



**HAL**  
open science

# Deux Méthodes d'Approximation pour un Contrôle Optimal Semi-Décentralisé pour des Systèmes Distribués

Youssef Yakoubi

► **To cite this version:**

Youssef Yakoubi. Deux Méthodes d'Approximation pour un Contrôle Optimal Semi-Décentralisé pour des Systèmes Distribués. Mathématiques [math]. Université de Franche-Comté, 2010. Français. NNT: . tel-00565898

**HAL Id: tel-00565898**

**<https://theses.hal.science/tel-00565898>**

Submitted on 15 Feb 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Deux Méthodes d'Approximation pour un Contrôle Optimal Semi-Décentralisé pour des Systèmes Distribués

## THÈSE DE DOCTORAT

présentée et soutenue publiquement le 15 juillet 2010

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Franche Comté – Besançon  
Spécialité Sciences pour l'Ingénieur

par

Youssef Yakoubi

### Composition du jury

*Rapporteurs :* Bassam BAMIEH Professeur, University of California at Santa Barbara, Etats-Unis  
Christian LUBICH Professeur, Universität Tübingen, Allemagne

*Examineurs :* Eric COLINET  
Manuel COLLET  
Yann LE GORREC  
Michel LENCZNER (Directeur de thèse)  
Gérard MONTSENY

Mis en page avec la classe thloria.

## Remerciements

Mes premiers remerciements sont pour mon directeur Michel Lenczner. Je lui exprime toute ma gratitude pour l'encadrement qu'il a pu m'apporter tout au long de ce sinueux travail. Sa motivation, sa patience, sa disponibilité, son exigence, ses remarques et encouragements, mais aussi et à juste titre ses remontrances, m'ont permis de soutenir aujourd'hui ma thèse de doctorat. Je tiens donc à le remercier du fonds du cœur pour tout cela.

Je remercie messieurs Bassam Bamieh et Christian Lubich qui ont tous deux accepté de me consacrer le temps nécessaire à rapporter ma thèse. Leurs remarques et l'intérêt qu'ils ont apporté à mon travail ont permis d'ajouter à la qualité du manuscrit.

Eric Colinet, Manuel Collet, Yann Le Gorrec et Gérard Montseny m'ont fait l'honneur d'accepter d'être membre de mon jury, je les en remercie.

Je remercie également le directeur du Département Temps-Fréquence Monsieur Bernard Dulmet pour son accueil et sa gentillesse.

L'environnement attentif et la rigueur du travail apportés par les secrétaires du Laboratoire Jacques-Louis Lions (LJLL), Mesdames Danièle Boulic et Liliane Ruprecht, du département Temps-Fréquence, Madame Fabienne Cornu et de l'école doctorale SPIM, Mesdames Rachel Langlet et Mariette Jobard ont permis que cette thèse soit soutenue enfin, et à la bonne date. Un grand merci donc pour tant de disponibilité!

Je tiens tout particulièrement à remercier Monsieur Yvon Maday qui a eu la générosité scientifique et humaine de m'inviter au sein du laboratoire qu'il dirige, le LJLL. De belles rencontres scientifiques et humaines ont été issues de cette période, notamment avec Faker Ben-Belgacem, Christine Bernardi, Tahar Boulmezaoud, Frédéric Coquel, Sidi Mahmoud Kaber, Driss Yakoubi, Mohammed El Rhabi, Jean-Baptiste Apoung Kamga, Philippe Hoch, Stéphane Del-Pino, Mourad Ismail, Ulrich Razafison, Mouna Daadaa, Laurent Boudin, Laurent Dumas et sa femme Djamilia, Nicolas, Fred, ... J'ai pu bénéficier d'un encadrement exceptionnel et les en remercie.

Je n'oublie surtout pas notre Didier national avec ses nombreuses blagues et ses attentions amicales, touchantes et généreuses. Un merci à toi Jérôme, et mille excuses pour les fois où je t'ai réveillé en pleine nuit! Mais surtout, un énorme merci à vous, Josiane, pour avoir veillé sur nous avec un amour presque maternel. Le seul mot nécessaire non suffisant à votre égard et à ce que vous avez fait pour moi, est MERCI.

A mes amis du département Temps-Fréquence, je tiens à exprimer toute ma gratitude pour ces bons moments au quotidien, pour leur gentillesse et surtout leur amitié partagée : Dhara Raj Narayan, Hui Hui, YANG Bin et Nguyen Thi Trang. Je leur souhaite une bonne continuation pour tout ce qu'ils entreprendront!

A mes amis d'enfance et de cœur : Brahim (l'mouh'ndice), Abdellah (le sympathique) et sa famille, Hicham (jadarmi), Anass (houbal), sa sœur et sa maman, Khalid (le professeur), Khalid (le terrible), pour leur amitié fidèle, leur précieux et sages conseils. A Mehdi, alias Big Man, car c'est vrai, les années passant le prouvent, tu es un grand homme et à Imane. A Abderrafie (SSSSSSS), qui m'a si gentiment ouvert sa porte à un moment difficile, ce geste que je n'oublierai jamais.

Pour terminer, enfin presque, les remerciements les plus importants. A ma famille, qui est tant pour moi et sans qui je ne serai pas ce que je suis. A mon père, le plus grand

merci est pour toi. Mon rêve était que tu assistes à ma soutenance, et grâce à Allah, à ta persévérance et ton amour, tu m'as exaucé. J'espère que tu es aussi fier de moi que tous les sentiments que j'éprouve pour toi. A ma mère, la plus belle et patiente des mères. Tu as fait de moi l'homme que je suis aujourd'hui. A Nezha, toi ma soeur que j'aime et qui nous manque tant. Ta place dans mon coeur est irremplaçable. A Myriam et sa famille, et à Sarah, mes soeurs chéries sur qui je continue à veiller, même à distance! A Rochdi, un grand merci pour ton soutien et ton aide. A Driss, à qui je souhaite le meilleur pour la suite avec toute sa belle petite famille car tu le mérites, au nom de tout ce que tu as fait pour moi. A Elias (le Bequec), depuis que tu as posé tes yeux sur moi le jour de ta naissance, tu m'as rendu fier d'être ton oncle. A Abdou, pour que la vie le soutienne et lui donne le petit coup de pouce pour qu'il accomplisse ce qu'il souhaite. A Abderrahman, pour que tu sois l'homme que tu aspiras d'être en continuant à suivre le droit chemin.

Hobbi, je te remercie pour ton amour, ton soutien mais aussi l'aide en anglais et les corrections d'orthographe qui m'ont bien aidé. Compte sur mon soutien pour ta thèse ,et pour d'autres..., que je te souhaite de soutenir rapidement et dans les meilleures conditions!

I'm watchin' you through the window  
With your girlfriends from back home  
You're showin' off your dress  
There's laughter and a toast  
From your daddy to the prettiest bride he's ever seen  
Oh won't you baby be in my book of dreams

*Je dédie cette thèse  
à Baba et Tata,  
à Nezha  
à mes frères et soeurs  
à Alexandra*



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>xi</b>
1 Présentation du thème de Recherche . . . . .	xi
2 Contributions principales . . . . .	xiii

## Partie I Approximation par fonctions d'opérateur

<b>Chapitre 1 Approximation Semi-décentralisée du Contrôle Optimal pour des EDPs</b>	<b>1</b>
1.1 Position du problème . . . . .	2
1.2 Enoncé des résultats . . . . .	3
1.2.1 Matrices de fonctions d'un opérateur auto-adjoint . . . . .	3
1.2.2 Opérateurs de contrôle bornés . . . . .	4
1.2.3 Opérateurs de contrôle non bornés . . . . .	10
1.2.4 Extensions . . . . .	12
1.3 Démonstrations . . . . .	12
1.3.1 Quelques propriétés du calcul fonctionnel . . . . .	12
1.3.2 Preuve du Théorème 4 . . . . .	15
1.3.3 Preuve du Théorème 6 . . . . .	15
1.3.4 Preuve du Théorème 10 . . . . .	16
1.4 Conclusion . . . . .	17
<b>Chapitre 2 Application et résultats numériques</b>	<b>19</b>
2.1 Exemple 1 : Equation de la chaleur avec un opérateur de contrôle borné	21
2.1.1 Equation d'état est contrôleur semi-décentralisé . . . . .	21
2.1.2 Construction et étude des contrôleurs semi-décentralisés . . . . .	23



2.2	Exemple 2 : Equation de la chaleur avec un opérateur de contrôle non borné . . . . .	29
2.2.1	Présentation . . . . .	29
2.2.2	Formulation d'un contrôleur semi-décentralisé . . . . .	29
2.3	Exemple 3 : Equation des poutres . . . . .	30
2.3.1	Présentation . . . . .	30
2.3.2	Formulation et étude d'un contrôleur semi-décentralisé . . . . .	31
2.4	Exemple 4 : Equation de la chaleur 2D, contrôle frontière . . . . .	40
2.4.1	Présentation . . . . .	40
2.4.2	Construction et étude du contrôleur semi-décentralisé . . . . .	41
2.5	Exemple 5 : Microscope de Force Atomique (AFM) . . . . .	46
2.5.1	Présentation . . . . .	46
2.5.2	Application . . . . .	49
2.6	Exemple 6 : Contrôle LQG d'une poutre avec actionneurs et capteurs piézo-électriques distribués . . . . .	55
2.6.1	Présentation du problème . . . . .	55
2.6.2	Simplification du modèle : Modèle homogénéisé de plaque . . . . .	56
2.6.3	Formulation du problème de contrôle optimal $LQG$ . . . . .	57
2.6.4	Approximation de la loi de contrôle . . . . .	59
2.6.5	Résultats numériques . . . . .	61
2.7	Conclusion . . . . .	66

**Partie II Formulation par Réalisation Diffusive 67**

**Chapitre 3 Réalisation diffusive d'opérateurs solutions de certaines ED-POs 69**

3.1	Réalisation diffusive d'opérateurs intégraux . . . . .	70
3.1.1	Définition et propriétés générales de la réalisation diffusive . . . . .	70
3.1.2	Réalisation diffusive complexe . . . . .	73
3.1.3	Réalisation diffusive réelle . . . . .	77
3.2	Equations de symboles diffusifs associées à un problème aux limites portant sur un noyau . . . . .	78
3.2.1	Équations des symboles complexes . . . . .	79
3.2.2	Équations des symboles réels . . . . .	82

---

3.3	Approximations numériques . . . . .	83
3.3.1	Enoncé des problèmes aux limites portant sur les parties causale et anti-causale du noyau . . . . .	84
3.3.2	Approximation du symbole diffusif à partir de l'approximation du noyau . . . . .	85
3.3.3	Approximation directe du symbole complexe . . . . .	103
3.3.4	Réalisation diffusive réelle . . . . .	110
3.4	Conclusion . . . . .	112
3.5	Appendice . . . . .	113
<b>Annexes</b>		<b>115</b>
<b>Annexe A Inversion numérique de la transformée de Laplace</b>		<b>115</b>
A.1	Intégrale de Bromwich . . . . .	116
A.1.1	Transformée de Laplace inverse . . . . .	116
A.2	Catégorie d'algorithmes pour l'inversion numérique de la transformée de Laplace . . . . .	116
A.3	Optimisation des contours de Bromwich paramétrisés . . . . .	117
A.3.1	Contour de Talbot . . . . .	118
A.3.2	Contour hyperbolique vs. approximations sinc . . . . .	119
A.3.3	Approximation de la transformée de Laplace inverse sur un in- tervalle en $t$ . . . . .	121
A.4	Contours de Bromwich optimisés . . . . .	121
A.4.1	Estimations d'erreur . . . . .	122
A.4.2	Procédure d'optimisation . . . . .	123
<b>Annexe B Conception de Contrôleurs semi-décentralisés</b>		<b>129</b>
B.1	Systèmes Distribués Invariant en Espace . . . . .	130
B.1.1	Préliminaires . . . . .	130
B.1.2	Approche semi-décentralisée via un problème inverse du contrôle optimal distribué . . . . .	131
B.1.3	Exemples . . . . .	132
B.2	Approche semi-décentralisée via LMI . . . . .	133
B.2.1	Préliminaires . . . . .	134
B.2.2	Caractère bien-posé, stabilité et performance . . . . .	135

B.2.3 Conception du contrôle . . . . . 136

**Bibliographie** . . . . . **137**

# Table des figures

1	Vues du millipede utilisé pour le stockage d'informations (IBM, Zürich-CH)	xii
2	Vues d'un réseau de micro-miroirs. Technologie DLP de projection numérique capable de restituer une image fidèle (Texas Instruments, USA)	xii
3	Peau active distribué et architecture des cellules élémentaires (FEMTO-ST Besançon-FR)	xiii
2.1	(a) Convergence en échelle logarithmique de $\ p_N^{m+1} - p_N^m\ _{L^2(I_\sigma)}$ pour $N = 10$ (b) Erreur entre $p$ et $p_N$ en fonction de $N$ , 30 itérations	27
2.2	Contour $\zeta$ , $R = 3.8$	27
2.3	Erreur entre $p$ et $p_{N,M}$ en fonction de $M$ , pour différentes valeurs de $R$ en échelle logarithmique et pour $N = 10$	28
2.4	(a) Profil espace-temps de l'état optimal discrétisé (b) Profil espace-temps du contrôle optimal discrétisé	28
2.5	Convergence en échelle logarithmique de $\ k_{i,N}^{m+1} - k_{i,N}^m\ _{L^2(I_\sigma)}$ , $i \in \{1, 2\}$	38
2.6	Erreur $E_i$ en fonction de $M$ pour différentes valeurs de $R$ en échelle logarithmique et pour $N = (10, 10)$	38
2.7	(a) Profil espace-temps de l'état optimal discrétisé (b) Profil espace-temps du contrôle optimal discrétisé	39
2.8	Le domaine $\Omega$	40
2.9	Formes des fonctions spectrales $k$	45
2.10	Erreurs entre $k$ et $k_{N,M}$	46
2.11	Matrice de Cantilevers	47
2.12	Domaine à deux-échelles	47
2.13	Formes des fonctions Spectrales $k$	54
2.14	Erreurs entre $k$ et $k_{N,M}$	54
2.15	Gamme de fréquences (a) de $\Delta^2$ (b) de $\Lambda$	60
2.16	Evolutions temporelles <b>(a)</b> du déplacement $w_n$ (en bleu) et de son estimateur $\hat{z}_{1,n}$ (en rouge) <b>(b)</b> de la vitesse $\partial_t w_n$ (en bleu) et de son estimateur $\hat{z}_{2,n}$ (en rouge), pour les modes $n = 1, 2, 3, 4$	63
2.17	Erreurs d'estimations <b>(a)</b> du déplacement $\varepsilon_1$ <b>(b)</b> de la vitesse $\varepsilon_2$ , en fonction du temps à l'échelle logarithmique pour les modes $n = 1, 2, 3, 4$	64
2.18	Circuit électronique distribué	65
3.1	The arc $\theta^+$	71

3.2	Erreurs relatives $e^+$ (en bleu) et $e^-$ (en rouge) en norme $L^2$ , définies par (3.54), en fonction de $N = (N_1, N_2)$ en échelle logarithmique . . . . .	98
3.3	Profil $x$ - $y$ des noyaux (a) $p(x, y)$ , (b) $p^{N^+}(x, y)$ et (c) $p^{N^-}(x, y)$ pour $N = (15, 15)$ . . . . .	98
3.4	Profil $\xi$ - $x$ de (a) $\Re(\mu^{N^+}\psi^{h^+})$ et (b) $\Re(\mu^{N^-}\psi^{h^-})$ pour $h = 0.05$ et $N = (15, 15)$ . . . . .	100
3.5	Erreur relative $E^+$ définie par (3.55), en fonction du nombre de nœuds $M$ et pour différentes valeurs de $h$ ( $h = 0.1, 0.05, 0.02, 0.01$ ) à l'échelle logarithmique. Les traits continus sont associés à l'interpolation linéaire de $u$ (voir Algorithme 5). Les traits discontinus correspondent à l'interpolation constante de $u$ (voir Algorithme 3). En noir, on distingue le calcul avec contour hyperbolique. Enfin, le rouge symbolise le calcul avec contour parabolique. $N = (15, 15)$ . . . . .	101
3.6	Erreur relative $E^-$ définie par (3.55), en fonction du nombre de nœuds $M$ et pour différentes valeurs de $h$ ( $h = 0.1, 0.05, 0.02, 0.01$ ) à l'échelle logarithmique. Les traits continus sont associés à l'interpolation linéaire de $u$ (voir Algorithme 6). Les traits discontinus correspondent à l'interpolation constante de $u$ (voir Algorithme 4). En noir, on distingue le calcul avec contour hyperbolique. Enfin, le rouge symbolise le calcul avec contour parabolique. $N = (15, 15)$ . . . . .	102
3.7	Même commentaire que celui attribué à la Figure 3.5 . . . . .	109
3.8	Même commentaire que celui attribué à la Figure 3.6 . . . . .	110
A.1	Image de la bande d'analyticité dans le $s$ -plan, pour le cas Parabolique (a) et pour le cas Hyperbolique (b) . . . . .	126
A.2	Image de la bande d'analyticité dans le $s$ -plan, pour le cas Parabolique (a) et pour le cas Hyperbolique (b) . . . . .	126
A.3	Maximisation de la fonction $B(\alpha)$ pour le cas où les singularités sont sur l'axe réel négatif et pour $\Lambda = 20$ . . . . .	127
A.4	Contour de Talbot A.5 avec $\sigma = 0$ , $\mu = 2$ , $\lambda = 0.5$ . . . . .	127
B.1	Structure de chaque sous-système (source de l'image : [24]) . . . . .	134
B.2	Structure de chaque contrôleur (source de l'image : [24]) . . . . .	136

# Introduction générale

## 1 Présentation du thème de Recherche

Les systèmes dynamiques distribués sont rencontrés dans de nombreux problèmes scientifiques et d'ingénieries. On s'intéresse à une classe de systèmes régis par des équations aux dérivées partielles linéaires et dans lesquels les observations et les contrôles sont distribués et en grand nombre. Les applications visées concernent principalement les matrices de micro-systèmes et les systèmes intelligents distribués. Dans de telles applications, la réalisation de contrôleurs optimaux semble impossible si leur calcul est effectué sur des architectures de calculateurs centralisés. Cela résulte des limitations d'une part en transmission d'information et d'autre part en puissance de calcul. On envisage d'utiliser des architectures de calculateurs semi-décentralisés, c'est-à-dire de matrices de calculateurs très élémentaires interconnectés seulement entre voisins.

La conception de contrôleurs semi-décentralisés (c'est-à-dire contrôleurs qui se prêtent à être implantés sur des architectures semi-décentralisées) a suscité l'attention de nombreux chercheurs. Cet intérêt s'est ensuite renforcé depuis la progression technologique dans le domaine des matrices de Systèmes Micro-Electro-Mécaniques (MEMS). En effet, la fabrication de grande matrices de dispositifs micro-mécaniques avec des capteurs et des actionneurs incluant l'intégration de contrôle distribué, est devenue à la fois réalisable et prometteuse d'un point de vue économique. On cite les exemples des matrices de micro-cantilevers (voir Figure 1) et de micro-miroirs (voir Figure 2). A l'échelle macroscopique, on se réfère par exemple à la paroi à impédance active [19] et [26] (voir Figure 3).

Le problème que l'on rencontre est que les opérateurs du contrôle optimal sont par nature très non-locaux et donc ne se prêtent pas à être implantés dans des architectures semi-décentralisées. Les travaux présentés dans cette thèse portent sur deux méthodes s'inscrivant dans le cadre des approximations d'opérateurs linéaires, solutions d'équations aux dérivées partielles opératorielle *linéaire* et *non-linéaire*. Ces approximations permettent d'envisager l'implantation en temps réel de tels opérateurs sur des calculateurs ayant une architecture semi-décentralisée.

La première méthode concerne le calcul du contrôle optimal pour des systèmes distribués linéaires. Sa construction repose sur le calcul fonctionnel des opérateurs auto-adjoints et sur la formule de représentation de Dunford-Schwartz. La deuxième méthode est formulée dans le cadre dit des *réalisations diffusives*, pour laquelle on propose deux approches

pour la résolution d'équations aux dérivées partielles opérationnelles linéaires dans des domaines bornés mono-dimensionnels.

Pour les première et deuxième méthodes, des approches numériques sont présentées et analysées dans le cadre d'applications à la théorie du contrôle.

Mes travaux sont utilisés au sein de l'Institut FEMTO-ST dans le cadre de la réalisation d'un logiciel d'aide à la conception de matrices de microsystemes généraux. Les deux méthodes développées dans cette thèse sont applicables à la réalisation de la partie "contrôle" du logiciel. Une thèse a été engagée à l'Institut FEMTO-ST afin de développer la première théorie pour la réalisation d'un organe de commande d'une matrice de microscopes à forces atomiques avec la perspective d'utiliser une approximation par un circuit électronique digital ou analogique. Enfin, un stage a été proposé pour mettre en place l'implémentation de la réalisation diffusive dans un FPGA.

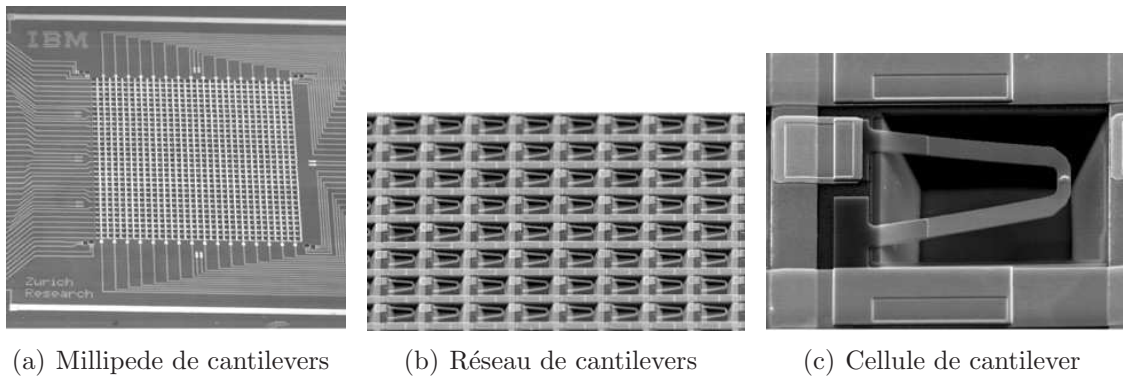


FIG. 1 – Vues du millipede utilisé pour le stockage d'informations (IBM, Zürich-CH)

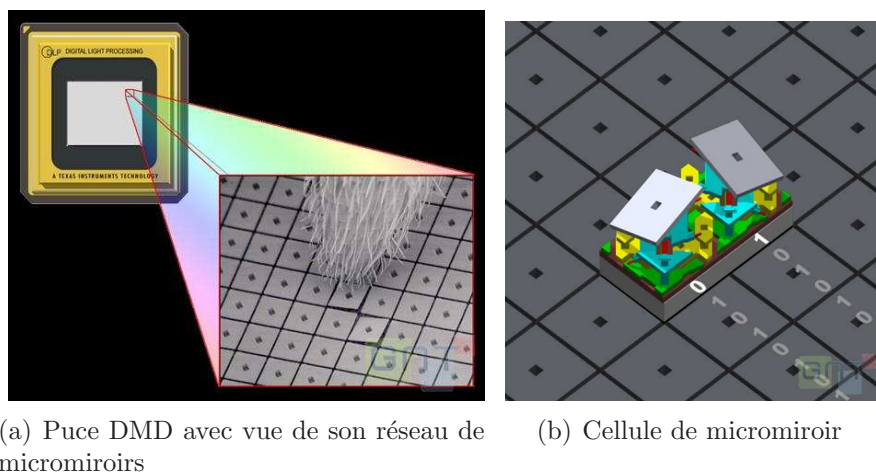


FIG. 2 – Vues d'un réseau de micro-miroirs. Technologie DLP de projection numérique capable de restituer une image fidèle (Texas Instruments, USA)

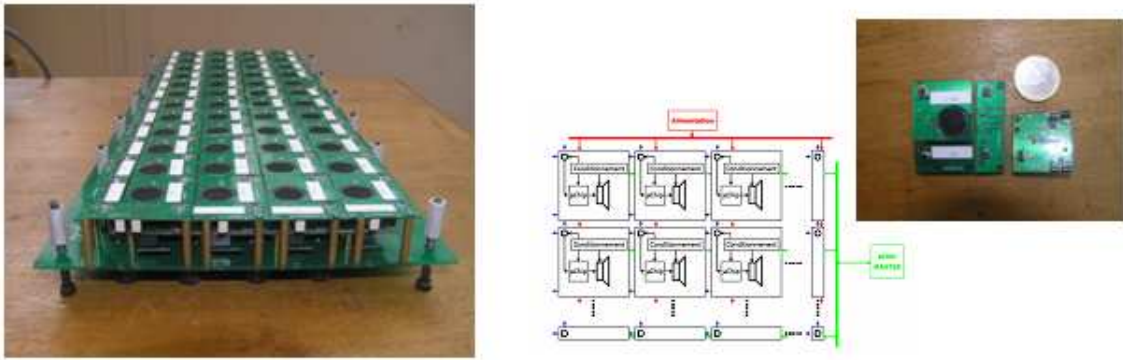


FIG. 3 – Peau active distribué et architecture des cellules élémentaires (FEMTO-ST Besançon-FR)

## 2 Contributions principales

Ce manuscrit comporte deux parties et deux annexes. On y présente chacune des deux méthodes d'approximation d'opérateurs linéaires mentionnées précédemment. En annexes, on trouve les bibliographies concernant l'inversion numérique de la transformée de Laplace, ainsi que quelques approches sur la conception de contrôleurs semi-décentralisés.

### Première Partie : Approximation par fonctions d'opérateurs

**Chapitre 1** Ce chapitre contribue à l'étude de contrôleur semi-décentralisé, associé à des systèmes distribués de grande taille. Diverses techniques ont été établies, nous ne les exposerons pas ici. Cependant, nous citons de récentes approches davantage adaptées aux systèmes distribués, telles que [4], [24] et [48], ainsi que d'autres études accompagnées de leur bibliographie. Ce travail s'appuie sur la conception en temps réel de la loi de contrôle pour les matrices de microsystemes. Parmi elles, nous citons l'exemple des matrices de microscopes à force atomique. Pour cette application spécifique, nous proposons le modèle récent décrit dans [53]. De tels systèmes sont régis par des équations aux dérivées partielles. Ils sont composés d'une distribution périodique de microsystemes interconnectés, eux-mêmes constitués d'une partie mécanique de structure, de capteurs et d'actionneurs enrichis d'une capacité de traitement.

Nous distinguons trois architectures distinctes de processeurs distribués. Une architecture entièrement décentralisée est composée de processeurs qui ne sont pas reliés entre eux. Pour une architecture semi-décentralisée, les processeurs sont reliés à leurs voisins. Enfin, pour une architecture centralisée, ils sont entièrement interconnectés. Par abus de langage, on utilisera dorénavant l'expression *approximation semi-décentralisée* pour traduire la compatibilité avec une architecture semi-décentralisée.

Les papiers [73] et [4] présentent une idée originale d'un schéma d'approximation pour les lois de contrôle optimal habituelles ( $LQR$ ,  $H_2$  et  $H_\infty$ ), qui peuvent être utilisées pour



une architecture semi-décentralisée. Le schéma s'applique à des systèmes distribués, linéaires et invariants en espace. Ils peuvent être continus ou discrets, périodiques ou infinis en espace. Les systèmes invariants en espace sont considérablement simplifiés par l'application de la transformée de Fourier spatiale. Cette dernière est appliquée aux équations opératorielles de Riccati. Ainsi, elles sont transformées en un nombre infini d'équations algébriques de Riccati pouvant être résolues de manière exacte. Puis, l'opérateur de Riccati, solution de l'équation opératorielle de Riccati, est écrit sous la forme d'un opérateur noyau. On montre que ce dernier est exponentiellement décroissant en espace, de sorte que l'approximation semi-décentralisée de cet opérateur peut être obtenue par troncature du noyau.

Dans [42] et [43], une autre méthode est présentée à l'aide d'un exemple publié dans *"Smart Materials and Structures"*. Il s'agit de la méthode *LQR* appliquée au problème de contrôle de vibration d'une plaque mince avec une distribution discrète de capteurs et d'actionneurs piézo-électriques. La loi de contrôle est synthétisée en un système homogénéisé, révélant une distribution continue de capteurs et d'actionneurs. Son application au système réel est effectuée à l'aide d'une discrétisation. Le problème *LQR* est formulé dans le cadre de [22] pour un contrôle de systèmes en dimension infinie avec des opérateurs de contrôle et d'observation bornés. De manière analogue à [4], l'équation opératorielle de Riccati du système homogénéisé est transformée en un nombre infini d'équations algébriques de solution  $p(\lambda)$ , matrice évaluant la fonction paramétrée par  $\lambda$ . On note que  $\lambda$  appartient au voisinage de zéro. Cela est réalisé par une décomposition spectrale au profit de la transformée de Fourier, après avoir introduit les espaces de contrôle et d'observation de sorte que tous les coefficients dans l'équation de Riccati ainsi que sa solution, soient fonctions d'un même opérateur  $\Lambda$ . L'opérateur de Riccati, solution de l'équation opératorielle de Riccati, est montré comme étant égal à la fonction  $p(\Lambda)$ . En conséquence et à partir de l'équation algébrique,  $p(\lambda)$  est approchée par sa série de Taylor au voisinage de zéro. L'approximation résultante traduit directement l'approximation de l'opérateur de Riccati. Il s'agit d'une alternative à la troncature du noyau présentée dans l'article [4] mais elle se limite aux opérateurs  $\Lambda$  ayant un spectre concentré dans un petit intervalle. Cet article inclut également des validations numériques de la stratégie développée.

Ce chapitre provient de [43] et apporte un certain nombre de contributions. Il est formulé pour un cadre général de contrôle pour des systèmes en dimension infinie au lieu d'une application spécifique. Il est développé tant pour des opérateurs de contrôle et d'observation bornés (cf [22]), que pour le cadre des opérateurs de contrôle non bornés (cf [5]). Dans les deux cas, contrôle et observation doivent être répartis sur la totalité du domaine. En principe, cette stratégie s'applique pour des domaines bornés ou non bornés aussi bien que pour des systèmes discrets ou continus indépendamment de l'invariance des coefficients. Cependant, nous avons volontairement restreint la méthode d'approximation aux systèmes régis par des équations aux dérivées partielles définies dans des domaines bornés.

De plus, l'obtention de l'équation algébrique de Riccati est basée sur un calcul fonctionnel rigoureux. Nous avons choisi d'utiliser la théorie spectrale d'opérateurs auto-adjoints

ayant un spectre réel, compacts ou non compacts, de manière à pouvoir utiliser des domaines bornés ou non bornés. Le calcul fonctionnel est adapté à des matrices d'opérateurs figurant par exemple dans l'équation opératorielle de Riccati, associées aux problèmes de second ordre comme les équations d'onde ou de plaque. On présentera ensuite une méthode globale permettant à tous les coefficients de l'équation opératorielle de Riccati d'être fonctions d'un seul opérateur.

Enfin, on constate que les schémas proposés dans [43] et [4] pour des approximations semi-décentralisées, sont applicables uniquement dans des cas particuliers, voir les Remarques 8 et 9. C'est pourquoi nous présentons un troisième schéma dont le degré de semi-décentralisation est constant, et qui s'applique également pour le cas d'un large spectre. Il est basé sur la formule de représentation de Dunford-Schwartz. Pour l'appliquer,  $p(\lambda)$  doit être approchée au voisinage d'un spectre dans  $\mathbb{C}$ . De plus, nous pouvons considérer plusieurs stratégies et nous choisissons d'établir la nature de l'approximation en fonction du comportement asymptotique de  $p(\lambda)$  au voisinage de 0. Ainsi, nous utiliserons soit une approximation polynomiale, soit une approximation rationnelle de  $p(\lambda)$  au voisinage du spectre dans  $\mathbb{R}$ . Ces approximations peuvent être trivialement prolongées dans  $\mathbb{C}$ .

**Chapitre 2** Dans ce chapitre on applique la théorie détaillée dans le chapitre précédent. La théorie générale est appliquée à six exemples distincts, des résultats numériques y étant également présentés. On a traité différents cas où l'opérateur d'entrée est borné, ou pas. Puis, nous avons étudié la situation où les opérateurs de contrôle et d'observation sont fonctions de l'opérateur  $\Lambda$ , ou pas. On s'est également intéressés à des problèmes de type multi-échelles avec des contrôles considérés à l'échelle micro. Enfin, on a appliqué notre théorie au cadre  $LQG$ . Après avoir appliqué la théorie aux exemples, nous avons cherché à approcher l'opérateur contrôleur.

## Deuxième Partie : Formulation par Réalisation Diffusive

**Chapitre 3** Soit un opérateur  $u \mapsto z = Pu$ , solution d'une équation aux dérivées partielles linéaires opératorielles dans un domaine mono-dimensionnel. Un exemple, détaillé dans ce chapitre, est la solution  $P$  de l'équation de Lyapunov, issue de la théorie du contrôle optimal pour l'équation de la chaleur. Une version simplifiée s'écrit

$$\frac{d^2}{dx^2}Pu + P\frac{d^2}{dx^2}u = Qu \quad \text{pour tout } u \in H_0^1(0, 1),$$

avec  $Q$  un opérateur donné. La méthode que nous proposons est à la fois rapide et facile à implémenter pour des architectures semi-décentralisées. Sa formulation utilise une technique intéressante et applicable à une réalisation d'opérateur causal, largement développée dans le cadre d'opérateurs en temps. L'un des avantages connus de cette approche est son faible coût en temps de calcul, voir les papiers de G. Montseny *et al.* [55], [69], [51], [12] et de D. Matignon *et al.* [40], [39], [65] pour les représentations d'opérateurs pseudo-différentiels variés et leur approximation. Les travaux de C. Lubich *et al.* [63], [62], [58], [21], [76], [59] reprennent la même idée appliquée à des opérateurs de convolution et développent des méthodes numériques optimisées. Récemment, C. Casenave et E. Montseny

ont montré dans [17] comment cette approche implique la stabilité des schémas pour des équations intégral-différentielles. G. Montseny a également publié une monographie [70] sur le sujet. Il y introduit la notion de *réalisation diffusive* et l'applique à de nombreux champs. Tout au long de ce chapitre, on adoptera la même terminologie. Jusqu'à présent, une grande partie des études sur la réalisation diffusive a été consacrée à des problèmes mono-dimensionnels. On souligne le fait que cette théorie peut être appliquée en dimension quelconque. Un exemple est traité dans [70], il est formulé pour un espace de dimension supérieure à un et appliqué au traitement d'image. On en conclut que la théorie présentée dans ce chapitre peut être étendue à des opérateurs solutions d'équations aux dérivées partielles opératorielles posées dans des domaines multi-dimensionnels.

La plus grande partie des travaux liés à la représentation diffusive traitent d'opérateurs formellement connus. Une des particularités de ce chapitre consiste à considérer des opérateurs solution d'une équation opératorielle, ils ne sont donc pas explicitement connus. On considère la décomposition de la réalisation d'un opérateur, à noyau,

$$z = Pu(x) = \int_0^1 p(x, y)u(y) dy,$$

et la décomposition  $z = z^+ + z^-$  en parties causale et anti-causale,

$$z^+ = \int_0^x p(x, y)u(y) dy \quad \text{et} \quad z^- = \int_x^1 p(x, y)u(y) dy.$$

La réalisation diffusive de  $P$  est divisée en deux parties

$$z^+(x) = \int \mu^+(x, \xi)\psi^+(x, \xi) d\xi \quad \text{et} \quad z^-(x) = \int \mu^-(x, \xi)\psi^-(x, \xi) d\xi, \quad (1)$$

où  $\psi^+$  et  $\psi^-$  dépendent de l'historique de la donnée d'entrée  $u$ . Elles sont solution d'équations différentielles ordinaires directe et rétrograde en  $x$ ,

$$\partial_x \psi^+(x, \xi) + \theta^+(\xi)\psi^+(x, \xi) = u(x) \quad \text{avec} \quad \psi^+(0, \xi) = 0, \quad (2)$$

$$\text{et} \quad \partial_x \psi^-(x, \xi) - \theta^-(\xi)\psi^-(x, \xi) = u(x) \quad \text{avec} \quad \psi^-(1, \xi) = 0, \quad (3)$$

où  $\xi$  est un paramètre réel. On remarque qu'elles sont indépendantes de  $P$ . A l'inverse, les coefficients  $\mu^+$  et  $\mu^-$ , appelés *symboles  $\theta$ -diffusifs*, dépendent de  $P$  mais pas de  $u$ . Les fonctions  $\xi \mapsto \theta^+(\xi)$  et  $\theta^-(\xi)$  paramétrisent deux chemins fermés dans le plan complexe. Deux méthodes différentes d'obtention de  $\mu^+$  et  $\mu^-$  sont étudiées dans ce chapitre, suivant le choix de  $\theta^\pm$ . Pour les distinguer, on parlera de méthode du *symbole diffusif complexe* et de méthode du *symbole diffusif réel*. On construit les symboles diffusifs par étapes. Les fonctions

$$y \mapsto p^+(x, x - y) \quad \text{et} \quad y \mapsto p^-(x, x + y) \quad (4)$$

sont prolongées analytiquement à  $\mathbb{R}^+$ , ainsi leur transformée de Laplace  $\mathcal{P}^+$  et  $\mathcal{P}^-$  est bien-définie. On suppose que  $\mathcal{P}^+$  et  $\mathcal{P}^-$  admettent des prolongements holomorphes de  $\mathbb{C}^+$  au domaine entier borné à gauche par  $-\theta^\pm$ , tendant vers 0 à l'infini. Après application du lemme de Jordan et du théorème de Cauchy, les intégrales suivant  $-\theta^\pm$  sont considérés au

sens de la trace droite de distributions afin de prendre en compte d'éventuelles singularités de  $\mathcal{P}^\pm$  en  $-\theta^\pm$ .

Dans le cas des symboles diffusifs réels,  $\xi \mapsto \mu^+(\cdot, \xi)$  et  $\xi \mapsto \mu^-(\cdot, \xi)$  peuvent être définis de manière équivalente comme l'image par la transformée de Laplace inverse du prolongement analytique de  $y \mapsto p^+(x, x - y)$  et de  $y \mapsto p^-(x, x + y)$ . Dans ce cas, les chemins  $\theta^+$  et  $\theta^-$  sont des courbes fermées dégénérées en le demi-axe  $\mathbb{R}^+$ .

Dans ce chapitre, on obtient les équations satisfaites par  $\mu^+$  et  $\mu^-$  à partir de celles de  $p^+$  et de  $p^-$  pour le cas complexe comme pour le cas réel. Nous limitons notre étude à des situations où les parties causale et anti-causale du noyau,  $p^+$  et  $p^-$ , sont solution de problèmes aux limites découplés. C'est précisément le cas pour notre exemple de l'équation de Lyapunov, voir l'équation (3.32).

Pour déterminer l'équation satisfaite par les symboles diffusifs réels, on utilise une décomposition en termes réguliers et en termes singuliers dans des calculs effectués analytiquement. Pour le cas complexe, on établit un critère pour localiser les singularités de  $\mathcal{P}^+$  et  $\mathcal{P}^-$ , ce qui aide à choisir le contour. Puis, on introduit les formulations variationnelles des équations de  $\mu^+$  et  $\mu^-$  qu'on approche grâce à une base convenablement choisie. Ainsi, il n'est pas nécessaire de calculer les approximations  $p^{N^+}$  et  $p^{N^-}$ .

Une fois les symboles diffusifs obtenus, on s'intéresse à l'approximation numérique des intégrales dans (1). La réalisation diffuse  $z(x) = z^+(x) + z^-(x)$  étant évaluée aux points  $(x_n)_{n=0, \dots, \mathcal{N}} \in (0, 1)$ , les valeurs correspondantes  $z(x_n)$  sont évaluées par la formule de quadrature

$$z_n = \sum_k \mu_{n,k}^+ \psi_{n,k}^+ + \mu_{n,k}^- \psi_{n,k}^-, \quad (5)$$

avec  $\mu_{n,k}$  des valeurs discrètes de  $\mu$  aux points  $x_n$  et  $\xi_k$ , et  $\psi_{n,k}$  une approximation discrète de  $\psi$  en  $x_n$  et  $\xi_k$ . Une telle formule de quadrature est similaire à celle utilisée pour la transformation de Laplace inverse. Cette méthode a été largement étudiée dans la littérature. Dans ce chapitre, on choisit la formule de trapèze comme formule de quadrature. Ses paramètres ont été optimisés pour trois différentes classes de contours (parabolique, hyperbolique et cotangent). Le dernier, également appelé contour de Talbot, a été étudié par A. Talbot dans [84], publié en 1979 et récemment revisité par L.N. Trefethen et J.A.C. Weideman dans [86]. Des contours paraboliques ont été examinés par I.P. Gavriluk et V.L. Makarov dans [31]. Le cas de contours hyperboliques, un choix particulièrement attractif pour des généralisations à des opérateurs sectoriels, a été traité par divers auteurs, voir [58], [60], [66] et [79]. Notre calcul a été basé sur ces contours optimisés et des formules de quadrature que nous détaillerons par la suite.

Comme il a été dit, un autre intérêt de la méthode de réalisation diffuse, appliquée à des opérateurs distribués en espace, est qu'elle est implémentable (en vue de calculs en temps réel) sur des architectures semi-décentralisées à faible granularité. On considère que les données dans l'algorithme précédent sont allouées à  $\mathcal{N} + 1$  processeurs associés aux points de discrétisation  $(x_n)_{n=0, \dots, \mathcal{N}}$ . On dira qu'un calcul est adapté à une architecture semi-décentralisée, si les communications n'impliquent que des voisins proches. Ainsi, un

algorithme est considéré comme adapté à une telle architecture si les opérations font intervenir des fonctions calculées en  $x_n$  et seulement en ses voisins  $x_{n-1}$  et  $x_{n+1}$ . Pour un calcul en temps réel, on considère que les symboles diffusifs sont calculés une fois pour toute. Seul le calcul de  $\psi_{n,k}^+$  et de  $\psi_{n,k}^-$ , puis de  $z_n$  par (5), doit être réalisé à chaque pas de temps. La sommation (5) est clairement une opération locale (en espace), et la résolution des problèmes de Cauchy (2-3) requiert des opérations entre nœuds voisins uniquement. En effet, en considérant les relations de récurrences directe et rétrograde associées à une méthode de discrétisation que l'on établira par la suite,

$$\begin{aligned} \psi_{n+1,k}^+ &= \psi_{n,k}^+ e^{-\theta^+(\zeta_k)(x_{n+1}-x_n)} + \frac{e^{-\theta^+(\zeta_k)(x_{n+1}-x_n)} - 1}{-\theta^+(\zeta_k)} u(x_n), \quad \text{avec } \psi_{0,k}^+ = 0, \\ \text{et } \psi_{n,k}^- &= \psi_{n+1,k}^- e^{-\theta^-(\zeta_k)(x_{n+1}-x_n)} - \frac{e^{-\theta^-(\zeta_k)(x_{n+1}-x_n)} - 1}{-\theta^-(\zeta_k)} u(x_n), \quad \text{avec } \psi_{1,k}^- = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

l'approximation  $\psi_{n+1,k}^+$  (resp.  $\psi_{n,k}^-$ ) au nœud  $x_{n+1}$  (resp.  $x_n$ ) est calculée à l'aide de l'approximation  $\psi_{n,k}^+$  (resp.  $\psi_{n+1,k}^-$ ) au nœud précédent  $x_n$  (resp. suivant  $x_{n+1}$ ) pour tout  $k$ . Suivant le même procédé, d'autres relations de récurrences directe et rétrograde ont également été établies sous la forme :

$$\begin{aligned} \psi_{n+1,k}^+ &= \psi_{n,k}^+ e^{-\theta^+(\zeta_k)(x_{n+1}-x_n)} \\ &+ \left( \frac{u(x_n)}{-\theta^+(\zeta_k)} + \frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{\theta^+(\zeta_k)^2 (x_{n+1} - x_n)} \right) e^{-\theta^+(\zeta_k)(x_{n+1}-x_n)} \\ &- \left( \frac{u(x_{n+1})}{-\theta^+(\zeta_k)} + \frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{\theta^+(\zeta_k)^2 (x_{n+1} - x_n)} \right), \quad \text{avec } \psi_{0,k}^+ = 0, \\ \text{et } \psi_{n,k}^- &= \psi_{n+1,k}^- e^{-\theta^-(\zeta_k)(x_{n+1}-x_n)} \\ &- \left( \frac{u(x_{n+1})}{-\theta^-(\zeta_k)} + \frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{\theta^-(\zeta_k)^2 (x_{n+1} - x_n)} \right) e^{-\theta^-(\zeta_k)(x_{n+1}-x_n)} \\ &+ \left( \frac{u(x_n)}{-\theta^-(\zeta_k)} + \frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{\theta^-(\zeta_k)^2 (x_{n+1} - x_n)} \right), \quad \text{avec } \psi_{N,k}^- = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

A présent, on met en évidence l'avantage de notre approche en comparaison à d'autres travaux [4], [49], [54] consacrés au problème des réalisations, sur des architectures semi-décentralisées, d'opérateurs issus du contrôle optimal pour des équations aux dérivées partielles. De tels opérateurs sont solution d'équations de Riccati (équations non linéaires) qui ne s'inscrivent pas dans le cadre de ce chapitre. Cependant, les théories sont suffisamment générales pour être appliquées à des équations opératoriennes linéaires. L'article [4] du groupe de B. Bamieh traite du cas particulier d'équations aux dérivées partielles posées dans l'espace  $\mathbb{R}^d$  avec des contrôles et observations distribués sur l'espace tout entier. L'article [24] traite d'une classe très restreinte de problèmes aux limites avec des observations et des contrôles également distribués sur tout l'espace. La méthode utilisée dans [54] est applicable à une classe bien plus large de problèmes aux limites, posés dans des domaines bornés et non bornés, avec la même restriction sur les opérateurs de contrôle et d'observation. Dans le présent travail, le domaine est borné et les opérateurs ne sont

pas nécessairement distribués sur tout le domaine. Les principales limitations sont que les équations opératorielles sont linéaires et posées dans des domaines mono-dimensionnels. De plus, les problèmes aux limites résolus par  $p^+$  et  $p^-$  doivent être découplés. Ces trois hypothèses ont été introduites pour des raisons de simplicité, mais aucune n'est un obstacle à une généralisation plus poussée.

### **Annexe A : Inversion Numérique de la Transformée de Laplace**

On propose dans cette annexe une bibliographie sur différentes méthodes numériques qui ont été mises en place pour traiter le problème de l'inversion numérique de la transformée de Laplace. L'efficacité de la plupart d'entre elles dépend du bon choix des paramètres qui doivent être réglés de façon expérimentale. On présente les quatre approches algorithmiques les plus efficaces pour l'inversion numérique de la transformée de Laplace. La première est basée sur un développement en séries de Fourier. La seconde utilise un développement en séries suivant les polynômes de Laguerre. La troisième est la combinaison des fonctionnelles de Gaver. La quatrième est fondée sur une idée de Talbot [84] qui consiste à déformer le contour de Bromwich afin de faciliter l'intégration numérique. Cette dernière approche semble la plus efficace et la plus adaptée au calcul en temps réel de la réalisation diffusive. De plus, l'implémentation de son algorithme peut être automatisée. C'est pourquoi on a privilégié sa présentation.

### **Annexe B : Conception de Contrôleurs semi-décentralisés**

Dans cette annexe, on expose une bibliographie portant sur quelques approches concurrentes de réalisation de contrôleurs semi-décentralisés.



Première partie

Approximation par fonctions  
d'opérateur





# Chapitre 1

## Approximation Semi-décentralisée du Contrôle Optimal pour des EDPs

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Position du problème</b> . . . . .	<b>2</b>
<b>1.2</b>	<b>Enoncé des résultats</b> . . . . .	<b>3</b>
1.2.1	Matrices de fonctions d'un opérateur auto-adjoint . . . . .	3
1.2.2	Opérateurs de contrôle bornés . . . . .	4
1.2.3	Opérateurs de contrôle non bornés . . . . .	10
1.2.4	Extensions . . . . .	12
<b>1.3</b>	<b>Démonstrations</b> . . . . .	<b>12</b>
1.3.1	Quelques propriétés du calcul fonctionnel . . . . .	12
1.3.2	Preuve du Théorème 4 . . . . .	15
1.3.3	Preuve du Théorème 6 . . . . .	15
1.3.4	Preuve du Théorème 10 . . . . .	16
<b>1.4</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>17</b>

---

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section 1.1, on présente le problème d'approximation semi-décentralisée d'un contrôleur *LQR*. Les résultats généraux sont énoncés dans la section 1.2, suivis de leur preuve dans la section 1.3.

## 1.1 Position du problème

Nous considérons le problème de Régulation Quadratique Linéaire *LQR* (terme issu de l'anglais *Linear Quadratic Regulator*) associé à une équation d'état distribuée. Il est posé dans un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  avec une distribution discrète d'actionneurs dans tout le domaine. On note  $h$  la distance entre les actionneurs,  $z$  la variable d'état et  $u_h$  la variable de contrôle appartenant à  $U_h$ , un espace de dimension finie muni de la même norme qu'un espace  $U$  de dimension infinie, pour tout  $h$ . La formulation abstraite du problème *LQR* est sous sa forme standard :

$$\begin{cases} \partial_t z(t) = A_h z_h(t) + B_h u_h(t) \text{ pour } t > 0 \text{ et } z_h(0) = z_0, \\ J(z_0, u) = \int_0^{+\infty} \|Cz_h\|_Y^2 + (Su, u)_U dt, \\ \min_{u_h \in U_h} J(z_0, u_h). \end{cases} \quad (1.1)$$

Sous des hypothèses classiques, la solution de ce problème est

$$u_h^* = -S^{-1}B_h^*P_h z_h,$$

où  $P_h$  est solution de l'équation opératorielle formelle de Riccati

$$A_h^*P_h + P_h A_h - P_h B_h S^{-1}B_h^*P_h + C^*C = 0. \quad (1.2)$$

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode d'approximation de  $P_h$  pouvant être implémentée sur une architecture semi-décentralisée. Tout d'abord,  $P_h$  est approché par la solution  $P$  de l'équation de Riccati associée au problème *LQR* pour l'équation d'état avec une distribution continue d'actionneurs obtenue en augmentant *mathématiquement* le nombre d'actionneurs jusqu'à l'infini. On écrit le problème asymptotique,

$$\begin{cases} \partial_t z(t) = Az(t) + Bu(t) \text{ pour } t > 0 \text{ et } z(0) = z_0, \\ \min_{u \in U} J(z_0, u). \end{cases} \quad (1.3)$$

Sa solution est

$$u^* = -S^{-1}B^*Pz,$$

$P$  étant la solution de l'équation opératorielle de Riccati,

$$A^*P + PA - PBS^{-1}B^*P + C^*C = 0. \quad (1.4)$$

Une fois  $P_h$  approchée par  $P$ , nous construisons une approximation semi-décentralisée de la réalisation  $Pz$ . Dans ce chapitre, nous focaliserons notre attention sur la construction de cette approximation.

Dans ce qui suit, on se restreint au cas particulier où  $A_h = A$  et  $P_h$  est une approximation convergente de  $P$  quand  $h$  tend vers zéro. Ce point ne sera pas traité et on se référera aux articles [46], [45], [44] portant sur l'homogénéisation de problème de contrôle optimal et sur l'étude générale de l'homogénéisation.

## 1.2 Enoncé des résultats

La norme et le produit scalaire d'un espace de Hilbert  $E$  sont notés respectivement  $\|\cdot\|_E$  et  $(\cdot, \cdot)_E$ . Pour un second espace de Hilbert  $F$ ,  $\mathcal{L}(E, F)$  représente l'espace des opérateurs linéaires continus définis de  $E$  dans  $F$ . De plus,  $\mathcal{L}(E, E)$  sera noté  $\mathcal{L}(E)$ . On dit que  $\Phi \in \mathcal{L}(E, F)$  est un isomorphisme de  $E$  dans  $F$  si  $\Phi$  est bijective et si son inverse est continu.

### 1.2.1 Matrices de fonctions d'un opérateur auto-adjoint

La méthode d'approximation de  $P$  est basée sur le concept de matrices de fonctions d'un opérateur auto-adjoint, on consacre donc cette sous-section à leur définition. Soit  $\Lambda$  un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert séparable  $X$  de domaine  $D(\Lambda)$ . Nous désignons par  $\sigma(\Lambda)$  son spectre et par  $I_\sigma = (\sigma_{\min}, \sigma_{\max})$  un intervalle ouvert qui inclut  $\sigma(\Lambda)$ . Nous rappelons que si  $\Lambda$  est compact alors  $\sigma(\Lambda)$  est borné et constitué de valeurs propres réelles  $\lambda_k$ . Elles sont solution du problème de valeurs propres  $\Lambda\phi_k = \lambda_k\phi_k$  où  $\phi_k$  est un vecteur propre associé à  $\lambda_k$  et choisi normalisé dans  $X$ , i.e. tel que  $\|\phi_k\|_X = 1$ . Pour une fonction  $f$  donnée à valeurs réelles, continue sur  $I_\sigma$ ,  $f(\Lambda)$  est un opérateur linéaire auto-adjoint sur  $X$  défini par

$$f(\Lambda)z = \sum_{k=1}^{\infty} f(\lambda_k) z_k \phi_k \quad \text{où} \quad z_k = (z, \phi_k)_X,$$

de domaine

$$D(f(\Lambda)) = \left\{ z \in X \mid \sum_{k=1}^{\infty} |f(\lambda_k) z_k|^2 < \infty \right\}.$$

Alors, si  $f$  est une matrice  $n_1 \times n_2$  de fonctions  $f_{ij}$  à valeurs réelles et continues sur  $I_\sigma$ ,  $f(\Lambda)$  est une matrice d'opérateurs linéaires  $f_{ij}(\Lambda)$  de domaine

$$D(f(\Lambda)) = \left\{ z \in X^{n_2} \mid \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_2} |f_{ij}(\lambda_k)(z_j)_k|^2 < \infty \quad \forall i = 1 \dots n_1 \right\}.$$

Dans le cas général, où  $\Lambda$  n'est pas compact et  $f$  est toujours une fonction continue, l'opérateur auto-adjoint  $f(\Lambda)$  est alors défini sur  $X$  par l'intégrale de Stieltjes

$$f(\Lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) dE_\lambda, \quad (1.5)$$

et son domaine est

$$D(f(\Lambda)) = \left\{ z \in X \mid \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 d\|E_\lambda z\|_X^2 < \infty \right\},$$

où  $E_\lambda$  désigne la famille spectrale associée à  $\Lambda$ , voir [25]. Si  $f$  est une matrice,  $f(\Lambda)$  est une matrice d'opérateurs linéaires définie par la formule (1.5) et de domaine

$$D(f(\Lambda)) = \left\{ z \in X^{n_2} \mid \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{n_2} |f_{ij}(\lambda)|^2 d\|E_\lambda z_j\|_X^2 < \infty \quad \forall i = 1 \dots n_1 \right\}.$$

### 1.2.2 Opérateurs de contrôle bornés

Dans cette partie, on présente une approximation dans le cadre d'opérateurs de contrôle bornés. Nous suivons le cadre mathématique [22] pour le problème  $LQR$  (1.3). Ainsi,  $A$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe continu sur un espace de Hilbert séparable  $Z$  de domaine dense  $D(A)$ ,  $B \in \mathcal{L}(U, Z)$ ,  $C \in \mathcal{L}(Z, Y)$  et  $S \in \mathcal{L}(U, U)$  où  $U$  et  $Y$  sont deux espaces de Hilbert. Nous supposons que  $(A, B)$  est stabilisable et que  $(A, C)$  est détectable, dans le sens où il existe  $K \in \mathcal{L}(Z, U)$  et  $F \in \mathcal{L}(Y, Z)$  tels que  $A - BK$  et  $A - FC$  sont des générateurs infinitésimaux de semigroupes continus uniformément exponentiellement stables.

Pour chaque  $z_0 \in Z$ , le problème  $LQR$  (1.3) admet une solution unique

$$u^* = -S^{-1}B^*Pz,$$

où  $P \in \mathcal{L}(Z)$  est la solution unique non-négative et auto-adjointe de l'équation opératoire de Riccati

$$(A^*P + PA - PBS^{-1}B^*P + C^*C)z = 0, \quad (1.6)$$

pour tout  $z \in D(A)$ .

L'adjoint  $A^*$  de l'opérateur non borné  $A$  est défini de  $D(A^*) \subset Z$  dans  $Z$  par l'égalité

$$(A^*z, z')_Z = (z, Az')_Z,$$

pour tout  $z \in D(A^*)$  et  $z' \in D(A)$ . L'opérateur adjoint  $B^* \in \mathcal{L}(Z, U)$  de l'opérateur borné  $B$  est défini par

$$(B^*z, u)_U = (z, Bu)_Z,$$

l'adjoint  $C^* \in \mathcal{L}(Y, Z)$  étant défini de manière similaire.

Maintenant, nous présentons les hypothèses spécifiques associées à la méthode d'approximation. Ici,  $\Lambda$  est un opérateur auto-adjoint donné sur un espace de Hilbert séparable  $X$  qui est choisi de sorte à être facilement approchable sur une architecture semi-décentralisée.

L'opérateur  $\Lambda$  est choisi au regard de  $A$  et  $\Phi_Z$ ,  $\Phi_U$  sont choisis de façon à être faciles à approcher de façon semi-décentralisée.

(H1) Il existe trois entiers  $n_Z, n_U$  et  $n_Y \in \mathbb{N}^*$ , trois isomorphismes  $\Phi_Z \in \mathcal{L}(X^{n_Z}, Z)$ ,  $\Phi_U \in \mathcal{L}(X^{n_U}, U)$  et  $\Phi_Y \in \mathcal{L}(X^{n_Y}, Y)$  et quatre matrices de fonctions  $a(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_Z \times n_Z}$ ,  $b(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_Z \times n_U}$ ,  $c(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_Y \times n_Z}$  et  $s(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_U \times n_U}$  continues dans  $I_\sigma$ , tels que

$$A = \Phi_Z a(\Lambda) \Phi_Z^{-1},$$

$$B = \Phi_Z b(\Lambda) \Phi_U^{-1},$$

$$C = \Phi_Y c(\Lambda) \Phi_Z^{-1},$$

$$S = \Phi_U s(\Lambda) \Phi_U^{-1}.$$

Une des conséquences de cette hypothèse est que les opérateurs de contrôle et d'observation sont distribués sur le domaine  $\Omega$  entier, conformément à ce qui a été annoncé depuis le début. Nous introduisons l'équation algébrique de Riccati

$$a^T(\lambda)p + pa(\lambda) - pb(\lambda)s^{-1}(\lambda)b^T(\lambda)p + c^T(\lambda)c(\lambda) = 0. \quad (1.7)$$

**Remarque 1** *Considérons le cas particulier suivant : les trois isomorphismes sont des fonctions de  $\Lambda$ , i.e. les trois opérateurs  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des fonctions de  $\Lambda$ . Alors,  $P$  apparaît clairement être une fonction  $p$  de  $\Lambda$ , solution de (1.7).*

**Remarque 2**

- i) L'introduction des isomorphismes  $\Phi_Z$ ,  $\Phi_Y$ ,  $\Phi_U$  permet de traiter, par la méthode des fonctions d'opérateurs, des problèmes où les opérateurs  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas des fonctions de  $\Lambda$ . Cela généralise la remarque précédente.*
- ii) Pour un problème de contrôle interne, l'hypothèse (H1) est généralement vérifiée. Les exemples 2.3 et 2.5 du chapitre suivant traiteront du cas d'un contrôle et d'une observation internes, où  $C$  n'est pas une fonction de  $\Lambda$  dans l'exemple 2.3 et où  $B$  ne l'est dans l'exemple 2.5.*
- iii) Pour les problèmes de contrôle ou d'observation frontière, il est impossible de construire de tels isomorphismes. Néanmoins, l'exemple 2.4 du chapitre 2 indique comment utiliser cette méthode pour aborder certains problèmes de contrôle frontière.*
- iv) On peut également inclure dans ce cadre des problèmes de type multi-échelles avec des contrôles à l'échelle micro, d'autant plus si on dispose de modèles réduits du comportement dynamique à l'échelle micro. Dans l'exemple 2.5 du chapitre suivant on envisage un tel cas.*

(H2) Pour tout  $\lambda \in I_\sigma$ , l'équation algébrique de Riccati (1.7) admet une solution symétrique non-négative unique notée  $p(\lambda)$ .

