



**HAL**  
open science

# Contribution à la conception et à la réalisation des morphologies non-standard : les formes pascaliennes comme outil

Marine Bagnéris

## ► To cite this version:

Marine Bagnéris. Contribution à la conception et à la réalisation des morphologies non-standard : les formes pascaliennes comme outil. Matériaux. Université Montpellier 2, 2009. Français. NNT : . tel-00566979

**HAL Id: tel-00566979**

**<https://theses.hal.science/tel-00566979>**

Submitted on 17 Feb 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE MONTPELLIER II  
SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

# THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE MONTPELLIER II

Spécialité Doctorale : Mécanique et Génie Civil  
Ecole Doctorale : Information Structures Systèmes

présentée et soutenue publiquement par

Marine BAGNERIS

le 17 juin 2009

---

CONTRIBUTION  
A LA CONCEPTION ET A LA REALISATION  
DES MORPHOLOGIES NON-STANDARD :  
LES FORMES PASCALIENNES COMME OUTIL

---

## JURY

J.C. LEON	Professeur G-SCOP et ENSE3 Grenoble	Président Rapporteur
Y. WEINAND	Professeur EPFL Lausanne	Rapporteur
A. MARTY	Maître Assistant ENSAM Montpellier	Examineur
N. PAULI	Professeur ENSAM Montpellier	Examineur
R. MOTRO	Professeur Univ. Montpellier II	Directeur de thèse
B. MAURIN	Maître de Conférences Univ. Montpellier II	Co-directeur de thèse



*« L'histoire, c'est la réalité vulgaire pour laquelle nous sommes nés, à la hauteur de laquelle nous devons nous montrer et devant laquelle échoue la générosité inadaptée de Don Quichotte. C'est sympathique et c'est ridicule. »*

Traversée avec Don Quichotte, Thomas Mann.



## Remerciements

Ce mémoire commence par ce qui ne peut s'exprimer qu'après son achèvement... J'adresse ainsi une sincère reconnaissance à Jean-Claude Léon et Yves Weinand pour avoir accepté de rapporter sur ce travail et suscité ces fructueux échanges lors de la soutenance. Je remercie chaleureusement René Motro pour la confiance bienveillante qu'il m'a accordée, permettant ainsi à l'intuition de converger vers une concrétisation. Des relectures « arbalètesque » de Bernard Maurin, j'ai pu en teinter la couleur finale. Merci Bernard pour ces discussions et ces rires partagés qui se lient au plaisir de notre collaboration. Bien sûr, j'exprime un très respectueux remerciement à Alain Marty et à son travail qui constitue la colonne vertébrale du mien. Je me suis nourrie de tes errances passionnées entre les n-dimensions... où toi seul ne sembles t'égarer ! Je communique également mes remerciements à Nicolas Pauli pour ce projet né d'une ambition commune et qui en a permis la réalisation par l'intermédiaire du bureau d'études Abaca. Grâce à la présence de chacun, le souvenir de la soutenance s'inscrit comme un très agréable moment. Je transmets aussi mes remerciements à Manfred Grohmann pour ses encouragements et son intérêt pour cette étude bien que son emploi du temps n'ait pu le libérer pour participer au jury.

Avant ce jour J, une thèse c'est assez long pour avoir l'occasion de se promener et de croiser des personnages bien singuliers dans ce métier. Alors, un grand merci à Alexandre Martin pour avoir mis sa pensée récurive au profit de meilleurs plongeurs dans les formes gauches. Je risque gros si j'oublie Chiara Silvestri et Mr Dung Nguyen (et son épouse) qui ont égayé le quotidien d'un bureau de thésards. Je remercie Alejandra Ramirez pour ces encouragements qui me parvenaient même depuis l'autre côté de l'océan, et François Ouedraogo pour ceux qu'il m'émettait par-delà la mer ! Le LMGC compte du monde de Katia Lopez à Gille Camp et Alain Clary en passant par Farhang Radjaï et Gilbert Gobbo et je vais me taire car je ne peux pas énumérer tous ceux avec qui j'ai eu le plaisir de partager un café, une cigarette ou un sourire. Et puis ça ne s'arrange pas car grâce aux congrès, les portes du laboratoire s'ouvrent vers des horizons plus lointains et l'opportunité d'autres trouvailles. Il y a cette amitié avec Cyril Douthe depuis Venise. Y que rico sus encuentros Jaime Sanchez, Dino Juan Ignacio del Cueto, Marcos Ontiveros, Paco Francisco Javier Gordillo Aguilar y amigos mexicanos con increíbles nombres! I still can't help laughing when I remember shared instants with Andrew Borgart and Arno Pronk. Je veux également transmettre un grand merci à Claude Parisel que je ne connais pas mais qui a partagé son travail de traduction des formes pascaliennes, ce qui m'a indéniablement fait gagner beaucoup de temps dans la programmation.

Je souhaite aussi saluer d'un large sourire les nombreuses rencontres vers lesquelles ces quelques années de chemin m'ont conduite et que j'ai inévitablement la maladresse de ne pas toutes citer. Je pense à Catherine Gérardin qui continue de m'é(mer)veiller par ses trésors en tout genre. Au dissident « antiquaire de huit ans » qu'est Thierry Berthomier, tout simplement. A Bernard et Judith Chaperon, j'ai été vraiment touchée par votre présence. A Gwi, l'éternel brotha. Et à ceux qui n'ont pu être là, tels que Hélène cette « vieille mauvaise », Dawood et Anne-Lou, les punks Dim et Mathilde, le Steph ou encore Nifer et Simon avec leurs créatures vivantes et à venir.

Enfin, merci merci et encore merci aux plus proches que j'ai la pudeur de tenir trop souvent à l'écart. Fabien toujours sur le pont malgré les vents et marées de l'envers du décor. Ma petite famille qui a enfin vu ce que pouvait bien fabriquer leur sœur ou leur fille depuis tout ce temps à l'école et qui m'a concocté le meilleur des buffets. A mon père qui est parti trop tôt, au tout début de cette aventure.



# Plan général

*Mots clés*

*Sommaire*

*Notations*

## INTRODUCTION

### **PARTIE 1 : Morphologie et architecture non-standard**

- 1 Précisions sur le concept de non-standard
- 2 Une logique de continuité
- 3 Apports de la morphologie structurale
- 4 Réintégration du paramètre de Forme

### **PARTIE 2 : Formes pascaliennes, approche géométrique des outils de la représentation numérique**

- 1 Modèles communs de la CAO
- 2 Formes pascaliennes ou pFormes
- 3 Cas d'expérimentations

### **PARTIE 3 : Outils pour la conception avec les pFormes**

- 1 Caractérisation locale
- 2 Recherche de réseaux structuraux sur une pSurface
- 3 Etudes de cas
- 4 Recherche de formes par critères géométriques
- 5 Développements prospectifs

### **PARTIE 4 : Outils pour la conception avec les pFormes immergées**

- 1 pFormes immergées ou ipFormes
- 2 Développement d'outils par immersion dans une pSurface
- 3 Opérateurs de déformation
- 4 Cas d'application
- 5 Développements prospectifs

## CONCLUSION

*Annexes*

*Bibliographie*



## **Mots-clés**

ARCHITECTURE NON-STANDARD

MORPHOLOGIE STRUCTURALE

PROCESSUS DE CONCEPTION

OUTILS DE GENERATION

FORMES PARAMETREES

FORMES PASCALIENNES

PFORMES

## **Key-words**

NON STANDARD ARCHITECTURE

STRUCTURAL MORPHOLOGY

DESIGN PROCESS

GENERATIVE TOOL

PARAMETRIC FORMS

PASCALIAN FORMS

PFORMS



## Sommaire

<b>INTRODUCTION</b> .....	1
---------------------------	---

### **PARTIE 1 : Morphologie et architecture non-standard**

1	Introduction.....	7
2	Précisions sur le concept de non-standard .....	7
3	Une logique de continuité .....	8
3.1	Métaphores des sciences et techniques dans le processus créatif.....	8
3.2	L'architecture non-standard comme héritage des avant-gardes .....	9
3.3	Une immatérialité apparente .....	9
3.4	Vers une nouvelle matérialité.....	10
4	Apports de la morphologie structurale.....	12
4.1	Morphologie structurale .....	12
4.2	Des formes analytiques aux formes flexibles.....	13
5	Réintégration du paramètre de Forme.....	28
5.1	Hybridation flexible - mécanique.....	28
5.2	Retour de la géométrie .....	28
6	Conclusion .....	31

### **PARTIE 2 : Formes pascaliennes, approche géométrique des outils de la représentation numérique**

1	Introduction.....	35
2	Modèles communs de la CAO .....	36
2.1	Modèles polynomiaux .....	36
2.2	Modèles rationnels .....	48
3	Formes pascaliennes ou pFormes.....	52
3.1	Approche gestuelle .....	52
3.2	pFormes et formes de Bézier .....	60
3.3	pFormes et B-splines uniformes.....	63
3.4	pFormes et formes de Bézier rationnelles .....	66
3.5	pFormes et nurbs .....	68
4	Cas d'expérimentations.....	69
4.1	Expérimentation 1 : réalisation d'une enveloppe gauche.....	69

4.2	Expérimentation 2 : générations de morphologies non-standard .....	72
5	Conclusion .....	78

### **PARTIE 3 : Outils pour la conception avec les pFormes**

1	Introduction.....	81
2	Caractérisation locale.....	82
2.1	Points dans une pForme.....	82
2.2	Analyse des propriétés.....	84
2.3	Outils complémentaires à l'exploitation des pCourbes et des pSurfaces.....	92
3	Recherche de réseaux structuraux sur une pSurface .....	98
3.1	Lignes isoparamétriques .....	98
3.2	Lignes de courbure.....	99
3.3	Lignes asymptotiques.....	103
3.4	Lignes géodésiques .....	106
3.5	Lignes d'écoulement.....	111
3.6	Conclusion .....	112
4	Etudes de cas.....	114
4.1	Construction d'une passerelle textile .....	114
4.2	Etude comparative de réseaux structuraux.....	116
5	Recherche de formes par critères géométriques.....	121
5.1	Surfaces réglées .....	121
5.2	Surfaces développables.....	122
5.3	Surfaces à quadrangles plans .....	129
6	Développements prospectifs .....	134
6.1	Surfaces à quadrangles plans par l'algorithme de De Casteljau .....	134
6.2	Volumes de Coons .....	140
7	Conclusion .....	144

### **PARTIE 4 : Outils pour la conception avec les pFormes immergées**

1	Introduction.....	147
2	pFormes immergées ou ipFormes .....	148
2.1	ipCourbes .....	148
2.2	ipSurfaces.....	156
2.3	ipVolumes .....	157
2.4	Conclusion .....	158

3	Développement d'outils par immersion dans une pSurface.....	159
3.1	ipCourbes quelconques .....	159
3.2	ipCourbes géodésiques.....	160
3.3	ipSurfaces.....	164
3.4	Conclusion .....	166
4	Opérateurs de déformation.....	167
4.1	Théorie de la transformation .....	167
4.2	Points de contrôle.....	167
4.3	« Free-form deformation ».....	168
5	Cas d'application.....	171
5.1	Présentation du projet .....	171
5.2	Le compas comme outil.....	172
5.3	Les pFormes comme outil.....	172
5.4	Commentaires .....	174
6	Développements prospectifs .....	175
6.1	Fractals.....	175
6.2	Grille en tensegrité non-standard .....	177
7	Conclusion .....	181
	<b>CONCLUSION</b> .....	<b>183</b>
	<b>ANNEXE A</b> : Eléments de théorie des courbes.....	<b>187</b>
	<b>ANNEXE B</b> : Eléments de théorie des surfaces .....	<b>195</b>
	<b>BIBLIOGRAPHIE</b> .....	<b>205</b>



## Notations

### Espaces

$\mathfrak{R}^n$	espace vectoriel de dimension $n$
$E^n$	espace affine de dimension $n$

### Symboles

$\vec{a} \cdot \vec{b}$	produit scalaire
$\vec{a} \wedge \vec{b}$	produit vectoriel
$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$	produit mixte
$[A].[B]$	produit matriciel

### Courbes, surfaces et volumes

$i, j, k$	indices $\in \mathbb{N}^+$
$(x, y, z, w)$	système de coordonnées d'un point dans $E^4$
$(u, v, g)$	système de coordonnées paramétriques d'un point en dimension 3, généralement restreintes à l'intervalle $[0,1] \subset \mathfrak{R}$
$p_m$	point milieu
$p_i$	point de contrôle d'une courbe, d'indice $i$ dans la direction $u$
$p_{i,j}$	point de contrôle d'une surface, d'indice $i$ dans la direction $u$ et $j$ dans la direction $v$
$p_{i,j,k}$	point de contrôle d'un volume, d'indice $i$ dans la direction $u$ , $j$ dans la direction $v$ et $k$ dans la direction $g$
$p_i^r(u)$	point en $u$ intermédiaire de De Casteljaou
$p^n$	courbe de degré $n$
$p^n(u)$	point de coordonnées $u$ sur la courbe $p^n$
$p^{m,n}$	surface de degré $(m,n)$
$p^{m,n}(u,v)$	point de coordonnées $(u,v)$ sur la surface $p^{m,n}$
$p^{m,n,r}$	volume de degré $(m,n,r)$
$p^{m,n}(u,v,g)$	point de coordonnées $(u,v,g)$ sur le volume $p^{m,n,r}$
$F_i^n$	fonctions polynomiales
$B_i^n(u)$	polynômes de Bernstein de degré $n$ en $u$
$\binom{n}{i}$	coefficients du binôme de Pascal
$\binom{m}{\vec{k}}$	coefficients multinomiaux
$\frac{d^r}{du^r}$	dérivée $r$ -ième en $u$
$\frac{\partial^{r+s}}{\partial u^r \partial v^s}$	dérivées partielles croisée $r$ -ième en $u$ et $s$ -ième en $v$
$\Delta^r p_i$	opérateur de différence avant pour une courbe

$\Delta^{r,s} p_{i,j}$  opérateur de différence avant pour une surface

### Écritures matricielles

$[p^n(u)]$  vecteur ligne des coordonnées d'un point de la courbe  $p^n$   
 $[p_n]$  matrice à  $(n+1)$  lignes des points de contrôle  $p_i$   
 $[q_n]$  matrice à  $(n+1)$  lignes des points de définition canoniques  $q_i$   
 $[B_n]$  matrice colonne de taille  $(n+1)$  des polynômes de Bernstein  
 $[U_n], [V_n]$  matrices colonnes de taille  $(n+1)$  des puissances de  $u^i$  et  $v^i$   
 $[M_n]$  matrice de passage de la base canonique à la base de Bernstein, à  $(n+1)$  lignes et  $(n+1)$  colonnes  
 $[p^{m,n}(u,v)]$  vecteur ligne des coordonnées d'un point de la surface  $p^{m,n}$   
 $[p_{m,n}]$  matrice à  $(m+1)$  lignes et  $(n+1)$  colonnes des points de contrôle  $p_{i,j}$   
 $[q_{m,n}]$  matrice à  $(m+1)$  lignes et  $(n+1)$  colonnes des points de définition canonique  $q_{i,j}$

### Écritures vectorielles

$\vec{M}$  vecteur défini par le bipoint  $OM$   
 $\vec{M}'$  vecteur dérivée première du bipoint  $OM$   
 $\vec{M}''$  vecteur dérivée seconde du bipoint  $OM$   
 $\vec{M}'''$  vecteur dérivée troisième du bipoint  $OM$   
 $\vec{t}$  vecteur tangent  
 $\vec{b}$  vecteur binormal  
 $\vec{n}$  vecteur normal à la courbe  
 $\vec{N}$  vecteur normal à la surface  
 $\vec{g}$  vecteur d'accélération de la pesanteur

### Géométrie

$\rho$  courbure  
 $\rho_n$  courbure normale  
 $\tau$  torsion  
 $E, F, G$  coefficients de la première forme fondamentale  
 $L, M, N$  coefficients de la seconde forme fondamentale  
 $\lambda$  direction dans le plan  $(u, v)$   
 $\lambda_1, \lambda_2$  directions principales maximales et minimales  
 $\rho_1, \rho_2$  courbures principales maximale et minimale  
 $R_1, R_2$  rayons de courbure principaux maximal et minimal  
 $C$  courbure moyenne  
 $K$  courbure totale ou gaussienne

## **INTRODUCTION**



Ces dernières décennies sont marquées par l'émergence de nouvelles formes architecturales caractérisées par une absence d'orthogonalité. Le Musée Guggenheim de F.O. Gehry (Fig.1), reconnu comme l'une des premières réalisations de cette tendance, a transfiguré la ville de Bilbao tant par la marque d'une nouvelle architecture que par la manifestation sociale et l'acte culturel. Fruit de la collaboration entre la Fondation S. R. Guggenheim et les administrations locales, ce projet est perçu comme le plus conséquent plan de relance urbain du pays basque. L'extraordinaire impact économique généré à la suite de son ouverture en 1997, qualifié « d'effet Guggenheim », a déclenché dans le monde entier une grande demande de ce type aux architectes contemporains.

Passés ces premiers engouements, le constat des critiques est aujourd'hui moins enthousiaste sur l'ensemble de ces productions. En débridant l'audace des architectes en matière de représentation spatiale, l'outil numérique les invite à générer des formes jusqu'alors inaccessibles à la règle et au compas. Il en résulte des projets aux géométries complexes, généralement gouvernés par des intentions plastiques et déconnectés des autres paramètres de conception. Lorsqu'il est envisagé la transposition de ces abstractions à formes dites « libres » ou « non-standard » vers la réalité constructive, le débat est toutefois d'une toute autre nature.



Fig.1: Musée Guggenheim – F. O. Gehry – Bilbao – Espagne – 1997



Fig.2: Terminal – FOA – Yokohama – Japon – 2002



Fig.3: New Trade Fair – M. Fuksas – Milan – Italie – 2005

Les questionnements associés aux aspects architecturaux, structuraux et constructifs rendent en effet difficile l'émergence d'un compromis idéal. Le terminal de Yokohama (Fig.2) ou la nouvelle foire de Milan (Fig.3) matérialisent une réalité lourde de contradiction avec les ambitions de fluidité mises en avant sur les images infographiques des agences d'architectes. L'étude de la structure du Musée Pompidou de Metz (Fig.4), initialement confiée au bureau d'étude Arup, une référence mondiale dans l'ingénierie, fut finalement reprise par le groupe Terrel. Quant aux entreprises capables de fabriquer une telle ossature, l'architecte S. Ban fait remarquer qu'il n'en existe pas en France et qu'elle le sera donc en Allemagne [COR 08]. Ces problématiques de conception impliquent que ces projets « prototypes » ne respectent ni les délais, ni les coûts initialement prévus. Le nouveau Pompidou affiche ainsi trois ans de retard et une enveloppe budgétaire qui est passée de 45 millions d'euro à près de 80 millions.

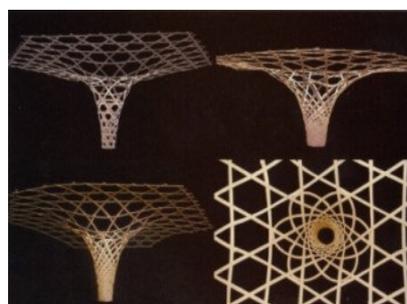
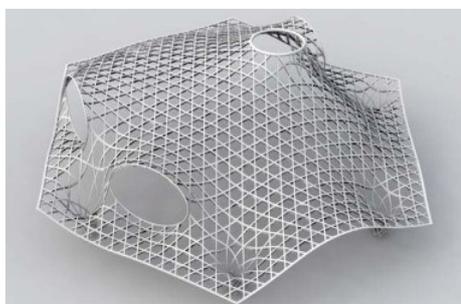


Fig.4: Maquettes de la toiture du Musée Pompidou – S. Ban – Metz – France – 2002 / 2010

De tels constats sont la conséquence probable de l'immaturation de ces approches émergentes. L'architecture non-standard pâtit ainsi d'une définition souvent décrite en termes purement visuels, alors que ce qui devrait la caractériser est davantage les moyens de sa réalisation. Cette confusion revient actuellement à restreindre la complexité à la complication.

Le présent travail va ainsi s'attacher à concentrer le débat sur la forme, caractéristique de cette architecture mais à l'origine de la plupart des incompréhensions mutuelles entre architectes, ingénieurs et entrepreneurs. L'objectif global consiste à réhabiliter une compréhension de la géométrie sous-jacente à ces objets complexes, en développant un appareil théorique et opérationnel capable d'assister les acteurs dans les différentes étapes du processus de conception.

La première partie positionne la tendance non-standard dans le contexte actuel et propose une classification des différentes formes architecturales en s'appuyant sur une analyse à partir de la morphologie structurale. Nous mettons alors en évidence l'existence de particularités pour lesquelles la forme s'exclut des autres paramètres de la conception tandis que les outils morphologiques actuels de l'ingénierie présentent des limites. Ces constats nous conduisent à la nécessité de proposer de nouvelles approches.

Nous justifions ainsi les développements de la deuxième partie qui présente l'outil génératif constituant notre base de réflexion, nommé formes pascaliennes ou pFormes par A. Marty, leur initiateur. Les pFormes abordent les formes classiques de la CAO en mettant l'accent sur un point de vue géométrique qui permet d'en comprendre les logiques de génération. Nous montrons ainsi sa pertinence par deux expérimentations menées auprès d'acteurs en formations d'architecte et d'ingénieur.

A cette perspective théorique s'ajoute des potentialités opérationnelles que nous identifions dans les deux parties suivantes. Dans la mesure où ces géométries complexes deviennent intelligibles, on s'attache à rendre accessible un vocabulaire que peuvent partager l'architecte et l'ingénieur pour communiquer sur des concepts plus élaborés. La compréhension de la génération par les pFormes permet d'accéder à la richesse contenue dans ces formes et à leur manipulation. La troisième partie propose, à cet effet, un panel d'outils basés sur l'exploitation de leurs propriétés géométriques pour contribuer activement à élaborer des solutions d'ordres mécanique et technique et ainsi faciliter des étapes de conception. La quatrième partie complète ces objectifs en utilisant le potentiel des formes immergées dans d'autres pour résoudre des problèmes de conception spécifiques. Pour chacune de ces parties, l'efficacité et la pertinence des propositions sont testées et discutées sur des études de cas concrets. De plus, des développements exploratoires présentent des alternatives structurelles et technologiques prometteuses en perspectives d'applications.

L'équipe de recherche « Conception en Structures » du LMGC (Laboratoire de Mécanique et Génie Civil), qui travaille dans le champ de la morphologie structurale, a notamment pour ambition de nouer un dialogue avec les professionnels dans une perspective d'enrichissement mutuel. Les travaux effectués dans le cadre de cette thèse de doctorat concentrent ainsi des préoccupations interdisciplinaires et visent à répondre aux attentes du bureau d'études Abaca, partenaire du financement Cifre, ce qui a permis d'en définir les axes de recherche. Nos choix d'investigations s'inscrivent dans une thématique récente, mais active, et dont l'actuelle utilité pour les acteurs de la construction est manifeste.

## **PARTIE 1**

### **Morphologie et architecture non-standard**



## 1 INTRODUCTION

Depuis la fin des années 90, des architectes expérimentent l'outil numérique pour concevoir des projets caractérisés par une absence d'orthogonalité. Free-form, liquid, blob, digital ou non-standard sont autant de qualificatifs pour cette tendance à la richesse d'expression formelle stimulée par les progrès de l'infographie. La conception de formes fluides existe depuis longtemps déjà dans les domaines de l'art visuel, du design automobile et de l'aéronautique pour des raisons de technicités et d'optimisations structurelles, quelquefois pour répondre simplement à des exigences de style. Mais en architecture, cette complexité formelle rêvée par le concepteur soulève d'importantes difficultés lorsque l'ingénieur s'attache à sa concrétisation, aussi bien en bureaux d'études que lors de la réalisation.

La première partie de ce mémoire situe la tendance non-standard dans le contexte actuel puis aborde ce chaos apparent de la multitude des propositions formelles par une analyse menée grâce à la morphologie structurale. Cette approche nous permet d'identifier des familles de formes appelant des processus de conception spécifiques. L'objectif est ainsi de mettre en évidence la singularité de cas pour lesquels :

- la forme n'est plus en interopérabilité avec les autres aspects de la conception ;
- les outils actuels de l'ingénierie manifestent leurs limites.

On fait émerger en conséquence la nécessité de proposer de nouveaux outils morphologiques pour la conception de tels objets. Cela permet de légitimer l'objectif global de ce travail de thèse, qui consiste à développer un appareil théorique et opérationnel basé sur l'approche des formes pascaliennes. Puisque le paramètre de forme peut être à l'origine d'une exclusion déstructurante, nous le positionnons alors au cœur de cette problématique de recherche et le proposons ainsi comme pivot unificateur du processus de conception.

## 2 PRECISIONS SUR LE CONCEPT DE NON-STANDARD

Un standard définit un modèle de référence caractérisé par des règles normatives. L'architecture non-standard correspond, par opposition, à des projets dont la conception est sans référence commune aux règles ordinairement admises. Cette non-conformité n'affecte généralement pas l'intégralité de la conception. Seuls certains aspects du bâti peuvent être concernés par un traitement innovant d'une solution architecturale ou technique. Aussi, la consommation énergétique, l'organisation sociale ou l'adaptation à d'autres contraintes peuvent nécessiter une attention particulière pour contribuer au sens et à la fonction du projet architectural. Il en résulte une architecture qualifiée de « non-standard », comme le projet de logements de SANAA à Gifu au Japon (Fig. 2-1), osant une gestion du collectif contemporain en restructurant le tissu urbain par une « barre » de 800m.



Fig. 2-1: Motosu Kitagata – Sanaa - Gifu – Japon – 1998



Fig. 2-2: Juan José Arreola – Nox – Guadalajara – Mexique – 2005 (compétition)

La définition du non-standard que nous proposons dans le cadre de ce travail repose sur des critères de nature morphologique, à l'image des projets présentés lors de l'exposition « Architecture Non-Standard » au Centre Pompidou en 2004 [ARC 04] ou, plus récemment, de la proposition de l'agence d'architecture Nox pour le concours d'une bibliothèque au Mexique (Fig. 2-2). Nous discuterons dans

un premier temps des raisons de l'apparition de ces formes complexes dans le paysage architectural. Au-delà d'une tendance à la dislocation structurelle passagère permise par le numérique, nous nous attacherons à analyser la problématique visant à l'inscrire dans « l'histoire et la tradition de l'architecture avec une logique assumée de continuité », comme l'a formulé B. Cache [CAC 97].

### 3 UNE LOGIQUE DE CONTINUITÉ

#### 3.1 Métaphores des sciences et techniques dans le processus créatif

L'étude de mouvements avant-gardistes ne peut être menée sans parallèle avec les développements des pensées scientifiques et des moyens techniques. Les idées portées par les cubistes, les futuristes, les surréalistes ou autres, qui leur ont succédé dans leur quête de l'abolition de la forme et des codes de l'esthétisme, sont un écho constant aux théories scientifiques et aux progrès techniques des XIX<sup>e</sup> et XX<sup>e</sup> siècles. Les concepts de la théorie de la relativité avec sa quatrième dimension temporelle ne sont pas nécessairement compris par les artistes mais ils les fascinent et nourrissent leur vocabulaire. A. Gleizes s'intéresse à la géométrie non euclidienne avec B. Riemann et N. Lobatchevsky et parcourt la Science et l'Hypothèse de H. Poincaré, tout comme M. Duchamp ou J. Metzinger. La volonté de rupture avec les modes de représentation classiques oriente leurs travaux vers l'emploi de matériaux nouveaux dont les particularités mécaniques sont l'objet de caractérisation par les scientifiques. Leurs recherches plastiques sur la déformation, la vitesse, le mouvement, l'instabilité et le hasard trouvent un vaste champ d'expression dans les matériaux élastiques, visqueux ou mous comme les élastomères (Fig. 3-1), les colles et les mousses polyuréthanes (Fig. 3-2) [FRE 04].



Fig. 3-1: Belts – R. Serra – caoutchouc vulcanisé et tube de néon bleu – Fondation Guggenheim – New York – 1966 / 1967



Fig. 3-2: Expansion n°14 – Mousse Polyuréthane – César B. – Centre Georges Pompidou – Paris – 1970

La science propose des modèles de représentations du monde et « les artistes y trouvent souvent la confirmation de certaines intuitions ou une stimulation pour l'imagination » [COU 03]. En outre, la technique leur fournit des moyens de production et de fabrication pour exprimer la perception qu'ils ont du réel. Cette attraction peut se traduire par une attitude de rejet qui ne s'en libère pas totalement, comme les multiples provocations faites à la loi de la gravité (Fig. 3-3 et Fig. 3-4).



Fig. 3-3: Château des Pyrénées – R. Magritte – 1959



Fig. 3-4: Untitled – R. Morris – 1968

Depuis près de vingt ans, le développement du numérique s'inscrit dans ce prolongement d'influences comme support à l'expression mais fait disparaître le rapport concret aux matériaux. L'outil logiciel propose des simulations, issues de modélisations qui sont elles-mêmes des interprétations du réel avec lesquelles le concepteur doit s'accorder. De fait, la métaphore de la science et de la technique dans le processus de création se présente différemment. L'usage de l'ordinateur dans la sphère créatrice est ainsi porteur de continuité mais entraîne paradoxalement une rupture.

### 3.2 L'architecture non-standard comme héritage des avant-gardes

Cette digression rapide vers l'histoire de l'art a permis de montrer que les apparitions récentes de projets non-standard dans le paysage urbain ne sont que les manifestations par le bâti d'aspirations ancrées depuis déjà longtemps dans la société. Les architectes considèrent « les flux des conditions historiques comme une matérialité privilégiée » [KWI 96]. A ce titre, J. P. Chupin s'amuse à rappeler qu'ils ont reçu une « leçon de physique et de mathématiques (sic) » des artistes [CHU 05]. A. Picon fait un parallèle ingénieux entre l'ordinateur et l'automobile, image symbolique de la beauté de la vitesse chez les futuristes [MAR 09], pour expliquer « la multiplication des projets qui ressemblent à des surfaces fluides » [PIC 05]. Grâce au numérique, l'architecte n'est plus contraint à manipuler un assemblage de formes statiques mais peut expérimenter des flux géométriques (Fig. 3-5) qui lui sont suggérés par sa culture et son environnement. Dans une société de l'information, l'exploration de systèmes à géométrie complexe est une résonance aux modèles développés par les recherches contemporaines aussi variées que la nanotechnologie, la biologie, la sociologie ou l'économie.



Fig. 3-5: *Ether/i – Decoi – Genève – 1995*

### 3.3 Une immatérialité apparente

Les premiers logiciels de dessin mis à la disposition des architectes dans les années 80 différaient peu de l'exercice du plan réalisé sur calque à l'aide de la règle et du té. L'outil correspondait avec une certaine tendance des architectes à dessiner ce qui peut être construit et à construire ce qui peut être dessiné. La démocratisation de la technologie numérique au milieu des années 90 a rendu accessibles au grand public de puissants logiciels de modélisation et de calcul initialement développés pour l'industrie de l'automobile, de l'aéronautique ou du cinéma. Les architectes étaient restreints jusqu'alors dans l'exploration formelle en raison de l'absence d'émergence de matériaux autres que le béton, l'acier ou le bois. La possibilité de « représenter » mène vers la création de maquettes de projets élaborées à partir de matériaux habituellement réservés aux plasticiens et sans caractéristique physique commune aux matériaux ordinaires de la construction (Fig. 3-6 à Fig. 3-8).



Fig. 3-6: *Astor Place Hotel* – F.O. Gehry – New York – USA – 1998 (competition)

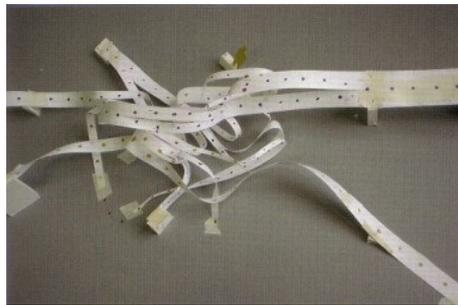


Fig. 3-7: *Son-O-House* – Nox – Son en Breugel – Holland – 2000 / 2004



Fig. 3-8: *Blood Sense Tower* – Royal College of Arts – Londres – Angleterre – 2003 / 2004

Certains trouvent dans la simulation numérique, d'une part les moyens de rupture avec la répétitivité portée par l'ère industrielle, d'autre part d'identification à une avant-garde. G. Lynn, s'affirmant comme théoricien des flux géométriques [LYN 99], est suivi d'un public international séduit à l'excès par les potentialités de la modélisation et les expériences comme le « Paperless Studio » de l'école d'architecture de l'université de Columbia. Il résulte de cet engouement des propositions architecturales très similaires et oubliées de toutes cultures constructives, coïncidant avec le développement des logiciels d'animation [RAZ 08]. Probablement tombée dans la confusion entre l'outil et l'idée, cette première vague décriée par des critiques comme K. Frampton [FRA 95] est généralement restée cantonnée à cette virtualité si prônée : G. Lynn n'a construit qu'un bâtiment et s'étonnerons-nous de le voir s'orienter vers le design industriel pour des marques comme Alessi. L'installation de voiles métalliques par F. O. Gehry dans la rotonde du Guggenheim de New York en 2001 est un exemple laborieux des conséquences de cette dématérialisation. Le processus de conception reposait sur un modèle de simulation du comportement d'une surface assimilée à un voile virtuel. L'approche qualitative de la modélisation releva d'avantage de l'animation vidéo à laquelle crurent les concepteurs. Le comportement réel du matériau leur révéla ses surprises et l'équipe fut contrainte d'investir par trois fois l'espace du musée avant de pouvoir maîtriser la forme des rideaux suspendus [SHE 02]. Le débat entre les partisans d'une architecture digitale expérimentant les limites de leur discipline et les orthodoxes soucieux de la préserver d'un risque de dématérialisation est ainsi en cours de dépassement. L'ordinateur peut en effet introduire une nouvelle matérialité qui va au-delà de la séduction par l'image pure.

### 3.4 Vers une nouvelle matérialité

L'architecture a cette particularité de devoir être réalisée. Cette matérialisation est guidée d'après des choix qui intègrent de nombreuses contraintes en termes de coût, de consommation énergétique, d'échelle, de stabilité, d'intervenants nombreux devant coopérer ensemble... Vouloir bâtir des édifices à géométrie complexe engendre une rupture avec la logique structurelle ordinaire. Si les épures stéréotomiques de P. de L'Orme s'attelaient à donner « forme stable à une matière en perpétuelle changement, nous sommes aujourd'hui confrontés à la difficulté inverse, qui impose de donner chair aux figures instables de nos conceptions » [CHU 05]. La conception de l'enveloppe est devenue plus cruciale que d'autres aspects structureux du bâtiment. Face à ces dilemmes techniques, les ingénieurs sont confrontés à deux « écoles » d'architectes. Z. Hadid, F. O. Gehry ou Coop Himmelb(l)au (Fig. 3-9) imposent une forme reléguant l'ingénieur à prouver sa rationalité constructive en concevant un système structurel qui en épouse les contours. En comparaison, les démarches de S. Ban, T. Ito (Fig. 3-10) ou L. Spuybroek (Fig. 3-11) semblent plus attirées vers l'exploration des possibilités matérielles

et formelles. Néanmoins, il ne s'agit pas de catégoriser gratuitement. Chacun de ces projets est unique et exprime une complexité propre, à recaler dans un contexte toujours particulier en terme de délai ou de capacité de calculs disponibles, comme en témoigne M. Grohmann, ingénieur directement impliqué dans la conception de la BMW Welt de Munich. Toutefois, l'émergence de certaines approches permet de se prononcer pour une nouvelle matérialité de l'architecture non-standard sous-tendue par l'emploi de l'outil numérique.



Fig. 3-9: BMW Welt – Coop Himmelb(l)au – Munich – Allemagne – 2007



Fig. 3-10: Parc de relaxation – T. Ito – Torrevieja – Espagne – 2006

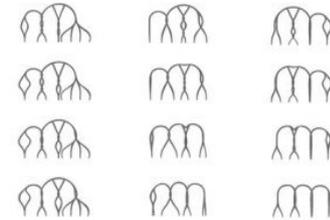


Fig. 3-11: Jalisco – Réflexions sur les arches – Nox – Guadalajara – Mexique – 2005

D'une part, l'évolution numérique est propice à l'intégration de matériaux innovants. L'implémentation de code de calculs avec des théories de comportement mécanique plus élaborées (anisotropie, plasticité...) va vers une prise en compte des propriétés physiques de la matière, au détriment de son utilisation passive. Cette extension n'est pas le thème de cette thèse, mais nous verrons comment les possibilités de génération de formes complexes lancent une piste vers la modélisation de matériaux innovants.

D'autre part, il s'agit de définir une « syntaxe constructive claire » pour répondre au constat d'une « crise tectonique » [PIC 07] où des systèmes structuraux sont générés sans que l'on dispose de modèles d'intelligibilité. La maîtrise de cette complexité exige un partage des compétences entre les architectes, les ingénieurs et les industriels dès la phase de conception pour garantir la transmission des intentions initiales jusqu'à la réalisation. Cette interaction intime entre conception et matérialité peut remettre en question la traditionnelle identité de l'architecte ou de l'ingénieur [PIC 05], puisque le projet devient le résultat d'un travail commun, conjuguant esthétique et rationalité structurelle. Nous rappellerons dans un prochain paragraphe comment l'architecte a pu être écarté de la conception des structures à grande portée exigeant des comportements mécaniques optimaux comme les résilles ou les coques. Les potentialités du numérique appellent dès lors à une réappropriation de la conception par l'architecte et à une continuité du savoir-faire de l'ingénieur qui profite de l'extension de ses outils. Comme le souligne J. Schlaich [SCH 07], l'ingénierie n'intervient pas seulement de façon réductrice pour proposer des solutions plus « raisonnables » mais participe dès la conception pour offrir plus de créativité et de liberté. En parallèle, les progrès de la fabrication par machines à commande numérique renforcent cette nécessaire collaboration pour en exploiter les possibilités techniques. Une telle redéfinition du rôle de l'ingénieur dans le processus de conception a déjà été adoptée par M. Sasaki [SAS 05], M. Ikeda [IKE 04] ou C. Balmond, l'initiateur de l'Advanced Geometry Unit d'Arup [BAL 06].

Ce mémoire ambitionne ainsi de participer au développement de l'interopérabilité des outils de l'architecte et de l'ingénieur, par l'élaboration d'un vocabulaire commun capable d'assurer la transmission des informations inhérentes au processus de conception. L'argumentaire de cette proposition trouve des moyens supplémentaires d'analyse et de justification par l'intermédiaire de la morphologie structurale. Ce concept, développé notamment au sein de l'équipe « Conception en Structures » du Laboratoire de Mécanique et Génie Civil (LMGC) pour l'analyse des systèmes en tenségrité et des membranes architecturales, permet de proposer une grille de lecture dans cette multitude de possibilités formelles.

## 4 APPORTS DE LA MORPHOLOGIE STRUCTURALE

### 4.1 Morphologie structurale

#### 4.1.1 Contexte et définition

Il est intéressant de rappeler qu'en 1991, le groupe de travail « Structural Morphology Group » (SMG) se constitua au sein de l'International Association for Shell and Spatial structures (IASS). T. Wester le présenta comme un « enfant de l'esprit de l'époque », dont la création était motivée par un désir de clarté dans l'expression structurale, en réponse à l'avènement de l'ordinateur dans les pratiques professionnelles de l'architecte et de l'ingénieur [WES 97]. La morphologie structurale se définit comme l'étude de la forme en relation aux cheminements des forces transitant dans les éléments structuraux la matérialisant. Cette étude exige l'interaction de nombreux champs disciplinaires pour être abordée dans la perspective des forces, des matériaux, de l'énergie, du cycle de vie, des moyens de production, de la fonction, du coût, de la perception, de l'écologie... Chacun de ces paramètres suppose un point de vue particulier qui contribue à la description de la nature et du langage spécifique à la composition structurale. Cette approche a pour objectif de contribuer à une prise de décisions éclairées lors du processus de conception.

#### 4.1.2 Paramètres de conception : de « 0 à 1 »

Dans le cadre de ce travail, nous ne pouvons couvrir tout le spectre des paramètres intervenant lors de la réalisation d'un projet d'enveloppe complexe. Il nous apparaît néanmoins utile d'identifier les principaux d'entre eux et de les organiser pour comprendre les degrés de liberté et les contraintes du concepteur pouvant agir seul ou en équipe. Cinq paramètres (Fig. 4-1) peuvent être considérés comme étant directement liés aux compétences de l'ingénierie [MOT 93] :

- **Forme** : ce paramètre peut correspondre à la forme de chaque constituant ou à l'ensemble du système. Les informations géométriques sur les dimensions et les localisations des éléments peuvent généralement suffire, mais des descriptions supplémentaires en terme de rayons de courbure sont par exemple très utiles dans le cas des surfaces à double courbure.
- **Force** : la "Force" est le terme générique pour la description des caractéristiques mécaniques des actions de chargement, des contraintes, de la précontrainte, des déformations, des déplacements...
- **Structure** : elle doit être comprise selon une signification systémique, décrivant l'assemblage des composants et les conditions aux limites déterminées par les concepteurs. Ce paramètre peut aussi être désigné comme la structure relationnelle du système.
- **Matériau** : nous faisons ici référence au comportement mécanique des différents matériaux employés, caractérisé par des tests expérimentaux donnant accès à la rigidité, la rhéologie...
- **Technologie** : parce que les moyens de réalisation doivent être maîtrisés dès le processus de conception, l'ensemble des aspects technologiques associés sont inclus dans la classe des paramètres. Il s'agit, par exemple, des processus industriels de fabrication, des techniques d'assemblage...

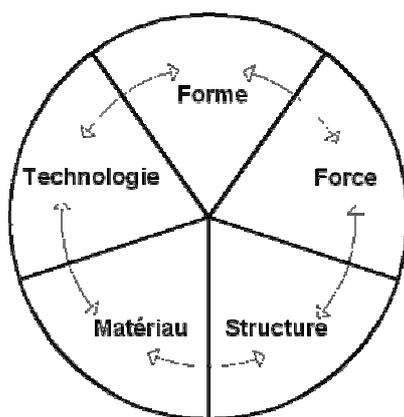


Fig. 4-1: Schéma conceptuel du couplage « Forme-Force »

L'étude des couplages et des relations entre ces paramètres permet d'identifier des dénominateurs communs et de faire ainsi émerger des familles de formes. Dans le constat actuel d'une tendance prononcée vers des formes à fortes modulations de courbure, la morphologie structurale offre des moyens d'analyse susceptibles de faire émerger des critères d'interopérabilité et révèle une grille de lecture simplifiant la complexité du tout [BAG 08]. Nous identifions principalement trois classes de formes à double courbure : les formes « analytiques », les formes « mécaniques » et les formes « flexibles ».

## 4.2 Des formes analytiques aux formes flexibles

### 4.2.1 Formes géométriquement contraintes ou formes analytiques

Nous avons choisi l'expression de formes analytiques pour celles qui sont conditionnées par une définition géométrique. Cette famille rassemble les formes que l'on retrouve dans l'architecture classique (Fig. 4-2) comme le cercle, entité continue de courbure jusqu'à sa représentation discontinue minimale par le triangle en passant par les polygones et le carré. En montant en dimension, elles sont déclinées en cylindre, tore, cône, sphère, cube, ellipsoïde, etc. Les surfaces réglées, créées à partir de lignes directrice et génératrice, y sont aussi incluses. A notre connaissance, nous les retrouvons dans l'architecture essentiellement sous leur expression quadrique, c'est-à-dire des surfaces algébriques de degré 2, les plus simples après le plan. Ces formes et leurs intersections constituent un vocabulaire courant dans la construction, maîtrisé pour générer de la double courbure.

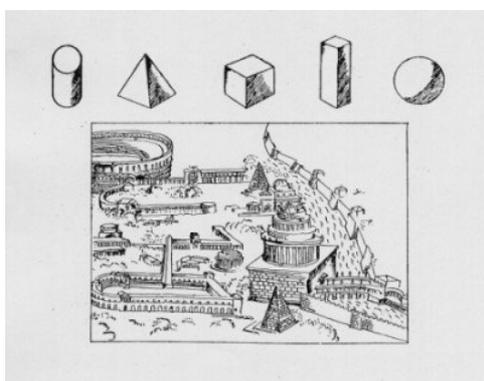


Fig. 4-2: Formes de l'architecture classique – Le Corbusier – Vers une architecture – 1923

#### 4.2.1.1 Arches, voûtes et dômes

Les voûtes ou les dômes répondent à ce critère, principalement par leurs moyens de réalisation technique et par leurs modes de génération géométrique. Généralement dérivée du cercle, leur forme conduit à une surface de révolution facile à dessiner mais également à construire si les difficultés liées aux problèmes d'échelle sont écartées (Fig. 4-3). L'histoire de l'architecture témoigne de nombreux exemples expérimentant des solutions innovantes. L'approche de F. Brunelleschi relève typiquement d'une méthodologie alliant démarche créatrice, connaissance et recherche scientifique. L'étude de la coupole pour Santa Maria del Fiore à Florence (Fig. 4-4) intégra dès le début la forme, les matériaux, la technologie de mise en œuvre ainsi que le comportement structurel en un seul processus, également renforcé par des tests expérimentaux sur des modèles au 1/8<sup>e</sup>. Le concept de double coque, réponse novatrice aux contraintes imposées (travail en hauteur, cintre impossible à mettre en œuvre...), naquit probablement de cette réalisation.

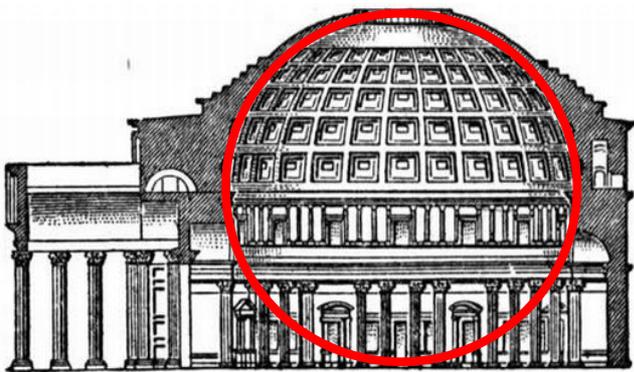


Fig. 4-3: Panthéon – Rome – Italie – IIe siècle

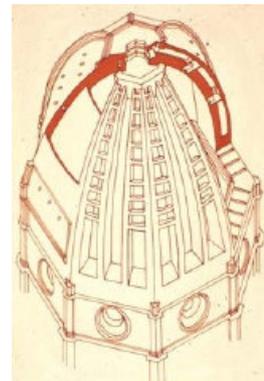


Fig. 4-4: Coupole de la Santa Maria del Fiore – F. Brunelleschi – Florence – Italie – 1420 / 1446

#### 4.2.1.2 Surfaces réglées

Les paraboloides hyperboliques, les hyperboloïdes de révolution ou les conoïdes ont été préférentiellement utilisés pour la réalisation de coques minces en béton. La présence de génératrices en lignes droites se déplaçant sur des profils simplifie la réalisation des coffrages. L'œuvre de F. Candela magnifie les potentialités de la maîtrise du paraboløide hyperbolique aux directrices rectilignes, en dépit de la quantité de main d'œuvre nécessaire à sa réalisation (Fig. 4-5). Si les directrices deviennent circulaires, la surface générée est alors un hyperboloïde de révolution à une nappe. Cette morphogenèse fut ultérieurement reprise pour la réalisation de tours de refroidissement. Pour d'avantage de rapidité de mise en œuvre, le bureau d'études Schlaich Bergermann & Partner opta pour une résille de câbles tendus, orientés bidirectionnellement selon les génératrices (Fig. 4-6).

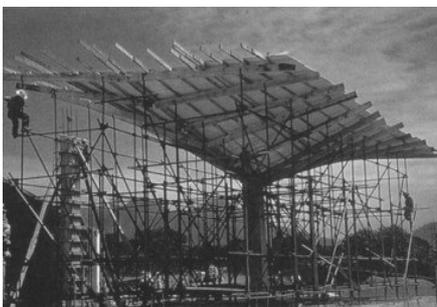


Fig. 4-5: Coque en « pH » – F. Candela – 1953



Fig. 4-6: Tour de refroidissement – réseau de câbles – Schlaich Bergermann & Partner – 1974

#### 4.2.1.3 Opérations de combinaisons (opérations booléennes)

Les diverses possibilités de combinaisons par intersection, soustraction et union de formes permettent de générer des lignes gauches ou des surfaces à double courbure. Ces techniques peuvent s'inscrire dans le savoir-faire traditionnel des artisans de la construction, comme en témoignent de nombreux monuments (Fig. 4-7 et Fig. 4-8).



Fig. 4-7: Bazar – Istanbul – Turquie – 1455

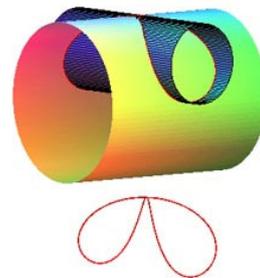


Fig. 4-8: Intersection de deux cylindres générant une courbe gauche

La richesse de représentation graphique offerte par l'ordinateur a permis de représenter cette complexité architecturale. Des surfaces complexes sont obtenues à partir de formes simples sans que la morphogenèse soit immédiatement intelligible. La volonté de forme, apparemment libre, est traduite tandis que la définition mathématique claire de la géométrie est exploitable aux étapes de calcul et de fabrication des éléments. La poursuite des travaux de la Sagrada Familia a nécessité des recherches en modélisation numérique par les universités UPC à Barcelone et RMIT à Melbourne, en collaboration avec le bureau d'études en charge du chantier, pour allier les intentions architecturales de A. Gaudí aux moyens techniques contemporains [BUR 99]. Il s'agit d'une actualisation des méthodes morphologiques employées par A. Gaudí pour traduire des formes organiques à partir de combinaisons d'un ensemble de formes analytiques élémentaires (Fig. 4-9 et Fig. 4-10). Par ce biais, l'analyse des structures en béton et la définition des coffrages font appel aux outils actuels de l'ingénierie et de la technique.

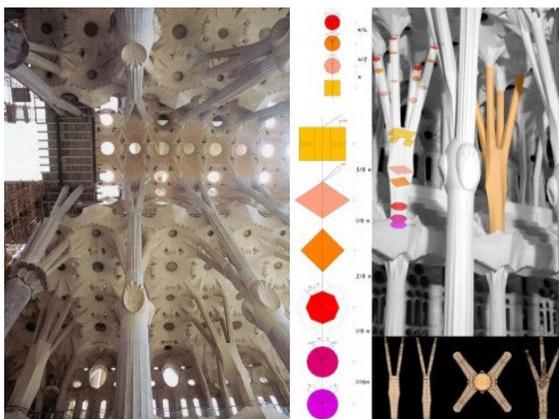


Fig. 4-9: Colonnes de la Sagrada Familia – A. Gaudí – 1882 / ...

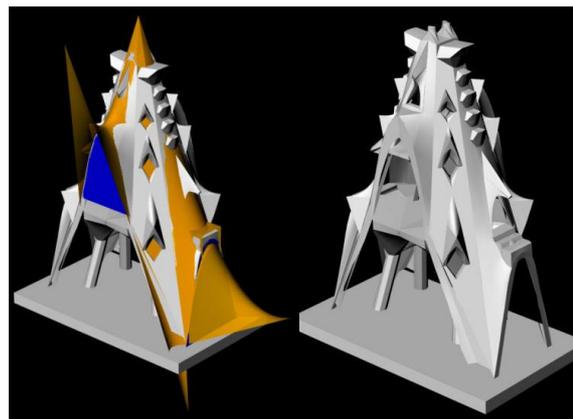


Fig. 4-10: Toit de la nef – A. Gaudí – 1882 / ...

Concernant la construction de coques minces en béton, l'œuvre de R. Bradshaw est très illustrative de l'utilisation de la géométrie comme principe générateur [BRA 02]. La figure (Fig. 4-11) montre ainsi une coque de 37m de portée dont la forme est le résultat de l'intersection de deux tores (Fig. 4-12).



Fig. 4-11: Coque 37m de portée – 64-127mm d'épaisseur sans nervure ni raidisseur – R. Bradshaw

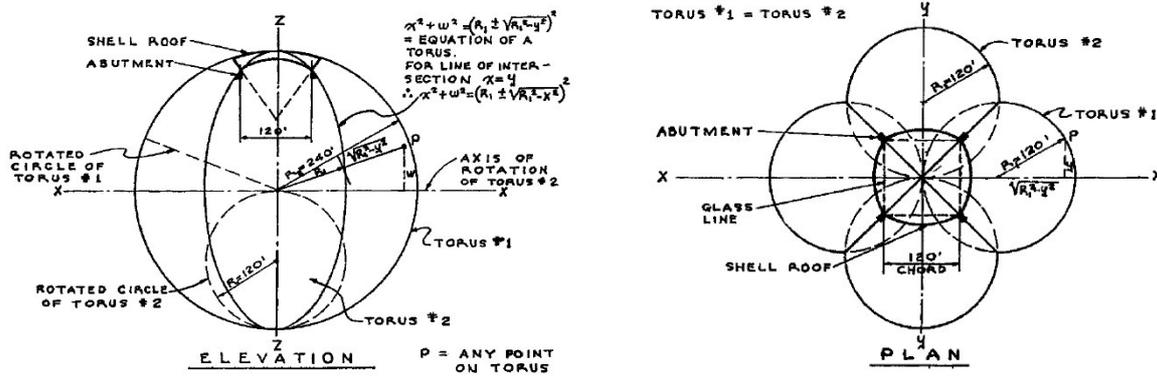


Fig. 4-12: Morphogenèse de la coque

#### 4.2.1.4 Cas d'étude de forme analytique

La lentille de la station de métro Saint-Lazare à Paris (Fig. 4-13) a une allure de goutte d'eau mais est conçue comme une surface de révolution, issue de la combinaison d'une sphère et d'un tore [BAL 05]. Trois étapes sont nécessaires pour comprendre la forme (Fig. 4-14) :

- à partir d'un tore, on définit une sphère de telle sorte qu'elle soit tangente à l'extérieur du tore. Cette condition de tangence crée un cercle d'intersection qui délimite une calotte sphérique en partie supérieure ;
- pour délimiter la surface, on considère ensuite un plan incliné A intersectant la partie torique inférieure ;
- le réseau quadrangulaire à partir duquel est déterminé le positionnement final des 108 panneaux de verre et des arcs porteurs est le résultat de l'intersection de plans radiaux avec la surface (plan B). Cette opération génère des panneaux gauches symétriques, à l'exception de 36 modèles uniques, réduisant ainsi légèrement le nombre de moules de fabrication.



Fig. 4-13: Lentille Saint-Lazare – ARTE – J.M Charpentier et Associés – Paris – France – 1997 / 2003

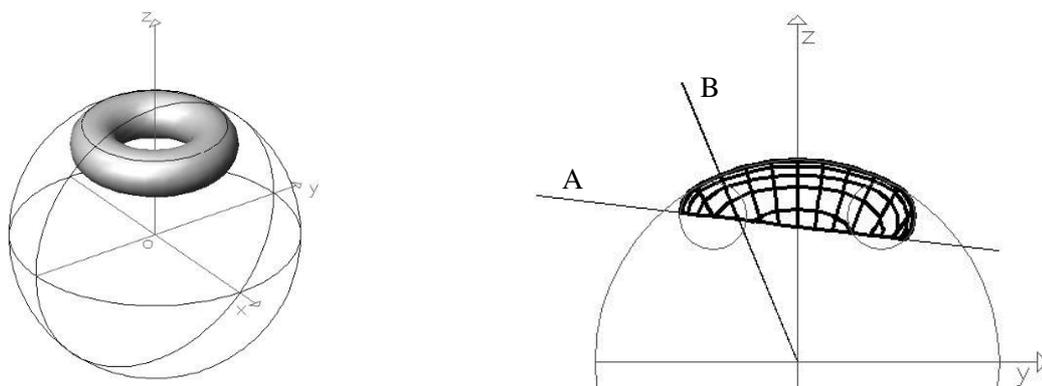


Fig. 4-14: Morphogenèse de la lentille

Plus en détail, l'intersection du plan B avec la partie sphérique génère un grand cercle, c'est à dire une ligne géodésique. En raison des propriétés de ces lignes, les normales aux arcs sont alors orthogonales à la calotte et cela facilite la conception des détails de connexion entre structure et enveloppe. Cet alignement n'est toutefois plus conservé dans la partie torique où leur inclinaison varie. La logique géométrique adoptée permet d'identifier clairement les problèmes techniques : dans ce cas, il s'agit de la connexion entre la peau et la structure primaire en partie torique. Ce détail est résolu en utilisant un nœud sphérique qui permet de corriger la variation d'inclinaison avec la surface [VER 03]. En lien avec le paramètre de Force, les panneaux en verre feuilleté sont dimensionnés pour un cas critique de chargement de type accidentel (vandalisme). Les arcs en acier inox extrudé ont une section en ogive dont on augmente la hauteur pour accroître l'inertie et renforcer les zones fortement sollicitées par la poussée et la flexion en la partie torique. Les pièces de connexion aux croisements des arcs sont moulées individuellement et réalisent des nœuds d'encastrement, à  $90^\circ$  dans la partie sphérique et variant en zone torique. Des câbles en croix de Saint-André assurent ensuite le contreventement de l'ensemble des panneaux gauches.

Ces informations, incomplètes pour la description de l'ensemble du projet, permettent néanmoins de renseigner les paramètres de conception associés, définis par un schéma de morphologie structurale (Fig. 4-15). Pour ce projet, nous pouvons observer la fluidité de la transmission de l'information entre chacun des intervenants à chaque évolution du projet. Il est intéressant de remarquer que l'ingénierie a été menée par RFR, le bureau d'études fondé par P. Rice qui fut en charge du calepinage des voussoirs en béton des enveloppes du Sydney Opera House de J. Utzon. Ce projet remarquable fut un « cauchemar d'ingénieur » jusqu'à ce que l'équipe de conception conçoive les enveloppes comme les portions d'une sphère et détermine ainsi les moyens de les réaliser.

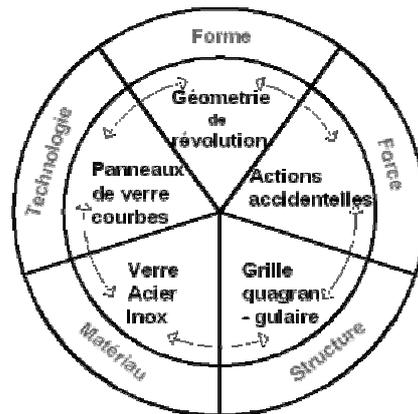


Fig. 4-15: Schéma conceptuel de morphologie structurale

#### 4.2.2 Formes mécaniquement contraintes ou formes mécaniques

Lorsqu'un fort couplage existe entre les paramètres de Forme et de Force, nous classons le système constructif dans la famille des formes mécaniquement contraintes. Un tel lien exige une étape de recherche de forme qui définit une géométrie assurant les conditions d'un équilibre statique. En fonction des conditions mécaniques imposées, on différencie les systèmes funiculaires des systèmes précontraints et autocontraints. Des logiciels dédiés aux processus de recherche de forme font aujourd'hui partie des outils des ingénieurs spécialisés. Toutefois, le recours aux modèles physiques demeure un moyen complémentaire pour appréhender et contrôler la morphogenèse. Les concepts de rigidité, de double courbure et d'équilibre géométrique ne sont en effet pas nécessairement intelligibles si l'on se limite à une visualisation graphique des formes résultantes. Par contre, ils deviennent perceptibles sur une maquette. Ces deux méthodes, physique et numérique, sont indissociables pour stimuler un échange tant pédagogique [LIN 07] que collaboratif entre concepteurs [KAP 02].

