



Modélisation et simulations en turbulence homogène anisotrope : effets de rotation et magnétohydrodynamique

Benjamin Favier

► To cite this version:

Benjamin Favier. Modélisation et simulations en turbulence homogène anisotrope : effets de rotation et magnétohydrodynamique. Physique [physics]. Ecole Centrale de Lyon, 2009. Français. NNT : 2009ECDL0020 . tel-00564494

HAL Id: tel-00564494

<https://theses.hal.science/tel-00564494>

Submitted on 9 Feb 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée devant

L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

École Doctorale MEGA

en vue d'obtenir le titre de

DOCTEUR

par

Benjamin FAVIER

**Modélisation et simulation en turbulence homogène
anisotrope : effets de rotation et magnétohydrodynamique**

Soutenue le 3 Novembre 2009 devant la Commission d'Examen

Jury :	T.	Alboussière	- <i>Rapporteur</i>
	C.	Cambon	- <i>Directeur de thèse</i>
	F.S.	Godefert	- <i>Co-directeur de thèse</i>
	H.K.	Moffatt	- <i>Rapporteur</i>
	J.F.	Pinton	- <i>Examineur</i>
	Y.	Ponty	- <i>Examineur</i>
	J.	Scott	- <i>Examineur</i>

Remerciements

En premier lieu, mes remerciements vont à mes deux directeurs, Claude Cambon et Fabien Godeferd. Leurs compétences complémentaires m'ont été indispensables pour mener à bien cette thèse. Je remercie Claude pour m'avoir appris à apprécier l'espace spectral et Fabien pour ses compétences numériques hors pair. Je les remercie tous deux pour m'avoir permis de visiter Sheffield, Munich, Villanova, Cargèse, Newcastle, Nancy, Porquerolles, Varsovie... dans le cadre de conférences scientifiques.

La tâche fastidieuse de rapporteur est revenue à Messieurs Thierry Alboussière et Keith Moffatt. Je les remercie tous deux pour s'être attaqué à la lecture de mes travaux et pour leurs commentaires détaillés. Je tiens également à remercier spécifiquement Thierry Alboussière pour sa visite de l'expérience DTS à Grenoble ainsi que Keith Moffatt, dont la lecture de certains de ces travaux a été une grande source d'inspiration et de motivation.

L'ensemble des membres du Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, avec qui j'ai interagi de près ou de loin, ont contribué d'une manière ou d'une autre à l'accomplissement du présent manuscrit. Je remercie particulièrement, dans un ordre plus moins chronologique : Anas El Gallaf, Sophie Miralles (sans qui je n'aurais peut-être pas fait de MHD), Wouter Bos (pour sa connaissance infailible des publications récentes et pour le code MHD), Alexandre Delache (pour les discussions nocturnes, que ce soit chez lui ou les pieds dans l'eau en Corse), les doctorants du groupe Turbomachines (mention spéciale à Émilie et Véronique pour l'accompagnement sonore), Clément Jause-Labert et Yann Largeron (pour le road-trip canadien et les nuits grenobloises). L'ensemble de l'équipe d'enseignement de Mécanique des Fluides, au sein de laquelle j'ai effectué trois années de monitorat, se doit également d'être saluée ici.

Je remercie l'Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique pour l'accès à la machine NEC-SX8 sous les contrats 082206 et 092206.

Je tiens à remercier, dans le désordre le plus complet, Pink Floyd, Mogwai, Amon Tobin, P.J. Harvey, The Beatles, Nine Inch Nails, Radiohead, The Mars Volta, Sigur Rós, King Crimson, Robert Wyatt, Ludwig Van Beethoven, Ennio Morricone, Cat Stevens, Pixies, Chopin, Émilie Simon, Arcade Fire, The Dresden Dolls, Sia, Bonobo, Archive, My Bloody Valentine, The Verve et The Dandy Warhols pour l'accompagnement musical.

J'aimerais remercier ma famille et mes proches pour leurs soutiens durant ces trois années. Enfin, merci à Nono, pour tout le reste...

Mots clés

Turbulence homogène, Rotation, Magnétohydrodynamique, Simulation Numérique Directe, Aéroacoustique

Résumé

Cette thèse s'intéresse à la turbulence incompressible homogène et anisotrope, et plus particulièrement à l'effet d'une rotation solide et d'un champ magnétique uniforme et stationnaire. En plus des simulations numériques directes (DNS), nous présentons également un modèle synthétique de turbulence (Kinematic Simulation ou KS) construit à partir d'une superposition de modes de Fourier, et au sein duquel la dynamique linéaire (basée sur la Rapid Distorsion Theory) peut être incluse. Dans un premier temps, l'effet de la rotation solide est étudié avec un effort particulier porté sur les corrélations en deux-temps. Une comparaison entre DNS et KS est proposée dans le cas isotrope comme dans le cas en rotation. Dans le contexte aéroacoustique, on montre dans quelle mesure la rotation modifie l'émission acoustique d'une turbulence homogène. L'effet d'un champ magnétique est ensuite considéré et l'anisotropie de l'écoulement est étudiée en fonction du nombre de Reynolds magnétique. Il est montré dans quelle mesure la turbulence magnétohydrodynamique quasi-statique est similaire à la turbulence "deux-dimensions trois-composantes" du fait de la dissipation Joule anisotrope et comment l'écoulement restaure son isotropie lorsque le nombre de Reynolds magnétique croît. Enfin, l'effet couplé d'une rotation et d'un champ magnétique est considéré. Les propriétés énergétiques ainsi que l'anisotropie sont étudiés et une étude paramétrique en fonction du nombre d'Elsasser est proposée.

Abstract

This thesis focuses on incompressible homogeneous anisotropic turbulence, with a particular interest on the effect of a solid-body rotation and a uniform steady magnetic field. In addition to Direct Numerical Simulations (DNS), we also propose a stochastic model of anisotropic turbulence (Kinematic Simulation or KS) based on a superposition of Fourier modes, in which linear dynamics (based on Rapid Distorsion Theory) is included. First, the effect of a solid body rotation is studied and we focus on two-time velocity correlations. Comparisons between KS and DNS are presented in the isotropic and rotating cases. We then apply these results to aeroacoustics and show how the rotation modifies the acoustic emission of homogeneous turbulence. Secondly, we focus on the effect of an imposed magnetic field and we describe the anisotropy of the flow in function of the magnetic Reynolds number. The quasi-static magneto-hydrodynamic turbulence is very similar to the so-called 2D-3C turbulence due to anisotropic Joule dissipation and we show how the isotropy is restored as the magnetic Reynolds numbers increases. Finally, we consider the coupled effect of rotation and magnetic field. Energetic properties and anisotropy are studied and a dependance of the results on the Elsasser number is also proposed.

Table des matières

Table des figures	4
Notations	7
Introduction	9
1 Analyse statistique d'écoulements turbulents homogènes anisotropes.	12
1.1 Équations de Navier-Stokes	12
1.2 Moyenne d'ensemble	13
1.3 Tenseur de corrélation dans l'espace physique	13
1.4 Représentation spectrale	14
1.5 Décomposition poloïdale-toroïdale	16
1.6 Anisotropie dans l'espace de Fourier	17
1.7 Définitions complémentaires	20
2 Méthodes numériques	24
2.1 Modèles synthétiques de turbulence	24
2.2 Kinematic Simulation	25
2.2.1 Concept de base	25
2.2.2 Présentation du modèle classique	26
2.2.3 Généralisation dans le cas isotrope	29
2.2.4 Généralisation au cas anisotrope	34
2.2.5 Instationnarité et dynamique linéaire	38
2.3 Simulations numériques directes	41
2.3.1 Équations de Navier-Stokes	41
2.3.2 Résolution en référentiel tournant	43
2.3.3 Magnétohydrodynamique	44
2.3.4 Conditions initiales	46
2.3.5 Forçage et initialisation des calculs anisotropes	48
2.4 Conclusion	54
3 Turbulence homogène isotrope et en rotation	55
3.1 Corrélations deux-temps en turbulence homogène isotrope	55
3.1.1 Résultats DNS isotrope	58
3.1.2 De l'instationnarité en KS isotrope	60

3.1.3	Comparaison entre KS et DNS isotropes	63
3.2	Turbulence homogène en rotation pure	66
3.2.1	Équations dans un repère tournant	66
3.2.2	Nombres adimensionnés	66
3.2.3	Régime linéaire et ondes d'inertie	67
3.2.4	Anisotropie en turbulence homogène en rotation	72
3.3	Corrélations deux-temps en turbulence homogène en rotation	77
3.3.1	Résultats KS en rotation pure	78
3.3.2	Comparaison entre DNS et KS	80
3.4	Applications à l'aéroacoustique	81
3.4.1	L'analogie acoustique de Lighthill	82
3.4.2	Application en turbulence homogène et isotrope	84
3.4.3	Pourquoi utiliser la KS en aéroacoustique ?	85
3.4.4	Implémentations numériques	86
3.4.5	Forçage - Signaux de pression acoustique	88
3.4.6	Spectres acoustiques - Cas isotrope	89
3.4.7	Spectres acoustiques - Cas en rotation	91
3.4.8	Dépendance au nombre de Mach	93
3.4.9	Directivité	95
3.5	Conclusion	96
4	Turbulence MHD avec champ magnétique uniforme imposé.	98
4.1	Équations et définitions	98
4.1.1	Champ magnétique imposé	100
4.1.2	Nombres adimensionnés	100
4.2	Solutions linéaires et KS	101
4.2.1	Ondes d'Alfvén	101
4.2.2	Régime linéaire dissipatif	104
4.2.3	Kinematic Simulation	106
4.3	Anisotropie en turbulence MHD	109
4.3.1	Prédiction linéaire	109
4.3.2	Simulations numériques directes	113
4.4	Conclusion	123
4.5	Complément au chapitre 4	123
5	Turbulence MHD en rotation.	128
5.1	Équations et définitions	129
5.2	Solutions linéaires	130
5.2.1	Ondes magnéto-inertiellles	130
5.2.2	Solutions non dissipatives dans l'espace spectral	134
5.2.3	Régime linéaire dissipatif	135
5.3	Propriétés énergétiques et influence de la rotation	137
5.3.1	$Pr_M \ll 1$	137
5.3.2	$Pr_M \approx 1$	139

5.4	Anisotropie en turbulence MHD en rotation	142
5.4.1	Prédiction linéaire	142
5.4.2	Fort nombre de Reynolds magnétique	144
5.4.3	Faible nombre de Reynolds magnétique	150
5.5	Conclusion	154
Conclusion		156
A Contribution à l'effet α et aux corrélations croisées		159
A.1	Lien entre α_{ij} et le tenseur spectral $\hat{R}_{ij}$	159
A.2	Lien entre β_{ij} et le tenseur spectral $\hat{R}_{ij}$	160
A.3	Anisotropie dans l'espace de Fourier	161
A.4	Corrélations croisées	161
B Interaction non-linéaire d'ondes d'Alfvén		163
B.1	Méthode numérique	163
B.2	Régime linéaire	163
B.3	Régime non-linéaire	164
C Vers une configuration non-axisymétrique		167
C.1	Fort nombre de Reynolds magnétique	168
C.2	Faible nombre de Reynolds magnétique	171
D Statistiques Lagrangiennes.		173
D.1	Corrélations de vitesse	174
D.2	Dispersion d'une particule	176
E Compilation des résultats d'anisotropie pour les fluctuations magnétiques		178

Table des figures

1.1	Repère local de Craya-Herring.	16
1.2	Schématisation de l'anisotropie dans l'espace de Fourier.	19
1.3	Schématisation du domaine d'intégration dans l'espace spectral.	22
2.1	Enstrophie en turbulence isotrope.	30
2.2	Spectre d'expression analytique imposé en KS.	33
2.3	Spectre arbitraire imposé en KS.	34
2.4	Initialisation anisotrope en KS et impact de l'anisotropie de directivité.	39
2.5	Comparaison entre les équations MHD et l'hypothèse QS.	46
2.6	Spectres d'énergie $E(k)$ imposés comme condition initiale en DNS.	48
2.7	Spectres et énergie en turbulence homogène isotrope forcée.	49
2.8	Skewness et dissipation en turbulence homogène isotrope forcée.	51
2.9	Coefficient $c(k, t)$ et spectres angulaires.	53
2.10	Visualisation de l'enstrophie obtenue par DNS isotrope forcée.	53
3.1	Schématisation du <i>straining</i> et du <i>sweeping</i>	57
3.2	Impact du forçage sur les corrélations deux-temps.	58
3.3	Corrélations deux-temps en DNS isotrope forcée.	59
3.4	Fonction de corrélation en fonction de λ'	62
3.5	Comparaison des fonctions de corrélations obtenues par DNS et KS.	63
3.6	Comparaison des temps de corrélations obtenus par DNS et KS.	65
3.7	Visualisations d'ondes inertielles.	69
3.8	Réponse impulsionnelle d'un fluide en rotation.	71
3.9	Évolution de l'énergie cinétique en turbulence en rotation.	73
3.10	Angle de Shebalin et anisotropie du tenseur de Reynolds.	74
3.11	Spectre angulaire $E(k, \theta)$ pour une turbulence en rotation.	75
3.12	Enstrophie en turbulence en rotation.	76
3.13	Longueurs de corrélations en turbulence homogène en rotation	77
3.14	Fonctions de corrélations deux-temps en KS avec rotation.	79
3.15	Corrélations deux-temps obtenues par DNS en rotation.	80
3.16	Corrélations deux-temps obtenues par KS en rotation.	81
3.17	Schématisation du temps de retard.	87
3.18	Impact du forçage sur la fluctuation de pression acoustique.	89
3.19	Densité spectrale d'intensité acoustique en DNS.	90
3.20	Densité spectrale d'intensité acoustique en KS.	91

3.21	Spectre d'intensité acoustique pour une turbulence homogène en rotation.	91
3.22	Spectre d'intensité acoustique pour une turbulence homogène en rotation.	92
3.23	Intensité acoustique en fonction du nombre de Mach dans le cas isotrope.	94
3.24	Intensité acoustique en fonction du nombre de Mach dans le cas en rotation.	95
3.25	Intensité acoustique en fonction du point d'observation.	96
4.1	Visualisation de la propagation d'un paquet d'ondes d'Alfvén.	103
4.2	Évolution temporelle de l'énergie lorsque $S \ll 1$	107
4.3	Évolution temporelle de l'énergie lorsque $S \gg 1$	108
4.4	Prédictions linéaires pour la densité d'énergie $e_K(\mathbf{k})$	110
4.5	Angles de Shebalin pour la vitesse, $Pr_M < 1$	111
4.6	Angles de Shebalin pour la vitesse, $Pr_M \approx 1$	112
4.7	Enstrophie calculée par KS et énergie spectrale angulaire.	113
4.8	Comparaison des énergies au cours du temps en fonction de R_M	115
4.9	Angles de Shebalin θ_U et θ_B pour trois valeurs de R_M	115
4.10	Spectres angulaires en turbulence MHD pour $R_M \approx 1$	117
4.11	Spectres poloïdal et toroïdal pour $R_M \approx 1$	118
4.12	Prédiction linéaire de l'anisotropie à bas nombre de Reynolds magnétique.	118
4.13	Spectres angulaires en turbulence MHD pour $R_M \approx 100$	119
4.14	Composante $b_{33}(t)$ du tenseur d'anisotropie de Reynolds au cours du temps.	120
4.15	Longueurs de corrélations de vitesse et de vorticité en turbulence MHD.	121
4.16	Enstrophie et densité de courant en turbulence MHD.	122
5.1	Vitesse de groupe des ondes magnéto-inertielles.	132
5.2	Visualisation des ondes magnéto-inertielles.	133
5.3	évolution temporelle de l'énergie lorsque $Pr_M \approx 10^{-2}$	138
5.4	Taux de dissipation total ϵ_T au cours du temps.	139
5.5	évolution temporelle de l'énergie lorsque $Pr_M \approx 1$	140
5.6	Spectres d'énergie cinétique $E_K(k)$ et magnétique $E_M(k)$	141
5.7	Prédictions linéaires pour les densités d'énergies $e_K(\mathbf{k})$ et $e_M(\mathbf{k})$	143
5.8	Angles de Shebalin pour la vitesse.	144
5.9	Angles de Shebalin θ_U et θ_B lorsque $R_M \approx 100$	145
5.10	Spectres angulaires d'énergies pour $R_M \approx 100$ et Ro variable.	146
5.11	Composante b_{33} du tenseur d'anisotropie de Reynolds au cours du temps.	147
5.12	Longueur de corrélation L_{11}^3 au cours du temps.	148
5.13	Isosurfaces de la densité de courant.	149
5.14	Angles de Shebalin θ_U et θ_B lorsque $R_M \approx 1$	151
5.15	Spectres angulaires d'énergies pour $R_M \approx 1$ et Ro variable.	152
5.16	Composante b_{33} du tenseur d'anisotropie de Reynolds au cours du temps.	153
5.17	Longueurs de corrélations $L_{11}^3(u)$ et $L_{33}^3(u)$ pour $R_M \approx 1$ et Ro variable.	154
5.18	Longueurs de corrélations $L_{11}^3(\omega)$ et $L_{33}^3(\omega)$ pour $R_M \approx 1$ et Ro variable.	155
B.1	énergies cinétique et magnétique au cours du temps. Cas linéaire	164
B.2	énergies cinétique et magnétique au cours du temps. Cas non-linéaire	165

B.3	Visualisation de la composante verticale des fluctuations magnétiques au cours du temps	166
C.1	Évolution des énergies lorsque $\mathbf{B}_0 \perp \boldsymbol{\Omega}$ pour $R_M \approx 100$	168
C.2	Angles de Shebalin et $b_{33}^Z(\mathbf{b})$ lorsque $\mathbf{B}_0 \perp \boldsymbol{\Omega}$	169
C.3	Spectres angulaires d'énergies lorsque $\mathbf{B}_0 \perp \boldsymbol{\Omega}$	169
C.4	Prédiction linéaire de la dépendance angulaire de l'énergie dans l'espace spectral	170
C.5	Évolution des énergies lorsque $\mathbf{B}_0 \perp \boldsymbol{\Omega}$ pour $R_M \approx 1$	171
C.6	Longueurs de corrélations pour $R_M \approx 1$ et $\Lambda \approx 1$	172
D.1	Corrélations Lagrangiennes de vitesse en turbulence MHD.	175
D.2	Corrélations Lagrangiennes de vitesse en turbulence MHD en rotation.	175
D.3	Dispersion d'une particule dans le cas MHD pur.	177
D.4	Dispersion d'une particule dans le cas MHD en rotation.	177
E.1	Composante b_{33} du tenseur d'anisotropie de Reynolds en fonction de R_M	179
E.2	Composante b_{33} du tenseur d'anisotropie de Reynolds en fonction de Λ pour $R_M \approx 100$	179
E.3	Composante b_{33} du tenseur d'anisotropie de Reynolds en fonction de Λ pour $R_M \approx 1$	179

Notations

$\bar{V}$ ou $\langle V \rangle$	Moyenne d'ensemble
Ω	Vecteur rotation
ω	Vorticité
$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$	Champ de fluctuations magnétiques
$\mathbf{B}_0$	Champ magnétique uniforme et stationnaire
$(\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)}, \mathbf{e}^{(3)})$	Repère de Craya-Herring
$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$	Repère cartésien (aussi noté $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$)
$\mathbf{j}$	Densité de courant électrique
$\mathbf{k}$	Vecteur d'onde
$\mathbf{n}$	Direction privilégiée (verticale)
$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$	Champ de vitesse fluctuante
$\mathbf{v}_\phi$	Vitesse de phase
$\mathbf{v}_g$	Vitesse de groupe
ϵ	Taux de dissipation cinétique turbulente
ϵ_T	Taux de dissipation total
η	Diffusivité magnétique
$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \omega)$	Transformée de Fourier spatio-temporelle de la vitesse
$\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{k}, \omega)$	Transformée de Fourier spatio-temporelle des fluctuations magnétiques
$\hat{R}_{ij}(\mathbf{k})$	Tenseur spectral de corrélations
$\hat{u}^{(1)}$	Composante toroïdale de la vitesse
$\hat{u}^{(2)}$	Composante poloïdale de la vitesse
λ	Paramètre d'instationnarité en KS
λ'	Paramètre caractérisant l'écart-type des pulsations aléatoires
Λ	Nombre d'Elsasser
$\Im$	Partie imaginaire
$\Re$	Partie réelle
μ	Viscosité dynamique
ν	Viscosité cinématique
μ_0	Perméabilité magnétique du vide
ω_n	Pulsation aléatoire en KS
ϖ_n	Pseudo-relation de dispersion en KS
ρ	Masse volumique

σ	Conductivité électrique
σ_R	Relation de dispersion des ondes inertielles
σ_B	Relation de dispersion des ondes d'Alfvén
τ_D	Temps de corrélation intégral
$\tau_{1/2}$	Temps de corrélation à mi-hauteur
θ	Angle polaire dans l'espace spectral (défini par rapport à la verticale)
c_0	Célérité du son
$E(k)$	Spectre d'énergie cinétique (aussi noté $E_K(k)$ selon le contexte)
$E_M(k)$	Spectre d'énergie magnétique
$E(k, \theta)$	Spectre d'énergie angulaire
$G_{ij}(\mathbf{k}, t)$	Fonction de Green
i	$i^2 = -1$
I	Intensité acoustique
l_0	Échelle intégrale
l_λ	Échelle de Taylor
l_η	Échelle de Kolmogorov
L_{ij}^l	Longueurs intégrales de corrélations
$\mathcal{L}$	Nombre de Lehnert
M	Nombre de modes en KS
M_0	Nombre de Mach
N	Nombre d'interaction
p	Pression
$R(k, \tau)$	Fonction de corrélation
Re	Nombre de Reynolds intégral
Re_λ	Nombre de Reynolds de Taylor
R_M	Nombre de Reynolds magnétique
Ro	Nombre de Rossby
S	Nombre de Lundquist
T_{ij}	Tenseur de Lighthill
u_0	Vitesse <i>rms</i> de l'écoulement
DNS	Direct Numerical Simulation
KS	Kinematic Simulation
LES	Large Eddy Simulation
THA	Turbulence Homogène Anisotrope
THI	Turbulence Homogène Isotrope

Introduction

La turbulence est un phénomène physique complexe qui intervient dans des situations très diverses. De l'écoulement sanguin à la convection dans les étoiles, la turbulence conditionne une grande majorité des écoulements fluides. La multiplicité des situations affectées explique le grand nombre d'approches existantes pour étudier le problème. Un point de vue optimiste serait d'affirmer que, grâce à la croissance de la puissance de calcul numérique, il est désormais envisageable de simuler directement les équations de Navier-Stokes pour des écoulements de plus en plus proches des paramètres réels et dans des géométries de plus en plus complexes. Une personne moins enthousiaste rétorquerait que la plupart des situations pratiques échappent encore aux simulations directes du fait de la grande diversité d'échelles et de temps existant au sein des écoulements turbulents que l'on rencontre dans la nature. Quoi qu'il en soit, il existe selon l'auteur deux approches radicalement différentes mais complémentaires lorsqu'il s'agit de "comprendre" la turbulence. La première se donne comme objectif de s'approcher autant que possible des conditions réelles de l'écoulement. Les paramètres sont alors, dans la plupart des cas, inaccessibles pour une DNS et le problème réside dans la modélisation des quantités inconnues. Du fait de la grande complexité du système dynamique considéré, de son grand nombre de degrés de liberté et surtout des interactions non-linéaires entre les différents phénomènes physiques existants, il est bien souvent difficile d'analyser en détail les résultats obtenus. L'impact du modèle est également un problème majeur. La seconde approche réside en la simplification de systèmes réels afin d'atteindre des paramètres accessibles pour une DNS. Il est alors plus aisé d'analyser la nature des phénomènes observés, mais difficile d'établir un lien avec les phénomènes existant au sein d'écoulements réels, dont les paramètres sont très différents. Cette étape de simplification est cependant indispensable afin de pouvoir par la suite s'intéresser à des configurations de plus en plus réalistes mais aussi de plus en plus complexes.

Une des simplifications les plus importantes dans le domaine de la turbulence est due à G.K. Batchelor et sa célèbre homogénéisation de la turbulence [Batchelor(1953), Moffatt(2002)]. En supposant que les statistiques de l'écoulement ne dépendent pas de la position, l'étude théorique de la turbulence est alors grandement simplifiée. Cette hypothèse est cependant à double tranchant. Ce type d'écoulements est bien évidemment idéal en ce sens qu'il n'existe pas de méthode permettant de construire rigoureusement de tels écoulements (bien que la turbulence de grille permette de s'en approcher). Il existe toujours dans les configurations réelles des phénomènes rendant l'écoulement inhomogène. Les conditions aux limites en font partie, et l'homogénéisation de la turbulence passe par l'hypothèse d'un domaine fluide infini. Bien que très éloignée des préoccupations pratiques, la turbulence homogène permet de s'affranchir d'un certain nombre de problèmes afin de comprendre la dynamique de la turbulence en tant que telle, non perturbée par des phénomènes extérieurs ou des conditions aux limites. Bien que de nom-

breux aspects restent encore sujets à polémique, un grand nombre de résultats théoriques ont été obtenus grâce à cette approche. Cependant, en homogénéisant la turbulence, les non-linéarités de l'équation de Navier-Stokes sont maintenant l'élément le plus important de la dynamique. Citons par exemple H.K. Moffatt :

“The intense and enduring difficulty of the problem of homogeneous turbulence is associated with the fact that all linearizable features have been stripped away, and the naked nonlinearity of the problem is all that remains”.

Au-delà des considérations d'homogénéité, une autre hypothèse permet également de simplifier grandement les statistiques d'un écoulement turbulent. Il s'agit de l'hypothèse d'isotropie. Les statistiques en deux-points ne dépendent plus dans ce cas de la direction de séparation mais seulement de la distance. Si cette hypothèse permet de simplifier l'approche mathématique, il reste qu'elle est rarement vérifiée dans des situations pratiques. Il existe souvent au sein des écoulements réels des phénomènes à grande échelle qui contraignent et transforment la turbulence, pouvant mener à un état fortement anisotrope.

Une approche intermédiaire est la turbulence homogène anisotrope (ou THA). L'homogénéité est toujours supposée, mais les propriétés statistiques de l'écoulement peuvent dépendre de la direction considérée. L'anisotropie est souvent engendrée par des phénomènes à grande échelle tels qu'un gradient moyen (de vitesse ou de température par exemple) ou des forces de volume. Si l'homogénéité place les non-linéarités au centre du problème, l'anisotropie permet de réintroduire l'analyse linéaire. Ainsi, selon l'intensité de la source d'anisotropie et son temps caractéristique, il est possible de passer d'une analyse purement linéaire (telle que la théorie de la distorsion rapide ou *Rapid Distortion Theory*, RDT) à des théories statistiques non-linéaires telles que la turbulence faible ou turbulence d'ondes. L'avantage de la THA est donc double : l'écoulement considéré est plus réaliste et l'analyse linéaire est de nouveau utilisable.

L'objectif du présent travail est de contribuer à l'analyse de la turbulence homogène anisotrope. On conserve donc l'approche d'un domaine fluide infini mais dont les propriétés statistiques dépendent de la direction. En particulier, on se concentrera sur les écoulements axisymétriques et il existe donc une direction particulière définissant cette symétrie. Ce type d'écoulements est similaire à de nombreux écoulements réels où l'anisotropie est fondamentale. Les courants marins ou atmosphériques sont soumis à la force de Coriolis ainsi qu'à des effets de flottaison du fait de la stratification en densité. Le fer liquide constituant le noyau terrestre est également soumis à la même force de Coriolis ainsi qu'à la force de Lorentz résultant de l'existence du champ magnétique terrestre. Si ces différents écoulements ne sont pas homogènes, il est possible de considérer qu'une portion de fluide est localement homogène mais toujours soumise aux différentes forces énoncées plus haut. Dans une première approche, ce type d'écoulements peut donc être considéré comme une turbulence homogène anisotrope.

Notre travail se bornera à deux effets générateurs d'anisotropie que sont la force de Coriolis et la force de Lorentz. Une application directe est donc la dynamique du noyau terrestre (on néglige alors les effets dus à la stratification ainsi qu'aux conditions aux limites dues au manteau et au noyau central) ou les applications industrielles faisant intervenir un métal en fusion. De tels écoulements sont caractérisés par une grande variété de régimes. Aussi, notre travail se limite aux cas où la force de Coriolis et/ou la force de Lorentz jouent un rôle fondamental sur la dynamique. Autrement dit, la force de Coriolis est intense comparée aux termes d'advection,

et il existe un champ magnétique imposé intense. Nous nous restreindrons également au cas purement axisymétrique (quelques remarques concernant le cas non-axisymétrique pourront être trouvées au sein de l'annexe C) où l'axe de rotation est aligné avec le champ magnétique imposé.

Indépendamment, l'action de la force de Coriolis et de la force de Lorentz est largement documentée. Il existe de nombreux ouvrages et articles traitant du sujet sous différents aspects. Une partie du présent travail traite de ces deux forces indépendamment l'une de l'autre. Les résultats correspondants ne sont donc pas nécessairement originaux mais ont contribué grandement à ma compréhension de la turbulence et de l'anisotropie. De plus, l'effet de la rotation est aussi considéré du point de vue des corrélations à deux-temps et de l'aéroacoustique, ce qui constitue une approche originale. Enfin, les résultats en turbulence en rotation et en turbulence MHD serviront de référence lorsque l'on s'intéressera au cas couplé. Pour toutes ces raisons, nous avons jugé utile de rapporter ici quelques résultats concernant la turbulence en rotation et la turbulence MHD.

Afin d'étudier ces écoulements, nous utiliserons deux méthodes numériques complémentaires. La première est très largement utilisée dans le contexte d'écoulements homogènes tandis que la seconde est un peu plus marginale. La simulation numérique directe (Direct Numerical Simulation ou DNS par la suite) permet de résoudre explicitement les équations de Navier-Stokes tandis que la simulation cinématique (Kinematic Simulation ou KS dans la suite) est un modèle stochastique dont l'objectif est de générer un champ de vitesse dont les différentes propriétés sont parfaitement contrôlées. Même si l'on y reviendra, il est important de mentionner dès maintenant l'objectif de ce modèle synthétique. L'analyse des résultats DNS est souvent complexe et fait appel à des statistiques fines. Lorsque l'on considère la turbulence homogène anisotrope, il n'est pas aisé de différencier les phénomènes purement linéaires des interactions non-linéaires. C'est pour cette raison que l'analyse linéaire, ainsi que le modèle synthétique, constituent une approche intéressante dans le contexte qui est le nôtre. En comparaison avec les résultats DNS, le modèle synthétique que nous utilisons permet clairement de distinguer les phénomènes linéaires.

Le premier chapitre sera consacré à quelques rappels d'analyse statistique des écoulements turbulents et l'accent sera porté sur la turbulence homogène anisotrope. Le second chapitre développera les deux méthodes numériques utilisées dans ce travail. Le troisième chapitre se concentrera sur le cas de la turbulence homogène isotrope et en rotation. Notre contribution à ce type d'écoulements portera sur les corrélations en deux-temps avec quelques applications à l'aéroacoustique. Le quatrième chapitre traitera de la dynamique et de l'anisotropie d'une turbulence homogène soumise à l'action d'un champ magnétique imposé uniforme et stationnaire. Nous proposerons une application possible du modèle synthétique dans ce contexte, ainsi qu'une description fine de l'anisotropie. Enfin, le cinquième et dernier chapitre proposera une analyse de l'anisotropie au sein d'une turbulence MHD en rotation. Les solutions linéaires de ce type d'écoulements seront également proposées.

Les annexes rassembleront différents aspects qui n'ont pas trouvé leur place au sein du manuscrit, à savoir : quelques remarques concernant l'effet α , l'interaction non-linéaire de deux ondes d'Alfvén, une analyse préliminaire de la configuration non-axisymétrique (*i.e.* $\mathbf{B}_0 \perp \boldsymbol{\Omega}$) et enfin quelques considérations sur les statistiques Lagrangiennes.

Chapitre 1

Analyse statistique d'écoulements turbulents homogènes anisotropes.

L'objectif de ce premier chapitre est d'introduire les bases théoriques utilisées tout au long de ce manuscrit. On s'intéresse à un écoulement turbulent homogène incompressible mais pas nécessairement isotrope. L'anisotropie est en effet un des aspects fondamentaux du présent travail. Dans un premier temps, on propose de rappeler les notions propres au cas isotrope (turbulence homogène et isotrope ou THI), puis les notions propres au cas anisotrope (turbulence homogène et anisotrope ou THA). On ne rappelle ici que les notions fondamentales. De plus amples détails pourront être trouvés dans les nombreux ouvrages de références traitant de l'approche statistique en mécanique des fluides (voir par exemple [Tennekes & Lumley(1972), Mathieu & Scott(2000)]).

1.1 Équations de Navier-Stokes

Considérons un fluide Newtonien de masse volumique ρ et de viscosité cinématique ν . Le champ de vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ incompressible est alors régi par les équations de Navier-Stokes, qui peuvent s'écrire :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.2)$$

où p est la pression et $\mathbf{f}$ une force de volume. Le rapport entre le terme d'advection non-linéaire et la dissipation par viscosité définit le nombre de Reynolds selon :

$$Re \approx \frac{|\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}|}{|\nu \nabla^2 \mathbf{u}|} = \frac{u_0 l_0}{\nu}, \quad (1.3)$$

où u_0 et l_0 sont respectivement une vitesse et une longueur caractéristiques. Lorsque le nombre de Reynolds est grand devant l'unité, l'écoulement devient turbulent, et le caractère aléatoire de la vitesse motive l'utilisation d'une approche statistique.

1.2 Moyenne d'ensemble

Considérons une variable aléatoire v dépendant de l'espace et du temps. La quantité statistique la plus élémentaire est la moyenne de cette quantité sur un ensemble de réalisations indépendantes de l'écoulement. Celle-ci sera indifféremment notée $\bar{V}$ ou $\langle V \rangle$ dans la suite du manuscrit. On ne discutera pas ici de l'ergodicité mais on suppose que cet opérateur statistique possède toutes les propriétés de commutation avec les opérateurs de dérivations spatiales et temporelle.

La décomposition de Reynolds est utilisée pour de nombreuses applications, afin de séparer le champ de vitesse moyen $\bar{\mathbf{u}}$ et le champ de vitesse fluctuant $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}$, où $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ est la vitesse au point $\mathbf{x}$ et à l'instant t . En ce qui nous concerne, en l'absence de vitesse moyenne, seules les fluctuations turbulentes nous intéressent et les différents outils statistiques seront donc appliqués directement à la quantité $\mathbf{u}'$ qui sera simplement notée $\mathbf{u}$ dans la suite.

1.3 Tenseur de corrélation dans l'espace physique

Avant d'étudier la dynamique à proprement parler, il est nécessaire d'introduire différentes quantités statistiques classiquement utilisées lors de l'étude de la turbulence homogène. Un moment statistique de la vitesse $\mathbf{u}$ (ou des fluctuations magnétiques $\mathbf{b}$) d'ordre quelconque N peut être calculé à la même position $\mathbf{x}$ et au même instant t , ou bien en plusieurs points et en plusieurs temps. Pour chacune de ces quantités, il est possible d'écrire une équation d'évolution faisant apparaître le problème de fermeture. Si cet aspect est fondamental pour l'étude de la turbulence, il ne sera pas considéré au sein de ce manuscrit. En effet, les équations linéaires utilisées au sein des différents chapitres sont fermées tandis que les simulations numériques directes (pour plus détails, se reporter au chapitre 2) résolvent explicitement les équations de Navier-Stokes sans nécessité de modélisation des moments d'ordres élevés.

La quantité statistique la plus fondamentale est le tenseur de corrélations de la vitesse[†] en deux points et en deux temps défini par :

$$R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t, \tau) = \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t + \tau) \rangle . \quad (1.4)$$

Bien que les aspects temporels nous intéresseront plus loin (voir le chapitre 3), on suppose par la suite que la turbulence est statistiquement stationnaire, et l'on se restreint aux statistiques en un temps. L'équation (1.4) se réduit alors à

$$R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \langle u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle , \quad (1.5)$$

où le temps n'apparaît plus. Du fait de l'homogénéité, toutes les quantités statistiques sont indépendantes de la position $\mathbf{x}$ et ne dépendent donc que de l'écart $\mathbf{r}$. L'équation (1.5) se simplifie donc encore pour aboutir à

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = \langle u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle . \quad (1.6)$$

[†]La définition est analogue pour les fluctuations de champ magnétique.

Enfin, si l'on considère le cas de la turbulence isotrope et possédant les propriétés de symétrie miroir, le tenseur R_{ij} peut se réduire à la fonction [Batchelor(1953)]

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = A(r)\delta_{ij} + B(r)r_i r_j \quad (1.7)$$

qui est souvent réécrite de la manière suivante :

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = u_0^2 \left(\frac{f(r) - g(r)}{r^2} r_i r_j + g(r)\delta_{ij} \right), \quad (1.8)$$

où u_0 est la vitesse *rms* définie par $u_0 = \frac{1}{3} \langle u_i u_i \rangle$, tandis que $f(r)$ et $g(r)$ sont respectivement les fonctions de corrélations longitudinale et transversale. En réintroduisant la dépendance temporelle, il est possible d'écrire une équation sur la fonction de corrélation longitudinale $f(r)$ comme

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_0^2 f) = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r} \right) \left[R_{LL,L}(r, t) + 2\nu \frac{\partial}{\partial r} (u_0^2 f) \right], \quad (1.9)$$

où $R_{LL,L}$ est la fonction de corrélation longitudinale d'ordre 3 définie par

$$R_{LL,L}(r, t) = \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_i(\mathbf{x}, t) u_m(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle \frac{r_m}{r}. \quad (1.10)$$

L'équation (1.9) est l'équation de Kármán-Howarth.

1.4 Représentation spectrale

Puisque l'on s'intéresse ici au cas de la turbulence homogène existant dans un domaine infini, la transformée de Fourier est un outil utile pour traiter les équations des fluctuations de vitesse, de pression, ou de leurs moments. La transformée de Fourier inverse relie la fluctuation de vitesse $\mathbf{u}$ à sa composante spectrale $\hat{\mathbf{u}}$ selon :

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \iiint \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k}, \quad (1.11)$$

tandis que la transformée directe s'écrit :

$$\hat{u}_i(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint u_i(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad (1.12)$$

où $\mathbf{k}$ est le vecteur d'onde associé au coefficient spectral de la vitesse $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)$. L'équation de continuité $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ s'écrit dans l'espace spectral comme suit :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \int i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} = 0, \quad (1.13)$$

et doit être valable quelle que soit la position $\mathbf{x}$, aboutissant à la simple condition géométrique

$$\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0. \quad (1.14)$$

La quantité statistique la plus simple dans l'espace spectral est le tenseur de corrélations de deux modes de Fourier défini[†] par

$$\hat{R}_{ij}(\mathbf{k}, t) = \langle \hat{u}_i^*(\mathbf{k}, t) \hat{u}_j(\mathbf{k}, t) \rangle \quad (1.15)$$

[†] $\hat{u}_i(\mathbf{k}, t)$ est ici considérée comme une fonction généralisée au sens des distributions. En toute rigueur, la définition est $\langle \hat{u}_i^*(\mathbf{p}, t) \hat{u}_j(\mathbf{k}, t) \rangle = \hat{R}_{ij}(\mathbf{k}, t) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p})$, mais la définition (1.15) est suffisante pour la suite.

qui n'est autre que la transformée de Fourier directe du tenseur de corrélation en deux points selon

$$R_{ij}(\mathbf{r}, t) = \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle = \iiint \hat{R}_{ij}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k} . \quad (1.16)$$

Le tenseur $\hat{R}_{ij}(\mathbf{k})$ est complexe et possède les propriétés suivantes :

$$\hat{R}_{ij}(\mathbf{k}) = \hat{R}_{ji}^*(\mathbf{k}) = \hat{R}_{ji}(-\mathbf{k}) \quad (1.17)$$

car $R_{ij}(\mathbf{r})$ est réel et

$$k_i \hat{R}_{ij}(\mathbf{k}) = k_j \hat{R}_{ij}(\mathbf{k}) = 0 \quad (1.18)$$

du fait de l'incompressibilité de l'écoulement.

L'énergie cinétique contenue dans un mode de Fourier est simplement

$$e(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2} \langle \hat{u}_i^*(\mathbf{k}, t) \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) \rangle = \frac{1}{2} \hat{R}_{ii}(\mathbf{k}, t) \quad (1.19)$$

où la sommation se fait sur l'indice i . L'énergie turbulente totale s'en déduit directement par intégration selon

$$K(t) = \iiint \frac{1}{2} \hat{R}_{ii}(\mathbf{k}, t) d^3\mathbf{k} = \frac{1}{2} \langle u_i u_i \rangle . \quad (1.20)$$

Le spectre d'énergie est relié au tenseur de corrélation par

$$E(k) = \oint \frac{1}{2} \hat{R}_{ii}(\mathbf{k}) d\mathcal{S}(k) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \langle \hat{u}_i^*(\mathbf{k}, t) \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) \rangle k^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (1.21)$$

où $\mathcal{S}(k)$ correspond à la sphère de rayon k centrée à l'origine. Les propriétés de $E(k)$ se déduisent directement de celle de $\hat{R}_{ij}(\mathbf{k})$. D'une manière générale (*i.e.* sans hypothèses supplémentaires concernant l'isotropie de l'écoulement), le tenseur spectral contient bien plus d'informations que le spectre d'énergie. Cependant, si l'on se restreint à la turbulence isotrope, $\hat{R}_{ij}(\mathbf{k})$ est complètement déterminé par $E(k)$ selon la relation :

$$\hat{R}_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{E(k)}{4\pi k^2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) , \quad (1.22)$$

où δ_{ij} est le tenseur de Kronecker.

Le taux de dissipation est également relié au tenseur de corrélation selon

$$\epsilon(t) = \iiint \nu k^2 \hat{R}_{ii}(\mathbf{k}, t) d^3\mathbf{k} . \quad (1.23)$$

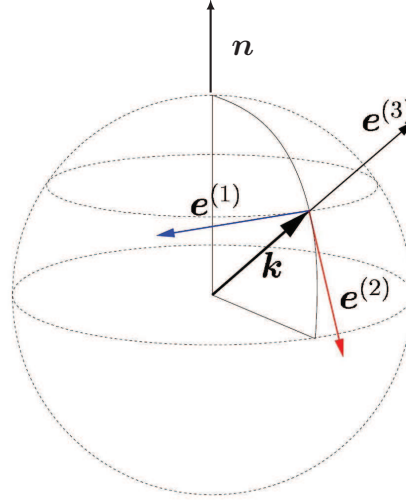
Finalement, il est possible d'écrire une équation d'évolution temporelle du spectre d'énergie, ou équation de Lin :

$$\frac{\partial E(k, t)}{\partial t} + 2\nu k^2 E(k, t) = T(k, t) \quad (1.24)$$

où $T(k, t)$ est le terme de transfert spectral, lié aux corrélations triples de vitesse. L'intégrale du terme de transfert est nulle :

$$\int_0^\infty T(k, t) dk = 0 , \quad (1.25)$$

montrant ainsi qu'il s'agit d'une terme de redistribution de l'énergie entre modes. L'équation (1.24) est l'équivalent spectral de l'équation de Kármán-Howarth (1.9).

FIG. 1.1 – Repère local de Craya-Herring lié au vecteur d'onde $\mathbf{k}$.

L'ensemble des quantités statistiques définies ci-dessus s'appliquent également aux fluctuations magnétiques $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ ainsi qu'à leurs composantes spectrales $\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{k}, t)$. Le spectre d'énergie magnétique est, par exemple, défini par :

$$M(k) = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \langle \hat{b}_i^*(\mathbf{k}, t) \hat{b}_i(\mathbf{k}, t) \rangle k^2 \sin \theta d\theta d\phi . \quad (1.26)$$

1.5 Décomposition poloïdale-toroïdale

Lorsqu'il existe une direction privilégiée $\mathbf{n}$ au sein de l'écoulement (axe de rotation, champ magnétique uniforme, gradient de densité uniforme...), un champ de vitesse incompressible à trois composantes peut être représenté par deux scalaires indépendants u^{tor} et u^{pol} selon

$$\mathbf{u} = \nabla \times (u^{\text{tor}} \mathbf{n}) + \nabla \times [\nabla (u^{\text{pol}} \mathbf{n})] . \quad (1.27)$$

Cette relation s'écrit dans l'espace de Fourier :

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{k} \times \mathbf{n} (\hat{u}^{\text{tor}}) - \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{n}) \hat{u}^{\text{pol}} , \quad (1.28)$$

et il apparaît que les modes tels que $\mathbf{k} // \mathbf{n}$ n'ont pas de contribution. Cela montre qu'il est impossible, avec cette représentation, de capturer dans l'espace physique un écoulement du type $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})$ avec $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ (appelé VSHF pour *vertically sheared horizontal flows*).

Pour pallier ce problème, le repère orthonormé suivant est introduit :

$$\mathbf{e}^{(1)} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{n}}{|\mathbf{k} \times \mathbf{n}|}, \quad \mathbf{e}^{(2)} = \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{e}^{(1)}, \quad \mathbf{e}^{(3)} = \frac{\mathbf{k}}{k} . \quad (1.29)$$

Ce repère, souvent dénommé repère de Craya-Herring, est en fait le repère local d'un système de coordonnées sphériques lié à $\mathbf{k}$ (voir figure 1.1). La singularité $\mathbf{k} // \mathbf{n}$ est contournée par l'utilisation d'un repère fixe au pôle.

Dans l'espace de Fourier, la condition d'incompressibilité s'écrit simplement :

$$\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = 0 \quad (1.30)$$

et traduit le fait que le vecteur vitesse est perpendiculaire au vecteur d'onde dans l'espace de Fourier. Il en résulte directement la décomposition suivante pour la vitesse :

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = u^{(1)}\mathbf{e}^{(1)} + u^{(2)}\mathbf{e}^{(2)}, \quad (1.31)$$

et de même pour la vorticité :

$$\hat{\omega}_i(\mathbf{k}) = ik \left(u^{(1)}e_i^{(2)} - u^{(2)}e_i^{(1)} \right). \quad (1.32)$$

Les composantes $u^{(1)}$ et $u^{(2)}$ sont respectivement qualifiées de toroïdale et poloïdale.   tant donné que le champ magnétique est également solénoïdal (sans hypothèse supplémentaire dans le contexte de la magnétohydrodynamique), cette décomposition dans l'espace de Craya est également valable pour les fluctuations magnétiques.

Une décomposition alternative, qui peut s'avérer avantageuse dans certains contextes, est la décomposition en modes hélicoïdaux définis par

$$N_i(\mathbf{k}) = e_i^{(2)}(\mathbf{k}) - ie_i^{(1)}(\mathbf{k}). \quad (1.33)$$

1.6 Anisotropie dans l'espace de Fourier

Comme nous l'avons déjà évoqué, l'anisotropie est un des aspects centraux de ce manuscrit. En particulier, on s'intéresse au cas où la turbulence est homogène, anisotrope mais néanmoins axisymétrique. Il s'agit d'un cas particulier d'anisotropie, mais qui concerne malgré tout une grande classe d'écoulements tels que la turbulence en rotation, la turbulence stratifiée, la turbulence soumise à un champ magnétique uniforme, *etc.*

Dans le cas général où aucune hypothèse n'est formulée concernant les symétries de l'écoulement, le tenseur de corrélation de second ordre se décompose [Batchelor(1953), Ould-Rouiss(2000)] selon^{à} :

$$\begin{aligned} R_{ij}(\mathbf{r}) &= \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle \\ &= A\delta_{ij} + 1 \text{ terme de type } Br_i r_j \\ &\quad + 6 \text{ termes de type } Cr_i n_j \\ &\quad + 3 \text{ termes de type } D\epsilon_{ijk} r_k \\ &\quad + 12 \text{ termes de type } E\epsilon_{ikl} r_k n_l r_j \\ &\quad + 6 \text{ termes de type } F\epsilon_{ikl} r_k n_l \mu_j \end{aligned}$$

où $\mathbf{n}$ et $\boldsymbol{\mu}$ sont deux vecteurs orthogonaux. A, B, C, D, E et F sont des scalaires dépendant de $r^2, r_i \lambda_i$ et $r_i \mu_i$. Si l'on suppose maintenant que l'écoulement est isotrope, cette expression se réduit à :

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = A\delta_{ij} + Br_i r_j \quad (1.34)$$

qui est l'équivalent de l'expression (1.22) dans l'espace physique.

^{à} Attention à l'erreur de frappe au sein de [Ould-Rouiss(2000)], qui présente 93 termes du type $Br_i r_j$ au lieu de 3.    noter également l'erreur au sein de [Batchelor(1953)], qui présente 3 termes au lieu de 1.

Dans le cas axisymétrique et en excluant cette fois la symétrie miroir, les relations (1.34) et (1.22) ne sont plus valables, et il n'existe plus de relation directe entre le spectre d'énergie $E(k)$ et le tenseur spectral. Le tenseur se décompose alors comme suit :

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = A\delta_{ij} + Br_i r_j + Cn_i n_j + D(n_i r_j + n_j r_i) \quad (1.35)$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire définissant la direction de symétrie. Cette relation peut également être obtenue dans l'espace de Fourier. La matrice complexe $\hat{R}_{ij}$ n'est pas une matrice quelconque. Elle est hermitienne et définie positive. La condition d'incompressibilité implique également que $\hat{R}_{ij}k_j = 0$. Ces différentes propriétés réduisent les 18 degrés de libertés nécessaires pour décrire une matrice complexe à 4 scalaires indépendants. Dans le repère de Craya-Herring, le tenseur spectral s'écrit en effet

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \Phi^{11} & \Phi^{12} & 0 \\ \Phi^{12*} & \Phi^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

ou de manière analogue

$$\hat{R}_{ij} = \Phi^{11}e_i^{(1)}e_j^{(1)} + \Phi^{12}e_i^{(1)}e_j^{(2)} + \Phi^{12*}e_i^{(2)}e_j^{(1)} + \Phi^{22}e_i^{(2)}e_j^{(2)} . \quad (1.37)$$

Cette relation peut se réécrire [Sagaut & Cambon(2008)] :

$$\hat{R}_{ij} = e(\mathbf{k}, t) \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) + i\mathcal{H}(\mathbf{k}, t)\epsilon_{ijn}\frac{k_n}{k^2} + \Re[\mathcal{Z}(\mathbf{k}, t)N_i(\mathbf{k})N_j(\mathbf{k})] \quad (1.38)$$

où $e(\mathbf{k}, t)$ et $\mathcal{H}(\mathbf{k}, t)$ sont des fonctions réelles, tandis que $\mathcal{Z}(\mathbf{k}, t)$ est une fonction complexe. Celles-ci sont liées au tenseur spectral par les relations :

$$e(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}\hat{R}_{ii}(\mathbf{k}), \quad \mathcal{H}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{2}i\epsilon_{ijn}k_j\hat{R}_{in}(\mathbf{k}) \quad \text{et} \quad \mathcal{Z}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}N_i^*(\mathbf{k})N_j^*(\mathbf{k})\hat{R}_{ij}(\mathbf{k}) \quad (1.39)$$

Comme nous l'avons déjà vu, la densité d'énergie cinétique $e(\mathbf{k}, t)$ est reliée au tenseur spectral selon :

$$e(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2}\hat{R}_{ii} = \frac{1}{2}(\Phi^{11} + \Phi^{22}) . \quad (1.40)$$

L'hélicité est définie par :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle &= \int i\epsilon_{ijk}k_j\hat{R}_{ik}(\mathbf{k})d\mathbf{k} \\ &= 2 \int \mathcal{H}(\mathbf{k})d\mathbf{k} \end{aligned} \quad (1.41)$$

où $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ est la vorticité. Dans le repère de Craya, le spectre d'hélicité est donc :

$$\mathcal{H}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2}ik\epsilon_{i3j}\hat{R}_{ij} = \frac{1}{2}ik(\Phi^{21} - \Phi^{12}) = -k\Im(\Phi^{12}) , \quad (1.42)$$

où $\Im$ est la partie imaginaire.

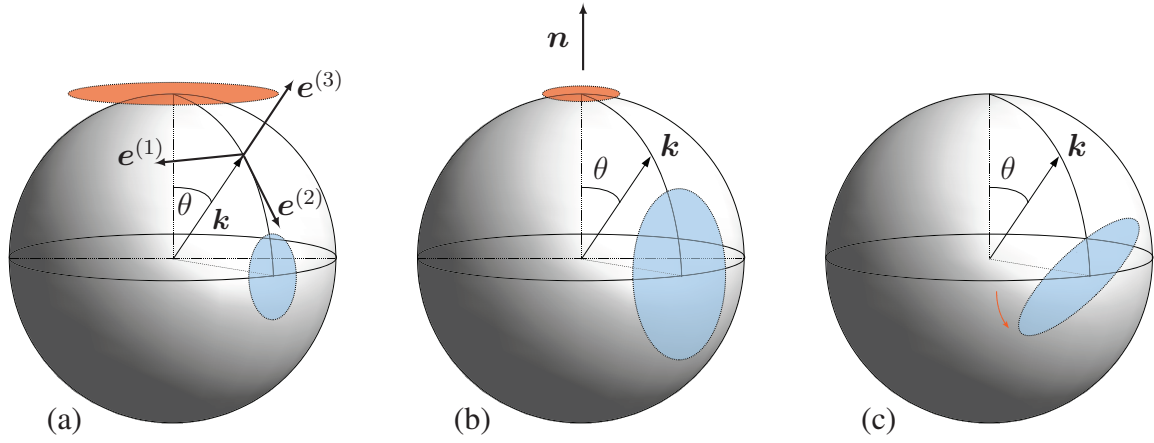


FIG. 1.2 – Schématisation de l'anisotropie dans l'espace spectral. Les disques de couleur sont de diamètre égal à $e(\mathbf{k})$. Sur la figure (a), à $k = |\mathbf{k}|$ fixé, l'énergie est plus importante au pôle qu'à l'équateur. Sur la figure (b), l'énergie est plus importante à l'équateur qu'au pôle. Ces deux cas sont caractéristiques d'une anisotropie directionnelle. Sur la figure (c), l'ellipse est de grand axe $e(\mathbf{k}) + |\mathcal{Z}(\mathbf{k})|$ et de petit axe $e(\mathbf{k}) - |\mathcal{Z}(\mathbf{k})|$. La rotation de l'ellipse autour de la direction locale du vecteur d'onde est donnée par la partie imaginaire de $\mathcal{Z}(\mathbf{k})$. Cette figure est représentative de l'anisotropie de polarisation.

Enfin, le troisième et dernier terme, qualifié de polarisation dans la suite, est défini par

$$\mathcal{Z}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2} \hat{R}_{ij} N_i^* N_j^* = \frac{1}{2} (\Phi^{22} - \Phi^{11} + i\Re(\Phi^{12})) . \quad (1.43)$$

L'interprétation de ces différentes quantités est la suivante. Il existe tout d'abord une anisotropie de directivité : l'énergie n'est pas uniformément répartie selon la direction du vecteur d'onde $\mathbf{k}$ (voir la figure 1.2(a) et (b)). L'écoulement peut ensuite être isotrope mais ne pas posséder de symétrie de réflexion $\mathbf{k} \leftrightarrow -\mathbf{k}$ auquel cas l'hélicité n'est pas nulle (écoulement quasi-isotrope). Enfin, la polarisation représente l'anisotropie dans le plan perpendiculaire à $\mathbf{k}$ (voir la figure 1.2(c)). De plus amples détails concernant l'impact de ces différentes quantités pourront être trouvés au sein du chapitre 2, section 2.2.4.

Il est clair que le tenseur spectral de corrélations des fluctuations magnétiques, défini par

$$\hat{B}_{ij}(\mathbf{k}) = \langle \hat{b}_i^*(\mathbf{k}) \hat{b}_j(\mathbf{k}) \rangle \quad (1.44)$$

possède les mêmes propriétés que le tenseur $\hat{R}_{ij}$ et peut donc se décomposer de la même manière dans l'espace de Craya, selon

$$\hat{B}_{ij}(\mathbf{k}) = e^M(\mathbf{k}) \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) + i\mathcal{H}^M(\mathbf{k}) \epsilon_{ijn} \frac{k_n}{k^2} + \Re[\mathcal{Z}^M(\mathbf{k}) N_i(\mathbf{k}) N_j(\mathbf{k})] \quad (1.45)$$

où l'indice M fait référence aux quantités magnétiques. Quelques détails supplémentaires concernant les corrélations croisées $\hat{c}_{ij}(\mathbf{k}) = \langle \hat{u}_i^*(\mathbf{k}) \hat{b}_j(\mathbf{k}) \rangle$ pourront être trouvés au sein de l'annexe A.

L'anisotropie sera caractérisée par les variations de ces scalaires en fonction de la direction du vecteur d'onde $\mathbf{k}$. Pour plus de détails à propos de cette notation, se référer à

[Sagaut & Cambon(2008)][†].

1.7 Définitions complémentaires

En plus des différentes quantités statistiques introduites au sein du paragraphe précédent, et afin de caractériser l'anisotropie des champs de vitesse et de fluctuation magnétique, on s'intéressera à différents indicateurs statistiques d'ores et déjà utilisés dans la cadre d'études de la turbulence MHD [Vorobev *et al.*(2005), Shebalin *et al.*(1983), Pouquet & Patterson(1978), Oughton *et al.*(1994), Zikanov & Thess(1998)] ou encore de la turbulence en rotation [Cambon *et al.*(1997), Liechtenstein *et al.*(2006), Salhi & Cambon(2007)].

Afin de caractériser l'anisotropie dans l'espace spectral grâce à un simple scalaire, on introduit l'angle dit de Shebalin[†] [Shebalin *et al.*(1983)] défini, pour une quantité vectorielle spectrale $\hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{k}, t)$, par :

$$\tan^2 \theta_Q = \frac{\sum_{\mathbf{k}} k_h^2 |\hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{k}, t)|^2}{\sum_{\mathbf{k}} k_z^2 |\hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{k}, t)|^2}, \quad (1.46)$$

où $k_h^2 = k_x^2 + k_y^2$ est la composante horizontale du vecteur d'onde, tandis que k_z est la composante verticale (alignée avec l'axe de symétrie) du vecteur d'onde. Cet angle permet de quantifier simplement l'anisotropie dans un contexte axisymétrique. Lorsque la quantité $\hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{k}, t)$ est isotrope, l'angle θ_Q tend vers une valeur de 54.74° . Lorsque la quantité $\hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{k}, t)$ ne dépend pas de la direction verticale, l'angle tend vers une valeur de 90° . Cette quantité est directement représentative de l'anisotropie directionnelle mais en aucun cas de la polarisation. De plus, elle ne permet pas d'identifier l'anisotropie selon l'échelle en raison de l'intégration sur l'ensemble des modes.

Deux autres quantités déjà utilisées dans le contexte d'une turbulence en rotation [Cambon *et al.*(1997), Morinishi *et al.*(2001)] permettent de quantifier l'anisotropie dans l'espace de Fourier. Il s'agit d'étudier l'anisotropie du tenseur de Reynolds grâce à la quantité :

$$b_{ij} = \frac{R_{ij}}{u_0^2} - \frac{\delta_{ij}}{3}, \quad (1.47)$$

où R_{ij} est le tenseur de Reynolds défini par :

$$R_{ij} = \langle u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) \rangle = \int \Re [\hat{R}_{ij}(\mathbf{k})] d\mathbf{k} \quad (1.48)$$

où $\Re$ est la partie réelle et u_0 la vitesse *rms* de l'écoulement. En utilisant la décomposition (1.38) pour le tenseur spectral de corrélations, le tenseur d'anisotropie b_{ij} peut être séparé en deux parties : $b_{ij} = b_{ij}^e + b_{ij}^z$, avec :

$$b_{ij}^e = \frac{1}{u_0^2} \int \left[e(\mathbf{k}) - \frac{E(k)}{4\pi k^2} \right] P_{ij}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (1.49)$$

$$b_{ij}^z = \frac{1}{u_0^2} \int \Re [\mathcal{Z}(\mathbf{k}) N_i(\mathbf{k}) N_j(\mathbf{k})] d\mathbf{k}. \quad (1.50)$$

[†]Attention cependant à la différence de notations, la quantité $k\mathcal{H}$ est considéré au sein de [Sagaut & Cambon(2008)] tandis que l'on considère ici la quantité $\mathcal{H}$.

[†]Une définition plus ancienne mais analogue peut être trouvée au sein de [Alemany *et al.*(1979)].

Le premier terme caractérise l'écart entre l'énergie locale et sa moyenne sphérique, et est donc représentatif de l'anisotropie de directivité, tandis que le second terme caractérise la polarisation. La définition est analogue pour les fluctuations magnétiques. Dans la suite du manuscrit, on ne s'intéressera qu'à la composante b_{33} du tenseur d'anisotropie de Reynolds. Dans une configuration axisymétrique, les trois composantes diagonales du tenseur sont en effet reliées par la relation[‡] $b_{33} = -2b_{11} = -2b_{22}$. Afin de faciliter l'interprétation de ces différentes quantités, il est possible de distinguer trois cas particuliers (sans hélicité dans chacun des cas) :

- le cas isotrope tri-dimensionnel à trois composantes (souvent noté 3D-3C) caractérisé par $b_{ij} = b_{ij}^e = b_{ij}^Z = 0$ (dans ce cas, $e = E(k)/4\pi k^2$ et $Z = \mathcal{H} = 0$).
- le cas bi-dimensionnel à deux composantes (2D-2C) caractérisé par $b_{33} = -1/3$, $b_{33}^e = 1/6$ et $b_{33}^Z = -1/2$ (avec dans ce cas, $e = E(k)\delta(k_3)/2\pi k$, $Z = -E(k)\delta(k_3)/2\pi k$ et $\mathcal{H} = 0$).
- le cas bi-dimensionnel à trois composantes (2D-3C) caractérisé par $b_{33} = 1/6$, $b_{33}^e = 1/6$ et $b_{33}^Z = 0$ (avec dans ce cas, $e = E(k)\delta(k_3)/2\pi k$ et $Z = \mathcal{H} = 0$).

De même, il est possible de mettre en évidence le lien entre les invariants du tenseur spectral et les échelles intégrales de l'écoulement. Ainsi, dans l'espace physique, l'échelle L_{ij}^l représente la longueur de corrélation dans la direction l entre deux composantes i et j de la vitesse [Cambon & Jacquin(1989), Cambon *et al.*(1997)] :

$$L_{ij}^l = \frac{1}{\langle u_i u_j \rangle} \int_0^\infty \langle u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle d\mathbf{r} \quad (1.51)$$

où le vecteur de séparation est dans ce cas défini par $r_k = r\delta_{kl}$. En supposant l'homogénéité, une écriture équivalente dans l'espace spectral est :

$$L_{ij}^l = \frac{\pi}{\langle u_i u_j \rangle} \iint \hat{R}_{ij}(\mathbf{k}) \Big|_{k_l=0} d^2\mathbf{k} , \quad (1.52)$$

Ainsi, les longueurs de corrélations transverses et longitudinales, dans la direction verticale (alignée avec l'axe de rotation et/ou le champ magnétique imposé dans la suite), sont définies par [Cambon & Jacquin(1989)] :

$$L_{33}^3 = \frac{2\pi^2}{u_3^2} \int_0^\infty [e(\mathbf{k}) + \Re Z(\mathbf{k})] \Big|_{k_3=0} k dk \quad (1.53)$$

$$L_{11}^3 = \frac{\pi^2}{u_1^2} \int_0^\infty [e(\mathbf{k}) - \Re Z(\mathbf{k})] \Big|_{k_3=0} k dk . \quad (1.54)$$

La définition de ces corrélations est analogue pour la vorticité :

$$L_{ij}^l(\omega) = \frac{1}{\langle \omega_i \omega_j \rangle} \int_0^\infty \langle \omega_i(\mathbf{x}) \omega_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle d\mathbf{r} , \quad (1.55)$$

où la notation $L_{ij}^l(\omega)$ est introduite afin de distinguer les corrélations de vorticité des corrélations de vitesse, notées $L_{ij}^l(u)$.

Ces différentes quantités rendent compte de l'anisotropie globale mais il apparaîtra évident par la suite que l'anisotropie dépend souvent de l'échelle considérée. Pour cette raison, il est

[‡]N'importe quelle composante peut s'obtenir à partir de la relation $b_{ij}^{\{e,Z\}} = -3(\delta_{ij}/3 - \delta_{i3}\delta_{j3})b_{33}^{\{e,Z\}}/2$.

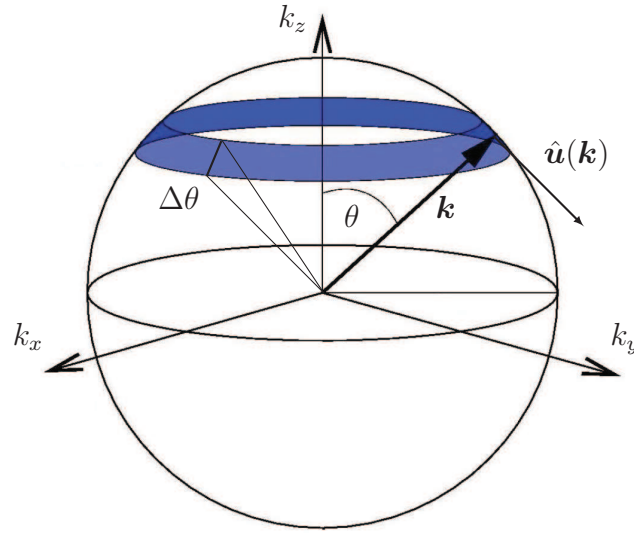


FIG. 1.3 – L'aire en couleur représente le domaine d'intégration, pour un nombre d'onde k fixé, et pour un angle polaire θ fixé.

important d'être en mesure de quantifier l'anisotropie en fonction du nombre d'onde. Pour cela, nous introduisons deux autres quantités. Pour chaque nombre d'onde k , nous calculons le rapport entre l'énergie horizontale et l'énergie verticale [Vorobev *et al.*(2005)] selon :

$$c(k) = \frac{E_1(k) + E_2(k)}{2E_3(k)}, \quad (1.56)$$

où

$$E_i(k)\Delta k = \sum_{k-\Delta k/2 < |\mathbf{k}| < k+\Delta k/2} \hat{u}_i(\mathbf{k})\hat{u}_i^*(\mathbf{k}). \quad (1.57)$$

Enfin, la quantité la plus fine que nous utiliserons, et qui tient en compte à la fois de l'échelle k et de la direction de propagation θ (angle polaire dans le repère Craya, défini par rapport à la verticale), est le spectre angulaire d'énergie. Cette quantité, similaire aux corrélations angulaires utilisées au sein du chapitre 3, est toujours basée sur l'axisymétrie de l'écoulement. L'idée est de moyennner l'énergie dans l'espace spectral selon l'angle azimuthal ϕ , tout en conservant la dépendance à k et l'angle polaire θ selon :

$$E(k, \theta) = \sum_{\substack{k-\Delta k/2 < |\mathbf{k}| < k+\Delta k/2 \\ \theta-\Delta\theta/2 < \theta < \theta+\Delta\theta/2}} \hat{u}_i(k, \theta)\hat{u}_i^*(k, \theta). \quad (1.58)$$

Le pas angulaire $\Delta\theta$ est constant et l'angle solide des différents domaines angulaires varie avec θ (voir la figure 1.3). Afin de se ramener à un spectre indépendant de θ dans le cas isotrope, il est nécessaire de multiplier l'expression (1.58) par une fonction de poids afin d'aboutir à l'expression finale :

$$E(k, \theta) = \left[\int_{\theta-\Delta\theta/2}^{\theta+\Delta\theta/2} \cos \theta d\theta \right]^{-1} \sum_{\substack{k-\Delta k/2 < |\mathbf{k}| < k+\Delta k/2 \\ \theta-\Delta\theta/2 < \theta < \theta+\Delta\theta/2}} \hat{u}_i(k, \theta)\hat{u}_i^*(k, \theta). \quad (1.59)$$

Cette quantité servira principalement à distinguer l'énergie contenue dans les modes $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)$ tels que $\mathbf{k} \perp \mathbf{n}$ (i.e. $\theta \approx \pi/2$) de l'énergie contenue dans les modes tels que $\mathbf{k} // \mathbf{n}$ (i.e. $\theta \approx 0$).

Les premiers correspondant à l'équateur tandis que les seconds correspondent au pôle. Des quantités similaires peuvent être trouvées au sein de [Burattini *et al.*(2008), Teaca *et al.*(2009)].

Chapitre 2

Méthodes numériques

Ce second chapitre se concentre sur les méthodes numériques utilisées lors de ce travail. L'objectif est ici de simuler numériquement l'évolution spatio-temporelle d'un écoulement incompressible et homogène mais pas nécessairement isotrope. Deux méthodes distinctes sont utilisées à cette fin.

La simulation cinématique ou *Kinematic Simulation* (KS) est une méthode numérique générant un champ de vitesse stochastique dans l'espace physique comme une superposition de modes de Fourier [Kraichnan(1970)]. Si le champ résultant n'est pas solution des équations de Navier-Stokes, il possède cependant différentes propriétés statistiques proches de celles obtenues par DNS par exemple. Il est de plus possible d'y inclure explicitement les solutions linéarisées des équations de Navier-Stokes.

La Simulation Numérique Directe (SND) ou *Direct Numerical Simulation* (DNS) résout les équations de Navier-Stokes sans modèle de fermeture puisque toutes les échelles de l'écoulement sont résolues. Du fait de la limitation de la puissance de calcul, le nombre de Reynolds est relativement faible comparé à celui que l'on rencontrerait au sein d'applications pratiques. On utilise dans la suite l'approche dite pseudo-spectrale qui consiste à calculer les opérateurs vectoriels dans l'espace de Fourier et les termes non-linéaires—faisant intervenir des produits de quantités dans l'espace physique et donc des produits de convolution dans l'espace de Fourier—dans l'espace physique.

2.1 Modèles synthétiques de turbulence

Devant la complexité de la turbulence et son existence dans de nombreux domaines, il existe un grand nombre de modèles d'écoulements turbulents, chacun ayant des hypothèses et des objectifs bien précis. Une grande partie des efforts en modélisation de la turbulence se concentre sur le problème de fermeture. Du fait des non-linéarités, les équations pour une quantité d'un certain ordre font intervenir des quantités inconnues d'ordre supérieur. Dans le contexte de la simulation des grandes échelles, lorsque que l'on tronque les équations dans l'espace de Fourier afin de ne résoudre qu'une partie des échelles, il est par la suite nécessaire de modéliser les échelles non-résolues ainsi que leurs effets sur les grandes échelles. Enfin, lorsque l'on ne considère que l'écoulement moyen, l'ensemble des fluctuations doivent être modélisées sous la forme de tension de Reynolds.

Une autre approche moins connue réside dans les modèles synthétiques de turbulence. L'objectif est ici radicalement différent puisque le champ de vitesse est construit de toute pièce. Les équations de Navier-Stokes ne sont pas explicitement résolues. Les avantages sont en général un coût numérique très faible et un contrôle précis des propriétés de l'écoulement. Ces modèles sont rarement utilisés seuls et sont souvent utilisés en complément d'un modèle plus complexe ou d'une simulation directe afin d'enrichir l'analyse. Du moins, c'est ici l'approche que nous retenons : le modèle synthétique est utilisé comme outil de diagnostic afin de pouvoir analyser plus facilement les résultats obtenus par simulation directe.

Le principe de base est commun à l'ensemble de ces modèles, il s'agit de générer un champ de vitesse stochastique dans l'espace physique à partir d'un protocole arbitraire. Les deux éléments fondamentaux étant souvent une structure élémentaire dans l'espace physique (tourbillon, onde plane, ...) et un processus construisant l'instationnarité (pulsation aléatoire, équation de Langevin...).

Il serait inutile ici de rappeler tous les types de modèles synthétiques en turbulence, qui ont chacun des domaines d'application et des objectifs différents. On se concentrera donc dans la prochaine section aux modèles de type *Kinematic Simulation*.

2.2 Kinematic Simulation

2.2.1 Concept de base

Considérons un champ de vitesse turbulent homogène défini par la variable aléatoire $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ où $\mathbf{x}$ représente la position et t le temps. La transformée de Fourier en espace et en temps de cette variable est définie par :

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega t)} d\mathbf{x} dt. \quad (2.1)$$

De la même façon, la retour dans l'espace physique se fait par transformée inverse selon :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega t)} d\mathbf{k} d\omega. \quad (2.2)$$

La variable $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ est réelle, la variable complexe $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \omega)$ vérifie donc la propriété de symétrie Hermitienne, à savoir :

$$\hat{\mathbf{u}}^*(\mathbf{k}, \omega) = \hat{\mathbf{u}}(-\mathbf{k}, -\omega) \quad (2.3)$$

où $\hat{\mathbf{u}}^*(\mathbf{k}, \omega)$ est la variable conjuguée de $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \omega)$.

La représentation spectrale des quantités turbulentes possède un avantage certain dans le cas de la turbulence homogène incompressible. En effet, la condition d'incompressibilité $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ se réduit, dans l'espace spectral, à une contrainte géométrique du type :

$$\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = 0. \quad (2.4)$$

Cette condition impose l'orthogonalité entre le vecteur d'onde et le vecteur local $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \omega)$.

L'idée initiale de la KS est de proposer une forme discrète de l'équation (2.1). La formulation la plus générale est :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}_n, \omega_p) \exp[i(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x} + \omega_p t)] . \quad (2.5)$$

Cette formulation est ensuite étendue au cas d'un nombre fini de modes de Fourier pour aboutir à la formulation suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=-N}^N \sum_{p=-P}^P \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}_n, \omega_p) \exp[i(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x} + \omega_p t)] . \quad (2.6)$$

L'objectif final étant de générer la variable aléatoire $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, il est nécessaire de définir les amplitudes $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}_n, \omega_p)$ ainsi que les variables $\mathbf{k}_n$ et ω_p . La méthode de génération de ces variables n'est bien évidemment pas unique et deux d'entre elles seront développées dans ce manuscrit. La première est la plus largement utilisée et documentée tandis que la seconde est originale et se généralise de façon élégante au cas homogène anisotrope.

2.2.2 Présentation du modèle classique

L'objectif de cette partie est de présenter le modèle tel qu'il est utilisé par un grand nombre d'auteurs. Une présentation exhaustive du modèle peut être trouvée dans [Fung *et al.* (1992)]. Il est cependant important de souligner que le modèle le plus utilisé est en fait la version la plus simple parmi les différents degrés de raffinement présentés dans [Fung *et al.* (1992)].

Champ de vitesse

L'idée originelle de la KS est de résoudre l'équation suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial t} = \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t) \quad (2.7)$$

où $\mathbf{x}(t)$ est la position d'une particule fluide à l'instant t et $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ est le champ de vitesse Eulerien. Afin de résoudre cette équation, il est nécessaire de connaître le champ de vitesse en tout point et à tout instant. Plutôt que de résoudre les équations de Navier-Stokes, l'idée à l'origine de la KS est de générer arbitrairement un champ de vitesse afin d'intégrer les trajectoires des particules fluides grâce à l'équation (2.7).

Se basant sur la première tentative de construction d'un champ stochastique due à Kraichnan [Kraichnan(1970)], Fung et al.[Fung *et al.* (1992)] ont écrit le champ de vitesse comme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \left[\left(\frac{\mathbf{a}_{mnp} \times \boldsymbol{\kappa}_{mn}}{k_n} \right) \cos\{\boldsymbol{\kappa}_{mn} \cdot \mathbf{x} + \omega_{np} t\} + \left(\frac{\mathbf{b}_{mnp} \times \boldsymbol{\kappa}_{mn}}{k_n} \right) \sin\{\boldsymbol{\kappa}_{mn} \cdot \mathbf{x} + \omega_{np} t\} \right] \quad (2.8)$$

où $k_n = |\boldsymbol{\kappa}_{mn}|$ pour tout m .

Il peut ainsi exister plusieurs vecteurs d'onde de même module et plusieurs pulsations pour une composante de Fourier donnée. Dans la plupart des cas, $N = 1$ and $P = 1$, et le champ de vitesse peut ainsi s'écrire :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^M \left[(\mathbf{a}_n \times \hat{\mathbf{k}}_n) \cos\{\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x} + \omega_n t\} + (\mathbf{b}_n \times \hat{\mathbf{k}}_n) \sin\{\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x} + \omega_n t\} \right] \quad (2.9)$$

Cette formulation est identique à celle de Kraichnan [Kraichnan(1970)]. L'utilisation du produit vectoriel découle directement de la condition d'incompressibilité. Les directions des vecteurs $\mathbf{k}_n$, $\mathbf{a}_n$ et $\mathbf{b}_n$ sont aléatoires, et le produit vectoriel assure donc la création d'un vecteur orthogonal à $\mathbf{k}_n$.

Nous préférons par la suite utiliser une décomposition dans l'espace de Craya. Cette méthode est en lien direct avec celle utilisée par Rogallo [Rogallo(1981)] pour initialiser des simulations directes. L'amplitude de chaque mode de Fourier est ainsi décomposée dans le plan $(\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)})$ (voir la figure 1.1) et l'initialisation se réduit ainsi à la génération d'une phase aléatoire $\beta(\mathbf{k}_n)$ afin de répartir l'énergie entre les composantes toroïdale et poloïdale selon :

$$\hat{u}^{(1)}(\mathbf{k}_n) = \sqrt{\frac{E(k_n)}{4\pi k_n^2}} \cos \beta(\mathbf{k}_n) \quad (2.10)$$

$$\hat{u}^{(2)}(\mathbf{k}_n) = \sqrt{\frac{E(k_n)}{4\pi k_n^2}} \sin \beta(\mathbf{k}_n), \quad (2.11)$$

où $E(k)$ est le spectre d'énergie imposé, et la composante sur $\mathbf{e}^{(3)}$ étant nulle du fait de l'incompressibilité. Plus de détails concernant cette approche pourront être trouvés dans la suite de ce chapitre.

Discrétisation de l'espace spectral

Les valeurs pour k_n sont choisies parmi une discrétisation de l'espace des nombres d'onde. Il a été montré [Malik(1991), Goto *et al.*(2005)] que la discrétisation suivante donne de meilleurs résultats en terme de statistiques Lagrangiennes :

$$k_n = k_1 \left(\frac{k_M}{k_1} \right)^{(n-1)/(M-1)}. \quad (2.12)$$

La détermination du vecteur d'onde $\mathbf{k}_n$ est basée sur le choix de deux angles aléatoires. L'angle azimuthal ϕ est compris entre 0 et 2π , et possède une distribution uniforme tandis que l'angle polaire θ est choisi entre 0 et π et possède la distribution non uniforme

$$P(\theta) = \sin \theta \quad (2.13)$$

du fait de la représentation sphérique. Les vecteurs $\mathbf{a}_n$ et $\mathbf{b}_n$ sont choisis de telle manière que le champ de vitesse respecte une distribution d'énergie $E(k_n)$ imposée :

$$|\mathbf{a}_n|^2 = |\mathbf{b}_n|^2 = 2E(k_n)\Delta k_n. \quad (2.14)$$

Instationnarité

Concernant l'instationnarité, on se bornera ici aux éléments classiques car les corrélations deux-temps feront l'objet du prochain chapitre. Les pulsations ω_n au sein de l'équation 2.9 sont déterminées par une loi arbitraire fonction du nombre d'onde k_n . La plupart des travaux utilisant la KS se basent sur un temps caractéristique lié au temps de retournement d'une structure turbulence défini par

$$\omega_n = \lambda \sqrt{k_n^3 E(k_n)} \quad (2.15)$$

où λ est un paramètre réel qui contrôle l'intensité de l'instationnarité. $\lambda = 0$ correspond à un champ turbulent gelé tandis que $\lambda \gg 1$ correspond à une turbulence évoluant très rapidement devant le temps caractéristique des structures la constituant. Avec cette hypothèse, une structure d'échelle caractéristique $1/k$ possède une vitesse caractéristique $\sqrt{kE(k)}$ (pour plus de détails, se référer au chapitre 3).

Une autre possibilité, qui sera discutée plus loin, est basée sur l'hypothèse de *sweeping* selon laquelle les petites structures de l'écoulement sont advectées par les structures énergétiques. La pulsation est alors

$$\omega_n = \lambda u_0 k_n \quad (2.16)$$

où u_0 est la vitesse *rms* de l'écoulement. Une structure d'échelle caractéristique $1/k$ possède ainsi une vitesse caractéristique u_0 , indépendante de l'échelle considérée. Il est à noter que ces pulsations ne représentent pas un processus physique réel. L'objectif est ici de rendre le champ synthétique instationnaire par l'utilisation d'une pulsation arbitraire pour chacun des modes.

Dans la majorité des applications, les pulsations sont des fonctions déterministes du nombre d'onde. Cependant, il est possible de définir ω_n comme une variable aléatoire. Fung *et al.* [Fung *et al.*(1992)] ont ainsi considéré que la pulsation est une variable aléatoire Gaussienne de moyenne $\varpi(k)$ et d'écart type $\sigma_\omega(k)$. Cette formulation aboutit au spectre spatio-temporel

$$\mathcal{E}(k, \omega) = E(k) \frac{\exp [-(\omega - \varpi(k))^2 / 2\sigma_\omega^2(k)]}{\sqrt{2\pi}\sigma_\omega(k)} \quad (2.17)$$

à partir duquel le spectre d'énergie $E(k)$ se retrouve par intégration sur toutes les pulsations ω . On se retient ici au cas où $\varpi(k) = \sigma_\omega(k)$. Il existe d'autres méthodes ayant pour objectif de générer l'instationnarité du champ synthétique [Béchara *et al.*(1994), Bailly & Juvé(1999), Billson *et al.*(2004)]. On se concentrera cependant sur l'utilisation d'une pulsation aléatoire, qui peut être soit déterministe soit Gaussienne (avec $\varpi(k) = \sigma_\omega(k)$), et dont la loi $\varpi(k)$ est déterminée à partir des relations (2.16) ou (2.15).

Avantages et inconvénients

Les avantages de la KS classique sont les suivants :

- Le modèle est numériquement très efficace. Chaque réalisation de l'écoulement contient toutes les informations spatio-temporelles sans nécessité d'itérations temporelles (ce qui est le cas en DNS). La vitesse peut être calculée le long des trajectoires uniquement. On s'affranchit ainsi du calcul de la vitesse sur une grille cartésienne et des problèmes d'interpolation qui en résultent (la position d'une particule ne correspond jamais à un point de collocation).

- Certaines propriétés fondamentales sont vérifiées exactement pour chacune des réalisations. L'écoulement est par exemple solénoïdal, contrairement à d'autres modèles stochastiques Lagrangiens. Les propriétés de la transformée de Fourier sont préservées, et il est possible de calculer explicitement la vorticité, la pression, *etc.*
- Partant d'une quantité statistique simple, le spectre d'énergie $E(k)$, le modèle génère un champ de vitesse dont les propriétés spatio-temporelles sont continues pour chaque réalisation. Cela permet de calculer par exemple les corrélations de vitesse en deux-points et deux-temps, quantité statistique très importante en diffusion Lagrangienne ou pour estimer le son rayonné (par la biais d'une analogie acoustique).
- Les éléments constitutifs du champ synthétique sont parfaitement contrôlés par l'utilisateur. Il constitue donc un outil de diagnostic intéressant, particulièrement lorsqu'il est comparé avec une DNS.

Les inconvénients sont :

- La construction du champ de vitesse nécessite la génération de variables aléatoires comme la phase ou les angles caractérisant la direction du vecteur d'onde. Ces variables sont générées à partir de lois de probabilités très simples qui favorisent, au moins pour le champ de vitesse (et sûrement pour ses inc r ments), des statistiques Gaussiennes. Le *skewness* du modèle demeure donc nul.
- L'instationnarité générée par des fréquences aléatoires n'est liée à aucun phénomène physique.
- L'isotropie de l'écoulement est imposée par construction (cet inconvénient disparaît au sein de la méthode présentée dans la section 2.2.3).
- Il n'existe pas de structures cohérentes au sein de l'écoulement. Même dans le cas d'une turbulence isotrope, il a été observé des tubes allongés de vorticité à la fois exp riementalement et numériquement (*e.g.* DNS très haute résolution [Kaneda & Ishihara(2000)], voir également la figure 2.1).