**Remarque 3** *Si on émet l'hypothèse de l'existence et de l'unicité de la solution auto-adjointe non-négative  $P$ , alors l'hypothèse (H2) est en général satisfaite. Pour cela, la fonction  $p(\Lambda)$  ne doit pas trop varier entre deux valeurs isolées consécutives du spectre de  $\Lambda$ .*

Nous choisissons de munir  $Z$ ,  $U$  et  $Y$  des produits scalaires

$$(z, z')_Z = (\Phi_Z^{-1}z, \Phi_Z^{-1}z')_{X^nz},$$

$$(u, u')_U = (\Phi_U^{-1}u, \Phi_U^{-1}u')_{X^nu},$$

$$(y, y')_Y = (\Phi_Y^{-1}y, \Phi_Y^{-1}y')_{X^ny}.$$

Alors  $P$  et  $p(\lambda)$  sont liés comme indiqué par la suite.

**Théorème 4** Si (H1) et (H2) sont satisfaites alors

$$P = \Phi_Z p(\Lambda) \Phi_Z^{-1},$$

et le contrôle optimal s'écrit sous la forme

$$u^* = -Qz,$$

avec  $Q$  admettant la factorisation suivante

$$Q = \Phi_U q(\Lambda) \Phi_Z^{-1},$$

et où  $q(\Lambda)$  désigne une fonction de  $\Lambda$  égale à

$$q(\Lambda) = s^{-1}(\Lambda) b^T(\Lambda) p(\Lambda).$$

A ce stade, nous présentons l'approximation semi-décentralisée de  $Q$  ce qui permet d'obtenir celle de  $q(\lambda)$ . Nous nous intéresserons uniquement au cas particulier d'opérateurs  $\Lambda$  bornés avec un spectre borné. Cela est suffisant pour les applications à des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles dans des domaines bornés.

(H3) L'opérateur  $\Lambda$  est borné et son spectre  $\sigma(\Lambda)$  est borné, ainsi il existe  $R > 0$  vérifiant  $\sigma(\Lambda) \subset (-R, R)$ .

Cette hypothèse peut être relaxée, voir la sous-section 1.2.4.

(H4) Les opérateurs  $\Phi_Z$ ,  $\Phi_Z^{-1}$ ,  $\Lambda$  et  $(\zeta I - \Lambda)^{-1}$  admettent des approximations semi-décentralisées sur le cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$  dans  $\mathbb{C}$ .

Dans ce qui suit, nous développons deux types d'approximation de  $q(\Lambda)$ . La première approximation est notée  $q_N(\Lambda)$ . Le second type d'approximation  $q_{N,M}(\Lambda)$  est construit à partir de la première approximation. Une fois les deux approximations bien définies, elles pourront être référencées et utilisées par la suite.

► **Approximation rationnelle  $q_N(\Lambda)$  de  $q(\Lambda)$**  : Puisque l'intervalle  $I_\sigma$  est borné, chaque fonction  $q_{ij}(\lambda)$  admet une approximation rationnelle sur  $I_\sigma$ , à partir de laquelle on obtient une approximation rationnelle de la matrice  $q(\lambda)$ , suivant la formule suivante à comprendre composante par composante

$$q_N(\lambda) = \frac{\sum_{k=0}^{N^N} d_k \lambda^k}{\sum_{k'=0}^{N^D} d'_{k'} \lambda^{k'}}, \quad (1.8)$$

où  $d_k$  et  $d'_{k'}$  sont des matrices de coefficients et  $N = (N^N, N^D)$  définit le degré des polynômes. Dans le cas où  $N^D = 0$ , on retrouve une approximation polynomiale classique. Pour tout  $\eta > 0$ , on peut choisir le degré  $N$  de l'approximation tel que l'estimation uniforme

$$\sup_{\lambda \in I_\sigma} |q(\lambda) - q_N(\lambda)| \leq C_1(q) \eta, \quad (1.9)$$

soit satisfaite.

► **Approximation par la formule de Dunford-Schwartz**  $q_{N,M}(\Lambda)$  de  $q(\Lambda)$  : L'intégrale

$$I(g) = \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta$$

peut être approchée par la formule de quadrature

$$I_M(g) = \sum_{\ell=1}^M \omega_\ell g(\theta_\ell)$$

dont l'estimation d'erreur est de la forme

$$|I(g) - I_M(g)| \leq C_2(g) \eta, \quad (1.10)$$

vérifiée pour toute fonction à valeurs complexes  $g(\theta)$  continue sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$ . Ici, les  $(\theta_\ell)_\ell$  désignent les nœuds d'une discrétisation de  $[0, 2\pi]$  et  $\omega_\ell$  les poids associés. Pour  $z \in X^{nz}$  et  $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2 \in \mathbb{C}$ , nous introduisons la solution  $(v_i^\zeta)_{i=1,2}$  du système

$$\begin{cases} \zeta_1 v_1^\zeta - \zeta_2 v_2^\zeta - \Lambda v_1^\zeta = \Re(-i\zeta' q_N(\zeta)) z, \\ \zeta_2 v_1^\zeta + \zeta_1 v_2^\zeta - \Lambda v_2^\zeta = \Im(-i\zeta' q_N(\zeta)) z. \end{cases} \quad (1.11)$$

Alors, nous définissons

$$q_{N,M}(\Lambda) z = \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=1}^M \omega_\ell v_1^{\zeta_\ell}, \quad (1.12)$$

où  $(v_i^{\zeta_\ell})_{i=1,2}$  est solution de (1.11) et  $\zeta_\ell$  une fonction de  $\theta_\ell$  dans le plan complexe. On remarque que la réalisation en temps réel de  $q_{N,M}z$  nécessite la résolution de  $M$  systèmes (1.11) correspondants aux  $M$  nœuds  $\zeta(\theta_\ell)$ . On remarque donc l'importance de  $M$  pour la précision de la simulation en temps réel. En effet, en stockant en mémoire la matrice  $q_N$  calculée hors-ligne une fois pour toutes, la vitesse de simulation n'est pas freinée par le calcul de cette matrice. On choisit  $N$  assez grand de sorte que  $q_N$  réalise une très bonne approximation de  $q$ . Ainsi, seul le paramètre  $M$  influence la précision de l'approximation  $q_{N,M}$  de  $q$ , mis à part le paramètre de discrétisation spatiale examiné plus loin.

**Remarque 5** *Les approximations  $p_N$  et  $p_{N,M}$  de  $p$  se construisent de la même manière que celles de  $q$ .*

**Théorème 6** *Sous les hypothèses (H1-H4),  $P$  et  $Q$  peuvent être approchés par une des deux approximations semi-décentralisées suivantes*

$$\begin{cases} P_N = \Phi_Z p_N(\Lambda) \Phi_Z^{-1}, \\ Q_N = \Phi_U q_N(\Lambda) \Phi_Z^{-1}, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} P_{N,M} = \Phi_Z p_{N,M}(\Lambda) \Phi_Z^{-1}, \\ Q_{NM} = \Phi_U q_{N,M}(\Lambda) \Phi_Z^{-1}. \end{cases}$$



De plus, pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $N$  et  $M$  tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \|P - P_N\|_{\mathcal{L}(Z)} \leq C_3\eta, \\ \|Q - Q_N\|_{\mathcal{L}(Z,U)} \leq C'_3\eta. \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \|P - P_{N,M}\|_{\mathcal{L}(Z)} \leq C_4\eta, \\ \|Q - Q_{N,M}\|_{\mathcal{L}(Z,U)} \leq C'_4\eta, \end{array} \right.$$

$C_3, C'_3, C_4$  et  $C'_4$  étant indépendants de  $\eta, N$  et  $M$ .

### Remarque 7

- i) Lorsque  $N^D = 0$  (approximation polynômiale), si on pose  $\zeta = Re^{i\theta}$ , ainsi dans l'expression de la formule (1.11), on a  $\dot{\zeta} = -id\zeta/d\theta$ .
- ii) Lorsque  $N^D \geq 1$  (approximation rationnelle), si on peut poser  $\zeta = R_0 + R_1 \cos(\theta) + iR_2 \sin(\theta)$ , où  $R_0, R_1$  et  $R_2$  sont des paramètres. Puisque  $p_N$  possède  $N^D$  pôles dans  $\mathbb{C}$ , ces paramètres sont à choisir convenablement.

**Remarque 8** L'approximation de  $p$  utilisée dans [42] est basée sur des séries de Taylor. Elle est uniquement applicable si l'intervalle  $I_\sigma$  est suffisamment petit.

**Remarque 9** A partir de [56], nous savons que  $P$  est un opérateur à noyau

$$Pz(x) = \int_{\Omega} \bar{p}(x, x') z(x') dx'.$$

Quand  $\Lambda$  est compact, le noyau de  $P$  peut s'écrire sous la forme

$$\bar{p}(x, x') = \sum_{k=1}^{\infty} p(\lambda_k) \phi_k(x) \phi_k(x'),$$

et la technique de troncature utilisée dans [4] peut être appliquée pour construire une approximation semi-décentralisée de  $P$ . Cependant, quand la décroissance de  $\bar{p}$  n'est pas assez rapide dans  $\Omega$ , la troncature n'est pas une technique efficace. C'est le cas lorsque  $p(\lambda) = \lambda$ . Un exemple du problème LQR menant à cette solution est alors facile à construire.

On achève cette partie par des approximations spatiale de  $u^*$ . Pour cela, on introduit le paramètre  $h'$  de discrétisation spatiale de *calcul*. Ce paramètre est choisi, en pratique, plus petit que la distance  $h$  entre les actionneurs. On note  $z_{h'}$  le vecteur des valeurs nodales de  $z$ .

► **Approximation rationnelle** : Tout d'abord, on approche  $q_N$  par  $q_{N,h'}$  en discrétisant chacune des puissances d'opérateur  $\Lambda, \dots, \Lambda^N$  par un schéma de différences finies. Par exemple, pour  $N^D = 0$ , i.e. approximation polynômiale, alors on peut décomposer  $q_N$  comme suit

$$q_N(\Lambda) = \sum_{k=0}^N d_k \Lambda^k. \quad (1.13)$$

Ainsi, on obtient la discrétisation basée sur l'approximation polynômiale

$$q_{N,h'} z_{h'} = \sum_{k=0}^N d_k \Lambda_{h'}^k z_{h'}. \quad (1.14)$$

En pratique, la discrétisation des  $\Lambda^k$  est source d'erreurs importantes lorsque  $N$  est élevé.

► **Approximation par la formule de Dunford-Schwartz** : Elle consiste en la détermination du couple  $(v_{1,h'}^\zeta, v_{2,h'}^\zeta)$  pour tout  $\zeta$ , solution du problème discrétisé

$$\begin{cases} \zeta_1 v_{1,h'}^\zeta - \zeta_2 v_{2,h'}^\zeta - \Lambda_{h'} v_{1,h'}^\zeta = \Re(-i\zeta' q_N(\zeta)) z_{h'}, \\ \zeta_2 v_{1,h'}^\zeta + \zeta_1 v_{2,h'}^\zeta - \Lambda_{h'} v_{2,h'}^\zeta = \Im(-i\zeta' q_N(\zeta)) z_{h'}. \end{cases} \quad (1.15)$$

Puis, on déduit  $q_{N,M,h'}$  approximation de  $q_{N,M}$  par une formule analogue à (1.12)

$$q_{N,M,h'} z_{h'} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=1}^M \omega_\ell v_{1,h'}^{\zeta_\ell}. \quad (1.16)$$

Une fois que l'approximation spatiale  $q_{N,h'}$  ou  $q_{N,M,h'}$  de  $q$  est définie, on en déduit celle du contrôle  $u^*$ . En vertu de l'hypothèse (H4), on introduit  $\Phi_{U,h'}$  et  $\Phi_{Z,h'}$  des approximations semi-décentralisées de  $\Phi_U$  et  $\Phi_Z$ . Ainsi, on obtient les deux approximations de  $u^*$  par discrétisation spatiale de  $u_{N,h'}^*$  et  $u_{N,M,h'}^*$ ,

$$u_{N,h'}^* = -\Phi_{U,h'} q_{N,h'}(\Lambda) \Phi_{Z,h'}^{-1} z_{h'}, \quad (1.17)$$

$$u_{N,M,h'}^* = -\Phi_{U,h'} q_{N,M,h'}(\Lambda) \Phi_{Z,h'}^{-1} z_{h'}. \quad (1.18)$$

Nous pouvons à présent construire les approximations  $u_{N,h',h}^*$  et  $u_{N,M,h',h}^*$  de  $u_h^*$ . Pour cela, on utilise la matrice de passage  $\Pi_{hh'}$  du maillage de taille  $h'$  au maillage de positionnement des actionneurs de taille  $h$ ,

$$u_{N,h',h}^* = \Pi_{hh'} u_{N,h'}^*,$$

$$u_{N,M,h',h}^* = \Pi_{hh'} u_{N,M,h'}^*.$$

**Remarque 10** Les approximations  $u_{N,h'}^*$  et  $u_{N,M,h'}^*$  du contrôle optimal sont données dans le cas général où les isomorphismes  $\Phi_Z$  et  $\Phi_U$  ne sont pas des matrices de fonctions de  $\Lambda$  uniquement. Par conséquent, les approximations ont été développées en  $q(\Lambda)$ . En pratique,

(i) si les isomorphismes  $\Phi_Z$  et  $\Phi_U$  sont des matrices de fonctions de  $\Lambda$ , alors  $Q$  l'est également. Ainsi

$$Q = k(\Lambda).$$

Par conséquent, les approximations peuvent être développées directement sur  $k(\Lambda)$ . Il vient

$$u_{N,h'}^* = -k_{N,h'}(\Lambda) z_{h'}, \quad (1.19)$$

$$u_{N,M,h'}^* = -k_{N,M,h'}(\Lambda) z_{h'}. \quad (1.20)$$

(ii) Si l'isomorphisme  $\Phi_Z$  est une matrice de fonctions de  $\Lambda$  et pas  $\Phi_U$ , alors  $\Phi_U^{-1}Q$  est une matrice de fonctions de  $\Lambda$ , ainsi

$$\Phi_U^{-1}Q = k(\Lambda).$$

Alors, on a

$$u_{N,h'}^* = -\Phi_{U,h'} k_{N,h'}(\Lambda) z_{h'}, \quad (1.21)$$

$$u_{N,M,h'}^* = -\Phi_{U,h'} k_{N,M,h'}(\Lambda) z_{h'}. \quad (1.22)$$

(iii) Les approximations  $k_{N,h'}$  et  $k_{N,M,h'}$  de  $k$  se construisent de la même manière que celles de  $q$ .

### 1.2.3 Opérateurs de contrôle non bornés

Si l'opérateur d'entrée  $B$  n'est pas borné de  $U$  dans  $Z$  et si l'opérateur d'observation est borné de  $Z$  dans  $Y$ , nous utilisons la méthode décrite dans [5] où  $V$  est un autre espace de Hilbert,  $V'$  son espace dual par rapport à l'espace pivot  $Z$ ,  $A \in \mathcal{L}(V, V')$ ,  $B \in \mathcal{L}(U, V')$  et  $C \in \mathcal{L}(Z, Y)$ . Nous choisissons ici de ne pas détailler un certain nombre d'hypothèses techniques. Les équations d'état sont écrites au sens de  $V'$  avec  $z_0 \in Z$ . Le contrôle optimal est

$$u^* = -B^* P z,$$

où  $P$  est la solution unique non-négative de l'équation opératorielle de Riccati

$$(A^* P + P A - P B S^{-1} B^* P + C^* C) v = 0, \quad (1.23)$$

pour tout  $v \in V$ . L'adjoint  $A^* \in \mathcal{L}(V, V')$  est défini par

$$\langle A^* v, v' \rangle_{V', V} = \langle v, A v' \rangle_{V, V'},$$

et  $B^* \in \mathcal{L}(V', U)$  est défini comme l'adjoint d'un opérateur borné.

Nous conservons les mêmes produits scalaires pour  $Z$ ,  $U$  et  $Y$ . De même, les produit scalaires de  $V$  et de  $V'$  sont

$$(v, v')_V = (\Phi_V^{-1} v, \Phi_V^{-1} v')_{X^nz},$$

$$(v, v')_{V'} = (\Phi_{V'}^{-1} v, \Phi_{V'}^{-1} v')_{X^nz}.$$

De plus, nous choisissons  $J = \Phi_V \Phi_{V'}^{-1}$  comme l'isomorphisme canonique de  $V'$  dans  $V$  et le produit de dualité entre  $V$  et  $V'$  est

$$\langle v, v' \rangle_{V, V'} = (v, J v')_V.$$

(H1') Même énoncé que (H1) excepté le fait que

$$A = \Phi_{V'} a(\Lambda) \Phi_V^{-1},$$

$$B = \Phi_{V'} b(\Lambda) \Phi_U^{-1},$$

où  $\Phi_V \in \mathcal{L}(X^{nz}, V)$  et  $\Phi_{V'} \in \mathcal{L}(X^{nz}, V')$  désignent deux isomorphismes supplémentaires. De plus

$$\Phi_V = \phi_V(\Lambda),$$

$$\Phi_Z = \phi_Z(\Lambda),$$

$$\Phi_{V'} = \phi_{V'}(\Lambda)$$

sont fonctions de  $\Lambda$ .

Ici, l'équation algébrique de Riccati est

$$\begin{aligned} & \phi_{V'}(\lambda) a^T(\lambda) p \phi_{V'}^{-1}(\lambda) \phi_V(\lambda) + \phi_V(\lambda) p a(\lambda) \\ & - \phi_V(\lambda) p b(\lambda) s^{-1}(\lambda) b^T(\lambda) p \phi_{V'}^{-1}(\lambda) \phi_V(\lambda) \\ & + \phi_Z(\lambda) c^T(\lambda) c(\lambda) \phi_Z^{-1}(\lambda) \phi_V(\lambda) = 0. \end{aligned} \quad (1.24)$$

(H2') Pour tout  $\lambda \in I_\sigma$ , l'équation algébrique de Riccati (1.24) admet une solution unique non-négative notée  $p(\lambda)$ .

**Théorème 11** *Si les hypothèses (H1', H2') sont satisfaites, alors*

$$P = \Phi_V p(\Lambda) \Phi_{V'}^{-1}$$

et le contrôle optimal s'écrit sous la forme

$$u^* = -Qz,$$

où  $Q$  admet la factorisation suivante

$$Q = \Phi_U q(\Lambda),$$

$q(\Lambda)$  étant une fonction de  $\Lambda$  définie par

$$q(\Lambda) = b^T(\Lambda) J^{-1} p(\Lambda) \Phi_{V'}^{-1},$$

avec  $J^{-1} = \Phi_{V'}^{-1} \Phi_V$ .

Les hypothèses suivantes sont nécessaires pour l'approximation semi-décentralisée de  $P$ .

(H4') Même position que (H4) complétée par  $\Phi_V$ ,  $\Phi_{V'}$  et  $\Phi_{V'}^{-1}$  admettant une approximation semi-décentralisée.

Dans ce qui suit, les approximations  $p_N$ ,  $q_N$ ,  $p_{N,M}$  et  $q_{N,M}$  sont construites d'après les formules (1.8) et (1.12) appliquées à la solution de (1.24).

**Théorème 12** *Sous les hypothèses  $(H1', H2', H3, H4')$ ,  $P$  et  $Q$  peuvent être approchés par une des deux approximations semi-décentralisées*

$$\begin{cases} P_N = \Phi_V p_N(\Lambda) \Phi_{V'}^{-1}, \\ Q_N = \Phi_U q_N(\Lambda), \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} P_{N,M} = \Phi_V p_{N,M}(\Lambda) \Phi_{V'}^{-1}, \\ Q_{N,M} = \Phi_U q_{N,M}(\Lambda). \end{cases}$$

De plus, pour tout  $\eta > 0$  il existe  $N$  et  $M$  tels que

$$\begin{cases} \|P - P_N\|_{\mathcal{L}(V',V)} \leq C_3 \eta, \\ \|Q - Q_N\|_{\mathcal{L}(V',U)} \leq C'_3 \eta, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \|P - P_{N,M}\|_{\mathcal{L}(V',V)} \leq C_4 \eta, \\ \|Q - Q_{N,M}\|_{\mathcal{L}(V',U)} \leq C'_4 \eta, \end{cases}$$

$C_3, C'_3, C_4$  et  $C'_4$  étant indépendants de  $\eta, N$  et  $M$ .

**Remarque 13** *Les approximations de  $u^*$  et de  $u_h^*$  sont construites de la même façon que dans le cas des opérateurs bornés.*

## 1.2.4 Extensions

Voici à présent diverses extensions du cadre présenté ci-avant.

1. La même stratégie est appliquée directement aux compensateurs dynamiques obtenus par les théories de contrôle de  $H_2$  dans  $H_\infty$ . La condition

$$\rho(PQ) < \gamma$$

porte sur le rayon spectral du produit entre les solutions de chacune des deux équations de Riccati. Cette condition est vérifiée dès que

$$\rho(p(\lambda)q(\lambda)) < \gamma$$

pour tout  $\lambda \in I_\sigma$ , voir Lemme 15 (vi).

2. La théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints a été choisie pour sa relative simplicité. Nous connaissons ses limites, c'est pourquoi nous en citons des extensions possibles basées sur des calculs fonctionnels plus généraux comme ceux développés dans [64] ou [37].
3. D'autres travaux concernant la propriété dite *bien posée* du problème *LQR* peuvent être utilisés. En particulier, le travail de [50] pour un contrôle optimal avec une observation et un contrôle non bornés peut être ajouté à cette approche.

## 1.3 Démonstrations

### 1.3.1 Quelques propriétés du calcul fonctionnel

Tout d'abord, nous remarquons que pour  $E$  et  $F$ , deux espaces de Hilbert, et  $\Phi$  un isomorphisme de  $E$  dans  $F$ , si  $F$  est muni du produit scalaire

$$(z, z')_F = (\Phi^{-1}z, \Phi^{-1}z')_E$$

alors

$$\Phi^* = \Phi^{-1}.$$

Dans le prochain Lemme, nous formulons quelques propriétés du calcul fonctionnel.

**Lemme 14** *Pour  $\Lambda$  un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert separable  $X$ , et pour  $f, g$  deux fonctions continues sur  $I_\sigma$ , alors*

- (i)  $f(\Lambda)$  est auto-adjoint ;
- (ii) pour  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $(\mu f)(\Lambda) = \mu f(\Lambda)$  sur  $D(f(\Lambda))$  ;
- (iii)  $(f + g)(\Lambda) = f(\Lambda) + g(\Lambda)$  sur  $D(f(\Lambda)) \cap D(g(\Lambda))$  ;
- (iv)  $g(\Lambda) f(\Lambda) = (gf)(\Lambda)$  où l'image de  $f(\Lambda)$  est inclus dans  $D(g(\Lambda))$  ;
- (v) si  $f \neq 0$  dans  $I_\sigma$  alors  $f(\Lambda)^{-1}$  existe et est égal à  $\frac{1}{f}(\Lambda)$  ;
- (vi) si  $f(\lambda) \geq 0$  pour tout  $\lambda \in I_\sigma$  alors  $f(\Lambda) \geq 0$  ;
- (vii)  $\|f(\Lambda)x\|_X^2 \leq \sup_{\lambda \in I_\sigma} |f(\lambda)|^2 \|x\|_X^2$  pour tout  $x \in D(f(\Lambda))$ .

**Preuve** Les preuves des cinq premiers points peuvent être trouvés dans [25]. Nous allons prouver le (vi), i.e.

$$\sum_{i,j=1}^n (f_{ij}(\Lambda)z_j, z_i)_X \geq 0.$$

Tout d'abord, supposons que  $I_\sigma$  est borné. Nous rappelons que pour une fonction  $g$  continue sur  $I_\sigma$  et pour  $z \in X$ , l'intégrale

$$\int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} g(\lambda) dE_\lambda z$$

est définie comme la limite forte dans  $X$  de la somme de Riemann, voir [25],

$$\sum_{k=1}^p g(\lambda'_k) (E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k}) z,$$

si  $\max_k |\lambda_{k+1} - \lambda_k|$  s'annule, avec  $\lambda'_k \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}]$  et  $\sigma_{\min} = \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p = \sigma_{\max}$ . Si  $I_\sigma$  n'est pas borné, nous utilisons une subdivision pour un intervalle borné  $I_{\tilde{\sigma}} = (\tilde{\sigma}_{\min}, \tilde{\sigma}_{\max})$  et l'intégrale

$$\int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} g(\lambda) dE_\lambda z$$

est définie par passage à la limite dans les bornes de l'intégrale. On établit que la somme de Riemann

$$\sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^p f_{ij}(\lambda'_k) ((E_{\lambda_{k+1}} z_j, z_i) - (E_{\lambda_k} z_j, z_i))$$

est non-négative, ainsi le résultat sera obtenu par passage à la limite. Puisque

$$(E_{\lambda_{k+1}} z_j, z_i) - (E_{\lambda_k} z_j, z_i) = ((E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k}) z_j, z_i) = (y_j^k, y_i^k)$$

où  $y_j^k = (E_{\lambda_{k+1}} - E_k) z_j$ , alors la somme de Riemann est la somme sur  $k$  des termes non négatifs

$$\sum_{i,j=1}^n f_{ij}(\lambda'_k)(y_j^k, y_i^k)$$

qui à son tour est non-négatif.

Maintenant, nous prouvons (vii) :

$$\begin{aligned} \|f(\Lambda)x\|_X^2 &= \int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} |f(\lambda)|^2 d\|E_\lambda x\|_X^2 \\ &\leq \sup_{\lambda \in I_\sigma} |f(\lambda)|^2 \int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} d\|E_\lambda x\|_X^2 \\ &\leq \sup_{\lambda \in I_\sigma} |f(\lambda)|^2 \|x\|_X^2. \end{aligned}$$

■

Pour deux entiers  $n_E$  et  $n_F$ , on note  $f$  une matrice  $n_E \times n_F$  constituée de fonctions continues sur  $I_\sigma$ . On considère également deux espaces de Hilbert  $E$  et  $F$ , isomorphes à  $X^{n_E}$  et  $X^{n_F}$  par  $\Phi_E^{-1}$  et  $\Phi_F^{-1}$  respectivement. Nous introduisons la matrice de fonctions de  $\Lambda$  généralisée :  $f^\phi(\Lambda) = \Phi_E f(\Lambda) \Phi_F^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$  de domaine  $D(f^\phi(\Lambda)) = \Phi_F D(f(\Lambda))$ . Pour simplifier, les espaces  $E$  et  $F$  n'apparaîtront pas explicitement dans la notation  $f^\phi$ , ainsi ils seront associés à chaque matrice au début de leur utilisation. Par la suite, aucune confusion ne sera donc possible. Dans le prochain Lemme, nous donnons quelques propriétés de matrices de fonctions généralisées.

**Lemme 15** *Pour toute matrice de fonctions de  $\Lambda$  généralisée,  $f^\phi(\Lambda) = \Phi_E f(\Lambda) \Phi_F^{-1}$  et  $g^\phi(\Lambda) = \Phi_E g(\Lambda) \Phi_F^{-1}$ , et pour tout nombre réel  $\mu$ ,*

- (i)  $(f^\phi(\Lambda))^* = (f^T)^\phi(\Lambda)$  ;
- (ii)  $\mu f^\phi(\Lambda) = (\mu f)^\phi(\Lambda)$  sur  $D(f^\phi(\Lambda))$  ;
- (iii)  $f^\phi(\Lambda) + g^\phi(\Lambda) = (f + g)^\phi(\Lambda)$  sur  $D(f^\phi(\Lambda)) \cap D(g^\phi(\Lambda))$  ;
- (iv) *pour un autre espace de Hilbert  $G$  et  $g^\phi(\Lambda) = \Phi_F g(\Lambda) \Phi_G^{-1}$ ,  $f^\phi(\Lambda) g^\phi(\Lambda) = (fg)^\phi(\Lambda) = \Phi_E (fg)(\Lambda) \Phi_G^{-1}$  quand l'image  $R(f^\phi(\Lambda)) \subset D(g(\Lambda))$  ;*
- (v) *pour  $F = E$ , si  $f(\lambda) \geq 0$  pour tout  $\lambda \in I_\sigma$  alors  $f^\phi(\Lambda) \geq 0$  ;*
- (vi)  $\sigma(f^\phi(\Lambda)) = \sigma(f)$ .

**Preuve** Les propriétés (i-iv) sont des conséquences directes du Lemme (14). Pour obtenir (v), nous remarquons que pour  $z \in D(f^\phi) \subset E$ ,

$$(f^\phi(\Lambda)z, z)_E = (f(\Lambda)\Phi_E^{-1}z, \Phi_E^{-1}z)_{X^{n_E}},$$

qui est non-négatif si  $f(\Lambda)$  est non-négative. La conclusion utilise le Lemme 14 (v). Enfin, l'obtention de (vi) est une conséquence directe de la définition du spectre. ■

### 1.3.2 Preuve du Théorème 4

**Preuve du Théorème 4** A partir du Lemme 15 (i) et (iv),

$$A^* = \Phi_Z a^T(\Lambda) \Phi_Z^{-1},$$

$$BB^* = \Phi_Z b(\Lambda) b^*(\Lambda) \Phi_Z^{-1},$$

$$C^*C = \Phi_Z c^*(\Lambda) c(\Lambda) \Phi_Z^{-1}$$

sont des matrices de fonctions de  $\Lambda$  généralisées sur  $Z$ . Nous posons

$$e(\lambda) = a^T(\lambda)p(\lambda) + p(\lambda)a(\lambda) - p(\lambda)b(\lambda)b^T(\lambda)p(\lambda) + c^T(\lambda)c(\lambda),$$

ainsi par construction  $e(\lambda) = 0$  et  $e(\Lambda) = 0$ . En multipliant la dernière égalité par  $\Phi_Z$  à gauche et par  $\Phi_Z^{-1}$  à droite, en utilisant le Lemme 15 (iii) et (iv), et en posant

$$\tilde{P} = \Phi_Z p(\Lambda) \Phi_Z^{-1},$$

nous trouvons que  $\tilde{P}$  vérifie l'équation de Riccati (1.6). Ensuite, la non-négativité et la symétrie de  $p$ , le Lemme 15 (i) et (v) engendrent la non-négativité et le fait que  $\tilde{P}$  est auto-adjoint. Nous concluons que  $P = \tilde{P}$  grâce à l'unicité de la solution. Enfin, on pose  $u^* = -Qz$ , i.e l'opérateur de rétroaction  $Q$  est égal à

$$Q = S^{-1}B^*\tilde{P}.$$

Il vient par construction que  $Q$  peut s'écrire sous la forme

$$Q = \Phi_U q \Phi_Z^{-1},$$

avec  $q$  la fonction de  $\Lambda$  définie comme suit

$$q(\Lambda) = s^{-1}(\Lambda) b^T(\Lambda) p(\Lambda).$$

■

### 1.3.3 Preuve du Théorème 6

**Preuve du Théorème 6** L'estimation de

$$\|q(\Lambda) - q_N(\Lambda)\|_{\mathcal{L}(X^{nz}, X^{nU})} \leq C_3\eta$$

résulte de (1.9) et du 14 (vii). Dans la suite, nous obtenons l'estimation

$$\|q_N(\Lambda) - q_{N,M}(\Lambda)\|_{\mathcal{L}(X^{nz}, X^{nU})} \leq C_5\eta.$$



Puisque  $q_N$  est holomorphe dans un domaine inclus dans  $\mathbb{C}$ , et  $\Lambda$  est un opérateur borné sur  $X$  avec un spectre contenu dans  $(-R, R)$ ,  $q_N(\Lambda)$  peut être représenté par la formule de Dunford-Schwartz, voir [95],

$$q_N(\Lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(R)} q_N(\zeta) (\zeta I - \Lambda)^{-1} d\zeta \quad \text{où } \mathcal{C}(R) \subset \mathbb{C}.$$

En choisissant  $\zeta$  une fonction de  $\theta$  avec  $\theta \in (0, 2\pi)$  une paramétrisation de  $\mathcal{C}$  dans l'intégrale, nous trouvons

$$q_N(\Lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -i\zeta' q_N(\zeta) (\zeta I - \Lambda)^{-1} d\theta,$$

avec  $\zeta' = \frac{d\zeta}{d\theta}$ . Alors nous utilisons la formule de quadrature pour approcher  $q_N$  par

$$q_{N,M} = \frac{1}{2\pi} I_M (-i\zeta' q_N(\zeta) (\zeta I - \Lambda)^{-1}).$$

En combinant l'estimation (1.10) et le Lemme 14 (v), nous obtenons l'estimation désirée. L'inégalité triangulaire permet d'obtenir

$$\begin{aligned} \|q(\Lambda) - q_{N,M}(\Lambda)\|_{\mathcal{L}(X^{nz}, X^{nu})} &\leq \|q(\Lambda) - q_N(\Lambda)\|_{\mathcal{L}(X^{nz}, X^{nu})} + \|q_N(\Lambda) - q_{N,M}(\Lambda)\|_{\mathcal{L}(X^{nz}, X^{nu})} \\ &\leq (C_3 + C_5)\eta \\ &\leq C_4\eta, \end{aligned}$$

avec  $C_4 = C_3 + C_5$ . Enfin, l'expression (1.12) de  $q_{N,M}(\Lambda)z$  est obtenue en posant

$$v^{\zeta_\ell} = -i\zeta'_\ell q_N(\zeta_\ell) (\zeta_\ell I - \Lambda)^{-1} z,$$

et après la décomposition de  $v^{\zeta_\ell}$  en sa partie réelle  $v_1^{\zeta_\ell}$  et imaginaire  $v_2^{\zeta_\ell}$ , avec  $\zeta'_\ell = \left(\frac{d\zeta}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_\ell}$ .

■

**Remarque 16** Dans le cas de l'approximation rationnelle,  $q_N$  est holomorphe sur le complémentaire de l'ensemble de ses  $N^D$  pôles. Par conséquent, le chemin  $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$  associé à la formule de Dunford-Schwartz désigne l'ellipse de centre  $(R_0, 0)$ ,  $R_1$  et  $R_2$  étant ses deux axes.

### 1.3.4 Preuve du Théorème 10

**Preuve du Théorème 10** L'obtention de l'expression

$$A^* = J^{-1} \Phi_V a^*(\Lambda) \Phi_{V'}^{-1} J^{-1}$$

provient directement de

$$\langle u, v \rangle_{V', V} = (Ju, v)_V = (u, J^{-1}v)_{V'}.$$

Puisque

$$J = \Phi_V \Phi_{V'}^{-1},$$

l'expression se simplifie en

$$A^* = \Phi_{V'} a^* \Phi_V^{-1}.$$

Alors (1.23) est équivalente à

$$\begin{aligned} & [\phi_{V'}(\Lambda) a^*(\Lambda) P \phi_{V'}^{-1}(\Lambda) \phi_V(\Lambda) + \phi_V(\Lambda) P a(\Lambda) \\ & - \phi_V(\Lambda) P b(\Lambda) b^*(\Lambda) P \phi_{V'}(\Lambda)^{-1} \phi_V(\Lambda) \\ & + \phi_Z(\Lambda) c^*(\Lambda) c(\Lambda) \phi_Z^{-1} \phi_V] x = 0. \end{aligned}$$

Enfin, la preuve complète suit les mêmes étapes que celle du Théorème 4. ■

La preuve du Théorème 11 est identique à celle du Théorème 6.

## 1.4 Conclusion

Nous avons proposé une méthode de calcul de contrôle distribué appliqué à des systèmes linéaires distribués munis d'un opérateur de contrôle borné ou non borné. Cette méthode a été conçue pour des architectures de processeurs semi-décentralisées. Sa construction utilise un calcul fonctionnel sur les matrices de fonctions d'un opérateur, basée sur la théorie spectrale et la formule de représentation de Dunford-Schwartz.

Nous avons formulé, étape par étape, la méthode d'approximation semi-décentralisée de l'opérateur contrôleur  $Q$ . La première étape a été consacrée à la définition de ces matrices. La deuxième étape de la méthode a consisté en la factorisation de  $Q$  sous la forme d'un produit d'une fonction de  $\Lambda$  avec des opérateurs satisfaisant une approximation naturelle semi-décentralisée. Pour la troisième étape, on s'est intéressé à l'approximation d'une fonction générale  $q$  de  $\Lambda$  par une fonction plus simple à discrétiser et pour une architecture semi-décentralisée. On a choisi une approximation rationnelle ou polynômiale  $q_N$  de  $q$ . La discrétisation de  $q_N$  engendre cependant des erreurs très élevées dues aux puissances de  $\Lambda$ . Afin de pallier à ce problème, nous avons utilisé la formule de Dunford-Schwartz. Elle présente l'avantage de mettre en oeuvre un seul opérateur  $(\zeta I - \Lambda)^{-1}$ , plus simple à discrétiser. Cette dernière est exprimée sous forme intégrale, d'où la nécessité d'une seconde approximation  $q_{N,M}$  basée sur une intégration numérique avec  $M$  le nombre de points d'intégration. On a remarqué l'importance de  $M$  dans la précision de la simulation en temps réel. L'étape finale a consisté en la discrétisation spatiale du problème intermédiaire donné par (1.11) afin de trouver la discrétisation  $q_{N,M,h}$  de  $q_{N,M}$ , où  $h$  est le pas de discrétisation.



# Chapitre 2

## Application et résultats numériques

### Sommaire

---

<b>2.1 Exemple 1 : Equation de la chaleur avec un opérateur de contrôle borné</b>	<b>21</b>
2.1.1 Equation d'état est contrôleur semi-décentralisé	21
2.1.2 Construction et étude des contrôleurs semi-décentralisés	23
<b>2.2 Exemple 2 : Equation de la chaleur avec un opérateur de contrôle non borné</b>	<b>29</b>
2.2.1 Présentation	29
2.2.2 Formulation d'un contrôleur semi-décentralisé	29
<b>2.3 Exemple 3 : Equation des poutres</b>	<b>30</b>
2.3.1 Présentation	30
2.3.2 Formulation et étude d'un contrôleur semi-décentralisé	31
<b>2.4 Exemple 4 : Equation de la chaleur 2D, contrôle frontière</b>	<b>40</b>
2.4.1 Présentation	40
2.4.2 Construction et étude du contrôleur semi-décentralisé	41
<b>2.5 Exemple 5 : Microscope de Force Atomique (AFM)</b>	<b>46</b>
2.5.1 Présentation	46
2.5.2 Application	49
<b>2.6 Exemple 6 : Contrôle LQG d'une poutre avec actionneurs et capteurs piézo-électriques distribués</b>	<b>55</b>
2.6.1 Présentation du problème	55
2.6.2 Simplification du modèle : Modèle homogénéisé de plaque	56
2.6.3 Formulation du problème de contrôle optimal <i>LQG</i>	57
2.6.4 Approximation de la loi de contrôle	59
2.6.5 Résultats numériques	61
<b>2.7 Conclusion</b>	<b>66</b>

---

Dans ce chapitre, nous exposons six applications afin d'illustrer selon différents points de vue la théorie développée dans le chapitre précédent. Nous avons ainsi traité différents cas où l'opérateur d'entrée est borné (Exemples 1, 3, 5, 6), envisageant également le cas où ce dernier ne l'est pas (Exemple 2). Puis, nous avons étudié la situation où les opérateurs  $B$  et  $C$  sont fonctions de l'opérateur  $\Lambda$  (Exemples 1, 2), et le cas où ils ne le sont pas (Exemples 3, 5, 6) en introduisant les isomorphismes  $\Phi_Z$ ,  $\Phi_Y$  et  $\Phi_U$ . Nous avons traité plusieurs exemples de contrôles internes. Néanmoins, à travers l'exemple de la section 2.4, on a montré comment aborder certains problèmes de contrôles frontières. On s'est également intéressés, à travers l'exemple 5, à des problèmes de type multi-échelles avec des contrôles considérés à l'échelle micro. Enfin, dans le dernier exemple, on a appliqué notre théorie à un autre cadre de contrôle, à savoir  $LQG$ . Dans cette application, l'approximation d'un problème de contrôle optimal par la *méthode des fonctions d'opérateurs*, permet l'implantation sur un ordinateur distribué semi-décentralisé, pouvant être analogique ou pas.

Après avoir appliqué la théorie aux exemples, nous cherchons à approcher l'opérateur contrôleur  $Q$ . Pour cela, nous utilisons un schéma semi-implicite en appliquant une méthode spectrale pour approcher  $k$  par un polynôme. Puis nous utilisons la formule de Dunford-Schwartz dont le contour est un cercle de rayon  $R$ . Dans le cas où l'approximation est rationnelle (interpolation rationnelle classique), nous résolvons un système surdéterminé au sens des moindres carrés. La solution est obtenue par la décomposition en valeurs singulières  $SVD$ , puis grâce à la formule de Dunford-Schwartz dont le contour est une ellipse, évitant ainsi les pôles et zéros de l'approximation rationnelle.

Dans les exemples que l'on développe dans ce chapitre, chaque actionneur occupe un sous-domaine  $Y_\alpha$ . Ces sous-domaines sont distribués périodiquement sur  $\Omega$  ou sur un sous-domaine de  $\Omega$ . On note  $\beta_0$  le rapport entre la taille  $|Y_\alpha|$  d'un actionneur et celle d'une cellule périodique de  $\Omega$ . Pour simplifier, on posera  $\beta_0 = 1$ . Le bord  $\partial\Omega$  du domaine  $\Omega$  est supposé régulier et sa normale unitaire extérieure est notée  $n$ . La régularité de  $\partial\Omega$  intervient dans le choix des isomorphismes  $\Phi$ .

Les espaces de Sobolev utilisés sont définis pour  $k \in \mathbb{N}^*$  par

$$\begin{aligned} H^k(\Omega) &= \{v \in L^2(\Omega) \mid \nabla^j v \in L^2(\Omega)^{d^j} \text{ pour tout } 1 \leq j \leq k\} \\ H_0^k(\Omega) &= \{v \in H^k(\Omega) \mid \nabla^j v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ pour } 0 \leq j \leq k-1\}. \end{aligned}$$

On désignera par  $\mathbb{P}_n$  l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ , avec  $n$  un entier positif.

On introduit la fonction vectorielle,

$$v^{\zeta_\ell} = (\zeta_\ell I - \Lambda)^{-1} z. \quad (2.1)$$

Puis on multiplie cette équation par  $\Lambda^{-1}(\zeta_\ell I - \Lambda)$  pour obtenir

$$\zeta_\ell \Lambda^{-1} v^{\zeta_\ell} - v^{\zeta_\ell} = \Lambda^{-1} z. \quad (2.2)$$

On définit la matrice

$$\mathcal{P}^{\zeta_\ell} = \omega_\ell \zeta'_\ell k_N(\zeta_\ell), \quad (2.3)$$

pour  $\zeta_1, \dots, \zeta_M \in \mathbb{C}$  et  $\omega_1, \dots, \omega_M \in \mathbb{R}$ . On peut facilement établir l'égalité

$$\sum_{\ell=1}^M \omega_\ell v_1^{\zeta_\ell} = \sum_{\ell=1}^M \Im(\mathcal{P}^{\zeta_\ell} v^{\zeta_\ell}). \quad (2.4)$$

Cette égalité sera utilisée dans la suite de ce chapitre.

## 2.1 Exemple 1 : Equation de la chaleur avec un opérateur de contrôle borné

Cet exemple illustre le cas d'un opérateur de contrôle et d'un opérateur d'observation, tous deux internes et bornés.

### 2.1.1 Equation d'état est contrôleur semi-décentralisé

Soit le système gouverné par l'équation de la chaleur posé sur le domaine régulier  $\Omega$ , avec des conditions de Dirichlet homogènes au bord

$$\begin{cases} \partial_t w(t, x) = \Delta w(t, x) + u_h(t, x) & \text{sur } \mathbb{R}^{+*} \times \Omega, \\ w(t, x) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^{+*} \times \partial\Omega, \\ w(0, x) = w_0(x) & \text{sur } \Omega. \end{cases} \quad (2.5)$$

L'espace de contrôle  $U_h \subset U \subset L^2(\Omega)$  est constitué de fonctions constantes dans chaque  $Y_\alpha$  et nulles ailleurs. Nous choisissons la fonctionnelle de coût

$$\mathcal{J}(w_0; u) = \int_0^{+\infty} \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.$$

Avec une distribution continue des actionneurs, l'équation d'état devient

$$\partial_t w(t, x) = \Delta w(t, x) + \beta_0 u(t, x), \quad (2.6)$$

dans  $\mathbb{R}^{+*} \times \Omega$  avec  $u \in U$ .

Présentons tout d'abord la forme semi-décentralisée des contrôleurs résultant des deux types d'approximation : polynômiale et basée sur la formule de Dunford-Schwartz.

► **Approximation polynômiale** : Dans la section suivante, on montre que le contrôle optimal  $u^*$  peut être approché par

$$u^* \simeq u_N^*(t, x) = -p_N((-\Delta)^{-1})w, \quad (2.7)$$

où  $p_N$ , approximation de  $p$ , désigne un polynôme de degré inférieur ou égal à  $N$ ,  $N$  étant un paramètre entier supérieur ou égal à 1. Par exemple, pour  $N = 1$ ,  $u_N^*$  s'écrit

$$u_N^* = [-d_0 + d_1 (\Delta)^{-1}] w,$$

notre calcul numérique montrant que  $d_0 = 2.23 \times 10^{-2}$  et  $d_1 = 0,407$ . Autrement dit,  $u_N^*$  vérifie

$$\Delta u_N^* = -d_0 \Delta w + d_1 w,$$

complétée par les conditions aux limites  $u_N^* = 0$  et  $w = 0$  en  $\partial\Omega$ . Dans le cas monodimensionnel, en utilisant un schéma aux différences finies centré du Laplacien, on obtient l'équation discrétisée

$$u_{h',-1}^* - 2u_{h'}^* + u_{h',+1}^* = -d_0 (w_{h',-1} - 2w_{h'} + w_{h',+1}) - d_1 h'^2 w_{h'}, \quad (2.8)$$

où  $h' = \frac{L}{H'}$  désigne le pas de discrétisation, avec  $H' \in \mathbb{N}^*$  et  $L$  la taille du domaine  $\Omega$ . On note  $u_{h',-1}^*$ ,  $u_{h'}^*$ ,  $u_{h',+1}^*$ ,  $w_{h',-1}$ ,  $w_{h'}$  et  $w_{h',+1}$  les vecteurs des valeurs nodales de  $(u_N^*(\cdot, x_i))_{i=0, \dots, H'-2}$ ,  $(u_N^*(\cdot, x_i))_{i=1, \dots, H'-1}$ ,  $(u_N^*(\cdot, x_i))_{i=2, \dots, H'}$ ,  $(w(\cdot, x_i))_{i=0, \dots, H'-2}$ ,  $(w(\cdot, x_i))_{i=1, \dots, H'-1}$  et  $(w(\cdot, x_i))_{i=2, \dots, H'}$  respectivement, où  $x_j = jh'$ ,  $j \in \{0, \dots, H'\}$ . Afin de satisfaire les conditions aux limites, on pose aux extrémités

$$u_N^*(\cdot, 0) = u_N^*(\cdot, x_{H'}) = 0 \quad \text{et} \quad w(\cdot, 0) = w(\cdot, x_{H'}) = 0.$$

► **Approximation basée sur la formule de Dunford-Schwartz** : On introduit les  $(M)$  problèmes de différences finies vérifiées par les  $v_{h'}^{\zeta_\ell}$

$$\zeta_\ell \left( v_{h',-1}^{\zeta_\ell} - 2v_{h'}^{\zeta_\ell} + v_{h',+1}^{\zeta_\ell} \right) - h'^2 v_{h'}^{\zeta_\ell} = w_{h',-1} - 2w_{h'} + w_{h',+1}, \quad (2.9)$$

et les  $(M)$  conditions aux limites

$$v^{\zeta_\ell}(\cdot, 0) = v^{\zeta_\ell}(\cdot, x_{H'}) = 0, \quad (2.10)$$

où  $v_{h'}^{\zeta_\ell}$  sont les vecteurs des valeurs nodales, approximations des solutions  $v^{\zeta_\ell}$  des problèmes (2.2) pour chaque  $\ell = 1, \dots, M \in \mathbb{N}^*$ . Puis, on établit par la suite que le contrôle optimal  $u^*$  peut être approché par

$$u_{N,M,h'}^* = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=1}^M \Im \left( \omega_\ell \zeta'_\ell p_N(\zeta_\ell) v_{h'}^{\zeta_\ell} \right). \quad (2.11)$$

**Remarque 17** *Les points de discrétisation peuvent être assimilés aux positions des actionneurs, lorsque  $h' = h$ . On pourra également considérer un maillage plus fin. Dans ce cas, seuls certains points de discrétisation correspondent à ces positions.*

### 2.1.2 Construction et étude des contrôleurs semi-décentralisés

Ici  $B_h = B_h^* = S = I$ . Nous cherchons à obtenir l'approximation  $p_{N,M}(\Lambda)w$  de  $Pw$ . Pour cela, nous posons  $U = Z = L^2(\Omega)$  alors  $A = \Delta$  est un isomorphisme de son domaine dans  $Z$ . Puisque le bord de  $\Omega$  est régulier, le domaine de  $A$  est  $D(\Delta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , voir [35]. De plus,  $Y = U = Z$  et  $B = C = S = I$ . On pose  $X = Z$ . On choisit  $\Lambda = (-\Delta)^{-1}$  qui est compact et admet par conséquent un spectre borné et positif avec un point d'accumulation en zéro, on note que zéro n'appartient pas à  $\sigma(\Lambda)$  (voir [75]). Alors, on trouve aisément que les isomorphismes

$$\Phi_Z = \Phi_Y = \Phi_U = I$$

et que les paramètres de l'équation algébrique de Riccati sont

$$a(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}, \quad b = c = s = 1$$

sont tous continus sur  $I_\sigma = (0, \sigma_{\max})$ . L'équation algébrique de Riccati s'écrit

$$p^2(\lambda) + 2p(\lambda)/\lambda - 1 = 0. \quad (2.12)$$

Commençons tout d'abord par construire l'approximation polynômiale  $p_N(\lambda)$  (avec  $N^D = 0$ ) de  $p(\lambda)$  solution unique non-négative de l'équation (2.12). Nous nous sommes appuyés sur la méthode spectrale pour chercher cette approximation qui peut être établie comme suit : remplaçons  $p$  par  $p_N$  et multiplions la partie gauche de l'équation algébrique de Riccati (2.12) par une fonction test  $\eta(\lambda) \in \mathcal{C}^0(I_\sigma)$  et par  $\lambda$ . Puis on intègre par rapport à  $\lambda$  pour obtenir

$$\int_0^{\sigma_{\max}} (\lambda p_N^2 + 2p_N - \lambda) \eta(\lambda) d\lambda = 0. \quad (2.13)$$

Nous utilisons alors un schéma semi-implicite pour résoudre ce problème, ce qui donne l'algorithme suivant

---

**Algorithme 1** Schéma Semi-Implicite appliqué à l'équation (2.13)

---

- 1:  $p_N^0$  donné
- 2: à la  $(m+1)$ ième étape : connaissant  $p_N^m \in \mathbb{P}_N$ , trouvons  $p_N^{m+1} \in \mathbb{P}_N$  tel que

$$\int_0^{\sigma_{\max}} (\lambda p_N^m(\lambda) p_N^{m+1}(\lambda) + 2p_N^{m+1}(\lambda) - \lambda) \eta(\lambda) d\lambda = 0, \quad \forall \eta \in \mathbb{P}_N, \quad (2.14)$$

- 3: fin itération
- 

**Remarque 18** *La convergence du schéma semi-implicite n'a pas été démontrée. Cependant, d'un point de vue empirique, nous avons pu conclure que ce schéma converge vers la solution positive. Nous avons pour cela procédé à divers tests portant sur une variation de la valeur initiale  $p_N^0$ .*



Pour calculer les intégrales décrites dans l'Algorithme 1, nous avons utilisé les formules de quadrature de Legendre-Gauss-Lobatto (LGL) qui sont exactes pour des polynômes de degré  $(2n - 1)$ , soit

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \omega_i,$$

avec  $\xi_i$  les nœuds de Gauss-Lobatto et  $\omega_i$  les poids associés. La Table 2.1 fournit les  $\xi_i$  et  $\omega_i$ , pour  $n = 10$ . Le polynôme  $(\lambda p_N^m(\lambda) p_N^{m+1}(\lambda) + 2p_N^{m+1}(\lambda) - \lambda) \eta(\lambda)$  appartient à  $\mathbb{P}_{3N+1}$ . Une formule de Gauss-Lobatto à  $n \geq E(\frac{3}{2}N) + 1$  points est nécessaire pour le calcul exact de l'intégrale apparaissant dans la formule (2.14).

On se réfère à [6], [20] et [28] pour une analyse numérique plus complète. Pour plus de détails sur les méthodes spectrales, voir [8], [9], [16] et [68].

$i =$	$\xi_i$	$\omega_i$
0	-.000000	0.0181818
1	-0.934001	0.1096120
2	-0.784483	0.1871700
3	-0.565235	0.2480480
4	-0.295758	0.2868790
5	00.000000	0.3002180
6	0.2957580	0.2868790
7	0.5652350	0.2480480
8	0.7844830	0.1871700
9	0.9340010	0.1096120
10	1.0000000	0.0181818

TAB. 2.1 – Nœuds de Gauss-Lobatto (colonne du milieu) et poids associés (colonne de droite) pour  $n = 10$ .

### Solutions exactes

Nous présentons la solution exacte du problème de contrôle optimal utilisée pour la validation numérique des différentes approximations. Tout d'abord, nous donnons la solution positive exacte de l'équation algébrique de Riccati (2.12)

$$p(\lambda) = \frac{-1 + \sqrt{1 + \lambda^2}}{\lambda}.$$

Le contrôle optimal  $u$  s'écrit comme suit

$$u = -p(\Lambda) w(t, x).$$

On injecte cette expression dans l'équation (2.6), le système en boucle fermé s'écrit

$$\partial_t w(t, x) = (A - p(\Lambda)) w(t, x).$$

Dans le cas du choix du domaine mono-dimensionnel  $\Omega = (0, \pi)$ , on introduit la base des fonctions propres normalisées  $(\phi_k(x))_k = \left(\sqrt{2/\pi} \sin(kx)\right)_k$  et les valeurs propres  $\lambda_k = \frac{1}{k^2}$ , associées au problème des valeurs propres

$$\Lambda \phi_k(x) = \lambda_k \phi_k(x).$$

On adopte la décomposition modale de  $w(t, x)$  suivant la base  $\{\phi_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ ,

$$w(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} w_k(t) \phi_k(x),$$

avec  $w_k(t)$  solution de l'équation

$$\partial_t w_k(t) = (-\lambda^{-1} - p(\lambda)) w_k(t), \quad (2.15)$$

complétée par la condition initiale

$$w_k(0) = \int_0^\pi w(0, x) \phi_k(x) dt. \quad (2.16)$$

La solution  $w_k$  de (2.15-2.16) s'écrit

$$w_k(t) = w_k(0) e^{-(\lambda^{-1} + p(\lambda))t}.$$

Finalement, le contrôle optimal exact peut s'exprimer sous la forme

$$u^*(t, x) = - \sum_k w_k(t) p(\lambda_k) \phi_k(x).$$

Nous choisissons à la suite de cet exemple :  $w_k(0) = 1$ .

### Résultats numériques

Pour l'application numérique,  $\sigma_{\max} = 1$  donc  $I_\sigma = (0, 1)$ ,  $t \in [0, T]$  avec  $T = 0.1$  et on utilise une projection sur quatre modes.

Dans ce qui suit, on s'intéresse tout d'abord à l'étude de l'erreur d'approximation polynômiale et à la convergence du schéma semi-implicite. Puis, on étudie l'erreur d'approximation de quadrature dans la formule de Dunford-Schwartz. Enfin, on analyse l'erreur d'approximation spatiale.

► **Erreur d'approximation polynômiale et convergence du schéma semi-implicite** : Le calcul numérique montre que l'Algorithme 1 converge vers la solution positive et fournit une très bonne approximation polynômiale. Afin d'évaluer la qualité de la convergence, on introduit l'erreur  $\|p_N^{m+1} - p_N^m\|_{L^2(I_\sigma)}$ . Pour  $N = 10$  et  $P_N^0 = 0$ , la Figure 2.1(a) illustre la convergence exponentielle du schéma proposé. De plus, la Figure 2.1(b) représente l'erreur relative en fonction de  $N$

$$e_N = \frac{\|p - p_N\|_{L^2(I_\sigma)}}{\|p\|_{L^2(I_\sigma)}}.$$

Cette erreur décroît de façon linéaire, sur l'échelle logarithmique, de pente  $\approx -0.7$ . On introduit le contrôle optimal approché basé sur l'approximation polynômiale de la façon suivante

$$u_N^*(t, x) = -p_N(\Lambda) w(t, x) = -\sum_{k=1}^4 w_k(0) e^{-(\lambda_k^{-1} + p_N(\lambda_k))t} p_N(\lambda_k) \phi_k(x).$$

On définit l'erreur relative de la fonctionnelle de coût associée

$$J_N = \frac{|\mathcal{J}(w_0; u^*) - \mathcal{J}(w_0; u_N^*)|}{\mathcal{J}(w_0; u^*)}.$$

► **Erreur d'approximation de quadrature dans la formule de Dunford-Schwartz :**

Pour l'approximation par la formule de Dunford-Schwartz en utilisant l'approximation  $p_N$  ci-dessus, nous avons utilisé la quadrature de trapèze sur un contour paramétré par un cercle de rayon  $R$ , voir la Figure 2.2. On définit l'erreur relative entre  $p$  et  $p_{N,M}$  par

$$e_{N,M} = \frac{\|p - p_{N,M}\|_{L^2(I_\sigma)}}{\|p\|_{L^2(I_\sigma)}}.$$

L'erreur relative de la fonctionnelle de coût associée est

$$J_{N,M} = \frac{|\mathcal{J}(w_0; u^*) - \mathcal{J}(w_0; u_{N,M}^*)|}{\mathcal{J}(w_0; u^*)},$$

$u_{N,M}^*(t, x)$  désigne l'approximation du contrôle optimal, basée sur la combinaison de l'approximation polynômiale avec l'intégration numérique de Dunford-Schwartz,

$$u_{N,M}^*(t, x) = -\sum_{k=1}^K w_k(0) e^{-(\lambda_k^{-1} + p_{N,M}(\lambda_k))t} p_{N,M}(\lambda_k) \phi_k(x).$$

Les courbes de la Figure 2.3 montrent l'influence du rayon  $R$  sur l'intégration numérique. On remarque que la convergence de  $e_{N,M}$  vers  $e_N$  est exponentielle et proportionnellement plus rapide à l'augmentation de  $R$ . On choisit pour la suite  $R = 2.6$  et le paramètre de la formule de quadrature  $M = 11$  de sorte que  $e_N$  et  $J_N$  soient négligeables devant  $e_{N,M}$  et  $J_{N,M}$ , voir la deuxième courbe de la Figure 2.3, les colonnes de gauche et du milieu de la Table 2.2.

