

De manière étrange, on remarque que le plus fort amortissement proportionnel est le cas le plus instable puisque la bifurcation de Hopf pour  $\xi = 3\%$  intervient à  $\mu = 0.93\mu_0$  et la partie réelle, qui correspond au taux de croissance des oscillations, est supérieure sur toute la plage de variation du frottement. L'amortissement proportionnel sur les modes non-couplés a également une influence sur la coalescence des fréquences puisque ces dernières ont tendance à plus s'écartier les unes des autres après le point de bifurcation lorsque  $\mu$  augmente.

### 4.6.2 Modèle à 2 mode instable

Le modèle présenté précédemment montrait un unique couplage de modes dû à la présence du frottement. Avec la modification de quelques paramètres du système dont les données sont récapitulées dans le tableau 4.3, il est possible que le système présente deux couplages de modes et donc deux instabilités potentielles. Pour information les données qui ont été changées concerne les rigidités de contact ainsi que l'amortissement puisque l'on considère cette fois-ci un amortissement de Rayleigh.

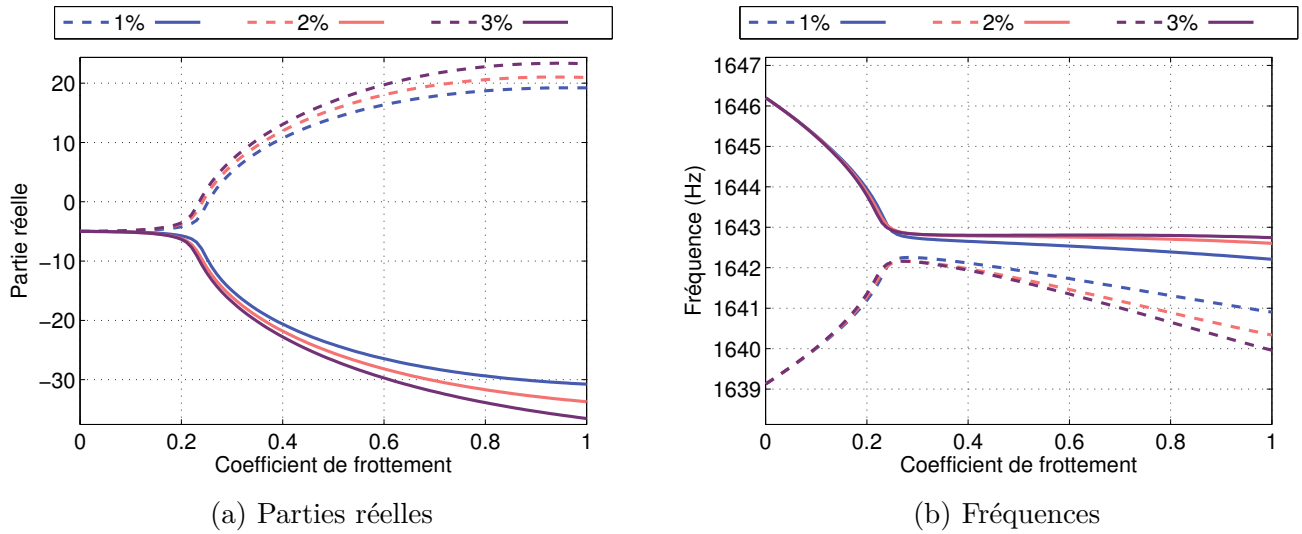


FIGURE 4.14 – Diagramme de stabilité : amortissement des modes non couplés

Garniture		
Module de Young $E$	( $GPa$ )	2
Coefficient de Poisson $\nu$		0.1
Densité $\rho$	( $kg.m^{-3}$ )	2500
Disque		
Module de Young $E$	( $GPa$ )	125
Coefficient de Poisson $\nu$		0.3
Densité $\rho$	( $kg.m^{-3}$ )	7200

Paramètres Modèle		
$k_1$	( $N.m^{-1}$ )	$1.77e^5$
$k_3$	( $N.m^{-3}$ )	$5.07e^9$
$F_{ext}$	( $N$ )	$3.1e^4$
$\alpha$	( $s^{-1}$ )	6.11
$\beta$	( $s$ )	$1.6e^{-7}$

TABLE 4.3 – Caractéristiques matériaux et données du modèle

L'objectif de ce modèle est de montrer le comportement dynamique d'un système autonome lorsqu'il est soumis à deux modes instables.

Les diagrammes de stabilité sont présentés Figure 4.15. On constate effectivement la présence de deux modes instables  $m_1$  à  $f_1 = 918Hz$  et  $m_2$  à  $f_2 = 1511Hz$  respectivement à  $\mu_1 = 0.28$  et  $\mu_2 = 0.26$ . Il s'agit respectivement de la coalescence du mode  $m_{11}$  à  $f_{11} = 900Hz$  avec le mode  $m_{12}$  à  $f_{12} = 943Hz$  et du mode  $m_{21}$  à  $f_{21} = 1513Hz$  avec le mode  $m_{22}$  à  $f_{22} = 1520Hz$ . Puisque les coefficients de Rayleigh  $\alpha$  et  $\beta$  ont été choisis pour obtenir un amortissement modal  $\zeta$  identique sur les modes  $m_{11}$  et  $m_{12}$ , ces derniers se rapprochent et deviennent identiques à  $\mu_1 = 0.28$ , alors que le rapprochement des modes  $m_{21}$  et  $m_{22}$  est lissé autour du point de bifurcation. On constate que la croissance de la partie réelle positive est plus importante pour le mode  $m_1$  et devient supérieur à celle du mode  $m_2$  dès  $\mu = 0.283$ . Néanmoins, nous savons que la partie réelle indique seulement le taux de croissance des amplitudes mais ne donne aucune information quant à l'amplitude et la prédominance d'un mode instable plutôt qu'un autre dans la réponse dynamique. Dans notre cas, pour  $\mu > 0.28$  où deux modes couplés à partie réelle positive coexistent, elle peut être périodique ou pseudo-périodique, ce que nous verrons au chapitre 6.



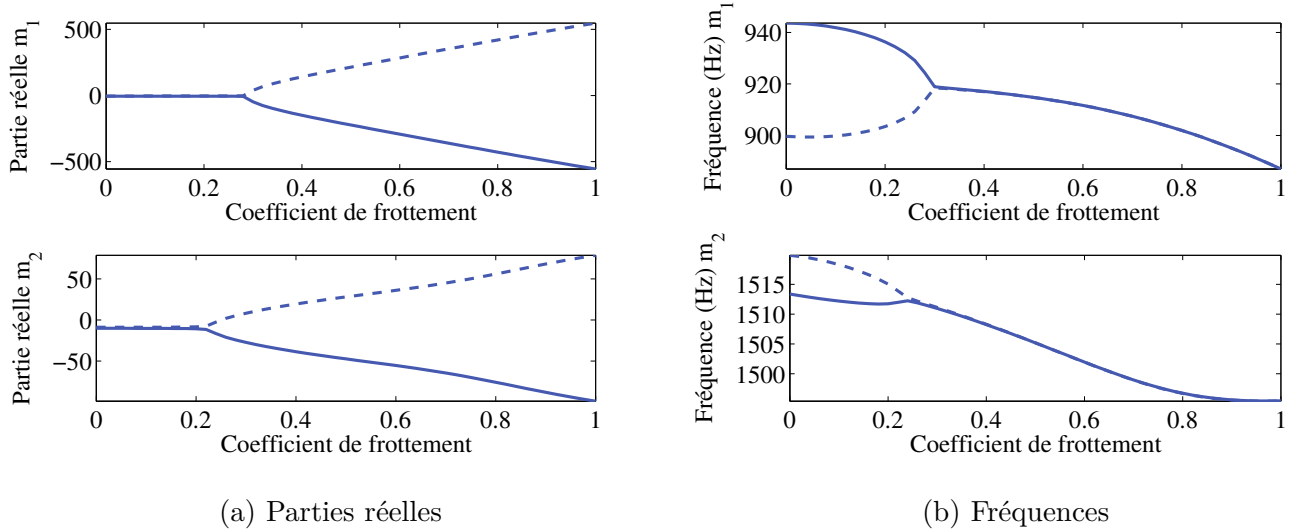


FIGURE 4.15 – Evolution des parties réelles et des fréquences en fonction du frottement

## 4.7 Conclusion

La stabilité des points fixes et des solutions périodiques a été abordée dans la première partie de ce chapitre. Nous avons également étudié les différents types de bifurcation que l'on peut rencontrer dans le cadre des systèmes autonomes non-linéaires, notamment la bifurcation de Hopf qui est la plus couramment rencontrée dans les modèles de frein soumis à des modes instables, où la perte de l'équilibre du point fixe se traduit par la présence de solutions périodiques bifurquées. Dans la deuxième partie nous étudions la stabilité du modèle de frein présenté dans le chapitre précédent et suivant les paramètres d'amortissement et de rigidité de contact, un ou deux modes instables sont obtenus à partir d'un certain seuil de frottement. Dans le cas où il n'y a qu'un seul mode instable, une étude paramétrique montre que la variation de l'amortissement modal modifie la stabilité du système et que son augmentation peut parfois amener à des seuils de frottement plus faibles au delà desquels la stabilité du point fixe n'existe plus. Nous verrons dans le chapitre suivant l'influence de l'amortissement modal sur les amplitudes de cycles limites et l'analogie que l'on peut faire entre analyses linéaires (analyse de stabilité) et analyses non-linéaires (analyse dynamique).

## Chapitre 5

# Analyse non-linéaire des systèmes frottants autonomes

L'objectif de ce chapitre est d'étudier le comportement non-linéaire du système de frein abordé dans le chapitre précédent lorsqu'il est sujet à une instabilité. On a vu dans le chapitre 2 que les solutions stationnaires de crissement sont de type périodiques et nous nous orientons donc sur des méthodes fréquentielles, très efficaces pour le traitement de ce type de réponse. Elles sont également capables de prendre en compte n'importe quelle forme de non-linéarité grâce à des techniques d'alternance temps-fréquence (AFT). Une approche originale de la méthode de balance harmonique applicable sur des systèmes autonomes non-linéaires est proposée dans ce chapitre. Dans une première partie, nous exposons la théorie des méthodes harmoniques et le traitement des non-linéarités en fréquentiel. Ensuite, nous abordons les développements spécifiques nécessaires pour que ces méthodes puissent traiter de façon robuste des systèmes autonomes non-linéaires. Un nouvel algorithme est présenté et les résultats sont comparés à des calculs de référence obtenus par des méthodes temporelles classiques. Les performances numériques sont également comparées et montrent un net avantage en faveur de la nouvelle méthode fréquentielle qui devient ainsi adaptée pour l'analyse non-linéaire du crissement de frein lorsque l'influence de plusieurs paramètres doit être étudiée.

### 5.1 Panorama des méthodes de résolution des systèmes dynamiques

Il existe de nombreuses méthodes disponibles dans la littérature pour l'étude des systèmes dynamiques non-linéaires dont l'utilisation dépend du type de modèle considéré, de sa taille, des phénomènes mis en jeu (non-linéarités régulières ou irrégulières, faibles ou fortes, comportement hystérétique, etc.) et du type de solution envisagé (périodique, chaotique, transitoire, etc.). Dans le cadre du crissement de frein, la méthode envisagée se doit d'être capable de traiter la dynamique de systèmes autonomes non-linéaires du type (3.84) et qui présentent généralement des réponses périodiques ou pseudo-périodiques. La résolution analytique de cette équation n'est pas envisageable de part sa taille, des couplages et des non-linéarités qui lui sont associés. Il existe néanmoins des méthodes numériques permettant d'approcher la réponse dynamique d'une telle équation et qui forment de manière générale deux classes distinctes. Il s'agit des méthodes temporelles et fréquentielles. Les premières méthodes ont l'avantage de pouvoir traiter quasiment tout type de solution sans nécessiter d'hypothèses particulières sur la

solution recherchée. De plus, elles sont simples d'utilisation. C'est la raison pour laquelle elles sont largement implémentées dans les codes de calcul. Néanmoins, la recherche de solutions basée sur un schéma temporel peut s'avérer prohibitif en terme de temps de calcul lorsque l'on souhaite étudier l'évolution de la dynamique d'un système pour plusieurs points de fonctionnement. *La méthode de tir* [SB80], basée sur la méthode temporelle, permet la recherche de solutions périodiques en reformulant le problème aux conditions aux limites par un problème aux valeurs initiales. Cette méthode présente généralement un avantage en terme de temps de calcul pour des petits systèmes par rapport à une intégration temporelle directe. Néanmoins, elle comporte certaines limitations inhérentes aux méthodes temporelles, notamment en terme de stabilité.

Ainsi les méthodes fréquentielles, qui se ramènent à approcher la solution dynamique par une série de Fourier tronquée, sont très performantes pour traiter des réponses périodiques ou pseudo-périodiques de systèmes non-linéaires. Elles ont été employées avec succès dans de nombreux domaines, citons comme exemple l'analyse de la dynamique des roues aubagées [Nac02, Lax07], des rotors [Gus07] ou encore l'étude de la dynamique des fluides [JDH02]. Dans le cadre de l'étude dynamique du crissement de frein à disque, cette méthode semble prometteuse en terme d'efficacité numérique. Nous développons donc dans la suite de l'étude les aspects théoriques de la technique de balance harmonique, également appelée *méthode d'équilibrage harmonique* ou encore HBM pour *Harmonic Balance Method*.

## 5.2 Méthode de la balance harmonique

### 5.2.1 Mise en équations

On s'intéresse directement à une réponse dite de *régime établi* c'est à dire que l'on considère la réponse périodique d'un système dynamique du second ordre :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, t) = \mathbf{F}_{ext}(t) \quad (5.1)$$

Une réponse  $\mathbf{U}(t)$  est dite  $T$  périodique s'il existe une constante  $T \in \mathbb{R}^+$  telle que :

$$\mathbf{U}(t + T) = \mathbf{U}(t) \text{ et } \mathbf{U}(t + \check{T}) \neq \mathbf{U}(t) \text{ pour } 0 < \check{T} < T \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (5.2)$$

$T$  est une grandeur connue *a priori* dans le cas des systèmes excités périodiquement. Dans la suite, on parlera également de la pulsation qui s'écrit  $\omega = 2\pi/T$ . Toute réponse peut être décomposée sur une base de fonctions trigonométriques ce qui donne une expression sous forme de série de Fourier :

$$\mathbf{U}(t) \approx \sum_{k=0}^{N_h} \mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{N_h} \mathbf{b}_k \sin(k\omega t) \quad (5.3)$$

$N_h$  est le nombre d'harmoniques conservées dans la solution,  $(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k)$  désignent respectivement les coefficients de Fourier de la base cosinus et sinus de la série,  $k$  est le numéro d'harmonique et  $\omega$  désigne la pulsation propre du système. De même que le champ de déplacement  $\mathbf{U}(t)$  se décompose en série de Fourier, le vecteur des efforts non-linéaires s'écrit de façon analogue :

$$\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, t) \approx \sum_{k=0}^{N_h} \mathbf{c}_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{N_h} \mathbf{d}_k \sin(k\omega t) \quad (5.4)$$

De même que l'effort extérieur :

$$\mathbf{F}_{ext}(t) \approx \sum_{k=0}^{N_h} \mathbf{e}_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{N_h} \mathbf{f}_k \sin(k\omega t) \quad (5.5)$$

En injectant les équations (5.3-5.4-5.5) dans l'équation du mouvement (5.1) et en remarquant que les vitesses et les accélérations s'obtiennent en dérivant une et deux fois respectivement l'équation (5.3) par rapport au temps, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{N_h}(t) \approx & \sum_{k=0}^{N_h} \left[ (\mathbf{K} - (k\omega)^2 \mathbf{M}) \mathbf{a}_k + (k\omega \mathbf{C}) \mathbf{b}_k \right] \cos(k\omega t) + \\ & \sum_{k=1}^{N_h} \left[ (\mathbf{K} - (k\omega)^2 \mathbf{M}) \mathbf{b}_k - (k\omega \mathbf{C}) \mathbf{a}_k \right] \sin(k\omega t) + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{c}_k, \mathbf{d}_k) - \mathbf{F}_{ext}(\mathbf{e}_k, \mathbf{f}_k) \end{aligned} \quad (5.6)$$

En remarquant que les fonctions cosinus et sinus forment une base normale, le résidu dynamique (5.6) est orthogonalisé par rapport à ces fonctions (procédure de Galerkin [Bat82]). Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/\omega} \mathbf{R} \cos(k\omega t) dt &= 0 \text{ pour } k \in [0, N_h] \\ \int_0^{2\pi/\omega} \mathbf{R} \sin(k\omega t) dt &= 0 \text{ pour } k \in [1, N_h] \end{aligned} \quad (5.7)$$

On obtient alors un système algébrique équivalent à (5.6) qui s'écrit :

$$\mathbf{\Lambda} \bar{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{F}}_{nl}(\bar{\mathbf{z}}) = \tilde{\mathbf{F}}_{ext} \quad (5.8)$$

$\mathbf{\Lambda}$  désigne la matrice de rigidité dynamique composée des matrices structurelles du modèle,  $\bar{\mathbf{z}}$  est le vecteur qui collecte les coefficients de Fourier,  $\tilde{\mathbf{F}}_{nl}(\bar{\mathbf{z}})$  et  $\tilde{\mathbf{F}}_{ext}$  regroupent respectivement les composantes des efforts non-linéaires et des efforts extérieurs décrites dans la base de Fourier tronquée. De façon détaillée,  $\mathbf{\Lambda}$  a la structure suivante :

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_{N_h} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

où chaque bloc élémentaire de  $\mathbf{\Lambda}$  s'écrit :

$$\mathbf{\Lambda}_k = \begin{bmatrix} -(k\omega)^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} & (k\omega) \mathbf{C} \\ -(k\omega) \mathbf{C} & -(k\omega)^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} \end{bmatrix} \text{ pour } k \in [1, N_h] \quad (5.10)$$

Les vecteurs harmoniques des déplacements  $\bar{\mathbf{z}}$ , des efforts non-linéaires  $\tilde{\mathbf{F}}_{nl}(\bar{\mathbf{z}})$  et des efforts extérieurs  $\tilde{\mathbf{F}}_{ext}$  ont la structure suivante :

$$\tilde{\mathbf{z}} = \left[ \mathbf{a}_0^T \quad \mathbf{a}_1^T \quad \mathbf{b}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{a}_{N_h}^T \quad \mathbf{b}_{N_h}^T \right]^T \quad (5.11)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{nl} = \left[ \mathbf{c}_0^T \quad \mathbf{c}_1^T \quad \mathbf{d}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{c}_{N_h}^T \quad \mathbf{d}_{N_h}^T \right]^T \quad (5.12)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{ext} = \left[ \mathbf{e}_0^T \quad \mathbf{e}_1^T \quad \mathbf{f}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{e}_{N_h}^T \quad \mathbf{f}_{N_h}^T \right]^T \quad (5.13)$$

Les indices représentent le numéro d'harmonique de chaque composante vectorielle, dont la dimension  $n$  est égale à la taille du modèle (5.1). Ainsi la taille du système algébrique (5.8) est de taille  $n(2N_h + 1)$ .

## 5.2.2 Traitement des efforts non-linéaires

Le vecteur des efforts non-linéaires  $\tilde{\mathbf{F}}_{nl}$  est une quantité qui dépend des déplacements du système et nécessite d'être évalué à chaque itération de calcul. L'existence d'une expression analytique reliant les composantes de déplacement  $\tilde{\mathbf{z}}$  aux composantes des efforts non-linéaires  $\tilde{\mathbf{z}}_{nl}$  permet de traiter la non-linéarité directement dans le domaine fréquentiel. Lorsque ce n'est pas le cas et que les non-linéarités sont explicitement exprimées dans le domaine temporel, ce qui est le cas du contact frottant formulé ici, il existe des techniques d'alternance temps-fréquence (AFT) permettant de traiter les non-linéarités dans le domaine temporel puis d'en extraire leurs composantes fréquentielles.

### Collocation trigonométrique

Cette technique consiste à associer des coefficients de Fourier  $\tilde{\mathbf{Q}}$  aux termes temporels  $\bar{\mathbf{Q}}(t_i)$  échantillonnés sur une période  $T$  via une matrice de passage  $\mathbf{E}$  :

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{E} \bar{\mathbf{Q}}(t_i) \quad (5.14)$$

où  $\bar{\mathbf{Q}}(t_i) = \left[ \mathbf{Q}(t_1)^T, \dots, \mathbf{Q}(t_i)^T, \dots, \mathbf{Q}(t_{n_{ech}})^T \right]$  avec  $n_{ech}$  le nombre d'échantillons retenus et  $t_i = i\Delta t$ , où  $\Delta t = T/n_{ech}$  correspond au pas de discrétisation sur une période. La matrice de transformation  $\mathbf{E}$  prend la forme :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1/2 & \cos(\omega t_1) & \sin(\omega t_1) & \dots & \cos(\omega N_h t_1) & \sin(\omega N_h t_1) \\ 1/2 & \cos(\omega t_2) & \sin(\omega t_2) & \dots & \cos(\omega N_h t_2) & \sin(\omega N_h t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1/2 & \cos(\omega T) & \sin(\omega T) & \dots & \cos(\omega N_h T) & \sin(\omega N_h T) \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

La solution temporelle  $\bar{\mathbf{Q}}(t_i)$  peut également être exprimée en fonction des composantes harmoniques en inversant la relation (5.14) au sens des moindres carrés :

$$\bar{\mathbf{Q}}(t_i) = \left( \mathbf{E}^T \mathbf{E} \right)^{-1} \mathbf{E}^T \tilde{\mathbf{Q}} \quad (5.16)$$

On peut développer à partir de cette expression une formulation harmonique des termes de l'équation algébrique (5.8) :

$$\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{E}\bar{\mathbf{z}}(t_i) \quad (5.17)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{nl} = \mathbf{E}\bar{\mathbf{F}}_{nl} \left( \left( \mathbf{E}^T \mathbf{E} \right)^{-1} \mathbf{E}^T \tilde{\mathbf{z}} \right) \quad (5.18)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{ext} = \mathbf{E}\bar{\mathbf{F}}_{ext}(t_i) \quad (5.19)$$

L'équation (5.18) permet de traiter la non-linéarité dans le domaine temporel (le terme  $\left( \mathbf{E}^T \mathbf{E} \right)^{-1} \mathbf{E}^T \tilde{\mathbf{z}}$  est le champ du déplacement discrétisé en temps) puis de traduire l'effort obtenu en termes de composantes harmoniques et résoudre ainsi le problème algébrique (5.8). Liu et al. [LTD<sup>+</sup>06] proposent une version spécifique de la méthode de collocation en imposant  $n_{ech} = 2N_h + 1$ , rendant ainsi la matrice de passage  $\mathbf{E}$  carrée.

### Algorithme de transformée de Fourier (FFT)

Cameron et Griffin [CG89] proposent une méthode AFT qui utilise l'algorithme de transformée de Fourier discrète (DFT) pour évaluer les efforts non-linéaires en temporel. Si le nombre d'échantillons  $n_{ech}$  est une puissance de 2, on utilise alors l'algorithme de Transformée de Fourier Rapide (FFT) de Cooley-Tukey [CT65] particulièrement performant puisque sa complexité algorithmique passe de  $\mathcal{O}(n_{ech}^2)$  à  $\mathcal{O}(2 \ln n_{ech})$ . La démarche globale est la suivante :

1. Par une transformée de Fourier inverse, le vecteur  $\tilde{\mathbf{z}}$  est exprimé dans le domaine temporel  $\mathbf{U}(t)$  sur une période.
2. Le vecteur  $\mathbf{F}_{nl}(t)$  est évalué explicitement à partir des déplacements  $\mathbf{U}(t)$  en tenant compte des conditions de contact et de frottement.
3. Les composantes harmoniques de  $\tilde{\mathbf{F}}_{nl}(\tilde{\mathbf{z}})$  sont calculées en opérant une transformée de Fourier directe sur les efforts non-linéaires  $\mathbf{F}_{nl}(t)$ .

La FFT permet de réaliser une alternance temps/fréquence exacte (à la troncature près) contrairement aux méthodes de collocation qui sont sujettes au nombre d'échantillons retenus  $n_{ech}$ . De plus, son coût numérique est particulièrement faible. C'est pourquoi nous avons fait le choix de cette technique pour l'évaluation des non-linéarités dans la suite.

#### 5.2.2.1 Erreur de troncature

L'emploi d'une méthode fréquentielle nécessite d'effectuer une troncature sur le spectre fréquentiel de la réponse dont la qualité dépend du nombre d'harmoniques retenues. Lorsque les résultats d'intégration temporelle ne sont pas connus, il est nécessaire de trouver une autre solution de référence pour savoir si l'estimation de la réponse est correcte. On peut évidemment considérer un grand nombre d'harmoniques, mais ce sera au détriment du temps de calcul et il est donc nécessaire de trouver un compromis. Dans la méthode de balance harmonique présentée ici, couplée à la méthode d'alternance temps/fréquence *via* l'utilisation de la FFT, on remarque que les efforts temporels sont calculés de façon exacte (au sens du modèle non-linéaire retenu) puis sont tronqués en passant dans le domaine fréquentiel. Puisque l'approximation provient en partie de cette transformation, on peut calculer un critère d'erreur de troncature [Lax07] :

$$\varepsilon(N_h) = \int_T \left[ \mathbf{F}_{nl}(t) - \left( \sum_{k=0}^{N_h} \mathbf{c}_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{N_h} \mathbf{d}_k \sin(k\omega t) \right) \right] dt \quad (5.20)$$

où  $\mathbf{F}_{nl}(t)$  sont les forces non-linéaires "exactes" dans le domaine temporel et où la double somme à droite représente leur expression temporelle après troncature à  $N_h$  harmoniques. On adapte ainsi le nombre d'harmoniques pour que l'erreur de Fourier ne dépasse pas une certaine limite rendant la précision de la réponse quasiment constante.

### 5.2.3 Synthèse de la méthode HBM

Puisque le système (5.8) est non-linéaire, il est nécessaire d'employer des méthodes itératives de résolution de type Newton. On peut donc réécrire (5.8) sous la forme d'un problème à résoudre :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \tilde{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^{n(2N_h+1)} \text{ tel que :} \\ J_1(\tilde{\mathbf{z}}) = \mathbf{\Lambda} \tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{F}}_{nl}(\tilde{\mathbf{z}}) - \tilde{\mathbf{F}}_{ext} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.21)$$

De manière générale, la solution est approchée selon le schéma itératif suivant :

$$\tilde{\mathbf{z}}^{k+1} = \tilde{\mathbf{z}}^k + \Delta \tilde{\mathbf{z}}^k \quad (5.22)$$

$\Delta \tilde{\mathbf{z}}^k$  correspond au  $k^{\text{ième}}$  pas d'itération et s'exprime de la façon suivante :

$$\Delta \tilde{\mathbf{z}}^k = - \left( \left[ \frac{\partial J_1(\tilde{\mathbf{z}})}{\partial \tilde{\mathbf{z}}} \right]^k \right)^{-1} J_1(\tilde{\mathbf{z}})^k \quad (5.23)$$

où

$$\frac{\partial J_1(\tilde{\mathbf{z}})}{\partial \tilde{\mathbf{z}}} = \mathbf{\Lambda} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}_{nl}(\tilde{\mathbf{z}})}{\partial \tilde{\mathbf{z}}} \quad (5.24)$$

Pour l'évaluation de la dérivé première des efforts non-linéaires  $\frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}_{nl}(\tilde{\mathbf{z}})}{\partial \tilde{\mathbf{z}}}$ , le calcul classique consiste à effectuer une approximation par différences finies, qui s'écrit :

$$\left. \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}_{nl}(\tilde{\mathbf{z}})}{\partial \tilde{\mathbf{z}}} \right|_{ij} = \frac{\left( \tilde{\mathbf{F}}_{nl}(\tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\varepsilon}_j) - \tilde{\mathbf{F}}_{nl}(\tilde{\mathbf{z}}) \right)_i}{\tilde{\varepsilon}_j}, \quad i, j = 1, \dots, nN_h \quad (5.25)$$

où  $i, j$  indiquent respectivement la ligne et la colonne dans la matrice des dérivées et  $\tilde{\varepsilon}_j$  un incrément appliqué sur le terme harmonique  $j$ . Puisque les efforts non-linéaires sont uniquement évalués dans le domaine temporel, le nombre de calculs par FFT est proportionnel à  $n^2(2N_h+1)^2$ . Le calcul est terminé lorsqu'un ou plusieurs critères de convergence fixés par l'utilisateur sont atteints. Généralement, on considère la norme euclidienne  $\|\cdot\|$  sur les composantes  $\Delta \tilde{\mathbf{z}}$  et  $\tilde{\mathbf{z}}$  tel que :

$$\left| \begin{aligned} \|\Delta \tilde{\mathbf{z}}\| &\leq \varepsilon_1 \\ \frac{\|\Delta \tilde{\mathbf{z}}\|}{\tilde{\mathbf{z}}} &\leq \varepsilon_2 \end{aligned} \right. \quad (5.26)$$

où  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont des tolérances fixées par l'utilisateur.

Une alternative à la résolution de (5.21) est d'utiliser une procédure de Newton-Raphson en injectant une forme de l'équation (5.22) dans (5.21) où cette fois  $\tilde{\mathbf{z}}$  est une fonction donnée *a priori* et

$\Delta\tilde{\mathbf{z}}$  une fonction corrective qui est la nouvelle inconnue. Le développement de Taylor à l'ordre 1 des termes non-linéaires  $\tilde{\mathbf{F}}_{nl}$  donne la forme incrémentale suivante :

$$(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{J}_{nl}) \Delta\tilde{\mathbf{z}} + \mathbf{\Lambda}\tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{F}}_{nl}(\tilde{\mathbf{z}}) - \tilde{\mathbf{F}}_{ext} = 0 \quad (5.27)$$

où  $\mathbf{J}_{nl}$  n'est rien d'autre que la matrice Jacobienne de  $\tilde{\mathbf{F}}_{nl}(\tilde{\mathbf{z}})$  et est donnée par l'expression (5.25). Puisque l'expression (5.27) est linéaire, on peut calculer la correction  $\Delta\tilde{\mathbf{z}}$  et procéder à une nouvelle évaluation de  $\tilde{\mathbf{z}}$  donnée par l'expression (5.22). L'algorithme générique de la balance harmonique incrémentale est le suivant :

1. Initialisation de  $\tilde{\mathbf{z}}$
2. Résolution du système (5.27)
3. Mise à jour des coefficients de Fourier :  $\tilde{\mathbf{z}}^{k+1} = \tilde{\mathbf{z}}^k + \Delta\tilde{\mathbf{z}}^k$
4. Test de convergence positif ou retour en 2

A chaque itération, on obtient une approximation de la solution  $\tilde{\mathbf{z}}$  meilleure que la précédente si la valeur initiale  $\tilde{\mathbf{z}}_0$  n'est pas trop éloignée de la solution finale. Le processus s'arrête lorsqu'un ou plusieurs critères de convergence sont vérifiés. Cette méthode a été introduite par Lau et al. [LCW83] et est connue sous le nom de *balance harmonique incrémentale*. Néanmoins, on peut directement résoudre le système (5.21) obtenu par la méthode de Galerkin en ayant recours à n'importe quel solveur non-linéaire sans utiliser la procédure de Newton-Raphson. Dans le cadre de ce mémoire, nous utilisons donc directement la procédure de Galerkin et la résolution de (5.21) est obtenue grâce à la méthode de Powell modifiée [Pow7], implémentée dans MATLAB qui offre une bonne robustesse de recherche de minimum de par sa nature (méthode des régions de confiance). Le lecteur intéressé trouvera en annexe A un panorama des méthodes de résolution non-linéaire.

### 5.3 Contrainte d'optimisation pour les systèmes autonomes

Nous avons vu dans la section précédente le développement de la méthode HBM qui permet le calcul des coefficients de Fourier de la réponse stationnaire d'un système dynamique. L'hypothèse forte de cette technique est une condition de périodicité sur la solution calculée qui, si elle est vérifiée, rend la méthode HBM particulièrement efficace en terme de coût numérique.

L'utilisation de la HBM dans le cas de systèmes autonomes tel que le phénomène de crissement de frein n'a pas, à la connaissance de l'auteur, été abordée dans la littérature et pose quelques difficultés supplémentaires dues à la nature du système dynamique de frein. D'un point de vue théorique, l'obtention des vibrations d'un système autonome instable nécessite que la position d'équilibre soit perturbée pour que le système passe d'un état stationnaire glissant instable à un état stationnaire dynamique borné s'il existe des non-linéarités dans le système (théoriquement, l'absence de non-linéarité entraîne une croissance infinie des oscillations ce qui n'a bien entendu aucun sens physique).

En d'autres termes, il existe deux positions d'équilibre et seule une perturbation des conditions initiales ou d'un paramètre du modèle dans le domaine temporel entraîne une explosion des oscillations. L'existence "physique" de ces deux solutions pour un même jeu de paramètres liés au modèle se traduit dans le domaine d'optimisation par l'existence de deux minima. L'un est relié à la position d'équilibre glissant instable du système que l'on note  $\Upsilon_0$  et un autre est relié à la position stationnaire dynamique



que l'on note  $\Upsilon_d$ . Or, la méthode d'optimisation va forcément converger vers la position d'équilibre instable  $\Upsilon_0$  (réponse statique du système) quelque soit la condition initiale choisie. En effet, cette position correspond à une solution exacte au sens du système temporel (5.1) alors que la solution dynamique calculée avec la méthode de balance harmonique ne peut qu'être approximée puisqu'elle est exprimée dans une base de Fourier tronquée. Ainsi, pour que le calcul de la réponse dynamique soit systématique, nous allons exploiter une propriété des systèmes autonomes non-linéaires en régime dynamique stationnaire. De plus, il faut noter que la pulsation de tels systèmes est une donnée inconnue *a priori* et qu'il convient donc d'estimer.