Pour illustrer l'absence de structures cohérentes en KS, on propose de visualiser deux champs de vitesse calculés par DNS et KS. La DNS est forcée et le spectre quasi-stationnaire résultant est utilisée pour initialiser la KS. La figure 2.1 présente l'ensrophie de deux champs de vitesse, l'un calculé par DNS et l'autre par KS. Si l'apparition de filaments de vorticité est claire sur la figure 2.1(a), le champ synthétique ne présente que des zones ponctuelles de vorticité intense résultant de la superposition aléatoire des modes de Fourier.

Les deux sous-sections suivantes, 2.2.3 et 2.2.4, ont pour objectif de présenter une généralisation du modèle KS. Dans un premier temps, cette généralisation se bornera au cas isotrope (voir la section 2.2.3) avant de s'étendre au cas anisotrope axisymétrique (voir la section 2.2.4).

2.2.3 Généralisation dans le cas isotrope

On propose ici une manière différente de générer un champ de vitesse stochastique dont le spectre d'énergie est imposé. Cette méthode fut originellement développée par J. Scott et se voit adaptée ici au cas de l'initialisation à partir d'un spectre provenant d'une DNS.

  n'importe quel temps t et en n'importe quel point $\mathbf{x}$ du domaine turbulent, la vitesse est

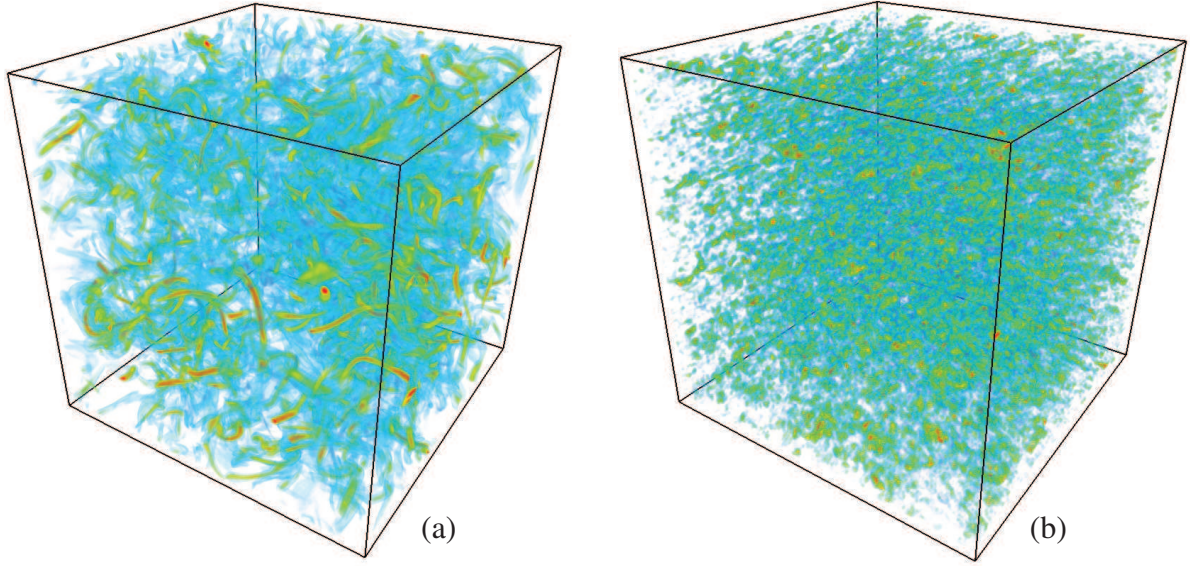


FIG. 2.1 – Enstrophie en turbulence isotrope. Les zones de vorticité intense (de l'ordre de 50% de la valeur maximale) sont représentées en rouge, tandis que les zones de faible vorticité (de l'ordre de 10% de la valeur maximale) sont représentées en bleu. La même échelle est utilisée pour les deux figures. (a) DNS forcée avec une résolution de 256^3 modes de Fourier. (b) KS. La plupart des visualisations de ce manuscrit sont réalisées avec le logiciel Vapor [Clyne *et al.*(2007)], www.vapor.ucar.edu.

obtenue par la sommation suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \Re \sum_{n=1}^M e^{i(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x} + \omega_n t)} \times \left(u^{(1)}(\mathbf{k}_n) e^{(1)}(\mathbf{k}_n) + u^{(2)}(\mathbf{k}_n) e^{(2)}(\mathbf{k}_n) \right) \quad (2.18)$$

où le repère $(e^{(1)}, e^{(2)}, \mathbf{k}/|\mathbf{k}|)$ est le repère local de Craya-Herring (voir la figure 1.1) et $\Re$ est la partie réelle. La composante spectrale colinéaire au vecteur d'onde $\mathbf{k}$ est nulle par construction et le champ résultant est donc nécessairement incompressible. Cette définition du champ de vitesse est analogue à l'équation (2.9), mais présente l'avantage d'alléger la notation en introduisant une exponentielle complexe et en simplifiant la prise en compte de la condition d'incompressibilité[†].

On s'intéresse dans un premier temps aux corrélations spatiales d'un tel champ. L'instationnarité est donc dans un premier temps ignorée et l'équation (2.18) se simplifie :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = A \Re \sum_{n=1}^M e^{i(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x} + \phi_n)} \times \left(e^{i\psi_n^{(1)}} e^{(1)}(\mathbf{k}_n) + e^{i\psi_n^{(2)}} e^{(2)}(\mathbf{k}_n) \right), \quad (2.19)$$

où A est une constante réelle, $\mathbf{k}_n$, $\psi_n^{(1)}$, $\psi_n^{(2)}$ and ϕ_n sont des variables aléatoires indépendantes.

Si la méthode classique discrétise l'espace des nombres de d'onde de manière arbitraire, nous préférons considérer que le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ est une variable aléatoire de densité de probabilité $P(\mathbf{k})$ de telle manière que $P(\mathbf{k}) = P(-\mathbf{k})$. Puisque l'on se restreint ici à une

[†]Les solutions linéaires seront par la suite établies dans le repère de Craya, et l'écriture présente l'avantage de faire directement apparaître les composantes toroïdales et poloïdales de la vitesse.

turbulence isotrope, les variables $\psi_n^{(1)}$, $\psi_n^{(2)}$ et ϕ_n sont uniformément réparties sur $[0 : 2\pi]$. Ainsi, le champ de vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ est solénoïdal, statistiquement homogène et de moyenne nulle. De plus, si $P(\mathbf{k}) = P(k = |\mathbf{k}|)$, alors le champ $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ est statistiquement isotrope. Lorsque $N \rightarrow \infty$, le champ synthétique $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ tend vers un procédé aléatoire Gaussien.

Calculons dans un premier temps le tenseur des corrélations défini par :

$$R_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \overline{u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}')}. \quad (2.20)$$

En posant :

$$\mathbf{v}^{(n)} = e^{i(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x} + \phi_n)} \times \left(e^{i\psi_n^{(1)}} \mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{k}_n) + e^{i\psi_n^{(2)}} \mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{k}_n) \right), \quad (2.21)$$

nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}A \sum_{n=1}^M (\mathbf{v}^{(n)}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^{(n)*}(\mathbf{x})) \\ &= A \Re \sum_{n=1}^N (\mathbf{v}^{(n)}(\mathbf{x})) , \end{aligned} \quad (2.22)$$

où la notation $*$ représente la conjugaison complexe. Ainsi, le tenseur des corrélations s'écrit :

$$R_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{4}A^2 \overline{\left(\sum_{n=1}^M (v_i^{(n)}(\mathbf{x}) + v_i^{(n)*}(\mathbf{x})) \right)} \left(\sum_{m=1}^M (v_j^{(m)}(\mathbf{x}') + v_j^{(m)*}(\mathbf{x}')) \right). \quad (2.23)$$

Étant donné que les variables $\mathbf{v}^{(n)}(\mathbf{x})$ sont statistiquement indépendantes les unes des autres et de moyenne nulle, et étant donné la symétrie de l'équation (2.23), nous avons

$$R_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{2}A^2 \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M \overline{(v_i^{(n)}(\mathbf{x})v_j^{(m)*}(\mathbf{x}'))}. \quad (2.24)$$

Lorsque $n \neq m$, les variables aléatoires $v_i^{(n)}(\mathbf{x})$ et $v_j^{(m)}(\mathbf{x})$ sont statistiquement indépendantes :

$$\begin{aligned} R_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \frac{1}{2}A^2 \sum_{n=1}^M \overline{(v_i^{(n)}(\mathbf{x})v_j^{(n)*}(\mathbf{x}'))} \\ &= \frac{1}{2}A^2 M \overline{v_i(\mathbf{x})v_j^*(\mathbf{x}')}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

où la notation $v(\mathbf{x})$ remplace $\mathbf{v}^{(n)}(\mathbf{x})$, quel que soit n .

Le tenseur est calculé grâce à (2.21) en moyennant sur $\psi_n^{(1)}$, $\psi_n^{(2)}$ et ϕ_n :

$$\begin{aligned} \overline{v_i(\mathbf{x})v_j^*(\mathbf{x}')} &= \overline{\left(e^{i\psi_n^{(1)}} e_i^{(1)}(\mathbf{k}) + e^{i\psi_n^{(2)}} e_i^{(2)}(\mathbf{k}) \right) \left(e^{i\psi_n^{(1)}} e_j^{(1)}(\mathbf{k}) + e^{i\psi_n^{(2)}} e_j^{(2)}(\mathbf{k}) \right)} e^{i(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') + 2\phi_n)} \\ &= \overline{\left(e_i^{(1)}(\mathbf{k})e_j^{(1)}(\mathbf{k}) + e_i^{(2)}(\mathbf{k})e_j^{(2)}(\mathbf{k}) \right)} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \\ &= \int P(\mathbf{k}) \left(e_i^{(1)}(\mathbf{k})e_j^{(1)}(\mathbf{k}) + e_i^{(2)}(\mathbf{k})e_j^{(2)}(\mathbf{k}) \right) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} d^3\mathbf{k} \end{aligned} \quad (2.26)$$

où la moyenne sur la variable $\mathbf{k}$ a été remplacée par une intégrale faisant intervenir le densité de probabilité $P(\mathbf{k})^\dagger$.

[†] Attention à ne pas confondre la densité de probabilité $P(\mathbf{k})$ utilisée ici avec l'opérateur de projection P_{ij} utilisé plus loin (voir par exemple (2.78)).

À partir de (2.23), (2.26), $P(\mathbf{k}) = P(-\mathbf{k})$ et de la symétrie de $e_i^{(1)}(\mathbf{k})e_j^{(1)}(\mathbf{k}) + e_i^{(2)}(\mathbf{k})e_j^{(2)}(\mathbf{k})$ par rapport à la transformation $\mathbf{k} \mapsto -\mathbf{k}$, il vient :

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}A^2M \int P(\mathbf{k}) \left(e_i^{(1)}(\mathbf{k})e_j^{(1)}(\mathbf{k}) + e_i^{(2)}(\mathbf{k})e_j^{(2)}(\mathbf{k}) \right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k} . \quad (2.27)$$

Le tenseur spectral est dès lors :

$$\hat{R}_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}A^2MP(\mathbf{k}) \left(e_i^{(1)}(\mathbf{k})e_j^{(1)}(\mathbf{k}) + e_i^{(2)}(\mathbf{k})e_j^{(2)}(\mathbf{k}) \right) . \quad (2.28)$$

Une conséquence directe est que l'hélicité $\mathcal{H}$ et la polarisation $\mathcal{Z}$ sont nulles (voir les définitions au sein du chapitre 1). La densité d'énergie s'écrit en revanche :

$$e(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}A^2MP(\mathbf{k}) . \quad (2.29)$$

Puisque l'intégrale de $P(\mathbf{k})$ est 1,

$$P(\mathbf{k}) = \frac{e(\mathbf{k})}{\int e(\mathbf{k})d^3\mathbf{k}} \quad (2.30)$$

donne la distribution de la variable $\mathbf{k}_n$ en fonction du spectre d'énergie imposé. La constante de normalisation A s'obtient par intégration du spectre d'énergie (2.29) selon

$$A^2 = \frac{2}{M} \int e(\mathbf{k})d^3\mathbf{k} = \frac{\overline{u_i u_i}}{M} \quad (2.31)$$

et ne dépend donc que du nombre de modes M et de la vitesse *rms*.

La question est maintenant de savoir comment construire la variable aléatoire $\mathbf{k}_n$ possédant la distribution $P(\mathbf{k})$ requise. Dans le cas isotrope, $e(\mathbf{k})$ et $P(\mathbf{k})$ ne dépendent que de $k = |\mathbf{k}|$, et les composantes cartésiennes du vecteur d'onde $\mathbf{k}_n$ peuvent s'écrire

$$k_n \sin \phi_n \cos \theta_n, \quad k_n \sin \phi_n \sin \theta_n \quad \text{et} \quad k_n \cos \phi_n \quad (2.32)$$

où k_n , ϕ_n et θ_n sont des variables statistiquement indépendantes. ϕ_n est distribuée uniformément sur $[0, 2\pi]$ (comme pour la méthode classique). La fonction densité de probabilité de θ_n est $\sin \theta_n$ que l'on obtient en posant $\theta_n = \arccos X_n$ avec X_n une variable réelle uniforme sur $[-1, 1]$. La fonction densité de probabilité de la variable k_n est donc :

$$\hat{P}(k) = 4\pi k^2 P(\mathbf{k}) = \frac{E(k)}{\int_0^\infty E(\kappa) d\kappa} \quad (2.33)$$

où $E(k) = 4\pi k^2 e(\mathbf{k})$ est le spectre d'énergie. Ainsi, afin d'obtenir les M valeurs de k_n requises pour calculer (2.18), il est nécessaire de générer des variables aléatoires dont la distribution ne dépend que de $E(k)$.

En turbulence homogène isotrope, la zone inertielle peut être décrite par :

$$E(k) = C_K \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (2.34)$$

où ϵ est le taux de dissipation de l'énergie turbulente par unité de masse et C_K est la constante universelle de Kolmogorov. Il est possible dans ce cas de définir la fonction $\hat{P}(k)$ analytiquement. Un exemple de KS dont le spectre imposé est de la forme (2.34) est présenté sur la figure 2.2.

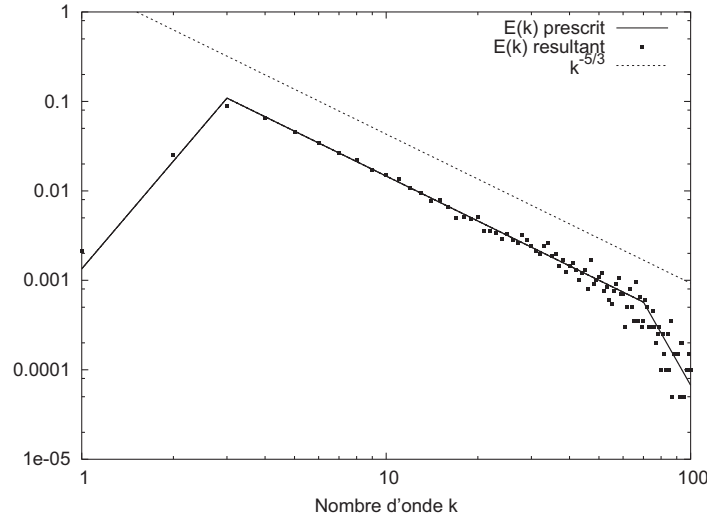


FIG. 2.2 – Comparaison entre le spectre imposé et le spectre calculé *a posteriori*. Exemple de spectre isotrope dont l'expression analytique est connue.

Pour un spectre $E(k)$ quelconque (dont on ne connaît pas l'expression analytique), il est nécessaire de calculer la distribution (2.33) directement. Dans ce cas, on définit la fonction suivante :

$$\Psi(k) = \int_0^k E(\kappa) d\kappa, \quad (2.35)$$

et le nombre d'onde k_n s'obtient en résolvant l'équation :

$$\Psi(k) = Y_n \Psi(\infty), \quad (2.36)$$

où Y_n est uniformément distribuée sur $[0, 1]$. La fonction $\Psi(k)$ est monotone entre 0 et $\Psi(\infty)$ lorsque k varie de 0 à $+\infty$. L'équation (2.36) possède donc une unique solution. La plupart des travaux utilisant la KS se basent sur une expression analytique de $E(k)$. Puisque la suite de notre travail consiste principalement en une comparaison entre la KS et la DNS, on utilisera la dernière formulation du modèle qui permet d'imposer n'importe quel spectre $E(k)$ et en particulier ceux provenant d'une DNS.

Cette méthode, qui passe par la résolution de l'équation (2.36) pour chacun des M modes, est appliquée à différents spectres d'énergie $E(k)$. La figure 2.3 présente les spectres obtenus pour deux spectres imposés différents, l'un étant constant tandis que l'autre provient d'une DNS.

La différence fondamentale entre la présente méthode et le procédé classique se comprend bien en observant la figure 2.3(a). En effet, il est clair que les deux méthodes sont similaires lorsque le spectre imposé est proche de la forme (2.34). En fait, la répartition des nombres d'onde est, au sein de la méthode classique, indépendante du spectre imposé. Dans le cas du spectre proposé en figure 2.3(a), tous les nombres d'ondes possèdent la même énergie, et la méthode originale développée plus haut distribue uniformément les nombres d'onde. Dans le cas du spectre présenté en figure 2.3(b), tous les modes de Fourier ont toujours la même amplitude (définie par la constante A), mais le modèle générera beaucoup plus de faibles valeurs de k_n que de fortes valeurs puisque l'énergie des faibles nombres d'onde est plus importante qu'aux hauts nombres d'onde. Cette méthode généralisée est donc très proche de la méthode classique

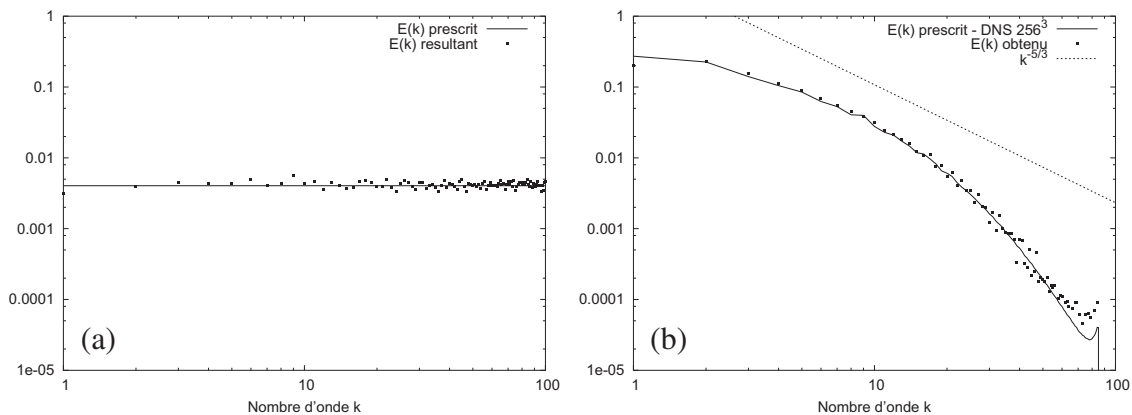


FIG. 2.3 – Comparaison entre le spectre imposé et le spectre calculé *a posteriori*. (a) Exemple de spectre constant. (b) Exemple de spectre provenant d'une DNS de résolution 256^3 .

lorsque l'on se retient au cas d'une turbulence isotrope. Cependant, puisque la discrétisation de l'espace spectral s'adapte au spectre imposé, il est possible d'envisager la génération d'un champ synthétique dont les propriétés spectrales sont anisotropes.

2.2.4 Généralisation au cas anisotrope

Cette partie propose une méthode générale[†] dont l'objectif est de construire un champ de vitesse incompressible dont le tenseur spectral est totalement prescrit.

Dans le cas de la turbulence homogène anisotrope, la distribution de l'énergie dépend de la direction du vecteur d'onde de telle manière que $P(\mathbf{k}) \neq P(k)$. Cette partie présente une méthode permettant de générer une turbulence synthétique ayant des moments d'ordre deux quelconques. La méthode classique n'impose que le spectre d'énergie isotrope $E(k)$. Le tenseur spectral obtenu est donc nécessairement :

$$\hat{R}_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{E(k)}{4\pi k^2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right). \quad (2.37)$$

Il est possible de généraliser la méthode présentée dans la section précédente et ainsi d'imposer n'importe quel tenseur spectral.

De la même manière que la méthode classique nécessite la connaissance du spectre d'énergie, on suppose ici que l'on dispose d'un moyen pour connaître les 4 scalaires définissant le tenseur spectral (voir l'équation (1.38)). Cela revient à connaître les deux réels $e(\mathbf{k})$ et $\mathcal{H}(\mathbf{k})$, ainsi que le complexe $\mathcal{Z}(\mathbf{k})$, et ce quelque soit le vecteur d'onde $\mathbf{k}$. On ne se préoccupe pas pour l'instant du moyen d'obtention de ces quantités.

Le champ de vitesse s'écrit :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = A \sum_{m=1}^M \Re(\mathbf{v}_m(\mathbf{x})) \quad (2.38)$$

où chacune des M composantes sont statistiquement indépendantes et définies par :

$$\mathbf{v}_m(\mathbf{x}) = \left[B(\mathbf{k}_m) \gamma_m \mathbf{N}(\mathbf{k}_m) + C(\mathbf{k}_m) \gamma_m^* \mathbf{N}^*(\mathbf{k}_m) \right] \exp(i\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{x} + \phi_m) \quad (2.39)$$

[†]Cette méthode fut développée par J. Scott et fera l'objet d'une publication prochaine.

où N est défini par (1.33). L'intérêt d'une telle formulation apparaîtra dans la suite, mais on peut d'ores et déjà se permettre quelques commentaires. Les fonctions $B(\mathbf{k})$ et $C(\mathbf{k})$, si elles ne sont pas égales (ce qui est le cas en configuration isotrope), induisent une dissymétrie entre les composantes poloïdales et toroïdales du champ de vitesse. La variable complexe γ_m induit une polarisation dans le plan ($e^{(1)}, e^{(2)}$).

A est une constante réelle, $B(\mathbf{k})$ et $C(\mathbf{k})$ sont des fonctions réelles positives possédant la propriété $B(-\mathbf{k}) = B(\mathbf{k})$ et $C(-\mathbf{k}) = C(\mathbf{k})$. γ_m est un complexe défini par :

$$\gamma_m = \frac{\Gamma_m}{|\Gamma_m|} = e^{i\theta_m} + \mu(\mathbf{k}_m)e^{-i\theta_m} \quad (2.40)$$

où $\mu(\mathbf{k})$ est une fonction complexe telle que $\mu(-\mathbf{k}) = \mu^*(\mathbf{k})$ et $|\mu|(\mathbf{k}) \leq 1$. Les variables $\mathbf{k}_m$, θ_m et ϕ_m sont aléatoires, réelles et indépendantes. On notera $\Pi(\mathbf{k})$ la p.d.f. de $\mathbf{k}_m$ (avec $\Pi(-\mathbf{k}) = \Pi(\mathbf{k})$), tandis que θ_m et ϕ_m sont uniformément réparties sur $[-\pi, \pi]$.

L'objectif est ici de déterminer A , $B(\mathbf{k})$, $C(\mathbf{k})$, $\mu(\mathbf{k})$ et $\Pi(\mathbf{k})$ dont découlent les fonctions $e(\mathbf{k})$, $\mathcal{H}(\mathbf{k})$ et $\mathcal{Z}(\mathbf{k})$.

En prenant la moyenne de la variable $\gamma_m^2 = \Gamma_m/\Gamma_m^*$ pour un vecteur d'onde $\mathbf{k}_m$ fixé, on obtient la moyenne conditionnelle

$$\langle \gamma_m^2 | \mathbf{k}_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta_m} + \mu(\mathbf{k}_m)e^{-i\theta_m}}{e^{-i\theta_m} + \mu^*(\mathbf{k}_m)e^{i\theta_m}} d\theta \quad (2.41)$$

qui se calcule en introduisant le changement de variables $\zeta = e^{i\theta}$:

$$\langle \gamma_m^2 | \mathbf{k}_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\zeta^2 + \mu(\mathbf{k}_m)}{\zeta(1 + \mu^*(\mathbf{k}_m)\zeta^2)} d\zeta. \quad (2.42)$$

En supposant que $|\mu|(\mathbf{k}) < 1$, l'intégrande ne possède qu'un seul pôle en $\zeta = 0$ et le théorème des résidus conduit à :

$$\langle \gamma_m^2 | \mathbf{k}_m \rangle = \mu(\mathbf{k}_m). \quad (2.43)$$

Le résultat précédant reste valable même lorsque $|\mu|(\mathbf{k}) = 1$, puisque l'intégrande est dans ce cas constant égal à :

$$\frac{e^{i\theta_m} + \mu(\mathbf{k}_m)e^{-i\theta_m}}{e^{-i\theta_m} + \mu^*(\mathbf{k}_m)e^{i\theta_m}} = \mu(\mathbf{k}_m) \frac{e^{i\theta_m} + \mu(\mathbf{k}_m)e^{-i\theta_m}}{\mu(\mathbf{k}_m)e^{-i\theta_m} + \mu^*(\mathbf{k}_m)e^{i\theta_m}} = \mu(\mathbf{k}_m). \quad (2.44)$$

Le moment d'ordre deux pour la vitesse est :

$$R_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \overline{u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}')} \quad (2.45)$$

et se simplifie de la même façon que précédemment en :

$$R_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{2} M A^2 \Re \overline{v_i^*(\mathbf{x})v_j(\mathbf{x}')} \quad (2.46)$$

où $\mathbf{v}_m$ a été remplacé par $\mathbf{v}$ pour simplifier les notations. Puisque $|\gamma_m| = 1$, il vient :

$$\begin{aligned} v_i^*(\mathbf{x})v_j(\mathbf{x}') = & \left[B^2(\mathbf{k})N_i^*(\mathbf{k})N_j(\mathbf{k}) + C^2(\mathbf{k})N_i(\mathbf{k})N_j^*(\mathbf{k}) \right. \\ & \left. + B(\mathbf{k})C(\mathbf{k}) \left(\gamma^2 N_i(\mathbf{k})N_j(\mathbf{k}) + \gamma^{*2} N_i^*(\mathbf{k})N_j^*(\mathbf{k}) \right) \right] e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} . \end{aligned} \quad (2.47)$$

En moyennant sur l'angle θ tandis que $\mathbf{k}$ est fixé, on obtient la moyenne conditionnelle suivante :

$$\langle v_i^*(\mathbf{x})v_j(\mathbf{x}')|\mathbf{k} \rangle = [B^2(\mathbf{k})N_i^*(\mathbf{k})N_j(\mathbf{k}) + C^2(\mathbf{k})N_i(\mathbf{k})N_j^*(\mathbf{k}) + B(\mathbf{k})C(\mathbf{k}) (\mu(\mathbf{k})N_i(\mathbf{k})N_j(\mathbf{k}) + \mu^*(\mathbf{k})N_i^*(\mathbf{k})N_j^*(\mathbf{k}))]e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \quad (2.48)$$

qui, en moyennant sur le vecteur d'onde $\mathbf{k}$, aboutit à :

$$\overline{v_i^*(\mathbf{x})v_j(\mathbf{x}')} = \int \left[B^2(\mathbf{k})N_i^*(\mathbf{k})N_j(\mathbf{k}) + C^2(\mathbf{k})N_i(\mathbf{k})N_j^*(\mathbf{k}) + B(\mathbf{k})C(\mathbf{k}) (\mu(\mathbf{k})N_i(\mathbf{k})N_j(\mathbf{k}) + \mu^*(\mathbf{k})N_i^*(\mathbf{k})N_j^*(\mathbf{k})) \right] \Pi(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} d\mathbf{k} . \quad (2.49)$$

Le complexe conjugué de l'équation précédente est simplement :

$$\left(\overline{v_i^*(\mathbf{x})v_j(\mathbf{x}')} \right)^* = \overline{v_i(\mathbf{x})v_j^*(\mathbf{x}')} \quad (2.50)$$

ce qui met en évidence le fait que $\overline{v_i^*(\mathbf{x})v_j(\mathbf{x}')}$ est une quantité réelle. Finalement, le tenseur de Reynolds s'écrit :

$$\overline{u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}')} = \frac{1}{2}MA^2 \int \left[B^2(\mathbf{k})N_i^*(\mathbf{k})N_j(\mathbf{k}) + C^2(\mathbf{k})N_i(\mathbf{k})N_j^*(\mathbf{k}) + B(\mathbf{k})C(\mathbf{k}) (\mu(\mathbf{k})N_i(\mathbf{k})N_j(\mathbf{k}) + \mu^*(\mathbf{k})N_i^*(\mathbf{k})N_j^*(\mathbf{k})) \right] \Pi(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} d\mathbf{k} \quad (2.51)$$

$$= \int \hat{R}_{ij}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} d\mathbf{k} \quad (2.52)$$

ce qui permet d'obtenir le tenseur spectral en fonction des quantités introduites dans l'équation (2.39). Par exemple, dans le repère de Craya-Herring, celui-ci s'écrit comme suit :

$$\hat{R}_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}MA^2\Pi(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} B^2 + C^2 - 2\mu_r BC & 2\mu_i BC + i(B^2 - C^2) \\ 2\mu_i BC - i(B^2 - C^2) & B^2 + C^2 + 2\mu_r BC \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

$$= \begin{pmatrix} e - \mathcal{Z}_r & \mathcal{Z}_i + i\mathcal{H} \\ \mathcal{Z}_i - i\mathcal{H} & e + \mathcal{Z}_r \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

où $\mu = \mu_r + i\mu_i$ et $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_r + i\mathcal{Z}_i$. Le lien est donc fait entre les invariants du tenseur spectral et les fonctions introduites dans la définition du champ de vitesse :

$$e(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}MA^2\Pi(\mathbf{k}) (B^2(\mathbf{k}) + C^2(\mathbf{k})) \quad (2.55)$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}MA^2\Pi(\mathbf{k}) (B^2(\mathbf{k}) - C^2(\mathbf{k})) \quad (2.56)$$

$$\mathcal{Z}(\mathbf{k}) = MA^2\Pi(\mathbf{k})B(\mathbf{k})C(\mathbf{k})\mu(\mathbf{k}) . \quad (2.57)$$

Etant donné que $B(\mathbf{k})$ ainsi que $C(\mathbf{k})$ sont des fonctions positives ou nulles, les formules précédentes permettent d'exprimer les fonctions inconnues en fonction des invariants :

$$B(\mathbf{k}) = \left(\frac{e(\mathbf{k}) + \mathcal{H}(\mathbf{k})}{MA^2\Pi(\mathbf{k})} \right)^{1/2} \quad (2.58)$$

$$C(\mathbf{k}) = \left(\frac{e(\mathbf{k}) - \mathcal{H}(\mathbf{k})}{MA^2\Pi(\mathbf{k})} \right)^{1/2} \quad (2.59)$$

$$\mu(\mathbf{k}) = \frac{\mathcal{Z}(\mathbf{k})}{(e(\mathbf{k}) - \mathcal{H}(\mathbf{k}))^{1/2}} . \quad (2.60)$$

La détermination des fonctions $B(\mathbf{k})$ et $C(\mathbf{k})$ n'est cependant pas unique. Afin de se raccorder à la méthode propre au cas isotrope, on impose une contrainte supplémentaire afin de créer un lien direct entre le spectre d'énergie $e(\mathbf{k})$ et la p.d.f. du vecteur d'onde $\Pi(\mathbf{k})$. Pour cela, la fonction $B^2(\mathbf{k}) + C^2(\mathbf{k})$ est rendue indépendante de $\mathbf{k}$ en choisissant :

$$B^2(\mathbf{k}) + C^2(\mathbf{k}) = 1 \quad (2.61)$$

et ainsi :

$$\Pi(\mathbf{k}) = \frac{2}{MA^2}e(\mathbf{k}) \quad (2.62)$$

$$B(\mathbf{k}) = \left(\frac{e(\mathbf{k}) + \mathcal{H}(\mathbf{k})}{2e(\mathbf{k})} \right)^{1/2} \quad (2.63)$$

$$C(\mathbf{k}) = \left(\frac{e(\mathbf{k}) - \mathcal{H}(\mathbf{k})}{2e(\mathbf{k})} \right)^{1/2}. \quad (2.64)$$

La normalisation de la *pdf* permet de déterminer la constante A , correspondant à l'énergie contenue dans chacun des M modes de Fourier :

$$A = \left(\frac{2}{M} \int e(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\overline{u_i u_j}}{M}}. \quad (2.65)$$

Ainsi, en imposant les trois quantités $e(\mathbf{k})$, $\mathcal{H}(\mathbf{k})$ et $\mathcal{Z}(\mathbf{k})$ (modélisation théorique ou numérique), il est possible de déterminer les trois quantités $B(\mathbf{k})$, $C(\mathbf{k})$ et $\mu(\mathbf{k})$, et donc de construire le champ de vitesse synthétique. Cette méthode permet d'imposer de la manière la plus générale une anisotropie arbitraire au modèle KS. Dans le cas particulier de la turbulence homogène axisymétrique, toutes les quantités précédentes ne dépendent que du module du vecteur d'onde et de l'angle polaire θ .

La méthode exposée ci-dessus permet aussi d'envisager l'initialisation d'une simulation numérique directe avec un contrôle précis de l'anisotropie initiale. Il vient naturellement à l'esprit, dans un contexte magnétohydrodynamique, de construire un champ initial avec hélicité. La précédente méthode permet en effet d'imposer un spectre d'hélicité $\mathcal{H}(\mathbf{k})$ quelconque. Cet aspect n'a pas pu être considéré en détails ici, mais fera l'objet de travaux ultérieurs.

Exemples dans le cas axisymétrique sans hélicité ni polarisation

On se restreint ici au cas axisymétrique où l'anisotropie ne provient que du premier terme au sein de l'équation (1.38) (anisotropie directionnelle). Dans ce cas, l'énergie ne dépend que du nombre d'onde k et de l'angle polaire θ . L'hélicité et la polarisation sont dans ce cas toutes deux nulles ce qui implique $B(\mathbf{k}) = C(\mathbf{k})$ et $\mu(\mathbf{k}) = 0$. Les deux variables aléatoires à déterminer sont θ_n et k_n . La distribution de l'angle polaire θ_n dépend du spectre angulaire d'énergie $E'(\theta)$ défini par :

$$E'(\theta) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e(k, \theta, \phi) k \sin \theta dk d\phi. \quad (2.66)$$

Si $E'(\theta)$ est une constante, on retrouve le cas isotrope. La densité de probabilité de l'angle polaire est reliée au spectre angulaire d'énergie d'une manière analogue à (2.33) :

$$P(\theta) = \frac{E'(\theta)}{\int_0^\pi E'(\vartheta) d\vartheta}. \quad (2.67)$$

Une fois la variable θ_n déterminée, il est possible de déterminer le densité de probabilité conditionnelle du nombre d'onde associé k_n :

$$P(k_n|\theta_n) = \frac{E(k, \theta_n)}{\int_0^\infty E(\kappa, \theta_n) d\kappa} \quad (2.68)$$

où $E(k, \theta)$ est relié à la densité d'énergie $e(k, \theta, \phi)$ par :

$$E(k, \theta) = \int_0^{2\pi} e(k, \theta, \phi) k \sin \theta d\phi . \quad (2.69)$$

Numériquement, cela revient à discrétiser le spectre imposé $E(k, \theta)$. Afin d'illustrer cette méthode, on choisit de construire des champs synthétiques à partir de spectres angulaires arbitrairement définis. Le spectre retenu est de la forme volontairement simplifiée :

$$E(k, \theta) = g(\theta)f(k) , \quad (2.70)$$

où g et f sont deux fonctions réelles. $f(k)$ est choisie de la forme (2.34) tandis que $g(\theta)$ est la fonction qui caractérise l'anisotropie directionnelle. Lorsque $g(\theta) = \sin \theta$, cela revient à l'initialisation anisotrope classique. La figure 2.4 présente différentes densités de probabilités pour la variable θ_n issues de différents choix pour la fonction $g(\theta)$. Lorsque l'énergie est concentrée à l'équateur (*i.e.* cas en rotation ou MHD à bas nombre de Reynolds magnétique par exemple, cf. Chapitres 3 et 4), on observe des structures cohérentes alignées avec la direction verticale (cf. figure 2.4(a)), tandis que lorsque l'énergie est concentrée aux pôles (*i.e.* cas stratifié par exemple [Liechtenstein *et al.* (2006)]), les zones de vorticité intense sont principalement horizontales (cf. figure 2.4(c)). L'anisotropie de directivité traduit donc une concentration de l'énergie dans un domaine spectral préférentiel qui se traduit dans l'espace physique par l'apparition de structures cohérentes.

Exemples dans le cas axisymétrique avec polarisation

Une fois l'anisotropie directionnelle imposée par la dépendance angulaire de l'énergie, il est possible d'obtenir deux configurations d'écoulement très différentes en fonction de la polarisation. Prenons le cas présenté au sein de la figure 2.4(a). Les vecteurs d'onde horizontaux contribuent de manière prépondérante à l'énergie. La condition d'incompressibilité impose donc aux composantes spectrales de la vitesse de se trouver dans un plan perpendiculaire à $\mathbf{k}$. Si l'on suppose que ce plan est quasiment vertical en raison de l'anisotropie directionnelle, les composantes spectrales de la vitesse sont donc soit horizontales dans le plan perpendiculaire à $\mathbf{k}$, soit verticales. Dans le premier cas, la polarisation engendre des structures cohérentes verticales de type tourbillonnaires sans composantes verticales ; tandis que dans le second cas, la vitesse verticale domine et l'on observe des jets verticaux.

2.2.5 Instationnarité et dynamique linéaire

Nous avons vu au sein des sections précédentes comment construire un champ synthétique dont les corrélations en deux-points sont parfaitement contrôlées, même dans un cas anisotrope.

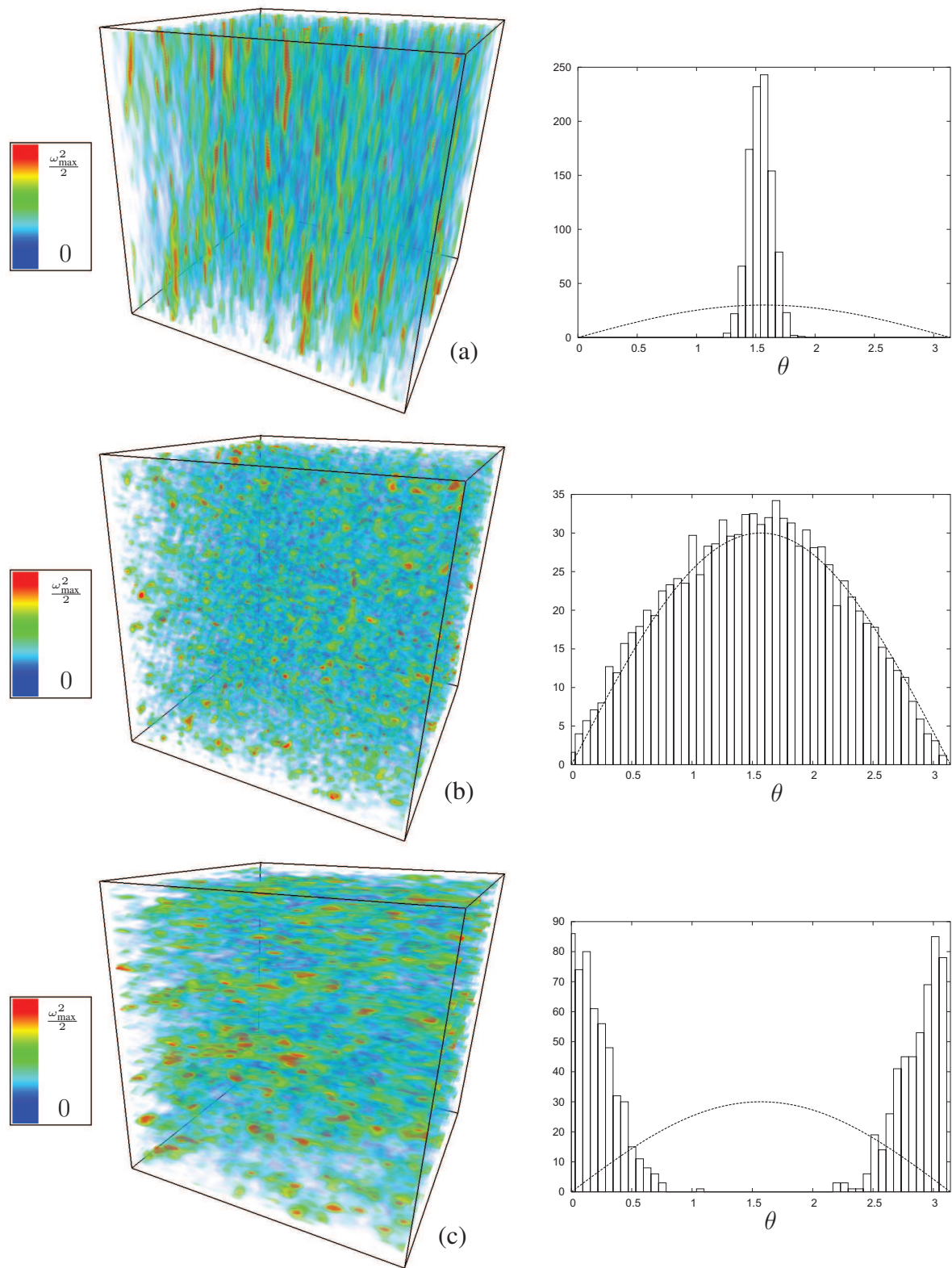


FIG. 2.4 – Initialisation anisotrope en KS. Exemple d'anisotropie directionnelle arbitraire. À gauche : enstrophie calculée par KS ($\omega_{\max}^2$ étant la valeur maximum de l'enstrophie rencontrée au sein du calcul). À droite : densité de probabilité correspondante pour la variable θ (le trait plein correspond à une distribution isotrope). (a) Énergie concentrée à l'équateur (équivalent à un cas en rotation ou MHD à bas nombre de Reynolds magnétique). (b) Cas isotrope. (c) Énergie concentrée aux pôles (équivalent au cas stablement stratifié).

L'originalité du présent travail réside également dans l'utilisation de solutions linéaires pour générer l'instationnarité du champ synthétique. Les sections précédentes ont présenté la méthode classique qui peut se résumer au choix d'une pulsation caractéristique. L'expression de cette pulsation et son lien avec le nombre d'onde se base principalement sur l'analyse dimensionnelle et sur diverses observations numériques et théoriques. Dans le cas d'une turbulence homogène isotrope, cette méthode s'avère être la plus simple. Cependant, lorsque l'on considère des écoulements anisotropes sous l'effet d'une force de volume, il est possible de construire l'instationnarité non plus de manière arbitraire, mais en se basant sur la linéarisation des équations du moment.

Pour cela, réécrivons l'équation (2.18) en faisant apparaître explicitement les deux types d'instationnarité possibles :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \Re \sum_{n=1}^N e^{i(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x} + \omega_n t)} \times \left(u^{(1)}(\mathbf{k}_n, t) \mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{k}_n) + u^{(2)}(\mathbf{k}_n, t) \mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{k}_n) \right). \quad (2.71)$$

La pulsation aléatoire ω_n a déjà été présentée et sera particulièrement discutée dans le chapitre suivant. Celle-ci affecte toutes les composantes (*i.e.* poloïdale comme toroïdale) d'un mode de Fourier et peut être qualifiée de phase translatrice. Nous considérons maintenant que chacune des composantes d'un mode de Fourier est instationnaire. Ainsi, les composantes toroïdales et poloïdales n'évoluent plus nécessairement de la même manière au cours du temps. Au sein de la méthode classique, les composantes $u^{(1)}(\mathbf{k}_n)$ et $u^{(2)}(\mathbf{k}_n)$ représentent les conditions initiales dérivées à partir du spectre d'énergie. Au sein de notre version du modèle KS, il est toujours nécessaire de dériver une condition initiale pour chacune des composantes, mais celles-ci évoluent ensuite en temps. Le problème est de savoir quelle est la dépendance temporelle de ces composantes et comment les relier à des phénomènes physiques.

Les trois prochains chapitres seront consacrés à la turbulence en rotation, à la turbulence MHD avec champ magnétique imposé et enfin au couplage des deux phénomènes. Dans chacun des cas, les équations seront linéarisées et des solutions seront développées dans l'espace de Craya. Ainsi, nous disposerons de solutions explicites pour les composantes $u^{(1)}(\mathbf{k}_n, t)$ et $u^{(2)}(\mathbf{k}_n, t)$. Ces solutions seront incluses au sein du modèle et la phase des modes de Fourier sera directement liée à la dynamique linéaire des équations. Selon l'application, il sera toujours possible de prendre en compte la décorrélation temporelle des modes par l'introduction d'une pulsation arbitraire.

Les modèles synthétique de type KS se sont jusqu'alors concentrés sur la génération d'un champ de vitesse. Comme nous le verrons dans le chapitre 4, la linéarisation des équations conduit à des solutions linéaires pour les fluctuations magnétiques. Il est donc également possible de générer un champ magnétique synthétique en utilisant la même formulation

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \Re \sum_{n=1}^N e^{i(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x} + \omega_n t)} \times \left(b^{(1)}(\mathbf{k}_n, t) \mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{k}_n) + b^{(2)}(\mathbf{k}_n, t) \mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{k}_n) \right) \quad (2.72)$$

où les composantes $b^{(1)}(\mathbf{k}_n, t)$ et $b^{(2)}(\mathbf{k}_n, t)$ peuvent être directement dérivées des solutions linéarisées de l'équation d'induction. L'incompressibilité du champ $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ est alors vérifiée par construction.

À ce stade, il est nécessaire de préciser la méthode que nous utiliserons par la suite afin de calculer numériquement certaines quantités statistiques à partir des solutions linéaires. L'objectif premier de la simulation cinématique est de calculer des statistiques Lagrangiennes à partir de l'expression dans l'espace physique du type (2.71) et de la résolution de l'équation (2.7). Cette approche sera retenue pour calculer diverses statistiques Lagrangiennes au sein de l'annexe D. Il se pose alors le problème de la validité du modèle synthétique dans ce contexte. En effet, si l'évolution temporelle de chaque mode découle directement des solutions linéaires, le modèle synthétique est basé sur la superposition de plusieurs modes arbitrairement définis. Lorsque nous utiliserons les solutions linéaires au sein du modèle synthétique, il sera donc nécessaire de vérifier que la discrétisation spectrale n'introduit pas d'erreurs et que les solutions linéaires sont fidèlement représentées.

Lorsqu'il s'agit de quantités spectrales telle que l'énergie ou le spectre d'énergie, il serait possible, à partir d'une condition initiale donnée, de les calculer directement par l'intégration des solutions linéaires sur tout l'espace spectral, sans utiliser le modèle synthétique. Une méthode bien plus facile à mettre en place et qui permet de plus de valider la modèle synthétique, est de calculer des statistiques à partir du modèle synthétique directement. Ainsi, dans la suite du manuscrit, nous présenterons donc les statistiques linéaires provenant du modèle synthétique, sachant que nous avons vérifié que la discrétisation arbitraire de l'espace spectral n'introduit pas de différences par rapport à l'intégration directe des solutions linéaires.

2.3 Simulations numériques directes

Par simulations numériques directes (ou Direct Numerical Simulation), on entend la résolution numérique des équations de Navier-Stokes. Malgré les progrès effectués dans le domaine du calcul numérique, les DNS sont toujours limitées à des valeurs modérées du nombre de Reynolds. Cependant, l'intérêt majeur de ce modèle est de résoudre toutes les échelles de l'écoulement sans paramètres ajustables.

Une des méthodes numériques la plus répandue pour résoudre les équations de Navier-Stokes dans le cas homogène est la méthode dite pseudo-spectrale. La première utilisation de cette méthode remonte aux travaux d'Orszag et Patterson [Orszag & Patterson(1971)]. Elle fut par la suite largement utilisée et s'avère encore aujourd'hui offrir un excellent compromis entre précision et efficacité. Cette méthode ne sera que très brièvement exposée dans la suite de cette section.

Les propriétés et les solutions linéaires des équations suivantes seront développées au sein des prochains chapitres. Ces équations ne sont considérées ici que d'un point de vue numérique.

2.3.1 Équations de Navier-Stokes

Du fait de l'homogénéité de l'écoulement, la résolution se fait en partie dans l'espace de Fourier. Un autre avantage de l'espace de Fourier vient de l'écriture très simple de la condition

d'incompressibilité. En considérant des conditions aux limites périodiques[†] sur les surfaces d'un cube de côté L , le champ de vitesse (ou de manière analogue, le champ des fluctuations magnétiques) peut se développer en série de Fourier discrète selon :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (2.73)$$

Le nombre d'onde k_i est discrétisé dans les trois directions selon :

$$k_i = \frac{2\pi}{L_i} n \quad (2.74)$$

où n est un entier compris entre $-N/2$ et $N/2$. N est ici le nombre de points de collocation dans chacune des directions. La taille L_i du domaine du calcul est en général de 2π dans les trois directions et les nombres d'onde sont donc des entiers.

Pour un fluide Newtonien de viscosité cinématique ν , la vitesse est régie par les équations de Navier-Stokes qui s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (2.75)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.76)$$

où l'on considère le cas d'un écoulement incompressible. Le terme quadratique des équations de Navier-Stokes est tout d'abord décomposé dans l'espace physique selon :

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (2.77)$$

où $\boldsymbol{\omega}$ est la vorticité définie par $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$. Le terme faisant intervenir un gradient est simplement inclu dans la pression et ne nécessite donc pas d'attention particulière puisqu'il sera implicitement pris en compte par la condition d'incompressibilité.

Les équations de Navier-Stokes adimensionnées dans l'espace de Fourier s'écrivent, dans le cas où l'homogénéité statistique est préservée et lorsque l'écoulement est incompressible,

$$\frac{\partial \hat{u}_i(\mathbf{k}, t)}{\partial t} + \frac{1}{Re} k^2 \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) = -i P_{ijk}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \hat{u}_j(\mathbf{p}, t) \hat{u}_k(\mathbf{q}, t) d^3 \mathbf{p} \quad (2.78)$$

$$k_i \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) = 0 \quad (2.79)$$

où le tenseur $P_{ijk} = \frac{1}{2}(P_{ij}k_k + P_{ik}k_j)$ intervient dans l'équation après l'élimination de la pression due à la condition d'incompressibilité (2.79). Le tenseur P_{ij} est le tenseur de projection classique défini par $P_{ij} = \delta_{ij} - (k_i k_j / k^2)$. L'avantage premier de cette méthode est de s'affranchir de la résolution de la pression puisque celle-ci est implicitement résolue par la prise en compte de l'incompressibilité de l'écoulement. En revanche, si les termes ne faisant intervenir que des opérateurs linéaires dans l'espace physique (membres de gauche de l'équation (2.78)) sont relativement simples à calculer dans l'espace spectral, il n'en va pas de même pour le terme d'advection qui s'écrit $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ dans l'espace physique. Celui-ci fait intervenir un produit scalaire dans l'espace physique et donc un produit de convolution dans l'espace spectral.

[†] Voir [Davidson(2004)], p.433 pour une discussion portant sur les implications de ce type de conditions aux limites.

Si le membre de droite de l'équation (2.78) présente un intérêt théorique certain quant à la compréhension des échanges d'énergie entre modes formant une triade [Waleffe(1992)], il est complexe à calculer d'un point de vue numérique. C'est pour cette raison que ce terme (ou tout autre terme faisant intervenir le produit de deux quantités dans l'espace physique) est calculé dans un premier temps dans l'espace physique, d'où l'appellation pseudo-spectral qui se réfère au fait qu'une partie de la résolution se fait dans l'espace physique.

Le calcul de la vorticité s'effectue dans l'espace spectral (opérateur linéaire) selon $\hat{\omega}(\mathbf{k}, t) = i\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)$. Le terme non-linéaire $\mathbf{s} = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$ est quant à lui calculé dans l'espace physique puis transformé dans l'espace spectral selon :

$$\hat{\mathbf{s}}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{N^3} \sum_{\mathbf{k}} [\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}] e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} . \quad (2.80)$$

Le rôle de la pression est de maintenir ce terme incompressible par projection dans le plan perpendiculaire au vecteur d'onde local. Finalement, l'équation (2.78) peut s'écrire :

$$\frac{\partial \hat{u}_i(\mathbf{k}, t)}{\partial t} + \frac{1}{Re} k^2 \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) = \hat{\mathcal{S}}_i(\mathbf{k}, t) \quad (2.81)$$

où $\hat{\mathcal{S}}(\mathbf{k})$ est relié à $\hat{\mathbf{s}}(\mathbf{k})$ par :

$$\hat{\mathcal{S}}(\mathbf{k}) = -k^{-2} [\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{s}}(\mathbf{k}))] . \quad (2.82)$$

Le terme visqueux est implicitement pris en compte par le changement de variables suivant :

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) \rightarrow \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) \exp(-k^2 t / Re) . \quad (2.83)$$

Il reste enfin à définir le schéma d'avancement en temps ainsi que les conditions initiales. Un schéma d'Adams-Bashforth d'ordre 3 est utilisé afin de déterminer les composantes spectrales de la vitesse à l'instant $t + dt$ en fonction des instants précédents selon l'expression :

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t + dt) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) + dt \left(\frac{23}{12} \hat{\mathcal{S}}(\mathbf{k}, t) - \frac{4}{3} \hat{\mathcal{S}}(\mathbf{k}, t - dt) + \frac{5}{12} \hat{\mathcal{S}}(\mathbf{k}, t - 2dt) \right) \quad (2.84)$$

où le changement de variable (2.83) a été effectué. Cette méthode nécessite donc l'enregistrement en mémoire de deux termes non-linéaires $\hat{\mathcal{S}}(\mathbf{k}, t - dt)$ et $\hat{\mathcal{S}}(\mathbf{k}, t - 2dt)$ en plus des composantes correspondant à l'itération courante. Les transformées de Fourier sont réalisées grâce aux FFT (Fast Fourier Transforms) de la librairie JMFFT, écrite par J-M. Teuler [Chergui(2000)]. Afin de s'affranchir des erreurs d'aliasing, une troncature dans l'espace de Fourier est réalisée (méthode de troncature aux 2/3, voir [Rogallo(1981), Patterson & Orszag(1971)] pour plus de détails).

2.3.2 Résolution en référentiel tournant

Il est plus simple de considérer le cas de la turbulence en rotation en se plaçant dans le repère non-Galiléen tournant. Dans ce cas, l'impact de la rotation se traduit par l'apparition de deux forces d'inertie : la force de Coriolis et la force centrifuge. Celle-ci est implicitement prise en compte par la condition d'incompressibilité ce qui suppose néanmoins que ses variations

spatiales sont négligeables. Dans ces conditions, l'influence de la rotation se traduit par l'ajout d'une vorticité absolue liée à la rotation du repère avec un taux de rotation Ω . L'équation r solv e est donc identique à (2.81), seul le terme non-linéaire est modifié selon :

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \times (\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) + 2\boldsymbol{\Omega}) . \quad (2.85)$$

2.3.3 Magn tohydrodynamique¹

L'étude numérique de l'écoulement d'un fluide conducteur passe par la résolution des équations de Navier-Stokes ainsi que de l'équation d'induction. Il s'agit donc de résoudre deux champs vectoriels dont les équations respectives sont couplées. La méthode pseudo-spectrale se généralise très bien dans ce contexte. Ainsi, comme dans le cas hydrodynamique, les termes faisant intervenir des produits scalaires dans l'espace physique sont calculés dans un premier temps dans l'espace physique, puis transformés dans l'espace de Fourier. Pour un fluide conducteur de viscosité cinématique ν et de diffusivité magnétique η , les deux champs sol no daux $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ et $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ sont soumis aux équations :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla \left(p + \frac{u^2}{2} \right) + \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{j} \times (\mathbf{b} + \mathbf{B}_0) \quad (2.86)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} - \eta \nabla^2 \mathbf{b} = \nabla \times (\mathbf{u} \times (\mathbf{b} + \mathbf{B}_0)) \quad (2.87)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.88)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (2.89)$$

où $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{b}$ est la densité de courant électrique. Les quantités magnétiques sont ici dimensionnées comme des vitesses d'Alfvén, *i.e.* divisées par $\sqrt{\mu_0 \rho}$ où μ_0 est la perméabilité du vide et ρ la masse volumique. Une fois de plus, le terme de pression est implicitement calculé par la prise en compte de la condition d'incompressibilité. Les termes non-linéaires de l'équation du moment et de l'équation d'induction sont calculés dans l'espace physique selon :

$$\mathbf{s} = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{j} \times (\mathbf{b} + \mathbf{B}_0) \quad (2.90)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{u} \times (\mathbf{b} + \mathbf{B}_0) , \quad (2.91)$$

tandis que les membres de gauche des équations (2.86) et (2.87) sont calculés directement dans l'espace de Fourier. $\mathbf{E}$ est le champ électrique. De la même manière que la vitesse, les fluctuations magnétiques se décomposent en série de Fourier :

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} , \quad (2.92)$$

et subissent le changement de variables :

$$\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{k}, t) \rightarrow \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{k}, t) \exp(-\eta k^2 t) \quad (2.93)$$

afin d'impliciter le terme de diffusivité magnétique. Le schéma d'avancement en temps des fluctuations magnétiques est identique à celui utilisé pour la vitesse. On note que la condition

¹L'adaptation du code hydrodynamique à un contexte MHD a été réalisée par W. Bos.

d'incompressibilité des fluctuations magnétiques n'est pas explicitement utilisée. Cependant, si le champ magnétique initial est à divergence nulle, il le demeure à tout instant puisque la divergence de l'équation (2.87) est égale à zéro.

Enfin, puisque l'équation d'induction ne dépend pas du repère dans lequel on se place, il est possible de considérer un fluide soumis à un champ magnétique $\mathbf{B}_0$, le tout dans un repère tournant.

Remarques concernant l'hypothèse quasi-statique

Le nombre de Reynolds magnétique est défini comme le rapport de deux temps caractéristiques : le temps de diffusion magnétique l_0^2/η et le temps de retournement l_0/u_0 . Lorsque le nombre de Reynolds magnétique est très faible, ces deux temps peuvent avoir plusieurs ordres de grandeur d'écart. Il est alors possible de simplifier les équations de la magnétohydrodynamique en faisant appel à l'hypothèse quasi-statique [Roberts(1967)]. Cette hypothèse suppose que $R_M \ll 1$, et l'équation (2.87) se simplifie alors :

$$\mathbf{B}_0 \cdot \nabla \mathbf{u} + \eta \nabla^2 \mathbf{b} = 0. \quad (2.94)$$

La transformée de Fourier de l'équation précédente montre le lien direct qu'il existe entre le champ de vitesse et le champ de fluctuation magnétique :

$$\hat{b}_i(\mathbf{k}, t) = i \frac{\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}}{\eta k^2} \hat{u}_i(\mathbf{k}, t). \quad (2.95)$$

Ainsi, le champ $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ est entièrement déterminé par $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Le problème se résume donc à déterminer le champ de vitesse, dont l'équation dans l'espace de Fourier est :

$$\frac{\partial \hat{u}_i(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = -i P_{ijk}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \hat{u}_j(\mathbf{p}, t) \hat{u}_k(\mathbf{q}, t) d^3\mathbf{p} - \left(\frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2}{\eta k^2} + \nu k^2 \right) \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) \quad (2.96)$$

et l'effet du champ magnétique imposé se réduit ainsi à une dissipation supplémentaire anisotrope. Cette hypothèse simplificatrice est valable jusqu'à des nombres de Reynolds magnétique de l'ordre de l'unité [Knaepen *et al.*(2004)].

Dans un contexte de simulations numériques, l'hypothèse quasi-statique est souvent considérée comme indispensable du fait du trop grand écart entre le temps caractéristique de dissipation Joule et le temps de retournement des structures turbulentes. Cependant, lorsque les termes dissipatifs linéaires sont implicités par une expression du type (2.93), ce problème n'apparaît pas et l'on peut atteindre des régimes à bas nombre de Reynolds magnétique en conservant les équations MHD classiques.

Pour s'en assurer, et puisque nous souhaitons par la suite étudier la dynamique à faible R_M , les équations (2.86) et (2.87) sont résolues par simulations directes lorsque $R_M \approx 10^{-1}$, avec ou sans hypothèse quasi-statique. La figure 2.5 présente une comparaison des énergies cinétique et magnétique au cours du temps ainsi qu'une comparaison des spectres d'énergies. L'hypothèse quasi-statique ne diffère que très peu avec les simulations MHD complètes lorsque l'on observe les statistiques du champ de vitesse, confirmant ainsi que l'effet du champ magnétique imposé se résume bien à ajouter une dissipation à l'écoulement. En revanche, plusieurs différences apparaissent pour les quantités magnétiques. Concernant l'énergie magnétique, les

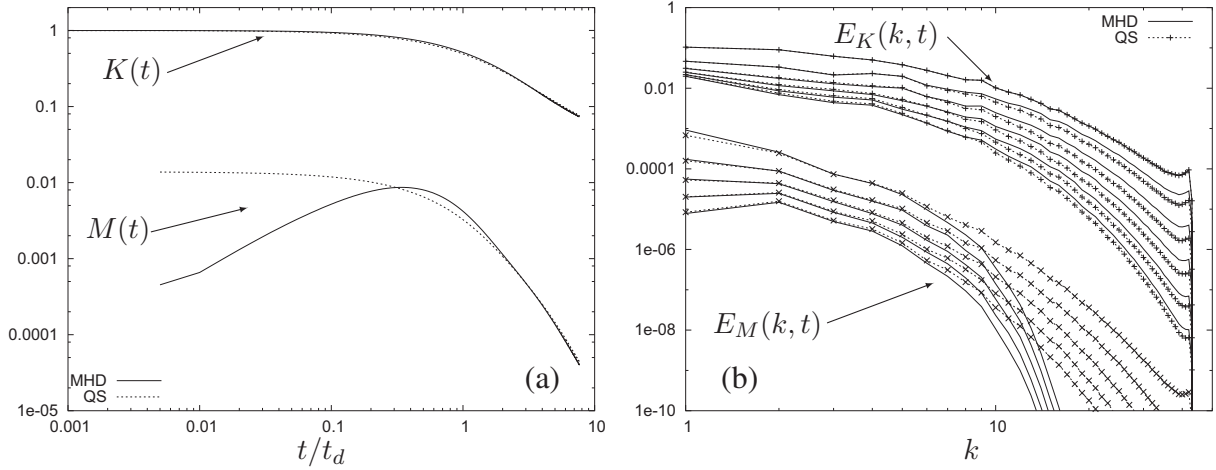


FIG. 2.5 – Comparaison des équations MHD complètes et de l'hypothèse quasi-statique (QS). Le nombre de Reynolds magnétique est de l'ordre de 10^{-1} . (a) Évolution temporelle de l'énergie cinétique totale $K(t)$ et de l'énergie magnétique totale $M(t)$. Le temps t_d correspond au temps caractéristique de diffusion $t_d = \eta/B_0^2$. (b) Spectres d'énergie cinétique $E_K(k, t)$ et magnétique $E_M(k, t)$.

deux simulations convergent vers les mêmes valeurs pour des temps $t > t_d$, où $t_d = \eta/B_0^2$ est le temps caractéristique de dissipation du champ de vitesse sous l'action de la force de Lorentz. En revanche, pour $t < t_d$, l'hypothèse quasi-statique surestime l'énergie magnétique. Cela provient directement du fait que les fluctuations magnétiques répondent instantanément aux fluctuations selon l'équation (2.95). La simulation MHD prédit une évolution plus lente des fluctuations magnétiques.

Les spectres d'énergie magnétique sont également différents pour les grands nombres d'onde k . L'hypothèse quasi-statique surestime l'énergie des fluctuations magnétiques. Encore une fois, cela est dû au lien direct (2.95) qui relie les deux champs.

Afin de s'assurer que la résolution des équations MHD à bas nombre de Reynolds magnétique et sans hypothèse quasi-statique est valable, les simulations précédentes ont été également réalisées avec des pas de temps deux fois et quatre fois plus petits. La seule différence observée est une légère augmentation de l'énergie magnétique aux grands nombres d'onde, laissant supposer que l'utilisation des équations MHD classiques dans un contexte de faible nombre de Reynolds magnétique sous-estime l'énergie magnétique des grands nombres d'onde.

Par la suite, l'hypothèse quasi-statique ne sera pas utilisée lors des simulations à bas nombre de Reynolds magnétique, et nous avons vérifié que les résultats obtenus sont qualitativement cohérents avec ceux utilisant l'approximation quasi-statique.

2.3.4 Conditions initiales

Les conditions initiales méritent qu'on les présente en détail pour plusieurs raisons. Une analogie intéressante peut être notée entre le modèle KS et l'initialisation d'une DNS. Il existe de nombreuses manières d'initialiser un calcul par DNS selon le contexte. L'objectif étant ici d'étudier une turbulence homogène anisotrope, la méthode retenue devra proposer un contrôle clair de l'anisotropie de l'écoulement initial tout en simulant une turbulence relativement déve-

loppée afin de limiter le temps de calcul. Afin d'avoir une présentation exhaustive de l'initialisation retenue pour les simulations présentées au sein de ce manuscrit, le lecteur se référera à l'article par Rogallo [Rogallo(1981)].

Le choix des conditions initiales est un problème à part entière en DNS. À la vue du coût numérique d'une telle méthode, il paraît fondamental de pouvoir construire une condition initiale la plus proche possible d'un point de vue statistique de l'écoulement considéré. Il existe différentes méthodes ayant cet objectif dont les deux principales sont celles dues à Orszag et Patterson [Orszag & Patterson(1971)] et Rogallo [Rogallo(1981)].

Quelque soit le contexte (MHD ou non), le champ de vitesse est initialement construit à partir d'un spectre d'énergie imposé par l'expression analytique :

$$E(k) \approx \frac{k^4}{k_0^5} \exp \left(-2 \left(\frac{k}{k_0} \right)^2 \right), \quad (2.97)$$

où k_0 correspond au nombre d'onde d'énergie maximum au début de la simulation. Ce spectre ne comporte pas de petites échelles. À partir de ce spectre, et du fait des non-linéarités des équations de Navier-Stokes, l'énergie va transiter des faibles nombres d'ondes $k \approx k_0$ vers les hauts nombres d'onde.

La densité spectrale s'en déduit immédiatement :

$$e(\mathbf{k}) \approx \frac{1}{8\pi k^2} \frac{k^4}{k_0^5} \exp \left(-2 \left(\frac{k}{k_0} \right)^2 \right), \quad (2.98)$$

où le facteur $1/2$ (en plus du facteur classique $1/4\pi k^2$ provenant de la représentation sphérique) provient de la séparation de l'énergie entre les modes poloïdaux et toroïdaux. Les composantes initiales dans l'espace de Craya se déduisent de la densité d'énergie par :

$$\hat{u}^{(1)}(\mathbf{k}) = \sqrt{e(\mathbf{k})} \cos \beta(\mathbf{k}) e^{i\phi(\mathbf{k})} \quad (2.99)$$

$$\hat{u}^{(2)}(\mathbf{k}) = \sqrt{e(\mathbf{k})} \sin \beta(\mathbf{k}) e^{i\phi(\mathbf{k})} \quad (2.100)$$

$$\hat{u}^{(3)}(\mathbf{k}) = 0 \quad (2.101)$$

où $\beta(\mathbf{k})$ et $\phi(\mathbf{k})$ sont des angles aléatoires indépendants. Les composantes poloïdales et toroïdales sont ensuite reprojctées dans le repère cartésien et une transformée de Fourier permet finalement de remonter au champ de vitesse dans l'espace physique. Une méthode similaire peut bien évidemment être utilisée pour générer un champ magnétique fluctuant solénoïdal. Il est possible de montrer que cette méthode assure d'une part l'isotropie directionnelle du champ initial, mais également une polarisation nulle.

Il est intéressant de remarquer la très grande similarité qu'il existe entre l'initialisation d'une DNS et la méthode de construction du champ de vitesse synthétique en KS. Il est possible de s'imaginer la différence entre les deux approches comme suit : à l'instant initial, les deux champs sont identiques puisque construits sur une superposition de modes de Fourier dans l'espace de Craya ; aux instants ultérieurs, le champ DNS évolue selon la dynamique des équations de Navier-Stokes tandis que le champ KS évolue selon des pulsations arbitraires (modèle classique) ou bien selon la dynamique linéaire des équations de Navier-Stokes. Il apparaît dès lors qu'une comparaison entre les deux méthodes est tout indiquée. Bien évidemment, au-delà de la considération sur la dynamique, la discrétisation de l'espace des vecteurs d'onde n'est bien évidemment pas la même au sein des deux méthodes.

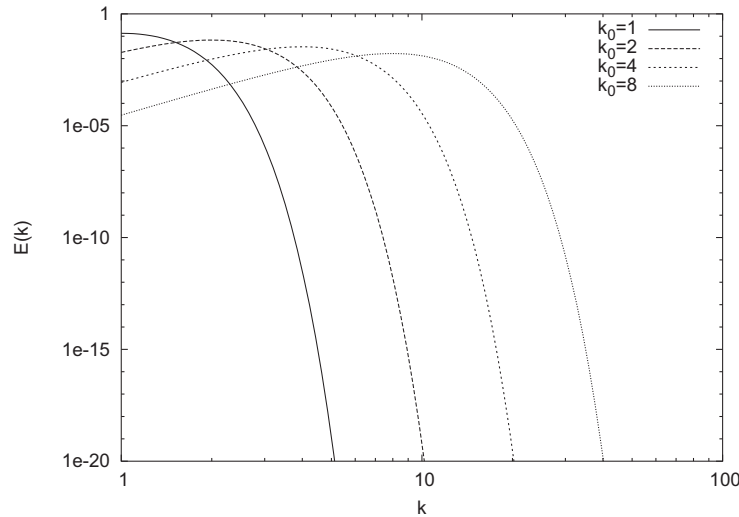


FIG. 2.6 – Spectres d'énergie $E(k)$ imposés comme condition initiales en DNS.

2.3.5 Forçage et initialisation des calculs anisotropes

Puisqu'aucun phénomène ne restaure l'énergie dissipée par viscosité ou dissipation Joule, l'énergie cinétique décroît indéfiniment. En réalité, il existe souvent des phénomènes qui tentent à restaurer l'énergie dissipée. Il peut s'agir d'instabilités qui alimentent en énergie les fluctuations turbulentes, ou bien de parois mobiles ou tout autre type de conditions aux limites. Ces phénomènes sont pris en compte indirectement en introduisant un terme de forçage dans les équations. Il est important de noter que le type de forçage que l'on présente par la suite ne représente en rien un phénomène d'instabilités ou autre source d'énergie possible pour la turbulence. On injecte *arbitrairement* de l'énergie dans l'écoulement afin de compenser les phénomènes dissipatifs et éventuellement atteindre un régime quasi-stationnaire.

Au sein de ce travail, trois méthodes différentes de forçage ont été utilisées. Elles sont semblables en ce qui concerne l'idée de base : l'énergie dissipée est réinjectée dans certaines échelles de l'écoulement.

Type 1

L'objectif de ce premier forçage est de maintenir l'énergie cinétique constante au cours de la simulation. Pour cela, l'énergie cinétique totale est calculée à chaque pas de temps. Entre chaque itération, on dispose ainsi de l'énergie $\Delta E = E(t + dt) - E(t)$ dissipée entre deux itérations successives. Cette énergie est ensuite réinjectée dans le système en modifiant le module (et uniquement le module) de certains modes sélectionnés arbitrairement. Ainsi, une fois l'avancement en temps par le schéma d'Adams-Bashforth effectué, les composantes de Fourier de la vitesse sont multipliées par un coefficient β selon

$$\beta = \sqrt{1 + \frac{\Delta E}{\sum_{|\mathbf{k}| \in [k_1, k_2]} |\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})|^2}} \quad \text{si } k \in [k_1, k_2] \quad (2.102)$$

$$= 1 \quad \text{sinon.} \quad (2.103)$$

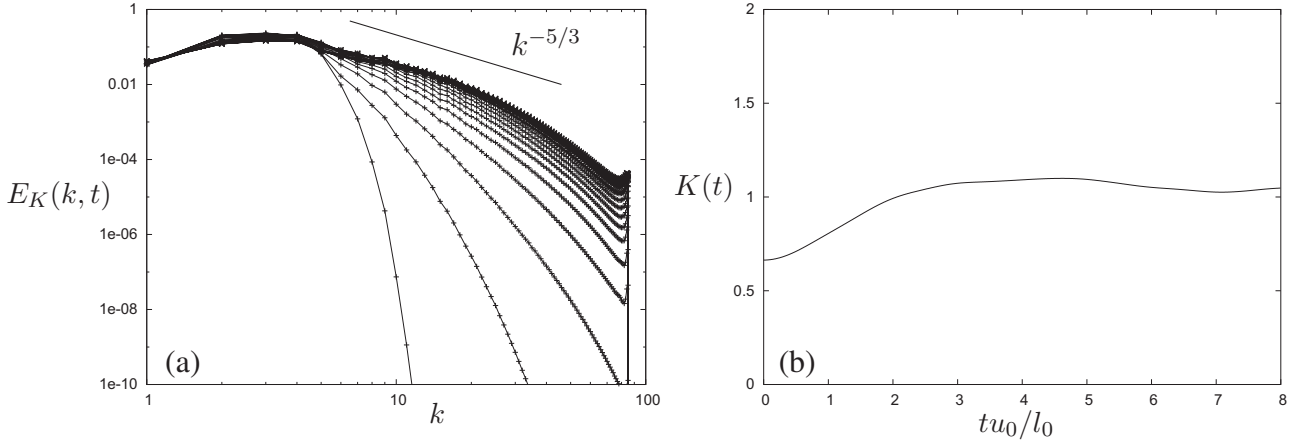


FIG. 2.7 – Turbulence homogène isotrope forcée. (a) Spectre d'énergie $E_K(k, t)$. (b) Énergie cinétique au cours du temps.

Ainsi, les modes $\hat{u}(\mathbf{k})$ tels que $k \in [k_1, k_2]$ voient leurs modules modifiés afin de compenser exactement l'énergie dissipée au pas de temps précédent. Le coefficient β est toujours très légèrement plus grand que un. Sa valeur dépend bien évidemment du nombre de modes forcés, donc de k_1 et k_2 . Le choix du domaine forcé peut conduire à des comportements très différents. D'une manière générale, l'énergie dissipée par les grands nombres d'onde est réinjectée dans les structures les plus énergétiques du système, et ce afin de perturber au minimum la cascade d'énergie ayant lieu dans la zone inertielle.

Ce forçage sera utilisé dans un contexte aéroacoustique au sein du chapitre 3. En effet, il est particulièrement important que l'énergie cinétique demeure constante dans ce cas. Le rayonnement acoustique varie très fortement avec le nombre de Mach u_0/c_0 de l'écoulement, où c_0 est la célérité du son dans le fluide considéré.

Type 2

Le second forçage sera utilisé lorsque qu'un état d'énergie cinétique constante n'est pas de première importance. L'objectif est ici de limiter le déclin de la turbulence avec un minimum d'impact sur la dynamique. Le forçage de type 1 impose des contraintes relativement importantes lorsque les phénomènes dissipatifs sont dominants. En effet, le coefficient β est proportionnel à l'énergie perdue ΔE . C'est en particulier le cas d'une turbulence MHD à bas nombre de Reynolds magnétique. La dissipation Joule s'ajoute à la diffusion moléculaire et le forçage de type 1 engendre de très grandes fluctuations des quantités statistiques de la turbulence et peut éventuellement conduire à une divergence numérique.

C'est pour cela que l'on se propose ici d'utiliser un deuxième type de forçage. Celui-ci n'impose en aucun cas à l'énergie cinétique *totale* d'être constante. En revanche, l'idée est de maintenir l'énergie constante mais pour certains modes uniquement. Pour cela, on définit de la même manière un domaine de forçage $[k_1, k_2]$, au sein duquel les modes voient leurs modules

modifiés par un coefficient β défini cette fois par

$$\beta = \sqrt{\frac{E_0}{\sum_{|\mathbf{k}| \in [k_1, k_2]} |\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})|^2}} \quad \text{si } k \in [k_1, k_2] \quad (2.104)$$

$$= 1 \quad \text{sinon} \quad (2.105)$$

où E_0 est le niveau d'énergie que l'on souhaite fixer au sein des modes forcés. Avec cette méthode l'énergie cinétique varie beaucoup plus et il est nécessaire d'effectuer plus d'itérations que la première méthode avant d'atteindre un état quasi-stationnaire. En revanche, la turbulence s'adapte naturellement à la contrainte d'énergie E_0 et atteint un état quasi-stationnaire dont on ne contrôle pas le niveau d'énergie, mais au sein duquel la dynamique est très faiblement perturbée.

Type 3

Un troisième type de forçage est nécessaire dans le contexte de la turbulence MHD. En effet, dans ce cas, les variations d'énergie cinétique sont d'une part dues aux phénomènes dissipatifs, mais également aux transferts d'énergie vers les fluctuations magnétiques. Un raisonnement basé sur l'énergie cinétique seulement, comme les forçages de type 1 et 2, n'est donc pas adapté et mène d'ailleurs à des problèmes de stabilité du code de calcul. C'est pour cette raison que nous utiliserons par la suite un troisième type de forçage, dont les détails peuvent être trouvés dans [Vorobev *et al.* (2005)].

L'équation résolue par méthode pseudo-spectrale est modifiée par l'ajout d'une force définie par :

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}) = \alpha(\mathbf{k}) \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) \quad \text{si } k \in [k_1, k_2] \quad (2.106)$$

$$= 0 \quad \text{sinon} . \quad (2.107)$$

La constante $\alpha(\mathbf{k})$ est calculée pour chaque mode forcé et à chaque itération. L'intensité de cette constante est relié à un taux de dissipation constant ϵ_0 . Après une phase d'initialisation, l'écoulement atteint un équilibre quasi-stationnaire d'énergie constante et de dissipation turbulente oscillant autour de la valeur ϵ_0 . La constante $\alpha(\mathbf{k})$ est ainsi définie par :

$$\alpha(\mathbf{k}) = \frac{\epsilon_0}{N_{\text{forçés}} (\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{u}}^*(\mathbf{k}))} , \quad (2.108)$$

où $N_{\text{forçés}}$ correspond au nombre de modes influencés par le forçage, *i.e.* au nombre de modes $\mathbf{u}(\mathbf{k})$ tels que $|\mathbf{k}| \in [k_1, k_2]$. Dans le cas purement hydrodynamique, cette méthode est très proche du forçage type 2. Dans un contexte MHD, la dissipation totale (visqueuse plus effet Joule) est imposée par la valeur de ϵ_0 sans contrainte sur la valeur de l'énergie cinétique ou magnétique.

Quelques statistiques de simulations forcées

D'une manière générale, les simulations directes suivent le protocole suivant. Une première simulation hydrodynamique purement isotrope et forçée est réalisée afin d'atteindre un écoulement quasi-stationnaire dont les statistiques sont raisonnablement développées. Cet état quasi-stationnaire est ensuite pris comme nouvelle condition initiale pour les simulations anisotropes.

DNS							
Résolution	Forçage	ϵ_0	u_0	ν	l_0	Re_λ	$k_{\max} l_\eta$
256^3	$k \in [2 : 4]$	0.5	0.78	0.0025	0.62	68	1.4

TAB. 2.1 – Paramètres d’une simulation isotrope forcée. Re_λ est le nombre de Reynolds basé sur l’échelle de Taylor. l_η est l’échelle de Kolmogorov. Les valeurs présentées sont celles obtenues à la fin de la simulation (état quasi-stationnaire).

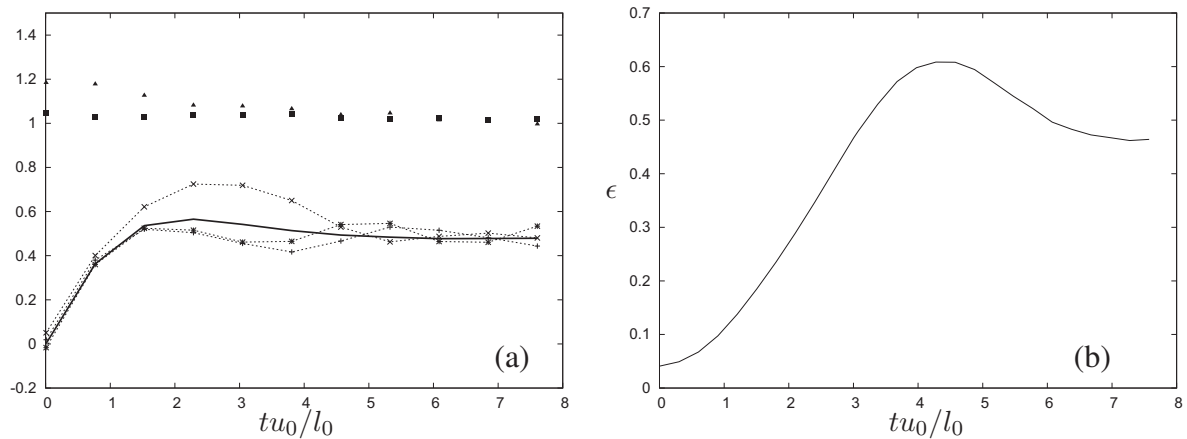


FIG. 2.8 – Turbulence homogène isotrope forcée. (a) Facteurs de *skewness* (éq.(2.109) en trait pointillé et points et (2.110) en trait plein) et coefficients d’anisotropie des gradients $\blacksquare$ G_1 et $\blacktriangle$ G_2 . (b) Taux de dissipation ϵ . Le paramètre de forçage est $\epsilon_0 = 0.5$.

A l’instant $t = 0$, le forçage est supprimé tandis que la rotation et/ou le champ magnétique imposé apparaissent. Dans certains cas, ce protocole sera modifié, mais il est valable pour la plupart des simulations rassemblées dans ce travail.

On réalise ainsi une simulation hydrodynamique forcée dont les paramètres en fin de simulation sont rassemblés au sein du tableau 2.1. On s’intéresse ici aux propriétés statistiques de cet écoulement afin de s’assurer qu’il peut être utilisé comme condition initiale pour des calculs ultérieurs. Les résultats qui vont suivre proviennent d’une turbulence forcée grâce à la troisième méthode présentée ci-dessus mais ils sont qualitativement identiques en utilisant les deux autres méthodes.

La figure 2.7 présente l’évolution du spectre depuis la condition initiale de type (2.97) jusqu’à un état quasi-stationnaire. L’énergie se stabilise après quelques temps de retournement $t_0 = l_0/u_0$.

On considère souvent [Jimenez *et al.*(1993)] que la résolution est suffisante lorsque le critère $k_{\max} l_\eta > 1$ est vérifié, où l_η est l’échelle de Kolmogorov et $k_{\max}$ est le plus grand nombre d’onde résolu. Pour cette simulation, $k_{\max} l_\eta \approx 1.4$. D’une manière générale, toutes les simulations directes présentées au sein de ce manuscrit vérifient ce critère à tout instant.

L’objectif de cette simulation est bien évidemment de laisser les phases de chacun des modes se développer en évitant de dissiper trop d’énergie avant l’application des effets anisotropes. Pour cela, il est nécessaire de vérifier que le champ représente effectivement une turbulence isotrope développée. Il existe de nombreux indicateurs statistiques permettant de déterminer qualitativement l’état de la turbulence. En turbulence homogène et isotrope, le fac-

teur de *skewness* est défini par :

$$s_i = -\frac{\langle (\partial u_i / \partial x_i)^3 \rangle}{\langle (\partial u_i / \partial x_i)^2 \rangle^{3/2}} \quad (2.109)$$

et doit être identique quelque soit l'indice. Une valeur de l'ordre de 0.4 à 0.5 est souvent retenue. Il existe également une expression équivalente pour un turbulence isotrope 3D [Batchelor & Townsend(1947)] définie par :

$$s = \sqrt{\frac{135}{98}} \frac{\langle \omega_i \omega_i \partial u_i / \partial x_i \rangle}{\langle \omega_j \rangle^{3/2}} . \quad (2.110)$$

La figure 2.8(a) présente ces différentes quantités au cours du temps pour une simulation forcée. On retrouve bien la valeur attendue et ce quelque soit la direction considérée. On trace également en figure 2.8(b) le taux de dissipation turbulente pour s'assurer que celui-ci passe par un maximum. En fin de simulation, la valeur de la dissipation tend vers le paramètre de forçage ϵ_0 de la troisième méthode de forçage [Vorobev *et al.*(2005)].