► **Erreur d'approximation spatiale :** Enfin, nous achevons notre approximation globale par l'approximation spatiale. Nous proposons pour cela deux calculs différents. Le premier est basé sur l'approximation polynômiale (2.8) pour  $N = 1$ , l'autre utilise l'approximation par la formule de Dunford-Schwartz (2.9<sup>1</sup>-2.11<sup>2</sup>) pour  $N = 10$ . Nous avons choisi 200 nœuds de discrétisation spatiale, régulièrement répartis dans  $\Omega$ . Les deux écarts

$$\frac{\int_0^T \|u_{N,h'}^* - u_N^*\|_{L^2(\Omega)} dt}{\int_0^T \|u_N^*\|_{L^2(\Omega)} dt} \simeq 2.48 \times 10^{-5} \quad \text{et} \quad \frac{\int_0^T \|u_{N,M,h'}^* - u_{N,M}^*\|_{L^2(\Omega)} dt}{\int_0^T \|u_{N,M}^*\|_{L^2(\Omega)} dt} \simeq 3.22 \times 10^{-5}$$

---

<sup>1</sup>Etant donné  $\Lambda^{-1} = -\Delta$  et en utilisant le schéma des différences finies, on en déduit la discrétisation de l'équation (2.2), on obtient ainsi (2.9).

<sup>2</sup>La formule (2.11) est obtenue en utilisant la relation (2.4) et les formules du chapitre précédent.

ont pour but l'évaluation de l'approximation spatiale. La première méthode a été évaluée par rapport à la discrétisation associée à l'approximation polynomiale et la seconde méthode a été comparée à l'approximation par la formule de Dunford-Schwartz. Les méthodes fournissent une bonne discrétisation spatiale puisque de l'ordre de  $10^{-5}$ .

Nous concluons par l'évaluation de l'écart

$$J_{N,M,h'} = \frac{|\mathcal{J}(z_0; u^*) - \mathcal{J}(z_0; u_{N,M,h'}^*)|}{\mathcal{J}(z_0; u^*)}$$

entre la fonctionnelle de coût exacte et l'approximation de la fonctionnelle de coût discrétisée. Le résultat obtenu est satisfaisant, voir la colonne droite du Tableau 2.2. Finalement, nous avons représenté en coordonnées espace-temps l'approximation  $w_{N,M,h'}$  sur la Figure 2.4(a), et l'approximation du contrôle optimal discrétisé sur la Figure 2.4(b). On constate que le premier mode domine les autres modes.

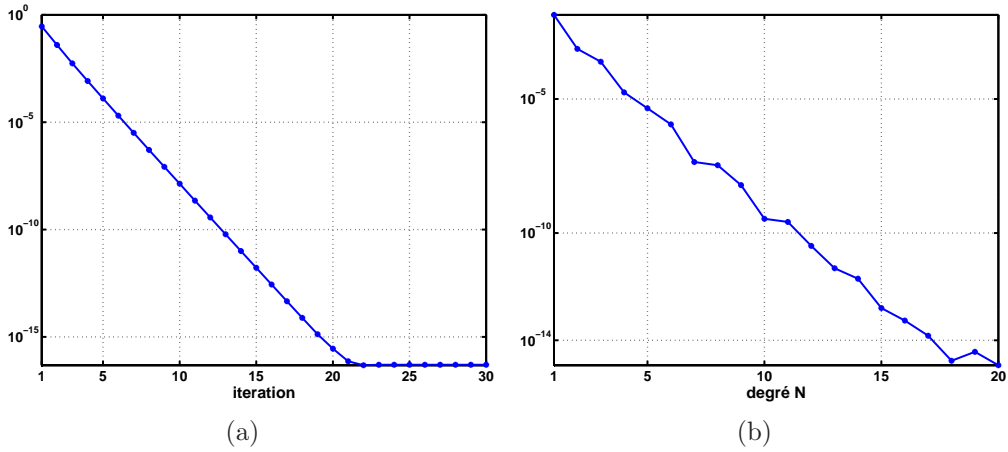


FIG. 2.1 – (a) Convergence en échelle logarithmique de  $\|p_N^{m+1} - p_N^m\|_{L^2(I_\sigma)}$  pour  $N = 10$   
 (b) Erreur entre  $p$  et  $p_N$  en fonction de  $N$ , 30 itérations

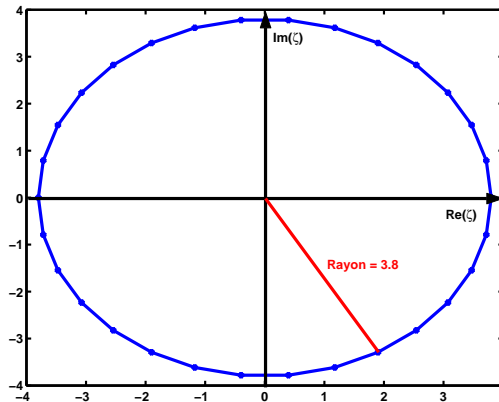


FIG. 2.2 – Contour  $\zeta$ ,  $R = 3.8$

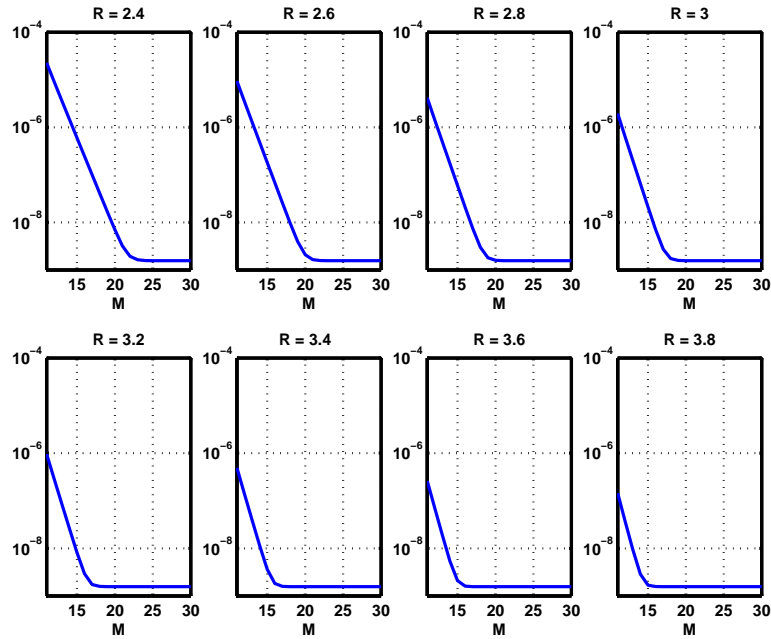


FIG. 2.3 – Erreur entre  $p$  et  $p_{N,M}$  en fonction de  $M$ , pour différentes valeurs de  $R$  en échelle logarithmique et pour  $N = 10$

$J_N$	$J_{N,M}$	$J_{N,M,h'}$
$1.01 \times 10^{-10}$	$5.03 \times 10^{-6}$	$9.35 \times 10^{-6}$

TAB. 2.2 – Erreurs sur la fonctionnelle de coût pour  $N = 10$ ,  $M = 30$ ,  $h' = 1/199$

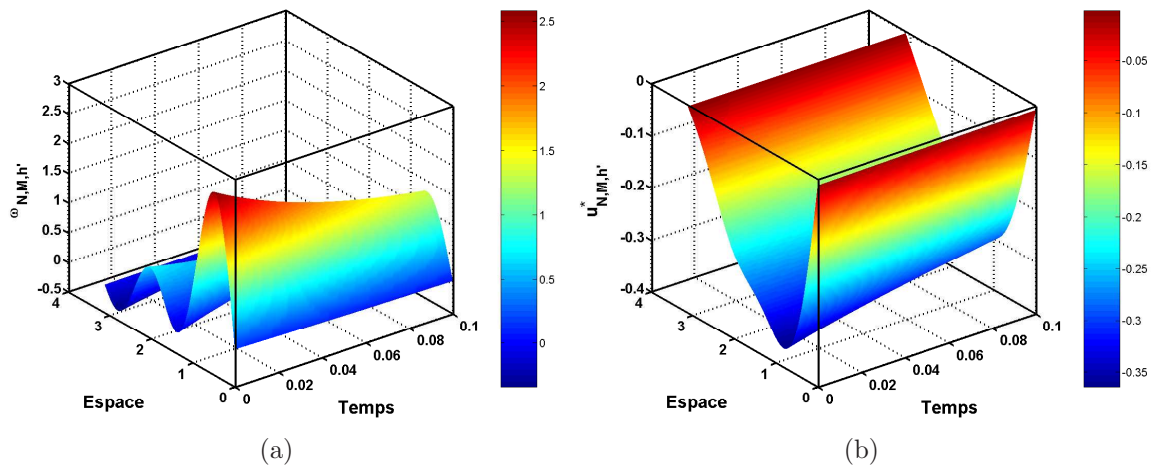


FIG. 2.4 – (a) Profil espace-temps de l'état optimal discrétisé (b) Profil espace-temps du contrôle optimal discrétisé

## 2.2 Exemple 2 : Equation de la chaleur avec un opérateur de contrôle non borné

### 2.2.1 Présentation

Considérons à nouveau l'équation de la chaleur comme équation d'état. L'espace de contrôle est  $U_h \subset L^2(\Omega)$ . La fonctionnelle de coût  $\mathcal{J}$  est la même que celle de l'exemple précédent. L'opérateur discret de contrôle est ici remplacé par un opérateur non borné défini au sens des distributions par

$$\langle B_h u, v \rangle = - \int_{\Omega} u_h \beta_1 \cdot \nabla v \, dx,$$

avec  $\beta_1$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^d$ . L'opérateur de contrôle continu correspondant est également non borné, sa définition au sens des distributions est

$$\langle B u, v \rangle = -\beta_0 \int_{\Omega} u \beta_1 \cdot \nabla v \, dx,$$

avec  $U \subset L^2(\Omega)$ .

### 2.2.2 Formulation d'un contrôleur semi-décentralisé

Dans cet exemple l'opérateur de contrôle est interne et non borné et l'opérateur d'observation est interne et borné. On applique le résultat de la section 1.2.3. Nous commençons par poser l'espace pivot  $Z = L^2(\Omega)$ ,  $V = H_0^1(\Omega)$ , ainsi  $A = \Delta$  est un isomorphisme de  $V$  dans  $V'$  à partir duquel nous définissons  $J = (-A)^{-1}$ . Cela nous permet de donner une définition précise de  $B_h$  et de  $B$  :

pour tout  $v \in V$ ,

$$\begin{aligned} \langle B_h u_h, v \rangle_{V',V} &= - \int_{\Omega} u_h \beta_1 \cdot \nabla v \, dx \quad \text{pour } u_h \in U_h, \\ \text{et } \langle B u, v \rangle_{V',V} &= - \int_{\Omega} u \beta_1 \cdot \nabla v \, dx \quad \text{pour } u \in U. \end{aligned}$$

Calculons  $B_h^*$  défini par

$$(B_h u_h, v)_{V'} = (u_h, B_h^* v)_{L^2(\Omega)}, \quad \text{pour } u_h \in U_h \quad \text{et } v \in V'.$$

Puisque

$$(B_h u_h, v)_{V'} = \langle B_h u_h, Jv \rangle_{V',V} = - (u_h, \beta_1 \cdot \nabla Jv)_{L^2(\Omega)},$$

alors

$$B_h^* v = -\beta_1 \nabla Jv,$$

et de manière similaire

$$B^* v = -\beta_1 \nabla Jv.$$

On introduit le noyau de  $B$  défini par

$$K_B = \{u \in L^2(\Omega) \mid u \text{ constant dans la direction } \beta_1\},$$

l'espace  $U = L^2(\Omega)/K_B$  ainsi que le noyau de  $B^*$

$$K_{B^*} = \{v \in V' \mid Jv \text{ constant dans la direction } \beta_1\}.$$

Puisque  $Jv = 0$  sur le bord  $\partial\Omega$ , alors  $K_{B^*} = \{0\}$ . De plus, en utilisant les arguments classiques, e.g. [32], on déduit que  $B$  est un isomorphisme de  $U$  dans  $V'$ . Nous posons également

$$Y = Z = L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad S = C = I \in \mathcal{L}(Z, Y).$$

A présent, on introduit  $X = V'$  et l'opérateur non négatif  $\Lambda = J$ . Le fait que  $\Lambda$  soit auto-adjoint i.e.

$$(\Lambda v, v')_{V'} = (v, \Lambda v')_{V'}$$

vient de l'égalité

$$\langle \Lambda v, Jv' \rangle_{V', V} = \langle Jv, \Lambda v' \rangle_{V, V'}.$$

Pour achever la construction, nous posons

$$\Phi_U = (\beta_1 \cdot \nabla)^{-1}, \quad \Phi_V = \Lambda, \quad \Phi_{V'} = I, \quad \Phi_Y = \Phi_Z = \Lambda^{\frac{1}{2}},$$

où  $\Lambda^{\frac{1}{2}}$  est un isomorphisme de  $V'$  dans  $L^2(\Omega)$ . De plus,

$$a(\Lambda) = I, \quad b(\Lambda) = I \quad \text{et} \quad c(\Lambda) = I.$$

Enfin, pour calculer  $p_{N,M}$  nous procédons comme dans le premier exemple.

## 2.3 Exemple 3 : Equation des poutres

Nous traitons ici le cas d'un opérateur de contrôle et d'un opérateur d'observation, tous deux internes et bornés.

### 2.3.1 Présentation

Le système est gouverné par l'équation biharmonique du second ordre avec des conditions d'encastrement aux bords et avec les mêmes espaces de contrôle  $U_h$  et  $U$  qu'à l'exemple 1,

$$\partial_{tt}^2 w(t, x) = -\Delta^2 w(t, x) + u_h(t, x) \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^{+*} \times \Omega, \quad (2.17)$$

$$w(t, x) = \nabla w(t, x) \cdot n = 0 \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^{+*} \times \partial\Omega, \quad (2.18)$$

$$w(0, x) = w_0(x) \quad \text{et} \quad \partial_t w(0, x) = w_1(x) \quad \text{sur} \quad \Omega. \quad (2.19)$$

Nous choisissons la fonctionnelle coût

$$\mathcal{J}(w_0, w_1; u) = \int_0^{+\infty} \|\Delta w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.$$

L'équation d'état avec une distribution continue d'actionneurs est

$$\partial_{tt}^2 w(t, x) = -\Delta^2 w(t, x) + \beta_0 u(t, x) \quad \text{sur } \mathbb{R}^{+*} \times \Omega.$$

À la section suivante, on montre que le contrôle optimal  $u^*$  peut être approché par

$$u_{N,M,h'}^* = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=1}^M \Im \left( \omega_\ell \zeta_\ell' \left( k_{1,N}(\zeta_\ell) v_{h',1}^{\zeta_\ell} + k_{2,N}(\zeta_\ell) v_{h',2}^{\zeta_\ell} \right) \right), \quad (2.20)$$

avec des notations analogues à celles de l'exemple 1, et où  $k_{1,N}$  et  $k_{2,N}$  sont définis à la section suivante.

Soit  $z^T = [w \ \partial_t w]$ , on établit par la suite que le vecteur  $v_{h'}^{\zeta_\ell} = \left( v_{h',1}^{\zeta_\ell}; v_{h',2}^{\zeta_\ell} \right)$  est solution de

$$\zeta_\ell \left( v_{h',-2}^{\zeta_\ell} - 4v_{h',-1}^{\zeta_\ell} + 6v_{h'}^{\zeta_\ell} - 4v_{h',+1}^{\zeta_\ell} + v_{h',+2}^{\zeta_\ell} \right) - h'^4 v_{h'}^{\zeta_\ell} = (z_{h',-2} - 4z_{h',-1} + 6z_{h'} - 4z_{h',+1} + z_{h',+2}), \quad (2.21)$$

et les conditions aux limites

$$v(0) = v(x_{H'}) = \partial_x v(0) = \partial_x v(x_{H'}) \quad \text{et} \quad z(0) = z(x_{H'}) = \partial_x z(0) = \partial_x z(x_{H'}) = 0,$$

avec  $x_{H'}$  est définie dans la section suivante.

### 2.3.2 Formulation et étude d'un contrôleur semi-décentralisé

Remarquons tout d'abord que le système (2.17) peut être écrit sous la forme d'un système du premier ordre  $\partial_t z = Az + Bu$ . Avec  $z = [w \ \partial_t w]^T$ , on obtient les opérateurs de l'équation opératorielle de Riccati

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\Delta^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_h = B = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad C = [\Delta, 0] \quad \text{et} \quad S = I.$$

Les espaces de contrôle et d'observation sont

$$U = L^2(\Omega), \quad Y \subset L^2(\Omega).$$

L'espace d'état habituel est  $Z = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$  alors  $B_h$ ,  $B$  et  $C$  sont bornés. Nous posons  $X = L^2(\Omega)$ ,  $\Lambda = (\Delta^2)^{-1}$  un isomorphisme de  $X$  dans  $H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ ,

$$\Phi_z = \begin{bmatrix} \Lambda^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \Phi_U = I \quad \text{et} \quad \Phi_Y = \Delta \Lambda^{1/2},$$

si bien que

$$\begin{aligned} Y &= \Delta \Lambda^{\frac{1}{2}} L^2(\Omega) \\ &= \Delta H_0^2(\Omega). \end{aligned}$$

Alors les paramètres de l'équation algébrique de Riccati sont

$$a(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & \lambda^{-1/2} \\ -\lambda^{-1/2} & 0 \end{bmatrix}, \quad b(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c(\lambda) = [1, 0] \quad \text{et} \quad s(\lambda) = 1.$$



**Remarque 19**

1. Les isomorphismes  $\Phi_Y$  et  $\Phi_Z$  résultent de calculs non triviaux. C'est pour cette raison que nous souhaitons préciser sur quels critères nous avons choisi ces isomorphismes. Le choix de  $\Phi_Z$  provient directement de l'expression des produits scalaires

$$\begin{cases} (z, z')_Z = (\Phi_Z^{-1}z, \Phi_Z^{-1}z')_{X^2}, \\ (z_1, z'_1)_{H_0^2(\Omega)} = \left( (\Delta^2)^{\frac{1}{2}} z_1, (\Delta^2)^{\frac{1}{2}} z'_1 \right)_{L^2(\Omega)}. \end{cases}$$

Pour  $\Phi_Y$ , nous utilisons la relation

$$C = \Phi_Y c(\Lambda) \Phi_Z^{-1},$$

et le produit scalaire

$$(y, y')_Y = (\Phi_Y^{-1}y, \Phi_Y^{-1}y')_X.$$

2. Puisque  $\Phi_Z$  et  $\Phi_U$  sont des matrices de fonctions de  $\Lambda$ , on utilise la Remarque 10(i) pour la construction de l'approximation.

On injecte les expressions de  $a, b, c, s$  et  $p = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$  dans l'équation (1.7), on trouve

$$\begin{cases} 0 = p_{21}^2 + 2\lambda^{-1/2}p_{21} - 1, \\ 0 = \lambda^{-1/2}p_{11} - \lambda^{-1/2}p_{22} - p_{21}p_{22}, \\ 0 = 2\lambda^{-1/2}p_{21} - p_{22}^2. \end{cases} \quad (2.22)$$

La solution  $k$  est une matrice  $1 \times 2$  d'opérateurs

$$k = [k_1 \quad k_2],$$

avec  $k_1 = p_{21}\Lambda^{-\frac{1}{2}}$  et  $k_2 = p_{22}$ . Ainsi, à partir de (2.22<sub>1</sub>) et (2.22<sub>3</sub>), le couple  $(k_1, k_2)$  est solution du système

$$\begin{cases} 0 = \lambda k_1^2 + 2k_1 - 1, \\ 0 = 2k_1 - k_2^2. \end{cases} \quad (2.23)$$

Comme dans l'exemple 1, on cherche les approximations polynômiales  $k_{1,N}$  et  $k_{2,N}$  de  $k_1$  et  $k_2$ , avec  $N = (N_1, N_2)$ . On utilise pour cela un schéma semi-implicite. Ici, le schéma est appliqué au système des deux équations couplées. En voici la mise en oeuvre : soient  $\eta_1(\lambda)$  et  $\eta_2(\lambda)$  deux fonctions test appartenant à  $\mathcal{C}^0(I_\sigma)$ , (2.23) équivaut à :

$$\begin{cases} 0 = \int_{I_\sigma} (\lambda k_1^2 + 2k_1 - 1) \eta_1(\lambda) d\lambda, \\ 0 = \int_{I_\sigma} (2k_1 - k_2^2) \eta_2(\lambda) d\lambda. \end{cases}$$

On modifie la seconde équation du système précédent de la façon suivante

$$\begin{cases} \int_{I_\sigma} (\lambda k_1^2 + 2k_1) \eta_1(\lambda) d\lambda = \int_{I_\sigma} \eta_1(\lambda) d\lambda, \\ \int_{I_\sigma} (k_2^2 + k_2) \eta_2(\lambda) d\lambda = \int_{I_\sigma} (2k_1 + k_2) \eta_2(\lambda) d\lambda, \end{cases}$$

de manière à ce que l'Algorithme 2 converge, indépendamment de la valeur initiale  $k_{2,N} = 0$ ,

---

**Algorithme 2** Schéma Semi-Implicite appliqué à un système

---

1:  $k_{1,N}^0, k_{2,N}^0$  donnés,

2: à la  $(m+1)$ ème étape : connaissant  $k_{1,N}^m \in \mathbb{P}_{N_1}$  et  $k_{2,N}^m \in \mathbb{P}_{N_2}$ , trouvons  $k_{1,N}^{m+1} \in \mathbb{P}_{N_1}$  et  $k_{2,N}^{m+1} \in \mathbb{P}_{N_2}$  tels que

$$\begin{cases} \int_{I_\sigma} k_{1,N}^{m+1}(\lambda) (\lambda k_{1,N}^m(\lambda) + 2) \eta_1(\lambda) d\lambda = \int_{I_\sigma} \eta_1(\lambda) d\lambda, \\ \int_{I_\sigma} k_{2,N}^{m+1}(\lambda) (k_{2,N}^m(\lambda) + 1) \eta_2(\lambda) d\lambda = \int_{I_\sigma} (2k_{1,N}^{m+1}(\lambda) + k_{2,N}^m(\lambda)) \eta_2(\lambda) d\lambda, \\ \forall \eta_1(\lambda) \in \mathbb{P}_{N_1} \quad \text{et} \quad \eta_2(\lambda) \in \mathbb{P}_{N_2}. \end{cases}$$

3: fin itération

---

Le calcul numérique des intégrales se fait par la formule (LGL).

### Solutions exactes

Tout d'abord, nous donnons la solution exacte du système (2.23)

$$\begin{cases} k_1(\lambda) = \frac{-1 + \sqrt{1 + \lambda}}{\lambda}, \\ k_2(\lambda) = \sqrt{2 \frac{-1 + \sqrt{1 + \lambda}}{\lambda}}. \end{cases}$$

La loi de contrôle optimal s'écrit

$$u^* = -k(\Lambda)z(t, x) = -k_1(\Lambda)w(t, x) - k_2(\Lambda)\partial_t w(t, x).$$

On injecte cette expression dans l'équation d'état (2.17), l'équation en boucle fermé s'écrit

$$\partial_{tt}^2 w(t, x) = -k_2(\Lambda) \partial_t w(t, x) - (\Delta^2 + k_1(\Lambda)) w(t, x). \quad (2.24)$$

Dans le cas mono-dimensionnel, le domaine  $\Omega$  est égal à  $]0, L[$  avec  $L$  la longueur de la poutre. Soient les vecteurs propres  $(\phi_n \in H_0^2(\Omega))_{n \in \mathbb{N}^*}$ , avec  $\phi_n$  est solution de

$$\frac{d^4 \phi_n}{d\xi^4} - \nu_n \phi_n = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

On introduit le scalaire  $y = \frac{x}{L}$ , les fonctions  $\eta_n(y) = \phi_n(x)$  solutions de  $\eta_n \in H_0^2([0, 1])$  et

$$\frac{d^4 \eta_n}{dy^4} - \mu_n^4 \eta_n = 0 \quad \text{dans } ]0, 1[,$$

avec  $\mu_n$  tel que  $\nu_n = \frac{\mu_n^4}{L^4}$ . La solution globale peut être écrite sous la forme

$$\eta_n(\mu_n y) = A s_1(\mu_n y) + B c_1(\mu_n y) + C s_2(\mu_n y) + D c_2(\mu_n y),$$

où

$$s_1(\mu_n y) = \sin(\mu_n y) + \sinh(\mu_n y),$$

$$c_1(\mu_n y) = \cos(\mu_n y) + \cosh(\mu_n y),$$

$$s_2(\mu_n y) = -\sin(\mu_n y) + \sinh(\mu_n y),$$

$$c_2(\mu_n y) = -\cos(\mu_n y) + \cosh(\mu_n y).$$

En tenant compte des conditions aux limites (2.18), il s'ensuit que  $\mu_n$  est solution de l'équation transcendante

$$\cos \mu_n \cosh \mu_n - 1 = 0,$$

et

$$\eta_n(\mu_n x) = C \left( s_2(\mu_n y) - \frac{s_2(\mu_n)}{c_2(\mu_n)} c_2(\mu_n) \right).$$

Enfin, les vecteurs propres  $\phi_n$  sont déduits de l'expression de  $\eta_n$  par changement de variable. Les valeurs propres  $\lambda_n$  de  $\Lambda$  sont l'inverse des valeurs propres  $\nu_n$  du Bilaplacien. De plus, la solution  $w(t, x)$  peut être décomposée suivant la base  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  orthonormale pour le produit scalaire  $L^2(\Omega)$ ,

$$w(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} w_n(t) \phi_n(\mu_n x).$$

En remplaçant  $w$  par sa décomposition dans (2.24), il s'ensuit que  $w_n$  est solution de

$$\partial_{tt}^2 w_n(t) = -k_2(\lambda_n) \partial_t w_n(t) - (\lambda_n^{-1} + k_1(\lambda_n)) w_n(t),$$

complétée par les conditions initiales

$$\begin{cases} w_n(0) = \int_0^L w(0, x) \phi_n(x) dt, \\ \partial_t w_n(0) = \int_0^L \partial_t w(0, x) \phi_n(x) dt. \end{cases}$$

On introduit les expressions

$$C_1(\lambda_n) = \frac{(k_2(\lambda_n) + \sqrt{k_2^2(\lambda_n) - 4(k_1(\lambda_n) + \lambda_n^{-1})}) w_n(0) + 2\partial_t w_n(0))}{2\sqrt{k_2^2(\lambda_n) - 4(k_1(\lambda_n) + \lambda_n^{-1})}},$$

$$C_2(\lambda_n) = \frac{(-k_2(\lambda_n) + \sqrt{k_2^2(\lambda_n) - 4(k_1(\lambda_n) + \lambda_n^{-1})}) w_n(0) - 2\partial_t w_n(0))}{2\sqrt{k_2^2(\lambda_n) - 4(k_1(\lambda_n) + \lambda_n^{-1})}}.$$

On peut établir que la solution exacte des modes

$$w_n(t) = C_1(\lambda_n) e^{\frac{1}{2}t(-k_2(\lambda_n) + \sqrt{k_2^2(\lambda_n) - 4(k_1(\lambda_n) + \lambda_n^{-1})})}$$

$$+ C_2(\lambda_n) e^{\frac{1}{2}t(-k_2(\lambda_n) - \sqrt{k_2^2(\lambda_n) - 4(k_1(\lambda_n) + \lambda_n^{-1})})}.$$

Enfin, le contrôle optimal exact peut s'écrire comme suit

$$u^*(t, x) = - \sum_n (k_1(\lambda_n) w_n(t) + k_2(\lambda_n) \partial_t w_n(t)) \phi_n(x).$$

A la suite de cet exemple, nous choisissons  $w_n(0) = \partial_t w_n(0) = 1$  et un seul mode pour la validation numérique.

### Résultats numériques

Pour cette application, on a choisi la longueur de la poutre  $L$  égale à  $\mu_1 = 4.73$ . Ainsi, toutes les valeurs propres de  $\Lambda$  sont incluses dans  $I_\sigma = (0, 1)$ . La Figure 2.5 montre que l'Algorithme 2 converge de manière exponentielle et le Tableau 2.3 illustre la pertinence du schéma semi-implicite associé. Nous avons choisi pour la suite de cet exemple, le paramètre  $N = (N_1, N_2) = (10, 10)$  assez grand pour s'assurer que l'approximation de  $k_{1,N}(\lambda)$  et  $k_{2,N}(\lambda)$  n'affecte pas la précision de la méthode d'approximation. En effet, les erreurs des deux approximations sont très petites car respectivement de l'ordre de  $10^{-10}$  et de  $10^{-11}$ . Par conséquent, l'écart de la fonctionnelle associée à l'approximation polynômiale fournit un bon résultat, voir la colonne de droite du Tableau 2.4. On a utilisé la quadrature de trapèze sur un cercle de rayon  $R$  afin de construire l'approximation  $k_{N,M}$ . Cette approximation est basée sur la combinaison de l'approximation polynômiale  $k_N$  avec la formule de Dunford-Schwartz. On illustre l'influence de  $R$  sur l'intégration numérique via la Figure 2.6. Ensuite, on fixe le rayon  $R = 2.6$  et le paramètre de la formule de quadrature  $M = (M_1, M_2) = (11, 11)$  pour que les erreurs relatives

$$e_i = \frac{\|k_{i,N} - k_i\|_{L^2(I_\sigma)}}{\|k_i\|_{L^2(I_\sigma)}}$$

soient négligeables devant les erreurs relatives

$$E_i = \frac{\|k_{i,N,M} - k_i\|_{L^2(I_\sigma)}}{\|k_i\|_{L^2(I_\sigma)}}.$$

Par conséquent,  $J_{N,M} \ll J_N$ , avec

$$J_N = \frac{|\mathcal{J}(w_0, w_1; u^*) - \mathcal{J}(w_0, w_1; u_N^*)|}{\mathcal{J}(w_0, w_1; u^*)},$$

$$\text{où } u_N^*(t, x) = - \sum_n (k_{1,N}(\lambda_n)w_n(t) + k_{2,N}(\lambda_n)\partial_t w_n(t)) \phi_n(x),$$

et

$$J_{N,M} = \frac{|\mathcal{J}(w_0, w_1; u^*) - \mathcal{J}(w_0, w_1; u_{N,M}^*)|}{\mathcal{J}(w_0, w_1; u^*)},$$

$$\text{où } u_{N,M}^*(t, x) = - \sum_n (k_{1,N,M}(\lambda_n)w_n(t) + k_{2,N,M}(\lambda_n)\partial_t w_n(t)) \phi_n(x).$$

De plus, l'approximation associée à l'intégration numérique est satisfaisante, voir la colonne du milieu du tableau 2.4. Enfin, nous achevons notre calcul par l'approximation spatiale. Pour ce faire, nous discrétisons le problème aux limites suivant

$$\begin{aligned} \Delta^2 v &= f \quad \text{dans } \Omega, \\ v &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ \nabla v \cdot n &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.25}$$

à l'aide d'une approximation aux différences finies. Étant donné  $H' \in \mathbb{N}$ , on pose

$$h' = \frac{L}{H' + 2},$$

et on pose

$$\Delta v = g \quad \text{et} \quad \Delta g = f. \tag{2.26}$$

Pour tout  $i \in \{0, \dots, H' + 2\}$ , on désigne par  $v_i$  une approximation de la solution  $v$  du système (2.25) au point  $x_i = ih'$  et par  $v_{h'}$ ,  $f_{h'}$  et  $g_{h'}$  les vecteurs de composante respective  $v_i$ ,  $f_i$  et  $g_i$  pour  $1 \leq i \leq H' + 1$ . On utilise l'approximation aux différences finies centrée usuelle du Laplacien. le problème (2.26) est alors discrétisé comme suit

$$\begin{aligned} \frac{1}{h'^2} (v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}) &= g_i, \\ \frac{1}{h'^2} (g_{i-1} - 2g_i + g_{i+1}) &= f_i. \end{aligned} \tag{2.27}$$

On remplace l'expression de  $g_i$  de l'équation (2.27<sub>1</sub>) dans l'équation (2.27<sub>2</sub>), on obtient alors la discrétisation de l'opérateur Bilaplacien  $\Delta^2$

$$\frac{1}{h'^4} (v_{i-2} - 4v_{i-1} + 6v_i - 4v_{i+1} + v_{i+2}) = f_i, \quad i = 2, \dots, H'.$$

On complète cette équation par  $v_0 = 0$ ,  $v_{H'+2} = 0$ ,  $\partial v_0 = 0$  et  $\partial v_{H'+2} = 0$ . Il reste à discrétiser la condition aux limites  $\partial v_0 = \partial v_{H'+2} = 0$ . Avec le développement de Taylor, on a

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0 + h' \partial_x v_0 + \frac{h'^2}{2} \partial_{xx}^2 v_0 + \mathcal{O}(h'^3), \\ v_2 &= v_0 + 2h' \partial_x v_0 + \frac{(2h')^2}{2} \partial_{xx}^2 v_0 + \mathcal{O}(h'^3). \end{aligned}$$



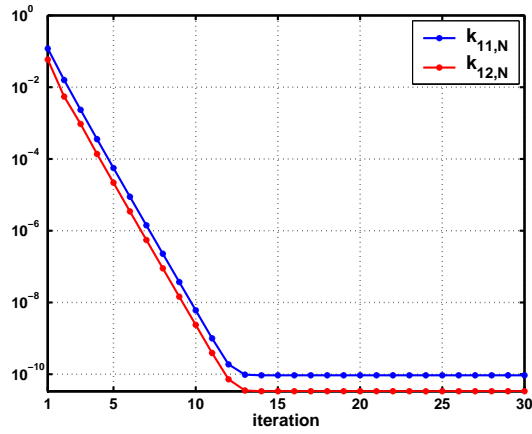


FIG. 2.5 – Convergence en échelle logarithmique de  $\|k_{i,N}^{m+1} - k_{i,N}^m\|_{L^2(I_\sigma)}$ ,  $i \in \{1, 2\}$

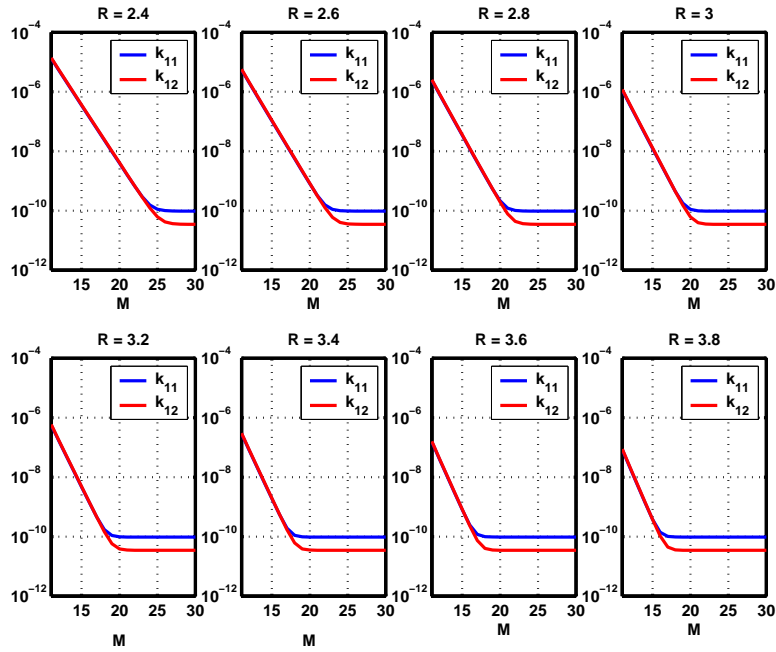


FIG. 2.6 – Erreur  $E_i$  en fonction de  $M$  pour différentes valeurs de  $R$  en échelle logarithmique et pour  $N = (10, 10)$

$N$	$e_1$	$e_2$
(2, 2)	$8,92 \times 10^{-4}$	$3,62 \times 10^{-4}$
(2, 3)	$8,92 \times 10^{-4}$	$4,28 \times 10^{-4}$
(3, 2)	$9,56 \times 10^{-5}$	$3,55 \times 10^{-4}$
(3, 3)	$9,56 \times 10^{-5}$	$3,74 \times 10^{-5}$
(3, 4)	$9,56 \times 10^{-5}$	$5,17 \times 10^{-5}$
(4, 3)	$1,17 \times 10^{-6}$	$3,67 \times 10^{-5}$
(4, 4)	$1,17 \times 10^{-6}$	$4,56 \times 10^{-6}$
(5, 5)	$1,53 \times 10^{-6}$	$5,73 \times 10^{-7}$
(5, 10)	$1,53 \times 10^{-6}$	$6,15 \times 10^{-7}$
(10, 5)	$9,32 \times 10^{-11}$	$5,61 \times 10^{-7}$
(10, 10)	$9,32 \times 10^{-11}$	$3,35 \times 10^{-11}$

TAB. 2.3 – Erreurs des approximations polynômiales

$J_N$	$J_{N,M}$	$J_{N,M,h'}$
$1.17 \times 10^{-7}$	$1.44 \times 10^{-5}$	$7.21 \times 10^{-5}$

TAB. 2.4 – Erreurs relatives des fonctionnelles de coût,  $N = (10, 10)$ ,  $M = (11, 11)$  et  $h' = 1/199$

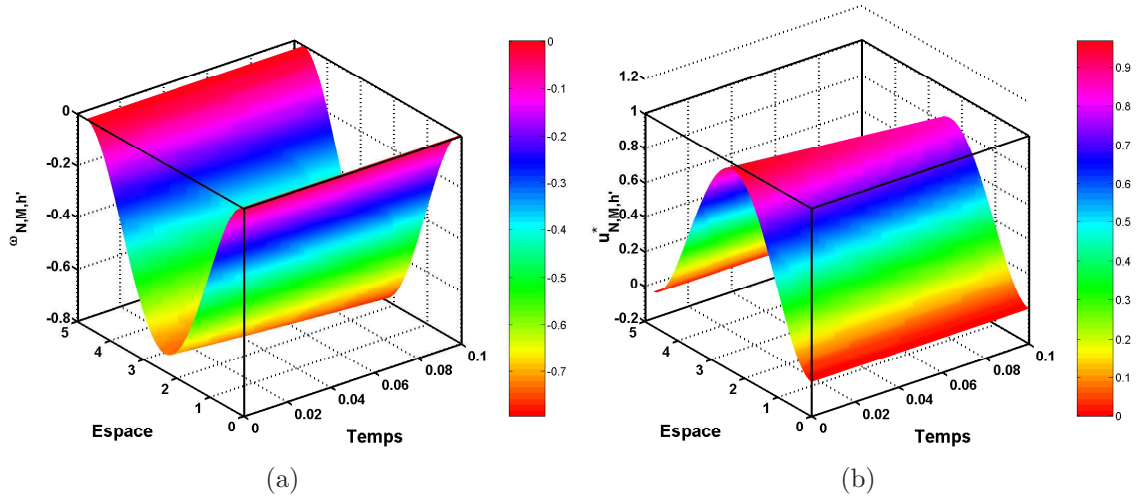


FIG. 2.7 – (a) Profil espace-temps de l'état optimal discrétisé (b) Profil espace-temps du contrôle optimal discrétisé



## 2.4 Exemple 4 : Equation de la chaleur 2D, contrôle frontière

On considère à présent le cas d'un opérateur de contrôle frontière et d'un opérateur d'observation interne borné.

### 2.4.1 Présentation

Soient  $\Omega$  le rectangle  $(0, 1) \times (0, \pi) \subset \mathbb{R}^2$  et  $\Gamma_0 = \{(0, y) : 0 < y < \pi\}$  une partie de sa frontière, voir la Figure 2.8.

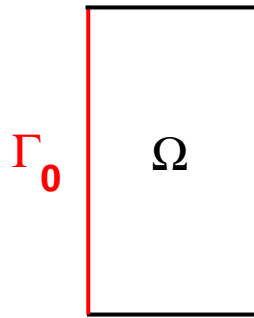


FIG. 2.8 – Le domaine  $\Omega$

Considérons le problème de contrôle frontière appliqué à l'équation de la chaleur sur  $\Gamma_0$ ,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t w(t, x, y) - \partial_{xx}^2 w(t, x, y) - \partial_{yy}^2 w(t, x, y) = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^{+*} \times \Omega, \\ w(t, 0, y) = v(t, y), & \text{sur } \mathbb{R}^{+*} \times \Gamma_0, \\ w(t, x, y) = 0, & \text{sur } \mathbb{R}^{+*} \times \partial\Omega \setminus \Gamma_0, \\ w(0, x, y) = w_0(x, y), & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (2.28)$$

où  $v(t, y)$  désigne le contrôle frontière.

Rappelons que la méthode décrite dans le chapitre précédent n'est pas applicable à des problèmes de contrôle frontière. Ainsi, nous devons transformer notre problème de contrôle frontière en un problème de contrôle interne. Pour ce faire, on pose

$$\bar{w}(t, x, y) = w(t, x, y) - (1 - x)v(t, y),$$

solution de l'équation de la chaleur avec des conditions aux limites homogènes et contrôle

interne

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \bar{w}(t, x, y) = \partial_{xx}^2 \bar{w}(t, x, y) + \partial_{yy}^2 \bar{w}(t, x, y) - (1-x)u(t, y) & \text{dans } \mathbb{R}^{+*} \times \Omega, \\ \bar{w}(t, x, y) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^{+*} \times \partial\Omega, \\ \bar{w}(0, x, y) = \bar{w}_0(x, y) = w_0(x, y) - (1-x)w_0(0, y) & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (2.29)$$

avec

$$u(t, y) = \partial_t v(t, y) - \partial_{yy}^2 v(t, y).$$

On choisit l'espace de contrôle  $U \subset L^2(0, 1)$ . Nous choisissons la fonctionnelle coût de la manière suivante

$$\mathcal{J}(\bar{w}_0; u) = \int_0^{+\infty} \|\bar{w}(t, x, y)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u(t, y)\|_{L^2(0,1)}^2 dt. \quad (2.30)$$

A la section 2.4.2, on construit l'approximation semi-décentralisée  $u_{M,h'}^*$  du contrôle optimal  $u^*$  en projetant ce système sur les quatre premiers vecteurs  $\psi_k(x)$  d'une base de  $L^2(0, 1)$ . On montre que,

$$u^* = -k(\Lambda)z,$$

où  $k(\Lambda)$  est un vecteur ligne  $1 \times 4$  d'opérateurs et la variable d'état  $z$  un vecteur colonne  $4 \times 1$  ayant pour coefficients  $z_{1j} = \bar{w}_j(t, y) = \sqrt{2} \int_0^1 \bar{w}(t, x, y) \sin(j\pi x) dx$ ,  $j = 1, \dots, 4$ . On pose  $N = (N^N, N^D)$  suffisamment grand avec  $N = (N_{j1})_{j,1}$ ,  $N^N = (N_{j1}^N)_{j,1}$  et  $N^D = (N_{j1}^D)_{j,1}$ . Les coefficients  $k_{j1,N}$  de la matrice  $k_N$  sont des fractions rationnelles approchant les  $k_{j1}$ . Leurs numérateurs et dénominateurs sont de degrés respectifs  $N_{j1}^N$  et  $N_{j1}^D$ . On obtient  $v_{h'}^{\zeta_\ell}$  par une formule analogue à (2.9). Enfin, on montre que l'approximation semi-décentralisée s'écrit sous la forme

$$u_{M,h'}^* = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=1}^M \Im \left( \mathcal{P}^{\zeta_\ell} v_{h'}^{\zeta_\ell} \right), \quad (2.31)$$

où

$$\mathcal{P}^{\zeta_\ell} = \omega_\ell \zeta_\ell' \begin{bmatrix} k_{11,N}(\zeta_\ell) & k_{12,N}(\zeta_\ell) & k_{13,N}(\zeta_\ell) & k_{14,N}(\zeta_\ell) \end{bmatrix}.$$

## 2.4.2 Construction et étude du contrôleur semi-décentralisé

Dans cet exemple, nous utilisons pour le calcul de  $k_N$  un algorithme différent de celui présenté pour les exemples précédents. Il est à présent basé sur une approximation rationnelle.

On introduit la base des fonctions propres normalisées associées au problème des valeurs propres

$$(\psi_k(x))_k = \left( \sqrt{2} \sin(k\pi x) \right)_k,$$

avec  $k$  étant un entier supérieur ou égal à 1. Ces fonctions vérifient

$$\begin{cases} -\partial_{xx}\psi(x) = k^2\pi^2\psi(x) & \text{pour } x \in (0, 1), \\ \psi(x) = 0 & \text{pour } x \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Ainsi, on adopte l'approximation

$$\begin{aligned} \bar{w}(t, x, y) &= \sum_{k \geq 1} \bar{w}_k(t, y) \psi_k(x) \\ &\simeq \sum_{k=1}^K \bar{w}_k(t, y) \psi_k(x), \end{aligned}$$

où  $K$  est un paramètre entier supérieur ou égal à 1 et  $\bar{w}_k$  les coefficients des modes  $\psi_k$  de la décomposition modale  $\bar{w}$ . Comme

$$\int_0^1 (1-x) \psi_k(x) dx = \frac{\sqrt{2}}{k\pi},$$

on trouve que  $\bar{w}_k(t, y)$  est solution de l'équation posée sur  $\Gamma_0$

$$\begin{cases} \partial_t \bar{w}_k(t, y) = -k^2\pi^2 \bar{w}_k(t, y) + \partial_{yy}^2 \bar{w}_k(t, y) - \frac{\sqrt{2}}{k\pi} u(t, y) & \text{dans } \mathbb{R}^{+*} \times \Gamma_0, \\ \bar{w}_k(t, y) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^{+*} \times \{0, \pi\}, \\ \bar{w}_k(0, y) = \bar{w}_{k,0}(y) = \int_0^1 \bar{w}_0(x, y) \psi_k(x) dx & \text{dans } \Gamma_0. \end{cases} \quad (2.32)$$

Ici  $u(t, y)$  désigne le contrôle interne. L'équation d'état est constituée de  $K$  équations (2.32) qui ne sont couplées que par le même contrôle  $u(t, y)$ , lui-même intervenant dans chacune des équations. La fonctionnelle de coût (2.30) est simplifiée par

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\bar{w}_0; u) &\simeq \mathcal{J}(\bar{w}_{\cdot,0}; u) \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^K \|\bar{w}_k(t, y)\|_{L^2(\Gamma_0)}^2 + \|u(t, y)\|_{L^2(\Gamma_0)}^2 dt. \end{aligned}$$

Le système (2.32) peut être exprimé sous la forme d'un système du premier ordre (1.3). Nous posons pour variable d'état

$$z^T = [ \bar{w}_1 \quad \dots \quad \bar{w}_K ].$$

Nous obtenons les coefficients-opérateurs de l'équation opératorielle de Riccati

$$A = -\text{diag} [ 1^2\pi^2 + \Lambda^{-1}, \quad \dots, \quad K^2\pi^2 + \Lambda^{-1} ],$$

$$B = \frac{I\sqrt{2}}{\pi} \left[ \frac{1}{1}, \quad \dots, \quad \frac{1}{K} \right]^T,$$

$C$  l'opérateur identité sur  $Z$ .

Les espaces de contrôle et d'observation sont  $U = L^2(\Gamma_0)$  et  $Y = (L^2(\Gamma_0))^K$ . L'espace d'état est  $Z = (L^2(\Gamma_0))^K$  alors  $B$  et  $C$  sont bornés. Nous posons  $X = L^2(\Gamma_0)$  et  $\Lambda = (-\partial_{yy}^2)^{-1}$  qui est un isomorphisme de  $X$  dans  $H^2(\Gamma_0) \cap H_0^1(\Gamma_0)$ . Alors nous trouvons les isomorphismes

$$\Phi_Z = \Phi_Y = I_{K \times K}, \quad \Phi_U = I,$$

et les coefficients-matrices de l'équation algébrique de Riccati

$$a(\lambda) = -\text{diag} \left[ 1^2\pi^2 + \frac{1}{\lambda}, \dots, K^2\pi^2 + \frac{1}{\lambda} \right],$$

$$b(\lambda) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left[ \frac{1}{1}, \dots, \frac{1}{K} \right]^T,$$

$c(\cdot)$  l'opérateur identité sur  $\mathbb{R}^K$ .

**Remarque 20** Ici,  $\Phi_Z$  et  $\Phi_U$  sont des matrices de fonctions de  $\Lambda$ , on peut donc utiliser la Remarque 10(i) pour la construction de l'approximation.

A ce stade, on peut chercher l'interpolation rationnelle  $k_N(\lambda)$  sous la forme (1.8) sur  $I_\sigma$ . Soient  $\lambda_0, \dots, \lambda_{\max}$   $L + 1$  nœuds distincts de  $I_\sigma$  et  $p(\lambda_0), \dots, p(\lambda_{\max})$  les solutions de l'équation algébrique de Riccati en ces points. On notera  $\mathcal{R}_{N^N, N^D}$  l'ensemble des fonctions rationnelles dont le numérateur est de degré inférieur ou égal à  $N^N$  et le dénominateur de degré inférieur ou égal à  $N^D$ . Soit  $N = (N^N, N^D)$ , le problème d'interpolation rationnelle est le suivant : étant donné  $N$ , trouver

$$k_{ij,N} = \frac{T_{ij,1}}{T_{ij,2}} \in \mathcal{R}_{N^N, N^D}$$

tel que

$$k_{ij,N}(\lambda_n) = \frac{T_{ij,1}(\lambda_n)}{T_{ij,2}(\lambda_n)} = k_{ij}(\lambda_n), \quad n = 0, \dots, L. \quad (2.33)$$

Si  $k_{ij,N}$  existe, sa représentation canonique s'écrit sous la forme (1.8) et les conditions d'interpolation de (2.33) impliquent

$$T_{ij,1}(\lambda_n) - k_{ij,N}(\lambda_n) T_{ij,2}(\lambda_n) = 0, \quad n = 0, \dots, L, \quad (2.34)$$

ou bien

$$d_0 + d_1\lambda_n + \dots + d_{N^N}\lambda_n^{N^N} - k_{ij}(\lambda_n)(d'_0 + d'_1\lambda_n + \dots + d'_{N^D}\lambda_n^{N^D}) = 0.$$

L'ensemble des vecteurs-solution  $\chi = (d_0, \dots, d_{N^N}, d'_0, \dots, d'_{N^D})^T$  de (2.34) constitue le noyau de la matrice  $(L + 1) \times (N^N + N^D + 2)$  donnée par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_0 & \lambda_0^2 & \dots & \lambda_0^{N^N} & -k_{ij}(\lambda_0) & -k_{ij}(\lambda_0)\lambda_0 & -k_{ij}(\lambda_0)\lambda_0^2 & \dots & -k_{ij}(\lambda_0)\lambda_0^{N^D} \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{N^N} & -k_{ij}(\lambda_1) & k_{ij}(\lambda_1)\lambda_1 & -k_{ij}(\lambda_1)\lambda_1^2 & \dots & -k_{ij}(\lambda_1)\lambda_1^{N^D} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_L & \lambda_L^2 & \dots & \lambda_L^{N^N} & -k_{ij}(\lambda_L) & -k_{ij}(\lambda_L)\lambda_L & -k_{ij}(\lambda_L)\lambda_L^2 & \dots & -k_{ij}(\lambda_L)\lambda_L^{N^D} \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

La décomposition en valeurs singulières, notée *SVD* de l'anglais *Singular Value Decomposition*, permet le calcul de la matrice pseudo-inverse et donc la résolution du système surdéterminé

$$\mathbf{A}\chi = 0$$

au sens des moindres carrés, sans donner la solution triviale  $\chi = 0$ . La solution  $\chi$  correspond alors la dernière colonne de  $V$  de la *SVD* de  $\mathbf{A} = U\Sigma V^T$ . Pour plus d'informations sur la *SVD*, le lecteur peut se référer à [52] et à [33].

Une introduction à l'interpolation rationnelle classique, i.e. dans le cas  $L = N^N + N^D$ , est relatée dans [13], [83], [93]. Pour une littérature plus complète, on pourra consulter [34], [67], [36] et [94].

Pour l'application numérique, nous avons choisi quatre modes ( $K = 4$ ) et  $L = 100$  nœuds logarithmiquement distribués sur  $I_\sigma = (10^{-2}, 1)$ . Nous remarquons que les formes de toutes les fonctions spectrales  $k_{ij}$  impliquées dans  $Q$  et illustrées par la Figure 2.9, représentent un comportement singulier à l'origine, d'où l'utilisation dans cet exemple de l'interpolation rationnelle. Dans le Tableau 2.5, nous donnons les degrés des polynômes  $N = (N^N, N^D)$  et les erreurs relatives

$$e_{ij} = \frac{\|k_{ij,N} - k_{ij}\|_{L^2(I_\sigma)}}{\|k_{ij}\|_{L^2(I_\sigma)}} \quad (2.36)$$

calculées entre  $k$  et son approximation rationnelle  $k_N$ . Les degrés  $N^N$  et  $N^D$  sont choisis suffisamment grands pour que les erreurs soient suffisamment petites. Ainsi, cela n'affecte pas le calcul en temps réel du contrôle.

Ici, l'approximation est rationnelle. D'après la Remarque 16, les intégrations numériques sont calculées par une quadrature de trapèze le long de l'ellipse définie par

$$R_1 = R_0 = 0.51 \quad \text{et} \quad R_{2,ij} = \begin{cases} 0.1 & \text{si } \Re(\zeta_{ij}^P) \notin (0, 1.22), \\ \frac{1}{2} \min(|\Im(\zeta_{ij}^P)|) & \text{si } \Re(\zeta_{ij}^P) \in (0, 1.22), \end{cases}$$

où  $\zeta_{ij}^P$  désignent les pôles de  $k_{ij,N}$ . Par conséquent, les pôles et les zéros de  $k_{ij,N}$  se trouvent à l'extérieur de ce chemin. Les erreurs relatives calculées entre les fonctions exactes et les approximations finales

$$E_{ij} = \frac{\|k_{ij,N,M} - k_{ij}\|_{L^2(I_\sigma)}}{\|k_{ij}\|_{L^2(I_\sigma)}}, \quad (2.37)$$

sont illustrées par la Figure 2.10, mise à l'échelle logarithmique, avec  $M$  variant entre 1 et  $10^3$ . Les résultats sont corrects. La décroissance est proportionnelle au nombre de nœuds.

Dans cet exemple, nous n'avons ni traité l'approximation spatiale  $k_{N,h'}$  ni  $k_{N,M,h'}$ . Cette approximation peut être envisagée en discrétisant l'opérateur  $\Lambda^{-1}$  d'une façon similaire à celle utilisée pour l'exemple 1.

$(i, j)$	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
$N_{ij}$	(20, 10)	(20, 10)	(19, 10)	(20, 10)
$e_{ij} \times 10^{-10}$	0.03	0.09	1.69	0.95

TAB. 2.5 – Erreurs des approximations rationnelles

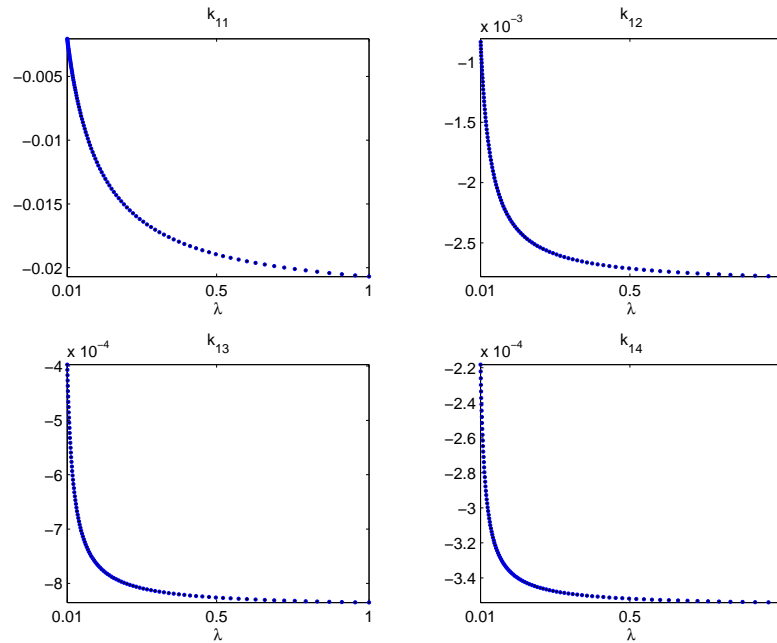


FIG. 2.9 – Formes des fonctions spectrales  $k$

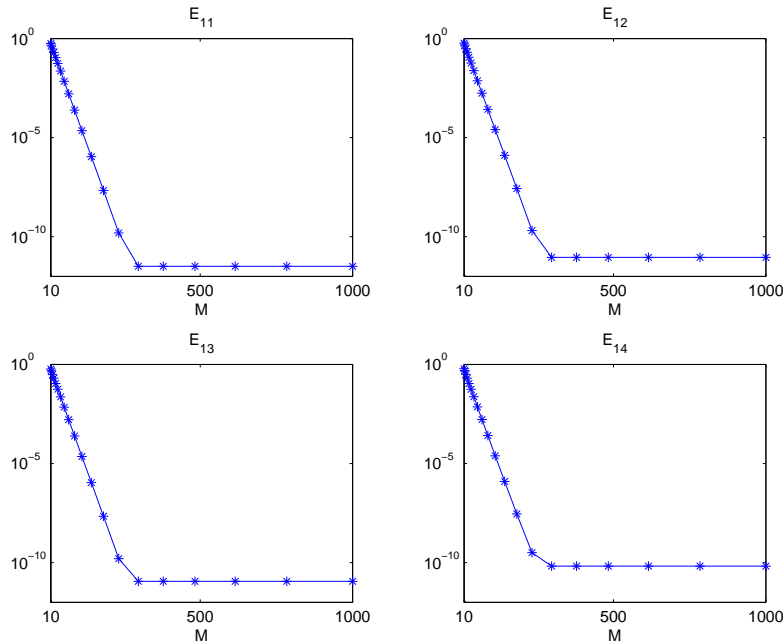


FIG. 2.10 – Erreurs entre  $k$  et  $k_{N,M}$

## 2.5 Exemple 5 : Microscope de Force Atomique (AFM)

On s'intéresse à un modèle multi-échelles d'un réseau de cantilevers mettant en oeuvre un opérateur de contrôle et un opérateur d'observation internes et bornés.

### 2.5.1 Présentation

On se réfère ici au modèle à deux-échelles [53] constitué d'une large matrice mono-dimensionnelle de cantilevers, voir Figure 2.11. Ce modèle a été obtenu à partir d'une méthode d'homogénéisation consacrée à des systèmes fortement hétérogènes. Le modèle homogénéisé est construit suivant trois étapes. Tout d'abord, un changement de variable est introduit afin de permettre la formulation du modèle complet dans un référentiel à deux-échelles et constitué de variables micro et macro. La seconde étape consiste à approcher le modèle en considérant un grand nombre de cantilevers. Enfin, on le réinjecte dans le référentiel naturel avec lequel le système réel est décrit. La théorie du contrôle présent est appliquée au modèle résultant de la seconde étape, pour être considérée comme élément du référentiel à deux-échelles. De plus, un nombre important mais fini de cantilevers est approché par une distribution d'un nombre infini de cantilevers.

