HAL open science

Eléments finis stabilisés pour des écoulements diphasiques compressible-incompressible

Marie Billaud Friess

To cite this version:

Marie Billaud Friess. Eléments finis stabilisés pour des écoulements diphasiques compressible-incompressible. Mathématiques [math]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2009. Français. NNT : . tel-00565815

HAL Id: tel-00565815

https://theses.hal.science/tel-00565815v1

Submitted on 14 Feb 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 3872

THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Par Marie BILLAUD

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : Mathématiques appliquées et calcul scientifique

ELEMENTS FINIS STABILISES POUR DES ECOULEMENTS DIPHASIQUES COMPRESSIBLE-INCOMPRESSIBLE

Soutenue le : 27 Novembre 2009

Après avis de :

M.	**Grégoire ALLAIRE**,	Professeur,	Ecole Polytechnique,	*Rapporteur*
M.	**Christophe BERTHON**,	Professeur,	Université de Nantes,	*Rapporteur*

Devant le jury formé de :

M.	**Rémi ABGRALL**,	Professeur,	Université Bordeaux 1,	*Président*
M.	**Grégoire ALLAIRE**,	Professeur,	Ecole Polytechnique,	*Rapporteur*
M.	**Christophe BERTHON**,	Professeur,	Université de Nantes,	*Rapporteur*
M.	**Jean-Paul CALTAGIRONE**,	Professeur,	Université Bordeaux 1,	*Examinateur*
M.	**Gérard GALLICE**,	Ingénieur,	CEA-CESTA,	*Examinateur*
M.	**Boniface NKONGA**,	Professeur,	Université de Nice,	*Directeur*

-2009-

Remerciements

J'aimerais tout d'abord adresser mes remerciements à Boniface Nkonga grâce à qui j'ai pu effectuer cette thèse. Malgré des conditions géographiques un peu particulières surtout en fin de thèse, j'ai pu bénéficier durant mes trois années de thèse de ses grandes compétences, ainsi que sa sympathie et sa confiance.

Je remercie également Jean-Paul Caltagirone sans qui cette thèse n'aurait pu avoir lieu.

Je remercie Grégoire Allaire et Christophe Berthon d'avoir donné de leur temps pour rapporter cette thèse. Leurs remarques pertinentes m'ont permis d'améliorer le présent document.

J'adresse également de vifs remerciements à Rémi Abgrall qui m'a fait l'honneur d'examiner mon travail.

Je voudrais également exprimer mes plus chaleureux remerciements à Gérard Gallice, mon encadrant CEA, qui après notre première rencontre il y'a plus de trois ans a bien voulu me renouveller sa confiance en participant à l'encadrement de ma thèse. "En fait", durant ces quelques années je le remercie d'avoir répondu patiemment à mes questions et de m'avoir guidée dans mes réflexions et mon travail ainsi que dans ces quelques villes d'Europe que j'ai pu découvrir en sa compagnie. Je n'oublierai pas également ces années passées dans son bureau avec mes fameux barbus, où il nous a toujours accueilli avec sympathie, bonne humeur même les jours les plus gris.

Je remercie de façon plus générale le groupe des Ganéens du CEA-CESTA, dans lequel j'ai été accueillie chaleureusement avec bonne humeur et convivialité. Je les remercie autant pour leur écoute les jours où le chef Gégé n'était pas là : Agnès et Jean, mais aussi pour leur goût incontestable en matière de décoration : les Gigi, également pour la minute matinale, tendre et humouristique : David, pour les discussions entre Médocoquins : Alain et puis tous les autres avec qui la vie de ce petit groupe ne serait pas aussi légère.

Au delà des horizons bordelais, je tiens également à saluer et remercier toutes les personnes rencontrées dans les divers congrès, écoles ou séjours de recherche avec qui il a été agréable d'échanger ou de travailler.

M'éloignant de la sphère des mathématiques, j'adresse ma reconnaissance et bien plus... à mes parents pour leur soutien surtout depuis ces cinq dernières années. Sans eux je n'aurais pas eu la joie de continuer sur ce long chemin studieux. Ce "succès" est également un peu le leur. Un clin d'oeil aussi au reste de la famille, sans qui je n'aurais pas eu le goût de me lancer dans cette aventure.

Enfin, j'adresse mes derniers remerciements et pensées à deux être chers : petit et grand, pour leurs encouragements implicites ou explicites, pour les moments passés et à venir en leur compagnie et pour tout le reste... Je leur souhaite également de réussir tout ce qu'ils entreprendront. COURAGE !

Table des matières

Introduction **1**

I Eléments finis stabilisés appliqués aux équations de Navier-Stokes **9**

1 Formulation unifiée des équations de Navier-Stokes **11**
1 Equations de Navier-Stokes compressible 11
1.1 Forme conservative 11
1.2 Formes quasi-linéaires 13
1.3 Autres formes quasi-linéaires 15
2 Equations de Navier-Stokes incompressible 16
2.1 Formulation standard 16
2.2 Limite incompressible des équations de Navier-Stokes compressible . . . 17
3 Conclusion 21

2 Méthode des éléments finis stabilisés **23**
1 Généralités sur la méthode des éléments finis stabilisés 23
1.1 Problèmes modèles 24
1.2 Méthode de Galerkin 26
1.3 Nécessité de stabiliser 26
1.4 Méthodes d'éléments finis stabilisés 30
2 Eléments finis stabilisés pour les équations de Navier Stokes 35
2.1 Formulation GLS pour les équations de Navier-Stokes unifiées 35
2.2 Construction de la matrice des coefficients de stabilisation 36
3 Conclusion 38

II Couplage compressible-incompressible pour des écoulements diphasiques **39**

3 Formulation du problème couplé **41**
1 Problématique 41
2 Description de chaque phase 42
2.1 Approche incompressible-incompressible 42
2.2 Approche compressible-compressible 43
2.3 Approche compressible-incompressible 43
2.4 Approche proposée 44
3 Méthodes numériques pour le suivi d'interface 45
3.1 Méthodes de type "front tracking" 45
3.2 Méthodes de type "front capturing" 46
3.3 Méthodes sans maillage 48
3.4 Méthode choisie : Méthode Level Set 48
4 Formulation globale 50
4.1 Conditions de saut à l'interface 50
4.2 Modèle bi-fluide 51

4.3 Modèle mono-fluide . . . 52
5 Conclusion . . . 53

4 Méthode numérique mono-dimensionnelle 55
1 Formulation mathématique . . . 55
2 Problème linéarisé et isotherme sans convection . . . 57
2.1 Approximation temporelle . . . 58
2.2 Approximation spatiale . . . 58
2.3 Construction du schéma numérique . . . 60
2.4 Synthèse sur la formulation éléments finis . . . 80
3 Problème isotherme sans convection . . . 82
3.1 Schéma numérique . . . 83
3.2 Illustration numérique . . . 84
4 Problème isotherme . . . 85
4.1 Méthode numérique . . . 87
4.2 Synthèse de l'algorithme . . . 88
4.3 Illustration numérique . . . 89
5 Extension au problème anisotherme . . . 90
5.1 Modèle non visqueux . . . 91
5.2 Modèle complet . . . 93
6 Conclusion . . . 95

5 Résultats numériques mono-dimensionnels 97
1 Problèmes diphasiques : cas test réguliers . . . 97
1.1 Remplissage d'une cavité . . . 97
1.2 Oscillation d'une goutte d'eau sous l'effet de la gravité . . . 98
1.3 Déplacement d'une colonne d'eau dans une cavité différentiellement chauffée 99
2 Problèmes diphasiques : cas test irréguliers . . . 101
2.1 Remplissage d'une cavité . . . 101
2.2 Convection d'un goutte de liquide . . . 102
2.3 Remarques générales . . . 103
3 Conclusion . . . 103

6 Méthode numérique multi-dimensionnelle 115
1 Formalisme général . . . 115
2 Solveur de l'écoulement . . . 116
2.1 Problème étudié . . . 116
2.2 Maillages . . . 117
2.3 Formulation éléments finis . . . 117
2.4 Construction des opérateurs moyennés . . . 118
2.5 Schéma numérique . . . 122
2.6 Choix du pas de temps . . . 125
3 Solveur de l'interface . . . 125
3.1 Problème modèle . . . 126
3.2 Discrétisation spatiale . . . 128
3.3 Discrétisation temporelle . . . 132
3.4 Cas test pour l'équation de transport . . . 134
4 Couplage des deux solveurs . . . 136
4.1 Discrétisation en espace . . . 137
4.2 Choix du pas de temps . . . 138

4.3 Algorithme général 139
5 Conclusion 139

7 Résultats numériques bi-dimensionnels 141
1 Remontée d'une bulle 141
2 Déferlement d'une vague 143
3 Translation d'une goutte 144
4 Compression d'une bulle 146
5 Conclusion 147

Conclusion 157

III Annexes 161

A Différentes formes quasi-linéaires 163
1 Forme quasi-linéaire pour les inconnues primitives 163
1.1 Equations de Navier Stokes 163
1.2 Matrices jacobiennes pour un fluide compressible 163
1.3 Matrices jacobiennes pour un fluide incompressible 165
2 Forme quasi-linéaire symétrisée pour les inconnues primitives 165
2.1 Equations quasi-linéaires symétrisées 165
2.2 Matrices symétrisées pour un fluide compressible 166
2.3 Matrices symétrisées pour un fluide incompressible 166

B Solutions exactes pour le système couplé 1D 169
1 Modèle isotherme linéarisé sans convection non visqueux 169
1.1 Recherche d'une solution dans le liquide 169
1.2 Recherche d'une solution dans le gaz 170
1.3 Recherche d'une solution pour le problème couplé 172
2 Modèle isotherme sans convection non visqueux 173
2.1 Recherche d'une solution dans le liquide 173
2.2 Recherche d'une solution dans le gaz 174
2.3 Recherche d'une solution pour le problème couplé 175

C Calcul de la fonction couleur en 2D 177

Introduction générale

Contexte général

La simulation numérique d'écoulements diphasiques à interfaces suscite depuis des décennies énormément d'intérêt dans la communauté scientifique de la Mécanique des Fluides Numériques. Les avancées théoriques, concernant les méthodes numériques et la modélisation, aussi bien que les progrès technologiques permettent à l'heure actuelle de simuler un vaste champ d'écoulements comportant une variété de phénomènes physiques à différentes échelles. La microfluidique, les écoulements à bulles, l'atomisation d'un jet, la dynamique des fluides dans un réservoir ou encore des écoulements à interface libre sont autant d'exemples qui constituent également des problématiques présentes dans le domaine de la chimie, l'environnement, l'aéronautique, l'espace...

En particulier, nous nous intéresserons ici au comportement de l'écoulement autour d'un bouclier thermique d'une capsule spatiale en rentrée atmosphérique (par exemple : rentrée atmosphérique de la sonde Huygens sur Titan [1] voir Fig. 1).

Fig. 1 – Rentrée atmosphérique de la sonde Huygens sur Titan

Lors de sa rentrée dans l'atmosphère d'une planète, une sonde spatiale subit un freinage important dus aux frottements des gaz atmosphériques. Par conversion de l'énergie cinétique en énergie thermique l'engin va également s'échauffer. Pour pallier cette élévation de température et afin de garantir l'intégrité de la structure, la face de la capsule qui subit le freinage est recouverte d'un bouclier thermique en matériaux composites permettant d'absorber en grande partie le flux thermique. Un composite est un assemblage de deux matériaux dont l'un assure la tenue mécanique : les fibres de carbone et l'autre la cohésion de la structure : la résine. Sous l'effet de l'échauffement la résine se liquéfie et la structure en carbone s'ablate. On peut ainsi observer à la surface du bouclier la formation de rugosités dans lesquelles s'écoule la résine liquide ainsi que les gaz atmosphériques. La dynamique de ces écoulements de type diphasique peut être complexe. En effet de nombreux phénomènes entrent en jeu, dont le changement de phase, la turbulence (ou non) de l'écoulement, l'apparition de points triples (interface solide-gaz-liquide) ou encore les effets de tension de surface par exemple.

[1] source : http ://techno-science.net/illustration/Espace/Cassini-Huygens/HuygensBouclier200.jpg

Il s'agit dans cette thèse de contribuer au développement d'outils de simulation numérique permettant aux ingénieurs d'étudier et de comprendre les différents mécanismes présents dans de tels écoulements.

Objectif

Les travaux effectués dans cette thèse correspondent au développement d'une méthode numérique capable de prédire précisément un écoulement diphasique constitué d'une phase gazeuse supposée compressible et d'une phase liquide incompressible non-miscibles séparées par une interface mobile. C'est le couplage de ces deux modèles qui constitue l'originalité et l'enjeu principal de de cette thèse. Pour traiter cette difficulté majeure, nous nous attacherons à l'élaboration d'une approche *globale* (i.e. la même dans chaque phase) et simple à mettre en œuvre.

Stratégie

La simulation numérique de la dynamique de l'interface liquide-gaz précédemment décrite est d'autant plus délicate qu'on souhaite prendre en compte l'ensemble des phénomènes physiques mis en jeu. Dans le cadre de cette thèse, nous nous contenterons d'étudier un problème simplifié reposant sur l'ensemble des hypothèses suivantes :

(1) l'écoulement est instationnaire, visqueux et lent. De plus on supposera qu'il n'y a pas de choc ;
(2) les deux phases (liquide et gaz) sont supposées non miscibles ;
(3) bien que l'écoulement soit anisotherme, le changement de phase n'est pas pris en compte ;
(4) les effets de tension de surface sont omis.

A l'heure actuelle une multitude de méthodes numériques sont dédiées à la simulation d'écoulements diphasiques à interfaces. De façon générale, ces approches sont toutes construites de la même manière et reposent sur quatres éléments fondamentaux qui sont :

- la représentation de l'interface ;
- la modélisation de l'écoulement ;
- la discrétisation spatiale des équations (interface et écoulement) ;
- le traitement numérique du couplage.

Il existe une abondante littérature concernant le traitement de l'interface entre deux fluides (voir Chapitre 3). On distingue essentiellement deux approches, d'une part les *méthodes d'interface diffuse* et d'autre part les *méthodes à interface ponctuelle*. Dans la première approche, c'est un seul et unique modèle [BN86] qui prend en compte les deux phases ainsi que l'interface. Dans la seconde approche, l'interface est représentée explicitement et chaque phase est résolue séparement par des modèles spécifiques. Malgré sa simplicité, une approche à interface diffuse a l'inconvénient, d'être peu précise car l'interface est étalée sur quelques mailles. De plus les modèles utilisés nécessitent des paramètres physiques qui ne sont pas forcément bien connus. Par conséquent nous retiendrons ici les méthodes à interface ponctuelle. Parmi ces méthodes se distinguent les approches de type *lagrangien* (i.e. le maillage suit explicitement l'interface) et celles de type *eulerien* (i.e. interface représentée par une fonction implicite définie sur un maillage fixé). Les approches euleriennes regroupent d'une part les méthodes dites de *front tracking* et celles dites de *front capturing*. Les méthodes de front capturing ont l'avantage

majeur de prendre naturellement en compte les changements topologiques. Parmi les plus utilisées nous pouvons citer les méthodes de type *Volume of fluid* [HN81] et *Level Set* [OS88]. Ici nous mettons en oeuvre une méthode de type Level-Set qui permet de repérer simplement et précisément la position de l'interface.

Afin de décrire chaque phase de l'écoulement, différents modèles mathématiques peuvent être considérés. Dans certains travaux une représentation complètement incompressible des deux phases est considérée (voir [CHMO96, TE00, Smo01, VCLR04, TB05, Mar06, Gué07]), alors que dans d'autres une description compressible de chaque fluide est utilisée [AS99, Mur03, BBN05, Bra07, WTL08, TT09]. Une troisième alternative est de considérer le liquide comme un fluide incompressible et le gaz comme un fluide compressible (voir [FMO98, CFA01, Xia04, XRS06]).

Dans de nombreux cas les liquides (résine) peuvent être considérés comme incompressibles alors que les gaz (gaz atmosphériques) sont vus comme des fluides compressibles. En effet, la masse volumique des premiers varie peu, ce qui se traduit par la conservation de leur volume. Par contre, la masse volumique des seconds est fortement influencée par les variations de pression et/ou de température. Ainsi les modèles de Navier-Stokes incompressible et compressible sont utilisés ici pour décrire la phase liquide et la phase gaz respectivement. Cela nous assure de respecter la conservation de volume de l'une, et la compressibilité de l'autre.

Afin de résoudre les équations de Navier-Stokes compressible et incompressible, ainsi que l'équation de transport associée à la méthode Level-Set il est nécessaire d'utiliser des schémas numériques en espace précis et robustes.

Deux types de méthodes numériques peuvent être envisagées afin de résoudre les équations de Navier Stokes, les approches *unifiées* et *non-unifiées*.
Historiquement les schémas numériques pour résoudre spatialement les équations de Navier-Stokes compressible et incompressible ont été développées de façon indépendante. Par conséquent un schéma numérique dédié à la résolution des équations de l'incompressible est souvent inutilisable pour la résolution du compressible et vice versa. Dans ce cas, on parle de schéma non-unifié.
Une première façon de remédier à cette difficulté est, dans le cadre des écoulements à faible Mach i.e. *"Low Mach"*, d'utiliser les méthodes numériques dédiées à la résolution des systèmes compressibles en préconditionnant le système initial comme cela est fait par Turkel [Tur93], Weiss [WS95] ou encore Guillard [GV99]. Une seconde solution a été d'étendre les méthodes de projection initialement introduites par Harlow [HW65] et Chorin [Cho68] pour la résolution des équations de l'incompressible à la résolution des équations du compressible (voir [YW91, Yab91, YX95, YY99, Ida00, Ida03, Xia04, XRS06]). Enfin, une troisième alternative repose sur la mise en oeuvre d'une méthode d'éléments finis pour la résolution des équations de Navier-Stokes compressible et incompressible écrites de façon unifiée pour différents jeux d'inconnues (primitives, entropiques). On distingue dans cette lignée les travaux de Hauke et Hughes [HH94, HH98] ainsi que ceux de Polner [Pol05, PVdVVD06]. Dans le même esprit, Pesch et Van der Vegt [PVdV08] ont proposé très récemment la mise en oeuvre d'une méthode Galerkin Discontinu unifiée pour la résolution des équations de Navier-Stokes compressible et incompressible.

Partant de ce constat, il est possible d'envisager de résoudre les équations compressible et incompressible de deux façons différentes.

Une première façon de procéder est d'utiliser pour chaque phase un schéma numérique adéquat, le couplage à l'interface étant traité de façon spécifique a posteriori. Une telle approche a été développée dans [CFA01] où les auteurs utilisent un schéma volume fini Total Variation Diminushing (TVD) dans la partie compressible et un schéma Marker-And-Cell (MAC) pour la partie incompressible sur maillage structuré. Cela conduit à une méthode de résolution numérique *non-globale* et *difficile* à mettre en oeuvre.
Contrairement à [CFA01], nous proposons ici une seconde approche numérique *simple* et *valide* quelque soit la phase de l'écoulement. Dans ce but nous avons mis en œuvre un même schéma numérique pour chaque phase. Comme les géométries traitées peuvent être complexes (par exemple : rugosités en surface du bouclier thermique), les développements numériques effectués ici doivent être réalisés dans un cadre non-structuré. Par conséquent nous utilisons une méthode d'éléments finis en espace qui permet non seulement de travailler simplement sur ce type de maillage, mais aussi offre la possibilité d'utiliser le même schéma numérique pour les équations de Navier-Stokes compressible et incompressible, et enfin de monter facilement en ordre.

Pour résoudre l'équation de transport de la fonction Level Set, les méthodes numériques les plus fréquemment utilisées sont les schémas type Essentially Non Oscillating (ENO) ou bien Runge Kutta-Galerkin Discontinu (RK-GD) [Mar06, DPLFP06]. Pour des raisons de flexibilité géométrique et pour ses bonnes propriétés de conservation la méthode de type Galerkin Discontinu a été retenue dans le cadre de cette thèse.

Enfin, un dernier point essentiel à l'élaboration de notre méthode numérique s'appuie sur le traitement spécifique des mailles situées de part et d'autre de l'interface. Pour cela, comme [Tur09], une approche dite *moyennée* est considérée. Cette façon de procéder s'appuie sur la construction de moyennes spécifiques dans les mailles traversées par l'interface pour traiter les coefficients discontinus à l'interface (par exemple : densité, viscosité).

Plan de la thèse

Ce mémoire s'articule autour de deux axes.

Une première partie est dédiée à la présentation détaillée des outils utilisés dans cette thèse, à savoir la formulation unifiée des équations de Navier-Stokes compressible et incompressible ainsi que leur discrétisation par une méthode d'éléments finis stabilisés.

Dans le chapitre 1, la formulation des équations de Navier-Stokes compressible et incompressible nécessaire à la conception d'une méthode numérique *unifiée* est présentée. En s'appuyant sur [HH94, HH98, Pol05], nous rappellons pour commencer les formes *conservatives* et *quasi-linéaires* des équations de Navier-Stokes compressible, pour différents jeux d'inconnues, *conservatives, entropiques, primitives.* Afin de fermer ce système, une loi d'état de type gaz parfaits est employée. Dans ces diverses formulations deux *paramètres thermodynamiques* (coefficient de compressibilité isotherme, et coefficient de dilatation thermique) sont mis en évidence. Ils permettent notamment de passer à la limite incompressible de façon assez naturelle pour les inconnues primitives et entropiques.

Dans le chapitre 2, la *méthode des éléments finis stabilisés* pour les équations de Navier-Stokes compressible et incompressible écrites sous leur forme unifiée pour un même jeu d'inconnues est rappelée. Pour une implémentation simple mais aussi pour travailler avec le même cadre discret pour les deux types d'équations, condition nécessaire à l'élaboration d'un schéma unifié,

chaque inconnue est approchée par des éléments finis de Lagrange de même ordre. Toutefois, pour ce choix d'éléments finis la méthode de Galerkin appliquée aux équations de Navier-Stokes donne lieu à un schéma numérique instable pour deux raisons. D'une part, lorsque les termes de convection des équations de Navier-Stokes sont dominants, la solution numérique présente des oscillations non physiques. D'autre part pour les équations de Navier-Stokes incompressible, les espaces discrets pour la vitesse et la pression ne satisfont par la condition de stabilité inf-sup [Bab73, Bre74] ou condition LBB (Ladyzenskaya-Babuska-Brezzi). Pour contourner ces deux difficutés, il est nécessaire d'introduire un terme de stabilisation dans la formulation Galerkin. De nombreuses stabilisations ont été proposées. Les méthodes de types Petrov-Galerkin sont détaillées ici, parmi lesquelles les stabilisations *SUPG, PSPG* et *GLS*.

Dans une seconde partie nous nous focalisons sur l'élaboration de la méthode numérique dédiée à la simulation numérique d'écoulements diphasiques à interfaces par un couplage compressible-incompressible.

Dans le chapitre 3, la formulation globale en espace du modèle utilisé pour effectuer les simulations numériques présentées par la suite est dérivée. Pour cela, nous discutons d'une part des équations utilisées pour chaque phase (forme et inconnues) et d'autre part de la méthode de réprésentation de l'interface employée. Ainsi, les équations de Navier-Stokes compressible (gaz) et incompressible (liquide) écrites de façon unifiée en terme d'inconnues primitives (pression, vitesse, température) pour différentes formes quasi-linéaire ou quasi-linéaire symétrique sont retenues. A cela on associe la méthode *Level Set* pour représenter l'interface. A partir de ces deux ingrédients, nous dérivons formellement un modèle dit *mono-fluide* permettant de décrire l'écoulement de façon globale.

Dans le chapitre 4, la construction de notre méthode numérique en une dimension de l'espace est considérée. Notre approche est basée sur la résolution de l'équation mono-fluide en 1D associée au transport de l'interface. Pour résoudre ces équations nous avons choisi une approche découplée. Cela consiste dans un premier temps à figer l'interface pour résoudre l'équation mono-fluide, puis dans un second temps de mettre à jour la position de l'interface avec le champ de vitesse calculée à la première étape. Les méthodes numériques retenues ici, sont une méthode de type différences finies en temps ainsi que des éléments finis stabilisés en espace. En 1D la discrétisation de l'équation de transport de l'interface est simple. Par contre, la discrétisation de l'équation mono-fluide est plus complexe. Notamment, il faut traiter spécifiquement l'opérateur du modèle mono-fluide qui dépend de la phase considéré et qui est donc discontinu à l'interface. Dans ce but, des *moyennes* calculées sur chaque élément ont été introduites dans la formulation variationnelle discrète.

Dans le chapitre 5, l'ensemble des simulations numériques mono-dimensionnelles effectuées afin d'illustrer bon comportement de la méthode numérique sont regroupées. Les modèles quasi-linéaire et quasi-linéaire symétrique pour des cas test réguliers ou même non-réguliers, isotherme ou anisotherme sont considérés.

Dans le chapitre 6, la méthode numérique présentée au chapitre 4, est généralisée en plusieurs dimensions de l'espace. Dans un premier temps, la méthode des élément finis stabilisés est appliquée au modèle mono-fluide multi-dimensionnel. Nous revenons notamment sur la construction des moyennes dans la maille mixte. Dans un second temps, nous détaillons la mise en œuvre du schéma RK-GD pour la discrétisation de l'équation de transport de la fonction Level Set. Enfin, nous présentons le couplage entre le solveur de l'écoulement et de l'interface pour

la simulation numérique d'écoulements diphasiques à interface.

Dans le chapitre 7, des calculs bi-dimensionnels sont présentés pour illustrer le bon fonctionnement de la méthode numérique développée dans cette thèse. En s'inspirant par exemple des cas tests considérés dans [Smo01], la remontée d'une bulle est étudiée. Ensuite l'expérience proposée par Tanaka dans [Tan86] est considérée. Une vague, initialement en déplacement à vitesse constante se brise sur un récif. Les dernières simulations numériques réalisées concernent des écoulements où les effets de compressibilité du gaz sont importants : la translation d'une goutte de liquide dans un gaz [CFA01] et la compression d'une bulle.

Pour finir, nous présentons les conclusions inspirées par ce travail, ainsi que les perspectives envisagées.

Valorisation des travaux de thèse

Les travaux réalisés dans cette thèse ont donné lieu aux communications et publications suivantes.

Communications lors de congrès internationaux

Stabilized finite element method for compressible-incompressible flows
8th European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications
ENUMATH 2009, 29 Juin - 3 Juillet 2009, Uppsala, Suède

Stabilized finite element method for compressible-incompressible interface flows
5th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering
ECCOMAS 2008, 30 Juin - 4 Juillet 2008, Venise, Italie

Eléments finis stabilisés pour des écoulements à interface compressible-incompressible
39ème Congrès d'Analyse Numérique
CANUM 2008, 26–30 Mai 2008, Saint Jean de Mont, France

Séminaires

Eléments finis stabilisés pour des écoulements diphasiques compressible-incompressible
Séminaire des doctorants
26 Mars 2009, Poitiers, France

Eléments finis stabilisés pour des écoulements diphasiques compressible-incompressible
21ème Séminaire de Mécanique des Fluides Numérique
CEA-GAMNI,26–27 Janvier 2009, Paris, France

Couplage compressible-incompressible par une méthode d'éléments finis stabilisés
10ème Ecole de Mécanique des Fluides Numérique
MNF 2007, 3–9 Juin 2007, Roscoff, France

Liste des publications

Stabilized finite element method for compressible-incompressible flows
Marie BILLAUD, Gérard GALLICE et Boniface NKONGA
Article en préparation

Stabilized finite element method for compressible-incompressible flows
Marie BILLAUD, Gérard GALLICE et Boniface NKONGA
Proceeding ENUMATH 2009

Première partie

Eléments finis stabilisés appliqués aux équations de Navier-Stokes

Chapitre 1

Formulation unifiée des équations de Navier-Stokes

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la formulation unifiée des équations de Navier-Stokes compressible et incompressible. Après avoir rappelé le modèle qui régit l'écoulement d'un fluide compressible, décliné sous différentes formes pour plusieurs jeux d'inconnues, nous soulignerons son lien avec le modèle incompressible. Pour cela il sera nécessaire de mettre en évidence un certain nombre de paramètres thermodynamiques qui permettront d'établir un passage à la limite incompressible de façon assez naturelle.

1 Equations de Navier-Stokes compressible

Pour commencer nous présentons les équations qui régissent le mouvement d'un fluide compressible dans un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^3$. Il s'agit des équations *de conservation de la masse, la quantité de mouvement et de conservation de l'énergie.* Nous nous plaçons dans le cadre d'une description eulérienne et nous nous limitons au cas d'un fluide newtonien.

Notation : Dans la suite de ce chapitre, nous noterons en gras les vecteurs de $\mathbb{R}^d$, et $\overline{\overline{a}}$ désignera un tenseur d'ordre deux.

1.1 Forme conservative

De façon générale un fluide est caractérisé par sa densité $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ et sa vitesse $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = {}^t(u_1, u_2, u_3)$ qui sont fonctions des variables spatiale $\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ et temporelle t. Ces deux grandeurs sont reliées par l'équation de *conservation de la masse* également appelée équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \tag{1.1}$$

L'équation de *conservation de mouvement* dans un milieu continu a pour expression :

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \nabla \cdot \overline{\overline{\sigma}} = \rho \mathbf{g}, \tag{1.2}$$

avec $\mathbf{g} = {}^t(g_1, g_2, g_3)$ la gravité et $\overline{\overline{\sigma}}$ le tenseur des contraintes. L'équation de *conservation de l'énergie* s'écrit

$$\frac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho e + p)\mathbf{u}) - \nabla \cdot (\overline{\overline{\tau}} \cdot \mathbf{u}) + \nabla \cdot \mathbf{q} = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}, \tag{1.3}$$

avec $e = \epsilon + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2$ l'énergie totale, somme de l'énergie interne ϵ et de l'énergie cinétique $\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2$. Enfin la quantité $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = {}^t(q_1, q_2, q_3)$ est le flux de chaleur thermique.

Dans la suite de cette thèse nous nommerons équations de *Navier-Stokes compressible* l'ensemble des équations (1.1), (1.2) et (1.3).

1.1.1 Relations constitutives

Jusqu'à présent, nous avons donné la forme générale des équations de conservation de la masse (1.1), de quantité de mouvement (1.2) et d'énergie (1.3) pour l'écoulement d'un fluide quelconque. Ces équations font apparaître plusieurs quantités encore indéterminées dont le tenseur des contraintes : $\overline{\overline{\sigma}}$, le flux de chaleur $\mathbf{q}$ et l'énergie interne ε qu'il est essentiel de définir.

Tenseur des contraintes

Pour un fluide newtonien, le tenseur des contraintes se décompose de la façon suivante :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\tau}} - p\overline{\overline{I}}, \tag{1.4}$$

où $p = p(\mathbf{x}, t)$ est la pression, $\overline{\overline{I}}$ l'identité et $\overline{\overline{\tau}}$ le tenseur des contraintes visqueuses donné par :

$$\overline{\overline{\tau}} = 2\mu D(\mathbf{u}) + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\overline{\overline{I}}, \text{ avec } D(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + {}^t\nabla\mathbf{u}). \tag{1.5}$$

Les coefficients λ et μ sont des coefficients de viscosité vérifiant $\lambda = -2\mu/3$ sous l'hypothèse de Stokes.

Loi de Fourier

Ici nous supposons que le flux thermique est donné par la loi de Fourier. Ainsi $\mathbf{q}$ et le gradient de la température $T = T(\mathbf{x}, t)$ sont reliés proportionnellement par l'intermédiaire de la conductivité thermique κ :

$$\mathbf{q} = -\kappa\nabla T. \tag{1.6}$$

Equation d'état des gaz parfaits

Le système d'équations de Navier-Stokes fait intervenir sept inconnues : la pression, la température, la densité, la vitesse et l'énergie interne alors qu'il n'y a que cinq équations. Il est donc nécessaire de d'introduire deux relations supplémentaires.

Pour fermer le système on fait l'hypothèse que le système est *bivariant*. En outre, cela signifie que la température et la pression sont des fonctions d'états d'autres grandeurs thermodynamiques comme la densité ρ et l'énergie interne ε :

$$T = T(\rho, \varepsilon), \text{ et } p = p(\rho, \varepsilon). \tag{1.7}$$

Ici, nous considérons le cas particulier d'un gaz *calorifiquement parfait*, ce qui se traduit par les relations thermodynamiques ci-dessous :

$$p = \rho RT, \text{ et } \epsilon = c_v T, \tag{1.8}$$

où R est la constante des gaz parfaits définie par la relation de Mayer :

$$R = c_p - c_v, \text{ et } \gamma = \frac{c_p}{c_v}. \tag{1.9}$$

Enfin le coefficient γ est le rapport des capacités calorifiques à pression constante c_p et à vitesse constante c_v.

En utilisant les équations de Navier-Stokes compressible ainsi que les relations constitutives (1.4), (1.6) et (1.8), le mouvement d'un fluide compressible peut être parfaitement décrit dans l'espace et dans le temps. Par la suite, il sera utile de réécrire les équations de Navier-Stokes compressible de façon plus compacte :

$$\partial_t \mathbf{U} + \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i} \mathbf{F}_i^a(\mathbf{U}) = \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i} \mathbf{F}_i^d(\mathbf{U}, \nabla \mathbf{U}) + \mathbf{S}, \tag{1.10}$$

où $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^5$ est le vecteur des inconnues conservatives, et $\mathbf{F}_i^a, \mathbf{F}_i^d \in \mathbb{R}^3$ sont respectivement les flux advectifs et diffusifs dans la $i^{\text{ème}}$ direction définis par :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho e \end{pmatrix}, \mathbf{F}_i^a = \rho u_i \begin{pmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ e \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_{1i} \\ \delta_{2i} \\ \delta_{3i} \\ u_i \end{pmatrix}, \mathbf{F}_i^d = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{1i} \\ \tau_{2i} \\ \tau_{3i} \\ \tau_{ij} u_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -q_i \end{pmatrix}, i, j = 1, 2, 3. \tag{1.11}$$

Dans les expressions ci-dessus δ_{ij} représente le symbole de Kronecker. Enfin, lorsque seule la gravité est prise en compte, le vecteur des efforts extérieurs $\mathbf{S}$ donné par :

$$\mathbf{S} = \rho \begin{pmatrix} 0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

1.2 Formes quasi-linéaires

Nous considérons ici une méthode canonique pour obtenir des formes quasi-linéaires à partir de la forme conservative. Nous verrons plus loin qu'il existe d'autres façons de procéder.

En introduisant un changement d'inconnu $\mathbf{Y} \to \mathbf{U}(\mathbf{Y})$ quelconque, il est possible de réexprimer les équations de Navier-Stokes compressible sous la forme *conservative* :

$$\partial_t \mathbf{U}(\mathbf{Y}) + \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i} \mathbf{F}_i^a(\mathbf{U}(\mathbf{Y})) = \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i} \mathbf{F}_i^d(\mathbf{U}(\mathbf{Y}), \nabla \mathbf{U}(\mathbf{Y})) + \mathbf{S}, \tag{1.13}$$

équivalente pour des solutions régulières à la forme *quasi-linéaire* :

$$A_0(\mathbf{Y}) \partial_t \mathbf{Y} + \sum_{i=1}^{3} A_i(\mathbf{Y}) \partial_{x_i} \mathbf{Y} = \sum_{i,j=1}^{3} \partial_{x_i} \left(K_{ij}(\mathbf{Y}) \partial_{x_j} \mathbf{Y} \right) + \mathbf{S}, \tag{1.14}$$

où $A_0(\mathbf{Y}) = \partial_{\mathbf{Y}} \mathbf{U}(\mathbf{Y})$, $A_i(\mathbf{Y}) = \partial_{\mathbf{Y}} \mathbf{F}_i^a(\mathbf{Y})$ est la $i^{\text{ème}}$ matrice jacobienne et $K = [K_{ij}]$ la matrice des coefficients de viscosité telle que $K_{ij}(\mathbf{Y}) \partial_{x_j} \mathbf{Y} = \mathbf{F}_i^d(\mathbf{Y}, \nabla \mathbf{U}(\mathbf{Y}))$.

Nous considèrerons ci-dessous le cas particulier des inconnues *conservatives*, *entropiques* et *primitives*.

1.2.1 Variables conservatives

Pour l'inconnue *conservative* notée $\mathbf{U}$, le système d'équations (1.10) est équivalent à :

$$\partial_t \mathbf{U} + \sum_{i=1}^{3} \widehat{A}_i \partial_{x_i} \mathbf{U} = \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i} \left(\widehat{K}_{ij} \partial_{x_j} \mathbf{U} \right) + \mathbf{S}, \tag{1.15}$$

où $\widehat{A}_i = \partial_{\mathbf{U}} \mathbf{F}_i^a$ et $\widehat{K}_{ij} \partial_{x_j} \mathbf{U} = \mathbf{F}_i^d$. Pour plus de détails sur les matrices nous renvoyons le lecteur aux travaux de Hauke et Hughes [HH98, HH94]. Pour ce choix d'inconnues les matrices jacobiennes et des coefficients de viscosité ne sont ni symétriques ni définies positives contrairement à celles obtenues avec les inconnues entropiques.

1.2.2 Variables entropiques

Le vecteur inconnues *entropiques* noté $\mathbf{V}$ est :

$$\mathbf{V} = \frac{1}{T} \begin{pmatrix} \tilde{\mu} - \dfrac{|\mathbf{u}|^2}{2} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{1.16}$$

où $\tilde{\mu}$ représente le potentiel chimique donné par :

$$\tilde{\mu} = e + \frac{p}{\rho} - Ts. \tag{1.17}$$

avec s l'entropie.
En utilisant la variable entropique $\mathbf{V}$, les équations (1.10) deviennent :

$$\tilde{A}_0 \partial_t \mathbf{V} + \sum_{i=1}^{3} \tilde{A}_i \partial_{x_i} \mathbf{V} = \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i} \left(\tilde{K}_{ij} \partial_{x_j} \mathbf{V} \right) + \mathbf{S}, \tag{1.18}$$

où $\tilde{A}_0 = \partial_V \mathbf{U}, \tilde{A}_i = \widehat{A}_i \tilde{A}_0$ et $\tilde{K}_{ij} = \widehat{K}_{ij} \tilde{A}_0$. Ces matrices sont données en détail dans [Pol05].
La forme quasi-linéaire entropique possède deux propriétés importantes. D'une part, les matrices ont les caractéristiques suivantes :

- $\tilde{A}_0$ est symétrique définie positive ;
- $\tilde{A}_i$ sont symétriques pour $i = 1, 2, 3$;
- et $K = [\tilde{K}_{ij}]$ est symétrique (i.e. $\tilde{K}_{ij} = {}^t\tilde{K}_{ij}$) et semi-définie positive.

D'autre part, la formulation éléments finis stabilisés de type Galerkin Least Square appliquée aux équations (1.18) pour l'inconnue entropique satisfait l'inégalité de Clausius-Duhem également appelée la condition d'entropie [SH91, Pol05].

On note que les variables entropiques possèdent beaucoup d'avantages par rapport aux inconnues conservatives. Toutefois leur utilisation est délicate et coûteuse car les expressions des matrices jacobiennes sont complexes. C'est pourquoi le jeu des variables primitives est fréquemment considéré.

1.2.3 Variables primitives

Le vecteur des inconnues primitives noté $\mathbf{Y}$ est donné par :

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} p \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ T \end{pmatrix}. \tag{1.19}$$

Pour les inconnues primitives les équations (1.10) sont équivalentes au système quasi-linéaire :

$$A_0 \partial_t \mathbf{Y} + \sum_{i=1}^{3} A_i \partial_{x_i} \mathbf{Y} = \sum_{i,j=1}^{3} \partial_{x_i} \left(K_{ij} \partial_{x_j} \mathbf{Y} \right) + \mathbf{S}, \tag{1.20}$$

où les $A_0, A_i, i = 1, .., 3$ sont les matrices jacobiennes données par $A_0 = \partial_{\mathbf{Y}} \mathbf{U}$ et $A_i = \widehat{A}_i A_0$. Enfin la matrice des coefficients de viscosité est telle que $K_{ij} = \widehat{K}_{ij} A_0$. Pour plus de détail sur ces matrices nous renvoyons le lecteur à l'annexe 1. On soulignera ici que les matrices ont une forme beaucoup plus simple que celles issues des variables entropiques ou conservatives.

1.3 Autres formes quasi-linéaires

Il est possible à partir de la forme quasi-linéaire (1.14) introduite au paragraphe précédent de mettre en évidence des systèmes quasi-linéaires équivalents par le biais de transformations purement algébriques.

En multipliant le système (1.14) par une matrice $M \in \mathcal{M}^{5\times 5}$, il vient :

$$\mathcal{A}_0 \partial_t \mathbf{Y} + \sum_{i=1}^{3} \mathcal{A}_i \partial_{x_i} \mathbf{Y} = M \sum_{i,j=1}^{3} \partial_{x_i} \left(K_{ij} \partial_{x_j} \mathbf{Y} \right) + \mathcal{S}, \tag{1.21}$$

dont les matrices sont $\mathcal{A}_i = M A_i, i = 0, 1, 2, 3$ et le second membre $\mathcal{S} = M\mathbf{S}$.

1.3.1 Forme quasi-linéaire normalisée

Quelque soit le type d'inconnue $\mathbf{Y}$ considéré (entropique, conservative ou primitives), lorsque la matrice A_0 est inversible, le système (1.14) est équivalent à :

$$\partial_t \mathbf{Y} + \sum_{i=1}^{3} \tilde{A}_i \partial_{x_i} \mathbf{Y} = A_0^{-1} \sum_{i,j=1}^{3} \partial_{x_i} \left(K_{ij} \partial_{x_j} \mathbf{Y} \right) + \tilde{\mathbf{S}}, \tag{1.22}$$

avec $\tilde{A}_i = A_0^{-1} A_i, i = 1, 2, 3$ et le second membre $\tilde{S} = A_0^{-1}\mathbf{S}$.

1.3.2 Forme quasi-linéaire symétrisée

En multipliant le système quasi-linéaire pour les inconnues primitives (1.20) par la matrice :

$$M(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -u_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -u_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{T}(|\mathbf{u}|^2 - e_1) & -\frac{u_1}{T} & -\frac{u_2}{T} & -\frac{u_3}{T} & \frac{1}{T} \end{pmatrix}, \tag{1.23}$$

où $e_1 = h + \dfrac{|\mathbf{u}|^2}{2}$ avec $h = e + \dfrac{p}{\rho}$ l'enthalpie, nous obtenons un système d'équations équivalent :

$$\mathcal{A}_0 \partial_t \mathbf{Y} + \sum_{i=1}^{3} \mathcal{A}_i \partial_{x_i} \mathbf{Y} = M \sum_{i,j=1}^{3} \partial_{x_i} \left(K_{ij} \partial_{x_j} \mathbf{Y} \right) + \mathcal{S}, \tag{1.24}$$

dont les matrices sont $\mathcal{A}_i = MA_i, i = 0, 1, 2, 3$ et le second membre $\mathcal{S} = M\mathbf{S}$.
Nous remarquons que cette forme possède des propriétés intéressantes, en effet les matrices ont les caractéristiques suivantes :

- $\mathcal{A}_0$ est symétrique définie positive,
- et les $\mathcal{A}_i$ sont symétriques pour $i = 1, 2, 3$.

Le système (1.24) est globalement symétrique lorsqu'on considère :

- un écoulement isotherme i.e. $\mathbf{Y} =^t (p,^t \mathbf{u})$ dans ce cas le terme visqueux se simplifie :

$$M \sum_{i,j=1}^{3} \partial_{x_i} \left(K_{ij} \partial_{x_j} \mathbf{Y} \right) = \sum_{i,j=1}^{3} \partial_{x_i} \left(K_{ij} \partial_{x_j} \mathbf{Y} \right),$$

- ou bien des viscosité (μ) et conductivité thermique (κ) nulles.

En s'appuyant sur les travaux de Hughes, Franca et Hulbert [HFH89], on peut supposer que la méthode Galerkin Least Square appliquée aux équations (1.24) (système d'advection-diffusion instationnaire symétrique) possède de bonnes propriétés de stabilité.

2 Equations de Navier-Stokes incompressible

Nous nous intéressons dans cette section à la formulation des équations régissant le mouvement d'un fluide incompressible dans un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^3$. Après avoir rappelé les équations, nous établirons le lien avec les différentes formulations du modèle compressible présentées dans la première section de ce chapitre.

2.1 Formulation standard

Nous dirons, dans le cadre de cette thèse, qu'un fluide est incompressible si sa densité ρ est constante. Cela implique que l'écoulement est isochore, i.e. la divergence de sa vitesse est nulle :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{1.25}$$

Toujours dans le cadre d'une description eulérienne et pour un fluide newtonien, le mouvement d'un fluide incompressible est régi par :

- l'équation de conservation de la masse aussi appelée *contrainte d'incompressibilité*

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{1.26}$$

- l'équation de conservation de quantité de mouvement

$$\rho \partial_t \mathbf{u} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \nabla \cdot (2\mu D(\mathbf{u})) + \rho \mathbf{g}, \tag{1.27}$$

- et enfin l'équation de conservation d'énergie

$$\rho c_p \left(\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = 2\mu |D(\mathbf{u})| + \nabla \cdot (\kappa \nabla T). \tag{1.28}$$

Dans la suite de cette thèse nous appellerons *équations de Navier-Stokes incompressible* l'ensemble des équations (1.26), (1.27) et (1.28).

2.1.1 Approximation de Boussinesq

Lorsqu'on soumet un fluide incompressible à un champ de température non uniforme, il se dilate et se met en mouvement de telle sorte à répartir uniformément sa température. Il s'agit d'un phénomène de convection naturelle. Dans ce contexte, la divergence de la vitesse n'est plus nulle.
En utilisant l'*approximation de Boussinesq* il est possible de prendre en compte la dilatabilité du fluide tout en conservant la *condition d'incompressibilité* $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Elle repose sur plusieurs considérations :

- premièrement la variation de masse volumique est uniquement prise en compte dans le terme source $\mathbf{S}$;
- deuxièmement si les écarts de température et de pression sont faibles la densité $\tilde{\rho}(T)$ intervenant dans le terme source est définie comme une fonction linéaire de la température :

$$\tilde{\rho}(T) = \rho\alpha(T - \overline{T}), \tag{1.29}$$

  avec $\overline{T}$ grandeur de référence et α un coefficient de dilation volumique.

En utilisant l'approximation de Boussinesq, les équations de Navier Stokes incompressible deviennent :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \rho\partial_t \mathbf{u} + \rho\left(\mathbf{u} \cdot \nabla\right)\mathbf{u} + \nabla p = \nabla \cdot \left(2\mu D(\mathbf{u})\right) + \tilde{\rho}\mathbf{g}, \\ \rho c_p\left(\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T\right) = 2\mu|D(\mathbf{u})| + \nabla \cdot \left(\kappa \nabla T\right). \end{cases}$$

2.2 Limite incompressible des équations de Navier-Stokes compressible

2.2.1 Coefficients thermodynamiques

Les équations qui régissent le mouvement d'un fluide compressible sont (1.1), (1.2) et (1.3). En exprimant les dérivées partielles de la densité par rapport à la pression et à la température, l'équation de conservation de la masse (1.1) :

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

avec $\rho = \rho(p, T)$ devient :

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dt} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \frac{dT}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

soit :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\beta_T \frac{dp}{dt} + \alpha_p \frac{dT}{dt}, \tag{1.30}$$

où $d_t = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ représente la dérivée particulaire. L'équation de conservation de la masse ainsi réecrite fait intervernir deux paramètres thermodynamiques (voir [HH94, HH98, Pol05]) qui sont :

- le coefficient de *dilatation thermique*

$$\alpha_p = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p, \tag{1.31}$$

- et le coefficient de *compressibilité isotherme*

$$\beta_T = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T. \tag{1.32}$$

De même en faisant apparaitre les dérivées de l'énergie interne $\varepsilon = \varepsilon(p, T)$ par rapport à la pression et la température dans l'équation de conservation de l'énergie (1.3) on a :

$$\rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dt} + \rho \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_p \frac{dT}{dt} + p\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \overline{\overline{\tau}}.$$

équivalent à :

$$\rho\eta \frac{dp}{dt} + \rho\delta \frac{dT}{dt} + p\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \overline{\overline{\tau}}. \tag{1.33}$$

A partir des deux coefficients thermodynamiques (1.31) et (1.32) on construit les coefficients η et δ définis par :

$$\eta = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\right)_T = \frac{\beta_T p - \alpha_p T}{\rho},$$

et

$$\delta = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_p = c_p - \frac{p\alpha_p}{\rho}.$$

Remarques :

1. En supposant qu'un fluide est à compressibilité nulle et à dilation nulle i.e. :

$$\alpha_p = 0 \text{ et } \beta_T = 0 \Rightarrow \eta = 0 \text{ et } \delta = c_p, \tag{1.34}$$

   et en utilisant les équations (1.30) et (1.33) nous retrouvons la condition d'incompressibilité (1.26) et l'équation sur la température (1.28) présentées au paragraphe précédent.

2. Pour un gaz parfait les coefficients thermodynamiques de compressibilité isotherme et de dilation thermique obtenus en utilisant (1.31), (1.32) et (1.8) sont :

$$\alpha_p = \frac{1}{T} \text{ et } \beta_T = \frac{1}{p} \Rightarrow \eta = 0 \text{ et } \delta = c_v. \tag{1.35}$$

2.2.2 Passage à la limite

A présent nous allons discuter de la limite incompressible des équations de Navier-Stokes écrites sous leur forme quasi-linéaire (1.14) pour les inconnues primitives, conservatives et entropiques.

Quelques soient les inconnues considérées, conservatives, entropiques ou primitives, on montre (voir [HH94, HH98]) que les matrices jacobiennes intervenant dans la formulation quasi-linéaire (1.14) sont des fonctions des deux coefficients thermodynamiques α_p et β_T (voir annexe 1). Il est également légitime d'introduire la dépendance de ces matrices par rapport à la densité qui est supposée constante dans le fluide incompressible alors que c'est une fonction de la pression et de la température dans un fluide compressible. Enfin de façon générale, deux fluides se différencient également par leurs viscosité ou leur conductivité. Il faudra également tenir compte de cette dépendance. Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} A_i(\mathbf{Y}) &= \hat{A}_i(\mathbf{Y}, \alpha_p, \beta_T, \rho) \\ K_{ij}(\mathbf{Y}) &= \hat{K}_{ij}(\mathbf{Y}, \mu, \kappa), \\ \mathbf{S}(\mathbf{Y}) &= \hat{S}(\mathbf{Y}, \rho) \end{aligned}$$

où les matrices $\hat{A}_i, \hat{K}_{ij}$ et $\mathbf{S}$ (quand il s'agit des efforts dus à la gravité) sont des fonctions de l'inconnue, des deux coefficients thermodynamiques, de la densité, de la viscosité et de la conductivité thermique. Afin d'alléger les notations nous définissons :

$$\boldsymbol{\chi} = (\alpha_p, \beta_T)\,.$$

Finalement, en tenant compte des dépendances des matrices par rapport à $\mathbf{Y}, \rho, \chi$ le système quasi-linéaire se réécrit sous la forme :

$$\hat{A}_0(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\chi}, \rho)\partial_t \mathbf{Y} + \sum_{i=1}^{3} \hat{A}_i(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\chi}, \rho)\partial_{x_i}\mathbf{Y} = \sum_{i,j=1}^{3} \partial_{x_i}\left(\hat{K}_{ij}(\mathbf{Y}, \mu, \kappa)\partial_{x_j}\mathbf{Y}\right) + \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{Y}, \rho). \tag{1.36}$$

De façon générale les équations de Navier-Stokes incompressible sont une forme asymptotique des équations de Navier-Stokes compressible lorsque le nombre de Mach M tend vers zéro. Cela a fait l'objet de nombreux travaux mathématiques dont ceux de Majda [KM81, KM82], Ukai [Uka86], Alazard [Ala05], et beaucoup d'autres. Ici le même principe est repris pour pouvoir déduire des modèles incompressible à partir des modèles quasi-linéaires compressible (1.36). Toutefois, on ne s'appuie plus sur un seul petit paramètre comme le nombre Mach M, mais sur les deux coefficients thermodynamiques (1.31) et (1.32) comme dans les travaux de Hughes [HH94, HH98] ou de Polner [Pol05, PVdVVD06] par exemple. Il existe une forte corrélation entre M et β_T. Notamment lorsque le coefficient de compressibilité isotherme est nul, cela signifie que la vitesse du son est infinie dans un fluide incompressible, autrement dit que le nombre de Mach est nul.

Dans [HH94, HH98], la limite incompressible des équations quasi-linéaires (1.36) est obtenue quand les coefficients de dilatation thermique et de compressibilité isotherme sont pris égaux à zéro et lorsque la densité est supposée constante i.e. :

$$\boldsymbol{\chi} = (\alpha_p, \beta_T) = (0, 0) = \mathbf{0} \text{ et } \rho = cte. \tag{1.37}$$

Hauke et Hughes [HH94, HH98] ont montré que pour les inconnues primitives $\mathbf{Y}$ et entropiques $\mathbf{V}$, la limite incompressible des équations de Navier-Stokes était bien définie i.e. que les matrices jacobiennes $\hat{A}$ de (1.36). Cela n'est pas vrai pour un jeu d'inconnues dans lequel la densité intervient, en particulier pour les inconnues conservatives $\mathbf{U}$.

Cette propriété permettra notamment de considérer les équations de Navier-Stokes compressible ou incompressible sous une formulation *unifiée* quasi-linéaire, dépendant seulement des deux coefficients thermodynamiques et de la densité. Ce point essentiel constituera une base pour la construction d'un schéma numérique unifié pour le couplage.

Nous nous intéresserons ici à la limite incompressible des équations de Navier-Stokes compressible quasi-linéaire pour les variables primitives (pour les variables entropiques voir [HFB86, HH98, Pol05]). Pour cela nous rappelons dans un premier temps les formes des ma-

trices jacobiennes $\hat{A}_i$ données en trois dimensions par :

$$\hat{A}_0(\mathbf{Y},\boldsymbol{\chi},\rho) = \begin{pmatrix} \rho\beta_T & 0 & 0 & 0 & -\rho\alpha_p \\ \rho\beta_T u_1 & \rho & 0 & 0 & -\rho\alpha_p u_1 \\ \rho\beta_T u_2 & 0 & \rho & 0 & -\rho\alpha_p u_2 \\ \rho\beta_T u_3 & 0 & 0 & \rho & -\rho\alpha_p u_3 \\ e_1^p & \rho u_1 & \rho u_2 & \rho u_3 & e_4^p \end{pmatrix}, \tag{1.38}$$

$$\hat{A}_1(\mathbf{Y},\boldsymbol{\chi},\rho) = \begin{pmatrix} \rho\beta_T u_1 & \rho & 0 & 0 & -\rho\alpha_p u_1 \\ \rho\beta_T u_1^2+1 & 2\rho u_1 & 0 & 0 & -\rho\alpha_p u_1^2 \\ \rho\beta_T u_1 u_2 & \rho u_2 & \rho u_1 & 0 & -\rho\alpha_p u_1 u_2 \\ \rho\beta_T u_1 u_3 & \rho u_3 & 0 & \rho u_1 & -\rho\alpha_p u_1 u_3 \\ u_1 e_2^p & e_3^p+\rho u_1^2 & \rho u_1 u_2 & \rho u_1 u_3 & u_1 e_4^p \end{pmatrix}, \tag{1.39}$$

$$\hat{A}_2(\mathbf{Y},\boldsymbol{\chi},\rho) = \begin{pmatrix} \rho\beta_T u_2 & 0 & \rho & 0 & -\rho\alpha_p u_2 \\ \rho\beta_T u_2 u_1 & \rho u_2 & \rho u_1 & 0 & -\rho\alpha_p u_2 u_1 \\ \rho\beta_T u_2^2+1 & 0 & 2\rho u_2 & 0 & -\rho\alpha_p u_2^2 \\ \rho\beta_T u_2 u_3 & 0 & \rho u_3 & \rho u_2 & -\rho\alpha_p u_2 u_3 \\ u_2 e_2^p & \rho u_2 u_1 & e_3^p+\rho u_2^2 & \rho u_2 u_3 & u_2 e_4^p \end{pmatrix}, \tag{1.40}$$

$$\hat{A}_3(\mathbf{Y},\boldsymbol{\chi},\rho) = \begin{pmatrix} \rho\beta_T u_3 & 0 & 0 & \rho & -\rho\alpha_p u_3 \\ \rho\beta_T u_3 u_1 & \rho u_3 & 0 & \rho u_1 & -\rho\alpha_p u_3 u_1 \\ \rho\beta_T u_3 u_2 & 0 & \rho u_3 & \rho u_2 & -\rho\alpha_p u_3 u_2 \\ \rho\beta_T u_3^2+1 & 0 & 0 & 2\rho u_3 & -\rho\alpha_p u_3^2 \\ u_3 e_2^p & \rho u_3 u_1 & \rho u_3 u_2 & e_3^p+\rho u_3^2 & u_3 e_4^p \end{pmatrix}, \tag{1.41}$$

avec

$$e_1^p = \rho\beta_T e_1 - \alpha_p T, e_2^p = e_1^p + 1, e_3^p = \rho e_1, \text{ et}, e_4^p = -\rho\alpha_p e_1 + \rho c_p \text{ et } e_1 = h + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2.$$

En utilisant les propriétés (1.37) dans les matrices jacobiennes écrites ci-dessus, nous obtenons :

$$\hat{A}_0(\mathbf{Y},\mathbf{0},\rho) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & \rho u_1 & \rho u_2 & \rho u_3 & \rho c_p \end{pmatrix}, \tag{1.42}$$

$$\hat{A}_1(\mathbf{Y},\mathbf{0},\rho) = \begin{pmatrix} 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\rho u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho u_2 & \rho u_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho u_3 & 0 & \rho u_1 & 0 \\ u_1 & \rho u_1^2+\rho e_1 & \rho u_1 u_2 & \rho u_1 u_3 & u_1\rho c_p \end{pmatrix}, \tag{1.43}$$

$$\hat{A}_2(\mathbf{Y},\mathbf{0},\rho) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho u_2 & \rho u_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2\rho u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho u_3 & \rho u_2 & 0 \\ u_2 & \rho u_2 u_1 & \rho u_2^2+\rho e_1 & \rho u_2 u_3 & u_2\rho c_p \end{pmatrix}, \tag{1.44}$$

$$\hat{A}_3(\mathbf{Y}, \mathbf{0}, \rho) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & \rho u_3 & 0 & \rho u_1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho u_3 & \rho u_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2\rho u_3 & 0 \\ u_3 & \rho u_3 u_1 & \rho u_3 u_2 & \rho u_3^2 + \rho e_1 & u_3 \rho c_p \end{pmatrix}. \tag{1.45}$$

Les matrices des coefficients de viscosité, quant à elles sont inchangées car elles ne dépendent pas de α_p ni de β_T .

En multipliant le système quasi-linéaire (1.20) par la matrice M (1.23) et en utilisant la limite incompressible des matrices jacobiennes introduite auparavant, nous obtenons que le système quasi-linéaire est équivalent aux équations de Navier-Stokes incompressible formulées de façon standard (1.26) (1.27) et (1.28). Ces équations réécrites de façon matricielle sont la limite incompressible du système (1.24). Nous retrouvons par ailleurs, les propriétés de symétrie déjà observées sur le système quasi-linéaire symétrique compressible.

Remarques :
Pour les inconnues entropiques, il est également possible d'écrire de façon unifiée les équations quasi-linéaires compressible et incompressible. Pour cela on construit la limite incompressible des matrices jacobiennes intervennant dans (1.18) en supposant (1.37). Ces calculs sont détaillés dans [HH94, HH98, Pol05].

3 Conclusion

Nous avons rappelé dans cette partie différentes formulations des équations de Navier-Stokes compressible et incompressible. Notamment nous avons souligné l'existence de formes *unifiées* quasi-linéaires (1.36) pour différents types d'inconnues $\mathbf{Y}$ (primitives ou entropiques). Cela signifie qu'un écoulement compressible ou bien incompressible peut être décrit par cette forme générique des équations de Navier-Stokes en utilisant des matrices adéquates.

Ces modèles unifiés sont paramétrés par la densité et deux coefficients thermodynamiques : de dilation thermique (1.31) et de compressibilité isotherme (1.32), qui sont fortement corrélés à la nature du fluide considéré. Pour un fluide incompressible la densité est supposée constante et α_p et β_T sont nuls. Par contre pour un fluide compressible ces quantités sont fortement liées à la loi d'état utilisée. Pour un gaz parfait nous retrouvons les relations (1.35) et (1.8).

Chapitre 2

Méthode des éléments finis stabilisés

La résolution des équations de Navier-Stokes compressible et incompressible nécessite la mise en oeuvre d'une méthode numérique spécifique. Pour cela, nous avons choisi dans le cadre de cette thèse une méthode d'éléments finis stabilisés. Comme cela a été déjà expliqué en introduction, ce choix possède les trois avantages suivants : utilisation d'un même schéma pour résoudre les équations de Navier-Stokes compressible et incompressible, flexibilité géométrique et montée en ordre aisée. Après avoir rappelé quelques généralités sur la méthode des éléments finis stabilisés sa mise en oeuvre pour la résolution des équations de Navier-Stokes compressible et incompressible est détaillée dans ce chapitre.

1 Généralités sur la méthode des éléments finis stabilisés

Initialement conçus pour traiter des problèmes symétriques et coercifs comme cela est le cas en mécanique des milieux déformables, les éléments finis ont été rapidement employés en dehors de ce contexte pour résoudre des problèmes de la mécanique des fluides notamment. Cette méthode n'étant pas adaptée à ce type de problème (nous verrons pourquoi par la suite), il est nécessaire d'ajouter dans la formulation variationnelle discrète un terme supplémentaire qui permet d'assurer la stabilité du schéma numérique obtenu en conservant la consistance et l'ordre de la méthode. C'est ainsi qu'on voit apparaître dans les années 70-80 les premières méthodes dites d' *éléments finis stabilisés* (EFS).
Dans un premier temps ces méthodes ont été développées pour des équations d'advection-diffusion [Hug78, HB79, BH82], ainsi que pour le problème de Stokes [HFB86, HFB87]. Par la suite elles ont été généralisées aux équations de Navier-Stokes incompressible [FF92] et compressible [Hug87, HTB, SH91].
Les éléments finis stabilisés ont été et sont encore l'objet de nombreuses recherches. Ainsi, nous pouvons distinguer deux grandes familles de méthodes EFS : celles de type *Petrov-Galerkin*, et celles dites *multi-échelles*. La première catégorie regroupe les méthodes : Streamline-Upwind / Petrov-Galerkin (SUPG) [BH82], Pressure-Stabilization / Petrov-Galerkin (PSPG) [HFB86, FF92], Galerkin Least Square (GLS) [HFH89], Gradient Galerkin Least Square (GGLS) [FFH92], alors que la seconde regroupe les éléments finis de type bulles [BBF$^+$91], Variational Multi-Scale (VMS) [HTB, Hug95], Sub-Grid Scale (SGS) [MK04, MK06], Orthogonal Sub-Grid Scale (OSGS) [Cod02] , méthodes de pénalisation intérieure [BFH06, BF07, BE07] par exemple.

Après avoir mis en évidence les limites de la méthode de Galerkin standard pour deux problèmes types (advection-diffusion et problème de Stokes), nous présenterons quelques méthodes d'éléments finis stabilisés : SUPG, PSPG et enfin GLS.

1.1 Problèmes modèles

Pour pouvoir présenter de façon simple le concept des EFS, nous allons introduire dans ce paragraphe deux problèmes modèles très différents : équation d'advection diffusion et problème de Stokes, pour lesquels il est nécessaire d'utiliser cette méthode.

Problème I *Advection-diffusion instationnaire :*

Soit Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^d$. Considérons l'équation d'*advection-diffusion* :

$$\mathcal{L}u = \partial_t u + a \cdot \nabla u - \nabla \cdot (\kappa \nabla u) = f \text{ dans } \Omega, \forall t > 0. \tag{2.1}$$

Dans l'équation aux dérivées partielles ci-dessus interviennent diverses grandeurs :
- le coefficient de diffusion $\kappa(\mathbf{x})$ de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour simplifier le problème les phénomènes de diffusion sont supposés isotropes, par conséquent κ est constant et on impose $\kappa > 0$;
- le champ d'advection $a(\mathbf{x})$ de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$;
- un terme source $f(\mathbf{x}, t)$ de $\Omega \times \mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose que sur la frontière $\partial\Omega$ du domaine la solution vérifie la condition de Dirichlet :

$$u = g \text{ sur } \partial\Omega, \tag{2.2}$$

où $g : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction donnée. Pour que problème soit complet il est également nécessaire de se donner la condition initiale :

$$u(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \Omega. \tag{2.3}$$

Nous multiplions l'EDP (2.1) par une fonction test v supposée suffisament régulière et nous intégrons sur Ω. En utilisant la formule de Green il vient :

$$-\int_\Omega v \nabla \cdot (\kappa \nabla u) = \int_\Omega \nabla v \cdot \kappa \nabla u - \int_\Gamma v \left(n \cdot \kappa \nabla u\right). \tag{2.4}$$

En posant :

$$a(v, u) = \int_\Omega \left(v a \cdot \nabla u + \nabla v \cdot \kappa \nabla u\right), \tag{2.5}$$

et

$$l(v) = \int_\Omega v f, \tag{2.6}$$

nous obtenons la formulation faible du problème aux limites (2.1)-(2.2)-(2.3) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u \in \mathcal{C}^1(]0,T[, L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^0(]0,T[, H^1(\Omega)) \text{ telle que} & \\ \dfrac{d}{dt}(v, u) + a(v, u) = l(v), & \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}), & \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ u = g, & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{2.7}$$

où $(\cdot, \cdot)$ représente le produit scalaire L^2, f une fonction de $L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$, u^0 une fonction de $L^2(\Omega)$ et g une fonction de $H^{1/2}(\partial\Omega)$. De plus les nous définissons les espaces de Sobolev $H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ par :

$$H^1(\Omega) = \left\{ v; v \in L^2(\Omega), \nabla v \in L^2(\Omega)^d \right\}, \tag{2.8}$$

et

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ v; v \in L^2(\Omega), \nabla v \in L^2(\Omega)^d; v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}. \tag{2.9}$$

Problème II *Stokes stationnaire*

Soit Ω un borné régulier de $\mathbb{R}^d$. Considérons le problème de Stokes :

$$\left\{ \begin{array}{r} -\nu\triangle\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \end{array} \right. \quad \text{dans } \Omega. \tag{2.10}$$

Dans les équations ci-dessus on désigne par $\mathbf{u}$ la vitesse, p la pression. Ce sont des fonctions définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}$ respectivement. Enfin $\mathbf{f}$ est un terme source à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On suppose que sur la frontière $\partial\Omega$ du domaine la vitesse $\mathbf{u}$ vérifie la condition de Dirichlet :

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ sur } \partial\Omega, \tag{2.11}$$

où $\mathbf{g} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^d$ est une donnée.

Nous multiplions la 1ère équation de (2.10) par une fonction test assez régulière $\mathbf{v}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et nulle sur $\partial\Omega$, et nous intégrons sur Ω. En utilisant la formule de Green nous obtenons

$$\int_\Omega \nabla\mathbf{v} : \nabla\mathbf{u} - \int_\Omega (\nabla\cdot\mathbf{v})\, p = \int_\Omega \mathbf{v}\cdot f. \tag{2.12}$$

De même pour tester la seconde équation du système (2.10) on multiplie par une fonction test suffisament régulière à valeurs dans $\mathbb{R}$ et on a :

$$\int_\Omega q\nabla\cdot\mathbf{u} = 0. \tag{2.13}$$

En posant

$$a(\mathbf{v},\mathbf{u}) = \int_\Omega \nabla\mathbf{v} : \nabla\mathbf{u}, \tag{2.14}$$

$$b(\mathbf{u},p) = \int_\Omega (\nabla\cdot\mathbf{u})\, p, \tag{2.15}$$

$$l(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{f}, \tag{2.16}$$

il vient la formulation faible du problème (2.10) :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \multicolumn{3}{l}{\text{Trouver } \mathbf{u} \in \left(H^1(\Omega)\right)^d \text{ et } p \in L^2_0(\Omega) \text{ telle que}} \\ & a(\mathbf{v},\mathbf{u}) + b(\mathbf{v},p) = l(\mathbf{v}), & \forall v \in \left(H^1_0(\Omega)\right)^d \\ & b(\mathbf{u},q) = 0, & \forall q \in L^2_0(\Omega), \\ & \mathbf{u} = \mathbf{g}, & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{2.17}$$

avec $\mathbf{f}$ une fonction de $\left(L^2(\Omega)\right)^d$ et $\mathbf{g}$ une fonction de $\left(H^{1/2}(\partial\Omega)\right)^d$. L'espace $L^2_0(\Omega)$ est l'espace des fonctions test de $L^2(\Omega)$ de moyennes nulles :

$$L^2_0(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega); \int_\Omega q = 0 \right\}. \tag{2.18}$$

1.2 Méthode de Galerkin

Dans ce paragraphe la discrétisation spatiale par une méthode Galerkin des problèmes modèles (2.1) et (2.10) est présentée. La méthode de Galerkin, associée naturellement avec la méthode des éléments finis, peut être décrite comme l'approximation de la formulation variationnelle d'une équations aux dérivées partielles (EDP), ou d'un système d'EDP, sur des espaces fonctionnels approchés engendrés par des fonctions polynômiales par morceaux.

Ainsi, la méthode de Galerkin appliquée au problème (2.1) consiste à chercher les inconnues dans des espaces approchés S_h sous espace de dimension finie de $H^1(\Omega)$ engendré par des fonctions continues polynômiales par morceaux. On définit de même l'espace des fonctions test approchés T_h sous espace de dimension finie de $H^1_0(\Omega)$. En utilisant la méthode des lignes, le problème discrétisé en espace mais continu en temps consiste finalement à :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in L^2(]0,T[,\mathsf{S}_h) \text{ telle que :} \\ \dfrac{d}{dt}(v_h,u_h)+a(v_h,u_h)=0, \quad \forall v_h \in \mathsf{T}_h, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u_h = g, \quad \forall x \in \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{2.19}$$

De même, pour le problème de Stokes, nous définissons d'une part les espaces de dimension finie $\mathsf{S}^{\mathbf{u}}_h, \mathsf{T}^{\mathbf{u}}_h$ de $\left(H^1(\Omega)\right)^d$, $\left(H^1_0(\Omega)\right)^d$ respectivement et $\mathsf{S}^p_h, \mathsf{T}^p_h$ de $L^2_0(\Omega)$, engendrés par des fonctions continues polynômiales par morceaux. En utilisant ces espaces approchés nous obtenons le problème variationnel approché :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \multicolumn{4}{c}{\text{Trouver } \mathbf{u}_h \in \mathsf{S}^{\mathbf{u}}_h \text{ et } p_h \in \mathsf{S}^p_h \text{ telle que :}} \\ a(\mathbf{v}_h,\mathbf{u}_h)+b(\mathbf{v}_h,p_h) & = & l(\mathbf{v}_h), & \forall \mathbf{v}_h \in \mathsf{T}^{\mathbf{u}}_h, \\ b(\mathbf{u}_h,q_h) & = & 0, & \forall q_h \in \mathsf{T}^p_h, \\ u_h & = & g, & \forall x \in \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{2.20}$$

1.3 Nécessité de stabiliser

Dans ce paragraphe, nous allons voir que lorsque des éléments finis de Lagrange de type $\mathbb{P}_k$ sont utilisés pour approcher (2.1) et (2.10), la méthode de Galerkin standard, (2.19) et (2.20), présente des instabilités numériques.

1.3.1 Equation d'advection-diffusion avec convection dominante

Typiquement, la méthode de Galerkin est inadaptée à la résolution des équations d'advection-diffusion. En effet cette méthode est instable quand les termes de convection sont prépondérants par rapport aux termes visqueux. Pour illustrer ce point, il suffit de considérer la restriction de (2.1) au cas stationnaire mono-dimensionnel suivant :

$$\left\{\begin{array}{rl} au'-\kappa u''=0, & \text{dans } \Omega, \\ u=0, & \text{en } x=0 \\ u=1, & \text{en } x=1, \end{array}\right. \tag{2.21}$$

où $u' = du/dx$.

Nous allons approcher la solution du problème (2.21) par des éléments finis $\mathbb{P}_1$ de Lagrange. Nous définissons un maillage du segment $\Omega = [0,1]$ en nous donnant un entier $N > 0$ et en définissant $x_i = ih$ pour $0 \leq i \leq N+1$ où $h = \dfrac{1}{N+1}$. Nous introduisons :

– l'espace approché des solutions :

$$\mathsf{S}_h = \left\{ v_h \in \mathcal{C}^0(\Omega), v_{h,[x_i,x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1([x_i, x_{i+1}]), 0 \leq i \leq N \right\} \subset H^1(\Omega). \tag{2.22}$$

– ainsi que l'espace approché des fonctions tests :

$$\begin{aligned} \mathsf{T}_h &= \mathsf{S}_h \cap H_0^1(]0,1[) \\ &= \left\{ v_h \in \mathcal{C}^0(\Omega), v_{h,[x_i,x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1([x_i, x_{i+1}]), 0 \leq i \leq N; v_h = 0 \text{ en } x = 0 \text{ et } x = 1 \right\} \subset H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{2.23}$$

L'espace vectoriel S_h de dimension $N+2$ a pour base $(\phi_i)_{0 \leq i \leq N+1}$ dont chaque fonction satisfait $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ et est donnée par :

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.24}$$

L'espace approché des fonctions test, quant à lui, est de dimension N et est engendré par la famille de fonctions $(\phi_i)_{1 \leq i \leq N}$.

Pour le problème aux limites (2.21) la formulation Galerkin standard est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in \mathsf{S}_h \text{ telle que} \\ a(v_h, u_h) = 0, \forall v_h \in \mathsf{T}_h \\ u_h(0) = 0 \text{ et } u_h(1) = 1, \end{cases} \tag{2.25}$$

où $a(v_h, u_h) = (v_h, a u_h') + (v_h', \kappa u_h')$. On parle ici de formulation de Galerkin si l'espace approché des fonctions test est le même que celui des solutions, aux conditions de Dirichlet près.

Le système approché (2.25) conduit à la résolution d'un système linéaire. Notons la matrice de rigidité $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}^{(N+2)\times(N+2)}$ définie par :

$$\mathcal{A}_{ij} = a(\phi_i, \phi_j), 0 \leq i, j \leq N+1, \tag{2.26}$$

avec

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} & \ddots & & & \\ \cdots & -1 & 0 & 1 & \cdots \\ & & & \ddots & \end{pmatrix} + \frac{\kappa}{h} \begin{pmatrix} & \ddots & & & \\ \cdots & 1 & -2 & 1 & \cdots \\ & & & \ddots & \end{pmatrix}. \tag{2.27}$$

Introduisons également la décomposition de u_h dans la base de S_h :

$$u_h = \sum_{j=0}^{N+1} \phi_j u_j. \tag{2.28}$$

Par un calcul direct on montre que chercher u_h solution de (2.25) est équivalent à résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{N+1} \mathcal{A}_{ij} u_j = 0, \qquad 1 \leq i \leq N \\ u_0 = 0 \text{ et } u_{N+1} = 1. \end{cases} \tag{2.29}$$

On retrouve ici un schéma différences finies centrées à un coefficient h près de la forme :

$$\frac{1}{2}\left(u_{i+1} - u_{i-1}\right) + \frac{\kappa}{h}\left(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}\right) = 0, \text{ pour } 1 \leq i \leq N. \tag{2.30}$$

La figure Fig. 2.1 présente diverses solutions numériques de l'équation d'advection-diffusion (2.21). Le domaine Ω est le segment unitaire $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$. Nous imposons en $u(0) = 0$ et en $u(L) = 1$. Le coefficient de diffusion vaut $\kappa = 0.01$, le champ d'advection est constant dans Ω et vaut $a = 1$, le terme source f est nul enfin $L = 1$. On vérifie aisément que la solution analytique de l'équation est :

$$u(x) = \frac{1 - e^{\alpha x/L}}{1 - e^{\alpha/L}}, \tag{2.31}$$

avec $\alpha = \dfrac{aL}{\kappa}$ le nombre de Péclet global.