Étant donné que cette simulation hydrodynamique servira de condition initiale pour des calculs anisotropes, il paraît important de vérifier que l'écoulement est bien isotrope et que le forçage n'introduit pas d'anisotropie parasite. Pour cela, on trace en figure 2.8(a) les deux coefficients d'anisotropie G_1 (▲) et G_2 (■) définis par :

$$G_1 = \frac{\langle (\partial u_y / \partial z)^2 \rangle}{2 \langle (\partial u_y / \partial y)^2 \rangle} \quad \text{et} \quad G_2 = \frac{2 \langle (\partial u_z / \partial z)^2 \rangle}{\langle (\partial u_z / \partial y)^2 \rangle} . \quad (2.111)$$

Ceux-ci doivent être égaux à 1 dans le cas d'une turbulence isotrope, et c'est bien ce que l'on observe en figure 2.8(a). Afin de s'assurer que l'écoulement est bien isotrope à toutes échelles de l'écoulement, nous traçons en figure 2.9(a) la quantité $c(k)$ définie par [Vorobev *et al.*(2005)] :

$$c(k) = \frac{E_1(k) + E_2(k)}{2E_3(k)} , \quad (2.112)$$

où

$$E_i(k) = \frac{1}{2} \sum_{k-1/2 < |\mathbf{k}| < k+1/2} \hat{u}_i(\mathbf{k}) \hat{u}_i^*(\mathbf{k}) . \quad (2.113)$$

En turbulence isotrope, $c(k)$ doit être égale à 1 et ce quel que soit k , tandis que $c(k)$ tend vers l'infini lorsque la turbulence tend vers un état bidimensionnel. Enfin, la figure 2.9(b) trace le spectre angulaire de l'état quasi-stationnaire. Ces deux figures illustrent le fait qu'il faut demeurer vigilant lorsque l'on considère des statistiques en lien avec les plus petits nombres d'onde de la méthode pseudo-spectrale. Le plus faible nombre d'échantillons entraîne inévitablement des statistiques plus bruitées et dont l'isotropie n'est pas parfaite. Néanmoins, l'isotropie est remarquable pour les nombres d'ondes intermédiaires et ce quel que soient le nombre d'onde et la direction de propagation.

Finalement, la figure 2.10 présente un rendu en volume de l'ensrophie à la fin de la simulation. Ce champ de vitesse est ensuite considéré comme condition initiale.

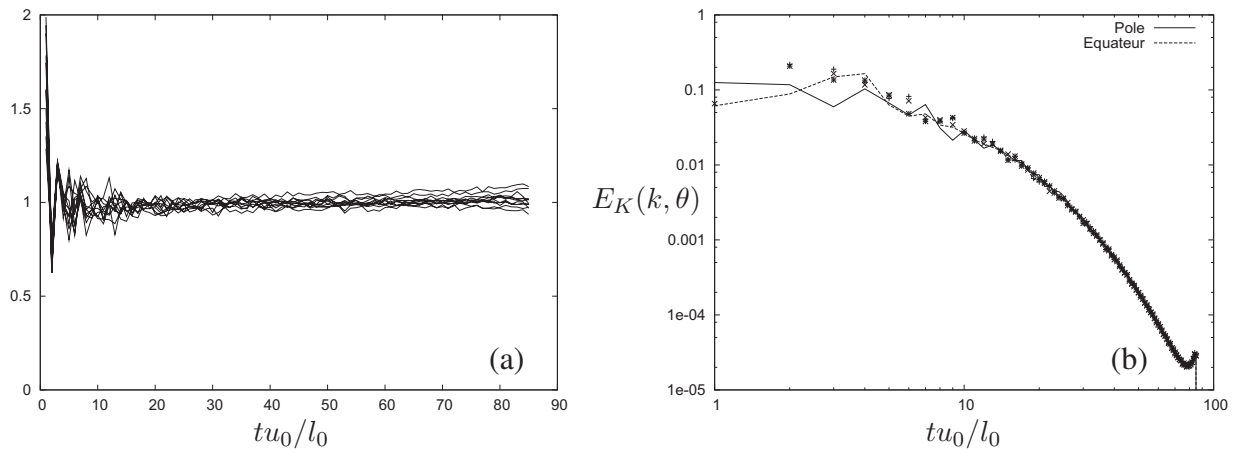


FIG. 2.9 – Turbulence homogène isotrope forcée. (a) Coefficient $c(k, t)$ (éq.(2.112)). (b) Spectres angulaires d'énergie cinétique $E_K(k, \theta)$.

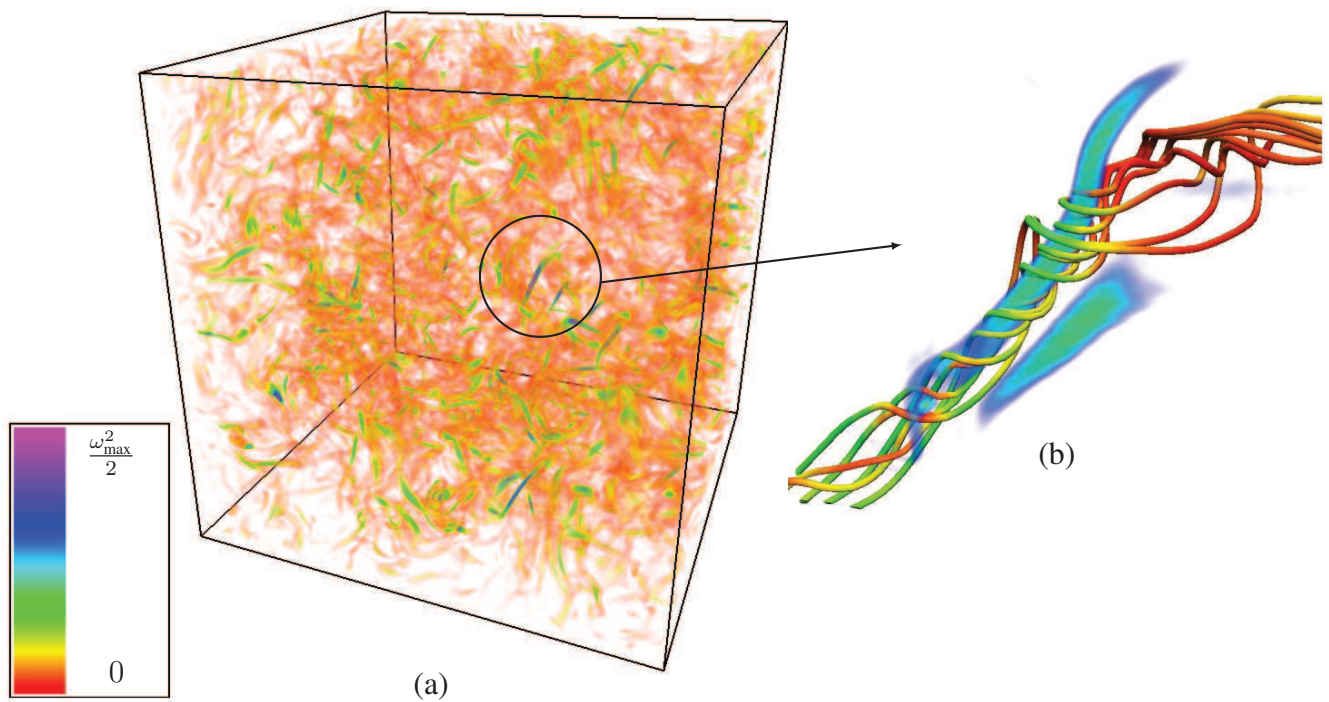


FIG. 2.10 – Visualisations de l'état quasi-stationnaire obtenu par DNS isotrope forcée. (a) Rendu en volume de l'enstrophie obtenue par DNS isotrope forcée. (b) Enstrophie (en bleu) et lignes de courant dont la couleur correspond à la valeur locale de l'énergie cinétique.

2.4 Conclusion

L'objectif de ce chapitre a été de présenter les deux méthodes numériques utilisées au sein des chapitres suivants.

La méthode pour générer un champ turbulent stochastique par Kinematic Simulation a été rappelée. Nous proposons une généralisation de cette méthode au cas anisotrope : l'élément novateur étant de considérer le vecteur d'onde et la phase de chacun des modes comme des variables aléatoires. Les distributions de ces variables sont directement reliées aux tenseur spectral. Il est ainsi possible de générer un champ synthétique dont les corrélations en deux-points sont complètement déterminées. Nous avons donné l'exemple d'une anisotropie de directivité initiale et observé sa conséquence dans l'espace physique. À plus long terme, il est possible d'envisager l'initialisation d'une simulation directe par cette méthode, avec un contrôle à toutes échelles de l'énergie, de l'hélicité (fondamental pour le cas MHD) et de la polarisation. À noter finalement, que le formalisme de Craya permet, en plus de simplifier la prise en compte de la condition d'incompressibilité, d'inclure explicitement toutes solutions linéaires obtenues dans ce repère. Cette étape sera réalisée pour le cas de la turbulence en rotation (Chapitre 3, section 3.2.3), le cas de la turbulence MHD (Chapitre 4, section 4.2.2) et enfin le cas de la turbulence MHD en repère tournant (Chapitre 5, section 5.2.3).

Enfin, l'approche DNS pseudo-spectrale a été brièvement rappelée. Une attention particulière a été apportée au calcul hydrodynamique d'une turbulence homogène isotrope forcée. L'état quasi-stationnaire résultant sera par la suite considéré comme condition initiale des différentes simulations anisotropes présentées au sein des chapitres suivants. L'isotropie de cette condition initiale a été en particulier étudiée en détails.

Chapitre 3

Turbulence homogène isotrope et en rotation[†]

Ce chapitre est centré autour des corrélations en deux-points et en deux temps d'une turbulence homogène. Deux cas nous intéressent en particulier, le cas d'une turbulence homogène isotrope et la cas d'une turbulence homogène en rotation. Pour cela, nous utiliserons les deux méthodes numériques décrites dans le chapitre précédent.

Tout d'abord, l'objectif de ce chapitre est de présenter le modèle synthétique classique et de mettre en évidence ses limites dans le cas isotrope. On montrera sous quelles conditions la fonction de corrélation des composantes spectrales de la vitesse est correctement représentée par le modèle synthétique. Par comparaison avec des DNS, on étudiera également les deux pulsations caractéristiques fréquemment rencontrées dans la littérature.

Le cas de la turbulence en rotation sera ensuite considéré. Après avoir présenté quelques résultats DNS classiques et rappelé les principales propriétés de ce type d'écoulements, on proposera une comparaison des résultats par DNS avec ceux obtenus par KS incluant les solutions linéarisées des équations en repère tournant. En particulier, on s'intéressera aux fonctions de corrélations en deux-temps des modes de Fourier de la vitesse.

Une possible application à l'aéroacoustique est finalement proposée en fin de chapitre.

3.1 Corrélations deux-temps en turbulence homogène isotrope

Les corrélations spatiales et temporelles des écoulements turbulents présentent un intérêt certain dans de nombreuses applications. Les corrélations de vitesse en deux-points et en deux-temps peuvent être utilisées afin d'évaluer le déplacement de particules fluides [Cambon *et al.*(2004), Kaneda & Ishida(2000)]. En aéroacoustique, le son émis par une turbulence isotrope dépend intimement des corrélations en deux-points et deux-temps du champ de vitesse [Proudman(1952), Lilley(1994)]. La fonction de corrélation spatiale des fluctuations à petites échelles est raisonnablement décrite par la théorie de Kolmogorov [Kolmogorov(1941)], *i.e.* $\langle (u(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u(\mathbf{r}))^2 \rangle \approx r^{2/3}$. Il est également possible d'établir un spectre en fréquence pour le champ de vitesse Lagrangien à partir d'arguments basés sur l'hypothèse de similarité. Cependant, cette

[†]Les résultats présentés au sein de ce chapitre ont fait l'objet de deux publications [Favier *et al.*(2008), Favier *et al.*(2010)].

approche ne prédit pas le spectre en fréquence de manière correcte. En effet, si l'effet de *sweeping* (voir la suite) est dominant au sein de l'écoulement, le taux de dissipation turbulente ϵ n'est plus l'unique paramètre intéressant d'un point de vue dimensionnel, mais la vitesse *rms* u_0 (qui est une caractéristique des grandes échelles de l'écoulement) intervient également. Ainsi, deux phénomènes peuvent être responsables de la décorrélation temporelle d'un champ de vitesse Eulerien : le "sweeping effect" caractérisant l'advection des échelles dissipatives de l'écoulement par les grandes structures énergétiques ; et le temps de retournement (aussi appelé "local straining" ou "Kolmogorov timescale") pour lequel une structure de l'écoulement se décorrèle en temps en fonction de son énergie et de sa taille. La figure 3.1 présente un schéma simplifié de ces deux phénomènes. Ces deux hypothèses sont discutées depuis maintenant un certain temps [Kraichnan(1964), Tennekes(1975), Chen & Kraichnan(1989)], et sont considérées comme les deux temps caractéristiques des différents processus dynamiques existant au sein de l'écoulement [Comte-Bellot & Corrsin(1971)]. Il existe de nombreuses évidences de l'existence de l'effet de *sweeping*, que ce soit grâce à des travaux théoriques [Chen & Kraichnan(1989)], expérimentaux [Poulain *et al.*(2006)] ou numériques [Sanada & Shanmugasundaram(1992)].

Ce chapitre est tout particulièrement dédié aux corrélations Euleriennes de vitesse et l'on souhaite discuter et comparer les deux phénomènes physiques présentés ci-dessus. Pour cela, on s'intéressera aux corrélations temporelles des modes de Fourier de la vitesse. Cette quantité statistique se montrera parfaitement adaptée au problème qui nous intéresse ici. Différents travaux ont été consacrés à ce type de corrélations, dans le contexte de simulations des grandes échelles (ou Large Eddy Simulation (LES)) [He *et al.*(2004)] ainsi que dans le contexte de la génération sonore due à une turbulence isotrope [Zhou & Rubinstein(1995)]. Lors de ces études, différents outils numériques ont été utilisés, de la LES à le DNS, en passant par des approches plus théoriques. L'effet de *sweeping* est considéré comme une conséquence directe de la dynamique des équations de Navier-Stokes. Tout modèle se basant sur ces équations (LES comme DNS), devrait donc mettre en évidence des temps caractéristiques propre au *sweeping*. En revanche, il n'existe que peu de modèles numériques sur lesquels l'utilisateur dispose d'un contrôle complet sur l'instationnarité, permettant ainsi d'introduire explicitement le temps de retournement comme temps caractéristique[†]. Ainsi, l'intérêt principal de la KS est ici de pouvoir contrôler explicitement l'instationnarité du champ de vitesse. En particulier, il est possible de choisir entre une décorrélation temporelle basée sur l'effet de *sweeping* ou de *straining*. Le modèle KS ne prend en compte ces deux effets que par l'utilisation d'une pulsation caractéristique, et n'a donc qu'un lien limité avec la dynamique réelle. Cependant, par comparaison avec des DNS, le modèle synthétique permet de distinguer clairement les contributions non-linéaires, inexistantes en KS, des phénomènes physiques élémentaires simples pris en compte en KS grâce aux pulsations caractéristiques.

Les corrélations deux-temps, et en particulier l'impact de l'hypothèse de *sweeping*, ont déjà été étudiées en utilisant des DNS [Sanada & Shanmugasundaram(1992)] ou des LES [He *et al.*(2004)]. Il ne semble donc pas justifié d'effectuer de nouvelles simulations directes dans ce contexte. La raison pour laquelle nous proposons de nouveau un calcul par DNS est la suivante. La simulation cinématique nécessite un spectre d'énergie afin de déterminer l'amplitude de chacun

[†] À noter cependant que le temps de retournement a été observé comme étant le temps caractéristique dominant au sein du modèle présenté dans [McComb *et al.*(1989)].

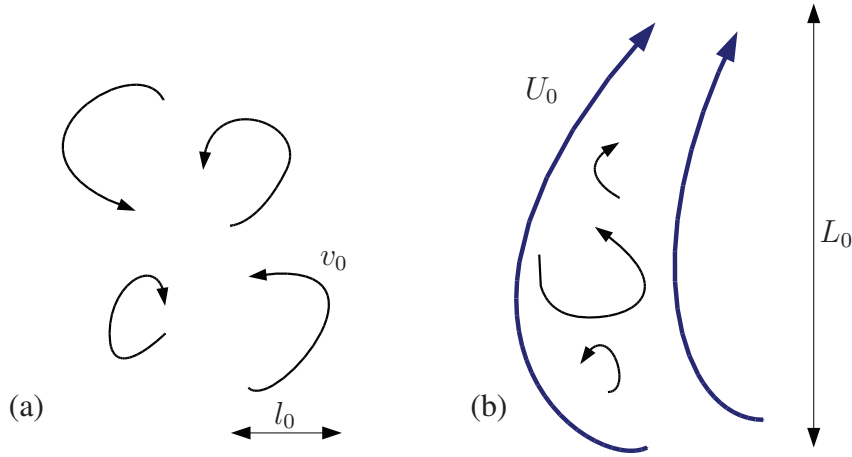


FIG. 3.1 – Schéma représentant deux phénomènes physiques possibles à l'origine de la décorrélation temporelle en turbulence homogène et isotrope. (a) Le temps caractéristique de chaque structure est son temps de retournement l_0/v_0 , où $v_0 \approx \sqrt{k_0 E(k_0)}$ et $l_0 \approx 1/k_0$. (b) Les structures d'échelle caractéristique l_0 sont advectées par les grandes structures d'échelle L_0 à la vitesse U_0 .

des modes. Pour ce faire, et afin de proposer la comparaison la plus cohérente possible entre les deux modèles, ce spectre d'énergie initial est obtenu à partir de l'état quasi-stationnaire de nos DNS forcées. L'objectif des calculs DNS qui vont suivre est donc triple : nous souhaitons d'une part retrouver les résultats déjà observés dans le cas isotrope, nos résultats DNS ont également pour objectif de fournir les quantités statistiques nécessaires à l'initialisation de nos KS, et nous souhaitons finalement généraliser cette approche pour la turbulence en rotation.

Le second objectif de ce chapitre est en lien direct avec la diffusion Lagrangienne d'un écoulement turbulent en rotation (mais également en présence d'une stratification stable). Dans ce cas, les solutions linéaires pour les corrélations deux-points deux-temps permettent d'estimer les statistiques Lagrangiennes de l'écoulement [Kaneda & Ishida(2000)]. Les simulations cinématiques ont d'ores et déjà été utilisées dans ce contexte [Cambon *et al.*(2004)] puisqu'il est possible d'inclure explicitement les solutions au sein du modèle synthétique, comme cela a été présenté au sein du chapitre 2. Nous souhaitons donc comparer les corrélations deux-temps obtenues par cette approche linéaire à celles obtenues par DNS.

Sont calculées dans cette partie les corrélations deux-temps d'une turbulence homogène, quasi-stationnaire, mais pas nécessairement isotrope. Le champ de vitesse est généré grâce aux deux méthodes numériques décrites dans le chapitre 2. La quantité statistique qui nous intéresse ici est la fonction de corrélation temporelle d'un mode de Fourier de la vitesse définie par[†]

$$R(k, \tau) = \frac{\langle \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) \hat{u}_i^*(\mathbf{k}, t + \tau) \rangle}{\langle \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) \hat{u}_i^*(\mathbf{k}, t) \rangle}. \quad (3.1)$$

Les crochets $\langle \dots \rangle$ correspondent ici à une moyenne d'ensemble, une moyenne temporelle, ainsi qu'à une moyenne sur la direction du vecteur d'onde $\mathbf{k}$. La quantité $\hat{u}_i^*(\mathbf{k}, t)$ est le com-

[†]Rien ne prouve que la quantité 3.1 est réelle, comme cela est supposé par la suite. Nous avons cependant observé numériquement que sa partie complexe demeure très faible. De plus amples investigations sur le sens physique de la partie complexe de 3.1 sont cependant nécessaires.

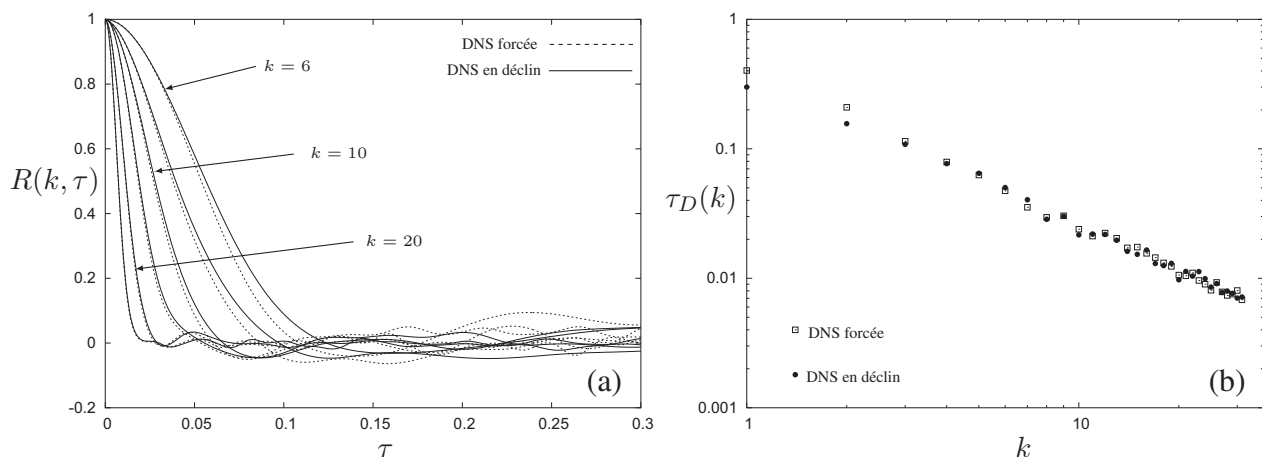


FIG. 3.2 – Impact du forçage sur les corrélations deux-temps. (a) Fonction de corrélation $R(k, \tau)$ pour $k = 6, 8, 10, 14, 20, 30$. (b) Temps τ_D pour $k \in [1 : 32]$ calculés à partir de trois réalisations indépendantes (Série DNS 1, Tab.3.1).

plexe conjugué de $\hat{u}_i(\mathbf{k}, t)$. Comme on le verra par la suite, il est particulièrement important de conserver la dépendance au nombre d'onde k .

Étant donné que les deux modèles numériques possèdent quasiment le même spectre d'énergie, la fonction de corrélation définie par (3.1) est normalisée. Effectivement, pour un temps de retard τ nul, la fonction de corrélation est égale à l'énergie contenue au sein des modes tels que $|\mathbf{k}| = k$, qui est identique pour les deux modèles. En s'appuyant sur les travaux publiés dans [Sanada & Shanmugasundaram(1992)], nous introduisons également le temps caractéristique $\tau_D(k)$, défini à une échelle k par :

$$\tau_D(k) = \int_0^\infty R(k, \tau) d\tau. \quad (3.2)$$

Il serait également possible de se baser sur la valeur à mi-hauteur de la fonction de corrélation. Cependant, on verra par la suite que la définition (3.2) est plus appropriée au cas qui nous intéresse dans cette partie. Le temps à mi-hauteur sera quant à lui plus adapté lorsque l'on considérera le cas de la turbulence homogène en rotation au sein du paragraphe 3.3.

3.1.1 Résultats DNS isotrope

Impact du forçage

Aucun phénomène dissipatif n'est présent au sein du modèle KS isotrope. L'énergie est donc constante au cours du temps, ce qui est un avantage dans le contexte acoustique. Effectivement, les propriétés acoustiques de la turbulence dépendent intimement du nombre de Mach, et donc de la vitesse *rms* de l'écoulement.

Dans le contexte d'une DNS, il est donc nécessaire de compenser l'énergie dissipée par viscosité. Les différentes méthodes de forçage sont détaillées au sein du chapitre précédent, section 2.3.5. Au sein de ce chapitre, la méthode de forçage est la méthode dite de type 1 au sein du chapitre 2[†]. Nous avons choisi cette méthode car l'énergie cinétique est ainsi constante

[†]Les résultats concernant les corrélations deux-temps ne sont pas modifiés par l'utilisation d'une autre méthode

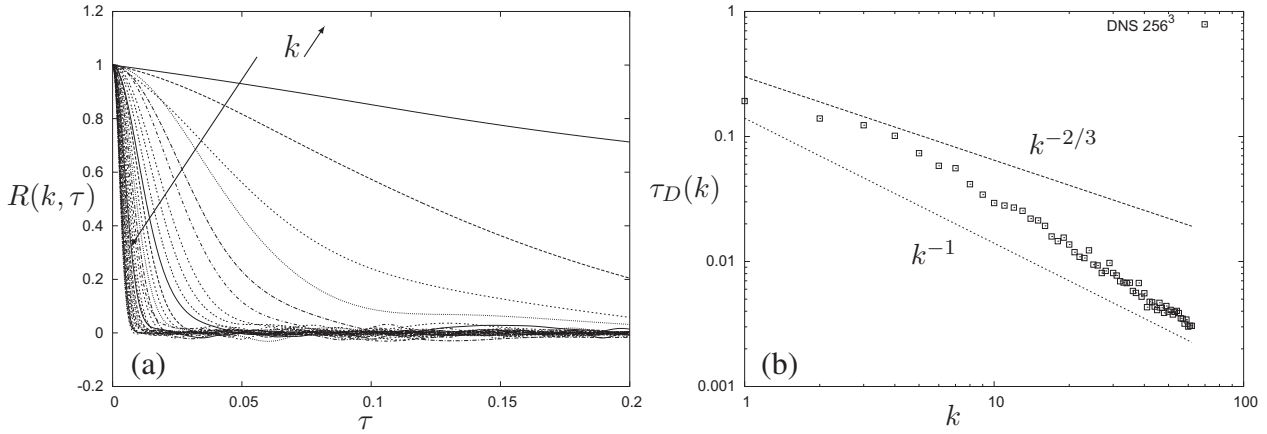


FIG. 3.3 – Corrélations deux-temps en DNS isotrope forcée. (a) Fonction $R(k, \tau)$ pour $k \in [2 : 64]$. (b) Temps de corrélation τ_D pour $k \in [2 : 64]$. (Série DNS 2, Tab.3.1)

au cours du temps, ce qui présente un intérêt certain dans un contexte aéroacoustique (voir plus loin, section 3.4). Nous nous intéressons ici uniquement à l'impact du forçage sur la fonction de corrélation. La figure 3.2(a) présente la fonction $R(k, \tau)$ pour deux réalisations identiques d'un écoulement résolu par DNS, l'une étant forcée, l'autre non. Le forçage est ici effectué pour les modes tels que $k \in [1 : 4]$ (voir les paramètres des simulations numériques de ce chapitre au sein du tableau récapitulatif 3.1). L'impact du forçage est d'autant plus faible que l'on s'éloigne de la gamme des nombres d'onde forcés. Pour des écarts de temps τ longs, les fonctions de corrélations présentent des oscillations plus prononcées dans le cas forcé. Cependant, ces oscillations n'ont que peu d'impact sur le temps de corrélation τ_D comme on peut l'observer sur la figure 3.2(b). Seuls les modes forcés semblent avoir des temps de corrélations sensiblement plus longs par rapport au cas en déclin.

L'utilisation du forçage ne perturbe donc pas les corrélations si l'on observe des nombres d'onde suffisamment éloignés de la zone forcée, ce qui est notre cas puisque nous nous intéressons à la décorrélation des modes se trouvant dans la zone inertielle. Si le forçage n'est pas nécessaire lorsque l'on s'intéresse aux fonctions de corrélations (sections 3.1 et 3.3), il est en revanche utile dans un contexte aéroacoustique (voir la section 3.4) afin d'obtenir des quantités acoustiques stationnaires. Dans la suite, les résultats proviennent donc de simulations directes forcées.

Corrélations et temps caractéristiques

Nous utilisons ici la définition (3.1) afin de calculer $R(k, \tau)$ à partir d'une DNS isotrope forcée. Les corrélations de quantités spectrales sont relativement aisées à calculer au sein d'un code pseudo-spectral puisque nous disposons directement de la quantité $\hat{u}(\mathbf{k}, t)$. Les statistiques présentées ici sont obtenues par moyenne sur trois réalisations différentes de l'écoulement. Ces trois simulations diffèrent uniquement par leurs conditions initiales. Le spectre d'énergie initial est le même dans tous les cas, mais les phases et les amplitudes initiales de chacun des modes diffèrent. Ce choix est le résultat d'un équilibre entre temps de calcul numérique, nombre de réalisations et résolution.

de forçage.

DNS					
Série	Résolution	Forçage	Réalisations	Re_λ	
1	128^3	$k \in [1 : 4]$	3	72	
2	256^3	$k \in [1 : 4]$	3	156	
KS					
Série	Réalisations	M	λ'	λ	ω_n
1	50	2000	$[0 : 1]$	0.4	$\sqrt{k_n^3 E(k_n)}$
2	50	2000	$[0.2 : 1]$	$[0 : 2]$	$\sqrt{k_n^3 E(k_n)}$
3	100	2000	0.7	0.4	$\sqrt{k_n^3 E(k_n)}$
4	100	2000	0.7	0.4	$k_n u_0$

TAB. 3.1 – Paramètres des différentes simulations numériques isotropes présentées au sein de ce chapitre. Re_λ est le nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor. M est le nombre de modes de Fourier en KS (à comparer avec la résolution des DNS).

La figure 3.3(a) présente la fonction de corrélation $R(k, \tau)$ calculée pour $2 < k < 64$. On observe clairement que la décorrélation temporelle est d'autant plus rapide que le nombre d'onde est grand. Autrement dit, les petites structures de l'écoulement ont un temps caractéristique beaucoup plus petit que les grandes échelles énergétiques.

Sous les hypothèses de Kolmogorov, le temps de retournement τ_E peut s'écrire

$$\tau_E \approx (k^3 E(k))^{-1/2} \approx (\epsilon^{1/3} k^{2/3})^{-1} \quad (3.3)$$

où ϵ est le taux de dissipation turbulente. Le temps de *sweeping* τ_S peut quant à lui s'écrire

$$\tau_S \approx (u_0 k)^{-1} \quad (3.4)$$

où u_0 est la vitesse *rms* de l'écoulement. Pour ces deux lois, le temps de corrélation $\tau_D(k)$ varie en puissance négative du nombre d'onde k , ce qui est cohérent avec les résultats de la figure 3.3(a). Le temps de corrélation est tracé en fonction du nombre d'onde k en figure 3.3(b). Celui-ci est simplement obtenu par intégration temporelle de la fonction $R(k, \tau)$ pour chacun des nombres d'onde. Les deux pentes en k^{-1} et $k^{-2/3}$ correspondent aux deux lois en puissance (3.3) et (3.4) évoquées plus haut. Tandis que le nombre d'onde augmente, la dépendance du temps caractéristique au nombre d'onde semble tendre vers une loi en puissance de type $\tau_D \approx k^{-1}$. Cela confirme que l'effet de *sweeping* est dominant, du moins pour les petites échelles de l'écoulement. Ces résultats sont similaires à ceux observés dans [Sanada & Shanmugasundaram(1992), He *et al.*(2004), Orszag & Patterson(1971)]. Cependant, les conclusions sont moins claires concernant les petits nombres d'onde.

3.1.2 De l'instationnarité en KS isotrope

Les modèles synthétiques de type KS sont majoritairement utilisés dans des contextes Lagrangiens. Ceci explique le fait que l'instationnarité est souvent traitée avec moins d'importance que la discrétisation des vecteurs d'ondes. Dans de nombreuses applications, le champ de

vitesse est gelé (*i.e.* $\omega_n = 0$ pour tout n) sans conséquences notables sur les statistiques Lagrangiennes de l'écoulement (voir par exemple la figure 10 dans [Thomson & Devenish(2005)]).

Comme on l'a vu lors de la présentation du modèle classique, le champ synthétique dépend du temps via une pulsation particulière ω_n . Fung *et al.* [Fung *et al.*(1992)] propose que cette pulsation soit proportionnelle au temps de retournement du $n^{\text{ème}}$ mode selon :

$$\omega_n = \lambda \sqrt{k_n^3 E(k_n)} \quad (3.5)$$

où λ est une constante réelle arbitraire indépendante du nombre d'onde. Cette constante contrôle l'intensité de l'instationnarité de l'écoulement. On considère souvent que λ doit être proche de l'unité, sans jamais apporter d'arguments [Dàvila & Vassilicos(2003), Fung & Vassilicos(1998), Thomson & Devenish(2005), Khan *et al.*(2008)]. Une valeur nulle de λ correspond à un champ gelé tandis que $\lambda \gg 1$ correspond à une turbulence variant très rapidement par rapport au temps caractéristique des structures la constituant. La relation (3.5) est souvent qualifiée d'hypothèse de “local *straining*”. Ce temps caractéristique peut être considéré comme un temps Lagrangien car il ne dépend que l'échelle considérée $1/k_n$ et de son énergie $E(k_n)$.

La seconde possibilité de définition de ω_n est liée à l'hypothèse de *sweeping*, dont la pulsation caractéristique est :

$$\omega_n = \lambda k_n u_0, \quad (3.6)$$

où u_0 est la vitesse *rms* définie par :

$$u_0 = \sqrt{\frac{2}{3} \int E(\kappa) d\kappa}. \quad (3.7)$$

$E(k)$ est ici le spectre initial imposé en KS. Si l'expression (3.5) est utilisée dans la majorité des travaux faisant intervenir la KS, nous discuterons également l'impact du *sweeping* à travers l'expression (3.6).

Au delà du choix de la relation liant la pulsation ω_n au nombre d'onde k_n , il est également intéressant de discuter la nature déterministe de la variable ω_n . Celle-ci peut être considérée comme une variable aléatoire Gaussienne [Fung *et al.*(1992)] dont la valeur moyenne est $\lambda \varpi_n$ et l'écart-type $\lambda' \varpi_n$. λ et λ' sont des constantes réelles indépendantes du nombre d'onde. $\varpi_n = \sqrt{k_n^3 E(k_n)}$ correspond à l'hypothèse de *straining* tandis que $\varpi_n = k_n u_0$ correspond à l'hypothèse de *sweeping*. Lorsque $\lambda' = 0$, on retrouve la méthode classique dont les temps caractéristiques sont déterministes. Lorsque $\lambda = \lambda' = 0$, le champ est stationnaire. Dans la plupart des travaux rencontrés, $\lambda' = 0$, hormis dans [Fung *et al.*(1992)] où $\lambda' = \lambda$ (pour d'autres méthodes de génération de ω_n , voir également [Thomson & Devenish(2005)]). Bien évidemment, il s'agit du cas particulier où la moyenne et l'écart-type de la variable ω_n varie de la même manière avec k_n , à une constante près.

L'avantage principal de la KS est de pouvoir contrôler explicitement l'instationnarité en choisissant arbitrairement la pulsation ω_n . D'une part, l'objectif est ici de comparer les deux possibilités énoncées plus haut, c'est à dire $\omega_n \approx 1/\tau_E \approx \sqrt{k_n^3 E(k_n)}$ et $\omega_n \approx 1/\tau_S \approx k_n u_0$. D'autre part, nous souhaitons caractériser l'impact des paramètres λ et λ' sur l'instationnarité du champ synthétique, et en particulier sur ses fonctions de corrélations en deux-temps. Les valeurs considérées pour λ et λ' peuvent être trouvées au sein de la Table 3.1, et trouveront une justification dans les paragraphes qui suivent.

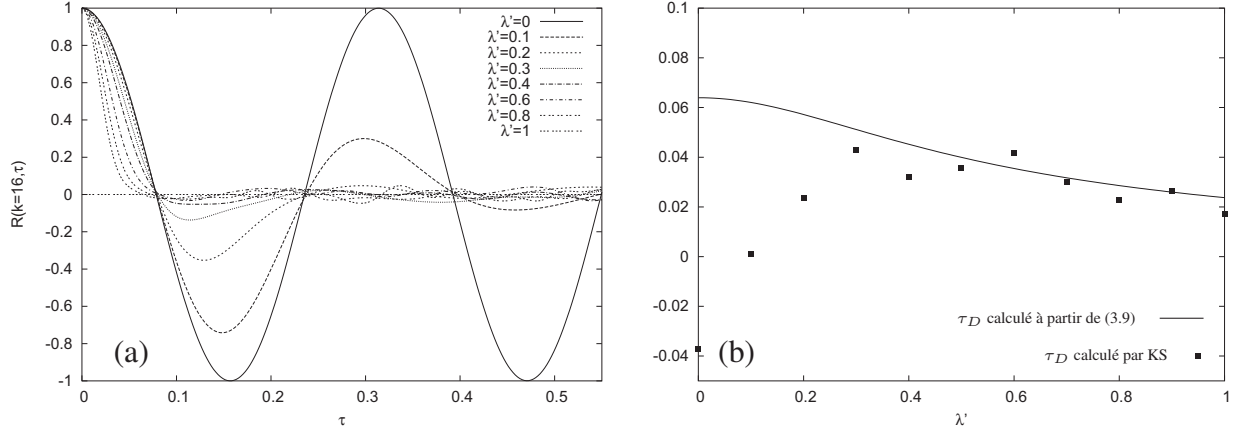


FIG. 3.4 – (a) Fonction de corrélation $R(k=16, \tau)$ pour différentes valeurs de λ' . (b) Évolution du temps de corrélation τ_D en fonction de λ' . Le trait continu correspond à l'équation (3.9) tandis que les points sont les résultats numériques obtenus par KS (Série KS 1 dans Tab.3.1).

À partir de l'équation (2.18), il est possible d'exprimer analytiquement la fonction de corrélation $R(k, \tau)$ du champ synthétique. Pour l'instant, la seule source d'instationnarité est la variable Gaussienne ω_n de telle manière que :

$$R(k_n, \tau) = \langle e^{-i\omega_n \tau} \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}\omega_{n0}^2 \tau^2\right) \quad (3.8)$$

où $\omega_{n0} = \sqrt{\lambda^2 + \lambda'^2} \varpi_n$ est la valeur *rms* de ω_n . Le temps de corrélation τ_D est alors :

$$\tau_D = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\omega_{n0}}. \quad (3.9)$$

Dans ce cas, le temps de corrélation dépend uniquement des valeurs retenues pour λ et λ' . Les paragraphes suivants s'intéressent à l'impact de λ' et λ sur la fonction $R(k, \tau)$.

Le rôle de λ'

On se concentre ici sur l'importance de λ' , et la valeur de λ est donc pour l'instant arbitrairement fixée à 0.4. Le choix de la relation $\omega_n(k_n)$ est ici sans importance et l'on choisit d'opter pour la relation (3.5). La figure 3.4(a) présente la fonction $R(k=16, \tau)$ pour des valeurs de λ' allant de 0 à 1. Le choix arbitraire $k=16$ est également sans importance et l'ensemble des conclusions qui vont suivre restent valables pour d'autres valeurs du nombre d'onde.

Lorsque $\lambda' = 0$, chacun des modes de Fourier ayant la même nombre d'onde oscille avec la même fréquence en vertu de la loi déterministe $\varpi_n(k_n)$. Ainsi, quel que soit le temps τ , il n'existe pas de déphasage entre deux modes de Fourier ayant le même nombre d'onde (ici $k=16$). Ces oscillations ne sont pas observées en DNS, où les boucles $R(k, \tau) < 0$ sont rares (voir la figure 3.3(a)). Il est important de remarquer que ces oscillations disparaissent après intégration de l'équation (3.1) sur les nombres d'onde. Il est donc particulièrement important de conserver la dépendance au nombre d'onde.

Lorsque $\lambda' \neq 0$, l'écart type de ω_n est non nul, et les oscillations sont atténuées puisque tous les modes de Fourier ayant la même nombre d'onde n'ont plus nécessairement la même pulsation. La fonction $R(k, \tau)$ converge ainsi rapidement vers zéro lorsque τ augmente.

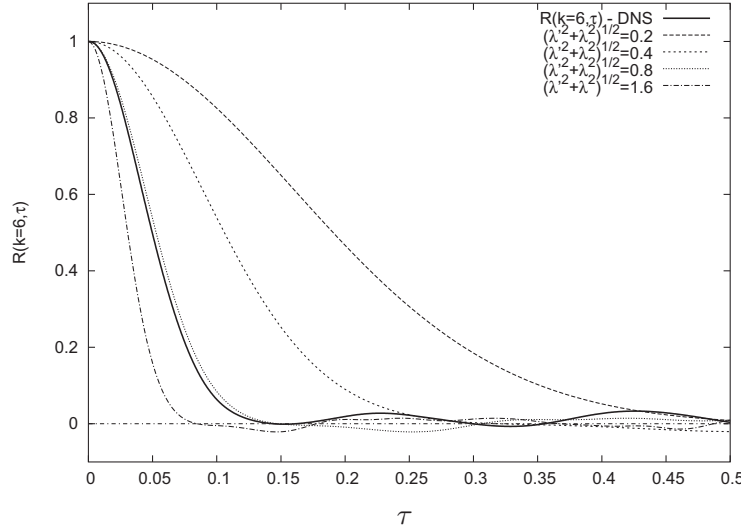


FIG. 3.5 – Fonction de corrélation $R(k = 6, \tau)$ obtenue par DNS et KS pour différentes valeurs de $\sqrt{\lambda^2 + \lambda'^2}$ (Série DNS 2 et Série KS 2 dans Tab.3.1).

Au sein de la figure 3.4(b) sont rassemblés les mêmes résultats après intégration sur le temps. On y observe donc τ_D comme une fonction de λ' . Les valeurs numériques de τ_D sont en accord avec celles obtenues analytiquement à partir de l'équation (3.9), avec $\omega_{n0} = \sqrt{\lambda^2 + \lambda'^2} \sqrt{k^3 E(k)}$, $k = 16$ et $\lambda = 0.4$. Les différences observées pour les petites valeurs de λ' sont dues aux parties négatives de la fonction de corrélation. Afin de s'assurer de la positivité de $R(k, \tau)$, il est nécessaire de respecter l'inégalité $\lambda' > \lambda$. Tous ces résultats qualitatifs demeurent identiques pour d'autres valeurs de λ ou de k .

Il est donc important, du point de vue de la fonction de corrélation $R(k, \tau)$, de considérer ω_n comme étant une variable Gaussienne. Cela inclut une constante additionnelle au sein du modèle, *i.e.* λ' .

3.1.3 Comparaison entre KS et DNS isotropes

Détermination de λ et λ'

Dans cette partie, nous présentons une méthode possible dont l'objectif est de déterminer les valeurs des constantes numériques λ et λ' . Toute la présente démarche est effectuée à nombre de Reynolds constant et il n'est pas exclu que les constantes λ et λ' en dépendent. Étant donné que λ et λ' ne dépendent pas du nombre d'onde, on se propose dans un premier temps de déterminer leurs valeurs en se plaçant à un nombre d'onde fixé. Nous choisissons ainsi d'étudier la fonction de corrélation $R(k = 6, \tau)$, où $k = 6$ correspond aux structures les plus énergétiques de l'écoulement. De plus, les constantes λ et λ' ne dépendent pas *a priori* de la relation $\varpi_n(k_n)$. Nous avons donc arbitrairement considéré que $\varpi_n \approx \sqrt{k_n^3 E(k_n)}$. La figure 3.5 présente la fonction $R(k = 6, \tau)$ calculée à partir d'une DNS et d'une KS. Les résultats provenant de la KS ont été obtenus pour différentes valeurs de $\sqrt{\lambda^2 + \lambda'^2}$. La fonction de corrélation $R(k = 6, \tau)$ obtenue par DNS est bien approximée par la fonction $f(\tau) = \exp(-275\tau^2)$ (si l'on néglige les faibles oscillations observées à temps long, principalement dues au forçage). Il est alors possible, par comparaison, de déterminer des valeurs de λ et λ' afin que les corrélations obtenues par KS soient les plus proches possible de celles obtenues par DNS. L'objectif est

donc d'égaliser les deux expressions suivantes :

$$R_{\text{DNS}}(k = 6, \tau) \approx \exp(-275\tau^2) \quad \text{et} \\ R_{\text{KS}}(k = 6, \tau) \approx \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 + \lambda'^2}k^3 E(k)\tau^2\right).$$

Étant donné que $E(k = 6) \approx 3.2$, les corrélations $R_{\text{DNS}}(k = 6, \tau)$ et $R_{\text{KS}}(k = 6, \tau)$ seront similaires si $\sqrt{\lambda^2 + \lambda'^2} \approx 0.8$. Cette équation ne possède bien évidemment pas de solution unique. Dans la suite, on propose $\lambda = 0.4$ et $\lambda' = 0.7$. La condition supplémentaire $\lambda' > \lambda$ est bien vérifiée, de façon à minimiser les parties négatives de la fonction de corrélation. Pour une autre méthode de détermination des constantes λ et λ' , se référer à [Favier *et al.*(2008)].

À ce stade, il est important de mentionner que la détermination du couple λ et λ' s'est faite jusqu'alors à une échelle k fixée. Les valeurs numériques retenues n'ont donc rien d'universel et auraient pu être différentes si la comparaison entre les fonctions de corrélations s'était faite à une échelle différente. Ceci étant dit, et connaissant maintenant des valeurs plausibles de λ et λ' , il est possible de comparer les temps de corrélations $\tau_D(k)$ obtenus par DNS et KS sur *toute une gamme d'échelles* dans la zone inertielle. Le but est désormais de savoir quelle hypothèse représente le plus fidèlement la décorrélation des échelles turbulentes ; les deux hypothèses retenues étant l'effet de *sweeping* et de *straining*.

Comparaison entre les hypothèses de *sweeping* et de *straining*.

On propose ici de comparer les fonctions $\tau_D(k)$ obtenues par DNS et KS. Dans la section 3.1.3, nous avons vu qu'il est possible de choisir une valeur pour la quantité $\sqrt{\lambda^2 + \lambda'^2}$ de telle manière que le modèle synthétique fournisse des fonctions de corrélations proches de celles obtenues par DNS, pour un nombre d'onde en particulier. Nous avons choisi $k = 6$ dans la section précédente afin de s'assurer que les échelles les plus énergétiques de l'écoulement (*i.e.* le début de la zone inertielle) possèdent des corrélations identiques à celles provenant d'une DNS. Dans la suite, nous conservons donc les valeurs $\lambda = 0.4$ et $\lambda' = 0.7$, et l'on souhaite observer la dépendance du temps caractéristique τ_D avec le nombre d'onde k .

Une comparaison des temps de corrélations $\tau_D(k)$ obtenus par DNS et KS est présentée au sein de la figure 3.6. Les résultats représentés par des carrés ont été obtenus par KS en construisant l'instationnarité sur le temps de retournement. Les temps caractéristiques sont similaires pour les faibles nombres d'onde, ce qui est évident puisque les valeurs de λ et λ' ont été choisies pour que ce soit la cas. En revanche, au fur et à mesure que le nombre d'onde augmente, une très nette différence est observée. Les structures synthétiques demeurent cohérentes sur un temps plus long que leurs homologues provenant d'une DNS. Le modèle synthétique, au sein duquel l'instationnarité est construite sur une approche Lagrangienne, n'est pas capable de prédire la rapide décorrélation des petites échelles de l'écoulement. Si l'on choisit d'autres valeurs de λ et λ' , on observerait une translation verticale de la courbe $\tau_D(k)$, sans modifications de sa pente. Ainsi, et quelles que soient les valeurs de λ et λ' , il n'est pas possible d'obtenir par KS des temps de corrélations similaires à ceux obtenus par DNS pour toutes les échelles de l'écoulement.

Les résultats KS basés sur l'hypothèse de *sweeping* sont rassemblés au sein de la figure 3.6, et représentés par des triangles. Les valeurs de λ et λ' sont toujours de 0.4 et 0.7, seule la loi

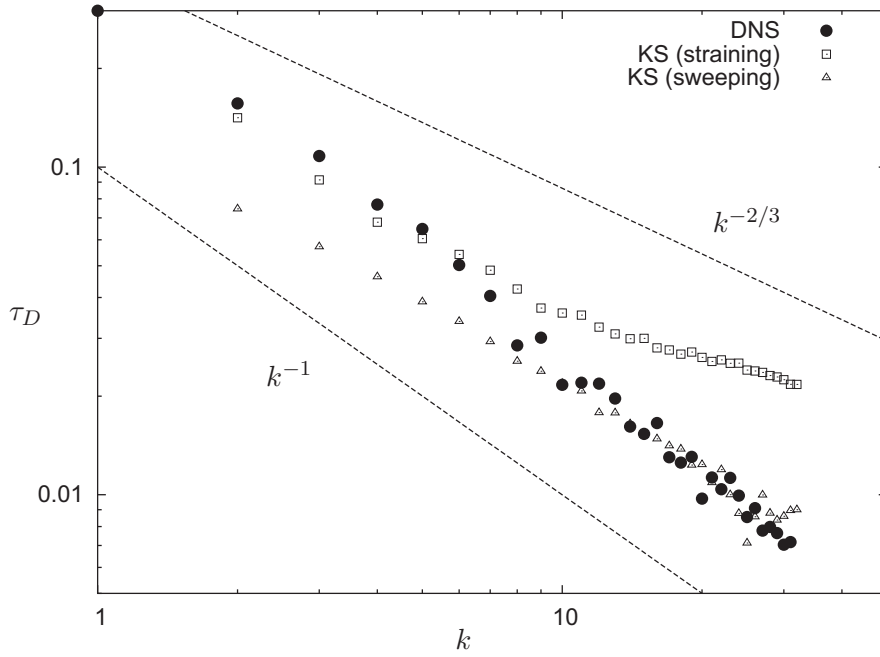


FIG. 3.6 – Comparaison des temps de corrélations obtenus par DNS et KS en fonction du nombre d'onde : les carrés représentent la KS basée sur un temps caractéristique Lagrangien (*straining*), tandis que les triangles représentent la KS basée sur un temps caractéristique Eulerien (*sweeping*). Les ronds noirs correspondent aux résultats DNS (Série DNS 2 et Séries KS 3 et 4 dans Tab.3.1).

$\omega_n(k_n)$ a été modifiée par rapport au cas précédent. Cette fois-ci, les corrélations sont en accord pour les grands nombres d'onde. Les écarts observés aux faibles nombres d'onde peuvent être attribués à plusieurs phénomènes. Il est tout d'abord possible que l'hypothèse de *sweeping* ne soit plus valide pour de faibles valeurs de k puisque les échelles caractéristiques sont alors du même ordre de grandeur que celles responsables de l'advection. Le forçage utilisé en DNS est également responsable d'une légère augmentation des temps de corrélations comme nous l'avons déjà vu au sein de la figure (3.2). Finalement, il est également possible que ces écarts soient dus à la légère diminution de précision des méthodes pseudo-spectrales pour de faibles valeurs de k .

Il est remarquable que les valeurs de λ et λ' déterminées dans la section 3.1.3 n'aient pas à être modifiées lorsque l'on change la loi $\omega_n(k_n)$ (*i.e.* lorsque l'on passe de l'hypothèse de *straining* à l'hypothèse de *sweeping*). Cela semble suggérer que l'hypothèse de *straining* est valable aux faibles nombres d'onde pour ensuite laisser place à l'hypothèse de *sweeping* lorsque le nombre d'onde devient trop grand.

3.2 Turbulence homogène en rotation pure

Cette section est consacrée à la turbulence homogène en rotation. La plupart des résultats qui vont suivre doivent être considérés comme des rappels des propriétés des fluides turbulents en rotation. De plus amples détails concernant la dynamique et l'anisotropie pourront être trouvés au sein des articles et livres suivants [Bartello *et al.*(1994), Cambon(2001), Cambon *et al.*(1997), Greenspan(1968), Morinishi *et al.*(2001), Sagaut & Cambon(2008)].

L'objectif est ici multiple. On souhaite tout d'abord dériver les solutions linéaires dans l'espace de Craya, qui seront utilisées ensuite en KS. Une brève analyse de l'anisotropie existant au sein de ce type d'écoulements est également nécessaire afin de disposer de moyens de comparaison et d'analyse pour le chapitre consacré à la turbulence MHD en rotation. Enfin, l'étude des corrélations deux-temps présentée en début de chapitre sera également réalisée dans le cas d'un système en rotation.

La rotation est un facteur important dans de nombreux mécanismes industriels, géophysiques et astrophysiques. Une vaste gamme d'écoulements peut être modélisée par une turbulence homogène incompressible soumise à une rotation solide. On considère dans cette partie que le repère tourne avec une vitesse angulaire constante Ω autour de l'axe vertical e_3 , sans perte de généralité. Les équations sont donc dérivées dans le repère non-Galiléen tournant.

3.2.1 Équations dans un repère tournant

Les variations temporelles d'une quantité vectorielle $\phi(x, t)$ dans le repère absolu sont reliées à celles dans le repère tournant par la relation :

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)_a = \left(\frac{d\phi}{dt}\right)_r + \Omega \wedge \phi$$

où $d\phi/dt$ représente une dérivée particulière. Les équations de Navier-Stokes dans le repère absolu sont donc modifiées lorsqu'on les écrit dans le repère tournant, faisant apparaître des forces d'inertie. Dans le repère tournant, ces équations s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + 2\Omega \wedge \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}(\Omega \wedge \mathbf{r})^2 \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{u}$$

où r est la distance à l'axe de rotation. Dans la suite, le terme de pression modifié par la force centrifuge sera noté simplement p . Dans ce cas, seule la force de Coriolis apparaît explicitement dans les équations :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + 2\Omega \wedge \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} . \quad (3.10)$$

La condition d'incompressibilité s'écrit toujours $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ et permet de déterminer complètement le terme de pression.

3.2.2 Nombres adimensionnés

On définit une vitesse de référence u_0 et une échelle de longueur caractéristique l_0 telles que $u_i = u_0 \tilde{u}_i$ et $x_i = l_0 \tilde{x}_i$. En introduisant une échelle de temps telle que $t = l_0/u_0 \tilde{t}$, l'équation

(3.10) devient :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{Ro} \mathbf{n} \wedge \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}} = -\frac{l_0}{u_0^2} \nabla p + \frac{1}{Re} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{u}} \quad (3.11)$$

où $\mathbf{n}$ est la direction de l'axe de rotation défini par $\Omega = n\Omega$. Hormis le terme de pression, seules des quantités adimensionnées apparaissent. En plus du nombre de Reynolds, l'adimensionnement des équations introduit le nombre de Rossby défini par :

$$Ro = \frac{u_0}{2\Omega l_0} . \quad (3.12)$$

Une seconde échelle de temps est possible en choisissant $t = 2\Omega \tilde{t}$, de manière à ce que l'équation (3.10) s'écrive :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + \mathbf{n} \wedge \tilde{\mathbf{u}} + Ro \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}} = -\frac{1}{2\Omega u_0} \nabla p + \frac{Ro}{Re} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{u}} . \quad (3.13)$$

Le rapport entre le nombre de Rossby et le nombre de Reynolds est le nombre d'Eckman, défini par :

$$Ek = \frac{Ro}{Re} = \frac{\nu}{2\Omega l_0^2} . \quad (3.14)$$

Ce nombre joue un rôle fondamental au sein de la théorie dynamo des planètes [Zhang & Shubert(2000)] du fait de sa valeur souvent extrêmement faible[†]. En ce qui concerne les diverses simulations présentées au sein de ce manuscrit, le nombre d'Ekman est compris entre 10^{-3} et 10^{-4} . La limite linéaire non visqueuse est obtenue pour de très faibles valeurs de Ro et Ek . D'une manière plus générale, nous sommes intéressés par les régimes dynamiques fortement influencés par la rotation et le nombre de Rossby sera donc considéré comme faible devant l'unité.

3.2.3 Régime linéaire et ondes d'inertie

Dans leurs formes dimensionnelles, les équations linéarisées s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + 2\Omega \wedge \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.16)$$

où l'on s'est placé dans la limite d'un petit nombre de Rossby. La divergence de la force de Coriolis n'est pas nulle, et le rôle de la pression pour maintenir la condition d'incompressibilité n'est pas trivial. L'équation suivante régit la pression, après élimination de la vitesse dans les équations précédentes et dans le cas non-visqueux :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 p + 4\Omega^2 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 , \quad (3.17)$$

où l'axe de rotation est dirigé selon l'axe vertical z . Cette équation admet comme solution des ondes propagatives. La pression couple non localement différentes composantes de la vitesse générant des ondes transverses. Si l'on suppose que les perturbations engendrées sont des ondes

[†]Le nombre d'Ekman pour le noyau liquide de la Terre est estimé à 10^{-15} [Gubbins & Roberts(1987)].

planes de la forme $p \approx \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \sigma t)$, on retrouve la relation de dispersion classique des ondes inertielles [Phillips(1963), Greenspan(1968)] :

$$\sigma_R = \pm 2\Omega \frac{k_z}{k} = \pm 2\Omega \cos \theta, \quad (3.18)$$

où θ est l'angle polaire entre la direction verticale de l'axe de rotation et la direction locale du vecteur d'onde $\mathbf{k}$.

La vitesse de phase $\mathbf{v}_\phi$ d'une onde se déplaçant dans la direction du vecteur d'onde $\mathbf{k}$ correspond à la vitesse de déplacement des surfaces pour lesquelles la quantité $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \sigma_R t$ (en choisissant $\sigma_R = +2\Omega \cos \theta$) est constante. Dans notre cas, la vitesse de phase de ces ondes est donnée par :

$$\mathbf{v}_\phi^R(\mathbf{k}) = \frac{\sigma_R}{k} \mathbf{e}^{(3)} = \frac{\sigma_R}{k^2} \mathbf{k}, \quad (3.19)$$

où $\mathbf{e}^{(3)}$ est le troisième vecteur du repère de Craya-Herring introduit au chapitre 1 (voir figure 1.1).

La vitesse de groupe $\mathbf{v}_g$ correspond à la vitesse de propagation de l'énergie et peut être calculée en déterminant le flux d'énergie. Pour de plus amples détails concernant le calcul de ces quantités, se référer à [Greenspan(1968), Whitman(1965)]. La vitesse de groupe est définie par :

$$\mathbf{v}_g^R(\mathbf{k}) = \nabla_{\mathbf{k}} \sigma(\mathbf{k}) = \frac{\partial \sigma}{\partial k_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \sigma}{\partial k_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \sigma}{\partial k_3} \mathbf{e}_3^\dagger \quad (3.20)$$

où $\mathbf{k} = k_1 \mathbf{e}_1 + k_2 \mathbf{e}_2 + k_3 \mathbf{e}_3$. Pour un fluide en rotation,

$$\sigma_R = \frac{2\Omega_1 k_1 + 2\Omega_2 k_2 + 2\Omega_3 k_3}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}} \quad (3.21)$$

et on aboutit à la relation suivante :

$$\mathbf{v}_g^R(\mathbf{k}) = \frac{2\Omega}{|\mathbf{k}|} - \mathbf{v}_\phi^R = \frac{2}{k^3} \mathbf{k} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k}) = \frac{2\Omega \sin \theta}{k} \mathbf{e}^{(2)}. \quad (3.22)$$

Une autre façon plus simple de calculer la vitesse de groupe consiste à calculer le gradient de la relation de dispersion en repère sphérique selon :

$$\mathbf{v}_g^R = \nabla \sigma_R = \frac{\partial \sigma_R}{\partial k} \mathbf{e}^{(3)} + \frac{1}{k} \frac{\partial \sigma_R}{\partial \theta} \mathbf{e}^{(2)} \quad (3.23)$$

$$= \pm \frac{2\Omega \sin \theta}{k} \mathbf{e}^{(2)}. \quad (3.24)$$

Il est remarquable que vitesse de phase et vitesse de groupe soient perpendiculaires. Il apparaît donc que ces ondes sont dispersives et que leur fréquence dépend uniquement de la direction de propagation. Il est possible de visualiser ces ondes expérimentalement [McEwan(1970)] ainsi que numériquement [Godefert & Lollini(1999)]. On se propose de mettre en évidence les ondes inertielles dans le contexte suivant. En utilisant la méthode pseudo-spectrale décrite dans le chapitre précédent (voire section 2.3), il est possible de visualiser la propagation d'ondes

[†]Attention à ne pas confondre le repère cartésien orthonormé $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ avec le repère de Craya $(\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)}, \mathbf{e}^{(3)})$.

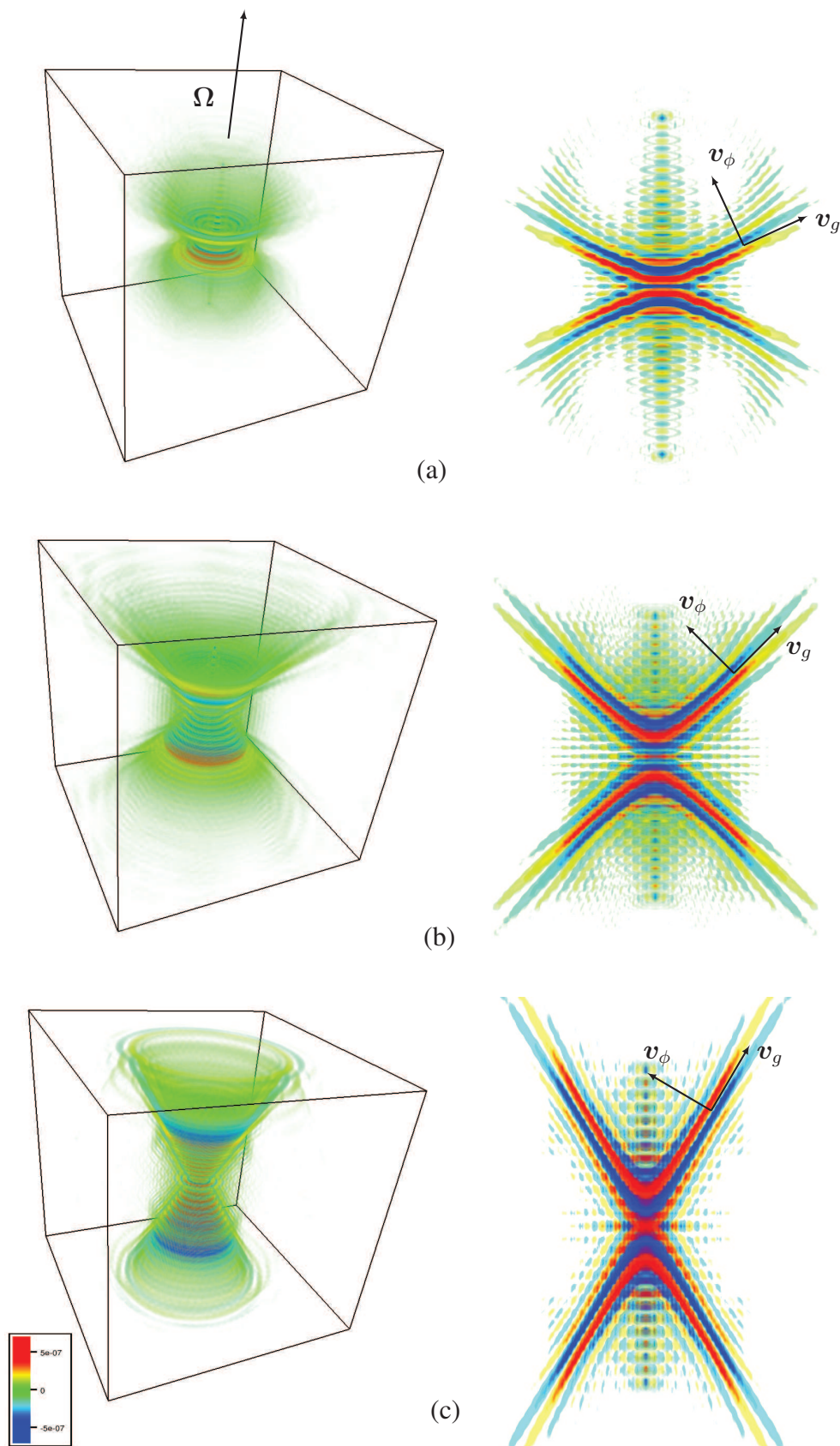


FIG. 3.7 – Visualisations d'ondes inertielles pour un fluide non-visqueux. Le forçage sinusoïdal est situé au centre du domaine de pulsation σ_f . On représente la composante verticale de la vitesse fluctuante. (a) $2\Omega/\sigma_f = 1.1$. (b) $2\Omega/\sigma_f = 1.4$. (c) $2\Omega/\sigma_f = 2$.

inertiels au sein d'un domaine tri-périodique. Pour cela, on introduit un forçage ponctuel au sein d'un fluide au repos dans le repère tournant. Le forçage est caractérisé par une accélération sinusoïdale de pulsation σ_f , et est situé au point central du domaine de calcul. Si une rotation d'ensemble est appliquée, le forçage génère des ondes inertielles dont la pulsation est égale à celle du forçage, soit $\sigma_f = 2\Omega \cos \theta$. Ainsi, le rapport entre fréquence de forçage et taux de rotation fixe le cosinus de l'angle polaire du vecteur d'onde $\mathbf{k}$. Cette direction est également celle de la vitesse de phase en vertu de l'équation (3.19). La colonne de droite de la figure 3.7 présente une coupe verticale du domaine de calcul centrée sur le point de forçage, tandis que la colonne de gauche correspond à une vision d'ensemble (dont l'objectif est de rappeler que ce phénomène propagatif est tridimensionnel). L'axe de rotation est vertical. Les zones rouges correspondent à une valeur positive de la vitesse verticale, tandis que les zones bleues correspondent aux valeurs négatives. Les figures 3.7(a) à 3.7(c) représentent trois taux de rotation différents. La visualisation est réalisée après une dizaine de périodes du forçage. Les flèches correspondent aux directions théoriques prédites par (3.18), (3.19) et (3.22). L'accord est excellent et ne laisse pas de doutes quant à la nature des ondes observées.

Une autre visualisation qui prouvera son intérêt par la suite est la réponse impulsionnelle d'un fluide en rotation. Au lieu d'imposer un forçage en fréquence, on considère désormais le cas d'un forçage localisé en temps et en espace de la forme :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_0 g(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) h(t - t_0) . \quad (3.25)$$

où g et h sont des fonctions Gausiennes de l'espace et du temps. Une impulsion suffisamment localisée en temps excite le système sur une large bande de fréquences et l'on devrait observer, toujours en vertu de (3.18), une multitude de direction de propagation. La figure 3.8 présente une coupe verticale du domaine de calcul contenant le point de forçage. L'axe de rotation est toujours vertical et l'on observe la composante de la vitesse alignée avec la rotation. Il apparaît nettement plusieurs directions de propagation.

Les équations (3.15) et (3.16) se simplifient grandement en les projetant dans le repère local de Craya ($\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)}$). La condition d'incompressibilité, qui en spectral s'écrit $\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{k} = 0$, assure que la composante perpendiculaire au plan ($\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)}$) est égale à zéro. Sans forçage ni conditions aux limites, le problème linéaire se résume à :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \hat{u}^{(1)} \\ \hat{u}^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_R \\ \sigma_R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}^{(1)} \\ \hat{u}^{(2)} \end{pmatrix} = 0 . \quad (3.26)$$

Le système (3.26) fait clairement intervenir le couplage entre les composantes toroïdale $\hat{u}^{(1)}$ et poloïdale $\hat{u}^{(2)}$ de la vitesse. Connaissant une condition initiale $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, 0)$, la solution à tout instant t ultérieur s'écrit simplement :

$$\begin{pmatrix} \hat{u}^{(1)}(\mathbf{k}, t) \\ \hat{u}^{(2)}(\mathbf{k}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \sigma_R t & -\sin \sigma_R t \\ \sin \sigma_R t & \cos \sigma_R t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}^{(1)}(\mathbf{k}, 0) \\ \hat{u}^{(2)}(\mathbf{k}, 0) \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

et traduit la rotation de la condition initiale autour de la direction du vecteur d'onde, avec une vitesse angulaire fixée par la relation de dispersion. Le système linéaire précédent peut également s'écrire :

$$\hat{u}_i(\mathbf{k}, t') = G_{ij}(\mathbf{k}, t', t) \hat{u}_j(\mathbf{k}, t) \quad (3.28)$$

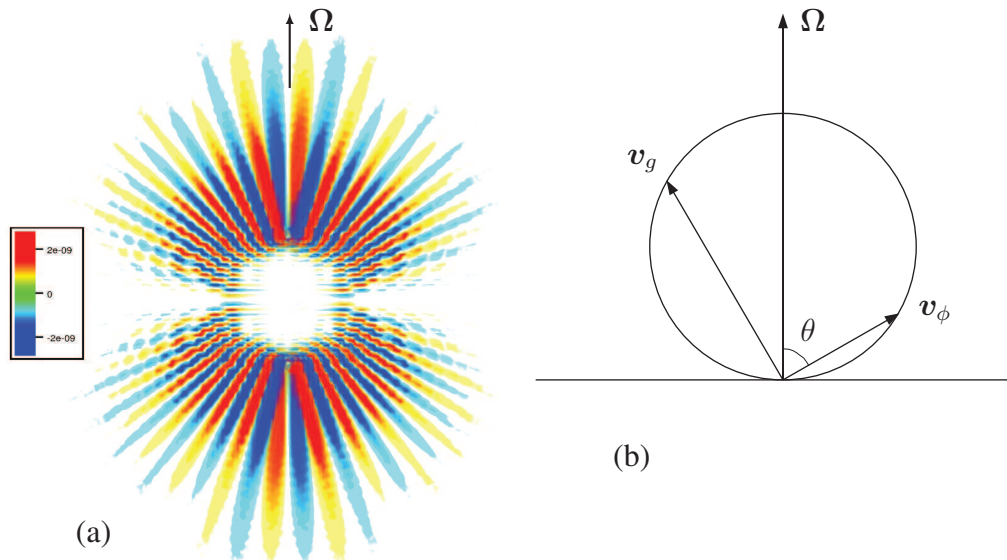


FIG. 3.8 – (a) Réponse impulsionnelle non-visqueuse d'un fluide en rotation. Le forçage est situé au centre du domaine. On représente la composante verticale de la vitesse fluctuante. Le taux de rotation est $\Omega = 5 \text{ rad.s}^{-1}$. (b) Schéma reliant la vitesse de phase et la vitesse de groupe [Moffatt(1970)].

où $G_{ij}(\mathbf{k}, t', t)$ est la fonction de Green du problème, qui dépend des vecteurs propres de l'opérateur linéaire $\mathbf{N} = \mathbf{e}^{(2)} - i\mathbf{e}^{(1)}$ et son complexe conjugué $\mathbf{N}^* = \mathbf{e}^{(2)} + i\mathbf{e}^{(1)}$ selon

$$G_{ij}(\mathbf{k}, t', t) = \sum_{s=\pm 1} N_i(s\mathbf{k}) N_j(-s\mathbf{k}) e^{is\sigma_R(t'-t)}. \quad (3.29)$$

L'influence de la rotation, dans l'approximation est linéaire est donc relativement aisée à visualiser. Les composantes de Fourier de la vitesse tournent dans le plan $(\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)})$ avec une vitesse angulaire σ_R .

DNS							
Série	Résolution	Forçage	Réalisations	Re_λ	Ω	Ro	
3	256^3	-	1	156	15	0.05	
4	256^3	$k \in [1 : 4]$	3	156	50	0.01	
KS							
Série	Réalisations	M	λ'	λ	ω_n	Ω	Ro
5	100	2000	0	0	-	10	0.08
6	100	2000	0.7	0.4	$k_n u_0$	50	0.01

TAB. 3.2 – Paramètres des différentes simulations numériques en rotation présentées au sein de ce chapitre. Re_λ est le nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor. M est le nombre de modes de Fourier en KS (à comparer avec la résolution des DNS).

3.2.4 Anisotropie en turbulence homogène en rotation

Nous souhaitons désormais rappeler quelques résultats classiques concernant l'anisotropie des écoulements turbulents en rotation. Ces résultats serviront de référence pour l'analyse du couplage avec la MHD au sein du chapitre 5.

Prédictions linéaires

À partir des solutions (3.27), il est possible de calculer explicitement les différents moments statistiques de la vitesse. En particulier, on s'intéresse dans la suite à la décomposition introduite au sein de la section 1.6. L'évolution linéaire non-visqueuse pour les composantes du tenseur spectral de corrélations $\hat{R}_{ij}(\mathbf{k})$ est simplement [Sagaut & Cambon(2008)] :

$$e(\mathbf{k}, t) = e(\mathbf{k}, t_0), \quad \mathcal{H}(\mathbf{k}, t) = \mathcal{H}(\mathbf{k}, t_0) \quad \text{et} \quad \mathcal{Z}(\mathbf{k}, t) = \mathcal{Z}(\mathbf{k}, t_0) e^{2i\sigma_R(t-t_0)}. \quad (3.30)$$

S'il existe une anisotropie directionnelle initiale, celle-ci est conservée [Salhi & Cambon(2007)], tandis qu'une anisotropie de polarisation est atténuée [Cambon *et al.*(1992), Kassinos *et al.*(2001)]. En revanche, sans anisotropie initiale, les solutions linéaires ne conduisent à aucune anisotropie aux instants ultérieurs.

Résultats DNS

Grâce à diverses études expérimentales, numériques et théoriques, les conclusions concernant une turbulence homogène soumise à une rotation d'ensemble sont les suivantes :

- La rotation atténue les transferts non-linéaires et donc la cascade d'énergie. Une conséquence directe est un taux de dissipation plus faible que dans le cas isotrope [Jacquin *et al.*(1990)].
- L'écoulement est anisotrope et l'anisotropie correspond à une transition d'un écoulement 3D vers un écoulement 2D [Cambon *et al.*(1997)].
- Des structures cohérentes alignées avec l'axe de rotation apparaissent. Les structures possédant une vorticité cyclonique (*i.e.* dont la vorticité est positive dans la direction de l'axe de rotation) sont dominantes [Bartello *et al.*(1994)].

Étant donné que nous souhaitons par la suite étudier le couplage entre effets de rotation et effets MHD, il nous semble important de réaliser une simulation de référence en rotation pure. L'objectif est d'ici de disposer de statistiques de référence afin d'analyser l'impact du champ magnétique lorsque celui-ci est imposé (Chapitre 5). Une analyse identique sera proposée pour le cas MHD sans rotation (Chapitre 4).

A partir d'une condition initiale provenant d'une simulation hydrodynamique forcée (voir détails au sein du Chapitre 2, section 2.3.5), on s'intéresse à l'influence d'une rotation d'ensemble de taux de rotation $\Omega = 15 \text{ rad.s}^{-1}$ et d'axe vertical. Nous sommes intéressés par le régime dont la dynamique est dominée par la rotation et le nombre de Rossby initial est de l'ordre de 0.05. Au début de la simulation, le forçage utilisé lors de l'initialisation isotrope est supprimé tandis que la rotation est introduite. Les paramètres de la simulation présentée dans la suite sont rassemblés au sein du tableau 3.2, série DNS 3.

Le spectre d'énergie $E(k)$ et l'énergie cinétique totale $K(t)$ sont représentés au cours du temps en figure 3.9. Le terme de transfert non-linéaire est fortement atténué par la rotation, et la

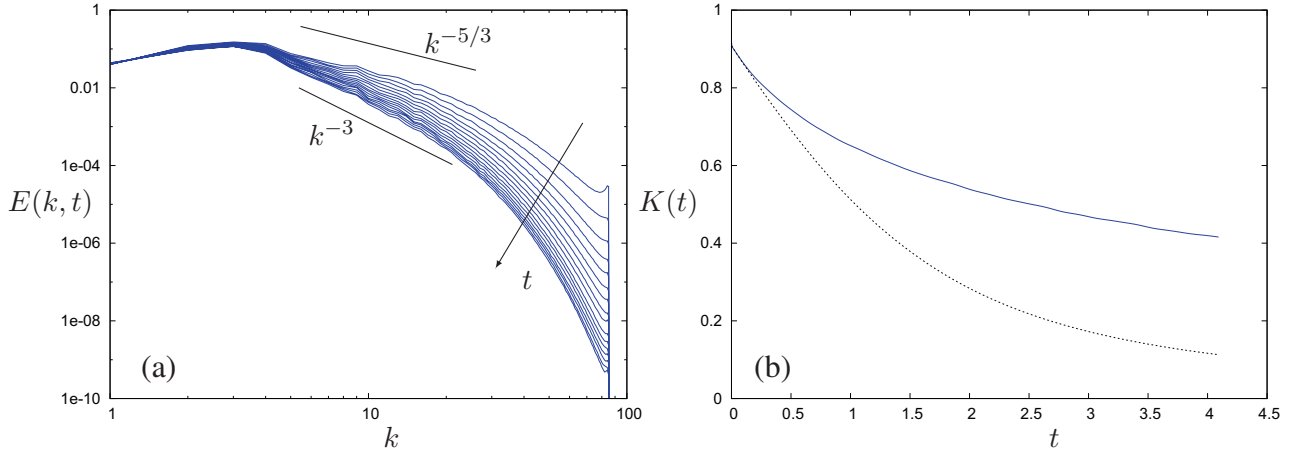


FIG. 3.9 – Évolution de l'énergie cinétique en turbulence en rotation. Le nombre de Rossby est de l'ordre de 0.05. (a) Spectre d'énergie cinétique $E(k, t)$ en fonction du temps. (b) Comparaison de la décroissance de l'énergie entre une turbulence en rotation (courbe bleue pleine) et une turbulence isotrope (courbe noire en pointillés).

dissipation d'énergie est donc fortement diminuée. Il en résulte également un spectre d'énergie tendant vers une pente en k^{-3} à partir d'une condition initiale isotrope en $k^{-5/3}$.

La cascade d'énergie classique de nombre d'onde en nombre d'onde est ici dominée par des transferts angulaires d'énergie conduisant à une concentration de l'énergie à l'équateur dans le repère spectral de Craya. Les modes alignés avec l'axe de rotation (*i.e.* les modes $\hat{u}(\mathbf{k})$ tels que $\mathbf{k} \parallel \Omega$) transfèrent leur énergie aux modes horizontaux (*i.e.* les modes $\hat{u}(\mathbf{k})$ tels que $\mathbf{k} \perp \Omega$). Cette anisotropie purement directionnelle peut être caractérisée dans un premier temps en calculant l'angle de Shebalin (1.46) pour la vitesse. Une comparaison de cet angle entre le cas isotrope et le cas en rotation est présentée au sein de la figure 3.10(a). On observe clairement un écart à l'angle isotrope de 54.74° . L'augmentation de l'angle traduit une concentration de l'énergie à l'équateur (*i.e.* les modes de vecteur d'onde perpendiculaire à l'axe de rotation).

Comme il a déjà été discuté, l'anisotropie n'est pas uniquement caractérisée par une répartition anisotrope de l'énergie en fonction de la direction de propagation. Il existe également une anisotropie dite de polarisation due à une direction privilégiée du vecteur $\hat{u}(\mathbf{k})$ dans le plan perpendiculaire à $\mathbf{k}$. L'anisotropie directionnelle est caractérisée par la quantité b_{ij}^e (1.49) tandis que la polarisation est caractérisée par la quantité b_{ij}^z (1.50). La somme de ces deux quantités n'étant autre que la partie anisotrope du tenseur de Reynolds. La figure 3.10(b) présente ces deux quantités au cours du temps. On se restreint à la composante b_{33} qui est suffisante pour la présente discussion[†], où l'indice 3 correspond à la direction verticale de l'axe de rotation. La quantité b_{33}^e croît d'une valeur quasiment nulle et sature rapidement vers une valeur de 0.03, ce qui est bien inférieur à la valeur attendue pour une configuration bi-dimensionnelle à deux composantes où $b_{33}^e = 1/6$ [Cambon *et al.* (1997)]. Comme on le verra par la suite, cette saturation n'est pas due à un effet de périodicité.

Le terme b_{33}^z est quant à lui relié à l'évolution rapide de la phase due aux ondes inertielles. La période des oscillations observées est bien de l'ordre de la période des ondes iner-

[†]Les composantes b_{11} et b_{22} sont, dans le cas axisymétrique, reliées à la composante b_{33} par les relations $b_{33} = -2b_{11} = -2b_{22}$.

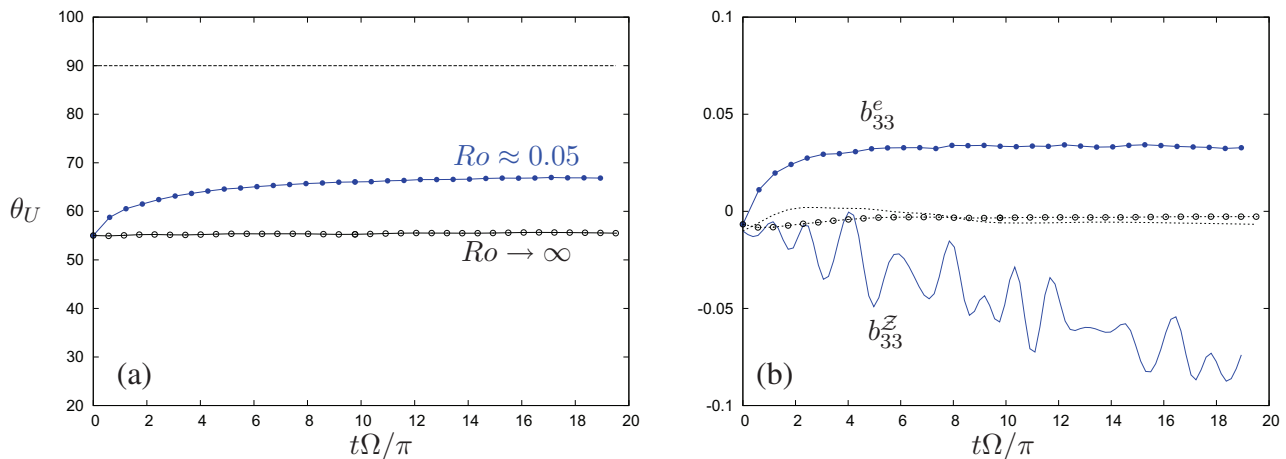


FIG. 3.10 – Développement de l'anisotropie au sein d'une turbulence homogène en rotation. Le temps est adimensionné par le temps caractéristique de la rotation. Les courbes bleues correspondent au cas en rotation tandis que les courbes noires correspondent au cas isotrope. (a) Angle de Shebalin pour la vitesse au cours du temps. (b) Composantes verticales du tenseur anisotrope de Reynolds b_{33} . La contribution due à l'anisotropie directionnelle b_{33}^e (représentée par la courbe avec points) est séparée de la contribution due à la polarisation b_{33}^z (représentée par la courbe pleine).

tielles. La polarisation devient négative au cours du temps, ce qui est caractéristique de vortex dont l'axe de rotation est aligné avec la verticale. La décroissance de la polarisation indique que l'écoulement se trouve dans un état intermédiaire entre l'écoulement 3D-3C (pour lequel $b_{33}^z = 0$) et l'écoulement 2D-2C (pour lequel $b_{33}^z = -1/2$). La contribution de b_{33}^z au tenseur b_{33} s'oppose donc à celle de b_{33}^e , prouvant ainsi que le seul tenseur de Reynolds n'est pas suffisant pour caractériser l'anisotropie au sein d'un écoulement en rotation. Pour de plus amples détails sur ces quantités et leur dépendance au nombre de Rossby, se référer aux articles [Morinishi *et al.*(2001), Cambon *et al.*(1997)].

Il est important de rappeler que les diverses quantités présentées plus haut correspondent à une intégration sur tout l'espace spectral. Il semble donc important d'observer l'anisotropie en fonction de l'angle polaire θ . On utilise pour cela le spectre angulaire d'énergie $E(k, \theta)$ (1.58). Celui-ci est présenté en figure 3.11[†] au temps $t = 18\pi/\Omega$. Une fois de plus, on observe clairement que l'énergie est bien plus importante à l'équateur (*i.e.* modes tels que $\theta \approx \pi/2$) qu'au pôle (*i.e.* modes tels que $\theta \approx 0$). L'information supplémentaire est ici la dépendance de cette anisotropie avec l'échelle considérée k . Hormis aux très faibles nombres d'onde, les modes horizontaux sont plus énergétiques que les modes verticaux. Cet écart est d'autant plus important que le nombre d'onde est grand. Les petites échelles de l'écoulement sont donc beaucoup plus anisotropes que les grandes structures. La figure 3.12 présente une visualisation de l'ensrophie à l'instant $t = 18\pi/\Omega$. La colonne de gauche et la colonne de droite correspondent à deux sections verticales différentes, l'axe de rotation étant vertical dans tous les cas. La figure 3.12(a) correspond au champ d'ensrophie complet. Le champ est de plus tronqué dans l'espace de Fourier afin de séparer les modes $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)$ tels que $k < 10$ et des modes tels que $k > 10$. La

[†]Par la suite, et par soucis de clarté, on ne présentera que le pôle et l'équateur, les domaines angulaires intermédiaires étant compris entre ces deux quantités.