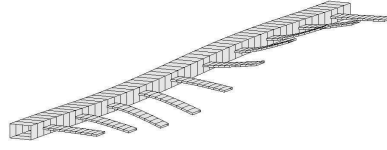


FIG. 2.11 – Matrice de Cantilevers

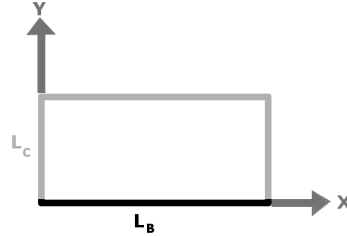


FIG. 2.12 – Domaine à deux-échelles

Après certaines simplifications, le modèle d'approximation est exprimé dans le référentiel à deux-échelles et apparaît comme étant posé dans un domaine rectangulaire  $\Omega = (0, L_B) \times (0, L_C)$ , voir Figure 2.12. Les paramètres  $L_B$  et  $L_C$  représentent respectivement la longueur de la base dans la direction macro-échelle  $x$ , et la longueur du cantilever mise à l'échelle dans la direction micro-échelle  $y$ . La base est modélisée par la ligne  $\Gamma = \{(x, y) \mid x \in (0, L_B) \text{ et } y = 0\}$ , et le rectangle  $\Omega$  contient un nombre infini de cantilevers. Nous décrivons le mouvement du système par son déplacement de flexion uniquement. Ainsi, la base est régie par une équation des poutres d'Euler-Bernoulli, avec deux forces distribuées distinctes, l'une exercée par les cantilevers attachés, l'autre notée  $u_B(t, x)$  et traduisant l'influence de la distribution d'actionneurs. Le déplacement de flexion, la masse par unité de longueur, le coefficient de flexion ainsi que la largeur sont respectivement notés  $w_B(t, x)$ ,  $\rho^B$ ,  $R^B$  et  $\ell_C$ . L'équation gouvernant la base s'écrit alors

$$\rho^B \partial_{tt}^2 w_B(t, x) + R^B \partial_{x\dots x}^4 w_B(t, x) + \ell_C R^C \partial_{yyy}^3 w_C(t, x, y) = -\partial_{xx}^2 u_B \quad \text{sur } \Gamma. \quad (2.38)$$

La base est supposée encastree à chaque extrémité, ainsi les conditions aux limites sont

$$\begin{cases} w_B(0) = \partial_x w_B(0) = 0, \\ w_B(L_B) = \partial_x w_B(L_B) = 0. \end{cases} \quad (2.39)$$

Les cantilevers sont orientés suivant la direction  $y$  et leurs mouvements sont gouvernés par un nombre infini d'équations d'Euler-Bernoulli distribuées le long de la direction  $x$ . Pour simplifier, chaque cantilever est soumis à une force de contrôle  $u_C(t, x)$  considérée constante le long des cantilevers. Ce choix n'affecte pas la méthode présentée ci-après, il peut ainsi être substitué par une distribution de force réaliste. On note respectivement  $w_C(t, x, y)$ ,  $\rho^C$  et  $R^C$  les déplacements de flexion de cantilever, la masse par unité de longueur et le coefficient de flexion. L'équation en  $(x, y) \in \Omega$  s'écrit

$$\rho^C \partial_{tt}^2 w_C + R^C \partial_{y\dots y}^4 w_C = u_C \quad \text{dans } \Omega,$$



et les quatre conditions aux limites sont les suivantes

$$\begin{cases} w_C = w_B \text{ et } \partial_y w_C = 0 & \text{en } y = 0, \\ \partial_{yy}^2 w_C = \partial_{yyy}^3 w_C = 0 & \text{en } y = L_C. \end{cases}$$

Cela traduit une extrémité encastree à la base, et l'autre laissée libre. Finalement, les deux équations sont complétées par des conditions initiales sur les déplacements et vitesses

$$\begin{cases} w_B = w_{B,0} & , \quad \partial_t w_B = w_{B,1}, \\ w_C = w_{C,0} & \text{et} \quad \partial_t w_C = w_{C,1}, \end{cases}$$

Le problème *LQR* est posé pour des variables de contrôle  $(u_B, u_C) \in U = H^2(\Gamma) \cap H_0^1(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$  et pour la fonctionnelle de coût

$$\begin{aligned} & \mathcal{J}(w_{B,0}, w_{B,1}, w_{C,0}, w_{C,1}; u_B, u_C) \\ &= \int_0^\infty \|w_B(t, x)\|_{H_0^2(\Gamma)}^2 + \|u_B(t, x)\|_{H^2 \cap H_0^1(\Gamma)}^2 \\ &+ \|\partial_{yy}^2 w_C(t, x, y)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_C(t, x, y)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \end{aligned} \quad (2.40)$$

On cherchera à construire l'approximation semi-décentralisée  $u_{M,h'}^*$  du contrôle optimal

$$u^* = \begin{bmatrix} u_B^* \\ u_C^* \end{bmatrix} = -k(\Lambda)z,$$

où  $k(\Lambda)$  est une matrice  $2 \times 4$  d'opérateur, la variable d'état  $z^T = [w_B \quad \tilde{w}_C^1 \quad \partial_t w_B \quad \partial_t \tilde{w}_C^1]$  avec  $\tilde{w}_C^1 = w_C \int_0^{L_C} \psi_1 dy$  ( $\psi_1$  étant solution du problème (2.43) pour un seul mode). Pour cela, on commence par chercher les fractions rationnelles  $k_{ij,N}$ , approximations des  $k_{ij}$ . Puis on cherche  $v_{h'}^{\zeta_\ell}$ , solution du problème analogue à (2.21). Enfin, on établit que l'approximation semi-décentralisée s'écrit sous la forme

$$\begin{bmatrix} -\partial_{xx}^2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}_{h'} u_{M,h'}^* = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=1}^M \Im \left( \mathcal{P}^{\zeta_\ell} v_{h'}^{\zeta_\ell} \right), \quad (2.41)$$

où  $\mathcal{P}^{\zeta_\ell}$  est une matrice  $2 \times 4$  qui s'écrit de la façon suivante

$$\mathcal{P}^{\zeta_\ell} = \omega_\ell \zeta'_\ell \begin{bmatrix} k_{11,N}(\zeta_\ell) & k_{12,N}(\zeta_\ell) & k_{13,N}(\zeta_\ell) & k_{14,N}(\zeta_\ell) \\ k_{21,N}(\zeta_\ell) & k_{22,N}(\zeta_\ell) & k_{23,N}(\zeta_\ell) & k_{24,N}(\zeta_\ell) \end{bmatrix}.$$

## 2.5.2 Application

La première étape pour appliquer la méthode décrite dans le chapitre précédent consiste à transformer le problème de contrôle en un autre problème avec un contrôle et une observation internes distribués. Pour ce faire, on pose

$$\bar{w}_C = w_C - w_B,$$

solution d'une équation d'Euler-Bernoulli des cantilevers avec des conditions aux limites homogènes

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho^C \partial_{tt}^2 \bar{w}_C + R^C \partial_{y\dots y}^4 \bar{w}_C = u_C - \rho^C \partial_{tt}^2 w_B \quad \text{sur } (0, L_C), \\ \bar{w}_C = \partial_y \bar{w}_C = 0 \quad \text{en } y = 0, \\ \partial_{yy}^2 \bar{w}_C = \partial_{yyy}^3 \bar{w}_C = 0 \quad \text{en } y = L_C. \end{array} \right. \quad (2.42)$$

On introduit la base des fonctions propres normalisées  $(\psi_k)_k$  associées au problème des valeurs propres<sup>3</sup>

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{y\dots y}^4 \psi(y) = \lambda^C \psi(y) \quad \text{sur } (0, L_C), \\ \psi(0) = \partial_y \psi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_{yy}^2 \psi(L_C) = \partial_{yyy}^3 \psi(L_C) = 0, \\ \|\psi_k\|_{L^2(0, L_C)} = 1. \end{array} \right. \quad (2.43)$$

Ainsi, on adopte l'approximation

$$\bar{w}_C(t, x, y) \simeq \sum_{k=1}^K \bar{w}_C^k(t, x) \psi_k(y),$$

où  $\bar{w}_C^k$  sont les coefficients des modes  $\psi_k$  de la décomposition modale de  $\bar{w}_C$ . On introduit la moyenne

$$\bar{\psi}_k = \int_0^{L_C} \psi_k dy,$$

et la quantité

$$u_C^k = \int_0^{L_C} u_C \psi_k dy.$$

On trouve que  $\bar{w}_C^k$  est solution de

$$\rho^C \partial_{tt}^2 \bar{w}_C^k + R^C \lambda_k^C \bar{w}_C^k = u_C^k - \rho^C \bar{\psi}_k \partial_{tt}^2 w_B.$$

<sup>3</sup>Numériquement, on peut obtenir les valeurs propres  $\lambda_k^C$  et les vecteurs propres  $\psi_k(y)$  de la même façon que pour le Bilaplacien avec des conditions aux limites de Dirichlet (voir exemple 3). L'équation en  $\mu_n$  sera alors remplacé par l'équation  $\sin(\mu_n) \sinh(\mu_n) - 1 = 0$  associée aux conditions aux limites des cantilevers.

Pour éviter d'utiliser  $\partial_{tt}^2 w_B$ , on introduit

$$\tilde{w}_C^k = \bar{w}_C^k + \bar{\psi}_k w_B$$

de sorte que  $\tilde{w}_C^k$  est solution de

$$\rho^C \partial_{tt}^2 \tilde{w}_C^k + R^C \lambda_k^C \tilde{w}_C^k - R^C \lambda_k^C \bar{\psi}_k w_B = u_C^k. \quad (2.44)$$

On exprime

$$\partial_y^3 w_C = \partial_y^3 (\bar{w}_C + w_B) = \partial_y^3 \left[ \sum_{k=1}^K \bar{w}_C^k \psi_k + \sum_{k=1}^K w_B \psi_k \right] = \sum_{k=1}^K \partial_y^3 \psi_k \tilde{w}_C^k.$$

On pose  $c_k = \partial_y^3 \psi_k(0)$ , on obtient que  $(w_B, \tilde{w}_C^k)$  est solution du système d'équations posé sur  $\Gamma$

$$\begin{cases} \rho^B \partial_{tt}^2 w_B + R^B \partial_{x\dots x}^4 w_B + \ell_R R^C \sum_k c_k \tilde{w}_C^k = -\partial_{xx}^2 u_B & \text{sur } \Gamma, \\ \rho^C \partial_{tt}^2 \tilde{w}_C^k + R^C \lambda_k^C \tilde{w}_C^k - R^C \lambda_k^C \bar{\psi}_k w_B = u_C^k & \text{sur } \Gamma, \text{ pour chaque } k, \end{cases} \quad (2.45)$$

avec les conditions aux limites (2.39). La fonctionnelle de coût (2.40) devient

$$\mathcal{J} \simeq \int_0^\infty \left\| \partial_{xx}^2 w_B(t, x) \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \sum_{k=1}^K \left\| \lambda_k^C \tilde{w}_C^k(t, x) \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \left\| \partial_{xx}^2 u_B \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \sum_{k=1}^K \left\| u_C^k \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt.$$

**Remarque 21** La fonctionnelle de coût a été simplifiée grâce à l'égalité entre les normes

$$\|w_B(t, x)\|_{H_0^2(\Gamma)}^2 = \|\partial_{xx}^2 w_B(t, x)\|_{L^2(\Gamma)}^2,$$

et à l'aide des relations associées aux fonctions propres normalisées  $(\psi_k)_k$

$$\begin{cases} \left\| \partial_{yy}^2 \psi_k(y)(t, x) \right\|_{L^2(0, L_C)}^2 = \lambda_k^C, \\ \int_0^{L_C} \partial_{yy}^2 \psi_k(y) \partial_{yy}^2 \psi_{k'}(y) dy = \delta_{kk'}. \end{cases}$$

On pose pour variable d'état

$$z^T = [w_B \quad \tilde{w}_C^1 \quad \dots \quad \tilde{w}_C^k \quad \partial_t w_B \quad \partial_t \tilde{w}_C^1 \quad \dots \quad \partial_t \tilde{w}_C^k],$$

et pour contrôle

$$u^T = [u_B \quad u_C^1 \quad \dots \quad u_C^k].$$

Le système (2.45) est donc formulé comme le système (1.3). Soit  $X = L^2(\Gamma)$ , l'opérateur  $\Lambda = (\partial_{x\dots x}^4)^{-1}$  est un isomorphisme de  $X$  dans  $H^4(\Gamma) \cap H_0^2(\Gamma)$ . Nous choisissons pour

espace d'état  $Z = H_0^2(\Gamma) \times X^{2K+1}$ , pour espace de contrôle  $U = H^2 \cap H_0^1(\Gamma) \times X^K$  et pour espace d'observation  $Y = Z$ . On introduit les expressions suivantes

$$A_1^K \text{ l'opérateur identité dans } \mathbb{R}^K,$$

$$A_2 = -\frac{\ell_R R^C}{\rho^B} [c_1, \dots, c_K],$$

$$A_3 = \frac{R^C}{\rho^C} [\bar{\psi}_1 \lambda_1^C, \dots, \bar{\psi}_K \lambda_K^C]^T,$$

$$A_4 = \text{diag} [\lambda_1^C, \dots, \lambda_K^C],$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\partial_{xx}^2}{\rho^B} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^C} A_1^K \end{bmatrix},$$

$$b_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho^B} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^C} A_1^K \end{bmatrix}.$$

Ainsi, l'opérateur d'état s'écrit comme suit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A_1^{K+1} I \\ \left[ \begin{array}{cc} -\frac{R^B}{\rho^B} \Lambda^{-1} & A_2 I \\ A_3 I & -\frac{R^C}{\rho^C} A_4 I \end{array} \right] & 0 \end{bmatrix},$$

et les opérateurs de contrôle  $B$  et d'observation  $C$  sont respectivement donnés par

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 I \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} \text{diag}(I, A_4 I) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notons que les opérateurs  $A$  et  $B$  sont obtenus à partir de l'équation d'état (2.45), tandis que  $C$  issu de l'expression de la fonctionnelle de coût simplifiée. Alors, les isomorphismes sont donnés par

$$\Phi_Z = \text{diag} [\Lambda^{\frac{1}{2}}, A_1^{2K+1} I], \quad \Phi_U = \begin{bmatrix} (-\partial_{xx}^2)^{-1} & 0 \\ 0 & A_1^K \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Phi_Y = \Phi_Z,$$

et les paramètres de l'équation algébrique de Riccati sont définis comme suit

$$a(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & \text{diag}(\lambda^{-\frac{1}{2}}, A_1^K) \\ \left[ \begin{array}{cc} -\frac{R^B}{\rho^B} \lambda^{-\frac{1}{2}} & A_2 \\ A_3 \lambda^{\frac{1}{2}} & -\frac{R^C}{\rho^C} A_4 \end{array} \right] & 0 \end{bmatrix},$$

$$b(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ b_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad c(\lambda) = \begin{bmatrix} \text{diag}(1, A_4) & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Remarque 22**

1. Ici,  $\Phi_Z$  et  $\Phi_Y$  sont obtenus de manière analogue à celle utilisée pour le choix de  $\Phi_Z$  dans la Remarque 19 de l'Exemple 3. Pour  $\Phi_U$ , nous utilisons la relation

$$B = \Phi_Z b \Phi_U^{-1},$$

et les produits scalaires

$$(u, u')_U = (\Phi_U^{-1}u, \Phi_U^{-1}u')_{X^{1+K}},$$

$$(u_1, u'_1)_{H^2 \cap H_0^1(\Gamma)} = (-\partial_{xx}^2 u_1, -\partial_{xx}^2 u'_1)_{L^2(\Gamma)},$$

ce qui implique

$$\frac{-\partial_{xx}^2}{\rho^B} = b_{1+K,1} (\Phi_U^{-1})_{1,1}.$$

2. Dans cet exemple,  $\Phi_Z$  est une matrice de fonction de  $\Lambda$  mais  $\Phi_U$  n'est pas une matrice de fonction de  $\Lambda$ . En conséquence, on utilise la Remarque 10(ii) pour la construction de l'approximation.

3. Nous calculons  $k_{ij,N}$  et  $k_{ij,N,M}$  suivant la même procédure que celle employée dans l'exemple précédent.

A présent, on s'intéresse à une dynamique à l'échelle micro. Par conséquent, l'étude d'un seul mode suffit et on prendra  $K = 1$ . Pour ce cas, la variable d'état est

$$z^T = [w_B \quad \tilde{w}_C^1 \quad \partial_t w_B \quad \partial_t \tilde{w}_C^1],$$

et le contrôle s'écrit

$$u^T = [u_B \quad u_C^1].$$

Les coefficients de l'équation algébrique de Riccati sont simplifiés en

$$a(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{R^B}{\rho^B} \lambda^{-\frac{1}{2}} & -\frac{\ell_R R^C}{\rho^B} c_1 & 0 & 0 \\ \frac{R^C}{\rho^C} \bar{\psi}_1 \lambda_1^C \lambda^{\frac{1}{2}} & -\frac{R^C}{\rho^C} \lambda_1^C & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho^B} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^C} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad c(\lambda) = \text{diag}[1, \lambda_1^C, 0, 0].$$

Pour l'application numérique, nous avons pris  $R^B$ ,  $\rho^B$ ,  $\ell_R$ ,  $R^C$ ,  $\rho^C$  et  $L_C$  tous égaux à un, et  $L_B = 4.73$ . Ainsi, toutes les valeurs propres de  $\Lambda$  sont incluses dans  $(0, 1)$ . La première valeur propre du cantilever est égale à  $\lambda_1^C = 12.36$ ,  $\bar{\psi}_1 = -0.78$  et  $c_1 = 9.86$ . De

plus, nous avons choisi  $L = 100$  nœuds logarithmiquement distribués sur  $I_\sigma \in (10^{-2}, 1)$ . Les formes de toutes les fonctions spectrales  $k_{ij}$  représentent un comportement singulier à l'origine, voir Figure 2.13. Dans le Tableau 2.6, nous donnons les degrés des polynômes  $N = (N^N, N^D)$  et les erreurs relatives (2.36). Les degrés  $N^N$  et  $N^D$  sont choisis assez grands pour que les erreurs soient suffisamment petites, cela dans le but de ne pas affecter le calcul du contrôle en temps réel.

Les intégrations numériques ont été calculées par la quadrature de trapèze. Le chemin d'intégration est défini par

$$R_1 = R_0 = 0.61 \quad \text{et} \quad R_{2,ij} = \frac{9}{10} \min(|\Im(\zeta_{ij}^P)|),$$

où  $\zeta_{ij}^P$  désignent les pôles de  $k_{ij,N}$ . Les erreurs relatives (2.37) considérées entre les fonctions exactes et les approximations finales sont données par la Figure 2.14 à l'échelle logarithmique, pour  $M$  variant entre 1 et  $10^3$ . Les résultats sont corrects. On note de plus que la décroissance est proportionnelle au nombre de nœuds.

Dans cet exemple nous n'avons ni abordé le calcul de l'approximation spatiale  $k_{N,h'}$  ni celui de  $k_{N,M,h'}$ . Ces approximations peuvent être traitées en discrétisant l'opérateur  $\Lambda^{-1}$  de façon similaire à celle utilisée pour l'exemple 3.

$(i, j)$	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)
$N_{ij}$	(7, 19)	(7, 20)	(13, 8)	(7, 19)	(8, 20)	(7, 19)	(20, 10)	(19, 7)
$e_{ij} \times 10^{-7}$	4.78	0.69	3.83	1.19	1.81	1.19	0.89	0.53

TAB. 2.6 – Erreurs des approximations rationnelles

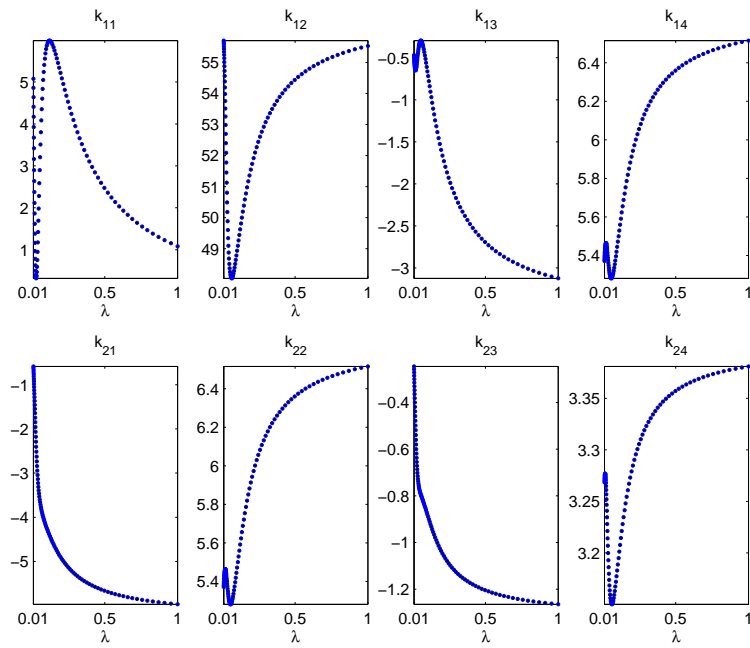


FIG. 2.13 – Formes des fonctions Spectrales  $k$

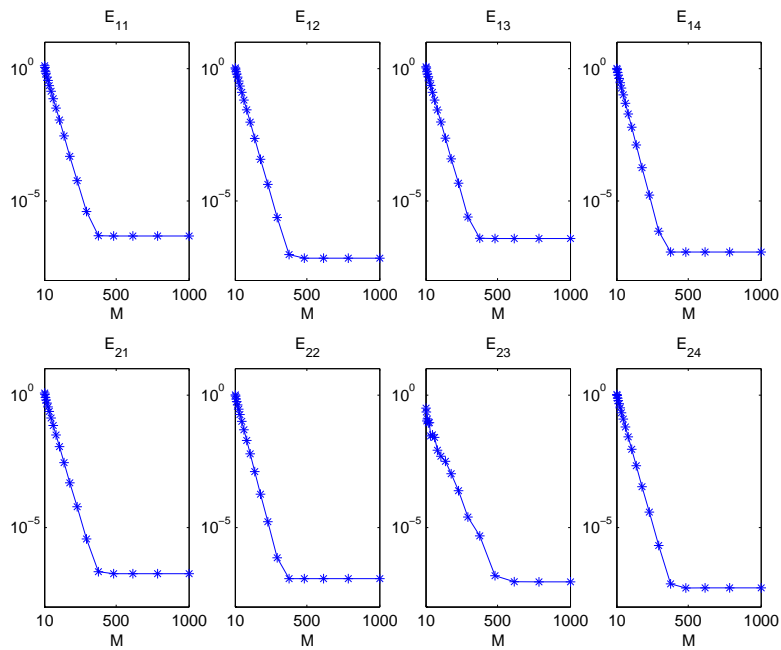


FIG. 2.14 – Erreurs entre  $k$  et  $k_{N,M}$

## 2.6 Exemple 6 : Contrôle LQG d'une poutre avec actionneurs et capteurs piézo-électriques distribués

Cet exemple est relatif à un problème de contrôle distribué rencontré en mécanique des structures. Considérons une plaque élastique sur les faces de laquelle sont répartis des transducteurs piézo-électriques de façon périodique. Sur une face, les pastilles piézo-électriques seront utilisées comme des capteurs tandis que sur l'autre face, placés de façon symétrique, il le seront comme des actionneurs. Le système ainsi constitué est soumis à une excitation initiale. Nous nous intéressons ici au problème de la réduction de son niveau de vibrations.

Dans cet exemple, nous construisons l'approximation semi-décentralisée du contrôle, de manière analogue à celle décrite dans un problème *LQR* déjà traité. Le contexte est différent puisqu'on l'applique cette fois au cadre *LQG*. Ici, le contrôle n'est pas fonction de  $\Lambda$ . Nous avons dans cette étude considéré uniquement l'approximation polynômiale des opérateurs contrôleur et filtre. Cette approximation est établie à l'aide d'un développement asymptotique et de la méthode d'identification des coefficients par identification des puissances. Enfin, l'approximation du contrôle semi-décentralisée est réalisée à l'aide d'un circuit électronique.

### 2.6.1 Présentation du problème

Le mouvement d'une plaque élastique équipée d'une distribution de transducteurs piézo-électriques est régi par les équations de la dynamique

$$\int_{\Omega^{\bar{\alpha}}} \left( \rho^{\bar{\alpha}} \sum_{i=1}^3 \partial_{tt}^2 u_i^{\bar{\alpha}} \cdot v_i + \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}^{\bar{\alpha}} \cdot s_{ij}(v) \right) dx = 0,$$

pour tout champ de déplacement admissible  $v$ . Il est également gouverné par l'équation de l'électrostatique

$$\int_{\Omega^{\bar{\alpha}}} \sum_{i=1}^3 D_i^{\bar{\alpha}} \partial_i \psi dx = 0,$$

pour tout potentiel électrique admissible  $\psi$ . Ici,  $\Omega^{\bar{\alpha}}$ ,  $\rho^{\bar{\alpha}}$ ,  $u^{\bar{\alpha}}$ ,  $\sigma^{\bar{\alpha}}$  et  $D^{\bar{\alpha}}$  représentent respectivement le domaine occupé par la plaque, la masse volumique, le vecteur des déplacements mécaniques, le tenseur des contraintes et le vecteur des déplacements électriques. L'indice  $\bar{\alpha}$  est relatif à l'épaisseur de la plaque. Le tenseur des contraintes mécaniques et les déplacements électriques sont supposés être des combinaisons linéaires du tenseur des déformations  $s_{kl}(u^{\bar{\alpha}})$  et du champ électrique  $\partial_k \phi^{\bar{\alpha}}$  (ici  $\phi^{\bar{\alpha}}$  représente le potentiel électrique)

$$\sigma_{ij}^{\bar{\alpha}} = \sum_{k=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 R_{ijkl} s_{kl}(u^{\bar{\alpha}}) + e_{kij} \partial_k \phi^{\bar{\alpha}} \right),$$



et

$$D_k^{\bar{\alpha}} = \sum_{j=1}^3 \left( \sum_{i=1}^3 e_{kij} s_{kl}(u^{\bar{\alpha}}) - \varepsilon_{ki} \partial_i \phi^{\bar{\alpha}} \right).$$

Les  $R_{ijkl}$ ,  $e_{kij}$  et  $\varepsilon_{ki}$  sont respectivement le tenseur de raideur, le coefficient de piézo-électricité et la matrice des permittivités. Du point de vue des conditions aux limites imposées, nous supposons que les deux extrémités de la poutre sont encastées et que les autres bords sont libres. Par ailleurs, toutes les faces latérales des transducteurs piézo-électriques sont supposées être électriquement isolées de leur environnement. Leurs faces inférieures sont reliées à la terre. Les faces supérieures des capteurs sont reliées à l'entrée d'amplificateurs courant-courant, alors que celles des actionneurs sont reliées à la sortie d'amplificateurs tension-tension. Enfin, le déplacement mécanique est soumis à des conditions initiales. Pour plus de détails concernant ce modèle, on se référera à [14].

La mise en oeuvre d'un contrôleur optimal à partir de ce modèle serait beaucoup trop lourde. Pour cette raison, nous ne présentons ici qu'une simplification du modèle avec l'utilisation de la théorie de l'homogénéisation.

### 2.6.2 Simplification du modèle : Modèle homogénéisé de plaque

La plaque considérée est supposée être mince. Utilisant cette hypothèse, les auteurs ont montré dans [14] que le modèle ci-dessus peut être approché par le modèle bi-dimensionnel suivant :

$$\int_{\omega} \rho \partial_{tt}^2 w v + \sum_{i,j=1}^2 \left( \sum_{k,\ell=1}^2 c_{ijkl} \partial_{k\ell}^2 w + e_{ij} \phi \right) \partial_{ij}^2 v \, dx = 0,$$

où  $\omega$ ,  $\rho$ ,  $w$ ,  $c_{ijkl}$ ,  $e_{ij}$  et  $\phi$  représentent respectivement la surface moyenne de la plaque, sa masse surfacique, le déplacement transverse, le tenseur des raideurs de flexion, le tenseur des coefficients piézo-électriques surfaciques et la tension électrique aux bornes de chaque transducteur. Dans ce modèle, la charge par unité de surface sortant d'un capteur  $S$  est

$$q = \sum_{i,j=1}^2 e_{ij} \frac{1}{S} \int_{\bar{\omega}} \partial_{ij}^2 w \, ds.$$

En tirant parti du fait que les transducteurs piézo-électriques sont distribués périodiquement dans la plaque, il est possible d'obtenir un modèle simplifié de ce système couplé en utilisant la théorie de l'homogénéisation. Cela a été effectué dans [15]. Il en résulte le modèle d'un milieu continu homogène qui a une structure identique à celle du modèle bi-dimensionnel de plaque. Néanmoins, dans ce nouveau modèle, les tenseurs de raideur, de piézo-électricité et la matrice de permittivités  $y$  sont constants. Les sources de courant produites par les capteurs piézo-électriques sont modélisées par une distribution continue d'un champs de courants électriques. Quant aux tensions appliquées aux actionneurs, elles sont représentées par une distribution continue de tensions. A partir de ce modèle homogénéisé, on peut effectuer une étude simple en utilisant une loi de contrôle optimal.

Néanmoins, afin d'alléger l'exposé de la méthode, le modèle homogénéisé sera davantage simplifié. En supposant que le mouvement de la plaque est principalement un

mouvement de flexion dans sa direction longitudinale, le modèle de plaque homogénéisé peut être substitué par un modèle posé dans un domaine de dimension un, c'est-à-dire que le modèle de plaque est remplacé par le modèle de poutre

$$\partial_{tt}^2 \omega(t, \zeta) + \alpha \Delta^2 \omega(t, \zeta) + \beta \Delta \phi(t, \zeta) = 0, \quad \text{pour } (t, \zeta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \Omega. \quad (2.46)$$

Ici  $\alpha = c_{1111}/\rho$ ,  $\beta = e_{11}/\rho$ ,  $\Delta$  est l'opérateur Laplacien en dimension un  $\Delta = \partial_{\zeta\zeta}^2$  et  $\Omega = ]0, L[$  représente la section longitudinale. Les conditions aux limites d'encastrement deviennent

$$\omega(t, \zeta) = \partial_{\zeta} \omega(t, \zeta) = 0 \quad \text{en } (t, \zeta) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega,$$

avec  $\partial\Omega = \{0, L\}$  et les conditions initiales

$$\omega(0, \zeta) = g(\zeta) \quad \text{et} \quad \partial_t \omega(0, \zeta) = 0.$$

Les densités de charge et de courant mesurées sont

$$q = e\Delta\omega \quad \text{et} \quad i = e\Delta\partial_t\omega,$$

où  $e = e_{11}$ . Les résultats numériques présentés dans la dernière partie de cet exemple sont basés sur ce modèle.

### 2.6.3 Formulation du problème de contrôle optimal LQG

L'équation (2.46) est choisie comme équation d'état du problème de contrôle. Elle peut être exprimée sous forme d'un système d'équations opératorielles du premier ordre :

$$\partial_t z = Az + Bu \quad \text{pour } t > 0 \quad \text{et} \quad z(0) = z^0.$$

Ici, la variable d'état  $z^T = [\omega \quad \partial_t \omega]$  appartient à l'espace  $L^2(\mathbb{R}^+; Z)$ , où  $Z = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . Le domaine de l'opérateur d'état  $A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\alpha\Lambda^{-1} & 0 \end{bmatrix}$ , où  $\Lambda^{-1} = \Delta^2 = \partial_{\zeta\zeta\zeta\zeta}^4$ , est  $\mathcal{D}(A) = H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \subset Z \rightarrow Z$ . La variable de contrôle  $u$  est choisie dans l'espace  $U = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , et l'opérateur de contrôle  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta\Delta \end{bmatrix}$  est donc défini de  $U$  dans  $Z$ . La fonctionnelle de coût du problème de contrôle optimal est

$$J(u) = \int_0^\infty |Cz|_Y^2 + |Du|_U^2 dt,$$

$D = d$  étant une constante. Nous choisissons  $Cz = [\gamma I \quad 0] : Z \rightarrow Y = H_0^2(\Omega)$ ,  $\gamma$  étant une constante positive. On suppose qu'on observe le déplacement  $\omega$  et on estime la vitesse  $\partial_t \omega$ .

Comme les couples  $(A, B)$  et  $(C, A^*)$  sont respectivement stabilisable et détectable, le problème de minimisation

$$\min_{u \in U} J(u),$$

admet une solution unique. Cette dernière est

$$u = -Q\hat{z},$$

avec

$$Q = (DD^*)^{-1} B^* P,$$

où  $P$  est l'unique opérateur borné auto-adjoint non négatif, solution de l'équation opératorielle de Riccati de contrôle

$$(A^* P + PA - PB(DD^*)^{-1} B^* P + C^* C) x = 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A), \quad (2.47)$$

pour tout  $x \in \mathcal{D}(A)$ , et  $\widehat{z}^T = [\widehat{z}_1 \quad \widehat{z}_2]$  la variable d'estimation de l'état  $z$ . On introduit

$$A_C = A - BQ - \widehat{Q}C.$$

Nous obtenons le système en boucle fermée suivant

$$\begin{bmatrix} \partial_t z \\ \dots \\ \partial_t \widehat{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \dots & -BQ \\ \dots & \dots & \dots \\ \widehat{Q}C & \dots & A_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \dots \\ \widehat{z} \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

avec

$$\widehat{Q} = \widehat{P}C^* (DD^*)^{-1}$$

et  $\widehat{P}$  l'unique solution de l'équation opératorielle de Riccati du filtre

$$\left( A\widehat{P} + \widehat{P}A^* - \widehat{P}C^* (DD^*)^{-1} C\widehat{P} + BB^* \right) x = 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A). \quad (2.49)$$

Les opérateurs  $A^*$ ,  $B^*$  et  $C^*$  sont les opérateurs adjoints de  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Ils sont définis de la façon suivante :  $A^* = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha I \\ \Lambda^{-1} & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B^* = [0 \quad -\beta \Delta^{-1}] : Z \rightarrow U$  et  $C^* = \begin{bmatrix} \gamma I \\ 0 \end{bmatrix} : Y \rightarrow Z$ , voir [22]. Nous posons  $X = L^2(\Omega)$ . Le choix des espaces  $Z$ ,  $U$  et  $Y$  a pour conséquence que

$$\Phi_z = \begin{bmatrix} \Lambda^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \Phi_U = (-\Delta)^{-1} \quad \text{et} \quad \Phi_Y = \Lambda^{1/2},$$

alors

$$a(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & \lambda^{-1/2} \\ -\alpha \lambda^{-1/2} & 0 \end{bmatrix}, \quad b(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix}, \quad c(\lambda) = [\gamma, 0] \quad \text{et} \quad s(\lambda) = d^2.$$

**Remarque 23** *Nous présentons quelques remarques montrant le lien avec la théorie développée dans le chapitre précédent.*

1. L'opérateur  $DD^*$  est égal à l'opérateur  $S$ .

2. Les hypothèses (H1) et (H2) sont satisfaites, voir chapitre précédent, alors

$$\widehat{P} = \Phi_Z \widehat{p}(\Lambda) \Phi_Z^{-1},$$

où  $\widehat{p}$  est solution de l'équation algébrique de Riccati du filtre

$$a(\lambda) \widehat{p} + \widehat{p} a^T(\lambda) - \widehat{p} c^T(\lambda) s^{-1}(\lambda) c(\lambda) \widehat{p} + b(\lambda) b^T(\lambda) = 0.$$

3. L'opérateur  $\widehat{Q}$  admet la factorisation suivante

$$\widehat{Q} = \Phi_Z \widehat{q}(\Lambda) \Phi_Y^{-1},$$

avec

$$\widehat{q}(\Lambda) = \widehat{p}(\Lambda) c^T(\Lambda) s^{-1}(\Lambda).$$

4.  $\Phi_Z$  et  $\Phi_Y$  sont des matrices de fonctions de  $\Lambda$ , de même pour  $\Phi_U^{-1}Q$  et  $\widehat{Q}$ , ainsi

$$\begin{cases} \Phi_U^{-1}Q = k(\Lambda), \\ \widehat{Q} = \widehat{k}(\Lambda). \end{cases}$$

## 2.6.4 Approximation de la loi de contrôle

### Approximation de $k$ et $\widehat{k}$ par un développement asymptotique

La solution  $k$  (resp.  $\widehat{k}$ ) est une matrice  $1 \times 2$  (resp.  $2 \times 1$ ) d'opérateurs

$$k = [k_{11} \quad k_{12}] \quad (\text{resp. } \widehat{k} = [\widehat{k}_{11} \quad \widehat{k}_{21}]^T),$$

avec  $k_{11} = \frac{\beta}{d^2} p_{21} \Lambda^{-\frac{1}{2}}$ ,  $k_{12} = \frac{\beta}{d^2} p_{22}$ ,  $\widehat{k}_{11} = \frac{\gamma}{d^2} \widehat{p}_{11}$  et  $\widehat{k}_{21} = \frac{\beta}{d^2} \widehat{p}_{21} \Lambda^{-\frac{1}{2}}$ . Ainsi, on peut facilement montrer que le couple  $(k_1, k_2)$  est solution du système

$$\begin{cases} \frac{2\alpha d^2}{\beta} k_1 + d^2 \Lambda k_1^2 - \gamma^2 I = 0, \\ k_2^2 - \frac{2}{\beta} k_1 = 0, \end{cases}$$

et que le couple  $(\widehat{k}_{11}, \widehat{k}_{21})$  est solution du système

$$\begin{cases} \frac{2\alpha d^2}{\gamma} \widehat{k}_{21} + d^2 \Lambda \widehat{k}_{21}^2 - \beta^2 I = 0, \\ \widehat{k}_{11}^2 - \frac{2}{\gamma} \widehat{k}_{21} = 0. \end{cases}$$

Les opérateurs  $k_{ij}$  et  $\widehat{k}_{ij}$  ne peuvent ni être directement discrétisés ni de manière simple. L'analyse des deux systèmes présentés ci-dessus indique que  $k$  et  $\widehat{k}$  peuvent être approchés par une approximation polynômiale en  $\Lambda$

$$k = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} k_{ij,\ell} \Lambda^\ell \quad \text{et} \quad \widehat{k} = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \widehat{k}_{ij,\ell} \Lambda^\ell.$$

En introduisant cette expression dans les deux systèmes décrits ci-dessus et en identifiant les termes du même ordre, on en déduit

$$\begin{aligned} \bar{k} &= \begin{bmatrix} \frac{\gamma^2 \beta}{2\alpha d^2} I & \frac{\gamma}{d\sqrt{\alpha}} I \end{bmatrix} \quad \text{l'approximation de } k, \\ \widetilde{k}^T &= \begin{bmatrix} \frac{\beta}{d\sqrt{\alpha}} I & \frac{\gamma \beta^2}{2\alpha d^2} I \end{bmatrix} \quad \text{l'approximation de } \widehat{k}. \end{aligned}$$

Les approximations  $\bar{k}$  et  $\widetilde{k}$  sont des approximations au sens des hautes fréquences (voir la courbe gauche de la Figure 2.15 représentant les valeurs propres de  $\Delta^2$ ). Pour la gamme de fréquences étudiée dans cet exemple, les résultats de  $k$  (resp.  $\widehat{k}$ ) et  $\bar{k}$  (resp.  $\widetilde{k}$ ) sont très semblables.

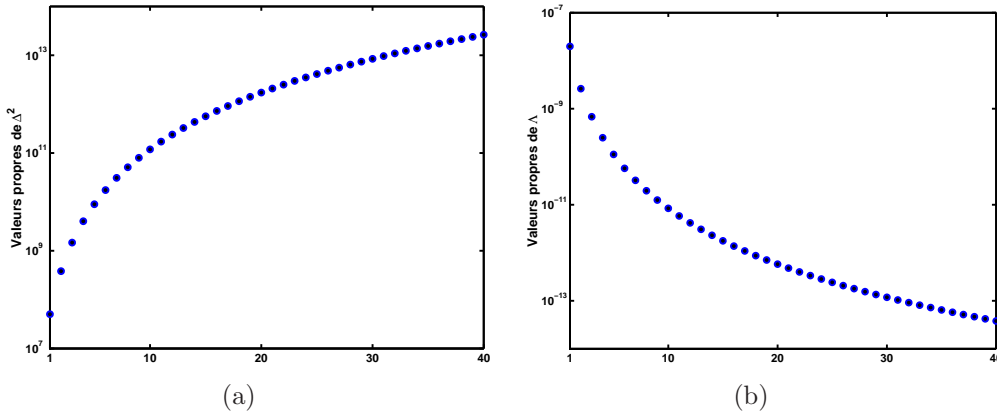


FIG. 2.15 – Gamme de fréquences (a) de  $\Delta^2$  (b) de  $\Lambda$

On introduit la variable  $\sigma$  de la manière suivante

$$\sigma = \frac{\gamma \beta}{d\sqrt{\alpha}}.$$

On peut montrer que  $BQ = bk \simeq b\bar{k}$  et  $\widehat{Q}C = \widehat{k}c \simeq \widetilde{k}c$ . Ainsi, à partir de l'égalité (2.48), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \Lambda^{-1} \omega = -\partial_{tt}^2 \omega - \frac{1}{2} \sigma^2 \widehat{z}_1 - \sigma \widehat{z}_2, \\ \widehat{z}_2 = \partial_t \widehat{z}_1 + \sigma (\widehat{z}_1 - \omega), \\ \partial_t \widehat{z}_2 = \frac{1}{2} \sigma^2 \omega - (\alpha \Lambda^{-1} + \sigma^2) \widehat{z}_1 - \sigma \widehat{z}_2. \end{array} \right. \quad (2.50)$$

On injecte l'expression de  $\widehat{z}_2$  de l'équation (2.50<sub>2</sub>) dans (2.50<sub>1</sub>) et dans (2.50<sub>3</sub>), on trouve

$$\begin{cases} \alpha\Lambda^{-1}\omega = -\partial_{tt}^2\omega + \sigma^2\omega - \sigma\partial_t\widehat{z}_1 - \frac{3}{2}\sigma^2\widehat{z}_1, \\ \alpha\Lambda^{-1}\widehat{z}_1 = -\partial_{tt}^2\widehat{z}_1 - 2\sigma\partial_t\widehat{z}_1 - 2\sigma^2\widehat{z}_1 + \sigma\partial_t\omega + \frac{3}{2}\sigma^2\omega. \end{cases}$$

Par conséquent, la détermination du contrôle  $u$  se fait par la résolution de la cascade d'équations suivante. Étant donnée la distribution des charges  $q$  et des courants  $i$ , le déplacement  $\omega$  et la vitesse  $\partial_t\omega$  sont déterminés par la résolution des équations

$$e\Delta\omega = q \quad \text{dans } \Omega.$$

Le contrôle  $u$  est à son tour obtenu en résolvant dans  $\Omega$  les équations

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\sigma}{\beta}\partial_t\widehat{z}_1 + \frac{3\sigma^2}{2\beta}\widehat{z}_1 - \frac{\sigma^2}{\beta}\omega, \\ \alpha\Lambda^{-1}\widehat{z}_1 &= -\partial_{tt}^2\widehat{z}_1 - 2\sigma\partial_t\widehat{z}_1 - 2\sigma^2\widehat{z}_1 + \sigma\partial_t\omega + \frac{3}{2}\sigma^2\omega. \end{aligned}$$

### Approximation par un circuit électronique (Architecture semi-décentralisée)

Les équations précédentes peuvent être aisément discrétisées par un schéma aux différences finies. La distance entre deux capteurs ou deux actionneurs est notée  $h$ . Les opérateurs  $\Delta$  présents dans la cascade d'équations sont discrétisés par un schéma aux différences finies à trois points [43], tandis que  $\Lambda^{-1}$  est discrétisé par le même schéma mais à cinq points. La Figure 2.18 illustre l'implémentation de l'approximation de la loi de contrôle distribué, en terme de circuit électronique distribué.

### 2.6.5 Résultats numériques

La plaque élastique utilisée dans la simulation numérique est en laiton. Ses dimensions sont  $155 \text{ mm} \times 5 \text{ mm} \times 2 \text{ mm}$  et incluent seize paires de capteurs/actionneurs. Ces paires de transducteurs piézo-électriques sont des céramiques de PZT. La dimension de chaque piézo-électrique est  $5 \text{ mm} \times 5 \text{ mm} \times 0.2 \text{ mm}$ . Ainsi,  $L = 155 \text{ mm}$  et  $h = 10 \text{ mm}$ .

Les vecteurs propres associés à l'équation homogénéisée (2.46) sont  $(\phi_n \in H_0^2(\Omega))_{n \in \mathbb{N}^*}$  solution de

$$\alpha \frac{d^4 \phi_n}{d\xi^4} - \lambda_n^{-1} \phi_n = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

En outre,  $\omega$  et  $\widehat{z}_1$  peuvent être décomposés sur la base  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ , orthonormale dans  $L^2(\Omega)$ . Nous obtenons donc

$$\partial_{tt}^2\omega_n + \sigma\partial_t\widehat{z}_{1,n} + (\alpha\lambda_n^{-1} - \sigma^2)\omega_n + \frac{3}{2}\sigma^2\widehat{z}_{1,n} = 0, \quad (2.51)$$

$$\partial_{tt}^2\widehat{z}_{1,n} + 2\sigma\partial_t\widehat{z}_{1,n} + (\alpha\lambda_n^{-1} + 2\sigma^2)\widehat{z}_{1,n} - \sigma\partial_t\omega_n - \frac{3}{2}\sigma^2\omega_n = 0, \quad (2.52)$$

Les conditions initiales de l'état sont choisies comme étant

$$\omega(0, \zeta) = g(\zeta) = \frac{L}{10} \sin(\zeta) \quad \text{et} \quad \partial_t \omega(0, \zeta) = 0,$$

alors

$$\omega_n(0) = \int_0^L g(\zeta) \phi_n(\zeta) dt \quad \text{et} \quad \partial_t \omega_n(0) = 0.$$

La simulation du système complet en boucle fermée nécessite une condition initiale pour l'estimation d'état. Pour représenter une erreur dans l'estimation initiale,  $\widehat{z}_n(0)$  est choisie égale à  $0.75 z_n(0)$ . La partie supérieure de la Figure 2.16 représente l'évolution temporelle des modes  $n = 1, 2, 3, 4$  du déplacement  $w_n$  (en bleu) et de son estimateur  $\widehat{z}_{1,n}$  (en rouge), et la partie inférieure celle de la vitesse  $\partial_t w_n$  (en bleu) et de son estimateur  $\widehat{z}_{2,n}$ . Le taux de décroissance étant égal à  $\frac{\sigma}{2} = -500 < 0$ , le système est stable. Conformément aux prédictions théoriques et pour un temps suffisamment grand la variable d'état tend exponentiellement vers l'estimateur. La Figure 2.17 représente l'erreur d'estimation du déplacement (partie supérieure de la Figure)

$$\varepsilon_1 = w - \widehat{z}_1,$$

et l'erreur d'estimation de la vitesse (partie inférieure de la Figure)

$$\varepsilon_2 = \partial_t w - \widehat{z}_2.$$

Le calcul effectué montre que les résultats exacts et approchés sont semblables.

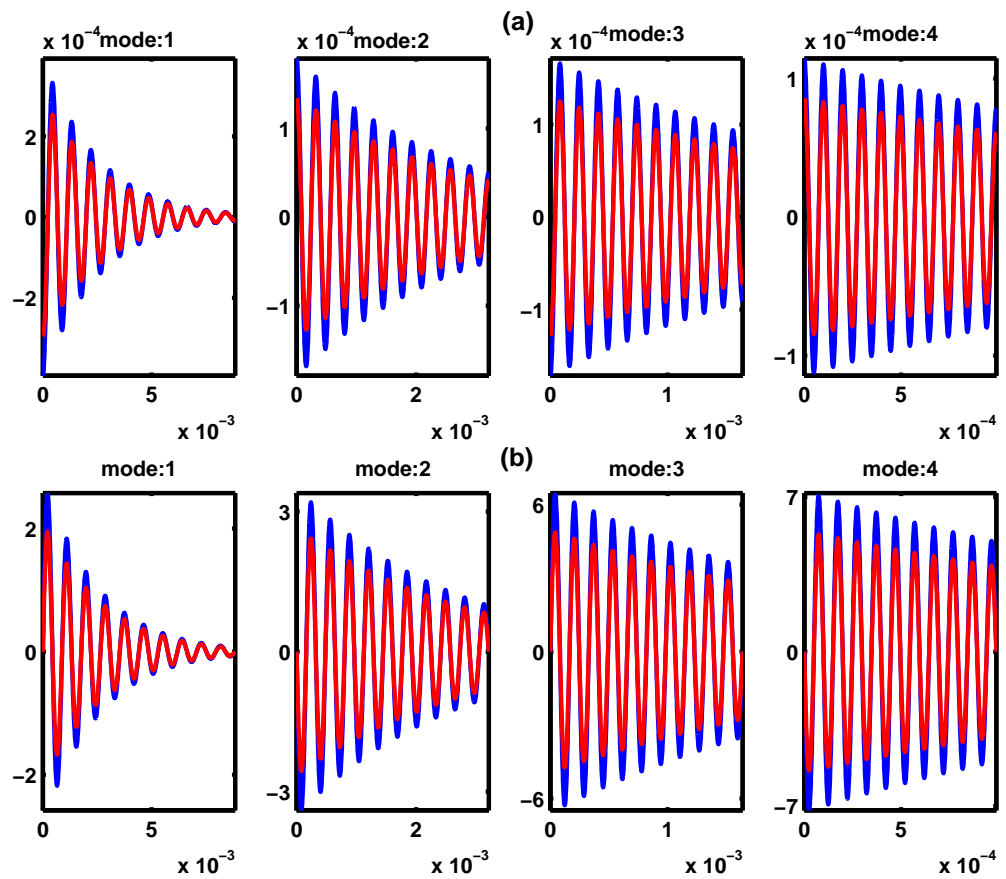


FIG. 2.16 – Evolutions temporelles (a) du déplacement  $w_n$  (en bleu) et de son estimateur  $\hat{z}_{1,n}$  (en rouge) (b) de la vitesse  $\partial_t w_n$  (en bleu) et de son estimateur  $\hat{z}_{2,n}$  (en rouge), pour les modes  $n = 1, 2, 3, 4$



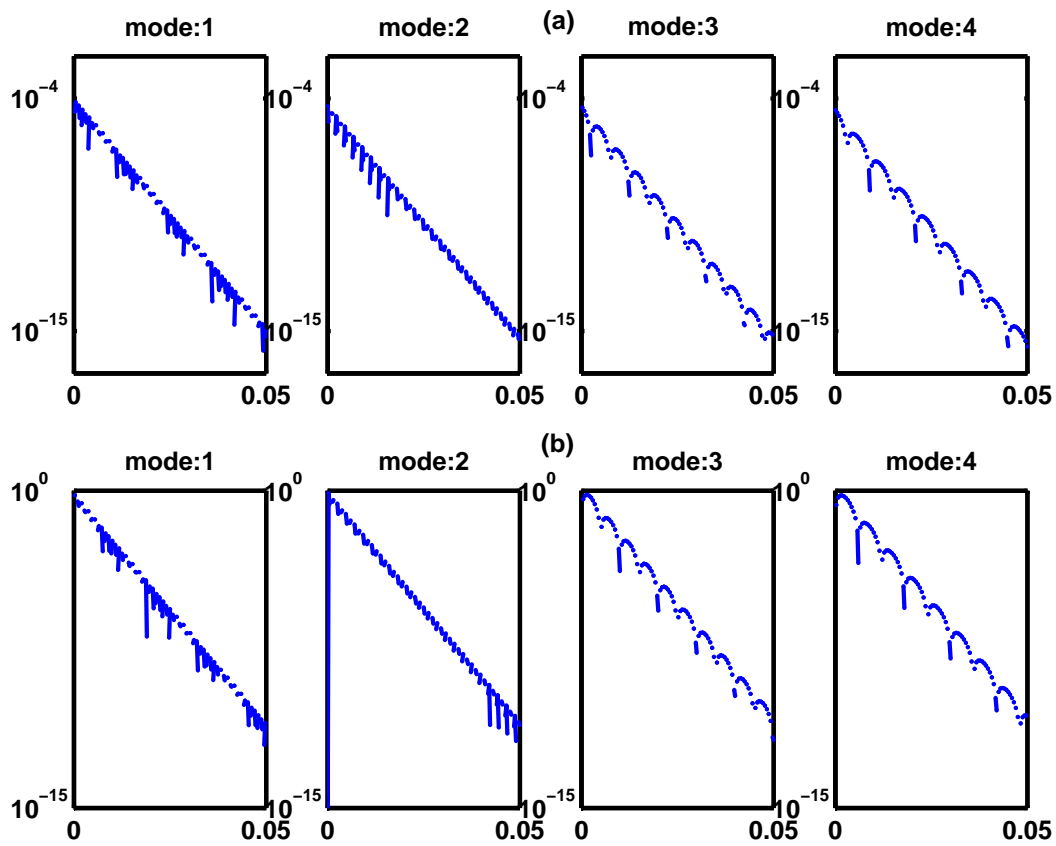


FIG. 2.17 – Erreurs d'estimations (a) du déplacement  $\varepsilon_1$  (b) de la vitesse  $\varepsilon_2$ , en fonction du temps à l'échelle logarithmique pour les modes  $n = 1, 2, 3, 4$

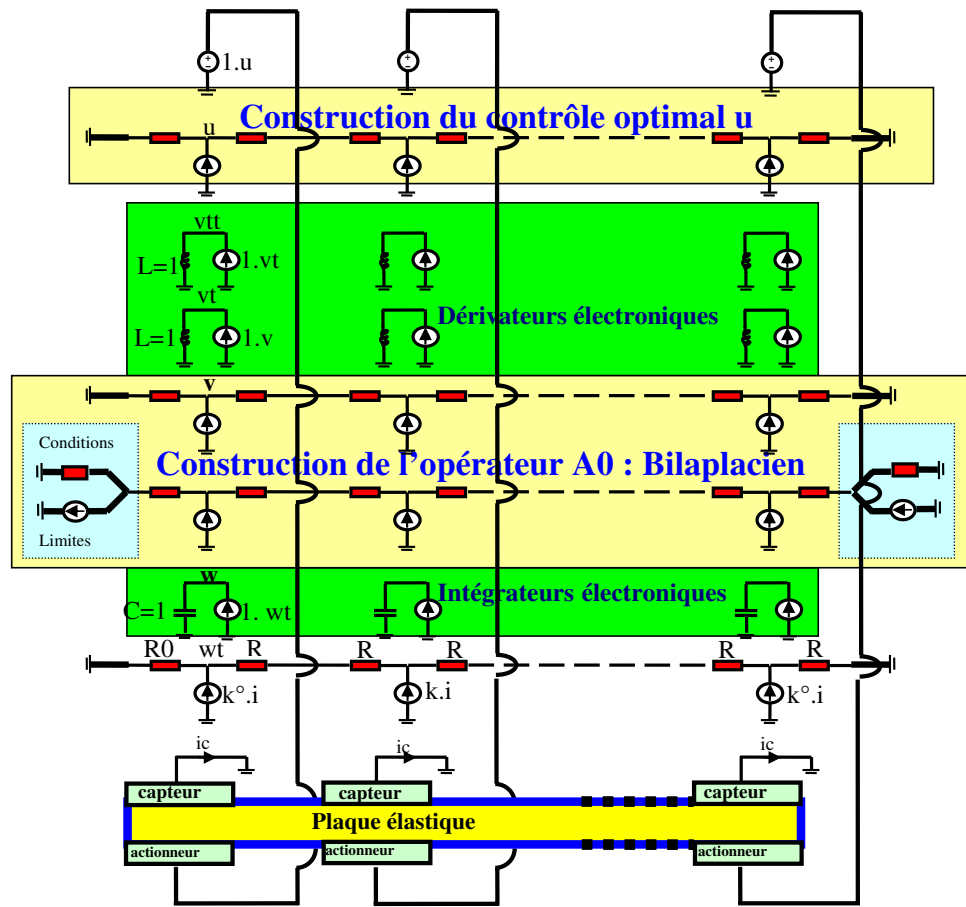


FIG. 2.18 – Circuit électronique distribué

## 2.7 Conclusion

Dans le cas où on a approché  $k$  par un polynôme, nous avons constaté que l'intégration numérique nécessitait peu de points d'intégration  $M$  et que le rayon  $R$  influençait l'intégration numérique. Si l'approximation est rationnelle (interpolation rationnelle classique), nous en avons conclu que l'intégration numérique convergerait pour  $M > 200$ , les paramètres de l'ellipse étant choisis de manière heuristique.

Certaines améliorations semblent nécessaires. Deux extensions sont possibles.

1. L'approximation numérique de l'intégrale de Dunford-Schwartz par la quadrature de trapèze n'est pas *optimale*. Nous pensons pouvoir choisir les paramètres des chemins (paramétrés par un cercle, une ellipse ...) de manière automatique. D'autre part, nous souhaitons rendre plus rapide le taux de convergence en fonction du paramètre de quadrature  $M$ . Ces idées sont envisageables si l'on considère le travail de N. Hale, N. J. Higham, et L. N. Trefethen concernant l'évaluation numérique des intégrales de contours par la loi de trapèze, pour plus de détail voir [38].
2. L'approximation polynomiale obtenue par un schéma semi-implicite est optimale. A l'opposé, l'approximation rationnelle classique ne l'est pas. Si elle a été choisie pour sa simplicité et la pertinence de ses résultats, elle n'admet pas forcément de solution, voir l'exemple [83] p.50 ou [11] p.367. Si cette solution existe alors elle est unique, voir [83] p.51. La difficulté majeure réside dans les zéros du dénominateur, voir l'explication dans [11], deuxième page. L'algorithme décrit dans [11] pour calculer le noyau de  $\mathbf{A}$  est beaucoup plus efficace que le calcul par les *SVD*. Il consiste à triangulariser la matrice en deux étapes : la première dite analytique, qui conduit à des différences divisées ; l'autre dite numérique, consistant en l'élimination Gaussienne à l'aide d'un pivot de colonne. L'article [10] propose une meilleure interpolation rationnelle.

Deuxième partie

Formulation par Réalisation  
Diffusive



# Chapitre 3

## Réalisation diffusive d'opérateurs solutions de certaines EDPOs

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Réalisation diffusive d'opérateurs intégraux . . . . .</b>	<b>70</b>
3.1.1	Définition et propriétés générales de la réalisation diffusive . . . . .	70
3.1.2	Réalisation diffusive complexe . . . . .	73
3.1.3	Réalisation diffusive réelle . . . . .	77
<b>3.2</b>	<b>Equations de symboles diffusifs associées à un problème aux limites portant sur un noyau . . . . .</b>	<b>78</b>
3.2.1	Équations des symboles complexes . . . . .	79
3.2.2	Équations des symboles réels . . . . .	82
<b>3.3</b>	<b>Approximations numériques . . . . .</b>	<b>83</b>
3.3.1	Énoncé des problèmes aux limites portant sur les parties causale et anti-causale du noyau . . . . .	84
3.3.2	Approximation du symbole diffusif à partir de l'approxima- tion du noyau . . . . .	85
3.3.3	Approximation directe du symbole complexe . . . . .	103
3.3.4	Réalisation diffusive réelle . . . . .	110
<b>3.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>112</b>
<b>3.5</b>	<b>Appendice . . . . .</b>	<b>113</b>

---

Ce chapitre est organisé comme suit. Le cadre de la réalisation diffusive des opérateurs intégraux est présenté en section 3.1. En section 3.2, on établit l'équation satisfaite par les symboles diffusifs. Finalement, la section 3.3 est dédiée à des applications et à des méthodes numériques.

## 3.1 Réalisation diffusive d'opérateurs intégraux

Nous présentons dans ce chapitre un travail auto-contenu dans un cadre assez simple, mais demeurant applicable à un panel assez large de situations pratiques. Ainsi, nous limitons notre présentation à deux classes d'opérateurs et de contours. La première utilise des contours choisis loin des singularités de la transformée de Laplace  $\mathcal{P}$ , de ce fait les symboles diffusifs sont réguliers. La deuxième classe met en oeuvre des contours passant par les singularités, lorsque les contours et les singularités sont situés sur l'axe réel. De tels contours traversent nécessairement toutes les singularités et par conséquent, les symboles diffusifs sont des fonctions généralisées. Dans les deux cas, on énonce et on montre l'existence des réalisations et symboles diffusifs. On abordera également la question de l'unicité des symboles.

On considère un opérateur borné  $P$  dans un sous-ensemble de  $L^2(\omega)$  exprimé sous forme intégrale

$$Pu(x) = \int_{\omega} p(x, y)u(y) dy$$

avec  $\omega = ]0, 1[$  et le noyau  $p(x, y)$  ayant une régularité que l'on spécifiera par la suite <sup>4</sup>.