##### 4.2.2.1 Formes funiculaires

L'étude des désordres dans la structure de Saint Pierre de Rome suggéra à A. Poleny le principe de forme funiculaire obtenue pour un chargement donné. Cependant, il revient à A. Gaudi de l'utiliser comme outil de conception pour rechercher la forme de systèmes comprimés (Fig. 4-16) par inversion du funiculaire associé (Fig. 4-17) [TOM 89].



Fig. 4-16: Sagrada Família – A. Gaudi – Barcelone – Espagne – 1882 / ...



Fig. 4-17: Funiculaire de la Sagrada Família – A. Gaudi – 1882

En 1971, F. Otto expérimenta l'équilibre funiculaire appliqué à un réseau de câble (Fig. 4-18) pour modéliser le grid-shell de Mannheim (Fig. 4-19), initialement temporaire mais toujours en place.

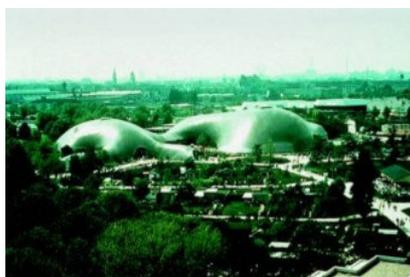
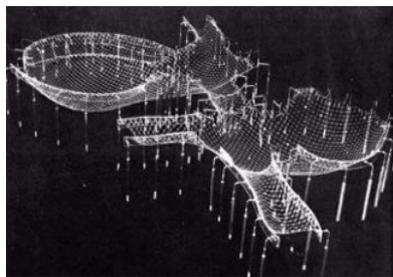


Fig. 4-18: Recherche de forme

Fig. 4-19: Mannheim – Mutschler and Langner – F. Otto – Ove Arup & Partners – Germany – 1971

H. Isler généralisa le funiculaire du câble à la surface pour créer d'inégalables coques en béton [CHI 00]. La surface à l'équilibre sous son poids propre (Fig. 4-20) est obtenue en imbibant un tissu de résine qui durcit en polymérisant (Fig. 4-21) ou en profitant du climat hivernal pour transformer l'eau en glace rigidifiante. Il testa également l'obtention de funiculaires sous pression interne en insufflant de l'air dans une membrane fixée en rive.

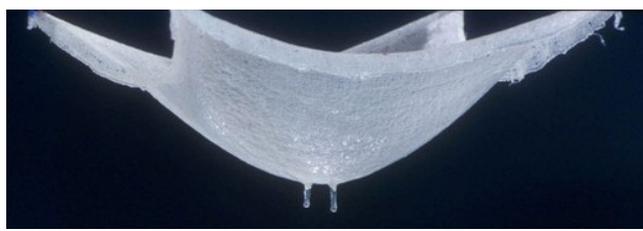


Fig. 4-20: Tennis – H. Isler – Crissier – Suisse – 1980 / 1985

Fig. 4-21: Processus de recherche de forme associé

Aujourd'hui, la complexité tridimensionnelle des ponts et des passerelles conçus par Schlaich Bergermann & Partner dépasse les possibilités de recherche de forme par modèles physiques et illustre la parfaite maîtrise des algorithmes de génération de formes funiculaires (Fig. 4-22 et Fig. 4-23).

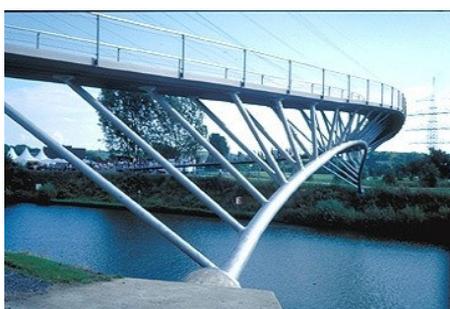


Fig. 4-22: Passerelle – Schlaich Bergermann & Partner – Ripshorst – Allemagne – 1997

Fig. 4-23: Passerelle – Schlaich Bergermann & Partner – Bochum – Allemagne – 2003

#### 4.2.2.2 Formes précontraintes et autocontraintes

La rigidité d'un réseau de câbles ou d'une membrane à double courbure inverse dépend de sa prétension. La traction est transmise par descente de charge aux ancrages, par compression et/ou flexion dans les mâts et les supports de fixation. Les structures tendues pionnières conçues par F. Otto comme l'Institut des Structures Légères de Stuttgart (Fig. 4-24), réalisé sur la base d'un modèle physique (Fig. 4-25), ou le complexe olympique de Munich, expérimentant la méthode des densités de

forces, demeurent parmi les réalisations emblématiques. Le film de savon qui produit naturellement une surface d'aire minimale est mis à profit pour la réalisation de maquettes. Dans les années 70, l'absence de matériau toile approprié pour reprendre de telles sollicitations explique les premières approches discontinues matérialisant la surface par des réseaux de câbles structuraux. Les progrès de l'industrie des textiles architecturaux ont ensuite permis de considérer une approche continue. Ce passage de la modélisation discrète à la modélisation continue de la matière s'est parallèlement opéré dans les modèles numériques de formes à l'équilibre. Les premières résolutions numériques basées sur la méthode des densités de forces [SHE 74] assimilent elles aussi la forme à l'équilibre à un réseau de câbles. Plus tard, les modélisations par méthodes de relaxation dynamique [BAR 84] et d'éléments finis permettent de considérer des éléments surfaciques où les gradients de contrainte sont imposés.



Fig. 4-24: Institut des Structures Légères – F. Otto

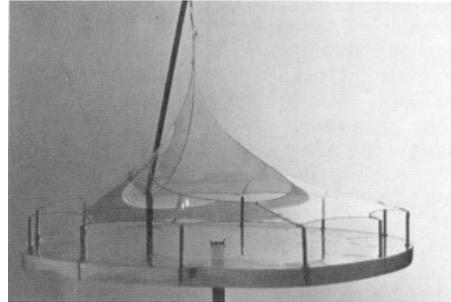


Fig. 4-25: Recherche de forme – film de savon

Nous mentionnons également les systèmes auto-contraints, autrement appelés systèmes en tenségrité, par souci d'exhaustivité. Ils n'ont que rarement quitté [KAW 01] la sphère exploratoire en raison des difficultés technologiques qu'ils soulèvent. Des études précédentes [MOT 05] et nos travaux exposés en partie 4 montreront toutefois que nous pouvons générer de la double courbure en tenségrité.



Fig. 4-26: Sleeping Dragon – K. Snelson – 2002 / 2003

#### 4.2.2.3 Cas d'étude de forme mécanique

La structure Marsyas (Fig. 4-27) conçue par A. Kapoor a investi la salle des turbines de la Tate Modern Gallery à Londres en 2002. Il s'agit d'une membrane continue d'une portée monumentale de 140m environ, réalisée en moins de neuf mois depuis la commande jusqu'à la livraison. Pendant trois mois, le sculpteur, en collaboration avec une équipe d'ingénieurs d'Arup, envisagea la faisabilité de plusieurs propositions formelles impliquant différents matériaux et techniques de mise en œuvre [BAL 03]. La proposition finale fut le résultat d'intenses échanges et de développements spécifiques à l'expression et à la communication des problématiques propres à chacun des intervenants. La complexité de la forme ne pouvant s'exprimer par des croquis à main levée, des maquettes réalisées à l'aide de tissu élastique permirent des explorations formelles (Fig. 4-28). Le souhait d'un affinement important des « trompes » éloigne la géométrie désirée de la forme d'un film de savon pour lequel la tension est homogène. Par conséquent, la recherche de forme s'effectua sur modèle numérique pour imposer une répartition non homogène des tensions dans la membrane. Pour aider à sa visualisation

tridimensionnelle, des maquettes furent produites par imprimante 3D (Fig. 4-28) et insertion du modèle numérique dans un environnement virtuel, à l'image d'un jeu vidéo dans lequel les concepteurs pouvaient « évoluer ».



Fig. 4-27: Marsyas – A. Kapoor – Londres – Angleterre – 2002

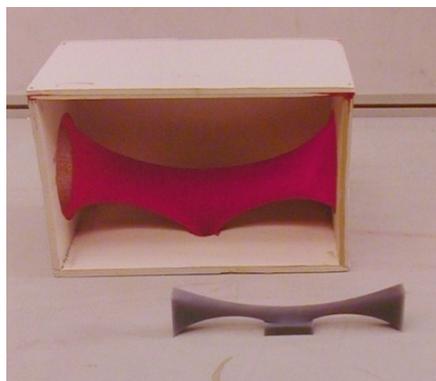


Fig. 4-28: Maquettes d'étude



Fig. 4-29: Visualisation des éléments de toile

La membrane en PVC précontraint (Fig. 4-29) fut ainsi calculée à Londres, fabriquée à Lyon puis assemblée en Bulgarie d'après des plans de découpe faits à Bath en Angleterre et imprimés en taille réelle en Belgique. Elle est fixée par des sangles sur trois anneaux en acier de 30m de diamètre exigeant un cintrage très précis dit « par induction ». Deux anneaux sont positionnés verticalement à chaque bout de la toile et respectivement ancrés en cinq points étudiés pour reprendre l'inhabituelle prétension (1500daN/m par endroit) les sollicitant en flexion et en torsion (due au mode de fixation de la toile s'enroulant sur les tubes). Le troisième anneau prétend la toile par son poids propre. Les exigences de ce projet révèlent un fort couplage des différents paramètres de conception et leurs communications à chacun des intervenants pour aboutir à l'esthétique finale. Le schéma conceptuel de morphologie structurale permet d'en synthétiser les caractéristiques (Fig. 4-30).

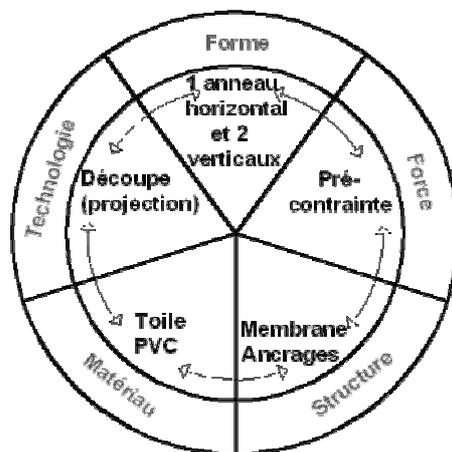


Fig. 4-30: Schéma conceptuel de morphologie structurale

#### 4.2.3 Formes flexibles

Il est manifeste que la majeure partie des projets free-form, non-standard ou autre appellation, proposés par les architectes contemporains ne relèvent ni des critères géométriques, ni des critères mécaniques précédemment présentés. Ces produits de l'architecture digitale entraînent une complexité morphologique réduite à une complication formelle, difficilement communicable aux ingénieurs et aux entreprises. Nous les nommons aussi « formes flexibles » car elles sont souvent caractérisées par de

fortes modulations de courbures, modifiables à l'infini par le calcul. Bien que ces formes nécessitent toujours une représentation numérique, la recherche d'une morphologie peut, selon les architectes, faire aussi appel à la fabrication de modèles physiques.

#### 4.2.3.1 *Modèle physique*

Comme précisé précédemment, l'élaboration de maquettes sculpturales est souvent encouragée par les outils de digitalisation qui permettent de les convertir en modèles numériques. F. O. Gehry est un pionnier dans l'utilisation de ces techniques, et plus particulièrement du logiciel CATIA développé initialement pour l'aéronautique par Dassault Systèmes. A partir de croquis, ses collaborateurs construisent des maquettes sur lesquelles sont appliquées des modifications motivées par des critères plastique, volumétrique, fonctionnel...



Fig. 4-31: Maquettes d'études pour la Fondation Louis Vuitton – F.O.Gehry & Partners – Paris – France – 2010

Dès que la maquette répond aux attentes de l'architecte, elle est numérisée point par point pour être étudiée sur cette plateforme logicielle (Fig. 4-32). L'analyse mécanique résultante et les contraintes techniques influent sur la forme digitale et nécessitent une actualisation des maquettes du projet. Chacun des changements réclame alors l'accord de l'architecte et de nombreux allers et retours entre maquettes et modèles virtuels.



Fig. 4-32: Digitalisation de la maquette de l'EMP – F.O.Gehry – Seattle – USA – 1995 / 2000



Fig. 4-33: Maquette du Pompidou 2 – Nox – Metz – France – 2003 (compétition)

Le recours à ces technologies ne signifie toutefois pas nécessairement une telle domination de la forme. L. Spuybroek de l'agence Nox est par exemple très influencé par les travaux de F. Otto. Ses propositions formelles apparaissent initialement gratuites mais reposent généralement sur des concepts générateurs géométriques, voire mécaniques. Il fait morphologiquement appel à des modèles physiques (Fig. 4-33) qu'il traduit ensuite numériquement en associant un processus évolutif respectant certaines règles. La structure du Jeongok Prehistory Museum (Fig. 4-34) est ainsi constituée d'arcs en acier tubulaires composés de portions de cercles (Fig. 4-35). Ce projet constitue un exemple d'une recherche locale de règles géométriques. Il demeure cependant une indétermination géométrique globale sur l'enveloppe et un manque de réversibilité, car de telles exigences sont rarement des règles

génératrices en intégralité. Chaque modification de la surface nécessite ainsi une reprise fastidieuse de la forme.



Fig. 4-34: Jeongok Prehistory Museum – Nox – Jeongok Gyeonggi-do – Corée du Sud – 2005 (compétition)

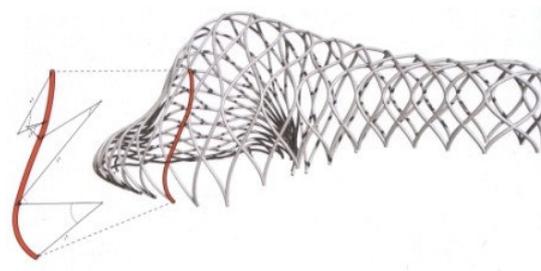


Fig. 4-35: Structure en arcs tubulaires à rayons de courbure constant par morceaux

#### 4.2.3.2 Modèle numérique

Certains concepteurs recherchent une scénarisation de l'espace et du construit à travers l'utilisation de logiciels dédiés à l'industrie du cinéma ou du jeu vidéo. Des notions abstraites telles que le dynamisme ou l'analyse de flux multiples sont alors considérées comme bases conceptuelles. Ces approches relèvent souvent de l'observation des conséquences de la variabilité des paramètres algorithmiques sur la forme. Des concepts virtuels surgissent comme les « Motion Scapes » d'Asymptote Architecture, dont la morphologie est le résultat d'un traitement de données sur le mouvement urbain. Néanmoins, les matérialisations sont rares. Des Motions Scapes, dont les premières images datent de 2000 (Fig. 4-36), ont été réalisés pour la première fois en 2008 à l'échelle de l'objet domestique lors d'une exposition dans une galerie d'art contemporain (Fig. 4-37). Nous rappelons également celle de K. Oosterhuis qui, au sein du groupe de recherche Hyperbody de l'université de Delft en Hollande, a pu expérimenter « The muscle » (Fig. 4-38). Cette forme est adaptative et présente un « comportement » développé à partir d'une logique d'animation des jeux vidéo, qui se modifie en fonction d'impulsions transmises par des capteurs externes excités par les personnes.

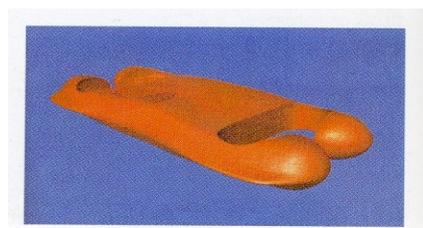


Fig. 4-36: Motion Scape – Asymptote – 2000



Fig. 4-37: Motion Scape – Baldaquin de Pury – Asymptote – Phillips de Pury & Company – New-York – 2008



Fig. 4-38: The muscle – Kas Oosterhuis & Hyperbody Research Group – Centre Pompidou – Paris – 2004

L'utilisation des modèles numériques ne peut être toutefois réduite à ce type d'approches, qui proviennent plutôt du fort engouement primaire pour les potentialités du numériques que nous avons déjà évoqué.

La complexité des propositions « flexibles » d'architectes comme Z. Hadid ou Coop Himmelb(l)au font intensément appel à la représentation numérique à chaque étape du processus de conception, auquel participe initialement l'équipe d'ingénieurs. La forme du toit du centre d'exposition BMW Welt à Munich (Fig. 4-39) fut générée par l'application de charges virtuelles sur deux grilles (Fig. 4-40) constituant les faces d'un gigantesque treillis spatial [GRO 07]. Une fois la forme désirée atteinte, les deux surfaces déformées furent reliées par les éléments verticaux et diagonaux pour compléter le treillis. Ce choix de structure caractérise une représentation discrète des surfaces

continues recherchées. La complexité du toit, couvrant une superficie de 200m par 120m, nécessita une modélisation complète du système structural, car chaque modification locale impliquait une redistribution des charges qui se répercutait sur l'ensemble. En raison des multiples modifications que le projet a subies au cours de son évolution, le développement du design s'est opéré par un processus itératif qui n'a pu aboutir que par l'actualisation des modèles numériques entre architectes et ingénieurs.

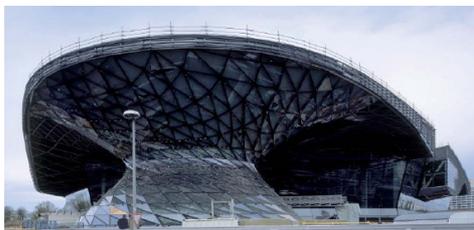


Fig. 4-39: BMW Welt – Coop Himmelb(l)au – Munich – Allemagne – 2001 / 2007

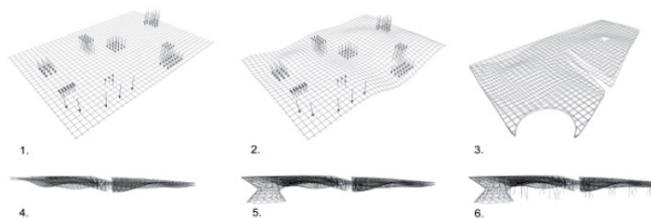


Fig. 4-40: Processus de recherche de forme du toit – B+G Ingénieurs – 2002 / 2004

En 1999, l'ingénieur M. Sasaki, travaillant sur le concours de l'Opéra de Pékin avec l'architecte A. Isozaki [SAS 05], s'était confronté à une expérience similaire. Leur projet comportait une couverture de 150m par 225m à géométrie complexe (Fig. 4-41), reposant cette fois sur une approche structurale continue en coque. N'ayant pas de représentation analytique de cette forme, ils la modélisèrent numériquement avec des surfaces splines en déplaçant arbitrairement des points de contrôle. Il en résulta une géométrie sans base mécanique qui puisse rendre prédictible son comportement. Une analyse structurale fut donc effectuée par éléments finis en récupérant les coordonnées du maillage. A nouveau, l'équipe d'ingénieurs se heurta à un laborieux processus d'essais-erreurs, en fonction de chacune des modifications apportées, pour converger vers une coque alliant considérations formelles et mécaniques. Remarquons que c'est finalement le projet de P. Andreu qui fut retenu, dont l'enveloppe est une forme analytique générée sur l'équation d'un superellipsoïde (Fig. 4-42).

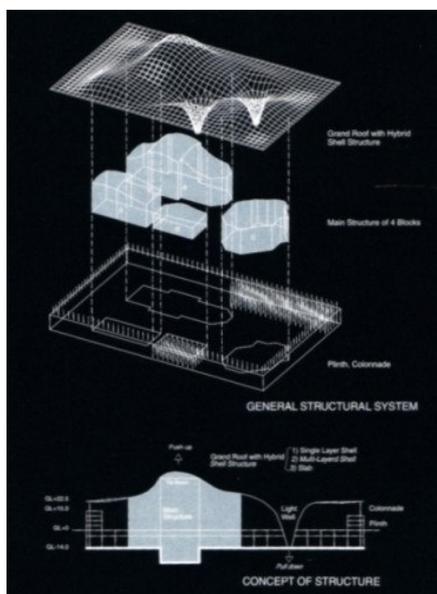


Fig. 4-41: Opéra de Pékin – A. Isozaki – Pékin – Chine – 1999 (compétition)

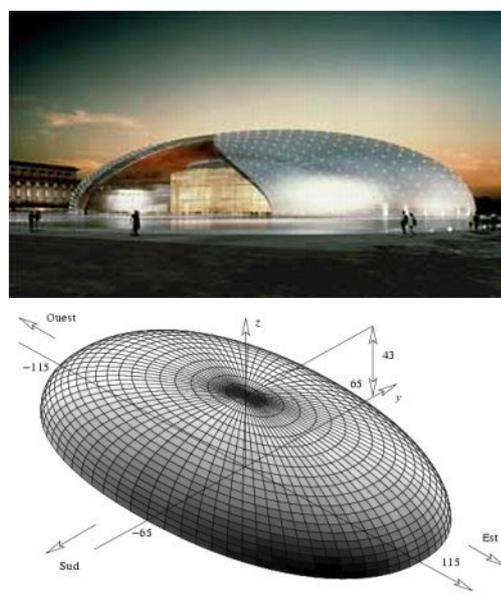


Fig. 4-42: Opéra de Pékin – P. Andreu – Pékin – Chine – 1999 / 2007

Les deux projets cités, quasi-simultanés mais différents par leurs approches structurales, l'une discrète et l'autre continue, se retrouvent autour de la complexité dans laquelle ont été plongés les ingénieurs en l'absence de modèles prédictifs disponibles à l'époque. Avec le recul, M. Sasaki n'hésite pas à qualifier cette expérience « d'incident » et « d'ennuyeuse période de travail improductif et non

scientifique ». Nous verrons dans la prochaine section comment ces mêmes ingénieurs orientent aujourd'hui leurs études vers des considérations de formes hybrides.

#### 4.2.3.3 *Cas d'étude de forme flexible*

Le MARta Herford Museum (Fig. 4-43), conçu par F. O. Gehry, illustre cette focalisation particulière sur la forme et les performances visuelles. Ce projet ne fait pas référence à une quelconque technique de construction et aucun principe structurel ne peut être immédiatement perçu. La peau doit ici être supportée par une structure métallique secondaire. La complexité du traitement du paramètre de Structure (Fig. 4-44) se répercute sur l'ensemble du processus de conception. Bien que l'enveloppe soit réalisée par un matériau à très haute résistance, ses propriétés mécaniques ne sont pas considérées dans le comportement structurel global du bâtiment. On constate alors une superposition de « couches » du parement extérieur, passif et repris par une structure secondaire, elle-même rapportée à une structure primaire porteuse de l'ensemble.



Fig. 4-43: MARta Herford Museum – F.O. Gehry – Herford – Allemagne – 2004

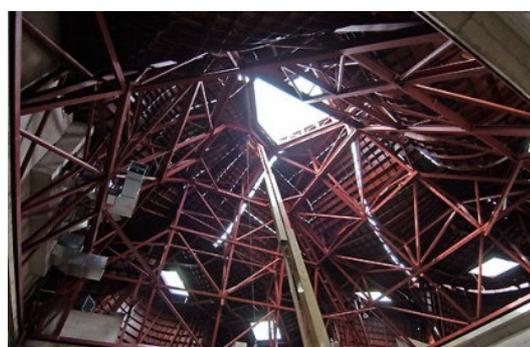


Fig. 4-44: Vue du principe structurel

Cette « sédimentation » engendre à chaque étape des inconnues en terme de réponse technologique, faisant appel au savoir-faire des entreprises associées qui n'hésitent alors pas à développer des moyens spécifiques de mise en œuvre. Le lien entre les paramètres du processus de conception est rompu car il n'y a pas circulation d'informations, au sens d'une articulation des problématiques entre les intervenants. Chacun formule une réponse sans cohérence claire avec les autres mais toutefois lourde de répercussions. Le paramètre de Forme se détache au détriment des autres, et apparaît à l'origine de cette rupture de communication et d'unité, comme l'illustre le schéma (Fig. 4-45).

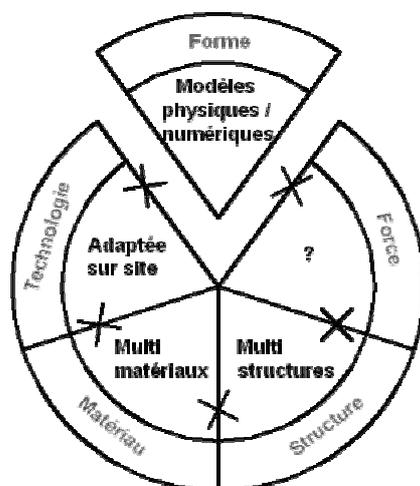


Fig. 4-45: Schéma conceptuel de morphologie structurale

#### 4.2.4 Quels liens tisser entre les formes et leur réalisation ?

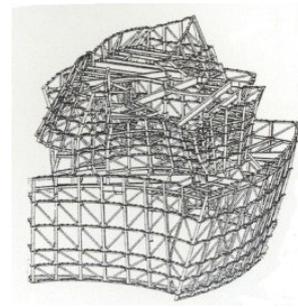
Les cinq paramètres de conception que nous avons mentionnés ne peuvent suffire à décrire la totalité des interactions à considérer pour un projet architectural dans sa globalité. Il est toutefois intéressant de constater que cet échantillon réduit de paramètres met en évidence de forts couplages, desquels dépend le transfert d'informations entre les partenaires depuis l'intention initiale jusqu'à la réalisation. La communication peut ainsi pâtir des différences de points de vue entre les intervenants. Si nous nous appuyons sur les travaux de B. Lawson [LAW 05], qui prétend que « les architectes sont beaucoup plus dépendants d'un savoir expérimental » que la plupart des autres professions dont le savoir repose « intensivement sur des bases théoriques », les différentes façons de percevoir l'information peuvent émaner de connaissances différentes. Les problèmes de compréhension et de langage surgissent à l'interface des savoirs distincts des partenaires d'un projet, alors même qu'ils doivent s'unir pour mener l'expérience jusqu'à sa réalisation. Nous soulevons ainsi une question relative à la communication entre les intervenants en fonction des trois familles de formes auparavant identifiées.

Les formes analytiques, figures historiques dans la pratique architecturale sont l'expression de ce qui peut être dessiné comme de ce qui peut être construit. Récemment, R. Motro a pu observer en visitant la Sagrada Familia un simple bout de bois dans lequel étaient plantés deux clous avec l'inscription suivante : « compas ». Effectivement, cet objet rudimentaire s'avérait tout à fait pertinent sur le chantier pour dessiner le plus élémentairement un cercle. Cette simplicité permettait aux artisans de modéliser la forme à partir d'un vocabulaire basé sur une géométrie analytique commune. Bien que le langage maîtrisé par chacun puisse différer (A. Gaudi n'utilisait probablement pas le même outil de tracé et un ingénieur se référerait peut-être à l'équation du cercle), les outils utilisés n'autorisent aucune confusion possible sur le résultat final. Le lien entre ces différents savoirs existe pour la première classe de forme, mais son vocabulaire formel est en partie épuisé et ne distrait plus vraiment les architectes préférant manifestement d'autres outils. Cette scission se constatait déjà au sujet des coques en béton, entre les partisans d'une morphogenèse analytique comme M. Mihailescu et ceux défendant l'approche mécanique comme H. Isler. Les premiers réduisaient les coques réalisables aux surfaces dont ils maîtrisaient les équations analytiques pour les traduire en équations d'équilibre. Or, des concepteurs comme H. Isler ne pouvaient restreindre leur champ d'inspiration et d'expérimentation au domaine limité des formes analytiques.

Les formes mécaniques connaissent à leur tour un certain désaveu chez les concepteurs. L'argument classique de la nécessité d'une main-d'œuvre nombreuse et qualifiée pour leur construction, aujourd'hui rédhibitoire en raison du coût financier, ne suffit pas à expliquer leur disparition progressive dans le paysage. Les réalisations emblématiques sont encore celles des pionniers, alors capables d'en contrôler les processus complexes de génération. Ces formes exigent un profond intérêt pour les procédés de recherche de forme ou un savoir théorique de l'équilibre statique non linéaire que peu d'ingénieurs, comme J. Schlaich, maîtrisent. L'architecte est donc souvent écarté de la morphogenèse des formes mécaniquement contraintes, ou doit se satisfaire d'en déterminer les conditions aux limites, le reste ne lui appartenant pas. Un langage de communication assurant un lien entre les autres intervenants existe pourtant, ce qui a permis de remarquables réalisations souvent qualifiées de « structures d'ingénieurs ». Ainsi, sans connaissance mécanique pour en élargir les possibilités, le résultat formel est généralement restreint à une famille de solutions similaires, peu ouverte à toute modification.



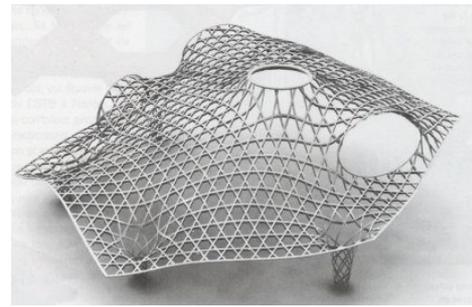
*Fig. 4-46: Musée Guggenheim – F.O. Gehry – Bilbao – Espagne – 1997*



*Fig. 4-47: Ossature*



*Fig. 4-48: Centre Pompidou – S. Ban – Metz – France – 2006 / 2009*



*Fig. 4-49: Proposition d'ossature*

Actuellement, l'intérêt des concepteurs est clairement porté sur le registre des formes flexibles qui ne conservent pas nécessairement le couplage entre la forme et les autres paramètres de conception mais qui confèrent une plus grande richesse formelle. Une dizaine d'années sépare le projet du Musée Guggenheim de Bilbao de F.O. Gehry & Partners (Fig. 4-46) et celui du Musée Pompidou de Metz par S. Ban (Fig. 4-48).

Visiblement, le premier ne dépend pas d'une technologie spécifique de réalisation (Fig. 4-47) mais résulte plutôt d'une utilisation de techniques classiques appliquées à un nouvel esthétisme. La composition structurale du Pompidou (Fig. 4-49) affiche au contraire une évolution vers une intégration des paramètres de conception pour aboutir à une plus grande cohérence mécanique et technique, ce qui n'exclut pas les difficultés de réalisation. Les formes flexibles sont toujours une source de complexité et de désaccord entre les intervenants en raison de l'absence de partage et d'échange autour de la forme, paramètre initial d'un projet. Le défi à relever consiste ainsi à conserver cette richesse morphologique tout en retissant les liens avec l'ingénierie et la technique.

## 5 REINTEGRATION DU PARAMETRE DE FORME

Dans le cas des formes flexibles, le paramètre de Forme focalise une attention quasi exclusive qui dégénère en une dislocation des étapes du processus de conception. Au contraire, nous montrons que pour les deux autres classes d'édifices, la maîtrise des outils d'aide à la conception constitue un langage permettant la continuité d'une communication et à terme, d'une réalisation de formes complexes. La pertinence de la morphologie structurale n'a aucun sens pour les formes flexibles, à moins que nous y introduisions de nouveaux outils morphologiques, donc de nouveaux protocoles d'analyse. Différentes études sont développées dans cette direction, dont le présent travail. L'évolution des différents projets à géométries complexes permet d'observer qu'avec la maturité, les concepteurs s'orientent soit vers une hybridation des formes choisies pour en puiser les avantages respectifs, soit vers la définition de règles génératrices de géométries complexes.

### 5.1 Hybridation flexible - mécanique

Forts de leurs expériences dans les premiers projets non-standard, des ingénieurs comme K. Bollinger, M. Grohmann ou M. Sasaki affichent un intérêt prononcé vers le développement d'algorithmes de calcul de structure capables de rendre plus interactive la communication avec les architectes. On assiste alors à un engouement pour les méthodes numériques évolutionnaires basées sur des schémas d'optimisation multi-critères [CUI 03] [OHM 06] [KIM 08] ou génétiques [WIN 08] [PUG 07]. Ces outils morphologiques peuvent constituer des solutions appropriées aux cas des formes flexibles pour y introduire des critères mécaniques en terme de rigidité, de résistance ou de minimisation d'énergie de déformation. Nous considérons qu'il y a hybridation dans l'approche avec les formes mécaniques, dans le sens où l'outil numérique permet d'obtenir un optimum inaccessible par l'utilisation classique du modèle physique. Toutefois, il ne résulte pas de ces calculs une forme mécanique pure car le jeu des paramètres d'optimisation permet un contrôle des solutions alliant critères esthétiques et structuraux. Comme le précise M. Sasaki [SAS 05], l'ingénieur abandonne la doctrine du « less is more » pour concilier avec l'architecte d'un « more is more ». On voit alors apparaître des coques de grande portée (Fig. 5-1 et Fig. 5-2) dont l'épaisseur peut varier de 40 à 80cm, renforcées jusqu'à 450kg d'acier par m<sup>3</sup> de béton pour résister aux moments de flexion. Leur réalisation demeure pharaonique et le recours à ces méthodes numériques reste encore l'apanage d'ingénieurs expérimentés dans l'étude de structures complexes, seuls capables d'en interpréter correctement les résultats.

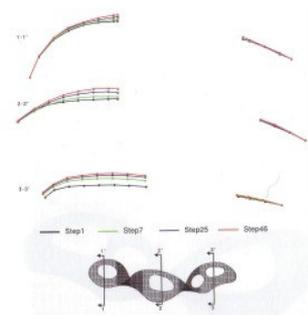


Fig. 5-1: Optimisation de la forme

Fig. 5-2: I project – T. Ito – Fukuoka – Japon – 2005 – Différentes phases de chantier – portée max. 190m – ép. 40cm

### 5.2 Retour de la géométrie

#### 5.2.1 Nécessité d'un outil

Les logiciels les plus élaborés utilisés par les architectes sont toutefois issus d'autres industries. Or les exigences de conception d'un projet architectural diffèrent de celles d'une voiture ou d'un personnage

de dessin animé. H. Whitehead (Foster & Partners) et R. Aish (Bentley Systems), membres fondateurs du SmartGeometry Group, expliquent que les industries de production de masse et celles de la construction architecturale divergent sur leur rapport à la standardisation [HEN 06]. Les premières optimisent les coûts en produisant des modèles standard à partir d'éléments produits en masse mais spécialement conçus pour s'adapter à ces modèles. Les secondes produisent un modèle unique mais avec une économie basée sur l'usage d'éléments standardisés. De plus, leur rapport au temps de production est différent ; la conception d'un bâtiment non-standard étant soumise à de nombreuses modifications qui exigent une exploration rapide des alternatives possibles. Les concepts sur lesquels sont construits les outils de représentation sont donc propres aux domaines d'application. La simplification du processus de conception des formes flexibles est ainsi tributaire de la nécessité de faire émerger des outils de description des formes appropriés.

### 5.2.2 Compréhension d'une géométrie sous-jacente

L'idée qu'on est limité à construire ce qu'on est capable de communiquer est partagée par de nombreux ingénieurs et architectes impliqués dans la pratique de l'architecture non-standard. Aussi, nous pouvons observer une nette tendance à un retour vers le savoir géométrique pour rendre la forme transmissible, car il est difficile de structurer et constituer une culture à partir du calcul numérique.

C. Balmond [BAL 06] défend cette notion de chaos formel qui ne repose pas sur le hasard et l'arbitraire mais sur un algorithme qui structure la pensée. Il en explora la pertinence lorsqu'il collabora avec A. Siza pour le Pavillon Portugais Expo 2000 (Fig. 5-3). Le toit en forme de vagues ne fut maîtrisé tridimensionnellement qu'à partir de l'instant où ils pensèrent à fixer l'alternance des ondulations par une répartition codée de 0 et de  $\pm 1$  sur une grille (Fig. 5-4).

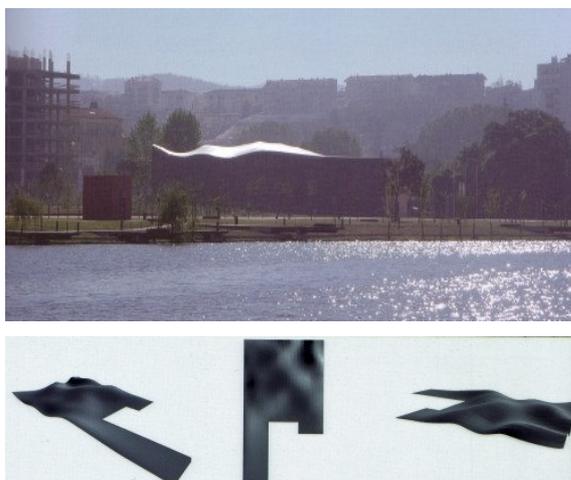


Fig. 5-3: Pavillon portugais, Expo 2000 – A. Siza, E.Souto de Moura – Hannover – Allemagne – 2000

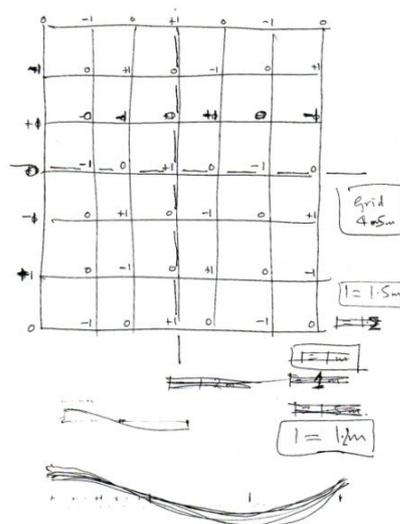


Fig. 5-4: Principe générateur de la forme du toit

Chacun des projets auquel C. Balmond collabore est conçu sur une idée régulatrice qui sert de langage à la communication avec l'architecte puis avec les autres intervenants. Le Serpentine Pavillon (Fig. 5-5) en est une autre illustration. La répétition d'une idée initiale très simple crée un maillage complexe (Fig. 5-6), a priori anarchique mais réellement ordonné et dont on peut identifier les éléments constitutifs jusqu'au phasage du montage sur site.



Fig. 5-5: Serpentine Gallery Pavilion –T. Ito –Londres  
– Angleterre – 2002

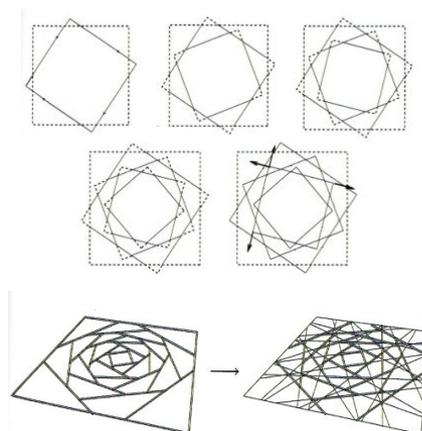


Fig. 5-6: Principe générateur de la forme du toit

La firme Bentley Systems s'engage quant à elle de façon encore plus radicale dans la promotion et la réhabilitation du langage géométrique, comme en témoigne ses récents développements. En concurrence avec la version « architecture » du logiciel CATIA développée par Gehry Systems, elle a élaboré un logiciel de conception paramétrique Generative Components appliqué à la production architecturale. Elle contribue d'autre part à l'organisation des conférences du SmartGeometry Group et édite un ouvrage conséquent d'initiation à la géométrie [POT 07a], dont le premier auteur, H. Pottmann, est un mathématicien bien connu pour ces travaux en infographie.

Enfin, citons le bureau d'études parisien RFR, sponsor de la conférence Advances in Architectural Geometry en 2008 à Vienne, qui invita également H. Pottmann à collaborer sur des travaux pour le développement d'enveloppes de verre [POT 08a] sur lesquels nous reviendrons en troisième partie de ce mémoire.

## 6 CONCLUSION

Une analyse de l'architecture non-standard sous l'éclairage de la morphologie structurale nous a permis d'identifier des familles de formes au sein de cette vaste tendance architecturale. Pour chaque classe de formes, il apparaît que le processus de conception est sujet à de multiples problématiques concernant :

- la Forme
- la Force
- la Structure
- le Matériau
- la Technologie

Cette approche montre que la transmission de l'information entre tous les paramètres de la conception constitue un critère de constructibilité rationnelle. Parmi les pistes de recherche suscitées par l'étude de ces paramètres et de leurs couplages, on choisit de centrer le débat sur celui de la Forme, à la fois responsable d'atomisation du processus de conception mais aussi capable d'en être l'élément unificateur.

Nous avons en effet mis en évidence son exclusion lors du processus de conception des formes flexibles, les plus prisées par le phénomène non-standard. Ce constat révèle la limite des outils morphologiques actuels et implique la nécessité d'en proposer de nouveaux. Nous justifions ainsi l'objectif global de ce travail de thèse, qui consiste à établir une compréhension de la géométrie sous-jacente à ces objets complexes pour en permettre la communication et l'exploitation. Une telle compréhension passe par la maîtrise de règles génératrices simples qui régissent la représentation, en cohérence avec la structure algorithmique du calcul numérique.

La poursuite de cette démarche nous conduit ainsi à introduire en seconde partie l'outil génératif sur lequel s'appuie notre réflexion et qui est nommé formes pascaliennes ou pFormes. A partir de cette base théorique, nous développerons les parties suivantes pour l'opérationnel dans le but de participer à l'élaboration des solutions mécaniques et techniques permettant d'offrir des éléments de réponses à des problématiques spécifiques de conception.

Précisons aussi que la liste des paramètres évoquée est incomplète pour décrire la complexité du processus de conception. D'autres aspects capitaux interviennent et, bien qu'ils ne soient pas tous abordés ici dans un souci de concision, nous pouvons toutefois citer :

- l'énergie
- le cycle de vie
- l'éco-compatibilité

Leurs considérations ouvrent de larges perspectives de développement pour que cette architecture réponde aux préoccupations contemporaines et de demain.



## **PARTIE 2**

**Formes pascaliennes,  
approche géométrique des outils de la représentation numérique**



## 1 INTRODUCTION

“(…) il me semblait qu’il faudrait parvenir à utiliser une définition indiscutable, exempte de distorsion et facile à communiquer, établie par le styliste lui-même et transmise ensuite sous forme numérique à tous les groupes, y compris les sous-traitants et les fournisseurs, intervenant dans le processus, depuis le styliste jusqu’au contrôleur opérant à la sortie de la chaîne de fabrication, et même aux ateliers d’entretien du réseau des agents et des concessionnaires.” P. Bézier, lettre à C. Rabut [RAB 02], le 04/11/1999.

Derrière des interfaces conviviales, les formes flexibles sont élaborées dans l’obscurité des « boîtes noires » logicielles, à partir d’outils mathématiques communément nommés Bézier, splines, nurbs ou autres. Les géométries visualisées à l’écran sont le résultat d’un calcul effectué à l’insu de l’utilisateur et ne sont jamais « dessinées ». Or, l’incompréhension de la logique de génération de la forme rend inévitablement difficile sa transmission, donc sa réalisation comme discuté en première partie. La géométrie complexe du non-standard peut ainsi être réduite à une « complication visuelle » (Fig. 1-1) plutôt qu’à un « outil de représentation mentale » (Fig. 1-2), tel que peut l’être le dessin à main levée.

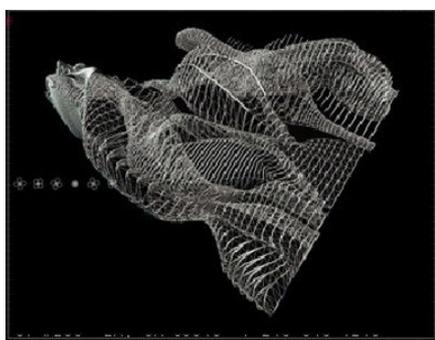


Fig. 1-1: San Jose University Art Museum – Xefirotarch – San Jose – USA – 2003

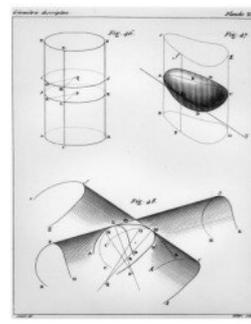


Fig. 1-2: « Eléments de géométrie descriptive » – G. Monge – 1746 / 1818

Cette seconde partie permet de montrer que les pFormes abordent avec simplicité et rigueur les formes classiques utilisées en CAO. Nous les présenterons d’un point de vue géométrique et non avec leur description explicite ordinaire à laquelle sont hermétiques les non initiés. Cet outil ne vise pas à dessiner des enveloppes complexes à la main, mais plutôt à saisir, au-delà de leur superficialité visuelle, les principes algorithmiques générateurs et l’abstraction algébrique qui les fondent. En proposant une logique de génération basée sur des règles simples, les pFormes s’affirment compatibles, voire complémentaires à l’utilisation du panel existant, comme pourront en témoigner nos expérimentations.

Ainsi, de façon plus détaillée, nous proposons :

- une présentation des modèles classiques utilisés à ce jour en CAO pour la génération de formes,
- une introduction aux pFormes par trois opérateurs élémentaires qui permettent d’en révéler l’approche gestuelle pour la génération de formes gauches,
- une présentation des pFormes selon des aspects plus théoriques qui permettent de les situer dans le formalisme des modèles classiques de la CAO et d’en souligner la compatibilité,
- les retours de deux expériences testant l’usage et l’efficacité de cet outil auprès d’étudiants en masters d’écoles d’architecture et d’ingénierie.

La mise en place des concepts développés dans cette seconde partie établit une base, potentiellement commune à l’architecte et l’ingénieur, offrant une compréhension de la génération des formes et qui guidera progressivement ce travail vers l’opérationnel.

## 2 MODELES COMMUNS DE LA CAO

### 2.1 Modèles polynomiaux

#### 2.1.1 Formes de Bézier

##### 2.1.1.1 Représentation géométrique : l'algorithme de De Casteljau

###### 2.1.1.1.1 Rappel historique

Employé par Citroën Automobile SA, P. De Faget De Casteljau développa dans le secret de l'entreprise privée son idée de formes à pôles (Fig. 2-1) à la fin des années 50. Le point de vue géométrique de son approche offre le grand avantage d'une compréhension immédiate de leur fonctionnement. W. Boehm et A. Müller [BOE 99] ont rendu hommage à ce mathématicien en rappelant que ses principales contributions ont permis de réaliser des outils fondamentaux de la conception géométrique assistée par ordinateur. C'est par ailleurs à W. Boehm que l'on doit la reconnaissance des travaux de P. De Casteljau au sein de la communauté scientifique et la proposition du terme « algorithme de De Casteljau » dès la fin des années 70 [FAR 02].

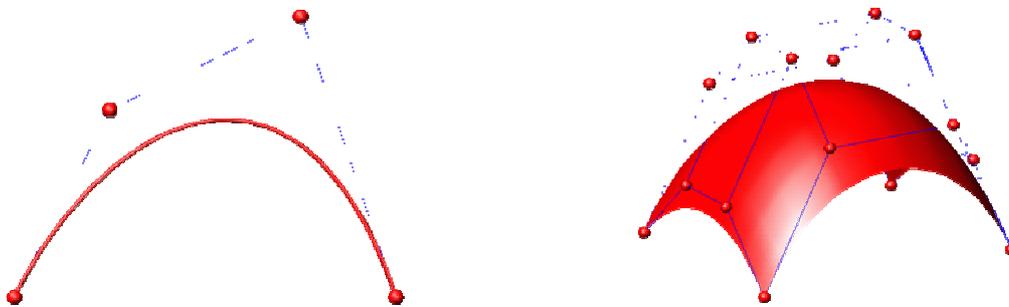


Fig. 2-1: Courbe et surface à pôles

###### 2.1.1.1.2 Algorithme de De Casteljau

###### Cas de la parabole

Nous détaillons une construction simple pour générer une parabole [FAR 90]. Soit  $p_0, p_1$  et  $p_2$  trois points quelconques de  $E^3$  et  $u \in \mathfrak{R}$ , construisons

$$p_0^1(u) = (1-u)p_0 + u p_1 \quad (2.1)$$

$$p_1^1(u) = (1-u)p_1 + u p_2$$

$$p_0^2(u) = (1-u)p_0^1(u) + u p_1^1(u)$$

En injectant les deux premières relations dans la troisième, nous obtenons

$$p_0^2(u) = (1-u)^2 p_0 + 2u(1-u)p_1 + u^2 p_2 \quad (2.2)$$

Cela correspond à une expression quadratique en  $u$ ,  $p_0^2(u)$  décrivant une parabole lorsque  $u$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ . Cette construction fait appel à une interpolation linéaire répétée (Fig. 2-2). Pour  $u \in [0,1]$ ,  $p_0^2(u)$  est à l'intérieur du triangle formé par  $p_0, p_1$  et  $p_2$ ; en particulier  $p_0^2(0) = p_0$  et  $p_0^2(1) = p_2$ .

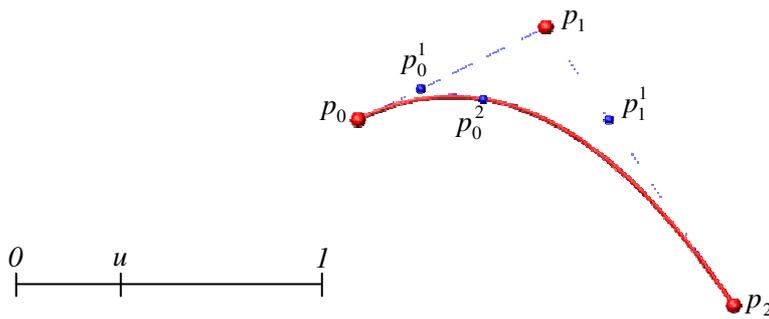


Fig. 2-2: Construction d'une parabole par interpolation linéaire répétée

En conservant les rapports de proportionnalité par interpolation linéaire par morceaux, cette construction d'une parabole est affinement invariante.

**Généralisation au cas des courbes de degré  $n$**

La démarche décrite ci-avant peut-être généralisée pour générer une courbe polynomiale d'un degré  $n$  arbitraire ; deux documents fondamentaux [CAS 59] [CAS 63] l'exposent de la façon suivante :

« Etant donné un polygone à  $n$  cotés de l'espace et une partition  $u$  de l'unité. La subdivision des côtés du polygone selon le ratio  $u / (1-u)$  donne les sommets d'un nouveau polygone composé de  $(n-1)$  côtés. La poursuite de cette procédure s'achève par l'obtention d'un point. En faisant varier  $u$ , ce point bouge sur une courbe d'ordre  $n$  et le dernier côté du polygone résultant en est la tangente. »

Algorithmiquement, cette procédure s'écrit comme l'itération de combinaisons affines.

Soient  $p_0, p_1, \dots$  et  $p_n \in E^3$  et  $u \in \mathfrak{R}$ , posons

$$p_i^r(u) = (1-u)p_i^{r-1}(u) + up_{i+1}^{r-1}(u) \quad \begin{cases} r \in [1, n] \\ i \in [0, n-r] \end{cases} \text{ et } p_i^0(u) = p_i \quad (2.3)$$

Alors  $p_0^n$  est le point de paramètre  $u$  sur la courbe  $p^n$  de degré  $n$ , dite courbe de Bézier. Le polygone formé par  $p_0, p_1, \dots$  et  $p_n$  est appelé polygone de contrôle ou polygone de Bézier de la courbe  $p^n(u)$ . De la même façon, les sommets  $p_0, p_1, \dots$  et  $p_n$  sont nommés points de contrôle ou points de Bézier. Le cas cubique, illustré en Fig. 2-3, fait apparaître les coefficients intermédiaires pour  $p_i^r(u=1/3)$ . Ces derniers sont souvent présentés sous forme d'un tableau triangulaire de points, appelé schéma de De Casteljau (Fig. 2-4).

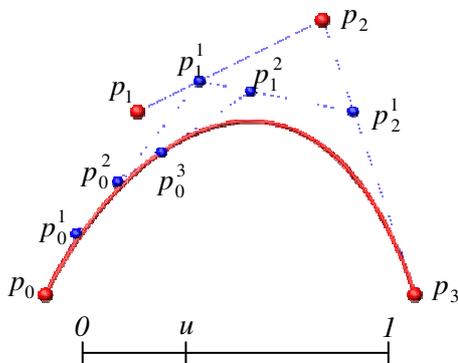


Fig. 2-3: Algorithme de De Casteljau pour  $n=3$  – Cubique et ses points intermédiaires pour  $u=1/3$

$P_0$			
$P_1$	$P_0^1$		
$P_2$	$P_1^1$	$P_0^2$	
$P_3$	$P_2^1$	$P_1^2$	$P_0^3$

Fig. 2-4: Schéma de De Casteljau

### Généralisation au cas des surfaces

Les points de contrôle furent utilisés par De Casteljaou pour créer des surfaces, dans la mesure où « toute surface à pôles peut-être considérée comme engendrée par une courbe à pôles dont les pôles se déplacent, à paramètres constants, le long d'un certain nombre de courbes à pôles données (différentes de celle qui se déplace) » [CAS 63].

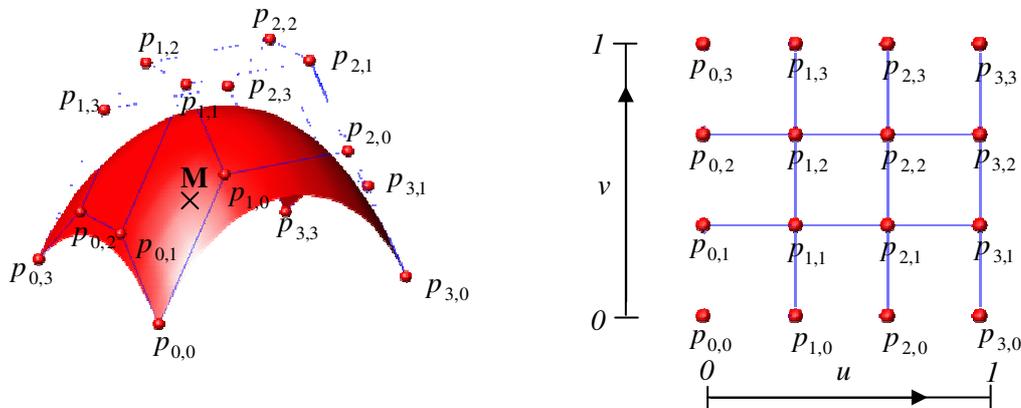


Fig. 2-5: Bicubique et son réseau de contrôle

Si l'on considère un réseau quadrangulaire de  $(m+1)$  par  $(n+1)$  points de contrôle  $p_{i,j}$  (Fig. 2-5) et un point M de coordonnées paramétriques  $(u,v)$  par rapport au carré unité, l'algorithme de De Casteljaou se généralise aux surfaces en l'appliquant  $(m+1)$  fois dans la direction  $u$  puis  $(n+1)$  fois dans la direction  $v$ , ou vice et versa. Les courbes sont obtenues par application récursive d'interpolations linéaires. De la même façon, les surfaces sont générées par application récursive d'interpolations bilinéaires.

#### 2.1.1.1.3 Propriétés révélées par l'approche géométrique

L'algorithme de De Casteljaou permet de déduire quelques propriétés importantes des courbes de Bézier ; nous nous limiterons à une énumération succincte mais davantage de précisions sont consultables dans [FAR 90].

**L'invariance affine :** dans tout système CAO, il faut pouvoir déplacer les objets, changer leur échelle, etc. Une propriété importante des courbes de Bézier est qu'elles sont invariantes par transformations basées sur toute combinaison barycentrique, c'est-à-dire la translation, la rotation, l'homothétie ou le cisaillement. En clair, cela signifie que l'on peut sans modifier le résultat calculer les points de la courbe, puis leur appliquer une transformation affine ou appliquer d'abord cette transformation au polygone de contrôle puis évaluer les points de la courbe. Cette propriété est une conséquence de l'algorithme de De Casteljaou, dans la mesure où il est composé d'une suite d'interpolations linéaires qui sont elles-mêmes des invariants affines.

**L'invariance par transformation affine du paramètre :** généralement, le paramètre  $u$  d'une courbe de Bézier est défini dans l'intervalle  $[0,1]$ . Ceci relève d'une facilité plutôt que d'une nécessité. L'algorithme de De Casteljaou est insensible à l'intervalle de définition du paramètre parce qu'il n'utilise que des rapports de proportionnalité.

**Propriété d'enveloppe convexe :** pour  $u \in [0,1]$ , la courbe est dans l'enveloppe convexe du polygone de contrôle. Ceci vient de ce que chaque point intermédiaire de De Casteljaou  $p_i^r$  est obtenu comme une combinaison barycentrique convexe des  $p_i^{r-1}$  précédents. Aucune étape de l'algorithme ne produit des points hors de l'enveloppe convexe des  $p_i$ . Une conséquence de cette propriété est qu'un polygone de contrôle plan génère une courbe plane.

**Interpolation des extrémités :** La courbe passe en  $p_0$  et  $p_n$ , ce qui est aisément vérifié en écrivant le schéma ( 2.3 ) pour  $u = 0$  et  $u = 1$ .

### 2.1.1.2 Représentation algébrique : la forme de Bernstein

#### 2.1.1.2.1 Rappel historique

Presque à la même époque et indépendamment des recherches de P. De Casteljaou chez Citroën, P. Bézier, employé à la Régie Renault, s'interroge sur les moyens d'offrir au dessinateur une méthode simple et puissante pour créer des formes et pour faciliter la programmation des machines à commande numérique nouvellement employées dans l'industrie automobile [BEZ 82a] [BEZ 82b] [BEZ 83].

Son idée de départ consiste à considérer une courbe de base, générée par l'intersection de deux quarts de cylindres circulaires inscrits dans un cube (Fig. 2-6 et Fig. 2-7). Le cube est défini dans un repère  $(0,x,y,z)$ , mais P. Bézier trouva plus intuitif de mettre bout à bout les vecteurs pour obtenir un polygone  $p_0p_1p_2p_3$  (Fig. 2-8), dit « caractéristique », qui définit directement les points d'origine  $p_0$  et d'extrémité  $p_3$  ainsi que leurs tangentes  $p_0p_1$  et  $p_2p_3$ . Par simples transformations affines, le cube peut-être déformé en un parallélépipède quelconque tandis que la courbe inscrite « suit » les transformations appliquées. Le polygone à trois côtés ainsi formé peut définir une grande variété de courbes. Pour en augmenter la diversité, on peut utiliser des hypercubes d'ordres supérieurs et travailler sur les polygones correspondants. On voit là aussi poindre l'idée novatrice de contrôle indirect des courbes complexes par points de contrôle, mais selon une approche mathématique qui diffère de celle de De Casteljaou.