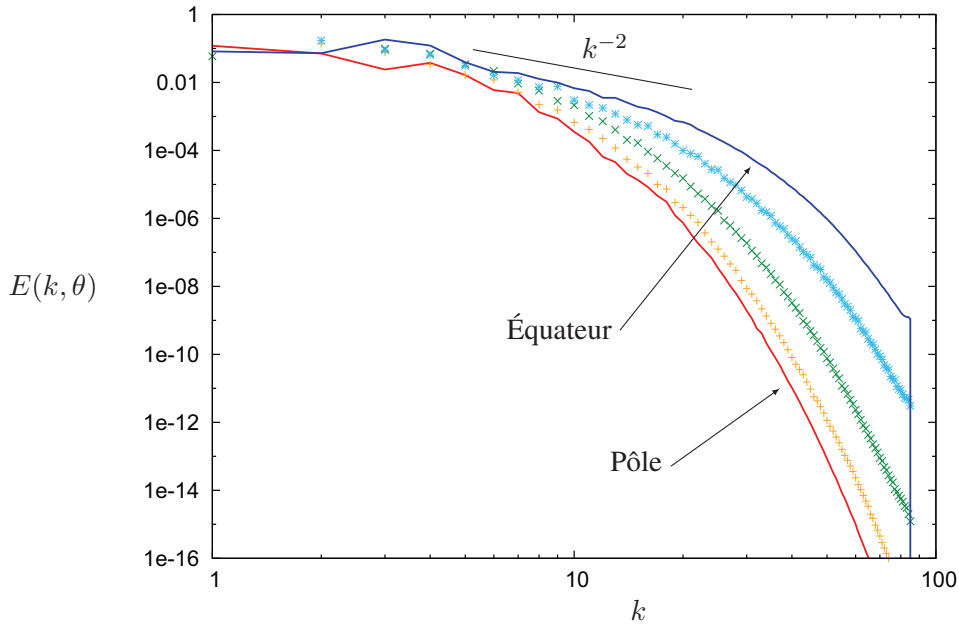


FIG. 3.11 – Spectre angulaire $E(k, \theta)$ pour une turbulence en rotation. La courbe rouge correspond au domaine angulaire $\theta \approx 0$ tandis que la courbe bleue correspond au domaine angulaire $\theta \approx \pi/2$. Les points correspondent aux domaines angulaires intermédiaires. Les spectres sont tracés à l'instant $t\Omega/\pi = 18$. La pente k^{-2} est tracée pour indication.

troncature se fait dans l'espace spectral et les deux champs sont obtenus dans l'espace physique par transformées de Fourier inverses. La figure 3.12(b) correspond au champ tronqué tel que $k < 10$ tandis que la figure 3.12(c) correspond au champ tronqué tel que $k > 10$. L'anisotropie est clairement estompée lorsque l'on considère les grandes échelles. En revanche, les petites échelles sont quasiment bidimensionnelles.

Cette observation est contradictoire avec la possible restauration de l'isotropie au fur et à mesure que le nombre d'onde augmente. Certains auteurs [Zeman(1994), Zhou & Rubinstein(1995)] définissent, par analogie avec l'échelle d'Ozmidov en turbulence stratifiée, un nombre d'onde de coupure comme :

$$k_{\Omega} = \sqrt{\frac{\Omega^3}{\epsilon}}, \quad (3.31)$$

où ϵ est le taux de dissipation turbulente. Lorsque $k > k_{\Omega}$, l'effet de la rotation est négligeable et l'on s'attend à une restauration de l'isotropie. Lorsque $k < k_{\Omega}$, les effets anisotropes dus à la rotation sont dominants. Dans notre cas, le taux de rotation est $\Omega = 15 \text{ rad.s}^{-1}$. Le nombre d'onde de coupure k_{Ω} varie ainsi entre 80 au début de la simulation à 280 en fin de simulation. Le nombre d'Ozmidov à l'instant $t = 18\pi/\Omega$ (*i.e.* temps auquel est tracée la figure 3.11) est de 240. Si l'échelle d'Ozmidov donne effectivement un ordre de grandeur de l'échelle à laquelle la rotation n'est plus effective, il serait nécessaire d'utiliser une résolution bien plus élevée que la nôtre afin de le vérifier.

Enfin, pour terminer cette revue de l'anisotropie dans un écoulement turbulent homogène en rotation, on propose d'observer quelques longueurs de corrélations dont les définitions ont été données au sein du chapitre 1 (voir la définition (1.51)). La figure 3.13 rassemble les lon-

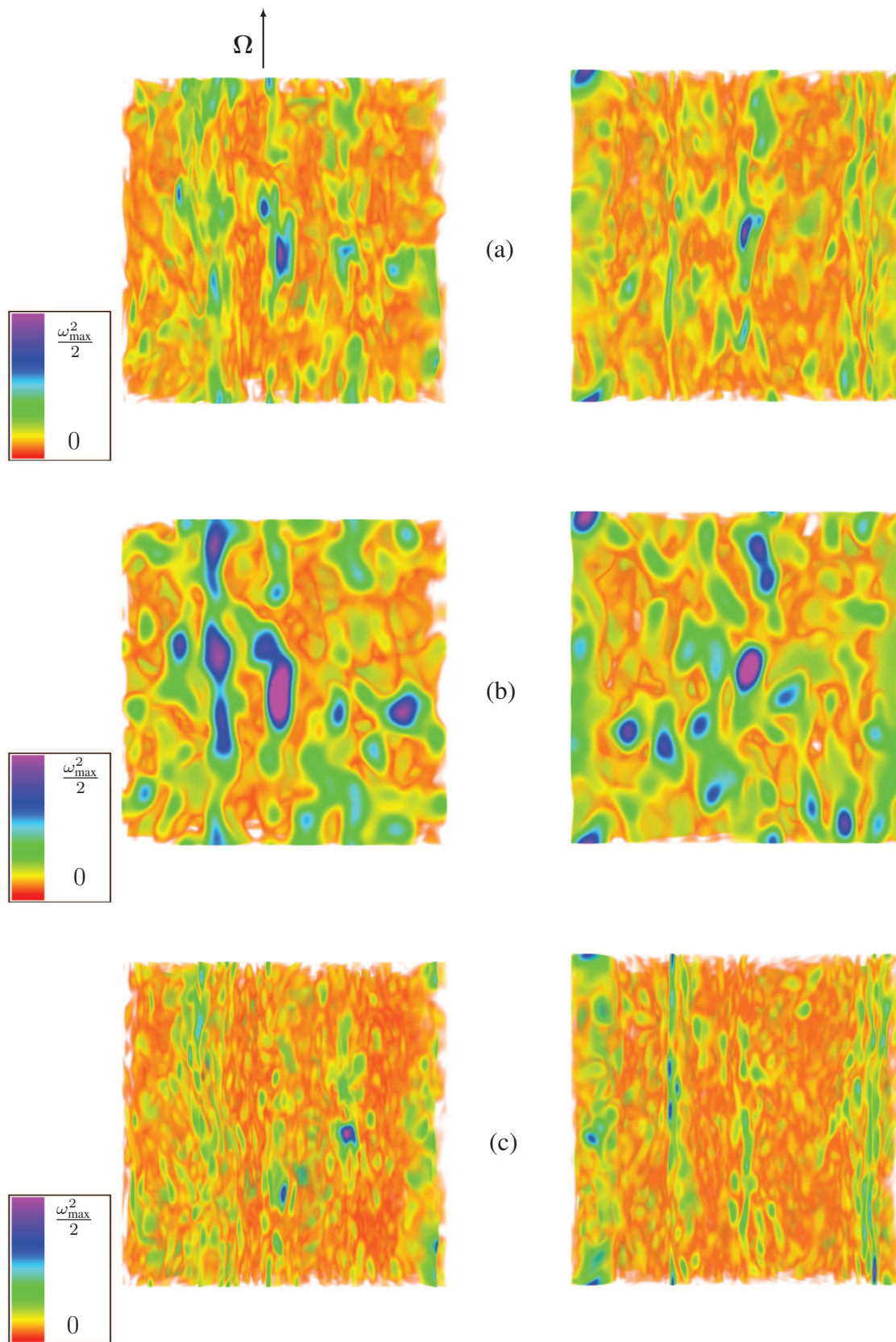


FIG. 3.12 – Visualisation de l'enstrophie en turbulence en rotation dans deux plans différents contenant l'axe de rotation (colonne de gauche et colonne de droite). (a) Champ complet. (b) Champ des grandes échelles (*i.e.* modes tels que $k < 10$). (c) Champ des petites échelles (*i.e.* modes tels que $k > 10$).

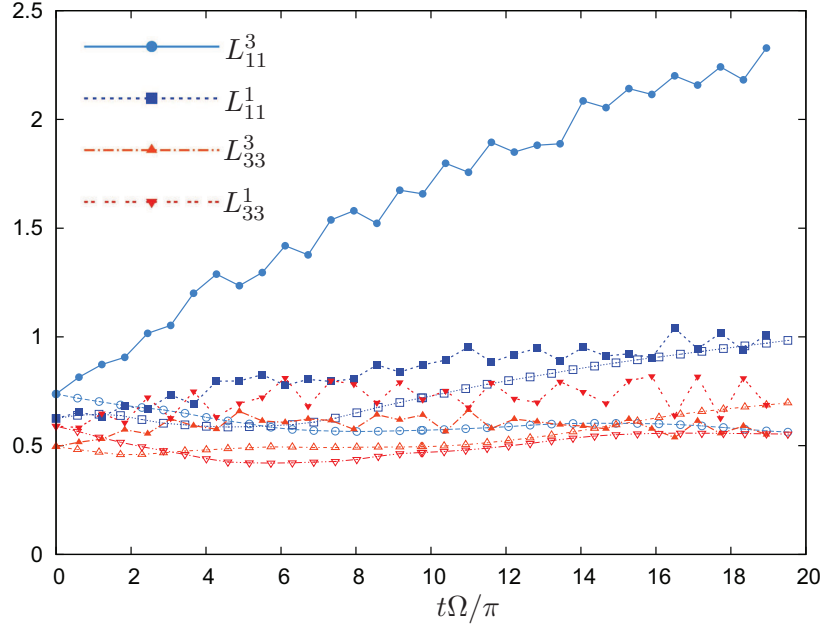


FIG. 3.13 – Longueurs de corrélations au cours du temps. Les symboles pleins correspondent au cas en rotation tandis que les symboles vides correspondent au cas isotrope. La couleur bleue correspond aux corrélations de vitesses horizontales tandis que la couleur rouge correspond aux corrélations de vitesses verticales.

guez de corrélations horizontales L_{11}^1 et L_{11}^3 et les longueurs de corrélations verticales L_{33}^1 et L_{33}^3 . Les résultats en rotation (symboles pleins) sont comparés avec les résultats isotropes (symboles vides). La seule corrélation significativement modifiée par la rotation est la corrélation transversale des vitesses horizontales L_{11}^3 , dont la définition est [Cambon & Jacquin(1989)] :

$$L_{11}^3 = \frac{\pi^2}{\langle u_1^2 \rangle} \int_0^\infty [e(\mathbf{k}) - \Re \mathcal{Z}(\mathbf{k})] \Big|_{k_3=0} k dk . \quad (3.32)$$

Celle-ci croît très rapidement en temps, ce qui est une autre confirmation du fait que la polarisation est négative et décroissante, et de la formation de structures cohérentes alignées avec l'axe de rotation. À noter que l'intégrale (3.32) est définie dans le plan $k_3 = 0$, la croissance de la corrélation L_{11}^3 nous informe également sur le fait que la polarisation se manifeste de façon dominante dans le plan équatorial. À noter également que la longueur L_{11}^3 demeure largement inférieure à la taille du domaine numérique ($L = 2\pi$), ce qui nous permet d'affirmer que la turbulence n'est pas, ou peu, influencée par les conditions aux limites périodiques.

3.3 Corrélations deux-temps en turbulence homogène en rotation

L'objectif de cette section est de caractériser l'impact de la rotation sur les quantités statistiques précédemment étudiées dans le cas isotrope. On s'attachera à montrer dans quelle mesure un modèle linéaire est capable de reproduire les corrélations deux-temps obtenues par DNS.

La relation (3.1) se généralise au cas axisymétrique selon :

$$R(k, \theta, \tau) = \frac{\langle \hat{u}_i(k, \theta, t) \hat{u}_i^*(k, \theta, t + \tau) \rangle}{\langle \hat{u}_i(k, \theta, t) \hat{u}_i^*(k, \theta, t) \rangle}, \quad (3.33)$$

où θ est l'angle polaire entre l'axe de rotation (considéré comme vertical) et le vecteur d'onde $\mathbf{k}$. Cette fonction de corrélation permet de capturer l'effet de la rotation en fonction de l'échelle k considérée, mais aussi en fonction de la direction du vecteur d'onde par rapport à l'axe de rotation. Dans le cas isotrope, la fonction de corrélation ne dépend pas de θ .

De la même manière, il est toujours possible de déterminer un temps de corrélation qui dépend cette fois-ci de k et de θ selon :

$$\tau_D(k, \theta) = \int_0^\infty R(k, \theta, \tau) d\tau. \quad (3.34)$$

Les ondes inertielles étant dispersives, et leur relation de dispersion étant anisotrope, on s'attend à ce que l'impact de la rotation sur la fonction (3.33) dépende de l'échelle k et de l'angle θ .

3.3.1 Résultats KS en rotation pure

Dans un premier temps, nous considérons l'effet de la rotation sur les corrélations deux-temps dans la limite linéaire. Pour cela, on utilise le modèle KS présenté au sein du chapitre 2 et qui utilise les solutions linéaires développées au sein de la section 3.2.3. Ces solutions prennent explicitement en compte la relation de dispersion anisotrope des ondes d'inertie, et l'on s'attend à observer leur influence sur les corrélations temporelles du champ synthétique de vitesse. On se restreint ici au cas où l'instationnarité ne provient que des solutions linéaires et non des pulsations arbitraires (qui ont été discutées au sein de la section 3.1.2). L'avantage de la KS est ici de pouvoir isoler explicitement l'effet des ondes d'inertie et de comparer les résultats obtenus avec une simulation non-linéaire complète. La fonction de corrélation angulaire est calculée de la manière suivante :

$$R(k, \theta, \tau) = \frac{\sum_{\substack{k-\Delta k < |\mathbf{k}| < k+\Delta k \\ \theta-\Delta\theta < \theta < \theta+\Delta\theta}} \hat{u}_i(k, \theta, t) \hat{u}_i^*(k, \theta, t + \tau)}{\sum_{\substack{k-\Delta k < |\mathbf{k}| < k+\Delta k \\ \theta-\Delta\theta < \theta < \theta+\Delta\theta}} \hat{u}_i(k, \theta, t) \hat{u}_i^*(k, \theta, t)}. \quad (3.35)$$

avec $\Delta k = 1/2$, $\Delta\theta = \pi/20$, k variant de 1 à 64 et θ variant de 0 à $\pi/2$. Cette quantité statistique fine nécessite un grand nombre de réalisations (typiquement 100, voir Tab.3.2) de l'écoulement afin de converger. Le taux de rotation est fixé à $\Omega = 10 \text{ rad.s}^{-1}$.

La figure 3.14 présente la fonction de corrélations pour trois domaines angulaires, le premier correspondant à $\theta \approx 0$ (vecteurs d'onde quasiment verticaux et alignés avec l'axe de rotation), le second à $\theta \approx \pi/4$ et le troisième à $\theta \approx \pi/2$ (vecteurs d'onde quasiment horizontaux et donc perpendiculaires à l'axe de rotation). La fonction en gras représente la fonction $\cos(2\Omega \cos(\theta)\tau)$ et correspond à la fonction de corrélation théorique linéaire que l'on devrait observer. Étant donné que la relation de dispersion ne dépend pas du module du vecteur d'onde, tous les modes se trouvant dans le domaine angulaire considéré (*i.e.* $\hat{\mathbf{u}}(k, \theta)$ tels que

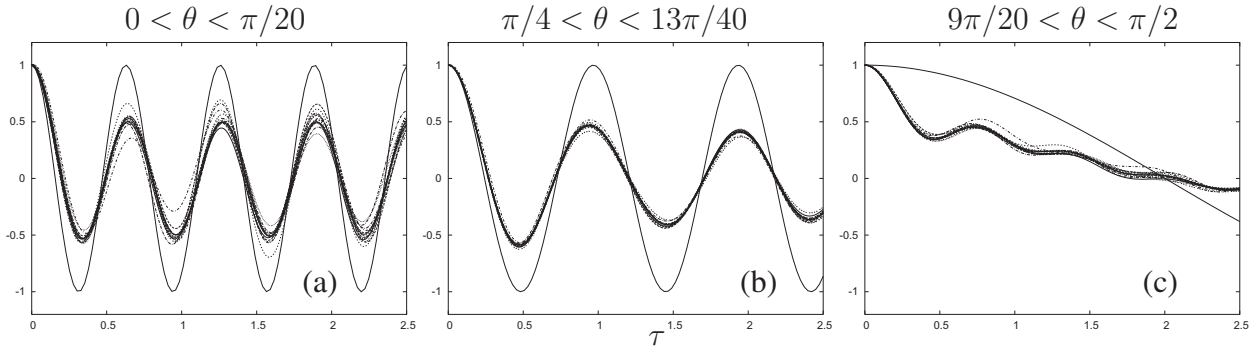


FIG. 3.14 – Fonctions de corrélations deux-temps $R(k, \theta, \tau)$ en KS avec rotation pour $k \in [2 : 64]$ et différents angles polaires. Le trait gras représente la fonction $\cos(2\Omega \cos(\theta)\tau)$, avec $\Omega = 10 \text{ rad.s}^{-1}$. (a) $\theta \approx 0$. (b) $\theta \approx \pi/4$. (c) $\theta \approx \pi/2$. (Série KS 5 au sein de Tab.3.2).

$\theta - \Delta\theta < \theta < \theta + \Delta\theta$) devraient osciller à la même pulsation, définie par le taux de rotation et la direction du vecteur d'onde. C'est effectivement ce que l'on observe au sein de la figure 3.14(a), où tous les modes oscillent en phase avec la pulsation des ondes d'inertie. Le fait que l'amplitude soit différente provient du léger mélange de phase qu'il existe du fait de la discrétisation de l'angle polaire. Les modes oscillent avec une pulsation comprise entre 2Ω (pour les modes exactement verticaux) et $2\Omega \cos(\pi/20)$ (pour les modes à la limite du domaine angulaire suivant), ce qui génère un très léger mélange de phase, et donc une légère décorrélation temporelle des modes. Lorsque θ augmente, ce mélange de phase est d'autant plus important puisque la plage de variation de la pulsation augmente avec θ . Néanmoins, la pulsation des ondes d'inertie est toujours bien identifiée sur la figure 3.14(b) (pour laquelle $\theta \approx \pi/4$), et les modes horizontaux tendent vers un comportement quasi-stationnaire puisque non influencés par la rotation (voir figure 3.14(c)).

Le temps de corrélation tel qu'il est défini par (3.34) n'est plus utile ici. En effet, du fait des oscillations observées pour la fonction $R(k, \theta, \tau)$, le temps τ_D dépend grandement du domaine d'intégration. Le temps à mi-hauteur $\tau_{1/2}$ est ici une quantité plus représentative des corrélations temporelles. Ce dernier est simplement défini par la relation suivante :

$$R(k, \tau_{1/2}) = \frac{1}{2}. \quad (3.36)$$

Concernant les prédictions linéaires, le temps de corrélation $\tau_{1/2}$ ne varie pas avec le nombre d'onde k (toutes les courbes sont quasiment superposables au sein des figures 3.14). Il ne varie qu'avec θ , en liaison directe avec la relation de dispersion des ondes inertielles. Le temps de corrélation est ainsi d'autant plus grand que l'on se rapproche de l'horizontale $\theta \approx \pi/2$.

Dans un écoulement turbulent en rotation, l'effet des ondes d'inertie mis en évidence ci-dessus se superpose à la décorrélation induite par les structures turbulentes elles-mêmes. En particulier, l'effet du *sweeping* peut être introduit de la même manière qu'au sein de la section 3.1.2 afin de prendre en compte cette décorrélation. Selon l'angle θ et le nombre d'onde k , il existe une compétition entre les ondes d'inertie et le *sweeping*, mise en évidence dans le prochain paragraphe.

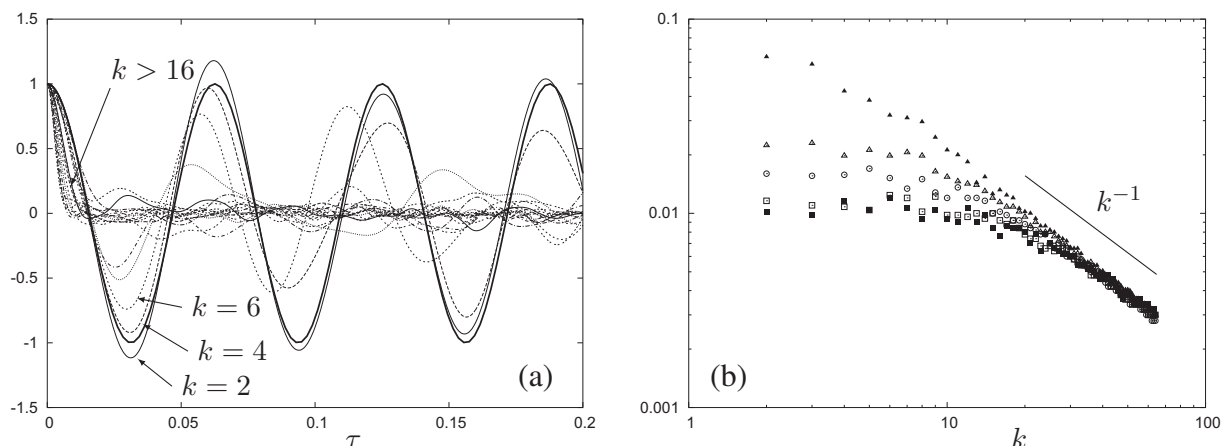


FIG. 3.15 – Corrélations deux-temps obtenues par DNS en rotation. Le nombre de Rossby est de l'ordre de 0.05. (a) Fonction $R(k, \theta, \tau)$ pour $k \in [2 : 64]$ et $\theta \approx 0$. La courbe en gras représente la fonction $\cos(2\Omega\tau)$. (b) Temps de corrélation $\tau_{1/2}(k, \theta)$ pour $k \in [2 : 64]$ et 5 valeurs discrètes de θ . $\blacktriangle$ $\theta \approx \pi/2$. $\blacksquare$ $\theta \approx 0$. (Série DNS 3, tableau 3.2)

3.3.2 Comparaison entre DNS et KS

La quantité (3.33) est calculée par DNS pour un nombre de Rossby de l'ordre de 10^{-2} ($\Omega = 50 \text{ rad.s}^{-1}$). Dans le cas isotrope, la moyenne sur θ de l'équation (3.33) (qui aboutit d'ailleurs à l'équation (3.1)) permettait d'obtenir des statistiques relativement lisses. Ce n'est plus la cas ici puisqu'en gardant la dépendance à l'angle polaire, les statistiques sont calculées à partir d'un échantillon bien moins important de données. En particulier, lorsque $\theta \approx \pi/2$, il existe un plus grand nombre de modes que lorsque $\theta \rightarrow 0$. Ce problème a pu être contourné en KS en augmentant le nombre de réalisations de l'écoulement. En revanche, les limitations numériques ne nous permettent pas de choisir cette solution pour l'approche par DNS. On se contentera donc d'une résolution de 256^3 modes de Fourier et de trois réalisations de l'écoulement, ce qui engendrera nécessairement des statistiques relativement bruitées.

La figure 3.15(a) (qui est à comparer aux figures 3.3(a) et 3.14(a)) présente la fonction de corrélation $R(k, \theta, \tau)$ lorsque θ tend vers zéro. Dans l'approche linéaire, cela correspond aux modes dont la pulsation prédite par la relation de dispersion est la plus élevée. Malgré le manque évident d'échantillons, on distingue malgré tout deux domaines de nombre d'onde : l'un étant influencé par les ondes d'inertie et l'autre vraisemblablement caractérisé par le *sweeping*. La figure 3.15(b) présente le temps à mi-hauteur en fonction du nombre d'onde et ce pour 5 domaines angulaires. Les modes dont le vecteur d'onde est perpendiculaire à l'axe de rotation (représentés par des triangles noirs $\blacktriangle$) ne sont pas perturbés et l'on retrouve le comportement déjà observé au sein de la figure 3.3(b). Pour les modes tels que $\Omega \cdot \mathbf{k} \neq 0$, l'effet de la rotation est dominant aux bas nombres d'onde, pour lesquels on observe un temps caractéristique indépendant du nombre d'onde, comme l'a montré l'approche purement linéaire du paragraphe 3.3.1. Pour les grands nombres d'onde, on retrouve un temps à mi-hauteur résultant de l'effet de *sweeping*. La transition entre les deux domaines est simplement due au fait que la pulsation caractéristique des ondes d'inertie ne dépend pas du module du vecteur d'onde (mais seulement de sa direction) tandis que le temps caractéristique de l'effet de *sweeping* est inversement proportionnel à k . Le nombre d'onde critique k_c séparant les domaines d'influence des ondes

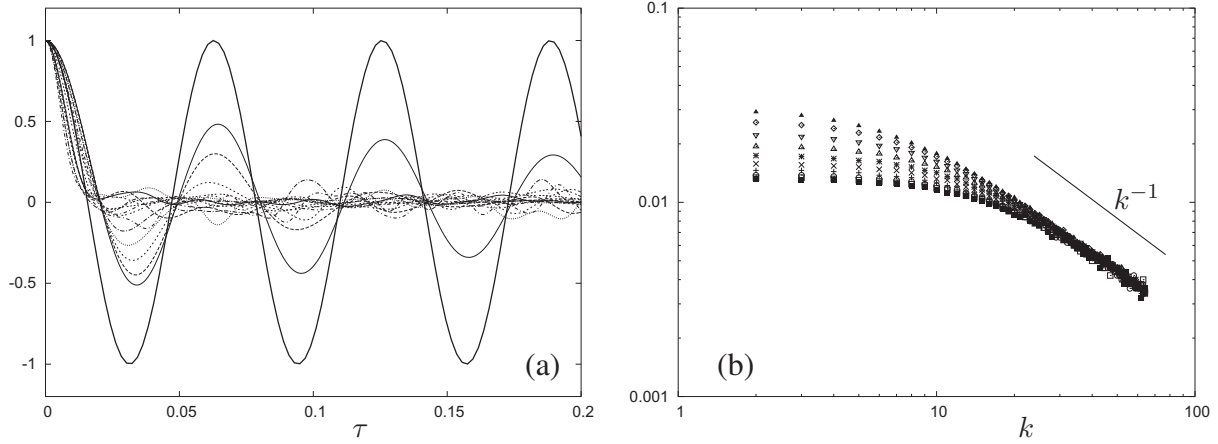


FIG. 3.16 – Corrélations deux-temps obtenues par KS en rotation. (a) Fonction $R(k, \theta, \tau)$ pour $k \in [2 : 32]$ et $\theta \approx 0$. La courbe en gras représente la fonction $\cos(2\Omega\tau)$. (b) Temps de corrélation $\tau_{1/2}(k, \theta)$ pour $k \in [2 : 32]$ et 10 valeurs discrètes de θ . $\Delta \theta \approx \pi/2$. $\blacksquare \theta \approx 0$. (Série KS 6, tableau 3.2)

d'inertie de l'effet de *sweeping* s'obtient simplement en égalisant les deux pulsations :

$$2\Omega \cos \theta \approx u_0 k_c . \quad (3.37)$$

Cette compétition dépend du module du nombre d'onde, mais également de sa direction. Pour les modes verticaux, la pulsation des ondes inertielles est maximum et celles-ci influencent l'écoulement sur une importante plage de nombres d'onde (voir la courbe représentée par des $\blacksquare$ la figure 3.15(b)). Au fur et à mesure que l'angle θ augmente, la pulsation des ondes inertielles diminue et la rotation n'influence que les faibles nombres d'onde. Pour les résultats présentés au sein de la figure 3.15, le taux de rotation est $\Omega \approx 50$ et la vitesse *rms* de l'écoulement est $u_0 \approx 6$. Le nombre critique séparant les deux régimes est donc de l'ordre de $k_c \approx 16$ pour les modes verticaux, ce qui est en accord avec la transition observée au sein de la figure 3.15(b).

Afin de terminer cette analyse, il est possible de comparer les résultats obtenus par DNS avec ceux provenant d'une KS utilisant à la fois les solutions linéaires et le temps caractéristique du *sweeping*. Pour cela, nous choisissons pour λ et λ' les valeurs retenues au sein de la section 3.1.3, c'est à dire $\lambda = 0.4$ et $\lambda' = 0.7$. De la même manière que pour la DNS présentée plus haut, le taux de rotation est fixé à $\Omega \approx 50$. Les résultats rassemblés au sein de la figure 3.16 confirment d'une part l'analyse précédente concernant l'influence de la rotation sur les corrélations deux-temps, mais permet également d'être confiant quant à l'utilisation de la KS (incluant les solutions linéaires d'un écoulement en rotation) dans des contextes tels que la diffusion Lagrangienne ou l'aéroacoustique, deux domaines pour lesquels les corrélations temporelles sont fondamentales.

3.4 Applications à l'aéroacoustique

L'étude des phénomènes acoustiques lorsque ceux-ci sont en interaction forte avec un écoulement constitue ce qu'on appelle l'aéroacoustique, qui est une branche à part entière de la dynamique des fluides. Les couplages entre le champ sonore et le milieu au sein duquel il évolue

ont un rôle fondamental. Il existe globalement trois phénomènes physiques susceptibles d'être étudiés dans le cadre de l'aéroacoustique : la génération d'une onde acoustique par un écoulement quelconque, la propagation de cette onde au sein de l'écoulement et enfin la génération d'un écoulement du à la présence d'une onde acoustique. Ce dernier phénomène s'observe dans des conditions particulières où les fluctuations acoustiques deviennent importantes comparées aux fluctuations hydrodynamiques. Les non-linéarités ne sont plus négligeables et agissent sur le champ moyen, phénomène appelé "acoustic streaming". Cet aspect ne sera pas étudié dans le cadre de ce mémoire. On s'intéressera ici principalement à la génération et à la propagation des ondes acoustiques dans un écoulement turbulent.

En pratique, les trois phénomènes décrits ci-dessus sont fortement couplés et toujours présents simultanément. Le couplage intervient via les termes non-linéaires des équations de base de la dynamique des fluides. Il ne faut donc pas perdre de vue qu'*a priori*, on ne peut pas séparer un phénomène d'un autre : l'acoustique, la mécanique des fluides et les transferts de chaleur, contenus dans les équations générales. De fait, il est possible de définir trois modes de perturbations qui coexistent au sein de l'écoulement :

- *Mode hydrodynamique* : une fluctuation de pression ne s'accompagne pas d'une fluctuation de masse volumique. La fluctuation de vitesse hydrodynamique est convectée par l'écoulement moyen.
- *Mode acoustique* : une fluctuation de pression s'accompagne d'une fluctuation de masse volumique. Cette perturbation se propage à la célérité du son, qui est une grandeur thermodynamique.
- *Mode entropique* : une fluctuation d'entropie ou de température s'accompagne d'une fluctuation de masse volumique convectée par l'écoulement.

Isoler un mode de perturbation passe nécessairement par une série d'hypothèses. Le mode entropique peut être négligé lorsque l'on s'intéresse à des transformations isentropiques. En revanche, isoler les fluctuations acoustiques des fluctuations hydrodynamiques est une opération ardue. Il est possible d'utiliser l'hypothèse d'un fluide incompressible, ce qui supprime toute possibilité de propagation et donc d'acoustique ; seul subsiste le mode hydrodynamique. Le seul moyen d'isoler entièrement le mode acoustique est de supprimer le mode hydrodynamique (milieu au repos), ce qui n'a pas de sens dans le contexte de l'aéroacoustique.

L'objet de ce chapitre est d'utiliser l'aéroacoustique comme un exemple concret d'application des résultats des sections 3.1 et 3.3 concernant les corrélations deux-temps. Pour cela, nous choisissons la méthode de calcul des quantités acoustiques qui nous semble la plus appropriée : l'analogie acoustique.

3.4.1 L'analogie acoustique de Lighthill

En 1952, puis en 1954, M.J. Lighthill introduit une théorie dont l'objectif est d'estimer le son rayonné par un écoulement contenant des fluctuations ou de la turbulence [Lighthill(1952a), Lighthill(1954)]. Les travaux de l'époque se concentrent pour la plupart sur l'étude des fréquences caractéristiques d'un écoulement et leurs relations avec les fréquences acoustiques émises. La question de l'intensité acoustique émise et sa relation avec les grandeurs caractéristiques de l'écoulement restait ouverte.

En s'intéressant aux bruits des jets, Lighthill considère que les ondes acoustiques sont le

fruit de structures turbulentes localisées, et qu'elles se propagent ensuite dans un milieu homogène au repos. Ainsi, en dehors du domaine source, les fluctuations sont gouvernées par une équation d'onde classique. La démarche de Lighthill consiste ainsi en l'isolement d'un opérateur d'onde classique pour les grandeurs acoustiques, les sources de bruit apparaissant dans le second membre. Le terme source est défini comme la différence entre les expressions exactes des lois de conservation de la dynamique des fluides et les approximations acoustiques linéarisées. On parle généralement d'analogie acoustique.

Equation de Lighthill

Sur la base des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, il est possible d'obtenir une équation d'onde pour les fluctuations acoustiques de masse volumique ρ avec un terme source comme second membre :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial y_l^2} = \frac{\partial^2 T_{il}}{\partial x_i \partial x_l}, \quad (3.38)$$

où T_{il} est le tenseur de Lighthill défini par :

$$T_{il} = \underbrace{\rho u_i u_l}_{(a)} + \underbrace{(p' - \rho_0 c_0^2) \delta_{il}}_{(b)} - \underbrace{\tau_{il}}_{(c)}. \quad (3.39)$$

Trois processus fondamentaux peuvent être identifiés au sein de l'équation (3.39) comme des sources de bruit :

- (a) l'instationnarité du terme non-linéaire convectif $\rho u_i u_l$,
- (b) le bruit d'entropie, non-nul dès lors que les transformations ne sont plus isentropiques ou lorsque l'écoulement n'est plus homentropique. C'est le cas des jets de température supérieure à l'ambiante,
- (c) les fluctuations du tenseur des contraintes visqueuses τ_{il} .

L'analogie acoustique de Lighthill consiste donc en une reformulation exacte des équations de la dynamique des fluides.

Il se pose immédiatement la question de l'identification du terme source, supposé connu lors du développement de l'analogie. Ce terme source contient les fluctuations de masse volumique et de vitesse qui nécessitent de résoudre le système d'équations non-linéaires qui gouvernent l'écoulement. Ceci est, hors situations académiques, difficilement réalisable. L'analogie consiste donc à sous-entendre que l'inconnue du problème n'est pas contenue dans le terme source, ce qui revient à ignorer les interactions possibles entre champ rayonné et champ source. Cette hypothèse est certainement très forte dans notre contexte. Cependant, l'objectif n'est pas ici d'étudier en détails le champ acoustique et son interaction avec les fluctuations turbulentes, mais simplement d'estimer les propriétés du champ acoustique lointain.

Solution en espace libre

La suite traite du cas général d'un écoulement turbulent subsonique à température ambiante. La solution pour un observateur placé en $\mathbf{x}$ à l'instant t , issue d'une source localisée en $\mathbf{y}$ émettant à l'instant τ , s'écrit, pour la masse volumique :

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \int_{t_0}^t \iiint_V \frac{\partial^2 T_{il}}{\partial y_i \partial y_l} G_0(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y} d\tau, \quad (3.40)$$

où G_0 est la fonction de Green en espace libre donnée par :

$$G_0(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, \tau) = \frac{\delta(t - \tau - r/c_0)}{4\pi r c_0^2} \quad \text{avec} \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|. \quad (3.41)$$

Par intégration partielle et en utilisant la relation de réciprocity :

$$\frac{\partial G_0}{\partial y_i} = -\frac{\partial G_0}{\partial x_i}, \quad (3.42)$$

on aboutit à :

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_l} \iiint_V \frac{T_{il}(\mathbf{y}, t - r/c_0)}{4\pi r c_0^2} d\mathbf{y}. \quad (3.43)$$

On se place désormais en condition de champ lointain. La seule échelle de longueur est ainsi la longueur d'onde et l'estimation de la dérivation spatiale peut être remplacée par l'estimation de la fréquence caractéristique du bruit produit. En champ lointain s'ajoutent les deux hypothèses suivantes :

$$|\mathbf{y}| \ll |\mathbf{x}| \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \approx -\frac{x_i}{c_0 |\mathbf{x}|} \frac{\partial}{\partial t},$$

ce qui permet d'obtenir pour la fluctuation de masse volumique la solution suivante :

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{x_i x_l}{4\pi c_0^4 |\mathbf{x}|^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iiint_V \frac{T_{il}(\mathbf{y}, t - |\mathbf{x}|/c_0)}{|\mathbf{x}|} d\mathbf{y}. \quad (3.44)$$

Il existe de nombreuses autres analogies acoustiques (par exemple, celles dues à Powell et Lilley pour ne citer qu'elles). D'autres méthodes dont l'objectif est de calculer l'émission acoustique d'un écoulement existent également. La discussion quant à l'application et la pertinence de l'analogie de Lighthill dans notre cadre est au-delà des objectifs du présent travail. Effectivement, l'analogie de Lighthill est utilisée comme un moyen simple de calculer une quantité (la pression acoustique) à partir d'un champ incompressible de vitesse. C'est ici un outil de diagnostic permettant de comparer les deux méthodes numériques utilisées au sein du manuscrit. La dépendance explicite aux corrélations deux points et deux temps dans la solution (3.44) est également à l'origine de ce choix.

3.4.2 Application en turbulence homogène et isotrope

L'objectif est ici de déterminer une expression analytique pour le spectre de puissance acoustique émise par une turbulence homogène et isotrope. Afin de s'affranchir des moments d'ordre quatre générés par la théorie de Lighthill, Proudman [Proudman(1952)] propose une hypothèse de quasi-normalité. Cette théorie relie finalement les propriétés statistiques du champ de vitesse turbulent aux propriétés acoustiques du champ lointain. Ces travaux ont été par la suite complétés par Lilley [Lilley(1994)].

Une alternative due à Goldreich et Kumar [Goldreich & Kumar(1988)] se base sur une analyse dimensionnelle de type Kolmogorov. Cette approche prédit un spectre haute-fréquence du son émis en champ lointain variant comme $\omega^{-7/2}$, où ω est la pulsation.

Combinant les deux approches précédentes, Zhou et Rubinstein [Rubinstein & Zhou(2000)] propose l'expression suivante pour le spectre de puissance acoustique :

$$P_T(\omega) = \frac{\pi}{2} \rho_0 \frac{\omega^4}{c_0^5} \frac{32\pi}{15} \int_0^\infty 4\pi k^2 \frac{E^2(k)}{(4\pi k^2)^2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty R^2(k, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right) dk \quad (3.45)$$

où $E(k)$ est le spectre d'énergie turbulente et $R(k, \tau)$ est la fonction de corrélation temporelle. Les auteurs de cet article mettent en avant le fait que les prédictions de Goldreich [Goldreich & Kumar(1988)] supposent implicitement l'utilisation d'une hypothèse de *straining*, qui est appropriée dans le cas des corrélations Lagrangiennes. En substituant l'hypothèse de *straining* par celle de *sweeping* dans l'analyse dimensionnelle, le spectre haute fréquence évolue en $\omega^{-4/3}$. La formule (3.45) présente un double intérêt pour notre étude. D'une part, elle offre des possibilités de comparaisons intéressantes avec les résultats obtenus par KS ou DNS. De plus, cette expression analytique ne dépend que de deux paramètres qui sont le spectre d'énergie et la fonction de corrélation. Ces deux paramètres sont exactement ceux qu'il est nécessaire d'imposer en KS.

3.4.3 Pourquoi utiliser la KS en aéroacoustique ?

Le son rayonné par un écoulement turbulent est lié à la corrélation temporelle de l'ensemble des structures turbulentes. Il est possible de déterminer les grandeurs hydrodynamiques en utilisant une DNS, puis de remonter aux quantités acoustiques par analogie en intégrant l'équation (3.44). Cependant, le coût numérique d'une telle procédure est relativement élevé et ce pour deux raisons. Il est d'une part nécessaire de stocker en mémoire l'évolution temporelle des quantités hydrodynamiques, ce qui peut s'avérer être un obstacle lorsque l'on augmente la résolution. De plus, la séparation d'échelles qu'il existe entre la longueur d'onde des ondes acoustiques et celle des structures turbulentes impose un pas de temps souvent beaucoup plus petit que dans un cas hydrodynamique classique. Il existe bien sûr d'autres solutions. En particulier, le calcul des grandeurs hydrodynamiques par LES s'avère prometteur. Cependant, il est alors nécessaire de comprendre l'impact de la troncature dans l'espace de Fourier et du modèle sous-maille (subgrid-scale model (SGS)) sur les corrélations temporelles et donc le rayonnement acoustique [Rubinstein & Zhou(2002), He *et al.*(2002), He *et al.*(2004)].

Dans ce contexte, la KS est un candidat pour calculer les petites échelles de l'écoulement, non-résolues par LES. Cette approche hybride LES-KS a d'ores et déjà été utilisée pour étudier la dispersion d'un scalaire passif au sein d'un écoulement turbulent [Flohr & Vassilicos(2000)] ainsi que la dispersion de particules dans un canal avec obstacle [Khan *et al.*(2008)]. La KS a également été utilisée afin de calculer les interactions entre écoulement moyen et fluctuations au sein des équations d'Euler linéarisées [Béchara *et al.*(1994)]. Enfin, un exemple d'utilisation de la KS en plus de la LES dans un contexte aéroacoustique peut être trouvé au sein de la référence [Yao & He(2008)]. On note que la KS ne joue pas ici le rôle du modèle sous-maille, l'objectif étant d'obtenir le champ de vitesse non-résolu par la LES (pour plus de détails, voir [Flohr & Vassilicos(2000)]). Comme l'ont montré les paragraphes précédents, les corrélations temporelles obtenues en KS sont intégralement reliées au choix de la variable ω_n . Celle-ci doit être une variable Gaussienne afin d'éviter les oscillations de la fonction $R(k, \tau)$ et le temps caractéristique de l'effet de *sweeping* doit être utilisé, au moins pour les petites échelles de l'écoulement. Il est possible que ces restrictions aient un impact considérable sur le champ de vitesse synthétique et sa contribution au rayonnement acoustique.

Les paragraphes suivants sont consacrés au calcul du son émis par le champ de vitesse synthétique. L'objectif étant d'une part d'illustrer la possible utilisation de la KS dans un contexte aéroacoustique, mais aussi de montrer l'intérêt de la KS lorsque celle-ci est comparée à une

DNS.

3.4.4 Implémentations numériques

Les quantités acoustiques calculées par la suite découlent du formalisme de Lighthill. L'objectif n'est pas ici de discuter de l'intérêt d'une telle méthode, ni de la comparer avec un autre formalisme. L'analogie acoustique est utilisée ici comme un moyen pratique permettant d'évaluer l'impact des hypothèses utilisées en KS pour générer l'instationnarité du champ de vitesse sur des quantités telles que le spectre d'intensité acoustique. Comme cela a été mis en évidence précédemment, le spectre acoustique peut, sous certaines hypothèses, dépendre intimement des quantités statistiques imposées en KS.

Une analyse numérique détaillée de l'application de la théorie de Lighthill au cas de la turbulence homogène isotrope peut être trouvée dans [Sarkar & Hussaini(1993), Witkowska(1994), Witkowska & Juvé(1997)]. Le lecteur se reportera à ces travaux pour de plus amples détails.

Les grandeurs hydrodynamiques nécessaires au calcul du bruit rayonné par la théorie de Lighthill sont supposées connues. Dans notre cas, elles proviennent soit d'une DNS, soit d'un KS, les deux modèles fournissant un champ de vitesse incompressible et instationnaire. À partir de ces quantités, il est possible de calculer la pression acoustique en utilisant l'équation :

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{x_i x_l}{|\mathbf{x}|^3} \int_V \frac{\partial^2}{\partial t^2} T_{il} \left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c_0} \right) d^3 \mathbf{y} \quad (3.46)$$

où $p(\mathbf{x}, t)$ est la pression acoustique au point $\mathbf{x}$, c_0 est la célérité du son, $\mathbf{y}$ est un point du volume turbulent V et T_{il} est le tenseur de Lighthill défini par (3.39). L'écart entre l'observateur et la source est noté $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. L'équation (3.46) n'est qu'une reformulation de (3.44) en remarquant que $p(\mathbf{x}, t) = c_0^2 \rho(\mathbf{x}, t)$. Il a été montré dans [Witkowska(1994)] que cette formulation est correcte même si le problème que l'on se pose est légèrement différent de celui de Lighthill [Lighthill(1952b)]. En effet, Lighthill s'intéresse à la génération de pression acoustique par un volume de fluide en mouvement au sein d'un milieu ambiant au repos. Dans notre cas, les quantités turbulentes sont calculées dans des boîtes cubiques au sein desquelles l'ensemble du fluide est en mouvement. Il pourrait ainsi apparaître des termes parasites venant des intégrales sur les bords du domaine de calcul. Ce n'est pas le cas avec la formulation retenue et cela est démontré en détails dans [Witkowska(1994)].

Il serait possible de calculer la pression acoustique en utilisant la transformée de Fourier temporelle de l'équation (3.46), qui s'écrit :

$$\tilde{p}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\omega^2}{4\pi c_0^2} \frac{x_i x_l}{|\mathbf{x}|^3} \int_V \hat{T}_{il}(\mathbf{y}, \omega) e^{i\omega \frac{r}{c_0}} d^3 \mathbf{y} . \quad (3.47)$$

Si cette formulation présente l'avantage de simplifier le terme de retard temporel, il nécessite de connaître la vitesse au cours du temps afin d'en calculer la transformée. Cela est possible en KS mais inenvisageable en DNS car la sauvegarde de l'ensemble des champs de vitesse générerait une quantité très importante de données. Afin de contourner ce problème, l'équation (3.47) n'est pas utilisée. L'équation (3.46) est réécrite afin de ne faire intervenir que des quantités hydrodynamiques à l'instant t :

$$p \left(\mathbf{x}, t + \frac{r}{c_0} \right) = \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{x_i x_l}{|\mathbf{x}|^3} \int_V \frac{\partial^2}{\partial t^2} T_{il}(\mathbf{y}, t) d^3 \mathbf{y} . \quad (3.48)$$

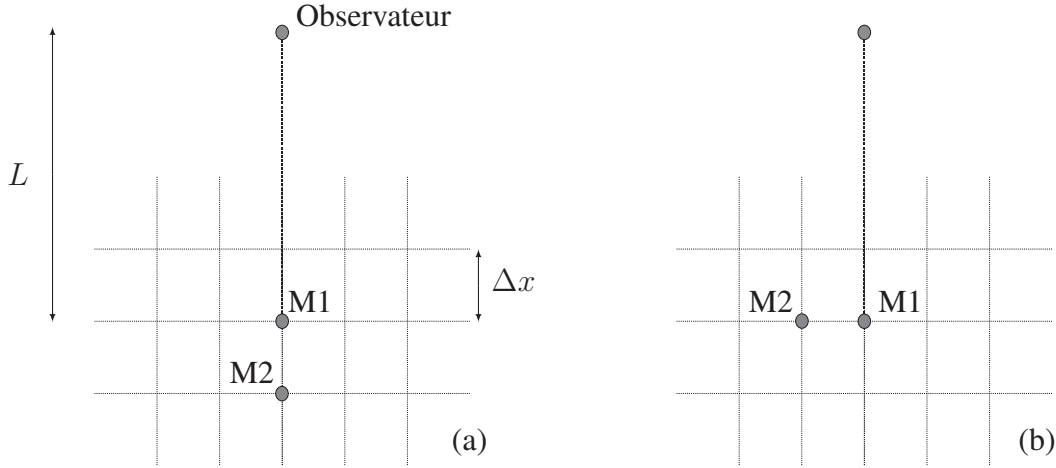


FIG. 3.17 – Schéma indiquant la position de M1 et M2, deux points du maillage appartenant au domaine turbulent, ainsi que la position de l'observateur. Δx désigne les pas en espace.

En choisissant un schéma d'ordre 2 pour calculer la double dérivée temporelle du tenseur de Lighthill, seuls deux champs de vitesses doivent être sauvegardés (en plus du champ courant). Nous avons vérifié qu'un schéma d'ordre 3 ne modifiait pas les résultats. Ainsi, à chaque instant t , les contributions turbulentes à la pression $p(\mathbf{x}, t')$ sont calculées. La fluctuation turbulente située en $\mathbf{y}$ à l'instant t génère une fluctuation de pression acoustique en $\mathbf{x}$ à l'instant $t' = t + r/c_0$. Numériquement, le temps t' doit être un multiple du pas de temps Δt de la simulation, ce qui impose :

$$t' = \left\lfloor \frac{t + \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c_0}}{\Delta t} \right\rfloor \Delta t, \quad (3.49)$$

où $\lfloor \dots \rfloor$ désigne la partie entière. Cette méthode fonctionne pourvu que l'approximation faite en estimant le temps retardé par sa plus proche valeur disponible au sein de la simulation est acceptable. Pour vérifier cela, déterminons l'ordre de grandeur de l'écart minimum entre deux temps de retard. Considérons deux points M1 et M2 d'un maillage de pas Δx . L'observateur se trouve à une distance L du premier point M1. Dans la situation schématisée par la figure 3.17(a), une onde émise par le point M1 arrive à l'observateur avec un temps de retard $t_{M1} = L/c_0$ tandis que $t_{M2} = (L + \Delta x)/c_0$. Ainsi le pas de temps minimum nécessaire pour différencier les contributions des points M1 et M2 est de l'ordre de :

$$\Delta t_{min} \approx \frac{\Delta x}{c_0}. \quad (3.50)$$

Le même raisonnement dans le cas de la figure 3.17(b) conduit à une relation beaucoup plus restrictive puisque les distances séparant les points M1 et M2 de l'observateur sont quasiment égales. Nous avons toujours $t_{M1} = L/c_0$, avec cette fois $t_{M2} = L/(c_0 \cos \theta)$ où θ est ici l'angle entre les deux rayons reliant M1 et M2 à l'observateur. Nous avons de plus $\theta = \arctan(\Delta x/L) \approx \Delta x/L$ car $L \gg \Delta x$ (hypothèse de champ lointain). Finalement, $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2 \approx 1 - \Delta x^2/(2L^2)$. Le pas de temps minimum nécessaire pour différen-

DNS					
Série	Résolution	Forçage [†]	Réalisations	Re_λ	Ω
1	256^3	$k \in [1 : 4]$	1	148	0
2	256^3	$k \in [1 : 4]$	1	148	0
3	128^3	$k \in [1 : 4]$	1	83	[0 : 50]
4	128^3	$k \in [1 : 4]$	3	83	15

KS							
Série	Résolution	Réalisations	N	λ'	λ	ω_n	Ω
1	128^3	30	2000	0.7	0.4	$\sqrt{k_n^3 E(k_n)}$	0
2	128^3	30	2000	0.7	0.4	$k_n u_0$	0
3	128^3	30	2000	0	0	-	[0 : 50]
4	128^3	30	2000	0.7	0.4	$k_n u_0$	25
4	128^3	60	2000	0	0	-	15

TAB. 3.3 – Paramètres des différentes simulations numériques présentées dans la section 3.4. Re_λ est le nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor.

cier les contributions des points M1 et M2 est cette fois-ci de l'ordre de :

$$\Delta t_{min} \approx \frac{\Delta x^2}{2Lc_0} . \quad (3.51)$$

La condition (3.51) est numériquement très restrictive et la condition (3.50) est donc utilisée par la suite après avoir vérifié qu'un pas de temps plus petit ne change pas les résultats.

La pression acoustique est calculée en plusieurs points $\mathbf{x}$, répartis isotropiquement sur une sphère de rayon $20L_x$ centrée sur le domaine de calcul. L_x représente ici le côté du domaine cubique de calcul des quantités turbulentes. Le fait que la boîte soit cubique rend la configuration non-isotropique, mais nous avons vérifié que cela n'interfère pas sur les quantités acoustiques. L'intensité acoustique $I(\mathbf{x}, t)$ est calculée en chaque point selon :

$$I(\mathbf{x}, t) = \frac{\langle (p(\mathbf{x}, t) - \langle p(\mathbf{x}, t) \rangle)^2 \rangle}{\rho_0 c_0} , \quad (3.52)$$

où les crochets $\langle \dots \rangle$ désignent les moyennes statistiques sur les réalisations, les différents observateurs et le temps. Le densité spectrale d'intensité acoustique est simplement la transformée de Fourier de l'expression (3.52). La puissance acoustique s'en déduit immédiatement dans le cas isotrope par :

$$P_T(t) = 4\pi x^2 I(\mathbf{x}, t) . \quad (3.53)$$

3.4.5 Forçage - Signaux de pression acoustique

Afin de montrer la nécessité du forçage en DNS dans un contexte aéroacoustique, on se propose d'observer les signaux instantanés de pression acoustique calculée en un point. La figure 3.18 présente un tel signal dans le cas d'une DNS en déclin (3.18(a)) et dans le cas d'une DNS forcée à l'aide de la méthode de forçage de type 1 (3.18(b)).

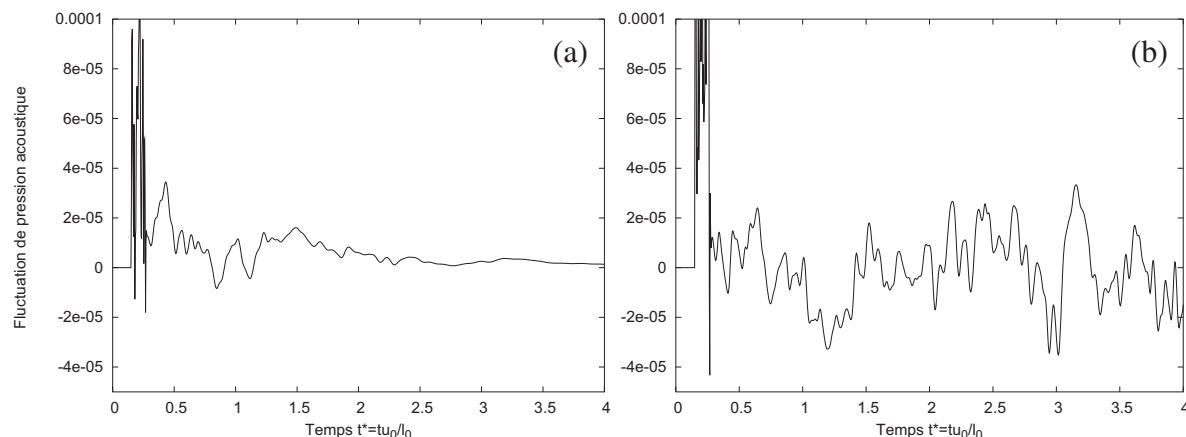


FIG. 3.18 – Fluctuation de pression acoustique adimensionnée $p/(\rho_0 u_0^2)$ en fonction du temps adimensionné par le temps caractéristique l_0/u_0 . $t = 0$ correspond au début de la simulation hydrodynamique. (a) DNS sans forçage (Série DNS 1 au sein de Tab.3.3). (b) DNS forcée (Série DNS 2 au sein de Tab.3.3).

Au tout début de la simulation (pour $t^* < 0.2$), le signal est nul puisqu'aucune fluctuation n'a encore atteint le point d'observation. Pour $0.2 < t^* < 0.3$ environ, les fortes fluctuations de pression sont dues au fait que l'ensemble des points n'ont pas encore contribué à la pression à cet instant. Il en résulte un signal de pression incohérent, puisque construit à partir d'un domaine turbulent tronqué. Pour $t^* > 0.3$, l'ensemble des points du domaine turbulent contribue à la pression acoustique au point d'observation. D'une manière générale, l'ensemble des statistiques présentées au sein de ce chapitre, et en particulier les spectres d'intensité, ont été calculées pour $t^* > 1$.

L'importance du forçage est ici très claire. La décroissance de la pression acoustique est très rapide dans le cas non forcé et le signal est quasiment nul après seulement deux temps de retournement. Le signal de pression du cas forcé est quant à lui quasiment stationnaire.

3.4.6 Spectres acoustiques - Cas isotrope

Dans cette section, nous nous intéressons au spectre de puissance acoustique d'une turbulence homogène et isotrope. Nous utilisons pour cela trois différentes méthodes : (a) DNS, (b) KS et (c) l'équation (3.45). Dans le cas de la DNS et de la KS, les quantités acoustiques sont calculées par analogie de Lighthill tandis que l'équation (3.45) fournit directement le spectre de puissance acoustique. Lorsque cela est possible (*i.e.* pour la KS et l'équation (3.45)), les deux temps caractéristiques discutés au sein de la section 3.1 sont utilisés.

Dans un premier temps, l'équation (3.46) est résolue afin d'estimer le rayonnement acoustique dû aux champs de vitesse provenant de DNS ou KS. Dans chacun des cas, l'algorithme de résolution est identique. Pour de plus amples détails concernant la résolution numérique de l'équation (3.46) dans le cadre d'une turbulence homogène, le lecteur se référera à [Witkowska & Juvé(1997), Sarkar & Hussaini(1993), Favier *et al.*(2008)].

L'équation (3.45) est ensuite intégrée numériquement. Le spectre d'énergie $E(k)$ est identique à celui utilisé pour initialiser la KS et correspond au spectre quasi-statique résultant des DNS forcées. La fonction de corrélation est basée soit sur l'hypothèse de *sweeping* (*i.e.*

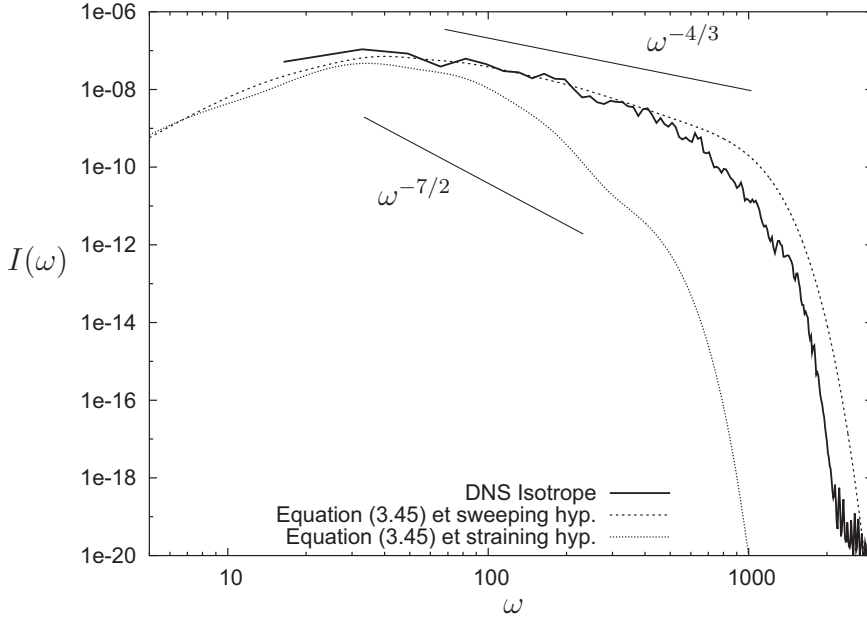


FIG. 3.19 – Densité spectrale d'intensité acoustique $I(\omega)$ pour une turbulence isotrope. Comparaison entre DNS et l'équation (3.45) (Série DNS 2 au sein de Tab.3.3).

$R(k, \tau) = \exp(-k^2 u_0^2 \tau^2 / 2)$) soit sur celle de *straining* (i.e. $R(k, \tau) = \exp(-k^3 E(k) \tau^2 / 2)$).

La figure 3.19 compare les résultats obtenus par DNS avec ceux provenant de l'intégration de (3.45). Si l'on utilise le temps de retournement pour déterminer la fonction de corrélation $R(k, \tau)$ dans l'équation (3.45), la composante haute-fréquence de l'émission acoustique est très largement sous-estimée par rapport à celle prédite par la DNS. Il apparaît clairement que le temps Eulérien caractérisant le *sweeping* est bien plus efficace pour estimer le son rayonné par les petites structures de l'écoulement. De plus, sont tracées sur la figure les pentes $\omega^{-4/3}$ et $\omega^{-7/2}$ correspondant respectivement aux prédictions de Zhou et Rubinstein [Rubinstein & Zhou(2000)] et de Goldreich et Kumar [Goldreich & Kumar(1988)]. Les résultats DNS sont en accord avec la loi en puissance obtenue par Zhou et Rubinstein, qui s'étaient basés sur une hypothèse de *sweeping* dominant. En revanche, la pente $\omega^{-7/2}$ n'est observée sur aucun des résultats présentés au sein de la figure 3.19, que ce soient ceux provenant d'une DNS ou ceux obtenus par intégration de l'équation (3.45).

Les résultats obtenus par KS sont rassemblés sur la figure 3.20. Une fois de plus, on peut ici souligner l'avantage que présente la KS sur d'autres modèles numériques plus complexes. Il est possible de distinguer clairement l'impact du phénomène à l'origine de l'instationnarité sur l'émission acoustique. Les conclusions sont les suivantes : si l'émission acoustique à basses fréquences dépend peu du choix retenu pour la loi $\omega_n(k_n)$, la composante haute-fréquence n'est fidèlement représentée que lorsque l'hypothèse de *sweeping* est utilisée. Cela confirme encore une fois que les corrélations des petites échelles de l'écoulement (et donc leur rayonnement acoustique) sont régies par l'advection due aux grandes structures de l'écoulement. À partir de ces observations, les modèles synthétiques de type KS pourrait être utilisés pour modéliser les petites échelles d'un écoulement turbulent à condition que l'instationnarité découle de l'hypothèse de *sweeping*. Dans le cas contraire, la décorrélation des structures à haut nombre d'onde sera sous-estimée.

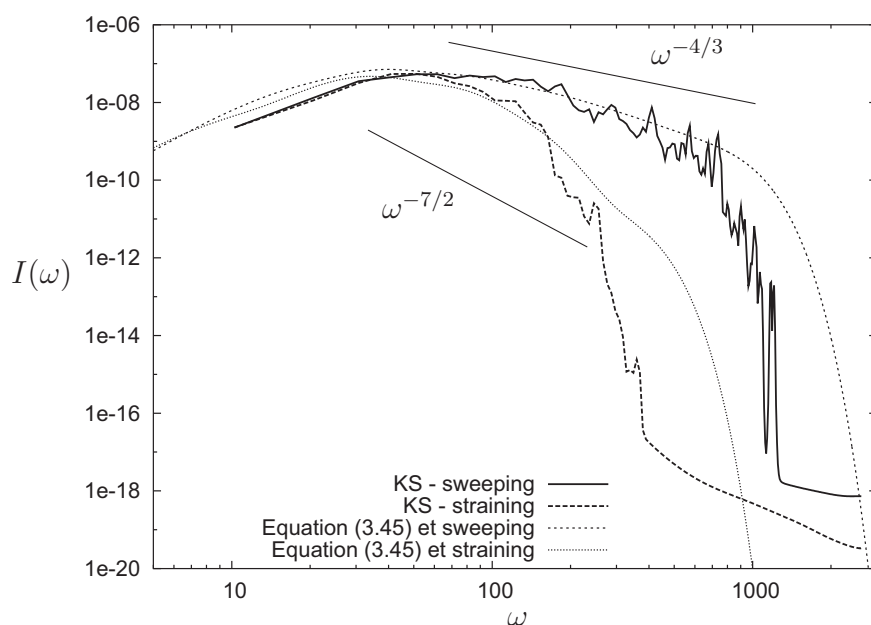


FIG. 3.20 – Densité spectrale d'intensité acoustique $I(\omega)$ pour une turbulence isotrope. Comparaison entre KS et l'équation (3.45) (Séries KS 1 et 2 au sein de Tab.3.3).

3.4.7 Spectres acoustiques - Cas en rotation

On s'intéresse ici à l'émission acoustique d'une turbulence homogène mais anisotrope. L'anisotropie provient de la mise en rotation du repère. La figure 3.21(a) présente les spectres acoustiques calculés par DNS pour différents taux de rotation. Le nombre de Rossby varie de l'unité à 10^{-1} environ. L'impact de la rotation est facilement identifiable. Il apparaît une composante basses fréquences d'autant plus intense que le nombre de Rossby est faible. Au-delà de ce domaine, le spectre acoustique est relativement indifférent à la présence de la rotation (on notera cependant un légère diminution de l'intensité acoustique pour le plus fort taux de rotation).

Nous allons ici pouvoir illustrer l'intérêt de ls KS comme outil de diagnostic. Les para-

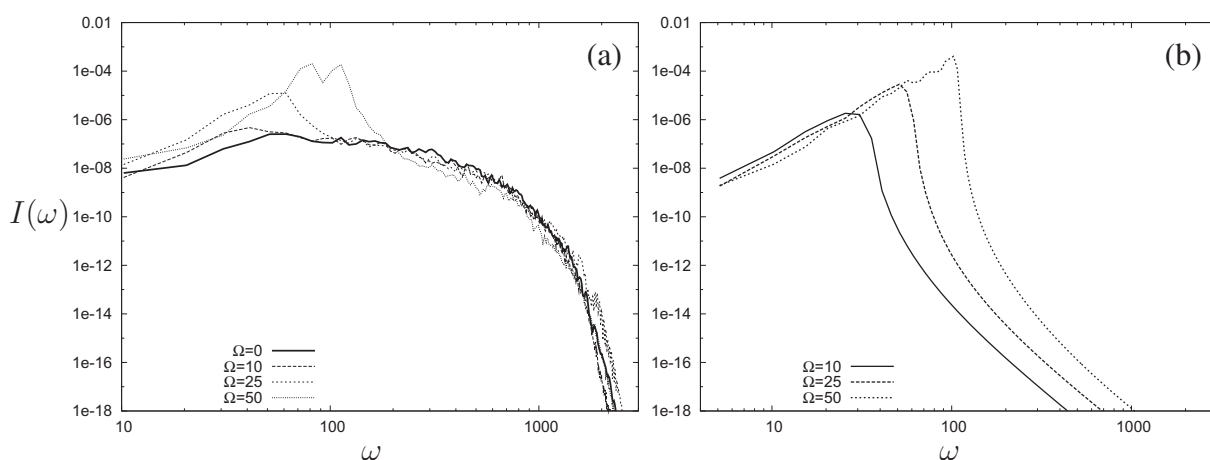


FIG. 3.21 – Densité spectrale d'intensité acoustique $I(\omega)$ pour une turbulence homogène en rotation. (a) DNS (Série DNS 3 au sein de Tab.3.3). (b) KS sans pulsations arbitraires mais incluant les solutions linéaires de rotation (Série KS 3 au sein de Tab.3.3).

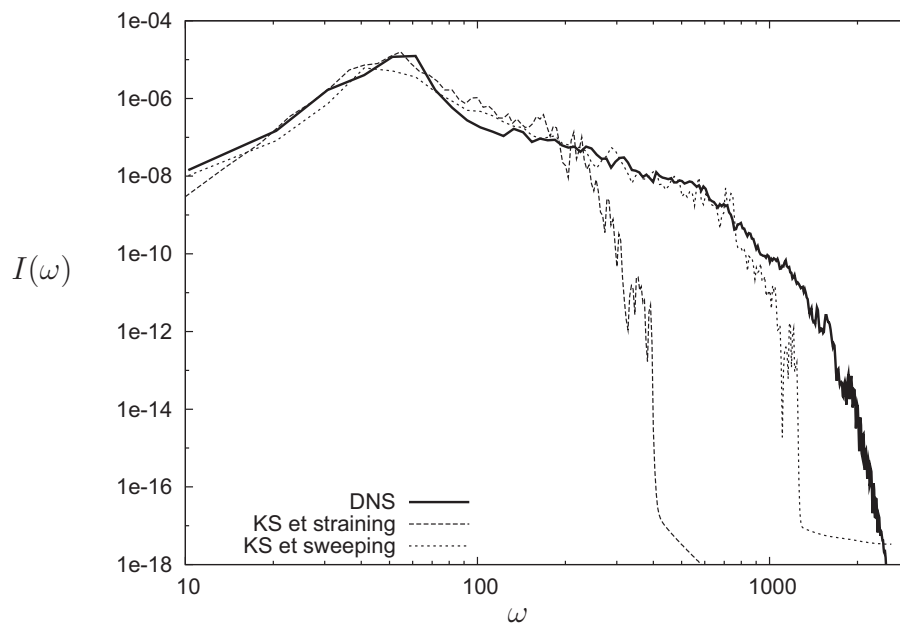


FIG. 3.22 – Densité spectrale d'intensité acoustique $I(\omega)$ pour une turbulence homogène en rotation. Le taux de rotation est $\Omega = 25 \text{ rad.s}^{-1}$. Comparaison entre DNS (Série DNS 3 au sein de Tab.3.3) et KS avec hypothèse *sweeping* ou *straining* (Série KS 4 au sein de Tab.3.3).

graphes précédents ont été consacrés à l'instationnarité au sein du modèle classique. Nous allons ici utiliser les solutions linéaires développées dans la section 3.2.3. La pulsation caractéristique est dans un premier temps mise de côté ($\lambda = \lambda' = 0$) et l'instationnarité du champ synthétique provient uniquement des solutions linéaires, et ne dépend donc que de la relation de dispersion des ondes d'inertie. La figure 3.21(b) présente les spectres acoustiques calculés par KS pour différents taux de rotation et pour $\lambda = \lambda' = 0$. Ces simulations permettent d'isoler l'impact de la rotation sur l'émission acoustique, dans la limite linéaire. On observe que la pulsation de coupure au-delà de laquelle la rotation n'influence plus l'émission acoustique est très proche pour les deux modèles, et ce quel que soit le taux de rotation. Cette pulsation de coupure est d'ailleurs très proche de la pulsation maximum des ondes d'inertie qui est simplement $\omega_{\max} = 2\Omega$. Lorsque $\Omega = 50 \text{ rad.s}^{-1}$, la pulsation maximum des ondes d'inertie est donc $\omega_{\max} \approx 100 \text{ rad.s}^{-1}$. Cette pulsation critique correspond bien à la coupure observée en KS sur la figure 3.21(b), mais également à celle observée en DNS sur la figure 3.21(a) (bien que dans ce cas, l'émission acoustique due aux ondes inertielles se superpose à une composante haute-fréquence).

Comme il a déjà été montré au sein de la section 3.3.2, il est possible de superposer l'instationnarité provenant des ondes inertielles à celle provenant de la pulsation aléatoire. Il est ainsi possible d'illustrer l'impact de la rotation sur l'émission acoustique d'une turbulence homogène. Les conclusions qui vont suivre sont bien évidemment à mettre en parallèle avec les résultats déjà observés concernant les corrélations deux-temps. Les paramètres des simulations cinématiques sont identiques à ceux de la section 3.3.2. La figure 3.22 présente les spectres acoustiques pour différents taux de rotation. La pulsation aléatoire est basée sur l'hypothèse de *sweeping* d'une part, et sur l'hypothèse de *straining* d'autre part. Dans un premier temps, l'utilisation des solutions linéaires permet de reproduire l'émission acoustique basse-fréquence due à la rotation. Dans un second temps, le spectre haute-fréquence est bien pris en compte

lorsque l'on utilise une pulsation arbitraire basée sur le *sweeping*. Ces conclusions, similaires à celles résultant de l'analyse sur les corrélations deux-temps, montrent à quel point l'émission acoustique et les corrélations deux-temps sont des quantités liées.

3.4.8 Dépendance au nombre de Mach

Un des résultats les plus marquant de la théorie de Lighthill [Lighthill(1952b)] concerne la dépendance de la puissance acoustique avec le nombre de Mach. Le nombre de Mach est ici défini comme le rapport entre la vitesse *rms* u_0 de l'écoulement turbulent et la célérité du son c_0 . Lorsque le nombre de Reynolds est suffisamment élevé et lorsqu'on se limite à observer le rayonnement acoustique en champ lointain, l'intensité acoustique est reliée à u_0 par [Proudman(1952)] :

$$\bar{I} \approx \frac{\alpha \rho_0 u_0^8}{l_0 c_0^5} \quad (3.54)$$

où α est constante parfois appelée constante de Proudman. En d'autres termes, l'intensité acoustique (et donc la puissance acoustique) évolue comme le nombre de Mach à la puissance 8. Cette loi en puissance souligne le caractère quadripolaire des sources turbulentes. L'équation (3.38) fait en effet apparaître la double divergence du tenseur de Lighthill, ce qui peut être considéré comme une superposition de quadripôles.

L'intensité acoustique est donc calculée pour différentes valeurs de la vitesse *rms*, c'est à dire pour différentes valeurs du nombre de Mach $M = u_0/c_0$. Concernant la DNS, le forçage de type 1 maintient l'énergie cinétique quasiment constante. De légères fluctuations apparaissent néanmoins et peuvent engendrer une incertitude sur la valeur du nombre de Mach. Sur les figures 3.23(a) et 3.24(a), les points représentent la valeur moyenne du nombre de Mach lors de chacune des simulations. Les barres d'erreurs permettent quant à elles de quantifier l'incertitude en représentant les maxima et minima du nombre de Mach.

Concernant la KS, l'énergie est constante en absence de phénomènes dissipatifs, et le nombre de Mach est donc constant au cours de chacune des simulations. Les résultats présentés au sein des figures 3.23(b) et 3.24(b) ne dépendent ni des valeurs de λ et λ' (il suffit que $\lambda \neq 0$ pour observer les résultats qui vont suivre), ni de la loi $\omega_n(k_n)$.

Dans la figure 3.23 est présentée la dépendance de l'intensité acoustique au nombre de Mach. La loi en puissance 8 est observée à la fois en DNS (c.f. figure 3.23(a)) et en KS (c.f. figure 3.23(b)).

Lorsque la rotation d'ensemble est introduite, la relation (3.54) n'est plus valable. Les résultats provenant des DNS suggèrent que l'intensité acoustique émise par une turbulence homogène en rotation varie comme le nombre de Mach à la puissance 4. Ces résultats, ainsi que les deux lois en puissance, sont tracés au sein de la figure 3.24(a). Une première approche afin de comprendre ce résultat a été d'écrire le tenseur de Lighthill dans un repère absolu plutôt que dans le repère tournant comme cela était supposé jusqu'alors. Il est important de remarquer que l'écriture des solutions linéaires pour la turbulence en rotation peut parfaitement se faire dans un repère fixe plutôt que dans le repère tournant. La relation de dispersion des ondes inertielles reste inchangée tandis que l'angle azimutal du vecteur d'onde dépend du temps et se voit ajouter

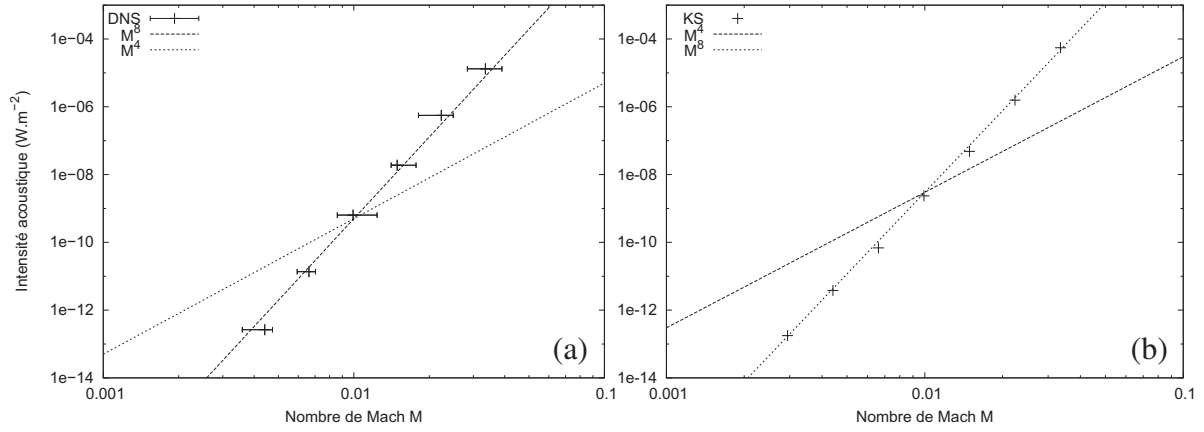


FIG. 3.23 – Intensité acoustique en fonction du nombre de Mach. (a) DNS isotrope. Les extrema des barres d’erreurs représentent les valeurs minimales et maximales du nombre de Mach rencontrées lors de chacune des simulations. (b) KS isotrope. Sans phénomènes dissipatifs, l’énergie est constante est il n’existe donc pas d’ambiguïté quant à la détermination du nombre de Mach M .

une composante Ωt . Dans le repère fixe, le tenseur de Lighthill s’écrit :

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \rho_0 [(u_i + \varepsilon_{ikl}\Omega_k x_l)(u_j + \varepsilon_{jmn}\Omega_m x_n)] \\ &= \rho_0 [u_i u_j + u_i \varepsilon_{jmn}\Omega_m x_n + u_j \varepsilon_{ikl}\Omega_k x_l + \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}\Omega_k x_l \Omega_m x_n] , \end{aligned} \quad (3.55)$$

où $\mathbf{x}$ est le point courant de calcul du tenseur T_{ij} , Ω est le vecteur rotation et ε_{ijk} est le symbole de Levi-Civita. Dans notre cas, nous avons choisi sans perte de généralité $\Omega = (0, 0, \Omega)$. La double divergence de l’équation (3.55) est :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} T_{ij} = \rho_0 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + 2\Omega\omega_3 - 2\Omega^2 \right) \quad (3.56)$$

où ω_3 est la composante de la vorticité dans la direction de l’axe de rotation. Les deux premiers termes de l’équation (3.56) peuvent être approchés par :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \approx \frac{u_0^2}{l_\lambda^2} \quad \text{et} \quad \Omega\omega_3 \approx \frac{u_0\Omega}{l_\lambda}$$

où l_λ est l’échelle de Taylor et u_0 est la vitesse *rms* de l’écoulement. Lorsque l’écoulement est dominé par la rotation, le nombre de Rossby Ro défini par $Ro \equiv u_0/(2l_\lambda\Omega)$ est très inférieur à l’unité et le terme source dans l’équation d’onde se réduit à :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} T_{ij} \approx \rho_0 \Omega^2 (Ro^2 + 2Ro - 2) \approx -2\rho_0 \Omega^2 . \quad (3.57)$$

Ce terme ne présente aucune dépendance spatiale, et est caractéristique d’une rotation d’ensemble. Les fluctuations de vitesse n’interviennent plus ce qui est problématique puisque qu’un écoulement de rotation solide n’emet, a priori, aucun bruit. L’idée initiale de se placer dans le repère fixe plutôt que dans le repère tournant n’est donc pas satisfaisante. Il est dès lors intéressant de vérifier si le modèle synthétique, qui ne comporte qu’une approximation linéaire des équations résolues en DNS, prédit cette loi en puissance monopolaire.

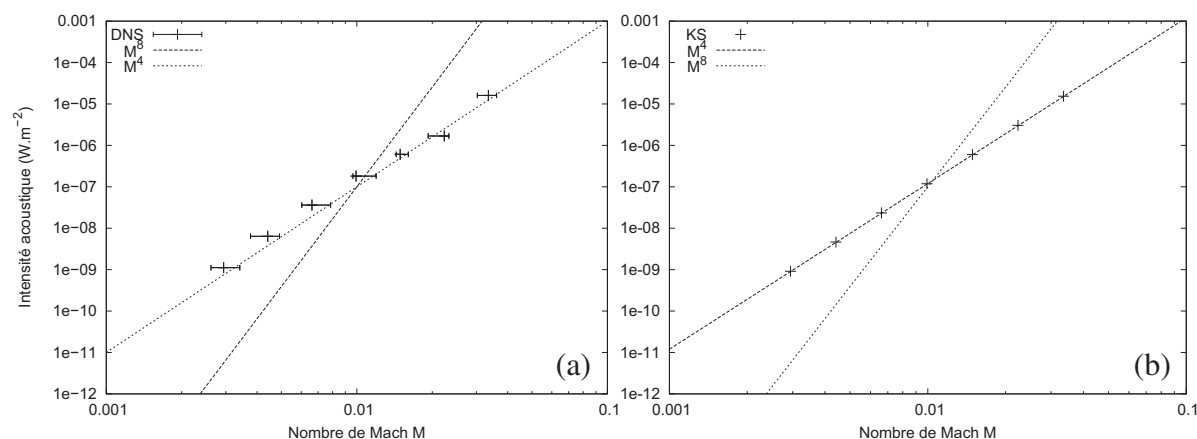


FIG. 3.24 – Intensité acoustique en fonction du nombre de Mach. Le nombre de Rossby est de l'ordre de 10^{-1} . (a) DNS en rotation. (b) KS en rotation.

La figure 3.24(b) présente l'intensité acoustique obtenue par KS. Les pulsations arbitraires ω_n sont nulles et l'instationnarité provient donc uniquement de la relation de dispersion des ondes inertielles. De la même manière qu'en DNS (3.24(a)), la loi en puissance 4 est observée.

Il est remarquable que cette loi en puissance soit retrouvée par un simple modèle linéaire. Ce changement de comportement pourrait être attribué à la formation de structures alignées avec l'axe de rotation caractéristiques des écoulement tournants. Ces structures cohérentes, observées en DNS, ne sont pas présentes au sein du modèle synthétique puisque résultant de l'interaction non-linéaire des modes de Fourier de la vitesse. L'approximation linéaire, prenant en compte les ondes d'inertie, suffit cependant à prédire cette loi en puissance.

Il semble ainsi qu'en fonction du nombre de Rossby, l'émission acoustique d'une turbulence homogène en rotation transite d'un état quadripolaire classique (turbulence homogène isotrope, loi en Mach à la puissance 8) à un état différent (turbulence homogène anisotrope en rotation, loi en Mach à la puissance 4) probablement du à la présence d'ondes d'inertie dans le système (puisque le modèle linéaire est suffisant afin de prédire ce comportement).

3.4.9 Directivité

Une turbulence homogène n'est plus isotrope sous l'action de la force de Coriolis. Que ce soit expérimentalement ou numériquement, l'effet de la rotation se traduit par l'apparition de structures cohérentes alignées avec l'axe de rotation (voir par exemple [Cambon *et al.*(1997)]). Du fait de l'anisotropie du champ de vitesse, on peut s'attendre à ce que la directivité du champ acoustique lointain soit différente du cas isotrope. En particulier, l'intensité acoustique pourrait dépendre de l'angle θ_0 qu'il existe entre la direction d'observation et l'axe de rotation (supposé vertical). Comme conséquence de l'anisotropie, les moyennes spatiales sur les différents points d'observation sont remplacées par des moyennes spatiales pour un angle θ_0 donné. Pour compenser cette perte de précision statistique, plusieurs réalisations de l'écoulement sont simulées.