### 3.1.1 Définition et propriétés générales de la réalisation diffusive

Un opérateur  $P$  est dit causal (resp. anti-causal) si  $p(x, y) = 0$  pour  $y > x$  (resp. pour  $y < x$ ). La réalisation diffusive de  $P$  est basée sur son (unique) décomposition en parties causale et anti-causale,

$$P = P^+ + P^-,$$

où

$$P^+u(x) = \int_0^x p(x, y)u(y) dy \quad \text{et} \quad P^-u(x) = \int_x^1 p(x, y)u(y) dy.$$

Tout au long de ce travail, on utilisera les signes  $+$  ou  $-$  pour faire référence à un opérateur causal ou anti-causal, et par convention  $\mp = -(\pm)$ .

La réponse dite impulsionnelle  $\tilde{p}$  est définie à partir du noyau  $p(x, y)$  par

$$p(x, y) = \tilde{p}(x, x - y) \quad \text{avec} \quad (x, y) \in \overline{\Omega}$$

---

<sup>4</sup>Notons que pour les applications que nous allons traiter, des opérateurs peuvent être non bornés; dans un tel cas, il faudra les décomposer comme le produit d'un opérateur différentiel et d'un opérateur appartenant à la classe des opérateurs bornés considérée ici.

ou inversement par

$$\tilde{p}(x, y) = p(x, x - y) \quad \text{avec } (x, x - y) \in \overline{\Omega}, \quad (3.1)$$

où  $\Omega = \omega \times \omega$ .

On se donne  $a^\pm \in \mathbb{R}$ , on considère  $\xi \mapsto \theta^\pm(\xi)$  deux fonctions complexes continues et différentiables presque partout de  $\mathbb{R}$  dans  $[a^\pm, +\infty[ + i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , dont les dérivées  $\theta^{\pm'}$  sont telles que  $0 < \alpha \leq |\theta^{\pm'}| \leq \beta < +\infty$ , pour  $\alpha, \beta > 0$ , et qui définissent deux arcs simples orientés fermés à l'infini. Nous supposons également que les  $\theta^\pm$  sont localisés dans un secteur délimité par deux droites non verticales comme sur la figure 3.1. Cette dernière condition implique que l'équation (3.6<sub>1</sub>) à venir est de nature diffusive (voir [95]), cela justifiant la terminologie "représentation diffusive". Dans ce cas, le semi-groupe associé est analytique avec pour conséquence que la réponse impulsionnelle  $y \mapsto \tilde{p}(x, y)$  de l'opérateur est analytique pour  $y > 0$  et pour  $y < 0$ .

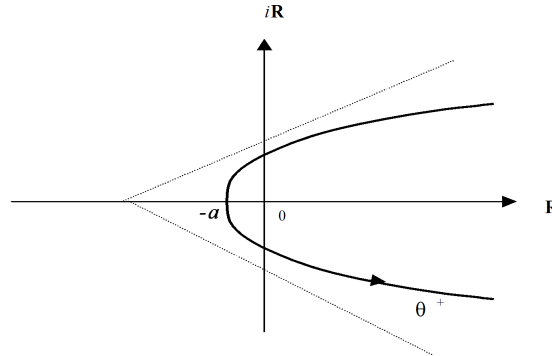


FIG. 3.1 – The arc  $\theta^+$

**Remarque 24** *L'approche présentée ci-après peut être également formulée avec des arcs bornés  $\theta^\pm$  paramétrés sur  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{R} \equiv [0, 2\pi[$  plutôt que sur  $\mathbb{R}$ , de sorte que  $\theta^\pm$  sont des contours fermés. Avec des adaptations techniques mineures, tous les résultats de cette section seront valables en changeant  $\mathbb{R}$  en  $[0, 2\pi[$ .*

Dorénavant, nous utilisons la notation :

$$\langle \mu, \psi \rangle := \int \mu(\xi) \psi(\xi) d\xi; \quad (3.2)$$

où on précisera le sens de l'intégration pour chacun des deux cas mentionnés. Si  $\mu$  n'est pas une fonction localement intégrable, un produit de dualité plus général sera spécifié pour chaque application <sup>5</sup> et substitué à l'intégrale.

<sup>5</sup>Notons qu'une dualité adaptée au cadre général de la réalisation diffusive a été introduite dans [70].



**Définition 25**

(i) Un opérateur causal  $P^+$  (resp. anti-causal  $P^-$ ) admet une  $\theta^+$ -réalisation (resp.  $\theta^-$ -réalisation) diffusive s'il existe un symbole dit diffusif<sup>6</sup>  $\mu^+(x, \xi)$  (resp.  $\mu^-(x, \xi)$ ) tel que

$$P^+u(x) = \langle \mu^+, \psi^+(u) \rangle \quad (\text{resp. } P^-u(x) = \langle \mu^-, \psi^-(u) \rangle), \quad (3.3)$$

avec  $\psi^\pm$ , appelée  $\theta^\pm$ -représentation de  $u$ , définie par

$$\begin{aligned} \psi^+(u)(x, \xi) &= \int_0^x e^{-\theta^+(\xi)(x-y)} u(y) dy \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^+, \\ \text{et } \psi^-(u)(x, \xi) &= - \int_x^1 e^{\theta^-(\xi)(x-y)} u(y) dy \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^+. \end{aligned} \quad (3.4)$$

(ii) Un opérateur  $P$  admet une  $\theta^\pm$ -réalisation diffusive si ses parties causale  $P^+$  et anti-causale  $P^-$  admettent une réalisation diffusive respectivement associée à  $\theta^+$  et  $\theta^-$ .

Notons que dans (3.4),  $u$  peut être pris dans l'espace des mesures sans perte de régularité de  $\psi$ ; ainsi, la partie causale de la réponse impulsionnelle peut être écrite

$$\tilde{p}(x, y) = \langle \mu(x, \xi), e^{-\theta^+(\xi)y} \rangle, \quad (3.5)$$

et il en résulte que le théorème de Fubini est valable :

$$\int_0^x \langle \mu, e^{-\theta^+(\xi)(x-y)} \rangle u(y) dy = \langle \mu, \int_0^x e^{-\theta^+(\xi)(x-y)} u(y) dy \rangle.$$

On procède de même pour la partie anti-causale.

Les fonctions  $\psi^\pm(u)$  peuvent être considérées comme les solutions uniques des problèmes de Cauchy direct et de Cauchy rétrograde, paramétrisés par  $\xi \in \mathbb{R}$  :

$$\partial_x \psi^+(x, \xi) = -\theta^+(\xi) \psi^+(x, \xi) + u(x) \quad \forall x \in ]0, 1[, \quad \psi^+(0, \xi) = 0 \quad (3.6)$$

$$\text{et } \partial_x \psi^-(x, \xi) = \theta^-(\xi) \psi^-(x, \xi) + u(x) \quad \forall x \in ]0, 1[, \quad \psi^-(1, \xi) = 0, \quad (3.7)$$

ce qui constitue avec (3.4) la réalisation d'état diffusive de  $P^+$  et  $P^-$  respectivement. Ce dernier point est capital pour la réalisation approchée concrète de  $P$ . La proposition 34 dans la sous-section 3.1.2 montre que un demi arc de  $\theta^\pm$  est suffisant pour calculer la réalisation d'opérateurs réels.

La proposition suivante énonce que les opérateurs auto-adjoints peuvent être exprimés uniquement en fonction de  $\mu^+$  ou  $\mu^-$ . Cette propriété est nécessaire par exemple pour le traitement des équations d'opérateur non-linéaires telles que les équations de Riccati, où les équations de  $\mu^+$  et  $\mu^-$  sont couplées.

---

<sup>6</sup>pour la fonction  $\theta$ ,  $\xi$  est en fait une variable fréquentielle car homogène avec  $1/x$ .

**Proposition 26** *S'il existe une réalisation diffusive d'un opérateur auto-adjoint  $P$ , alors il peut être réalisé avec seulement l'un des deux symboles  $\mu^+$  ou  $\mu^-$  :*

$$Pu(x) = \langle \mu^+(x, \xi), \psi^+(u)(x, \xi) \rangle + \int_x^1 \langle \mu^+(y, \xi), e^{-\theta^+(\xi)(y-x)} \rangle u(y) dy$$

$$\text{et } Pu(x) = - \int_0^x \langle \mu^-(y, \xi), e^{\theta^-(\xi)(y-x)} \rangle u(y) dy - \langle \mu^-(x, \xi), \psi^-(u)(x, \xi) \rangle.$$

*Les relations entre les parties causale et anti-causale du noyau et les symboles diffusifs sont alors*

$$p(x, y) = \langle \mu^+(x, \xi), e^{-\theta^+(\xi)(x-y)} \rangle = - \langle \mu^-(y, \xi), e^{\theta^-(\xi)(y-x)} \rangle \quad \text{pour } y \leq x$$

$$\text{et } p(x, y) = - \langle \mu^-(x, \xi), e^{\theta^-(\xi)(x-y)} \rangle = \langle \mu^+(y, \xi), e^{-\theta^+(\xi)(y-x)} \rangle \quad \text{pour } y \geq x.$$

**Preuve** Selon l'expression de la réalisation diffusive de  $P^+$  et  $P^-$ , on peut en déduire la relation entre  $p(x, y)$  et  $\mu^\pm$ ,

$$p(x, y) = \langle \mu^+(x, \xi), e^{-\theta^+(\xi)(x-y)} \rangle \quad \text{pour } y \leq x$$

$$\text{et } p(x, y) = - \langle \mu^-(x, \xi), e^{\theta^-(\xi)(x-y)} \rangle \quad \text{pour } x \leq y. \quad (3.8)$$

A présent, la symétrie de

$$p(x, y) = p(y, x)$$

implique l'expression

$$P^-u(x) = \int_x^1 p(y, x)u(y) dy$$

avec le noyau  $p(y, x)$  pour  $x < y$  qui peut être formulé comme une fonction de  $\mu^+$ , dont on déduit la première formule de  $Pu$ . Concernant la seconde, elle est obtenue en utilisant un argument similaire qui amène l'expression de  $P^+u$  en fonction de  $\mu^-$ . ■

### 3.1.2 Réalisation diffusive complexe

Dans cette section, on énonce les conditions suffisantes d'existence de réalisations  $\theta^\pm$ -diffusives de symboles complexes  $\mu^\pm$  pour  $\theta^+$  et  $\theta^-$  des contours donnés. La preuve est constructive. En opposition au second cas où les chemins  $\theta^\pm$  sont inclus dans l'axe réel, ici les chemins  $\theta^\pm$  sont dans un plan complexe si bien qu'on parle de *réalisations diffusives complexes* et de *symboles diffusifs complexes*.

Les conditions d'existence des symboles complexes font intervenir les transformées de Laplace par rapport à  $y$  du prolongement analytique des parties causale et anti-causale de la réponse impulsionnelle (localement intégrable),

$$\mathcal{P}^+(x, \lambda) = \mathcal{L}_y(\tilde{p}(x, y))(\lambda) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}^-(x, \lambda) = \mathcal{L}_y(\tilde{p}(x, -y))(\lambda). \quad (3.9)$$

**Hypothèse 27**

- (i) La transformée de Laplace  $\lambda \mapsto \mathcal{P}^+(x, \lambda)$  (resp.  $\lambda \mapsto \mathcal{P}^-(x, \lambda)$ ) est holomorphe dans un domaine  $D^+ \subset \mathbb{C}$  (resp.  $D^- \subset \mathbb{C}$ ) qui contient l'ensemble fermé localisé à droite de l'arc  $-\theta^+$  (resp.  $-\theta^-$ );
- (ii) Pour tout  $x \in \omega$ , la transformée de Laplace  $\lambda \mapsto \mathcal{P}^+(x, \lambda)$  (resp.  $\lambda \mapsto \mathcal{P}^-(x, \lambda)$ ) tend vers zéro uniformément par rapport à  $\arg \lambda$  quand  $|\lambda| \rightarrow \infty$ .

En fait, il existe une relation entre l'holomorphie d'une fonction dans un secteur incluant  $\mathbb{R}^+$  et l'holomorphie de sa transformée de Laplace prolongée à un secteur d'angle plus grand que  $\pi$ . On énonce cela dans le Théorème 30, qui résulte des théorèmes 1.46.5 et 1.46.6 de [88]. Pour chaque  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , on définit le secteur

$$\Sigma_{\alpha\beta} = \{y \in \mathbb{C}^* \mid \arg(y) \in (\alpha, \beta)\}$$

et la demi-droite

$$\mathcal{D}_t = \{re^{it} \mid r > 0\}.$$

**Hypothèse 28** Il existe des constantes

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha^\pm < 0 < \beta^\pm < \frac{\pi}{2}, \quad a^\pm, \quad A^\pm > 0, \quad \rho^\pm \geq 0 \quad \text{et} \quad \tau^\pm > -1,$$

telles que pour chaque  $x \in \omega$ ,  $y \mapsto \tilde{p}(x, \pm y)$  est holomorphe dans  $\Sigma_{\alpha^\pm \beta^\pm}$ ,

$$|\tilde{p}(x, \pm y)| \leq c|y|^{\tau^\pm} \quad \text{quand} \quad |y| \leq a^\pm \quad \text{et} \quad |\tilde{p}(x, y)| \leq ce^{\tau^\pm|y|} \quad \text{quand} \quad |y| \geq A^\pm,$$

pour des constantes positives  $c$ .

**Hypothèse 29** Pour tout  $t \in (\alpha, \beta)$ ,

$$\tilde{p}(x, \pm y) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j^\pm (\pm y)^{\gamma_j^\pm} \quad \text{quand} \quad y \rightarrow 0 \quad \text{avec} \quad \pm y \in \mathcal{D}_t,$$

pour deux suites

$$-1 < \Re(\gamma_0^\pm) < \Re(\gamma_1^\pm) < \dots < \Re(\gamma_j^\pm) < \Re(\gamma_{j+1}^\pm) < \dots \quad \text{avec} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \Re(\gamma_j^\pm) = \infty.$$

**Théorème 30** Sous l'Hypothèse 28, la transformée de Laplace  $\lambda \mapsto \mathcal{P}^\pm(\cdot, \lambda)$  se prolonge analytiquement en une fonction holomorphe dans le secteur  $\Sigma_{\alpha^\pm - \frac{\pi}{2}, \beta^\pm + \frac{\pi}{2}}$ . De plus, si l'Hypothèse 29 est vérifiée, les prolongements  $\mathcal{P}^\pm$  admettent, pour tout  $\varepsilon > 0$ , un développement asymptotique

$$\mathcal{P}^\pm(\cdot, \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^\pm \Gamma(\gamma_j^\pm + 1) \lambda^{-(\gamma_j^\pm + 1)}$$

quand  $|\lambda| \rightarrow \infty$  et  $\arg \lambda \in (-\beta^\pm - \frac{\pi}{2} + \varepsilon, \alpha^\pm + \frac{\pi}{2} - \varepsilon)$ .

Puis, on énonce le théorème d'existence d'une réalisation  $\theta^\pm$ -diffusive complexe.

**Théorème 31** *Pour un chemin donné  $\theta^+$  (resp.  $\theta^-$ ), si un opérateur causal (resp. anti-causal)  $P^+$  (resp.  $P^-$ ) satisfait l'Hypothèse 27, alors il existe un  $\theta^+$ -symbole complexe  $\mu^+$  (resp.  $\theta^-$ -symbole complexe  $\mu^-$ ),*

$$\mu^+(x, \xi) = -\frac{\theta^{+'}(\xi)}{2i\pi} \mathcal{P}^+(x, -\theta^+(\xi)) \quad (\text{resp. } \mu^-(x, \xi) = \frac{\theta^{-'}(\xi)}{2i\pi} \mathcal{P}^-(x, -\theta^-(\xi))), \quad (3.10)$$

et  $\xi \mapsto \mu^+(x, \xi)$  (resp.  $\xi \mapsto \mu^-(x, \xi)$ ) admet la même régularité que  $\theta^{+'}$  (resp.  $\theta^{-'}$ ).

**Preuve** La transformée de Laplace  $\mathcal{P}^+$  est holomorphe à droite de la ligne verticale,  $\Re(\lambda) \geq a$ , alors  $\tilde{p}(x, y)$  peut être exprimée grâce à la transformée de Laplace inverse  $\mathcal{L}^{-1}$ , par

$$\tilde{p}(x, y) = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{P}^+(x, \lambda))(y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{a+i\mathbb{R}} \mathcal{P}^+(x, \lambda) e^{\lambda y} d\lambda. \quad (3.11)$$

Puisque pour tout  $x \in \omega$  la transformée de Laplace  $\lambda \mapsto \mathcal{P}^+(x, \lambda)$  est supposée holomorphe à droite de  $-\theta^+$  et tend vers zéro uniformément à l'infini, le lemme de Jordan et le théorème de Cauchy permettent de prouver que

$$\begin{aligned} \tilde{p}(x, y) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-\theta^+} \mathcal{P}^+(x, \lambda) e^{\lambda y} d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{-\theta^{+'}(\xi)}{2i\pi} \mathcal{P}^+(x, -\theta^+(\xi)) e^{-\theta^+(\xi)y} d\xi. \end{aligned}$$

Pour compléter la preuve pour la partie causale, on utilise la relation

$$P^+u(x) = \int_0^x \tilde{p}(x, x-y)u(y) dy$$

et l'expression (3.4) de  $\psi^+$ . La preuve est similaire pour la partie anti-causale. Considérons  $\tilde{p}(x, -y)$  quand  $y < 0$ , on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{p}(x, -y) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-\theta^-} \mathcal{P}^-(x, \lambda) e^{\lambda y} d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{-\theta^{-'}(\xi)}{2i\pi} \mathcal{P}^-(x, -\theta^-(\xi)) e^{-\theta^-(\xi)y} d\xi, \end{aligned}$$

et on conclut par les expressions de  $P^-u$  et de  $\psi^-$ . ■

**Remarque 32** *On tiendra compte du fait que, suivant l'Hypothèse 27, la partie causale (resp. anti-causale) de la réponse impulsionnelle est nécessairement analytique dans  $\mathbb{R}^{+*}$  (resp.  $\mathbb{R}^{-*}$ ) et localement intégrable dans  $\mathbb{R}^+$  (resp.  $\mathbb{R}^-$ ) par rapport à la seconde variable  $y$ . En fait, cela peut être vérifié, par exemple, sur la partie causale. L'expression de*

$$\tilde{p}(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{-\theta^{+'}(\xi)}{2i\pi} \mathcal{P}^+(x, -\theta^+(\xi)) e^{-\theta^+(\xi)y} d\xi$$

peut être prolongée à une fine bande qui forme un voisinage de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{C}$ . Grâce à l'hypothèse sur  $\theta^+$ , cette fonction est dérivable, elle est alors analytique dans une bande ouverte et par conséquent dans  $\mathbb{R}^{+*}$ .

**Remarque 33** *Quand il existe, le symbole diffusif complexe d'un opérateur est nécessairement unique, mais une infinité de symboles diffusifs (non-canoniques) existe aussi. On peut le constater par l'étude du noyau des opérateurs linéaires*

$$\mu^\pm \mapsto \langle \mu^\pm, \psi^\pm(u) \rangle,$$

qui inclut toute fonction  $\xi \mapsto \mu^\pm(\cdot, \xi)$  définie par (3.10) avec  $\mathcal{P}^+$  (resp.  $\mathcal{P}^-$ ) holomorphe dans la fermeture du domaine à gauche de  $-\theta^+$  (resp. de  $-\theta^-$ ).

La proposition suivante montre que la moitié de  $\theta^\pm$  est suffisante pour réaliser des opérateurs à valeurs réelles.

**Proposition 34** *Si  $P$  est à valeurs réelles et si les chemins  $\theta^\pm$  sont symétriques par rapport à l'axe réel, soit*

$$\theta^\pm(-\xi) = \overline{\theta^\pm(\xi)},$$

alors

$$\mu^\pm(-\xi) = \overline{\mu^\pm(\xi)}$$

et

$$\langle \mu^\pm, \psi^\pm \rangle = 2\Re \int_0^{+\infty} \mu^\pm \psi^\pm d\xi$$

de sorte que la réalisation diffusive peut être déterminée avec un demi chemin

$$\theta^{\pm*} = \theta^\pm|_{\mathbb{R}^+}.$$

**Preuve Si**

$$\theta^\pm(-\xi) = \overline{\theta^\pm(\xi)},$$

alors

$$\psi^\pm(x, -\xi) = \overline{\psi^\pm(x, \xi)}.$$

Puisque  $P$  est à valeurs réelles, il vient que

$$\mathcal{P}^\pm(x, \bar{\lambda}) = \overline{\mathcal{P}^\pm(x, \lambda)} \quad \text{et} \quad \mu^\pm(-\xi) = \overline{\mu^\pm(\xi)}.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} \langle \mu^\pm, \psi^\pm \rangle &= \int_0^{+\infty} \mu^\pm \psi^\pm d\xi + \int_{-\infty}^0 \mu^\pm \psi^\pm d\xi \\ &= \int_0^{+\infty} \mu^\pm(x, \xi) \psi^\pm(x, \xi) + \mu^\pm(x, -\xi) \overline{\psi^\pm(x, \xi)} d\xi. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\mu^\pm(-\xi) = \overline{\mu^\pm(\xi)}$$

implique

$$\langle \mu^\pm, \psi^\pm \rangle = 2\Re \int_0^{+\infty} \mu^\pm \psi^\pm d\xi.$$

■

### 3.1.3 Réalisation diffusive réelle

Dans le théorème 31, nous avons supposé que les chemins  $\theta^\pm$  ne croisent pas les singularités des transformées de Laplace  $\mathcal{P}^\pm$ . Un résultat similaire a été établi sous les hypothèses plus faibles dans [70], en incluant le cas où  $\mathcal{P}^\pm$  peut avoir des singularités sur les arcs  $\theta^\pm$ . La preuve générale est plus technique : elle nécessite de considérer  $\int_\theta$  au sens de la trace à droite et d'un point de vue topologique, elle utilise un espace de Fréchet adapté  $\Delta_{\theta^\pm} \ni \psi(x, \cdot)$  de dual topologique  $\Delta'_{\theta^\pm} \ni \mu(x, \cdot)$ . On mentionne que, dans ce cas, les symboles diffusifs  $\mu^\pm$  sont en général des fonctions généralisées.

Dans cette section, on restreint notre étude au cas dégénéré où les singularités sont localisées sur l'axe réel  $\mathbb{R}$ , ainsi  $\theta^\pm(\mathbb{R})$  peut être une ligne semi-infinie dans  $\mathbb{R}$ . De la symétrie,  $\int_{\mathbb{R}}$  peut être réduit à  $\int_{\mathbb{R}^+}$  et que la réalisation associée à  $P$  est unique, voir Remarque 33 sur l'unicité. Cette caractéristique permet de construire la représentation diffusive par une autre méthode et évite les difficultés techniques de l'étude d'un contour  $\theta$  approchant les singularités. En effet, la réponse impulsionnelle peut être vue comme la transformée de Laplace du symbole diffusif, au lieu d'être sa transformée inverse de Fourier-Laplace.

On commence avec une remarque générale sur les réalisations diffusives avec des chemins fermés  $\theta^\pm$  ayant un intérieur vide. Ils peuvent être paramétrés de manière symétrique de sorte que

$$\theta^\pm(-\xi) = \theta^\pm(\xi), \quad \psi^\pm(-\xi) = \psi^\pm(\xi)$$

et alors

$$\begin{aligned} \langle \mu^\pm, \psi^\pm \rangle &= \int_0^{+\infty} \mu^\pm(x, \xi) \psi^\pm(x, \xi) d\xi + \int_{-\infty}^0 \mu^\pm(x, \xi) \psi^\pm(x, \xi) d\xi \\ &= \int_0^{+\infty} (\mu^\pm(x, \xi) + \mu^\pm(x, -\xi)) \psi^\pm(x, \xi) d\xi. \end{aligned}$$

En posant

$$\mu^{\pm*}(x, \xi) = \mu^\pm(x, \xi) + \mu^\pm(x, -\xi),$$

cela implique une réalisation diffusive sur les demi-contours  $\theta^{\pm*} = \theta^\pm|_{\mathbb{R}^+}$  (paramétrés sur  $\mathbb{R}^+$  uniquement) formellement exprimée par :

$$= \int_0^{+\infty} \mu^{\pm*}(x, \xi) \psi^\pm(x, \xi) d\xi.$$

De manière plus rigoureuse, puisque les  $\mu^{\pm*}$  peuvent être des fonctions généralisées, il sera préférable de les noter  $\langle \mu^{\pm*}, \psi^\pm \rangle$ . Un cas particulièrement important est celui où les demi-contours  $\theta^{\pm*}$  sont des demi-droites

$$\theta^{\pm*}(\xi) = \lambda_0^\pm + \sigma^\pm \xi \tag{3.12}$$

avec  $\xi \in \mathbb{R}^+$ ,  $\lambda_0^\pm$  et  $\sigma^\pm$  des nombres complexes ; alors

$$\tilde{p}(x, \pm y) = \pm e^{-\lambda_0^\pm y} (\mathcal{L}_\xi \mu^{\pm*}(x, \xi))(\sigma^\pm y) \quad \text{pour } y \in \mathbb{R}^+, \tag{3.13}$$

où  $\mathcal{L}$  est la transformée de Laplace prolongée à l'ensemble  $\mathcal{D}'_+$  des distributions à support dans  $\mathbb{R}^+$ . De manière équivalente, les expressions de  $\mu^{\pm*}$  par rapport à  $\tilde{p}$  sont

$$\mu^{\pm*}(x, \xi) = \pm \mathcal{L}^{-1}(e^{\lambda_0^\pm y / \sigma^\pm} \tilde{p}(x, \pm y / \sigma^\pm))(\xi) \quad \text{pour } \xi \in \mathbb{R}^+.$$

Puisque nous considérons des opérateurs réels (et par conséquent des réponses impulsionnelles réelles), les singularités de  $\mathcal{P}^\pm$  sont nécessairement conjuguées. Ainsi, elles sont concentrées sur la demi-droite incluse dans l'axe réel. Dans ce qui suit, on se restreint à  $\lambda_0^\pm, \sigma^\pm \in \mathbb{R}$ .

Pour achever cette section, on énonce une condition suffisante assurant l'existence d'une réalisation diffusive, également appelée une réalisation  $\theta^{\pm*}$ -diffusive réelle.

### Hypothèse 35

- (i) La fonction  $y \mapsto \tilde{p}(\cdot, y)$  (resp.  $y \mapsto \tilde{p}(\cdot, -y)$ ) a une continuité analytique holomorphe dans  $\mathbb{R}^{+*} + i\mathbb{R}$ .
- (ii) Il existe une constante  $c^+$  (resp.  $c^-$ ) telle que  $y \in \mathbb{C} \mapsto \tilde{p}(x, y)e^{\lambda_0^+ y}$  (resp.  $y \in \mathbb{C} \mapsto \tilde{p}^-(x, y)e^{\lambda_0^- y}$ ) est uniformément bornée en  $x$  par une fonction polynômiale de  $|y|$  dans le demi-plan  $\Re(y) > c^+$  (resp.  $> c^-$ ).

**Proposition 36** Si les Hypothèses 35 sont satisfaites, alors pour des demi-droites  $\theta^{\pm*}$  similaires à (3.12), l'opérateur  $P$  admet une réalisation  $\theta^{\pm*}$ -diffusive réelle de symboles uniques  $\mu^{\pm*} \in \mathcal{D}'_+$ .

**Preuve** Cet énoncé vient directement de la caractérisation de l'image de  $\mathcal{D}'_+$  par la transformée de Laplace, voir par exemple [77] Chap. VI Proposition 5. ■

## 3.2 Equations de symboles diffusifs associées à un problème aux limites portant sur un noyau

Dans cette section, on considère que le noyau  $p(x, y)$  est solution d'un problème aux limites linéaire général à coefficients variables. On introduit les équations intégral-différentielles satisfaites par leur symbole complexe  $\mu^\pm$  ou réel  $\mu^{\pm*}$  à condition qu'ils existent pour des contours donnés  $\theta^\pm$  ou  $\theta^{\pm*}$ .

On commence par diviser  $\Omega$  en deux ensembles ouverts  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  correspondant aux parties causale ( $y < x$ ) et anti-causale ( $y > x$ ) de  $\Omega$ . La frontière de  $\Omega^+$  est partagée en  $\Gamma_y^+ = \{1\} \times \omega$ ,  $\Gamma_x^+ = \omega \times \{0\}$  et  $\Gamma_0 = \{(x, y) \in \Omega \text{ tel que } x = y\}$ , et la frontière de  $\Omega^-$  est divisée en  $\Gamma_y^- = \{0\} \times \omega$ ,  $\Gamma_x^- = \omega \times \{1\}$  et  $\Gamma_0$ .

On note  $\nabla = (\partial_x, \partial_y)^T$  et  $q$  le noyau d'un second opérateur  $Q$ , on considère que  $p$  est solution d'une équation aux dérivées partielles écrite sous forme générale

$$A(x, y, \nabla)p(x, y) = q(x, y) \quad \text{dans } \Omega^+ \cup \Omega^-, \quad (3.14)$$

avec pour conditions aux limites,

$$B(x, y, \nabla)p(x, y) = r(x, y) \quad \text{sur } \partial\Omega^+ \cup \partial\Omega^-. \quad (3.15)$$

On introduit le changement de variables

$$\phi^\pm(x, y) = (x, x \mp y),$$

les réponses impulsionnelles modifiées

$$\tilde{p}^\pm(x, y) = \tilde{p}(x, \pm y) = p \circ \phi^\pm(x, y), \quad (3.16)$$

les matrices  $K^\pm = (\nabla^T(\phi^\pm)^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & \mp 1 \end{pmatrix}$ , l'opérateur différentiel  $D_\lambda = (\partial_x, \lambda)$ , et les opérateurs

$$A^\pm(x, y, \xi, \partial_x) = A(x, y, K^\pm D_{-\theta^\pm(\xi)}^T) \quad \text{et} \quad B^\pm(x, y, \xi, \partial_x) = B(x, y, K^\pm D_{-\theta^\pm(\xi)}^T).$$

### 3.2.1 Équations des symboles complexes

Ici on montre que si l'opérateur linéaire de noyau  $p$  admet une réalisation  $\theta^\pm$ -diffusive alors ses symboles  $\mu^\pm$  sont solution des équations

$$\pm \left\langle A^\pm \mu^\pm, e^{\mp \theta^\pm(\xi)(x-y)} \right\rangle = q \quad \text{dans } \Omega^\pm, \quad (3.17)$$

$$\pm \left\langle B^\pm \mu^\pm, e^{\mp \theta^\pm(\xi)(x-y)} \right\rangle = r \quad \text{sur } \partial\Omega^\pm. \quad (3.18)$$

Dans le cas où  $A$  et  $B$  sont indépendents de  $y$ , on remplace l'équation (3.17) et l'équation (3.18) restreinte à  $\Gamma_y^\pm$  par deux familles infinies d'équations différentielles en  $x$  paramétrées par  $\xi$ .

Les transformées de Laplace du prolongement de  $y \mapsto \tilde{p}^\pm(\cdot, y)$  étant notées  $\lambda \mapsto \mathcal{P}^\pm(\cdot, \lambda)$ , comme dans (3.9), on fait les hypothèses permettant les calculs comme dans la définition des symboles complexes :

**Hypothèse 37** Les fonctions  $\lambda \mapsto \mathcal{P}^\pm(x, \lambda)$ ,  $\lambda \mapsto A(x, y, K^\pm D_\lambda^T) \mathcal{P}^\pm(x, \lambda)$  pour  $(x, y) \in \omega \times \mathbb{R}$  et  $\lambda \mapsto B(x, y, K^\pm D_\lambda^T) \mathcal{P}^\pm(x, \lambda)$  pour  $(x, y) \in \partial\Omega^\pm$  satisfont l'Hypothèse 27.

**Proposition 38** Sous les hypothèses 37,  $p$  est une solution du problème aux limites (3.14-3.15) si et seulement si ses  $\theta^\pm$ -symboles  $\mu^\pm$  sont solution du système (3.17-3.18).

**Preuve** Avec un changement de variables dans (3.14-3.15), les équations satisfaites par  $\tilde{p}^\pm$  sont

$$A(\phi^\pm(x, y), K^\pm \nabla) \tilde{p}^\pm = q \circ \phi^\pm \quad \text{et} \quad B(\phi^\pm(x, y), K^\pm \nabla) \tilde{p}^\pm = r \circ \phi^\pm. \quad (3.19)$$



On introduit les transformées de Laplace  $\mathcal{P}^\pm$  des  $\tilde{p}^\pm$ , ainsi  $\tilde{p}^\pm = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}\tilde{p}^\pm = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{P}^\pm$  et

$$\int_{a+i\mathbb{R}} A(\phi^\pm(x, y), K^\pm D_\lambda^T) \mathcal{P}^\pm(x, \lambda) e^{\lambda y} d\lambda = q \circ \phi^\pm$$

et

$$\int_{a+i\mathbb{R}} B(\phi^\pm(x, y), K^\pm D_\lambda^T) \mathcal{P}^\pm(x, \lambda) e^{\lambda y} d\lambda = r \circ \phi^\pm,$$

pour  $a \in \mathbb{R}$  convenablement choisi. En changeant le contour d'intégration comme dans la preuve du théorème 31, il vient

$$\pm \left\langle A(\phi^\pm(x, y), K^\pm D_{-\theta^\pm(\xi)}^T) \mu^\pm(x, \xi), e^{-\theta^\pm(\xi)y} \right\rangle_\xi = q \circ \phi^\pm,$$

et

$$\pm \left\langle B(\phi^\pm(x, y), K^\pm D_{-\theta^\pm(\xi)}^T) \mu^\pm(x, \xi), e^{-\theta^\pm(\xi)y} \right\rangle_\xi = r \circ \phi^\pm,$$

à condition que  $\lambda \mapsto \mathcal{P}^\pm(x, \lambda)$ ,  $\lambda \mapsto A(\phi^\pm(x, y), K^\pm(\partial_x, \lambda)^T) \mathcal{P}^\pm(x, \lambda)$  et  $\lambda \mapsto B(\phi^\pm(x, y), K^\pm(\partial_x, \lambda)^T) \mathcal{P}^\pm(x, \lambda)$  soient holomorphes dans  $\mathbb{C} - D^\pm$  et décroissent à l'infini. En inversant le changement de variable, cela amène au résultat

$$\pm \left\langle A(x, y, K^\pm D_{-\theta^\pm(\xi)}^T) \mu^\pm(x, \xi), e^{\mp\theta^\pm(\xi)(x-y)} \right\rangle_\xi = q,$$

et

$$\pm \left\langle B(x, y, K^\pm D_{-\theta^\pm(\xi)}^T) \mu^\pm(x, \xi), e^{\mp\theta^\pm(\xi)(x-y)} \right\rangle_\xi = r.$$

■

Maintenant, on prouve que pour un opérateur  $A$  et pour un opérateur  $B$  restreint à  $\Gamma_y^\pm$  indépendants de  $y$ , les équations associées aux symboles peuvent être réécrites dans le domaine de Laplace. Ainsi, à partir de l'expression ci-dessus, on considère  $q$  et  $r$  comme des noyaux d'opérateurs, et on suppose que leurs réponses impulsionnelles  $y \mapsto \tilde{q}$  et  $y \mapsto \tilde{r}$  satisfont les Hypothèses 27 pour un même ensemble  $D^\pm$  que  $p$ . Ainsi, elles admettent des réalisations  $\theta^\pm$ -diffusives de symboles notés  $\nu^\pm$  et  $\rho^\pm$ . Si nous appliquons le même calcul à  $q$  et  $r$  que pour le membre gauche, on obtient

$$\left\langle A(x, K^\pm D_{-\theta^\pm}^T) \mu^\pm - \nu^\pm, e^{\mp\theta^\pm(x-y)} \right\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \left\langle B(x, K^\pm D_{-\theta^\pm}^T) \mu^\pm - \rho^\pm, e^{\mp\theta^\pm(x-y)} \right\rangle = 0.$$

En se référant à la Remarque 33 portant sur l'absence d'unicité de la réalisation diffusive, on ne peut pas en déduire d'équations locales sur les symboles diffusifs. On procède différemment, on prolonge les équations de  $\tilde{p}^\pm$  à  $\omega \times \mathbb{R}^+$ . Selon la Remarque 32, nous savons que les prolongements de  $y \mapsto \tilde{q}$  et de  $y \mapsto \tilde{r}$  sont analytiques sur  $\mathbb{R}^+$ . Ici, on procède au prolongement analytique des équations satisfaites par  $\tilde{p}^\pm$ ,  $\tilde{q}^\pm$  et  $\tilde{r}^\pm$ . Alors,  $y \mapsto \tilde{p}^\pm$ ,  $y \mapsto \tilde{q}^\pm$  et  $y \mapsto \tilde{r}^\pm$  pour  $y \in \Gamma_y^\pm$  sont prolongées par 0 sur  $\mathbb{R}^-$ , et on sait qu'il existe des opérateurs aux dérivées partielles appropriés  $A_k^\pm(x, \nabla)$  et  $B_k^\pm(x, \nabla)$  de sorte que les équations suivantes, écrites au sens des distributions dans  $\mathcal{D}'_+$  par rapport à  $y$ ,

$$A(x, K^\pm \nabla) \tilde{p}^\pm + \sum_k A_k^\pm(x, K^\pm \nabla) \tilde{p}^\pm \delta_0^{(k)} = \tilde{q}^\pm \tag{3.20}$$

$$\text{et } B(x, K^\pm \nabla) \tilde{p}^\pm + \sum_k B_k^\pm(x, K^\pm \nabla) \tilde{p}^\pm \delta_0^{(k)} = \tilde{r}^\pm \tag{3.21}$$

sont équivalentes à l'équation (3.14) et les conditions aux limites (3.15) sur  $\Gamma_y^\pm$ . Ici  $\delta_0^{(k)}$  est la dérivée  $k^{\text{ième}}$  de la distribution de Dirac en 0. De  $A_k^\pm$  et  $B_k^\pm$ , on définit les opérateurs intégrro-différentiels  $A_0^\pm$  et  $B_0^\pm$  par

$$A_0^\pm(x, \partial_x, \xi)\mu(x, \xi) = \mp \frac{\theta^{\pm'}(\xi)}{2i\pi} \sum_k (-\theta^\pm(\xi))^k \left\langle A_k^\pm(x, K^\pm D_{-\theta^\pm(\zeta)}^T)\mu(x, \zeta), 1 \right\rangle_\zeta$$

et  $B_0^\pm(x, \partial_x, \xi)\mu(x, \xi) = \mp \frac{\theta^{\pm'}(\xi)}{2i\pi} \sum_k (-\theta^\pm(\xi))^k \left\langle B_k^\pm(x, K^\pm D_{-\theta^\pm(\zeta)}^T)\mu(x, \zeta), 1 \right\rangle_\zeta$ .

**Proposition 39** *Si l'opérateur  $A$  et l'opérateur  $B$  restreint à  $\Gamma_y^\pm$  sont indépendants de  $y$  alors le noyau  $p(x, y)$  est solution des équations (3.17) avec les conditions aux limites (3.18) en  $\Gamma_y^\pm$  si et seulement si les symboles  $\mu^\pm$  sont solution de*

$$(A^\pm + A_0^\pm)\mu^\pm = \nu^\pm \quad \text{dans } \omega \times \mathbb{R}, \quad (3.22)$$

$$(B^+ + B_0^+)\mu^+ = \rho^+ \quad \text{dans } \{1\} \times \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (B^- + B_0^-)\mu^- = \rho^- \quad \text{dans } \{0\} \times \mathbb{R}. \quad (3.23)$$

**Preuve** On applique la transformée de Laplace aux équations (3.20-3.21) au sens des distributions,

$$A(x, K^\pm D_\lambda)\mathcal{P}^\pm + \sum_k \lambda^k A_k^\pm(x, K^\pm \nabla)\tilde{p}^\pm(x, 0) = \mathcal{L}(\tilde{q}^\pm)$$

et  $B(x, K^\pm D_\lambda)\mathcal{P}^\pm + \sum_k \lambda^k B_k^\pm(x, K^\pm \nabla)\tilde{p}^\pm(x, 0) = \mathcal{L}(\tilde{r}^\pm)$ .

Puisque les transformées de Laplace de  $\tilde{p}^\pm$ ,  $\tilde{q}^\pm$  et de  $\tilde{r}^\pm$  sont toutes holomorphes dans  $D^\pm$ , ces équations sont encore satisfaites le long des contours paramétrisés  $\xi \mapsto \theta^\pm(\xi)$ . En changeant la variable  $\lambda$  en  $\xi$  et en introduisant les symboles diffusifs, cela implique que

$$A^\pm \mu^\pm \mp \frac{\theta^{\pm'}}{2i\pi} \sum_k (-\theta^\pm)^k A_k^\pm(x, K^\pm \nabla)\tilde{p}^\pm(x, 0) = \nu^\pm,$$

et  $B^\pm \mu^\pm \mp \frac{\theta^{\pm'}}{2i\pi} \sum_k (-\theta^\pm)^k B_k^\pm(x, K^\pm \nabla)\tilde{p}^\pm(x, 0) = \rho^\pm$ .

Afin d'achever la preuve, on introduit  $\tilde{p}^\pm = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}(\tilde{p}^\pm)$  et on procède comme dans la preuve de la Proposition 38 pour obtenir

$$A_k^\pm(x, K^\pm \nabla)\tilde{p}^\pm(x, 0) = \left\langle A_k^\pm(x, K^\pm D_{-\theta^\pm(\zeta)}^T)\mu^\pm(\cdot, \zeta), 1 \right\rangle_\zeta,$$

ce qui complète l'obtention de (3.22, 3.23). ■

**Remarque 40** *Pour terminer cette section, on s'intéresse à la détermination "a priori" de  $D^\pm$ . Une singularité apparaît dans la solution des équations dans le domaine de Laplace lorsqu'un coefficient d'un opérateur s'annule ou quand le membre de droite est singulier. La seconde possibilité est déjà prise en compte explicitement dans nos hypothèses précédentes. On considère les situations où les applications  $\lambda \mapsto A(x, \partial_x, \lambda)$  et  $\lambda \mapsto B(x, \partial_x, \lambda)$*

sont analytiques et où les opérateurs  $A$  et  $B$  peuvent être développés en séries finies en  $\partial_x$ ,

$$A(x, K^\pm D_\lambda^T) = \sum_m a_m^\pm(x, \lambda) \partial_x^m \quad \text{et} \quad B(x, K^\pm D_\lambda^T) = \sum_m b_m^\pm(x, \lambda) \partial_x^m.$$

Alors,  $\lambda \mapsto \mathcal{P}^\pm(\cdot, \lambda)$  est potentiellement singulière aux zéros des applications  $\lambda \mapsto a_m^\pm(x, \lambda)$  et  $\lambda \mapsto b_m^\pm(x, \lambda)$ . Dans les applications à venir, on note ces ensembles par  $W_A^\pm$  et  $W_B^\pm$ , à savoir

$$W_A^\pm := \bigcup_{x,m} [a_m^\pm(x, \cdot)]^{-1}(0) \quad \text{et} \quad W_B^\pm := \bigcup_{x,m} [b_m^\pm(x, \cdot)]^{-1}(0). \quad (3.24)$$

### 3.2.2 Équations des symboles réels

À présent, on établit les équations des symboles dans le cadre des réalisations diffusives réelles introduites dans la section 3.1.3. On choisit  $\theta^{\pm*} \subset \mathbb{R}$  comme dans (3.12) avec  $\sigma^\pm = 1$ , ainsi

$$\theta^{\pm*}(\xi) = \lambda_0^\pm + \xi \quad \text{avec} \quad \xi \in \mathbb{R}^+.$$

Les  $\theta^{\pm*}$ -symboles réels de  $q$  et  $r$  sont notés  $\nu^{\pm*}$  et  $\rho^{\pm*}$ .

#### Proposition 41

(i) On suppose que  $p$ ,  $q = A(x, y, \nabla)p$  et  $r = B(x, y, \nabla)p$  satisfont les Hypothèses 35, alors  $p$  est solution du problème aux limites (3.14-3.15) si et seulement si ses symboles  $\theta^{\pm*}$ -diffusifs réels  $\mu^{\pm*}$  sont solution du système

$$\pm \left\langle A^\pm \mu^{\pm*}, e^{\mp \theta^{\pm*}(\xi)(x-y)} \right\rangle_\xi = q \quad \text{dans} \quad \Omega^\pm, \quad (3.25)$$

$$\pm \left\langle B^\pm \mu^{\pm*}, e^{\mp \theta^{\pm*}(\xi)(x-y)} \right\rangle_\xi = r \quad \text{sur} \quad \partial\Omega^\pm. \quad (3.26)$$

(ii) De plus, si l'opérateur  $A$  et l'opérateur  $B$  restreint à  $\Gamma_y^\pm$  sont indépendants de  $y$  alors  $p$  est solution de l'équation (3.14) et la condition aux limites (3.15) sur  $\Gamma_y^\pm$  si et seulement si  $\mu^{\pm*}$  sont solutions de

$$A^\pm \mu^{\pm*} = \nu^{\pm*} \quad \text{dans} \quad \omega \times \mathbb{R}^+, \quad (3.27)$$

$$B^+ \mu^{+*} = \rho^{+*} \quad \text{dans} \quad \{1\} \times \mathbb{R} \quad \text{et} \quad B^- \mu^{-*} = \rho^{-*} \quad \text{dans} \quad \{0\} \times \mathbb{R}. \quad (3.28)$$

#### Preuve

(i) On sait que  $\tilde{p}^\pm$  est solution de (3.19), et on utilise son expression (3.13) pour obtenir

$$\pm \left\langle A(\phi^\pm(x, y), K^\pm D_{-\theta^{\pm*}}^T) \mu^{\pm*}, e^{-\theta^{\pm*}y} \right\rangle = q \circ \phi^\pm \quad (3.29)$$

$$\text{et} \quad \pm \left\langle B(\phi^\pm(x, y), K^\pm D_{-\theta^{\pm*}}^T) \mu^{\pm*}, e^{-\theta^{\pm*}y} \right\rangle = r \circ \phi^\pm. \quad (3.30)$$

Cela implique les équations annoncées après un nouveau changement de variables pour revenir au domaine initial.

(ii) Introduire les représentations diffusives de  $q$  et  $r$  dans (3.29, 3.30) implique

$$\langle A^\pm \mu^{\pm*}, e^{-\theta^{\pm*} y} \rangle = \langle \nu^{\pm*}, e^{-\theta^{\pm*} y} \rangle \quad \text{et} \quad \langle B\mu^{\pm*}, e^{-\theta^{\pm*} y} \rangle = \langle \rho^{\pm*}, e^{-\theta^{\pm*} y} \rangle,$$

Ou de manière équivalente, quand on remplace  $\theta^{\pm*}$  par  $\lambda_0^{\pm*} + \xi$  :

$$\mathcal{L}(A^\pm \mu^{\pm*}) = \mathcal{L}(\nu^{\pm*}) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(B\mu^{\pm*}) = \mathcal{L}(\rho^{\pm*}) \quad \text{pour } \Re(y) \geq 0.$$

Puisque la transformée de Laplace est injective dans  $\mathcal{D}'_+$ , on obtient les égalités (3.27, 3.28).

■

### 3.3 Approximations numériques

Les Hypothèses 37 sont très restrictives concernant la régularité et la croissance asymptotique du prolongement analytique des réponses impulsionnelles modifiées  $y \mapsto \tilde{p}^\pm(., y)$ . Par exemple, lorsqu'un noyau  $y \mapsto p^\pm(., y)$  est solution d'une équation aux dérivées partielles de type elliptique dans un domaine borné  $\Omega$ , il est généralement composé de termes exponentiels positifs et négatifs. Il en est de même pour  $y \mapsto \tilde{p}^\pm(., y)$ . Ainsi, notre théorie ne s'applique pas directement à ces cas fréquents. Quand bien même les Hypothèses 37 étaient satisfaites, construire l'approximation numérique du prolongement analytique d'une réponse impulsionnelle numérique modifiée, dans le but de calculer sa transformée de Laplace, se révèle être une procédure extrêmement coûteuse. Ces deux points nous ont donc encouragés à explorer une approche plus souple.

La méthode que nous avons trouvée revient à approcher les réponses impulsionnelles modifiées  $y \mapsto \tilde{p}^\pm(., y)$  dans une base de polynômes  $y \mapsto \tilde{p}^{N\pm}(., y)$  d'exponentiels négatifs en  $y$ . Prolonger analytiquement  $y \mapsto \tilde{p}^{N\pm}(., y)$  et calculer leur transformée de Laplace devient trivial. De plus, trouver la position des pôles devient facile, car nous savons qu'ils appartiennent à  $\mathbb{Z}^-$ . En conséquence, le choix des contours  $\theta^\pm$  est considérablement simplifié, et les méthodes efficaces déjà développées par plusieurs auteurs peuvent être utilisées pour des quadratures intervenant dans l'approximation de  $Pu$ .

Nous construisons la séquence  $y \mapsto \tilde{p}^{N\pm}(., y)$  pour qu'elle soit convergente en des normes appropriées, lorsque la dimension de la base augmente. Cependant, pour le cas général, les séquences de leur prolongements analytiques associés ne sont pas convergentes pour une norme raisonnable. Il en est de même pour les séquences  $\mu^{N\pm}$  des symboles diffusifs. De plus, dans les symboles, nous ne pouvons pas passer à la limite en  $N$ . Étonnamment, la réalisation diffusive approchée converge, ce qui est le point le plus important. Ainsi, nous concluons que notre méthode d'approximation est applicable à de nombreux cas pour lesquels les hypothèses de croissance ne sont pas remplies mais satisfont tout de même une certaine hypothèse de régularité du prolongement.

Dans cette section, on souhaite évaluer diverses méthodes pour approcher des symboles diffusifs puis des réalisations diffusives en traitant l'exemple de l'équation de Lyapunov

mentionnée en Introduction générale. Tout d'abord, dans la sous-section 3.3.1 on énonce les problèmes aux limites respectivement satisfaits par les parties causale et anti-causale. Ensuite, une méthode d'approximation est formulée en sous-section 3.3.2. On commence par les approximations du noyau  $p^{N\pm}$  de  $p^\pm$  pour définir les symboles approchés  $\mu^{N\pm}$ . Dans la sous-section 3.3.3, on expose deux méthodes directes du calcul des symboles. Elles sont basées sur deux formulations variationnelles différentes, chacune possédant ses avantages et inconvénients. Les sous-sections 3.3.2 et 3.3.3 présentent les méthodes numériques, leur implémentation et les résultats. Enfin, la sous-section 3.3.4 est dédiée à la réalisation diffusive réelle où les calculs sont effectués analytiquement.

### 3.3.1 Enoncé des problèmes aux limites portant sur les parties causale et anti-causale du noyau

L'équation de Lyapunov considérée s'inscrit dans le contexte de la stabilisation interne de l'équation de la chaleur avec des conditions aux limites de Dirichlet. On considère une constante non-négative  $c$  et un opérateur  $Q \in \mathcal{L}(L^2(\omega))$ , positif, auto-adjoint, de noyau  $q$  et admettant une représentation diffusive de symboles  $\nu^\pm$ . L'équation de Lyapunov consiste à trouver  $P \in \mathcal{L}(H_0^1(\omega))$  tel que

$$\int_{\omega} \frac{du}{dx} \frac{d(Pv)}{dx} + \frac{d(P^*u)}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_{\omega} Qu v + cu v dx \quad \text{pour tout } u, v \in H_0^1(\omega). \quad (3.31)$$

On cherchera la solution de  $P$  sous la forme d'un opérateur noyau de noyau  $p(x, y)$ , le noyau de son adjoint  $P^*$  étant

$$p^*(x, y) = p(y, x).$$

On peut facilement démontrer que  $p$  est symétrique i.e.  $p^* = p$ , par interversion de  $u$  avec  $v$ , puis de  $x$  avec  $y$ . A présent, on pose les équations satisfaites par le noyau  $p$  dans  $\Omega^+$  et dans  $\Omega^-$  sous la forme (3.14-3.15). Pour simplifier, nous utilisons les notations  $p^+$  et  $p^-$  pour les parties causale et anti-causale des noyaux  $p|_{\Omega^+}$  et  $p|_{\Omega^-}$ .

**Proposition 42** *Les parties causale  $p^+$  et anti-causale  $p^-$  du noyau  $p$  sont les solutions uniques des deux problèmes aux limites découplés*

$$\begin{cases} -\Delta p^\pm = q^\pm & \text{dans } \Omega^\pm, \\ (-\partial_x + \partial_y)p^\pm = \pm \frac{c}{2} & \text{sur } \Gamma_0, \\ p^\pm = 0 & \text{sur } \Gamma_x^\pm \cup \Gamma_y^\pm. \end{cases} \quad (3.32)$$

Dans le cas particulier  $c = 0$ ,  $p$  est la solution unique de

$$\begin{cases} -\Delta p = q & \text{dans } \Omega, \\ p = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.33)$$

**Preuve** L'utilisation des formes intégrales de  $Pu$ ,  $Pv$  et  $Qu$  dans l'équation de Lyapunov mène à

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \partial_x u(x) \partial_x (p(x, y) v(y)) + \partial_x (p(x, y) u(y)) \partial_x v(x) \, dy \, dx \\ &= \int_{\omega} c u(x) v(x) \, dx + \int_{\Omega} q(x, y) u(x) v(y) \, dy \, dx. \end{aligned}$$

On introduit

$$w(x, y) = u(x)v(y) \in H_0^1(\Omega),$$

et on utilise la symétrie

$$p(x, y) = p(y, x)$$

pour obtenir la formulation variationnelle satisfaite par  $p$

$$\int_{\Omega} \nabla p(x, y) \nabla w(x, y) \, dy \, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\Gamma_0} c w(x, y) \, ds(x, y) + \int_{\Omega} q(x, y) w(x, y) \, dy \, dx. \quad (3.34)$$

De plus, on remarque que l'ensemble des fonctions  $w(x, y) = u(x)v(y)$ , avec  $u, v \in H_0^1(\omega)$ , est dense dans  $H_0^1(\Omega)$ . On note également que  $p = 0$  sur  $\partial\Omega$  car  $Pu = 0$  sur  $\partial\omega$  et  $p$  est symétrique. Ainsi  $p \in H_0^1(\Omega)$  est solution de (3.34) pour tout  $w \in H_0^1(\Omega)$ . Cette formulation variationnelle satisfait les hypothèses du lemme de Lax-Milgram, elle admet par conséquent une solution unique. Quand  $c = 0$ , la formulation variationnelle est directement déduite de (3.33). Quand  $c \neq 0$ , la formulation forte de l'équation doit être écrite sur chaque côté de  $\Gamma_0$ . En appliquant la formule de Green dans  $\Omega - \Gamma_0 = \Omega^+ \cup \Omega^-$ , on trouve

$$\int_{\Omega^+ \cup \Omega^-} -(\Delta p + q)w \, dy \, dx + \int_{\Gamma_0} \frac{1}{\sqrt{2}} (-\partial_x + \partial_y)(p^+ - p^- - c)w \, ds = 0$$

ce qui implique la formulation forte

$$\begin{cases} -\Delta p = q & \text{dans } \Omega^+ \cup \Omega^-, \\ (-\partial_x + \partial_y)(p^+ - p^-) = c & \text{sur } \Gamma_0 \\ p = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Puisque  $p$  est symétrique, la seconde relation est équivalente à l'une des deux conditions

$$(-\partial_x + \partial_y)p^+ = \frac{c}{2} \quad \text{ou} \quad (-\partial_x + \partial_y)p^- = -\frac{c}{2},$$

ce qui termine la preuve. ■

### 3.3.2 Approximation du symbole diffusif à partir de l'approximation du noyau

Dans cette sous-section, on présente des résultats numériques obtenus par le calcul des réalisations diffusives de  $P^+u$  et  $P^-u$ , calcul basé sur les approximations spectrales du

noyau  $p$ . Par mesure de simplification, on restreint nos calculs au cas  $c = 0$ . On considère donc la solution de la formulation faible associée à (3.33). On utilise une méthode spectrale de base polynômiale dans la direction de  $x$  et une base exponentielle dans la direction de  $y$ , positive pour la partie causale et négative pour la partie anti-causale. Dans les deux cas, le calcul a été réalisé dans tout le domaine  $\Omega$ . Avant de commencer ces approximations, on introduit les notations suivantes :

- $\widehat{\omega} = ] - 1, 1[$  et  $\widehat{\Omega} = \widehat{\omega} \times \widehat{\omega}$ .
- $\mathbb{P}_0^N = \mathbb{P}^N \cap H_0^1(\widehat{\omega})$ , où  $\mathbb{P}^N$  est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à  $N$ .
- $L_k$  est le  $k^{\text{ième}}$  polynôme de Legendre sur  $\widehat{\omega}$ .
- $(K_k)_{k=1, \dots, N}$  est la famille de polynômes définie par

$$K_k(s) = (1 - s^2) L'_{k-1}(s) \quad \text{pour } k \geq 1. \quad (3.35)$$

- $T^\pm : \Omega \longrightarrow \widehat{\Omega}$  est un changement de variables :

$$T^\pm(x, y) = (s, z) = \left( 2x - 1, \frac{2e^{\pm y} - 1 - e^{\pm 1}}{e^{\pm 1} - 1} \right).$$

- $\rho^\pm(z) = \pm \left( z + \frac{1+e^{\pm 1}}{e^{\pm 1}-1} \right)$  et  $DT^\pm \circ (T^\pm)^{-1}(s, z) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \rho^\pm(z) \end{bmatrix}$ .

- $D(T^\pm)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^\pm(z)} \end{bmatrix}$  et  $\det(D(T^\pm)^{-1}) = \frac{1}{2\rho^\pm(z)}$ .

- $\widehat{g}^\pm$  est la transformation

$$g^\pm(x, y) = \widehat{g}^\pm \circ T^\pm(x, y). \quad (3.36)$$

- $\mathcal{N} \in \mathbb{N}^*$ ,  $(x_n)_{n=0, \dots, \mathcal{N}}$   $\mathcal{N} + 1$  points de discrétisation spatiale de  $x$  sur  $\omega$  et  $h = \frac{1}{\mathcal{N}}$  le pas de cette discrétisation (espace séparant deux nœuds consécutifs), ainsi  $x_n = nh$ .

### Remarque 43

- 1) La famille  $(K_k)_{k=1, \dots, N}$  constitue une base de  $\mathbb{P}_0^N$ , voir [7].
- 2)  $(K_k \otimes K_\ell)_{k, \ell}$  est une base de polynômes dans  $H_0^1(\widehat{\Omega})$ .

L'approximation des réalisations diffuses de  $P^\pm u$  requiert l'accomplissement d'étapes successives. Nous décrivons ces principales étapes suivant le plan : approximation du noyau et des symboles complexes, discrétisation des  $\psi^\pm u$  en  $x$  avec différentes approximations de  $u$  (approximation constante et affine par morceau) et approximation des réalisations diffuses de  $P^\pm u$ . Puis, pour chacune des trois étapes, nous détaillons sa mise en oeuvre suivie d'un test numérique.