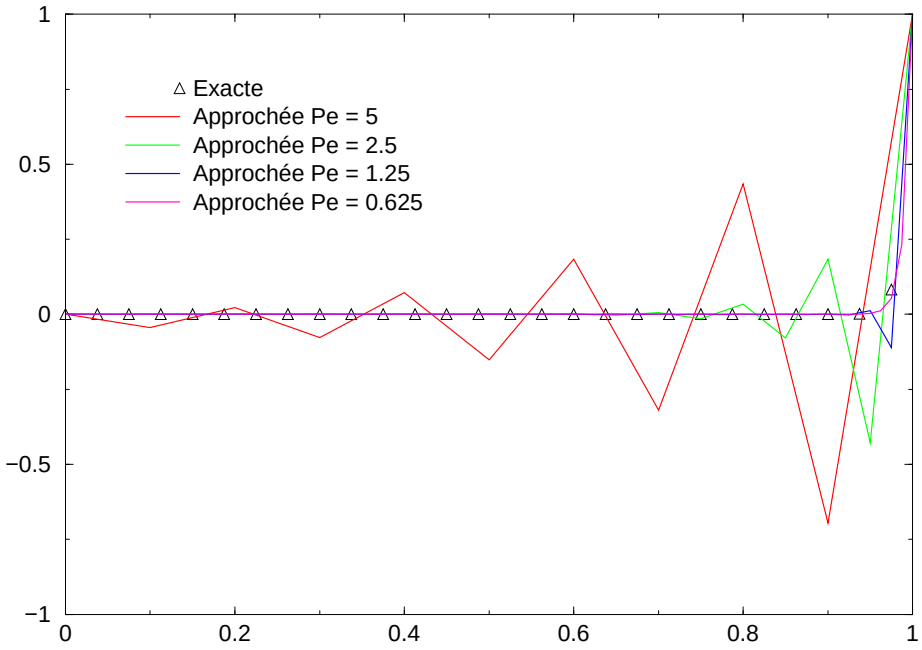


Fig. 2.1 – Solutions exactes et approchées de l'équation d'advection diffusion 1D pour différents nombres de Péclet de grille et $\alpha = 100, \kappa = 0.01, a = 1$.

Du fait de la faible valeur du coefficient de viscosité κ, la solution analytique u est pratiquement nulle dans Ω à l'exception d'une couche limite localisée près de l'abcisse $x = 1$, d'épaisseur κ où la solution passe brutalement de 0 à 1. Nous considérons plusieurs maillages associés aux pas d'espace $h = \dfrac{1}{10}$, $h = \dfrac{1}{20}$, $h = \dfrac{1}{40}$ et $h = \dfrac{1}{80}$.
Sur la figure 2.1 on constate la présence d'oscillations numériques pour les trois premiers cas qui sont d'autant plus importantes que le maillage est grossier. Cela peut être réinterprété en terme de nombre de Péclet de grille Pe défini par $Pe = \dfrac{ah}{2\kappa}$. Ainsi, pour $Pe > 1$ la solution présente des oscillations numériques d'autant plus importantes que le Péclet est élévé.

Cet exemple met en évidence les limites de la méthode de Galerkin pour la résolution des équations d'advection-diffusion avec advection dominante. En effet, cette méthode donne lieu à un schéma de type différences finies centrées surtout approprié pour les problèmes elliptiques. Pour un écoulement où la convection est dominante ($Pe > 1$) on a observé que la solution

approchée de l'équation d'advection diffusion oscillait violemment.

Une première façon d'éliminer ces oscillations est de raffiner le maillage pour que le Péclet de grille soit inférieur à 1. Cette possibilité n'est pas pratiquement réalisable lorsque la viscosité est très faible. Une seconde possibilité est d'utiliser des éléments finis adéquats de type $\mathbb{P}_1$-bulle par exemple. Enfin, une dernière alternative dans ce dernier cas est de stabiliser la formulation de Galerkin en introduisant des termes diffusifs à un ordre suffisament petit pour garantir la consistance de la formulation. Cette stabilisation revient aussi à différencier l'espace d'interpolation de l'espace des fonctions test (formulation Petrov-Galerkin). C'est cette dernière approche que nous explorons dans une prochaine section.

1.3.2 Problème de Stokes stationnaire

A présent, nous allons illustrer l'instabilité de la méthode de Galerkin lorsque des éléments finis $\mathbb{P}_1$ de Lagrange sont employés pour approcher la vitesse et la pression, solutions du problème de Stokes stationnaire (2.10).

Considérons une boîte carrée $\Omega =]0,1[^2$ discrétisée par une triangulation notée $\mathcal{T}_h$. Dans ce cas, les espaces d'approximation sont les suivants :

$$\mathsf{S}_h^{\mathbf{u}} = \left\{ \mathbf{u}_h \in C^0(\Omega)^2; \forall E \in \mathcal{T}_h, \mathbf{u}_{h|E} \in (\mathbb{P}_1(e))^2 \right\}, \tag{2.32}$$

$$\mathsf{S}_h^{p} = \left\{ p_h \in L_0^2(\Omega) \cap C^0(\Omega); \forall E \in \mathcal{T}_h, p_{h|E} \in \mathbb{P}_1(E) \right\}, \tag{2.33}$$

$$\mathsf{T}_h^{\mathbf{u}} = \left\{ \mathbf{v}_h \in C^0(\Omega)^2; \forall E \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_{h|E} \in (\mathbb{P}_1(e))^2 ; v_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}, \tag{2.34}$$

$$\mathsf{T}_h^{p} = \left\{ p_h \in L_0^2(\Omega) \cap C^0(\Omega); \forall E \subset \mathcal{T}_h, p_{h|E} \in \mathbb{P}_1(E) \right\}. \tag{2.35}$$

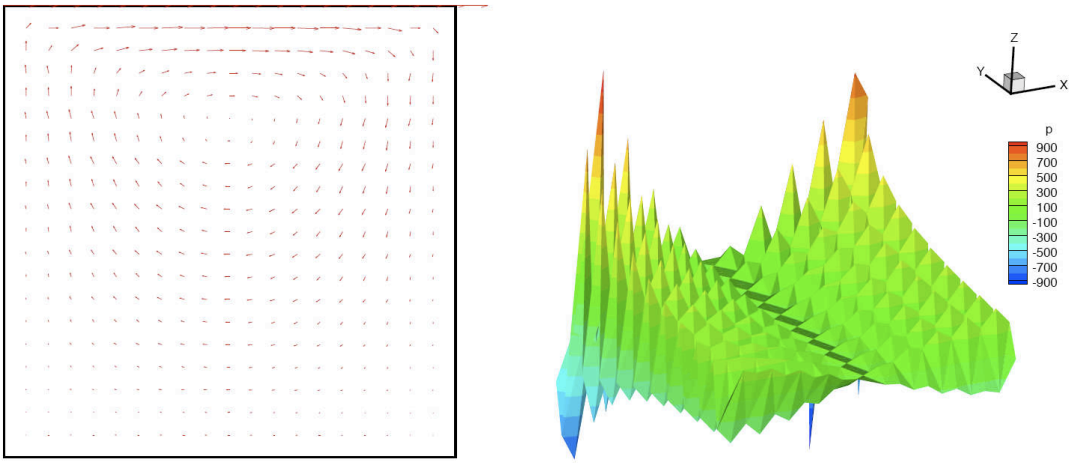
Pour ce choix d'interpolation de la vitesse et de la pression, le système approché (2.20) donne lieu au système algébrique suivant :

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nu\mathcal{D} & \mathcal{G}rad \\ \mathcal{D}iv & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{2.36}$$

où $\mathbf{U}$ et $\mathbf{P}$ sont les vecteurs des valeurs nodales de la vitesse et de la pression, $\mathcal{D}$ l'opérateur de diffusion discret, $\mathcal{G}rad$ et $\mathcal{D}iv$ sont les opérateurs de gradient discret et de divergence discrète respectivement. Enfin $\mathbf{F}$ est la contribution du terme source.
La matrice $\mathcal{A}$ ci-dessus peut être obtenue de différentes façons, notamment en ce qui concerne les conditions aux limites de Dirichlet sur la vitesse. Par exemple, on peut utiliser des techniques de relèvement ou de pénalisation. La procédure utilisée ici, consiste à imposer fortement les conditions aux limites lors de l'assemblage de la matrice $\mathcal{A}$. Cette méthode est détaillée au paragraphe 6.5.2 du 6ème chapitre.

Par hypothèse, le fluide est entrainé par frottement sur le bord supérieur horizontal à une vitesse $\mathbf{u} = (1,0)$. Le coefficient de diffusion $\nu = 10$ et le terme source f est nul. Nous avons représenté sur les figures Fig. 2.2 les profils de vitesse et de pression. Alors que le champ de vitesse semble raisonnable Fig. 2.2 (a), le profil pression présente de violentes oscillations numériques voir Fig. 2.2 (b).

Ces résultats numériques montrent que la mise en oeuvre l'élément fini $\mathbb{P}_1$ n'est pas adaptée pour approximer la solution du problème de Stokes. En effet les espaces d'approximation que



(a) Profil de vitesse (b) Profil de pression

FIG. 2.2 – Solution du problème (2.10)

nous avons choisi ne vérifient par la condition de compatibilité *inf-sup ou condition Basbuska-Brezzi* [Bab73, Bre74].

Une première solution pour construire un schéma numérique stable est de choisir une paire d'éléments finis qui satisfait la condition inf-sup ($\mathbb{P}_{k+1}/\mathbb{P}_k, k > 1$ ou bien des éléments finis de type bulle). Une autre alternative, consiste à introduire un terme de stabilisation dans la formulation de Galerkin, qui permette de garder la même approximation pour la pression et la vitesse. Dans la suite, nous traiterons ce problème de compatibilité en adoptant une approche de type Petrov-Galerkin.

1.4 Méthodes d'éléments finis stabilisés

Dans cette partie, les plus importantes méthodes de stabilisation sont décrites brièvement pour la résolution des deux problèmes d'advection-diffusion (2.7) et de Stokes (2.17) présentés précédemment.

La majorité des méthodes (SUPG, PSPG ou GLS) présentées par la suite sont de type *Petrov-Galerkin*. En effet ces méthodes reposent sur l'ajout dans la formulation de Galerkin d'un *terme de stabilisation*. Ce terme supplémentaire peut être vu comme une perturbation des fonctions tests intervenant dans la formulation de Galerkin classique. Cette perturbation étant multipliée par le résidu de l'équation résolue assurant de surcroît la consistance du schéma numérique. Enfin, ce terme de stabilisation dépend également d'un *coefficient de stabilisation* permettant de pondérer son influence.

1.4.1 Méthode SUPG

L'apparition de la méthode SUPG n'a pas été immédiate, avant cela quelques méthodes ont été développées parmi lesquelles on retrouve les méthodes *upwind* et *streamline upwind*.

Méthode upwind ou de diffusion artificielle

Les premières méthodes dites de "stabilisation" sont initialement apparues pour l'étude des équations d'advection-diffusion 1D stationnaire dont la formulation de Galerkin est la suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in \mathsf{S}_h \text{ telle que} \\ (v_h, au'_h) + (v'_h, \kappa u'_h) = 0, \forall v_h \in \mathsf{T}_h. \end{cases} \tag{2.37}$$

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que cette formulation donne lieu à un schéma centré de type différences finies et que pour un nombre de Péclet grand ($Pe > 1$) la solution approchée présente de fortes oscillations. Une façon de contourner cette difficulté est d'introduire un terme de *diffusion artificielle* [Hug78] dans la formulation de Galerkin (2.37) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in \mathsf{S}_h \text{ telle que} \\ (v_h, au'_h) + (v'_h, (\kappa + \tilde{\kappa})u'_h) = 0, \forall v_h \in \mathsf{T}_h. \end{cases} \tag{2.38}$$

où $\tilde{\kappa}$ qui représente le *coefficient de diffusion artificielle* donné par la formule :

$$\tilde{\kappa} = \frac{h}{2a}(coth(Pe) - \frac{1}{Pe}), \tag{2.39}$$

h est la taille d'une maille et $Pe = \dfrac{ah}{2\kappa}$ le nombre de Péclet de grille. Le coefficient de diffusion artificielle a été choisi de telle sorte que que la solution approchée coïncide avec la solution exacte du problème en tout point x_i du maillage. En faisant l'analogie avec un schéma différence finies on s'aperçoit qu'un schéma upwind donne lieu à un schéma différences finies décentré (voir [Hug78]).

Méthode Streamline-Upwind

La méthode upwind est parfaitement adaptée à la résolution des problèmes d'advection-diffusion 1D. Elle permet notamment de retrouver exactement noeud à noeud la solution exacte lorsque le coefficient de diffusion artificiel est choisi correctement. Toutefois son extension au problèmes d'advection-diffusion multi-dimensionnels est assez déconcertante. En effet cette méthode est sans succès à cause des effets de diffusion transverses au champ advectif (*Crosswind diffusion*).
Dans [HB79] les auteurs proposent une nouvelle méthode de stabilisation *Streamline Upwind* . Cette approche, adaptée aux problèmes multi-dimensionnels, repose sur la construction d'un opérateur de diffusion artificielle agissant uniquement dans la direction de l'écoulement. Ainsi la formulation de Galerkin en plusieurs dimension de l'espace est modifiée de la façon suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in \mathsf{S}_h \text{ telle que} \\ (v_h, a \cdot \nabla u_h) + (\nabla v_h, \kappa \nabla u_h) + \left(\nabla v_h, \tilde{K} \nabla u_h\right) =, \forall v_h \in \mathsf{T}_h. \end{cases} \tag{2.40}$$

avec $\tilde{K} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ le *tenseur de diffusion* défini par :

$$\tilde{K} = \tilde{\kappa} \frac{a \otimes a}{||a||^2}, \tag{2.41}$$

où $||a||^2 = \sum_i a_i^2$, avec $\tilde{\kappa}$ un terme de diffusion articielle. Par exemple en 2D si $a = (1, 0)$ la matrice de diffusion artificielle est donnée par :

$$\tilde{K} = \tilde{\kappa} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cet exemple indique clairement l'absence de diffusion dans les directions autres que les lignes de courant.

Méthode SUPG

La méthode Streamline Upwind a permis de résoudre le problème de diffusion dans les directions transverses aux lignes de courants. Néanmoins cette méthode présente encore quelques inconvénients. Notamment la méthode proposée n'est pas consistante. Une façon de résoudre cette difficulté [BH82] consiste en l'application du terme complet de stabilisation à l'ensemble des équations. Cette méthode est appelée *Streamline Upwind Petrov-Galerkin.* L'idée de base de la méthode SUPG est de rajouter un terme de diffusion qui non seulement agit uniquement dans la direction de l'écoulement mais aussi qui permet de conserver la consistence du schéma numérique considéré. Cette méthode est appelée méthode de Petrov-Galerkin car elle suggère la modification des fonctions test v_h en ajoutant une perturbation de type Streamline Upwind qui agit uniquement dans la direction de l'écoulement :

$$\tilde{v}_h = v_h + \tau a \cdot \nabla v_h. \tag{2.42}$$

Pour le problème (2.1), la méthode SUPG se formule de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Trouver } u_h \in \mathsf{S}_h \text{ telle que} \\ (v_h, \mathcal{L}u_h - f) + S_{SUPG}(v_h, u_h) = 0, \forall v_h \in \mathsf{T}_h, \end{array} \right. \tag{2.43}$$

où le terme de stabilisation est donné par :

$$\begin{aligned} S_{SUPG}(v_h, u_h) &= \sum_e (\tau_e a \cdot \nabla v_h, \mathcal{L}u_h - f)_e \\ &= \sum_e \left(\tau_e a \cdot \nabla v_h, \underbrace{\partial_t u_h + a \cdot \nabla u_h - \nabla \cdot (\kappa \nabla u_h) - f}_{\text{résidu de l'équation d'advection-diffusion}} \right)_e . \end{aligned}$$

où τ_e est un coefficient de stabilisation défini sur chaque élément e du maillage $\mathcal{T}_h$ de Ω.

1.4.2 Méthode PSPG

Comme nous l'avons vu précédement, le bon fonctionnement d'une méthode de Galerkin classique pour le problème de Stokes, réside dans le choix de l'interpolation de la vitesse et de la pression. En particulier la condition de stabilité de Babuska-Brezzi nous interdit d'utiliser des approximations de même ordre.

Pour contourner cette difficulté, il est crucial est de stabiliser la matrice $\mathcal{A}$ du système algébrique (2.36) avec une matrice $\mathcal{S}$. L'idée de base est de renforcer la positivité de $\mathcal{A}$. Cela peut être accompli en modifiant la contrainte d'incompressibilité $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Pour construire $\mathcal{C}$, il est possible de perturber de différentes manières l'équation de la continuité :

$$\begin{array}{rcll} \nabla \cdot \mathbf{u} &=& \tau \nabla^2 p, & \text{méthode } \textit{pressure stabilization}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &=& -\tau p, & \text{méthode } \textit{de pénalisation.} \end{array}$$

Dans le cas d'un problème de Stokes, instationnaire on peut également distinguer une approche dite de *compressibilité artificielle* qui se traduit par l'ajout dans l'équation de continuité d'une dérivée temporelle en pression :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\tau \partial_t p, \quad \text{méthode } \textit{de compressibilité artificielle.} \tag{2.44}$$

Ici, τ est un coefficient de stabilisation qui doit être choisi judicieusement pour assurer la convergence et la précision de la méthode. Dans le cas de la méthode pressure stabilization,

τ a la dimension d'un temps. Pour la méthode de pénalisation, τ est l'inverse d'une viscosité enfin dans le cas de la diffusion artificielle τ est le carré d'une vitesse.
Ces différentes approches, font partie la classe des *méthodes de régularisation* et non de stabilisation. Toutes ont l'inconvénient d'être inconsistantes.

Dans le même esprit mais en conservant une formulation de type Petrov-Galerkin pour le problème approché, Hughes et ses collaborateurs [HFB86, HFB87] ont développée la méthode de stabilisation dite *Pressure Stabilization Petrov-Galerkin*. L'idée de base est de rajouter un terme de perturbation à la formulation Galerkin standard qui permet d'assurer la stabilité du schéma numérique tout en restant consistant. Comme toute méthode de type Petrov-Galerkin, elle consiste à modifier la fonction test $\mathbf{v}_h$ en ajoutant une perturbation $\tau\nabla q$:

$$\tilde{\mathbf{v}_h} = \mathbf{v}_h + \tau\nabla q_h. \tag{2.45}$$

La méthode PSPG pour le problème de Stokes stationnaire se formule ainsi :

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Trouver } \mathbf{u}_h \in \mathsf{S}_h^{\mathbf{u}} \text{ et } p_h \in \mathsf{S}_h^p \text{ telle que} \\ a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p) = l(\mathbf{v}_h), \forall \mathbf{v}_h \in \mathsf{T}_h^{\mathbf{u}}, \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) + s(p_h, q_h) = 0, \forall q_h \in \mathsf{T}_h^p. \end{array}\right. \tag{2.46}$$

où le terme de stabilisation est donné par :

$$s(p_h, q_h) = \sum_e \left(\tau_e \nabla q_h, \underbrace{\nabla p_h - \nu\triangle \mathbf{u}_h - f}_{\text{résidu}} \right). \tag{2.47}$$

avec τ_e coefficient de stabilisation défini sur chaque élément e de la triangulation $\mathcal{T}_h$ de Ω.
Dans le cas où le problème dépend du temps (Stokes instationnaire) où lorsqu'un terme d'advection est présent dans les équations (Navier-Stokes) la structure de la stabilisation PSPG n'est pas modifiée. Ainsi pour des problèmes mixtes, instationnaires avec convection dominantes, comme les équations de Navier-Stokes incompressible, les stabilisations SUPG et PSPG sont requises pour obtenir des résultats satisfaisants. A priori les coefficients de stabilisation pour PSPG ou SUPG ne sont pas nécessairement les mêmes, mais cela est souvent le cas en pratique afin de mener une analyse plus théorique de la méthode (voir [BBJL07]) .

1.4.3 Méthode GLS

La méthode de stabilisation *Galerkin Least Square* a été introduite pour la première fois par Hughes et Franca pour une équation d'advection-diffusion [HFH89]. Elle peut être interprétée comme la généralisation de la méthode SUPG motivée par une analyse mathématique de la méthode. L'idée de cette stabilisation est de rajouter à la formulation de Galerkin un opérateur de stabilisation qui est le même que celui de l'équation initiale. Cette méthode de type Petrov-Galerkin s'appuie sur l'ajout à la fonction test v_h une perturbation $\tau\mathcal{L}v_h$ au lieu de $\tau a \cdot \nabla v_h$ pour SUPG :

$$\tilde{v}_h = v_h + \tau\mathcal{L}v_h. \tag{2.48}$$

Par conséquent la méthode GLS pour l'équation d'advection diffusion se résume à

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Trouver } u_h \in \mathsf{S}_h^{\mathbf{u}} \text{ telle que} \\ (v_h, \mathcal{L}u_h - f) + S_{GLS}(v_h, u_h) = 0, \forall v_h \in \mathsf{T}_h^{\mathbf{u}}, \end{array}\right. \tag{2.49}$$

où le terme de stabilisation est donné par

$$\begin{aligned} S_{GLS}(v_h, u_h) &= \sum_e (\tau \mathcal{L} v_h, \mathcal{L} u_h - f)_e \\ &= \sum_e \left(\tau \mathcal{L} v_h, \underbrace{\partial_t u_h + a \cdot \nabla u_h - \nabla \cdot (\kappa \nabla u_h) - f}_{\text{résidu de l'équation}} \right)_e . \end{aligned}$$

Pour une équation strictement hyperbolique et/ou une approximation $\mathbb{P}_1$ on retrouve la méthode SUPG.

Cette méthode a l'avantage d'être plus générale que la méthode SUPG. En effet elle peut être tout aussi bien appliquée aux équations d'advection-diffusion, qu'au problème de Stokes qu'aux équations de Navier-Stokes compressible ou incompressible. Ce dernier aspect constituera le point de départ à l'écriture d'un schéma éléments finis unifié.

1.4.4 Identification du paramètre de stabilisation τ

Chacune des méthodes de stabilisation décrites précédemment s'appuie sur deux composants essentiels : la structure de la perturbation et le coefficient (ou matrice des coefficients) de stabilisation τ. Ce paramètre doit être défini correctement afin d'assurer la stabilité et la précision de la méthode d'éléments finis stabilisés.

Il existe dans la littérature, plusieurs stratégies pour déterminer le coefficient de stabilisation τ qui intervient dans (2.43) ou bien (2.49) . On peut citer par exemple la construction des coefficients de stabilisation à partir de normes de matrices ou de vecteurs élémentaires [TO00], de l'utilisation d'éléments finis de type bulle [Bre74], de fonctions de Green élémentaires [Hug95] ou encore d'une estimation d'erreur [HFH89, FFH92, FF92]. D'un point de vue analytique, on peut facilement montrer que le coefficient de stabilisation τ vérifie les critères suivants :

- $\tau > 0$;
- $\tau = O(h^2/\kappa)$ pour des nombres de Péclet faibles ;
- $\tau = O(h/|a|)$ pour des nombres de Péclet élevés.

Pour le cas particulier de l'équation d'advection-diffusion linéaire homogène en une dimension, nous avons vu qu'il est possible de construire de façon optimale ce coefficient de stabilisation de telle sorte que la solution coïncide nodalement avec la solution exacte du problème. Ainsi, on retrouve la formule de la cotangente donnée par :

$$\tau = \frac{h}{2a} \left(coth(Pe) - \frac{1}{Pe} \right), \text{ avec } Pe = \frac{|a|h}{2\kappa}. \tag{2.50}$$

La généralisation de ce coefficient de stabilisation pour des systèmes d'advection-diffusion multi-dimensionnels n'a pas été immédiate (voir [MH86]). Une première idée est d'utiliser naïvement le coefficient de stabilisation ci-dessus pour toutes les composantes du système. Cette approche s'avère inadéquate. En effet, il est impossible dans ce cas d'obtenir une stabilisation optimale dans chaque composante du système ce qui se traduit par des solutions soit trop diffuses, si τ est trop grand, soit présentant des oscillations numériques, si τ est trop petit. Pour stabiliser correctement un système multi-dimensionnel, il donc est primordial de construire un coefficient de stabilisation propre à chaque composante. Ainsi, comme l'ont proposé Hughes et Mallet [MH86], le coefficient de stabilisation, qui est en réalité une matrice, doit vérifier les critères suivants :

- sa restriction au cas 1D redonne la définition (2.50) ;

– on retrouve une méthode SUPG/GLS sur chaque composante découplée lorsque le système est diagonalisable.

Cette approche, limitée pour la résolution de système d'advection-diffusion stationnaire a été par la suite étendue à des systèmes instationnaires (comme le système des équations de Navier-Stokes compressible) dans les travaux de Shakib [SH91] notamment.

2 Eléments finis stabilisés pour les équations de Navier Stokes

Comme cela a été évoqué dans le début de cette thèse, une méthode numérique unifiée est envisagée pour résoudre aussi bien les équations de Navier-Stokes compressible et incompressible. Dans ce but, il est nécessaire de considérer la forme unifiée des équations de Navier-Stokes (voir Chapitre 1) résolues par un schéma numérique permettant de traiter correctement le changement de nature du système d'équations (compressible vs. incompressible) tout en utilisant les mêmes fonctions d'interpolation. C'est dans ce cadre que s'inscrit la méthode des éléments finis stabilisés GLS. En effet, celle-ci peut être appliquée aussi bien pour la résolution des équations de Navier-Stokes incompressible que des équations de Navier-Stokes compressible [HH94, HH98, Pol05]. En particulier cette méthode permet de stabiliser les instabilités inhérantes à chaque type d'écoulement dont : le problème d'incompatibilité entre l'espace approché des vitesses et de la pression pour les équations de Navier-Stokes incompressible et la prépondérance des termes de convection pour un écoulement compressible ou incompressible. En nous appuyant sur les travaux de Hauke et Hughes [HH94, HH98], nous proposons ici une formulation éléments finis stabilisée unifiée pour la résolution des équations de Navier-Stokes compressible et incompressible.

2.1 Formulation GLS pour les équations de Navier-Stokes unifiées

Nous rappelons que les équations de Navier-Stokes compressible et Incompressible peuvent s'écrire sous une forme conservative :

$$\partial_t \mathbf{U}(\mathbf{Y}) + \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i} \mathbf{F}_i^a(\mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i} \mathbf{F}_i^d(\mathbf{Y}) + \mathbf{F}, \tag{2.51}$$

où $\mathbf{U}$ est le vecteur des variables conservatives, $\mathbf{F}_i^a, \mathbf{F}_i^d$ les flux advectif et diffusifs respectivement dans la $i^{\text{ème}}$ direction, et $\mathbf{F}$ le vecteur source. Pour le cas particulier des inconnues primitives $\mathbf{Y} = (p, \mathbf{u}, T)^t$ ce système est équivalent au système quasi-linéaire :

$$A_0(\mathbf{Y})\partial_t \mathbf{Y} + \sum_{i=1}^{3} A_i(\mathbf{Y})\partial_{x_i} Y = \sum_{i,j=1}^{3} \partial_{x_i} \left(K_{ij}(\mathbf{Y})\partial_{x_j} \mathbf{Y} \right) + \mathbf{S}, \tag{2.52}$$

où $A_0 = \partial_{\mathbf{Y}} \mathbf{U}$, $A_i = \partial_{\mathbf{Y}} F_i$ sont les matrices jacobiennes, et K est la matrice de diffusion où $K_{ij}\partial_{x_j}\mathbf{Y} = F_i^d$. Nous proposons par la suite de mettre en oeuvre la méthode GLS pour discrétiser spatialement les équations de Navier Stokes (2.51).

Avant de présenter la formulation GLS, nous avons besoin d'introduire quelques notations. Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation de Ω en N_e éléments notés e, où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un domaine borné de frontière $\partial\Omega$. Soit S_h l'espace des solutions approchées et T_h l'espace des fonctions test la

formulation GLS des équations (2.51) est :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{Y}_h \in \mathsf{S}_h \text{ telle que } \forall \mathbf{W}_h \in \mathsf{T}_h \text{on ait} \\ \displaystyle\int_\Omega \left(\mathbf{W}_h \cdot \partial_t \mathbf{U}(\mathbf{Y}_h) - \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} \mathbf{W}_h \cdot \mathbf{F}_i^a(\mathbf{Y}_h) + \sum_{i,j=1}^d \partial_{x_i} \mathbf{W}_h \cdot K_{ij} \partial_{x_i} \mathbf{Y}_h - \mathbf{W}_h \cdot \mathbf{F} \right) d\Omega \\ \displaystyle - \int_{\partial\Omega} \mathbf{W}_h \cdot \left(\sum_{i=1}^d -F_i^a(\mathbf{Y}_h) + F_i^d(\mathbf{Y}_h) \right) n_i d\Gamma + \sum_{e=1}^{N_e} \int_e \mathcal{L}^t \mathbf{W}_h \cdot \tau \left(\mathcal{L}\mathbf{Y}_h - \mathbf{S} \right) = 0. \end{array}\right. \tag{2.53}$$

qui est équivalente à la formulation :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{Y}_h \in \mathsf{S}_h \text{ telle que } \forall \mathbf{W}_h \in \mathsf{T}_h \text{on ait} \\ \displaystyle\int_\Omega \left(\mathbf{W}_h \cdot A_0 \partial_t \mathbf{Y}_h + \sum_{i=1}^d \mathbf{W}_h \cdot A_i \partial_{x_i} \mathbf{Y}_h + \sum_{i,j=1}^d \partial_{x_i} \mathbf{W}_h \cdot K_{ij} \partial_{x_i} \mathbf{Y}_h - \mathbf{W}_h \cdot \mathbf{F} \right) d\Omega \\ \displaystyle - \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^d \mathbf{W}_h \cdot F_i^d(\mathbf{Y}) n_i d\Gamma + \sum_{e=1}^{N_e} \int_e \mathcal{L}^t \mathbf{W}_h \cdot \tau \left(\mathcal{L}\mathbf{Y}_h - \mathbf{F} \right) = 0. \end{array}\right. \tag{2.54}$$

Dans les deux formulations précédentes, la première et la seconde intégrales sont les contributions de Galerkin après intégration par parties. La troisième intégrale est le terme de stabilisation GLS, où $\mathcal{L}$ désigne l'opérateur d'advection diffusion défini par :

$$\mathcal{L} = A_0(\mathbf{Y})\partial_t + \sum_{i=1}^d A_i(\mathbf{Y})\partial_{x_i} - \sum_{i,j=1}^d \partial_{x_i} \left(K_{ij} \partial_{x_j} \right). \tag{2.55}$$

On introduit également l'opérateur transposé $\mathcal{L}^t$:

$$\mathcal{L}^t = A_0^t(\mathbf{Y})\partial_t + \sum_{i=1}^d A_i^t(\mathbf{Y})\partial_{x_i} - \sum_{i,j=1}^d \partial_{x_i} \left(K_{ij}^t \partial_{x_j} \right). \tag{2.56}$$

Remarques :

- La méthode éléments finis (2.53) est globalement conservative et permet de calculer correctement les chocs. Toutefois dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons à la simulation numérique d'écoulements sans chocs. Les solutions recherchées sont supposées régulières. Par conséquent on s'autorise à résoudre les équations de Navier Stokes sous leur forme non conservative (2.54).
- Le travail effectué dans ce paragraphe, peut être également transposé aux équations de Navier-Stokes compressible et incompressible écrites de façon unifiée pour les inconnues entropiques. Pour cela nous renvoyons le lecteur aux travaux de Hauke et Hughes [HH98] ou encore Polner [Pol05].

2.2 Construction de la matrice des coefficients de stabilisation

Dans le deux formulations variationnelles approchées (2.53) et (2.54) intervient la matrice des coefficients de stabilisation τ qui assure la convergence et la précision de la méthode numérique. Nous présentons ici, les matrices adoptées pour les équations de Navier-Stokes incompressible puis compressible.

2.2.1 Pour les équations de l'incompressible

Pour un fluide incompressible la matrice des coefficients de stabilisation [HH98] pour $d = 3$ est choisie diagonale et définie par :

$$\tau_{inc} = diag\{\tau_c, \tau_m, \tau_m, \tau_m, \tau_e\}, \tag{2.57}$$

où

$$\tau_c = \frac{|\mathbf{u}|h_1^e}{2} min\left(1, Re^h\right), \tag{2.58}$$

$$\tau_m = min\left(\frac{\Delta t}{\rho}, \frac{h_2^e}{2\rho|\mathbf{u}|}, \frac{m^e(h_3^e)^2}{4\mu}\right), \tag{2.59}$$

$$\tau_e = min\left(\frac{\Delta t}{\rho c_v}, \frac{h_2^e}{2\rho|\mathbf{u}|c_v}, \frac{m^e(h_3^e)^2}{4\kappa}\right), \tag{2.60}$$

Les expressions ci-dessus sont exprimées en fonction des $h_i^e, i = 1, 2, 3$ qui représentent la taille de l'élément, Δt le pas de temps, μ et κ la viscosité et la conductivité thermique respectivement. Enfin Re^h est le Reynolds de maille (i.e. nombre de Péclet) défini par

$$Re^h = \frac{\rho|\mathbf{u}|h_1^e}{2\mu}. \tag{2.61}$$

Enfin $m^e = min\left(\frac{1}{3}, 2C^e\right)$ où C^e est une constante déduite de l'estimation inverse des dérivées seconde des fonctions de base, pour des éléments linéaires (approximation $\mathbb{P}_1$) $C^e = \infty$ et $m^e = 1/3$. On notera que pour des calculs stationnaires le terme en Δt est omis.

2.2.2 Pour les équations du compressible

Les équations de Navier-Stokes compressible font partie de la classe des équations d'advection-diffusion multi-dimensionnelles pour lesquelles les matrices des coefficients de stabilisation ont été dérivées de façon formelle (voir [SH91] par exemple). Dans ce cas, les formulations obtenues souffrent de deux inconvénients majeurs. D'une part elles sont complexes à mettre en oeuvre et d'autre part coûteuses à calculer.
Pour éviter ces deux difficultés, Hauke [Hau01] propose des matrices de stabilisation plus simples parmi lesquelles la forme diagonale retenue dans le cadre de cette thèse :

$$\tau_{comp} = diag\{\tau_c, \tau_m, \tau_m, \tau_m, \tau_e\}, \tag{2.62}$$

où

$$\tau_c = \frac{(|\mathbf{u}| + c)h_1^e}{2}, \tag{2.63}$$

$$\tau_m = min\left(\frac{\Delta t}{\rho}, \frac{h_2^e}{2\rho(|\mathbf{u}| + c)}, \frac{m^e(h_3^e)^2}{4\mu}\right), \tag{2.64}$$

$$\tau_e = min\left(\frac{\Delta t}{\rho c_v}, \frac{h_2^e}{2\rho(|\mathbf{u}| + c)c_v}, \frac{m^e(h_3^e)^2}{4\kappa}\right). \tag{2.65}$$

Cette formulation, peut être interprétée comme une extension de la matrice diagonale utilisée pour les équations de Navier-Stokes incompressible pour les équations de Navier-Stokes compressible. Par contre, dans ce cas la valeur propre $|u|$ a été remplacée par $|u| + c$, la plus grande des valeurs propres du système compressible, avec c la vitesse du son.

Remarques :

1. Pour des écoulements stationnaires, les termes en Δt sont omis.
2. La limite incompressible($c \to \infty$) des expressions précédentes est mal posée. Pour résoudre ce problème il peut être envisagé de modifier les coefficients de stabilisation de la façon suivante

$$\tau_e = min\left(\frac{\Delta t}{\rho c_v}, \frac{h_2^e}{2\rho(|\mathbf{u}|+c)c_v} + \frac{h_2^e}{2\rho|\mathbf{u}|c_v}, \frac{m^e(h_3^e)^2}{4\kappa}\right),$$

$$\tau_m = min\left(\frac{\Delta t}{\rho}, \frac{h_2^e}{2\rho(|\mathbf{u}|+c)} + \frac{h_2^e}{2\rho|\mathbf{u}|c_v}, \frac{m^e(h_3^e)^2}{4\mu}\right).$$

2.2.3 Unification des matrices de stabilisation

En s'appuyant sur les travaux de Hauke et Hughes [HH94, HH98], nous avons présenté dans cette section une méthode de type GLS dédiée à la résolution des équations de Navier-Stokes compressible ou incompressible formulées en terme d'inconnues primitives (ou entropiques). De façon générale nous pouvons parler de schéma numérique unifié car la formulation éléments finis stabilisée utilisée pour chaque type d'équation est la même (voir (2.53) ou encore (2.54)). Toutefois, cela n'est pas le cas pour la matrice des coefficients de stabilisation choisies ici qui est inhérente à chaque type d'écoulement. En outre, nous avons vu que la limite incompressible de la matrice τ compressible est mal posée.

Toutefois, il serait intéressant d'employer des coefficients de stabilisation unifiés. Dans cette perspective, nous pourrions nous inspirer des travaux récents de Polner[Pol05] qui proposent une stratégie pour unifier les matrices de stabilisation valides pour un large éventail d'écoulements du faiblement compressible à l'incompressible. L'objectif de cette approche a été de dériver des matrices de stabilisation pour les inconnues entropiques dont la limite incompressible est bien définie, puis de proposer une extension à d'autres jeux d'inconnues (inconnues primitives par exemple).

3 Conclusion

La méthode numérique considérée dans la thèse est de type éléments finis. Lorsque des polynômes de Lagrange de même degré sont utilisés pour approcher chaque inconnue (pression, vitesse et température par exemple), la méthode de Galerkin appliquées aux équations de Navier-Stokes compressible et incompressible présente des instabilités numériques qu'il est nécessaire de stabiliser. Pour cela on introduit une perturbation des fonctions tests pondérées par un paramètre de stabilisation afin d'assurer la précision et la consistance du schéma numérique. C'est dans ce contexte qu'on a introduit les méthodes de type Petrov-Galerkin : PSPG, SUPG ou encore GLS. Ici, nous retiendrons la dernière méthode qui permet de dériver un schéma numérique unifié valide pour les équations du compressible et de l'incompressible [HH94, HH98] au coefficient de stabilisation près.

Deuxième partie

Couplage compressible-incompressible pour des écoulements diphasiques

Chapitre 3

Formulation du problème couplé

La seconde partie de cette thèse traite de la simulation numérique d'écoulements diphasiques par un couplage compressible-incompressible. L'objet de ce chapitre est de présenter la formulation globale en espace du modèle utilisé pour effectuer les simulations considérées par la suite.
Pour commencer, il sera nécessaire de détailler le problème étudié. Puis nous justifierons le choix des équations et de la méthode de suivi d'interface retenues. Enfin à partir de ces éléments, le modèle global employé par la suite sera dérivé formellement.

1 Problématique

Nous étudions dans le cadre de cette thèse, des écoulements instationnaires, sans choc, constitués de deux fluides visqueux séparés par une interface mobile, en présence ou non de transferts thermiques et soumis à la gravité. Plus particulièrement nous considérons un écoulement constitué d'une phase gazeuse et d'une phase liquide. Dans un premier temps nous ne tiendrons pas compte de la tension de surface.

Nous notons Ω un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^d, d = 1, 2, 3$ de frontière $\partial\Omega$ (voir Fig. 3.1). Ce domaine se décompose en deux parties $\Omega_1(t)$ et $\Omega_2(t)$ que l'on associe respectivement aux phases liquide et gazeuse, séparées par une interface mobile $\Gamma(t)$. On a $\Omega = \Omega_1(t) \cup \Omega_2(t) \cup \Gamma(t)$. Enfin nous notons $\mathbf{n}$ et $\boldsymbol{t}$ les normale et tangente à l'interface respectivement.

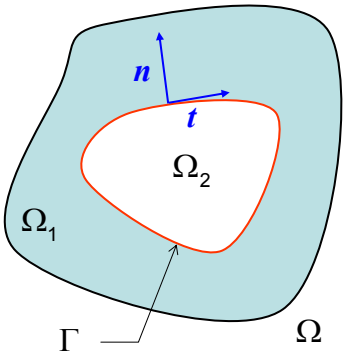


Fig. 3.1 – Représentation d'un écoulement diphasique à interfaces

Pour pouvoir simuler correctement des écoulements diphasiques tels qu'ils ont été décrits précédemment, il est nécessaire de :

– déterminer le ou les modèles permettant de décrire le plus fidèlement possible chaque phase ;
– choisir la méthode numérique à mettre en oeuvre pour représenter l'interface.

Autant du point de vue de la description de chaque phase que du suivi d'interface, nous verrons dans les prochaines sections qu'il est possible d'envisager différentes approches dont nous discuterons les avantages et les inconvénients.

2 Description de chaque phase

Avant de décrire l'approche utilisée pour la simulation numérique d'un écoulement diphasique, il faut déterminer les modèles utilisés pour décrire chaque phase. Ici, nous sommes en présence d'un écoulement visqueux constitué de deux phases a priori non miscibles séparées par une interface. La première région est un gaz, l'autre est un liquide. Il existe plusieurs façons de décrire de tels écoulements qui s'appuient sur un couplage : soit *incompressible-incompressible*, soit *compressible-compressible* ou bien *compressible-incompressible*. La première approche consiste à traiter les deux phases comme des fluides incompressibles alors que dans la seconde les deux fluides sont supposés compressibles. Enfin une dernière alternative est de considérer que le gaz est un fluide compressible alors que le liquide est un fluide incompressible.

2.1 Approche incompressible-incompressible

Afin de décrire l'évolution d'un écoulement diphasique, une première solution consiste à considérer que chaque fluide est régi par les équations de Navier-Stokes incompressible. Cette approche a été, ces dernières années, l'objet de nombreux travaux dont [TB05, VCLR04, CHMO96, Gué07, Mar06, Smo01, TE00] par exemple. Il est possible, de formuler de deux façons différentes les équations qui régissent l'écoulement.

Une première alternative [TB05, Gué07], s'appuie sur l'écriture d'un modèle *bi-fluide* ("two-fluids approach"). Ici, chaque phase de l'écoulement est décrite par les équations de Navier-Stokes incompressible qui se formulent de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcll} \nabla \cdot \mathbf{u} & = & 0 & \text{dans } \Omega_i \\ \rho_i \partial_t \mathbf{u} + \rho_i \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p & = & \nabla \cdot (2\mu_i D(\mathbf{u})) & \text{dans } \Omega_i \end{array} \tag{3.1}$$

Dans le modèle ci-dessus, nous notons μ_i et ρ_i les viscosité et densité associées au fluide i. Cette formulation permet de résoudre précisément chaque phase par des équations adéquates. Toutefois cette façon de procéder nécessite d'une part de décrire précisément l'interface (ex : Level Set) et de traiter spécifiquement les conditions de transmission à l'interface (ex : méthode d'interface mince de type Ghost Fluid).

Afin de décrire de façon globale l'écoulement il est également possible d'utiliser le modèle *mono-fluide* suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \nabla \cdot \mathbf{u} & = & 0 \\ \rho(\mathbf{x},t)\partial_t \mathbf{u} + \rho(\mathbf{x},t)\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p & = & \nabla \cdot (2\mu(\mathbf{x},t)D(\mathbf{u})), \end{array} \right. \quad \text{dans } \Omega = \cup_{i=1}^{2} \Omega_i(t) \tag{3.2}$$

avec

$$\rho(\mathbf{x},t) = \rho_i \text{ et } \mu(\mathbf{x},t) = \mu_i \text{ dans } \Omega_i(t).$$

L'avantage de ce modèle est qu'on résout exactement dans chaque phase les équations appropriées en utilisant un seul modèle global valide pour l'ensemble de l'écoulement. Comme la formulation bi-fluide, cette approche nécessite de décrire précisément l'interface. Toutefois, elle

permet de mettre en oeuvre des outils numériques simples développés pour des écoulements monophasiques. C'est par exemple ce qui est fait dans [MR06, MGCR07] dans lequel l'auteur met en oeuvre une méthode d'éléments finis stabilisés pour la résolution de (3.2).

Néanmoins cette description est contraignante. En outre la modification du volume du gaz n'est pas prise en compte lorsque celui ci est soumis à de fortes variations de pression ou température.

2.2 Approche compressible-compressible

La seconde possibilité est de supposer que les deux fluides sont compressibles. Comme dans l'approche incompressible-incompressible, certaines méthodes [WTL08, TT09] s'appuient sur une description bi-fluide de l'écoulement :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_i + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{u}_i) &= 0 \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_t(\rho_i \mathbf{u}_i) + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p_i - \nabla \cdot (\overline{\overline{\tau}}_i) &= 0 \text{ dans } \Omega_i. \end{aligned}$$

Les quantités indicées i sont spécifiques à chaque fluide. Enfin pour fermer le système il est nécessaire d'utiliser des lois d'états qui sont propres à chaque fluide. Comme nous l'avons précisé dans le paragraphe précédent, l'interface doit être définie, décrite et traitée de façon précise (suivi et conditions de transmission). Par opposition à ce type de méthode pour lequel il est nécessaire de définir l'interface explicitement, il existe également des méthodes d'interface diffuse qui à l'aide d'un processus d'homogénéisation permettent de s'affranchir de cette définition. Pour plus de détail sur ce type d'approche nous renvoyons le lecteur aux travaux d'Abgrall [AS99], Murrone [Mur03], Berthon[BBN05] ou Braconnier par exemple.

L'inconvénient de ce second type de description est qu'on ne respecte pas la contrainte d'incompressibilité (1.26) pour le liquide.

2.3 Approche compressible-incompressible

Bien évidemment, il existe une troisième alternative, permettant de respecter au mieux les natures compressible du gaz et incompressible du liquide. Il s'agit simplement d'utiliser pour chaque fluide le modèle qui lui est approprié i.e. incompressible pour le liquide et compressible pour le gaz. Cette voie a été très peu explorée à ce jour. On distingue toutefois les travaux de Yabe et ses collaborateurs [YW91, Yab91, YX95], qui proposent une méthode de projection généralisée pour le couplage compressible-incompressible. Il faut également citer les travaux de Fedkiw [FMO98, CFA01], dans lesquels les auteurs proposent une méthode numérique qui s'appuie sur des formulations des équations de Navier-Stokes compressible et incompressible très différentes. En effet, le liquide est décrit par des équations de Navier-Stokes incompressible sous leur forme non conservative pour les inconnues primitives ${}^t\mathbf{Y} = (p, {}^t\mathbf{u})$:

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{dans } \Omega_1 \\ \rho \partial_t \mathbf{u} + \rho \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p &= \nabla \cdot (2\mu D(\mathbf{u})) && \text{dans } \Omega_1, \end{aligned} \right.$$

alors que le gaz est modélisé par les équations du compressible pour les inconnues conservatives ${}^t\mathbf{U} = (\rho, \rho^t\mathbf{u})$:

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 && \text{dans } \Omega_2, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p - \nabla \cdot (\overline{\overline{\tau}}) &= 0 && \text{dans } \Omega_2. \end{aligned} \right.$$

Afin de résoudre ces équations, des schémas numériques adaptés ont été utilisés dans chaque phase. Cela se traduit par l'utilisation d'un schéma volume fini TVD dans la partie compressible

et un schéma MAC pour la partie incompressible, les deux phases étant couplées à l'interface par une méthode de type Ghost Fluid. Etant donné ces deux choix, selon la phase considérée les inconnues sont localisées en des positions différentes du maillage. Cela conduit finalement à une méthode numérique complexe à mettre en oeuvre.

2.4 Approche proposée

Nous avons vu dans la section précédente, qu'il existe de nombreuses possibilités pour décrire des écoulements diphasiques. Compte tenu de l'objectif de cette thèse qui est de développer une méthode numérique simple pour la simulation numérique de tels écoulements, nous faisons les choix suivants.
D'une part, afin de respecter la nature de chaque fluide, nous choisissons les équations de Navier-Stokes incompressible pour décrire la phase liquide Ω_1, alors que la phase gazeuse Ω_2 est gouvernée par les équations de Navier-Stokes compressible associées à la loi des gaz parfaits. D'autre part, nous avons vu pour une description totalement incompressible [Mar06], qu'il est avantageux de dériver un modèle global, i.e. mono-fluide régissant l'écoulement sur tout le domaine pour les mêmes inconnues. En effet cela permet notamment de construire une méthode numérique simple et unique quelque soit la phase considérée (par le biais d'une méthode d'éléments finis stabilisés). Toutefois, contrairement à l'approche proposée dans [Mar06],les modèles utilisés dans chaque région sont de types différents. Par conséquent le couplage sera plus délicat à traiter. Nous avons vu au chapitre 1 qu'il existe une formulation *unifiée* (1.36) des équations de Navier-Stokes compressible et incompressible. Ces équations vont constituer un point de départ à la formulation d'un modèle global mono-fluide compressible-incompressible.

Les équations de Navier-Stokes compressible et incompressible peuvent être écrites de façon *unifiée* (1.36) en utilisant différents jeux d'inconnues : *primitives* ou *entropiques* sous une forme *conservative* ou *quasi-linéaire*. Sachant que les écoulements considérés ici sont sans chocs et réguliers, nous avons avons fait le choix d'utiliser les équations sous leur forme quasi-linéaire. De plus l'utilisation des variables entropiques est plus coûteuse. Compte tenu de ces aspects, nous travaillerons dans la suite de cette thèse avec le jeu des inconnues primitives :

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} p \\ \mathbf{u} \\ T \end{pmatrix},$$

pour la formulation quasi-linéaire rappelée ici :

$$\hat{L}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\chi}, \rho)\mathbf{Y} \quad = \quad \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{Y}, \rho), \tag{3.3}$$

avec l'opérateur :

$$\hat{L}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\chi}, \rho)\mathbf{Y} \stackrel{def}{=} \hat{A}_0(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\chi}, \rho)\partial_t \mathbf{Y} + \sum_{i=1}^{d} \hat{A}_i(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\chi}, \rho)\partial_{x_i}\mathbf{Y} - \sum_{i,j=1}^{d} \partial_{x_i}\left(\hat{K}_{ij}(\mathbf{Y})\partial_{x_j}\mathbf{Y}\right).$$

Nous verrons que l'utilisation de la formulation (3.3) des équations de Navier-Stokes dans chaque phase permet de développer une méthode numérique simple. En outre il est possible d'isoler clairement la partie transport dans le modèle ce qui peut se révéler utile pour envisager des méthodes de splitting comme dans [YW91, Yab91, YX95].

En plus d'une description globale de l'écoulement par l'intermédiaire des équations de Navier-Stokes compressible et incompressible couplées présentées ci-dessus, il est nécessaire de traiter explicitement l'interface.

3 Méthodes numériques pour le suivi d'interface

Il existe dans la littérature différentes méthodes numériques dédiées au suivi d'interface qui peuvent être classées selon :
- qu'elles représentent l'interface de manière diffuse ou ponctuelle ;
- qu'elles s'appuient ou non sur un maillage fixe ou mobile ;
- qu'elles suivent explicitement ou capturent implicitement l'interface ;

Nous allons détailler ces différents points par la suite.

Par définition l'interface est une frontière entre deux milieux physiques. Elle peut être modélisée de deux façons différentes, soit par une méthode d'*interface diffuse*, soit par une méthode d'*interface ponctuelle*. Dans la description à interface ponctuelle, on introduit des discontinuités sur les caractéristiques du milieu physique (par ex. : densité, viscosité) au contraire d'une approche à interface diffuse, où ces quantités présentent une transition rapide à l'interface, tout en restant continues. Dans le cadre de nos travaux nous nous intéresserons à des approches de type interface ponctuelle.

Afin de décrire l'évolution de l'interface il est nécessaire de passer de sa représentation continue à sa formulation discrète. Dans de nombreux cas, les méthodes de suivi d'interface s'appuient sur l'utilisation du maillage employé pour la discrétisation spatiale des inconnues de l'écoulement. Dans ce contexte, des maillages mobiles se déformant avec l'écoulement et dont les éléments épousent la forme de l'interface peuvent être retenus. Cette approche a priori très naturelle peut devenir très coûteuse et complexe à mettre en œuvre lorsque que le maillage subit de grandes déformations. Pour contourner cette difficulté, il est fréquent d'utiliser un maillage fixe. Dans ce cas, il est nécessaire de représenter de façon *explicite* ou *implicite* l'interface. Enfin il existe également des méthodes sans maillage.

Parmi les méthodes s'appuyant sur un maillage, nous pouvons distinguer les méthodes dites de *"front tracking"* et les méthodes dites de *"front capturing"*. Les premières s'appuient sur le *suivi explicite* de l'interface à l'aide d'objets la représentant (particules par exemple). Ces méthodes sont à opposer aux méthodes de "front capturing" qui capturent l'interface en la représentant de façon *implicite* à l'aide de la ligne de niveau d'un champ scalaire ou d'une fraction volumique sur tout le domaine.

Parmi les méthodes de suivi d'interface les plus connues on citera, les méthodes des *marqueurs* (M) et de *maillage mobile* (MM) classées dans les méthodes de "front tracking". Les approches de types "front capturing" regroupent quant à elles la méthode *Volume of Fluid* (VOF) et la méthode *Level Set* (LS). Il existe également d'autres types d'approches dont les *méthodes sans maillage* (MSM).

Une rapide synthèse sur les propriétés de ces méthodes est donnée dans les paragraphes qui viennent ainsi que dans le tableau Tab. 3.1.

3.1 Méthodes de type "front tracking"

La méthode des marqueurs

En 2D l'interface est une courbe (resp. une surface en 3D) se mouvant dans l'espace et dans le temps. Intuitivement une première idée à laquelle on pense pour discrétiser l'interface est de positionner des points tout le long de la courbe qui la représente. Pour la déplacer, il suffit donc de faire évoluer chaque point et de reconstruire par interpolation l'interface. C'est le principe

Méthode	Avantages	Inconvénients
MM	Très précis	Adapté pour les petites déformations Complexe et couteux en 3D
M	Très précis	Changement de topologie
VOF	Très simple Bonne conservation de la masse	Reconstruction de l'interface complexe
LS	Très simple Changement topologiques bien gérés	Mauvaise conservation de la masse
MSM	Simple en 3D Géométries complexes	Raffinement limité

TAB. 3.1 – Synthèse des méthodes de description de l'interface

de la *méthode des marqueurs*, utilisée par Tryggvason [TT09, Try07], pour laquelle l'interface est reperée par des marqueurs advectés par l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{d\mathbf{x}_k}{dt} = u(\mathbf{x}_k, t), \mathbf{x} \in \Gamma. \tag{3.4}$$

Chaque particule k de l'interface Γ est repérée par sa coordonnée $\mathbf{x}_k$ qui vérifie l'équation ci-dessus, où $\mathbf{u}_k$ est la vitesse de la particule k. Cette méthode de type lagrangien est très précise tant que les particules ne sont pas trop écartées. Dans le cas contraire, il est nécessaire de redistribuer les marqueurs le long de l'interface. De plus les changements topologiques (fusion ou séparation de bulles par exemple) ne s'effectuent pas naturellement (redistribution). Enfin l'extension au 3D est complexe.

La méthode de maillage mobile

Comme son nom l'indique, cette approche consiste à mailler le domaine de manière à ce que chaque élément du maillage s'appuie précisément la forme de l'interface. Cette méthode lagrangienne permet de prendre en compte correctement les conditions de saut à l'interface. En contrepartie, elle demande de remailler à chaque pas de temps l'ensemble du domaine de calcul, ce qui se traduit par une augmentation de la durée de simulation. Enfin son utilisation reste limitée aux écoulements qui subissent des petites déformations. En effet en plusieurs dimensions de l'espace elles ont du mal à gérer des grandes déformations dues au cisaillement ou à la vorticité par exemple.

3.2 Méthodes de type "front capturing"

La méthode Volume of Fluid (VOF)

La méthode VOF, depuis sa première apparition dans les années 80 [HN81] a été intensivement utilisée, étudiée et développée. Ici, nous allons juste décrire l'idée de base de la méthode. Une revue plus approfondie de la méthode a été faite par Zaleski et Scardovelli dans [SZ99, Zal07]. Le principe de la méthode VOF est le suivant. Le domaine de calcul Ω est divisé en cellules. Chaque cellule se voit assigner une valeur comprise entre 0 et 1 représentant la fraction d'un des deux fluides dans cette cellule. A partir de ces quantités, il est possible de déterminer la position de l'interface Γ à partir d'une méthode dite de reconstruction polynomiale constante [NW76] ou affine.
Ainsi on construit la fonction caractéristique F qui est 0 dans un fluide et 1 dans l'autre. Le transport de l'interface est réalisé par l'équation aux dérivées partielles :

$$\partial_t F + \mathbf{u} \cdot \nabla F = 0 \text{ avec } F \in [0, 1]. \tag{3.5}$$

Cette équation d'advection peut être résolue par des schémas appropriés ce qui permet de minimiser la diffusion numérique. En plus de la fonction couleur, il est nécessaire de savoir orienter l'interface. Pour cela on utilise le gradient de la fonction couleur.
Déterminer les propriétés géométriques de l'interface (normales, courbure) n'est pas immédiat avec la méthode VOF. En effet pour calculer la normale et la courbure, on introduit une régularisation $\tilde{F}$ de la fonction couleur. A partir de $\tilde{F}$, on calcule :

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \tilde{F}}{||\nabla \tilde{F}||} \text{ et } \kappa = -\nabla \cdot \mathbf{n},$$

où $\mathbf{n}$ est la normale et κ la courbure.
Par contre l'avantage majeur de cette méthode est de conserver correctement la masse.

La méthode Level Set (LS)

La méthode Level Set a été introduite pour la première fois par Osher et Sethian en 1988 [OS88], et maintes fois employée par la suite pour traiter différents problèmes de la mécanique des fluides au traitement d'image en passant par la science des matériaux ou la propagation de front (flamme, givrage par ex.) etc.
Dans l'approche Level Set, l'interface Γ est représentée comme l'ensemble des zéros d'une fonction continue notée ϕ. L'interface est transportée par le champ de vitesse $\mathbf{u}$ qui est dans le cas d'écoulements multi-phasiques la solution des équations de Navier-Stokes. L'équation élémentaire qui régit l'évolution de l'interface est donc donnée par :

$$\partial_t \phi + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0 \text{ avec } \phi \in \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

De nombreux schémas numériques sont adaptés à la discrétisation spatio-temporelle de l'équation hyperbolique (3.6). Par exemple, il est courant d'utiliser des schémas d'ordre élévé de type ENO en espace combinés avec des schémas de type TVD-Runge Kutta (RK) en temps. Cette approche développée par [OS91, HS99] a été utilisée dans [TB05, Tan07, Vig07] par exemple. Bien que l'équation (3.6) permette de transporter l'interface dans la bonne direction, la fonction Level Set ne conserve pas sa propriété de fonction distance signée. L'utilisation de techniques de *réinitialisation* ou de *redistanciation* ont permis d'améliorer ce défaut. Il existe différentes approches qui permettent de réinitialiser ϕ à une fonction distance.

Equation de redistanciation **[SSO94]**

Une première alternative développée dans les travaux de Sussman [SSO94] est de redistancier la fonction Level Set en résolvant l'équation de redistanciation donnée par :

$$\partial_t \phi + S(\phi_0)\left(|\nabla \phi| - 1\right) = 0. \tag{3.7}$$

à laquelle on associe la condition initiale $\phi(\mathbf{x}, 0) = \phi_0(x)$ et la fonction signe lissée :

$$S(\phi_0) = \frac{\phi_0}{\sqrt{\phi_0^2 + \alpha^2}}.$$

Dans l'expression ci-dessus, α est un coefficient proportionnel à la taille des mailles. En définissant $\mathbf{v}(\phi) = S(\phi_0)\dfrac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$, l'équation (3.7) peut être reformulée sous la forme :

$$\partial_t \phi + \mathbf{v}(\phi) \cdot \nabla \phi = S(\phi_0), \tag{3.8}$$

qui n'est rien d'autre qu'une équation de transport de ϕ à la vitesse $\mathbf{v}$. La résolution de cette équation de type Hamilton-Jacobi peut être complexe et peut également entraîner le décalage du niveau zéro de la fonction Level Set. Pour remédier à ce problème, il existe des méthodes de correction de l'algorithme de réinitialisation développées par Sussman et Fatemi [SF99] ou encore Russo et Smereka [RS00].

Autres méthodes
Enfin il est possible d'utiliser d'autres types de méthodes de redistanciation basée sur une approche purement géométrique, comme dans [Mar06] appelée *"Tree-based" algorithms.*

L'emploi de techniques de redistanciation peut introduire une perte de masse ce qui ne confère pas à la méthode Level Set de bonnes propriétés de conservation. Pour contourner cette difficulté il est possible de coupler cette méthode à une autre méthode de suivi d'interface. Nous pouvons citer en exemple les travaux de Berlemont qui propose de coupler une méthode VOF avec la méthode Level Set [TB05] ou bien Fedkiw [EFFM02] qui couple les méthodes d'interface tracking et d'interface capturing en utilisant des particules. Ces stratégies ont l'inconvénient de complexifier une méthode qui était originellement très simple.
Longtemps, les gens ont associé cette propriété à la méthode Level Set elle même. Comme le soulignent les auteurs dans [MRC06, DPLFP06], contrairement à ce que l'on pourrait croire, ce défaut est surtout associé à la méthode de discrétisation de l'équation de transport de la fonction Level Set (3.6). Avec une méthode de type Galerkin discontinu, utilisée par exemple dans [GH05, DPLFP06, Mar06] pour discrétiser (3.6), il est possible de conserver de bonnes propriétés de conservation. Ainsi il n'est plus nécessaire de redistancier la fonction Level Set à chaque itération.
Indépendemment de ce dernier aspect, la méthode offre également des avantages qui sont les suivants. Premièrement, elle gère de façon naturelle les changements de topologie. Deuxièmement il est aisé à partir de la fonction distance signée ϕ de recalculer la normale et la courbure à l'interface.

3.3 Méthodes sans maillage

Il existe un dernier type de méthode qui diffère des approches de type front tracking ou front capturing. Il s'agit des méthodes sans maillage dites "Meshless Methods" parmi lesquelles on distingue la méthode "smoothed particle hydrodynamics" [Mon88, Mon94] qui est de nos jours la plus utilisée. Initialement introduit en astrophysique, ce type de méthode a été par la suite utilisé pour la simulation d'écoulements en mécanique des fluides comme le déferlement de vague ou bien l'effondrement d'une colonne d'eau. Le principe de cette approche consiste à représenter le fluide par un nombre fini de particules auxquelles on associe un certain nombre de propriétés physiques. La MSM a donc l'avantage de ne s'appuyer sur aucun maillage, ce qui peut représenter un sérieux avantage en trois dimensions pour des géométries complexes. Néanmoins, les particules doivent évoluer dans le domaine en respectant des lois d'intéractions réalistes qui peuvent s'avérer délicates à construire. Enfin cette méthode ne permet pas de raffiner autant qu'on le souhaite à un endroit précis du domaine.

3.4 Méthode choisie : Méthode Level Set

Jusqu'à présent nous avons présenté de façon comparative les diverses méthodes numériques qui permettent de représenter l'interface. A présent, nous allons préciser le choix que nous avons effectué.
Premièrement nous avons choisi une *méthode eulérienne*, afin de pouvoir travailler sur un maillage fixe. Deuxièmement, la méthode que nous allons employer doit nous permettre de représenter des transformations complexes de l'interface, notamment des changement de topologie, et grandes déformations. Dans ce cas seule une approche de type *interface capturing* peut être envisagée. Enfin cette approche permet de calculer simplement la courbure et la normale à l'interface. Ces quantités peuvent s'avérer utiles lorsque l'on souhaite représenter les effets de la tension de surface. Compte tenu de ces trois aspects nous avons naturellement convergé

vers la méthode *Level Set*.

Désormais, nous allons présenter en détail le principe de la méthode Level Set appliquée au problème présenté au paragraphe 1.1 de ce chapitre. Nous voulons étudier et calculer le déplacement de Γ (l'interface entre le gaz Ω_1 et le liquide Ω_2) induit par un champ de vitesse $\mathbf{u}$. Cette vitesse peut dépendre de l'espace, du temps, des caractéristiques géométriques de l'interface (normale, courbure) et/ou de la physique environnante. Ici, $\mathbf{u}$ est solution des équations de Navier-Stokes.
D'une part, comme son nom l'indique, la méthode consiste à caractériser Γ comme étant une des *courbes* de niveau (par exemple l'isovaleur 0) d'une fonction régulière (au moins lipschitzienne) $\phi(\mathbf{x}, t)$ à valeurs de $\Omega \times \mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Autrement dit à l'instant t nous avons :

$$\Gamma(t) = \{\mathbf{x},\ \text{tels que } \phi(\mathbf{x}, t) = 0\}\,. \tag{3.9}$$

Ainsi, l'interface est implicitement déterminée par ϕ qui est appelée *fonction Level Set*.
D'autre part, le déplacement de l'interface est obtenu naturellement en transportant ϕ par le champ de vitesse $\mathbf{u}$. Pour cela nous employons l'équation de transport :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega, t > 0. \tag{3.10}$$

Ici, au lieu de s'attacher au mouvemement des points de Γ, la méthode Level Set consiste à faire évoluer la surface globale représentée par la fonction ϕ. L'interface Γ est alors déterminée a posteriori en recherchant les valeurs pour lesquelles ϕ est nulle. C'est cet aspect qui justifie que la méthode Level Set fait partie des méthodes de type front capturing.
Comme c'est fréquemment le cas dans la littérature, la fonction Level Set est initialisée par la fonction distance à l'interface :

$$\phi_0(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, 0) = d(\mathbf{x}).$$

Dans la définition qui précède, nous avons introduit la fonction distance d à l'interface Γ telle que :

$$d(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\ \min\limits_{\mathbf{x}_\Gamma \in \Gamma} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_\Gamma|, & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_1, \\ \ \ \min\limits_{\mathbf{x}_\Gamma \in \Gamma} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_\Gamma|, & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_2. \end{cases}$$

Nous avons choisi par convention, $\phi < 0$ dans le liquide (Ω_1) et $\phi > 0$ dans le gaz (Ω_2), cette propriété est purement arbitraire et dépend du choix de chacun. Une propriété intéressante de la fonction distance signée est que :

$$|\nabla d| = 1.$$

Cette équation eikonale est utilisée notamment pour la méthode de redistanciation de type Fast Marching.
Enfin, enfin il est possible d'extraire de la fonction Level Set ϕ un certain nombre d'informations sur la géométrie de l'interface dont la normale à l'interface donnée par :

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|},$$

ainsi que la courbure moyenne à l'interface définie par :

$$\kappa = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) = \nabla \cdot \mathbf{n}.$$

4 Formulation globale

Dans les deux paragraphes qui précèdent nous avons présenté les choix effectués afin de modéliser chaque phase de l'écoulement ainsi que la méthode numérique employée pour représenter précisément l'interface. A partir de ces deux ingrédients, nous allons dériver un modèle global qui nous permettra à terme de décrire l'évolution d'un écoulement diphasique. Pour cela, il est possible d'envisager deux types d'approches équivalentes :

- le modèle *bi-fluide* qui s'appuie sur la description de chaque phase par des équations indépendantes reliées à l'interface par des conditions de sauts,
- le modèle *mono-fluide* qui représente de façon globale l'écoulement par un seul modèle qui intègre les relations d'interface.

Nous reviendrons en détail sur ces deux possibilités dans la suite de cette section, mais d'abord il est nécessaire de définir en détail les relations de saut que nous avons à l'interface.

4.1 Conditions de saut à l'interface

Notation :
Par la suite, nous désignons par saut de f au travers de l'interface Γ la quantité :

$$[f] = f_1 - f_2,$$

où les f_i sont les valeurs de f à l'interface associées au fluide i.

Pour que le problème soit complet, il faut ajouter aux équations régissant l'écoulement (3.3) et l'évolution de l'interface (3.10) des conditions de saut. Comme dans [Smo01, Mar06, Gué07, Tan07] nous supposons qu'à l'interface nous avons la continuité :

- des vitesses normales
$$[\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}] = 0, \tag{3.11}$$
- du tenseur des contraintes
$$\left[\left(p\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{\tau}}\right) \cdot \mathbf{n}\right] = 0, \tag{3.12}$$
- de la température
$$[T] = 0. \tag{3.13}$$

Dans cette thèse on fera l'hypothèse qu'il n'y a pas de glissement à l'interface i.e. le saut des vitesses tangentielles est nul à l'interface :

$$[\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{t}] = 0, \tag{3.14}$$

ce qui conduit finalement avec (3.11) à :

$$[\mathbf{u}] = 0. \tag{3.15}$$

Ici nous considèrons que les contraintes visqueuses sont négligeables devant la pression et par conséquent que le saut de pression est quasi-nul à l'interface :

$$[p] \simeq 0. \tag{3.16}$$

Compte tenu de ces différentes assertions, l'inconnue $\mathbf{Y}$ est continue à l'interface Γ et nous avons :

$$[\mathbf{Y}] \simeq 0. \tag{3.17}$$

Remarques :

1. Pour un fluide non-visqueux, la condition de continuité de la pression à l'interface est vraie car le tenseur des contrainte est nul.
2. La continuité de l'inconnue au travers de l'interface, induit l'égalité entre deux pressions de natures différentes associées à chaque fluide. Nous avons donc :

$$p_1(T) = p_2(\rho, T).$$

   avec p_i la pression dans le fluide i. Dans le liquide Ω_1 la pression ne dépend que de la température, alors que dans le gaz Ω_2 elle varie également en fonction de la densité.
3. La continuité de l'inconnue $\mathbf{Y}$ nous permet d'avoir une régularité minimum pour pouvoir utiliser par la suite la forme quasi-linéaire et non-conservative des équations de Navier-Stokes.
4. Si les modèles considérés sont conservatifs, alors les relations de saut à l'interface sont une conséquence de leur formulation faible et sont naturellement prises en compte. Ici nous considérons des écoulements réguliers et nous utilisons la formulation non-conservative des équations (3.3), dans ce cas il est nécessaire d'imposer des conditions de saut (3.17).

4.2 Modèle bi-fluide

Dans la description *bi-fluide* (à deux fluides) chaque fluide est décrit par un système d'équations indépendantes reliées par des relations d'interface adéquates.

Compte tenu des choix effectués précédemment, les modèles décrivant l'évolution de chaque fluide dans chaque phase sont données par les équations de Navier-Stokes incompressible dans le fluide 1 et compressible dans le fluide 2 :

$$\begin{aligned} \hat{L}(\mathbf{Y}_1, \boldsymbol{\chi}_1, \rho_1, \mu_1, \kappa_1)\mathbf{Y}_1 &= \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{Y}_1, \rho_1) \text{ dans } \Omega_1(t), \\ \hat{L}(\mathbf{Y}_2, \boldsymbol{\chi}_2, \rho_2, \mu_2, \kappa_2)\mathbf{Y}_2 &= \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{Y}_2, \rho_2) \text{ dans } \Omega_2(t), \end{aligned} \tag{3.18}$$

avec

$$\hat{L}(\mathbf{Y}_k, \boldsymbol{\chi}_k, \rho_k, \mu_k, \kappa_k) \stackrel{def}{=} \hat{A}_0(\mathbf{Y}_k, \boldsymbol{\chi}_k, \rho_k)\partial_t + \sum_{i=1}^{d} A_i(\mathbf{Y}_k, \boldsymbol{\chi}_k, \rho_k)\partial_{x_i} - \sum_{i,j=1}^{d} \partial_{x_i}\left[K_{ij}(\mathbf{Y}_k, \mu_k, \kappa_k)\partial_{x_j}\right],$$

l'opérateur associé au fluide k.

Ici les matrices jacobiennes A_i, les matrices des coefficients de viscosité K_{ij} et le vecteur des efforts extérieurs prennent des valeurs différentes selon la phase k. En effet, elles dépendent d'un certain nombre de grandeurs associées au fluide $\mathbf{Y}_k$ le vecteur des inconnues primitives, ρ_k la densité, μ_k la viscosité, κ_k la conductivité thermique et les coefficients thermodynamiques $\boldsymbol{\chi}_k = (\alpha_p^k, \beta_T^k)$.

A ces équations nous rajoutons la condition de continuité de l'inconnue (3.17).

Les équations (3.18) peuvent être discrétisées de deux manières disctinctes, soit de façon *dynamique*, soit de façon *globale*.
La première stratégie, consiste à résoudre les équations dans chaque phase $\Omega_i, i = 1, 2$, de façon indépendante. Les relations de saut sur la frontière Γ, sont quant à elles, traitées comme des conditions aux limites du point de vue de chaque fluide. Cette approche est employée

dans [CFA01] par exemple. La mise en œuvre informatique de cette approche se traduit par un stockage dynamique des inconnues $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2$. En effet la taille des tableaux des inconnues est redéfinie à chaque pas de temps en fonction de la portion du domaine occupé par chaque phase.
Dans une approche globale, le principe est d'étendre les équations locales (3.18) à tout le domaine de l'écoulement qui sont ensuite résolues globalement sur le domaine entier. Nous pouvons citer à titre d'exemple les travaux de Murrone [Mur03]. Cette approche permet de s'affranchir d'un stockage dynamique des inconnues d'un point de vue informatique. Ici, il suffit de construire une fois pour toute un tableau d'inconnues de taille fixe. Par contre il faut noter que cette approche mène à la résolution de deux équations dans chaque phase au lieu d'une seule.

4.3 Modèle mono-fluide

Le modèle mono-fluide consiste à modéliser l'ensemble des deux fluides comme un seul fluide avec un seul modèle. En s'appuyant sur la continuité (3.17) de l'inconnue primitive $\mathbf{Y}$ et à partir de l'écriture unifiée des équations de Navier-Stokes compressible et incompressible (3.3) pour chaque phase $\Omega_k, k = 1, 2$ (i.e. le modèle bi-fluide), nous pouvons écrire un modèle global équivalent valide sur tout le domaine Ω :

$$\hat{L}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\chi}, \rho, \phi)\mathbf{Y} = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{Y}, \rho, \phi), \text{ dans } \Omega, \tag{3.19}$$

pour lequel $\mathbf{Y} = {}^t(p, \mathbf{u}, T)$ est l'inconnue primitive globale définie et continue sur Ω. Dans (3.19) nous avons utilisé l'opérateur $\hat{L}$ donné par :

$$\hat{L}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\chi}, \rho, \phi) \stackrel{def}{=} \hat{A}_0(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\chi}, \rho, \phi)\partial_t + \sum_{i=1}^{d} \hat{A}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\chi}, \rho, \phi)\partial_{x_i} - \sum_{i,j=1}^{d} \partial_{x_i}\left[\hat{K}_{ij}(\mathbf{Y}, \phi)\partial_{x_j}\right].$$

En adoptant la représentation de l'interface par le biais de la fonction Level Set ϕ et en s'inspirant de ce qui est fait dans [TB05, CHMO96, Mar06, TE00], nous construisons matrices globales $A_i(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\chi}, \alpha, \rho, \phi)$ et $K_{ij}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\chi}, \alpha, \rho, \phi)$ et le second membre $\mathbf{S}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\chi}, \alpha, \rho, \phi)$ définis sur Ω par :

$$\begin{aligned}
\hat{A}_0(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\chi}, \rho, \phi) &= (1 - H(\phi))\,\hat{A}_0^1(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\chi}_1, \rho_1) + H(\phi)\hat{A}_0^2(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\chi}_2, \rho_2) && (3.20)\\
\hat{A}_i(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\chi}, \rho, \phi) &= (1 - H(\phi))\,\hat{A}_i^1(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\chi}_1, \rho_1) + H(\phi)\hat{A}_i^2(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\chi}_2, \rho_2) && (3.21)\\
\hat{K}_{ij}(\mathbf{Y}, \phi) &= (1 - H(\phi))\,\hat{K}_{ij}^1(\mathbf{Y}) + H(\phi)\hat{K}_{ij}^2(\mathbf{Y}) && (3.22)\\
\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{Y}, \rho, \phi) &= (1 - H(\phi))\,\hat{\mathbf{S}}^1(\mathbf{Y}, \rho_1) + H(\phi)\hat{\mathbf{S}}^2(\mathbf{Y}, \rho_2). && (3.23)
\end{aligned}$$

Dans les définitions précédentes $H(\phi)$ désigne la fonction Heaviside et ϕ une fonction continue. Elles sont données par

$$H(\phi) = \begin{cases} 1, \text{ si } \phi > 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Nous constatons que les quantités globales $\hat{A}_i, \hat{K}_{ij}, \hat{\mathbf{S}}$ sont des fonctions explicites d'un certain nombre de grandeurs dont la densité ρ, les coefficients thermodynamiques $\boldsymbol{\chi}$. Elles dépendent également de façon implicite de la viscosité μ et de la conductivité thermique κ, qui prennent des valeurs différentes selon le milieu considéré. Par abus de notation nous considérerons par la suite que l'opérateur $\hat{L}$ dépend seulement de l'inconnue $\mathbf{Y}$ et de la position de l'interface i.e. de ϕ. Dans ce cas les dépendances par rapport à $\rho, \boldsymbol{\chi}, \mu, \kappa$ sont prises en compte implicitement par

l'intermédiaire de la dépendance en ϕ. Nous omettrons également les chapeaux sur les matrices dans le but d'alléger les notations. La formulation globale est donc :

$$L(\mathbf{Y},\phi)\mathbf{Y} = \mathbf{S}(\mathbf{Y},\phi), \text{ dans } \Omega, \tag{3.24}$$

où

$$L(\mathbf{Y},\phi) \stackrel{def}{=} A_0(\mathbf{Y},\phi)\partial_t + \sum_{i=1}^{d} A(\mathbf{Y},\phi)\partial_{x_i} - \sum_{i,j=1}^{d} \partial_{x_i}\left[K_{ij}(\mathbf{Y},\phi)\partial_{x_j}\right].$$

C'est ce modèle global dit *mono-fluide* que nous utiliserons pour décrire les écoulements diphasiques étudiés par la suite.

