



Description relativiste de l'état fondamental des noyaux atomiques par l'approche du champ moyen auto-cohérent, incluant la déformation et la superfluidité

J.P. Ebran

► To cite this version:

J.P. Ebran. Description relativiste de l'état fondamental des noyaux atomiques par l'approche du champ moyen auto-cohérent, incluant la déformation et la superfluidité. Physique Nucléaire Théorique [nucl-th]. Université Paris Sud - Paris XI, 2010. Français. NNT: . tel-00565208

HAL Id: tel-00565208

<https://theses.hal.science/tel-00565208>

Submitted on 11 Feb 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-SUD XI
INSTITUT DE PHYSIQUE NUCLÉAIRE D'ORSAY

THÈSE

présentée en première version en vue d'obtenir le grade de
Docteur, spécialité « Physique Nucléaire »

par

Jean-Paul EBRAN

DESCRIPTION RELATIVISTE DE L'ÉTAT FONDAMENTAL DES NOYAUX ATOMIQUES PAR L'APPROCHE DU CHAMP MOYEN AUTO-COHÉRENT, INCLUANT LA DÉFORMATION ET LA SUPERFLUIDITÉ

Thèse soutenue le 27 septembre 2010 devant le jury composé de :

M.	PIERRE DESESQUELLES	
M.	ELIAS KHAN	Directeur
M.	DAVID LUNNEY	Rapporteur
M.	NGUYEN VAN GIAI	
M ^{me}	SOPHIE PERU-DESENFANTS	
M.	PETER RING	Rapporteur

à ma mère et ma sœur

REMERCIEMENTS

UNE thèse est un travail de longue haleine. En plus de former au métier de chercheur, elle m'a permis de rencontrer des personnes passionnées et passionnantes. C'est ainsi que j'aimerais dire un merci bien maladroit, car ne connotant pas l'étendue de ma gratitude, aux personnes liées à mon travail. C'est donc tout naturellement à Elias Khan que vont mes remerciements les plus sincères. Sans essayer de rappeler ses qualités scientifiques et humaines, ces trois années de recherche à ses côtés auront été enthousiasmantes et agréables. Un grand merci à Daniel Peña Arteaga pour son aide précieuse et son humour. Mes remerciements vont également à Dario Vretenar, Nguyen van Giai, Marcella Grasso, Tamara Nikšić, Haozhao Liang, Thomas Duguet, Hagop Sazdjian et Bachir Moussallam pour nos discussions enrichissantes.

Merci à Peter Ring, David Lunney, Nguyen van Giai, Sophie Péru-Desenfants et Pierre Desesquelles pour avoir accepté de composer mon jury de thèse.

Ces années de thèse n'auraient pas été aussi agréables sans la présence de mes collègues thésards. Je tiens en particulier à remercier mon camarade de bureau et surtout ami Sébastien Galais. Je n'aurais jamais imaginé qu'une personne dotée d'un humour aussi décalé que le mien puisse exister. Merci à toi pour la bonne ambiance qui régnait dans notre bureau, pour nos discussions, et pour ta relecture de mon mémoire de thèse. Je ne peux m'empêcher d'inclure dans ces remerciements Mélanie Vangvichith, qui forme avec Sébastien et moi un trio légendaire. Merci à Anthea Fantina pour sa gentillesse et sa douceur. Je n'oublie pas Jérôme Gava et Julien Welzel. J'espère que vous vous épanouirez dans ce nouveau domaine que vous avez juré de conquérir. J'attends avec impatience ces dîners promis dans les restaurants les plus prestigieux de Paris. Je remercie également Gui-Gui (Guillaume Blanchon), Benoît Avez, Alexis Ramus, Marc Dupuis, Baptiste Mouginot (bonne chance futur papa), Mathieu Ferraton, Sandra Giron et tous ceux rencontrés dans les divers écoles et conférences.

Merci aux membres du groupe de physique théorique de l'IPNO ainsi qu'à Frederic van Wijland, Olivier Martin et Nicolas Pavloff avec qui enseigner fut un plaisir. Je m'excuse auprès de ceux que j'ai involontairement omis.

Enfin, mes remerciements les plus profonds et les plus chaleureux vont à ma mère et à ma sœur, qui m'ont toujours soutenu du mieux qu'elles le pouvaient, qui ont supporté mon tempérament de feu même lorsque mon

stress atteignait son paroxysme à mesure que l'échéance de ma thèse se rapprochait. Je vous aime.

Paris, le 4 février 2011.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	vii
LISTE DES FIGURES	x
INTRODUCTION	1
1 INTERACTION FORTE DANS LE MILIEU NUCLÉAIRE : APPROCHES RELATIVISTES	9
1.1 MOTIVATION D'UNE APPROCHE RELATIVISTE	11
1.1.1 Potentiels relativistes	11
1.1.2 Potentiel spin-orbite	12
1.1.3 Corrections relativistes cinématiques, dynamiques, et mécanisme de saturation de la matière nucléaire	14
1.1.3.1 Equations dans la matière nucléaire symétrique	14
1.1.3.2 Saturation de la matière nucléaire symétrique	16
1.1.3.3 Limite non-relativiste	17
1.1.3.4 Corrections relativistes cinématiques	18
1.1.3.5 Corrections relativistes dynamiques	18
1.1.4 Symétrie pseudo-spin	19
1.1.5 Magnétisme nucléaire	19
1.2 VERS LE LAGRANGIEN PHÉNOMÉNOLOGIQUE RHF	20
1.2.1 La Chromodynamique Quantique	20
1.2.1.1 Le Lagrangien de QCD	20
1.2.1.2 Les symétries de QCD	21
1.2.1.3 Brisure spontanée de la symétrie chirale	22
1.2.2 Le potentiel nucléon-nucléon et QCD exacte à basse énergie	24
1.2.3 Le potentiel nucléon-nucléon et la théorie effective des champs chirale	26
1.2.4 Le potentiel nucléon-nucléon dans l'approximation OBE	30
1.2.4.1 Interaction nucléon-nucléon à longue portée	32
1.2.4.2 Interaction nucléon-nucléon à moyenne portée	33
1.2.4.3 Interaction nucléon-nucléon à courte portée	35
1.2.4.4 Lagrangien dans l'approximation OBE	36
1.2.5 Approche de type Dirac-Brueckner	37
1.2.6 Vers une densité lagrangienne phénoménologique	39
1.2.6.1 Définition d'une énergie fonctionnelle de la densité dans une approche <i>ab initio</i>	39
1.2.6.2 Modèles phénoménologiques	43
1.3 MOTIVATION DU TERME DE FOCK	44

1.3.1	Masse effective	44
1.3.2	Structure en couche	46
1.3.3	RPA et excitations d'échange de charge	47
1.3.4	Modèles relativistes reposant sur des couplages ponctuels	49
CONCLUSION		49
2	L'APPROCHE HARTREE-FOCK-BOGOLIUBOV RELATIVISTE	51
2.1	LA DENSITÉ LAGRANGIENNE	55
2.1.1	Secteur nucléonique	55
2.1.2	Secteur mésonique	55
2.1.3	Interaction effective nucléon-méson	56
2.1.4	Paramètres libres de la densité lagrangienne	58
2.1.5	Les équations classiques du mouvement	59
2.1.5.1	Cas des nucléons	60
2.1.5.2	Cas des champs mésoniques effectifs	60
2.2	LE HAMILTONIEN EFFECTIF DU MODÈLE	61
2.2.1	Nucléons libres	62
2.2.2	Mésons effectifs libres	62
2.2.3	Interaction nucléon-méson	63
2.2.4	Hamiltonien total	63
2.2.5	Quantification canonique	64
2.3	LE FORMALISME HARTREE-FOCK RELATIVISTE	64
2.3.1	L'approximation <i>no-sea</i>	65
2.3.2	L'approximation du champ moyen	66
2.3.3	L'Energie Fonctionnelle de la Densité	69
2.3.4	Les équations Hartree-Fock relativistes	72
2.3.5	Cas des systèmes à déformation axiale	75
2.3.5.1	Symétries et champ moyen	75
2.3.5.2	Equations Hartree-Fock relativistes en symétrie axiale	77
2.4	L'APPARIEMENT NUCLÉONIQUE ET LA THÉORIE HARTREE-FOCK-BOGOLIUBOV RELATIVISTE	79
2.4.1	La superfluidité nucléaire	79
2.4.2	Modélisation de l'appariement nucléonique dans les modèles relativistes	79
2.4.3	Le formalisme Hartree-Fock-Bogoliubov relativiste	81
2.5	OPTIMISATIONS NUMÉRIQUES	83
2.5.1	Paramétrisations	83
2.5.2	Nombre de couches d'oscillateur	84
2.5.3	Nombre de points d'intégrations	85
2.5.4	Termes de réarrangement	85
CONCLUSION		86
3	APPLICATION AUX NOYAUX DES CHAÎNES ISOTOPIQUES $Z = 6, 10, 12$	87
3.1	PRÉDICTION DES OBSERVABLES DES SYSTÈMES NUCLÉAIRES	89
3.1.1	L'interaction PKO2 du Lagrangien RHFB	89
3.1.2	Propriétés des noyaux atomiques appartenant aux chaînes isotopiques $Z = 6, 10, 12$	90
3.1.2.1	Déformation axiale	90

3.1.2.2	Masse	92
3.1.2.3	Prédiction de la <i>drip-line</i> à deux neutrons	99
3.1.2.4	Rayon de charge	101
3.1.2.5	Densités nucléoniques	103
3.1.3	Etude du ^{16}C	103
3.2	STRUCTURE EN COUCHES	106
3.2.1	Evolution du spectre individuel	106
3.2.2	Persistance du gap magique $Z = 8$	111
3.3	RÔLE DU PION DANS LES MODÈLES DE CHAMP MOYEN RELATIVISTES	113
	CONCLUSION	117
	CONCLUSION GÉNÉRALE	119
A	EXPRESSIONS DÉTAILLÉES DES CONTRIBUTIONS D'ÉCHANGE	121
A.1	LE MÉSON SCALAIRE ISOSCALAIRE σ	123
A.1.1	Energie du système nucléons + σ	123
A.1.2	Equation Hartree-Fock relativiste en représentation coordonnée	124
A.1.3	Equation Hartree-Fock relativiste dans la base d'oscillateur harmonique déformé	124
A.1.3.1	Contribution des blocs Ω_j positifs	125
A.1.3.2	Contribution des blocs Ω_j négatifs	127
A.1.3.3	Contribution totale	128
A.2	LE MÉSON 4-VECTEUR ISOSCALAIRE ω	129
A.2.1	Contribution temporelle	129
A.2.1.1	Contribution des blocs Ω_j positifs	130
A.2.1.2	Contribution des blocs Ω_j négatifs	130
A.2.1.3	Contribution totale	131
A.2.2	Contributions spatiales $\mu = 1, 2$	131
A.2.2.1	Contribution des blocs Ω_j positifs	133
A.2.2.2	Contribution des blocs Ω_j négatifs	133
A.2.2.3	Contribution totale	134
A.2.3	Contributions spatiales $\mu = 3$	134
A.2.3.1	Contribution des blocs Ω_j positifs	135
A.2.3.2	Contribution des blocs Ω_j négatifs	135
A.2.3.3	Contribution totale	136
A.3	LE 4-POTENTIEL ÉLECTROMAGNÉTIQUE ET LE MÉSON ρ	136
A.3.1	Le 4-potentiel électromagnétique	136
A.3.2	Le méson ρ	136
A.4	LE MÉSON PSEUDO-SCALAIRE ISOVECTEUR π	137
A.4.1	Contribution ++	138
A.4.1.1	Contribution des blocs Ω_j positifs	138
A.4.1.2	Contribution des blocs Ω_j négatifs	139
A.4.1.3	Contribution totale	140
A.4.2	Contribution +-	140
A.4.2.1	Contribution des blocs Ω_j positifs	140
A.4.2.2	Contribution des blocs Ω_j négatifs	141
A.4.2.3	Contribution totale	141
A.4.3	Contribution -+	142

A.4.3.1	Contribution des blocs Ω_j positifs	142
A.4.3.2	Contribution des blocs Ω_j négatifs	142
A.4.3.3	Contribution totale	142
A.4.4	Contribution - -	143
A.4.4.1	Contribution des blocs Ω_j positifs	143
A.4.4.2	Contribution des blocs Ω_j négatifs	143
A.4.4.3	Contribution totale	144
A.4.5	Contribution 33	144
A.4.5.1	Contribution des blocs Ω_j positifs	144
A.4.5.2	Contribution des blocs Ω_j négatifs	145
A.4.5.3	Contribution totale	145
A.4.6	Contre terme	146
A.4.6.1	Contribution +/-	146
A.4.6.2	Contribution 33	147
A.5	TERME DE RÉARRANGEMENT	148
A.5.1	Expression en représentation coordonnée	148
A.5.2	Expression dans la base d'oscillateur déformé	148
A.5.2.1	Cas ($m > 0, n > 0$)	149
A.5.2.2	Cas ($m > 0, n < 0$)	149
A.5.2.3	Cas ($m < 0, n > 0$)	150
A.5.2.4	Cas ($m < 0, n < 0$)	151
A.5.2.5	Expressions généralisées	152
A.6	LES INTÉGRALES SPATIALES	153
A.6.1	Cas des intégrales $I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}$ associées aux mésons σ, ω, ρ , au champ Coulombien et au contre terme	153
A.6.2	Cas du pion	154
A.6.3	Les intégrales spatiales $K_{\alpha\alpha'\mu\nu;\nu'\mu'}$	155

BIBLIOGRAPHIE

157

LISTE DES FIGURES

1.1	Courbe de saturation de la matière nucléaire symétrique . .	17
1.2	Première correction relativiste dynamique à l'opérateur de masse.	19
1.3	Spectre des premières excitations hadroniques	23
1.4	Image schématique du liquide instantonique.	24
1.5	Contribution instantonique aux fonctions de corrélation ha- droniques.	25
1.6	Diagrammes de diffusion pion-pion.	28
1.7	Hierarchie des contributions à la force nucléaire nue issues de la χ EFT.	29
1.8	Energie par particule de la matière nucléaire symétrique en fonction de la densité nucléonique.	31

1.9	L'échange de plusieurs pions corrélés est décrit en terme d'échange d'un méson.	31
1.10	Potentiel nucléon-nucléon nu	32
1.11	Contribution générale de l'échange de deux pions au potentiel nucléon-nucléon.	33
1.12	Contribution typique de l'échange de deux pions corrélés à l'interaction nucléon-nucléon.	33
1.13	Représentation de l'échange d'un pion et de deux pions dans le canal t	34
1.14	Fonction spectrale dans le canal $J = T = 1$	34
1.15	Fonction spectrale dans le canal $J = T = 1$	35
1.16	Contribution générale de l'échange à trois pions au potentiel nucléon-nucléon.	36
1.17	Contribution à l'ordre le plus bas au potentiel nucléon-nucléon.	37
1.18	Effets des corrélations à deux corps sur la fonction d'onde à deux nucléons en fonction de leur distance relative r	38
1.19	Schéma de résolution des équations de la théorie DBHF.	39
1.20	Point de saturation de la matière nucléaire symétrique.	40
1.21	Resommation des diagrammes en échelle à trois corps.	40
1.22	Premières contributions à $\langle Q \rangle$ dans un développement perturbatif de Goldstone.	41
1.23	Définition diagrammatique des éléments de matrice de type particule-trou du potentiel moyen U	42
1.24	Structure diagrammatique de la fonction de vertex méson-nucléon dans l'approximation des échelles de Brueckner.	43
1.25	Masses effectives M_{NR}^{eff} calculées à partir de PKO1 en fonction de $\beta = \frac{N-Z}{A}$	46
1.26	Dépendance en énergie des masses effectives.	47
1.27	Spectre du noyau ^{208}Pb	47
1.28	Distribution de force de la GTR dans le noyau ^{208}Pb	48
2.1	Vue synoptique des étapes nécessaires à une description relativiste du noyau atomique	53
2.2	Contribution directe à l'énergie	70
2.3	Contribution d'échange à l'énergie	71
2.4	Contribution de Hartree à la <i>self-energy</i>	73
2.5	Contribution de Fock à la <i>self-energy</i>	74
3.1	Constante de couplage au méson σ dans les interactions PKO2, PKO3 et DDME2	89
3.2	Constante de couplage au méson ω dans les interactions PKO2, PKO3 et DDME2	89
3.3	Constante de couplage au méson ρ dans les interactions PKO2, PKO3 et DDME2	89
3.4	Constante de couplage au méson π dans l'interaction PKO3	89
3.5	Déformation axiale dans la chaîne isotopique $Z = 6$	91
3.6	Déformation axiale dans la chaîne isotopique $Z = 10$	91
3.7	Déformation axiale dans la chaîne isotopique $Z = 12$	91
3.8	Energie de liaison dans la chaîne isotopique $Z = 6$	93

3.9	Energie de liaison dans la chaîne isotopique $Z = 10$	93
3.10	Energie de liaison dans la chaîne isotopique $Z = 12$	94
3.11	Déviaton de l'énergie de liaison calculée à l'énergie de liaison expérimentale dans la chaîne isotopique $Z = 6$	94
3.12	Déviaton de l'énergie de liaison calculée à l'énergie de liaison expérimentale dans la chaîne isotopique $Z = 10$	95
3.13	Déviaton de l'énergie de liaison calculée à l'énergie de liaison expérimentale dans la chaîne isotopique $Z = 12$	95
3.14	Ecart-type de la déviaton des énergies calculées par rapport aux énergies mesurées dans les chaînes isotopiques $Z = 6$, $Z = 10$ et $Z = 12$	95
3.15	Proportion des contributions bosoniques directe et d'échange à l'énergie de liaison du noyau ^{38}Mg	96
3.16	Contribution directe des bosons à l'énergie de liaison du noyau ^{38}Mg	97
3.17	Contribution totale des bosons à l'énergie de liaison du noyau ^{38}Mg	98
3.18	Energie de séparation à deux neutrons prédite par les interactions PKO2 et DDME2 dans la chaîne isotopique $Z = 6$	100
3.19	Potentiel chimique neutronique prédit par les interactions PKO2 et DDME2 dans la chaîne isotopique $Z = 6$	100
3.20	Energie de séparation à deux neutrons prédite par les interactions PKO2 et DDME2 dans la chaîne isotopique $Z = 10$	100
3.21	Potentiel chimique neutronique prédit par les interactions PKO2 et DDME2 dans la chaîne isotopique $Z = 10$	100
3.22	Energie de séparation à deux neutrons prédite par les interactions PKO2 et DDME2 dans la chaîne isotopique $Z = 12$	100
3.23	Potentiel chimique neutronique prédit par les interactions PKO2 et DDME2 dans la chaîne isotopique $Z = 12$	100
3.24	Rayon de charge dans la chaîne isotopique $Z = 6$	102
3.25	Rayon de charge dans la chaîne isotopique $Z = 10$	102
3.26	Rayon de charge dans la chaîne isotopique $Z = 12$	102
3.27	Densité des nucléons calculée à partir de PKO2 et DDME2 dans la chaîne isotopique $Z = 10$	104
3.28	Densités nucléoniques prédites par l'interaction NL3 dans la chaîne isobarique $A = 20$	105
3.29	Densité de proton dans le noyau ^{16}C prédite par PKO2	106
3.30	Densité de neutron dans le noyau ^{16}C prédite par PKO2	106
3.31	Densité de proton dans le noyau ^{16}C prédite par DDME2	106
3.32	Densité de neutron dans le noyau ^{16}C prédite par DDME2	106
3.33	Niveaux neutroniques du noyau ^{28}Mg prédits par PKO2 et DDME2. Les lignes en pointillé représentent le potentiel chimique.	107
3.34	Niveaux protoniques du noyau ^{28}Mg prédits par PKO2 et DDME2.	107
3.35	Niveaux neutroniques du noyau ^{30}Mg prédits par PKO2 et DDME2.	108
3.36	Niveaux protoniques de ^{30}Mg prédits par PKO2 et DDME2.	108
3.37	Niveaux neutroniques du noyau ^{32}Mg prédits par PKO2 et DDME2.	108

3.38	Niveaux protoniques du noyau ^{32}Mg prédits par PKO2 et DDME2.	109
3.39	Niveaux neutroniques du noyau ^{34}Mg prédits par PKO2 et DDME2.	109
3.40	Niveaux protoniques du noyau ^{34}Mg prédits par PKO2 et DDME2.	109
3.41	Niveaux neutroniques du noyau ^{38}Mg prédits par PKO2 et DDME2.	110
3.42	Niveaux protoniques du noyau ^{38}Mg prédits par PKO2 et DDME2.	110
3.43	Séquence des niveaux individuels dans le modèle de Nilsson.	112
3.44	<i>Evolution du gap $Z=8$ dans la chaîne isotopique $Z=10$ prédite par les interactions PKO2 (cercles) et DDME2 (carrés). Les couleurs indiquent la valeur du paramètre de déformation β.</i>	113
3.45	<i>Evolution du gap $Z=8$ dans la chaîne isotopique $Z=12$ prédite par les interactions PKO2 (cercles) et DDME2 (carrés). Les couleurs indiquent la valeur du paramètre de déformation β.</i>	113
3.46	Energie de liaison des noyaux ^{18}Ne , ^{20}Ne , ^{22}Ne et ^{28}Ne prédite par PKO3 (violet), PKO2 (bleu) et DDME2 (rouge). .	114
3.47	Déviaton à l'expérience de l'énergie de liaison des noyaux ^{18}Ne , ^{20}Ne , ^{22}Ne et ^{28}Ne prédite par PKO3 (violet), PKO2 (bleu) et DDME2 (rouge).	115
3.48	Déformation axiale des noyaux ^{18}Ne , ^{20}Ne , ^{22}Ne et ^{28}Ne prédite par PKO3 (violet), PKO2 (bleu), DDME2 (rouge) et Gogny D1S (vert).	115
3.49	Rayon de charge des noyaux ^{18}Ne , ^{20}Ne , ^{22}Ne et ^{28}Ne prédits par PKO3 (violet), PKO2 (bleu) et DDME2 (rouge). .	115
3.50	Niveaux protoniques du noyau ^{22}Ne prédits par PKO2 et PKO3.	116
3.51	Niveaux neutroniques du noyau ^{22}Ne prédits par PKO2 et PKO3.	116

INTRODUCTION

LA complémentarité entre théorie et expérience est particulièrement présente en physique nucléaire, comme le met en exergue son histoire. Ainsi, l'élaboration du modèle de la goutte liquide permit la reproduction des premières mesures de masse à l'aide de la formule semi-empirique de Bethe-Weizsäcker. La déviation de l'énergie de liaison de certains noyaux atomiques possédant un nombre particulier de protons et/ou de neutrons par rapport à celle prédite par le modèle de la goutte liquide entraîna Johannes Hans Daniel Jensen et Maria Goeppert Mayer à décrire les nombres magiques dans le noyau [M⁺55]. Ces derniers fournissaient une base solide pour la description du noyau en terme de couches nucléoniques générées par un potentiel dont une partie peut être représentée en première approximation par un potentiel d'oscillateur harmonique tandis qu'une autre s'interprète comme un potentiel spin-orbite de forte amplitude. Le modèle en couches ainsi développé ne rendait pas compte de la déformation de la distribution de charge, souvent observée. James Rainwater d'une part, ainsi qu'Aage Bohr et Ben Mottelson d'autre part proposèrent indépendamment de considérer l'influence des nucléons externes sur le comportement collectif des nucléons du cœur du noyau. La mise en évidence des modes d'oscillation de surface, de compression et de polarisation des états excités nucléaires prouvèrent la validité de cette approche.

Les premières techniques expérimentales ont limité l'étude des noyaux atomiques à ceux peuplant la vallée de la stabilité ou en étant proches. C'est ainsi que les noyaux ont été traités avec succès comme une collection de nucléons non-relativistes interagissant par l'intermédiaire d'un potentiel à deux corps instantané, et dont la dynamique est gouvernée par l'équation de Schrödinger. Généralement, les modèles théoriques reproduisant avec succès les propriétés des noyaux stables s'extrapolent difficilement aux noyaux exotiques [L⁺03]. La manne d'informations apportée par la mise en place conjuguée d'accélérateurs de faisceaux radioactifs¹ et de nouvelles générations de détecteurs permettent ainsi un affinement sélectif des modèles théoriques ayant pour conséquence l'augmentation de leur pouvoir prédictif ainsi que de leur capacité à reproduire un ensemble toujours plus important de propriétés nucléaires.

Au cours de ces dernières décennies, la physique nucléaire s'est focalisée sur l'étude des noyaux exotiques. La recherche expérimentale

¹Citons comme exemple de complexe expérimental GANIL (France), CERN (Europe), GSI (Allemagne), Riken (Japon), NCSL, ORNL, ANL (Etats-Unis), Dubna (Russie), TRIUMF (Canada).

correspondante fait intervenir des faisceaux radioactifs produits par fragmentation du projectile ou par la méthode ISOL afin d'étendre les outils permettant l'étude des noyaux stables à celle des noyaux exotiques : mesures de masses et de sections efficaces de réaction, excitations coulombiennes, diffusions élastiques et inélastiques de protons, réactions *knock-out* et de transfert [Blu02]. Ces méthodes représentent de véritables défis expérimentaux dans la mesure où elles sont souvent caractérisées par des taux de production très faibles, imposant le traitement d'une statistique et d'un rapport signal sur bruit défavorables.

L'étude des noyaux riches en neutrons vers la *drip-line* neutronique a exhibé de nombreuses propriétés souvent liées à la proximité du niveau de Fermi et du continuum d'états individuels. Elle a mis en évidence l'émergence de nouveaux phénomènes tels que la formation de peaux de neutrons [H⁺95] voire de halos [T⁺95]. La présence dans ces noyaux d'une zone étendue de faible densité neutronique peut provoquer des groupements corrélés de particules. De plus, le découplage des densités neutronique et protonique conduit à l'émergence de nouveaux modes collectifs de basse énergie [P⁺07]. Ces propriétés observées enrichissent le traitement théorique des noyaux atomiques. Par exemple, les modèles doivent incorporer un couplage au continuum d'états. La façon dont est pris en compte ce dernier influence en particulier la diffusion de paires de nucléons dans le continuum par l'interaction résiduelle d'appariement [G⁺01]. Un traitement adéquat du continuum est donc pertinent. L'étude des noyaux riches en neutrons renseignent également sur l'interaction nucléon-nucléon, et notamment sur son canal isovecteur, via la modification des nombres magiques traditionnels loin de la stabilité par exemple [S⁺08].

De récents progrès expérimentaux ont permis la synthèse d'éléments superlourds [O⁺06; HM00] à partir de réactions de fusion froide faisant intervenir le noyau doublement magique ^{208}Pb ou le noyau quasi-magique ^{209}Bi comme cibles. Cette synthèse peut également faire intervenir des réactions de fusion chaudes dans lesquelles le noyau doublement magique ^{48}Ca bombarde des noyaux d'actinide. C'est ainsi que les éléments superlourds $Z = 113 - 116, 118$ ont été produits avec succès. Dans les noyaux superlourds, du fait de la forte répulsion coulombienne, l'éventuelle stabilité résulte directement des effets quantiques des couches. Leur étude permet de valider les modèles théoriques qui ne s'accordent pas quant à la localisation de l'îlot de stabilité au-delà du nombre magique $Z = 82$ [C⁺96; B⁺99; k⁺00].

Le traitement théorique des systèmes nucléaires est complexe du fait qu'il s'inscrit dans le cadre des problématiques à N corps. A cette difficulté vient s'ajouter le caractère non-perturbatif des interactions entre nucléons. De fait, la description des systèmes nucléaires dépend des propriétés que l'on cherche à étudier. Ces dernières vont guider le choix des degrés de liberté et de leurs modes d'interaction. Ainsi, au niveau le plus microscopique, le noyau peut être représenté comme une collection de quarks interagissant via l'échange de gluons et de photons. Il est ensuite

possible de décrire le noyau à partir de fermions ponctuels, les nucléons, interagissant par une force nue représentant un échange de mésons. Ces mêmes fermions peuvent être habillés par leurs interactions avec le milieu, et interagissent ainsi par l'intermédiaire d'une force effective. Il est également possible de modéliser le noyau à l'aide de degrés de liberté plus globaux. Par exemple, les noyaux à halo sont décrits dans ce cadre comme des systèmes à trois corps, composés d'un cœur et de deux nucléons périphériques interagissant par une force quasi nue. La modélisation la plus macroscopique consiste à voir le noyau comme une goutte liquide.

Ces différentes approches, caractérisées par leur domaine de validité, sont d'autant plus complexes, mais en principe plus prédictives, qu'elles sont microscopiques. Les approximations visant à simplifier leur formalisme tentent de réduire la taille de l'espace de Hilbert à explorer pour la description des observables, cette troncature étant accompagnée ou non d'une renormalisation des degrés de liberté due aux effets manquants. Pour la physique de la structure nucléaire à basse énergie, les approches microscopiques pertinentes sont celles construites sur des degrés de liberté correspondant aux nucléons ponctuels. Dans un premier temps, la description de l'interaction entre ces degrés de liberté fait appel à une force nue à deux-corps, éventuellement complétée par une force à trois corps. Cette dernière représente une renormalisation des effets liés à la structure interne des nucléons, non considérée dans de telles approches.

Le type de modélisation des systèmes nucléaires étant spécifié, il est possible de prendre en compte toutes les corrélations des noyaux légers ($A \leq 10$) dans des approches *ab initio* de type *Green Function Monte Carlo* [PW01]. Ces dernières reposent sur une force nue à deux corps déterminée au moyen de modèles OBEP (One Boson Exchange Potential) et ajustée sur les déphasages de la diffusion nucléon-nucléon, complétée par une force phénoménologique à trois corps. Elles correspondent à une classe d'algorithmes permettant de traiter les intégrales multi-dimensionnelles intervenant dans le calcul de la fonction d'onde de l'état fondamental du système à N corps. Leur nature rend difficile la connexion de leurs résultats aux phénomènes physiques à l'œuvre dans le noyau.

D'autre part, des approches reposant sur des forces effectives prenant en compte l'essentiel de la physique et destinées à être utilisées dans un espace des états restreint ont été développées. Elles interviennent au cœur du modèle en couches et des modèles de champ moyen auto-cohérent. Le modèle en couches introduit une division de l'espace des états individuels possibles en un cœur et un espace de valence. Le cœur est un ensemble de niveaux individuels supposés inactifs tandis que l'espace de valence est l'ensemble de tous les états individuels pouvant jouer un rôle dans la construction des fonctions d'onde à N corps. Lorsque le modèle en couches repose sur une interaction effective dérivée de l'interaction nue à deux-corps (*no-core shell model*), les calculs *ab initio* correspondants permettent la description des noyaux jusqu'à la masse $A \approx 12$ [N⁺00]. L'utilisation d'une interaction effective phénoménologique ajustée aux

données expérimentales² permet une description performante des noyaux légers, de masse intermédiaire et éventuellement des noyaux lourds dans lesquels l'approximation d'un cœur inactif est valide (régions autour des noyaux magiques essentiellement) [P⁺01]. Le modèle en couche est donc performant dans la région où l'interaction a été ajustée, mais son pouvoir prédictif est intrinsèquement limité.

Les théories de champ moyen auto-cohérent reposent sur l'hypothèse selon laquelle les nucléons peuvent être décrits en terme de particules indépendantes se mouvant dans un potentiel moyen généré par les autres nucléons. De nature phénoménologique, leur succès dans la description d'un très grand nombre de propriétés statiques et dynamiques de basse énergie jusque dans les noyaux superlourds en fait un outil de choix pour l'étude des phénomènes nucléaires. Par exemple, les calculs de champ moyen étendu permettent une description précise des états excités de rotation à l'approximation de *cranking* [RS80]. La présence de coexistences de formes nécessite des techniques au-delà du champ moyen, comme la Méthode de la Coordonnée Génératrice [RS80]. Quant aux états vibrationnels de petites amplitudes tels que les résonances géantes, les méthodes de type Approximation de la Phase Aléatoire, ou RPA, construites sur la base du champ moyen, en assurent une description adaptée [KvGoo; PnARo8].

Les théories de champ moyen auto-cohérent sont aujourd'hui interprétées comme une mise en œuvre approchée de la théorie de la fonctionnelle de la densité (DFT). Les exemples les plus célèbres de telles fonctionnelles sont celle de Skyrme [VB72] et de Gogny [Gog75]. L'équivalent relativiste de ces fonctionnelles résulte d'une densité lagrangienne traitée dans l'approximation Hartree (RMF ou RH) [V⁺05] ou Hartree-Fock (RHF) [B⁺87]. Ces dernières, au moins aussi précises que leurs consœurs non-relativistes, offrent certains avantages comme le traitement naturel des degrés de libertés de spin ou la classification de différentes quantités physiques selon leur comportement sous les transformations de Lorentz. La présence de potentiels relativistes scalaire S et 4-vecteur V^μ en est une conséquence directe. Ces derniers façonnent les caractéristiques principales des systèmes nucléaires, *i.e.* leur structure en couches. Ainsi, leur compensation mutuelle est à l'origine du potentiel moyen de faible amplitude dans lequel évoluent les nucléons, d'où une cinématique non-relativiste, tandis que leur combinaison constructive génère le potentiel spin-orbite.

L'application des modèles de champ moyen relativistes fut initiée par les travaux de B.D. Serot et J.D. Walecka [SW86]. Les modèles de type QHD (*Quantum HadroDynamics*) ainsi développés reposent sur les principes suivants :

- Les nucléons sont traités comme des particules ponctuelles.
- La covariance relativiste est prise en compte.

²Cette interaction représente donc une interaction nucléon-nucléon dans le milieu.

- Les nucléons évoluent comme des particules indépendantes dans un potentiel moyen.

La dynamique nucléonique est gouvernée par une équation de Dirac inhomogène, dont l'opérateur de masse fait intervenir les champs mésoniques caractérisés par leur spin, leur parité et leur isospin. La plupart des modèles relativistes sont formulés dans le cadre de l'approximation *no-sea*, consistant à ne pas prendre en compte explicitement la contribution des états d'énergie négative formant la mer de Dirac dans le calcul des densités et courants nucléoniques. En pratique, un nombre restreint de champs mésoniques effectifs est suffisant pour reproduire les propriétés nucléaires : les champs pseudo-scalaire isovecteur, scalaire isoscalaire, 4-vecteur isoscalaire et 4-vecteur isovecteur. On introduit également le 4-potentiel électromagnétique afin de générer l'interaction coulombienne entre protons.

A l'ordre le plus bas, les fluctuations quantiques de ces mésons effectifs ne sont pas prises en compte, conduisant à un modèle semi-classique. Ces derniers sont couplés aux nucléons par l'intermédiaire de vertex locaux phénoménologiques. On réalisa très vite qu'une dépendance en densité (i.e. une prise en compte explicite des effets du milieu et de la structure interne des nucléons) était cruciale afin d'obtenir un accord quantitatif avec l'expérience. Historiquement, la première prise en compte explicite d'une dépendance en densité se fit par l'introduction de termes non-linéaires s'interprétant comme un auto-couplage du champ scalaire isoscalaire [BB77]. Une autre méthode introduite par Brockmann et Toki [B⁺84; ST94] consista à promouvoir les constantes de couplage au rang de fonctions dépendant explicitement de la densité baryonique. Les modèles relativistes les plus récents mettent en jeu des couplages nucléon-nucléon ponctuels. Introduits par Bürgenich et Madland [B⁺02], ces derniers font intervenir les premiers termes d'un développement des propagateurs mésoniques de portée finie intervenant dans les modèles de type QHD.

Dans les noyaux à couches ouvertes et dans le cadre d'une description des noyaux en terme de couches nucléoniques, le nombre d'états quantiques dans les spectres individuels de basse énergie ($E - E_0 \sim 1\text{MeV}$) est *a priori* grand et augmente exponentiellement avec le nombre de nucléons à considérer [Mot96]. Or l'observation de ces spectres individuels met en évidence la présence d'un nombre restreint de configurations favorisées parmi l'énorme possibilité accordée par la structure en couches du noyau. Certaines corrélations nucléoniques dans les noyaux à couches ouvertes sont à l'origine de cette sélection. On rencontre des phénomènes de même nature en structure atomique et dans l'effet Hall quantique fractionnaire, où les dégénérescences des configurations impliquant des couches partiellement remplies offrent à certaines corrélations la possibilité de stabiliser de nouvelles structures [Mot96]. Cependant, les corrélations nucléoniques diffèrent de celles intervenant dans les atomes ou dans l'effet Hall en ce que les interactions résiduelles dans le noyau sont à dominante attractives et de courte portée. L'analyse des spectres individuels nucléaires révèle

que deux mécanismes en compétition jouent un rôle important dans l'exploitation des dégénérescences offertes par la structure en couches des noyaux : les corrélations d'appariement et la déformation collective du champ moyen.

Les corrélations d'appariement jouent un rôle important pour la description quantitative des observables nucléaires. Leur traitement dans le cadre de l'approximation BCS a toujours été populaire en raison de sa simplicité. Cependant, cette approximation n'est plus suffisante pour les noyaux proches des *drip-lines*, où les niveaux composant le continuum peuvent être occupés. Ces problèmes peuvent être contournés en travaillant dans le cadre des modèles RHB [V⁺05] ou RHFB [L⁺10], incluant un canal d'appariement explicite. Dans la mesure où les grande et petite composantes du spineur nucléonique ne se mélangent pratiquement pas [SR02a], les corrélations d'appariement statiques sont décrites à partir d'une interaction non-relativiste de Gogny dans le canal particule-particule. Cette interaction étant de portée finie, elle introduit un *cut-off* naturel si bien qu'elle n'est pas sujette aux difficultés présentes dans le formalisme BCS ou tout autre méthode mettant en jeu une fenêtre d'appariement artificielle.

Le phénomène de déformation nucléaire est aussi d'une importance capitale puisqu'il concerne la quasi totalité des noyaux atomiques. Or à l'heure actuelle, aucun modèle relativiste traitant explicitement les termes d'échange n'est apte à décrire les noyaux déformés. D'autre part, ces mêmes modèles traitaient jusqu'à très récemment les corrélations d'appariement dans le cadre de l'approximation BCS. Ce travail de thèse vise donc à étendre les modèles de type RHF aux noyaux à symétrie axiale. D'autre part, les corrélations d'appariement sont prises en compte dans le cadre de la théorie RHFB, permettant un traitement auto-cohérent et unifié des canaux particule-trou et particule-particule de l'interaction nucléon-nucléon. Le développement de ce modèle et son application aux noyaux finis nous permettra d'examiner ce qu'apporte le traitement explicite des termes d'échange dans le cadre des modèles de champ moyen relativistes aptes à traiter la déformation nucléaire.

La structure de ce mémoire de thèse s'organise comme suit. Le *premier chapitre* examine l'existence ou non de liens connectant le modèle phénoménologique à la Chromodynamique Quantique (QCD). La pertinence d'une description relativiste des systèmes nucléaires est discutée. Puis, le cheminement menant de QCD au Lagrangien à la base de ce travail de thèse est exposé. Enfin, les motivations d'un traitement explicite des termes d'échange dans le cadre des modèles de champ moyen relativistes sont expliquées.

Le *deuxième chapitre* présente en détail le modèle développé. Ainsi, la construction de la densité lagrangienne phénoménologique et les différentes approximations mises en œuvre pour la dérivation de la fonctionnelle de la densité sont exposées. Le traitement de la déformation nucléaire ainsi que des corrélations d'appariement statiques est ensuite

détaillé.

Enfin, le *troisième chapitre* consiste en un exemple d'application du modèle développé aux noyaux finis. En particulier, la prédiction d'observables et des spectres individuels est discutée dans les chaînes isotopiques $Z = 6, 10$ et 12 . Elle permet de mettre en évidence les conséquences du traitement explicite des termes d'échange à travers une comparaison systématique avec les résultats du modèle RHB.

INTERACTION FORTE DANS LE MILIEU NUCLÉAIRE : APPROCHES RELATIVISTES

1

SOMMAIRE

1.1	MOTIVATION D'UNE APPROCHE RELATIVISTE	11
1.1.1	Potentiels relativistes	11
1.1.2	Potentiel spin-orbite	12
1.1.3	Corrections relativistes cinématiques, dynamiques, et mé- canisme de saturation de la matière nucléaire	14
1.1.3.1	Equations dans la matière nucléaire symétrique	14
1.1.3.2	Saturation de la matière nucléaire symétrique .	16
1.1.3.3	Limite non-relativiste	17
1.1.3.4	Corrections relativistes cinématiques	18
1.1.3.5	Corrections relativistes dynamiques	18
1.1.4	Symétrie pseudo-spin	19
1.1.5	Magnétisme nucléaire	19
1.2	VERS LE LAGRANGIEN PHÉNOMÉNOLOGIQUE RHF	20
1.2.1	La Chromodynamique Quantique	20
1.2.1.1	Le Lagrangien de QCD	20
1.2.1.2	Les symétries de QCD	21
1.2.1.3	Brisure spontanée de la symétrie chirale	22
1.2.2	Le potentiel nucléon-nucléon et QCD exacte à basse énergie	24
1.2.3	Le potentiel nucléon-nucléon et la théorie effective des champs chirale	26
1.2.4	Le potentiel nucléon-nucléon dans l'approximation OBE .	30
1.2.4.1	Interaction nucléon-nucléon à longue portée . .	32
1.2.4.2	Interaction nucléon-nucléon à moyenne portée .	33
1.2.4.3	Interaction nucléon-nucléon à courte portée . .	35
1.2.4.4	Lagrangien dans l'approximation OBE	36
1.2.5	Approche de type Dirac-Brueckner	37
1.2.6	Vers une densité lagrangienne phénoménologique	39
1.2.6.1	Définition d'une énergie fonctionnelle de la den- sité dans une approche <i>ab initio</i>	39
1.2.6.2	Modèles phénoménologiques	43

1.3	MOTIVATION DU TERME DE FOCK	44
1.3.1	Masse effective	44
1.3.2	Structure en couche	46
1.3.3	RPA et excitations d'échange de charge	47
1.3.4	Modèles relativistes reposant sur des couplages ponctuels	49
	CONCLUSION	49

LES systèmes nucléaires sont habituellement traités dans un cadre non-relativiste. Lorsque leur description s'appuie sur les méthodes du champ-moyen auto-cohérent, aujourd'hui interprété comme une mise en œuvre approchée de la théorie de la fonctionnelle de la densité, les modèles non-relativistes correspondants prédisent avec succès leurs propriétés [B⁺03]. Cependant, un traitement relativiste de ces systèmes fournit une compréhension plus aboutie de certaines propriétés nucléaires. L'émergence du potentiel spin-orbite, le mécanisme de saturation de la matière nucléaire ou encore l'origine de la symétrie pseudo-spin sont autant d'exemples présentés dans la section 1.1 motivant une approche relativiste des systèmes nucléaires.

Le noyau atomique consiste en un agglomérat de nucléons qui, à leur tour, sont un assemblage de quarks et gluons. En ce sens, la description des systèmes nucléaires devrait être liée et contrainte par la théorie sous-jacente des interactions fortes : la chromodynamique quantique (QCD). La section 1.2 présente la complexité caractérisant le secteur de basse énergie non perturbatif de QCD. Une dérivation directe des observables nucléaires à partir de QCD n'est pas envisageable, mais pas nécessaire non plus si l'on travaille dans le cadre des théories effectives des champs. La théorie effective des champs chirale permet ainsi de faire le lien entre les caractéristiques principales de QCD à basse énergie et la phénoménologie nucléaire. Le cheminement menant de cette théorie effective au Lagrangien qui sert de point de départ du travail de thèse fait l'objet de la section 1.2.

Le Lagrangien phénoménologique ainsi déduit est généralement traité dans l'approximation de Hartree. Elle conduit à un formalisme étonnamment simple décrivant avec succès les observables nucléaires [V⁺05]. Le traitement explicite des contributions d'échange dans le cadre de l'approximation Hartree-Fock complique le formalisme en introduisant une non-localité dans le potentiel moyen. Néanmoins, le comportement de la masse effective nucléonique dans la matière nucléaire de même que le rôle du pion (contribuant uniquement dans le canal d'échange) et du couplage tenseur du méson ρ (contribuant principalement dans le canal d'échange) constituent des arguments motivant la prise en compte explicite des termes d'échange (section 1.3).

1.1 MOTIVATION D'UNE APPROCHE RELATIVISTE

Le noyau est caractérisé par une cinématique non-relativiste ($\frac{E_{cin}}{M} \sim \frac{30}{1000}$, E_{cin} représentant l'énergie cinétique par nucléon et M la masse du nucléon). Ainsi, les théories non-relativistes de la structure nucléaire, dont la dynamique est gouvernée par l'équation de Schrödinger, décrivent les propriétés des noyaux atomiques avec grand succès [B⁺03]. Il est alors légitime de s'interroger sur la pertinence d'une approche relativiste.

Les théories de la structure nucléaire peuvent être vues comme des modèles effectifs de QCD à basse énergie. Or, il existe une infinité de représentations possibles de QCD à basse énergie. En revanche, ces différentes représentations ne sont pas toutes aussi efficaces ou physiquement transparentes. Un choix possible se pose entre une formulation relativiste et non-relativiste. Outre une prise en compte naturelle des degrés de liberté de spin, plusieurs arguments (que nous allons discuter par la suite) indiquent qu'une représentation du système nucléaire en terme de potentiels relativistes scalaire de Lorentz et 4-vecteur fournit une description plus efficace, plus simple et plus fondamentale que les approches non-relativistes. La pertinence d'une formulation relativiste n'est donc pas liée au besoin d'une cinématique relativiste mais au maintien d'une distinction entre scalaire de Lorentz et 4-vecteur.

1.1.1 Potentiels relativistes

L'intervention de potentiels scalaire de Lorentz et 4-vecteur sont à la base des modèles relativistes phénoménologiques (modèles de type QHD pour *quantum hadrodynamics*) [SW86]. Des indications provenant de la saturation de la matière nucléaire ou encore de l'espacement des niveaux de partenaires spin-orbites dans les noyaux finis révèlent que l'amplitude dans le milieu nucléaire de chacun de ces deux potentiels est de l'ordre de quelques centaines de *MeV*. En conséquence, ces derniers ne sont pas négligeables devant l'énergie de masse du nucléon au repos, de l'ordre du *GeV*. Dans le cadre de la théorie chirale des perturbations à densité finie [Vre04], les règles de somme de QCD à densité finie relient l'émergence de ces potentiels aux changements du condensat de quark et de la densité de quark dus à la présence de la matière baryonique¹. Dans le cadre des modèles de type QHD, ces potentiels générés par l'échange de mésons sont traités phénoménologiquement.

Prenons l'exemple du modèle de Serot et Walecka [SW86]². Les degrés de liberté mis en jeu correspondent alors aux nucléons, représentés par un spineur de Dirac ψ , au méson $\sigma (J^\pi = 0^+, T = 0)$ et au méson $\omega (1^+, 0)$. Ils interviennent dans la densité lagrangienne suivante :

¹Plus de détails sont donnés dans la section 1.2.3

²Historiquement, il s'agit du premier modèle de type QHD

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Walecka} = & \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - M - g_\sigma \sigma - g_\omega \gamma_\mu \omega^\mu) \psi \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - \frac{1}{2} (\Omega_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu} - m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu) \end{aligned} \quad (1.1)$$

avec

$$\Omega^{\mu\nu} = \partial^\mu \omega^\nu - \partial^\nu \omega^\mu \quad (1.2)$$

M représente la masse du nucléon, g_σ et g_ω correspondent aux constantes de couplage phénoménologiques des mésons effectifs σ et ω . La densité lagrangienne de Walecka est traitée dans l'approximation de Hartree.

L'échange des mésons σ et ω génère respectivement les potentiels scalaire S et 4-vecteur $V^\mu = (V, \mathbf{V})$:

$$\begin{aligned} S(\mathbf{r}) &= -g_\sigma \sigma(\mathbf{r}) \\ V^\mu(\mathbf{r}) &= g_\omega \omega^\mu(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Ces derniers interviennent dans l'Hamiltonien effectif de Dirac à 1 corps :

$$h_D = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta(M - S + \gamma_\mu V^\mu) \quad (1.4)$$

Pour la description de l'état fondamental des noyaux pair-pairs, l'invariance sous les transformations de renversement du temps impose à la composante spatiale $\mathbf{V}$ du 4-potential V^μ de s'annuler : $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$. Le champ $S \sim -400 \text{ MeV}$ représente un potentiel attractif, tandis que la composante temporelle du 4-potential $V \sim 350 \text{ MeV}$ représente un potentiel répulsif.

Un premier exemple de la simplification de la description des noyaux induite par la représentation du champ moyen nucléaire en terme des potentiels S et V^μ est donné par le potentiel spin-orbite.

1.1.2 Potentiel spin-orbite

Depuis plus de soixante-dix ans, il est connu que le champ moyen nucléaire est caractérisé par un potentiel spin-orbite de grande amplitude [M⁺55]. Sa prise en compte est essentielle afin de générer la séquence des nombres magiques observés. Alors qu'une formulation non-relativiste ne permet ni d'expliquer l'origine du potentiel spin-orbite, ni même son amplitude ou son signe, celui-ci émerge naturellement dans un traitement relativiste.

Dans le cadre du modèle de Walecka et pour la description de l'état fondamental des noyaux pair-pairs, l'équation de Dirac stationnaire prend la forme suivante :

$$h_D \begin{pmatrix} \varphi_i \\ \chi_i \end{pmatrix} = (\varepsilon_i^{NR} + M) \begin{pmatrix} \varphi_i \\ \chi_i \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} S + V & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -2M - S + V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_i \\ \chi_i \end{pmatrix} = \varepsilon_i^{NR} \begin{pmatrix} \varphi_i \\ \chi_i \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Dans cette dernière équation, $\psi_i \equiv \begin{pmatrix} \varphi_i \\ \chi_i \end{pmatrix}$ représente le spineur de Dirac nucléonique de grande composante φ_i et de petite composante χ_i , σ représente les matrices de Pauli.

La grande composante φ_i du spineur de Dirac nucléonique est associée à la combinaison $V + S \sim 50 \text{ MeV}$, petite en comparaison de l'énergie de masse d'un nucléon au repos $M \sim 1 \text{ GeV}$. En revanche, la petite composante χ_i ressent la combinaison $V - S \sim 750 \text{ MeV}$ non négligeable devant l'énergie de masse d'un nucléon au repos.

Pour les systèmes sphériques et après élimination de la petite composante à partir de la deuxième équation de 1.6, la première équation de 1.6 s'écrit sous la forme³ :

$$\left\{ \mathbf{p} \frac{1}{\varepsilon_i^{NR} + 2\tilde{M}(r)} \mathbf{p} + [V + S](r) + \frac{2}{(\varepsilon_i^{NR} + 2\tilde{M}(r))^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (V - S) \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} \right\} \varphi_i = \varepsilon_i^{NR} \varphi_i \quad (1.7)$$

où $\tilde{M}(r) \equiv M - \frac{1}{2} [V - S](r)$ et $\mathbf{s} \equiv \frac{\sigma}{2}$.

L'équation 1.7 est une formulation équivalente de l'équation de Dirac 1.6. Pour les niveaux appartenant à la mer de Fermi, on peut négliger ε_i^{NR} devant $2\tilde{M}$, si bien que l'équation 1.7 devient :

$$\left\{ \mathbf{p} \frac{1}{2\tilde{M}(r)} \mathbf{p} + W(r) + V_{ls}(r) \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} \right\} \varphi_i = \varepsilon_i^{NR} \varphi_i \quad (1.8)$$

avec :

$$W(r) = [V + S](r) \quad (1.9)$$

$$V_{ls}(r) = \frac{1}{2\tilde{M}^2(r)} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (V - S) \quad (1.10)$$

Cette dernière équation prend la forme d'une équation de Schrödinger avec une masse effective $\tilde{M}(r)$ dépendante des coordonnées spatiales. Elle met en exergue la manière dont les potentiels relativistes $S(r)$ et $V(r)$ caractérisent les propriétés essentielles des systèmes nucléaires.

- Leur compensation mutuelle $W(r) \sim 50 \text{ MeV}$ génère le champ moyen central de faible amplitude dans lequel évoluent les nucléons. En conséquence, les systèmes nucléaires présentent une cinématique non-relativiste.
- Leur combinaison constructive engendre le potentiel spin-orbite $V_{ls}(r)$.

³Cette dérivation fait appel à la propriété suivante des matrices de Pauli : pour des vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ commutant avec les matrices de Pauli, $(\mathbf{a} \cdot \sigma)(\mathbf{b} \cdot \sigma) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})I + i\sigma \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$

Cette étude simplifiée met en évidence la manière dont émerge le potentiel spin-orbite dans le cadre d'une formulation relativiste qui maintient une distinction entre scalaire de Lorentz et 4-vecteur. D'autre part, à partir du moment où S et V sont décrits phénoménologiquement, aucun paramètre supplémentaire n'est nécessaire afin d'introduire le potentiel spin-orbite. En effet, S et V déterminent à la fois le potentiel central et le potentiel spin-orbite.

L'équation de Schrödinger 1.8 ainsi obtenue permet une discussion qualitative. Cependant, l'approximation non-relativiste menant à l'équation 1.8 n'est pas satisfaisante quantitativement si bien que les applications d'une théorie de champ moyen relativiste doit reposer sur l'équation de Dirac complète 1.6.

Le potentiel spin-orbite est d'ordre $\frac{1}{M^2}$ par rapport au potentiel central. Du fait qu'intervienne la masse $\tilde{M}(r)$ plutôt que la masse nue M du nucléon, le potentiel spin-orbite incorpore des corrections relativistes dites dynamiques, qui font l'objet du paragraphe suivant. Remplacer $\tilde{M}(r)$ par M conduit au potentiel spin-orbite $V_{ls}(r) = \frac{1}{2M^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (V - S)$. Ce dernier représente une correction relativiste dite cinématique, pouvant être incorporée dans tout calcul non-relativiste reposant sur l'équation de Schrödinger.

1.1.3 Corrections relativistes cinématiques, dynamiques, et mécanisme de saturation de la matière nucléaire

Le rôle des corrections relativistes est manifeste lorsque l'on examine le mécanisme de saturation de la matière nucléaire [Mat89].

La matière nucléaire représente un système uniforme idéal de taille infinie. Elle est définie comme un ensemble infini de nucléons à température nulle pour lequel on "débranche" l'interaction coulombienne. Un tel système n'existe pas dans la nature et de fait, ses propriétés ne représentent pas des observables expérimentales. Toutefois, décrire le centre des noyaux lourds de même que l'intérieur des étoiles à neutrons à partir de la matière nucléaire constitue une approximation adaptée. En outre, l'approximation de la densité locale (LDA) permet de lier certaines observables des noyaux finis à une densité ρ à celles dans la matière nucléaire à la même densité ρ [B⁺58].

1.1.3.1 Equations dans la matière nucléaire symétrique

Pour simplifier la discussion, nous nous plaçons à nouveau dans le cadre du modèle de Walecka (1.1) et considérons la matière nucléaire symétrique. Les équations d'Euler-Lagrange mésoniques conduisent aux équations de Klein Gordon :

$$[\square + m_\sigma^2] \sigma = -g_\sigma \bar{\psi} \psi \quad (1.11)$$

$$[\square + m_\omega^2] \omega^0 = g_\omega \bar{\psi} \gamma^0 \psi \quad (1.12)$$

ψ représentant toujours le spineur de Dirac nucléonique.

L'invariance par translation impose :

$$\sigma = -\frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \bar{\psi} \psi \quad (1.13)$$

$$\omega^0 = \frac{g_\omega}{m_\omega^2} \bar{\psi} \gamma^0 \psi \quad (1.14)$$

La fonction d'onde relativiste du nucléon s'écrit alors

$$\varphi_{p,s,\tau}^R(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} u(\mathbf{p}, s) \chi_\tau^{\frac{1}{2}} \quad (1.15)$$

où $\chi_\tau^{\frac{1}{2}}$ représente un bi-spineur dans l'espace d'isospin. Elle correspond au développement de l'opérateur nucléonique ψ dans la base définie par $\{c_{p,s,\tau}^\dagger, c_{p,s,\tau}\}$ créant et annihilant un nucléon dans l'état $|\mathbf{p}, s, \tau\rangle$.

L'équation de Dirac statique vérifiée par u s'écrit alors [Mat89] :

$$[\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + \beta(M + \Sigma(\mathbf{p}))] u(\mathbf{p}, s) = e(\mathbf{p}) u(\mathbf{p}, s) \quad (1.16)$$

Rappelons les solutions d'énergies positives u^0 et négatives v^0 de l'équation de Dirac vérifiée par un nucléon libre ($\Sigma(\mathbf{p}) = 0$) :

$$u^0(\mathbf{p}, s) = \sqrt{\frac{e_p + M}{2e_p}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}}{e_p + M} \end{pmatrix} \chi_s^{\frac{1}{2}} \quad (1.17)$$

$$v^0(\mathbf{p}, s) = \sqrt{\frac{e_p + M}{2e_p}} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}}{e_p + M} \\ 1 \end{pmatrix} \chi_s^{\frac{1}{2}} \quad (1.18)$$

Dans le cadre de la matière nucléaire symétrique, l'opérateur de masse relativiste $\Sigma(\mathbf{p})$ prend la forme :

$$\Sigma(\mathbf{p}) = \Sigma_S(\mathbf{p}) + \beta\Sigma_0(\mathbf{p}) \quad (1.19)$$

Les *self-energies*⁴ scalaire $\Sigma_S(\mathbf{p})$ et 4-vecteur (composante temporelle) $\Sigma_0(\mathbf{p})$ correspondent aux transformées de Fourier de $\Sigma_S(\mathbf{r})$ et $\Sigma_0(\mathbf{r})$ définies par :

$$\Sigma_S(\mathbf{r}) = g_\sigma \sigma(\mathbf{r}) \quad (1.20)$$

$$\Sigma_0(\mathbf{r}) = g_\omega \omega^0(\mathbf{r}) \quad (1.21)$$

L'équation de Dirac statique 1.16 peut se réarranger sous la forme d'une équation de Dirac libre :

$$[\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + \beta M^*(\mathbf{p})] u(\mathbf{p}, s) = e^*(\mathbf{p}) u(\mathbf{p}, s) \quad (1.22)$$

avec

$$M^*(\mathbf{p}) = M + \Sigma_S(\mathbf{p}) \quad (1.23)$$

$$e^*(\mathbf{p}) = e(\mathbf{p}) - \Sigma_0(\mathbf{p}) \quad (1.24)$$

⁴La *self-energy* d'une particule représente la contribution à l'énergie de cette particule provenant de son interaction avec le milieu.

La solution d'énergie positive $u^*(\mathbf{p}, s)$ prend alors la même forme que la solution libre (1.17) si ce n'est que la masse M et l'énergie propre e sont remplacées par leurs équivalents étoilés :

$$u^*(\mathbf{p}, s) = \sqrt{\frac{e_p^* + M^*}{2e_p^*}} \left(\frac{1}{\frac{\sigma \cdot \mathbf{k}}{e_p^* + M^*}} \right) \chi_s^{\frac{1}{2}} \quad (1.25)$$

avec la relation de dispersion dans le milieu

$$e_p^* = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^{*2}} \quad (1.26)$$

Le nucléon dont il est question dans une approche relativiste est donc différent du nucléon non-relativiste. En effet, le spineur u^* fait intervenir les quantités modifiées M^* et e_k^* . En d'autres termes, le nucléon relativiste est habillé par l'intermédiaire de l'opérateur de masse $\Sigma(\mathbf{p})$, alors que la fonction d'onde nucléonique non-relativiste ne dépend en aucune manière des interactions.

Les *self-energies* s'écrivent :

$$\Sigma_S(\mathbf{r}) = - \left(\frac{g_\sigma}{m_\sigma} \right)^2 \rho_s(\mathbf{r}) \quad (1.27)$$

$$\Sigma_0(\mathbf{r}) = \left(\frac{g_\omega}{m_\omega} \right)^2 \rho_b(\mathbf{r}) \quad (1.28)$$

où la densité scalaire ρ_s et la densité baryonique ρ_b correspondent à [Mat89] :

$$\rho_s = \sum_{i=p,n} \sum_{spin} \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{p_{F,i}} dp \, p^2 \frac{M^*(p)}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + M^{*2}(p)}} \quad (1.29)$$

$$\rho_b = \sum_{i=p,n} \sum_{spin} \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{p_{F,i}} dp \, p^2 = \sum_{i=p,n} \frac{p_{F,i}^3}{3\pi^2} \quad (1.30)$$

avec p_F le moment de Fermi.

1.1.3.2 Saturation de la matière nucléaire symétrique

Les équations (1.29,) renseignent sur le mécanisme de saturation de la matière nucléaire dans de telles approches relativistes. L'énergie de liaison résulte de la compensation entre la contribution scalaire attractive Σ_S de la *self-energy* (due à l'échange du méson σ) et de sa contribution 4-vectorielle (partie temporelle) répulsive Σ_0 (due à l'échange du méson ω). Aux grands moments de Fermi, Σ_S tend vers une valeur constante ($\sim \frac{1}{M}$) tandis que Σ_0 croît comme la densité ($\sim p_F^3$), dominant ainsi la courbe de saturation [B⁺87](figure 1.1). Ce mécanisme de saturation est un autre exemple de la simplicité accordée par la représentation en terme de quantités se comportant comme des scalaires et 4-vecteurs sous les transformations de Lorentz.

Pour mieux se rendre compte de l'implication des corrections relativistes sur le mécanisme de saturation de la matière nucléaire symétrique, différentes réductions du calcul relativiste sont présentées.

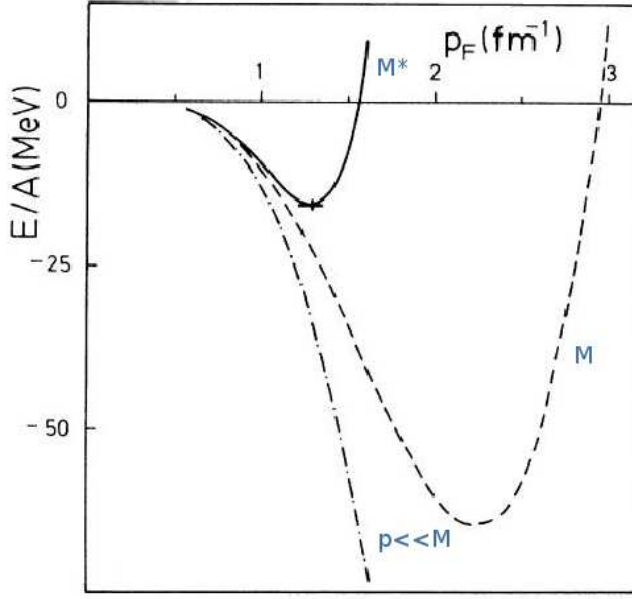


FIG. 1.1 – Courbe de saturation de la matière nucléaire symétrique dans le calcul relativiste complet (courbe solide), en négligeant les corrections relativistes dynamiques (courbe en pointillé) et dans la limite non-relativiste (courbe en traits mixtes)(cf texte). Image adaptée de [B⁺87].

1.1.3.3 Limite non-relativiste

La première réduction envisagée consiste en la limite non-relativiste. Elle s'obtient en négligeant le moment des nucléons devant la masse M^* .

Le spineur (1.25) prend alors la forme :

$$u^{NR}(\mathbf{p}, s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \chi_s^{\frac{1}{2}} \quad (1.31)$$

si bien que la fonction d'onde relativiste du nucléon (1.15) coïncide avec la fonction d'onde non-relativiste, i.e l'onde plane $e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \chi_s^{\frac{1}{2}} \chi_t^{\frac{1}{2}}$.

Dans ce cas, la densité scalaire ρ_s est identique à la densité baryonique ρ_b . L'énergie potentielle totale par nucléon s'écrit alors :

$$\left\langle \frac{E_{pot}}{A} \right\rangle = \frac{1}{2} \left[- \left(\frac{g_\sigma}{m_\sigma} \right)^2 + \left(\frac{g_\omega}{m_\omega} \right)^2 \right] \rho_b \quad (1.32)$$

Dans cette limite (courbe en traits mixtes de la figure 1.1), la matière nucléaire ne sature pas. Ce résultat rejoint une propriété bien connue des approches non-relativistes s'appuyant sur une interaction nue : il est nécessaire d'aller à l'approximation Brueckner-Hartree-Fock pour avoir saturation (sans pour autant reproduire le point empirique de saturation de la matière nucléaire). Cet exemple met donc en valeur la perte de simplicité due à l'occultation des échelles relativistes. Ainsi, la disparition du scalaire de Lorentz détruit le mécanisme de saturation à l'approximation Hartree-Fock, et il est nécessaire de prendre en compte les corrélations de Brueckner pour atteindre à nouveau la saturation.

1.1.3.4 Corrections relativistes cinématiques

Une étape intermédiaire entre le calcul relativiste exact et sa limite non-relativiste consiste à calculer les *self-energies* en remplaçant la masse effective M^* par la masse nue du nucléon M (courbe en pointillé de la figure 1.1). L'auto-cohérence de l'équation (1.27) s'en retrouve brisée.