### Approximations du noyau et des symboles complexes

Considérons la formulation faible associée à (3.33), i.e. la formulation faible (3.34) avec  $c = 0$ . On applique le changement de variables  $T^\pm$  défini dans (3.36)

$$p^\pm = \widehat{p}^\pm \circ T^\pm, \quad w^\pm = \widehat{w}^\pm \circ T^\pm \quad \text{et} \quad q^\pm = \widehat{q}^\pm \circ T^\pm.$$

Ainsi, on obtient la formulation : trouver  $\widehat{p}^\pm \in H_0^1(\widehat{\Omega})$  tel que

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{\Omega}} (\nabla \widehat{p}^\pm)^T (DT^\pm \circ (T^\pm)^{-1}) \cdot (\nabla \widehat{w}^\pm)^T (DT^\pm \circ (T^\pm)^{-1}) \det(D(T^\pm)^{-1}) \, ds \, dz \\ = \int_{\widehat{\Omega}} \widehat{q}^\pm \widehat{w}^\pm \det(D(T^\pm)^{-1}) \, ds dz, \quad \text{pour tout } \widehat{w}^\pm \in H_0^1(\widehat{\Omega}). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Pour résoudre ce problème numériquement, on propose d'approcher  $\widehat{p}^\pm$  par

$$\widehat{p}^{N^\pm}(s, z) = \sum_{k=0}^{N_1} \sum_{\ell=0}^{N_2} p_{k\ell}^\pm K_k(s) K_\ell(z), \quad \text{avec } N = (N_1, N_2).$$

Les approximations  $p^{N^\pm}$  de  $p^\pm$  sont ensuite obtenues

$$p^{N^\pm}(x, y) = \widehat{p}^{N^\pm} \circ T^\pm(x, y) = \sum_{k=0}^{N_1} \sum_{\ell=0}^{N_2} p_{k\ell}^\pm K_k \circ T_x^\pm(x) K_\ell \circ T_y^\pm(y). \quad (3.38)$$

Puis, on déduit les approximations  $\widetilde{p}^{N^\pm}$  des réponses impulsionnelles  $\widetilde{p}^\pm$

$$\widetilde{p}^{N^\pm}(x, y) = p^{N^\pm} \circ \phi^\pm(x, y) = \sum_{k=0}^{N_1} \sum_{\ell=0}^{N_2} p_{k\ell}^\pm K_k \circ T_x^\pm(x) K_\ell \circ T_y^\pm(x \mp y). \quad (3.39)$$

**Remarque 44** *Les approximations du noyau et de la réponse impulsionnelle sont développées sur la base de polynômes  $(K_k \otimes K_\ell)_{k,\ell}$  combinées avec la transformation  $T^\pm$ . Par conséquent, les  $\widetilde{p}^{N^\pm}$  sont exponentiels en  $y$  avec des exposants négatifs.*

**Remarque 45** *On utilise une méthode spectrale pour discrétiser suivant les directions  $x$  et  $y$ . Pour la direction  $y$ , on a besoin d'utiliser des fonctions de base globale prolongées analytiquement. Il n'y a cependant pas de restriction particulière concernant la direction  $x$ . Par exemple, une base locale pourra être utilisée comme une base d'éléments finis.*

Alors, les approximations  $\mathcal{P}^{N^\pm}$  et  $\mu^{N^\pm}$  des transformées de Laplace  $\widehat{\mathcal{P}}^\pm$  et des symboles complexes  $\mu^\pm$  s'obtiennent directement, i.e.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{N^\pm}(x, \lambda) &= \mathcal{L}_y(\widetilde{p}^{N^\pm}(x, y))(\lambda), \\ \mu^{N^\pm}(x, \xi) &= \mp \frac{\theta^{\pm'}(\xi)}{2i\pi} \mathcal{P}^{N^\pm}(x, -\theta^\pm(\xi)). \end{aligned}$$

On note que les pôles de  $\mathcal{P}^{N^\pm}$  se situent sur l'axe réel négatif, ainsi les domaines d'holomorphic  $D^{N^\pm}$  peuvent être n'importe quel ensemble ouvert ne contenant pas de nombres



réels négatifs  $\{0, -1, \dots, -N_2\}$ . L'Hypothèse 27 est clairement satisfaite pour tout contour  $-\theta^\pm$  dans  $D^{N^\pm}$ , et on peut appliquer le Théorème 31 pour obtenir les symboles complexes correspondant  $\mu^{N^\pm}$ . Pour calculer  $\mu^{N^\pm}$ , on a choisi les contours  $-\theta^\pm$  proposés par Weideman et Trefethen dans [92], dans le cadre du calcul de la transformée de Laplace inverse, à savoir la parabole

$$-\theta^\pm(\xi) = \theta_p (i\xi + 1)^2 \quad \text{pour } \xi \in \mathbb{R}, \quad (3.40)$$

et l'hyperbole

$$-\theta^\pm(\xi) = \theta_h (1 + \sin(i\xi - \alpha)) \quad \text{pour } \xi \in \mathbb{R}. \quad (3.41)$$

Les nombres réels positifs  $\theta_p$  et  $\theta_h$  contrôlent respectivement la largeur du contour parabolique et hyperbolique. L'hyperbole contient le paramètre libre supplémentaire  $\alpha$ , qui détermine son angle asymptotique.

### Discrétisation de $\psi^\pm(u)$ en $x$

Pour achever le calcul de  $P^\pm u$ , il faut discrétiser les équations différentielles (3.6, 3.7) pour les résoudre numériquement. La discrétisation de  $\psi$  en  $x$  se fera à l'aide de deux approximations différentes de  $u$ , la première étant constante par morceaux et la seconde affine par morceaux. Pour ce faire, on considère en premier lieu les relations de (3.4). En particulier, au point  $x = x_{n+1}$ , on a

$$\begin{aligned} \psi^+(u)(x_{n+1}, \xi) &= \int_0^{x_{n+1}} e^{-\theta^+(\xi)(x_{n+1}-y)} u(y) dy \\ &= \int_0^{x_n} e^{-\theta^+(\xi)(x_{n+1}-y)} u(y) dy + \int_{x_n}^{x_{n+1}} e^{-\theta^+(\xi)(x_{n+1}-y)} u(y) dy, \end{aligned}$$

et au point  $x = x_n$ , on a

$$\begin{aligned} \psi^-(u)(x_n, \xi) &= - \int_{x_n}^1 e^{\theta^-(\xi)(x_n-y)} u(y) dy \\ &= - \int_{x_{n+1}}^1 e^{\theta^-(\xi)(x_n-y)} u(y) dy - \int_{x_n}^{x_{n+1}} e^{\theta^-(\xi)(x_n-y)} u(y) dy. \end{aligned}$$

On remarque que  $x_{n+1} - x_n = h$ , pour tout  $n \in \{0, \dots, \mathcal{N}\}$ . On peut déduire les relations de récurrence suivantes

$$\begin{aligned} \psi^+(u)(x_{n+1}, \xi) &= e^{-\theta^+(\xi)h} \psi^+(u)(x_n, \xi) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} e^{-\theta^+(\xi)(x_{n+1}-y)} u(y) dy, \quad \text{avec } \psi^+(u)(0, \xi) = 0, \\ \text{et } \psi^-(u)(x_n, \xi) &= e^{-\theta^-(\xi)h} \psi^-(u)(x_{n+1}, \xi) - \int_{x_n}^{x_{n+1}} e^{\theta^-(\xi)(x_n-y)} u(y) dy, \quad \text{avec } \psi^-(u)(1, \xi) = 0. \end{aligned}$$

Ensuite, on approche  $u(x)$  sur l'intervalle  $[x_n, x_{n+1}]$ , soit par une constante  $\tilde{u}(x)$ , soit par une fonction linéaire  $\bar{u}(x)$ , i.e.

$$\begin{aligned} u(x) &\simeq \tilde{u}(x) = u_n, \\ u(x) &\simeq \bar{u}(x) = u_n + \frac{u_{n+1} - u_n}{h} (x - x_n), \end{aligned} \quad (3.42)$$

avec  $u_n = u(x_n)$  et  $u_{n+1} = u(x_{n+1})$ .

► **Approximation constante par morceau de  $u$**  : Dans ce cas, on obtient les approximations suivantes

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{x_{n+1}} e^{-\theta^+(\xi)(x_{n+1}-y)} u(y) dy &\simeq \int_{x_n}^{x_{n+1}} e^{-\theta^+(\xi)(x_{n+1}-y)} \tilde{u}(y) dy = u(x_n) \frac{e^{-\theta^+(\xi)h} - 1}{-\theta^+(\xi)}, \\ \text{et } \int_{x_n}^{x_{n+1}} e^{\theta^-(\xi)(x_n-y)} u(y) dy &\simeq \int_{x_n}^{x_{n+1}} e^{\theta^-(\xi)(x_n-y)} \tilde{u}(y) dy = u(x_n) \frac{e^{-\theta^-(\xi)h} - 1}{-\theta^-(\xi)}. \end{aligned}$$

Enfin, on introduit les variables  $\alpha^\pm(\xi) = e^{-\theta^\pm(\xi)h}$  et  $\beta^\pm(\xi) = \frac{\alpha^\pm(\xi) - 1}{-\theta^\pm(\xi)}$ . On obtient les relations de récurrence suivantes

$$\begin{aligned} \psi^+(u)(x_{n+1}, \xi) &\simeq \alpha^+(\xi) \psi^+(u)(x_n, \xi) + \beta^+(\xi) u_n, & \text{avec } \psi^+(u)(0, \xi) &= 0, \\ \psi^-(u)(x_n, \xi) &\simeq \alpha^-(\xi) \psi^-(u)(x_{n+1}, \xi) - \beta^-(\xi) u_n, & \text{avec } \psi^-(u)(1, \xi) &= 0, \end{aligned} \quad (3.43)$$

► **Approximation affine par morceau de  $u$**  : Dans ce cas, on obtient les approximations suivantes

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{x_{n+1}} e^{-\theta^+(\xi)(x_{n+1}-y)} u(y) dy &\simeq \int_{x_n}^{x_{n+1}} e^{-\theta^+(\xi)(x_{n+1}-y)} \bar{u}(y) dy \\ &\simeq \left( \frac{u_n}{-\theta^+(\xi)} + \frac{u_{n+1} - u_n}{\theta^+(\xi)h} \right) e^{-\theta^+(\xi)h} - \left( \frac{u_{n+1}}{-\theta^+(\xi)} + \frac{u_{n+1} - u_n}{\theta^+(\xi)h} \right), \\ \text{et } \int_{x_n}^{x_{n+1}} e^{\theta^-(\xi)(x_n-y)} u(y) dy &\simeq \int_{x_n}^{x_{n+1}} e^{\theta^-(\xi)(x_n-y)} \bar{u}(y) dy \\ &\simeq \left( \frac{u_{n+1}}{-\theta^-(\xi)} + \frac{u_{n+1} - u_n}{\theta^-(\xi)h} \right) e^{-\theta^-(\xi)h} - \left( \frac{u_n}{-\theta^-(\xi)} + \frac{u_{n+1} - u_n}{\theta^-(\xi)h} \right). \end{aligned}$$

Enfin, on introduit les variables  $\gamma^\pm(\xi) = \pm \frac{\alpha^\pm(\xi)}{-\theta^\pm(\xi)} - \frac{\beta^\pm(\xi)}{-\theta^\pm(\xi)h}$  et  $\delta^\pm(\xi) = \mp \frac{1}{-\theta^\pm(\xi)} + \frac{\beta^\pm(\xi)}{-\theta^\pm(\xi)h}$  pour obtenir les relations de récurrence suivantes

$$\begin{aligned} \psi^+(u)(x_{n+1}, \xi) &\simeq \alpha^+(\xi) \psi^+(u)(x_n, \xi) + \gamma^+(\xi) u_n + \delta^+(\xi) u_{n+1}, & \text{avec } \psi^+(u)(0, \xi) &= 0, \\ \psi^-(u)(x_n, \xi) &\simeq \alpha^-(\xi) \psi^-(u)(x_{n+1}, \xi) + \delta^-(\xi) u_n + \gamma^-(\xi) u_{n+1}, & \text{avec } \psi^-(u)(1, \xi) &= 0, \end{aligned} \quad (3.44)$$

Dans ce qui suit, on désigne par  $\psi^{h^\pm}(x_n, \xi)$  l'approximation de  $\psi^\pm(x_n, \xi)$  en  $x = x_n$ .

### Approximation des réalisations diffusives de $P^\pm u$

On dispose à présent de tous les éléments pour mettre en œuvre les réalisations diffusives

$$P^\pm u = \langle \mu^\pm, \psi^\pm(u) \rangle.$$

On remplace  $\mu^\pm$  et  $\psi^\pm$  par leur approximation  $\mu^{N^\pm}$  et  $\psi^{h^\pm}$ . Ainsi, les réalisations diffusives de  $P^\pm u(x_n)$  peuvent être approchées comme suit

$$P^\pm u(x_n) \simeq \int_{\mathbb{R}} \mu^{N^\pm}(x_n, \xi) \psi^{h^\pm}(u)(x_n, \xi) d\xi, \quad \text{pour tout } n. \quad (3.45)$$

Puis, on considère la discrétisation des paramétrages des contours  $-\theta^\pm$ , c'est-à-dire de  $\mathbb{R}_\xi$  en  $2M + 1$  points  $\xi_k$ ,  $k = -M, -M + 1, \dots, M - 1, M$ . De cette discrétisation, on déduit l'approximation des réalisations diffusives de  $P^\pm u(x_n)$  par la formule des trapèzes

$$P^{N,h,M^\pm} u(x_n) = h_* \sum_{k=-M}^M \mu^{N^\pm}(x_n, \xi_k) \psi^{h^\pm}(x_n, \xi_k), \quad \text{pour tout } n. \quad (3.46)$$

avec  $h_* > 0$  la taille du pas, espace séparant deux points d'intégration consécutifs. On note que les approximations  $\psi^{h^\pm}(x_n, \xi_k)$  sont calculées en utilisant (3.43) ou (3.44) au point  $\xi = \xi_k$ .

Le calcul numérique de l'intégrale (3.45) par la formule (3.46) est implicitement lié à l'inversion numérique des transformées de Laplace. L'objet de l'étude suivante est d'explicitier ce lien.

**Lien avec l'inversion numérique de la transformée de Laplace :** On établit que l'approximation de la réalisation diffusive (3.46) peut s'écrire sous forme d'une combinaison linéaire de transformée de Laplace inverse. Pour ce faire, soient  $n = 0, \dots, \mathcal{N}$ ,  $J_n^+ = \{0, \dots, n - 1\}$  et  $J_n^- = \{n, \dots, \mathcal{N} - 1\}$ . Au point  $x = x_n$ , la formule (3.4) s'écrit

$$\begin{aligned} \psi^+(x_n, \xi) &= \int_0^{x_n} e^{-\theta^+(\xi)(x_n-y)} u(y) dy = \sum_{j \in J_n^+} \int_{x_j}^{x_{j+1}} e^{-\theta^+(\xi)(x_n-y)} u(y) dy, \\ \psi^-(x_n, \xi) &= - \int_{x_n}^1 e^{\theta^-(\xi)(x_n-y)} u(y) dy = - \sum_{j \in J_n^-} \int_{x_j}^{x_{j+1}} e^{\theta^-(\xi)(x_n-y)} u(y) dy. \end{aligned}$$

Si l'on considère l'approximation affine de  $u$  sur  $[x_j, x_{j+1}]$  (voir (3.42<sub>2</sub>)), alors les  $\psi^\pm(x_n, \xi)$  peuvent être approchées par  $\psi^{h^\pm}(x_n, \xi)$ , avec

$$\psi^\pm(x_n, \xi) \simeq \psi^{h^\pm}(x_n, \xi) = \pm \sum_{j \in J_n^\pm} \int_{x_j}^{x_{j+1}} e^{\mp \theta^\pm(\xi)(x_n-y)} \bar{u}(y) dy, \quad \text{pour tout } n.$$

De plus,

$$\psi^{h^\pm}(x_n, \xi) = \pm \sum_{j \in J_n^\pm} \left[ \int_{x_j}^{x_n} e^{\mp \theta^\pm(\xi)(x_n-y)} \bar{u}(y) dy - \int_{x_{j+1}}^{x_n} e^{\mp \theta^\pm(\xi)(x_n-y)} \bar{u}(y) dy \right], \quad \text{pour tout } n.$$

Dans l'expression ci-dessus, le calcul des intégrales se fait exactement, ainsi on obtient

$$\begin{aligned} \psi^{h^\pm}(x_n, \xi) &= \pm \sum_{j \in J_n^\pm} \left[ \left( \frac{u_j}{-\theta^\pm(\xi)} + \frac{u_{j+1} - u_j}{\theta^{\pm 2}(\xi)h} \right) e^{-\theta^\pm(\xi)(\pm(x_n-x_j))} \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{u_{j+1}}{-\theta^\pm(\xi)} + \frac{u_{j+1} - u_j}{\theta^{\pm 2}(\xi)h} \right) e^{-\theta^\pm(\xi)(\pm(x_n-x_{j+1}))} \right], \end{aligned} \quad (3.47)$$

pour tout  $n = 0, \dots, \mathcal{N}$ , avec  $x_j = jh$  et  $u_j = u(x_j)$ .

Les réalisations diffusives  $\langle \mu^\pm, \psi^\pm \rangle$  sont approchées par  $\langle \mu^{N^\pm}, \psi^{h^\pm} \rangle$ , en conséquence

$$P^\pm u(x_n) \simeq \pm \int_{\mathbb{R}} \sum_{j \in J_n^\pm} \mu^{N^\pm}(x_n, \xi) \left[ \left( \frac{u_j}{-\theta^\pm(\xi)} + \frac{u_{j+1} - u_j}{\theta^{\pm 2}(\xi)h} \right) e^{-\theta^\pm(\xi)(\pm(x_n - x_j))} - \left( \frac{u_{j+1}}{-\theta^\pm(\xi)} + \frac{u_{j+1} - u_j}{\theta^{\pm 2}(\xi)h} \right) e^{-\theta^\pm(\xi)(\pm(x_n - x_{j+1}))} \right] d\xi,$$

pour tout  $n \in \{0, \dots, N\}$ . On intervertit  $\int_{\mathbb{R}}$  et  $\sum_j$  dans l'équation ci-dessus, puis on pose

$$f_m^\pm(x, \bar{x}) = \pm \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu^{N^\pm}(x, \xi)}{(-\theta^\pm(\xi))^m} e^{-\theta^\pm(\xi)\bar{x}} d\xi, \quad m = 1, 2,$$

avec  $\bar{x} \geq 0$  et  $f_m^\pm(x, 0) = 0$ <sup>7</sup>. Finalement, on peut établir que les réalisations diffusives  $P^\pm u(x_n)$  peuvent être approchées par  $P^{N,h,M^\pm} u(x_n)$ , avec

$$P^{N,h,M^\pm} u(x_n) = \sum_{j \in J_n^\pm} \left[ f_1^{M^\pm}(x_n, \pm(x_n - x_j)) u_j + f_2^{M^\pm}(x_n, \pm(x_n - x_j)) \frac{u_{j+1} - u_j}{h} - f_1^{M^\pm}(x_n, \pm(x_n - x_{j+1})) u_{j+1} - f_2^{M^\pm}(x_n, \pm(x_n - x_{j+1})) \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right], \quad (3.48)$$

pour tout  $n \in \{0, 1, \dots, N\}$ . On désigne par  $f_m^{M^\pm}$  l'approximation de l'intégrale de  $f_m^\pm$  par la méthode des trapèzes, associée à l'inversion numérique d'une transformée de Laplace. En effet, on introduit la fonction  $\mathcal{F}_m^\pm(x, \lambda)$  de la façon suivante

$$\mathcal{F}_m^\pm(x, \lambda) = \frac{\mathcal{P}^{N^\pm}(x, \lambda)}{\lambda^m}, \quad m = 1, 2.$$

On trouve que

$$f_m^\pm(x, \bar{x}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{-\theta^{\pm'}(\xi)}{2i\pi} \frac{\mathcal{P}^{N^\pm}(x, -\theta^\pm(\xi))}{(-\theta^\pm(\xi))^m} e^{-\theta^\pm(\xi)\bar{x}} d\xi = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\theta^\pm} \mathcal{F}_m^\pm(x, \lambda) e^{\lambda\bar{x}} d\lambda, \quad m = 1, 2.$$

On remarque que  $\bar{x} \mapsto f_m^\pm(x, \bar{x})$  est la transformée de Laplace inverse de  $\lambda \mapsto \mathcal{F}_m^\pm(x, \lambda)$ ,

$$f_m^\pm(x, \bar{x}) = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{F}_m^\pm(x, \lambda))(\bar{x}), \quad m = 1, 2.$$

On note également que les singularités de la transformée  $\lambda \mapsto \mathcal{F}_m^\pm(x, \lambda)$  se trouvent sur l'axe réel négatif. Dans ce contexte, les auteurs du papier [92] proposent une méthode

<sup>7</sup>  $f_m^\pm(\cdot, 0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\theta^\pm} \mathcal{F}_m^\pm(\cdot, \lambda) d\lambda = \sum_j \text{Res}(\mathcal{F}_m^\pm(\cdot, \lambda), \lambda_j) = 0$ , où  $\lambda_j$  sont les pôles de  $\mathcal{F}_m^\pm(x, \lambda)$ .

numérique pour une inversion "rapide" de la transformée de Laplace, sur un intervalle borné donné de la variable  $\bar{x}$ , utilisant la formule des trapèzes,

$$f_m^\pm(x, \bar{x}) \simeq f_m^{M\pm}(x, \bar{x}) = \frac{-h_*}{2i\pi} \sum_{k=-M}^M e^{-\theta^\pm(\xi_k)\bar{x}} \mathcal{F}_m^\pm(x, -\theta^\pm(\xi_k)) \theta^{\pm'}(\xi_k), \quad m = 1, 2,$$

Une étude de cette méthode, pour les contours parabolique (3.40) et hyperbolique (3.41), est détaillée dans l'Annexe A.

**Remarque 46** Dans le cas où  $u$  est approché par une constante sur  $[x_j, x_{j+1}]$ , on peut établir les approximations suivantes

$$\psi^{h\pm}(x_n, \xi) = \pm \sum_{j \in J_n^\pm} \frac{u_j}{-\theta^\pm(\xi)} \left[ e^{-\theta^\pm(\xi)(\pm(x_n - x_j))} - e^{-\theta^\pm(\xi)(\pm(x_n - x_{j+1}))} \right], \quad (3.49)$$

$$P^{N,h,M\pm}u(x_n) = \sum_{j \in J_n^\pm} \left[ f_1^{M\pm}(x_n, \pm(x_n - x_j)) - f_1^{M\pm}(x_n, \pm(x_n - x_{j+1})) \right] u_j. \quad (3.50)$$

### Mise en œuvre numérique

La mise en œuvre de l'approximation de la réalisation diffusive se fait en trois étapes. Tout d'abord, on commence par la mise en œuvre de l'approximation du noyau. Elle est basée sur l'approximation de  $\hat{p}^\pm$ , solution du problème (3.37). Ce dernier est équivalent au problème : trouver  $\hat{p}^\pm \in H_0^1(\hat{\Omega})$  tel que

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\Omega}} \left[ 2 \frac{\partial \hat{p}^\pm}{\partial s}(s, z) \cdot \frac{\partial \hat{w}^\pm}{\partial s}(s, z) \frac{1}{\rho^\pm(z)} + \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{p}^\pm}{\partial z}(s, z) \cdot \frac{\partial \hat{w}^\pm}{\partial z}(s, z) \rho^\pm(z) \right] ds dz \\ = \int_{\hat{\Omega}} \frac{1}{2\rho^\pm(z)} \hat{q}(s, z) \hat{w}^\pm(s, z) ds dz, \quad \text{pour tout } \hat{w}^\pm \in H_0^1(\hat{\Omega}). \end{aligned} \quad (3.51)$$

On considère les fonctions tests

$$\hat{w}^{N\pm} = K_i(s)K_j(z), \quad \text{avec } 1 \leq i \leq N_1 \quad \text{et} \quad 1 \leq j \leq N_2.$$

Ainsi

$$\frac{\partial \hat{w}^{N\pm}}{\partial s} = K'_i(s)K_j(z) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \hat{w}^{N\pm}}{\partial z} = K_i(s)K'_j(z).$$

Rappelons qu'on approche  $\hat{p}^\pm$  par

$$\hat{p}^{N\pm}(s, z) = \sum_{k,\ell}^{N_1, N_2} p_{k\ell}^\pm K_k(s)K_\ell(z).$$

On dérive suivant chaque direction, on trouve

$$\frac{\partial \hat{p}^{N\pm}(s, z)}{\partial s} = \sum_{k,\ell}^{N_1, N_2} p_{k\ell}^\pm K'_k(s)K_\ell(z) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \hat{p}^{N\pm}(s, z)}{\partial z} = \sum_{k,\ell}^{N_1, N_2} p_{k\ell}^\pm K_k(s)K'_\ell(z).$$

Finalement, on remplace  $\widehat{w}$  et  $\widehat{p}^\pm$  par leur approximation dans la formulation variationnelle (3.51). Ainsi, on trouve que  $p_{k\ell}^\pm$  est solution du système linéaire

$$\sum_{k,\ell} a_{klij}^\pm p_{k\ell}^\pm = b_{ij}^\pm \quad \text{pour tout } i, j,$$

avec

$$\begin{aligned} a_{klij}^\pm &= 2 \int_{\widehat{\omega}} K'_k(s) K'_i(s) ds \int_{\widehat{\omega}} K_\ell(z) K_j(z) \frac{1}{\rho^\pm(z)} dz \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\widehat{\omega}} K_k(s) K_i(s) ds \int_{\widehat{\omega}} K'_\ell(z) K'_j(z) \rho^\pm(z) dz, \\ \text{et } b_{ij}^\pm &= \frac{1}{2} \int_{\widehat{\Omega}} K_i(s) K_j(z) \widehat{q}^\pm(s, z) \frac{1}{\rho^\pm(z)} ds dz. \end{aligned}$$

Le calcul numérique des intégrales ci-dessus se fait par la quadrature de Legendre-Gauss-Lobatto (LGL), voir le chapitre précédent. Enfin, on applique les changements de variables  $T^\pm$  et  $\phi^\pm$ . On en déduit les approximations  $p^{N^\pm}$  et  $\widetilde{p}^{N^\pm}$  par (3.38) et (3.39) respectivement.

La seconde étape concerne la mise en œuvre de l'approximation du symbole diffusif  $\mu^{N^\pm}$ . Celle-ci nécessite le calcul exact des transformées de Laplace de  $K_\ell \circ T_y^\pm(x \mp y)$ , facile à obtenir.

Enfin, on s'intéresse à la mise en œuvre de l'approximation des réalisations diffusives  $P^{N,h,M^\pm}u$ . Dans cette troisième étape, on la présente adaptée à une architecture centralisée ou semi-décentralisée.

► **Mise en œuvre adaptée à une architecture centralisée** : Les formules des approximations des réalisations diffusives (3.48) et (3.50) peuvent également s'écrire sous la forme du produit de convolution discret suivant

$$P^{N,h,M}u(x_n) = \sum_{j^+=0}^n \omega_{n,n-j^+}^+ u_{j^+} + \sum_{j^-=n}^{\mathcal{N}} \omega_{n,j^- - n}^- u_{j^-}, \quad (3.52)$$

avec pour la formule (3.48)

$$\begin{aligned} \omega_{n,\pm(n-j^\pm)}^\pm &= f_1^{M^\pm}(nh, \pm(n-j^\pm)h) + \frac{1}{h} [f_2^{M^\pm}(nh, (\pm(n-j^\pm) - 1)h) - f_2^{M^\pm}(nh, \pm(n-j^\pm)h)] \\ &\quad \text{pour } j^+ = 0 \quad \text{et } j^- = \mathcal{N}, \\ \omega_{n,j^\pm}^\pm &= \frac{1}{h} [f_2^{M^\pm}(nh, (j^\pm - 1)h) - 2f_2^{M^\pm}(nh, j^\pm h) + f_2^{M^\pm}(nh, (j^\pm + 1)h)], \\ &\quad \text{pour } j^+ = 1, \dots, n-1 \quad \text{et } j^- = n+1, \dots, \mathcal{N}-1, \\ \omega_{n,0}^\pm &= \frac{f_2^{M^\pm}(nh, h)}{h}, \\ &\quad \text{pour } j^\pm = n, \end{aligned}$$



Pour le cas où  $u(x)$  est interpolé par une constante, on établit

$$\begin{aligned} P^+u(x_{n+1}) &\simeq \int_{\mathbb{R}} \mu^{N^+}(x_{n+1}, \xi) \psi^{h^+}(x_{n+1}, \xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mu^{N^+}(x_{n+1}, \xi) (\alpha^+(\xi) \psi^{h^+}(x_n, \xi) + \beta^+(\xi) u_n) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mu^{N^+}(x_{n+1}, \xi) (\alpha^+(\xi) \psi^{h^+}(x_n, \xi) + \bar{\beta}^+(\xi) u_n) d\xi. \end{aligned}$$

En procédant de manière analogue, on trouve

$$P^-u(x_n) \simeq \int_{\mathbb{R}} \mu^{N^-}(x_n, \xi) (\alpha^-(\xi) \psi^{h^-}(x_{n+1}, \xi) - \bar{\beta}^-(\xi) u_n) d\xi.$$

Concernant le cas où  $u(x)$  est interpolé par une fonction linéaire, on obtient

$$\begin{aligned} P^+u(x_{n+1}) &\simeq \int_{\mathbb{R}} \mu^{N^+}(x_{n+1}, \xi) (\alpha^+(\xi) \psi^{h^+}(x_n, \xi) + \bar{\gamma}^+(\xi) u_n + \bar{\delta}^+(\xi) u_{n+1}) d\xi, \\ P^-u(x_n) &\simeq \int_{\mathbb{R}} \mu^{N^-}(x_n, \xi) (\alpha^-(\xi) \psi^{h^-}(x_{n+1}, \xi) + \bar{\delta}^-(\xi) u_n + \bar{\gamma}^-(\xi) u_{n+1}) d\xi. \end{aligned}$$

Finalement, lorsqu'on utilise une interpolation constante de  $u$ , on conclut

$$\begin{aligned} z_{n+1}^+ &= P^{N,h,M^+}u(x_{n+1}) = h_* \sum_{k=-M}^M \mu^{N^+}(x_{n+1}, \xi_k) (\alpha_k^+ \psi^{h^+}(x_n, \xi_k) + \bar{\beta}_k^+ u_n), \\ z_n^- &= P^{N,h,M^-}u(x_n) = h_* \sum_{k=-M}^M \mu^{N^-}(x_n, \xi_k) (\alpha_k^- \psi^{h^-}(x_{n+1}, \xi_k) - \bar{\beta}_k^- u_n). \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} z_{n+1}^+ &= P^{N,h,M^+}u(x_{n+1}) = h_* \sum_{k=-M}^M \mu^{N^+}(x_{n+1}, \xi_k) (\alpha_k^+ \psi^{h^+}(x_n, \xi_k) + \bar{\gamma}_k^+ u_n + \bar{\delta}_k^+ u_{n+1}), \\ z_n^- &= P^{N,h,M^-}u(x_n) = h_* \sum_{k=-M}^M \mu^{N^-}(x_n, \xi_k) (\alpha_k^- \psi^{h^-}(x_{n+1}, \xi_k) + \bar{\delta}_k^- u_n + \bar{\gamma}_k^- u_{n+1}), \end{aligned}$$

pour une interpolation linéaire de  $u$ , avec  $\theta_k^\pm = \theta^\pm(\xi_k)$ ,  $\alpha_k^\pm = \alpha^\pm(\xi_k)$ ,  $\bar{\beta}_k^\pm = \bar{\beta}^\pm(\xi_k)$ ,  $\bar{\gamma}_k^\pm = \bar{\gamma}^\pm(\xi_k)$  et  $\bar{\delta}_k^\pm = \bar{\delta}^\pm(\xi_k)$ .

Dans un esprit synthétique, une mise en forme algorithmique des résultats est présentée.



**Algorithme 3** Réalisation diffusive causale, cas de l'interpolation constante de  $u(x)$

---

1: **Calcul hors-ligne** des  $\theta^+$ -symboles diffusifs approchés  $\mu^{N^+}(x, \xi)$

2: **Calcul en temps réel**

3: **pour**  $n = 0, \dots, \mathcal{N}$  **faire**

4:   **pour**  $k = -M, \dots, M$  **faire**

5:

$$\psi_{n+1,k}^+ = \alpha_k^+ \psi_{n,k}^+ + \beta_k^+ u_n, \quad \psi_{0,k}^+ = 0,$$

6:   **fin pour**  $k$

7:

$$z_{n+1}^+ = h_* \sum_{k=-M}^M \mu_{n+1,k}^{N^+} \left( \alpha_k^+ \psi_{n,k}^+ + \bar{\beta}_k^+ u_n \right)$$

8: **fin pour**  $n$

---

**Algorithme 4** Réalisation diffusive anti-causale, cas de l'interpolation constante de  $u(x)$

---

1: **Calcul hors-ligne** des  $\theta^-$ -symboles diffusifs approchés  $\mu^{N^-}(x, \xi)$

2: **Calcul en temps réel**

3: **pour**  $n = 0, \dots, \mathcal{N}$  **faire**

4:   **pour**  $k = -M, \dots, M$  **faire**

5:

$$\psi_{n,k}^- = \alpha_k^- \psi_{n+1,k}^- - \beta_k^- u_n, \quad \psi_{\mathcal{N},k}^- = 0,$$

6:   **fin pour**  $k$

7:

$$z_n^- = h_* \sum_{k=-M}^M \mu_{n,k}^{N^-} \left( \alpha_k^- \psi_{n+1,k}^- - \bar{\beta}_k^- u_n \right).$$

8: **fin pour**  $n$

---

---

**Algorithme 5** Réalisation diffusive causale, cas de l'interpolation linéaire de  $u(x)$

---

- 1: **Calcul hors-ligne** des  $\theta^+$ -symboles diffusifs approchés  $\mu^{N^+}(x, \xi)$
- 2: **Calcul en temps réel**
- 3: **pour**  $n = 0, \dots, \mathcal{N}$  **faire**
- 4:   **pour**  $k = -M, \dots, M$  **faire**
- 5:

$$\psi_{n+1,k}^+ = \alpha_k^+ \psi_{n,k}^+ + \gamma_k^+ u_n + \delta_k^+ u_{n+1}, \quad \psi_{0,k}^+ = 0,$$

- 6:   **fin pour**  $k$
- 7:

$$z_{n+1}^+ = h_* \sum_{k=-M}^M \mu_{n+1,k}^{N^+} \left( \alpha_k^+ \psi_{n,k}^+ + \bar{\gamma}_k^+ u_n + \bar{\delta}_k^+ u_{n+1} \right).$$

- 8: **fin pour**  $n$
- 

**Algorithme 6** Réalisation diffusive anti-causale, cas de l'interpolation linéaire de  $u(x)$

---

- 1: **Calcul hors-ligne** des  $\theta^-$ -symboles diffusifs approchés  $\mu^{N^-}(x, \xi)$
- 2: **Calcul en temps réel**
- 3: **pour**  $n = 0, \dots, \mathcal{N}$  **faire**
- 4:   **pour**  $k = -M, \dots, M$  **faire**
- 5:

$$\psi_{n,k}^- = \alpha_k^- \psi_{n+1,k}^- + \delta_k^- u_n + \gamma_k^- u_{n+1}, \quad \psi_{\mathcal{N},k}^- = 0,$$

- 6:   **fin pour**  $k$
- 7:

$$z_n^- = h_* \sum_{k=-M}^M \mu_{n,k}^{N^-} \left( \alpha_k^- \psi_{n+1,k}^- + \bar{\delta}_k^- u_n + \bar{\gamma}_k^- u_{n+1} \right).$$

- 8: **fin pour**  $n$
- 

### Test numérique

On se réfère à l'exemple (3.33) introduit plus haut, où le noyau

$$q(x, y) = -2(1 - 3x)(1 - y)y^2 - 2(1 - x)x^2(1 - 3y).$$

La solution analytique de ce système est le noyau  $p$ ,

$$p(x, y) = (1 - x)x^2(1 - y)y^2, \quad \text{pour tout } (x, y) \in \Omega.$$

► **calcul hors ligne** : Sur la Figure 3.2, on représente les erreurs relatives en norme  $L^2(\Omega)$

$$e^\pm = \frac{\|p^\pm - p^{N^\pm}\|_{L^2(\Omega)}}{\|p^\pm\|_{L^2(\Omega)}} \quad (3.54)$$

calculées entre  $p^\pm$  et leur approximation respective  $p^{N^\pm}$  en fonction de  $N = (N_1, N_2)$ , pour  $N_1 = N_2 = 1, \dots, 18$ . Les erreurs décroissent de façon linéaire, sur l'échelle logarithmique, avec une pente de  $\approx -1.40$  pour  $e^+$  et de  $\approx -1.42$  pour  $e^-$ .

A présent, on considère les degrés polynômiaux de  $p^{N^\pm}$  suffisamment grands ( $N_1 = N_2 = 15$ ) de sorte que les erreurs relatives (3.54) soient suffisamment petites, soit de l'ordre de  $10^{-9}$ . Ainsi, les courbes de la Figure (3.3) représentant  $p$  et ses approximations  $p^{\pm N}$  sont semblables.

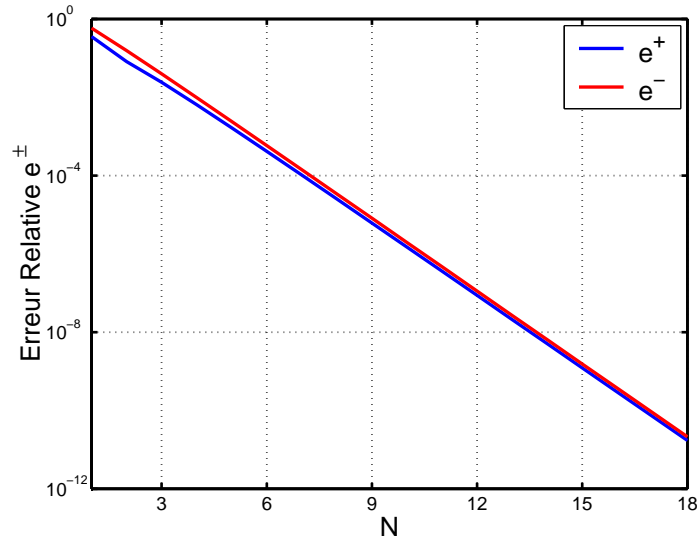


FIG. 3.2 – Erreurs relatives  $e^+$  (en bleu) et  $e^-$  (en rouge) en norme  $L^2$ , définies par (3.54), en fonction de  $N = (N_1, N_2)$  en échelle logarithmique

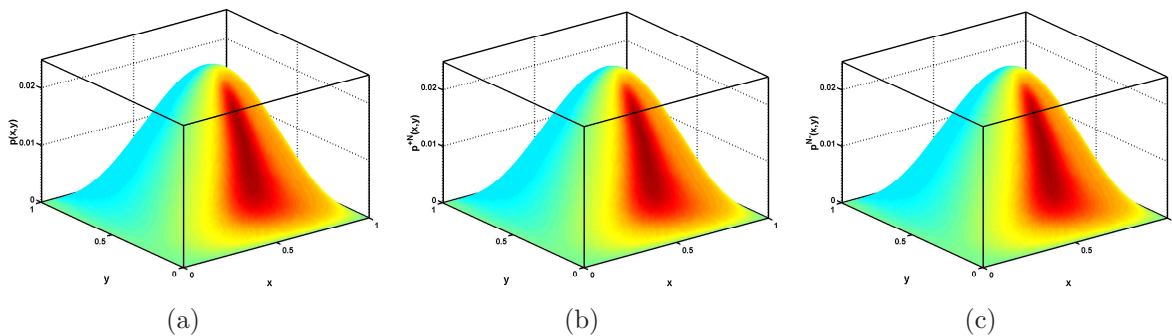


FIG. 3.3 – Profil  $x$ - $y$  des noyaux (a)  $p(x, y)$ , (b)  $p^{N^+}(x, y)$  et (c)  $p^{N^-}(x, y)$  pour  $N = (15, 15)$

► **calcul en temps réel** : On considère les réalisations d'états (causale et anti-causale) suivantes

$$\partial_x \psi^\pm(x, \xi) \pm \theta^\pm(\xi) \psi^\pm(x, \xi) = u(x) \quad \text{avec} \quad \psi^+(0, \xi) = \psi^-(1, \xi) = 0,$$

$$P^\pm u(x) = \int_{\mathbb{R}} \mu^\pm(x, \xi) \psi^\pm(x, \xi) d\xi,$$

où la variable d'entrée

$$u(x) = \sin(\pi x).$$

Les solutions analytiques  $(P^\pm u)(x)$  sont

$$\begin{aligned} (P^+ u)(x) &= - \left( \frac{1}{\pi} x^6 - \frac{2}{\pi} x^5 + \left( \frac{1}{\pi} - \frac{6}{\pi^3} \right) x^4 + \frac{8}{\pi^3} x^3 - \frac{2}{\pi^3} x^2 \right) \cos(\pi x) \\ &\quad - \left( -\frac{3}{\pi^2} x^5 + \frac{5}{\pi^2} x^4 + \left( \frac{6}{\pi^4} - \frac{2}{\pi^2} \right) x^3 - \frac{6}{\pi^4} x^2 \right) \sin(\pi x) \\ &\quad + \frac{2}{\pi^3} x^3 - \frac{2}{\pi^3} x^2, \\ (P^- u)(x) &= + \left( \frac{1}{\pi} x^6 - 2\frac{1}{\pi} x^5 + \left( \frac{1}{\pi} - \frac{6}{\pi^3} \right) x^4 + \frac{8}{\pi^3} x^3 - \frac{2}{\pi^3} x^2 \right) \cos(\pi x) \\ &\quad + \left( -\frac{3}{\pi^2} x^5 + \frac{5}{\pi^2} x^4 + \left( \frac{6}{\pi^4} - \frac{2}{\pi^2} \right) x^3 - \frac{6}{\pi^4} x^2 \right) \sin(\pi x) \\ &\quad - \frac{4}{\pi^3} x^3 + \frac{4}{\pi^3} x^2. \end{aligned}$$

Les calculs sont réalisés en utilisant les contours  $-\theta^\pm$  parabolique (3.40) et hyperbolique (3.41), avec

- $\Lambda = \frac{x_{\mathcal{N}-1}}{x_1} = \frac{(\mathcal{N}-1)h}{h} = \mathcal{N} - 1$ .
- $\theta_p = \frac{\pi}{4\sqrt{8\Lambda+1}} \frac{M}{x_{\mathcal{N}-1}}$  et  $h_* = \frac{\sqrt{8\Lambda+1}}{M}$  pour le contour parabolique.
- $\theta_h = \frac{4\pi\alpha - \pi^2}{A(\alpha)} \frac{M}{x_{\mathcal{N}-1}}$ ,  $\alpha = \max_{\bar{\alpha} \in [\pi/4, \pi/2]} \frac{\pi^2 - 2\pi\bar{\alpha}}{A(\bar{\alpha})}$  et  $h_* = \frac{A(\alpha)}{M}$  où  $A(\alpha) = \cosh^{-1} \frac{(\pi-2\alpha)\Lambda + 4\alpha - \pi}{(4\alpha - \pi) \sin \alpha}$  pour le contour hyperbolique.

Le choix "optimal" de ces paramètres a fait l'objet de l'étude développée en Annexe A-§ A.4.

Les pas de discrétisation spatiale  $h$ , que nous avons pris pour réaliser le test numérique et les valeurs induites de  $\Lambda$ ,  $\alpha$  et  $A(\alpha)$ , sont indiqués dans le tableau ci-dessous.

$h$	0.1	0.05	0.02	0.01
$\Lambda$	9	19	49	99
$\alpha$	1.0316	0.9816	0.9388	0.9173
$A(\alpha)$	3.2295	4.2631	5.5321	6.4301

On observe que les fonctions  $\xi \mapsto \Re(\mu^{N^\pm} \psi^{h^\pm})(\xi)$  décroissent très rapidement. Pour mettre en évidence ce comportement, on se réfère à la Figure 3.4.

Sur les Figures 3.5 et 3.6, on évalue les erreurs relatives

$$E^\pm = \frac{\|P^\pm u - P^{N,h,M^\pm} u\|_{L^2(\omega)}}{\|P^\pm u\|_{L^2(\omega)}}, \quad (3.55)$$

considérées entre les réalisations exactes  $P^\pm u$  et leurs approximations  $P^{N,h,M^\pm} u$  en échelle logarithmique, avec  $M$  variant de 10 à  $10^2$  pour chaque contour : parabolique (3.40) (en noir) et hyperbolique (3.41) (en rouge). Les erreurs décroissent exponentiellement jusqu'aux limites correspondant à la précision de l'approximation de  $u$  par interpolation constante (en trait discontinu) et linéaire (en trait continu). En effet, ce comportement est attendu car l'approximation de la réalisation diffusive contient trois sources d'erreurs : la première provient de l'approximation spectrale et la seconde de la discrétisation du contour d'intégration, chacune étant bien contrôlée. En conséquence, on peut ignorer ces deux sources d'erreurs. La troisième erreur est due à l'interpolation de  $u$  par  $\bar{u}$  ou  $\tilde{u}$ . On contrôle l'erreur en  $u$ , bornée par

$$\begin{aligned} \|\bar{u}(x) - u(x)\| &\leq \bar{C}h^2 \|u''\|_\infty, \quad \bar{C} > 0, \quad \text{pour l'interpolation linéaire,} \\ \|\tilde{u}(x) - u(x)\| &\leq \tilde{C}h \|u'\|_\infty, \quad \tilde{C} > 0, \quad \text{pour l'interpolation constante.} \end{aligned}$$

En d'autres termes, utiliser les interpolations linéaire et constante, induisent des erreurs  $E^\pm$  proportionnelles à  $h^2$  et  $h$  respectivement. On note que les taux de convergence calculés favorisent le contour hyperbolique au contour parabolique. Pour de petites valeurs de  $M$ , on remarque que les erreurs relatives sont inférieures lorsqu'on utilise une approximation constante par morceau par rapport à l'approximation affine par morceau de  $u$ . Ainsi, pour un calcul en temps réel, le choix du contour hyperbolique et l'approximation de  $u$  par une constante sont privilégiés.

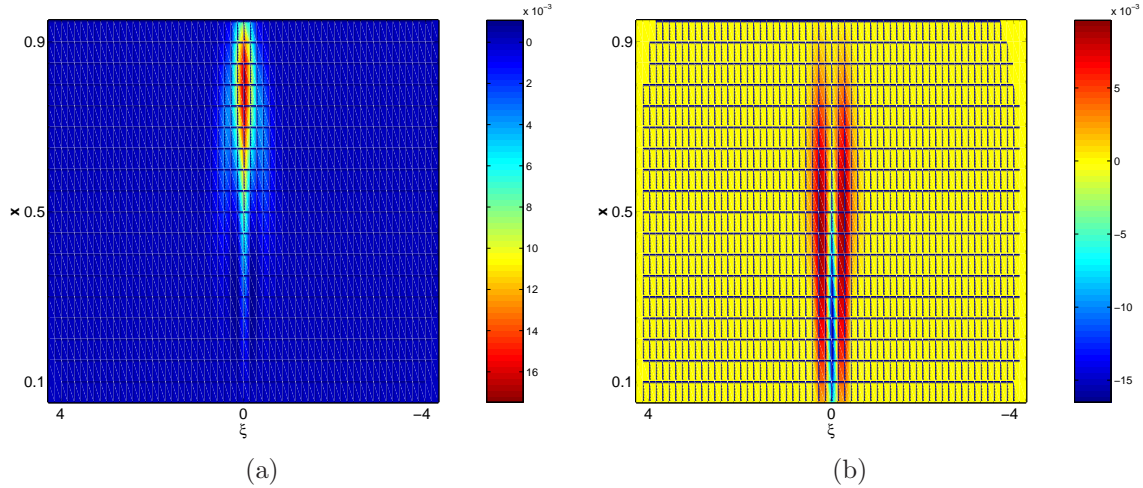


FIG. 3.4 – Profil  $\xi$ - $x$  de (a)  $\Re(\mu^{N+} \psi^{h+})$  et (b)  $\Re(\mu^{N-} \psi^{h-})$  pour  $h = 0.05$  et  $N = (15, 15)$

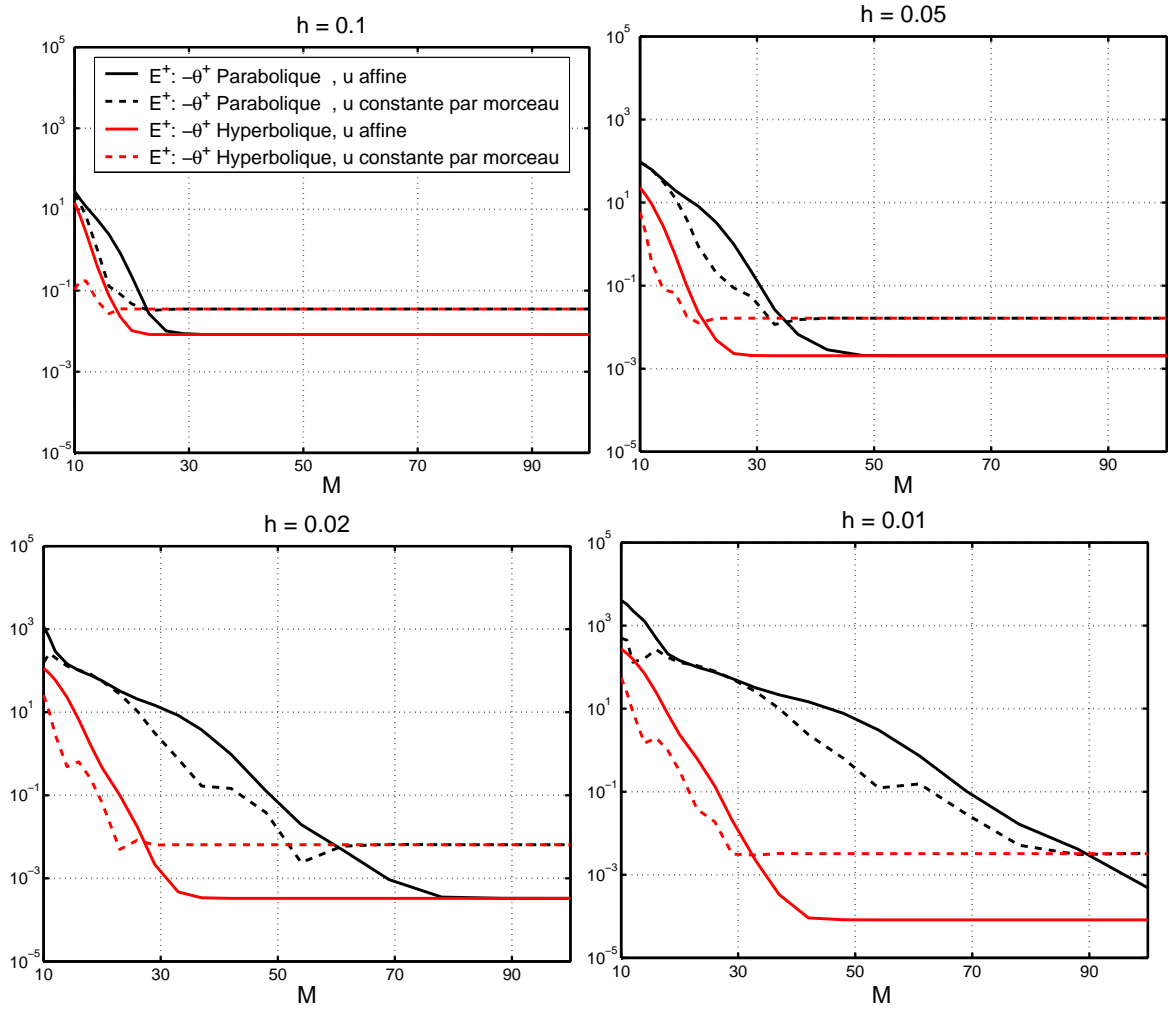


FIG. 3.5 – Erreur relative  $E^+$  définie par (3.55), en fonction du nombre de nœuds  $M$  et pour différentes valeurs de  $h$  ( $h = 0.1, 0.05, 0.02, 0.01$ ) à l'échelle logarithmique. Les traits continus sont associés à l'interpolation linéaire de  $u$  (voir Algorithme 5). Les traits discontinus correspondent à l'interpolation constante de  $u$  (voir Algorithme 3). En noir, on distingue le calcul avec contour hyperbolique. Enfin, le rouge symbolise le calcul avec contour parabolique.  $N = (15, 15)$

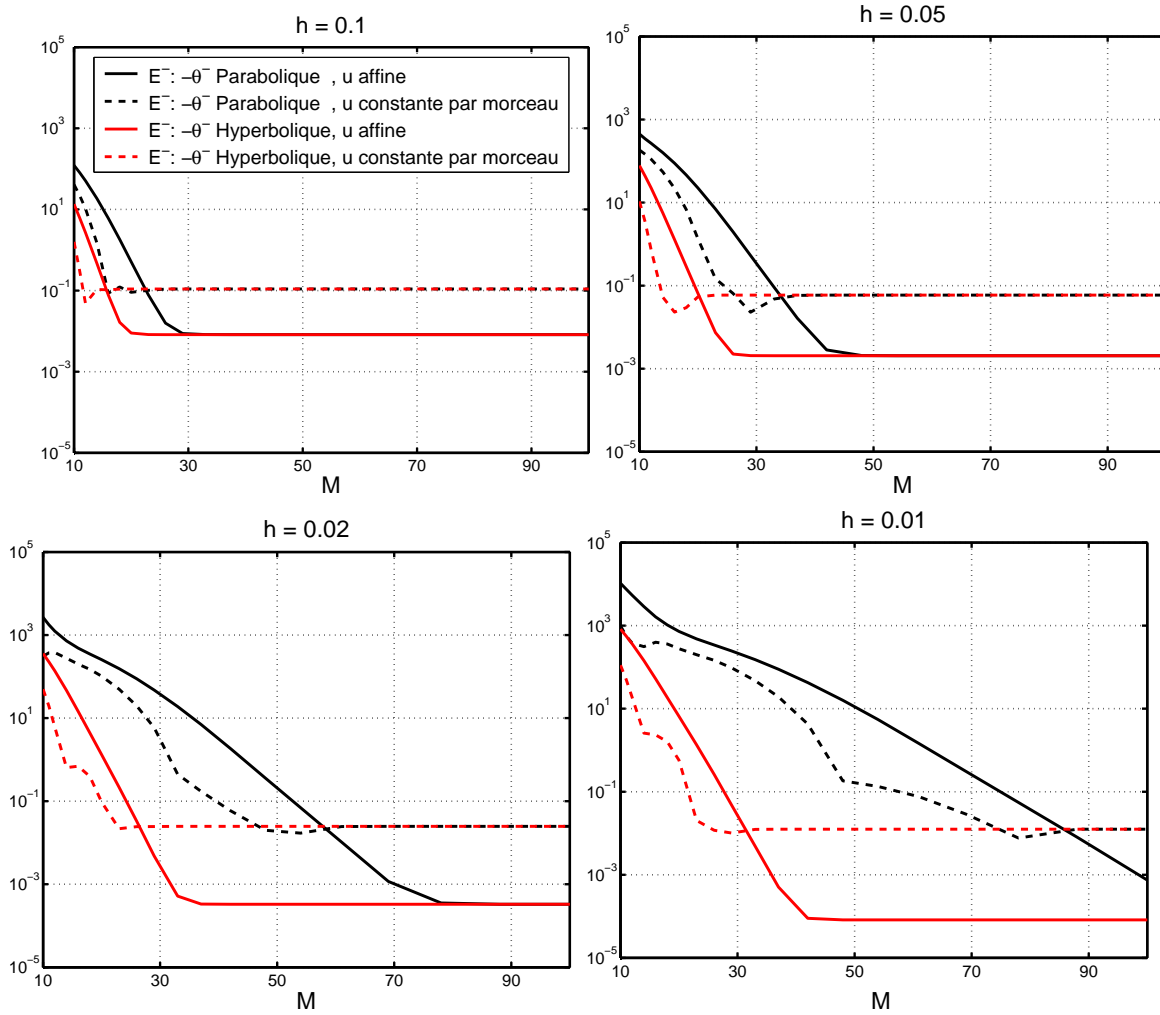


FIG. 3.6 – Erreur relative  $E^-$  définie par (3.55), en fonction du nombre de nœuds  $M$  et pour différentes valeurs de  $h$  ( $h = 0.1, 0.05, 0.02, 0.01$ ) à l'échelle logarithmique. Les traits continus sont associés à l'interpolation linéaire de  $u$  (voir Algorithme 6). Les traits discontinus correspondent à l'interpolation constante de  $u$  (voir Algorithme 4). En noir, on distingue le calcul avec contour hyperbolique. Enfin, le rouge symbolise le calcul avec contour parabolique.  $N = (15, 15)$

### 3.3.3 Approximation directe du symbole complexe

On commence par l'écriture des équations (3.17) et (3.18) sur les symboles diffusifs complexes qui correspond au problème aux limites (3.32) en supposant que les  $\theta^\pm$ -symboles  $\mu^\pm$  existent. On trouve

$$A^\pm \mu^\pm = (\partial_{xx} \mp 2\theta^\pm \partial_x + 2\theta^{\pm 2}) \mu^\pm,$$

pour les conditions aux limites de Dirichlet, on a

$$B^\pm \mu^\pm = \mu^\pm$$

et pour une condition type Neuman sur  $\Gamma_0$

$$B^\pm \mu^\pm = (\partial_x \mp 2\theta^\pm) \mu^\pm.$$

On suppose de plus que l'Hypothèse 37 est satisfaite. L'application de la Proposition 38 permet d'établir l'ensemble des équations (3.17) et (3.18) qui, dans ce cas, s'écrit

$$\pm \left\langle (\partial_{xx}^2 - 2\theta^\pm \partial_x + 2\theta^{\pm 2}) \mu^\pm, e^{\mp \theta^\pm (x-y)} \right\rangle = q(x, y) \quad \text{dans } \Omega^\pm, \quad (3.56)$$

$$\left\langle (\partial_x \mp 2\theta^\pm) \mu^\pm, 1 \right\rangle = 0 \quad \text{dans } \omega, \quad (3.57)$$

$$\left\langle \mu^+, e^{-\theta^+ x} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \mu^-, e^{\theta^- (x-1)} \right\rangle = 0 \quad \text{dans } \omega, \quad (3.58)$$

$$\left\langle \mu^+, e^{-\theta^+ (1-y)} \right\rangle = 0 \quad \text{sur } \Gamma_y^+ \quad \text{et} \quad \left\langle \mu^-, e^{-\theta^- y} \right\rangle = 0 \quad \text{sur } \Gamma_y^-. \quad (3.59)$$

D'après la Remarque 40, l'ensemble de singularités possibles associées aux équations intérieures et aux conditions aux limites sont  $W_A^\pm = \{0\}$  et  $W_B^\pm = \emptyset$ .

Puis nous introduisons deux formulations faibles pour les équations symboliques. La première vient directement de la formulation faible du problème aux limites (3.32) de  $p^\pm$ . Elle fait intervenir une intégrale par rapport aux variables  $(x, y)$  et deux intégrales en  $\xi$ . Ainsi, elle devient inabordable en termes de coût de calcul, et nous avons décidé de ne pas la mettre en œuvre. La seconde est moins coûteuse, car elle ne nécessite le calcul de seulement deux intégrales. Elle est cependant non-symétrique.