De la même façon on introduit le *modèle mono-fluide symétrisé* défini pour l'inconnue primitive par :

$$\mathcal{L}(\mathbf{Y},\phi) = \mathcal{S}(\mathbf{Y},\phi), \text{ dans } \Omega, \tag{3.25}$$

avec

$$\mathcal{L}(\mathbf{Y},\phi) \stackrel{def}{=} \mathcal{A}_0(\mathbf{Y},\phi)\partial_t + \sum_{i=1}^{3} \mathcal{A}_i(\mathbf{Y},\phi)\partial_{x_i} - M(\mathbf{Y},\phi)\left\{\sum_{i,j=1}^{3} \partial_{x_i}\left[\mathcal{K}_{ij}(\mathbf{Y},\phi)\partial_{x_j}\right]\right\}.$$

Nous notons $\mathcal{S}(\mathbf{Y},\phi) = M(\mathbf{Y},\phi)\mathbf{S}(\mathbf{Y},\phi)$ et $\mathcal{A}_i(\mathbf{Y},\phi) = M(\mathbf{Y},\phi)A_i(\mathbf{Y},\phi), i = 0,\ldots,d$. Dans les égalités précédentes, nous avons introduit la matrice M définie par

$$M(\mathbf{Y},\phi) = (1 - H(\phi))\, M^1(\mathbf{Y}) + H(\phi)M^2(\mathbf{Y}), \text{ dans } \Omega. \tag{3.26}$$

Dans le cas où $d = 3$ nous avons

$$M^k(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} 1/\rho^k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -u_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -u_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{T}(|\mathbf{u}|^2 - e_1^k) & -\frac{u_1}{T} & -\frac{u_2}{T} & -\frac{u_3}{T} & \frac{1}{T} \end{pmatrix} \text{ dans } \Omega_k. \tag{3.27}$$

Nous avons vu au paragraphe précédent, que l'utilisation d'une description bi-fluide peut s'avérer lourde d'un point de vue pratique : stockage dynamique des inconnues d'une part ou résolution d'équations multiples d'autre part. L'utilisation d'un modèle mono-fluide permet de s'affranchir de ces deux types d'inconvénient. En pratique, elle permet de résoudre des problèmes diphasiques en utilisant des outils numériques développés pour des cas monophasiques (voir [Mar06, TE00] par exemple). Pour cette raison, nous choisirons par la suite de travailler avec une description purement mono-fluide de l'écoulement.

5 Conclusion

Nous avons détaillé dans ce chapitre les modèles utilisés pour la simulation numérique d'un écoulement diphasique. En particulier nous avons construit de façon formelle un modèle mono-fluide qui permet de décrire l'évolution du fluide quelque soit la phase considérée. Nous allons présenter par la suite, la méthode numérique mise en oeuvre pour la résolution des équations que nous venons d'introduire.

Par la suite il sera utile de définir le modèle mono-fluide généralisé :

$$\mathscr{L}(\mathbf{Y},\phi)\mathbf{Y} = \mathscr{S}(\mathbf{Y},\phi), \tag{3.28}$$

avec

$$\mathscr{L}(\mathbf{Y},\phi)\mathbf{Y} \overset{def}{=} \mathscr{A}_0(\mathbf{Y},\phi)\partial_t\mathbf{Y} + \sum_{i=1}^{d}\mathscr{A}_i(\mathbf{Y},\phi)\partial_{x_i}\mathbf{Y} - \mathscr{M}(\mathbf{Y},\phi)\left\{\sum_{i,j=1}^{d}\partial_{x_i}\left[\mathscr{K}_{ij}(\mathbf{Y},\phi)\partial_{x_j}\mathbf{Y}\right]\right\}.$$

Cette forme représente aussi bien le modèle quasi-linéaire symétrique que quasi-linéaire isotherme ou anisotherme. Par identification avec les formulations (3.24) et (3.25) nous obtenons les relations récapitulées dans le tableau Tab. 3.2.

Opérateurs généraux	**Forme quasi-linéaire**	**Forme symétrique**
$\mathscr{A}_0(\mathbf{Y},\phi)$	$A_0(\mathbf{Y},\phi)$	$\mathcal{A}_0(\mathbf{Y},\phi)$
$\mathscr{A}_i(\mathbf{Y},\phi)$	$A_i(\mathbf{Y},\phi)$	$\mathcal{A}_i(\mathbf{Y},\phi)$
$\mathscr{K}_{ij}(\mathbf{Y},\phi)$	$K_{ij}(\mathbf{Y},\phi)$	$\mathcal{K}_{ij}(\mathbf{Y},\phi)$
Terme source général		
$\mathscr{S}(\mathbf{Y},\phi)$	$\mathbf{S}(\mathbf{Y},\phi)$	$\mathcal{S}(\mathbf{Y},\phi)$
Matrice de symétrisation		
$\mathscr{M}(\phi)$	I_d	$M(\phi)$

Tab. 3.2 – Opérateurs de la forme généralisée selon le modèle considéré

Chapitre 4

Méthode numérique mono-dimensionnelle

Ce chapitre est consacré au développement d'une méthode numérique simple pour la simulation d'écoulements diphasiques mono-dimensionnels. Nous commencerons par un bref rappel des modèles mathématiques utilisés en 1D. Ensuite une succession de problèmes de difficulté croissante sera étudiée afin de construire de façon méthodique la stratégie numérique présentée dans ce chapitre. En premier lieu, il sera utile de considérer un problème simplifié pour lequel nous mettrons en oeuvre une méthode d'éléments finis stabilisés en espace couplée à une méthode aux différences finies en temps. Cette méthode sera étendue par la suite au système physique réel.

1 Formulation mathématique

Nous nous intéressons ici à l'évolution d'écoulements diphasiques composés d'un gaz et d'un liquide non miscibles séparés par une interface. Les notations utilisées sont celles introduites au chapitre précédent. En une dimension de l'espace, $\Omega =]a, b[\subset \mathbb{R}$ est un segment d'extrémités $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. L'interface $\Gamma(t)$ est réduite à un ensemble de points mobiles repérés par leur abscisse évoluant au cours du temps. Afin de simplifier notre présentation, le cas particulier d'un écoulement constitué d'une phase liquide $\Omega_1(t) =]a, x_I(t)[$ et d'une phase gazeuse $\Omega_2(t) =]x_I(t), b[$, situées respectivement à gauche et à droite de l'interface repérée par sa position $x_I(t)$ (voir Fig. 4.1), est étudié.

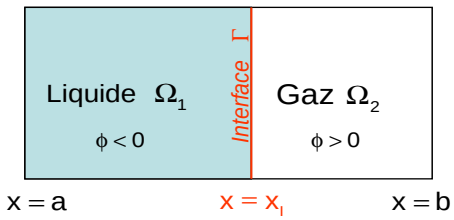


Fig. 4.1 – Représentation d'un écoulement diphasique 1D

Les équations décrivant l'évolution spatio-temporelle d'un tel écoulement sont données par le *modèle mono-fluide* (3.28) introduit au Chapitre 3 :

$$\mathscr{L}(\mathbf{Y}, \phi)\mathbf{Y} = \mathscr{S}(\mathbf{Y}, \phi), \tag{4.1}$$

avec $\mathscr{L}$ l'opérateur généralisé défini par :

$$\mathscr{L}(\mathbf{Y},\phi) \stackrel{def}{=} \mathscr{A}_0(\mathbf{Y},\phi)\partial_t + \mathscr{A}(\mathbf{Y},\phi)\partial_x - \mathscr{M}(\mathbf{Y},\phi)\partial_x\left(\mathscr{K}(\mathbf{Y},\phi)\partial_x\right)$$

et $\mathbf{Y} = {}^t(p,u,T)$ le vecteur des inconnues primitives. Par la suite, il sera utile de décomposer la matrice de convection $\mathscr{A}$ de la façon suivante $\mathscr{A} = u\mathscr{A}_0 + \mathscr{A}_a$ avec :

- $u\mathscr{A}_0$ la contribution des termes de convection à la vitesse u de l'écoulement,
- $\mathscr{A}_a$ la partie acoustique de la matrice $\mathscr{A}$.

En 1D, l'interface est trivialement réduite à un seul et unique point repéré par son abscisse x_I. Afin de simplifier le transport de l'interface, nous n'emploierons pas ici la méthode Level Set telle qu'elle a été définie au précédent chapitre. En effet nous préfèrerons utiliser une méthode des marqueurs, plus précise et plus simple à mettre en oeuvre dans ce cas. Il s'agit donc d'advecter l'interface à la vitesse de l'écoulement. Ainsi, x_I vérifie l'équation d'évolution :

$$\frac{dx_I}{dt} = u_I. \tag{4.2}$$

avec $u_I(t) = u(x_I(t),t)$ la vitesse de l'interface. Toutefois, comme l'opérateur $\mathscr{L}(\mathbf{Y},\phi)$ dépend de ϕ, il est nécessaire de garder la notion de fonction Level Set qui sera reconstruite "manuellement" comme une fonction distance signée à partir de la position de l'interface x_I à chaque instant :

$$\phi(x,t) = x - x_I(t), \quad \forall x \in \Omega, t > 0. \tag{4.3}$$

Cette stratégie peut être facilement étendue à des écoulements 1D présentant plusieurs interfaces (gouttes par exemple). En effet il s'agit de transporter un nombre fini d'interfaces repérées par leurs coordonnées puis de mettre à jour ϕ comme une fonction distance signée. Cette approche est suffisante en une dimension. Par contre, comme nous l'avons déjà expliqué, en plusieurs dimensions d'espace, cela est plus complexe. Il sera dans ce cas nécessaire de résoudre l'équation de transport de la fonction Level Set telle que nous l'avons présentée au chapitre précédent.

En nous appuyant sur les deux équations (4.1) et (4.2), nous allons élaborer dans ce chapitre une méthode numérique simple pour simuler des écoulements diphasiques.
Ici, il est possible de distinguer deux manières de résoudre ces équations. Dans une première approche, les équations de l'écoulement et de transport de l'interface sont résolues simultanément. Dans la seconde, appelée approche *découplée*, chaque équation est traitée séparément. Ainsi, il s'agit de résoudre (4.1) en supposant que l'interface est figée puis de mettre à jour la position de l'interface par le biais de (4.2) avec le nouveau champ de vitesse déduite de (4.1). Du fait de sa simplicité, nous choisissons ici, la seconde solution afin de résoudre (4.1) et (4.2). Cela nous permettra d'aborder séparément les difficultés associés à la discrétisation de chaque équation.
En 1D, la résolution de l'équation différentielle ordinaire (4.1) est triviale. Par contre, la nature de l'opérateur $\mathscr{L}$ rend complexe la discrétisation du système d'équations associé au modèle mono-fluide. Il faut distinguer trois types de difficulté :

- l'opérateur $\mathscr{L}$ est à coefficients discontinus, car la densité, la viscosité, la conductivité thermique ainsi que les coefficients thermodynamiques sont spécifiques à chaque phase ;
- l'opérateur $\mathscr{L}$ est non-linéaire, car il dépend de l'inconnue $\mathbf{Y}$;
- l'opérateur $\mathscr{L}$ est "dynamique" car sa discontinuité est localisée sur l'interface dont la position évolue dans le temps.

Afin de traiter pas à pas les différents points précédemment cités, nous suggérons d'étudier une succession de problèmes de complexité croissante.

2 Problème linéarisé et isotherme sans convection

Ici, nous nous intéressons à la résolution du problème isotherme linéarisé et sans transport. Cela signifie quatre choses :

- le modèle mono-fluide (3.28) se réduit à deux équations : celles de la conservation de la masse et de la conservation de la quantité de mouvement. Les inconnues sont donc la pression et la vitesse. De plus les équations ne dépendent plus que du seul coefficient thermodynamique β_T. Enfin nous rappelons que pour un écoulement isotherme, le terme visqueux se simplifie et vérifie :

$$\mathscr{M}(\mathbf{Y},\phi)\partial_x\left(\mathscr{K}(\mathbf{Y},\phi)\partial_x\mathbf{Y}\right)=\partial_x\left(\mathscr{K}(\mathbf{Y},\phi)\partial_x\mathbf{Y}\right);$$

- les équations mono-fluides sans advection sont considérées. Cela signifie que les termes de convection à la vitesse u sont omis dans le modèle. Ainsi la matrice d'advection $\mathscr{A}$ est réduite à sa composante acoustique $\mathscr{A}=\mathscr{A}_a$.(Dans la suite la notation $\mathscr{A}$ sera conservée pour simplifier la présentation.) Cette manipulation est possible car nous avons choisi de résoudre les équations de Navier-Stokes sous une forme non-conservative (quasi-linéaire ou quasi-linéaire symétrique) ;
- l'équation d'évolution de l'interface (4.2) n'est pas résolue. Par conséquent la position de l'interface x_I ainsi que la fonction distance signée ϕ ne dépendent pas du temps ;
- l'opérateur $\mathscr{L}$ ainsi que le terme source $\mathscr{S}$ sont linéarisés ce qui signifie qu'ils sont constants dans chaque milieu.

Compte tenu des hypothèses précédentes, le problème que nous allons étudier est le suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll}\mathscr{L}(x)\mathbf{Y}=\mathscr{S}(x), & \text{dans } \Omega\times]0,T[,\\ \mathbf{Y}(x,0)=\mathbf{Y}^0(x), & \text{dans } \Omega,\end{array}\right. \tag{4.4}$$

avec ${}^t\mathbf{Y}={}^t(p,u)$ et l'opérateur :

$$\mathscr{L}(x)=\mathscr{A}_0(x)\partial_t+\mathscr{A}(x)\partial_x-\partial_x\{\mathscr{K}(x)\partial_x\}.$$

On suppose de plus que sur la frontière $\partial\Omega$ la vitesse vérifie les conditions aux limites de type Dirichlet :

$$u(a,t)=u_g(t) \text{ et } u(b,t)=u_d(t).$$

Ici l'opérateur $\mathscr{L}=\mathscr{A}_0\partial_t+\mathscr{A}\partial_x-\partial_x\left(\mathscr{K}\partial_x\right)$ et le second membre $\mathscr{S}$ qui dépendaient initialement de $\mathbf{Y},\rho,\mu,\beta_T,\phi$ se simplifient, et sont des fonctions des coefficients constants par milieu :

$$\beta_T(x)=\left\{\begin{array}{lcll}\beta_T^1 & = & 0 & \text{si } x<x_I,\\ \beta_T^2 & = & \dfrac{1}{\rho_2c^2} & \text{sinon,}\end{array}\right.,\rho(x)=\left\{\begin{array}{ll}\rho_1 & \text{si } x<x_I,\\ \rho_2 & \text{sinon,}\end{array}\right.\quad \mu(x)=\left\{\begin{array}{ll}\mu_1 & \text{si } x<x_I,\\ \mu_2 & \text{sinon,}\end{array}\right.$$

avec $c=\sqrt{RT}$ la vitesse du son dans le gaz à température constante. Ainsi l'opérateur $\mathscr{L}$ et le second membre $\mathscr{S}$ dépendent seulement de la coordonnée spatiale et sont :

$$\mathscr{L}(x)=\mathscr{L}^i \text{ et } \mathscr{S}(x)=\mathscr{S}^i \text{ si } x\in\Omega_i, i=1,2,$$

avec $\mathscr{L}^i=\mathscr{A}_0^i\partial_t+\mathscr{A}^i\partial_x-\partial_x\left(\mathscr{K}^i\partial_x\right)$. Dans les définitions qui précèdent $\mathscr{A}_0^i,\mathscr{A}^i,\mathscr{K}^i$ et $\mathscr{S}^i$ sont constants par domaine Ω_i. Le modèle qui intervient dans (4.4) peut se décliner sous la forme :

$$\begin{pmatrix}\beta_T\rho & 0\\ 0 & \rho\end{pmatrix}\partial_t\mathbf{Y}+\begin{pmatrix}0 & \rho\\ 1 & 0\end{pmatrix}\partial_x\mathbf{Y}-\partial_x\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 4/3\mu\end{pmatrix}\partial_x\mathbf{Y}\right)=\begin{pmatrix}0\\ \rho g\end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

ainsi que sous sa forme symétrisée :

$$\begin{pmatrix} \beta_T & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \partial_t \mathbf{Y} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_x \mathbf{Y} - \partial_x \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4/3\mu \end{pmatrix} \partial_x \mathbf{Y} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho g \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Même si les deux systèmes d'équations présentés ci-dessus sont équivalents, nous allons voir qu'ils conduisent à des méthodes numériques différentes.

2.1 Approximation temporelle

Comme l'évoquent Asensio, Ayuso et Sangalli [AAS07], il est possible d'envisager deux stratégies pour résoudre numériquement le problème (4.4) :

- la première s'appuie d'abord sur la discrétisation en temps de l'équation (4.4) par un schéma aux différences finies puis sur l'utilisation d'une méthode d'éléments finis stabilisés pour résoudre la suite de problèmes stationnaires découlant de la formulation semi-discrète en temps du problème (4.4) ;
- la seconde plus fréquemment employée, connue sous le nom de *méthode des lignes* consiste à discrétiser d'abord spatialement l'équation (4.4) par une méthode d'éléments finis stabilisés, puis de mettre en oeuvre une méthode aux différences finies en temps pour résoudre l'équations différentielle ordinaire associée.

Ici, nous avons choisi de mettre en oeuvre la première approche qui est plus robuste et plus précise d'après les comparaisons effectuées dans [AAS07].

Pour approcher la solution du système d'équations aux dérivées partielles (4.4), il est possible de mettre en oeuvre différents types de schémas d'intégration en temps dont les méthodes à un pas (par ex. : Runge Kutta) ou les méthodes multipas (par ex. : methodes d'Adams). Dans un souci de simplicité, nous emploierons ici un schéma d'Euler implicite précis à l'ordre 1.

Considérons une partition uniforme $0 = t^0 < t_1 < \cdots < t_N = T, N \in \mathbb{N}$ de l'intervalle de temps $[0, T]$, avec $\delta t = \frac{T}{N}$. Afin d'approcher l'équation d'évolution (4.4), on remplace $\partial_t \mathbf{Y}$ par la différence finie $\frac{1}{\delta t}\left(\mathbf{Y}^{n+1} - \mathbf{Y}^n\right)$, où la suite $(\mathbf{Y}^n)_{0 \leq n \leq N}$ est solution de :

$$\begin{cases} \mathsf{L}_i(x)\mathbf{Y}^{n+1} + \mathsf{L}_e(x)\mathbf{Y}^n = \mathsf{S}(x), & x \in]a, b[, \\ \mathbf{Y}^0 = \mathbf{Y}_0(x), & x \in]a, b[, \\ u^n(a) = u_g(t^n) \text{ et } u^n(b) = u_d(t^n). \end{cases} \tag{4.7}$$

Ici, nous utilisons les opérateurs semi-discrets :

$$\mathsf{L}_i(x)\mathbf{Y} \overset{def}{=} \mathscr{A}_0(x)\frac{\mathbf{Y}}{\delta t} + \mathscr{L}_s(x)\mathbf{Y} = \mathscr{A}_0(x)\frac{\mathbf{Y}}{\delta t} + \mathscr{A}(x)\partial_x \mathbf{Y} - \partial_x\left(\mathscr{K}(x)\partial_x \mathbf{Y}\right),$$

$$\mathsf{L}_e(x)\mathbf{Y} = -\mathscr{A}_0(x)\frac{\mathbf{Y}}{\delta t} \text{ et } \mathsf{S}(x) = \mathscr{S}(x).$$

2.2 Approximation spatiale

Après avoir effectué la semi-discrétisation en temps du problème (4.4), nous nous intéressons à la discrétisation spatiale du problème aux limites semi-discret en temps (4.7). Comme nous l'avons évoqué au chapitre 2, nous nous focalisons dans le cadre de cette thèse sur la mise en oeuvre d'une méthode d'éléments finis stabilisés pour la résolution spatiale de (4.7). En particulier nous considèrons une approximation de l'inconnue $\mathbf{Y}^n$ par des éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}_1$.

Formulation faible

Dans un premier temps, nous allons écrire la formulation faible du problème (4.7). Pour cela, nous multiplions l'équation (4.7) par une fonction test $\mathbf{W}$ supposée suffisament régulière et nulle au bord, puis nous intégrons sur $[a, b]$. En utilisant la formule de Green le terme visqueux devient :

$$-\int_a^b \mathbf{W} \cdot \partial_x \left(\mathscr{K}(x)\partial_x \mathbf{Y}^{n+1}\right) = \int_a^b \partial_x \mathbf{W} \cdot \mathscr{K}(x)\partial_x \mathbf{Y}^{n+1} - \left[\mathbf{W} \cdot \mathscr{K}(x)\partial_x \mathbf{Y}^{n+1}\right]_a^b. \tag{4.8}$$

Ici les fonctions tests sont nulles en a et b par conséquent nous avons :

$$\left[\mathbf{W} \cdot \mathscr{K}(x)\partial_x \mathbf{Y}^{n+1}\right]_a^b = 0.$$

En définissant les formes bilinéaires :

$$a\left(\mathbf{W}, \mathbf{Y}\right) = \int_a^b \mathbf{W} \cdot \mathscr{A}_0(x)\frac{\mathbf{Y}}{\delta t} + \mathbf{W} \cdot \mathscr{A}(x)\partial_x \mathbf{Y} + \partial_x \mathbf{W} \cdot \mathscr{K}(x)\partial_x \mathbf{Y} dx,$$

$$b\left(\mathbf{W}, \mathbf{Y}\right) = \int_a^b \mathbf{W} \cdot \mathscr{A}_0(x)\frac{\mathbf{Y}}{\delta t} dx,$$

et la forme linéaire :

$$s\left(\mathbf{W}\right) = \int_a^b \mathbf{W} \cdot \mathscr{S}(x) dx$$

nous obtenons finalement la formulation faible du problème (4.7) :

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Trouver } \left(\mathbf{Y}^n\right)_{0\leq n\leq N} \in \mathsf{S}^p \times \mathsf{S}^u \text{ telle que } \forall \mathbf{W} \in \mathsf{T}^p \times \mathsf{T}^u \text{ on ait :} \\ a\left(\mathbf{W}, \mathbf{Y}^{n+1}\right) + b\left(\mathbf{W}, \mathbf{Y}^n\right) = s\left(\mathbf{W}\right), \\ \mathbf{Y}^0 = \mathbf{Y}_0, \\ u^n(a) = u_g(t^n) \text{ et } u^n(b) = u_d(t^n). \end{array}\right. \tag{4.9}$$

Dans le problème variationnel discret (4.9) $\mathsf{S}^p, \mathsf{S}^u, \mathsf{T}^p, \mathsf{T}^u$, sont les espaces fonctionnels des solutions et des fonctions tests définis par :

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{S}^p & = & H^1\left(]a, b[\right), \\ \mathsf{S}^u & = & H^1\left(]a, b[\right), \\ \mathsf{T}^p & = & H^1\left(]a, b[\right), \\ \mathsf{T}^u & = & H_0^1\left(]a, b[\right), \end{array}$$

avec les espaces de Sobolev :

$$\begin{array}{rcl} H^1(]a, b[) & = & \left\{u \in L^2(]a, b[), \partial_x u \in L^2(]a, b[)\right\}, \\ H_0^1\left(]a, b[\right) & = & \left\{v \in H^1\left(]a, b[\right); v(a) = v(b) = 0\right\}. \end{array}$$

Maillage

Maintenant, nous définissons un découpage du domaine spatial $]a, b[$ pour pouvoir approximer le système d'équations aux dérivées partielles (4.7).

Soit $\mathcal{T}_h$ un maillage du domaine spatial Ω, subdivisé en $N_s + 1$ éléments notés $I_{i+1/2}$, tels que $\mathcal{T}_h = \bigcup_{i=0}^{N_s} I_{i+1/2}$. Chaque élément $I_{i+1/2} = [x_i, x_{i+1}]$ est un intervalle d'extrémités x_i, x_{i+1} et de taille $h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i$, où $(x_i)_{0\leq i\leq N_s+1}$ sont les noeuds du maillage. Enfin $N_s + 2$ représente le nombre de sommets du maillage.

Espaces fonctionnels approchés

Sur chaque intervalle $I_{i+1/2}$, les fonctions tests et les solutions sont approximées par des éléments finis $\mathbb{P}_1$ de Lagrange. Cela signifie notamment, que les inconnues sont situées aux noeuds du maillage. Par conséquent les espaces fonctionnels approchés sont :

– espace des solutions :

$$\mathsf{S}_h^u = \left\{ u_h \in C^0(]a,b[), u_{h|I_{i+1/2}} \in \mathbb{P}_1(I_{i+1/2}), 0 \leq i \leq N_s \right\}, \tag{4.10}$$

$$\mathsf{S}_h^p = \left\{ p_h \in C^0(]a,b[), p_{h|I_{i+1/2}} \in \mathbb{P}_1(I_{i+1/2}), 0 \leq i \leq N_s \right\}, \tag{4.11}$$

– espace des fonctions test :

$$\mathsf{T}_h^u = \left\{ v_h \in C^0(]a,b[), v_{h|I_{i+1/2}} \in \mathbb{P}_1(I_{i+1/2}), 0 \leq i \leq N_s; v_h(a) = v_h(b) = 0 \right\}, \tag{4.12}$$

$$\mathsf{T}_h^p = \left\{ q_h \in C^0(]a,b[), q_{h|I_{i+1/2}} \in \mathbb{P}_1(I_{i+1/2}), 0 \leq i \leq N_s \right\}. \tag{4.13}$$

Problème variationnel approché

Le problème approché que nous allons résoudre se formule de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Trouver } (\mathbf{Y}^n)_{0\leq n\leq N} \in \mathsf{S}_h^p \times \mathsf{S}_h^u \text{ telle que } \forall \mathbf{W}_h \in \mathsf{T}_h^p \times \mathsf{T}_h^u \text{ on ait :} \\ \overline{a}\left(\mathbf{W}_h, \mathbf{Y}_h^{n+1}\right) + \overline{b}\left(\mathbf{W}_h, \mathbf{Y}_h^n\right) + \overline{a}_s\left(\mathbf{W}_h, \mathbf{Y}_h^{n+1}\right) + \overline{b}_s\left(\mathbf{W}_h, \mathbf{Y}_h^n\right) = \overline{s}\left(\mathbf{W}_h\right) + \overline{s}_s\left(\mathbf{W}_h\right), \\ \mathbf{Y}_h^0 = \mathbf{Y}_{0h}, \\ u^n(a) = u_g(t^n) \text{ et } u^n(b) = u_d(t^n). \end{array} \right. \tag{4.14}$$

Dans la formulation variationnelle approchée (4.14), nous pouvons distinguer deux types de contribution :

– celle associée à la formulation Galerkin standard qui fait intervenir les formes bilinéaires $\overline{a}, \overline{b}$ et linéaire $\overline{s}$ approchées,
– et celle associée à la stabilisation de type GLS associée à $\overline{a}_s, \overline{b}_s$ et $\overline{s}_s$ (pour les détails se référer au chapitre 2).

A présent, nous proposons de discuter en détail de l'expression des formes bilinéaires et linéaire approchées $(\overline{a}, \overline{a}_s, \overline{b}, \overline{b}_s, \overline{s}, \overline{s}_s)$ dans les paragraphes qui suivent.

2.3 Construction du schéma numérique

Comme nous l'avons déjà précisé, l'interface est fixée en $x = x_I$ pour tout temps. Toutefois ce n'est qu'une hypothèse de travail et à la fin de ce chapitre nous devrons tenir compte de l'évolution de l'interface dans le temps.

Lorsque l'interface se déplace à chaque instant, elle peut se trouver dans deux situations distinctes (voir Fig. 4.2) :

– dans un premier cas, l'interface est sur un noeud du maillage,
– dans une seconde configuration, l'interface est située entre deux noeuds x_{i_0} et x_{i_0+1} du maillage ; on dira que la maille $I_{i_0+1/2} = [x_i, x_{i+1}]$ est *mixte*.

La méthode que nous allons construire par la suite devra donc être capable de tenir compte de ces deux cas même si l'interface est figée.

2.3.1 Interface sur un noeud

Supposons que l'interface coïncide avec le $i_0^{\text{ème}}$ noeud du maillage (voir la première configuration de la figure Fig. 4.2). Cette configuration est a priori la plus simple. Nous allons

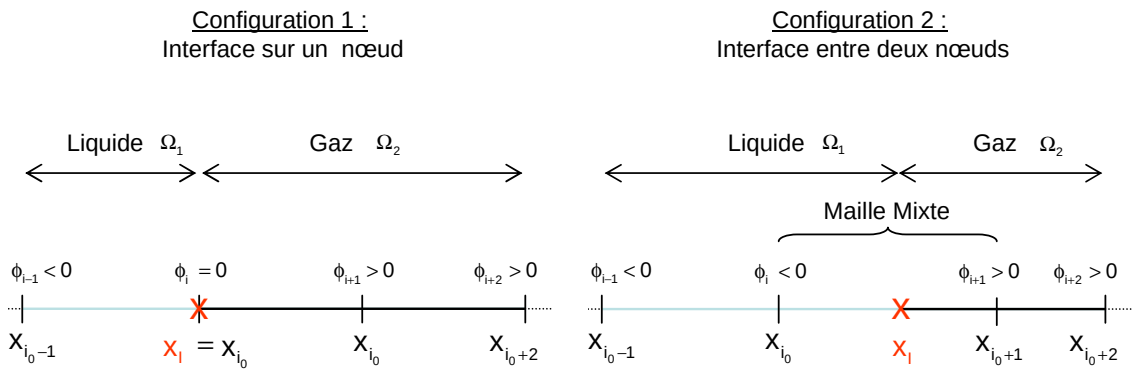


FIG. 4.2 – Positions possibles de l'interface

voir que dans ce cas nous pouvons définir une méthode d'éléments finis stabilisés de façon très naturelle.

Construction de $\overline{a}, \overline{b}$ et $\overline{s}$

Pour les formes bilinéaires et linéaire $\overline{a}, \overline{b}$ et $\overline{s}$ associées à la partie Galerkin de (4.14), nous utilisons pour les définitions habituelles i.e. :

$$\overline{a} = a, \overline{b} = b \text{ et } \overline{s} = s. \tag{4.15}$$

Construction de $\overline{a}_s, \overline{b}_s$ et $\overline{s}_s$

Pour que le schéma numérique soit complet, il faut également définir la contribution de la stabilisation GLS à (4.14). Nous introduisons donc :

$$\overline{a}_s(\mathbf{W}_h, \mathbf{Y}_h) = \sum_{i=0}^{Ns-1} \int_{I_{i+1/2}} {}^t\mathsf{L}(x)\mathbf{W}_h \cdot \tau_{i+1/2} \left[\mathscr{A}_0(x)\frac{\mathbf{Y}_h}{\delta t} + \mathscr{A}(x)\partial_x \mathbf{Y}_h \right] dx, \tag{4.16}$$

$$\overline{b}_s(\mathbf{W}_h, \mathbf{Y}_h) = \sum_{i=0}^{Ns-1} \int_{I_{i+1/2}} {}^t\mathsf{L}(x)\mathbf{W}_h \cdot \tau_{i+1/2}\mathscr{A}_0(x)\frac{\mathbf{Y}_h}{\delta t} dx, \tag{4.17}$$

et

$$\overline{s}_s(\mathbf{W}_h) = \sum_{i=0}^{Ns-1} \int_{I_{i+1/2}} {}^t\mathsf{L}(x)\mathbf{W}_h \cdot \tau_{i+1/2}\mathscr{S}(x) dx. \tag{4.18}$$

Dans les égalités précédentes, l'opérateur L^t est défini par

$${}^t\mathsf{L}(x) \overset{def}{=} {}^t\mathscr{A}_0(x)\frac{\delta}{\delta t} + {}^t\mathscr{A}(x)\partial_x - \partial_x\left({}^t\mathscr{K}(x)\partial_x\right).$$

Ici les fonctions tests sont indépendantes du temps. De plus nous utilisons une approximation $\mathbb{P}_1$. Enfin comme le terme visqueux est constant par morceaux, on a :

$$\begin{aligned} \partial_x\left(\mathscr{K}(x)\partial_x \mathbf{W}_h(x)\right) &= 0, \\ \partial_x\left(\mathscr{K}(x)\partial_x \mathbf{Y}_h^n(x)\right) &= 0. \end{aligned}$$

En utilisant ces simplifications, nous retrouvons une stabilisation de type SUPG avec

$$\overline{a}_s(\mathbf{W}_h, \mathbf{Y}_h) = \sum_{i=0}^{Ns-1} \int_{I_{i+1/2}} {}^t\mathscr{A}(x)\partial_x \mathbf{W}_h \cdot \tau_{i+1/2} \left[\mathscr{A}_0(x)\frac{\mathbf{Y}_h}{\delta t} + \mathscr{A}(x)\partial_x \mathbf{Y}_h \right] dx,$$

$$\overline{b}_s(\mathbf{W}_h, \mathbf{Y}_h) = \sum_{i=0}^{Ns-1} \int_{I_{i+1/2}} {}^t\mathscr{A}(x)\partial_x \mathbf{W}_h \cdot \tau_{i+1/2}\mathscr{A}_0(x)\frac{\mathbf{Y}_h}{\delta t}dx$$

$$\overline{s}_s(\mathbf{W}_h) = \sum_{i=0}^{Ns-1} \int_{I_{i+1/2}} {}^t\mathscr{A}(x)\partial_x \mathbf{W}_h \cdot \tau_{i+1/2}\mathscr{S}(x)dx.$$

La matrice 2×2 des coefficients de stabilisation est notée $\tau_{i+1/2}$ et est définie sur chaque élément $I_{i+1/2} \in \mathcal{T}_h$. Son choix dépend donc fortement de la maille dans laquelle on se trouve. Lorsque l'interface est située sur un noeud du maillage, chaque maille est dans une zone soit totalement compressible, soit incompressible. Il est donc légitime de définir sur tout $I_{i+1/2}$ de $\mathcal{T}_h$:

$$\tau_{i+1/2} = \begin{cases} \tau^1_{i+1/2} \text{ si } I_{i+1/2} \in \Omega_1, \\ \tau^2_{i+1/2} \text{ si } I_{i+1/2} \in \Omega_2. \end{cases} \tag{4.19}$$

Dans la définition précédente, $\tau^1_{i+1/2}$ et $\tau^2_{i+1/2}$ sont les matrices des coefficients de stabilisation associés aux équations de Navier-Stokes incompressible et compressible respectivement. Elles dépendent des caractéristiques du fluide dans lequel on se trouve. Dans le liquide $\tau^1_{i+1/2}$ dépend de ρ_1, μ_1 alors que dans le gaz $\tau^2_{i+1/2}$ dépend de ρ_2, μ_2 ainsi que de la vitesse du son $c = \sqrt{RT}$. Nous rappelons ici, ces quantités (déjà définies au chapitre 2) :

$$\tau^i_{i+1/2} = \mathbf{diag}\left(\tau^i_c, \tau^i_m\right),$$

avec

$$\begin{cases} \tau^1_c = 0, \\ \tau^2_c = \dfrac{h_{i+1/2}c}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \tau^1_m &= \dfrac{\delta t}{\rho_1}, \\ \tau^2_m &= \min\left(\dfrac{\delta t}{\rho_2}, \dfrac{h_{i+1/2}}{2\rho_2 c}\right). \end{cases}$$

Schéma numérique

Pour chaque pas de temps t^n, $0 \leq n \leq N$ les solutions approchées sont définies de la façon suivante :

$$\mathbf{Y}^n_h(x) = \sum_{i=0}^{N_s+1} \varphi_i(x)\mathbf{Y}^n_i, \text{ pour tout } x \in \Omega, \tag{4.20}$$

alors que les fonctions test sont :

$$\mathbf{W}_h(x) = \sum_{i=1}^{N_s} \varphi_i(x)\mathbf{W}_i, \text{ pour tout } x \in \Omega. \tag{4.21}$$

Dans les égalités précédentes, nous désignons par $\mathbf{Y}^n_i$ le vecteur de $\mathbb{R}^2$ des inconnues au noeud i à l'instant t^n ; $\mathbf{W}_i$ est le vecteur de $\mathbb{R}^2$ des fonctions test pour le noeud i ; et φ_i est la $i^{\text{ème}}$ fonction de base. Nous choisissons successivement $\mathbf{W}_h = e_k\varphi_i(x), k = 1, 2$. Les e_k sont les vecteurs de base de $\mathbb{R}^2$ définis par

$$e_k = \begin{pmatrix} \delta_{1k} \\ \delta_{2k} \end{pmatrix}, k = 1, 2.$$

En substituant les expressions de $\mathbf{Y}^n_h$ et $\mathbf{W}_h$ dans la formulation variationnelle approchée (4.14) et en utilisant les définitions précédentes des formes linéaire et bilinéaire (4.15) à (4.18), il est possible de réécrire le système approché (4.14) sous la forme d'un système linéaire de dimension.

Pour cela nous introduisons la matrice carrée A de dimension $2\cdot(N_s+2)\times 2\cdot(N_s+2)$ définie par :

$$\mathsf{A}_{ij} = \overline{a}(\varphi_i,\varphi_j) + \overline{a}_s(\varphi_i,\varphi_j), 0\le i,j\le N_s+1,$$

ainsi que B matrice carrée de taille $2\cdot(N_s+2)\times 2\cdot(N_s+2)$ donnée par :

$$\mathsf{B}_{ij} = \overline{b}(\varphi_i,\varphi_j) + \overline{b}_s(\varphi_i,\varphi_j), 0\le i,j\le N_s+1,$$

et le vecteur F de $\mathbb{R}^{2\cdot N_s}$:

$$\mathsf{F}_i = \overline{s}(\varphi_i) + \overline{s}_s(\varphi_i), 1\le i\le N_s.$$

Nous notons également $\mathsf{Y} = {}^t({}^t\mathbf{Y}_0,...,{}^t\mathbf{Y}_{N_s+1})$ le vecteur de $\mathbb{R}^{2\cdot(N_s+2)}$. Par un calcul direct on montre que chercher $(\mathbf{Y}_h^n)_{0\le n\le N}$ solution de (4.14) est équivalent à trouver la solution $(\mathsf{Y}^n)_{0\le n\le N}$ du problème :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j=0}^{N_s+1} \mathsf{A}_{ij}\mathsf{Y}_j^{n+1} + \mathsf{B}_{ij}\mathsf{Y}_j^n = \mathsf{F}_i, 1\le i\le N_s, \\ u_0^{n+1} = u_g(t^{n+1}) \text{ et } u_{N_s+1}^{n+1} = u_d(t^{n+1}), \\ \qquad\qquad \mathsf{Y}^0 \text{ connu.} \end{array}\right. \tag{4.22}$$

Le système (4.22) donne lieu à un schéma de type différences finies, qu'il peut être utile de détailler pour mettre en évidence le couplage liquide-gaz. Nous supposerons ici pour plus de simplicité, que le domaine spatial est découpé en N_s-1 intervalles réguliers de taille $h_{i+1/2}=\delta x$. Ainsi chaque ligne du système linéaire (4.22) s'écrit :

– pour $1\le i\le i_0$:

$$\begin{array}{rl} & \dfrac{\delta x}{\delta t}\mathscr{A}_0^1\left(\dfrac{1}{6}\delta\mathbf{Y}_{i-1}^{n+1}+\dfrac{2}{3}\delta\mathbf{Y}_i^{n+1}+\dfrac{1}{6}\delta\mathbf{Y}_{i+1}^{n+1}\right)+\dfrac{1}{2}\mathscr{A}^1\left(\mathbf{Y}_{i+1}^{n+1}-\mathbf{Y}_{i-1}^{n+1}\right) \\ + & \dfrac{1}{2\delta t}\mathscr{A}^1\left[\tau_{i-1/2}^1\mathscr{A}_0^1\left(\delta\mathbf{Y}_i^{n+1}+\delta\mathbf{Y}_{i-1}^{n+1}\right)-\tau_{i+1/2}^1\mathscr{A}_0^1\left(\delta\mathbf{Y}_i^{n+1}+\delta\mathbf{Y}_{i+1}^{n+1}\right)\right] \\ - & \dfrac{1}{\delta x}\left[\left(\mathscr{K}^1+\mathscr{A}^1\tau_{i+1/2}^1\mathscr{A}^1\right)\left(\mathbf{Y}_{i+1}^{n+1}-\mathbf{Y}_i^{n+1}\right)+\left(\mathscr{K}^1+\mathscr{A}^1\tau_{i-1/2}^1\mathscr{A}^1\right)\left(\mathbf{Y}_{i-1}^{n+1}-\mathbf{Y}_i^{n+1}\right)\right] \\ = & \left[\delta x I_d+\mathscr{A}^1\left(\tau_{i+1/2}^1-\tau_{i-1/2}^1\right)\right]\mathscr{S}^1, \end{array} \tag{4.23}$$

– pour $i=i_0$:

$$\begin{array}{rl} & \dfrac{\delta x}{\delta t}\left[\mathscr{A}_0^1\left(\dfrac{1}{6}\delta\mathbf{Y}_{i-1}^{n+1}+\dfrac{1}{3}\delta\mathbf{Y}_i^{n+1}\right)+\mathscr{A}_0^2\left(\dfrac{1}{3}\delta\mathbf{Y}_i^{n+1}+\dfrac{1}{6}\delta\mathbf{Y}_{i+1}^{n+1}\right)\right] \\ + & \dfrac{1}{2}\left[\mathscr{A}^1\left(\mathbf{Y}_i^{n+1}-\mathbf{Y}_{i-1}^{n+1}\right)+\mathscr{A}^2\left(\mathbf{Y}_{i+1}^{n+1}-\mathbf{Y}_i^{n+1}\right)\right] \\ + & \dfrac{1}{2\delta t}\left[\mathscr{A}^1\tau_{i-1/2}^1\mathscr{A}_0^1\left(\delta\mathbf{Y}_i^{n+1}+\delta\mathbf{Y}_{i-1}^{n+1}\right)-\mathscr{A}^2\tau_{i+1/2}^2\mathscr{A}_0^2\left(\delta\mathbf{Y}_i^{n+1}+\delta\mathbf{Y}_{i+1}^{n+1}\right)\right] \\ - & \dfrac{1}{\delta x}\left[\left(\mathscr{K}^1+\mathscr{A}^1\tau_{i-1/2}^1\mathscr{A}^1\right)\left(\mathbf{Y}_{i-1}^{n+1}-\mathbf{Y}_i^{n+1}\right)+\left(\mathscr{K}^2+\mathscr{A}^2\tau_{i+1/2}^2\mathscr{A}^2\right)\left(\mathbf{Y}_{i+1}^{n+1}-\mathbf{Y}_i^{n+1}\right)\right] \\ = & \dfrac{\delta x}{2}\left(\mathscr{S}^1+\mathscr{S}^2\right)+\left(\mathscr{A}^2\tau_{i+1/2}^2\mathscr{S}^2-\mathscr{A}^1\tau_{i-1/2}^1\mathscr{S}^1\right), \end{array} \tag{4.24}$$

– pour $i_0+1\le i\le N_s$:

$$
\begin{aligned}
& \frac{\delta x}{\delta t}\mathscr{A}_0^2\left(\frac{1}{6}\delta\mathbf{Y}_{i-1}^{n+1}+\frac{2}{3}\delta\mathbf{Y}_{i}^{n+1}+\frac{1}{6}\delta\mathbf{Y}_{i+1}^{n+1}\right)+\frac{1}{2}\mathscr{A}^2\left(\mathbf{Y}_{i+1}^{n+1}-\mathbf{Y}_{i-1}^{n+1}\right)\\
+ \quad & \frac{1}{2\delta t}\mathscr{A}^2\left[\tau_{i-1/2}^2\mathscr{A}_0^2\left(\delta\mathbf{Y}_{i}^{n+1}+\delta\mathbf{Y}_{i-1}^{n+1}\right)-\tau_{i+1/2}^2\mathscr{A}_0^2\left(\delta\mathbf{Y}_{i}^{n+1}+\delta\mathbf{Y}_{i+1}^{n+1}\right)\right] \qquad (4.25)\\
- \quad & \frac{1}{\delta x}\left[\left(\mathscr{K}^2+\mathscr{A}^2\tau_{i-1/2}^2\mathscr{A}^2\right)\left(\mathbf{Y}_{i-1}^{n+1}-\mathbf{Y}_{i}^{n+1}\right)+\left(\mathscr{K}^2+\mathscr{A}^2\tau_{i+1/2}^2\mathscr{A}^2\right)\left(\mathbf{Y}_{i+1}^{n+1}-\mathbf{Y}_{i}^{n+1}\right)\right]\\
= \quad & \left[\delta x I_d+\mathscr{A}^2\left(\tau_{i+1/2}^2-\tau_{i-1/2}^2\right)\right]\mathscr{S}^2.
\end{aligned}
$$

Dans les expressions qui précèdent, nous avons utilisé la décomposition par domaine des opérateurs $\mathscr{A}_0, \mathscr{A}, \mathscr{K}$ et du second membre $\mathscr{S}$. De plus nous notons :

$$\delta\mathbf{Y}^{n+1}=\mathbf{Y}^{n+1}-\mathbf{Y}^{n}.$$

Comme ici l'interface est alignée avec le noeud i_0 du maillage, on note que seule la ligne i_0 (4.25) du schéma numérique (4.22) est affectée par le couplage. Dans ce cas on distingue deux contributions, l'une associée au liquide Ω_1 et l'autre associée au gaz Ω_2. Pour les autres lignes (4.23) et (4.25), on construit un schéma associé à la résolution des équations de Navier-Stokes soit incompressible, soit compressible.

Illustration numérique

A présent nous allons tester le schéma numérique proposé (4.23) à (4.25).

Nous considérons un domaine de 1 m de long rempli de deux fluides séparés par une interface située en $x_I = 0.5$m. Le fluide à gauche de l'interface est un liquide tandis que le fluide à droite est un gaz.

Le liquide est un fluide incompressible de densité constante ; $\rho_1 = 10$kg.m^{-3}. Le gaz, quant à lui est un fluide compressible régit par la loi d'état des gaz parfaits. Pour simplifier le problème nous avons supposé, d'une part que l'écoulement est isotherme ainsi la vitesse c du son dans le gaz est constante et telle que $c = 317$m.s^{-1}, d'autre part, la densité du gaz est imposée par $\rho_2 = 1$kg.m^{-3}. Enfin dans ce paragraphe les deux fluides considérés sont non visqueux i.e. $\mu_1 = \mu_2 = 0kg.m^{-1}.s^{-1}$. Le gaz et le liquide sont initialement au repos à la vitesse $u = 0$m.s^{-1} et à la pression constante $p = p_{atm} = 10^5$Pa. On injecte au cours du temps du liquide en $x = 0$m à la vitesse $u = t$ m.s^{-1}. Par contre en $x = 1$m, la vitesse et la pression vérifient des conditions aux limites transparentes. Le domaine spatial est découpé en 1000 intervalles. Par hypothèse, l'interface est figée et est alignée avec le maillage. Enfin le temps varie de $t = 0$ms à $t = 1$ms.

Bien que l'interface soit figée, ce cas test va nous permettre de voir comment se comporte le schéma numérique décrit précédemment pour le couplage compressible-incompressible lorsque l'interface est alignée avec le maillage.
Les résultats représentés sur la figure Fig. 4.3 montrent que le schéma numérique proposé pour la résolution du problème (4.4) permet de calculer la bonne solution lorsque l'interface est située sur un noeud. En effet, quelque soit le modèle considéré, quasi-linéaire ou symétrique, la solution numérique se superpose avec la solution exacte (calculée en annexe B.1) qui est donnée par :

$$
u(x,t)=\begin{cases} t & \text{si } x\le x_I\\ t-\dfrac{x-x_I}{c} & \text{si } x-x_I\le ct,\\ 0 & \text{si } x-x_I>ct \end{cases} \qquad (4.26)
$$

et

$$p(x,t) = \begin{cases} -\rho_1(x - x_I) + \rho_2 ct + p_{atm} & \text{si } x \leq x_I \\ \rho_2 c \left(t - \dfrac{x - x_I}{c} \right) + p_{atm}, & \text{si } x - x_I \leq ct, \\ p_{atm} & \text{si } x - x_I > ct. \end{cases} \tag{4.27}$$

Convaincus du bon fonctionnement du schéma EFS présenté lorsque l'interface est située sur un noeud du maillage, nous allons désormais étendre cette approche au cas où l'interface se situe entre deux noeuds du maillage.

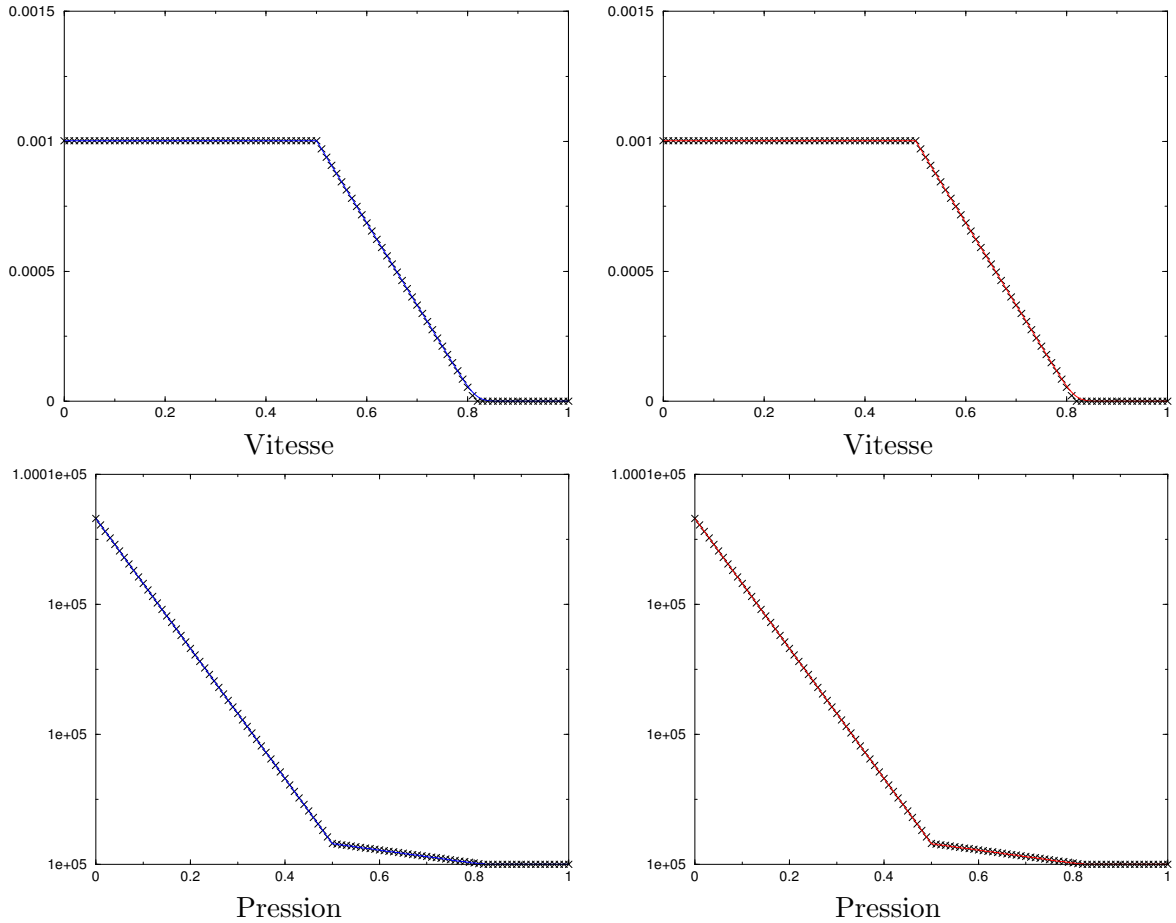


FIG. 4.3 – Injection de liquide dans un tuyau ouvert contenant du gaz à $t = 1$ms. Modèle symétrique (courbes bleues), modèle quasi-linéaire (courbes rouges) et solution exacte (croix noires).

2.3.2 Interface entre deux noeuds

Nous supposons désormais que l'interface n'est plus alignée sur un noeud et se situe dans la maille mixte $I_{i_0+1/2} = [x_{i_0}, x_{i_0+1}]$. Dans ce cas, il est plus compliqué de construire les formes bilinaires et linéaires introduites dans le problème variationnel approché (4.14), à cause de la discontinuité des opérateurs semi-discret $\mathsf{L_i}, \mathsf{L_e}$ et du second membre S discontinus à l'interface.

Intégration exacte

Une première idée est d'employer pour les deux formes bilinéaires $\overline{a}, \overline{b}$ et linéaire $\overline{s}$ les mêmes

définitions qu'au paragraphe précédent (4.15). Du fait de la discontinuité de $\mathsf{L_i}, \mathsf{L_e}$ et S, les intégrales suivantes sur la maille mixte $I_{i_0+1/2}$ sont "discontinues" :

$$\int_{I_{i_0+1/2}} \mathbf{W}_h \cdot \left[\mathscr{A}_0(x) \frac{\mathbf{Y}_h^{n+1}}{\delta t} + \mathscr{A}(x) \partial_x \mathbf{Y}_h^{n+1} \right] + \partial_x \mathbf{W}_h \cdot \mathscr{K}(x) \partial_x \mathbf{Y}_h^{n+1} dx, \tag{4.28}$$

$$\int_{I_{i_0+1/2}} \mathbf{W}_h \mathscr{A}_0(x) \frac{1}{\delta t} dx, \tag{4.29}$$

et

$$\int_{I_{i_0+1/2}} \mathbf{W}_h \cdot \mathscr{S}(x) dx. \tag{4.30}$$

Cela signifie que nous devons intégrer une intégrande discontinue dans la maille mixte. Pour contourner cette difficulté nous pouvons adopter une méthode *d'intégration exacte* qui s'est avérée utile pour la construction du schéma numérique dans [Mar06, Smo01]. Cette approche s'appuie en 1D sur le découpage de la maille mixte $I_{i_0+1/2} = [x_{i_0}, x_{i_0+1}]$ en deux contributions :

- l'une $I_1 = [x_{i_0}, x_I]$ incompressible,
- l'autre $I_2 = [x_I, x_{i_0+1}]$ compressible.

En effectuant cela, les intégrales discontinues peuvent être scindées en deux. Prenons par exemple le terme de masse :

$$\int_{I_{i_0+1/2}} \mathbf{W}_h \cdot \mathscr{A}_0(x) \frac{1}{\delta t} \mathbf{Y}_h^{n+1} dx = \int_{I_1} \mathbf{W}_h \cdot \mathscr{A}_0^1 \frac{1}{\delta t} \mathbf{Y}_h^{n+1} + \int_{I_2} \mathbf{W}_h \cdot \mathscr{A}_0^2 \frac{1}{\delta t} \mathbf{Y}_h^{n+1} dx.$$

Par la suite il s'agit d'évaluer les intégrales sur chaque contribution I_1 et I_2.

Le principe de la méthode d'intégration exacte a l'avantage d'être relativement simple. De plus lorsque l'interface est alignée avec un noeud du maillage elle dégénère sur le schéma numérique introduit au paragraphe précédent qui, nous l'avons vu, donne des résultats satisfaisants.
Toutefois sa mise en oeuvre pour le calcul des intégrales discontinues (4.28),(4.29) et (4.30) peut s'avérer complexe et fastidieuse surtout en plusieurs dimensions de l'espace. De plus cette technique ne permet pas de résoudre des équations à coefficients discontinus et non-linéaires comme le vrai système physique (4.1) qui sera étudié par la suite. Par conséquent, nous devons envisager une autre approche.

Méthode de type Ghost Fluid

Pour traiter numériquement les conditions de transmission pour des écoulements présentant des interfaces, certains auteurs utilisent une méthode d'interface mince comme la méthode Ghost Fluid. Cette méthode a été initialement employée par Fedkiw dans [FMO98] pour traiter des écoulements diphasiques compressible-compressible puis étendue à des chocs, déflagrations et détonations [FAMO99] ainsi qu'à des écoulements diphasiques de type compressible-incompressible [CFA01]. Cette méthode a été également utilisée dans [CHMO96, TB05, Coy07, Gué07]. Ici nous nous inspirons des travaux de Fedkiw afin de traiter les discontinuités des opérateurs dans la maille mixte.

Principe

Le principe de la méthode Ghost Fluid est d'étaler artificiellement la région Ω_i occupée par le fluide i sur un voisinage de l'interface jusqu'au noeud le plus proche. Ici, nous avons étendu le liquide jusqu'au noeud $i_0 + 1$ alors que le gaz a été étendu jusqu'au noeud i_0, comme nous

l'avons représenté sur la figure FIG. 4.4. Nous dirons alors que la maille mixte $[x_{i_0}, x_{i_0+1}]$ est une *maille fantôme*. Chaque noeud de la maille fantôme se voit attribuer la pression et la vitesse du fluide réel, mais la densité, la viscosité et le coefficient thermodynamique du fluide fantôme.

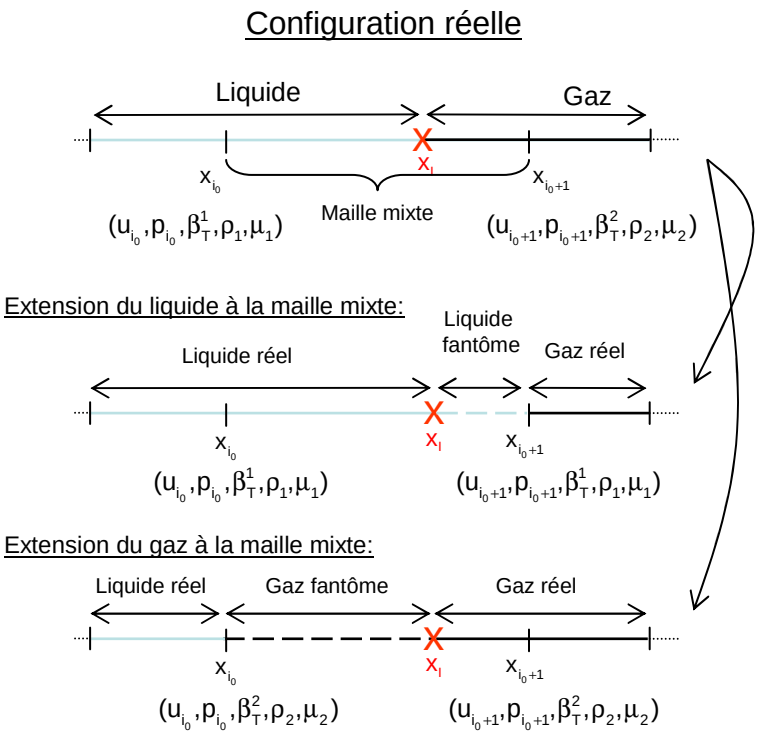


FIG. 4.4 – Principe de la méthode "Ghost Fluid"

En utilisant une approche de type Ghost Fluid, il n'y a plus de maille mixte $[x_{i_0}, x_{i_0+1}]$. En effet celle-ci est soit totalement incompressible soit totalement compressible. Dans ce cas, nous pouvons utiliser le schéma numérique mis en oeuvre pour la résolution de (4.4) lorsque l'interface est positionnée sur un noeud du maillage.
Nous allons donc procéder comme il suit :

- pour les noeuds n'appartenant pas à la maille mixte, nous construisons un schéma numérique soit de type incompressible ($1 \leq i \leq i_0 - 1$) soit de type compressible ($i_0 + 2 \leq i \leq N_s - 1$) en utilisant les quantités réelles ;
- par contre pour i_0 et $i_0 + 1$, nous allons nous ramener à des schémas soit strictement compressible ou incompressible soit au cas d'un schéma couplé, en utilisant les propriétés du fluide fantôme.

Construction de $\overline{a}, \overline{b}$ et $\overline{s}$

Dans l'approche Ghost Fluid, nous définissons les formes bilinéaires et linéaires qui interviennent dans (4.14) respectivement par :

$$\overline{a}(\mathbf{W}_h, \mathbf{Y}_h) = \sum_{i=1}^{N_s-1} \int_{I_{i+1/2}} \mathbf{W}_h \cdot \left(\overline{\mathscr{A}}_{0i+1/2} \frac{\mathbf{Y}_h}{\delta t} + \overline{\mathscr{A}}_{i+1/2} \partial_x \mathbf{Y}_h \right) + \partial_x \mathbf{W}_h \cdot \overline{\mathscr{K}}_{i+1/2} \partial_x \mathbf{Y}_h dx,$$

$$\overline{b}(\mathbf{W}_h, \mathbf{Y}_h) = \sum_{i=1}^{N_s-1} \int_{I_{i+1/2}} \mathbf{W}_h \cdot \overline{\mathscr{A}_0}_{i+1/2} \frac{\mathbf{Y}_h}{\delta t} dx,$$

et

$$\overline{s}(\mathbf{W}_h) = \sum_{i=1}^{N_s-1} \int_{I_{i+1/2}} \mathbf{W}_h \cdot \overline{\mathscr{S}}_{i+1/2} dx.$$

Dans les définitions précédentes, nous avons introduit les quantités définies sur chaque intervalle $I_{i+1/2} \in \mathcal{T}_h$ par :

$$\overline{\mathscr{A}_0}_{i+1/2} = \begin{cases} \mathscr{A}_0^1 & \text{si } i \leq i_0 - 1, \\ \mathscr{A}_0^* & \text{si } i = i_0, \\ \mathscr{A}_0^2 & \text{si } i \geq i_0 + 1, \end{cases}, \overline{\mathscr{A}}_{i+1/2} = \begin{cases} \mathscr{A}^1 & \text{si } i \leq i_0 - 1, \\ \mathscr{A}^* & \text{si } i = i_0, \\ \mathscr{A}^2 & \text{si } i \geq i_0 + 1, \end{cases},$$

$$\overline{\mathscr{K}}_{i+1/2} = \begin{cases} \mathscr{K}^1 & \text{si } i \leq i_0 - 1, \\ \mathscr{K}^* & \text{si } i = i_0, \\ \mathscr{K}^2 & \text{si } i \geq i_0 + 1, \end{cases} \text{ et } \overline{\mathscr{S}}_{i+1/2} = \begin{cases} \mathscr{S}^1 & \text{si } i \leq i_0 - 1, \\ \mathscr{S}^* & \text{si } i = i_0, \\ \mathscr{S}^2 & \text{si } i \geq i_0 + 1. \end{cases}$$

Ici, les quantités indiquées par une étoile sont les *quantités fantômes* dans la maille mixte. Nous discuterons de leur valeur dans un prochain paragraphe. L'avantage d'une telle approche est que les intégrales élémentaires qui interviennent dans le calcul des formes bilinéaires approchées sont simples à calculer. En effet l'intégrande sur la maille mixte est toujours "continue".

Construction de $\overline{a}_s, \overline{b}_s$ et $\overline{s}_s$

Par analogie avec la contribution de Galerkin, nous proposons des termes de stabilisation formulées de la façon suivante :

$$\overline{a}_s(\mathbf{W}_h, \mathbf{Y}_h) = \sum_{i=0}^{Ns-1} \int_{I_{i+1/2}} {}^t\overline{\mathscr{A}}_{i+1/2} \partial_x \mathbf{W}_h \cdot \overline{\tau}_{i+1/2} \left[\overline{\mathscr{A}_0}_{i+1/2} \frac{\mathbf{Y}_h}{\delta t} + \overline{\mathscr{A}}_{i+1/2} \partial_x \mathbf{Y}_h \right] dx,$$

et

$$\overline{b}_s(\mathbf{W}_h, \mathbf{Y}_h) = \sum_{i=0}^{Ns-1} \int_{I_{i+1/2}} {}^t\overline{\mathscr{A}}_{i+1/2} \partial_x \mathbf{W}_h \cdot \overline{\tau}_{i+1/2} \overline{\mathscr{A}_0}_{i+1/2} \frac{\mathbf{Y}_h}{\delta t} dx,$$

et

$$\overline{s}_s(\mathbf{W}_h) = \sum_{i=0}^{Ns-1} \int_{I_{i+1/2}} {}^t\overline{\mathscr{A}}_{i+1/2} \partial_x \mathbf{W}_h \cdot \overline{\tau}_{i+1/2} \overline{\mathscr{S}}_{i+1/2} dx.$$

De la même façon que pour les matrices jacobiennes, la matrice des coefficients de stabilisation est constante par mailles et définie par :

$$\overline{\tau}_{i+1/2} = \begin{cases} \tau^1 & \text{si } i \leq i_0 - 1, \\ \tau* & \text{si } i = i_0, \\ \tau^2 & \text{si } i \geq i_0 + 1, \end{cases}$$

où la quantité étoilée est une grandeur fantôme.

Schéma numérique

En utilisant la décomposition éléments finis de $\mathbf{Y}_h^n$ et en choisissant de façon appropriée la fonction test $\mathbf{W}_h$ nous avons vu que le problème variationnel approché était équivalent à un système linéaire qui peut s'écrire en termes d'un schéma numérique aux différences finies (voir (4.22)). Etant donné que l'interface appartient au support des fonctions test φ_{i_0} et φ_{i_0+1}, seules

les lignes i_0 et i_0+1 du schéma numérique sont affectées par le couplage. Elles sont données par :

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta x}{\delta t}\left[\mathscr{A}_0^1\left(\frac{1}{6}\delta\mathbf{Y}_{i_0-1}^{n+1}+\frac{1}{3}\delta\mathbf{Y}_{i_0}^{n+1}\right)+\mathscr{A}_0^*\left(\frac{1}{3}\delta\mathbf{Y}_{i_0}^{n+1}+\frac{1}{6}\delta\mathbf{Y}_{i_0+1}^{n+1}\right)\right] \\
+ & \frac{1}{2}\left[\mathscr{A}^1\left(\mathbf{Y}_{i_0}^{n+1}-\mathbf{Y}_{i_0-1}^{n+1}\right)+\mathscr{A}^*\left(\mathbf{Y}_{i_0+1}^{n+1}-\mathbf{Y}_{i_0}^{n+1}\right)\right] \\
+ & \frac{1}{2\delta t}\left[\mathscr{A}^1\tau_{i_0-1/2}^1\mathscr{A}_0^1\left(\delta\mathbf{Y}_{i_0}^{n+1}+\delta\mathbf{Y}_{i_0-1}^{n+1}\right)-\mathscr{A}^*\tau_{i_0+1/2}^*\mathscr{A}_0^*\left(\delta\mathbf{Y}_{i_0}^{n+1}+\delta\mathbf{Y}_{i_0+1}^{n+1}\right)\right] \\
- & \frac{1}{\delta x}\left[\left(\mathscr{K}^1+\mathscr{A}^1\tau_{i_0-1/2}^1\mathscr{A}^1\right)\left(\mathbf{Y}_{i_0-1}^{n+1}-\mathbf{Y}_{i_0}^{n+1}\right)+\left(\mathscr{K}^*+\mathscr{A}^*\tau_{i_0+1/2}^*\mathscr{A}^*\right)\left(\mathbf{Y}_{i_0+1}^{n+1}-\mathbf{Y}_{i_0}^{n+1}\right)\right] \\
= & \frac{\delta x}{2}\left(\mathscr{S}^1+\mathscr{S}^*\right)+\left(\mathscr{A}^*\tau_{i_0+1/2}^*\mathscr{S}^*-\mathscr{A}^1\tau_{i_0+1-2}^1\mathscr{S}^1\right),
\end{aligned} \tag{4.31}$$

et

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta x}{\delta t}\left[\mathscr{A}_0^*\left(\frac{1}{6}\delta\mathbf{Y}_{i_0}^{n+1}+\frac{1}{3}\delta\mathbf{Y}_{i_0+1}^{n+1}\right)+\mathscr{A}_0^2\left(\frac{1}{3}\delta\mathbf{Y}_{i_0+1}^{n+1}+\frac{1}{6}\delta\mathbf{Y}_{i_0+2}^{n+1}\right)\right] \\
+ & \frac{1}{2}\left[\mathscr{A}^*\left(\mathbf{Y}_{i_0+1}^{n+1}-\mathbf{Y}_{i_0}^{n+1}\right)+\mathscr{A}^2\left(\mathbf{Y}_{i_0+2}^{n+1}-\mathbf{Y}_{i_0}^{n+1}\right)\right] \\
+ & \frac{1}{2\delta t}\left[\mathscr{A}^*\tau_{i_0+1/2}^*\mathscr{A}_0^*\left(\delta\mathbf{Y}_{i_0+1}^{n+1}+\delta\mathbf{Y}_{i_0}^{n+1}\right)-\mathscr{A}^2\tau_{i_0+3/2}^2\mathscr{A}_0^2\left(\delta\mathbf{Y}_{i_0+1}^{n+1}+\delta\mathbf{Y}_{i_0+2}^{n+1}\right)\right] \\
- & \frac{1}{\delta x}\left[\left(\mathscr{K}^*+\mathscr{A}^*\tau_{i_0+1/2}^*\mathscr{A}^*\right)\left(\mathbf{Y}_{i_0}^{n+1}-\mathbf{Y}_{i_0+1}^{n+1}\right)+\left(\mathscr{K}^2+\mathscr{A}^2\tau_{i_0+3/2}^2\mathscr{A}^2\right)\left(\mathbf{Y}_{i_0+2}^{n+1}-\mathbf{Y}_{i_0+1}^{n+1}\right)\right] \\
= & \frac{\delta x}{2}\left(\mathscr{S}^*+\mathscr{S}^2\right)+\left(\mathscr{A}^2\tau_{i_0+3/2}^2\mathscr{S}^2-\mathscr{A}^*\tau_{i_0+1/2}^*\mathscr{S}^*\right).
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Pour les autres lignes on utilise un schéma de type incompressible (4.23) quand $i \leq i_0-1$ ou compressible (4.25) lorsque $i \geq i_0+2$.

Grandeurs fantômes

A présent nous allons discuter du choix des grandeurs fantômes indiquées par *. Pour cela il est possible de procéder de deux façons différentes.

Méthode n°1 :
Une première possibilité consiste à supposer que la contribution au noeud i_0 de la maille fantôme est de type incompressible (cf Fig. 4.5). Par contre pour le noeud i_0+1 on va considérer que la contribution de la maille mixte fantôme est compressible (cf Fig. 4.5). Pour résumer on se ramène à la construction d'un schéma incompressible en i_0 et d'un schéma compressible en i_0+1.

Méthode n°2 :
Une seconde alternative est de se ramener fictivement à une interface en i_0 et en i_0+1 (voir Fig. 4.6), configuration pour laquelle le couplage fonctionne (cf. section précédente). Concrètement, cela signifie qu'en i_0 et en i_0+1 on construit des schémas numériques couplés du type (4.25). Ainsi, la maille fantôme $[x_{i_0}, x_{i_0+1}]$ est supposée compressible du point de vue du noeud i_0. Alors que cette même maille est vue comme une maille incompressible du point de vue du noeud i_0+1 (cf Fig. 4.6).

L'ensemble des correspondances entre la nature de la maille mixte fantôme et la méthode choisie sont récapitulées dans le tableau Tab. 4.1.

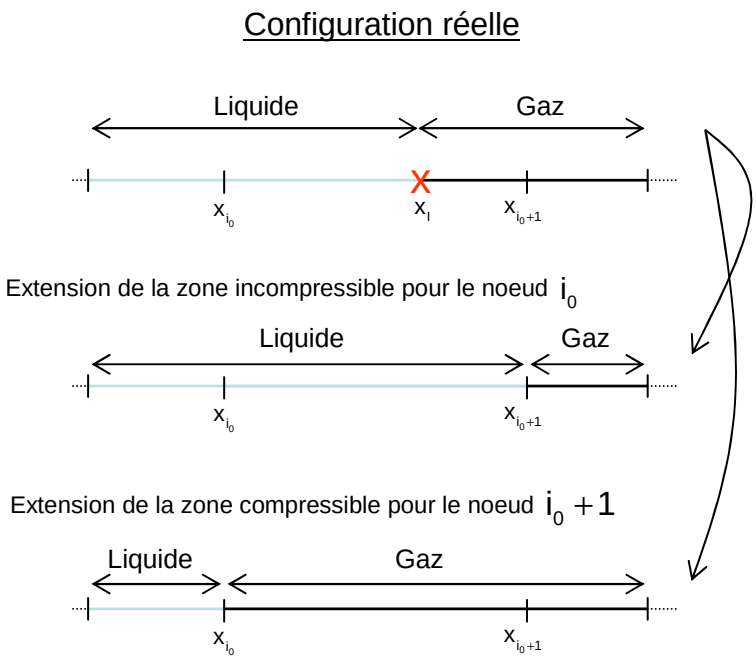


FIG. 4.5 – Principe de la méthode 1

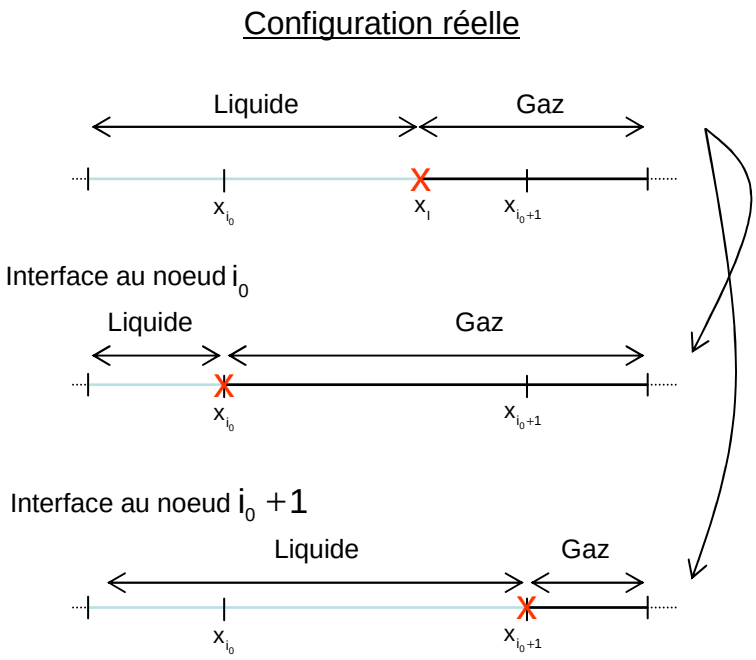


FIG. 4.6 – Principe de la méthode 2

Méthode	**Contribution au noeud i_0**	**Contribution au noeud $i_0 + 1$**
1	$* = 1$	$* = 2$
2	$* = 2$	$* = 1$

TAB. 4.1 – Correspondances entre la nature de la maille mixte fantôme et la méthode GFM choisie

La méthode Ghost Fluid a priori simple, dégénère mal en pratique. En effet, lorsque l'interface s'approche d'un noeud du maillage, le schéma numérique obtenu ne coïncide pas avec celui introduit lorsque l'interface est alignée avec le maillage.
Prenons par exemple le cas où l'interface est proche du noeud $i_0 + 1$ i.e. $x_I \to x_{i_0+1}$. Pour la première méthode, le schéma au noeud i_0+1 se ramène à la résolution des équations de Navier-Stokes compressible, cela n'est pas conforme avec la configuration réelle qui correspond à un problème couplé (voir FIG. 4.6). Pour la second méthode par contre, le schéma au noeud i_0 est un schéma couplé, alors que dans la réalité, nous devrions retrouver un schéma complètement incompressible (voir FIG. 4.7).
Enfin cette méthode très simple en 1D, aurait été complexe à étendre en plusieurs dimensions de l'espace sur un maillage non structuré. Pour ces diverses raisons on ne retiendra pas cette méthode pour la suite de notre étude.