### 5.3.1 Equation supplémentaire

Dans cette section nous allons donc expliciter l'équation supplémentaire qui va nous permettre de statuer sur l'obtention de la réponse stationnaire de la solution dynamique. On reprend le système autonome défini au chapitre 3 qui décrit la dynamique du système de frein :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, t) = \mathbf{F}_{ext} \quad (5.28)$$

dont la transformation dans l'espace d'état donne :

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{Y}(t) + \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{Y}(t)) \quad (5.29)$$

avec

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}(t) \\ \dot{\mathbf{U}}(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{Y}(t)) = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, t)) \end{Bmatrix} \quad (5.30)$$

et la matrice dynamique

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

En se basant sur la théorie des systèmes linéaires [Kha02], la solution de l'équation (5.29) est :

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Y}_0 e^{(\mathbf{J}t)} = \mathbf{Y}_0 \Phi e^{(\boldsymbol{\lambda}t)} \Phi^{-1} \quad (5.32)$$

$\mathbf{J}$  est la matrice de linéarisation équivalente du système (5.29) dont le calcul sera abordé par la suite. Le remplacement de l'exponentielle de matrice  $e^{(\mathbf{J}t)}$  par l'expression  $\Phi e^{(\boldsymbol{\lambda}t)} \Phi^{-1}$  n'est valable que si  $\mathbf{J}$  est diagonalisable, en d'autres termes,  $\mathbf{J} = \Phi \boldsymbol{\lambda} \Phi^{-1}$  où  $\Phi$  est la matrice des vecteurs propres  $\boldsymbol{\varphi}_j$  de  $\mathbf{J}$  et  $\boldsymbol{\lambda}$  la matrice diagonale des valeurs propres complexes associées  $\lambda_j = a_j + i\omega_j$  où  $a_j$  est la partie réelle et  $\omega_j$  la pulsation du mode  $\boldsymbol{\varphi}_j$ . La solution générale est donc une combinaison d'exponentielles :

$$\mathbf{Y}(t) = \sum_{j=1}^n \mathbf{c}_j \boldsymbol{\varphi}_j e^{(\lambda_j t)} = \sum_{j=1}^n \mathbf{c}_j \boldsymbol{\varphi}_j e^{(a_j t)} e^{(i\omega_j t)} \quad (5.33)$$

avec  $\mathbf{c}_j = \Phi^{-1} \mathbf{x}_0$ . Les termes  $\mathbf{c}_j \boldsymbol{\varphi}_j$  déterminent l'amplitude tandis que  $e^{(i\omega_j t)}$  produit les oscillations à la pulsation  $\omega_j$  et  $e^{(a_j t)}$  détermine les amplitudes de  $\mathbf{Y}(t)$  à un facteur près où  $a_j$  est le taux de croissance. Ainsi l'analyse de stabilité de la solution périodique du mode  $j$  dépend de la quantité  $e^{(a_j t)}$  c'est à dire du signe de  $a_j$  :

- Si  $a_j < 0$  pour tout  $j$  alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(a_j t)} = 0$  et donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{Y}(t) = \mathbf{0} \forall \mathbf{Y}_0$  et la matrice  $\mathbf{J}$  est dite *stable*.
- Si  $a_j > 0$  pour  $j \geq 1$ , alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(a_j t)} \rightarrow \infty$  et  $\mathbf{Y}(t)$  n'est pas bornée lorsque  $t \rightarrow +\infty$  auquel cas la matrice  $\mathbf{J}$  est dite *instable*.
- Si  $a_j \leq 0$  pour tout  $j$ , alors certaines quantités  $e^{(\lambda_j t)}$  tendent vers 0 et d'autres sont finies pour tout  $t$  mais oscillent indéfiniment. Cette situation est appelée *semi-stable* et la réponse  $\mathbf{Y}(t)$  est une combinaison linéaire de  $m$  solutions périodiques  $\mathbf{c}_m \boldsymbol{\varphi}_m e^{(i\omega_m t)}$  avec  $m < j$  et où les parties réelles associées  $a_m$  sont nulles pour tout  $m$ .

En résumé, les oscillations de  $\mathbf{Y}(t)$  diminuent pour  $a < 0$ , sont constantes pour  $a = 0$  et explosent pour  $a > 0$ . L'objectif ici est de rechercher une solution stationnaire de la forme :

$$\mathbf{Y}(t) = \sum_{j=1}^p \mathbf{c}_j \boldsymbol{\varphi}_j e^{(i\omega_j t)} \quad (5.34)$$

Dans ce cas  $\mathbf{Y}(t)$  est périodique de période  $\omega_j/2\pi$  si  $j = 1$ , sinon c'est une solution multi-fréquentielle si  $j > 1$  pour  $c_j \neq 0 \forall j \in [1, p]$  où  $p$  est le nombre de modes à partie réelle nulle.

Puisque l'on suppose que la solution stationnaire de crissement n'est gouvernée que par les modes instables, l'idée est d'imposer dans l'algorithme HBM la condition de nullité sur les parties réelles des modes instables de la solution (5.34) et ceci en considérant tout simplement cette contrainte sur la ou les parties réelles  $a_j$  comme une fonctionnelle supplémentaire  $J_2$  à annuler. Puisqu'en parallèle l'algorithme HBM vérifie exactement les équations du mouvement au seuil de troncature près du problème de minimisation (5.21), le solveur doit vérifier la double condition suivante :

1. Equation du mouvement  $\iff J_1(\tilde{\mathbf{z}}) = \mathbf{0}$
2. Annulation des parties réelles  $\iff J_2(\tilde{\mathbf{z}}) = \sum_{j=1}^p |a_j| = \mathbf{0}$

Or, cela correspond à la solution dynamique du système associée et donc à la recherche du minimum  $\Upsilon_d$  uniquement. Cette condition supplémentaire permet donc de s'affranchir définitivement du calcul de la position statique de la procédure de balance harmonique classique.

### Calcul de $\mathbf{J}$

Puisque le système (5.29) est non-linéaire, les valeurs et les vecteurs propres  $\lambda_j$  et  $\boldsymbol{\varphi}_j$  qui lui sont associés sont également non-linéaires et dépendent de la solution temporelle  $\mathbf{Y}(t)$ . L'extraction des quantités  $\lambda_j$  et  $\boldsymbol{\varphi}_j$  impose de linéariser le terme temporel  $\mathbf{F}_{NL}$  par un équivalent linéaire  $\mathbf{J}_{NL}$  :

$$\zeta = \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{Y}) - \mathbf{J}_{NL} \mathbf{Y} \text{ avec } \zeta \rightarrow 0 \quad (5.35)$$

Cette écriture fait référence au concept de linéarisation équivalente introduit par Iwan [Iwa73, SI78, IM79]. On note que contrairement au chapitre 4 où le système est linéarisé autour d'une position d'équilibre statique représentée par le vecteur  $\mathbf{x}_0$ , on le linéarise ici autour d'une solution dynamique  $\mathbf{Y}(t)$ .

D'un point de vue pratique,  $\mathbf{Y}$  et  $\mathbf{F}_{NL}(\mathbf{Y})$  sont des matrices contenant  $n_e$  échantillons temporels des  $2n$  DDLS. Pour que  $\mathbf{J}_{NL}$  soit représentative de la dynamique de l'effort non-linéaire  $\mathbf{F}_{NL}(\mathbf{Y})$ , la fenêtre temporelle d'observation doit contenir tous les états possibles de  $\mathbf{F}_{NL}(\mathbf{Y})$ . Puisque le système

est périodique, il n'est pas difficile d'imaginer que l'observation optimale se fait sur une période du système. On a alors  $n_e = 2\pi f_e/\omega$  si  $f_e$  est la fréquence d'échantillonnage.

Le critère  $\zeta$  est minimisé au sens d'une norme. On peut par exemple utiliser une méthode des moindres carrés en écrivant  $\min \int_0^\tau \zeta^T \zeta dt$  qui correspond à une mesure de la différence entre le système non-linéaire et linéaire équivalent sur une période de vibration si on pose  $\tau = T$ .  $\mathbf{J}_{NL}$  est donc obtenue en inversant la relation (5.35) au sens des moindres carrés :

$$\mathbf{J}_{NL} = \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{Y}) \cdot [\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}]^{-1} \mathbf{Y}^T \quad (5.36)$$

On remarque que le terme  $\mathbf{Y}^+ = [\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}]^{-1} \mathbf{Y}^T$  est la matrice pseudo-inverse de  $\mathbf{Y}$ . Ainsi, une écriture linéaire équivalente au système non-linéaire (5.29) est :

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{J}\mathbf{Y} \quad \text{avec} \quad \mathbf{J} = \mathbf{A} + \mathbf{J}_{NL} \quad (5.37)$$

Maintenant que l'équation différentielle (5.37) est linéarisée autour d'une solution dynamique non-linéaire, la partie réelle  $a_j$  de la valeur propre d'intérêt  $\lambda_j$  associée au mode instable  $\varphi_j$  peut être extraite et est introduite dans le processus de balance harmonique en tant que fonctionnelle supplémentaire  $J_2$  à minimiser.

Puisque la transformée de Fourier est une application linéaire, les matrices temporelles  $\mathbf{F}_{NL}(\mathbf{Y})$  et  $\mathbf{Y}$  peuvent être remplacées par leur matrices fréquentielles  $\tilde{\mathbf{F}}_{NL}(\tilde{\mathbf{Y}})$  et  $\tilde{\mathbf{Y}}$  contenant les coefficients de Fourier et de taille  $n[2N_h + 1]$  avec  $N_h$  le nombre d'harmoniques. Dans les cas où très peu d'harmoniques sont envisagées dans la solution, nous avons  $2N_h + 1 \ll 2\pi f_e/\omega$  ce qui entraîne des matrices fréquentielles plus petites mais contenant la même information que les matrices temporelles.

*Remarque :* En pratique nous utiliserons la décomposition en valeurs singulières (*SVD*) implémentée dans MATLAB, plus performante numériquement que l'écriture (5.36).

### 5.3.2 Inconnue supplémentaire

On a vu que l'utilisation de la HBM suppose que la pulsation  $\omega$  soit connue *a priori* puisqu'elle paramètre la matrice de raideur dynamique  $\mathbf{\Lambda}$ . Dans le cas de systèmes excités, la pulsation est une donnée connue du problème ce qui n'est pas le cas des systèmes autonomes. Un raccourci serait de récupérer la pulsation  $\omega_j$  associée au mode instable  $\varphi_j$  obtenue dans l'analyse de stabilité et de l'injecter dans la matrice  $\mathbf{\Lambda}$ . Cette méthode n'est pas valable puisque  $\omega_j$  est calculée à partir d'une position linéarisée de l'équilibre glissant et n'est donc plus valide loin de cet état d'équilibre. Il est donc nécessaire d'introduire la pulsation  $\omega$  non pas comme une donnée *a priori* mais comme une inconnue du système, au même titre que les coefficients de Fourier  $\tilde{\mathbf{z}}$  des déplacements  $\mathbf{U}(t)$ .

### 5.3.3 Synthèse de la HBM adaptée aux systèmes autonomes

Nous venons de voir que le calcul du régime périodique par une méthode de balance harmonique d'un système autonome en régime d'équilibre instable nécessite d'ajouter aux équations classiques de la méthode fréquentielle une équation portant sur la partie réelle associée au mode identifié comme étant instable dans l'analyse de stabilité. De plus, la fréquence de la solution périodique recherchée

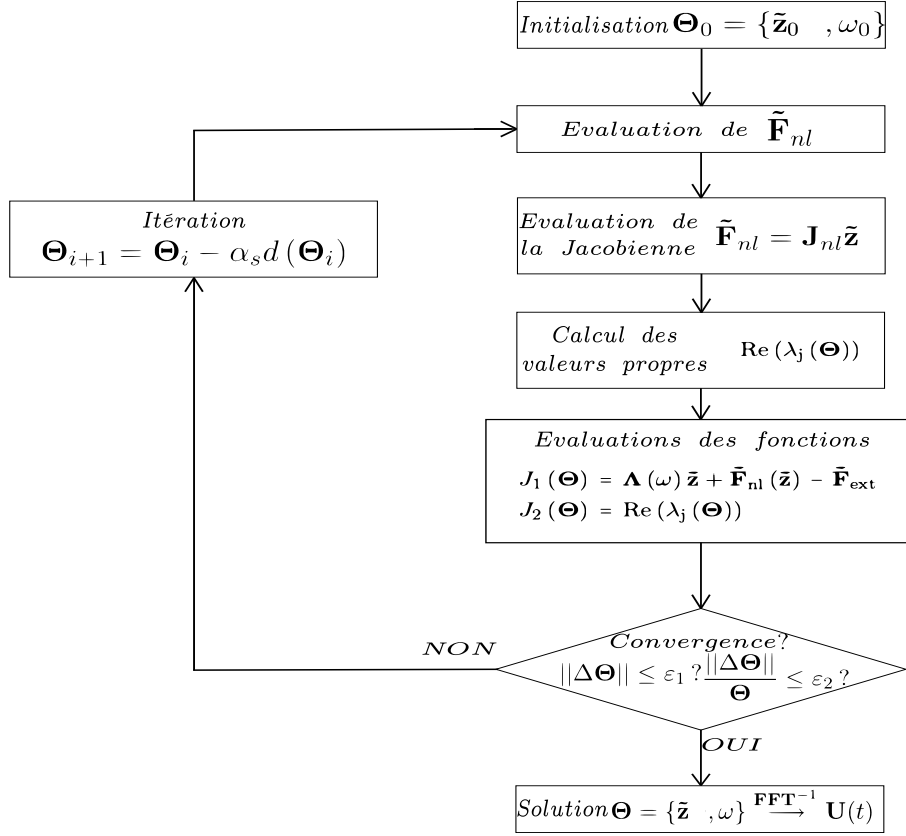


FIGURE 5.1 – Algorithme détaillé de la balance harmonique contrainte

n'étant pas une donnée du système, elle est considérée comme une inconnue supplémentaire à déterminer par le solveur. Le nouveau système algébrique à résoudre pour le calcul de la réponse périodique d'un système autonome soumis à un mode instable s'écrit comme l'ensemble de deux fonctionnelles à minimiser :

$$\text{Trouver } \Theta = [\bar{\mathbf{z}}^T, \omega]^T \in \mathbb{R}^{n(2N_h+1)+1} \text{ tel que } J(\Theta) = \begin{Bmatrix} J_1(\Theta) \\ J_2(\Theta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \text{ avec } \Theta = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{z}} \\ \omega \end{Bmatrix} \quad (5.38)$$

$\Theta$  est le vecteur des inconnues,  $J_1$  et  $J_2$  sont respectivement la fonctionnelle (5.21) des équations du mouvement et la fonctionnelle de la partie réelle associée au mode instable  $\varphi_j$  :

$$\begin{cases} J_1(\Theta) = \Lambda(\omega) \bar{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{F}}_{nl}(\bar{\mathbf{z}}) - \tilde{\mathbf{F}}_{ext} \\ J_2(\Theta) = \text{Re}(\lambda_j(\Theta)) \end{cases} \quad (5.39)$$

La Figure 5.1 montre le synopsis de la méthode de HBM modifiée que l'on appellera dorénavant CHBM pour *Constrained Harmonic Balance Method* ou Méthode de Balance Harmonique Contrainte [CSN08]. On remarquera que l'ajout d'une équation et d'une inconnue supplémentaire ne change pas fondamentalement la structure du problème qui reste carrée et de taille  $n(2N_h + 1) + 1$ . La résolution de ce système se fait de la même manière que pour la méthode de balance harmonique classique.

## 5.4 Définition des conditions initiales

Tout problème d'optimisation a plus de chance de converger et ce d'autant plus rapidement lorsque les conditions initiales sont correctement estimées, c'est à dire pas trop éloignées de la solution finale désirée.

### 5.4.1 Initialisation des coefficients de Fourier

Pour initialiser notre problème, nous nous basons sur les travaux de Sinou et al. [STJ06] qui consistent à écrire que la réponse périodique est principalement pilotée par le mode instable linéarisé autour d'une position dynamique qui s'écrit :

$$\mathbf{U}(t) \approx \eta \left( \boldsymbol{\varphi}_\eta e^{iIm(\lambda_\eta)t} + \bar{\boldsymbol{\varphi}}_\eta e^{-iIm(\lambda_\eta)t} \right) \quad (5.40)$$

avec  $\boldsymbol{\varphi}_\eta$  et  $\bar{\boldsymbol{\varphi}}_\eta$  le vecteur propre instable et son conjugué,  $Im(\lambda_\eta)$  la pulsation de ce mode et  $\eta$  un coefficient réel à déterminer *via* l'algorithme itératif de CNLMA (Complex Non-Linear Modal Analysis) proposé dans cet article. En s'inspirant de l'équation (5.40), on va initialiser les coefficients de Fourier liés à la la fréquence fondamentale ( $k = 1$ ) avec le vecteur propre instable  $\boldsymbol{\varphi}_j$  provenant de l'analyse de stabilité, ce qui revient à écrire :

$$\tilde{\mathbf{z}}_{0,k=1} = \eta \left( \boldsymbol{\varphi}_j + \bar{\boldsymbol{\varphi}}_j \right) \quad (5.41)$$

où  $\eta$  est ici un coefficient réel que l'utilisateur choisit arbitrairement lors de l'initialisation de la méthode de balance harmonique contrainte. Pour information, nous considérons dans ce mémoire une fourchette telle que  $\eta \in [10 - 100]$  et qui semble être une estimation raisonnable des conditions initiales pour le système sur lequel nous travaillons.

### 5.4.2 Initialisation de la fréquence

Dans le cadre de la méthode de balance harmonique contrainte, la fréquence devient une inconnue supplémentaire puisque celle-ci n'est pas une donnée *a priori* d'un système autonome. Si la fréquence obtenue dans l'analyse de stabilité est différente de celle de la réponse dynamique non-linéaire, elle en donne néanmoins une bonne estimation. On initialise donc la fréquence inconnue  $f_0$  avec la valeur obtenue dans l'analyse de stabilité  $f_{stab}$ , soit  $\omega_0 = \omega_{stab}$ .

## 5.5 Condensation sur les nœuds non-linéaires du système

La performance d'une méthode itérative est directement liée au nombre d'inconnues à rechercher et sa diminution est souhaitable. Dans le cadre de systèmes sujets à des non-linéarités localisées aux nœuds, il est possible d'effectuer une réduction exacte sur ces nœuds en réorganisant les termes linéaires et non-linéaires du vecteur  $\tilde{\mathbf{z}}$  tel que  $\tilde{\mathbf{z}} = \left[ \tilde{\mathbf{z}}_{ln}^T \tilde{\mathbf{z}}_{nl}^T \right]^T$  et la fonctionnelle  $J_1$  de (5.39) associée aux équations du mouvement est réécrite :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_{ln,ln} & \boldsymbol{\Lambda}_{ln,nl} \\ \boldsymbol{\Lambda}_{nl,ln} & \boldsymbol{\Lambda}_{nl,nl} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{z}}_{ln} \\ \tilde{\mathbf{z}}_{nl} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{F}}_{nl} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_{ext,ln} \\ \tilde{\mathbf{F}}_{ext,nl} \end{Bmatrix} \quad (5.42)$$

La forme réduite de (5.42) devient :

$$\mathbf{\Lambda}_{eq} \tilde{\mathbf{z}}_{nl} + \tilde{\mathbf{F}}_{nl}(\tilde{\mathbf{z}}_{nl}) = \tilde{\mathbf{F}}_{eq} \quad (5.43)$$

avec

$$\mathbf{\Lambda}_{eq} = \mathbf{\Lambda}_{nl,nl} - \mathbf{\Lambda}_{nl,ln} (\mathbf{\Lambda}_{ln,ln})^{-1} \mathbf{\Lambda}_{ln,nl} \quad (5.44)$$

et

$$\tilde{\mathbf{F}}_{eq} = \tilde{\mathbf{F}}_{ext,nl} - \mathbf{\Lambda}_{nl,ln} (\mathbf{\Lambda}_{ln,ln})^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{ext,ln} \quad (5.45)$$

Cette étape réduit le nombre d'équations à résoudre de  $(n(2N_h + 1) + 1)$  à  $(n_{nl}(2N_h + 1) + 1)$  où  $n_{nl}$  est le nombre de DDLS non-linéaires. Cette étape est donc particulièrement intéressante quand  $n_{nl} \ll n$ . Une fois que le champ  $\tilde{\mathbf{z}}_{nl}$  est connu, il est aisé de calculer le champ linéaire  $\tilde{\mathbf{z}}_{ln}$  :

$$\tilde{\mathbf{z}}_{ln} = \mathbf{\Lambda}_{ln,ln}^{-1} \left( \tilde{\mathbf{F}}_{ext,ln} - \mathbf{\Lambda}_{ln,nl} \tilde{\mathbf{z}}_{nl} \right) \quad (5.46)$$

## 5.6 Condensation sur les nœuds en vis-à-vis

Dans sa thèse, Nacivet [Nac02] propose une étape de réduction supplémentaire permettant de diviser par 2 le nombre d'inconnues de l'équation algébrique (5.43) en considérant uniquement le déplacement relatif entre deux nœuds de contact en vis à vis :

$$\tilde{\mathbf{z}}_{r,i} = \tilde{\mathbf{z}}_{nl,obs,i} - \tilde{\mathbf{z}}_{nl,ref,i} \quad (5.47)$$

où les indices *obs* et *ref* désignent respectivement les nœuds d'observation et de référence et *i* indique l'élément de contact. On définit également la matrice de souplesse  $\mathbf{S}$  comme l'inverse de la matrice de raideur dynamique  $\mathbf{\Lambda}_{eq}$  :

$$\mathbf{S} = \mathbf{\Lambda}_{eq}^{-1} \quad (5.48)$$

D'après le principe d'action-réaction, les efforts non-linéaires  $\tilde{\mathbf{F}}_{nl}$  se partitionnent en efforts non-linéaires d'observation et en efforts non-linéaires de référence tel que :

$$\tilde{\mathbf{F}}_{nl,obs} = -\tilde{\mathbf{F}}_{nl,ref} \quad (5.49)$$

En reprenant les équations (5.43), (5.48) et (5.49), le vecteur des déplacements non-linéaires  $\tilde{\mathbf{z}}_{nl}$  est réorganisé selon les nœuds de référence et les nœuds d'observation tel que :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{z}}_{nl,obs} \\ \tilde{\mathbf{z}}_{nl,ref} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{obs,obs} & \mathbf{S}_{obs,ref} \\ \mathbf{S}_{ref,obs} & \mathbf{S}_{ref,ref} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_{eq,obs} - \tilde{\mathbf{F}}_{nl,obs} \\ \tilde{\mathbf{F}}_{eq,ref} + \tilde{\mathbf{F}}_{nl,obs} \end{Bmatrix} \quad (5.50)$$

Enfin, en considérant les équations (5.47) et (5.50), l'équation du mouvement réduite sur les déplacements relatifs s'écrit :

$$\mathbf{\Lambda}_r \tilde{\mathbf{z}}_r + \tilde{\mathbf{F}}_{nl,obs}(\tilde{\mathbf{z}}_r) = \tilde{\mathbf{F}}_r \quad (5.51)$$

où le détail des écritures de la matrice dynamique réduite  $\mathbf{\Lambda}_r$  et du vecteur des efforts extérieurs réduit  $\tilde{\mathbf{F}}_r$  se trouve dans [Nac02]. Une fois que l'équation algébrique (5.51) est résolue,  $\tilde{\mathbf{z}}_r$  est connu, les efforts

Garniture			Paramètres Modèle		
Module de Young $E$	(GPa)	2	$k_1$	(N.m <sup>-1</sup> )	$1.77e^7$
Coefficient de Poisson $\nu$		0.1	$k_3$	(N.m <sup>-3</sup> )	$5.07e^{14}$
Densité $\rho$	(kg.m <sup>-3</sup> )	2500	$F_{ext}$	(N)	$2.2e^4$
Disque			$f_{1stab}$	(Hz)	1642
Module de Young $E$	(GPa)	125	$\zeta_1 = \zeta_2$		10
Coefficient de Poisson $\nu$		0.3	$\xi$	(%)	1
Densité $\rho$	(kg.m <sup>-3</sup> )	7200			

TABLE 5.1 – Caractéristiques matériaux et données du modèle

non-linéaires d'observation  $\tilde{\mathbf{F}}_{nl,obs}$  sont calculés avec l'équation (5.51) et le vecteur des déplacements non-linéaires  $\tilde{\mathbf{z}}_{nl}$  est obtenu *via* l'équation (5.50).

Le calcul de la matrice Jacobienne de linéarisation équivalente  $\mathbf{J}_{NL}$  de l'équation (5.35) s'obtient à partir de la matrice Jacobienne calculée à partir des déplacements relatifs  $\tilde{\mathbf{z}}_r$  :

$$\tilde{\mathbf{F}}_{nl,obs} = \mathbf{J}_r \tilde{\mathbf{z}}_r \quad (5.52)$$

En considérant les équations (5.47) et (5.49),  $\mathbf{J}_{NL}$  peut donc se mettre sous la forme :

$$\mathbf{J}_{NL} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_r & -\mathbf{J}_r \\ -\mathbf{J}_r & \mathbf{J}_r \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

Cette étape permet de diviser par 2 le nombre d'inconnues qui passe de  $(n_{nl}(2N_h + 1) + 1)$  à  $(n_{nl}/2(2N_h + 1) + 1)$ . Néanmoins, nous n'utiliserons pas cette réduction sur les ddls en vis-à-vis car le modèle étudié comporte des modes de corps rigide et génère donc un mauvais conditionnement des matrices de souplesse  $\mathbf{S}$ . Ainsi, le résultat d'optimisation du système réduit sur les ddls en vis-à-vis doit être calculé avec des tolérances beaucoup plus strictes que le résultat du système condensé sur les ddls non-linéaires. Le gain apporté par cette méthode devient donc négligeable.

## 5.7 Résultats numériques

Dans cette section nous étudions les réponses temporelles non-linéaires du système de frein vu au chapitre précédent dont les données sont récapitulées dans le Tableau 5.1. Celui-ci ne présente qu'une seule instabilité (section 4.6.1). Nous comparons les résultats de la balance harmonique contrainte aux résultats obtenus par une intégration temporelle, les performances numériques et nous étudions l'influence du coefficient de frottement et de l'amortissement du système sur les réponses dynamiques.

### 5.7.1 Validation des calculs et influence du nombre d'harmoniques

Pour rappel, ce modèle présente une instabilité à 1642.3Hz pour  $\mu_0 = 0.27$ , issue du couplage de deux modes propres du disque, l'un à 1637Hz, l'autre à 1644Hz. Sur la Figure 5.2 (a) on trace l'évolution temporelle du système calculée avec le schéma de Newmark implicite *des accélérations moyennes* ( $\beta = 1/4$  et  $\gamma = 1/2$ ). La perturbation de la position d'équilibre statique instable génère

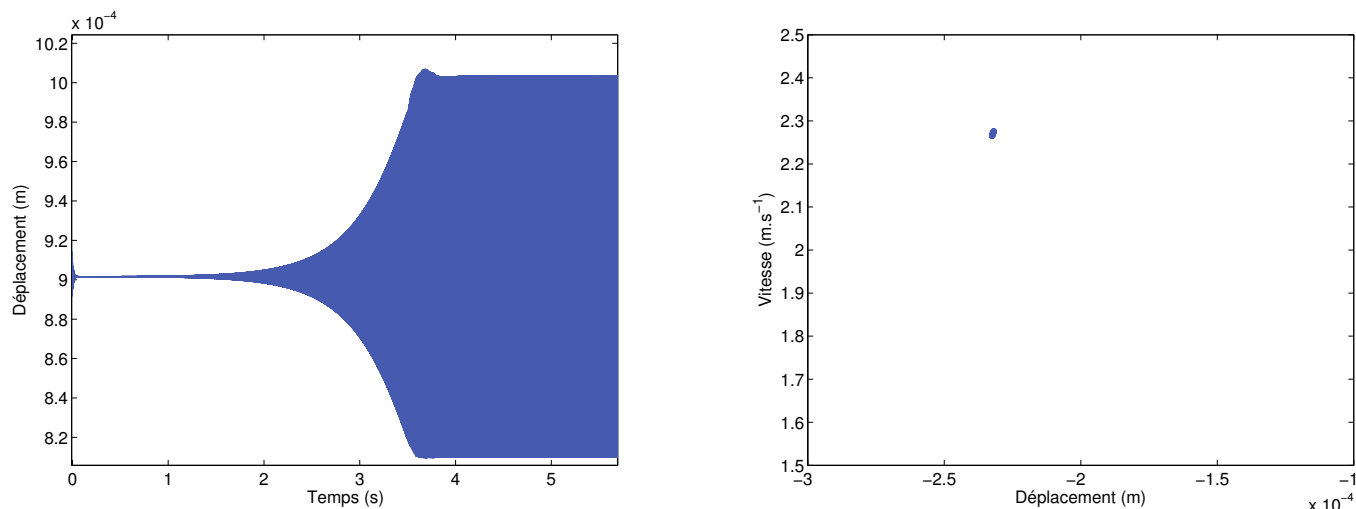


FIGURE 5.2 – Evolution temporelle (a) et section de Poincaré (b) dans la zone stationnaire

	$N_h$	1	2	3	5	10	20
Erreur relative moyenne (%)	Déplacement	39.1	17.2	13.1	7.2	1.45	0.6
	Vitesse	44.2	24.5	21.2	10.3	3.2	1.7

TABLE 5.2 – Erreur relative moyenne en déplacement et vitesse

des oscillations qui explosent de manière exponentielle jusqu'à atteindre un régime dynamique stationnaire également appelé cycle limite. La section de Poincaré (Figure 5.2 (b)) tracée dans la partie stationnaire du signal montre un nuage de points concentrés qui traduit la périodicité du signal. Pour information, on devrait obtenir théoriquement un point unique sur la section. Il se trouve néanmoins que le schéma pas à pas de Newmark calcule les amplitudes à une tolérance près et génère également des erreurs de périodicité. Ainsi le flot ne coupe pas la section de Poincaré strictement au même endroit.

La réponse stationnaire du système dynamique est périodique et respecte donc l'hypothèse de périodicité nécessaire pour l'utilisation de la méthode de balance harmonique contrainte. La Figure 5.3 présente les cycles limites calculés avec cette méthode. On présente les résultats obtenus pour  $N_h = 1, 2, 3, 5, 10, 20$  harmoniques que l'on compare avec les résultats temporels de référence.

Exception faite du calcul avec  $N_h = 1$ , on constate une bonne corrélation entre les résultats temporels et les résultats issus de la méthode de balance harmonique contrainte. Comme on peut s'y attendre, une augmentation du nombre d'harmoniques permet de mieux estimer la réponse (voir Tableau 5.2). Dans les cas où les cycles limites ont une forme "simple" (Figure 5.3 (e,g)), un faible nombre d'harmoniques ( $N_h = 2$ ) est suffisant pour décrire correctement la réponse. Néanmoins, lorsque les cycles limites ont des formes plus complexes et donc une richesse fréquentielle plus importante (Figure 5.3 (a,c)) il est nécessaire de conserver plus d'harmoniques afin d'obtenir une bonne description de la réponse dynamique.



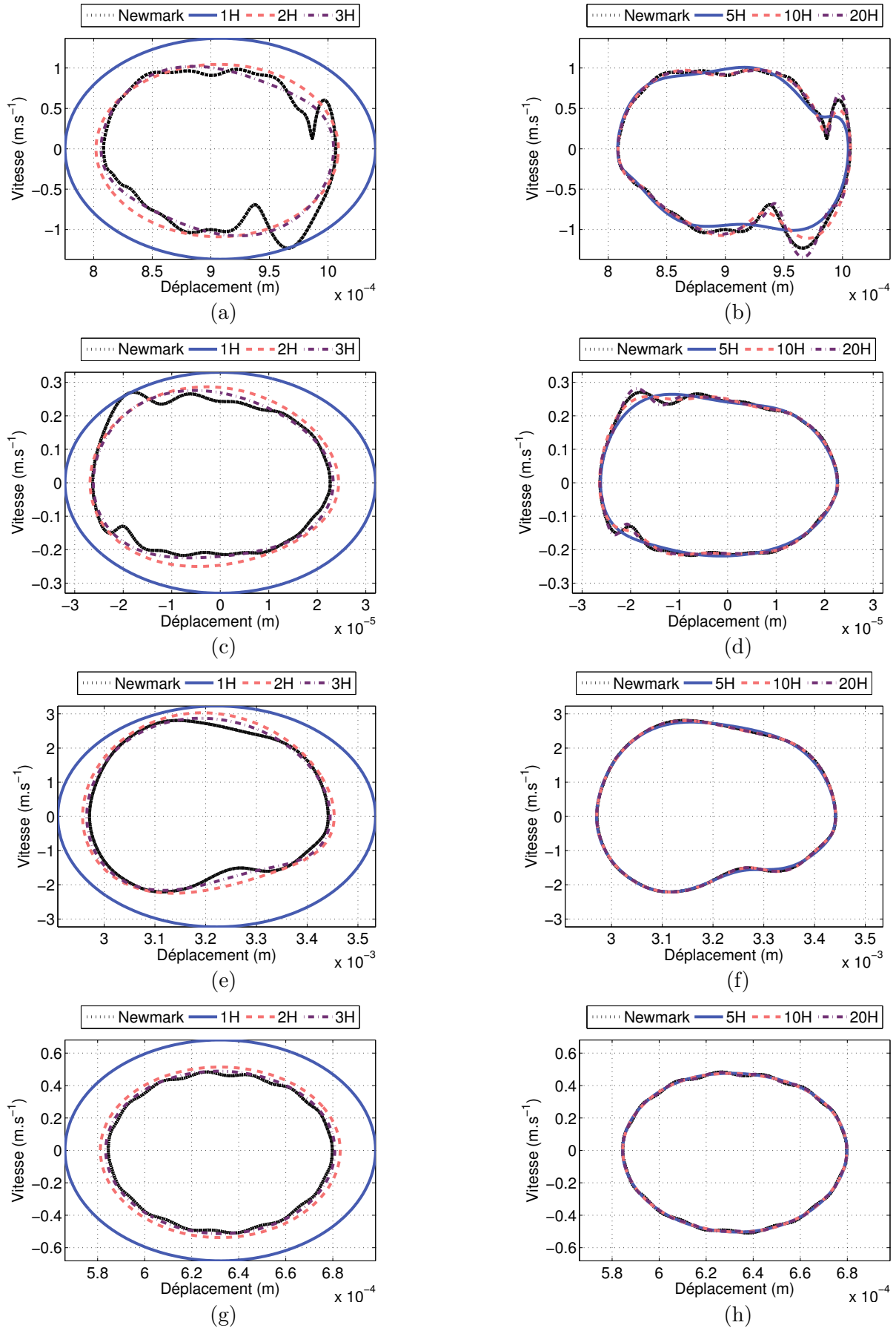


FIGURE 5.3 – Cycles limites : Garniture (a-f) ,Disque (g-h) ;  $N_h = 1, 2, 3$  (a,c,e,g) ,  $N_h = 5, 10, 20$  (b,d,f,h)

Les spectres de la Figure 5.4 montrent que les raies des analyses temporelles et de la CHBM, qui correspondent à la composante fondamentale et aux harmoniques de la réponse sont confondues. L'amplitude des harmoniques d'ordre supérieur dépend de la complexité des cycles limites. On note effectivement une répartition plus homogène de l'énergie sur la bande de fréquence du spectre (b) que du spectre (h) d'où la nécessité de prendre en compte un nombre supérieur d'harmoniques pour capter cette énergie.

L'observation de l'histogramme 5.5 où sont tracées les puissances totales de chaque harmonique montrent que l'harmonique fondamentale  $N_h = 1$  concentre la quasi totalité de l'énergie (soit environ 99.8%). Le calcul de la puissance des composantes harmoniques est défini de la façon suivante :

$$P_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{dof}} (a_{i,j}^2 + b_{i,j}^2) \quad (5.54)$$

où  $P_j$  est la puissance totale de la  $j^{\text{ème}}$  harmonique et  $a_i$  et  $b_i$  sont respectivement les coefficients de Fourier associés au cosinus et sinus du  $i^{\text{ème}}$  ddl. Même si cette harmonique concentre pratiquement la totalité de l'énergie, le fait de la retenir seule dans le calcul de balance harmonique conduit à une approximation insuffisante des cycles limites et montre que les non-linéarités, qui exacerbent les harmoniques aux ordres supérieurs, jouent un rôle important pour la convergence de la méthode de balance harmonique contrainte.

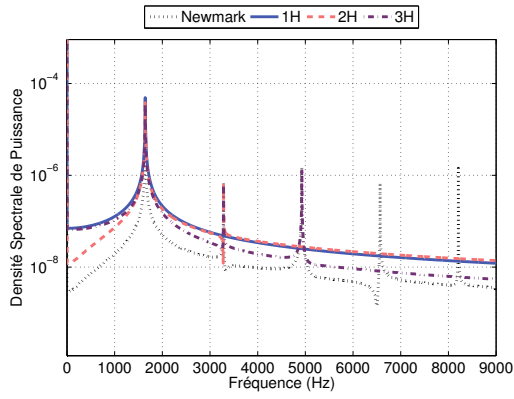
Le critère de l'erreur relative de Fourier défini à l'équation (5.20) peut être utilisé pour estimer l'erreur commise sur la non-linéarité (Figure 5.6). Intuitivement, on note que plus le nombre d'harmoniques retenu est important moins l'erreur de Fourier est grande. En fixant une tolérance choisie arbitrairement à  $\varepsilon = 0.1$ , on a besoin de retenir  $N_h = 3$  harmoniques dans la méthode fréquentielle.