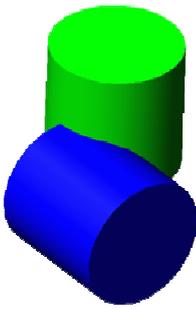


Fig. 2-6: Deux cylindres en intersection

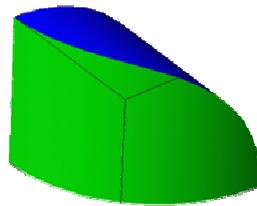


Fig. 2-7: Intersection inscrite dans un cube

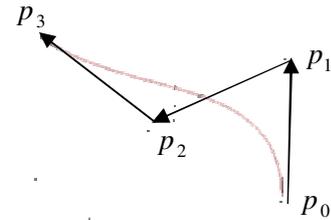


Fig. 2-8: Courbe résultante

Cette méthode de génération des courbes est explicitement écrite comme combinaison linéaire des fonctions  $F_i^n$  selon

$$p^n(u) = \sum_{i=0}^n p_i F_i^n(u) \quad (2.4)$$

où les  $F_i^n$  sont des polynômes, nommés arbitrairement « fonctions du Professeur Onésime Durand » par P. Bézier soucieux de placer ses recherches « sous l'égide d'un grand ancêtre » [BEZ 82a] et de rassurer sa hiérarchie inquiète de le voir s'intéresser aux hyperespaces. Ces polynômes satisfont à la relation de récurrence

$$F_i^r(u) = (1-u)F_i^{r-1}(u) + u F_{i-1}^{r-1}(u) \quad \begin{cases} r \in [1, n] \\ i \in [0, n-r] \end{cases} \quad (2.5)$$

$$F_0^0(u) = 1, F_{r+1}^r(u) = 0 \text{ et } F_{-1}^r(u) = 1 \quad (2.6)$$

Comme  $F_i^n(u) \geq 0$  pour tout  $u \in [0,1]$  et que leur somme sur  $i$  n'est généralement pas égale à 1, il suit que (2.4) n'est pas une combinaison barycentrique des  $p_i$ . En fait,  $p_0$  est un point quand les autres  $p_i$  sont des vecteurs (différences de points). Cette distinction entre points et vecteurs fut abandonnée peu après la découverte de R. Forrest [FOR 72] montrant que la forme de Bézier (2.4) d'une courbe

pouvait être décrite en terme de polynômes de Bernstein, c'est-à-dire sous la forme utilisée par De Castelĵau depuis 1959 ! La popularité des courbes de Bézier doit ainsi beaucoup aux travaux de R. Forrest qui « corrigea » l'approche mathématique initiale. Les formes de Bézier pouvaient dès lors tirer partie des propriétés des polynômes de Bernstein.

### 2.1.1.2.2 Forme de Bernstein

La représentation géométrique permet de définir les courbes de Bézier par algorithme récursif. Toutefois, la mise en évidence de propriétés remarquables est simplifiée par une représentation explicite. Nous allons donc en rappeler l'écriture.

#### Polynômes de Bernstein

Les polynômes de Bernstein sont explicitement définis par

$$B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} \quad (2.7)$$

où les coefficients du binôme sont donnés par  $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$  si  $i \in [0, n]$  ;  $\binom{n}{i} = 0$  sinon.

Ces polynômes satisfont ainsi à la relation de récurrence

$$B_i^r(u) = (1-u)B_i^{r-1}(u) + u B_{i-1}^{r-1}(u) \quad \begin{cases} r \in [1, n] \\ i \in [0, n-r] \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\text{avec } B_0^0(u) = 1 \text{ et } B_i^r(u) = 0 \text{ pour } i \notin [0, n] \quad (2.9)$$

On remarque que seules les conditions exposées en ( 2.6 ) permettent de différencier la définition des  $F_i^n$  de celle des  $B_i^n$ . Une expression explicite des  $F_i^n$  est donnée par  $F_i^n = \sum_{j=i}^n B_j^n$ .

Une propriété importante réside dans le fait que les polynômes de Bernstein forment une partition de l'unité, soit

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(u) = 1 \quad (2.10)$$

Le graphique en (Fig. 2-9) montre la famille des 5 polynômes de Bernstein de degré 4, tous positifs dans l'intervalle  $[0,1]$ .

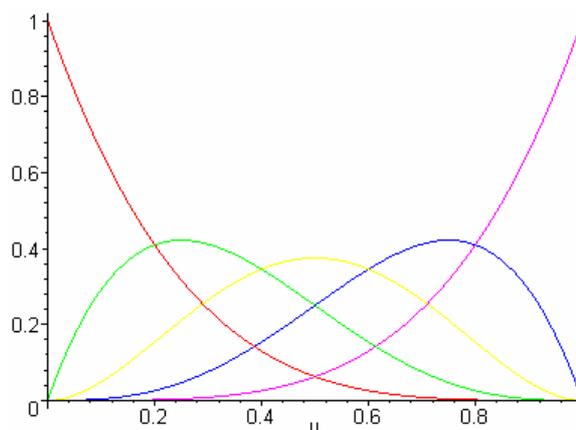


Fig. 2-9: Polynômes de Bernstein pour  $n=4$

### Courbes de Bézier

Nous rappelons à présent l'importance du rôle des polynômes de Bernstein pour le développement des courbes de Bézier. Les points de De Casteljaou intermédiaires  $p_i^r$  peuvent en effet être exprimés en terme de polynômes de Bernstein de degré  $r$

$$p_i^r(u) = \sum_{j=0}^r p_{i+j} B_j^r(u) \quad \begin{cases} r \in [0, n] \\ i \in [0, n-r] \end{cases} \quad (2.11)$$

Cela met en évidence la relation de dépendance entre les points intermédiaires de De Casteljaou et les points de contrôle ou de Bézier  $p_i$  donnés. L'importance de cette équation est manifeste pour le cas où  $r = n$ . Le point de De Casteljaou correspondant est alors le point sur la courbe de Bézier donné par

$$p^n(u) = p_0^n(u) = \sum_{i=0}^n p_i B_i^n(u) \quad (2.12)$$

Nous souhaitons toutefois exposer la preuve de ( 2.11 ) de façon à clarifier la correspondance entre l'écriture algorithmique de De Casteljaou et l'écriture explicite sous la forme de Bernstein [FAR 90]. La définition ( 2.3 ) des  $p_i^r$  et les relations ( 2.8 ) et ( 2.9 ) des polynômes de Bernstein sont utilisées dans une démonstration par récurrence

$$p_i^r(u) = (1-u)p_i^{r-1}(u) + u p_{i+1}^{r-1}(u) \quad (2.13)$$

$$\text{d'où } p_i^r(u) = (1-u) \sum_{j=i}^{i+r-1} p_j B_{j-i}^{r-1}(u) + u \sum_{j=i+1}^{i+r} p_j B_{j-i-1}^{r-1}(u) \quad (2.14)$$

En réindexant ( 2.14 ) grâce à ( 2.9 ), nous écrivons

$$p_i^r(u) = (1-u) \sum_{j=i}^{i+r} p_j B_{j-i}^{r-1}(u) + u \sum_{j=i}^{i+r} p_j B_{j-i-1}^{r-1}(u) \quad (2.15)$$

$$p_i^r(u) = \sum_{j=i}^{i+r} p_j \left( (1-u) B_{j-i}^{r-1}(u) + u B_{j-i-1}^{r-1}(u) \right) \quad (2.16)$$

Enfin, ( 2.8 ) complète la démonstration

$$p_i^r(u) = \sum_{j=i}^{i+r} p_j B_{j-i}^r(u) \quad (2.17)$$

### Surfaces de Bézier

Le concept intuitif de génération d'une surface formulé par de Casteljaou [CAS 63] peut être formalisé pour arriver à une description mathématique d'une surface. Supposons que la courbe qui se « déplace » soit une courbe de Bézier de degré constant  $m$ . A chaque instant, la courbe en mouvement est déterminée par un ensemble de points de contrôle. Chaque point de contrôle originel se déplace alors à travers l'espace sur une courbe de Bézier. Les courbes sur lesquelles les points de contrôle se déplacent sont toutes du même degré  $n$ . Cette description peut-être ainsi formalisée.

Soit la courbe initiale, une courbe de Bézier de degré  $m$

$$p^m(u) = p_0^m(u) = \sum_{i=0}^m p_i B_i^m(u) \quad (2.18)$$

Chaque point de contrôle  $p_i$  décrit une courbe de Bézier de degré  $n$

$$p_i = p_i(v) = \sum_{j=0}^n p_{i,j} B_j^n(v) \quad (2.19)$$

En combinant ces deux équations, on obtient le point  $p^{m,n}(u,v)$  sur la surface  $p^{m,n}$

$$p^{m,n}(u,v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n p_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v) \quad (2.20)$$

L'équivalence entre la définition utilisant l'algorithme de De Casteljau et celle d'une surface de Bézier est ainsi mise en évidence.

Afin d'utiliser concrètement les courbes et surfaces de Bézier, un logiciel fut créé par Renault et baptisé UNISURF. Les concepts de CAO et de CFAO venaient alors de prendre forme. UNISURF est à la base des développements du logiciel EVE développé par la compagnie Dassault, qui plus tard prendra le nom de CATIA (Computer Aided Three-dimensional Interactive Application).

### 2.1.1.2.3 Propriétés révélées par l'approche algébrique

Les propriétés décrites précédemment ont été élaborées sur des arguments géométriques. L'approche algébrique nous permet de les réinterpréter et d'en proposer une version complémentaire. Nous invitons le lecteur à se reporter à [FAR 90] pour une bibliographie et des informations plus amplement détaillées.

**L'invariance affine :** les combinaisons barycentriques sont laissées invariantes par transformations affines (( 2.10 ) donne la vérification algébrique de cette propriété).

**L'invariance par transformation affine du paramètre :** algébriquement, cette propriété s'écrit

$$\sum_{i=0}^n p_i B_i^n(u) = \sum_{i=0}^n p_i B_i^n\left(\frac{u-a}{b-a}\right) \text{ avec } a, b \in \mathfrak{R} \quad (2.21)$$

**Propriété d'enveloppe convexe :** cette propriété est vérifiée car pour,  $u \in [0,1]$ , les polynômes de Bernstein sont positifs et leur somme est égale à 1 ( 2.10 ). Lorsqu'un ensemble A de points de l'espace  $E^n$  est convexe, tout barycentre à coefficients positifs d'un sous-ensemble fini de points quelconques de A appartient encore à A.

**Interpolation des extrémités :** cette propriété est une conséquence des identités suivantes

$$B_i^n(0) = 1 \text{ si et seulement si } i = 0$$

$$B_i^n(1) = 1 \text{ si et seulement si } i = n$$

**Symétrie :** les points de Bézier peuvent indifféremment être dans l'ordre  $p_0, p_1, \dots, p_n$  ou dans l'ordre inverse  $p_n, p_{n-1}, \dots, p_0$ . Les courbes correspondantes sont les mêmes, seul diffère leur sens de parcours

$$\sum_{i=0}^n p_i B_i^n(u) = \sum_{i=0}^n p_{n-i} B_i^n(1-u) \quad (2.22)$$

qui découle de l'identité

$$B_i^n(u) = B_{n-i}^n(1-u) \quad (2.23)$$

Les polynômes de Bernstein sont ainsi dits symétriques en  $u$  et  $1-u$ .

**Invariance par combinaisons barycentriques :** la construction d'une courbe de Bézier à partir d'un polygone de contrôle laisse invariantes les combinaisons barycentriques. Pour  $\alpha + \beta = 1$ , on a

$$\sum_{i=0}^n (\alpha p_i + \beta q_i) B_i^n(u) = \alpha \sum_{i=0}^n p_i B_i^n(u) + \beta \sum_{i=0}^n q_i B_i^n(u) \quad (2.24)$$

**Précision linéaire :** l'identité  $\sum_{i=0}^n \frac{i}{n} B_i^n(u) = u$  permet l'application suivante. Supposons que les sommets  $p_i$  soient uniformément distribués sur une droite joignant deux points  $a$  et  $b$

$$p_i = \left(1 - \frac{i}{n}\right)a + \frac{i}{n}b \text{ pour } i \in [0, n] \quad (2.25)$$

alors, la courbe générée par ce polygone est la droite entre  $a$  et  $b$  ; c'est-à-dire que la droite initiale est reproduite. Cette propriété est dite de précision linéaire.

**Contrôle pseudo-local :** le polynôme  $B_i^n$  n'a qu'un maximum atteint en  $u = \frac{i}{n}$ . En dessin, si uniquement un des sommets du polygone de contrôle est déplacé, la courbe est principalement affectée dans la région autour des points où le paramètre prend cette valeur. L'effet du changement s'avère ainsi relativement prévisible bien qu'il affecte en réalité la courbe dans sa totalité.

### 2.1.1.3 Exploitation de la représentation explicite

La représentation explicite nous permet d'exposer d'autres caractéristiques des formes de Bézier. Nous rappelons succinctement ces résultats, largement détaillés dans la littérature appropriée [FAR90] [DEM 98]. Ce formalisme mathématique ne vise toutefois pas à distraire le lecteur vers des dérives obscures ; nous y sommes contraints car les résultats exposés seront ensuite utilisés pour l'écriture de certains algorithmes.

#### 2.1.1.3.1 *Dérivations d'une courbe de Bézier*

Les polynômes de Bernstein étant dérivables à l'infini, il en est de même pour la fonction vectorielle définissant une courbe de Bézier. La dérivée  $r$ -ième d'une courbe de Bézier s'exprime par

$$\frac{d^r}{du^r} p^n(u) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r p_i B_i^{n-r}(u) \quad (2.26)$$

où  $\Delta^r p_i$  est l'opérateur de différence vers l'avant itéré, défini dans le cas général selon

$$\Delta^r p_i = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^{r-j} p_{i+j} \quad (2.27)$$

Nous notons que la dérivée  $r$ -ième d'une courbe de Bézier est une autre courbe de Bézier, obtenue par l'application de l'opérateur différence  $r$ -ième sur le polygone de contrôle. La théorie des pôles permet ainsi de calculer la dérivée d'une courbe en un point sans avoir recours au calcul différentiel. Toutefois, cette courbe de Bézier n'est plus définie dans  $E^n$ . Ses coefficients sont en effet des différences de points, soit des vecteurs éléments de  $\mathfrak{R}^n$ . On peut toutefois visualiser cette courbe et son polygone dans  $E^n$  par rapport à une origine en 0. La courbe associée à la dérivée première est nommée hodographe.

Nous donnons deux cas particuliers importants pour  $u=0$  et  $u=1$

$$\frac{d^r}{du^r} p^n(0) = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r p_0 \quad (2.28)$$

$$\frac{d^r}{du^r} p^n(1) = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r p_{n-r} \quad (2.29)$$

On observe ainsi que la dérivée  $r$ -ième d'une courbe de Bézier en une de ses extrémités dépend uniquement des  $r+1$  points de Bézier les plus proches de celle-ci.

### 2.1.1.3.2 Dérivations et algorithme de De Casteljau

Les dérivées d'une courbe de Bézier peuvent être exprimées en fonction des points intermédiaires générés par l'algorithme de De Casteljau. En effet, sachant que la sommation et l'opérateur de différence commutent selon

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta p_i = \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=0}^{n-1} p_i = \Delta \sum_{i=0}^{n-1} p_i \quad (2.30)$$

Nous pouvons alors écrire

$$\frac{d^r}{du^r} p^n(u) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r p_i B_i^{n-r}(u) \quad (2.31)$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r \sum_{i=0}^{n-r} p_i B_i^{n-r}(u) \quad (2.32)$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r p_0^{n-r}(u) \quad (2.33)$$

Les relations (2.31) et (2.33) fournissent deux méthodes de calcul de la dérivée  $r$ -ième d'une courbe de Bézier. Notre approche des formes à pôles par les formes pascaliennes justifiera l'emploi de (2.33) pour écrire un algorithme de détermination des dérivées en un point  $M(u)$ . Il s'agira essentiellement d'implémenter l'opérateur de différence  $r$ -ième des points intermédiaires de De Casteljau pour aboutir au résultat souhaité.

Si l'on spécifie seulement le cas  $r = 1$  (dérivée première)

$$\frac{d}{du} p^n(u) = n (p_1^{n-1}(u) - p_0^{n-1}(u)) \quad (2.34)$$

On remarque que les points intermédiaires  $p_0^{n-1}$  et  $p_1^{n-1}$  définissent les vecteurs tangents en  $p^n(u)$ , ce qui est illustré par (Fig. 2-2) et (Fig. 2-3).

### 2.1.1.3.3 Dérivations d'une surface de Bézier

Comme dans le cas d'une courbe, des dérivations peuvent être effectuées par l'application de l'opérateur différence généralisés à deux indices. Les formules pour les dérivées partielles d'ordre  $r$  peuvent s'écrire selon

$$\frac{\partial^r}{\partial u^r} p^{m,n}(u,v) = \frac{m!}{(m-r)!} \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{m-r} \Delta^{r,0} p_{i,j} B_i^{m-r}(u) B_j^n(v) \quad (2.35)$$

et

$$\frac{\partial^s}{\partial v^s} p^{m,n}(u,v) = \frac{n!}{(n-s)!} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{n-s} \Delta^{0,s} p_{i,j} B_i^m(u) B_j^{n-s}(v) \quad (2.36)$$

Avec les opérateurs de différence définis par

$$\Delta^{r,0} p_{i,j} = \Delta^{r-1,0} p_{i+1,j} - \Delta^{r-1,0} p_{i,j} \quad (2.37)$$

et

$$\Delta^{0,s} p_{i,j} = \Delta^{0,s-1} p_{i,j+1} - \Delta^{0,s-1} p_{i,j} \quad (2.38)$$

Précisons toutefois le cas général, à savoir les dérivées partielles croisées de degrés arbitraires

$$\frac{\partial^{r+s}}{\partial u^r \partial v^s} p^{m,n}(u,v) = \frac{m!n!}{(m-r)!(n-s)!} \sum_{i=0}^{m-r} \sum_{j=0}^{n-s} \Delta^{r,s} p_{i,j} B_i^{m-r}(u) B_j^{n-s}(v) \quad (2.39)$$

Rappelons qu'en raison de l'opérateur de différence, la dérivée partielle d'une surface de points appartenant à  $E^n$  est un ensemble de vecteurs dans  $\mathfrak{R}^n$ .

#### 2.1.1.3.4 Changement de base associée

##### Cas de la courbe

Tout polynôme écrit dans la base de Bernstein peut être défini dans la base canonique par l'intermédiaire d'une matrice de passage telle que

$$[B_n] = [M_n]^T \cdot [U_n] \quad (2.40)$$

où :

- $[B_n]$  est la matrice colonne de taille  $(n+1)$  dont les éléments sont les polynômes de Bernstein  $B_i^n$  de la variable  $u$  ;
- $[U_n]$  la matrice colonne de taille  $(n+1)$  des puissances de  $u^i$  ;
- $[M_n]$  la matrice de passage à  $(n+1)$  lignes et  $(n+1)$  colonnes dont l'expression générale du coefficient de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  variants de 0 à  $n$  s'écrit  $(-1)^{i-j} \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j}$  et ainsi :

$$[M_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\binom{n}{1} & \binom{n}{1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \binom{n}{2} & -\binom{n}{1} \binom{n-1}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\binom{n}{3} & \binom{n}{1} \binom{n-1}{2} & -\binom{n}{2} \binom{n-2}{1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & (-1)^{i-j} \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^n \binom{n}{n} & (-1)^{n-1} \binom{n}{n} \binom{n-1}{n-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Une courbe de Bézier s'écrit alors sous forme matricielle dans les deux bases

$$[p^n(u)] = [B_n]^T \cdot [p_n] = [U_n]^T \cdot [M_n] \cdot [p_n] = [U_n]^T \cdot [q_n] \quad (2.42)$$

où :

- $[p^n(u)]$  est le vecteur ligne des coordonnées d'un point de la courbe en  $(x, y, z)$  pour une valeur du paramètre  $u$  ;
- $[p_n]$  la matrice à  $(n+1)$  lignes des points de contrôle  $p_n$  en coordonnées  $(x, y, z)$  ;
- $[q_n]$  la matrice à  $(n+1)$  lignes des points de définition canoniques  $q_n$  en coordonnées  $(x, y, z)$ , définie par  $[q_n] = [M_n] \cdot [p_n]$ .

On observe toutefois que l'expression d'une courbe dans la base canonique est bien adaptée au calcul numérique, mais présente l'inconvénient de ne pas révéler ses propriétés géométriques.

### Cas de la surface

En utilisant les matrices colonnes des polynômes de Bernstein  $[B_m]$  et  $[B_n]$ , respectivement d'ordres  $(m+1)$  et  $(n+1)$ , nous pouvons écrire la définition du point courant d'une surface de Bézier au moyen de produits matriciels

$$[p^{m,n}(u,v)] = [B_m]^T \cdot [p_{m,n}] \cdot [B_n] \quad (2.43)$$

où :

- $[p^{m,n}(u,v)]$  est le vecteur ligne des coordonnées d'un point de la surface en  $(x, y, z)$  pour une valeur du couple de paramètres  $(u, v)$  ;
- $[p_{m,n}]$  la matrice à  $(m+1)$  lignes et  $(n+1)$  colonnes des points de contrôle  $p_{m,n}$  en coordonnées  $(x, y, z)$ .

Par suite, la mise en place des points de définition canoniques de la surface se décline à partir de celle de la courbe avec ( 2.40 ) et les analogues en la variable  $v$

$$[p^{m,n}(u,v)] = [U_m]^T \cdot [M_m] \cdot [p_{m,n}] \cdot [M_n]^T \cdot [V_n] \quad (2.44)$$

où  $[V_n]$  est la matrice colonne d'ordre  $(n+1)$  des puissances de  $v^i$ .

Par analogie avec la matrice  $[p_{m,n}]$  qui définit le réseau de contrôle de la surface, le réseau canonique constitué des points  $q_{m,n}$  peut s'écrire au moyen de la relation matricielle

$$[q_{m,n}] = [M_m] \cdot [p_{m,n}] \cdot [M_n]^T \quad (2.45)$$

Cela conduit à la définition canonique d'une surface de Bézier

$$[p^{m,n}(u,v)] = [U_m]^T \cdot [q_{m,n}] \cdot [V_n] \quad (2.46)$$

où  $[q_{m,n}]$  est la matrice à  $(m+1)$  lignes et  $(n+1)$  colonnes des points de définition canoniques  $q_{m,n}$  en coordonnées  $(x, y, z)$ .

#### 2.1.1.4 Représentation mécanique

En raison des propriétés barycentriques, une interprétation dite « mécanique » est intéressante à rappeler pour apprécier la capacité du modèle à générer une forme et à la contrôler. Ce parallèle mécanique considère que le point  $M(u)$  appartenant à la courbe est soumis de la part de chacun des points de contrôle  $p_i$  à une « force d'attraction »  $\vec{F}_i = B_i^n(u) \overrightarrow{Mp_i}$ . Ces forces vérifient un équilibre traduit par  $\sum_0^n \vec{F}_i = \vec{0}$ . Par conséquent, le point  $M(u)$  soumis à ces forces adopte à chaque instant une position possible d'équilibre statique [DEM 98].

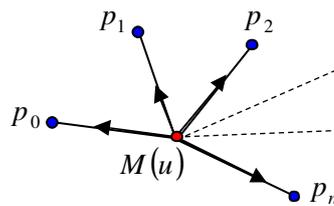


Fig. 2-10: Analogie mécanique d'une courbe de Bézier

### 2.1.2 B-splines

« La théorie des pôles est totalement algébrique, le calcul des coefficients des B-splines repose sur l'analyse, et le drame de l'analyse, c'est d'oublier en fin de calcul, les conditions que l'on avait posées au début. Par contre, l'algèbre permet l'inventaire complet de tous les cas possibles. » P. De Faget De Casteljaou [CAS 85].

#### 2.1.2.1 Introduction

Les premières études sur les B-splines furent menées par N. Lobachevsky et remontent donc au XIX<sup>ème</sup> siècle. Elles servirent ensuite d'outil de lissage de données statistiques avant de trouver une application à la CAO révélée par C. De Boor, M. Cox et L. Mansfield [FAR 90].

Le développement de la théorie générale des B-splines est très mathématique [BOO 78] et s'expose plus naturellement pour le cas des courbes non-paramétrées de la forme  $y = f(u)$ . Pour cette raison, nous ne nous étendons pas sur leur formalisme qui sort de l'objectif de nos travaux. Nous nous restreignons ainsi au rappel de la définition des courbes et de leurs propriétés remarquables. Toutefois, nous étudierons plus en détail les cas paramétrés des B-splines quadriques et cubiques pour mettre en évidence leurs représentations comme courbes de Bézier « composites » avec l'approche des formes pascaliennes. Le lecteur pourra s'informer d'avantage en consultant des ouvrages comme [DEM 98] ou [FAR 90] dans lesquels des références complémentaires sont données.

#### 2.1.2.2 Paramètres globaux et locaux

De façon analogue au modèle de Bézier, les vecteurs construits avec des points de contrôle peuvent être pondérés par des fonctions B-splines, lesquelles remplacent les polynômes pondérateurs de Bernstein. Les courbes B-splines sont polynomiales par morceaux, ce qui leur confère des avantages appréciables par rapport aux courbes de Bézier : une courbe complexe peut être représentée avec moins de points de contrôle et le déplacement d'un point n'affecte que localement la courbe.

Cette construction par morceaux implique l'introduction de notions supplémentaires. Avec le modèle de Bézier, nous supposons que les courbes sont définies sur un intervalle où le paramètre  $u$  varie sur  $[0,1]$ . Cette hypothèse est valide grâce à l'invariance des courbes de Bézier vis-à-vis des transformations affines du paramètre. Pour les courbes par morceaux, nous pouvons toujours supposer que le paramètre de chaque segment individuel varie sur un intervalle  $[0,1]$ , mais la courbe B-spline entière est alors associée à un ensemble d'intervalles  $t_0 < \dots < t_k$  où chaque intervalle partiel  $[t_i, t_{i+1}]$  est associé à un segment de courbe polynomiale. La taille relative de ces intervalles joue cependant un rôle important. Le cas où les extrémités  $t_i$  des intervalles partiels sont imposées comme des entiers consécutifs caractérise ainsi les B-splines uniformes. On distingue ces dernières des B-splines non uniformes pour lesquelles les  $t_i$  sont des réels et ne sont pas nécessairement régulièrement distribués.

Une extrémité d'intervalle  $t_i$  est appelée nœud et leur suite non décroissante est nommée vecteur nodal. Pour chaque valeur du paramètre  $t$  tirée de l'intervalle partiel  $[t_i, t_{i+1}]$ , nous avons un point correspondant  $s^n(t)$  sur la courbe B-spline  $s^n$ . Un paramètre local  $u$  de l'intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$  peut être introduit en posant

$$u = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \quad (2.47)$$

Il permet de faire le lien avec les courbes polynomiales composant la courbe totale. Toutefois, pour la suite de la définition des courbes B-splines générale, il est plus pratique, lorsque l'on parle de la courbe entière, de le faire en fonction du paramètre global  $t$ .

### 2.1.2.3 Définitions

Le degré  $n$  de la courbe  $s^n$  est le degré maximal de chaque segment polynomial. On considère le vecteur nodal  $(t_0, t_1, \dots, t_{L+2n-2})$  pour lequel tous les nœuds n'ont pas à être distincts. Si  $r$  nœuds successifs coïncident, le nœud correspondant est dit de multiplicité  $r$ . Si un nœud ne correspond à aucun autre, il est dit simple (ou de multiplicité 1). Dans le cas où tous les nœuds sont simples,  $L$  désigne le nombre de segments de courbes. La courbe B-spline est uniquement définie sur le domaine  $[t_{n-1}, t_{L+n-1}]$ , si bien que le premier intervalle correspond à  $[t_{n-1}, t_n]$  et le dernier à  $[t_{L+n-2}, t_{L+n-1}]$ . Pour chaque multiplicité de nœuds dans ce domaine, le nombre d'intervalles chute de un. Enfin, en considérant une suite de  $(L+n)$  points de contrôle  $d_i$ , chaque fonction polynomiale par morceaux  $s^n$  sur  $[t_{n-1}, t_{L+n-1}]$  peut être écrite de manière unique sous la forme

$$s^n(t) = \sum_{i=0}^{L+n-1} d_i N_i^n(t) \quad (2.48)$$

où les  $N_i^n$  sont les fonctions de base B-splines et  $t \in \mathfrak{R}$ , le paramètre assujetti à parcourir le domaine d'intervalles.

### 2.1.2.4 Propriétés

Cette énumération des propriétés n'est pas complète, seules les principales sont proposées.

**L'invariance affine :** pour tout  $t$  du domaine paramétrique, les fonctions  $N_i^n$  forment une partition de l'unité. Cette propriété commune aux polynômes de Bernstein assure l'indépendance de la courbe vis-à-vis de l'origine choisie.

**Propriété d'enveloppe convexe :** la positivité des fonctions  $N_i^n$  dans le domaine paramétrique a pour conséquence, comme dans le cas des courbes de Bézier, que toute la courbe B-spline est contenue dans l'enveloppe convexe de ces points de définition.

**Contrôle local :** si un point de contrôle est déplacé, la courbe n'est affectée que localement, ce qui n'est pas le cas pour les courbes de Bézier. Cette propriété rend donc très appréciable l'emploi des B-splines comme outil de génération et de gestion de formes.

## 2.2 Modèles rationnels

Jusqu'à présent, nous avons décrit les formes comme des modèles polynomiaux. Or, certaines formes ne peuvent être représentées que par un formalisme où des fonctions rationnelles remplacent les fonctions polynomiales. Une courbe de Bézier dont les points de contrôle sont restreints à  $E^3$  ne peut ainsi, en aucun cas, représenter un arc de cercle. Par suite, toutes les surfaces qui en dérivent sont inaccessibles : pas de cône, de cylindre, de tore, ni de sphère et encore moins des surfaces de révolution.

### 2.2.1 Formes de Bézier rationnelles

#### 2.2.1.1 Géométrie projective

L'utilisation des coordonnées homogènes, introduites par A.F. Möbius, permet de remédier à cette restriction formelle. On peut se placer non plus en géométrie affine mais en géométrie projective. On a

vu que la définition d'une courbe de Bézier est invariante par une transformation affine, mais cette propriété n'est plus vérifiée en général pour une projection conique. Dans ce cas, l'image  $p''$  d'une courbe de Bézier  $p^n$  avec  $(n+1)$  points de contrôle  $p_i$ , n'est pas, en général, une courbe de Bézier de points de contrôle  $p'_i$ , images des  $p_i$ . Il en résulte qu'une telle courbe  $p''$  peut servir pour définir un modèle autre que celui de Bézier, nommé Bézier rationnel.

### 2.2.1.2 Coordonnées homogènes

On peut considérer une coordonnée supplémentaire  $w$ , dite d'homogénéité [CAS 85], et passer en géométrie projective par une projection conique centrée à l'origine vers un hyperplan d'équation définie selon  $w$ . Dans l'espace projectif de dimension 3, les coordonnées homogènes d'un point  $M$  seront  $(x, y, z, w)$ .

L'espace projectif construit permet de caractériser le plan à l'infini, défini en règle générale par l'ensemble des points ou vecteurs ayant pour dernière coordonnée  $w=0$ . Hors de ce plan, nous pouvons utiliser  $\left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}\right)$  comme un système cartésien dans  $E^3$ . L'espace affine complémentaire au plan infini est coordonné dans une forme familière, avec une base correspondant à  $(1,0,0,1)$ ,  $(0,1,0,1)$  et  $(0,0,1,1)$ .

### 2.2.1.3 Courbes de Bézier rationnelles

Nous voyons dès lors poindre tout l'intérêt de cette approche. Dans le cas où  $w$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$  (à l'exception du plan infini où il prend la valeur 0), à tout point  $M(x,y,z,w)$  de l'espace projectif de dimension 3 va correspondre un point  $M'(x',y',z')$  de l'espace affine de dimension 3 tel que

$$x' = \frac{x}{w}, \quad y' = \frac{y}{w}, \quad z' = \frac{z}{w} \quad (2.49)$$

Par extension, à une courbe de Bézier  $p^n$  de degré  $n$  dans  $E^4$  va correspondre un ensemble de courbes de degré  $n$  dans  $E^3$ , toutes étant des projections de  $p^n$  vers un hyperplan d'équation  $w$ . On note que l'on pourrait construire une surface dans  $E^3$  à partir de la seule donnée d'une courbe de  $E^4$ .

En utilisant la forme de Bernstein, les coordonnées ( 2.49 ) de l'image  $M'$  du point  $M$  appartenant à  $p^n$  vérifient

$$x' = \frac{\sum_{i=0}^n x_i B_i^n(u)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(u)}, \quad y' = \frac{\sum_{i=0}^n y_i B_i^n(u)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(u)}, \quad z' = \frac{\sum_{i=0}^n z_i B_i^n(u)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(u)} \quad (2.50)$$

Or, d'après ( 2.49 ), nous avons entre les coordonnées des points de contrôle  $p_i$  de  $E^4$  et celles des  $p'_i$  (leur projection dans  $E^3$ ) les relations

$$x_i = x'_i w_i, \quad y_i = y'_i w_i, \quad z_i = z'_i w_i \quad (2.51)$$

Nous en déduisons la définition de l'image  $p''$  d'une courbe de Bézier  $p^n$  de degré  $n$  [PIE 97]

$$p''(u) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i p'_i B_i^n(u)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(u)} = \sum_{i=0}^n p'_i \frac{w_i B_i^n(u)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(u)} \quad (2.52)$$

La formule ( 2.52 ) fait ainsi apparaître des fonctions rationnelles. Les courbes images d'une courbe de Bézier de degré  $n$  dans  $E^4$  sont alors des courbes de Bézier rationnelles de degré  $n$  dans  $E^3$ . Les  $w_i$  sont

généralement appelés poids. Lorsque tous les poids sont égaux à 1 (ou tous égaux), nous obtenons une courbe de Bézier non rationnelle standard. Si quelques  $w_i$  sont négatifs, des singularités peuvent survenir [FAR 90] ; nous nous restreindrons donc à des valeurs de  $w_i$  positives.

L'introduction des poids élargit les possibilités formelles car ils jouent le rôle de paramètres supplémentaires de déformation d'une courbe. De plus, les coniques sont alors incluses dans l'ensemble des courbes de Bézier rationnelles.

#### 2.2.1.4 Propriétés

Les courbes de Bézier rationnelles bénéficient de toutes les propriétés des courbes non rationnelles mais des propriétés spécifiques apparaissent parmi lesquelles peut être citée :

**L'invariance par projection conique** : le modèle de Bézier rationnel possède la propriété d'invariance par transformations projectives qui généralise l'invariance affine. Ainsi, la projection conique d'une courbe de Bézier rationnelle a pour image une autre Bézier rationnelle, dont les nouveaux points de contrôle sont les images des anciens dans cette projection.

#### 2.2.1.5 Surfaces de Bézier rationnelles

Nous pouvons généraliser les surfaces de Bézier à leur équivalent rationnel de la même manière que dans le cas des courbes. Une surface rationnelle de Bézier est ainsi définie comme la projection d'une surface de Bézier 4D qui prend alors la forme

$$p^{m,n}(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{i,j} p'_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)} \quad (2.53)$$

### 2.2.2 Nurbs

#### 2.2.2.1 Introduction

Le développement présenté pour les formes de Bézier rationnelles peut s'appliquer de façon similaire aux formes B-splines générales. Cette démarche nous conduit à présenter les courbes B-splines rationnelles non uniformes (ou nurbs), développées initialement par S. Coons en 1967 et K. Versprille en 1975 [DEM 98].

Les nurbs sont devenues l'outil de description standard des courbes et des surfaces dans les domaines de la CAO et du graphisme informatique. Cette famille de formes, souvent présentée comme un « must » bien que concurrencée aujourd'hui par d'autres « monstres » mathématiques telles que les T-splines, demeure l'apanage de spécialistes du monde de l'animation numérique ou du rendu infographique. Inaccessible à toute appréhension directe, elles sont assez malmenées par les logiciels de CAO puisqu'en dehors de logiciels spécifiques comme Rhino ou Maya qui les prennent pour base, les nurbs ne sont la plupart du temps réellement utilisées que pour la construction de cercles et de surfaces de révolution. Autre exemple, le module « free-form » de CATIA V5 (la dernière version) ne permet pas de générer de véritables nurbs et dénomme nupbs les courbes produites par l'outil le plus avancé de courbes 3D.

Nous invitons le lecteur à se reporter à des ouvrages de référence tels que [VES 75] et [PIE 97] pour plus d'informations à leur sujet. En effet, notre travail se concentrant sur l'étude d'un formalisme offrant des possibilités de dialogue entre l'ingénieur et l'architecte, nous ne nous étendons pas sur les aspects mathématiques pour nous limiter au rappel de leurs définition et propriétés remarquables.

#### 2.2.2.2 Définition

Les formes de Bézier rationnelles constituent une bonne introduction géométrique aux courbes et aux surfaces nurbs qui les généralisent. Si nous substituons les fonctions B-splines associées au vecteur

nodal  $(t_0, t_1, \dots, t_{L+2n-2})$  aux polynômes de Bernstein dans l'écriture ( 2.55 ), on définit la courbe nurbs  $\eta^n$  de degré  $n$

$$\eta^n(t) = \frac{\sum_{i=0}^{L+n-1} w_i d_i N_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{L+n-1} w_i N_i^n(t)} \quad (2.54)$$

où :

- les  $d_i$  sont les  $(L+n)$  points de contrôle ;
- $w_i$  les  $(L+n)$  poids réels (non tous nuls et fixés positifs) ;
- $N_i^n$  les fonctions B-splines et  $t \in \mathfrak{R}$  le paramètre assujetti à parcourir l'intervalle  $[t_{n-1}, t_{L+n-1}]$ .

Les poids fournissent des paramètres supplémentaires par rapport aux modèles polynomiaux que sont les courbes B-splines ou celles de Bézier et, de ce fait, permettent de modifier la forme de telles courbes. Dans le cas particulier où tous les poids sont égaux à 1, l'appartenance de  $t$  au domaine paramétrique implique que la courbe redevient une courbe B-spline non rationnelle associée aux points de contrôle  $d_i$  et au vecteur nodal considéré.

En posant

$$R_i^n(t) = \frac{w_i N_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{L+n-1} w_i N_i^n(t)} \quad (2.55)$$

nous pouvons ainsi réécrire ( 2.54 ) sous la forme

$$\eta^n(t) = \sum_{i=0}^{L+n-1} d_i R_i^n(t) \quad (2.56)$$

où les  $R_i^n$  sont les fonctions rationnelles de base.

### 2.2.2.3 Propriétés

Les nurbs bénéficient de toutes les propriétés des B-splines non rationnelles. Les fonctions  $R_i^n$  identifiées d'après l'équation ( 2.55 ) héritent donc de celles des fonctions B-splines. Comme pour les Bézier rationnelles, la propriété d'invariance par transformations projectives est vérifiée.

### 3 FORMES PASCALIENNES OU PFORMES

« La valeur de la simplicité n'apparaît qu'à celui qui, laborieusement, l'a longtemps cherchée. »

P. Bézier [BEZ 82a].

Développées par A. Marty [MAR 04], architecte enseignant de l'Ecole Nationale Supérieure d'Architecture de Montpellier, les formes pascaliennes sont le résultat d'une recherche ayant pour but de révéler le caractère unitaire de formes apparemment aussi distinctes que « le cube et la cubique ». Cette approche de la représentation des formes s'appuie sur une interprétation géométrique poussée à sa plus simple expression gestuelle : la recherche du point milieu, soit

$$p_m = \frac{p_0 + p_1}{2} \quad (3.1)$$

#### 3.1 Approche gestuelle

##### 3.1.1 Points dans $E^4$

Nous considérons initialement des points définis dans l'espace affine à 4 dimensions  $(x, y, z, w)$ . Rappelons que la quatrième coordonnée, dite d'homogénéité, permet d'associer à un point de  $E^4$  un point de  $E^3$  défini par  $\left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}\right)$ . Dans un premier temps,  $w$  est fixé égal à 1, mais nous en ferons un usage différent lorsqu'il s'agira de généraliser les pFormes au cas des formes rationnelles.

##### 3.1.2 Opérateurs milieu

La recherche du milieu de deux formes, appliquée récursivement, permet de générer les premières formes linéaires de la géométrie comme les segments, les facettes ou les cubes gauches. Ces applications sont désignées par les opérateurs milieu (MI) et milieu récursif (MIR) que nous introduisons ci-après.

###### 3.1.2.1 Milieu de deux points

L'opérateur milieu (MI) appliqué à un couple de points  $(p_0, p_1)$  de  $E^3$  retourne le point milieu  $p_m$  (Fig. 3-1). Deux nouveaux couples de points sont ainsi créés  $(p_0, p_m)$  et  $(p_m, p_1)$ , sur lesquels (MI) peut à nouveau être utilisé. Cette opération conduit à l'appel récursif de (MI) et à la définition de l'opérateur (MIR) qui produit un ensemble dense de points situés entre  $p_0$  et  $p_1$  (Fig. 3-2), à partir duquel un segment de droite est représenté (Fig. 3-3).

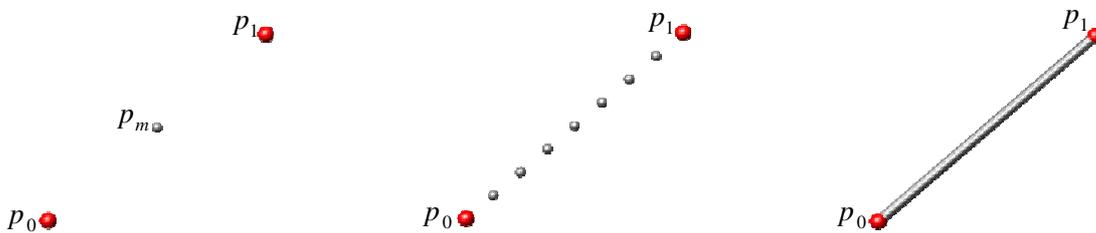


Fig. 3-1: (MI) appliqué à  $(p_0, p_1)$     Fig. 3-2: (MIR) appliqué à  $(p_0, p_1)$     Fig. 3-3: Segment de droite

###### 3.1.2.2 Milieu de deux segments

Considérons deux segments, construits sur les couples de points  $(p_{0,0}, p_{1,0})$  et  $(p_{1,0}, p_{1,1})$  (Fig. 3-4). L'extension de l'opérateur (MIR) à ces deux segments génère un ensemble dense de segments de

droite (Fig. 3-5) qui conduit à représenter une facette construite à partir des quatre points  $(p_{0,0}, p_{1,0}, p_{1,0}, p_{1,1})$  (Fig. 3-6). Cette facette est un parabololoïde hyperbolique si les deux segments initiaux ne sont pas coplanaires.

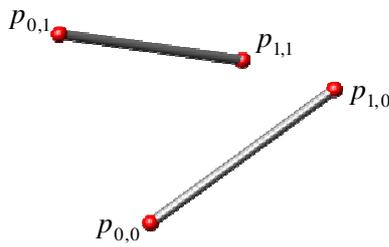


Fig. 3-4: Deux segments  $(p_{0,0}, p_{1,0})$  et  $(p_{0,1}, p_{1,1})$

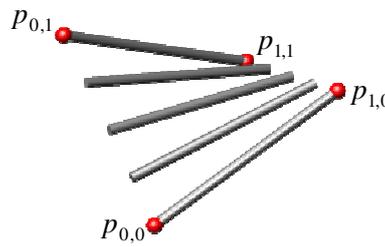


Fig. 3-5: (MIR) appliqué aux deux segments

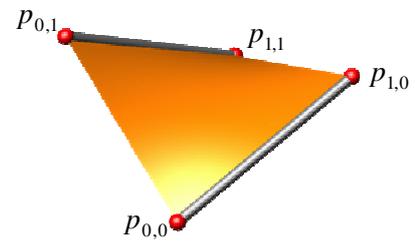


Fig. 3-6: Facette gauche

3.1.2.3 Milieu de deux facettes

En poursuivant toujours cette progression, la détermination de la facette milieu appliquée récursivement à un couple de facettes initiales (Fig. 3-7) produit un ensemble dense de points (Fig. 3-8) générant un volume (Fig. 3-9).

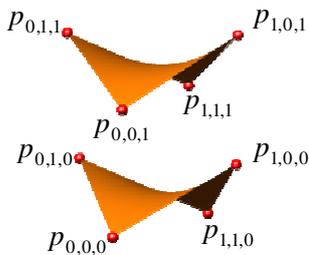


Fig. 3-7: Deux facettes initiales

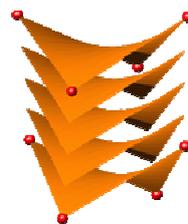


Fig. 3-8: (MIR) appliqué aux deux facettes

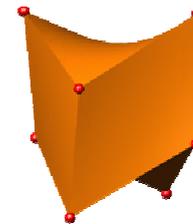


Fig. 3-9: Volume gauche

La représentation de ces ensembles de points peut être l'objet de plusieurs rendus graphiques comme l'illustre les figures (Fig. 3-10 à Fig. 3-13).



Fig. 3-10: Enveloppe de facettes gauches

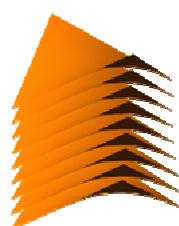


Fig. 3-11: « Mille-feuilles » de facettes gauches



Fig. 3-12: Segments cylindriques

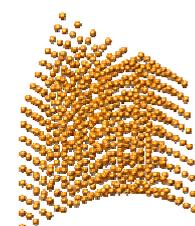


Fig. 3-13: Ensemble de sphères

3.1.2.4 Conclusion

La recherche de la forme milieu de deux formes permet de générer une famille de formes gauches engendrées par des segments non coplanaires. On note que l'opérateur (MI) produit une forme de même dimension et que son application récursive par l'opérateur (MIR) produit une forme de dimension supérieure.

### 3.1.3 Opérateur diagonalisation

Jusqu'à présent, les formes gauches présentées et générées par les opérateurs milieu ont des bords rectilignes. Elles contiennent toutefois des courbes de degré plus élevé pour lesquelles un accès est proposé en recherchant l'expression du milieu d'une forme. Cette opération mène à la définition d'un opérateur supplémentaire de diagonalisation et à une extension des opérateurs (MI) et (MIR).

#### 3.1.3.1 Milieu d'une facette

Considérons une facette gauche construite sur deux segments définis respectivement par deux couples de points  $(p_{0,0}, p_{1,0})$  et  $(p_{0,1}, p_{1,1})$ . L'expression du point milieu  $p_m$  de la facette peut être définie selon

$$p_m = \frac{1}{2} \left( \frac{p_{0,0} + p_{1,0}}{2} + \frac{p_{0,1} + p_{1,1}}{2} \right) \quad (3.2)$$

$$p_m = \frac{1}{4} (p_{0,0} + p_{1,0} + p_{0,1} + p_{1,1}) \quad (3.3)$$

A partir du point  $p_m$ , quatre sous-facettes sont ainsi identifiées (Fig. 3-14). En reproduisant récursivement cette opération sur les deux sous-facettes diagonales (Fig. 3-15), un ensemble dense de points est généré et produit une courbe diagonale reliant  $p_{0,0}$  et  $p_{1,1}$  (Fig. 3-16).

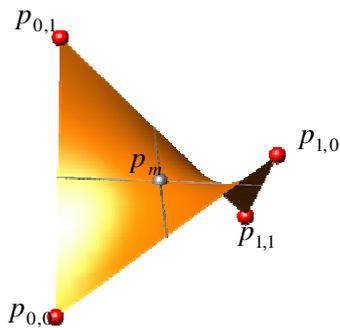


Fig. 3-14: Point milieu de la facette

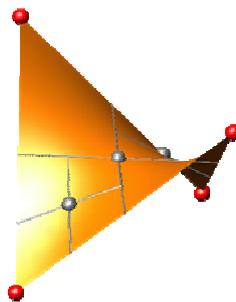


Fig. 3-15: Points milieux de deux sous-facettes diagonales

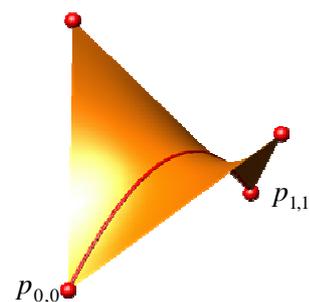


Fig. 3-16: Courbe diagonale de la facette entre  $p_{0,0}$  et  $p_{1,1}$

La détermination du milieu d'une facette conduit alors à la génération d'une forme de degré inférieur. L'expression de courbes diagonales peut être simplifiée à partir des quatre points définissant la facette (Fig. 3-17) en posant

$$p_0 = p_{0,0}, \quad p_1 = \frac{p_{1,0} + p_{0,1}}{2} \quad \text{et} \quad p_2 = p_{1,1} \quad (3.4)$$

L'expression (3.3) peut alors s'écrire

$$p_m = \frac{1}{4} (p_0 + 2p_1 + p_2) \quad (3.5)$$

La relation (3.5) amène à considérer l'extension de l'opérateur (MI) à trois points. En effet, l'obtention du point milieu d'un triplet de points  $(p_0, p_1, p_2)$  revient à une application en deux temps de l'opérateur (MI) aux couples  $(p_0, p_1)$  et  $(p_1, p_2)$

$$p_m = \frac{1}{2} \left( \frac{p_0 + p_1}{2} + \frac{p_1 + p_2}{2} \right) \quad (3.6)$$

L'application récursive de l'opérateur (MI) étendu à trois points (Fig. 3-18) permet de définir l'extension de l'opérateur (MIR) (Fig. 3-19). La relation ( 3.4 ) identifie ainsi l'opérateur de diagonalisation (Diag) pour une facette et la représentation de la courbe diagonale fait appel à l'opérateur (MIR).

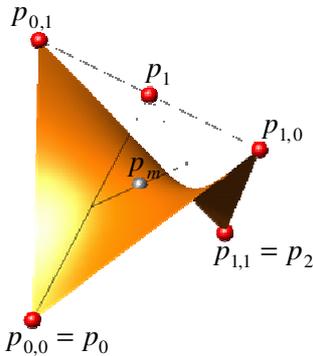


Fig. 3-17: Expression réduite du point milieu

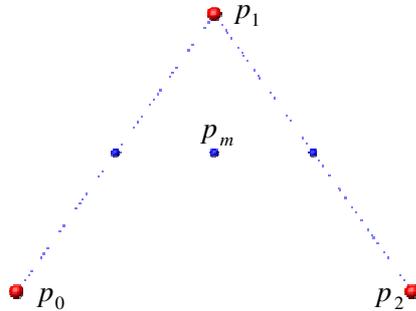


Fig. 3-18: (MI) appliqué à trois points

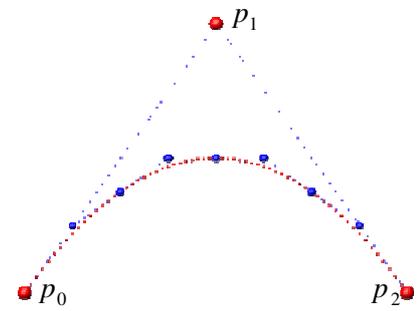


Fig. 3-19: (MIR) appliqué à trois points

Il en résulte une courbe générée par un triplet de points, plus complexe que le segment et dont la construction retrouve l'algorithme de De Casteljau appliqué au cas de la parabole. Sa reformulation par l'application des opérateurs (Diag), (MI) et (MIR) permet d'envisager la parabole comme la diagonale d'une facette gauche, ou bien la forme obtenue par la recherche récursive des points milieu de triplets de points. On peut ainsi étendre cette démarche à l'étude des représentations de formes gauches plus complexes.

### 3.1.3.2 Milieu d'un paraboloïde réglé

L'extension des opérateurs (MI) et (MIR) à trois points génère une parabole. En suivant la même logique de progression, leur définition peut être élargie en les appliquant à un couple de paraboles, respectivement définies par les deux triplets de points  $(p_{0,0}, p_{1,0}, p_{2,0})$  et  $(p_{0,1}, p_{1,1}, p_{2,1})$ .

L'application de (MI) à ces triplets génère un nouveau triplet de points qui définit la parabole milieu. Si nous répétons récursivement l'appel de (MI) à « gauche » et à « droite » sur les nouveaux couples de paraboles formés, nous étendons (MIR) à la création d'un paraboloïde réglé (Fig. 3-20).

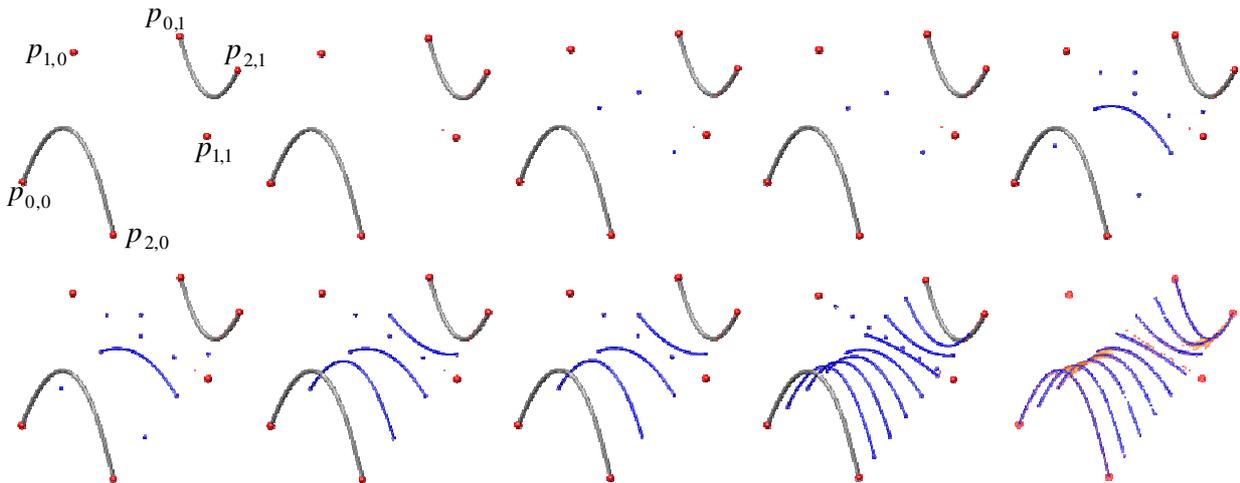


Fig. 3-20: Génération d'un paraboloïde réglé à partir de deux paraboles

Nous remarquons que cette surface peut aussi être construite à partir des trois segments  $(p_{0,0}, p_{0,1})$ ,  $(p_{1,0}, p_{1,1})$  et  $(p_{2,0}, p_{2,1})$ , ce qui incite à étendre les opérateurs (MI) et (MIR) au cas de trois segments (Fig. 3-21).

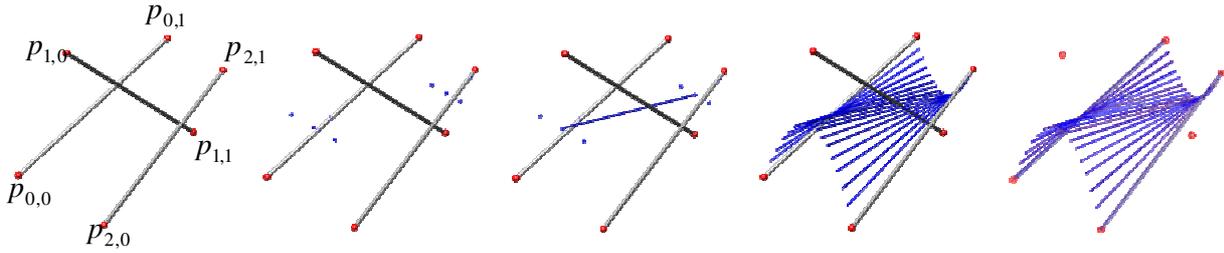


Fig. 3-21: Génération d'un paraboloïde réglé à partir de trois segments

Le raisonnement permettant de construire la diagonale d'une facette gauche s'applique de façon analogue à la construction de celle du paraboloïde réglé. La figure (Fig. 3-22) propose ainsi un schéma illustratif de l'opérateur (Diag).

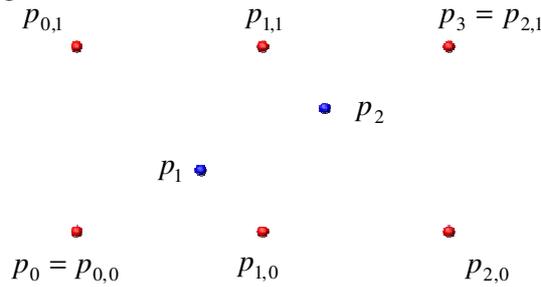


Fig. 3-22: Opérateur (Diag) sur un paraboloïde réglé

Si l'on pose

$$p_0 = p_{0,0}, p_1 = \frac{2p_{1,0} + p_{0,1}}{3}, p_2 = \frac{p_{2,0} + 2p_{1,1}}{3} \text{ et } p_3 = p_{2,1} \tag{3.7}$$

alors, l'expression du point milieu de la surface, conduit après simplification à l'extension de l'opérateur (MI) au cas de quatre point, devient (Fig. 3-23)

$$p_m = \frac{p_0 + 3p_1 + 3p_2 + p_3}{8} \tag{3.8}$$

L'application récursive de la recherche du point milieu d'un quadruplet de points entraîne à étendre (MIR) au cas de quatre points, ce qui produit la cubique diagonale du paraboloïde réglé. La progression de l'opérateur (MIR) nous mène à la représentation de la première courbe 3D gauche construite sur quatre points de définition (Fig. 3-23).

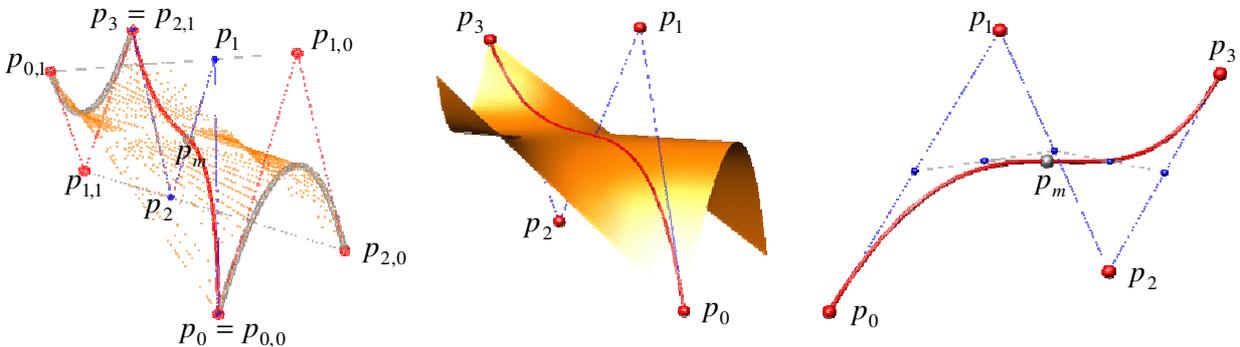


Fig. 3-23: Cubique - Courbe diagonale d'un paraboloïde réglé

Remarquons toutefois que les deux paraboles génératrices du paraboloïde réglé sont elles-mêmes les diagonales des facettes gauches génératrices d'un cube. Le paraboloïde réglé peut donc être considéré comme la surface diagonale du cube gauche (Fig. 3-24). L'opérateur (Diag) est ainsi étendu aux cas des cubes gauches.



$$p_m = \frac{p_0 + 4p_1 + 6p_2 + 4p_3 + p_4}{16} \quad (3.10)$$

L'application récursive de la recherche du point milieu d'un quintuplé de points mène à (MIR) étendu au cas de cinq points, ce qui crée la diagonale de la biquadrique, soit une courbe contrôlée par ces cinq points (Fig. 3-27).