Une directivité très prononcée est observée dans le cas de la turbulence en rotation. Les résultats DNS sont présentés sur la figure 3.25(a) tandis que les résultats provenant de la KS

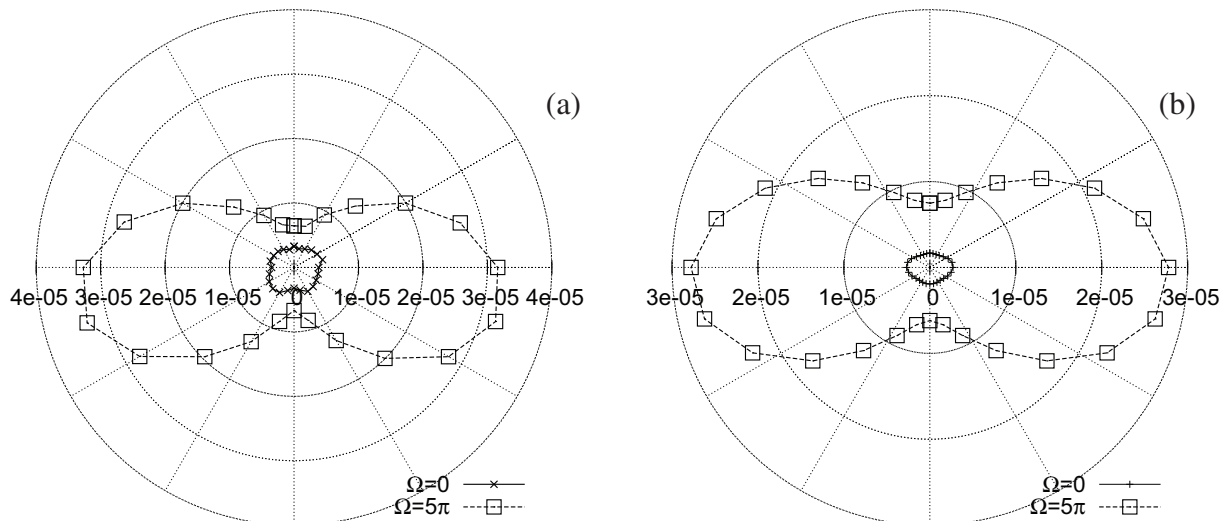


FIG. 3.25 – Intensité acoustique en fonction du point d’observation. Ces résultats sont tracés en échelles linéaires. (a) DNS (Série DNS 4 dans Tab.3.3). (b) KS (Série KS 5 dans Tab.3.3).

sont à trouver en figure 3.25(b). Sous l’effet de la rotation, l’émission acoustique est amplifiée dans la direction perpendiculaire à l’axe de rotation (direction horizontale dans notre cas). Cette émission préférentielle est observée aussi bien en DNS qu’en KS.

L’origine de cette directivité particulière est difficilement identifiable du fait des nombreux phénomènes à prendre en compte : structures cohérentes verticales, ondes intertielles... En revanche, la seule différence entre la KS isotrope et la KS en rotation est l’ajout des solutions linéaires prenant en compte la relation de dispersion des ondes d’inertie. L’anisotropie observée en KS est donc directement reliée à l’anisotropie de la relation de dispersion (3.18). En effet, les résultats de la figure 3.25(b) ont été obtenus avec une initialisation isotrope. Les solutions linéaires décrites en section 3.2.3 ne génèrent aucune anisotropie comme le montrent les équations (3.30). Il semble donc que la restructuration de l’écoulement en colonnes verticales, qui existe en DNS mais pas en KS, n’est pas responsable de l’émission acoustique préférentielle observée. Du moins, si l’émission acoustique est perturbée par la présence de structures cohérentes (comme c’est certainement le cas), le formalisme de l’analogie de Lighthill ne permet pas de la mettre en évidence.

3.5 Conclusion

Ce chapitre s’est intéressé aux corrélations en deux-temps d’une turbulence homogène isotrope ou en rotation. Dans le premier cas, une comparaison détaillée des fonctions de corrélations spectrales $R(k, \tau)$ obtenues par KS et DNS a été réalisée. Lorsque l’on considère les pulsations aléatoires utilisées en KS pour générer l’instationnarité, deux conclusions importantes sont à retenir : d’une part, il est préférable que les pulsations soient des variables aléatoires et non déterministes comme c’est le cas au sein de la méthode classique. Cela assure une décorrélation en temps réaliste pour chaque fonction $R(k, \tau)$. D’autre part, l’hypothèse de *sweeping* représente mieux la décorrélation observée aux hauts nombres d’onde.

Dans le cas de la turbulence en rotation, l'impact des solutions linéaires, qui dépendent explicitement de la relation de dispersion des ondes d'inertie, sur l'instationnarité du champ synthétique a été discuté. On a montré comment ces solutions linéaires influent sur la fonction $R(k, \theta, \tau)$. Par comparaison avec des simulations directes, les conclusions sont les suivantes : les modes dont le vecteur d'onde est colinéaire à l'axe de rotation et de faible nombre d'onde sont fortement influencés par les ondes d'inertie dont la pulsation caractéristique est identifiable sur l'évolution de la fonction $R(k, \theta, \tau)$. Les modes dont le vecteur d'onde est perpendiculaire à l'axe de rotation et de grand nombre d'onde semblent dominés par une décorrélation liée à l'effet de *sweeping*. Nous avons également proposé un bref rappel de l'anisotropie en turbulence en rotation qui nous sera utile par la suite.

Enfin, le contexte aéroacoustique est intéressant de plusieurs points de vue. L'objectif a été de confronter les observations faites sur les corrélations deux-temps à celles faites sur les statistiques acoustiques du champ turbulent obtenues par analogie de Lighthill. Dans le cas isotrope, le spectre acoustique à haute fréquence est bien représenté lorsque l'hypothèse de *sweeping* est utilisée. Dans le cas en rotation, une émission à basse fréquence apparaît, et le modèle KS la reproduit qualitativement par simple prise en compte des solutions linéaires. La dépendance au nombre de Mach ainsi que la directivité du son ont également été considérées.

Chapitre 4

Turbulence MHD avec champ magnétique uniforme imposé.

Ce chapitre a pour objectif d'étudier une turbulence homogène soumise à un champ magnétique uniforme et stationnaire. Le fluide est conducteur et il existe donc une interaction entre le champ de vitesse et le champ magnétique du fait de la force de Lorentz. L'origine du champ magnétique imposé n'est pas discutée ici. Nous supposons qu'il existe un phénomène compensant la diffusion de ce champ magnétique. Il est également possible d'invoquer une séparation d'échelles [Moffatt(1971)]. Tout comme le cas de la rotation pure, l'intérêt de cette étude est de pouvoir disposer par la suite de résultats de référence pour l'étude concernant le cas MHD en rotation.

Après avoir rappelé les équations de la magnétohydrodynamique ainsi que leurs solutions linéaires, on présentera une possible application du modèle synthétique à ce type d'écoulements. Différentes quantités seront calculées grâce à la KS et comparées avec divers travaux théoriques et des simulations numériques directes. On s'intéressera ensuite à l'anisotropie du champ de vitesse et du champ magnétique fluctuant en fonction du nombre de Reynolds magnétique.

4.1 Équations et définitions

Nous considérons ici un fluide Newtonien incompressible de densité ρ , de viscosité dynamique μ . Les équations qui régissent sa vitesse $\mathbf{u}$ et sa pression p sont les équations de Navier-Stokes :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F} , \quad (4.1)$$

où $\mathbf{F}$ représente l'ensemble des forces de volume agissant sur le fluide. Si le fluide est conducteur et qu'il transporte un courant électrique, de densité $\mathbf{j}$, en présence d'un champ magnétique $\mathbf{B}$, il subit alors la force de Lorentz[†] $\mathbf{F}_L$ définie par :

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{j} \times \mathbf{B} . \quad (4.2)$$

Le champ magnétique $\mathbf{B}$ et le champ électrique $\mathbf{E}$ sont gouvernés par les équations de Maxwell. On adopte cependant l'approximation dite de la magnétohydrodynamique selon laquelle

[†]Cette force est aussi appelée force de Laplace.

le courant de déplacement (ou tout autre effet relativiste) est supposé négligeable de telle manière que :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \approx \mu_0 \mathbf{j} , \quad (4.3)$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ S.I.) et ϵ_0 est la permittivité diélectrique du vide ($\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ S.I.). La densité de courant est donc reliée au champ magnétique par l'équation d'Ampère qui s'écrit :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} , \quad (4.4)$$

et le champ magnétique est de plus incompressible :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 . \quad (4.5)$$

La loi d'induction de Faraday relie quant à elle le champ magnétique au champ électrique selon :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} . \quad (4.6)$$

La loi d'Ohm permet de fermer le système et s'écrit :

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (4.7)$$

où σ est la conductivité électrique du fluide, qui sera considérée comme constante par la suite.

Lorsque l'on élimine $\mathbf{j}$ et $\mathbf{E}$ dans les équations (4.4), (4.6) et (4.7), on aboutit à l'équation dite d'induction :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} , \quad (4.8)$$

où $\eta = (\mu_0 \sigma)^{-1}$ est la diffusivité magnétique. Il est intéressant de remarquer que le champ magnétique est régi par la même équation que la vorticité. Il est également possible de considérer la champ magnétique comme une vecteur actif (il agit sur le champ de vitesse par la force de Lorentz) advect  par l'écoulement. L'équation du transport d'un scalaire étant, pour rappel :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \kappa \nabla^2 \theta , \quad (4.9)$$

et décrit l'évolution d'une quantité $\theta(\mathbf{x}, t)$ de diffusivité moléculaire κ .

Finalement la force de Lorentz $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ s'exprime, en s'appuyant sur l'équation (4.4), comme suit :

$$\mathbf{F}_L = \frac{1}{\mu_0} \left(\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla B^2 \right) , \quad (4.10)$$

où le premier terme est lié à la courbure du champ magnétique tandis que le second est la pression magnétique p_M . L'équation de Navier-Stokes devient alors :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla P + \frac{1}{\mu_0 \rho} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (4.11)$$

où $P = (p + p_M)/\rho$.

4.1.1 Champ magnétique imposé

Dans la suite, toutes les quantités magnétiques sont divisées par $\sqrt{\mu_0 \rho}$ où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide et ρ la densité du fluide. Ainsi, les quantités magnétiques sont homogènes à des vitesses, dites vitesses d'Alfvén.

On s'intéresse ici au cas particulier où la turbulence évolue en présence d'un champ magnétique imposé, uniforme et stationnaire. Cette configuration suppose donc qu'il existe un phénomène compensant les différents processus dissipatifs du problème (viscosité et effet Joule). On ne cherche pas ici à mettre en évidence un tel phénomène puisque l'on impose un champ magnétique. Ce champ est par la suite noté $\mathbf{B}_0$ et l'on suppose qu'il ne dépend ni de l'espace ni du temps. Le champ magnétique instantané est donc décomposé de manière classique en valeur moyenne et fluctuation selon $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ où $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ est le champ de fluctuations magnétiques. On suppose qu'il existe une séparation d'échelles entre le champ magnétique imposé et les fluctuations turbulentes de vitesse $\mathbf{u}$ et de champ magnétique $\mathbf{b}$. Si le champ $\mathbf{B}_0$ varie sur une échelle de longueur L_0 et un temps caractéristique T_0 , les fluctuations turbulentes varient sur une échelle de longueur $l_0 \ll L_0$ et sur une échelle de temps $t_0 \ll T_0$. Cette séparation d'échelles est également d'un intérêt certain lors de l'analyse de la génération d'énergie magnétique par des écoulements turbulents (voir par exemple [Moffatt(1971)] et l'annexe A).

En présence d'un champ magnétique imposé, les équations qui régissent les fluctuations de vitesse $\mathbf{u}$ et les fluctuations magnétiques $\mathbf{b}$ sont :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla P + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b} + \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \mathbf{b} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \mathbf{u} + \eta \nabla^2 \mathbf{b} \quad (4.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (4.15)$$

où P prend en compte la pression cinétique et magnétique.

4.1.2 Nombres adimensionnés

Selon l'équation d'induction (4.8), l'évolution temporelle du champ magnétique dépend de deux facteurs : le terme d'advection par le champ de vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ et le terme diffusif. Si l'on considère un écoulement caractérisé par une échelle de vitesse u_0 et une échelle de longueur l_0 , le rapport de ces termes peut s'écrire :

$$\frac{|\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})|}{|\eta \nabla^2 \mathbf{B}|} \approx \frac{u_0 l_0}{\eta} = R_M, \quad (4.16)$$

définissant ainsi le nombre de Reynolds magnétique d'une manière analogue au nombre de Reynolds classique.

Lorsque $R_M \ll 1$, les processus diffusifs dominent l'advection par le champ de vitesse. Les fluctuations magnétiques induites sont très faibles par rapport au champ imposé et peuvent être déduites simplement du champ de vitesse (voir les remarques concernant l'hypothèse quasi-statique 2.3.3). Ce domaine concerne la plupart des métaux liquides.

Lorsque $R_M \gg 1$, l'advection domine la diffusion et l'équation d'induction se réduit à :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) , \quad (4.17)$$

et le champ magnétique est gelé car le flux de champ magnétique $\mathbf{B}$ se conserve à travers une surface matérielle (théorème d'Alfvén).

Les régimes intermédiaires caractérisés par un nombre de Reynolds magnétique proche de l'unité sont le siège des instabilités de type dynamo.

Un autre paramètre adimensionné très utile est le nombre d'interaction N caractérisant l'influence relative de la force de Lorentz et du terme d'advection selon :

$$\frac{|\mathbf{j} \times \mathbf{B}_0|}{|\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}|} \approx \frac{B_0^2 l_0}{\eta u_0} = N . \quad (4.18)$$

La dissipation du champ de vitesse par l'action de la force de Lorentz a pour temps caractéristique $t_d = \eta/B_0^2$ tandis que le temps de retournement de la turbulence est simplement $t_0 = l_0/u_0$. Le nombre d'interaction est donc le rapport de ces deux temps caractéristiques, $N = t_0/t_d$.

Enfin, un autre paramètre proche du nombre d'interaction, et dont l'utilité apparaîtra lors de l'analyse des solutions linéaires, est le nombre de Lundquist S défini par :

$$S = \frac{B_0 l_0}{\eta} . \quad (4.19)$$

Ces différents nombres ne sont bien évidemment pas indépendants, et l'on a par exemple $S = (NR_M)^{1/2}$.

Dans la suite, on s'intéresse au cas où la turbulence est fortement influencée par la présence du champ magnétique, ce qui sous-entend que le nombre d'interaction N est grand devant l'unité.

4.2 Solutions linéaires et KS

L'objectif de cette section est d'établir les solutions linéaires dans l'espace de Fourier. Ces solutions peuvent être utilisées pour calculer différentes quantités statistiques mais présentent aussi un intérêt dans le contexte de la KS. En effet, comme il a été mentionné plus haut (section 2.2.5), toute solution linéaire dans l'espace de Fourier peut servir à rendre les modes de Fourier composant le champ synthétique stationnaires. On propose ainsi dans la suite les solutions linéaires non dissipatives (afin de mettre en évidence les phénomènes ondulatoires existant au sein de tels écoulements) puis les solutions linéaires générales qui seront par la suite incluses dans le modèle KS.

4.2.1 Ondes d'Alfvén

Comme dans le cas de la rotation pure, la linéarisation des équations du moment conduit à la mise en évidence de phénomènes ondulatoires au sein du fluide. En négligeant les processus

dissipatifs ainsi que les termes quadratiques des équations (4.12) et (4.13), il vient :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla P + \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \mathbf{b} \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \mathbf{u} . \quad (4.21)$$

En 1942 [Alfvén(1942)], Hannes Alfvén reformula ces équations linéarisées pour aboutir à l'équation d'onde suivante :

$$\frac{\partial^2 b}{\partial t^2} = B_0^2 \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} , \quad (4.22)$$

où z est la composante alignée avec le champ magnétique imposé $\mathbf{B}_0$. Cette équation est caractéristique d'une onde plane, appelée onde d'Alfvén, se propageant à la vitesse B_0 dans la direction de l'axe z . Rappelons que les quantités magnétiques sont ici homogènes à des vitesses.

On propose ici une visualisation de la propagation d'un paquet d'ondes d'Alfvén. Un fluide au repos est placé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire. La réponse impulsionnelle du système est obtenue en imposant un forçage en vitesse du type[†] :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_0 g(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) h(t - t_0) , \quad (4.23)$$

où $\mathbf{x}_0$ est le point de forçage situé au centre du domaine de calcul et t_0 l'instant de l'impulsion. g et h sont des fonctions Gaussiennes de l'espace et du temps. L'amplitude du forçage est ici volontairement très faible afin de rester dans un régime purement linéaire (voir l'annexe B pour un début d'analyse du régime non-linéaire). La direction de l'impulsion de vitesse est perpendiculaire au champ magnétique. La visualisation de l'énergie magnétique à trois instants successifs est présentée en figure 4.1(a) (colonne de gauche), pour laquelle le nombre de Lundquist est infini ($\eta = 0$). Le forçage étant localisé en temps, il excite toute une gamme de fréquences. Les ondes d'Alfvén étant non-dispersives (voir la suite), toutes les fréquences ainsi générées se propagent à une vitesse constante $\mathbf{B}_0$, de direction verticale ici.

Comme cela a déjà été effectué pour le cas en rotation, on propose de développer les solutions des équations (4.20) et (4.21) dans l'espace de Craya. On introduit ainsi la transformée $\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{k}, t)$ de la fluctuation magnétique $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$, et les équations précédentes s'écrivent :

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} = \mathbf{i} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) \hat{\mathbf{b}} \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{b}}}{\partial t} = \mathbf{i} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) \hat{\mathbf{u}} \quad (4.25)$$

où la pression n'apparaît pas explicitement en raison de la condition d'incompressibilité pour la vitesse. La condition d'incompressibilité est d'ailleurs toujours valable pour $\hat{\mathbf{b}}$, et les fluctuations magnétiques sont donc décomposées dans le plan perpendiculaire au vecteur d'onde local $\mathbf{k}$ selon :

$$\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{k}) = \hat{b}^{(1)}(\mathbf{k}) \mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{k}) + \hat{b}^{(2)}(\mathbf{k}) \mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{k}) . \quad (4.26)$$

Le cas en rotation pure se résume au système (3.26) d'ordre deux pour les composantes poloidale et toroïdale de la vitesse. Les équations (4.20) et (4.21) font intervenir les quatre inconnues

[†]Ce forçage n'est pas incompressible mais l'opération de projection est réalisée à tout instant au sein du code.

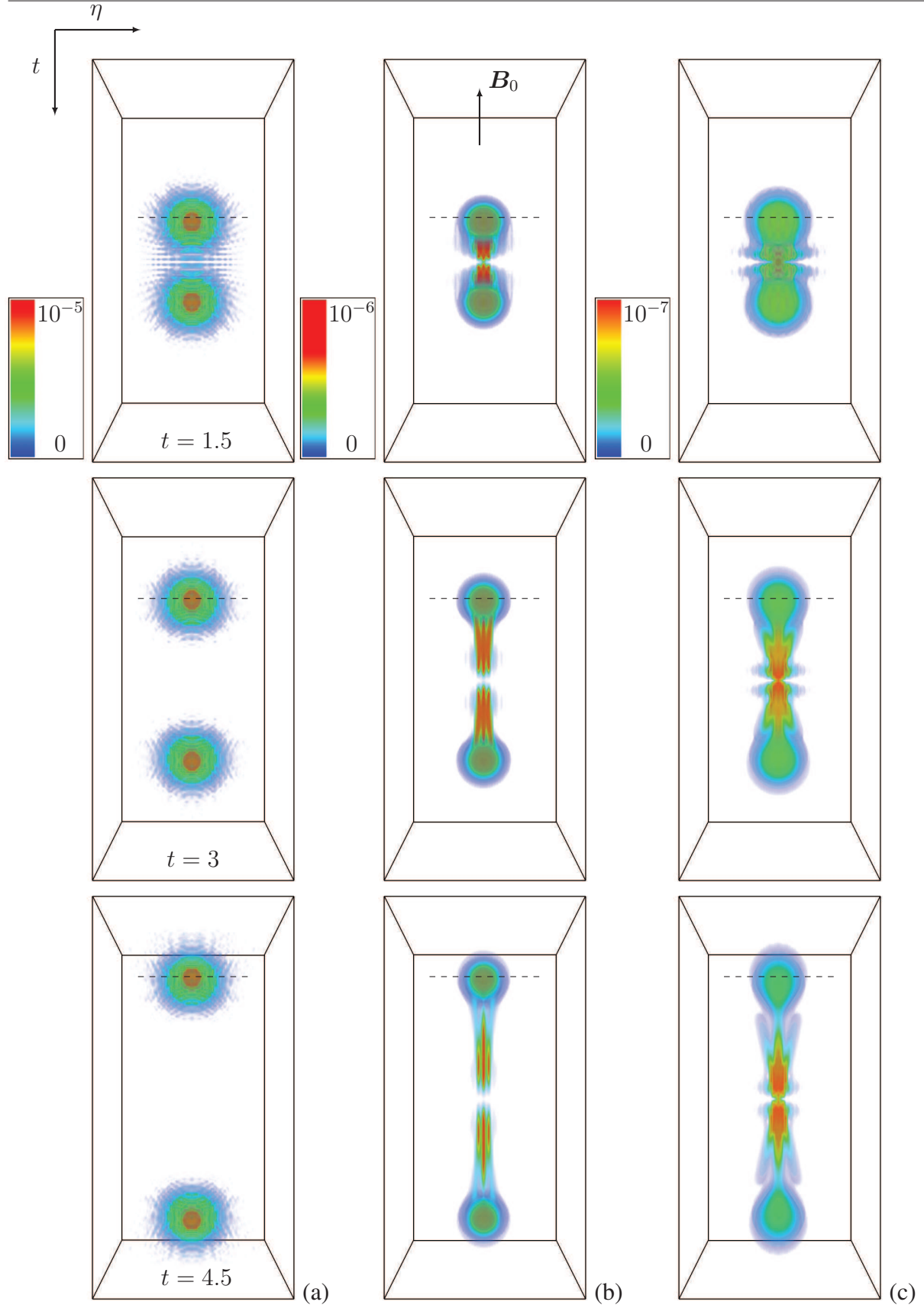


FIG. 4.1 – Propagation d'un paquet d'ondes d'Alfvén pour une vitesse d'Alfvén unitaire (*i.e.* $B_0 = 1$). L'énergie magnétique est représentée à différents instants. L'échelle de représentation varie d'un facteur 10 lorsque l'on se déplace de la gauche vers la droite. Le trait pointillé se déplace verticalement à la vitesse d'Alfvén. (a) $\eta = 0$. (b) $\eta = 0.02$. (c) $\eta = 0.1$.

$\hat{u}^{(1)}$, $\hat{u}^{(2)}$, $\hat{b}^{(1)}$ et $\hat{b}^{(2)}$, qui sont couplées par le système linéaire suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \hat{u}^{(1)} \\ \hat{u}^{(2)} \\ \hat{b}^{(1)} \\ \hat{b}^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i\sigma_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\sigma_B \\ -i\sigma_B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\sigma_B & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}^{(1)} \\ \hat{u}^{(2)} \\ \hat{b}^{(1)} \\ \hat{b}^{(2)} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.27)$$

où $\sigma_B = \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k} = B_0 k_{//}$ est la relation de dispersion des ondes d'Alfvén, $k_{//}$ étant la composante du vecteur d'onde alignée avec le champ magnétique imposé. La vitesse de phase et de groupe de ces ondes est simplement :

$$\mathbf{v}_\phi^B = \mathbf{v}_g^B = \pm \mathbf{B}_0, \quad (4.28)$$

démontrant ainsi la non-dispersivité des ondes d'Alfvén. Si l'origine physique de ce phénomène ondulatoire est complexe, le formalisme mathématique est élémentaire puisque l'onde est non-dispersive et de vitesse de groupe uni-directionnelle.

Les composantes poloïdales sont indépendantes des composantes toroïdales et le système (4.27) se résume finalement à :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} u^{(1)}, u^{(2)} \\ b^{(1)}, b^{(2)} \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_B \\ -i\sigma_B & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u^{(1)}, u^{(2)} \\ b^{(1)}, b^{(2)} \end{Bmatrix} = 0. \quad (4.29)$$

La solution au système (4.29) peut s'écrire sous la forme d'une fonction de Green appliquée à une condition initiale $(\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, 0), \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{k}, 0))$ selon :

$$\begin{pmatrix} \hat{u}^{(\alpha)}(\mathbf{k}, t) \\ \hat{b}^{(\alpha)}(\mathbf{k}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \sigma_B t & i \sin \sigma_B t \\ i \sin \sigma_B t & \cos \sigma_B t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}^{(\alpha)}(\mathbf{k}, 0) \\ \hat{b}^{(\alpha)}(\mathbf{k}, 0) \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

où $\alpha = 1, 2$ représente respectivement les composantes toroïdales et poloïdales.

4.2.2 Régime linéaire dissipatif

On s'intéresse ici aux solutions linéaires dans le cas où les processus dissipatifs ne sont pas négligés. Ce problème a été étudié en détails par H.K. Moffatt [Moffatt(1967)]. On se propose ici de recouvrer les relations obtenues dans ce papier en conservant le formalisme du repère de Craya. Les équations linéarisées du problème s'écrivent :

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} = i(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) \hat{\mathbf{b}} - \nu k^2 \hat{\mathbf{u}} \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{b}}}{\partial t} = i(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) \hat{\mathbf{u}} - \eta k^2 \hat{\mathbf{b}} \quad (4.32)$$

et le système matriciel est désormais :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \hat{u}^{(\alpha)}(\mathbf{k}, t) \\ \hat{b}^{(\alpha)}(\mathbf{k}, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu k^2 & -i\sigma_B \\ -i\sigma_B & \eta k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}^{(\alpha)}(\mathbf{k}, t) \\ \hat{b}^{(\alpha)}(\mathbf{k}, t) \end{pmatrix} = 0. \quad (4.33)$$

Si les valeurs propres de l'opérateur linéaire étaient triviales dans le cas en rotation pure, ou dans le cas MHD non-dissipatif, elles méritent ici plus d'attention. Les deux valeurs propres sont :

$$X_{1,2} = -\frac{1}{2} \left((\eta + \nu)k^2 \pm \sqrt{(\eta - \nu)^2 k^4 - 4\sigma_B^2} \right). \quad (4.34)$$

Il apparaît désormais deux régimes distincts. Le paramètre distinguant ces deux régimes est

$$\zeta = \frac{2\sigma_B}{(\eta - \nu)k^2} \quad (4.35)$$

et a été initialement introduit par Lehnert [Lehnert(1955)]. Afin d'alléger l'écriture des solutions, nous négligeons la viscosité dans la suite (comme le fait Moffatt au sein de la première partie de [Moffatt(1967)]). En passant par la transformée de Laplace du système (4.33), on aboutit aux solutions suivantes :

$$\hat{u}^{(\alpha)}(\mathbf{k}, t) = \left[\hat{u}^{(\alpha)}(\mathbf{k}, 0) \cosh \left(\frac{1}{2} t \eta k^2 \sqrt{1 - \zeta^2} \right) + \left(\hat{u}^{(\alpha)}(\mathbf{k}, 0) + i \zeta \hat{b}^{(\alpha)}(\mathbf{k}, 0) \right) \frac{\sinh \left(\frac{1}{2} t \eta k^2 \sqrt{1 - \zeta^2} \right)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right] e^{-\frac{1}{2} \eta k^2 t} \quad (4.36)$$

pour les composantes de la vitesse et

$$\hat{b}^{(\alpha)}(\mathbf{k}, t) = \left[\hat{b}^{(\alpha)}(\mathbf{k}, 0) \cosh \left(\frac{1}{2} t \eta k^2 \sqrt{1 - \zeta^2} \right) + \left(-\hat{b}^{(\alpha)}(\mathbf{k}, 0) + i \zeta \hat{u}^{(\alpha)}(\mathbf{k}, 0) \right) \frac{\sinh \left(\frac{1}{2} t \eta k^2 \sqrt{1 - \zeta^2} \right)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right] e^{-\frac{1}{2} \eta k^2 t} \quad (4.37)$$

pour les composantes du champ magnétique fluctuant. Ces solutions sont identiques à celles proposées par Moffatt [Moffatt(1967)] lorsque l'on considère que les fluctuations magnétiques initiales sont nulles.

Ainsi, lorsque $\zeta < 1$ (régime noté $\mathcal{D}_1$ au sein de [Moffatt(1967)]), les valeurs propres sont réelles et les solutions proposées par Moffatt sont :

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, 0) \left(e^{X_2 t} \cot \frac{1}{2} \xi - e^{-X_1 t} \tan \frac{1}{2} \xi \right) \quad (4.38)$$

$$\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2} i \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, 0) \tan \xi (e^{-X_2 t} - e^{-X_1 t}) \quad (4.39)$$

où $\sin \xi = \zeta$. Il s'agit d'un régime non-oscillant purement dissipatif.

Lorsque $\zeta > 1$ (régime $\mathcal{D}_2$), les valeurs propres sont complexes et l'on observe un régime ondulatoire dont les solutions sont :

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, 0) \left(\cos \omega t + \frac{\sin \omega t}{\sinh \xi} \right) e^{-\frac{1}{2} \eta k^2 t} \quad (4.40)$$

$$\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{k}, t) = i \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, 0) \coth \xi \sin \omega t e^{-\frac{1}{2} \eta k^2 t} \quad (4.41)$$

où $\cosh \xi = \zeta$ et $\omega = \frac{1}{2} \eta k^2 \sinh \xi$. Il s'agit d'un régime oscillant amorti où les ondes d'Alfvén se propagent sans dispersion mais avec amortissement. La superposition de ces deux régimes peut conduire à un écoulement pseudo-dispersif.

Les figures 4.1(b) et (c) présentent la propagation d'un paquet d'ondes d'Alfvén pour des nombres de Lundquist finis. Afin de faciliter la visualisation, il existe un facteur 10 entre les

KS						
Série	Réalisations	M	η	B_0	S	ω_n
1	50	2000	2	0.1	$5 \cdot 10^{-2}$	0
2	50	2000	0.002	1	500	0
3	1	2000	0.2	1	5	0

TAB. 4.1 – Paramètres des différentes simulations synthétiques présentées au sein du chapitre 4. M est le nombre de modes de Fourier en KS (à comparer avec la résolution des DNS, tableau 4.2).

échelles de représentation de la figure 4.1(a) et (b), et de nouveau un facteur 10 entre 4.1(b) et (c). On discerne clairement le paquet d’ondes d’Alfvén amorties de la diffusion de l’impulsion initiale.

Ces solutions permettent de plus de calculer l’évolution asymptotique de l’énergie cinétique [Moffatt(1967)], qui sera utilisée ultérieurement afin d’observer le comportement du modèle de type KS.

4.2.3 Kinematic Simulation

Les solutions développées dans la section précédente permettent d’étudier la réponse linéaire d’une turbulence initialement isotrope à l’application soudaine d’un champ magnétique uniforme. On s’intéresse ici à la comparaison des résultats asymptotiques théoriques obtenus dans [Moffatt(1967)] avec ceux obtenus par KS. Cette partie peut être considérée comme une validation du modèle synthétique. En effet, étant basées sur les mêmes équations linéarisées, les deux approches devraient aboutir qualitativement aux mêmes résultats. Cette étape est particulièrement importante puisque rien n’assure que le modèle synthétique, bien qu’utilisant les mêmes solutions linéaires, n’introduit pas d’erreurs, en particulier du fait du nombre limité de modes et de leur caractère aléatoire.

L’analyse suivante se base sur les solutions linéaires (4.36) et (4.37). Nous supposons dans la suite que les fluctuations magnétiques sont initialement nulles. Le nombre adimensionné fondamental est le nombre de Lundquist défini par :

$$S = \frac{B_0 l_0}{\eta}, \quad (4.42)$$

où B_0 est l’intensité du champ magnétique uniforme imposé, l_0 est l’échelle intégrale et η la diffusivité magnétique. S est directement relié au paramètre ζ , défini par (4.35). Il est ainsi possible de distinguer deux régimes limites : lorsque $S \rightarrow \infty$, la dissipation Joule est négligeable et les solutions linéaires correspondent à une superposition d’onde d’Alfvén pures ; lorsque $S \rightarrow 0$, la diffusion du champ magnétique est un phénomène dominant.

Par intégration des solutions linéaires (4.36) pour $\hat{u}(\mathbf{k}, t)$ et (4.37) pour $\hat{b}(\mathbf{k}, t)$ et en choisissant comme condition initiale un spectre turbulent du type $E(k) = Ck^4/(1 + k^{17/3})$, il est possible de déterminer le comportement asymptotique des énergies cinétique et magnétique. Lorsque le nombre de Lundquist est très inférieur à l’unité, la contribution du domaine $\mathcal{D}_1$ est

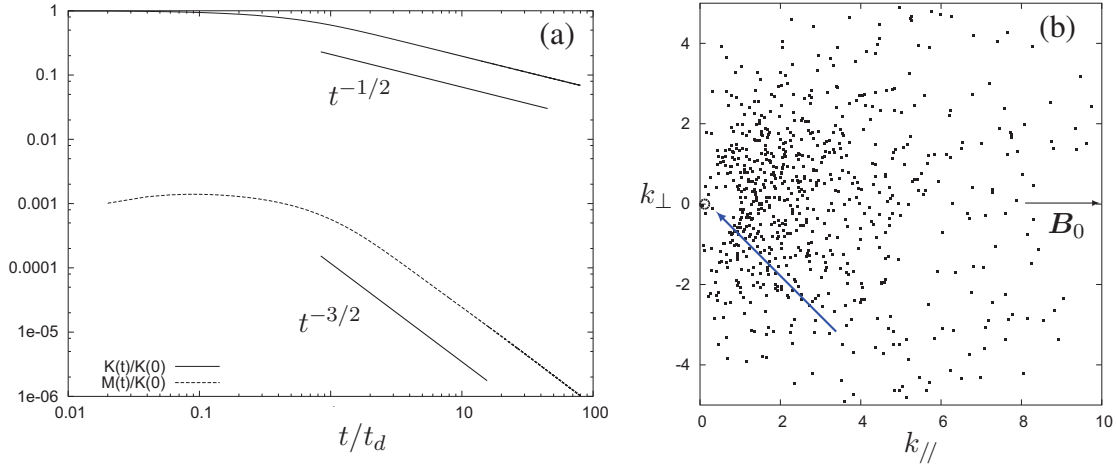


FIG. 4.2 – Régime linéaire pour $S \ll 1$. (a) Énergies cinétique et magnétique au cours du temps obtenues par KS. Les fluctuations magnétiques sont initialement nulles. Les pentes représentent les prédictions théoriques obtenues dans [Moffatt(1967)]. Le nombre de Lundquist est environ de $5 \cdot 10^{-2}$ (voir Série KS 1 au sein du tableau 4.1). (b) Représentation des modes de Fourier en KS et de la délimitation entre le domaine $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ (à peine visible pour ce régime).

dominante et l'on aboutit à la relation suivante pour l'énergie cinétique :

$$K_1(t) \approx K_1(0) \left(\frac{t_d}{t} \right)^{1/2} \quad (4.43)$$

où $t_d = \eta/B_0^2$ est le temps caractéristique de la dissipation Joule. Pour l'énergie magnétique $M_1(t)$ contenue dans le domaine $\mathcal{D}_1$, les solutions linéaires aboutissent au comportement asymptotique suivant :

$$M_1(t) \approx S^2 K_1(0) \left(\frac{t_d}{t} \right)^{3/2}. \quad (4.44)$$

La figure 4.2(a) compare les résultats asymptotiques des équations (4.43) et (4.44) à ceux obtenus par KS. Le spectre initial utilisé pour initialiser la KS est ici le même spectre que celui utilisé lors de l'analyse théorique (i.e. $E(k) = Ck^4/(1 + k^{17/3})$), et les mêmes solutions linéaires (4.36) et (4.37) sont incluses. Les différents paramètres des simulations présentées au sein de ce chapitre sont rassemblés au sein du tableau 4.1. Le modèle synthétique confirme bien le régime prédit par l'analyse linéaire. Sur la figure 4.2(b), on représente les vecteurs d'onde en fonction de la valeur absolue de leur composante $k_{//}$ parallèle au champ magnétique et $k_{\perp}$ perpendiculaire au champ magnétique. L'ensemble des modes se trouve dans le régime $\mathcal{D}_1$ et la sphère de Moffatt[†] qui délimite les domaines $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est à peine visible. Le champ magnétique est ici horizontal afin de respecter la convention utilisée au sein de [Moffatt(1967)]. À noter que nous avons également vérifié que l'intégration directe des solutions linéaires dans l'espace de Fourier conduit bien aux mêmes résultats.

Lorsque le nombre de Lundquist est très grand devant l'unité, la contribution du domaine

[†]Cette sphère est caractérisée, dans l'espace spectral, par $\zeta = 1$. Le rayon de cette sphère est égal au nombre de Lundquist.

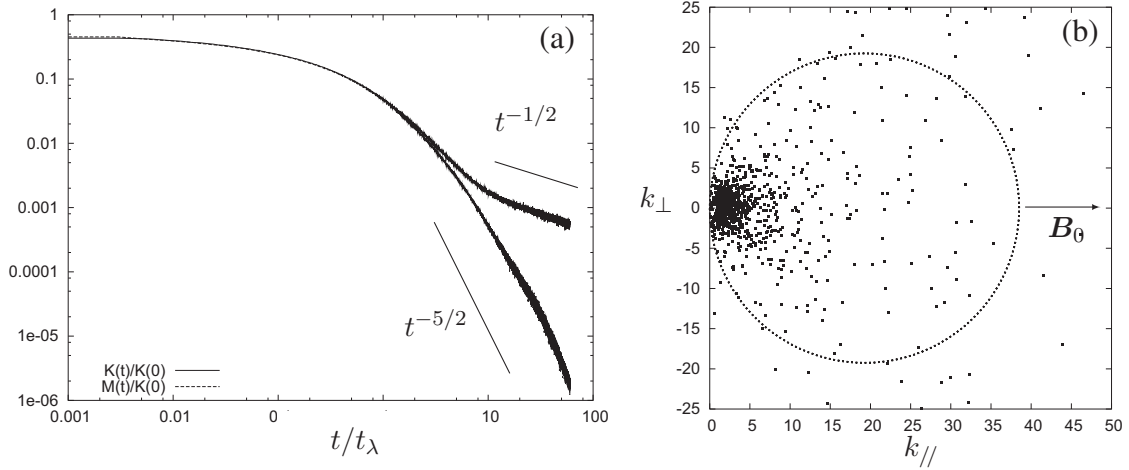


FIG. 4.3 – Régime linéaire pour $S \gg 1$. (a) Énergies cinétique et magnétique au cours du temps obtenues par KS. Les fluctuations magnétiques sont initialement nulles. Les pentes représentent les prédictions théoriques obtenues dans [Moffatt(1967)]. Le nombre de Lundquist est environ de 500 (voir Série KS 2 au sein du tableau 4.1). (b) Représentation des modes de Fourier en KS et de la délimitation entre le domaine $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

$\mathcal{D}_2$ est dominante et l'on aboutit à :

$$K_2(t) \approx K_2(0) \left(\frac{t_\eta}{t} \right)^{5/2} \quad (4.45)$$

où $t_\eta = l_0/\eta$ est le temps caractéristique de la diffusion du champ magnétique, lié à t_d par :

$$\frac{t_\eta}{t_d} = S^2. \quad (4.46)$$

Pour l'énergie magnétique $M_2(t)$ contenue dans le domaine $\mathcal{D}_2$, les solutions linéaires aboutissent au comportement asymptotique suivant :

$$M_2(t) \approx K_2(0) \left(\frac{t_\eta}{t} \right)^{5/2}. \quad (4.47)$$

La figure 4.3 présente les mêmes résultats que précédemment pour le cas $S \gg 1$. Cette fois-ci, la plupart des modes se trouvent au sein du domaine $\mathcal{D}_2$ et l'on observe une équipartition de l'énergie due à la présence d'ondes d'Alfvén (voir figure 4.3(b)). Une fois de plus, on vérifie les prédictions de l'analyse linéaire. On note que l'énergie du domaine $\mathcal{D}_1$ décroît moins vite que celle du domaine $\mathcal{D}_2$ (voir les relations (4.45) et (4.43)). Ainsi, lorsque $t \gg t_\eta$, l'énergie cinétique dominante provient du domaine $\mathcal{D}_1$, et décroît donc moins rapidement que l'énergie magnétique dominée par sa contribution due au domaine $\mathcal{D}_2$.

4.3 Anisotropie en turbulence MHD

Cette section s'intéresse à l'anisotropie existant au sein d'une turbulence homogène soumise à champ magnétique uniforme. Dans un premier temps, on suppose qu'il n'existe pas de fluctuations magnétiques initiales, et l'on considère une turbulence en déclin. La réponse d'une turbulence à l'application d'un champ magnétique est un problème qui a été largement étudié. Les travaux théoriques concernant ce problème se sont intéressés à la réponse initiale des structures énergétiques de l'écoulement à l'application soudaine du champ magnétique [Moffatt(1967)] ou bien au régime final de déclin [Lehnert(1955)], pour des nombres de Reynolds magnétique très inférieurs à l'unité. Dans ce cas, les termes non-linéaires sont négligeables et la dynamique est dominée par la dissipation anisotrope due à l'effet Joule. Des expériences d'écoulements turbulents en conduite à bas nombre de Reynolds magnétique (voir par exemple [Alemany *et al.*(1979)] et ses références), ont également permis la mise en évidence de l'anisotropie. D'un point de vue numérique, la première simulation de turbulence MHD due à U. Schumann [Schumann(1976)] se limite au cas des faibles nombres de Reynolds magnétique. Il existe de nombreuses études numériques portant sur la turbulence magnetohydrodynamique incompressible, mais nous nous concentrerons sur celles évoquant l'anisotropie de l'écoulement [Oughton *et al.*(1994), Zikanov & Thess(1998), Bigot *et al.*(2008), Burattini *et al.*(2008), Teaca *et al.*(2009)].

Nous souhaitons ici présenter quelques résultats concernant l'anisotropie au sein d'une turbulence soumise à un champ magnétique. En particulier, l'objectif est de disposer de résultats de référence pour le cas en rotation étudié au sein du chapitre 5. L'anisotropie sera caractérisée grâce au formalisme introduit en section 1.6 ainsi qu'en utilisant les différents indicateurs statistiques définis en section 1.7.

4.3.1 Prédiction linéaire

Les solutions linéaires développées dans l'espace de Craya dans la section 4.2.2 permettent de calculer les différentes composantes du tenseur de corrélations $\hat{R}_{ij}$. En particulier, on calcule par la suite les trois invariants du tenseur que sont l'énergie, l'hélicité et la polarisation.

Régime non-dissipatif

Les phénomènes dissipatifs sont ici négligés. À partir des solutions (4.30) dans l'espace de Craya, il est possible de calculer les différents invariants du tenseur spectral. Pour la partie cinétique, on obtient immédiatement :

$$e_K(\mathbf{k}, t) = e_K(\mathbf{k}, 0) \cos^2(\sigma_B t) , \quad (4.48)$$

$$\mathcal{H}_K(\mathbf{k}, t) = \mathcal{H}_K(\mathbf{k}, 0) \cos^2(\sigma_B t) , \quad (4.49)$$

$$\mathcal{Z}_K(\mathbf{k}, t) = \mathcal{Z}_K(\mathbf{k}, 0) \cos^2(\sigma_B t) . \quad (4.50)$$

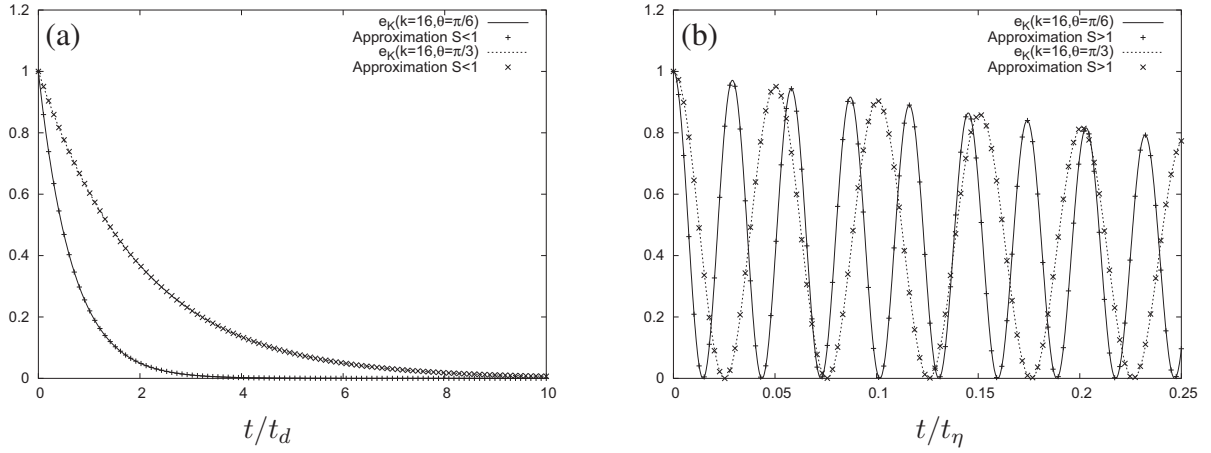


FIG. 4.4 – Densité d'énergie $e_K(\mathbf{k})$ pour deux modes tels que $k = 16$ et $\theta = \pi/3$ ou $\theta = \pi/6$. Les traits continus correspondent à l'équation (4.54) tandis que les points correspondent aux approximations (4.55) et (4.56). (a) $S \approx 0.01$. (b) $S \approx 100$.

De même, les invariants de tenseur spectral des fluctuations magnétiques s'écrivent :

$$e_M(\mathbf{k}, t) = e_K(\mathbf{k}, 0) \sin^2(\sigma_B t) , \quad (4.51)$$

$$\mathcal{H}_M(\mathbf{k}, t) = \mathcal{H}_K(\mathbf{k}, 0) \sin^2(\sigma_B t) , \quad (4.52)$$

$$\mathcal{Z}_M(\mathbf{k}, t) = \mathcal{Z}_K(\mathbf{k}, 0) \sin^2(\sigma_B t) . \quad (4.53)$$

Ainsi, dans la limite linéaire, si les conditions initiales ne présentent ni hélicité ni polarisation, ces quantités resteront nulles aux temps ultérieurs. De même, l'intégrale des solutions linéaires pour la densité d'énergie (4.48) montrent qu'aucune anisotropie directionnelle n'est générée lorsque les phénomènes dissipatifs sont négligés. Enfin, les relations sur la densité d'énergie mettent en évidence l'équipartition[†] de l'énergie entre sa forme cinétique et magnétique due à la présence des ondes d'Alfvén.

Régime dissipatif

Les mêmes calculs sont répétés à partir des solutions générales (4.36) et (4.37). On suppose cependant que les fluctuations magnétiques sont initialement nulles. Afin de simplifier l'écriture des solutions et étant donné qu'elle ne joue aucun rôle quant aux prédictions linéaires de l'anisotropie, la viscosité est également négligée. Cette fois-ci, en présence de diffusion magnétique, les composantes du tenseur spectral de corrélations s'écrivent :

$$e_K(\mathbf{k}, t) = \frac{e_K(\mathbf{k}, 0) e^{-\eta k^2 t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \left(\sinh\left(\frac{1}{2} t \eta k^2 \sqrt{1 - \zeta^2}\right) + \sqrt{1 - \zeta^2} \cosh\left(\frac{1}{2} t \eta k^2 \sqrt{1 - \zeta^2}\right) \right)^2 \quad (4.54)$$

et de même pour l'hélicité et la polarisation. Si l'exponentielle affecte l'ensemble des modes de manière isotrope, il en va différemment pour les fonctions hyperboliques. En effet, lorsque le nombre de Lundquist est très faible, alors $\zeta \ll 1$. Dans ce cas, les solutions (4.54) se simplifient pour aboutir au premier ordre (*i.e.* $\sqrt{1 - \zeta^2} \approx 1 - \zeta^2/2$) à :

$$e_K(\mathbf{k}, t) \approx e_K(\mathbf{k}, 0) \exp\left(-\frac{2B_0^2 \cos^2 \theta t}{\eta}\right) \quad (4.55)$$

[†]Lorsque l'on moyenne sur une période d'onde d'Alfvén.

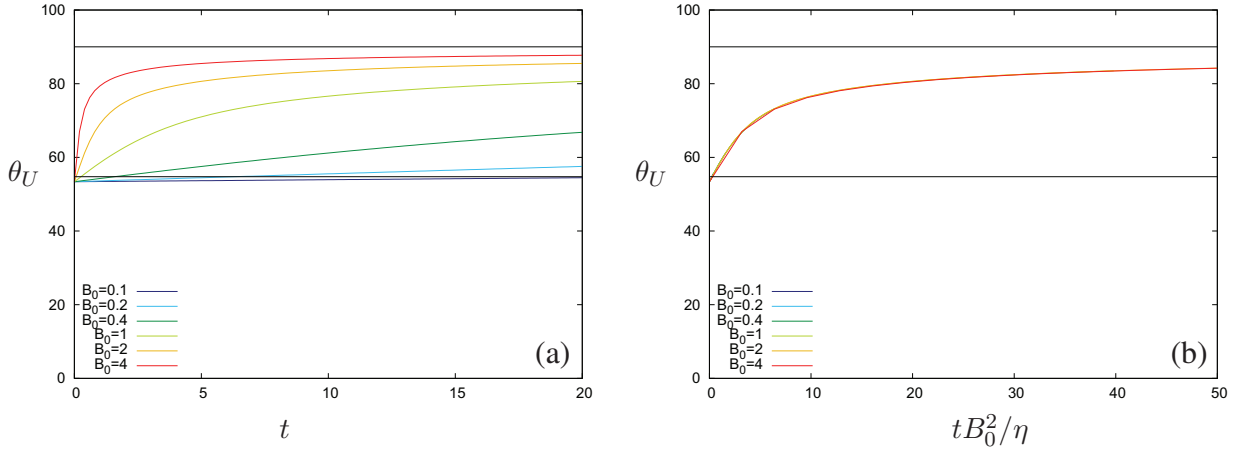


FIG. 4.5 – Angles de Shebalin pour la vitesse calculés par KS intégrant les solutions linéaires dans l'espace spectral. Le nombre de Reynolds magnétique est de l'ordre de l'unité (i.e. $Pr_M < 1$). (a) Résultats bruts. (b) Le temps est adimensionné par le temps caractéristique de dissipation t_d , différent dans chacun des cas.

où il apparaît clairement que les modes verticaux (i.e. tels que $\theta = 0$) sont fortement dissipés tandis que les modes horizontaux (i.e. tels que $\theta = \pi/2$) sont inchangés. Il apparaît également au sein de l'expression précédente le temps caractéristique de dissipation t_d déjà mis en évidence précédemment [Moffatt(1967)]. Si l'on suppose maintenant que le nombre de Lundquist est très grand devant l'unité, on a alors $\zeta \gg 1$ et l'équation (4.54) se simplifie cette fois-ci en :

$$e_K(\mathbf{k}, t) \approx e_K(\mathbf{k}, 0) e^{-\eta k^2 t} \cos^2(B_0 k \cos \theta t) . \quad (4.56)$$

L'expression précédente ne fait pas apparaître explicitement d'anisotropie puisque tous les modes sont dissipés de la même manière. Le temps caractéristique t_d n'apparaît plus et seul le temps dissipatif $t_\eta = 1/(\eta k^2)$ [Moffatt(1967)] intervient. Il s'agit donc d'un régime d'ondes d'Alfvén atténuées.

La figure 4.4 présente les solutions de l'équation (4.54) pour deux modes tels que $k = 16$ et $\theta = \pi/3$ ou $\theta = \pi/6$. Le choix arbitraire $e_K(t = 0) = 1$ a été effectué. Les calculs sont réalisés pour différents nombres de Lundquist et comparés avec les expressions (4.55) et (4.56). Lorsque le nombre de Lundquist est faible devant l'unité (figure 4.4(a), $S \approx 0.01$), le régime est purement dissipatif. Il apparaît clairement une dissipation sélective sur un temps de l'ordre de t_d . Lorsque le nombre de Lundquist est grand devant l'unité (figure 4.4(b), $S \approx 100$), les ondes d'Alfvén atténuées dominent et aucune anisotropie n'est observée.

Afin de caractériser l'anisotropie globale (et non pas pour un unique mode) engendrée par les solutions linéaires, il est également possible d'utiliser la KS incluant les équations linéaires (4.36) et (4.37). On impose un spectre d'énergie afin de dériver l'amplitude de chacun des modes et les phases sont aléatoires. L'angle de Shebalin est suffisant pour quantifier ici l'anisotropie. Les solutions linéaires ne sont valables que lorsque le nombre de Reynolds magnétique est faible. Les conditions initiales du champ de vitesse sont telles que $u_0 \approx 1$ et $l_0 \approx 1$ et l'on impose donc une diffusivité magnétique $\eta = 1$. Dans ce cas, le nombre de Lundquist est de l'ordre de l'unité. La figure 4.5 présente les angles de Shebalin au cours du temps pour différents champs magnétiques imposés B_0 . Ce faisant, le nombre d'interaction N augmente tandis que le temps caractéristique t_d diminue, et l'anisotropie apparaît donc pour des temps de plus

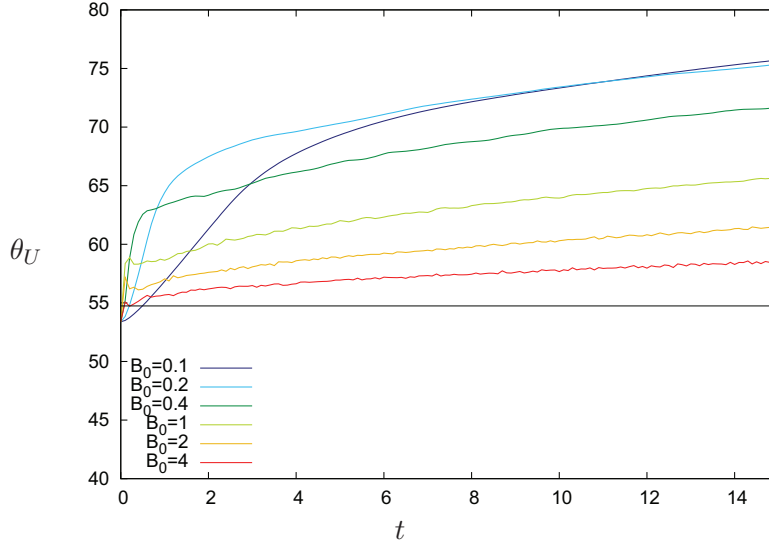


FIG. 4.6 – Angles de Shebalin pour la vitesse calculés par intégration des solutions linéaires dans l'espace spectral. Le nombre de Reynolds magnétique est de l'ordre de 10^2 (*i.e.* $Pr_M \approx 1$).

en plus courts. Lorsque l'angle de Shebalin est supérieur à sa valeur isotrope (*i.e.* $\theta_U \approx 55^\circ$), cela traduit une énergie plus importante au sein des modes horizontaux (*i.e.* tels que $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$) qu'au sein des modes verticaux (*i.e.* tels que $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$). Afin de confirmer le fait que le temps t_d caractérise l'anisotropie, les résultats de la figure 4.5(a) sont adimensionnés par le temps t_d , de manière à ce que toutes les courbes se superposent (voir la figure 4.5(b)).

Dans la suite, et puisque l'on s'intéresse tout particulièrement à l'anisotropie du champ de vitesse, il sera important de s'assurer que le nombre d'interaction (et donc le temps t_d) est constant entre les diverses simulations anisotropes.

Même si les solutions linéaires ne sont plus valides, il est tout de même intéressant de calculer les mêmes quantités pour un nombre de Reynolds magnétique $R_M \gg 1$ (*i.e.* $S \gg 1$). La diffusivité est maintenant fixée à $\eta = 0.01$ et le champ magnétique imposé est croissant. Les angles de Shebalin pour la vitesse sont présentés sur la figure 4.6. Aux temps courts, l'évolution est la même que pour la figure 4.5(a). Au fur et à mesure que B_0 augmente, t_d diminue et l'anisotropie apparaît de plus en plus tôt. En revanche, pour les temps longs, la tendance est l'inverse de celle observée pour les faibles nombres de Lundquist. Lorsque B_0 augmente, l'angle θ_U croît toujours avec le temps, mais le taux de croissance est d'autant plus faible que B_0 est important. Il est possible de résumer ces résultats comme suit : lorsque le champ magnétique imposé augmente alors que la diffusivité magnétique est constante, le temps t_d diminue et l'anisotropie apparaît sur des temps de plus en plus courts. En revanche, le nombre de Lundquist augmente et de plus en plus de modes voient leurs dynamiques transiter d'un régime dissipatif à un régime ondulatoire. Le cas limite correspond au nombre de Lundquist infini où l'écoulement est alors une superposition d'ondes d'Alfvén pures, pour lesquelles les solutions (4.48) prédisent l'isotropie, comme cela a déjà été mentionné (voir équation (4.56)).

A noter que les tendances mises en évidence pour la vitesse sont également valables pour les fluctuations magnétiques, dont l'anisotropie est très proche de celle observée pour la vitesse.

Il est également possible de visualiser l'anisotropie dans l'espace physique en utilisant la simulation cinématique. Les solutions linéaires générales (4.36) et (4.37) sont utilisées afin de

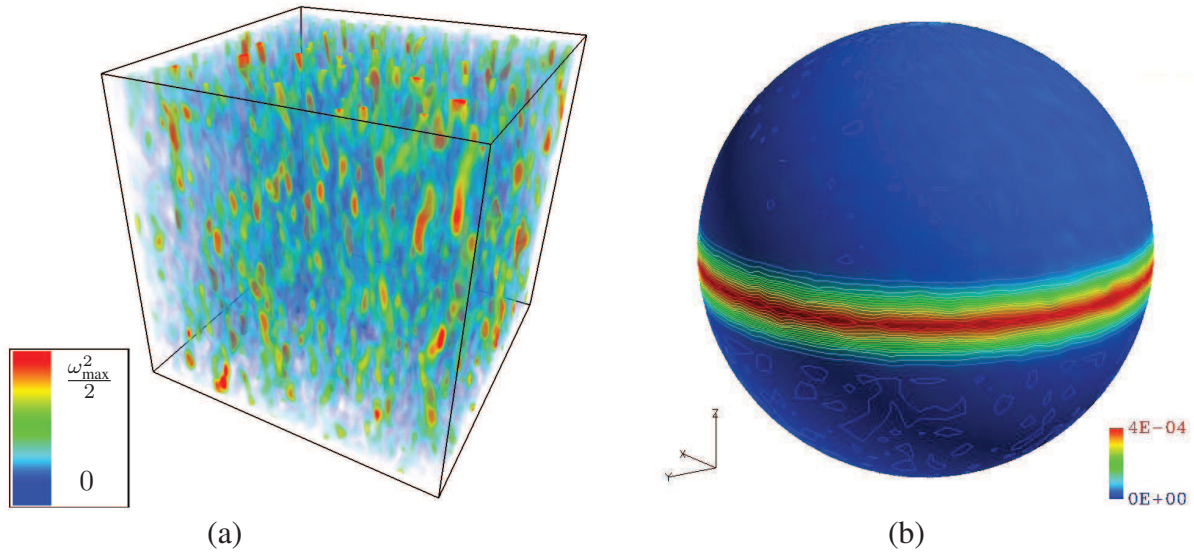


FIG. 4.7 – (a) Rendu en volume de l’ensrophie calculée par KS à l’instant $t \approx 20t_d$. $\omega_{\max}^2$ est la valeur maximale de l’ensrophie à cet instant. Les paramètres du calcul correspondent à la série KS-3 au sein du tableau 4.1. (b) Énergie cinétique angulaire $K(\theta, \phi)$ au même instant.

générer l’instationnarité du modèle synthétique. Les pulsations aléatoires sont égales à zéro. Les champs de vitesse et de fluctuations magnétiques sont calculés sur une grille cartésienne en utilisant les expressions (2.71) et (2.72) pour un champ magnétique unitaire et une diffusivité magnétique $\eta = 0.2$. Le nombre de Lundquist est alors de l’ordre de l’unité. La figure 4.7(a) présente le rendu en volume de l’ensrophie à l’instant $t \approx 20t_d$. On observe clairement la dissipation préférentielle mise en évidence par les solutions linéaires (4.55) : les modes de vecteur d’onde vertical sont rapidement dissipés laissant place aux modes de vecteur d’onde horizontal et à un écoulement qui tend à devenir indépendant de la direction verticale. Un autre moyen de mettre en évidence la dissipation préférentielle est d’intégrer l’énergie dans l’espace spectral sur l’ensemble des nombres d’onde tout en conservant la dépendance angulaire. Ainsi, la figure 4.7(b) présente la quantité $K(\theta, \phi)$ définie par :

$$K(\theta, \phi) = \left[\int_{\theta-\Delta\theta/2}^{\theta+\Delta\theta/2} \cos\theta d\theta \right]^{-1} \int_0^\infty \hat{u}_i(k, \theta, \phi) \hat{u}_i^*(k, \theta, \phi) dk \quad (4.57)$$

où les composantes spectrales $\hat{u}_i(k, \theta, \phi)$ sont déduites des solutions linéaires. Cette quantité, représentative de l’anisotropie directionnelle, confirme bien l’accumulation d’énergie cinétique à l’équateur dans la limite linéaire. À ce stade, on peut donc supposer qu’il s’agit d’une anisotropie de directivité (comparer la figure 4.7(b) avec la figure 2.4(a)) dont la cause est la dissipation sélective des modes.

4.3.2 Simulations numériques directes

Après avoir rapidement observé les tendances prédites par les solutions linéaires, on s’intéresse maintenant aux équations non-linéaires complètes résolues par DNS. L’accent est ici porté sur l’influence du nombre de Reynolds magnétique. Lorsque celui-ci est faible, on s’attend à ce que les non-linéarités soient négligeables au sein des équations (4.12) et (4.13). Les solutions linéaires présentées ci-dessus devraient, dans ce cas, constituer une bonne approxi-

DNS						
Série	Résolution	η	B_0	R_M	N	Pr_M
1	256^3	0.5	3.54	1	20	10^{-2}
2	256^3	0.05	1.12	10	20	10^{-1}
3	256^3	0.005	0.35	100	20	1

TAB. 4.2 – Paramètres des différentes DNS présentées au sein du chapitre 4.

mation de l'écoulement. Au fur et à mesure que le nombre de Reynolds magnétique augmente, un régime non-linéaire est attendu.

L'ensemble des résultats qui vont suivre sont réalisés à nombre d'interaction constant. On s'intéresse en particulier au cas où N est grand devant l'unité. L'impact du nombre d'interaction sur l'anisotropie a été étudié au sein de [Knaepen *et al.* (2004)]. Une fois le nombre d'interaction et le nombre de Reynolds magnétique déterminés, il n'existe plus de paramètres libres puisque le champ magnétique et la diffusivité magnétique sont alors définis par :

$$B_0 = \frac{Nu_0^2}{R_M} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{u_0 l_0}{R_M}.$$

Puisque l'on souhaite faire varier le nombre de Reynolds magnétique, et donc la diffusivité magnétique, il est nécessaire de faire également varier le champ magnétique imposé. On se propose d'étudier l'écoulement à trois nombres de Reynolds magnétique différents : $R_M \approx 1$, $R_M \approx 10$ et $R_M \approx 100$. Le nombre d'interaction est constant tel que $N \approx 20$ dans tous les cas. Les paramètres des simulations numériques directes présentées dans la suite peuvent être trouvés dans la tableau 4.2. On rappelle que les propriétés de la condition initiale du champ de vitesse peuvent être trouvées au sein du tableau 2.1.

La condition initiale pour les calculs par DNS est l'état quasi-stationnaire obtenu par une simulation hydrodynamique forcée (voir la figure 2.7). À l'instant initial, le forçage est supprimé et le champ magnétique B_0 est imposé. Les fluctuations magnétiques initiales sont nulles. Sous l'effet de la viscosité et de la dissipation Joule, l'énergie totale tend inéluctablement vers zéro. Aucun forçage n'est inclut pour compenser ces phénomènes dissipatifs, car n'importe quel forçage perturberait l'anisotropie. La dissipation Joule est un phénomène fortement anisotrope. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer que le nombre de Reynolds magnétique est faible (ou de manière équivalente $Pr_M \ll 1$) de façon à pouvoir écrire le rotationnel de la force de Lorentz comme une fonction linéaire de la vitesse :

$$\mathcal{F}_L = \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B}_0 = -\frac{B_0^2}{\eta} \Delta^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \quad (4.58)$$

où Δ^{-1} est le réciproque de l'opérateur Laplacien. Le champ magnétique est vertical selon la direction z . Si l'on suppose de plus que le domaine de calcul est homogène et infini, la transformée de Fourier de l'expression (4.58) aboutit à

$$\hat{\mathcal{F}}_L = -\frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2}{\eta k^2} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) = -\frac{B_0^2}{\eta} \cos^2 \theta \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t). \quad (4.59)$$

Cette force est fortement anisotrope puisque qu'elle est maximum pour les modes alignés avec le champ magnétique B_0 et nulle pour les modes perpendiculaires. Ce phénomène purement

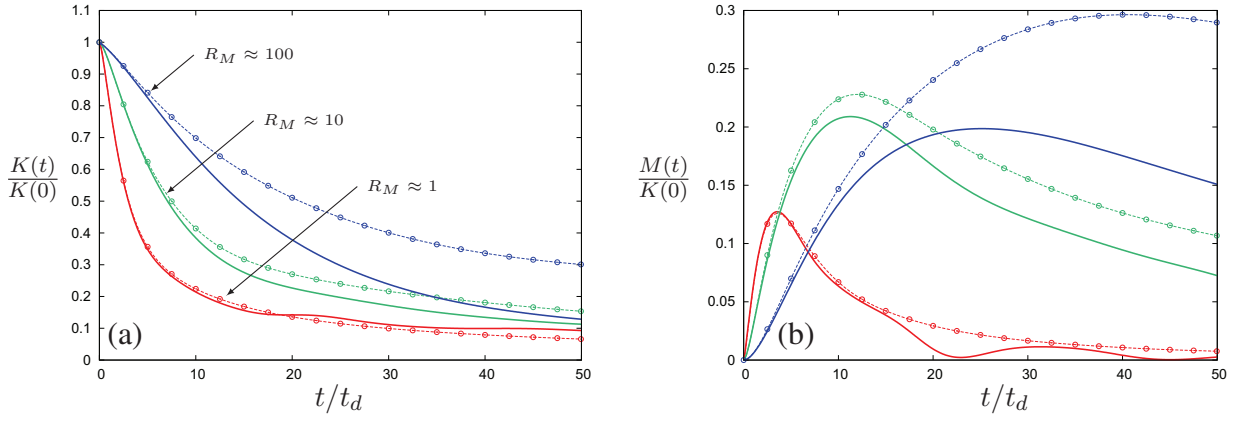


FIG. 4.8 – Comparaison de l'évolution temporelle des énergies cinétiques et magnétiques entre KS et DNS, pour trois nombres de Reynolds magnétiques différents. Le temps est adimensionné par $t_d = \eta/B_0^2$. Les traits pleins correspondent aux DNS tandis que les traits pointillés avec ronds correspondent aux simulations linéaires KS. (a) Énergie cinétique $K(t)$. (b) Énergie magnétique $M(t)$.

linéaire a déjà été mis en évidence lors de l'analyse linéaire et devrait, selon la valeur du nombre de Reynolds magnétique considérée, rester qualitativement valable pour le système non-linéaire complet.

La figure 4.8 présente une comparaison des énergies cinétique et magnétique au cours du temps. Puisque le nombre d'interaction est constant, le temps caractéristique de dissipation $t_d = \eta/B_0^2$ l'est également. L'ensemble des séries temporelles est donc représenté en temps adimensionné par t_d . Les traits pleins correspondent aux simulations directes tandis que les traits pointillés correspondent aux prédictions linéaires par KS. Plus le nombre de Reynolds magnétique est important, plus l'écart aux solutions linéaires augmente.

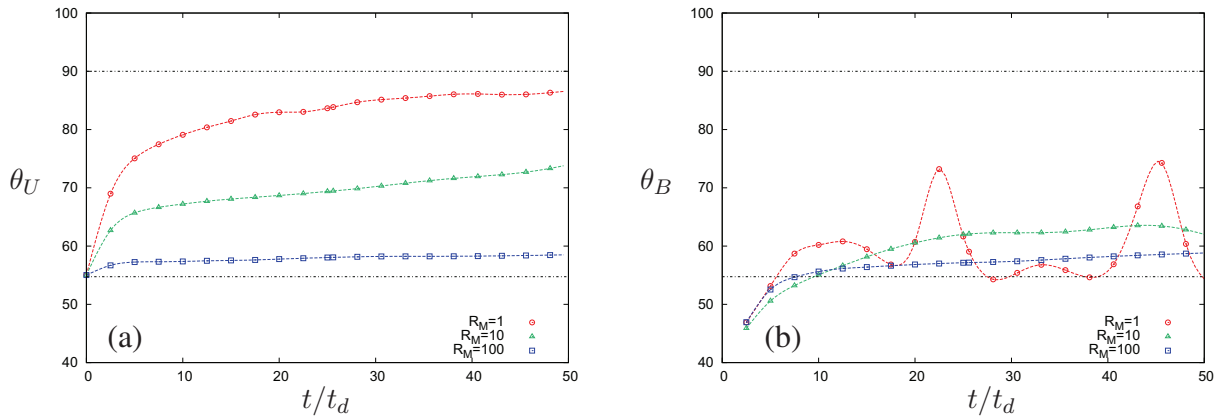


FIG. 4.9 – Évolution temporelle de l'angle de Shebalin (défini par (1.46)) pour trois nombres de Reynolds magnétique différents. Le temps est adimensionné par $t_d = \eta/B_0^2$. Les traits alternés sont caractéristiques des valeurs isotropes (*i.e.* $\theta_Q \approx 55^\circ$) et quasi-bidimensionnelles (*i.e.* $\theta_Q \approx 90^\circ$). (a) Angle θ_U . (b) Angle θ_B .

Angles de Shebalin

On s'intéresse maintenant à l'anisotropie de l'écoulement. La figure 4.9 rassemble les angles de Shebalin θ_U pour le champ de vitesse et θ_B pour le champ magnétique fluctuant.

Concernant la quantité θ_U , on observe de nouveau la dissipation sélective des modes lorsque le nombre de Reynolds magnétique est faible. L'angle tend vers sa valeur extrême de 90° , indiquant ainsi que l'énergie cinétique équatoriale est dominante. Lorsque le nombre de Reynolds magnétique augmente, les résultats DNS prédisent un retour à l'isotropie (*i.e.* $\theta_U \approx 55^\circ$). Ce comportement est dû à l'influence croissante des termes non-linéaires au sein des équations (4.12) et (4.13). Cette restauration de l'isotropie est différente de celle observée précédemment au sein des solutions linéaires. Celles-ci prédisent un angle θ_U d'autant plus proche de sa valeur isotrope que le nombre de Lundquist est grand devant l'unité (voir la figure 4.6), le nombre de Reynolds magnétique est dans ce cas constant (seul B_0 varie au sein des résultats linéaires).

L'angle de Shebalin pour les fluctuations magnétiques (voir la figure 4.9(b)) suit la même tendance que son homologue cinétique : il tend vers sa valeur isotrope lorsque le nombre de Reynolds magnétique croît. On observe cependant de fortes oscillations de θ_B à bas nombre de Reynolds magnétique. Ces oscillations ont déjà été observées (voir par exemple la figure 5 au sein de [Knaepen *et al.* (2004)]), et ne semblent apparaître que pour de faibles valeurs de R_M et de fortes valeurs de N . Les maxima pour la quantité θ_B sont directement reliés aux très faibles valeurs de l'énergie magnétique observées au sein de la figure 4.8 (pour $t/t_d \approx 23$ et $t/t_d \approx 45$ par exemple). Ces fluctuations trouveront une explication plus loin, lors de l'analyse des spectres angulaires.

Spectres angulaires pour $R_M \approx 1$

Afin de caractériser l'anisotropie selon l'échelle considérée, on propose d'observer les spectres angulaires d'énergie cinétique $E_K(k, \theta)$ et d'énergie magnétique $E_M(k, \theta)$ à l'instant $t = 40t_d$. Dans un premier temps, ces quantités sont rassemblées au sein de la figure 4.10 pour la cas $R_M \approx 1$. La concentration d'énergie à l'équateur (ou plutôt la dissipation dominante de l'énergie polaire) est très claire lorsque l'on distingue l'énergie contenue au sein des vecteurs d'onde verticaux de celle contenue au sein des vecteurs d'onde horizontaux. Cette anisotropie directionnelle existe à toutes échelles, mais est toutefois plus prononcée pour les grands nombres d'onde. Ces observations sont bien évidemment qualitativement identiques à celles réalisées à partir des angles de Shebalin, mais l'on dispose désormais d'une quantification plus fine de l'anisotropie.

Afin d'approfondir l'analyse et de permettre une meilleure compréhension des résultats qui vont suivre concernant les quantités b_{33}^e et b_{33}^z , on propose de décomposer les spectres angulaires en partie poloïdale et toroïdale. Pour cela, on utilise la décomposition poloïdale-toroïdale (1.31) introduite au sein du chapitre 1, et rappelée ici[†] :

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = u^{(1)}\mathbf{e}^{(1)} + u^{(2)}\mathbf{e}^{(2)}, \quad (4.60)$$

où $\mathbf{e}^{(1)}$ et $\mathbf{e}^{(2)}$ sont deux vecteurs de la base de l'espace de Craya (voir les figures 1.1 et 1.2). Comme nous l'avons vu, l'énergie est dominante à l'équateur (*i.e.* $\theta \approx \pi/2$). Pour $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0$

[†]Cette décomposition est aussi valable pour les fluctuations magnétiques, et les définitions (4.61) et (4.61) ont donc des équivalents magnétiques.

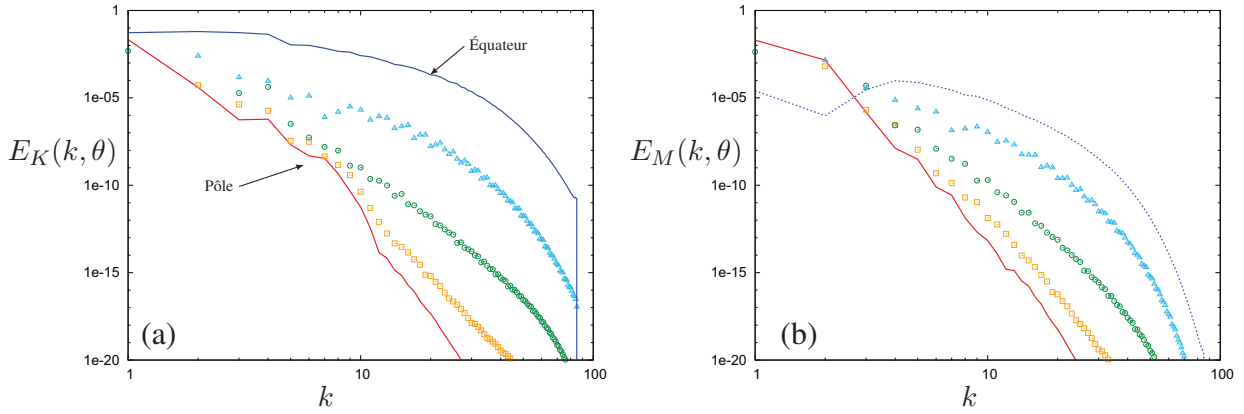


FIG. 4.10 – Spectres angulaires d'énergies $E_K(k, \theta)$ et $E_M(k, \theta)$, à l'instant $t \approx 40t_d$, pour un nombre de Reynolds magnétique $R_M \approx 1$.

(i.e. à l'équateur), le vecteur $e^{(1)}$ est horizontal tandis que le vecteur $e^{(2)}$ est vertical. La décomposition de l'énergie en composante poloïdale et toroïdale est donc particulièrement intéressante dans ce cas. Le spectre d'énergie poloïdale est défini par :

$$E_K^{(2)}(k) = \sum_{k-\Delta k/2 < |\mathbf{k}| < k+\Delta k/2} \hat{u}_i^{(2)}(\mathbf{k}) \hat{u}_i^{(2)*}(\mathbf{k}), \quad (4.61)$$

tandis que le spectre d'énergie toroïdale est défini par :

$$E_K^{(1)}(k) = \sum_{k-\Delta k/2 < |\mathbf{k}| < k+\Delta k/2} \hat{u}_i^{(1)}(\mathbf{k}) \hat{u}_i^{(1)*}(\mathbf{k}). \quad (4.62)$$

En utilisant une décomposition du type (1.59), il est possible de dissocier les contributions polaire et équatoriale de chacune de ces quantités. La figure 4.11(a) présente ainsi les spectres d'énergie cinétique toroïdale $E_K^{(1)}(k)$ et poloïdale $E_K^{(2)}(k)$ à l'équateur et au pôle, tandis que la figure 4.11(b) présente les mêmes quantités magnétiques.

Il apparaît que l'énergie cinétique à l'équateur n'est pas équitablement répartie entre ses composantes poloïdale et toroïdale. En particulier, on observe une énergie toroïdale dominante aux faibles nombres d'onde et une énergie poloïdale dominante aux grands nombres d'onde. Concernant l'énergie magnétique, seule une domination de la composante poloïdale est observée aux grands nombres d'onde. Ces écarts sont significatifs et sont dûs à des phénomènes non-linéaires. En effet, l'effet linéaire de la force de Lorentz est une dissipation sélective conduisant à une énergie équatoriale dominante. L'alignement préférentiel (i.e. vertical-poloïdal ou horizontal-toroïdal) de la composante spectrale $\hat{u}(\mathbf{k})$ telle que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0$, est, en revanche, un phénomène non-linéaire. Si les observations à bas nombres d'onde sont discutables du fait de la précision de la méthode spectrale pour ce domaine, les résultats concernant la zone inertielle sont clairs et prédisent une domination des composantes verticales de la vitesse, de vecteurs d'onde horizontaux. L'explication de ce croisement de spectre est reportée en fin de chapitre, au sein de la section 4.5.

Que ce soit en observant la figure 4.10(b) ou la figure 4.11(b), il apparaît une tendance particulière pour le spectre $E_M(k, \theta)$ pour $k < 4$. Il semble que le pôle contienne plus d'énergie magnétique que l'équateur. Ces observations à bas nombre d'onde sont évidemment à considérer avec précaution dans le contexte d'une simulation pseudo-spectrale. Le nombre de modes

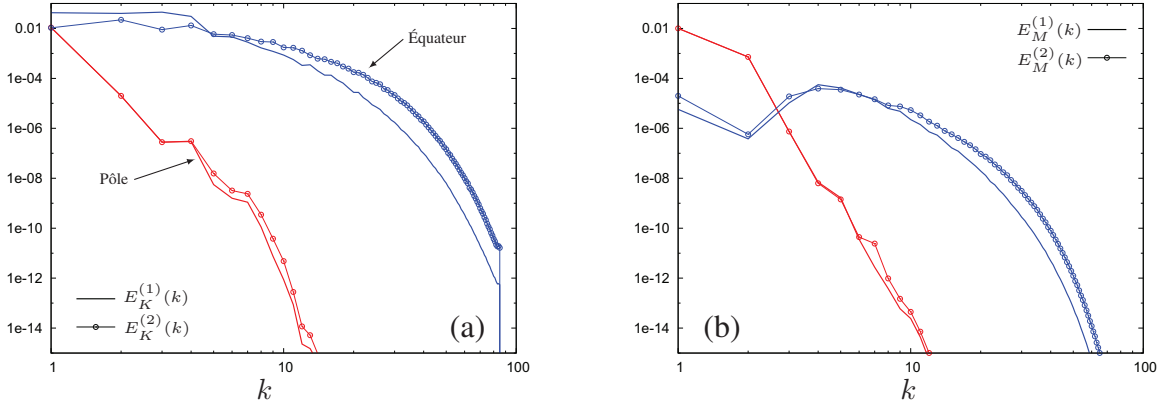


FIG. 4.11 – Spectres angulaires poloidaux et toroïdaux pour $R_M \approx 1$ à l'instant $t \approx 40t_d$. (a) Spectres d'énergie cinétique $E_K^{(1)}(k)$ et $E_K^{(2)}(k)$. (b) Spectres d'énergie magnétique $E_M^{(1)}(k)$ et $E_M^{(2)}(k)$.

$\hat{u}(\mathbf{k})$ tels que $k \approx 4$ est relativement faible et la convergence des statistiques calculées pour ces modes est donc modérée. Cependant, un argument linéaire permet peut-être d'expliquer ce comportement. Le nombre de Lundquist pour le cas $R_M \approx 1$ est $S \approx 4$. Dans l'approche linéaire, cela implique qu'une grande majorité des modes se trouve dans un régime dissipatif (régime $\mathcal{D}_1$ plus haut). Cependant, les très faibles nombres d'onde se trouvent dans un régime oscillant amorti (régime $\mathcal{D}_2$ plus haut). Pour ce régime oscillant, la croissance initiale de l'énergie magnétique est d'autant plus importante que la direction de propagation est proche de celle du champ magnétique imposé.

La figure 4.12(a) montre par exemple l'évolution des énergies cinétique et magnétique en fonction du temps, intégrées pour différents domaines angulaires en KS. Il apparaît clairement que l'équipartition de l'énergie sous l'action des ondes d'Alfvén est d'autant plus lente que l'angle est proche de $\pi/2$. Cela est bien évidemment directement lié à la relation de dispersion des ondes d'Alfvén, *i.e.* $\sigma_B = B_0 k \cos \theta$. Ainsi, l'énergie magnétique des modes alignés avec le champ magnétique croît plus vite que celle des modes horizontaux. Il en résulte une anisotropie

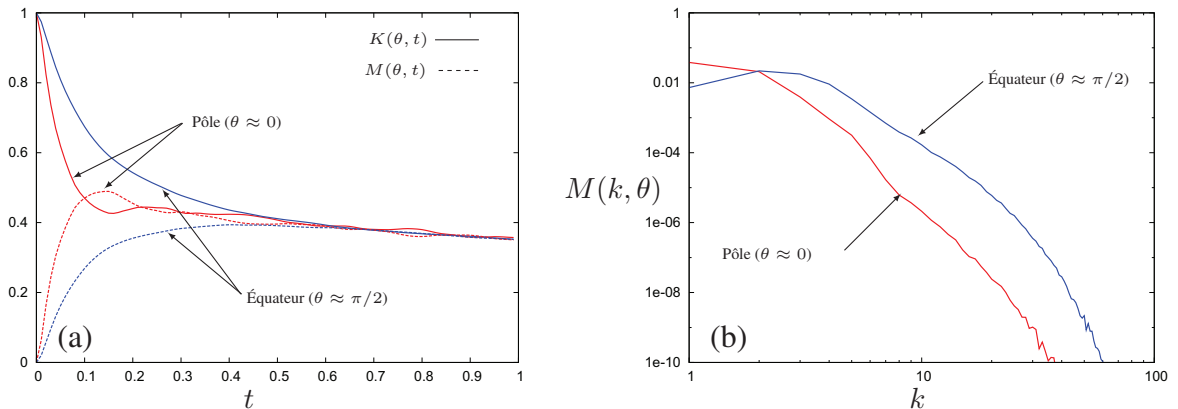


FIG. 4.12 – Prédiction linéaire de l'anisotropie pour $R_M \approx 1$. (a) Évolution temporelle de l'énergie cinétique $K(t)$ (courbes pleines) et de l'énergie magnétique $M(t)$ (courbes pointillés) pour différents domaines angulaires. (b) Spectre angulaire de l'énergie magnétique à l'instant $t \approx 40t_d$.

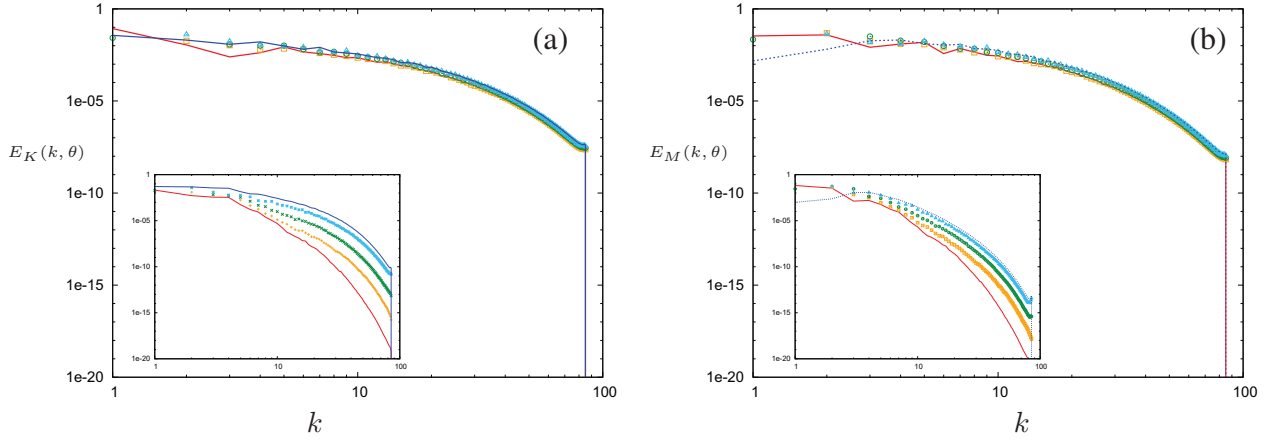


FIG. 4.13 – Spectres angulaires d'énergies à l'instant $t \approx 40t_d$, pour un nombre de Reynolds magnétique $R_M \approx 100$ (les sous-figures correspondent aux résultats lorsque $R_M \approx 10$). (a) $E_K(k, \theta)$. (b) $E_M(k, \theta)$.