### Convergence et comparaisons du coût numérique

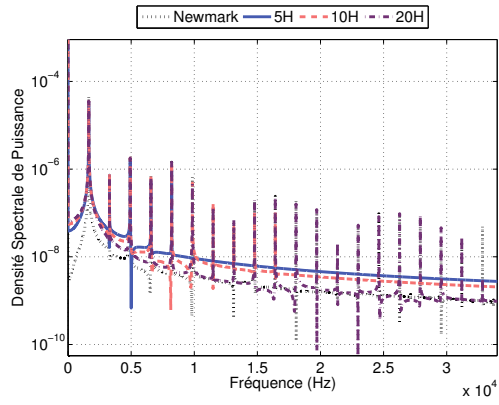
La Figure 5.7 présente l'évolution de la norme du résidu dynamique (a), de la partie réelle (b) et de la fréquence (c) en fonction des itérations pour  $N_h = 1, 3, 5, 10$ . On remarque le nombre croissant d'itérations nécessaire pour converger lorsque le nombre d'harmoniques augmente.

La variation de la fréquence au cours des itérations (Figure 5.7 (c)) par rapport à la fréquence obtenue dans l'analyse de stabilité montre la nécessité de la prendre en compte en tant qu'inconnue du système pour assurer la bonne convergence de l'algorithme (dépendance des matrices fréquentielles dynamiques  $\mathbf{\Lambda}$ ). Elle passe ainsi de  $f_{stab} = 1642.3\text{Hz}$  à  $f_{nl} = 1641.9\text{ Hz}$ . Même si la variation de cette dernière peut apparaître faible, ne pas la prendre en compte dans le processus d'optimisation rend impossible la convergence de la méthode de balance harmonique contrainte. De plus, il y a une très faible différence entre la fréquence de la réponse non-linéaire estimée avec le schéma d'intégration de Newmark et celle de la méthode de balance harmonique contrainte puisqu'elle est inférieure à 0.01Hz quelque soit  $N_h$ .

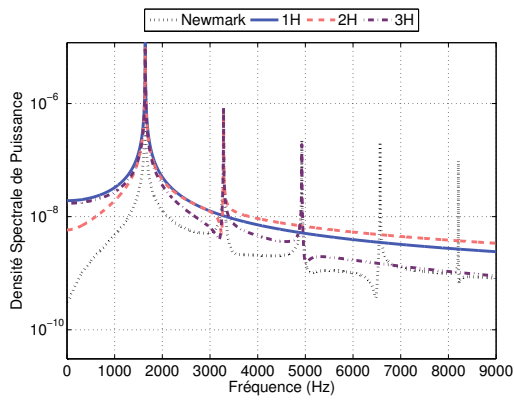
Le Tableau 5.3 synthétise les temps CPU nécessaires pour les deux méthodes numériques. Les calculs de la méthode de balance harmonique contrainte sont effectués à partir des conditions initiales vues à la section 5.4 et à partir de la position statique perturbée autour de l'équilibre glissant pour la méthode temporelle. Pour information, les temps de calcul de l'intégrateur Runge-Kutta d'ordre



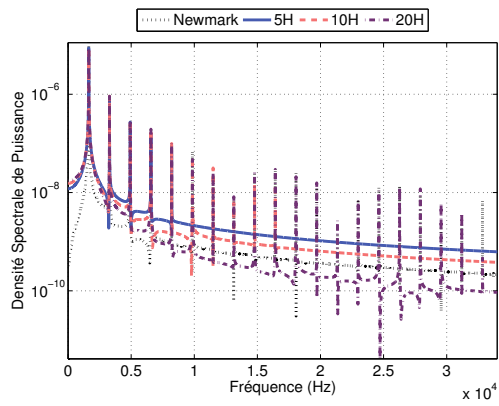
(a)



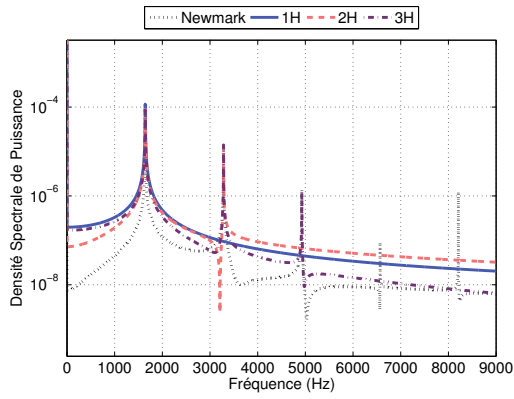
(b)



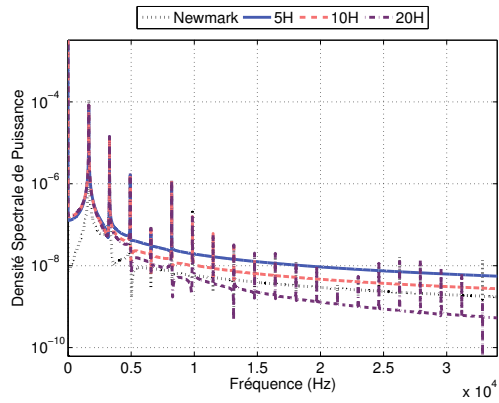
(c)



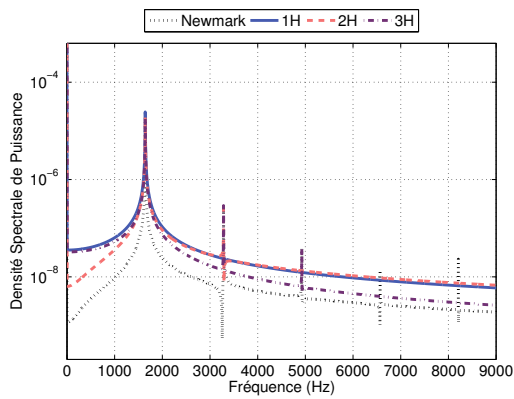
(d)



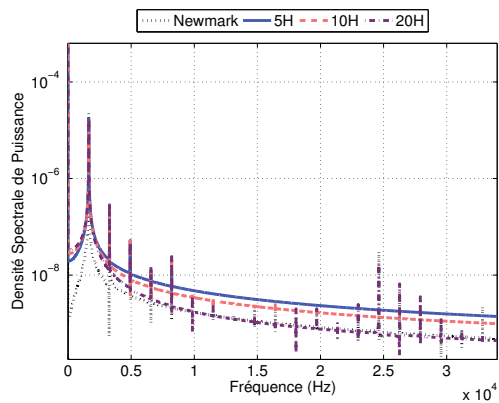
(e)



(f)



(g)



(h)

FIGURE 5.4 – Spectres des cycles limites

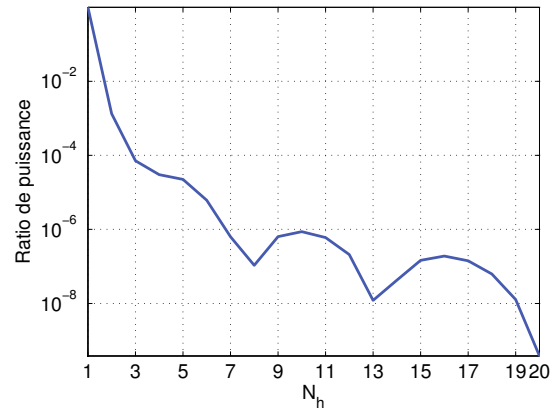


FIGURE 5.5 – Ratio de puissance

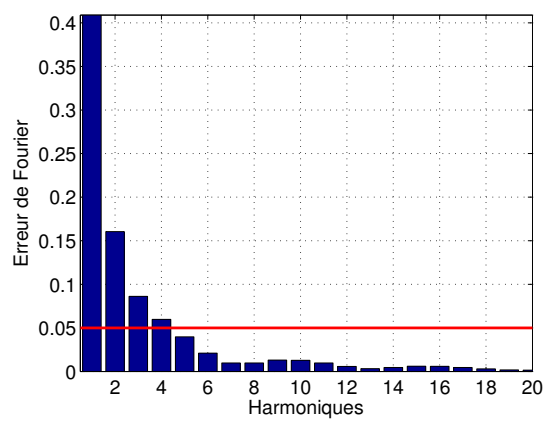


FIGURE 5.6 – Erreur de Fourier

Méthodes	Runge-Kutta 4	Newmark	1H	2H	3H	5H	10H
Nombre d'itérations	–	–	5	31	7	17	59
Nb Variables/Inconnues	316	158	163	271	379	595	1135
Temps CPU	8h50	3h10	0h02	0h16	0h06	0h24	2h18

TABLE 5.3 – Temps de calcul

4 sont également reportés. Le coût numérique du calcul du cycle limite *via* la méthode de balance harmonique contrainte est plus faible qu'avec l'utilisation des méthodes temporelles classiques. On remarque que la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 impose de transformer le système différentiel (5.28) d'ordre 2 dans l'espace d'état d'ordre 1, doublant ainsi la taille du système à résoudre. De plus, ce schéma d'intégration est à pas multiple, ce qui le pénalise par rapport au schéma de Newmark qui est un schéma à pas unique et qui traite directement avec le système différentiel original.

Le temps de calcul extrêmement réduit lorsqu'une seule harmonique est prise en compte dans la réponse n'a pas une grande signification étant donné que la réponse obtenue n'est pas satisfaisante vis à vis de la réponse temporelle. Pour  $N_h = 3$ , la méthode de balance harmonique contrainte est environ 30 fois plus rapide que le schéma temporel de Newmark. Lorsque 10 harmoniques sont retenues dans la réponse, le nombre d'itérations et donc le temps de calcul sont prohibitifs et comparables à celui de l'analyse temporelle. Néanmoins, on peut habilement bénéficier des performances obtenues avec un petit nombre d'harmoniques. La procédure consiste simplement à récupérer le résultat de l'itération à  $N_h^i$  et l'injecter dans le calcul à  $N_h^{i+1}$ , avec  $N_h^i < N_h^{i+1}$ . Pour illustrer cet exemple, prenons le cas où la réponse dynamique est calculée avec  $N_h = 10$  harmoniques. En prenant la séquence  $N_h = [1, 3, 5, 10]$  pour le calcul de la réponse stationnaire, le temps total cumulé est de 42 minutes à comparer au temps de calcul de la procédure directe,  $t = 2$  heures et 18 minutes.

La méthode de balance harmonique contrainte est donc bien adaptée pour résoudre les problèmes dynamiques autonomes non-linéaires. On a montré la corrélation avec les méthodes temporelles en termes d'amplitudes et de fréquence de la réponse non-linéaire. Il est nécessaire de conserver un nombre minimal de composantes  $N_h$  dans la troncature pour estimer correctement les cycles limites dont les harmoniques d'ordre supérieur sont fortement exacerbées et d'autre part assurer la convergence du solveur. En effet, on a vu que la valeur de la partie réelle est conditionnée par la réponse non-linéaire du système et une troncature trop importante de la solution donne une estimation de la partie réelle qui ne correspond pas au système dynamique. Le solveur recherche alors une réponse qui satisfait les équations dynamiques et qui minimise la partie réelle. Dans le meilleur des cas le solveur trouvera une solution relativement bien approximée, c'est le cas ici avec  $N_h = 1$ , dans le pire des cas il ne trouvera pas de direction de recherche et le processus itératif s'arrêtera. Pour estimer *a posteriori* la qualité d'une solution et donc le nombre d'harmoniques nécessaire à retenir, on peut se rapporter à l'erreur de Fourier relative qui estime l'erreur commise sur la troncature de la non-linéarité. On fixe  $\varepsilon = 0.1$  pour la suite des calculs.

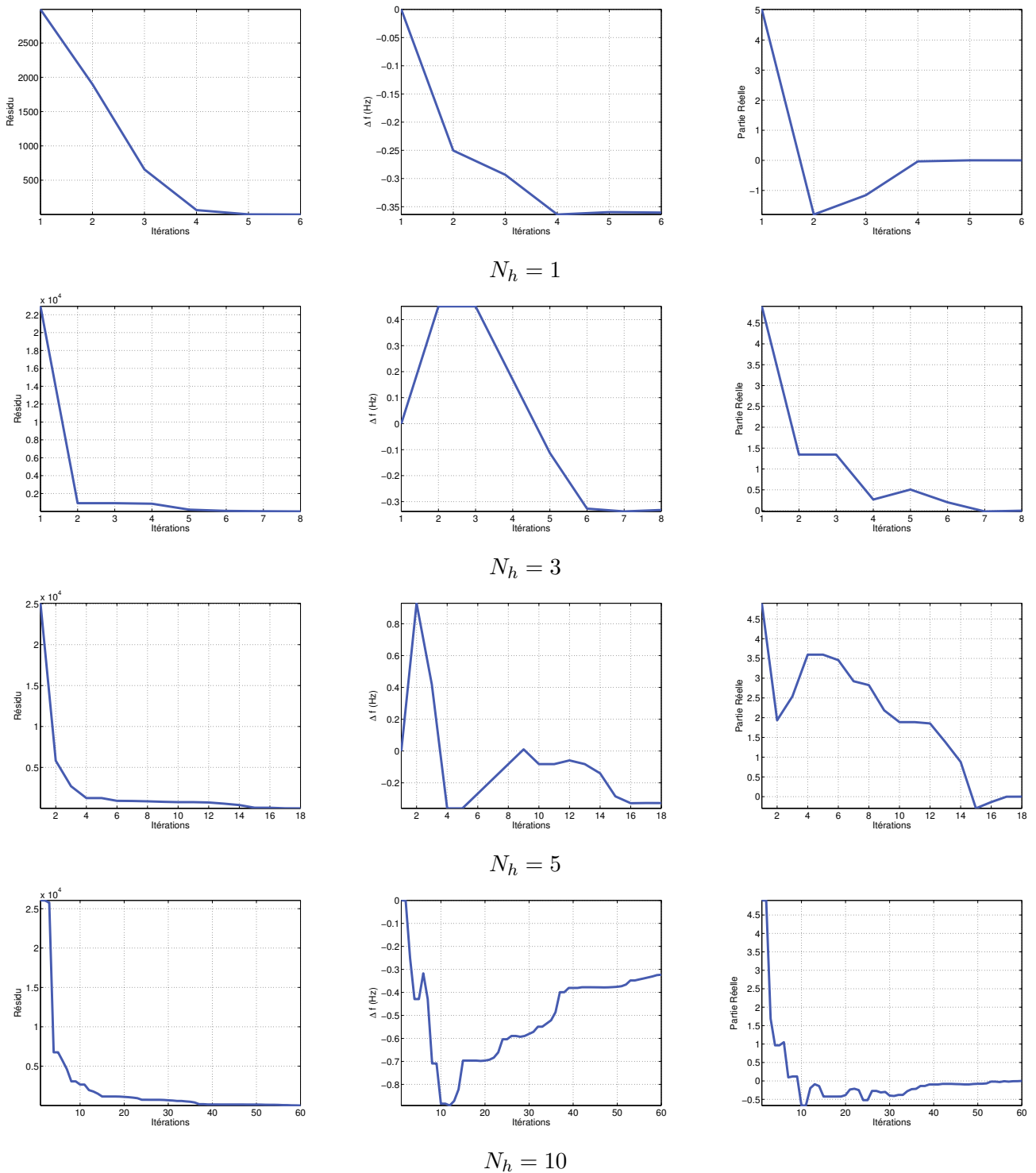


FIGURE 5.7 – Évolution des parties réelles, des fréquences et des résidus pour différentes harmoniques au cours des itérations

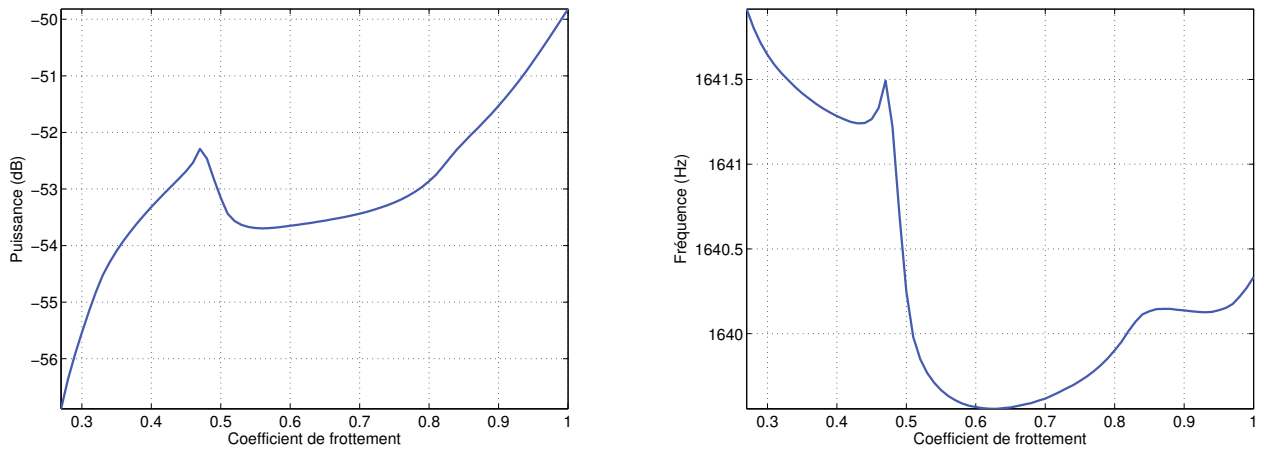


FIGURE 5.8 – Évolution de la puissance et de la fréquence des vibrations

## 5.7.2 Évolutions paramétriques

Cette section porte sur l'influence du coefficient de frottement et l'influence de l'amortissement sur le comportement vibratoire du système de frein. Ces deux paramètres sont parmi ceux ayant une influence essentielle sur le comportement dynamique du système de freinage, c'est la raison pour laquelle ils ont été choisis dans cette étude paramétrique.

### 5.7.2.1 Coefficient de frottement

On trace sur la Figure 5.8 l'évolution de la puissance totale de la réponse (a) et de la fréquence du régime périodique stationnaire (b) en fonction du coefficient de frottement  $\mu$ . L'évolution de la puissance totale est croissante en moyenne sur la plage de variation de  $\mu$ . On constate une rupture de la croissance autour de  $\mu = 0.47$  avec un saut d'amplitude puis de nouveau une croissance d'ordre quadratique par rapport au coefficient de frottement. L'évolution de la fréquence est fortement non-linéaire même si les variations ne sont pas très grandes : l'écart maximal de la fréquence de vibration est de 2.5Hz sur la plage de variation du coefficient de frottement pour une fréquence nominale de 1641.9Hz, soit une variation relative de 0.15%.

Néanmoins, l'évolution locale des cycles limites avec le coefficient de frottement semble plus complexe qu'il n'y paraît. L'observation des cycles limites des ddl dans la direction normale à la surface de contact montre une évolution non-linéaire des amplitudes avec le coefficient de frottement. On cherche à savoir s'il y a une corrélation entre l'évolution des amplitudes de cycles limites et l'évolution des non-linéarités de contact (contact/perte de contact).

La Figure 5.9 montre le statut de contact de chaque ddl normal au cours d'une période en fonction du coefficient de frottement. Un point bleu indique qu'il y a un contact permanent entre la plaquette et le disque au cours d'une période de la réponse dynamique stationnaire alors qu'un point rouge indique qu'une perte de contact a lieu au cours d'une période. Le coefficient de frottement exacerbe les non-linéarités de contact puisqu'à  $\mu = 1$ , 6 éléments de contact sur 9 présentent une perte de contact au cours d'une période de vibration contre un seul élément à  $\mu = 0.3$ .

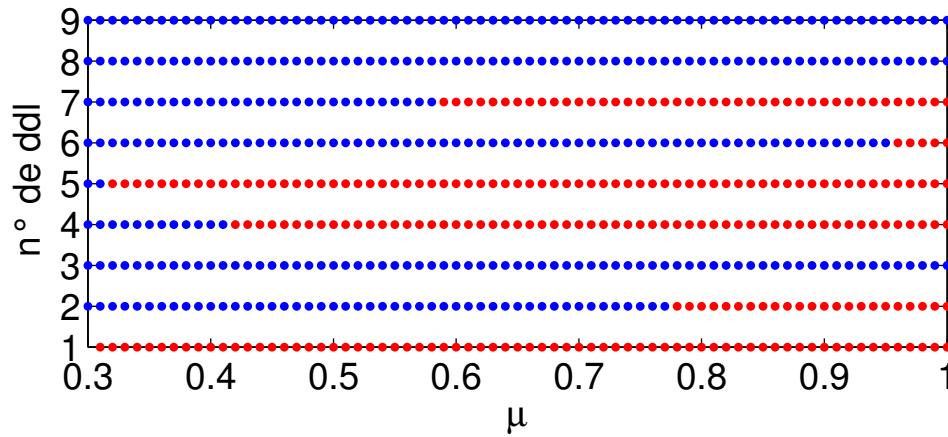


FIGURE 5.9 – Statuts des ddl de contact. Les points rouges indiquent une perte de contact au cours d'une période

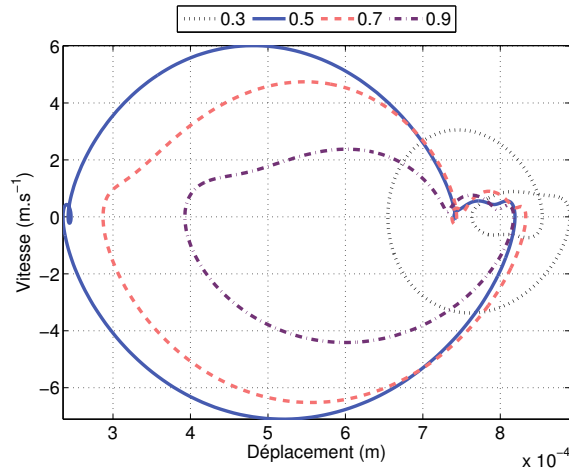
Il est très difficile d'établir une corrélation entre l'apparition de la perte de contact au fur et à mesure que  $\mu$  augmente et une variation des amplitudes de cycles limites. En effet, l'observation des ddl normaux du disque et de la garniture associés à l'élément de contact n°1 montre que depuis l'origine de la bifurcation  $\mu = 0.27$  et ce jusqu'à  $\mu = 1$ , il y a un changement du statut de contact au cours d'une période (contact/perte de contact). En étudiant le cycle limite associé au ddl normal de garniture Figure 5.10 (a) et l'évolution de la puissance des harmoniques (b), on remarque que les amplitudes deviennent maximales autour de  $\mu = 0.5$  puis qu'elles décroissent jusqu'à  $\mu = 0.8$  et se stabilisent après. Quant aux amplitudes des cycles limites du ddl appartenant au disque et en vis-à-vis (Figure 5.11), elles atteignent un pic autour de  $\mu = 0.5$  puis décroissent quasi-linéairement jusqu'à  $\mu = 0.95$ .

L'élément de contact n°2 passe d'un état en contact permanent à un état où une perte de contact apparaît au cours d'une période à partir de  $\mu = 0.78$ . On observe alors à cet instant un saut d'amplitude des cycles limites et de puissance (Figure 5.12 (a-b)) pour le ddl de la garniture mais le ddl du disque semble avoir un comportement indifférent au changement de statut de contact puisque le maximum d'amplitude apparaît peu avant  $\mu = 0.5$  pour décroître après (Figure 5.13 (a-b)).

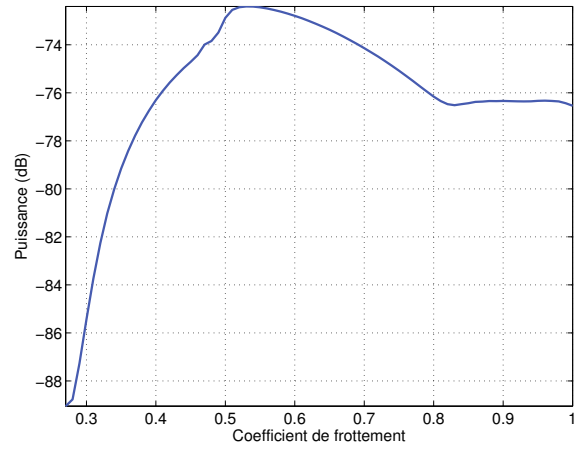
Ces deux exemples montrent qu'il n'est pas évident d'établir un lien entre la modification du statut de contact et un changement des amplitudes de vibration. L'augmentation du coefficient de frottement diminue la puissance des amplitudes normales de vibration du disque (Figure 5.14 (a)) mais augmente celles de la garniture (Figure 5.14 (b)) et celles des ddl du plan de la surface de contact du disque et de la garniture (Figure 5.15 (a-b)). L'évolution locale des cycles est donc complexe puisque l'augmentation du coefficient de frottement n'est pas synonyme d'augmentation des amplitudes de vibration.

Pour information, le calcul des réponses stationnaires sur la plage  $\mu \in [0.27 - 1]$  avec un pas  $\Delta\mu = 0.01$ , soit 74 points a nécessité un temps total de  $t = 5\text{h}28\text{m}$  soit un temps moyen  $t_p = 4\text{m}25\text{s}$  pour un pas de calcul.



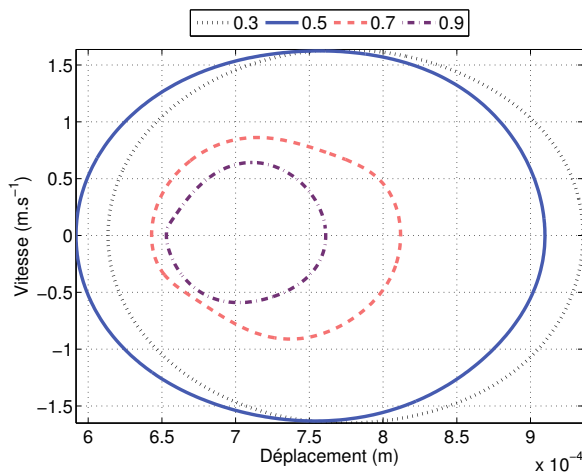


(a) Cycles limites

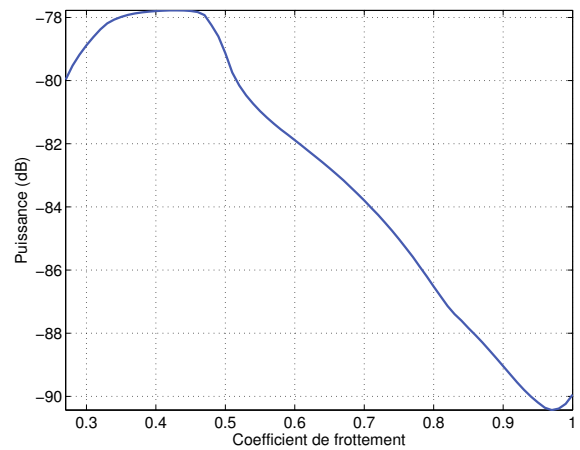


(b) Puissance

FIGURE 5.10 – ddl de la garniture associé à l'élément de contact n°1

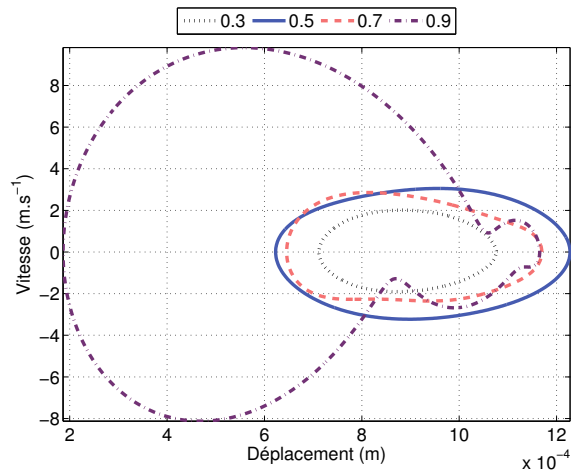


(a) Cycles limites

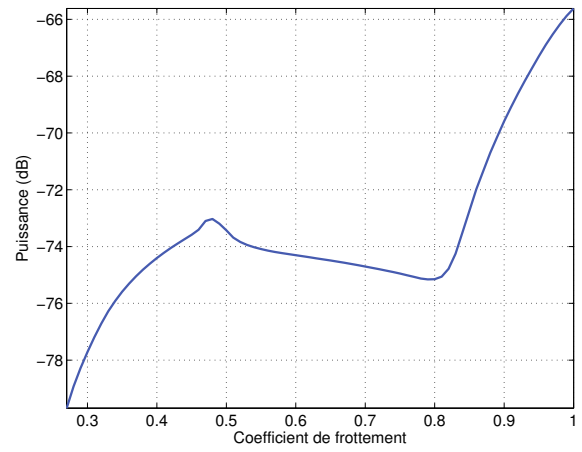


(b) Puissance

FIGURE 5.11 – ddl du disque associé à l'élément de contact n°1

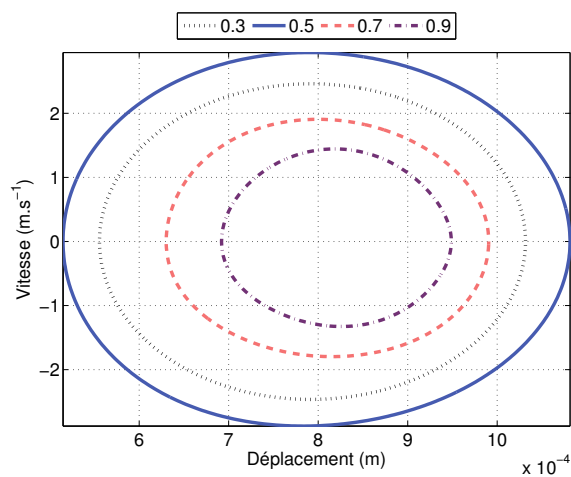


(a) Cycles limites

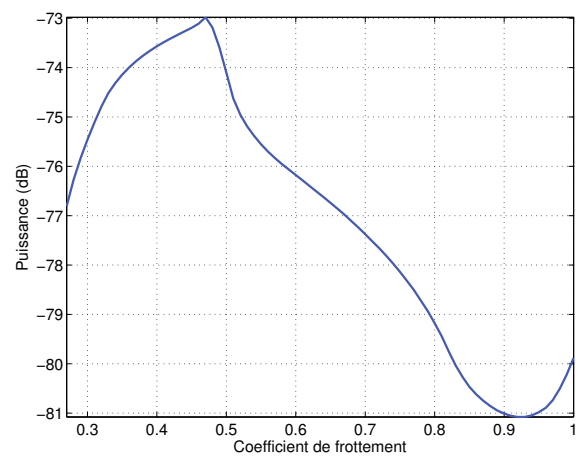


(b) Puissance

FIGURE 5.12 – ddl de la garniture associé à l'élément de contact n°2

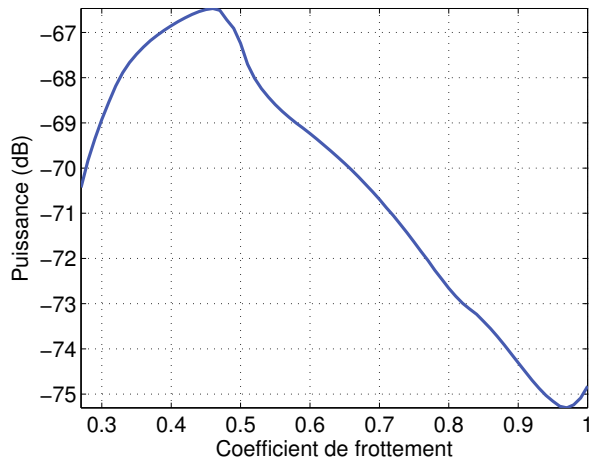


(a) Cycle limite

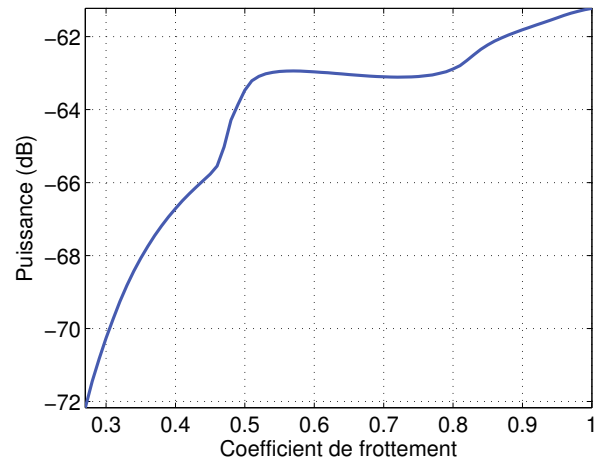


(b) Puissance

FIGURE 5.13 – ddl du disque associé à l'élément de contact n°2

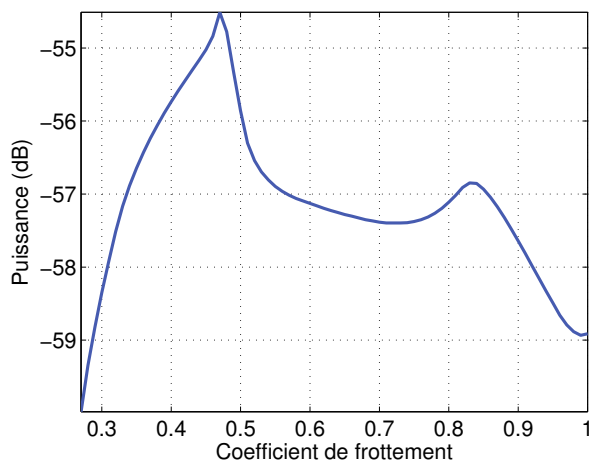


(a) Disque

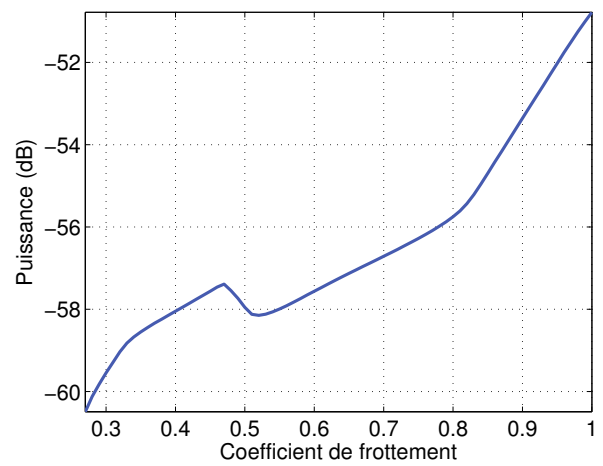


(b) Garniture

FIGURE 5.14 – Puissances cumulées des amplitudes dans la direction normale



(a) Disque



(b) Garniture

FIGURE 5.15 – Puissances cumulées des amplitudes dans le plan de frottement

Cas	1	2	3	4	5	6	7
$\zeta_1$	1	2	10	1	2	1	10
$\zeta_2$	1	2	10	2	1	10	1
$\mu$	$0.71\mu_0$	$0.85\mu_0$	$\mu_0$	$0.69\mu_0$	$0.85\mu_0$	$0.57\mu_0$	$0.85\mu_0$

TABLE 5.4 – Répartition de l'amortissement modal

### 5.7.2.2 Influence de l'amortissement modal

On a vu dans le chapitre 4 l'influence de l'amortissement modal sur la stabilité des systèmes autonomes. Les analyses de stabilité ont montré qu'un amortissement modal non réparti équitablement sur l'ensemble des modes couplés a des conséquences inattendues comme une augmentation de la zone d'instabilité par rapport à un état de référence où l'amortissement modal est identique sur les deux modes. Les parties réelles des deux modes couplés se séparent de façon continue et une des parties réelles croise le demi plan positif pour un coefficient de frottement plus faible. Nous allons étudier dans cette section l'influence de l'amortissement modal sur les amplitudes de cycles limites. Le Tableau 5.4 rassemble tous les cas d'études présentés dans la suite. L'amortissement est proportionnel à la pulsation sur les autres modes et est fixé à 1%.