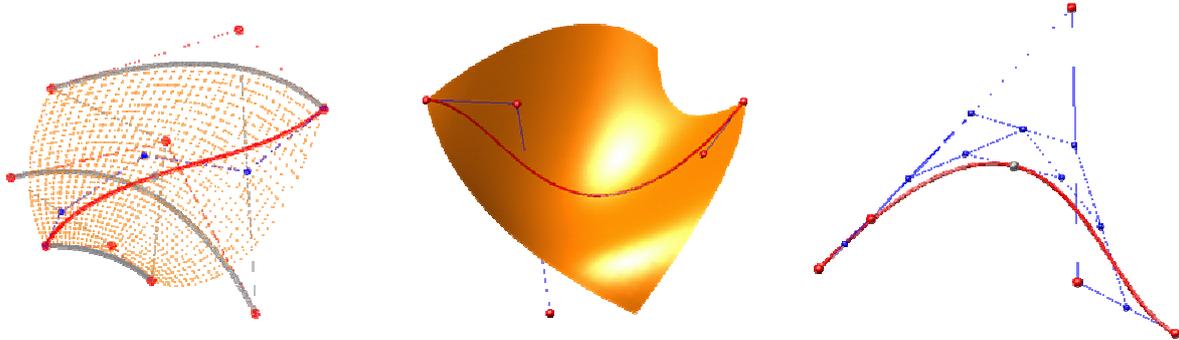


Fig. 3-27: Courbe à cinq points de contrôle – Courbe diagonale d'une biquadrique

La biquadrique est la première surface gauche non réglée de la famille des pFormes. Nous pouvons aussi remarquer qu'une poursuite de l'extension de l'opérateur (Diag) au cas de l'hypercube (obtenu à partir de deux volumes) produit un volume diagonal contrôlé par trois facettes et étend ainsi l'opérateur (MIR) au cas de trois facettes. Une seconde diagonalisation appliquée à ce volume permet alors de retrouver la biquadrique construite sur les paraboles de chacune de ces facettes.

Il apparaît néanmoins nécessaire de passer à une généralisation des opérateurs (MI) et (MIR) pour constituer un outil de représentation de formes complexes de degré et de dimension arbitraires.

### 3.1.4 Généralisation

La logique de génération partant de l'expression du point milieu à laquelle est appliqué un processus récursif nous a progressivement amené à créer des formes de degré et de dimension croissants. Cette progression a fait apparaître la correspondance entre l'opérateur (Diag) et les formes produites par les opérateurs (MI) et (MIR) redéfinis pour s'appliquer à un nombre quelconque de formes. L'extension de l'opérateur (MIR) permet une écriture nouvelle et généralisée de l'algorithme de De Casteljau ; nous en précisons la relation dans un prochain paragraphe.

De façon générale, nous pouvons noter que :

- l'opérateur (MI) produit une forme de même dimension ;
- l'opérateur (MIR) produit une forme de dimension supérieure ;
- l'opérateur (Diag) produit une forme de dimension inférieure.

Nous avons présenté l'écriture explicite de la forme milieu  $f_m$  jusqu'au cas de cinq formes

- 2 formes :  $f_m = \frac{f_0 + f_1}{2}$
- 3 formes :  $f_m = \frac{f_0 + 2f_1 + f_2}{4}$
- 4 formes :  $f_m = \frac{f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3}{8}$  (3.11)

$$f_m = \frac{f_0 + 4f_1 + 6f_2 + 4f_3 + f_4}{16}$$

- 5 formes :

Les coefficients des termes en numérateur correspondent aux coefficients du triangle de Pascal. L'expression d'une forme milieu  $f_m$  peut ainsi être généralisée comme combinaison barycentrique de  $p$  formes telle que

$$f_m = \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p-1}{i} \frac{1}{2^{p-1}} f_i \quad (3.12)$$

où nous retrouvons  $\binom{p-1}{i}$ , l'expression du binôme de Pascal, déjà présentée dans (2.7).

Nous remarquons la propriété d'invariance affine, assurant l'indépendance des formes créées par rapport à l'origine du repère choisie, et traduite par

$$\sum_{i=0}^{p-1} \binom{p-1}{i} \frac{1}{2^{p-1}} = 1 \quad (3.13)$$

### 3.1.5 Eléments de vocabulaire

A. Marty a proposé pour cette famille de formes le nom de « formes pascaliennes », ou « pFormes ».

La lettre « p » rappelle le « P » de Pascal en raison de la présence des coefficients du binôme et « le fait que ces formes sont toutes des ensembles denses et non continus de points, des formes pas tout à fait équivalentes aux formes de la géométrie ordinaire, même si elles peuvent en être aussi proches qu'il est souhaitable ».

En suivant ce langage, nous parlerons de pCourbes, pSurfaces, de pVolumes etc... suivis d'indices précisant le nombre de points de contrôle ayant permis leur génération. Nous en donnons quelques exemples ci-dessous (Tab. 3-1).

pCourbes		pSurfaces		pVolumes	
pC2	segment	pS22	paraboloïde hyperbolique	pV222	cube
pC3	parabole	pS32	paraboloïde réglé	pV324	4 paraboloïdes réglés
pC4	cubique	pS33	biquadratique	<b>pHypervolume</b>	
pC5	courbe degré 4	pS44	bicubique	pH2222	hypercube

Tab. 3-1 : Exemples de dénomination de pFormes

La suite d'indice désigne le nombre de points de contrôle selon les différentes dimensions de la forme. Un pV324 indique 3 points de contrôle dans la direction  $u$  (une parabole), 2 points en  $v$  (un segment) et 4 points en  $g$  (une cubique). Le degré pour chacune des directions correspond au nombre de points de contrôle diminué de 1. L'allure d'une biquadratique générée à partir de 3 paraboles (Fig. 3-25) montre que la surface n'interpole que ses courbes d'extrémités, comme une courbe avec ses points extrêmes.

### 3.1.6 Conclusion

Les pFormes offrent ainsi un outil de génération de formes complexes, basé sur un algorithme récursif élémentaire de recherche du point milieu. Cette approche géométrique garantit une continuité gestuelle reproductible pour :

- le dessin d'un croquis ;

- la structure du code numérique ;
- le tracé avec des cordes pour la mise en œuvre d'éléments constructifs comme les expériences d'atelier présentées plus tard en témoignent.

Dans ce qui suit, nous mettrons en évidence les moyens de description des formes classiques de la CAO par l'approche pForme.

### 3.2 pFormes et formes de Bézier

L'extension de l'opérateur (MIR) au cas de trois points a permis de retrouver la construction de l'algorithme de De Casteljaou d'une parabole. Nous souhaitons détailler davantage la relation entre cet opérateur de représentation et la reformulation de l'algorithme généralisé de De Casteljaou d'un point de vue récursif. Par ailleurs, la correspondance déjà rappelée entre l'approche géométrique des formes à pôles de De Casteljaou et leur formulation explicite avec les polynômes de Bernstein nous conduit à présenter les formes pascaliennes comme un moyen de représentation des formes de Bézier.

#### 3.2.1 Algorithme de De Casteljaou généralisé

##### 3.2.1.1 Parabole

Reprenons la construction de la parabole détaillée par ( 2.1 ) et ( 2.2 ) avec  $p_0, p_1$  et  $p_2$ , trois points quelconques de  $E^3$  ; fixons le paramètre  $u$  à la valeur  $\frac{1}{2}$  et construisons

$$\begin{aligned} p_0^1\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} p_0 + \frac{1}{2} p_1 = \frac{1}{2}(p_0 + p_1) \\ p_1^1\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2}(p_1 + p_2) \\ p_0^2\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left(p_0^1\left(\frac{1}{2}\right) + p_1^1\left(\frac{1}{2}\right)\right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

En substituant les valeurs de  $p_0^1\left(\frac{1}{2}\right)$  et de  $p_1^1\left(\frac{1}{2}\right)$  dans  $p_0^2\left(\frac{1}{2}\right)$ , nous obtenons le point en  $u = \frac{1}{2}$  sur la parabole

$$\begin{aligned} p_0^2\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(p_0 + p_1) + \frac{1}{2}(p_1 + p_2)\right) \\ p_0^2\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{4} p_0 + \frac{1}{2} p_1 + \frac{1}{4} p_2 = \frac{p_0 + 2p_1 + p_2}{4} = p_m \end{aligned} \quad (3.15)$$

Nous retrouvons ainsi l'expression ( 3.5 ) définissant le point milieu de trois points.

Au lieu d'effectuer des interpolations linéaires répétées en faisant varier  $u$  dans son intervalle de définition pour obtenir une représentation de la courbe (Fig. 3-28), poursuivons l'opération sur les deux sous-polygones de contrôle  $p_0, p_0^1, p_0^2$  à gauche et  $p_0^2, p_1^1, p_2$  à droite (Fig. 3-29). Nous obtenons alors deux nouveaux points sur la parabole pour  $u = \frac{1}{4}$  et  $u = \frac{3}{4}$ , qui génèrent à leur tour quatre nouveaux sous-polygones (Fig. 3-30) grâce auxquels la poursuite des subdivisions est possible jusqu'à obtention d'un nombre convenable de points pour la représentation. Il s'agit d'une application récursive de l'algorithme de De Casteljaou qui produit un ensemble dense de points correspondant ainsi aux partitions de l'unité  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)$  de l'intervalle  $[0,1]$ .

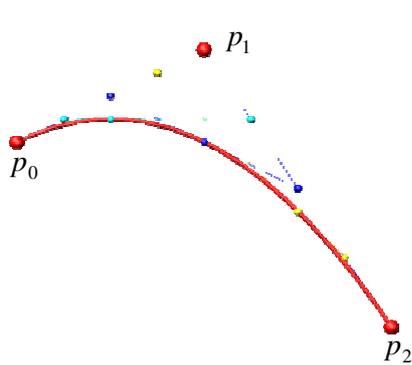


Fig. 3-28: Algorithme de De Casteljau pour  $u$  variant sur  $[0,1]$

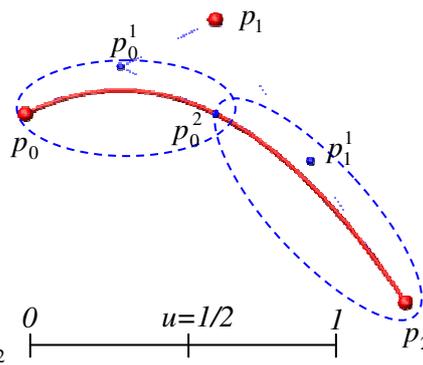


Fig. 3-29: Algorithme de De Casteljau pour  $u=1/2$

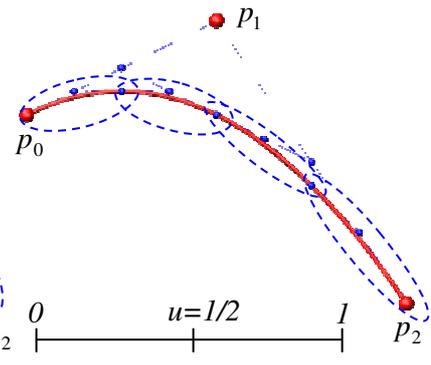


Fig. 3-30: Algorithme de De Casteljau récursif pour  $u=1/2$  avec deux subdivisions

### 3.2.1.2 Généralisation

#### 3.2.1.2.1 Courbes de degré $n$

La construction décrite ci-dessus peut-être généralisée pour générer une courbe polynomiale d'un degré  $n$  arbitraire. Une cubique peut ainsi être aisément représentée (Fig. 3-31) par l'application récursive de l'algorithme de Casteljau en  $u = \frac{1}{2}$ . L'utilisateur détermine le nombre de subdivisions de l'intervalle en fonction de la finesse d'affichage souhaitée.

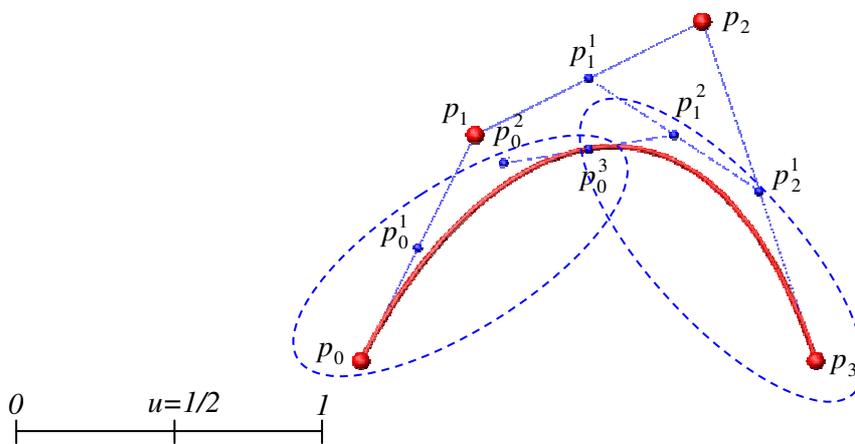


Fig. 3-31: Cubique et algorithme de De Casteljau récursif pour  $u=1/2$  (une seule subdivision est illustrée)

#### 3.2.1.2.2 Formes à $n$ -dimensions

La généralisation au cas des surfaces ne pose pas de problème majeur. Il s'agit de constituer des tableaux bidimensionnels de points issus de l'application récursive du « point milieu » dans les deux directions. On peut l'appliquer de la même façon dans trois directions et constituer ainsi des tableaux tridimensionnels de points pour représenter des volumes. Des dimensions supérieures sont aussi envisageables, mais l'application à la CAO en limitera l'étendue.

### 3.2.2 pFormes et polynôme de Bernstein

#### 3.2.2.1 Cas des courbes

Rappelons l'expression d'une courbe de Bézier de degré  $n$

$$p^n(u) = \sum_{i=0}^n p_i B_i^n(u) \quad (3.16)$$

Si nous fixons le paramètre  $u = \frac{1}{2}$ , cela devient

$$p^n\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{i=0}^n p_i B_i^n\left(\frac{1}{2}\right) \quad (3.17)$$

D'après l'expression ( 2.7 ) des polynômes de Bernstein alors ( 3.17 ) peut s'écrire

$$p^n\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{i=0}^n p_i \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-i} \quad (3.18)$$

et après simplification

$$p^n\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{p_i}{2^n} \quad (3.19)$$

En fixant le paramètre à  $u = \frac{1}{2}$ , la forme de Bernstein ( 3.16 ) se réduit à l'expression ( 3.12 ) du point milieu de  $(n+1)$  points, dont l'application récursive génère une pCourbe de degré  $n$  à  $(n+1)$  points de contrôle.

### 3.2.2.2 Cas des surfaces

L'expression générale ( 3.12 ) du point milieu de  $(n+1)$  formes s'applique aussi aux surfaces de Bézier  $p^{m,n}$  en considérant  $(n+1)$  courbes de degré  $m$ .

Soit une courbe initiale  $p^m$  de degré  $m$  que l'on peut représenter par récursivité de ( 3.19 )

$$p^m\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \frac{p_i}{2^m} \quad (3.20)$$

Chacun de ses points de contrôle  $p_i$  décrit une courbe de Bézier de degré  $n$

$$p_i(v) = \sum_{j=0}^n p_{i,j} B_j^n(v) \quad (3.21)$$

que l'on représente par récursivité telle que

$$p_i\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{j=0}^n p_{i,j} B_j^n\left(\frac{1}{2}\right) \quad (3.22)$$

$$p_i\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{p_{i,j}}{2^n} \quad (3.23)$$

En combinant ( 3.20 ) et ( 3.23 ), on obtient le point milieu  $p^{m,n}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  de la surface de Bézier  $p^{m,n}$

$$p^{m,n}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \binom{m}{i} \binom{n}{j} \frac{p_{i,j}}{2^{m+n}} \quad (3.24)$$

Ces interpolations multilinéaires de points, appliquées récursivement, permettent d'obtenir un tableau bidimensionnel de points qui constituent une surface entre ces courbes.

### 3.2.2.3 Généralisation aux cas de formes de dimensions supérieures

L'approche pFormes permet de générer des volumes (Fig. 3-9). A partir de leur écriture sous la forme de Bernstein, on a

$$p^{m,n,r}(u,v,g) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^r p_{i,j,k} B_i^m(u) B_j^n(v) B_k^r(g) \text{ pour un volume} \quad (3.25)$$

Nous pouvons retrouver de la même façon l'expression du point milieu dont la détermination récursive conduit à un ensemble dense de points qui permet de les représenter, soit

$$p^{m,n,r}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^r \binom{m}{i} \binom{n}{j} \binom{r}{k} \frac{p_{i,j,k}}{2^{m+n+r}} \text{ pour un volume} \quad (3.26)$$

### 3.2.3 Conclusion

Les formes pascaliennes, dont les coordonnées des points de  $E^4$  sont du type  $(x, y, z, 1)$ , sont ainsi des formes de Bézier ordinaires. L'originalité de l'approche géométrique rend toutefois accessibles leurs représentations à main levée jusqu'à un certain niveau de complexité choisie et fournit un moyen de compréhension de leur génération.

## 3.3 pFormes et B-splines uniformes

Nous avons précisé les intérêts des courbes B-splines qui pallient les limitations des courbes de Bézier dont le degré devient rédhibitoire pour la représentation des courbes complexes. Les B-splines quadriques et cubiques, souvent nommées splines, sont des courbes de Bézier dites « composites ». On peut ainsi définir les raccordements par des règles assurant des conditions de continuité. Dans ce qui suit, une représentation des B-splines uniformes quadriques et cubiques est proposée par concaténation de pCourbes selon deux approches classiques :

- par déclaration du polygone de contrôle ;
- par interpolation des points de définition, dite de « dessin inverse ».

La méthode géométrique nous apparaît être la plus accessible, de nombreuses sources se consacrant néanmoins à leur étude peuvent être consultées dans la littérature [FAR 90] [DEM 98] pour plus d'approfondissement.

### 3.3.1 Splines non interpolantes

#### 3.3.1.1 B-splines quadriques

Une courbe B-spline quadrique est composée de courbes de Bézier à trois points de contrôle. On peut ainsi en proposer une représentation par concaténation de paraboles générées par l'approche pForme.

Considérons un polygone de contrôle B-spline quadrique composé des points  $d_i$  où  $i \in [0, N]$  (Fig. 3-32). Pour chaque triplet de points  $(d_i, d_{i+1}, d_{i+2})$ , nous pouvons retrouver les trois points de contrôle  $(p_0, p_1, p_2)$  de chacune des pCourbes pC3 composites (Fig. 3-33) tels que

$$p_0 = \frac{d_i + d_{i+1}}{2}, \quad p_1 = \frac{2d_{i+1}}{2} \text{ et } p_2 = \frac{d_{i+1} + d_{i+2}}{2} \quad (3.27)$$

Les courbes successives se raccordent avec une continuité en tangence car, par construction, les tangentes sont colinéaires et de même module [FAR 90]. Ces courbes sont très utilisées par les logiciels mais limitées à la représentation 2D. En effet, la planéité des paraboles implique des discontinuités de torsion (voir en annexe A) aux points de raccordements.

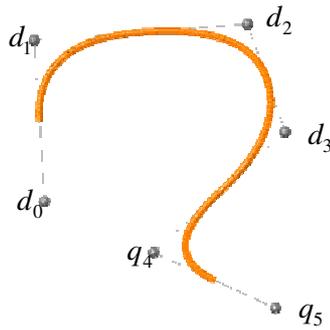


Fig. 3-32: Génération d'une B-spline quadrique

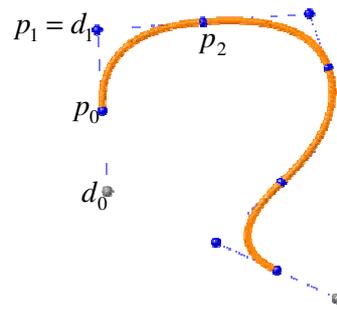


Fig. 3-33: Construction géométrique des points de contrôle de la première parabole

### 3.3.1.2 B-splines cubiques

Une courbe B-spline cubique est composée de courbes de Bézier à quatre points de contrôle. On en propose ainsi une construction géométrique par concaténation de cubiques générées par l'approche pForme.

Considérons un polygone de contrôle B-spline cubique composé des points  $d_i$  pour  $i \in [0, N]$  (Fig. 3-34). Pour chaque quadruplet de points  $(d_i, d_{i+1}, d_{i+2}, d_{i+3})$ , on peut retrouver les quatre points de contrôle  $(p_0, p_1, p_2, p_3)$  de chacune des pCourbes pC4 composées (Fig. 3-35) tels que

$$p_0 = \frac{d_i + 4d_{i+1} + d_{i+2}}{6}, \quad p_1 = \frac{4d_{i+1} + 2d_{i+2}}{6}, \quad p_2 = \frac{2d_{i+1} + 4d_{i+2}}{6} \quad \text{et} \quad p_3 = \frac{d_{i+1} + 4d_{i+2} + d_{i+3}}{6} \quad (3.28)$$

Par construction, les courbes successives se raccordent avec une continuité en tangence (tangentes colinéaires et de même module) ainsi qu'une continuité en courbure car les plans osculateurs (annexe A) sont confondus aux points de jonction. Pour leur propriété de continuité d'ordre 2, ces courbes sont très utilisées par les logiciels de CAO et FAO. Un autre avantage des cubiques par morceaux réside dans le fait qu'elles peuvent avoir des points d'inflexion à l'intérieur d'un segment. Avec des quadriques par morceaux, il faut alors prévoir un point de raccordement à chaque point d'inflexion qu'une seule parabole ne peut pas représenter.

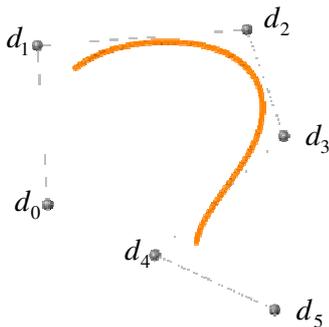


Fig. 3-34: Génération d'une B-spline cubique

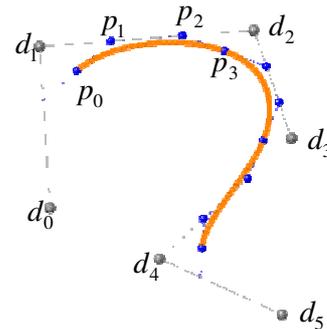


Fig. 3-35: Construction géométrique des points de contrôle de la première cubique

### 3.3.2 Splines interpolantes

On peut préférer manipuler une courbe directement plutôt que d'agir sur son polygone de contrôle. Ce problème, qualifié de « dessin inverse », fait appel à des méthodes d'interpolation [FAR 90] ou peut être résolu sous forme de Bézier par morceaux quadriques [MAR 04] ou cubiques. Une construction selon l'approche pForme est donc possible pour générer des splines interpolantes.

### 3.3.2.1 B-splines quadriques

Considérons les points  $b_i$  pour  $i \in [0, N]$  à interpoler à l'aide de paraboles (Fig. 3-36). La continuité en tangence nécessite la donnée d'un point supplémentaire  $b_{-1}$  qui définit avec  $b_0$  la direction de la tangente au départ de la courbe. La construction de la parabole démarre en notant que son second point de contrôle est le point symétrique de  $b_{-1}$  par rapport à  $b_0$  (Fig. 3-37).

A partir du triplet de points initial  $(b_{-1}, b_0, b_1)$ , on pose ainsi

$$p_0 = b_0, \quad p_1 = 2b_0 - b_{-1} \quad \text{et} \quad p_2 = b_1 \quad (3.29)$$

La poursuite de la construction des paraboles s'effectue par incrémentation sur les points  $b_i$  afin d'effectuer la même opération sur un triplet de points  $(b_{-1}, b_i, b_{i+1})$ , actualisé tel que  $b_{-1}$  soit le point  $p_1$  de la parabole précédente. La continuité en tangence aux points de jonction est alors conservée par construction.

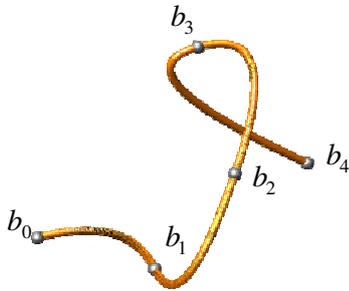


Fig. 3-36: Spline quadrique interpolante

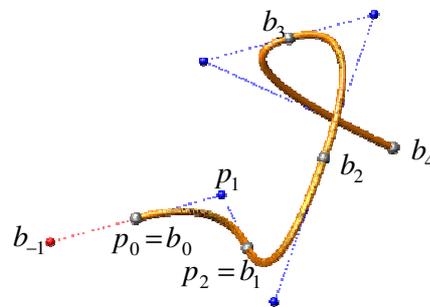


Fig. 3-37: Construction géométrique des points de contrôle de la première parabole

### 3.3.2.2 B-splines cubiques

Considérons les points  $b_i$  pour  $i \in [0, N]$  à interpoler à l'aide de cubiques (Fig. 3-38). La condition de raccordement en tangente et en courbure fait alors appel à deux points supplémentaires  $b_{-1}$  et  $b_{-2}$ . Ils définissent respectivement les directions de la tangente et de la courbure en  $b_0$  au départ de la courbe. La génération de la cubique nécessite toutefois une construction géométrique plus élaborée (Fig. 3-39).

A partir du quadruplet de points initial  $(b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1)$ , on pose

$$p_0 = b_0, \quad p_1 = 2b_0 - b_{-1}, \quad p_2 = 2p_1 - (2b_{-1} - b_{-2}) = 4b_0 - 4b_{-1} + b_{-2} \quad \text{et} \quad p_3 = b_1 \quad (3.30)$$

La poursuite de la construction s'effectue par incrémentation sur les points  $b_i$  afin d'effectuer la même démarche sur un quadruplet de points  $(b_{-2}, b_{-1}, b_i, b_{i+1})$ , actualisé tel que  $b_{-2}$  et  $b_{-1}$  soient respectivement les points  $p_1$  et  $p_2$  de la cubique précédente. La continuité en tangente et en courbure est ainsi conservée par construction aux points de jonction.

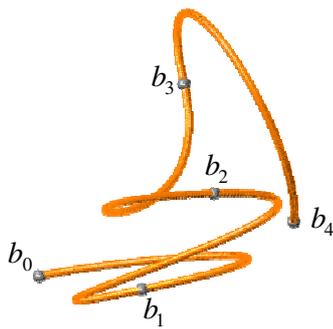


Fig. 3-38: Spline cubique interpolante

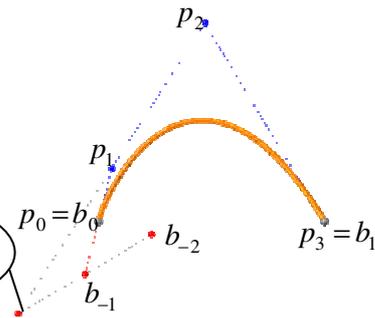


Fig. 3-39: Construction géométrique d'un quadruplet de points de contrôle

### 3.3.3 Conclusion

Les approches géométriques proposées montrent la possibilité de générer des pCourbes composites dont les positionnements des points de contrôle sont basés sur des distributions uniformes. Il en résulte des B-splines uniformes de degré deux ou trois. Il pourrait toutefois être envisagé d'étudier des positionnements dissymétriques et/ou différents par segments de courbe pour étendre l'application des pCourbes composites aux B-splines non-uniformes.

Il faut également préciser que la construction géométrique des splines uniformes par l'approche pFormes permet de retrouver l'algorithme de Chaikin [CHA 74]. G.M. Chaikin voyait l'intérêt de cette approche récursive en terme de rapidité du calcul numérique, mais n'en soulignait pas l'intérêt géométrique et gestuel porté par les pFormes.

## 3.4 pFormes et formes de Bézier rationnelles

Nous avons utilisé les pFormes comme outil de représentation géométrique de modèles polynomiaux que sont les formes de Bézier et les splines. Toutefois, un retour aux formes de Bézier rationnelles et aux nurbs montre que certaines formes comme les coniques (exceptée la parabole) et leurs déclinaisons ne peuvent être représentées que par des modèles où des fonctions rationnelles remplacent les fonctions polynomiales (§2.2.1.3). Rappelons également que nous avons contraint les coordonnées des points de contrôle  $p_i$  à des valeurs du type  $(x_i, y_i, z_i, 1)$ . Chaque pForme était de fait implicitement définie comme la projection d'une pForme de  $E^4$  vers un hyperplan d'équation  $w=1$ , ce qui nous a permis de travailler dans  $E^3$  sans que la coordonnée d'homogénéité joue un rôle de poids. Il est toutefois nécessaire d'utiliser ce paramètre si l'on souhaite étendre les possibilités formelles des pFormes à celles des formes rationnelles.

### 3.4.1 Cas des courbes

Rappelons la définition ( 2.52 ) de l'image  $p^n$  d'une courbe de Bézier  $p^n$  de degré  $n$

$$p^n(u) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i p'_i B_i^n(u)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(u)} = \sum_{i=0}^n p'_i \frac{w_i B_i^n(u)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(u)}$$

Nous avons vu qu'en fixant le paramètre à  $u = \frac{1}{2}$ , la forme de Bernstein ( 3.16 ) se réduit à l'expression ( 3.19 ) du point milieu de  $(n+1)$  points.

Si nous remplaçons ( 3.19 ) dans ( 2.52 ), nous obtenons l'expression du point milieu dans le cas des fonctions rationnelles

$$p^m\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sum_{i=0}^n p'_i \binom{n}{i} \frac{w_i}{2^n}}{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{w_i}{2^n}} = \sum_{i=0}^n p'_i \frac{\binom{n}{i} \frac{w_i}{2^n}}{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{w_i}{2^n}} \quad (3.31)$$

Lorsque tous les poids sont égaux à 1 (ou tous égaux), nous retrouvons l'expression ( 3.19 ) des pCourbes non rationnelles. Afin d'éviter des problèmes de divergence lors des calculs, la plupart des auteurs recommandent toutefois des poids  $w_i$  positifs.

Pour une telle construction, l'algorithme de De Casteljau récursif est appliqué dans  $E^4$  puis chacun des points issus de la subdivision est projeté dans  $E^3$  selon ( 2.49 ). Il en résulte d'après ( 3.31 ) une pCourbe rationnelles de  $E^3$  de degré  $n$  à  $(n+1)$  points de contrôle.

Les figures (Fig. 3-40) et (Fig. 3-41) illustrent le tracé d'un arc de cercle, étendu au cercle complet en augmentant l'intervalle de définition.

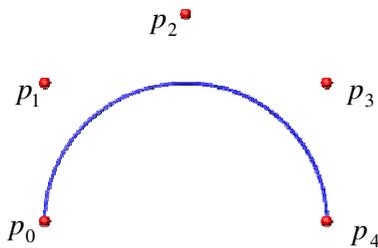


Fig. 3-40: Demi-cercle construit sur une pC5 sur l'intervalle  $[0,1]$

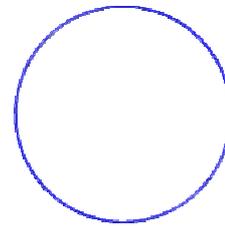


Fig. 3-41: Cercle complet construit sur une pC5 sur l'intervalle  $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}]$

### 3.4.2 Généralisation au cas des surfaces

Si on considère  $(n+1)$  courbes de degré  $m$ , l'application des pFormes au cas des pSurfaces rationnelles, donc à celui des surfaces de Bézier rationnelles  $p^{m,n}$ , suit la même logique d'écriture des expressions ( 3.20 ) à ( 3.24 ) dans lesquelles la forme non rationnelles d'une pCourbe est remplacée par ( 3.31 ). Le résultat conduit à une expression algébrique relativement lourde et sans intérêt premier pour ce travail. Nous nous appuierons donc davantage sur la compréhension de ces formes par le biais d'une représentation géométrique. On considère ainsi que le réseau de contrôle d'une pSurface rationnelle est un ensemble de pCourbes rationnelles. Des surfaces de révolution peuvent ainsi être obtenues (Fig. 3-42) par une construction qui sera précisée en troisième partie. A titre illustratif, nous montrons qu'à partir de deux cercles de diamètres différents on obtient un cône creux (Fig. 3-43).

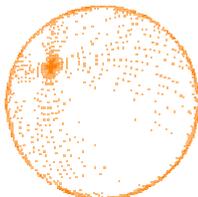


Fig. 3-42: Sphère



Fig. 3-43: Deux représentations d'un cône

### 3.4.3 Généralisation au cas des volumes

Sans chercher à écrire l'équation d'un volume rationnel, nous en proposons la construction en suivant la logique de génération pForme. On considère ainsi que le réseau de contrôle d'un volume est un ensemble de surfaces. A partir de deux disques, nous obtenons alors un cylindre plein.

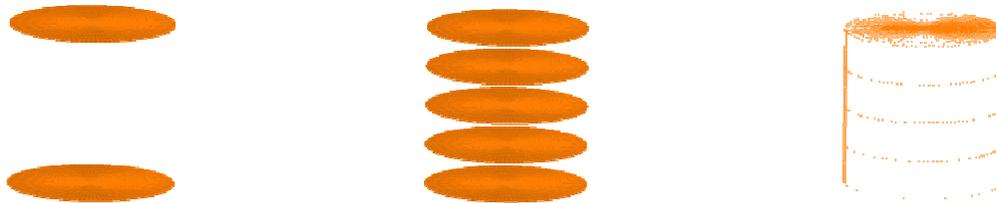


Fig. 3-44: Cylindre plein par l'approche pForme

### 3.4.4 Conclusion

Les formes pascaliennes, définies dans  $E^4$ , produisent dans  $E^3$  des formes rationnelles dans le cas général. Elles se réduisent toutefois à des formes polynomiales si les points de contrôle possèdent tous la valeur 1 en quatrième coordonnée (projection sur l'hyperplan  $w=1$ ).

Grâce à l'emploi des coordonnées homogènes, une méthode efficace de génération des formes de Bézier rationnelles est ainsi offerte, dont l'avantage réside dans une simplification de l'approche (une simple projection de l'espace à quatre dimensions dans l'espace tridimensionnel, à l'instar de la théorie des coniques).

## 3.5 **pFormes et nurbs**

Grâce à l'approche gestuelle des pFormes, nous avons pu présenter les modes de génération des B-splines et des formes de Bézier rationnelles. A l'image de l'extension possible des concaténations de pCourbes polynomiales uniformes à des pCourbes polynomiales non uniformes par distributions asymétriques des points de contrôle, nous pourrions envisager le même raisonnement pour les pCourbes rationnelles. Les pFormes nous permettraient alors de retrouver les nurbs par une logique de continuité de l'approche géométrique. L'application pratique de ce concept relève toutefois d'autres perspectives. Nous retiendrons pour l'instant que les nurbs peuvent être interprétées comme des concaténations de pFormes interpolantes ou non, uniformes ou non, dont les points de contrôle sont obtenus à partir des points du polygone B-spline par transformations linéaires.

## 4 CAS D'EXPERIMENTATIONS

### 4.1 Expérimentation 1 : réalisation d'une enveloppe gauche

« En choisissant de limiter l'approche à une poignée d'opérateurs géométriques élémentaires appliqués à un ensemble de points, associée à une représentation matérielle qui peut être limitée à une simple corde pour tracer des segments et en trouver le milieu, on peut conserver le contact avec les gestes simples du dessin à main levée » A. Marty [MAR 04].

#### 4.1.1 Objectif

Nous rapportons l'expérience d'un workshop<sup>1</sup> qui rassembla une équipe internationale et interdisciplinaire de participants : des étudiants architectes de l'Ecole Nationale Supérieure d'Architecture de Montpellier et des étudiants ingénieurs du département Génie Civil de l'Université Technologique de Delft en Hollande. Des informations complémentaires sont consultables dans l'article [AAN 08] que nous avons proposé avec la collaboration de quelques étudiants pour un congrès de l'IASS en 2008.

L'objectif s'inscrivait dans une démarche d'étude des processus de conception pour des formes caractérisées par des géométries dont la complexité résultait en particulier de modulations de courbures. La thématique de la double courbure fut abordée avec le souci constant de tisser un lien entre l'idée et la réalisation ; ce qui apporta des éléments de réponse au débat relatif aux formes libres :

*Comment assurer la plus grande cohérence du processus qui conduise des premières esquisses à la réalisation effective de constructions à doubles courbures variables ?*

L'accent fut ainsi mis sur la cohérence entre conception, dimensionnement et réalisation des surfaces en s'intéressant aux méthodes choisies lors des différentes étapes du processus. Nous proposons de tester à cet effet le choix du vocabulaire commun des pFormes.

La construction effective d'une surface à double courbure de 25m<sup>2</sup> (Fig. 4-1), considérée comme « objet d'étude », sert de support à la compréhension du principe des pFormes. La technologie nécessaire à sa réalisation fut abordée comme un moyen, en référence aux caractéristiques décrites dans le cahier des charges.

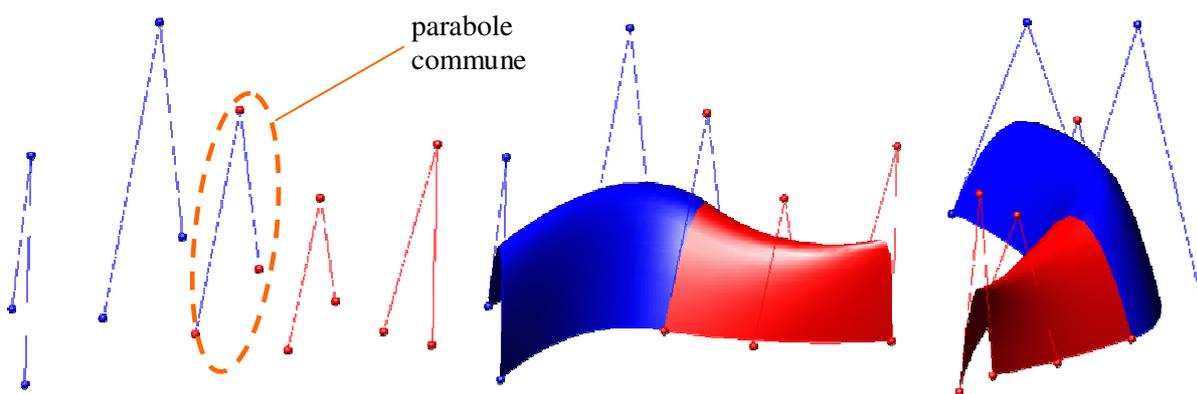


Fig. 4-1: Surface à double courbure composée de deux pS33

<sup>1</sup> Organisé en octobre 2007, aux Grands Ateliers de l'Isle d'Abeau, par le sous-groupe de travail "Morphologie Structurale" de l'International Association of Shell and Spatial Structures (IASS).

#### 4.1.2 Cahier des charges de l'objet

La méthode des pFormes étant méconnue des étudiants, nous avons limité l'outil de génération de formes gauches à son expression élémentaire :

- la parabole pC3, première courbe après la droite ;
- la bicubique pS33, première surface gauche non réglée.

L'emprise de l'objet fut limitée à 3m de large par 4m de haut, sur une surface de 25m<sup>2</sup>. Des zones de courbures positives et négatives devaient être observées. Cette contrainte exigeait la combinaison de deux pS33 dont la continuité des tangentes fut assurée par un alignement et une symétrie des points de contrôle à la jonction. De plus, les participants étaient assujettis à une faisabilité à court terme, compte tenu du délai dévolu à la réalisation limité à trois jours.

A la suite de ces considérations, dix groupes d'étudiants élaborèrent différentes propositions (Fig. 4-2), parmi lesquelles le pavillon à réaliser fut sélectionné.

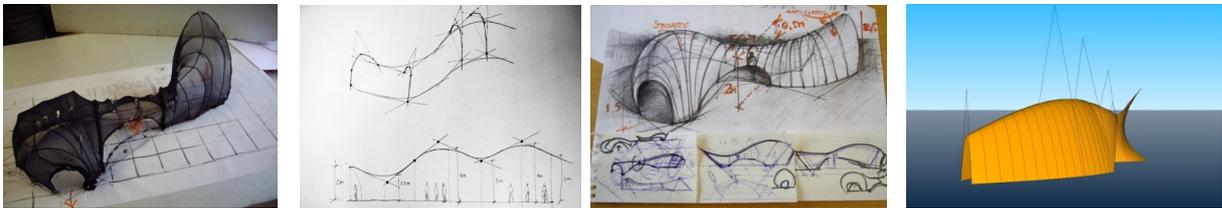


Fig. 4-2: Quelques propositions

#### 4.1.3 Conception

La recherche formelle fut effectuée dans un premier temps à main levée. Les groupes durent ainsi positionner sur une feuille de papier les points de contrôle générateurs de leur forme gauche. La maîtrise des courbures apparentes de leur objet selon différentes vues (plan, élévation, face..) leur assura une compréhension de leur représentation qui permit de passer aisément à des maquettes rudimentaires et à des modèles numériques (implémentation des routines pFormes sous Sketchup et Autocad).

#### 4.1.4 Réalisation

La technique de mise en œuvre se limita à une ossature en tasseaux assemblés, recouverte d'un bardage double face en carton ondulé. Chacune des paraboles fut alors tracée puis assemblée au sol (Fig. 4-3 et Fig. 4-4). A l'aide du modèle numérique, les laizes de carton furent découpées par triangulation. Enfin, chaque élément de bardage fut agrafé sur un couple de paraboles, constituant ainsi un module (Fig. 4-5 et Fig. 4-6). L'assemblage de chacun des modules conféra une stabilité à l'ensemble par l'intermédiaire de la double courbure ainsi générée.

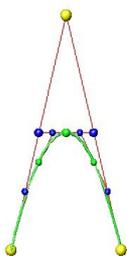


Fig. 4-3: Génération numérique d'une pC3



Fig. 4-4: Génération physique d'une pC3



Fig. 4-5: Agrafage d'une laize de carton



Fig. 4-6: Modules de couple de paraboles

#### 4.1.5 Analyse et commentaires

La méthode des formes pascaliennes a ici offert un langage commun qui assura par la transmission de l'information et la continuité du processus menant de la conception à la réalisation. Cette expérience pédagogique d'une semaine permet de considérer l'efficacité des pFormes à trois niveaux :

- La simplification

Les participants ont pu expérimenter la génération de formes à double courbure à partir de la courbe la plus simple, la pC3. En considérant les deux directions paramétriques de la surface, ils ont été conduits à maîtriser les surfaces non réglées les plus simples : les pS33 ainsi que leur concaténation pour obtenir une forme plus complexe. Au final, l'intégralité de la coque était donc donnée par cinq paraboles à l'aide d'un outil de géométrie descriptive les libérant de la complexité des expressions analytiques.

- La continuité

Les pFormes proposent une logique de génération basée sur des règles simples qui peut être reproduite depuis les premières esquisses, en passant par le modèle numérique, jusqu'aux procédés de montage des éléments de structure (arcs et implantation au sol par des cordelettes). Les étudiants ont donc abordé en continuité le croquis esquissé à la main, le modèle numérique et la technologie de montage. L'efficacité de ce langage fut aussi manifeste grâce à la matérialisation de leur projet, dont l'existence reste habituellement restreinte à la virtualité de leur écran.

- L'appropriation

Elle s'effectue en deux temps. Le premier concerne l'appropriation de la forme du fait de sa compréhension. Les participants sont capables de la maîtriser et de l'expliquer avec rigueur. Dans un second temps, ils se sont appropriés l'outil, ce qui a permis de développer du code informatique et d'aller au-delà des interfaces graphiques avec lesquelles ils ont l'habitude de travailler.



*Fig. 4-7: Structure finale*

Toutefois, le passage du virtuel au réel (Fig. 4-7) révéla d'autres paramètres du processus de conception. En effet, la complexité de l'architecture ne se limite pas à sa seule description géométrique. Bien que la forme parabolique nous garantissait une stabilité structurelle de l'objet sous poids propre, les matériaux utilisés, les imprécisions de réalisation et le choix des assemblages nous menèrent vers une esthétique différemment appréciée.

Certes, l'objectif de cette expérimentation ne se situait pas à ce niveau, voire visait à dépasser l'esthétisme de ces nouvelles formes architecturales pour en apporter une autre lecture.

Le pavillon «Tea House » (Fig. 4-8 à Fig. 4-10) réalisé en 2005 par l'architecte K. Kuma, pourrait être considéré comme un exemple significatif de conception pascalienne.



Fig. 4-8: Tea House – K. Kuma – 2005



Fig. 4-9: Vue intérieure



Fig. 4-10: Détail de connexion

Il s'agit d'un édifice temporaire dont les arcs sont réalisés en feuilles de plastique de 5mm (Fig. 4-11). Ces arcs, distants de 65mm, sont connectés par des pièces de carton à travers lesquelles de simples serre-joints assurent l'assemblage (Fig. 4-10 et Fig. 4-12).

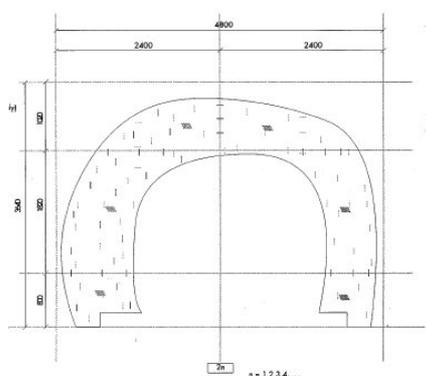


Fig. 4-11: Vue d'un arc

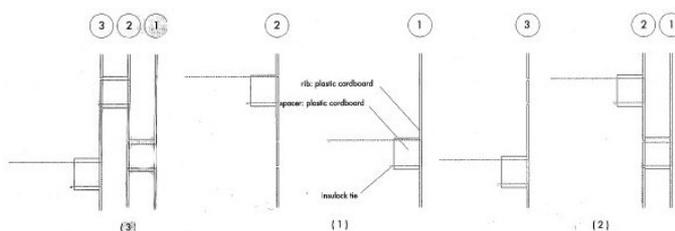


Fig. 4-12: Connexions des arcs

## 4.2 Expérimentation 2 : générations de morphologies non-standard

### 4.2.1 Objectifs

Nous rendons compte d'une seconde expérience<sup>2</sup> visant à tester l'efficacité de l'approche géométrique par pFormes auprès d'étudiants en master d'Architecture à l'Ecole Nationale Supérieure d'Architecture de Montpellier. La modélisation et de la représentation des formes gauches ont été abordées en ayant en point de mire leur utilisation dans l'architecture. Nous cherchions à mettre l'accent sur la compréhension et la maîtrise des outils de représentation, au-delà de l'image purement plastique du rendu infographique. Seuls quelques uns des projets d'étudiants sont présentés en illustration mais l'ensemble des onze propositions est consultable sur le site [http://ensam.wiki.free.fr/S9/infographie\\_2008](http://ensam.wiki.free.fr/S9/infographie_2008)

### 4.2.2 Contenu

A cet effet, nous nous sommes appuyés sur les pFormes pour aborder la génération de formes complexes. L'enseignement des opérateurs de base permettait aux étudiants de découvrir un mode de génération à main levée de paraboles simples ou concaténées, de cubiques ou de surfaces pS<sub>3n</sub> jusqu'à des volumes simples.

<sup>2</sup> Organisée sur un volume horaire de 72h, pour un module d'infographie dirigé par A. Marty.

Trois outils numériques de base ont également été utilisés :

- Sketchup, outil devenu incontournable pour les étudiants car il leur permet de modéliser et de manipuler avec facilité des formes 3D. Les possibilités de rendu sont également très appréciées ;
- Autocad, outil classique de la profession du bâtiment, largement utilisé par toute la chaîne d'intervenants participant au processus de conception. Principalement utilisé pour la production de plans 2D, nous en avons toutefois exposé les potentialités de modélisation de formes gauches 3D ;
- Blender, outil sophistiqué de modélisation 3D et initialement destiné à l'animation. Ce logiciel permet en plus d'aller au-delà des premiers rendus de Sketchup et de produire des images photoréalistes.

Grâce au langage incorporé dans Sketchup (ruby), nous avons pu mettre à disposition des étudiants une bibliothèque de base pour la création de pFormes.

#### 4.2.3 Applications

Suite aux aspects théoriques, il s'agissait pour les étudiants travaillant en binômes de sélectionner un projet architectural de forme complexe déjà existant et d'en reconstituer une représentation. Dans un premier temps, la lecture de la forme choisie s'appuyait sur les diverses photos, documents graphiques ou textes glanés durant leurs recherches documentaires.

Ils se confrontèrent rapidement à la superficialité des images pénalisant la compréhension de leur forme. Leur réflexe de se retourner vers l'outil numérique sans réflexion sur l'objet s'avéra peu concluant et coûteux en temps. Sur ces constats, la plupart d'entre eux commença à esquisser à la main ou numériquement les lignes et contours remarquables du projet choisi. Les illustrations firent appel à leur maîtrise de la génération de courbes à partir de points de contrôle. Pour organiser leur recherche formelle, ils utilisaient le positionnement des points sur une trame régulatrice.

Cette étape de contrôle de l'information par des points géométriques leur a permis d'aller plus loin dans la représentation des formes gauches. L'absence d'interface graphique de la bibliothèque pFormes qui leur était proposée les contraignait à travailler directement en langage ruby, ce qui était une nouveauté dans leur pratique de Sketchup. Mais, passées les premières réticences, cette étape n'a pas posé d'inconvénient. En effet, la correspondance entre la génération à main levée et la structure algorithmique proposée par les pFormes les a conduit naturellement à la compréhension du code en ruby. Ils adaptèrent ainsi les commandes de déclaration et de génération à des objets pour en obtenir une représentation. Ils ont donc pu poursuivre plus interactivement l'analyse des formes en agissant sur des paramètres tels que la position des points de contrôle (par translation, homothétie ou rotation).

Il fut ainsi intéressant de les voir aboutir à des propositions formelles similaires aux images à partir desquelles leur travail commença. L'intérêt de cette démarche réside dans l'appropriation des étapes du processus de génération et la compréhension de l'influence des paramètres (points de contrôle). Cette maîtrise les a amenés à épurer les informations géométriques nécessaires à la génération des formes, comme le montre leurs propositions finales (Fig. 4-19 à Fig. 4-22).

Nous explicitons ci-après les étapes d'évolution de quelques binômes.

- **Cas d'étude 1 (C. Cavalier et C. Ducamp)**

Ces étudiants choisirent de travailler sur la proposition des architectes de l'agence hollandaise Mecanoo pour le concours du Learning Center à l'EPFL (Fig. 4-13).

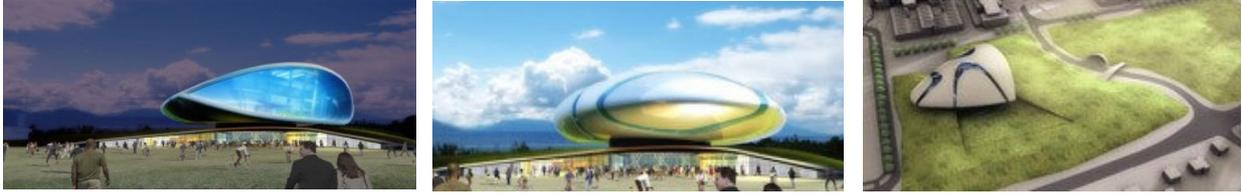


Fig. 4-13: Learning Center – Mecanoo - Lauzanne – Suisse – 2004 (concours)

Ils constatèrent que les sections de l'objet, a priori complexe, pouvaient être obtenues à partir de la concaténation de quatre courbes élémentaires, en fait des paraboles  $pC3$  dont les points de contrôle se trouvaient sur les sommets et les milieux de rectangles présentant des propriétés de symétrie et de rapport d'échelle (Fig. 4-14).

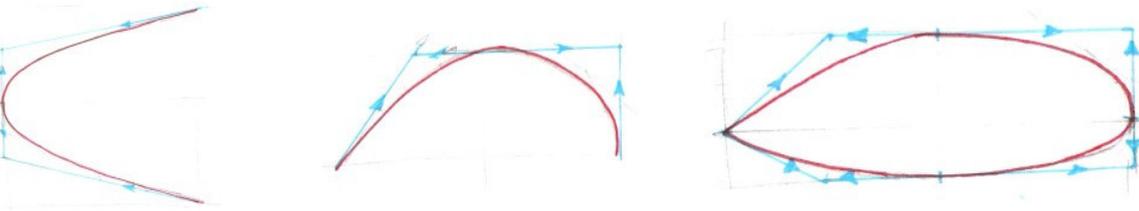


Fig. 4-14: Analyse de la forme du Learning Center

Ils firent ainsi le choix simple de construire la surface à partir d'une surface élémentaire composée de trois paraboles ( $pS3$ ), dont les points de contrôle se situaient de la même façon sur les sommets et les milieux d'un parallélépipède. Des transformations de cette surface élémentaire leur permirent d'obtenir ainsi les quatre sous-surfaces constituant l'intégralité de la coque (Fig. 4-15).

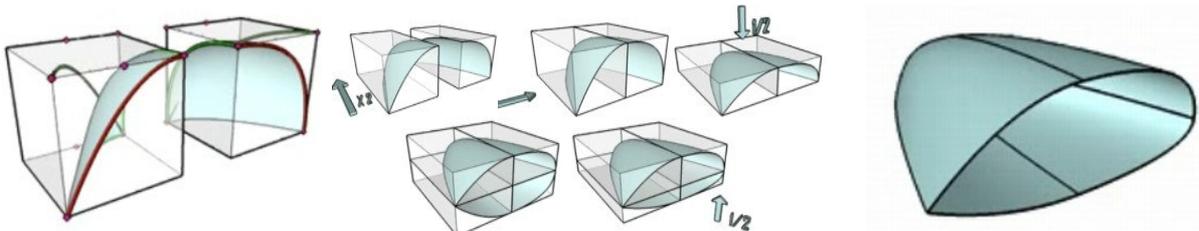


Fig. 4-15: Modélisation du Learning Center à partir de quatre surfaces composées de trois paraboles  $pL3$

A partir cette géométrie, ils s'attachèrent à une représentation plus réaliste en utilisant les outils d'intersection et de rendu qu'ils avaient l'habitude de maîtriser (Fig. 4-16).

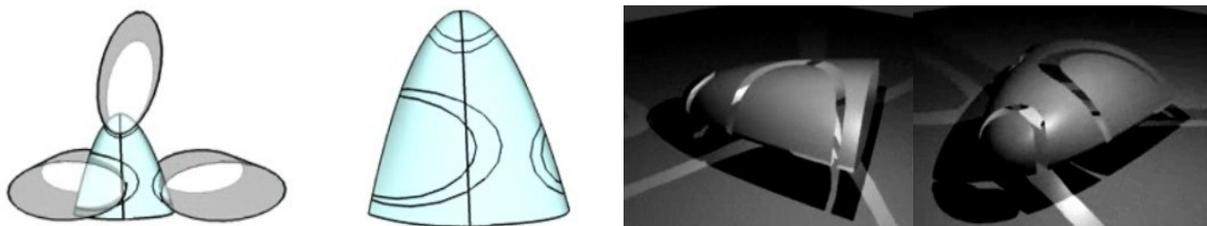


Fig. 4-16: Final

- **Cas d'étude 2 (J.Y. Demuyter et M. Descamp)**

Ce groupe travailla sur le projet de la Tour Phare (la Défense, Paris) de Tom Mayne de l'agence Morphosis (Fig. 4-17).

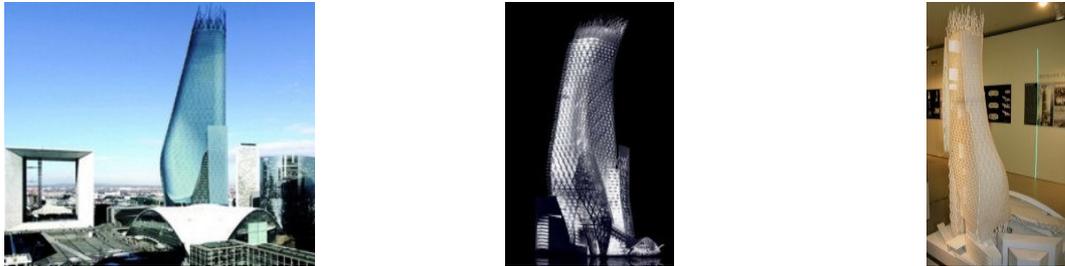


Fig. 4-17: Tour Phare – Morphosis – Paris – France – 2006 / 2012

Il utilisa dans un premier temps le logiciel Blender ; l'idée consistait à se servir des fonctions avancées de « free form deformation ». Il s'agit de déclarer un objet défini dans un parallélépipède. Les déformations s'effectuant ensuite sur le parallélépipède en déplaçant ses points de contrôle se répercutent sur l'objet immergé. Les étudiants choisirent ainsi d'immerger un demi cylindre. Ils furent néanmoins très vite pénalisés par le manque de contrôle des opérations de déformation, dans la mesure où ils ne comprenaient pas les fonctionnalités de l'outil et les répercussions de leurs actions pour approcher la forme souhaitée.

Ils se tournèrent ensuite vers les pFormes en recherchant les points de contrôle de sections horizontales de la tour. Des pC5 permirent d'abord de représenter les variations de sections sur la hauteur du bâtiment. Ils dessinèrent de nombreuses coupes horizontales jusqu'à ce qu'ils sachent interpréter les informations issues de l'étude des profils. En effet, des pC4 permettaient de reproduire les profils Nord et Est (Fig. 4-18). Le couplage de ces données dans les deux directions les renseigna sur la nature d'une surface élémentaire pouvant approcher la forme recherchée, soit une pS54.

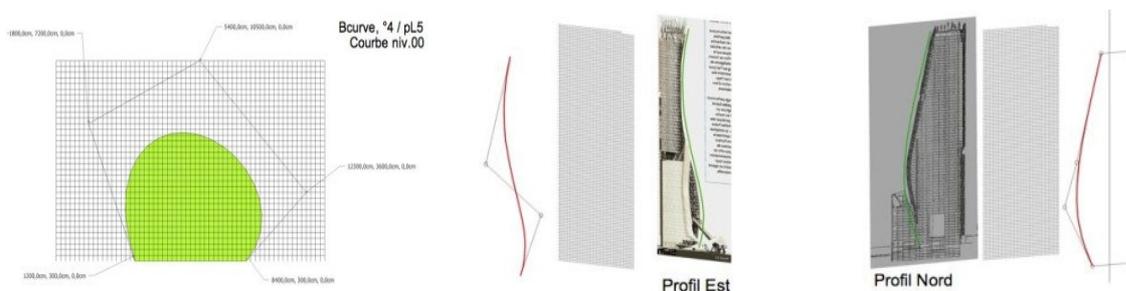


Fig. 4-18: Analyse de la forme de la Tour Phare

A partir de cette analyse qui les renseignait sur le nombre et la position des points de contrôle nécessaires, ils passèrent au codage en ruby (Fig. 4-19).