à grande échelle que l'on peut observer au sein de la figure 4.12(b), qui représente le spectre angulaire d'énergie magnétique. Ce simple raisonnement linéaire semble fournir une explication qualitative au phénomène observé au sein de la figure 4.10 : il existe une compétition entre deux phénomènes anisotropes : l'équipartition de l'énergie et la dissipation anisotrope. Le premier phénomène est dominant aux faibles nombres d'onde tandis que le second est dominant pour les grands nombres d'onde. C'est ce phénomène qui permet d'expliquer les fluctuations observées au sein de la quantité θ_B (voir la figure 4.9(b)) : l'énergie au pôle est plus importante que celle à l'équateur pour les faibles nombres d'onde, tandis que l'inverse est observé pour les grands nombres d'onde. Ces deux phénomènes tendent à se compenser lorsque l'on intègre sur tout l'espace spectral comme c'est le cas pour l'angle de Shebalin. Une légère diminution de l'énergie au pôle entraîne ainsi une forte augmentation de l'angle de Shebalin, comme observé au sein de la figure 4.9(b).

Spectres angulaires pour $R_M \approx 100$

Enfin, les spectres angulaires obtenus pour $R_M \approx 100$ sont rassemblés au sein de la figure 4.13. Le champ de vitesse comme les fluctuations magnétiques sont quasiment isotropes. Seuls les faibles nombres d'onde, pour lesquels le nombre d'échantillons dans l'espace spectral est plus faible, présentent des tendances légèrement anisotropes. À noter que les sous-figures incluses au sein de la figure 4.13 présentent les résultats obtenus pour un nombre de Reynolds intermédiaire $R_M \approx 10$.

Tenseur d'anisotropie de Reynolds

On se concentre désormais sur l'anisotropie du champ de vitesse[†]. Les résultats concernant les fluctuations magnétiques seront compilés au sein de l'annexe E. Est présentée en figure 4.14(a) et 4.14(b), la composante b_{33} du tenseur d'anisotropie de Reynolds. Sa partie direction-

[†]Le tenseur d'anisotropie peut également être défini pour les fluctuations magnétiques. Cependant, par souci de clarté, les quantités b_{33}^e et b_{33}^z pour $\mathbf{b}$ ne sont pas rapportées ici. En effet, leur évolution temporelle prend en compte la phase de croissance des fluctuations magnétiques rendant l'analyse compliquée.

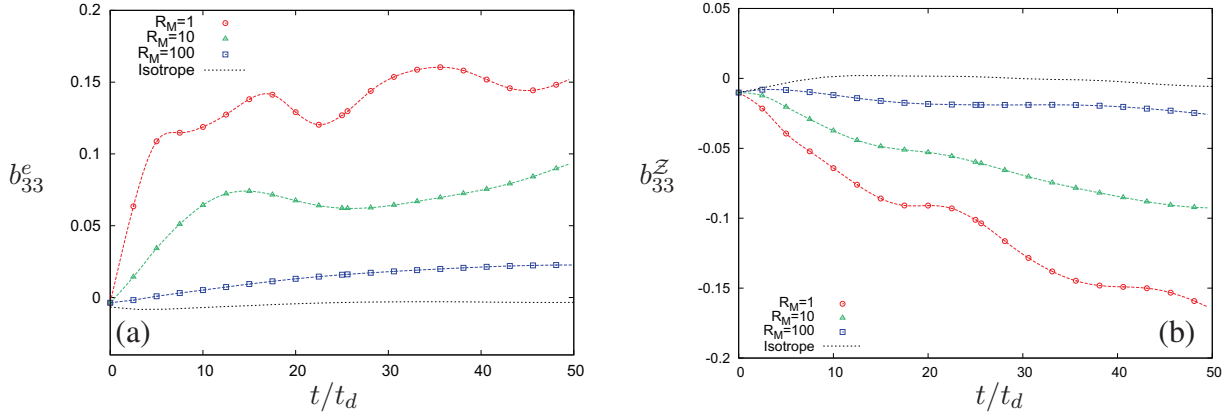


FIG. 4.14 – Composante $b_{33}(t)$ du tenseur d'anisotropie de Reynolds. Le temps est adimensionné par $t_d = \eta/B_0^2$. (a) Anisotropie de directivité $b_{33}^e(t)$. (b) Anisotropie de polarisation $b_{33}^z(t)$.

nelle b_{33}^e a été séparée de sa partie polarisation b_{33}^z . Concernant l'anisotropie de directivité, on observe une diminution de la quantité b_{33}^e lorsque le nombre de Reynolds magnétique augmente. Pour $R_M \approx 1$, b_{33}^e est proche de sa valeur maximale de $1/6$, caractéristique d'un écoulement invariant dans la direction verticale (*i.e.* celle du champ magnétique imposé). L'écoulement n'est pas pour autant bidimensionnel puisque la composante verticale de la vitesse est non-nulle. Cet état intermédiaire est souvent qualifié de "two-and-a-half-dimensional" turbulence ou encore de turbulence 2D-3C. On trouvera en fin de chapitre (section 4.5) un article traitant exclusivement de cette transition d'un écoulement tri-dimensionnel à un écoulement quasi-bidimensionnel.

Une importante contribution à l'anisotropie du tenseur de Reynolds de la vitesse provient du terme de polarisation, qui est fortement négatif pour de faibles valeurs de R_M (voir la figure 4.14(b)). Cela montre que l'écoulement est principalement organisé en tourbillons verticaux, mais l'écoulement est encore loin d'un état 2D-2C (pour lequel on aurait $b_{33}^e = 1/6$ et $b_{33}^z = -1/2$). Cette observation est cohérente avec la décomposition poloïdale-toroïdale de l'énergie cinétique, présentée au sein de la figure 4.11(a), pour laquelle l'énergie toroïdale à l'équateur (qui contribue donc à l'énergie horizontale) est dominante aux faibles nombres d'onde[†]. La polarisation de la vitesse diminue lorsque R_M augmente. Tout comme le cas en rotation pure, les deux composantes b_{33}^e et b_{33}^z ne contribuent pas de la même manière au tenseur de Reynolds, ce qui montre que la considération du terme b_{33} n'est pas suffisante à elle seule pour caractériser l'anisotropie.

Longueurs intégrales

On s'intéresse ici aux longueurs de corrélations (1.51) et (1.55) définies au sein du chapitre 1. Celles-ci sont tracées au sein de la figure 4.15, pour le cas où le nombre de Reynolds magnétique est de l'ordre de l'unité[‡].

Considérons tout d'abord les corrélations de vitesse $L_{ij}^l(u)$ (voir la figure 4.15(a)). Tout

[†]Le tenseur de Reynolds ainsi que sa partie anisotrope sont représentatifs des structures les plus énergétiques, donc des faibles nombres d'onde.

[‡]Le cas $R_M \gg 1$ ne présente qu'un intérêt limité puisque toutes les longueurs de corrélations sont très proches de leurs homologues isotropes.

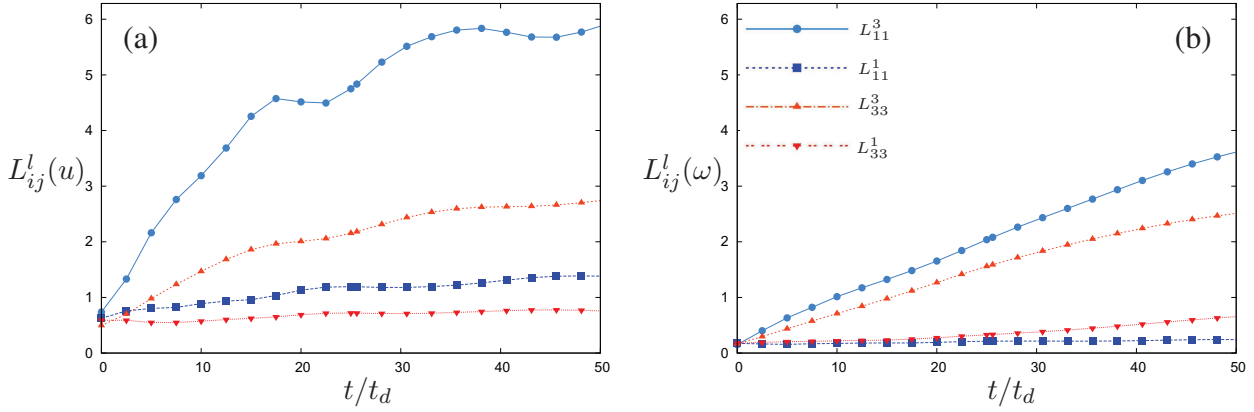


FIG. 4.15 – Longueurs de corrélations au cours du temps lorsque $R_M \approx 1$. La couleur bleue correspond aux corrélations horizontales tandis que la couleur rouge correspond aux corrélations verticales. (a) Longueurs de corrélations de vitesse. (b) Longueurs de corrélations de vorticité.

comme le cas en rotation, on observe une forte augmentation de la corrélation L_{11}^3 pour la vitesse, ce qui est cohérent avec les valeurs négatives de b_{33}^z et la formation de structures cohérentes alignées avec le champ magnétique imposé. Plusieurs remarques cependant : la croissance de L_{11}^3 est bien plus intense dans le cas MHD que dans le cas en rotation. La longueur de corrélation L_{11}^3 atteint très rapidement la valeur maximale de 2π qui correspond à la taille verticale du domaine numérique. Dès lors, la périodicité empêche tout développement supplémentaire de l'anisotropie dans cette direction. Les résultats obtenus au sein de ce chapitre sont ainsi à considérer avec précaution. Cet effet des conditions aux limites est peut-être responsable pour la décroissance de la quantité b_{33}^e observée sur la figure 4.14(a). À la différence du cas en rotation, d'autres longueurs de corrélations sont plus importantes en turbulence MHD à bas nombre de Reynolds magnétique. On observe tout d'abord une croissance des corrélations L_{33}^3 et, dans une moindre mesure, L_{11}^1 . La croissance de L_{33}^3 est due à la concentration intense de l'énergie à l'équateur, qui est plus importante qu'en rotation pure.

Les longueurs de corrélations pour la vorticité sont rassemblées au sein de la figure 4.15(b). La tendance est sensiblement la même, mais on notera que les longueurs L_{11}^3 et L_{33}^3 sont cette fois-ci beaucoup plus proches l'une de l'autre. Ceci indique une nette réduction de la polarisation pour la vorticité, tandis que la croissance de ces deux longueurs est toujours due à une concentration de l'énergie dans le plan $k_3 = 0$ (*i.e.* $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0$). Les longueurs de corrélations à séparation horizontale (*i.e.* L_{11}^1 et L_{33}^1) pour la vorticité sont qualitativement inchangées par la présence des phénomènes magnétiques.

Visualisation

Enfin, il est possible de visualiser les champs d'ensrophie et de densité de courant afin de confirmer les différentes observations énoncées plus haut. La figure 4.16 rassemble différentes visualisations. La colonne de gauche correspond à l'ensrophie tandis que la colonne de droite correspond à la densité de courant. Au fur et à mesure que le nombre de Reynolds magnétique augmente, l'anisotropie des deux champs diminue, et les fluctuations magnétiques se développent sur une gamme d'échelles de plus en plus importante.

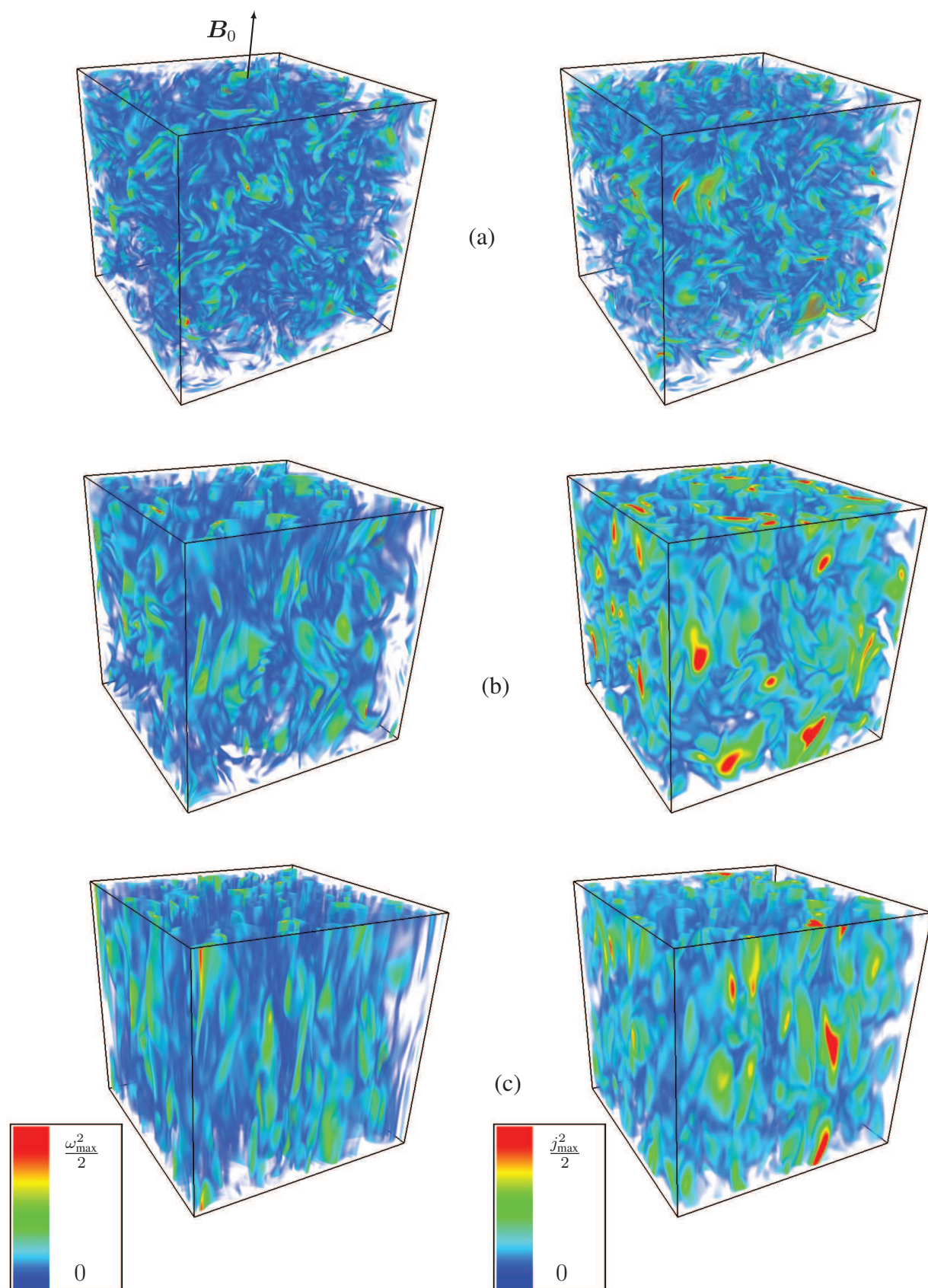


FIG. 4.16 – Visualisation de l'enstrophie (colonne de gauche) et de la densité de courant (colonne de droite) en turbulence MHD, pour différents nombres de Reynolds magnétique. L'échelle est normalisée par la valeur maximum de la quantité représentée, différente dans chacun des cas. (a) $R_M \approx 100$. (b) $R_M \approx 10$. (c) $R_M \approx 1$.

À noter que l'ensemble des résultats à bas nombre de Reynolds magnétique ont également été réalisés en utilisant l'approximation quasi-statique sans variation qualitative des résultats.

4.4 Conclusion

L'objectif de ce chapitre était de présenter quelques résultats d'anisotropie concernant la turbulence MHD. En particulier, nous nous sommes intéressés aux solutions linéaires en présence d'un champ magnétique imposé. Ces solutions peuvent être explicitement incluses au sein du modèle synthétique de la même manière que pour le cas en rotation. Deux nouveautés sont à noter : d'une part, la diffusivité magnétique est prise en compte et permet ainsi le développement linéaire de l'anisotropie due à la force de Lorentz ; d'autre part, la méthode KS est ici également appliquée aux fluctuations magnétiques, et le modèle propose désormais deux champs synthétiques instationnaires en interaction linéaire. L'anisotropie en fonction du nombre de Reynolds magnétique a également été étudiée. Pour cela, nous avons utilisé des indicateurs statistiques propres à la communauté MHD mais également des quantités plus générales déjà utilisées dans le cadre d'une turbulence homogène en rotation. La restauration de l'isotropie au fur et à mesure que le nombre de Reynolds magnétique augmente a été observée. Pour $R_M \approx 1$, on observe des structures cohérentes alignées avec la direction du champ magnétique imposé. Les longueurs de corrélations de ces structures deviennent de l'ordre de grandeur de la taille du domaine numérique.

4.5 Complément au chapitre 4

Les quatre prochaines pages correspondent à un article (soumis au *Physical Review Letters* en Novembre 2009) traitant exclusivement de la turbulence quasi-statique. Il y est montré comment une turbulence initialement tri-dimensionnelle transite vers un état quasi-bidimensionnelle sous l'action d'un champ magnétique imposé. Nombres des résultats présentés au sein de ce chapitre sont illustrés et expliqués au sein des quatre prochaines pages.

On the two-dimensionalization of quasi-static MHD turbulence

B. Favier,* F.S. Godeferd, and C. Cambon

LMFA UMR 5509 CNRS, École Centrale de Lyon, Université de Lyon, France

A. Delache

LaMUSE EA 3989, Université Jean Monnet, Saint-Étienne, France

(Dated: November 2009)

We analyse the anisotropy of turbulence in an electrically conducting fluid in the presence of a uniform magnetic field, for low magnetic Reynolds number, using the quasi-static approximation. In the linear approximation, the horizontal kinetic energy decays faster than the vertical one [Moffatt, JFM 28, 1967]. However, numerous numerical studies predict a different behavior, wherein the final state is characterized by a dominant horizontal energy. We investigate the corresponding nonlinear phenomenon using Direct Numerical Simulations, and we show that the final state of turbulence is very similar to the so-called “two-and-a-half-dimensional” flow [Montgomery & Turner, Phys. Fluids 25(2), 1982] and we explain the reason why the horizontal kinetic energy is dominant.

In most geophysical and astrophysical flows, turbulence is affected by forces that distort significantly some of its scales in an anisotropic manner, such as the Lorentz force arising from the presence of an external magnetic field in a conducting fluid. This is the case *e.g.* in the solar wind, wherein the large scales may usefully be treated in the one-fluid magnetohydrodynamics approximation. Of course, the kinetic plasma effects at smaller scales are excluded from such a description, but the large scale dynamical anisotropy is still a matter of large interest. Another category of flows which share this specific turbulent dynamics forced by an imposed magnetic field is found in liquid metals flows, be they of geophysical nature—the melted iron core of the earth—or of academic interest in the laboratory [1], or even in industrial configurations in sodium.

Forgetting the possible inhomogeneities arising from the presence of boundaries or interfaces in the latter flows, the fact is that homogeneous anisotropic turbulence remains far less studied than isotropic turbulence. The response of initially isotropic turbulence to a static magnetic field is nonetheless documented, in pioneering theoretical works [2], many numerical [3–6] and experimental studies [1]. One of the main properties of this kind of flow is the suppression of the three-dimensional motion due to anisotropic linear Joule dissipation, leading to a flow without variations in the direction of the imposed magnetic field. In the linear regime, this final state is characterized by the following scaling of the vertical fluctuating velocity component w , along the magnetic field, and the horizontal ones u and v [2]:

$$\langle w^2 \rangle \simeq \langle u^2 \rangle + \langle v^2 \rangle. \quad (1)$$

However, recent numerical simulations of low magnetic Reynolds number turbulence show that the horizontal kinetic energy is dominant, at least at large scales [5, 7]. In

this letter, we present results of Direct Numerical Simulations (DNS) in order to analyse this nonlinear phenomenon, which is up to now considered as a restoration of isotropy, but still has to be elucidated [8].

We consider initially isotropic homogeneous turbulence in an incompressible conducting fluid. The fluid is characterized by a kinematic viscosity ν , a density ρ and a magnetic diffusivity $\eta = (\sigma\mu_0)^{-1}$; σ is the electrical conductivity, μ_0 the magnetic permeability. The initial *rms* velocity is u_0 , the integral length scale l_0 . The Reynolds number and its magnetic counterpart are $Re = (u_0 l_0)/\nu \gg 1$ and $R_M = (u_0 l_0)/\eta \ll 1$. The flow is submitted to a uniform vertical magnetic field $\mathbf{B}_0$ scaled as Alfvén speed as $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}/\sqrt{\rho\mu_0}$. The ratio between the eddy turnover time and the Joule time is the magnetic interaction number $N = (B_0^2 l_0)/(\eta u_0)$. Within the quasi-static approximation [9], the Navier-Stokes equations become

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\rho^{-1} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \underbrace{\eta^{-1} B_0^2 \Delta^{-1} \partial_{zz}^2 \mathbf{u}}_{\mathbf{F}} \quad (2)$$

where $\mathbf{F}$ is the rotational part of the Lorentz force, Δ^{-1} is the inverse of the Laplacian operator and z the vertical coordinate, along the direction of $\mathbf{B}_0$. Compressible effects are not taken into account here, so that $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. A pseudo-spectral method is used to solve equation (2). The velocity field is computed in a cubic box of side

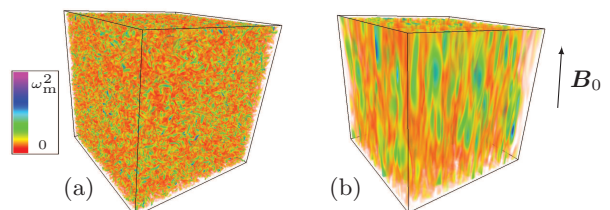


FIG. 1: Volume rendering of the enstrophy (ω_m^2 is the maximum value) using VAPOR [10]. (a) Initial isotropic condition. (b) Final state for $N = 5$.

*benjamin.favier@ec-lyon.fr

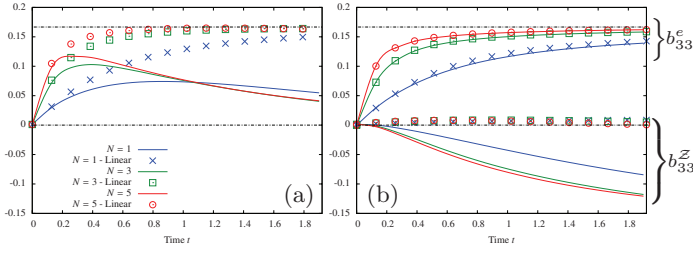


FIG. 2: Anisotropy tensor of the Reynolds stresses versus time. (a) $b_{33}^e(t)$. (b) $b_{33}^e(t)$ and $b_{33}^z(t)$.

2π with periodic boundary conditions using 256^3 Fourier modes. A spherical 2/3-truncation of Fourier modes is used to avoid aliasing and the time scheme is third-order Adams-Bashforth. The Eulerian velocity field is initialized using an isotropic pre-computation of eq.(2) in the hydrodynamic case. The initial incompressible velocity field is a random superposition of Fourier modes distributed with a narrow-band kinetic energy spectrum $E(k, t=0) \simeq k^4 \exp(-2(k/k_i)^2)$ peaked at k_i . Due to the imposed magnetic field, the vertical velocity correlation lengths quickly increase. We therefore avoid interference with the periodic boundary conditions by choosing k_i larger than for a neutral fluid simulation. At the end of the pre-computation stage, the *rms* velocity is $u_0 = 0.45$ and the integral scale $l_0 = 0.16$ yielding $Re \simeq 100$. The corresponding turbulent flow field (visualized on fig.1(a)) is used as initial state for three different MHD simulations. In all of them $R_M \simeq 0.1$ (hence $\eta \simeq 1$), so that the quasi-static approximation is justified [9]. Three different amplitudes of the imposed magnetic field are chosen, that correspond to $N=1, 3$ and 5 . For each case, we perform additional “linear” simulations by neglecting the nonlinear advective term in eq.(2). The simulations are freely decaying, since forcing would hinder the natural development of anisotropy.

We first investigate the Reynolds stress tensor $R_{ij} = \langle u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}) \rangle$ and its anisotropic contents $b_{ij} = R_{ij}/(2\mathcal{K}) - \delta_{ij}/3$ where $\mathcal{K}$ is the total kinetic energy. Considering the axisymmetry of the flow about the axis of $\mathbf{B}_0$, only one of the diagonal terms is relevant. Fig.2(a) plots the time-dependent $b_{33}(t)$ for the three values of N . The index 3 stands for the vertical direction. The initial value $b_{33}(t=0) = 0$ is characteristic of isotropic turbulence. In the linear regime (symbols in fig.2(a)), b_{33} quickly recovers $b_{33} \simeq 1/6$ corresponding to the scaling in eq. (1). After a short initial growth—the larger N , the shorter this transient stage—the nonlinear simulations exhibit a decay of b_{33} . This indicates that the vertical kinetic energy decays faster than the total kinetic energy, in agreement with previous observations [5, 7]. This observation alone could lead to the incorrect conclusion that the quadratic nonlinearity in eq.(2) tends to restore 3D isotropy. A closer inspection of b_{33} provides a significantly different viewpoint, when considering the decom-

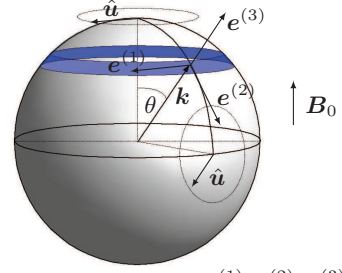


FIG. 3: Craya-Herring frame $(\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)}, \mathbf{e}^{(3)})$ in Fourier space. Fourier modes in the blue region contribute to $E(k, \theta)$ (eq.(5)).

position of $b_{33} = b_{33}^e + b_{33}^z$ in directional and polarization anisotropy contributions [11, 12], following:

$$b_{33}^e = (2\mathcal{K})^{-1} \int (e(\mathbf{k}) - E(k)/(4\pi k^2)) \sin^2 \theta d^3 \mathbf{k} \quad (3)$$

$$b_{33}^z = (2\mathcal{K})^{-1} \int \mathcal{Z}(\mathbf{k}) \sin^2 \theta d^3 \mathbf{k} \quad (4)$$

where θ is the polar angle between the wave vector $\mathbf{k}$ and the axis of symmetry, $E(k)$ is the spherically-averaged kinetic energy spectrum, $\mathcal{Z}(k)$ is the polarization spectrum (see below). This decomposition is easier described in polar-spherical coordinates (fig.3) with unit toroidal vector $\mathbf{e}^{(1)}$ and poloidal vector $\mathbf{e}^{(2)}$. Due to incompressibility $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = 0$, $\hat{\mathbf{u}} = \hat{u}^{(1)}\mathbf{e}^{(1)} + \hat{u}^{(2)}\mathbf{e}^{(2)}$: each Fourier mode has a toroidal contribution $\hat{u}^{(1)}$ and a poloidal one $\hat{u}^{(2)}$ (we drop the explicit $\mathbf{k}$ dependence in this paragraph). Assuming horizontal plane mirror symmetry, thus without helicity, the kinetic energy density is $e = E^{\text{pol}} + E^{\text{tor}} = \frac{1}{2} (\hat{u}^{(2)*}\hat{u}^{(2)} + \hat{u}^{(1)*}\hat{u}^{(1)})$ and the polarization tensor density is $\mathcal{Z} = E^{\text{pol}} - E^{\text{tor}}$. A detailed presentation of this decomposition can be found in [11]. Note that b_{33}^e is close to the so-called Shebalin angle [13].

Fig.2(b) shows the time evolution of b_{33}^e and b_{33}^z . For all values of N , b_{33}^e increases indicating that the kinetic energy density $e(\mathbf{k})$ is not isotropically distributed among the different wavevector orientations. In the linear runs (symbols in fig.2) b_{33}^e follows closely the nonlinear evolution (continuous lines in fig.2). Unlike b_{33}^e , a departure is observed for b_{33}^z : it decreases in the nonlinear simulations, but remains negligible in the linear runs. Thus, the decay of b_{33} observed in fig.2(a) is due to a nonlinear decay of the polarization contribution b_{33}^z .

The analysis can be even more refined when considering the scale dependence of the poloidal/toroidal anisotropy. In eq.(2), one observes that the Lorentz force introduces an additional anisotropic dissipation, upon examining the Fourier transform of $\mathbf{F}$: $\hat{\mathbf{F}} = -(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \hat{\mathbf{u}}/(\eta k^4)$ shows that the vertical modes ($\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$) are strongly damped whereas horizontal ones ($\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$) are only modified by pressure effects. This well-known phenomenon, which is linear and characterized by a Joule timescale $\tau_J = \eta/B_0^2$, is responsible for the initial growth of b_{33}^e observed in fig.2(a). Note that τ_J can be used to rescale t so that all curves for b_{33}^e on fig.2(b) collapse.

Let us define angular energy spectra defined by

$$E(k, \theta) = f(\theta) \sum_{T(k, \theta)} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{u}}^*, \quad (5)$$

where $T(k, \theta)$ denotes the torus-shaped volume defined from $k - \Delta k/2 < |\mathbf{k}| < k + \Delta k/2$ and $\theta - \Delta\theta/2 < \theta < \theta + \Delta\theta/2$, with $\Delta k = 1$ and $\Delta\theta = \pi/10$ the Fourier space discretisation steps (blue domain in fig.3). $f(\theta)$ is the geometrical weighting function such that the angular spectra collapse in isotropic turbulence. Torus-averaged angular spectra $E(k, \theta)$ have already been used in the context of rotating turbulence [12] and are similar to the so-called ring decomposition [3]. In fig.4, we present the angular spectra for five orientations from the equator ($\theta \simeq \pi/2$) to the pole ($\theta \simeq 0$), for $N = 5$. In addition, we distinguish the poloidal and toroidal spectra E^{pol} and E^{tor} , and the linear simulation from the nonlinear one (figs.4(a) and fig.4(b) respectively). The figures show that almost all the energy is concentrated in the equatorial spectrum, as a result from the linear Joule dissipation, independently on the poloidal or toroidal contributions, and in both the linear and nonlinear simulations. The reasons for the observed differences between the latter two cases are two-fold: (a) the nonlinear downscale energy cascade increases the energy in the small scale range of the nonlinear run with respect to the linear one of fig.4(b); (b) in the meantime, a nonlinear angular transfer kicks in, explaining the polar energy depletion, in the same figure, for the linear runs (see *e.g.* [3]). Given that polar modes contribute only to the horizontal kinetic energy (clearly from geometrical reasons, see fig.3) combined with a more efficient Joule dissipation in the same region, this linear mechanism is responsible for the rapid decrease of horizontal energy, *i.e.* rapid *increase* of b_{33} , observed at short times on fig.2(a). There is however nothing in this mechanism that explains the decay, of b_{33}^Z in the nonlinear simulation results plotted on fig.2(b).

The crucial difference between linear and nonlinear simulations in fig.4 is brought to light by the poloidal-toroidal decomposition. At the equator in the full DNS, the horizontal kinetic energy (also E^{tor} at this specific orientation) is dominant at large scales, whereas the vertical kinetic energy (also E^{pol}) is dominant at small scales (the inset of fig.4(a), in linear scale, shows more clearly the important large-scale energy gap between the two modes). This result explains the increase of horizontal kinetic energy with respect to the vertical energy, hence the decay of b_{33}^Z . It is clearly of nonlinear origin since it disappears when nonlinear interactions are removed (fig.4(a)). Although already observed in previous works [7], this unpredicted dominance of horizontal energy was not understood. We provide here a more precise analysis since only modes such that $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$ appear to have noticeably different poloidal and toroidal energies.

In short, the anisotropic Lorentz force is responsible for a preferential dissipation leading to a turbulent flow

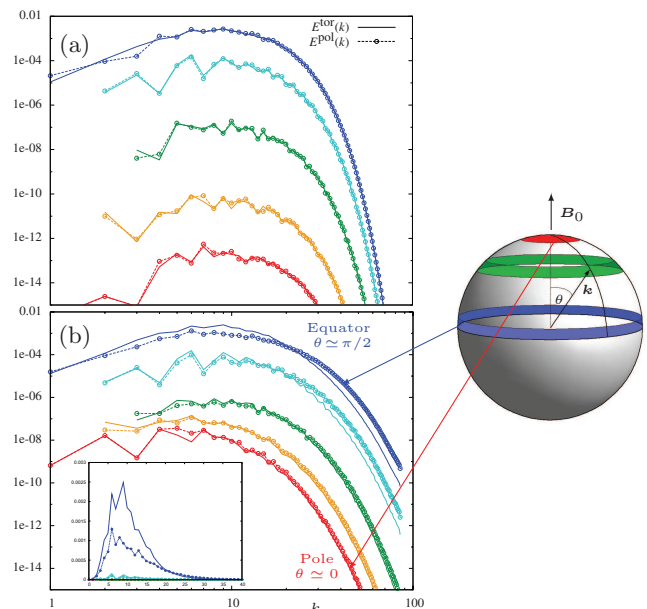


FIG. 4: Angular energy spectra at $t \simeq 1.2$ for $N = 5$. (a) Linear simulation. (b) Nonlinear simulation (the small figure is plotted in linear scale).

independent of the vertical direction (see fig.1(b)); this linear effect concentrates the kinetic energy among horizontal modes, as attested by the growth of b_{33}^e . Then, due to nonlinearity, the energy is anisotropically distributed among poloidal and toroidal components leading to a nonzero polarization and negative b_{33}^Z .

The quasi-static MHD turbulence is however far from being purely two-dimensional. Although the flow tends to be invariant in the vertical direction, the vertical kinetic energy does not decay to zero (and is even dominant in the linear regime). This state is often referred to as two-dimensional, three-components (2D-3C) or “two-and-a-half-dimensional” turbulence [14]. We now propose a simple description of the above results on directional anisotropy and polarization. We first write the Navier-Stokes equations for a flow independent of the vertical direction z , so that $\partial/\partial z = 0$:

$$\partial_t w + \mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp w = \nu \nabla_\perp^2 w \quad (6)$$

$$\partial_t \mathbf{u}_\perp + \mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp \mathbf{u}_\perp = -\rho^{-1} \nabla_\perp p + \nu \nabla_\perp^2 \mathbf{u}_\perp \quad (7)$$

where $\mathbf{u}_\perp = (u, v)$ is the horizontal velocity component and $\nabla_\perp$ the horizontal gradient. In both equations, the Lorentz force disappears altogether. Eq.(6) for the vertical velocity is that of a passive scalar, whereas eq.(7) for horizontal velocity is characteristic of 2D neutral-fluid turbulence. One therefore expects an inverse energy cascade for the horizontal velocity (or at least a strongly attenuated direct cascade) and a classical direct cascade for the vertical velocity. This is consistent with the results observed on fig.4(a) since the slope of the toroidal (*i.e.* horizontal) component is steeper than the slope of the

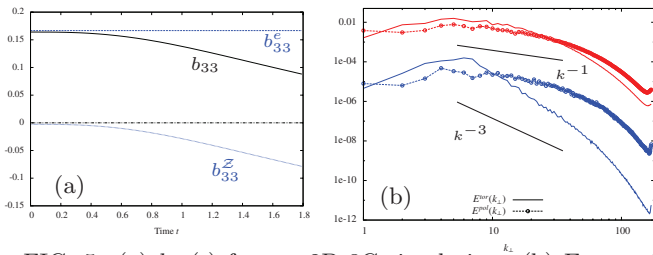


FIG. 5: (a) $b_{33}(t)$ from a 2D-3C simulation. (b) Equatorial energy spectra $E^{\text{pol,tor}}(k_{\perp})$. Red/top: Quasi-static 3D MHD. Blue/bottom: 2D-3C (shifted down by two decades).

poloidal (*i.e.* vertical) component for horizontal modes (*i.e.* at the equator). Thus, we explain the large-scale dominance of horizontal energy as a result of 2D-like cascade for the horizontal velocity. The vertical component behaves like a passive scalar, and is therefore characterized by a direct cascade so that the vertical energy is dominant at small scales. Note that this effect has nothing to do with a restoration of isotropy, even if b_{33} tends to its isotropic value.

To assess the validity of this analysis, we perform two additional simulations. First, we compute the evolution of hydrodynamic turbulence from an initial 2D-3C state and a resolution of 512^2 . Fig.5(a) shows that $b_{33} = 1/6$ during all the simulation. As in quasi-static MHD turbulence, 2D-3C turbulence is characterized by a negative polarization indicating a dominance of toroidal kinetic energy with respect to the poloidal one. Fig.5(b) shows the equatorial toroidal and poloidal energy spectra $E^{\text{tor,pol}}(k_{\perp})$ (bottom of the figure) that again exhibit a dominance of toroidal energy at large scales and the opposite at small scales, in support to our previous analysis on the final state of quasi-static MHD turbulence. Secondly, we would like to validate the universality of the mechanism at higher Reynolds number MHD turbulence, by performing a quasi-static simulation at $Re \simeq 300$, using 512^3 Fourier modes. We choose the case $N=5$ and $R_M=0.1$. In this 3D simulation, the crossing of the toroidal and poloidal spectra (top spectra in fig.5(b)) appears as in fig.4(a) and in the previously described 2D-3C spectra. The k^{-3} and k^{-1} slopes are plotted for comparison with common scalings of 2D turbulence with passive scalar [15, 16], again showing clearly that the energy cascade is more efficient for the toroidal energy than for the poloidal one, resulting in a steeper slope for toroidal kinetic energy.

In conclusion, we have shown that the final state of quasi-static MHD turbulence is analogous to 2D-3C hydrodynamic turbulence. The mechanism responsible for the transition from 3D isotropic turbulence to 2D-3C turbulence is subtle. It combines the anisotropic Joule dissipation, which is a linear phenomenon, and nonlin-

ear energy transfers. If nonlinearities are neglected, this final state is characterized by a dominance of vertical kinetic energy [2]. However, from the quasi-2D state arising from Joule dissipation, nonlinearity induces different dynamics for toroidal/horizontal velocity components and for poloidal/vertical components. The horizontal flow behaves like 2D turbulence whereas the vertical flow behaves like a passive scalar. Accordingly, the energy cascade (and thus the dissipation) is more efficient in the vertical direction, explaining the overall dominance of horizontal energy. We have also shown that the poloidal/toroidal decomposition and the distinction between directional and polarization anisotropy are fundamental to explain these physical phenomena. This description may help to explain the large scale anisotropy of some geophysical or astrophysical conducting fluid flows, with the possibility of coupling the 2D-3C model for the large scales to a specific turbulence closure at small scales, thus allowing to achieve very high Reynolds number simulations.

The authors would like to thank Pr. H.K. Moffatt and Dr. W.J.T. Bos for useful discussions, and to acknowledge support of CNRS IDRIS for computational time under projects #082206 and #071433.

-
- [1] A. Alemany, R. Moreau, P.L. Sulem and U. Frisch. *J. de Mécanique* **18**, 277–313 (1979).
 - [2] H.K. Moffatt. *J. Fluid Mech.* **28**, 571–592 (1967).
 - [3] P. Burattini, M. Kinet, D. Carati and B. Knaepen. *Physica D* **237**, 2062–2066 (2008).
 - [4] U. Schumann. *J. Fluid Mech.* **74**, 31–58 (1976).
 - [5] A. Vorobev, O. Zikanov, P.A. Davidson and B. Knaepen. *Phys. Fluids* **17**, 125105 (2005).
 - [6] O. Zikanov and A. Thess. *J. Fluid Mech.* **358**, 299–333 (1998).
 - [7] P. Burattini, M. Kinet, D. Carati and B. Knaepen. *Phys. Fluids* **20** (065110) (2008).
 - [8] B. Knaepen and R. Moreau. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **40**, 25–45 (2008).
 - [9] B. Knaepen, S. Kassinos and D. Carati. *J. Fluid Mech.* **513**, 199–220 (2004).
 - [10] J. Clyne, P. Mininni, A. Norton and M. Rast. *New J. of Physics* **9**, 301 (2007).
 - [11] C. Cambon and L. Jacquin. *J. Fluid Mech.* **202**, 295–317 (1989).
 - [12] C. Cambon, N. N. Mansour and F. S. Godeferd. *J. Fluid Mech.* **337**, 303–332 (1997).
 - [13] J.V. Shebalin, W.H. Matthaeus and D. Montgomery. *J. Plasma Phys.* **29**, 525 (1983).
 - [14] D. Montgomery and L. Turner. *Phys. Fluids* **25** (2), 345–349 (1982).
 - [15] G.K. Batchelor. *J. Fluid Mech.* **5**, 113 (1959).
 - [16] W.J.T. Bos, B. Kadoch, K. Schneider and J.-P. Bertoglio. *Physics of Fluids* **21** (11), 115105 (2009).

Chapitre 5

Turbulence MHD en rotation.

Ce chapitre a pour objectif d'étudier une turbulence homogène en rotation soumise à un champ magnétique uniforme et stationnaire. Il existe bien évidemment un grand nombre de régimes différents caractérisant de tels écoulements. L'objectif est ici de déterminer les grandes tendances et d'identifier certains régimes représentatifs, particulièrement en ce qui concerne l'anisotropie.

De par sa grande similarité avec certains écoulements géophysiques ou astrophysiques, ce type d'écoulement est souvent étudié dans le contexte d'une géométrie sphérique ou cylindrique (voir par exemple les approches expérimentales dues à [Nataf *et al.*(2008), Schmitt *et al.*(2008)], quelques exemples numériques [Mininni & Montgomery(2006), Mininni *et al.*(2008)], et une revue [Zhang & Shubert(2000)]). De même, de nombreuses applications industrielles font intervenir le couplage entre la rotation et un champ magnétique (ou encore un champ magnétique tournant pour les applications de croissances cristallines par exemple [Dold & Benz(1999), Moffatt(2000)]) pour lesquelles une géométrie cylindrique est souvent retenue (voir par exemple [Montgomery *et al.*(1978)]). À notre connaissance, très peu de travaux se sont jusqu'alors consacrés au couplage entre une rotation d'ensemble et l'application d'un champ magnétique externe dans le contexte d'une turbulence homogène. L'importance de la force de Coriolis dans un contexte MHD a été mise en évidence par Chandrasekhar [Chandrasekhar(1953)]. La période finale de déclin a été étudiée par B. Lehnert [Lehnert(1955)] et une revue détaillée des écoulements MHD en rotation peut être trouvée dans [Acheson & Hide(1972)]. L'impact des ondes inertielles sur la dynamo turbulente a également été considéré [Moffatt(1970)].

L'application directe de ce type d'écoulements est la turbulence locale du noyau terrestre, mais dans ce cas, les phénomènes convectifs sont supposés alimenter la turbulence en énergie et doivent être pris en compte. Diverses études théoriques sont consacrées à la structure anisotrope de la turbulence au sein du noyau terrestre [Braginsky & Meytlis(1990), Pierre(1996)], et l'on notera également l'approche numérique de [Matsushima *et al.*(1999)]. Le présent travail n'est pas directement applicable dans ce contexte puisque la turbulence est ici en déclin. L'objectif est cependant le même : on tente de s'affranchir de tous phénomènes inhomogènes afin de considérer la dynamique intrinsèque de la turbulence et l'anisotropie engendrée par l'application de la force de Coriolis et la force de Lorentz. Indépendamment, ces deux phénomènes ont été largement étudiés comme nous l'avons déjà mentionné au cours des deux chapitres précédents. En particulier, l'accent sera porté sur un écoulement fortement influencé par la rotation et le champ magnétique extérieur (*i.e.* $N \gg 1$ et $Ro \ll 1$).

5.1 Équations et définitions

Cette partie s'intéresse à l'effet couplé d'une rotation d'ensemble et d'un champ magnétique externe imposé sur une turbulence homogène. Les équations générales sont les équations de Navier-Stokes auxquelles s'ajoutent la force de Coriolis et la force de Lorentz. L'équation d'induction n'est pas modifiée par le passage du repère fixe au repère tournant. Le système d'équations pour le champ de vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ et le champ magnétique fluctuant $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$, en présence d'un champ magnétique uniforme $\mathbf{B}_0$ et dans un repère tournant à la vitesse Ω , est :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla P - 2\Omega \times \mathbf{u} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b} + \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \mathbf{b} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \mathbf{u} + \eta \nabla^2 \mathbf{b} \quad (5.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (5.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (5.4)$$

où P inclut la force centrifuge et la pression magnétique.

Il existe de nombreux paramètres caractérisant de tels écoulements. On se restreint ici au cas d'un écoulement turbulent développé de telle manière que $Re \gg 1$. Le nombre de Prandtl magnétique, qui est une caractéristique du fluide, est défini par le rapport entre diffusivité moléculaire et diffusivité magnétique selon :

$$Pr_M = \frac{\nu}{\eta} . \quad (5.5)$$

Puisque notre étude suppose un nombre de Reynolds constant, Pr_M est directement lié au nombre de Reynolds magnétique défini par :

$$R_M = \frac{u_0 l_0}{\eta} = Re Pr_M . \quad (5.6)$$

Dans la suite, on étudiera les régimes $Pr_M \approx 1$ (i.e. $R_M \approx Re \gg 1$) ainsi que les régimes $Pr_M \ll 1$ (i.e. $R_M \ll Re$).

L'influence du champ magnétique sur la dynamique est souvent caractérisée par le nombre d'interaction défini par :

$$N = \frac{B_0^2 l_0}{\eta u_0} , \quad (5.7)$$

ou encore par le nombre de Lundquist défini par :

$$S = \frac{B_0 l_0}{\eta} . \quad (5.8)$$

Dans la suite, nous nous plaçons dans un contexte de fort champ magnétique de telle manière que $N > 1$. Les termes non-linéaires d'advection sont donc dominés par la force de Lorentz.

L'influence de la rotation peut être caractérisée par le nombre de Rossby défini comme le rapport entre advection et force de Coriolis selon :

$$Ro = \frac{u_0}{2\Omega l_0} . \quad (5.9)$$

u_0	l_0	η	ν	B_0	Ω	Ro	N	Λ	$\mathcal{L}$
3.10^{-4}	2.10^6	2.6	10^{-7}	0.1	10^{-4}	10^{-5}	10^5	1	2.10^{-4}

TAB. 5.1 – Estimation des nombres adimensionnés pour le noyau terrestre [Acheson & Hide(1972)][Moffatt(1978)].

Nous supposons également que le nombre de Rossby est très faible, *i.e.* que la rotation joue un rôle important dans la dynamique de l'écoulement.

Enfin, l'influence relative de la rotation et du champ magnétique peut s'estimer grâce à deux nombres adimensionnés. Le premier est le nombre d'Elsasser Λ , qui caractérise l'importance relative de la force de Coriolis et de la force de Lorentz. Celui-ci est défini par :

$$\Lambda = N Ro = \frac{B_0^2}{2\Omega\eta} . \quad (5.10)$$

Il est également possible de comparer la pulsation maximum des ondes d'Alfvén avec celle des ondes d'inertie. Ce rapport définit le nombre de Lehnert selon[†] :

$$\mathcal{L} = \frac{B_0 k}{2\Omega} . \quad (5.11)$$

Contrairement au nombre d'Elsasser, le nombre de Lehnert dépend de l'échelle considérée. $B_0 k$ correspond à la pulsation maximum des ondes d'Alfvén tandis que 2Ω correspond à la pulsation maximum des ondes d'inertie, et il est ainsi possible de définir un nombre d'onde de coupure caractérisé par un nombre de Lehnert de l'ordre de l'unité :

$$k_c = \frac{2\Omega}{B_0} . \quad (5.12)$$

Le tableau 5.1 donne l'ordre de grandeur de ces différents nombres adimensionnés pour l'écoulement au sein du noyau terrestre.

5.2 Solutions linéaires

5.2.1 Ondes magnéto-inertielles

La linéarisation des équations (5.1) et (5.2) conduit, dans le repère de Craya, au système matriciel suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \hat{u}^{(1)} \\ \hat{u}^{(2)} \\ \hat{b}^{(1)} \\ \hat{b}^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_R & -i\sigma_B & 0 \\ \sigma_R & 0 & 0 & -i\sigma_B \\ -i\sigma_B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\sigma_B & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}^{(1)} \\ \hat{u}^{(2)} \\ \hat{b}^{(1)} \\ \hat{b}^{(2)} \end{pmatrix} = 0 . \quad (5.13)$$

où les phénomènes dissipatifs ont été négligés dans une première approche.

[†]Une définition analogue dans l'espace physique serait $\mathcal{L} = B_0 / (2\Omega l_0)$, mais l'on préfère ici introduire la définition (5.11) qui fait explicitement apparaître le nombre d'onde.

Contrairement au cas sans rotation, il n'est plus possible de découpler les composantes poloïdales et toroïdales des variables cinétiques et magnétiques, du fait du couplage induit par le terme extra-diagonal σ_R .

Les valeurs propres de l'opérateur linéaire sont :

$$X_j = \frac{1}{2}i \left(\pm\sigma_R \pm \sqrt{\sigma_R^2 + 4\sigma_B^2} \right) \quad j = 1, 4 \quad (5.14)$$

et sont liées à la pulsation des ondes mises en évidence par la linéarisation des équations. Ces ondes seront qualifiées d'ondes magnéto-inertiellles par la suite, et ont déjà été mises en évidence à maintes reprises [Chandrasekhar(1953), Lehnert(1955), Chandrasekhar(1961), Acheson & Hide(1972)].

Configuration axisymétrique - Vitesses de groupe et de phase

Afin de conserver une configuration axisymétrique et de simplifier l'analyse qui va suivre, nous considérons que Ω et B_0 sont colinéaires et verticaux. Dans ce cas, et à partir des valeurs propres (5.14), la relation de dispersion est :

$$\sigma_{BR}(k, \theta) = \pm\Omega \cos \theta \pm \sqrt{\Omega^2 \cos^2 \theta + B_0^2 k^2 \cos^2 \theta} \quad (5.15)$$

$$= \Omega \cos \theta \left(\pm 1 \pm \sqrt{1 + 4\mathcal{L}^2} \right), \quad (5.16)$$

où σ_{BR} est la pulsation des ondes magnéto-inertiellles. On retrouve bien évidemment la pulsation des ondes inertiellles lorsque $\mathcal{L} \ll 1$, et la pulsation des ondes d'Alfvén lorsque $\mathcal{L} \gg 1$. La vitesse de phase de ces ondes est simplement une combinaison de la vitesse de phase des ondes inertiellles v_ϕ^R (3.19) et de la vitesse de phase des ondes d'Alfvén v_ϕ^B (4.28) selon :

$$\mathbf{v}_\phi(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \left(\pm \mathbf{v}_\phi^R \pm \sqrt{\mathbf{v}_\phi^{R2} + 4\mathbf{v}_\phi^{B2}} \right) = \frac{\cos \theta}{k^2} \left(\pm\Omega \pm \sqrt{\Omega^2 + B_0^2 k^2} \right) \mathbf{e}^{(3)}. \quad (5.17)$$

Calculons la vitesse de groupe dans le repère de Craya selon :

$$\mathbf{v}_g(\mathbf{k}) = \nabla \sigma_{BR}(k, \theta) = \frac{\partial \sigma_{BR}(k, \theta)}{\partial k} \mathbf{e}^{(3)} + \frac{1}{k} \frac{\partial \sigma_{BR}(k, \theta)}{\partial \theta} \mathbf{e}^{(2)} \quad (5.18)$$

$$= \frac{B_0^2 k \cos \theta}{\sqrt{\Omega^2 + B_0^2 k^2}} \mathbf{e}^{(3)} - \frac{\left(\Omega + \sqrt{\Omega^2 + B_0^2 k^2} \right) \sin \theta}{k} \mathbf{e}^{(2)}, \quad (5.19)$$

où l'on s'est restreint au cas des signes positifs dans l'expression (5.15). Rappelons que $\mathbf{n}$ est la direction privilégiée autour de laquelle se base la décomposition poloïdale-toroïdale. En mettant en évidence le fait que, dans le repère de Craya,

$$\cos \theta \mathbf{e}^{(3)} - \sin \theta \mathbf{e}^{(2)} = \mathbf{n} \quad (5.20)$$

il est possible de simplifier l'équation (5.19) afin d'aboutir à l'expression

$$\mathbf{v}_g(\mathbf{k}) = \underbrace{\frac{B_0 k}{\sqrt{\Omega^2 + B_0^2 k^2}} \mathbf{B}_0}_{(a)} - \underbrace{\frac{\Omega \sin \theta}{k} \left(1 + \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2 + B_0^2 k^2}} \right)}_{(b)} \mathbf{e}^{(2)}. \quad (5.21)$$

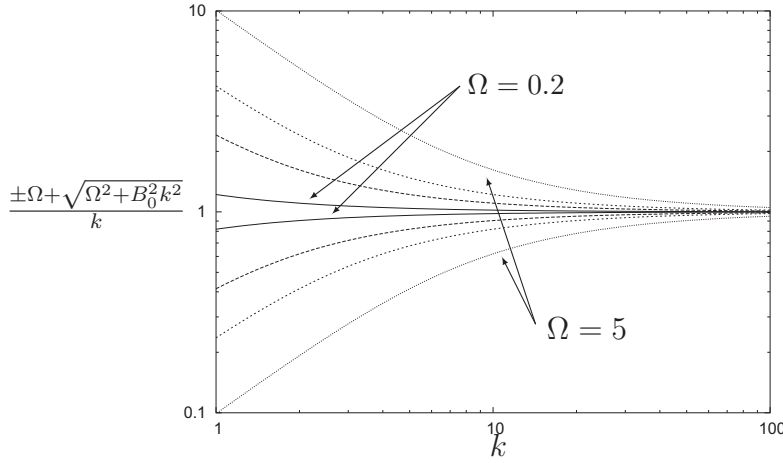


FIG. 5.1 – Vitesse de groupe des ondes magnéto-inertiellles pour les modes perpendiculaires au champ magnétique. $B_0 = 1$.

Le terme (a) correspond à une propagation d'énergie dans la direction du champ magnétique. Cette propagation se fait à une vitesse différente des ondes d'Alfvén pures et de manière dispersive, mais ne dépend pas de la direction du nombre d'onde. Le second terme (b) correspond à une propagation d'énergie perpendiculairement au vecteur d'onde. Cette propagation se fait à une vitesse différente des ondes inertiellles pures.

En introduisant le nombre de Lehnert $\mathcal{L}$, l'expression (5.21) se réécrit :

$$\mathbf{v}_g(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/(4\mathcal{L}^2)}} \mathbf{B}_0 - \frac{\Omega \sin \theta}{k} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + 4\mathcal{L}^2}} \right) \mathbf{e}^{(2)}, \quad (5.22)$$

et l'on retrouve bien l'expression (4.28) lorsque $\mathcal{L} \rightarrow \infty$ et l'expression (3.22) lorsque $\mathcal{L} \rightarrow 0$.

Il se dégage donc deux contributions, l'une correspondant à la propagation d'ondes d'Alfvén influencées par la présence de la rotation, et l'autre correspondant à la propagation d'ondes inertiellles influencées par la présence du champ magnétique. Une autre manière d'écrire la relation (5.21) consiste à projeter le terme (b) dans le plan $(\mathbf{e}^{(3)}, \mathbf{n})$ afin d'isoler les contributions colinéaires à $\mathbf{n}^\dagger$:

$$\mathbf{v}_g(\mathbf{k}) = \frac{\pm\Omega + \sqrt{\Omega^2 + B_0^2 k^2}}{k} \mathbf{n} + \frac{\Omega \cos \theta}{k} \left(1 \pm \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2 + B_0^2 k^2}} \right) \mathbf{e}^{(3)}. \quad (5.23)$$

L'amplitude du terme colinéaire à $\mathbf{n}$ est représentée au sein de la figure 5.1. La vitesse d'Alfvén est unitaire ($B_0 = 1$) et l'on fait varier le taux de rotation. Il apparaît ainsi que la compétition des termes (a) et (b) de l'équation (5.21) engendre deux vitesses de propagation différentes dans la direction verticale : l'une étant plus grande que celle des ondes d'Alfvén pures et l'autre plus faible. Il est à noter que l'effet de la rotation est d'autant plus important que le nombre d'onde est petit et qu'il n'existe pas de propagation d'énergie purement horizontale.

Une visualisation de la propagation de ces ondes aide à en comprendre la nature et permet de confirmer l'analyse portant sur la vitesse de groupe. Nous utilisons pour cela le même protocole que pour les ondes d'Alfvén pures. L'axe de rotation et le champ magnétique sont

[†]Le calcul du gradient en coordonnées cartésiennes de l'équation (5.19) aboutit directement à la relation (5.23).

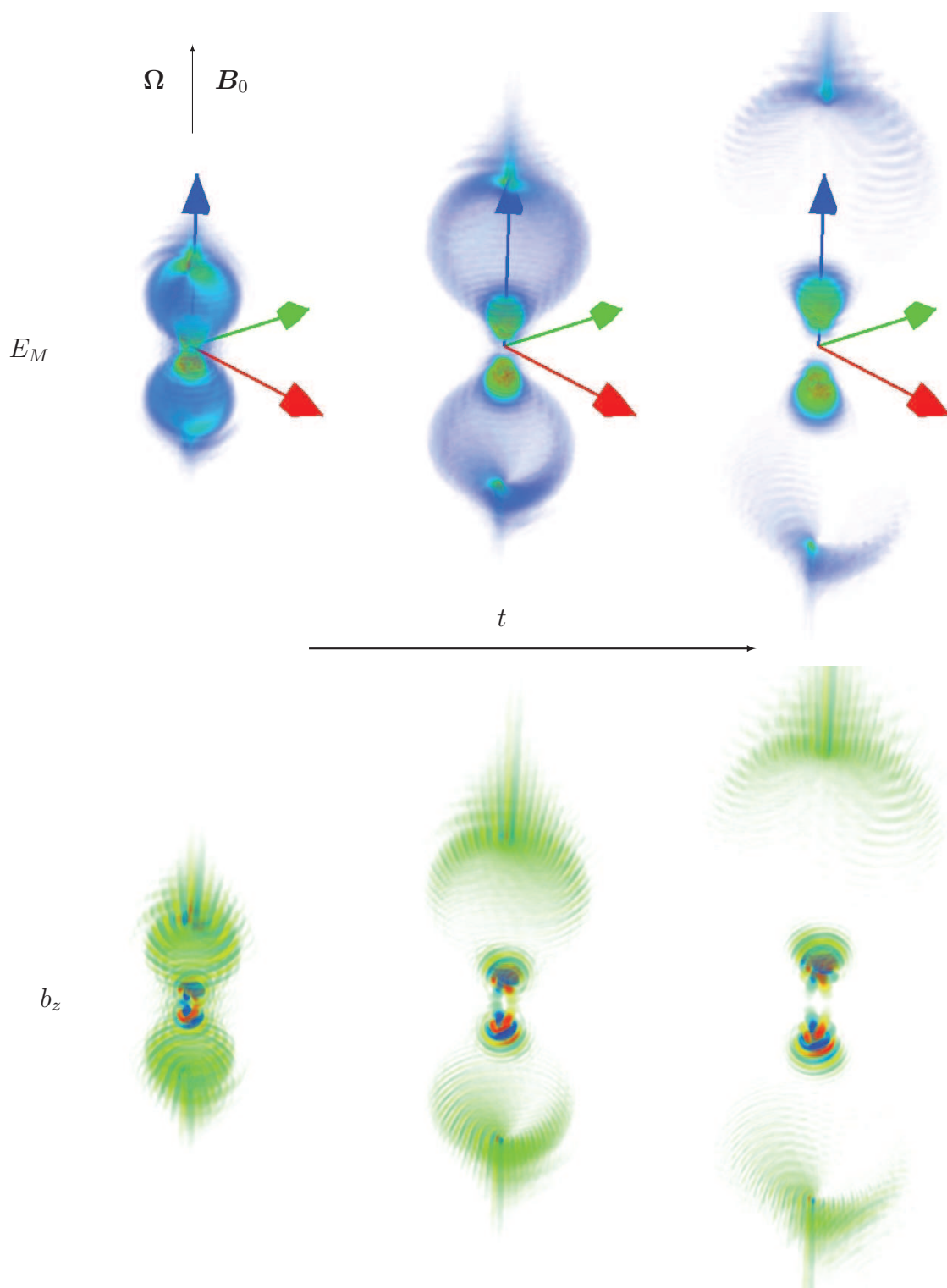


FIG. 5.2 – Réponse impulsionnelle d'un fluide soumis à un champ magnétique vertical d'intensité $B_0 = 1$ dans un repère tournant à la vitesse $\Omega = 5$. L'énergie magnétique et la composante verticale des fluctuations magnétiques sont représentées à différents instants. Les processus dissipatifs sont négligés.

verticaux. La figure 5.2 présente l'énergie magnétique et la composante verticale des fluctuations magnétiques résultant d'une impulsion spatio-temporelle centrée.

On observe effectivement la compétition des termes (a) et (b) ainsi que la dispersion de l'énergie due au terme (b) de l'équation (5.21). À noter l'analogie entre la dispersion de l'énergie dans la direction perpendiculaire à l'axe de rotation au sein de la figure 5.2 à celle observée au sein de la figure 3.8.

5.2.2 Solutions non dissipatives dans l'espace spectral

Afin d'alléger l'écriture des solutions, nous considérons par la suite que les fluctuations magnétiques sont initialement nulles. Nous nous concentrons donc sur la phase de croissance des fluctuations magnétiques sous l'influence du champ de vitesse.

La transformée de Laplace du système (5.13) conduit à :

$$\begin{pmatrix} \omega & -\sigma_R & -i\sigma_B & 0 \\ \sigma_R & \omega & 0 & -i\sigma_B \\ -i\sigma_B & 0 & \omega & 0 \\ 0 & -i\sigma_B & 0 & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}^{(1)} \\ \tilde{u}^{(2)} \\ \tilde{b}^{(1)} \\ \tilde{b}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u}^{(1)}(0) \\ \tilde{u}^{(2)}(0) \\ \tilde{b}^{(1)}(0) \\ \tilde{b}^{(2)}(0) \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

où ω est la variable d'intégration de la transformée de Laplace et $\tilde{u}$ (resp. $\tilde{b}$) est la transformée de Laplace de $\hat{u}$ (resp. $\hat{b}$) définie selon :

$$\tilde{u}(k, \omega) = \int_0^{+\infty} e^{-\omega t} \hat{u}(k, t) dt. \quad (5.25)$$

La transformée inverse de Laplace fait intervenir l'intégration autour de quatre pôles et la solution pour la composante toroïdale de la vitesse s'écrit :

$$\hat{u}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^4 \frac{(X_i^2 + \sigma_B^2) \hat{u}^{(1)}(0) e^{X_i t}}{\sigma_R^2 + 2\sigma_B^2 + 2X_i^2} + \sum_{i=1}^4 \frac{X_i \sigma_R \hat{u}^{(2)}(0) e^{X_i t}}{\sigma_R^2 + 2\sigma_B^2 + 2X_i^2} \right). \quad (5.26)$$

On obtient une solution similaire pour la composante poloïdale. Ces solutions peuvent être simplifiée pour s'écrire sous la forme :

$$\hat{u}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + 4\sigma_B^2}} \left[\hat{u}^{(1)}(0) (\omega_1 \cos(\omega_1 t) + \omega_2 \cos(\omega_2 t)) + \hat{u}^{(2)}(0) (\omega_2 \sin(\omega_2 t) - \omega_1 \sin(\omega_1 t)) \right] \quad (5.27)$$

et

$$\hat{u}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + 4\sigma_B^2}} \left[\hat{u}^{(2)}(0) (\omega_1 \cos(\omega_1 t) + \omega_2 \cos(\omega_2 t)) - \hat{u}^{(1)}(0) (\omega_2 \sin(\omega_2 t) - \omega_1 \sin(\omega_1 t)) \right] \quad (5.28)$$

où ω_1 et ω_2 sont les deux pulsations caractéristiques du problème définies par :

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \left(-\sigma_R + \sqrt{\sigma_R^2 + 4\sigma_B^2} \right) \quad (5.29)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \left(\sigma_R + \sqrt{\sigma_R^2 + 4\sigma_B^2} \right) \quad (5.30)$$

avec $X_1 = -X_2 = i\omega_1$ and $X_3 = -X_4 = i\omega_2$.

Concernant les fluctuations magnétiques, la transformée inverse de Laplace fait intervenir quatre pôles et la première solution s'écrit :

$$\hat{b}^{(1)} = \frac{1}{2} i\sigma_B \left(\sum_{i=1}^4 \frac{(X_i^2 + \sigma_B^2) \hat{u}^{(1)}(0) e^{X_i t}}{X_i(\sigma_R^2 + 2\sigma_B^2 + 2X_i^2)} + \sum_{i=1}^4 \frac{\sigma_R \hat{u}^{(2)}(0) e^{X_i t}}{\sigma_R^2 + 2\sigma_B^2 + 2X_i^2} \right), \quad (5.31)$$

qui donne après simplification :

$$\hat{b}^{(1)} = \frac{2i\sigma_B \sin \left(\frac{\sqrt{\sigma_R^2 + 4\sigma_B^2} t}{2} \right)}{\sqrt{\sigma_R^2 + 4\sigma_B^2}} \left(\hat{u}^{(1)}(0) \cos(\sigma_R t/2) + \hat{u}^{(2)}(0) \sin(\sigma_R t/2) \right). \quad (5.32)$$

De la même manière, pour la composante poloïdale, on aboutit à :

$$\hat{b}^{(2)} = \frac{2i\sigma_B \sin \left(\frac{\sqrt{\sigma_R^2 + 4\sigma_B^2} t}{2} \right)}{\sqrt{\sigma_R^2 + 4\sigma_B^2}} \left(\hat{u}^{(2)}(0) \cos(\sigma_R t/2) - \hat{u}^{(1)}(0) \sin(\sigma_R t/2) \right). \quad (5.33)$$

5.2.3 Régime linéaire dissipatif

Nous considérons dans cette partie les équations linéarisées d'une turbulence homogène incompressible d'un fluide conducteur soumis à un champ magnétique imposé dans un repère tournant. Nous ne négligeons plus les phénomènes dissipatifs si bien que le système linéaire régissant le problème s'écrit dans l'espace de Craya :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \hat{u}^{(1)} \\ \hat{u}^{(2)} \\ \hat{b}^{(1)} \\ \hat{b}^{(2)} \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{k}, t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \nu k^2 & -\sigma_R & -i\sigma_B & 0 \\ \sigma_R & \nu k^2 & 0 & -i\sigma_B \\ -i\sigma_B & 0 & \eta k^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_B & 0 & \eta k^2 \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} \hat{u}^{(1)} \\ \hat{u}^{(2)} \\ \hat{b}^{(1)} \\ \hat{b}^{(2)} \end{pmatrix} = 0, \quad (5.34)$$

ou bien de manière équivalente :

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{w}}(\mathbf{k}, t) + M \hat{\mathbf{w}}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{0}. \quad (5.35)$$

Les valeurs propres de la matrice M sont :

$$X_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\nu k^2 + \eta k^2 - i\sigma_R \pm \sqrt{(\eta k^2 - \nu k^2 + i\sigma_R)^2 - 4\sigma_B^2} \right) \quad (5.36)$$

$$X_{3,4} = \frac{1}{2} \left(\nu k^2 + \eta k^2 + i\sigma_R \pm \sqrt{(\nu k^2 - \eta k^2 + i\sigma_R)^2 - 4\sigma_B^2} \right). \quad (5.37)$$

Contrairement au cas MHD pur, il n'est plus possible de distinguer le régime ondulatoire du régime diffusif [Moffatt(1967)]. Lorsque la rotation intervient, l'ensemble des valeurs propres ont une partie imaginaire non nulle[†].

Les vecteurs propres $\mathcal{N}_i$ associés aux valeurs propres X_i sont[‡] :

$$\mathcal{N}_{1,2} = \begin{pmatrix} \frac{i(X_{1,2}-\eta k^2)}{\sigma_B} \\ -\frac{(X_{1,2}-\eta k^2)}{\sigma_B} \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_{3,4} = \begin{pmatrix} -\frac{(X_{3,4}-\eta k^2)}{\sigma_B} \\ \frac{i(X_{3,4}-\eta k^2)}{\sigma_B} \\ i \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.38)$$

Les conditions aux limites dans l'espace de Craya sont simplement :

$$\hat{\mathbf{w}}^T(\mathbf{k}, t=0) = (\hat{u}^{(1)}(\mathbf{k}, t=0), \hat{u}^{(2)}(\mathbf{k}, t=0), 0, 0), \quad (5.39)$$

où l'on suppose que les fluctuations magnétiques sont initialement nulles. Les conditions initiales dans l'espace des vecteurs propres sont

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, t=0) = P^{-1}\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{k}, t=0) \quad (5.40)$$

où P est la matrice de passage entre l'espace de Craya et l'espace des vecteurs propres. Le système a pour solution dans la base des vecteurs propres :

$$\hat{v}_i(\mathbf{k}, t) = \hat{v}_i(\mathbf{k}, t=0) \exp(-X_i t). \quad (5.41)$$

Le retour dans l'espace de Craya s'écrit :

$$\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{k}, t) = P\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, t), \quad (5.42)$$

et les solutions du système linéaire peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\hat{u}^{(1)}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2} \frac{u^{(1)}(0) + iu^{(2)}(0)}{X_1 - X_2} \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} (X_i - \eta k^2) e^{-X_i t} \quad (5.43)$$

$$\hat{u}^{(2)}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2} \frac{i u^{(1)}(0) + u^{(2)}(0)}{X_1 - X_2} \sum_{i=1}^4 (-1)^i (X_i - \eta k^2) e^{-X_i t} \quad (5.44)$$

$$\hat{b}^{(1)}(\mathbf{k}, t) = \frac{\sigma_B}{2} \frac{i u^{(1)}(0) + u^{(2)}(0)}{X_1 - X_2} \sum_{i=1}^4 (-1)^i e^{-X_i t} \quad (5.45)$$

$$\hat{b}^{(2)}(\mathbf{k}, t) = \frac{\sigma_B}{2} \frac{u^{(1)}(0) + i u^{(2)}(0)}{X_1 - X_2} \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} e^{-X_i t}. \quad (5.46)$$

[†]À l'exception des modes tels que $k_{//} = 0$ pour lesquels on a $\sigma_R = 0$ et $\sigma_B = 0$.

[‡]Contrairement au cas en rotation (voir (3.29)), ces vecteurs propres ne sont pas orthogonaux entre eux.

Les transformées de Laplace des équations (5.43) à (5.46) sont directement :

$$\tilde{u}^{(1)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{(\omega + \eta k^2) [\hat{u}^{(1)}(0) (\omega^2 + \omega \eta k^2 + \sigma_B^2) + \sigma_R \hat{u}^{(2)}(0) (\omega + \eta k^2)]}{[\sigma_R (\omega + \eta k^2) + i (\omega^2 + \omega \eta k^2 + \sigma_B^2)] [\sigma_R (\omega + \eta k^2) - i (\omega^2 + \omega \eta k^2 + \sigma_B^2)]} \quad (5.47)$$

$$\tilde{u}^{(2)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{(\omega + \eta k^2) [\hat{u}^{(2)}(0) (\omega^2 + \omega \eta k^2 + \sigma_B^2) - \sigma_R \hat{u}^{(1)}(0) (\omega + \eta k^2)]}{[\sigma_R (\omega + \eta k^2) + i (\omega^2 + \omega \eta k^2 + \sigma_B^2)] [\sigma_R (\omega + \eta k^2) - i (\omega^2 + \omega \eta k^2 + \sigma_B^2)]} \quad (5.48)$$

$$\tilde{b}^{(1)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{i \sigma_B [\hat{u}^{(1)}(0) (\omega^2 + \omega \eta k^2 + \sigma_B^2) + \sigma_R \hat{u}^{(2)}(0) (\omega + \eta k^2)]}{[\sigma_R (\omega + \eta k^2) + i (\omega^2 + \omega \eta k^2 + \sigma_B^2)] [\sigma_R (\omega + \eta k^2) - i (\omega^2 + \omega \eta k^2 + \sigma_B^2)]} \quad (5.49)$$

$$\tilde{b}^{(2)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{i \sigma_B [\hat{u}^{(2)}(0) (\omega^2 + \omega \eta k^2 + \sigma_B^2) - \sigma_R \hat{u}^{(1)}(0) (\omega + \eta k^2)]}{[\sigma_R (\omega + \eta k^2) + i (\omega^2 + \omega \eta k^2 + \sigma_B^2)] [\sigma_R (\omega + \eta k^2) - i (\omega^2 + \omega \eta k^2 + \sigma_B^2)]} \quad (5.50)$$

Bien évidemment, les transformées de Laplace des équations (5.43) à (5.46) aboutissent aux équations (5.47) à (5.50).

On vérifie également que les équations (5.47) et (5.49), ainsi que les équations (5.48) et (5.50) sont bien liées par la limite linéaire de l'équation d'induction, soit :

$$(\omega + \eta k^2) \tilde{\mathbf{b}} = i \sigma_B \tilde{\mathbf{u}}. \quad (5.51)$$

5.3 Propriétés énergétiques et influence de la rotation

Cette partie est consacrée à l'influence de la rotation sur la croissance des fluctuations magnétiques due à l'interaction entre un champ magnétique imposé $\mathbf{B}_0$ et un champ de vitesse turbulent. On se restreint à un écoulement turbulent développé et le nombre de Reynolds est donc grand devant l'unité. Les fluctuations magnétiques sont initialement nulles. En mettant de côté la rotation, cette configuration est identique à celle imaginée par H.K. Moffatt[†] [Moffatt(1967)]. Sous l'effet des fluctuations de vitesse, les lignes de champ magnétique uniformes sont advectées, donnant naissance à des fluctuations. On s'intéresse ici à la croissance de ces fluctuations, et en particulier à l'impact de la rotation sur ce régime.

En revanche, de la même manière que précédemment, le nombre de Reynolds magnétique peut varier. Lorsque celui-ci est grand, on se rapproche d'un nombre de Prandtl magnétique de l'ordre de l'unité. Dans ce cas, les fluctuations magnétiques et cinétiques diffusent avec la même intensité. Lorsque R_M diminue, Pr_M diminue également et l'on se rapproche d'un régime purement diffusif pour les fluctuations magnétiques.

On rappelle que, en première approximation, le champ magnétique imposé est aligné avec l'axe de rotation, tous deux verticaux.

5.3.1 $Pr_M \ll 1$

Dans un premier temps, le nombre de Prandtl magnétique est supposé être très inférieur à l'unité. L'objectif est de comparer qualitativement les variations d'énergies cinétique et magné-

[†]On trouvera également dans cet article des considérations sur la réalisabilité expérimentale d'un tel système.

DNS							
Série	Résolution	η	B_0	N	Ω	Ro	Λ
1	256^3	0.5	3.54	20	[4 : 40]	[0.2 : 0.02]	[10 : 0.1]
2	256^3	0.005	0.35	20	[4 : 40]	[0.2 : 0.02]	[10 : 0.1]

KS								
Série	Réalisations	M	η	B_0	N	Ω	Ro	Λ
1	50	2000	0.5	3.54	20	[4 : 40]	[0.2 : 0.02]	[10 : 0.1]
2	50	2000	0.005	0.3	20	[4 : 40]	[0.2 : 0.02]	[10 : 0.1]

TAB. 5.2 – Paramètres des différentes simulations numériques présentées dans le chapitre 5. M est le nombre de modes de Fourier en KS (à comparer avec la résolution des DNS).

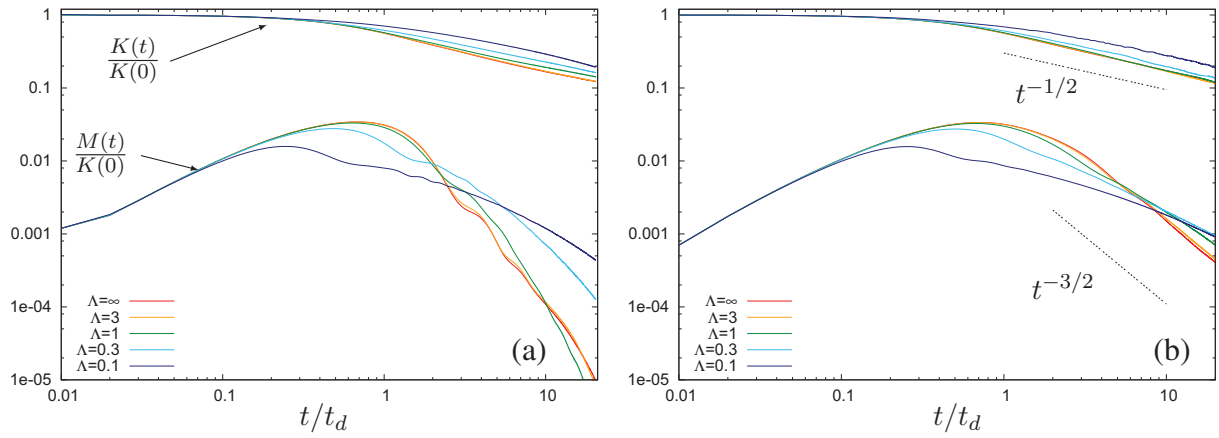


FIG. 5.3 – Évolution temporelle de l'énergie cinétique totale $K(t)$ et de l'énergie magnétique totale $M(t)$. Le nombre de Prandtl magnétique est de l'ordre de 10^{-2} . Le temps t_d correspond au temps caractéristique de diffusion $t_d = \eta/B_0^2$. Les pentes correspondent aux résultats linéaires asymptotiques sans rotation. (a) DNS (Série 1 dans le tableau 5.2). (b) KS (Série 1 dans le tableau 5.2).

tique au cours du temps en fonction du nombre d'Elsasser. Pour cela, on compare les résultats obtenus par simulation directe de l'écoulement avec ceux obtenus par l'approche linéaire au sein de la KS. Concernant la DNS, l'initialisation est effectuée à partir d'une turbulence purement hydrodynamique forcée dans un état quasi-stationnaire. On rappelle que les propriétés de la condition initiale pour le champ de vitesse sont rassemblées au sein du tableau 2.1. Au début de la simulation, le forçage est supprimé et l'on impose un champ magnétique B_0 ainsi qu'un taux de rotation Ω . Concernant la KS, le spectre d'énergie initial est identique à celui de la DNS forcée.

L'intérêt de la KS est d'obtenir un champ de vitesse dans l'espace physique et non de calculer des statistiques dans l'espace de Fourier. Cependant, nous souhaitons vérifier ici que la discrétisation arbitraire de l'espace des vecteurs d'onde utilisée en KS n'introduit pas d'erreurs dans l'estimation des solutions linéaires. Par la suite, on ne propose qu'une comparaison entre KS et DNS sachant que nous avons vérifié que l'intégration directe des solutions linéaires conduit aux mêmes résultats que ceux obtenus par KS. Les paramètres de calcul de ces simulations sont rassemblés dans le tableau 5.2.

La figure 5.3 présente l'évolution temporelle de l'énergie cinétique $K(t)$ et de l'énergie magnétique $M(t)$ pour différents nombres d'Elsasser. Le temps est adimensionné par le temps caractéristique de dissipation t_d . Comme prédit par l'analyse linéaire, les fluctuations magnétiques atteignent un maximum d'énergie pour un temps de l'ordre de t_d (voir la figure 4 dans [Moffatt(1967)]). L'effet de la rotation est double. D'une part, le maximum d'énergie magnétique décroît avec le nombre d'Elsasser (*i.e.* lorsque le taux de rotation augmente). Il semble donc que les fluctuations magnétiques soient atténuées lorsque la rotation domine. D'autre part, le taux de décroissance des fluctuations magnétiques diminue lorsque le nombre d'Elsasser décroît. Ainsi, lorsque $t \gg t_d$, l'énergie magnétique totale est plus importante lorsque la rotation domine, et ce malgré l'atténuation des fluctuations magnétiques mise en évidence précédemment. Ces deux phénomènes, observés à la fois en KS et DNS, semblent être dus à une interaction purement linéaire. Bien évidemment, les résultats présentés au sein de la figure 5.3 correspondent à la réponse *initiale* (*i.e.* pour des temps de l'ordre du temps de retournement) d'une turbulence, et des effets non-linéaires sont à attendre pour des temps plus longs.

Une autre observation concerne le fait que les fluctuations magnétiques sont dissipées bien plus rapidement en DNS qu'en KS. Cette observation trouvera une explication évidente lorsque l'on s'intéressera au régime $Pr_M \approx 1$.

La taux de dissipation total ϵ_T , défini par

$$\epsilon_T(t) = \nu \langle (\nabla \times \mathbf{u})^2(\mathbf{x}) \rangle(t) + \eta \langle (\nabla \times \mathbf{b})^2(\mathbf{x}) \rangle(t), \quad (5.52)$$

est calculé par DNS et présenté en figure 5.4(a). On observe clairement une atténuation de la dissipation totale. Lorsque le nombre d'Elsasser diminue, le taux de dissipation tend vers la valeur obtenue dans un contexte hydrodynamique en rotation (*i.e.* $\Lambda = 0$), qui est inférieure à la valeur obtenue dans le cas isotrope.

5.3.2 $Pr_M \approx 1$

Lorsque l'on augmente le nombre de Prandtl magnétique à nombre de Reynolds constant, le nombre de Reynolds magnétique croît également. Les phénomènes diffusifs ne dominent plus les fluctuations magnétiques et l'on s'attend à observer un régime pleinement turbulent.

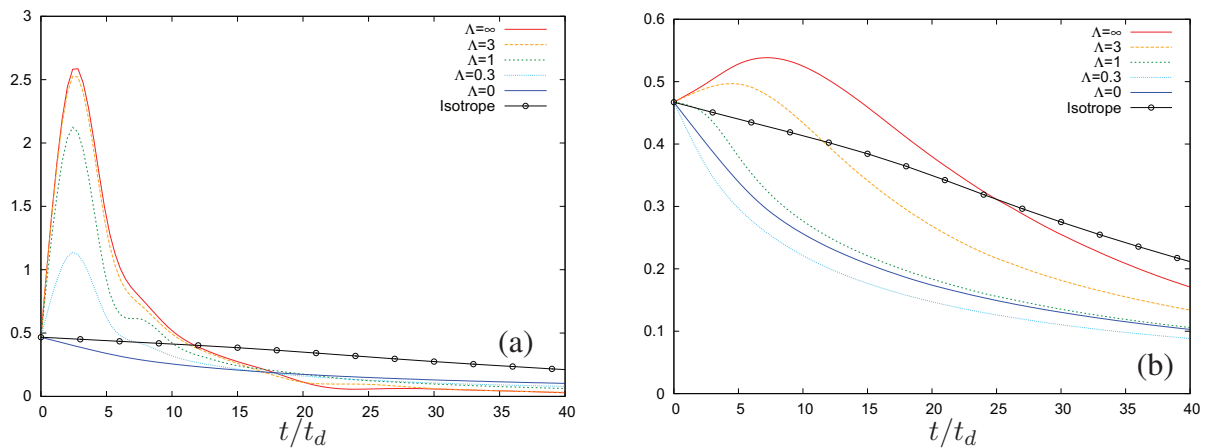


FIG. 5.4 – Taux de dissipation total ϵ_T au cours du temps, calculé par DNS. (a) $R_M \approx 1$ (Série DNS 1 dans le tableau 5.2). (b) $R_M \approx 100$ (Série DNS 2 dans le tableau 5.2).