#### Amortissement modal symétrique

On trace les cycles limites pour les cas 1, 2 et 3 où les amortissements modaux sont identiquement répartis sur les deux modes impliqués dans l'instabilité. Les Figures 5.16 et 5.17 montrent respectivement les cycles limites d'un ddl normal à la surface de contact de la garniture et du disque, pour  $\mu = 0.29$  et  $\mu = 0.44$ . Pour mémoire, l'augmentation de l'amortissement modal également réparti sur les deux modes a pour effet d'abaisser le niveau des parties réelles et donc de retarder le seuil d'instabilité lorsque le coefficient de frottement varie. D'après les Figures, l'amortissement modal a pour effet de modifier non seulement les amplitudes de vibration, mais aussi la position d'équilibre statique des ddls de la garniture (Figure 5.16). Sur la Figure 5.18 sont tracées les puissances cumulées des amplitudes de vibration normales de la garniture (a) et du disque (b) pour les 3 cas d'amortissement en fonction du coefficient de frottement. On remarque donc que l'augmentation de l'amortissement modal diminue le niveau global des amplitudes. Néanmoins localement, l'amplitude des cycles limites peut être maximale dans les cas de plus fort taux d'amortissement (Figure 5.17 (a-b), cas n°3,  $\zeta_1 = \zeta_2 = 10$ ). De plus, l'évolution des amplitudes en fonction du coefficient de frottement combiné à l'amortissement présente une certaine complexité. Par exemple dans le cas de la garniture, (Figure 5.16), les cycles limites des cas n°1 et 2 (respectivement  $\zeta_1 = \zeta_2 = 1$  et  $\zeta_1 = \zeta_2 = 2$ ) sont distincts pour  $\mu = 0.29$  alors qu'ils sont pratiquement confondus pour  $\mu = 0.44$ . Dans le cas du disque, même si les écarts d'amplitudes sont relativement faibles, on constate que le cycle limite minimum n'est pas obtenu pour le même amortissement lorsque le frottement augmente. En effet, à  $\mu = 0.29$  (Figure 5.17 (a)) il s'agit du cas n°2 ( $\zeta_1 = \zeta_2 = 2$ ) alors que c'est le cas n°1 ( $\zeta_1 = \zeta_2 = 1$ ) à  $\mu = 0.44$  (Figure 5.17 (b)).

Si une certaine corrélation entre l'abaissement des parties réelles (et donc le retardement des seuils d'instabilité, Figure 4.11) et l'abaissement global des amplitudes pour une valeur de paramètre donné

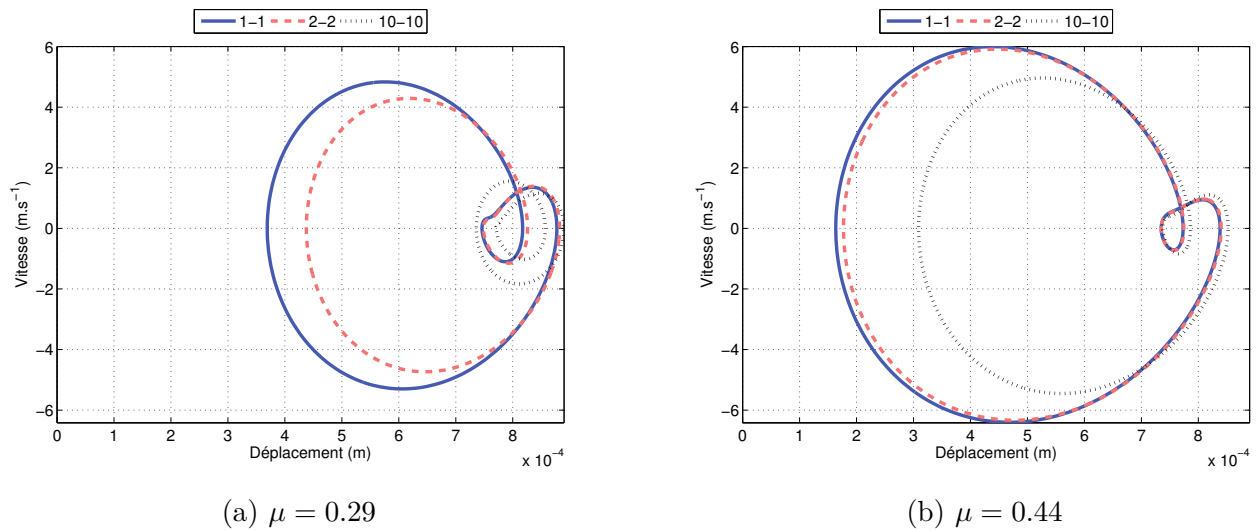


FIGURE 5.16 – Cycles limites garniture

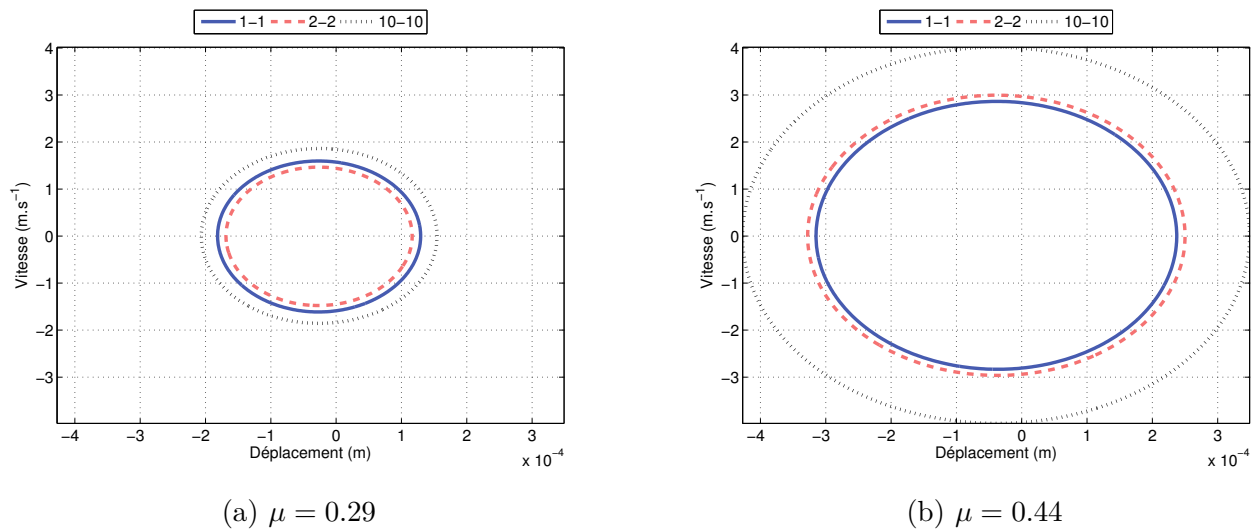


FIGURE 5.17 – Cycles limites disque

(Figure 5.18) est observée ici, les comportements locaux peuvent montrer des phénomènes complexes où le lien entre l'analyse de stabilité et les résultats dynamiques est difficile à établir (Figure 5.17).

### Amortissement modal dissymétrique

Nous étudions maintenant l'influence de l'amortissement modal lorsque celui-ci est réparti de façon dissymétrique entre les deux modes couplés. Nous abordons les cas n°4, 5, 6 et 7 à  $\mu = 0.29$  et  $\mu = 0.44$ . Nous comparons aux cas de référence n°1 et n°3. Pour mémoire, l'analyse de stabilité a montré que :

- Les cas n°4 et n°6 où l'amortissement modal est plus important sur le mode stable  $m_2$  rend le système plus instable puisque le seuil d'instabilité est obtenu à  $\mu = 0.69\mu_0$  et  $\mu = 0.57\mu_0$  respectivement, à comparer avec le cas n°1 à iso-amortissement où l'instabilité apparaît à  $\mu = 0.71\mu_0$ .
- Dans les cas n°5 et 7, l'augmentation de l'amortissement sur le mode instable  $m_1$  a pour effet

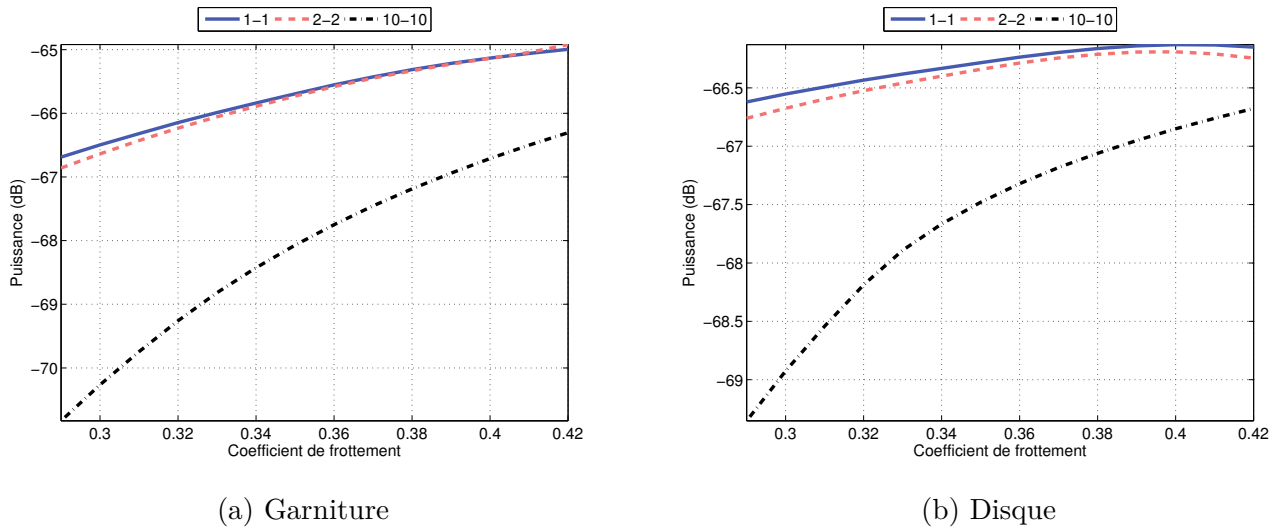


FIGURE 5.18 – Puissances cumulées des amplitudes dans les directions normales

de légèrement retarder l'instabilité, car la partie réelle de ce mode devient positive à  $\mu = 0.85\mu_0$  pour les deux cas, à comparer avec le cas n°1 à iso-amortissement où l'instabilité apparaît à  $\mu = 0.71\mu_0$ .

L'évolution des puissances cumulées des amplitudes dans les directions normales de la garniture et du disque des cas présentés ci-dessus en fonction du coefficient de frottement est tracée Figure 5.19. Globalement, on remarque que l'amortissement dissymétrique est défavorable en terme de puissance des réponses lorsque le mode  $m_2$ , qui est stable (partie réelle négative), est plus amorti que le mode  $m_1$ , qui est instable (partie réelle positive). En effet, l'observation des courbes montre que les amplitudes augmentent lorsque l'amortissement est doublé ou multiplié par 10 sur le mode  $m_2$  (comparaison des cas n°1, 4 et 6 où respectivement  $\zeta_1 = \zeta_2 = 1$ ,  $\zeta_1 = 1$  et  $\zeta_2 = 2$ ,  $\zeta_1 = 1$  et  $\zeta_2 = 10$ ). On retrouve ici une certaine corrélation avec l'analyse de stabilité puisque nous avons vu que l'apport d'amortissement sur le mode stable  $m_2$  uniquement déstabilise le système en diminuant le seuil d'instabilité (Figure 4.12). Dans le cas où l'apport d'amortissement est uniquement introduit sur le mode  $m_1$ , qui est instable, la puissance des amplitudes correspondantes est plus faible (cas n°5 et n°7 où respectivement  $\zeta_1 = 2$  et  $\zeta_2 = 1$ ,  $\zeta_1 = 10$  et  $\zeta_2 = 1$ ) que dans le cas de référence à iso-amortissement (cas  $\zeta_1 = \zeta_2 = 1$ ). Nous pouvons établir une corrélation avec l'analyse de stabilité, où le point de bifurcation de Hopf intervient plus tard pour le cas n°7 que pour le cas n° 1 (Figure 4.13). En fait il s'agit plutôt de dire que l'amortissement du mode  $m_2$  (stable) n'a pas d'influence sur la réponse dynamique du système tant que l'amortissement du mode  $m_1$  (instable) est supérieur ou égal : le cas n°7 ( $\zeta_1 = 10$  et  $\zeta_2 = 1$ ) et le cas n°3 ( $\zeta_1 = 10 - \zeta_2 = 10$ ) sont quasiment identiques en terme d'évolution de puissance des amplitudes. Néanmoins, la corrélation avec l'analyse de stabilité est moins évidente à établir puisque ce dernier cas présente un seuil d'instabilité qui intervient plus tard (Figure 4.12) et où la partie réelle est plus faible sur toute la plage de variation de  $\mu$ .

Localement néanmoins, la relation entre amplitudes, coefficient de frottement et amortissement est complexe. Sur les Figures 5.20 et 5.21 sont tracés des cycles limites d'un ddl normal de la garniture et du disque respectivement, pour les cas n°4 et n°5 ( $\zeta_1 = 1$  et  $\zeta_2 = 2$ ,  $\zeta_1 = 1$  et  $\zeta_2 = 10$ ) et les cas n°1 et

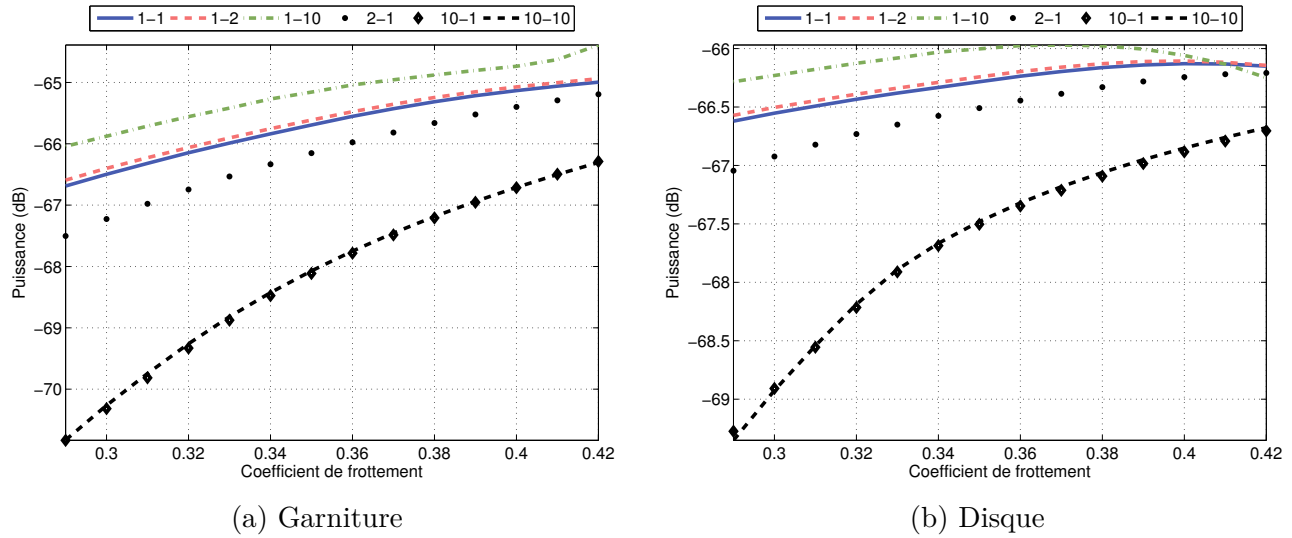


FIGURE 5.19 – Puissances cumulées des amplitudes dans les directions normales

n°3 ( $\zeta_1 = \zeta_2 = 1$  et  $\zeta_1 = \zeta_2 = 10$ ) qui sont tracés à titre de référence. Concernant la garniture, les plus faibles amplitudes sont obtenues pour le cas dont l'amortissement est maximal et symétriquement réparti, c'est à dire  $\zeta_1 = \zeta_2 = 10$  et ceci pour les deux valeurs de coefficient de frottement. L'observation des autres cas montre qu'à partir d'une position iso-amortie  $\zeta_1 = \zeta_2 = 1$ , un apport d'amortissement sur un seul des modes (ici sur le mode  $m_2$  stable) n'a pratiquement aucune influence sur les cycles limites ce qui ne corrobore pas les observations faites sur le comportement global du système.

Pour un ddl normal du disque, on assiste même à une inversion de la hiérarchie des amplitudes maximales de vibration avec  $\mu$  croissant. En effet, pour le cas (a) à  $\mu = 0.29$  le maximum d'amplitude est atteint pour le cas n°6 c'est à dire  $\zeta_1 = 1$  et  $\zeta_2 = 10$ , ce qui est en accord avec la Figure 5.19. Les amplitudes pour les autres cas ( $\zeta_1 = \zeta_2 = 1$ ,  $\zeta_1 = 1$  et  $\zeta_2 = 2$ ,  $\zeta_1 = \zeta_2 = 10$ ) sont semblables même si le cas où  $\zeta_1 = \zeta_2 = 10$  domine légèrement les deux autres. Lorsque le frottement augmente, ce cas présente les amplitudes de vibration les plus fortes alors que c'est le plus amorti. Finalement, le cas le plus favorable pour ce ddl correspond au cas n°1 c'est à dire  $\zeta_1 = \zeta_2 = 1$ .

Cette section montre l'influence particulièrement complexe de l'amortissement modal sur les amplitudes de cycles limites et rend compte des limites de l'analyse de stabilité dans l'étude du crissement de frein. L'étude globale montre que l'amortissement du mode stable est critique puisque si ce dernier est plus amorti que le mode instable, les amplitudes du système dynamique vont croître. Par contre l'augmentation de l'amortissement du mode instable est bénéfique puisque cela diminue les amplitudes de vibration.

### Amortissement proportionnel de l'ensemble des modes du système

Dans cette partie, nous analysons l'influence qu'a l'amortissement proportionnel de l'ensemble des modes du système (sauf les modes  $m_1$  et  $m_2$ ) sur les amplitudes de cycles limites. Par rapport aux études précédentes, où cet amortissement était fixé à  $\xi = 1\%$ , nous faisons varier ce paramètre et nous comparons 3 cas où  $\xi$  prend les valeurs de 1%, 2% et 3% (Tableau 5.5). Quant à l'amortissement modal des modes couplés  $m_1$  et  $m_2$ , il est fixé à  $\zeta_1 = \zeta_2 = 10$ . Même si l'ensemble de ces modes sont

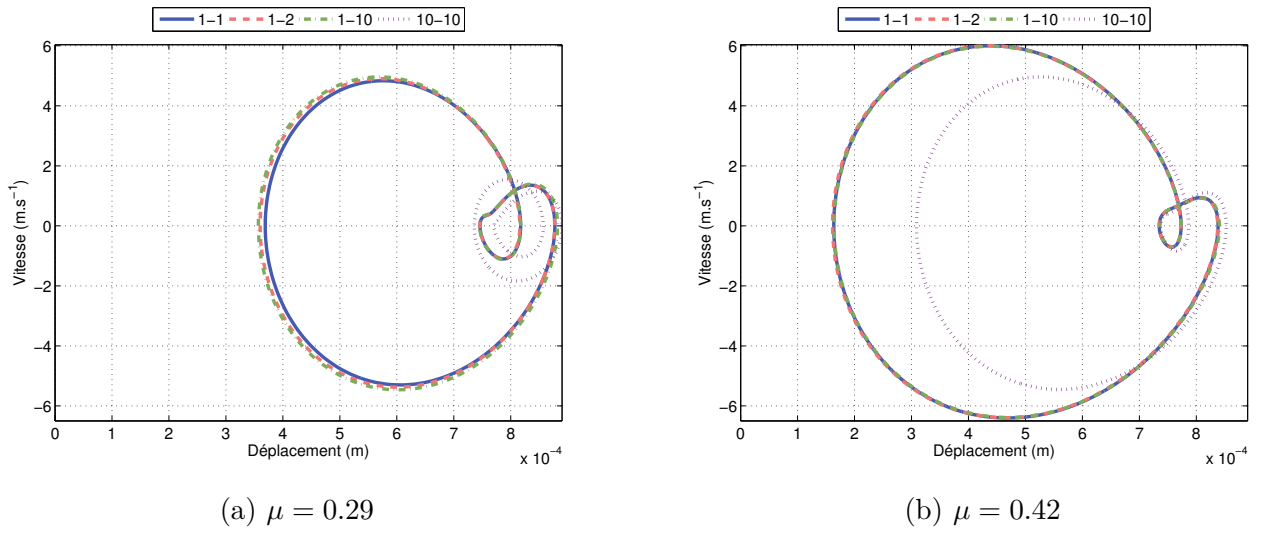


FIGURE 5.20 – Cycles limites garniture

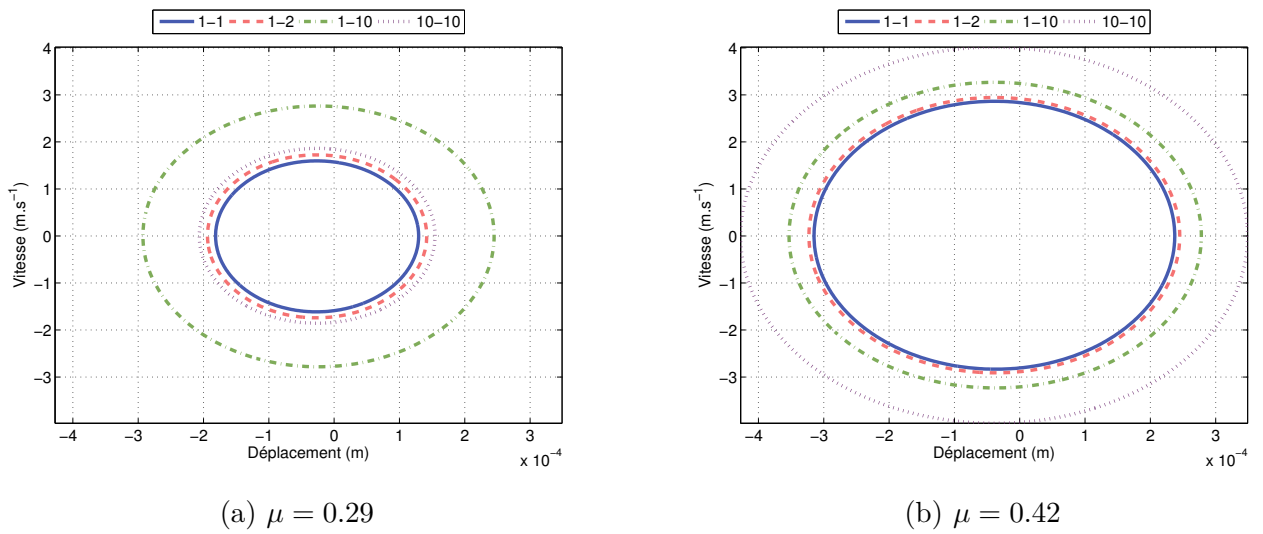


FIGURE 5.21 – Cycles limites disque

Cas	1	2	3
Amortissement $\xi$	1%	2%	3%
$\mu$	$\mu_0$	$0.95\mu_0$	$0.9\mu_0$

TABLE 5.5 – Amortissement proportionnel des modes stables



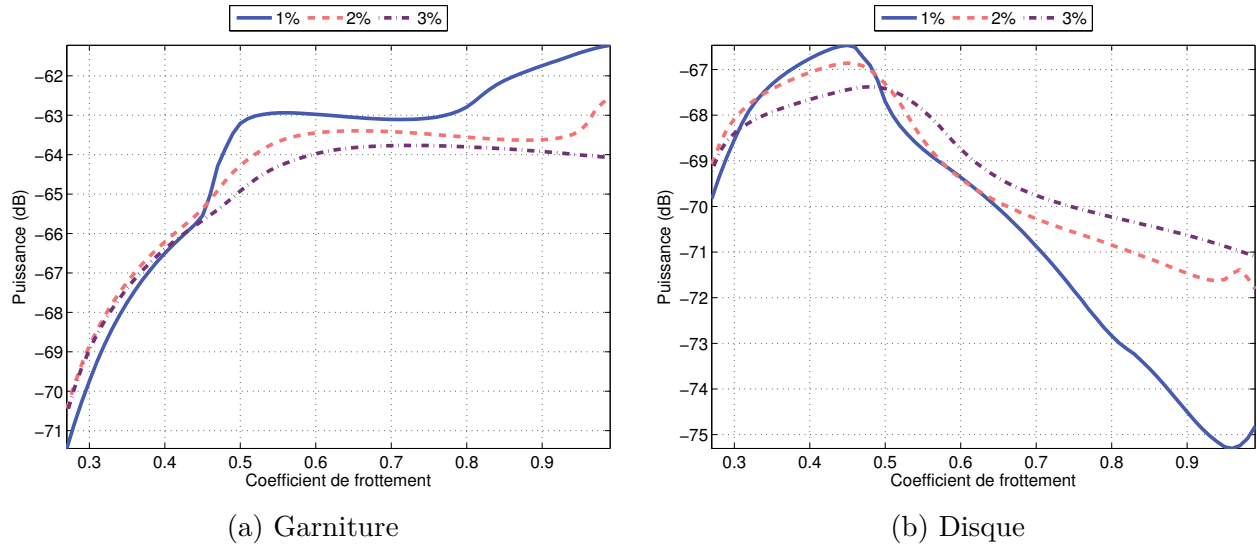


FIGURE 5.22 – Puissances cumulées des amplitudes dans les directions normales

stables (car leur valeur propre est à partie réelle négative), une harmonique de la réponse dynamique pourrait exciter un de ces modes si sa fréquence est proche de celle de l'harmonique et il pourrait donc participer aux vibrations alors qu'il apparaîtrait comme stable dans l'analyse linéaire de stabilité.

Comme précédemment, on présente les puissances cumulées des amplitudes d'un ddl de la garniture et du disque dans la direction normale en fonction du frottement (Figure 5.22). L'augmentation de l'amortissement proportionnel sur les modes stables n'est pas synonyme de diminution des amplitudes de vibration, puisque dans le cas du disque, les amplitudes de vibration dans la direction normale sont plus importantes à partir de  $\mu = 0.65$  pour le cas n°3, c'est à dire  $\xi = 3\%$ . L'illustration est donnée en Figure 5.23 qui donne les cycles limites d'un ddl normal du disque pour  $\mu = 0.30$  et  $\mu = 0.70$ . Le cas de la garniture montre que les puissances cumulées des amplitudes sont en moyenne plus faibles lorsque l'amortissement des modes stables augmente. Néanmoins, l'observation locale montre qu'il existe des cas particuliers où les réponses sont plus importantes pour les cas les plus fortement amortis (Figure 5.24 (a) (b)). Dans ce cas, l'évolution des cycles limites suit les résultats obtenus dans l'analyse de stabilité, à savoir que l'on a une déstabilisation du système dynamique par l'augmentation de l'amortissement modal proportionnel sur les modes stables (non crissants).

### 5.7.3 Conclusion des analyses paramétriques

Ces analyses paramétriques montrent que les tendances obtenues par l'intermédiaire d'une analyse de stabilité sont beaucoup plus complexes dans le cadre de l'étude du comportement dynamique (analyse non-linéaire). Même si dans le cas du frottement on retrouve une certaine corrélation entre l'augmentation de la partie réelle et des amplitudes globales avec  $\mu$ , l'étude des comportements locaux montrent des phénomènes opposés, comme par exemple la décroissance des amplitudes normales du disque à partir d'une certaine valeur de coefficient de frottement, alors que les amplitudes de vibration globales du système ont tendance à croître.

L'amortissement modal des systèmes autonomes est également un phénomène relativement complexe à étudier. On constate en effet ici que l'augmentation de l'amortissement ne s'accompagne pas forcément d'une diminution des amplitudes. Au contraire, cela peut dans certains cas les augmen-

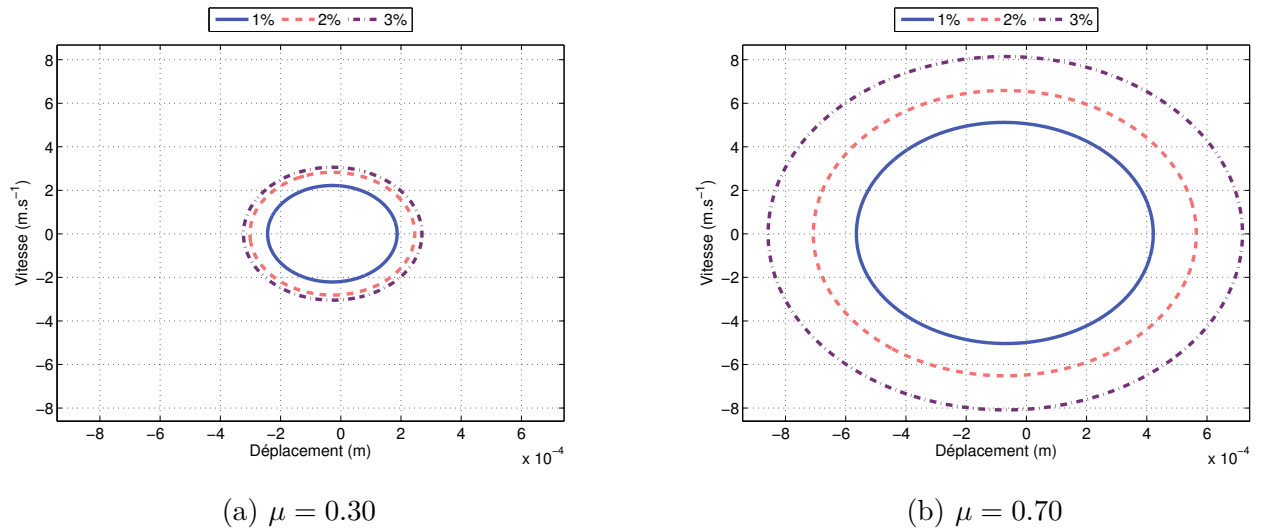


FIGURE 5.23 – Cycles limites disque

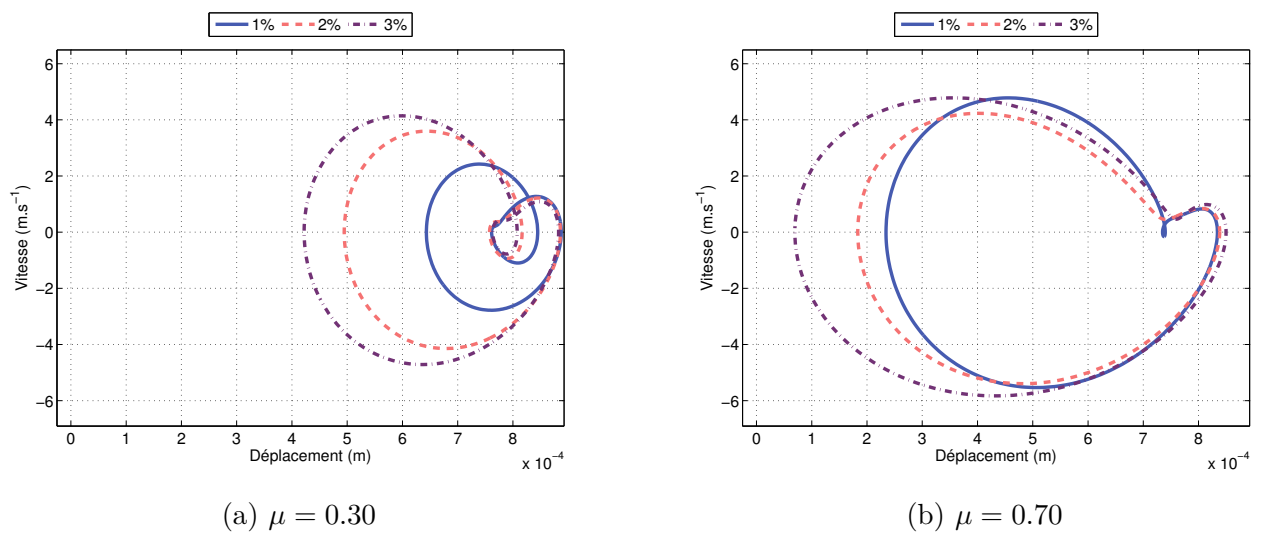


FIGURE 5.24 – Cycles limites garniture

ter dans des proportions non-négligeables. Si un apport d'amortissement identiquement réparti sur les modes couplés est bénéfique quant aux vibrations globales du système, avec toutefois localement quelques exceptions, l'apport d'un amortissement mal maîtrisé sur les deux modes peut avoir des conséquences imprévues comme par exemple l'augmentation des amplitudes globales du système. Enfin l'amortissement proportionnel de l'ensemble des modes stables du système a une influence sur les amplitudes des cycles limites et son augmentation donne également un comportement paradoxal puisque les amplitudes ont tendance à croître avec  $\xi$ . En pratique, l'apport d'amortissement est généralement obtenu par l'ajout de *shims* ou sandwichs visco-élastiques au dos des plaquettes. Il est donc difficile d'amortir un mode en particulier sans impacter les autres modes, d'autant plus que les propriétés mécaniques de ce type de matériau peuvent être sensibles à des facteurs comme la température, la fréquence ou encore la direction des vibrations. L'amortissement est un paramètre clé pour la réduction des amplitudes de vibration et les solutions technologiques permettant d'apporter de l'amortissement devraient être conçues dans l'optique de pouvoir le contrôler sur une ou plusieurs gammes de fréquence.

## 5.8 Conclusion

Nous avons développé dans ce chapitre une méthode originale de balance harmonique qui est adaptée aux systèmes autonomes non-linéaires. A une méthode de balance harmonique classique on ajoute une nouvelle équation à résoudre qui est la partie réelle du système dynamique linéarisé autour d'une position dynamique. L'introduction de cette équation force le solveur à ne calculer que la position dynamique en rejetant la position triviale d'équilibre statique. Étant donné que le modèle de frein est un système mécanique autonome, la pulsation de la solution dynamique est une donnée inconnue et est donc introduite en tant qu'inconnue supplémentaire à résoudre. Cette étape a l'avantage de bien poser le système algébrique à résoudre, puisque aux équations du mouvement nous ajoutons une équation et une inconnue supplémentaire.

Cette méthode de balance harmonique contrainte est appliquée ici à un système de frein soumis à un unique mode couplé instable. Les résultats obtenus sont excellents comparés aux résultats de référence issus d'une intégration temporelle classique. Comme attendu, les temps de calculs sont plus avantageux que les méthodes temporelles pour une précision donnée. Les calculs sont environ 30 fois plus rapides en considérant  $N_h = 3$  par rapport au schéma de Newmark des accélérations moyennes. Néanmoins le succès de la méthode est conditionné par une approximation correcte des non-linéarités et donc un nombre d'harmoniques minimal est nécessaire. Les études paramétriques selon le frottement et l'amortissement modal montrent des comportements complexes et des évolutions qui ne vont pas forcément dans le sens attendu. On voit donc la nécessité de coupler analyses linéaire et non-linéaire pour capter les différents phénomènes d'un système autonome non-linéaire.