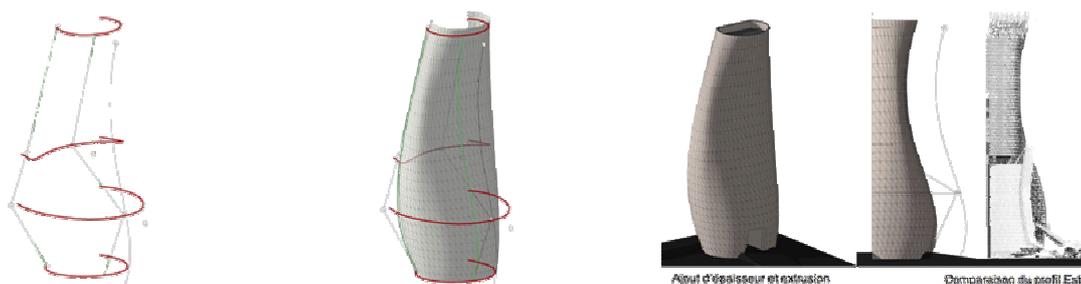


Fig. 4-19: Modélisation de la Tour Phare à partir de quatre pC5

- **Cas d'étude 3 (Y. Florentin et L. Gau)**

Ce groupe arrêta son choix sur le projet de l'Abu Dhabi National Exhibition Center (ADNEC) conçu par le groupement RMJR (Fig. 4-20).



Fig. 4-20: ADNEC – RMJR – Abu Dhabi – Emirats Arabes Unis – 2008

Deux objets devaient être analysés, consistant en une tour inclinée et une couverture. Ils simulèrent premièrement la tour par une succession de nombreuses pCourbes à sept points de contrôle, associées à des coupes horizontales. Puis, ils se rendirent compte que le profil du bâtiment pouvait être généré par seulement quatre points de contrôle (Fig. 4-21). Le couplage de ces données leur permit d'identifier les informations nécessaires dans les deux directions de l'espace pour réaliser la surface paramétrée souhaitée, c'est-à-dire une pS74. Pour la courverture, ils mirent à profit plus rapidement cet acquis analytique et montrèrent que trois pC5 suffisaient à la générer.

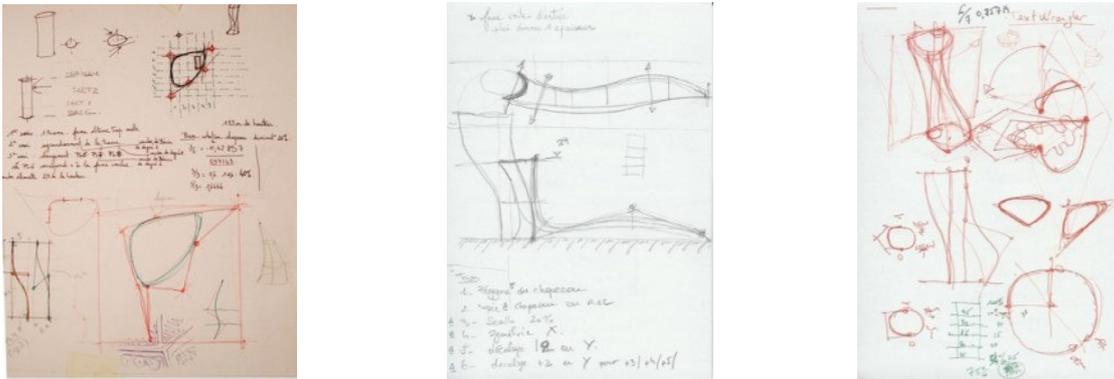


Fig. 4-21: Analyse de la forme de l'ADNEC

A partir de cette étude les renseignant sur le nombre et la position des points de contrôle, ils passèrent au modèle numérique selon cette logique générative (Fig. 4-22).

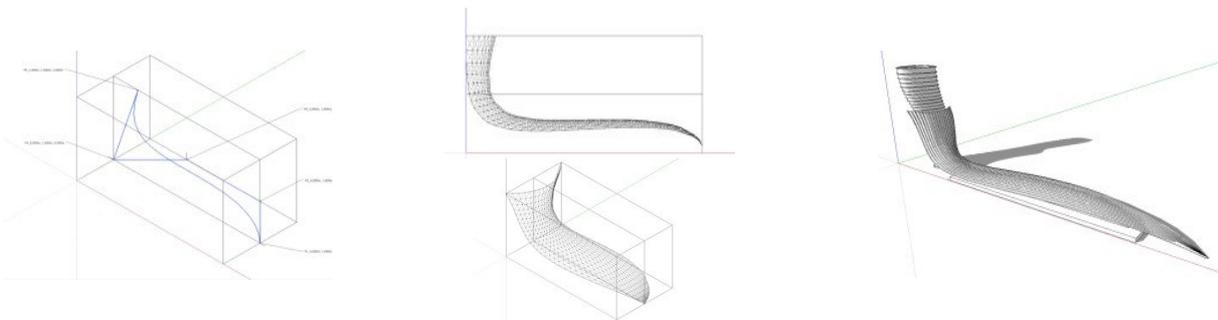


Fig. 4-22: Modélisation de la partie couverture de l'ADNEC à partir de trois pC5

#### 4.2.4 Analyse et commentaires

Cette seconde expérimentation fut fructueuse en terme de discussion sur l'efficacité didactique des pFormes. Elle confirma plus nettement les conclusions de l'expérience du workshop car les heures dédiées étaient plus nombreuses et le délai de rendu moins contraignant. Le bilan peut-être le suivant :

- La simplification

Les formes choisies apparaissaient initialement compliquées et sans logique générative évidente. Il fut donc très intéressant de voir qu'au terme d'une analyse, les étudiants architectes aient réussi à clarifier les informations géométriques. Les formes sont ainsi rendues accessibles par des opérations successives effectuées sur des courbes élémentaires identifiables.

- La continuité

Ce point fut déjà constaté lors de la première expérimentation. Les heures supplémentaires accordées aux phases de croquis et de codage numérique l'ont davantage confirmé.

- L'appropriation

Nous l'avons également remarqué dans le bilan de l'expérience précédente. La visualisation des présentations finales des participants, disponibles sur le site internet, en fournit une illustration supplémentaire.

- La compatibilité

Les étudiants ont su assimiler les pFormes aux autres outils et fonctionnalités dont ils connaissaient déjà l'utilité. Une géométrie générée par l'approche pForme pourra bénéficier de fonctions intégrées à Sketchup, par exemple pour créer des ouvertures et des épaisseurs, et passer à un autre logiciel pour en améliorer le rendu. D'autre part, la compréhension de la génération permet de mieux utiliser les outils de formes courbes implantés dans les logiciels (Sketchup, Autocad, Blender), comme les courbes de Bézier.

Nous avons également vérifié l'un des constats précédent, qui consiste à reconnaître que ces logiciels présentent aussi des limites pour la représentation architecturale. Par exemple, face à Blender et la sophistication de ses multiples fonctionnalités 3D, les étudiants étaient dans la confusion entre idée, méthode et outils. Il en résultait soit un abandon, après de nombreuses et vaines tentatives, soit une forme qu'ils étaient incapables de traduire et d'expliquer autrement qu'en faisant appel aux noms des fonctions qu'ils avaient utilisées. S'agissant d'Autocad, pourtant familier, les raisons de leur échec sont différentes. Ce logiciel n'a pas été conçu sur une logique de conception paramétrée et, par conséquent, les opérateurs 3D sont limités, peu flexibles et moins intuitifs pour la génération de formes complexes. Nous présenterons ainsi, en troisième et quatrième parties de ce mémoire, un ensemble de fonctionnalités écrites en autolisp qui permettent de concevoir avec les pFormes sur cette plateforme très répandue en bureaux d'études.

Enfin, cette expérience ne concerne qu'une étape du processus de conception. Munis de ces moyens d'analyse de la forme, les étudiants pourront néanmoins intégrer d'autres contraintes en maîtrisant d'autant plus d'informations qu'ils seront en mesure de les communiquer.

## 5 CONCLUSION

L'objectif de contribuer à la réintégration de la Forme dans le processus de conception nous a conduit à utiliser un outil morphologique réhabilitant une compréhension de la géométrie. A la suite d'une présentation des modèles mathématiques classiquement utilisés pour la génération de formes gauches, nous avons ainsi exposé l'approche géométrique des pFormes. Nous avons mis en évidence le potentiel de ses règles simples pour retrouver les formes de Bézier, les B-splines et les nurbs, habituellement peu accessibles aux non-initiés. L'efficacité didactique des pFormes a ensuite été testée en menant deux expériences applicatives et les avantages suivants ont pu être constatés :

- La simplification, en synthétisant l'information géométrique aux éléments générateurs et non plus au résultat visuel (à l'image du cercle défini par son centre et son rayon et non plus par le trait) ;
- La continuité, en proposant une logique algorithmique de génération, reproductible depuis les premières esquisses jusqu'au modèle numérique et à la mise en œuvre physique des éléments de construction ;
- L'appropriation, bénéfique de la compréhension de la génération qui permet de transmettre l'information et de mieux maîtriser les outils informatiques utilisés en bureaux d'études ;
- La compatibilité, garant d'une bonne interopérabilité entre acteurs et outils.

La génération d'une géométrie complexe peut ainsi reposer sur des résolutions formelles conscientes, dont on peut anticiper les retombées sur les autres contraintes d'un projet.

Les troisième et quatrième parties de ce travail proposeront un développement vers l'opérationnel. Ainsi rendus plus intelligibles, les objets complexes donnent accès à un vocabulaire qui permet de communiquer et d'évoluer vers des concepts plus élaborés. L'exploitation des propriétés géométriques contribuera ainsi à élaborer des solutions techniques et structurelles. Cette démarche vise à développer des couplages entre la Forme et les autres paramètres du processus de conception, en toute cohérence avec la simplification et l'opérabilité souhaitée.

## **PARTIE 3**

### **Outils pour la conception avec les pFormes**



## 1 INTRODUCTION

La fluidité et la transparence véhiculées par les images numériques des projets d'enveloppes complexes sont souvent contredites une fois l'objet réalisé (Fig. 1-1). Le choix de la structure porteuse et son interaction avec la couverture font apparaître des contraintes et des impératifs d'ordre géométrique, mécanique, matériel et technologique, parfois de natures antagonistes et qui rendent difficile l'émergence d'un compromis idéal. Il s'agit alors d'aboutir à une conception optimale, au travers d'un processus fait d'allers et retours et nécessitant la capacité à préciser à chaque étape des critères de performances afin de hiérarchiser les solutions envisageables.



Fig. 1-1: Mab Zeil – M. Fuskas – Frankfurt – Allemagne – 2008

Dans cette troisième partie, nous proposons ainsi de développer une gamme d'outils basée sur l'approche pForme, qui va permettre d'aborder et de résoudre des problèmes de conception spécifiques. Nous illustrerons la pertinence de certains outils par des cas d'étude concrets.

Ainsi, de façon plus détaillée, nous aborderons :

- la caractérisation locale qui permet d'analyser les propriétés des courbes et des surfaces ;
- l'identification de maillages géométriques particuliers permettant de localiser des éléments structuraux pour une surface donnée ; l'efficacité de ces outils étant étudiée sur deux expérimentations ;
- la proposition d'outils de recherche de forme donnant une maîtrise sur le positionnement des points de contrôle d'une surface pour répondre à des critères technologiques ;
- des développements exploratoires, néanmoins appliqués comme nous l'illustrerons par des méthodes de détermination de surfaces discrétisées par des quadrangles plans ou de volumes interpolants des surfaces.

L'ensemble de ce panel a été implémenté sur un logiciel de bureaux d'études. Le développement d'outils de génération géométrique utilisés par la profession est un atout majeur pour garantir une meilleure communication des intentions pour la réalisation du projet.

## 2 CARACTERISATION LOCALE

### 2.1 Points dans une pForme

#### 2.1.1 Un point

Tout point  $M$  appartenant à une pForme est défini par ses coordonnées paramétriques  $(u)$  pour une courbe,  $(u, v)$  pour une surface et  $(u, v, g)$  pour un volume. Les coordonnées de  $M$  dans l'espace global  $(x, y, z)$  sont calculées par combinaisons multi-linéaires des points de contrôle. En donnant pour paramètre d'interpolation, non plus  $\frac{1}{2}$  comme on l'a fait pour la génération d'une pForme mais les coordonnées paramétriques du point  $M$ , l'algorithme de De Casteljaou retourne celles dans le repère global.

#### 2.1.2 Plusieurs points

Tout tableau de points (unidimensionnel pour une courbe, bidimensionnel pour une surface et tridimensionnel pour un volume), dont les coordonnées sont respectivement incluses dans l'intervalle  $[0,1]$ , peut donc être défini dans le domaine paramétrique d'une pForme de dimension égale ou supérieure. La pForme est alors simplement utilisée comme un repère « local ». L'application de l'algorithme de De Casteljaou à chacun de ces points permet d'en obtenir les coordonnées dans l'espace global. Par cette application, la forme déclarée point par point n'a pas de définition paramétrique. Nous ne connaissons pas ses points de contrôle ; les points appartenant à cette forme sont individuellement définis dans la pForme mais ne contiennent aucune information géométrique autre que celle de leurs propres coordonnées. Le degré de la forme dans l'espace global, hors de la pForme, demeure méconnu à ce stade, le « transport » point par point d'une forme dans une pForme ne générant pas une pForme. Par conséquent, nous ne pouvons plus appliquer l'ensemble des opérateurs propres aux pFormes sur la forme obtenue par cette transformation.

Bien que les objets générés ne soient pas paramétrés, cette application permet de tracer des formes non polynomiales, ou encore d'obtenir les coordonnées dans le repère global des points solutions d'un système différentiel, comme nous l'exploiterons pour le tracé de courbes particulières. L'illustration (Fig. 2-1) permet par exemple de visualiser l'allure d'une sinusoïde ou de cercles transportés point par point dans une pS33 (composée de 3 paraboles).



Fig. 2-1: Immersion point par point de deux cercles et d'une sinusoïde dans une pS33

#### 2.1.3 Repère local

Les annexes A et B présentent les éléments de base de géométrie différentielle sur la théorie des courbes et des surfaces. Elles permettent de définir le vocabulaire nécessaire à la poursuite des travaux pour exploiter les informations contenues au sein des formes gauches.

L'étude des propriétés locales en un point d'une pForme débute avec le calcul du repère local en ce point. Au regard des approches différentielles classiques, son obtention est simplifiée grâce aux relations qui existent entre les dérivées successives et les points de contrôle. Nous présentons le cas des pCourbes, des pSurfaces et des pVolumes [MAR04].

### 2.1.3.1 pCourbes

Dans le cas d'une pCourbe, le calcul du repère de Frenet est possible au point de départ, donc au premier point de contrôle, grâce à la propriété d'interpolation des extrémités et à la simplification des écritures des dérivées qui s'en déduit. Soit  $p_0$  ce point de contrôle,  $p_1$  et  $p_2$  les deux points de contrôle suivants

- le vecteur normé porté par  $p_0$  et  $p_1$  est le vecteur tangent  $\vec{t}$  en  $p_0$  à la courbe ;
- le plan défini par les points  $(p_0, p_1, p_2)$  étant par construction osculateur à la courbe en  $p_0$ , le produit vectoriel  $\overrightarrow{p_0p_1} \wedge \overrightarrow{p_0p_2}$  donne la binormale  $\vec{b}$  ;
- le produit vectoriel de la binormale et de la tangente donne la normale  $\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{t}$ .

Le calcul du trièdre de Frenet en un autre point d'abscisse curviligne  $s$ , différent du premier point de contrôle, se fait en utilisant la courbe équivalente démarrant en ce point. Il s'agit ainsi de déplacer l'intervalle de définition de  $[0,1]$  à  $[s, s+1]$  et de calculer le trièdre en ce « nouveau » point de départ.

Une autre alternative consiste à conserver le même intervalle de définition et à normaliser les dérivées première et seconde obtenues grâce aux points intermédiaires de De Casteljaou, ce qui permet de définir  $\vec{t}$  et  $\vec{n}$  ; leur produit vectoriel donnant la binormale  $\vec{b}$ .

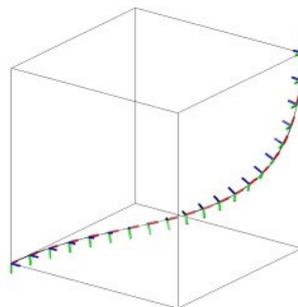


Fig. 2-2: Repères de Frenet en 20 points d'une pCourbe

### 2.1.3.2 pSurfaces

Dans le cas d'une pSurface, le calcul du repère local, tel qu'il est défini en annexe B, est mené au point de contrôle de départ grâce à la propriété d'interpolation des extrémités. Soit  $p_{0,0}$  ce point de contrôle,  $p_{1,0}$  et  $p_{0,1}$  les points de contrôle suivants dans les deux directions

- les vecteurs portés par les couples  $(p_{0,0}, p_{1,0})$  et  $(p_{0,0}, p_{0,1})$  sont tangents en  $p_{0,0}$  à la surface, mais non orthogonaux entre eux ;
- le produit vectoriel de ces deux vecteurs est normal au plan tangent en ce point.

Le calcul du repère tangent en un autre point se fait de façon analogue à celle utilisée dans le cas d'une pCourbe, en déplaçant l'intervalle de définition.

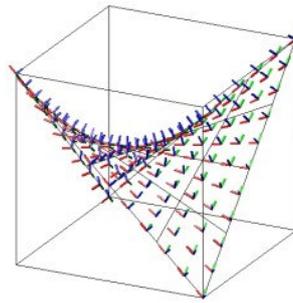


Fig. 2-3: Repères locaux en plusieurs points régulièrement répartis d'une pS22

### 2.1.3.3 pVolumes

Grâce à la propriété d'interpolation des extrémités, la poursuite de cette approche permet d'obtenir le repère local en un point d'un volume. Le triplet de vecteurs est construit sur ce point et les trois points suivants sur les axes  $u, v, g$ . Il en résulte un repère non orthogonal que l'on peut toutefois normaliser.

### 2.1.4 Conclusion

Nous avons exposé les moyens d'obtention :

- des coordonnées globales d'un point défini dans le domaine paramétrique d'une pForme quelconque ;
- du repère local en un point appartenant à une pCourbe, une pSurface ou un pVolume.

Ces opérateurs, impliquant seulement les points et leurs repères locaux associés, vont nous permettre d'identifier des outils d'aide à la conception d'enveloppes complexes.

## 2.2 Analyse des propriétés

### 2.2.1 Courbure et torsion d'une pCourbe

Les définitions théoriques des propriétés des courbes sont consultables en annexe A. La maîtrise de la courbure et de la torsion d'une courbe, objet élémentaire d'une géométrie gauche, confère un meilleur contrôle de l'objet réalisé, tant dans l'ingénierie de calcul que de fabrication. En effet, la connaissance de ces propriétés est une aide à la rationalisation dans le sens où elle introduit « les règles de constructibilité au sein de la géométrie du projet » [SHE 02]. Nous mettrons en évidence les intérêts pratiques de ces outils durant le processus de conception par des exemples concrets.

### **Intérêt mécanique**

Dans le cas de l'Experience Music Project de Gehry & Partners (Fig. 2-4), la structure porteuse est constituée d'arcs en profilés non-standard (de type IPE à inertie variable), cintrés dans un plan de manière à suivre les variations de courbure de la surface. Si le calcul de la structure a permis la détermination des hauteurs des profilés, il a aussi conduit à proscrire des zones de fortes courbures qui sont aussi le siège de concentrations de contraintes en créant des moments de flexion excessifs. Une correction de la courbure des arcs a dû s'opérer en les éloignant de la surface et en ajoutant des éléments métalliques supplémentaires de fixation [SHE 02]. La localisation de ces zones nécessite toutefois l'utilisation d'un outil de calcul de la courbure, ce qui est l'objet de ce développement.



Fig. 2-4: Arc structuraux de l'Experience Music Project – Gehry & Partners – Seattle – 1995 / 2000

### Intérêt technologique

En charpente métallique, quelque soit la méthode de cintrage de tubes employée, par machine à commande numérique (Fig. 2-5) ou rationalisation en segments de courbures constantes (Fig. 2-6), les possibilités de formage sont bornées dans une gamme de valeurs. Pour s'assurer de la fabrication de l'objet, il est donc nécessaire de disposer d'un outil de vérification et de contrôle des données.



Fig. 2-5: BMW Autosalon – salon de l'automobile – ABB Architectes – Genf – Allemagne – 2000

Fig. 2-6: BMW Wave – expo 2000 – ABB Architectes – Munchen – Allemagne – 2000

Dans un souci de conservation de l'approche géométrique, nous détaillons à présent le calcul de la courbure et de la torsion pour une pCourbe non rationnelle puis nous présenterons la généralisation de ces résultats au cas des pCourbes rationnelles. En effet, l'intervention des poids, propre à toute forme rationnelle, perturbe l'interprétation purement géométrique.

#### 2.2.1.1 pCourbe non rationnelle

##### 2.2.1.1.1 Courbure

Rappelons l'expression, évoquée en annexe A, de la courbure  $\rho$  en tout point  $M$  appartenant à une courbe  $p^n$

$$\rho = \frac{\|\vec{M}' \wedge \vec{M}''\|}{\|\vec{M}'\|^3} \quad (2.1)$$

Comme pour le cas de la détermination du repère local, les dérivées successives sont aussi calculables au point de contrôle de départ

$$\vec{M}'(0) = \frac{d}{du} p^n(0) = \frac{n!}{(n-1)!} \Delta^1 p_0 = n (p_1 - p_0) = n \overrightarrow{p_0 p_1} \quad (2.2)$$

$$\vec{M}''(0) = \frac{d^2}{du^2} p^n(0) = \frac{n!}{(n-1)!} \Delta^2 p_0 = n(n-1)(p_2 - 2p_1 - p_0) = n(n-1)(\overrightarrow{p_1 p_2} - \overrightarrow{p_0 p_1}) \quad (2.3)$$

Le produit vectoriel des deux fournit

$$\vec{M}'(0) \wedge \vec{M}''(0) = n^2 (n-1) (\overrightarrow{p_0 p_1} \wedge \overrightarrow{p_1 p_2}) = n^2 (n-1) \left| \overrightarrow{p_0 p_1} \right| \left| \overrightarrow{p_1 p_2} \right| \sin \theta \quad (2.4)$$

soit

$$\vec{M}'(0) \wedge \vec{M}''(0) = n^2 (n-1) a b \sin \theta = n^2 (n-1) a b' \quad (2.5)$$

où  $a$  est la distance entre  $p_0$  et  $p_1$ ,  $b$  celle entre  $p_2$  et  $p_1$  et  $b'$  celle entre  $p_2$  et la tangente engendrée par  $p_0$  et  $p_1$  (Fig. 2-7).

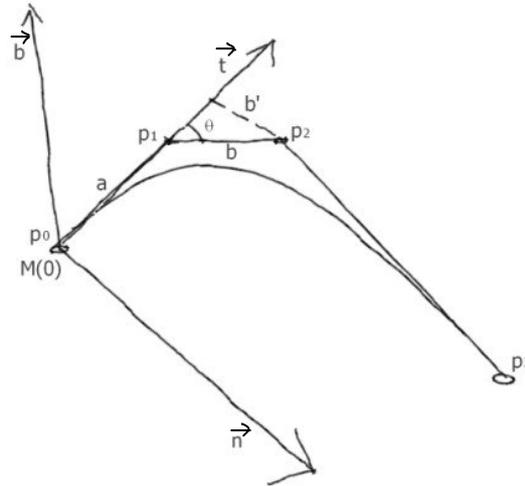


Fig. 2-7: Signification géométrique de  $a$ ,  $b$  et  $b'$

Il s'ensuit l'expression de la courbure au point d'origine d'une pCourbe non rationnelle

$$\rho(0) = \frac{n-1}{n} \frac{b'}{a^2} \quad (2.6)$$

Comme pour les opérateurs qui suivront, le calcul de la propriété recherchée en un autre point d'abscisse curviligne  $s$  s'effectue en déplaçant l'intervalle de définition de  $[0,1]$  à  $[s, s+1]$  (Fig. 2-8 et Fig. 2-9).

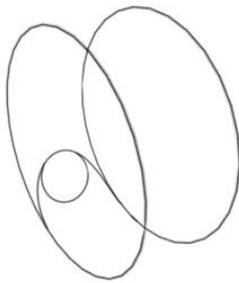


Fig. 2-8: Visualisation des cercles osculateurs en trois points d'une pCourbe pC6

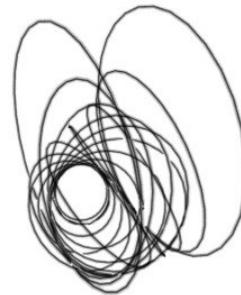


Fig. 2-9: Visualisation des cercles osculateurs en vingt points d'une pCourbe pC6

### 2.2.1.1.2 Torsion

Rappelons l'expression de la torsion  $\tau$  en tout point  $M$  appartenant à une courbe  $p^n$  (annexe A)

$$\tau = - \frac{(\vec{M}', \vec{M}'', \vec{M}''')} {\|\vec{M}' \wedge \vec{M}''\|^2} \quad (2.7)$$

Les deux premières dérivées ont été déterminées pour le calcul de la courbure. L'expression de la dérivée troisième au point de contrôle de départ donne

$$\begin{aligned}\overline{M}'''(0) &= \frac{d^3}{du^3} p^n(0) = \frac{n!}{(n-1)!} \Delta^3 p_0 = n(n-1)(n-2)(p_3 - 3p_2 - 3p_1 - p_0) \\ \overline{M}'''(0) &= n(n-1)(n-2)(\overrightarrow{p_0 p_1} - 2\overrightarrow{p_1 p_2} + \overrightarrow{p_2 p_3})\end{aligned}\quad (2.8)$$

Calculons le produit mixte en numérateur pour le premier point de contrôle

$$(\overrightarrow{M}', \overrightarrow{M}'', \overrightarrow{M}''') = (\overrightarrow{M}' \wedge \overrightarrow{M}'') \cdot \overrightarrow{M}''' = n^3(n-1)^2(n-2)(\overrightarrow{p_0 p_1} \wedge \overrightarrow{p_1 p_2}) \cdot (\overrightarrow{p_0 p_1} - 2\overrightarrow{p_1 p_2} + \overrightarrow{p_2 p_3})\quad (2.9)$$

qui devient après simplification

$$(\overrightarrow{M}', \overrightarrow{M}'', \overrightarrow{M}''') = n^3(n-1)^2(n-2)(\overrightarrow{p_0 p_1} \wedge \overrightarrow{p_1 p_2}) \cdot \overrightarrow{p_2 p_3} = n^3(n-1)^2(n-2)ab'c \cos \alpha\quad (2.10)$$

où  $c$  est la distance entre  $p_3$  et  $p_2$  ;  $c \cos \alpha$  celle entre  $p_3$  et le plan défini par  $p_0$ ,  $p_1$  et  $p_2$  ( $\alpha$  étant l'angle formé par le vecteur  $\overrightarrow{p_2 p_3}$  avec ce plan).

L'expression de la torsion au point origine de la courbe est alors

$$\tau(0) = \frac{n^3(n-1)^2(n-2)ab'c \cos \alpha}{n^4(n-1)^2 a^2 b'^2} = \frac{(n-2)c \cos \alpha}{n ab'}\quad (2.11)$$

### 2.2.1.2 pCourbe rationnelle

Le calcul des dérivées des formes rationnelles se complexifie rapidement au-delà de la dérivée première [FAR 90] [PIE 99]. Toutefois, les expressions générales de la courbure et de la torsion d'une courbe de Bézier rationnelle ont été écrites en fonction des points intermédiaires générés par l'algorithme de De Casteljaou [FLO 91].

#### 2.2.1.2.1 Courbure

L'expression générale de la courbure  $\rho$  est donnée par

$$\rho(u) = \frac{(n-1)}{n} W_1 \frac{\|(\overrightarrow{p_1^{n-2}(u)} - \overrightarrow{p_0^{n-2}(u)}) \wedge (\overrightarrow{p_2^{n-2}(u)} - \overrightarrow{p_1^{n-2}(u)})\|}{\|(\overrightarrow{p_1^{n-1}(u)} - \overrightarrow{p_0^{n-1}(u)})\|^3}\quad (2.12)$$

Nous voyons apparaître les termes liés à la forme non rationnelle pour le cas où  $u=0$ , auxquels se rajoute le coefficient  $W_1$  dans lequel interviennent les poids intermédiaires  $w_i^n(u)$

$$W_1 = \frac{w_0^{n-2} w_1^{n-2} w_2^{n-2} (w_0^n)^3}{(w_0^{n-1})^3 (w_1^{n-1})^3}\quad (2.13)$$

$$\text{où } w_i^n(u) = \sum_{j=0}^n w_{i+j} B_j^n(u)$$

Dans le cas  $u=0$ , l'expression de  $W_1$  se simplifie à

$$W_1 = \frac{w_0 w_2}{(w_1)^2}\quad (2.14)$$

La courbure d'une courbe de Bézier rationnelle en son point d'origine se réduit finalement à

$$\rho(0) = \frac{n-1}{n} \frac{w_0 w_2}{(w_1)^2} \frac{b'}{a^2} \tag{2.15}$$

2.2.1.2.2 Torsion

L'expression générale de la torsion  $\tau$  est donnée par

$$\tau(u) = \frac{(n-2)}{n} W_2 \frac{(p_1^{n-3}(u) - p_0^{n-3}(u)) \wedge (p_2^{n-3}(u) - p_1^{n-3}(u)) \cdot (p_3^{n-3}(u) - p_2^{n-3}(u))}{\|(p_1^{n-2}(u) - p_0^{n-2}(u)) \wedge (p_2^{n-2}(u) - p_1^{n-2}(u))\|^2} \tag{2.16}$$

Il apparaît ici aussi les termes de la forme non rationnelle (cas  $u=0$ ) auxquels se rajoute  $W_2$  contenant les poids intermédiaires

$$W_2 = \frac{w_0^{n-3} w_1^{n-3} w_2^{n-3} w_3^{n-3} (w_0^n)^2}{(w_0^{n-2})^2 (w_1^{n-2})^2 (w_2^{n-2})^2} \tag{2.17}$$

Dans le cas  $u = 0$ , cela se simplifie en

$$W_2 = \frac{w_0 w_3}{w_1 w_2} \tag{2.18}$$

La torsion d'une courbe de Bézier rationnelle en son point d'origine est ainsi

$$\tau(0) = \frac{(n-2)}{n} \frac{w_0 w_3}{w_1 w_2} \frac{c \cos \alpha}{a b'} \tag{2.19}$$

2.2.1.3 Applications

Les relations ( 2.15 ) et ( 2.19 ) ont été implémentées en langage autolisp afin de déterminer les propriétés d'une pCourbe à partir du logiciel Autocad. Nous retrouvons l'expression de la courbure et de la torsion d'une courbe non rationnelle dans le cas où tous les poids sont égaux à 1. Les figures (Fig. 2-10 à Fig. 2-13) illustrent des possibilités de visualisation des résultats.

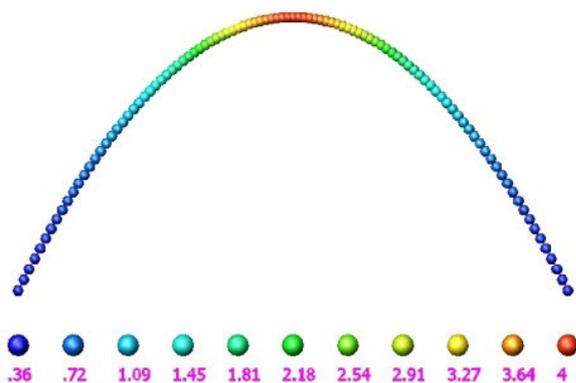


Fig. 2-10: Visualisation de la courbure d'une parabole pC3 par colorimétrie

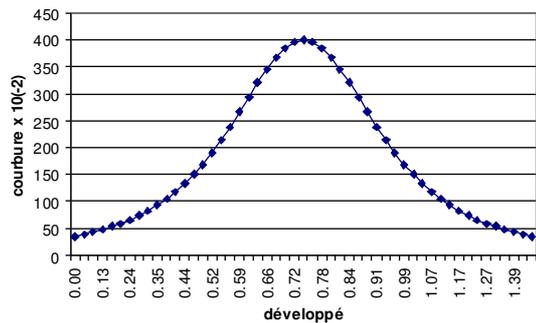


Fig. 2-11: Variation de courbure en fonction du développé d'une parabole pC3

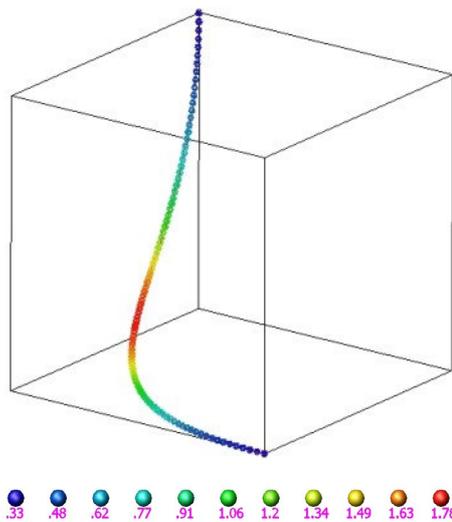


Fig. 2-12: Visualisation de la torsion d'une cubique pC4 par colorimétrie

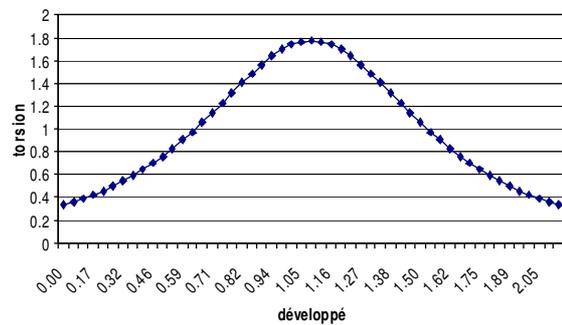


Fig. 2-13: Variation de torsion en fonction du développé d'une cubique pC4

### 2.2.2 Courbures d'une pSurface

La progression dans la connaissance des propriétés locales des formes gauches nous conduit à passer de la courbe à la surface. Les propriétés des surfaces sont rappelées en annexe B ; nous ne reviendrons ici ni sur leur obtention, ni sur la définition du vocabulaire. De même que pour les courbes, la connaissance des courbures gaussienne et moyenne permet d'avoir un meilleur contrôle de la surface réalisée, tant dans l'ingénierie de calcul que lors de la fabrication. Là encore, se justifie le développement d'outils sur la plateforme Autocad. Nous allons l'illustrer par un exemple concret de projet à géométrie complexe.

#### Intérêt mécanique et technologique

Reprenons l'exemple du projet de l'EMP pour témoigner de l'intérêt de connaître les variations de courbure gaussienne d'une surface. L'équipe de conception, préalablement confrontée au problème du contrôle de l'aspect de surface sur le projet du musée Guggenheim de Bilbao, étendit son savoir faire sur celui de l'EMP [SHE 02]. L'exigence d'un aspect de finition très lisse et régulier (surface « drapée », caractéristique des projets de Gehry) entraîne un besoin sur le contrôle de la courbure des éléments de bardage. A. Zahner & Company (AZCO), en charge de cette couverture, ne pouvait toutefois s'engager sur le niveau de courbure admissible par le matériau, ainsi que sur les implications économiques pour des panneaux doublement courbés. L'entreprise élaborera une série de tests sur des feuilles métalliques, basés sur un critère de flambement du matériau, pour différentes combinaisons de courbures. Trois typologies de surface furent testées : un dôme selon le cas convexe d'une surface à double courbure positive, un bol pour le cas concave et une selle de cheval pour les zones à double courbure négative. La distinction entre les cas convexe et concave provient de la plus grande difficulté du matériau à être mis en forme dans le cas convexe. Munie de ces données, l'équipe d'ingénierie conçut les éléments de bardage de l'enveloppe en utilisant les fonctions d'analyse de courbure du logiciel CATIA (Fig. 2-14).

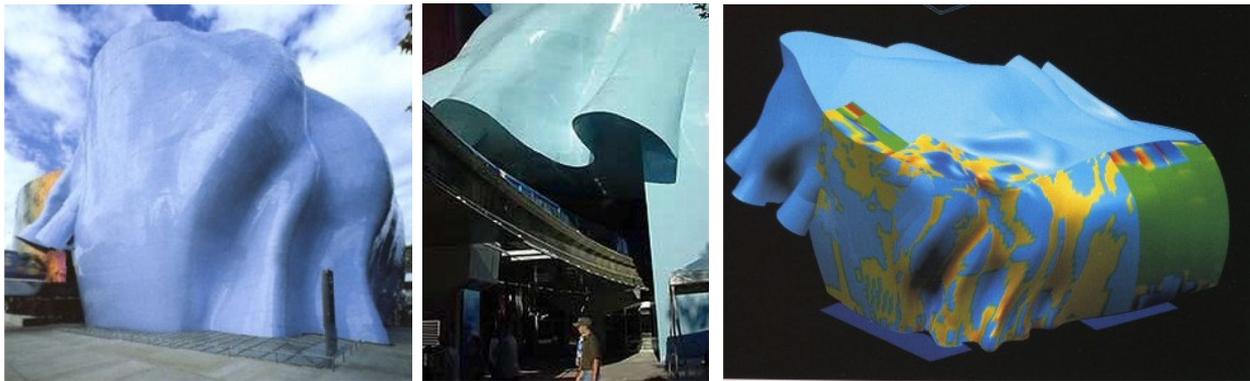


Fig. 2-14: Aspect de surface de l'Experience Music Project – Gehry & Partners – Seattle – 1995 / 2000

### 2.2.2.1 Directions principales

[FAR 90] et [PIE 97] proposent une méthode de détermination des dérivées partielles pour les surfaces rationnelles que nous n'avons toutefois pas utilisée. Aussi, nous calculerons les dérivées exactes en un point quelconque pour les pSurfaces non rationnelles et, dans le cas rationnel, nous approximerons les dérivées par différences finies en considérant des incréments en espace  $du$  et  $dv$  faibles (de l'ordre de  $10^{-4}$ ).

Rappelons que les extremums de la courbure normale  $\rho_n$  (annexe B), sont obtenus par

$$\rho_n = \frac{M + N\lambda}{F + G\lambda} = \frac{L + M\lambda}{E + F\lambda} \quad (2.20)$$

dont on déduit l'équation aux directions principales

$$(NF - GM)\lambda^2 + (NE - GL)\lambda + ME - FL = 0 \quad (2.21)$$

où :

- $\lambda = \frac{dv}{du}$  définit une direction dans le plan  $(u, v)$  ;
- $E$ ,  $F$  et  $G$  étant les coefficients de la première forme fondamentale ;
- $L$ ,  $M$  et  $N$ , ceux de la seconde.

Les directions principales sont orthogonales, démonstration également rappelée en annexe B.

### 2.2.2.2 Courbures principales

En éliminant  $\lambda$  dans ( 2.20 ) nous obtenons

$$\lambda = \frac{F\rho_n - M}{N - G\rho_n} = \frac{E\rho_n - L}{M - F\rho_n} \quad (2.22)$$

Nous retrouvons ainsi l'équation aux courbures principales ( 2.23 ) dont la résolution permet d'obtenir  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , respectivement les courbures principales maximales et minimales.

$$(EG - F^2)\rho_n^2 + (2FM - EN - GL)\rho_n + LN - M^2 = 0 \quad (2.23)$$

### 2.2.2.3 Courbures moyenne $C$ et totale $K$

Nous en tirons également l'expression de la courbure moyenne (annexe B)

$$C = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2) \tag{2.24}$$

Ainsi que celle de la courbure totale ou gaussienne (annexe B)

$$K = \rho_1\rho_2 \tag{2.25}$$

2.2.2.4 Applications

Ces expressions ont été également implémentées en autolisp afin d'obtenir les directions de courbures principales ainsi que les valeurs des courbures gaussienne et moyenne pour une liste de points d'une pSurface sous Autocad.

La résolution de ( 2.21 ) pour cette liste permet de calculer les vecteurs orthogonaux des directions principales, que l'on peut représenter comme en Fig. 2-15.

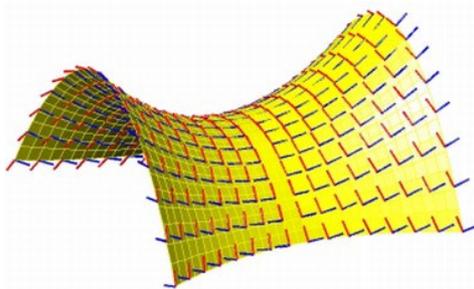


Fig. 2-15: Orientation des directions principales de courbure d'une pS33

Les valeurs de ( 2.24 ), appliquées itérativement sur la liste de points de la surface puis représentées par des sphères colorisées en fonction de C, permet de visualiser les variations de courbure moyenne sur une pSurface (Fig. 2-16).

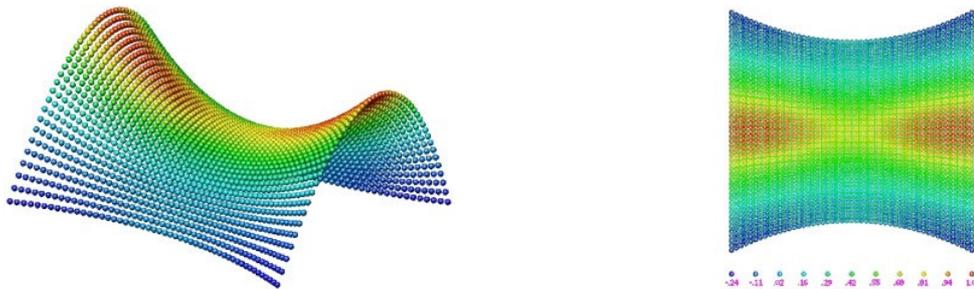


Fig. 2-16: Variation de la courbure moyenne d'une pS33

De même, l'utilisation des valeurs de ( 2.25 ) représentées par des sphères colorisées en fonction de K, permet de visualiser les variations de courbure gaussienne (Fig. 2-17).

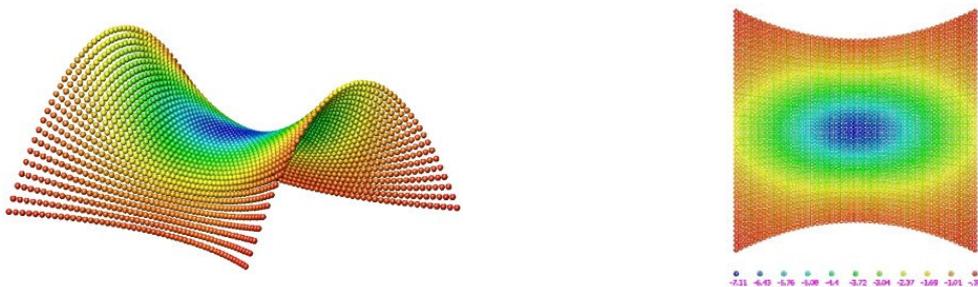


Fig. 2-17: Variation de la courbure gaussienne d'une pS33

## 2.3 Outils complémentaires à l'exploitation des pCourbes et des pSurfaces

Les pFormes donnent accès à la génération d'objets géométriques qui restent toutefois des entités mathématiques sans matérialité. Hors, la définition d'un projet architectural doit prendre en compte la réalité physique des éléments. Nous proposons donc des outils permettant de considérer des épaisseurs ou des encombrements pour des pCourbes et pSurfaces, modélisant ainsi un profilé ou une enveloppe.

### 2.3.1 Matérialisation de l'épaisseur d'une pCourbe

Les courbes traçées ont une matérialité et une épaisseur qu'il convient de représenter lors de la production de plans. Cette fonctionnalité est peu pratique et limitée sur la plateforme Autocad. Nous choisissons d'y pallier en appliquant un opérateur « tubage » à une section de profilé quelconque, pouvant subir alors des transformations tout en parcourant une courbe paramétrée.

#### 2.3.1.1 Surfaces affines

##### 2.3.1.1.1 Définition

Cette approche considère une courbe section se déplaçant le long de la courbe chemin. Il résulte de ce « balayage » une surface dénommée « swept » ou « sweep » surface comme dans la littérature [MAR96], [SHI 04] ou [PIE 97]. Les swept surfaces, dont il existe plusieurs méthodes de construction [MAR96], sont très appréciées pour la modélisation géométrique de formes complexes en raison de leur génération intuitive.

Dans leur écriture générale, ces surfaces ne sont pas paramétrées ; ce ne sont donc pas des pSurfaces. Nous travaillerons ainsi à partir d'une représentation subdivisée ou discrète. Les repères de Serret-Frenet en  $n$  points de la courbe chemin sont utilisés comme opérateur de transformation, assurant la translation et la rotation des points de la courbe section.

L'expression du point courant devient

$$M(x,y,z,t) = \begin{bmatrix} n_x S_x & b_x & t_x & d_x \\ n_y & b_y S_y & t_y & d_y \\ n_z & b_z & t_z S_z & d_z \\ D_x & D_y & D_z & d_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} section.x \\ section.y \\ section.z \\ section.t \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

où :

- $(n_x, n_y, n_z)$  sont les composantes du vecteur normal ;
- $(b_x, b_y, b_z)$  celles du vecteur binormal ;
- $(t_x, t_y, t_z)$  celles du vecteur tangent ;
- $S = (S_x, S_y, S_z)$  un vecteur dont les composantes sont utilisées comme des scalaires pondérant des homothéties non-homogènes de la section ;
- $D = (D_x, D_y, D_z)$  un vecteur de déformation tangentielle modifiant le poids  $t$  des points de la section ;
- $(d_x, d_y, d_z, d_t)$  le vecteur des coordonnées du point de la courbe chemin assurant la translation de la section.

Cette matrice concentre l'ensemble des transformations de torsion, rotation, dilatation et translation. L'usage du trièdre de Serret-Frenet assure les changements de bases pour que la section soit perpendiculaire au vecteur tangent de la trajectoire en tout point et « renferme » ainsi le calcul des matrices de rotation 3D (dont on trouve les expressions dans [MAR 94]).

Bien que son effet soit moins appréhendable en terme géométrique, l'exploitation de la « 4<sup>ème</sup> coordonnée »  $t$  fournit une transformation supplémentaire par rapport à l'approche classique des swept surfaces.

L'implémentation de cette application nous permet de proposer des exemples d'utilisation pour générer des tubages simples, des tubages ondulés et déformés par l'intermédiaire des vecteurs  $S = (S_x, S_y, S_z)$  et  $D = (D_x, D_y, D_z)$ .

### 2.3.1.1.2 Applications

#### Surfaces tubulaires

Avec  $S = (1,1,1)$  et  $D = (0,0,0)$  aucune homothétie et déformation ne sont appliquées. Chaque point de la courbe section est successivement translaté et tourné selon les composantes du repère local au point courant de la courbe chemin (Fig. 2-18).

$$M(x,y,z,t) = \begin{bmatrix} n_x & b_x & t_x & d_x \\ n_y & b_y & t_y & d_y \\ n_z & b_z & t_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & d_t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} section.x \\ section.y \\ section.z \\ section.t \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

On obtient ainsi la possibilité de générer des tubages simples (Fig. 2-19).

#### Surfaces tubulaires ondulées

La figure (Fig. 2-20) montre une extension possible aux tubages ondulés en paramétrant par exemple l'amplitude  $a$  et la fréquence  $f$  d'une ondulation sinusoïdale telles que

$$S = ((1 + a \sin(2\pi f u)), (1 + a \sin(2\pi f u)), (1 + a \sin(2\pi f u))) \quad (2.28)$$

L'expression du point courant devient alors

$$M(x,y,z,t) = \begin{bmatrix} n_x S_x & b_x & t_x & d_x \\ n_y & b_y S_y & t_y & d_y \\ n_z & b_z & t_z S_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & d_t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} section.x \\ section.y \\ section.z \\ section.t \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

La figure (Fig. 2-21) permet d'observer l'influence de  $D$  sur les déformations du tubage ondulé résultant de l'expression du point courant avec

$$M(x,y,z,t) = \begin{bmatrix} n_x S_x & b_x & t_x & d_x \\ n_y & b_y S_y & t_y & d_y \\ n_z & b_z & t_z S_z & d_z \\ D_x & D_y & D_z & d_t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} section.x \\ section.y \\ section.z \\ section.t \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

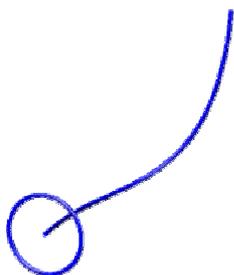


Fig. 2-18: Section plane et chemin gauche

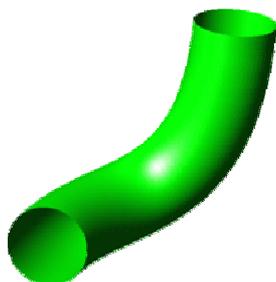


Fig. 2-19: Tubage simple

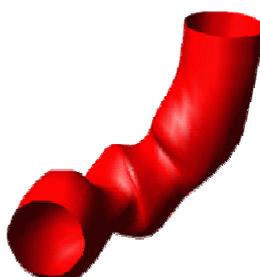


Fig. 2-20: Tubage ondulé ( $a=0.5$  et  $f=3$ )

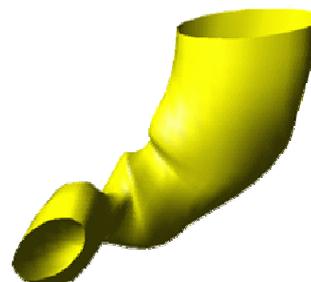


Fig. 2-21: Tubage ondulé ( $a=0.5$  et  $f=3$ ) + déformation  
 $D = (1.3, 2.5, 2)$

### 2.3.1.2 Commentaires

La nécessité d'avoir recourt au repère de Serret-Frenet de la courbe chemin pour déterminer les sections de la swept surface a pour conséquence que :

- la précision de la surface résultante dépend des points en lesquels sont calculés les repères locaux, donc du nombre de subdivisions de la courbe chemin ;
- l'étape de subdivision implique que la surface résultante n'est pas une pSurface ;
- l'application ne fonctionne pas dans le cas d'un chemin réduit à un segment linéaire à deux points de contrôle (car le repère local ne peut être défini sans un troisième point de contrôle déterminant le plan osculateur pour le calcul de la binormale) ;
- la binormale change brusquement d'orientation au passage d'un point d'inflexion, ce qui a pour effet de retourner la surface de manière indésirable (Fig. 2-22) [KLO 86]. Nous avons corrigé cette singularité en effectuant un test sur les produits scalaires des vecteurs normaux et binormaux de deux repères successifs de la trajectoire. Dans le cas d'un résultat négatif, les vecteurs unitaires sont alors réorientés (Fig. 2-23), ce qui évite le retournement de la section.

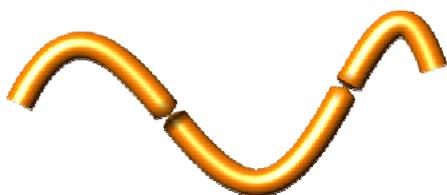


Fig. 2-22: Inversion du profil aux points d'inflexion

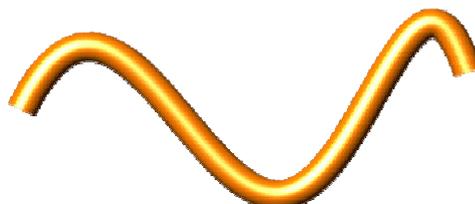


Fig. 2-23: Correction par réorientation des repères

Bien que la surface résultante ne soit pas une pForme, cet opérateur élargit la richesse formelle dont nous disposons pour représenter un profilé (Fig. 2-24) à section complexe et/ou variable, ce qui est un atout appréciable.

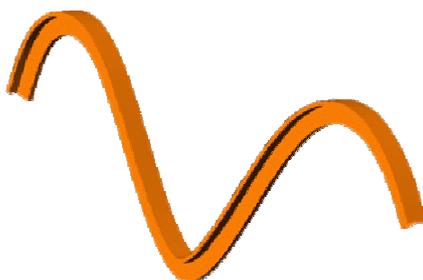


Fig. 2-24: Extrusion d'un profil en T le long d'une pL5

### 2.3.2 Matérialisation de l'épaisseur d'une pSurface

L'épaisseur nulle d'un modèle numérique ne correspond à aucune réalité physique. Une enveloppe a nécessairement une épaisseur à partir de laquelle vont être ajoutés des éléments de fixation sur les autres éléments de structure. L'implémentation d'opérateurs de représentation liés à l'emprise d'une enveloppe présente un intérêt non négligeable pour la maîtrise des solutions techniques d'un projet.

#### 2.3.2.1 Surfaces décalées « offset »

##### 2.3.2.1.1 *Définition*

Les surfaces décalées, plus connues sous le nom de « offset surfaces » dans la littérature, sont un outil classique de la CAO. Partant d'une surface initiale, il s'agit de déterminer une seconde surface située à une distance constante ou variable de la première. Utilisées pour la commande numérique de machines, la représentation de complexes composites multicouches, la robotique ou le prototypage rapide, elles constituent un sujet d'étude répandu dans la communauté des mathématiciens infographistes [PHA 92] [MAE 99]. Bien que leur définition s'énonce simplement, leur détermination nécessite le développement de méthodes élaborées, surtout axées sur les représentations exacte ou approximée de surfaces décalées paramétriques de type Bézier [SED 92], splines [KLA 83] [PHAM 88] [COQ 87] ou nurbs [POT 95a] [PIE 99]. Selon la géométrie de la surface, la forme résultante de ce décalage peut dégénérer en s'auto-intersectant ou en créant des singularités, inconvénients qui encouragent les travaux pour y remédier [FAR 86] [MAE 93] [MAE 97] [RAV 02].

##### 2.3.2.1.2 *Applications*

La méthode que nous avons choisi d'utiliser s'appuie sur des translations de points à la distance souhaitée selon les vecteurs portés par les normales à la surface à décaler. Cette approche entraîne un décalage des points de contrôle [MAR 04] duquel résulte une nouvelle pSurface, bien que la détermination des repères de Darboux introduise une métrique faisant sortir du cadre de la géométrie affine des formes pascaliennes. Cette pSurface, décalée de la première, est située approximativement à la distance donnée par rapport à la première (Fig. 2-25). En effet, l'opération de décalage s'effectuant sur les réseaux de contrôle, elle ne produit pas un décalage exact sur les surfaces générées par subdivisions.

Pour un décalage plus précis de la surface, nous devons utiliser une approche locale en appliquant l'algorithme sur les points subdivisés, et non sur les points de contrôle. Le résultat est bien une surface représentée à la distance voulue, mais elle n'est plus pascalienne (Fig. 2-26). Une comparaison des résultats obtenus avec ces deux approches est illustrée sur la figure (Fig. 2-27).

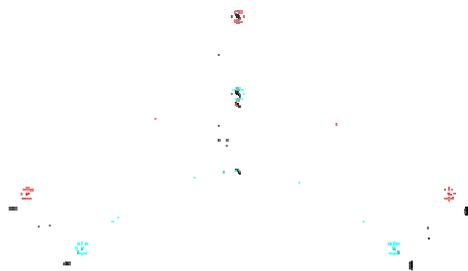


Fig. 2-25: Décalage de points de contrôle



Fig. 2-26: Décalage de la surface subdivisée

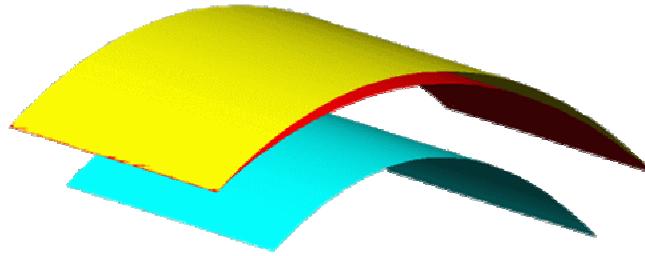


Fig. 2-27: Résultats comparatifs des deux applications

### 2.3.2.1.3 Observations

Nous disposons ainsi de deux outils pour générer une surface décalée (Fig. 2-28) par rapport à une autre (Fig. 2-29). L'une crée une surface paramétrée située à une distance approximative (Fig. 2-30) ; l'autre est plus précise (erreur de l'ordre de  $10^{-2}$ ) mais la surface résultante n'est alors plus pascalienne (Fig. 2-31).

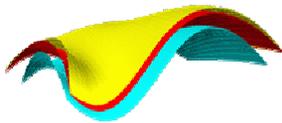


Fig. 2-28: Deux méthodes de décalage

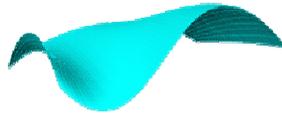


Fig. 2-29: pSurface de référence

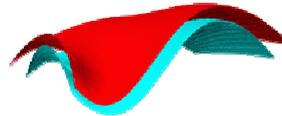


Fig. 2-30: pSurface décalée approximative

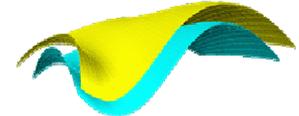


Fig. 2-31: Surface décalée exacte

La deuxième méthode est plus sujette aux problèmes d'auto-intersections. Selon la forme de référence et la distance de décalage, des singularités peuvent être observées sur la forme décalée non paramétrée (Fig. 2-32). En effet, la définition par les points de contrôle rend la première méthode plus stable (Fig. 2-33 et Fig. 2-34).

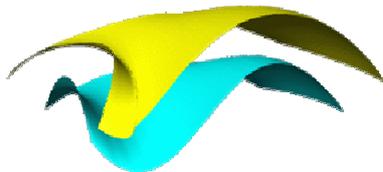


Fig. 2-32: Apparition de singularités sur la surface exacte (dist = 2)

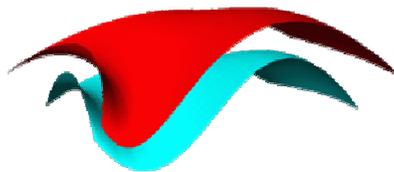


Fig. 2-33: pSurface décalée toujours stable (dist = 2)

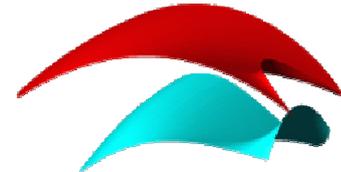


Fig. 2-34: Singularités sur la pSurface décalée (dist = 5)

L'extension de ces approches pour une distance variant selon la localisation sur la surface ne pose pas d'inconvénients particuliers et peut s'avérer nécessaire selon les exigences de la conception.