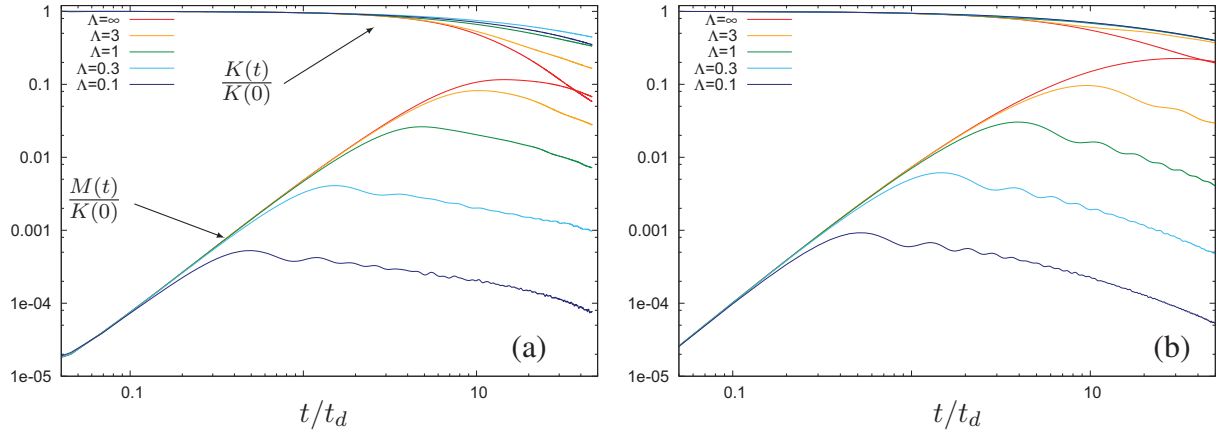


FIG. 5.5 – Évolution temporelle de l'énergie cinétique totale $K(t)$ et de l'énergie magnétique totale $M(t)$. Le nombre de Prandtl magnétique est de l'ordre de 1. Le temps t_d correspond au temps caractéristique de diffusion $t_d = \eta/B_0^2$. (a) DNS (Série 2 au sein du tableau 5.2). (b) KS (Série 2 au sein du tableau 5.2).

La dissipation Joule anisotrope devient du même ordre de grandeur que les termes non-linéaires et l'on s'attend également à une restauration de l'isotropie.

L'objectif est ici de conserver les mêmes nombres d'Elsasser que ceux considérés lors du régime $Pr_M \ll 1$. Le nombre de Reynolds (et donc la viscosité) est inchangé, et il est donc nécessaire de diminuer la diffusivité magnétique. Cette diminution affecte nécessairement le nombre d'interaction (ainsi que le nombre de Lundquist) et il est donc nécessaire de diminuer le champ magnétique imposé afin de conserver un paramètre d'interaction constant.

La figure 5.5 présente l'évolution temporelle des énergies totales pour un nombre de Prandtl magnétique de l'ordre de l'unité, tandis que la figure 5.4(b) présente le taux de dissipation totale au cours du temps, calculé par DNS. Sans rotation, on s'attend à tendre vers un état d'équipartition de l'énergie entre sa forme cinétique et sa forme magnétique, caractéristique de la présence d'ondes d'Alfvén. C'est effectivement ce que l'on observe à la fois en KS et en DNS. Lorsque le nombre d'Elsasser décroît, les fluctuations magnétiques sont fortement atténuées tandis que l'énergie cinétique augmente. Ces deux phénomènes sont également observés au sein des solutions linéaires. Le mécanisme responsable de cette atténuation est aisément identifiable lorsque l'on considère le système linéaire dans l'espace de Craya. Celui-ci s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \hat{u}^{(1)} \\ \hat{u}^{(2)} \\ \hat{b}^{(1)} \\ \hat{b}^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_R & -i\sigma_B & 0 \\ \sigma_R & 0 & 0 & -i\sigma_B \\ -i\sigma_B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\sigma_B & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}^{(1)} \\ \hat{u}^{(2)} \\ \hat{b}^{(1)} \\ \hat{b}^{(2)} \end{pmatrix} = 0, \quad (5.53)$$

où les phénomènes dissipatifs ont été négligés. Sans rotation, les composantes poloïdales et toroïdales sont découplées. Lorsqu'un champ magnétique est appliqué, les ondes d'Alfvén engendrent une équipartition de l'énergie. Si des ondes d'inertie apparaissent sous l'effet de la rotation, celles-ci échangent de l'énergie cinétique entre les composantes poloïdale et toroïdale de la vitesse. Si la force de Coriolis domine la force de Lorentz (*i.e.* $\Lambda < 1$), les ondes d'inertie prennent l'avantage sur les ondes d'Alfvén et le terme de transfert d'énergie cinétique vers l'énergie magnétique diminue. Cette compétition linéaire est toutefois relativement complexe

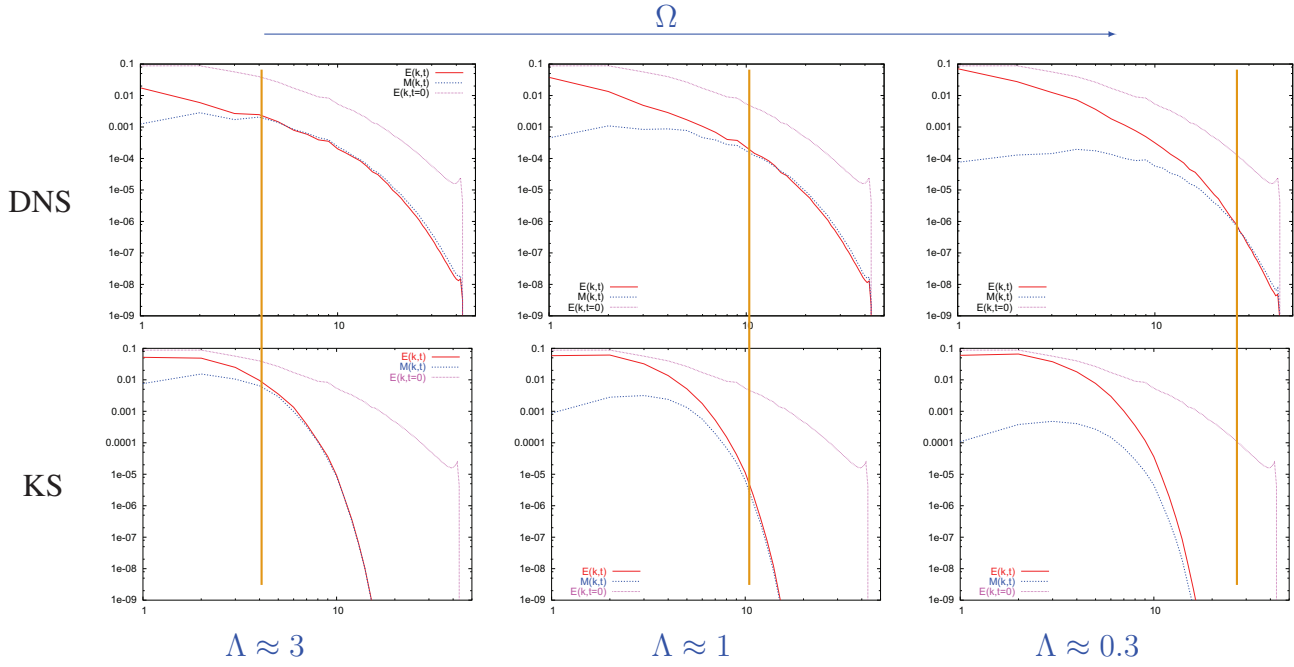


FIG. 5.6 – Spectres d'énergie cinétique $E(k)$ et magnétique $M(k)$. De la gauche vers la droite, le taux de rotation augmente. Les traits verticaux correspondent à un nombre de Lehnert de 1. Les résultats DNS sont en haut tandis que les résultats KS sont en bas.

car les ondes d'inertie sont dispersives tandis que les ondes d'Alfvén ne le sont pas. On s'attend donc à observer une compétition entre énergie cinétique et énergie magnétique qui dépend de l'échelle considéré. C'est ici qu'intervient le nombre de Lehnert défini comme le rapport des pulsations maximales de chacune des ondes.

La figure 5.6 présente les spectres d'énergie pour différents nombres d'Elsasser obtenus à la fois en DNS et en KS. Tous ces spectres sont tracés au même instant qui correspond environ à une cinquantaine de temps dissipatifs t_d . La pulsation maximum des ondes d'inertie est 2Ω tandis que la pulsation maximum des ondes d'Alfvén est $B_0 k$. Le rapport définit le nombre de Lehnert (5.11), et un nombre de Lehnert égal à 1 définit un nombre d'onde critique k_c représenté par les traits verticaux au sein de la figure 5.6.

Pour des nombres d'onde tels que $k > k_c$, on a $\mathcal{L} > 1$ et les ondes d'Alfvén sont le phénomène le plus rapide, tendant ainsi vers un régime d'équipartition de l'énergie. Lorsque $k < k_c$, on a $\mathcal{L} < 1$ est les ondes d'inertie dominant, atténuant les fluctuations magnétiques.

Il est également à noter que les spectres calculés par KS sont sensiblement différents de leurs homologues obtenus par DNS, particulièrement en ce qui concerne les petites échelles. La disparition des petites structures (qui étaient présentes dans la condition initiale) est une conséquence directe de la viscosité et de la linéarité du modèle. Du fait de la viscosité, les petites structures sont dissipées en KS comme en DNS. En revanche, le transfert non-linéaire, qui tend à restaurer l'énergie des petites échelles en puisant dans celle des grandes échelles, est inexistant en KS. Ceci explique le très faible niveau d'énergie observé en KS pour les hauts nombres d'onde, et cela explique également pourquoi la DNS dissipe plus rapidement l'énergie que la KS : les non-linéarités transfèrent de l'énergie continuellement vers les zones de forte dissipation.

Ces quelques résultats qualitatifs, permettent de comprendre l'influence globale de la rota-

tion sur la croissance des fluctuations magnétiques. Le second élément qui nous intéresse est la caractérisation de l'anisotropie.

5.4 Anisotropie en turbulence MHD en rotation

On s'intéresse désormais à l'anisotropie existant au sein d'une turbulence MHD en rotation. Le nombre d'interaction est constant tandis que le nombre d'Elsasser varie. Dans tous les cas, le nombre de Rossby est petit devant l'unité (*i.e.* $0.02 < Ro < 0.2$). Deux nombres de Reynolds magnétique seront considérés : $R_M \approx 1$ et $R_M \approx 100$.

5.4.1 Prédiction linéaire

Les équations linéarisées complètes pour le cas MHD en rotation sont trop compliquées pour permettre de dériver lisiblement les différentes composantes du tenseur spectral dans le cas général. De plus, l'intérêt est limité puisque nous avons déjà vu que les solutions linéaires en rotation pure ne génèrent pas d'anisotropie si le champ initial est parfaitement isotrope (voir les équations (3.30)). Le seul effet de la rotation, d'un point de vue linéaire, est de restaurer l'isotropie du champ de vitesse du fait de la présence des ondes inertielles.

On se propose de calculer les composantes du tenseur spectral dans le cas non-dissipatif, puis de mettre en évidence simplement le retour à l'isotropie sous l'action linéaire de la rotation.

Régime non-dissipatif

À partir de solutions (5.27) et (5.28), on se propose de calculer les différentes composantes du tenseur des corrélations $\hat{R}_{ij}$ dans le cas où les phénomènes dissipatifs sont négligés. Ainsi, pour le tenseur spectral lié à la vitesse, la densité d'énergie s'exprime :

$$e_K(\mathbf{k}, t) = \frac{e_K(\mathbf{k}, 0)}{\sigma_R^2 + 4\sigma_B^2} \left(\sigma_R^2 + 4\sigma_B^2 \cos^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\sigma_R^2 + 4\sigma_B^2} t \right) \right), \quad (5.54)$$

tandis que le spectre d'hélicité est ;

$$\mathcal{H}_K(\mathbf{k}, t) = \frac{\mathcal{H}_K(\mathbf{k}, 0)}{\sigma^2 + 4\sigma_B^2} \left(\sigma^2 + 4\sigma_B^2 \cos^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\sigma_B^2} t \right) \right). \quad (5.55)$$

Enfin, la polarisation peut s'écrire ;

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_K(\mathbf{k}, t) = \frac{\mathcal{Z}_K(\mathbf{k}, 0)e^{i\sigma_R t}}{\sigma_R^2 + 4\sigma_B^2} & \left[\sigma_R^2 \cos \left(\sqrt{\sigma_R^2 + 4\sigma_B^2} t \right) + \sqrt{\sigma_R^2 + 4\sigma_B^2} \sin \left(\sqrt{\sigma_R^2 + 4\sigma_B^2} t \right) \right. \\ & \left. + 4\sigma_B^2 \cos^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\sigma_R^2 + 4\sigma_B^2} t \right) \right]. \quad (5.56) \end{aligned}$$

De même, pour le tenseur spectral des fluctuations magnétiques :

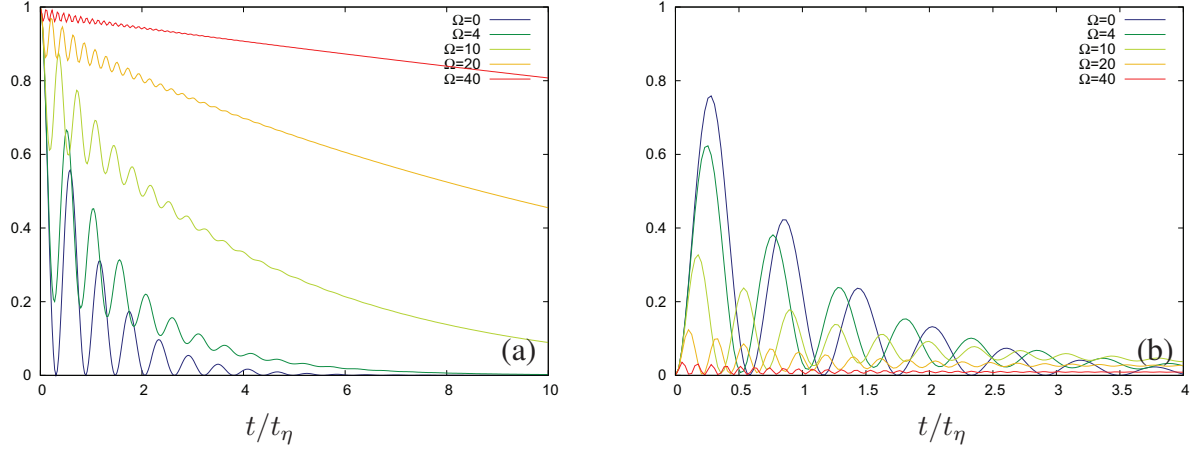


FIG. 5.7 – Densité d'énergie pour un mode tel que $k = 16$ et $\theta = \pi/6$. (a) $e_K(\mathbf{k}, t)$. (b) $e_M(\mathbf{k}, t)$.

$$e_M(\mathbf{k}, t) = e_K(\mathbf{k}, 0) \frac{4\sigma_B^2 \sin^2 \left(\frac{\sqrt{\sigma_R^2 + 4\sigma_B^2} t}{2} \right)}{\sigma_R^2 + 4\sigma_B^2} \quad (5.57)$$

$$\mathcal{H}_M(\mathbf{k}, t) = \mathcal{H}_K(\mathbf{k}, 0) \frac{4\sigma_B^2 \sin^2 \left(\frac{\sqrt{\sigma_R^2 + 4\sigma_B^2} t}{2} \right)}{\sigma_R^2 + 4\sigma_B^2} \quad (5.58)$$

$$\mathcal{Z}_M(\mathbf{k}, t) = \mathcal{Z}_K(\mathbf{k}, 0) \frac{4\sigma_B^2 \sin^2 \left(\frac{\sqrt{\sigma_R^2 + 4\sigma_B^2} t}{2} \right)}{\sigma_R^2 + 4\sigma_B^2} e^{i\sigma_R t}. \quad (5.59)$$

Ainsi, dans la limite linéaire non-dissipative, si l'hélicité et la polarisation sont nulles initialement, elles le demeurent aux instants suivants. Enfin, aucune anisotropie directionnelle n'apparaît lorsque l'on observe les équations (5.54) et (5.57).

Régime dissipatif

Les solutions linéaires dans le cas général où les phénomènes dissipatifs sont conservés sont trop lourdes pour être rapportées ici. De plus, dans la limite linéaire, l'impact de la rotation sur l'isotropie est relativement simple à mettre en évidence. Sans rotation, nous avons vu au chapitre précédent que la dissipation Joule dissipe de manière sélective les modes dans l'espace de Fourier avec un temps caractéristique t_d . Lorsque le nombre de Lundquist est faible devant l'unité, le régime est purement dissipatif et l'on observe une anisotropie croissante au cours du temps. Lorsque le nombre de Lundquist est grand, le temps caractéristique t_d est très court et l'anisotropie se développe rapidement. Cependant, du fait de la présence des ondes d'Alfvén, l'isotropie est progressivement restaurée pour les temps $t \gg t_d$ (voir la figure 4.6).

La figure 5.7 présente l'évolution temporelle des densités d'énergies cinétique et magnétique pour différents taux de rotation, et pour un mode tel $|\mathbf{k}| = 16$ et $\theta = \pi/6$. Le champ magnétique est $B_0 = 1$ et la diffusivité magnétique est $\eta = 0.005$. Le nombre de Lundquist est donc grand et nous sommes donc en présence d'ondes d'Alfvén atténuées. Au fur et à mesure que Ω augmente, $e_K(\mathbf{k})$ passe continûment de la solution (4.54) à la solution (3.30). D'une part, on retrouve le fait que les solutions linéaires en rotation tendent à conserver l'isotropie initiale. D'autre part, la figure 5.7(b) montre l'impact de la rotation sur la densité d'énergie magnétique

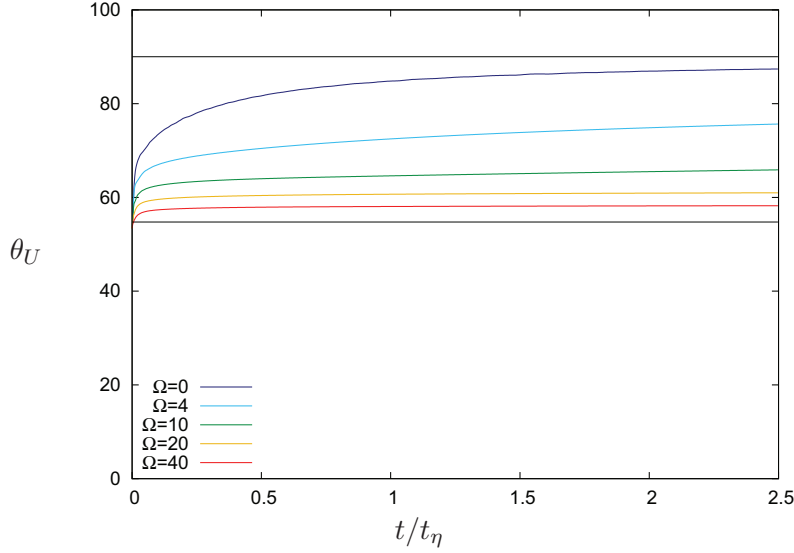


FIG. 5.8 – Angles de Shebalin pour la vitesse calculés par intégration des solutions linéaires dans l'espace spectral. Les paramètres magnétiques sont $B_0 = 1$ et $\eta = 0.05$.

et l'effet d'atténuation déjà mis en évidence précédemment. Lorsque la rotation augmente, la période des ondes inertielles est beaucoup plus courte que la période des ondes d'Alfvén (le rapport des deux étant le nombre de Lehnert) ou que le temps caractéristique de dissipation t_d (le rapport des deux étant le nombre d'Elsasser).

Enfin, pour terminer l'analyse de l'impact de la rotation sur l'anisotropie dans la limite linéaire, les angles de Shebalin sont calculés par KS. Les conditions initiales sont identiques que celles de la section 4.3.1. De la même manière, les angles de Shebalin sont calculés pour différents taux de rotation, et leur évolution temporelle est présentée au sein de la figure 5.8. On observe ici clairement que l'effet linéaire de la rotation est de restaurer l'isotropie perdue par l'application du champ magnétique. La dissipation sélective est ici un phénomène plus lent que les ondes inertielles.

5.4.2 Fort nombre de Reynolds magnétique

L'objectif est ici de présenter quelques résultats concernant l'anisotropie dans un contexte de turbulence en déclin résolue par simulations directes.

Dans un premier temps, nous supposons que le nombre de Reynolds magnétique est important (*i.e.* $Pr_M \approx 1$). Nous avons vu dans ce cas (voir le chapitre précédent, section 4.3.2) que le champ de vitesse et le champ des fluctuations magnétiques sont quasiment isotropes en raison de la redistribution d'énergie due aux termes de transferts non-linéaires. L'objectif est ici de caractériser l'impact de la rotation. Le nombre d'interaction est toujours grand devant l'unité (*i.e.* $N \approx 20$), et les paramètres magnétiques sont donc tous fixés. L'influence de la force de Coriolis par rapport à la force de Lorentz est caractérisée par le nombre d'Elsasser Λ (5.10). Lorsque le nombre d'interaction est constant, le nombre d'Elsasser varie comme le nombre de Rossby. Dans la suite, l'écoulement est simulé pour trois nombres de Rossby différents : $Ro \approx 0.02$, $Ro \approx 0.05$ et $Ro \approx 0.2$, ce qui correspond respectivement à des valeurs du nombre d'Elsasser de $\Lambda \approx 0.3$, $\Lambda \approx 1$ et $\Lambda \approx 3$. Nous considérons un cas où la force de Coriolis domine, un cas

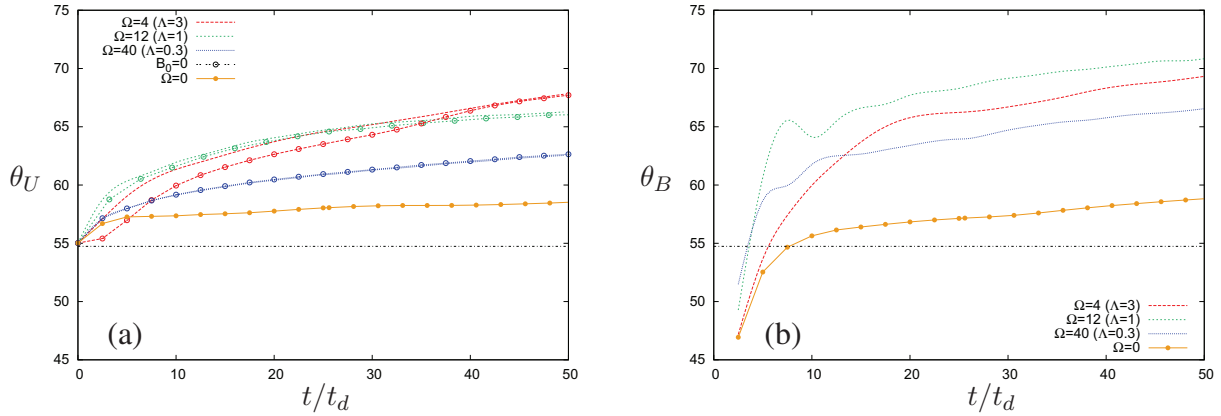


FIG. 5.9 – Évolution temporelle de l'angle de Shebalin (défini par (1.46)) pour $R_M \approx 100$ et différents nombres d'Elsasser. Le temps est adimensionné par $t_d = \eta/B_0^2$. (a) Angle θ_U . (b) Angle θ_B .

où la force de Lorentz domine et un cas où les deux forces sont du même ordre de grandeur. Les paramètres des simulations sont rassemblés au sein du tableau 5.2.

Le calcul est mené de la même manière que précédemment. Une simulation hydrodynamique forcée fournit la condition initiale au calcul MHD. Les fluctuations magnétiques sont initialement nulles. À l'instant $t = 0$, le champ magnétique $\mathbf{B}_0$ est appliqué ainsi que le taux de rotation Ω . Les deux phénomènes sont dirigés selon le même axe vertical.

Nous avons déjà caractérisé l'impact de la rotation sur des quantités telles que l'énergie ou les spectres d'énergie. L'effort est ici concentré sur l'anisotropie de l'écoulement. Les indicateurs statistiques sont les mêmes que précédemment.

Angles de Shebalin

On s'intéresse dans un premier temps aux angles de Shebalin, rassemblés au sein de la figure 5.9.

Considérons dans un premier temps l'angle θ_U caractéristique du champ de vitesse. Les courbes tracées en trait continu correspondent aux simulations MHD en rotation. Les courbes en pointillés et avec des ronds correspondent à des simulations hydrodynamiques en rotation. Dans les deux cas, la condition initiale est la même et la couleur correspond au taux de rotation considéré. La courbe en trait continu avec des disques correspond enfin au cas MHD sans rotation, avec $R_M \approx 100$. Quelle que soit le nombre d'Elsasser, les résultats MHD sont très proches des résultats hydrodynamiques (*i.e.* les courbes continues se superposent aux courbes avec ronds). Ceci est d'autant plus vrai que le nombre d'Elsasser diminue. Remarquons également que l'angle θ_U est plus important dans le cas MHD en rotation que dans le cas MHD pur, et ce quelle que soit le nombre d'Elsasser.

Considérons maintenant la figure 5.9(b) qui représente la quantité θ_B au cours du temps. Lorsque le nombre de Reynolds magnétique est important, et sans rotation, les fluctuations magnétiques sont quasiment isotropes (voir par exemple les figures 4.9 et 4.13). Dans le cas en rotation, l'angle de Shebalin θ_B est au-dessus de sa valeur isotrope. Cela traduit une concentration d'énergie magnétique à l'équateur. Quelle que soit la valeur du nombre d'Elsasser, l'angle θ_B est plus important dans le cas en rotation que dans le cas non-tournant (points oranges sur

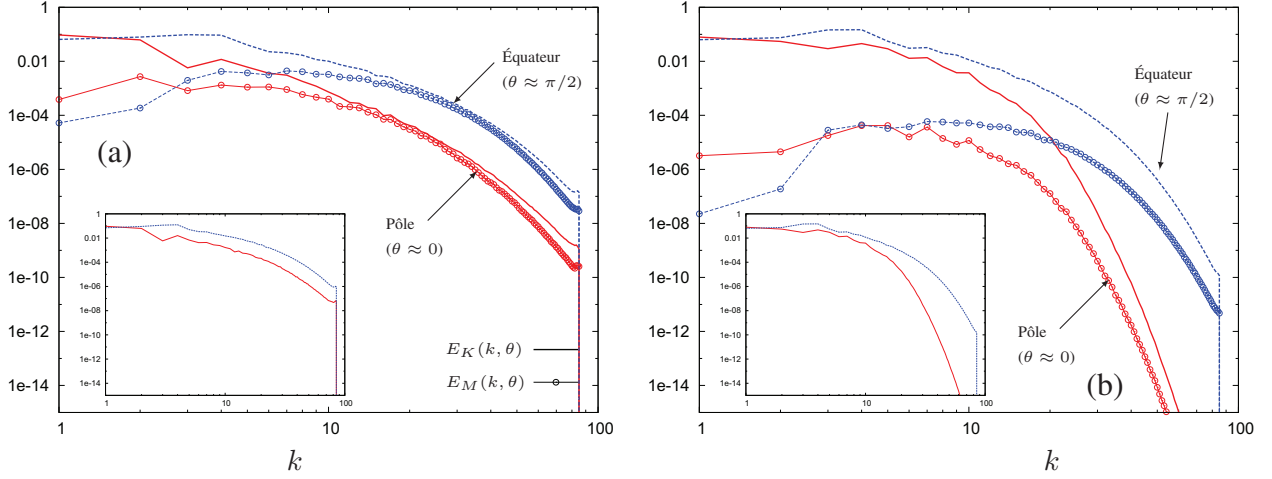


FIG. 5.10 – Spectres d'énergies angulaires $E_K(k, \theta)$ (courbes pleines) et $E_M(k, \theta)$ (courbes avec ronds). La couleur rouge correspond à l'équateur (*i.e.* aux modes tels que $\theta \approx \pi/2$) tandis que la couleur bleue correspond aux pôles (*i.e.* aux modes tels que $\theta \approx 0$). Les sous-figures représentent les résultats obtenus dans le cas hydrodynamique avec le même taux de rotation. (a) $Ro \approx 0.2$. (b) $Ro \approx 0.02$.

la figure 5.9(b)). L'anisotropie directionnelle des fluctuations magnétiques semble donc suivre celle imposée par les fluctuations de vitesse, et l'on observe une décroissance de θ_B lorsque le nombre de Rossby devient trop important.

Spectres angulaires

Les considérations précédentes s'affranchissent de la dépendance de l'anisotropie au nombre d'onde k . Il est donc nécessaire, afin d'approfondir l'analyse, d'observer les spectres angulaires d'énergie cinétique et d'énergie magnétique. La figure 5.10 présente ces quantités pour les deux nombres de Rossby extrema, *i.e.* $Ro \approx 0.2$ ($\Lambda \approx 3$) et $Ro \approx 0.02$ ($\Lambda \approx 0.3$).

D'une part, on observe encore une fois que plus la rotation est importante, plus les fluctuations magnétiques sont atténuées aux faibles nombres d'onde. Ensuite, comme cela a déjà été observé lors de l'analyse des angles de Shebalin, l'anisotropie du champ de vitesse est très proche de celle observée au sein d'une turbulence hydrodynamique en rotation (voir les sous-figures au sein de la figure 5.10), à savoir une concentration d'énergie à l'équateur d'autant plus importante que le nombre d'onde est grand. Les fluctuations magnétiques semblent d'ailleurs tendre également vers cet état puisque l'on observe une équipartition de l'énergie pour les grands nombres d'onde. Finalement, deux tendances apparaissent à l'issue de cette analyse : pour les faibles nombres d'onde, les deux champs sont relativement isotropes et les fluctuations magnétiques sont atténuées par les ondes inertielles ; pour les grands nombres d'onde, il existe une équipartition de l'énergie cinétique avec l'énergie magnétique du fait de la présence d'onde d'Alfvén, et les deux champs sont fortement anisotropes avec une concentration de l'énergie à l'équateur.

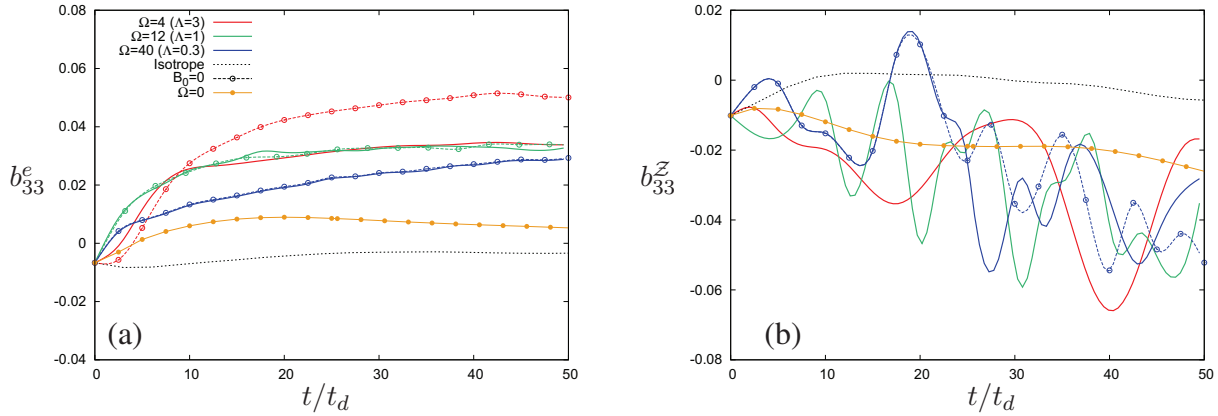


FIG. 5.11 – Composante b_{33} du tenseur d'anisotropie de Reynolds au cours du temps, adimensionné par $t_d = \eta/B_0^2$. Les courbes continues correspondent aux résultats MHD en rotation tandis que les courbes avec des ronds vides correspondent aux résultats hydrodynamiques en rotation. Les résultats MHD sans rotation sont rapportés par la courbe continue avec des ronds pleins. (a) Indicateur d'anisotropie de directivité b_{33}^e . (b) Indicateur d'anisotropie de polarisation b_{33}^z .

Tenseur d'anisotropie de Reynolds

On s'intéresse ici exclusivement à l'anisotropie du champ de vitesse[†]. Les résultats magnétiques concernant le tenseur d'anisotropie de Reynolds sont compilés pour indication au sein de l'annexe E. Les quantités b_{33}^e et b_{33}^z pour le champ de vitesse sont représentées au sein de la figure 5.11. Les traits continus correspondent aux simulations MHD en rotation tandis que les courbes en pointillés avec des ronds correspondent aux simulations hydrodynamiques avec rotation[‡].

Les conclusions que l'on peut tirer de la figure 5.11(a) sont très proches de celles déduites des résultats concernant la quantité θ_U . Au fur et à mesure que le nombre d'Elsasser diminue, les quantités b_{33}^e calculées par simulations hydrodynamiques et MHD sont indissociables. On remarque également que lorsque le nombre de Rossby devient très faible, la quantité b_{33}^e diminue (la tendance est la même pour les quantités θ_U et θ_B au sein de la figure 5.9). Ce comportement a déjà été observé au sein d'une turbulence homogène en rotation [Cambon *et al.*(1997), Morinishi *et al.*(2001)], où la quantité b_{33}^e croît lorsque le nombre de Rossby est modéré puis décroît lorsque la rotation devient trop intense.

Concernant la polarisation, celle-ci est également très proche de celle obtenue en rotation pure. La rotation tend par ailleurs à accroître (*i.e.* en valeur absolue) la polarisation par rapport à celle obtenue en MHD pure.

[†]Pour les mêmes raisons qu'au chapitre 4, les quantités b_{33}^e et b_{33}^z pour les fluctuations magnétiques sont reportées en annexe E.

[‡]Par souci de clarté, les résultats hydrodynamiques pour la quantité b_{33}^z (voir la figure 5.11(b), courbe bleue avec des points) ne sont représentés que pour $\Lambda \approx 0.3$.

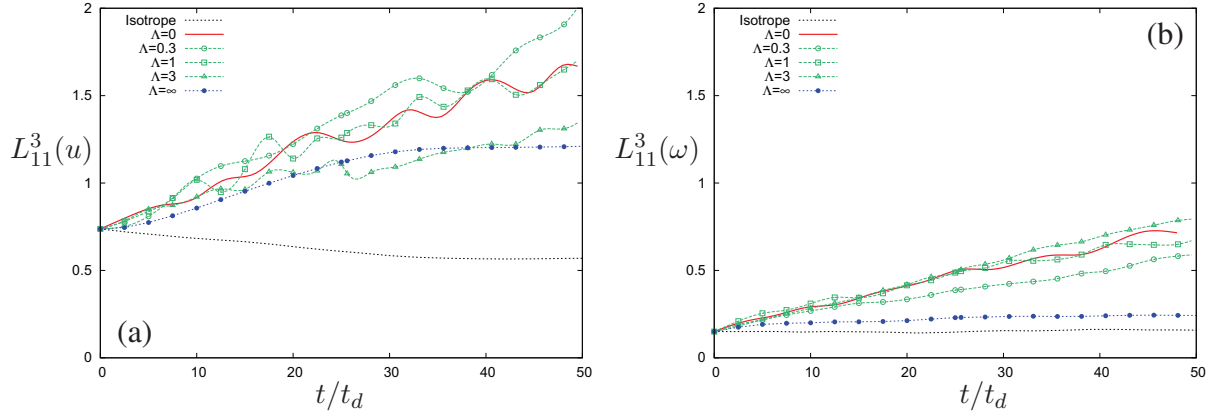


FIG. 5.12 – Longueur de corrélation L_{11}^3 au cours du temps. La courbe rouge en trait continu correspond au cas hydrodynamique en rotation pure. La courbe bleue avec des disques correspond au cas MHD avec $R_M \approx 100$. Les courbes avec des symboles vides correspondent à trois valeurs différentes du nombre d'Elsasser. (a) Corrélations de vitesse. (b) Corrélations de vorticité au cours du temps.

Longueurs intégrales

Observons maintenant la longueur de corrélation L_{11}^3 du champ de vitesse, définie au chapitre 1 par (1.53)[†]. La figure 5.12(a) rassemble l'évolution temporelle de cette quantité pour plusieurs simulations : le cas hydrodynamique en rotation (courbe rouge en trait continu), le cas MHD sans rotation avec $R_M \approx 100$ (courbe bleue avec des disques) et enfin trois simulations MHD en rotation correspondant à trois valeurs différentes du nombre d'Elsasser. Lorsque la rotation est faible (*i.e.* $\Lambda \approx 3$), les résultats sont très proches de ceux obtenus dans le cas MHD pur et l'on observe une légère augmentation de la corrélation L_{11}^3 par rapport au cas isotrope. Pour des valeurs plus importantes du taux de rotation, on observe une augmentation de L_{11}^3 , mais celle-ci demeure proche des résultats obtenus par simulation hydrodynamique pure. Ces observations offrent une autre confirmation du fait que l'anisotropie du champ de vitesse est, lorsque le nombre de Reynolds magnétique est élevé, proche de celle observée en turbulence hydrodynamique en rotation.

Il est de plus possible de calculer les longueurs intégrales de corrélations de vorticité définies, de manière analogue à (1.51), par :

$$L_{ij}^l(\omega) = \frac{1}{\langle \omega_i \omega_j \rangle} \int_0^\infty \langle \omega_i(\mathbf{x}) \omega_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle d\mathbf{r} , \quad (5.60)$$

où le vecteur de séparation est dans ce cas défini par $r_k = r \delta_{kl}$. La figure 5.12(b) présente la longueur de corrélation L_{11}^3 pour la vorticité. Sans rotation, cette quantité n'est que très légèrement supérieure à sa valeur isotrope. En revanche, les corrélations de vorticité observées en MHD avec rotation sont très proches de celles obtenues par simulations hydrodynamiques avec rotation.

[†]Les autres longueurs de corrélations ne présentent pas de variations notables et ne sont donc pas rapportées ici.

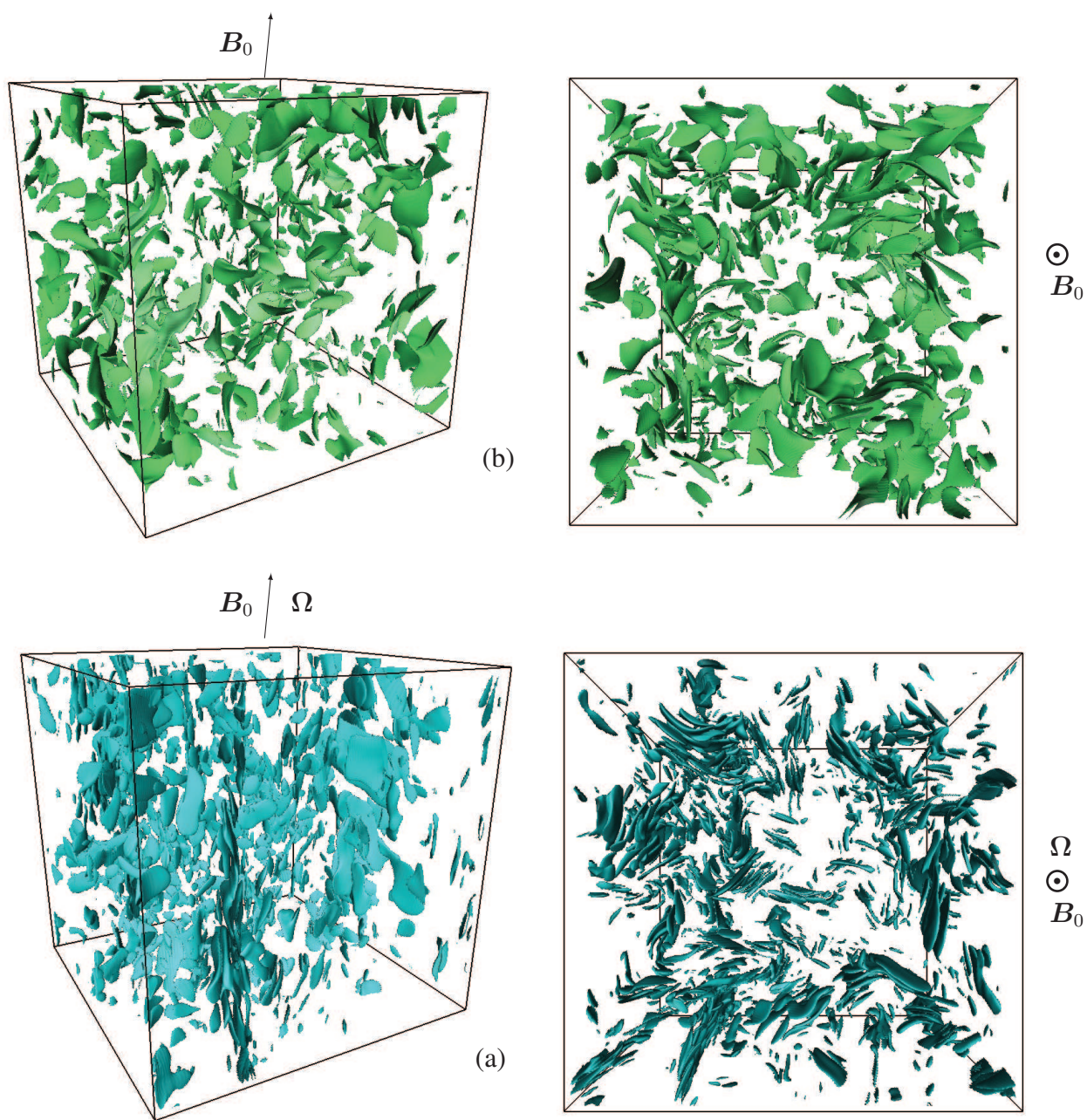


FIG. 5.13 – Isosurfaces de la norme de la densité de courant. La valeur représentée est de 25% de la valeur maximale au sein du domaine de calcul. La colonne de gauche correspond à une vue globale du domaine tandis que la colonne de droite correspond à une vue de dessus. Le nombre de Reynolds magnétique est de l'ordre de 10^2 . (a) Cas MHD pur. (b) Cas MHD en rotation pour $\Lambda \approx 1$.

Visualisations

Les fluctuations magnétiques sont fortement influencées par l'anisotropie du champ de vitesse, et développent ainsi une anisotropie et des structures analogues. Pour s'en convaincre, la figure 5.13 propose une visualisation de la norme de la densité de courant. La colonne de gauche correspond à une vue d'ensemble tandis que la colonne de droite correspond à une vue de dessus et le champ magnétique B_0 est donc aligné avec la direction d'observation. En haut est représenté le cas MHD sans rotation tandis que le cas tournant est représenté en bas. Dans les deux cas, le nombre de Reynolds magnétique est de l'ordre de 10^2 tandis que le nombre d'Elsasser est de l'ordre de l'unité pour le cas tournant. On observe clairement que la densité de courant est structurée majoritairement en couches fines. Ces couches sont orientées dans toutes les directions dans le cas MHD tandis que l'on observe clairement une orientation préférentielle des couches dans la direction de l'axe de rotation dans le cas tournant.

5.4.3 Faible nombre de Reynolds magnétique

La section précédente s'est concentrée sur les régimes à fort nombre de Reynolds magnétique. Il est possible de résumer les résultats comme suit : l'anisotropie du champ de vitesse est très similaire à celle observée dans le cas hydrodynamique tandis que les fluctuations magnétiques deviennent anisotropes, avec des structures préférentiellement alignées avec l'axe de rotation. On s'intéresse maintenant au cas où le nombre de Reynolds magnétique est faible. Dans ce cas, nous avons vu au sein du chapitre 4 que le champ de vitesse est fortement anisotrope sous l'action de la force de Lorentz, tandis que les fluctuations magnétiques sont dominées par la diffusion et ne présentent qu'une légère anisotropie. L'objectif est ici d'observer l'influence de la rotation sur le développement des structures magnétiques. Étant donné que la dissipation d'énergie par effet Joule et la force de Coriolis conduisent indépendamment à la même concentration de l'énergie à l'équateur pour la vitesse, on ne s'attend pas à observer de tendances différentes dans le cas en rotation.

Le nombre d'interaction est toujours constant et possède la même valeur que précédemment, *i.e.* $N \approx 20$. Le nombre de Reynolds magnétique est de l'ordre de l'unité et l'ensemble des paramètres magnétiques sont donc fixés. On s'intéresse à trois régimes différents, caractérisés par des nombres d'Elsasser de $\Lambda \approx 3$, $\Lambda \approx 1$ et $\Lambda \approx 0.3$. Le protocole de calcul est identique à celui de la section précédente, la condition initiale est la même, seuls les paramètres sont modifiés.

Angles de Shebalin

La figure 5.14 présente les angles de Shebalin pour les champs de vitesse et de fluctuations magnétiques. La présentation est identique à celle de la figure 5.9.

Considérons dans un premier temps la figure de gauche, correspondant aux statistiques du champ de vitesse. L'angle θ_U est clairement atténué lorsque l'on passe du cas MHD pur (représenté par les points oranges) aux cas MHD en rotation (courbes continues). Lorsque la rotation domine, θ_U tend d'ailleurs à se rapprocher des valeurs observées dans le cas hydrodynamique (courbes avec points). La concentration d'énergie à l'équateur, et donc l'anisotropie directionnelle, est ainsi atténuée par la présence de la rotation. Ce comportement est relative-

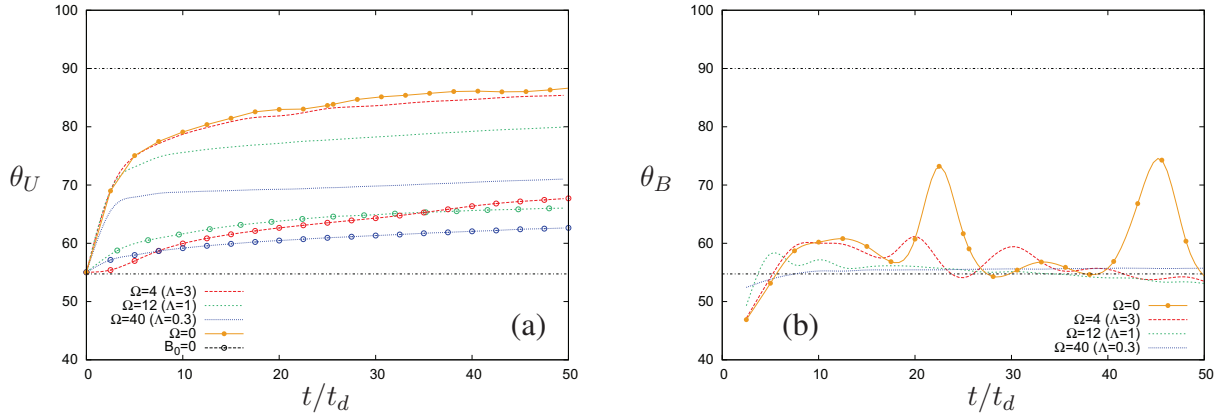


FIG. 5.14 – Évolution temporelle de l'angle de Shebalin pour $R_M \approx 1$ et différents nombres d'Elsasser. (a) Angle θ_U . (b) Angle θ_B .

ment surprenant puisqu'indépendamment, la force de Coriolis et la force de Lorentz conduisent qualitativement à la même domination d'énergie cinétique équatoriale[†]. À noter que les solutions linéaires prédisent également une diminution de θ_U lorsque la rotation augmente. Les solutions linéaires pour la rotation tendent en effet à conserver l'isotropie initiale (voir les solutions (3.30)).

La figure 5.14(b) concerne la quantité θ_B , liée aux fluctuations magnétiques. Il semble que l'effet de la rotation soit d'atténuer les oscillations observées au sein du cas MHD pur. Si le champ $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ semble tendre vers un état isotrope aux temps longs (*i.e.* $t \gg t_d$), l'angle de Shebalin passe en dessous de sa valeur isotrope pour des nombres de Rossby modérés (*i.e.* pour $\Lambda \approx 1$ et $\Lambda \approx 3$). Il n'est pas exclu que ce comportement s'accroisse par la suite[‡]. Quelle que soit la valeur du nombre d'Elsasser, les fluctuations magnétiques semblent ainsi, en se basant sur la quantité θ_B , quasiment isotropes.

Spectres angulaires

Comme nous l'avons déjà remarqué au sein du chapitre 4, il existe une très forte anisotropie du champ de vitesse lorsque le nombre de Reynolds magnétique est faible. Cependant, cette anisotropie dépend beaucoup de l'échelle considérée et les quantités précédentes ne sont pas suffisantes pour analyser l'effet de la rotation sur la dynamique. Les spectres angulaires d'énergies sont rassemblés au sein de la figure 5.15. Le trait plein correspond au cas sans rotation. Les différents taux de rotation sont représentés par des courbes avec différents symboles (la couleur est de plus en plus claire au fur et à mesure que Ω augmente).

Observons dans un premier temps les spectres d'énergie cinétique (figure 5.15(a)). La première remarque est que la rotation augmente l'énergie cinétique contenue aux pôles. Cet effet peut paraître en contradiction avec le cas purement hydrodynamique (cf. Chapitre 2), où l'on observe une redistribution de l'énergie du pôle vers l'équateur. Encore une fois, on se conten-

[†]L'anisotropie directionnelle est cependant beaucoup plus intense en MHD à faible R_M qu'en rotation. Il suffit de comparer les valeurs extrémales de θ_U dans ces deux cas (voir les figures 4.9(a) et 3.10(a)).

[‡]Il a été observé au sein de simulations directes de plus faible résolution (non rapportées ici), une concentration de l'énergie magnétique aux pôles aux temps longs, avec $\theta_B \approx 30^\circ$. Le champ magnétique est alors structuré en feuilles horizontales, contrastant avec les structures cohérentes verticales du champ de vitesse.

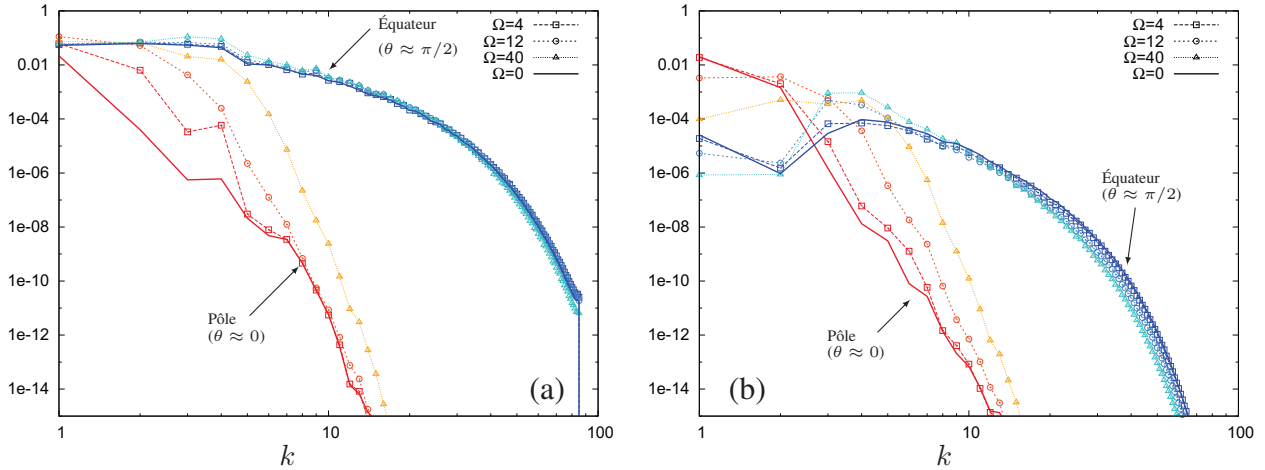


FIG. 5.15 – Spectres d'énergie angulaires. Les courbes en trait continu correspondent au cas sans rotation. Les couleurs rouges correspondent à l'équateur (*i.e.* aux modes tels que $\theta \approx \pi/2$) tandis que les couleurs bleues correspondent aux pôles (*i.e.* aux modes tels que $\theta \approx 0$). (a) Spectres angulaires d'énergie cinétique $E_K(k, \theta)$. (b) Spectres angulaires d'énergie magnétique $E_M(k, \theta)$.

tera d'une analyse linéaire afin d'expliquer ce phénomène. Lorsque le taux de rotation augmente, tout autre paramètre demeurant constant, la fréquence maximale des ondes inertielles augmente, ainsi que le nombre d'onde critique k_c associé au nombre de Lehnert (5.12). De plus en plus de modes sont donc influencés par les ondes inertielles, qui sont caractérisées par une équipartition d'énergie cinétique entre le pôle et l'équateur. À noter également la tendance à l'isotropie des faibles nombres d'onde déjà observée au sein des simulations hydrodynamiques en rotation (voir la figure 3.11). L'énergie contenue à l'équateur est en revanche quasiment indifférente à la présence de la rotation.

La figure 5.15(b) représente les spectres angulaires d'énergie magnétique pour différents taux de rotation. On observe deux tendances lorsque que la rotation augmente : le maximum du spectre d'énergie polaire diminue et se décale vers les grands nombres d'onde, tandis que l'énergie à l'équateur semble croître aux faibles nombres d'onde et décroître aux grands nombres d'onde.

Si ces observations sont cohérentes avec les résultats obtenus pour la quantité θ_U , elles mettent en évidence les limites de l'utilisation de l'angle de Shebalin afin de caractériser l'anisotropie. Si cette quantité permet de quantifier simplement l'anisotropie spectrale par un unique scalaire, elle peut néanmoins conduire à des conclusions éronnées. Ainsi, en se basant sur l'évolution de l'angle θ_B (voir la figure 5.14(b)), on pourrait conclure que le champ magnétique est isotrope. Il apparaît cependant clairement, lorsque l'on observe les spectres angulaires, que le champ magnétique est fortement anisotrope aux petites échelles, mais que l'inversion d'anisotropie identifiée pour $k < 4$ fausse l'analyse par intégration sur tout l'espace spectral.

Nous avons également réalisé une série de calculs (non rapportée ici) à plus faible nombre de Reynolds afin d'augmenter le nombre d'onde d'énergie maximum et de s'affranchir du manque de convergence statistique pour les faibles nombres d'onde. Les résultats sont inchangés.

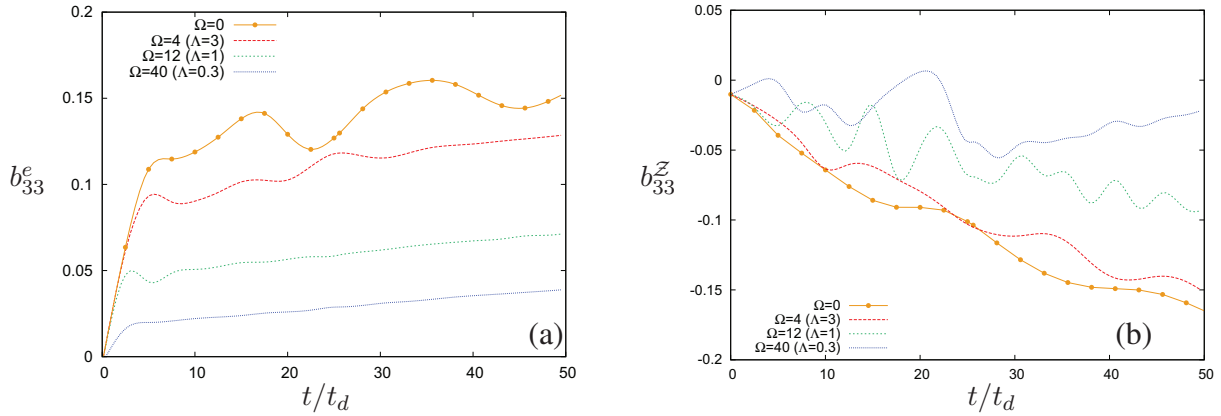


FIG. 5.16 – Composante $b_{33}(t)$ du tenseur d'anisotropie de Reynolds. Le temps est adimensionné par $t_d = \eta/B_0^2$. (a) Anisotropie de directivité $b_{33}^e(t)$. (b) Anisotropie de polarisation $b_{33}^z(t)$.

Tenseur d'anisotropie de Reynolds

À partir de ce point, seule l'anisotropie du champ de vitesse est considérée. On s'intéresse ici au tenseur d'anisotropie de Reynolds, et en particulier à la décomposition de sa composante diagonale verticale $b_{33} = b_{33}^e + b_{33}^z$. La figure 5.16 rassemble les résultats obtenus par simulations directes.

L'anisotropie de directivité, caractérisée par la quantité b_{33}^e , est atténuée par la présence de la rotation. Cette observation est cohérente avec le comportement de la quantité θ_U . On notera que dans le cas hydrodynamique en rotation, la valeur asymptotique de b_{33}^e dépend du nombre de Rossby. La tendance est la suivante : lorsque le nombre de Rossby diminue, b_{33}^e augmente jusqu'à saturation au-delà de laquelle b_{33}^e diminue (voir les courbes avec points dans la figure 5.11(a) ou [Morinishi *et al.* (2001), Cambon *et al.* (1997)]). L'effet de la rotation se résume donc à atténuer la croissance initiale de l'anisotropie de directivité qui correspond à la phase initiale de croissance des fluctuations magnétiques. Remarquons enfin que la diminution de l'anisotropie de directivité (qui se manifeste par la diminution de b_{33}^e et θ_U) est cohérente avec les observations réalisées sur les spectres angulaires où la rotation tend clairement à restaurer l'isotropie aux faibles nombres d'onde énergétiques.

Concernant la polarisation, la quantité b_{33}^z est tracée au sein de la figure 5.16(b). La rotation tend clairement à atténuer la forte polarisation observée en MHD pure.

Longueurs intégrales

Les longueurs de corrélations pour la vitesse sont rapportées au sein de la figure 5.17. Les deux longueurs qui méritent un intérêt sont L_{11}^3 et L_{33}^3 . Celles-ci évoluent continûment entre la courbe rouge en trait plein (rotation pure) et la courbe bleue avec disques (MHD à bas nombre de Reynolds magnétique). Au fur et à mesure que la rotation augmente, les longueurs L_{11}^3 et L_{33}^3 diminuent, tendant vers les valeurs observées dans le cas de la rotation pure. La diminution de L_{11}^3 est cohérente avec la diminution de la polarisation (voir pour rappel les définitions (1.51) et (1.53)), tandis que la diminution conjointe de L_{11}^3 et L_{33}^3 est cohérente avec une anisotropie de directivité moins importante, et en particulier une concentration de l'énergie cinétique à

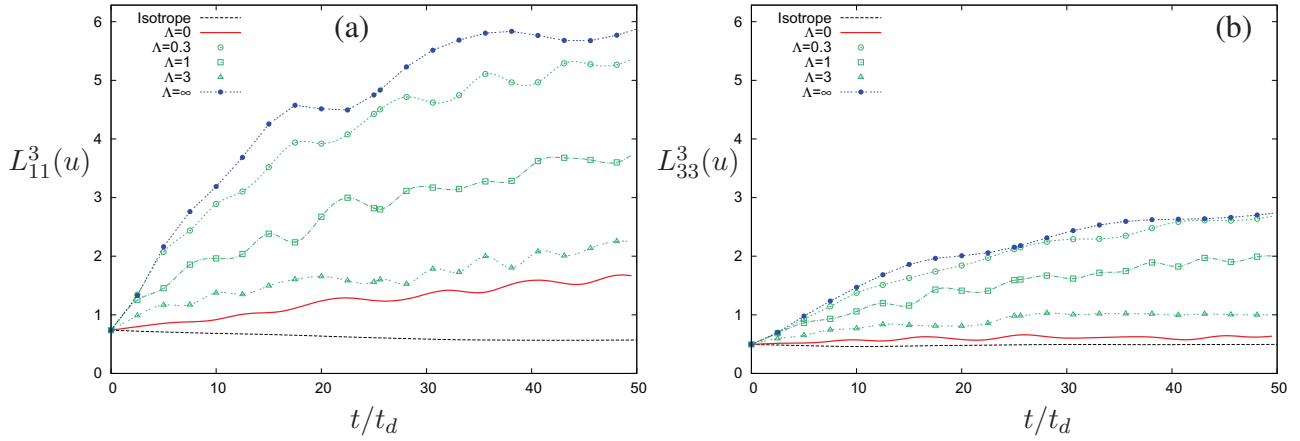


FIG. 5.17 – Longueurs de corrélations de la vitesse au cours du temps. La courbe rouge en trait continu correspond au cas hydrodynamique en rotation pure. La courbe bleue avec des disques correspond au cas MHD avec $R_M \approx 1$. Les courbes avec des symboles vides correspondent à trois valeurs différentes du nombre d'Elsasser. (a) $L^3_{11}(u)$. (b) $L^3_{33}(u)$.

l'équateur moins intense.

Les longueurs de corrélation L^3_{11} et L^3_{33} pour la vorticité sont rapportées au sein de la figure 5.18. La tendance est cette fois-ci différente. Pour des taux de rotation modérés (*i.e.* $\Lambda = 3$ et $\Lambda = 1$), les corrélations obtenues en MHD avec rotation demeurent proches de celles obtenues en MHD pure. Seul le cas $\Lambda = 0.3$ présente un écart notable et les corrélations tendent dans ce cas à diminuer. Si l'on suppose que les corrélations de vorticité sont caractéristiques des petites échelles de l'écoulement, il semble ainsi que l'anisotropie aux grands nombres d'onde soit dominée par la force de Lorentz et qu'il est nécessaire de considérer un régime de rotation dominante (*i.e.* $\Lambda \approx 0.3$) avant d'observer une différence notable entre les résultats MHD et les résultats MHD en rotation.

En conclusion, l'impact de la rotation à bas nombre de Reynolds magnétique est relativement faible. Seules les grandes structures (cinétiques comme magnétiques) semblent voir leur anisotropie diminuer. À noter cependant que ce comportement va contre l'idée que la rotation ne peut qu'accentuer l'anisotropie observée en turbulence MHD. Des comportements plus complexes pourraient voir le jour à fort nombre de Reynolds ou plus faible nombre d'interaction. Dans ce cas, le temps t_d augmente et la rotation pourrait influencer l'anisotropie du champ magnétique de manière plus prononcée. De même, les régimes à nombre de Reynolds magnétique modéré (*i.e.* $10^{-2} < Pr_M < 1$) peuvent s'avérer intéressants puisque l'anisotropie due à l'action de la force de Lorentz est plus faible.

5.5 Conclusion

Ce chapitre est dédié à l'étude de la réponse d'une turbulence homogène à l'application d'un champ magnétique imposé dans un repère tournant. Ce type d'écoulements est caractérisé par un grand nombre de paramètres adimensionnés. Dans une première approche, nous nous sommes concentrés sur le cas d'un nombre d'interaction grand ($N \approx 20$) et d'un nombre de

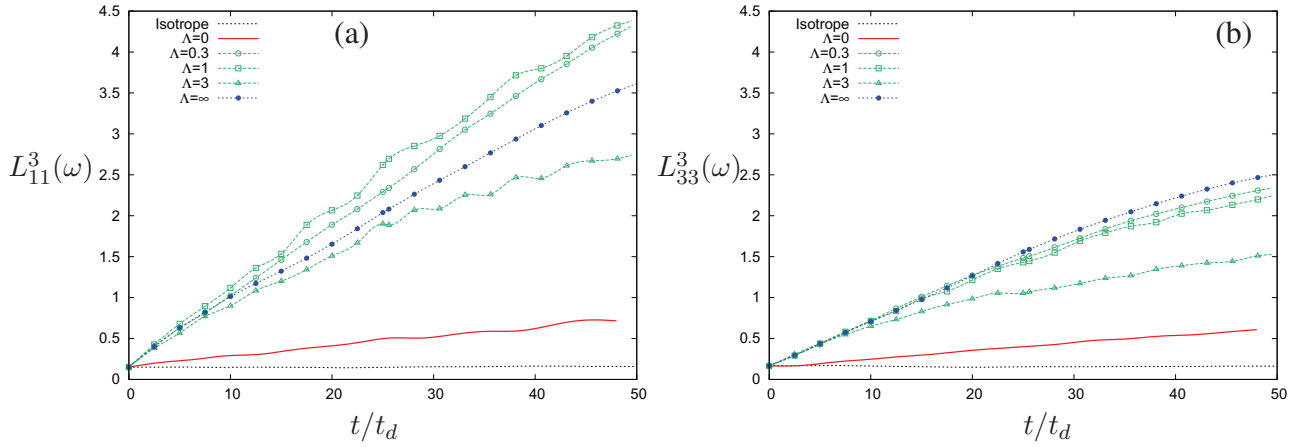


FIG. 5.18 – Longueurs de corrélations de la vorticité au cours du temps. La courbe rouge en trait continu correspond au cas hydrodynamique en rotation pure. La courbe bleue avec des disques correspond au cas MHD avec $R_M \approx 1$. Les courbes avec des symboles vides correspondent à trois valeurs différentes du nombre d'Elsasser. (a) $L^3_{11}(\omega)$. (b) $L^3_{33}(\omega)$.

Rossby faible ($0.02 < Ro < 0.2$). Le cas axisymétrique représente également un avantage par sa simplicité et nous avons donc considéré que le champ magnétique $\mathbf{B}_0$ était aligné avec l'axe de rotation (quelques résultats préliminaires en configuration perpendiculaire peuvent être trouvés en annexe C). Concernant l'impact de la rotation sur l'énergie de l'écoulement, nous avons observé une nette réduction des fluctuations magnétiques, et ce quel que soit le nombre de Reynolds magnétique. La dissipation des fluctuations magnétiques est également plus faible dans le cas tournant. Ces comportements sont qualitativement prédits par les solutions linéaires, qui mettent en évidence la compétition entre ondes inertielles et ondes d'Alfvén.

Concernant l'anisotropie, lorsque le nombre de Reynolds magnétique est important, l'anisotropie du champ de vitesse est très proche de celle obtenue dans un contexte hydrodynamique en rotation. Les fluctuations magnétiques sont atténuées aux faibles nombres d'onde tandis que l'on observe une équipartition d'énergie pour les petites échelles, et donc une anisotropie similaires à celle du champ de vitesse.

Lorsque le nombre de Reynolds magnétique est faible, la rotation tend à diminuer l'anisotropie du champ de vitesse et du champ magnétique, particulièrement aux faibles nombres d'onde. Les régimes que nous avons considéré sont malgré tout dominés par la dissipation anisotrope.

Conclusion

Ce travail de thèse est consacré aux corrélations en deux-temps et à l'anisotropie en turbulence homogène soumise à la force de Coriolis et à la force de Lorentz.

Après avoir rappelé quelques notions d'analyse statistique d'écoulements turbulents anisotropes, nous avons présenté les deux méthodes numériques utilisées dans ce rapport. La simulation directe est une méthode classique et nous avons donc particulièrement insisté sur le modèle synthétique de turbulence. Nous avons montré comment celui-ci peut se généraliser aux écoulements anisotropes et comment il est possible d'y inclure explicitement toutes solutions linéaires dans l'espace de Craya.

Nous nous sommes ensuite intéressés à la turbulence homogène isotrope ou en rotation. Ce type d'écoulements et l'anisotropie qui s'y développe ont été largement étudiés. Nous nous sommes ainsi concentrés sur l'analyse des corrélations en deux-temps de la vitesse. Dans un premier temps, l'étude de la turbulence homogène isotrope, et la comparaison entre simulations directes et synthétiques, nous ont permis de mettre en évidence l'impact des pulsations aléatoires sur des quantités fines telles que la corrélation temporelle des modes de Fourier de la vitesse $R(k, \tau)$. Il apparaît ainsi que la décorrélation rapide des petites structures est nettement mieux représentée par une hypothèse se basant sur l'effet de *sweeping*. Le caractère Gaussien de cette même pulsation est également un élément important qui n'apparaît pas lors de l'analyse des corrélations dans l'espace physique. Il est important de remarquer que l'utilisation d'une pulsation aléatoire basée sur le *sweeping* ne correspond pas à un processus physique d'advection. Nous avons essayé d'introduire au sein du modèle KS un processus d'advection des petites structures, mais nous nous sommes heurtés soit à une violation de l'incompressibilité, soit à un problème de discrétisation spectrale[†]. Si l'absence de *sweeping* dans les modèles synthétiques de type KS est un inconvénient majeur, d'autres modèles synthétiques, basés sur une approche Lagrangienne, permettent de générer des champs de vitesse (stationnaires pour l'instant) possédant des statistiques non-Gausiennes [Rosales & Meneveau(2006)]. Ce type de modèle pourrait s'avérer prometteur quant à la construction d'un modèle synthétique plus réaliste.

La cas de la turbulence homogène en rotation permet d'introduire l'analyse linéaire autour de l'écoulement de rotation solide. L'instationnarité des solutions linéaires est ainsi directement liée à la relation de dispersion des ondes inertielles. La comparaison des résultats non linéaires avec le modèle synthétique permet de discerner l'impact de la rotation sur les corrélations en deux-temps. Il existe une compétition entre les effets de la rotation et l'advection, modélisée ici de façon élémentaire par une hypothèse de *sweeping*. La rotation domine la décorrélation des bas nombres d'onde et est d'autant plus importante que le vecteur d'onde est aligné avec

[†]Les interactions entre deux modes de Fourier font intervenir un troisième mode, qui n'existe pas nécessairement en KS.

l'axe de rotation. Les petites structures sont quant à elles dominées par l'advection qui peut être approximée par l'hypothèse de sweeping. Dans le cas isotrope comme dans le cas en rotation, l'analyse de l'émission sonore d'un domaine turbulent par analogie de Lighthill permet de confirmer les précédentes prédictions. De la même manière qu'il existe un lien étroit entre corrélations temporelles et diffusion Lagrangienne, il existe un lien fort en corrélations deux-temps et aéroacoustique. La comparaison des spectres acoustiques calculés à partir du champ direct et du champ synthétique permet d'aboutir aux conclusions suivantes : le son émis aux hautes fréquences est bien mieux représenté lorsque l'hypothèse de sweeping est utilisée. Pour la turbulence en rotation, la relation de dispersion des ondes inertielles, et l'instationnarité qui en découle par analyse linéaire, est suffisante pour observer l'émission acoustique basse fréquence préférentielle.

La quatrième chapitre est consacré à l'analyse d'une turbulence homogène soumise à un champ magnétique uniforme et stationnaire. Nous nous sommes focalisés sur la généralisation du modèle synthétique dans ce contexte. Pour cela, nous avons rappelé quelles étaient les solutions linéaires dans l'espace de Craya. L'anisotropie a ensuite été considérée en utilisant divers indicateurs statistiques et en comparant les prédictions linéaires avec les résultats de simulations directes. L'importance de l'utilisation de statistiques fines telles que les spectres angulaires et la distinction entre anisotropie directionnelle et anisotropie de polarisation a également été soulignée. Malgré une mise en évidence de l'anisotropie par analyse linéaire, le cas d'une turbulence MHD à bas nombre de Reynolds magnétique est plus complexe qu'il n'y paraît. Les oscillations observées pour l'angle de Shebalin des fluctuations magnétiques et la différence entre composantes poloïdale et toroïdale de la vitesse à l'équateur—deux phénomènes purement non-linéaires—méritent que l'on s'y intéresse en détail.

Enfin, le cinquième chapitre traite d'une turbulence homogène soumise à un champ magnétique dans un repère tournant. Bien qu'en relation directe avec de nombreux écoulements géophysiques ou astrophysiques, ce type de configuration n'a été que peu étudié, du moins dans le cas d'une turbulence homogène. Encore une fois, l'approche linéaire se trouve être d'un intérêt certain et permet d'analyser les résultats des simulations directes. Il existe bien évidemment une grande gamme d'écoulements différents caractérisés par différents nombres adimensionnés. Lorsque le nombre de Reynolds magnétique est important, le champ de vitesse comme le champ de fluctuations magnétiques est quasiment isotrope. L'effet de la rotation est, dans ce cas, sensiblement le même que dans un contexte hydrodynamique en rotation. L'énergie se concentre à l'équateur par transfert non-linéaire. Les fluctuations magnétiques tendent vers le même état anisotrope, et l'on observe également une forte atténuation de l'énergie magnétique aux faibles nombres d'onde, du fait de la domination des ondes inertielles. Lorsque le nombre de Reynolds magnétique est faible, l'anisotropie est dominée par la dissipation induite par la force de Lorentz. La rotation tend cependant à conserver l'isotropie à bas nombres d'onde.

Il est important de mettre en avant la multitude de régimes différents qu'il peut exister au sein des écoulements que nous avons considéré. Seule une petite partie a été étudiée ici et d'autres études pourront être menées. En premier lieu, une configuration non-axisymétrique semble être une première piste intéressante. Le champ magnétique au sein du noyau terrestre est majoritairement toroïdal, et donc perpendiculaire à l'axe de rotation. De nouveaux indicateurs statistiques seront nécessaires et l'on s'attend à observer des phénomènes complexes, même en ne considérant que l'analyse linéaire. Une étude préliminaire est présentée au sein de l'annexe

C.

Au delà de l'espace paramétrique, nous nous sommes concentrés sur un seul type de conditions initiales. Le champ de vitesse est quasi-stationnaire et représente une turbulence homogène isotrope développée tandis que les fluctuations magnétiques sont nulles. Il est cependant démontré que les conditions initiales ont un impact considérable en turbulence MHD en déclin [Dobrowolny *et al.*(1980), Matthaeus *et al.*(1983), Neffaa *et al.*(2008)]. Une faible variation sur les quantités intégrales initiales peut entraîner des comportements très distincts. Pour cette raison, il serait nécessaire de considérer d'autres types de conditions initiales. Une autre possibilité serait d'initialiser les fluctuations magnétiques suivant la même méthode que le champ de vitesse. Les paramètres supplémentaires étant le rapport initial entre énergie cinétique et énergie magnétique, ainsi que les éventuelles hélicités (cinétique, magnétique ou croisée). Dans ce contexte, la méthode générale d'initialisation anisotrope en KS présentée au sein de la section 2.2.4 pourrait s'avérer utile.

Enfin, seul le cas d'une turbulence en déclin a été considéré. Dans le contexte d'une turbulence anisotrope, le forçage est un problème épineux. En effet, sans forçage, l'origine de l'anisotropie est sans ambiguïté. Ce n'est plus le cas dès que l'on utilise une méthode de forçage stochastique. En gagnant la quasi-stationnarité, nous perdons alors tout contrôle sur l'anisotropie de l'écoulement. Une approche différente consisterait à inclure au sein de l'écoulement un processus physique d'instabilité (convection thermique, instabilité barocline, instabilité MRI...) afin de maintenir la turbulence dans un état stationnaire. Les méthodes de forçage stochastique (ou méthode similaire comme le forçage de type Taylor-Green ou par écoulement ABC) n'ont qu'un lien éloigné avec la dynamique d'un forçage réel. L'ajout d'un forçage réaliste constitue donc une étape importante quant à la compréhension de l'anisotropie de la turbulence locale au sein des écoulements géophysiques et astrophysiques.

Annexe A

Contribution à l'effet α et aux corrélations croisées

L'objectif de cette annexe est de dériver le calcul du tenseur α en partant de la formulation axisymétrique la plus générale du tenseur spectral $\hat{R}_{ij}$. L'équation d'induction peut être séparée en moyenne et fluctuations ([Moffatt(1978)] p.148) :

$$\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U}_0 \times \mathbf{B}_0) + \nabla \times \mathcal{E} + \eta \nabla^2 \mathbf{B}_0 \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U}_0 \times \mathbf{b}) + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) + \nabla \times \mathbf{G} + \eta \nabla^2 \mathbf{b} \quad (\text{A.2})$$

où

$$\mathcal{E} = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle \quad \text{et} \quad \mathbf{G} = \mathbf{u} \times \mathbf{b} - \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle . \quad (\text{A.3})$$

Dans notre cas, le champ de vitesse est de moyenne nulle et l'on suppose donc que $\mathbf{U}_0 = 0$. L'approximation quasi-linéaire (aussi appelée *first order smoothing*) consiste à négliger le terme quadratique $\nabla \times \mathbf{G}$, tout en conservant la force électromotrice moyenne $\mathcal{E}$. Cela revient à supposer que le nombre de Reynolds magnétique R_M est petit devant 1. Le développement suivant est introduit pour relier le champ magnétique moyen $\mathbf{B}_0$ à la force électromotrice moyenne $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E}_i = \alpha_{ij} B_{0j} + \beta_{ijk} \frac{\partial B_{0j}}{\partial x_k} + \dots \quad (\text{A.4})$$

où α_{ij} et β_{ijk} sont des pseudo-tenseurs, et sont totalement déterminés par les propriétés statistiques du champ fluctuant $\mathbf{u}$ et par η .

A.1 Lien entre α_{ij} et le tenseur spectral $\hat{R}_{ij}$

Lorsque $R_M \ll 1$ et $\mathbf{U}_0 = 0$, l'équation (A.2) s'écrit :

$$(\mathrm{i}\omega + \eta k^2) \tilde{\mathbf{b}} = \mathrm{i} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) \tilde{\mathbf{u}} , \quad (\text{A.5})$$

où $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \omega)$ (resp. $\tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{k}, \omega)$) est la transformée de Fourier spatio-temporelle de $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ (resp. $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$) définie par :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iint \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) e^{-\mathrm{i}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d\mathbf{x} dt . \quad (\text{A.6})$$

La force électromotrice moyenne s'en déduit immédiatement :

$$\mathcal{E} = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle = \iint \frac{\langle \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \omega) \times \tilde{\mathbf{u}}^*(\mathbf{k}, \omega) \rangle}{-i\omega + \eta k^2} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega, \quad (\text{A.7})$$

et le tenseur α_{ij} est donc relié au tenseur spectral selon :

$$\alpha_{ij} = i\epsilon_{ilm} \iint \frac{k_j \hat{R}_{lm}(\mathbf{k}, \omega)}{-i\omega + \eta k^2} d\mathbf{k} d\omega. \quad (\text{A.8})$$

A.2 Lien entre β_{ij} et le tenseur spectral $\hat{R}_{ij}$

Le calcul est identique mais on suppose que le champ magnétique possède un gradient constant :

$$B_j(\mathbf{x}, t) = B_{0j} + \frac{\partial B_j}{\partial x_l} x_l. \quad (\text{A.9})$$

L'équation (A.2) devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_k}{\partial t} - \eta \nabla^2 b_k &= B_m \frac{\partial u_k}{\partial x_m} - u_m \frac{\partial B_k}{\partial x_m} \\ &= \left(B_{0m} + \frac{\partial B_m}{\partial x_l} x_l \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_m} - u_m \frac{\partial B_k}{\partial x_m}, \end{aligned}$$

et s'écrit dans l'espace de Fourier :

$$(-i\omega + \eta k^2) \tilde{b}_k = \left(B_{0m} + i \frac{\partial B_m}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial k_l} i k_m \tilde{u}_k \right) - \frac{\partial B_k}{\partial x_m} \tilde{u}_m. \quad (\text{A.10})$$

La force électromotrice moyenne s'exprime alors :

$$\mathcal{E}_i = \epsilon_{ijk} \iint \frac{\langle \tilde{u}_j^*(\mathbf{k}, \omega) \left[\left(B_{0m} - \frac{\partial B_m}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial k_l} k_m \tilde{u}_k \right) - \frac{\partial B_k}{\partial x_m} \tilde{u}_m \right] \rangle}{-i\omega + \eta k^2} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega. \quad (\text{A.11})$$

Tout calcul fait, et en posant $G(k, \omega) = (-i\omega + \eta k^2)^{-1}$, on trouve :

$$\beta_{iml} = \epsilon_{ijk} \iint \frac{\partial G}{\partial k_l} k_m \hat{R}_{jk} d\mathbf{k} d\omega - \epsilon_{ijm} \iint G \hat{R}_{jl} d\mathbf{k} d\omega, \quad (\text{A.12})$$

or

$$\frac{\partial G}{\partial k_l} = \frac{-2\eta k_l}{(-i\omega + \eta k^2)^2},$$

et l'on obtient finalement :

$$\beta_{iml} = -\epsilon_{ijk} \iint \frac{2\eta k_l k_m \hat{R}_{jk}}{(-i\omega + \eta k^2)^2} d\mathbf{k} d\omega - \epsilon_{ijm} \iint \frac{\hat{R}_{jl}}{-i\omega + \eta k^2} d\mathbf{k} d\omega. \quad (\text{A.13})$$

A.3 Anisotropie dans l'espace de Fourier

On rappelle que dans le cas axisymétrique, le tenseur $\hat{R}_{ij}$ peut se décomposer selon :

$$\hat{R}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = e(\mathbf{k}, \omega) \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) + i\mathcal{H}(\mathbf{k}, \omega) \epsilon_{ijn} \frac{k_n}{k^2} + \Re [\mathcal{Z}(\mathbf{k}, \omega) N_i(\mathbf{k}) N_j(\mathbf{k})] , \quad (\text{A.14})$$

où $N_i(\mathbf{k}) = e_i^{(2)} - i e_i^{(1)}$, $e(\mathbf{k}, \omega)$ et $\mathcal{H}(\mathbf{k}, \omega)$ sont réels tandis que $\mathcal{Z}(\mathbf{k}, \omega)$ est complexe.

Seule la partie antisymétrique du tenseur $\hat{R}_{ij}$ ne contribue au tenseur α_{ij} . Le premier terme de la décomposition (A.14) ne contribue donc pas. Il en va de même du troisième terme, qui contribue en revanche à l'effet β selon :

$$\beta_{iml}^{\mathcal{Z}} = -\epsilon_{ijm} \iint \frac{\mathcal{Z}_R \left(e_j^{(2)} e_l^{(2)} - e_j^{(1)} e_l^{(1)} \right) + \mathcal{Z}_I \left(e_j^{(1)} e_l^{(2)} + e_j^{(2)} e_l^{(1)} \right)}{-i\omega + \eta k^2} d\mathbf{k} d\omega . \quad (\text{A.15})$$

Finalement, la seule contribution à l'effet α provient du terme d'hélicité et l'on aboutit aux relations suivantes :

$$\alpha_{ij}^{\mathcal{H}} = -\eta \iint \frac{2k_i k_j \mathcal{H}(\mathbf{k}, \omega)}{\omega^2 + \eta k^2} d\mathbf{k} d\omega \quad (\text{A.16})$$

$$\beta_{ijk}^{\mathcal{H}} = \iint \frac{\omega}{\omega^2 + \eta^2 k^4} \left(\frac{8\eta^2 k_i k_m k_l}{\omega^2 + \eta^2 k^4} + \frac{k_i \delta_{ml} - k_m \delta_{il}}{k^2} \right) \mathcal{H}(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k} d\omega \quad (\text{A.17})$$

qui ont d'ores et déjà été mises en évidence [Moffatt(1978)].

A.4 Corrélations croisées

Il est clair que le tenseur spectral de corrélations des fluctuations magnétiques, défini par :

$$\hat{B}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \left\langle \hat{b}_i^*(\mathbf{k}, \omega) \hat{b}_j(\mathbf{k}, \omega) \right\rangle , \quad (\text{A.18})$$

possède les mêmes propriétés que le tenseur $\hat{R}_{ij}$ et peut donc se décomposer de la même manière dans l'espace de Craya, selon :

$$\hat{B}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = e^M(\mathbf{k}, \omega) \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) + i\mathcal{H}^M(\mathbf{k}, \omega) \epsilon_{ijn} \frac{k_n}{k^2} + \Re [\mathcal{Z}^M(\mathbf{k}, \omega) N_i(\mathbf{k}) N_j(\mathbf{k})] \quad (\text{A.19})$$

où l'indice M fait référence aux quantités magnétiques. De la même manière que pour la vitesse, il est possible de dissocier l'énergie, l'hélicité et la polarisation magnétiques.

Le tenseur des corrélations croisées est défini par :

$$\hat{C}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \left\langle \hat{b}_i^*(\mathbf{k}, \omega) \hat{u}_j(\mathbf{k}, \omega) \right\rangle , \quad (\text{A.20})$$

tandis que la décomposition dans l'espace de Craya aboutit à une relation du type :

$$\hat{C}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = C_1(\mathbf{k}, \omega) P_{ij}(\mathbf{k}) + Z_1(\mathbf{k}, \omega) N_i N_j + Z_2(\mathbf{k}, \omega) N_i^* N_j^* + i\epsilon_{ijn} \frac{k_n}{k} C_2(\mathbf{k}, \omega) \quad (\text{A.21})$$

faisant ainsi intervenir quatre pseudo-scalaires complexes.

La trace du tenseur $\hat{C}_{ij}$, qui n'est autre que C_1 , est le spectre de l'hélicité croisée $\langle b_i u_i \rangle$. Une autre quantité intéressante est le spectre vectoriel de la force électromotrice moyenne $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle$. Nous avons :

$$\langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle_m = -\epsilon_{mij} \hat{C}_{ij} = \epsilon_{mij} \epsilon_{ijn} \frac{k_n}{k} C_2 \quad (\text{A.22})$$

et l'on aboutit donc aux relations

$$\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} \rangle = 2 \int C_1 d\mathbf{k} \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle = -2i \int \frac{\mathbf{k}}{k} C_2 d\mathbf{k} . \quad (\text{A.23})$$

Annexe B

Interaction non-linéaire d'ondes d'Alfvén

Cette annexe est consacrée à quelques considérations concernant les interactions linéaires et non-linéaires de deux paquets d'ondes d'Alfvén. Cette étude fut motivée par les visualisations réalisées au cours du chapitre 4 (voir figure 4.1), ainsi que par le montage expérimental de l'équipe de Thierry Alboussière au LGIT (Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique) à Grenoble.