Dans cette approximation, le spineur (1.25) coïncide avec le spineur libre (1.17). Ainsi, seules les corrections relativistes cinématiques, qui interviennent au niveau du potentiel nucléon-nucléon, sont incorporées. Elles correspondent aux corrections d'ordre $(\frac{p}{M})^2$ incluses dans le potentiel central et le potentiel spin-orbite. La dénomination cinématique prend alors tout son sens du fait que ces corrections apparaissent seulement au niveau du nucléon libre, sa fonction d'onde ne faisant pas intervenir explicitement l'opérateur de masse.

Dans ce cas, les densités scalaire et baryonique sont bien différentes, conduisant à la saturation de la matière nucléaire. Cependant, la dépendance en densité de Σ_S est plus faible que dans le calcul exact, ayant pour conséquence la saturation à trop haute densité et à une énergie de liaison trop profonde (cf. figure 1.1). En variant les constantes de couplage g_σ et g_ω , il n'est jamais possible de reproduire le point de saturation de la matière nucléaire [Mat89].

1.1.3.5 Corrections relativistes dynamiques

Par opposition aux corrections relativistes cinématiques, on appelle corrections relativistes dynamiques les corrections générées par le spineur habillé u^* (1.25) par rapport au spineur libre u^0 (1.17) (courbe en ligne solide de la figure 1.1). Pour interpréter le contenu physique spécifique au spineur habillé, décomposons le sur la base des états libres de l'équation de Dirac [B⁺84] :

$$u^*(\mathbf{p}, s) = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2(p)}} \left\{ u^0(\mathbf{p}, s) + \xi(p) \sum_{s'} \langle s | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} | s' \rangle v^0(-\mathbf{p}, s') \right\} \quad (1.33)$$

où le paramètre $\xi(p) \simeq -\frac{p \Sigma_S}{2MM^*}$ vaut environ 0.1 dans le modèle de Walecka [Mat89].

Ce développement dans la base libre indique que les corrections spécifiques au spineur habillé correspondent à une composante d'anti-nucléons v^0 dans la fonction d'onde nucléonique dans le milieu nucléaire. Cette dernière fait directement intervenir la partie scalaire de l'opérateur de masse. En outre, cette décomposition exhibe un "petit" paramètre $\xi(p)$, légitimant un développement perturbatif de l'opérateur de masse en fonction de ξ . Au premier ordre non nul en $\xi(p)$, la correction relativiste dynamique à l'opérateur de masse non-relativiste, représentée à la figure 1.2, vaut [B⁺87] :

$$\delta \Sigma_0 |_{dyn} = \frac{p^2}{M} \left(\frac{\Sigma_S}{M} \right)^2 \quad (1.34)$$

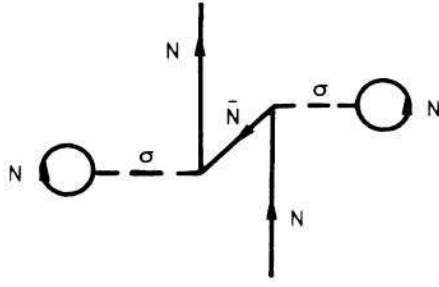


FIG. 1.2 – Première correction relativiste dynamique à l'opérateur de masse. Image tirée de [B⁺87]

La particularité de cette correction relativiste dynamique est de prendre la forme d'une correction à trois corps, ne pouvant donc pas être incluse dans le potentiel nu à deux corps non-relativiste.

On comprend alors pourquoi les plus simples calculs de type Brueckner-Hartree-Fock relativistes sont plus proches du point de saturation de la matière nucléaire que leurs équivalents non-relativistes qui, sans l'ajout des contributions à trois corps, sont astreints à parcourir la ligne dite de Coester [D⁺76]. Cet exemple témoigne de l'efficacité d'une formulation relativiste par rapport à un traitement non-relativiste.

1.1.4 Symétrie pseudo-spin

Un nouvel exemple de l'importance de l'invariance de Lorentz, et ce même à basse énergie, est donné par la symétrie pseudo-spin. Il y a plus de trente ans, une quasi-dégénérescence de certaines orbitales nucléoniques fut observée dans les noyaux sphériques [A⁺69]. Il s'agit des couples $\{(n_r, l, j = l + \frac{1}{2}); (n_r - 1, l + 2, j = l - \frac{1}{2})\}$, soit, par exemple, $\{2s_{\frac{1}{2}}; 1d_{\frac{3}{2}}\}, \dots$.

Toutes les tentatives de compréhension de la symétrie pseudo-spin dans un cadre non-relativiste ont échoué. Au contraire, dans une formulation relativiste faisant intervenir les potentiels scalaire de Lorentz S et 4-vectoriel V , la symétrie pseudo-spin s'explique comme une symétrie de l'Hamiltonien de Dirac h_D apparaissant lorsque les valeurs absolues des potentiels S et V sont proches [Gino4].

1.1.5 Magnétisme nucléaire

Le phénomène de magnétisme nucléaire fournit un nouvel exemple de la simplicité apportée par une formulation relativiste. Les systèmes dans lesquels l'invariance par renversement du temps est brisée, comme les noyaux composés d'un nombre impair de nucléons ou encore les noyaux en rotation, sont caractérisés par des courants non nuls. Ces derniers jouent un rôle important pour la compréhension quantitative du moment magnétique des noyaux impairs [HR88] ou du moment d'inertie des noyaux en rotation [A⁺96].

Dans le cadre d'une formulation relativiste, ces courants contribuent au potentiel nucléaire par l'intermédiaire de la composante spatiale $V(\mathbf{r})$ du 4-vecteur V^μ . La composante temporelle V et la composante spatiale $\mathbf{V}$ sont donc caractérisées par la même constante de couplage, de telle sorte que la prise en compte des courants induits par la brisure de l'invariance par renversement du temps ne nécessite l'ajout d'aucun paramètre supplémentaire.

1.2 VERS LE LAGRANGIEN PHÉNOMÉNOLOGIQUE RHF

Etant admis que l'équation pertinente pour décrire la dynamique du nucléon dans le noyau est l'équation de Dirac, on se propose de partir des premiers principes de QCD et de montrer comment les simplifications d'ordre théoriques ou les approximations imposées par les contraintes numériques conduisent au Lagrangien RHF à la base de ce travail de thèse. L'idée de cette section est donc de présenter le cheminement menant de QCD de basse énergie au Lagrangien phénoménologique RHF, et d'examiner si la connexion avec QCD persiste dans les modèles phénoménologiques.

L'interaction entre nucléons est comprise comme une réminiscence de l'interaction forte dont le cadre théorique est fourni par QCD. Les nucléons sont des objets composites. Ils correspondent à des hadrons composés de trois quarks de valence baignant dans une "soupe" de quarks, anti-quarks et gluons. La dynamique des quarks et des gluons étant décrite par QCD, il est donc *a priori* légitime de vouloir connecter les propriétés du nucléon et de ses interactions à la théorie fondamentale des interactions fortes. Commençons par présenter les propriétés élémentaires de QCD pertinentes pour la description des interactions entre nucléons.

1.2.1 La Chromodynamique Quantique

1.2.1.1 Le Lagrangien de QCD

QCD est la théorie fondamentale des interactions fortes dont les acteurs sont les quarks s'échangeant des gluons. La dynamique des quarks et des gluons résulte de la symétrie de jauge associée au groupe non-abélien $SU(3)_{\text{coul}}$. Se restreignant à deux saveurs $N_f = 2^5$, les quarks légers u et d forment un doublet d'isospin de saveur ψ_q couplé aux gluons à travers la densité lagrangienne suivante :

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\psi}_q [i\gamma_\mu \mathcal{D}^\mu - m] \psi_q - \frac{1}{2} \text{Tr} (G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}) \quad (1.35)$$

$\mathcal{L}_{\text{QCD}}$ fait intervenir :

⁵Pour la description des noyaux atomiques, la seule prise en compte des quarks u et d est suffisante. Cette simplification est justifiée par l'écart entre les masses des quarks u et d (de l'ordre de quelques MeV) d'une part et celle du quark s (de l'ordre de la centaine de MeV) d'autre part, puis avec celles des quarks lourds c , b et t (de l'ordre du GeV)

- La matrice 2×2 $m = \text{diag}(m_u, m_d)$ contenant les masses des quarks u et d .
- La dérivée covariante $\mathcal{D}_\mu$ mettant en jeu le couplage g , le champ gluonique A_μ^a ($a = 1, \dots, 8$) et les générateurs $t^a \equiv \frac{\lambda_a}{2}$ de $SU(3)_{\text{coul}}$ (λ_a étant les matrices de Gell-Mann) :

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a t_a \quad (1.36)$$

- Le tenseur gluonique $G_{\mu\nu}$ défini à partir du champ gluonique A_μ^a , des générateurs t^a de $SU(3)_{\text{coul}}$, des constantes de structure f_{abc} de $SU(3)_{\text{coul}}$ ($[t_a, t_c] = if_{abc}t_c$) et du couplage g comme :

$$G_{\mu\nu} = \frac{i}{g} [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = \partial_\mu A_\nu^a t_a - \partial_\nu A_\mu^a t_a + gf_{abc} A_\mu^a A_\nu^b t_c \quad (1.37)$$

La constante de couplage g dépend de l'échelle d'énergie considérée à travers le mécanisme de renormalisation. C'est ainsi que pour de très courtes distances $r < 0.1fm$, ou de façon équivalente pour des transferts de moments supérieurs à quelques GeV/c, lesquels sondent l'intérieur des nucléons, QCD est une théorie de quarks et gluons faiblement couplés. Au contraire, pour des échelles d'énergie inférieures au GeV (correspondant à des échelles spatiales $r \geq 1fm$, typiques de la physique du noyau atomique), QCD est dans son régime non perturbatif, caractérisé par le confinement de couleur et un vide doté d'une structure complexe.

1.2.1.2 Les symétries de QCD

Comme nous le verrons dans un instant, les symétries caractérisant QCD auront leur importance dans l'établissement de sa connexion avec les modèles nucléaires effectifs. Nous les présentons donc de façon succincte :

- La symétrie de jauge associée au groupe $SU(3)_{\text{coul}}$, sur laquelle la théorie est construite. Elle est donc exactement conservée et n'est brisée par aucune interaction connue.
- Les symétries discrètes telles que la parité, la conjugaison de charge ou le renversement du temps sont respectées par QCD. Des effets quantiques reliés entre autres aux instantons⁶ conduisent à un terme (le terme θ) pouvant violer la symétrie PT . La valeur expérimentale $\theta < 10^{-9}$ permet de négliger la violation de la symétrie PT par ce terme. Précisons que la faible valeur de θ ne trouve pas encore d'explications théoriques.
- Dans le cas où l'on se restreint à un nombre de saveur $N_f = 2$, intéressons nous au groupe de transformation chirale $U(2)_L \times U(2)_R$.

⁶Les instantons sont abordés dans la section suivante

Au niveau des générateurs infinitésimaux, $U(N) \sim SU(N) \times U(1)$. Les transformations chirales peuvent donc se séparer en transformations sous les groupes $SU(2)_L \times SU(2)_R$ et $U(1)_L \times U(1)_R$. Enfin, les transformations sous les groupes $U(1)_L$ et $U(1)_R$ peuvent se recombinaer en transformation sous les groupes $U(1)_V$ et $U(1)_A$, le premier étant pair sous les transformations de parité et le second impair.

- Dans la limite chirale où les masses des quarks u et d sont nulles, le Lagrangien de QCD est invariant sous les transformations chirales mais l'état fondamental n'exhibe pas cette symétrie : la symétrie chirale $U(2)_L \times U(2)_R$ est brisée spontanément vers le sous-groupe $SU(2)_V \times U(1)_V$. L'invariance sous les transformations de ces derniers groupes entraînent respectivement la conservation de l'isospin et du nombre baryonique.
- Le terme de masse des quarks brise explicitement la symétrie chirale. Dans le cas où les quarks u et d possèdent la même masse $m_u = m_d$, le sous-groupe $SU(2)_V \times U(1)_V$ reste non brisé. Si les masses des quarks sont différentes, alors le sous-groupe $SU(2)_V$ est brisé à son tour. La brisure explicite de la symétrie chirale, engendrée par les masses non nulles des quarks, est donc causée par l'interaction électrofaible, les masses des quarks étant générées par le couplage de ces derniers au champ de Higgs.
- Un couplage des quarks au boson de jauge de la théorie électrofaible entraîne une brisure explicite de la symétrie chirale supplémentaire. Il conduit entre autres à une différence dans les masses des mésons $\pi^\pm$ et π^0 .
- La symétrie axiale sous $U(1)_A$ est une anomalie, c'est-à-dire une symétrie présente dans la théorie classique mais pas dans sa version quantique. Les corrections quantiques brisent explicitement cette symétrie vers le sous-groupe cyclique Z_{2N_f} .

1.2.1.3 Brisure spontanée de la symétrie chirale

La symétrie chirale joue un rôle important en QCD de basse énergie. Comme indiqué dans le paragraphe précédent, le Lagrangien de QCD est approximativement invariant sous les transformations chirales $SU(2)_L \times SU(2)_R$ (la masse non nulle des quarks u et d brise explicitement la symétrie chirale). Par conte, l'état fondamental de QCD n'est pas invariant sous les transformations du groupe entier $SU(2)_L \times SU(2)_R$, mais sous son sous-groupe $SU(2)_V$. En effet, si l'état fondamental de QCD respectait la symétrie chirale, on observerait dans le spectre des hadrons des partenaires chiraux, de même spin mais de parité opposée, approximativement dégénérés. Il n'en est rien. Par exemple, les partenaires chiraux $\omega(J^P = 1^-)$ et $f_1(J^P = 1^+)$ apparaissent comme résonances de masse 782 MeV et 1281 MeV respectivement.

La brisure spontanée de la symétrie chirale génère un mode de Goldstone de masse nulle (dans la limite où les quarks u et d sont de masse nulle), identifié au pion dans le cas $N_f = 2$. La faible brisure explicite de la symétrie chirale par le terme de masse des quarks entraîne une faible masse pour le pion. En conséquence, les états de QCD sont bien P-dégénérés : un pion peut-être ajouté à un état hadronique, un nucléon par exemple, changeant sa parité sans modifier son énergie (dans la limite où $m_u = m_d = 0 \text{ MeV}$). La brisure spontanée de la symétrie chirale est associée au paramètre d'ordre $\langle \bar{\psi}_q \psi_q \rangle$. Ce condensat de quark a une valeur non-nulle dans la phase associée à la brisure de la symétrie chirale.

Le vide de QCD présente une structure complexe caractérisée par la présence de condensats de quarks et de gluons. Les hadrons correspondent à des excitations de ce vide non perturbatif. C'est ainsi que les mésons peuvent être vus comme des excitations particule-trou du vide, tandis que les baryons requièrent la présence de trois quarks de valence pour former le nombre baryonique $B = 1$. Le spectre des états hadroniques de basse énergie est caractérisé par un espacement $\Delta \sim M_\rho \sim M_{\text{nucléon}} \sim 1 \text{ GeV}$ (cf. figure 1.3). Les masses de tous les états baryoniques et de la grande majorité des états mésoniques sont nettement séparées du vide de QCD. Au contraire, les pseudo bosons de Goldstone résident au sein de cet espacement. Ces caractéristiques sont la signature de la brisure spontanée de la symétrie chirale : la présence d'un condensat de quarks dans l'état fondamental de QCD introduit une échelle de brisure $\Delta \sim 1 \text{ GeV}$ dans le spectre des états excités construit sur ce vide non perturbatif. A l'intérieur de cet espacement résident des excitations collectives de masse quasi nulle : les bosons de Goldstone associée à la brisure de la symétrie chirale.

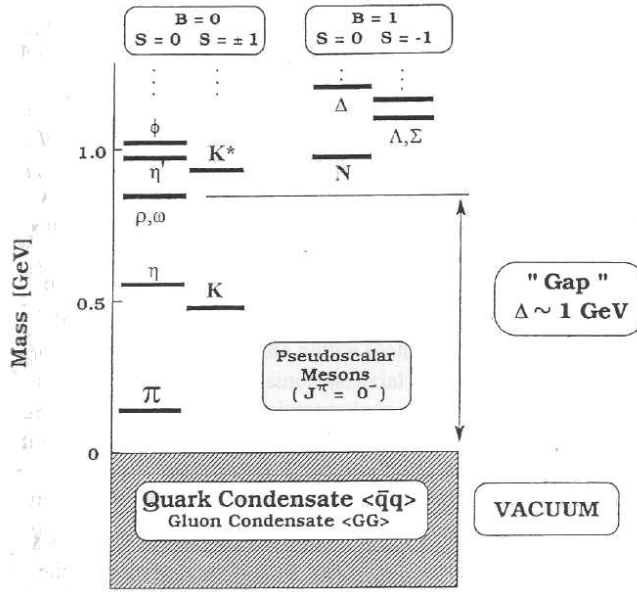


FIG. 1.3 – Spectre des premières excitations hadroniques construites sur le vide condensé de QCD. L'espacement caractéristique $\Delta \sim 1 \text{ GeV}$ est représenté. Image tirée de [Wei98]

1.2.2 Le potentiel nucléon-nucléon et QCD exacte à basse énergie

Une dérivation directe du potentiel nucléon-nucléon à partir de QCD est complexe en raison du caractère non-perturbatif de QCD dans le domaine d'énergie pertinent pour la physique de la structure nucléaire. Les hadrons correspondent à des excitations du vide non perturbatif de QCD, dont la modélisation est déjà compliquée.

Une description possible d'un tel vide repose sur le modèle d'instantons liquides [Sch98]. Ce modèle fait intervenir les solutions des équations du mouvement classiques gluoniques en temps imaginaire (ou Euclidien) : les instantons. Dans l'espace Euclidien, ces objets correspondent à des particules localisées. Dans l'espace de Minkowski, ils représentent des chemins connectant par effet tunnel les vides classiques dégénérés de la théorie. A température nulle et à densité ordinaire, le vide de QCD est caractérisé par un ensemble d'instantons (I) et anti-instantons ($\bar{I}$) fortement corrélés formant une phase liquide désordonnée. Une propriété importante des instantons réside dans l'existence de modes fermioniques nuls en présence de fermions légers. En effet, dans le champ d'un instanton A_μ^{inst} , l'opérateur de Dirac Euclidien $\mathcal{D} \equiv \gamma_\mu [\partial^\mu + gA_\mu^{inst}]$ possède une valeur propre nulle $\lambda = 0$. Une vision élémentaire du mouvement d'un quark dans un tel vide est indiquée dans la figure 1.4.

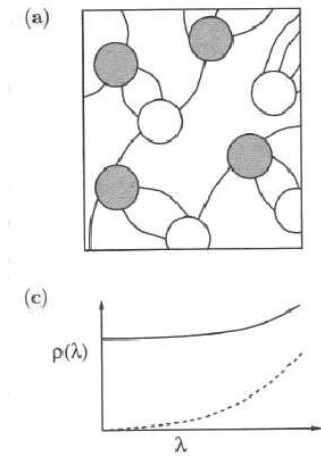


FIG. 1.4 – Image schématique du liquide instantonique tirée de [Shuo4]. (a) représente le liquide d'instantons et anti-instantons fortement corrélés peuplant le vide de QCD à température nulle. Les cercles vides et grisés représentent respectivement les instantons et anti-instantons. Les lignes correspondent à des échanges de fermions. Les modes fermioniques nuls voyagent par saut entre les instantons et anti-instantons, comme les électrons dans un conducteur. (c) présente l'allure de la densité spectrale de l'opérateur de Dirac associé à la configuration (a). La courbe en pointillée correspond à la densité spectrale de l'opérateur de Dirac dans le cas de quarks sans interactions.

Un (anti-)instanton agit comme un puits de potentiel liant les quarks dans un état localisé d'énergie nulle. La situation diffère lorsque plusieurs instantons peuplent le vide. Par exemple, la présence d'une paire $I\bar{I}$ engendre deux modes fermioniques nuls. Cependant, la dégénérescence de ces deux modes est levée par la superposition de leurs fonctions d'onde. Considérons à présent le cas où le nombre d'instantons et anti-instantons

est très grand. Chacun d'eux lie les quarks dans un mode d'énergie nulle. Le mécanisme de superposition des fonctions d'onde lève la dégénérescence de ces états, conduisant à la formation d'une bande continue autour de la virtualité $\lambda = 0$ et par conséquent à la délocalisation des modes fermioniques. Il s'agit du même phénomène intervenant en physique de la matière condensée : dans un milieu désordonné, les électrons, bien qu'étant initialement liés à une impureté, peuvent être délocalisés par superposition d'orbitales. Or, de même que la conductivité est déterminée par la densité d'états au niveau de la surface de Fermi, de même le condensat de quarks est associé à la densité des états propres de l'opérateur de Dirac au niveau de la virtualité $\lambda = 0$. Le condensat de quark, paramètre d'ordre de la symétrie chirale, possède ainsi une valeur non-nulle (cf figure 1.4) et la symétrie chirale est brisée. En conséquence, les quarks acquièrent une masse dynamique dépendant de l'échelle d'énergie, avec $m_q(p = 0) \sim 350 \text{ MeV}$ [Dia03].

Dans le cadre de ce modèle, la formation des états liés hadroniques de basse énergie est principalement due à l'interaction entre quarks induite par les instantons. Les fonctions de corrélation hadroniques sont l'outil de choix pour étudier le spectre des hadrons [Shuo4]. La figure 1.5 présente la contribution instantonique aux fonctions de corrélations du pion, du nucléon et du méson ρ . Le pion est caractérisé par les

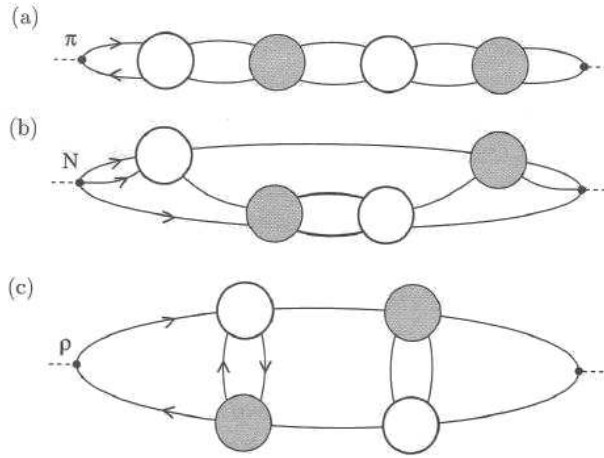


FIG. 1.5 – Contribution instantonique aux fonctions de corrélation hadroniques (tiré de [Shuo4]). (a) correspond au corrélateur du pion, (b) du nucléon et (c) du méson ρ . Les cercles vides et grisés représentent respectivement les instantons et anti-instantons. Les lignes correspondent à la contribution des modes fermioniques nuls au propagateur du quark.

nombre quantique du courant $j_\pi = \bar{u}\gamma_5 d$. La fonction de corrélation du pion $\Pi(x) = \langle j_\pi(x) j_\pi(0) \rangle$ représente l'amplitude pour qu'un quark d et un anti-quark u de chiralité opposée, créés par une source au point 0, se rencontrent à nouveau au point x . Dans le liquide instantonique désordonné, cette amplitude est grande car le quark et l'anti-quark sont absorbés et émis par le même instanton. Dans le pion, la contribution de l'interaction entre le quark et l'anti-quark induite par l'instanton est si grande qu'elle compense la somme des masses dynamiques des quarks

le constituant, si bien que le pion se retrouve avec une masse quasi-nulle (figure 1.5(a)). Dans le cas du méson ρ , la fonction de corrélation fait intervenir l'amplitude de deux quarks avec la même chiralité. Par conséquent, les quarks doivent être absorbés par des instantons différents (i.e. propagent dans des états fermioniques non-nuls) (figure 1.5 (c)). L'amplitude résultante est plus faible et l'état mésonique est beaucoup moins fermement lié. Ainsi, la masse du méson ρ correspond approximativement à la somme de la masse dynamique du quark et de l'anti-quark le constituant. Enfin, la formation d'un proton lié se comprend comme le couplage d'un diquark scalaire ud et d'un quark u . Leur mode de propagation est indiqué dans la figure 1.5 (b).

Cette section montre bien qu'il n'est pas raisonnable de vouloir décrire l'interaction nucléon-nucléon dans le cadre de ce formalisme où la description du nucléon seul est déjà complexe.

1.2.3 Le potentiel nucléon-nucléon et la théorie effective des champs chirale

La section précédente témoigne de la difficulté à traiter les interactions entre nucléons dans le cadre de QCD. Mentionnons tout de même de récents progrès reposant sur QCD sur réseau [Ish07].⁷ Plutôt que de tenter de dériver les propriétés de l'interaction nucléaire à partir de QCD, il est possible de travailler dans le cadre des théories effectives des champs (EFT pour *effective field theory*). Les EFT représentent une approximation à basse énergie de théories plus fondamentales. Elles reposent sur des principes communs à de nombreux domaines de la physique, tels que la séparation naturelle des échelles. Prenons l'exemple du nucléon. La description des processus de haute énergie fait intervenir le détail de la sous-structure du nucléon. En revanche, les processus de basse énergie ne sont pas sensibles aux détails de ce qui se passe aux courtes distances⁸, si bien qu'il est plus efficace de les décrire à partir des degrés de liberté de basse énergie. La structure à courte distance peut alors être remplacée par quelque chose de plus simple sans affecter les observables de basse énergie.

Ainsi, les EFT correspondent à des Lagrangiens construits sur les degrés de liberté de basse énergie de la théorie fondamentale dont elles sont l'approximation. Elles contiennent explicitement la dynamique relative aux grandes échelles de longueur, cette dernière étant contrainte par les symétries de la théorie sous-jacente. La dynamique correspondant aux petites échelles de longueur est paramétrisée de façon générique, par exemple, sous la forme de termes de contacts dont les coefficients encodent la physique de ces échelles. Si la théorie effective est perturbative, ces coefficients peuvent se dériver à partir de la théorie sous-jacente. Dans le cas contraire, ces coefficients sont ajustés sur des données expérimentales. La distinction entre grande et courte échelle de longueur est

⁷QCD sur réseau est une approche numérique de résolution de QCD dans son régime non perturbatif reposant sur une discrétisation de l'espace-temps après rotation de Wick.

⁸Pour être plus exact, le système n'est pas vraiment insensible à tous les détails de la structure à courte distance, mais leurs effets à basse énergie peuvent être pris en compte de façon simple, comme nous le montrons par la suite.

caractérisée par l'échelle de validité (*cut-off*) Λ de l'EFT.

Une EFT de QCD est la théorie des champs effective chirale (χ EFT). Elle exploite la séparation naturelle introduite par l'espacement $\Delta \sim 1\text{GeV}$ entre les degrés de liberté « légers » et « lourds ». Les degrés de liberté traités explicitement sont le pion et les nucléons. Le Lagrangien de QCD est ainsi remplacé par un Lagrangien effectif présentant les symétries pertinentes de la théorie sous-jacente, par exemple :

- Les symétries discrètes telles que parité, conjugaison de charge et renversement du temps.
- La symétrie chirale et sa brisure explicite et spontanée.

C'est ainsi que [Epe09] :

$$\mathcal{L}_{QCD} \rightarrow \mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{\pi} + \mathcal{L}_{\pi N} + \mathcal{L}_{NN} \quad (1.38)$$

La densité lagrangienne $\mathcal{L}_{eff}$ présente le même développement à basse énergie que QCD elle-même. Le développement de la χ EFT s'organise en puissance du paramètre $\frac{Q}{\Lambda}$, où $Q \sim M_{\pi}$ représente l'échelle « douce » et $\Lambda \sim 1\text{GeV}$ l'échelle « dure », *i.e.* le *cut-off* de la théorie chirale. Il est motivé par deux propriétés :

- Les bosons de Goldstone interagissent faiblement.
- Le terme de masse brisant explicitement la symétrie chirale est petit, de telle sorte qu'il peut être traité perturbativement.

Dans l'expression 1.38 :

- $\mathcal{L}_{\pi}$ représente la partie du Lagrangien effectif décrivant le pion. Le pion $\vec{\pi}(x)$ est construit dans une représentation non linéaire du groupe chirale $SU(2)_L \times SU(2)_R$ et intervient par l'intermédiaire d'une matrice unitaire 2×2 $U(x) \in SU(2)$. A basse énergie, un développement en puissance de l'impulsion du pion est équivalent à un développement de $\mathcal{L}_{\pi}$ en puissance des dérivées de $U(x)$. L'invariance de Lorentz restreint cette série aux termes comprenant un nombre pair de dérivées. De plus, chacun de ces termes est contraint par la symétrie chirale :

$$\mathcal{L}_{\pi} = \mathcal{L}_{\pi}^{(0)} + \mathcal{L}_{\pi}^{(2)} + \dots \quad (1.39)$$

$\mathcal{L}_{\pi}^{(0)}$ est une constante. $\mathcal{L}_{\pi}^{(2)}$ peut s'écrire en terme de $\vec{\pi}(x)$ comme [Epe09] :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\pi}^{(2)} = & \frac{1}{2} \partial_{\mu} \vec{\pi} \cdot \partial^{\mu} \vec{\pi} + \frac{1}{2F^2} (\partial_{\mu} \vec{\pi} \cdot \vec{\pi})^2 + F^2 B(m_u + m_d) \\ & - \frac{B}{2} (m_u + m_d) \vec{\pi}^2 + \mathcal{O}(\vec{\pi}^4) \end{aligned} \quad (1.40)$$

où F et B représentent des constantes (LEC pour *low-energy constant*) *a priori* inconnues. Elles sont en fait reliées à la constante de désintégration du pion et au condensat de quarks [Epe09]. Les deux derniers termes de $\mathcal{L}_\pi^{(2)}$ sont introduits pour briser explicitement la symétrie chirale et générer ainsi un terme de masse pour le pion. Les diagrammes contribuant à la diffusion pion-pion sont présentés à la figure 1.6.

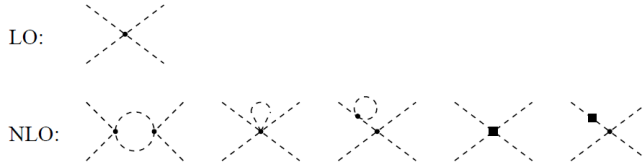


FIG. 1.6 – Diagrammes de diffusion pion-pion à l'ordre dominant (LO) et à l'ordre suivant (NLO). Les points et rectangles correspondent aux vertex de $\mathcal{L}_\pi^{(2)}$ et $\mathcal{L}_\pi^{(4)}$ respectivement.

- $\mathcal{L}_{\pi N}$ décrit l'interaction nucléon-pion. Les termes correspondants sont contraints par la symétrie chirale. La densité lagrangienne peut être développée en puissance des impulsions externes et des masses des quarks :

$$\mathcal{L}_{\pi N} = \mathcal{L}_{\pi N}^{(1)} + \mathcal{L}_{\pi N}^{(2)} + \dots \quad (1.41)$$

Ainsi, $\mathcal{L}_{\pi N}$ développé au second ordre dans le champ pionique s'écrit [Epe09] :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\pi N} = & \bar{\psi}_N (i\gamma_\mu \partial^\mu - M_N) \psi_N - \frac{g_A}{2f_\pi} \bar{\psi}_N \gamma_\mu \gamma_5 \vec{\tau} \psi_N \cdot \partial^\mu \vec{\pi} \\ & - \frac{1}{4f_\pi^2} \bar{\psi}_N \gamma_\mu \vec{\tau} \psi_N \cdot \vec{\pi} \times \partial^\mu \vec{\pi} + \frac{\sigma_N}{f_\pi^2} \bar{\psi}_N \psi_N \vec{\pi}^2 + \dots \end{aligned} \quad (1.42)$$

Dans cette dernière expression, ψ_N représente le spineur de Dirac nucléonique et $\vec{\tau}$ correspond aux matrices de Pauli dans l'espace d'isospin.

- $\mathcal{L}_{NN}$ décrit l'interaction nucléon-nucléon de courte portée. La symétrie chirale ne peut contraindre ce terme. L'interaction nucléon-nucléon de courte portée est introduite sous forme de termes de contact faisant intervenir les spineurs nucléoniques et leurs dérivées. Ces termes sont caractérisés par des LEC à ajuster aux données relatives à la diffusion nucléon-nucléon.

La χ EFT fournit donc l'image de l'interaction nucléon-nucléon dans l'espace libre comme échange de pions. La partie de courte portée est paramétrisée par un couplage ponctuel. La hiérarchie des contributions au potentiel nucléon-nucléon dans l'espace libre est présentée dans la figure 1.7. Elle permet en outre l'introduction de force à trois corps, quatre corps, ... de façon cohérente.

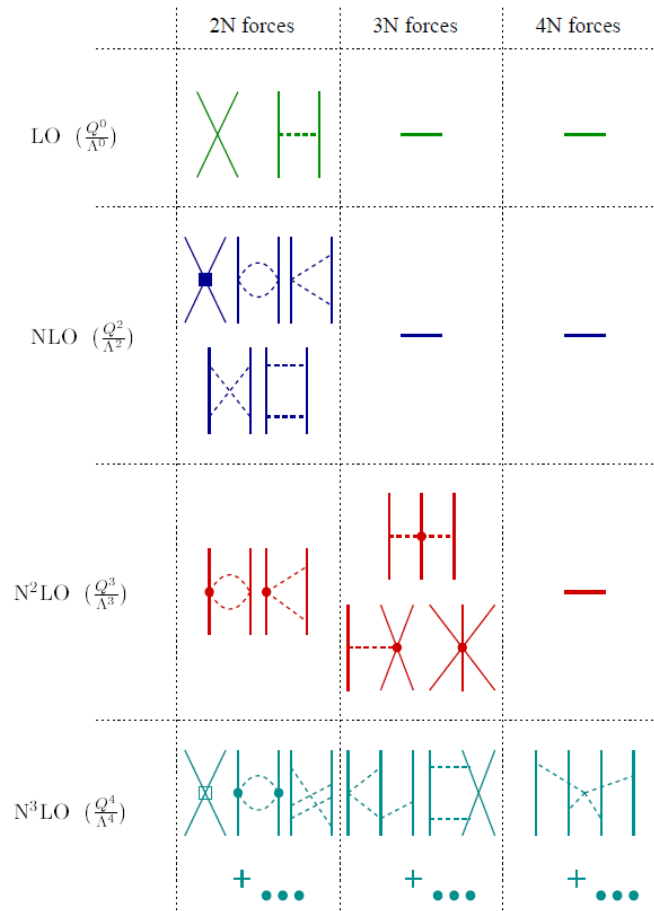


FIG. 1.7 – Hiérarchie des contributions à la force nucléaire nue issues de la χ EFT. Les lignes continues (respectivement en pointillé) représentent le propagateur nucléonique (respectivement pionique). Image tirée de [Meio5]

Le Lagrangien de la χ EFT, tronqué à un ordre donné, a été utilisé pour décrire la matière nucléaire [Vre04]. Il permet de connecter, du moins qualitativement, certaines propriétés nucléaires à QCD. Nous pouvons les résumer comme suivant :

- Le vide non perturbatif de QCD présente des changements qualitatifs lorsqu'il est exposé à des variations des conditions thermodynamiques, comme la température ou la densité baryonique. Ainsi, l'émergence des potentiels relativistes scalaire de Lorentz et 4-vecteur caractérisant l'état fondamental de la matière nucléaire est liée aux changements du condensat de quarks et de la densité de quarks en présence de matière baryonique. En effet, les règles de somme de QCD à densité finie permettent de relier les *self-energies* scalaire et 4-vecteur à l'ordre dominant (LO) au condensat et à la densité de quarks :

$$\Sigma_S^{(0)} \propto - [\langle \bar{\psi}_q \psi_q \rangle_\rho - \langle \bar{\psi}_q \psi_q \rangle_0] \quad (1.43)$$

$$\Sigma_V^{(0)} \propto \langle \psi_q^\dagger \psi_q \rangle_\rho \quad (1.44)$$

où $\langle \bar{\psi}_q \psi_q \rangle_\rho$ (respectivement $\langle \psi_q^\dagger \psi_q \rangle_\rho$) désigne la valeur du condensat (respectivement de la densité) de quarks à la densité baryonique ($\rho = \langle \psi_N^\dagger \psi_N \rangle$) et $\langle \bar{\psi}_q \psi_q \rangle_0$ la valeur du condensat de quarks sans présence de matière baryonique.

- La saturation de la matière nucléaire est engendrée par la combinaison entre l'échange d'un pion, l'échange itérée d'un pion (*i.e* échange de plusieurs pions non corrélés), l'échange de deux pions prenant compte du blocage de Pauli des états nucléoniques intermédiaires et de la dynamique de courte portée encodée dans un *cut-off* en moments.

La mise en œuvre de calculs reposant sur le Lagrangien de la χ EFT à une précision donnée (comprendre, tronqué à un ordre donné) est déjà lourde dans la matière nucléaire. La figure 1.8 présente l'équation d'état de la matière nucléaire symétrique [Vre04]. Le modèle chiral conduit à des prédictions aussi bonnes que les modèles de champ moyen phénoménologiques les plus sophistiqués. Malheureusement, son utilisation pour la description des noyaux finis n'est pas envisageable. Une première simplification consiste à paramétriser les échanges de plusieurs pions corrélés en terme d'échange d'un unique méson. On parle d'approximation OBE pour *one boson exchange*.

1.2.4 Le potentiel nucléon-nucléon dans l'approximation OBE

L'approximation OBE peut se représenter schématiquement comme sur la figure 1.9. En plus du pion, elle introduit ainsi les mésons non étranges σ , δ , η , ω et ρ . Ces derniers paramétrisent différentes portées de l'interaction nucléon-nucléon dans l'espace libre comme l'indique la figure

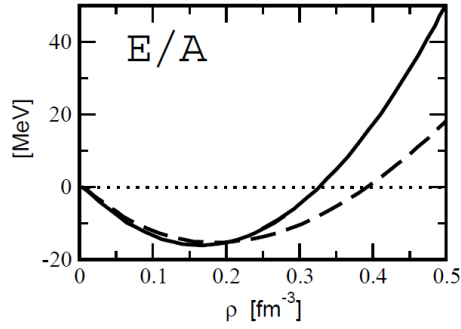


FIG. 1.8 – Energie par particule de la matière nucléaire symétrique en fonction de la densité nucléonique, déterminée à partir de l'échange d'un et de deux pions. La prise en compte des contributions de la résonance $\Delta(1232)$ au niveau de l'échange de deux pions (courbe solide) améliore sensiblement les résultats qui les négligent (courbe en pointillé).

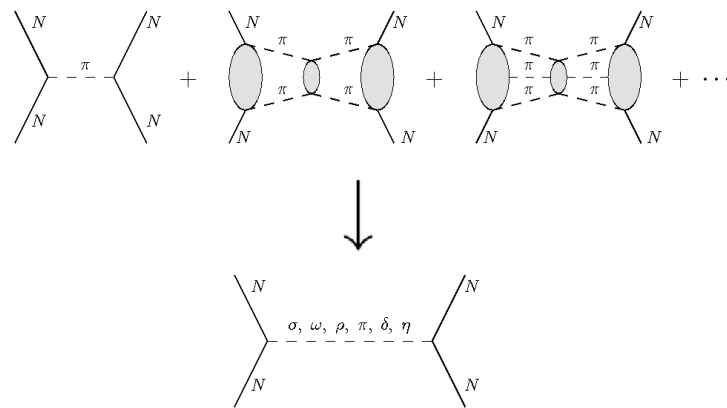


FIG. 1.9 – L'échange de plusieurs pions corrélés est décrit en terme d'échange d'un méson.

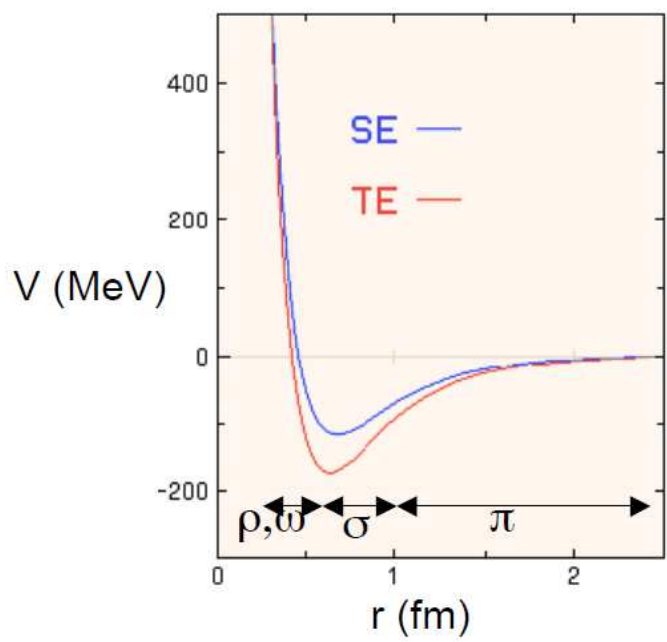


FIG. 1.10 – Potentiel nucléon-nucléon nu dans les canaux $S=1, T=0$ (en bleu) et $S=0, T=1$ (en rouge) avec région d'application des mésons.

Le rôle des mésons intervenant dans le cadre de l'approximation OBE est présenté dans le tableau 1.1.

Couplage	Méson (Amplitude du couplage)		Caractéristiques des forces			
	$T = 0$ $[\vec{1}]$	$T = 1$ $[\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2]$	Central $[1]$	Spin-Spin $[\sigma_1 \cdot \sigma_2]$	Tenseur $[S_{12}]$	Spin-Orbite $[L \cdot S]$
ps	η (faible)	π (fort)	-	Faible, constructif avec v, t	Fort	-
s	σ (fort)	δ (faible)	Fort, attractif	-	-	constructif avec v
v	ω (fort)	ρ (faible)	Fort, répulsif	Faible, constructif avec ps	Opposé à ps	Fort, constructif avec s
t	ω (faible)	ρ (fort)	-	Faible, constructif avec ps	Opposé à ps	-

TAB. 1.1 – Tableau des mésons intervenant dans le cadre de l'approximation OBE. Les couplages méson-nucléon ps , s , v et t désignent respectivement les couplages de type pseudo-scalaire, scalaire, vecteur et tenseur.

Dans la suite, nous explicitons essentiellement le rôle des mésons π , σ , ω et ρ , dans la mesure où les contributions des mésons δ et η sont faibles.

1.2.4.1 Interaction nucléon-nucléon à longue portée

Cette contribution provient de l'échange d'un pion. Le potentiel nucléon-nucléon généré par l'échange d'un pion s'écrit, dans la limite non

relativiste [Mat91] :

$$V_{OPEP}(r) = \frac{1}{4\pi} \frac{g_\pi^2}{4M^2} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \frac{m_\pi}{3} [\sigma_1 \cdot \sigma_2 Y_0(m_\pi r) + S_{12}(\mathbf{r}) Y_2(m_\pi r)] \quad (1.45)$$

avec

$$Y_0(m_\pi r) = \frac{e^{-m_\pi r}}{m_\pi r} - \frac{4\pi}{m_\pi^3} \delta(\mathbf{r}) \quad (1.46)$$

$$Y_2(m_\pi r) = \left(1 + \frac{3}{m_\pi r} + \frac{3}{(m_\pi r)^2} \right) \frac{e^{-m_\pi r}}{m_\pi r} \quad (1.47)$$

$$S_{12}(\mathbf{r}) = 3\sigma_1 \cdot \mathbf{r} \sigma_2 \cdot \mathbf{r} - \sigma_1 \cdot \sigma_2 \quad (1.48)$$

1.2.4.2 Interaction nucléon-nucléon à moyenne portée

La contribution à moyenne portée est gouvernée par l'échange de deux pions. Elle est représentée schématiquement dans la figure 1.11. Des

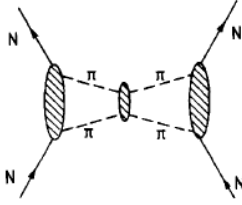


FIG. 1.11 – Contribution générale de l'échange de deux pions au potentiel nucléon-nucléon [Mat91].

exemples de contributions sont présentés dans la figure 1.12. Ces derniers font intervenir la résonance $\Delta(J = \frac{3}{2}, T = \frac{3}{2})$ de masse 1232 Mev, état excité du nucléon $N(J = \frac{1}{2}, T = \frac{1}{2})$.

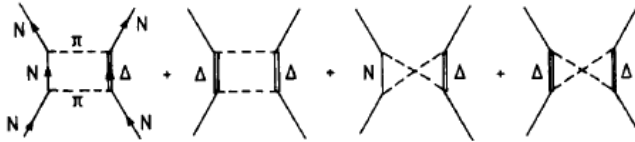


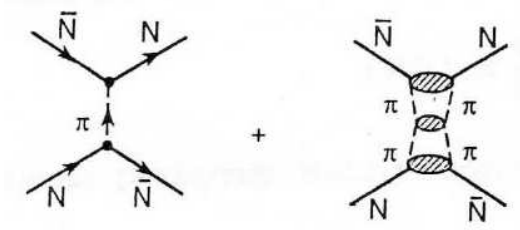
FIG. 1.12 – Contribution typique de l'échange de deux pions corrélés à l'interaction nucléon-nucléon [Mat91].

Une façon possible de représenter ces processus en terme d'échange d'uniques mésons plus lourds fait appel aux relations de dispersion [Mat91]. Pour ce faire, au lieu de la réaction dans le canal s 1.11, la réaction croisée dans le canal t 1.13 est considérée, s et t formant avec u les variables de Mandelstam. Ces quantités invariantes de Lorentz sont reliées aux 4-impulsions p_1 et p_2 (respectivement p_3 et p_4) des deux nucléons dans l'état initial (respectivement final) de la diffusion 1.13 :

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \quad (1.49)$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 \quad (1.50)$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2 \quad (1.51)$$

FIG. 1.13 – Représentation de l'échange d'un pion et de deux pions dans le canal t

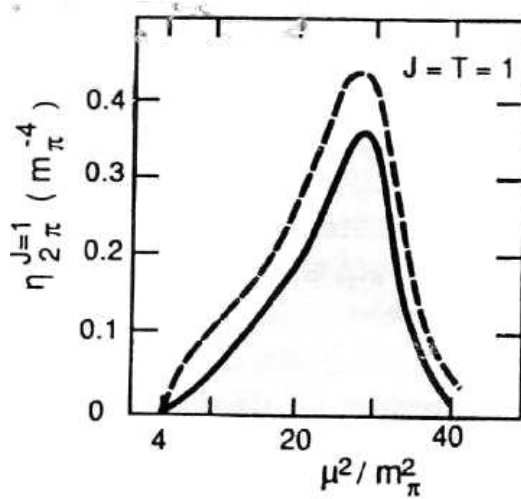
L'amplitude $\mathcal{M}(s, t)$ de la réaction dans le canal t peut alors se décomposer comme :

$$\mathcal{M}(s, t) = \frac{g_\pi^2}{m_\pi^2 - t} + \frac{1}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} d\mu^2 \frac{\eta_{2\pi}(s, \mu^2)}{\mu^2 - t} + \dots \quad (1.52)$$

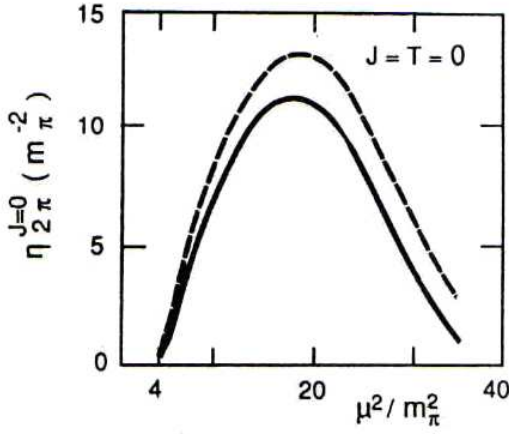
où les facteurs de spin et d'isospin sont omis par soucis de simplicité. A basse énergie et dans la limite statique, le potentiel nucléon-nucléon qui en résulte prend la forme :

$$V(r) = \frac{e^{-m_\pi r}}{4\pi r} + \frac{1}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} d\mu^2 \eta_{2\pi}(s_0, \mu^2) \frac{e^{-\mu r}}{4\pi r} + \dots \quad (1.53)$$

La fonction spectrale $\eta_{2\pi}$ représente la distribution de masse de l'état intermédiaire à deux pions. Les principales contributions proviennent des secteurs vecteur-isovecteur $J = T = 1$ et scalaire-isoscalaire $J = T = 0$. Les fonctions spectrales correspondantes ($\eta_{2\pi}^{J=1}$ et $\eta_{2\pi}^{J=0}$ respectivement) sont représentées dans les figures 1.14 et 1.15.

FIG. 1.14 – Fonction spectrale dans le canal $J = T = 1$ [Mat91]

Dans la figure 1.14 le pic coïncide avec la résonance ρ . La fonction spectrale s'annule plus lentement pour les μ^2 inférieurs à μ_ρ^2 , conduisant à une contribution significative au potentiel nucléon-nucléon. La fonction spectrale dans le canal scalaire-isoscalaire 1.15 ne présente pas de pic bien marqué, reflétant l'absence d'une résonance bien définie dans ce canal et dans cet intervalle de masse.

FIG. 1.15 – Fonction spectrale dans le canal $J = T = 0$ [Mat91]

Pour simplifier les calculs numériques, une simplification possible consiste à remplacer la fonction spectrale complète de chaque canal par une fonction delta centrée sur une masse au carrée fixe μ_0^2 :

$$\eta(s, \mu^2) = \pi g^2 \delta(\mu^2 - \mu_0^2(s)) \quad (1.54)$$

En conséquence, dans chaque canal, en omettant les indices de spin et d'isospin, les contributions de l'échange de deux pions au potentiel nucléon-nucléon prennent la forme d'un potentiel de Yukawa :

$$V_{2\pi}(r) \propto \frac{g^2}{4\pi} \frac{e^{-\mu_0 r}}{r} \quad (1.55)$$

Il s'agit de l'approximation OBE. La constante de couplage g et le paramètre de masse μ_0 sont ajustés aux données afin de reproduire au mieux les déphasages du potentiel nucléon-nucléon. Dans le cas du canal vecteur-isovecteur, on s'attend à ce que le paramètre de masse soit inférieur à celui correspondant au maximum de la fonction spectrale. Les contributions importantes à deux pions aux petits μ^2 sont ainsi implicitement pris en compte.

L'approximation OBE, qui se justifie lorsqu'une résonance existe, est tout de même employée dans le canal scalaire-isoscalaire. La contribution de l'échange de deux pions dans ce canal est ainsi simulée par l'échange du méson fictif σ . Précisons enfin que l'échange de deux pions donne une contribution positive à l'interaction nucléon-nucléon.

1.2.4.3 Interaction nucléon-nucléon à courte portée

Contribuent à ce secteur les échanges de plus de deux pions (figure 1.16). L'échange de trois pions est déjà complexe à calculer en terme de fonction spectrale. La contribution la plus importante, correspondant au canal vecteur-isoscalaire $J = 1, T = 0$, peut être représentée en première approximation par l'échange du méson ω . Cette dernière est répulsive.

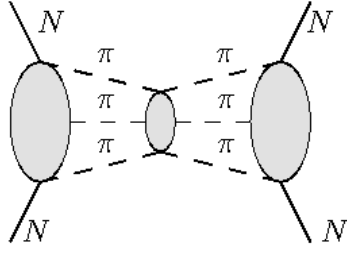


FIG. 1.16 – Contribution générale de l'échange à trois pions au potentiel nucléon-nucléon.

A très courtes distances, un nombre plus grand de mésons (de masse de plus en plus importante d'ordre $\frac{1}{r}$) devrait en principe être introduit, rendant vite le problème intraitable. En pratique, on conserve la structure du potentiel nucléon-nucléon en terme d'échanges des mésons π , σ , ρ , ω jusqu'à la distance relative entre les nucléons $r = 0 fm$. Les potentiels de Yukawa correspondants sont régularisés à l'aide de facteurs de forme excluant les contributions aux hautes impulsions. Les *cut-offs* en impulsion prennent typiquement des valeurs comprises entre 1.5 GeV/c et 2 GeV/c. Ces *cut-offs* trouvent une justification physique dans le fait qu'ils éliminent les contributions associées à la sous-structure des hadrons.

1.2.4.4 Lagrangien dans l'approximation OBE

L'approximation OBE permet de simplifier grandement les calculs numériques. Un exemple de potentiel reposant sur cette approximation est le potentiel de Bonn [Mac89]. Paramétriser l'interaction nucléon-nucléon dans le cadre de l'approximation OBE conduit à la densité lagrangienne suivante, décrivant l'interaction des nucléons dans l'espace libre :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{OBE} = & \bar{\psi} \left[i\gamma^\mu \partial_\mu - M - \frac{f_\pi}{m_\pi} \gamma_5 \gamma_\mu \partial^\mu \vec{\pi} \cdot \vec{\tau} - g_\sigma \sigma \right. \\
 & - g_\omega \gamma_\mu \omega^\mu - g_\rho \gamma_\mu \vec{\rho}^\mu \cdot \vec{\tau} - \frac{f_\rho}{4M} \sigma^{\mu\nu} \vec{\mathcal{R}}_{\mu\nu} \cdot \vec{\tau} - e \gamma_\mu A^\mu \left. \right] \psi \\
 & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) \\
 & - \frac{1}{2} (\Omega_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu} - m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu) - \frac{1}{2} (\vec{\mathcal{R}}_{\mu\nu} \vec{\mathcal{R}}^{\mu\nu} - m_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \vec{\rho}^\mu) \\
 & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\pi} \partial^\mu \vec{\pi} - m_\pi^2 \vec{\pi}^2) - \frac{1}{2} (\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu})
 \end{aligned} \tag{1.56}$$

où

$$\begin{aligned}
 \Omega^{\mu\nu} &= \partial^\mu \omega^\nu - \partial^\nu \omega^\mu \\
 \vec{\mathcal{R}}^{\mu\nu} &= \partial^\mu \vec{\rho}^\nu - \partial^\nu \vec{\rho}^\mu \\
 \mathcal{F}^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu
 \end{aligned} \tag{1.57}$$

La justification de chaque terme constituant la densité lagrangienne n'est pas précisée ici dans la mesure où le chapitre 2 insistera sur le détail de la construction d'une densité similaire, à la base du travail présenté dans ce mémoire de thèse.

Les constantes de couplage sont ajustées aux données de telle sorte que le potentiel déduit de la densité lagrangienne 1.56 reproduise les déphasages relatifs à la diffusion nucléon-nucléon. Les simplifications apportées par l'approximation OBE ont pour contrepartie la perte de la hiérarchie des contributions au potentiel nucléon-nucléon accordée par la χ EFT, ainsi qu'une dégradation de la connexion à QCD.

Avec pour point de départ la densité lagrangienne 1.56, la contribution d'ordre le plus bas au potentiel nucléon-nucléon dans le référentiel du centre de masse est donnée par l'amplitude $\mathcal{A}$ correspondant au diagramme de Feynman 1.17 :

$$-i \mathcal{A}_{\phi_m}(q', q) = \bar{u}_1(q') \Gamma_{\phi_m}(1) u_1(q) D_{\phi_m}(q' - q) \bar{u}_2(-q') \Gamma_{\phi_m}(2) u_2(-q) \quad (1.58)$$

où Γ_{ϕ_m} représente le couplage pseudo-scalaire, scalaire ou vectoriel selon

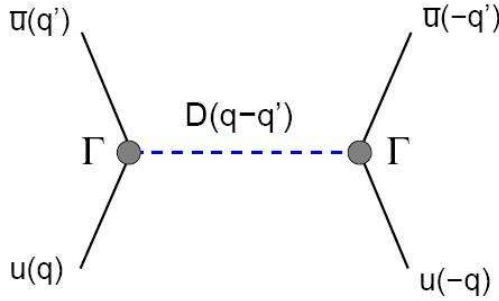


FIG. 1.17 – Contribution à l'ordre le plus bas au potentiel nucléon-nucléon dans le référentiel du centre de masse. Le processus représenté correspond à l'échange d'un méson caractérisé par son propagateur D . Le spineur nucléonique est couplé au méson via le vertex Γ .

le méson ϕ_m échangé. Le potentiel nucléon-nucléon est alors obtenu à partir de la somme des amplitudes OBE 1.58 régularisées :

$$V^{OBE}(q', q) = \sum_{\phi_m} \mathcal{A}_{\phi_m}(q', q) \mathcal{F}_{\phi_m}^2(q', q) \quad (1.59)$$

où $\mathcal{F}_{\phi_m}^2(q', q) = \frac{\Lambda_{\phi_m}^2 - m_{\phi_m}^2}{\Lambda_{\phi_m}^2 + (q' - q)^2}$ correspond au facteur de forme associé au méson ϕ_m introduisant un nouveau paramètre phénoménologique : le *cut-off* Λ_{ϕ_m} .

1.2.5 Approche de type Dirac-Brueckner

Ayant simplifié le cadre théorique à l'aide de l'approximation OBE, il s'agit à présent de décrire les propriétés des systèmes nucléaires à partir de la densité lagrangienne 1.56. Cette description s'appuyant sur l'interaction nucléon-nucléon dans l'espace libre, on parle d'approche *ab initio*, dont la théorie Dirac-Brueckner-Hartree-Fock (DBHF) [Fuco4] est un exemple.

Pour approximer les observables de l'état fondamental des systèmes nucléaires, une technique puissante consiste en un développement perturbatif dans lequel on opère des resommations adéquates. Entre autres,

la partie fortement répulsive du potentiel nucléon-nucléon nu à courte distance (cœur dur) nécessite la prise en compte des corrélations nucléoniques à deux corps. La matrice T (équivalent relativiste de la matrice G de Brueckner, la lettre G étant déjà assignée au propagateur nucléonique) permet la prise en compte de telles corrélations à deux corps. Elle représente une interaction effective à deux corps dans le milieu. On la détermine par une resommation des diagrammes dits en échelle (*cf.* figure 1.19), conduisant à une équation auto-cohérente (équation de Thompson représentant une approximation de l'équation relativiste de Bethe-Salpeter) [Fuco4] :

$$T = V + i \int V Q G G T \quad (1.60)$$

Dans cette dernière équation, T fait référence à la matrice de Brueckner. V correspond au potentiel nucléon-nucléon nu 1.59. Les états nucléoniques intermédiaires (ils ne sont pas sur couche de masse) sont décrits par l'intermédiaire d'un propagateur à deux particules iGG où G représente la fonction de Green exacte du nucléon. L'opérateur de Pauli Q tient compte de l'influence du milieu à travers le principe de Pauli en projetant les états de diffusion intermédiaire hors de la mer de Fermi.

Le contenu physique de T peut être mis en évidence à travers la définition de la fonction d'onde nucléonique corrélée Ψ :

$$T\Phi \equiv V\Psi \quad (1.61)$$

où Φ correspond à la fonction nucléonique non corrélée. La somme des échelles de Brueckner construit dans Ψ les corrélations à courte distance induites par le cœur dur. La différence de comportement entre Φ et Ψ est schématisée dans la figure 1.18. Si le potentiel nucléon-nucléon nu V présente un cœur dur, ses éléments diagonaux intervenant dans l'approximation Hartree-Fock de l'énergie sont fortement répulsifs et ne conduisent jamais à un état lié. Au contraire, les mêmes éléments de matrice correspondant à l'interaction resommée T sont attractifs et permettent l'obtention d'un état lié.

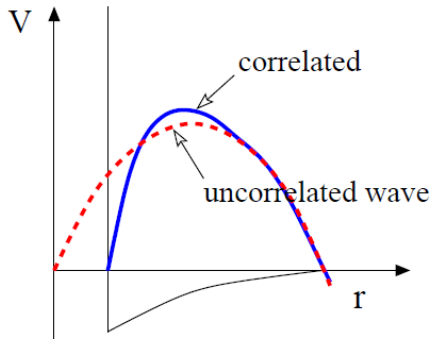


FIG. 1.18 – Effets des corrélations à deux corps sur la fonction d'onde à deux nucléons en fonction de leur distance relative r . Le potentiel nucléon-nucléon nu est représenté de façon schématique. Image tirée de [Fuco4].

La fonction de Green exacte G du nucléon vérifie l'équation de Dyson

schématisée dans la figure 1.19 :

$$G = G_0 + G_0 \Sigma G \quad (1.62)$$

G_0 représente la fonction de Green du nucléon libre (sans interactions). L'influence des nucléons environnants est encodée dans la *self-energy* nucléonique Σ . Dans la théorie Brueckner-Hartree-Fock, une certaine classe de diagramme de *self-energy* est resommée de façon à ce que Σ corresponde aux diagrammes de *self-energy* de Hartree et de Fock dans lesquels le propagateur libre G_0 est remplacé par le propagateur exact G (cf. figure 1.19) :

$$\Sigma = -i \int_F (Tr [GT] - GT) \quad (1.63)$$

L'ensemble des équations 1.60, 1.62 et 1.63 constitue un problème doublement itératif.

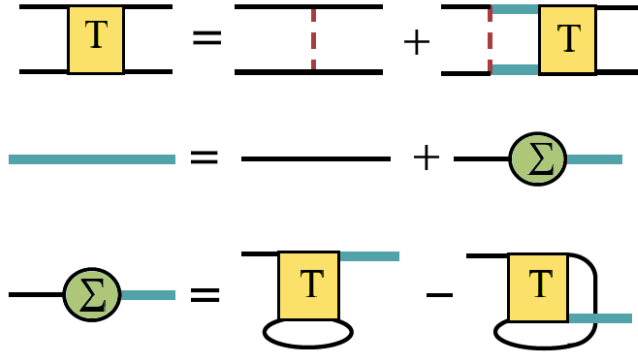


FIG. 1.19 – Schéma de résolution des équations de la théorie DBHF : Les interactions dans le milieu sont décrites à partir de l'équation de Bethe-Salpeter (en haut) faisant intervenir l'interaction nue (en rouge) et le propagateur nucléonique exact (en bleu). Ce dernier satisfait à l'équation de Dyson (au milieu) dans laquelle apparaît la *self-energy* nucléonique (en vert). Enfin la *self-energy* est déterminé dans l'approximation Brueckner-Hartree-Fock (en bas). Cet ensemble d'équation doit être résolu de façon auto-cohérente.

Un exemple d'application de la théorie DBHF est présenté dans la figure 1.20. La double auto-cohérence des équations de la théorie DBHF mène à des calculs numériques lourds, ne pouvant pas être menés dans les noyaux finis. Il nous faut encore aller plus loin dans nos approximations.

1.2.6 Vers une densité lagrangienne phénoménologique

1.2.6.1 Définition d'une énergie fonctionnelle de la densité dans une approche *ab initio*

Afin d'alléger le calcul, nous souhaitons remplacer la matrice de Brueckner par une interaction nucléonique dans le milieu purement phénoménologique. Nous aimerions également préserver la simplicité caractérisant la théorie Hartree-Fock telle qu'elle apparaît dans les problématiques à N corps comme la physique du solide ou encore la chimie. Dans ce paragraphe, reprenant l'approche adoptée par Negele dans [

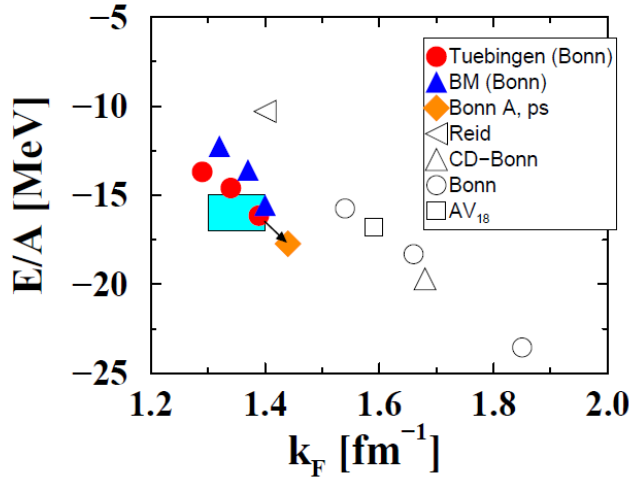


FIG. 1.20 – Point de saturation de la matière nucléaire symétrique prédit par les modèles BHF relativistes (symboles pleins) et non-relativistes (symboles vides). Image tirée de [Fuco4].

Neg82], nous montrons qu'un développement diagrammatique plus général que celui intervenant dans la théorie DBHF peut être approximé par un principe variationnel⁹ appliqué à une fonctionnelle de la densité.

Conscient de la nécessité de prendre en compte les corrélations nucléoniques à deux corps, la série perturbative associée au calcul d'une observable donnée est réécrite en terme de l'interaction T (resommant les diagrammes en échelles) en sus et place de l'interaction nue V . La resommation des échelles suivante concerne la diffusion de trois nucléons comme indiqué dans la figure 1.21. Elle conduit à l'équation de Fadeev à trois corps. De manière générale, la resommation des échelles associée à la diffusion de N nucléons conduit aux équations de Fadeev à N corps. Dans la matière nucléaire, le développement particule-trou converge au niveau des corrélations à trois corps [S⁺98].

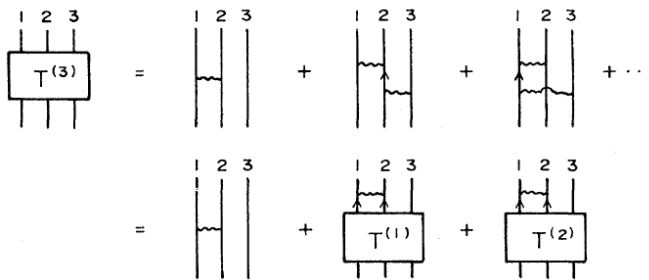


FIG. 1.21 – Resommation des diagrammes en échelle à trois corps définissant l'amplitude de Fadeev $T_3 = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)}$. Le ligne ondulée représente l'interaction à deux corps dans le milieu T .