### 2.3.2.2 Surfaces symétriques

#### 2.3.2.2.1 Définition

En partant du principe fondamental des pFormes, faisant que toute combinaison barycentrique de points produit un point « valide », invariant par changement de repère, on fait de même pour des combinaisons linéaires de pFormes [MAR 04] telles que

$$pF = \sum_i k_i pF_i \text{ avec } \sum_i k_i = 1 \quad (2.31)$$

Nous identifions ainsi la combinaison particulière produisant une surface symétrique à une autre.

Soit deux points donnés  $p_1$  et  $p_2$ , dont la combinaison  $p = 2p_1 - p_2$  génère le point  $p$ , symétrique de  $p_2$  par rapport à  $p_1$ . Si nous remplaçons les points par des surfaces, cette combinaison linéaire produit une surface  $S$ , symétrique de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  (Fig. 2-35). Dans le cas particulier où  $S_1$  est un plan, et que les coordonnées des points de contrôle de  $S_2$  correspondent en  $x$  et  $y$  à ceux de  $S_1$ , on obtient une symétrie plane (Fig. 2-36).

#### 2.3.2.2.2 Application

Cet opérateur peut également être perçu comme une alternative aux surfaces décalées d'une distance variable, la géométrie de la surface par rapport à laquelle s'établit la symétrie jouant le rôle de paramètre de distance.

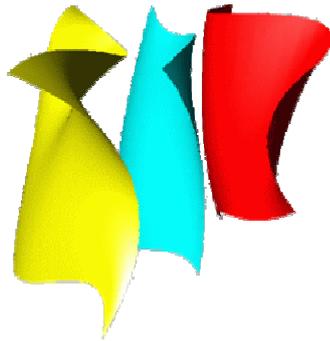


Fig. 2-35: Surfaces symétriques par rapport à la surface intermédiaire

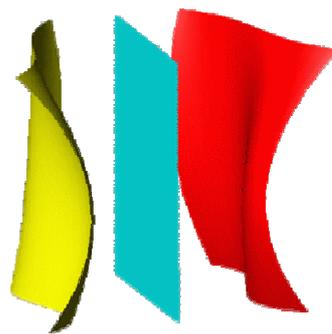


Fig. 2-36: Symétrie plane

### 3 RECHERCHE DE RESEAUX STRUCTURAUX SUR UNE PSURFACE

L'objectif de ce chapitre consiste à proposer des localisations potentielles d'éléments structuraux sur la surface. Les lignes isoparamétriques sont, à cet effet, les plus évidentes et les plus accessibles. Toutefois, nous avons déjà signalé l'intérêt des objets construits point par point sur une pSurface (§2.1.2) pour tracer des formes non polynomiales. Nous soulignons à présent leur aide pour obtenir les coordonnées dans le repère global des points solutions de systèmes différentiels. En effet, la caractérisation locale en un point rend possible la génération de lignes particulières pouvant être des réseaux structuraux d'une enveloppe complexe. Nous en proposons ainsi des constructions qui présentent des atouts pour répondre à des considérations mécaniques et techniques.

#### 3.1 Lignes isoparamétriques

##### 3.1.1 Définition

Si l'on fixe un des deux paramètres  $u$  ou  $v$  du domaine paramétrique, un point d'une surface décrit une courbe coordonnée ou isoparamétrique. Par conséquent, une surface est couverte par un réseau de ces courbes, c'est-à-dire par deux familles de courbes à un paramètre. Plus de détails sont consultables en annexe B.

##### 3.1.2 Avantages

##### Intérêt technologique

Quelque soit la forme de l'enveloppe d'un bâtiment, il est nécessaire de connaître l'allure des coupes transversales et longitudinales pour un rendu sur plan. Or, une section par un plan perpendiculaire, comme il est d'usage de le faire en dessin technique, n'est pas immédiate ou nécessairement pertinente dans le cas de géométries complexes. L'identification des lignes isoparamétriques peut alors s'avérer être un outil intéressant pour la production de plans (Fig. 3-1).

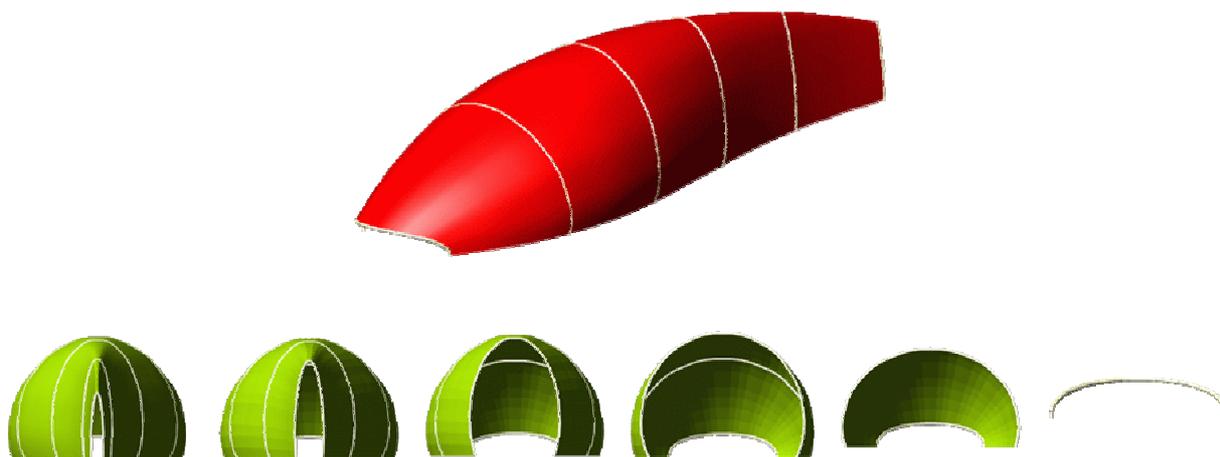


Fig. 3-1: Différentes sections d'une pSurface selon des lignes isoparamétriques

##### Intérêt mécanique

Comme l'illustre la figure (Fig. 3-2), les lignes isoparamétriques peuvent aider à la localisation d'éléments structuraux primaires ou secondaires sur une enveloppe complexe. Une analyse mécanique devra toutefois valider ce choix géométrique.

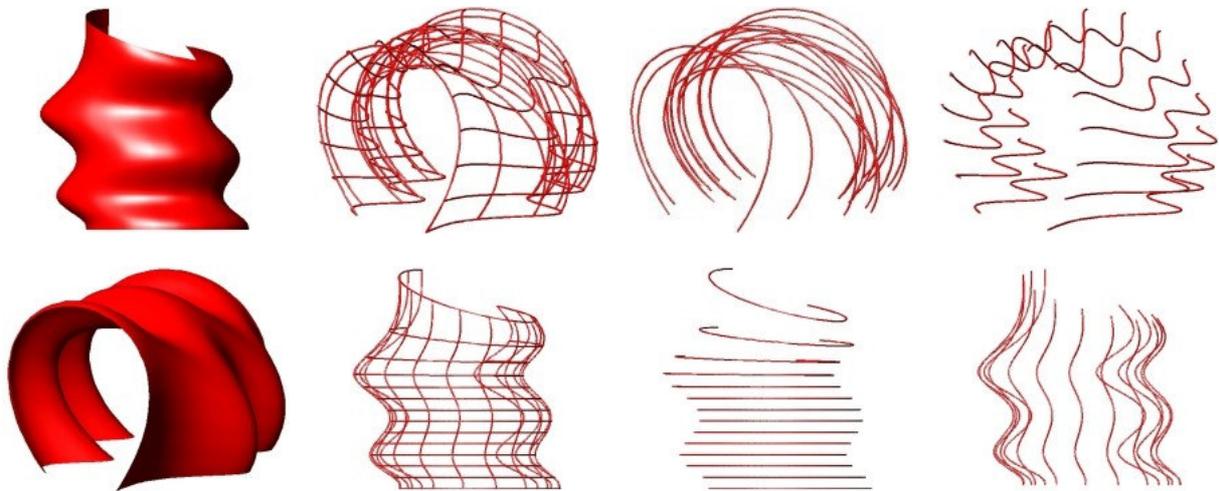


Fig. 3-2: Réseau isoparamétrique d'une pSurface

### 3.1.3 Application

Une pForme est le résultat d'une application récursive de recherche du point milieu à un tableau de sous-formes. L'opérateur qui permet d'obtenir les coordonnées dans le repère global d'un point immergé, défini dans le domaine paramétrique d'une pForme, retourne la sous-forme ultime d'une forme, c'est à dire le point. Toutefois, nous sommes en mesure de proposer un opérateur qui génère une sous-forme intermédiaire, conduisant dans le cas d'une pSurface à l'obtention d'une pCourbe qui a la propriété d'être une ligne isoparamétrique.

Une courbe isoparamétrique arbitraire  $u = cste$  d'une surface  $p^{m,n}$  est une courbe de degré  $n$  en  $v$ . Les  $(n+1)$  points de contrôle sont obtenus en évaluant toutes les rangées du réseau de contrôle pour  $u = cste$ . Les courbes isoparamétriques  $v = cste$  sont traitées de manière analogue (Fig. 3-6).

La formule de détermination des points de contrôle de la courbe isoparamétrique pour  $u = cste$  est [FAR 90]

$$p_j(u = cst) = \sum_{i=0}^m p_{i,j} B_i^m(u = cst) \text{ avec } j \in [0, n] \quad (3.1)$$

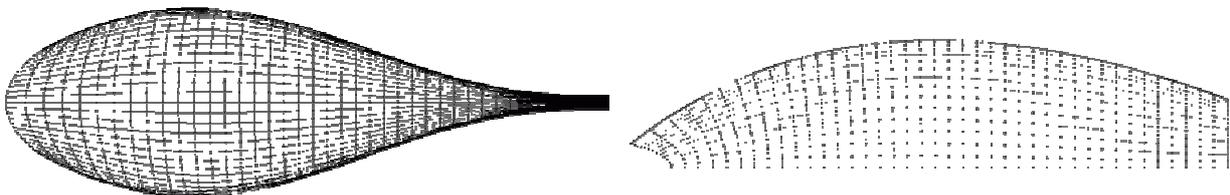


Fig. 3-3: Lignes isoparamétriques sur une pSurface

## 3.2 Lignes de courbure

### 3.2.1 Définitions

Plusieurs définitions des lignes de courbure d'une surface se déduisent de leur relation avec les directions principales :

**Définition 1**

Les lignes de courbure sont des courbes tracées sur la surface qui sont tangentes en chaque point à l'une des directions principales.

Il en résulte qu'en tout point d'une surface, à l'exception des points ombilics et des méplats (annexe B), passent deux lignes de courbure orthogonales. L'ensemble de ces lignes forme par conséquent un réseau orthogonal.

**Définition 2**

Les lignes de courbure sont à torsion géodésique nulle.

**Définition 3**

Les lignes de courbure sont telles que la « normale » associée soit développable, c'est-à-dire que la surface réglée engendrée par les normales à la surface le long d'une de ses lignes de courbure soit développable.

**3.2.2 Avantages**

Dans le domaine de l'architecture textile, la connaissance des lignes de courbure est d'une importance capitale pour la conception d'une toile.

**Intérêt technologique**

Dans une membrane architecturale, les contraintes principales sous pré-tension sont généralement orientées selon les directions principales de courbure. En respectant ce calepinage pour la découpe des laizes, le comportement de la structure est optimisé et mieux contrôlé car le matériau en toile est ainsi correctement orienté, en respectant sa technologie de fabrication (directions chaîne / trame) (Fig. 3-4 et Fig. 3-5).

**Intérêts mécaniques**

D'autre part, la tension dans la toile est directement liée aux rayons de courbure. Le « Guide de la conception des membranes architecturales » [VER 97] proscrit des valeurs excessives de rayon de courbure au delà desquels la précontrainte ne peut plus être assurée et où les effets de battement au vent peuvent nuire à la pérennité de l'ouvrage. En maîtrisant ces informations géométriques, nous avons donc un contrôle plus précis de la géométrie d'une toile et une meilleure anticipation de son comportement.



Fig. 3-4: Kingly Court – MRP Architects – 2006      Fig. 3-5: KindderMinster College – GVA Grimley – 2005

Dans d'autres domaines du bâtiment, les lignes de courbures sont peu utilisées à notre connaissance mais portent toutefois des intérêts qui mériteraient d'être exploités à différents niveaux.

**Intérêt technologique**

La définition 3 des lignes courbure révèle l'intérêt en fabrication pour un tel réseau sur une surface gauche. La propriété des normales à générer une surface développable permet en effet d'envisager le

parcourt du réseau par des âmes de profilés, ou des éléments de fixation, dont la fabrication serait simplifiée.

Par ailleurs, l'orthogonalité du réseau présente un avantage indiscutable pour la conception des nœuds de connexion, en les ramenant à un élément standard et unique pour l'ensemble de l'objet (Fig. 3-6).

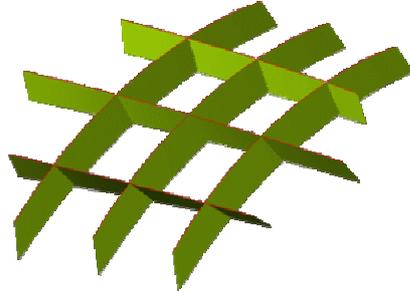


Fig. 3-6: Le réseau des lignes de courbure est orthogonal et génère des normales développables

A partir de ces atouts, les réseaux de courbure peuvent ainsi définir la localisation d'éléments structuraux sur une enveloppe complexe (Fig. 3-8). Une étude mécanique doit cependant justifier un tel choix d'orientation en fonction des autres contraintes du projet.

### 3.2.3 Application

Les propriétés des lignes de courbure sont traduites par l'équation différentielle

$$d\vec{M} \wedge d\vec{N} = \vec{0} \quad (3.2)$$

où  $\vec{N}$  est le vecteur normal à la surface en  $M$ .

La propriété associée à la première définition permet l'écriture d'un algorithme incrémental pour le tracé de ces lignes particulières sur une pSurface. L'appel itéré de la macro de calcul des directions principales permet d'obtenir un tableau de  $n$  points de la pSurface constituant une solution approchée d'une ligne de courbure (Fig. 3-7), où les  $(n-1)$  vecteurs tangents sont proportionnels à une direction principale.

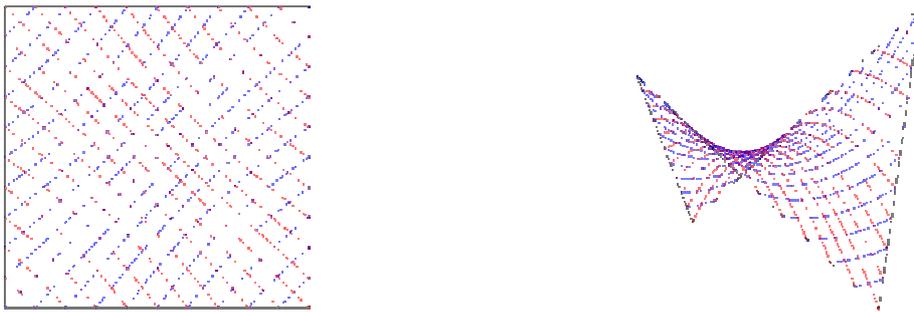


Fig. 3-7: Réseau de ligne de courbure sur un PH (pS22)

Au-delà du parabolôïde hyperbolique, surface gauche élémentaire, nous montrons l'allure du réseau de lignes de courbure sur une pSurface de forme plus complexe (Fig. 3-8).

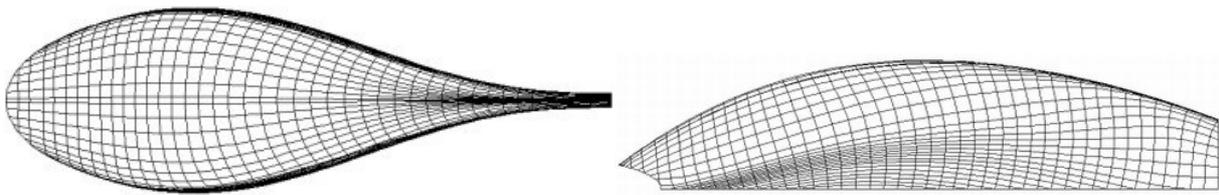


Fig. 3-8: Réseau de courbure sur une pSurface

### 3.2.4 Commentaires

La figure (Fig. 3-9) permet de visualiser un autre exemple de réseau. Les singularités observées correspondent à des points ombilics (définis en annexe B), au voisinage desquels les lignes « tournent ». On trouve ainsi trois classes de points ombilics, nommées Lemon, Monstar et Stars (Fig. 3-10). Elles sont distinguées selon leur « index » et leur nombre de directions principales « limitantes ». L'index décrit de quelle façon la ligne de courbure tourne autour du point ombilic. Une direction principale limitante est une direction du plan tangent à la surface au point ombilic, qui est tangente à une ligne de courbure aboutissant à l'ombilic.

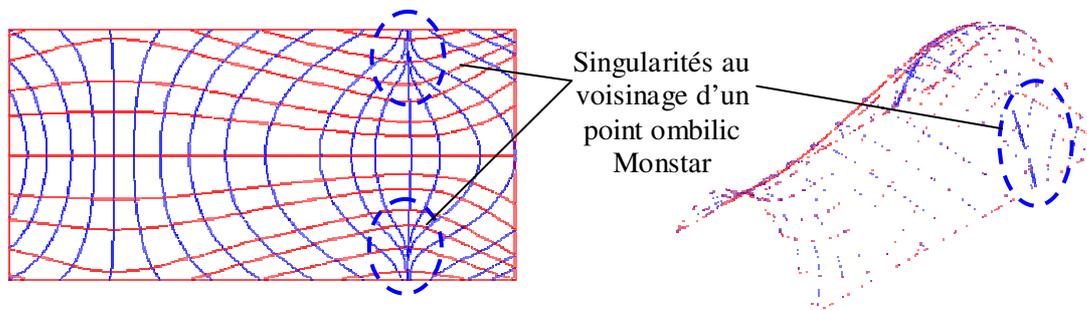


Fig. 3-9: Réseau de ligne de courbure sur une pS35

La classe Lemon est ainsi caractérisée par une seule direction principale limitante, les deux autres classes ayant trois directions principales limitantes. Toutefois, pour un Monstar, les trois directions sont contenues dans un angle droit et toutes les lignes de courbure dans cet angle aboutissent au point ombilic formant le secteur parabolique du Monstar. Soulignons que toutes ces lignes ont la même tangente à l'ombilic (la direction principale limitante). Pour la classe Star, seulement trois lignes de courbure aboutissent à l'ombilic et les directions limitantes ne sont pas contenues dans un angle droit. L'étude approfondie de leur comportement est traitée dans le domaine des mathématiques appliquées à l'infographie [GUT 91] [MAE 96a] [POU 05].

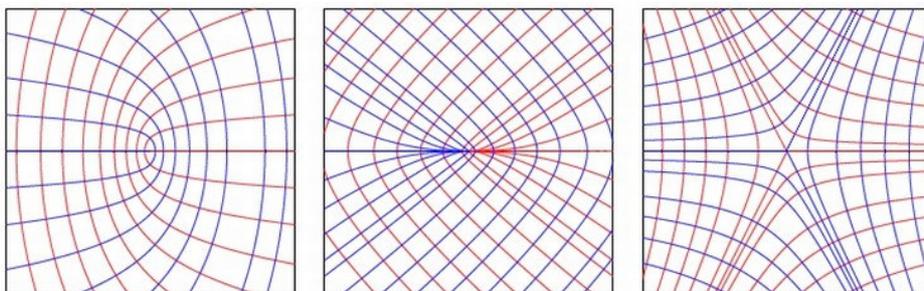


Fig. 3-10: Points ombilics Lemon, Monstar et Star [POU 05]

Les lignes de courbure obtenues sont néanmoins des solutions approchées. Nous déterminons en effet chaque point « suivant » à partir des données obtenues dans plan tangent au point précédent. La valeur du pas d'incrément est donc importante pour la précision du résultat car ce schéma génère des erreurs accumulées à chaque pas. D'autre part, les troncatures effectuées lors de la résolution

numérique altèrent aussi la précision. Néanmoins, à l'échelle de la réalisation architecturale, l'exploitation de ces courbes est d'un grand intérêt.

### 3.3 Lignes asymptotiques

#### 3.3.1 Définitions

L'origine du mot asymptotique vient du grec *asumptôtos* "qui ne s'affaisse pas". Les directions suivant lesquelles la courbure normale  $\rho_n$  s'annule sont appelées directions asymptotiques. Trois définitions équivalentes peuvent ainsi être mises en avant pour ces lignes.

##### Définition 1

Les lignes asymptotiques sont des courbes sur la surface qui sont tangentes en chaque point à l'une des directions asymptotiques.

##### Définition 2

Les lignes asymptotiques sont les courbes à courbure normale nulle.

##### Définition 3

Les lignes asymptotiques sont des courbes telles qu'en chaque point le plan tangent à la surface soit osculateur à la courbe. D'un point de vue cinématique, ce sont les trajectoires d'un mobile se déplaçant sur la surface de telle sorte que le vecteur accélération soit à tout instant dans le plan tangent à la surface.

#### 3.3.2 Avantages

Citons d'abord le cas élémentaire pour lequel les lignes asymptotiques sont des lignes droites sur une surface. Hormis ces conditions géométriques particulières, elles peuvent générer des réseaux intéressants pour parcourir une enveloppe. De plus, leurs propriétés géométriques entraînent un intérêt sur le plan mécanique.

##### Intérêt technologique

Les lignes asymptotiques sont fréquemment utilisées pour la réalisation des surfaces quadratiques à double courbure négative. Les paraboloides hyperboliques ou les hyperboloïdes à une nappe sont des surfaces doublement réglées, les plus simples après le plan, et leurs asymptotiques ne sont autres que leurs génératrices, c'est-à-dire des lignes droites. L'exploitation de cette propriété pour la réalisation de coffrages est pertinente et souvent rencontrée dans l'histoire de la construction des coques en béton, comme nous l'avons déjà montré en première partie, pour générer facilement de la double courbure (Fig. 3-11). De nombreuses tours de refroidissement ont également été conçues sur ce même principe, plus rapide à mettre en œuvre avec un réseau de câbles distribués selon les génératrices (Fig. 3-12).

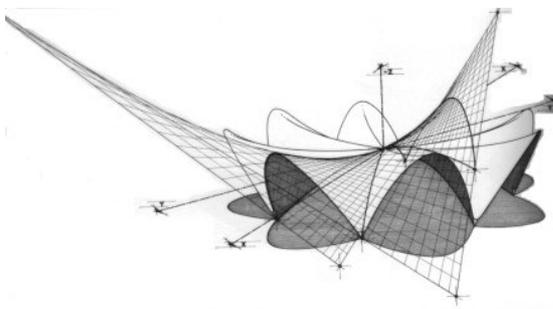


Fig. 3-11: Les Manantiales – F. Candela – Xochimilco  
– Mexique – 1958



Fig. 3-12: Tour de refroidissement – Schlaich  
Bergermann & Partners – 1974

Les conoïdes, générés par le déplacement d'une ligne droite le long d'une autre droite (à une extrémité) et d'une courbe (à l'autre extrémité) sont un autre exemple de l'utilisation maîtrisée des

asymptotiques pour la réalisation. A. Gaudi exploita cette spécificité pour concevoir le toit et les murs de l'Ecole de la Sagrada Familia (Fig. 3-13) à Barcelone, pour laquelle les asymptotes se déplacent le long d'une sinusoïde (Fig. 3-14).



Fig. 3-13: Ecole de la Sagrada Familia – Gaudi – Barcelone – Espagne – 1909

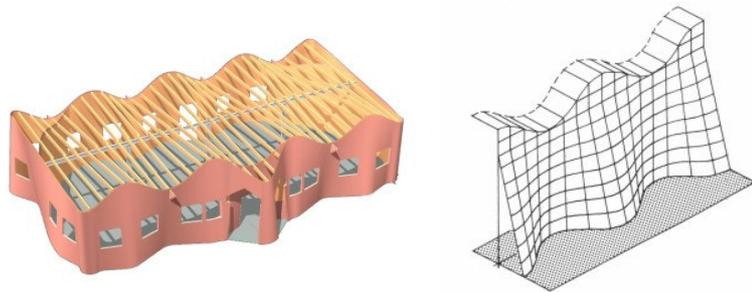


Fig. 3-14: Génération du toit et des murs

### Intérêt géométrique

Dans le domaine des mathématiques appliquées à la physique théorique et à la mécanique, des études [CHO 95] [AUD 99] [AUD 00] de nature géométrique montrent que la « rigidité » géométrique d'une surface est liée à la présence de courbes dites « rigidifiantes ». Lorsqu'elles sont inscrites sur la surface, de telles courbes suppriment les modes de déformations isométriques, en partie ou totalement. Ces déformations sont d'importance dans les structures de type coque mince en raison de leur faible épaisseur. Elles se caractérisent par une conservation des longueurs tangentielle à la surface moyenne de la coque. Sur les surfaces de révolution, la première mise en évidence de courbes à propriétés rigidifiantes, identifiées comme étant les cercles asymptotiques, est due à Cohn-Vossen [COH 29]. La compréhension géométrique de ce résultat et sa généralisation aux surfaces qui ne sont pas de révolution [AUD 99] montrent que, pour des raisons purement géométriques, certaines courbes ne peuvent pas se déformer de façon quelconque et contraignent donc les déformations de la surface dans leur voisinage. Il est aussi connu que, sur des surfaces de type mixte, une courbe à courbure gaussienne nulle entre les régions hyperbolique et parabolique rigidifie la surface lorsque sa tangente est partout confondue avec la direction asymptotique. Les surfaces possédant une courbe rigidifiante sont très particulières, car la direction asymptotique sur une ligne de courbure nulle n'est pas, en général, la tangente à cette courbe. Par conséquent, une surface n'inclut pas généralement de courbe rigidifiante. L'importance des surfaces rigidifiées n'en est pas pour autant atténuée et B. Audoly [AUD 00] conclut sur les potentiels d'application en élasticité des coques. Les déformations isométriques pourraient alors être contrebalancées par l'adjonction de courbes rigidifiantes dans le profil de la coque. Néanmoins, la difficulté de passage entre la géométrie et la mécanique est soulevée. Les outils que nous développons peuvent ainsi apporter une aide à la détection de telles courbes sur une surface (en superposant la visualisation des courbures gaussiennes et les repères des directions asymptotiques), sachant que des études mécaniques complémentaires devront être envisagées dans le cadre de futurs développements.

#### 3.3.3 Application

L'équation différentielle d'une ligne asymptotique est telle que

$$d^2 \vec{M} \cdot d\vec{N} = \vec{0} \Leftrightarrow d\vec{M} \cdot d\vec{N} = \vec{0} \quad (3.3)$$

où  $\vec{N}$  est le vecteur normal à la surface en  $M$ .

On peut ainsi écrire la forme

$$\psi = L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = 0 \quad (3.4)$$

Une direction asymptotique, combinaison linéaire des vecteurs tangents à la surface, est alors une racine de la seconde forme quadratique fondamentale. L'existence de lignes asymptotiques est donc

subordonnée au signe du discriminant  $\Delta = M^2 - NL$ . Son étude précise la position relative des points de la surface par rapport au plan tangent. On retrouve ainsi le caractère hyperbolique, parabolique ou elliptique d'une surface (annexe B) par l'intermédiaire de l'indicatrice de Dupin.

- si  $\Delta > 0$  : il existe deux directions tangentes de signes opposés selon lesquelles le plan tangent traverse la surface. Nous sommes dans une configuration hyperbolique ( $K < 0$ ) pour laquelle on identifie deux familles de lignes asymptotiques réelles et distinctes ;
- si  $\Delta = 0$  : la seconde forme fondamentale s'annule au moins pour une des directions tangentes. Il s'agit d'une configuration parabolique ( $K = 0$ ) pour laquelle les lignes asymptotiques sont réelles et confondues ;
- si  $\Delta < 0$  : la seconde forme fondamentale garde un signe constant. C'est une configuration elliptique pour laquelle les directions asymptotiques sont complexes, les lignes asymptotiques n'existent pas.

La synthèse de ces informations permet de statuer sur l'existence d'un réseau réel et régulier dans les régions hyperboliques d'une surface. Les directions asymptotiques sont obtenues par interprétation de l'indicatrice de Dupin, en suivant une approche comparable à celle développée par [ALM 07] pour le tracé des « lignes de milieu de courbure ».

Considérons les deux directions définies par le ratio entre les deux axes principaux de l'indicatrice de Dupin dans le cas hyperbolique

$$\tan \phi = \pm \sqrt{\frac{|R_2|}{|R_1|}} = \pm \sqrt{\frac{|\rho_1|}{|\rho_2|}} \quad (3.5)$$

où  $\pm \phi$  est l'angle par rapport à la première direction principale (annexe B).

Nous pouvons par suite écrire

$$\frac{\sin^2 \phi}{\cos^2 \phi} = \frac{|\rho_1|}{|\rho_2|} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} |\rho_1| \cos^2 \phi &= |\rho_2| \sin^2 \phi = |\rho_2| (1 - \cos^2 \phi) \\ (|\rho_1| + |\rho_2|) \cos^2 \phi &= |\rho_2| \end{aligned} \quad (3.7)$$

Soit

$$\cos^2 \phi = \frac{|\rho_2|}{|\rho_1| + |\rho_2|} \quad \text{et} \quad \sin^2 \phi = \frac{|\rho_1|}{|\rho_1| + |\rho_2|} \quad (3.8)$$

La courbure dans cette direction est due au théorème d'Euler

$$\rho_n = \rho_1 \cos^2 \phi + \rho_2 \sin^2 \phi \quad (3.9)$$

qui devient, par substitution car  $K < 0$

$$\rho_n = \rho_1 \frac{|\rho_2|}{|\rho_1| + |\rho_2|} + \rho_2 \frac{|\rho_1|}{|\rho_1| + |\rho_2|} = 0 \quad (3.10)$$

Dans le cas hyperbolique, le ratio entre les deux axes principaux de l'indicatrice de Dupin permet d'obtenir les directions asymptotiques dans le plan tangent. Un algorithme comparable à celui des lignes de courbure a été implémenté en autolisp afin de visualiser les réseaux asymptotiques d'une pSurface à courbure nulle ou négative (Fig. 3-15).

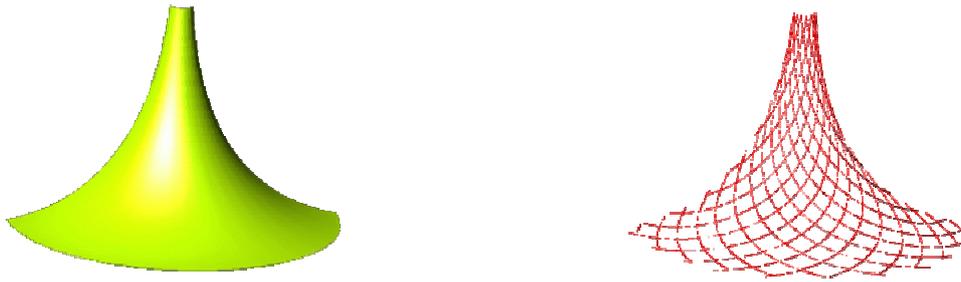


Fig. 3-15: Exemple de réseau asymptotique sur une pSurface

### 3.3.4 Remarques

Les lignes asymptotiques étant obtenues selon un schéma similaire à celui des lignes de courbure, on retrouve les mêmes causes d'erreurs numériques. Les résultats conservent néanmoins un grand intérêt pour leur application à des projets architecturaux.

Testée sur une surface à courbure gaussienne positive, l'approche algorithmique retenue identifie les directions des lignes de milieu de courbure [ALM 07], caractérisées par une courbure normale telle que, d'après le théorème d'Euler

$$\rho_n = \rho_1 \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} + \rho_2 \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \quad (3.11)$$

$$\rho_n = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \quad (3.12)$$

$$\text{soit } \rho_n = \frac{K}{C} \quad \text{pour } K > 0 \quad (3.13)$$

Comme la courbure ainsi calculée revient à un partage égal des directions principales, elles sont dénommées directions de milieu de courbure pour les surfaces à courbure gaussienne positive. Les courbes tracées sur la surface qui sont tangentes en chaque point à l'une de ces directions sont les lignes de milieu de courbure.

## 3.4 Lignes géodésiques

L'origine du mot géodésique vient du grec *gê* "terre" et *daiein* qui signifie "partager, diviser". Dans le vocabulaire de la navigation, on les retrouve sous le nom d'orthodromie, provenant du grec *orthos* "droit" et *dromos* "course".

### 3.4.1 Définitions

Les lignes géodésiques sont aux surfaces courbes ce que sont les droites dans l'espace euclidien « ...un être fondamental dont tout ou presque dérive, les polygones, les triangles, la définition des angles, du parallélisme, etc... »[MAR 04]. Ces lignes possèdent plusieurs définitions équivalentes que nous présenterons sous deux déclinaisons : le point de vue géométrique et l'approche mécanique. Les aspects mathématiques apporteraient des éléments complémentaires que nous n'aborderons pas, bien que l'étude de ces lignes intéresse depuis longtemps cette communauté [AND 94] [CHA 70].

### 3.4.1.1 Représentation géométrique

#### Définition 1

Les lignes géodésiques ont une courbure géodésique nulle  $\rho_g = \rho \sin \theta = 0$  (ce qui implique  $\theta = 0$ ).

Cette propriété engendre d'autres particularités propres aux géodésiques. Si on définit  $\theta$  comme l'angle porté par la normale à la courbe et la normale à la surface alors, lorsque sa valeur s'annule, une seconde définition s'en déduit.

#### Définition 2

Les courbes géodésiques sont les courbes sur la surface telles qu'en chaque point la normale principale à la courbe (si elle existe) coïncide avec la normale à la surface. Autrement dit, elles sont telles que le plan osculateur à la courbe contienne la normale à la surface, ou encore que le plan rectifiant de la courbe soit le plan tangent à la surface.

Enfin, si nous reprenons l'écriture de la courbure normale d'une courbe donnée en annexe A ( $\rho_n = \rho \cos \theta = \rho$  pour  $\theta = 0$ ), il vient une troisième définition.

#### Définition 3

Les courbes géodésiques sont les courbes telles qu'en tout point la courbure normale de la courbe (c'est-à-dire la courbure de la surface dans la direction de la tangente à la courbe) soit égale en valeur absolue à la courbure de la courbe.

En reprenant l'écriture de la torsion d'une courbe (annexe A,  $\tau_g = \tau - \frac{d\theta}{ds} = \tau$  pour  $\theta = 0$ ), on présente également une quatrième définition.

#### Définition 4

Les courbes géodésiques sont les courbes sur la surface telles qu'en tout point, leur torsion géodésique soit égale à leur torsion.

### 3.4.1.2 Représentation mécanique

#### Définition 5

Ce sont les trajectoires d'un point matériel se déplaçant sur la surface et soumis à la seule réaction normale. Physiquement, il s'agit d'une bille qui roule sans frottement et sans glissement sur la surface, en dehors de toute pesanteur. Si la pesanteur est considérée, ces lignes deviennent les lignes d'écoulement.

On pourra se référer à un écrit de J. Andrade qui précisait en 1894 dans « Sur une propriété mécanique des lignes géodésiques » [AND 94] : « Lorsqu'un mobile assujéti à rester sur une surface est abandonné à lui-même avec une vitesse initiale, il décrit une géodésique de la surface tangente à la direction de la vitesse initiale. »

#### Définition 6

Les courbes géodésiques sont aussi le chemin le plus court entre deux points quelconques d'une surface. Cette définition, de loin la plus connue, n'est pourtant vraie que sous certaines conditions de proximité. On démontre que tout arc joignant deux points de la surface, de longueur minimum, est une géodésique, mais il peut y avoir des géodésiques joignant deux points avec une longueur non minimale (par exemple deux points d'une génératrice d'un cylindre de révolution sont aussi joints par une hélice circulaire, plus longue, qui est aussi une géodésique). Par contre, pour tout point  $B$  assez voisin d'un point  $A$  de la surface, il existe une unique géodésique joignant  $A$  à  $B$ , réalisant forcément le minimum de la distance géodésique de  $A$  à  $B$ .

En général, par tout point d'une surface passe, dans une direction donnée, une géodésique et une seule, et par deux points au moins une géodésique (cette propriété est une généralisation des axiomes d'Euclide).

De cette définition, vérifiée sous certaines conditions, les mécaniciens en déduisent une autre, très utile pour le tracé d'une géodésique sur une surface.

### Définition 7

Les courbes géodésiques sont les géométries d'équilibre d'un fil homogène inextensible tendu sur la surface, en l'absence de gravité et sans frottement. Si la pesanteur est considérée, ces formes deviennent des chaînettes.

#### 3.4.2 Avantages mécanique et technologique

D'un point de vue mécanique, les lignes géodésiques permettent de réduire les contraintes initiales dues à la courbure. Un profilé structurel orienté selon une ligne géodésique n'est en effet pas fléchi selon son axe de forte inertie, ce qui évite des contraintes initiales importantes. Des planches droites peuvent ainsi convenir pour réaliser une enveloppe. Les sections ne sont alors que sollicitées par un moment de flexion selon leur axe faible et un moment de torsion. Ce choix structurel fut adopté par le bureau d'études bois de M. Flach pour réaliser le toit d'une piscine à St Quentin en Yvelines (Fig. 3-16). Le positionnement des nœuds de connexion des éléments en bois lamellé-collé a été déterminé à partir d'une méthode de calcul des trajectoires des géodésiques développée par A. Marty [MAR 05].

La perspective de réaliser des charpentes orientées selon les lignes géodésiques encouragea le travail de thèse de R. Rozsnyo [ROZ 04] qui le dédia entièrement à la maîtrise de la génération, du calcul et de la fabrication.



Fig. 3-16: Toit torique d'une piscine – M. Flach – St Quentin en Yvelines – 2004

#### 3.4.3 Etat de l'art

De nombreuses études traitent des moyens d'obtention des lignes géodésiques sur une surface. On distingue deux approches générales ; l'une correspond à une méthode de « tir » à partir d'un point avec une direction donnée, l'autre fixant un point d'arrivée et un point de départ pour rechercher la courbe géodésique les reliant.

##### 3.4.3.1 Recherche de la géodésique par méthode de tir

Cette méthode [PAT 89] utilise une approche variationnelle minimisant la longueur d'une courbe paramétrée sur une surface de type nurbs ; elle nécessite un point de lancement, une direction et un pas de calcul. Les points de l'espace paramétrique sont obtenus itérativement à chacun des pas, résultants en un ensemble de points constituant la ligne géodésique. Leur interpolation permet alors d'obtenir une courbe paramétrée.

Selon un procédé numérique moins complexe, certains [HOT 00] ont élaboré une méthode géométrique basée sur la propriété qu'une géodésique est une généralisation des lignes droites sur les plans. Au voisinage d'un point, la géodésique orientée dans une direction correspond à l'intersection du plan porté par le vecteur direction et la normale à la surface avec le plan tangent. La géodésique est

construite localement par projection orthogonale du plan tangent sur la surface. Le problème est ainsi ramené à des projections orthogonales de points appartenant aux plans tangents. Néanmoins, la longueur de la tangente à projeter doit être correctement choisie pour minimiser l'erreur d'approximation. Cette longueur correspond au pas de calcul, dont la valeur est déterminée en fonction des propriétés de la surface et de la géodésique recherchée selon des critères de courbure et de torsion.

[MAR 05] a utilisé une interprétation basée sur la définition « mécanique » pour calculer ces lignes particulières. En l'absence de gravité, un mobile qui roule sans frottement et sans dérapage sur une surface génère une poussée égale et opposée à la réaction au point de contact, toujours perpendiculaire à la surface. Cette propriété s'énonce en écrivant que l'accélération du mobile est un vecteur orthogonal à la surface, ce qui permet de retrouver la définition n°2 d'une géodésique. Cette méthode nécessite également un point de lancement, une direction et un pas de calcul pour la détermination itérative des points sur la surface.

Il existe également deux méthodes de génération de géodésiques discrètes par conservation des angles ou des normales, applicables au cas des surfaces polyédriques. Ces dernières sont représentées à partir de nuages de points constituant les sommets d'un maillage. Bien que ce type de géométrie n'ait pas a priori de lien avec l'approche par formes à pôles, nous pouvons remarquer que la représentation d'une pForme est une surface polyédrique.

La première approche élaborée par [TUC 97] se base sur l'idée qu'une géodésique immergée dans une facette plane est une ligne droite, et que le passage d'une facette à l'autre par la traversée du bord commun à ces deux facettes exige une conservation des angles de part et d'autre du bord (Fig. 3-17). Cette approche n'apporte toutefois aucune information au passage d'un sommet. Par suite, [POL 98] a introduit la notion de courbure géodésique discrète comme généralisation du concept de courbure géodésique sur des surfaces polyédriques. Les géodésiques discrètes ont la propriété d'être des courbes « plus droites », plutôt que « plus courtes » localement, et ont une courbure géodésique discrète nulle en tout point. Si on considère  $\theta$  comme la somme des angles incidents au point  $P$  d'une courbe immergée dans une surface,  $\theta_R$  et  $\theta_L$  les sommes des angles à droite et à gauche, la courbure géodésique discrète est définie telle que

$$\rho_g(p) = \frac{2\pi}{\theta} \left( \frac{\theta}{2} - \theta_R \right) = -\frac{2\pi}{\theta} \left( \frac{\theta}{2} - \theta_L \right) \quad (3.14)$$

La « plus droite » géodésique est une courbe à courbure géodésique nulle, par conséquent  $\theta_R = \theta_L$  en tout point (Fig. 3-18).

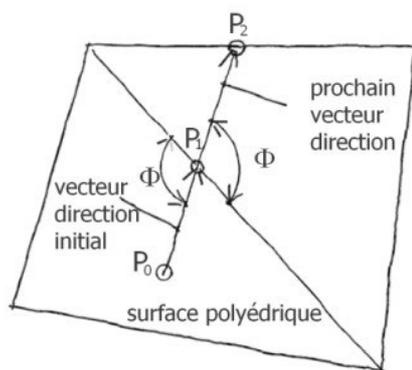


Fig. 3-17: Conservation des angles à la traversée de l'élément commun à deux facettes

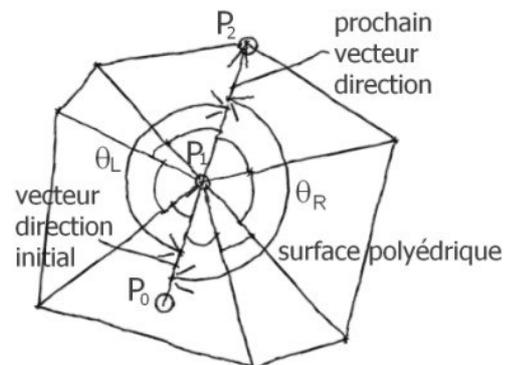


Fig. 3-18: Généralisation de la conservation des angles d'une géodésique discrète sur un maillage

Cette approche généralise la précédente en permettant la poursuite du trajet d'une géodésique au passage d'un sommet du maillage.

Malgré tout, une lacune demeure pour ces méthodes par conservation des angles : les normales aux surfaces polyédriques ne sont pas considérées. Or, le changement de normales entre deux points d'une

surface caractérise la complexité de celle-ci entre ces deux points. C'est pourquoi [RAV 03] propose une méthode de tracé par calcul de la ligne d'intersection du plan normal  $(\vec{t}, \vec{n})$  passant par le point considéré avec le plan de la facette rencontrée, ce qui garantit une détermination dans le cas général en tout point du réseau polyédrique.

### 3.4.3.2 Recherche de la géodésique entre deux points

Plusieurs études utilisent la définition n°7, où la position d'équilibre d'un fil uniformément tendu permet d'obtenir le plus court chemin entre ces deux extrémités. Partant de cette définition, [MEE 87] et [MAE 96b] proposent une résolution par relaxation dynamique et [ZHA 05] utilise les équations d'un modèle par éléments finis pour déplacer itérativement les éléments jusqu'à convergence vers le plus court chemin.

[ROZ 04], déjà cité pour ses travaux sur la construction de charpentes en bois, présente un moyen de détermination de la géodésique entre deux points par adaptation d'une méthode de tir. En effet, cette dernière identifie une géodésique aboutissant nécessairement en un point mais qui dépend de la vitesse initiale, donc du vecteur tangent au lieu de départ. La recherche du vecteur tangent initial est donc abordée par une méthode d'optimisation. Il constitue la variable de contrôle et une fonction de coût, mesurant l'écart entre le point cible et le point atteint après essais, est minimale lorsque la condition d'arrivée est atteinte.

[PHA 01a] et [PHA 01b] ont également proposé une minimisation de la longueur d'une courbe immergée dans une surface de Bézier par la méthode du gradient conjugué. Nous reviendrons ultérieurement sur cette approche, lorsque nous discuterons des identifications d'outils par immersion de courbes dans une surface (quatrième partie).

### 3.4.4 Application

Selon les objectifs visés dans la conception de l'enveloppe d'un bâtiment, il est évident que le calcul d'une géodésique entre deux points présente un grand intérêt. Nous proposons ainsi d'utiliser le principe de la méthode de [MAR 05], couplé à une recherche par dichotomie de l'angle de lancement pour atteindre le point cible.

Considérons l'équation différentielle d'une géodésique

$$\det(\vec{N}, d\vec{M}, d^2\vec{M}) = 0 \quad (3.15)$$

où  $\vec{N}$  est le vecteur normal à la surface en  $M$ .

Sachant que les dérivées partielles  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}$  et  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$  définissent les vecteurs tangents à la surface en  $M$ , le vecteur normal est tel que  $\vec{N} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$ .

La dérivée première de  $M$  par rapport à  $t$ , paramètre de la courbe géodésique recherchée, est fonction des deux paramètres  $u$  ou  $v$  de la surface.

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \frac{dv}{dt} \quad (3.16)$$

On calcule ensuite la dérivée seconde qui, après simplification, s'écrit

$$\frac{d^2\vec{M}}{dt^2} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{d^2\vec{M}}{du^2} \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2 \frac{d^2\vec{M}}{du dv} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \frac{d^2\vec{M}}{dv^2} \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \quad (3.17)$$

L'équation différentielle (3.15) devient alors

$$\det \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \frac{dv}{dt}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{d^2\vec{M}}{du^2} \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + 2 \frac{d^2\vec{M}}{du dv} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \frac{d^2\vec{M}}{dv^2} \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 \right) = 0 \quad (3.18)$$

L'orthogonalité des vecteurs tangents avec le vecteur accélération est exprimée en annulant leur produit scalaire. On obtient ainsi le système différentiel

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{d^2\vec{M}}{du^2} \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + 2 \frac{d^2\vec{M}}{du dv} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \frac{d^2\vec{M}}{dv^2} \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 \right) \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} = 0 \\ \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{d^2\vec{M}}{du^2} \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + 2 \frac{d^2\vec{M}}{du dv} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \frac{d^2\vec{M}}{dv^2} \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 \right) \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

Le point  $M$  doit vérifier ces conditions pour que la courbe suivie soit une géodésique. On ne sait toutefois pas intégrer ce système dans le cas général et seules des solutions approchées peuvent être obtenues.

Cette méthode de tir conduit à l'obtention d'une géodésique partant d'un point d'origine, mais sa trajectoire est liée au vecteur tangent en ce point de départ, dont dépendra alors le point d'arrivée. Nous atteindrons ainsi le point cible par dichotomie de l'intervalle angulaire. Le critère d'arrêt de la recherche repose sur une minimisation de la distance entre le point d'arrivée après lancement et le point cible.

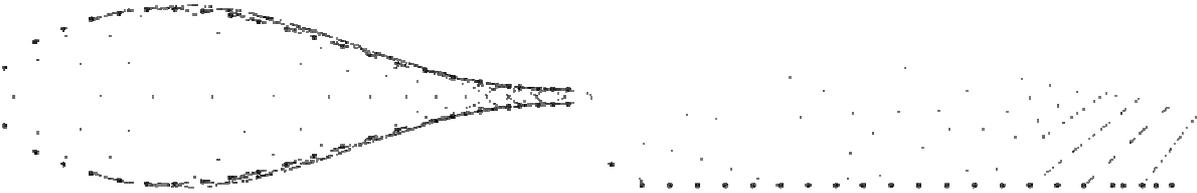


Fig. 3-19: Réseau géodésique sur une pSurface

### 3.4.5 Commentaires

Pour les pSurfaces non rationnelles, les dérivées sont calculées de façon exacte d'après ( 2.39 ) en partie 2, ce qui atténue les approximations génératrices d'imprécision. Dans le cas des surfaces rationnelles, nous pouvons les déterminer par un schéma aux différences finies. Les lignes géodésiques tracées demeurent toutefois des solutions approchées, puisque le point « suivant » solution est obtenu à partir de données issues du plan tangent au point précédent. La valeur du pas d'incrément est donc déterminante pour la précision du résultat. Ce schéma génère alors une erreur accumulée à chaque pas de calcul. D'autre part, les troncatures effectuées lors de la résolution numérique altèrent également la précision.

## 3.5 Lignes d'écoulement

### 3.5.1 Définition

Les lignes d'écoulement d'une surface sont les trajectoires de points matériels liés à la surface soumis à un champ de pesanteur vertical. Lorsque la vitesse est nulle, la ligne d'écoulement est tangente à la ligne de pente passant par un point.

### 3.5.2 Intérêt technologique

Une erreur communément répandue est de considérer que le cheminement d'une goutte d'eau sur une surface correspond à une ligne de plus grande pente. Or, cette caractéristique géométrique ne retranscrit correctement le trajet parcouru que sous la condition d'une vitesse nulle. La visualisation du parcours d'une goutte d'eau dans une gouttière permet de le constater. Nous pourrions, par exemple, envisager de canaliser l'écoulement de la condensation sur une surface en insérant des profilés de drainage disposés selon les lignes d'écoulement et maîtriser ainsi le cheminement de l'eau.

### 3.5.3 Application

Considérons l'équation différentielle d'une ligne d'écoulement

$$\vec{N} \wedge \left( \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial t^2} - \vec{g} \right) = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \vec{g} = -g\vec{z} \quad (3.20)$$

On remarque que si  $g = 0$  on retrouve l'équation d'une géodésique de la surface. En revanche pour  $g > 0$ , l'intensité de la pesanteur influe sur la vitesse à laquelle la courbe est parcourue. Il faut donc rajouter le terme de pesanteur au système (3.19) pour obtenir le tracé d'une ligne d'écoulement.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{d^2 \vec{M}}{du^2} \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + 2 \frac{d^2 \vec{M}}{du dv} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \frac{d^2 \vec{M}}{dv^2} \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 + g\vec{z} \right) \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} = 0 \\ \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{d^2 \vec{M}}{du^2} \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + 2 \frac{d^2 \vec{M}}{du dv} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \frac{d^2 \vec{M}}{dv^2} \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 + g\vec{z} \right) \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} = 0 \end{array} \right. \quad (3.21)$$

### 3.5.4 Remarques

De même que pour la résolution du système d'équations pour une ligne géodésique, nous obtenons une solution approchée dépendant du pas d'incrémentation. Néanmoins, les résultats vérifient des solutions connues telles que l'obtention de paraboles sur un plan incliné ou de la ligne de plus grande pente pour une vitesse initiale nulle (Fig. 3-20). Cette méthode est un outil supplémentaire pour la génération de maillages particuliers sur des géométries gauches (Fig. 3-21). Par ailleurs, on observe que moins il y a de pente, plus la trajectoire fait des méandres.

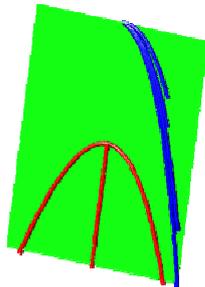


Fig. 3-20: Lignes d'écoulement sur un plan incliné

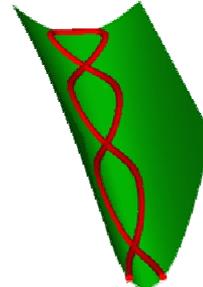


Fig. 3-21: Lignes d'écoulement sur une psurface

## 3.6 Conclusion

La caractérisation locale en tout point d'une pSurface permet de proposer un choix étendu de parcours potentiels sur une enveloppe par des profilés structuraux. Ces possibilités de génération de maillages sur des surfaces complexes offrent des solutions géométriques originales à l'ingénieur. Nous présentons ainsi dans le chapitre suivant deux expérimentations envisageant des couplages :

- Forme-Force pour la conception d'une passerelle en matériau textile ;
- Forme-Force-Structure en comparant la performance mécanique de différents maillages pour une forme donnée.

## 4 ETUDES DE CAS

### 4.1 Construction d'une passerelle textile

#### 4.1.1 Objectif

L'objectif de cette expérimentation<sup>1</sup> consistait à sensibiliser les participants au couplage Forme-Force en leur faisant construire une passerelle en matériau textile (Fig. 4-1). Compte tenu du peu de temps imparti à la réalisation (cinq jours) et de l'absence d'outil informatique sur place, la conception de la toile par découpe de laizes ne pouvait se faire par une approche classique. La génération de la surface gauche, à partir d'éléments plans de membrane peu extensible, devait répondre à un impératif de simplicité. Le choix se porta ainsi sur les lignes géodésiques parcourant la surface de franchissement. En effet, ce réseau particulier permettant de générer la surface résultait, après développement sur un plan, sensiblement en des bandes de toile minces et rectilignes.

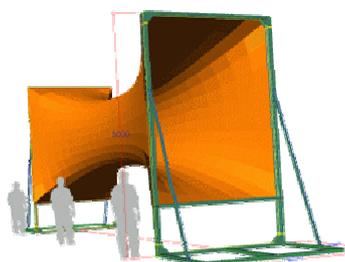


Fig. 4-1: Concept du projet à réaliser

Cette passerelle devait constituer un espace intérieur et réaliser un franchissement alliant souplesse et courbure, rigidifié par une mise en tension. Le caractère éphémère et événementiel, propice au lieu, imposait des exigences de montabilité et de démontabilité d'une structure autonome, sans ancrage sur l'extérieur.

#### 4.1.2 Conception

Ces exigences furent respectées en utilisant deux portiques métalliques aux extrémités, reliés par un franchissement en matériau toile PVC sur une portée de 10m. La géométrie de la membrane fut déterminée par le calcul d'une forme à l'équilibre tendue entre ces deux cadres. La mise en pré-tension s'effectuait par laçage sur les cadres, tandis que des lests disposés aux appuis reprenaient la traction de la toile. A partir du modèle numérique du maillage (Fig. 4-2), la réalisation de l'enveloppe consista à découper des bandes droites de toiles de longueurs données permettant de générer la forme désirée.

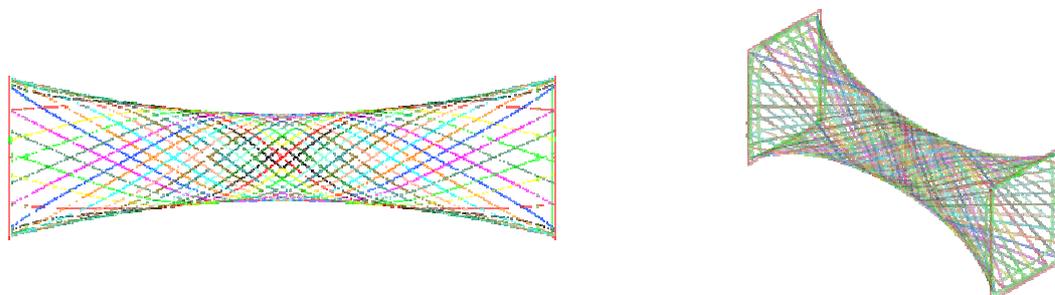


Fig. 4-2: Modèle numérique du réseau géodésique

<sup>1</sup> Organisée par V. Raducanu et N. Pauli, membres du SLA (groupe de recherche en Structures Légères pour l'Architecture) et réalisée dans le cadre d'un atelier aux Grands Ateliers de l'Isle d'Abeau avec des étudiants de l'ENSAM (Ecole Nationale Supérieure d'Architecture de Montpellier).

La réalisation nécessita le montage des portiques métalliques préfabriqués préalablement en atelier (Fig. 4-3) ainsi que la découpe des bandes de toile PVC (Fig. 4-4), ensuite assemblées par collage (Fig. 4-5).



Fig. 4-3: Montage des portiques



Fig. 4-4: Découpe des bandes



Fig. 4-5: Collage des bandes

#### 4.1.3 Commentaires

Ce travail permit de mettre en évidence un problème majeur. Si le maillage géodésique fut virtuellement satisfaisant, sa réalisation montra que la maîtrise du couplage Forme-Force (entre la géométrie et le comportement mécanique) n'avait pas été correctement appréhendée. Chaque bande mise en pré-tension tendait à adopter la position d'équilibre d'un câble tendu entre deux points sans aucune astreinte à « rester » sur la surface. Il en résulta le glissement des bandes les unes par rapport aux autres, générant ainsi des plis (Fig. 4-6). Ces phénomènes furent amoindris par la mise en place d'un anneau central rigide et par le collage des bandes à leurs croisements afin de créer des points fixes.

Le modèle numérique si cher à l'architecture des formes complexes (« architecture digitale ») nous a dévoyé jusqu'à la perte de tout sens critique et physique. Au-delà des risques inhérents à la dématérialisation, décrits en première partie, cet exemple de maillage de lignes particulières sur une surface gauche rappelle que le seul paramètre de Forme ne peut être étudié indépendamment des autres (Force, Structure, Matériau et Technologie) pour aboutir à un résultat valable.

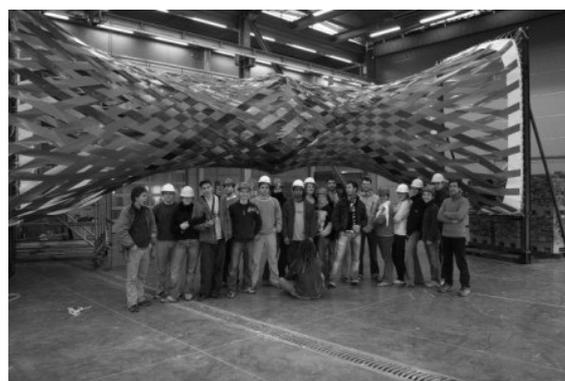


Fig. 4-6: Réalisation finale

Par la suite, nous avons proposé un maillage formé de douze paraboloides hyperboliques [SLA 08] dont les huit génératrices obliques, joignant deux milieux des cadres, sont des génératrices d'un hyperboloïde de révolution (Fig. 4-7 et Fig. 4-8). C'est donc finalement ces réseaux de lignes asymptotiques qui permirent un couplage Forme – Force plus efficace.

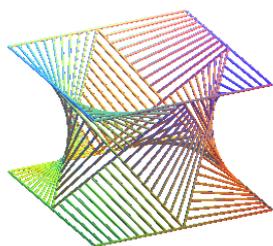


Fig. 4-7: Modèle numérique du maillage alliant critères géométrique et mécanique



Fig. 4-8: Sculpture d'A. Duarte basée sur la même composition – 36 portions de PH – Lausanne – Suisse

## 4.2 Etude comparative de réseaux structuraux

### 4.2.1 Objectif

Les maillages orientés selon des lignes particulières sont construits à partir de critères géométriques. L'objectif est ici de mener une étude mécanique comparative de différents réseaux pour une même forme. Par ailleurs, la finalité de ce travail<sup>2</sup> concerne l'exploitation des outils géométriques développés au sein du bureau d'études Abaca pour aider à la conception de projets architecturaux. Dans un souci de cohérence avec les pratiques des ingénieurs du bureau, les calculs portant sur les aspects mécaniques ont été effectués avec leur outil logiciel Robot Millenium (modélisation par éléments finis).