## Chapitre 6

# Balance harmonique contrainte appliquée aux systèmes multi-fréquentiels

Nous avons vu dans le chapitre précédent l'algorithme de balance harmonique contrainte qui permet de calculer l'état dynamique stationnaire d'un système autonome non-linéaire sujet à un seul mode instable. La dynamique du système de frein est riche et il n'est pas rare d'observer dans l'analyse de stabilité plusieurs couplages de modes indiquant potentiellement plusieurs instabilités à des fréquences n'ayant pas de diviseur commun entier (on dit qu'elles sont incommensurables). Dans ce chapitre nous généralisons la méthode de la balance harmonique contrainte à des systèmes autonomes comportant plusieurs modes instables. Dans un premier temps, nous développons l'algorithme général puis nous formulons les équations spécifiques aux systèmes autonomes et enfin nous analysons la dynamique d'un modèle de frein modifié qui présente deux modes instables à partir d'un certain seuil de frottement.

### 6.1 Concepts généraux

La réponse dynamique d'un système soumis à  $p$  fréquences d'excitations (ou  $p$  modes instables dans le cas de systèmes autonomes) avec  $p > 1$  est dite *quasi-périodique* si le ratio des fréquences d'excitation  $r = f_i/f_j \notin \mathbb{N} \forall i \neq j, < i, j > \in [1, p]$ . De telles fréquences sont dites incommensurables. Pour les systèmes non-linéaires, le contenu fréquentiel des oscillations est une combinaison linéaire de toutes les fréquences incommensurables fondamentales :

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \dots + k_j\omega_j + \dots + k_p\omega_p \quad (6.1)$$

avec  $k_j = [-N_h, N_h]$  pour  $j \in [1, p]$  où  $N_h$  est le nombre d'harmoniques retenu. Comme pour la HBM mono-fréquentielle, on peut décomposer la réponse du système (5.1) en série de Fourier généralisée :

$$\mathbf{U}(t) \approx \sum_{k_1=-N_h}^{N_h} \dots \sum_{k_p=-N_h}^{N_h} \mathbf{a}_{k_1\dots k_p} \cos(k_1\omega_1 + \dots + k_p\omega_p)t + \mathbf{b}_{k_1\dots k_p} \sin(k_1\omega_1 + \dots + k_p\omega_p)t \quad (6.2)$$

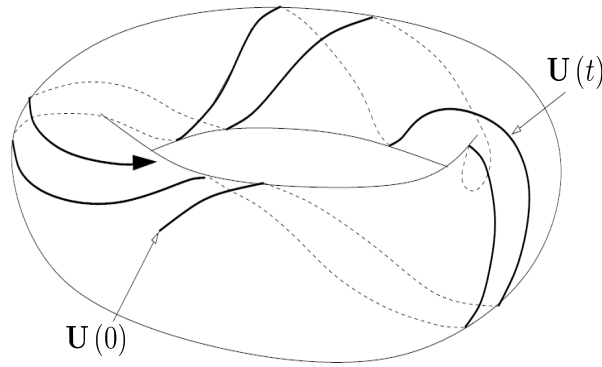


FIGURE 6.1 – Trajectoire sur un tore invariant [Gus07]

$\mathbf{a}_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_p}$  et  $\mathbf{b}_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_p}$  définissent les coefficients de Fourier inconnus associés à toutes les combinaisons possibles des composantes fréquentielles  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$  définies en (6.1). Une manière plus évidente d'écrire (6.2) est d'introduire une base  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \dots, \omega_p]$  et de poser :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega}t \quad (6.3)$$

où  $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \dots, \tau_p]$  est la variable *d'hyper-temps*,  $2\pi$  périodique sur chaque dimension  $\tau_j$ . L'équation (6.2) est réécrite sous la forme suivante :

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{a}_0 + \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^p} \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\tau}) + \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^p} \mathbf{b}_{\mathbf{k}} \sin(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\tau}) \quad (6.4)$$

$\mathbf{k}$  désigne le vecteur du nombre d'harmoniques pour chaque dimension temporelle  $\tau_j$ . Cette transformation permet de travailler dans un domaine temporel multi-périodique  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}_+^p$  plutôt que dans un domaine temporel  $t \in \mathbb{R}_+$  où chaque dimension  $\tau_j$  correspond à une fréquence incommensurable fondamentale identifiée dans le système dynamique. L'équation (6.4) est donc  $2\pi$  périodique sur chaque dimension d'hyper-temps  $\tau_j$ .  $\mathbf{U}(\boldsymbol{\tau})$  est une fonction de temps multi-dimensionnel qui décrit l'évolution temporelle du système multi-fréquentiel  $\mathbf{U}(t)$ . Elle est également appelée fonction-tore [SVSO05] et on donne un exemple de trajectoire bi-périodique à la Figure 6.1 où la fonction dépendante du temps  $t$  évolue dans  $\mathbb{R}^3$  sur le tore formé par les deux paramètres d'hyper-temps  $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ . La notion de temps "vrai" a disparu dans (6.4) et la paramétrisation (6.3) permet de retrouver  $t$  à partir d'une représentation hyper-temps :

$$\begin{cases} \tau_1 = \omega_1 t \\ \tau_2 = \omega_2 t \end{cases} \Rightarrow t = \frac{\tau_1}{\omega_1} = \frac{\tau_2}{\omega_2} \quad (6.5)$$

L'équation (6.5) permet d'avoir une bijection entre le temps  $t$  et les paramètres  $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$  et la Figure 6.2 illustre le passage du domaine temporel au domaine hyper-temps. Le contenu qui s'inscrit dans le carré défini par  $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle \in [0, 2\pi]^2$  correspond au déroulement du tore de la Figure 6.1 dans le plan. Ainsi, il est possible d'associer de manière unique à tout point de  $t \in [0, +\infty]$  un point dans l'ensemble  $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle \in [0, 2\pi]^2$  et inversement. Deux points infiniment proches dans  $[0, 2\pi]^2$  peuvent correspondre à des instants très éloignés sur l'échelle de temps  $t$  et aucune méthode d'approximation ne peut être employée pour retrouver un instant  $t$  à partir de sa position dans  $[0, 2\pi]^2$ . Seule l'adi-

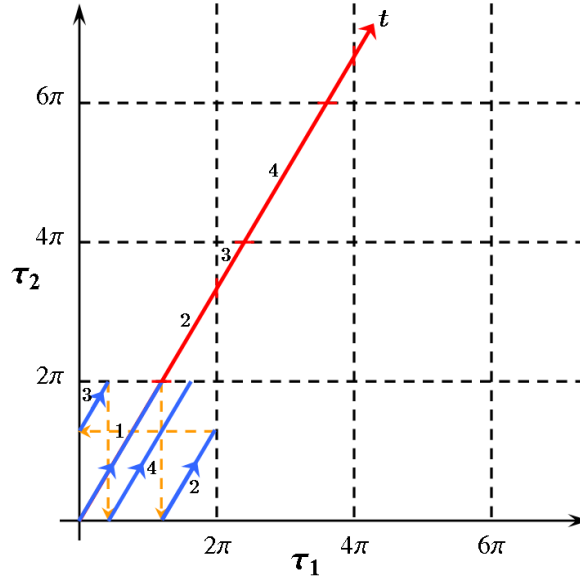


FIGURE 6.2 – Domaines temporels mono et multi-dimensionnels

mensionnalisation au sens de (6.3) permet de conserver l'orthogonalité entre les fréquences et autorise l'utilisation d'une transformée de Fourier rapide multi-dimensionnelle dans une procédure AFT.

D'un point de vue théorique, l'équation (6.4) permet de traiter tout type de système dont on a identifié un nombre fini de fréquences incommensurables. Comme pour la méthode HBM, on remplace  $\mathbf{U}(t)$  à partir de son expression (6.4) dans l'équation dynamique (5.1), ce qui donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\boldsymbol{\tau}) \approx & \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_{N_h}^n} \left[ \left( \mathbf{K} - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega})^2 \mathbf{M} \right) \mathbf{a}_{\mathbf{k}} + ((\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{C}) \mathbf{b}_{\mathbf{k}} \right] \cos(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\tau}) + \\ & \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_{N_h}^n} \left[ \left( \mathbf{K} - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega})^2 \mathbf{M} \right) \mathbf{b}_{\mathbf{k}} - ((\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{C}) \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \right] \sin(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\tau}) + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{a}_{\mathbf{k}}, \mathbf{b}_{\mathbf{k}}) - \mathbf{F}_{ext} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Le résidu (6.6) est orthogonalisé par rapport aux fonctions trigonométriques (Galerkin) :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \mathbf{R} \cos(k_1 \cdot \tau_1 + \dots + k_p \cdot \tau_p) d\tau_1 \dots d\tau_p &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \mathbf{R} \sin(k_1 \cdot \tau_1 + \dots + k_p \cdot \tau_p) d\tau_1 \dots d\tau_p &= 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

On retrouve l'écriture classique d'un système algébrique à résoudre :

$$\boldsymbol{\Lambda} \tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{F}}_{nl}(\tilde{\mathbf{z}}) = \tilde{\mathbf{F}}_{ext} \quad (6.8)$$

où  $\boldsymbol{\Lambda}$  est la matrice diagonale par blocs :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda_{N_c} \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

avec

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} -(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega})^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} & (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{C} \\ -(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{C} & -(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega})^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} \end{bmatrix} \text{ pour } i \in [1, N_c] \quad (6.10)$$

Enfin  $\tilde{\mathbf{z}}$ ,  $\tilde{\mathbf{F}}_{nl}$  et  $\tilde{\mathbf{F}}_{ext}$  sont les vecteurs de coefficients de Fourier du déplacement, des efforts non-linéaires et des efforts extérieurs du système et s'écrivent classiquement :

$$\tilde{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{N_c} & \mathbf{b}_{N_c} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{nl} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_{nl,0} & \tilde{\mathbf{F}}_{nl,1}^a & \tilde{\mathbf{F}}_{nl,1}^b & \cdots & \tilde{\mathbf{F}}_{nl,N_c}^a & \tilde{\mathbf{F}}_{nl,N_c}^b \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{ext} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_{ext,0} & \tilde{\mathbf{F}}_{ext,1}^a & \tilde{\mathbf{F}}_{ext,1}^b & \cdots & \tilde{\mathbf{F}}_{ext,N_c}^a & \tilde{\mathbf{F}}_{ext,N_c}^b \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

$N_c$  est le nombre de termes harmoniques dans la solution et est fonction du nombre d'harmoniques  $N_h$  retenu pour chaque fréquence incommensurable. Pour les termes couplés, on note que seuls ceux dont la fréquence associée est positive sont retenus dans la réponse. Il existe plusieurs formulations pour définir le contenu fréquentiel (6.2) c'est à dire l'ensemble des composantes harmoniques  $\mathbb{Z}_{N_h}^n$ . Par exemple Chua et Ushida [CU81] proposent la formulation suivante :

$$\sum_{j=1}^p |k_j| \leq N_h \quad (6.14)$$

Alors que Legrand [Leg05] propose dans sa thèse cette formulation :

$$|k_j| \leq N_h \quad \forall j \in [1, p] \quad (6.15)$$

Une interprétation géométrique des formulations présentées est donnée Figure 6.3 dans le cas où  $p = 2$  et  $N_h = 3$  et peut s'appliquer pour les deux fréquences incommensurables des deux modes instables du modèle de frein vu au chapitre 4. On note la non-symétrie par rapport au point milieu  $k_1 = k_2 = 0$  due à la suppression des couplages fréquentiels négatifs. Le nombre d'harmoniques passe du simple au double selon la méthode retenue. Une autre formulation consiste encore à considérer la formulation de Legrand tout en imposant une fréquence de coupure haute, ce qui s'écrit :

$$|k_j| \leq N_h \quad \forall j \in [1, p] \text{ avec } f_c = \sum_{i=1}^p k_i f_i < f_{max} \quad (6.16)$$

Cette formulation permet de tenir compte des couplages d'ordre supérieur dans les basses fréquences sans retenir les couplages hautes fréquences. Ainsi l'approximation de la solution est meilleure

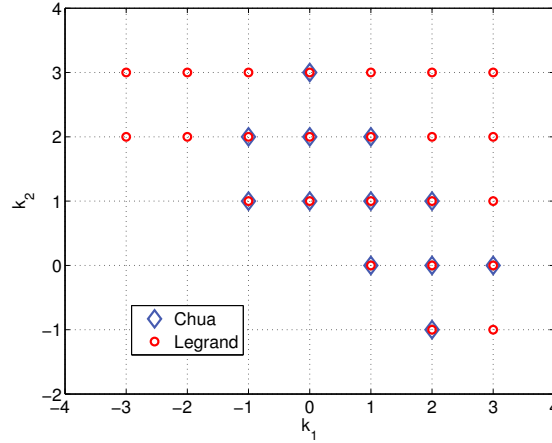


FIGURE 6.3 – Répartition des composantes harmoniques dans le cas  $p = 2, N_h = 3$

si de nombreux couplages basses fréquences ont lieu et cette formulation permet de ne pas faire "explorer" le nombre d'inconnues. Dans le cadre de ce mémoire, nous garderons l'écriture (6.14) car la troncature associée semble suffisante pour l'estimation de la réponse pseudo-périodique.

*Remarque :* Le système peut être condensé sur les nœuds en vis-à-vis, selon les mêmes procédures vues au chapitre précédent sans difficulté particulière. Ainsi la nouvelle équation algébrique à résoudre, s'écrit :

$$\mathbf{\Lambda}_r \tilde{\mathbf{z}}_r + \tilde{\mathbf{F}}_{nl,obs}(\tilde{\mathbf{z}}_r) = \tilde{\mathbf{F}}_r \quad (6.17)$$

La taille du système passe alors de  $(n_{nl}(2N_c + 1))$  à  $(n_{nl}/2(2N_c + 1))$ .

## Traitement des efforts non-linéaires

Le traitement des efforts non-linéaires s'opère de la même façon que dans le cas de la méthode HBM mono-harmonique et les deux méthodes présentées (collocation trigonométrique et FFT) restent valides.

La collocation trigonométrique garde la même structure que celle vue dans le chapitre 5 sauf que l'échantillonnage se fait sur une plage de temps plus importante que la période maximale de la plus petite fréquence considérée, c'est à dire que  $t = [0, i\Delta t, \dots, n\Delta t]$  avec  $\Delta t \ll \min(2\pi/\omega_1, 2\pi/\omega_2)$  et  $n\Delta t \gg \max(2\pi/\omega_1, 2\pi/\omega_2)$ .

Le calcul des efforts non-linéaires par FFT nécessite de considérer une transformée de Fourier de dimension égale au nombre de fréquences incommensurables ce qui, dans le cas du crissement de frein, correspond au nombre de modes instables.

Comme au chapitre précédent, la procédure AFT sera effectuée avec l'algorithme FFT multidimensionnel pour des raisons de rapidité et de précision. En effet la qualité de l'estimation des coefficients de Fourier des efforts non-linéaires par la méthode de collocation dépend du choix du pas de temps  $\Delta t$  et de la taille de la fenêtre temporelle  $n\Delta t$  ce qui ne semble pas robuste à nos yeux.



## 6.2 Adaptation aux systèmes autonomes

L'application de la procédure HBM multi-dimensionnelle telle qu'elle est présentée ici sur un système autonome soumis à  $p$  modes instables aura la possibilité de calculer la solution triviale statique ce qui n'a aucun intérêt ou la solution dynamique stationnaire. Tout comme le cas de la HBM mono-dimensionnelle, on va rajouter des équations supplémentaires dans le système algébrique (6.17) pour forcer l'algorithme à ne calculer que la solution dynamique. En reprenant les écritures de la section 5.3, on suppose la solution dynamique sous la forme :

$$\mathbf{Y}(t) = \sum_{j=1}^n \mathbf{c}_j \boldsymbol{\varphi}_j e^{(\lambda_j t)} = \sum_{j=1}^n \mathbf{c}_j \boldsymbol{\varphi}_j e^{(a_j t)} e^{(i\omega_j t)} \quad (6.18)$$

avec  $\boldsymbol{\varphi}_j$  un mode instable et  $\lambda_j = a_j + i\omega_j$  sa valeur propre complexe correspondante. Cette équation est stationnaire lorsque **toutes** les parties réelles des valeurs propres  $[\text{Re}(\lambda_1) \dots \text{Re}(\lambda_p)]^T$  associées aux modes instables  $[\boldsymbol{\varphi}_1 \dots \boldsymbol{\varphi}_p]^T$  sont nulles. Comme pour la procédure de balance harmonique modifiée, la minimisation des parties réelles en plus de la minimisation de l'équation (6.17) dans un process d'optimisation va permettre d'atteindre les coefficients de Fourier associés à la solution pseudo-périodique recherchée. Le calcul des valeurs propres complexes utilise le même concept de linéarisation équivalente vu précédemment et ne pose pas de difficulté particulière.

Enfin, comme précédemment, les fréquences incommensurables des modes instables ne sont pas déterminées *a priori* ce qui introduit un nouveau vecteur  $\boldsymbol{\Omega} = [\omega_1 \dots \omega_p]^T$  des pulsations inconnues.

Finalement, la méthode de balance harmonique appliquée à un système autonome sujet à  $p$  modes instables est un problème algébrique à résoudre décliné en deux fonctions objectives :

$$\text{Trouver } \boldsymbol{\Theta} = [\tilde{\mathbf{z}}_r, \boldsymbol{\Omega}]^T \in \mathbb{R}^{n_{nl}/2(2N_c+1)+p} \text{ tel que } J(\boldsymbol{\Theta}) = \begin{Bmatrix} J_1(\boldsymbol{\Theta}) \\ J_2(\boldsymbol{\Theta}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \text{ avec } \boldsymbol{\Theta} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{z}}_r \\ \boldsymbol{\Omega} \end{Bmatrix} \quad (6.19)$$

et  $J_1, J_2$  ont la forme suivante :

$$\begin{cases} J_1(\boldsymbol{\Theta}) = \boldsymbol{\Lambda}_r(\boldsymbol{\Omega}) \tilde{\mathbf{z}}_r + \tilde{\mathbf{F}}_{nl,obs}(\tilde{\mathbf{z}}_r) - \tilde{\mathbf{F}}_r \\ J_2(\boldsymbol{\Theta}) = \{\text{Re}(\lambda_j(\boldsymbol{\Theta}))\} \text{ pour } j \in [1, p] \end{cases} \quad (6.20)$$

$J_2$  s'écrit de façon détaillée :

$$J_2(\boldsymbol{\Theta}) = \begin{Bmatrix} \text{Re}(\lambda_1(\boldsymbol{\Theta})) \\ \text{Re}(\lambda_2(\boldsymbol{\Theta})) \\ \vdots \\ \text{Re}(\lambda_p(\boldsymbol{\Theta})) \end{Bmatrix} \quad (6.21)$$

Le synopsis de la méthode est présenté à la Figure 6.4. La résolution du système d'équations est obtenue avec une variante de l'algorithme de Powell [Pow7], implémentée dans MATLAB.

### 6.2.1 Initialisation

L'initialisation de la méthode de balance harmonique contrainte généralisée est identique à ce que l'on a vu à la section 5.4 à ceci près que cette fois-ci chaque composante fondamentale  $\mathbf{z}_{0,k=1,j}$  est initialisée avec le mode instable associé  $\boldsymbol{\varphi}_j$  issu de l'analyse de stabilité et on écrit :

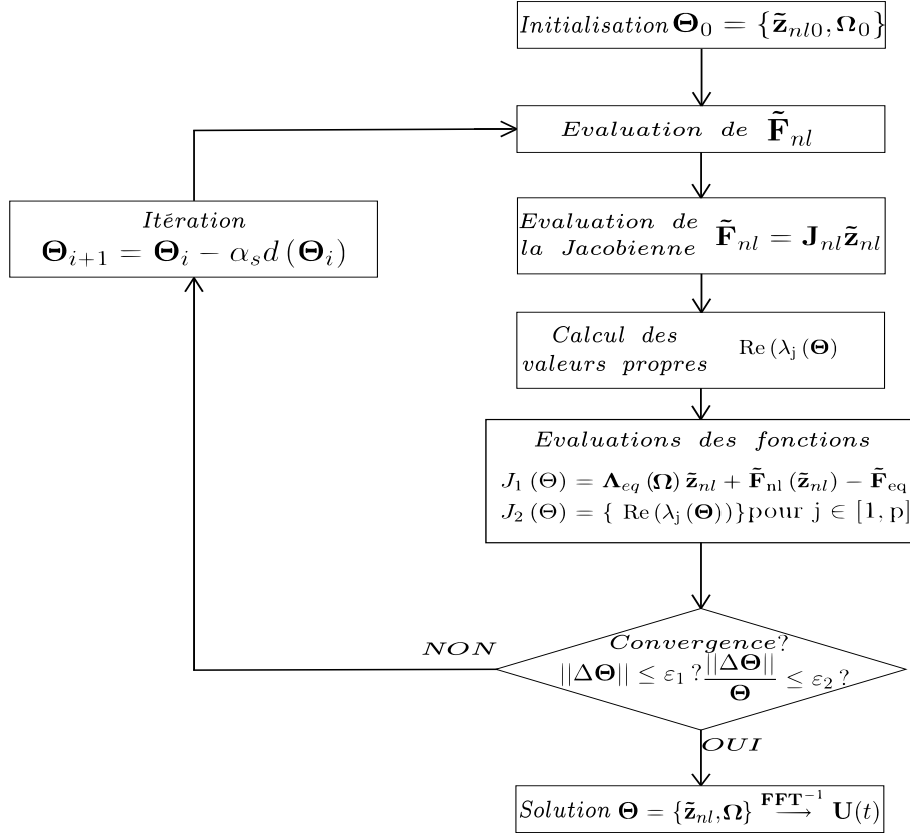


FIGURE 6.4 – Algorithme détaillé de la balance harmonique contrainte généralisée

$$\tilde{\mathbf{z}}_{0,k=1,j} = \eta (\varphi_j + \bar{\varphi}_j) \text{ avec } j \in [1, p] \quad (6.22)$$

où  $\eta$  est une constante choisie arbitrairement. Enfin, les pulsations inconnues des modes instables sont initialisées en récupérant celles obtenues dans l'analyse de stabilité :

$$\mathbf{\Omega}_0 = \left\{ \begin{array}{c} \omega_{1stab} \\ \omega_{2stab} \\ \vdots \\ \omega_{pstab} \end{array} \right\} \text{ avec } j \in [1, p] \quad (6.23)$$

### 6.3 Résultats

Cette section propose d'étudier la réponse dynamique non-linéaire du modèle de frein traité dans l'analyse de stabilité qui présente deux modes instables, soit  $p = 2$ . Ces deux modes instables  $m_1$  et  $m_2$  ont leurs fréquences égales à  $f_{1stab} = 917.3\text{Hz}$  et  $f_{2stab} = 1511.5\text{Hz}$  respectivement à partir de  $\mu = 0.29$ . Toutes les données de ce modèle sont répertoriées dans le Tableau 6.1. Les résultats et les performances numériques de la méthode fréquentielle sont présentés et comparés aux résultats temporels du schéma de Newmark. A la dernière section de ce chapitre, une analyse de l'évolution des amplitudes en fonction du coefficient de frottement est menée et montre la disparition d'un des modes instables.

Garniture			Paramètres Modèle		
Module de Young $E$	( $GPa$ )	2	$k_1$	( $N.m^{-1}$ )	$1.77e^5$
Coefficient de Poisson $\nu$		0.1	$k_3$	( $N.m^{-3}$ )	$5.07e^9$
Densité $\rho$	( $kg.m^{-3}$ )	2500	$F_{ext}$	( $N$ )	$3.1e^4$
Disque			$f_{1stab}$	( $Hz$ )	917.3
Module de Young $E$	( $GPa$ )	125	$f_{2stab}$	( $Hz$ )	1511.5
Coefficient de Poisson $\nu$		0.3	$\alpha$	( $s^{-1}$ )	6.11
Densité $\rho$	( $kg.m^{-3}$ )	7200	$\beta$	( $s$ )	$1.6e^{-7}$

TABLE 6.1 – Caractéristiques matériaux et données du modèle

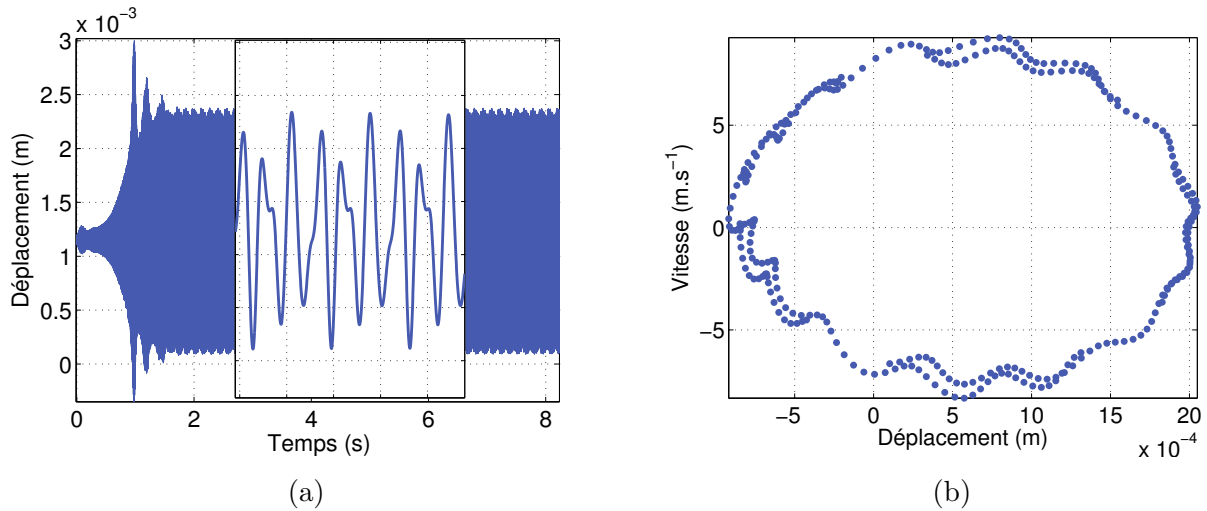
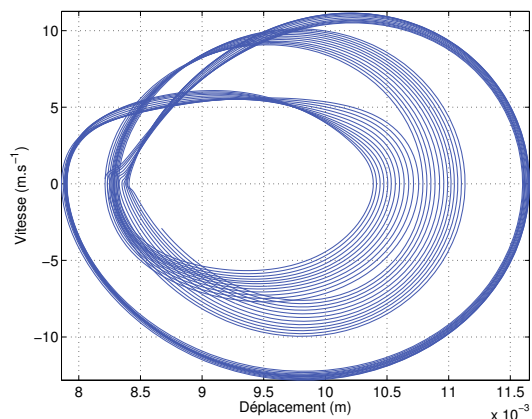
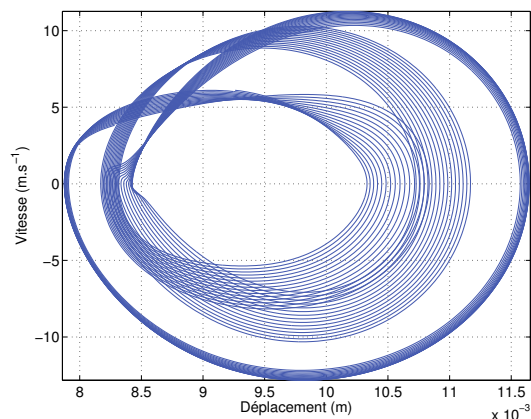


FIGURE 6.5 – Intégration temporelle (a) et section de Poincaré de la zone stationnaire (b)

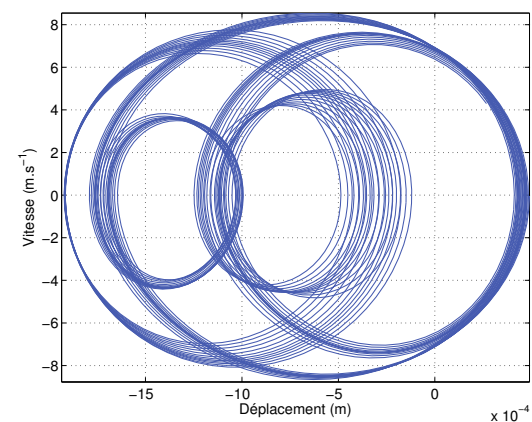
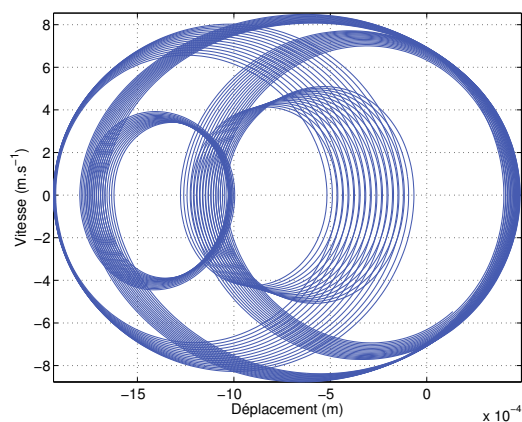
L'intégration temporelle depuis la position d'équilibre statique est tracée sur la Figure 6.5 (a). Un zoom sur la position stationnaire montre effectivement la présence d'une réponse qui n'est pas périodique. Le flot de la zone stationnaire qui traverse la section de Poincaré Figure 6.5 (b) décrit une courbe inscrite dans un gabarit ce qui confirme le caractère pseudo-périodique de la réponse. Théoriquement, la section de Poincaré d'un système pseudo-périodique doit montrer une courbe parfaitement fermée mais à cause des tolérances du schéma de Newmark et des erreurs de périodicité générées, il y a un léger décalage lorsque le flot coupe la section.

La Figure 6.6 présente les réponses pseudo-périodiques dans l'espace des phases obtenues avec la méthode fréquentielle en prenant  $N_h = 3$  et avec le schéma de Newmark. Elles correspondent à des déplacements dans la direction normale de la garniture et du disque. Les résultats des deux méthodes sont présentés côte à côte pour un même ddl étant donnée la complexité des réponses.

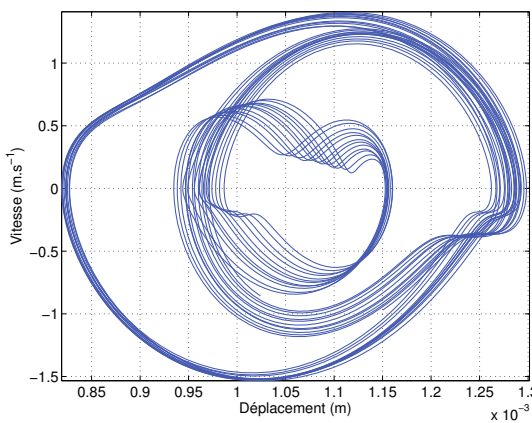
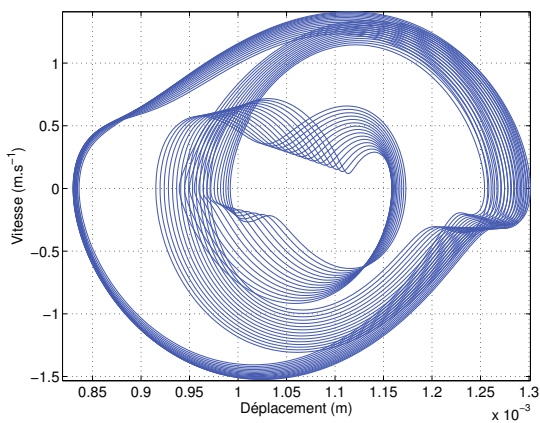
On constate une bonne corrélation entre les deux méthodes, aussi bien en termes d'amplitudes maximales qu'en terme de forme globale des cycles (boucles). On note l'aspect pseudo-périodique des réponses puisque cette fois-ci le cycle n'est pas fermé et passe indéfiniment à l'intérieur d'un gabarit maximal formé par des couples extremum  $\langle U, \dot{U} \rangle$  de la réponse. Pour faciliter la compréhension, la Figure 6.7 présente la densité spectrale de puissance des réponses stationnaires d'un ddl normal de la garniture (a) et du disque (b), correspondant respectivement aux cycles (a) et (c) de la Figure 6.6. Les spectres sont tracés pour le schéma de Newmark et pour les cas avec  $N_h = 3$  et  $N_h = 5$ . Les raies des



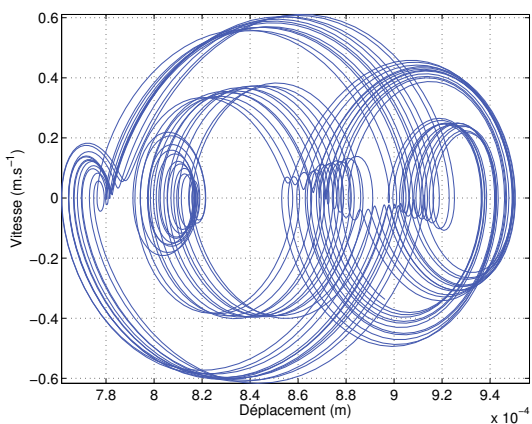
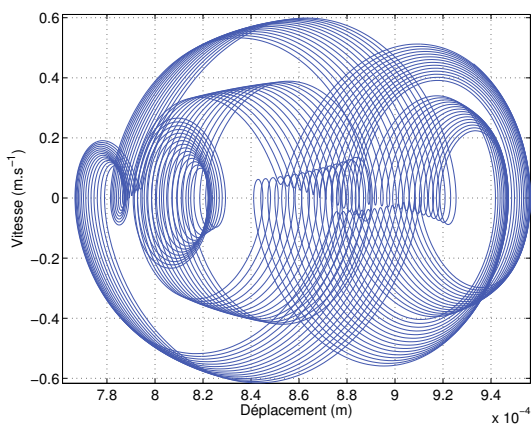
(a)



(b)



(c)



(d)

Balance Harmonique

Schéma de Newmark

FIGURE 6.6 – Réponse pseudo-périodique,  $N_h = 3$

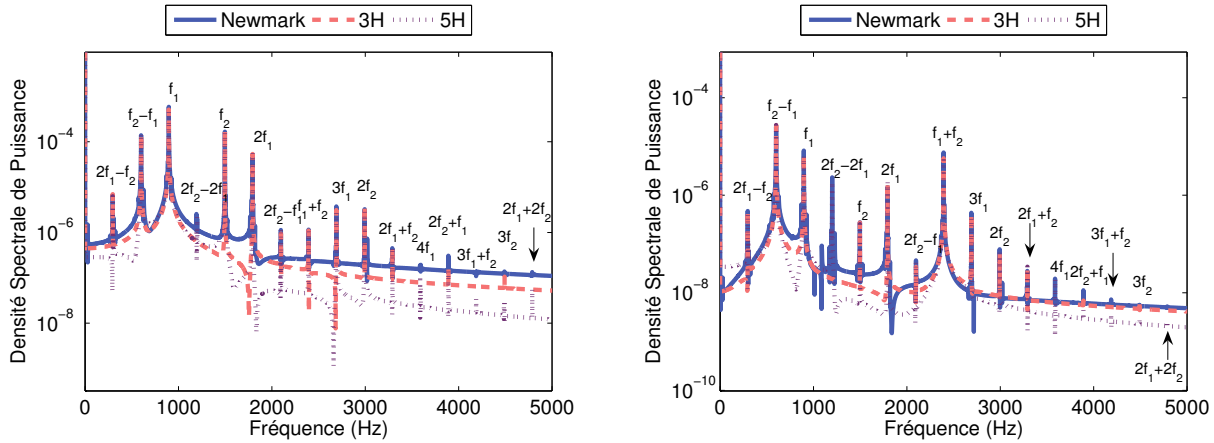


FIGURE 6.7 – Spectres de la réponse pseudo-périodique

deux méthodes sont parfaitement calées en terme de fréquence puisque les fréquences fondamentales  $f_1$  et  $f_2$  calculées par la méthode fréquentielle sont égales à  $f_1 = 896.8\text{Hz}$  et  $f_2 = 1497.3\text{Hz}$  alors que celle de la méthode temporelle de référence sont égales à  $f_1 = 897.0\text{Hz}$  et  $f_2 = 1497.2\text{Hz}$  soit une erreur relative inférieure à  $0.05\%$  pour les deux fréquences. Ces fréquences sont différentes de celles obtenues dans l'analyse de stabilité ( $f_{1stab} = 917.3\text{Hz}$  et  $f_{2stab} = 1511.5\text{Hz}$ ), d'où l'intérêt de les considérer en tant qu'inconnues.