B.1 Méthode numérique

Les équations de la magnétohydrodynamique sont résolues par DNS. Le fluide est plongé dans un champ magnétique uniforme $\mathbf{B}_0$ vertical. La condition initiale est une impulsion de vitesse horizontale de la forme

$$\mathbf{u}_f(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{U}_F(\mathbf{x})}{\sqrt{2\pi}\sigma_f} \exp\left(-\frac{(t - t_0)^2}{\sigma_f}\right) \quad (\text{B.1})$$

où t_0 est le temps où l'impulsion atteint son maximum et σ_f permet de passer continûment d'un dirac temporel à une impulsion progressive. La composante spatiale $\mathbf{U}_F$ est Gaussienne centrée sur un point du domaine de calcul. Ce forçage initial peut être appliqué en un ou plusieurs points. Par périodicité, l'onde sortant par la face supérieure du domaine de calcul continue son parcours à partir de la face inférieure. Afin de visualiser l'interaction des deux paquets d'ondes au centre du domaine de calcul, l'impulsion est réalisée au sommet du domaine de calcul. Lors de l'impulsion, deux paquets d'ondes sont générés : l'un étant ascendant de vitesse de groupe $\mathbf{v}_g = +\mathbf{B}_0$ et l'autre descendant de vitesse de groupe $\mathbf{v}_g = -\mathbf{B}_0$.

B.2 Régime linéaire

L'amplitude U_F est ici suffisamment faible pour que l'on demeure dans un régime linéaire. On observe dans un premier temps la propagation d'ondes d'Alfvén pour différents champ magnétique. La figure B.1 présente les énergies cinétiques et magnétiques en fonction du temps pour trois différents champs magnétiques $\mathbf{B}_0$ et sans aucun phénomène dissipatif (*i.e.* $\nu = 0$ et $\eta = 0$). Le fait que l'énergie totale soit quasiment constante[†] est remarquable. Par périodicité

[†]Une légère dissipation numérique est observée lorsque $B_0 = 4$ et qui s'explique par le fait que le pas de temps est trop grand pour représenter les ondes d'Alfvén de pulsations maximales.

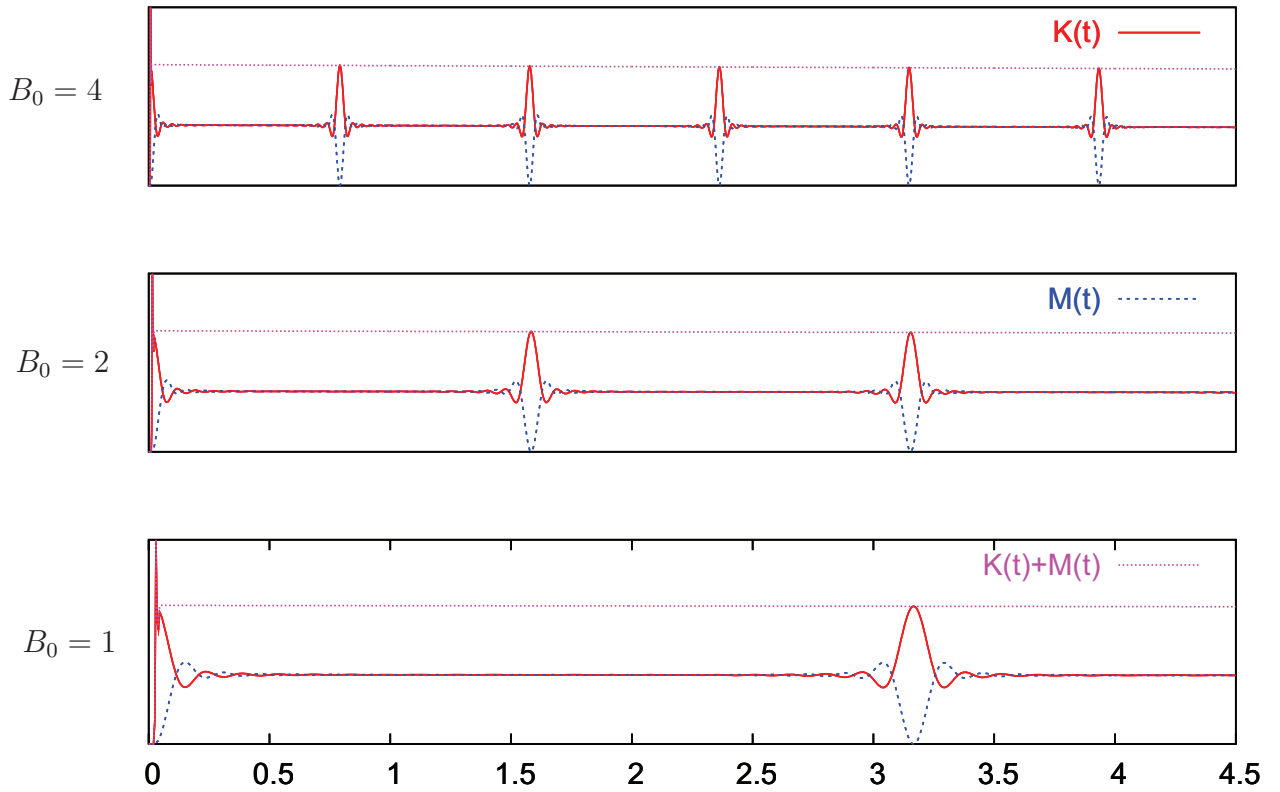


FIG. B.1 – Énergies cinétique et magnétique au cours du temps. L'axe des ordonnées est identique sur les trois graphiques. Les amplitudes sont faibles.

du domaine de résolution, on observe une interaction linéaire des deux paquets d'ondes d'Alfvén de manière cyclique. La taille du domaine de calcul est de 2π et la distance à parcourir pour chacune des ondes et donc de π . Lorsque la vitesse d'Alfvén est unitaire, le temps entre chaque interaction est donc également de π , ce qui est effectivement observé sur la figure B.1. On retrouve ainsi, à tous les instants $t \propto \pi/B_0$, notre condition initiale qui consiste en des fluctuations de vitesse sans fluctuations magnétiques.

Les interactions non-linéaires sont ici négligeables et ces résultats demeurent identiques si l'on supprime le calcul des termes non-linéaires dans les équations de la magnétohydrodynamique. Le spectre d'énergie cinétique initial est donc conservé au cours du temps, et ce quel que soit le nombre d'interactions.

B.3 Régime non-linéaire

On se retient maintenant au cas où $B_0 = 1$ et l'amplitude de l'impulsion initiale est augmentée progressivement. La figure B.2 présente les mêmes résultats que précédemment, pour trois amplitudes initiales différentes. Pour les besoins du calcul, les termes non-linéaires sont ici négligés dans une première partie du calcul. En effet, à l'instant initial, les deux paquets d'onde (*i.e.* ascendant et descendant) se trouvent au même endroit et interagissent non-linéairement dès le début de la simulation. Afin d'éviter ce phénomène et faciliter les observations, seules les équations linéaires sont simulées. Une fois que les deux paquets d'onde sont suffisamment éloignés l'un de l'autre, les termes non-linéaires sont réintroduits afin de simuler

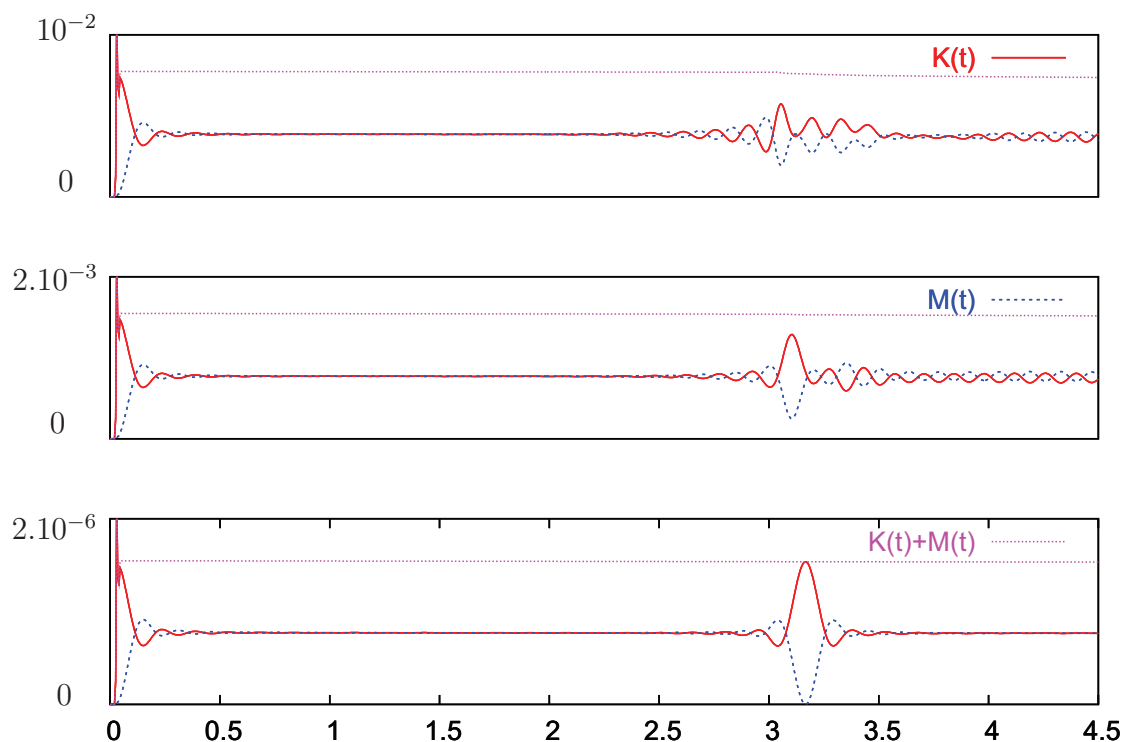


FIG. B.2 – Énergies cinétique et magnétique au cours du temps. L'axe des ordonnées varie d'un graphique à l'autre. Les amplitudes sont croissantes du bas vers le haut.

les équations MHD complètes lors de la prochaine collision. Il est à noter que cette configuration est très particulière puisqu'il s'agit de la collision de deux paquets d'ondes provenant de la même impulsion initiale.

Au fur et à mesure que l'amplitude des ondes d'Alfvén augmente, on observe une perte de la périodicité temporelle observée dans le cas des faibles amplitudes. L'énergie totale demeure presque constante, mais l'on observe tout de même une dissipation numérique plus importante que dans le cas linéaire, signe de la création de structures non-résolues.

Si les deux paquets d'onde se retrouvent inchangés par l'interaction linéaire, la figure B.3 présente la composante verticale des fluctuations magnétiques à cinq instants différents. Le rouge correspond à une valeur positive de b_z tandis que le bleu correspond à une valeur négative (20% de la valeur extrême dans les deux cas). On observe nettement une interaction complexe qui transforme sensiblement le paquet d'onde. L'apparition de structures d'échelles caractéristiques faibles comparées à la taille initiale du paquet d'onde est également à noter.

Ces observations dépendent bien évidemment grandement des conditions initiales. En particulier, le fait que l'on considère l'interaction de deux paquets d'onde provenant de la même impulsion initiale impose à l'écoulement certaines symétries. Une autre approche, que nous n'avons pas eu le temps de rapporter ici, serait de générer deux impulsions distinctes et d'observer la collision du paquet d'onde ascendant provenant de l'une des impulsions avec le paquet descendant de l'autre impulsion.

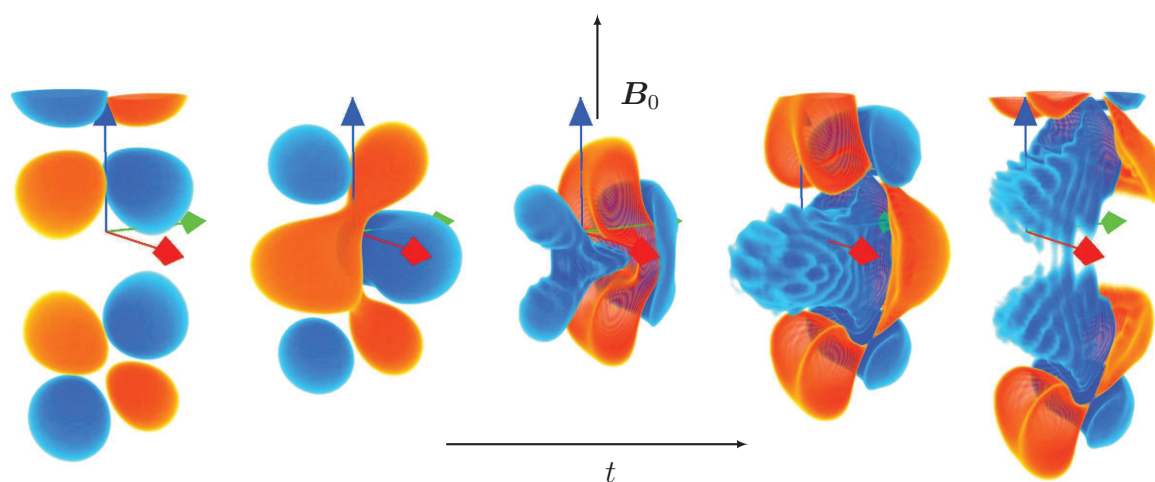


FIG. B.3 – Visualisation de la composante verticale des fluctuations magnétiques au cours du temps.

Annexe C

Vers une configuration non-axisymétrique

Cette annexe a pour objectif de rassembler quelques résultats préliminaires de turbulence MHD homogène en rotation dans une configuration non-axisymétrique. Le chapitre 5 s'est concentré sur le cas axisymétrique, mais il est clair que ce type d'écoulements n'est qu'un cas particulier. De plus, il semble que le champ magnétique au sein du noyau terrestre soit principalement toroïdal, et donc perpendiculaire à l'axe de rotation de la terre [Matsushima *et al.* (1999)]. On s'intéresse donc ici au cas non-axisymétrique où l'axe de rotation demeure vertical tandis que le champ magnétique imposé est horizontal dans la direction y .

Il faut cependant être vigilant lorsque l'on applique différentes forces de volume au sein d'une simulation numérique directe. L'homogénéité est une contrainte forte que l'on se doit de respecter. En particulier, si l'on suppose que le champ magnétique est perpendiculaire à l'axe de rotation, tout en restant uniforme et stationnaire, cela suppose implicitement que le champ magnétique tourne avec le même taux de rotation que le repère. Les quantités magnétiques considérées sont donc obtenues dans le repère tournant.

De plus, les différents indicateurs statistiques utilisés au sein du manuscrit sont principalement dédiés à des configurations axisymétriques puisque la distinction n'est faite qu'entre le pôle (*i.e.* les modes $\hat{u}(\mathbf{k})$ tels que $\mathbf{k}$ soit vertical) et l'équateur (*i.e.* les modes $\hat{u}(\mathbf{k})$ tels que $\mathbf{k}$ soit horizontal). Or, il est clair que dans une configuration non-axisymétrique, l'angle azimutal ϕ joue également un rôle. Dans le cas particulier où l'axe de rotation est perpendiculaire au champ magnétique imposé, il existe trois directions préférentielles : celle de la rotation, celle du champ magnétique et enfin la direction perpendiculaire aux deux précédentes. On peut dès lors imaginer une généralisation de l'angle de Shebalin :

$$\tan^2 \theta_i^Q = \frac{\sum_{\mathbf{k}} k_h^2 |\hat{Q}(\mathbf{k}, t)|^2}{\sum_{\mathbf{k}} k_i^2 |\hat{Q}(\mathbf{k}, t)|^2} \quad (\text{C.1})$$

où k_i est la composante du vecteur d'onde alignée avec la direction considérée, et k_h la composante perpendiculaire à cette direction, définissant ainsi trois angles de Shebalin pour chacune des directions x , y et z .

Nous ne sommes pas en mesure de fournir ici une étude systématique d'un tel écoulement. L'objectif est ici d'anticiper le fait que la direction respective de Ω et de $\mathbf{B}_0$ est un paramètre fondamental de l'anisotropie de l'écoulement. Pour s'en convaincre, on présentera dans la suite quelques quantités statistiques obtenues par simulations directes. Les solutions linéaires sont toujours valables dans ce cas, et il est également possible de les utiliser dans ce contexte.

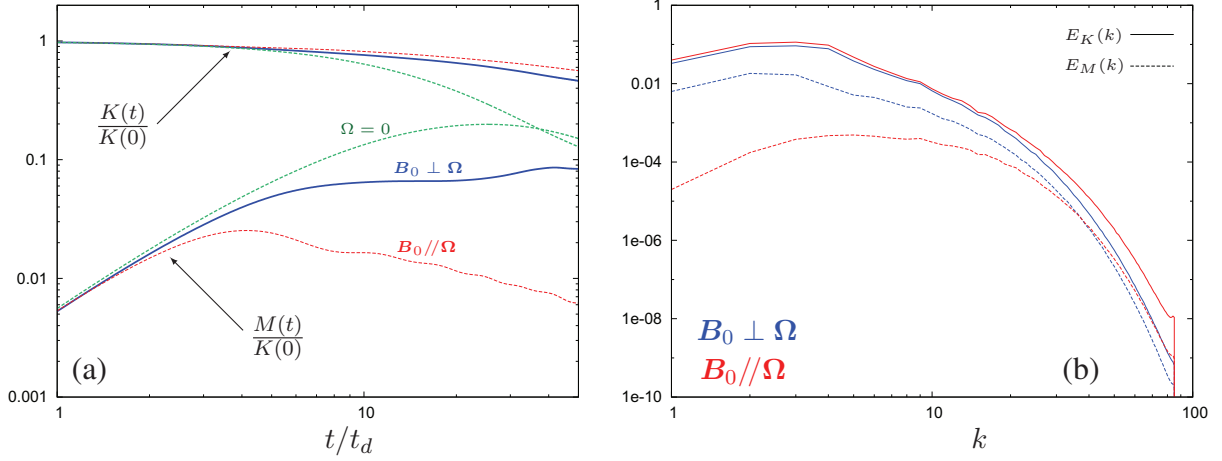


FIG. C.1 – (a) Évolution temporelle des énergies cinétique $K(t)$ et magnétique $M(t)$. On compare les résultats du cas non-axisymétrique (courbes bleues) avec ceux du cas axisymétrique (courbes rouges) et sans rotation (courbes vertes). (b) Spectres d'énergie cinétique $E_K(k)$ et magnétique $E_M(k)$ à l'instant $t \approx 40t_d$.

C.1 Fort nombre de Reynolds magnétique

On se restreint ici au régime suivant : le nombre de Reynolds magnétique est de l'ordre de 100, le nombre d'interaction est de l'ordre de 20 et le nombre d'Elsasser est de l'ordre de l'unité. Pour d'autres valeurs de ces paramètres, on s'attend bien évidemment à des comportements différents de ceux qui vont suivre.

La figure C.1(a) présente l'évolution temporelle de l'énergie cinétique $K(t)$ et de l'énergie magnétique $M(t)$. Lorsque l'axe de rotation est aligné avec le champ magnétique imposé, la croissance de l'énergie magnétique est fortement atténuée. C'est toujours le cas lorsque $B_0 \perp \Omega$, mais l'énergie magnétique est bien plus importante que dans le cas axisymétrique. Il en résulte directement que l'énergie cinétique est moins importante lorsque $B_0 \perp \Omega$ que lorsque $B_0 // \Omega$. Aux temps $t \gg t_d$, il semble même que les fluctuations magnétiques soient encore en phase de croissance, et l'on peut supposer que l'énergie magnétique sera plus importante que dans le cas sans rotation pour des temps ultérieurs.

Les spectres d'énergies magnétique (courbes en pointillés) et cinétique (courbes continues) sont rassemblés au sein de la figure C.1(b). Il apparaît clairement que, lorsque $B_0 \perp \Omega$, l'énergie magnétique est bien plus importante que dans le cas axisymétrique, et ce sur une large gamme d'échelles.

Même si les statistiques telles que l'angle de Shebalin ou encore le tenseur d'anisotropie de Reynolds sont définies dans un contexte axisymétrique, il est toujours possible de les calculer dans un contexte non-axisymétrique. Il sera cependant indispensable de s'intéresser à des quantités statistiques plus fines en vue de caractériser précisément l'anisotropie. La figure C.2 rassemble quelques-unes de ces quantités afin d'apprécier les différences observées en terme d'anisotropie lorsque le champ magnétique imposé est perpendiculaire. Seules les angles de Shebalin et la quantité b_{33}^Z sont rapportées.

On observe tout d'abord une augmentation significative de l'angle θ_B lorsque $B_0 \perp \Omega$. Le champ magnétique semble donc nettement plus anisotrope. Cependant, la configuration n'étant

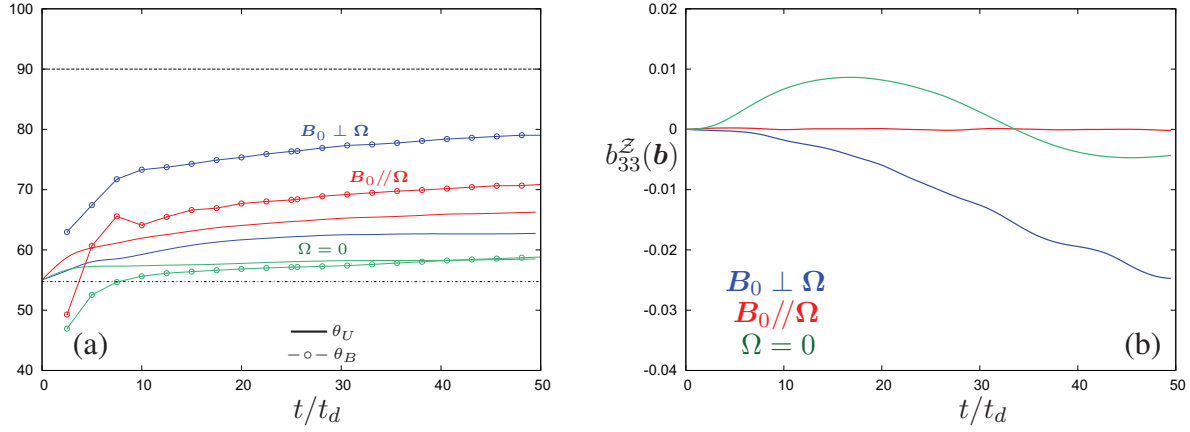


FIG. C.2 – (a) Évolution temporelle des angles de Shebalin θ_U (courbes pleines) et θ_B (courbes avec points). On compare les résultats du cas non-axisymétrique (courbes bleues) avec ceux du cas axisymétrique (courbes rouges) et sans rotation (courbes vertes). (b) Évolution temporelle de $b^Z_{33}(b)$.

plus axisymétrique, il n'est pas possible de conclure quant à une éventuelle concentration de l'énergie à l'équateur. L'angle θ_U semble en revanche diminuer, mais reste toujours plus important que dans le cas non-tournant.

Comme on peut l'observer au sein de la figure C.2(b), la polarisation du champ magnétique, qui est restée très faible quelque soit le régime étudié jusqu'alors (voir l'annexe E), semble ici atteindre des valeurs non négligeables. Même s'il est difficile de conclure à ce stade, il est d'ores et déjà possible d'affirmer que la configuration non-axisymétrique présente des comportements complexes en terme d'anisotropie.

La figure C.3 rassemble les spectres angulaires d'énergie à l'instant $t \approx 40t_d$. Les spectres

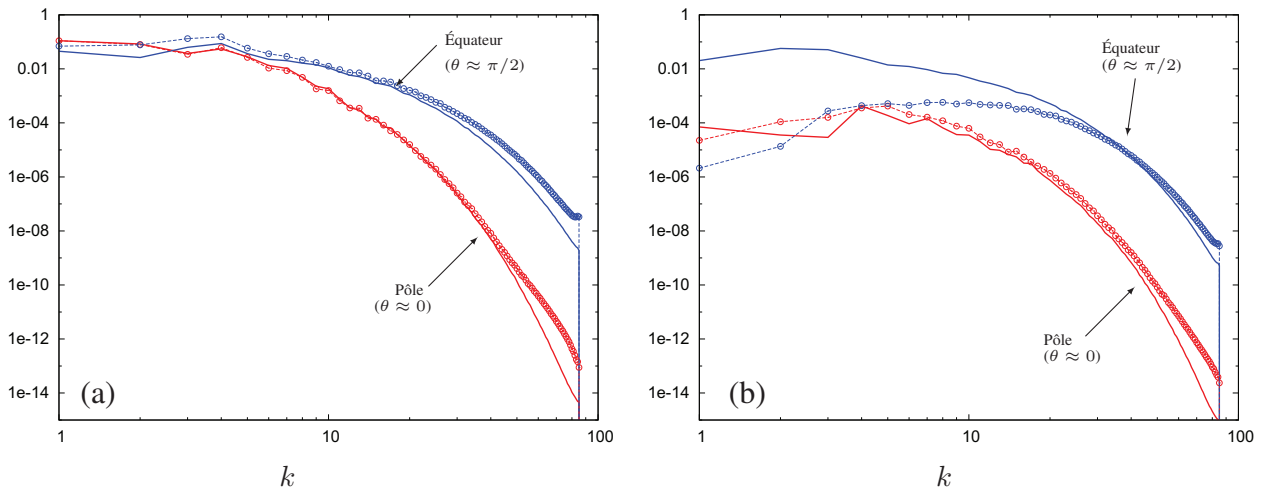


FIG. C.3 – Spectres d'énergies angulaires. Les courbes en trait continu correspondent au cas non-axisymétrique où $B_0 \perp \Omega$ tandis que les courbes avec points correspondent au cas axisymétrique. Les couleurs rouges correspondent à l'équateur (*i.e.* aux modes tels que $\theta \approx \pi/2$) tandis que les couleurs bleues correspondent aux pôles (*i.e.* aux modes tels que $\theta \approx 0$). (a) Spectre angulaire d'énergie cinétique $E_K(k, \theta)$. (b) Spectre angulaire d'énergie magnétique $E_M(k, \theta)$.

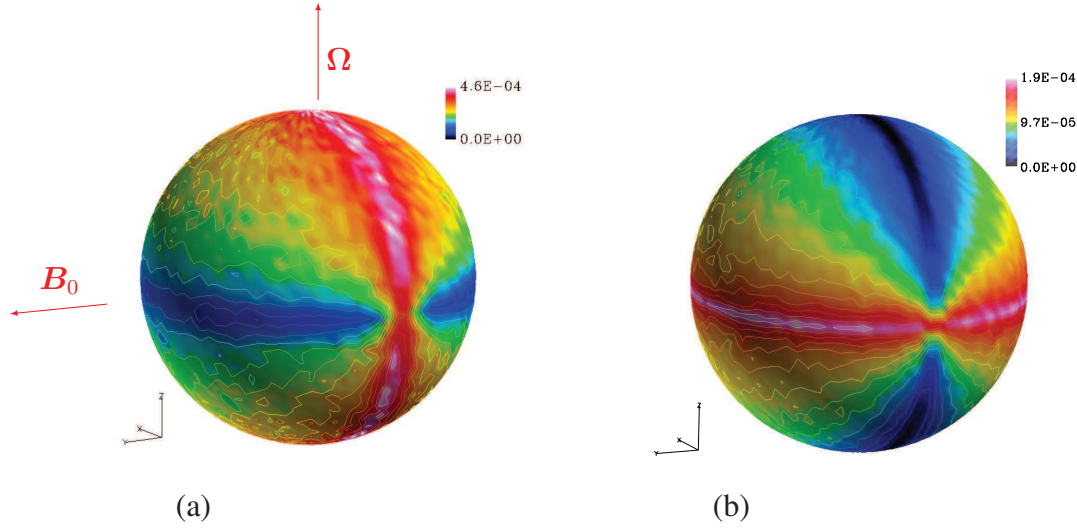


FIG. C.4 – Prédiction linéaire de la dépendance angulaire de l'énergie dans l'espace spectral. (a) $E_K(\theta, \phi)$ lorsque $\mathbf{B}_0 \perp \Omega$. (b) $E_M(\theta, \phi)$.

d'énergie cinétique sont quasiment inchangés par la passage du cas axisymétrique au cas non-axisymétrique. Seule l'énergie à l'équateur semble légèrement plus faible aux bas nombres d'onde. En revanche, on observe une forte amplification des fluctuations magnétiques à l'équateur, tandis que les conditions aux pôles semblent inchangées.

Afin d'illustrer la complexité de la configuration non-axisymétrique, et de fournir une première explication aux résultats précédents, on se propose d'utiliser les solutions linéaires (5.43) à (5.46). Celles-ci sont intégrées sur l'ensemble des nombres d'onde tout en conservant la dépendance angulaire en θ et ϕ . On représente ainsi sur la figure C.4(a) la quantité $E_K(\theta, \phi)$, définie par :

$$E_K(\theta, \phi) = \left[\int_{\theta-\Delta\theta/2}^{\theta+\Delta\theta/2} \cos \theta d\theta \right]^{-1} \int_0^\infty \hat{u}_i(k, \theta, \phi) \hat{u}_i^*(k, \theta, \phi) dk. \quad (\text{C.2})$$

La définition est analogue pour l'énergie magnétique, et la quantité $E_M(\theta, \phi)$ est représentée au sein de la figure C.4(b). Les processus dissipatifs sont ici ignorés, la vitesse d'Alfvén est unitaire (*i.e.* $B_0 = 0$) et le taux de rotation est $\Omega = 5^\dagger$. La figure correspond à l'état stationnaire. Il apparaît ainsi clairement une compétition entre les effets linéaires de la rotation (*i.e.* les ondes inertielles) et les effets linéaires du champ magnétique (*i.e.* les ondes d'Alfvén). Les fluctuations magnétiques sont fortement atténuées (comme dans le cas axisymétrique) du fait de la rotation mais principalement aux pôles (direction de l'axe de rotation). À l'équateur, la rotation n'a qu'un effet très réduit, et les fluctuations magnétiques sont amplifiées librement sous l'effet des ondes d'Alfvén. Il en résulte donc une concentration intense de l'énergie magnétique à l'équateur qui est, dans l'approche linéaire, un phénomène non-dissipatif. Cette anisotropie de directivité est d'ailleurs cohérente avec l'observation des spectres angulaires au sein de la figure C.3(b). L'énergie cinétique se comporte de manière complémentaire, et l'on observe une diminution de $E_K(\theta, \phi)$ à l'équateur du fait des transferts linéaires d'énergie cinétique vers l'énergie magnétique par les ondes d'Alfvén. À noter également que l'énergie cinétique est maintenant concentrée dans le plan $k_y = 0$.

[†]Le nombre de Lehnert, défini par (5.11) est ainsi de l'ordre de 10^{-1} .

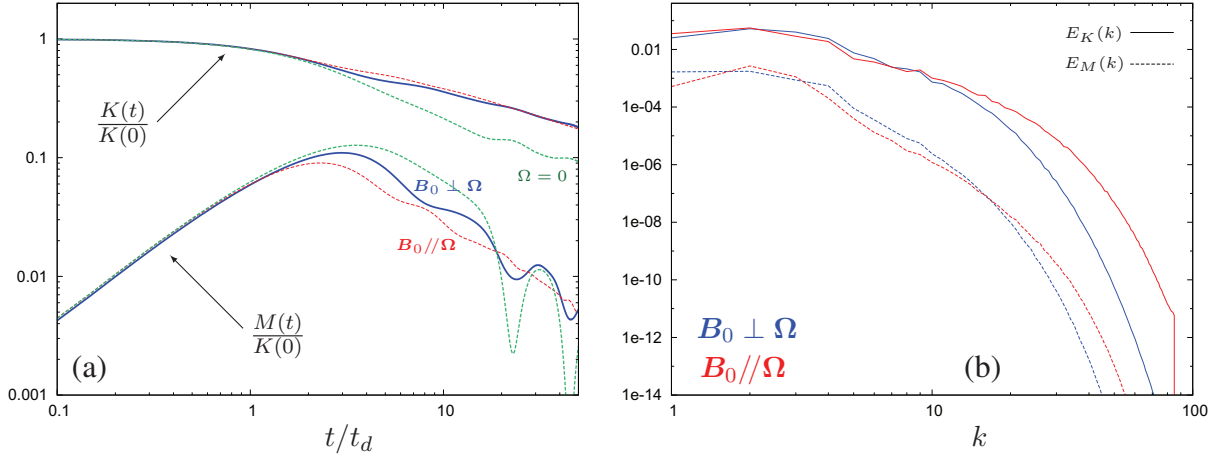


FIG. C.5 – (a) Évolution temporelle des énergies cinétique $K(t)$ et magnétique $M(t)$. On compare les résultats du cas non-axisymétrique (courbes bleues) avec ceux du cas axisymétrique (courbes rouges) et sans rotation (courbes vertes). (b) Spectres d'énergie cinétique $E_K(k)$ et magnétique $E_M(k)$ à l'instant $t \approx 40t_d$.

C.2 Faible nombre de Reynolds magnétique

Le cas des faibles nombres de Reynolds magnétique est maintenant considéré. L'anisotropie au sein d'un tel écoulement est sans doute relativement complexe. La force de Lorentz tend à dissiper les modes tels que $\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k} = 0$ (*i.e.* tels que $k_y \neq 0$ dans notre cas), tandis que les transferts angulaires d'énergie dus à la force de Coriolis tendent à concentrer l'énergie à l'équateur. À noter que cette compétition est différente de l'analyse linéaire présentée au sein de la figure C.4, où l'on s'est affranchi de tous phénomènes dissipatifs.

Dans un premier temps, on s'intéresse à l'évolution temporelle de l'énergie. La figure C.5 rassemble les quantités $K(t)$ et $M(t)$, pour le cas sans rotation (courbes vertes), le cas MHD en rotation axisymétrique (courbes rouges) et enfin le cas MHD en rotation non-axisymétrique (courbes bleues). Si une nette différence entre ces trois situations était observée lorsque le nombre de Reynolds magnétique était élevée, ce n'est plus le cas ici, et les trois courbes possèdent sensiblement les mêmes caractéristiques. On notera cependant une diminution de l'énergie (cinétique comme magnétique) aux grands nombres d'onde lorsque $\mathbf{B}_0 \perp \Omega$ (voir la figure C.5(b)).

On s'intéresse maintenant aux longueurs de corrélations[†]. La figure C.6 rassemble les longueurs de corrélations L_{ij}^l pour la vitesse ainsi que pour la vorticité. La grande disparité de ces résultats démontre la complexité de l'anisotropie au sein d'un tel écoulement. Les corrélations possédant la plus grande croissance sont celles dont la séparation est alignée avec le champ magnétique (*i.e.* L_{11}^2 et L_{22}^2). À noter également que les corrélations de vitesses verticales (*i.e.* L_{33}^1 et L_{33}^3) restent quasiment constantes. Enfin, on notera que la longueur de corrélation L_{11}^3 diminue (et devient quasiment nulle pour la vorticité), tandis que la longueur L_{11}^1 croît, ce qui démontre que la direction perpendiculaire à la fois à $\mathbf{B}_0$ et Ω (*i.e.* la direction x ou 1) présente une anisotropie singulière.

[†] Celles-ci n'ont pas été considérées lorsque le nombre de Reynolds magnétique était faible car elles sont toutes très similaires.

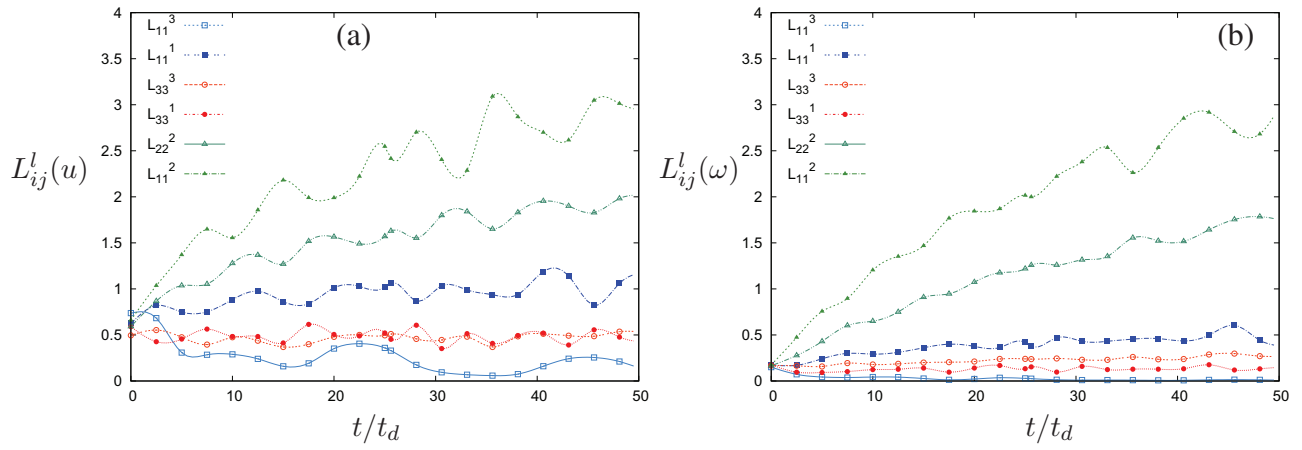


FIG. C.6 – Longueurs de corrélations au cours du temps. (a) $L_{ij}^l(u)$. (b) $L_{ij}^l(\omega)$.

Annexe D

Statistiques Lagrangiennes.

L'objectif de cette annexe est de rassembler les résultats obtenus concernant les statistiques Lagrangiennes des écoulements étudiés au sein de ce manuscrit. La raison pour laquelle ceux-ci sont rapportés hors du corps principal est la suivante : il s'agit ici de résultats préliminaires concernant la diffusion Lagrangienne de particules fluides et non pas d'une étude systématique et complète des propriétés Lagrangiennes des écoulements MHD. En effet, comme on le verra par la suite, l'écoulement est très dissipatif du fait de la viscosité et de la dissipation Joule. L'énergie totale décroît donc rapidement au cours du temps. Puisque nous souhaitons obtenir des statistiques Lagrangiennes en suivant des particules dans leur mouvement au sein du fluide, il serait envisageable d'introduire un forçage (voir le chapitre 2, section 2.3.5) afin d'atteindre un régime quasi-stationnaire. Si cette solution est attirante, il n'en demeure pas moins que nous perdons alors tout contrôle de l'anisotropie de l'écoulement. Nous préférons ainsi, dans une première approche, nous intéresser à une turbulence en déclin.

Considérons une particule fluide[†] au sein d'un écoulement turbulent homogène et incompressible. Les statistiques Lagrangiennes s'obtiennent en suivant la particule fluide au cours de son mouvement. La position initiale d'une particule est notée $\mathbf{X}$. La vitesse Lagrangienne de cette particule est notée $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$ et est reliée au champ de vitesse Eulerien par la relation :

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) , \quad (\text{D.1})$$

où $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ (simplement notée $\mathbf{x}(t)$ par la suite) est la position à l'instant t d'une particule initialement en $\mathbf{X}$.

L'équation d'évolution de la particule au sein du champ de vitesse Lagrangien est donc :

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t) . \quad (\text{D.2})$$

Deux méthodes différentes sont utilisées afin de résoudre l'équation (D.2). Dans un premier temps, le champ de vitesse est généré par une méthode stochastique de type KS, qui a été discutée en détails au sein du chapitre 2 (voir la section 2.2). Les particules se déplacent dans un champ aléatoire généré par une superposition de modes de Fourier. L'instationnarité des différents champs synthétiques provient de la dynamique linéaire mise en évidence au sein des

[†]Nous utilisons le terme "particule fluide" par opposition à une particule possédant une inertie propre ou particule inertielle.

chapitres 3,4 et 5 (voir les sections 3.2.3, 4.2 et 5.2). Cette première approche est donc linéaire, mais il est important de remarquer que l'équation (D.2) est intrinsèquement non-linéaire, quel que soit le champ de vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$.

La seconde méthode consiste à intégrer l'équation (D.2) à partir du champ de vitesse Eulerien calculé par simulations directes.

Quelle que soit la méthode, l'avancement en temps est effectué par un schéma d'Adams-Bashforth d'ordre deux. Les positions initiales des particules fluides sont réparties aléatoirement sur l'ensemble du domaine de calcul. Lorsqu'une particule sort du domaine numérique, le champ de vitesse est déterminé par périodicité, de telle manière que les trajectoires sont toujours continues. Pour chaque particule lâchée dans l'écoulement, une seconde particule est lâchée de telle manière que les deux particules soient distantes d'environ dix échelles de Kolmogorov. Pour chaque réalisation de l'écoulement (une unique réalisation en DNS et 20 réalisations en KS), 10^5 particules sont ainsi dispersées.

D.1 Corrélations de vitesse

On s'intéresse ici à la corrélation qu'il existe entre la vitesse initiale $\mathbf{V}(0)$ d'une particule et sa vitesse à un instant t ultérieur. En particulier, cette corrélation est séparée en une composante verticale définie par :

$$R_v^L(t) = \frac{\langle V_3(0)V_3(t) \rangle}{\langle V_3^2(0) \rangle}, \quad (\text{D.3})$$

et une composante horizontale :

$$R_h^L(t) = \frac{\langle V_1(0)V_1(t) + V_2(0)V_2(t) \rangle}{\langle V_1^2(0) + V_2^2(0) \rangle}, \quad (\text{D.4})$$

où les crochets font référence à la moyenne sur l'ensemble des trajectoires.

Cas MHD pur

Dans un premier temps, on s'intéresse aux corrélations Lagrangiennes de vitesse dans le cas MHD pur. Deux nombres de Reynolds magnétique sont considérés : $R_M \approx 1$ et $R_M \approx 100$. Les résultats sont rassemblés au sein de la figure D.1. Les résultats linéaires obtenus par KS sont à droite tandis que les résultats non-linéaires obtenus par DNS sont à gauche.

Lorsque le nombre de Reynolds magnétique est important (courbes bleues), les corrélations sont proches de celles obtenues pour une simulation hydrodynamique isotrope. Les corrélations verticales (courbes continues) et horizontales (courbes pointillées) sont quasiment identiques en KS, mais l'on observe une corrélation verticale persistente en DNS. À noter que cet effet n'apparaît pas si l'on ne fait pas la distinction entre corrélations horizontales et verticales.

Lorsque le nombre de Reynolds magnétique est faible (courbes rouges), les deux approches fournissent qualitativement les mêmes résultats : la corrélation verticale (alignée avec le champ magnétique imposé) est plus importante que la corrélation horizontale. Les corrélations prédites par KS tendent cependant plus rapidement vers zéro que leurs homologues obtenus par DNS. À noter également que les corrélations Lagrangiennes décroissent plus rapidement lorsque le nombre de Reynolds magnétique est faible.

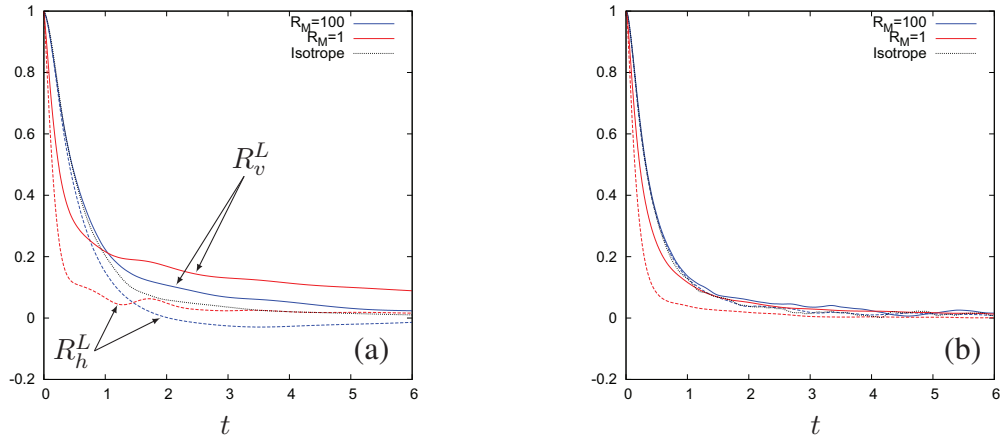


FIG. D.1 – Corrélations Lagrangiennes de vitesse au cours du temps. La corrélation verticale R_v^L est représentée par un trait continu tandis que la corrélation horizontale R_h^L est représentée par un trait pointillé. Le trait pointillé noir correspond au cas hydrodynamique isotrope. (a) DNS. (b) KS.

Cas MHD en rotation

On considère cette fois les corrélations Lagrangiennes de vitesse pour un écoulement MHD en rotation. On se restreint ici au cas où le nombre d'Elsasser est de l'ordre de l'unité. Les résultats sont présentés au sein de la figure D.2.

Quel que soit le nombre de Reynolds magnétique, les corrélations de vitesse sont cette fois-ci dominées par les ondes inertielles de temps caractéristique π/Ω . Dans tous les cas, les résultats obtenus par KS sont très proches de ceux obtenus par DNS.

Lorsque le nombre de Reynolds magnétique est élevé, les corrélations de vitesse sont très proches de celles obtenues en rotation pure (les courbes bleues et vertes sont quasiment su-

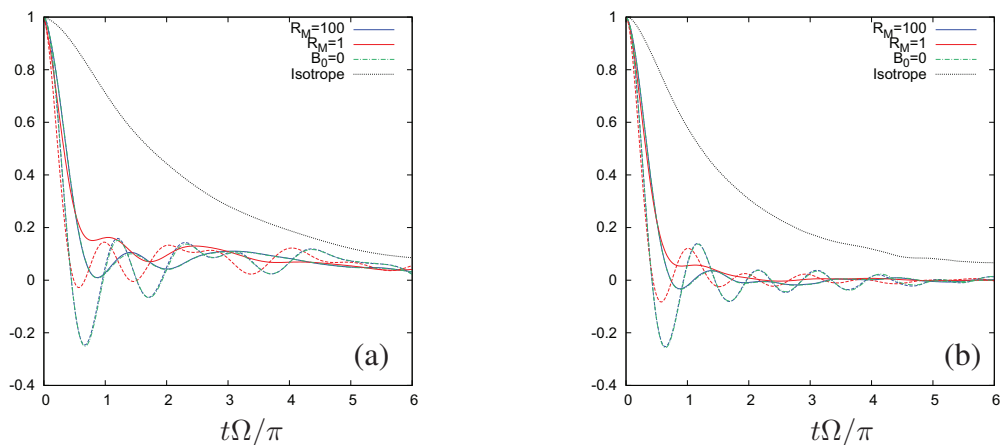


FIG. D.2 – Corrélations Lagrangiennes de vitesse au cours du temps. La corrélation verticale est représentée par un trait continu tandis que la corrélation horizontale est représentée par un trait pointillé. Le trait alterné vert correspond au cas hydrodynamique en rotation. Le trait pointillé noir correspond au cas hydrodynamique isotrope. (a) DNS. (b) KS.

perposées au sein de la figure D.2). Les corrélations Lagrangiennes semblent donc être complètement dominées par les contributions dues à la rotation. Cette observation est à mettre en lien avec l'anisotropie très proche qu'il existe entre une turbulence MHD et une turbulence hydrodynamique en rotation lorsque $R_M \gg 1$.

Lorsque $R_M \approx 1$, les oscillations observées en rotation voient leurs périodes diminuer tandis que leurs amplitudes sont atténuées (particulièrement les boucles négatives).

D.2 Dispersion d'une particule

Une des quantités statistiques Lagrangiennes les plus élémentaires est la dispersion d'une particule par rapport à sa position d'origine. Le déplacement d'une particule fluide peut être représenté par la quantité :

$$\Delta x_i(t, t') = x_i(t) - x_i(t') = \int_{t'}^t \frac{\partial x_i(s)}{\partial t} ds, \quad (\text{D.5})$$

qui permet de remonter à la dispersion d'une particule en prenant la covariance de l'expression précédente :

$$\Delta_{ii}(t, t') = \langle \Delta x_i(t, t') \rangle^2 = \int_{t'}^t ds' \int_{t'}^t \left\langle \frac{\partial x_i(s)}{\partial t} \frac{\partial x_i(s')}{\partial t} \right\rangle ds. \quad (\text{D.6})$$

Il est possible, grâce à l'hypothèse de Corrsin simplifiée, de calculer cette dispersion en assimilant les corrélations Lagrangiennes à leurs équivalents Euleriens [Kaneda & Ishida(2000), Cambon *et al.*(2004)]. Dans ce cas, les corrélations peuvent directement être déduites des solutions linéaires provenant d'une analyse de type RDT. Cette voie n'a cependant pas été suivie, et l'on propose par la suite l'étude de la dispersion d'une particule grâce à la KS et à la DNS. Comme précédemment, on distingue la dispersion verticale Δ_{33} des dispersions horizontales Δ_{11} et Δ_{22} .

Cas MHD pur

La figure D.3 présente les résultats de dispersion à une particule pour une turbulence homogène soumise à un champ magnétique uniforme. Quels que soient les paramètres considérés et pour les temps courts, on observe une évolution du type $\Delta_{ii} \propto t^2$, caractéristique d'un régime ballistique. Ce régime illustre l'absence d'interactions entre la particule fluide et l'écoulement aux temps suffisamment courts. Dans le cas isotrope, et pour des temps plus longs, on observe un régime tel que $\Delta_{ii} \propto t$, caractéristique d'un mouvement brownien.

Pour des temps relativement courts (*i.e.* tels que $t < 2$), les deux modèles fournissent des résultats très proches. Lorsque $R_M \gg 1$, la dispersion est très proche de celle obtenue dans le cas isotrope aux temps courts, on observe par la suite une dispersion verticale plus importante que la dispersion horizontale. Lorsque $R_M \approx 1$, le régime ballistique est très court comparé à celui observé lorsque $R_M \gg 1$. On observe une dispersion verticale préférentielle très rapidement. Rappelons ici que les résultats DNS ont été obtenus sans forçage et que l'écoulement est donc en déclin. Les résultats aux temps longs sont donc à considérer avec précaution.

Cas MHD en rotation

On s'intéresse maintenant à la dispersion d'une particule dans un écoulement MHD en rotation avec champ magnétique imposé. L'influence du nombre de Reynolds magnétique est ici beaucoup plus faible et l'on observe les mêmes tendances lorsque $R_M \approx 1$ ou lorsque $R_M \gg 1$. Les résultats à haut nombre de Reynolds magnétique sont quasiment superposables à ceux obtenus en rotation pure (non rapportés ici par soucis de clarté), et ce quelque soit le modèle considéré. On observe ainsi une dispersion verticale dominante. Encore une fois, le régime ballistique est d'autant plus court que le nombre de Reynolds magnétique est faible.

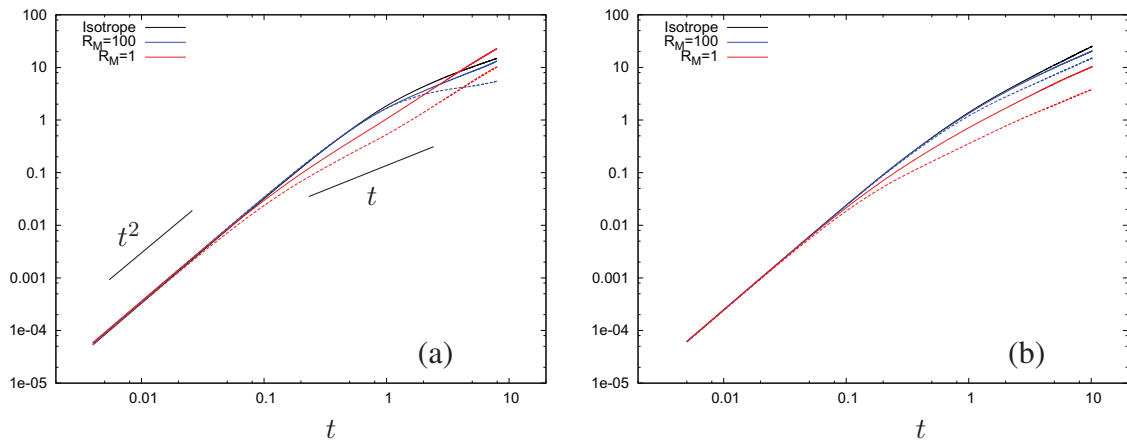


FIG. D.3 – Dispersion d'une particule pour une turbulence homogène soumise à un champ magnétique uniforme. La dispersion verticale Δ_{33} est représentée par un trait continu tandis que la dispersion horizontale $(\Delta_{11} + \Delta_{22})/2$ est représentée par un trait pointillé. Le trait continu noir correspond au cas hydrodynamique isotrope. (a) DNS. (b) KS.

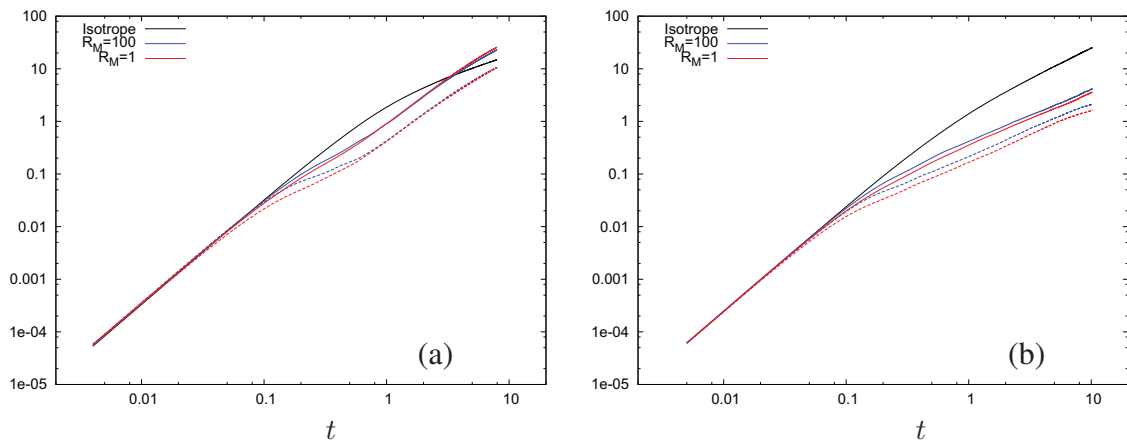


FIG. D.4 – Dispersion d'une particule pour une turbulence homogène soumise à un champ magnétique uniforme. La dispersion verticale est représentée par un trait continu tandis que la dispersion horizontale est représentée par un trait pointillé. Le trait pointillé noir correspond au cas hydrodynamique isotrope. (a) DNS. (b) KS.

Annexe E

Compilation des résultats d'anisotropie pour les fluctuations magnétiques

Dans les chapitres 4 et 5, nous nous sommes intéressés principalement à l'anisotropie du champ de vitesse turbulent sous l'action de la force de Coriolis et de la force de Lorentz. Pour quantifier cette anisotropie, nous avons utilisé les angles de Shebalin, les spectres angulaires, le tenseur d'anisotropie de Reynolds et les longueurs intégrales.

Concernant le champ de fluctuations magnétiques, seuls l'angle de Shebalin et les spectres angulaires ont été rapportés. La raison pour laquelle nous n'avons pas présenté les résultats concernant le tenseur d'anisotropie est la suivante : si les différentes définitions liées à ces quantités sont analogues pour le champ de vitesse et le champ de fluctuations magnétiques, il n'en demeure pas moins que les fluctuations magnétiques, au contraire des fluctuations de vitesse, sont initialement nulles. Il en résulte une phase de croissance durant laquelle l'anisotropie est difficilement quantifiable. L'évolution temporelle de b_{33}^e et b_{33}^z pour les fluctuations magnétiques est donc difficile à interpréter, d'autant plus que les longueurs de corrélations L_{ij}^l n'ont pas été calculées, ni pour $\mathbf{b}$, ni pour $\mathbf{j}$.

Pour toutes ces raisons, nous préférons compiler ces résultats au sein de cette annexe. Ainsi, lorsque l'on considérera d'autres types de conditions initiales (avec, par exemple, des fluctuations magnétique initiales), les résultats qui vont suivre trouveront peut-être une explication.

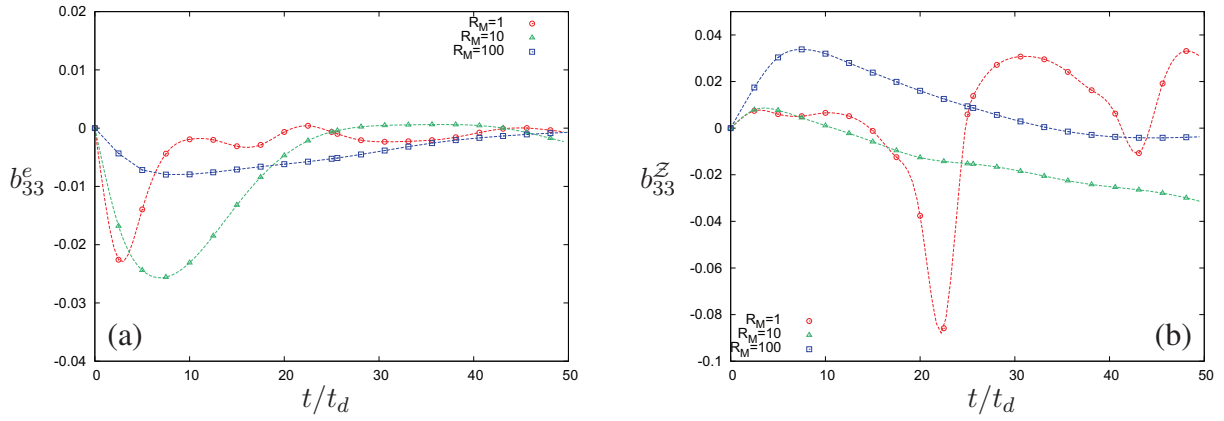


FIG. E.1 – Composante b_{33} du tenseur d'anisotropie de Reynolds en turbulence MHD pour trois valeurs différentes de R_M . Le temps est adimensionné par $t_d = \eta/B_0^2$. (a) Anisotropie de directivité b_{33}^e . (b) Anisotropie de polarisation b_{33}^z .

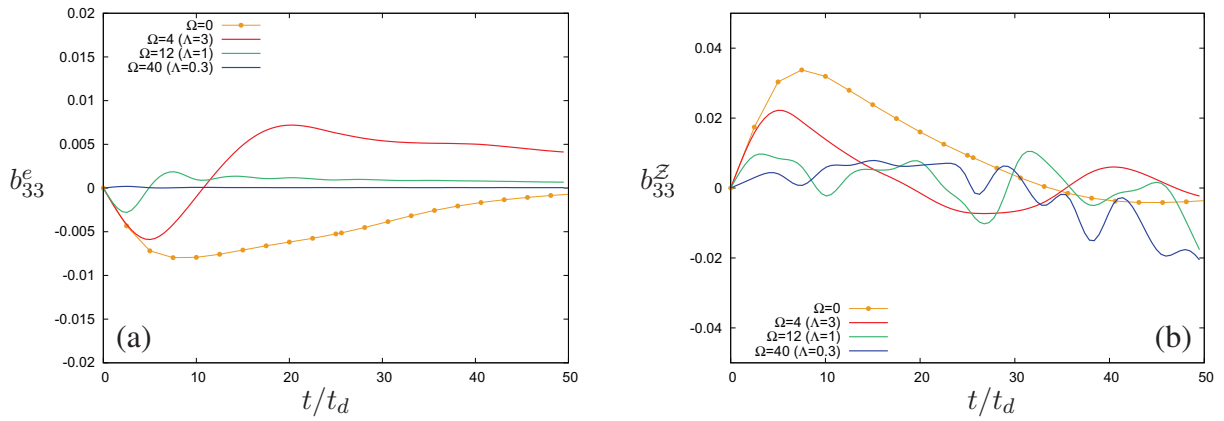


FIG. E.2 – Composante b_{33} du tenseur d'anisotropie de Reynolds en fonction de Λ pour $R_M \approx 100$. (a) Anisotropie de directivité b_{33}^e . (b) Anisotropie de polarisation b_{33}^z .

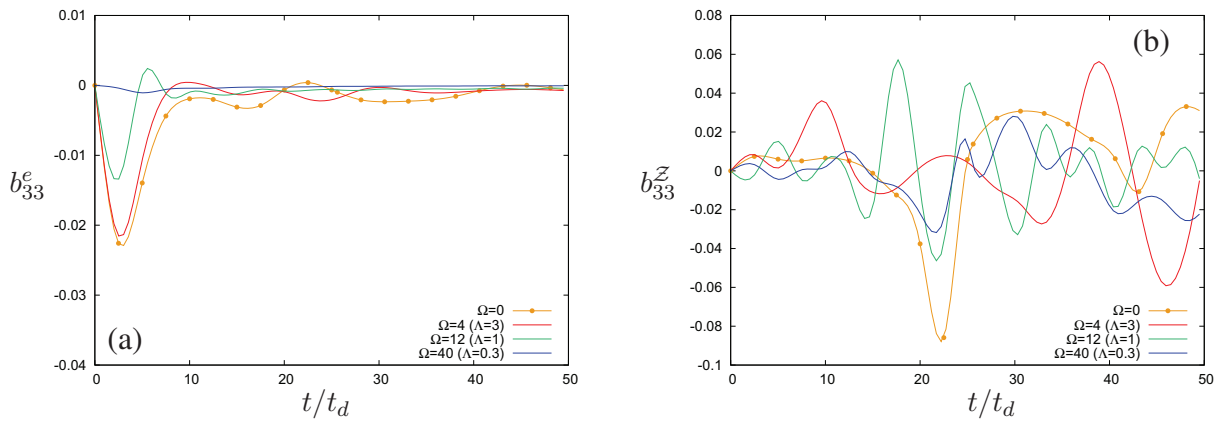


FIG. E.3 – Composante b_{33} du tenseur d'anisotropie de Reynolds en fonction de Λ pour $R_M \approx 1$. (a) Anisotropie de directivité b_{33}^e . (b) Anisotropie de polarisation b_{33}^z .

Références

- [Acheson & Hide(1972)] ACHESON, D.J. & HIDE, R. 1972 Hydromagnetics of rotating fluids. *Rep. Prog. Phys.* **36**, 159–221.
- [Alemany *et al.*(1979)] ALEMANY, A., MOREAU, R., SULEM, P.L. & FRISCH, U. 1979 Influence of an external magnetic field on homogeneous MHD turbulence. *Journal de Mécanique* **18**, 277–313.
- [Alfvén(1942)] ALFVÉN, H. 1942 Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves. *Nature* **50**, 405.
- [Bailly & Juvé(1999)] BAILLY, C. & JUVÉ, D. 1999 A stochastic approach to compute subsonic noise using linearized Euler’s equations. *5th AIAA/CEAS Aeroacoustics conference* **99**, 1872.
- [Bartello *et al.*(1994)] BARTELLO, P., MÉTAIS, O. & LESIEUR, M. 1994 Coherent structures in rotating three-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.* **273**, 1–29.
- [Batchelor(1953)] BATCHELOR, G.K. 1953 *The theory of homogeneous turbulence*. Cambridge University Press.
- [Batchelor & Townsend(1947)] BATCHELOR, G.K. & TOWNSEND, A.A. 1947 Decay of vorticity in isotropic turbulence. *Proc. R. Soc. Lond. A* **190**, 34–50.
- [Béchara *et al.*(1994)] BÉCHARA, W., BAILLY, C., LAFON, P. & CANDEL, C.M. 1994 Stochastic approach to noise modeling for free turbulent flows. *AIAA Journal* **32**, 455–463.
- [Bigot *et al.*(2008)] BIGOT, B., GALTIER, S. & POLITANO, H. 2008 Development of anisotropy in incompressible magnetohydrodynamic turbulence. *Phys. Rev. E* **78**, 066301.
- [Billson *et al.*(2004)] BILLSON, M., ERIKSSON, L.E., DAVIDSON, L. & JORDAN, P. 2004 Modeling of synthetic anisotropic turbulence and its sound emission. *10th AIAA/CEAS Aeroacoustics conference* **2004**, 2857.
- [Braginsky & Meytlis(1990)] BRAGINSKY, S.I. & MEYTLIS, V.P. 1990 Local turbulence in the Earth’s core. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics* **55**, 71–87.
- [Burattini *et al.*(2008)] BURATTINI, P., KINET, MAXIME, CARATI, DANIELE & KNAEPEN, BERNARD 2008 Spectral energetics of quasi-static MHD turbulence. *Physica D* **237**, 2062–2066.
- [Cambon(2001)] CAMBON, C. 2001 Turbulence and vortex structures in rotating and stratified flows. *Eur. J. Mech. B. - Fluids* **20**, 489–510.
- [Cambon *et al.*(2004)] CAMBON, C., GODEFERD, F.S., NICOLLEAU, F.C.G.A & VASSILICOS, J.C. 2004 Turbulent diffusion in rapidly rotating flows with and without stable stratification. *J. Fluid Mech.* **499**, 231–255.

- [Cambon & Jacquin(1989)] CAMBON, C. & JACQUIN, L. 1989 Spectral approach to non-isotropic turbulence subjected to rotation. *J. Fluid Mech.* **202**, 295–317.
- [Cambon *et al.*(1992)] CAMBON, C., JACQUIN, L. & LUBRANO, J.L. 1992 Towards a new Reynolds stress model for rotating turbulent flows. *Phys. Fluids* **4**, 812–824.
- [Cambon *et al.*(1997)] CAMBON, C., MANSOUR, N. N. & GODEFERD, F. S. 1997 Energy transfer in rotating turbulence. *J. Fluid Mech.* **337**, 303–332.
- [Chandrasekhar(1953)] CHANDRASEKHAR, S. 1953 Problems of stability in hydrodynamics and hydromagnetics (George Darwin lecture). *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **113**, 667–678.
- [Chandrasekhar(1961)] CHANDRASEKHAR, S. 1961 *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Oxford University Press.
- [Chen & Kraichnan(1989)] CHEN, S. & KRAICHNAN, R.H. 1989 Sweeping decorrelation in isotropic turbulence. *Phys. Fluids A* **1** (12), 2019–2024.
- [Chergui(2000)] CHERGUI, J. 2000 Transformées de Fourier rapides monoprocasseur sur NEC SX-5. *CNRS-IDRIS* .
- [Clyne *et al.*(2007)] CLYNE, J., MININNI, P., NORTON, A. & RAST, M. 2007 Interactive desktop analysis of high resolution simulations : application to turbulent plume dynamics and current sheet formation. *New Journal of Physics* **9**, 301.
- [Comte-Bellot & Corrsin(1971)] COMTE-BELLOT, G. & CORRSIN, S. 1971 Simple Eulerian time correlations of full and narrow-band velocity signals in grid generated isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.* **48**, 273.
- [Davidson(2004)] DAVIDSON, P.A. 2004 *Turbulence : An introduction for scientists and engineers*. Oxford University Press.
- [Dàvila & Vassilicos(2003)] DÀVILA, J. & VASSILICOS, J.C. 2003 Richardson’s pair diffusion and the stagnation point structure of turbulence. *Phys. Rev. Lett.* **91**.
- [Dobrowolny *et al.*(1980)] DOBROWOLNY, M., MANGENEY, A. & VELTRI, P. 1980 Fully developed anisotropic hydromagnetic turbulence in interplanetary space. *Phys. Rev. Lett.* **45**, 144.
- [Dold & Benz(1999)] DOLD, P. & BENZ, K.W. 1999 Rotating magnetic field : fluid flow and crystal growth applications. *Progress in Crystal Growth and Characterization of Materials* **7**, 38.
- [Favier *et al.*(2008)] FAVIER, B., GODEFERD, F.S. & CAMBON, C. 2008 Modeling the far-field acoustic emission of rotating turbulence. *Journal of turbulence* **9**, 1–21.
- [Favier *et al.*(2010)] FAVIER, B., GODEFERD, F.S. & CAMBON, C. 2010 On space and time correlations of isotropic and rotating turbulence. *Phys. Fluids* **22**, 015101.
- [Flohr & Vassilicos(2000)] FLOHR, P. & VASSILICOS, J.C. 2000 A scalar subgrid model with flow structure for large-eddy simulations of scalar variances. *J. Fluid Mech.* **407**, 315–349.
- [Fung *et al.*(1992)] FUNG, J.C.H., HUNT, J.C.R., MALIK, N.A. & PERKINS, R.J. 1992 Kinematic simulation of homogeneous turbulence by unsteady random Fourier modes. *J. Fluid Mech.* **236**, 281–318.

- [Fung & Vassilicos(1998)] FUNG, J.C.H. & VASSILICOS, J.C. 1998 Two particles dispersion in turbulent-like flows. *Phys. Rev. E* **57**, 1677–1690.
- [Godeferd & Lollini(1999)] GODEFERD, F.S. & LOLLINI, L. 1999 Direct numerical simulations of turbulence with confinement and rotation. *J. Fluid Mech.* **393**, 257–308.
- [Goldreich & Kumar(1988)] GOLDREICH, P. & KUMAR, P. 1988 The interaction of acoustic radiation with turbulence. *Astrophys. J.* **326**, 462–478.
- [Goto *et al.*(2005)] GOTO, S., OSBORNE, D.R., VASSILICOS, J.C. & HAIGH, J.D. 2005 Acceleration statistics as measures of statistical persistence of streamlines in isotropic turbulence. *Phys. Rev. E* **71**, 015301(R).
- [Greenspan(1968)] GREENSPAN, H.P. 1968 *The theory of rotating fluids*. Cambridge University Press.
- [Gubbins & Roberts(1987)] GUBBINS, D. & ROBERTS, P.H. 1987 Magnetohydrodynamics of the earth's core. *Geomagnetism* **2**, 1–183.
- [He *et al.*(2002)] HE, G.W., RUBINSTEIN, R. & WANG, L.P. 2002 Effects of subgrid-scale modeling on time correlations in large eddy simulation. *Phys. Fluids* **14**, 2186–2193.
- [He *et al.*(2004)] HE, G.W., WANG, M. & LELE, S.K. 2004 On the computation of space-time correlations by large-eddy simulation. *Phys. Fluids* **16**, 3859–3867.
- [Jacquin *et al.*(1990)] JACQUIN, L., LEUCHTER, O., CAMBON, C. & MATHIEU, J. 1990 Homogeneous turbulence in the presence of rotation. *J. Fluid Mech.* **125**, 505–534.
- [Jimenez *et al.*(1993)] JIMENEZ, J., WRAY, A.A., SAFFMAN, P.G. & ROGALLO, R.S. 1993 The structure of intense vorticity in isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.* **255**, 65–90.
- [Kaneda & Ishida(2000)] KANEDA, Y. & ISHIDA, T. 2000 Suppression of vertical diffusion in strongly stratified turbulence. *J. Fluid Mech.* **402**, 311–327.
- [Kaneda & Ishihara(2000)] KANEDA, Y. & ISHIHARA, T. 2000 Energy dissipation rate and energy spectrum in high resolution direct numerical simulations of turbulence in a periodic box. *J. Fluid Mech.* **402**, 311–327.
- [Kassinos *et al.*(2001)] KASSINOS, S.C., REYNOLDS, W.C. & ROGERS, M.M. 2001 One-point turbulence structure tensors. *J. Fluid Mech.* **428**, 213–248.
- [Khan *et al.*(2008)] KHAN, M.A.I., LUO, X.Y., NICOLLEAU, F.C.G.A., TUCKER, P.G. & IACONO, G.L. 2008 Effects of LES sub-grid flow structure on particle deposition in a plane channel with a ribbed wall. *Commun. Numer. Meth. Eng.* .
- [Knaepen *et al.*(2004)] KNAEPEN, B., KASSINOS, S. & CARATI, D. 2004 Magnetohydrodynamics turbulence at moderate Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **513**, 199–220.
- [Kolmogorov(1941)] KOLMOGOROV, A.N. 1941 The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *C.R. Acad. Sci. U.R.S.S.* **36**, 301.
- [Kraichnan(1964)] KRAICHNAN, R.H. 1964 Kolmogorov's hypotheses and Eulerian turbulence theory. *Phys. Fluids* **7**, 1723–1734.
- [Kraichnan(1970)] KRAICHNAN, R.H. 1970 Diffusion by a random velocity field. *Phys. Fluids* **13**, 22–31.

- [Lehnert(1955)] LEHNERT, B. 1955 The decay of magneto-turbulence in the presence of a magnetic field and Coriolis force. *Quart. Appl. Math.* **4**, 321–341.
- [Lichtenstein *et al.*(2006)] LIECHTENSTEIN, L., GODEFERD, F. S. & CAMBON, C. 2006 The role of nonlinearity in turbulent diffusion models for stably stratified and rotating turbulence. *Int. J. of Heat and Fluid Flow* **27** (4), 644–652.
- [Lighthill(1952a)] LIGHTHILL, M.J. 1952a On sound generated aerodynamically, I. General theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences.* **221**, 564–587.
- [Lighthill(1952b)] LIGHTHILL, M. 1952b On sound generated aerodynamically, I General theory. *Proc. Roy. Soc.* **A211**.
- [Lighthill(1954)] LIGHTHILL, M.J. 1954 On sound generated aerodynamically, II. Turbulence as a source of sound. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences.* **222**, 1–32.
- [Lilley(1994)] LILLEY, G. M. 1994 The radiated noise from isotropic turbulence revisited. *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **6**, 281.
- [Malik(1991)] MALIK, N. A. 1991 Studies in turbulent dispersion using kinematic simulation. Ph.d. diss., DAMTP.
- [Mathieu & Scott(2000)] MATHIEU, J. & SCOTT, J.F. 2000 *Turbulent flows : an introduction*. Cambridge University Press.
- [Matsushima *et al.*(1999)] MATSUSHIMA, M., NAKAJIMA, T. & ROBERTS, P.H. 1999 The anisotropy of the local turbulence in the Earth’s core. *Eart Planets Space* **51**, 277–286.
- [Matthaeus *et al.*(1983)] MATTHAEUS, W.H., GOLDSTEIN, M.L. & MONTGOMERY, D.C. 1983 Turbulent generation of outward-traveling interplanetary alfvénic fluctuations. *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1484.
- [McComb *et al.*(1989)] MCCOMB, W.D., SHANMUGASUNDARAM, V. & HUTCHINSON, P. 1989 Velocity-derivative skewness and two-time velocity correlations of isotropic turbulence as predicted by the LET theory. *J. Fluid Mech.* **208**, 91.
- [McEwan(1970)] MCEWAN, A.D. 1970 Inertial oscillations in a rotating fluid cylinder. *J. Fluid Mech.* **40**, 126.
- [Mininni *et al.*(2008)] MININNI, P., LEE, E., NORTON, A. & CLYNE, J. 2008 Flow visualization and field line advection in computational fluid dynamics : application to magnetic fields and turbulent flows. *New J. Phys.* **10**, 125007.
- [Mininni & Montgomery(2006)] MININNI, P. & MONTGOMERY, D.C. 2006 Magnetohydrodynamic activity inside a sphere. *Phys. Fluids* **18**, 116602.
- [Moffatt(1967)] MOFFATT, H.K. 1967 On the suppression of turbulence by a uniform magnetic field. *J. Fluid Mech.* **28**, 571–592.
- [Moffatt(1970)] MOFFATT, H.K. 1970 Dynamo action associated with random inertial waves in a rotating conducting fluid. *J. Fluid Mech.* **44**, 705–719.
- [Moffatt(1971)] MOFFATT, H.K. 1971 Turbulent dynamo action at low magnetic Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **41**, 435–452.

- [Moffatt(1978)] MOFFATT, H.K. 1978 *Magnetic field generation in electrically conducting fluids*. Cambridge University Press.
- [Moffatt(2000)] MOFFATT, H.K. 2000 Reflexions on Magnetohydrodynamics. *Perspectives in Fluid Dynamics* **Cambridge University Press**, 347–391.
- [Moffatt(2002)] MOFFATT, H.K. 2002 Batchelor and the homogenization of turbulence. *Annual review of fluid mechanics* **34**, 19–35.
- [Montgomery *et al.*(1978)] MONTGOMERY, D.C., TURNER, L. & VAHALA, G. 1978 Three-dimensional magnetohydrodynamic turbulence in cylindrical geometry. *Phys. Fluids* **21**, 757.
- [Morinishi *et al.*(2001)] MORINISHI, Y., NAKABAYASHI, K. & REN, S.Q. 2001 Dynamics of anisotropy on decaying homogeneous turbulence subjected to system rotation. *Phys. Fluids* **13**, 2912–2922.
- [Nataf *et al.*(2008)] NATAF, H.C., ALBOUSSIÈRE, T., BRITO, D., CARDIN, P., GAGNIÈRE, N., JAULT, D. & SCHMITT, D. 2008 Rapidly rotating spherical Couette flow in a dipolar magnetic field : an experimental study of the mean axisymmetric flow. *Phys. Earth Planet. Inter* **170**, 60–72.
- [Neffaa *et al.*(2008)] NEFFAA, S., BOS, W.J.T. & SCHNEIDER, K. 2008 The decay of magnetohydrodynamic turbulence in a confined domain. *Physics of Plasmas* **15**, 092304.
- [Orszag & Patterson(1971)] ORSZAG, S.A. & PATTERSON, G.S. 1971 Numerical simulation of three-dimensional homogeneous isotropic turbulence. *Phys. Rev. Let.* **28** (2), 76–79.
- [Oughton *et al.*(1994)] OUGHTON, S., PRIEST, E.R. & MATTHAEUS, W.H. 1994 The influence of a mean magnetic field on three-dimensional magnetohydrodynamic turbulence. *J. Fluid Mech.* **280**, 95–117.
- [Ould-Rouiss(2000)] OULD-ROUISS, M. 2000 Axisymmetric form of Kármán-Howarth equation and its limiting forms. *Eur. Phys. J. B* **15**, 339–347.
- [Patterson & Orszag(1971)] PATTERSON, G.S. & ORSZAG, S.A. 1971 Spectral calculations of isotropic turbulence : Efficient removal of aliasing interactions. *Phys. Fluids* **21A**, 2538–2541.
- [Phillips(1963)] PHILLIPS, O.M. 1963 Energy transfer in rotating fluids by reflexion of inertial waves. *Phys. Fluids* **6**, 513–520.
- [Pierre(1996)] PIERRE, M.G. ST. 1996 On the local nature of turbulence in the Earth's outer core. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics* **83**, 293–306.
- [Poulain *et al.*(2006)] POULAIN, C., MAZELLIER, N., CHEVILLARD, L., GAGNE, Y. & BAUDET, C. 2006 Dynamics of spatial Fourier modes in turbulence. *Eur. Phys. J. B* **53**, 219–224.
- [Pouquet & Patterson(1978)] POUQUET, A. & PATTERSON, G.S. 1978 Numerical simulation of helical magnetohydrodynamic turbulence. *J. Fluid Mech.* **85**, 305–323.
- [Proudman(1952)] PROUDMAN, I. 1952 The generation of noise by isotropic turbulence. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **214**, 119.
- [Roberts(1967)] ROBERTS, P.H. 1967 *An introduction to magnetohydrodynamics*. American Elsevier.

- [Rogallo(1981)] ROGALLO, R. S. 1981 *Numerical experiments in homogeneous turbulence*. NASA Tech. Mem. 81315.
- [Rosales & Meneveau(2006)] ROSALES, C. & MENEVEAU, C. 2006 A minimal multiscale lagrangian map approach to synthesize non-Gaussian turbulent vector fields. *Phys. Fluids* **18**, 075104.
- [Rubinstein & Zhou(2000)] RUBINSTEIN, R. & ZHOU, Y. 2000 The frequency spectrum of sound radiated by isotropic turbulence. *Physics Letters A* **267**, 379–383.
- [Rubinstein & Zhou(2002)] RUBINSTEIN, R. & ZHOU, YE 2002 Characterization of sound radiation by unresolved scales of motion in computational aeroacoustics. *Eur. J. Mech. B/Fluids* **21**, 105–111.
- [Sagaut & Cambon(2008)] SAGAUT, P. & CAMBON, C. 2008 *Homogeneous turbulence dynamics*. Cambridge University Press.
- [Salhi & Cambon(2007)] SALHI, A. & CAMBON, C. 2007 Anisotropic phase-mixing in homogeneous turbulence in a rapidly rotating or in a strongly stratified fluid : An analytical study. *Phys. Fluids* **19**, 055102.
- [Sanada & Shanmugasundaram(1992)] SANADA, T. & SHANMUGASUNDARAM, V. 1992 Random sweeping effect in isotropic numerical turbulence. *Phys. Fluids A* **4** (6), 1245–1250.
- [Sarkar & Hussaini(1993)] SARKAR, S. & HUSSAINI, H. 1993 Computation of the sound generated by isotropic turbulence. *ICASE Technical report 93-74* .
- [Schmitt *et al.*(2008)] SCHMITT, D., ALBOUSSIÈRE, T., BRITO, D., CARDIN, P., GAGNIÈRE, N., JAULT, D. & NATAF, H.C. 2008 Rotating spherical Couette flow in a dipolar magnetic field : experimental study of magneto-inertial waves. *J. Fluid Mech.* **604**, 175–197.
- [Schumann(1976)] SCHUMANN, U. 1976 Numerical simulation of the transition from three- to two-dimensional turbulence under a uniform magnetic field. *J. Fluid Mech.* **74**, 31–58.
- [Shebalin *et al.*(1983)] SHEBALIN, J.V., MATTHAEUS, W.H. & MONTGOMERY, D. 1983 Anisotropy in MHD turbulence due to a mean magnetic field. *J. Plasma Phys.* **29**, 525.
- [Teaca *et al.*(2009)] TEACA, B., VERMA, M.K., KNAEPEN, BERNARD & CARATI, DANIELE 2009 Energy transfer in anisotropic magnetohydrodynamic turbulence. *Phys. Rev. E* **79**, 046312.
- [Tennekes(1975)] TENNEKES, H. 1975 Eulerian and Lagrangian time microscales in isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.* **67**, 561–567.
- [Tennekes & Lumley(1972)] TENNEKES, H. & LUMLEY, J.L. 1972 *A first course in Turbulence*. MIT Press.
- [Thomson & Devenish(2005)] THOMSON, D.J. & DEVENISH, B.J. 2005 Particle pair separation in kinematic simulations. *J. Fluid Mech.* **526**, 277–302.
- [Vorobev *et al.*(2005)] VOROBEV, A., ZIKANOV, O., DAVIDSON, P.A. & KNAEPEN, B. 2005 Anisotropy of MHD turbulence at low magnetic Reynolds number. *Phys. Fluids* **17**, 125105.

- [Waleffe(1992)] WALEFFE, F. 1992 The nature of triad interactions in homogeneous turbulence. *Phys. Fluids* **A-4**, 350–363.
- [Whitman(1965)] WHITMAN, G.B. 1965 Non-linear dispersive waves. *Proc. Roy. Soc. A* **283**, 238–61.
- [Witkowska(1994)] WITKOWSKA, A. 1994 Estimation numérique du bruit rayonné par une turbulence isotrope. Ph.d. diss., École Centrale de Lyon.
- [Witkowska & Juvé(1997)] WITKOWSKA, A. & JUVÉ, D. 1997 Numerical study of noise from isotropic turbulence. *Journal of Computational Acoustics* **5**, 317–336.
- [Yao & He(2008)] YAO, HUA-DONG & HE, GUO-WEI 2008 A kinematic subgrid scale model for large eddy simulation of turbulence-generated sound. In *61st Annual Meeting of the APS Division of Fluid Dynamics*.
- [Zeman(1994)] ZEMAN, O. 1994 A note on the spectra and decay of rotating homogeneous turbulence. *Phys. Fluids* **6**, 3221.
- [Zhang & Shubert(2000)] ZHANG, K. & SHUBERT, G. 2000 Magnetohydrodynamics in rapidly rotating spherical systems. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **32**, 409–443.
- [Zhou & Rubinstein(1995)] ZHOU, Y. & RUBINSTEIN, R. 1995 Sweeping and straining effects in sound generation by high Reynolds number isotropic turbulence. *Phys. Fluids* **8** (3), 647–649.
- [Zikanov & Thess(1998)] ZIKANOV, O. & THESS, A. 1998 Direct numerical simulation of forced MHD turbulence at low magnetic Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **358**, 299–333.