Comment définir au mieux le potentiel à un corps intervenant dans l'approximation du champ moyen que nous voulons mettre en œuvre ?

⁹Ce principe variationnel ne repose pas sur le principe variationnel de Ritz comme c'est le cas dans la théorie Hartree-Fock reposant sur une interaction nue.

Si H désigne le Hamiltonien obtenu comme transformée de Legendre du Lagrangien relativiste 1.56, une façon de procéder consiste à ajouter et retrancher le potentiel à un corps U :

$$H = H_0 + H_1 \quad (1.64)$$

avec

$$H_0 = K + U \quad (1.65)$$

$$H_1 = V - U \quad (1.66)$$

K et V désignent respectivement les contributions cinétique et potentielle (provenant de l'interaction nucléon-nucléon nue) de H . La théorie des perturbations est ensuite développée en terme de $V - U$, où des resommations adéquates doivent être entreprises afin de faire apparaître T et, idéalement, T_3 . Le potentiel moyen U est alors choisi de façon à annuler identiquement le maximum de corrections dominantes apparaissant dans la série perturbative associée à une observable à un corps.

Par exemple, considérons un opérateur Q à un corps dont la valeur moyenne $\langle Q \rangle$ dans l'état fondamental du système nucléaire nous intéresse. Un développement perturbatif en terme de diagrammes de Goldstone s'écrit génériquement comme dans la figure 1.22 [Neg82]. Le dia-

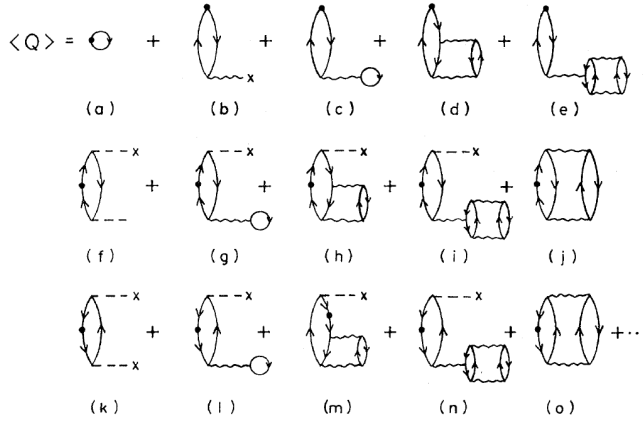


FIG. 1.22 – Premières contributions à $\langle Q \rangle$ dans un développement perturbatif de Goldstone. L'opérateur à un corps Q est représenté par un point. Le potentiel ($-U$) est symbolisé par une croix. La série perturbative est partiellement resommée pour faire intervenir l'interaction dans le milieu T (ligne ondulée) au lieu de l'interaction nue V . Image tirée de [Neg82].

gramme de Goldstone (a) représente la contribution principale de $\langle Q \rangle$. Le diagramme (b) correspond à l'action du potentiel ($-U$). Les diagrammes (c) à (e) présentent plusieurs types d'excitations une particule-un trou. Si les éléments de matrices de type particule-trou du potentiel moyen U sont choisis comme indiqué à la figure 1.23, alors le diagramme (b) annule identiquement les contributions correspondant aux diagrammes (c) à (e). De même, les diagrammes d'ordre supérieur (f) à (i) et (k) à (n) sont annulés par cette définition de U . Subsistent les diagrammes du type (j) ou (o). Les diagrammes de ce type conduisent cependant à une petite

contribution en comparaison de celle du diagramme (a). Ils sont plus petits d'un ordre de grandeur κ , où κ correspond à la probabilité d'excitation d'une paire particule-trou au delà de la mer de Fermi [Neg82]. Pour le potentiel de Reid à la densité de la matière nucléaire, $\kappa \sim 15\%$. D'autre part, la contribution des diagrammes (j) et (o) est d'autant plus réduite qu'elles sont de signe opposé.

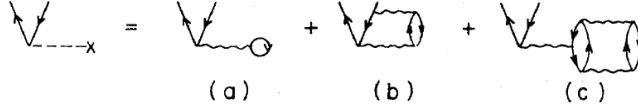


FIG. 1.23 – Définition diagrammatique des éléments de matrice de type particule-trou du potentiel moyen U . Image tirée de [Neg82]

Examinons les différents termes apparaissant dans 1.23. Le premier diagramme correspond à la définition Hartree-Fock du potentiel (notons qu'elle fait intervenir l'interaction dans le milieu T). Les deux suivants sont plus faibles que le premier d'un facteur κ . Le deuxième terme a été interprété Kümmel *et al.* comme le terme dominant dans la contribution à trois lignes de trou du potentiel particule-trou [K⁺78]. Le troisième diagramme correspond au terme de réarrangement. Sa contribution vaut grossièrement celle du premier diagramme multipliée par $(-\kappa)$. Il peut s'interpréter comme une correction de probabilité d'occupation au premier diagramme. En effet, le premier diagramme représente le champ moyen généré par l'interaction d'états normalement occupés. Cependant, ces états peuvent ne plus être occupés avec une probabilité κ . Cette partie de la contribution du premier diagramme devrait donc être omise, ce qui est précisément le rôle du troisième diagramme. Negele fut ainsi l'un des premiers à mettre en évidence l'importance des termes dits de réarrangement dans les approches non-relativistes.

La définition diagrammatique de U 1.23 peut s'obtenir à partir d'un principe variationnel faisant intervenir l'expression approchée E de l'énergie du système nucléaire suivante [Neg82] :

$$E = \sum_{\nu} \langle \nu | K | \nu \rangle + \frac{1}{2} \sum_{\nu\nu'} \langle \nu\nu' | T(\varepsilon_{\nu} + \varepsilon_{\nu'}) | \nu\nu' - \nu'\nu \rangle \quad (1.67)$$

avec

$$\varepsilon_{\nu} = \langle \nu | K | \nu \rangle + \sum_{\nu'} \langle \nu\nu' | T(\varepsilon_{\nu} + \varepsilon_{\nu'}) | \nu\nu' - \nu'\nu \rangle \quad (1.68)$$

Ce principe variationnel n'est en aucun cas lié au principe variationnel de Ritz, mais correspond plutôt à une méthode de calcul aboutissant à la définition diagrammatique 1.23 du champ moyen. Les dépendances en l'opérateur de Pauli présent dans l'interaction dans le milieu T et en les énergies ε_{ν} peuvent être prises en compte approximativement par une dépendance en la densité nucléonique locale [Neg82].

Lenske a montré [Leno4] que les effets du milieu (approximés par une dépendance en densité au niveau de la matrice T) peuvent s'exprimer à

travers une susceptibilité χ_F reliant la matrice T et l'interaction nue V :

$$T = \chi_F V \quad (1.69)$$

Cette susceptibilité peut être combinée avec les constantes de couplage nue g_{ϕ_m} pour définir les fonctions de vertex effectives $g_{\phi_m}(\rho)$:

$$g_{\phi_m}(\rho) = \chi_F g_{\phi_m} = (1 - iV G G - V G G V G G + \dots) g_{\phi_m} \quad (1.70)$$

Cette dernière expression est à comprendre comme une sommation des corrections en échelle à la fonction de vertex (cf. figure 1.24)

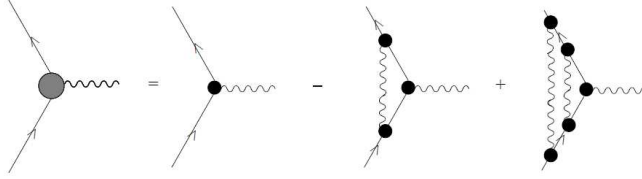


FIG. 1.24 – Structure diagrammatique de la fonction de vertex (cercle gris) méson-nucléon dans l'approximation des échelles de Brueckner. Les points noirs représentent les constantes de couplage nues. Image tirée de [Leno4]

1.2.6.2 Modèles phénoménologiques

Pour mener des calculs dans les noyaux finis, la relation explicite des constantes de couplage dans le milieu en fonction des constantes de couplage nues 1.70 est sacrifiée au profit de constantes de couplages dans le milieu phénoménologiques. Un ansatz motivé par plusieurs résultats de la théorie DBHF est utilisé pour la forme de leur dépendance en densité [T⁺99]. Cette dernière permet également de prendre en compte implicitement les contributions de l'interaction nucléonique à trois corps, à comprendre comme une renormalisation des effets liés à la structure interne des nucléons omise dans cette approche.

Toutes ces considérations mènent à la densité lagrangienne à la base de ce travail de thèse :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} \left[i\gamma^\mu \partial_\mu - M - \frac{f_\pi(\rho_b)}{m_\pi} \gamma_5 \gamma_\mu \partial^\mu \vec{\pi} \cdot \vec{\tau} - g_\sigma(\rho_b) \sigma \right. \\ & \left. - g_\omega(\rho_b) \gamma_\mu \omega^\mu - g_\rho(\rho_b) \gamma_\mu \vec{\rho} \cdot \vec{\tau}^\mu - e \gamma_\mu A^\mu \right] \psi \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) \\ & - \frac{1}{2} (\Omega_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu} - m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu) - \frac{1}{2} (\vec{\mathcal{R}}_{\mu\nu} \vec{\mathcal{R}}^{\mu\nu} - m_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \vec{\rho}^\mu) \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\pi} \partial^\mu \vec{\pi} - m_\pi^2 \vec{\pi}^2) - \frac{1}{2} (\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (1.71)$$

Cette densité lagrangienne phénoménologique décrit l'interaction des nucléons dans le milieu. L'Hamiltonien est déduit du Lagrangien par transformée de Legendre. L'énergie est ensuite obtenue dans le cadre de l'approximation Hartree-Fock. Sa minimisation conduit aux équations Hartree-Fock relativistes. Notons que cette minimisation n'est pas liée

au principe variationnel de Ritz. En effet, la densité lagrangienne est construite de telle façon à ce que la minimisation reproduise la définition diagrammatique du potentiel moyen discutée dans la section précédente (figure 1.23). Des corrélations bien au-delà de celles contenues dans les traditionnels termes d'Hartree et Fock sont donc prises en compte phénoménologiquement. L'avantage de ce *modus operandi* est de prendre en compte des corrélations complexes dans le formalisme simplifié Hartree-Fock. En contre partie, cette prise en compte est implicite, si bien que le détail de l'action d'une corrélation donnée sur les propriétés nucléaires n'est pas accessible.

La simplification opérée déconnecte le modèle de l'interaction nucléon-nucléon nue, dont le lien avec QCD est dégradé en raison de l'approximation OBE. En revanche, cette densité lagrangienne, conçue pour être employée dans le cadre du champ moyen auto-cohérent, rend possible une description efficace de l'état fondamental de l'ensemble des noyaux finis composant la carte de nucléides.

1.3 MOTIVATION DU TERME DE FOCK

La densité lagrangienne phénoménologique 1.71 est habituellement traitée dans l'approximation Hartree. Les termes de Fock ne sont pas négligés mais pris en compte de façon implicite à travers l'ajustement des paramètres libres du Lagrangien aux données. Différentes paramétrisations, comme DDME2, ont été dérivées par ajustement aux données. Elles permettent d'excellentes prédictions quant aux propriétés de l'état fondamental de l'ensemble des noyaux composant la carte des nucléides [V⁺05]. Dans ce cas, pourquoi donc prendre en compte explicitement les contributions de Fock dans les approches relativistes phénoménologiques ?

En effet, l'objet de ce travail de thèse consiste en la prise en compte explicite des termes d'échange dans le cadre de la théorie RHF. Les avantages du traitement explicite des termes d'échange sont présentés à travers les exemples de la masse effective, du spectre à particules indépendantes, de la RPA (*Random Phase Approximation* ou Approximation des Phases Aléatoires) et des modèles adoptant une interaction ponctuelle entre nucléons.

1.3.1 Masse effective

Dans les approches non-relativistes, la relation de dispersion

$$\frac{p^2}{2M} + V(p, e) = e \quad (1.72)$$

où M désigne la masse nucléonique et V le potentiel moyen, fonction de l'impulsion p et l'énergie à particules indépendantes e , conduit à la définition de la masse effective M^{eff} :

$$\frac{M^{eff}}{M} = 1 - \frac{dV(p(e), e)}{de} \quad (1.73)$$

Cette masse effective traduit le fait que le système nucléaire en interaction peut se représenter en terme d'un système de quasi-particules libres de masse M^{eff} évoluant dans un potentiel moyen V .

Dans les approches relativistes, la relation de dispersion dans le cas simplifié du modèle de Walecka correspond à l'équation 1.26. Nous rappelons son expression :

$$e_p^* = \sqrt{p^2 + M^{*2}} \quad (1.74)$$

ou encore

$$(e - \Sigma_0)^2 = p^2 + (M + \Sigma_S)^2 \quad (1.75)$$

La masse effective M_R^{eff} comprise comme l'extension relativiste de M^{eff} ne doit pas se confondre avec $M^* \equiv M + \Sigma_S$ également appelée masse effective. Pour les différencier dans ce paragraphe, nous appellerons M^* masse de Dirac, le terme "masse effective" étant alors dédié à M_R^{eff} .

La forme de Schrödinger équivalente de 1.75 est :

$$\frac{p^2}{2M} + V(p, e) - \frac{e^2}{2M} = e \quad (1.76)$$

où $V(p, e)$ peut s'exprimer en terme des *self-energies* Σ_S et Σ_0 . On en déduit la masse effective relativiste comme :

$$\frac{M_R^{eff}}{M} = 1 - \frac{d}{de} \left[V(p(e), e) - \frac{e^2}{2M} \right] \quad (1.77)$$

Une masse effective non-relativiste M_{NR}^{eff} peut se définir en négligeant le dernier terme de 1.77, conduisant à la relation :

$$M_{NR}^{eff} \equiv M_R^{eff} - e \quad (1.78)$$

On peut identifier deux sources de modification de la masse nue M dans les approches relativistes [J⁺89] :

- La non-localité du potentiel moyen, qui engendre la contribution appelée "k-masse".
- La dépendance en énergie du potentiel moyen donnant naissance à la contribution appelée "E-masse".

Le potentiel moyen relativiste est local dans l'approximation de Hartree. En revanche, la prise en compte explicite des termes d'échange dans l'approximation Hartree-Fock engendre un potentiel moyen relativiste non-local. Une différence de comportement des masses effectives dans l'approche Hartree relativiste (RH) et Hartree-Fock relativiste (RHF) est donc attendue. W. Long *et al.* ont étudié entre autres le comportement de M_{NR}^{eff} dans la matière nucléaire symétrique à partir de la paramétrisation PKO1 [L⁺06; vG09]¹⁰. L'évolution des masses effectives M_{NR}^{eff} protonique

¹⁰PKO1 est un jeu de paramètres caractérisant la densité lagrangienne phénoménologique 1.71 traitée dans le cadre de l'approximation RHF.

et neutronique, calculées à leur niveau de Fermi respectif, en fonction de $\beta = \frac{N-Z}{A}$ pour différentes valeurs de la densité baryonique ρ_b est présentée dans la figure 1.25. Pour les densités les plus basses, le calcul

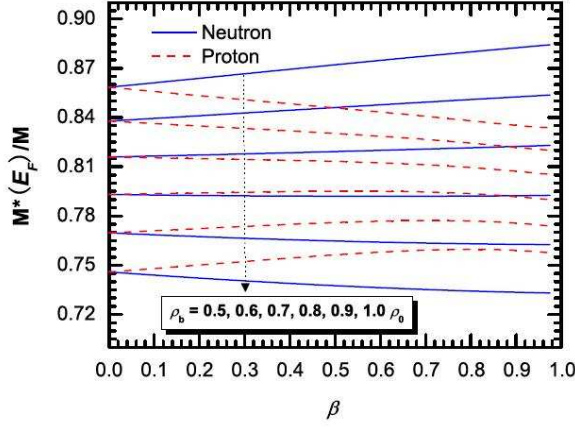


FIG. 1.25 – Masses effectives M_{NR}^{eff} calculées à partir de PKO1 en fonction de $\beta = \frac{N-Z}{A}$. Image tirée de [L⁺06]

RHF prédit que $M_{NR,n}^{eff} > M_{NR,p}^{eff}$. Cette tendance est inversée aux alentours de $\rho_b = 0.8\rho_0$. Ces résultats diffèrent des prédictions du modèle RH, qui conclut que $M_{NR,n}^{eff} < M_{NR,p}^{eff}$ quelque soit la densité baryonique ρ_b dans les systèmes riches en neutron. Les prédictions du modèle RHF s'accordent avec les résultats de la théorie DBHF à $\rho_b = \rho_0$: elle prédit que $M_n^{eff} > M_p^{eff}$ pour les systèmes riches en neutron [vD⁺05]. Notons que la relation $M_n^{eff} > M_p^{eff}$ est vérifiée à plus haute densité dans la théorie DBHF (à partir de $\rho_b = 0.17 fm^{-3}$) que dans le modèle RHF (en-dessous de $\rho_b = 0.8\rho_0$).

Les masses effectives issues des approches RHF et RH diffèrent également au niveau de leur dépendance en énergie : contrairement à la masse effective obtenue dans le modèle RHF, la masse effective prédite par le modèle RH est constante [L⁺06]. La forme de la dépendance en énergie de M_{NR}^{eff} dans l'approche RHF est présentée dans la figure 1.26. A basse énergie, $M_{NR,n}^{eff}(E) > M_{NR,p}^{eff}(E)$. La théorie DBHF prédit également $M_n^{eff}(E) > M_p^{eff}(E)$ mais à plus haute énergie ($E = 50 MeV$)

1.3.2 Structure en couche

La prise en compte explicite des termes d'échange permet d'introduire les contributions de type tenseur par l'intermédiaire des mésons π et ρ . Elles conduisent à une amélioration de la description de la structure en couches par rapport aux modèles RH [vG09]. Le plus gros effet provient de la contribution de type tenseur associée à l'échange du méson ρ . En effet, l'introduction des termes correspondants dans la densité lagrangienne 1.71 corrige les fermetures de couche artificielles à N ou $Z = 58, 92, \dots$ dont souffrent les approches relativistes (cf. figure 1.27). Elle

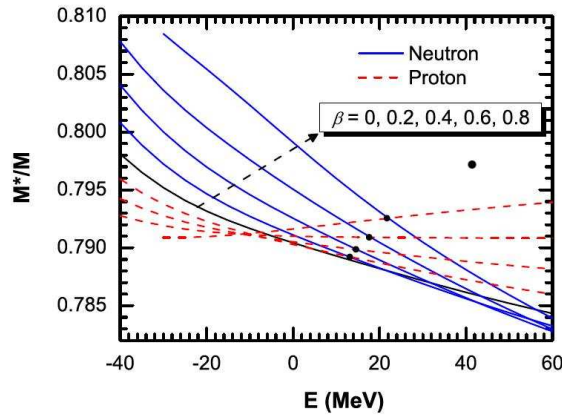


FIG. 1.26 – Dépendance en énergie des masses effectives M_{NR}^{eff} calculées à partir de PKO1 à $\rho_b = 0.8\rho_0$ en fonction de $\beta = \frac{N-Z}{A}$. Image tirée de [L⁺o6]

permet également une organisation des couches plus cohérente avec la symétrie pseudo-spin [L⁺o7].

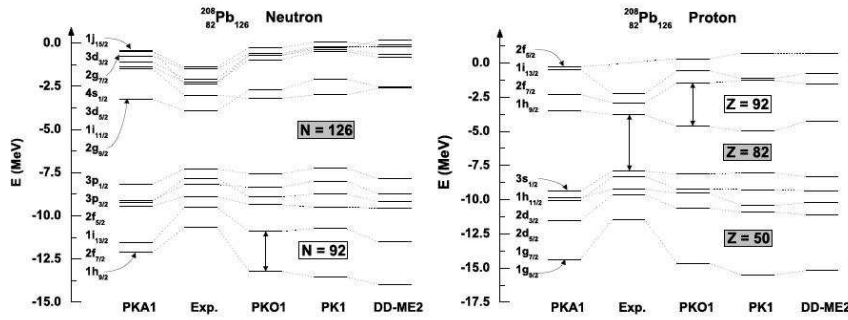


FIG. 1.27 – Spectre du noyau ^{208}Pb obtenu à partir des modèles RHF (PKO1 et PKA1) et RH (PK1 et DDME2). La fermeture de couche artificielle $N = Z = 92$ n'est plus présente dans PKA1 qui inclut un couplage nucléon- ρ tensoriel. Les données expérimentales sont tirées de [Oro96]. Image tirée de [vGo9].

1.3.3 RPA et excitations d'échange de charge

Les modèles de champ moyen auto-cohérent offrent une base pour traiter les excitations de petites amplitudes dans le cadre de la théorie de la réponse linéaire. Dans l'approximation Hartree-Fock, cette dernière prend la forme de la RPA. En particulier, les excitations de type échange de charge jouissent d'une importance notable en ce qu'elles interviennent dans un large spectre de problématiques physiques, allant de questions inhérentes à la structure nucléaire à la description des étoiles à neutron et des supernovæ [vGo9].

Un des avantages accordé par le traitement explicite des termes d'échange est la construction d'un modèle RHF+RPA totalement auto-cohérent, contrairement au modèle RH+RPA [L⁺o8a]. En effet, le pion, intervenant dans la description relativiste des résonances spin-isospin, est absent au niveau de l'état fondamental traité dans l'approximation

de Hartree. De plus, pour annuler l'interaction de contact générée par le couplage pseudo-vecteur pion-nucléon, un contre-terme de portée nulle doit être introduit avec un facteur $g' = \frac{1}{3}$. Or, pour l'étude des résonances géantes de Gamow-Teller (GTR), de très bons accords existent entre l'expérience et les modèles RHF+RPA d'une part et RH+RPA d'autre part, à la différence près que le premier modèle ne nécessite pas un réajustement de ses paramètres alors que le second traite le coefficient g' comme un paramètre libre. L'approche RH+RPA reproduit ainsi les données expérimentales pour $g' \sim 0.6$ [M⁺04a; P⁺04].

Le rôle des différentes contributions à l'interaction particule-trou résiduelle peut se comprendre à partir de l'analyse de la figure 1.28 [vG09]. Ainsi, d'après l'approche RHF+RPA, l'interaction particule-trou résiduelle

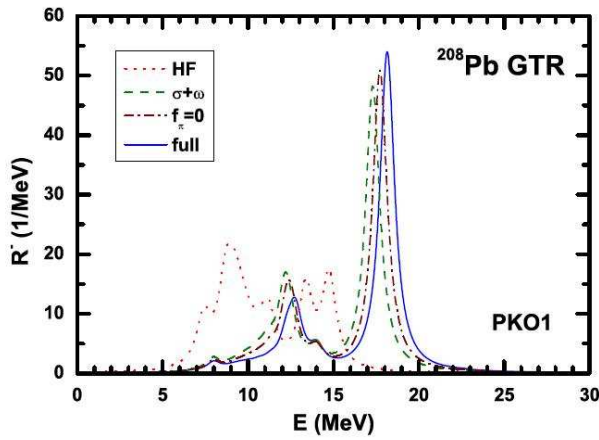


FIG. 1.28 – Distribution de force de la GTR dans le noyau ^{208}Pb calculée à partir de l'approche RHF+RPA avec l'interaction PKO1 (ligne solide). Sont également présentés la distribution non perturbée HF (ligne en pointillés), le calcul contenant uniquement les contributions des mésons σ et ω à l'interaction particule-trou résiduelle (ligne en tirets) ainsi que le calcul sans pion ($f_\pi = 0$) dans l'interaction particule-trou résiduelle (ligne mixte). Image tirée de [L⁺08a].

générée par le pion ne représente qu'une contribution mineure à l'énergie de la GTR. Ceci tranche avec les prédictions du modèle RH+RPA, pour qui l'interaction particule-trou résiduelle provenant du pion et de son contre-terme ajusté représente la contribution principale au mode Gamow-Teller [P⁺04]. D'autre part, dans le cadre du modèle RHF+RPA, les termes d'échange associés à l'interaction particule-trou résiduelle générée par les mésons isoscalaires σ et ω sont indispensables afin de produire le pic de la distribution de la GTR.

La RPA dans le canal échange de charge construite sur le modèle RHF constitue donc un outil de choix pour l'étude des transitions de type spin-isospin grâce au maintien d'une auto-cohérence totale entre le champ moyen et l'interaction particule-trou résiduelle. Ses prédictions sont en très bon accord avec les mesures expérimentales [vG09].

1.3.4 Modèles relativistes reposant sur des couplages ponctuels

Certains modèles relativistes ont été développés en remplaçant les couplages effectifs nucléon-méson par des couplages ponctuels effectifs [M⁺04b]. La partie interaction de la densité lagrangienne s'écrit par exemple :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{PC}^{Int} = & -\frac{1}{2}\alpha_S(\bar{\psi}\psi)^2 - \frac{1}{2}\alpha_V(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) \\ & -\frac{1}{2}\alpha_{TS}(\bar{\psi}\vec{\tau}\psi)(\bar{\psi}\vec{\tau}\psi) - \frac{1}{2}\alpha_{TV}(\bar{\psi}\gamma_\mu\vec{\tau}\psi)(\bar{\psi}\gamma^\mu\vec{\tau}\psi) \quad (1.79) \end{aligned}$$

La prise en compte implicite des termes d'échange dans le cadre de l'approximation RH conduit à une redéfinition des couplages α_i en couplages $\tilde{\alpha}_i$. Ces couplages sont reliés par transformation de Fierz.

L'interprétation physique des couplages RH $\tilde{\alpha}_i$ et RHF α_i est différente. Madland *et al.* ont étudié certaines de leurs propriétés dans la référence [M⁺04b]. Ils concluent que l'approximation RHF constitue un cadre plus réaliste que l'approximation RH lorsque l'on tente de relier le modèle de couplage ponctuel à QCD.

CONCLUSION

Les modèles de structure nucléaire, relativistes ou non, doivent se comprendre comme des théories effectives approximant le secteur de basse énergie de QCD. En particulier, les modèles relativistes, décrivant la dynamique du nucléon à l'aide de l'équation de Dirac, fournissent une description plus fondamentale et plus efficace de l'état fondamental des systèmes nucléaires que leurs équivalents non-relativistes. La raison principale est qu'une formulation covariante maintient une distinction entre scalaire de Lorentz et 4-vecteur. La simplicité apportée par la représentation des systèmes nucléaires en terme de potentiels relativistes scalaire et 4-vecteur est un signe que les symétries associées aux transformations de Lorentz jouent un rôle important et ce même à basse énergie.

Alors que décrire les observables des systèmes nucléaires directement à partir de QCD ne semble pas envisageable, les principes inhérents aux théories effectives des champs nous indiquent que cela n'est pas nécessaire. Il s'agit alors de définir le Lagrangien le plus général possible compatible avec les symétries de la théorie fondamentale sous-jacente. En particulier, la symétrie chirale et sa brisure à la fois spontanée et explicite jouent un rôle essentiel pour contraindre ces Lagrangiens. La puissance de calcul informatique disponible à une époque donnée nous impose de sévères approximations afin de pouvoir réaliser des prédictions dans des durées compatibles avec la vie humaine. C'est ainsi que les échanges de pions générant l'interaction nucléon-nucléon nue, décrits par la théorie chirale des perturbations, sont remplacés par les échanges d'uniques mésons plus lourds (approximation OBE). Le potentiel nucléon-nucléon nu correspondant, comme le potentiel de Bonn, sert de point de départ à l'approche *ab initio* DBHF. La double auto-cohérence caractéristique de

cette approche prohibe son application dans les noyaux finis. Des interactions dans le milieu phénoménologiques sont alors définies de telle sorte que leur utilisation dans l'approximation du champ moyen conduit à une bonne approximation des observables nucléaires. En résulte la densité lagrangienne phénoménologique à la base des modèles RH et RHF.

Les approches relativistes phénoménologiques sont habituellement traitées dans l'approximation RH. La prise en compte explicite des termes de Fock complique le modèle, dans la mesure où elle introduit une non-localité dans le potentiel moyen. Cette complication s'accompagne d'une description de masses effectives protonique et neutronique dans la matière nucléaire plus en accord avec le modèle *ab initio* DBHF. Le traitement des termes de Fock permet également d'introduire le pion dont la contribution directe est nulle. Un rôle plus important est joué par le méson ρ à travers son couplage tensoriel au nucléon. La contribution correspondante corrige les fermetures de couche artificielles présentes dans les modèles relativistes phénoménologiques, conduisant à une meilleure description de la structure en couches des noyaux atomiques.

Jusqu'ici, les contributions d'échange ont été traitées dans des modèles applicables aux noyaux sphériques uniquement. Récemment, les corrélations d'appariement initialement prises en compte dans le cadre de la théorie BCS ont été traitées dans le formalisme de Bogoliubov [L⁺10]. Le travail de thèse a consisté à étendre ces modèles par la prise en compte de la déformation nucléaire, la majorité des noyaux étant déformés. Le modèle développé est ainsi applicable aux noyaux présentant une symétrie axiale. D'autre part les corrélations d'appariement sont traitées dans le formalisme de Bogoliubov. L'approche Hartree-Fock-Bogoliubov relativiste en symétrie axiale ainsi développée fait l'objet du chapitre suivant.

L'APPROCHE HARTREE-FOCK-BOGOLIUBOV RELATIVISTE

SOMMAIRE

2.1	LA DENSITÉ LAGRANGIENNE	55
2.1.1	Secteur nucléonique	55
2.1.2	Secteur mésonique	55
2.1.3	Interaction effective nucléon-méson	56
2.1.4	Paramètres libres de la densité lagrangienne	58
2.1.5	Les équations classiques du mouvement	59
2.1.5.1	Cas des nucléons	60
2.1.5.2	Cas des champs mésoniques effectifs	60
2.2	LE HAMILTONIEN EFFECTIF DU MODÈLE	61
2.2.1	Nucléons libres	62
2.2.2	Mésons effectifs libres	62
2.2.3	Interaction nucléon-méson	63
2.2.4	Hamiltonien total	63
2.2.5	Quantification canonique	64
2.3	LE FORMALISME HARTREE-FOCK RELATIVISTE	64
2.3.1	L'approximation <i>no-sea</i>	65
2.3.2	L'approximation du champ moyen	66
2.3.3	L'Energie Fonctionnelle de la Densité	69
2.3.4	Les équations Hartree-Fock relativistes	72
2.3.5	Cas des systèmes à déformation axiale	75
2.3.5.1	Symétries et champ moyen	75
2.3.5.2	Equations Hartree-Fock relativistes en symétrie axiale	77
2.4	L'APPARIEMENT NUCLÉONIQUE ET LA THÉORIE HARTREE-FOCK-BOGOLIUBOV RELATIVISTE	79
2.4.1	La superfluidité nucléaire	79
2.4.2	Modélisation de l'appariement nucléonique dans les modèles relativistes	79
2.4.3	Le formalisme Hartree-Fock-Bogoliubov relativiste	81
2.5	OPTIMISATIONS NUMÉRIQUES	83

2.5.1	Paramétrisations	83
2.5.2	Nombre de couches d'oscillateur	84
2.5.3	Nombre de points d'intégrations	85
2.5.4	Termes de réarrangement	85
CONCLUSION		86

Les approches relativistes du système nucléaire, initiées par Walecka [Wal74], consistent à décrire les interactions fortes entre nucléons comme un échange de mésons effectifs à partir d'un Lagrangien phénoménologique. Elles posent un cadre théorique permettant l'étude des phénomènes apparaissant en structure nucléaire non seulement dans les noyaux stables ou proches de la vallée de la stabilité, mais également dans les noyaux exotiques, voire proches des *drip-lines* protonique et neutronique. L'approche phénoménologique déconnecte le modèle de l'interaction nucléon-nucléon nue reproduisant les déphasages mais permet de prendre en compte, certes de façon implicite mais avec un faible coût numérique, les effets de polarisation du vide, de la sous-structure des nucléons, de corrélations de grande et courte portées, comme le détaille la section 2.1. En ce sens, ces approches représentent l'équivalent relativiste des calculs Hartree-Fock dépendants de la densité reposant sur les forces de Gogny ou Skyrme.

Plusieurs jeux de paramètres (masses des mésons, constantes de couplage nucléon-méson) caractérisant les Lagrangiens phénoménologiques ont été dérivés à travers un ajustement aux données expérimentales. Il s'agit de reproduire l'équation d'état de la matière nucléaire ainsi que quelques propriétés globales d'un échantillon de noyaux sphériques à couche fermée. Les premières fonctionnelles ainsi générées ont échoué à reproduire quantitativement les propriétés de surface telles que la déformation et la compressibilité nucléaires. Pour pallier ces difficultés, Boguta et Bodmer [BB77] ont étendu le modèle relativiste en simulant une dépendance en densité à travers l'introduction d'un auto-couplage non linéaire au méson σ . Une autre approche consiste à introduire une dépendance du milieu dans les vertex nucléon-méson, notamment via la promotion des constantes de couplages au rang de fonctions explicites de la densité. Cette dernière approche aurait le mérite d'établir une connexion plus directe avec la dynamique microscopique sous-jacente. Ainsi, la théorie des champs hadroniques relativistes dépendante de la densité [Leno4], modèle plus fondamental que nos approches reposant sur un Lagrangien phénoménologique, fait intervenir des vertex fonctionnelles des opérateurs champs baryoniques. Ces fonctionnelles sont reliées aux *self-energies* déterminées par une approche de type Dirac-Brueckner dans la matière nucléaire.

Dans ce chapitre, nous suivons la ligne de pensée représentée par la vue synoptique 2.1. Nous détaillons ainsi les principes permettant la construction du Lagrangien phénoménologique (section 2.1). L'idée est de construire une interaction effective qui, utilisée conjointement avec une description en terme de particules indépendantes (approximation de

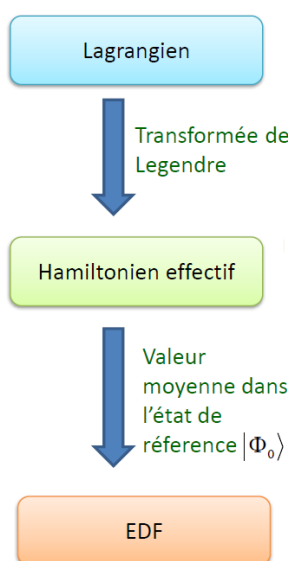


FIG. 2.1 – Vue synoptique des étapes nécessaires à une description relativiste du noyau atomique

champ moyen) est à même de reproduire quantitativement les propriétés des systèmes nucléaires. Ce lagrangien ainsi construit permettra de dériver l'Hamiltonien du modèle, comme le présente la section 2.2 Cette étape intermédiaire est nécessaire pour obtenir l'énergie fonctionnelle de la densité, objet à la base de la détermination des observables nucléaires. En pratique, des approximations doivent être mises en œuvre pour dériver l'énergie fonctionnelle de la densité à partir du Hamiltonien (approximation du champ moyen). La section 2.3 introduit ainsi le formalisme Hartree-Fock relativiste et détaille notamment comment décrire les noyaux déformés. Enfin, la section 2.4 traite l'appariement nucléonique à travers le formalisme Hartree-Fock-Bogoliubov relativiste.

2.1 LA DENSITÉ LAGRANGIENNE

Les équations relativistes du mouvement s'obtiennent à partir d'une densité lagrangienne effective $\mathcal{L}$. Cette dernière fait intervenir les degrés de liberté pertinents pour la structure nucléaire de basse énergie, à savoir les nucléons et les mésons. Elle peut s'écrire comme la somme de trois termes :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{int} \quad (2.1)$$

où $\mathcal{L}_N$, $\mathcal{L}_m$ et $\mathcal{L}_{int}$ décrivent respectivement les nucléons libres, les mésons libres et l'interaction nucléon-méson.

2.1.1 Secteur nucléonique

L'idée est de traiter les nucléons comme des particules ponctuelles obéissant à une équation de Dirac, la motivation d'une approche relativiste ayant été développée dans le Chapitre 1 (section 1.2). Les degrés de liberté nucléoniques sont alors représentés par des spineurs de Dirac ψ . Ils interagissent via l'échange de champs mésoniques effectifs. La dynamique de l'assemblée de nucléons sans interaction est spécifiée par $\mathcal{L}_N$:

$$\mathcal{L}_N = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - M) \psi \quad (2.2)$$

M étant la masse au repos des nucléons.

2.1.2 Secteur mésonique

Le modèle que nous présentons est effectif et phénoménologique. En ce sens, les degrés de liberté mésoniques qui y interviennent ne doivent pas être confondus avec les mésons observés dans l'espace libre. En effet, ils ressemblent implicitement des corrélations nucléoniques bien au-delà du champ moyen à travers l'ajustement aux données expérimentales. Cette procédure vise à construire une interaction effective qui, utilisée conjointement avec un état de référence de type Hartree-Fock ou Hartree-Fock-Bogoliubov, aboutit à une bonne approximation des observables du système nucléaire. C'est donc un défaut de langage que de parler de champ moyen, tel qu'il est mis en oeuvre dans les problématiques à N corps comme la physique de la matière condensée ou encore la chimie. Nous continuerons tout de même d'évoquer le terme champ moyen, conscients qu'en réalité des corrélations complexes sont prises en compte de façon implicite.

Afin de rester cohérent avec la recherche de simplicité inhérente aux approches phénoménologiques, on cherche à introduire le nombre minimal de champs mésoniques effectifs permettant de reproduire les données expérimentales, ces derniers pouvant correspondre à des mésons non observés dans l'espace libre. Ces champs mésoniques se distinguent entre autre par leurs nombres quantiques (J^π, T) : respectivement spin, parité et isospin. Notre modèle d'étude comporte les mésons ponctuels effectifs suivant :

- Le méson isovecteur pseudo-scalaire $\vec{\pi}(0^-, 1)$
- Le méson isoscalaire scalaire $\sigma(0^+, 0)$
- Le méson isoscalaire vecteur $\omega^\mu(1^+, 0)$
- Le méson isovecteur vecteur $\vec{\rho}^\mu(0^+, 0)$
- On introduit également le **4-potential électromagnétique** A^μ afin de prendre en compte l'interaction coulombienne entre les protons.

La propagation de ces bosons libres se déduit de $\mathcal{L}_m$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m = & \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - \frac{1}{2} (\Omega_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu} - m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu) - \frac{1}{2} (\vec{\mathcal{R}}_{\mu\nu} \vec{\mathcal{R}}^{\mu\nu} - m_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \vec{\rho}^\mu) \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\pi} \partial^\mu \vec{\pi} - m_\pi^2 \vec{\pi}^2) - \frac{1}{2} (\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

où

$$\begin{aligned} \Omega^{\mu\nu} &= \partial^\mu \omega^\nu - \partial^\nu \omega^\mu \\ \vec{\mathcal{R}}^{\mu\nu} &= \partial^\mu \vec{\rho}^\nu - \partial^\nu \vec{\rho}^\mu \\ \mathcal{F}^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \end{aligned} \quad (2.4)$$

correspondent aux champs tenseurs des mésons ω , ρ et de A^μ , et où $m_\sigma, m_\omega, m_\rho, m_\pi$ sont les masses au repos des mésons correspondants. Ces dernières auraient pu être prises comme des paramètres libres dans la mesure où les degrés de liberté mésoniques sont effectifs. On fixera tout de même la masse des mésons à celle observée dans l'espace libre (dans le cas où les mésons existent dans l'espace libre) afin de réduire le nombre de paramètres libres du modèle. Enfin, précisons que les flèches indiquent des vecteurs dans l'espace d'isospin.

2.1.3 Interaction effective nucléon-méson

Dans le milieu nucléaire, les hadrons sont entourés par un nuage de matière polarisée. En conséquence, les interactions dans le milieu nucléaire diffèrent significativement de celles dans l'espace libre. Dans nos modèles phénoménologiques, la dynamique complexe du système à N corps est contenue de façon effective dans les constantes de couplage baryon-méson empiriques. On perd ainsi le lien explicite avec le cas de l'espace libre. En contre partie, on gagne en simplicité et mener le calcul des observables du système nucléaire à son terme devient faisable.

En ce qui concerne la construction de l'interaction effective dans les modèles relativistes, la covariance relativiste impose à la densité lagrangienne d'être un scalaire de Lorentz contraignant ainsi la forme du couplage nucléon-méson. Cette contrainte est d'autant plus précise que la densité lagrangienne se doit également d'être isoscalaire. Il s'agit donc de

former la combinaison scalaire de Lorentz et isoscalaire la plus simple à partir des champs mésoniques effectifs d'une part, et des formes bilinéaires en les spineurs nucléoniques ($\bar{\psi}\Gamma\psi O_\tau$) d'autre part, avec :

$$O_\tau \in \{1, \tau_i\}, \quad \Gamma \in \{1, \gamma_\mu, \gamma_5, \gamma_5\gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}\} \quad (2.5)$$

Ici, τ_i correspond aux matrices de Pauli dans l'espace d'isospin et Γ désigne de façon générique les matrices de Dirac. Ce jeu de construction conduit à $\mathcal{L}_{int}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} = & -g_\sigma(\rho_v)\bar{\psi}\sigma\psi - g_\omega(\rho_v)\bar{\psi}\gamma_\mu\omega^\mu\psi - g_\rho(\rho_v)\bar{\psi}\gamma_\mu\vec{\rho}^\mu\cdot\vec{\tau}\psi \\ & - \frac{f_\pi(\rho_v)}{m_\pi}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\partial^\mu\vec{\pi}\cdot\vec{\tau}\psi - e\bar{\psi}\gamma_\mu A^\mu\psi \end{aligned} \quad (2.6)$$

Le terme pionique dans la densité lagrangienne 2.6 correspond à un couplage pseudo-vectériel. Cependant, dans le cas du pion, la combinaison scalaire isoscalaire la plus simple prend la forme d'un couplage pseudo-scalaire :

$$\mathcal{L}_{\pi NN}^{PS} = -ig_\pi\bar{\psi}\gamma_5\vec{\pi}\cdot\vec{\tau}\psi \quad (2.7)$$

Dans la limite non relativiste, avec des nucléons sur couche de masse, ces deux couplages conduisent aux mêmes résultats si :

$$\frac{g_\pi}{2M} = \frac{f_\pi}{m_\pi} \quad (2.8)$$

En revanche, dans les modèles effectifs, Serot et Walecka ont montré [SW86] que le couplage pseudo-scalaire engendre des énergies d'échange pioniques de très grande amplitude, compromettant par là même une reproduction correcte des spectres à particules individuelles. Le couplage pseudo-vectériel, quant à lui, ne présente pas ce problème, si bien que l'on travaille généralement avec ce dernier.

Les constantes de couplage intervenant dans la densité lagrangienne 2.6 sont prises comme fonctions explicites de la densité baryonique ρ_v définie comme :

$$\rho_v = \sqrt{j_\mu j^\mu} \quad (2.9)$$

avec j^μ le 4-courant baryonique :

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (2.10)$$

Cette dépendance en densité permet de prendre en compte :

- L'influence du milieu nucléaire avec notamment les corrélations à deux corps induites entre autres par le cœur dur de l'interaction nucléon-nucléon nue. Ces dernières correspondent aux diagrammes en échelle de Brueckner. En ce sens, notre interaction phénoménologique peut se comparer à la matrice de Brueckner G traitée dans le cadre de l'approximation de la densité locale (LDA) [Neg70, Leno04]. La différence vient du fait que les interactions phénoménologiques, à travers l'ajustement aux données expérimentales, tiennent

compte de corrélations qui vont au-delà de celles traitées par la matrice de Brueckner au premier ordre.

- L'influence de la sous-structure des nucléons qui engendre une interaction N-N à trois corps et plus. Ces dernières contributions peuvent être incluses phénoménologiquement à travers une dépendance en densité dans une interaction effective à deux corps [Bet71].

Un autre choix possible aurait été de prendre les constantes de couplage dépendantes de la densité scalaire $\rho_s = \bar{\psi}\psi$. Cependant, une dépendance en la densité baryonique conduit à de meilleurs résultats en ce qui concerne les noyaux finis [Fuc95], et fournit une relation plus naturelle entre les *self-energies* de la théorie des champs hadroniques dépendante de la densité d'une part et de la théorie de Dirac-Brueckner d'autre part [Hof01]. L'ansatz choisi pour la forme de la dépendance en densité des constantes de couplage est motivé par divers résultats de la théorie de Dirac-Brueckner [T⁺99].

Dans le cas des mésons σ et ω , la dépendance en densité des constantes de couplage prend la forme :

$$g_i(\rho_v) = g_i(\rho_{sat})f_i(\xi), \quad i = \sigma, \omega \quad (2.11)$$

où

$$f_i(\xi) = a_i \frac{1 + b_i(\xi + d_i)^2}{1 + c_i(\xi + d_i)^2} \quad (2.12)$$

est une fonction de $\xi = \frac{\rho_v}{\rho_{sat}}$, ρ_{sat} désignant la densité baryonique de saturation de la matière nucléaire.

Les constantes de couplage des mésons ρ et π ont une dépendance exponentielle en la densité baryonique :

$$g_\rho(\rho_v) = g_\rho(0)e^{-a_\rho \xi} \quad (2.13)$$

$$f_\pi(\rho_v) = f_\pi(0)e^{-a_\pi \xi} \quad (2.14)$$

2.1.4 Paramètres libres de la densité lagrangienne

La densité lagrangienne 2.1 étant phénoménologique, elle est caractérisée par des paramètres ajustés aux données expérimentales. En ce sens, la situation est similaire aux modèles Hartree-Fock non relativistes dépendants de la densité, dans lesquels sont employés des ansatz phénoménologiques.

Pour être plus explicite, les paramètres du lagrangien sont :

$$\begin{aligned} & m_\sigma, g_\sigma(\rho_{sat}), a_\sigma, b_\sigma, c_\sigma, d_\sigma \\ & m_\omega, g_\omega(\rho_{sat}), a_\omega, b_\omega, c_\omega, d_\omega \\ & m_\rho, g_\rho(0), a_\rho \\ & m_\pi, f_\pi(0), a_\pi \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dans un premier temps, on réduit le nombre de paramètres libres en fixant les grandeurs existant dans l'espace libre à leur valeur observée :

$$\begin{aligned} m_\omega &= 783.0 \text{ MeV} \\ m_\rho &= 769.0 \text{ MeV}, g_\rho(0) = 2.629 \\ m_\pi &= 138.0 \text{ MeV}, f_\pi(0) = 1.0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

D'autre part, les huit paramètres a_i, b_i, c_i et d_i ($i = \sigma, \omega$) intervenant dans la définition des fonctions $f_i(\xi)$ (2.12) ne sont pas indépendants. En effet, en $\rho_v = \rho_{sat}$, la fonction $f_i(\xi)$ doit vérifier la relation évidente

$$f_i(1) = 1 \quad (2.17)$$

De plus, des contraintes supplémentaires ont été imposées dans la référence [T⁺99] afin de réduire le nombre de paramètres libres. Elles s'écrivent comme suivant :

$$\begin{aligned} f''_\sigma(1) &= f''_\omega(1) \\ f''_i(0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

La dernière de ces deux contraintes assure que les contributions de réarrangement restent finies à densité nulle. Ces contraintes réduisent le nombre de paramètres libres à trois au lieu de huit. On choisit b_σ, d_σ et b_ω pour spécifier la dépendance en densité des mésons σ et ω . La densité lagrangienne est alors caractérisée par huit paramètres libres :

$$\begin{aligned} m_\sigma, g_\sigma(\rho_{sat}), b_\sigma, d_\sigma \\ g_\omega(\rho_{sat}), b_\omega \\ a_\rho \\ a_\pi \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ces derniers paramètres sont contraints d'une part à travers l'ajustement sur la masse de douze noyaux finis sphériques magiques, voire doublement magiques ($^{16}\text{O}, ^{40}\text{Ca}, ^{48}\text{Ca}, ^{56}\text{Ni}, ^{68}\text{Ni}, ^{90}\text{Zr}, ^{116}\text{Sn}, ^{132}\text{Sn}, ^{182}\text{Pb}, ^{194}\text{Pb}, ^{208}\text{Pb}, ^{214}\text{Pb}$), et d'autre part en cherchant à reproduire dans un intervalle donné le point de saturation de la matière nucléaire infinie, le module d'incompressibilité K_∞ et l'énergie de symétrie J au point de saturation. La donnée de ces paramètres définit l'interaction effective que l'on utilisera afin d'étudier les noyaux finis, qu'ils soient sphériques ou axialement déformés, superfluides ou non.

2.1.5 Les équations classiques du mouvement

La dynamique du système s'obtient à partir du principe de moindre action

$$\delta S = 0, \quad S = \int d^4x \mathcal{L}(x) \quad (2.20)$$

conduisant aux équations d'Euler-Lagrange.

2.1.5.1 Cas des nucléons

L'équation d'Euler-Lagrange relative aux nucléons

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_v} \frac{\partial \rho_v}{\partial \bar{\psi}} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \quad (2.21)$$

conduit à l'équation de Dirac vérifiée par le spineur nucléonique ψ [SW86] :

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - M - \Sigma] \psi(x) = 0 \quad (2.22)$$

La *self-energy* Σ (toujours classique à ce stade) peut se décomposer en plusieurs contributions :

$$\Sigma = \gamma^\mu \left(\Sigma_\mu^V + \Sigma_\mu^R \right) + \Sigma^S \quad (2.23)$$

- La *self-energy* vectorielle s'écrit :

$$\Sigma_\mu^V = g_\omega(\rho_v) \omega_\mu + g_\rho(\rho_v) \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\tau} + \frac{f_\pi(\rho_v)}{m_\pi} \gamma_5 \partial_\mu \vec{\pi} \cdot \vec{\tau} + e \frac{(1 - \tau_3)}{2} A_\mu \quad (2.24)$$

- La *self-energy* scalaire prend la forme :

$$\Sigma^S = g_\sigma(\rho_v) \sigma \quad (2.25)$$

- La *self-energy* de réarrangement trouve son origine dans la dépendance en densité des constantes de couplage nucléon-méson. Elle contient les termes suivants :

$$\begin{aligned} \Sigma_\mu^R = & \frac{j_\mu}{\rho_v} \left[\frac{\partial g_\sigma}{\partial \rho_v} \bar{\psi} \sigma \psi + \frac{\partial g_\omega}{\partial \rho_v} \bar{\psi} \gamma_\nu \omega^\nu \psi + \frac{\partial g_\rho}{\partial \rho_v} \bar{\psi} \gamma_\nu \vec{\rho}^\nu \cdot \vec{\tau} \psi \right. \\ & \left. + \frac{1}{m_\pi} \frac{\partial f_\pi}{\partial \rho_v} \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\nu \partial^\nu \vec{\pi} \cdot \vec{\tau} \psi \right] \end{aligned} \quad (2.26)$$

Comme mis en exergue dans le Chapitre 1 (1.2.6.1), la *self-energy* de réarrangement tient compte des corrélations de hautes impulsions de type une particule-un trou et deux particules-deux trous relatives au mouvement d'un nucléon individuel [Neg82]. De plus, la prise en compte de la *self-energy* de réarrangement est essentielle pour la conservation du tenseur énergie-impulsion :

$$T^{\mu\nu} \equiv -\eta^{\mu\nu} \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial^\nu \phi_i, \quad \phi_i = \{ \bar{\psi}, \psi, \sigma, \omega^\alpha, \vec{\rho}^\alpha, \vec{\pi}, A^\alpha \} \quad (2.27)$$

En effet, si les termes de réarrangement sont omis, alors la relation $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ n'est pas vérifiée [Len95].

2.1.5.2 Cas des champs mésoniques effectifs

Les équations d'Euler-Lagrange correspondant aux mésons effectifs

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_m} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_m)} \quad (2.28)$$

conduisent aux équations de Klein-Gordon (2.29,2.32) et de Proca (2.30,2.31,2.33) suivantes :

$$(\square + m_\sigma^2) \sigma = -g_\sigma \bar{\psi} \psi \quad (2.29)$$

$$\partial_\mu \Omega^{\mu\nu} + m_\omega^2 \omega^\nu = g_\omega \bar{\psi} \gamma^\nu \psi \quad (2.30)$$

$$\partial_\mu \vec{R}^{\mu\nu} + m_\rho^2 \vec{\rho}^\nu = g_\rho \bar{\psi} \gamma^\nu \vec{\tau} \psi \quad (2.31)$$

$$(\square + m_\pi^2) \vec{\pi} = \frac{f_\pi}{m_\pi} \partial_\mu [\bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \vec{\tau} \psi] \quad (2.32)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = e \bar{\psi} \gamma^\nu \frac{1 - \tau_3}{2} \psi \quad (2.33)$$

La conservation du courant baryonique $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ impose :

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \Rightarrow \partial_\mu \omega^\mu = 0, \partial_\mu \vec{\rho}^\mu = \vec{0} \quad (2.34)$$

si bien que les équations de Proca auxquelles obéissent les mésons effectifs ω^μ et $\vec{\rho}^\mu$ se simplifient en équations de Klein-Gordon. De plus, se placer dans la jauge de Coulomb ($\partial_\mu A^\mu = 0$) permet de mettre l'équation du mouvement du 4-potentiel électromagnétique A^μ sous la forme d'une équation de Klein-Gordon. En conséquence, les mésons effectifs ainsi que le 4-potentiel électromagnétique sont solutions d'équations de Klein-Gordon inhomogènes dont les sources correspondent à divers densités et courants nucléoniques :

$$(\square + m_\sigma^2) \sigma = -g_\sigma \bar{\psi} \psi \quad (2.35)$$

$$(\square + m_\omega^2) \omega^\mu = g_\omega \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (2.36)$$

$$(\square + m_\rho^2) \vec{\rho}^\mu = g_\rho \bar{\psi} \gamma^\mu \vec{\tau} \psi \quad (2.37)$$

$$(\square + m_\pi^2) \vec{\pi} = \frac{f_\pi}{m_\pi} \partial_\mu [\bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \vec{\tau} \psi] \quad (2.38)$$

$$\square A^\mu = e \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{1 - \tau_3}{2} \psi \quad (2.39)$$

2.2 LE HAMILTONIEN EFFECTIF DU MODÈLE

Les observables décrivant le système nucléaire se dérivent à partir de l'énergie fonctionnelle de la densité. Cette dernière fait intervenir le Hamiltonien du système. Nous présentons donc dans cette section la manière dont s'obtient le Hamiltonien à partir du Lagrangien construit au paragraphe précédent.

La densité hamiltonienne s'obtient à partir de la composante $(\mu, \nu) = (0, 0)$ du tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$:

$$\mathcal{H} = -\mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi_i)} \partial^0 \phi_i \quad (2.40)$$

où ϕ_i représente les champs nucléoniques, mésoniques et le 4-potentiel électromagnétique. Elle peut se décomposer en la somme de plusieurs contributions :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_N + \mathcal{H}_m + \mathcal{H}_{int} \quad (2.41)$$

où $\mathcal{H}_N$, $\mathcal{H}_m$ et $\mathcal{H}_{int}$ réfèrent respectivement aux cas des nucléons libres, des mésons libres et de l'interaction nucléon-méson.

2.2.1 Nucléons libres

Le conjugué canonique associé à ψ étant $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} = i\psi^\dagger$, on en déduit la densité hamiltonienne correspondant au secteur "nucléons libres" :

$$\mathcal{H}_N = \bar{\psi} [-i\gamma \cdot \nabla + M] \psi \quad (2.42)$$

2.2.2 Mésons effectifs libres

Un calcul similaire conduit aux expressions suivantes pour le secteur "mésons libres" :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\sigma &= \frac{1}{2} \{ \partial_0 \sigma \partial_0 \sigma + \nabla \sigma \cdot \nabla \sigma + m_\sigma^2 \sigma^2 \} \\ \mathcal{H}_\omega &= \frac{1}{2} \{ -\Omega^{0i} \partial_0 \omega_i + \Omega^{i\mu} \partial_i \omega_\mu - m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \} \\ \mathcal{H}_\rho &= \frac{1}{2} \{ -\vec{R}^{0i} \partial_0 \vec{\rho}_i + \vec{R}^{i\mu} \partial_i \vec{\rho}_\mu - m_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu \} \\ \mathcal{H}_\pi &= \frac{1}{2} \{ \partial_0 \vec{\pi} \cdot \partial_0 \vec{\pi} + \nabla \vec{\pi} \cdot \nabla \vec{\pi} + m_\pi^2 \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} \} \\ \mathcal{H}_A &= \frac{1}{2} \{ -F^{0i} \partial_0 A_i + F^{i\mu} \partial_i A_\mu \} \end{aligned} \quad (2.43)$$

L'interaction véhiculée par les mésons n'est pas instantanée. Toutefois, dans la mesure où l'approximation Hartree-Fock sera mise en œuvre dans le but de décrire l'état fondamental des noyaux atomiques, nous pouvons opérer la simplification suivante : négliger la dépendance en temps des champs mésoniques [B⁺87]. Cette approximation revient à négliger la composante temporelle de la 4-impulsion relative aux champs mésoniques. Si cette simplification n'a aucune conséquence au niveau du terme direct (Hartree), elle entraîne en revanche l'omission des effets de retards au niveau du terme d'échange (Fock). Dans le cadre de la structure nucléaire de basse énergie, les énergies transférées par les mésons sont petites devant la masse de ces derniers, du moins en ce qui concerne σ , ω^μ et $\vec{\rho}^\mu$. Aussi cette approximation devrait-elle être valide dans le cas des trois mésons évoqués, et, dans une moindre mesure, dans le cas du pion.

Ainsi, dans l'expression de l'Hamiltonien $H_m = \int d^3x \mathcal{H}_m$, la mise en œuvre de cette simplification couplée avec une intégration par parties et l'utilisation des équations du mouvement mésoniques conduit aux nouvelles formules :

$$\begin{aligned} H_\sigma &= -\frac{1}{2} \int d^3x g_\sigma \bar{\psi} \sigma \psi \\ H_\omega &= -\frac{1}{2} \int d^3x g_\omega \bar{\psi} \gamma_\mu \omega^\mu \psi \\ H_\rho &= -\frac{1}{2} \int d^3x g_\rho \bar{\psi} \gamma_\mu \vec{\rho}^\mu \vec{\tau} \psi \\ H_\pi &= -\frac{1}{2} \int d^3x \frac{f_\pi}{m_\pi} \bar{\psi} \gamma_5 \gamma \cdot \nabla \vec{\pi} \cdot \vec{\tau} \psi \\ H_A &= -\frac{1}{2} e \int d^3x \bar{\psi} \gamma_\mu A^\mu \frac{1 - \tau_3}{2} \psi \end{aligned} \quad (2.44)$$

2.2.3 Interaction nucléon-méson

La densité hamiltonienne correspondant au secteur "interaction" s'écrit :

$$\mathcal{H}_{int} = \bar{\psi} \left[g_{\sigma}\sigma + g_{\omega}\gamma_{\mu}\omega^{\mu} + g_{\rho}\gamma_{\mu}\vec{\rho}^{\mu}.\vec{\tau} + \frac{f_{\pi}}{m_{\pi}}\gamma_5\gamma.\nabla\vec{\pi}.\vec{\tau} + e\gamma_{\mu}A^{\mu}\frac{1-\tau_3}{2} \right] \psi \quad (2.45)$$

2.2.4 Hamiltonien total

On en déduit l'Hamiltonien total du modèle, dans lequel la partie méson libre se simplifie avec la partie interaction :

$$H = \int d^3x \bar{\psi} [-i\gamma.\nabla + M] \psi + \frac{1}{2} \int d^3x \bar{\psi} \left[g_{\sigma}\sigma + g_{\omega}\gamma_{\mu}\omega^{\mu} + g_{\rho}\gamma_{\mu}\vec{\rho}^{\mu}.\vec{\tau} + \frac{f_{\pi}}{m_{\pi}}\gamma_5\gamma.\nabla\vec{\pi}.\vec{\tau} + e\gamma_{\mu}A^{\mu}\frac{1-\tau_3}{2} \right] \psi \quad (2.46)$$

Les degrés de liberté mésoniques peuvent être éliminés au profit des degrés de liberté nucléoniques en écrivant formellement :

$$\phi_m(x) = \int d^4y D_{\phi_m}(x,y) s_{\phi_m}(y) \quad (2.47)$$

En d'autres termes, le champ mésonique ϕ_m correspond à la convolution de sa fonction de Green (ou propagateur) D_{ϕ_m} avec la source s_{ϕ_m} de l'équation de Klein-Gordon dont il est solution. Par exemple, le champ mésonique σ peut s'écrire :

$$\sigma(x) = - \int d^4y D_{\sigma}(x,y) g_{\sigma} [\bar{\psi}\psi](y) \quad (2.48)$$

avec

$$(\square + m_{\sigma}^2) D_{\sigma}(x,y) = \delta^{(4)}(x-y) \quad (2.49)$$

En procédant ainsi avec chaque méson et avec le 4-potentiel électromagnétique, on aboutit à :

$$H = \int d^3x \bar{\psi} [-i\gamma.\nabla + M] \psi + \frac{1}{2} \int d^3x d^4y \bar{\psi}(x) \bar{\psi}(y) \Gamma_m(x,y) D_m(x,y) \psi(y) \psi(x) \quad (2.50)$$

où une sommation implicite est effectuée sur l'indice $m = \{\sigma, \omega^{\mu}, \vec{\rho}^{\mu}, \vec{\pi}, A^{\mu}\}$ et où les vertex à deux corps $\Gamma_m(x,y)$ sont définis par :

$$\Gamma_{\sigma}(1,2) = - [g_{\sigma}(1)] [g_{\sigma}(2)] \quad (2.51)$$

$$\Gamma_{\omega}(1,2) = [g_{\omega}(1)\gamma_{\mu}(1)] [g_{\omega}(2)\gamma^{\mu}(2)] \quad (2.52)$$

$$\Gamma_{\rho}(1,2) = [g_{\rho}(1)\gamma_{\mu}(1)\vec{\tau}(1)] \cdot [g_{\rho}(2)\gamma^{\mu}(2)\vec{\tau}(2)] \quad (2.53)$$

$$\Gamma_{\pi}(1,2) = - \left[\frac{f_{\pi}(1)}{m_{\pi}} \gamma_5(1) \gamma(1) \cdot \nabla(1) \vec{\tau}(1) \right] \cdot \left[\frac{f_{\pi}(2)}{m_{\pi}} \gamma_5(2) \gamma(2) \cdot \nabla(2) \vec{\tau}(2) \right] \quad (2.54)$$

$$\Gamma_A(1,2) = \frac{e^2}{4} [\gamma_{\mu}(1) (1 - \tau_3(1))] [\gamma^{\mu}(2) (1 - \tau_3(2))] \quad (2.55)$$

2.2.5 Quantification canonique

Le passage de notre théorie classique des champs à une théorie quantique des champs se fait en imposant des relations d'anticommutation à temps égaux pour les champs nucléoniques et des relations de commutation à temps égaux pour les champs mésoniques et le 4-potentiel électromagnétique :

$$\{\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \psi_\beta^\dagger(\mathbf{y}, t)\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2.56)$$

$$\{\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \psi_\beta(\mathbf{y}, t)\} = \{\psi_\alpha^\dagger(\mathbf{x}, t), \psi_\beta^\dagger(\mathbf{y}, t)\} = 0 \quad (2.57)$$

$$[\phi_\mu(\mathbf{x}, t), \Pi_\nu(\mathbf{y}, t)] = i\delta_{\mu\nu} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2.58)$$

$$[\phi_\mu(\mathbf{x}, t), \phi_\nu(\mathbf{y}, t)] = [\Pi_\mu(\mathbf{x}, t), \Pi_\nu(\mathbf{y}, t)] = 0 \quad (2.59)$$

où α, β correspondent à des indices spinoriels et où $\Pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi^\mu)}$ représente le conjugué canonique de ϕ_μ

Il est possible de développer l'opérateur champ nucléonique sur une base auxiliaire à un corps $\{c_i, d_i\}$ à déterminer ultérieurement.

$$\psi(x) = \sum_i \left\{ f_i(\mathbf{x}) e^{-i\varepsilon_i t} c_i + g_i(\mathbf{x}) e^{i\varepsilon_i' t} d_i^\dagger \right\} \quad (2.60)$$

$$\psi^\dagger(x) = \sum_i \left\{ f_i^\dagger(\mathbf{x}) e^{i\varepsilon_i t} c_i^\dagger + g_i^\dagger(\mathbf{x}) e^{-i\varepsilon_i' t} d_i \right\} \quad (2.61)$$

Les opérateurs $c_i^\dagger$ et c_i (respectivement $d_i^\dagger$ et d_i) représentent les opérateurs de création et annihilation de nucléon (respectivement antinucléons) dans un état $|i\rangle$, qui correspond à un ensemble de nombres quantiques dépendant des symétries du système. Les spineurs de Dirac $f_i(\mathbf{x})$ et $g_i(\mathbf{x})$ correspondent aux fonctions d'onde nucléoniques et antinucléoniques $\langle \mathbf{x} | i \rangle$.