A cause des non-linéarités, il y a les harmoniques d'ordre supérieur des deux modes  $m_1$  et  $m_2$  c'est à dire  $2f_1, 3f_1, 2f_2$  et  $3f_2$  pour  $N_h = 3$  et, en plus de ces composantes, il y a aussi  $4f_1, 5f_1, 4f_2$  et  $5f_2$  pour  $N_h = 5$  qui n'apparaissent pas ici car le spectre est tronqué à  $5\text{kHz}$  par souci de clareté. De plus, on note l'existence de composantes de modulation dans le spectre qui ne sont rien d'autre que la combinaison d'harmoniques des deux modes instables  $m_1$  et  $m_2$ . Les combinaisons pour  $N_h = 3$  sont les suivantes :  $2f_1 - f_2, f_2 - f_1, 2f_2 - f_1, f_1 + f_2, 2f_1 + f_2$  et  $f_1 + 2f_2$ . Puisqu'il y a une troncature à l'ordre 3, il manque des raies dans le spectre aux fréquences modulées d'ordre supérieur. On constate ainsi que la combinaison  $2f_2 - 2f_1$  est absente du spectre pour  $N_h = 3$  alors qu'elle existe pour  $N_h = 5$ . Si cette composante modulée est relativement faible pour le cas de la garniture (a), son niveau énergétique est relativement important dans le cas du disque (b), puisque la raie est supérieure à bien d'autres raies dont toutes les harmoniques liées au mode  $m_2$ , c'est à dire  $f_2, 2f_2$  et  $3f_2$ . Se pose alors la question de conserver cette raie pour la bonne approximation de la solution. Tout d'abord, les formes des cycles limites à  $N_h = 3$  et  $N_h = 5$  pour ce ddl du disque sont très proches (Figure 6.8 (b) et (c)) et prendre plus d'harmoniques dans la solution ne semble pas nécessaire. De plus, l'erreur de Fourier qui mesure l'erreur d'approximation des non-linéarités est inférieure à  $0.01$  pour le cas  $N_h = 3$ , ce qui montre une très bonne estimation des non-linéarités avec ce nombre d'harmoniques. L'histogramme 6.9 présente l'erreur relative pour chaque raie de  $N_h = 3$  en termes d'amplitudes par rapport à la référence temporelle. On note qu'elle est relativement faible sur chaque harmonique.

Un calcul est effectué en prenant  $N_h = 2$  à partir des mêmes conditions initiales que le cas à  $N_h = 3$ . La réponse stationnaire d'un ddl est tracée à la Figure 6.10 et le spectre associé est visible à la Figure 6.10 (b). Les composantes harmoniques de la méthode de balance harmonique contrainte à  $N_h = 2$  ne sont pas corrélées aux composantes de la réponse temporelle aussi bien en termes d'amplitudes que de fréquences. Ces dernières sont données à  $f_1 = 917.2\text{Hz}$  et  $f_2 = 1510.3\text{Hz}$ , valeurs à comparer

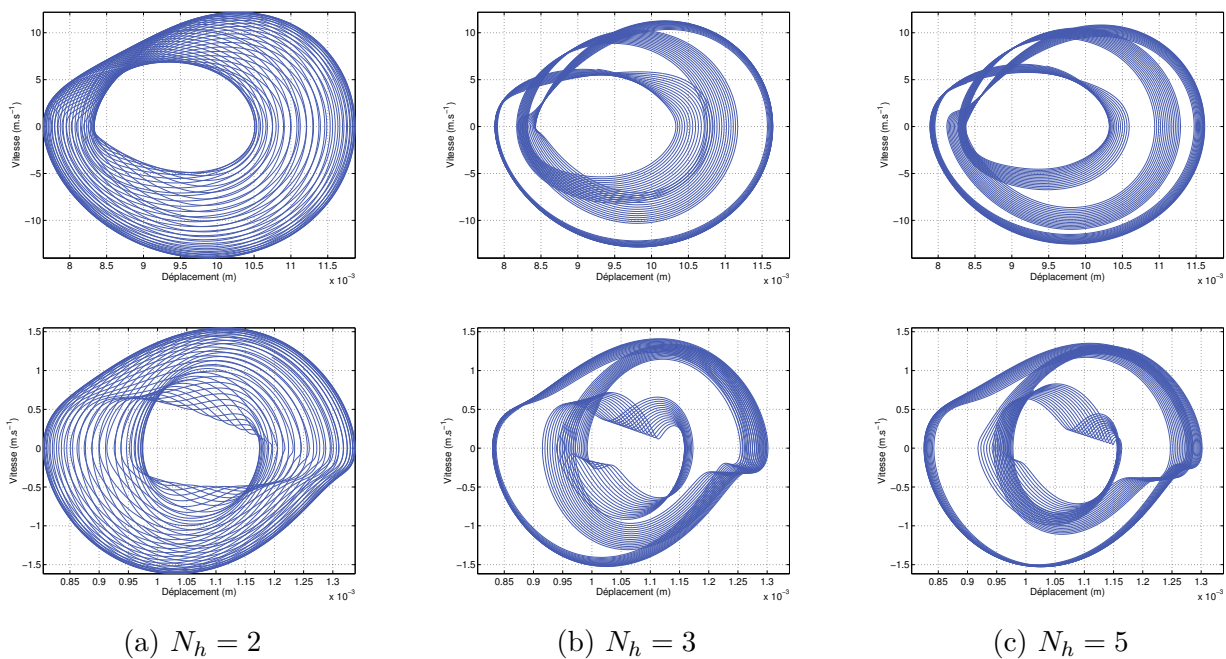


FIGURE 6.8 – Réponses pseudo-périodiques pour différentes harmoniques

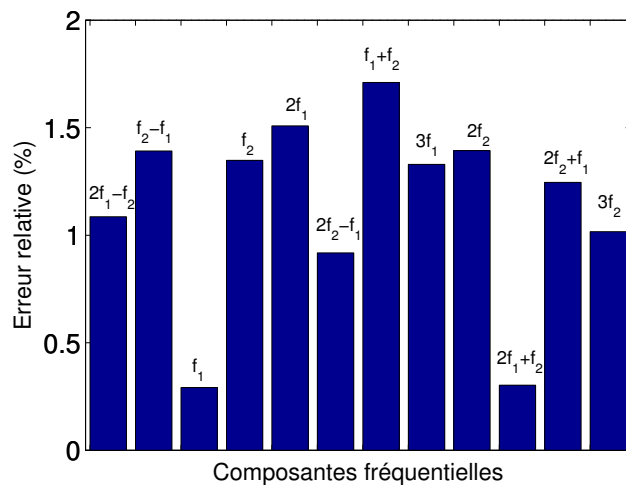
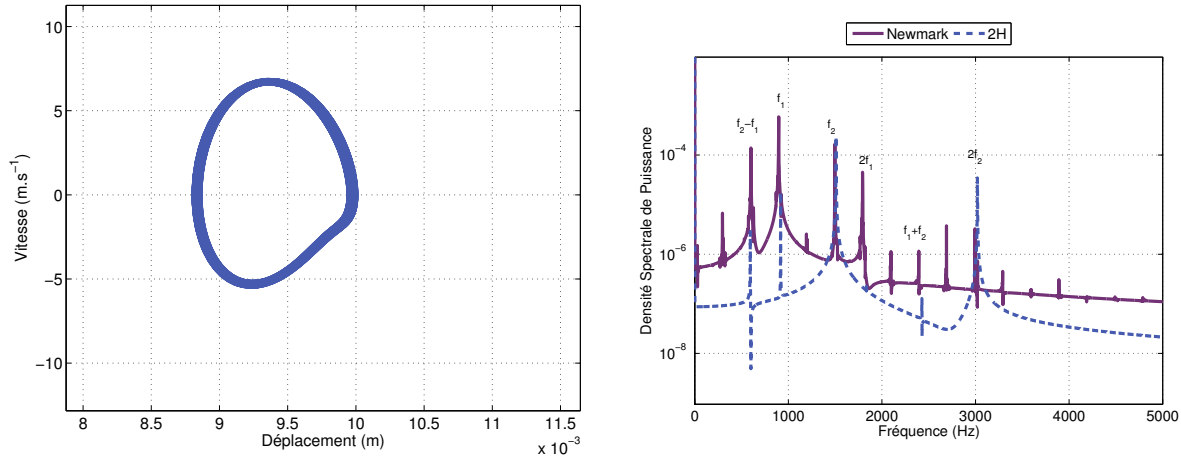


FIGURE 6.9 – Erreur relative des composantes fréquentielles,  $N_h = 3$



FIGURE 6.10 – Réponse à  $N_h = 2$  et spectre associé

avec celles de la méthode temporelle ( $f_1 = 897.0\text{Hz}$  et  $f_2 = 1497.2\text{Hz}$ ). Quant au cycle limite, qui est à comparer avec celui de la Figure 6.6 (a), il est erroné et l'estimation de la réponse dynamique est fautive. Dans ce cas de figure, le solveur ne trouve plus de direction de descente à partir d'un certain nombre d'itérations. On se situe donc sur un minimum local du problème algébrique où le résidu de l'équation dynamique n'est pas minimisé (il ne respecte pas l'équation (6.19) à la tolérance près) et où les deux parties réelles des modes  $m_1$  et  $m_2$  ne respectent pas les critères de la réponse stationnaire : Ces dernières ne tendent pas vers 0 et valent respectivement  $R_1 = -7.26$  et  $R_2 = 2.96$ .

Pour savoir si la méthode avec  $N_h = 2$  ne converge pas à cause des conditions initiales arbitraires mal estimées ou bien à cause de la trop grande approximation de la non-linéarité, on prend cette fois-ci comme conditions initiales les résultats obtenus avec le calcul à  $N_h = 3$ . Autrement dit, les composantes à  $f_1, 2f_1, f_2, 2f_2, f_2 - f_1$  et  $f_1 + f_2$  calculées avec  $N_h = 3$  sont réinjectées en tant que conditions initiales pour un nouveau calcul à  $N_h = 2$ . Puisque ces composantes permettent d'avoir une bonne approximation de la réponse du système dynamique autonome, l'obtention d'une solution avec  $N_h = 2$  ne devrait pas poser de difficultés. Les réponses sont présentées en Figure 6.8 (a). Dans ce cas, les formes globales des réponses sont respectées, comparativement aux réponses à  $N_h = 3$  (Figure 6.8 (b)) et  $N_h = 5$  (Figure 6.8 (c)). Toutefois on note une légère surestimation des amplitudes maximales et une non prise en compte des boucles internes dues à la troncature. Si en première approximation le calcul avec  $N_h = 2$  semble satisfaisant, la difficulté de trouver une estimation convenable de la solution dynamique lorsque les conditions initiales sont choisies selon la méthode vue à la section 6.2.1 rend ce nombre d'harmoniques inadéquat pour le calcul de la solution stationnaire, et n'est pas retenu dans la suite.

### Convergence et comparaisons du coût numérique

La Figure 6.11 présente l'évolution des parties réelles et fréquences en fonction du nombre d'itérations, quant à la Figure 6.12, elle montre l'évolution du résidu des équations dynamiques en fonction des itérations pour  $N_h = 3$ . 26 itérations sont nécessaires pour obtenir la réponse pseudo-périodique. On note la faible vitesse de convergence à partir de  $N_{iter} = 20$  puisque les valeurs de chaque quantité sont proches de leur valeur finale alors que 6 itérations supplémentaires sont encore nécessaires. Comme indiqué précédemment, les fréquences fondamentales associées à la réponse pseudo-périodique

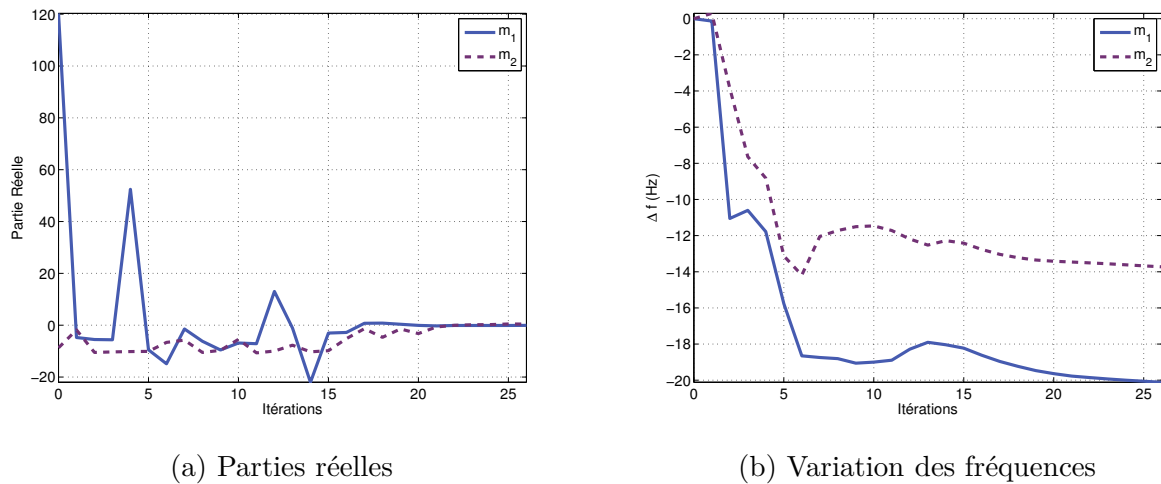


FIGURE 6.11 – Évolution des parties réelles et des fréquences

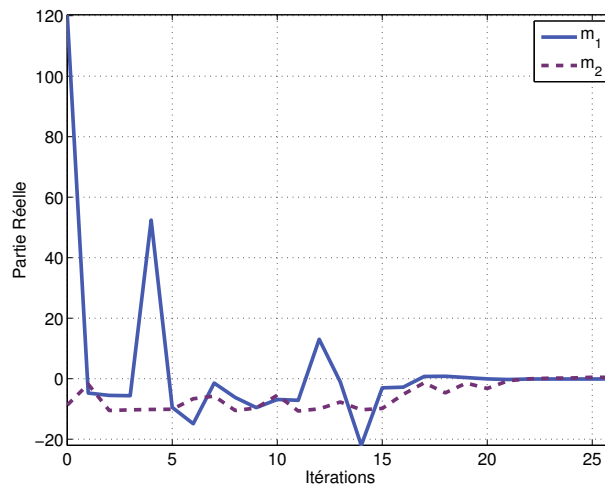


FIGURE 6.12 – Évolution du résidu dynamique

sont différentes des fréquences obtenues dans l'analyse de stabilité puisqu'il y a une différence d'environ 20Hz pour le mode  $m_1$  et de 14Hz pour le mode  $m_2$  entre le début et la fin du calcul. Enfin les deux parties réelles convergent vers 0, ce qui correspond donc bien à la solution quasi-périodique recherchée.

Les temps de calculs sont rassemblés dans le Tableau 6.2. Si la méthode de balance harmonique contrainte reste avantageuse en terme de temps de calculs, le gain est beaucoup plus faible que lorsqu'un seul mode est considéré dans la réponse puisqu'il est de 2 comparé au schéma de Newmark. Bien sûr, le gain est plus important par rapport à la méthode de Runge-Kutta 4 qui nécessite 7 heures et 20 minutes pour atteindre le régime stationnaire pseudo-périodique. Pour information, le calcul avec  $N_h = 5$  n'est pas présenté puisque ce dernier est effectué à partir des résultats obtenus avec  $N_h = 3$ . Le temps de calcul plus long s'explique en grande partie par le nombre d'inconnues plus important (1352) dû à la présence de deux modes instables qui génèrent beaucoup plus d'harmoniques par rapport aux cas à un seul mode instable (harmoniques des modes et composantes de modulation).



Méthodes	Runge-Kutta 4	Newmark	3H
Nb Itérations	–	–	26
Nb Variables/Inconnues	316	158	1352
Temps CPU	7h20	4h10	2h10

TABLE 6.2 – Temps de calcul

Néanmoins, la méthode de balance harmonique contrainte présente l'avantage de permettre le suivi de paramètres puisque l'on utilise une continuation séquentielle où les résultats d'un calcul sont réinjectés en tant que conditions initiales dans un nouveau calcul. Ainsi, le temps CPU moyen pour un incrément du coefficient de frottement  $\Delta\mu = 0.01$  est d'environ 10 minutes avec la méthode de balance harmonique contrainte alors qu'il est d'environ 45 minutes avec le schéma de Newmark dont les conditions initiales sont également issues d'un résultat de calcul précédent.

## 6.4 Évolution de la réponse dynamique en fonction du frottement

La Figure 6.13 présente l'évolution des réponses en fonction du coefficient de frottement avec  $0.29 < \mu < 0.85$  pour un ddl normal du disque. Par souci de clareté, les réponses ne sont pas tracées à la même échelle mais ajustées sur les limites de la réponse.

Un phénomène intéressant apparaît autour de  $\mu = 0.36$  puisque d'une réponse pseudo-périodique contenant deux fréquences incommensurables nous passons à une réponse périodique caractérisée par la présence de cycles limites fermés. Pour une meilleure compréhension les spectres de la réponse sont tracés à  $\mu = 0.355$  et  $\mu = 0.36$  (Figures 6.14 (a) et (b)). On constate effectivement la disparition du mode  $m_2$  sur le spectre de l'intégration temporelle à  $\mu = 0.36$  puisqu'aucune raie liée à la composante  $f_2$  n'est présente et seules les raies liées à  $f_1$  présentent une amplitude non-nulle. Pour le cas à  $\mu = 0.355$ , les raies liées à  $f_1$  et  $f_2$  sont présentes dans le spectre du schéma de Newmark. Cette réponse présente effectivement un caractère pseudo-périodique mais les composantes liées au mode  $m_2$  ( $f_2 = 1497\text{Hz}$ ) sont faibles comparées aux composantes du mode  $m_1$  ( $f_1 = 900\text{Hz}$ ). Le mode  $m_1$  semble occulter le mode  $m_2$  qui ne répond plus. Du point de vue du solveur, nous avons constaté que ce dernier donne des signes de difficulté pour converger autour de  $\mu = 0.357$  : il ne trouve pas la solution selon les tolérances spécifiées. Si l'algorithme n'a pas de difficulté pour calculer les coefficients de Fourier des deux modes instables (avec les composantes du mode  $m_2$  quasi-nulles), la recherche d'une partie réelle nulle pour le mode  $m_2$  est impossible. En effet, ce mode est absent de la réponse dynamique et la partie réelle de sa valeur propre est donc négative. Autrement dit, ce mode devient stable à partir de ce seuil de frottement. Afin de poursuivre l'étude paramétrique et en remarquant que seul le mode  $m_1$  répond, nous basculons de l'algorithme multi-fréquentiel présenté et exploité dans ce chapitre à l'algorithme mono-fréquentiel (CHBM) développé dans le chapitre précédent. Aussi, plutôt que de démarrer le calcul à partir de conditions initiales arbitraires, on récupère les résultats du calcul précédent d'où l'on extrait les composantes du mode  $m_1$  uniquement, c'est à dire  $f_1, 2f_1$  et  $3f_1$ . A partir de  $\mu = 0.36$  donc, nous sommes en présence que d'un seul mode instable et la réponse est calculée avec l'algorithme mono-fréquentiel (CHBM).

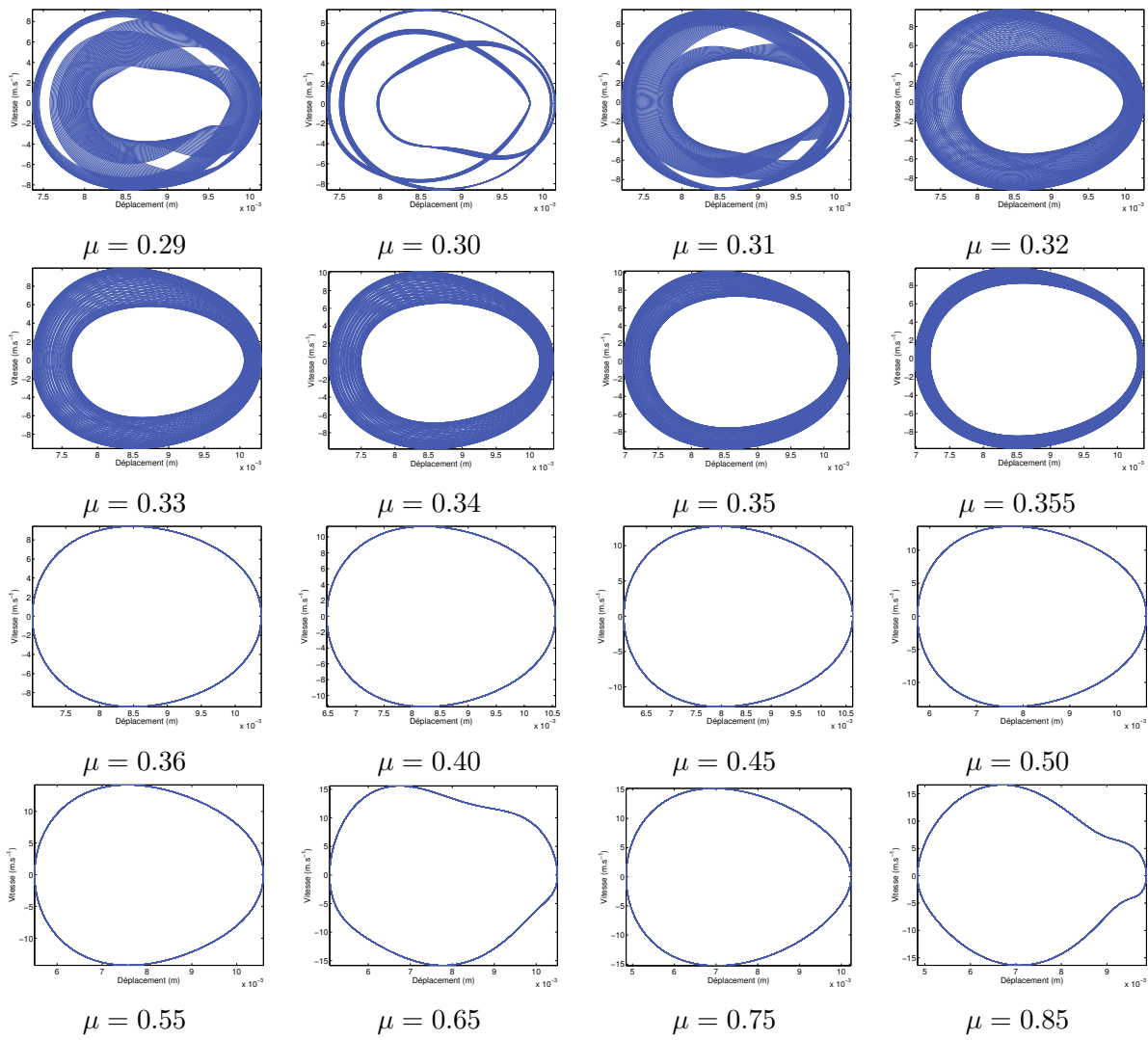


FIGURE 6.13 – Evolution des réponses,  $N_h = 3$

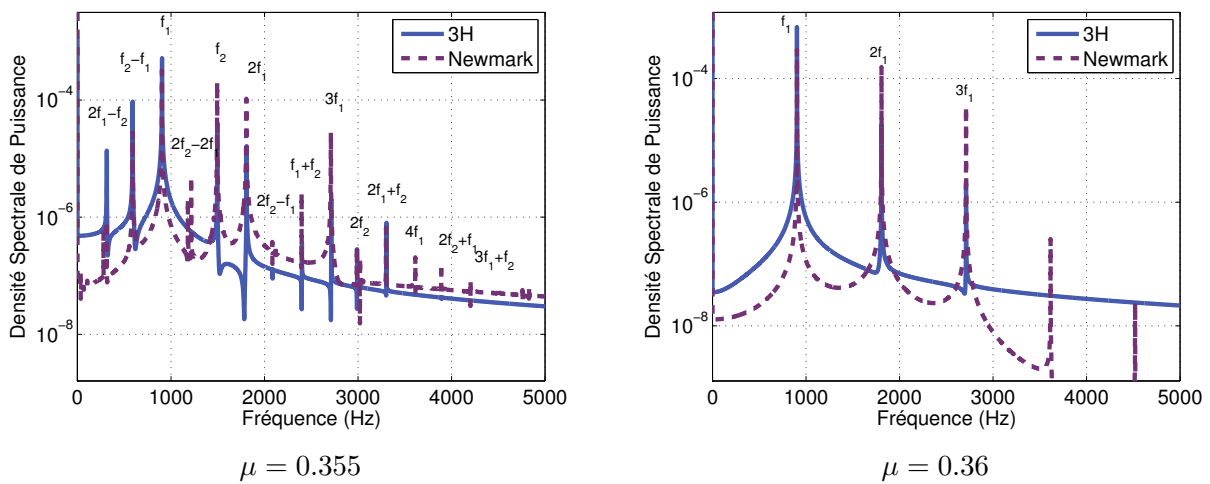


FIGURE 6.14 – Spectres

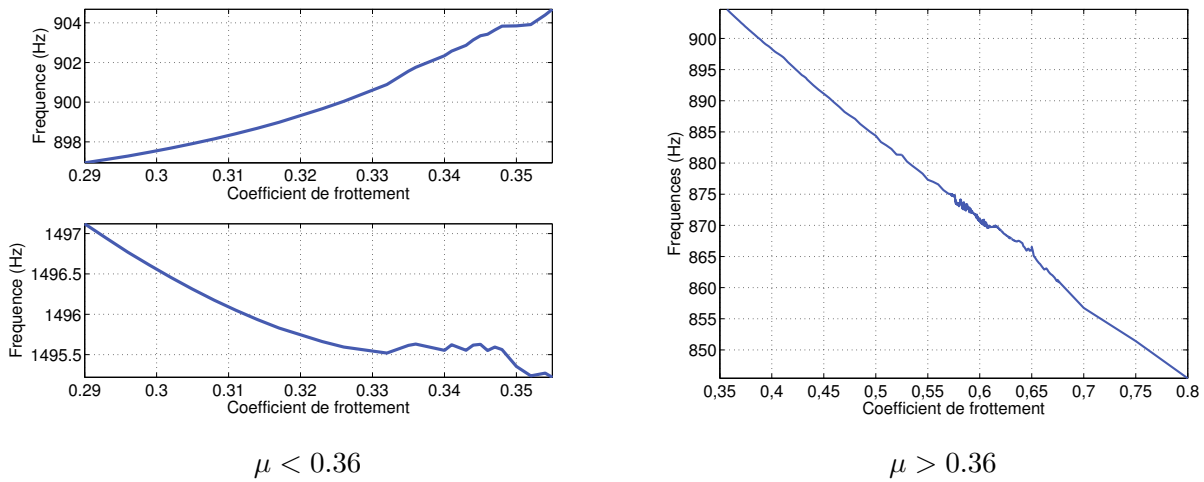


FIGURE 6.15 – Evolution des fréquences

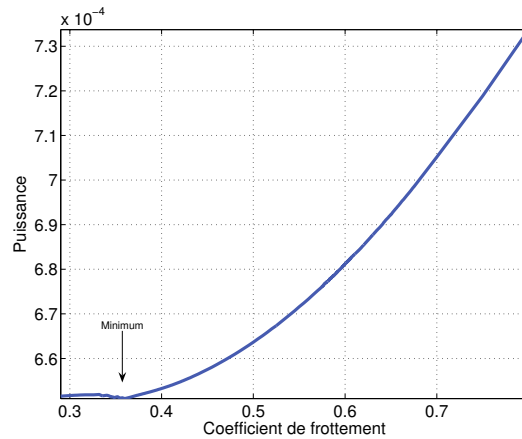


FIGURE 6.16 – Evolution des puissances cumulées

La Figure 6.15 présente l'évolution des fréquences des modes  $m_1$  et  $m_2$  et la Figure 6.16 présente l'évolution la puissance des amplitudes en fonction du frottement. On constate une forte variation des fréquences, notamment celle du mode  $m_1$  pour  $\mu > 0.36$ . La variation est d'environ 60Hz à  $\mu = 0.85$  soit environ 7% de la fréquence d'origine ( $f_{1stab} = 917.3\text{Hz}$ ) ce qui n'est pas négligeable. Ce résultat est courant lorsque des comparaisons sont faites entre des analyses de stabilité et des analyses non-linéaires : les fréquences instables entre les deux méthodes sont toujours sensiblement différentes [Lor07, MBL<sup>+</sup>07] à cause des non-linéarités. Concernant l'évolution des amplitudes de la garniture et du disque dans la direction normale, un minimum est trouvé autour de  $\mu = 0.36$  qui correspond au point où le deuxième mode disparaît de la réponse. Après ce point, l'amplitude croît de façon quadratique avec le frottement. Ainsi la présence de deux modes rend complexe le lien entre frottement et amplitudes de vibrations puisqu'elles ne sont pas forcément minimales pour des faibles frottements.

Pour étudier plus en détail les liens entre analyse de stabilité et analyse non-linéaire et tenter de comprendre pourquoi le mode  $m_2$  disparaît de la réponse, on propose de calculer un index de propensité de chaque mode selon la formule suivante [Moi98] :

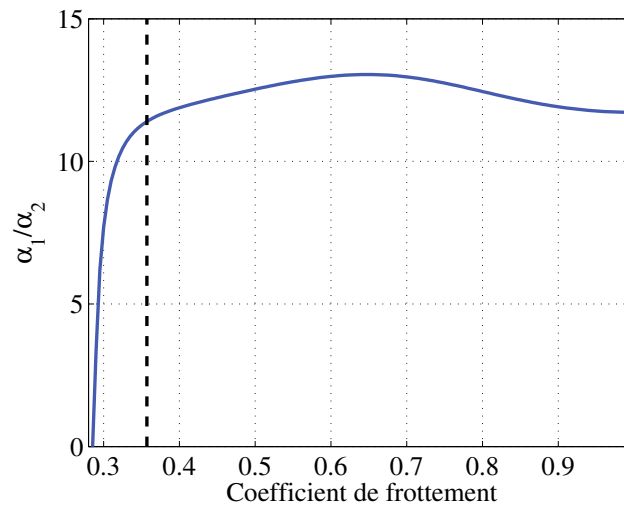


FIGURE 6.17 – Ratio des index

$$\alpha_j = 100 * 2 \frac{Re(\lambda_j)}{Im(\lambda_j)} \text{ pour le } j^{\text{ème}} \text{ mode} \quad (6.24)$$

où  $\lambda_j$  est la valeur propre du mode  $j$  calculée dans l'analyse de stabilité. Le ratio  $\alpha_1/\alpha_2$  en fonction du frottement est tracé Figure 6.17. Son évolution présente 2 phases bien distinctes avec une forte pente pour  $0.29 < \mu < 0.36$  et une zone où il varie peu pour  $\mu > 0.36$ . Or c'est autour de ce point que la transition entre une réponse pseudo-périodique et une réponse périodique apparaît. Il semble donc qu'il y ait une analogie entre le changement de comportement du ratio d'index et la disparition d'un mode dans la réponse dynamique. Ainsi on remarque que le ratio augmente jusqu'à ce que le mode  $m_2$  disparaisse et reste quasi-constant lorsque seul le mode  $m_1$  génère des oscillations.

Quoiqu'il en soit, les limites de l'analyse de stabilité sont mises en évidence ici : malgré la présence de deux instabilités caractérisées par leurs valeurs propres à parties réelles positives, il existe des cas où seul un des modes oscille et génère des vibrations tandis que l'autre est stable. L'analyse non-linéaire se présente donc comme l'étape indispensable dans le cadre de l'étude de crissement pour la caractérisation des réponses dynamiques stationnaires associées.

## 6.5 Conclusion

Ce chapitre a permis de généraliser la méthode de balance harmonique contrainte à des systèmes dynamiques autonomes soumis à plusieurs modes instables susceptibles de générer des instabilités. Les traitements spécifiques consistent à traiter les équations dynamiques avec une composante multidimensionnelle de temps ce qui permet de conserver l'orthogonalité entre les différentes composantes fréquentielles incommensurables. Une procédure de Galerkin appliquée sur les équations dynamiques différentielles multidimensionnelles en temps donne un système algébrique à résoudre contenant les termes harmoniques retenus dans la troncature. Les non-linéarités sont traitées avec l'algorithme de FFT dont la dimension est égale au nombre de fréquences incommensurables. Tout comme la méthode de balance harmonique contrainte adaptée aux systèmes autonomes présentant un seul mode instable, il est nécessaire de contraindre le système algébrique afin de rechercher uniquement la réponse station-

naire en rajoutant des équations liées aux parties réelles des modes considérés comme étant instables. Enfin, les fréquences incommensurables sont considérées comme des inconnues. Le système présenté ici montre une bonne corrélation entre la méthode de balance harmonique contrainte multi-fréquentielle et les méthodes temporelles. L'observation des amplitudes en fonction du frottement montre qu'un des modes disparaît de la réponse dynamique bien que l'analyse de stabilité indique la présence des deux modes instables. La combinaison de ces deux analyses dans le cadre de l'étude du crissement de frein est donc primordiale dans une phase de conception. La disparition d'un des deux modes dans la réponse dynamique montre les limites de la méthode de la balance harmonique contrainte. En effet, il a été facile de voir ici qu'un des deux modes participait faiblement aux vibrations du système. De manière automatisée au sein de l'algorithme, on peut donc facilement éliminer ce mode des équations pour le calcul de la réponse dynamique. Cependant, dans le cas où plusieurs modes instables sont détectés dans l'analyse de stabilité mais que tous ne répondent pas dans la solution dynamique, il sera très difficile d'utiliser la méthode de balance harmonique contrainte. Une solution serait de conserver tous les modes au sein de l'algorithme. Même si tous ne répondent pas, on aurait une première estimation des amplitudes des composantes fréquentielles de chaque mode et on pourrait identifier ceux qui semblent participer aux vibrations. Un second calcul où seuls ces modes seraient conservés permettrait de calculer la réponse dynamique. Néanmoins, ce processus peut être coûteux numériquement si un grand nombre de modes instables existent et des difficultés de convergence risquent d'apparaître si certains modes ne répondent pas (recherche d'une partie réelle nulle qui n'existe pas). L'autre solution consisterait à réaliser plus simplement une intégration temporelle. Une fois que les modes participant aux vibrations sont identifiés, la méthode de balance harmonique contrainte pourrait être utilisée pour étudier l'évolution de la solution dynamique en fonction des paramètres.

# Conclusion générale et perspectives

Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes principalement intéressés au développement d'une méthode numérique permettant l'étude de la dynamique non-linéaire des systèmes de frein sujets à un ou plusieurs modes instables.