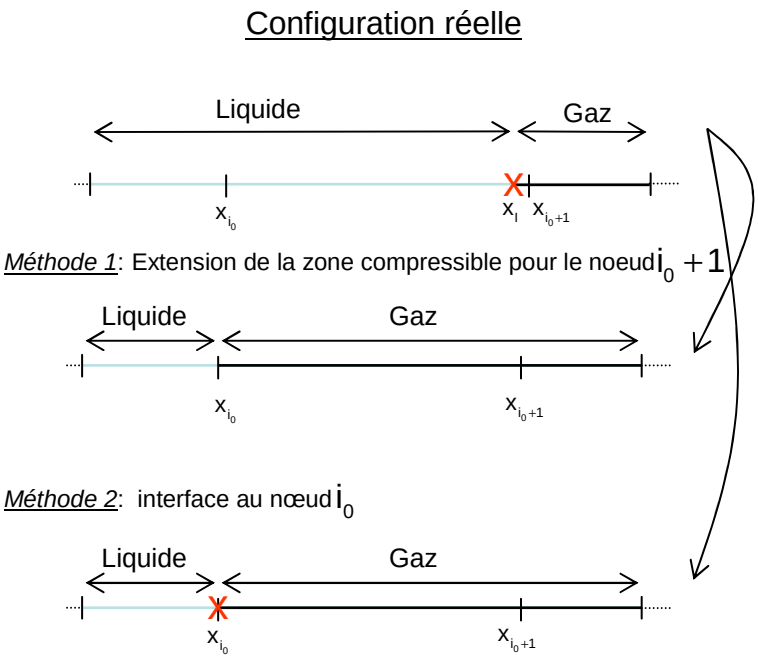


FIG. 4.7 – Limites de l'approche de type "Ghost Fluid"

Nous avons vu dans ce paragraphe que la construction du schéma numérique peut s'avérer délicate notamment lorsque l'interface n'est pas alignée avec le maillage. En effet la difficulté est de savoir calculer correctement la contribution de la maille mixte. Dans ce cas la méthode d'intégration exacte et la GFM ne sont pas satisfaisantes. Nous proposons par la suite d'explorer une troisième voie, qui s'appuie sur la construction de grandeurs moyennées calculées sur chaque

maille du maillage.

2.3.3 Méthode des moyennes

Nous présentons dans ce paragraphe la méthode numérique EFS que nous avons développée pour la résolution du problème (4.4) lorsque l'interface est située soit sur un noeud, soit entre deux noeuds du maillage.

Avant de rentrer dans les détails, une première précision s'impose. Comme nous l'avons évoqué précédemment la difficulté de la construction du schéma numérique est due à la discontinuité des quantités $\mathsf{L}_i, \mathsf{L}_e$ et S, en particulier lorsque l'interface n'est pas alignée avec le maillage.

Il est donc utile de formaliser la dépendance de $\mathsf{L}_i, \mathsf{L}_e$ et S en fonction des quantités discontinues à l'interface qui sont : le coefficient de compressibilité isotherme β_T, la densité ρ, la viscosité μ. Nous pouvons écrire :

$$\mathsf{L}_i = \mathscr{A}_0 \frac{1}{\delta t} + \mathscr{A}\partial_x - \partial_x\left(\mathscr{K}\partial_x\right) = \tilde{\mathscr{A}_0}(\beta_T, \rho)\frac{1}{\delta t} + \tilde{\mathscr{A}}(\rho)\partial_x - \partial_x\left(\tilde{\mathscr{K}}(\mu)\partial_x\right) = \tilde{\mathsf{L}}_i(\beta_T, \rho, \mu),$$

$$\mathsf{L}_e = \mathscr{A}_0 \frac{1}{\delta t} = \tilde{\mathscr{A}_0}(\beta_T, \rho)\frac{1}{\delta t} = \tilde{\mathsf{L}}_e(\beta_T, \rho, \mu),$$

et

$$\mathsf{S} = \mathscr{S} = \tilde{\mathscr{S}}(\rho) = \tilde{\mathsf{S}}(\rho)^1.$$

Ici, le coefficient thermodynamique β_T traduit une discontinuité entre le type des modèles utilisés pour le liquide et le gaz contrairement aux grandeurs ρ et μ. Par conséquent, nous allons traiter séparément ces trois sources de discontinuités.

Discontinuité de β_T

Dans une première partie on supposera que μ et ρ sont constantes i.e. $\rho_1 = \rho_2$ et $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Le terme visqueux étant supposé nul la matrice $\mathscr{K}$ l'est également. De plus la matrice $\mathscr{A}$ et le second membre $\mathscr{S}$ sont constants. La discontinuité sur $\mathscr{A}_0$ se résume à la discontinuité du coefficient de compressibilité isotherme β_T :

$$\tilde{\mathsf{L}}_i(\beta_T) = \tilde{\mathscr{A}_0}(\beta_T)\frac{1}{\delta t} + \tilde{\mathscr{A}}\partial_x,$$

$$\tilde{\mathsf{L}}_e(\beta_T) = \tilde{\mathscr{A}_0}(\beta_T)\frac{1}{\delta t},$$

et

$$\tilde{\mathsf{S}} = \mathscr{S}.$$

L'objectif de ce paragraphe est de traiter la discontinuité de la matrice $\tilde{\mathscr{A}_0}$.

Construction de $\overline{a}, \overline{b}$ et $\overline{s}$

L'approche proposée s'appuie sur la construction d'une moyenne de la fonction β_T dans la maille mixte, à partir de laquelle on définit une nouvelle matrice $\mathscr{A}_0$ qui est constante donc continue dans cette maille. Pour cela nous avons besoin de définir une *fonction couleur* comme cela est fait dans l'approche VOF [HN81].

[1] Ici seuls les efforts dus à la gravité sont considérés.

Definition 1 *On appellera fonction couleur, une fonction constante sur chaque maille K_e de $\mathcal{T}_h$ qui représente la proportion de fluide 2 (gaz) dans une maille. Elle est définie par :*

$$\begin{array}{rccl} \varepsilon_{i+1/2}: & [a,b] & \mapsto &]0,1[\\ & x & \to & \dfrac{V^2_{i+1/2}}{V_{i+1/2}} \quad si\ x \in I_{i+1/2} \in \mathcal{T}_h. \end{array} \tag{4.33}$$

La quantité $V^2_{i+1/2}$ est le volume de fluide 2 (gaz) dans la maille $I_{i+1/2}$ de volume $V_{i+1/2}$.

En utilisant la fonction couleur, nous considérons la moyenne arithmétique de β_T sur $I_{i+1/2}$ notée $\beta_{T,i+1/2}$ et donnée par :

$$\beta_{T,i+1/2} = (1-\varepsilon_{i+1/2})\beta^1_T + \varepsilon_{i+1/2}\beta^2_T, \tag{4.34}$$

avec $\beta^1_T = 0$ et $\beta^2_T = \dfrac{1}{\rho_2 c^2}$ associés respectivement au liquide et au gaz. Ici $\beta_{T,i+1/2}$ est constant par maille. Dans une maille strictement incompressible on retrouve bien $\beta_T = 0$ alors que dans une maille compressible nous avons $\beta_T = \dfrac{1}{\rho_2 c^2}$.

En s'appuyant sur (4.34), nous construisons les quantités constantes par maille :

$$\tilde{\mathsf{L}}(\beta_{T,i+1/2}) = \tilde{\mathscr{A}}_0(\beta_{T,i+1/2})\frac{1}{\delta t} + \tilde{\mathscr{A}}\partial_x, \text{ et } \tilde{\mathsf{S}}(\beta_{T,i+1/2}) = \tilde{\mathscr{S}}.$$

A partir de ces deux quantités nous proposons d'utiliser les définitions de $\overline{a}$ et $\overline{s}$ suivantes :

$$\overline{a}(\mathbf{W}_h,\mathbf{Y}_h) = \sum_{i=1}^{N_s-1}\int_{I_{i+1/2}} \mathbf{W}_h\cdot\left[\tilde{\mathscr{A}}_0(\beta_{T,i+1/2})\frac{\mathbf{Y}_h}{\delta t} + \tilde{\mathscr{A}}\partial_x\mathbf{Y}_h\right]dx, \tag{4.35}$$

$$\overline{b}(\mathbf{W}_h,\mathbf{Y}_h) = \sum_{i=1}^{N_s-1}\int_{I_{i+1/2}} \mathbf{W}_h\cdot\tilde{\mathscr{A}}_0(\beta_{T,i+1/2})\frac{\mathbf{Y}_h}{\delta t}dx, \tag{4.36}$$

$$\overline{s}(\mathbf{W}_h) = \sum_{i=1}^{N_s-1}\int_{I_{i+1/2}} \mathbf{W}_h\cdot\tilde{\mathscr{S}}dx. \tag{4.37}$$

Construction de $\overline{a}_s, \overline{b}_s$ et $\overline{s}_s$

Par analogie avec la méthode proposée pour traiter la partie Galerkin du problème approché (4.14), nous utilisons pour la stabilisation :

$$\overline{a}_s(\mathbf{W}_h,\mathbf{Y}_h) = \sum_{i=0}^{Ns-1}\int_{I_{i+1/2}} {}^t\tilde{\mathscr{A}}\partial_x\mathbf{W}_h\cdot\tau_{i+1/2}\left[\tilde{\mathscr{A}}_0(\beta_{T,i+1/2})\frac{\mathbf{Y}_h}{\delta t} + \tilde{\mathscr{A}}\partial_x\mathbf{Y}^{n+1}_h\right]dx, \tag{4.38}$$

$$\overline{b}_s(\mathbf{W}_h,\mathbf{Y}_h) = \sum_{i=0}^{Ns-1}\int_{I_{i+1/2}} {}^t\tilde{\mathscr{A}}\partial_x\mathbf{W}_h\cdot\tau_{i+1/2}\tilde{\mathscr{A}}_0(\beta_{T,i+1/2})\frac{\mathbf{Y}_h}{\delta t}dx, \tag{4.39}$$

$$\overline{s}_s(\mathbf{W}_h) = \sum_{i=0}^{Ns-1}\int_{I_{i+1/2}} {}^t\tilde{\mathscr{A}}\partial_x\mathbf{W}_h\cdot\tau_{i+1/2}\tilde{\mathscr{S}}dx. \tag{4.40}$$

Il reste toutefois à déterminer correctement la matrice des coefficients de stabilisation $\tau_{i+1/2}$ dans chaque maille et en particulier dans la maille mixte.

Le système d'équations que nous résolvons par le biais de (4.14) en utilisant (4.38) et (4.39) peut être vu dans chaque maille comme un système de type Navier-Stokes compressible parametré par la fonction couleur $\varepsilon_{i+1/2}$. Pour le modèle symétrique cela donne :

$$\begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_{i+1/2}}{\rho_2 c^2} & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \partial_t \mathbf{Y} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_x \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho g \end{pmatrix}, \quad \forall I_{i+1/2} \in \mathcal{T}_h.$$

Ce système a pour valeurs propres :

$$\pm c_{i+1/2} \text{ avec } c_{i+1/2} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{i+1/2}}},$$

où $c_{i+1/2}$ est la vitesse des ondes acoustiques. Pour ce système il semble naturel de construire une matrice des coefficients de stabilisation de type compressible telle que :

$$\tau_{i+1/2} = \tau^2_{i+1/2}(c_{i+1/2}). \tag{4.41}$$

Il est intéressant de regarder comment dégénère $c_{i_0+1/2}$ selon la position de l'interface dans la maille mixte $[x_{i_0}, x_{i_0+1}]$. Sachant que la valeur de la fonction couleur $\varepsilon_{i_0+1/2}$ dans la maille mixte est donnée par :

$$\varepsilon_{i_0+1/2} = \frac{V^2_{i_0+1/2}}{V_{i_0+1/2}} = \frac{x_{i_0+1} - x_I}{x_{i_0+1} - x_{i_0}}, \tag{4.42}$$

on trouve que :

- si $x_{i_0} = x_I$ alors la maille $[x_{i_0}, x_{i_0+1}]$ est strictement compressible,
- si $x_{i_0+1} = x_I$ alors la maille $[x_{i_0}, x_{i_0+1}]$ est strictement incompressible,
- enfin si $x_{i_0} < x_I < x_{i_0+1}$ la maille est mixte.

Nous avons donc :

$$\lim_{x_I \to x_{i_0}} c_{i_0+1/2} = c,$$

cela signifie que lorsque la maille est compressible, $c_{i+1/2}$ est la vitesse du son donnée par la relation des gaz parfaits. Par contre dans une maille strictement incompressible $c_{i+1/2}$ est infiniment grande :

$$\lim_{x_I \to x_{i_0+1}} c_{i_0+1/2} = +\infty.$$

Dans ce cas, la matrice des coefficients de stabilisation (4.41) est mal définie. Il est donc impossible de construire correctement une matrice de stabilisation incompressible en s'appuyant sur celle du compressible (4.41) par un passage à la limite sur $c_{i_0+1/2}$. Bien qu'on ait su unifier les équations de Navier-Stokes compressible et incompressible, cela n'est pas possible pour la stabilisation dont la construction dépend de la vitesse des ondes qui se déplacent dans chaque fluide. Nous retrouvons ici une difficulté rencontrée dans l'écriture d'un schéma élément finis stabilisés unifié à la fois pour un fluide compressible et un fluide incompressible [HH94, HH98]. Dans ce même article, les auteurs suggèrent l'utilisation d'une moyenne arithmétique des coefficients de stabilisation compressible et incompressible pondérée par la nombre de Mach.

En s'inspirant de cette remarque et en utilisant la fonction couleur, nous construisons le coefficient de stabilisation $\tau_{i+1/2}$ défini sur chaque maille $I_{i+1/2}$ de la façon suivante :

$$\tau_{i+1/2} = (1 - \varepsilon_{i+1/2})\tau^1_{i+1/2} + \varepsilon_{i+1/2}\tau^2_{i+1/2}. \tag{4.43}$$

Dans une maille strictement compressible ou incompressible, on retrouve le coefficient de stabilisation approprié, alors que dans une maille mixte on effectue une moyenne arithmétique des coefficients de stabilisation.

Illustration numérique

Afin d'illustrer le bon fonctionnement de cette approche nous proposons de résoudre un problème 1D.

Comme précédemment, on considère un domaine de 1 m de long contenant un liquide ($0\text{m} \leq x \leq 0,5005\text{m}$) et un gaz ($0,5005\text{m} \leq x \leq 1\text{m}$) séparés par une interface localisée en $x_I = 0,5005\text{m}$. Le liquide est un fluide incompressible alors que le gaz est un fluide compressible caractérisé par sa vitesse du son $c = 317\text{m.s}^{-1}$. Par hypothèses, tous deux ont des densités et des viscosités constantes et respectivement égales à : $\rho_1 = \rho_2 = 1\text{kg.m}^{-3}$ et $\mu_1 = \mu_2 = 0\text{kg.m}^{-1}\text{s}^{-1}$. Le gaz et le liquide sont initialement au repos ; $u = 0\text{m.s}^{-1}$ à la pression constante $p = p_{atm} = 10^5\text{Pa}$. On injecte au cours du temps du liquide en $x = 0\text{m}$ à la vitesse $u = 100t\text{m.s}^{-1}$. Par contre en $x = 1\text{m}$, la vitesse et la pression vérifient des conditions aux limites transparentes. Le domaine spatial est découpé de façon uniforme en 1000 intervalles de taille $h = 0.001$, ce qui assure que l'interface située en $x_I = 0,5005\text{m}$ est localisée entre deux noeuds du maillage. Enfin le temps varie de $t = 0\text{ms}$ à $t = 1\text{ms}$.

Nous avons tracé sur la figure FIG. 4.8 les résultats obtenus avec la méthode numérique proposée. De nouveau, pour les deux modèles quasi-linéaire et symétrique, les solutions calculées sont en accord avec la solution exacte qui est dans ce cas :

$$u(x,t) = \begin{cases} 100t & \text{si } x \leq x_I \\ 100\left(t - \dfrac{x - x_I}{c}\right) & \text{si } x - x_I \leq ct, \\ 0 & \text{si } x - x_I > ct \end{cases} \tag{4.44}$$

et

$$p(x,t) = \begin{cases} -100\rho_1(x - x_I) + \rho_2 ct + p_{atm} & \text{si } x \leq x_I \\ \rho_2 c\left(t - \dfrac{x - x_I}{c}\right) + p_{atm}, & \text{si } x - x_I \leq ct, \\ p_{atm} & \text{si } x - x_I > ct. \end{cases} \tag{4.45}$$

Discontinuité de ρ

Dans ce paragraphe, nous supposons $\beta_T^1 \neq \beta_T^2$, $\rho_1 \neq \rho_2$ et toujours $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Dans ce cas $\mathsf{L}_i, \mathsf{L}_e$ et S sont discontinus et tels que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathsf{L}}_i(\beta_T, \rho) &= \tilde{\mathscr{A}}_0(\beta_T, \rho)\frac{1}{\delta t} + \tilde{\mathscr{A}}(\rho)\partial_x, \\ \tilde{\mathsf{L}}_e(\beta_T, \rho) &= \tilde{\mathscr{A}}_0(\beta_T, \rho)\frac{1}{\delta t}, \\ \tilde{\mathsf{S}}(\beta_T, \rho) &= \tilde{\mathscr{S}}(\rho). \end{aligned}$$

Afin de traiter ces discontinuités, nous proposons comme nous l'avons fait pour β_T de moyenner la densité dans la maille mixte. Pour cela, il est possible d'envisager deux types de *moyennes* par la suite :

– une moyenne *arithmétique* :

$$\rho_{i+1/2} = (1 - \varepsilon_{i+1/2})\rho_1 + \varepsilon_{i+1/2}\rho_2, \tag{4.46}$$

– et une moyenne *harmonique* :

$$\rho_{i+1/2} = \left(\frac{(1 - \varepsilon_{i+1/2})}{\rho_1} + \frac{\varepsilon_{i+1/2}}{\rho_2}\right)^{-1}. \tag{4.47}$$

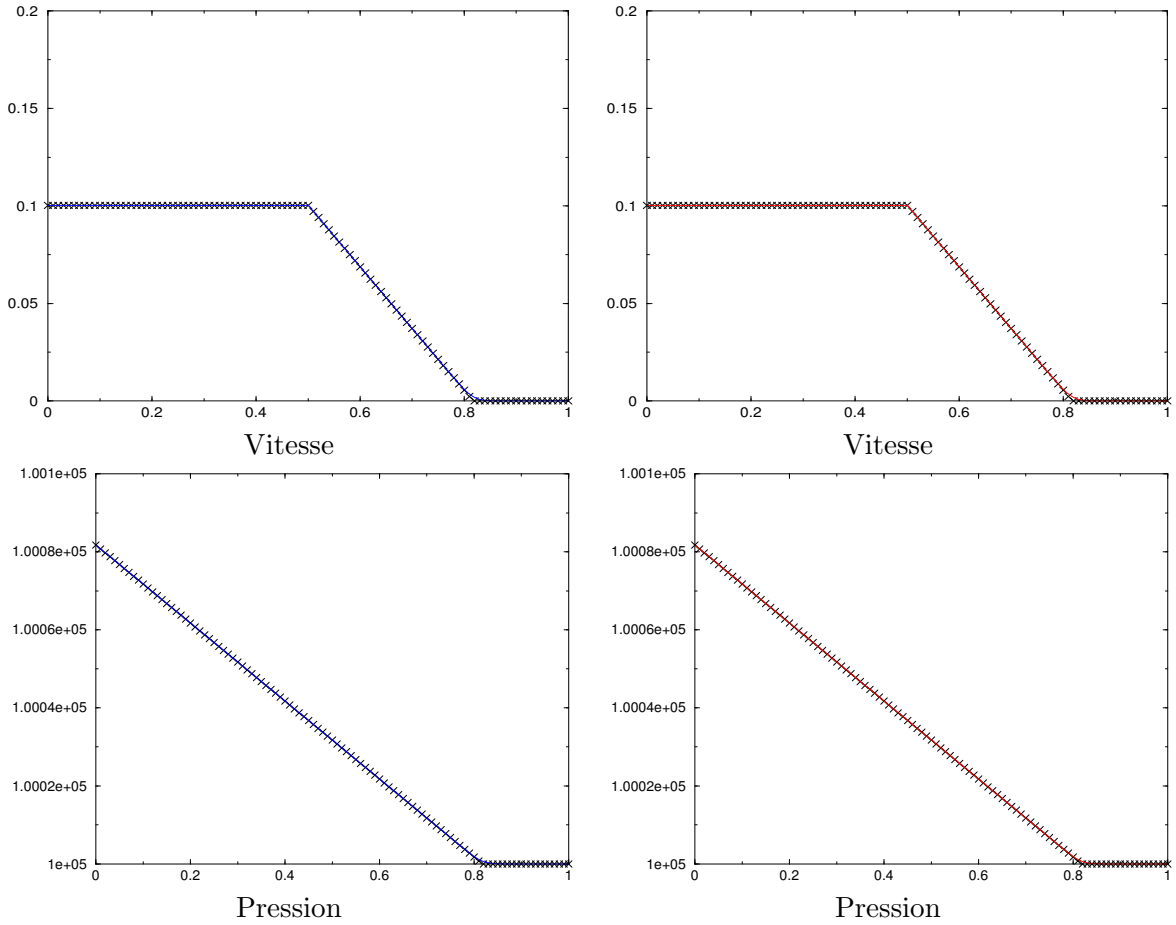


FIG. 4.8 – Injection de liquide dans un tuyau ouvert contenant du gaz à $t = 1$ms. Modèle quasi-linéaire symétrique (courbes bleues), modèle quasi-linéaire (courbes rouges) et solution exacte (croix noires).

Il est intéressant de remarquer que lorsqu'on utilise une moyenne arithmétique, la densité incompressible est prépondérante dans la maille mixte alors que pour une moyenne harmonique la densité compressible l'emporte.

A partir de (4.34) et (4.46) ou (4.47), nous construisons sur chaque élément $I_{i+1/2}$ de $\mathcal{T}_h$ les opérateurs :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathsf{L}}_i(\beta_{T,i+1/2}, \rho_{i+1/2}) &= \tilde{\mathscr{A}}_0(\beta_{T,i+1/2}, \rho_{i+1/2})\frac{1}{\delta t} + \tilde{\mathscr{A}}(\rho_{i+1/2})\partial_x, \\
\tilde{\mathsf{L}}_e(\beta_{T,i+1/2}, \rho_{i+1/2}) &= \tilde{\mathscr{A}}_0(\beta_{T,i+1/2}, \rho_{i+1/2})\frac{1}{\delta t}\partial_x, \\
\tilde{\mathsf{S}}^n(\beta_{T,i+1/2}, \rho_{i+1/2}) &= \tilde{\mathscr{S}}(\rho_{i+1/2}),
\end{aligned}$$

que nous utilisons pour construire les formes bilinéaires et linéaires intervenant :

– dans la contribution de Galerkin :

$$\begin{aligned}
\overline{a}(\mathbf{W}_h,\mathbf{Y}_h) &= \sum_{i=1}^{N_s-1}\int_{I_{i+1/2}} \mathbf{W}_h\cdot\left[\tilde{\mathscr{A}_0}(\beta_{T,i+1/2},\rho_{i+1/2})\frac{\mathbf{Y}_h}{\delta t}+\tilde{\mathscr{A}}(\rho_{i+1/2})\partial_x\mathbf{Y}_h\right]dx,\\
\overline{b}(\mathbf{W}_h,\mathbf{Y}_h) &= \sum_{i=1}^{N_s-1}\int_{I_{i+1/2}} \mathbf{W}_h\cdot\tilde{\mathscr{A}_0}(\beta_{T,i+1/2},\rho_{i+1/2})\frac{\mathbf{Y}_h}{\delta t}dx,\\
\overline{s}(\mathbf{W}_h) &= \sum_{i=1}^{N_s-1}\int_{I_{i+1/2}} \mathbf{W}_h\cdot\tilde{\mathscr{S}}(\rho_{i+1/2})dx,
\end{aligned}$$

– dans la stabilisation :

$$\begin{aligned}
\overline{a}_s(\mathbf{W}_h,\mathbf{Y}_h) &= \sum_{i=0}^{Ns-1}\int_{I_{i+1/2}} {}^t\tilde{\mathscr{A}}(\rho_{i+1/2})\partial_x\mathbf{W}_h\cdot\tau_{i+1/2}\tilde{\mathscr{A}_0}(\beta_{T,i+1/2},\rho_{i+1/2})\frac{\mathbf{Y}_h}{\delta t}dx,\\
&+ \sum_{i=0}^{Ns-1}\int_{I_{i+1/2}} {}^t\tilde{\mathscr{A}}(\rho_{i+1/2})\partial_x\mathbf{W}_h\cdot\tau_{i+1/2}\tilde{\mathscr{A}}(\rho_{i+1/2})\partial_x\mathbf{Y}_h dx,\\
\overline{b}_s(\mathbf{W}_h,\mathbf{Y}_h) &= \sum_{i=0}^{Ns-1}\int_{I_{i+1/2}} {}^t\tilde{\mathscr{A}}(\rho_{i+1/2})\partial_x\mathbf{W}_h\cdot\tau_{i+1/2}\tilde{\mathscr{A}_0}(\beta_{T,i+1/2},\rho_{i+1/2})\frac{\mathbf{Y}_h}{\delta t}dx,\\
\overline{s}_s(\mathbf{W}_h) &= \sum_{i=0}^{Ns-1}\int_{I_{i+1/2}} {}^t\tilde{\mathscr{A}}(\rho_{i+1/2})\partial_x\mathbf{W}_h\cdot\tau_{i+1/2}\tilde{\mathscr{S}}(\rho_{i+1/2})dx.
\end{aligned}$$

Pour que la construction du schéma numérique soit complète, il est important de revenir en détail sur la construction des coefficients de stabilisation. Comme nous l'avons déjà expliqué, la matrice de stabilisation utilisée s'appuie sur la moyenne arithmétique :

$$\tau_{i+1/2} = (1-\varepsilon_{i+1/2})\tau^1_{i+1/2} + \varepsilon_{i+1/2}\tau^2_{i+1/2}.$$

Par définition les coefficients de stabilisation $\tau^1_{i+1/2}$ et $\tau^2_{i+1/2}$ dépendent de la densité. Dans le but de traiter la discontinuité de cette dernière, nous avons introduit ici sa moyenne $\rho_{i+1/2}$ sur chaque élément $I_{i+1/2}$. Afin de tenir compte de cet aspect les matrices des coefficients de stabilisation vérifient les dépendances :

$$\tau^1_{i+1/2} = \tau^1_{i+1/2}(\rho_{i+1/2}), \tag{4.48}$$

$$\tau^2_{i+1/2} = \tau^2_{i+1/2}(\rho_{i+1/2}). \tag{4.49}$$

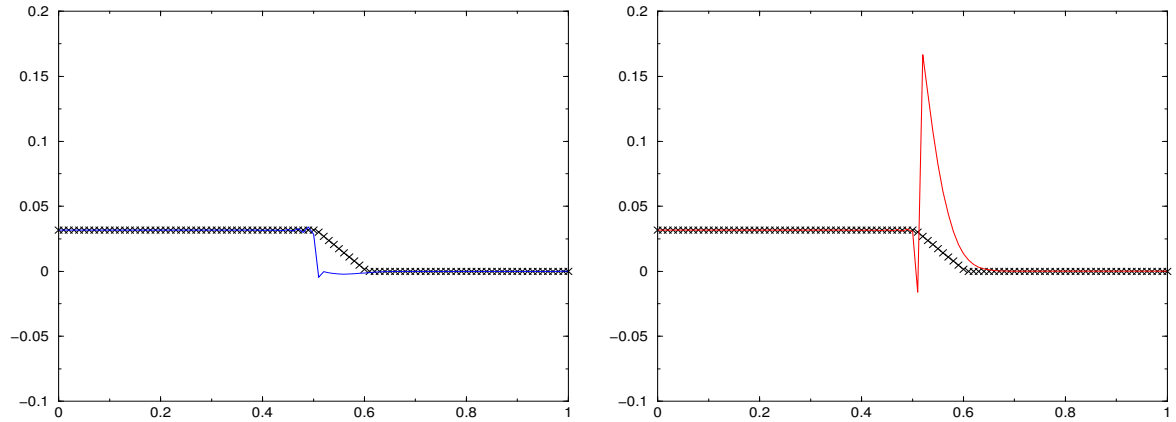
Illustration numérique

Nous proposons dans cette partie d'étudier le comportement des solutions obtenues par le biais du schéma numérique présenté pour les deux types de moyennes proposées : arithmétique et harmonique.

Le même cas test que précédemment est étudié. On considère un domaine de 1m occupé par un liquide et un gaz séparés par une interface fixe en $x = 0,5005$m. Le liquide a une densité constante $\rho_1 = 1000$kg.m^{-3}. Le gaz quant à lui est caractérisé par la vitesse du son $c = 317$m.s^{-1} et la densité $\rho_2 = 1$kg.m^{-3}. De plus l'écoulement considéré est non visqueux. Les deux fluides sont initialement au repos ; $u = 0$m.s^{-1} à la pression constante $p = p_{atm} = 10^5$Pa. On injecte au cours du temps du liquide en $x = 0$m à la vitesse $u = 100t$m.s^{-1}. Par contre en $x = 1$m, la vitesse et la pression vérifient des conditions aux limites transparentes. Le domaine

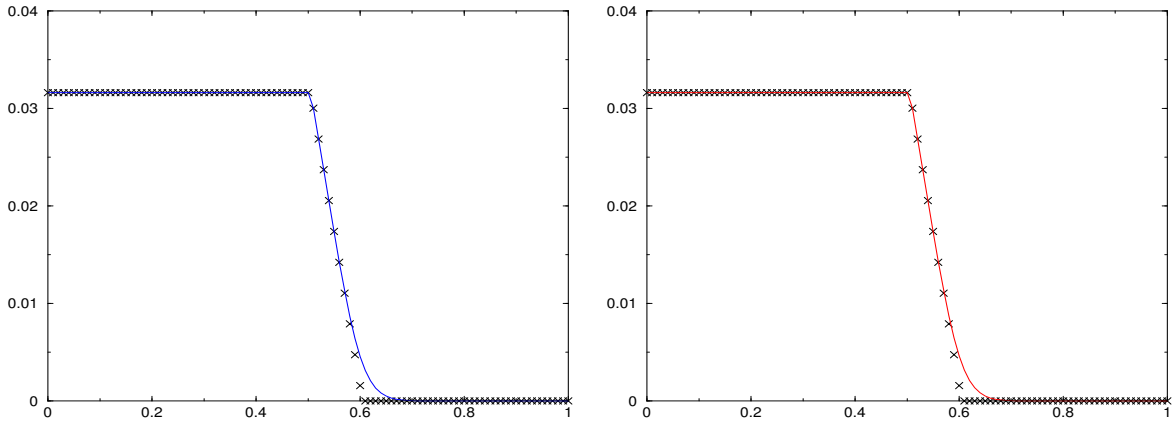
spatial est découpé en 1000 intervalles. Enfin le temps varie de $t = 0$ms à $t = 1$ms.

Nous avons tracé sur la figure Fig. 4.9 et Fig. 4.10 les résultats obtenus avec le schéma numérique pour les deux moyennes (harmonique et arithmétique) ainsi que pour les deux types de modèle (quasi-linéaire et quasi-linéaire symétrique). Pour la moyenne arithmétique (voir Fig. 4.9), quelque soit le modèle considéré, la solution numérique ne correspond pas à la solution exacte (4.45). En effet, aussi bien pour le modèle quasi-linéaire que le modèle quasi-linéaire symétrique nous observons une oscillation de la vitesse près de l'interface qui est plus ou moins conséquente selon le modèle employé. Par contre, l'utilisation de la moyenne harmonique (voir Fig. 4.10) donne pour les deux modèles une solution numérique en très bon accord avec la solution analytique (4.45). Compte tenu de cette observation, il sera nécessaire d'utiliser par la suite une moyenne harmonique pour calculer la densité moyenne dans chaque maille.



Modèle quasi-linéaire symétrique Modèle quasi-linéaire

Fig. 4.9 – Injection de liquide dans un tuyau ouvert contenant du gaz à $t = 1$ms. Profil de la vitesse pour le modèle quasi-linéaire (courbes rouges) et le modèle quasi-linéaire symétrique (courbes bleues) ainsi que pour une moyenne arithmétique comparées à la solution exacte (croix noires).



Modèle quasi-linéaire symétrique Modèle quasi-linéaire

Fig. 4.10 – Injection de liquide dans un tuyau ouvert contenant du gaz à $t = 1$ms. Profil de la vitesse pour le modèle quasi-linéaire (courbes rouges) et le modèle quasi-linéaire symétrique (courbes bleues) ainsi que pour une moyenne harmonique comparées à la solution exacte (croix noires).

Discontinuité de μ

A présent, nous supposons que l'écoulement étudié est visqueux et que chaque fluide a une viscosité non nulle et $\mu_1 \neq \mu_2$. Finalement, les dépendances des opérateurs par rapport aux coefficients discontinus sont :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathsf{L}}_i(\beta_T, \rho, \mu) &= \tilde{\mathscr{A}_0}(\beta_T, \rho)\frac{1}{\delta t} + \tilde{\mathscr{A}}(\rho)\partial_x - \partial_x\left(\tilde{\mathscr{K}}(\mu)\partial_x\right), \\
\tilde{\mathsf{L}}_e(\beta_T, \rho) &= \tilde{\mathscr{A}_0}(\beta_T, \rho)\frac{1}{\delta t}, \\
\tilde{\mathsf{S}}(\beta_T, \rho) &= \tilde{\mathscr{S}}(\rho).
\end{aligned}$$

De même que pour la densité, nous utilisons pour la viscosité μ une moyenne de type harmonique définie par :

$$\mu^{i+1/2} = \left(\frac{1-\varepsilon_{i+1/2}}{\mu_1} + \frac{\varepsilon_{i+1/2}}{\mu_2}\right)^{-1}, \forall I_{i+1/2} \in \mathcal{T}_h. \tag{4.50}$$

Il est fréquent d'employer une moyenne harmonique pour traiter la résolution d'équations d'ordre deux à coefficients discontinus, comme l'équation de la chaleur [BTM07] ou de poisson [LFK00, Gué07]. Ce choix permet notamment d'assurer la continuité des flux à l'interface.

En utilisant les moyennes (4.34) et (4.47) pour β_T et ρ respectivement, ainsi que la moyenne harmonique (4.50) de μ, nous proposons de résoudre le problème variationnel approché (4.14) dont les formes bilinéaires et linéaires approximées sont données par :

$$\begin{aligned}
\overline{a}(\mathbf{W}_h, \mathbf{Y}_h) = & \sum_{i=1}^{N_s-1} \int_{I_{i+1/2}} \mathbf{W}_h \cdot \left[\tilde{\mathscr{A}_0}(\beta_{T,i+1/2}, \rho_{i+1/2})\frac{\mathbf{Y}_h}{\delta t} + \tilde{\mathscr{A}}(\rho_{i+1/2})\partial_x \mathbf{Y}_h\right] dx \\
+ & \sum_{i=1}^{N_s-1} \int_{I_{i+1/2}} \partial_x \mathbf{W}_h \cdot \tilde{\mathscr{K}}(\mu^{i+1/2})\partial_x \mathbf{Y}_h dx \\
\overline{b}(\mathbf{W}_h, \mathbf{Y}_h) = & \sum_{i=1}^{N_s-1} \int_{I_{i+1/2}} \mathbf{W}_h \cdot \tilde{\mathscr{A}_0}(\beta_{T,i+1/2}, \rho_{i+1/2})\frac{\mathbf{Y}_h}{\delta t} dx, \\
\overline{s}(\mathbf{W}_h) = & \sum_{i=1}^{N_s-1} \int_{I_{i+1/2}} \mathbf{W}_h \cdot \tilde{\mathscr{S}}(\rho_{i+1/2}) dx, \\
\overline{a}_s(\mathbf{W}_h, \mathbf{Y}_h) = & \sum_{i=0}^{Ns-1} \int_{I_{i+1/2}} {}^t\tilde{\mathscr{A}}(\rho_{i+1/2})\partial_x \mathbf{W}_h \cdot \tau_{i+1/2}\tilde{\mathscr{A}_0}(\beta_{T,i+1/2}, \rho_{i+1/2})\frac{\mathbf{Y}_h}{\delta t} dx, \\
+ & \sum_{i=0}^{Ns-1} \int_{I_{i+1/2}} {}^t\tilde{\mathscr{A}}(\rho_{i+1/2})\partial_x \mathbf{W}_h \cdot \tau^{i+1/2}\tilde{\mathscr{A}}(\rho_{i+1/2})\partial_x \mathbf{Y}_h dx, \\
\overline{b}_s(\mathbf{W}_h, \mathbf{Y}_h) = & \sum_{i=0}^{Ns-1} \int_{I_{i+1/2}} {}^t\tilde{\mathscr{A}}(\rho_{i+1/2})\partial_x \mathbf{W}_h \cdot \tau_{i+1/2}\tilde{\mathscr{A}_0}(\beta_{T,i+1/2}, \rho_{i+1/2})\frac{\mathbf{Y}_h}{\delta t} dx, \\
\overline{s}_s(\mathbf{W}_h) = & \sum_{i=0}^{Ns-1} \int_{I_{i+1/2}} {}^t\tilde{\mathscr{A}}(\rho_{i+1/2})\partial_x \mathbf{W}_h \cdot \tau_{i+1/2}\tilde{\mathscr{S}}(\rho_{i+1/2}) dx.
\end{aligned}$$

Comme pour la densité, la matrice des coefficients de stabilisation fait intervenir la moyenne des viscosités (4.50). Ainsi nous obtenons :

$$\tau^1_{i+1/2} = \tau^1_{i+1/2}(\rho_{i+1/2}, \mu_{i+1/2}) \tag{4.51}$$

$$\tau^2_{i+1/2} = \tau^2_{i+1/2}(\rho_{i+1/2}, \mu_{i+1/2}). \tag{4.52}$$

Illustration numérique

Pour illustrer la dernière étape de la construction de notre méthode numérique nous nous intéressons maintenant à la simulation numérique d'un écoulement mono-dimensionnel visqueux.

La configuration étudiée est toujours la même. On considère un domaine de 1 m de long occupé par un liquide ($0\text{m} \leq x \leq 0,5005\text{m}$) et un gaz ($0,5005\text{m} \leq x \leq 1\text{m}$) séparés par une interface immobile localisée en $x_I = 0,5005\text{m}$. Le liquide est un fluide incompressible alors que le gaz est un fluide compressible. Dans ce paragraphe, nous avons supposé que les deux fluides ont des densités et des viscosités constantes mais différentes. Pour le liquide nous avons $\rho_1 = 1\text{kg.m}^{-3}$ et $\mu_1 = 1\text{kg.m}^{-1}\text{s}^{-1}$ alors que pour le gaz nous considérons $\rho_2 = 1\text{kg.m}^{-3}$ et $\mu_2 = 0,01\text{kg.m}^{-1}\text{s}^{-1}$ ou bien $\mu_2 = 100\text{kg.m}^{-1}\text{s}^{-1}$. Enfin dans le gaz, les ondes acoustiques se propagent à la vitesse $c = 317\text{m.s}^{-1}$. Le gaz et le liquide sont initialement au repos ; $u = 0\text{m.s}^{-1}$ à la pression constante $p = p_{atm} = 10^5\text{Pa}$. On injecte au cours du temps du liquide en $x = 0\text{m}$ à la vitesse $u = 100t\text{m.s}^{-1}$. Par contre en $x = 1\text{m}$, la vitesse et la pression vérifient des conditions aux limites transparentes. Le domaine spatial est découpé en 1001 intervalles. Par hypothèse, l'interface est figée mais décalée par rapport au maillage. Enfin le temps varie de $t = 0\text{ms}$ à $t = 1\text{ms}$.

Sur les figures Fig. 4.11 et Fig. 4.12 nous avons représenté les calculs réalisés avec le modèle mono-fluide en prenant compte les effets de viscosité avec $\mu_2 = 0,01\text{kg.m}^{-1}\text{s}^{-1}$ dans le premier cas et $\mu_2 = 100\text{kg.m}^{-1}\text{s}^{-1}$ dans le second cas. Les résultats sont obtenus avec les modèles quasi-linéaire et quasi-linéaire symétrique . Quelque soit le modèle utilisé les solutions numériques semblent en très bon accord. Lorsque que $\mu_2 = 0,01\text{kg.m}^{-1}\text{s}^{-1}$ (voir Fig. 4.11), il semble que la solution calculée soit proche de celle donnée par les modèles non visqueux. Cela s'explique pour deux raisons. Premièrement, en une dimension de l'espace pour un fluide incompressible les effets du tenseur des contraintes visqueuse sont nul à cause de la contrainte d'incompressibilité. Deuxièmement, la viscosité est très faible dans l'air. Par contre lorsque $\mu_2 = 100\text{kg.m}^{-1}\text{s}^{-1}$ (voir Fig. 4.12), la vitesse bien plus diffuse. On observe également une discontinuité sur la pression. En effet, dans ce cas $-4/3\partial_{xx}u$ n'est plus négligeable devant p comme nous l'avons supposé au chapitre précédent.

D'impact négligeable en 1D, nous verrons que la viscosité influence fortement la dynamique d'un écoulement en 2D notamment pour des écoulements à bulle.

2.4 Synthèse sur la formulation éléments finis

L'utilisation d'une discrétisation aux différences finies en temps et d'une méthode d'éléments finis stabilisés en espace nous a permis de concevoir dans ce chapitre un schéma numérique global pour la résolution du modèle mono-fluide isotherme linéarisé sans convection (4.4).

Ce schéma s'appuie sur la résolution du problème variationnel approché :

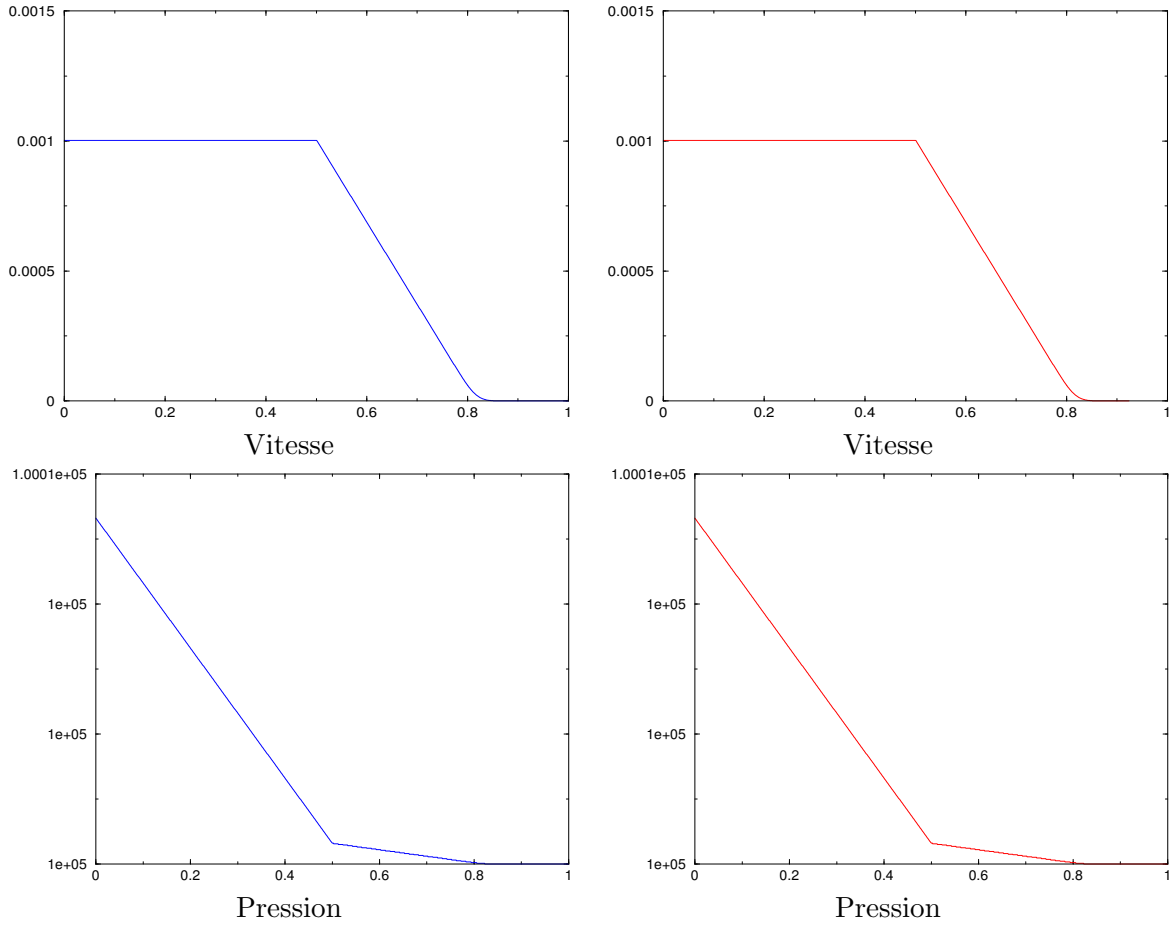


FIG. 4.11 – Injection de liquide dans un tuyau ouvert contenant du gaz à $t = 1$ms pour $\mu_2 = 0,01\text{kg.m}^{-1}\text{s}^{-1}$. Modèle symétrique (courbes bleues), modèle quasi-linéaire (courbes rouges).

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{Y}_h^n)_{0\leq n\leq N} \in \mathsf{S}_h^p \times \mathsf{S}_h^u \text{ tel que pour tout } \mathbf{W}_h \in \mathsf{T}_h^p \times \mathsf{T}_h^u \text{ on ait :} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N_s-1} \int_{I_{i+1/2}} \mathbf{W}_h \cdot \left(\tilde{\mathscr{A}_0}(\beta_{T,i+1/2}, \rho_{i+1/2}) \frac{\delta \mathbf{Y}_h^{n+1}}{\delta t} + \tilde{\mathscr{A}}(\rho_{i+1/2}) \partial_x \mathbf{Y}_h^{n+1} - \tilde{\mathscr{S}}(\rho_{i+1/2}) \right) dx \\ + \displaystyle\sum_{i=1}^{N_s-1} \int_{I_{i+1/2}} \partial_x \mathbf{W}_h \cdot \tilde{\mathscr{K}}(\mu_{i+1/2}) \partial_x \mathbf{Y}_h^{n+1} dx \\ + \displaystyle\sum_{i=1}^{N_s-1} \int_{I_{i+1/2}} {}^t\tilde{\mathscr{A}}(\rho_{i+1/2}) \partial_x \mathbf{W}_h \cdot \tau(\rho_{i+1/2}, \mu_{i+1/2}) \tilde{\mathscr{R}}(\beta_{T,i+1/2}, \rho_{i+1/2}, \mu_{i+1/2}; \mathbf{Y}_h^{n+1}) dx = 0, \end{array}\right. \tag{4.53}$$

avec le résidu :

$$\tilde{\mathscr{R}}(\beta_{T,i+1/2}, \rho_{i+1/2}, \mu_{i+1/2}; \mathbf{Y}_h^{n+1}) = \tilde{\mathscr{A}_0}(\beta_{i+1/2}, \rho_{i+1/2}) \frac{\delta \mathbf{Y}_h^{n+1}}{\delta t} + \tilde{\mathscr{A}}(\rho_{i+1/2}) \partial_x \mathbf{Y}_h^{n+1} - \tilde{\mathscr{S}}(\rho_{i+1/2}).$$

Afin de traiter les discontinuités de $\mathscr{A}_0, \mathscr{A}, \mathscr{K}$ et du second membre $\mathscr{S}$ présents dans (4.4) nous avons construit des *opérateurs moyennés* constants sur chaque élément $I_{i+1/2}$ du maillage $\mathcal{T}_h$:

$$\tilde{\mathscr{A}_0}(\beta_{T,i+1/2}, \rho_{i+1/2}), \tilde{\mathscr{A}}(\rho_{i+1/2}), \tilde{\mathscr{K}}(\mu_{i+1/2}), \tilde{\mathscr{S}}(\rho_{i+1/2}), \tag{4.54}$$

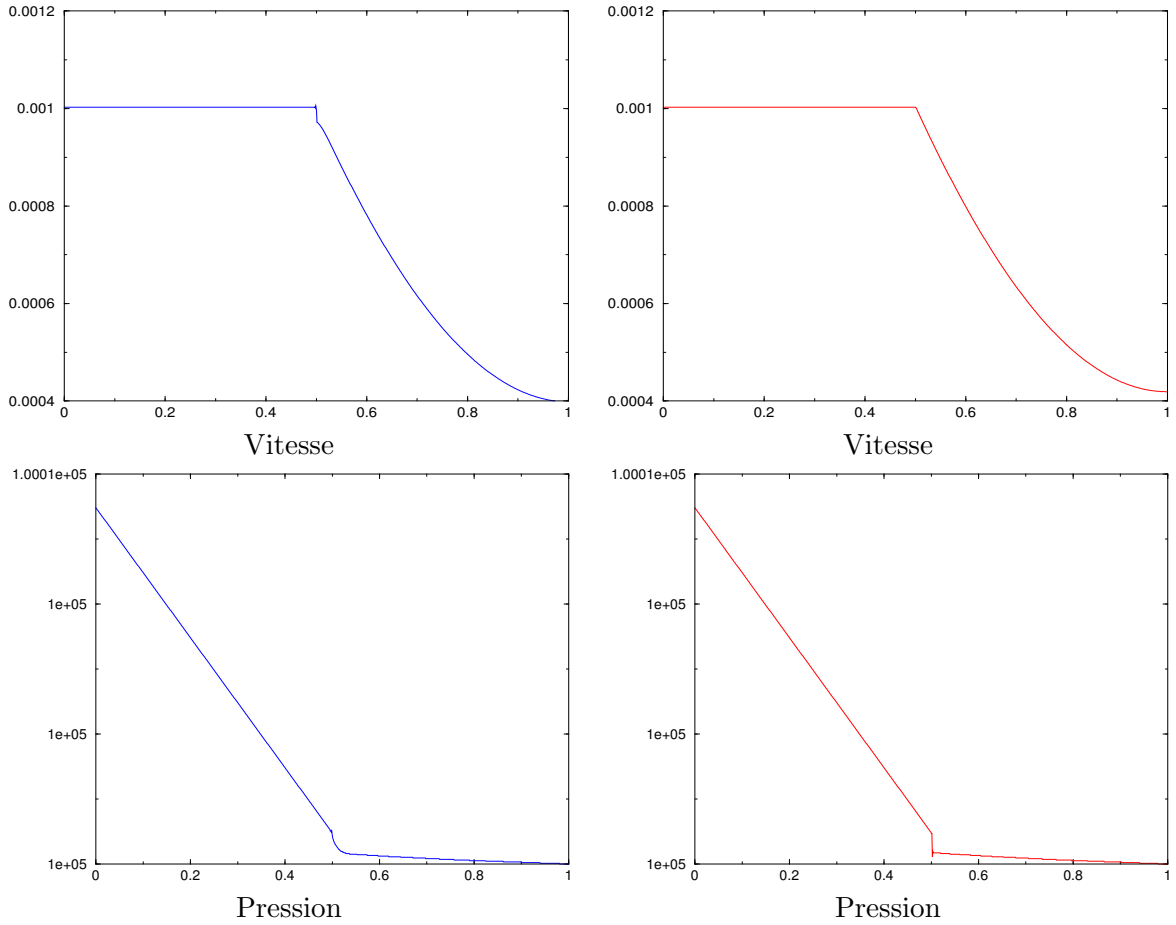


FIG. 4.12 – Injection de liquide dans un tuyau ouvert contenant du gaz à $t = 1$ms pour $\mu_2 = 100\text{kg.m}^{-1}\text{s}^{-1}$. Modèle symétrique (courbes bleues), modèle quasi-linéaire (courbes rouges).

dépendant des quantités moyennes :

$$\begin{aligned} \beta_{T,i+1/2} &= (1-\varepsilon_{i+1/2})\beta_T^1 + \varepsilon_{i+1/2}\beta_T^2, \\ \rho_{i+1/2} &= \left(\frac{1-\varepsilon_{i+1/2}}{\rho_1} + \frac{\varepsilon_{i+1/2}}{\rho_2}\right)^{-1}, \\ \mu_{i+1/2} &= \left(\frac{1-\varepsilon_{i+1/2}}{\mu_1} + \frac{\varepsilon_{i+1/2}}{\mu_2}\right)^{-1}, \end{aligned} \tag{4.55}$$

avec la fonction couleur $\varepsilon_{i+1/2}$ définie par :

$$\varepsilon_{i+1/2} = \frac{V_{i+1/2}^2}{V_{i+1/2}}. \tag{4.56}$$

Enfin, la matrice des coefficients de stabilisation pout tout $I_{i+1/2}$ de $\mathcal{T}_h$ est donnée par :

$$\tau_{i+1/2}(\rho_{i+1/2}, \mu_{i+1/2}) = (1-\varepsilon_{i+1/2})\tau_{i+1/2}^1(\rho_{i+1/2}, \mu_{i+1/2}) + \varepsilon_{i+1/2}\tau_{i+1/2}^2(\rho_{i+1/2}, \mu_{i+1/2}). \tag{4.57}$$

Cette approche a été validée quelque soit la position de l'interface (i.e. alignée avec le maillage ou non) pour le modèle mono-fluide isotherme linéaire sans convection. Nous nous intéressons désormais au modèle mono-fluide non-linéaire.

3 Problème isotherme sans convection

Dans cette section, nous généralisons la méthode numérique présentée dans la section précédente à la résolution du problème non-linéaire :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \mathscr{L}(\mathbf{Y},x)\mathbf{Y} = \mathscr{A}_0(\mathbf{Y},x)\partial_t\mathbf{Y} + \mathscr{A}(\mathbf{Y},x)\partial_x\mathbf{Y} - \partial_x\left(\mathscr{K}(\mathbf{Y},x)\partial_x\mathbf{Y}\right) & = & \mathscr{S}(\mathbf{Y},x), & \text{dans }]a,b[\times]0,T[, \\ \mathbf{Y}(x,0) & = & \mathbf{Y}^0(x), & \text{dans }]a,b[, \end{array}\right. \tag{4.58}$$

avec $\mathbf{Y}^t = (p,u)^t$. On suppose de plus que sur la frontière $\partial\Omega$ la vitesse vérifie les conditions aux limites de type Dirichlet

$$u(a,t) = u_g(t) \text{ et } u(b,t) = u_d(t).$$

Ici, l'écoulement est toujours supposé isotherme et les termes de convection sont omis. Toutefois l'opérateur $\mathscr{L}$ et le second membre $\mathscr{S}$ dépendent de $\mathbf{Y}$ (Ce qui implique qu'ils ne sont plus constants par domaine) et des quantités :

$$\beta_T(\mathbf{Y},x) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < x_I, \\ \dfrac{1}{p} & \text{sinon,} \end{array}\right., \rho(\mathbf{Y},x) = \left\{\begin{array}{ll} \rho_1 & \text{si } x < x_I, \\ \dfrac{p}{RT} & \text{sinon,} \end{array}\right. \quad \mu(x) = \left\{\begin{array}{ll} \mu_1 & \text{si } x < x_I, \\ \mu_2 & \text{sinon.} \end{array}\right.$$

3.1 Schéma numérique

Dans la section précèdente nous avons mis en oeuvre un schéma aux différences finies en temps associé à une méthode d'éléments finis stabilisés en espace pour la résolution du modèle mono-fluide linéaire (4.4). Dans ce cas la difficulté essentielle a été de traiter les discontinuités de $\mathscr{L}$ et $\mathscr{S}$ à l'interface. Pour cela nous avons introduit un certain nombre de moyennes s'appuyant sur une fonction couleur.

Afin de résoudre les équations mono-fluides non-linéaires (4.58), il faut tenir compte de la dépendence de $\mathscr{L}$ et $\mathscr{S}$ par rapport à $\mathbf{Y}$ qui évolue à chaque pas de temps. Afin de simplifier la résolution de ce problème, les équations ont été linéarisées au premier ordre en temps. Ensuite la méthode développée dans la section 2 a été utilisée pour leur discrétisation spatiale.

3.1.1 Formulation éléments finis

Par extension de (4.53) à (4.58), nous proposons de résoudre le problème variationnel approché :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{Y}_h^n)_{0\le n\le N} \in \mathsf{S}_h^p \times \mathsf{S}_h^u \text{ tel que pour tout } \mathbf{W}_h \in \mathsf{T}_h^p \times \mathsf{T}_h^u \text{ on ait :} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N_s-1} \int_{I_{i+1/2}} \mathbf{W}_h \cdot \left(\overline{\mathscr{A}_0}^n_{i+1/2} \frac{\delta \mathbf{Y}_h^{n+1}}{\delta t} + \overline{\mathscr{A}}^n_{i+1/2}\partial_x \mathbf{Y}_h^{n+1} - \overline{\mathscr{S}}^n_{i+1/2}\right) + \partial_x \mathbf{W}_h \cdot \overline{\mathscr{K}}^n_{i+1/2}\partial_x \mathbf{Y}_h^{n+1} dx \\ \displaystyle + \sum_{i=1}^{N_s-1} \int_{I_{i+1/2}} {}^t\overline{\mathscr{A}}^n_{i+1/2}\partial_x \mathbf{W}_h \cdot \overline{\tau}^n_{i+1/2} \left(\overline{\mathscr{A}_0}^n_{i+1/2} \frac{\delta \mathbf{Y}_h^{n+1}}{\delta t} + \overline{\mathscr{A}}^n_{i+1/2}\partial_x \mathbf{Y}_h^{n+1} - \overline{\mathscr{S}}^n_{i+1/2}\right) dx = 0. \end{array}\right. \tag{4.59}$$

Désormais, l'opérateur $\mathscr{L}$ et le second membre $\mathscr{S}$ sont discontinus et également non-linéaires ; dépendence par rapport à $\mathbf{Y}$ qui est une fonction du temps. Par analogie avec le cas linéarisé, des moyennes explicites sur chaque élément $I_{i+1/2}$ du maillage $\mathcal{T}_h$:

$$\overline{\mathscr{A}_0}^n_{i+1/2}, \overline{\mathscr{A}}^n_{i+1/2}, \overline{\mathscr{K}}^n_{i+1/2}, \overline{\mathscr{S}}^n_{i+1/2} \text{ et } \overline{\tau}^n_{i+1/2},$$

ont été utilisées. Ce choix permet non seulement de linéariser sur chaque maille les équations en espace mais aussi de traiter les discontinuités des opérateurs notament dans la maille mixte. Enfin, ces moyennes sont calculées à chaque instant à partir des valeurs de $\mathbf{Y}$ au temps t^n, ce qui permet de linéariser aussi le schéma en temps.

3.1.2 Moyennes

Des valeurs de la solution $\mathbf{Y}^n$ au temps t^n, nous déduisons les grandeurs moyennes sur chaque élément de $\beta_T, \rho, \mu, \mathbf{Y}$ avec lesquelles on construira les moyennes $\overline{\mathscr{A}_0}^n_{i+1/2}, \overline{\mathscr{A}}^n_{i+1/2}, \overline{\mathscr{K}}^n_{i+1/2}$, $\overline{\mathscr{S}}^n_{i+1/2}$ et $\overline{\tau}^n_{i+1/2}$ présentes dans (4.59).

A chaque instant t^n, $n = 0, \ldots, N$, nous connaissons la solution $\mathbf{Y}^n$ en tout point du maillage. A partir de $\mathbf{Y}^n_i$ on en déduit le coefficient de compressibilité $\beta^n_{T,i}$, la densité ρ^n_i et la viscosité μ^n_i à l'instant n pour tout noeud $i, i = 1, \ldots, N_s$ du maillage qui sont donnés par

$$\beta^n_{T,i} = \begin{cases} 0 & \text{si } x_i \leq x_I, \\ \dfrac{1}{p^n_i} & \text{sinon,} \end{cases}, \rho^n_i = \begin{cases} \rho^1 & \text{si } x_i \leq x_I, \\ \dfrac{p_i}{RT} & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et } \mu^n_i = \begin{cases} \mu_1 & \text{si } x_i \leq x_I, \\ \mu_2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

A partir des valeurs ponctuelles précédemment calculées, nous construisons leurs moyennes à l'instant n sur chaque élément du maillage regroupées dans le tableau Tab. 4.2 selon le type de maille considérée.

Moyennes	**Maille non mixte** $I_{i+1/2}$	**Maille mixte** $I_{i+1/2}$
$\overline{\mathbf{Y}}^n_{i+1/2}$	$\dfrac{\mathbf{Y}^n_i + \mathbf{Y}^n_{i+1}}{2}$	$(1-\varepsilon_{i+1/2})\mathbf{Y}^n_i + \varepsilon_{i+1/2}\mathbf{Y}^n_{i+1}$
$\overline{\rho}^{i+1/2}$	$\left(\dfrac{1}{2\rho^n_i} + \dfrac{1}{2\rho^n_{i+1}}\right)^{-1}$	$\left(\dfrac{1-\varepsilon_{i+1/2}}{\rho^n_i} + \dfrac{\varepsilon_{i+1/2}}{\rho^n_{i+1}}\right)^{-1}$
$\overline{\mu}^n_{i+1/2}$	$\left(\dfrac{1}{2\mu^n_i} + \dfrac{1}{2\mu^n_{i+1}}\right)^{-1}$	$\left(\dfrac{1-\varepsilon_{i+1/2}}{\mu^n_i} + \dfrac{\varepsilon_{i+1/2}}{\mu^n_{i+1}}\right)^{-1}$
$\overline{\beta_T}^n_{i+1/2}$	$\dfrac{\beta^n_{T,i} + \beta^n_{T,i+1}}{2}$	$(1-\varepsilon_{i+1/2})\beta^n_{T,i} + \varepsilon_{i+1/2}\beta^n_{T,i+1}$

Tab. 4.2 – Grandeurs moyennes à t^n sur un élément $I_{i+1/2}$ du maillage

Enfin, à partir des moyennes calculées précédemment nous construisons les matrices moyennes et le second membre moyen explicites (i.e. au temps t^n) qui interviennent dans la formulation variationnelle (4.59). Pour tout $I_{i+1/2}$ de $\mathcal{T}_h$ nous avons :

$$\begin{aligned} \overline{\mathscr{A}_0}^n_{i+1/2} &= \tilde{\mathscr{A}_0}(\overline{\mathbf{Y}}^n_{i+1/2}, \overline{\beta_T}^n_{i+1/2}, \overline{\rho}^n_{i+1/2}), \\ \overline{\mathscr{A}}^n_{i+1/2} &= \tilde{\mathscr{A}}(\overline{\mathbf{Y}}^n_{i+1/2}, \overline{\rho}^n_{i+1/2}), \\ \overline{\mathscr{K}}^n_{i+1/2} &= \tilde{\mathscr{K}}(\overline{\mu}^n_{i+1/2}), \\ \overline{\mathscr{S}}^n_{i+1/2} &= \tilde{\mathscr{S}}(\overline{\rho}^n_{i+1/2}), \end{aligned} \tag{4.60}$$

et enfin le coefficient de stabilisation moyen

$$\overline{\tau}^n_{i+1/2} = (1-\varepsilon_{i+1/2})\tau_1^{i+1/2}(\overline{\mu}^n_{i+1/2}, \overline{\rho}^n_{i+1/2}) + \varepsilon_{i+1/2}\tau_2^{i+1/2}(\overline{\mu}^n_{i+1/2}, \overline{\rho}^n_{i+1/2}). \tag{4.61}$$

3.2 Illustration numérique

Comme nous l'avons fait pour le modèle linéaire, nous allons tester le schéma numérique issu de (4.59) pour la simulation numérique du remplissage d'un tuyau avec un liquide.

Nous considérons donc, un domaine de 1 m de long occupé par de l'eau liquide (0m $\leq x \leq 0,5$m) et de l'air ($0,5$m $\leq x \leq$ 1m) séparés par une interface immobile localisée en $x_I = 0,5$m. Le liquide est un fluide incompressible caractérisé par une densité constante donnée par $\rho_1 = 1000$kg.m^{-3}. Le gaz quant à lui, est supposé compressible et est régit par la loi d'état des gaz parfaits qui fait intervenir un certain nombre de constantes restituées dans le tableau suivant :

γ	$1,4$
c_v	1000
R	300
T	$300K$

Compte tenu des constantes choisies précédemment, la vitesse du son dans le gaz est constante et égale à $c = 317$m.s^{-1}. Enfin l'écoulement considéré ici est non visqueux. Les deux fluides sont initialement au repos ; $u = 0$m.s^{-1} à la pression constante $p = p_{atm} = 10^5$Pa. On injecte au cours du temps du l'eau en $x = 0$m à la vitesse $u = 100t$m.s^{-1}. Par contre en $x = 1$m, la vitesse et la pression vérifient des conditions aux limites transparentes. Le domaine spatial est découpé en 1000 intervalles. Enfin le temps varie de $t = 0$ms à $t = 1$ms.

Sur les figures Fig. 4.13 nous avons représenté les calculs réalisés avec les modèles mono-fluide quasi-linéaire et quasi-linéaire symétrique. Quelque soit le modèle retenu, les solutions numériques obtenues sont satisfaisantes. En effet, elle coïncident parfaitement avec la solution exacte (dont le calcul est effectué dans les annexes) du problème non-linéaire donnée par :

$$u(x,t) = \begin{cases} 100t & \text{si } x \leq x_I \\ \frac{1}{2}100\left(t - \frac{x-x_I}{c}\right) + \frac{1}{2c\rho_1}\left[p_I\left(t - \frac{x-x_I}{c}\right) - p_{atm}\right] & \text{si } x - x_I \leq ct, \\ 0 & \text{si } x - x_I > ct \end{cases} \tag{4.62}$$

et

$$p(x,t) = \begin{cases} -100\rho_2(x-x_I) + p_I(t) & \text{si } x \leq x_I \\ \frac{\rho_1 c}{2}\left[100\left(t - \frac{x-x_I}{c}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[p_I\left(t - \frac{x-x_I}{c}\right) + p_{atm}\right], & \text{si } x - x_I \leq ct, \\ p_{atm} & \text{si } x - x_I > ct \end{cases} \tag{4.63}$$

avec la pression interfaciale :

$$p_I(t) = e^{\frac{(100t-1)}{c} + \ln(p_{atm})}.$$

4 Problème isotherme

Depuis le début de ce chapitre, nous nous sommes intéressés au développement d'un schéma numérique uniquement dédié à la résolution spatio-temporelle du modèle mono-fluide sans

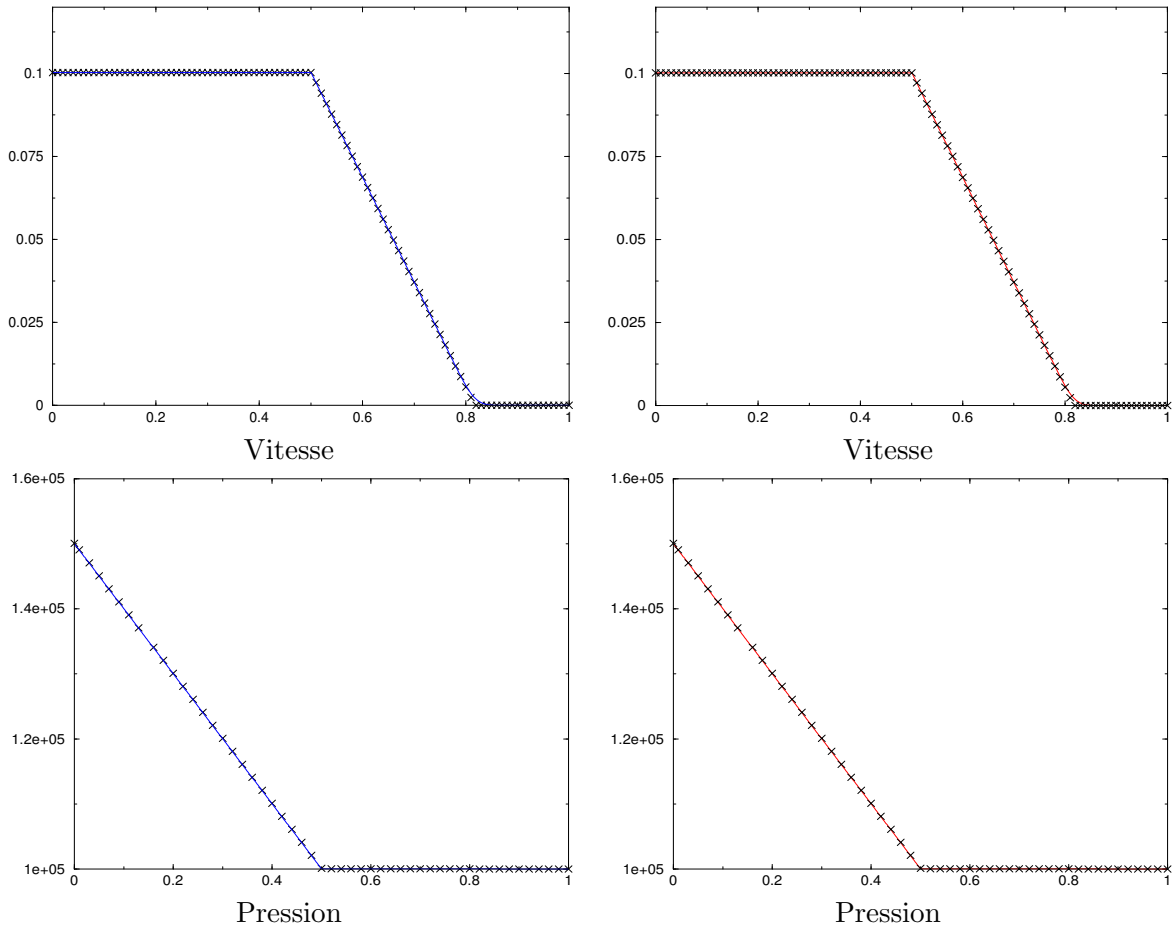


FIG. 4.13 – Injection de liquide dans un tuyau ouvert contenant du gaz à $t = 1$ms. Modèle symétrique (courbes bleues), modèle quasi-linéaire (courbes rouges) et solution exacte (croix noires).

transport (4.58) en supposant l'interface figée. Ce point étant désormais traité, nous allons nous intéresser à l'élaboration d'une méthode numérique simple pour la résolution des équations (4.1) et (4.2).

Toujours dans le but de simplifier le raisonnement, seul le modèle isotherme est considéré. Nous rappelons que le problème étudié est :

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(\mathbf{Y},\phi)\mathbf{Y} = \mathscr{A}_0(\mathbf{Y},\phi)\partial_t\mathbf{Y} + \mathscr{A}(\mathbf{Y},\phi)\partial_x\mathbf{Y} - \partial_x\left(\mathscr{K}(\mathbf{Y},\phi)\partial_x\mathbf{Y}\right) &= \mathscr{S}(\mathbf{Y},\phi), \quad \text{dans } \Omega\times]0,T[, \\ \frac{dx_I(t)}{dt} &= u_I(t), \qquad \text{dans }]0,T[. \end{aligned} \tag{4.64}$$

où $\mathbf{Y}^t = (p,u)^t$. Pour que le problème soit complet, il est nécessaire de se donner un certain nombre de données :

– dont la condition initiale :

$$x_I(0) = x_I^0 \text{ et } \mathbf{Y}(0,x) = \mathbf{Y}^0(x)$$

avec x_I^0 la position en $t = 0$ de l'interface,

– et la condition aux limites de type Dirichlet pour la vitesse

$$u(a,t) = u_g(t) \text{ et } u(b,t) = u_d(t).$$

Ici nous avons pris en compte les termes de convection, cela siginifie d'une part que l'interface évolue au cours du temps par le biais de l'équation (4.64) et d'autre part que les termes de convection ne sont plus omis dans le modèle mono-fluide. Les équations sont donc :

– pour le modèle quasi-linéaire symétrique :

$$\begin{pmatrix} \beta_T & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \partial_t \mathbf{Y} + \begin{pmatrix} \beta_T u & 1 \\ 1 & \rho u \end{pmatrix} \partial_x \mathbf{Y} - \partial_x \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4/3\mu \end{pmatrix} \partial_x \mathbf{Y} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho g \end{pmatrix},$$

– et pour le modèle quasi-linéaire :

$$\begin{pmatrix} \beta_T \rho & 0 \\ \rho \beta_T u & \rho \end{pmatrix} \partial_t \mathbf{Y} + \begin{pmatrix} \rho \beta_T u & \rho \\ \rho \beta_T u^2 + 1 & 2\rho u \end{pmatrix} \partial_x \mathbf{Y} - \partial_x \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4/3\mu \end{pmatrix} \partial_x \mathbf{Y} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho g \end{pmatrix}.$$

4.1 Méthode numérique

Dans cette section nous développons une méthode numérique dédiée à la résolution des équations couplées (4.64). Comme nous l'avons indiqué au début de ce chapitre, pour simplifier la résolution de (4.64) nous allons résoudre dans une premier temps le modèle mono-fluide puis dans un second temps transporter l'interface avec le nouveau champ de vitesse. Pour la discrétisation des équations régissant l'écoulement nous mettons en oeuvre une méthode d'éléments finis stabilisés en espace couplée à une méthode aux différences finies en temps, tandis que pour l'équation d'advection de l'interface nous utilisons une méthode aux différences finies.

4.1.1 Discrétisation du modèle mono-fluide

Dans cette partie nous nous intéressons uniquement à la résolution des équations associées à l'écoulement. En utilisant les mêmes notations que dans les sections précédentes, la formulation éléments finis stabilisés pour le modèle mono-fluide (4.64) est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{Y}_h^n)_{0 \le n \le N} \in \mathsf{S}_h^p \times \mathsf{S}_h^u \text{ tel que pour tout } \mathbf{W}_h \in \mathsf{T}_h^p \times \mathsf{T}_h^u \text{ on ait :} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N_s-1} \int_{I_{i+1/2}} \mathbf{W}_h \cdot \left(\overline{\mathscr{A}}_{0\,i+1/2}^n \frac{\delta \mathbf{Y}_h^{n+1}}{\delta t} + \overline{\mathscr{A}}_{i+1/2}^n \partial_x \mathbf{Y}_h^{n+1} - \overline{\mathscr{S}}_{i+1/2}^n \right) + \partial_x \mathbf{W}_h \cdot \overline{\mathscr{K}}_{i+1/2}^n \partial_x \mathbf{Y}_h^{n+1} dx \\ + \displaystyle\sum_{i=1}^{N_s-1} \int_{I_{i+1/2}} {}^t\overline{\mathscr{A}}_{i+1/2}^n \partial_x \mathbf{W}_h \cdot \overline{\tau}_{i+1/2}^n \left(\overline{\mathscr{A}}_{0\,i+1/2}^n \frac{\delta \mathbf{Y}_h^{n+1}}{\delta t} + \overline{\mathscr{A}}_{i+1/2}^n \partial_x \mathbf{Y}_h^{n+1} - \overline{\mathscr{S}}_{i+1/2}^n \right) dx = 0. \end{array} \right. \tag{4.65}$$

Les quantités $\overline{\mathscr{A}}_{0\,i+1/2}^n, \overline{\mathscr{A}}_{i+1/2}^n, \overline{\mathscr{K}}_{i+1/2}^n, \overline{\mathscr{S}}_{i+1/2}^n, \overline{\tau}_{i+1/2}^n$ sont des moyennes explicites calculées à partir de la position de l'interface supposée connue à l'instant t^n.

Lorsque l'interface était fixée, la fonction couleur ε ne dépendait que de l'espace (voir définition 1), à présent c'est une fonction spatio-temporelle car l'interface bouge au cours du temps.

Definition 2 *Par extension de la définition 1, nous définissons :*

$$\begin{array}{rccl} \varepsilon_{i+1/2}(t) : & [a,b] \times [0,T] & \mapsto &]0,1[\\ & (x,t) & \to & \dfrac{V_{i+1/2}^2(t)}{V_{i+1/2}} \quad \textit{si } x \in I_{i+1/2} \in \mathcal{T}_h. \end{array} \tag{4.66}$$

La quantité $V_{i+1/2}^2(t)$ est le volume de fluide 2 (gaz) dans la maille $I_{i+1/2}$ de volume $V_{i+1/2}$ à l'instant t. Il sera utile de noter $\varepsilon_{i+1/2}^n$ la valeur de fonction couleur à l'instant n.