2.3 LE FORMALISME HARTREE-FOCK RELATIVISTE

La version quantique de l'équation de Dirac 2.22 ne peut pas se résoudre sans approximation. La *self-energy*, objet désormais quantique, fait intervenir des contributions complexes à calculer. Plusieurs simplifications sont alors mises en œuvre, comme nous le détaillons dans cette section. Par exemple, l'omission des anti-nucléons (approximation *no-sea*) permet d'éliminer les divergences des diagrammes de type polarisation du vide. Cette approximation intervient dans tous les modèles de champ moyen auto-cohérent relativiste. Un autre exemple d'approximation consiste à ne retenir qu'une certaine classe de diagrammes de *self-energy* : cette sélection de diagrammes, après resommation, conduit aux diagrammes de Hartree et de Fock¹. Ces derniers ne font pas intervenir les fonctions de Green nucléoniques libres mais les fonctions de Green nucléoniques exactes. Il s'agit de l'approche auto-cohérente Hartree-Fock.

¹On considère également les diagrammes correspondant à la *self-energy* de réarrangement

2.3.1 L'approximation *no-sea*

Le premier niveau d'approximation caractérisant la théorie Hartree-Fock relativiste consiste en l'approximation *no-sea*. Dans le cadre de cette approximation, le rôle des états d'énergie négative appartenant à la mer de Dirac n'est pas pris en compte explicitement. Le traitement explicite des états de la mer de Dirac conduit à des diagrammes de type polarisation du vide divergents. Dans le langage des théories effectives des champs, ces contributions sont associées à une échelle d'énergie au delà du domaine de validité de la théorie. Les effets correspondants doivent donc être absorbés dans des paramètres qui seront soit dérivés de la théorie sous-jacente lorsque cela est faisable, soit ajustés aux données (ce qui est notre cas). Les effets de polarisation du vide ne sont donc pas omis mais pris en compte implicitement à travers l'ajustement aux données.

Plus précisément, considérons notre Lagrangien à densité baryonique nulle. Afin de régulariser les diagrammes divergents faisant intervenir des boucles nucléons/anti-nucléons, des contre-termes doivent être ajoutés au Lagrangien. Une méthode efficace pour évaluer les valeurs moyennes d'opérateurs dans l'état fondamental de la théorie fait appel aux intégrales fonctionnelles. Ainsi, la valeur moyenne d'un opérateur O dépendant du champ ψ fait intervenir une intégrale fonctionnelle sur le champ ψ de l'opérateur O pondéré par un poids W . Ce poids s'exprime comme $e^{i \int d^4x \mathcal{L}}$. A température et densité baryonique nulles, l'énergie, valeur moyenne de l'Hamiltonien, fait intervenir la contribution $Tr \ln G^{-1}(\mu = 0)$ [Furo4]. G fait référence au propagateur nucléonique, μ au potentiel chimique et Tr désigne une trace sur l'espace-temps, les variables de spin et celles d'isospin. Cette contribution contient la physique du vide quantique engendrée par la mer de Dirac. Le point important est qu'elle peut s'écrire comme un développement de termes locaux correspondant à des puissances des champs et de leur dérivée. Ces derniers termes ont une structure similaire aux contre-termes introduits pour régulariser le modèle. Ce que l'on appelle approximation *no-sea* consiste alors en un schéma de soustraction particulier : celui correspondant à l'annulation exacte entre les contres-termes et une partie de la contribution du vide. La partie qui subsiste peut être absorbée dans la dépendance en densité des constantes de couplage.

Quelles sont les conséquences sur le Lagrangien à densité baryonique non nulle, *i.e* sur le Lagrangien décrivant les noyaux finis ? A température nulle et à densité baryonique finie, en se plaçant dans l'ensemble grand canonique (on permet au potentiel chimique μ de prendre des valeurs non nulles), la densité lagrangienne à considérer est :

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(x) + \mu \bar{\psi} \gamma_0 \psi \quad (2.62)$$

Comme dans le cas précédent, le calcul de l'énergie fait intervenir la contribution $Tr \ln G^{-1}(\mu)$. Il est toujours possible d'ajouter et soustraire la contribution de densité baryonique nulle $Tr \ln G^{-1}(0)$. La contribution du vide $+Tr \ln G^{-1}(0)$ annule les contres-termes du Lagrangien. La partie de la contribution du vide qui subsiste peut être simulée à travers la

dépendance en densité des constantes de couplages phénoménologiques. La contribution $-Tr \ln G^{-1}(0)$ se combine avec son équivalent à densité finie. En ne détaillant que les termes pertinents pour la discussion, l'énergie s'écrit :

$$\begin{aligned}
 E &= -iTr \ln G^{-1}(\mu) + iTr \ln G^{-1}(0) + \dots \\
 &= \sum_i^{\varepsilon_i < \mu} (\mu - \varepsilon_i) - \sum_i^{\varepsilon_i < 0} (-\varepsilon_i) + \dots \\
 &= \sum_i^{0 < \varepsilon_i < \mu} (\mu - \varepsilon_i) + \dots
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

L'énergie fait donc intervenir une somme sur les états occupés d'énergie positive, ce qui n'est rien d'autre que l'approximation *no-sea*.

Pour résumer, l'approximation *no-sea* ne correspond pas seulement à une omission pure et simple des états composant la mer de Dirac. Elle correspond plutôt à un schéma de soustraction menant à une théorie pouvant se formuler en terme de nucléons peuplant uniquement les états d'énergie positive et dont les paramètres phénoménologiques contiennent implicitement les effets de la dynamique du vide. En pratique, cette approximation revient à ne considérer que les opérateurs de création et annihilation relatifs aux nucléons dans le développement 2.60 :

$$\psi(x) = \sum_i \left\{ f_i(x) e^{-i\varepsilon_i t} c_i \right\} \tag{2.64}$$

$$\psi^\dagger(x) = \sum_i \left\{ f_i^\dagger(x) e^{i\varepsilon_i t} c_i^\dagger \right\} \tag{2.65}$$

2.3.2 L'approximation du champ moyen

Une autre approximation mise en œuvre dans la théorie Hartree-Fock relativiste est l'approximation du champ moyen dans sa version la plus moderne. Dans le cas d'un système à N nucléons sans interactions, chacune des particules occupe un état à particule indépendante bien défini. Il est clair que cette situation est modifiée par la présence d'interactions entre ces particules. Toutefois, une description du système nucléaire en terme de particules indépendantes constitue une bonne approximation si elle est utilisée conjointement avec une interaction nucléon-nucléon effective. Rappelons en effet que le terme tenseur et la répulsion à courte portée induite par le cœur dur empêchent l'utilisation directe de l'interaction nucléon-nucléon nue dans les calculs Hartree-Fock. Aussi utilise-t-on des interactions effectives phénoménologiques qui tiennent compte des excitations virtuelles des nucléons en dehors de la mer de Fermi.

Une description du noyau en terme de particules indépendantes semble *a priori* contradictoire avec les mouvements collectifs au sein du noyau, comme la fission. Cependant, l'expérience favorise l'image du champ moyen par le fait que libre parcours moyen d'un nucléon dans le noyau est de l'ordre de grandeur du noyau lui-même ($\sim 10 fm$) [RS80]. D'ailleurs, l'idée de comprendre certaines propriétés du noyau à l'aide

d'une structure en couches pour les nucléons provient de la découverte d'une stabilité spéciale vis-à-vis de l'énergie de séparation d'un nucléon pour les noyaux possédant un nombre particulier de protons et/ou neutrons (2,8,20,28,50,82,...) [M⁺55]. A l'image des gaz rares, dont l'inertie chimique s'explique par des électrons individuels occupant des couches complètes, ces noyaux magiques sont interprétés comme des noyaux à couches de protons et/ou neutrons complètes. Notons néanmoins que ce ne sont pas les nucléons "nus" qui occupent ces couches mais les nucléons "habillés" par son interaction avec ses voisins. Ceci fait écho à l'utilisation conjointe d'une interaction effective et d'une description en couches.

La question est de savoir si cette image suggérée par l'expérience peut se justifier d'un point de vue théorique. Une interprétation habituellement invoquée est l'effet du caractère fermionique des nucléons qui, en vertu du principe de Pauli, se voient interdire de s'approcher trop près les uns des autres, augmentant ainsi leur libre parcours moyen. Mais cette justification est remise en cause par les travaux de B. Mottelson [Mot96] dans la mesure où le libre parcours moyen serait aussi important que ce qui est observé si les nucléons étaient des bosons interagissant avec les mêmes forces. Pour être plus explicite, considérons un système à N corps qui incorpore les propriétés importantes des systèmes nucléaires, à savoir une interaction de forte amplitude et de courte portée. De tels systèmes ont un état fondamental qui présente essentiellement deux types de structure :

- Pour les systèmes obéissant aux lois de la mécanique classique, l'état d'énergie minimum est atteint lorsque chaque particule est dans la position d'équilibre qui minimise son énergie potentielle relativement à tous ses voisins. En résultent des structures statiques et localisées. Nous qualifierons l'état fondamental correspondant par le terme « cristallin ».
- Pour les systèmes dans lesquels les effets quantiques ne sont pas négligeables dans leur état fondamental, l'énergie cinétique au point zéro ($\sim \frac{\hbar^2}{Ma^2}$) intervenant dans la localisation d'une particule de masse M dans une sphère de rayon a entraîne une délocalisation des particules. En effet, le gain d'énergie potentielle de la configuration classique est surpassé par l'énergie cinétique quantique. De tels fluides délocalisés quantiques sont à la base des discussions de l'état fondamental de l'hélium liquide (^3He à caractère fermionique aussi bien que ^4He à caractère bosonique), des électrons dans un atome, des nucléons dans un noyau. Ainsi, le noyau est caractérisé par une délocalisation quantique des ses nucléons, analogue à la délocalisation des électrons dans un atome. L'état fondamental correspondant sera qualifié par le terme « liquide ».

Ainsi, plutôt que le principe de Pauli, ce sont les caractéristiques des forces nucléaires (intensité, portée) qui empêchent la localisation des nucléons dans une structure cristalline si bien que l'état fondamental des noyaux est du second type, et qu'en conséquence les nucléons disposent

d'un important libre parcours moyen. Pour montrer que l'état fondamental du noyau correspond à la phase délocalisée, considérons le paramètre suivant [Mot96] :

$$\Lambda = \frac{\hbar^2}{Ma^2} \frac{1}{V_0} \quad (2.66)$$

avec M la masse de la particule indépendante et où V_0 et a sont les caractéristiques de l'interaction repérant la profondeur du puits d'attraction et la position du minimum. Ce paramètre mesure qualitativement l'amplitude du rapport de l'énergie cinétique de l'état localisé et de l'énergie potentielle. Lorsque Λ est petit, les effets quantiques sont négligeables et l'état fondamental présente une structure cristalline. Pour des valeurs de Λ suffisamment grande, le système demeure un fluide quantique même dans son état fondamental. Les valeurs de ce paramètre pour différents systèmes sont listées dans le tableau 2.1. La transition entre solide cristallin et liquide quantique apparaît dans la région $\Lambda \sim 0.1$. La matière nucléaire appartient à la phase délocalisée.

Constituant	M	$a(\text{cm})$	$V_0 \text{ (eV)}$	Λ	Phase
^3He	3	$2.9 \cdot 10^{-8}$	$8.6 \cdot 10^{-4}$	0.19	liquide
^4He	4	$2.9 \cdot 10^{-8}$	$8.6 \cdot 10^{-4}$	0.14	liquide
H_2	2	$3.3 \cdot 10^{-8}$	$32 \cdot 10^{-4}$	0.06	cristalline
^{20}Ne	20	$3.1 \cdot 10^{-8}$	$31 \cdot 10^{-4}$	0.007	cristalline
noyau	1	$9 \cdot 10^{-14}$	$100 \cdot 10^6$	0.5	liquide

TAB. 2.1 – Valeur de Λ dans plusieurs systèmes

Il est important de remarquer que Λ ne dépend pas explicitement de la statistique (Bose ou Fermi) du système quantique considéré. On pourrait s'attendre à ce que la valeur de Λ définissant le passage entre les phases localisée et délocalisée diffère en fonction du caractère fermionique ou bosonique du système. Il s'avère que ces valeurs sont en fait plutôt proches, du fait que lorsque le système cristallise (système de Fermi ou de Bose gelé), les particules sont par définition localisées si bien que les intégrales d'échange, qui opèrent la distinction entre les systèmes de Fermi et de Bose, sont relativement faibles. Par exemple, une étude de l'état fondamental de ^3He pris comme fermionique ou bosonique, avec les mêmes interactions et la même densité observées dans le cas fermionique conduit à une fraction de condensat n_0 et une discontinuité de la surface de Fermi Z égales dans la précision des calculs [Mot96].

L'approximation du champ moyen consiste donc à approcher l'état du système par des particules indépendantes évoluant dans un potentiel correspondant à la moyenne de leurs interactions mutuelles. Concrètement, on postule l'état fondamental du système à N corps sous la forme d'un déterminant de Slater $|\Phi_0\rangle$ construit sur la base à un corps formée par les opérateurs de création et annihilation nucléoniques :

$$|\Phi_0\rangle = \prod_i c_i^\dagger |0\rangle \quad (2.67)$$

$|0\rangle$ représentant le vide de la théorie.

Ainsi, si H_{exact} et $|\Psi_{exact}\rangle$ désignent respectivement le Hamiltonien exact et l'état fondamental exact du système à N corps, alors :

$$\frac{\langle \Phi_0 | H[\rho] | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \Phi_0 \rangle} \approx \frac{\langle \Psi_{exact} | H_{exact} | \Psi_{exact} \rangle}{\langle \Psi_{exact} | \Psi_{exact} \rangle} \quad (2.68)$$

Par la suite, on considèrera que $|\Phi_0\rangle$ est correctement normalisé, de sorte que $\langle \Phi_0 | \Phi_0 \rangle = 1$.

2.3.3 L'Energie Fonctionnelle de la Densité

Les observables de l'état fondamental du système nucléaire se déduisent de l'énergie fonctionnelle de la densité. Nous détaillons dans ce paragraphe comment cet objet s'obtient à partir du Hamiltonien 2.50.

La substitution de l'opérateur champ nucléonique ψ par son développement 2.64 dans l'expression du Hamiltonien 2.50 conduit à :

$$H = T + \sum_m V_m \quad (2.69)$$

avec

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i,j} c_i^\dagger c_j \int d^3x \bar{f}_i [-i\gamma \cdot \nabla + M] f_j \\ V_m &= \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} c_i^\dagger c_j^\dagger c_k c_l \int d^3x_1 d^3x_2 \bar{f}_i(x_1) \bar{f}_j(x_2) \Gamma_m(1,2) D_m(x_1, x_2) f_k(x_2) f_l(x_1) \end{aligned} \quad (2.70)$$

L'Hamiltonien H est une fonctionnelle de la matrice densité ρ représentant le déterminant de Slater $|\Phi_0\rangle$ par l'intermédiaire de V_m :

$$\begin{aligned} H &= H[\rho] \\ \rho_{ij} &= \langle \Phi_0 | c_j^\dagger c_i | \Phi_0 \rangle \end{aligned} \quad (2.71)$$

Un déterminant de Slater a la propriété de pouvoir être représenté par le seule matrice densité. La condition nécessaire et suffisante pour que $|\Phi_0\rangle$ soit un déterminant de Slater est que la matrice densité ρ satisfasse à la relation $\rho^2 = \rho$.

La matrice densité ρ peut être considérée comme un opérateur agissant sur l'espace des états à une particule. D'autre part, dans la mesure où $\left[\frac{\partial}{\partial \rho}, \rho\right] = 1$, l'opérateur $\frac{\partial}{\partial \rho}$ peut être représenté par la matrice :

$$\langle i | \frac{\partial}{\partial \rho} | j \rangle = \frac{\partial}{\partial \rho_{ji}} \quad (2.72)$$

On construit l'énergie fonctionnelle de la densité comme la valeur moyenne dans l'état Hartree-Fock $|\Phi_0\rangle$ de l'Hamiltonien 2.69 (caractérisé par l'interaction nucléon-nucléon effective et phénoménologique) :

$$\mathcal{E}^{RHF}[\rho] = \langle \Phi_0 | H[\rho] | \Phi_0 \rangle \quad (2.73)$$

L'application du théorème de Wick conduit à l'expression suivante :

$$\mathcal{E}^{RHF}[\rho] = \sum_{ij} t_{ij} \rho_{ji} + \frac{1}{2} \sum_{ijkl} V_{ijkl}[\rho] \{ \rho_{li} \rho_{kj} - \rho_{ki} \rho_{lj} \} \quad (2.74)$$

avec

$$\begin{aligned} t_{ij} &= \int d^3x \bar{f}_i [-i\gamma \cdot \nabla + M] f_j \\ V_{ijkl} &= \int d^3x_1 d^3x_2 \bar{f}_i(x_1) \bar{f}_j(x_2) \Gamma_m(1,2) D_m(x_1, x_2) f_k(x_2) f_l(x_1) \end{aligned} \quad (2.75)$$

Dans la base des $\{c_i\}$, la matrice densité est diagonale :

$$\rho_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{si } i,j \text{ sont des états de type trou} \\ 0 & \text{si } i,j \text{ sont des états de type particule} \end{cases} \quad (2.76)$$

La valeur moyenne de l'opérateur énergie potentielle $V_m[\rho]$ (2.70) fait apparaître deux types de contribution :

- La contribution directe, correspondant au diagramme 2.2

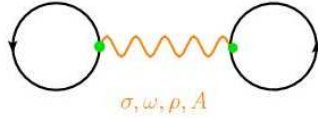


FIG. 2.2 – Contribution directe à l'énergie

$$V_m^{Direct} = \mp \frac{1}{2} \sum_{ij} \int d^3r_1 d^3r_2 [\bar{f}_i \Gamma_m(1) f_i](r_1) D_m(r_1, r_2) [\bar{f}_j \Gamma_m(2) f_j](r_2) \quad (2.77)$$

où le signe $-$ prévaut dans le cas des mésons scalaires et le signe $+$ dans les autres cas. Les constantes de couplages Γ_m sont définies par :

$$\Gamma_\sigma = g_\sigma(\rho_v) \quad (2.78)$$

$$\Gamma_\omega = g_\omega(\rho_v) \gamma^\mu \quad (2.79)$$

$$\Gamma_\rho = g_\rho(\rho_v) \gamma^\mu \vec{\tau} \quad (2.80)$$

$$\Gamma_\pi = \frac{f_\pi(\rho_v)}{m_{\pi i}} \gamma_5 \gamma^\mu \nabla \vec{\tau} \quad (2.81)$$

$$\Gamma_A = e \gamma^\mu \frac{1 - \tau_3}{2} \quad (2.82)$$

V_m^{Direct} peut se simplifier en utilisant la relation 2.47 :

$$V_m^{Direct} = \frac{1}{2} \sum_i \int d^3x [\bar{f}_i \Gamma_m \langle \phi_m \rangle f_i](x) \quad (2.83)$$

Dans cette dernière équation, les mésons et le 4-potentiel électromagnétique ne contribuent que par l'intermédiaire de leur valeur moyenne $\langle \phi_m \rangle$. En d'autres termes, les mésons interviennent sous la forme de champs classiques. On écrira par la suite ϕ_m à la place de $\langle \phi_m \rangle$, gardant en tête que les champs mésoniques ne sont désormais pas quantifiés.

Le canal direct fait à nouveau intervenir les degrés de liberté mésoniques. Il nous faut donc opérer la transformation inverse qui nous a fait passer de 2.43 à 2.44, afin d'exprimer la partie cinétique du Hamiltonien mésonique en terme des degrés de liberté mésoniques. Par conséquent :

$$\frac{1}{2} \sum_{ij} \int d^3x [\bar{f}_i \Gamma_m \phi_m f_i] (x) = \pm \frac{1}{2} \int d^3x [(\partial_\mu \phi_m)^2 + m_m^2] + \sum_{ij} \int d^3x [\bar{f}_i \Gamma_m \phi_m f_i] (x) \quad (2.84)$$

- La contribution d'échange, correspondant au diagramme 2.3

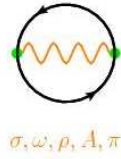


FIG. 2.3 – Contribution d'échange à l'énergie

$$V_m^{Echange} = \pm \frac{1}{2} \sum_{ij} \mathcal{I}_{ij} \int d^3r_1 d^3r_2 [\bar{f}_i \Gamma_m(1) f_j] (r_1) D_m(r_1, r_2) [\bar{f}_j \Gamma_m(2) f_i] (r_2) \quad (2.85)$$

où q_i désigne l'isospin relatif à l'état $|i\rangle$ et où

$$\mathcal{I}_{ij} \equiv \begin{cases} \delta_{q_i, q_j} & \text{dans le cas d'un couplage isoscalaire} \\ 2 - \delta_{q_i, q_j} & \text{dans le cas d'un couplage isovecteur} \end{cases} \quad (2.86)$$

En terme de l'opérateur densité, la fonctionnelle $\mathcal{E}^{RHF}[\rho]$ peut donc s'écrire :

$$\mathcal{E}^{RHF}[\rho, \phi_m] = Tr [(-i\gamma \cdot \nabla + M + \Gamma_m \phi_m) \rho] + \frac{1}{2} Tr [\mathcal{V}[\rho] \rho^\dagger \otimes \rho] \pm \frac{1}{2} \int d^3x [(\partial_\mu \phi_m)^2 + m_m^2] \quad (2.87)$$

Dans cette dernière équation, la trace introduit une sommation sur les indices de Dirac ainsi qu'une intégrale spatiale. $\mathcal{V}$ correspond à l'opérateur représenté par les éléments de matrices V_{ijkl} introduits dans 2.75. Le

produit tensoriel $\rho^\dagger \otimes \rho$ est défini par :

$$(\rho^\dagger \otimes \rho)_{ijkl} = \rho_{ik}^\dagger \rho_{lj} \quad (2.88)$$

2.3.4 Les équations Hartree-Fock relativistes

Nous cherchons à décrire l'état fondamental des noyaux atomiques. Par conséquent, nous nous plaçons dans la limite statique où les mésons sont des champs indépendants du temps. En outre, l'état fondamental des noyaux pair-pair est pair dans les transformations de renversement du temps, si bien que la composante spatiale des 4-courants intervenant comme sources dans les équations de Klein-Gordon 2.35, ainsi que la composante spatiale des mésons 4-vecteurs et du 4-potential électromagnétique ont une contribution directe (Hartree) nulle. Précisons enfin que les données expérimentales montrent que les potentiels nucléaires préservent la parité. Or, le pion, en tant que méson pseudo-scalaire, génère un potentiel de Hartree qui viole la parité. Par conséquent, le pion ne contribue pas dans le secteur de Hartree.

La base à un corps, et par là même la matrice densité et donc le déterminant de Slater sont déterminés par la minimisation de la fonctionnelle 2.87 avec la contrainte que la matrice densité réfère bien à un déterminant de Slater, *i.e.* que $\rho^2 = \rho$:

$$\delta \left\{ \mathcal{E}^{RHF} - \sum_{kl} \Lambda_{kl} (\rho^2 - \rho)_{kl} \right\} = 0 \quad (2.89)$$

Précisons que cette minimisation n'est pas liée au principe variationnel de Ritz, dans la mesure où le Hamiltonien dépend de la matrice densité. L'énergie ainsi obtenue peut notamment être inférieure à l'énergie du vrai fondamental.

La minimisation 2.89 conduit aux équations :

$$\begin{aligned} [h[\rho], \rho] &= 0 \\ (-\Delta + m_m^2) \phi_m &= \pm \text{Tr}(\Gamma_m \rho) \end{aligned} \quad (2.90)$$

où l'hamiltonien de Dirac effectif à un corps $h[\rho]$ est défini par :

$$h[\rho] = \frac{\delta \mathcal{E}^{RHF}[\rho]}{\delta \rho} \quad (2.91)$$

En développant la matrice densité sur les états à un corps :

$$\rho = \sum_{i \in F} |i\rangle \langle i| \quad (\text{dans le cas où } \rho \text{ réfère à un déterminant de Slater}) \quad (2.92)$$

la somme étant limitée aux états de la mer de Fermi composant le déterminant de Slater, on aboutit aux équations Hartree-Fock relativistes 2.90 sous une forme plus usuelle qui, compte tenu des simplifications discutées

plus haut (limite statique, invariance par renversement du temps, parité), s'écrivent en représentation de coordonnées :

$$\left\{ -i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta M^*(\mathbf{r}) + [V(\mathbf{r}) + \Sigma^R(\mathbf{r})] \right\} f_i(\mathbf{r}, q_i) + \mathcal{F}_i(\mathbf{r}) = \epsilon_i f_i(\mathbf{r}, q_i) \quad (2.93)$$

$$\begin{cases} (-\Delta + m_\sigma^2) \sigma(\mathbf{r}) = -g_\sigma(\rho_v) \rho_s(\mathbf{r}) \\ (-\Delta + m_\omega^2) \omega^0(\mathbf{r}) = g_\omega(\rho_v) \rho_v(\mathbf{r}) \\ (-\Delta + m_\rho^2) \rho_3^0(\mathbf{r}) = g_\rho(\rho_v) \rho_{tv}(\mathbf{r}) \\ -\Delta A^0(\mathbf{r}) = e \rho_c(\mathbf{r}) \end{cases} \quad (2.94)$$

Dans ces dernières équations :

- $M^*(\mathbf{r})$ désigne la masse effective de Dirac :

$$M^*(\mathbf{r}) = M + S(\mathbf{r}) \quad (2.95)$$

- $S(\mathbf{r})$ et $V(\mathbf{r})$ correspondent respectivement aux contributions directes (Hartree) de la *self-energy* scalaire et de la composante temporelle de la *self-energy* 4-vecteur (figure 2.4)

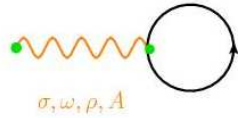


FIG. 2.4 – Contribution de Hartree à la *self-energy*

$$S(\mathbf{r}) = g_\sigma(\rho_v) \sigma(\mathbf{r}) \quad (2.96)$$

$$V(\mathbf{r}) = g_\omega(\rho_v) \omega^0(\mathbf{r}) + g_\rho(\rho_v) \rho_3^0(\mathbf{r}) \tau_3 + e A^0(\mathbf{r}) \quad (2.97)$$

- $\Sigma^R(\mathbf{r})$ réfère au potentiel de réarrangement dont l'origine tient à la dépendance explicite en la densité baryonique des constantes de couplage. Ce dernier se décompose en une contribution directe $\Sigma_H^R(\mathbf{r})$ et une contribution d'échange $\Sigma_F^R(\mathbf{r})$:

→ Contribution directe :

$$\Sigma_H^R(\mathbf{r}) = \frac{\partial g_\sigma}{\partial \rho_v} \rho_s(\mathbf{r}) \sigma(\mathbf{r}) + \frac{\partial g_\omega}{\partial \rho_v} \rho_v(\mathbf{r}) \omega_0(\mathbf{r}) + \frac{\partial g_\rho}{\partial \rho_v} \rho_{tv}(\mathbf{r}) \rho_3^0(\mathbf{r}) \quad (2.98)$$

→ Contribution d'échange, dans le cas du méson effectif σ par exemple :

$$\Sigma_F^{R,\sigma}(\mathbf{r}) = \sum_{k,l} \delta_{q,q'} \left[\frac{\partial g_\sigma}{\partial \rho_v} \bar{f}_k f_l \right](\mathbf{r}, q) \int d\mathbf{r}' \{ D_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [g_\sigma \bar{f}_l f_k](\mathbf{r}', q') \} \quad (2.99)$$

La contribution des autres mésons effectifs est détaillée dans l'annexe A.

- $\mathcal{F}_i(\mathbf{r})$ désigne la contribution de Fock de la *self-energy* correspondant à l'échange des mésons σ , ω^μ (les composantes spatiales ont une contribution non nulle), $\vec{\rho}^\mu$ (les composantes spatiales de même que les composantes isospinorielles 1 et 2 ont une contribution non nulle), $\vec{\pi}$ (ce méson contribue à travers toutes ses composantes isospinorielles) et de A^μ (les composantes spatiales ont une contribution non nulle)(figure 2.5). Les expressions détaillées sont présentées dans l'annexe A. Donnons par exemple l'expression correspondant au mésons σ :

$$\mathcal{F}_i^\sigma(\mathbf{r}) = \sum_j \delta_{q,q'} \int d\mathbf{r}' \{ D_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [g_\sigma \bar{f}_j f_i](\mathbf{r}', q') \} \beta [g_\sigma f_j](\mathbf{r}, q) \quad (2.100)$$

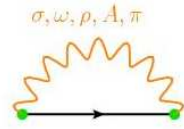


FIG. 2.5 – Contribution de Fock à la self-energy

- Les densités intervenant comme source des équations de Klein-Gordon et de Poisson font référence à la densité scalaire et à la composante temporelle des 4-courants j^μ , $\vec{j}^\mu$ et $j_{coulomb}^\mu$ ² :

$$\rho_s(\mathbf{r}) = \sum_i \bar{f}_i(\mathbf{r}) f_i(\mathbf{r}) \quad (2.101)$$

$$\rho_v(\mathbf{r}) = j^0 = \sum_i f_i^\dagger(\mathbf{r}) f_i(\mathbf{r}) \quad (2.102)$$

$$\rho_{tv}(\mathbf{r}) = j_3^0 = \sum_i f_i^\dagger(\mathbf{r}) \tau_3 f_i(\mathbf{r}) = \rho_v^{proton}(\mathbf{r}) - \rho_v^{neutron}(\mathbf{r}) \quad (2.103)$$

$$\rho_c(\mathbf{r}) = j_{coulomb}^0 = \sum_i f_i^\dagger(\mathbf{r}) \frac{1 - \tau_3}{2} f_i(\mathbf{r}) = \rho_v^{proton}(\mathbf{r}) \quad (2.104)$$

(2.105)

- q , α et β correspondent respectivement à l'isospin, aux matrices de Dirac $\gamma^0 \gamma$ et à la matrice de Dirac γ^0 dans la représentation de Dirac.

Il s'agit donc de résoudre le système couplé d'équations différentielles 2.93 : Pour résoudre l'équation de Dirac nucléonique, il est nécessaire de connaître les champs mésoniques qui interviennent par l'intermédiaire de leur potentiel de Hartree. Pour résoudre les équations de Klein-Gordon

²Le spineur ligne $\bar{f}_i$ est défini par $\bar{f}_i \equiv f_i^\dagger \gamma_0$

mésoniques ainsi que l'équation de Poisson coulombienne, la donnée des spineurs nucléoniques est indispensable afin de pouvoir calculer les sources. C'est en ce sens que ce modèle est auto-cohérent. D'un point de vue pratique, on résout numériquement ces équations comme suivant :

1. On choisit des potentiels mésoniques initiaux sous la forme de potentiels de Woods-Saxon.
2. On résout l'équation de Dirac correspondante, en omettant les termes de Fock pour la première itération. On en déduit les spineurs de Dirac $f_i(\mathbf{r})$.
3. A partir de ces spineurs de Dirac, on construit d'une part les différentes densités nucléoniques intervenant comme source des équations mésoniques, et d'autre part les potentiels de Fock $\mathcal{F}_i^m(\mathbf{r})$.
4. On résout les équations de Klein-Gordon et l'équation de Poisson avec comme source les densités calculées au cours de l'étape 3. On en déduit les champs mésoniques.
5. On réitère jusqu'à convergence les étapes 2 à 4, à la différence près que l'on résout désormais l'équation de Dirac complète, dans laquelle interviennent les mésons déterminés au cours de l'étape 4 ainsi que les termes de Fock calculés à l'étape 3.

2.3.5 Cas des systèmes à déformation axiale

2.3.5.1 Symétries et champ moyen

L'Hamiltonien nucléaire exact présente un certain nombre de symétries mises en évidence expérimentalement. Citons à titre d'exemple quelques transformations commutant avec le Hamiltonien exact : la parité, le renversement du temps, les translations spatiales, les translations dans le temps, les rotations spatiales, les rotations autour de l'axe Z de l'espace d'isospin. En revanche, ces transformations ne correspondent pas forcément à des symétries de l'Hamiltonien effectif Hartree-Fock. On peut montrer [BR86] qu'une transformation U représentant une symétrie de l'Hamiltonien vrai représente également une symétrie de l'Hamiltonien Hartree-Fock si elle laisse invariante la mer de Fermi.

La prise en compte des symétries conservées et des symétries brisées à l'approximation du champ moyen témoigne de la nature complexe des théories de champ moyen auto-cohérent par rapport aux théories à particules indépendantes définies relativement à un Hamiltonien à un corps fixe. Ainsi, la considération des symétries brisées à l'approximation du champ moyen permet d'introduire à moindre frais des corrélations nucléoniques à l'ordre le plus bas de la théorie. Par exemple, dans le cas de la brisure spontanée de la symétrie associée aux rotations spatiales, les corrélations se traduisant par une superposition d'états particule-trou de moments angulaires différents relativement à un potentiel sphérique sont prises en compte plus aisément par un déterminant de Slater associé à un champ moyen déformé.

Développons les états individuels de la mer de Fermi $|\lambda\rangle$ sur une base d'états $|n, l, j, m, q\rangle$:

$$|\lambda\rangle = \sum_{nljm q} c_{nljm q}^{\lambda} |n, l, j, m, q\rangle \quad (2.106)$$

- Pour conserver l'invariance sous les transformations de parité à l'approximation du champ moyen, il suffit de limiter le développement 2.106 à des états de l soit pair, soit impair. Ainsi, $|\lambda\rangle$ aura une parité donnée et l'opérateur parité transformera chaque orbite en elle-même, laissant invariante la mer de Fermi.
- Le Hamiltonien Hartree-Fock commute avec l'opérateur de renversement du temps si le noyau comporte un nombre pair de nucléons. Dans le cas où le Hamiltonien Hartree-Fock commute également avec la composante T_z d'isospin, la symétrie relative aux transformations par renversement du temps ne sont réalisées que pour les noyaux pair-pair.
- Les translations spatiales ne laissent pas invariante la mer de Fermi dans le cas des noyaux finis et liés.
- L'Hamiltonien Hartree-Fock est à symétrie sphérique s'il commute avec les trois composantes du moment cinétique J . Limitons le développement 2.106 comme suivant :

$$|\lambda, j_{\lambda}, m_{\lambda}\rangle = \sum_{nlq} c_{nlq}^{\lambda} |n, l, j_{\lambda}, m_{\lambda}, q\rangle \quad (2.107)$$

L'action des opérateurs $J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$ sur cet état individuel s'écrit :

$$J_{\pm} |\lambda, j_{\lambda}, m_{\lambda}\rangle = (j_{\lambda} \mp m_{\lambda})^{\frac{1}{2}} (j_{\lambda} \pm m_{\lambda} + 1)^{\frac{1}{2}} |\lambda, j_{\lambda}, m_{\lambda} \pm 1\rangle \quad (2.108)$$

Les opérateurs $J_{\pm}$ laissent donc invariante la mer de Fermi si pour chaque j_{λ} , les $2j_{\lambda} + 1$ orbites aux m_{λ} différents appartiennent toutes à la mer de Fermi ou sont toutes en dehors. Autrement dit, le noyau doit présenter le nombre précis de nucléons nécessaire pour former des couches complètes.

- Dans le cas des noyaux à symétrie axiale, la symétrie de rotation spatiale est brisée spontanément, mais l'Hamiltonien de Hartree-Fock commute toujours avec une des composantes du moment cinétique, disons J_z . La brisure de la symétrie de rotation spatiale pour les noyaux à couche ouverte induit une déformation du potentiel moyen, celui-ci gardant un axe de symétrie dans le cas axial. Les brisures de symétries s'accompagnent d'une labélisation toujours plus restreinte des états individuels. Dans le cas de la brisure de la symétrie de rotation spatiale, le développement 2.107 se restreint à :

$$|\lambda, m_{\lambda}\rangle = \sum_{nljq} c_{nljq}^{\lambda} |n, l, j, m_{\lambda}, q\rangle \quad (2.109)$$

- En ce qui concerne les rotations autour de T_z , limitons le développement 2.106 comme suivant :

$$|\lambda, q_\lambda\rangle = \sum_{nljm} c_{nljm}^{\lambda, q_\lambda} |n, l, j, m, q_\lambda\rangle \quad (2.110)$$

Chaque orbite est alors état propre de T_z qui laisse invariante la mer de Fermi. En d'autres termes, on peut parler d'orbite de proton ou de neutron sans les mélanger.

2.3.5.2 Equations Hartree-Fock relativistes en symétrie axiale

Nous nous intéressons aux noyaux pouvant être correctement décrits à partir de fonctions d'ondes variationnelles à symétrie axiale. La projection du moment cinétique sur l'axe de symétrie est une quantité conservée. Par conséquent, l'utilisation de coordonnées cylindriques $(r_\perp, \phi, z)$ s'impose d'elle-même, avec l'axe (Oz) aligné sur l'axe de symétrie. Les fonctions d'onde spinorielles $f_i(\mathbf{r})$ sont caractérisées par les nombres quantiques (Ω, Π, q) , respectivement la projection du moment cinétique sur l'axe de symétrie, la parité et la projection de l'isospin. Elle prennent la forme générale [R⁺97] :

$$f_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} F_i^+(r_\perp, z; q_i) e^{i(\Omega_i - \frac{1}{2})\phi} \\ F_i^-(r_\perp, z; q_i) e^{i(\Omega_i + \frac{1}{2})\phi} \\ iG_i^+(r_\perp, z; q_i) e^{i(\Omega_i - \frac{1}{2})\phi} \\ iG_i^-(r_\perp, z; q_i) e^{i(\Omega_i + \frac{1}{2})\phi} \end{pmatrix} \quad (2.111)$$

La résolution des équations du modèle se fait dans une base d'oscillateur harmonique déformé. Ainsi, les spineurs de Dirac sont développés sur les fonctions propres du potentiel harmonique déformé :

$$V_{osc}(r_\perp, z) = \frac{1}{2}M\omega_\perp^2 r_\perp^2 + \frac{1}{2}M\omega_z^2 z^2 \quad (2.112)$$

Les fonctions propres de l'oscillateur harmonique déformé sont caractérisés par les nombres quantiques

$$|\alpha\rangle = |n_z, n_r, m_l, m_s\rangle \quad (2.113)$$

où m_l et m_s correspondent aux projections des moments angulaire et de spin sur l'axe de symétrie (Oz) . Les nombres quantiques Ω et Π caractérisant les spineurs de Dirac $f_i(\mathbf{r})$ peuvent s'exprimer en fonction des nombres quantiques labélisant les fonctions propres de l'oscillateur harmonique déformé :

$$\Omega = m_l + m_s \quad (2.114)$$

$$\Pi = (-1)^{n_z + m_l} \quad (2.115)$$

Les fonctions propres de l'oscillateur harmonique déformé s'écrivent explicitement [R⁺97] :

$$\Phi_\alpha(r_\perp, z, \phi, s, q) = \phi_{n_r}^{m_l}(r_\perp) \phi_{n_z}(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_l\phi} \chi_{m_s}(s) \chi_{q_\alpha}(q) \quad (2.116)$$

avec

$$\phi_{n_r}^{m_l}(r_\perp) = \frac{N_{n_r}^{m_l}}{b_\perp} \sqrt{2} L_{n_r}^{m_l}(\eta) \eta^{\frac{m_l}{2}} e^{-\frac{\eta}{2}} \quad (2.117)$$

$$\phi_{n_z}(z) = \frac{N_{n_z}}{\sqrt{b_z}} H_{n_z}(\zeta) e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \quad (2.118)$$

et

$$\eta = \frac{r_\perp^2}{b_\perp^2}, \quad \zeta = \frac{z}{b_z} \quad (2.119)$$

$$b_\perp = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega_\perp}}, \quad b_z = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega_z}} \quad (2.120)$$

$$N_{n_r}^{m_l} = \sqrt{\frac{n_r!}{(n_r + m_l)!}}, \quad N_{n_z} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^{n_z} n_z!}} \quad (2.121)$$

$L_{n_r}^{m_l}(\eta)$ et $H_{n_z}(\zeta)$ désignent les polynômes de Laguerre et de Hermite.

Les spineurs de Dirac se développent dans la base d'oscillateur harmonique déformé comme suivant :

$$F_i(\mathbf{r}, q_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} F_i^+(r_\perp, z; q_i) e^{i(\Omega_i - \frac{1}{2})\varphi} \\ F_i^-(r_\perp, z; q_i) e^{i(\Omega_i + \frac{1}{2})\varphi} \end{pmatrix} = \sum_\alpha f_\alpha^{(i)}(q_i) \phi_\alpha(r_\perp, z, \varphi) \quad (2.122)$$

$$G_i(\mathbf{r}, q_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} G_i^+(r_\perp, z; q_i) e^{i(\Omega_i - \frac{1}{2})\varphi} \\ G_i^-(r_\perp, z; q_i) e^{i(\Omega_i + \frac{1}{2})\varphi} \end{pmatrix} = \sum_{\tilde{\alpha}} g_{\tilde{\alpha}}^{(i)}(q_i) \phi_{\tilde{\alpha}}(r_\perp, z, \varphi) \quad (2.123)$$

La résolution de l'équation de Dirac prend alors la forme d'un problème de diagonalisation de matrice symétrique :

$$\begin{pmatrix} A_{\alpha, \alpha'} & B_{\alpha, \tilde{\alpha}'} \\ B_{\tilde{\alpha}, \alpha'} & C_{\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{\alpha'}^{(i)}(q_i) \\ g_{\tilde{\alpha}'}^{(i)}(q_i) \end{pmatrix} = \varepsilon_i \begin{pmatrix} f_{\alpha}^{(i)}(q_i) \\ g_{\tilde{\alpha}}^{(i)}(q_i) \end{pmatrix} \quad (2.124)$$

L'expression des matrices A , B et C est détaillée dans l'annexe A. Cette dernière équation met en lumière l'avantage de travailler dans une base d'oscillateur harmonique déformé. En effet, dans l'équation de Dirac exprimée dans l'espace des coordonnées 2.93, le terme de Fock agit comme un potentiel externe non local, rendant complexe sa résolution. En revanche, dans l'équation de Dirac 2.124, considérer le terme de Fock revient à rajouter des contributions aux matrices A , B et C intervenant dans la théorie Hartree relativiste, sans changer la structure de l'équation. La non-localité introduite par le terme de Fock agit sur les intégrales spatiales contribuant aux matrices A , B et C . Ces contributions supplémentaires sont coûteuses en terme de temps de calcul. Elles imposent donc à la base d'oscillateur harmonique déformé une taille limite, à savoir celle qui permet de faire le compromis entre précision des calculs correcte et temps de calcul raisonnable.

2.4 L'APPARIEMENT NUCLÉONIQUE ET LA THÉORIE HARTREE-FOCK-BOGOLIUBOV RELATIVISTE

2.4.1 La superfluidité nucléaire

La majorité des noyaux atomiques présentent un comportement superfluide. Les signatures expérimentales correspondantes sont bien connues, comme le *backbending* ou encore le *staggering* pair-impair. La superfluidité est la manifestation macroscopique de l'appariement des nucléons dans des états de spins opposés à l'échelle du système à N corps. Les paires de Cooper ainsi liées se comportent en première approximation comme des bosons relativement indépendants au sein du système à N corps. Une partie de l'interaction résiduelle, négligée dans l'approximation du champ moyen, est à l'origine de l'interaction d'appariement nucléonique.

Les excitations élémentaires du système nucléaire se construisent à partir de l'état fondamental Hartree-Fock en promouvant un nucléon depuis un état occupé vers un état vide autour du niveau de Fermi. On comprend aisément que l'énergie d'une telle configuration est d'autant plus grande que l'espacement de couche autour du niveau de Fermi correspondant est important. Dans le cas où cet espacement de couche est important, comme dans les noyaux magiques, le couplage de l'état fondamental Hartree-Fock aux premières excitations élémentaires par l'intermédiaire de l'interaction résiduelle est négligeable. Ainsi, l'approximation Hartree-Fock, qui ne tient pas compte de l'interaction résiduelle, constitue une bonne approximation de l'état fondamental de ces noyaux. En revanche, dans le cas où cet espacement de couche est petit, comme dans les noyaux à couche ouverte, l'état fondamental Hartree-Fock est quasi dégénéré avec un certain nombre de configurations correspondant aux premières excitations élémentaires. L'état fondamental Hartree-Fock et ces configurations sont alors fortement couplés par l'interaction résiduelle et l'approximation Hartree-Fock est alors moins à même de décrire le système nucléaire dans son état fondamental.

Afin de décrire correctement de tels systèmes, il faut donc considérer les corrélations d'appariement. L'idée est d'en tenir compte tout en conservant la simplicité apportée par l'approximation du champ moyen.

2.4.2 Modélisation de l'appariement nucléonique dans les modèles relativistes

Dans le cas des noyaux sphériques et déformés proches de la vallée de la stabilité, les corrélations particule-particule sont souvent prises en compte phénoménologiquement dans le cadre de l'approximation BCS [B⁺₅₇, Gam90]. L'approximation du *gap* constant est parfois employée : les densités sont déterminées à l'aide des facteurs d'occupation BCS associés au paramètre de *gap* Δ que l'on détermine à partir des différences de masses empiriques. L'approximation BCS est mise à mal dans le cas des noyaux en rotation ou bien des noyaux proches des *drip-lines* protonique et

neutronique. En effet, dans ce dernier cas, les masses ne sont pas toujours connues expérimentalement. Plus important, la surface de Fermi du type de nucléons concerné est proche du *continuum*, si bien que les énergies de séparation nucléoniques sont comparables aux *gaps* d'appariement. La diffusion des paires de Cooper dans le *continuum* par les corrélations d'appariement se retrouvent magnifiée. Elle conduit à la présence d'un gaz de nucléons non physique entourant le noyau [D⁺96]. En conséquence, l'approximation BCS conduit à des prédictions très éloignées des observations expérimentales en ce qui concerne les observables liées à la densité nucléonique. A titre d'exemple, les modèles s'appuyant sur l'approximation BCS prédisent une augmentation exagérée des rayons neutroniques pour les noyaux à couche ouverte riches en neutrons. Pour ces noyaux faiblement liés, un traitement unifié et auto-cohérent du champ moyen et des corrélations d'appariement est nécessaire : ceci est mis en œuvre dans le cadre du formalisme Hartree-Fock-Bogoliubov.

La première extension relativiste des modèles HFB fut introduite dans [Kuc91]. Dans le modèle Hartree-Bogoliubov correspondant, la quantification des champs mésoniques permet de former des opérateurs de type $\psi^\dagger\psi^\dagger$ et $\psi\psi$. Les équations Hartree-Bogoliubov relativistes se dérivent à partir des fonctions de Green normales et anormales. Dans les premières applications à la matière nucléaire, les canaux particule-trou et particule-particule étaient caractérisés par le même jeu de paramètres. La fonctionnelle résultante conduit à une forte surestimation des corrélations d'appariement. En particulier, les *gaps* d'appariement à la surface de Fermi sont prédits trois fois trop grands [Rino4]. L'origine de cette surestimation réside dans l'absence de *cut-off* en impulsion pour ces fonctionnelles, si bien qu'elles présentent un comportement totalement erroné aux grandes impulsions, ou de façon équivalente, aux petites distances. L'idée est donc d'utiliser des paramètres différents dans les canaux particule-trou et particule-particule, ce qui se justifie dans le cadre d'une approche de type énergie fonctionnelle de la densité.

Cependant, nous ne disposons pas de force effective dans le canal particule-particule dérivée de façon cohérente à partir des données expérimentales relatives aux diffusions de nucléons. Il existe en revanche des forces nues permettant une description correcte de l'appariement dans la matière nucléaire [Bal90; SR02b], dont le potentiel de Bonn par exemple. Malheureusement, les difficultés techniques n'autorisent pas leur emploi pour la description des noyaux finis [Rino4].

En lieu et place d'une interaction d'appariement effective ou nue, une interaction d'appariement phénoménologique et non relativiste est employée dans le cadre de la théorie Hartree-Fock-Bogoliubov relativiste. Le choix d'une interaction d'appariement non relativiste sera justifié dans la section suivante.

2.4.3 Le formalisme Hartree-Fock-Bogoliubov relativiste

Afin de prendre en compte les corrélations d'appariement, l'état de référence $|\Phi_0\rangle$ doit être choisi sous une forme plus générale qu'un déterminant de Slater de particules. Ainsi, les fermions indépendants ne sont plus représentés par les nucléons "habillés", mais par des quasi-particules caractérisées par un jeu d'opérateurs à un corps $\{\eta_k\}$ faisant intervenir les opérateurs de création et d'annihilation de particules $\{c_k^\dagger, c_k\}$. Bogoliubov proposa de retenir les combinaisons linéaires de la forme :

$$\eta_k = \sum_l U_{lk}^* c_l + V_{lk}^* c_l^\dagger \quad (2.125)$$

$$\eta_k^\dagger = \sum_l V_{lk} c_l + U_{lk} c_l^\dagger \quad (2.126)$$

Cette transformation unitaire peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^\dagger & V^\dagger \\ V^T & U^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ c^\dagger \end{pmatrix} \quad (2.127)$$

L'état de référence auxiliaire est choisi comme le vide de quasi-particules :

$$\begin{aligned} |\Phi_0\rangle &= \prod_k \eta_k |0\rangle \\ \forall k \eta_k |\Phi_0\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2.128)$$

Après introduction d'une interaction d'appariement phénoménologique $\mathcal{V}^{pp}$, la nouvelle fonctionnelle est obtenue comme valeur moyenne de l'Hamiltonien $H'[\rho, \kappa] = H[\rho, \kappa] - \lambda_N N - \lambda_Z Z^3$ dans l'état de référence HFB $|\Phi_0\rangle$ supposé normalisé :

$$\mathcal{E}^{RHFB}[\rho, \phi, \kappa] = \langle \Phi_0 | H' | \Phi_0 \rangle = \mathcal{E}^{RHF}[\rho, \phi] + \mathcal{E}^{pair}[\kappa] \quad (2.129)$$

où

$$\rho_{ji} = \langle \Phi_0 | c_i^\dagger c_j | \Phi_0 \rangle = (V^* V^T)_{ji} \quad (2.130)$$

$$\kappa_{ji} = \langle \Phi_0 | c_i c_j | \Phi_0 \rangle = (V^* U^T)_{ji} \quad (2.131)$$

désignent respectivement la matrice densité à un corps et la densité anormale (ou tenseur d'appariement) de l'état HFB, et où $\mathcal{E}^{pair}[\kappa]$ peut s'écrire sous la forme générale

$$\mathcal{E}^{pair}[\kappa] = \frac{1}{4} \text{Tr}(\kappa^* \mathcal{V}^{pp} \kappa) \quad (2.132)$$

La valeur moyenne fait intervenir l'opérateur H' de sorte que la minimisation se fait sous les contraintes

$$\langle \Phi_0 | N | \Phi_0 \rangle = N, \quad \langle \Phi_0 | Z | \Phi_0 \rangle = Z \quad (2.133)$$

assurant le bon nombre de nucléons en moyenne dans l'état $|\Phi_0\rangle$. En effet, la prise en compte des corrélations d'appariement dans le formalisme

³ λ_N et λ_Z représentent respectivement les potentiels chimiques neutronique et protonique.

HFB se traduit par l'abandon de la conservation du nombre de nucléons dans le noyau (brisure spontanée de symétrie). De la même façon que l'apparition du potentiel moyen (déformé) caractérise la brisure spontanée de la symétrie de translation (rotation spatiale), la brisure spontanée de la symétrie du bon nombre de nucléon engendre le potentiel d'appariement Δ .

Après introduction de la matrice densité généralisée de Valatin $\mathcal{R}$ [Val61]

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \rho & \kappa \\ \kappa^* & 1 - \rho^* \end{pmatrix} \quad (2.134)$$

l'énergie RHFB peut s'exprimer comme une fonctionnelle de $\mathcal{R}$ et des champs mésoniques effectifs ϕ_m : $\mathcal{E}^{RHFB} = \mathcal{E}^{RHFB}[\mathcal{R}, \phi_m]$. La minimisation de la fonctionnelle $\mathcal{E}^{RHFB}$ conduit aux équations :

$$[\mathcal{H}, \mathcal{R}] = 0 \quad (2.135)$$

$$(-\Delta + m_\phi^2)\phi_m(\mathbf{r}) = s_m(\mathbf{r}) \quad (2.136)$$

Dans ces dernières équations :

- L'Hamiltonien Hartree-Fock-Bogoliubov s'écrit

$$\mathcal{H} = \frac{\delta \mathcal{E}^{RHFB}}{\delta \mathcal{R}} \quad (2.137)$$

Les équations RHFB se présentent sous la forme d'équations aux valeurs propres de $\mathcal{H}$:

$$\int d^3r' \begin{pmatrix} h(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \lambda & \Delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ -\Delta^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & -h(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_k(\mathbf{r}') \\ V_k(\mathbf{r}') \end{pmatrix} = E_k \begin{pmatrix} U_k(\mathbf{r}) \\ V_k(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad (2.138)$$

où le champ de Dirac auto-cohérent $h = \frac{\delta \mathcal{E}^{RHFB}}{\delta \rho}$ correspond au Hamiltonien Hartree-Fock dérivé précédemment. Il comporte d'une part les contributions des termes cinétique, potentiel direct et de ré-arrangement, tous trois locaux, et d'autre part du terme potentiel d'échange non local.

Le champ d'appariement $\Delta = \frac{\delta \mathcal{E}^{RHFB}}{\delta \kappa}$, relativiste pour l'instant, introduit les corrélations particule-particule.

- Les sources $s_m(\mathbf{r})$ intervenant dans les équations de Klein-Gordon mésoniques correspondent aux différentes densités :

$$s_\sigma(\mathbf{r}) = \rho_s(\mathbf{r}) = \sum_k V_k^\dagger(\mathbf{r}) \gamma^0 V_k(\mathbf{r}) \quad (2.139)$$

$$s_\omega(\mathbf{r}) = \rho_v(\mathbf{r}) = \sum_k V_k^\dagger(\mathbf{r}) V_k(\mathbf{r}) \quad (2.140)$$

$$s_\rho(\mathbf{r}) = \rho_{tv}(\mathbf{r}) = \sum_k V_k^\dagger(\mathbf{r}) \tau_3 V_k(\mathbf{r}) \quad (2.141)$$

$$s_{coul}(\mathbf{r}) = \rho_{coul}(\mathbf{r}) = \sum_k V_k^\dagger(\mathbf{r}) \frac{1 - \tau_3}{2} V_k(\mathbf{r}) \quad (2.142)$$

Revenons plus en détails sur le champ d'appariement Δ . Dans un premier temps, Δ est pris comme un potentiel relativiste. Il a alors la structure de Lorentz suivante :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_{++} & \Delta_{+-} \\ \Delta_{-+} & \Delta_{--} \end{pmatrix} \quad (2.143)$$

Les indices $++$, $+-$, $-+$, $--$ réfèrent aux grande et petite composantes spinorielles. Le champ d'appariement Δ est relié à l'interaction d'appariement $\mathcal{V}^{pp}$ comme suivant :

$$\Delta_{ab}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2} \sum_{c,d} \mathcal{V}_{abcd}^{pp}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \kappa_{dc}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2.144)$$

où a, b, c, d correspondent aux indices spinoriels. La forme du potentiel relativiste $\mathcal{V}^{pp}$ ainsi que les effets relativistes de l'appariement ont été estimés dans [SR02a]. L'étude est basée sur une interaction d'appariement relativiste de portée nulle :

$$\mathcal{V}^{pp}(1, 2) = \gamma^0(1) \gamma^0(2) [c_\sigma + c_\omega \gamma^\mu(1) \gamma_\mu(2)] \delta^{(3)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (2.145)$$

Il en ressort que Δ_{+-} est plus petit d'un ordre de grandeur que les composantes diagonales de Δ . En outre, Δ_{+-} est plus petit de plusieurs ordres de grandeur que les éléments de matrice correspondants de l'Hamiltonien h . D'autre part, les corrélations d'appariement ont lieu dans une fenêtre d'énergie de l'ordre de quelques MeV autour de la surface de Fermi. En conséquence, Δ_{--} n'induit aucun effet au niveau de l'appariement dans les noyaux finis. Une bonne approximation consiste alors à négliger les composantes Δ_{+-} , Δ_{-+} et Δ_{--} et à utiliser un potentiel d'appariement non-relativiste pour le calcul de Δ_{++} . Comme proposé dans [GL⁺96], nous utilisons la force de Gogny non-relativiste

$$\mathcal{V}^{pp}(1, 2) = \sum_{i=1,2} e^{-\left(\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\mu_i}\right)^2} [W_i + B_i P^\sigma - H_i P^\tau - M_i P^\sigma P^\tau] \quad (2.146)$$

pour le calcul de Δ_{++} , avec le jeu de paramètres D1S.

2.5 OPTIMISATIONS NUMÉRIQUES

La traitement explicite des termes d'échange dans le cadre de la théorie RHFB prenant en compte la déformation nucléaire et les corrélations d'appariement conduit à une complication aussi bien théorique que numérique. Cette section présente la procédure numérique adoptée pour prédire les observables des noyaux atomiques dans leur état fondamental.

2.5.1 Paramétrisations

Les calculs RHF présentés dans le chapitre 3 de ce mémoire de thèse reposent sur les paramétrisations PKO2 et PKO3 (cf. tableau 2.2) [L⁺06].

L'interaction PKO2 correspond à une densité lagrangienne n'incluant pas explicitement le pion ni le couplage tensoriel nucléon- ρ . L'interaction PKO3 est associée à une densité lagrangienne traitant explicitement le pion mais pas le couplage tensoriel nucléon- ρ .

	PKO2	PKO3	DDME2
m_σ (MeV)	534.461792	525.667664	555.1238
m_ω (MeV)	783.000000	783.000000	783.0000
m_ρ (MeV)	769.000000	769.000000	769.0000
$g_\sigma(\rho_{sat})$	8.920597	8.895635	10.5396
$g_\omega(\rho_{sat})$	10.550553	10.802690	13.0189
$g_\rho(\rho_{sat})$	2.163268	2.030285	3.6836
$f_\pi(0)$	0.000000	1.000000	0.0000
a_σ	1.375772	1.244635	1.3881
b_σ	2.064391	1.566659	1.0943
c_σ	3.052417	2.074581	1.7057
d_σ	0.330459	0.400843	0.4421
a_ω	1.451420	1.245714	1.3892
b_ω	3.574373	1.645754	0.9240
c_ω	5.478373	2.177077	1.4620
d_ω	0.246668	0.391293	0.4775
a_ρ	0.631605	0.635336	0.5647
a_π	0.000000	0.934122	0.0000

TAB. 2.2 – Paramètres des interactions PKO2, PKO3 et DDME2

2.5.2 Nombre de couches d'oscillateur

La prise en compte explicite des termes d'échange entraîne un potentiel moyen non local. Par conséquent, l'équation de Dirac nucléonique en représentation coordonnées est complexe à résoudre. Une méthode de résolution consiste à développer les spineurs nucléoniques et les champs mésoniques dans une base d'oscillateur harmonique déformé [R⁺97]. Plus la taille de la base sera grande, plus les résultats seront précis. Dans la base d'oscillateur harmonique, la résolution de l'équation de Dirac prend la forme d'une diagonalisation matricielle (2.124). Les éléments de matrices font intervenir des intégrales non séparables $I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}$ (cf annexe A). Ces dernières correspondent à des tableaux de dimension n_f^4 , où n_f est la taille de la base fermionique. Ces intégrales nous imposent les contraintes de calcul les plus sévères. Après parallélisation du code via OpenMP, les calculs sont menés dans une base dont le nombre de couches d'oscillateur vaut $N_f = 6$ correspondant à une taille $n_f = 119$. Le temps de calcul dépend bien entendu du nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la convergence. Pour $N_f = 6$, elle est atteinte entre huit heures et un jour sur un processeur 2× quatre core Intel(R) Xeon(R) L5420@2.50GHz.

Afin d'apporter des arguments quant à ce choix pour le nombre de couches d'oscillateur, les observables de l'état fondamental du noyau ^{16}O prédites par l'interaction PKO2 dans le cadre du modèle RHFB que nous avons développé ont été comparées à celles obtenues à partir de la même interaction PKO2 dans le cadre du modèle RHF+BCS de W. Long *et al.* [L⁺06]. Le premier calcul fait intervenir un développement dans une base d'oscillateur harmonique déformé avec un nombre de couches égal à six. Le second calcul résout l'équation de Dirac à un corps dans l'espace des coordonnées pris comme une sphère de rayon $R_{max} = 20\text{fm}$ discrétisée en un réseau de pas $a = 0.1\text{fm}$. Il en ressort que l'écart relatif entre les ob-

servables varie entre 0.2% et 0.7%. Quant aux énergies individuelles, elles diffèrent de quelques dizaines de keV. La même analyse a été réalisée dans le noyau ^{40}Ca . L'écart relatif entre les observables varie entre 0.3% et 1% et les énergies individuelles diffèrent de 50 keV à 200 keV. En conséquence, le choix $N_f = 6$ est adapté à la description des noyaux légers.

2.5.3 Nombre de points d'intégrations

L'intégrale $I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}$ (cf annexe A) consiste en une intégrale 2D non séparable dans l'espace des impulsions faisant à son tour intervenir deux intégrales spatiales 2D non séparables. Les intégrales spatiales sont évaluées par les méthodes de Gauss-Laguerre pour $r_\perp$ et Gauss-Hermite pour z . Le réseau spatial associé est donc de taille $N_{Lag} \times N_{Herm}$, où N_{Lag} désigne le nombre de points intervenant pour l'intégrale sur $r_\perp$ et N_{Herm} le nombre de points intervenant pour l'intégrale sur z . De même, l'intégrale dans l'espace des impulsions est évaluée par la méthode de Gauss-Legendre et est associée à un réseau de taille $N_{Leg} \times N_{Leg}$.

Les calculs reposant sur les interactions PKO2 et PKO3 font intervenir des réseaux de taille 20×20 pour les intégrales spatiales aussi bien que pour les intégrales dans l'espace réciproque.

2.5.4 Termes de réarrangement

Les termes de réarrangement sont les objets les plus lourds à calculer. Ils font en effet intervenir des intégrales $K_{\alpha\alpha'\mu\nu;\nu'\mu'}$ (cf annexe A) de taille n_f^6 . L'origine de ces termes réside dans la dépendance en densité explicite des constantes de couplage phénoménologiques. Par conséquent, lorsque la densité ne varie plus, les termes de réarrangement sont constants. Fort de cette constatation, une première implémentation des termes de réarrangement reposait sur la procédure suivante : Le calcul auto-cohérent RHF est mené. A chaque nouvelle itération i est déterminée la différence $\rho_v^i - \rho_v^{i-1}$. Lorsque cette différence est assez faible (écart relatif inférieur à 0.1%), les termes de réarrangement de l'itération correspondante $\Sigma_R^{i_R}$ sont stockés. Les itérations $i > i_R$ font alors intervenir $\Sigma_R^{i_R}$ nous épargnant ainsi le calcul fastidieux des termes de réarrangement.

Ce principe a été poussé beaucoup plus loin après l'étude suivante : Un calcul RHF est mené sans l'introduction de la contribution d'échange des termes de réarrangement. La densité baryonique obtenue une fois la convergence atteinte est notée ρ_{1v} . Un calcul RHF complet est ensuite mené jusqu'à convergence. La densité baryonique obtenue est appelée ρ_{2v} . Or l'écart relatif entre ρ_{1v} et ρ_{2v} est de l'ordre de 0.1%. En effet la contribution d'échange du terme de réarrangement représente une correction de 20% à la contribution directe du terme de réarrangement. De plus, les termes de réarrangements corrigent les propriétés de surface des systèmes nucléaires et ont pour conséquence qu'une influence limitée sur la densité de baryon. Dès lors, le calcul RHF est d'abord mené jusqu'à convergence sans l'introduction de la contribution d'échange des termes de réarrangement. Une fois cette première convergence atteinte, la contri-

bution d'échange des termes de réarrangement pour la densité correspondante est calculée puis stockée dans un tableau. Une autre série d'itérations comportant la contribution d'échange des termes de réarrangement stockée se déroule jusqu'à une seconde convergence qui marque la fin du calcul RHF. Nous avons vérifié que les prédictions reposant sur cette procédure présentent un écart relatif inférieur au pourcent par rapport aux résultats du calcul faisant intervenir la totalité des contributions dès le départ.

CONCLUSION

L'approche Hartree-Fock relativiste a été étendue pour décrire les noyaux atomiques déformés et superfluides. Le modèle HFB relativiste ainsi développé s'inscrit dans le cadre des approches phénoménologiques au même titre que les fonctionnelles non-relativistes de Gogny ou Skyrme. Son point de départ consiste en une densité lagrangienne décrivant la dynamique des nucléons interagissant via l'échange de mésons. Ainsi, nucléons et mésons vérifient des équations inhomogènes couplées de Dirac et Klein Gordon respectivement. Elles sont résolues dans les approximations du champ moyen et *no-sea*.

Les prédictions du modèle HFB relativiste en symétrie axiale que nous avons développé sont étudiées dans le chapitre suivant.