La synthèse bibliographique menée sur le crissement des freins à disque a montré la multitude des recherches faites sur le sujet, tant sur le plan expérimental que sur le plan de la modélisation. De ces études, il ressort globalement que le crissement des freins à disque est une instabilité par flottement due au caractère non conservatif du frottement. L'instabilité par couplage de modes entraîne la perte d'un équilibre de type point fixe et l'apparition de vibrations auto-entretenues, responsables du crissement. Les performances de calcul en constante augmentation ont permis d'employer massivement la méthode des éléments finis pour modéliser les systèmes de frein et ainsi obtenir une meilleure description des phénomènes physiques et une meilleure identification des paramètres qui ont un rôle prépondérant sur la stabilité du système. Dans la majorité des études, seule l'analyse de stabilité est considérée pour étudier la propension d'un système à crisser. Pourtant, sa combinaison avec des méthodes non-linéaires autorise une meilleure prédictivité puisque ces dernières permettent d'identifier les modes effectifs qui sont dans la réponse dynamique et leur niveau d'amplitude. Une des raisons de leur faible diffusion réside dans leur coût de calcul qui peut être prohibitif étant donné la nature du système dynamique : en effet, ce dernier comporte des non-linéarités non-régulières et génère des phénomènes relativement complexes aux interfaces de contact. Dans ce contexte scientifique et industriel, cette thèse s'est intéressée à la réduction des temps de calcul par la réduction des modèles et l'emploi de méthodes non-linéaires adaptées aux systèmes autonomes.

On s'est d'abord intéressé à la modélisation d'un système de frein par la méthode des éléments finis. L'étude bibliographique des méthodes de réduction a montré que la synthèse modale de Craig et Bampton est la plus adaptée lorsque l'on souhaite gérer un contact frottant unilatéral aux interfaces. Dans le modèle utilisé au cours de la thèse, nous avons considéré un modèle relativement simple de frein comportant un modèle de disque et un modèle de garniture avec la prise en compte du contact unilatéral et du frottement de type Coulomb.

Suivant les paramètres, nous avons établi qu'un ou deux modes instables sont susceptibles de participer aux vibrations du système et donc de générer du crissement : en effet, nous avons affaire à une bifurcation de Hopf où l'instabilité de la position d'équilibre statique est vue comme une instabilité par flottement. Dans le cas où une seule instabilité est détectée, une investigation de l'influence de l'amor-

tissement montre dans certains cas un effet paradoxal où l'augmentation de ce dernier sur un seul des modes qui se couplent déstabilise le système en diminuant le seuil à partir duquel l'instabilité apparaît.

Le second axe de la thèse fût le développement d'une méthode non-linéaire originale basée sur une méthode de balance harmonique classique à laquelle nous avons adjoint une équation et une inconnue supplémentaire qui permettent de calculer systématiquement la réponse dynamique non-linéaire d'un système autonome soumis à une instabilité. La comparaison des performances de calculs avec les méthodes non-linéaires traditionnelles telles que les intégrateurs temporels montre un net avantage en faveur de la nouvelle méthode de balance harmonique contrainte développée dans ce mémoire. En effet, les temps de calcul sont environ divisés par un facteur 30, ce qui représente un gain important et permet de mener des études paramétriques de façon intensive.

Nous avons donc analysé l'évolution des réponses non-linéaires avec le coefficient de frottement et montré que son augmentation n'engendre pas une croissance systématique des amplitudes de cycles limites. Au contraire, localement, on observe des nœuds qui vibrent avec une amplitude plus faible lorsque le coefficient de frottement croît. De même, nous avons poursuivi l'étude de l'influence de l'amortissement faite dans l'analyse de stabilité. L'étude non-linéaire montre que l'augmentation de l'amortissement n'est pas synonyme de diminution des amplitudes et légitime l'étude de la réponse dynamique non-linéaire en complémentarité de l'étude de stabilité puisque cette dernière peut amener à des conclusions erronées quant au comportement du système.

Enfin la dernière partie de la thèse a été consacrée à la généralisation de la méthode de balance harmonique contrainte à des systèmes autonomes sujets à plusieurs modes instables. Ainsi la méthode nouvellement développée est capable de traiter des réponses pseudo-périodiques contenant les composantes fréquentielles de plusieurs modes instables. Le modèle présentant deux modes instables a été étudié pour valider la méthode et a montré une particularité intéressante : malgré la présence des deux modes instables dans l'analyse de stabilité, nous avons observé la disparition d'un mode à partir d'un certain seuil de frottement. Cette observation montre l'intérêt notoire de l'analyse non-linéaire et met en avant la complexité que peuvent prendre les réponses dynamiques d'un système autonome, même pour un modèle de frein qui est relativement simple.

## Perspectives

Ces résultats de recherche ouvrent à de nombreuses perspectives :

Sur le plan théorique, les performances de la méthode de balance harmonique contrainte peuvent encore être améliorées. En effet, l'ajout de la contrainte supplémentaire en tant que nouvelle équation à résoudre nécessite un calcul aux valeurs propres à chaque itération qui peut être pénalisant lorsque la taille des systèmes augmente. En effet, le calcul de valeurs propres correspond à environ 80% du temps de calcul total de la méthode de balance harmonique, c'est donc un levier d'amélioration conséquent. Plutôt que d'extraire toutes les valeurs propres à l'aide d'un solveur *complet* comme c'est le cas ici, l'idée serait d'utiliser des solveurs *partiels* qui permettent de calculer uniquement les  $n$  premières

valeurs propres d'intérêt. La méthode de Lanczos est bien adaptée à ce type de calcul mais elle ne se révèle efficace que lorsqu'elle est employée sur des systèmes creux. Dans notre cas, l'utilisation de cette méthode n'a pas apporté de gains significatifs étant donné que la matrice traitée est pleine et non symétrique. Une autre méthode qu'il serait intéressant d'approfondir est la méthode d'itération sur les résidus qui semble plus performante que la méthode de Lanczos. Ainsi, la méthode de balance harmonique contrainte serait moins pénalisée pour traiter des modèles de grande taille et l'avantage sur les méthodes temporelles pourrait être encore plus significatif.

Le second point concerne la modélisation qu'il est nécessaire d'améliorer à court terme. En effet, nous nous sommes concentrés sur un modèle relativement simple de système de frein. Or, la complexité des phénomènes aux interfaces de contact, le nombre de pièces qui génèrent des non-linéarités supplémentaires (jeux de fonctionnement notamment) et donc les multiples configurations possibles nécessitent d'enrichir les modèles numériques. Cela concerne la modélisation des interfaces de contact avec notamment le nombre d'éléments de contact à conserver, les lois de contact et de frottement qu'il convient de considérer mais aussi la modélisation réaliste de l'amortissement du modèle puisque certains matériaux tels que la garniture ont un comportement visco-élastique. L'influence de ce paramètre sur les instabilités et les réponses non-linéaires est capital et sa modélisation réaliste reste une tâche à part entière.

Enfin, l'amélioration de la modélisation doit s'accompagner d'une campagne d'essais et permettre ainsi une phase de recalage/corrélation entre les résultats d'essais et les résultats de calcul pour valider les choix de modélisation. La corrélation devra également se faire sur des résultats issus d'analyses paramétriques et permettre ainsi de valider l'ensemble du modèle dans l'espace de conception. A l'issue de cette phase, la méthode de balance harmonique contrainte pourrait être intégrée dans un processus de Monte-Carlo où le tirage de certains paramètres permettrait d'identifier un espace de conception qui minimise les vibrations du système de façon robuste.

Si l'analyse du régime dynamique stationnaire par une méthode non-linéaire spécifique est primordiale pour conduire des études paramétriques dans le cadre d'une démarche prédictive du crissement de frein, l'analyse des phénomènes transitoires ne doit pas être occultée. En effet, lorsque la position statique d'équilibre instable est perturbée, des oscillations croissantes apparaissent, entraînant l'excitation du ou des modes instables selon un mécanisme qui semble encore inconnu aujourd'hui.





# Bibliographie

- [AB82] R. Allemang and D. Brown. A correlation coefficient for modal vector analysis. In *International Modal Analysis Conference*, 1982.
- [Aba08] *ABAQUS Analysis User's Manual Version 6.7.4*, 2008.
- [Ada95] G.G Adams. Self-excited oscillations of two elastic half-spaces sliding with a constant coefficient of friction. *Journal of Applied Mechanics*, 62 :867–872, 1995.
- [ADKS84] V. Aronov, A.F. D'Souza, S. Kalpakjian, and I. Sharper. Interaction among friction, wear and system stiffness - part 1 : Effect of normal load and system stiffness ; part 2 : Vibrations induced by dry friction ; part 3 : Wear model. *Journal of lubrication technique*, 106 :54–69, 1984.
- [Aka02] A. Akay. Acoustics of friction. *J. Acoust Soc. Am.*, 111(4) :1525–1548, April 2002.
- [AO06] A. Abubakar and H. Ouyang. Complex eigenvalue analysis and dynamic transient analysis in predicting disc brake squeal. *International Journal of Vehicle Noise and Vibration*, 2(2) :143–155, 2006.
- [BA94] M.T. Bengisu and A. Akay. Stability of friction-induced vibrations in multi-degree-of-freedom systems. *Journal of Sound and Vibration*, 171(4) :557–570, 1994.
- [Bal96] E. Balmes. Use of generalized interface degrees of freedom in component mode synthesis. In *IMAC*, 1996.
- [Bat82] K.J. Bathe. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, Inc, Englewoods Cliffs, New Jersey, 1982.
- [BDL06] L. Baillet, S. D'Errico, and B. Laulagnet. Understanding the occurrence of squealing noise using the temporal finite element method. *Journal of Sound and Vibration*, 292 :443–460, 2006.
- [Bea96] C.F. Beards. *Structural Vibration : Analysis and Damping*. Arnold, 1996.
- [BEJ99] F. Bergman, M. Eriksson, and S. Jacobson. Influence of disc topography on generation of brake squeal. *Wear*, 225-229 :621–628, 1999.
- [BH71] W.A. Benfield and R.F. Hrudá. Vibration analysis of structures by component mode substitution. *AIAA Journal*, 9(7) :1255–1261, 1971.

- [BT58] P. Basford and S. Twiss. Properties of friction materials. 1 : experiments on variables affecting noise. *ASME*, 80 :402–406, 1958.
- [BTW00] P. Blaschke, M. Tan, and A. Wang. On the analysis of brake squeal propensity using finite element method. In *SAE Paper*, volume 2765, 01 2000.
- [CB68] R.-J. Craig and M. Bampton. Coupling of substructures for dynamic analyses. *American Institute of Aeronautics and Astronautics - Journal*, 6(7) :1313–1319, 1968.
- [CC76] R.R. Craig and C.-J. Chang. Free interface methods of substructures coupling for dynamic analysis. *AIAA Journal*, 14(11) :1633–1635, 1976.
- [CDH97] M.L. Chargin, L.W. Dune, and D.N. Herting. Nonlinear dynamics of brake squeal. *Finite Elements in Analysis and Design*, 28 :69–82, 1997.
- [CG89] T.M. Cameron and J.H. Griffin. An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems. *Journal of Applied Mechanics*, 56 :149–154, 1989.
- [CGT00] N.R. Conn, N.I.M. Gould, and P.L. Toint. Trust-region methods. MPS/SIAM Series on Optimization. SIAM and MPS, 2000.
- [Cha91] P. Chambrette. *Stabilité des systèmes dynamiques avec frottement sec : Application au crissement des freins à disque*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 1991.
- [CSN08] N. Coudeyras, J.-J. Sinou, and S. Nacivet. A new treatment for predicting the self-excited vibrations of nonlinear systems with frictional interfaces : The CHBM. *Journal of Sound and Vibration*, *In press*, 2008.
- [CSRB04] D. Chamoret, P. Saillard, A. Rassineux, and J.-M. Bergheau. New smoothing procedures in contact mechanics. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 168 :107–116, 2004.
- [CT65] J.W. Cooley and J.W. Tukey. An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Math. Comput.*, 19 :297–301, 1965.
- [CU81] L.-O. Chua and A. Ushida. Algorithm for computing almost periodic steady-state response of nonlinear systems to multiple input frequencies. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 28(10) :953–971, 1981.
- [DD90a] A.F. D’Souza and H. Dweib. Self-excited vibrations induced by dry friction, part 2 : Stability and limit-cycle analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 137(2) :177–190, 1990.
- [DD90b] H. Dweib and A.F. D’Souza. Self-excited vibrations induced by dry friction, part 1 : Experimental study. *Journal of Sound and Vibration*, 137(2) :163–175, 1990.
- [DGW81] J. E. Dennis, D. M. Gay, and R. E. Welsch. An adaptive nonlinear least-squares algorithm. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 7 :348–368, 1981.

- [Dhi03] H. Ben Dhia. Cours de mécanique du contact, 2002-2003. Ecole Centrale Paris.
- [DP80] J. R. Dormand and P. J. Prince. A family of embedded runge-kutta formulae. *J. Comp. Appl. Math.*, 6 :19–26, 1980.
- [dRBL08] G. Vermont des Roches, E. Balmès, and R. Lemaire. Time simulation of squeal phenomena in realistic brake models. In *ISMA*, 2008.
- [DRL99] K.B. Dunlap, M.A. Riehle, and R.E. Longhouse. An investigative overview of automobile disc brake noise. In *SAE Paper*, volume 990142, 1999.
- [DT84] G. Dhatt and G. Touzot. *Une présentation de la Méthode des Éléments Finis 2<sup>ème</sup> édition*. Maloine, Paris, 1984.
- [EB76] S.W.E. Earles and M.N.M. Badi. Instabilities arising from the frictional interaction of a pin-disc system resulting in noise generation. *Journal of Engineering for Industry*, pages 81–86, 1976.
- [EBJ02] M. Eriksson, F. Bergman, and S. Jacobson. On the nature of tribological contact in automotive brakes. *Wear*, 252 :26–36, 2002.
- [EJ01] M. Eriksson and S. Jacobson. Friction behaviour and squeal generation of disc brakes at low speeds. In *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, volume D 215 of *D12*, pages 1245–1256, 2001.
- [EL84] S.W.E. Earles and C.K. Lee. Oscillatory instabilities generated in a double-pin and disc undamped system : a mechanism of disc-brake squeal. In *IMechE*, volume 198C, pages 43–50, 1984.
- [FH59] R.A.C. Fosberry and Z. Holubecki. Interim report on disc brake squeal. Technical report, Motor Industry Research Association , Warwickshire, England, 1959.
- [FH61] R.A.C. Fosberry and Z. Holubecki. Disc brake squeal : its mechanism and suppression. Technical report, Motor Industry Research Association , Warwickshire, England, 1961.
- [FH02] F. Flint and J. Hulten. Lining-deformation-induced modal coupling as squeal generator in a distributed parameter disc brake model. *Journal of Sound and Vibration*, 254(1) :1–21, 2002.
- [FHM78] A. Felske, G. Hoppe, and H. Matthäi. Oscillations in squealing disc brakes ; analysis of vibration modes by holographic interferometry. In *SAE Paper*, volume 780333, 1978.
- [Fle00] R. Fletcher. *Practical methods of optimization, second edition*. John Wiley & Sons, 2000.
- [FN91] J.D. Fieldhouse and T.P. Newcomb. An investigation into disc brake noise using holographic interferometry. In *IMechE*, volume C427/11/213, 1991.
- [FN93] J.D. Fieldhouse and T.P. Newcomb. The application of holographic interferometry to the study of disc brake noise. In *SAE Paper*, volume 930805, 1993.

- [FR64] R. Fletcher and C.M. Reeves. Function minimization by conjugate gradients. *Computer Journal*, 7 :149–154, 1964.
- [FSDJ07a] G. Fritz, J.-J. Sinou, J.-M. Duffal, and L. Jezequel. Effects of damping on brake squeal coalescence patterns-application on a finite element model. *Mechanics Research Communications*, 34 :181–190, 2007.
- [FSDJ07b] G. Fritz, J.-J. Sinou, J.-M. Duffal, and L. Jezequel. Investigation of the relationship between damping and mode-coupling patterns in case of brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 307 :591–609, 2007.
- [FX92] R. Fletcher and C. Xu. Hybrid methods for nonlinear least-squares. Technical report, Univ. of Dundee Dept. of Math. Sci., 1992.
- [GAM06] O. Giannini, A. Akay, and F. Massi. Experimental analysis of brake squeal noise on a laboratory brake setup. *Journal of Sound and Vibration*, 292 :1–20, 2006.
- [Gau06] P.E. Gautier. Cours de mécanique des milieux continus, 2006. Ecole Centrale Paris.
- [Gla64] G.M.L. Gladwell. Branch mode analysis of vibrating systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1 :41–59, 1964.
- [God67] V. Godfrey. Vibration reduces metal to metal contact and causes an apparent reduction in friction. *ASLE Transactions*, 10 :183–192, 1967.
- [God84] M. Godet. The third body approach : A mechanical view of wear. *Wear*, 100 :437–452, 1984.
- [GP67] A.A. Goldstein and J.F. Price. An effective algorithm for minimization. *Numer. Math.*, 10 :184–189, 1967.
- [GR97] M. Géradin and D. Rixen. *Mechanical Vibrations - Theory and Application to Structural Dynamics*. John Wiley & Sons, 1997.
- [Gro59] D.M. Grobman. Homeomorphisms of systems of differential equations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 128 :880–881, 1959.
- [Gus07] M. Guskov. *Dynamique non-linéaire des systèmes multi-rotors. Études numérique et expérimentale*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2007.
- [GW74] C.W. Gear and D.S. Watanabe. Stability and convergence of variable order multistep methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, 11(5) :1044–1058, 1974.
- [HFAG02] N. Hoffmann, M. Fisher, R. Allgaier, and L. Gaul. A minimal model for studying properties of the mode-coupling type instability in friction induced oscillations. *Mechanics Research Communications*, 29 :197–205, 2002.
- [HG03] N. Hoffmann and L. Gaul. Effects of damping on mode-coupling instability in friction induced oscillations. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 8 :524–534, 2003.

- [HHT77] H.M. Hilbert, T.J.R. Hughes, and R.L. Taylor. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 5 :283–292, 1977.
- [HN97] Y. Hu and L.I. Nagy. Brake squeal analysis using nonlinear transient finite element method. In *SAE Paper*, volume 971510, 1997.
- [HOP98] N. Hinrichs, M. Oestreich, and K. Popp. On the modelling of friction oscillators. *Journal of Sound and Vibration*, 216(3) :435–459, 1998.
- [Hou50] J.C. Houblot. A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft. *Journal of the Aeronautical Science*, 17 :540–550, 1950.
- [HS74] M.W. Hirsch and S. Smale. *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*. Academic Press, New York, 1974.
- [Ibr94a] R.A. Ibrahim. Friction-induced vibration, chatter, squeal and chaos ; part 1 : Mechanics of contact and friction. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 47(7) :208–226, 1994.
- [Ibr94b] R.A. Ibrahim. Friction-induced vibration, chatter, squeal and chaos ; part 2 : Dynamics and modelling. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 47(7) :227–253, 1994.
- [IM79] W.-D. Iwan and A.-B. Mason. Equivalent linearization for systems subjected to non-stationary random excitation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 15 :71–82, 1979.
- [IN93] Y. Ichiba and Y. Nagasawa. Experimental study on brake squeal. In *SAE Paper*, volume 930802, 1993.
- [Iwa73] W.-D. Iwan. A generalization of the concept of equivalent linearization. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 8 :279–287, 1973.
- [JDH02] P.T. Jeffrey, E.H. Dowell, and K.C. Hall. Nonlinear inviscid aerodynamic effects on transonic divergence, flutter and limit-cycle oscillations. *A.I.A.A. Journal*, 40(4) :638–646, 2002.
- [Jea99] M. Jean. The non-smooth contact dynamics method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 177 :235–257, 1999.
- [JM64] R.-P. Jarvis and B. Mills. Vibration induced by dry friction. *Proc. IMechE*, 178(32) :847–866, 1963-1964.
- [Jon01] D.L.G. Jones. *Handbook of viscoelastic vibration damping*. John Wiley & Sons, 2001.
- [Kha02] H.K. Khalil. *Nonlinear systems*. Prentice-Hall Inc, Upper Saddle River, NJ 07458, 2002.
- [KOP03] N. Kinkaid, O. O’Reilly, and P. Papadopoulos. Automotive disc brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 267 :105–166, 2003.

- [Kuc82] P.A. Kuchment. Floquet theory for partial differential equations. *Russian Mathematical Surveys*, 37(4) :1–60, 1982.
- [Lax07] D. Laxalde. *Etude d'amortisseurs non-linéaires appliqués aux roues aubagées et aux systèmes multi-étages*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2007.
- [LCW83] S.L. Lau, Y.K. Cheung, and S.Y. Wu. Incremental harmonic balance method with multiple time scales for aperiodic vibration of nonlinear systems. *Journal of Applied Mechanics*, 50 :871–876, 1983.
- [Leg05] M. Legrand. *Modèles de prédiction de l'interaction rotor/stator dans un moteur d'avion*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, 2005.
- [Lev44] K. Levenberg. A method for the solution of certain nonlinear problems in least-squares. *Quart. Appl. Math.*, 2 :164–168, 1944.
- [Lil89] G.-D. Liles. Analysis of disc brake squeal using finite element methods. In *SAE Paper*, volume 891150, 1989.
- [Lor07] X. Lorang. *Instabilité vibratoire des structures en contact frottant : Application au cisement des freins de TGV*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2007.
- [LS93] A. M. Lang and H. Smales. An approach to the solution of disc brake vibration problems. In *IMechE*, volume C37/83, 1993.
- [LTD<sup>+</sup>06] L. Liu, J.P. Thomas, E.H. Dowell, P. Attar, and K.C. Hall. A comparison of classical and high dimensional harmonic balance approaches for a duffing oscillator. *Journal of computational physics*, 215 :298–320, 2006.
- [Mar63] D.W. Marquardt. An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters. *SIAM J*, 11 :431–441, 1963.
- [MBGS07] F. Massi, L. Baillet, O. Giannini, and A. Sestieri. Linear and non-linear numerical approaches. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21 :2374–2393, 2007.
- [MBL<sup>+</sup>07] A. Meziane, L. Baillet, B. Laulagnet, C. Godeau, and Y. Berthier. Instabilités de contact : analyses temporelle, aux valeurs propres et validation expérimentale. *Mécanique et Industries*, 8 :597–607, 2007.
- [MDBL07] A. Meziane, S. D'Errico, L. Baillet, and B. Laulagnet. Instabilities generated by friction in a pad-disc system during the braking process. *Tribology International*, 40 :1127–1136, 2007.
- [Mei86] L. Meirovitch. *Elements of Vibration Analysis*. Mac Graw Hill International Editions, 1986.
- [MI93] M. Matsuzaki and T. Izumihara. Brake noise caused by longitudinal vibration of the disc rotor. In *SAE Paper*, volume 930804, 1993.

- [Mil78] N. Millner. Analysis of disc brake squeal. In *SAE Paper*, volume 780332, 1978.
- [MMC99] J.G. McDaniel, J. Moore, and S.-E. Chen. Acoustic radiation models of brake systems from stationary ldv measurements. In *Proceedings of IMEC, American Society of Mechanical Engineers*, 1999.
- [Moi98] F. Moirot. *Etude de la stabilité d'un équilibre en présence de frottement de Coulomb, application au crissement des freins à disque*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 1998.
- [Nac00] W.V. Nack. Brake squeal analysis by finite elements. *International Journal of Vehicle Design*, 23(3,4) :263–275, 2000.
- [Nac02] S. Nacivet. *Modélisation du frottement en pied d'aube par une approche fréquentielle*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2002.
- [NB95] A.H. Nayfeh and B. Balachandran. *Applied nonlinear dynamics*. John Wiley & Sons, 1995.
- [NCH94] L. Nagy, J. Cheng, and Y. Hu. A new method development to predict squeal occurrence. In *SAE Paper*, volume 942258, 1994.
- [Nea71] R. M. Neal. A hybrid method of component mode synthesis. *Computer and Structures*, 1 :581–601, 1971.
- [Ngu03] Q.S. Nguyen. Instability and friction. *C.R. Mécanique*, 331 :99–112, 2003.
- [NHO89] M. Nishiwaki, H. Harada, and H. Okamura. Study on disc brake squeal. In *SAE Paper*, volume 890864, 1989.
- [NM95] A.H. Nayfeh and D.T. Mook. *Nonlinear Oscillations*. Wiley-vch, 1995.
- [Nor72] M.-R. North. Disc brake squeal, a theoretical model. Technical report, Motor Industry Research Association M.I.R.A., 1972.
- [NW99] J. Nocedal and S.J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer Series in Operations Research, Springer Verlag, 1999.
- [OM85] J. Oden and J. Martins. Model and computational methods for dynamic friction phenomena. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 52(9) :527–634, 1985.
- [OMB<sup>+</sup>00] H. Ouyang, J. Mottershead, D. Brookfield, S. James, and M. Cartmell. Methodology for the determination of dynamic instabilities in a car disc brake. *International Journal of Vehicle Design*, 23(3/4) :241–262, 2000.
- [ONB03] A. Ouestlati, Q.S. Nguyen, and L. Baillet. Ondes adhérence-glisement-décollement sous contact unilatéral frottant. *C.R. Mécanique*, 331 :133–140, 2003.
- [ONYC05] H. Ouyang, W. Nack, Y. Yuan, and F. Chen. Numerical analysis of automotive disc brake squeal : a review. *International Journal of Vehicle Noise and Vibration*, 1(3/4) :207–231, 2005.



- [Par75] K.C. Park. An improved stiffly stable method for direct integration of nonlinear structural dynamic equations. *Journal of Applied Mechanics*, 42 :464–470, 1975.
- [Pow7] M. J. D. Powell. A fortran subroutine for solving systems of nonlinear algebraic equations. In *Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations*, chapter 1970. P. Rabinowitz, 7.
- [PR64] E. Polak and G. Ribière. Note sur la convergence de méthodes de directions conjuguées. *Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, série rouge*, 3(1) :35–43, 1964.
- [Rix04] D. J. Rixen. A dual craig bampton method for dynamic substructuring. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 168 :383–391, 2004.
- [RTE00] M. Reeves, N. Taylor, and C. Edwards. A study of disc modal behavior during squeal generation using high-speed electronic speckle pattern interferometry and near-field sound pressure measurements. In *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, volume 214, 2000.
- [Rub75] S. Rubin. Improved component mode representation for structural dynamics analysis. *A.I.A.A. Journal*, 13(8) :995–1006, 1975.
- [Sax98] G. De Saxcé. The bipotential method : A constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms. *Mathematical and computer modelling*, 28(4-8) :225–245, 1998.
- [SB80] J. Stoer and R. Bulirsch. *Introduction to numerical analysis*. Springer-Verlag, 1980.
- [SBC89] H.A. Sherif, J. Blouet, and J.F. Creteigny. Experimental investigation of self-excited squeal. In *SAE Paper*, volume 892451, 1989.
- [SBOH02] K. Shin, M.-J. Brennan, J.-E. Oh, and C.-J. Harris. Analysis of disc brake noise using a two-degree-of-freedom model. *Journal of Sound and Vibration*, 254(5) :837–848, 2002.
- [SG75] L. F. Shampine and M. K. Gordon. *Computer Solution of Ordinary Differential Equations : the Initial Value Problem*. W. H. Freeman, San Francisco, 1975.
- [Sho72] A.N. Shoshitaishvili. Bifurcations of topological type of singular points of vector fields that depend on parameters. *Funktsional. Anal, i Prilozhen*, 6(2) :97–98, 1972.
- [SI78] P.-T.D. Spanos and W.-D. Iwan. On the existence and uniqueness of solutions generated by equivalent linearization. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 13 :71–78, 1978.
- [SJ07] J.-J. Sinou and L. Jézéquel. The influence of damping on the limit cycles for a self-exciting mechanism. *Journal of Sound and Vibration*, 304 :875–893, 2007.
- [SL92] J. C. Simo and T. A. Laursen. An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Computers and Structures*, 42(1) :97–116, 1992.

- [SL07] J.-J. Sinou and A.-W. Lees. A non-linear study of a cracked rotor. *European Journal of Mechanics A/Solids* 26, 26 :152–170, 2007.
- [SM55] D. Sinclair and N.J. Mainville. Frictional vibrations. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 77 :207–213, 1955.
- [Spu62] R.-T. Spurr. A theory of brake squeal. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 1 :33–40, 1961-1962.
- [STJ04] J.-J. Sinou, F. Thouverez, and L. Jezequel. Methods to reduce non-linear mechanical systems for instability computation. *Archives of Computational Methods in Engineering - State of the art reviews*, 11(3) :257–344, 2004.
- [STJ06] J.-J. Sinou, F. Thouverez, and L. Jezequel. Stability analysis and non-linear behavior of structural systems using the complex non-linear analysis (cnlma). *Computers and Structures*, 84 :1891–1905, 2006.
- [SVSO05] F. Schilder, W. Vogt, S. Schreiber, and H.-M. Osinga. Fourier methods for quasi-periodic oscillations. Technical report, Bristol Centre for Applied Nonlinear Mathematics, 2005.
- [TBG71] D.M. Tolstoi, G.A. Borisova, and S.R. Grigorova. Role of intrinsic contact oscillations in normal direction during friction. 1971.
- [TBO94] W.W. Tworzydło, E.B. Becker, and J.T. Oden. Numerical modeling of friction-induced vibrations and dynamic instabilities. *Friction-Induced Vibration, ASME*, pages 15–26, 1994.
- [Tol67] D.M. Tolstoi. Significance of the normal degree of freedom and natural normal vibration in contact friction. *Wear*, 10 :199–213, 1967.
- [TRGF95] C. Thonon, D. Rixen, M. Géradin, and C. Farhat. Unification of the impedance and component mode formulations for the assembling of flexibles structures (final report). Volume 1 : Application to linear systems LTAS VA-144, Université de Liège, 1995. ESTEC contract 10127/92/NL/JG (SC).
- [vWHH07] U. von Wagner, D. Hochlenert, and P. Hagedorn. Minimal models for disc brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 302 :527–539, 2007.
- [vWJV<sup>+</sup>03] U. von Wagner, T. Jearsiripongkul, T. Vomstein, G. Chakraborty, and P. Hagedorn. Brake squeal : Modeling and experiments. Technical Report 1749, VDI-Report, 2003.
- [Yua96] Y. Yuan. An eigenvalue analysis approach to brake squeal problems. In *Proceeding of the 29 ISATA*, Florence, Italy, 1996. Conference Automotive Braking Systems.
- [ZT94] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The Finite Element Method, fourth edition*. McGraw-Hill Book Company, 1994.



# Publications

## Revue internationale spécialisée avec comité de lecture :

- N. COUDEYRAS, S. NACIVET AND J-J. SINOÛ, Periodic and quasi-periodic solutions for multi-instabilities involved in brake squeal, *Journal of Sound and Vibration*, 328, 520 – 540, 2009.
- N. COUDEYRAS, J-J. SINOÛ AND S. NACIVET, A new treatment for predicting the self-excited vibrations of nonlinear systems with frictional interfaces : the Constrained Harmonic Balance Method, with application to disc brake squeal, *Journal of Sound and Vibration*, 319, 1175 – 1199, 2009.
- J-J. SINOÛ, N. COUDEYRAS AND S. NACIVET, Study of the nonlinear stationary dynamic of single and multi instabilities for disc brake squeal, *International Journal of Vehicle Design*, 51(1 – 2), 207 – 222, 2009. (Numéro spécial de revue sur invitation).
- N. COUDEYRAS, S. NACIVET AND J-J. SINOÛ, Brake squeal analysis : a new method for predicting limit cycles using the Constrained Harmonic Balance Method, *SAE International Journal of Passenger Car-Mechanical System*, 1(1), 1276 – 1288, 2008. (Article issu de congrès).

## Colloques internationaux avec actes publiés :

- N. COUDEYRAS, J-J. SINOÛ AND S. NACIVET, Brake Squeal Analysis : A new method for predicting limit cycles using the Constrained Harmonic Balance Method, 26<sup>th</sup> Annual Brake Colloquium and Exhibition, San Antonio, Texas, USA, October 12 – 15, 2008.
- N. COUDEYRAS, S. NACIVET, J-J. SINOÛ AND L. JÉZÉQUEL, Non-linear brake squeal stability analysis using both modal and temporal approaches, Euromech Colloquium Nonlinear Vibrations of Structures, Porto, Portugal, 9 – 11 July 2007.

**Colloques nationaux avec actes publiés :**

- N. COUDEYRAS, J-J. SINOUE ET S. NACIVET, Calculs de cycles limites de systèmes autonomes multi-instables par une méthode fréquentielle : Application au crissement des freins à disque, 9<sup>ème</sup> Colloque national en calcul des structures, Giens, France, 25 – 29 Mai, 2009.

**Dépôt de brevets :**

- N. COUDEYRAS, S. NACIVET ET J-J. SINOUE, Procédé de simulation par ordinateur d'un équilibre dynamique de système physique, Publication FR2923045 (A1).
- N. COUDEYRAS, S. NACIVET ET J-J. SINOUE, Procédé de quantification de modes vibratoires auto-entretenus, En cours de publication.

# Annexes



## Annexe A

# Méthodes itératives de résolution

Cette annexe dresse un panorama des méthodes d'optimisation *sans contraintes* couramment utilisées dans le cadre de la résolution de systèmes algébriques. Les détails des techniques présentées dans la suite et les autres classes de méthode d'optimisation pourront être consultés dans le livre de Fletcher [Fle00] qui est une référence sur le sujet.

Soit une fonctionnelle  $f(x) \in \mathbb{R}$  suffisamment régulière, c'est à dire au moins deux fois différentiable, on cherche à obtenir :

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad (\text{A.1})$$

De manière générale, les méthodes d'optimisation permettent de ne rechercher qu'un minimum (ou maximum, en posant  $f(x) = -f(-x)$ ) *local* et non *global*. Ainsi la position de départ  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  a une influence considérable sur la convergence de l'algorithme. C'est pour cela qu'il est utile d'avoir une idée de ce que l'on cherche pour estimer une solution initiale "pas trop éloignée" de la solution finale.

La recherche du minimum s'effectue de façon itérative à partir du point de départ de la fonctionnelle  $f(x_0)$ . Cette notion réfère au fait qu'il est généralement impossible de trouver la solution exacte en temps fini. En fait la méthode d'optimisation génère une suite infinie de solutions  $\{x_k\}$  approximatives. L'itération  $x_{k+1}$  est formée selon l'information locale de la fonction  $f$  en  $x_k$  et un critère d'arrêt permet de produire une solution approchée  $x^*$  "proche" de la solution recherchée  $x$ . Le choix du critère d'arrêt est varié et peut prendre par exemple la forme d'une distance entre la solution approximée et l'ensemble des solutions ou plus généralement une tolérance maximale sur la fonctionnelle à minimiser.

Suivant l'information qu'utilisent les méthodes d'optimisation, nous distinguons les méthodes du 1<sup>er</sup> ordre qui utilisent les valeurs et les gradients de la fonction objective et les méthodes du 2<sup>nd</sup> ordre qui prennent en plus l'information du Hessien (matrice des dérivées secondes) de la fonction objective.