**Première formulation faible** Elle s'énonce ainsi : trouver le symbole  $\mu^{N^\pm}$ , lié à (3.38) approchant un noyau, tel que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^\pm} \left\langle K^\pm D_{-\theta^\pm}^T \mu^{N^\pm}, e^{\mp \theta^\pm (x-y)} \right\rangle \left\langle K^\pm D_{-\theta^\pm}^T \eta^{N^\pm}, e^{\mp \theta^\pm (x-y)} \right\rangle dy dx \\ &= \int_{\Omega^\pm} q \left\langle \eta^{N^\pm}, e^{\mp \theta^\pm (x-y)} \right\rangle dy dx, \end{aligned}$$

pour tout symbole  $\eta^{N^\pm}$  lié à tout noyau

$$v^{N^\pm}(x, y) = \sum_{k=0}^{N_1} \sum_{\ell=0}^{N_2} K_k \circ T_x^\pm(x) K_\ell \circ T_y^\pm(y) v_{k\ell}^\pm.$$



Il est obtenu à partir de la formulation faible de (3.32) : trouver  $p^\pm \in H_{\Gamma_x^\pm \cup \Gamma_y^\pm}^1(\Omega^\pm) = \{v^\pm \in H^1(\Omega^\pm) \mid v^\pm = 0 \text{ sur } \Gamma_x^\pm \cup \Gamma_y^\pm\}$ ,

$$\int_{\Omega^\pm} \nabla p^\pm \cdot \nabla v^\pm \, dydx = \int_{\Omega^\pm} q v^\pm \, dydx \quad \text{pour tout } v^\pm \in H_{\Gamma_x^\pm \cup \Gamma_y^\pm}^1(\Omega^\pm). \quad (3.60)$$

Appliquer la méthode de Galerkin dans la base générant (3.38) implique

$$\int_{\Omega^\pm} \nabla p^{N^\pm} \cdot \nabla v^{N^\pm} \, dydx = \int_{\Omega^\pm} q v^{N^\pm} \, dydx \quad \text{pour tout } v^{N^\pm}. \quad (3.61)$$

En remarquant que les  $\theta^\pm$ -symboles complexes associés à  $\nabla p^{N^\pm}$  et  $\nabla v^{N^\pm}$  sont  $K^\pm D_{-\theta^\pm}^T \mu^\pm$  et  $K^\pm D_{-\theta^\pm}^T \eta^{N^\pm}$ , nous pouvons conclure que

$$\begin{aligned} \nabla \left\langle \mu^{N^\pm}(x, \cdot), e^{\mp \theta^\pm(x-y)} \right\rangle &= \left\langle K^\pm D_{-\theta^\pm}^T \mu^{N^\pm}(x, \cdot), e^{\mp \theta^\pm(x-y)} \right\rangle \\ \text{et } \nabla \left\langle \eta^{N^\pm}(x, \cdot), e^{\mp \theta^\pm(x-y)} \right\rangle &= \left\langle K^\pm D_{-\theta^\pm}^T \eta^{N^\pm}, e^{\mp \theta^\pm(x-y)} \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.62)$$

**Deuxième formulation faible** Pour  $h^+(x) = x$ ,  $h^-(x) = 1 - x$ , et une fonction  $y \mapsto w(y) \in L^1(0, h^\pm(x))$ , on définit l'opérateur linéaire

$$L^\pm(w) = \int_0^{h^\pm(x)} w e^{-\theta^\pm y} \, dy.$$

Les bases pour l'approximation des solutions symboliques  $\mu^\pm$  sont

$$\left( \mp \frac{(\theta^\pm(\xi))'}{2i\pi} K_k(x) \Phi_\ell^\pm(x, \xi) \right)_{k=1, \dots, N_1, \ell=1, \dots, N_2}$$

avec

$$K_k(x) = (1-x)x^{k+1}, \quad \Phi_\ell^\pm(x, \xi) = \frac{1}{\ell+1-\theta^\pm(\xi)} - \frac{e^{-h^\pm(x)}}{\ell-\theta^\pm(\xi)}$$

avec des singularités à gauche de l'axe imaginaire, de sorte que les contours  $\theta^\pm$  sont choisis de manière analogue à (3.40) ou (3.41) afin de strictement enlacer  $\mathbb{R}^+$ . Les réponses impulsionnelles modifiées  $\tilde{q}^\pm$  sont uniquement approchées dans la direction  $y$ ,

$$\tilde{q}^{N_2^\pm}(x, y) = \sum_{\ell=0}^{N_2} \varphi_\ell^{2^\pm}(y) q_\ell^{N_2}(x), \quad (3.63)$$

par une projection  $L^2(0, h^\pm(x))$  dans les bases

$$\varphi_\ell^{2^\pm}(y) = (e^{-y} - e^{-h^\pm(x)})e^{-\ell y} \quad \text{pour } \ell = 1, \dots, N_2.$$

Les symboles associés sont notés  $\nu^{N_2^\pm}(x, \xi)$ . Les fonctions test sont choisies dans des bases différentes, par rapport à  $y$

$$\tilde{v}^{N^\pm}(x, y) = \sum_{k=0, \ell=0}^{N_1, N_2} K_k(x) \Psi_\ell^\pm(x, y) v_{k\ell}^\pm \quad \text{avec } \Psi_\ell^\pm(x, y) = (e^y - e^{h^\pm(x)})e^{\ell y}. \quad (3.64)$$

Alors, la formulation faible devient : trouver

$$\mu^{N^\pm}(x, \xi) = \mp \frac{(\theta^\pm(\xi))'}{2i\pi} \sum_{k=0, \ell=0}^{N_1, N_2} K_k(x) \Phi_\ell^\pm(x, \xi) \mu_{k\ell}^\pm \quad (3.65)$$

solution de

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} \langle K^\pm D_{-\theta^\pm}^T \mu^{N^\pm}, K^\pm L^\pm(\nabla \tilde{v}^{N^\pm}) \rangle dx \\ &= \int_{\omega} \langle \nu^{N_2^\pm}, L^\pm(\tilde{v}^{N^\pm}) \rangle dx \quad \text{pour tout } \tilde{v}^{N^\pm}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Pour l'établir, on utilise (3.61), on applique le changement de variables  $\phi^\pm$  dans les intégrales. Puis, on approche  $\tilde{p}^\pm$ , les réponses impulsionnelles modifiées, avec des polynômes en  $x$  et des exponentiels négatifs en  $y$ ,

$$\tilde{p}^{N^\pm}(x, y) = \sum_{k=0}^{N_1} (1-x)x^{k+1} \sum_{\ell=0}^{N_2} (e^{-y} - e^{-h(x)}) e^{-\ell y}.$$

Les réponses impulsionnelles  $\tilde{q}^\pm$  sont remplacées par leur approximation (3.63). Nous notons que le principe utilisé pour ces approximations ne correspond pas exactement à celui utilisé pour la première formulation faible, mais développe la même idée qui consiste à utiliser des polynômes exponentiels négatifs en  $y$  pour des réponses impulsionnelles. Cela implique l'expression ci-dessus de  $\mu^{N^\pm}$ . Nous remarquons à présent que

$$(\nabla p^{N^\pm}) \circ \phi^\pm = \pm \langle K^\pm D_{-\theta^\pm}^T \mu^{N^\pm}, e^{-\theta^\pm y} \rangle \quad \text{et} \quad q^{N_2^\pm} \circ \phi^\pm = \pm \langle \nu^{N_2^\pm}, e^{-\theta^\pm y} \rangle, \quad (3.67)$$

de sorte à obtenir facilement la conclusion désirée

$$\begin{aligned} & \pm \int_{\omega} \left\langle K^\pm D_{-\theta^\pm}^T \mu^{N^\pm}, K^\pm \int_0^{h^\pm(x)} \nabla \tilde{v}^{N^\pm} e^{-\theta^\pm y} dy \right\rangle dx \\ &= \pm \int_{\omega} \left\langle \nu^{N_2^\pm}, \int_0^{h^\pm(x)} \tilde{v}^{N^\pm} e^{-\theta^\pm y} dy \right\rangle dx. \end{aligned}$$

Nous remarquons que le choix de la base pour  $\tilde{v}^\pm$  a été fait pour que les pôles de

$$L^\pm(\tilde{v}^\pm)(x, \xi) = \sum_{k=0}^{N_1} (1-x)x^{k+1} \sum_{\ell=0}^{N_2} \left( \frac{e^{(\ell+1-\theta^\pm(\xi))h^\pm(x)} - 1}{\ell + 1 - \theta^\pm(\xi)} - \frac{e^{h^\pm(x)}(e^{(\ell-\theta^\pm(\xi))h^\pm(x)} - 1)}{\ell - \theta^\pm(\xi)} \right) v_{k\ell}^\pm$$

soient pour  $-\theta^\pm(\xi)$  à gauche de l'axe imaginaire comme pour  $\mu^{N^\pm}$ .

### Mise en œuvre

On présente ici la mise en œuvre de l'approximation de la formulation faible (3.65-3.66), i.e. trouver  $\mu^{N^\pm}(x, \xi)$  tel que

$$\int_{\omega} \langle K^\pm D_{-\theta^\pm}^T \mu^{N^\pm}, K^\pm L^\pm(\nabla \tilde{v}^{N^\pm}) \rangle dx = \int_{\omega} \langle \nu^{N_2^\pm}, L^\pm(\tilde{v}^{N^\pm}) \rangle dx. \quad (3.68)$$

Rappelons que  $K^\pm = \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & \mp 1 \end{pmatrix}$  et  $D_\lambda = (\partial_x, \lambda)$ , la formule (3.68) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \int_\omega \langle \partial_x \mu^{N^\pm}, L^\pm (\partial_x \tilde{v}^{N^\pm}) \pm L^\pm (\partial_y \tilde{v}^{N^\pm}) \rangle - \langle \theta^\pm \mu^{N^\pm}, \pm L^\pm (\partial_x \tilde{v}^{N^\pm}) + 2L^\pm (\partial_y \tilde{v}^{N^\pm}) \rangle dx \\ = \int_\omega \langle \nu^{N^\pm}, L^\pm (\tilde{v}^{N^\pm}) \rangle dx. \end{aligned} \quad (3.69)$$

On considère les fonctions tests

$$\tilde{v}_{ij}^{N^\pm}(x, y) = K_i(x) \Psi_j^\pm(x, y), \quad 0 \leq i \leq N_1 \quad \text{et} \quad 0 \leq j \leq N_2. \quad (3.70)$$

On utilise la formule  $L^\pm(w) = \int_0^{h^\pm} w e^{-\theta^\pm y} dy$ . Les expressions de  $L^\pm(\tilde{v}_{ij}^{N^\pm})$ ,  $L^\pm(\partial_x \tilde{v}_{ij}^{N^\pm})$  et  $L^\pm(\partial_y \tilde{v}_{ij}^{N^\pm})$  peuvent s'exprimer en fonction de

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_j^{\pm 1}(x, \xi) &= \frac{e^{(j+1-\theta^\pm)h^\pm(x)} - 1}{j+1-\theta^\pm}, \\ \bar{\Psi}_j^{\pm 2}(x, \xi) &= -\frac{e^{h^\pm(x)}(e^{(j-\theta^\pm)h^\pm(x)} - 1)}{j-\theta^\pm}, \\ \text{et } \bar{\Psi}_j^\pm(x, \xi) &= \bar{\Psi}_j^{\pm 1}(x, \xi) + \bar{\Psi}_j^{\pm 2}(x, \xi), \end{aligned} \quad (3.71)$$

de la manière suivante :

$$\begin{aligned} L^\pm(\tilde{v}_{ij}^{N^\pm})(x, \xi) &= K_i(x) \bar{\Psi}_j^\pm(x, \xi), \\ L^\pm(\partial_x \tilde{v}_{ij}^{N^\pm})(x, \xi) &= \partial_x K_i(x) \bar{\Psi}_j^\pm(x, \xi) \pm K_i(x) \bar{\Psi}_j^{\pm 2}(x, \xi), \\ L^\pm(\partial_y \tilde{v}_{ij}^{N^\pm})(x, \xi) &= K_i(x) \left( j \bar{\Psi}_j^\pm(x, \xi) + \bar{\Psi}_j^{\pm 1}(x, \xi) \right). \end{aligned} \quad (3.72)$$

A présent, on pose

$$\begin{aligned} g_{\ell j}^{\pm 1}(x) &= \int_{\mathbb{R}} \mp \frac{(\theta^\pm)'}{2i\pi} \Phi_\ell^\pm(x, \xi) \bar{\Psi}_j^\pm(x, \xi) d\xi, \\ g_{\ell j}^{\pm 2}(x) &= \int_{\mathbb{R}} \mp \frac{(\theta^\pm)'}{2i\pi} \partial_x \Phi_\ell^\pm(x, \xi) \bar{\Psi}_j^\pm(x, \xi) d\xi, \\ g_{\ell j}^{\pm 3}(x) &= \int_{\mathbb{R}} \mp \frac{(\theta^\pm)'\theta^\pm}{2i\pi} \Phi_\ell^\pm(x, \xi) \bar{\Psi}_j^\pm(x, \xi) d\xi, \\ g_{\ell j}^{\pm 4}(x) &= \int_{\mathbb{R}} \mp \frac{(\theta^\pm)'\theta^\pm}{2i\pi} \Phi_\ell^\pm(x, \xi) \bar{\Psi}_j^{\pm 1}(x, \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.73)$$

On utilise les formules (3.70)-(3.73) et on remplace  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  par  $\int_{\mathbb{R}}$  dans (3.69). Alors, la formulation faible approchée (3.68) implique que les coefficients  $\mu_{k\ell}^\pm$  sont solution du système linéaire (non-symétrique) suivant :

$$\sum_{k,\ell} \mu_{k\ell}^\pm a_{k\ell ij}^\pm = b_{ij}^\pm, \quad \text{pour tout } i, j,$$

avec

$$\begin{aligned}
 a_{klij}^{\pm} &= \int_{\omega} \left[ (\partial_x K_k(x) g_{\ell_j}^{\pm 1}(x) + K_k(x) g_{\ell_j}^{\pm 2}(x)) (\partial_x K_i(x) \pm (1+j)K_i(x)) \right. \\
 &\quad \left. - K_k(x) g_{\ell_j}^{\pm 3}(x) (\pm \partial_x K_i(x) + (2j+1)K_i(x)) - K_k(x) K_i(x) g_{\ell_j}^{\pm 4}(x) \right] dx, \quad (3.74) \\
 b_{ij}^{\pm} &= \int_{\omega} \langle \nu^{N_2^{\pm}}, L^{\pm} (\tilde{v}_{ij}^{N^{\pm}}) \rangle dx.
 \end{aligned}$$

La résolution numérique du système linéaire nécessite le calcul des intégrales (3.74) et (3.73). Le calcul des intégrales (3.74) est a priori trivial. Le calcul des intégrales (3.73) requiert davantage de développement, étant donnée la complexité de sa nature. On a besoin pour cela d'approcher les  $g_{\ell_j}^{\pm 1,2,3,4}(x)$  en calculant les intégrales sur  $\mathbb{R}$ , suivant la direction  $\xi$ .

**Procédure de calcul des intégrales de (3.73)** Pour ce faire, on considère tout d'abord les fonctions et leur transformée de Laplace inverse suivantes

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{\ell,j}^{\pm 1}(x, \lambda) &= \frac{\Phi_{\ell}^{\pm}(x, \lambda)}{(j + \lambda)}, & f_{\ell,j}^{\pm 1}(x, h^{\pm}(x)) &= \pm \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{F}_{\ell,j}^{\pm 1}(x, \lambda))(h^{\pm}(x)), \\
 \mathcal{F}_{\ell,j}^{\pm 2}(x, \lambda) &= \frac{\partial_x \Phi_{\ell}^{\pm}(x, \lambda)}{(j + \lambda)}, & f_{\ell,j}^{\pm 2}(x, h^{\pm}(x)) &= \pm \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{F}_{\ell,j}^{\pm 2}(x, \lambda))(h^{\pm}(x)), \\
 \mathcal{F}_{\ell,j}^{\pm 3}(x, \lambda) &= \frac{-\lambda \Phi_{\ell}^{\pm}(x, \lambda)}{(j + \lambda)}, & f_{\ell,j}^{\pm 3}(x, h^{\pm}(x)) &= \pm \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{F}_{\ell,j}^{\pm 3}(x, \lambda))(h^{\pm}(x)).
 \end{aligned}$$

On remplace les expressions de (3.71) dans (3.73). Alors, on établit que les  $g_{\ell,j}^{\pm 1,2,3,4}$  s'expriment comme suit

$$\begin{aligned}
 g_{\ell,j}^{\pm 1}(x) &= (f_{\ell,j+1}^{\pm 1}(x, h^{\pm}(x)) - f_{\ell,j}^{\pm 1}(x, h^{\pm}(x))) e^{(j+1)h^{\pm}(x)} + (-f_{\ell,j+1}^{\pm 1}(x, 0) + e^{h^{\pm}(x)} f_{\ell,j}^{\pm 1}(x, 0)), \\
 g_{\ell,j}^{\pm 2}(x) &= (f_{\ell,j+1}^{\pm 2}(x, h^{\pm}(x)) - f_{\ell,j}^{\pm 2}(x, h^{\pm}(x))) e^{(j+1)h^{\pm}(x)} + (-f_{\ell,j+1}^{\pm 2}(x, 0) + e^{h^{\pm}(x)} f_{\ell,j}^{\pm 2}(x, 0)), \\
 g_{\ell,j}^{\pm 3}(x) &= (f_{\ell,j+1}^{\pm 3}(x, h^{\pm}(x)) - f_{\ell,j}^{\pm 3}(x, h^{\pm}(x))) e^{(j+1)h^{\pm}(x)} + (-f_{\ell,j+1}^{\pm 3}(x, 0) + e^{h^{\pm}(x)} f_{\ell,j}^{\pm 3}(x, 0)), \\
 g_{\ell,j}^{\pm 4}(x) &= f_{\ell,j+1}^{\pm 3}(x, h^{\pm}(x)) e^{(j+1)h^{\pm}(x)} - f_{\ell,j+1}^{\pm 3}(x, 0).
 \end{aligned}$$

Or, pour tout  $\ell, j$ , on a

$$\begin{aligned}
 f_{\ell,j}^{\pm 1}(x, 0) &= \pm \frac{1}{2i\pi} \int_{-\theta^{\pm}} \frac{\Phi_{\ell}^{\pm}(x, \lambda)}{(j + \lambda)} d\lambda \\
 &= \pm \frac{1}{2i\pi} \int_{-\theta^{\pm}} \left( \frac{1}{\ell + 1 + \lambda} - \frac{e^{-h^{\pm}(x)}}{\ell + \lambda} \right) \frac{1}{(j + \lambda)} d\lambda \\
 &= \pm \frac{1}{2i\pi} \sum_{s \in \{-j, -\ell, \ell-1\}} \text{Res} \left( \left( \frac{1}{\ell + 1 + \lambda} - \frac{e^{-h^{\pm}(x)}}{\ell + \lambda} \right) \frac{1}{(j + \lambda)}, s \right) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

De la même façon, on obtient  $f_{\ell,j}^{\pm 2}(x, 0) = 0$ . De plus,

$$\begin{aligned} f_{\ell,j}^{\pm 3}(x, 0) &= \pm \frac{1}{2i\pi} \int_{-\theta^\pm} \frac{-\lambda \Phi_\ell^\pm(x, \lambda)}{(j + \lambda)} d\lambda \\ &= \pm \frac{1}{2i\pi} \int_{-\theta^\pm} \left( \frac{1}{\ell + 1 + \lambda} - \frac{e^{-h^\pm(x)}}{\ell + \lambda} \right) \frac{-\lambda}{(j + \lambda)} d\lambda \\ &= \pm \frac{1}{2i\pi} \sum_{s \in \{-j, -\ell, \ell-1\}} \text{Res} \left( \left( \frac{1}{\ell + 1 + \lambda} - \frac{e^{-h^\pm(x)}}{\ell + \lambda} \right) \frac{-\lambda}{(j + \lambda)}, s \right) \\ &= \pm \left( e^{-h^\pm(x)} - 1 \right). \end{aligned}$$

Finalement, on conclut

$$\begin{aligned} g_{\ell,j}^{\pm 1}(x) &= (f_{\ell,j+1}^{\pm 1}(x, h^\pm(x)) - f_{\ell,j}^{\pm 1}(x, h^\pm(x))) e^{(j+1)h^\pm(x)}, \\ g_{\ell,j}^{\pm 2}(x) &= (f_{\ell,j+1}^{\pm 2}(x, h^\pm(x)) - f_{\ell,j}^{\pm 2}(x, h^\pm(x))) e^{(j+1)h^\pm(x)}, \\ g_{\ell,j}^{\pm 3}(x) &= (f_{\ell,j+1}^{\pm 3}(x, h^\pm(x)) - f_{\ell,j}^{\pm 3}(x, h^\pm(x))) e^{(j+1)h^\pm(x)} \pm \left( 2 - e^{h^\pm(x)} - e^{-h^\pm(x)} \right), \\ g_{\ell,j}^{\pm 4}(x) &= f_{\ell,j+1}^{\pm 3}(x, h^\pm(x)) e^{(j+1)h^\pm(x)} \pm \left( 1 - e^{-h^\pm(x)} \right). \end{aligned}$$

On remarque que les  $g_{\ell,j}^{\pm 1,2,3,4}(x)$  sont des combinaisons linéaires de transformées de Laplace inverses  $h^\pm(x) \mapsto f_{\ell,j}^{\pm 1,2,3}(x, h^\pm(x))$  de fonctions  $\lambda \mapsto \mathcal{F}_{\ell,j}^{\pm 1,2,3}(x, \lambda)$  ayant des singularités sur l'axe réel négatif. Le calcul numérique en chaque point  $x_i$  de  $f_{\ell,j}^{\pm 1,2,3}(x_i, h^\pm(x_i))$  est réalisé suivant la méthode décrite par Weideman et Trefethen dans [92], i.e.

$$f_{\ell,j}^{\pm 1,2,3}(x_i, h^\pm(x_i)) \simeq \mp \frac{h_*}{2i\pi} \sum_{m=-M'}^{M'} e^{-\theta^\pm(mh_*)h^\pm(x_i)} \mathcal{F}_{\ell,j}^{\pm 1,2,3}(x, -\theta^\pm(mh_*)) \theta^{\pm'}(mh_*), \quad M' \in \mathbb{N}^*.$$

Les approximations de  $g_{\ell,j}^{\pm 1,2,3,4}(x_i)$  sont ensuite obtenues. On précise avoir utilisé la quadrature de Gauss-Lobatto pour calculer les intégrales de (3.74), suivant la direction  $x$ . De plus, les  $x_i$  ont été choisis comme étant les points de Gauss-Lobatto.

### Test numérique

On utilise le même noyau  $q$  et la même entrée  $u$  du test numérique présenté en sous-section 3.3.2.

► **calcul hors ligne** : Le calcul des  $f_{\ell,j}^{\pm 1,2,3}(x_i, h^\pm(x_i))$  est réalisé en utilisant le contour  $-\theta^\pm$  parabolique (3.41), avec  $M' = 30$ ,  $h_* = \frac{3}{M'}$ ,  $\theta_p = \frac{\pi}{12} \frac{M'}{x_i}$ . On choisit le degré d'approximation  $N$  de  $\mu^{N^\pm}$  suffisamment grand, soit  $N = (15, 15)$ .

On ne présente aucun résultat sur  $\mu^{N^\pm}$  car il n'y a pas de convergence. On sait néanmoins que le paramètre  $N$  influence la convergence de  $P^{N,h,M^\pm}u$ .

► **calcul en temps réel** : Pour ce test numérique, on utilise les mêmes données, valeurs et paramètres que pour le test présenté en sous-section 3.3.2 dans la partie **calcul en temps réel**.

Les résultats obtenus sont d'ailleurs similaires. En effet, les courbes de la Figure 3.7 (resp Figure 3.8) et de la Figure 3.5 (resp Figure 3.6) ont un comportement semblable. L'analyse et l'interprétation de ces résultats sont en conclusion analogues, voir la partie **calcul en temps réel** de la sous-section 3.3.2.

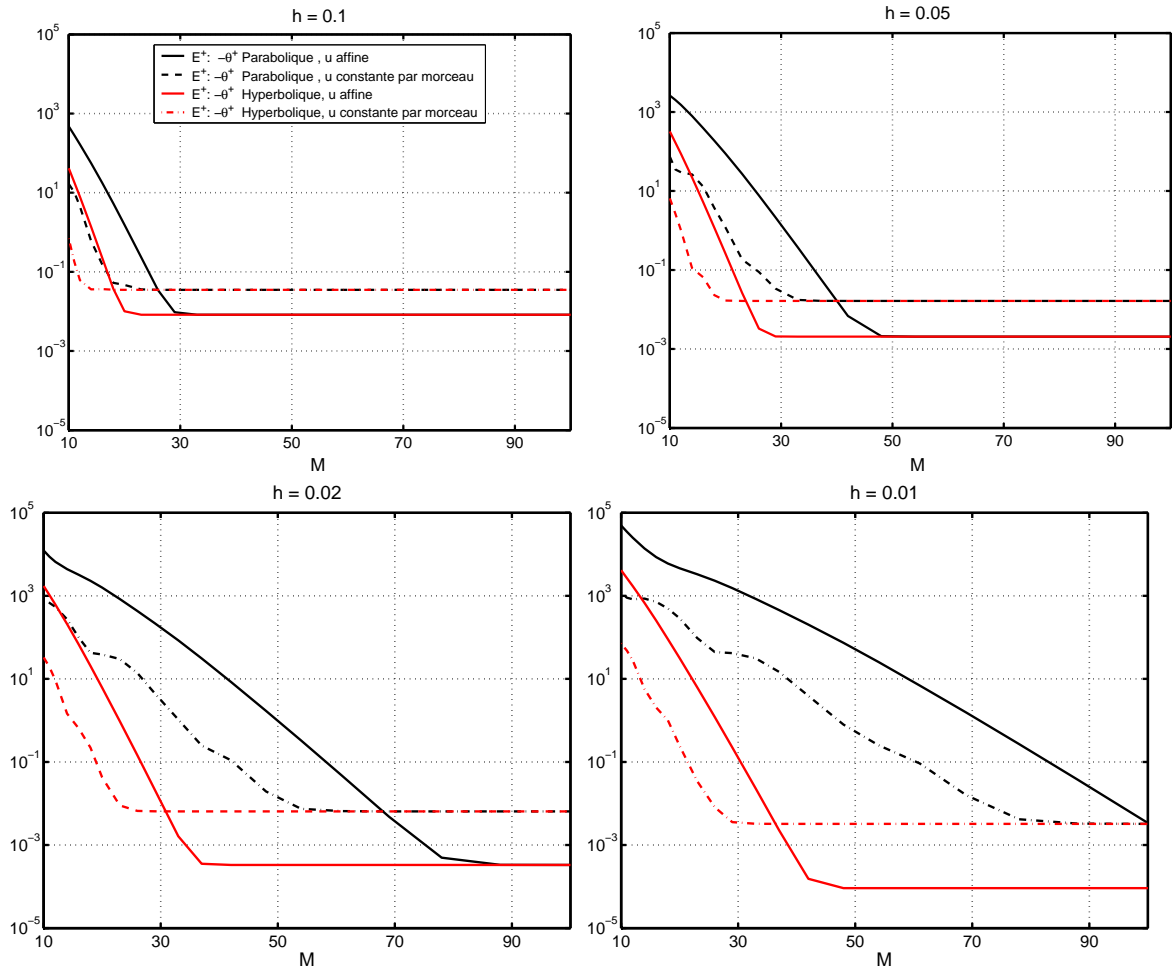


FIG. 3.7 – Même commentaire que celui attribué à la Figure 3.5

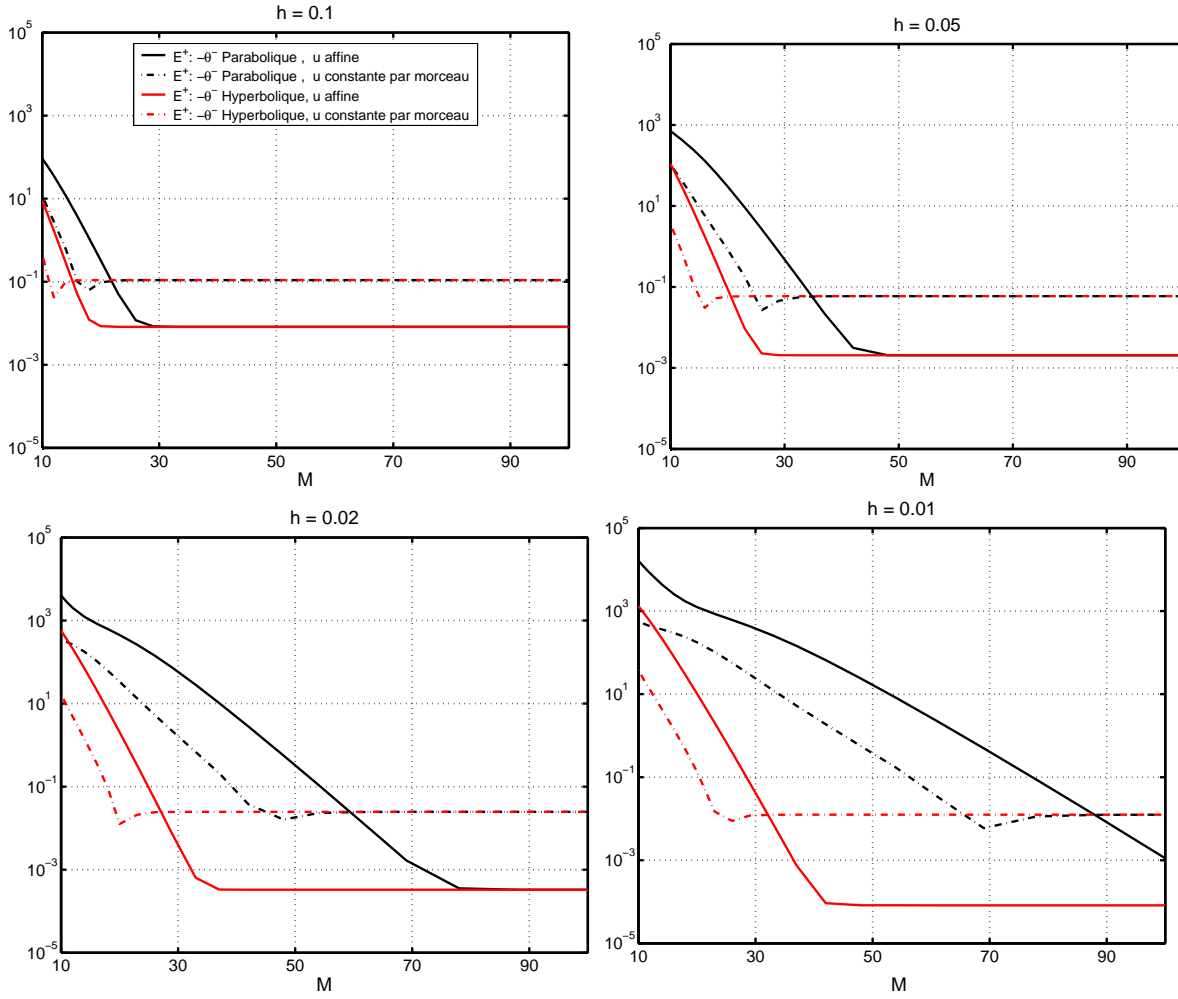


FIG. 3.8 – Même commentaire que celui attribué à la Figure 3.6

### 3.3.4 Réalisation diffusive réelle

Dans cette sous-section, on introduit une technique de calcul formel pour les symboles diffusifs réels appliquée à l'équation de Lyapunov. On pense que ce calcul pourra être utilisé comme point de départ pour une méthode numérique.

On a restreint notre étude au cas particulier  $q = 0$  mais  $c \neq 0$ . Puisque l'ensemble de singularités possibles  $W_A^\pm \cup W_B^\pm = \{0\}$  des symboles diffusifs est inclus dans  $\mathbb{R}^-$ , on peut appliquer le cadre de réalisations diffusives réelles. On choisit les contours

$$-\theta^{\pm*} = \mathbb{R}^- \supset W_A^\pm \cup W_B^\pm \quad (\text{i.e. } \lambda_0^\pm = 0 \quad \text{et} \quad \sigma^\pm = 1).$$

Puis on applique la Proposition 41. Les équations de symbole  $\theta^{\pm*}$ -diffusif s'écrivent alors

$$(\partial_{xx}^2 - 2\theta^{\pm*}\partial_x + 2\theta^{\pm*2})\mu^{\pm*} = 0 \quad \text{dans } \omega \times \mathbb{R}^+, \quad (3.75)$$

$$\langle (\partial_x \mp 2\theta^{\pm*})\mu^{\pm*}, 1 \rangle = \mp \frac{c}{2} \quad \text{dans } \omega, \quad (3.76)$$

$$\langle \mu^{+*}, e^{-\theta^{+*}x} \rangle = 0, \quad \langle \mu^{-*}, e^{\theta^{-*}(x-1)} \rangle = 0 \quad \text{dans } \omega, \quad (3.77)$$

$$\mu^{+*}(1, \cdot) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^+, \quad \text{et} \quad \mu^{-*}(0, \cdot) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^+. \quad (3.78)$$

Comme mentionné précédemment, dans un tel cas, les symboles diffusifs ne sont pas des fonctions. On devra donc choisir une dualité appropriée. On ne développe pas de théorie complète pour les équations en  $\mu^{\pm*}$  mais on donne leur solution et on propose une méthode générale formelle permettant leur obtention. Cette méthode formelle consiste à chercher une solution  $\mu^{\pm*}$  comme la somme d'une partie régulière  $g^{\pm}$  et d'une série des dérivées de masses de Dirac concentrées en les singularités potentielles. Alors, on cherche une solution pour la partie causale de la forme

$$\mu^{+*}(x, \xi) = g(x, \xi) + \sum_{n=0}^{n_0} g_n(x)\delta^{(n)}(\xi), \quad (3.79)$$

avec  $n_0$  supposé a priori un entier positif inconnu. On exprime  $\mu^{-*}$  en fonction de  $\mu^{+*}$ .

**Proposition 47** *Si  $Q = 0$  et  $\theta^{\pm*}(\xi) = \xi \in \mathbb{R}^+$ , alors  $P$  admet une réalisation  $\theta^{\pm*}$ -diffusive réelle de la forme (3.79) avec  $g = 0$  et  $n_0 = 1$ ,*

$$\mu^{+*}(x, \xi) = \frac{c}{2}(1-x)(x\delta(\xi) + \delta'(\xi)) \quad \text{dans } \omega \times \mathbb{R}^+. \quad (3.80)$$

De plus,

$$\mu^{-*}(x, \xi) = \mu^{+*}(1-x, \xi) \quad \text{dans } \omega \times \mathbb{R}^+.$$

### Preuve

(i) Tout d'abord, on établit la relation entre  $\mu^{+*}$  et  $\mu^{-*}$ . Ici,  $P$  préserve la symétrie par rapport au centre de l'intervalle  $\omega$ , dans le sens que

$$Pu(x) = Pu(1-x) \quad \text{pour tout } u \text{ tel que } u(y) = u(1-y).$$

Alors,

$$p(x, y) = p(1-x, 1-y), \quad \tilde{p}(x, y) = \tilde{p}(x-y, -y) \quad \text{et} \quad \mu^{-*}(1-x, \xi) = \mu^{+*}(x, \xi), \quad \forall x \in \omega.$$

(ii) On procède par essai successif des solutions

$$\mu^{+*} = g, \quad \mu^{+*} = g + g_0\delta, \quad \mu^{+*} = g + g_0\delta + g_1\delta', \dots$$

Les deux premiers cas ne conduisent pas à une solution, et l'insertion du troisième cas dans l'ensemble des équations permet d'obtenir

$$g = 0, \quad g_0(x) = \frac{c}{2}x(1-x) \quad \text{et} \quad g_1(x) = \frac{c}{2}(x-1).$$

Puisque la solution existe et est unique, la conclusion s'en suit. Notre calcul utilise les résultats énoncés dans le Lemme 48 de l'Appendice établie pour une fonction test  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  et appliqué à  $\varphi \equiv 1$  qui permet le même calcul pour des distributions de support dans un ensemble borné. Notons que nous avons utilisé les résultats récapitulés dans l'Appendice pour des fonctions tests  $\varphi_n$  convergeant à 1 quand  $n$  tend vers l'infini. ■



### 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a considéré l'opérateur  $u \mapsto Pu$ , solution d'une équation aux dérivées partielles linéaires opératorielle dans un domaine rectangle mono-dimensionnel. On a formulé une méthode dans le cadre des réalisations diffusives, pour laquelle on propose deux approches pour la résolution de cette équation. Nous avons présenté pour cela un travail mené pour un cadre limité à deux classes d'opérateurs et de contours. Pour la première classe, on a utilisé des contours choisis loin des singularités de la transformée de Laplace  $\mathcal{P}$ , les symboles diffusifs étant donc complexes. Pour la seconde classe, on a étudié des contours passant par les singularités lorsque contours et singularités sont situés sur l'axe réel, les symboles diffusifs étant ici réels. Dans les deux cas, on a pu énoncer et démontrer l'existence des réalisations et symboles diffusifs en abordant également pour ces derniers la question d'unicité. Puis, on a considéré le fait que le noyau  $p$  était solution d'un problème aux limites, linéaire, général et à coefficients variables. On a également établi les équations intégral-différentielles satisfaites par leur symbole complexe  $\mu^\pm$  ou réel  $\mu^{\pm*}$  pour des contours donnés  $\theta^\pm$  ou  $\theta^{\pm*}$ . Les équations intégral-différentielles du symbole complexe (resp. réel) causal  $\mu^+$  (resp.  $\mu^{+*}$ ) et du symbole complexe (resp. réel) anti-causal  $\mu^-$  (resp.  $\mu^{-*}$ ) sont découplées.

De plus, on a souhaité évaluer diverses méthodes pour approcher symboles diffusifs puis réalisations diffusives en traitant l'exemple de l'équation de Lyapunov. L'approximation des réalisations diffusives requiert l'accomplissement des étapes suivantes : approximation des symboles complexes  $\mu^\pm$ , discrétisation spatiale des  $\psi^\pm u$  en  $x$  avec différentes approximations de l'entrée  $u$  (approximation constante et affine par morceau en  $x$ ) puis approximation des réalisations diffusives de  $P^\pm u$ . Pour approcher les symboles diffusifs complexes, on dispose de deux méthodes. Pour la première, on a énoncé les deux problèmes aux limites découplés satisfaits par les noyaux des parties causale et anti-causale respectivement, puis on a formulé une méthode de Galerkin en choisissant une base convenable pour approcher les noyaux  $p^\pm$  par  $p^{N\pm}$  puis on a déduit les symboles approchés  $\mu^{N\pm}$  ayant des singularités sur l'axe réel négatif. Pour la seconde, on a exposé deux méthodes directes basées sur deux formulations variationnelles différentes portant sur  $\mu^\pm$ , chacune possédant ses avantages et ses inconvénients. Enfin, après avoir optimisé et validé les méthodes numériques, on a présenté leur implémentation et les résultats obtenus. Pour la deuxième classe d'opérateurs, on a étudié la réalisation diffusive réelle pour laquelle les calculs ont pu être effectués analytiquement.

On s'est intéressé au cas de la première classe jugé plus pratique. Parmi les avantages de la méthode des symboles complexes, on cite :

- l'absence de limitation sur la zone d'observation et de contrôle, ils peuvent être distribués ou frontières,
- implémentable sur une architecture semi-décentralisée type FPGA de l'anglais (*Field-Programmable Gate Array*).

On propose diverses perspectives :

- l'application de la méthode des symboles complexes à un problème de contrôle réel avec l'étude de stabilité, robustesse, etc...
- l'étude d'un problème d'équations couplées entre les symboles diffusifs  $\mu^+$  et  $\mu^-$ ,
- le calcul de la réalisation diffusive pour des solutions d'équations non-linéaires telles l'équation de Riccati,
- la généralisation de la méthode pour des domaines rectangles multi-dimensionnels et pour des domaines quelconques,
- l'amélioration des méthodes numériques pour le calcul direct des  $\mu^\pm$ , notamment le très mauvais conditionnement du système linéaire associé.

### 3.5 Appendice

On énonce certains résultats techniques utilisés dans la section 3.3.4 pour le calcul du symbole diffusif réel. On les énonce dans un cadre général des distributions de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  mais nous les appliquons aux distributions de  $\mathcal{D}'_+$  de support est dans  $\mathbb{R}^+$ .

#### Lemme 48

(i) Pour  $p, n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \xi^p \delta^{(n)} &= (-1)^p n(n-1)\dots(n-p+1) \delta^{(n-p)} && \text{pour } p \leq n \\ &= 0 && \text{pour } p \geq n+1. \end{aligned}$$

En particulier,

$$\xi \delta^{(n)} = -n \delta^{(n-1)} \quad \text{pour } n \geq 1 \quad \text{et} \quad \xi^2 \delta^{(n)} = n(n-1) \delta^{(n-2)} \quad \text{pour } n \geq 2. \quad (3.81)$$

(ii) Pour  $p, n \in \mathbb{N}$  et  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} \xi^p e^{-\xi x} \delta^{(n)} &= (-1)^p \sum_{k=p}^n \frac{x^{k-p} n!}{(k-p)!(n-k)!} \delta^{(n-k)} && \text{pour } p \leq n \\ &= 0 && \text{pour } p \geq n+1. \end{aligned} \quad (3.82)$$

En particulier,

$$\xi e^{-\xi x} \delta^{(n)}(\xi) = - \sum_{k=1}^n \frac{x^{k-1} n!}{(k-1)!(n-k)!} \delta^{(n-k)}(\xi) \quad \text{pour } n \geq 1 \quad (3.83)$$

$$\text{et } \xi^2 e^{-\xi x} \delta^{(n)}(\xi) = \sum_{k=2}^n \frac{x^{k-2} n!}{(k-2)!(n-k)!} \delta^{(n-k)}(\xi) \quad \text{pour } n \geq 2. \quad (3.84)$$

**Preuve** Le premier point est classique. On ne démontrera que le second.

$$\begin{aligned} \langle \xi^p e^{-\xi x} \delta^{(n)}, \varphi \rangle &= (-1)^n \langle \delta, (e^{-\xi x} \xi^p \varphi)^{(n)} \rangle = (-1)^n \sum_{k=0}^n C_n^k \langle \delta, (e^{-\xi x} \xi^p)^{(k)} \varphi^{(n-k)} \rangle \\ &= (-1)^n \left( \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^k + \sum_{k=p+1}^n \sum_{l=0}^p \right) C_k^l C_n^k (-x)^{k-l} p(p-1)\dots(p-l+1) \langle \delta, \xi^{p-l} e^{-\xi x} \varphi^{(n-k)} \rangle. \end{aligned}$$

On remarque que  $\langle \delta, \xi^{p-l} e^{-\xi x} \varphi^{(n-k)} \rangle = 0$  pour  $l < p$  et  $= \varphi^{(n-k)}(0)$  pour  $l = p$ , il reste ainsi

$$= (-1)^n p! C_n^p \langle \delta, e^{-\xi x} \varphi^{(n-p)} \rangle + p! \sum_{k=p+1}^n (-1)^{n+k-p} C_k^l C_n^k x^{k-p} \langle \delta, e^{-\xi x} \varphi^{(n-k)} \rangle.$$

Après simplifications,

$$= \frac{(-1)^p n!}{(n-p)!} \langle \delta^{(n-p)}, \varphi \rangle + (-1)^p \sum_{k=p+1}^n \frac{x^{k-p} n!}{(k-p)!(n-k)!} \langle \delta^{(n-k)}, \varphi \rangle.$$

Finalement,

$$\langle \xi^p e^{-\xi x} \delta^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^p \sum_{k=p}^n \frac{x^{k-p} n!}{(k-p)!(n-k)!} \langle \delta^{(n-k)}, \varphi \rangle,$$

qui est (3.82), d'où il vient (3.83, 3.84). ■

# Annexe A

## Inversion numérique de la transformée de Laplace

### Sommaire

---

<b>A.1</b>	<b>Intégrale de Bromwich</b>	<b>116</b>
A.1.1	Transformée de Laplace inverse	116
<b>A.2</b>	<b>Catégorie d’algorithmes pour l’inversion numérique de la transformée de Laplace</b>	<b>116</b>
<b>A.3</b>	<b>Optimisation des contours de Bromwich paramétrisés</b>	<b>117</b>
A.3.1	Contour de Talbot	118
A.3.2	Contour hyperbolique vs. approximations sinc	119
A.3.3	Approximation de la transformée de Laplace inverse sur un intervalle en $t$	121
<b>A.4</b>	<b>Contours de Bromwich optimisés</b>	<b>121</b>
A.4.1	Estimations d’erreur	122
A.4.2	Procédure d’optimisation	123

---

Cette annexe est inspirée du rapport [85] de Karim Trabelsi et *al.*

## A.1 Intégrale de Bromwich

Les méthodes les plus efficaces pour l'inversion numérique de la transformée de Laplace sont fondées sur l'approximation de l'intégrale de Bromwich. Dans la section suivante, on présente la formule de cette intégrale.

### A.1.1 Transformée de Laplace inverse

La transformée de Laplace d'une fonction  $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  d'une variable réelle positive  $t$ , est la fonction  $\mathcal{F}$  d'une variable complexe  $s$ , définie par

$$\mathcal{F}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt, \quad \Re(s) > -a_0, \quad (\text{A.1})$$

avec  $F(t)$  la transformée à inverser et  $-a_0$  son abscisse de convergence. Cela signifie que toutes les singularités de  $\mathcal{F}(s)$  se trouvent dans le demi-plan  $\Re(s) < -a_0$ , la fonction étant analytique dans l'autre demi-plan. La transformée de Laplace (A.1) est inversée via la formule de Bromwich

$$F(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st} \mathcal{F}(s) ds, \quad a > -a_0, \quad (\text{A.2})$$

où  $s = a + iy$ ,  $y \in \mathbb{R}$  étant la droite de Bromwich. L'approximation numérique de l'intégrale (A.2) n'est pas triviale. En effet, le facteur exponentiel est extrêmement oscillant sur la droite de Bromwich car la partie imaginaire tend vers l'infini. De plus, la transformée  $F(s)$  décroît lentement quand  $|y| \rightarrow \infty$ . Les intégrales de fonctions, à la fois oscillantes et lentement décroissantes sur des domaines non bornés, sont souvent difficiles à calculer.

## A.2 Catégorie d'algorithmes pour l'inversion numérique de la transformée de Laplace

A ce jour, il existe plus d'une centaine d'algorithmes pour l'inversion de la transformée de Laplace, trois études comparatives importantes ayant été publiées. La première étude [27], menée par Davies et Martin, a recensé une vingtaine de méthodes différentes et sélectionné quatorze algorithmes. L'article [72] de Narayanan et Beskos est la seconde étude et présente huit algorithmes ayant donné lieu à des tests numériques. Si dans chacun de ces papiers, les méthodes étudiées sont antérieures à 1980, la troisième étude [29] réalisée par Duffy présente trois logiciels basés sur des méthodes plus récentes car postérieures à 1980. D'autre part, on dénote un grand nombre d'articles concernant des applications pour ingénieur, chacun présentant sa propre procédure. Une bibliographie de plusieurs centaines de ces documents est disponible sur le Web [87].

Récemment, Abate et Valkò [2] ont classé ces algorithmes suivant quatre catégories faisant référence à la méthode utilisée :

- (i) Développement en séries de Fourier (méthode directe).
- (ii) Développement en série suivant les polynômes de Laguerre (méthode de Weeks).
- (iii) Combinaison des fonctionnelles de Gaver.
- (iv) Déformation du contour de Bromwich.

En quelques années, plus d'une quarantaine d'algorithmes mettant en oeuvre la méthode des séries de Fourier ont été développés, permettant une approche de la transformée de Laplace inverse par une série de Fourier infinie. En 1935, Koizumi [47] publie le premier article utilisant une telle procédure numérique. Parmi les plus populaires procédures qui ont suivi, on cite Dubner-Abate (1968), Veillon (1974), Durbin (1974), Crump (1976), Hosono (1981), DeHoog-Knight-Stokes (1982), Honig-Hirdes (1984) et Piessens-Huysmans (1984). Abate et Whitt [3] proposent en 1992 une évaluation de ces procédures et des références associées. Depuis, plusieurs nouveaux algorithmes utilisant des séries de Fourier ont été mis en place, dont D'Amore *et al.* [23].

Utilisant le développement en série suivant les polynômes de Laguerre de  $F(t)$  dans (A.1), le premier article que nous considérons dans cette seconde catégorie d'algorithmes a été mené par Ward [89] en 1954. Une quinzaine d'algorithmes ont alors suivi, tous basés sur la même approche : Chen (1966), Weeks (1966), Piessens-Branders (1971), Weber(1981), Lyness-Giunta (1986), Garbow-Giunta-Lyness-Murli (1988), etc. En 1996, l'article [1] d'Abate *et al.* propose une discussion de ces algorithmes et Weideman [90] réalise une importante contribution à la méthode de Laguerre.

La troisième catégorie d'algorithmes propose l'inversion numérique de la transformée de Laplace à partir d'une séquence de fonctionnelles développées par Gaver [30] en 1966.

Enfin, la quatrième catégorie, utilisant la déformation du contour dans l'intégrale de Bromwich, figure parmi les meilleures approches pour calculer la transformée de Laplace inverse. L'article de référence de cette approche a été publié par Talbot [84] en 1979. Dans ce qui suit, on étudie plusieurs algorithmes utilisant cette approche. On portera une attention particulière à la méthode proposant l'optimisation des contours de Bromwich paramétrisés.

### A.3 Optimisation des contours de Bromwich paramétrisés

Une stratégie pour pallier à la décroissance lente est proposée par Talbot [84]. L'auteur suggère de déformer la droite de Bromwich en un contour qui commence et finit dans le demi-plan gauche, avec une partie réelle qui tend vers l'infini. Sur un tel contour, le facteur exponentiel apparaissant dans (A.2) impose une décroissance rapide de l'intégrande quand  $\Re(s) \rightarrow -\infty$ . Cela rend l'intégrale facile à approcher par les méthodes de trapèze ou du milieu. A l'aide du théorème de Cauchy et du lemme de Jordan, une telle déformation du contour est permise si aucune singularité n'est traversée pendant la déformation et à condition que

1.  $|\mathcal{F}(s)| \rightarrow 0$  uniformément pour  $|s| \rightarrow \infty$  avec  $\Re(s) \leq -a_0$ .
2.  $\exists K > 0$  tel que, pour toute singularité  $\xi$  de  $\mathcal{F}$ , on a  $|\Im(\xi)| < K$ .

La formule générale d'inversion s'écrit alors

$$F(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{\gamma(\xi)t} \mathcal{F}(\gamma(\xi)) \gamma'(\xi) d\xi, \quad (\text{A.3})$$

avec  $\xi \mapsto \gamma(\xi)$  une paramétrisation de la courbe régulière  $\Gamma = \gamma(\mathbb{R})$ . En conclusion, une fois la décroissance rapide de l'intégrande obtenue sur la courbe  $\Gamma$ , l'inversion numérique de la transformée de Laplace (A.2) est facilement calculée par la formule des trapèzes ou des milieux. Ainsi, l'approximation est exprimée par

$$F_{h,N}(t) = \frac{h}{2i\pi} \sum_{n=-N}^N e^{\gamma(nh)t} \mathcal{F}(\gamma(nh)) \gamma'(nh), \quad (\text{A.4})$$

où  $N \in \mathbb{N}$  est le nombre de nœuds d'interpolation, points en lesquels l'intégrande est évaluée, et  $h > 0$  la taille du pas représentant l'espace séparant deux nœuds consécutifs.

**Remarque 49** Dans cette annexe et pour faire le lien avec le chapitre précédent, on remplace  $-\theta^\pm(\xi)$  par  $\gamma(\xi)$ .

### A.3.1 Contour de Talbot

La méthode originale de Talbot du contour de Bromwich est basée sur l'expression

$$\gamma(\xi) = \mu(\xi \cot(\xi) + \lambda i \xi) + \beta, \quad -\pi < \xi < \pi, \quad (\text{A.5})$$

avec  $\mu$  et  $\lambda$  des réels positifs et  $\beta$  devant satisfaire

$$\beta + \mu > -a_0.$$

Cela a été mentionné dans [71]. Les auteurs ont remarqué que le contour peut être déplacé vers la gauche sans trop se rapprocher des singularités, puisque  $|\mathcal{F}(s)|$  prend de grandes valeurs en ces nœuds. Notons qu'un code *Fortran* a été implémenté pour la méthode de Talbot dans [71], permettant l'inversion numérique de la transformée de Laplace. Des résultats numériques sont présentés pour des fonctions de Green avec divers types de singularités (singularités essentielles, points de branchement et coupures). Les auteurs ont observé que les singularités essentielles doivent rester à une "distance optimale" du contour, ajustée de manière expérimentale. De plus, les auteurs insistent sur l'importance de la première condition. En effet, si elle n'est pas remplie par la transformée, cela conduit à des résultats imprévisibles, en particulier pour de petites valeurs de  $t$ .

Récemment, Weideman [91] a obtenu des taux de convergence suffisamment optimaux pour le contour de Talbot (cotangent). Pour cela, l'auteur a choisi convenablement les paramètres  $(\mu, \lambda, \beta)$  de (A.5), c'est-à-dire de sorte à optimiser le taux de convergence. Ce taux a effectivement été amélioré de  $\mathcal{O}(e^{-c\sqrt{N}})$  (obtenu par Talbot [84]) à  $\mathcal{O}(e^{-cN})$ .

Cependant, l’optimalité des paramètres n’a pas été formellement établie. De plus, les résultats sont ”optimaux” pour un temps  $t$  donné et aucune preuve de leur efficacité pour les autres temps n’a été apportée.

La comparaison des diverses méthodes proposées pour l’inversion de la transformée de Laplace est une perspective intéressante. Une étude a été menée par Duffy [29] dans laquelle il compare la méthode de Talbot à la méthode de Weeks ainsi qu’à la méthode directe. Il apparaît que l’algorithme de Talbot est le meilleur. Cependant, il n’est pas approprié à des transformées présentant des singularités dont la partie imaginaire croît à l’infini. Si l’on souhaite approcher des fonctions ayant des singularités sur l’axe de Fourier, cette méthode est inefficace.

Dans [91] et [86], les auteurs ont comparé la méthode de Talbot (utilisant différents contours : parabolique, hyperbolique, cotangent) à la méthode dite *meilleure approximation rationnelle* proposée par Cody, Meinardus et Varga [18]. Cette méthode est basée sur une meilleure approximation de  $e^s$  sur  $(-\infty, 0]$ , elle se construit suivant trois étapes. Tout d’abord,  $e^s$  est remplacée par la meilleure approximation rationnelle  $r(s)$  de type  $(N - 1, N)$ . Puis, le contour initial  $\mathcal{C}$  est déformé en un autre contour  $\Gamma$  enlaçant les pôles. Enfin, on procède à l’évaluation de l’intégrale par un calcul de résidu. Il s’agit d’une idée alternative évitant l’utilisation d’une formule de quadrature. En fait, toute formule de quadrature appliquée à la transformée de Laplace inverse peut être vue comme une approximation rationnelle. Les résultats de la comparaison sont mitigés : la méthode dite *meilleure approximation rationnelle* est deux fois plus rapide que la méthode de Talbot et néanmoins plus difficile à mettre en œuvre. De plus, si pour l’inversion, les paramètres doivent être réglés pour une valeur de  $t$  donnée, la précision de la méthode de Talbot est difficile à maintenir sur un intervalle contenant cette valeur. Pour conclure, la méthode dite *meilleure approximation rationnelle* pour une inversion n’est pas efficace sur tout un intervalle.

### A.3.2 Contour hyperbolique vs. approximations sinc

Une large littérature traite de l’inversion numérique de la transformée de Laplace via des quadratures utilisant les contours de Talbot. La méthode de Talbot a été utilisée dans la thèse de López-Fernández [57], suivie de plusieurs articles sur l’optimisation des quadratures appropriée pour l’inversion numérique. Dans [60], López-Fernández et Palencia utilisent une formule de quadrature basée sur la fonction sinc. En pratique, ils utilisent la formule de trapèze pour discrétiser l’intégrale écrite sur un contour hyperbolique, voir Figure A.1(b). Les singularités de l’intégrande sont supposées situées dans un secteur restreint

$$\Sigma_\delta = \{s \in \mathbb{C} : |\arg(-s)| \leq \delta\}, \quad 0 < \delta < \frac{\pi}{2},$$

voir Figure A.1(b). De plus, l’intégrande admet un prolongement holomorphe

$$\Delta_d = \{s \in \mathbb{C} : |\Im(s)| \leq d\}, \quad d > 0,$$

hors du secteur décrit. Les auteurs établissent une bonne estimation de l’erreur de quadrature que l’on définit comme la différence absolue entre la transformée de Laplace inverse



réelle et l'approximation trapézoïdale tronquée. Pour ce faire, ils améliorent une estimation intéressante dûe à Stenger [80] et [81]. En effet, son travail traite d'une approximation de fonctions analytiques obtenue par la fonction *cardinal* de Whittaker. A savoir, si  $f$  est une fonction définie sur l'axe réel, la fonction *cardinal* est définie par

$$C(f, h) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh)S(k, h) \quad (\text{A.6})$$

quand la série converge, avec  $h > 0$  la taille du pas,

$$S(k, h)(x) = \frac{\sin [(\pi/h)(x - kh)]}{(\pi/h)(x - kh)}.$$

La relation entre cette fonction et l'inversion numérique de la transformée de Laplace est évidente à condition d'observer que

$$\int_{\mathbb{R}} C(f, h)(t)dt = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh).$$

En d'autres termes, ce développement en la "fonction sinc" de  $f$  est lié à l'approximation de l'intégrale de  $f$  par la formule des trapèzes. Ainsi, en utilisant les propriétés de la fonction *cardinal*, Stenger démontre que si  $f$  décroît rapidement, soit

$$|f| < ce^{-\alpha|x|}, \quad x \in \mathbb{R},$$

avec  $\alpha$  et  $c$  des réels positifs, alors il existe  $c_1 = c_1(c, \alpha, f) > 0$ , indépendant de  $N$ , tel que pour  $h = \sqrt{2\pi d/(\alpha N)}$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x) dx - h \sum_{k=-N}^N f(kh) \right| \leq c_1 e^{-\sqrt{2\pi d\alpha N}}.$$

L'estimation ci-dessus a été améliorée à  $\mathcal{O}(e^{-2\pi d \frac{N}{\ln N}})$  dans [60]. On note que dans ce travail comme pour celui de Stenger, le pas est fixé afin de minimiser l'erreur. De plus, la bande d'analyticité est choisie symétrique, ce qui ne représente pas une hypothèse naturelle. Récemment, López-Fernández *et al.* utilisent la quadrature de trapèze sur une branche hyperbolique, et fixent les paramètres de l'hyperbole de manière à atteindre le secteur contenant les singularités. La méthode est efficace pour des inversions numériques sur un intervalle borné pour  $t$ , commençant à  $t_0 > 0$ . Dans l'article [61], López-Fernández, Palencia et Schädle améliorent davantage l'estimation d'erreur jusqu'à  $\mathcal{O}(e^{-2\pi d N})$ . Cette estimation spectrale est donnée par d'autres choix que ceux considérés lors de la précédente procédure (par exemple le choix du pas). Le reste de l'article est dédié à l'étude de la propagation des erreurs d'arrondi et du mauvais conditionnement : un nouveau paramètre est introduit dans le but d'y remédier, voir la Remarque 51(iv). Cependant, les choix faits pour des paramètres libres du problème ne sont pas en général "optimaux".

### A.3.3 Approximation de la transformée de Laplace inverse sur un intervalle en $t$

Dans [74], Rizzardi modifie la méthode originale de Talbot pour l'inversion numérique de la transformée de Laplace sur un intervalle en  $t$ . Le principe de base consiste à utiliser le même ensemble de valeurs de  $F(s)$  sur l'intervalle en  $t$  tout entier, puis de faire le choix le plus judicieux des paramètres du contour. De cette façon, l'algorithme peut être parallélisé. Un inconvénient majeur de l'analyse menée pour optimiser ces paramètres est l'hypothèse que la transformée admet un nombre fini de pôles se trouvant sur un intervalle de l'axe de Fourier. L'analyse de l'erreur absolue considérée entre l'inverse et son approximation engendre des erreurs d'arrondi. Cette étude vise à fournir les paramètres optimisés du contour pour un intervalle  $[t_0, t_1]$ . Les résultats sont très satisfaisants même si les courbes d'erreur montrent différents profils pour des tests différents, posant ainsi le problème de la consistance de la procédure. Cependant, l'auteur parvient à des résultats satisfaisants avec un petit nombre  $N$  d'évaluations de  $F(s)$ .

Une avancée importante dans la technique de déformation du contour a été récemment réalisée par Weideman et Trefethen [92]. Ces auteurs proposent une procédure d'optimisation de deux simples contours réguliers de Bromwich type parabolique ou hyperbolique, pour une approximation de la transformée de Laplace inverse sur un intervalle donné. Une étude plus approfondie de cette méthode est détaillée dans la section suivante.