APPLICATION AUX NOYAUX DES CHAÎNES ISOTOPIQUES $Z = 6, 10, 12$

SOMMAIRE

3.1	PRÉDICTION DES OBSERVABLES DES SYSTÈMES NUCLÉAIRES . . .	89
3.1.1	L'interaction PKO2 du Lagrangien RHFB	89
3.1.2	Propriétés des noyaux atomiques appartenant aux chaînes isotopiques $Z = 6, 10, 12$	90
3.1.2.1	Déformation axiale	90
3.1.2.2	Masse	92
3.1.2.3	Prédiction de la <i>drip-line</i> à deux neutrons	99
3.1.2.4	Rayon de charge	101
3.1.2.5	Densités nucléoniques	103
3.1.3	Etude du ^{16}C	103
3.2	STRUCTURE EN COUCHES	106
3.2.1	Evolution du spectre individuel	106
3.2.2	Persistance du gap magique $Z = 8$	111
3.3	RÔLE DU PION DANS LES MODÈLES DE CHAMP MOYEN RELATI- VISTES	113
	CONCLUSION	117

L e modèle RHFB développé nous permet de déterminer les propriétés des noyaux atomiques dans leur état fondamental. La brisure de la symétrie sphérique nous autorise à décrire les noyaux dont l'état fondamental est à symétrie axiale. D'autre part, la prise en compte de l'appariement nucléonique dans le cadre du formalisme de Bogoliubov rend possible la description des noyaux superfluides, même proches des *drip-lines*. On en déduit les observables dans l'état fondamental du noyau considéré (potentiel chimique, déformation axiale, rayon, densité, moments quadrupolaire et hexadécapolaire, potentiel d'appariement, masse avec le détail de ses différentes contributions, ...), le spectre à particules indépendantes avec les probabilités d'occupation des niveaux, La complication numérique associée à la prise en compte des contributions

d'échange en symétrie axiale nous limite à l'étude des noyaux légers (*cf* section 2.5). Notons tout de même que le traitement des noyaux lourds est possible dès lors qu'une parallélisation plus avancée du code (via MPI (*Message Passing Interface*)) est mise en œuvre.

Les observables des noyaux composant les chaînes isotopiques $Z = 6, 10, 12$ sont étudiées dans la section 3.1 à partir de l'interaction PKO2 [L⁺06]. La section 3.2 présente l'organisation des niveaux individuels de certains noyaux composant la chaîne isotopique $Z = 12$. Enfin, la section 3.3 détaille le rôle du pion dans les modèles de champ moyen relativistes par l'intermédiaire de l'interaction PKO3 [L⁺06].

3.1 PRÉDICTION DES OBSERVABLES DES SYSTÈMES NUCLÉAIRES

3.1.1 L'interaction PKO2 du Lagrangien RHFB

Dans cette section, nous adoptons la paramétrisation PKO2 du Lagrangien RHFB. Les valeurs des paramètres du Lagrangien correspondant aux interactions PKO2, PKO3 et DDME2 sont présentées dans le tableau 2.2.

Contrairement à l'interaction PKO3, l'interaction PKO2 n'inclut pas explicitement le méson π . Sa contribution est implicitement prise en compte à travers l'ajustement aux données expérimentales. L'évolution des constantes de couplages en fonction de la densité baryonique est présentée dans les figures 3.1 à 3.4.

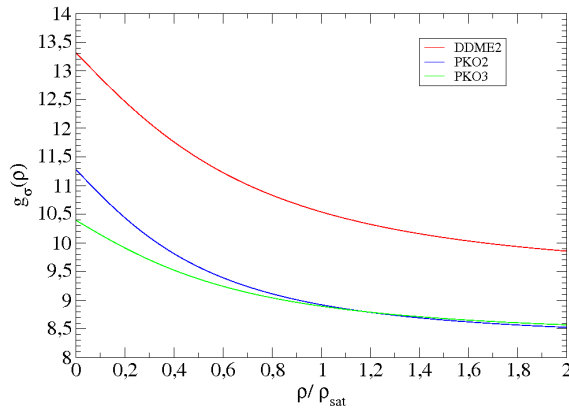


FIG. 3.1 – Constante de couplage au méson σ dans les interactions PKO2, PKO3 et DDME2

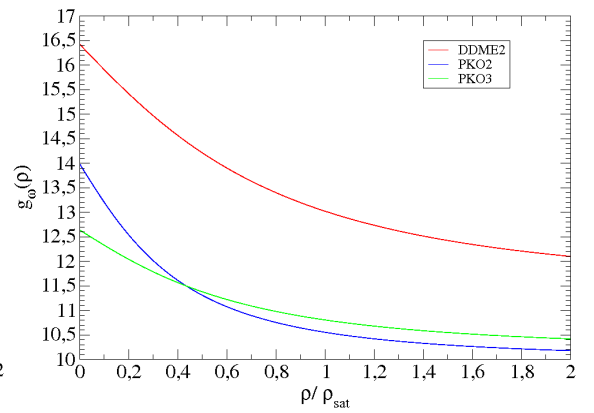


FIG. 3.2 – Constante de couplage au méson ω dans les interactions PKO2, PKO3 et DDME2

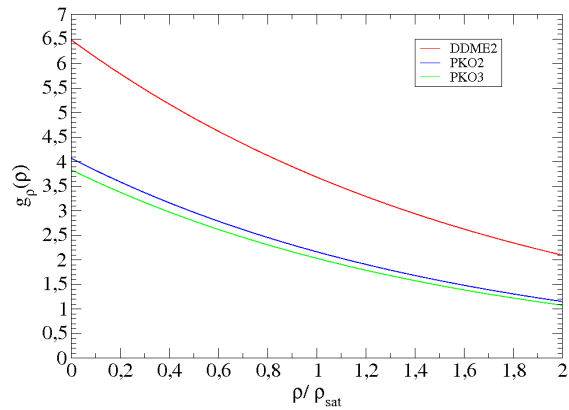


FIG. 3.3 – Constante de couplage au méson ρ dans les interactions PKO2, PKO3 et DDME2

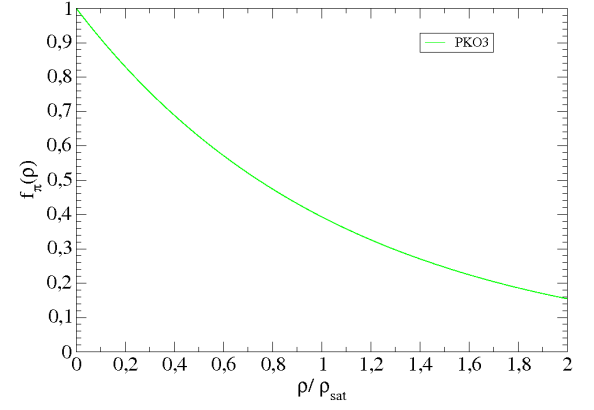


FIG. 3.4 – Constante de couplage au méson π dans l'interaction PKO3

Le traitement explicite des termes d'échange a pour conséquence de réduire l'amplitude des constantes de couplage. En opérant une transformation de Fierz, exacte dans le cas d'un couplage nucléon-nucléon ponctuel, on remarque que les constantes de couplages de la théorie RH s'organisent en combinaisons linéaires des constantes de couplage de la

théorie RHF [M⁺04b]. En d'autres termes, le traitement implicite des termes d'échange dans le cadre de l'approximation de Hartree mélange les effets de tous les canaux de l'interaction nucléon-nucléon (scalaire isoscalaire, pseudo-scalaire isovecteur, vecteur isoscalaire, vecteur isovecteur) au sein d'un même canal. Ce mélange rend difficile l'interprétation des contributions mésoniques dans le noyau à partir des modèles de type RH.

En règle générale, les constantes de couplage de l'interaction PKO2 ont une amplitude moins importante que celle de l'interaction DDME2. Leur dépendance en densité est plus prononcée dans la région $\frac{\rho}{\rho_{sat}} \leq 1$ dans le cas de l'interaction PKO2. En conséquence, la prise en compte explicite des termes d'échange à partir de l'interaction PKO2 ne conduit pas à une renormalisation triviale des constantes de couplage, *i.e* à une réduction globale de leur amplitude. Elle affecte également la forme de leur dépendance en densité qui encode les effets de polarisation du milieu et ceux dus à la structure interne du nucléon.

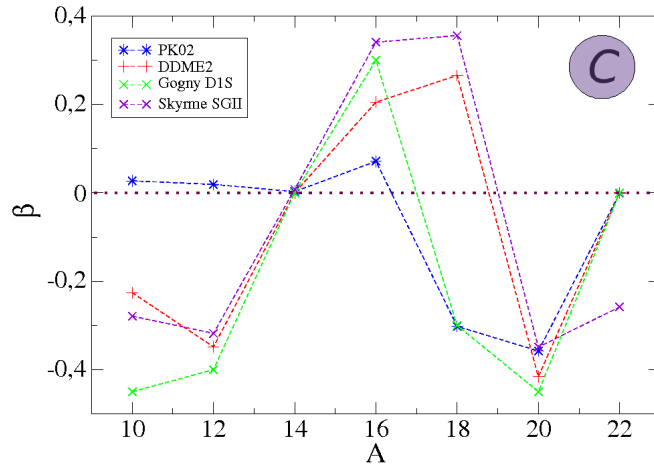
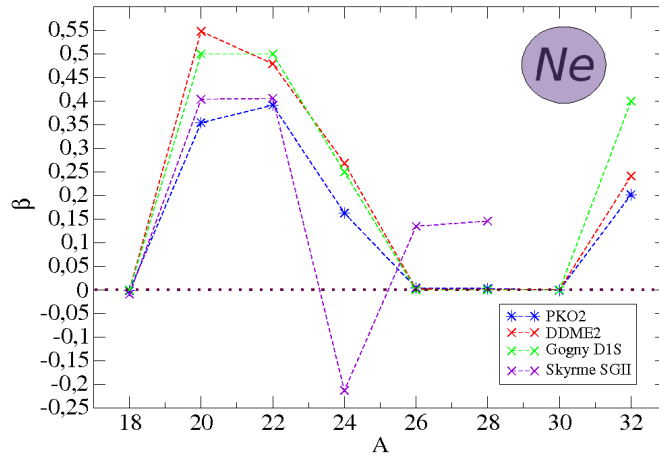
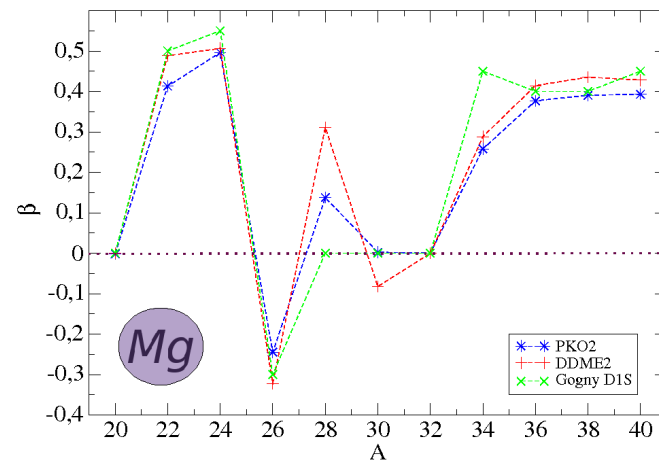
3.1.2 Propriétés des noyaux atomiques appartenant aux chaînes isotopiques $Z = 6, 10, 12$

Forme, énergie de liaison et taille représentent des caractéristiques fondamentales des noyaux atomiques et reflètent les propriétés de base des forces nucléaires effectives. Afin de tester la combinaison de l'interaction PKO2 pour le Lagrangien RHF et de l'interaction de Gogny D1S pour le canal d'appariement, les déformations axiales, masses et rayons de charge dans l'état fondamental des noyaux atomiques composant les chaînes isotopiques $Z = 6, 10, 12$ sont calculés et comparés aux données expérimentales.

3.1.2.1 Déformation axiale

Nous commençons par présenter les prédictions de la déformation axiale des noyaux composant les chaînes isotopiques $Z = 6, 10, 12$ afin de mettre en évidence la capacité de notre modèle à traiter la déformation nucléaire. Le paramètre de déformation axiale β est traité comme un paramètre libre. La valeur de β obtenue après la convergence du calcul correspond à celle qui minimise l'énergie de liaison du noyau considéré. Les figures 3.5, 3.6 et 3.7 présentent la déformation axiale prédite le long des chaînes isotopiques $Z = 6, 10, 12$ par les modèles RHFB (PKO2), RHB (DDME2) [V⁺05] HFB (Gogny D1S) [DAM] et HF+BCS (Skyrme SGII) [S⁺04].

- La chaîne isotopique des carbones ($Z = 6$) comporte des noyaux assez "mous" [DAM] : l'énergie de liaison de quelques noyaux de la chaîne ne présente pas de minimum bien marqué avec la déformation axiale. On peut tout de même relever que l'interaction PKO2 a tendance à prédire des noyaux plus proches de la sphéricité, contrairement aux deux autres interactions. Elle conclut ainsi à un état fondamental de forme légèrement prolata pour les isotopes

FIG. 3.5 – Déformation axiale dans la chaîne isotopique $Z = 6$ FIG. 3.6 – Déformation axiale dans la chaîne isotopique $Z = 10$ FIG. 3.7 – Déformation axiale dans la chaîne isotopique $Z = 12$

$N = 4$ et $N = 6$ du carbone. Les interactions DDME2, Gogny D1S et Skyrme SGII présentent une évolution similaire de la déformation axiale dans la chaîne isotopique des carbones, à quelques exceptions près (^{18}C et ^{22}C). Elles prédisent ainsi une forte dépendance isotopique de la déformation axiale : l'état fondamental sphérique du noyau magique ($N=8$) ^{14}C a pour voisins des états fondamentaux oblates ($N=4$ et $N=6$) et prolates ($N=10$ et $N=12$). L'interaction Gogny D1S aboutit à une déformation oblate pour le noyau ^{18}C , s'accordant avec l'interaction PKO2 sur la valeur de 0.3 pour le paramètre de déformation axial β . Les quatre interactions décrivent un noyau ^{20}C de forme oblate dans son état fondamental. Selon l'interaction Skyrme SGII, la forme oblate persiste dans l'isotope $N = 16$ du carbone tandis que les interactions PKO2, DDME2 et Gogny D1S prédisent une forme sphérique. Cette dernière pourrait être la signature de l'émergence du nouveau nombre magique $N = 16$ au détriment de l'affaiblissement du nombre magique $N=20$ dans les isotopes $Z < 14$ [(S⁺o8)].

- Dans la chaîne isotopique des néons ($Z = 10$), les interactions PKO2, DDME2 et Gogny D1S s'accordent qualitativement sur l'évolution du paramètre de déformation β . Comme dans la chaîne isotopique des carbones, l'interaction PKO2 conduit systématiquement à une déformation axiale de plus faible amplitude. L'interaction Skyrme SGII dévie de la tendance générale pour les noyaux ^{24}Ne , ^{26}Ne et ^{28}Ne .
- Comme dans le cas précédent, l'évolution du paramètre de déformation axiale déterminé par les interactions PKO2, DDME2 et Gogny D1S dans la chaîne isotopique des magnésiums ($Z = 12$) présente la même tendance. Les principales divergences apparaissent au niveau des noyaux ^{28}Mg et ^{30}Mg . Pour le premier, les interactions relativistes PKO2 et DDME2 s'accordent sur une forme prolates, alors que l'interaction Gogny D1S prédit un état fondamental sphérique. Quant au second, les interactions PKO2 et Gogny D1S concluent sur une forme sphérique tandis que DDME2 aboutit à une forme oblate.

Le modèle RHFB développé permet donc de prendre en compte la déformation des noyaux atomiques dans leur état fondamental. Dans le paragraphe suivant, l'énergie de liaison prédite par les interactions PKO2, DDME2 et Gogny D1S pour les noyaux sphériques et déformés composant les chaînes isotopiques $Z = 6, 10, 12$ est comparée aux données expérimentales.

3.1.2.2 Masse

L'énergie de liaison s'obtient comme :

$$\begin{aligned} E_{tot} &= E^{HFB} + E_{cm} - AM \\ &= E_{part} + E_{\sigma} + E_{\omega} + E_{\rho} + E_{\pi} + E_{coul} + E_{pair} + E_{cm} - AM \quad (3.1) \end{aligned}$$

Dans cette dernière expression :

- E_{part} correspond à la somme des énergies des particules indépendantes.
- E_m représentent les contributions directes et d'échange à l'énergie des bosons $m = \{\sigma, \omega, \rho, \pi, A\}$.
- E_{pair} désigne l'énergie d'appariement.
- E_{cm} est une correction qui élimine l'énergie cinétique du centre de masse [R⁺97].
- A désigne le nombre de nucléons et M la masse du nucléon.

Les figures 3.8, 3.9 et 3.10 présentent l'énergie de liaison des noyaux atomiques composant les chaînes isotopiques $Z = 6, 10, 12$ dans leur état fondamental. Les données expérimentales sont issues de [W⁺03].

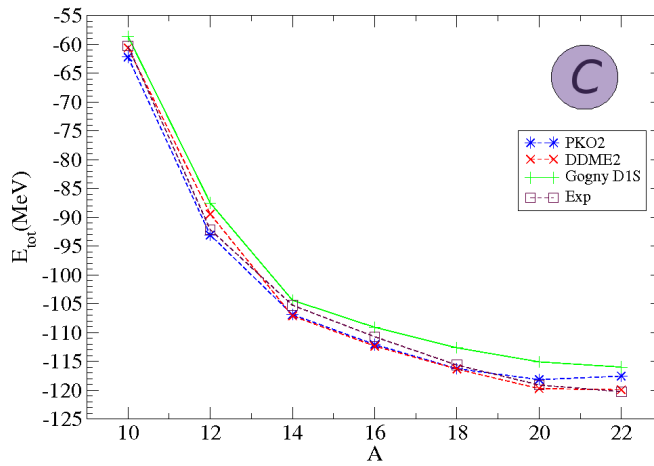


FIG. 3.8 – Energie de liaison dans la chaîne isotopique $Z = 6$

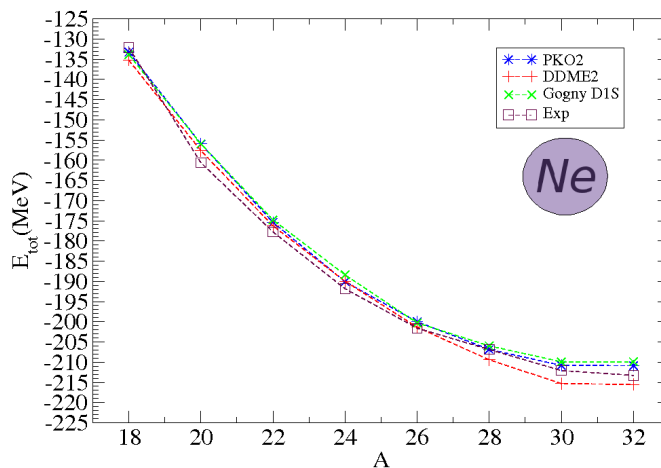
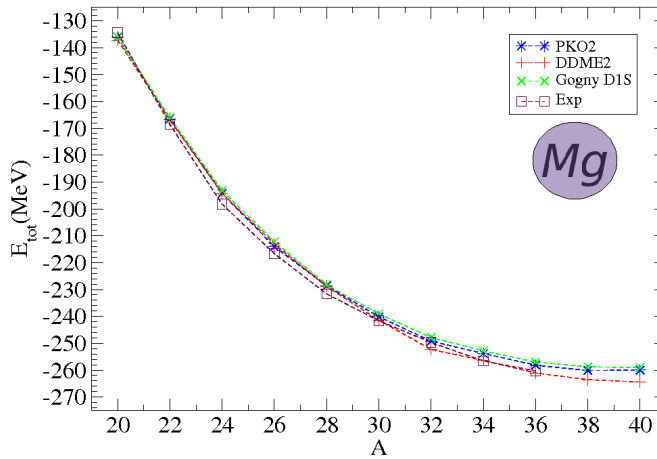
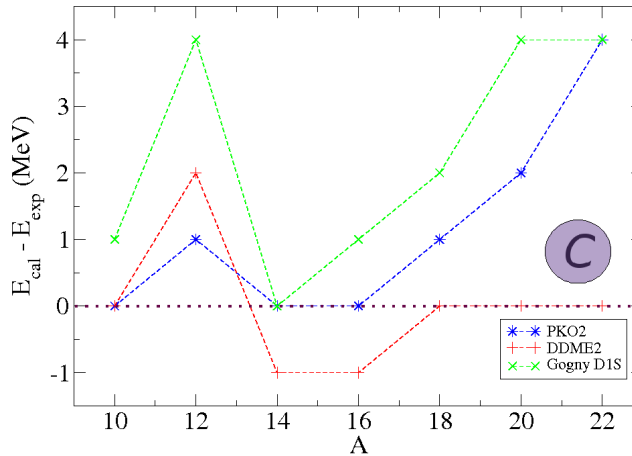


FIG. 3.9 – Energie de liaison dans la chaîne isotopique $Z = 10$

Ces figures montrent que le modèle RHFB, à travers l'interaction PKO2, est à même de reproduire qualitativement et quantitativement l'évolution de l'énergie de liaison dans les chaînes isotopiques d'étude.

FIG. 3.10 – Energie de liaison dans la chaîne isotopique $Z = 12$

En effet, elle présente la même tendance que les interactions DDME2 et Gogny D1S. Afin d'être plus précis, la déviation à l'énergie expérimentale des énergies prédites par les différents modèles est représentée dans les figures 3.11, 3.12 et 3.13.

FIG. 3.11 – Déviation de l'énergie de liaison calculée à l'énergie de liaison expérimentale dans la chaîne isotopique $Z = 6$

Le modèle RHFB conduit donc à de très bons résultats. En général, $E^{PKO2} - E^{exp} \geq 0$ tandis qu'il n'y a pas de tendance particulière dans le cas de l'interaction DDME2.

Dans la comparaison des trois forces PKO2, DDME2 et Gogny D1S, l'évaluation de l'écart-type des déviations à l'expérience précédentes (figure 3.14) permet de constater que les énergies de liaison calculées à partir de la force PKO2 correspondent aux prédictions les plus proches des données expérimentales dans le cas des chaînes isotopiques $Z = 10, 12$. Les prédictions les plus proches des mesures dans la chaîne isotopique $Z = 6$ reviennent à DDME2.

L'étude du détail des contributions des mésons effectifs à l'énergie de liaison dans les modèles RHFB (PKO2) et RHB (DDME2) permet d'étayer

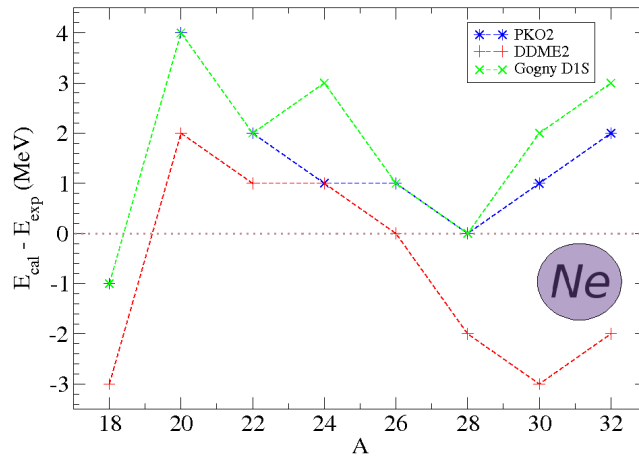


FIG. 3.12 – Déviation de l'énergie de liaison calculée à l'énergie de liaison expérimentale dans la chaîne isotopique $Z = 10$

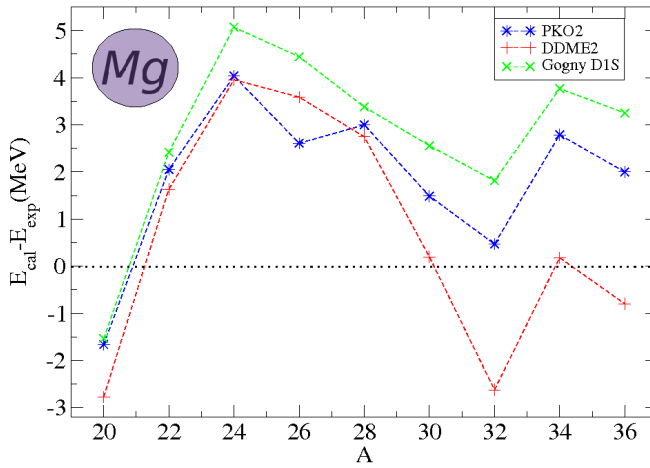


FIG. 3.13 – Déviation de l'énergie de liaison calculée à l'énergie de liaison expérimentale dans la chaîne isotopique $Z = 12$

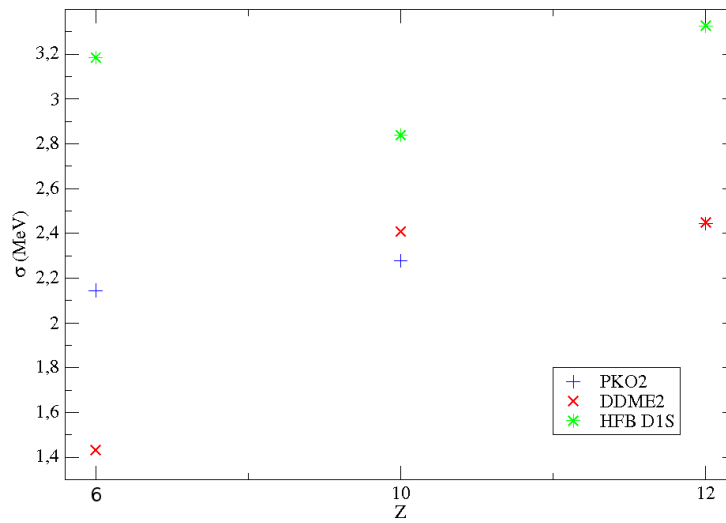


FIG. 3.14 – Ecart-type de la déviation des énergies calculées par rapport aux énergies mesurées dans les chaînes isotopiques $Z = 6$, $Z = 10$ et $Z = 12$

la discussion de la sous-section 3.1.1, à savoir le mélange des contributions des canaux isoscalaire et isovecteur dû à la prise en compte implicite des termes d'échange dans le cadre de la théorie RH. Ainsi, sur l'exemple du noyau déformé et riche en neutrons ^{38}Mg , le sacrifice du détail des différentes contributions mésoniques au profit de la simplicité inhérente aux modèles RH est mise en évidence. Ce noyau étant riche en neutron, le canal isovecteur de l'interaction nucléon-nucléon joue un rôle important. Le tableau 3.1 liste les contributions bosoniques directe et d'échange à l'énergie de liaison du noyau ^{38}Mg .

Energie bosonique	DDME2	PKO2 Direct	PKO2 Echange	PKO2 Total
$E_{\sigma}(\text{MeV})$	-4895.76	-3781.24	910.42	-2870.82
$E_{\omega}(\text{MeV})$	4076.16	2711.17	-593.45	2117.72
$E_{\rho}(\text{MeV})$	41.94	17.1	-85.61	-68.51
$E_{\text{coul}}(\text{MeV})$	31.63	31.53	-4.29	27.24
Total (MeV)	-746.03	-1021.44	227.07	-794.37

TAB. 3.1 – Contributions bosoniques directe et d'échange à l'énergie de liaison du ^{38}Mg prédites par les interactions PKO2 et DDME2.

A partir de ces valeurs, trois constatations peuvent être établies :

- La comparaison de l'amplitude des termes direct et d'échange au sein de l'interaction PKO2 indique que les contributions d'échange correspondent à une correction à l'énergie de l'ordre de 15-20 % dans les canaux isoscalaires (couplage aux mésons σ et ω), tandis qu'elles représentent la quasi-totalité de la contribution du canal isovecteur (couplage au méson ρ) (cf. figure 3.15). Les termes de Fock ne représentent donc pas une correction perturbative et ne peuvent être omis. C'est la raison pour laquelle leur prise en compte implicite dans les modèles RH engendre une renormalisation des constantes de couplage.

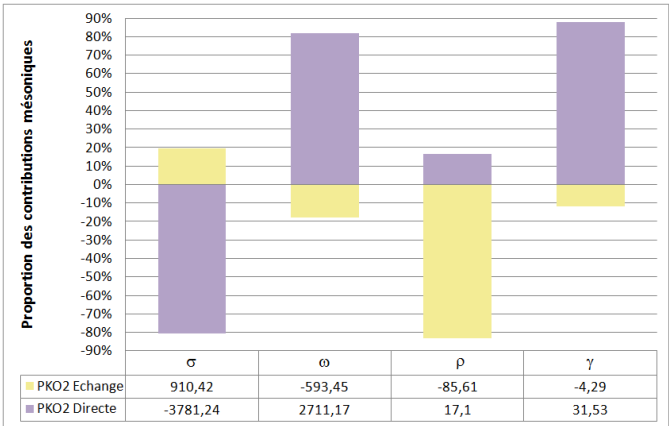


FIG. 3.15 – Proportion des contributions bosoniques directe (en violet) et d'échange (en jaune) à l'énergie de liaison du noyau ^{38}Mg issues d'un calcul reposant sur l'interaction PKO2. Les pourcentages négatifs sont à comprendre comme une indication du signe de la contribution correspondante.

- La comparaison des énergies mésoniques directes prédites par

PKO2 et DDME2 (figure 3.16) montre une nette augmentation de ces dernières lorsque l'on passe du modèle RHF au modèle RH. Ainsi, la prise en compte implicite des termes d'échange engendrent une renormalisation de 22.8%, 33.5% et 59.2% des contributions directes des mésons σ , ω et ρ respectivement.

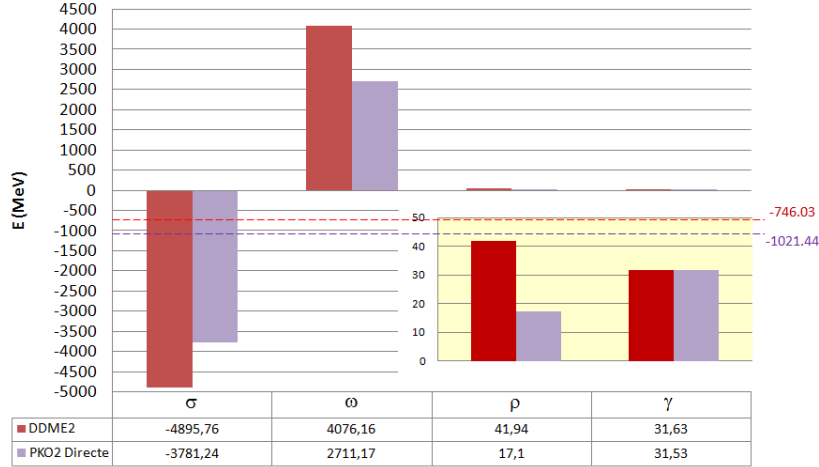


FIG. 3.16 – Contribution directe des bosons à l'énergie de liaison du noyau ^{38}Mg issues de calculs reposant sur les interactions PKO2 (en violet) et DDME2 (en rouge). Les lignes en pointillée indiquent la somme des contributions bosoniques.

- La comparaison des énergies mésoniques totales prédites par PKO2 (directe + échange) et DDME2 (directe) (figure 3.17) met en évidence la manière dont les modèles RHF et RH parviennent à des sommes des contributions bosoniques ($\sigma + \omega + \rho + \text{Coulomb}$) très proches (elles diffèrent de 6%) à partir de contributions mésoniques individuelles différentes.

Ces trois états des lieux montrent que si les interactions PKO2 et DDME2 s'accordent quant à la contribution globale des mésons à l'énergie du noyau ^{38}Mg , elles ne décrivent pas pour autant les mêmes processus physiques à l'œuvre dans le noyau. Ainsi, prenons les contributions bosoniques directes obtenues à partir de l'interaction PKO2 comme valeur de référence. La somme de ces contributions vaut -1021.44 MeV. La prise en compte explicite des termes d'échange dans le cadre de la théorie RHF réduit la contribution de chaque canal bosonique. En effet, les termes directs et ceux d'échange sont de signe opposé. Ainsi, les termes directs (-3781.24 MeV) et d'échange ($+910.42$ MeV) associés au méson σ se soustraient pour aboutir à une contribution totale du méson σ (-2870.82 MeV) inférieure en valeur absolue à la contribution directe. Au contraire la théorie RH prend en compte implicitement les termes de Fock à travers l'ajustement aux données expérimentales. Ce qu'on appelle contribution bosonique directe n'est donc pas une contribution directe telle qu'elle apparaît dans la théorie RHF, mais plutôt une contribution totale effective. Ainsi, la contribution du méson σ (-4895.76 MeV) est plus grande en valeur absolue que la contribution directe de référence donnée par

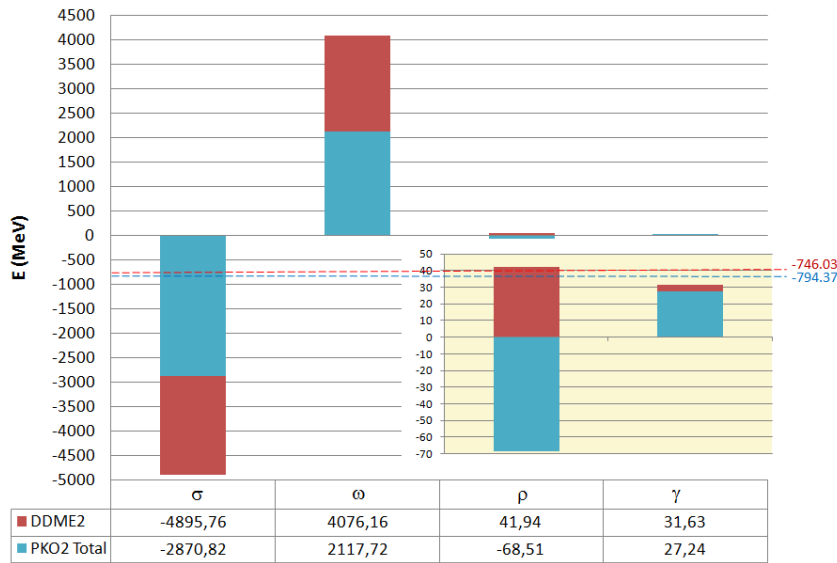


FIG. 3.17 – Contribution totale des bosons à l'énergie de liaison du noyau ^{38}Mg issues de calculs reposant sur les interactions PKO2 (en bleu) (contribution directe + contribution d'échange) et DDME2 (en rouge) (contribution directe). Les lignes en pointillée indiquent la somme des contributions bosoniques.

l'interaction PKO2 (-3781.24 MeV). Par conséquent, dans la théorie RH, l'influence du terme de Fock associé au méson σ ne se répercute pas dans le canal scalaire isoscalaire (dans le cas contraire, on aurait obtenu une contribution totale du méson σ inférieure à la valeur de référence donnée par la contribution directe de σ dans l'interaction PKO2.). Ce sont plutôt les contributions de Fock des mésons ω , ρ et du potentiel coulombien, de même signe que la contribution directe du méson σ qui renormalisent le canal scalaire isoscalaire. C'est en ce sens que l'on perd le détail de chaque contribution bosonique et que par conséquent la théorie RH ne se prête pas à l'interprétation des processus physiques associés à ces bosons.

De la même façon, la prise en compte implicite des termes de Fock renormalise le canal vecteur isoscalaire à partir d'un mélange de contributions provenant des autres canaux. En particulier, le calcul reposant sur l'interaction PKO2 indique que la quasi-totalité de la contribution du méson ρ passe par son terme de Fock. Les calculs reposant sur DDME2 aboutissent à une contribution du méson ρ grandement diminuée et de signe opposée. L'effet des corrélations du canal isovecteur, important pour la description des noyaux riches en neutrons, est donc dilué dans les canaux isoscalaires empêchant toute tentative d'analyse de ces dernières.

Pour résumer, la prise en compte explicite des termes d'échange dans le cadre de la théorie RHF conduit à une description cohérente de la physique à l'œuvre dans les noyaux. Ainsi, la contribution de Fock du canal scalaire isoscalaire affecte seulement le canal scalaire isoscalaire, et la même conclusion s'applique aux autres canaux¹. Au contraire, dans la

¹Notons que dans l'interaction PKO2, la prise en compte implicite du pion et de la contribution tenseur du méson ρ entraînent une renormalisation de tous les canaux.

théorie RH, la prise en compte implicite des termes d'échange renormalisent chaque canal de façon à reproduire correctement les observables de l'état fondamental du système considéré. Par conséquent, si tant est que l'on s'intéresse à l'interaction nucléon-nucléon dans le milieu, les modèles de type RHF correspondent à l'outil de description à adopter : les processus physiques qu'ils dépeignent sont plus propices à l'interprétation que ceux des modèles RH dans lesquels tous les effets se noient dans une forme ambiguë.

3.1.2.3 Prédiction de la *drip-line* à deux neutrons

Les modèles auto-cohérents RHB et RHFB fournissent deux quantités permettant de localiser la *drip-line* à deux neutrons :

- L'énergie de séparation à deux neutrons $S_{2n} \equiv E_{tot}(Z, N) - E_{tot}(Z, N - 2)$ où $E_{tot}(Z, N)$ est l'énergie de liaison prise positive du noyau possédant Z protons et N neutrons [G⁺01].
- Le potentiel chimique neutronique λ_n .

L'énergie de séparation à deux neutrons fournit une information « globale » sur le Q de réaction correspondant à un hypothétique transfert simultané de deux neutrons dans l'état fondamental du noyau $(Z, N - 2)$, conduisant à l'état fondamental du noyau (Z, N) . Le Q de réaction contient les informations relatives à toutes les différences de propriétés de l'état fondamental des deux noyaux mis en jeu, comme l'appariement, la déformation, Lorsque l'énergie de séparation à deux neutrons devient négative, le noyau (Z, N) peut émettre spontanément et simultanément deux neutrons, si bien qu'il se trouve au-delà de la *drip-line* à deux neutrons.

Le potentiel chimique neutronique donne une information « locale » sur la stabilité du noyau d'étude selon l'intensité de l'appariement, la déformation, Son signe renseigne sur les propriétés de localisation de la fonction d'onde HFB : cette dernière est localisée si $\lambda_n < 0$ et non localisée (*i.e.* se comporte asymptotiquement comme une onde plane) lorsque $\lambda_n > 0$. Ainsi, les noyaux tels que $\lambda_n > 0$ émettent spontanément des neutrons contrairement à ceux caractérisés par $\lambda_n < 0$ et ce indépendamment des Q de réaction disponibles pour l'émission réelle [S⁺00].

Les valeurs des énergies de séparation à deux neutrons et des potentiels chimiques neutroniques issues des calculs reposant sur les interactions PKO2 et DDME2 dans les chaînes isotopiques $Z = 6, 10, 12$ sont présentées dans les figures 3.18 à 3.23.

Dans la chaîne isotopique des carbones, les prédictions des S_{2n} de l'interaction PKO2 sont généralement meilleure que celles de l'interaction DDME2 (figure 3.18). En revanche, l'interaction PKO2 localise la *drip-line* à deux neutrons entre le noyau ^{20}C et le noyau ^{22}C , ce qui est en désaccord avec l'expérience et les résultats de l'interaction DDME2. Ainsi, l'énergie

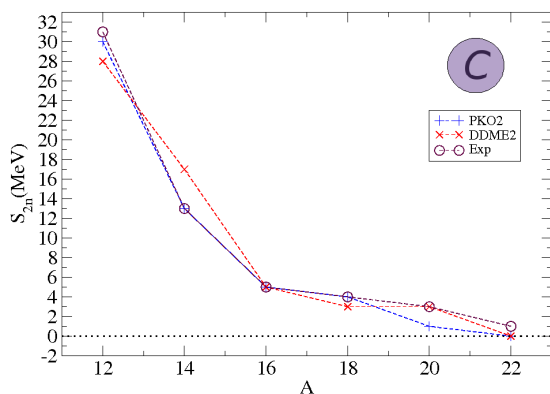


FIG. 3.18 – Energie de séparation à deux neutrons prédite par les interactions PKO2 et DDME2 dans la chaîne isotopique $Z = 6$

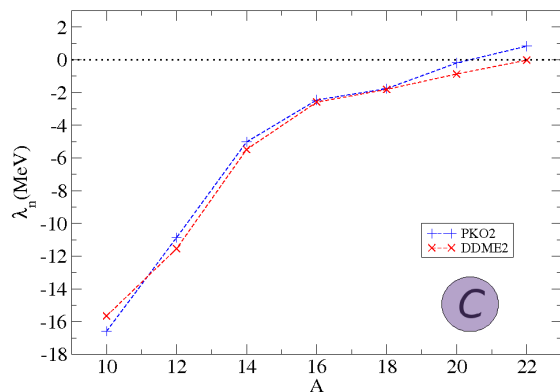


FIG. 3.19 – Potentiel chimique neutronique prédit par les interactions PKO2 et DDME2 dans la chaîne isotopique $Z = 6$

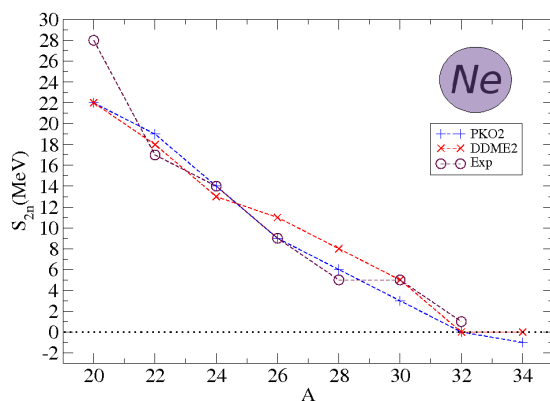


FIG. 3.20 – Energie de séparation à deux neutrons prédite par les interactions PKO2 et DDME2 dans la chaîne isotopique $Z = 10$

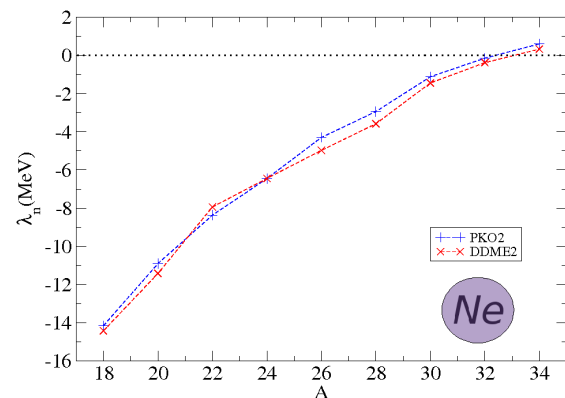


FIG. 3.21 – Potentiel chimique neutronique prédit par les interactions PKO2 et DDME2 dans la chaîne isotopique $Z = 10$

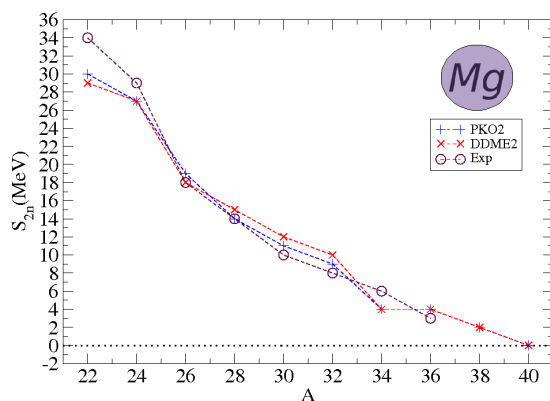


FIG. 3.22 – Energie de séparation à deux neutrons prédite par les interactions PKO2 et DDME2 dans la chaîne isotopique $Z = 12$

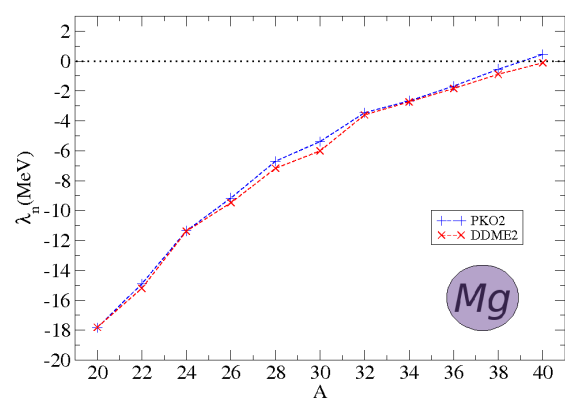


FIG. 3.23 – Potentiel chimique neutronique prédit par les interactions PKO2 et DDME2 dans la chaîne isotopique $Z = 12$

de séparation à deux neutrons pour $N = 22$ obtenue à partir de PKO2 est négative ($S_{2n} = -0,61 \text{ MeV}$) et le potentiel chimique neutronique du noyau ^{22}C est positif (cf figure 3.19).

Notons que l'interaction PKO2 prédit que la *drip-line* à deux neutrons à $Z = 8$ se situe entre le noyau ^{26}O et le noyau ^{28}O alors que des mesures expérimentales telles que celles effectuées au GANIL [Luk02] indiquent que le noyau ^{26}O est déjà non lié. A notre connaissance, ce problème général concerne l'ensemble des modèles nucléaires, qui ne peuvent reproduire à la fois la *drip-line* des oxygènes et celle des néons.

Dans la chaîne isotopique des néons, les prédictions des S_{2n} de l'interaction PKO2 sont généralement plus proche des données expérimentales (figure 3.20). Les interactions PKO2 et DDME2 s'accordent pour situer la *drip-line* à deux neutrons entre les noyaux ^{32}Ne et ^{34}Ne , comme l'indiquent les S_{2n} négatifs de même que les potentiels chimiques neutroniques positifs (figure 3.21).

La chaîne isotopique des magnésiums est un nouvel exemple montrant que l'interaction PKO2 prédit des S_{2n} généralement plus fidèles aux données expérimentales (figure 3.20). Cette dernière situe la *drip-line* à deux neutrons entre les noyaux ^{38}Mg et ^{40}Mg alors que l'interaction DDME2 la situe plus loin.

En conséquence, l'interaction PKO2 reproduit de façon très satisfaisante les énergies de séparation à deux neutrons. En revanche, elle situe les *drip-lines* neutroniques plus proches que l'interaction DDME2 dans les chaînes isotopiques $Z = 6$ et $Z = 12$. L'expérience donne raison à l'interaction DDME2 en ce qui concerne la chaîne des carbones.

3.1.2.4 Rayon de charge

Le rayon de charge est évalué à partir du rayon protonique *r.m.s.* selon la formule [R⁺97] :

$$R_0 = \sqrt{r_p^2 + 0.64} \quad (3.2)$$

où le facteur de forme 0.64 tient compte des effets de taille finie du proton.

Les rayons de charge prédits par les interactions PKO2 et DDME2 dans les chaînes isotopiques $Z = 6, 10, 12$ sont indiqués dans les figures 3.24, 3.25 et 3.26. Pour les chaînes isotopiques $Z = 10$ et $Z = 12$, nous avons bénéficié de résultats récents issus de la collaboration ISOLDE.

Dans la chaîne isotopique $Z = 6$, le rayon de charge du noyau ^{12}C prédit par l'interaction PKO2 est plus proche de la valeur expérimentale que celui prédit par l'interaction DDME2. En revanche, le rayon de charge du noyau ^{14}C prédit par l'interaction DDME2 est plus proche du centroïde expérimental que celui prédit par l'interaction PKO2.

Les rayons de charge obtenus à partir de l'interaction DDME2 dans la chaîne isotopique $Z = 10$ sont généralement plus proches des centroïdes

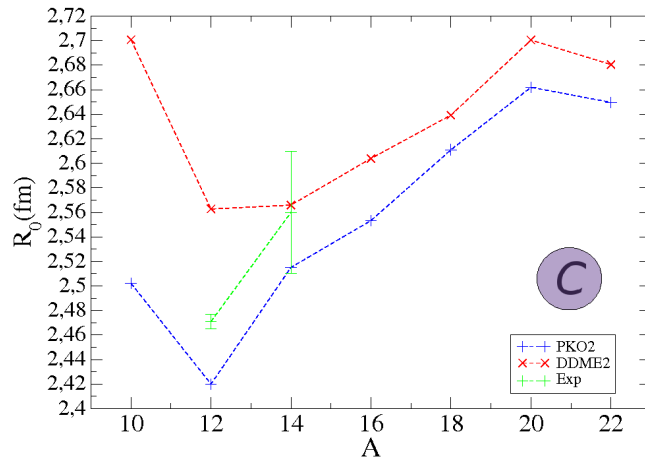


FIG. 3.24 – Rayon de charge dans la chaîne isotopique $Z = 6$. Les données expérimentales sont tirées de [$S^{+}o4$].

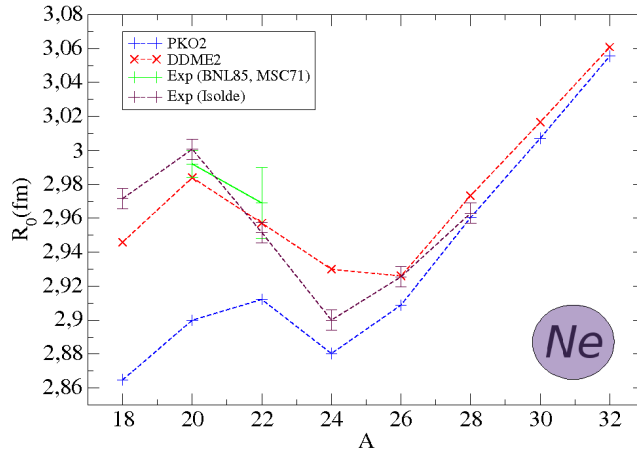


FIG. 3.25 – Rayon de charge dans la chaîne isotopique $Z = 10$. Les résultats expérimentaux d'Isolde [G^{+}] sont issus d'une communication privée. Une incertitude supplémentaire de l'ordre de 10% est à ajouter.

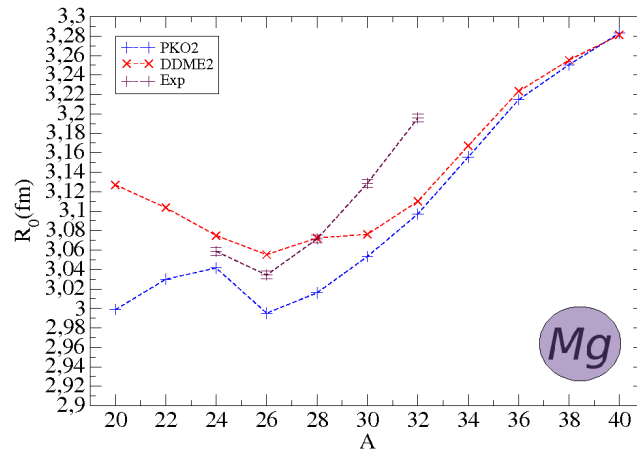


FIG. 3.26 – Rayon de charge dans la chaîne isotopique $Z = 12$. Les résultats expérimentaux sont préliminaires et proviennent de [K^{+}].

expérimentaux que ceux prédits par l'interaction PKO2. Cette dernière obtient de meilleurs résultats dans le cas des noyaux ^{24}Ne et ^{28}Ne . L'accord entre les interactions PKO2 et DDME2 s'améliore dans les noyaux plus lourds (pour A allant de 26 à 32).

Les résultats dans la chaîne isotopique $Z = 12$ sont similaires à ceux de la chaîne isotopique $Z = 10$. Ainsi, l'interaction DDME2 conduit à des prédictions plus proches des centroïdes expérimentaux et son accord avec l'interaction PKO2 est meilleur dans les noyaux plus lourds (pour A allant de 30 à 40).

3.1.2.5 Densités nucléoniques

Dans la procédure auto-cohérente de la résolution de l'équation nucléonique de Dirac et des équations mésoniques de Klein-Gordon, les spineurs nucléoniques sont obtenus une fois la convergence atteinte. Ces derniers permettent de déterminer la densité de nucléons. La figure 3.27 présente la densité de protons et neutrons calculée à partir des interactions PKO2 et DDME2 dans la chaîne isotopique des néons ($Z = 10$). Les densités nucléoniques du modèle RHB sont caractérisées par l'émergence de structures localisées possiblement artificielles. Ces dernières ne semblent pas liées à l'interaction DDME2 en particulier, mais bien au modèle RHB lui-même comme le montrent les densités nucléoniques obtenues à partir de l'interaction NL3² dans la chaîne isobarique $A = 20$ [[L⁺o1](#)] (figure 3.28).

Ces structures localisées sont beaucoup moins prononcées dans le modèle RHFB (figure 3.27). Les forces nucléaires étant de courte portée, potentiel nucléaire et profil de densité partagent la même allure. La non-localité spatiale introduite par la prise en compte explicite des termes d'échange est ainsi responsable de ce « lissage ».

3.1.3 Etude du ^{16}C

Appliquons la description de l'état fondamental à partir de notre modèle RHFB au cas du noyau riche en neutrons ^{16}C . Des mesures effectuées à RIKEN ont indiqué que ce noyau était le siège d'un découplage entre protons et neutrons. Plus précisément, une mesure du temps de vie de son premier état excité conduisit à une valeur anormalement faible du $B(E2)$ ($B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0^+) \approx 0.63e^2 fm^4$) [[Imao4](#)], tandis que des expériences de diffusion inélastique indiquaient une importante déformation nucléaire ($\beta_2^{pp'} \approx 0.47(5)$) [[Ongo6](#)]. Ces résultats suggérèrent donc un ^{16}C dans lequel les neutrons de valence se trouvent découplés d'un cœur quasi sphérique de protons. Plusieurs modèles ont corroboré ces résultats. Par exemple, K. Hagino et H. Sagawa ont adopté une description du noyau ^{16}C reposant sur un modèle à trois corps composé de deux neutrons de valence et du cœur ^{14}C [[HSo7](#)].

²NL3 est une paramétrisation du Lagrangien RHB dans lequel la dépendance en densité est prise en compte à travers l'introduction de couplages non linéaires au méson σ

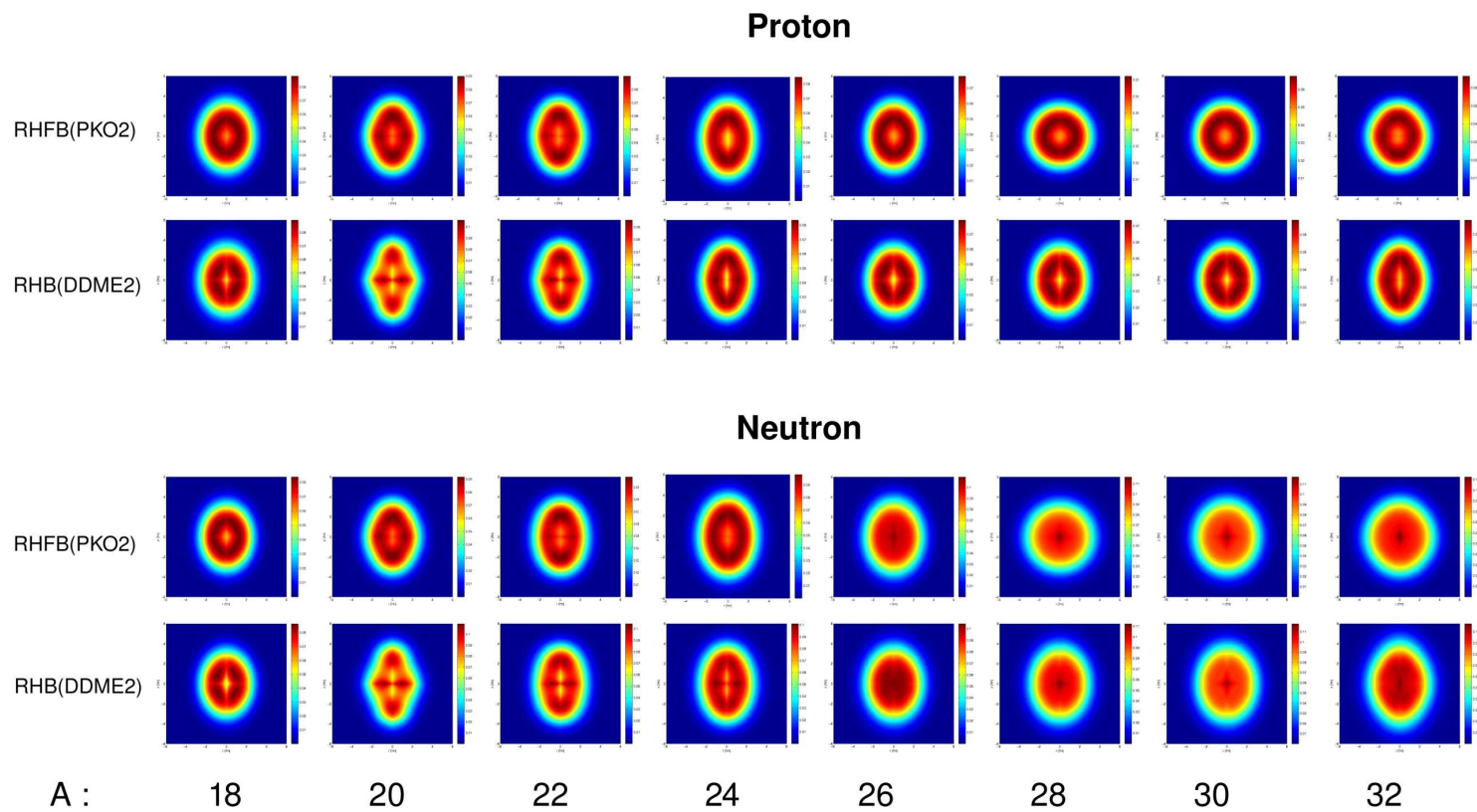


FIG. 3.27 – Densité des nucléons calculée à partir de PKO2 et DDME2 dans la chaîne isotopique $Z = 10$

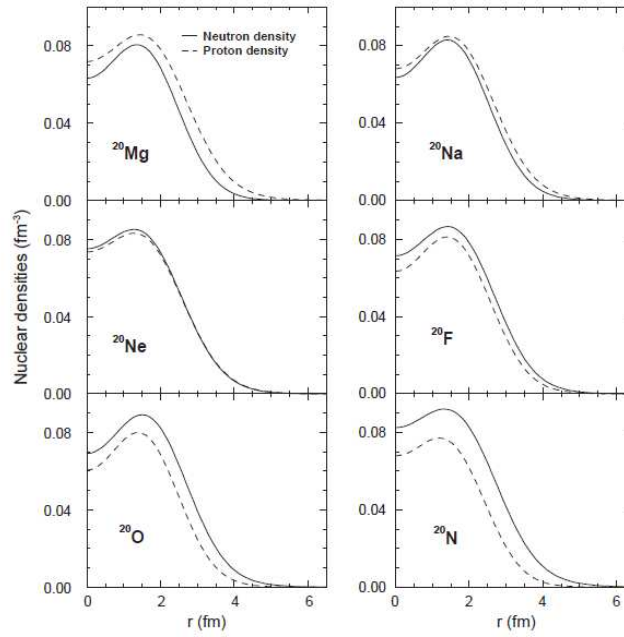


FIG. 3.28 – Densités nucléoniques prédites par l'interaction NL_3 dans la chaîne isobarique $A = 20$. Image tirée de [L⁺01].

Plus récemment, de nouvelles mesures du temps de vie du premier état excité du ^{16}C ont été effectuées à Berkeley [W⁺08]. Elles conduisent à $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0^+) \approx 4.15(73)e^2 \text{ fm}^4$, valeur qui semble plus en adéquation avec ce qui est observé dans les noyaux de même $\frac{N}{Z}$. Ces résultats, confirmés par de nouvelles mesures à RIKEN [Ele06], ne soutiennent donc plus l'interprétation du ^{16}C en terme de neutrons de valence découplés des protons.

Examinons les prédictions de l'interaction PKO2. L'accord des masses et des rayons de charge de la chaîne isotopique $Z = 6$ avec les données expérimentales disponibles justifie l'utilisation du modèle RHFB développé pour la description de l'état fondamental du noyau ^{16}C . Cette dernière semble cohérente avec les résultats de Berkeley. En effet, les déformations axiales neutronique et protonique sont prédites très proches (cf. tableau 3.2). Les rayons de neutrons et protons sont également du même ordre de grandeur.

	PKO2	DDME2
E_{tot} (MeV)	-110.14	-112.37
$E_{\text{cal}} - E_{\text{exp}}$ (MeV)	0.61	-1.62
β_{neutron}	0.08	0.24
β_{proton}	0.06	0.14
$R_{\text{neutron}}^{\text{RMS}}$ (fm)	2.74	2.88
$R_{\text{proton}}^{\text{RMS}}$ (fm)	2.42	2.48

TAB. 3.2 – Observables relatives à l'état fondamental du noyau ^{16}C

Les distributions spatiales des protons et des neutrons prédites par

PKO2 sont représentées par les figures 3.29, 3.30, et sont comparées aux prédictions de DDME2 (3.31, 3.32). Alors que l'interaction DDME2 conduit à une densité neutronique légèrement plus étendue que la densité protonique , l'interaction PKO2 prédit une répartition spatiale des protons et neutrons quasi identiques. Ces distributions spatiales très proches soutiennent également les mesures de Berkeley [W⁺o8].

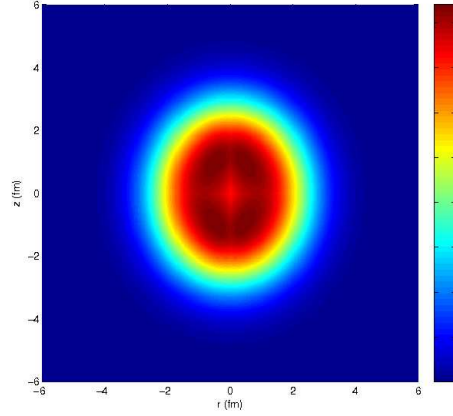


FIG. 3.29 – Densité de proton dans le noyau ^{16}C prédite par PKO2

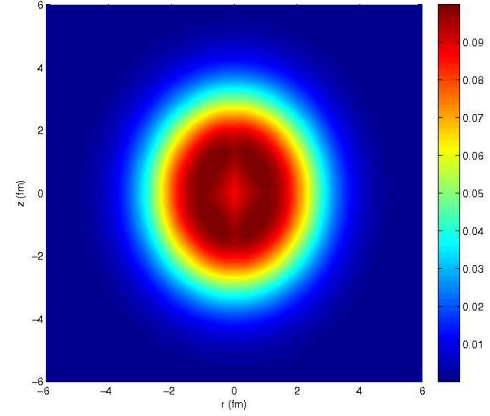


FIG. 3.30 – Densité de neutron dans le noyau ^{16}C prédite par PKO2

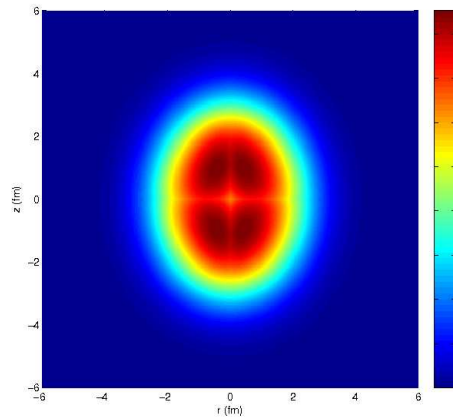


FIG. 3.31 – Densité de proton dans le noyau ^{16}C prédite par DDME2

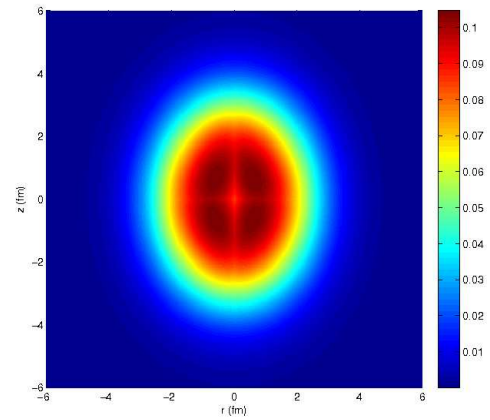


FIG. 3.32 – Densité de neutron dans le noyau ^{16}C prédite par DDME2

3.2 STRUCTURE EN COUCHES

Le modèle RHFb détermine les niveaux des particules indépendantes de façon auto-cohérente après diagonalisation du Hamiltonien de Dirac à un corps. Ces derniers sont étiquetés par les nombres quantiques de l'oscillateur harmonique déformé $2\Omega\pi[N\ n_z\ m_l]$.

3.2.1 Evolution du spectre individuel

A travers l'exemple de la chaîne isotopique des magnésiums ($Z = 12$), une comparaison des spectres individuels prédits par PKO2 et DDME2

est présentée dans les figures 3.33 à 3.42.

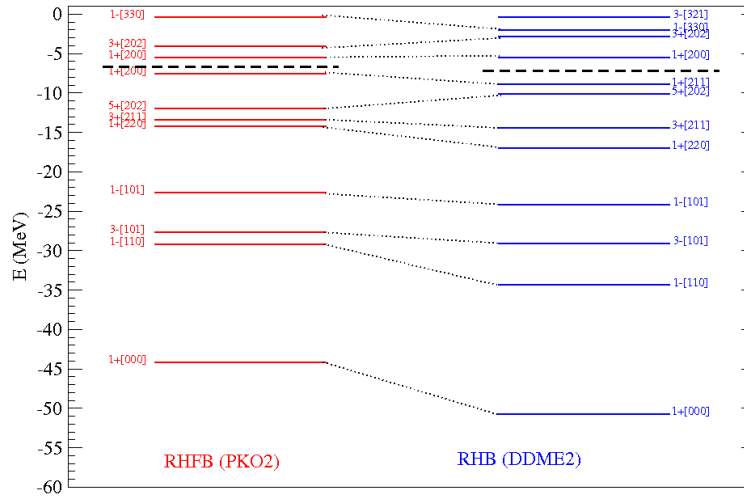


FIG. 3.33 – Niveaux neutroniques du noyau ^{28}Mg prédits par PKO2 et DDME2. Les lignes en pointillé représentent le potentiel chimique.