On a ainsi réalisé une étude sur une forme à géométrie complexe parcourue par différents maillages, sous différents cas de chargements. L'objectif est de dégager des tendances structurelles classées selon une grille de lecture des résultats basée sur des critères de :

- déplacement maximal (rigidité) ;
- contrainte maximale (résistance) ;
- aspects technologiques (poids propre, nombre de nœuds, d'appuis, d'éléments en bardage).

### 4.2.2 Modèles géométriques

Une pS35 générée par 5 paraboles (Fig. 4-9) est choisie comme forme gauche de référence dont une certaine complexité est donnée par modulation de courbures. La surface présente ainsi une zone à courbure gaussienne positive et une zone à courbure gaussienne négative, après le passage par une zone d'inflexion.

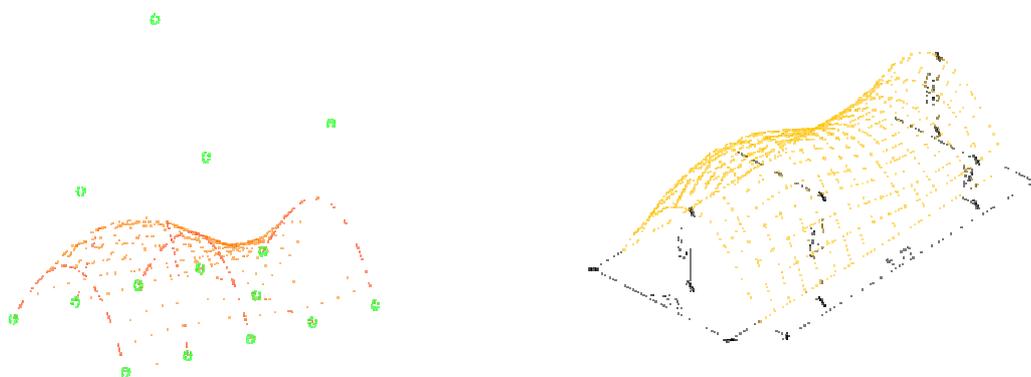


Fig. 4-9: Géométrie de référence

<sup>2</sup> Effectué avec P.B. Cressant, dans le cadre d'un stage de Master 1 en Sciences et Techniques pour l'Ingénieur.

A partir de cette forme, les applications de génération de lignes particulières ont été utilisées pour créer différents types de maillages :

- un maillage de lignes isoparamétriques (Fig. 4-10) ;
- un maillage de lignes de courbure (Fig. 4-11) ;
- cinq maillages de lignes géodésiques (Fig. 4-12 à Fig. 4-16) ;
- un maillage de lignes diagonales, c'est-à-dire de segments immergés inclinés à 45 degrés, par analogie à une trame orthogonale du domaine paramétrique (définition en partie 4) (Fig. 4-17).

Parmi ces huit maillages, deux groupes se distinguent en fonction de l'orientation des éléments. Des directions primaires et secondaires sont clairement identifiables pour les maillages *isoparamétrique*, *courbure*, *géodésique 1* et *géodésique 2*. En revanche, les quatre autres n'ont pas de direction privilégiée.

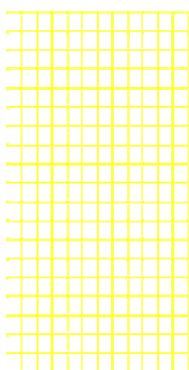


Fig. 4-10: Lignes isoparamétriques

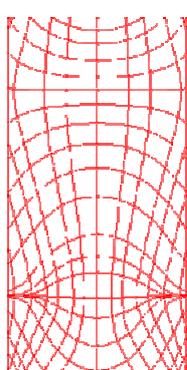


Fig. 4-11: Lignes de courbure

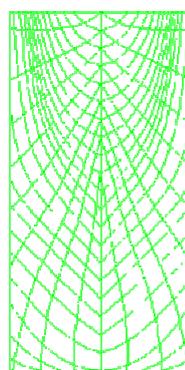


Fig. 4-12: Lignes géodésiques 1

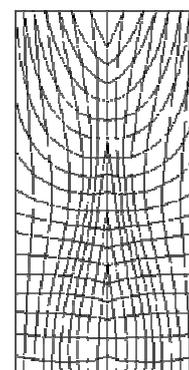


Fig. 4-13: Lignes géodésiques 2

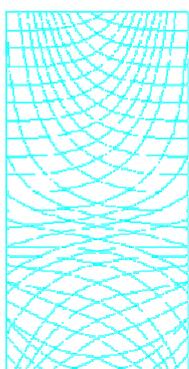


Fig. 4-14: Lignes géodésiques 3

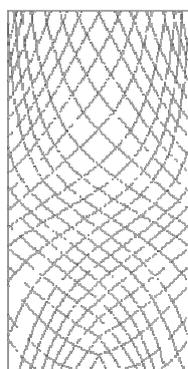


Fig. 4-15: Lignes géodésiques 4

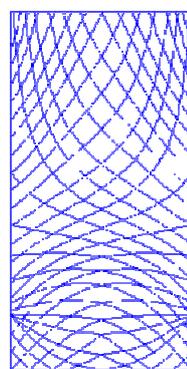


Fig. 4-16: Lignes géodésiques 5

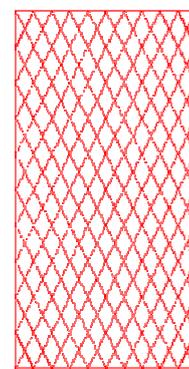


Fig. 4-17: Lignes diagonales

En raison de la méthode itérative de tracé qui génère un tableau de points en coordonnées globales, les courbes obtenues comportent un grand nombre de points reliés entre eux par des lignes. Ces courbes sont des entités « polygones » dont nous réduisons le nombre de points en les convertissant en  $n$  segments de longueur identique (précision selon la valeur de  $n$ ). Une autre conséquence du mode de génération est qu'il n'existe pas, en général, d'intersection entre deux courbes. La création d'un noeud de connexion à chaque croisement a nécessité une opération de « soudage », permise par le logiciel Robot.

#### 4.2.3 Modèles de calcul

Chaque maillage constitue un modèle de calcul par éléments finis utilisant des éléments de type « poutre » pour les directions primaires qui admettent ainsi des sollicitations de flexion. Les directions

secondaires sont modélisées comme un treillis réticulé en libérant les rotations aux nœuds pour annuler les termes de moment. A ces éléments sont affectées des sections métalliques IPE 80 et des tubes carrés 25x25. Les appuis de la structure au sol sont des rotules.

L'étape suivante consiste à mettre en place des chargements aux nœuds. Plusieurs cas de charge ont été envisagés tels que :

- le poids propre de la structure ;
- un chargement gravitaire surfacique projeté (de type neige) ;
- des cas de charges surfaciques normales à la surface associées avec des chargements linéiques répartis sur les rives (vent longitudinal) ;
- des cas de charges ponctuels en différents points singuliers selon les surfaces considérées, simulant le poids d'un ouvrier et de son matériel ou une action accidentelle.

Pour appliquer les actions des chargements surfaciques de neige et vent aux nœuds on a essayé d'utiliser des éléments de type « bardage » sans contribution en rigidité (seule l'ossature devait être structurelle et chargée). Toutefois, les fonctions de chargement disponibles n'apportèrent pas de réponse satisfaisante à la mise en place d'actions climatiques sur des surfaces complexes. Par conséquent, le calcul fut restreint aux combinaisons de poids propre, de charges ponctuelles et de chargements linéiques sur les arcs de rive pour un vent soufflant longitudinalement.

#### 4.2.4 Interprétation des résultats

En fonction des premiers résultats observés, les modèles *isoparamétrique*, *courbure* et *géodésique 4* ont été sélectionnés pour une étude plus approfondie. Les autres modèles ont été rejetés soit pour leur moins bonne performance en terme de rigidité ou de résistance, soit pour la complexité technologique du maillage. Les résultats ont été organisés selon des critères mécaniques (déplacement maximum des nœuds en  $z$ , contraintes maximales dans les éléments) et technologiques (nombres d'appuis, de nœuds de connexion et d'éléments de bardage). Aucune analyse des instabilités n'a toutefois été effectuée (flambement et déversement latéral).

##### **Rigidité**

Le déplacement vertical sous chargement de neige est plus important pour le maillage *géodésique 4* (vingt à vingt cinq fois supérieur aux deux autres) ; ceux de *courbure* et d'*isoparamétrique* étant comparables et faibles. La bonne performance du maillage *isoparamétriques* s'explique par la présence des paraboles transversales sur la pS35. Or l'un arc de parabole est une approximation acceptable de la chaînette, forme funiculaire optimale pour reprendre des chargements de poids propre en compression pure et sans flexion.

En ce qui concerne le déplacement longitudinal pour les cas de chargements linéiques transversaux, les résultats sont révélateurs. Alors que *courbure* et *géodésique 4* ont des valeurs de l'ordre du dixième de millimètre, celui de *isoparamétrique* est mille fois supérieur. Cette valeur s'explique par l'existence des mécanismes dans les quadrangles de la structure, excités par ces chargements et ordinairement maîtrisés par l'ajout de diagonales de contreventement.

##### **Résistance**

La comparaison entre les contraintes maximales dans les éléments pour les trois modèles retenus a mis en évidence une moins grande dispersion globale pour le maillage *courbure*. Les valeurs de *isoparamétrique* sont légèrement plus faibles que celles de *courbure*, toujours en raison de la forme parabolique des arcs, sauf pour les cas de chargement du vent où elles augmentent fortement en l'absence de contreventement. Le réseau *géodésique 4* est le maillage le moins performant en ce qui concerne les contraintes dans les éléments (valeurs globalement très supérieures aux autres). Les lignes de courbure apparaissent donc comme étant les plus performantes pour respecter un critère de résistance.

### Aspects technologiques

Les maillages *courbure* et *isoparamétrique* sont équivalents en terme de poids de la structure et de répartition des profilés (IPE et tubes carrés). En revanche, l'ossature *géodésique 4* est plus lourde d'environ 10%.

Concernant le nombre de nœuds de connexion, d'appuis et d'éléments de bardage, *géodésique 4* et *isoparamétrique* sont équivalents. Le maillage *courbure* se distingue cependant avec 40 nœuds de connexion, 10 appuis et 10 éléments de bardage en moins.

#### 4.2.5 Conclusions et perspectives

En première analyse, le maillage de la pS35 suivant les lignes géodésiques n°4 est le moins performant. Malgré une ossature plus lourde, les contraintes sont plus élevées et les déplacements plus importants. Le maillage suivant les lignes isoparamétriques constituerait une bonne solution, à condition toutefois d'y ajouter des diagonales de contreventement (qui alourdiraient la structure). Enfin, chose intéressante, le maillage suivant les lignes de courbures constitue le meilleur compromis en terme de déplacements, de contraintes et de technologie. De plus, l'atout géométrique majeur des lignes de courbure, qui se croisent orthogonalement, facilite la conception des nœuds de connexion.

Cette conclusion n'est cependant pas définitive, car les maillages ont été sélectionnés puis testés pour un nombre limité de cas de chargement. D'autres maillages parmi les propositions évoquées auraient pu se révéler plus pertinents. La définition de critères d'optimum est également hasardeuse sans connaître la fonction de la forme. L'architecture non standard se caractérise par son unicité et il est difficile d'apposer une grille de lecture générale sur ce qui relève du non ordinaire. Une telle analyse des compromis devrait être proposée pour chaque projet en intégrant ses particularités (forme, fonction, conditions aux limites, localisation...), mais ne peut en aucun cas constituer une ébauche de « guide de la conception » applicable généralement.

Cette étude a ainsi permis de tirer des conclusions intéressantes et d'élargir les perspectives. La complexité croissante des géométries considérées révéla les lacunes de ce logiciel de calcul de structures standard, aussi bien en terme de modélisation que de chargement. En effet, plusieurs corrections des maillages furent nécessaires après le transfert des modèles vers Robot, car la géométrie était dégradée par la création ou la disparition de lignes et de points de connexion. La gestion des degrés de liberté de la structure fut aussi une étape délicate doublée d'une logique particulière car, à titre d'exemple, la modélisation d'une rotule en appui extérieur ne peut se faire que par l'intermédiaire d'un encastrement à l'appui avec des éléments relâchés en rotation à leur extrémité. Les possibilités de chargement offertes par le logiciel se bornent de plus essentiellement à un chargement de poids propre, très fastidieux à mettre en place et limitatif en terme d'orientation structurelle. Les calculs furent également restreints à une résolution en linéaire et donc pas étendus à l'analyse des instabilités.

Nous voulions ensuite comparer les maillages construits sur une logique géométrique avec un positionnement « mécanique » donné par les lignes isostatiques de contrainte. Or les méthodes de calcul d'un tel logiciel commercial sont inaccessibles à l'utilisateur, ce qui soulève le problème majeur de l'interprétation et de la fiabilité des résultats. La visualisation des directions principales des contraintes sur la surface de référence (modélisée avec des éléments finis de type coque) montra l'impossibilité d'exploiter les résultats obtenus, allant même jusqu'à la remise en question de leur exactitude.

Finalement, le constat de « jungle » logicielle, rendant les outils de modélisation géométrique hors de toute compréhension directe du paramètre Forme et qui nous a amené à développer notre propre approche de génération de formes gauches, s'étend aux paramètres de Force et de Structure pour le cas de ce logiciel de calcul. L'efficacité de cet outil, présent dans un grand nombre de bureaux d'études, n'est toutefois pas à discuter pour des structures standard qui s'inscrivent dans le cadre des réglementations en vigueur. Par contre, ses capacités et son efficacité se réduisent drastiquement face à l'analyse d'édifices qui sont, par essence, des singularités du bâti.

Deux pistes de travail s'ouvrent ainsi en perspective s'agissant de l'étude mécanique des géométries complexes.

Nous pourrions tout d'abord envisager de poursuivre cette étude en utilisant des logiciels commerciaux qui paraissent davantage destinés à l'analyse de surfaces complexes (comme CATIA), tout en complétant l'approche mécanique avec des logiciels d'éléments finis destinés à la recherche et dont les codes de calculs sont ouverts (comme CASTEM).

Sur un plan plus théorique, les courbes particulières qui parcourent la surface ne sont pas paramétrées. Nous avons notamment pu en constater les inconvénients pour déterminer des nœuds d'intersections et limiter le nombre de segments les constituant.

Il s'agirait ainsi de déterminer des courbes immergées équivalentes qui garantiraient une appartenance à la surface en tout point et faciliterait un traitement postérieur, par exemple pour la mise en place de chargements de vent et de neige. La poursuite du développement sur les géodésiques sera orientée selon cet aspect (partie 4). Les autres courbes particulières peuvent être transcrites en pCourbes par interpolation, ce qui conduit toutefois à un grand nombre de points de contrôle sans relation avec la surface. L'emploi de méthodes d'optimisation serait alors plus efficace pour produire des pCourbes immergées équivalentes.

De plus, il nous apparaît intéressant d'envisager l'utilisation des points de contrôle, propre à la définition géométrique des formes, comme paramètres intégrés dans l'étude du comportement mécanique. De précédents travaux [HOS 93], [MIH 06] et [CZA 08] nous encouragent vers cette direction. La méthode des densités de contrainte, développée par B. Maurin [MAU 98] et dédiée à la recherche de forme des coques, pourrait nous servir de base pour faire appel à un calcul multi-paramétré, déterminant simultanément la géométrie de la coque et son épaisseur.

## 5 RECHERCHE DE FORMES PAR CRITERES GEOMETRIQUES

Les paragraphes précédents traitent de l'analyse et de la recherche de solutions géométriques pouvant simplifier le processus de conception. Les outils développés s'appliquent sur des objets préalablement donnés et permettent une exploitation de leurs propriétés géométriques.

A présent, nous souhaitons développer un ensemble d'outils orientés vers la conception d'enveloppes répondant à des objectifs de faisabilité précisés dès les premières phases. Ces propositions ne cherchent toutefois pas à donner les moyens à l'ingénieur de se substituer à l'architecte. Au contraire, elles mettent l'accent sur la nécessaire collaboration entre ces deux partenaires pour créer des formes complexes respectant une rationalité de mise en œuvre.

En effet, pour des raisons architecturales, technologiques et financières, il est utile de maîtriser la génération de surfaces dont la représentation discrète est constituée d'éléments réglés, développables ou plans. Nous illustrerons ainsi l'obtention d'enveloppes de complexité croissante, en partant des simples surfaces réglées jusqu'aux surfaces à quadrangles plans.

### 5.1 Surfaces réglées

#### 5.1.1 Définition

Les surfaces réglées sont générées par balayage d'une ligne dans l'espace, dénommée génératrice. Nous les avons déjà rencontrées dans le chapitre sur les lignes particulières, car leurs génératrices se confondent avec certaines de leurs lignes asymptotiques. L'existence d'asymptotiques dans l'espace réel implique néanmoins que la courbure gaussienne d'une surface réglée soit négative ou nulle.

#### 5.1.2 Intérêt technologique

L'atout fonctionnel de ces surfaces en terme de facilité de réalisation a déjà été évoqué dans le paragraphe sur les lignes asymptotiques. Nous n'insisterons pas davantage sur l'intérêt évident d'exploiter des lignes droites pour générer une surface gauche. L'œuvre de F. Candela fait référence à de telles géométries pour leur constructibilité. Pour son ingéniosité technologique, nous citerons également la surface d'H. Guimard, dont il utilisa des portions pour les parties circulaires des marquises des stations du métro Parisien (Fig. 5-1). En plus de présenter l'avantage d'être réalisée par des panneaux de verre plans, cette surface possède une gouttière centrale à la rencontre des génératrices.



Fig. 5-1: Station de métro Porte Dauphine – H. Guimard – Paris – 1900 / 1901

#### 5.1.3 Application

Les surfaces réglées résolvent le problème suivant : étant donné deux courbes  $c^m$  et  $d^m$  dans l'espace, définies sur le même intervalle de paramétrage, trouver une surface  $p^{m,n}$  qui contienne les deux courbes comme bords telles que

$$p^{m,n}(u,0) = c(u) \text{ et } p^{m,n}(u,1) = d(u) \quad (5.1)$$

Il existe une infinité de solutions, mais la plus élémentaire consiste à écrire une surface de Bézier réglée sous sa forme explicite

$$p^{m,1}(u,v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^1 p_{i,j} B_i^m(u) B_j^1(v) \text{ avec } u, v \in [0,1] \quad (5.2)$$

$$p^{m,1}(u,v) = (1-v) \sum_{i=0}^m p_{i,0} B_i^m(u) + v \sum_{i=0}^m p_{i,1} B_i^m(u) \quad (5.3)$$

$$p^{m,1}(u,v) = (1-v) \underbrace{\sum_{i=0}^m c_i B_i^m(u)}_{\text{courbe de bord 1}} + v \underbrace{\sum_{i=0}^m d_i B_i^m(u)}_{\text{courbe de bord 2}} \quad (5.4)$$

Une pforme du type pSm2 est donc une surface réglée (voir le cas d'une pS52 en Fig. 5-2).

Une autre possibilité de génération par approche locale peut être envisagée si l'on considère une pCourbe. En effet, le calcul du repère de Frénet en  $n$  points de cette courbe fournit l'orientation des vecteurs que nous pouvons alors utiliser comme les génératrices d'une surface réglée. Ce mode de génération présente peu de difficulté, il s'agit simplement d'inverser l'orientation de la génératrice lors d'un changement de courbure pour éviter le « retournement » de la surface résultante. La surface (Fig. 5-3) illustre le cas d'une surface réglée générée sur les binormales d'une pC5.

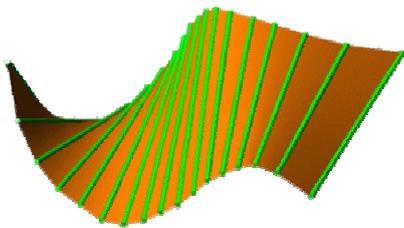


Fig. 5-2: Une pS52 (surface réglée)

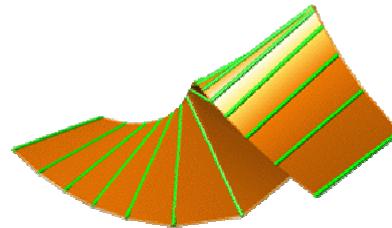


Fig. 5-3: Surface réglée construite sur les binormales d'une pC5

## 5.2 Surfaces développables

### 5.2.1 Définition

Les surfaces développables peuvent être projetées sur un plan sans recouvrement ni déchirures. Il en existe trois types :

- les cônes (Fig. 5-4) ;
- les cylindres (incluant le plan) (Fig. 5-5) ;
- les surfaces tangentes obtenues à partir des tangentes d'une courbe de bord tridimensionnelle (Fig. 5-6).

Par combinaison de ces trois types, d'autres surfaces développables composites peuvent être générées.

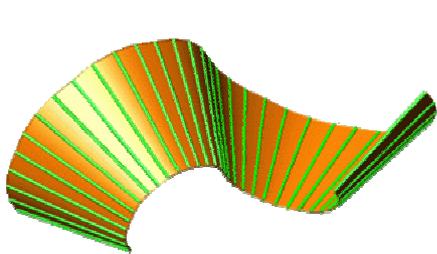


Fig. 5-4: Type cône

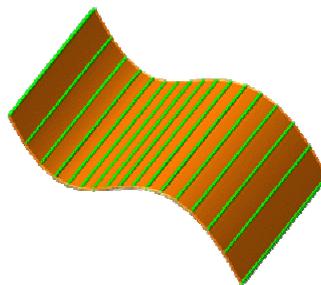


Fig. 5-5: Type cylindre

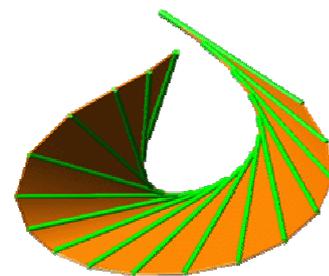


Fig. 5-6: Type surface tangente

Elles constituent un sous-ensemble des surfaces réglées. Rappelons qu'une surface est développable si et seulement si, pour chacune de ses génératrices, le plan tangent est identique en tous points. Une condition nécessaire et suffisante pour répondre à cette exigence consiste à garantir que, sur chacune des génératrices, il existe deux points ayant le même plan tangent.

### 5.2.2 Intérêt technologique

La maîtrise de la génération de surfaces développables est un élément important dans le panel des techniques utilisées par Gehry & Partners pour construire leurs projets. La Weatherhead School of Management (Fig. 5-7 et Fig. 5-8) dans l'Ohio est considérée comme leur premier projet d'envergure appliquant ce principe géométrique comme règle constructive [SHE 02].

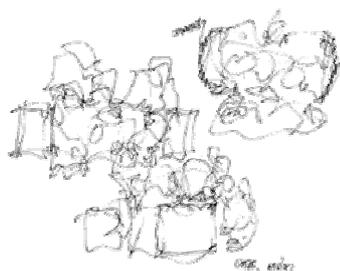


Fig. 5-7: Croquis du projet – F.O. Gehry



Fig. 5-8: Weatherhead School of Management – Cleveland – USA – Gehry & Partners – 1997 / 2000

Contrainte à une limitation de budget par cette institution académique, l'équipe de conception opta pour des choix drastiques. Tout d'abord, le système structurel secondaire métallique utilisé pour le musée Guggenheim de Bilbao ou l'EMP et qui permettait d'assurer un contrôle dimensionnel entre la structure et la « peau » en bardage fut supprimé. Puis, l'élaboration de la forme utilisa des éléments de surfaces développables pour tirer partie des génératrices comme localisation des éléments de fixation des feuilles métalliques (Fig. 5-9 et Fig. 5-10) ainsi que des planches de coffrage pour les voiles de béton (Fig. 5-11). Initialement, la développabilité de cette peau permettait de recourir à une technologie classique, susceptible de faire appel à une main d'œuvre locale. La méthode de génération numérique utilisée [LAN 92] offrait peu de flexibilité et soumit l'équipe de conception à un véritable défi. Au final, c'est plutôt l'aspect réglé que développable des surfaces qui fut exploité. Toutefois, l'invariance du vecteur normal a contribué à simplifier des détails de connexion en évitant les variations angulaires. De façon moins intuitive, l'équipe constata que restreindre les éléments de fixation sur les droites génératrices aux orientations très particulières s'avérait contraignant. Ce choix demeura néanmoins économiquement pertinent.

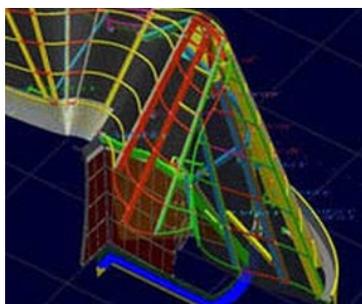


Fig. 5-9: Modèle numérique de génératrices comme éléments structuraux



Fig. 5-10: Mise en oeuvre



Fig. 5-11: Coffrage d'un voile béton par génératrices rectilignes

Toujours dans la monumentalité mais plus dans l'expression d'une simplicité, les sculptures de R. Serra illustrent les avantages esthétique, structurel et technique de ces formes (Fig. 5-12 et Fig. 5-13).



Fig. 5-12: *The Matter of time* – R. Serra – Musée Guggenheim – Bilbao – Espagne – 2005



Fig. 5-13: *Band* – R. Serra – MOMA – New York – USA – 2005 – 3.9x11.1x21.9m – 5.1cm ép

### 5.2.3 Applications

De nombreuses méthodes sont consultables dans la littérature pour générer ces surfaces. Une première approche consiste à résoudre les équations non linéaires qui caractérisent les surfaces gauches développables [AUM 91] [LAN 92] [CHA 98] [MAE 98] ; une deuxième utilise les méthodes de la géométrie projective [POT 95b]. Plus récemment, des méthodes basées sur l'algorithme de De Casteljau ont été proposées [CHU 02] [AUM 03] et dont l'approche est résumée ci-après.

#### 5.2.3.1 Fondamentaux

Revenons sur l'expression ( 5.4 ) d'une surface réglée construite sur deux courbes de Bézier  $c^m$  et  $d^m$ . Le point  $p^{m,1}(u,0) \in c^m$  (courbe de bord 1) est obtenu par l'algorithme de De Casteljau dont on visualise les séquences par le schéma triangulaire

$$\begin{array}{cccc}
 c_0^0 & & & \\
 c_1^0 & c_0^1 & & \\
 c_2^0 & c_1^1 & \dots & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & c_{m-1}^{m-1} \\
 c_{m-j}^0 & c_{m-j-1}^1 & \dots & c_1^{m-1} \quad c_0^m = p^{m,1}(u,0)
 \end{array} \quad (5.5)$$

De la même façon, le point  $p^{m,1}(u,1) \in d^m$  (courbe de bord 2) est obtenu par le schéma

$$\begin{array}{cccc}
 d_0^0 & & & \\
 d_1^0 & d_0^1 & & \\
 d_2^0 & d_1^1 & \dots & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & d_{m-1}^{m-1} \\
 d_{m-j}^0 & d_{m-j-1}^1 & \dots & d_1^{m-1} \quad d_0^m = p^{m,1}(u,1)
 \end{array} \quad (5.6)$$

Les quadrangles  $c_i^j d_i^j c_{i+1}^j d_{i+1}^j$  tels que  $i \in [0, m-j-1]$  et  $j \in [0, m-1]$  sont dénommés par  $Q_i^j$ . Or, il existe une équivalence entre la propriété de plan tangent identique en tout point d'une génératrice (caractérisant une surface développable) et la planéité du quadrangle  $Q_0^{m-1}$  [AUM 03]. C'est à partir de ce constat que l'algorithme de construction d'une surface développable est établi.

#### 5.2.3.2 Algorithme

Une courbe de Bézier régulière  $c^m$  de degré arbitraire  $m$  est donnée par ses points de contrôle  $c_0, \dots, c_m$ . Il s'agit alors de déterminer les points de contrôle  $d_0, \dots, d_m$  d'une courbe de Bézier  $d^m$ , de même degré  $m$ , de telle sorte que la surface résultante soit développable.

Le premier point de contrôle  $d_0$  de  $d^m$  est identifiable sous la condition que les vecteurs  $\overrightarrow{c_0c_1}$  et  $\overrightarrow{c_0d_0}$  ne soient pas colinéaires. En effet, dans ce cas, les tangentes aux points de départ des courbes seraient confondues, ce qui impliquerait que  $c_0$  soit un point singulier de la surface (longueur nulle de la génératrice). Par suite, le second point de contrôle  $d_1$  doit appartenir au plan formé par  $c_0$ ,  $c_1$  et  $d_0$  si l'on souhaite assurer la planéité du quadrangle  $Q_0^0$ , ainsi

$$d_1 = c_0 + \lambda(c_1 - c_0) + \mu(d_0 - c_0) \quad (5.7)$$

où les scalaires  $\lambda, \mu \in \mathfrak{R}$  et les coordonnées  $(x, y, z)$  de  $d_0$  peuvent être considérés comme cinq paramètres de conception.

Cette relation ( 5.7 ) est généralisée afin de déterminer l'expression des  $(m-1)$  points de contrôle suivants de  $d^m$ , formant avec ceux de  $c^m$  les quadrangles  $Q_i^0$

$$d_{i+1} = c_i + \lambda(c_{i+1} - c_i) + \mu(d_i - c_i) \text{ avec } i \in [1, m-1] \quad (5.8)$$

[AUM 03] démontre que, par transformations affines, le quadrangle  $Q_0^{n-1}$  hérite de la propriété de planéité de  $Q_0^0$ . Il résulte que la surface ainsi construite est développable.

### 5.2.3.3 Influences des paramètres $\lambda$ et $\mu$

Avec  $\lambda, \mu$  et les coordonnées de  $d_0$  nous disposons de cinq paramètres de génération d'une surface développable construite sur les courbes  $c^m$  et  $d^m$ . En agissant sur la position de  $d_1$ , les valeurs de  $\lambda$  et de  $\mu$  contrôlent la forme du quadrangle initial  $Q_0^0$ . La figure (Fig. 5-14) illustre leurs influences respectives et permet d'identifier des domaines de non convexité (A) et de pliage (B) du quadrangle à éviter. La convexité de  $Q_0^0$  est ainsi assurée si

$$\lambda > 0, \mu > 0 \text{ et } \lambda + \mu > 1 \quad (5.9)$$

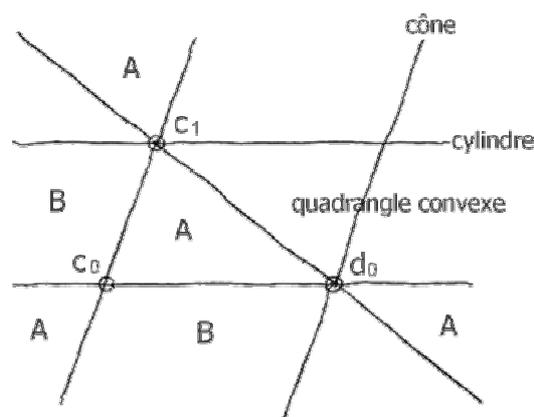


Fig. 5-14: Forme du quadrangle  $Q_0^0$  [AUM 03]

Il est ainsi démontré que pour :

- $\lambda=1$  et  $\mu=1$  :  $Q_0^0$  est alors un parallélogramme et par conservation des transformations affines, nous obtenons une surface développable de translation ( $c^m = d^m$  par translation le long d'une ligne génératrice Fig. 5-15) ;

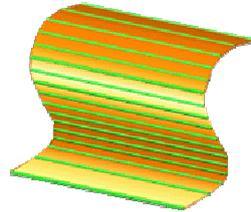


Fig. 5-15: Surface de translation pour  $\lambda=1$  et  $\mu=1$

- $\lambda=1$  et  $\mu \neq 1$  : la surface développable est de type cylindre (Fig. 5-16 et Fig. 5-17) ; en respectant les conditions de convexité sur la construction des quadrangles ( 5.9 ) on évite les points singuliers (Fig. 5-18) ;

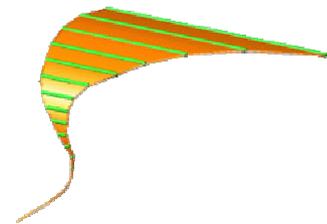
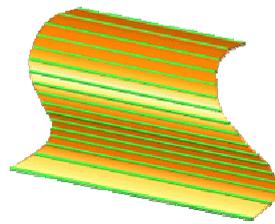
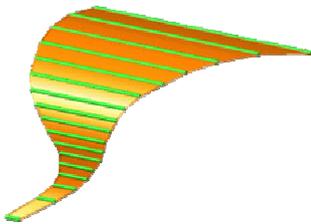


Fig. 5-16: Surface développable type cylindre pour  $\lambda=1$  et  $\mu=0.5$       Fig. 5-17: Surface développable type cylindre pour  $\lambda=1$  et  $\mu=1.1$       Fig. 5-18: Surface développable type cylindre pour  $\lambda=1$  et  $\mu=0$

- $\lambda \neq 1$  et  $\mu=1$  : la surface développable est de type cône (Fig. 5-19 à Fig. 5-22).

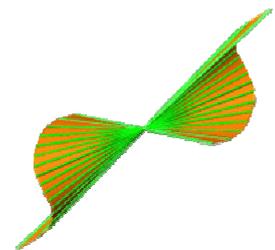
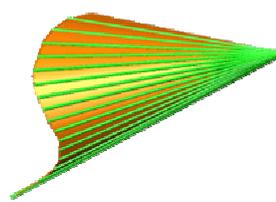
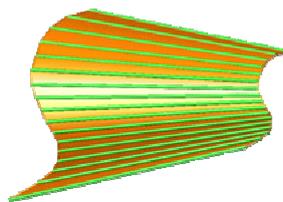
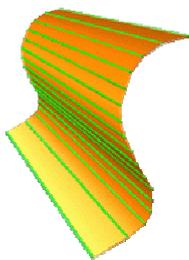


Fig. 5-19: Surface développable type cône pour  $\lambda=1.8$  et  $\mu=1$

Fig. 5-20: Surface développable type cône pour  $\lambda=0.5$  et  $\mu=1$

Fig. 5-21: Surface développable type cône pour  $\lambda=0$  et  $\mu=1$

Fig. 5-22: Surface développable type cône pour  $\lambda=-0.5$  et  $\mu=1$

Le non respect des conditions de convexité sur la construction des quadrangles génère des anomalies (Fig. 5-23 et Fig. 5-24).

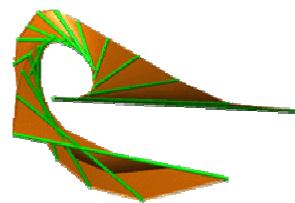
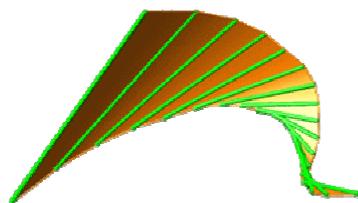


Fig. 5-23: Surface résultante pour  $\lambda=0.4$  et  $\mu=0.3$       Fig. 5-24: Surface résultante pour  $\lambda=-1$  et  $\mu=-0.5$

5.2.3.4 Conditions d'interpolation

Pour répondre à certaines exigences de conception d'une surface développable, il peut être nécessaire d'interpoler quatre points P, Q sur une ligne  $l_0$  (première génératrice) et R, S sur une ligne  $l_1$  (dernière génératrice) tels que

$$p^{m,1}(0,0)=P, p^{m,1}(0,1)=Q, p^{m,1}(1,0)=R \text{ et } p^{m,1}(1,1)=S \tag{5.10}$$

Deux conditions d'interpolation ont ainsi été prises en compte en s'appuyant sur les démonstrations proposées dans [AUM 03].

- les génératrices  $l_0$  et  $l_1$  sont parallèles (Fig. 5-25) : les exigences d'interpolation sont satisfaites si

$$c_0 = P, d_0 = Q, c_n = R, \lambda = 1 \text{ et } \mu = \left( \frac{\|RS\|}{\|PQ\|} \right)^{\frac{1}{m}} \tag{5.11}$$

Il en résulte une surface de Bézier développable de type cylindre (Fig. 5-26).

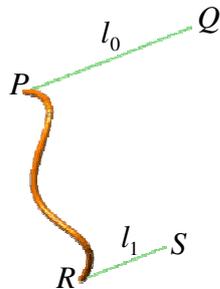


Fig. 5-25: Initialisation

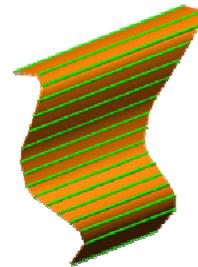


Fig. 5-26: Cylindre interpolant pour  $\lambda = 1$  et  $\mu \approx 0.84$

- Les génératrices  $l_0$  et  $l_1$  s'intersectent (Fig. 5-27) : les exigences d'interpolations sont satisfaites si

$$c_0 = P, d_0 = Q, c_n = R, \lambda = \frac{\|Qd_m\|}{\|PR\|} = \frac{\|QT\|}{\|PT\|} \text{ et } \mu = 1 \tag{5.12}$$

Il en résulte une surface de Bézier développable de type cône (Fig. 5-28).

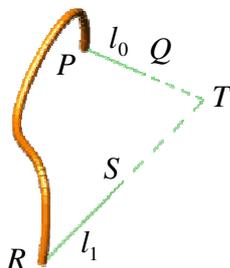


Fig. 5-27: Initialisation

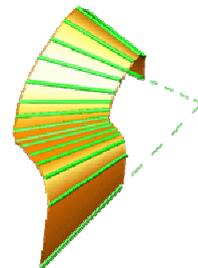


Fig. 5-28: Cône interpolant pour  $\lambda \approx 0.5$  et  $\mu = 1$

Il faut néanmoins préciser que, dans le cas du cône, l'interpolation de S n'est généralement pas satisfaite [AUM 03].

#### 5.2.4 Commentaires

Cette méthode présente plusieurs intérêts. En plus d'être construite à partir de l'algorithme fondamental sur lequel est basée la génération des pFormes, elle évite les désavantages des algorithmes cités en référence, qui ont pour la plupart au moins l'une des restrictions suivantes :

- les équations caractéristiques ne peuvent être résolues que pour des courbes de bord de bas degrés ;
- les courbes de bord doivent être planes ;
- les points singuliers sont difficilement contrôlables (sommet du cône, points sur la courbe de bord).

Nous disposons ainsi d'une méthode de génération de pSurfaces non rationnelles, développables et dont les points singuliers sont maîtrisés. A partir de la donnée d'une première courbe de bord de degré arbitraire, le calcul de la seconde est contrôlé par cinq paramètres ( $\lambda, \mu$  et les coordonnées de  $d_0$ ).

Par ailleurs, des conditions particulières d'interpolation peuvent être imposées aux premières et dernières génératrices des surfaces développables de type cône et cylindre. Les cas des génératrices biaisées est plus instable ; une étude plus approfondie de l'article de G. Aumann [AUM 03] étendrait certainement la maîtrise des conditions d'interpolation.

### 5.3 Surfaces à quadrangles plans

En collaboration avec Schlaich Bergermann & Partners, pour leur expertise dans la conception d'enveloppes de verre (Fig. 5-29), Gehry & Partners ont mis au point un outil de génération basé sur le principe des surfaces translationnelles, ensuite implémenté sous CATIA [GLY 04]. Aucune description analytique des surfaces obtenues n'est souhaitée ; il s'agit purement d'une application CAO s'appuyant sur le principe de translation et d'homothétie dans le plan d'une courbe profil se déplaçant le long d'un chemin.

Plus récemment, [ALM 07] a proposé une méthode de génération de maillages quadrangulaires plan à partir d'une paramétrisation particulière. Son approche se limite toutefois aux surfaces quadratiques, ce qui est très pénalisant pour la conception de formes flexibles.

Enfin, comme souligné dans l'introduction, le développement d'outils de modélisation pour l'architecture « freeform » suscite l'engouement de certains acteurs de la communauté infographique. H. Pottmann est ainsi le principal protagoniste de récents travaux appliquant la recherche en géométrie à l'ingénierie des structures de formes complexes. Son équipe développe une méthode d'approximation de surfaces gauches, basée sur l'optimisation de surfaces B-splines et dont le réseau de contrôle est composé de bandes de surfaces développables. Ces bandes, discrétisées à la précision requise, sont équivalentes à un réseau quadrangulaire à faces planes. Pour approcher une forme recherchée par un ensemble de bandes, le positionnement des points de contrôle est optimisé par minimisation d'une fonction cible intégrant plusieurs critères [LIU 06], [POT 07b], [POT 08a].

Dans ce qui suit, nous rappellerons deux méthodes de génération reposant sur le principe des surfaces translationnelles. Puis, nous proposerons une approche originale basée sur l'algorithme de De Casteljau.

#### 5.3.1 Intérêt architectural et technologique

La conception d'enveloppes de verre est généralement motivée par l'ambition architecturale d'atteindre une transparence structurelle. Or, ce résultat visuel est d'avantage atteint lorsque la surface est réalisée à l'aide de panneaux quadrangulaires plutôt que triangulaires dont les éléments diagonaux augmentent le réseau de barres et la complexité des noeuds de connexion.

Les panneaux quadrangulaires en verre gauches sont toutefois rédhibitoires pour la viabilité financière d'un projet en raison de leur coût de fabrication. C'est pour cela que la plupart des enveloppes

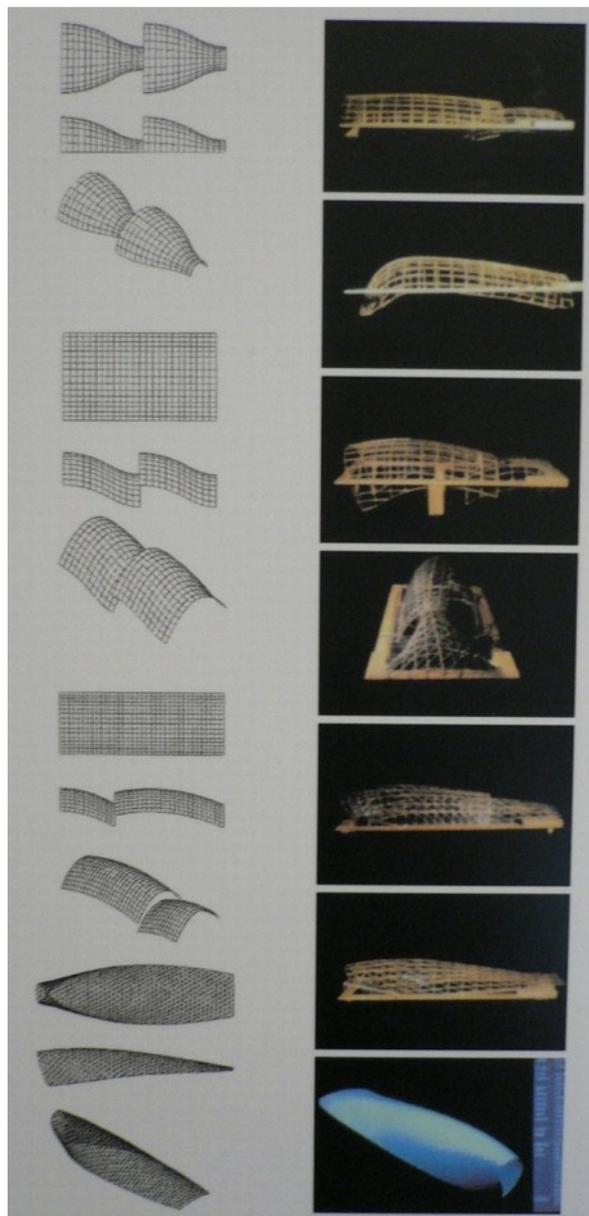


Fig. 5-29: Etudes de surfaces translationnelles pour la DG Bank Berlin - Schlaich Bergermann & Partners

complexes, à l'exception des surfaces de translation, sont réalisées à partir d'un maillage triangulaire. Toutefois, la complexité des nœuds d'assemblage et le surplus d'éléments peuvent aussi conduire à un surcoût financier qui rend alors judicieux le recours à des quadrangles plans. La génération d'un tel maillage n'est pas intuitive et les outils que nous avons développés peuvent être d'une aide précieuse.

### 5.3.2 Surfaces produits, surfaces de révolution

#### 5.3.2.1 Définition

Nous avons décrit au §2 la génération d'une surface en utilisant une courbe section se déplaçant sur une courbe chemin. Cette approche peut être néanmoins réduite à un cas particulier, en définissant un opérateur produisant des pSurfaces à partir d'une courbe section (définie dans un plan  $Oxz$ ) déplacée suivant l'axe  $Oy$  selon une courbe profil [MAR 04]. Dans le cas où la section est un arc de cercle, on génère alors une surface de révolution (Fig. 5-30 à Fig. 5-32).



Fig. 5-30: Initialisation

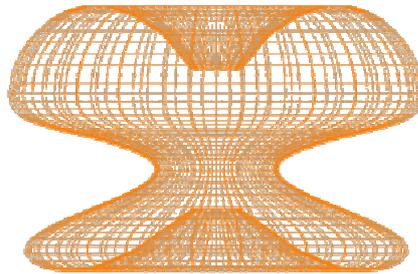


Fig. 5-31: pSurface à quadrangles plans résultante

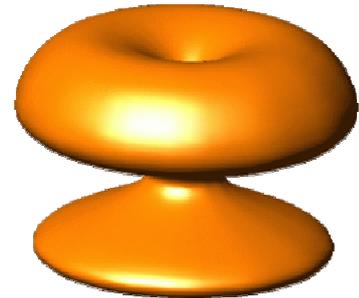


Fig. 5-32: pForme de révolution résultante

#### 5.3.2.2 Applications

Cette méthode consiste à déterminer chaque point de contrôle de la surface à partir de ceux des courbes section et profil définies dans le plan  $Oxy$ , soit en considérant le point courant

$$M(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} section.x \times profil.y \\ section.t \times profil.y \\ section.y \times profil.x \\ section.t \times profil.t \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Nous pouvons remarquer que, dans le cas d'une section et d'un profil non rationnels, dont tous les points ont une valeur de  $t$  égale à 1, l'expression du point devient

$$M(x, y, z, 1) = \begin{bmatrix} section.x \times profil.y \\ profil.y \\ section.y \times profil.x \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

On y reconnaît, pour les coordonnées en  $x$  et  $z$  du point résultant, l'application d'une homothétie de rapport  $profil.x$  sur le point courant  $(x, y)$  de la section. Enfin, la coordonnée en  $y$  correspond à l'application de la valeur  $profil.y$  sur le point courant.

La courbe section se déplace ainsi sur l'axe  $Oy$  en suivant la courbe profil (Fig. 5-33). Il en résulte une surface dont la représentation discrète est composée de quadrangles plans, car les points de contrôle sont obtenus par translations successives sur  $Oy$ . Or, l'invariance des applications affines permet d'assurer la transmission de cette caractéristique à chaque séquence de l'algorithme de De Casteljaou (Fig. 5-34 à Fig. 5-35).

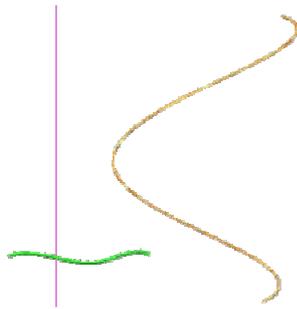


Fig. 5-33: Initialisation

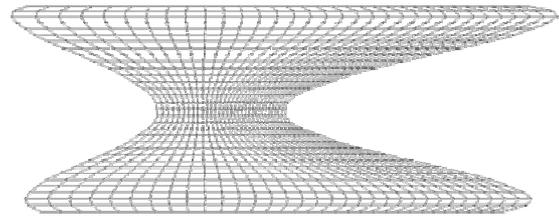


Fig. 5-34 : pSurface à quadrangles plans résultante

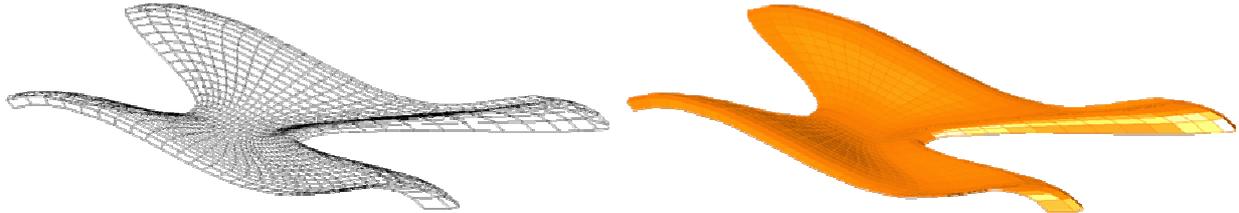


Fig. 5-35: Allure de la pForme résultante

Cette méthode présente l'intérêt de créer une surface produit résultante qui est aussi une pSurface à laquelle l'ensemble des applications internes peut être appliqué. Toutefois, les possibilités morphologiques sont limitées à l'usage d'une courbe profil définie dans le plan  $Oxy$ .

### 5.3.3 Cas particulier des swept surfaces

#### 5.3.3.1 Définition

Nous étendons à présent l'approche au cas d'un profil gauche, et menant à un type particulier de swept surface. Une pSurface est ainsi générée en utilisant une courbe section se déplaçant le long d'une courbe chemin. Nous limitons toutefois les transformations subies par la section à des translations et à des effets d'échelle homogènes, ce qui garantit l'obtention d'une surface pascalienne à quadrangles plans.

#### 5.3.3.2 Application

On utilise le repère de Serret-Frenet de la courbe chemin au point de départ afin de positionner la section perpendiculairement à la tangente initiale ; l'opérateur ne s'applique toutefois que sur les points de contrôle des deux courbes données en paramètre. Le nombre  $n$  de points de contrôle du chemin détermine le nombre de sections constituant la surface résultante. Les  $m$  points de contrôle de la section subissent d'abord  $n$  effets d'échelle de type

$$[S] = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Cela résulte en un tableau de  $n$  sections. Chacune d'entre elles est ensuite traduite du point origine au point de contrôle du chemin correspondant, ce qui est effectué par la matrice de translation

$$[T] = \begin{bmatrix} n_x(p_0) & b_x(p_0) & t_x(p_0) & x(p_i) \\ n_y(p_0) & b_y(p_0) & t_y(p_0) & y(p_i) \\ n_z(p_0) & b_z(p_0) & t_z(p_0) & z(p_i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

dont les 9 premiers termes correspondent aux coordonnées des vecteurs du trièdre de Serret-Frenet à l'origine de la courbe chemin et  $x(p_i)$ ,  $y(p_i)$ ,  $z(p_i)$  sont celles du point de contrôle  $p_i$  de la courbe chemin.

La figure (Fig. 5-36) donne une illustration des potentialités de cet outil.

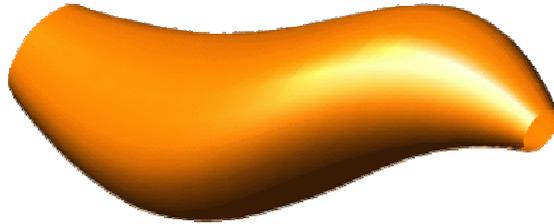


Fig. 5-36: pForme à quadrangles plans – section circulaire parcourant une courbe gauche

Pour un concours de plateforme organisée par des entreprises de la filière chimie des matériaux, l'architecte D. Serero proposa une enveloppe gauche (Fig. 5-37).

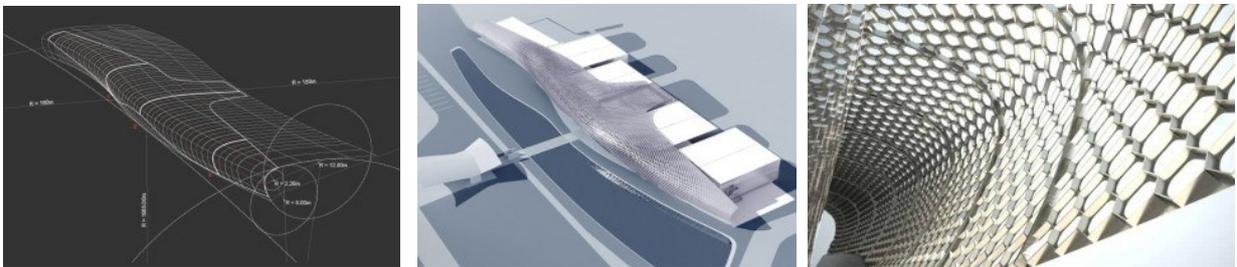


Fig. 5-37: Projet pour une plateforme chimique – David Serero Architectes – Mourenx – France – 2008

En dépit de son apparente complexité, cette enveloppe est générée en traduisant un arc le long d'une courbe de référence. Ce procédé permet une composition modulaire et répétitive comme illustré sur la première image (Fig. 5-38). Des variations homothétiques du profil font ensuite perdre cette répétitivité mais peuvent en conserver certains des intérêts (Fig. 5-38).

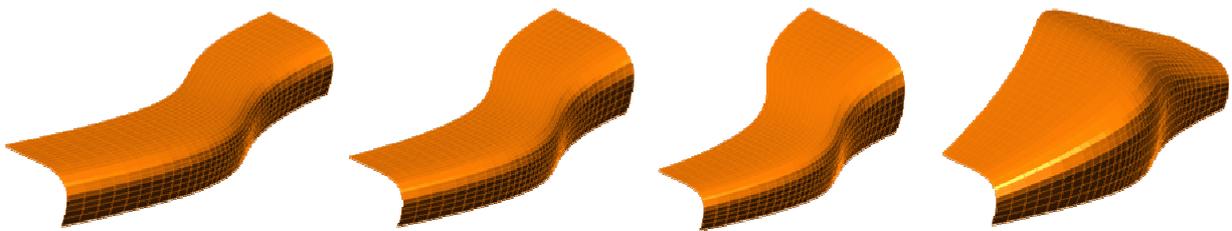


Fig. 5-38: Variation formelle en jouant sur les paramètres d'échelle sur une section parcourant un chemin gauche

Plus généralement, cet opérateur offre l'intérêt de générer une surface résultante qui est une pSurface. Toutefois, en raison même des contraintes de transformation de la section, certains chemins conduisent à des singularités lorsque la variation de la tangente à la courbe devient trop importante par rapport à la position d'origine (Fig. 5-39 et Fig. 5-40). Il revient alors à l'utilisateur d'appréhender cette limitation.

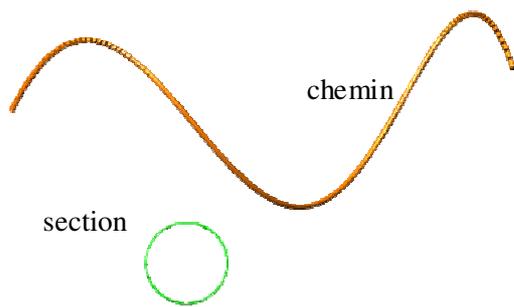


Fig. 5-39: Paramètres initiaux

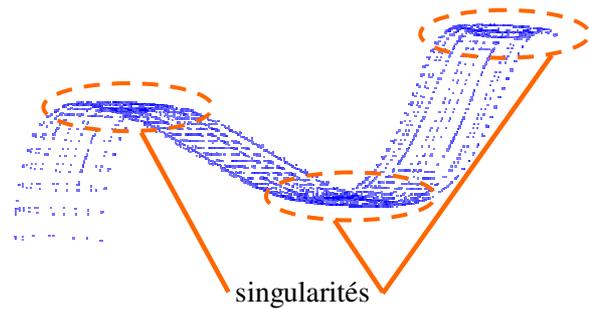


Fig. 5-40: Surface résultante présentant des zones d'aplatissement

#### 5.3.4 Conclusion

Nous disposons de deux méthodes de génération de surfaces dont la représentation discrète est composée de quadrangles plans :

- un algorithme de détermination de surfaces produits qui génère des pSurfaces et qui permet notamment de concevoir des surfaces de révolution ;
- l'algorithme d'une surface de balayage dont les rotations de la section sont empêchées et qui produit une pSurface avec plusieurs paramètres de déformation.

Nous proposons cependant dans le prochain chapitre une autre méthode de détermination de pSurfaces à quadrangles plans qui généralise le cas des surfaces de translation.

## 6 DEVELOPPEMENTS PROSPECTIFS

### 6.1 Surfaces à quadrangles plans par l’algorithme de De Casteljaou

Nous souhaitons à présent travailler sur une autre technique de création de surfaces à quadrangles plans, élaborée à partir des approches de [AUM 03] et [CHU 02]. Ces travaux présentent une méthode géométrique de génération de surfaces de Bézier développables en fonction de cinq paramètres, dont nous avons décrit le principe dans le §5.2. Ces auteurs démontrent que la condition de développabilité d’une surface réglée revient à une condition de planéité des quadrangles formés par les points intermédiaires de De Casteljaou des deux courbes de bord. Notre approche consiste ainsi à utiliser la méthode de génération des quadrangles plans pour l’appliquer à une courbe section suivant une courbe chemin. Il en résulte une pSurface non rationnelle dont le réseau de contrôle est composé de bandes développables, contraintes par deux paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  à définir un maillage de quadrangles plans à tous les niveaux de récursion.

#### 6.1.1 Application

Deux pCourbes non rationnelles et régulières  $s^m$  (dite section) et  $c^n$  (dite chemin) de degrés arbitraires, sont données par leurs points de contrôle (respectivement  $s_0, \dots, s_m$  et  $c_0, \dots, c_n$ ). Il s’agit de déterminer les points de contrôle de la surface  $S^{m,n}$  de telle sorte que la surface résultante soit composée d’éléments plans pour une représentation discrétisée.

Nous fixons tout d’abord  $s_0, \dots, s_m = S_{0,0}, \dots, S_{m,0}$ ,  $c_0 = s_0$  et  $c_1, \dots, c_n = S_{0,1}, \dots, S_{0,n}$  (Fig. 6-1).

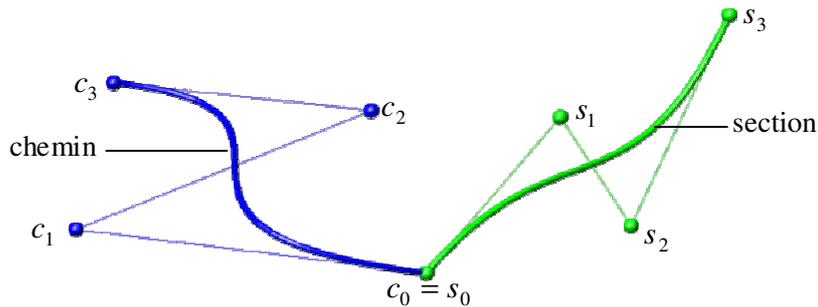


Fig. 6-1: Initialisation des courbes sections et chemin

On repère ensuite les quadrangles du réseau de contrôle de chaque bande de surface développable par  $Q_i^{0,k}$ , tels que  $i \in [0, m-1]$  et  $k \in [0, n-1]$  (Fig. 6-2).