### A.1 Méthode du gradient

La méthode du gradient fait parti des méthodes du 1<sup>er</sup> ordre et est une des plus simple à implémenter. Soit  $x_k$  un point à l'itération  $k$  qui permet de calculer  $f(x_k)$  et sa dérivée  $\nabla f(x_k)$ . Si  $x_k$  n'est pas un point critique de  $f$ , c'est à dire que  $\nabla f(x_k) \neq 0$  alors  $-\nabla f(x_k)$  est une direction de descente et on a :



$$x_{k+1} = x_k - \nabla f(x_k) \quad (\text{A.2})$$

Cette écriture est appelée Direction de Plus Rapide Descente puisque  $x_{k+1}$  est la valeur qui annule la fonction  $f(x_{k+1})$  lorsqu'elle est exprimée en développement de Taylor au 1<sup>er</sup> ordre. Néanmoins, vu qu'il s'agit d'une approximation au 1<sup>er</sup> ordre il n'est pas dit que  $f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$  car le pas  $-\nabla f(x_k)$  peut être trop grand. C'est pourquoi les méthodes de gradient utilisent généralement une longueur de pas  $\alpha_k$  tel que :

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \text{ avec } \alpha_k > 0 \quad (\text{A.3})$$

Le choix optimal de  $\alpha_k$  est défini selon des règles que nous n'aborderons pas ici mais le lecteur intéressé pourra se référer à [Fle00] pour plus de détails. Cette technique de recherche du  $\alpha_k$  optimal fait parti des méthodes de *line-search*.

On remarque que cette méthode est relativement simple à implémenter, cependant elle est rarement utilisée puisque près de la solution,  $\nabla f(x_k) \rightarrow 0$  ce qui entraîne une faible vitesse de convergence (convergence linéaire) et surtout un mauvais conditionnement de  $\nabla f(x_k)$  qui va alors devenir sensible aux approximations numériques et la solution recherchée risque de diverger.

## A.2 Méthode du gradient conjugué

Cette méthode est une amélioration de la méthode de gradient simple lorsqu'elle est appliquée à une fonctionnelle  $f(x) \in \mathbb{R}^n$  avec  $n > 2$ . Ainsi, plutôt que de prendre une direction de recherche quelconque au cours des itérations, on prend une combinaison linéaire des pas précédents :

$$x_{k+1} = -\nabla f(x_{k+1}) + s_{k+1}x_k \quad (\text{A.4})$$

avec  $s_{k+1}$  un réel basé sur les gradients des itérations  $k$  et  $k + 1$  et qui peut prendre deux formes selon la formule employée (Fletcher Reeves [FR64] ou Polak-Ribière [PR64]). Même si cette méthode est plus efficace que la méthode de gradient, elle a les mêmes inconvénients à savoir une vitesse de convergence faible près de la solution finale et des oscillations numériques peuvent apparaître lorsque  $\nabla f(x_k) \rightarrow 0$ . Néanmoins, ces méthodes présentent un faible coût par itération ce qui peut être utile lorsque ce dernier est prohibitif dans les méthodes présentées par la suite.

## A.3 Méthodes de Newton et Quasi-Newton

Cette méthode est très populaire dans les problèmes d'optimisation non-linéaire et est à l'origine de nombreuses variantes largement utilisées dans les codes de calculs (ABAQUS, NASTRAN, MATLAB, etc.). L'avantage de cette méthode est qu'elle utilise l'information du deuxième ordre dans le développement de Taylor de la fonctionnelle à minimiser et rend sa convergence quadratique. Étant donnée la valeur de la fonctionnelle  $f$  autour de la solution  $x_k$ , nous rapprochons la valeur  $f(x_{k+1})$  par son développement de Taylor à l'ordre 2 par :

$$f(x_{k+1}) \approx f(x_k) + (x_{k+1} - x_k)^T \nabla f(x_k) + \frac{1}{2} (x_{k+1} - x_k)^T [\nabla^2 f(x_k)] (x_{k+1} - x_k) \quad (\text{A.5})$$

$\nabla f(x_k)$  est la matrice Jacobienne et  $\nabla^2 f(x_k)$  est la matrice Hessienne définie comme la matrice des dérivées secondes de  $f(x_k)$  qui s'écrit :

$$\nabla^2 f(x_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x_k)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x_k)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x_k)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x_k)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x_k)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x_k)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x_k)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x_k)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x_k)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Si nous prenons en tant que prochaine itération le minimiseur de la fonctionnelle  $f$  en  $k+1$  c'est à dire que nous posons  $\nabla f(x_{k+1}) = 0$ , la forme quadratique à droite s'écrit :

$$\nabla f(x_k) + [\nabla^2 f(x_k)](x_{k+1} - x_k) = 0 \quad (\text{A.7})$$

Ainsi l'itération suivante  $x_{k+1}$  s'écrit à partir de  $x_k$  comme :

$$x_{k+1} = x_k - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k) \quad (\text{A.8})$$

Le terme  $n(x_k) = -[\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k)$  est appelé *pas de Newton*. Nous remarquons que la convergence de cette méthode n'est assurée que lorsque  $f$  est convexe c'est à dire pour  $\nabla^2 f(x_k)$  définie positive. Dans le voisinage d'un minimiseur local  $x^*$ , la fonctionnelle  $f$  est généralement convexe ce qui rend la méthode de Newton très efficace lorsque le point de départ n'est "pas trop loin" de la solution recherchée en assurant une convergence quadratique. Par contre, loin du point de départ, rien n'indique que  $\nabla^2 f(x)$  soit définie positive et  $-\nabla^2 f(x)^{-1} \nabla f(x)$  n'est alors plus une direction de descente. Dans ce cas là, une technique serait d'utiliser une méthode de descente dans un premier temps puis d'utiliser la méthode de Newton lorsque l'on se rapproche de la solution finale, ce qui revient à écrire [GP67] :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \nabla f(x) & \text{si } \nabla^2 f(x) \text{ n'est pas définie positive} \\ x_{k+1} = x_k - [\nabla^2 f(x)]^{-1} \nabla f(x) & \text{si } \nabla^2 f(x) \text{ est définie positive} \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Bien que la convergence de cette méthode puisse être démontrée, des oscillations d'itérations peuvent être observées tout comme dans la méthode de la Plus Rapide Descente puisque dans ce cas, l'information quadratique n'est pas utilisée.

**Méthode de Levenberg-Marquardt** Afin de garder l'information de la matrice Hessienne  $\nabla^2 f(x)$  dans l'algorithme d'optimisation, on introduit un biais dans le calcul du Hessien en écrivant la direction de descente comme :

$$x_{k+1} = x_k - [\nabla^2 f(x_k) + \nu \mathbf{I}]^{-1} \nabla f(x_k) \quad (\text{A.10})$$

où  $\mathbf{I}$  désigne la matrice identité. Cette technique a été introduite par Levenberg [Lev44] et Marquardt [Mar63] et porte leurs noms. Le choix du paramètre  $\nu$  est tel qu'il rend l'approximation de la Hessienne  $[\nabla^2 f(x_k) + \nu \mathbf{I}]$  définie semi-positive et ainsi (A.10) est bien une itération de descente. Malgré l'altération de l'information fournie par le terme quadratique, on peut montrer que cette technique

rend la méthode d'optimisation globalement convergente et que l'ordre de convergence est généralement quadratique. Comme pour les méthodes de gradient, on peut moduler le pas de descente par un facteur  $\alpha_k$  tel que :

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k [\nabla^2 f(x_k) + \nu \mathbf{I}]^{-1} \nabla f(x_k) \quad (\text{A.11})$$

où  $\alpha_k$  assure la condition  $f(x_{k+1}) < f(x_k)$  et est calculé par des méthodes de type *line-search*.

**Méthode de quasi-Newton** Comme on l'a vu, la méthode de Newton générale nécessite le calcul explicite de  $\nabla^2 f(x_k)$  à chaque itération ce qui peut s'avérer fastidieux et très coûteux lorsque le système à résoudre est grand. Une idée consiste à approcher numériquement la matrice Hessienne en posant  $B_k \approx \nabla^2 f(x_k)$ . Une technique est de générer  $B_k$  par différences finies à partir des gradients de la fonctionnelle  $f$  mais elle n'est pas efficace lorsque la taille du système est importante et impose de calculer  $B_k$  à chaque itération. L'autre approche beaucoup plus efficace pour mettre à jour  $B_k$  consiste à réutiliser l'information des gradients de  $f$ , c'est à dire  $\nabla f(x_0), \dots, \nabla f(x_k)$  et/ou des quantités  $B_k, \nabla^2 f(x_0) \dots \nabla^2 f(x_k)$  et une itération de quasi-Newton s'écrit :

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k \text{ avec } d_k = -B_k^{-1} \nabla f(x) \quad (\text{A.12})$$

Ainsi, un algorithme générique de Quasi-Newton s'écrit de la façon suivante :

1. Choix d'un point de départ  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , d'une matrice carrée non-singulière  $B_0$  de taille  $n$ , poser  $k = 0$  et définir une tolérance  $\epsilon$
2. Si  $\|\nabla f(x_k)\| = 0$  alors  $x_k$  est un minimiseur local et on stoppe l'algorithme. Sinon on effectue les étapes suivantes :
3. Calculer la direction de recherche quasi-Newtonienne  $d_k = -B_k^{-1} \nabla f(x)$
4. Minimiser  $f(x_k + \alpha_k d_k)$  en recherchant un  $\alpha$  optimal et calculer le nouvel itéré  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$
5. Faire la mise à jour de  $B_k$  selon un certain mode de calcul
6. Poser  $k = k + 1$  et retourner à l'étape 2

Comme pour la méthode de Newton, il est nécessaire que la matrice  $B_k$  soit définie positive et symétrique puisque c'est le cas de toute matrice Hessienne. Il existe dans la littérature plusieurs techniques de mise à jour de la pseudo-matrice Hessienne, dont la méthode de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) qui semble être la plus utilisée et la plus robuste [Fle00]. L'avantage de cette méthode réside dans son coût de calcul similaire aux méthodes de gradient puisque la seule différence est de mettre à jour la matrice Hessienne ce qui nécessite seulement  $\mathcal{O}(n^2)$  calculs supplémentaires à chaque itération. Il faut néanmoins noter que la convergence est *super-linéaire* et non quadratique ce qui situe la méthode entre celles des méthodes de gradient et des méthodes de Newton en terme de vitesse de convergence.

## A.4 Méthode de Gauss-Newton

L'idée de cette méthode est d'écrire le problème à minimiser comme un problème aux moindres carrés :

$$\text{Minimiser } G(x) \text{ tel que } G(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x)^2 \text{ avec } x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{A.13})$$

Cette écriture au sens des moindres carrées est largement utilisée en optimisation non-linéaire pour les systèmes *sur-déterminés* ( $m > n$ ) comme par exemple pour la recherche d'un modèle mathématique à partir de points de mesure expérimentaux. On note que dans le cas de systèmes *bien déterminés* c'est à dire que l'on a  $m = n$ , la méthode de Gauss-Newton est également appelé méthode de Newton-Raphson et tire profit de la structure carrée des matrices de gradient et des dérivées secondes. On peut donc s'attendre dans ce cas à une solution exacte de l'équation (A.13) c'est à dire  $G(x) = 0$ .

La résolution d'un tel problème dans le cas non-linéaire utilise les mêmes techniques que les méthodes de Newton. Ainsi, le gradient et le Hessien de  $G(x)$  se mettent sous la forme :

$$\begin{aligned} \nabla G(x) &= 2\mathbf{A} \cdot f(x) \\ \nabla^2 G(x) &= 2\mathbf{A}\mathbf{A}^T + 2\sum_{i=1}^m f_i(x)\nabla^2 f_i(x) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

avec

$$\mathbf{A}(x) = [\nabla f_1(x) \nabla f_2(x) \dots \nabla f_m(x)] \quad (\text{A.15})$$

$\mathbf{A}(x)$  est une matrice Jacobienne dont les colonnes sont les vecteurs des dérivées premières  $\nabla f_i(x)$  c'est à dire  $A_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$ . En remarquant que  $G(x)$  est minimisé au sens des moindres carrés, les termes  $f_i(x)$  sont généralement faibles et on peut approximer la matrice Hessienne  $\nabla^2 G(x)$  par :

$$\nabla^2 G(x) \approx 2\mathbf{A}\mathbf{A}^T \quad (\text{A.16})$$

Ainsi l'information nécessaire au calcul de  $\nabla G(x)$  peut être réutilisée de façon simple pour approcher la matrice Hessienne  $\nabla^2 G(x)$  et la méthode de Gauss-Newton converge généralement plus rapidement qu'une méthode de Quasi-Newton combinée à une méthode BFGS puisque la matrice Hessienne est mieux approchée du premier coup c'est à dire que son calcul ne nécessite pas plusieurs itérations pour obtenir une bonne approximation. De plus, l'équation (A.16) assure que la matrice est définie semi-positive et, de manière générale, est définie positive, ce qui assure une direction de descente. Cette méthode est donc relativement robuste et très rapide lorsque l'on est proche de la solution finale dans le cas de problèmes où les résidus sont "faibles", c'est à dire pour des  $f_i(x)$  relativement petits. Néanmoins, loin de la solution finale, le terme  $2\sum_{i=1}^m f_i(x)\nabla^2 f_i(x)$  de l'équation (A.14) ne devient plus négligeable et l'approximation de la matrice Hessienne par l'équation (A.16) n'est plus satisfaisante ce qui rend la convergence de la méthode de Gauss-Newton difficile voire impossible. Pour rendre la méthode robuste quel que soit les valeurs des fonctions  $f_i(x)$ , on peut appliquer le processus de Levenberg-Marquart à l'équation (A.16) et ainsi contrôler le pas d'itération comme vu précédemment, ou évaluer  $\nabla^2 f_i(x)$  par des itérations de Quasi-Newton [DGW81] ou encore utiliser une méthode *hybride* employant soit la méthode de Gauss-Newton soit la méthode BFGS pour la matrice Hessienne  $\nabla^2 G(x)$  [FX92].

## A.5 Méthode des Régions de Confiance (Trust-Region)

Nous avons vu jusqu'à maintenant que lorsqu'une direction de descente  $d_k$  est trouvée, on peut lui attribuer une longueur de pas  $\alpha_k$  calculée de différentes manières. Cette classe d'algorithmes appelée

line search-methods n'est pas unique pour minimiser une fonction et une autre classe dite des *méthodes des régions de confiance* permet également de construire des algorithmes performants de minimisation. L'idée est de remplacer la fonctionnelle  $f$  à minimiser par une fonction plus simple  $q$ , généralement choisie comme un polynôme d'ordre 2 et qui reflète néanmoins le comportement de  $f$  dans le voisinage  $\Omega$  de  $x$ . Ce voisinage  $\Omega$  est appelé *région de confiance*. Un algorithme générique peut s'écrire de la façon suivante :

1. A l'itération  $k$ , remplacer  $f(x)$  par un modèle quadratique  $q_k(x)$  valide localement.
2. Choisir un voisinage  $\Omega_k$  autour de l'itéré  $x_k$  où la fonction  $q_k(x)$  est valide (On dit que l'on peut avoir confiance en  $q_k(x)$  pour approcher  $f(x)$  dans  $\Omega$ ).
3. Le prochain itéré  $x_{k+1}$  est recherché dans le sens de la minimisation du modèle  $q_k$  dans la région de confiance  $\Omega_k$ ,

$$x_{k+1} \approx \arg \min_{x \in \mathbb{R}^k} q_k(x) \quad (\text{A.17})$$

Le mini-problème (A.17) peut être résolu classiquement en utilisant les méthodes de Newton ou Quasi-Newton vues précédemment. Soit  $y_{k+1}$  un nouvel itéré, solution du mini-problème (A.17). Ce point n'est pas exactement le nouvel itéré de  $f$  mais plutôt du modèle quadratique  $q$ , et il se peut que le passage à  $y_{k+1}$  augmente la *vraie* fonction objective  $f$ . Ainsi les méthodes de régions de confiance acceptent l'itéré  $y_{k+1}$  seulement si la diminution de la fonction objective  $f$  atteint un certain seuil "promis" par le modèle quadratique  $q$  :

$$x_{k+1} = \begin{cases} y_{k+1} & \text{si } \frac{f(x_k) - f(y_{k+1})}{q_k(x_k) - q_k(y_{k+1})} > \eta \\ x_k & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

Où  $\eta \in [0, 1/4]$  est un paramètre fixé *a priori*. Le fait d'accepter ou de rejeter la mise à jour de l'itération est l'essence même des méthodes de régions de confiance. Le lecteur notera que le fait de rejeter la mise à jour  $y_{k+1}$  ne rend pas l'algorithme stationnaire puisque la région de confiance  $\Omega$  va se rétrécir, ce qui donnera un nouvel itéré  $y'_{k+1} \neq y_{k+1}$ . Le choix de la région de confiance  $\Omega_k$  consiste généralement à prendre une boule fermée autour de l'itéré  $x_k$  et d'un certain rayon  $\Delta_k$ . Le choix du rayon peut être arbitraire au début de l'algorithme  $k = 0$  et dépend ensuite des valeurs de la fonction objective  $f$  et du modèle quadratique  $q$  selon le succès ou non de l'itéré  $y_{k+1}$ . Globalement, le rayon est diminué lorsque  $y_{k+1}$  ne correspond pas aux attentes, voir équation (A.18) ou augmenté lorsque la diminution de la fonction objective  $f$  est supérieure aux attentes. La méthode DOGLEG et la méthode STEihaug sont deux algorithmes basés sur la technique des régions de confiances. Nous n'entrerons pas dans les détails, le lecteur intéressé pourra se référer aux articles de Conn et al. [CGT00] et Nocedal et al. [NW99].

Les méthodes de région de confiance sont plus robustes que les méthodes de Newton-Raphson car :

- Au voisinage d'un point selle ou d'un maximiseur  $x^*$ , la méthode de région de confiance n'y sera pas attirée puisqu'elle assure la diminution de la séquence  $(f(x_k))$ .
- Le pas de descente de la méthode de Newton-Raphson n'est pas défini lorsque la matrice Hessienne est singulière; ce n'est pas le cas de la méthode de région de confiance où la Hessienne est toujours bien définie.

La convergence des méthodes de région de confiance dépendent de l'approche initiale du problème : comme précédemment, si la taille du modèle n'est pas trop importante, on peut considérer une méthode

globale de Newton, appelée *méthode de Newton à région de confiance*. Elle présente une convergence asymptotique quadratique lorsque l'on s'approche d'un minimiseur local  $x^*$  puisque les itérés  $y_{k+1}$  s'approchent de ceux produits par une méthode de Newton-Raphson. Si la taille du problème est grande, on considère une approche globale de quasi-Newton et la convergence devient alors super-linéaire.

## A.6 Synthèse des méthodes d'optimisations

Nous avons vu dans ce chapitre un aperçu des méthodes d'optimisation dites *sans contraintes*. Il existe également les méthodes d'optimisation *avec contraintes*, faisant appel aux notions de programmation linéaire et non-linéaire, ou encore les méthodes d'optimisation qui traitent les problèmes non-réguliers, mais celles-ci ne sont pas abordées dans cette annexe.

MATLAB fournit la plupart des algorithmes d'optimisation dont nous avons besoin. Nous utiliserons dans cette thèse la méthode des régions de confiance qui est une variante de l'algorithme de Powell [Pow7].



## Annexe B

# Méthodes temporelles

Les méthodes temporelles représentent l'approche classique pour résoudre un système d'équations différentielles dépendant du temps. Ces méthodes construisent une solution approchée pas à pas et leur grande force est leur capacité à traiter tout type de problèmes ainsi qu'une grande facilité d'utilisation. Dans cette annexe nous présentons les principales méthodes temporelles que l'on rencontre en dynamique des structures.

Parmi les méthodes temporelles, on distingue classiquement les schémas d'intégration implicite des schémas d'intégration explicite. Pour les méthodes implicites, on cherche à chaque pas de temps les champs de déplacement et de vitesse vérifiant les équations du mouvement et dépendants des quantités à l'instant  $t$  mais aussi à l'instant  $t + 1$ . Ainsi la présence de non-linéarités dans le système impose d'utiliser des algorithmes itératifs de type Newton pour converger vers la solution recherchée. La discrétisation du domaine temporel n'influence pas la précision de la solution mais la vitesse de convergence de la solution est affectée si le pas de temps retenu est grand et que les non-linéarités en jeu sont importantes. Le plus rudimentaire des algorithmes pas à pas implicites est le schéma d'Euler implicite qui se met sous la forme :

$$x_{i+1} = x_i + \delta t \dot{x}_{i+1} \quad (\text{B.1})$$

Dans un schéma explicite, les quantités à déterminer à l'instant  $t + 1$  dépendent uniquement des quantités connues à l'instant  $t$  :

$$x_{i+1} = x_i + \delta t \dot{x}_i \quad (\text{B.2})$$

Il n'y a donc pas de recherche de l'équilibre de la solution. Le calcul est donc très rapide mais la stabilité conditionnelle de ce schéma est déterminée par le pas de temps retenu :

$$\delta t \leq \frac{1}{\sqrt{2} f_{max}} \quad (\text{B.3})$$

où  $f_{max}$  représente la fréquence caractéristique maximale du modèle. Par exemple pour un modèle élément fini, le pas de temps doit être inférieur au temps mis par une onde de compression pour traverser le plus petit élément fini. Cette méthode est donc très utilisée en dynamique rapide tel que la simulation du crash en automobile par exemple.



## B.1 Équations différentielles du premier ordre

### B.1.1 Méthodes à pas unique

Une équation du premier ordre s'écrit :

$$\frac{df}{dt} = f(t, x) \quad \text{avec } x(t=0) = x_0 \quad (\text{B.4})$$

La résolution formelle de l'équation (B.4) peut se ramener sous forme intégrale :

$$x(t) = \int_0^t f(t, x) dt \quad (\text{B.5})$$

Le calcul de cette intégrale s'effectue par des méthodes numériques en utilisant par exemple la méthode des trapèzes généralisés décrite par un paramètre  $\alpha \in [0, 1]$  tel que :

$$x_{i+1} - x_i = \delta t [(1 - \alpha)f(t_i, x_i) + \alpha f(t_{i+1}, x_{i+1})] \quad (\text{B.6})$$

On distingue donc 3 cas :

– Cas  $\alpha = 0$ . On retrouve la méthode d'Euler explicite et la solution est de la forme :

$$x_{i+1} = x_i + \delta t f(t_i, x_i) \quad (\text{B.7})$$

– Cas  $\alpha = 1$ . Il s'agit de la méthode d'Euler implicite et la solution est de la forme :

$$x_{i+1} = x_i + \delta t f(t_{i+1}, x_{i+1}) \quad (\text{B.8})$$

– Cas  $\alpha = 1/2$ . On parle cette fois de la méthode de Crank-Nicolson et la solution s'écrit :

$$x_{i+1} = x_i + 1/2 \delta t [f(t_i, x_i) + f(t_{i+1}, x_{i+1})] \quad (\text{B.9})$$

### Méthode de Runge Kutta

Les schémas d'Euler implicite et explicite sont d'ordre 1 ce qui pose des problèmes de précision et de stabilité et ne sont donc pas utilisés dans la résolution numérique d'équations différentielles. On leur préfère les méthodes d'ordre supérieur comme par exemple les méthodes de Runge-Kutta [DP80] dont le principal intérêt est d'améliorer la stabilité et la précision de la solution. Le principe de la méthode consiste à rechercher une solution à l'instant  $i + 1$  en utilisant un schéma explicite ou implicite de la forme :

$$x_{i+1} = x_i + \delta t \varphi(x, t, \delta t) \quad \text{avec } x(t=0) = x_0 \quad (\text{B.10})$$

où  $\varphi$  est une fonction représentant en quelque sorte une moyenne pondérée des pentes prises à différents instants dans l'intervalle de temps  $\delta t$ . Ainsi pour un schéma d'ordre 4, la solution  $x_{i+1}$  s'écrit :

$$x_{i+1} = x_i + \frac{\delta t}{6}(q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4) \quad \text{et} \quad \begin{cases} q_1 = f(t_i, x_i) \\ q_2 = f\left(t_i + \frac{\delta t}{2}, x_i + \frac{\delta t}{2}q_1\right) \\ q_3 = f\left(t_i + \frac{\delta t}{2}, x_i + \frac{\delta t}{2}q_2\right) \\ q_4 = f(t_i + \delta t, x_i + \delta tq_3) \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

Cette méthode nécessite donc 4 évaluations de  $f$  ce qui rend la méthode numériquement coûteuse lorsque la fonction  $f$  est de taille importante mais est en contrepartie très précise.

### B.1.2 Méthodes à pas multiples

La philosophie des méthodes à pas multiples est de calculer la solution à l'instant  $t_{i+1}$  à partir de la solution de l'instant  $t_i$  mais aussi  $t_{i-1}$ , etc.

#### Méthode d'Adams explicite ou ouverte

Pour cela on considère un développement de Taylor de la solution  $x_{i+1}$  :

$$x_{i+1} = x_i + \delta t f(x_i, t_i) + \frac{\delta t^2}{2!} \frac{df}{dt}(x_i, t_i) + O(\delta t^3) \quad (\text{B.12})$$

On remarque que la fonction précédente est un développement de Taylor *avant* qui correspond à la méthode d'Adams explicite ou encore méthode d'Adams ouverte. L'ordre désiré conditionne le nombre de termes retenus. Par exemple, pour l'ordre 1, on retrouve Euler explicite,  $x_{i+1} = x_i + \delta t f(x_i, t_i) + O(\delta t^2)$ . A l'ordre 2, on utilise les 3 premiers termes de l'équation (B.12) et la dérivée  $\frac{df}{dt}(x_i, t_i)$  est remplacée par une différence finie à gauche :

$$\frac{df}{dt}(x_i, t_i) = \frac{f(x_i, t_i) - f(x_{i-1}, t_{i-1})}{\delta t} + O(\delta t) \quad (\text{B.13})$$

Le développement à l'ordre 2 de (B.12) devient alors :

$$x_{i+1} = x_i + \frac{\delta t}{2} (3f(x_i, t_i) - f(x_{i-1}, t_{i-1})) + o(\delta t^3) \quad (\text{B.14})$$

Ainsi, on peut augmenter l'ordre du développement de Taylor pour considérer plusieurs pas de temps précédant l'instant  $t_{i+1}$ . Les formules s'écrivent selon la même procédure que (B.12) et sont connues sous le nom de formules *d'Adams-Bashforth* [SG75]. L'augmentation de l'ordre permet une meilleure précision de la solution mais au détriment de sa stabilité. Ainsi, la formule la plus couramment utilisée est celle d'ordre 4.

#### Méthode d'Adams implicite ou fermée

Cette fois-ci on utilise un développement de Taylor *arrière*, c'est à dire :

$$x_{i+1} = x_i - \delta t f(x_{i+1}, t_{i+1}) + \frac{\delta t^2}{2!} \frac{df}{dt}(x_{i+1}, t_{i+1}) + \dots \quad (\text{B.15})$$

On remarque que l'ordre 1 correspond à un schéma d'Euler implicite. En utilisant la même technique que précédemment, on peut construire les schémas implicites pour des ordres plus élevés et on

obtient les formules *d'Adams-Moulton*. Étant donné le caractère implicite de ces formules, la stabilité est augmentée et les résultats beaucoup plus précis en comparaison de la méthode d'Adams explicite mais la zone de stabilité réduit également lorsque l'ordre croît.

*Remarque :* A propos de l'initialisation du schéma,  $x_1$  ne peut pas être déterminé car  $x_{-1}$  n'est pas défini. Pour démarrer le calcul, il faut donc réaliser la première itération avec un intégrateur à un pas de type Runge-Kutta.

### Méthode de Prédicteur-Correcteur

L'idée ici est de combiner les méthodes d'Adams explicites et implicites vues précédemment. En effet, la méthode explicite permet des temps de calcul réduits au détriment de la précision de la solution, par contre la méthode implicite offre une plus grande précision et une meilleure stabilité de la solution mais avec une dégradation du temps CPU due à la résolution itérative lors d'un pas de calcul. La méthode de prédicteur-correcteur consiste à estimer un pas de calcul  $\tilde{x}_{i+1}$  à l'aide de la méthode explicite (étape de prédiction) et réintroduire la valeur obtenue dans la méthode implicite (étape de correction). Vu que la valeur initiale sera "proche" de la valeur recherchée, l'algorithme itératif employé dans la méthode implicite convergera rapidement vers la solution exacte  $x_{i+1}$ . Ainsi on cumule les avantages liés à la méthode d'Adams : des temps de calcul réduit avec une bonne précision sur les résultats.

## B.2 Équations différentielles du deuxième ordre

L'inconvénient des méthodes du premier ordre est qu'elles nécessitent d'écrire un système différentiel du second ordre sous forme d'état pour se ramener à un système différentiel du premier ordre, doublant ainsi la taille des matrices et le nombre d'inconnues à calculer. Il existe des méthodes pas à pas permettant de résoudre directement des équations différentielles du second ordre dont l'écriture est sous la forme :

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) \quad \text{avec } x(t=0) = x_0 \text{ et } \frac{dx}{dt}(t=0) = \dot{x}_0 \quad (\text{B.16})$$

Tout comme pour les équations différentielles du premier ordre, on distingue les schémas explicites des schémas implicites. Il existe dans la littérature de nombreuses méthodes et nous allons développer dans la suite la méthode de Newmark issue de la règle des trapèzes qui semble être la plus populaire dans la résolution des systèmes dynamiques et la plus répandue. Les champs de déplacement  $x_{i+1}$  et de vitesse  $\dot{x}_{i+1}$  s'écrivent :

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \delta t \dot{x}_i + 0.5 \delta t^2 ((1 - 2\beta)\ddot{x}_i + 2\beta\ddot{x}_{i+1}) \\ \dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \delta t ((1 - \gamma)\ddot{x}_i + \gamma\ddot{x}_{i+1}) \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

$\alpha$  et  $\beta$  sont les deux paramètres d'intégration du schéma de Newmark et contrôlent à la fois la stabilité et la dissipation de l'algorithme (Figure B.2). Ainsi on distingue plusieurs couples  $(\alpha, \beta)$  qui définissent des variantes de l'algorithme de Newmark et on distingue les plus couramment utilisés :

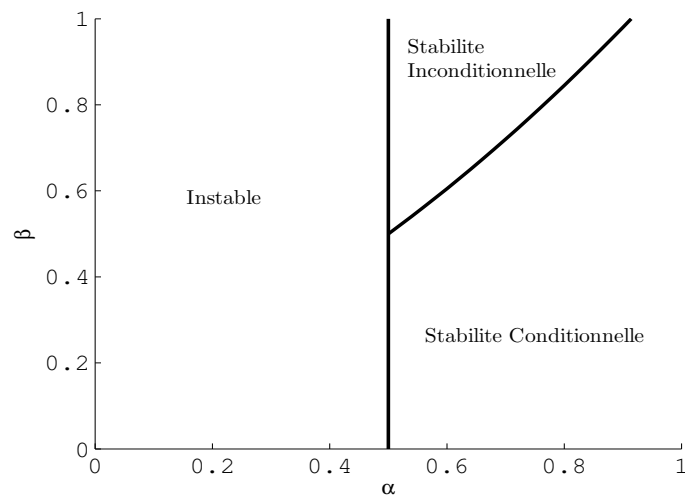


FIGURE B.1 – Zones de stabilité et d'instabilité en fonction des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$

- ( $\gamma = 1/2$  ,  $\beta = 1/4$ ) : ACCÉLÉRATION MOYENNE. Ce schéma est inconditionnellement stable et précis au second ordre, c'est LE schéma classique que l'on retrouve en dynamique des structures. Un des avantages majeur de ce schéma est son absence de dissipation numérique et il présente la plus faible erreur globale de troncature.
- ( $\gamma = 1/2$  ,  $\beta = 1/12$ ) : FOX ET GOODWIN. Cette méthode est conditionnellement stable et sa précision est du troisième ordre en périodicité.
- ( $\gamma = 1/2$  ,  $\beta = 0$ ) : DIFFÉRENCES CENTRÉES. C'est le schéma explicite de Newmark. La stabilité de ce schéma est conditionnelle et comme tout calcul explicite son utilisation nécessite un pas de temps relativement faible. L'utilisation de cette méthode nécessite également quelques précautions quant à la structure de la matrice de masse qui doit être diagonale.
- ( $\gamma = 0$  ,  $\beta = 0$ ) : ACCÉLÉRATION CONSTANTE. Ce schéma explicite ne présente aucun intérêt pratique car il est instable.

La méthode Hilber Hughes Taylor (HHT) [HHT77] est une variante de la méthode de Newmark qui permet *via* un paramètre  $\alpha$  de contrôler l'amortissement haute fréquence en laissant presque intacte la précision optimale de la règle des trapèzes dans le domaines des basses fréquences. Néanmoins, ce n'est pas l'algorithme le plus performant lorsque l'on compare les erreurs relatives de périodicités.

Enfin comme pour les algorithmes des équations du premier ordre, il existe des méthodes à pas multiples : la méthode de Gear à 2 pas [GW74], la méthode de Houblot [Hou50], inconditionnellement stable avec une précision du second ordre, mais peu utilisée car elle génère des erreurs relatives d'amplitude et de périodicité élevées ou encore la méthode implicite à trois pas inconditionnellement stable de Park [Par75] qui est inspirée de la méthode de Houblot.

*Remarque* : Dans le cas de problèmes non-linéaires, la stabilité inconditionnelle des schémas implicites n'est plus valide. Ils sont alors soumis, comme les schémas explicites, à une restriction sur le

pas de temps. Sans rentrer dans les détails, notons qu'il est courant de mener une seconde intégration temporelle avec un pas de temps plus faible pour s'assurer que le résultat est relativement indépendant de la taille du pas de temps utilisé.

### B.3 Synthèse

La préférence d'une méthode plutôt qu'une autre est guidée par la nature de la stabilité et le degré de précision recherché qu'elle offre pour un système dynamique. Les schémas conditionnellement stables requièrent un pas de temps inférieur à une fraction de la plus faible période de la structure pour assurer la stabilité. Ainsi dans les structures où les modes propres à basses fréquences sont dignes d'intérêt, l'utilisation de ce type de méthode risque d'être coûteux numériquement et les méthodes inconditionnellement stables sont privilégiées. L'utilisation de ces méthodes peut générer des erreurs d'amplitudes et de périodicité entachant la solution numérique. Il est donc souhaitable que la précision de l'opérateur de résolution temporelle soit au moins du second ordre. Les schémas à pas multiples assurent tous une précision d'ordre deux ainsi que les schémas de Newmark à l'exception du schéma de Fox et Goodwin qui est précis au troisième ordre. Néanmoins, les opérateurs de Newmark avec dissipation numérique  $\gamma > 1/2$  dégradent la précision de la solution jusqu'au premier ordre et ne sont pas acceptables dans une résolution temporelle. C'est ainsi que la méthode des accélérations moyennes  $\gamma = 1/2, \beta = 1/4$  est la procédure offrant la plus faible erreur locale de troncature et est précise au second ordre. C'est pour cette raison qu'elle est largement utilisée dans les codes de calculs. Dans le cadre de cette thèse, nous utilisons la méthode de Newmark des accélérations moyennes et la méthode de Runge-Kutta 4 qui fournissent des résultats de références auxquels nous comparons les résultats de la méthode de balance harmonique contrainte développée.



## AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 7 août 2006,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur L. JEZEQUEL

et les rapports de

Monsieur D. AUBRY  
Professeur - Ecole Centrale de Paris - Labo. MSSMat - Grande Voie des Vignes  
92295 CHATENAY-MALABRY cedex

et de

Monsieur R. OHAYON  
Professeur - CNAM -Chaire de Mécanique - Case 353 - 2, rue Conté - 75003 PARIS

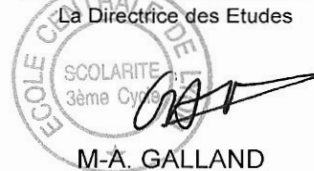
**Monsieur COUDEYRAS Nicolas**

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

**Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE (MEGA)**

Fait à Ecully, le 14 décembre 2009

P/Le Directeur de l'E.C.L.  
La Directrice des Etudes

  
M-A. GALLAND