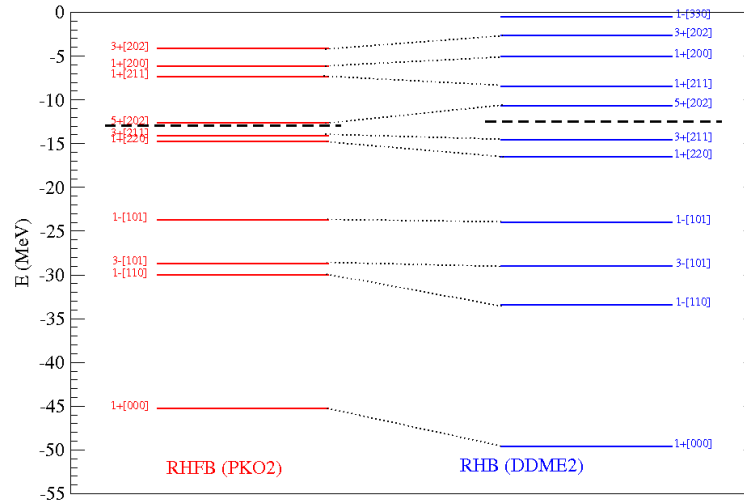
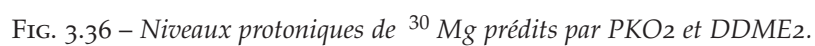


FIG. 3.34 – Niveaux protoniques du noyau ^{28}Mg prédits par PKO2 et DDME2.

La prise en compte explicite du terme de Fock a une conséquence sur l'organisation des niveaux nucléoniques. L'état $1s_{\frac{1}{2}} (1 + [000])$ est ainsi systématiquement moins profond en énergie par rapport au modèle RHB. D'autre part, on observe généralement un déplacement des niveaux de PKO2 en dessous du niveau de Fermi vers des énergies moins profondes que DDME2 et un déplacement des niveaux de PKO2 au dessus du niveau de Fermi vers des énergies plus profondes que DDME2, comme l'illustre le spectre protonique de ^{34}Mg (figure 3.40). En conséquence, la densité de niveau autour de la surface de Fermi semble plus importante dans le modèle RHFB que dans le modèle RHB. Or la densité de niveau autour de la surface de Fermi est liée à la masse effective nucléonique, telle qu'elle a été introduite dans la section 1.3 [vDM10]. Comme indiqué dans la section 1.3, la masse effective paramétrise la dépendance en moment du





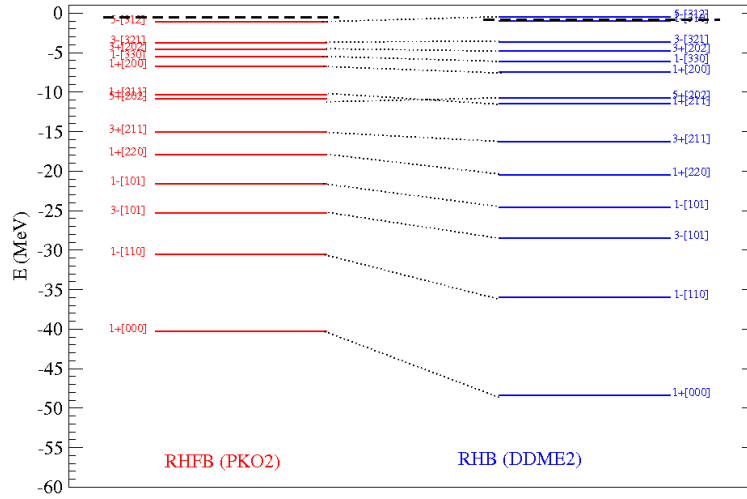


FIG. 3.41 – Niveaux neutroniques du noyau ^{38}Mg prédits par PKO2 et DDME2.

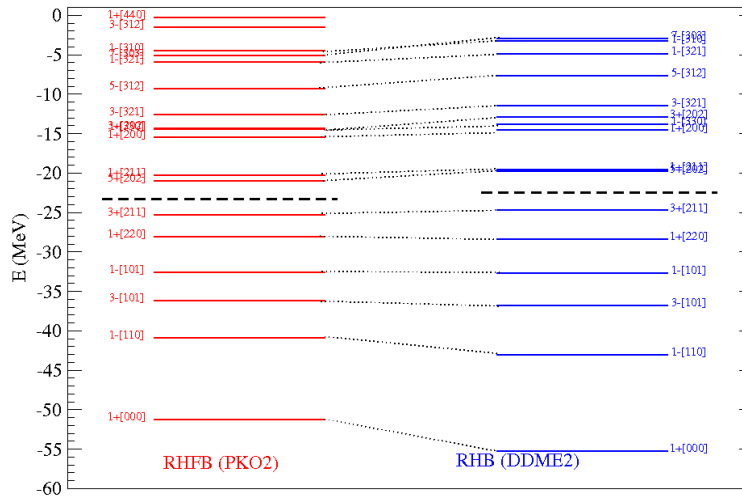


FIG. 3.42 – Niveaux protoniques du noyau ^{38}Mg prédits par PKO2 et DDME2.

potentiel moyen, si bien qu'elle représente une mesure de la non-localité de ce potentiel moyen (équation 1.77). Cette dernière peut être due à une non-localité spatiale ou une non-localité temporelle. La première engendre une dépendance en impulsion de la masse effective prise en compte dans la K-masse. La seconde entraîne une dépendance en énergie exprimée à travers la E-masse. La non-localité spatiale est principalement générée par les termes d'échange [F⁺02]. On comprend donc pourquoi la densité de niveau autour de la surface de Fermi est plus importante dans le modèle RHFB qui introduit explicitement les termes de Fock.

La prise en compte explicite des termes de Fock implique également des différences en ce qui concerne l'espacement entre niveaux individuels. Ainsi, dans le spectre neutronique de ²⁸Mg (3.33), la levée de dégénérescence du niveau $p_{\frac{3}{2}}^{-}$ ($1^{-}[110]$ et $3^{-}[101]$) est beaucoup moins prononcée dans le modèle RHFB que dans le modèle RHB. PKO2 donne un espacement de ces niveaux de l'ordre de 1,5 MeV contre 5.3 MeV pour DDME2. Il en est de même pour la levée de dégénérescence du niveau $d_{\frac{5}{2}}^{+}$ ($1^{+}[220]$, $3^{+}[211]$ et $5^{+}[202]$). Ces différences sont liées à la déformation axiale qui est prédite plus faible par PKO2 ($\beta \approx 0.14$) que par DDME2 ($\beta \approx 0.31$).

3.2.2 Persistance du gap magique $Z = 8$

La description des noyaux à partir d'une structure en couches est à la base de notre compréhension des propriétés nucléaires [M⁺55]. Une des conséquences de cette approche est l'émergence de nombres magiques, tels que les noyaux atomiques possédant un nombre particulier de protons et/ou neutrons partagent des caractéristiques communes : forme sphérique et faible probabilité d'excitation des premiers 2^{+} . On peut distinguer deux types de *gap* magique :

- Le *gap* magique de type « oscillateur harmonique »(8,20,40). Les orbites situées de part et d'autre de tels *gaps* sont de parités opposées. En conséquence, les excitations quadrupolaires ne peuvent pas se développer au niveau une particule - un trou dans la mesure où ces dernières conservent la parité.
- Le *gap* magique de type « spin-orbite »(28,50,82,126). Il fait intervenir des orbites de même parité et séparées de deux unités de moment angulaire.

Ces nombres magiques observés dans les noyaux stables peuvent évoluer dans les noyaux exotiques [S⁺08]. Par exemple, les noyaux proches de la *drip-line* neutronique peuvent présenter une peau de neutrons, si bien que leur surface est plus diffuse. Or les forces nucléaires étant de courte portée, le potentiel suit assez fidèlement le profil de densité. Le potentiel spin-orbite faisant intervenir la dérivée spatiale du potentiel, on peut s'attendre à son affaiblissement dans de tels noyaux et par consé-

quent à la modification des nombres magiques associés.

L'influence de l'interaction proton-neutron dans les canaux central, spin-orbite et tenseur sur l'évolution des nombres magiques a été étudiée en détails dans la référence [S⁺08] sur les bases du modèle en couches. On se propose d'étudier la robustesse du gap magique $Z = 8$ dans les chaînes isotopiques $Z = 10$ et $Z = 12$ dans le cadre des modèles RHFB et RHB. Le modèle de Nilsson semble indiquer que la déformation implique systématiquement la destruction du gap magique (figure 3.43). Ainsi, le gap $Z = 8$ passe de la valeur $0.55\hbar\omega$ pour $\beta = 0$ à la valeur $0.2\hbar\omega$ pour $\beta = 0.3$. Cependant, les prédictions de PKO2 ne vont pas dans ce sens. Les figures 3.44 et 3.45 présentent l'évolution du gap $Z = 8$ dans les chaînes isotopiques $Z = 10$ et $Z = 12$.

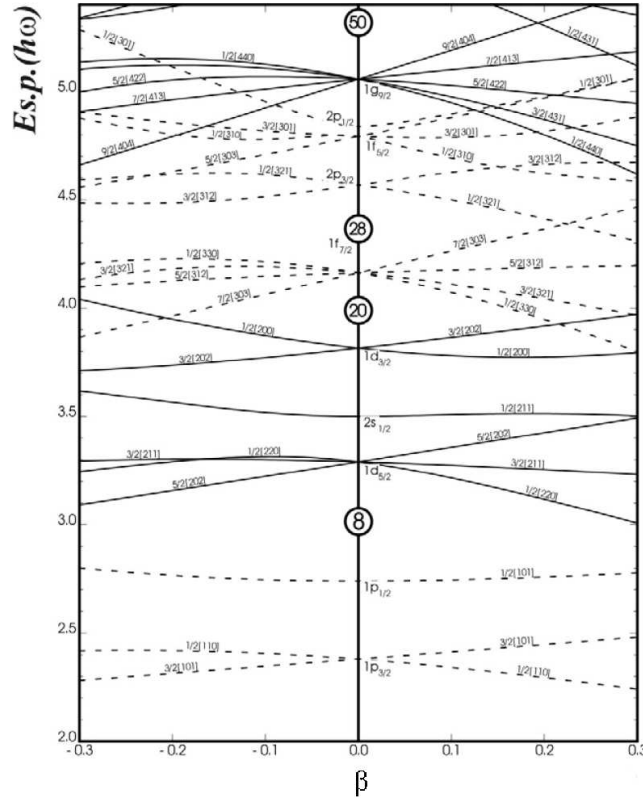


FIG. 3.43 – Séquence des niveaux individuels dans le modèle de Nilsson.

Dans la chaîne isotopique des néons ($Z = 10$), les noyaux sphériques ^{18}Ne , ^{26}Ne , ^{28}Ne et ^{30}Ne présentent un gap magique $Z = 8$ de l'ordre de 10 MeV aussi bien dans le modèle RHFB que dans le modèle RHB. PKO2 prédit une persistance de ce gap dans le noyau déformé ^{20}Ne ($\Delta E_{Z=8} \approx 5\text{MeV}$, $\beta \approx 0.35$) alors que DDME2 conclut à un affaiblissement plus prononcé de ce dernier ($\Delta E_{Z=8} \approx 3\text{MeV}$, $\beta \approx 0.55$). Ces différences sont dues à la déformation axiale plus importante prédite par DDME2. Le gap $Z = 8$ persiste malgré une forte déformation axiale ($\beta \approx 0.35$) dans le cas de PKO2, ce qui est remarquable. La même argumentation s'applique, dans une moindre mesure, au noyau ^{22}Ne .

Le cas du ^{24}Ne est plus significatif. En effet, PKO2 prédit ($\Delta E_{Z=8} \approx$

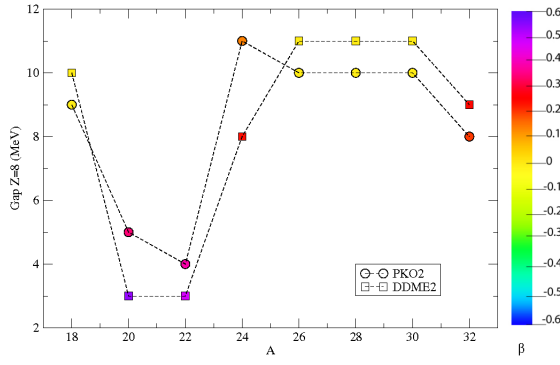


FIG. 3.44 – Evolution du gap $Z=8$ dans la chaîne isotopique $Z=10$ prédite par les interactions PKO2 (cercles) et DDME2 (carrés). Les couleurs indiquent la valeur du paramètre de déformation β .

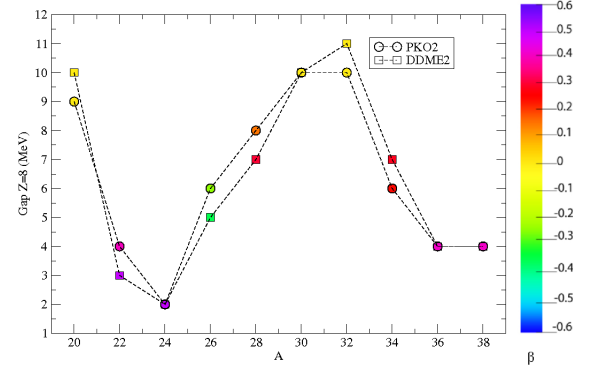


FIG. 3.45 – Evolution du gap $Z=8$ dans la chaîne isotopique $Z=12$ prédite par les interactions PKO2 (cercles) et DDME2 (carrés). Les couleurs indiquent la valeur du paramètre de déformation β .

11 MeV, $\beta \approx 0.16$) tandis que DDME2 aboutit à ($\Delta E_{Z=8} \approx 8$ MeV, $\beta \approx 0.27$). De même, le gap $Z=8$ résiste dans ^{32}Ne , où PKO2 et DDME2 prédisent des résultats très proches avec respectivement ($\Delta E_{Z=8} \approx 8$ MeV, $\beta \approx 0.2$) et ($\Delta E_{Z=8} \approx 9$ MeV, $\beta \approx 0.25$)

Par conséquent, le gap $Z=8$ résiste aux déformations allant jusqu'à $\beta \approx 0.3$. Réitérons notre étude en ajoutant deux protons, i.e. dans la chaîne isotopique des magnésiums ($Z = 12$). Le gap magique $Z = 8$ disparaît plus vite à $N=10$ et $N=12$ pour PKO2 et à $N=12$ pour DDME2 par rapport aux résultats dans la chaîne isotopique $Z = 10$. Les déformations axiales correspondantes sont plus élevées. Le gap magique est retrouvé à partir de ^{26}Mg pour finalement disparaître dans ^{36}Mg et ^{38}Mg . Comme dans le cas de la chaîne isotopique des néons, PKO2 prédit un gap $Z = 8$ plus important que DDME2 pour les isotopes déformés $N \leq 20$, et moins important pour les isotopes $N > 20$, et ce malgré que la déformation axiale soit systématiquement plus faible dans les calculs avec PKO2 que dans ceux avec DDME2. Le gap $Z = 8$ semble ainsi moins résistant à la déformation lorsque l'on augmente le nombre de protons.

3.3 RÔLE DU PION DANS LES MODÈLES DE CHAMP MOYEN RELATIVISTES

Le couplage pseudo-vectoriel π -nucléon engendre une contribution tensorielle à l'interaction nucléon-nucléon dans le milieu. En raison de sa parité négative, l'échange d'un pion ne contribue pas dans le canal direct, d'où l'absence du pion dans les modèles de type RH. L'échange d'un pion ne contribue donc que par son terme de Fock.

Le pion a suscité un regain d'intérêt ces dernières années. En effet, dans le cadre du modèle en couches, des calculs dans les noyaux exotiques mettent en évidence une modification de l'organisation des niveaux individuels due à la contribution tenseur de l'interaction nucléon-nucléon

engendrée par l'échange d'un pion [O⁺05]. Il en ressort que la force tenseur s'exerçant entre un proton sur une orbite telle que $j_> = l_p + \frac{1}{2}$ (spin parallèle au moment angulaire) et un neutron sur une orbite telle que $j_< = l_n - \frac{1}{2}$ (spin anti-parallèle au moment angulaire) ou vice-versa est fortement attractive. En revanche, si le proton et le neutron sont tous les deux sur des orbites telles que leur spin est parallèle au moment angulaire ou anti-parallèle au moment angulaire, l'interaction tenseur est fortement répulsive.

Qu'en est-il du rôle du pion dans le cadre des modèles de champ moyen relativistes ? La prise en compte explicite du pion dans le cadre de la théorie RHFB conduit à l'interaction PKO3, dont les paramètres sont listés dans le tableau 2.2. Rappelons que l'interaction PKO2 ne traite le pion qu'implicitement. Ainsi, en passant de l'interaction PKO2 à l'interaction PKO3, la prise en compte explicite du pion entraîne une renormalisation des constantes de couplage des mésons σ , ω et ρ de 0.3%, 2.3% et 6.1% respectivement. Les constantes de couplage des mésons σ et ρ sont légèrement plus petites dans l'interaction PKO3 que dans l'interaction PKO2, tandis que le couplage au méson ω montre une tendance contraire. La prise en compte explicite du pion dans l'interaction PKO3 adoucit la dépendance en densité des constantes de couplage g_σ et g_ω (cf figures 3.1 et 3.2).

La prédiction des observables de l'état fondamental des noyaux ^{18}Ne , ^{20}Ne , ^{22}Ne et ^{28}Ne par PKO3 est présentée dans les figures 3.46, 3.47, 3.48 et 3.49. Ces quantités sont comparées aux résultats des interactions PKO2, DDME2 ainsi qu'aux données expérimentales disponibles.

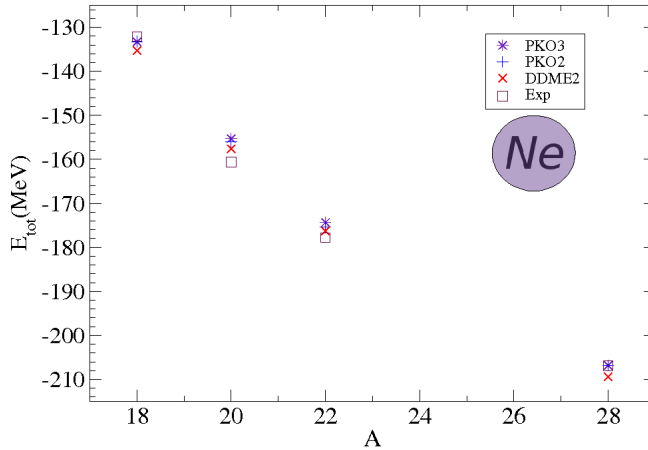


FIG. 3.46 – Energie de liaison des noyaux ^{18}Ne , ^{20}Ne , ^{22}Ne et ^{28}Ne prédite par PKO3 (violet), PKO2 (bleu) et DDME2 (rouge).

La déviation à l'expérience des masses calculées à partir de l'interaction PKO3 est présentée dans la figure 3.47. Si l'accord des prédictions de PKO3 à l'expérience est comparable à celui entre l'interaction PKO2 et l'expérience ou entre l'interaction DDME2 et l'expérience dans les noyaux sphériques ^{18}Ne et ^{28}Ne , il se dégrade dans les noyaux fortement défor-

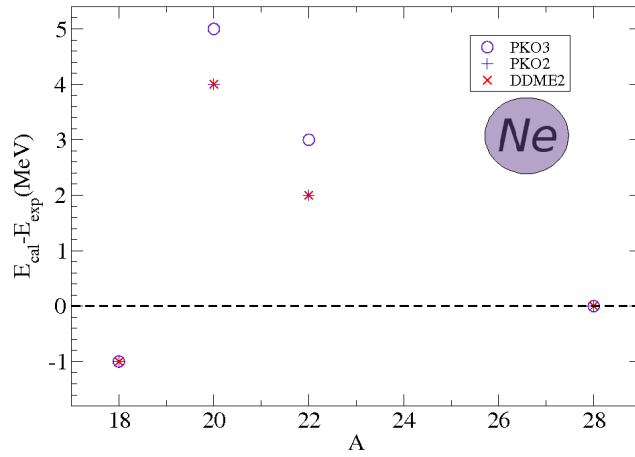


FIG. 3.47 – Déviation à l'expérience de l'énergie de liaison des noyaux ^{18}Ne , ^{20}Ne , ^{22}Ne et ^{28}Ne prédite par PKO3 (violet), PKO2 (bleu) et DDME2 (rouge).

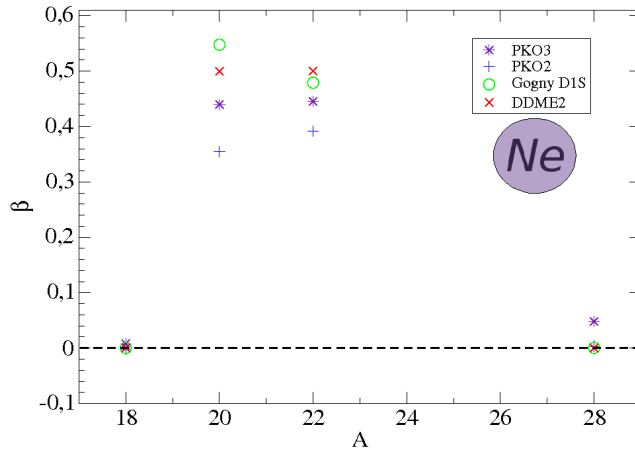


FIG. 3.48 – Déformation axiale des noyaux ^{18}Ne , ^{20}Ne , ^{22}Ne et ^{28}Ne prédite par PKO3 (violet), PKO2 (bleu), DDME2 (rouge) et Gogny D1S (vert).

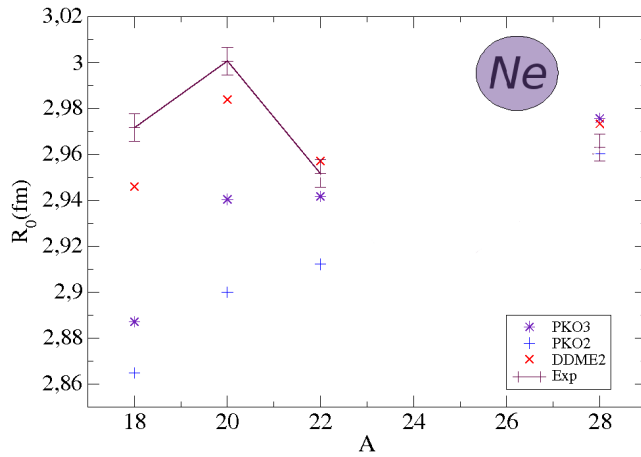


FIG. 3.49 – Rayon de charge des noyaux ^{18}Ne , ^{20}Ne , ^{22}Ne et ^{28}Ne prédits par PKO3 (violet), PKO2 (bleu) et DDME2 (rouge). Les données expérimentales proviennent de [G⁺]. Une incertitude supplémentaire de l'ordre de 10% est à ajouter.

més ^{20}Ne et ^{22}Ne . Ainsi, dans ces noyaux, l'écart des masses théoriques et expérimentales augmente de 1 MeV par rapport à celui caractérisant l'interaction PKO2.

Les déformations axiales issues des calculs reposant sur l'interaction PKO3 sont plus élevées (figure 3.48) que celles prédites par PKO2. En conséquence l'interaction PKO3 conduit à des résultats plus proches des prédictions des interactions DDME2 et Gogny D1S.

De même, les rayons de charge obtenus à partir de l'interaction PKO3 présentent un meilleur accord aux valeurs expérimentales que ceux provenant d'un calcul reposant sur l'interaction PKO2 (figure 3.49).

La constante de couplage du pion est prise dépendante de la densité. Son évolution est représentée dans la figure 3.4. Le champ moyen a donc tendance à rejeter le pion, comme l'indique la forte décroissance exponentielle de la constante de couplage π -nucléon. Ainsi, à la densité de saturation, cette dernière est réduite à 40% de sa valeur à densité nulle.

L'effet de la prise en compte explicite du pion dans le modèle RHFB sur l'organisation en couches du noyau ^{22}Ne est présenté dans les figures 3.50 et 3.51.

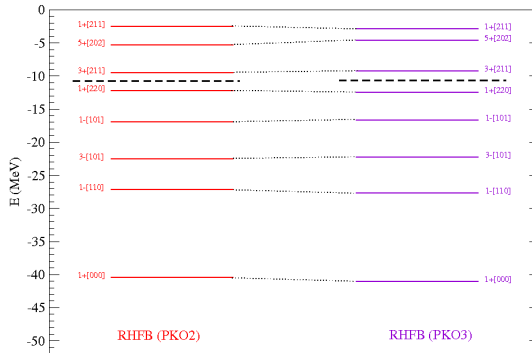


FIG. 3.50 – Niveaux protoniques du noyau ^{22}Ne prédits par PKO2 et PKO3.

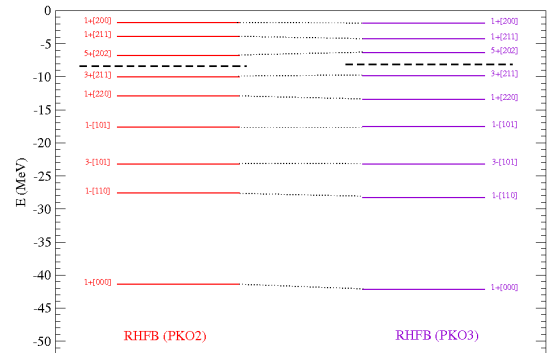


FIG. 3.51 – Niveaux neutroniques du noyau ^{22}Ne prédits par PKO2 et PKO3.

Le terme tenseur engendré par le terme de Fock correspondant à l'échange d'un pion induit des effets légers sur la structure en couches du noyau ^{22}Ne .

Le rôle de la contribution tenseur engendrée par le pion n'est donc pas aussi important dans les modèles de champ moyen relativiste que dans le modèle en couches. Sa prise en compte explicite améliore la description de la structures en couches des noyaux [L⁺08b], mais le plus gros effet de la contribution tenseur provient du couplage tenseur ρ -nucléon [L⁺07]. L'implémentation de cette dernière représente un travail conséquent et fait partie de nos perspectives.

CONCLUSION

L'association d'une interaction de type RHF (PKO₂ ou PKO₃) dans le canal particule-trou et de l'interaction de Gogny D1S dans le canal particule-particule pour la description de l'état fondamental des noyaux même déformés et superfluides conduit à des résultats très satisfaisants. Ainsi, l'interaction PKO₂ conduit à une prédiction des masses généralement meilleure que celles des interactions DDME2 et Gogny D1S. Elle a tendance à prédire des déformations axiales plus faibles en comparaison des interactions DDME2 et Gogny D1S. Les rayons de charge obtenus dans le cadre de l'interaction PKO₂ sont plus éloignés des centroïdes expérimentaux que ceux issus d'un calcul reposant sur l'interaction DDME2. L'accord entre les prédictions des interactions PKO₂ et DDME2 s'améliorent à mesure que le noyau considéré est plus lourd. D'autre part, l'interaction PKO₂ conduit généralement à des énergies de séparation à deux neutrons plus proches des valeurs expérimentales que celle prédites par l'interaction DDME2. Enfin, dans le cadre d'une description reposant sur l'interaction PKO₂, le noyau ¹⁶C recouvre une interprétation en accord avec l'expérience.

La prise en compte explicite des contributions provenant de l'échange d'un pion à travers l'interaction PKO₃ dégrade légèrement l'accord entre les masses calculées et expérimentales dans le cas des noyaux déformés. En revanche, la déformation axiale semble plus cohérente avec les prédictions des interactions DDME2 et Gogny D1S, et l'accord entre les rayons de charge calculés et expérimentaux est amélioré. Le faible effet de la contribution du canal tenseur générée par le pion justifie l'utilisation de l'interaction PKO₂.

La prise en compte explicite des termes d'échange dans le cadre de la théorie RHF introduit une non-localité spatiale dans le potentiel moyen. Celle-ci influence la masse effective et par conséquent l'organisation des orbites individuelles autour du niveau de Fermi. La masse effective légèrement supérieure dans les modèles RHF que dans les modèles RH est plus en accord avec les indications expérimentales, qui estiment que la masse effective nucléonique est très proche de la masse nue nucléonique. D'autre part, la non-localité spatiale élimine les structures localisées présentes dans les profils de densité nucléonique dans le cadre des modèles RH.

CONCLUSION

CE travail de thèse a consisté à développer un modèle de type RHFB en symétrie axiale. A la base de ce dernier, la densité lagrangienne phénoménologique décrit un modèle effectif de basse énergie de QCD. Les simplifications nécessaires pour décrire les noyaux finis avec un temps de calcul compatible avec la vie humaine déconnectent le modèle développé de la théorie fondamentale sous-jacente.

La fonctionnelle RHFB obtenue engendre les équations du champ moyen caractérisant l'état fondamental des noyaux pair-pairs à symétrie axiale. La forme variationnelle du formalisme n'est pas liée au principe variationnel de Ritz mais représente plutôt un moyen économique de définir un potentiel moyen dont la définition diagrammatique est lourde à manipuler.

L'application du modèle RHFB ainsi développé aux noyaux finis témoignent de son efficacité à décrire les observables nucléaires ainsi que les spectres individuels. Elle nous permet de répondre à la problématique posée dans l'introduction, à savoir « qu'apporte le traitement explicite des termes de Fock dans les noyaux déformés ? ».

- Elle permet une retranscription plus claire des processus physiques à l'œuvre dans l'interaction nucléon-nucléon. Ainsi, la contribution principale du canal isovecteur de l'interaction nucléon-nucléon est due aux termes d'échange.
- Elle introduit une non-localité spatiale dans le potentiel moyen. Cette dernière est certes source de complication numérique, mais elle assure une meilleure description des densités nucléoniques et des niveaux individuels.
- Elle permet la prise en compte de la contribution tenseur à l'interaction nucléon-nucléon. Si l'introduction du pion n'apporte pas de modifications significatives, celle du couplage tenseur ρ -nucléon améliore grandement la description de la structure en couches des noyaux atomiques [L⁺07].

Dans la continuité directe de ce travail de thèse, l'inclusion du couplage tenseur ρ -nucléon arrive en priorité. En effet, les travaux de W. Long *et. al* dans les noyaux sphériques [L⁺07] montrent que la plus grande contribution au canal tenseur de la force nucléon-nucléon provient du méson ρ .

L'amélioration de la parallélisation du programme via MPI a été entamée. Elle permettra d'augmenter la taille de la base d'oscillateur harmonique déformé et donc de traiter les noyaux lourds.

La non-localité apportée par les termes d'échange rend ardue la résolution numérique des équations du mouvement. Elle nous pousse à formuler des schémas de résolution toujours plus astucieux afin d'alléger la procédure numérique. Dans cet esprit, la faisabilité de paramétriser les constantes de couplage par des fonctions séparables en $r_{\perp}$ et z est à étudier. De même, le développement d'un modèle relativiste ponctuel traitant explicitement le terme de Fock (c'est-à-dire ne mettant pas en œuvre les transformations de Fierz), mais où le pion est décrit par un propagateur de portée finie, pourrait représenter l'avenir des modèles RHF.

EXPRESSIONS DÉTAILLÉES DES CONTRIBUTIONS D'ÉCHANGE

A

SOMMAIRE

A.1	LE MÉSON SCALAIRE ISOSCALAIRE σ	123
A.1.1	Energie du système nucléons + σ	123
A.1.2	Equation Hartree-Fock relativiste en représentation coordonnée	124
A.1.3	Equation Hartree-Fock relativiste dans la base d'oscillateur harmonique déformé	124
A.1.3.1	Contribution des blocs Ω_j positifs	125
A.1.3.2	Contribution des blocs Ω_j négatifs	127
A.1.3.3	Contribution totale	128
A.2	LE MÉSON 4-VECTEUR ISOSCALAIRE ω	129
A.2.1	Contribution temporelle	129
A.2.1.1	Contribution des blocs Ω_j positifs	130
A.2.1.2	Contribution des blocs Ω_j négatifs	130
A.2.1.3	Contribution totale	131
A.2.2	Contributions spatiales $\mu = 1, 2$	131
A.2.2.1	Contribution des blocs Ω_j positifs	133
A.2.2.2	Contribution des blocs Ω_j négatifs	133
A.2.2.3	Contribution totale	134
A.2.3	Contributions spatiales $\mu = 3$	134
A.2.3.1	Contribution des blocs Ω_j positifs	135
A.2.3.2	Contribution des blocs Ω_j négatifs	135
A.2.3.3	Contribution totale	136
A.3	LE 4-POTENTIEL ÉLECTROMAGNÉTIQUE ET LE MÉSON ρ	136
A.3.1	Le 4-potentiel électromagnétique	136
A.3.2	Le méson ρ	136
A.4	LE MÉSON PSEUDO-SCALAIRE ISOVECTEUR π	137
A.4.1	Contribution ++	138
A.4.1.1	Contribution des blocs Ω_j positifs	138
A.4.1.2	Contribution des blocs Ω_j négatifs	139
A.4.1.3	Contribution totale	140
A.4.2	Contribution +-	140
A.4.2.1	Contribution des blocs Ω_j positifs	140

	A.4.2.2	Contribution des blocs Ω_j négatifs	141
	A.4.2.3	Contribution totale	141
A.4.3		Contribution $-+$	142
	A.4.3.1	Contribution des blocs Ω_j positifs	142
	A.4.3.2	Contribution des blocs Ω_j négatifs	142
	A.4.3.3	Contribution totale	142
A.4.4		Contribution $--$	143
	A.4.4.1	Contribution des blocs Ω_j positifs	143
	A.4.4.2	Contribution des blocs Ω_j négatifs	143
	A.4.4.3	Contribution totale	144
A.4.5		Contribution 33	144
	A.4.5.1	Contribution des blocs Ω_j positifs	144
	A.4.5.2	Contribution des blocs Ω_j négatifs	145
	A.4.5.3	Contribution totale	145
A.4.6		Contre terme	146
	A.4.6.1	Contribution $+/-$	146
	A.4.6.2	Contribution 33	147
A.5		TERME DE RÉARRANGEMENT	148
	A.5.1	Expression en représentation coordonnée	148
	A.5.2	Expression dans la base d'oscillateur déformé	148
		A.5.2.1 Cas ($m > 0, n > 0$)	149
		A.5.2.2 Cas ($m > 0, n < 0$)	149
		A.5.2.3 Cas ($m < 0, n > 0$)	150
		A.5.2.4 Cas ($m < 0, n < 0$)	151
		A.5.2.5 Expressions généralisées	152
A.6		LES INTÉGRALES SPATIALES	153
	A.6.1	Cas des intégrales $I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}$ associées aux mésons σ, ω, ρ , au champ Coulombien et au contre terme	153
	A.6.2	Cas du pion	154
	A.6.3	Les intégrales spatiales $K_{\alpha\alpha'\mu\nu;\nu'\mu'}$	155

LE détail des expressions intervenant dans les équations de la théorie RHF est présenté dans cette annexe. Les contributions d'échange des champs mésoniques et du champ coulombien sont traitées dans les sections A.1 à A.4. La structure de la contribution d'échange des termes de réarrangement fait l'objet de la section A.5. Enfin, les intégrales spatiales intervenant dans les potentiels de Fock et de réarrangement sont étudiées dans la section A.6.

A.1 LE MÉSON SCALAIRE ISOSCALAIRE σ

La partie du Hamiltonien pertinent pour la dérivation des équations relatives au méson σ correspond à la contribution potentielle V_σ

$$V_\sigma = -\frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} c_i^\dagger c_j^\dagger c_k c_l \int d^3x_1 d^3x_2 g_\sigma(1) g_\sigma(2) \bar{f}_i(\mathbf{x}_1) \bar{f}_j(\mathbf{x}_2) D_\sigma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \delta_{q_i, q_l} \delta_{q_j, q_k} f_k(\mathbf{x}_2) f_l(\mathbf{x}_1) \quad (\text{A.1})$$

A.1.1 Energie du système nucléons + σ

Après application du théorème de Wick, l' énergie potentielle $E_{pot}^\sigma = \langle \Phi_0 | V_\sigma | \Phi_0 \rangle$ se scinde en deux contributions :

$$E_{pot}^\sigma = E_\sigma^{Hartree} + E_\sigma^{Fock} \quad (\text{A.2})$$

avec

$$E_\sigma^{Hartree} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \int d^3x_1 d^3x_2 g_\sigma(1) g_\sigma(2) [\bar{f}_i f_i](\mathbf{x}_1) D_\sigma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) [\bar{f}_j f_j](\mathbf{x}_2) \quad (\text{A.3})$$

$$E_\sigma^{Fock} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \delta_{q_i, q_j} \int d^3x_1 d^3x_2 g_\sigma(1) g_\sigma(2) [\bar{f}_i f_j](\mathbf{x}_1) D_\sigma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) [\bar{f}_j f_i](\mathbf{x}_2) \quad (\text{A.4})$$

La contribution directe $E_\sigma^{Hartree}$ fait apparaître le produit de convolution du propagateur du méson σ et de la source intervenant dans l'équation de Klein-Gordon qu'il vérifie, *i.e.* le champ $\sigma(\mathbf{x}_1)$ lui même¹ :

$$E_\sigma^{Hartree} = -\frac{1}{2} \sum_k \int d^3x g_\sigma(\rho_v(\mathbf{x})) [\bar{f}_k f_k \sigma](\mathbf{x}) \quad (\text{A.5})$$

Le canal direct fait à nouveau intervenir les degrés de liberté mésoniques. Il nous faut donc opérer la transformation inverse qui nous a fait passer de 2.43 à 2.44, afin d'exprimer la partie cinétique du Hamiltonien mésonique en terme des de degrés de liberté mésoniques :

$$E_\sigma^{Hartree} = \frac{1}{2} \int d^3x \{ \partial_0 \sigma \partial_0 \sigma + \nabla \sigma \cdot \nabla \sigma + m_\sigma^2 \sigma^2 \} + \sum_k \int d^3x g_\sigma(\rho_v(\mathbf{x})) [\bar{f}_k f_k \sigma](\mathbf{x}) \quad (\text{A.6})$$

L'énergie totale du système nucléons + σ s'écrit donc :

$$\begin{aligned} E_{N+\sigma}^{RHF} = & \sum_k \int d^3x \bar{f}_k [-i\gamma \cdot \nabla + M + g_\sigma \sigma] f_k \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \delta_{q_k, q_l} \int d^3x_1 d^3x_2 g_\sigma(1) g_\sigma(2) [\bar{f}_k f_l](\mathbf{x}_1) D_m(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) [\bar{f}_l f_k](\mathbf{x}_2) \\ & + \frac{1}{2} \int d^3x \{ \partial_0 \sigma \partial_0 \sigma + \nabla \sigma \cdot \nabla \sigma + m_\sigma^2 \sigma^2 \} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

¹ $\sigma(\mathbf{x}) = \int d^3y D_\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sum_k [g_\sigma \bar{f}_k f_k](\mathbf{y})$

A.1.2 Equation Hartree-Fock relativiste en représentation coordonnée

Les équations Hartree-Fock relativistes s'obtiennent à partir de la minimisation de l'énergie totale A.7 avec la contrainte assurant la normalisation du spineur nucléonique f_i :

$$\delta(E_{N+\sigma}^{RHF} - \sum_k \varepsilon_k \int d^3x f_k^\dagger(\mathbf{x}) f_k(\mathbf{x})) = 0 \quad (\text{A.8})$$

En particulier, l'équation Hartree-Fock relativiste vérifiée par le spineur nucléonique $f_i(\mathbf{r})$ s'obtient comme :

$$\frac{\delta}{\delta \bar{f}_i(\mathbf{r}, q_i)} (E_{N+\sigma}^{RHF} - \sum_k \varepsilon_k \int d^3x f_k^\dagger(\mathbf{x}, q_k) f_k(\mathbf{x}, q_k)) = 0 \quad (\text{A.9})$$

ou encore

$$\left\{ -i\alpha \cdot \nabla + \beta M^*(\mathbf{r}) + \Sigma_\sigma^R(\mathbf{r}) \right\} f_i(\mathbf{r}, q_i) + \mathcal{F}_i^\sigma(\mathbf{r}, q_i) = \varepsilon_i f_i(\mathbf{r}, q_i) \quad (\text{A.10})$$

Dans cette dernière expression :

- $M^* = M + S$ avec $S \equiv g_\sigma \sigma$
- Σ_σ^R est le terme de réarrangement associé au méson σ . Il est généré par la dépendance en densité de la constante de couplage g_σ via le terme en $\frac{\partial E_{N+\sigma}^{RHF}}{\partial \rho_v} \frac{\delta \rho_v}{\delta f_i(\mathbf{r})}$. Sa contribution directe ainsi que celle d'échange sont détaillées dans la section A.5.
- $\mathcal{F}_i^\sigma$ est le potentiel d'échange associé à l'interaction nucléon-nucléon véhiculée par le méson σ :

$$\mathcal{F}_i^\sigma(\mathbf{r}, q_i) = \sum_j \delta_{q_j, q_i} \int d^3r' \left\{ D_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [g_\sigma \bar{f}_j(q_j) f_i(q_i)](\mathbf{r}') \right\} \beta [g_\sigma f_j(q_j)](\mathbf{r}) \quad (\text{A.11})$$

A.1.3 Equation Hartree-Fock relativiste dans la base d'oscillateur harmonique déformé

L'équation Hartree-Fock relativiste dans la base d'oscillateur harmonique déformé repose sur le développement du spineur nucléonique suivant :

$$f_i(\mathbf{r}, q_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} F_i(r_\perp, z, \phi, q_i) \\ iG_i(r_\perp, z, \phi, q_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_\alpha f_\alpha^{(i)}(q_i) \phi_\alpha(r_\perp, z, \phi) \\ \sum_{\bar{\alpha}} g_{\bar{\alpha}}^{(i)}(q_i) \phi_{\bar{\alpha}}(r_\perp, z, \phi) \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

où les fonctions propres de l'oscillateur harmonique déformé sont définies dans l'équation 2.116.

Dans le cadre de la théorie RH, autrement dit sans prise en compte explicite des termes d'échange, l'équation nucléonique prend la forme [R⁺97] :

$$\begin{pmatrix} A_{\alpha,\alpha'} & B_{\alpha,\tilde{\alpha}'} \\ B_{\tilde{\alpha},\alpha'} & C_{\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{\alpha'}^{(i)}(q_i) \\ g_{\tilde{\alpha}'}^{(i)}(q_i) \end{pmatrix} = \varepsilon_i \begin{pmatrix} f_{\tilde{\alpha}}^{(i)}(q_i) \\ g_{\tilde{\alpha}}^{(i)}(q_i) \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})$$

avec

$$\begin{pmatrix} A_{\alpha,\alpha'} \\ C_{\alpha,\alpha'} \end{pmatrix} = \delta_{m_l, m_l'} \delta_{m_s, m_s'} N_{n_r}^{ml} N_{n_z} N_{n_r'}^{ml'} N_{n_z'} \int_0^\infty d\eta e^{-\eta} \eta^{m_l} L_{n_r}^{ml}(\eta) L_{n_r'}^{ml'}(\eta) \\ \times \int_0^\infty d\zeta e^{-\zeta^2} H_{n_z}(\zeta) H_{n_z'}(\zeta) M^*(b_\perp \sqrt{\eta}, b_z \zeta) \quad (\text{A.14})$$

et

$$B_{\alpha,\alpha'} = \delta_{m_l, m_l'} \delta_{m_s, m_s'} \delta_{n_r, n_r'} \frac{(-1)^{-m_s + \frac{1}{2}}}{b_z} \left(\delta_{n_z', n_z + 1} \sqrt{\frac{n_z'}{2}} - \delta_{n_z, n_z' + 1} \sqrt{\frac{n_z}{2}} \right) \\ + \delta_{m_l, m_l'} \delta_{n_z, n_z'} \frac{N_{n_r}^{ml} N_{n_r'}^{ml'}}{b_\perp} \\ \times (\delta_{m_s', m_s + 1} \int_0^\infty d\eta e^{-\eta} \eta^{m_l - \frac{1}{2}} L_{n_r}^{ml}(\eta) [\tilde{L}_{n_r'}^{ml}(\eta) + (1 - m_l) L_{n_r'}^{ml}(\eta)] \\ + \delta_{m_s, m_s' + 1} \int_0^\infty d\eta e^{-\eta} \eta^{m_l - \frac{1}{2}} L_{n_r}^{ml}(\eta) [\tilde{L}_{n_r'}^{ml}(\eta) + (1 + m_l) L_{n_r'}^{ml}(\eta)]) \quad (\text{A.15})$$

Dans ces équations, $L_{n_r}^{ml}(\eta)$ et $H_{n_z}(\zeta)$ désignent respectivement les polynômes de Laguerre et de Hermite. De plus :

$$\eta = \frac{r_\perp^2}{b_\perp^2}, \quad \zeta = \frac{z}{b_z} \quad (\text{A.16})$$

$$b_\perp = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega_\perp}}, \quad b_z = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega_z}} \quad (\text{A.17})$$

$$N_{n_r}^{m_l} = \sqrt{\frac{n_r!}{(n_r + m_l)!}}, \quad N_{n_z} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^{n_z} n_z!}} \quad (\text{A.18})$$

$$\tilde{L}_{n_r}^{ml}(\eta) = (2m_l + n_r - \eta) L_{n_r}^{ml}(\eta) - 2(n_r + m_l) L_{n_r-1}^{ml}(\eta) \quad (\text{A.19})$$

(cf Chapitre 2 section 2.3.5.2).

Examinons comment sont modifiés ces éléments de matrice par la prise en compte explicite de $\mathcal{F}_i^\sigma$. L'expression de $\mathcal{F}_i^\sigma$ A.11 fait intervenir une somme sur les états $j \equiv (\Omega_j^\Pi, q_j)$. En particulier, on peut scinder la somme en une sur les blocs $\Omega_j \geq 0$ et une autre sur les blocs $\Omega_j < 0$. Ces deux sommes seront notées symboliquement $\sum_{j>0}$ et $\sum_{j<0}$.

A.1.3.1 Contribution des blocs Ω_j positifs

La somme sur les blocs Ω_j positifs s'écrit :

$$\mathcal{F}_i^{\sigma, >0}(\mathbf{r}, q_i) = \sum_{j>0} \delta_{q_i, q_j} \int d^3 r' D_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left\{ g_\sigma(2) \frac{1}{2\pi} \left[F_j^\dagger(q_j) F_i(q_i) - G_j^\dagger(q_j) G_i(q_i) \right] \right\}(\mathbf{r}') \\ \frac{g_\sigma(1)}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} F_j(r_\perp, z, \phi, q_j) \\ -iG_j(r_\perp, z, \phi, q_j) \end{pmatrix}(\mathbf{r}) \quad (\text{A.20})$$

Dans la base d'oscillateur harmonique déformé, le produit spinoriel s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}[F_j^\dagger(q_j)F_i(q_i) - G_j^\dagger(q_j)G_i(q_i)](\mathbf{r}') &= \sum_{\beta', \alpha'} \delta_{m_{s_{\beta'}}, m_{s_{\alpha'}}} f_{\beta'}^{(j)}(q_j) f_{\alpha'}^{(i)}(q_i) \phi_{\beta'}^*(\mathbf{r}') \phi_{\alpha'}(\mathbf{r}') \\ &- \sum_{\tilde{\beta}', \tilde{\alpha}'} \delta_{m_{s_{\tilde{\beta}'}}}, m_{s_{\tilde{\alpha}'}}} g_{\tilde{\beta}'}^{(j)}(q_j) g_{\tilde{\alpha}'}^{(i)}(q_i) \phi_{\tilde{\beta}'}^*(\mathbf{r}') \phi_{\tilde{\alpha}'}(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Le passage de l'équation de Dirac en représentation coordonnée A.10 à celle dans la base d'oscillateur harmonique déformé A.13 fait intervenir l'opération $\int d^3r \phi_\alpha^*$. Le potentiel de Fock intervenant dans l'équation de Dirac dans la base d'oscillateur harmonique déformé est donc :

$$\mathcal{F}_\alpha^{(i), \sigma, >0}(q_i) \equiv \int d^3r \phi_\alpha^* \mathcal{F}_i^{\sigma, >0}(\mathbf{r}, q_i) \quad (\text{A.22})$$

dont la grande composante $\mathcal{F}_{\alpha,1}^{(i), \sigma, >0}(q_i)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\alpha,1}^{(i), \sigma, >0}(q_i) &= \sum_j \delta_{q_j, q_i} \sum_{\beta, \beta', \alpha'} \delta_{m_{s_\beta}, m_{s_{\alpha}}} \delta_{m_{s_{\beta'}}, m_{s_{\alpha'}}} f_\beta^{(j)}(q_j) f_{\beta'}^{(j)}(q_j) f_{\alpha'}^{(i)}(q_i) \\ &\int d^3r d^3r' [g_\sigma \phi_\alpha^* \phi_\beta](\mathbf{r}) D_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [g_\sigma \phi_{\beta'}^* \phi_{\alpha'}](\mathbf{r}') \\ &- \sum_j \delta_{q_j, q_i} \sum_{\beta, \tilde{\beta}', \tilde{\alpha}'} \delta_{m_{s_\beta}, m_{s_\alpha}} \delta_{m_{s_{\tilde{\beta}'}}}, m_{s_{\tilde{\alpha}'}}} f_\beta^{(j)}(q_j) g_{\tilde{\beta}'}^{(j)}(q_j) g_{\tilde{\alpha}'}^{(i)}(q_i) \\ &\int d^3r d^3r' [g_\sigma \phi_\alpha^* \phi_\beta](\mathbf{r}) D_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [g_\sigma \phi_{\tilde{\beta}'}^* \phi_{\tilde{\alpha}'}](\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Cette dernière expression peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{F}_{\alpha,1}^{(i), \sigma, >0}(q_i) = \sum_{\alpha'} A_{\alpha, \alpha'}^{\sigma, >0}(q_i) f_{\alpha'}^{(i)}(q_i) + \sum_{\tilde{\alpha}'} B_{\alpha, \tilde{\alpha}'}^{\sigma, >0}(q_i) g_{\tilde{\alpha}'}^{(i)}(q_i) \quad (\text{A.24})$$

avec :

$$A_{\alpha, \alpha'}^{\sigma, >0}(q_i) = \sum_{j>0} \delta_{q_j, q_i} \sum_{\beta, \beta'} \delta_{m_{s_{\beta'}}, m_{s_{\alpha'}}} \delta_{m_{s_\beta}, m_{s_\alpha}} f_\beta^{(j)}(q_j) f_{\beta'}^{(j)}(q_j) I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^\sigma \quad (\text{A.25})$$

$$B_{\alpha, \tilde{\alpha}'}^{\sigma, >0}(q_i) = - \sum_{j>0} \delta_{q_j, q_i} \sum_{\beta, \tilde{\beta}'} \delta_{m_{s_{\tilde{\beta}'}}}, m_{s_{\tilde{\alpha}'}}} \delta_{m_{s_\beta}, m_{s_\alpha}} f_\beta^{(j)}(q_j) g_{\tilde{\beta}'}^{(j)}(q_j) I_{\alpha\beta\tilde{\beta}'\tilde{\alpha}'}^\sigma \quad (\text{A.26})$$

$$I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^\sigma = \int d\mathbf{r} [g_\sigma \phi_\alpha^* \phi_\beta](\mathbf{r}) \int d\mathbf{r}' D_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [g_\sigma \phi_{\beta'}^* \phi_{\alpha'}](\mathbf{r}') \quad (\text{A.27})$$

De même, la petite composante $\mathcal{F}_{\alpha,2}^{(i), \sigma, >0}$ du spineur A.22 se met sous la forme :

$$\mathcal{F}_{\alpha,2}^{(i), \sigma, >0}(q_i) = i \left\{ \sum_{\alpha'} B_{\alpha, \alpha'}^{\sigma, >0}(q_i) f_{\alpha'}^{(i)}(q_i) + \sum_{\tilde{\alpha}'} C_{\alpha, \tilde{\alpha}'}^{\sigma, >0}(q_i) g_{\tilde{\alpha}'}^{(i)}(q_i) \right\} \quad (\text{A.28})$$

avec

$$C_{\alpha, \tilde{\alpha}'}^{\sigma, >0}(q_i) = \sum_{j>0} \delta_{q_j, q_i} \sum_{\tilde{\beta}, \tilde{\beta}'} \delta_{m_{s_{\tilde{\beta}'}}}, m_{s_{\tilde{\alpha}'}}} \delta_{m_{s_{\tilde{\beta}}}, m_{s_\alpha}} g_{\tilde{\beta}}^{(j)}(q_j) g_{\tilde{\beta}'}^{(j)}(q_j) I_{\alpha\tilde{\beta}\tilde{\beta}'\tilde{\alpha}'}^\sigma \quad (\text{A.29})$$

A.1.3.2 Contribution des blocs Ω_j négatifs

La contribution des blocs Ω_j négatifs $\mathcal{F}_i^{\sigma, <0}(\mathbf{r}, q_i)$ peut s'écrire en terme d'une somme sur les blocs Ω_j positifs après application de l'opérateur renversement du temps dont une représentation possible est $\mathcal{T} = i\Sigma K$, avec

$$\Sigma \equiv \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.30})$$

σ_2 représentant la matrice de Pauli correspondante et K l'opérateur de conjugaison complexe. Ainsi :

$$f_{j<0}(\mathbf{r}, q_j) = [i\Sigma K]f_{j>0}(\mathbf{r}, q_j) \quad (\text{A.31})$$

ou encore

$$f_{j<0}(\mathbf{r}, q_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} F_{j>0}^{-*}(r_\perp, z, \phi, q_j) \\ -F_{j>0}^{+*}(r_\perp, z, \phi, q_j) \\ -iG_{j>0}^{-*}(r_\perp, z, \phi, q_j) \\ iG_{j>0}^{+*}(r_\perp, z, \phi, q_j) \end{pmatrix} \quad (\text{A.32})$$

La contribution des blocs Ω_j négatifs du potentiel de Fock s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i^{\sigma, <0}(\mathbf{r}, q_i) &= \sum_{j>0} \delta_{q_j, q_i} \int d^3r' D_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') g_\sigma(2) \frac{1}{2\pi} \\ &\left[F_j^-(q_j) F_i^+(q_i) - F_j^+(q_j) F_i^-(q_i) + G_j^-(q_j) G_i^+(q_i) - G_j^+(q_j) G_i^-(q_i) \right] (\mathbf{r}') \\ &\frac{g_\sigma(1)}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} F_j^{-*}(q_j) \\ -F_j^{+*}(q_j) \\ iG_j^{-*}(q_j) \\ -iG_j^{+*}(q_j) \end{pmatrix} (\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Dans la base d'oscillateur harmonique déformé, le produit spinoriel intervenant dans A.33 prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} [F_j^-(q_j) F_i^+(q_i) - F_j^+(q_j) F_i^-(q_i) + G_j^-(q_j) G_i^+(q_i) - G_j^+(q_j) G_i^-(q_i)] (\mathbf{r}') &= \\ \sum_{\beta' \alpha'} \delta_{ms_{\beta'}, -ms_{\alpha'}} (-2.ms_{\beta'}) f_{\beta'}^{(j)}(q_j) f_{\alpha'}^{(i)}(q_i) \phi_{\beta'}(\mathbf{r}') \phi_{\alpha'}(\mathbf{r}') & \\ + \sum_{\tilde{\beta}' \tilde{\alpha}'} \delta_{ms_{\tilde{\beta}'}, -ms_{\tilde{\alpha}'}} (-2.ms_{\tilde{\beta}'}) g_{\tilde{\beta}'}^{(j)}(q_j) g_{\tilde{\alpha}'}^{(i)}(q_i) \phi_{\tilde{\beta}'}(\mathbf{r}') \phi_{\tilde{\alpha}'}(\mathbf{r}') & \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

On en déduit les matrices A , B et C générées par les grande et petite composantes du spineur de Dirac $\mathcal{F}_\alpha^{(i), \sigma, <0} \equiv \int d^3r \phi_\alpha^* \mathcal{F}_i^{\sigma, <0}(\mathbf{r})$:

$$A_{\alpha,\alpha'}^{\sigma,<0}(q_i) = \sum_{j>0} \delta_{q_j,q_i} \sum_{\beta,\beta'} \delta_{m_{s_{\beta'}},-m_{s_{\alpha'}}} \delta_{m_{s_{\beta'}},-m_{s_{\alpha}}} (2.ms_{\beta})(2.ms_{\beta'}) f_{\beta}^{(j)}(q_j) f_{\beta'}^{(j)}(q_j) \check{I}_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{\sigma} \quad (\text{A.35})$$

$$B_{\alpha,\tilde{\alpha}'}^{\sigma,<0}(q_i) = \sum_{j>0} \delta_{q_j,q_i} \sum_{\beta,\tilde{\beta}'} \delta_{m_{s_{\tilde{\beta}'}}},-m_{s_{\alpha'}}} \delta_{m_{s_{\beta'}},-m_{s_{\alpha}}} (2.ms_{\beta})(2.ms_{\tilde{\beta}'}) f_{\beta}^{(j)}(q_j) g_{\tilde{\beta}'}^{(j)}(q_j) \check{I}_{\alpha\beta\tilde{\beta}'\alpha'}^{\sigma} \quad (\text{A.36})$$

$$C_{\tilde{\alpha},\alpha'}^{\sigma,<0}(q_i) = \sum_{j>0} \delta_{q_j,q_i} \sum_{\tilde{\beta},\beta'} \delta_{m_{s_{\tilde{\beta}}}},-m_{s_{\alpha'}}} \delta_{m_{s_{\beta'}},-m_{s_{\alpha}}} (2.ms_{\tilde{\beta}})(2.ms_{\beta'}) g_{\tilde{\beta}}^{(j)}(q_j) g_{\beta'}^{(j)}(q_j) \check{I}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\beta'\alpha'}^{\sigma} \quad (\text{A.37})$$

avec

$$\check{I}_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{\sigma} \equiv \int d\mathbf{r} [g_{\sigma} \phi_{\alpha}^* \phi_{\beta'}^*](\mathbf{r}) \int d\mathbf{r}' D_{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [g_{\sigma} \phi_{\beta'} \phi_{\alpha'}](\mathbf{r}') \quad (\text{A.38})$$

A.1.3.3 Contribution totale

Le potentiel de Fock associé au méson σ engendre donc dans la base d'oscillateur harmonique déformé les contributions totales suivantes :

$$A_{\alpha,\alpha'}^{\sigma}(q_i) = \sum_{j>0} \delta_{q_j,q_i} \sum_{\beta,\beta'} f_{\beta}^{(j)}(q_j) f_{\beta'}^{(j)}(q_j) \times \left\{ \delta_{m_{s_{\beta'}},-m_{s_{\alpha}}}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\beta}},-m_{s_{\alpha}}}^{\parallel} I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{\sigma} + \delta_{m_{s_{\beta'}},0}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\beta}},-m_{s_{\alpha}}}^{\parallel} (2.ms_{\beta})(2.ms_{\beta'}) \check{I}_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{\sigma} \right\} \quad (\text{A.39})$$

$$B_{\alpha,\tilde{\alpha}'}^{\sigma}(q_i) = - \sum_{j>0} \delta_{q_j,q_i} \sum_{\beta,\tilde{\beta}'} f_{\beta}^{(j)}(q_j) g_{\tilde{\beta}'}^{(j)}(q_j) \times \left\{ \delta_{m_{s_{\tilde{\beta}'}}},-m_{s_{\alpha}}}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\beta}},-m_{s_{\alpha}}}^{\parallel} I_{\alpha\beta\tilde{\beta}'\alpha'}^{\sigma} - \delta_{m_{s_{\tilde{\beta}'}}},0}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\beta}},-m_{s_{\alpha}}}^{\parallel} (2.ms_{\beta})(2.ms_{\tilde{\beta}'}) \check{I}_{\alpha\beta\tilde{\beta}'\alpha'}^{\sigma} \right\} \quad (\text{A.40})$$

$$C_{\tilde{\alpha},\alpha'}^{\sigma}(q_i) = \sum_{j>0} \delta_{q_j,q_i} \sum_{\tilde{\beta},\beta'} g_{\tilde{\beta}}^{(j)}(q_j) g_{\beta'}^{(j)}(q_j) \times \left\{ \delta_{m_{s_{\tilde{\beta}}}},-m_{s_{\alpha}}}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\beta}},-m_{s_{\alpha}}}^{\parallel} I_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\beta'\alpha'}^{\sigma} + \delta_{m_{s_{\tilde{\beta}}}},0}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\beta}},-m_{s_{\alpha}}}^{\parallel} (2.ms_{\tilde{\beta}})(2.ms_{\beta'}) \check{I}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\beta'\alpha'}^{\sigma} \right\} \quad (\text{A.41})$$

avec

$$\delta_{m_{s_{\beta}},-m_{s_{\alpha}}}^{\parallel} \equiv \delta_{m_{s_{\beta}},m_{s_{\alpha}}} \quad (\text{A.42})$$

$$\delta_{m_{s_{\beta}},-m_{s_{\alpha}}}^{\parallel} \equiv \delta_{m_{s_{\beta'}},-m_{s_{\alpha}}} \quad (\text{A.43})$$

En conséquence, le traitement explicite des termes d'échange associés au méson σ génère dans la base d'oscillateur harmonique déformé des contributions $A_{\alpha,\alpha'}^{\sigma}(q_i)$, $B_{\alpha,\tilde{\alpha}'}^{\sigma}(q_i)$ et $C_{\tilde{\alpha},\alpha'}^{\sigma}(q_i)$ à ajouter aux matrices intervenant dans A.13.

A.2 LE MÉSON 4-VECTEUR ISOSCALAIRE ω

Dérivons les matrices A , B et C engendrées dans la base d'oscillateur harmonique déformé par le traitement explicite des termes d'échange associés à ω . La contribution potentielle V_ω au Hamiltonien de ce dernier s'écrit :

$$V_\omega = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} c_i^\dagger c_j^\dagger c_k c_l \int d^3 x_1 d^3 x_2 [g_\omega \gamma^\mu](1) [g_\omega \gamma_\mu](2) \bar{f}_i(\mathbf{x}_1) \bar{f}_j(\mathbf{x}_2) D_\omega(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \delta_{q_i, q_l} \delta_{q_j, q_k} f_k(\mathbf{x}_2) f_l(\mathbf{x}_1) \quad (\text{A.44})$$

Après application du théorème de Wick, l'énergie potentielle $E_{pot}^\omega = \langle \Phi_0 | V_\omega | \Phi_0 \rangle$ se scinde en deux contributions :

$$E_{pot}^\omega = E_\omega^{Hartree} + E_\omega^{Fock} \quad (\text{A.45})$$

avec

$$E_\omega^{Hartree} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int d^3 x_1 d^3 x_2 g_\sigma(1) g_\sigma(2) [\bar{f}_i \gamma^\mu f_i](\mathbf{x}_1) D_\omega(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) [\bar{f}_j \gamma_\mu f_j](\mathbf{x}_2) \quad (\text{A.46})$$

$$E_\sigma^{Fock} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \delta_{q_i, q_j} \int d^3 x_1 d^3 x_2 g_\sigma(1) g_\sigma(2) [\bar{f}_i \gamma^\mu f_j](\mathbf{x}_1) D_\omega(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) [\bar{f}_j \gamma_\mu f_i](\mathbf{x}_2) \quad (\text{A.47})$$

La contribution directe se simplifie comme suit :

$$E_\omega^{Hartree} = \frac{1}{2} \sum_k \int d^3 x g_\omega(\rho_v(\mathbf{x})) [\bar{f}_k \gamma_\mu f_k \omega^\mu](\mathbf{x}) \quad (\text{A.48})$$

En conséquence de l'invariance par renversement du temps, seule la contribution en ω^0 contribue.

La contribution d'échange ne fait pas intervenir pareille simplification si bien que toutes les composantes $\mu = 0, 1, 2, 3$ contribuent. Traitons séparément la contribution temporelle $\mu = 0$ et les composantes spatiales $\mu = 1, 2, 3$.