En employant la quantité $\varepsilon^n_{i+1/2}$ nous construisons à chaque instant $t^n, n = 0, \ldots, N$ les moyennes :

$$\overline{\mathbf{Y}}^n_{i+1/2}, \overline{\rho}^n_{i+1/2}, \overline{\beta_T}^n_{i+1/2}, \overline{\mu}^n_{i+1/2}$$

détaillées dans le tableau Tab. 4.3 dont on déduit :

$$\overline{\mathscr{A}_0}^n_{i+1/2}, \overline{\mathscr{A}}^n_{i+1/2}, \overline{\mathscr{K}}^n_{i+1/2}, \overline{\mathscr{S}}^n_{i+1/2}, \overline{\tau}^n_{i+1/2}.$$

Moyennes	**Maille non mixte** $I_{i+1/2}$	**Maille mixte** $I_{i+1/2}$
$\overline{\mathbf{Y}}^n_{i+1/2}$	$\dfrac{\mathbf{Y}^n_i + \mathbf{Y}^n_{i+1}}{2}$	$(1-\varepsilon^n_{i+1/2})\mathbf{Y}^n_i + \varepsilon^n_{i+1/2}\mathbf{Y}^n_{i+1}$
$\overline{\rho}^n_{i+1/2}$	$\left(\dfrac{1}{2\rho^n_i} + \dfrac{1}{2\rho^n_{i+1}}\right)^{-1}$	$\left(\dfrac{1-\varepsilon^n_{i+1/2}}{\rho^n_i} + \dfrac{\varepsilon^n_{i+1/2}}{\rho^n_{i+1}}\right)^{-1}$
$\overline{\mu}^n_{i+1/2}$	$\left(\dfrac{1}{2\mu^n_i} + \dfrac{1}{2\mu^n_{i+1}}\right)^{-1}$	$\left(\dfrac{1-\varepsilon^n_{i+1/2}}{\mu^n_i} + \dfrac{\varepsilon^n_{i+1/2}}{\mu^n_{i+1}}\right)^{-1}$
$\overline{\beta_T}^n_{i+1/2}$	$\dfrac{\beta^n_{T,i} + \beta^n_{T,i+1}}{2}$	$(1-\varepsilon^n_{i+1/2})\beta^n_{T,i} + \varepsilon^n_{i+1/2}\beta^n_{T,i+1}$

Tab. 4.3 – Grandeurs moyennes à t^n sur un élément $I_{i+1/2}$ du maillage

4.1.2 Discrétisation de l'équation d'évolution de l'interface

Nous considérons à présent la résolution de l'équation de transport de l'interface x_I à la vitesse interfaciale u^{n+1}_I. Pour cela un schéma de type différences finies à l'ordre 1 est employé. En conservant les mêmes notations nous considérons le schéma numérique :

$$\frac{x^{n+1}_I - x^n_I}{\delta t} = u^{n+1}_I. \tag{4.67}$$

Dans l'équation précédente $u_I = u(x^n_I, t^{n+1})$ est la vitesse au temps t^{n+1} au point x^n_I. Afin de déterminer la vitesse interfaciale la vitesse au point x^n_I est interpolée voir Fig. 4.14. La vitesse utilisée ici est celle calculée par l'intermédiaire de la formulation variationnelle approchée (4.65) notée u_h. Etant donné que nous utilisons une approximation $\mathbb{P}_1$ de l'inconnue $\mathbf{Y}$ en espace, cela signifie que sur un élément du maillage spatial la solution est linéaire. Si l'interface est située sur un élément $I_{i+1/2} = [x_i, x_{i+1}]$ par exemple, alors la vitesse u_I est donnée par :

$$u_I = \frac{u^{n+1}_{i+1} - u^{n+1}_i}{x_{i+1} - x_i}(x^n_I - x_i) + u^{n+1}_i, \forall n = 0, \ldots, N, \tag{4.68}$$

où u^{n+1}_i est la valeur de la vitesse au noeud x_i à l'instant $n+1$.
Enfin étant donnée la nouvelle position de l'interface x^{n+1}_I, on met à jour la fonction ϕ^{n+1} au

temps t^{n+1} à l'aide de la relation :

$$\phi^{n+1} = x - x_I^{n+1}.$$

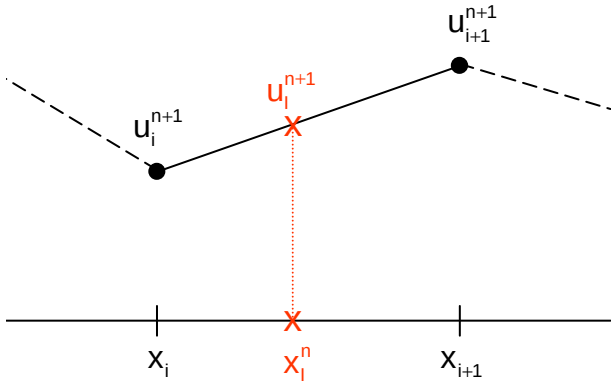


FIG. 4.14 – Interpolation de la vitesse interfaciale u_I^{n+1}

4.2 Synthèse de l'algorithme

Afin de découpler les difficultés inhérentes à la résolution de (4.64), l'algorithme proposé repose sur un splitting en temps. En effet, dans un premier temps on suppose que l'interface est figée au temps précédent et on résout le problème couplé, puis dans un second temps, étant donné le nouveau champ de vitesse on met à jour la position de l'interface. L'algorithme que nous avons utilisé pour résoudre le problème couplé (4.64) est résumé ci après :
Pour chaque instant $t^n, 0 \leq n \leq N$

1. Etant donnée la position de l'interface x_I^n et la solution $\mathbf{Y}^n$, on calcule :
   (a) La fonction couleur :
   $$\varepsilon_{i+1/2}^n,$$
   (b) On en déduit les moyennes :
   $$\overline{\mathbf{Y}}_{i+1/2}^n, \overline{\rho}_{i+1/2}^n, \overline{\mu}_{i+1/2}^n, \overline{\beta_{TT}}_{,i+1/2}^n,$$
   (c) On calcule également :
   $$\overline{\mathscr{A}_0}_{i+1/2}^n, \overline{\mathscr{A}}_{i+1/2}^n, \overline{\mathscr{K}}_{i+1/2}^n, \overline{\tau}_{i+1/2}^n.$$
2. On cherche $\mathbf{Y}_h^{n+1}$ solution du problème variationnel approché (4.65).
3. Une fois $\mathbf{Y}_h^{n+1}$ connue on met à jour la position de l'interface en résolvant (4.68).
4. Enfin on incrémente de temps de δt : $t^{n+1} = t^n + \delta t$ et on revient au début de la boucle.

4.3 Illustration numérique

Pour illustrer son bon comportement la méthode numérique précédemment définie a été testée pour la simulation numérique du remplissage d'un tuyau avec de l'eau.

On se donne un tuyau de 1m de long, occupé par de l'eau liquide et de l'air respectivement situés à gauche et à droite d'une interface mobile initialement positionnée en $x_I = 0,5$m. L'eau est un fluide incompressible de densité $\rho_1 = 1000$kg.m^{-3} et de viscosité $\mu_1 = 1$kg.m^{-1}.s^{-1}. L'air quant à lui est gouverné par la loi d'état des gaz parfaits caractérisé par une vitesse du son de $c = 317$m.s^{-1} et a une viscosité égale à $\mu_1 = 10^{-5}$kg.m^{-1}.s^{-1}. Les deux fluides sont initialement en translation vers la droite à vitesse constante ; $u = 1$m.s^{-1} et à la pression constante $p = p_{atm} = 10^5$Pa. On injecte au cours du temps de l'eau à l'entrée du tuyau ($x = 0$m) à la vitesse $u = 100t$m.s^{-1}. Par contre en $x = 1$m, la vitesse et la pression vérifient des conditions aux limites transparentes. Le domaine spatial est découpé en 1000 intervalles. Enfin le temps varie de $t = 0$ms à $t = 1$ms.

Sous l'effet de l'injection d'eau dans le tuyau, l'interface se déplace progressivement vers la droite à la vitesse $100t$. La position de l'interface vérifie donc :

$$x_I(t) = 50t^2 + t + x_I(0),$$

comme l'indique la figure (4.16). Nous observons également la formation d'un gradient de pression dans l'eau de pente 100. De façon générale, les solutions numériques calculées pour le modèle quasi-linéaire et le modèle quasi-linéaire symétrique semblent en parfait accord comme l'illustrent les courbes de la figure (4.15) .

5 Extension au problème anisotherme

Un des objectifs de cette thèse est de prendre en compte les effets thermiques. Pour cela nous allons généraliser l'approche dédiée à la résolution des équations (4.1) et (4.2) dans le cas isotherme à la résolution des équations anisothermes.

Ici, les effets de la température se traduisent par la présence d'une équation supplémentaire dans le modèle mono-fluide. L'équation de transport de l'interface, quant à elle, demeure inchangée. Par conséquent nous nous intéresserons ici, uniquement à la construction du schéma numérique pour les équations mono-fluides intervenant à la première étape de l'algorithme de splitting détaillé dans la section précédente. Pour le modèle non-visqueux, la méthode EFS moyennée peut être étendue de façon immédiate. Par contre nous verrons que cela est plus délicat pour le modèle visqueux selon la forme des équations considérée quasi-linéaire ou quasi-linéaire symétrique.

5.1 Modèle non visqueux

Pour commencer nous supposons qu'il n'y a pas d'effet visqueux ni d'effet de conductivité thermique. Cela se traduit par :

$$\mathscr{K}^i = 0 \text{ dans } \Omega_i.$$

Compte tenu de cette hypothèse nous nous ramenons à la résolution du système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{L}(\mathbf{Y},\phi)\mathbf{Y} = \mathscr{A}_0(\mathbf{Y},\phi)\partial_t\mathbf{Y} + \mathscr{A}(\mathbf{Y},\phi)\partial_x\mathbf{Y} & = & \mathscr{S}(\mathbf{Y},\phi), \\ \mathbf{Y}(x,0) & = & \mathbf{Y}^0(x) \end{array} \right. \tag{4.69}$$

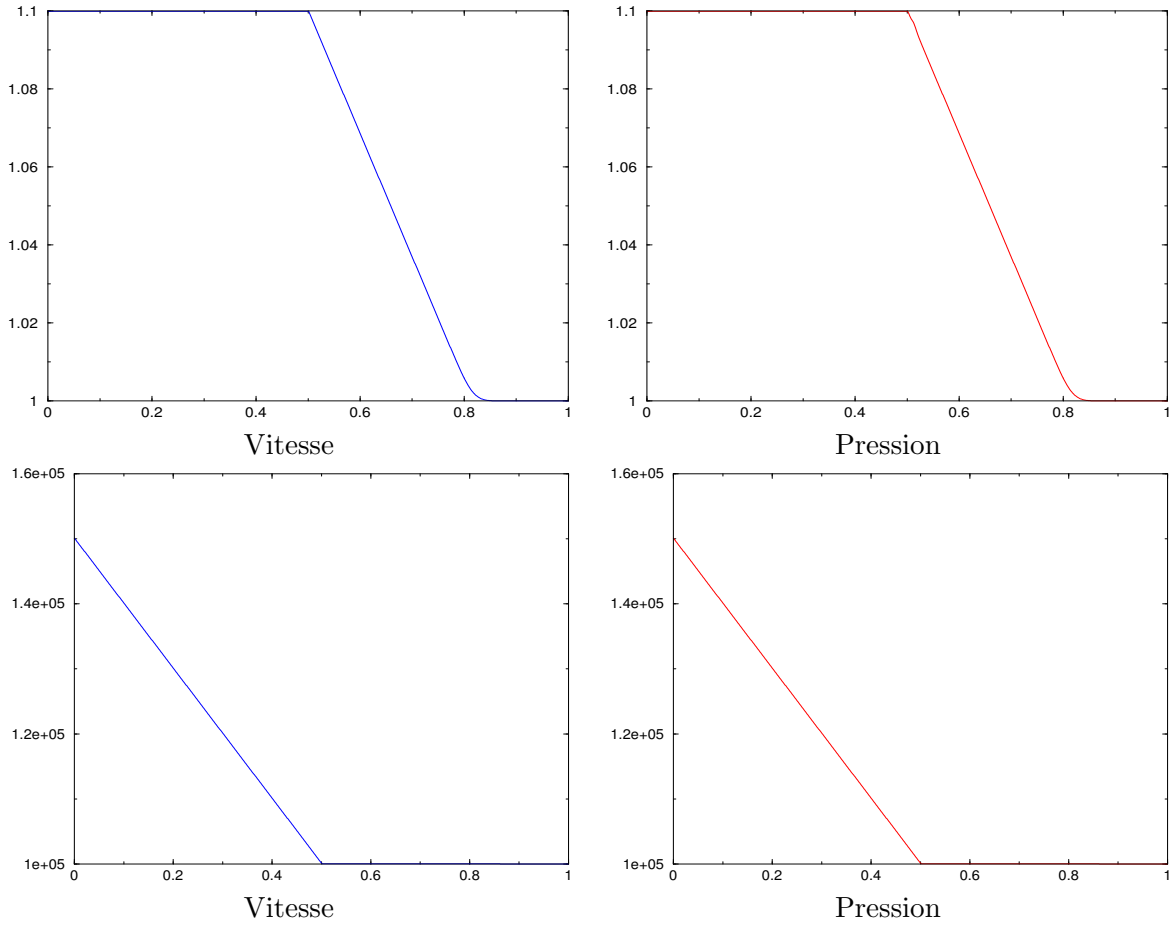


FIG. 4.15 – Injection de liquide dans un tuyau ouvert contenant du gaz à $t = 1$ms. Modèle symétrique (courbes bleues), modèle quasi-linéaire (courbes rouges).

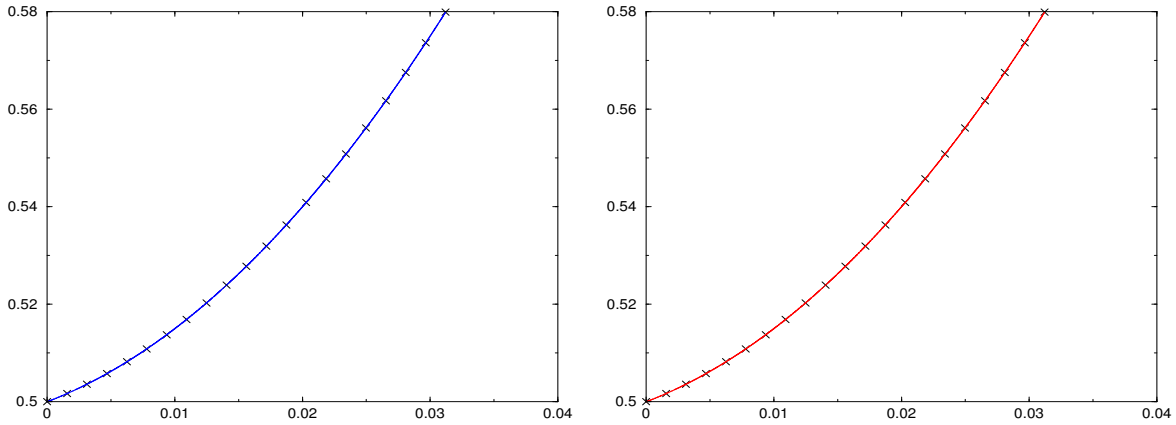


FIG. 4.16 – Evolution de la position de l'interface au cours du temps pour le modèle quasi-linéaire (courbe rouges) et le modèle quasi-linéaire symétrique (courbe bleue) comparées à la solution exacte (courbe noire).

avec $\mathbf{Y} = {}^t(p, u, T)$, pour des conditions aux limites de type Dirichlet sur la vitesse

$$u(a,t) = u_g(t) \text{ et } u(b,t) = u_d(t),$$

et sur la température :

$$T(a,t) = T_g(t) \text{ et } T(b,t) = T_d(t).$$

Ces équations sont couplées à l'équation de transport de l'interface (voir (4.2)).

Il est nécessaire, de rappeler que pour le modèle anisotherme, l'opérateur $\mathscr{L}$ dépend non seulement de $\mathbf{Y}, \rho, \beta_T$ mais aussi du coefficient de dilatation thermique α_p. Dans ce cas, ces coefficients sont donnés par :

$$\beta_T(x,t) = \begin{cases} \beta_T^1 &= 0 & \text{si } x < x_I(t), \\ \beta_T^2 &= \dfrac{1}{p(x,t)} & \text{sinon,} \end{cases}, \alpha(x,t) = \begin{cases} \beta_T^1 &= 0 & \text{si } x < x_I(t), \\ \beta_T^2 &= \dfrac{1}{T(x,t)} & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$\rho(x,t) = \begin{cases} \rho_1 & \text{si } x < x_I(t), \\ \dfrac{p(x,t)}{RT(x,t)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

5.1.1 Formulation éléments finis

Afin de résoudre (4.69), nous mettons en oeuvre comme précédemment une méthode d'éléments finis stabilisés associées à une méthode des moyennes pour traiter les discontinuités de $\mathscr{A}_0, \mathscr{A}, \mathscr{S}$. Ici, la prise en compte de l'équation sur la température T introduit une source de discontinuité supplémentaire due notamment à la présence de α_p dans les matrices $\mathscr{A}_0, \mathscr{A}$. Pour plus de détail sur les matrices nous renvoyons le lecteur aux Annexes A. Par conséquent, la construction des matrices moyennes présentes dans la formulation éléments finis sera en partie modifiée.

En utilisant les mêmes notations que dans les sections précédentes, la formulation éléments finis stabilisés du problème (4.69) est la suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{Y}_h^n)_{0\le n\le N} \in \mathsf{S}_h^p \times \mathsf{S}_h^u \times \mathsf{S}_h^T \text{ tel que pour tout } \mathbf{W}_h \in \mathsf{T}_h^p \times \mathsf{T}_h^u \times \mathsf{T}_h^T \text{ on ait :} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N_s-1} \int_{I_{i+1/2}} \mathbf{W}_h \cdot \left(\overline{\mathscr{A}_0}^n_{i+1/2} \frac{\delta \mathbf{Y}_h^{n+1}}{\delta t} + \overline{\mathscr{A}}^n_{i+1/2} \partial_x \mathbf{Y}_h^{n+1} - \overline{\mathscr{S}}^n_{i+1/2} \right) dx \\ + \displaystyle\sum_{i=1}^{N_s-1} \int_{I_{i+1/2}} {}^t\overline{\mathscr{A}}^n_{i+1/2} \partial_x \mathbf{W}_h \cdot \overline{\tau}^n_{i+1/2} \left(\overline{\mathscr{A}_0}^n_{i+1/2} \frac{\delta \mathbf{Y}_h^{n+1}}{\delta t} + \overline{\mathscr{A}}^n_{i+1/2} \partial_x \mathbf{Y}_h^{n+1} - \overline{\mathscr{S}}^n_{i+1/2} \right) dx = 0. \end{cases} \tag{4.70}$$

Dans la formulation variationnelle ci-dessus, interviennent les espaces approchés des fonctions test T_h^T et des solutions S_h^T associés à la température. Il sont définis par :

$$\mathsf{S}_h^T = \{T_h \in C^0(]a,b[), T_{h|K_e} \in \mathbb{P}_1(I_{i+1/2}), \forall I_{i+1/2} \in \mathcal{T}_h\}, \tag{4.71}$$

$$\mathsf{T}_h^T = \{\theta_h \in C^0(]a,b[), \theta_{h|K_e} \in \mathbb{P}_1(I_{i+1/2}), \forall I_{i+1/2} \in \mathcal{T}_h; \theta_h(a) = \theta_h(b) = 0\}. \tag{4.72}$$

5.1.2 Construction des moyennes

Le problème variationnel (4.65) s'appuie également sur les moyennes des opérateurs définies sur chaque maille $I_{i+1/2}$ du maillage $\mathcal{T}_h$ vérifiant les dépendances suivantes :

$$\begin{aligned} \overline{\mathscr{A}_0}^n_{i+1/2} &= \tilde{\mathscr{A}_0}(\overline{\mathbf{Y}}^n_{i+1/2}, \overline{\alpha_p}^n_{i+1/2}, \overline{\beta_T}^n_{i+1/2}, \overline{\rho}^n_{i+1/2}), \\ \overline{\mathscr{A}}^n_{i+1/2} &= \tilde{\mathscr{A}}(\overline{\mathbf{Y}}^n_{i+1/2}, \overline{\alpha_p}^n_{i+1/2}, \overline{\beta_T}^n_{i+1/2}, \overline{\rho}^n_{i+1/2}), \\ \overline{\mathscr{S}}^n_{i+1/2} &= \tilde{\mathscr{S}}(\overline{\rho}^n_{i+1/2}). \end{aligned} \tag{4.73}$$

Comme l'indiquent les définitions précédentes, la conception des matrices moyennes dépend fortement des moyennes des grandeurs physiques suivantes :

$$\overline{\mathbf{Y}}^n_{i+1/2}, \overline{\rho}^n_{i+1/2}, \overline{\alpha_p}^n_{i+1/2}, \overline{\beta_T}^n_{i+1/2}.$$

dont les valeurs sont récapitulées dans les tableaux Tab. 4.3 et Tab. 4.4

Moyennes	**Maille non mixte** $I_{i+1/2}$	**Maille mixte** $I_{i+1/2}$
$\overline{\alpha_p}^n_{i+1/2}$	$\dfrac{\alpha^n_{p,i} + \alpha^n_{p,i+1}}{2}$	$(1-\varepsilon^n_{i+1/2})\alpha^n_{p,i} + \varepsilon^n_{i+1/2}\alpha^n_{p,i+1}$

Tab. 4.4 – Grandeurs moyennes à t^n sur un élément $I_{i+1/2}$ du maillage

Pour déterminer la moyenne du coefficient de dilatation thermique $\overline{\alpha_p}^{i+1/2}$ (voir le tableau Tab. 4.4) il est nécessaire de calculer les valeurs de cette quantité en chaque noeud du maillage. Nous définissons donc :

$$\alpha^n_{p,i} = \begin{cases} 0 & \text{si } x_i \leq x_I, \\ \dfrac{1}{T^n_i} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin, pour un écoulement anisotherme, la loi des gaz parfait qui régit l'écoulement gazeux relie non seulement la densité à la pression mais aussi à la température. Cela implique d'une part que la vitesse du son n'est plus constante dans le gaz, d'autre part que la densité en chaque noeud du maillage est donnée par :

$$\rho^n_i = \begin{cases} \rho^1 & \text{si } x_i \leq x_I, \\ \dfrac{p^n_i}{RT^n_i} & \text{sinon.} \end{cases}$$

5.2 Modèle complet

A présent, nous étudions le problème anisotherme complet en tenant compte du terme des contraintes visqueuses :

$$\begin{cases} \mathscr{L}(\mathbf{Y},\phi)\mathbf{Y} = \mathscr{A}_0(\mathbf{Y},\phi)\partial_t\mathbf{Y} + \mathscr{A}(\mathbf{Y},\phi)\partial_x\mathbf{Y} - \mathscr{M}(\mathbf{Y},\phi)\partial_x\left(\mathscr{K}(\mathbf{Y},\phi)\partial_x\mathbf{Y}\right) &= \mathscr{S}(\mathbf{Y},\phi), \\ \mathbf{Y}(x,0) &= \mathbf{Y}^0(x) \end{cases} \tag{4.74}$$

avec $\mathbf{Y} = {}^t(p,u,T)$, pour la condition aux limites de type Dirichlet sur la vitesse

$$u(a,t) = u_g(t) \text{ et } u(b,t) = u_d(t),$$

et la condition aux limites de type Dirichlet sur la température :

$$T(a,t) = T_g(t) \text{ et } T(b,t) = T_d(t).$$

En raison de la présence de matrice $\mathscr{M}$ qui dépend de $\mathbf{Y}$ pour le modèle quasi-linéaire symétrique, la résolution du problème avec viscosité (4.74) peut s'avérer plus problématique. En effet il faut être capable de discrétiser correctement le terme visqueux :

$$\mathscr{M}(\mathbf{Y},\phi)\partial_x\left(\mathscr{K}(\mathbf{Y},\phi)\partial_x\mathbf{Y}\right).$$

En mettant en oeuvre la méthode EFS développée jusqu'à présent, nous allons voir dans un prochain paragraphe, que la construction du schéma numérique se fait simplement pour le modèle quasi-linéaire alors que cela est plus complexe pour son équivalent symétrique.

5.2.1 Formulation éléments finis

En étendant de façon naïve, la méthode employée jusqu'alors il est naturel de s'appuyer sur le problème variationnel approché suivant pour résoudre l'équation (4.74) :

$$\left\{\begin{array}{ll} & \text{Trouver } (\mathbf{Y}_h^n)_{0\leq n\leq N} \in \mathsf{S}_h^p \times \mathsf{S}_h^u \times \mathsf{S}_h^T \text{ tel que pour tout } \mathbf{W}_h \in \mathsf{T}_h^p \times \mathsf{T}_h^u \times \mathsf{T}_h^T \text{ on ait :} \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{N_s-1} \int_{I_{i+1/2}} \mathbf{W}_h \cdot \left(\overline{\mathscr{A}}_{0\,i+1/2}^n \frac{\delta \mathbf{Y}_h^{n+1}}{\delta t} + \overline{\mathscr{A}}_{i+1/2} \partial_x \mathbf{Y}_h^{n+1} - \overline{\mathscr{S}}_{i+1/2} \right) dx \\ + & \displaystyle\sum_{i=1}^{N_s-1} \int_{I_{i+1/2}} \partial_x (\overline{\mathscr{M}}_{i+1/2}^n \mathbf{W}_h) \cdot \left(\overline{\mathscr{K}}_{i+1/2}^n \partial_x \mathbf{Y}_h^{n+1} \right) dx \\ + & \displaystyle\sum_{i=1}^{N_s-1} \int_{I_{i+1/2}} {}^t\overline{\mathscr{A}}_{i+1/2}^n \partial_x \mathbf{W}_h \cdot \overline{\tau}_{i+1/2}^n \left(\overline{\mathscr{A}}_{0\,i+1/2}^n \frac{\delta \mathbf{Y}_h^{n+1}}{\delta t} + \overline{\mathscr{A}}_{i+1/2}^n \partial_x \mathbf{Y}_h^{n+1} - \overline{\mathscr{S}}_{i+1/2}^n \right) dx = 0. \end{array}\right. \tag{4.75}$$

A présent nous allons définir en détail les moyennes $\overline{\mathscr{K}}^{i+1/2}$ et $\overline{\mathscr{M}}^{i+1/2}$ pour tout élément $I_{i+1/2}$ de $\mathcal{T}_h$ présentes dans (4.75).

Construction de $\overline{\mathscr{K}}_{i+1/2}$

Pour le modèle anisotherme la matrice des coefficients de viscosité $\mathscr{K}$ dépend non seulement de μ mais également de κ :

$$\mathscr{K} = \tilde{\mathscr{K}}(\mu, \kappa),$$

par conséquent la matrice moyenne explicite $\overline{\mathscr{K}}_{i+1/2}$ est une fonction des moyennes harmoniques de la viscosité : $\overline{\mu}_{i+1/2}$ et de la conductivité thermique : $\overline{\kappa}_{i+1/2}$ (voir tableaux Tab. 4.3 et Tab. 4.5).

Moyennes	**Maille non mixte $I_{i+1/2}$**	**Maille mixte $I_{i+1/2}$**
$\overline{\kappa}_{i+1/2}$	$\left(\dfrac{1}{2\kappa_i^n} + \dfrac{1}{2\kappa_{i+1}^n}\right)^{-1}$	$\left(\dfrac{1-\varepsilon_{i+1/2}^n}{\kappa_i^n} + \dfrac{\varepsilon_{i+1/2}^n}{\kappa_{i+1}^n}\right)^{-1}$

Tab. 4.5 – Grandeurs moyennes à t^n sur un élément $I_{i+1/2}$ du maillage

Pour construire $\overline{\kappa}_{i+1/2}$ nous avons défini une conductivité thermique μ_i^n définie en chaque noeud i du maillage donnée par :

$$\kappa_i^n = \left\{\begin{array}{ll} \kappa_1 & \text{si } x_i \leq x_I, \\ \kappa_2 & \text{sinon.} \end{array}\right.$$

Construction de $\overline{\mathscr{M}}^{i+1/2}$

Dans la formulation variationnelle (4.75), nous avons introduit la matrice moyenne $\overline{\mathscr{M}}^{i+1/2}$ constante par éléments. Ce choix peut dégénérer sur une méthode numérique inconsistante selon le modèle mono-fluide considéré. En effet en utilisant ce type de moyenne, le schéma numérique défini par (4.75) ne correspond pas à la résolution de l'équation intiale :

$$\mathscr{A}_0 \partial_t \mathbf{Y} + \mathscr{A} \partial_x \mathbf{Y} - \mathscr{M} \partial_x (\mathscr{K} \partial_x \mathbf{Y}) = \mathscr{S}, \tag{4.76}$$

mais plutôt à l'équation :

$$\mathscr{A}_0\partial_t\mathbf{Y} + \mathscr{A}\partial_x\mathbf{Y} - \partial_x(\mathscr{M}\mathscr{K}\partial_x\mathbf{Y}) = \mathscr{S}. \tag{4.77}$$

Pour le modèle quasi-linéaire, $\mathscr{M}$ est la matrice identité. Cela implique, que les équations (4.76) et (4.77) sont identiques. La méthode numérique reste donc consistante.

Par contre, pour le modèle quasi-linéaire, la matrice $\mathscr{M}$ est plus complexe car elle dépend de $\mathbf{Y}, \rho$. Pour s'assurer de la consistance du schéma, une solution est de choisir comme moyenne pour $\mathscr{M}$ sa valeur en chaque noeud du maillage.
Bien que ce choix soit nécessaire, il n'est pas judicieux. En outre, l'utilisation de la valeur nodale engendre une complexification de l'implémentation informatique du schéma obtenu. De façon générale, la structure d'un code d'éléments finis s'appuie sur l' assemblage de blocs calculés sur chaque élément du maillage. En introduisant une moyenne sur chaque noeud du maillage pour la matrice $\mathscr{M}$, cette structure n'est plus respectée.

Compte tenu des difficultés associées à la discrétisation du modèle mono-fluide anisotherme symétrique visqueux ($\mathscr{L} = \mathcal{L}$), nous nous limiterons par la suite à l'utilisation du modèle quasi-linéaire standard ($\mathscr{L} = L$) pour la simulation numérique d'écoulement anisothermes et visqueux. Ainsi, le problème résolu est :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} L(\mathbf{Y},\phi)\mathbf{Y} = A_0(\mathbf{Y},\phi)\partial_t\mathbf{Y} + A(\mathbf{Y},\phi)\partial_x\mathbf{Y} - \partial_x\left(K(\mathbf{Y},\phi)\partial_x\mathbf{Y}\right) & = & S(\mathbf{Y},\phi), \\ \mathbf{Y}(x,0) & = & \mathbf{Y}^0(x) \end{array} \right. \tag{4.78}$$

En utilisant les mêmes notations que dans les sections précédentes, finalement nous utilisons la formulation éléments finis stabilisés du problème (4.78) qui est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{Y}_h^n)_{0\leq n\leq N} \in \mathsf{S}_h^p \times \mathsf{S}_h^u \times \mathsf{S}_h^T \text{ tel que pour tout } \mathbf{W}_h \in \mathsf{T}_h^p \times \mathsf{T}_h^u \times \mathsf{T}_h^T \text{ on ait :} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N_s-1} \int_{I_{i+1/2}} \mathbf{W}_h \cdot \left(\overline{A_0}^n_{i+1/2} \frac{\delta\mathbf{Y}_h^{n+1}}{\delta t} + \overline{A}^n_{i+1/2}\partial_x\mathbf{Y}_h^{n+1} - \overline{S}^n_{i+1/2} \right) + \partial_x\mathbf{W}_h \cdot \overline{K}^n_{i+1/2}\partial_x\mathbf{Y}_h^{n+1} dx \\ + \displaystyle\sum_{i=1}^{N_s-1} \int_{I_{i+1/2}} {}^t\overline{A}^n_{i+1/2}\partial_x\mathbf{W}_h \cdot \overline{\tau}^{i+1/2} \left(\overline{A_0}^n_{i+1/2} \frac{\delta\mathbf{Y}_h^{n+1}}{\delta t} + \overline{A}^n_{i+1/2}\partial_x\mathbf{Y}_h^{n+1} - \overline{S}^n_{i+1/2} \right) dx = 0. \end{array} \right. \tag{4.79}$$

6 Conclusion

La méthode numérique considérée ici pour la simulation d'écoulements diphasiques 1D repose sur la résolution des équations (4.1) et (4.2). Il a donc été nécessaire d'envisager deux types de méthodes numériques adéquates pour résoudre chaque type de problème et de les coupler par la suite.

Dans un premier temps nous nous sommes intéressés uniquement à la résolution des équations régissant l'écoulement (4.1), pour lequelles nous avons mis en oeuvre une méthode de type éléments finis stabilisés. Dans ce contexte le développement du schéma numérique se ramène à la résolution de la formulation variationnelle (4.59). Dans ce cas la difficulté majeure est d'écrire un schéma numérique pour la discrétisation d'opérateur discontinus, non-linéaires et qui évoluent au court du temps.
Nous avons proposé dans ce chapitre une démarche constructive pour l'élaboration de schémas numériques pour le modèle mono-fluide non-conservatif modélisant des écoulements compressible-incompressible multiphasiques. Elle est basée sur la construction d'opérateurs moyens à partir

d'une fonction couleur ε représentant la fraction occupée par la phase compressible dans chaque élément du maillage spatial. Pour des moyennes judicieusement choisies, cette méthode a été facilement généralisée et validée en non-linéraire avec convection pour des modèles anisothermes.

Dans un second temps, nous avons étudié le problème dans sa globalité, Pour cela nous avons couplé la méthode de type éléments finis stabilisés définie auparavant à une méthode aux différences finies pour résoudre l'équation de transport de l'interface.

A l'issue de ce chapitre nous avons été capables de proposer une méthode numérique simple et globale permettant de simuler numériquement des écoulement diphasiques monodimensionnels. Il s'agit maintenant de tester cette approche sur différents cas tests 1D.

Chapitre 5

Résultats numériques mono-dimensionnels

Nous nous intéressons maintenant à la validation de la méthode numérique construite au chapitre précédent. Un premier ensemble de tests numériques est réalisé dans le but de valider l'approche proposée sur des cas test réguliers (i.e. absence de discontinuité initiale sur l'inconnue). Par la suite des simulations pour lesquelles la donnée initiale est discontinue en vitesse sont effectuées. Bien que le schéma numérique ne soit pas particulièremement adapté à ce type de configuration nous verrons sur quelques exemples que la solution se comporte bien.

1 Problèmes diphasiques : cas test réguliers

Dans la première partie de ce chapitre, plusieurs cas test réguliers sont considérés. Les calculs présentés par la suite correspondent à différentes configurations. En outre, nous nous intéressons ici à des écoulements avec une ou plusieurs interfaces, sans ou avec terme source, et enfin en prenant compte ou non des effets thermiques.

1.1 Remplissage d'une cavité

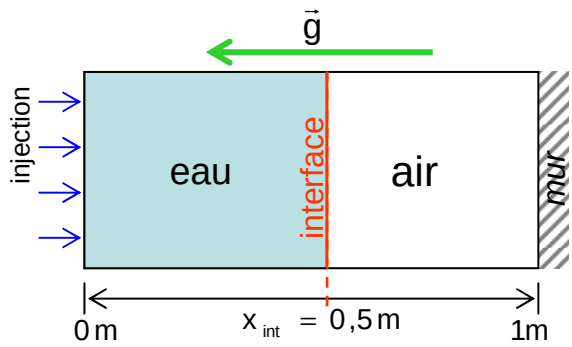


Fig. 5.1 – Remplissage d'une cavité fermée avec de l'eau

Dans ce paragraphe, nous reprenons le cas test du remplissage d'une cavité (voir chapitre 4) contenant de l'air avec de l'eau. Toutefois ici le domaine est fermé et l'écoulement est soumis à la gravité. De cette façon nous illustrons d'une part la compressibilité de la phase gazeuse et d'autre part le bon fonctionnement de notre méthode lorsque des termes sources interviennent dans les équations monofluides quasi-linéaires.

Nous considérons le remplissage d'une cavité contenant de l'air avec de l'eau (voir figure FIG. 5.1). L'ensemble est également placé sous l'influence d'un champ gravitationnel $g = 10m.s^{-2}$ (orienté dans le sens des x décroissants) pris en compte dans le modèle au travers du terme source $\mathscr{S}$ défini par :

$$\mathscr{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho g \end{pmatrix}.$$

La longueur du domaine de calcul est égale à 1m et l'interface est initialement positionnée en $x_{int} = 0.5$m. L'eau est considérée incompressible de densité $\rho = 1000$kg.m^{-3}, se trouve du coté gauche de l'interface tandis que l'air, de densité $\rho = 1$kg.m^{-3}, se trouve du côté droit. Dans l'air, supposé compressible, nous vérifions la loi des gaz parfaits :

$$p = \rho RT = \rho c^2.$$

Ici nous supposons que l'écoulement est isotherme, par conséquent la vitesse du son dans le gaz est constante et est égale à $c = 317m.s^{-1}$.
Les deux fluides sont initialement au repos i.e. $u = 0$m.s^{-1} et ont une pression identique $p = p_{atm} = 10^5$Pa, mais des viscosités différentes $\mu = 1$kg.m^{-1}.s^{-1} pour l'eau et $\mu = 10^{-5}$kg.m^{-1}.s^{-1} pour l'air. On injecte (en $x = 0$m) de l'eau de façon progressive à la vitesse $u_g(t) = 1000t$m.s^{-1}. Le domaine est fermé en $x = 1$m par une paroi imperméable.
On considère ici, un maillage régulier constitué de 1000 éléments. Enfin le temps varie de $t = 0$ms à $t = 15$ms.

Résultats

Pour les deux modèles quasi-linéaire et quasi-linéaire symétrisé, nous avons représenté sur les figures FIG. 5.6 les résultats obtenus en $t = 1,5.10^{-2}$s. Sur ce cas simple, les deux modèles donnent des solutions identiques, bien que les schémas numériques ne soient pas équivalents. Le remplissage de la cavité engendre naturellement le mouvement de l'interface vers la droite selon la loi :

$$x_{int}(t) = x_{int}(0) + 500t^2,$$

comme indiqué sur la figure FIG. 5.7 . En $t = 1,5.10^{-2}$s, l'interface a avancé jusqu'en $x_I = 0.314m$. Un gradient de pression apparait dans le liquide (de pente $-\rho(u'_g + g)$) alors que la vitesse reste constante et égale à u_g. L'air quant à lui, bloqué entre le liquide et la paroi, se compresse au fur et à mesure que l'interface avance. En effet, cela se traduit par une augmentation de la pression dans l'air qui est $p = 1,3.10^5$Pa à la fin du calcul.

1.2 Oscillation d'une goutte d'eau sous l'effet de la gravité

A présent nous allons tester notre méthode numérique pour la simulation numérique d'un écoulement présentant plusieurs interfaces. Dans le même esprit que [KSO+05], le cas test présenté ici concerne l'évolution d'une colonne d'eau dans un tuyau fermé sous l'effet d'un champ gravitationnel $g = 10m.s^{-2}$ (toujours orienté dans le sens des x décroissants) voir figure FIG. 5.2.

Nous considérons un domaine de 1m de long, fermé par des parois imperméables rempli d'air de densité $\rho = 1$kg.m^{-3}, excepté dans une colonne remplie d'eau de densité $\rho = 1000$kg.m^{-3} initialement située entre les interfaces d'abscisses $x_I = 0.1$m et $x_{II} = 0.2$m. Ici l'eau et l'air sont supposés visqueux et de coefficients de viscosité respectifs $\mu = 1$kg.m^{-1}.s^{-1} et $\mu = 10^{-5}$kg.m^{-1}.s^{-1}.
L'écoulement est initialement au repos à la vitesse $u = 0$m.s^{-1} à la pression atmosphérique

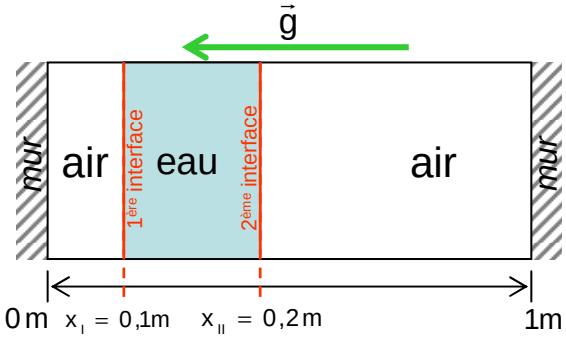


FIG. 5.2 – Oscillation d'une goutte d'eau

$p = p_{atm} = 10^5$Pa. Enfin, le domaine de calcul est découpé en 1000 éléments.

Résultats

Nous représentons les résultats obtenus pour les deux modèles : quasi-linéaire et quasi-linéaire symétrisé aux instants $t = 0,03$s et $t = 0,06$s sur les figures FIG. 5.8 et FIG. 5.9 respectivement. Sous l'effet de la gravité, les deux fluides se mettent en mouvement vers la gauche. L'air situé à la gauche de l'eau se comprime sous le poids de la goutte d'eau (voir figure FIG. 5.8), alors que le gaz situé à la droite de la goutte se dilate. Une fois l'équilibre atteint, le phénomène s'inverse. La goutte se déplace vers la droite et c'est l'air situé à sa gauche qui se dilate, alors que le gaz situé à sa droite se comprime (voir FIG. 5.8). Et ainsi de suite comme indiqué sur les courbes FIG. 5.10 où sont représentés les coefficients de pression qui sont les valeurs normalisées de la pression en $x = 0$ m et $x = 1$m donnés par :

$$P(0,t) = \frac{p(0,t) - p_{atm}}{p_{atm}} \text{ et } P(1,t) = \frac{p(1,t) - p_{atm}}{p_{atm}}.$$

Ce phénomène se répète de façon périodique toutes les $0,06s$, engendrant l'oscillation de la goutte d'eau entre deux positions limites des interfaces comme l'indique la figure (5.11), dont les valeurs sont restituées dans le tableau ci-après.

Positions des Interfaces	**Valeur minimale**	**Valeur Maximale**
x_I	$0.09825m$	$0.1m$
x_{II}	$0.19825m$	$0.2m$

Ici, l'amplitude des oscillations est la même pour les deux interfaces $\Delta x = 7,5.10^{-4}m$, et s'amortit très peu au cours du temps. En effet dans ce cas les effets de la viscosité sont négligeables et on ne constate quasiment pas de dissipation numérique. Enfin, nous avons représenté sur les courbes FIG. 5.12 l'erreur relative de la masse d'eau en fonction du temps donnée par :

$$M(t) = \frac{m_{eau}(t) - m_{eau}(0)}{m_{eau}}.$$

Quelque soit le modèle considéré, la méthode proposée respecte la conservation du volume de l'eau. En effet l'erreur relative M est de l'ordre de 10^{-5}.

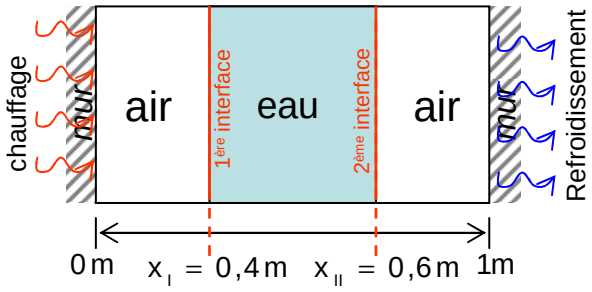


FIG. 5.3 – Cavité différentiellement chauffée

1.3 Déplacement d'une colonne d'eau dans une cavité différentiellement chauffée

Afin d'illustrer le bon fonctionnement de notre méthode numérique pour la prédiction d'écoulements anisothermes, nous proposons ici d'étudier l'évolution d'une colonne de liquide dans un tuyau fermé par des paroi différentiellement chauffées.

On considère un domaine de calcul de longueur 1m remplie de gaz en dehors d'une région occupée par un liquide comprise entre les interfaces situées en $x_I = 0,4$m et $x_I = 0,6$m. Le liquide est incompressible et le gaz compressible. Chaque fluide est caractérisé par un certain nombre de constantes restituées dans le tableau suivant :

Liquide		Gaz	
ρ	1000kg.m^{-3}	ρ	1kg.m^{-3}
μ	1kg.m^{-1}.s^{-1}	μ	$0,01$kg.m^{-1}.s^{-1}
κ	1kg.m^{-1}.s^{-1}	κ	100kg.m^{-1}.s^{-1}
		R	287

Comme l'indique le tableau précédent, nous avons pris pour le gaz une conductivité thermique élevée, ce qui nous permet d'observer sur des temps courts les effets dus à la conduction thermique.
L'écoulement est initialement au repos à la vitesse $u = 0$m.s^{-1} à la pression atmosphérique $p = p_{atm} = 10^5$Pa et à la température uniforme $T = 273^\circ$K.
Le domaine est fermé par des parois imperméables et adiabatiques chauffées à des températures différentes. En effet en $x = 0$m nous imposons $T = 273 + 1000t^\circ$K . Par contre en $x = 1$m la température est maintenue constante à $T = 273 - 1000t^\circ$K.
Enfin, le domaine de calcul est découpé de façon uniforme en 1000 éléments.

Résultats

Ici, les calculs ont été effectués seulement pour le modèle quasi-linéaire, en effet nous avons vu dans le chapitre précédent que seul ce modèle permet de construire un schéma numérique simple pour la résolution d'écoulements visqueux anisothermes.
Les courbes représentatives de la vitesse, la pression, la température et la position des interfaces au temps $t = 0.3$s sont représentées sur la figure FIG. 5.13 En $x = 0$m la paroi chauffe progressivement. Par phénomène de conductivité thermique le gaz s'échauffe également et se dilate. Par contre, la portion de gaz située à la droite du liquide se rétracte à cause de la

diminution de la température de la paroi. Ainsi la colonne d'eau se met en mouvement vers la droite comme le montrent les courbes d'évolution des interfaces tracées sur les figures FIG. 5.14.

2 Problèmes diphasiques : cas test irréguliers

Dans cette seconde partie, la méthode numérique proposée est utilisée pour la résolution de problèmes présentant des discontinuités. Nous verrons que dans ce cas, les solutions obtenues sont satisfaisantes.

2.1 Remplissage d'une cavité

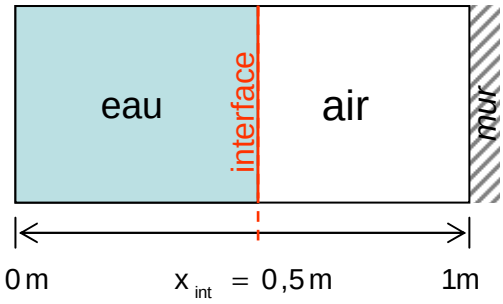


FIG. 5.4 – Remplissage d'une cavité

On considère ici une cavité de 1m remplie d'un liquide (incompressible) du côté gauche ($x < 0.5$) et de gaz (incompressible) du côté droit (voir figure FIG. 5.5) . Les fluides considérés sont caractérisés par l'ensemble des données récapitulées dans le tableau :

Liquide		Gaz	
ρ	10kg.m^{-3}	ρ	1kg.m^{-3}
		c	317m.s^{-1}

L'écoulement est non visqueux et isotherme. Aux extrémités du domaine nous imposons en $x = 0\text{m}$ une condition aux limites de type Dirichlet sur le vitesse et en $x = 1\text{m}$ des conditions aux limites transparentes. L'écoulement est initialement soumis à une pression constante $p = p_{atm} = 10^5\text{Pa}$, mais en mouvement avec des vitesses différentes pour le gaz et le liquide dont nous préciserons les valeurs par la suite.
Ce cas est du même type qu'un tube à choc avec deux fluides et admet une solution exacte. Dans les simulations numériques suivantes, le domaine est découpé en 1000 éléments et nous employons toujours les deux formulations du modèle monofluide : quasi-linéaire et quasi-linéaire symétrique.

Cas 1

Dans ce premier cas test, nous supposons qu'à l'instant initial la vitesse est discontinue. En effet à gauche de l'interface l'eau se déplace à la vitesse $u = 10\text{m.s}^{-1}$ alors que du côté droit l'air a pour vitesse $u = 100\text{m.s}^{-1}$. A l'entrée de la cavité ($x = 0\text{m}$), on maintient une vitesse de remplissage constante $u = 10\text{m.s}^{-1}$.

Sur les figures (5.15), nous avons représenté les solutions obtenues à l'instant $t = 7,610^{-4}$s. Quelque soit le modèle considéré les solutions calculées sont semblables. Sous l'effet du déplacement de l'eau, l'air se met en mouvement. Cela se traduit notamment par l'évolution de la position de l'interface qui se déplace vers la droite. Dans le liquide la vitesse et la pression demeurent constantes. Par contre dans le gaz, une onde de détente se propage et atteint ici la position $x = 0,77$m. Les solutions numériques obtenues numériquement coïncident bien avec la solution exacte.

Cas 2

Dans cet exemple nous nous intéressons au même cas test que précédemment mais en supposant que le liquide a une vitesse d'injection non constante $u = -1000t + 10\text{m.s}^{-1}$.
Comme le montrent les figures (5.16), qui représentent les solutions en $t = 1,08.10^{-3}$s, nous observons l'apparition d'un gradient de pression dans le liquide. Dans le gaz, on retrouve la propagation d'une onde de détente positionnée en $x = 0.87$m. Ici encore, quelque soit le modèle considéré, la solution numérique est très proche de la solution exacte.

Cas 3

Enfin, pour terminer nous supposons que l'eau est initialement en mouvement $u = 100m.s^{-1}$ tandis que l'air avance avec une vitesse plus faible $u = 10\text{m.s}^{-1}$. A l'entrée de la cavité ($x = 0$m), le liquide est injectée avec une vitesse constante $u(t) = 100\text{m.s}^{-1}$.

Nous avons représenté sur les figures (5.17) les solutions au temps $t = 7,61.10^{-4}$s. Pour les deux modèles (quasi-linéaire et quasi-linéaire symétrique), les solutions obtenues sont identiques et correspondent à la solution exacte. Ici, le liquide avance régulièrement avec une vitesse constante $u = 100m.s^{-1}$ et reste à pression constante. Par conséquent, l'interface dont la vitesse est imposée par celle du liquide, se déplace également. Toutefois, dans le gaz, nous pouvons noter la présence d'un choc qui se propage à la vitesse $100 + c$, situé ici en $x = 0,73m$.

2.2 Convection d'un goutte de liquide

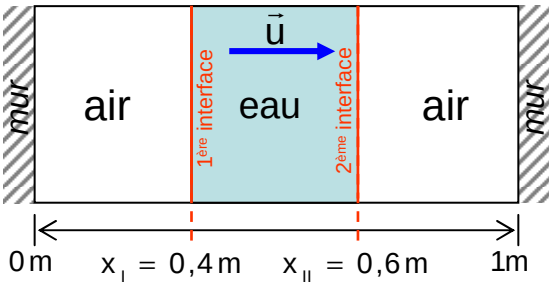


FIG. 5.5 – Convection d'une goutte de liquide

Pour finir ce chapitre, nous reproduisons, un des cas test numériques proposés dans [CFA01]. En 1D, ceux-ci traitent de la convection d'une goutte de liquide dans un milieu gazeux. L'écoulement étudié ici est supposé non visqueux et isotherme.

Nous considérons, un domaine de longueur 1m, partiellement rempli d'un gaz sauf dans une région qui s'étend de $x_I = 0.4$m à $x_{II} = 0.6$m remplie de liquide. Le liquide est un fluide incompressible de densité $\rho = 10\text{kg.m}^{-3}$, alors que le gaz est un fluide compressible régi par la loi des gaz parfait possédant une densité intiale $\rho = 1\text{kg.m}^{-3}$ et caractérisé par une vitesse du son égale à $c = 317\text{m.s}^{-1}$.
En $x = 0$m et $x = 1$m nous avons supposé que des conditions limites transparentes sont imposées. Initialement, le gaz est au repos alors que le liquide est en mouvement à la vitesse $u = 100\text{m.s}^{-1}$ mais tous deux ont la même pression $p = 10^5$Pa.
Enfin, le domaine est découpé uniformément en 1000 élements.

Résultats
Pour les deux modèles (quasi-linéaire et quasi-linéaire symétrique) nous avons tracé les solutions obtenus sur les courbes (5.18) au temps $t = 7,5.10^{-4}$s. Nous constatons qu'au fur et à mesure que le liquide se déplace vers la droite, la portion de gaz situé à l'avant se comprime au contraire de la portion située à l'arrière qui se dilate. Cela se traduit par une compression pour l'un et une dépression pour l'autre. Nous retrouvons ici, les profils de vitesse et de pression présentés dans [CFA01].

2.3 Remarques générales

Les simulations numériques présentées dans ce paragraphe (détente, choc ou translation d'une goutte), nous ont montré que pour de faibles rapports de densités ($\rho_1/\rho_2 \approx 10$) mais pour des conditions initiales présentant une discontinuité de vitesse importante à l'interface ($[u] \approx 100$) les résultats donnés par la méthode numérique proposée étaient satisfaisants et correspondaient avec la solution exacte espérée quand il était possible de la calculer exactement. L'inverse peut être également effectué avec $\rho_1/\rho_2 \approx 1000$ et $[u] \approx 10$.

Cependant, il ne peut être envisagé de simuler des écoulements présentant un saut de vitesse initiale élevé à l'interface ($[u] \approx 100$) avec un fort rapport de densités entre les deux phases ($\rho_1/\rho_2 \approx 1000$). Cela est particulier vrai pour des cas test présentant des chocs. Dans ce cas, les solutions obtenues sont fausses et présentent de violentes oscillations surtout près de l'interface. Ce constat illustre le manque de robustesse de la méthode présentée dans ce contexte. Les sources d'instabilité peuvent être diverses et il semble nécessaire d'améliorer dans ce cas la stratégie utilisée pour le couplage entre les deux modèles et/ou le choix de la stabilisation.

Néanmoins, l'approche proposée reste suffisante pour traiter des écoulements lents et sans discontinuité comme ceux qui nous intéressent dans cette thèse.

3 Conclusion

La méthode numérique introduite au chapitre 4 a été validée sur des problèmes réguliers à une ou plusieurs interfaces, isotherme ou anisotherme dans des contextes physiques différents comme des écoulements ou les effets de compressibilité étaient plus ou moins importants avec effet de la gravité ou pas. Les résultats numériques attestent du bon comportement général de notre approche en particulier pour le modèle monofluide quasi-linéaire.

De plus, bien que le schéma proposé soit adéquat pour la résolution de cas test régulier, nous avons mis en évidence qu'il pouvait également être employé pour la résolution de problèmes

présentant des chocs ou des détentes peu raides.

A présent, nous allons nous intéresser à l'extension et la mise en oeuvre de cette méthode en plusieurs dimensions de l'espace.

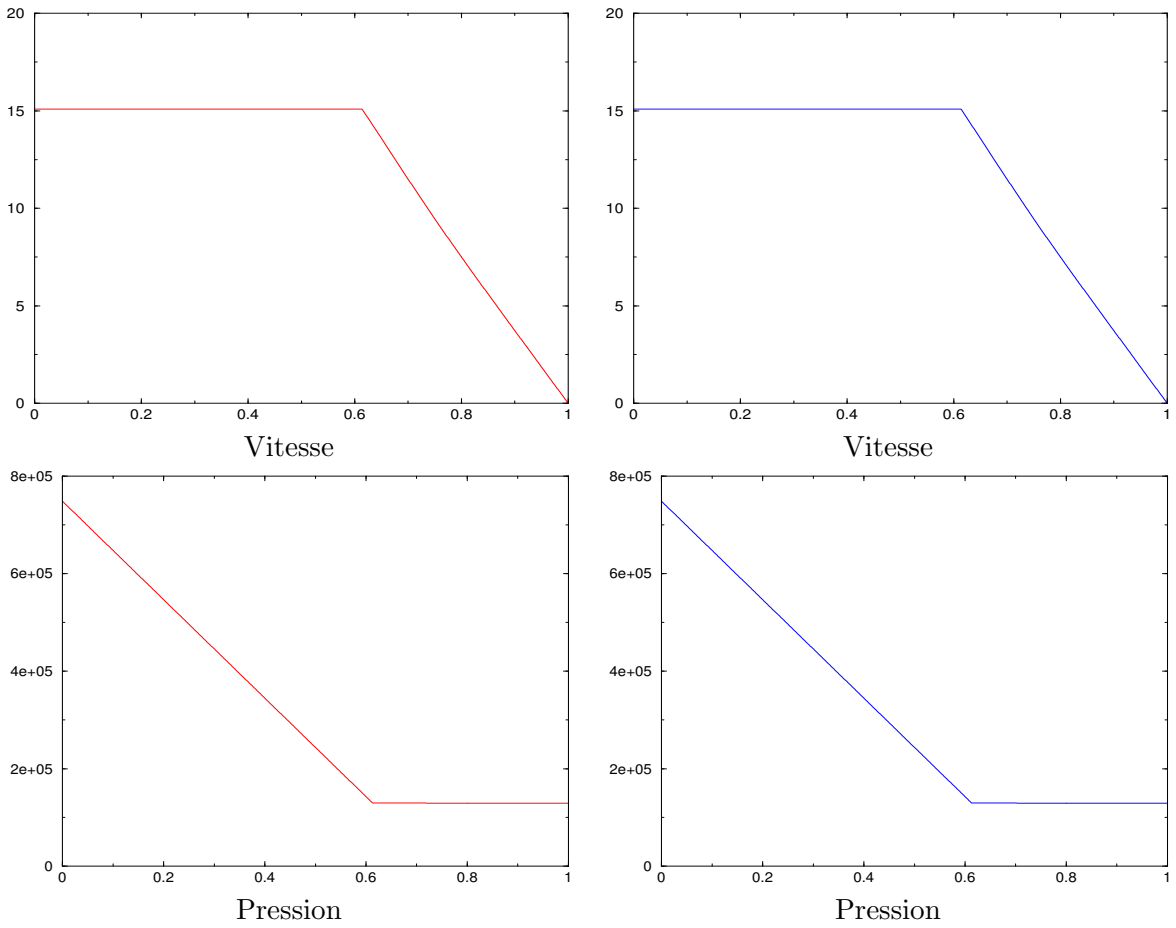


FIG. 5.6 – Remplissage d'une cavité contenant du gaz avec un liquide à $t = 1,51.10^{-2}s$. Modèle quasi-linéaire (courbes rouges à gauche) et modèle quasi-linéaire symétrique (courbes bleues à droite).

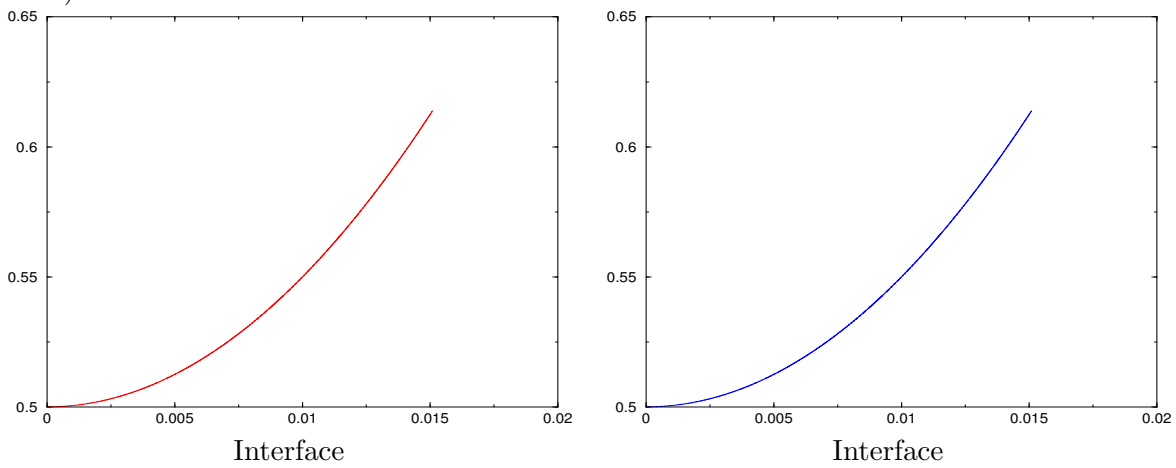


FIG. 5.7 – Evolution de la position de l'interface entre $t = 0$ms à $t = 15$ms. Modèle quasi-linéaire (courbe rouge à gauche) et modèle quasi-linéaire symétrique (courbe bleue à droite) comparées à la solution analytique (courbes croix noires) .

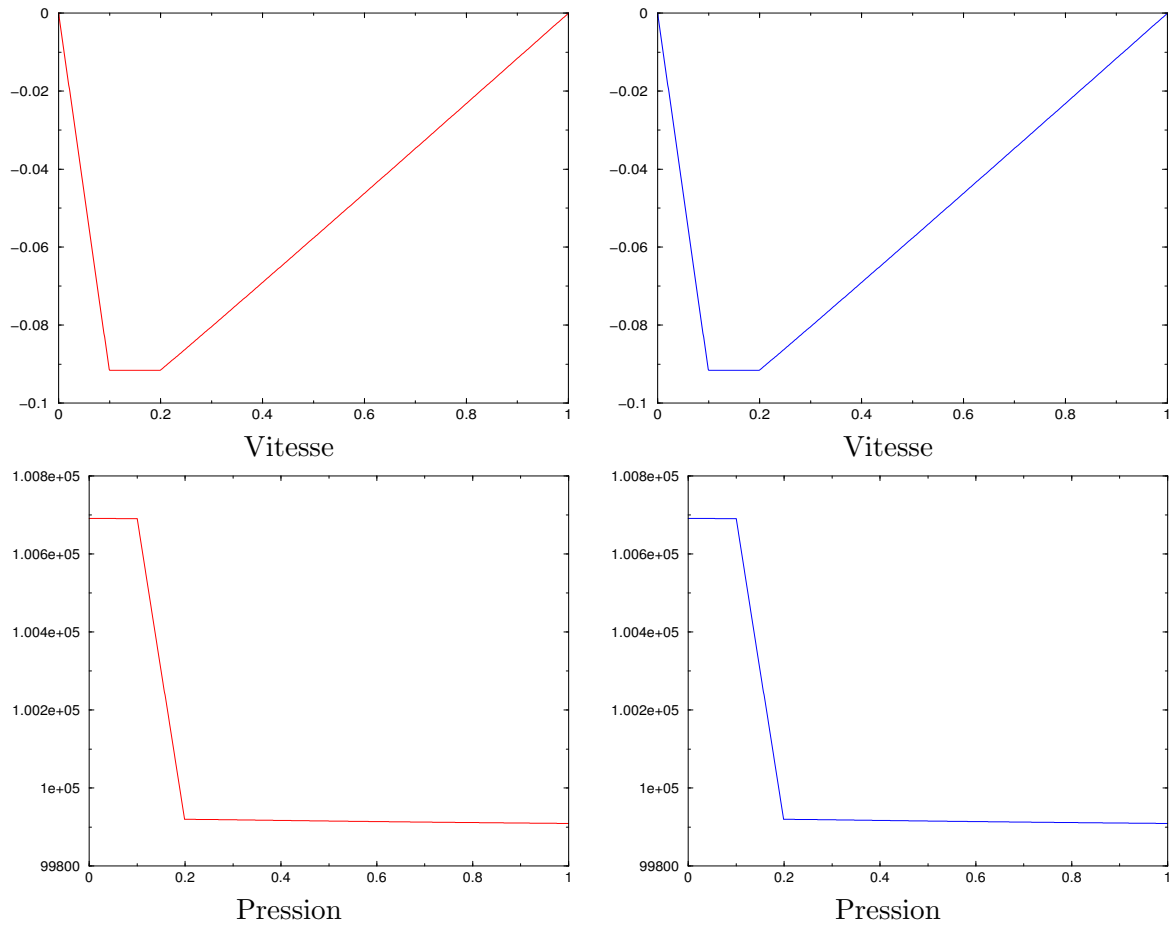


FIG. 5.8 – Chute d'une goutte d'eau sous l'effet de la gravité $t = 0,3$s. Modèle quasi-linéaire (courbes rouges à gauche) et modèle quasi-linéaire symétrique (courbes bleues à droite). Solutions calculées sur un maillage comptant 1000 éléments.

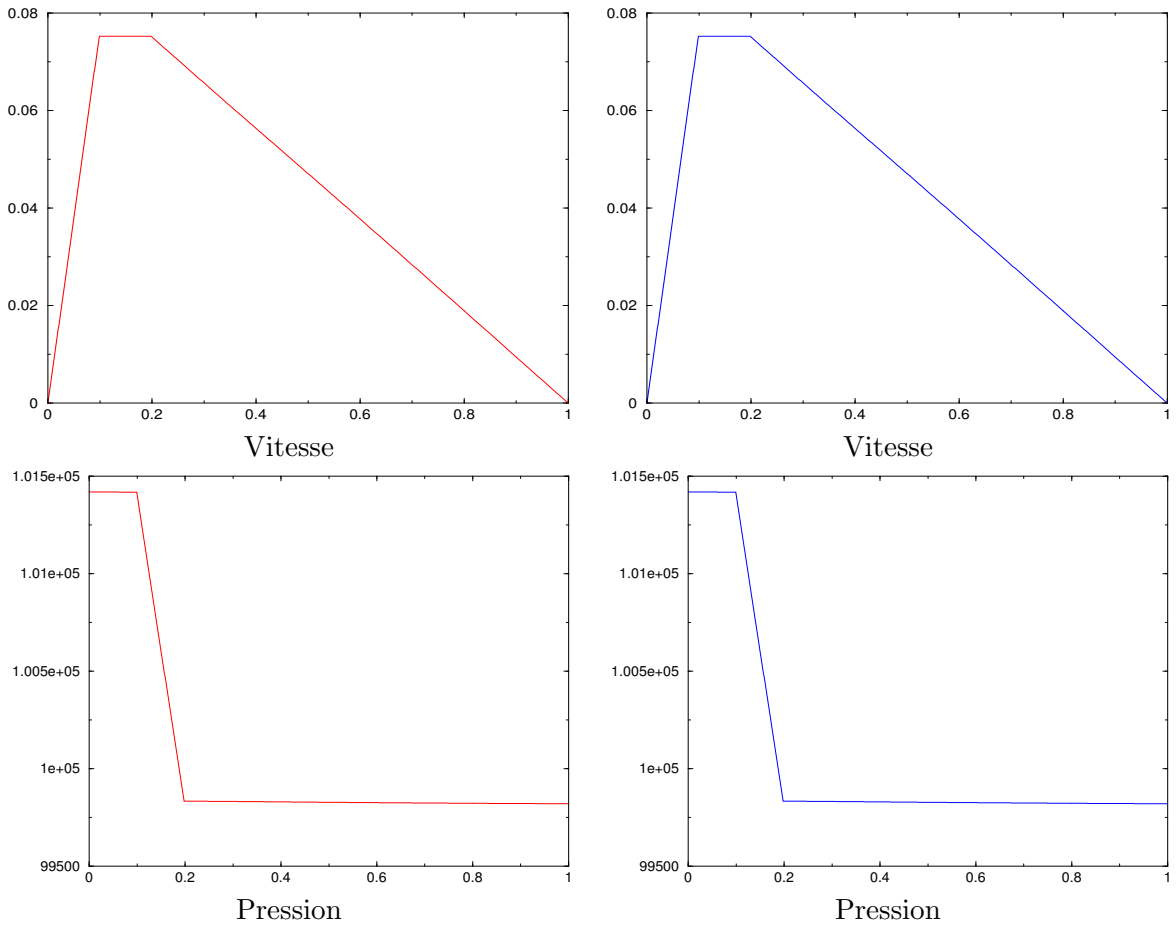


FIG. 5.9 – Chute d'une goutte d'eau sous l'effet de la gravité $t = 0,06$s. Modèle quasi-linéaire (courbes rouges à gauche) et modèle quasi-linéaire symétrique (courbes bleues à droite). Solutions calculées sur un maillage comptant 1000 éléments.

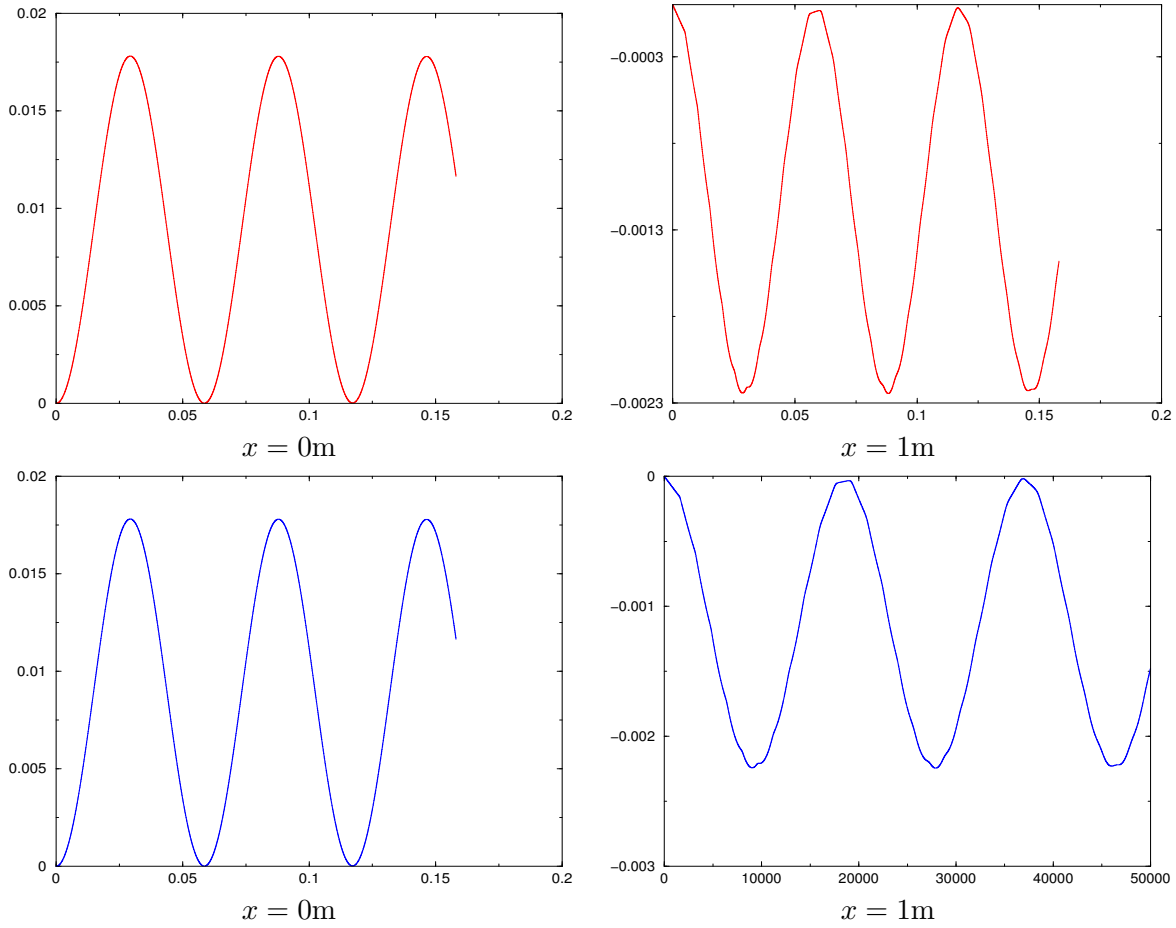


FIG. 5.10 – Evolution des coefficients de pression en fonction du temps. Modèle quasi-linéaire (courbes rouges) et modèle quasi-linéaire symétrique (courbes bleues).

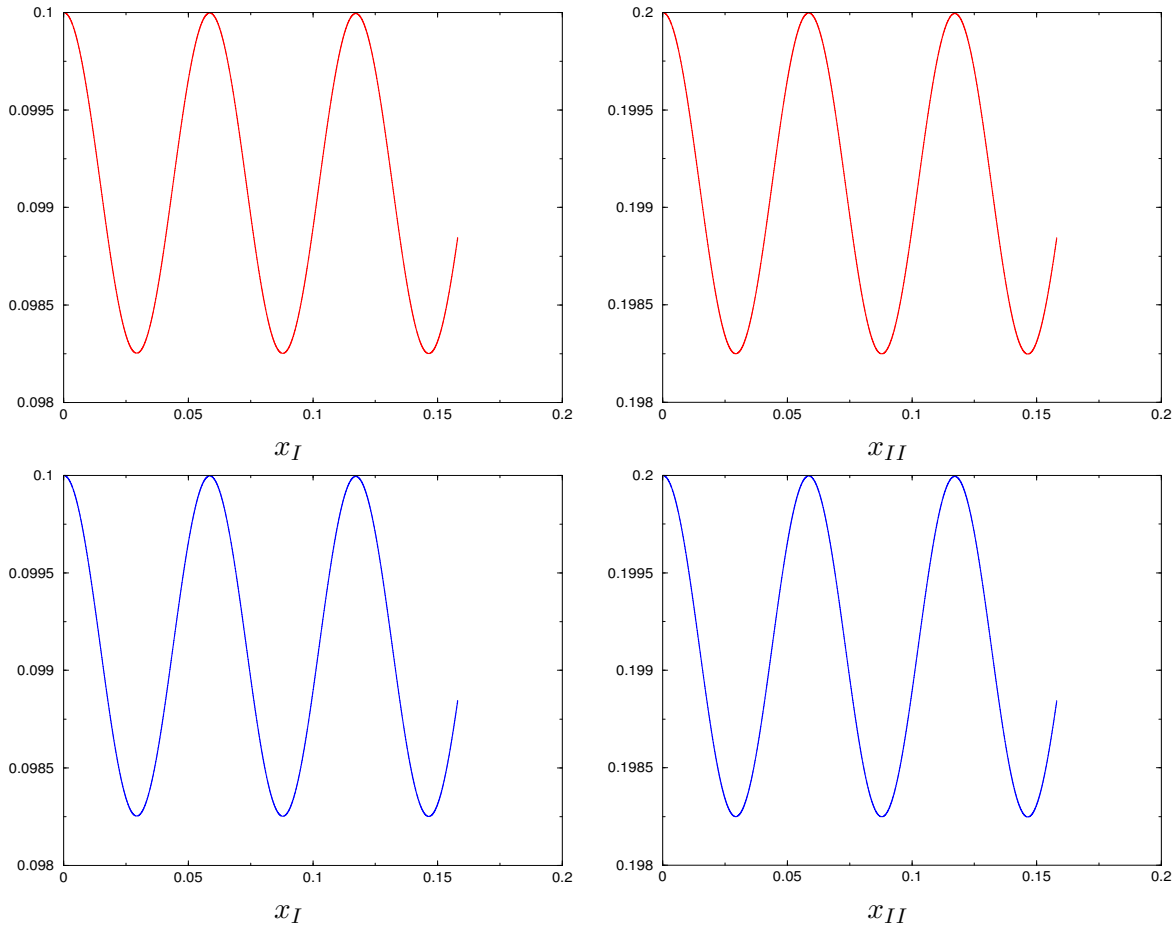


FIG. 5.11 – Evolution de la position des interfaces en fonction du temps. Modèle quasi-linéaire (courbes rouges) et modèle quasi-linéaire symétrique (courbes bleues).

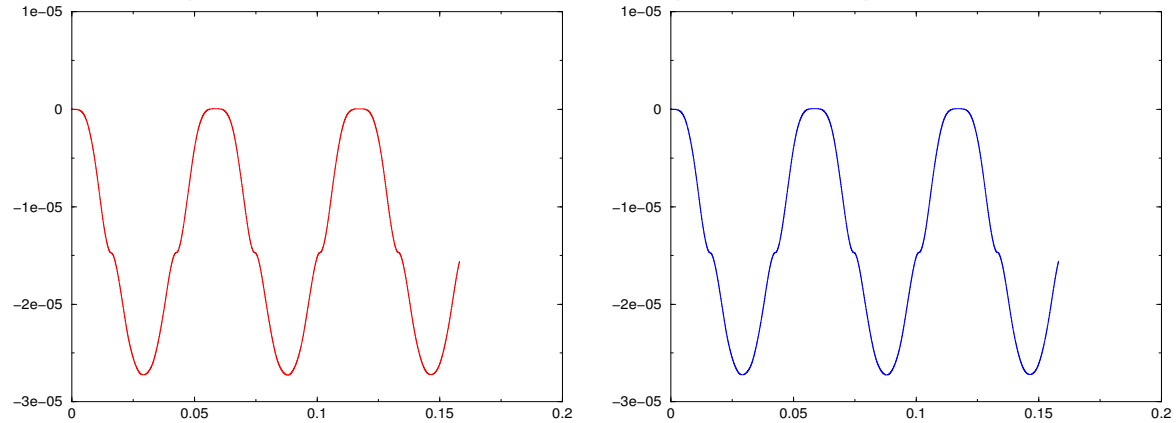


FIG. 5.12 – Variation de la masse de l'eau en fonction du temps. Modèle quasi-linéaire (courbes rouges) et modèle quasi-linéaire symétrique (courbes bleues).