## A.4 Contours de Bromwich optimisés

On étudie deux contours de Bromwich paramétrisés selon Weideman et Trefethen [92]. Ces contours semblent avoir fourni les meilleurs résultats pour une inversion numérique automatique et très rapide de la transformée de Laplace sur un intervalle donné.

Le premier contour est la parabole

$$\gamma(\xi) = \mu(i\xi + 1)^2, \quad (\text{A.7})$$

et le second l'hyperbole

$$\gamma(\xi) = \mu(1 + \sin(i\xi - \alpha)), \quad (\text{A.8})$$

avec  $\xi \in ]-\infty, +\infty[$ . Le paramètre  $\mu > 0$  règle la largeur des contours et  $\alpha$  définit l'angle asymptotique de l'hyperbole. La motivation de ces choix est leur simplicité et leur pertinence pour l'approximation (A.4) de (A.3) par la formule des trapèzes. Par opposition, le contour cotangent (A.5) de la Figure A.4, proposé initialement par Talbot, est très difficile à analyser, voir [74, 84, 91]. Ces contours plus simples ont été récemment introduits. Le contour parabolique (A.7) a été introduit dans [31], où il est optimisé en utilisant des arguments liés aux quadratures sinc, voir [82] et le paragraphe A.3. Comme pour le contour hyperbolique (A.8), il a tout d'abord été utilisé dans [78], puis dans [66] où aucune optimisation de contour n'a été explicitement établie. Dans [60], le contour est optimisé en utilisant des arguments de la théorie de l'approximation de sinc ; pour plus de détails sur cette approche, voir [80, 81] et le paragraphe A.3.2.

### A.4.1 Estimations d'erreur

En suivant Weideman et Trefethen [92], l'optimisation des contours est établie à partir d'un équilibre entre l'estimation d'erreur de troncature et l'estimation d'erreur asymptotique. Ces estimations sont associées à l'approximation de (A.3) par la formule des trapèzes, en utilisant les contours (A.7-A.8).

**Erreur de troncature notée  $E_N$**  L'erreur de troncature est la différence entre la série infinie qui approche l'inverse (A.3)

$$F_h(t) = F_{h,\infty}(t) = \frac{h}{2i\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\gamma(nh)t} \mathcal{F}(\gamma(nh)) \gamma'(nh) \simeq F(t), \quad (\text{A.9})$$

et la somme tronquée (A.4), à savoir,

$$E_N(t) = |F_h(t) - F_{h,N}(t)|.$$

Si  $|\mathcal{F}(\gamma(s))|$  décroît rapidement quand  $|s| \rightarrow \infty$ , l'erreur de troncature se comporte comme l'ordre de grandeur du dernier terme dans la somme (A.4), i.e.

$$E_N(t) = \mathcal{O}(|he^{\gamma(Nh)t} \mathcal{F}(\gamma(Nh)) \gamma'(Nh)|), \quad N \rightarrow \infty. \quad (\text{A.10})$$

**Erreur asymptotique notée  $E_h$**  Egalement appelée *erreur de discrétisation*, elle est la différence entre la transformée de Laplace inverse et l'approximation par la méthode des trapèzes (A.9), i.e.

$$E_h(t) = |F(t) - F_h(t)|.$$

Pour obtenir une bonne estimation de cette erreur, une analyse poussée doit être faite. Le résultat fondamental de l'article [92], énoncé dans le théorème 2.1, permet d'évaluer précisément cette erreur.

**Théorème 2.1** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction analytique dans

$$\mathcal{U} = \{s \in \mathbb{C} : -c^- < \Im(s) < c^+\}, \quad \text{avec } c^\pm > 0,$$

et  $f(s) \rightarrow 0$  uniformément quand  $|s| \rightarrow \infty$  dans  $\mathcal{U}$ . De plus, on suppose que  $f(s)$  satisfait

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u + iv)| du \leq M^+ \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(u - iw)| du \leq M^-, \quad \forall 0 < v < c^+, 0 < w < c^-,$$

avec  $M^\pm > 0$ . Alors

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du - h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kh) \right| \leq E_h^+ + E_h^-, \quad E_h^\pm = \frac{M^\pm}{e^{2\pi c^\pm/h} - 1}. \quad (\text{A.11})$$

**Remarque 50** Dans la littérature, la bande d'analyticité est choisie symétrique soit  $c^+ = c^-$ , ce qui réduit l'estimation (A.11) à l'inégalité

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du - h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kh) \right| \leq \frac{2M}{e^{2\pi c^+/h} - 1}, \quad \text{avec } M = M^+ = M^-,$$

inégalité connue en analyse numérique lorsque  $f$  est à valeurs réelles.

### A.4.2 Procédure d'optimisation

Le procédé de l'inversion numérique de la transformée de Laplace se fait en plusieurs étapes. Tout d'abord, le type du contour approprié doit être choisi en accord avec la localisation des singularités de la transformée de Laplace. Le contour parabolique (A.7) est adapté aux transformées de Laplace ayant des singularités sur une demi-droite horizontale dont la partie réelle tend vers moins l'infini. La Figure A.1(a) illustre le cas particulier où les singularités sont sur l'axe réel négatif. D'autre part, le contour hyperbolique (A.8) est supérieur dans le sens où il est adapté à toute transformée de Laplace ayant des singularités situées dans un secteur du demi-plan gauche dont la partie réelle tend vers moins l'infini, voir Figure A.1(b). Après avoir choisi le contour, l'étape suivante consiste à obtenir les meilleures estimations (A.10-A.11) pour ce contour particulier. A savoir, la bande d'analyticité définie dans le Théorème 2.1 doit être identifiée. Pour les cas considérés, les singularités se trouvent dans le demi-plan gauche de sorte que  $c^-$  est généralement fini tandis que  $c^+$  peut être infini. Dans ce cas,

$$E_h^+ = \mathcal{O}\left(e^{-2\pi c^+/h}\right), \quad E_h^- = \mathcal{O}\left(M^-(c^-) e^{-2\pi c^-/h}\right), \quad h \rightarrow 0. \quad (\text{A.12})$$

Par conséquent, une valeur optimale de  $c^-$  doit être déterminée en équilibrant la croissance de  $M^-(c^-)$  avec la décroissance du terme  $e^{-2\pi c^-/h}$  quand  $c^- \rightarrow \infty$ . Ainsi, on obtient une bonne estimation de  $E_h^-$  et on fixe au mieux la bande d'analyticité.

Une fois les estimations d'erreur de troncature et de discrétisation calculées, on obtient une estimation de l'erreur absolue

$$E(t) = |F(t) - F_{h,N}(t)| \leq E_N(t) + E_h(t).$$

La procédure d'optimisation est naturelle. Elle consiste à écrire les estimations (A.10-A.11) sous la forme

$$E_N(t) = \mathcal{O}\left(e^{\mathcal{E}_N(t)}\right), \quad E_h^- = \mathcal{O}\left(e^{\mathcal{E}_h^-(t)}\right) \quad \text{et} \quad E_h^+ = \mathcal{O}\left(e^{\mathcal{E}_h^+(t)}\right),$$

et à les équilibrer asymptotiquement, i.e.

$$\mathcal{E}_N(t) = \mathcal{E}_h^+(t) = \mathcal{E}_h^-(t). \quad (\text{A.13})$$

Cela produit deux équations qui déterminent le choix optimal des paramètres libres  $\mu$  et  $h$ , respectivement notés  $\mu_*$  et  $h_*$ . Par exemple, dans le cas du contour parabolique, les auteurs ont trouvé que la plus large bande d'analyticité correspond à  $c^+ = 1$  et  $c^- = \frac{\pi}{\mu th} - 1$ . Par conséquent, les deux équations à résoudre sont

$$-\frac{2\pi}{h} = -\frac{\pi^2}{\mu th^2} + \frac{2\pi}{h} = \mu t (1 - (hN)^2).$$

Les équations (A.13) permettent d'optimiser les paramètres pour une valeur de  $t$  donnée. Cela signifie que pour chaque nouvelle valeur de  $t$ ,  $\mathcal{F}(s)$  sera appliquée à un contour différent. Idéalement, on souhaite fixer les paramètres et n'utiliser qu'un seul contour

simple pour différentes valeurs de  $t \in [t_0, t_1]$ , avec  $t_1 = \Lambda t_0$ . Pour ce faire, Weideman et Trefethen [92] ont adapté (A.13) à l'intervalle considéré, en prenant

$$\mathcal{E}_N(t_0) = \mathcal{E}_h^+ = \mathcal{E}_h^-(t_1). \quad (\text{A.14})$$

L'erreur de troncature dépend alors de façon linéaire de  $t$ ,  $E_h^+$  est indépendant de  $t$  et  $E_h^-$  dépend de façon linéaire de  $1/t$  pour la parabole. En conséquence, le choix ci-dessus semble raisonnable pour que ces trois quantités soient du même ordre, de manière analogue au cas d'un seul  $t$  fixé. Un argument similaire est valable pour le contour hyperbolique.

A présent, on s'intéresse aux taux de convergence obtenus dans la formulation précédente.

**Taux de convergence théorique.** Les choix ont été réalisés ci-dessus pour un réglage automatique adapté aux contours parabolique et hyperbolique. Ils engendrent un système de deux équations à deux inconnues facilement résoluble de façon analytique.

Les paramètres du contour parabolique optimal s'écrivent

$$h_* = \frac{\sqrt{8\Lambda + 1}}{N}, \quad \mu_* = \frac{\pi}{4\sqrt{8\Lambda + 1}} \frac{N}{t_1}, \quad (\text{A.15})$$

ce qui implique un taux de convergence

$$E_N = \mathcal{O}(e^{(-2\pi/\sqrt{8\Lambda+1})N}). \quad (\text{A.16})$$

Les paramètres du contour hyperbolique optimal s'écrivent

$$h(\alpha) = \frac{A(\alpha)}{N}, \quad \mu(\alpha) = \frac{4\pi\alpha - \pi^2 + 2\pi\delta}{A(\alpha)} \frac{N}{t_1}, \quad (\text{A.17})$$

$$A(\alpha) = \cosh^{-1} \frac{(\pi - 2\alpha - 2\delta)\Lambda + 4\alpha - \pi + 2\delta}{(4\alpha - \pi + 2\delta) \sin \alpha}, \quad (\text{A.18})$$

avec  $\delta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  l'angle du secteur défini par les singularités et  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$  l'angle asymptotique de l'hyperbole, voir Figure A.1(b). La résolution du système (A.14) impose que l'angle asymptotique appartienne à  $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \delta \right) \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}. \quad (\text{A.19})$$

En conséquence, le taux de convergence dépend de l'angle asymptotique

$$E_N(\alpha) = \mathcal{O}(e^{-B(\alpha)N}) \quad \text{et} \quad B(\alpha) = \frac{\pi^2 - 2\pi\alpha - 2\pi\delta}{A(\alpha)}. \quad (\text{A.20})$$

Finalement, le taux de décroissance est maximisé, la fonction  $B$  ne possédant qu'un minimum local unique  $\bar{\alpha}$ , voir Figure A.3, de sorte que

$$h_* = h(\bar{\alpha}), \quad \mu_* = \mu(\bar{\alpha}), \quad \text{et} \quad B(\bar{\alpha}) = \max_{\alpha \in [\alpha_0; \alpha_1]} B(\alpha).$$

**Remarque 51**

- (i) La première observation est l'impossibilité de considérer  $t_0 = 0$  ou  $t_1 = \infty$ . En ces valeurs, les paramètres  $h_*$  et  $\mu_*$  deviennent infinis ou s'annulent.
- (ii) Le maximum de  $B(\alpha)$  est calculé numériquement.
- (iii) On peut considérer une parabole plus générale de la forme

$$s = \beta + \mu (iw + \alpha)^2.$$

Le paramètre  $\alpha$  n'améliore pas la précision puisque ce dernier peut être absorbé par le paramètre  $\mu$  et la taille du pas  $h$ . En effet, la parabole peut s'écrire sous la forme  $s = \beta + \mu\alpha^2(iw/\alpha + 1)^2$ . Le paramètre  $\beta$  influence le facteur de  $e^{\beta t}$  aux estimations d'erreur données ci-dessus. Cela peut réduire l'erreur lorsque  $\sigma < 0$  où le contour traverse l'axe réel négatif. Cela est problématique si les positions de singularités ne sont pas connues.

- (iv) Le contour hyperbolique (A.8) est présenté dans [60] et davantage analysé dans [61]. Dans le cas où  $\delta = 0$ , les estimations de paramètres données par la dernière référence sont semblables, mais pas identiques aux estimations (A.17), à savoir

$$h = \frac{a(\theta)}{N}, \quad \mu = \frac{2\pi d(1-\theta)N}{a(\theta)t_1},$$

$$a(\theta) = \cosh^{-1}\left(\frac{\Lambda}{(1-\theta)\sin\alpha}\right),$$

avec  $d$  et  $\theta$  des paramètres satisfaisant  $0 < d < \pi/2 - \alpha$  (en cas de singularités sur l'axe réel négatif, i.e.  $\delta = 0$ ) et  $0 < \theta < 1$ . Aucune formule explicite pour le choix optimal de  $\alpha$  et  $d$  n'a été fournie dans [61], les valeurs optimales pour  $\theta$  ayant néanmoins été obtenues numériquement. D'autre part, l'idée intéressante poursuivie dans [61] est de minimiser les effets des erreurs d'arrondi et du mauvais conditionnement associé à la transformée de Laplace inverse si le paramètre  $\theta$  dépend de  $N$ . De cette manière, les auteurs sont capables d'éviter la croissance d'erreur observée dans [92]. Pourtant, la dépendance explicite de  $\theta$  en  $N$  n'a pas été déterminée.

- (v) Les taux de convergence sont de la forme

$$E_N = \mathcal{O}(e^{-BN}), \quad \text{avec } B > 0.$$

Cependant, pour  $\Lambda$  assez grand, on a

$$B_{\text{para}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\right) \quad \text{et} \quad B_{\text{hyper}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln \Lambda}\right).$$

Donc, la croissance supposée exponentielle est très coûteuse pour être maintenue sur des intervalles larges en  $t$ . En conséquence, si le calcul est initialisé près de zéro, il sera difficile d'avoir un bon taux de convergence pour de grandes valeurs de  $t$ .

- (vi) On peut prévoir que des contours hyperboliques rapportent des inversions numériques plus efficaces.

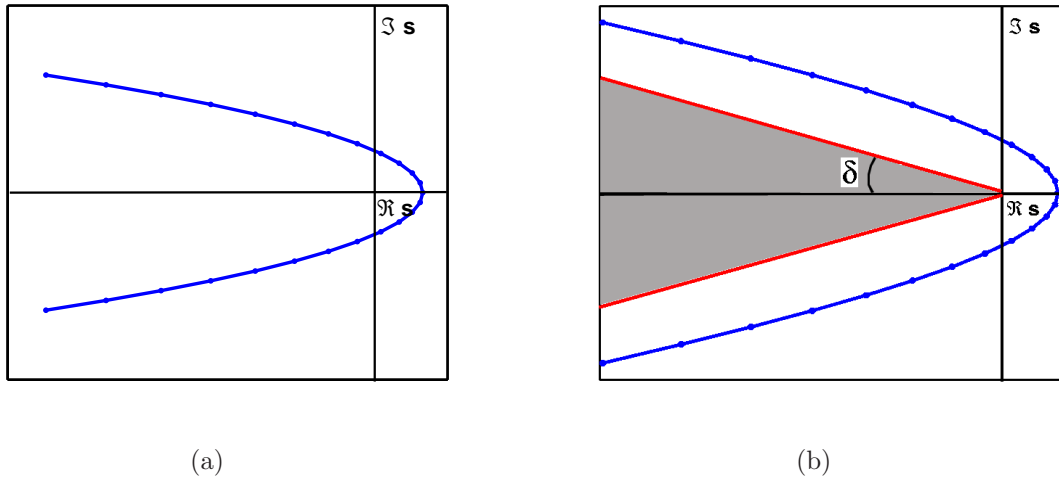


FIG. A.1 – Image de la bande d’analyticité dans le  $s$ -plan, pour le cas Parabolique (a) et pour le cas Hyperbolique (b)

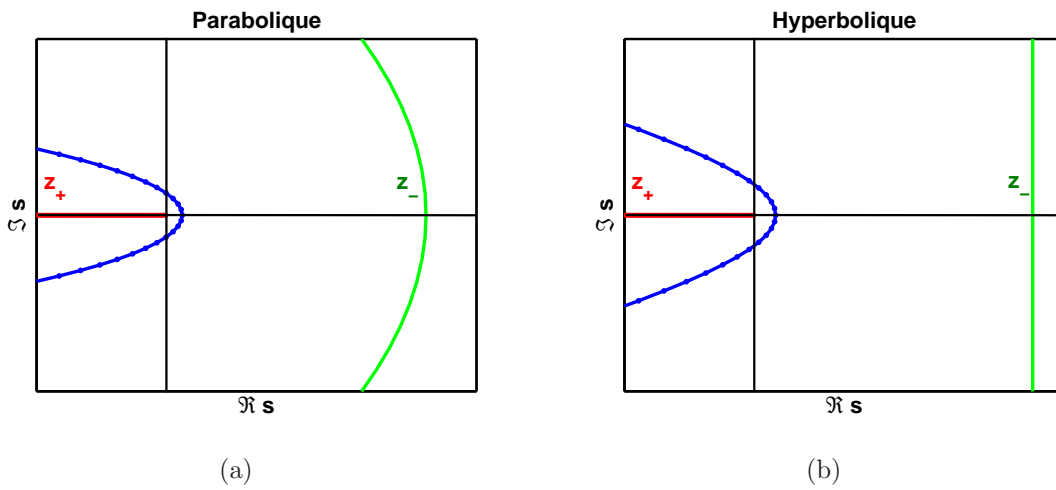


FIG. A.2 – Image de la bande d’analyticité dans le  $s$ -plan, pour le cas Parabolique (a) et pour le cas Hyperbolique (b)

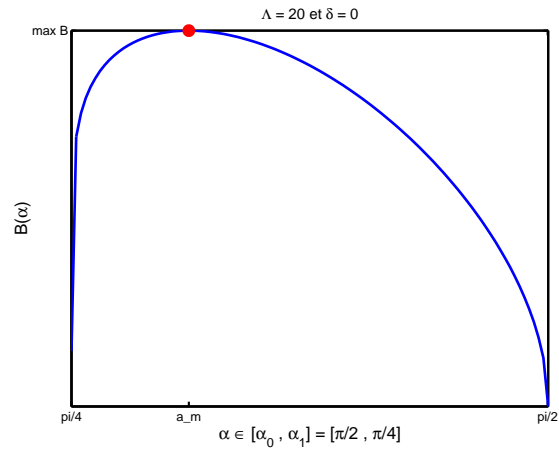


FIG. A.3 – Maximisation de la fonction  $B(\alpha)$  pour le cas où les singularités sont sur l'axe réel négatif et pour  $\Lambda = 20$

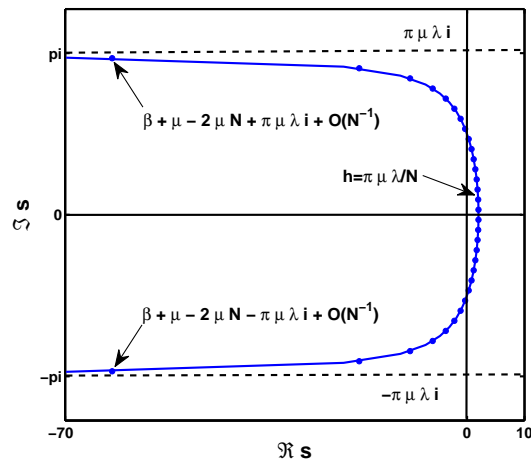


FIG. A.4 – Contour de Talbot A.5 avec  $\sigma = 0$ ,  $\mu = 2$ ,  $\lambda = 0.5$





# Annexe B

## Conception de Contrôleurs semi-décentralisés

### Sommaire

---

<b>B.1</b>	<b>Systèmes Distribués Invariant en Espace . . . . .</b>	<b>130</b>
B.1.1	Préliminaires . . . . .	130
B.1.2	Approche semi-décentralisée via un problème inverse du contrôle optimal distribué . . . . .	131
B.1.3	Exemples . . . . .	132
<b>B.2</b>	<b>Approche semi-décentralisée via LMI . . . . .</b>	<b>133</b>
B.2.1	Préliminaires . . . . .	134
B.2.2	Caractère bien-posé, stabilité et performance . . . . .	135
B.2.3	Conception du contrôle . . . . .	136

---

En général, le contrôleur optimal n'hérite pas de la structure du système dans l'espace des états (appelé "Plant" dans la terminologie anglo-saxonne). De plus, le degré de semi-décentralisation préconisé peut être difficile à réaliser.

Dans cette annexe on présente quelques approches traitant ces deux concepts.

## B.1 Systèmes Distribués Invariant en Espace

Les systèmes invariants en espace sont une sous-classe importante de la famille des systèmes spatialement distribués. Cette section introduit quelques aspects fondamentaux de cette classe, et montre comment, par une transformée de Fourier dans le domaine spatial, l'étude d'un système en dimension infinie peut être réduite à l'analyse d'une famille paramétrée de systèmes en dimension finie. De plus, B. Bamieh *et al.* dans [4] montrent que le contrôleur déduit admet un degré de semi-décentralisation intrinsèque. En effet, ce dernier décroît exponentiellement en espace. Finalement, on relate une stratégie développée par M. R. Jovanovic, permettant la conception d'un contrôleur optimal semi-décentralisé.

### B.1.1 Préliminaires

On considère un système distribué sous la forme

$$\partial_t \psi(t, \xi) = A\psi(t, \xi) + Bu(t, \xi), \quad (\text{B.1})$$

avec  $A$  le générateur infinitésimal du  $C_0$ -semi-groupe fortement continu. On suppose que la coordonnée spatiale  $\xi$  appartient à un groupe commutatif  $\mathbb{G}$ , et que les opérateurs  $A$  et  $B$  indépendants du temps sont invariants par translation suivant cette coordonnée. Ces propriétés impliquent l'invariance spatiale de (B.1), voir [4]. L'analyse et le problème de conception pour des systèmes linéaires invariants en espace sont énormément simplifiés par l'application de la transformée de Fourier dans les directions invariantes en espace [4]. En appliquant à (B.1) la transformée de Fourier en espace, on obtient

$$\frac{d}{dt} \widehat{\psi}_\kappa(t) = \widehat{A}_\kappa \widehat{\psi}_\kappa(t) + \widehat{B}_\kappa \widehat{u}_\kappa(t), \quad (\text{B.2})$$

avec  $\kappa$  désignant la coordonnée de fréquence correspondant à la coordonnée spatiale  $\xi$ ,  $\widehat{\psi}_\kappa(t) := \widehat{\psi}(t, \kappa)$ ,  $\widehat{u}_\kappa(t) := \widehat{u}(t, \kappa)$ .  $\widehat{A}_\kappa := \widehat{A}(\kappa)$  et  $\widehat{B}_\kappa := \widehat{B}(\kappa)$  désignent des opérateurs de multiplication, i.e. les symboles de Fourier des opérateurs respectifs  $A$  et  $B$ . On note que (B.2) représente une famille en dimension finie de systèmes paramétrés par  $\kappa \in \widehat{\mathbb{G}}$ . Il a été établi dans [4] que les propriétés dynamiques de (B.1) peuvent être déduites en satisfaisant les mêmes propriétés que (B.2) pour tout  $\kappa \in \widehat{\mathbb{G}}$ . En particulier, la solution des problèmes de contrôle optimale pour le système (B.1) peut être obtenue en résolvant les problèmes analogues pour la famille  $\kappa$ -paramétrée de systèmes en dimension finie (B.2).

On considère à présent le cadre LQR distribué. On associe la fonctionnelle de coût

$$J = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^+} (\langle Q\psi, \psi \rangle + \langle Ru, u \rangle) dt \quad (\text{B.3})$$

à (B.1). De plus, si  $Q \geq 0$  et  $R > 0$  désignent des opérateurs invariants par translation, l'application de la transformée de Fourier spatiale à (B.3) implique

$$J = \frac{1}{2} \int_{\widehat{\mathbb{G}}} \int_{\mathbb{R}^+} \left( \widehat{\psi}_\kappa^*(t) \widehat{Q}_\kappa \widehat{\psi}_\kappa(t) + \widehat{u}_\kappa^*(t) \widehat{R}_\kappa \widehat{u}_\kappa(t) \right) dt d\kappa. \quad (\text{B.4})$$

Ainsi, le problème distribué LQR (B.1,B.3) revient à résoudre la famille  $\kappa$ -paramétrée de problèmes LQR en dimension finie (B.2,B.4). Si les paires  $(A, B)$  et  $(A^*, Q^{1/2})$  sont exponentiellement stabilisables, alors la famille  $\kappa$ -paramétrée d'équations algébriques de Riccati découplées

$$\widehat{A}_\kappa^* \widehat{P}_\kappa + \widehat{P}_\kappa \widehat{A}_\kappa - \widehat{P}_\kappa \widehat{B}_\kappa \widehat{R}_\kappa^{-1} \widehat{B}_\kappa^* \widehat{P}_\kappa + \widehat{Q}_\kappa = 0 \quad (\text{B.5})$$

admet une solution unique  $\widehat{P}_\kappa$ , définie positive et uniformément bornée pour tout  $\kappa \in \widehat{\mathbb{G}}$  [25]. La matrice définie positive associée détermine le contrôle optimal  $\widehat{u}_\kappa$  du système (B.2) pour tout  $\kappa \in \widehat{\mathbb{G}}$

$$\widehat{u}_\kappa := \widehat{K}_\kappa \widehat{\psi}_\kappa = -\widehat{R}_\kappa^{-1} \widehat{B}_\kappa^* \widehat{P}_\kappa \widehat{\psi}_\kappa, \quad \kappa \in \widehat{\mathbb{G}}. \quad (\text{B.6})$$

Dans ce cas, il existe un contrôle  $u(t, \xi)$  invariant par translation du système (B.1) qui minimise (B.3), voir [4]. Ce contrôle optimal de (B.1) peut être facilement obtenu en appliquant la transformée de Fourier inverse à (B.6).

En général,  $\widehat{K}_\kappa$  est une fonction irrationnelle de  $\kappa$ . Ainsi, le contrôleur ne peut pas être mis en oeuvre par une équation aux dérivées partielles (EDP) en  $t$  et  $\xi$ . On le considère plutôt dans l'espace physique sous la forme

$$u(t, \xi) = \int_{\mathbb{R}} K(\xi - \zeta) \psi(t, \zeta) d\zeta. \quad (\text{B.7})$$

Dans [4], la décroissance exponentielle rapide en espace de  $K$  a été établie. Cela signifie que le contrôleur optimal résultant a un degré de localisation spatiale et peut donc être mis en oeuvre d'une façon distribuée. Malgré cette caractéristique, (B.7) représente un contrôleur centralisé.

Dans [41], l'auteur propose une stratégie pour la conception de contrôleurs optimaux semi-décentralisés, détaillée dans la section suivante.

### B.1.2 Approche semi-décentralisée via un problème inverse du contrôle optimal distribué

Dans cette section, on suppose que le système (B.1) est invariant en espace. Dans [41], l'auteur propose un problème inverse optimal de stabilisation exponentielle associé à (B.1). Ce problème est dit inverse dans le sens où le contrôle qui stabilise le système (B.1), minimise une fonctionnelle de coût choisie a posteriori. Autrement dit, les opérateurs  $Q$  et  $R$  dans la fonctionnelle (B.3) ne sont pas a priori fixés. Ils sont plutôt choisis a posteriori par la stabilisation exponentielle de l'état-feedback. Concernant l'optimalité, l'auteur énonce dans le Théorème 1 une condition de domaine de fréquence pour fixer des

contrôleurs optimaux au sens LQR. Afin d'établir cette condition, l'auteur a utilisé la dite *égalité de différence de retour* dans l'espace de Fourier, i.e. du système en boucle-fermé (B.2,B.6)

$$\widehat{\mathcal{H}}_\kappa(s) := I - \widehat{K}_\kappa \left( sI - \widehat{A}_\kappa \right)^{-1} \widehat{B}_\kappa =: I - \widehat{K}_\kappa \widehat{G}_\kappa(s) \widehat{B}_\kappa. \quad (\text{B.8})$$

Cette stratégie permet la conception de contrôleurs optimaux semi-décentralisés. En effet, on peut fixer a priori des contrôleurs s'écrivant sous la forme d'une (EDP).

Afin d'illustrer cette stratégie, on l'applique aux exemples de la section suivante.

### B.1.3 Exemples

On présente l'exemple d'un système invariant en espace avec des contrôles et des observations distribués. Cet exemple concerne l'équation de diffusion, posée dans un domaine infini  $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ . Le dual de  $\mathbb{G}$  est lui-même, i.e.  $\widehat{\mathbb{G}} = \mathbb{R}$ . Soit l'équation de diffusion uni-dimensionnelle

$$\partial_t \psi(t, \xi) = \partial_{\xi\xi} \psi(t, \xi) + c\psi(t, \xi) + u(t, \xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (\text{B.9})$$

#### Problème direct

L'application de la transformée de Fourier standard en espace donne

$$\partial_t \widehat{\psi}_\kappa(t) = (c - \kappa^2) \widehat{\psi}_\kappa(t) + \widehat{u}_\kappa(t) =: \widehat{A}_\kappa \widehat{\psi}_\kappa(t) + \widehat{B}_\kappa \widehat{u}_\kappa(t). \quad \kappa \in \mathbb{R}, \quad (\text{B.10})$$

Cela implique que (B.9), en boucle ouverte, n'est pas exponentiellement stable si  $c \geq 0$ . Considérons l'exemple  $Q = qI$  et  $R = rI$  dans (B.3), avec  $q$  et  $r$  deux constantes strictement positives. Cela implique que l'équation algébrique de Riccati  $\kappa$ -paramétrée (B.5) admet la solution définie positive suivante

$$\widehat{P}_\kappa = r(c - \kappa^2) + \sqrt{r^2(c - \kappa^2)^2 + rq}.$$

Le contrôle optimal est exprimé sous la forme (B.6) avec

$$\widehat{K}_\kappa = - \left( (c - \kappa^2) + \sqrt{(c - \kappa^2)^2 + q/r} \right).$$

Ainsi, le contrôle  $u(t, \xi)$  dans l'espace physique ne peut pas être mis en œuvre par une équation aux dérivées partielles en  $\psi$ .

#### Problème inverse pour concevoir un contrôleur semi-décentralisé

On peut établir que le contrôleur semi-décentralisé et invariant en espace suivant

$$u(t, \xi) = -(\beta \partial_{\xi\xi} \psi(t, \xi) + (c + \alpha)\psi(t, \xi)) \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{u}_\kappa(t) = \widehat{K}_\kappa \widehat{\psi}_\kappa(t) = - (c + \alpha - \beta\kappa^2) \widehat{\psi}_\kappa(t), \quad (\text{B.11})$$

fournit la stabilité exponentielle de (B.9) sous la condition que les paramètres  $\kappa$ -indépendants réels de conception  $\alpha$  et  $\beta$  satisfont respectivement  $\alpha > 0$  et  $\beta \in (-\infty, 1]$ . De plus, en se

basant sur le Théorème 1 du travail de Jovanovic dans [41], il s'ensuit que le contrôleur (B.11) est inversement optimal si et seulement si

$$(\alpha - c + (2 - \beta)\kappa^2) (\alpha + c - \beta\kappa^2) \geq 0,$$

pour tout  $\kappa \in \mathbb{R}$ . Cette condition est satisfaite pour tout  $\kappa \in \mathbb{R}$  si et seulement si

$$\alpha \geq c \quad \text{et} \quad \beta \leq 0.$$

Ainsi, il existe toujours un couple  $(Q \geq 0, R > 0)$  de (B.3) pour lequel (B.11) est inversement optimal. On choisit par exemple  $R = rI$ , avec  $r$  une constante strictement positive. Pour déterminer  $Q$ , l'auteur a tout d'abord cherché  $\widehat{D}_\kappa$  l'unique solution de

$$\|\widehat{D}_\kappa^* \widehat{G}_\kappa(j\omega) \widehat{B}_\kappa\|^2 = \widehat{R}_\kappa \left( |\widehat{\mathcal{H}}_\kappa(j\omega)|^2 - 1 \right), \quad (\text{B.12})$$

avec  $\widehat{Q}_\kappa = \widehat{D}_\kappa \widehat{D}_\kappa^*$ . Ainsi,

$$\widehat{Q}_\kappa = r \left( (\alpha^2 - c^2) + 2(c + \alpha(1 - \beta))\kappa^2 + \beta(\beta - 2)\kappa^4 \right),$$

pour tout  $\kappa \in \mathbb{R}$  et  $r > 0$ . Puis, il applique la transformée de Fourier inverse, il obtient

$$Q = r \left( (\alpha^2 - c^2) I - 2(c + \alpha(1 - \beta)) \partial_{\xi\xi} + \beta(\beta - 2) \partial_{\xi\xi\xi\xi} \right).$$

Finalement, l'auteur a établi l'optimalité du contrôleur distribué, semi-décentralisé et invariant en espace (B.11) pour la fonctionnelle de coût suivante

$$J = \frac{r}{2} \int_0^\infty \left( (\alpha^2 - c^2) \langle \psi, \psi \rangle + 2(c + \alpha(1 - \beta)) \langle \psi_\xi, \psi_\xi \rangle + \beta(\beta - 2) \langle \psi_{\xi\xi}, \psi_{\xi\xi} \rangle + \langle u, u \rangle \right) dt, \\ r > 0, \quad \alpha \geq c, \quad \beta \leq 0. \quad (\text{B.13})$$

En particulier, pour  $\beta = 0$ , le contrôleur (B.11) est entièrement décentralisé et (B.13) simplifie à

$$J = \frac{r}{2} \int_0^\infty \left( (\alpha^2 - c^2) \langle \psi, \psi \rangle + 2(c + \alpha) \langle \psi_\xi, \psi_\xi \rangle + \langle u, u \rangle \right) dt, \quad r > 0, \quad \alpha \geq c. \quad (\text{B.14})$$

## B.2 Approche semi-décentralisée via LMI

Plusieurs chercheurs se sont intéressés au problème d'imposer explicitement des contraintes a priori de conditions de communication entre des sous-systèmes de contrôleur. Dans ce contexte, on peut citer des approches basées sur les Inégalités Matricielles Linéaires (LMI), ainsi que des techniques d'optimisation convexes (voir [24, 49]). Elles fournissent la stabilité et garantissent des niveaux de performance en norme  $\mathcal{L}_2$ -induite aux systèmes capturés par des fonctions de transfert rationnelles et multi-dimensionnelles. On impose une structure de contrôleurs identique à celle du Plant. Pour cela on utilise une relaxation afin d'obtenir la stabilité et les conditions de performance via (LMI).

Dans ce qui suit, on détaille l'étude et la stratégie de conception menées par R. D'Andrea et G. E. Dullerud dans [24].

### B.2.1 Préliminaires

L'article [24] étudie les trois aspects des systèmes spatialement distribués, à savoir :

- caractère bien posé,
- stabilité,
- performance.

Il considère également la conception de contrôleurs associés à de tels systèmes. Le système est composé de blocs suivant la Figure B.1. Les variables du modèle sont :

$$\begin{aligned} d &= \text{variable d'entrée} \\ z &= \text{variable de sortie} \\ w, v &= \text{variables d'interconnection.} \end{aligned}$$

Un système distribué peut alors être rassemblé par de tels blocs, dont chacun est gouverné par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t, s) &= A_{TT}x(t, s) + A_{TS}v(t, s) + B_Td(t, s) \\ w(t, s) &= A_{ST}x(t, s) + A_{SS}v(t, s) + B_Sd(t, s) \\ z(t, s) &= C_Tx(t, s) + C_Sv(t, s) + Dd(t, s), \end{aligned} \tag{B.15}$$

avec

$$w = \begin{bmatrix} w^+ \\ w^- \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v^+ \\ v^- \end{bmatrix}, \tag{B.16}$$

et  $s$  la variable d'espace, considérée pour simplifier comme appartenant à  $\mathbb{Z}$  ou à un ensemble fini  $\{1, \dots, N\}$ .

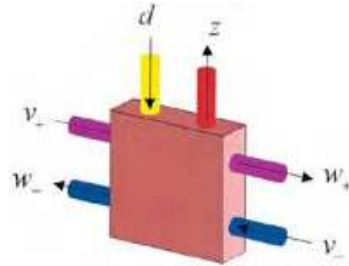


FIG. B.1 – Structure de chaque sous-système (source de l'image : [24])

Les auteurs ont introduit l'opérateur de déplacement spatial  $S$  agissant sur  $s$  :

$$(Sv)(t, s) := v(t, s + 1), \tag{B.17}$$

$$(S^{-1}v)(t, s) := v(t, s - 1). \tag{B.18}$$

Cet opérateur leur permet alors d'exprimer l'opérateur  $\Delta$  :

$$\Delta := \begin{bmatrix} SI_{m_+} & 0 \\ 0 & S^{-1}I_{m_-} \end{bmatrix}, \tag{B.19}$$

avec  $m_{\pm}$  les dimensions des variables  $v^{\pm}$ . A présent,  $w^{\pm}(t, s) = v^{\pm}(t, s \pm 1)$  et le système peut être écrit comme

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bd(t), \\ z(t) &= Cx(t) + Dd(t), \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

avec

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} A_{TT} & B_T \\ C_T & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{TS} \\ C_S \end{bmatrix} \times (\Delta - A_{SS})^{-1} \begin{bmatrix} A_{ST} \\ B_S \end{bmatrix}. \quad (\text{B.21})$$

Il est supposé ici que  $(\Delta - A_{SS})$  est inversible.

## B.2.2 Caractère bien-posé, stabilité et performance

### Caractère bien-posé

Cette propriété décrit la réalisabilité de l'interconnexion. Un système interconnecté défini par l'équation (B.15) est bien-posé si l'opérateur  $(\Delta - A_{SS})$  existe et est borné. Autrement dit, les signaux d'interconnexion  $v_{\pm}$  et  $w_{\pm}$  ont des normes finies.

### Stabilité

Un système est stable si pour tout état initial  $x(t=0)$ , la norme du signal  $x$  est bornée par une exponentiel décroissant lorsque la variable d'entrée  $d$  est nulle, i.e. s'il existe  $M$  et  $\alpha > 0$ , tel que

$$\|x(t)\| \leq Me^{-\alpha t} \|x(0)\| \quad \text{pour}$$

Un système est contractant si pour tout signal d'entrée  $d \neq 0$ ,

$$\|z\|_{\mathcal{L}_2} < \|d\|_{\mathcal{L}_2} \quad \text{quand} \quad x(t=0) = 0.$$

Avec

$$\|x(t)\| = \sum_{-\infty}^{\infty} x(t, \cdot)^* x(t, \cdot), \quad \|z\| = \int_0^{\infty} |z(t)| dt. \quad (\text{B.22})$$

Le résultat suivant permet de vérifier qu'un système est bien-posé, stable et performant via (LMI). La preuve du Théorème suivant est donnée par les auteurs dans le papier [24].

**Théorème 52** *Un système  $\mathcal{M}$  est bien posé, stable et contractant s'il existe une matrice symétrique  $X_S$  et  $X_T > 0$  tel que*

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ A_{ST}^- & A_{SS}^- & B_S^- \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} A_{TT}^* X_T + X_T A_{TT} & X_T A_{TS}^+ & X_T B_T \\ (A_{TS}^+)^* X_T & -X_S & 0 \\ B_T^* X_T & 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ A_{ST}^- & A_{SS}^- & B_S^- \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ A_{ST}^+ & A_{SS}^+ & B_S^+ \\ C_T & C_S & D \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & X_T A_{TS}^- & 0 \\ (A_{TS}^-)^* X_T & X_S & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ A_{ST}^+ & A_{SS}^+ & B_S^+ \\ C_T & C_S & D \end{bmatrix} < 0. \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

**Remarque 53** *Cette formulation présente l'avantage que la taille des matrices augmente uniquement et proportionnellement au nombre de voisins associé à chaque sous-système, indépendamment de la taille du système entier.*



### B.2.3 Conception du contrôle

Après avoir étudié les propriétés de stabilité, bien-posée et de performance du système, les auteurs conçoivent les contrôleurs comme une structure semblable à celle des sous-Plants, voir Figure B.2. Un contrôleur et un sous-Plant constituent ensemble un nouveau sous-système en boucle-fermée, avec les signaux de sortie

$$\tilde{w}_+ = \begin{bmatrix} w_+ \\ w_+^K \end{bmatrix}.$$

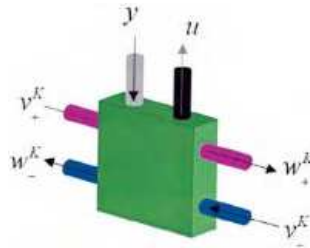


FIG. B.2 – Structure de chaque contrôleur (source de l'image : [24])

On considère les (LMIs) précédents, avec cette fois un nombre de paramètres du contrôleur à préciser. On obtient (LMI) Bi-linéaire (BLMI). Grâce à la similarité entre la structure du contrôleur et celle de Plant, le (BLMI) peut être rendue convexe et résolvable.

# Bibliographie

- [1] J. Abate, G. Choudhury, and W. Whitt. On the laguerre-method for numerically inverting laplace transforms. *INFORMS Journal of Computing*, (8) :413–427, 1996.
- [2] J. Abate and P. P. Valkó. Multi-precision laplace inversion. *Internat. J. Numer. Meth. Engrg.*, (60) :979–993, 2004.
- [3] J. Abate and W. Whitt. The fourier-series method for inverting transforms of probability distributions. *Queueing Systems*, (10) :5–88, 1992.
- [4] B. Bamieh, F. Paganini, and M.A. Dahleh. Distributed control of spatially invariant systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(7) :1091–107, 2002.
- [5] H. T. Banks and K. Ito. Approximation in lqr problems for infinite-dimensional systems with unbounded input operators. *J. Math. Systems Estim. Control*, 7(1) :p. 34 pp., 1997.
- [6] C. Bernardi and Y. Maday. Some spectral approximations of one-dimensional fourth-order problems, in : P. nevai and a. pinkus, eds. *In Progress in approximation theory*, page 43116, 1991.
- [7] C. Bernardi and Y. Maday. *Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques*. Mathematiques et Applications n.10. Springer-Verlag, (1992).
- [8] C. Bernardi and Y. Maday. Spectral methods, in Handbook of Numerical Analysis. In P. Ciarlet et J.-L. Lions, editor, , volume 5 of , page . North-Holland, Amsterdam, 1997.
- [9] C. Bernardi, Y. Maday, and F. Rapetti. *Discrétisations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques*, volume 45 of *Collection Mathématiques et Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [10] J.-P. Berrut, R. Baltensperger, and H. D. Mittelmann. Recent developments in barycentric rational interpolation. In *Trends and Applications in Constructive Approximation*, (Eds.) D. H. Mache, J. Szabados, and M. G. de Bruin, International Series of Numerical Mathematics Vol. 1, pages 1025–1029. Birkhaeuser Verlag, Basel, 2005.
- [11] J. P. Berrut and H. Mittelmann. Matrices for the direct determination of the barycentric weights of rational interpolation. *J. Comput. Appl. Math.*, 78(2) :355–370, 1997.
- [12] P. Bidan, T. Lebey, G. Montseny, C. Neascu, and J. Saint-Michel. Transient voltage distribution in inverter fed motor windings : Experimental study and modeling. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 16(1) :92–100, 2001.

- [13] R. Bulirsch and H. Rutishauser. *Interpolation und genäherte Quadratur*, in : Sauer R., Szabò I., Hsg., *Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs*. Grundlehren der math. Wissenschaften Bd. 141. Springer, Berlin-Heidelberg, 1968.
- [14] E. Canon and M. Lenczner. Models of elastic plates with piezoelectric inclusions, part1 : Models without homogenization. *Math. Comput. Modeling*, 26(5) :79–106, 1997.
- [15] E. Canon and M. Lenczner. Deux modèles de plaque mince avec inclusions de piézoélectriques et circuits électroniques ditribués. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. Iib*, 326(12) :793–798, 1998.
- [16] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [17] C. Casenave and E. Montseny. Time-local dissipative formulation and stable numerical schemes for a class of integrodifferential wave equations. *SIAM J. Appl. Math.*, 68(6) :1763–1782, 2008.
- [18] W. J. Cody, G. Meinardus, and R. S. Varga. Chebyshev rational approximations to  $e^{-x}$  in  $[0, +1)$  and applications to heat-conduction problems. *J. Approximation Theory*, (2) :50–65, 1969.
- [19] M. Collet, P. David, and M. Berthillier. Active acoustical impedance using distributed electrodynamic transducers. *J. Acoust. Soc. Am.*, 125(2) :882–94, 2009.
- [20] M. Crouzeix and A. L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maitrise. Masson, Paris, 1984.
- [21] E. Cuesta, C. Lubich, and C. Palencia. Convolution quadrature time discretization of fractional diffusion-wave equations. *Math. Comp.*, 75(254) :673–696, 2006.
- [22] R. F. Curtain and H. Zwart. *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*, volume 21 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, 1995.
- [23] L. DAmore, G. Laccetti, and A. Murli. An implementation of a fourier series method for the numerical inversion of the laplace transform. *ACM Trans. Math. Softw.*, 25(3) :279–305, 1999.
- [24] R. D’Andrea and G. E. Dullerud. Distributed control design for spatially interconnected systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 48(9) :1478–1495, 2003.
- [25] R. Dautray and J.-L. Lions. *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology*, volume 3. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [26] P. David and M. Collet. Experimental implementation of acoustic impedance control by 2d network of distributed smart cells. *Smart Materials and Structures*, 19(3), 2010.
- [27] B. Davies and B. Martin. Numerical inversion of the laplace transform : a survey and comparison of methods. *J. Comput. Phys.*, (33) :1–32, 1979.
- [28] P. J. Davis and P. Rabinowitz. *Methods of Numerical Integration*. Computer Science and Applied Mathematics. Academic Press Inc., Orlando, FL,, edition, 1984.
- [29] Dean G. Duffy. On the numerical inversion of laplace transforms : comparison of three new methods on characteristic problems from applications. *ACM Trans. Math. Softw.*, 19(3) :333–359, 1993.

- 
- [30] D. P. Gaver, Jr. observing stochastic processes and approximate transform inversion. *Operations Research*, (14) :444–459, 1966.
- [31] I. P. Gavrilyuk and V. L. Makarov. Exponentially convergent parallel discretization methods for the first order evolution equations. *Comput. Meth. Appl. Math.*, 1(4) :333–355, 2001.
- [32] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, volume 5 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. theory and algorithms.
- [33] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix computation*. 3rd edition.
- [34] P. R. Graves-Morris. *Efficient reliable rational interpolation*, volume 888-1981 of *in : M. G. de Gruin and H. van Rossum, eds., Padé Approximation and its Applications Amsterdam 1980*.
- [35] P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*, volume 24 of *Monographs and Studies in Mathematics*.
- [36] M. H. Gutknecht. *Block structure and recursiveness in rational interpolation*, volume Approximation Theory VII of *in : Cheney E. W., Chui C.K. and L. L. Schumaker (eds.)*.
- [37] M. Haase. *The functional calculus for sectorial operators*, volume 169 of *Operator Theory : Advances and Applications*.
- [38] N. Hale, N. J. Higham, and L. N. Trefethen. Computing  $a^\alpha$ ,  $\log(a)$ , and related matrix functions by contour integrals. *SIAM J. Numer. Anal.*, 46(5) :2505–2523, 2008.
- [39] T. Hélie, D. Matignon, and R. Mignot. Criterion design for optimizing low-cost approximations of infinite-dimensional systems : towards efficient real-time simulation. *Int. J. Tomogr. Stat.*, 7(F07) :13–18, 2007.
- [40] Th. Hélie and D. Matignon. Diffusive representations for the analysis and simulation of flared acoustic pipes with visco-thermal losses. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 16(4) :503–536, 2006.
- [41] M. R. Jovanovic. On the optimality of localized distributed controllers. *International Journal of Systems, Control and Communications*, 2009. Special issue on Information Processing and Decision Making in Distributed Control Systems, in press.
- [42] M. Kader, M. Lenczner, and Z. Mrcarica. Approximation of an optimal control law using a distributed electronic circuit : application to vibration control. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Serie II b/Mecanique*, 328(7) :547 – 53, 2000.
- [43] M. Kader, M. Lenczner, and Z. Mrcarica. Distributed optimal control of vibrations : a high frequency approximation approach. *Smart Materials and Structures*, 12(3) :437 – 46, 2003.
- [44] S. Kesavan and J. S. J. Paulin. Optimal control on perforated domains. *J. Math. Anal. Appl.*, 229(2) :563 – 586, 1999.
- [45] S. Kesavan and M. Vanninathan. L'homogénéisation d'un problème de contrôle optimal. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A*, 285(6) :441 – 444, 1977.

- [46] P. Kogut and G. Leugering. On s-homogenization of an optimal control problem with control and state constraints. *Z. Anal. Anwend.*, 20(2) :395 – 429, 2001.
- [47] S. Koizumi. A new method of evaluation of the heaviside operation expression by fourier series. *Philosophical Magazine*, (10) :1061–1076, 1935.
- [48] J. E. Lagnese and G. Leugering. *Domain decomposition methods in optimal control of partial differential equations*, volume 148 of *International Series of Numerical Mathematics*. Birkhäuser Verlag, 2004.
- [49] C. Langbort and R. D’Andrea. Distributed control of spatially reversible interconnected systems with boundary conditions. *SIAM J. Control Optim.*, 44(1) :1–28, 2005.
- [50] I. Lasiecka and R. Triggiani. *Control theory for partial differential equations : continuous and approximation theories. I*, volume 74 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Birkhäuser Verlag, 2000.
- [51] L. Laudebat, P. Bidan, and G. Montseny. Modeling and optimal identification of pseudodifferential electrical dynamics by means of diffusive representation - Part 1 : Modeling. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I-Regular Papers*, 51(9) :1801–1813, 2004.
- [52] S. Leach. *Singular Value Decomposition A primer*. 1995. Technical report, Department of Computer Science.
- [53] M. Lenczner. A multiscale model for atomic force microscope array mechanical behavior. *Appl. Phys. Lett. (USA)*, 90, 2007.
- [54] M. Lenczner and Y. Yakoubi. Semi-decentralized approximation of optimal control for partial differential equations in bounded domains. *Comptes Rendus Mécanique*, 337(4) :245–250, 2009.
- [55] D. Levadoux and G. Montseny. Diffusive realization of the impedance operator on circular boundary for 2D wave equation. In *Mathematical and numerical aspects of wave propagation—WAVES 2003*, pages 136–141. Springer, Berlin, 2003.
- [56] J.-L. Lions. *Optimal control of systems governed by partial differential equations*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 170. Springer-Verlag, 1971.
- [57] M. López-Fernández. PhD thesis.
- [58] M. López-Fernández, C. Lubich, C. Palencia, and A. Schädle. Fast Runge-Kutta approximation of inhomogeneous parabolic equations. *Numer. Math.*, 102(2) :277–291, 2005.
- [59] M. López-Fernández, C. Lubich, and A. Schädle. Adaptive, fast, and oblivious convolution in evolution equations with memory. *SIAM J. Sci. Comput.*, 30(2) :1015–1037, 2008.
- [60] M. López-Fernández and C. Palencia. On the numerical inversion of the laplace transform in certain holomorphic mappings. *Appl. Numer. Math.*, 51(2-3) :289–303, 2004.
- [61] M. López-Fernández, C. Palencia, and A. Schädle. A spectral order method for inverting sectorial Laplace transforms. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44(3) :1332–1350, 2006.

- 
- [62] C. Lubich. Convolution quadrature revisited. *BIT*, 44(3) :503–514, 2004.
- [63] C. Lubich and A. Schädle. Fast convolution for nonreflecting boundary conditions. *SIAM J. Sci. Comput.*, 24(1) :161–182, 2002.
- [64] C. Martinez Carracedo and M. Sanz Alix. *The theory of fractional powers of operators*, volume 187 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., 2001.
- [65] D. Matignon and C. Prieur. Asymptotic stability of linear conservative systems when coupled with diffusive systems. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 11(3) :487–507, 2005.
- [66] W. McLean, I. H. Sloan, and V. Thomée. Time discretization via Laplace transformation of an integro-differential equation of parabolic type. *Numer. Math.*, 102(3) :497–522, 2006.
- [67] J. Meinguet. On the solubility of the cauchy interpolation problem, in : Talbot a., ed., approximation theory. *Academic Press*, London and New York :137–163, 1970.
- [68] B. Mercier. *An Introduction to the Numerical Analysis of Spectral Methods*, volume 318 of *Lecture notes in physics*. Springer-Verlag, 1989.
- [69] G Montseny. Simple approach to approximation and dynamical realization of pseudodifferential time operators such as fractional ones. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II-Express Briefs*, 51(11) :613–618, 2004.
- [70] G. Montseny. *Représentation diffusive*. Hermès-Sciences, 2005.
- [71] A. Murli and M. Rizzardi. Algorithm 682 : Talbots method of the laplace inversion problems. *ACM Trans. Math. Softw.*, 16(2) :158–168, 1990.
- [72] G. V. Narayanan and D. E. Beskos. Numerical operational methods for time-dependent linear problems. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, (18) :1829–1854, 1982.
- [73] F. Paganini and B. Bamieh. Decentralization properties of optimal distributed controllers. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 2 :1877 – 1882, 1998.
- [74] M. Rizzardi. A modification of talbots method for the simultaneous approximation of several values of the inverse laplace transform. *ACM Trans. Math. Softw.*, 21(4) :347–371, 1995.
- [75] J. Sanchez Hubert and E. Sanchez-Palencia. *Vibration and coupling of continuous systems : asymptotic methods*. Springer-Verlag, 1989.
- [76] A. Schädle, M. López-Fernández, and C. Lubich. Fast and oblivious convolution quadrature. *SIAM J. Sci. Comput.*, 28(2) :421–438, 2006.
- [77] L. Schwartz. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. Enseignement des Sciences. Hermann, Paris, 1961.
- [78] D. Sheen, I. H. Sloan, and V. Thomée. A parallel method for time-discretization of parabolic problems based on contour integral representation and quadrature. *Math. Comp.*, 69(229) :177–195, 2000.



- [79] D. Sheen, I. H. Sloan, and V. Thomée. A parallel method for time discretization of parabolic equations based on Laplace transformation and quadrature. *IMA J. Numer. Anal.*, 23(2) :269–299, 2003.
- [80] F. Stenger. Approximations via whittakers cardinal function. *J. Approx. Theory*, 17(3) :222–240, 1976.
- [81] F. Stenger. Numerical methods based on whittaker cardinal, or sinc functions. *SIAM Rev.*, 23(2) :165–224, 1981.
- [82] F. Stenger. *Numerical methods based on sinc and analytic functions*, volume 20 of *Computational Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [83] J. Stoer. *Einführung in die Numerische Mathematik I*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1983.
- [84] A. Talbot. The accurate numerical inversion of Laplace transforms. *J. Inst. Math. Appl.*, 23(1) :97–120, 1979.
- [85] K. Trabelsi, D. Matignon, and Th. Hélie. On the numerical inversion of the laplace transform in the context of physical models with realistic damping. Technical report, Télécom ParisTech, 2009.
- [86] L. N. Trefethen, J. A. C. Weideman, and T. Schmelzer. Talbot quadratures and rational approximations. *BIT Numerical Mathematics*, 46(3) :653–670, 2006.
- [87] P. P. Valkó and B. L. Vojta. The list of papers for the numerical inversion of the laplace transforms, 2001. <http://pumpjack.tamu.edu/~valko>.
- [88] C. Wagschal. *Fonctions holomorphes, Equations différentielles*. Hermann, Paris, 2003.
- [89] E. E. Ward. The calculation of transients in dynamical systems. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, (50) :49–59, 1954.
- [90] J. A. C. Weideman. Algorithms for parameter selection in the weeks method for inverting the laplace transform. *SIAM Journal on Scientific Computing*, (21) :111–128, 1999.
- [91] J. A. C. Weideman. Optimizing Talbot’s contours for the inversion of the Laplace transform. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44(6) :2342–2362, 2006.
- [92] J. A. C. Weideman and L. N. Trefethen. Parabolic and hyperbolic contours for computing the Bromwich integral. *Math. Comp.*, 76(259) :1341–1356, 2007.
- [93] H. Werner and R. Schaback. *Praktische Mathematik II*. Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [94] L. Wuytack. On some aspects of the rational interpolation problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 11 :52–60, 1974.
- [95] K. Yosida. *Functional analysis*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, 1995. Reprint of the sixth (1980) edition.

## Résumé

Dans cette thèse, nous avons développé deux approches pour la construction de contrôleurs approchés semi-décentralisés. La thèse est partagée en deux parties, chaque partie décrivant une approche précise.

**Première Partie** Elle traite de l'approximation semi-décentralisée d'un contrôle optimal pour des équations aux dérivées partielles (EDPs) dans un domaine borné. Dans cette partie on présente une méthode de calcul de contrôle optimal pour des systèmes distribués linéaires avec un opérateur d'entrée borné ou non borné. Sa construction repose sur le calcul fonctionnel des opérateurs auto-adjoints et sur la formule de Dunford-Schwartz. Elle est conçue pour des architectures de calcul à très fine granularité, avec coordination semi-décentralisée. Enfin, elle est illustrée par des exemples portant en particulier sur la stabilisation interne de la chaleur, la stabilisation des vibrations d'une poutre, la stabilisation des vibrations dans une matrice de micro-cantilevers ...

**Deuxième Partie** Elle est consacrée à l'obtention de réalisations d'état, d'opérateurs linéaires solutions de quelques équations opératoriennes différentielles linéaires dans des domaines bornés mono-dimensionnels. Nous proposons deux approches dans le cadre de réalisations diffusives. La première utilise des symboles complexes et la seconde des symboles réels sur l'axe réel. Puis, on illustre la théorie et on développe des méthodes numériques pour le contexte d'une application à l'équation de Lyapunov issue de la théorie du contrôle optimal pour l'équation de la chaleur. Un intérêt pratique pour cette approche est le calcul en temps réel sur des processeurs organisés pour une architecture semi-décentralisée.

**Mots-clés:** Contrôle optimal distribué, Contrôle semi-décentralisée, Théorie spectrale, Equations aux dérivées partielles, Equation de Riccati, Opérateurs intégrales, Réalisation diffusive, Equation opérationnelle, Equation de Lyapunov, Calcul numérique, calcul en temps réel

## Abstract

In this thesis, we have developed two approaches to build semi-decentralized approached controllers. The thesis is divided into two distinct parts, each one dealing with its own specific method.

**First Part** It deals with semi-decentralized approximation of an optimal control for partial derivative equations in a bounded domain. In this part, we outline an optimal control computation method for linear distributed systems, with a bounded or not bounded



input operator. Its construction depends on the functional computation of self adjoint operators and on Dunford-Schwartz formula. It is suited to computation architectures with very thin granularity and semi-decentralized coordination. Finally, it is illustrated by examples dealing especially with the internal stabilization of heat, of vibrations in a beam or even in a micro-cantilevers array ...

**Second Part** We deal with derivation of state-realizations of linear operators solutions to some operatorial linear differential equations in one-dimensional bounded domains. We have developed two approaches in the framework of diffusive realizations. One is with regular symbols and the other is with symbols singular on the real axis. Then, we have illustrated the theories and we have developed numerical methods in the context of an application to a Lyapunov equation issued from the optimal control theory for the heat equation. A practical interest of this approach is for real-time computation on processors with semi-decentralized architecture.

**Keywords:** Optimal distributed control, Semi-decentralized control, Spectral Theory, Partial Differential Equations, Riccati Equation, Integral operators, Diffusive realization, Operational equation, Lyapunov equation, Computational method, Real-time computation.