A.2.1 Contribution temporelle

Après minimisation de l'énergie de Fock du méson ω , le potentiel de Fock faisant intervenir l'indice temporel $\mu = 0$ s'écrit :

$$\mathcal{F}_i^{\omega,0}(\mathbf{r}, q_i) = - \sum_j \delta_{q_j, q_i} \int d^3 r' g_\omega(2) [f_j^\dagger(q_j) f_i(q_i)](\mathbf{r}') D_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [g_\omega f_j](\mathbf{r}) \quad (\text{A.49})$$

On peut distinguer les contributions provenant des blocs Ω_j positifs et des blocs Ω_j négatifs

A.2.1.1 Contribution des blocs Ω_j positifs

La contribution des blocs Ω_j positifs au spineur A.49 s'écrit :

$$\mathcal{F}_i^{\omega,0,>0}(\mathbf{r}, q_i) = - \sum_{j>0} \delta_{q_j, q_i} \int d^3 r' D_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left\{ g_\omega(2) \frac{1}{2\pi} \left[F_j^\dagger(q_j) F_i(q_i) + G_j^\dagger(q_j) G_i(q_i) \right] \right\} (\mathbf{r}') \\ \frac{g_\omega(1)}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} F_j(r_\perp, z, \phi, q_j) \\ i G_j(r_\perp, z, \phi, q_j) \end{pmatrix} (\mathbf{r}) \quad (\text{A.50})$$

Dans la base d'oscillateur harmonique déformé, son représentant

$\mathcal{F}_\alpha^{(i),\omega,0,>0}(q_i)$ fait intervenir les matrices A , B et C suivantes :

$$A_{\alpha, \alpha'}^{\omega,0,>0}(q_i) = - \sum_{j>0} \delta_{q_j, q_i} \sum_{\beta, \beta'} \delta_{m_{s_{\beta'}}, m_{s_{\alpha'}}} \delta_{m_{s_{\beta}}, m_{s_{\alpha}}} f_\beta^{(j)}(q_j) f_{\beta'}^{(j)}(q_j) I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^\omega \quad (\text{A.51})$$

$$B_{\alpha, \tilde{\alpha}'}^{\omega,0,>0}(q_i) = - \sum_{j>0} \delta_{q_j, q_i} \sum_{\beta, \tilde{\beta}'} \delta_{m_{s_{\tilde{\beta}'}}}, m_{s_{\alpha'}}} \delta_{m_{s_{\beta}}, m_{s_{\alpha}}} f_\beta^{(j)}(q_j) g_{\tilde{\beta}'}^{(j)}(q_j) I_{\alpha\beta\tilde{\beta}'\tilde{\alpha}'}^\omega \quad (\text{A.52})$$

$$C_{\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}'}^{\omega,0,>0}(q_i) = - \sum_{j>0} \delta_{q_j, q_i} \sum_{\tilde{\beta}, \tilde{\beta}'} \delta_{m_{s_{\tilde{\beta}'}}}, m_{s_{\alpha'}}} \delta_{m_{s_{\tilde{\beta}}}, m_{s_{\alpha}}} g_{\tilde{\beta}}^{(j)}(q_j) g_{\tilde{\beta}'}^{(j)}(q_j) I_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\beta}'\tilde{\alpha}'}^\omega \quad (\text{A.53})$$

A.2.1.2 Contribution des blocs Ω_j négatifs

La contribution des blocs Ω_j négatifs au spineur A.49 s'écrit :

$$\mathcal{F}_i^{\omega,0,<0}(\mathbf{r}, q_i) = - \sum_{j>0} \delta_{q_j, q_i} \int d^3 r' D_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') g_\omega(2) \frac{1}{2\pi} \\ \left[-F_j^-(q_j) F_i^+(q_i) + F_j^+(q_j) F_i^-(q_i) + G_j^-(q_j) G_i^+(q_i) - G_j^+(q_j) G_i^-(q_i) \right] (\mathbf{r}') \\ \frac{g_\omega(1)}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} F_j^{-*}(q_j) \\ -F_j^{+*}(q_j) \\ -i G_j^{-*}(q_j) \\ i G_j^{+*}(q_j) \end{pmatrix} (\mathbf{r}) \quad (\text{A.54})$$

Dans la base d'oscillateur harmonique déformé, son représentant

$\mathcal{F}_\alpha^{(i),\omega,0,<0}(q_i)$ fait intervenir les matrices A , B et C suivantes :

$$A_{\alpha,\alpha'}^{\omega,0,<0}(q_i) = - \sum_{j>0} \delta_{q_j,q_i} \sum_{\beta,\beta'} \delta_{m_{s_{\beta'}},-m_{s_{\alpha'}}} \delta_{m_{s_{\beta}},-m_{s_{\alpha}}} (2.ms_{\beta})(2.ms_{\beta'}) f_{\beta}^{(j)}(q_j) f_{\beta'}^{(j)}(q_j) \check{I}_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{\omega} \quad (\text{A.55})$$

$$B_{\alpha,\tilde{\alpha}'}^{\omega,0,<0}(q_i) = \sum_{j>0} \delta_{q_j,q_i} \sum_{\beta,\tilde{\beta}'} \delta_{m_{s_{\tilde{\beta}'}}},-m_{s_{\alpha'}}} \delta_{m_{s_{\beta}},-m_{s_{\alpha}}} (2.ms_{\beta})(2.ms_{\tilde{\beta}'}) f_{\beta}^{(j)}(q_j) g_{\tilde{\beta}'}^{(j)}(q_j) \check{I}_{\alpha\beta\tilde{\beta}'\alpha'}^{\omega} \quad (\text{A.56})$$

$$C_{\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}'}^{\omega,0,<0}(q_i) = - \sum_{j>0} \delta_{q_j,q_i} \sum_{\tilde{\beta},\tilde{\beta}'} \delta_{m_{s_{\tilde{\beta}'}}},-m_{s_{\alpha'}}} \delta_{m_{s_{\tilde{\beta}}},-m_{s_{\alpha}}} (2.ms_{\tilde{\beta}})(2.ms_{\tilde{\beta}'}) g_{\tilde{\beta}}^{(j)}(q_j) g_{\tilde{\beta}'}^{(j)}(q_j) \check{I}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\beta}'\tilde{\alpha}'}^{\omega} \quad (\text{A.57})$$

A.2.1.3 Contribution totale

On en déduit les matrices A , B et C totales :

$$\begin{aligned} A_{\alpha,\alpha'}^{\omega,0}(q_i) = & - \sum_{j>0} \delta_{q_j,q_i} \sum_{\beta,\beta'} f_{\beta}^{(j)}(q_j) f_{\beta'}^{(j)}(q_j) \\ & \times \left\{ \delta_{m_{s_{\beta'}},0}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\beta\alpha}}}^{\parallel} I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{\omega} + \delta_{m_{s_{\beta'}},0}^{\text{H}} \delta_{m_{s_{\beta\alpha}}}^{\text{H}} (2.ms_{\beta})(2.ms_{\beta'}) \check{I}_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{\omega} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

$$\begin{aligned} B_{\alpha,\tilde{\alpha}'}^{\omega,0}(q_i) = & - \sum_{j>0} \delta_{q_j,q_i} \sum_{\beta,\tilde{\beta}'} f_{\beta}^{(j)}(q_j) g_{\tilde{\beta}'}^{(j)}(q_j) \\ & \times \left\{ \delta_{m_{s_{\tilde{\beta}'\alpha'}}}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\beta\alpha}}}^{\parallel} I_{\alpha\beta\tilde{\beta}'\alpha'}^{\omega} - \delta_{m_{s_{\tilde{\beta}'\alpha'}}}^{\text{H}} \delta_{m_{s_{\beta\alpha}}}^{\text{H}} (2.ms_{\beta})(2.ms_{\tilde{\beta}'}) \check{I}_{\alpha\beta\tilde{\beta}'\alpha'}^{\omega} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

$$\begin{aligned} C_{\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}'}^{\omega,0}(q_i) = & - \sum_{j>0} \delta_{q_j,q_i} \sum_{\tilde{\beta},\tilde{\beta}'} g_{\tilde{\beta}}^{(j)}(q_j) g_{\tilde{\beta}'}^{(j)}(q_j) \\ & \times \left\{ \delta_{m_{s_{\tilde{\beta}'\alpha'}}}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\tilde{\beta\alpha}}}}^{\parallel} I_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\beta}'\tilde{\alpha}'}^{\omega} + \delta_{m_{s_{\tilde{\beta}'\alpha'}}}^{\text{H}} \delta_{m_{s_{\tilde{\beta\alpha}}}}^{\text{H}} (2.ms_{\tilde{\beta}})(2.ms_{\tilde{\beta}'}) \check{I}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\beta}'\tilde{\alpha}'}^{\omega} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

A.2.2 Contributions spatiales $\mu = 1, 2$

Considérons le terme :

$$\mathcal{F}_i^{\omega,space}(\mathbf{r}, q_i) = \sum_j \delta_{q_j,q_i} \int d^3r' g_{\omega}(2) \left[f_j^{\dagger}(q_j) \gamma^0 \gamma f_i(q_i) \right] (\mathbf{r}') D_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[g_{\omega} \gamma^0 \gamma f_j \right] (\mathbf{r}) \quad (\text{A.61})$$

Plutôt que la représentation cartésienne

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) \quad (\text{A.62})$$

on adopte la représentation sphérique des vecteurs :

$$\mathbf{v} = (v^+, v^-, v^3) \quad (\text{A.63})$$

avec

$$v^+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}(u_x + iu_y) \quad (\text{A.64})$$

$$v^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_x - iu_y) \quad (\text{A.65})$$

$$v^3 = v_z \quad (\text{A.66})$$

Le produit scalaire s'écrit :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -u^+ v^- - u^- v^+ + u^3 v^3 \quad (\text{A.67})$$

Le vecteur d'intérêt pour l'évaluation du spineur A.61 est γ , dont les composantes en représentation sphérique s'écrivent :

$$\gamma^+ = \frac{-2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.68})$$

$$\gamma^- = \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.69})$$

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.70})$$

La première contribution de A.61 s'écrit :

$$\mathcal{F}_i^{\omega,1}(\mathbf{r}, q_i) = - \sum_j \delta_{q_j, q_i} \int d^3 r' g_\omega(2) \left[f_j^+(q_j) \gamma^0 \gamma^+ f_i(q_i) \right] (\mathbf{r}') D_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[g_\omega \gamma^0 \gamma^- f_j \right] (\mathbf{r}) \quad (\text{A.71})$$

ou encore :

$$\mathcal{F}_i^{\omega,1}(\mathbf{r}, q_i) = 2 \sum_j \delta_{q_j, q_i} \int d^3 r' g_\omega(2) \frac{1}{2\pi} \left[F_j^{+*}(q_j) G_i^-(q_i) - G_j^{+*}(q_j) F_i^-(q_i) \right] (\mathbf{r}') D_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{g_\omega}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} 0 \\ -G_j^+(q_j) \\ 0 \\ iF_j^+(q_j) \end{pmatrix} (\mathbf{r}) \quad (\text{A.72})$$

La deuxième contribution de A.61 s'écrit :

$$\mathcal{F}_i^{\omega,2}(\mathbf{r}, q_i) = - \sum_j \delta_{q_j, q_i} \int d^3 r' g_\omega(2) \left[f_j^+(q_j) \gamma^0 \gamma^- f_i(q_i) \right] (\mathbf{r}') D_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[g_\omega \gamma^0 \gamma^+ f_j \right] (\mathbf{r}) \quad (\text{A.73})$$

ou encore :

$$\mathcal{F}_i^{\omega,2}(\mathbf{r}, q_i) = 2 \sum_j \delta_{q_j, q_i} \int d^3 r' g_\omega(2) \frac{1}{2\pi} \left[F_j^{-*}(q_j) G_i^+(q_i) - G_j^{-*}(q_j) F_i^+(q_i) \right] (\mathbf{r}') D_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{g_\omega}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} -G_j^-(q_j) \\ 0 \\ iF_j^-(q_j) \\ 0 \end{pmatrix} (\mathbf{r}) \quad (\text{A.74})$$

La somme de ces deux contributions donne :

$$\mathcal{F}_i^{\omega,+ -}(\mathbf{r}, q_i) = 2 \sum_j \delta_{q_j, q_i} \int d^3 r' \frac{g_\omega(2)}{2\pi} \frac{g_\omega}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} -[F_j^{-*}(q_j) G_i^+(q_i) - G_j^{-*}(q_j) F_i^+(q_i)](\mathbf{r}') G_j^-(\mathbf{r}, q_j) \\ -[F_j^{+*}(q_j) G_i^-(q_i) - G_j^{+*}(q_j) F_i^-(q_i)](\mathbf{r}') G_j^+(\mathbf{r}, q_j) \\ i[F_j^{-*}(q_j) G_i^+(q_i) - G_j^{-*}(q_j) F_i^+(q_i)](\mathbf{r}') F_j^-(\mathbf{r}, q_j) \\ i[F_j^{+*}(q_j) G_i^-(q_i) - G_j^{+*}(q_j) F_i^-(q_i)](\mathbf{r}') F_j^+(\mathbf{r}, q_j) \end{pmatrix} \quad (\text{A.75})$$

A.2.2.1 Contribution des blocs Ω_j positifs

La contribution des blocs Ω_j positifs au spineur A.75 engendre les matrices suivantes dans la base d'oscillateur harmonique déformé :

$$A_{\alpha\alpha'}^{\omega,+ -, >0} = 2 \sum_{j>0} \delta_{q_j, q_i} \sum_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}'} \delta_{m_{s_{\alpha\tilde{\beta}}}}^{\mathfrak{H}} \delta_{m_{s_{\alpha'\tilde{\beta}'}}}^{\mathfrak{H}} \delta_{m_{s_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}'}}}^{\mathfrak{I}} g_{\tilde{\beta}}^{(j)}(q_j) g_{\tilde{\beta}'}^{(j)}(q_j) I_{\alpha\tilde{\beta}\tilde{\beta}'\alpha'}^{\omega} \quad (\text{A.76})$$

$$B_{\tilde{\alpha}\alpha'}^{\omega,+ -, >0} = -2 \sum_{j>0} \delta_{q_j, q_i} \sum_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}'} \delta_{m_{s_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}}}^{\mathfrak{H}} \delta_{m_{s_{\alpha'\tilde{\beta}'}}}^{\mathfrak{H}} \delta_{m_{s_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}'}}}^{\mathfrak{I}} f_{\tilde{\beta}}^{(j)}(q_j) g_{\tilde{\beta}'}^{(j)}(q_j) I_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\beta}'\alpha'}^{\omega} \quad (\text{A.77})$$

$$C_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}'}^{\omega,+ -, >0} = 2 \sum_{j>0} \delta_{q_j, q_i} \sum_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}'} \delta_{m_{s_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}}}^{\mathfrak{H}} \delta_{m_{s_{\alpha'\tilde{\beta}'}}}^{\mathfrak{H}} \delta_{m_{s_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}'}}}^{\mathfrak{I}} f_{\tilde{\beta}}^{(j)}(q_j) f_{\tilde{\beta}'}^{(j)}(q_j) I_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\beta}'\tilde{\alpha}'}^{\omega} \quad (\text{A.78})$$

A.2.2.2 Contribution des blocs Ω_j négatifs

Après transformation par renversement du temps sur l'indice j , la contribution des blocs Ω_j négatifs au spineur A.75 peut s'exprimer en terme d'une somme sur les blocs Ω_j positifs comme suit :

$$\mathcal{F}_i^{\omega,+ -, <0}(\mathbf{r}, q_i) = 2 \sum_{j>0} \delta_{q_j, q_i} \int d^3 r' \frac{g_\omega(2)}{2\pi} \frac{g_\omega}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} [F_j^+(q_j) G_i^+(q_i) + G_j^+(q_j) F_i^+(q_i)](\mathbf{r}') G_j^{+*}(\mathbf{r}, q_j) \\ [F_j^-(q_j) G_i^-(q_i) + G_j^-(q_j) F_i^-(q_i)](\mathbf{r}') G_j^{-*}(\mathbf{r}, q_j) \\ i[F_j^+(q_j) G_i^+(q_i) + G_j^+(q_j) F_i^+(q_i)](\mathbf{r}') F_j^{+*}(\mathbf{r}, q_j) \\ i[F_j^-(q_j) G_i^-(q_i) + G_j^-(q_j) F_i^-(q_i)](\mathbf{r}') F_j^{-*}(\mathbf{r}, q_j) \end{pmatrix} \quad (\text{A.79})$$

Son correspondant dans la base d'oscillateur harmonique peut être représenté en terme des matrices A , B et C suivantes :

$$A_{\alpha\alpha'}^{\omega,+-,<0} = 2 \sum_{j>0} \delta_{q_j,q_i} \sum_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}'} \delta_{m_{s_{\alpha\tilde{\beta}}}}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\alpha'\tilde{\beta}'}}}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}'}}}^{\parallel} g_{\tilde{\beta}}^{(j)}(q_j) g_{\tilde{\beta}'}^{(j)}(q_j) \check{I}_{\alpha\tilde{\beta}\tilde{\beta}'\alpha'}^{\omega} \quad (\text{A.80})$$

$$B_{\tilde{\alpha}\alpha'}^{\omega,+-,<0} = 2 \sum_{j>0} \delta_{q_j,q_i} \sum_{\beta\beta'} \delta_{m_{s_{\tilde{\alpha}\beta}}}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\alpha'\beta'}}}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\beta\beta'}}}^{\parallel} f_{\beta}^{(j)}(q_j) g_{\beta'}^{(j)}(q_j) \check{I}_{\tilde{\alpha}\beta\beta'\alpha'}^{\omega} \quad (\text{A.81})$$

$$C_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}'}^{\omega,+-,<0} = 2 \sum_{j>0} \delta_{q_j,q_i} \sum_{\beta\beta'} \delta_{m_{s_{\tilde{\alpha}\beta}}}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\tilde{\alpha}'\beta'}}}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\beta\beta'}}}^{\parallel} f_{\beta}^{(j)}(q_j) f_{\beta'}^{(j)}(q_j) \check{I}_{\tilde{\alpha}\beta\beta'\tilde{\alpha}'}^{\omega} \quad (\text{A.82})$$

A.2.2.3 Contribution totale

On en déduit la contribution totale des matrices A , B et C :

$$A_{\alpha\alpha'}^{\omega,+-} = 2 \sum_{j>0} \delta_{q_j,q_i} \sum_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}'} g_{\tilde{\beta}}^{(j)}(q_j) g_{\tilde{\beta}'}^{(j)}(q_j) \left\{ \delta_{m_{s_{\alpha\tilde{\beta}}}}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\alpha'\tilde{\beta}'}}}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}'}}}^{\parallel} I_{\alpha\tilde{\beta}\tilde{\beta}'\alpha'}^{\omega} + \delta_{m_{s_{\alpha\tilde{\beta}}}}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\alpha'\tilde{\beta}'}}}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}'}}}^{\parallel} \check{I}_{\alpha\tilde{\beta}\tilde{\beta}'\alpha'}^{\omega} \right\} \quad (\text{A.83})$$

$$B_{\tilde{\alpha}\alpha'}^{\omega,+-} = -2 \sum_{j>0} \delta_{q_j,q_i} \sum_{\beta\beta'} f_{\beta}^{(j)}(q_j) g_{\beta'}^{(j)}(q_j) \left\{ \delta_{m_{s_{\tilde{\alpha}\beta}}}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\alpha'\beta'}}}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\beta\beta'}}}^{\parallel} I_{\tilde{\alpha}\beta\beta'\alpha'}^{\omega} - \delta_{m_{s_{\tilde{\alpha}\beta}}}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\alpha'\beta'}}}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\beta\beta'}}}^{\parallel} \check{I}_{\tilde{\alpha}\beta\beta'\alpha'}^{\omega} \right\} \quad (\text{A.84})$$

$$C_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}'}^{\omega,+-} = 2 \sum_{j>0} \delta_{q_j,q_i} \sum_{\beta\beta'} f_{\beta}^{(j)}(q_j) f_{\beta'}^{(j)}(q_j) \left\{ \delta_{m_{s_{\tilde{\alpha}\beta}}}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\tilde{\alpha}'\beta'}}}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\beta\beta'}}}^{\parallel} I_{\tilde{\alpha}\beta\beta'\tilde{\alpha}'}^{\omega} + \delta_{m_{s_{\tilde{\alpha}\beta}}}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\tilde{\alpha}'\beta'}}}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\beta\beta'}}}^{\parallel} \check{I}_{\tilde{\alpha}\beta\beta'\tilde{\alpha}'}^{\omega} \right\} \quad (\text{A.85})$$

A.2.3 Contributions spatiales $\mu = 3$

La troisième contribution de A.61 s'écrit :

$$\mathcal{F}_i^{\omega,3}(\mathbf{r}, q_i) = \sum_j \delta_{q_j,q_i} \int d^3r' g_{\omega}(2) \left[f_j^{\dagger}(q_j) \gamma^0 \gamma^3 f_i(q_i) \right] (\mathbf{r}') D_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [g_{\omega} \gamma^0 \gamma^3 f_j] (\mathbf{r}) \quad (\text{A.86})$$

A.2.3.1 Contribution des blocs Ω_j positifs

La contribution des blocs Ω_j positifs au spineur A.86 s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i^{\omega,3,>0}(\mathbf{r}, q_i) = & \sum_{j>0} \delta q_j, q_i \int d^3 r' g_\omega(2) \frac{1}{2\pi} D_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ & \left[F_j^{+*}(q_j) G_i^+(q_i) - F_j^{-*}(q_j) G_i^-(q_i) - G_j^{+*}(q_j) F_i^+(q_i) + G_j^{-*}(q_j) F_i^-(q_i) \right] (\mathbf{r}') \\ & \frac{g_\omega}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} -G_j^+ \\ G_j^- \\ iF_j^+ \\ -iF_j^- \end{pmatrix} (\mathbf{r}, q_j) \end{aligned} \quad (\text{A.87})$$

On en déduit les matrices A , B et C générées par son représentant dans la base d'oscillateur harmonique :

$$A_{\alpha\alpha'}^{\omega,3,>0} = \sum_{j>0} \delta q_j, q_i \sum_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}'} \delta_{m_{s_{\alpha\tilde{\beta}}}}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\alpha'\tilde{\beta}'}}}^{\parallel} (2m_{s_{\tilde{\beta}}}) (2m_{s_{\tilde{\beta}'}}) g_{\tilde{\beta}}^{(j)}(q_j) g_{\tilde{\beta}'}^{(j)}(q_j) I_{\alpha\tilde{\beta}\tilde{\beta}'\alpha'}^{\omega} \quad (\text{A.88})$$

$$B_{\tilde{\alpha}\alpha'}^{\omega,3,>0} = - \sum_{j>0} \delta q_j, q_i \sum_{\beta\tilde{\beta}'} \delta_{m_{s_{\alpha\beta}}}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\alpha'\tilde{\beta}'}}}^{\parallel} (2m_{s_{\beta}}) (2m_{s_{\tilde{\beta}'}}) f_{\beta}^{(j)}(q_j) g_{\tilde{\beta}'}^{(j)}(q_j) I_{\tilde{\alpha}\beta\tilde{\beta}'\alpha'}^{\omega} \quad (\text{A.89})$$

$$C_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}'}^{\omega,3,>0} = \sum_{j>0} \delta q_j, q_i \sum_{\beta\tilde{\beta}'} \delta_{m_{s_{\alpha\beta}}}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\alpha'\tilde{\beta}'}}}^{\parallel} (2m_{s_{\beta}}) (2m_{s_{\tilde{\beta}'}}) f_{\beta}^{(j)}(q_j) f_{\tilde{\beta}'}^{(j)}(q_j) I_{\tilde{\alpha}\beta\tilde{\beta}'\tilde{\alpha}'}^{\omega} \quad (\text{A.90})$$

A.2.3.2 Contribution des blocs Ω_j négatifs

La contribution des blocs Ω_j négatifs au spineur A.86 s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i^{\omega,3,<0}(\mathbf{r}, q_i) = & \sum_{j>0} \delta q_j, q_i \int d^3 r' g_\omega(2) \frac{1}{2\pi} D_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ & \left[F_j^-(q_j) G_i^+(q_i) + F_j^+(q_j) G_i^-(q_i) + G_j^-(q_j) F_i^+(q_i) + G_j^+(q_j) F_i^-(q_i) \right] (\mathbf{r}') \\ & \frac{g_\omega}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} G_j^{-*} \\ G_j^{+*} \\ iF_j^{-*} \\ iF_j^{+*} \end{pmatrix} (\mathbf{r}, q_j) \end{aligned} \quad (\text{A.91})$$

On en déduit les matrices A , B et C générées par son représentant dans la base d'oscillateur harmonique :

$$A_{\alpha\alpha'}^{\omega,3,<0} = \sum_{j>0} \delta q_j, q_i \sum_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}'} \delta_{m_{s_{\alpha\tilde{\beta}}}}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\alpha'\tilde{\beta}'}}}^{\parallel} g_{\tilde{\beta}}^{(j)}(q_j) g_{\tilde{\beta}'}^{(j)}(q_j) \check{I}_{\alpha\tilde{\beta}\tilde{\beta}'\alpha'}^{\omega} \quad (\text{A.92})$$

$$B_{\tilde{\alpha}\alpha'}^{\omega,3,<0} = \sum_{j>0} \delta q_j, q_i \sum_{\beta\tilde{\beta}'} \delta_{m_{s_{\alpha\beta}}}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\alpha'\tilde{\beta}'}}}^{\parallel} f_{\beta}^{(j)}(q_j) g_{\tilde{\beta}'}^{(j)}(q_j) \check{I}_{\tilde{\alpha}\beta\tilde{\beta}'\alpha'}^{\omega} \quad (\text{A.93})$$

$$C_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}'}^{\omega,3,<0} = \sum_{j>0} \delta q_j, q_i \sum_{\beta\tilde{\beta}'} \delta_{m_{s_{\alpha\beta}}}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\alpha'\tilde{\beta}'}}}^{\parallel} f_{\beta}^{(j)}(q_j) f_{\tilde{\beta}'}^{(j)}(q_j) \check{I}_{\tilde{\alpha}\beta\tilde{\beta}'\tilde{\alpha}'}^{\omega} \quad (\text{A.94})$$

A.2.3.3 Contribution totale

On en déduit la contribution totale des matrices A , B et C :

$$A_{\alpha\alpha'}^{\omega,3} = \sum_{j>0} \delta_{q_j, q_i} \sum_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}'} g_{\tilde{\beta}}^{(j)}(q_j) g_{\tilde{\beta}'}^{(j)}(q_j) \left\{ \delta_{m_{s_{\alpha\beta}}}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\alpha'\beta'}}}^{\parallel} (2m_{s_{\tilde{\beta}}})(2m_{s_{\tilde{\beta}'}}) I_{\alpha\tilde{\beta}\tilde{\beta}'\alpha'}^{\omega} + \delta_{m_{s_{\alpha\beta}}}^{\#} \delta_{m_{s_{\alpha'\beta'}}}^{\#} \check{I}_{\alpha\tilde{\beta}\tilde{\beta}'\alpha'}^{\omega} \right\} \quad (\text{A.95})$$

$$B_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}'}^{\omega,3} = - \sum_{j>0} \delta_{q_j, q_i} \sum_{\beta\tilde{\beta}'} f_{\beta}^{(j)}(q_j) g_{\tilde{\beta}'}^{(j)}(q_j) \left\{ \delta_{m_{s_{\tilde{\alpha}\beta}}}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\alpha'\tilde{\beta}'}}}^{\parallel} (2m_{s_{\tilde{\beta}}})(2m_{s_{\tilde{\beta}'}}) I_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\beta}'\alpha'}^{\omega} - \delta_{m_{s_{\tilde{\alpha}\beta}}}^{\#} \delta_{m_{s_{\alpha'\tilde{\beta}'}}}^{\#} \check{I}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\beta}'\alpha'}^{\omega} \right\} \quad (\text{A.96})$$

$$C_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}'}^{\omega,3} = \sum_{j>0} \delta_{q_j, q_i} \sum_{\beta\tilde{\beta}'} f_{\beta}^{(j)}(q_j) f_{\tilde{\beta}'}^{(j)}(q_j) \left\{ \delta_{m_{s_{\tilde{\alpha}\beta}}}^{\parallel} \delta_{m_{s_{\alpha'\tilde{\beta}'}}}^{\parallel} (2m_{s_{\tilde{\beta}}})(2m_{s_{\tilde{\beta}'}}) I_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\beta}'\tilde{\alpha}'}^{\omega} + \delta_{m_{s_{\tilde{\alpha}\beta}}}^{\#} \delta_{m_{s_{\alpha'\tilde{\beta}'}}}^{\#} \check{I}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\beta}'\tilde{\alpha}'}^{\omega} \right\} \quad (\text{A.97})$$

A.3 LE 4-POTENTIEL ÉLECTROMAGNÉTIQUE ET LE MÉSON ρ

A.3.1 Le 4-potentiel électromagnétique

La structure de Lorentz des contributions du 4-potentiel électromagnétique est identique à celles du méson ω . En revanche, la structure isospinorielle est différente : seule les spineurs protoniques interviennent.

A.3.2 Le méson ρ

De même, le méson ρ est associé à des matrices A , B et C présentant des contributions spinorielles identiques à celles associées au méson ω . En revanche, du fait de son caractère isovecteur, la structure isospinorielle diffère. Détaillons cette dernière

Pour cela, on considère la contribution potentielle V_{ρ} au Hamiltonien du méson ρ :

$$V_{\rho} = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} c_i^{\dagger} c_j^{\dagger} c_k c_l \int d^3x_1 d^3x_2 [g_{\omega} \gamma^{\mu} \vec{\tau}](1) [g_{\omega} \gamma_{\mu} \vec{\tau}](2) \bar{f}_i(\mathbf{x}_1) \bar{f}_j(\mathbf{x}_2) D_{\rho}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) f_k(\mathbf{x}_2) f_l(\mathbf{x}_1) \quad (\text{A.98})$$

Prenons comme convention $q = -1$ pour un proton et $q = +1$ pour un neutron. En explicitant l'action des matrices de Pauli dans l'espace d'isospin $\vec{\tau}$, l'expression A.98 comporte trois contributions :

$$\begin{aligned}
V_\rho = & \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} c_i^\dagger c_j^\dagger c_k c_l \int d^3 x_1 d^3 x_2 [g_\rho \gamma^\mu](1) [g_\rho \gamma_\mu](2) \bar{f}_i(\mathbf{x}_1) \\
& \bar{f}_j(\mathbf{x}_2) D_\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \left[\delta_{q_i, -q_l} \delta_{q_j, -q_k} + q_i q_j \delta_{q_i, -q_l} \delta_{q_j, -q_k} + q_i q_j \delta_{q_i, q_l} \delta_{q_j, q_k} \right] f_k(\mathbf{x}_2) f_l(\mathbf{x}_1)
\end{aligned} \quad (\text{A.99})$$

L'application du théorème de Wick implique les règles de sélection d'isospin suivantes :

- Le terme de Hartree présente le facteur :

$$\delta_{i,l} \delta_{j,k} \left[\delta_{q_i, -q_l} \delta_{q_j, -q_k} + q_i q_j \delta_{q_i, -q_l} \delta_{q_j, -q_k} + q_i q_j \delta_{q_i, q_l} \delta_{q_j, q_k} \right] = q_i q_j \quad (\text{A.100})$$

Ainsi, seule subsiste la contribution provenant de la troisième composante d'isospin :

$$E_\rho^H = \frac{1}{2} \sum_{k,l} \int d^3 x_1 d^3 x_2 [g_\rho \bar{f}_k(q_k) \gamma^\mu q_k f_k(q_k)](\mathbf{x}_1) D_\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) [g_\rho \bar{f}_l(q_l) \gamma^\mu q_l f_l(q_l)](\mathbf{x}_2) \quad (\text{A.101})$$

qui se simplifie en :

$$E_\rho^H = \frac{1}{2} \int d^3 x [g_\rho \sum_j \bar{f}_j(q_j) \gamma^\mu q_j f_j(q_j)](\mathbf{x}) \rho_\mu^3(\mathbf{x}) \quad (\text{A.102})$$

- Le terme de Fock comporte le facteur :

$$\begin{aligned}
\delta_{i,j} \left[\delta_{q_i, -q_l} \delta_{q_j, -q_k} + q_i q_j \delta_{q_i, -q_l} \delta_{q_j, -q_k} + q_i q_j \delta_{q_i, q_l} \delta_{q_j, q_k} \right] &= \delta_{q_i, -q_j} + q_j^2 \delta_{q_i, -q_j} + q_j^2 \delta_{q_i, q_j} \\
&= 2\delta_{q_i, -q_j} + \delta_{q_i, q_j} \\
&= 2 - \delta_{q_i, q_j}
\end{aligned} \quad (\text{A.103})$$

Par conséquent, les matrices de Fock associées au méson ρ sont identiques à celles du méson ω à ceci près que le facteur δ_{q_i, q_j} doit être remplacé par le facteur $2 - \delta_{q_i, q_j}$.

A.4 LE MÉSON PSEUDO-SCALAIRE ISOVECTEUR π

Le pion ne contribue pas dans le canal direct. La fonctionnelle de la densité associée à ce dernier s'écrit :

$$E_\pi^F = \frac{1}{2m_\pi^2} \sum_{k,l} (2 - \delta_{q_k, q_l}) \int d^3 x_1 d^3 x_2 [f_\pi \bar{f}_k \gamma^5 \gamma^a f_l]_{x_1} \nabla_{x_1}^a \nabla_{x_2}^b D_\pi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) [f_\pi \bar{f}_l \gamma^5 \gamma^b f_k]_{x_2} \quad (\text{A.104})$$

Après minimisation de cette fonctionnelle, le potentiel non local de Fock $\mathcal{F}_i^\pi(\mathbf{r}) \equiv \gamma^0 \frac{\delta E_\pi^F}{\delta f_i(\mathbf{r})}$ contribuant dans l'équation de Dirac en représentation coordonnée correspond à :

$$\mathcal{F}_i^\pi(\mathbf{r}) = \frac{1}{m_\pi^2} \sum_j (2 - \delta_{q_i, q_j}) \int d^3 r' \left[f_\pi f_j^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \gamma^b f_i \right]_{\mathbf{r}'} \nabla_{\mathbf{r}}^a \nabla_{\mathbf{r}'}^b D_\pi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[f_\pi \gamma^0 \gamma^5 \gamma^a f_j \right]_{\mathbf{r}} \quad (\text{A.105})$$

Nous adoptons à nouveau la représentation sphérique des vecteurs, de telle sorte que :

$$\gamma^c \nabla^c = -\gamma^+ \partial^- - \gamma^- \partial^+ + \gamma^3 \partial^3 \quad (\text{A.106})$$

avec :

$$\begin{aligned} \gamma^+ &= \frac{-2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^- = \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \partial^+ &= \frac{-1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \left(\partial_{r_\perp} + \frac{i}{r_\perp} \partial_\varphi \right); \quad \partial^- = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} \left(\partial_{r_\perp} - \frac{i}{r_\perp} \partial_\varphi \right); \quad \partial^3 = \partial_z \end{aligned} \quad (\text{A.107})$$

Ce potentiel comprend cinq contributions non nulles :

$$\mathcal{F}_i^\pi(\mathbf{r}) = \mathcal{F}_i^{++}(\mathbf{r}) + \mathcal{F}_i^{+-}(\mathbf{r}) + \mathcal{F}_i^{-+}(\mathbf{r}) + \mathcal{F}_i^{--}(\mathbf{r}) + \mathcal{F}_i^{33}(\mathbf{r}) \quad (\text{A.108})$$

A.4.1 Contribution ++

Le spineur s'écrit :

$$\mathcal{F}_i^{++}(\mathbf{r}) = \frac{1}{m_\pi^2} \sum_j (2 - \delta_{q_j, q_i}) \int d^3 r' \left[f_\pi f_j^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \gamma^+ f_i \right]_{\mathbf{r}'} \partial_{\mathbf{r}}^- \partial_{\mathbf{r}'}^- D_\pi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[f_\pi \gamma^0 \gamma^5 \gamma^+ f_j \right]_{\mathbf{r}} \quad (\text{A.109})$$

A.4.1.1 Contribution des blocs Ω_j positifs

- Le produit spinoriel prend la forme :

$$f_j^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \gamma^+ f_i = \frac{2}{\sqrt{2}} \left[F_j^{+*} F_i^- + G_j^{+*} G_i^- \right]_{\mathbf{r}'} \quad (\text{A.110})$$

- Le spineur s'écrit :

$$\gamma^0 \gamma^5 \gamma^+ f_j = \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} F_j^- \\ 0 \\ iG_j^- \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathbf{r}} \quad (\text{A.111})$$

On en déduit les matrices A , B et C associées à son représentant dans la base d'oscillateur harmonique déformé :

$$A_{\alpha\alpha'}^{++>0} = \frac{1}{m_\pi^2} \sum_j (2 - \delta_{q_i q_j}) \sum_{\beta\beta'} \delta_{ms_{\alpha\beta}}^{\eta} \delta_{ms_{\alpha'\beta'}}^{\eta} \delta_{ms_{\beta}; \frac{-1}{2}} \delta_{ms_{\beta'}; \frac{+1}{2}} f_{\beta}^{(j)}(q_j) f_{\beta'}^{(j)}(q_j) I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{++} \quad (\text{A.112})$$

$$B_{\bar{\alpha}\alpha'}^{++>0} = \frac{1}{m_\pi^2} \sum_j (2 - \delta_{q_i q_j}) \sum_{\tilde{\beta}\beta'} \delta_{ms_{\bar{\alpha}\tilde{\beta}}}^{\eta} \delta_{ms_{\alpha'\beta'}}^{\eta} \delta_{ms_{\tilde{\beta}}; \frac{-1}{2}} \delta_{ms_{\beta'}; \frac{+1}{2}} g_{\tilde{\beta}}^{(j)}(q_j) f_{\beta'}^{(j)}(q_j) I_{\bar{\alpha}\tilde{\beta}\beta'\alpha'}^{++} \quad (\text{A.113})$$

$$C_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}'}^{++>0} = \frac{1}{m_\pi^2} \sum_j (2 - \delta_{q_i q_j}) \sum_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}'} \delta_{ms_{\bar{\alpha}\tilde{\beta}}}^{\eta} \delta_{ms_{\alpha'\tilde{\beta}'}}^{\eta} \delta_{ms_{\tilde{\beta}}; \frac{-1}{2}} \delta_{ms_{\tilde{\beta}'}; \frac{+1}{2}} g_{\tilde{\beta}}^{(j)}(q_j) g_{\tilde{\beta}'}^{(j)}(q_j) I_{\bar{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\beta}'\bar{\alpha}'}^{++} \quad (\text{A.114})$$

avec

$$I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{++} = \int d\mathbf{r} [f_\pi \phi_\alpha^* \phi_\beta](\mathbf{r}) \int d\mathbf{r}' \partial_{\mathbf{r}}^- \partial_{\mathbf{r}'}^- D_\pi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [f_\pi \phi_{\beta'}^* \phi_{\alpha'}](\mathbf{r}') \quad (\text{A.115})$$

A.4.1.2 Contribution des blocs Ω_j négatifs

- Le produit spinoriel prend la forme :

$$f_j^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \gamma^+ f_i = \frac{2}{\sqrt{2}} \left[F_j^- F_i^- - G_j^- G_i^- \right]_{\mathbf{r}'} \quad (\text{A.116})$$

- Le spineur s'écrit :

$$\gamma^0 \gamma^5 \gamma^+ f_j = \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -F_j^{+*} \\ 0 \\ iG_j^{+*} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathbf{r}} \quad (\text{A.117})$$

On en déduit les matrices A , B et C associées à son représentant dans la base d'oscillateur harmonique déformé :

$$A_{\alpha\alpha'}^{++<0} = -\frac{1}{m_\pi^2} \sum_j (2 - \delta_{q_i q_j}) \sum_{\beta\beta'} \delta_{ms_{\alpha\beta}}^{\eta} \delta_{ms_{\alpha'\beta'}}^{\eta} \delta_{ms_{\beta}; \frac{+1}{2}} \delta_{ms_{\beta'}; \frac{-1}{2}} f_{\beta}^{(j)}(q_j) f_{\beta'}^{(j)}(q_j) \check{I}_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{++} \quad (\text{A.118})$$

$$B_{\bar{\alpha}\alpha'}^{++<0} = \frac{1}{m_\pi^2} \sum_j (2 - \delta_{q_i q_j}) \sum_{\tilde{\beta}\beta'} \delta_{ms_{\bar{\alpha}\tilde{\beta}}}^{\eta} \delta_{ms_{\alpha'\beta'}}^{\eta} \delta_{ms_{\tilde{\beta}}; \frac{+1}{2}} \delta_{ms_{\beta'}; \frac{-1}{2}} g_{\tilde{\beta}}^{(j)}(q_j) f_{\beta'}^{(j)}(q_j) \check{I}_{\bar{\alpha}\tilde{\beta}\beta'\alpha'}^{++} \quad (\text{A.119})$$

$$C_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}'}^{++<0} = -\frac{1}{m_\pi^2} \sum_j (2 - \delta_{q_i q_j}) \sum_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}'} \delta_{ms_{\bar{\alpha}\tilde{\beta}}}^{\eta} \delta_{ms_{\alpha'\tilde{\beta}'}}^{\eta} \delta_{ms_{\tilde{\beta}}; \frac{+1}{2}} \delta_{ms_{\tilde{\beta}'}; \frac{-1}{2}} g_{\tilde{\beta}}^{(j)}(q_j) g_{\tilde{\beta}'}^{(j)}(q_j) \check{I}_{\bar{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\beta}'\bar{\alpha}'}^{++} \quad (\text{A.120})$$

avec

$$\check{I}_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{++} = \int d\mathbf{r} [f_\pi \phi_\alpha^* \phi_\beta^*](\mathbf{r}) \int d\mathbf{r}' \partial_{\mathbf{r}}^- \partial_{\mathbf{r}'}^- D_\pi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [f_\pi \phi_{\beta'} \phi_{\alpha'}](\mathbf{r}') \quad (\text{A.121})$$

A.4.1.3 Contribution totale

On en déduit les matrices A , B et C totales :

$$A_{\alpha\alpha'}^{++} = \frac{1}{m_\pi^2} \sum_j (2 - \delta_{q_i q_j}) \sum_{\beta\beta'} \left\{ \delta_{ms_{\alpha\beta}}^H \delta_{ms_{\alpha'\beta'}}^H \delta_{ms_{\beta}; \frac{-1}{2}} \delta_{ms_{\beta'}; \frac{+1}{2}} I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{++} - \delta_{ms_{\alpha\beta}}^I \delta_{ms_{\alpha'\beta'}}^I \delta_{ms_{\beta}; \frac{+1}{2}} \delta_{ms_{\beta'}; \frac{-1}{2}} \tilde{I}_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{++} \right\} f_{\beta}^{(j)}(q_j) f_{\beta'}^{(j)}(q_j) \quad (\text{A.122})$$

$$B_{\tilde{\alpha}\alpha'}^{++} = \frac{1}{m_\pi^2} \sum_j (2 - \delta_{q_i q_j}) \sum_{\tilde{\beta}\beta'} \left\{ \delta_{ms_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}}^H \delta_{ms_{\alpha'\beta'}}^H \delta_{ms_{\tilde{\beta}}; \frac{-1}{2}} \delta_{ms_{\beta'}; \frac{+1}{2}} I_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\beta'\alpha'}^{++} + \delta_{ms_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}}^I \delta_{ms_{\alpha'\beta'}}^I \delta_{ms_{\tilde{\beta}}; \frac{+1}{2}} \delta_{ms_{\beta'}; \frac{-1}{2}} \tilde{I}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\beta'\alpha'}^{++} \right\} g_{\tilde{\beta}}^{(j)}(q_j) f_{\beta'}^{(j)}(q_j) \quad (\text{A.123})$$

$$C_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}'}^{++} = \frac{1}{m_\pi^2} \sum_j (2 - \delta_{q_i q_j}) \sum_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}'} \left\{ \delta_{ms_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}}^H \delta_{ms_{\alpha'\tilde{\beta}'}}^H \delta_{ms_{\tilde{\beta}}; \frac{-1}{2}} \delta_{ms_{\tilde{\beta}'}; \frac{+1}{2}} I_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\beta}'\alpha'}^{++} - \delta_{ms_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}}^I \delta_{ms_{\alpha'\tilde{\beta}'}}^I \delta_{ms_{\tilde{\beta}}; \frac{+1}{2}} \delta_{ms_{\tilde{\beta}'}; \frac{-1}{2}} \tilde{I}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\beta}'\alpha'}^{++} \right\} g_{\tilde{\beta}}^{(j)}(q_j) g_{\tilde{\beta}'}^{(j)}(q_j) \quad (\text{A.124})$$

A.4.2 Contribution +-

Le spineur s'écrit

$$\mathcal{F}_i^{+-}(\mathbf{r}) = \frac{1}{m_\pi^2} \sum_j (2 - \delta_{q_j q_i}) \int d^3 r' \left[f_\pi f_j^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \gamma^- f_i \right]_{\mathbf{r}'} \partial_{\mathbf{r}}^- \partial_{\mathbf{r}'}^+ D_\pi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[f_\pi \gamma^0 \gamma^5 \gamma^+ f_j \right]_{\mathbf{r}} \quad (\text{A.125})$$

A.4.2.1 Contribution des blocs Ω_j positifs

- Le produit spinoriel prend la forme :

$$f_j^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \gamma^- f_i = \frac{-2}{\sqrt{2}} \left[F_j^{-*} F_i^+ + G_j^{-*} G_i^+ \right]_{\mathbf{r}'} \quad (\text{A.126})$$

- Le spineur s'écrit :

$$\gamma^0 \gamma^5 \gamma^+ f_j = \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} F_j^- \\ 0 \\ iG_j^- \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathbf{r}} \quad (\text{A.127})$$

A.4.2.2 Contribution des blocs Ω_j négatifs

- Le produit spinoriel prend la forme :

$$f_j^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \gamma^- f_i = \frac{2}{\sqrt{2}} \left[F_j^+ F_i^+ - G_j^+ G_i^+ \right]_{r'} \quad (\text{A.128})$$

- Le spineur s'écrit :

$$\gamma^0 \gamma^5 \gamma^+ f_j = \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -F_j^{+*} \\ 0 \\ iG_j^{+*} \\ 0 \end{pmatrix}_r \quad (\text{A.129})$$

A.4.2.3 Contribution totale

On en déduit les matrices A , B et C totales :

$$A_{\alpha\alpha'}^{+-} = \frac{1}{m_\pi^2} \sum_j (2 - \delta_{q_i q_j}) \sum_{\beta\beta'} \left\{ \delta_{ms_{\alpha\beta}}^{\text{tr}} \delta_{ms_{\alpha'\beta'}}^{\text{tr}} \delta_{ms_{\beta}; \frac{-1}{2}} \delta_{ms_{\beta'}; \frac{-1}{2}} I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{+-} + \delta_{ms_{\alpha\beta}}^{\text{ll}} \delta_{ms_{\alpha'\beta'}}^{\text{ll}} \delta_{ms_{\beta}; \frac{+1}{2}} \delta_{ms_{\beta'}; \frac{+1}{2}} \check{I}_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{+-} \right\} f_{\beta}^{(j)}(q_j) f_{\beta'}^{(j)}(q_j) \quad (\text{A.130})$$

$$B_{\bar{\alpha}\alpha'}^{+-} = \frac{1}{m_\pi^2} \sum_j (2 - \delta_{q_i q_j}) \sum_{\bar{\beta}\beta'} \left\{ \delta_{ms_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}}^{\text{tr}} \delta_{ms_{\alpha'\beta'}}^{\text{tr}} \delta_{ms_{\bar{\beta}}; \frac{-1}{2}} \delta_{ms_{\beta'}; \frac{-1}{2}} I_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\beta'\alpha'}^{+-} - \delta_{ms_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}}^{\text{ll}} \delta_{ms_{\alpha'\beta'}}^{\text{ll}} \delta_{ms_{\bar{\beta}}; \frac{+1}{2}} \delta_{ms_{\beta'}; \frac{+1}{2}} \check{I}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\beta'\alpha'}^{+-} \right\} g_{\bar{\beta}}^{(j)}(q_j) f_{\beta'}^{(j)}(q_j) \quad (\text{A.131})$$

$$C_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}'}^{+-} = \frac{1}{m_\pi^2} \sum_j (2 - \delta_{q_i q_j}) \sum_{\bar{\beta}\bar{\beta}'} \left\{ \delta_{ms_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}}^{\text{tr}} \delta_{ms_{\alpha'\bar{\beta}'}}^{\text{tr}} \delta_{ms_{\bar{\beta}}; \frac{-1}{2}} \delta_{ms_{\bar{\beta}'}; \frac{-1}{2}} I_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\beta}'\alpha'}^{+-} + \delta_{ms_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}}^{\text{ll}} \delta_{ms_{\alpha'\bar{\beta}'}}^{\text{ll}} \delta_{ms_{\bar{\beta}}; \frac{+1}{2}} \delta_{ms_{\bar{\beta}'}; \frac{+1}{2}} \check{I}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\beta}'\alpha'}^{+-} \right\} g_{\bar{\beta}}^{(j)}(q_j) g_{\bar{\beta}'}^{(j)}(q_j) \quad (\text{A.132})$$

avec

$$I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{+-} = \int d\mathbf{r} [f_\pi \phi_\alpha^* \phi_\beta](\mathbf{r}) \int d\mathbf{r}' \partial_{\mathbf{r}}^- \partial_{\mathbf{r}'}^+ D_\pi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [f_\pi \phi_{\beta'}^* \phi_{\alpha'}](\mathbf{r}') \quad (\text{A.133})$$

$$\check{I}_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{+-} = \int d\mathbf{r} [f_\pi \phi_\alpha^* \phi_\beta^*](\mathbf{r}) \int d\mathbf{r}' \partial_{\mathbf{r}}^- \partial_{\mathbf{r}'}^+ D_\pi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [f_\pi \phi_{\beta'} \phi_{\alpha'}](\mathbf{r}') \quad (\text{A.134})$$

A.4.3 Contribution -+

Le spineur s'écrit

$$\mathcal{F}_i^{-+}(\mathbf{r}) = \frac{1}{m_\pi^2} \sum_j (2 - \delta_{q_j, q_i}) \int d^3 r' \left[f_\pi f_j^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \gamma^+ f_i \right]_{\mathbf{r}'} \partial_{\mathbf{r}}^+ \partial_{\mathbf{r}'}^- D_\pi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[f_\pi \gamma^0 \gamma^5 \gamma^- f_j \right]_{\mathbf{r}} \quad (\text{A.135})$$

A.4.3.1 Contribution des blocs Ω_j positifs

- Le produit spinoriel prend la forme :

$$f_j^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \gamma^+ f_i = \frac{2}{\sqrt{2}} \left[F_j^{+*} F_i^- + G_j^{+*} G_i^- \right]_{\mathbf{r}'} \quad (\text{A.136})$$

- Le spineur s'écrit :

$$\gamma^0 \gamma^5 \gamma^- f_j = \frac{-2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ F_j^+ \\ 0 \\ iG_j^+ \end{pmatrix}_{\mathbf{r}} \quad (\text{A.137})$$

A.4.3.2 Contribution des blocs Ω_j négatifs

- Le produit spinoriel prend la forme :

$$f_j^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \gamma^+ f_i = \frac{2}{\sqrt{2}} \left[F_j^- F_i^- - G_j^- G_i^- \right]_{\mathbf{r}'} \quad (\text{A.138})$$

- Le spineur s'écrit :

$$\gamma^0 \gamma^5 \gamma^- f_j = \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -F_j^{-*} \\ 0 \\ iG_j^{-*} \end{pmatrix}_{\mathbf{r}} \quad (\text{A.139})$$

A.4.3.3 Contribution totale

On en déduit les matrices A , B et C totales :

$$A_{\alpha\alpha'}^{-+} = -\frac{1}{m_\pi^2} \sum_j (2 - \delta_{q_i, q_j}) \sum_{\tilde{\beta}\beta'} \left\{ \delta_{ms_{\alpha\tilde{\beta}}}^{\text{II}} \delta_{ms_{\alpha'\beta'}}^{\text{II}} \delta_{ms_{\tilde{\beta}'; \frac{+1}{2}}} \delta_{ms_{\beta'; \frac{+1}{2}}} I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{-+} + \delta_{ms_{\alpha\tilde{\beta}}}^{\text{II}} \delta_{ms_{\alpha'\beta'}}^{\text{II}} \delta_{ms_{\tilde{\beta}'; \frac{-1}{2}}} \delta_{ms_{\beta'; \frac{-1}{2}}} \check{I}_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{-+} \right\} f_{\tilde{\beta}}^{(j)}(q_j) f_{\beta'}^{(j)}(q_j) \quad (\text{A.140})$$

$$B_{\tilde{\alpha}\alpha'}^{-+} = -\frac{1}{m_\pi^2} \sum_j (2 - \delta_{q_i, q_j}) \sum_{\tilde{\beta}\beta'} \left\{ \delta_{ms_{\alpha\tilde{\beta}}}^{\text{II}} \delta_{ms_{\alpha'\beta'}}^{\text{II}} \delta_{ms_{\tilde{\beta}'; \frac{+1}{2}}} \delta_{ms_{\beta'; \frac{+1}{2}}} I_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\beta'\alpha'}^{-+} - \delta_{ms_{\alpha\tilde{\beta}}}^{\text{II}} \delta_{ms_{\alpha'\beta'}}^{\text{II}} \delta_{ms_{\tilde{\beta}'; \frac{-1}{2}}} \delta_{ms_{\beta'; \frac{-1}{2}}} \check{I}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\beta'\alpha'}^{-+} \right\} g_{\tilde{\beta}}^{(j)}(q_j) f_{\beta'}^{(j)}(q_j) \quad (\text{A.141})$$

$$C_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}'}^{-+} = -\frac{1}{m_\pi^2} \sum_j (2 - \delta_{q_i q_j}) \sum_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}'} \left\{ \delta_{m_{S_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}}^{\text{II}}}^{\text{II}} \delta_{m_{S_{\tilde{\alpha}'\tilde{\beta}'}}^{\text{II}}}^{\text{II}} \delta_{m_{S_{\tilde{\beta}}}; \frac{+1}{2}} \delta_{m_{S_{\tilde{\beta}'}; \frac{+1}{2}}} I_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\beta}'\tilde{\alpha}'}^{-+} + \delta_{m_{S_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}}^{\text{II}}}^{\text{II}} \delta_{m_{S_{\tilde{\alpha}'\tilde{\beta}'}}^{\text{II}}}^{\text{II}} \delta_{m_{S_{\tilde{\beta}}}; \frac{-1}{2}} \delta_{m_{S_{\tilde{\beta}'}; \frac{-1}{2}}} \tilde{I}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\beta}'\tilde{\alpha}'}^{-+} \right\} g_{\tilde{\beta}}^{(j)}(q_j) g_{\tilde{\beta}'}^{(j)}(q_j) \quad (\text{A.142})$$

avec

$$I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{-+} = \int d\mathbf{r} [f_\pi \phi_\alpha^* \phi_\beta](\mathbf{r}) \int d\mathbf{r}' \partial_{\mathbf{r}}^+ \partial_{\mathbf{r}'}^- D_\pi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [f_\pi \phi_{\beta'}^* \phi_{\alpha'}](\mathbf{r}') \quad (\text{A.143})$$

$$\tilde{I}_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{-+} = \int d\mathbf{r} [f_\pi \phi_\alpha^* \phi_\beta^*](\mathbf{r}) \int d\mathbf{r}' \partial_{\mathbf{r}}^+ \partial_{\mathbf{r}'}^- D_\pi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [f_\pi \phi_{\beta'} \phi_{\alpha'}](\mathbf{r}') \quad (\text{A.144})$$

A.4.4 Contribution - -

Le spineur s'écrit

$$\mathcal{F}_i^{--}(\mathbf{r}) = \frac{1}{m_\pi^2} \sum_j (2 - \delta_{q_j, q_i}) \int d^3 r' \left[f_\pi f_j^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \gamma^- f_i \right]_{\mathbf{r}'} \partial_{\mathbf{r}}^+ \partial_{\mathbf{r}'}^+ D_\pi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [f_\pi \gamma^0 \gamma^5 \gamma^- f_j]_{\mathbf{r}} \quad (\text{A.145})$$

A.4.4.1 Contribution des blocs Ω_j positifs

- Le produit spinoriel prend la forme :

$$f_j^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \gamma^- f_i = \frac{-2}{\sqrt{2}} \left[F_j^{-*} F_i^+ - G_j^{-*} G_i^+ \right]_{\mathbf{r}'} \quad (\text{A.146})$$

- Le spineur s'écrit :

$$\gamma^0 \gamma^5 \gamma^- f_j = \frac{-2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ F_j^+ \\ 0 \\ iG_j^+ \end{pmatrix}_{\mathbf{r}} \quad (\text{A.147})$$

A.4.4.2 Contribution des blocs Ω_j négatifs

- Le produit spinoriel prend la forme :

$$f_j^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \gamma^- f_i = \frac{2}{\sqrt{2}} \left[F_j^+ F_i^+ - G_j^+ G_i^+ \right]_{\mathbf{r}'} \quad (\text{A.148})$$

- Le spineur s'écrit :

$$\gamma^0 \gamma^5 \gamma^- f_j = \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -F_j^{-*} \\ 0 \\ iG_j^{-*} \end{pmatrix}_{\mathbf{r}} \quad (\text{A.149})$$

A.4.4.3 Contribution totale

On en déduit les matrices A , B et C totales :

$$A_{\alpha\alpha'}^{--} = \frac{1}{m_\pi^2} \sum_j (2 - \delta_{q_i q_j}) \sum_{\beta\beta'} \left\{ \delta_{ms_{\alpha\beta}}^H \delta_{ms_{\alpha'\beta'}}^H \delta_{ms_{\beta}; \frac{+1}{2}} \delta_{ms_{\beta'}; \frac{-1}{2}} I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{--} - \delta_{ms_{\alpha\beta}}^I \delta_{ms_{\alpha'\beta'}}^I \delta_{ms_{\beta}; \frac{-1}{2}} \delta_{ms_{\beta'}; \frac{+1}{2}} \check{I}_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{--} \right\} f_{\beta}^{(j)}(q_j) f_{\beta'}^{(j)}(q_j) \quad (\text{A.150})$$

$$B_{\tilde{\alpha}\alpha'}^{--} = \frac{1}{m_\pi^2} \sum_j (2 - \delta_{q_i q_j}) \sum_{\tilde{\beta}\beta'} \left\{ \delta_{ms_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}}^H \delta_{ms_{\alpha'\beta'}}^H \delta_{ms_{\tilde{\beta}}; \frac{+1}{2}} \delta_{ms_{\beta'}; \frac{-1}{2}} I_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\beta'\alpha'}^{--} + \delta_{ms_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}}^I \delta_{ms_{\alpha'\beta'}}^I \delta_{ms_{\tilde{\beta}}; \frac{-1}{2}} \delta_{ms_{\beta'}; \frac{+1}{2}} \check{I}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\beta'\alpha'}^{--} \right\} g_{\tilde{\beta}}^{(j)}(q_j) f_{\beta'}^{(j)}(q_j) \quad (\text{A.151})$$

$$C_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}'}^{--} = \frac{1}{m_\pi^2} \sum_j (2 - \delta_{q_i q_j}) \sum_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}'} \left\{ \delta_{ms_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}}^H \delta_{ms_{\alpha'\tilde{\beta}'}}^H \delta_{ms_{\tilde{\beta}}; \frac{+1}{2}} \delta_{ms_{\tilde{\beta}'}; \frac{-1}{2}} I_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\beta}'\alpha'}^{--} - \delta_{ms_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}}^I \delta_{ms_{\alpha'\tilde{\beta}'}}^I \delta_{ms_{\tilde{\beta}}; \frac{-1}{2}} \delta_{ms_{\tilde{\beta}'}; \frac{+1}{2}} \check{I}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\beta}'\alpha'}^{--} \right\} g_{\tilde{\beta}}^{(j)}(q_j) g_{\tilde{\beta}'}^{(j)}(q_j) \quad (\text{A.152})$$

avec

$$I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{--} = \int d\mathbf{r} [f_\pi \phi_\alpha^* \phi_\beta](\mathbf{r}) \int d\mathbf{r}' \partial_{\mathbf{r}'}^+ \partial_{\mathbf{r}'}^+ D_\pi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [f_\pi \phi_{\beta'}^* \phi_{\alpha'}](\mathbf{r}') \quad (\text{A.153})$$

$$\check{I}_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{--} = \int d\mathbf{r} [f_\pi \phi_\alpha^* \phi_\beta^*](\mathbf{r}) \int d\mathbf{r}' \partial_{\mathbf{r}'}^+ \partial_{\mathbf{r}'}^+ D_\pi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [f_\pi \phi_{\beta'} \phi_{\alpha'}](\mathbf{r}') \quad (\text{A.154})$$

A.4.5 Contribution 33

Le spineur s'écrit

$$\mathcal{F}_i^{33}(\mathbf{r}) = \frac{1}{m_\pi^2} \sum_j (2 - \delta_{q_j, q_i}) \int d^3 r' \left[f_\pi f_j^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \gamma^3 f_i \right]_{\mathbf{r}'} \partial_{\mathbf{r}'}^3 \partial_{\mathbf{r}'}^3 D_\pi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[f_\pi \gamma^0 \gamma^5 \gamma^3 f_j \right]_{\mathbf{r}} \quad (\text{A.155})$$

A.4.5.1 Contribution des blocs Ω_j positifs

- Le produit spinoriel prend la forme :

$$f_j^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \gamma^3 f_i = \left[-F_j^{+*} F_i^+ + F_j^{-*} F_i^- - G_j^{+*} G_i^+ + G_j^{-*} G_i^- \right]_{\mathbf{r}'} \quad (\text{A.156})$$

- Le spineur s'écrit :

$$\gamma^0 \gamma^5 \gamma^3 f_j = \begin{pmatrix} -F_j^+ \\ F_j^- \\ -iG_j^+ \\ iG_j^- \end{pmatrix}_r \quad (\text{A.157})$$

A.4.5.2 Contribution des blocs Ω_j négatifs

- Le produit spinoriel prend la forme :

$$f_j^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \gamma^3 f_i = \left[-F_j^- F_i^+ - F_j^+ F_i^- + G_j^- G_i^+ + G_j^+ G_i^- \right]_{r'} \quad (\text{A.158})$$

- Le spineur s'écrit :

$$\gamma^0 \gamma^5 \gamma^3 f_j = \begin{pmatrix} -F_j^{-*} \\ -F_j^{+*} \\ iG_j^{-*} \\ iG_j^{+*} \end{pmatrix}_r \quad (\text{A.159})$$

A.4.5.3 Contribution totale

On en déduit les matrices A , B et C totales :

$$A_{\alpha\alpha'}^{33} = \frac{1}{m_\pi^2} \sum_j (2 - \delta_{q_i q_j}) \sum_{\beta\beta'} \left\{ (2ms_\beta)(2ms_{\beta'}) \delta_{ms_\alpha\beta}^{\parallel} \delta_{ms_{\alpha'}\beta'}^{\parallel} I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{33} + \delta_{ms_\alpha\beta}^{\eta} \delta_{ms_{\alpha'}\beta'}^{\eta} \tilde{I}_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{33} \right\} f_\beta^{(j)}(q_j) f_{\beta'}^{(j)}(q_j) \quad (\text{A.160})$$

$$B_{\tilde{\alpha}\alpha'}^{33} = \frac{1}{m_\pi^2} \sum_j (2 - \delta_{q_i q_j}) \sum_{\tilde{\beta}\beta'} \left\{ (2ms_{\tilde{\beta}})(2ms_{\beta'}) \delta_{ms_{\tilde{\alpha}}\tilde{\beta}}^{\parallel} \delta_{ms_{\alpha'}\beta'}^{\parallel} I_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\beta'\alpha'}^{33} - \delta_{ms_{\tilde{\alpha}}\tilde{\beta}}^{\eta} \delta_{ms_{\alpha'}\beta'}^{\eta} \tilde{I}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\beta'\alpha'}^{33} \right\} g_{\tilde{\beta}}^{(j)}(q_j) f_{\beta'}^{(j)}(q_j) \quad (\text{A.161})$$

$$C_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}'}^{33} = \frac{1}{m_\pi^2} \sum_j (2 - \delta_{q_i q_j}) \sum_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}'} \left\{ (2ms_{\tilde{\beta}})(2ms_{\tilde{\beta}'}) \delta_{ms_{\tilde{\alpha}}\tilde{\beta}}^{\parallel} \delta_{ms_{\alpha'}\tilde{\beta}'}^{\parallel} I_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\beta}'\tilde{\alpha}'}^{33} + \delta_{ms_{\tilde{\alpha}}\tilde{\beta}}^{\eta} \delta_{ms_{\alpha'}\tilde{\beta}'}^{\eta} \tilde{I}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\beta}'\tilde{\alpha}'}^{33} \right\} g_{\tilde{\beta}}^{(j)}(q_j) g_{\tilde{\beta}'}^{(j)}(q_j) \quad (\text{A.162})$$

avec

$$I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{33} = \int d\mathbf{r} [f_\pi \phi_\alpha^* \phi_\beta](\mathbf{r}) \int d\mathbf{r}' \partial_r^3 \partial_{r'}^3 D_\pi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [f_\pi \phi_{\beta'}^* \phi_{\alpha'}](\mathbf{r}') \quad (\text{A.163})$$

$$\tilde{I}_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{33} = \int d\mathbf{r} [f_\pi \phi_\alpha^* \phi_\beta^*](\mathbf{r}) \int d\mathbf{r}' \partial_r^3 \partial_{r'}^3 D_\pi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [f_\pi \phi_{\beta'} \phi_{\alpha'}](\mathbf{r}') \quad (\text{A.164})$$

A.4.6 Contre terme

L'expression du potentiel nucléon-nucléon engendré par l'échange d'un pion 1.45 comporte une partie de courte portée en $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ qui peut être éliminée en ajoutant au Hamiltonien pionique le contre terme :

$$H_{ct} = \frac{1}{3} \frac{1}{2m_\pi^2} \sum_{i,j,k,l} c_i^\dagger c_j^\dagger c_k c_l \int d^3x_1 d^3x_2 [f_\pi \gamma^5 \gamma \vec{\tau}](1) [f_\pi \gamma^5 \gamma \vec{\tau}](2) \bar{f}_i(\mathbf{x}_1) \bar{f}_j(\mathbf{x}_2) \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) f_k(\mathbf{x}_2) f_l(\mathbf{x}_1) \quad (\text{A.165})$$

En raison de la conservation de la parité, seul le terme de Fock subsiste après application du théorème de Wick pour évaluer la valeur moyenne du contre terme dans l'état fondamental approché par un déterminant de Slater :

$$E_{ct}^F = -\frac{1}{3} \frac{1}{2m_\pi^2} \sum_{k,l} (2 - \delta_{q_k, q_l}) \int d^3x_1 d^3x_2 [f_\pi \bar{f}_k \gamma^5 \gamma f_l]_{\mathbf{x}_1} \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) [f_\pi \bar{f}_l \gamma^5 \gamma f_k]_{\mathbf{x}_2} \quad (\text{A.166})$$

Le potentiel de Fock correspondant

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i^{ct}(\mathbf{r}) &\equiv \gamma^0 \frac{\delta E_{ct}^F}{\delta \bar{f}_i(\mathbf{r})} \\ &= -\frac{1}{3} \frac{1}{m_\pi^2} \sum_j (2 - \delta_{q_j, q_i}) \int d^3r' [f_\pi f_j^\dagger \gamma^5 \gamma f_i]_{\mathbf{r}'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') [f_\pi \gamma^0 \gamma^5 \gamma f_j]_{\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (\text{A.167})$$

se scinde en trois contributions :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i^{ct}(\mathbf{r}) &= \mathcal{F}_i^{ct,+-}(\mathbf{r}) + \mathcal{F}_i^{ct,-+}(\mathbf{r}) + \mathcal{F}_i^{ct,33}(\mathbf{r}) \\ &= \mathcal{F}_i^{ct,+/-}(\mathbf{r}) + \mathcal{F}_i^{ct,33}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (\text{A.168})$$

A.4.6.1 Contribution +/-

La somme des deux premiers termes de A.168 engendre le potentiel spinoriel $\mathcal{F}_i^{ct,+/-}(\mathbf{r})$.