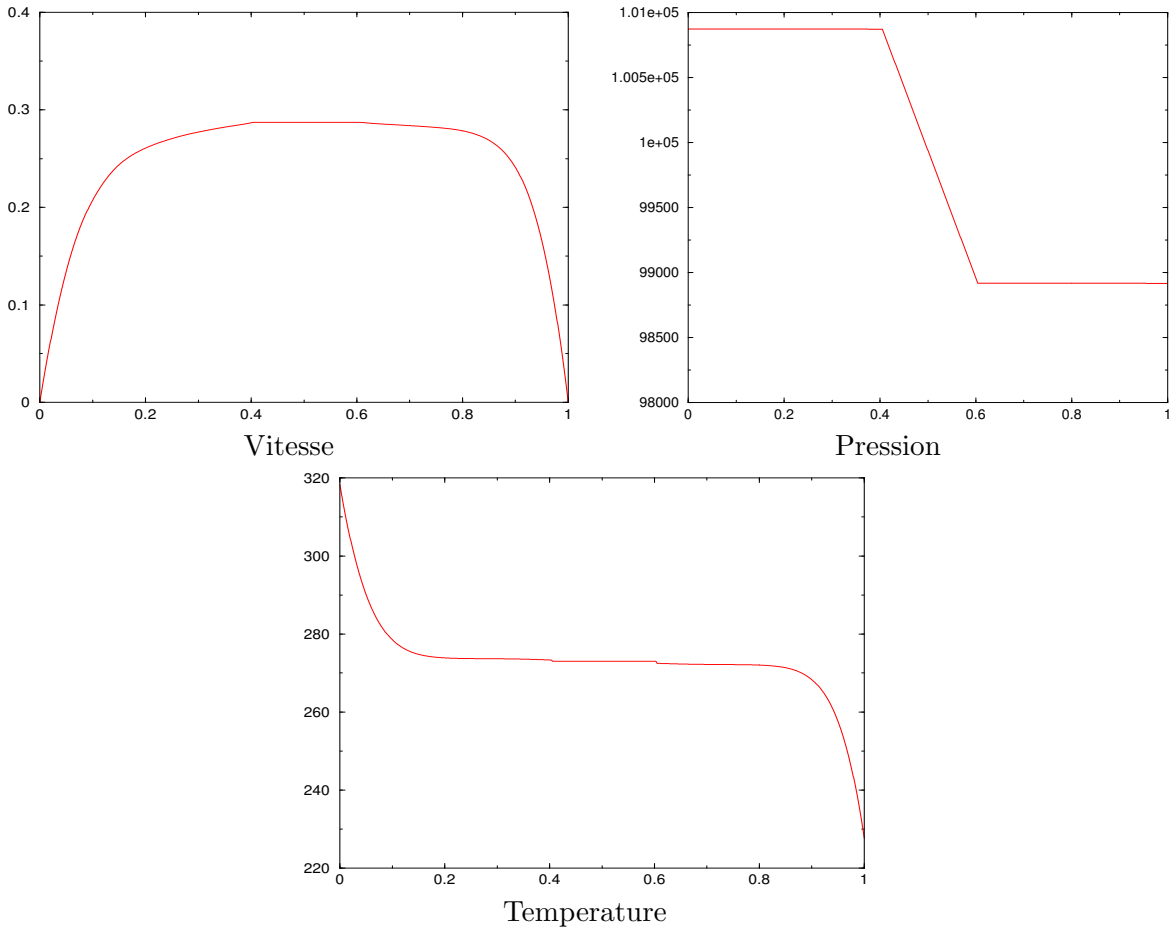


FIG. 5.13 – Déplacement d'une goutte d'eau dans un tuyau différentiellement chauffé à $t = 0,3$s.

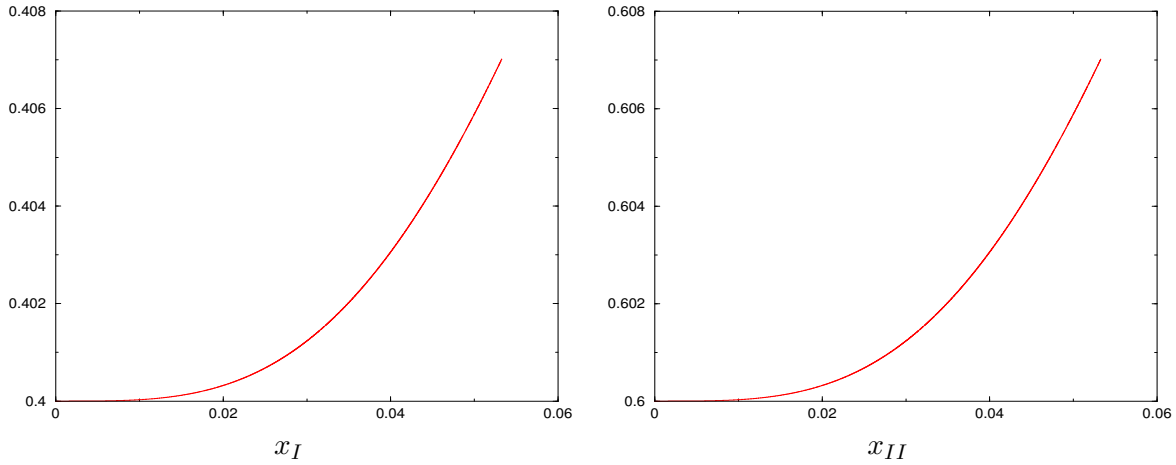


FIG. 5.14 – Evolution de la position des interfaces en fonction du temps.

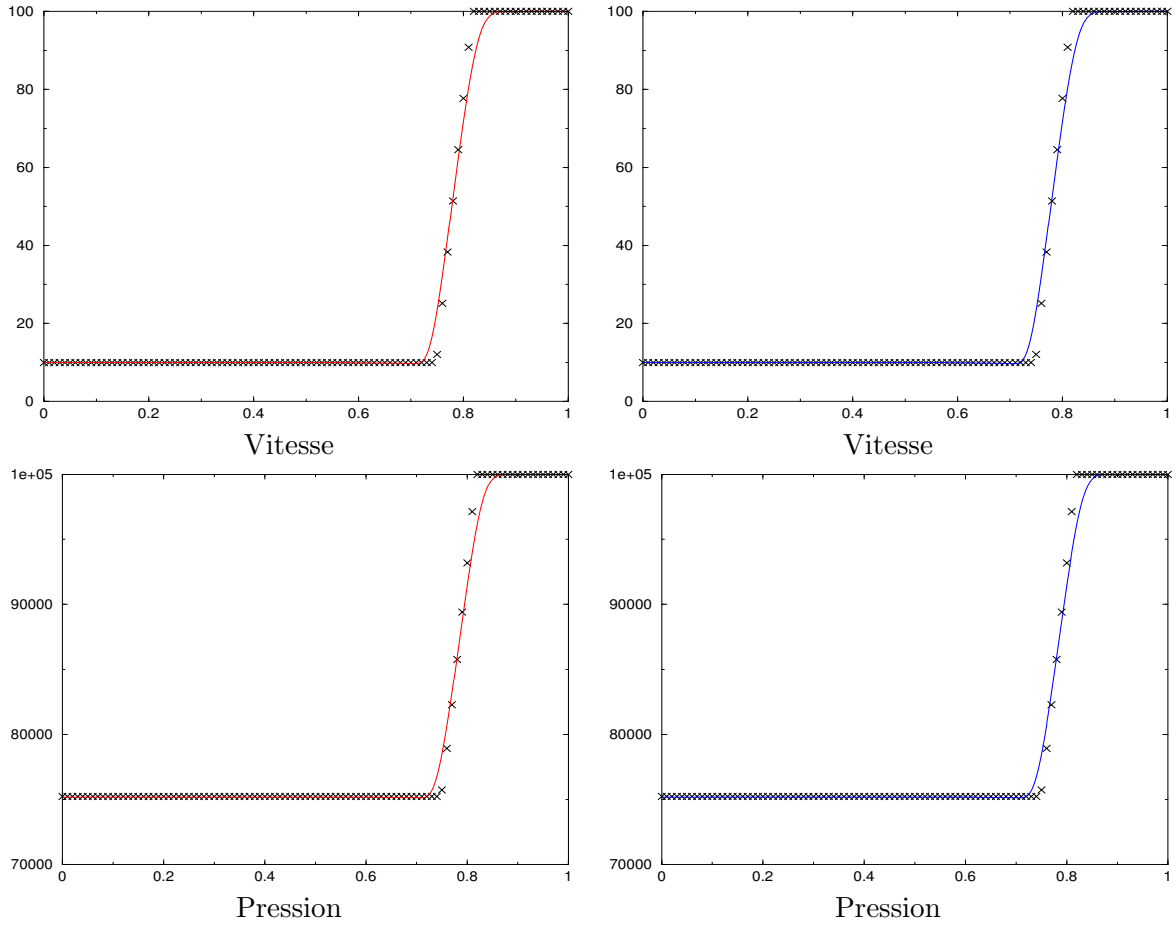


FIG. 5.15 – Etude d'une détente, solution à $t = 7,6.10^{-4}s$. Modèle quasi-linéaire (courbes rouges) et modèle quasi-linéaire symétrique (courbes bleues) comparés à la solution exacte (croix noires)

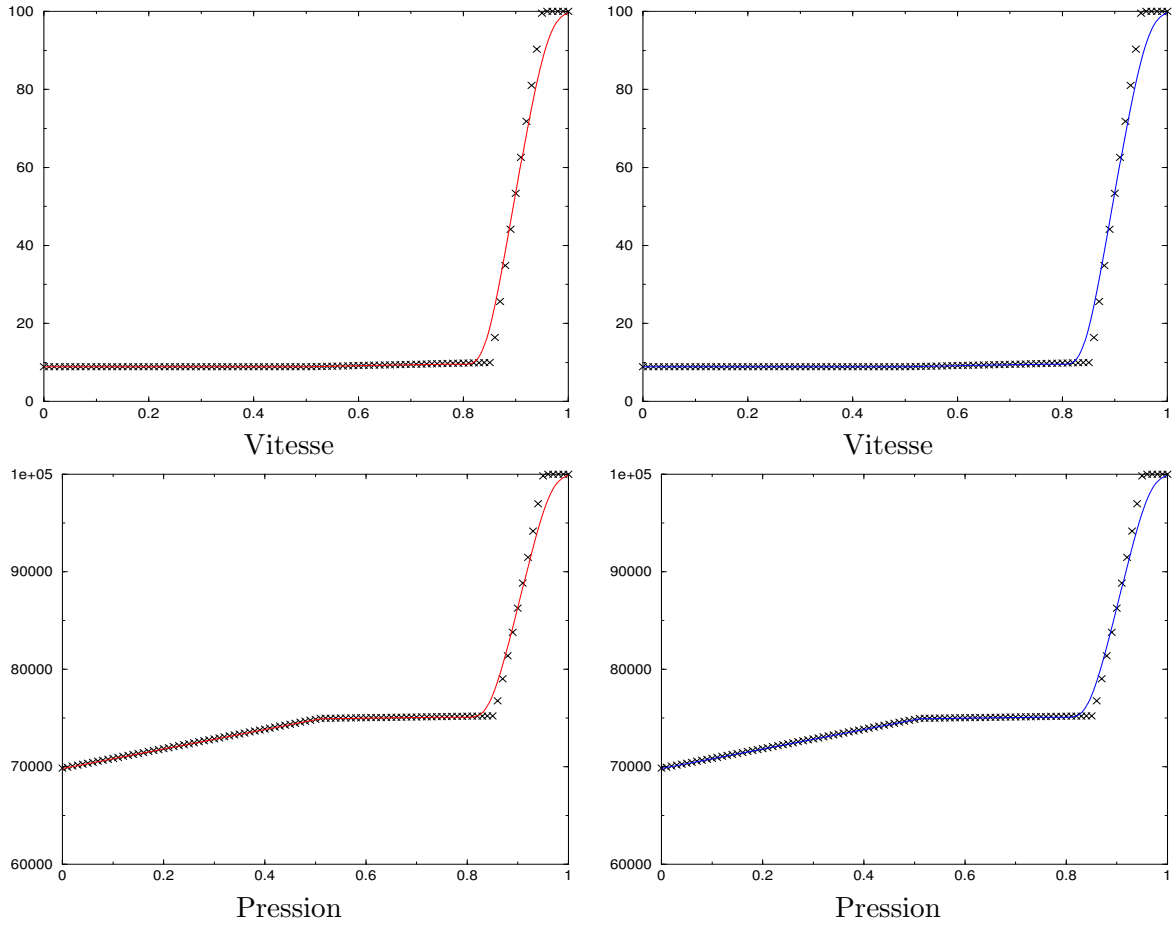


FIG. 5.16 – Etude d'une détente, solution à $t = 1,08.10^{-3}s$. Modèle quasi-linéaire (courbes rouges) et modèle quasi-linéaire symétrique (courbes bleues) comparées à la solution exacte (croix noires)

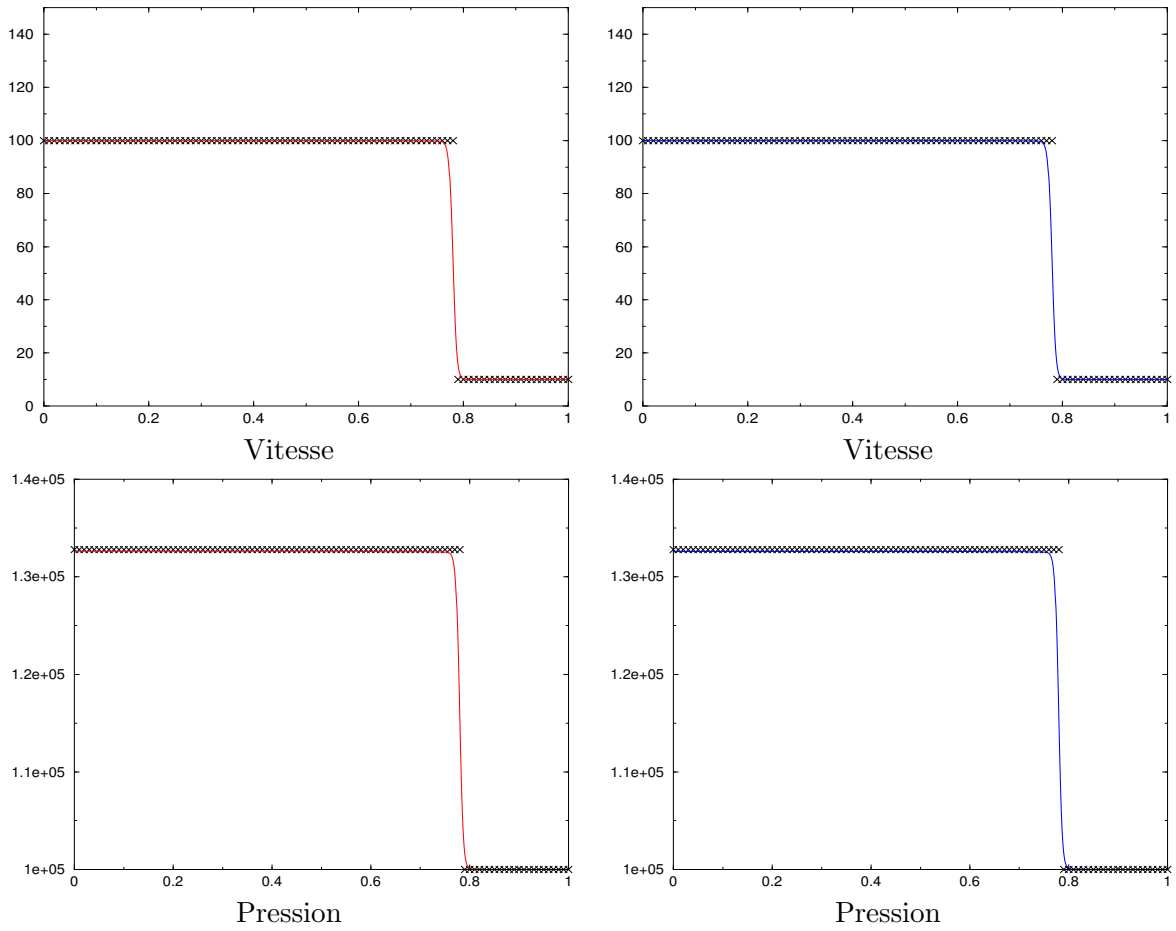


FIG. 5.17 – Etude d'un choc, solutions à $t = 7,61.10^{-4}s$. Modèle quasi-linéaire (courbes rouges) et modèle quasi-linéaire symétrique (courbes bleues) comparées à la solution exacte (croix noires)

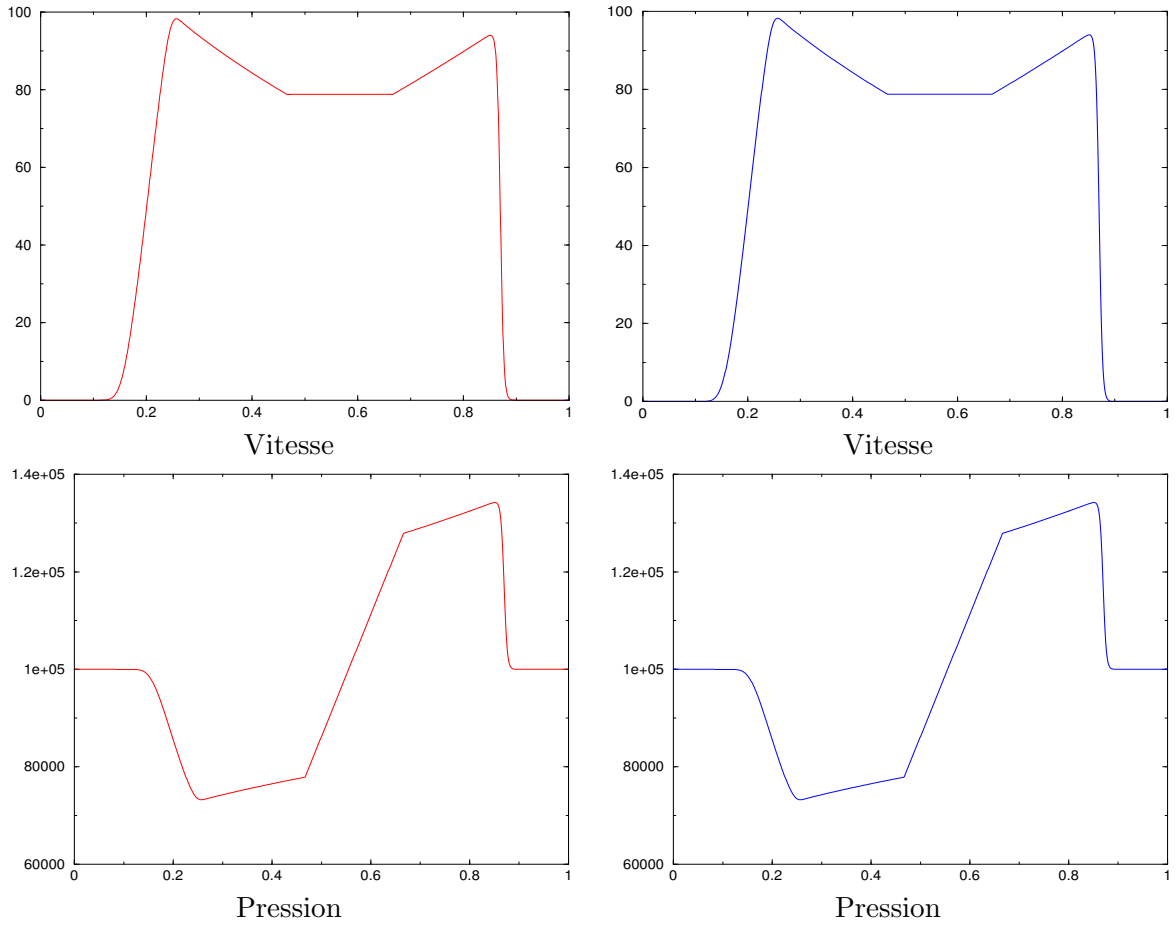


FIG. 5.18 – Convection d'une goutte de liquide à $t = 7,5.10^{-4}$s. Modèle quasi-linéaire (courbes rouges) et modèle quasi-linéaire symétrique (courbes bleues).

Chapitre 6

Méthode numérique multi-dimensionnelle

Dans le quatrième chapitre de cette thèse, une méthode numérique simple a été dérivée pour la simulation d'écoulements diphasiques mono-dimensionnels. A présent il s'agit d'étendre cette approche à la simulation numérique d'écoulements diphasiques en plusieurs dimensions de l'espace. Comme nous le rappellerons dans une première section, cette méthode s'appuie sur la résolution d'un modèle mono-fluide pour l'écoulement couplé à l'équation de transport de la fonction Level Set pour l'interface. Dans une seconde section, l'approche élaborée au chapitre 4 sera appliquée à la résolution des équations de Navier-Stokes monofluide en plusieurs dimensions de l'espace. Puis nous détaillerons le schéma numérique utilisé pour résoudre l'équation de transport de la fonction Level Set. Enfin le couplage entre ces deux types de solveur sera décrit.

1 Formalisme général

Il a été montré au début de cette seconde partie que l'évolution d'un écoulement diphasique (compressible-incompressible) en plusieurs dimensions de l'espace, constitué d'un liquide Ω_1 et d'un gaz Ω_2, séparés par une interface Γ dans un domaine Ω borné de $\mathbb{R}^d, d \geq 1$ peut être décrite à l'aide du modèle mono-fluide :

$$L(\mathbf{Y}, \phi)\mathbf{Y} = S(\mathbf{Y}, \phi), \tag{6.1}$$

avec $\mathbf{Y} = {}^t(p, {}^t\mathbf{u}, T)$ l'inconnue primitive. Dans l'équation (6.1) intervient l'opérateur différentiel L pour lequel il peut être pratique d'adopter l'écriture :

$$L\mathbf{Y} \stackrel{def}{=} A_0\partial_t\mathbf{Y} + A \cdot \nabla\mathbf{Y} - \nabla \cdot (K\nabla\mathbf{Y}),$$

où

$$\begin{aligned}
\nabla &= {}^t\left(I_{d+2}\partial_{x_1}, \ldots, I_{d+2}\partial_{x_d}\right) && \in \mathbb{R}^{d\cdot(d+2)\times(d+2)}, \\
\nabla\mathbf{Y} &= {}^t\left(\partial_{x_1}{}^t\mathbf{Y}, \ldots, \partial_{x_d}{}^t\mathbf{Y}\right) && \in \mathbb{R}^{d\cdot(d+2)}, \\
A &= {}^t\left({}^tA_1, \ldots, {}^tA_d\right) && \in \mathbb{R}^{d\cdot(d+2)\times(d+2)}, \\
A \cdot \nabla\mathbf{Y} &= {}^t\sum_{i=1}^{d} A_i\partial_{x_i}\mathbf{Y},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} K &= \begin{pmatrix} K_{11} & \dots & K_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{d1} & \dots & K_{dd} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d\cdot(d+2)\times d\cdot(d+2)}, \\ \nabla\cdot K\nabla\mathbf{Y} &= \sum_{i,j=1}^{d} \partial_{x_i}\left(K_{ij}\partial_{x_j}\mathbf{Y}\right). \end{aligned}$$

Ici, on considère uniquement le modèle quasi-linéaire. Toutefois, la méthode qui va être détaillée ensuite peut être également appliquée au modèle symétrique isotherme ou anisotherme non visqueux (voir chapitre 3).
Le modèle mono-fluide est couplé à une équation de transport de type hyperbolique pour la fonction continue ϕ (fonction Level Set) :

$$\partial_t\phi + \mathbf{u}\cdot\nabla\phi = 0. \tag{6.2}$$

Nous rappelons que la fonction Level Set ϕ est une fonction signée, positive dans le gaz ($\phi > 0$, dans Ω_2) et négative dans le liquide ($\phi < 0$, dans Ω_1) dont les zéros (i.e. $\mathbf{x}$ tels que $\phi(\mathbf{x},t) = 0$) représentent la position de l'interface. Cette fonction est advectée par le champ de vitesse $\mathbf{u}$ solution de (6.1).

Pour résoudre ces équations nous avons choisi une approche découplée. Nous rappelons que cela consiste à résoudre dans un premier temps les équations de Navier-Stokes (6.1) alors que l'interface est figée au temps précédent. Pour cela nous mettrons en oeuvre une méthode d'éléments finis stabilisés. Dans un second temps il s'agira de transporter l'interface en utilisant le champ de vitesse calculé à la première étape. Dans ce cas nous emploierons une méthode de type Galerkin Discontinu. Nous proposons de détailler ces deux points dans la suite de ce chapitre.

2 Solveur de l'écoulement

Dans cette section nous présentons le schéma employé pour résoudre numériquement l'équation mono-fluide (6.1). Un schéma aux différences finies implicite est introduit pour traiter l'opérateur temporel associé à une méthode d'éléments finis stabilisés en espace. Afin de traiter les discontinuités et les non-linéarités de l'opérateur différentiel $L(\mathbf{Y},\phi)$, la *méthode des moyennes* utilisée au chapitre 4 est généralisée.

2.1 Problème étudié

Ici la position de l'interface Γ est supposée figée et est donnée implicitement par la fonction Level Set ϕ qui est solution de (6.2). Nous cherchons donc $\mathbf{Y} :]0,T[\times\Omega \to \mathbb{R}^{d+2}$ solution du problème d'évolution :

$$\begin{cases} L(\mathbf{Y},\phi)\mathbf{Y} = \mathbf{S}(\mathbf{Y},\phi), & (\mathbf{x},t)\in\Omega\times]0,T[, \\ \mathbf{Y}(\mathbf{x},0) = \mathbf{Y}_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x}\in\Omega, \end{cases} \tag{6.3}$$

avec le vecteur des inconnues primitives $\mathbf{Y} = {}^t\left(p, {}^t\mathbf{u}, T\right)$. On suppose de plus que la vitesse et la température vérifient les conditions de Dirichlet sur les bords :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \overline{u}(t) \text{ et } T(\mathbf{x},t) = \overline{T}(t) \text{ sur } \partial\Omega. \tag{6.4}$$

2.2 Maillages ...

... en temps

En premier lieu, nous considérons un découpage $0 = t^0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ de l'intervalle de temps $[0, T]$, avec le pas de temps $\delta t = \dfrac{T}{N}$. Ici nous utilisons une partition uniforme de $]0, T[$, afin de simplifier la présentation du schéma numérique. En général le pas de temps n'est pas constant.

... en espace

Nous construisons également $\mathcal{E}_h$ un maillage admissible de Ω constitué d'éléments (triangles en 2D, tétrahèdres en 3D) notés $\mathcal{E}$ de taille h_E (voir figure FIG. 6.1). On dira que le maillage est admissible, si pour tout $i \neq j$ l'intersection $E_i \cap E_j$ est soit vide, soit réduite à un point qui est un sommet commun à E_i et E_j, soit égale à un segment appartenant à la fois à E_i et E_j. Enfin, on désignera par N_e et N_s le nombre d'éléments et le nombre de sommets du maillage respectivement.

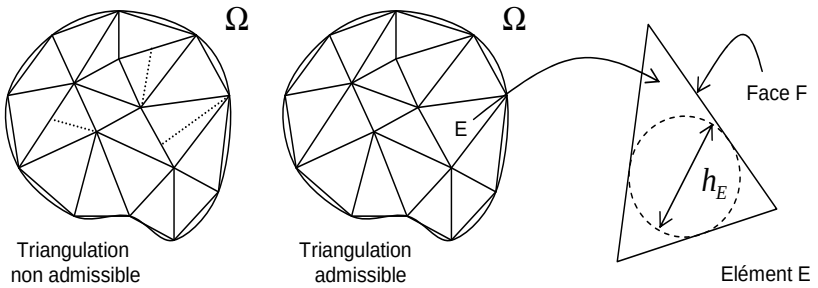


FIG. 6.1 – Triangulation admissible de Ω en 2D

2.3 Formulation éléments finis

Afin de discrétiser spatialement et temporellement le problème (6.3), nous utilisons des éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}_k$ pour approcher spatialement l'inconnue $\mathbf{Y}$. En temps, le terme $\partial_t \mathbf{Y}$ est remplacé par la différence finie $\dfrac{\mathbf{Y}^{n+1} - \mathbf{Y}^n}{\delta t}$.

Sur chaque élément $E \in \mathcal{E}_h$, les fonctions tests et les solutions sont approchées par des fonctions polynômiales, continues au travers de chaque élément E. Dans ce cas les espaces fonctionnels approchés sont :

– pour les solutions :

$$\mathsf{S}_h^{\mathbf{u}} = \left\{ \mathbf{u}_h \in \left(C^0(\Omega)\right)^d ; \mathbf{u}_{h|E} \in \left(\mathbb{P}_k(E)\right)^d, \forall E \in \mathcal{E}_h \right\}, \tag{6.5}$$

$$\mathsf{S}_h^{p} = \left\{ p_h \in C^0(\Omega); p_{h|E} \in \mathbb{P}_k(E), \forall E \in \mathcal{E}_h \right\}, \tag{6.6}$$

$$\mathsf{S}_h^{T} = \left\{ T_h \in C^0(\Omega); T_{h|E} \in \mathbb{P}_k(E), \forall E \in \mathcal{E}_h \right\}, \tag{6.7}$$

– pour les fonctions test :

$$\mathsf{T}_h^{\mathbf{u}} = \left\{ \mathbf{v}_h \in \left(C^0(\Omega)\right)^d ; \mathbf{v}_{h|E} \in \left(\mathbb{P}_k(E)\right)^d, \forall E \in \mathcal{E}_h; \mathbf{v}_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}, \tag{6.8}$$

$$\mathsf{T}_h^{p} = \left\{ q_h \in C^0(\Omega); q_{h|E} \in \mathbb{P}_k(E), \forall E \in \mathcal{E}_h \right\}, \tag{6.9}$$

$$\mathsf{T}_h^{T} = \left\{ \theta_h \in C^0(\Omega); \theta_{h|E} \in \mathbb{P}_k(E), \forall E \in \mathcal{E}_h; \theta_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}. \tag{6.10}$$

Finalement le problème discret consiste à :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{Y}_h^n)_{0\leq n\leq N} \in \mathsf{S}_h^p \times \mathsf{S}_h^{\mathbf{u}} \times \mathsf{S}_h^T \text{ tel que pour tout } \mathbf{W}_h \in \mathsf{T}_h^p \times \mathsf{T}_h^{\mathbf{u}} \times \mathsf{T}_h^T \text{ on ait :} \\ \displaystyle\sum_{E\in\mathcal{E}_h} \left(\mathbf{W}_h, \overline{A_0}_E^n \frac{\mathbf{Y}_h^{n+1} - \mathbf{Y}_h^n}{\delta t} + \overline{A}_E^n \cdot \nabla \mathbf{Y}_h^{n+1} - \overline{\mathbf{S}}_E^n \right)_{L^2(E)} + \left(\nabla \mathbf{W}_h, \overline{K}_E^n \nabla \mathbf{Y}_h^{n+1} \right)_{L^2(E)} \\ \displaystyle + \sum_{E\in\mathcal{E}_h} \left({}^t\overline{L}_E^n \mathbf{W}_h, \overline{\tau}_E^n \left(\overline{L}_E^n \mathbf{Y}_h^{n+1} - \overline{\mathbf{S}}_E^n \right) \right)_{L^2(E)} = 0, \\ Y_h^0(\mathbf{x}) = \mathbf{Y}_{0h} \text{ dans } \Omega, \\ \mathbf{u}_h^n = \overline{u}(\mathbf{x}, t^n) \text{ et } T_h^n = \overline{T}(\mathbf{x}, t^n) \text{ sur } \Omega. \end{cases} \tag{6.11}$$

Remarques :

1. Les deux premières intégrales de (6.11) sont les contributions de Galerkin, alors que la dernière est le terme de stabilisation GLS.
2. Pour des éléments finis $\mathbb{P}_1$ de Lagrange en espace, le terme de stabilisation se simplifie. Ainsi le problème approché devient :

$$\sum_{E\in\mathcal{E}_h} \left(\mathbf{W}_h, \overline{A_0}_E^n \frac{\mathbf{Y}_h^{n+1} - \mathbf{Y}_h^n}{\delta t} + \overline{A}_E^n \cdot \nabla \mathbf{Y}_h^{n+1} - \overline{\mathbf{S}}_E^n \right)_{L^2(E)} + \left(\nabla \mathbf{W}_h, \overline{K}_E^n \nabla \mathbf{Y}_h^{n+1} \right)_{L^2(E)}$$
$$+ \sum_{E\in\mathcal{E}_h} \left({}^t\overline{A}_E^n \mathbf{W}_h, \overline{\tau}_E^n \left(\overline{A_0}_E^n \frac{\delta \mathbf{Y}_h}{\delta t} + \overline{A}_E^n \cdot \nabla \mathbf{Y}_h^{n+1} - \overline{\mathbf{S}}_E^n \right) \right)_{L^2(E)} = 0. \tag{6.12}$$

3. Enfin, dans la formulation variationnelle approchée (6.11) des moyennes explicites $\overline{A_0}_E^n, \overline{A}_E^n, \overline{K}_E^n$, $\overline{\mathbf{S}}_E^n, \overline{L}_E^n$d et $\overline{\tau}_E^n$, définies sur chaque élément E du maillage $\mathcal{E}_h$ sont introduites afin de traiter les termes non-linéaires et discontinus. Nous allons discuter par la suite de la construction de ces moyennes.

2.4 Construction des opérateurs moyennés

Comme nous l'avons détaillé en 1D, la construction des moyennes $\overline{A_0}_E^n, \overline{A}_E^n, \overline{K}_E^n, \overline{\mathbf{S}}_E^n, \overline{L}_E^n$ et $\overline{\tau}_E^n$ n'est pas immédiate. En effet, elle nécessite l'utilisation d'un certain nombre de grandeurs intermédiaires dont :

- les valeurs ponctuelles de l'inconnue, de la densité, de la viscosité, de la conductivité thermique, et des coefficients thermodynamiques aux noeuds du maillage pris à l'instant antérieur ;
- la fonction couleur ε_e^n ;
- ainsi que leurs moyennes sur chaque élément $E \in \mathcal{E}_h$.

2.4.1 Valeurs ponctuelles

Dans un premier temps, il s'agit de calculer les valeurs ponctuelles des quantités comme : la densité, la conductivité thermique, la viscosité, les coefficients thermodynamiques. Pour cela, l'idée est de représenter de façon discrète sur le même maillage que $\mathbf{Y}_h$ ces grandeurs. Dans le cadre des polynômes $\mathbb{P}_k$ de Lagrange, nous avons représenté en 2D et en 3D la position des inconnues dans un élément E sur la figure Fig. 6.2.

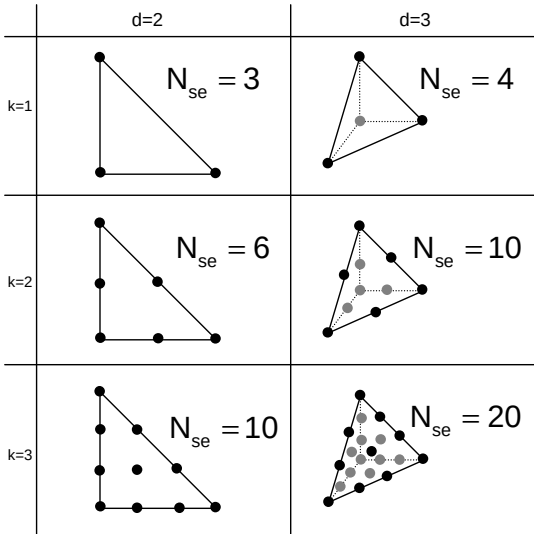


FIG. 6.2 – Position des degrés de liberté pour les polynômes $\mathbb{P}_k$ de Lagrange en 2D et 3D

A chaque instant t^n, nous construisons à partir de la solution $\mathbf{Y}$ et de la fonction Level Set ϕ, la densité ρ_i^n, la viscosité μ_i^n, la conductivité thermique κ_i^n et les coefficients de compressibilité isotherme $\beta_{T,i}^n$ et de dilatation thermique $\alpha_{p,i}^n$ en chaque noeud i du maillage :

$$\rho_i^n = \begin{cases} \rho^1 & \text{si } \phi_i \leq 0, \\ \dfrac{p_i^n}{RT_i^n} & \text{sinon,} \end{cases}, \mu_i = \begin{cases} \mu^1 & \text{si si } \phi_i \leq 0, \\ \mu^2 & \text{sinon.} \end{cases}, \kappa_i = \begin{cases} \kappa^1 & \text{si si } \phi_i \leq 0, \\ \kappa^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\alpha_{p,i}^n = \begin{cases} 0 & \text{si } \phi_i \leq 0, \\ \dfrac{1}{T_i^n} & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et } \beta_{T,i}^n = \begin{cases} \rho^1 & \text{si } \phi_i \leq 0, \\ \dfrac{1}{p_i^n} & \text{sinon,} \end{cases},$$

Dans les définitions ci-dessus ϕ_i représente la valeur de la fonction Level Set au sommet i du maillage.

2.4.2 Fonction couleur

Pour déterminer les grandeurs moyennes $\overline{\mathbf{Y}}_E^n, \overline{\alpha_p}_E^n, \overline{\beta_T}_E^n, \overline{\rho}_E^n, \overline{\mu}_E^n, \overline{\kappa}_E^n$ sur chaque élément à l'instant n, il est nécessaire de connaître non seulement les grandeurs ponctuelles précédemment calculées, mais aussi la valeur de la *fonction couleur* sur chaque maille.

Afin de quantifier la proportion de fluide compressible dans une maille E du maillage, nous avons introduit au quatrième chapitre la notion de fonction couleur. Cette fonction notée ε_E constante par élément est définie par :

$$\begin{array}{rccl} \varepsilon_E(\mathbf{x},t): & \Omega\times]0,T[& \mapsto & [0,1] \\ & \mathbf{x} & \to & \dfrac{V_E^2(t)}{V_E}, \quad \text{si } \mathbf{x} \in E \in \mathcal{E}_h. \end{array} \tag{6.13}$$

Dans la définition précédente, nous notons $V_E^2(t)$ le volume de fluide compressible dans la maille E de volume V_E à l'instant t. Cette fonction est nulle dans une maille incompressible, égale à 1 dans une maille compressible, et enfin strictement supérieure à 0 et inférieure à 1 dans une maille mixte. Par la suite nous noterons ε_E^n la valeur de la fonction couleur ε_E à l'instant t^n.

En 1D, nous avons vu que la valeur de la fonction couleur pouvait être calculée directement et de façon exacte à partir des positions des interfaces connues précisément. En multi-D, la construction de la fonction couleur est moins triviale. En effet, dans ce cas l'interface est une courbe ou une surface, ceci implique que la géométrie de la région occupée par le fluide compressible dans une maille mixte est complexe comme le montrent les schémas de la figure FIG. 6.3. Par conséquent le volume V_E^2 peut être délicat à calculer.

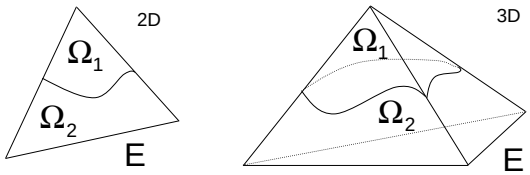


FIG. 6.3 – Intersection de l'interface avec un élément E en 2D et 3D

Pour simplifier les calculs, nous supposerons comme dans [Mar06] que l'interface est plane dans une maille. D'un point de vue Level Set, cela signifie que la fonction ϕ est supposée affine dans chaque élément alors qu'en réalité elle est approchée par des polynômes de degré $\mathbb{P}_k$ dans l'approche GD. D'un point de vue plus géométrique, cela se traduit façon suivante. En 2D, l'intersection entre l'interface et un élément est un segment (voir figure FIG. 6.4). Elle scinde l'élément en deux surfaces, l'une étant un triangle l'autre un quadrangle dont les aires peuvent êtres simplement évaluées en utilisant les valeurs de la fonction Level Set ϕ. Nous avons détaillé ce calcul en Annexe C.

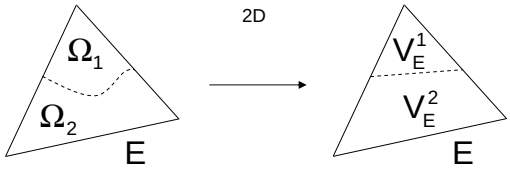


FIG. 6.4 – Approximation de l'interface dans un élément E en 2D

Par contre en 3D, l'intersection entre l'interface et une maille est une surface plane qui peut être soit un triangle soit un quadrangle. Dans le premier cas l'élément est découpé en un prisme et un tétrahèdre plus petit (voir configuration 1 de la figure FIG. 6.5), dans la seconde l'élément est décomposé en deux tétrahèdres (voir configuration 2 de la figure FIG. 6.5).

En redécoupant chaque prisme en tétraèdre (voir figure FIG. 6.6), le volume compressible peut se calculer simplement à l'aide de la fonction Level Set.

2.4.3 Les moyennes

Avant de rentrer dans le détail de la formulation des moyennes élémentaires, il est nécessaire de préciser un certain nombre de notations. Tout d'abord, nous désignons par N_{se} le nombre de degrés de liberté d'un élément E du maillage $\mathcal{E}_h$. La figure FIG. 6.2 donne des exemples de N_{se} pour des éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}_k, k = 1, 2, 3$ en 2D et en 3D. Nous notons également $\mathbf{S}_E^i$ l'ensemble des sommets de l'élément E appartenant au milieu Ω_i de cardinal $card(S_E^i)$.

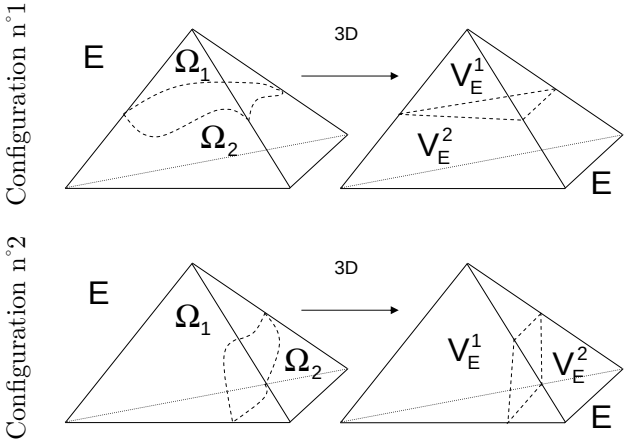


FIG. 6.5 – Approximation de l'interface dans un élément E en 3D

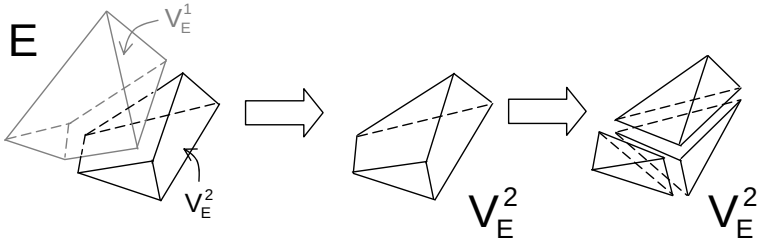


FIG. 6.6 – Redécoupage d'un prisme en tétrahèdre

En employant les valeurs ponctuelles définies précédemment, ainsi que la fonction couleur ε_E^n, nous pouvons aisément construire les grandeurs moyennes à chaque instant n. Elles sont définies par :

– pour l'inconnue :

$$\overline{\mathbf{Y}}_E^n = \frac{1-\varepsilon_E^n}{card(S_E^1)} \sum_{j \in S_E^1} \mathbf{Y}_i^n + \frac{\varepsilon_E^n}{card(S_E^2)} \sum_{j \in S_E^2} \mathbf{Y}_i^n; \tag{6.14}$$

– pour la densité :

$$\overline{\rho}_E^n = \left(\frac{1-\varepsilon_E^n}{card(S_E^1)} \sum_{j \in S_E^1} \frac{1}{\rho_i^n} + \frac{\varepsilon_E^n}{card(S_E^2)} \sum_{j \in S_E^2} \frac{1}{\rho_i^n} \right)^{-1}; \tag{6.15}$$

– pour la viscosité :

$$\overline{\mu}_E^n = \left(\frac{1-\varepsilon_E^n}{card(S_E^1)} \sum_{j \in S_E^1} \frac{1}{\mu_i^n} + \frac{\varepsilon_E^n}{card(S_E^2)} \sum_{j \in S_E^2} \frac{1}{\mu_i^n} \right)^{-1}; \tag{6.16}$$

– pour la conductivité thermique :

$$\overline{\kappa}_E^n = \left(\frac{1-\varepsilon_E^n}{card(S_E^1)} \sum_{j \in S_E^1} \frac{1}{\kappa_i^n} + \frac{\varepsilon_E^n}{card(S_E^2)} \sum_{j \in S_E^2} \frac{1}{\kappa_i^n} \right)^{-1}; \tag{6.17}$$

– pour le coefficient de compressibilité isotherme :

$$\overline{\beta_T}_E^n = \frac{1-\varepsilon_E^n}{card(S_E^1)} \sum_{j\in S_E^1} \beta_{T,i}^n + \frac{\varepsilon_E^n}{card(S_E^2)} \sum_{j\in S_E^2} \beta_{T,i}^n; \tag{6.18}$$

– et pour le coefficient de dilatation volumique :

$$\overline{\alpha_p}_E^n = \frac{1-\varepsilon_E^n}{card(S_E^1)} \sum_{j\in S_E^1} \alpha_{p,i}^n + \frac{\varepsilon_E^n}{card(S_E^2)} \sum_{j\in S_E^2} \alpha_{p,i}^n. \tag{6.19}$$

Il faut remarquer que dans les expressions ci-dessus, une sommation sur les indices locaux et non globaux des sommets est effectuée.

A l'aide des moyennes calculées précédemment (6.14) à (6.19), les matrices, le second membre et la matrice des coefficients de stabilisation moyens qui interviennent dans la formulation variationnelle (6.11), sont construits. Pour tout E élément de $\mathcal{E}_h$ nous avons $\overline{A_0}_E^n, \overline{A}_E^n, \overline{K}_E^n$, $\overline{\mathbf{S}}_E^n, \overline{L}_E^n$ et $\overline{\tau}_E^n$ définies par :

$$\begin{array}{rcl} \overline{A_0}_E^n & = & \tilde{A}_0(\overline{\mathbf{Y}}_E^n, \overline{\alpha_p}_E^n, \overline{\beta_T}_E^n, \overline{\rho}_E^n), \\ \overline{A}_E^n & = & \tilde{A}(\overline{\mathbf{Y}}_E^n, \overline{\alpha_p}_E^n, \overline{\beta_T}_E^n, \overline{\rho}_E^n), \\ \overline{K}_E^n & = & \tilde{K}(\overline{\mathbf{Y}}_E^n, \overline{\mu}_E^n, \overline{\kappa}_E^n), \\ \overline{\mathbf{S}}_E^n & = & \tilde{\mathbf{S}}(\overline{\mathbf{Y}}_E^n, \overline{\rho}_E^n), \end{array} \tag{6.20}$$

et enfin le coefficient de stabilisation moyen

$$\overline{\tau}_E^n = (1-\varepsilon_E^n)\tau_E^1(\overline{\mathbf{Y}}_E^n, \overline{\rho}_E^n, \overline{\mu}_E^n, \overline{\kappa}_E^n) + \varepsilon_E^n \tau_E^2(\overline{\mathbf{Y}}_E^n, \overline{\rho}_E^n, \overline{\mu}_E^n, \overline{\kappa}_E^n), \tag{6.21}$$

avec τ_E^1 et τ_E^2 les coefficients de stabilisation associés au liquide (Ω_1) et au gaz (Ω_2) respectivement. Cette dernière étape achève la construction de la méthode des éléments finis stabilisés pour la résolution de l'équation mono-fluide (6.3).

2.5 Schéma numérique

Dans ce paragraphe nous présentons la mise en oeuvre d'éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}_1$ pour le problème approché (6.11). Nous verrons que cela nous conduit à l'obtention d'un système algébrique linéaire pour chaque pas de temps.

2.5.1 Assemblage du système linéaire

Ici, nous choisissons d'interpoler la pression, la vitesse et la température par des polynômes de $\mathbb{P}_1$. Pour simplifier l'implémentation, il est usuel d'employer pour les espaces d'approximation des solutions $\mathsf{S}_h^p, \mathsf{S}_h^{\mathbf{u}}, \mathsf{S}_h^T$ et des fonctions test $\mathsf{T}_h^p, \mathsf{T}_h^{\mathbf{u}}, \mathsf{T}_h^T$ une même base notée :

$$\{N_1, \ldots, N_{N_s}\},$$

les conditions aux limites étant traitées a posteriori. Nous pouvons donc décomposer dans cette base les solutions approchées $\mathbf{Y}_h^n$ à chaque pas de temps t^n de la façon suivante :

$$\mathbf{Y}_h^n(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{Y}_i^n N_i(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \Omega, 0 \leq n \leq N.$$

De même les fonctions test sont données par :

$$\mathbf{W}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{W}_i N_i(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Dans les égalités précédentes, nous désignons par $\mathbf{Y}_i^n$ le vecteur de $\mathbb{R}^{d+2}$ des inconnues au noeud i à l'instant t^n ; $\mathbf{W}_i$ est le vecteur de $\mathbb{R}^{d+2}$ des valeurs des fonctions test pour le noeud i ; enfin N_i est la i^{ème} fonction de base.

En substituant dans (6.11), l'expression de $\mathbf{Y}_h^n$ et $\mathbf{W}_h$, il vient[1] :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_i \cdot \left[\overline{A_0}_E^n \frac{\delta \mathbf{Y}_j^{n+1}}{\delta t} \int_E N_i N_j + \overline{A_k}_E^n \mathbf{Y}_j^{n+1} \int_E N_i \partial_{x_k} N_j + \overline{K_{kl}}_E^n \mathbf{Y}_j^{n+1} \int_E \partial_{x_l} N_i \partial_{x_k} N_j - \overline{\mathbf{S}}_E^n \int_E N_i \right] \quad (6.22) \\ + \mathbf{W}_i \cdot \left[\overline{KG_k}_E^n \frac{\delta \mathbf{Y}_j^{n+1}}{\delta t} \int_E \partial_{x_k} N_i N_j + \overline{KL_{kl}}_E^n \mathbf{Y}_j^{n+1} \int_E \partial_{x_k} N_i \partial_{x_l} N_j - \overline{KS_k}_E^n \overline{\mathbf{S}}_E^n \int_E \partial_{x_k} N_j \right] = 0, \end{aligned}$$

Dans l'équation ci-dessus nous avons introduit les matrices $\overline{KG_k}_E^n, \overline{KL_{kl}}_E^n$ et $\overline{KS_k}_E^n$ définies sur chaque élément E du maillage par :

$$\begin{aligned} \overline{KG_k}_E^n &= \overline{A_k}_E^n \overline{\tau}_E^n \overline{A_0}_E^n, \\ \overline{KL_{kl}}_E^n &= \overline{A_k}_E^n \overline{\tau}_E^n \overline{A_l}_E^n, \\ \overline{KS_k}_E^n &= \overline{A_k}_E^n \overline{\tau}_E^n. \end{aligned}$$

A présent nous définissons les vecteurs suivants :

$$\mathsf{Y}^n = (\mathbf{Y}_i^n)_{1 \le i \le N_s}, 0 \le n \le N,$$

et

$$\mathsf{W} = (\mathbf{W}_i)_{1 \le i \le N_s}.$$

En utilisant ces notations, l'équation (6.22) devient :

$$\mathsf{W} \cdot \left[\mathsf{A}\mathsf{Y}^{n+1} + \mathsf{B}\mathsf{Y}^n - \mathsf{S} \right] = 0. \quad (6.23)$$

L'égalité précédente étant vraie pour tout W, nous obtenons trivialement le système linéaire de taille $(d+2) \cdot N_s \times (d+2) \cdot N_s$:

$$\mathsf{A}\mathsf{Y}^{n+1} + \mathsf{B}\mathsf{Y}^n = \mathsf{S} \quad (6.24)$$

où A, B sont des matrices de taille $(d+2) \cdot N_s \times (d+2) \cdot N_s$ et S un vecteur de $\mathbb{R}^{(d+2) \cdot N_s}$. En faisant intervenir l'opérateur d'assemblage éléments finis $\underset{E \in \mathcal{E}_h}{\mathbf{A}}$, nous pouvons écrire les matrices A et B sous la forme :

$$\mathsf{A} = \underset{E \in \mathcal{E}_h}{\mathbf{A}} \mathsf{A}^E \text{ et } \mathsf{B} = \underset{E \in \mathcal{E}_h}{\mathbf{A}} \mathsf{B}^E, \quad (6.25)$$

où les $\mathsf{A}^E, \mathsf{B}^E$ sont les matrices élémentaires de taille $(d+2) \cdot N_{se} \times (d+2) \cdot N_{se}$ dont les coefficients sont donnés par :

$$\begin{aligned} \mathsf{A}^E &= \left[\mathsf{A}_{ij}^E \right]_{1 \le i,j \le (d+2) \cdot N_{se}}, \\ \mathsf{A}_{ij}^E &= \frac{1}{\delta t} \overline{A_0}_E^n m_{ij}^E + \overline{A_k}_E^n a_{ij,k}^E + \overline{K_{kl}}_E^n d_{ij,kl}^E + \frac{1}{\delta t} \overline{KG_k}_E^n a_{ji,k}^E + \overline{KL_{kl}}_E^n d_{ij,kl}^E, \end{aligned} \quad (6.26)$$

[1] A partir d'ici nous utiliserons dans la suite de ce paragraphe, la convention de sommation d'Einstein sur les indices pour alléger les notations. Ainsi nous écrirons : $F = \sum_{i=1}^{N} F_i N_i = F_i N_i$.

et

$$\begin{aligned} \mathsf{B}^E &= \left[\mathsf{B}^E_{ij}\right]_{1\leq i,j\leq (d+2)\cdot N_{se}}, \\ \mathsf{B}^E_{ij} &= \frac{1}{\delta t}\overline{A_0}^n_E m^E_{ij} + \frac{1}{\delta t}\overline{KG_k}^n_E a^E_{ji,k}. \end{aligned} \tag{6.27}$$

Les coefficients $m^E_{ij}, a^E_{ij}, d^E_{ij}, sa^E_i, sm^E_i$ correspondent aux opérateurs discrets éléments finis. Calculés sur chaque élément E du maillage $\mathcal{E}_h$, ils représentent :

– l'opérateur de masse :

$$m^E_{ij} = \int_E N_i N_j \in \mathbb{R},$$

– l'opérateur du gradient :

$$a^E_{ij} = \int_E N_i \nabla N_j \in \mathbb{R}^d,$$

– l'opérateur du laplacien :

$$d^E_{ij} = \int_E \nabla N_i \otimes \nabla N_j \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d,$$

– ainsi que les deux opérateurs :

$$sm^E_i = \int_E N_i \in \mathbb{R} \text{ et } sa^E_i = \int_E \nabla N_i \in \mathbb{R}^d.$$

De façon similaire le vecteur S est assemblé de la façon suivante :

$$\mathsf{S} = \mathop{\mathbf{A}}_{E\in\mathcal{E}_h} \mathsf{S}^E, \tag{6.28}$$

avec S^E sa contribution sur chaque élément définie par :

$$\begin{aligned} \mathsf{S}^E &= \left(\mathsf{S}^E_i\right)_{1\leq i\leq (d+2)\cdot N_{se}}, \\ \mathsf{S}^E_i &= \overline{\mathbf{S}}^n_E sm^E_i + \overline{KS_k}^n_E \overline{\mathbf{S}}^n_E sa^E_{i,k}. \end{aligned} \tag{6.29}$$

2.5.2 Prise en compte des conditions aux limites

Jusqu'à présent, les matrices A, B et le second membre F intervenant dans le système (6.24) ne prennent pas en compte les conditions aux limites de type Dirichlet. En effet, ils correspondent au problème de Neumann en particulier pour la vitesse et la température. Par conséquent, les lignes associées aux degrés de libertés du bord sont erronées. Pour imposer des conditions aux limites de type Dirichlet, il est possible de procéder de différentes façons (pour plus de détails voir le chapitre 9 du livre de Ern et Guermond [EG02]). Ici, nous proposons de corriger ces lignes en imposant fortement la condition de Dirichlet. Cela signifie deux choses :

1. que nous annulons les lignes associées aux degrés de liberté du bord pour $\mathbf{u}$ et T sauf le terme diagonal qui est égal à 1 ;
2. pour le second membre, les coefficients des lignes associées au bord sont remplacés par les conditions aux limites adéquates pour $\mathbf{u}$ et T.

2.6 Choix du pas de temps

Dans le but de discrétiser l'équation (6.1) en temps, un schéma d'Euler implicite est employé. Ce choix permet de s'affranchir a priori d'un critère restrictif sur le pas de temps appelé *condition CFL* (Courant-Friedrich-Levy) pour assurer la stabilité du schéma numérique utilisé.

Cependant, pour représenter correctement les différentes ondes présentes dans l'écoulement, il convient de considérer un pas de temps qui n'excède pas certaines échelles de temps physiques dépendant du fluide dans lequel on se trouve.
Pour le liquide on veut connaitre précisément la dynamique associée à la convection alors que dans le gaz on s'intéresse aux effets de compressibilité. Cela conduit à choisir dans le liquide Ω_1 un pas de temps $\delta t^{(1)}$ vérifiant :

$$\delta t^{(1)} \leq \frac{h}{||\mathbf{u}||} \tag{6.30}$$

et dans le gaz un pas de temps $\delta t^{(2)}$ dépendant de la vitesse du son :

$$\delta t^{(2)} \leq \frac{h}{||\mathbf{u}|| + c}. \tag{6.31}$$

Dans les définitions ci-dessus nous notons $||\mathbf{u}|| = \max_{\mathbf{x}\in\Omega} \left\{ \sqrt{\sum_{i=1}^{d} u_i^2} \right\}$.
Finalement, nous imposons le critère global sur tout le domaine Ω de l'écoulement :

$$\delta t^{(e)} \leq \min\{\delta t^{(1)}, \delta t^{(2)}\}, \tag{6.32}$$

avec $\delta t^{(e)}$ le pas de temps associé à l'écoulement. Dans les simulations qui nous intéressent ici, les écoulements sont lents. Cela signifie en particulier que la vitesse de l'écoulement $\mathbf{u}$ est petite devant celle des ondes accoustiques c. Par conséquent, le pas de temps choisi $\delta t^{(e)}$ sera surtout piloté par le pas de temps compressible $\delta t^{(2)}$.

3 Solveur de l'interface

Pour des raisons que nous avons déjà évoquées dans un précédent chapitre, nous allons mettre en oeuvre une méthode de type Runge-Kutta/Garlerkin Discontinu (RK-GD) en temps et en espace pour discrétiser l'équation de transport (6.2), comme cela a été fait par Marchandise [Mar06] ou Di Pietro [DPLFP06].

La méthode GD a été initialement introduite au début des années 70 pour la simulation de problèmes de neutronique [RH73]. Par la suite, Lesaint et Raviart ont présenté les premières analyses numériques de la méthode pour le plus simple exemple d'équation hyperbolique, l'équation d'advection-réaction [LR74, Les75]. Plus tard Cockburn et Shu [CS98a, CS01] ont étendu cette méthode à la résolution de problèmes spatio-temporels : couplant une discrétisation de type Runge-Kutta explicite en temps avec une méthode Galerkin Discontinu en espace. D'un impact assez limité dans les années 70-80, la méthode Galerkin Discontinu n'a cessé d'accroître sa popularité depuis ces dernières années. Cela peut s'expliquer par les avantages qu'elle présente :

- une grande *flexibilité* dans le choix des fonctions de base locales dans chaque maille et dans la forme géométrique de chaque maille ;
- la possibilité d'*améliorer simplement la précision* locale en augmentant le degré polynômial sans modifier le maillage ;

– cette méthode bénéficie d'un *cadre théorique solide* ;
– enfin son implémentation est facilement *parallélisable.*

Toutefois, par comparaison avec la méthode de Galerkin standard l'approche Galerkin Discontinu présente, comme nous le verrons plus tard, un coût de calcul plus élevé. Effectivement, dans ce contexte, l'inconnue est discontinue d'une maille à l'autre. Elle requiert donc un nombre de degrés de liberté plus important qu'une approche continue.

Après avoir défini le problème résolu, nous détaillerons dans les paragraphes suivants la formulation GD en espace du problème (6.36) ainsi que la mise en oeuvre du shéma RK explicite en temps.

3.1 Problème modèle

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à l'écriture du schéma RK-GD pour la résolution de l'équation (6.2). Pour cela, étant donné Ω un domaine borné et connexe de $\mathbb{R}^d$ de frontière $\partial\Omega$, nous cherchons $\phi :]0,T[\times\Omega \mapsto \mathbb{R}$ solution du problème d'évolution :

$$(\mathcal{P}1)\left\{\begin{array}{rcll} \partial_t\phi + \mathbf{u}\cdot\nabla\phi & = & 0, & (\mathbf{x},t)\in\Omega\times]0,T[, \\ \phi(\mathbf{x},0) & = & \phi^0(\mathbf{x}), & \mathbf{x}\in\Omega. \end{array}\right. \tag{6.33}$$

Ici la fonction Level Set est advectée à la vitesse de l'écoulement $\mathbf{u}$ qui est solution de (6.1).

Il peut être utile de réécrire l'équation de transport de la fonction Level Set (6.33) sous sa forme conservative :

$$\partial_t\phi + \nabla\cdot(\mathbf{u}\phi) = \phi\nabla\cdot(\mathbf{u}), \mathbf{x}\in\Omega \tag{6.34}$$

Dans de nombreux travaux [GH05, DPLFP06, Mar06], les auteurs étudient la simulation numérique d'écoulements diphasiques incompressibles. Cela permet d'assurer que le champ de vitesse $\mathbf{u}$ est à divergence nulle dans Ω, ainsi l'équation ci-dessus se simplifie et devient :

$$\partial_t\phi + \nabla\cdot(\mathbf{u}\phi) = 0, \mathbf{x}\in\Omega. \tag{6.35}$$

Ecrite sous cette forme, l'équation (6.35) a l'avantage d'être simple à discrétiser par une méthode de type Galerkin Discontinu.

Dans le cas présent, la vitesse $\mathbf{u}$ est solution des équations mono-fluides (6.1). Cela implique notamment que la vitesse n'est pas à divergence nulle sur tout Ω. Par conséquent, les équations (6.34) et (6.35) ne sont pas équivalentes. Il faut a priori résoudre (6.34) en tenant compte du terme $\phi\nabla\cdot(\mathbf{u})$ qui peut être délicat à traiter.

Pour contourner cette difficulté, nous avons en réalité cherché ϕ telle que :

$$(\mathcal{P}2)\left\{\begin{array}{rcll} \partial_t\phi + \nabla\cdot(\mathbf{u}\phi) & = & 0, & (\mathbf{x},t)\in\Omega\times\mathbb{R}^+, \\ \phi(\mathbf{x},0) & = & \phi^0(\mathbf{x}), & \mathbf{x}\in\Omega. \end{array}\right. \tag{6.36}$$

Dans le cadre de notre étude, il est suffisant de résoudre le problème (6.36). En effet, pour une même condition initiale ϕ_0, on peut montrer que l'ensemble des zéros de la solution ϕ_1 du problème $(\mathcal{P}1)$ coïncide avec l'ensemble des zéros de la solution du problème $(\mathcal{P}2)$ i.e. quelque soit le problème résolu l'interface calculée est la bonne.

Proposition 1 *Soit* $\mathbf{u}$ *un champ de vitesse régulier de* $]0,T[\times\Omega$ *dans* $\mathbb{R}^d$. *Si* ϕ^0 *est une fonction suffisament régulière de* Ω *dans* $\mathbb{R}$, *alors*

$$\Gamma = \{\mathbf{x} \in \Omega; \phi_1 = 0\} = \{\mathbf{x} \in \Omega; \phi_2 = 0\}\,, \tag{6.37}$$

où ϕ_1 *et* ϕ_2 *sont les uniques solutions des problèmes* $(\mathcal{P}1)$ *et* $(\mathcal{P}2)$ *respectivement.*

Preuve :

Afin de montrer le résultat précédent, il faut dans un premier temps, expliciter les solutions des problèmes $(\mathcal{P}1)$ et $(\mathcal{P}2)$.

1. **Calcul de la solution de** $(\mathcal{P}1)$
   Etant donné un champ de vitesse régulier $\mathbf{u}$ et une condition initiale ϕ_0 le problème $(\mathcal{P}1)$ admet une solution unique. Ici, on peut résoudre le problème $(\mathcal{P}1)$ par la *méthode des caractéristiques*. Cela signifie, que si la solution de $(\mathcal{P}1)$ existe et si elle est suffisament régulière, alors elle est constante le long des trajectoires associées à $\mathbf{u}$. Ces trajectoires sont appelées les *courbes caractéristiques* de l'équation. Avant de définir ϕ il est indispensable d'introduire $\mathbf{X}$ qui est la position à l'instant s d'une particule de fluide située en $\mathbf{x}$ à l'instant t définie par :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{d}{ds}\mathbf{X}(s,t,\mathbf{x}) & = & \mathbf{u}(s,\mathbf{X}(s,t,\mathbf{x})), \\ \mathbf{X}(\mathbf{x},t,t) & = & \mathbf{x}. \end{array}\right. \tag{6.38}$$
   On montre (voir [BF06]) qu'une solution ϕ_1 du problème linéaire $(\mathcal{P}1)$ est donnée par :
   $$\phi_1(t,\mathbf{x}) = \phi^0(\mathbf{X}^0(t,\mathbf{x})), \tag{6.39}$$
   où $\mathbf{X}^0(t,\mathbf{x}) = \mathbf{X}(0,t,\mathbf{x})$.

2. **Calcul de la solution de** $(\mathcal{P}2)$
   De même que précédemment, étant donné $\mathbf{u}$ un champ de vitesse et ϕ^0 suffisament réguliers, le problème $(\mathcal{P}2)$ admet une unique solution ϕ_2 qui est :
   $$\phi_2(\mathbf{x},t) = \phi^0(\mathbf{X}^0(t,\mathbf{x}))e^{g(t,\mathbf{x})}, \tag{6.40}$$
   avec
   $$\left\{\begin{array}{rcl} g(t,\mathbf{x}) & = & \displaystyle\int_0^t f(\tau,\mathbf{x}(\tau,\mathbf{X}^0(t,\mathbf{x})))d\tau \\ f(t,\mathbf{x}) & = & -\nabla\cdot\mathbf{u}(t,\mathbf{x}). \end{array}\right.$$

A présent, nous allons établir l'égalité entre l'ensemble des zéros de ϕ_1 et ϕ_2 :

$$\Gamma_1(t) = \{\mathbf{x} \in \Omega; \phi_1(t,\mathbf{x}) = 0\} \text{ et } \Gamma_2(t) = \{\mathbf{x} \in \Omega; \phi_2(t,\mathbf{x}) = 0\}\,, \quad \forall t \in [0,T[.$$

Soit $\mathbf{x}$ dans $\Gamma_1(t)$. Pour tout $t \geq 0$, nous avons :

$$\phi_1(t,\mathbf{x}) = 0,$$

en multipliant l'équation précédente par $e^{g(t,\mathbf{x})}$, quantité strictement positive dans Ω (a fortiori dans Γ_1), nous obtenons :

$$\phi_1(t,\mathbf{x})e^{g(t,\mathbf{x})} = \phi^0(\mathbf{X}^0(t,\mathbf{x}))e^{g(t,\mathbf{x})} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_1,$$

qu'on peut également écrire :

$$\phi_2(t,\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_1.$$

Cela signifie que $\mathbf{x} \in \Gamma_2$ par conséquent nous avons $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$. On montre de la même façon que $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$. Donc $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

■

3.2 Discrétisation spatiale

3.2.1 Formulation éléments finis

Une partie des notations employées ici sont les mêmes que celles de la section 2. Ainsi nous notons $\mathcal{E}_h$ une triangulation du domaine spatial Ω. Il sera également utile de considérer $\mathcal{F}_h$ l'ensemble des faces du maillage. Cet ensemble est partitionné en $\mathcal{F}_h = \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^\partial$ où i désigne l'ensemble des faces intérieures du maillage et $\mathcal{F}_h^\partial$ est l'ensemble des faces situées sur la frontière $\partial\Omega$. Pour $F \in \mathcal{F}_h^i$, il existe deux mailles E_1 et E_2 de $\mathcal{E}_h$ telles que $F = E_1 \cap E_2$. On désigne par $\mathbf{n}_F$ le vecteur unitaire normal à F et pointant de E_1 vers E_2 (voir figure FIG. 6.7).

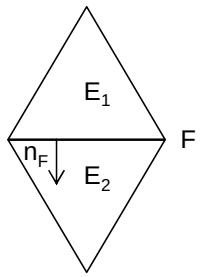


FIG. 6.7 – Orientation des normales

Pour une fonction ϕ, on définit son saut à travers F et sa moyenne sur F par les formules :

$$[[\phi]]_F = \phi_1 - \phi_2, \text{ et } \{\phi\}_F = \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2), \tag{6.41}$$

où pour alléger les notations, nous avons posé $\phi_i = \phi_{|E_i}, i \in \{1, 2\}$. L'indice F est omis dans les sauts et les moyennes lorsqu'il n'y pas d'ambiguïté. Pour $F \in \mathcal{F}_h^\partial$, $\mathbf{n}_F$ désigne la normale unitaire sur F sortant de Ω et les sauts et les moyennes de ϕ sont pris par convention égaux à la restriction de ϕ sur F.

Soit $k \geq 0$. Nous considérons W_h l'espace des fonctions dont la restriction sur chaque élément de $\mathcal{T}_h$ est un polynôme de degré k :

$$W_h = \left\{\phi_h \in L^2(\Omega); \phi_{h|K} \in \mathbb{P}_k(K_e), \forall K_e \in \mathcal{T}_h\right\}. \tag{6.42}$$

A la différence de la méthode Galerkin standard, les éléments de l'espace W_h sont des fonctions continues sur chaque élément mais a priori discontinues d'une maille à l'autre comme sur la figure FIG. 6.8.

La formulation GD du problème discontinu peut se formuler de la suivante :

$$\begin{cases} \text{Chercher } \phi_h \in \mathcal{C}^1\left(]0, T[, W_h\right) \text{ tel que} \\ a_h(\psi_h, \phi_h) = 0, \forall \psi_h \in W_h, \\ \phi_h(\mathbf{x}, 0) = I_h \phi_0(\mathbf{x}), \text{ dans } \Omega. \end{cases} \tag{6.43}$$

Dans le problème semi-discret précédent, a_h une forme bilinéaire approchée, I_h est l'opérateur d'interpolation linéaire de l'espace des solutions continues W sur l'espace des fonctions approchées W_h.
Dans la littérature [Ern07], il existe différentes façons de définir a_h satisfaisant des propriétés

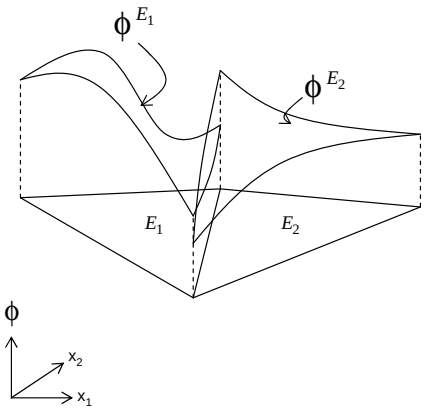


FIG. 6.8 – Représentation GD de la fonction ϕ sur deux éléments triangulaires

de consistance et de L^2- coercivité dans W_h. Ici, nous retiendrons la forme bilinéaire discrète utilisée dans [MRC06, DPLFP06] définie par :

$$\begin{aligned} a_h(\psi_h, \phi_h) &= \int_\Omega \psi_h \partial_t \phi_h - \nabla \psi_h \cdot \mathbf{u} \phi_h + \int_{\partial\Omega} \psi_h (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \phi_h \\ &+ \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F \{\phi_h\} [[\psi_h]] + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \frac{1}{2} |\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F| [[\phi_h]] [[\psi_h]]. \end{aligned} \tag{6.44}$$

Dans la définition suivante les deux premières intégrales sont les contributions de Galerkin, alors que les deux autres sont des termes nécessaires à la stabilité du schéma numérique. La dernière intégrale est un terme de décentrage *upwind*.

Le problème discret (6.43) admet une reformulation locale obtenue en considérant une fonction test de la forme $\psi_h = q\chi_E$ où q est un polynôme arbitraire dans $\mathbb{P}_k$ et où χ_E désigne la fonction indicatrice de la maille E. Ainsi, ϕ_h est solution de (6.43) si et seulement si pour toute maille $E \in \mathcal{E}_h$ et pour tout polynôme $q \in \mathbb{P}_k$:

$$\int_E q \partial_t \phi_h - \nabla q \cdot \mathbf{u} \phi_h + \int_{F \subset \partial E} q \phi_{E,F}(\phi_h) = 0, \tag{6.45}$$

où le *flux* $\phi_{E,F}$ est défini par :

$$\phi_{E,F}(\phi_h) = \begin{cases} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^+ \phi_h & \text{sur } \mathcal{F}_h^\partial, \\ \frac{1}{2} |\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F| [[\phi_h]] + \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F \{\phi_h\} & \text{sur } \mathcal{F}_h^i, \end{cases} \tag{6.46}$$

où pour un réel $x \in \mathbb{R}$, on désigne ses parties positive et négative par :

$$x^+ = \frac{1}{2}(|x| + x), \text{ et } x^- = \frac{1}{2}(|x| - x).$$

Moyennant quelques calculs, le flux précédent peut s'écrire plus simplement :

$$\phi_{E,F}(\phi_h) = \phi^{UP} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F, \tag{6.47}$$

en faisant apparaitre le flux ϕ^{UP} représenté sur le schéma FIG. 6.9 :

$$\text{avec } \phi^{UP} = \begin{cases} \phi_1 & \text{si } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F \geq 0, \\ \phi_2 & \text{si } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F \leq 0. \end{cases} \tag{6.48}$$

Ce flux est connu sous le nom de *flux upwind* car il consiste à choisir sur une face la valeur de ϕ_h située en amont des lignes de courant associées à $\mathbf{u}$.

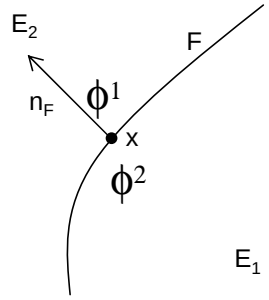


FIG. 6.9 – Définition du flux upwind

3.2.2 Construction du schéma numérique

L'équation (6.45) représente un système semi-discret sur chaque élément du maillage $\mathcal{E}_h$ dans laquelle le couplage entre éléments se traduit par la présence de flux sur les faces de chaque maille. Dans le prochain paragraphe nous détaillons l'écriture du schéma numérique pour des éléments finis de Lagrange.

Etant donné que la méthode DG s'appuie sur une approximation continue de la fonction ϕ sur chaque élément E de $\mathcal{E}_h$ mais discontinue d'une maille à l'autre, elle requiert plus de degrés de liberté qu'une méthode Galerkin classique. De plus, il est nécessaire d'évaluer des quantités supplémentaires comme des intégrales de surface sur les faces F des éléments. Ces deux facteurs engendrent une augmentation du coût des calculs. Ce coût peut être singulièrement réduit en utilisant une implémentation de type *"Quadrature free"* . Cette stratégie initialement introduite par Atkins et Shu [AS96] repose sur l'utilisation de *bases locales* (polynômes de Lagrange par exemple) pour construire l'espace des fonctions approchées W_h. Ainsi il est possible de calculer et de stocker les intégrales de volume une fois pour toutes. Cette approche permet non seulement de construire une méthode plus simple mais aussi de gagner de la rapidité en temps de calcul.

Dans cette thèse, nous utilisons les éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}_k$ pour l'interpolation de ϕ. En utilisant l'approche de type "Quadrature free", la solution approchée ϕ_h sur un élément E de $\mathcal{E}_h$ est donnée par :

$$\phi_h^E = \sum_{i=1}^{N_{se}} \phi_i^E N_i(x). \tag{6.49}$$

Dans l'expression précédente nous désignons par ϕ_i^E la valeur de la fonction ϕ_h au i^{ème} noeud de l'élement E. Ici, les noeuds de l'élement E sont numérotés localement de 1 à N_{se}, avec N_{se} le nombre de degrés de liberté dans l'élément E. Enfin, N_i est la i^{ème} fonction de base de $\mathbb{P}_k(E)$. En substituant, l'expression de ϕ_h dans (6.45), et en choisissant $q = N_i$, nous obtenons l'ex-

pression :

$$\begin{aligned} &\int_E N_j(\mathbf{x})\partial_t\left(\sum_{i=1}^{N_{se}}\phi_i^E(t)N_i\right) - \nabla N_j(\mathbf{x})\cdot\mathbf{F}\left(\mathbf{x},t,\sum_{i=1}^{N_{se}}\phi_i^E(t)N_i\right)d\mathbf{x} \\ + &\int_{F\subset\partial E} N_j(\mathbf{x})\phi_{E,F}(\mathbf{x},t)\left(\sum_{i=1}^{N_{se}}\phi_i^E(t)N_i(\mathbf{x})\right)d\mathbf{x} = 0. \end{aligned} \tag{6.50}$$

Dans l'équation ci-dessus, il faut remarquer la présence du terme $\mathbf{F}\left(\mathbf{x},t,\sum_{i=1}^{N_{se}}\phi_i^E N_i\right)$ avec $\mathbf{F}$ une fonction du temps, de l'espace et de l'inconnue ϕ_h définie par $\mathbf{F}(\mathbf{x},t,\phi_h(\mathbf{x},t)) = \mathbf{u}(\mathbf{x},t)\phi_h(\mathbf{x},t)$. Pour se ramener à un schéma numérique globalement linéaire on propose d'utiliser l'approximation qui suit sur chaque élément E du maillage $\mathcal{E}_h$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x},t,\phi_h(\mathbf{x},t)) = \mathbf{F}\left(\mathbf{x},t,\sum_{i=1}^{N_{se}}\phi_i^E(t)N_i(\mathbf{x})\right) \approx \sum_{i=1}^{N_e}\mathbf{F}_i^E(\mathbf{x},t)N_i(\mathbf{x}). \tag{6.51}$$

Nous posons $\mathbf{F}_i^E \overset{def}{=} (\mathbf{u}\phi)_i^E$ la valeur de $\mathbf{F}$ au noeud i sur l'élément E. L'idée est donc de représenter la fonction $\mathbf{F}$ de façon discrète sur le même maillage que ϕ. Bien entendu cette approximation est exacte seulement pour des fonctions $\mathbf{F}$ linéaires à coefficients constants.
En utilisant cette approximation pour F, et pour le flux $\phi_{E,F}$, l'équation (6.50) devient :

$$\sum_{i=1}^{N_{se}}\partial_t\phi_i^E\int_E N_jN_i = \sum_{i=1}^{N_{se}}(\mathbf{u}\phi)_i^E\cdot\int_E\nabla N_jN_i - \sum_{i=1}^{N_{se}}\sum_{F\subset\partial E}(\phi^{UP}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_F)_i^E\int_F N_iN_j. \tag{6.52}$$

Il apparait naturellement dans l'équation précédente (6.52) un certain nombre d'opérateurs discrets GD. Ces opérateurs peuvent être calculés de façon analytique sur chaque élément pour les interpolations de Lagrange $\mathbb{P}_k$.

Pour cela il est utile d'introduire T_E la *transformation géométrique affine* qui permet de passer d'un élément (triangle ou tétrahèdre) de référence noté $\hat{E}$ dans le système de coordonnées $\boldsymbol{\xi} = {}^t(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ à un élément quelconque $E \in \mathcal{E}_h$ dans le système de coordonnées $\mathbf{x} = {}^t(x_1,x_2,x_3)$ comme schématisé sur la figure (6.10) :

$$\begin{aligned} T_E \quad : \quad & \hat{E} \to E \\ & \boldsymbol{\xi} \mapsto \mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}). \end{aligned} \tag{6.53}$$

On note J la matrice jacobienne associée à la transformation affine T_E, constante sur chaque élément $E \in \mathcal{E}_h$ et définie en 3D par :

$$J = \begin{pmatrix} \partial_{\xi_1}x_1 & \partial_{\xi_2}x_1 & \partial_{\xi_2}x_1 \\ \partial_{\xi_1}x_2 & \partial_{\xi_2}x_2 & \partial_{\xi_2}x_2 \\ \partial_{\xi_1}x_3 & \partial_{\xi_2}x_3 & \partial_{\xi_2}x_3 \end{pmatrix}.$$

Sur un élément E du maillage, le déterminant de J sera noté : $\det J = ||E||$, de même sur une face F nous définissons : $\det J = ||F||$.
Etant donné une base $\{N_i\}$ de polynômes de $\mathbb{P}_k(E)$ et $\left\{\hat{N}_i\right\}$ de polynômes de $\mathbb{P}_k(\hat{E})$, nous avons la relation :

$$N_i = T_E \circ \hat{N}_i. \tag{6.54}$$

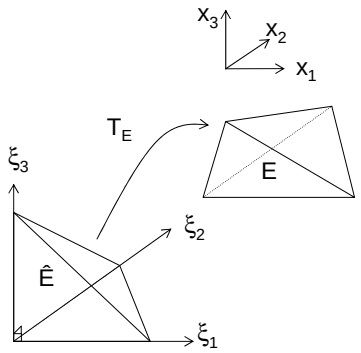


FIG. 6.10 – Transformation géométrique affine $T_E : \hat{E} \to E$ en 3D

Dans l'équation (6.52), nous pouvons mettre en évidence un certain nombre d'opérateurs GD. D'une part interviennent les matrices de masse, l'une relative à l'élément E :

$$M_{ij}^E = \int_E N_i N_j d\mathbf{x} = ||E|| \int_{\hat{E}} \hat{N}_i \hat{N}_j d\xi = \hat{M}_{ij}^E ||E||,$$

l'autre relative aux faces des éléments

$$M_{ij}^F = \int_F N_i N_j d\mathbf{x} = ||F|| \int_{\hat{F}} \hat{N}_i \hat{N}_j d\xi = \hat{M}_{ij}^F ||F||.$$

Les matrices $\hat{M}^E$ et $\hat{M}^F$ sont indépendantes de E et F et sont de taille $N_{se} \times N_{se}$. Le choix des éléments finis peut donner aux opérateurs discrets des structures intéressantes. Ici, nous employons des éléments finis de Lagrange, dans ce cas les matrices de masse sont diagonales par blocs ce qui leur confère la propriété d'être facilement inversible. Si nous avions considéré des éléments finis orthogonaux (Legendre), les matrices de masses auraient été diagonales.
Nous avons également les opérateurs de dérivation discrets :

$$D_{ij}^{x_k} = \int_E N_i \partial_{x_k} N_j d\mathbf{x} = ||E|| \left(\hat{D}_{ij}^{\xi_1} J_{k1}^{-1} + \hat{D}_{ij}^{\xi_2} J_{k2}^{-1} + \hat{D}_{ij}^{\xi_3} J_{k3}^{-1} \right), k = 1, 2, 3,$$

où $J_{ij}^{-1} = \dfrac{\partial \xi_i}{\partial x_j}$ et $\hat{D}_{ij}^{\xi_k} = \int_{\hat{E}} \hat{N}_i \partial_{\xi_k} \hat{N}_j d\xi$. Comme les opérateurs de masse, ces opérateurs sont indépendants de E et sont des matrices de taille $N_{se} \times N_{se}$. Finalement, en utilisant ces définitions, la formulation GD (6.52) peut s'écrire sur chaque élément de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \hat{M}_{ij}^E \partial_t \phi_i^E &= (u_{\xi_1}\phi)_i^E \hat{D}_{ij}^{\xi_1} + (u_{\xi_2}\phi)_i^E \hat{D}_{ij}^{\xi_2} + (u_{\xi_3}\phi)_i^E \hat{D}_{ij}^{\xi_3} - \sum_{F \subset \partial E} \frac{||F||}{||E||} \hat{M}_{ij}^F (\phi^{UP} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F)_i^E, \\ &= L_{ij}^E \phi_i^E, \end{aligned} \tag{6.55}$$

où les flux $(u_{\xi_k}\phi)_i^E, k = 1, 2, 3$ présents dans la formulation (6.55), ont été calculés dans le système de coordonnées de référence et sont donnés par :

$$(u_{\xi_k}\phi)_i^E = (u_1\phi)_i^E J_{1k}^{-1} + (u_2\phi)_i^E J_{2k}^{-1} + (u_3\phi)_i^E J_{3k}^{-1}, k = 1, 2, 3. \tag{6.56}$$

Le système semi-discret ainsi obtenu peut être à son tour discrétisé en temps par un schéma de type Runge-Kutta.

3.3 Discrétisation temporelle

Dans [MRC06, FK08], l'approche utilisée pour réaliser la discrétisation en temps de l'équation de transport de la fonction Level Set est la méthode des *lignes*. Cette approche consiste à supposer que la discrétisation spatiale peut être séparée de la discrétisation en temps si bien que cette dernière peut être traitée indépendamment comme une équation différentielle ordinaire.

En effet, sur chaque élément E du maillage $\mathcal{E}_h$, l'équation locale (6.55) est équivalente à l'EDO suivante :

$$\hat{M}\frac{d}{dt}\Phi = \hat{L}\Phi. \tag{6.57}$$

Dans le système précédent, $\Phi \in \mathbb{R}^{(d+2)\cdot N_{se}}$ est le vecteur des valeurs de la fonction Level Set aux degrés de libertés, $\hat{M} = [\hat{M}_{ij}] \in \mathcal{M}_{(d+2)\cdot N_{se}\times(d+2)\cdot N_{se}}$ et $\hat{L} = [\hat{L}_{ij}] \in \mathcal{M}_{(d+2)\cdot N_{se}\times(d+2)\cdot N_{se}}$ sont des matrices carrées. Ces quantités sont des grandeurs locales, définies sur chaque élément E de $\mathcal{E}_h$. Par inversibilité de la matrice de masse $\hat{M}$, (6.57) est équivalent au système linéaire :

$$\frac{d}{dt}\Phi = \hat{A}\Phi \text{ avec } \hat{A} = \hat{M}^{-1}\hat{L}. \tag{6.58}$$

Pour résoudre cette EDO, nous allons mettre en oeuvre un schéma numérique d'intégration à un pas de type Runge-Kutta.

3.3.1 Ordre nécessaire

D'après Cockburn et Shu [CS98b], si une interpolation de la fonction Level Set d'ordre k en espace est utilisée, alors il est nécessaire d'envisager un schéma numérique au moins précis à l'ordre $k+1$ en temps. Pour être le plus précis possible sur la fonction Level Set, ce qui est utile notamment pour calculer correctement la tension de surface et la courbure, nous sommes montés jusqu'à l'ordre 3 en espace. Par conséquent, des schémas Runge-Kutta jusqu'à l'ordre 4 vont être rappelés ici.

3.3.2 Schémas numériques

De façon générale, il existe deux grandes familles de schémas de type Runge-Kutta, l'une regroupe les schémas explicites et l'autre les schémas implicites. Ici, la discrétisation temporelle sera explicite. Comme les schémas de discrétisation spatiales sont assez complexes, une approche explicite en temps permet d'alléger la partie numérique en s'affranchissant de l'inversion d'un système matriciel.

RK1

Le schéma d'ordre 1 est donné par la *méthode d'Euler explicite* qui s'écrit :

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n + \delta t\hat{A}\Phi^n. \tag{6.59}$$

RK2

Le schéma d'ordre 2, donne lieu au schéma *d'Euler modifié* également appelé *schéma de Heun* qui est :

$$\begin{aligned} k_1 &= \hat{A}\Phi^n, \\ k_2 &= \hat{A}\Phi^n + \delta t k_1, \\ \Phi^{n+1} &= \Phi^n + \delta t\left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right). \end{aligned} \tag{6.60}$$

RK3

Pour le schéma d'ordre 3 nous considérons :

$$\begin{aligned} k_1 &= \hat{A}\Phi^n, \\ k_2 &= \hat{A}\Phi^n + \frac{1}{2}\delta t k_1, \\ k_3 &= \hat{A}\Phi^n + \delta t k_2, \\ \Phi^{n+1} &= \Phi^n + \delta t \left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_2 + \frac{1}{6}k_3 \right). \end{aligned} \tag{6.61}$$

RK4

Enfin le schéma le dernier schéma employé est le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 défini par l'algorithme :

$$\begin{aligned} k_1 &= \hat{A}\Phi^n, \\ k_2 &= \hat{A}\Phi^n + \frac{1}{2}\delta t k_1, \\ k_3 &= \hat{A}\Phi^n + \frac{1}{2}\delta t k_2, \\ k_4 &= \hat{A}\Phi^n + \delta t k_2, \\ \Phi^{n+1} &= \Phi^n + \delta t \left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{6}k_2 + \frac{2}{6}k_3 + \frac{1}{6}k_4 \right). \end{aligned} \tag{6.62}$$

3.3.3 Choix du pas de temps

L'utilisation d'un schéma de discrétisation en temps explicite s'accompagne d'une restriction sur le pas de temps afin de garantir la convergence de celui ici. Pour le schéma RK-GD, il a été démontré dans [CS01] que la combinaison d'un schéma Runge-Kutta en temps d'ordre $k+1$ avec une méthode Galerkin Discontinu de degré d'interpolation k est stable dans L^2 si le pas de temps, noté $\delta t^{(i)}$, vérifie la contrainte de stabilité CFL :

$$\delta t^{(i)} \leq \frac{h_E}{||\mathbf{u}||(2k+1)}, \tag{6.63}$$

où h est la taille d'une maille, $||u||$ la norme de la vitesse. Pour fixer les idées, si l'ordre d'interpolation $p = 2$ la restriction sur le pas de temps (6.63) devient $\delta t \leq 0.2h/||\mathbf{u}||$.

3.4 Cas test pour l'équation de transport

Afin d'illustrer succinctement le bon comportement de l'approche RK-GD, nous proposons de l'appliquer à la résolution de l'équation de transport en deux dimensions d'espace. Nous retenons ici la configuration classique de la rotation d'un cercle dans un champ de vitesse non déformant.

Dans cette configuration, nous résolvons l'équation 2D :

$$\partial_t \phi + u_1 \partial_{x_1} \phi + u_2 \partial_{x_2} \phi = 0,$$

avec un champ $\mathbf{u}$ indépendant du temps. Nous allons mettre en oeuvre des éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3$ en espace respectivement associés à des schémas RK d'ordre $2, 3, 4$ décrits précédemment.

3.4.1 Rotation d'un cercle

Il s'agit dans ce cas de faire tourner un cercle dans un champ de vitesse circulaire non déformant. Le domaine de calcul est le carré $[0;1] \times [0;1]$. La fonction Level Set est initialisée comme une fonction distance signée :

$$\phi_0(x_1, x_2) = \sqrt{(x_1 - 0,5)^2 + (x_2 - 0,75)^2} - 0.15.$$

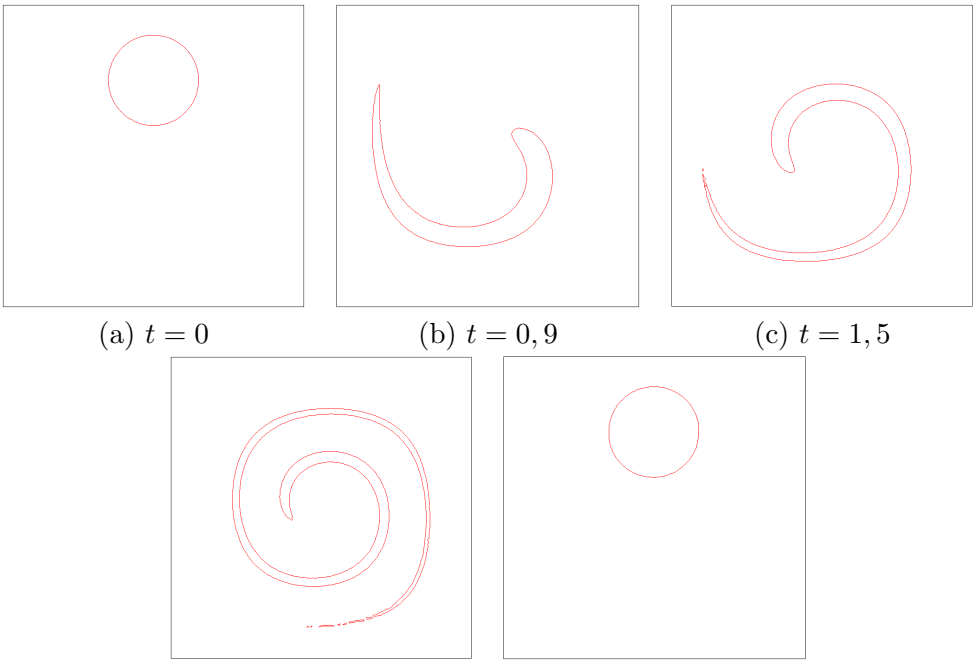
Ici l'interface est un cercle de rayon 0.15 de centre $(0,5; 0,75)$.
Comme cela est fait dans [EFFM02], le champ de vitesse utilisé est :

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, t) &= \cos(\frac{\pi t}{T}) \sin(2\pi x_2) \sin^2(\pi x_1), \\ u_2(x_1, x_2, t) &= -\cos(\frac{\pi t}{T}) \sin(2\pi x_1) \sin^2(\pi x_2). \end{aligned} \tag{6.64}$$

Le champ de vitesse satisfait la condition d'adhérence : $\mathbf{u} = (0;0)$ sur les bords du domaine. La présence du terme temporel $\cos(\frac{\pi t}{T})$ permet de rendre réversible ce problème. Réversible signifie, qu'au bout d'un certain temps le champ de vitesse s'inverse ainsi la fonction Level Set est ramenée à son état initial.

3.4.2 Résultats numériques

Nous avons effectués plusieurs calculs pour trois types d'interpolation $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3$. Les résultats présentés sur les figures Fig. 6.11, correspondent à une approximation $\mathbb{P}_3$ et ont été réalisés sur un maillage non-structuré comptant 6182 éléments, pour une durée de $t = 8s$. Enfin, la période de la fonction g a été prise égale à $T = 8$.



(a) $t = 0$ (b) $t = 0,9$ (c) $t = 1,5$

(d) $t = 3,4$ (e) $t = 8$

Fig. 6.11 – Evolution temporelle de la courbe de niveau zéro de la fonction Level Set dans un champ de vitesse circulaire non déformant

Globalement, comme l'indiquent les figures FIG. 6.11, le champ de vitesse circulaire (6.64) entraîne le cisaillement du disque et lui donne une géométrie longue et fine jusqu'en $t = 3,4$ (voir figure FIG. 6.11 (b)(c)(d)). Par la suite, la vitesse s'annule et prend un signe opposé. Ainsi, à l'instant $t = T$ (voir figure FIG. 6.11 (e)), on retrouve exactement la condition initiale (voir figure FIG. 6.11 (a)).

Les résultats obtenus pour les trois types d'approximation sont satisfaisants. Nous nous en tiendrons ici à une étude qualitative des résultats. Pour une étude quantitative plus détaillée sur l'ordre de la méthode, nous renvoyons le lecteur à se référer aux travaux de Marchandise [Mar06, MRC06] ou de Di Pietro [DPLFP06].

4 Couplage des deux solveurs

Ici, nous désignons par *solveur de l'écoulement*, la méthode EFS moyennée (6.11) utilisée pour résoudre le modèle mono-fluide, et par *solveur de l'interface*, le schéma RK-GD (6.55) développé pour l'équation de transport de la fonction Level Set. Jusqu'à présent, les solveurs associés à l'écoulement et à l'interface ont été décrits séparement. Dans ce quatrième et dernier paragraphe, nous présentons la procédure générale utilisée pour simuler numériquement des écoulements diphasiques à interface multi-dimensionnels. L'algorithme de cette procédure s'appuie sur le couplage informatique des deux solveurs cités précédemment dont nous rappelons les principaux éléments sur la figure FIG. 6.12.

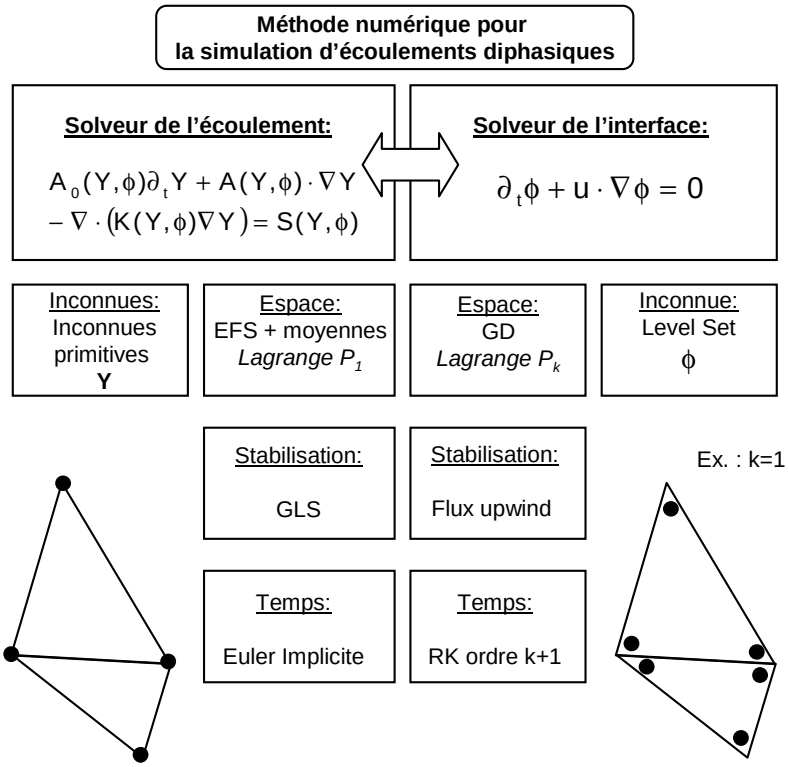


FIG. 6.12 – Organigramme de la méthode numérique pour la simulation numérique d'écoulements diphasiques

Le couplage des deux solveurs, repose sur un certain nombre de choix stratégiques concer-

nant le maillage, le pas de temps et la représentation des inconnues qui s'avèrent utiles pour simplifier l'implémentation ainsi que la mise en oeuvre de la méthode numérique proposée. Nous revenons sur ces différents aspects dans les paragraphes suivants.

4.1 Discrétisation en espace

L'utilisation d'une méthode EFS pour les équations de Navier-Stokes d'une part, et d'une méthode RK-GD pour l'équation de transport de la fonction Level Set d'autre part nous donne la possibilité de travailler avec le même maillage $\mathcal{E}_h$ (triangles en 2D et tétrahèdres en 3D) pour les deux solveurs. Toutefois, nous utilisons des approximations linéaires et continues entre chaque élément pour l'inconnue $\mathbf{Y}$, alors que pour la fonction Level Set nous utilisons une approximation polynômiale et discontinue entre chaque élément. Ainsi nous avons dans chaque élément E du maillage :

$$\mathbf{Y}_{h|E} = \sum_{i=1}^{d+1} \mathbf{Y}_i N_i^1 \text{ et } \phi_{h|E} = \sum_{i=1}^{N_{se}} \phi_i N_i^p.$$

Ici, N_{se} est le nombre de points de Lagrange dans chaque triangle qui sont au nombre de $N_{se} = (p+1)(p+2)/2$ en 2D et $N_{se} = (p+1)(p+2)(p+3)/6$ en 3D. Les N^p sont quant à elles les fonctions de base des espaces d'approximation pour des interpolations de Lagrange d'ordre p.
Les solveurs (6.11) et (6.55) qui semblent a priori indépendants, sont en réalité fortement couplés par l'intermédiaire :

- de la fonction Level Set ϕ dont on déduit la position de l'interface indispensable à l'écriture des moyennes utilisées dans (6.11) ;
- et de la vitesse $\mathbf{u}$ requise pour transporter correctement la fonction Level Set.

Comme nous venons de le voir, bien que chaque solveur s'appuie sur une discrétisation similaire du domaine spatial, $\mathbf{u}$ et ϕ sont représentées différement (degré d'interpolation et continuité).

Afin d'utiliser la fonction Level Set pour le solveur de l'écoulement, celle-ci a été projetée sur l'espace approché de la vitesse, et inversement pour la vitesse pour le solveur de l'interface. Comme l'indiquent les figures Fig. 6.13 et Fig. 6.5, cette projection se fait en deux étapes. Premièrement, il faut effectuer un passage entre la représentation continue et la représentation discontinue. Pour déterminer $\mathbf{u}_i^E$, il suffit de redistribuer à chaque sommet i de chaque élément E la valeur $\mathbf{u}_i$ aux noeuds du maillage. Inversement, pour calculer la valeur continue de ϕ_i au noeud i, on prend la moyenne des ϕ_i^E sur des éléments E dont i est le sommet. Deuxièmement on effectue la projection de la vitesse de l'espace polynômial de degré 1 vers l'espace polynômial de degré p associé à la fonction Level Set et inversement. Pour cela, nous définissons l'opérateur de projection élémentaire $\mathbb{P}$ qui permet de projeter une fonction f d'un espace polynômial de degré $p = a$ vers un espace polynômial de degré $p = b$ par :

$$f^b = \mathbb{P} f^b = \left(M^b\right)^{-1} M^{ab} f^a,$$

où f^a et f^b sont les fonctions représentées dans les espaces polynômiaux de degré a et b respectivement, M^b est une matrice définie sur chaque élément E par :

$$M_{ij}^b = \int_E N_i^b N_j^b,$$

et enfin la matrice de masse M^{ab} est donnée sur chaque E par :

$$M_{ij}^b = \int_E N_i^b N_j^b.$$

Bien qu'on ait utilisé cette méthode, il existe une autre alternative plus simple et moins coûteuse. En effet, il n'est pas nécessaire de projeter ϕ sur l'espace d'approximation de la vitesse. Comme, ϕ est utilisée uniquement afin de déterminer les moyennes par éléments présentes dans (6.11), il suffit de connaître sa valeur ϕ_i^E aux sommets i de chaque élément E. Cela signifie, qu'une représentation GD pour des éléments finis de Lagrange d'ordre p suffit. Par contre, il reste nécessaire de projeter $\mathbf{u}$ sur l'espace d'approximation de la fonction Level Set, en vertu de l'approximation du terme $\mathbf{u}\phi$ dans le schéma GD.

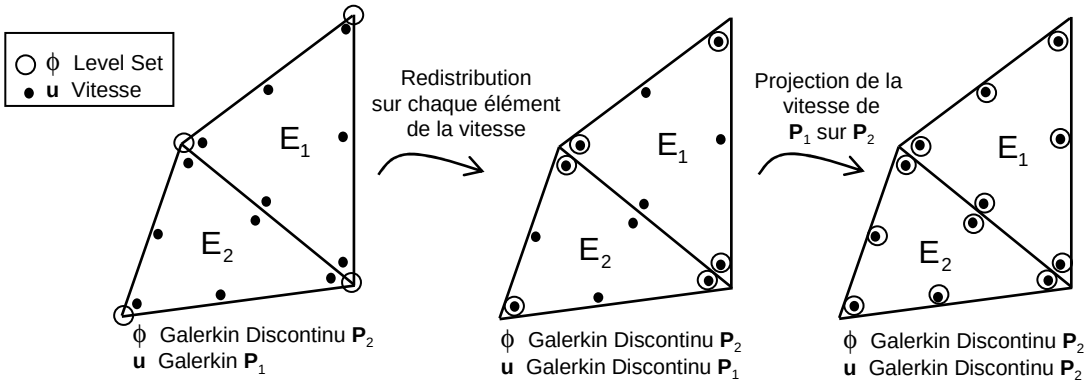


FIG. 6.13 – Projection de $\mathbf{u}$ sur l'espace d'approximation de ϕ

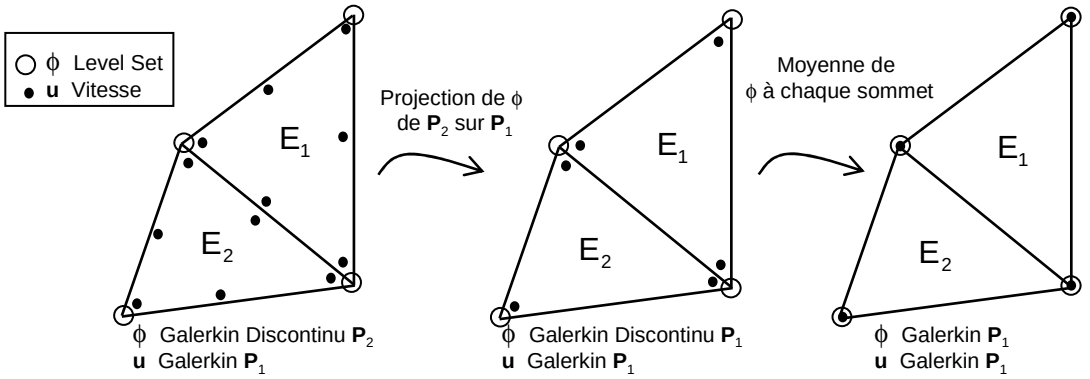


FIG. 6.14 – Projection de ϕ sur l'espace d'approximation de $\mathbf{u}$

4.2 Choix du pas de temps

De la même façon qu'en espace, il peut être envisagé pour les problèmes approchés (6.11) et (6.55) d'utiliser le même pas de temps. Dans ce cas il est nécessaire que celui ci vérifie la contrainte de stabilité globale donnée par :

$$\delta t \leq \min\{\delta t^{(i)}, \delta t^{(e)}\}, \tag{6.65}$$

où $\delta t^{(i)}, \delta t^{(e)}$ sont les pas de temps respectivement associés au solveur de l'interface (6.63) et au solveur de l'écoulement (6.32).

Selon le régime de l'écoulement considéré, ce choix de pas de temps peut être plus ou moins judicieux.
En effet, lorsque le pas de temps est piloté par $\delta t^{(i)}$ ce choix n'est pas optimal. Cette contrainte implique de résoudre plus souvent (6.11) et donc d'inverser une matrice plus souvent que si

nous avions un pas de temps calqué sur $\delta t^{(e)}$. Ce qui peut devenir très vite coûteux. Dans ce cas, il est nécessaire de retenir comme pas de temps physique $\delta t^{(e)}$ et mettre en œuvre une méthode de *"Sub-cycling"* pour le transport de la fonction Level Set. Comme nous l'avons précédemment remarqué, dans le cadre de nos applications, le pas de temps de l'écoulement est fortement corélé à la vitesse du son c dans le gaz. Lorsque c est grande i.e. $||u|| << c$ (ce qui est le cas ici), le pas de temps est piloté par le pas de temps compressible $\delta t^{(2)} << \delta t^{(i)}$. Dans ce cas, il est suffisant de se limiter au critère (6.65).

4.3 Algorithme général

L'algorithme de résolution tel qu'il a été implémenté repose sur une approche découplée (séparation des solveurs de l'écoulement et de l'interface). Il est donné par :
Au temps $t^0 = 0$:
- Choisir un pas de temps approprié δt vérifiant (6.65).
- Initialisation de la fonction Level Set ϕ comme une fonction distance.

Pour chaque pas de temps $t^n, n = 0, \ldots, N$

1. Etant donné la position de l'interface ϕ^n fixée, on calcule $\mathbf{Y}^{n+1}$:
   (a) Construction des grandeurs moyennées explicites sur chaque E de $\mathcal{E}_h$:
   - les quantités ponctuelles :
   $$\rho_i^n, \mu_i^n, \kappa_i^n,$$
   - la fonction couleur :
   $$\varepsilon_E^n,$$
   - les moyennes des grandeurs physiques :
   $$\overline{\mathbf{Y}}_E^n, \overline{\rho}_E^n, \overline{\mu}_E^n, \overline{\kappa}_E^n, \overline{\alpha_p}_E^n, \overline{\beta_T}_E^n,$$
   - puis les opérateurs moyens :
   $$\overline{A_0}_E^n, \overline{A}_E^n, \overline{K}_E^n, \overline{\tau}_E^n, \overline{\mathbf{S}}_E^n.$$

   (b) Recherche de $\mathbf{Y}^{n+1}$ en résolvant (6.11).
   (c) Projection de $\mathbf{Y}^{n+1}$ sur l'espace d'approximation de la fonction Level Set.
2. Etant donné la vitesse de l'écoulement $\mathbf{u}^{n+1}$ connue, calcul de ϕ^{n+1} en résolvant (6.55).
3. Projection ϕ_h^{n+1} sur l'espace d'approximation de la vitesse (optionnel).
4. Incrémentation du temps de δt : $t^{n+1} = t^n + \delta t$ et retour au début de la boucle (en 1).

5 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté les schémas numériques adaptés pour discrétiser les équations régissant l'évolution d'un écoulement diphasique en plusieurs dimensions de l'espace. Ces équations regroupent le modèle mono-fluide et l'équation transport de la fonction Level Set.

Par extension de la stratégie développée en 1D, nous avons proposé une méthode d'EFS en espace pour la résolution des équations multi-dimensionnelles du modèle mono-fluide, pour lesquelles les discontinuités à l'interface ont été traitées par une approche moyennée. Par contre pour la résolution de l'équation de transport fonction Level Set, nous avons choisi une méthode RK-GD.

Par la suite, nous avons également vu que leur couplage nous a permis d'élaborer une méthode numérique globale, et simple pour simuler numériquement des écoulements diphasiques en plusieurs dimensions de l'espace.

Chapitre 7

Résultats numériques bi-dimensionnels

Dans ce chapitre, diverses simulations numériques d'écoulements diphasiques en deux dimensions de l'espace sont présentées afin d'illustrer le bon comportement de l'approche développée jusqu'ici. Pour commencer, la remontée d'une bulle est étudiée pour différents maillages. Les résultats ainsi obtenus nous permettent de caractériser la résolution nécessaire pour obtenir des simulations numériques de bonne qualité. Dans un second temps, nous validons la méthode proposée pour la simulation du déferlement d'une vague. Pour cela une comparaison entre nos résultats numériques et des résultats expérimentaux issus de la littérature est effectuée. Enfin, la dernière simulation numérique porte sur un problème où les effets de compressibilité de la phase gazeuse sont importants : la translation d'une goutte de liquide dans un gaz.

1 Remontée d'une bulle

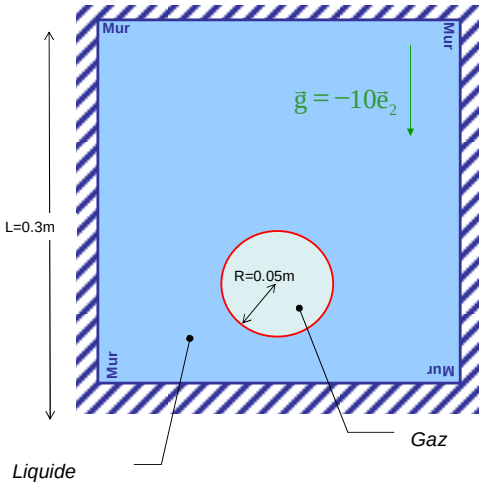


Fig. 7.1 – Géométrie, conditions initiale et aux limites pour la remontée d'une bulle dans un liquide

En nous inspirant des configurations présentées dans [Smo01] par exemple, le premier test de validation proposé concerne la remontée d'une bulle de gaz dans un liquide.

On considère un domaine de calcul carré, de dimension $[0; L] \times [0; L]$ avec la longueur

$L = 0,3$m, rempli d'un liquide hormis dans une bulle occupée par du gaz. Cette bulle de géométrie circulaire est initialement positionnée en $(0,10; 0,15)$ et a pour rayon $R = 0,05$ (voir figure FIG. 7.1).
Le liquide est un fluide visqueux incompressible de densité ρ_1 et de viscosité μ_1 constantes. Le gaz quant à lui est supposé compressible et visqueux. Il est caractérisé par une viscosité μ_2 constante et sa densité ρ_2 est reliée à la pression et la température par la loi d'état des gaz parfaits $p = \rho_2 RT$. Ici l'écoulement étant supposé isotherme, la vitesse du son dans le gaz est donc constante et donnée par $c = \sqrt{RT} = 317\text{m.s}^{-1}$.
Les deux fluides sont initialement au repos à la pression $p = p_{atm} = 10^5$Pa, et sont soumis à l'influence d'un champ gravitationnel $g = 10\text{m.s}^{-2}$. Le domaine est fermé par des parois imperméables.

L'écoulement est caractérisé par trois paramètres sans dimension que nous allons faire varier par la suite et qui sont :
- le rapport des densités ρ_1/ρ_2 ;
- le rapport des viscosités μ_1/μ_2 ;
- le nombre de Reynolds $Re = (2R)^{3/2}\sqrt{g}\rho_1/\mu_1$.

Résultats

Nous effectuons cette simulation avec le modèle monofluide quasi-linéaire isotherme. Des éléments finis de Lagrange d'ordre 1 pour l'écoulement et d'ordre 3 pour l'interface sont utilisés ici. Le domaine est dicrétisé par différents maillages non-structurés comptant 2172, 8812 et 35660 triangles. En raison de la symétrie de cette expérience, le maillage est symétrique par rapport à l'axe $x = 0,15$.

Nous avons représenté sur les figures FIG. 7.5 et FIG. 7.6 la position de l'interface ainsi que le champ de vitesse obtenus pour des temps variants de $t = 0$ms à $t = 30$ms pour les trois maillages proposés. Ces deux groupes de résultats correspondent à des configurations différentes. L'écoulement représenté sur la figure FIG. 7.5 est caractérisé par les nombres sans dimensions suivants : $\rho_1/\rho_2 = 100$, $\mu_1/\mu_2 = 10^5$ et $Re = (2R)^{3/2}\sqrt{g}\rho_1/\mu_1 = 10$. Par contre pour la seconde figure FIG. 7.6, nous avons imposé $\rho_1/\rho_2 = 1000$, $\mu_1/\mu_2 = 10^5$ et $Re = (2R)^{3/2}\sqrt{g}\rho_1/\mu_1 = 100$.

Quelque soit la configuration considérée, la bulle se met en mouvement vers le haut du domaine. En effet sous l'effet de la gravité, une surpression se créée à la base de la bulle engendrant sa mise en mouvement. Par conséquent, le centre de la bulle remonte plus vite que ses côtés. Cela se traduit par la déformation de la bulle dont la déformation dépend fortement du nombre de Reynolds qui pilote l'écoulement. En effet, pour $Re = 10$, au fur et à mesure que la bulle se déplace celle ci prend la forme d'un haricot. Par contre pour $Re = 100$, la surpression à la base de la bulle est plus forte, ainsi la bulle prend dans un premier temps la forme d'un haricot, puis dans un second temps apparaissent également deux filets de fluides à l'arrière de la bulle. Une fois que celle-ci a acquis une certaine vitesse, les filets sont attirés vers l'intérieur de la bulle et se rompent formant ainsi deux petites bulles qui tournent sur elles mêmes.

Les simulations numériques présentées montrent la nécessité d'utiliser des maillages suffisament fins pour obtenir des résultats corrects. Effectivement, pour un écoulement à faible Reynolds ($Re = 10$) un maillage comptant 8812 éléments suffit (voir FIG. 7.5) alors que pour un écoulement à Reynolds plus élevé ($Re = 100$) il est nécessaire d'employer un maillage plus fin (voir FIG. 7.6). L'observation de ces deux cas test illustre également que plus l'interface

se déforme, plus il est nécessaire d'utiliser un maillage raffiné pour calculer précisément son évolution. Si les maillages utilisés sont trop grossiers, des oscillations apparaissent au niveau de l'interface. Les causes probables de ces instabilités sont soit une faiblesse du maillage incapable de capturer précisément l'interface soit le fait que la fonction Level Set ne reste pas une fonction distance. Pour remédier à ces deux problèmes, il pourrait être utile d'employer des techniques de raffinement de maillage local près de l'interface [Gué07], ou des techniques de redistanciation [Mar06].

On peut également préciser que ces deux calculs peuvent être reproduits à l'aide d'un modèle quasi-linéaire anisotherme. Par contre pour le modèle quasi-linéaire symétrique, seul l'écoulement à Reynolds $Re = 10$ a pu être reproduit. En effet, la méthode s'appuyant sur le modèle symétrique est moins robuste et ne permet pas de considérer des simulations pour lesquelles les sauts de densité sont supérieurs à 100 entre le gaz et le liquide en plusieurs dimensions de l'espace.

2 Déferlement d'une vague

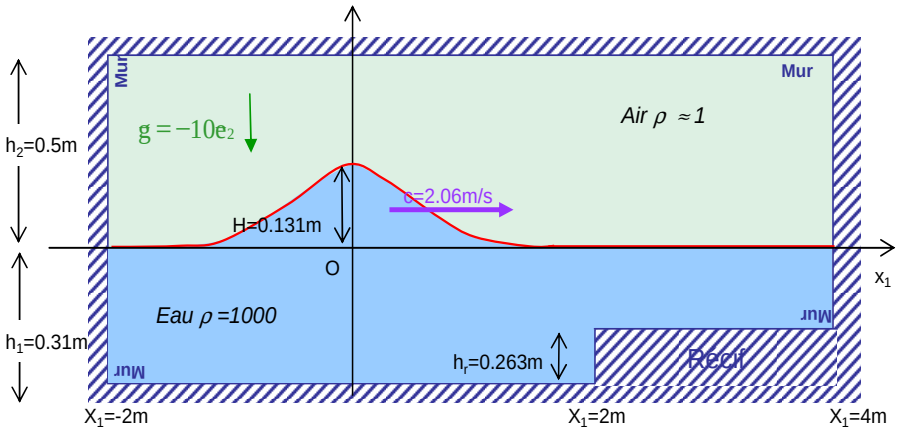


FIG. 7.2 – Géométrie, conditions initiale et aux limites pour l'expérience du déferlement de vague

Dans ce paragraphe, la simulation numérique du déferlement de vague sur un récif est proposée. L'étude envisagée ici, a déjà fait l'objet de travaux expérimentaux et numériques [Tan86, YMM97, HGC+05] par rapport auxquels nous comparons les résultats donnés par la méthode développée dans cette thèse.

On considère un domaine fermé, rempli d'eau et d'air comme cela est représenté en détail sur la figure FIG. 7.2. L'eau est un fluide visqueux incompressible de densité $\rho = 1000\text{kg.m}^{-3}$ et de viscosité $\mu = 1\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$. L'air quant à lui est supposé compressible et visqueux. Il est caractérisé par une viscosité $\mu = 10^{-5}\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ constante et une densité $\rho = 1\text{kg.m}^{-3}$ et est régi par la loi d'état des gaz parfaits. Ici l'écoulement étant supposé isotherme, la vitesse du son dans le gaz est donc constante et donnée par $c = \sqrt{RT} = 317\text{m.s}^{-1}$. Enfin l'écoulement est soumis au champ gravitationnel $g = 10\text{m.s}^{-2}$.
La condition initiale (voir FIG. 7.7) est une onde solitaire stable, calculée à l'aide de la méthode de Tanaka [Tan86]. L'onde a pour hauteur maximale $H = 0,131\text{m}$ au dessus du niveau zéro et se propage à la vitesse $1,18\sqrt{gh_1} = 2,07\text{m.s}^{-1}$. Enfin, le domaine est fermé par des parois

imperméables.

Résultats

L'expérience est reproduite à l'aide du modèle quasi-linéaire isotherme. Comme précédemment des éléments finis de Lagrange d'ordre 1 et 3 sont en espace sont employés pour l'écoulement et l'interface respectivement. Le domaine spatial est découpé en un maillage non-structuré constitué de 27538 éléments triangulaires. La vague est propagée pendant 4s.

Dans le but de valider nos simulations, deux types de comparaisons sont effectuées.

Pour commencer, nos résultats numériques sont confrontés aux valeurs expérimentales mesurées par Yasuda [YMM97]. Nous nous intéressons en particulier à l'évolution de la hauteur d'eau en fonction du temps en différents endroits $x = 2$m, $x = 2,515$m et $x = 3,02$m. Les résultats obtenus et les données expérimentales sont tracés sur les figures Fig. 7.8, Fig. 7.9 et Fig. 7.10. On constate clairement que les valeurs numériques sont en très bon accord avec les valeurs expérimentales de Yasuda.

A présent, nous étudions de façon plus qualitative le profil de la vague par rapprochement avec les résultats présentés dans [HGC$^+$05]. Les profils de l'interface eau-air pour $x > 0$m ont été représentés (voir Fig. 7.11) pour différents temps $t = 0$s, $t = 1,2$s, $t = 1,4$s, $t = 1,6$s et $t = 1,8$s. Les résultats numériques obtenus présentent globalement les même tendances que ceux exposés dans [HGC$^+$05]. Néanmoins, nos résultats restent moins précis car ils ont été effectués sur un maillage plus grossier. Il serait donc nécessaire de reproduire cette expérience sur un maillage plus fin. Il faut également remarquer que l'interface ne reste pas "lisse". Pour cela il serait utile d'améliorer la représentation de l'interface notamment par une redistanciation de la fonction Level-Set comme dans [Mar06] par exemple.

3 Translation d'une goutte

A présent nous nous intéressons au déplacement d'une goutte de liquide (incompressible) dans un gaz (compressible). Comme nous allons le voir, cette expérience proposée par Caiden [CFA01], permet de mettre en évidence la compressibilité de la phase gazeuse. En effet, jusqu'à présent les effets de compressibilité du gaz étaient négligeables pour les deux configurations traitées précédemment.

Nous nous donnons un domaine de calcul carré, de dimension $[0;1]^2$ rempli d'un gaz sauf dans une goutte occupée par du liquide. Cette bulle de géométrie circulaire est initialement positionnée en $(0,50;0,5)$ et a pour rayon $R = 0,1$ (voir Fig. 7.3).
Le liquide est un fluide incompressible de densité $\rho = 10\text{kg.m}^{-3}$. Le gaz quant à lui est supposé compressible de densité $\rho = 1\text{kg.m}^{-3}$ est relié à la pression et la température par la loi d'état des gaz parfaits $p = \rho RT$. Ici l'écoulement étant supposé isotherme, la vitesse du son dans le gaz est donc constante et donnée par $c = \sqrt{RT} = 317\text{m.s}^{-1}$.
L'écoulement a pour pression initiale $p = p_{atm} = 10^5$Pa. La goutte de liquide est initialement en mouvement à la vitesse $u = 100\text{m.s}^{-1}$ alors que le gaz est au repos. Enfin les deux fluides sont supposés non visqueux.

Résultats

Pour résoudre ce problème nous utilisons l'approche basée sur le modèle quasi-linéaire. Aussi bien pour l'écoulement que pour l'interface des éléments finis d'ordre 1 sont considérés. Enfin,

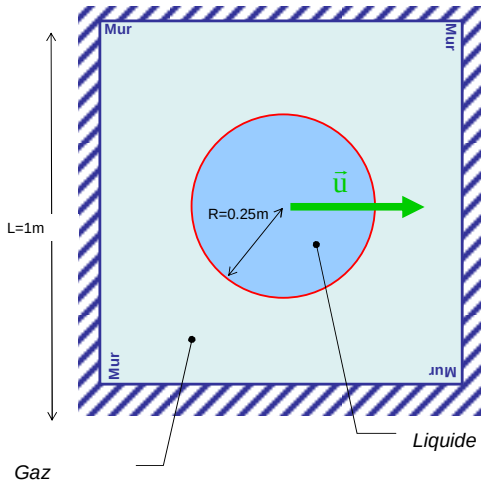


FIG. 7.3 – Géométrie, conditions initiale et aux limites pour la translation d'une goutte de liquide dans un gaz

le domaine de calcul est discrétisé par un maillage non-structuré constitué de 24376 éléments.

Comme l'indique la figure FIG. 7.12 où sont représentés l'évolution de l'interface ainsi que le profil de pression, sous l'effet du déplacement rapide de la goutte, une onde de compression est générée dans le gaz qui se trouve à l'avant du liquide, alors qu'à l'arrière c'est une onde de détente qui se propage. Les figures FIG. 7.13 et FIG. 7.15 montrent respectivement une coupe de cette onde en $y = 0,5$m et la position de l'interface à $t = 5,31.10^{-4}$s. Bien que la méthode numérique ne soit pas adaptée à ce type de configuration (présence de choc notamment) elle permet de capturer la bonne solution. En effet nos résultats sont en accord avec ceux obtenus dans [CFA01]. En effet, pour des temps comparables, la position des ondes ainsi que leur amplitudes sont similaires.

Toutefois, on observe un overshot et un undershot à l'avant et à l'arrière de la bulle sur les profils de la vitesse horizontale. Cela est plus visible notamment en $t = 1,32.10^{-4}$s (voir figure FIG. 7.14). Ces oscillations sont fortement liées à la discontinuité de la vitesse l'instant initial. Pour traiter correctement ce problème, il est nécessaire d'introduire dans la formulation éléments finis en plus de la stabilisation GLS un terme de stabilisation supplémentaire appelé *discontinuity-capturing*. Cela consiste à modifier les fonctions test de la formulation variationnelle approchée en leur ajoutant une perturbation uniquement dans la direction du gradient de la vitesse. Cette stabilisation n'est pas nécessaire en 1D. En effet le gradient de vitesse et le gradient de l'écoulement ayant la même direction une stabilisation GLS suffit. Ce qui explique que le même cas test en 1D (voir Chapitre 5) ne présente pas d'oscillation.

Enfin, on constate de nouveau que l'interface est chahutée. Cela est d'autant plus marqué qu'on utilise des approximations d'ordre élevé pour la fonction Levet Set. Cela confirme de nouveau la nécessité d'utiliser un algorithme de de redistanciation pour la fonction Level Set.

4 Compression d'une bulle

Pour conclure ce chapitre, les résultats numériques obtenus pour l'étude de la compression d'une bulle de gaz sont présentés. Comme nous allons le voir, ce calcul permet de mettre en évidence la compressibilité de la bulle de gaz. De plus, à la différence du cas test de la translation d'une goutte de liquide dans un gaz [CFA01], le cas proposé possède une donnée initiale régulière sur la vitesse. Enfin, ici le volume total de chaque phase sera amené à varier au cours du temps contrairement aux simulations effectuées jusqu'à présent.

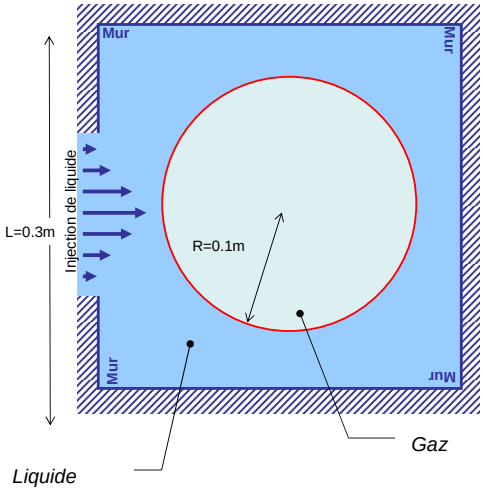


FIG. 7.4 – Géométrie, conditions initiale et aux limites pour la compression d'une bulle

Nous considérons un domaine carré, de dimension $[0; L] \times [0; L]$ avec la longueur $L = 0,3$m, rempli d'un liquide excepté dans une bulle occupée par du gaz. Cette bulle initialement circulaire est située en $(0,15; 0,15)$ et a pour rayon $R = 0,1$m (voir FIG.7.4).

Le liquide est un fluide incompressible de densité constante $\rho = 1\text{kg.m}^{-3}$ et de viscosité $\mu = 1\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$. Le gaz, de densité $\rho = 1\text{kg.m}^{-3}$ et de viscosité $\mu = 0,01\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$, est supposé compressible. Il vérifie la loi des gaz parfaits. Ainsi sa densité ρ est reliée à la pression et la température par la relation $p = \rho RT$. L'écoulement étant considéré isotherme, la vitesse du son reste constante et est donnée par $c = \sqrt{RT} = 317\text{m.s}^{-1}$.

Les deux fluides sont initialement au repos à la pression $p = p_{atm} = 10^5$Pa et ne subissent aucune action extérieure. Le domaine est fermé par des parois imperméables, sauf sur une section s'étendant de $y = 0,1$m et $y = 0,2$m sur le bord de gauche, par laquelle est injecté du liquide à la vitesse horizontale :

$$u = 100t(y - 0,1)(0,2 - y)\text{m.s}^{-1}.$$

Résultats

Les simulations ont été effectuées pour le modèle mono-fluide quasi-linéaire isotherme. Des éléments finis de Lagrange d'ordre 1 pour l'écoulement et d'ordre 3 pour l'interface sont employés ici. Le domaine est découpé en 8848 éléments et présente un axe de symétrie situé en $y = 0,15$m. Enfin, le calcul a été réalisé pour une durée de $1,35$s à l'aide d'environ 40000 itérations.

Comme l'indiquent les figures FIG.7.16, le liquide injecté dans la cavité fermée comprime la bulle qui se retrouve emprisonnée. Cette compression se traduit de deux façons.

Premièrement, l'interface se rétracte au fur et à mesure que le domaine se remplit. Le volume de la bulle de gaz diminue dans le temps en respectant la loi suivante :

$$V_{gaz}(t) = 3,14.10^{-2} - \frac{t^2}{120}, \tag{7.1}$$

comme l'indiquent les courbes de la figure FIG.7.17. Ainsi, le volume de gaz intialement de $V_{gaz} = 3,14.10^{-2}$ atteint à la fin du calcul la valeur $V_{gaz} = 1.62.10^{-2}$ en $t = 1,35$s. Cela représente une compression d'environ 48% du volume initial.

Deuxièmement, une augmentation de la densité du gaz, comme le suggèrent les isovaleurs visualisées sur les figures FIG.7.16, est également observée. Pour les trois temps indiqués sur la figure FIG.7.16, la densité prend les valeurs données dans le tableau suivant.

Temps (s)	0	$0,568$	$1,135$
Densité du gaz (kg.m^{-3})	1	$1,093$	$1,51$

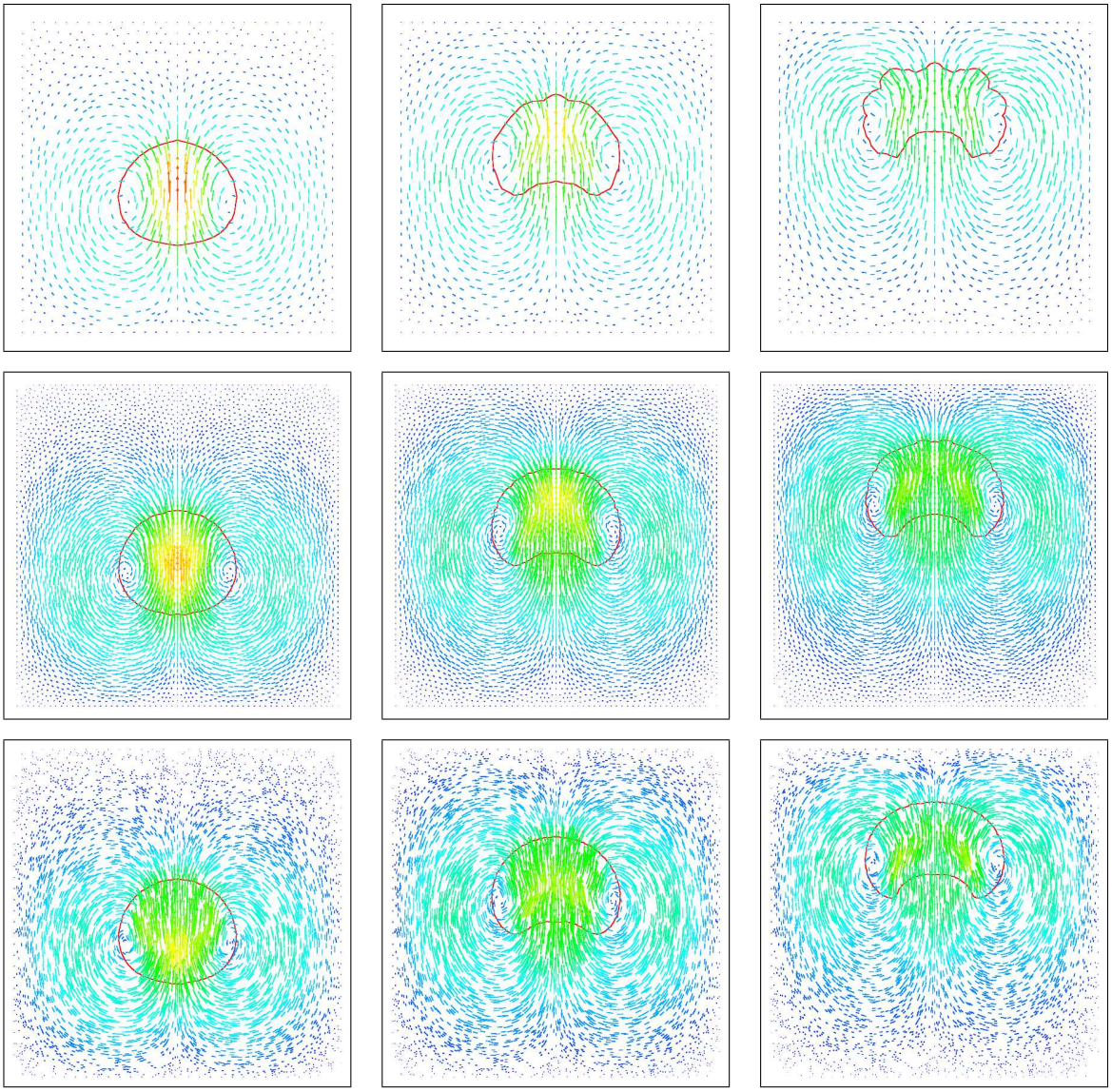
On pourra remarquer le caractère irrégulier de la représentation de la densité. En effet, cette quantité est reconstruite a posteriori en chaque nœud du maillage à l'aide des valeurs de la fonction Level Set, de l'inconnue et des données du problème.

Les calculs présentés ici, ont également été menés avec un rapport de densité de 1000 entre les deux fluides. Le comportement dans ce cas reste globalement le même. Ici, il nous a semblé intéressant de présenter seulement le calcul pour un rapport 1. En effet, dans ce cas, on visualise d'autant mieux la variation de densité dans le gaz que la densité du liquide est faible.

5 Conclusion

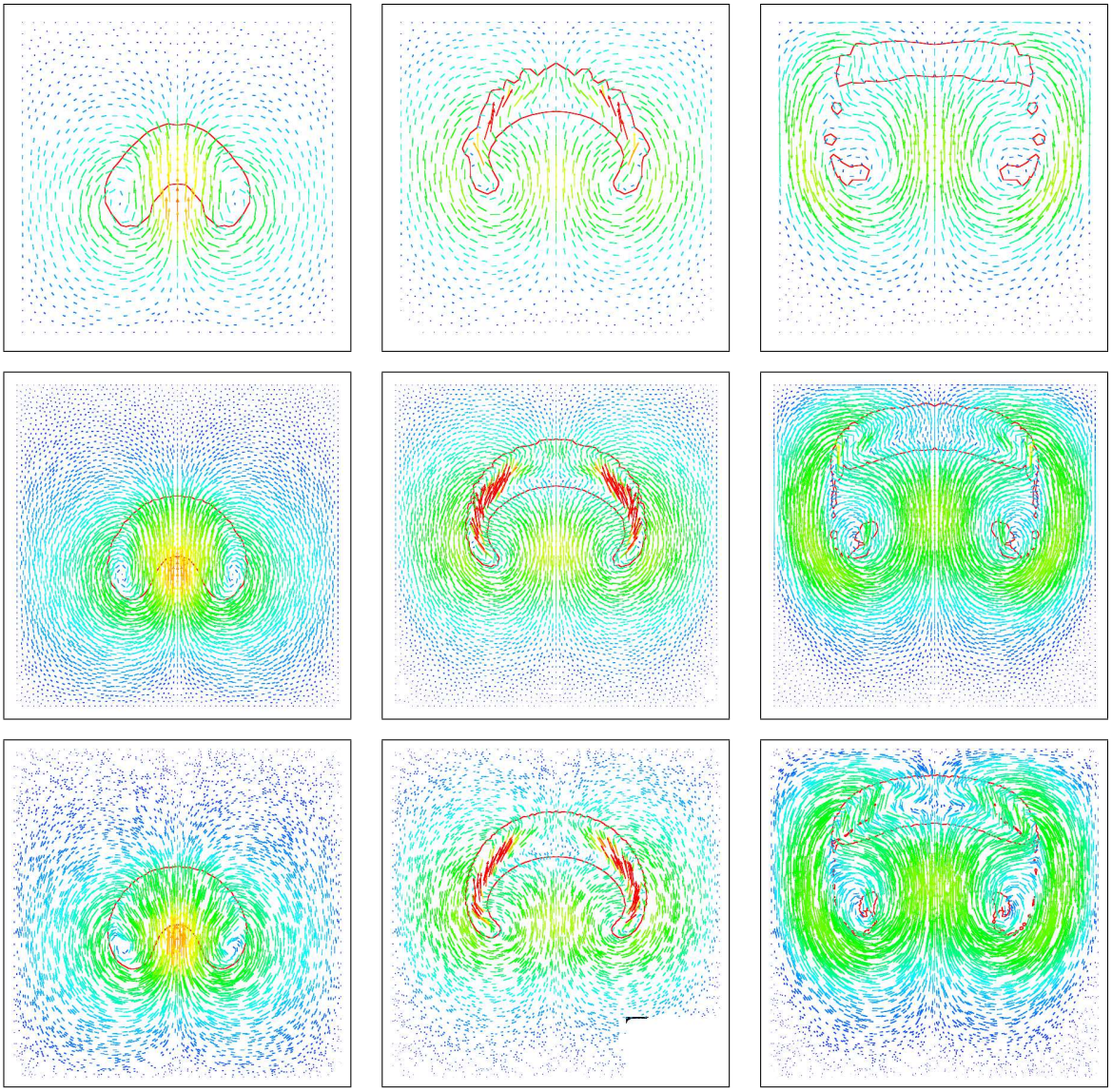
Au cours de ce chapitre, la méthode numérique développée dans cette thèse a été testée dans des contextes physiques différents comme des écoulements où les effets de compressibilité étaient plus ou moins importants. Les résultats numériques attestent du bon comportement général de notre approche en particulier pour le modèle monofluide quasi-linéaire ainsi que pour des écoulements présentants des rapports de densité et de viscosité important (rapport supérieur à 1000).

Toutefois, certaines de ces diverses illustrations numériques ont montré la nécessité d'améliorer la méthode proposée. Premièrement, il semble essentiel de redistancier la fonction Level Set et de raffiner localement le maillage près de l'interface pour capturer précisément celle-ci. Deuxièmement, pour traiter des problèmes dont les données initiales (vitesses) sont discontinues, la méthode des éléments finis stabilisés utilisée doit être enrichie avec une terme de type discontinuity capturing. Enfin, nous devons continuer la validation de cette méthode sur des cas test prenant en compte des effets thermiques notamment.



$t = 1,32.10^{-1}$s $t = 2,63.10^{-1}$s $t = 3,95.10^{-1}$s

FIG. 7.5 – Remontée d'une bulle : évolution du champ des vitesses et de l'interface, $\rho_1/\rho_2 = 100$, $\mu_1/\mu_2 = 10^5$ et $Re = 10$ pour différents maillages (de haut en bas du plus grossier au plus fin)



$t = 1,36.10^{-1}$s $t = 2,66.10^{-1}$s $t = 3,96.10^{-1}$s

FIG. 7.6 – Remontée d'une bulle : évolution du champ des vitesses et de l'interface, $\rho_1/\rho_2 = 1000$, $\mu_1/\mu_2 = 10^5$ et $Re = 100$ pour différents maillages (de haut en bas du plus grossier au plus fin)

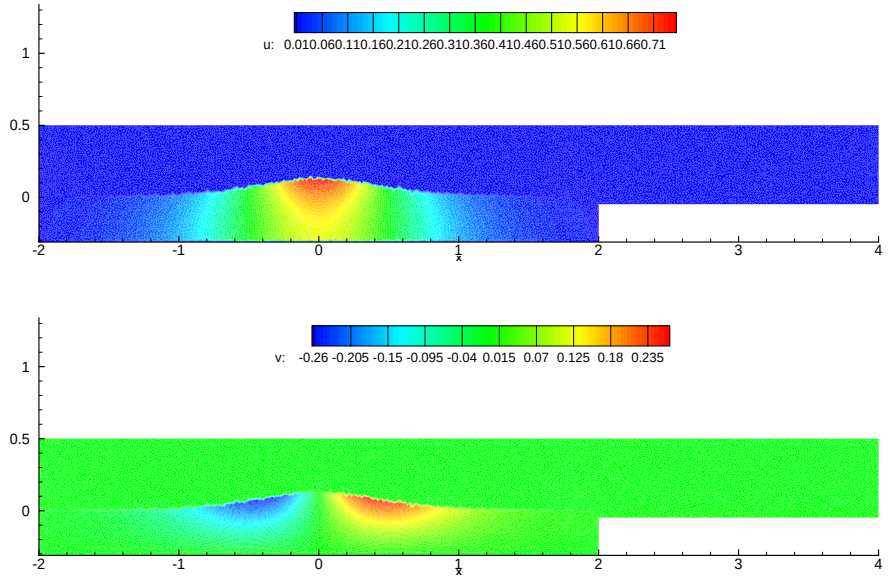


FIG. 7.7 – Profils de la vitesse horizontale (en haut) et verticale (en bas) à l'instant initial.

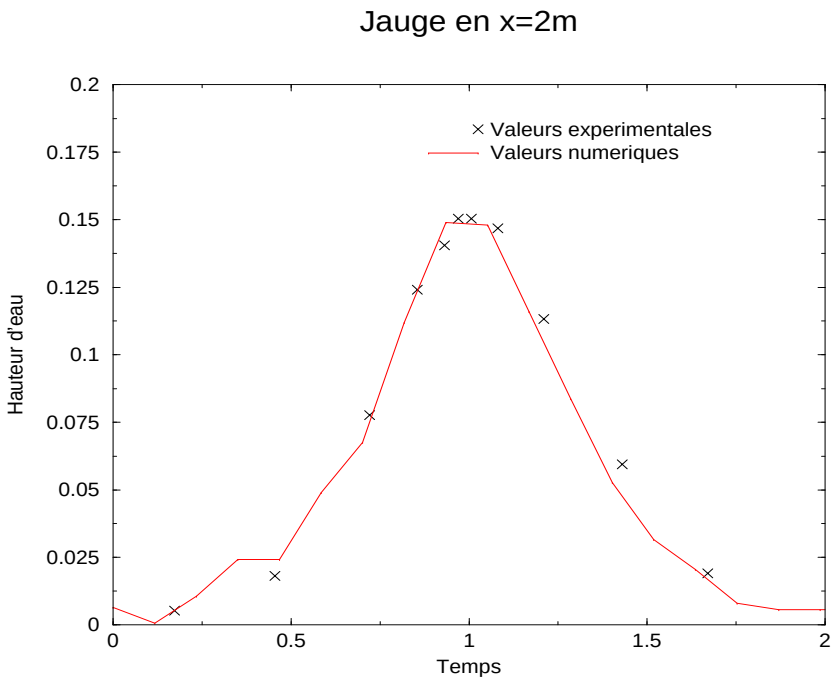


FIG. 7.8 – Hauteur d'eau en $x = 2$m en fonction du temps. Résultats numériques (courbes rouges) comparés aux valeurs expérimentales (croix noires)

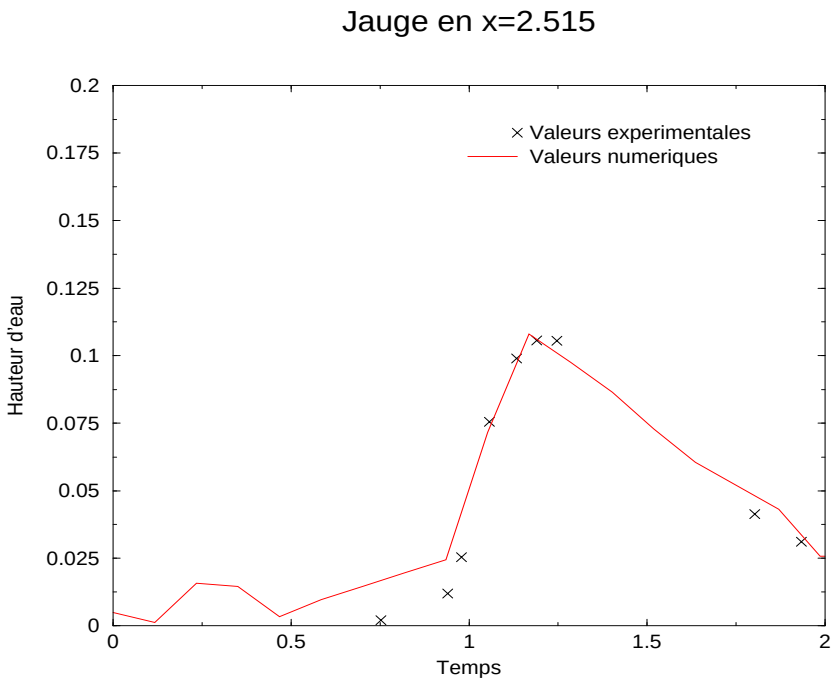


FIG. 7.9 – Hauteur d'eau en $x = 2,515$m en fonction du temps. Résultats numériques (courbes rouges) comparés aux valeurs expérimentales (croix noires)

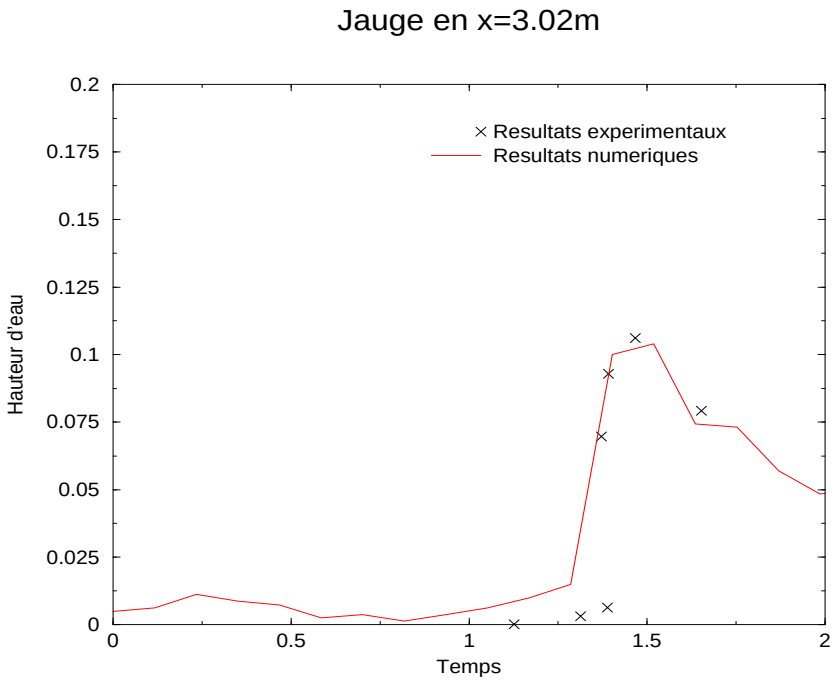
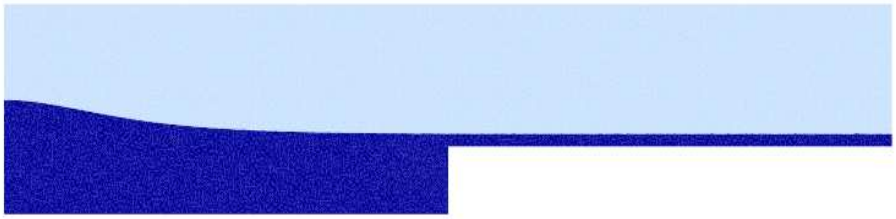
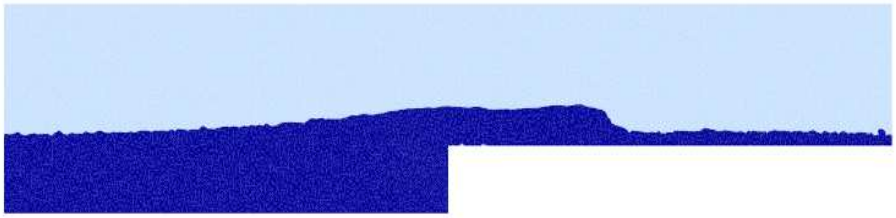


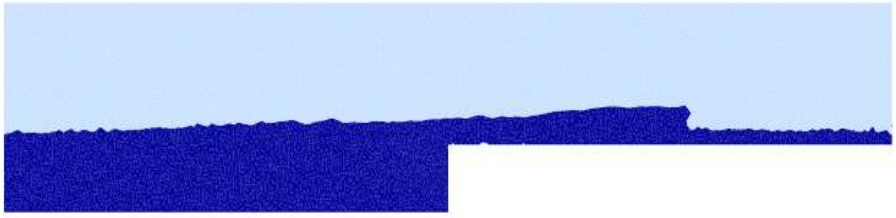
FIG. 7.10 – Hauteur d'eau en $x = 3,02$m en fonction du temps. Résultats numériques (courbes rougees) comparés aux valeurs expérimentales (croix noires)