La contribution des blocs Ω_j positifs donne :

$$\mathcal{F}_i^{ct,+/-,>0}(\mathbf{r}) = \frac{-2}{3m_\pi^2} \sum_{j>0} (2 - \delta_{q_j, q_i}) \int d^3r' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \begin{pmatrix} [F_j^{-*} F_i^+ + G_j^{-*} G_i^+](\mathbf{r}') F_j^-(\mathbf{r}) \\ [F_j^{+*} F_i^- + G_j^{+*} G_i^-](\mathbf{r}') F_j^+(\mathbf{r}) \\ i[F_j^{-*} F_i^+ + G_j^{-*} G_i^+](\mathbf{r}') G_j^-(\mathbf{r}) \\ i[F_j^{+*} F_i^- + G_j^{+*} G_i^-](\mathbf{r}') G_j^+(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad (\text{A.169})$$

Celle des blocs Ω_j négatifs s'écrit :

$$\mathcal{F}_i^{ct,+/-,>0}(\mathbf{r}) = \frac{-2}{3m_\pi^2} \sum_{j>0} (2 - \delta_{q_j, q_i}) \int d^3r' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \begin{pmatrix} [F_j^+ F_i^+ - G_j^+ G_i^+](\mathbf{r}') F_j^{+*}(\mathbf{r}) \\ [F_j^- F_i^- - G_j^- G_i^-](\mathbf{r}') F_j^{-*}(\mathbf{r}) \\ -i[F_j^+ F_i^+ - G_j^+ G_i^+](\mathbf{r}') G_j^{+*}(\mathbf{r}) \\ -i[F_j^- F_i^- - G_j^- G_i^-](\mathbf{r}') G_j^{-*}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad (\text{A.170})$$

On en déduit les matrices A , B et C totales :

$$A_{\alpha\alpha'}^{+/-} = -\frac{2}{3m_\pi^2} \sum_j (2 - \delta_{q_i q_j}) \sum_{\beta\beta'} \left\{ \delta_{ms_{\alpha\beta}}^\pi \delta_{ms_{\alpha'\beta'}}^\pi \delta_{ms_{\beta\beta'}}^\parallel I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{ct} + \delta_{ms_{\alpha\beta}}^\parallel \delta_{ms_{\alpha'\beta'}}^\parallel \delta_{ms_{\beta\beta'}}^\parallel \check{I}_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{ct} \right\} f_\beta^{(j)}(q_j) f_{\beta'}^{(j)}(q_j) \quad (\text{A.171})$$

$$B_{\tilde{\alpha}\alpha'}^{+/-} = -\frac{2}{3m_\pi^2} \sum_j (2 - \delta_{q_i q_j}) \sum_{\tilde{\beta}\beta'} \left\{ \delta_{ms_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}}^\pi \delta_{ms_{\alpha'\beta'}}^\pi \delta_{ms_{\tilde{\beta}\beta'}}^\parallel I_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\beta'\alpha'}^{ct} - \delta_{ms_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}}^\parallel \delta_{ms_{\alpha'\beta'}}^\parallel \delta_{ms_{\tilde{\beta}\beta'}}^\parallel \check{I}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\beta'\alpha'}^{ct} \right\} g_{\tilde{\beta}}^{(j)}(q_j) f_{\beta'}^{(j)}(q_j) \quad (\text{A.172})$$

$$C_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha'}}^{+/-} = -\frac{2}{3m_\pi^2} \sum_j (2 - \delta_{q_i q_j}) \sum_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}'} \left\{ \delta_{ms_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}}^\pi \delta_{ms_{\tilde{\alpha}'\tilde{\beta}'}}^\pi \delta_{ms_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}'}}^\parallel I_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\beta}'\tilde{\alpha}'}^{ct} + \delta_{ms_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}}^\parallel \delta_{ms_{\tilde{\alpha}'\tilde{\beta}'}}^\parallel \delta_{ms_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}'}}^\parallel \check{I}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\beta}'\tilde{\alpha}'}^{ct} \right\} g_{\tilde{\beta}}^{(j)}(q_j) g_{\tilde{\beta}'}^{(j)}(q_j) \quad (\text{A.173})$$

avec

$$I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{ct} = \int d\mathbf{r} [f_\pi \phi_\alpha^* \phi_\beta](\mathbf{r}) \int d\mathbf{r}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') [f_\pi \phi_{\beta'}^* \phi_{\alpha'}](\mathbf{r}') \quad (\text{A.174})$$

$$\check{I}_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{ct} = \int d\mathbf{r} [f_\pi \phi_\alpha^* \phi_\beta^*](\mathbf{r}) \int d\mathbf{r}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') [f_\pi \phi_{\beta'} \phi_{\alpha'}](\mathbf{r}') \quad (\text{A.175})$$

A.4.6.2 Contribution 33

La contribution 33 du contre terme est identique à la contribution 33 du pion après la substitution $I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{33} \rightarrow I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{ct}$:

$$A_{\alpha\alpha'}^{ct,33} = \frac{-1}{3m_\pi^2} \sum_j (2 - \delta_{q_i q_j}) \sum_{\beta\beta'} \left\{ (2ms_\beta)(2ms_{\beta'}) \delta_{ms_{\alpha\beta}}^\parallel \delta_{ms_{\alpha'\beta'}}^\parallel I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{ct} + \delta_{ms_{\alpha\beta}}^\pi \delta_{ms_{\alpha'\beta'}}^\pi \check{I}_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{ct} \right\} f_\beta^{(j)}(q_j) f_{\beta'}^{(j)}(q_j) \quad (\text{A.176})$$

$$B_{\tilde{\alpha}\alpha'}^{ct,33} = \frac{-1}{3m_\pi^2} \sum_j (2 - \delta_{q_i q_j}) \sum_{\tilde{\beta}\beta'} \left\{ (2ms_{\tilde{\beta}})(2ms_{\beta'}) \delta_{ms_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}}^\parallel \delta_{ms_{\alpha'\beta'}}^\parallel I_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\beta'\alpha'}^{ct} - \delta_{ms_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}}^\pi \delta_{ms_{\alpha'\beta'}}^\pi \check{I}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\beta'\alpha'}^{ct} \right\} g_{\tilde{\beta}}^{(j)}(q_j) f_{\beta'}^{(j)}(q_j) \quad (\text{A.177})$$

$$C_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}'}^{ct,33} = \frac{-1}{3m_\pi^2} \sum_j (2 - \delta_{q_i q_j}) \sum_{\bar{\beta}\bar{\beta}'} \left\{ (2ms_{\bar{\beta}})(2ms_{\bar{\beta}'}) \delta_{ms_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}}^{\parallel} \delta_{ms_{\bar{\alpha}'\bar{\beta}'}}^{\parallel} I_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\beta}'\bar{\alpha}'}^{ct} + \delta_{ms_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}}^{\parallel} \delta_{ms_{\bar{\alpha}'\bar{\beta}'}}^{\parallel} \tilde{I}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\beta}'\bar{\alpha}'}^{ct} \right\} g_{\bar{\beta}}^{(j)}(q_j) g_{\bar{\beta}'}^{(j)}(q_j) \quad (\text{A.178})$$

A.5 TERME DE RÉARRANGEMENT

Sur l'exemple du méson σ , les termes de réarrangements sont dérivés. Leurs expressions générales peut s'étendre aux autres mésons.

A.5.1 Expression en représentation coordonnée

La minimisation A.9 de l'énergie fonctionnelle de la densité engendre entre autres le terme :

$$\frac{\partial E_{N+\sigma}^{RHF}}{\partial \rho_v} \frac{\delta \rho_v}{\delta \bar{f}_i(\mathbf{r})} = \gamma_\mu \frac{j^\mu}{\rho_v} \Sigma_R^\sigma(\mathbf{r}) f_i(\mathbf{r}) \quad (\text{A.179})$$

En raison de l'invariance par renversement du temps, seule la contribution en $\gamma_0 j^0$ contribue. D'autre part, $j^0 = \sqrt{\sum_k \bar{f}_k \gamma^0 f_k \sum_l \bar{f}_l \gamma_0 f_l} = \rho_v$ si bien que $\frac{j^0}{\rho_v} = 1$.

La contribution directe du terme de réarrangement $\Sigma_R^\sigma(\mathbf{r})$ vaut :

$$\Sigma_R^{\sigma, Dir}(\mathbf{r}) = \frac{\partial g_\sigma}{\partial \rho_v} \rho_s(\mathbf{r}) \sigma(\mathbf{r}) \quad (\text{A.180})$$

où ρ_s représente la densité scalaire nucléonique $\rho_s(\mathbf{r}) = \sum_k [\bar{f}_k f_k](\mathbf{r})$.

Sa contribution d'échange s'écrit :

$$\Sigma_R^{\sigma, Ex}(\mathbf{r}) = \sum_{m,n} \delta_{q_m q_n} \left[\frac{\partial g_\sigma}{\partial \rho_v} \bar{f}_m(q_m) f_n(q_n) \right](\mathbf{r}) \int d^3 r' \{ D_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [g_\sigma \bar{f}_n(q_n) f_m(q_m)](\mathbf{r}') \} \quad (\text{A.181})$$

A.5.2 Expression dans la base d'oscillateur déformé

On peut distinguer dans l'expression A.181 quatre types de contribution :

- Σ_σ^{++} : contribution des blocs Ω_m positifs et Ω_n positifs.
- Σ_σ^{+-} : contribution des blocs Ω_m positifs et Ω_n négatifs.
- Σ_σ^{-+} : contribution des blocs Ω_m négatifs et Ω_n positifs.
- Σ_σ^{--} : contribution des blocs Ω_m négatifs et Ω_n négatifs.

A.5.2.1 Cas ($m > 0, n > 0$)

Le potentiel correspondant s'écrit en représentation coordonnée :

$$\Sigma_{\sigma}^{++}(\mathbf{r}) = \sum_{m>0, n>0} \delta_{q_m, q_n} \left\{ \frac{\partial g_{\sigma}}{\partial \rho_v} \left[F_m^{\dagger} F_n - G_m^{\dagger} G_n \right] \right\}(\mathbf{r}) \int d\mathbf{r}' D_{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left\{ g_{\sigma} \left[F_n^{\dagger} F_m - G_n^{\dagger} G_m \right] \right\}(\mathbf{r}') \quad (\text{A.182})$$

Dans la base d'oscillateur harmonique déformé, on obtient :

$$\Sigma_{\alpha, \alpha'}^{\sigma++} = \int d\mathbf{r} \Sigma_{\sigma}^{++}(\mathbf{r}) [\phi_{\alpha}^* \phi_{\alpha'}](\mathbf{r}) \quad (\text{A.183})$$

$$= \Sigma_{\alpha, \alpha'}^{1++} + \Sigma_{\alpha, \alpha'}^{2++} + \Sigma_{\alpha, \alpha'}^{3++} + \Sigma_{\alpha, \alpha'}^{4++} \quad (\text{A.184})$$

avec

- Contribution 1

$$\Sigma_{\alpha, \alpha'}^{1++} = \sum_{m>0} \sum_{\mu, \mu'} f_{\mu}^{(m)}(q_m) f_{\mu'}^{(m)}(q_m) \left\{ \sum_{n>0} \delta_{q_n, q_m} \sum_{\nu, \nu'} \delta_{m_{s_{\nu}}, m_{s_{\mu}}} \delta_{m_{s_{\nu'}}, m_{s_{\mu'}}} f_{\nu}^{(n)}(q_n) f_{\nu'}^{(n)}(q_n) K_{\alpha, \alpha', \mu, \nu, \nu', \mu'} \right\} \quad (\text{A.185})$$

- Contribution 2

$$\Sigma_{\alpha, \alpha'}^{2++} = - \sum_{m>0} \sum_{\mu, \tilde{\mu}'} f_{\mu}^{(m)}(q_m) g_{\tilde{\mu}'}^{(m)}(q_m) \left\{ \sum_{n>0} \delta_{q_n, q_m} \sum_{\tilde{\nu}, \nu'} \delta_{m_{s_{\tilde{\nu}}}, m_{s_{\mu}}} \delta_{m_{s_{\nu'}}, m_{s_{\tilde{\mu}'}}} f_{\tilde{\nu}}^{(n)}(q_n) g_{\nu'}^{(n)}(q_n) K_{\alpha, \alpha', \mu, \tilde{\nu}, \nu', \tilde{\mu}'} \right\} \quad (\text{A.186})$$

- Contribution 3

$$\Sigma_{\alpha, \alpha'}^{3++} = - \sum_{m>0} \sum_{\tilde{\mu}, \mu'} g_{\tilde{\mu}}^{(m)}(q_m) f_{\mu'}^{(m)}(q_m) \left\{ \sum_{n>0} \delta_{q_n, q_m} \sum_{\tilde{\nu}, \nu'} \delta_{m_{s_{\tilde{\nu}}}, m_{s_{\tilde{\mu}}}} \delta_{m_{s_{\nu'}}, m_{s_{\mu'}}} g_{\tilde{\nu}}^{(n)}(q_n) f_{\nu'}^{(n)}(q_n) K_{\alpha, \alpha', \tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \nu', \mu'} \right\} \quad (\text{A.187})$$

- Contribution 4

$$\Sigma_{\alpha, \alpha'}^{4++} = \sum_{m>0} \sum_{\tilde{\mu}, \tilde{\mu}'} g_{\tilde{\mu}}^{(m)}(q_m) g_{\tilde{\mu}'}^{(m)}(q_m) \left\{ \sum_{n>0} \delta_{q_n, q_m} \sum_{\tilde{\nu}, \nu'} \delta_{m_{s_{\tilde{\nu}}}, m_{s_{\tilde{\mu}}}} \delta_{m_{s_{\nu'}}, m_{s_{\tilde{\mu}'}}} g_{\tilde{\nu}}^{(n)}(q_n) g_{\nu'}^{(n)}(q_n) K_{\alpha, \alpha', \tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\mu}', \nu'} \right\} \quad (\text{A.188})$$

et :

$$K_{\alpha, \alpha', \mu, \nu, \nu', \mu'} = \int d\mathbf{r} [\phi_{\alpha}^* \phi_{\alpha'} \frac{\partial g_{\sigma}}{\partial \rho_v} \phi_{\mu}^* \phi_{\nu}] (\mathbf{r}) \int d\mathbf{r}' D_{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [g_{\sigma} \phi_{\nu'}^* \phi_{\mu'}] (\mathbf{r}') \quad (\text{A.189})$$

A.5.2.2 Cas ($m > 0, n < 0$)

Le potentiel correspondant s'écrit en représentation coordonnée :

$$\Sigma_{\sigma}^{+-}(\mathbf{r}) = \sum_{m>0, n>0} \delta_{q_m, q_n} \left\{ \frac{\partial g_{\sigma}}{\partial \rho_v} \left[F_m^{+*} F_n^{-*} - F_m^{-*} F_n^{+*} + G_m^{+*} G_n^{-*} - G_m^{-*} G_n^{+*} \right] \right\}(\mathbf{r}) \int d\mathbf{r}' D_{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left\{ g_{\sigma} \left[F_n^{-} F_m^{+} - F_n^{+} F_m^{-} + G_n^{-} G_m^{+} - G_n^{+} G_m^{-} \right] \right\}(\mathbf{r}') \quad (\text{A.190})$$

Dans la base d'oscillateur harmonique, on obtient :

$$\Sigma_{\alpha,\alpha'}^{\sigma+-} = \Sigma_{\alpha,\alpha'}^{1+-} + \Sigma_{\alpha,\alpha'}^{2+-} + \Sigma_{\alpha,\alpha'}^{3+-} + \Sigma_{\alpha,\alpha'}^{4+-} \quad (\text{A.191})$$

avec :

- Contribution 1

$$\begin{aligned} \Sigma_{\alpha,\alpha'}^{1+-} = & \sum_{m>0} \sum_{\mu,\mu'} f_{\mu}^{(m)}(q_m) f_{\mu'}^{(m)}(q_m) \\ & \left\{ \sum_{n>0} \delta_{q_n,q_m} \sum_{\nu,\nu'} \delta_{m_{s_{\nu}}+m_{s_{\mu}},0} \delta_{m_{s_{\nu'}}+m_{s_{\mu'}},0} (2m_{s_{\nu}})(2m_{s_{\nu'}}) f_{\nu}^{(n)}(q_m) f_{\nu'}^{(n)}(q_m) \check{K}_{\alpha,\alpha',\mu,\nu,\nu',\mu'} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.192})$$

- Contribution 2

$$\begin{aligned} \Sigma_{\alpha,\alpha'}^{2+-} = & \sum_{m>0} \sum_{\mu,\tilde{\mu}'} f_{\mu}^{(m)}(q_m) g_{\tilde{\mu}'}^{(m)}(q_m) \\ & \left\{ \sum_{n>0} \delta_{q_n,q_m} \sum_{\nu,\tilde{\nu}'} \delta_{m_{s_{\nu}}+m_{s_{\mu}},0} \delta_{m_{s_{\nu'}}+m_{s_{\tilde{\mu}'}}},0} (2m_{s_{\nu}})(2m_{s_{\nu'}}) f_{\nu}^{(n)}(q_n) g_{\tilde{\nu}'}^{(n)}(q_n) \check{K}_{\alpha,\alpha',\mu,\nu,\tilde{\nu}',\tilde{\mu}'} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.193})$$

- Contribution 3

$$\begin{aligned} \Sigma_{\alpha,\alpha'}^{3+-}(it, q_n) = & \sum_{m>0} \sum_{\tilde{\mu},\mu'} g_{\tilde{\mu}}^{(m)}(q_m) f_{\mu'}^{(m)}(q_m) \\ & \left\{ \sum_{n>0} \delta_{q_n,q_m} \sum_{\tilde{\nu},\nu'} \delta_{m_{s_{\tilde{\nu}}}+m_{s_{\tilde{\mu}}},0} \delta_{m_{s_{\nu'}}+m_{s_{\mu'}},0} (2m_{s_{\tilde{\nu}}})(2m_{s_{\nu'}}) g_{\tilde{\nu}}^{(n)}(q_n) f_{\nu'}^{(n)}(q_n) \check{K}_{\alpha,\alpha',\tilde{\mu},\tilde{\nu},\nu',\mu'} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.194})$$

- Contribution 4

$$\begin{aligned} \Sigma_{\alpha,\alpha'}^{4+-} = & \sum_{m>0} \sum_{\tilde{\mu},\tilde{\mu}'} g_{\tilde{\mu}}^{(m)}(q_m) g_{\tilde{\mu}'}^{(m)}(q_m) \\ & \left\{ \sum_{n>0} \delta_{q_n,q_m} \sum_{\tilde{\nu},\tilde{\nu}'} \delta_{m_{s_{\tilde{\nu}}}+m_{s_{\tilde{\mu}}},0} \delta_{m_{s_{\tilde{\nu}'}}+m_{s_{\tilde{\mu}'}}},0} (2m_{s_{\tilde{\nu}}})(2m_{s_{\tilde{\nu}'}}) g_{\tilde{\nu}}^{(n)}(q_n) g_{\tilde{\nu}'}^{(n)}(q_n) \check{K}_{\alpha,\alpha',\tilde{\mu},\tilde{\nu},\tilde{\nu}',\tilde{\mu}'} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.195})$$

et :

$$\check{K}_{\alpha,\alpha',\mu,\nu,\nu',\mu'} = \int d\mathbf{r} [\phi_{\alpha}^* \phi_{\alpha'} \frac{\partial g_{\sigma}}{\partial \rho_{\nu}} \phi_{\mu}^* \phi_{\nu}^*](\mathbf{r}) \int d\mathbf{r}' D_{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [g_{\sigma} \phi_{\nu'} \phi_{\mu'}](\mathbf{r}') \quad (\text{A.196})$$

A.5.2.3 Cas ($m < 0, n > 0$)

Le potentiel correspondant s'écrit en représentation coordonnée :

$$\begin{aligned} \Sigma_{\sigma}^{-+}(\mathbf{r}) = & \sum_{m>0, n>0} \delta_{q_m,q_n} \left\{ \frac{\partial g_{\sigma}}{\partial \rho_{\nu}} [F_m^{-} F_n^{+} - F_m^{+} F_n^{-} + G_m^{-} G_n^{+} - G_m^{+} G_n^{-}] \right\}(\mathbf{r}) \\ & \int d\mathbf{r}' D_{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left\{ g_{\sigma} [F_n^{+*} F_m^{-*} - F_n^{-*} F_m^{+*} + G_n^{+*} G_m^{-*} - G_n^{-*} G_m^{+*}] \right\}(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (\text{A.197})$$

Dans la base d'oscillateur harmonique déformé, on obtient :

$$\Sigma_{\alpha,\alpha'}^{\sigma--} = \Sigma_{\alpha,\alpha'}^{1--} + \Sigma_{\alpha,\alpha'}^{2--} + \Sigma_{\alpha,\alpha'}^{3--} + \Sigma_{\alpha,\alpha'}^{4--} \quad (\text{A.198})$$

avec :

- Contribution 1

$$\begin{aligned} \Sigma_{\alpha,\alpha'}^{1--} = & \sum_{m>0} \sum_{\mu,\mu'} f_{\mu}^{(m)}(q_m) f_{\mu'}^{(m)}(q_m) \\ & \left\{ \sum_{n>0} \delta_{q_n,q_m} \sum_{\nu,\nu'} \delta_{m_{s_\nu}+m_{s_{\mu}},0} \delta_{m_{s_{\nu'}}+m_{s_{\mu'}},0} (2m_{s_\nu}) (2m_{s_{\nu'}}) f_{\nu}^{(n)}(q_m) f_{\nu'}^{(n)}(q_m) \check{K}_{\alpha,\alpha',\mu,\nu,\nu',\mu'} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.199})$$

- Contribution 2

$$\begin{aligned} \Sigma_{\alpha,\alpha'}^{2--} = & \sum_{m>0} \sum_{\mu,\mu'} f_{\mu}^{(m)}(q_m) g_{\mu'}^{(m)}(q_m) \\ & \left\{ \sum_{n>0} \delta_{q_n,q_m} \sum_{\nu,\nu'} \delta_{m_{s_\nu}+m_{s_{\mu}},0} \delta_{m_{s_{\nu'}}+m_{s_{\mu'}},0} (2m_{s_\nu}) (2m_{s_{\nu'}}) f_{\nu}^{(n)}(q_n) g_{\nu'}^{(n)}(q_n) \check{K}_{\alpha,\alpha',\mu,\nu,\nu',\mu'} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.200})$$

- Contribution 3

$$\begin{aligned} \Sigma_{\alpha,\alpha'}^{3--} = & \sum_{m>0} \sum_{\mu,\mu'} g_{\mu}^{(m)}(q_m) f_{\mu'}^{(m)}(q_m) \\ & \left\{ \sum_{n>0} \delta_{q_n,q_m} \sum_{\tilde{\nu},\nu'} \delta_{m_{s_{\tilde{\nu}}}+m_{s_{\mu}},0} \delta_{m_{s_{\nu'}}+m_{s_{\mu'}},0} (2m_{s_{\tilde{\nu}}}) (2m_{s_{\nu'}}) g_{\tilde{\nu}}^{(n)}(q_n) f_{\nu'}^{(n)}(q_n) \check{K}_{\alpha,\alpha',\mu,\tilde{\nu},\nu',\mu'} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.201})$$

- Contribution 4

$$\begin{aligned} \Sigma_{\alpha,\alpha'}^{4--} = & \sum_{m>0} \sum_{\mu,\mu'} g_{\mu}^{(m)}(q_m) g_{\mu'}^{(m)}(q_m) \\ & \left\{ \sum_{n>0} \delta_{q_n,q_m} \sum_{\tilde{\nu},\nu'} \delta_{m_{s_{\tilde{\nu}}}+m_{s_{\mu}},0} \delta_{m_{s_{\nu'}}+m_{s_{\mu'}},0} (2m_{s_{\tilde{\nu}}}) (2m_{s_{\nu'}}) g_{\tilde{\nu}}^{(n)}(q_n) g_{\nu'}^{(n)}(q_n) \check{K}_{\alpha,\alpha',\mu,\tilde{\nu},\nu',\mu'} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.202})$$

et :

$$\check{K}_{\alpha,\alpha',\mu,\nu,\nu',\mu'} = \int d\mathbf{r} [\phi_{\alpha}^* \phi_{\alpha'} \frac{\partial g_{\sigma}}{\partial \rho_{\nu}} \phi_{\mu} \phi_{\nu}] (\mathbf{r}) \int d\mathbf{r}' D_{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [g_{\sigma} \phi_{\nu'}^* \phi_{\mu'}^*] (\mathbf{r}') \quad (\text{A.203})$$

A.5.2.4 Cas ($m < 0, n < 0$)

Le potentiel correspondant s'écrit en représentation coordonnée :

$$\Sigma_{\sigma}^{--}(\mathbf{r}) = \sum_{m>0, n>0} \delta_{q_m,q_n} \left\{ \frac{\partial g_{\sigma}}{\partial \rho_{\nu}} [F_n^{\dagger} F_m - G_n^{\dagger} G_m] \right\} (\mathbf{r}) \int d\mathbf{r}' D_{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left\{ g_{\sigma} [F_m^{\dagger} F_n - G_m^{\dagger} G_n] \right\} (\mathbf{r}') \quad (\text{A.204})$$

Dans la base d'oscillateur déformé, on obtient :

$$\Sigma_{\alpha,\alpha'}^{\sigma--} = \int d\mathbf{r} \Sigma_{\sigma}^{--}(\mathbf{r}) [\phi_{\alpha}^* \phi_{\alpha'}](\mathbf{r}) \quad (\text{A.205})$$

$$= \Sigma_{\alpha,\alpha'}^{1--} + \Sigma_{\alpha,\alpha'}^{2--} + \Sigma_{\alpha,\alpha'}^{3--} + \Sigma_{\alpha,\alpha'}^{4--} \quad (\text{A.206})$$

et :

- Contribution 1

$$\Sigma_{\alpha,\alpha'}^{1--} = \sum_{m>0} \sum_{\mu,\mu'} f_{\mu}^{(m)}(q_m) f_{\mu'}^{(m)}(q_m) \left\{ \sum_{n>0} \delta_{q_n,q_m} \sum_{\nu,\nu'} \delta_{m_{s_{\nu}},m_{s_{\mu}}} \delta_{m_{s_{\nu'}},m_{s_{\mu'}}} f_{\nu}^{(n)}(q_n) f_{\nu'}^{(n)}(q_n) K_{\alpha,\alpha',\nu,\mu,\mu',\nu'} \right\} \quad (\text{A.207})$$

- Contribution 2

$$\Sigma_{\alpha,\alpha'}^{2--} = - \sum_{m>0} \sum_{\mu,\tilde{\mu}'} f_{\mu}^{(m)}(q_m) g_{\tilde{\mu}'}^{(m)}(q_m) \left\{ \sum_{n>0} \delta_{q_n,q_m} \sum_{\nu,\tilde{\nu}'} \delta_{m_{s_{\nu}},m_{s_{\mu}}} \delta_{m_{s_{\nu'}},m_{s_{\tilde{\mu}'}}} f_{\nu}^{(n)}(q_n) g_{\tilde{\nu}'}^{(n)}(q_n) K_{\alpha,\alpha',\nu,\mu,\tilde{\mu}',\tilde{\nu}'} \right\} \quad (\text{A.208})$$

- Contribution 3

$$\Sigma_{\alpha,\alpha'}^{3--} = - \sum_{m>0} \sum_{\tilde{\mu},\mu'} g_{\tilde{\mu}}^{(m)}(q_m) f_{\mu'}^{(m)}(q_m) \left\{ \sum_{n>0} \delta_{q_n,q_m} \sum_{\tilde{\nu},\nu'} \delta_{m_{s_{\tilde{\nu}}},m_{s_{\tilde{\mu}}}} \delta_{m_{s_{\nu'}},m_{s_{\mu'}}} g_{\tilde{\nu}}^{(n)}(q_n) f_{\nu'}^{(n)}(q_n) K_{\alpha,\alpha',\tilde{\nu},\tilde{\mu},\mu',\nu'} \right\} \quad (\text{A.209})$$

- Contribution 4

$$\Sigma_{\alpha,\alpha'}^{4--} = \sum_{m>0} \sum_{\tilde{\mu},\tilde{\mu}'} g_{\tilde{\mu}}^{(m)}(q_m) g_{\tilde{\mu}'}^{(m)}(q_m) \left\{ \sum_{n>0} \delta_{q_n,q_m} \sum_{\tilde{\nu},\tilde{\nu}'} \delta_{m_{s_{\tilde{\nu}}},m_{s_{\tilde{\mu}}}} \delta_{m_{s_{\tilde{\nu}'},m_{s_{\tilde{\mu}'}}} g_{\tilde{\nu}}^{(n)}(q_n) g_{\tilde{\nu}'}^{(n)}(q_n) K_{\alpha,\alpha',\tilde{\nu},\tilde{\mu},\tilde{\mu}',\tilde{\nu}'} \right\} \quad (\text{A.210})$$

A.5.2.5 Expressions généralisées

Les contributions des blocs Ω_m positifs et des blocs Ω_m négatifs sont égales. De plus, on peut mettre les contributions d'échange des termes de réarrangement sous la forme :

$$\begin{aligned} \Sigma_{R;\alpha\alpha'}^b = & \sum_{m>0} \sum_{\mu\mu'} f_{\mu}^{(m)}(q_m) f_{\mu'}^{(m)}(q_m) \tilde{A}_{\alpha\alpha'\mu\mu'}^b + 2 \sum_{m>0} \sum_{\tilde{\mu}\mu'} g_{\tilde{\mu}}^{(m)}(q_m) f_{\mu'}^{(m)}(q_m) \tilde{B}_{\alpha\alpha'\tilde{\mu}\mu'}^b \\ & + \sum_{m>0} \sum_{\tilde{\mu}\tilde{\mu}'} g_{\tilde{\mu}}^{(m)}(q_m) g_{\tilde{\mu}'}^{(m)}(q_m) \tilde{C}_{\alpha\alpha'\tilde{\mu}\tilde{\mu}'}^b \end{aligned} \quad (\text{A.211})$$

pour $b = \{ \sigma, \omega, \rho, \pi, \text{ contre terme} \}$ et où les matrices « tildées » sont définies comme suivant : $\tilde{A}_{\alpha\alpha'\mu\mu'}^b$ correspond à $\tilde{A}_{\mu\mu'}^b$ dans laquelle les intégrales $I_{\mu\nu\nu'\mu'}^b$ et $\tilde{I}_{\mu\nu\nu'\mu'}^b$ sont remplacées par $K_{\alpha\alpha'\mu\nu;\nu'\mu'}^b$ et $\tilde{K}_{\alpha\alpha'\mu\nu;\nu'\mu'}^b$ respectivement.

A.6 LES INTÉGRALES SPATIALES

A.6.1 Cas des intégrales $I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}$ associées aux mésons σ, ω, ρ , au champ Coulombien et au contre terme

Détaillons l'expression des intégrales spatiales $I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^m$ avec dans un premier temps $m = \sigma, \omega, \rho$, *Coulomb* :

$$I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^m = \int d\mathbf{r} [g_m \phi_\alpha^* \phi_\beta](\mathbf{r}) \int d\mathbf{r}' D_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [g_m \phi_{\beta'}^* \phi_{\alpha'}](\mathbf{r}') \quad (\text{A.212})$$

Le propagateur D_m peut s'exprimer à partir de sa transformée de Fourier :

$$D_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{ik \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{k^2 + m_m^2} \quad (\text{A.213})$$

ou encore, en coordonnées cylindriques :

$$D_m(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + m_m^2} e^{i[k_\perp r_{1\perp} \cos(\varphi_1 - \chi) + k_z z_1]} e^{-i[k_\perp r_{2\perp} \cos(\varphi_2 - \chi) + k_z z_2]} \quad (\text{A.214})$$

En explicitant la dépendance en φ des fonctions propres de l'oscillateur harmonique déformé :

$$\begin{aligned} \phi_\alpha^*(\mathbf{r}_i) &= \check{\phi}_\alpha(r_{i\perp}, z_i) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-im_{l_\alpha} \varphi_i} \\ \phi_\alpha(\mathbf{r}_i) &= \check{\phi}_\alpha(r_{i\perp}, z_i) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_{l_\alpha} \varphi_i} \end{aligned} \quad (\text{A.215})$$

l'intégrale A.212 s'écrit :

$$\begin{aligned} I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^m &= \int \frac{dk_\perp dk_z}{(2\pi)^3} k_\perp \int d\chi \frac{1}{k_\perp^2 + k_z^2 + m_m^2} \\ &\quad \int dr_{1\perp} dz_1 r_{1\perp} [g_m \check{\phi}_\alpha \check{\phi}_\beta](r_{1\perp}, z_1) e^{ik_z z_1} \int \frac{d\varphi_1}{2\pi} e^{i(m_{l_\beta} - m_{l_\alpha}) \varphi_1} e^{ik_\perp r_{1\perp} \cos(\varphi_1 - \chi)} \\ &\quad \int dr_{2\perp} dz_2 r_{2\perp} [g_m \check{\phi}_{\beta'} \check{\phi}_{\alpha'}](r_{2\perp}, z_2) e^{-ik_z z_2} \int \frac{d\varphi_2}{2\pi} e^{i(m_{l_{\alpha'}} - m_{l_{\beta'}}) \varphi_2} e^{-ik_\perp r_{2\perp} \cos(\varphi_2 - \chi)} \end{aligned} \quad (\text{A.216})$$

Après le changement de variable $\theta_i = \varphi_i - \chi$, l'utilisation de la définition intégrale des fonctions de Bessel

$$i^n J_n(x) = \int \frac{d\theta}{2\pi} e^{in\theta} e^{ix \cos(\theta)} \quad (\text{A.217})$$

et après intégration sur χ , on aboutit à l'expression suivante :

$$I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^m = \delta_{(m_{l_\beta} - m_{l_\alpha}) + (m_{l_{\alpha'}} - m_{l_{\beta'}}), 0} \int \frac{dk_\perp dk_z}{(2\pi)^2} Q_{\alpha, \beta}(k_\perp, k_z) \frac{k_\perp}{k_\perp^2 + k_z^2 + m_m^2} Q_{\beta', \alpha'}(-k_\perp, -k_z) \quad (\text{A.218})$$

avec

$$\begin{aligned}
Q_{\alpha,\beta}(k_{\perp}, k_z) &= \int dr_{1\perp} dz_1 r_{1\perp} [g_{\sigma} \check{\phi}_{\alpha} \check{\phi}_{\beta}](r_{1\perp}, z_1) e^{ik_z z_1} J_{(m_{l_{\beta}} - m_{l_{\alpha}})}(k_{\perp} r_{1\perp}) \\
Q_{\beta',\alpha'}(-k_{\perp}, -k_z) &= \int dr_{2\perp} dz_2 r_{2\perp} [g_{\sigma} \check{\phi}_{\beta'} \check{\phi}_{\alpha'}](r_{2\perp}, z_2) e^{-ik_z z_2} J_{(m_{l_{\alpha'}} - m_{l_{\beta'}})}(-k_{\perp} r_{2\perp})
\end{aligned}
\tag{A.219}$$

En utilisant la propriété

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x) \tag{A.220}$$

on obtient :

$$I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^m = (-1)^{(m_{l_{\alpha'}} - m_{l_{\beta'}})} \delta_{(m_{l_{\beta}} - m_{l_{\alpha}}) + (m_{l_{\alpha'}} - m_{l_{\beta'}}), 0} \int \frac{dk_{\perp} dk_z}{(2\pi)^2} Q_{\alpha,\beta}(k_{\perp}, k_z) \frac{k_{\perp}}{k_{\perp}^2 + k_z^2 + m_m^2} Q_{\beta',\alpha'}(k_{\perp}, -k_z) \tag{A.221}$$

L'intégrale mise en jeu dans la contribution du contre terme est identique, à ceci près que le propagateur associé n'est pas un potentiel de Yukawa mais une fonction delta dont la transformée de Fourier est la fonction identité :

$$I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{ct} = (-1)^{(m_{l_{\alpha'}} - m_{l_{\beta'}})} \delta_{(m_{l_{\beta}} - m_{l_{\alpha}}) + (m_{l_{\alpha'}} - m_{l_{\beta'}}), 0} \int \frac{dk_{\perp} dk_z}{(2\pi)^2} Q_{\alpha,\beta}(k_{\perp}, k_z) k_{\perp} 1 Q_{\beta',\alpha'}(k_{\perp}, -k_z) \tag{A.222}$$

A.6.2 Cas du pion

En procédant de la même façon, on obtient les intégrales intervenant dans le canal pionique :

$$\begin{aligned}
I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{++} &= (-1)^{n_{\alpha'\beta'}} \delta_{n_{\beta\alpha}^- + n_{\alpha'\beta'}^-, 0} \int \frac{dk_{\perp} dk_z}{(2\pi)^2} k_{\perp} \left\{ \int dr_{\perp} dz r_{\perp} \phi_{\alpha\beta} e^{ik_z z} \mathcal{J}_{n_{\beta\alpha}^-}^-(k_{\perp} r_{\perp}) \right\} \Delta \\
&\quad \left\{ \int dr'_{\perp} dz' r'_{\perp} \phi_{\beta'\alpha'} e^{-ik_z z'} \mathcal{J}_{n_{\alpha'\beta'}^-}^-(k_{\perp} r'_{\perp}) \right\}
\end{aligned}
\tag{A.223}$$

$$\begin{aligned}
I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{+-} &= (-1)^{n_{\alpha'\beta'}} \delta_{n_{\beta\alpha}^- + n_{\alpha'\beta'}^+, 0} \int \frac{dk_{\perp} dk_z}{(2\pi)^2} k_{\perp} \left\{ \int dr_{\perp} dz r_{\perp} \phi_{\alpha\beta} e^{ik_z z} \mathcal{J}_{n_{\beta\alpha}^-}^-(k_{\perp} r_{\perp}) \right\} \Delta \\
&\quad \left\{ \int dr'_{\perp} dz' r'_{\perp} \phi_{\beta'\alpha'} e^{-ik_z z'} \mathcal{J}_{n_{\alpha'\beta'}^+}^+(k_{\perp} r'_{\perp}) \right\}
\end{aligned}
\tag{A.224}$$

$$\begin{aligned}
I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{-+} &= (-1)^{n_{\alpha'\beta'}} \delta_{n_{\beta\alpha}^+ + n_{\alpha'\beta'}^-, 0} \int \frac{dk_{\perp} dk_z}{(2\pi)^2} k_{\perp} \left\{ \int dr_{\perp} dz r_{\perp} \phi_{\alpha\beta} e^{ik_z z} \mathcal{J}_{n_{\beta\alpha}^+}^+(k_{\perp} r_{\perp}) \right\} \Delta \\
&\quad \left\{ \int dr'_{\perp} dz' r'_{\perp} \phi_{\beta'\alpha'} e^{-ik_z z'} \mathcal{J}_{n_{\alpha'\beta'}^-}^-(k_{\perp} r'_{\perp}) \right\}
\end{aligned}
\tag{A.225}$$

$$I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^- = (-1)^{n_{\alpha'\beta'}} \delta_{n_{\beta\alpha}^+ + n_{\alpha'\beta'}^+; 0} \int \frac{dk_{\perp} dk_z}{(2\pi)^2} k_{\perp} \left\{ \int dr_{\perp} dz r_{\perp} \phi_{\alpha\beta} e^{ik_z z} \mathcal{J}_{n_{\beta\alpha}^+}^+(k_{\perp} r_{\perp}) \right\} \Delta \\ \left\{ \int dr'_{\perp} dz' r'_{\perp} \phi_{\beta'\alpha'} e^{-ik_z z'} \mathcal{J}_{n_{\alpha'\beta'}^+}^+(k_{\perp} r'_{\perp}) \right\} \quad (\text{A.226})$$

$$I_{\alpha\beta\beta'\alpha'}^{33} = (-1)^{n_{\alpha'\beta'}} \delta_{n_{\beta\alpha}^+ + n_{\alpha'\beta'}^+; 0} \int \frac{dk_{\perp} dk_z}{(2\pi)^2} k_{\perp} \left\{ \int dr_{\perp} dz r_{\perp} \phi_{\alpha\beta} e^{ik_z z} k_z J_{n_{\beta\alpha}}(k_{\perp} r_{\perp}) \right\} \Delta \\ \left\{ \int dr'_{\perp} dz' r'_{\perp} \phi_{\beta'\alpha'} e^{-ik_z z'} k_z J_{n_{\alpha'\beta'}}(k_{\perp} r'_{\perp}) \right\} \quad (\text{A.227})$$

avec

$$n_{\mu\nu} = ml_{\mu} - ml_{\nu} ; n_{\mu\nu}^- = n_{\mu\nu} - 1 ; n_{\mu\nu}^+ = n_{\mu\nu} + 1 \quad (\text{A.228})$$

et les fonctions de Bessel généralisées :

$$\mathcal{J}_n^{\pm}(k_{\perp} r_{\perp}) = \frac{k_{\perp}}{2} [J_{n-1} - J_{n+1}](k_{\perp} r_{\perp}) \pm \frac{n}{r_{\perp}} J_n(k_{\perp} r_{\perp}) \quad (\text{A.229})$$

Les intégrales $\check{I}$ correspondantes ont la même expression, à la différence près que les indices n doivent être remplacés par $\check{n}$:

$$\check{n}_{\beta\alpha} = -ml_{\beta} - ml_{\alpha} \quad (\text{A.230})$$

$$\check{n}_{\alpha'\beta'} = +ml_{\alpha'} + ml_{\beta'} \quad (\text{A.231})$$

Les intégrales pioniques $\check{I}$ font donc intervenir les indices

$$\check{n}_{\beta\alpha}^- = -ml_{\beta} - ml_{\alpha} - 1 \quad (\text{A.232})$$

$$\check{n}_{\beta\alpha}^+ = -ml_{\beta} - ml_{\alpha} + 1 \quad (\text{A.233})$$

$$\check{n}_{\alpha'\beta'}^- = +ml_{\alpha'} + ml_{\beta'} - 1 \quad (\text{A.234})$$

$$\check{n}_{\alpha'\beta'}^+ = +ml_{\alpha'} + ml_{\beta'} + 1 \quad (\text{A.235})$$

$$(\text{A.236})$$

A.6.3 Les intégrales spatiales $K_{\alpha\alpha'\mu\nu;\nu'\mu'}$

Les intégrales intervenant au niveau des termes de réarrangement s'écrivent :

$$K_{\alpha,\alpha',\gamma,\lambda,\lambda',\gamma'} = \int d\mathbf{r} [\phi_{\alpha}^* \phi_{\alpha'} \frac{\partial g_m}{\partial \rho_v} \phi_{\gamma}^* \phi_{\lambda}] (\mathbf{r}) \int d\mathbf{r}' D_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [g_m \phi_{\lambda'}^* \phi_{\gamma'}] (\mathbf{r}') \quad (\text{A.237})$$

En procédant comme précédemment, on obtient :

$$K_{\alpha,\alpha',\gamma,\lambda,\lambda',\gamma'} = \delta_{(m_{l_{\alpha'}} - m_{l_{\alpha}} + m_{l_{\lambda}} - m_{l_{\gamma}}) + (m_{l_{\gamma'}} - m_{l_{\lambda'}}), 0} \\ \int \frac{dk_{\perp} dk_z}{(2\pi)^2} Q_{\alpha,\alpha',\gamma,\lambda}(k_{\perp}, k_z) \frac{k_{\perp}}{k_{\perp}^2 + k_z^2 + m_m^2} Q_{\lambda',\gamma'}(-k_{\perp}, -k_z) \quad (\text{A.238})$$

avec

$$Q_{\alpha,\alpha',\gamma,\lambda}(k_{\perp},k_z) = \int dr_{1\perp} dz_1 r_{1\perp} [\check{\phi}_{\alpha} \check{\phi}_{\alpha'} \frac{\partial g_m}{\partial \rho_v} \check{\phi}_{\gamma} \check{\phi}_{\lambda}](r_{1\perp}, z_1) e^{ik_z z_1} J_{(m_{l_{\alpha'}} - m_{l_{\alpha}} + m_{l_{\lambda}} - m_{l_{\gamma}})}(k_{\perp} r_{1\perp}) \quad (\text{A.239})$$

$$Q_{\lambda',\gamma'}(-k_{\perp}, -k_z) = \int dr_{2\perp} dz_2 r_{2\perp} [g_m \check{\phi}_{\lambda'} \check{\phi}_{\gamma'}](r_{2\perp}, z_2) e^{-ik_z z_2} J_{(m_{l_{\gamma'}} - m_{l_{\lambda'}})}(-k_{\perp} r_{2\perp}) \quad (\text{A.240})$$

De même, l'intégrale $\check{K}_{\alpha,\alpha',\gamma,\lambda,\lambda',\gamma'}$ s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \check{K}_{\alpha,\alpha',\gamma,\lambda,\lambda',\gamma'} = & \delta_{(m_{l_{\alpha'}} - m_{l_{\alpha}} - m_{l_{\lambda}} - m_{l_{\gamma}}) + (m_{l_{\gamma'}} + m_{l_{\lambda'}}), 0} \\ & \int \frac{dk_{\perp} dk_z}{(2\pi)^2} Q_{\alpha,\alpha',\gamma,\lambda}^{-}(k_{\perp}, k_z) \frac{k_{\perp}}{k_{\perp}^2 + k_z^2 + m_m^2} Q_{\lambda',\gamma'}^{+}(-k_{\perp}, -k_z) \end{aligned} \quad (\text{A.241})$$

où

$$Q_{\alpha,\alpha',\gamma,\lambda}^{-}(k_{\perp}, k_z) = \int dr_{1\perp} dz_1 r_{1\perp} [\check{\phi}_{\alpha} \check{\phi}_{\alpha'} \frac{\partial g_m}{\partial \rho_v} \check{\phi}_{\gamma} \check{\phi}_{\lambda}](r_{1\perp}, z_1) e^{ik_z z_1} J_{(m_{l_{\alpha'}} - m_{l_{\alpha}} - m_{l_{\lambda}} - m_{l_{\gamma}})}(k_{\perp} r_{1\perp}) \quad (\text{A.242})$$

$$Q_{\lambda',\gamma'}^{+}(-k_{\perp}, -k_z) = \int dr_{2\perp} dz_2 r_{2\perp} [g_m \check{\phi}_{\lambda'} \check{\phi}_{\gamma'}](r_{2\perp}, z_2) e^{-ik_z z_2} J_{(m_{l_{\gamma'}} + m_{l_{\lambda'}})}(-k_{\perp} r_{2\perp}) \quad (\text{A.243})$$

BIBLIOGRAPHIE

- [A⁺69] A. ARIMA *et al.* : *Phys. Lett. B*, 30:517, 1969. (Cité page 19.)
- [A⁺96] A.V. AFANASJEV *et al.* : *Phys. Lett. B*, 367:11, 1996. (Cité page 19.)
- [B⁺57] J. BARDEEN *et al.* : *Phys. Rev.*, 106:162–164, 1957. (Cité page 79.)
- [B⁺58] K.A. BRUECKNER *et al.* : *Phys. Rev.*, 110:431, 1958. (Cité page 14.)
- [B⁺84] R. BROCKMANN *et al.* : *Phys. Lett. B*, 149:283, 1984. (Cité pages 5 et 18.)
- [B⁺87] A. BOUYSSY *et al.* : *Phys. Rev. C*, 36:1, 1987. (Cité pages 4, 16, 17, 18, 19 et 62.)
- [B⁺99] M. BENDER *et al.* : *Phys. Rev. C*, 60:034304, 1999. (Cité page 2.)
- [B⁺02] T. BÜERVENICH *et al.* : *Phys. Rev. C*, 65:044308, 2002. (Cité page 5.)
- [B⁺03] M. BENDER *et al.* : *Rev. Mod. Phys.*, 75:121, 2003. (Cité pages 10 et 11.)
- [Bal90] M. BALDO : *Nucl. Phys. A*, 515:409, 1990. (Cité page 80.)
- [BB77] J. BOGUTA et A.R. BODMER : *Nucl. Phys. A*, 292:413, 1977. (Cité pages 5 et 52.)
- [Bet71] H.A. BETHE : *Annu. Rev. Nucl. Sci.*, 21:93, 1971. (Cité page 58.)
- [Blu02] Y. BLUMENFELD : *Cours de l'Ecole Joliot-Curie*, 2002. (Cité page 2.)
- [BR86] BLAIZOT et RIPKA : page Chap. 8, 1986. (Cité page 75.)
- [C⁺96] S. ĆWIOK *et al.* : *Nucl. Phys. A*, 611:211, 1996. (Cité page 2.)
- [D⁺76] K.T.R. DAVIES *et al.* : *Phys. Rev. C*, 7:943, 1976. (Cité page 19.)
- [D⁺96] J. DOBACZEWSKI *et al.* : *Phys. Rev. C*, 53:2809, 1996. (Cité page 80.)
- [DAM] CEA DAM : <http://www-phynu.cea.fr>. (Cité page 90.)
- [Dia03] D. DIAKONOV : *Prog. Part. Nucl. Phys*, 173:423–515, 2003. (Cité page 25.)
- [Ele06] Z. ELEKES : *Phys. Rev. C*, 73:027301, 2006. (Cité page 105.)
- [Epe09] E. EPELBAUM : *Rev. Mod. Phys.*, 81:1773, 2009. (Cité pages 27 et 28.)
- [F⁺02] T. FRICK *et al.* : *Phys. Rev. C*, 65:034321, 2002. (Cité page 111.)

- [Fuc95] C. FUCHS : *Physical Review C*, 52:3043–3060, 1995. (Cité page 58.)
- [Fuc04] C. FUCHS : *Lecture Notes in Physics*, 641:119–146, 2004. (Cité pages 37, 38 et 40.)
- [Fur04] R.J. FURNSTAHL : *Lecture Notes in Physics*, 641:1–29, 2004. (Cité page 65.)
- [G⁺] W. GEITHNER *et al.* : *communication privée*. (Cité pages 102 et 115.)
- [G⁺01] M. GRASSO *et al.* : *Phys. Rev. C.*, 64:064321, 2001. (Cité pages 2 et 99.)
- [Gam90] Y. GAMBHIR : *Annals of Physics (NY)*, 198:132, 1990. (Cité page 79.)
- [Gin04] J.N. GINOCCHIO : *Lecture Notes in Physics*, 641:219–327, 2004. (Cité page 19.)
- [GL⁺96] T. GONZALES-LLARENA *et al.* : *Phys. Lett. B*, 379:13, 1996. (Cité page 83.)
- [Gog75] D. GOGNY : *Phys. Rev. Lett.*, 35:565, 1975. (Cité page 4.)
- [H⁺95] P.G. HANSEN *et al.* : *Ann. Rec. Nucl. Part. Sci.*, 45:591, 1995. (Cité page 2.)
- [HM00] S. HOFMANN et G. MÜNZENBERG : *Rev. Mod. Phys.*, 72:733, 2000. (Cité page 2.)
- [Hof01] F. HOFMANN : *Physical Review C*, 64:034314, 2001. (Cité page 58.)
- [HR88] U. HOFMANN et P. RING : *Phys. Lett. B*, 214:307, 1988. (Cité page 19.)
- [HS07] K. HAGINO et H. SAGAWA : *Phys. Rev. C*, 75:021301(R), 2007. (Cité page 103.)
- [Ima04] N. IMAI : *Phys. Rev. Lett.*, 92:062501, 2004. (Cité page 103.)
- [Ish07] N. ISHII : *Phys. Rev. Lett.*, 99:022001, 2007. (Cité page 26.)
- [J⁺89] M. JAMINON *et al.* : *Phys. Rev. C*, 40:354, 1989. (Cité page 45.)
- [K⁺] J KRAEMER *et al.* : *ISOLDE workshop and users meeting 2009*. (Cité page 102.)
- [K⁺78] H. KÜMMEL *et al.* : *Phys. Rep. C*, 36:1, 1978. (Cité page 42.)
- [k⁺00] A.T. KRUPPA *et al.* : *Phys. Rev. C*, 61:034313, 2000. (Cité page 2.)
- [Kuc91] H. KUCHARÉK : *Z. Phys. A*, 339:23, 1991. (Cité page 80.)
- [KvGoo] E. KHAN et N. van GIAI : *Phys. Lett. B*, 472:253–257, 2000. (Cité page 4.)

- [L⁺01] G.A. LALAZISSIS *et al.* : *Phys. Rev. C*, 63:034305, 2001. (Cité pages 103 et 105.)
- [L⁺03] D. LUNNEY *et al.* : *Rev. Mod. Phys.*, 75:1021–1082, 2003. (Cité page 1.)
- [L⁺06] W. LONG *et al.* : *Phys. Lett. B*, 640:150, 2006. (Cité pages 45, 46, 47, 83, 84 et 88.)
- [L⁺07] W. LONG *et al.* : *Phys. Rev. C*, 76:034314, 2007. (Cité pages 47, 116 et 119.)
- [L⁺08a] H. LIANG *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, 101:122502, 2008. (Cité pages 47 et 48.)
- [L⁺08b] W. LONG *et al.* : *Euro Phys. Lett.*, 82:12001, 2008. (Cité page 116.)
- [L⁺10] W. LONG *et al.* : *Phys. Rev. C*, 81:024308, 2010. (Cité pages 6 et 50.)
- [Len95] H. LENSKE : *Physics Letters B*, 345:355–360, 1995. (Cité page 60.)
- [Len04] H. LENSKE : *Lecture Notes in Physics*, 641:147–174, 2004. (Cité pages 42, 43, 52 et 57.)
- [Luk02] S.M. LUKYANOV : *J. Phys. G*, 28:L41, 2002. (Cité page 101.)
- [M⁺55] M.G. MAYER *et al.* : *Elementary Theory of Nuclear Shell Structure*, Wiley, New York, 1955. (Cité pages 1, 12, 67 et 111.)
- [M⁺04a] Z.Y. MA *et al.* : *Eur. Phys. J. A*, 20:429–433, 2004. (Cité page 48.)
- [M⁺04b] D.G. MADLAND *et al.* : *Nucl. Phys. A*, 741:52–59, 2004. (Cité pages 49 et 90.)
- [Mac89] R. MACHLEIDT : *Adv. Nucl. Phys.*, 19:189, 1989. (Cité page 36.)
- [Mat89] J.-F. MATHIOT : *Cours de l'école Joliot-Curie*, pages 55–72, 1989. (Cité pages 14, 15, 16 et 18.)
- [Mat91] J.-F. MATHIOT : *Ann. Phys.*, 16:527–554, 1991. (Cité pages 33, 34 et 35.)
- [Mei05] Ulf-G. MEIßNER : *Nucl. Phys. A*, 751:149–166, 2005. (Cité page 29.)
- [Mot96] B. MOTTELSON : *Les Houches, Session LXVI*:25, 1996. (Cité pages 5, 67 et 68.)
- [N⁺00] P. NAVRATIL *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, 84:5728, 2000. (Cité page 3.)
- [Neg70] J.W. NEGELE : *Phys. Rev. C*, 1:1260, 1970. (Cité page 57.)
- [Neg82] J.W. NEGELE : *Reviews of Modern Physics*, 54(4):913–1015, 1982. (Cité pages 40, 41, 42 et 60.)
- [O⁺05] T. OTSUKA *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, 95:232502, 2005. (Cité page 114.)

- [O⁺06] Y. T. ORGANESSIAN *et al.* : *Phys. Rev. C.*, 74:044602, 2006. (Cité page 2.)
- [Ong06] H.J. ONG : *Phys. Rev. C*, 73:024610, 2006. (Cité page 103.)
- [Oro96] A.M. OROS : *thèse de doctorat de l'Université of Köln*, 1996. (Cité page 47.)
- [P⁺01] A. POVES *et al.* : *Nucl. Phys. A*, 694:157, 2001. (Cité page 4.)
- [P⁺04] N. PAAR *et al.* : *Phys. Rev. C*, 69:054303, 2004. (Cité page 48.)
- [P⁺07] N. PAAR *et al.* : *Rep. Prog. Phys.*, 70:691–794, 2007. (Cité page 2.)
- [PnAR08] D. Peña ARTEAGA et P. RING : *Phys. Rev. C*, 77:034317, 2008. (Cité page 4.)
- [PW01] S.C. PIEPER et R.B. WIRINGA : *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 51:53, 2001. (Cité page 3.)
- [R⁺97] P. RING *et al.* : *Comput. Phys. Commun.*, 105:77–97, 1997. (Cité pages 77, 84, 93, 101 et 124.)
- [Rin04] P. RING : *Lecture Notes in Physics*, 641:175–218, 2004. (Cité page 80.)
- [RS80] P. RING et P. SCHUCK : *The Nuclear Many-Body Problem*, Springer-Verlag:New-York, 1980. (Cité pages 4 et 66.)
- [S⁺98] H.Q. SONG *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, 81:1584, 1998. (Cité page 40.)
- [S⁺00] M.V. STOITSOV *et al.* : *Phys. Rev. C*, 61:034311, 2000. (Cité page 99.)
- [S⁺04] H. SAGAWA *et al.* : *Phys. Rev. C*, 70:054316, 2004. (Cité pages 90 et 102.)
- [S⁺08] O. SORLIN *et al.* : *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 61:602, 2008. (Cité pages 2, 92, 111 et 112.)
- [Sch98] T. SCHÄFER : *Rev. Mod. Phys.*, 70:323–425, 1998. (Cité page 24.)
- [Shuo04] E.V. SHURYAK : *World Scientific Lecture Notes in Physics*, 71:1, 2004. (Cité pages 24 et 25.)
- [SR02a] M. SERRA et P. RING : *Phys. Rev. C*, 65:064324, 2002. (Cité pages 6 et 83.)
- [SR02b] M. SERRA et P. RING : *Phys. Rev. C*, 65:014304, 2002. (Cité page 80.)
- [ST94] Y. SUGAHARA et H. TOKI : *Nucl. Phys. A*, 579:557, 1994. (Cité page 5.)
- [SW86] B.D. SEROT et J.D. WALECKA : *Advances in Nuclear Physics*, 16:1, 1986. (Cité pages 4, 11, 57 et 60.)
- [T⁺95] I. TANIHATA *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, 55:2676, 1995. (Cité page 2.)

- [T⁺99] S. TYPEL *et al.* : *Nucl. Phys. A*, 656:331, 1999. (Cité pages 43, 58 et 59.)
- [V⁺05] D. VRETENAR *et al.* : *Phys. Rep.*, 409:101–259, 2005. (Cité pages 4, 6, 10, 44 et 90.)
- [Val61] J.G. VALATIN : *Phys. Rev.*, 122:1012, 1961. (Cité page 82.)
- [VB72] D. VAUTHERIN et D.M. BRINK : *Phys. Rev. C*, 5:626, 1972. (Cité page 4.)
- [vD⁺05] E.N.E. van DALEN *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, 95:022302, 2005. (Cité page 46.)
- [vDM10] E. van DALEN et H. MÜTHER : *nucl-th*, 1004.0144, 2010. (Cité page 107.)
- [vGo9] N. van GIAI : *International Conference Nuclear Structure and Related Topics*, Dubna:Fédération de Russie, 2009. (Cité pages 45, 46, 47 et 48.)
- [Vre04] D. VRETENAR : *Lecture Notes in Physics*, 641:65–117, 2004. (Cité pages 11 et 30.)
- [W⁺03] A.H. WAPSTRA *et al.* : *Nucl. Phys. A*, 729:129, 2003. (Cité page 93.)
- [W⁺08] M. WIEDEKING *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, 100:152501, 2008. (Cité pages 105 et 106.)
- [Wal74] J.D. WALECKA : *Annals Phys.*, 83:491–529, 1974. (Cité page 52.)
- [Wei98] W. WEISE : *Les Houches*, Session LXVI:423–515, 1998. (Cité page 23.)

Titre Description relativiste de l'état fondamental des noyaux atomiques par l'approche du champ moyen auto-cohérent, incluant la déformation et la superfluidité

Résumé Le travail présenté dans ce mémoire de thèse consiste au développement d'un modèle Hartree-Fock-Bogoliubov relativiste en symétrie axiale. Pour la première fois, un modèle de type champ moyen auto-cohérent relativiste incorporant explicitement les contributions d'échange est à même de décrire les noyaux atomiques déformés et superfluides. Le choix d'une formulation covariante n'est en aucun cas lié au besoin d'une cinématique nucléaire relativiste mais à l'exploitation des symétries de Lorentz. En particulier, le maintien d'une distinction entre scalaire de Lorentz et composante temporelle des 4-vecteurs est source d'efficacité et de simplification en ce qui concerne la description des systèmes nucléaires. Dans ce cadre, les nucléons sont considérés comme des particules ponctuelles représentées par un spineur de Dirac. Leur interaction dans le milieu nucléaire est décrite en terme d'échange de mésons effectifs. La dynamique de ces degrés de liberté est spécifiée par une densité lagrangienne phénoménologique, caractérisée par huit paramètres libres contraints par l'ajustement sur la masse de noyaux sphériques ainsi que par la reproduction de propriétés de la matière nucléaire. Une fonctionnelle de la densité pour l'énergie s'obtient à partir de la densité lagrangienne traitée dans l'approximation Hartree-Fock-Bogoliubov. En particulier, la prise en compte explicite des termes d'échange permet l'introduction du pion, qui ne contribue que par son terme de Fock à l'échelle du champ moyen. La minimisation de la fonctionnelle de la densité pour l'énergie conduit aux équations Hartree-Fock-Bogoliubov relativistes considérées en symétrie axiale. Ces dernières sont résolues dans une base d'oscillateur harmonique déformé. Le modèle ainsi développé est utilisé pour décrire l'état fondamental des isotopes de carbone, néon et magnésium.

Mots-clés relativiste, hartree, fock, bogoliubov, symétrie axiale, déformation, appariement

Title Relativistic Hartree-Fock-Bogoliubov Description of Atomic Nuclei Ground State in Axial Symmetry

Abstract The present work deals with the development of a relativistic Hartree-Fock-Bogoliubov model in axial symmetry. For the first time, a relativistic self-consistent mean-field approach which treats explicitly the exchange contributions can be applied for the description of both deformed and superfluid nuclei. There are advantages in using a relativistic formulation in comparison to non-relativistic approaches. The relevance of a covariant framework is not imposed by the need for relativistic nuclear kinematics, but rather it is linked to the use of Lorentz symmetries. In particular, the effectiveness of relativistic approaches in describing the nuclear systems lies in the distinction between Lorentz scalars and time-like component of 4-vectors. In this framework, nucleons are considered as point

like particle and represented by a Dirac spinor. The in-medium nucleon-nucleon interaction is described in terms of effective mesons exchange. The degrees of freedom dynamics is specified by a phenomenological Lagrangian density. This Lagrangian is characterized by eight free parameters adjusted to reproduce nuclear matter properties and ground-state properties of finite nuclei. An energy density functional is derived from the the Lagrangian. In particular, the explicit treatment of the Fock terms allows one to introduce the pion field. The minimization of this functional leads to the relativistic Hartree-Fock-Bogoliubov equations which are written in axial symmetry. They are expanded in a deformed harmonic oscillator basis. The relativistic Hartree-Fock-Bogoliubov model in axial symmetry is used for the description of the carbon, neon and magnesium isotopes.

Keywords relativistic, hartree, fock, bogoliubov, axial symmetry, deformation, pairing