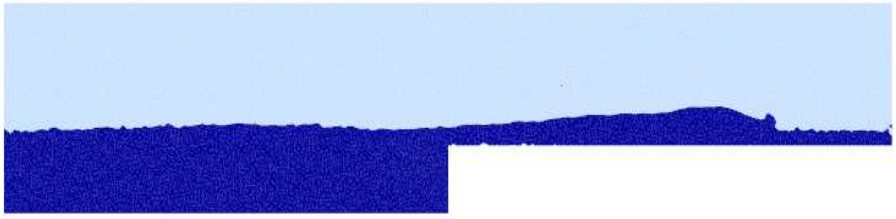
$t = 0\text{s}$



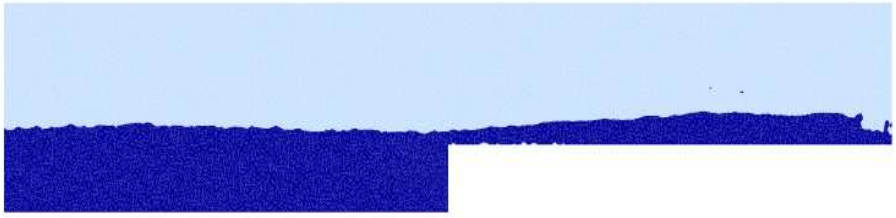
$t = 1,2\text{s}$



$t = 1,4\text{s}$



$t = 1,6\text{s}$



$t = 1,8\text{s}$

FIG. 7.11 – Evolution de l'interface eau-air pour le déferlement d'une vague

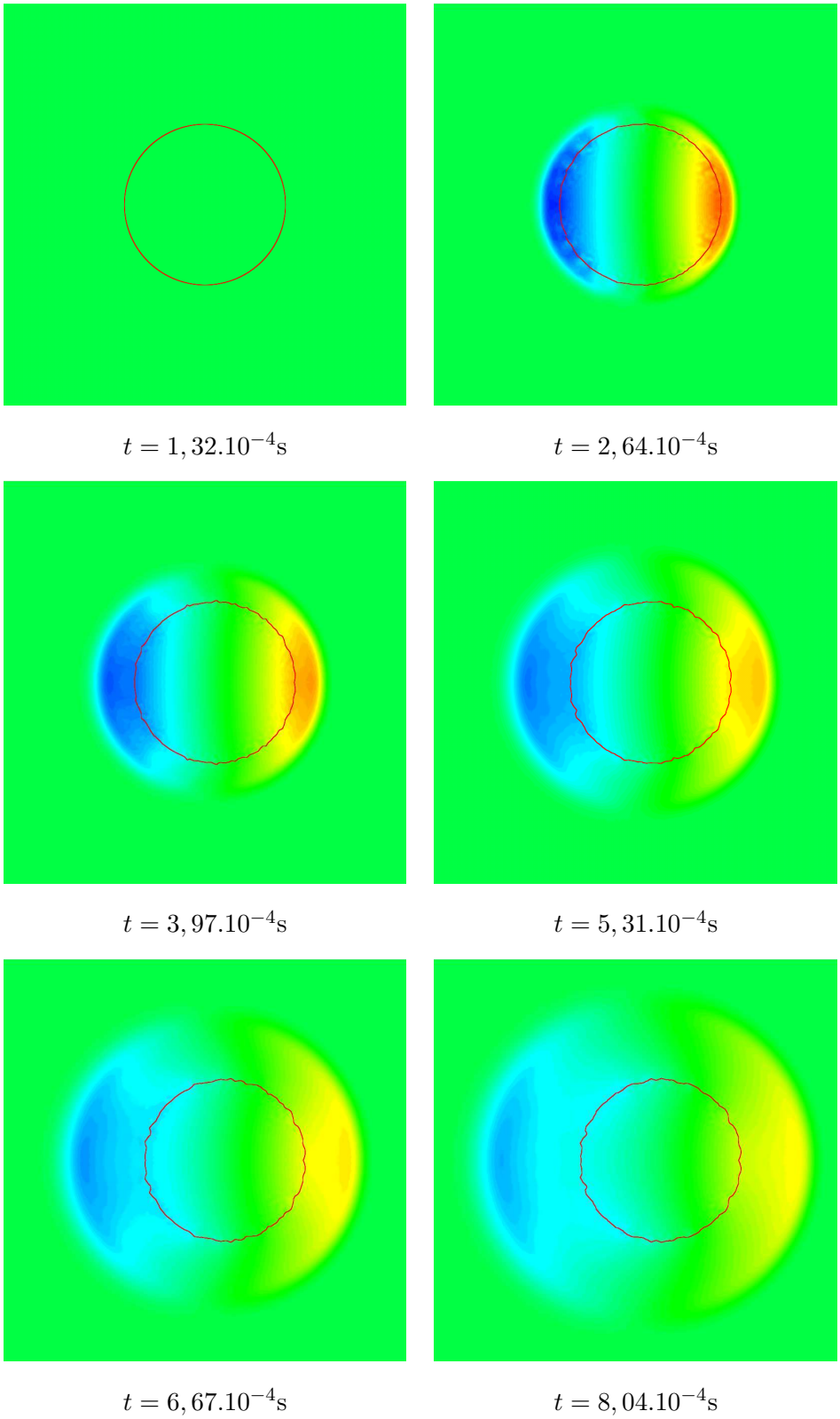
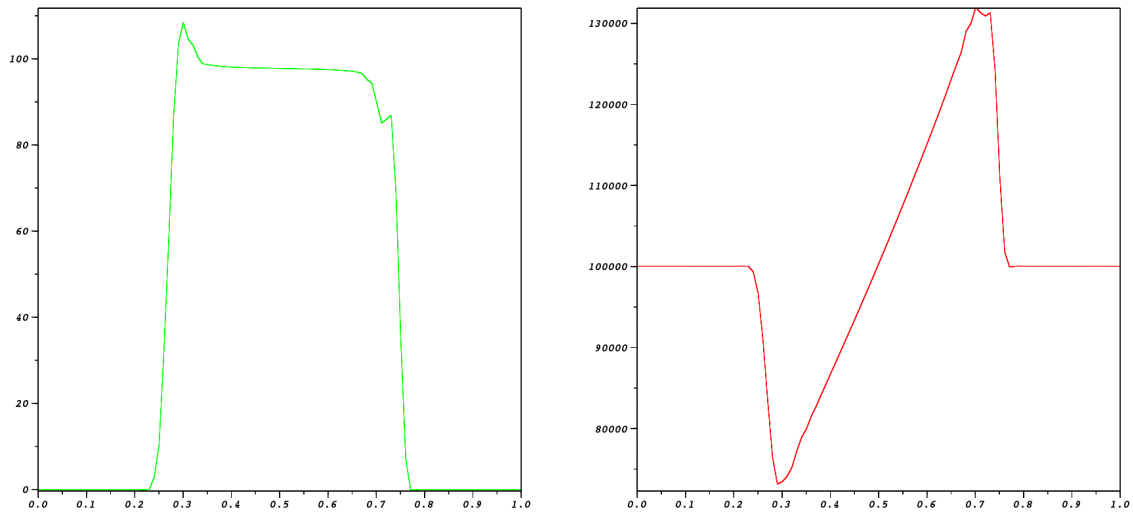
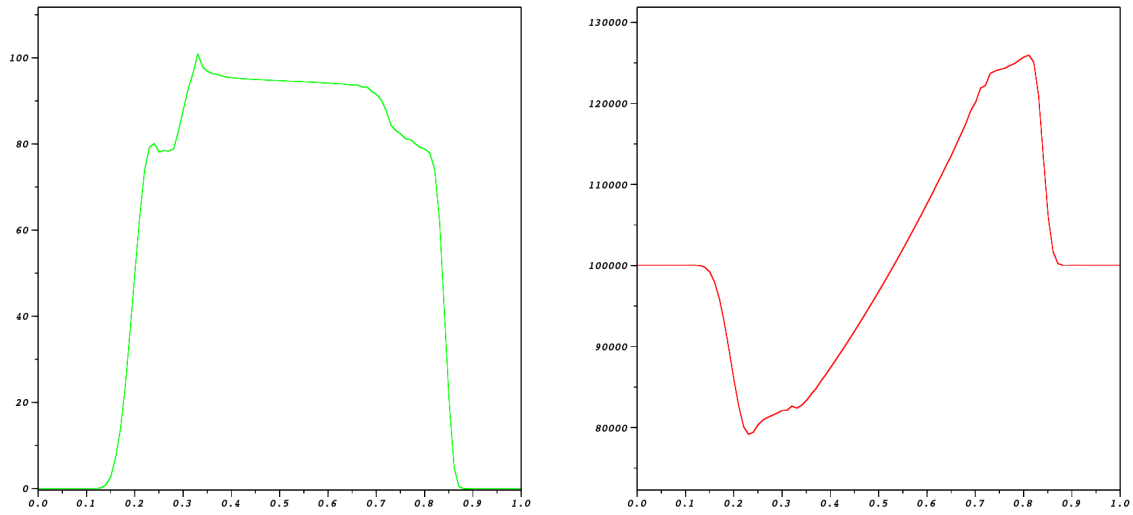


FIG. 7.12 – Evolution de l'interface et profil de la pression pour la convection d'une goutte de liquide dans un gaz



Vitesse Pression

FIG. 7.13 – Coupe en $y = 0,5$ des profils de vitesse horizontale et de pression à l'instant $t = 1,32.10^{-4}$s



Vitesse Pression

FIG. 7.14 – Coupe en $y = 0,5$ des profils de vitesse horizontale et de pression à l'instant $t = 3,97.10^{-4}$s

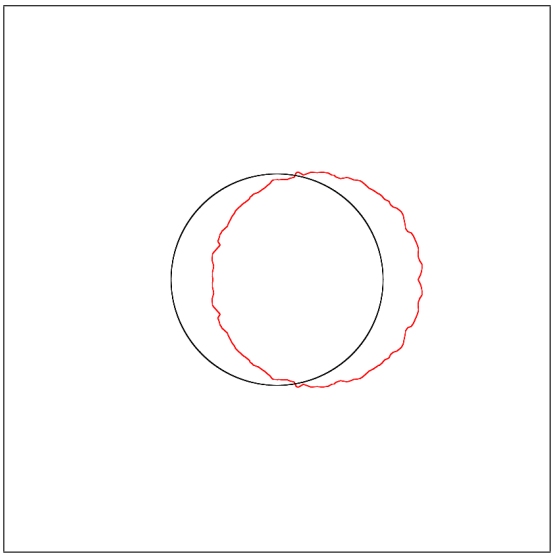
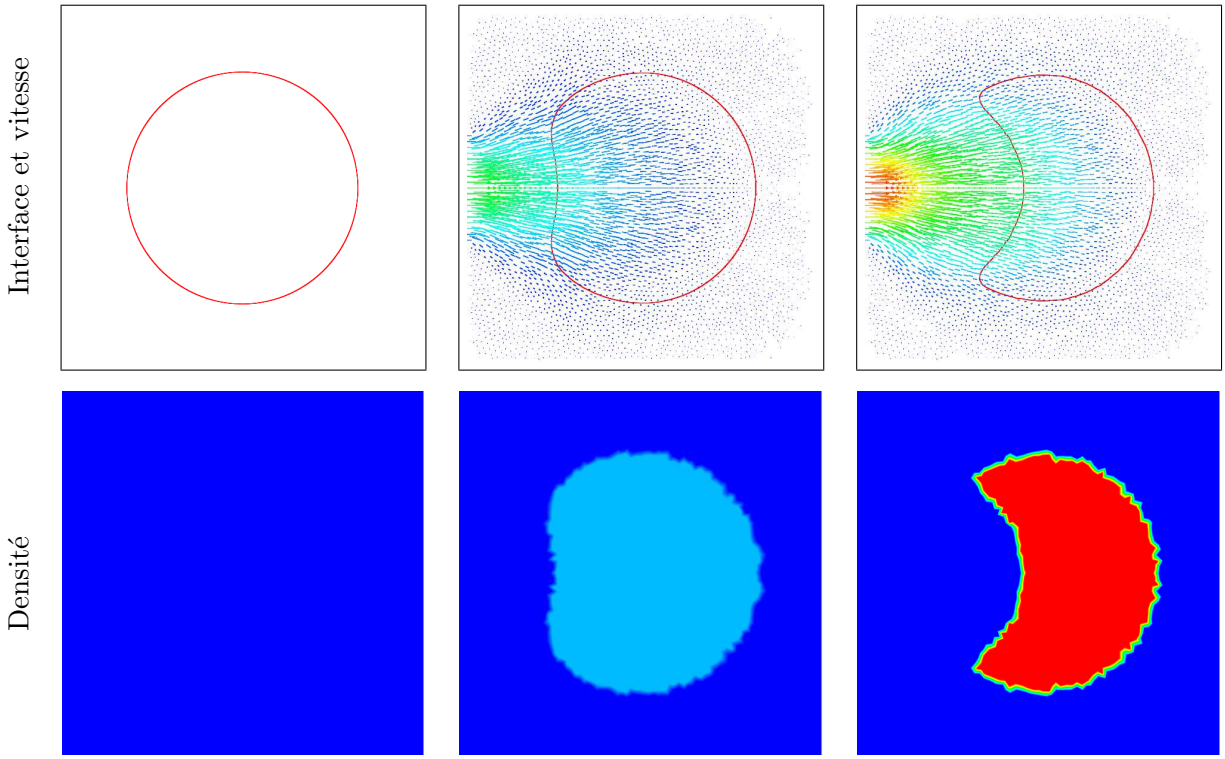


FIG. 7.15 – Position de l'interface à $t = 0$s (tracé noir) et $t = 5,31.10^{-4}$s (tracé rouge)



(a) $t = 0$s (b) $t = 0,568$s (c) $t = 1,135$s

FIG. 7.16 – Evolution temporelle de l'interface, des profils de la vitesse et de la densité

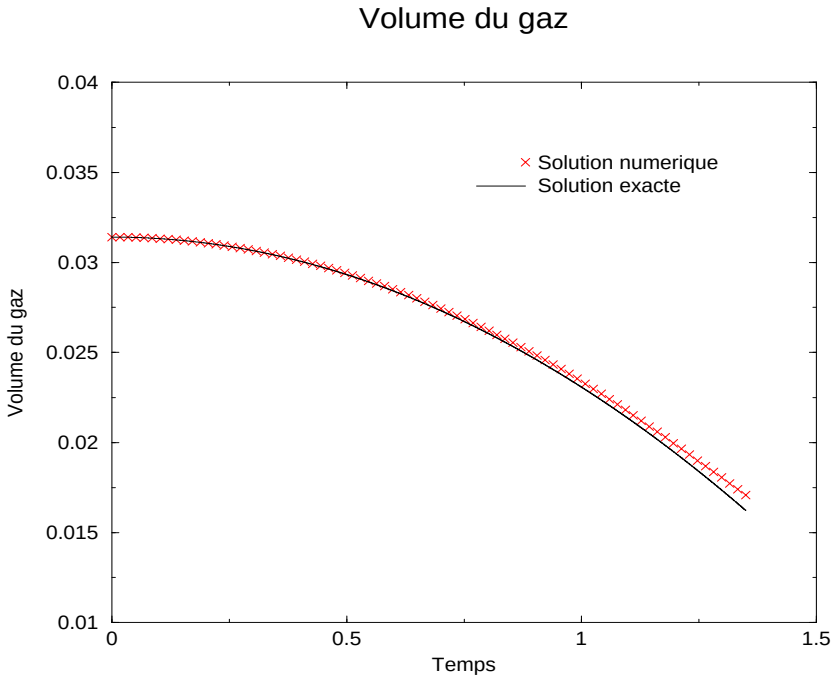


FIG. 7.17 – Evolution temporelle du volume de total de gaz. Calcul numérique (croix rouges), calcul exact (courbe noire)

Conclusion et perspectives

Les travaux présentés dans cette thèse sont consacrés à la prédiction d'écoulements à interfaces entre un gaz supposé compressible et un liquide incompressible non miscibles. En particulier nous nous sommes intéressés à l'élaboration d'une méthode numérique simple et globale permettant de traiter ce type d'écoulement.

Pour élaborer une telle approche, les équations de Navier-Stokes ont été utilisées. En nous inspirant des travaux de Hughes et Hauke [HH94, HH98], nous avons proposé une formulation unifiée des équations de Navier-Stokes compressible et incompressible sous différentes formes : conservatives ou quasi-linéaires pour les inconnues primitives. La paramétrisation de ces équations par la densité et les coefficients thermodynamiques nous a assuré le passage continu entre les équations du compressible et de l'incompressible.

Afin de développer une stratégie numérique adaptée à des écoulements dans des géométries complexes, permettant de monter en ordre sur un domaine de dépendance compact, des éléments finis ont été utilisés sur des maillages non structurés. Pour obtenir le même cadre discret pour les équations de Navier-Stokes compressible et incompressible, des éléments finis de Lagrange de même ordre ont été employés pour approcher les inconnues primitives. Dans ce contexte, la méthode de Galerkin standard est instable numériquement d'une part lorsque l'écoulement est à convection dominante et d'autre part parce que la condition inf-sup n'est pas satisfaite. Pour pallier ces deux difficultés, il peut être envisagé d'employer des techniques de stabilisation. Ici, une méthode GLS de type Petrov-Galerkin a été retenue [HH98, HH94, Pol05]. Elle permet d'une part de stabiliser correctement le système d'équations et d'autre part dériver un schéma numérique unifié pour les équations de Navier-Stokes nécessaire à l'élaboration d'une méthode numérique simple.

Dans le cadre de cette thèse des écoulements multifluides sans choc sont étudiés. Ce qui a permis de considérer les équations de Navier-Stokes compressible et incompressible écrites sous leur forme unifiée quasi-linéaire pour les inconnues primitives. A ces équations, nous avons associé une méthode de type Level Set [OS88], permettant de suivre simplement et précisément l'interface entre les deux fluides. A partir de ces deux éléments et en négligeant les effets de cisaillement à l'interface nous avons formalisé un modèle mono-fluide ("one-fluid model") paramétré par la fonction Level Set comme cela est fait dans [Mar06, TE00]. Une telle formulation a l'avantage de décrire un écoulement diphasique comme un seul et unique fluide avec un modèle global dépendant de coefficients discontinus à l'interface. Ainsi, les écoulements considérés ici sont régis simplement par un modèle mono-fluide couplé à l'équation de transport de la fonction Level Set.

Ici l'approximation numérique du système couplé a été réalisé par le biais de deux solveurs séparés associés à l'écoulement et à l'interface. Le solveur de l'écoulement, permet de déterminer l'évolution des fluides pour un profil d'interface fixé. Le solveur de l'interface, quant à lui, permet de calculer la nouvelle position de l'interface pour des états fluides donnés.
Le solveur de l'écoulement s'appuie sur la résolution des équations mono-fluides par la méthode d'éléments finis stabilisés GLS pour des éléments finis de Lagrange. Dans ce cas la difficulté est d'écrire un schéma numérique en tenant compte de la discontinuité des paramètres de

modélisation (coefficients thermodynamiques, densité, viscosité, conductivité thermique) avec des opérateurs de stabilisation adéquats dans une maille mixte (maille traversée par l'interface). Sur la base d'une analyse mono-dimensionelle, une approximation consistante des termes de couplage et des matrices de stabilisation a été réalisée. Ainsi, les mailles traversées par l'interface, ont été traitées de façon spécifique par l'intermédiaire de grandeurs moyennes définies sur chaque élément (comme [Tur09]). Ces moyennes sont pondérées par une fonction couleur, représentant la proportion de fluide compressible dans une maille et mise à jour à chaque pas de temps à partir de la position de l'interface. Initialement développée pour dans un cadre linéaire, sans convection et isotherme, cette approche a été généralisée pour des modèles avec convection, non-linéaires, anisothermes puis étendue à plusieurs dimensions d'espace. La méthode numérique ainsi obtenue se résume en un schéma implicite non symétrique linéaire, résolu par une méthode itérative (Gmres) préconditionnée (ILU).
Le solveur de l'interface dédié à la discrétisation de l'équation de transport de la fonction Level Set a été élaboré en utilisant une approche Galerkin Discontinu [Mar06, DPLFP06]. Le schéma RK-GD obtenu nous a permis de réaliser avec une grande précision le transport de l'interface, pour un champ de vitesse donné, tout en réduisant les défauts de préservation des volumes. Dans ce contexte, les inconnues sont discontinues entre chaque élément et peuvent être approchées par des polynômes de Lagrange de degrés différents de ceux utilisés pour le solveur de l'écoulement. Il a donc été nécessaire d'introduire des opérateurs de projection afin de coupler aisément le solveur de l'écoulement et le solveur de l'interface.

La méthode proposée a été testée et validée pour différentes simulations numériques en 1D et 2D. Différents cas tests ont été traités, graduellement, à partir de modèles simplifiés vers des modèles plus élaborés. Dans certains cas 1D, des solutions analytiques ont été construites puis utilisées pour la validation de la méthode numérique présentée. La robustesse de l'approche numérique à été éprouvée avec des rapports de densité et de viscosité de 1000 entre les phases incompressible (eau) et compressible (air). Les simulations numériques 2D semblent satisfaisantes.

Néanmoins, quelques éléments de la méthode proposée demandent des investigations complémentaires pour d'une part enrichir la modélisation physique et d'autre part améliorer la robustesse, l'efficacité et la précision numérique.

Le logiciel correspondant, dans sa version actuelle, est uniquement dédié à la résolution de problèmes 2D. Son extension en 3D (éléments tétraèdriques) est envisagée et peut est être effectuée de façon assez naturelle. Toutefois, il sera nécessaire d'adapter les schémas numériques utilisés ici au calcul parallèle par échange de messages (MPI). Pour cela, il sera utile d'utiliser les structures de communication déjà développées dans la plate-forme de calcul FluidBox (utilisée pour les développements 2D de cette thèse).

La résolution de l'interface peut être considérablement améliorée par une technique de raffinement local de maillage près de l'interface [Gué07]. De même une redistanciation [Mar06] qui réduira aussi les déformations résiduelles non physiques, introduites par la diffusion numérique à l'interface.

La stratégie proposée pourrait être adaptée au traitement d'une physique plus complexe. En particulier, en utilisant les travaux de Brackbill [BKZ92] il serait envisageable de prendre en compte les effets de tension de surface. Pour aller plus loin, la prise en compte du changement de phase ou encore la gestion de points triples est également à l'étude. En effet, la prise

en compte de ces différents phénomènes est indispensable dans la perspective de simulations numériques pour la prédiction de la rentrée atmosphérique.

Enfin la méthode présentée ici se limite à l'emploi des équations de Navier-Stokes compressible et incompressible sous leur forme quasi-linéaire unifiée. Cette formulation pour les inconnues primitives permet un contrôle efficace de la discontinuité des paramètres de modélisation au passage de l'interface. En contre-partie, le domaine d'application se limite aux écoulements sans chocs. La formulation conservative pour les inconnues primitives et l'introduction de termes de capture de chocs permettra, à terme, d'étendre le domaine de validité de la stratégie numérique.

Troisième partie

Annexes

Annexe A

Différentes formes quasi-linéaires

1 Forme quasi-linéaire pour les inconnues primitives

1.1 Equations de Navier Stokes

Pour les inconnues primitives $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} p \\ \mathbf{u} \\ T \end{pmatrix}$ les équations de Navier Stokes sous leur forme quasi-linéaire et sans terme source sont :

$$\hat{A}_0 \partial_t \mathbf{Y} + \sum_{i=1}^{d} \hat{A}_i \partial_{x_i} \mathbf{Y} = \sum_{i,j=1}^{d} \left(\partial_{x_j} \hat{K}_{ij} \partial_{x_i} \mathbf{Y} \right). \tag{A.1}$$

1.2 Matrices jacobiennes pour un fluide compressible

Les matrices Jacobiennes pour les variables primitives en dimension $d = 3$ s'écrivent :

$$\hat{A}_0(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\chi}, \rho) = \begin{pmatrix} \rho\beta_T & 0 & 0 & 0 & -\rho\alpha_p \\ \rho\beta_T u_1 & \rho & 0 & 0 & -\rho\alpha_p u_1 \\ \rho\beta_T u_2 & 0 & \rho & 0 & -\rho\alpha_p u_2 \\ \rho\beta_T u_3 & 0 & 0 & \rho & -\rho\alpha_p u_3 \\ e_1^p & \rho u_1 & \rho u_2 & \rho u_3 & e_4^p \end{pmatrix}, \tag{A.2}$$

$$\hat{A}_1(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\chi}, \rho) = \begin{pmatrix} \rho\beta_T u_1 & \rho & 0 & 0 & -\rho\alpha_p u_1 \\ \rho\beta_T u_1^2 + 1 & 2\rho u_1 & 0 & 0 & -\rho\alpha_p u_1^2 \\ \rho\beta_T u_1 u_2 & \rho u_2 & \rho u_1 & 0 & -\rho\alpha_p u_1 u_2 \\ \rho\beta_T u_1 u_3 & \rho u_3 & 0 & \rho u_1 & -\rho\alpha_p u_1 u_3 \\ u_1 e_2^p & \rho u_1^2 & e_3^p + \rho u_1 u_2 & \rho u_1 u_3 & u_1 e_4^p \end{pmatrix}, \tag{A.3}$$

$$\hat{A}_2(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\chi}, \rho) = \begin{pmatrix} \rho\beta_T u_2 & 0 & \rho & 0 & -\rho\alpha_p u_2 \\ \rho\beta_T u_2 u_1 & \rho u_2 & \rho u_1 & 0 & -\rho\alpha_p u_2 u_1 \\ \rho\beta_T u_2^2 + 1 & 0 & 2\rho u_2 & 0 & -\rho\alpha_p u_2^2 \\ \rho\beta_T u_2 u_3 & 0 & \rho u_3 & \rho u_2 & -\rho\alpha_p u_2 u_3 \\ u_2 e_2^p & \rho u_2 u_1 & e_3^p + \rho u_2^2 & \rho u_2 u_3 & u_2 e_4^p \end{pmatrix}, \tag{A.4}$$

$$\hat{A}_3(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\chi}, \rho) = \begin{pmatrix} \rho\beta_T u_3 & 0 & 0 & \rho & -\rho\alpha_p u_3 \\ \rho\beta_T u_3 u_1 & \rho u_3 & 0 & \rho u_1 & -\rho\alpha_p u_3 u_1 \\ \rho\beta_T u_3 u_2 & 0 & \rho u_3 & \rho u_2 & -\rho\alpha_p u_3 u_2 \\ \rho\beta_T u_3^2 + 1 & 0 & 0 & 2\rho u_3 & -\rho\alpha_p u_3^2 \\ u_3 e_2^p & \rho u_3 u_1 & \rho u_3 u_2 & e_3^p + \rho u_3^2 & u_3 e_4^p \end{pmatrix} \tag{A.5}$$

où

$$e_1^p = \rho\beta_T e_1 - \alpha_p T, e_2^p = e_1^p + 1, e_3^p = \rho e_1, \text{ et}, e_4^p = -\rho\alpha_p e_1 + \rho c_p \text{ et } e_1 = h + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2.$$

Les matrices des coefficients de diffusion K_{ij}, quant à elles, sont données par :

$$\hat{K}_{11}(\mathbf{Y},\mu,\kappa) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \chi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & \chi u_1 & \mu u_2 & \mu u_3 & \kappa \end{pmatrix}, \tag{A.6}$$

$$\hat{K}_{12}(\mathbf{Y},\mu,\kappa) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0\ 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu u_2 & \lambda u_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.7}$$

$$\hat{K}_{13}(\mathbf{Y},\mu,\kappa) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & \mu & 0 \\ 0 & \mu u_3 & 0 & \lambda u_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.8}$$

$$\hat{K}_{21}(\mathbf{Y},\mu,\kappa) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda u_2 & \mu u_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.9}$$

$$\hat{K}_{22}(\mathbf{Y},\mu,\kappa) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & \mu u_1 & \chi u_2 & \mu u_3 & \kappa \end{pmatrix}, \tag{A.10}$$

$$\hat{K}_{23}(\mathbf{Y},\mu,\kappa) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu u_3 & \lambda u_2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.11}$$

$$\hat{K}_{31}(\mathbf{Y},\mu,\kappa) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda u_3 & 0 & \mu u_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.12}$$

$$\hat{K}_{32}(\mathbf{Y},\mu,\kappa) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda u_3 & \mu u_2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.13}$$

$$\hat{K}_{33}(\mathbf{Y},\mu,\kappa) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \chi & 0 \\ 0 & \mu u_1 & \mu u_2 & \chi u_3 & \kappa \end{pmatrix} \tag{A.14}$$

avec $\chi = \lambda + 2\mu$.

1.3 Matrices jacobiennes pour un fluide incompressible

Pour un fluide incompressible les matrices jacobiennes sont obtenues en prenant $\alpha_p = \beta_T = 0$. Elles s'écrivent :

$$\hat{A}_0(\mathbf{Y},\mathbf{0},\rho) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & \rho u_1 & \rho u_2 & \rho u_3 & \rho c_p \end{pmatrix}, \tag{A.15}$$

$$\hat{A}_1(\mathbf{Y},\mathbf{0},\rho) = \begin{pmatrix} 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\rho u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho u_2 & \rho u_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho u_3 & 0 & \rho u_1 & 0 \\ u_1 & \rho e_1 + \rho u_1^2 & \rho u_1 u_2 & \rho u_1 u_3 & u_1 \rho c_p \end{pmatrix}, \tag{A.16}$$

$$\hat{A}_2(\mathbf{Y},\mathbf{0},\rho) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho u_2 & \rho u_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2\rho u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho u_3 & \rho u_2 & 0 \\ u_2 & \rho u_2 u_1 & \rho e_1 + \rho u_2^2 & \rho u_2 u_3 & u_2 \rho c_p \end{pmatrix}, \tag{A.17}$$

$$\hat{A}_3(\mathbf{Y},\mathbf{0},\rho) = \begin{pmatrix} 0 & \rho & 0 & \rho & 0 \\ 0 & \rho u_3 & 0 & \rho u_1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho u_3 & \rho u_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2\rho u_3^2 & 0 \\ u_3 & \rho u_3 u_1 & \rho u_3 u_2 & \rho e_1 + \rho u_3^2 & u_3 \rho c_p \end{pmatrix} \tag{A.18}$$

où

$$e_1 = h + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2.$$

Les matrices des coefficients de diffusion $K_{ij}(\mathbf{Y})$, pour $i,j = 1,2,3$ sont identiques à celles du compressible.

2 Forme quasi-linéaire symétrisée pour les inconnues primitives

2.1 Equations quasi-linéaires symétrisées

Pour les inconnues primitives $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} p \\ \mathbf{u} \\ T \end{pmatrix}$ les équations de Navier Stokes isotherme sous leur forme quasi-linéaire sont obtenues en faisant le produit des équations de Navier Stokes

quasi-linéaires par la matrice :

$$\hat{M}(\mathbf{Y},\rho) = \begin{pmatrix} 1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -u_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -u_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{T}(|u|^2 - e_1) & -\frac{u_1}{T} & -\frac{u_2}{T} & -\frac{u_3}{T} & \frac{1}{T} \end{pmatrix}, \tag{A.19}$$

cela donne :

$$\hat{\mathcal{A}}_0 \partial_t \mathbf{Y} + \sum_{i=1}^{d} \hat{\mathcal{A}}_i \partial_{x_i} \mathbf{Y} = \hat{M} \sum_{i,j=1}^{d} \left(\partial_{x_j} \hat{K}_{ij} \partial_{x_i} \mathbf{Y} \right), \tag{A.20}$$

avec $\hat{\mathcal{A}}_i = \hat{M}\hat{A}_i$.

2.2 Matrices symétrisées pour un fluide compressible

Les matrices jacobiennes symétrisées pour un fluide compressible sont :

$$\hat{\mathcal{A}}_0(\mathbf{Y},\boldsymbol{\chi},\rho) = \begin{pmatrix} = \beta_T & 0 & 0 & 0 & -\alpha_p \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ -\alpha_p & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho c_p}{T} \end{pmatrix}, \tag{A.21}$$

$$\hat{\mathcal{A}}_1(\mathbf{Y},\boldsymbol{\chi},\rho) = \begin{pmatrix} \beta_T u_1 & 1 & 0 & 0 & -\alpha_p u_1 \\ 1 & \rho u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho u_1 & 0 \\ -\alpha_p u_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho c_p u_1}{T} \end{pmatrix}, \tag{A.22}$$

$$\hat{\mathcal{A}}_2(\mathbf{Y},\boldsymbol{\chi},\rho) = \begin{pmatrix} \beta_T u_2 & 0 & 1 & 0 & -\alpha_p u_2 \\ 0 & \rho u_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \rho u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \rho u_2 & 0 \\ -\alpha_p u_2 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho c_p u_2}{T} \end{pmatrix}, \tag{A.23}$$

$$\hat{\mathcal{A}}_3(\mathbf{Y},\boldsymbol{\chi},\rho) = \begin{pmatrix} \beta_T u_3 & 0 & 0 & 1 & -\alpha_p u_3 \\ 0 & \rho u_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho u_3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \rho u_3 & 0 \\ -\alpha_p u_3 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho c_p u_3}{T} \end{pmatrix}. \tag{A.24}$$

2.3 Matrices symétrisées pour un fluide incompressible

Pour un fluide incompressible les matrices jacobiennes symétrisées sont obtenues en prenant $\alpha_p = \beta_T = 0$. Elles s'écrivent :

$$\hat{\mathcal{A}}_0(\mathbf{Y},\mathbf{0},\rho) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho c_p}{T} \end{pmatrix}, \tag{A.25}$$

$$\hat{\mathcal{A}}_1(\mathbf{Y},\mathbf{0},\rho) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \rho u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho u_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{\rho c_p u_1}{T} \end{pmatrix}, \tag{A.26}$$

$$\hat{\mathcal{A}}_2(\mathbf{Y},\mathbf{0},\rho) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho u_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \rho u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \rho u_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{\rho c_p u_1}{T} \end{pmatrix}, \tag{A.27}$$

$$\hat{\mathcal{A}}_3(\mathbf{Y},\mathbf{0},\rho) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \rho u_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho u_3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \rho u_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{\rho c_p u_1}{T} \end{pmatrix}. \tag{A.28}$$

Annexe B

Solutions exactes pour le système couplé 1D

Il peut être intéressant de calculer en 1D les solutions exactes du problème couplé compressible-incompressible introduit au chapitre 4. Ainsi nous pouvons comparer les solutions numériques obtenues par le biais du schéma numérique que nous proposons aux solutions calculées analytiquement.

1 Modèle isotherme linéarisé sans convection non visqueux

Considérons le problème mono-dimensionnel réduit :

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{Y} : \quad]0,+\infty[\times]0,+\infty[\mapsto \mathbb{R}^2 \text{ solution de} \\ \left\{ \begin{array}{rl} \mathscr{A}_0(x)\partial_t \mathbf{Y} + \mathscr{A}(x)\partial_x \mathbf{Y} = \mathscr{S}(x), & \text{dans }]0,+\infty[\times]0,+\infty[, \\ u(x,t) = \overline{u}(t), & \text{en } x = 0. \end{array} \right. \end{array} \tag{B.1}$$

La fonction $\overline{u}$ de $]0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est une donnée. Les opérateurs qui interviennent dans le problème ci-dessus sont ceux utilisés au chapitre 4 dans le problème spatio-temporel (4.4). Enfin nous supposons que le terme source est donné par

$$\mathscr{S}(x) = -\rho(x) \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}, \text{ dans }]0,+\infty[.$$

Le problème précédent peut être vu comme le couplage de deux problèmes aux limites, l'un associé au liquide ($\Omega_1 =]0, x_I]$) et l'autre associé au gaz ($\Omega_2 = [x_I, +\infty[$) séparés par une interface située en $x = x_I$. Pour commencer nous proposons de résoudre séparément ces deux problèmes aux limites.

1.1 Recherche d'une solution dans le liquide

Dans le liquide, les équations de Navier Stokes incompressible sont résolues :

$$\left\{ \begin{array}{rl} \rho_1 \partial_t u + \partial_x p = -\rho_1 g, & \text{dans }]0, x_I[\times]0,+\infty[\\ \partial_x u = 0, & \text{dans }]0, x_I[\times]0,+\infty[\\ u(x,t) = \overline{u}(t), & \text{en } x = 0. \end{array} \right. \tag{B.2}$$

L'équation de conservation de la masse, nous permet de calculer la vitesse dans $]0, x_I[$. En effet nous avons :

$$u(x,t) = \overline{u}(t), \text{ dans }]0, x_I[\times]0,+\infty[. \tag{B.3}$$

Pour déterminer la pression, il suffit de dériver l'équation de conservation de la quantité de mouvement par rapport à x, ainsi il vient :

$$\partial_{xx}p = 0, \text{ dans }]0, x_I[\times]0, +\infty[.$$

Nous en déduisons que la pression est une fonction affine de x dont les coefficients α, β peuvent dépendre du temps :

$$p(x,t) = \alpha(t)x + \beta(t), \text{ dans }]0, x_I[\times]0, +\infty[.$$

En supposant que l'équation de conservation de la quantité de mouvement est vérifiée en $x = 0$ nous obtenons :

$$p(x,t) = -\rho_1 \left(\overline{u}'(t) + g\right) x + \beta(t), \text{ dans }]0, x_I[\times]0, +\infty[.$$

Ici, la solution est parfaitement déterminée à $\beta(t)$ près pour la pression.

1.2 Recherche d'une solution dans le gaz

Dans la phase gazeuse nous résolvons les équations d'Euler données par :

$$\mathscr{A}_0^2 \partial_t \mathbf{Y} + \mathscr{A}^2 \partial_x \mathbf{Y} = \mathscr{S}, \text{ dans }]x_I, +\infty[\times]0, +\infty[. \tag{B.4}$$

Nous obtenons ici un demi-problème de Riemann associé à l'interface x_I :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t \mathbf{Y} + \mathsf{A}\partial_x \mathbf{Y} & = & \mathsf{S}, \\ \mathbf{V}(x,0) & = & \mathbf{V}_d, \end{array} \right. \quad \forall x \in]x_I, +\infty[. \tag{B.5}$$

Le vecteur $\mathbf{Y}_d^t = (p_d, u_d)^t$ est un état initial constant dans le segment $]x_I, +\infty[$. Enfin nous avons la matrice $\mathsf{A} = \left(\mathscr{A}_0^2\right)^{-1} \mathscr{A}^2$ et $\mathsf{S} = \left(\mathscr{A}_0^2\right)^{-1} \mathscr{S}^2$.
Le système (B.4) est inconditionnellement hyperbolique. Tous les champs sont linéairement dégénérés. Les invariants de Riemann sont donnés par :

Ondes	**Invariants de Riemann**
$\lambda_\pm = \pm c$	$W_\pm = u \pm p/\rho_1 c + gt$

(B.6)

Proposition 2 *La solution du demi-problème de Riemann* (B.5) *est donnée par :*
- *pour la vitesse*

$$u(x,t) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{2}\left[u_I\left(t_I\right) + gt_I + u_d +\right] + \dfrac{1}{2c\rho_2}\left[p_I(t_I) - p_d\right] - gt, & si\ x - x_I \leq ct, \\ u_d - gt, & si\ x - x_I > ct \end{array} \right. \tag{B.7}$$

- *et pour la pression*

$$p(x,t) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\rho_2 c}{2}\left[u_I(t_I) + u_d - gt_I\right] + \dfrac{1}{2}\left[p_I(t_I) + p_d\right], & si\ x - x_I \leq ct, \\ p_d, & si\ x - x_I > ct. \end{array} \right. \tag{B.8}$$

Dans les égalités précédentes, les quantités p_I et u_I sont respectivement la pression et la vitesse en $x = x_I$ et $t_I = t - \dfrac{x - x_I}{c}$.

Preuve :

Dans la zone du plan située en dessous de la caractéristique donnée par l'équation $x - x_I = ct$ et pour les $t > 0$ (zone grisée sur FIG. B.1) la solution est :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_0(x - x_I - ct),$$

or par hypothèse $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}_d = (p_d, u_d)^d$, et nous avons :

$$\mathbf{Y}(x,t) = \begin{pmatrix} p_d \\ u_d - gt \end{pmatrix}, \text{ si } x - x_I > ct.$$

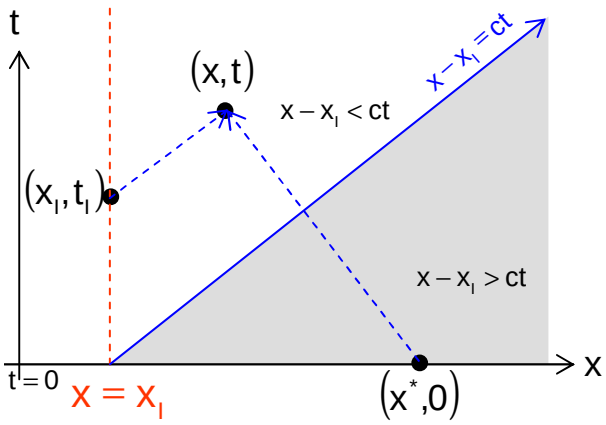


FIG. B.1 – Recherche de la pression p et de la vitesse u

A présent, nous recherchons la solution dans la zone entre l'interface $x = x_I$ et au dessus de la caractéristique d'équation $x - x_I = ct$ voir figure FIG. B.1.
Le long de la caractéristique issue de (x,t) de coefficient directeur $-c$ et qui intersecte l'axe des $t = 0$ en $(x^*, 0)$ l'invariant de Riemann W_- est constant. Il en est de même pour l'invariant de Riemann W_+ qui est constant de long de la caractéristique issue de (x,t) de coefficient directeur c et qui intersecte l'axe des $x = x_I$ en (x_I, t_I) voir FIG. B.1. Ainsi nous obtenons les deux relations :

$$\begin{cases} W_+(x_I, t_I) &= W_+(x,t), \\ W_-(x^*, 0) &= W_-(x,t). \end{cases}$$

Or nous avons $t_I = t - \dfrac{x - x_I}{c}$, en utilisant les définitions des invariants nous obtenons :

$$\begin{cases} u_I(t_I) + gt_I + \dfrac{1}{\rho_2 c} p_I(t_I) &= u(x,t) + gt + \dfrac{1}{\rho_2 c} p(x,t), \quad \forall x - x_I \leq ct, \\ u_d + \dfrac{1}{\rho_2 c} p_d &= u(x,t) + gt - \dfrac{1}{\rho_2 c} p(x,t), \quad \forall x - x_I \leq ct. \end{cases}$$

En recombinant linéairement chacune des équations précédentes nous obtenons les solutions :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_I(t_I) + \frac{1}{c\rho_2} p_I(t_I) + u_d - \frac{1}{c\rho_2} p_d\right] - gt, \tag{B.9}$$

$$p(x,t) = \frac{\rho_2 c}{2}\left[u_I(t_I) + u_d + gt_I\right] + \frac{1}{2}\left[p_I(t_I) + p_d\right]. \tag{B.10}$$

■

Dans ce paragraphe, nous avons calculé la solution exacte pour le demi-problème de Riemann (B.5). Toutefois, les inconnues dépendent de la pression interfaciale notée p_I encore indéterminée.

Proposition 3 *Supposons la vitesse $u_I(t)$ connue, alors la pression interfaciale est donnée par la formule :*

$$p_I(t) = \rho_2 c\,(u_I(t) + gt - u_d) + p_d. \tag{B.11}$$

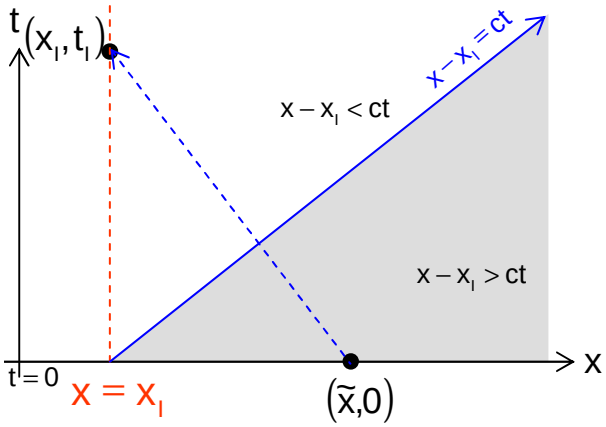


FIG. B.2 – Recherche de la pression interfaciale p_I

Preuve :

Pour calculer p_I, on utilise l'information au temps $t = 0$. En effet, le long de la caractéristique issue de (x_I, t) de coefficient directeur $-c$ et qui intersecte l'axe des ordonnées $t = 0$ en $(\tilde{x}, 0)$ (voir figure FIG. B.2) l'invariant de Riemann W_- est constant, ainsi nous avons la relation

$$\begin{aligned} W_-(\tilde{x}, 0) &= W_-(x_I, t), \\ \Leftrightarrow\quad u_d - \frac{1}{c\rho_2} p_d &= u_I(t) + gt - \frac{1}{c\rho_2} p_I(t), \end{aligned} \tag{B.12}$$

donc

$$p_I(t) = \rho_2 c\,(u_I(t) - u_d + gt) + p_d. \tag{B.13}$$

■

1.3 Recherche d'une solution pour le problème couplé

Nous avons construit dans les paragraphes précédents, une solution exacte aux problèmes compressible et incompressible issus de (B.5). Ces solutions peuvent s'écrire analytiquement mais dépendent encore des deux quantités inconnues : $\beta(t)$ et $u_I(t)$. Comme nous recherchons une solution continue au problème (B.1), il vient les égalités :

– pour la vitesse

$$\overline{u}(t) = u_I(t), t > 0 \tag{B.14}$$

– et pour la pression

$$-\rho_1 \left(\overline{u}'(t) + g\right) x_I + \beta(t) = p_I(t), t > 0. \tag{B.15}$$

Nous pouvons en déduire l'existence et l'unicité de la solution du problème (B.1) donnée par

$$u(x,t) = \begin{cases} \overline{u}(t) & \text{si } x \leq x_I \\ \frac{1}{2}\left[u_I\left(t - \frac{x - x_I}{c}\right) + g\left(t - \frac{x - x_I}{c}\right) + u_d\right] & \\ + \quad \frac{1}{2c\rho_2}\left[p_I\left(t - \frac{x - x_I}{c}\right) - p_d\right] - gt & \text{si } x - x_I \leq ct, \\ u_d - gt & \text{si } x - x_I > ct \end{cases} \tag{B.16}$$

et

$$p(x,t) = \begin{cases} -\rho_1 \left(\overline{u}'(t) + g\right)(x - x_I) + p_I(t) & \text{si } x \leq x_I \\ \frac{\rho_2 c}{2}\left[u_I\left(t - \frac{x - x_I}{c}\right) + u_d - g\left(t - \frac{x - x_I}{c}\right)\right] & \\ + \quad \frac{1}{2}\left[p_I\left(t - \frac{x - x_I}{c}\right) + p_d\right], & \text{si } x - x_I \leq ct, \\ p_d & \text{si } x - x_I > ct. \end{cases} \tag{B.17}$$

Ici c'est le liquide (incompressible) qui impose sa vitesse au gaz (compressible) alors que c'est l'inverse pour la pression.

2 Modèle isotherme sans convection non visqueux

Nous étudions le problème réduit suivant :

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{Y} : \quad]0,+\infty[\times]0,+\infty[\mapsto \mathbb{R}^2 \text{ solution de} \\ \left\{ \begin{array}{rl} \mathscr{A}_0(\mathbf{Y},x)\partial_t \mathbf{Y} + \mathscr{A}(\mathbf{Y},x)\partial_x \mathbf{Y} = \mathscr{S}(\mathbf{Y},x), & \text{dans }]0,+\infty[\times]0,+\infty[, \\ u(x,t) = \overline{u}(t), & \text{en } x = 0. \end{array} \right. \end{array} \tag{B.18}$$

La fonction $\overline{u}$ de $]0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est connue. Les opérateurs intervenant dans le problème ci-dessus sont ceux utilisés au chapitre 4 dans le problème spatio-temporel (4.4). Enfin le terme source est

$$\mathscr{S}(x) = -\rho(x)\begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}, \text{ dans }]0,+\infty[.$$

Comme précédemment, le problème étudié s'appuie sur le couplage des équations de Navier Stokes compressible et incompressible qu'on peut résoudre séparement.

2.1 Recherche d'une solution dans le liquide

Dans le liquide les équations de Navier Stokes incompressible :

$$\left\{ \begin{array}{rl} \rho_1 \partial_t u + \partial_x p = -\rho_1 g, & \text{dans }]0,x_I[\times]0,+\infty[\\ \partial_x u = 0, & \text{dans }]0,x_I[\times]0,+\infty[\\ u(x,t) = \overline{u}(t), & \text{en } x = 0. \end{array} \right. \tag{B.19}$$

ont pour solution :

– pour la vitesse

$$u(x,t) = \overline{u}(t), \text{ dans }]0,x_I[\times]0,+\infty[, \tag{B.20}$$

– pour la pression

$$p(x,t) = -\rho_1 \left(\overline{u}'(t) + g\right) x + \beta(t), \text{ dans }]0,x_I[\times]0,+\infty[,$$

où $\beta(t)$ est une fonction à déterminer.

2.2 Recherche d'une solution dans le gaz

Dans la phase gazeuse nous résolvons les équations :

$$\mathscr{A}_0^2 \partial_t \mathbf{Y} + \mathscr{A}^2 \partial_x \mathbf{Y} = \mathscr{S}, \text{ dans }]x_I, +\infty[\times]0, +\infty[, \tag{B.21}$$

Développons ce système :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \rho_2 \partial_t u + \partial_x p & = & -\rho_1 g, \\ \partial_t p + p \partial_x u & = & 0. \end{array} \right.$$

En utilisant la loi des gaz parfaits qui relie la densité et la pression par $p = \rho_2 c^2$ et en considérant le changement d'inconnue $P = \ln(p)$, il vient le système linéarisé :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \partial_t u + c^2 \partial_x P & = & -g, \\ \partial_t P + \partial_x u & = & 0. \end{array} \right.$$

Nous introduisons ici un demi-problème de Riemann associé à l'interface x_I :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t \mathbf{V} + \mathsf{A} \partial_x \mathbf{V} & = & \mathsf{S}, \\ \mathbf{V}(x,0) & = & \mathbf{V}_d, \end{array} \right. \quad \forall x \in]x_I, +\infty[. \tag{B.22}$$

Le vecteur $\mathbf{V}_d^t = (P_d, u_d)^t = (\ln(p_d), u_d)^t$ est un état initial constant dans le segment $]x_I, +\infty[$. Enfin nous définissons

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & c^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathsf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}.$$

Le système (B.22) est inconditionnellement hyperbolique. Toutes les champs sont linéairement dégénérés. Les invariants de Riemann sont données par :

Ondes	**Invariants de Riemann**
$\lambda_\pm = \pm c$	$W_\pm = u \pm Pc + gt$

(B.23)

Proposition 4 *La solution du demi-problème de Riemann* (B.5) *est donnée par :*
– *pour la vitesse*

$$u(x,t) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}\left[u_I(t_I) + gt_I + u_d +\right] + \frac{c}{2}\left[P_I(t_I) - P_d\right] - gt, & si\ x - x_I \leq ct, \\ u_d - gt, & si\ x - x_I > ct, \end{array} \right. \tag{B.24}$$

et

$$P(x,t) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2c}\left[u_I(t_I) + u_d - gt_I\right] + \frac{1}{2}\left[P_I(t_I) + P_d\right], & si\ x - x_I \leq ct, \\ P_d, & si\ x - x_I > ct. \end{array} \right. \tag{B.25}$$

Dans les égalités précédentes, les quantités P_I et u_I sont respectivement la pression et la vitesse en $x = x_I$ et $t_I = t - \dfrac{x - x_I}{c}$.

Preuve :
Pour la démonstration nous renvoyons le lecteur au cas linéaire, pour lequel la démarche est similaire.

■

Nous avons calculé dans ce paragraphe, la solution exacte pour le demi-problème de Riemann (B.5). Toutefois, les inconnues dépendent des deux inconnues P_I et u_I que nous allons déterminer.

Proposition 5 *Supposons la vitesse $u_I(t)$ connue, alors*

$$P_I(t) = \frac{1}{c}\left(u_I(t) + gt - u_d\right) + P_d. \tag{B.26}$$

A partir de la quantité $P_I(t)$ on déduit la pression interfaciale

$$p_I(t) = \exp(P_I(t)). \tag{B.27}$$

Preuve :
Voir système linéarisé.

■

2.3 Recherche d'une solution pour le problème couplé

Nous avons construit dans les paragraphes précédents, une solution exacte aux problèmes compressible et incompressible étudiés séparément. Ces solutions s'écrivent analytiquement en fonction des quantités indéterminées : $\beta(t)$ et $u_I(t)$. Comme nous recherchons une solution continue au problème global, il vient les égalités :

– pour la vitesse

$$\overline{u}(t) = u_I(t), t > 0 \tag{B.28}$$

– et pour la pression

$$-\rho_1\left(\overline{u}'(t) + g\right)x_I + \beta(t) = p_I(t) = \exp(P_I(t)), t > 0. \tag{B.29}$$

Nous pouvons en déduire l'existence et l'unicité de la solution du problème (B.1) donnée par

$$u(x,t) = \begin{cases} \overline{u}(t) & \text{si } x \leq x_I \\ \frac{1}{2}\left[u_I\left(t - \frac{x - x_I}{c}\right) + g\left(t - \frac{x - x_I}{c}\right) + u_d\right] & \\ + \quad \frac{1}{2c\rho_2}\left[p_I\left(t - \frac{x - x_I}{c}\right) - p_d\right] - gt & \text{si } x - x_I \leq ct, \\ u_d - gt & \text{si } x - x_I > ct \end{cases} \tag{B.30}$$

et

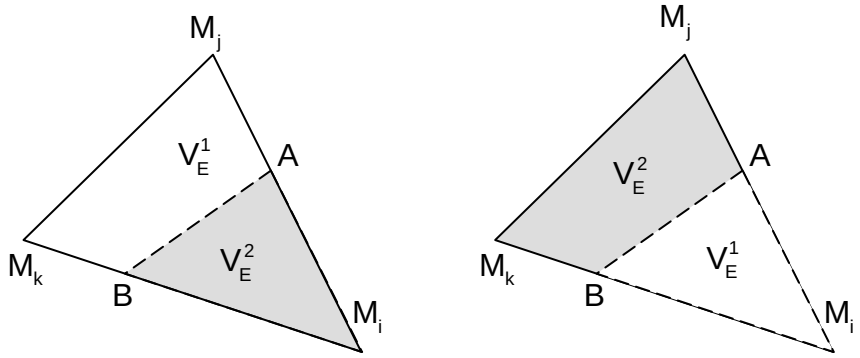
$$p(x,t) = \begin{cases} -\rho_1\left(\overline{u}'(t) + g\right)(x - x_I) + p_I(t) & \text{si } x \leq x_I \\ \frac{\rho_2 c}{2}\left[u_I\left(t - \frac{x - x_I}{c}\right) + u_d - g\left(t - \frac{x - x_I}{c}\right)\right] & \\ + \quad \frac{1}{2}\left[p_I\left(t - \frac{x - x_I}{c}\right) + p_d\right], & \text{si } x - x_I \leq ct, \\ p_d & \text{si } x - x_I > ct. \end{cases} \tag{B.31}$$

Annexe C

Calcul de la fonction couleur en 2D

Nous présentons dans cette annexe la démarche suivie pour calculer la valeur de la fonction couleur en deux dimensions de l'espace intervenant dans la construction des moyennes présentes dans le schéma EFS des équations du modèle mono-fluide.

Soit E un élément de la triangulation $\mathcal{E}_h$ de Ω. Nous noterons par la suite M_i, M_j, M_k ses sommets, ainsi que ϕ_i, ϕ_j, ϕ_k la valeur de la fonction Level Set en ces points. L'interface intersecte les cotés $[M_iM_j]$ et $[M_iM_k]$ de E aux points A et B respectivement. L'élément E est donc séparé en une région incompressible E_1 et une région compressible E_2 d'aires respectives V_E^1 et V_E^2. Comme nous l'avons précisé au Chap.6/Sec.2, l'interface est supposée localement plane dans une maille. Par conséquent, nous pouvons distinguer deux types de configuration représentés sur les figures Fig. C.1. Dans le premier cas la région compressible est représentée par le petit triangle ABM_k, dans la seconde il s'agit du quadrangle AM_iM_jB.



Configuration n°1 Configuration n°2

Fig. C.1 – Intersection de l'interface avec un élément

Par définition la fonction couleur ε_E représente la proportion de fluide compressible dans une maille mixte :

$$\varepsilon_E = \frac{V_E^2}{V_E}, \forall E \in \mathcal{E}_h, \tag{C.1}$$

avec V_E^2 l'aire occupée par la région compressible et V_E l'aire de la maille E. Nous proposons par la suite de calculer le volume V_E^2 de la région compressible dans une maille mixte selon la configuration considérée.

Calcul de V_E^2 pour la première configuration

Pour commencer, nous rappelons que l'aire du triangle M_iAB est donné par la relation

vectorielle :

$$\mathcal{A}_{M_iAB} = \frac{1}{2}||\overrightarrow{M_iA} \wedge \overrightarrow{M_iB}||. \tag{C.2}$$

Nous allons calculer les deux vecteurs $\overrightarrow{M_iA}$ et $\overrightarrow{M_iB}$.

Dans un premier temps, nous nous intéressons au segment $[M_iM_j]$, intersecté par l'interface en A. En utilisant la fonction Level Set ϕ, nous obtenons par le théorème de Thalès (voir figures Fig. C.2) la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{M_iA} = \frac{\phi_i}{\phi_j}\overrightarrow{AM_j}. \tag{C.3}$$

qui est équivalente à :

$$\overrightarrow{M_iA} = \frac{\phi_i}{\phi_i - \phi_j}\overrightarrow{M_iM_j}. \tag{C.4}$$

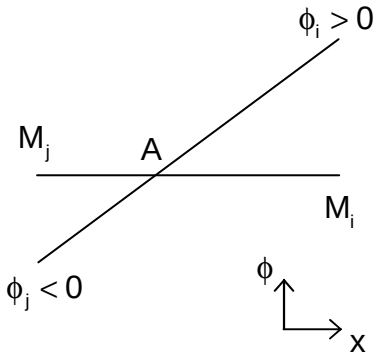


Fig. C.2 – Application du théorème de Thalès

De même pour le segment $[M_iM_k]$ intersecté par l'interface en B nous avons la relation :

$$\overrightarrow{M_iB} = \frac{\phi_i}{\phi_i - \phi_k}\overrightarrow{M_iM_k}, \tag{C.5}$$

Finalement, nous en déduisons :

$$\mathcal{A}_{M_iAB} = \frac{1}{2}\frac{\phi_i^2}{|(\phi_j - \phi_i)(\phi_k - \phi_i)|}||\overrightarrow{M_iM_j} \wedge \overrightarrow{M_iM_k}||. \tag{C.6}$$

Or par définition l'aire de l'élément $E = M_iM_jM_k$ est :

$$\mathcal{A}_{M_iM_jMk} = \frac{1}{2}||\overrightarrow{M_iM_j} \wedge \overrightarrow{M_iM_k}||, \tag{C.7}$$

d'où la relation

$$\mathcal{A}_{M_iAB} = \frac{\phi_i^2}{|(\phi_j - \phi_i)(\phi_k - \phi_i)|}\mathcal{A}_{M_iM_jMk}. \tag{C.8}$$

Calcul de V_E^2 pour la seconde configuration

Dans ce cas l'aire de la région quadrangulaire est :

$$\mathcal{A}_{AM_jM_kB} = \left(1 - \frac{\phi_i^2}{|(\phi_j - \phi_i)(\phi_k - \phi_i)|}\right)\mathcal{A}_{M_iM_jMk}. \tag{C.9}$$

Bibliographie

[AAS07] M.I. Asensio, B. Ayuso, and G. Sangalli. Coupling stabilized finite element methods with finite difference time intergration for advection-diffusion-reaction problems. *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, 196, 2007.

[Ala05] T. Alazard. *Dynamique des gaz à faible nombre de Mach.* PhD thesis, Université Bordeaux 1, 2005.

[AS96] H.L. Atkins and C.-W. Shu. Quadrature-free implementation of the discontinuous galerkin method for hyperbolic equations. *AIAA Journal*, 36 :775–782, 1996.

[AS99] R. Abgrall and R. Saurel. A multiphase godunov method for compressible multifluid and multiphase flows. *Journal of Computational Physics*, 150 :425–467, 1999.

[Bab73] I. Babuska. The finite element method with lagrangian multipliers. *Numer. Math.*, 20 :179–192, 1973.

[BBF+91] F. Brezzi, Marie-Odile Bristeau, L.P. Franca, Michel Mallet, and G. Roge. A relationship between stabilized finite element methods and the galerkin method with bubble functions. 1991.

[BBJL07] M. Braack, E. Burman, V. John, and G. Lube. Stabilized finite element methods for the generalized oseen problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196 :853–866, 2007.

[BBN05] C. Berthon, B. Braconnier, and B. Nkonga. Numerical approximation of a degenerate non-conservative multifluid model : relaxation scheme. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 1 :85–90, 2005.

[BE07] E. Burman and A. Ern. Continuous interior penalty *hp*-finite element methods for advection and advection-diffusion equations. *Math. Comp.*, 259 :1119–1140, 2007.

[BF06] F. Boyer and P. Fabrie. *Eléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles*, volume 52 of *Mathématiques & Applications*. Springer, 2006.

[BF07] E. Burman and M. Fernandez. Continuous interior penalty finite element method for the time-dependent navier-stokes equations : space discretization and convergence. *Numer. Math.*, 107 :39–77, 2007.

[BFH06] E. Burman, M. Fernandez, and P. Hansbo. Continuous interior penalty finite element method for oseen's equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44 :1248–1274, 2006.

[BH82] A.N. Brooks and T. J. R. Hughes. Streamline-upwind/petrov-galerkin formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32 :199–259, 1982.

[BKZ92] J.U. Brackbill, D.B. Kothe, and C. Zemach. A continuum method for modeling surface tension. *Journal of Computational Physics*, 100 :335–354, 1992.

[BN86] M.R. Baer and J.W. Nunziato. A two phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (ddt) in reactive granular materials. *Int. J. Multiphase Flows*, 12 :861–889, 1986.

[Bra07] B. Braconnier. *Modélisation numérique d'écoulements multiphasiques pour des fluides compressibles, non-miscibles et soumis aux effets capillaires.* PhD thesis, Université Bordeaux 1, 2007.

[Bre74] F. Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising form lgrange multipliers. *RAIRO Ser. Rouge*, 8 :129–151, 1974.

[BTM07] A. Berlemont, S. Tanguy, and T. Ménard. Level set/ghost fluid method for vaporizing two-phase flows. *Von Karman Institute for Fluid Dynamics*, Lecture series 2007-07, 2007.

[CFA01] R. Caiden, R. P. Fedkiw, and C. Anderson. A numerical method for two phase flow consisting of separate compressible and incompressible regions. *J. Comput. Phys.*, 166 :1–27, 2001.

[CHMO96] Y. C. Chang, T. Y. Hou, B. Merriman, and S. Osher. A level set formulation of eulerian interface capturing methods for incompressible fluid flows. *Journal of Computational Physics*, 124 :449–464, 1996.

[Cho68] A. Chorin. Numerical solution of the navier-stokes equations. *Math. Comput.*, 22, 1968.

[Cod02] R. Codina. Stabilized finite element approximation of transient incompressible flows using orthogonal subscales. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, 2002.

[Coy07] E. Coyajee. Introduction to level set techniques for the numerical simulation of interfacial two-phase flows. *Von Karman Institute for Fluid Dynamics*, Lecture series 2007-07, 2007.

[CS98a] B. Cockburn and C.-W. Shu. The local discontinuous galerkin method for time-dependant convection-diffusion systems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 35, 1998.

[CS98b] B. Cockburn and C.-W. Shu. Runge-kutta discontinuous galerkin methods for conservation laws v. *Journal of Computational Physics*, 141 :199–224, 1998.

[CS01] B. Cockburn and C.-W. Shu. Runge-kutta discontinuous galerkin methods for convection-dominated problems. *Journal of Scientific Computing*, 16, 2001.

[DPLFP06] D. A. Di Pietro, D. Lo Forte, and N. Parolini. Mass preserving finite element implementations of the level set method. *Applied Numerical Mathematics*, 56, 2006.

[EFFM02] D. Enright, R. P. Fedkiw, J. Ferziger, and I. Mitchell. Hybrid particle level set method for improved interface capturing. *J. Comput. Phys.*, 183, 2002.

[EG02] A. Ern and J.-L. Guermond. *Eléments finis : théorie, applications, mise en oeuvre*, volume 36. Springer, 2002.

[Ern07] A. Ern. La méthode galerkin discontinu. *Ecole de mécanique des fluides numérique, Roscoff*, 2007.

[FAMO99] R. P. Fedkiw, T. Aslam, B. Merriman, and S. Osher. A non-oscillatory eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid method). *Journal of Compulational Physics*, 169, 1999.

[FF92] L. P. Franca and S. L. Frey. Stabilized finite element methods : Ii. the incompressible navier stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 99 :209–233, 1992.

[FFH92] L. P. Franca, S. L. Frey, and T.J.R Hughes. Stabilized finite element methods : I. application to the advective-diffusive model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 95 :253–276, 1992.

[FK08] M.W. Farthing and C.E. Kees. Implementation of discontinuous galerkin methods fo the level set equation on unstructured meshes. Technical report, 2008.

[FMO98] R. P. Fedkiw, B. Merriman, and S. Osher. Numerical methods for one dimensional interface separating compressible and incompressible flows. *Barriers and Challenges in Computational Fluids Dynamics*, pages 155–194, 1998.

[GH05] J. Gross and J.S. Hesthaven. A level set discontinuous galerkin method for free surface flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005.

[Gué07] S. Guégan. *Modélisation numérique d'écoulements bifluides 3D instationnaires avec adaptation de maillage.* PhD thesis, Université Nice Sophia Antipolis, 2007.

[GV99] H. Guillard and C. Viozat. On the behavior of upwind schemes in the low mach number limit. *Comput. Fluids*, 28, 1999.

[Hau01] G. Hauke. Simple stabilizing matrices for the computation of compressible flows in primitive variables. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :6881–6893, 2001.

[HB79] T.J.R. Hughes and A. Brooks. A multi-dimensional upwind scheme with no crosswind diffusion. *AMD*, 21, 1979.

[HFB86] T.J.R. Hughes, L.P. Franca, and M. Balestra. A new finite lement formulation for computational fluid dynamics : V. circumventing the babuska-brezzi condition : A stable petrov-galerkin formulation for the stokes problem accomodating equal-order interpolations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 59 :85–99, 1986.

[HFB87] T.J.R. Hughes, L.P. Franca, and M. Balestra. A new finite element formulation for computational fluid dynamics : Vi. the stokes problem with various well-posed boundary conditions : symmetric formulations that converge for all velocity/pressure spaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 65 :85–96, 1987.

[HFH89] T.J.R. Hughes, L.P. Franca, and G. M. Hulbert. A new finite lement formulation for computational fluid dynamics : Viii. the galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 73 :173–189, 1989.

[HGC+05] P. Helluy, J.-P. Golay, J.-P. Caltagirone, P. Lubin, S. Vincent, D. Drevard, R. Marcer, P. Fraunié, N. Seguin, and S. Grilli. Numerical simulations of wave braking. *M2AN*, 39 :591–607, 2005.

[HH94] G. Hauke and T. J. R. Hughes. A unified approach to compressible and incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 113 :389–395, 1994.

[HH98] G. Hauke and T. J. R. Hughes. A comparative study of different sets of variables for solving compressible and incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 153(1–2) :1–44, 1998.

[HN81] C. W. Hirt and B. Nichols. Volume of fluid method (vof) for the dynamics of free boundaries. *J. Comput. Phys.*, 135 :201–225, 1981.

[HS99] C. Hu and C.W. Shu. Weighted eno schemes for hamilton-jacobi equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 34 :2126–2143, 1999.

[HTB] T.J.R. Hughes, T.E. Tezduyar, and A.N. Brooks. A petrov-galerkin finite element methods formulation for systems of conservation laws with special reference to the compressible euler equations.

[Hug78] T.J.R. Hughes. A simple scheme for developping 'upwind' finite elements. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 12 :1359–1365, 1978.

[Hug87] T.J.R. Hughes. Recent progress in the development and understanding of supg methods with special reference to the compressible euler and navier-stokes equations. *International journal for numerical methods in fluids*, 7 :1261–1275, 1987.

[Hug95] T.J.R. Hughes. Multiscale phenomena : Green's functions, the dirichlet-to-neumann formulation subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. *Computer Methods and Applied Mechanics Engineering*, 1995.

[HW65] F Harlow and E. Welch. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with a free surface. *Phys. Fluids*, 8, 1965.

[Ida00] M Ida. An improved unified solver for compressible and incompressible fluids involving free surfaces. part i. convection. *Computer Physics Communications*, 132 :44–65, 2000.

[Ida03] M Ida. An improved unified solver for compressible and incompressible fluids involving free surfaces. ii. multi-time-step integration and applications. *Computer Physics Communications*, 150 :300–322, 2003.

[KM81] S. Klainerman and A. Majda. Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limite of compressible fluids. *Comm. Pure Appl. Math.*, 4 :481–524, 1981.

[KM82] S. Klainerman and A. Majda. Compressible and incompressible fluids. *Comm. Pure Appl. Math.*, 5 :629–651, 1982.

[KSO$^+$05] S. Y. Kadioglu, M. Sussman, S. Osher, J. P. Wright, and M. Kang. A second order primitive preconditionner for solving all speed multi-phase flows. *Journal of computational physics*, 209 :477–503, 2005.

[Les75] P. Lesaint. *Sur la résolution des systèmes hyperboliques du premier ordre par des méthodes d'éléments finis.* PhD thesis, Université Paris VI, 1975.

[LFK00] X.-D. Liu, R. Fedkiw, and M. Kang. A boundary condition capturing method for poisson's equation on irregular domains. *Journal of computational Physics*, 160 :151–178, 2000.

[LR74] P. Lesaint and P.-A. Raviart. On a finite element method for solving the neutron transport equation. *Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations*, 33 :89–123, 1974.

[Mar06] E. Marchandise. *Simulation of three-dimensional two-phase flows : Coupling of stabilized finite element methode with a discontinuous Level Set approach.* PhD thesis, Université Catholique de Louvain, 2006.

[MGCR07] E. Marchandise, P. Geuzaine, N. Chevaugeon, and J.-F. Remacle. A stabilized finite element method using a discontinuous level set approach for the computation of bubble dynamics. *Journal of Computational Physics*, 225 :949–974, 2007.

[MH86] M. Mallet and T. J. R. Hughes. A new finite element formulation for computational fluid dynamics : Iii. the generalized streamline operator for multdimentional advective-diffusive systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58 :305–328, 1986.

[MK04] A. Masud and R.A. Khurram. A multiscale/stabilized finite element method for the advection-diffusion equation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 193 :1997–2018, 2004.

[MK06] A. Masud and R.A. Khurram. A multiscale finite element method for the incompressible navier-stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195 :1750–1777, 2006.

[Mon88] J.J. Monaghan. An introduction to sph. *Computer physics communications*, 1 :89–96, 1988.

[Mon94] J.J. Monaghan. Simulation free surface flows with sph. *Journal of Computational Physics*, 110 :399–406, 1994.

[MR06] E. Marchandise and J.-F. Remacle. A stabilized finite element method using a discontinuous level set approach for solving two phase incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, 219 :780–800, 2006.

[MRC06] E. Marchandise, J.-F. Remacle, and N. Chevaugeon. A quadrature-free discontinuous galerkin method for the level set equation. *Journal of Computational Physics*, 212 :338–357, 2006.

[Mur03] A. Murrone. *Modèles bi-fluides à six et sept équations pour les écoulements diphasiques à faible nombre de Mach.* PhD thesis, Université de Provence, 2003.

[NW76] W. Noh and P. Woodward. Slic (simple line interface calculation). *Proc. 5th Int. Conf. Fluid. Dyn., Lect. Notes Phys.*, 59 :330–340, 1976.

[OS88] S. Osher and J. Sethian. Fronts propagating with curvature dependant speed : Algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *J. Comput. Phys*, 79 :12–49, 1988.

[OS91] S. Osher and C.-W. Shu. High order essentially non-oscillatory schemes for hamilton-jacobi equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 728 :902–921, 1991.

[Pol05] M. Polner. *Galerkin Least-Squares Stabilization Operators for the Navier-Stokes Equations, A Unified Approach.* PhD thesis, University of Twente, 2005.

[PVdV08] L. Pesch and J. J. W. Van der Vegt. A discontinuous galerkin finite element discretization of the euler equations for compressible and incompressible fluids. *Journal of Computational Physics*, 227 :5426–5446, 2008.

[PVdVVD06] M. Polner, J.J.W. Van der Vegt, and R.M.J Van Damme. Analysis of stabilization operators for galerkin least-squares discretizations of then incompressible navier-stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195 :982–1006, 2006.

[RH73] W.H. Reed and T.R. Hill. Triangular mesh methods for the neutron transport equation. Technical report, 1973.

[RS00] G. Russo and P. Smereka. A remark on computing distance function. *Journal of Computational Physics*, 163 :51–67, 2000.

[SF99] M. Sussman and E. Fatemi. An efficient interface preserving level set redistancing algorithm and its application to interfacial incompressible fluid flow. *SIAM Journal on scientific computing*, 20 :1165–1191, 1999.

[SH91] F. Shakib and T. J. R. Hughes. A new finite element formulation for computational fluid dynamics : X. the compressible euler and navier-stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 89 :141–219, 1991.

[Smo01] A. Smolianski. *Numerical Modeling of Two-Fluid Interfacial Flows.* PhD thesis, University of Jyväskylä, 2001.

[SSO94] M. Sussman, P. Smereka, and S. Osher. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *Journal of Computational Physics*, 114 :146–159, 1994.

[SZ99] R. Scardovelli and S. Zaleski. Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow. *Annual Rev. Fluid Mech.*, 31 :567–603, 1999.

[Tan86] M. Tanaka. The stability of solitary waves. *Physics of fluids*, 29 :650–655, 1986.

[Tan07] S. Tancogne. *Calcul numérique et stabilité d'écoulements diphasiques tridimensionnels en microfluidique.* PhD thesis, Université Bordeaux 1, 2007.

[TB05] S. Tanguy and A. Berlemont. Application of a level set method for simulation of droplet collisions. *International Journal of Multiphase Flow*, 31 :1015–1035, 2005.

[TE00] A.-K. Tornberg and B. Engquist. A finite element based level-set method for multiphase flow applications. *Computing Visualization in Science*, 3 :93–101, 2000.

[TO00] T.E. Tezduyar and Y. Osawa. Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :411–430, 2000.

[Try07] S. Tryggvason. Using dns to understand bubbly flows. *Von Karman Institute for Fluid Dynamics*, Lecture series 2007-07, 2007.

[TT09] H. Terashima and G. Tryggvason. A front-tracking/ghost-fluid method for fluid interfaces in compressible flows. *Journal of Computational Physics*, 228 :4012–4037, 2009.

[Tur93] E. Turkel. Review of preconditioning techniques for fluid dynamics. *Appl. Numer. Math.*, 21, 1993.

[Tur09] S. Turek. Fem techniques for incompressible multiphase flow based on level set and phase field approaches. *ENUMATH*, 2009.

[Uka86] S. Ukai. The incompressible limit and the initial layer of the compressible euler equation. *J. Math. Kyoto Univ.*, 2 :323–331, 1986.

[VCLR04] S. Vincent, J. P. Caltagirone, P. Lubin, and R. P. Randrianarivelo. An adaptative augmented lagrangian method for three-dimensional multimaterial flows. *Computers & Fluids*, 33 :1273–1289, 2004.

[Vig07] P. Vigneaux. *Méthodes Level Set pour des problèmes d'interface en microfluidique.* PhD thesis, Université Bordeaux 1, 2007.

[WS95] M. Weiss and A. Smith. Preconditioning applied to variable and constant density flows. *AIAA*, 22, 1995.

[WTL08] C. Wang, H. Tang, and T. Liu. An adaptive ghost fluid finite volume method for compressible gas-water simulations. *Journal of Computational Physics*, 227 :6385–6409, 2008.

[Xia04] F. Xiao. Unified formulation for compressible and incompressible flows by using multi-integrated moments i : one-dimensional inviscid compressible flow. *Journal of Computational Physics*, 195 :629–654, 2004.

[XRS06] F. Xiao, A. A. Ryosuke, and I. Satoshi. Unified formulation for compressible and incompressible flows by using multi-integrated moments ii : Multi-dimensional version for compressible and incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, 213 :31–56, 2006.

[Yab91] T. Yabe. A universal cubic interpolation sovler for compressible and incompressible fluids. *Shock Waves*, 1 :187–195, 1991.

[YMM97] T. Yasuda, H. Mutsuda, and N. Mizutani. Kinematic of overtuning solitary waves and their relations to breaker types. *Coastal Engineering*, 29 :317–346, 1997.

[YW91] T. Yabe and P.-Y. Wang. Unified numerical procedure for compressible and incompressible fluid. *Journal of The Physical Society of Japan*, 60, N°7 :2105–2108, 1991.

[YX95] T. Yabe and F. Xiao. Description of complex and sharp interface with fixed grids in incompressible and compressible fluid. *Computers Math. Applic.*, 29,N°1 :15–25, 1995.

[YY99] S.Y. Yoon and T. Yabe. The unified simulation for incompressible and compressible flow by the predictor-corrector scheme based on the cip method. *Computer Physics Communications*, 119 :149–158, 1999.

[Zal07] S. Zaleski. Vof and interface tracking. *Von Karman Institute for Fluid Dynamics*, Lecture series 2007-07, 2007.

Eléments finis stabilisés pour des écoulements diphasiques compressible-incompressible

Résumé : Dans cette thèse, nous nous intéressons à la simulation numérique d'écoulements instationnaires de deux fluides visqueux non miscibles, séparés par une interface mobile. Plus particulièrement des écoulements sans choc constitués d'une phase gazeuse et d'une phase liquide sont considérés. Pour modéliser de tels écoulements, une approche dans laquelle le gaz est décrit par les équations de Navier-Stokes compressible et le liquide par les équations de Navier-Stokes incompressible est proposée. C'est le couplage de ces deux modèles qui constitue l'originalité et l'enjeu principal de de cette thèse. Pour traiter cette difficulté majeure, une méthode globale (i.e. la même dans chaque phase) et simple à mettre en œuvre est élaborée. L'utilisation des équations de Navier-Stokes formulées de façon unifiée pour les inconnues primitives (pression, vitesse et température) constitue le point de départ pour la construction de notre méthode qui repose sur les composants suivants :

- une méthode d'éléments finis stabilisés pour la discrétisation spatiale des équations de Navier-Stokes ;
- une approche Level Set pour représenter précisément l'interface dont l'équation de transport a été résolue par une méthode de type Galerkin Discontinu ;
- et des grandeurs moyennées pour traiter les discontinuités à l'interface.

Le bon comportement de notre approche est illustré sur différents tests mono et bi-dimensionnels.

Mots clés : Ecoulement diphasique, Interface, Navier-Stokes compressible, Navier-Stokes Incompressible, Eléments finis stabilisés, Méthode Level Set

Stabilized finite element method for incompressible-compressible two-phases flows

Abstract : In this thesis, we are interested in the numerical simulation of instationnary viscous flows of two immiscible fluids, separated by a mobile interface. In particular, flows without shock composed of a gas phase and a liquid phase are considered. In order to modelize such flows, an approach in which the gaz is discribed by compressible Navier-Stokes equations and the liquid by incompressible Navier-Stokes équations is proposed. The coupling between these two models constitutes the originality and the stake of this thesis. To treat this important difficulty, a global (i.e. the same for each phase) and simple method is elaborated. In our procedure we propose, using the Navier-Stokes equations formulated in set of primitives unknowns, to elaborate a strategy that relies on the follow components :

- the stabilized finite element method to discretize spatially the Navier-Stokes equations ;
- the Level Set method for tracking the interface precisely with a discontinuous Galerkin method to solve the associated transport equation ;
- and some averaged quantities to treat the discontinuities at the interface.

The good behaviour of this approach is performed on both one and two spatial dimensions.

Keywords : Diphasic flow, Interface, Compressible Navier-Stokes, Incompressible Navier-Stokes, Stabilized finite element, Level Set method