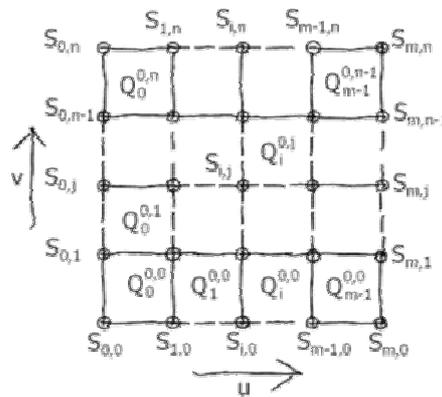


Fig. 6-2: Analogie du réseau de contrôle de la surface avec le domaine paramétrique

Le point de contrôle dans la direction  $v$  de la courbe chemin  $c_1 = S_{0,1}$  est fixé si les vecteurs  $\overrightarrow{s_0 s_1} = \overrightarrow{S_{0,0} S_{1,0}}$  et  $\overrightarrow{s_0 c_1} = \overrightarrow{S_{0,0} S_{0,1}}$  ne sont pas colinéaires :

$$\overrightarrow{S_{0,0} S_{1,0}} \wedge \overrightarrow{S_{0,0} S_{0,1}} \neq \vec{0} \quad (6.1)$$

En effet, dans ce cas, les tangentes aux points de départ des courbes seraient confondues, ce qui impliquerait que  $s_0 = S_{0,0}$ , soit un point singulier de la surface. Par suite, le second point de contrôle  $S_{1,1}$  doit appartenir au plan formé par  $s_0 = S_{0,0}$ ,  $s_1 = S_{1,0}$  et  $c_1 = S_{0,1}$  si l'on souhaite assurer la planéité du quadrangle  $Q_0^{0,0}$  ; ainsi, avec  $\mu, \lambda \in \mathfrak{R}$

$$S_{1,1} = s_0 + \lambda(s_1 - s_0) + \mu(c_1 - s_0) = S_{0,0} + \lambda(S_{1,0} - S_{0,0}) + \mu(S_{0,1} - S_{0,0}) \quad (6.2)$$

Cette expression est généralisée afin de déterminer l'expression des  $(m-1)$  points de contrôle suivants  $S_{m,1}$ , formant avec ceux de la courbe section, les quadrangles  $Q_i^{0,0}$

$$S_{i+1,1} = S_{i,0} + \lambda(S_{i+1,0} - S_{i,0}) + \mu(S_{i,1} - S_{i,0}) \text{ avec } i \in [1, m-1] \quad (6.3)$$

A ce stade, nous obtenons les points de contrôle  $S_{m,0}$  et  $S_{m,1}$  de la surface  $S^{m,n}$ , dont il est démontré que, par transformations affines [AUM 03], le quadrangle  $Q_0^{m-1,0}$  hérite de la propriété de planéité de  $Q_0^{0,0}$ . Il reste à déterminer les  $S_{i,j}$  points de contrôle tels que  $i \in [0, m]$  et  $j \in [1, n]$ , ce qui revient à appliquer la procédure précédente aux points  $S_{m,1}$  pour déterminer  $S_{m,2}$  en fonction de  $S_{0,2}$ ,  $\lambda$  et  $\mu$ .

$$S_{i+1,2} = S_{i,1} + \lambda(S_{i+1,1} - S_{i,1}) + \mu(S_{i,2} - S_{i,1}) \text{ avec } i \in [0, m-1] \quad (6.4)$$

La généralisation de cette procédure conduit à

$$S_{i+1,j+1} = S_{i,j} + \lambda(S_{i+1,j} - S_{i,j}) + \mu(S_{i,j+1} - S_{i,j}) \text{ avec } i \in [0, m-1] \text{ et } j \in [0, n-1] \quad (6.5)$$

### 6.1.2 Influence des paramètres $\lambda$ et $\mu$

Avec  $\lambda$  et  $\mu$ , nous disposons de deux paramètres de conception d'une surface à quadrangles plans construite sur les courbes section et chemin. En agissant sur la position de  $S_{1,1}$ , les valeurs de  $\lambda$  et  $\mu$  paramètrent la forme du quadrangle initial  $Q_0^0$ . Rappelons les conditions sur  $\lambda$  et  $\mu$  pour que la convexité de  $Q_0^0$  soit assurée

$$\lambda > 0, \mu > 0 \text{ et } \lambda + \mu > 1 \quad (6.6)$$

De plus :

$$\lambda = 1 \Leftrightarrow \overrightarrow{S_{i+1,j} S_{i+1,j+1}} \text{ parallèle à } \overrightarrow{S_{i,j} S_{i,j+1}} \quad (6.7)$$

$$\mu = 1 \Leftrightarrow \overrightarrow{S_{i,j} S_{i+1,j}} \text{ parallèle à } \overrightarrow{S_{i,j+1} S_{i+1,j+1}} \quad (6.8)$$

Cela implique que, par conservation des transformations affines, tous les quadrangles générés par les séquences successives de l'algorithme de De Casteljau sont des parallélogrammes. Il en résulte la génération d'une pSurface de translation (Fig. 5-36) dans la cas où  $\lambda = 1$  et  $\mu = 1$ .

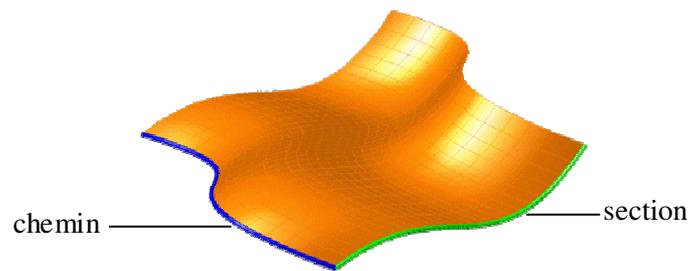


Fig. 6-3: pSurface de translation pour  $\lambda=1$  et  $\mu=1$

Par suite, en respectant les conditions de convexité les valeurs de  $\lambda$  et  $\mu$  offrent deux paramètres de conception. Les figures (Fig. 6-4 à Fig. 6-7) donnent des exemples de résultats. L'ensemble des opérations s'effectuant sur les points de contrôle de chacune des courbes, la surface résultante est une pSurface non rationnelle.

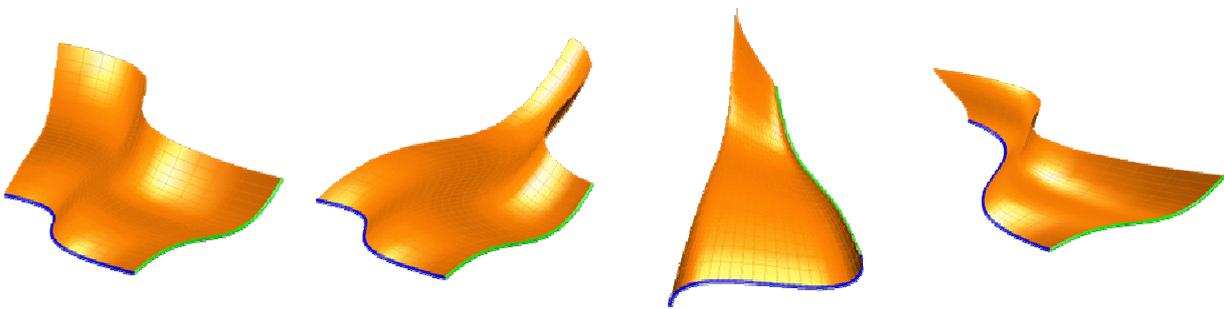


Fig. 6-4:  $\lambda=1$  et  $\mu=1.2$  Fig. 6-5:  $\lambda=1.2$  et  $\mu=1$

Fig. 6-6:  $\lambda=1.2$  et  $\mu=0.5$

Fig. 6-7:  $\lambda=0.5$  et  $\mu=1.2$

### 6.1.3 Conditions d'interpolation

Dans cette approche, seuls deux bords de la surface constitués par la section et le chemin sont contrôlables. Or, nous pouvons être amenés à rechercher une surface composée de quadrangles plans dont trois bords sont maîtrisés. En utilisant les conditions d'interpolation d'une surface développable [AUM 03], plusieurs méthodes peuvent être envisagées.

#### La courbe section parcourt deux bords parallèles

Nous générons alors des bandes de surfaces développables de type cylindre ; deux cas de figures étant alors à considérer :

- Soit les bords sont rectilignes, et l'on recherche alors la surface développable dont ils sont les génératrices à interpoler (méthode décrite au §5.2). Si les points de contrôle des deux chemins sont régulièrement répartis, il n'y a en effet aucune différence de résultat (Fig. 6-8 et Fig. 6-9) et les chemins peuvent être réduits à deux pC2. En revanche, s'ils sont répartis de façon non homogène, les points de contrôle supplémentaires permettent de créer une organisation différente des quadrangles (Fig. 6-10). Le choix du positionnement de ces points sur les génératrices rectilignes constitue alors un paramètre de conception supplémentaire. Pour le calcul de chaque bande, les paramètres doivent ensuite être pris tels  $\lambda=1$  et  $\mu=1$  ; il en résulte une pSurface à quadrangles plans.

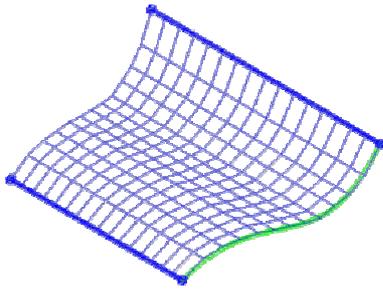


Fig. 6-8: Surface développable avec conditions d'interpolation type cylindre

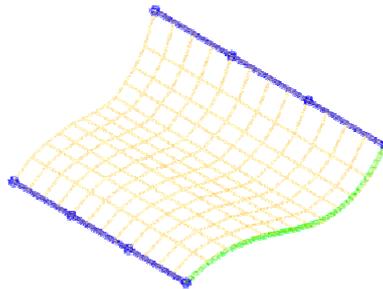


Fig. 6-9: Bandes développables avec conditions d'interpolation – distribution régulière des points de contrôle

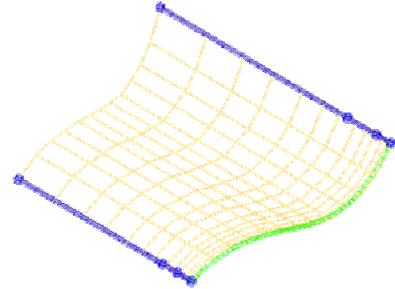


Fig. 6-10: Bandes développables avec conditions d'interpolation – distribution non régulière des points de contrôle

- Si les réseaux de contrôle des deux courbes de bords sont parallèles deux à deux par morceaux, seul le cas particulier de deux bords identiques produit une surface à quadrangles plans qui correspond au cas d'une surface de translation (Fig. 6-11) et pour laquelle l'égalité des paramètres  $\lambda=1$  et  $\mu=1$  est conservée à chaque calcul. Dans le cas de courbes de bords différentes, le calcul des paramètres pour garantir les critères d'interpolation conduit à des valeurs différentes pour chaque bande. Le maillage résultant n'est alors plus composé de quadrangles plans (Fig. 6-12).

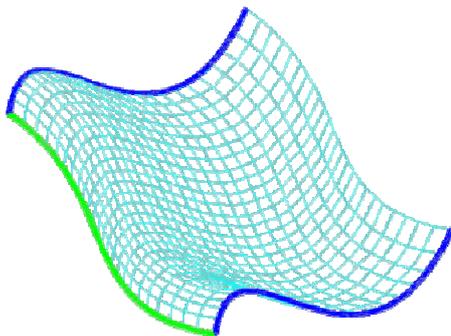


Fig. 6-11: Interpolation de deux bords identiques

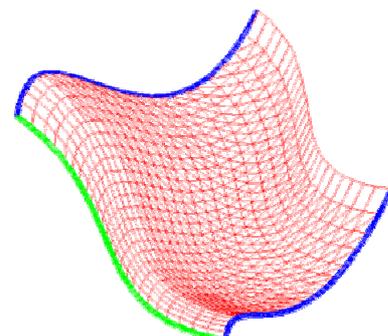


Fig. 6-12: Interpolation de deux bords différents

### La courbe section parcourt deux bords dont les réseaux de contrôle s'intersectent

Dans ce cas, nous générons des bandes de surfaces développables de type cône. De façon analogue au cas cylindrique, deux situations sont à considérer :

- Si les bords sont rectilignes, on peut faire les mêmes constats que dans le cas des rives parallèles discuté auparavant. Si les points de contrôle des deux chemins sont régulièrement répartis, le résultat du calcul des bandes développables est identique à celui de la surface développable interpolant les deux bords (Fig. 6-13 et Fig. 6-14). Par contre, s'ils ont une répartition non homogène, les points de contrôle supplémentaires créent une autre organisation des quadrangles (Fig. 6-15), leur positionnement étant un paramètre de conception additionnel. Comme le constate G. Aumann dans une étude sur l'interpolation des génératrices, les conditions d'interpolation ne sont généralement pas respectées dans le cas des surfaces développables du type cône.

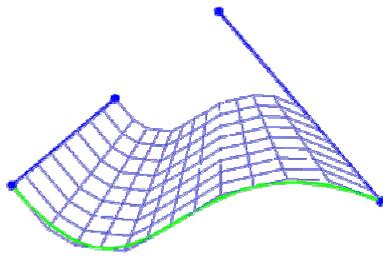


Fig. 6-13: Surface développable avec conditions d'interpolation type cône

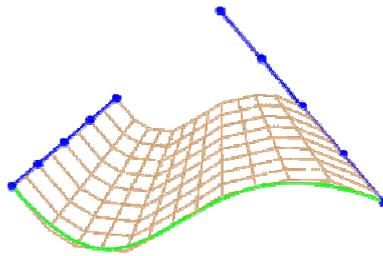


Fig. 6-14: Bandes développables avec conditions d'interpolation – distribution régulière des points de contrôle

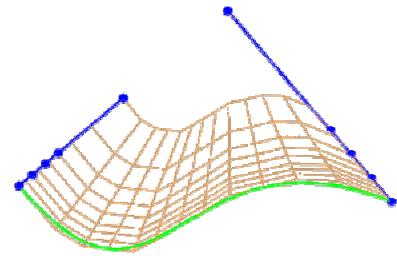


Fig. 6-15: Bandes développables avec conditions d'interpolation – distribution non régulière des points de contrôle

- Si les réseaux de contrôle des deux courbes de bords s'intersectent deux à deux par morceaux, on obtient un cas élémentaire qui considère alors deux courbes de bords symétriques. Malgré des valeurs différentes du paramètre  $\lambda$  seul (puisque nous sommes dans le cas cône avec  $\mu=1$ ) à chaque calcul de bande afin de garantir les critères d'interpolation, les maillages produits sont constitués de quadrangles plans (Fig. 6-16). Cette conservation de la planéité des quadrangles, malgré la variation d'un paramètre mériterait d'être démontrée mathématiquement. A l'heure actuelle, seul le calcul numérique le confirme.

D'autres cas peuvent considérer des bords différents tout en conservant la condition d'intersection par « bande » des réseaux de contrôle. En général, le problème de l'interpolation des conditions aux limites pour des surfaces développables du type cône rend toutefois très instable cette disposition des bords pour l'obtention d'un maillage à quadrangles plans. Lorsqu'un point de contrôle de la deuxième courbe de bord n'est pas interpolé, les conditions d'intersection sur les éléments des réseaux de contrôle ne sont généralement plus garanties et le calcul diverge (Fig. 6-17). Or, en l'absence d'intersection, nous sommes amenés à considérer des génératrices biaisées, pour lesquelles la planéité des quadrangles n'est généralement plus assurée en raison de la variation des paramètres pour le calcul de chaque bande (Fig. 6-17). Selon la géométrie initiale, nous avons cependant pu parfois constater une conservation de la planéité des quadrangles, bien que les conditions d'interpolation ne soient pas respectées à l'extrémité d'une des courbes de bords et que la surface soit composée de bandes à génératrices convergentes et biaisées.

Malgré cette incertitude d'ordre théorique, qui nous oblige à vérifier la planéité des quadrangles obtenus, la richesse formelle résultante demeure intéressante (Fig. 6-16).

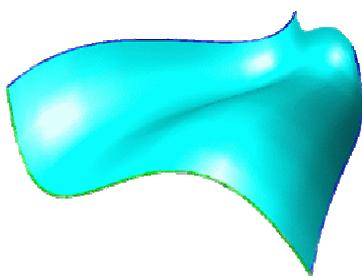


Fig. 6-16: pSurface à quadrangles plans – interpolation de trois bords avec conditions de symétrie

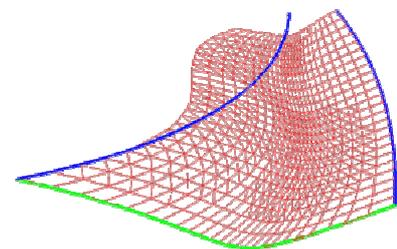
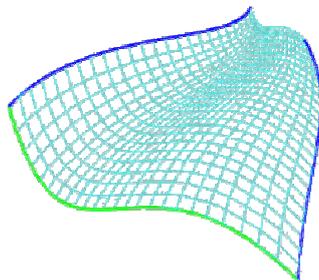


Fig. 6-17: Problèmes d'interpolation dans le cas conique

### La courbe section parcourt deux bords libres

Cette configuration génère une surface dont le réseau de contrôle peut être composé de bandes développables pour lesquelles les génératrices sont biaisées, ou bien allier les trois types (parallèles, convergentes vers un point et biaisées). L'instabilité de l'interpolation devient alors prédominante (Fig. 6-18) et, de plus, les valeurs des paramètres qui varient à chaque pas de calcul ne garantissent pas l'obtention d'un maillage à quadrangles plans dans un cas général.

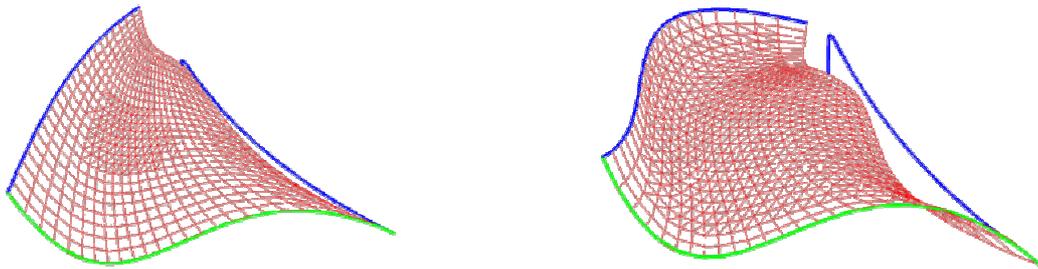


Fig. 6-18: Conditions de bords libres – Problèmes d'interpolation et quadrangles gauches

#### 6.1.4 Commentaires

L'outil développé repose sur deux paramètres et une courbe chemin arbitraire pour générer, à partir d'une courbe section, une pSurface non rationnelle dont la représentation discrète est un maillage de quadrangles plans. Si les valeurs de  $\lambda$  et  $\mu$  varient pour chacune des  $n$  bandes développables à déterminer, les propriétés de planéité des sous-quadrangles issus de la subdivision de la surface sont généralement perdues. En effet, l'application bidirectionnelle de la subdivision a pour conséquence que l'emploi de paramètres de valeurs différentes dans la direction  $v$  correspond à des transformations affines différentes.

Par exemple, considérons deux jeux de paramètres pour le calcul des deux premières bandes développables.

Pour le quadrangle  $Q_0^{0,0}$  correspondant à  $S_{0,0}, S_{0,1}, S_{1,1}, S_{1,0}$ , on a

$$S_{1,1} = S_{0,0} + \lambda_1(S_{1,0} - S_{0,0}) + \mu_1(S_{0,1} - S_{0,0}) \quad (6.9)$$

et, pour le quadrangle  $Q_0^{0,1}$  associé à  $S_{0,1}, S_{0,2}, S_{1,2}, S_{1,1}$ ,

$$S_{1,2} = S_{0,1} + \lambda_2(S_{1,1} - S_{0,1}) + \mu_2(S_{0,2} - S_{0,1}) \quad (6.10)$$

$Q_0^{0,0}$  n'est pas issu de la même transformation affine que  $Q_0^{0,1}$  si  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  ou  $\mu_1 \neq \mu_2$ . Bien que le réseau de contrôle constitue un maillage de quadrangles plans, la propriété de planéité n'est pas transmise aux quadrangles par la subdivision de De Casteljaou. D'après nos résultats, seul le cas de type conique avec des bords symétriques produit une surface à quadrangles plans malgré la variance du paramètre  $\lambda$ . Ce point doit faire l'objet d'une étude complémentaire sur la correspondance entre les différentes transformations affines mises en jeu.

Malgré cela, la liberté formelle offerte est vaste et cet outil présente l'intérêt de calculer une surface résultante qui est aussi une pSurface.

Toutefois, sous condition de ne pas faire appel à une subdivision de la surface, nous pouvons utiliser un jeu de paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  différent à chaque calcul de bande et générer un maillage de quadrangles plans. Plutôt qu'une surface à grand nombre de points de contrôle, il est préférable d'appliquer une étape de subdivision aux courbes chemin et section. On calcule ensuite un maillage à partir de ces courbes discrétisées en tableaux de points. Il en résulte une surface qui n'est plus pascalienne, mais dont le réseau très déstructuré peut présenter un intérêt architectural (Fig. 6-19).



Fig. 6-19: Maillage de quadrangles plans destructurés

### 6.1.5 Conclusion

En combinaison avec les deux méthodes décrites au §5, nous disposons au final de trois procédés de génération de surfaces dont la représentation discrète est composée de quadrangles plans :

- l'algorithme de détermination de surfaces produits ;
- l'algorithme de surface de balayage ;
- l'approche basée sur celle de De Casteljaou, qui fournit une méthode géométrique de génération de pSurfaces à quadrangles plans. Nous soulignons l'importance de ce résultat qui généralise la méthode d'obtention des surfaces de translation. De plus, certaines conditions d'interpolation peuvent être satisfaites. Nous noterons toutefois que cette méthode est restreinte aux pFormes non rationnelles ; les surfaces de révolution ou les tubages dont les sections sont des coniques ne pouvant être modélisés par ce biais. Enfin, l'emploi de cet algorithme sur des pCourbes non rationnelles subdivisées génère un maillage de quadrangles plans qui n'est pas une pSurface, mais qui est porteur d'autres possibilités formelles.

Ainsi, chacune des méthodes proposées a ses propres atouts, ce qui conduit à les considérer comme un panel élargi d'outils d'aide à la conception de surfaces gauches.

## 6.2 Volumes de Coons

Les travaux proposés dans cette partie de chapitre sont influencés par l'interprétation géométrique des surfaces de Coons, proposée dans [MAR 04]. Ces surfaces, connues en CAO pour interpoler leurs quatre courbes de bords, peuvent donner lieu à des applications pratiques dans le domaine du bâtiment. En effet, cette propriété se retrouve à l'échelle du panneau de verre comme à celle de l'implantation d'une couverture dans un espace urbain.

Nous souhaitons ici souligner la richesse des possibilités formelles offertes par combinaison linéaire entre pFormes. Nous proposons ainsi une combinaison particulière entre des pVolumes qui permet d'obtenir un pVolume interpolant des pSurfaces de bords. En plus de donner une extension aux surfaces de Coons, ces volumes peuvent apporter des solutions pratiques pour des applications architecturales. Ils offrent, par exemple, des moyens complémentaires pour la recherche de surfaces décalées matérialisant les épaisseurs d'une enveloppe.

Nous rappellerons tout d'abord le principe de génération des surfaces de Coons, que nous appliquerons au cas particulier de ce que l'on nomme les volumes de Coons.

### 6.2.1 Surfaces de Coons

#### 6.2.1.1 Historique

Ce concept majeur pour la CAO fut introduit par S. Coons qui, comme P. Bézier ou P. De Casteljaou, travaillait pour l'industrie automobile en tant que consultant pour Ford. La méthode de génération de

surfaces qu'il développa diffère de celles de ses confrères, dans la mesure où elle interpole des réseaux de courbes afin de créer une surface, au lieu d'être décrite par des réseaux de contrôle.

Son approche s'inscrit et se comprend par une description du processus de conception d'une automobile dans les années 60. La première étape de dessin résidait dans la fabrication d'un modèle d'argile ou de bois. Le processus de CAO commençait avec la transmission de cette forme vers un modèle virtuel. Sa numérisation s'effectuait alors par un capteur qui était déplacé le long de lignes caractéristiques et qui enregistrerait les coordonnées des points. Par suite, des courbes étaient ajustées en passant par ces points, et il en résultait un réseau de courbes, ensuite interpolées pour générer une description complète de la surface. Cette dernière étape a pu alors être traitée à l'aide des surfaces de Coons.

### 6.2.1.2 Définition

Une surface de Coons a la propriété d'interpoler quatre courbes quelconques, concourantes deux à deux et formant une frontière continue. Elle est donnée par la combinaison suivante de trois surfaces

$$S = S_0 + S_1 - S_2 \quad (6.11)$$

où l'on remarque que la somme des coefficients de la combinaison linéaire est égale à 1.

### 6.2.1.3 Application

Nous nous limitons à étudier le cas des surfaces de Coons à mélange bilinéaire, où  $S_0$  et  $S_1$  sont des surfaces réglées et  $S_2$  une surface bilinéaire construite sur les 4 points d'intersection des courbes frontières. Pour des informations sur les surfaces de Coons étendues à d'autres mélanges, on peut se référer à [FAR 90].

Considérons alors  $pC_0$ ,  $pC_1$ ,  $pC_2$  et  $pC_3$ , concourantes deux à deux aux points  $p_{0,0}$ ,  $p_{1,0}$ ,  $p_{0,1}$  et  $p_{1,1}$  (Fig. 6-20).

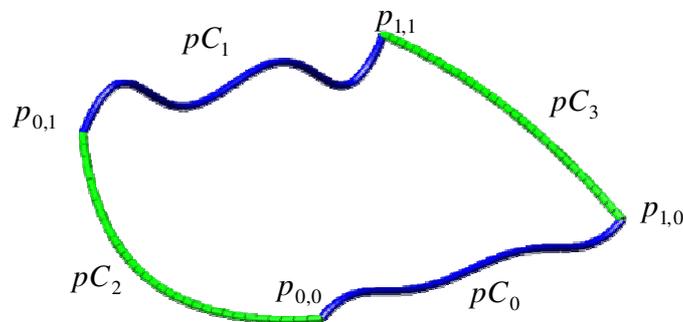


Fig. 6-20: Quatre pCourbes frontières concourantes

En égalisant le nombre de points de contrôle de ces quatre pCourbes par élévation du degré, on peut réécrire la combinaison de Coons sous la forme

$$S = (pC_0, pC_1) + (pC_2, pC_3) - ((P_{0,0}, P_{1,0}), (P_{0,1}, P_{1,1})) \quad (6.12)$$

Le nombre de points de contrôle des trois surfaces étant identique, nous pouvons effectuer une récursion sur les points pour obtenir une pSurface de Coons (Fig. 6-21 à Fig. 6-24).

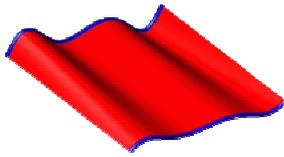


Fig. 6-21: pSurface réglée  
( $pC_0, pC_1$ )

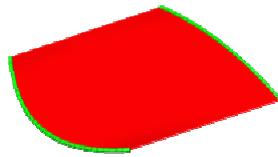


Fig. 6-22: pSurface réglée  
( $pC_2, pC_3$ )

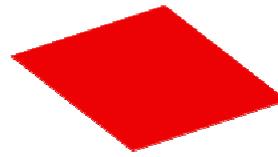


Fig. 6-23: pSurface bilinéaire  
( $(p_{0,0}, p_{1,0}), (p_{0,1}, p_{1,1})$ )

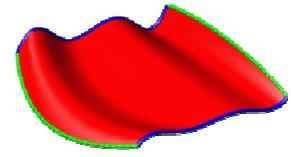


Fig. 6-24: Surface de Coons résultante

6.2.2 Application aux pVolumes

Nous proposons dès lors une combinaison linéaire entre quatre pVolumes qui vérifie que la somme des coefficients est égale à l'unité, c'est à dire

$$V = 0.5 V_0 + 0.5 V_1 + 0.5 V_2 - 0.5 V_3 \tag{6.13}$$

Le pVolume obtenu a alors la propriété d'interpoler quatre surfaces concourantes (Fig. 6-25).

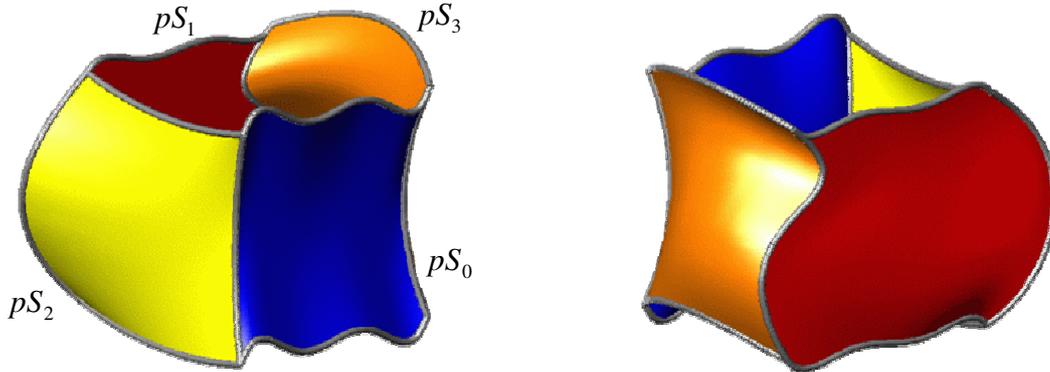


Fig. 6-25: Quatre pSurfaces frontières concourantes

Toutefois, contrairement au cas de surfaces de Coons pour lesquelles les courbes interpolées sont quelconques, nous devons respecter une contrainte : les bords d'une surface qui ne sont pas communs avec d'autres surfaces doivent être identiques deux à deux. Par contre, les courbes communes à deux surfaces sont quelconques (Fig. 6-26).

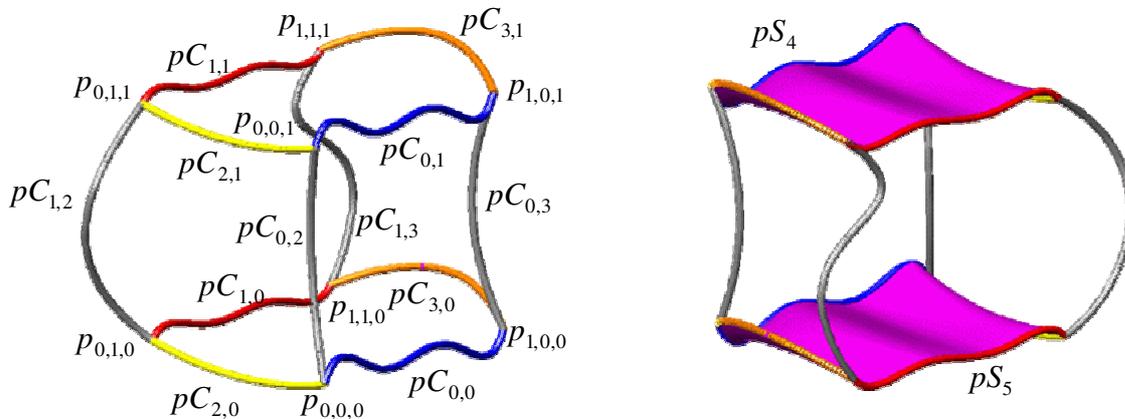


Fig. 6-26: Contraintes à respecter pour la construction du volume

En égalisant le nombre de points de contrôle des douze pCourbes par élévation du degré, on crée alors les quatre surfaces de Coons  $pS_0$ ,  $pS_1$ ,  $pS_2$  et  $pS_3$  (Fig. 6-25), concourantes deux à deux et construites chacune sur la donnée de quatre courbes (Fig. 6-26)

$$pS_0 = (pC_{0,0}, pC_{0,1}, pC_{0,2}, pC_{0,3}) \quad (6.14)$$

$$pS_1 = (pC_{1,0}, pC_{1,1}, pC_{1,2}, pC_{1,3}) \quad (6.15)$$

$$pS_2 = (pC_{2,0}, pC_{2,1}, pC_{2,2}, pC_{2,3}) \quad (6.16)$$

$$pS_3 = (pC_{3,0}, pC_{3,1}, pC_{3,2}, pC_{3,3}) \quad (6.17)$$

ainsi que les deux surfaces de Coons  $pS_4$  et  $pS_5$  construites sur les courbes

$$pS_4 = (pC_{0,0}, pC_{1,0}, pC_{2,0}, pC_{3,0}) \quad (6.18)$$

$$pS_5 = (pC_{0,1}, pC_{1,1}, pC_{2,1}, pC_{3,1}) \quad (6.19)$$

Nous réécrivons alors la combinaison ( 6.13 ) sous la forme

$$V = 0.5(pS_0, pS_1) + 0.5(pS_2, pS_3) + 0.5(pS_4, pS_5) - 0.5(((p_{0,0,0}, p_{1,0,0}), (p_{0,1,0}, p_{1,1,0})), ((p_{0,0,1}, p_{1,0,1}), (p_{0,1,1}, p_{1,1,1}))) \quad (6.20)$$

où les points définissant  $V_3$  sont montrés Fig. 6-26. Le nombre de points de contrôle des trois volumes étant identique, nous pouvons procéder à une récursion sur les points pour obtenir un « pVolume de Coons » (Fig. 6-27 à Fig. 6-31).

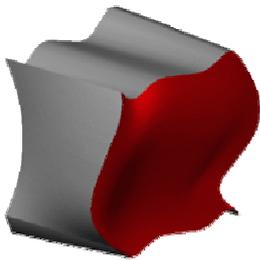


Fig. 6-27: pVolume  
( $pS_0, pS_1$ )

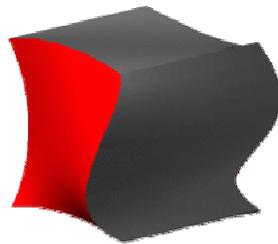


Fig. 6-28: pVolume réglé  
( $pS_2, pS_3$ )

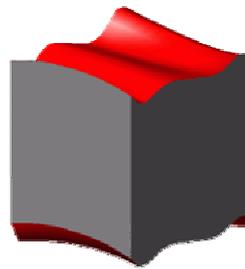


Fig. 6-29: pVolume  
( $pS_4, pS_5$ )

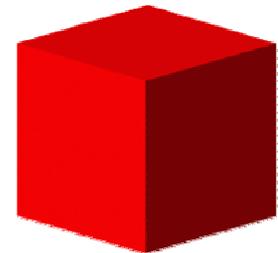


Fig. 6-30: Cube construit  
sur les 8 points

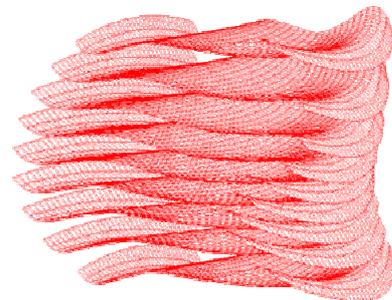
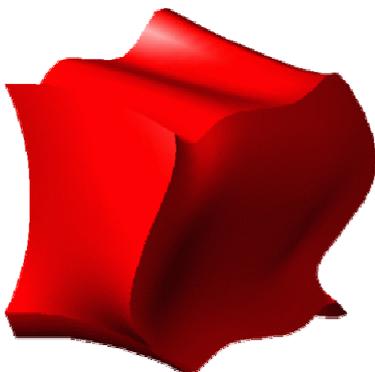


Fig. 6-31: « pVolume de Coons » résultant

## 7 CONCLUSION

L'approche géométrique par pFormes offre le bénéfice d'une meilleure compréhension des formes générées. Cet avantage nous mène vers une exploitation de la géométrie, par laquelle des solutions techniques et mécaniques émergent. Des problèmes de conception, très présents dans l'architecture non-standard, ont ainsi pu être abordés de façon constructive en répondant par des propositions d'outils.

Dans un premier temps, les outils développés s'appliquent à une forme donnée pour en identifier les particularités géométriques. Certaines fonctionnalités comme l'analyse des courbures existent déjà dans plusieurs logiciels ; néanmoins l'intérêt réside dans le fait qu'elles sont à présent implémentées dans un logiciel utilisé par la plupart des collaborateurs d'un bureau d'études, tout comme ses clients et sous-traitants.

Par ailleurs, la possibilité de générer des maillages particuliers sur des surfaces complexes met à disposition des outils originaux dans la pratique de l'ingénieur. L'exemple de la réalisation d'une passerelle textile nous a toutefois sensibilisé sur les risques d'une mauvaise maîtrise des couplages Forme-Force. En revanche, les études mécaniques comparant différentes orientations structurelles ont pu confirmer l'efficacité de ces outils pour des couplages Forme-Force-Structure mieux appréhendés.

Dans un deuxième temps, un point de vue différent a été développé. Nous avons ainsi travaillé sur des outils qui aident à la détermination d'enveloppes répondant à des critères technologiques particuliers, comme la développabilité ou la génération par quadrangles plans. Cette approche exige toutefois une proche collaboration entre architectes et ingénieurs, dès les premières phases de la conception.

En suivant ce cheminement, des recherches exploratoires nous ont conduit à élaborer une méthode originale de détermination de surfaces à quadrangles plans, modifiables en fonction de plusieurs paramètres et généralisant l'approche classique par surfaces de translation. Enfin, une prospection vers des combinaisons barycentriques appliquées à des pVolumes nous a permis d'obtenir des pVolumes pouvant interpoler des pSurfaces sous certaines conditions.

L'exploration géométrique par pFormes peut toutefois être poursuivie vers des concepts plus élaborés. Nous discuterons ainsi en quatrième partie d'autres outils développés à l'aide de pFormes immergés dans d'autres.

## **PARTIE 4**

### **Outils pour la conception avec les pFormes immergées (ipFormes)**



## 1 INTRODUCTION

Le recours à un traitement géométrique particulier de l'enveloppe est une caractéristique commune à de nombreux projets récents (Fig. 1-1). La partie précédente soulignait déjà la nécessité de disposer d'un panel d'outils paramétrables pour estimer les performances des solutions proposées lors du processus de conception.



*Fig. 1-1: Louvre Abou Dabi – Ateliers J. Nouvel – Abou Dabi – Emirats Arabes Unis – 2007 / ...*

Cette quatrième partie poursuit le développement d'outils orientés vers l'opérationnel, en se basant cette fois sur les potentialités des formes immergées. Des propositions complémentaires sont ainsi apportées pour la résolution de problèmes de conception. Nous nous appuyerons là encore sur l'étude d'un cas concret pour en révéler l'efficacité.

Les aspects suivants vont ainsi être détaillés :

- la définition et la formalisation des ipFormes en précisant les moyens de déterminer leur degré et leurs points de contrôle ;
- la proposition d'outils utilisant les pCourbes et les pSurfaces immergées. Les premiers compléteront la gamme des lignes particulières déjà identifiées. Nous exploiterons également l'intérêt de l'immersion pour approcher des courbes géodésiques par des ipCourbes. Les seconds fourniront des solutions aux problèmes de calepinage d'une surface ;
- la description de l'outil de « free form deformation », permettant des déformations géométriques que nous appliquerons ensuite à la morphogenèse globale d'un cas d'application ;
- l'étude comparative de deux méthodes d'obtention du calepinage d'une enveloppe complexe : l'une utilisant le compas, familier à l'ingénieur, l'autre exploitant les possibilités de l'approche par pFormes ;
- des développements exploratoires pour générer des maillages selon une logique proliférante de type fractal et, enfin, étendre la morphologie des grilles en tenségrité vers le non standard.

L'adaptation de méthodes telles que la « free form deformation », initialement développées par l'industrie automobile et l'infographie, aux problématiques de la conception en architecture non-standard offre de fructueuses perspectives pour l'ingénierie du bâtiment. L'éventail des alternatives disponibles est ainsi enrichi, augmentant les possibilités de dialogue entre les différents acteurs du projet.

## 2 PFORMES IMMERGEES OU IPFORMES

### 2.1 ipCourbes

L'approche géométrique de génération des pFormes dans l'espace euclidien peut être étendue à la création de formes immergées dans une autre servant d'espace de référence. Nous avons vu en partie 3 que les points d'une pForme, déclarés dans le repère paramétrique, peuvent être exprimés dans le repère global par l'intermédiaire de l'algorithme de De Casteljaou.

Si nous appliquons les opérateurs (MI) et (MIR) à des points de contrôle définis dans le domaine paramétrique d'une pForme (Fig. 2-1), nous obtenons des points de subdivisions en coordonnées paramétriques. Les points issus de cette subdivision peuvent alors être exprimés en coordonnées globales pour ainsi générer une forme immergée dans la pForme de référence. La figure (Fig. 2-2) illustre l'exemple d'une parabole immergée dans une pS22.

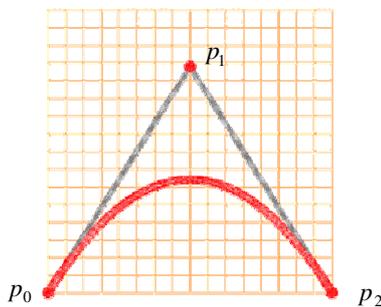


Fig. 2-1: Parabole définie dans le domaine paramétrique d'une pSurface pS22

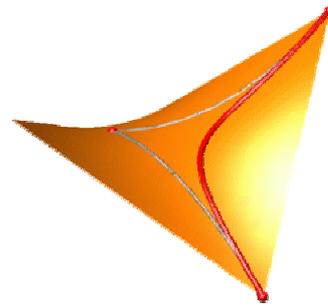


Fig. 2-2: Représentation d'une parabole immergée dans la pS22

Cette approche de l'immersion en révèle le caractère simplificateur. On voit que ce qui est défini comme une parabole dans la pS22 (Fig. 2-1) et en réalité une courbe gauche plus complexe (Fig. 2-2). Une telle construction permet de comprendre la génération de courbes immergées point par point. Néanmoins, leur nature reste à préciser car il ne s'agit pas de pFormes.

Définir une forme immergée par ses points de contrôle peut aussi se révéler d'un grand intérêt d'un point de vue pratique, comme nous le verrons plus tard. Mais deux questions se posent alors : quels sont les degrés et les points de contrôle de ces formes ?

Sur le premier point, nous commencerons par exposer les résultats que l'on trouve dans la littérature dans le cas de courbes immergées dans une surface, puis nous les généraliserons à toute pForme immergée.

En réponse à la seconde question, nous présenterons une méthode d'interpolation classique, employée notamment par A. Marty pour tracer des courbes immergées dans une surface. Nous généraliserons cette dernière jusqu'au cas des hypervolumes. Enfin, la détermination du degré nous conduira à proposer une seconde méthode de calcul des points de contrôle.

#### 2.1.1 Degré d'une courbe immergée

##### 2.1.1.1 Cas d'une courbe dans une surface

Soit une surface définie paramétriquement par une fonction vectorielle  $\vec{F}$  de ses paramètres  $u$  et  $v$ , alors toute relation scalaire du type  $\varphi(u,v)=0$  définit sur cette surface un ensemble de points qui correspond à une courbe tracée sur celle-ci. Cette courbe peut aussi être considérée comme l'image par l'application de Bézier d'une courbe (dite transposante) définie implicitement dans le domaine paramétrique.

## 2.1.1.1.1 Approche dissymétrique

Il est possible de trouver dans [DEM 98] une démonstration du degré d'une courbe dans une surface. Les auteurs placent leur analyse dans le cadre des hypothèses du théorème des fonctions implicites, ce qui leur permet d'écrire la relation scalaire  $\varphi(u, v) = 0$  sous la forme explicite  $v = \varphi(u)$ . La courbe apparaît alors comme définie par la fonction vectorielle composée  $\vec{F}(u, \varphi(u))$ . De plus, la fonction  $\varphi$  est supposée polynomiale, ce qui revient à restreindre l'étude à des courbes immergées polynomiales selon

$$u \mapsto \overrightarrow{OM}(u, \varphi(u))$$

Envisageons à présent les différentes situations possibles.

**Cas  $u=v$** 

Sur une surface de Bézier quelconque, considérons la courbe définie par  $u=v$ . On cherche l'image par l'application de Bézier, relative à cette surface, du segment du domaine paramétrique porté par la diagonale, déjà étudiée avec l'opérateur géométrique (Diag) et qui peut être définie explicitement d'après (2.20) de la partie 2 par

$$p^{m,n}(u, u) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n p_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(u) \text{ avec } u \in [0,1] \quad (2.1)$$

On peut déterminer le degré et les points de contrôle de cette courbe en utilisant différentes approches (vectorielle, écriture matricielle). Nous rapportons succinctement l'écriture vectorielle, mais seule l'écriture matricielle dans la base canonique est détaillée car elle permet une généralisation par la suite.

Écriture vectorielle

En se référant aux formules de définition, on peut écrire [DER 88]

$$B_i^m(u) B_j^n(u) = \frac{\binom{m}{i} \binom{n}{j}}{\binom{m+n}{i+j}} B_{i+j}^{m+n}(u) \quad (2.2)$$

Le regroupement des termes permet de conclure qu'une courbe immergée de degré 1 dans une surface  $p^{m,n}$  est de degré  $(m+n)$  dans l'espace global.

Écriture matricielle

Citons l'exemple d'une surface  $p^{m,n}$  avec  $m=3$  et  $n=2$ . En utilisant la définition canonique (2.46) de la partie 2, il vient

$$[p^{3,2}(u, u)] = [U_3]^T \cdot [q_{3,2}] \cdot [U_2] \quad (2.3)$$

où, pour mémoire,  $[U_3]$  et  $[U_2]$  sont respectivement les matrices colonnes des puissances des  $u^i$  et  $[q_{3,2}]$  est la matrice des points de définition canoniques en coordonnées  $(x, y, z)$ , soit

$$[p^{3,2}(u, u)] = [1 \quad u \quad u^2 \quad u^3] \cdot \begin{bmatrix} q_{0,0} & q_{0,1} & q_{0,2} \\ q_{1,0} & q_{1,1} & q_{1,2} \\ q_{2,0} & q_{2,1} & q_{2,2} \\ q_{3,0} & q_{3,1} & q_{3,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

On peut ainsi faire apparaître les matrices  $[L_i]$

$$[p^{3,2}(u,u)] = \left[ [L_0] + [L_1]u + [L_2]u^2 + [L_3]u^3 \right] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$= [L_0] \cdot [U_2] + [L_1]u \cdot [U_2] + [L_2]u^2 \cdot [U_2] + [L_3]u^3 \cdot [U_2]$$

Multipliées par les monômes de  $u$ , les colonnes de  $U$  en engendrent d'autres d'indices plus élevés (à la condition d'introduire des zéros supplémentaires dans les lignes multiplicatrices). On peut ainsi transformer (2.5) sous la forme

$$[p^{3,2}(u,u)] = \left[ [L_0 \ 0 \ 0 \ 0] + [0 \ L_1 \ 0 \ 0] + [0 \ 0 \ L_2 \ 0] + [0 \ 0 \ 0 \ L_3] \right] \cdot [U_5] \quad (2.6)$$

Cette forme peut être définie à partir du produit matriciel d'une matrice ligne d'ordre 6 par la matrice  $[U_5]$  des puissances de  $u$  de degrés inférieurs ou égaux à 5, obtenue en effectuant la somme des quatre matrices lignes contenues dans le premier terme. On arrive ainsi à

$$[p^{3,2}(u,u)] = \left[ q_{0,0} \quad (q_{0,1} + q_{1,0}) \quad (q_{0,2} + q_{1,1} + q_{2,0}) \quad (q_{1,2} + q_{2,1} + q_{3,0}) \quad (q_{2,2} + q_{3,1}) \quad q_{3,2} \right] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \\ u^5 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

On aboutit alors à la définition de type canonique d'une courbe de Bézier de degré 5, dont les points canoniques sont déterminés par les vecteurs de la matrice ligne.

La généralisation au cas d'une surface  $p^{m,n}$  suit le même raisonnement et l'on démontre qu'une courbe immergée de degré 1 dans le repère paramétrique est de degré global  $(m+n)$ .

### Cas général

Supposons que  $\varphi$  soit un polynôme de degré  $p$ , ce qui entraîne que les polynômes composés  $B_j^n(\varphi(u))$  sont de degré  $np$  et donc des combinaisons linéaires des polynômes  $B_k^{np}(u)$ . On en conclut que l'ensemble des points de la courbe immergée s'identifie à une courbe de degré  $(m+np)$ . La dissymétrie des variables se répercute toutefois sur le degré de la courbe immergée. En effet, en prenant pour hypothèse de départ  $v = \varphi(u)$ , telle que  $\varphi$  soit une fonction polynomiale, on restreint  $u$  à une forme affine de degré 1.

#### 2.1.1.1.2 Approche symétrique

L'approche explicitée précédemment génère toutefois une dissymétrie entre les variables qui en réduit le caractère général. Nous souhaitons y pallier en remplaçant  $u$  et  $v$  par des polynômes respectivement de degré  $p_u$  et  $p_v$  du même paramètre  $t$ ; ce qui correspond à un paramétrage de la courbe. Nous reprenons ainsi l'écriture matricielle en l'appliquant au cas général en posant

$$u = \alpha(t) = \sum_{i=1}^{p_u+1} a_i t^{i-1} \quad \text{et} \quad v = \beta(t) = \sum_{i=1}^{p_v+1} b_i t^{i-1} \quad (2.8)$$

Les fonctions polynomiales  $u$  et  $v$  décrivant la courbe dans le domaine paramétrique sont obtenues par l'expression classique d'une courbe de Bézier. Les points de contrôle, dont le nombre correspond au degré local  $p$  de la courbe, sont exprimés en coordonnées paramétriques  $(u,v)$  par

$$p^p(t) = \sum_{i=0}^p p_i B_i^p(t) \text{ avec } t \in [0,1] \quad (2.9)$$

soit en écriture matricielle

$$[p^p(t)] = [B_p]^T \cdot [p_p] \quad (2.10)$$

où apparaissent  $u$  et  $v$  sous des formes polynomiales en  $t$

$$[u \ v] = [B_p]^T \cdot \begin{bmatrix} u_{p_0} & v_{p_0} \\ \vdots & \vdots \\ u_{p_p} & v_{p_p} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$u$  et  $v$  sont par définition de degré inférieur ou égal à  $p$ . En effet, selon le jeu des points de contrôle, ils ne sont pas nécessairement de même degré car le terme en  $t^p$  peut s'annuler. C'est pour cette raison que nous distinguons leur degré  $p_u$  pour  $u$  et  $p_v$  pour  $v$ .

Exemple : on considère une surface *pS22* dans laquelle on définit une parabole par les points  $p_0$ ,  $p_1$  et  $p_2$  aux coordonnées locales suivantes (Fig. 2-3)

$$[p_p] = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

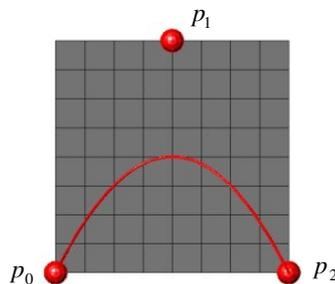


Fig. 2-3: Coordonnées des points de contrôle dans le domaine paramétrique

$$[u \ v] = [B_2]^T \cdot \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2t+t^2 & 2t-2t^2 & t^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

soit

$$[u \ v] = \begin{bmatrix} t & 2t-2t^2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

On voit que  $p_u = 1$  et  $p_v = 2$ . Par suite, d'après (2.46) de la partie 2, on peut écrire

$$[p^{m,n}(u,v)] = \begin{bmatrix} 1 & u & \dots & u^m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{0,0} & \dots & q_{0,n} \\ q_{1,0} & \dots & q_{1,n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ q_{m,0} & \dots & q_{m,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ v \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

On sait, de plus, que le développement d'une puissance entière d'un polynôme peut s'écrire sous forme d'une somme de produits de puissances (affectés de coefficients grâce à la formule du multinôme de Newton)

$$u^m = \left( \sum_{i=1}^{p_u+1} a_i t^{i-1} \right)^m = \sum_{|\vec{k}|=m} \binom{m}{\vec{k}} \prod_{i=1}^{p_u+1} a_i^{k_i} t^{(i-1)k_i} \quad (2.16)$$

où la somme porte sur toutes les combinaisons d'indices entiers naturels notée  $|\vec{k}| = m$  telle que

$$\sum_{i=1}^{p_u+1} k_i = m \quad (2.17)$$

avec certains d'entre eux pouvant être nuls. De plus, les nombres de  $\binom{m}{\vec{k}}$  sont appelés coefficients multinomiaux et s'écrivent

$$\binom{m}{\vec{k}} = \binom{m}{k_1, k_2, k_3, \dots, k_{p+1}} = \frac{m!}{k_1! k_2! k_3! \dots k_{p+1}!} = \frac{m!}{\prod_{i=1}^{p_u+1} k_i!} \quad (2.18)$$

En utilisant ( 2.16 ), l'écriture matricielle de  $[U_m]$  et  $[V_n]$  permet d'isoler les matrices colonnes des puissances de  $t$ , c'est à dire

$$[U_m] = [A]_{m,mp_u} \cdot [T_{mp_u}] \text{ et } [V_n] = [A']_{n,np_v} \cdot [T_{np_v}] \quad (2.19)$$

où  $[A]_{m,mp_u}$  et  $[A']_{n,np_v}$  sont des matrices dont les termes dépendent de  $m$  et  $p_u$  pour  $[A]_{m,mp_u}$ ,  $n$  et  $p_v$  pour  $[A']_{n,np_v}$  et des permutations des coefficients multinomiaux et polynomiaux. Leur structure n'est pas régulière et ne permet pas une écriture des termes sous forme analytique. Nous proposons l'approche algorithmique suivante pour les déterminer :

- application récursive permettant de déterminer toutes les permutations des  $k_i$  respectant le critère de somme ( 2.17 ) ;
- calcul des termes  $\binom{m}{\vec{k}} \prod_{i=1}^{p_u+1} a_i^{k_i}$  et  $\binom{n}{\vec{k}} \prod_{i=1}^{p_v+1} b_i^{k_i}$  ;
- calcul de la puissance de  $t$  correspondante ;
- placement dans la matrice du terme calculé à la ligne  $m$  et la colonne du degré correspondant.

En reprenant ( 2.15 ), nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} [P^{m,n}(u,v)] &= [U_m]^T \cdot \begin{bmatrix} q_{0,0} & \cdots & q_{0,n} \\ q_{1,0} & \cdots & q_{1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ q_{m,0} & \cdots & q_{m,n} \end{bmatrix} \cdot [V_n] \\ &= [T_{mp_u}]^T \cdot [A]_{m,mp_u}^T \cdot [q_{m,n}] \cdot [A']_{n,np_v} \cdot [T_{np_v}] \\ &= [T_{mp_u}]^T \cdot [q'_{mp_u,np_v}] \cdot [T_{np_v}] \end{aligned} \quad (2.20)$$

Nous poursuivons alors en reprenant la démarche présentée dans l'approche matricielle ( 2.5 ), mais appliquée à la variable  $t$

$$[p^{m,n}(u,v)] = [L'_0] + [L'_1]t + [L'_2]t^2 + \dots + [L'_{mp_u}]t^{mp_u} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^{np_v} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

qui devient

$$[p^{m,n}(u,v)] = [L'_0] \cdot [T_{np_v}] + [L'_1]t \cdot [T_{np_v}] + [L'_2]t^2 \cdot [T_{np_v}] + \dots + [L'_{mp_u}]t^{mp_u} \cdot [T_{np_v}] \quad (2.22)$$

En multipliant par les puissances de  $t$ , il apparaît d'autres d'indices plus élevés, à la condition d'introduire des zéros supplémentaires dans les lignes multiplicatrices. On peut ainsi transformer (2.22) sous la forme

$$[p^{m,n}(u,v)] = [L'_0 \ 0 \ \dots \ 0] + [0 \ L'_1 \ 0 \ \dots \ 0] + [0 \ 0 \ L'_2 \ 0 \ \dots \ 0] + \dots + [0 \ \dots \ 0 \ L'_{mp_u}] \cdot [T_{mp_u+np_v}] \quad (2.23)$$

Cette forme peut se reconstituer selon le produit matriciel d'une matrice ligne d'ordre  $(mp_u + np_v) + 1$  par la matrice  $[T_{mp_u+np_v}]$  des puissances de  $t$  de degrés inférieurs ou égaux à  $(mp_u + np_v)$ , obtenue en effectuant la somme des  $mp_u$  matrices lignes contenues dans le crochet. On trouve ainsi

$$[p^{m,n}(u,v)] = [p^{mp_u+np_v}(t)] = \begin{bmatrix} q'_{0,0} & (q'_{0,1}+q'_{1,0}) & (q'_{0,2}+q'_{1,1}+q'_{2,0}) & \dots & \dots & q'_{mp_u,np_v} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^{mp_u+np_v} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

On aboutit à une définition de type canonique d'une courbe de Bézier de degré  $(mp_u + np_v)$  ; les points de cette définition canonique étant liés aux vecteurs de la matrice ligne.

En reprenant l'exemple précédent, on obtient que la parabole immergée dans la pS22 est une courbe de degré 3 dans l'espace global (Fig. 2-4).

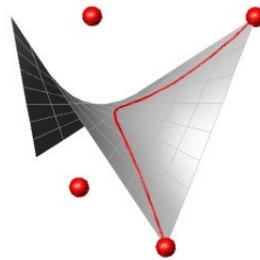


Fig. 2-4: *pC3 immergée dans une pS22 – Visualisation de ses points de contrôle en repère global*

### 2.1.1.1.3 Conclusion

L'approche symétrique des variables nous permet de généraliser l'écriture du degré d'une courbe dans une surface. La formule  $(mp_u + np_v)$  permet de retrouver le cas particulier de la diagonal où  $u = v$ . En effet, le segment diagonal immergé est localement de degré 1 en  $u$  et en  $v$  ; on retrouve donc le résultat de son degré global égal à  $(m + n)$ .

De même, la démonstration de [DEM 98] porte sur des degrés des fonctions  $u$  et  $v$  différents ( $u$  est de degré 1 et  $v$  de degré  $p$ ). On retombe là aussi sur le résultat, non intuitif, où le degré de la forme immergée est  $(m + np)$ .

Plusieurs remarques sont également à formuler :

- nous retrouvons succinctement dans [BEZ 86] (p.154) que le degré d'une courbe transposée d'un carré cartésien de côté unité à une surface est  $(m+n)p$ . Cette affirmation n'est suivie d'aucune démonstration et ne permet pas à elle seule de déterminer les points de contrôle puisqu'elle n'en spécifie que le nombre ;
- A. Marty écrit également que le degré de la courbe immergée est  $(m+n)p$ , mais l'obtient de façon intuitive sans le démontrer pour le cas général. Elle conduit alors à des courbes de degré « surabondant » dans certains cas particuliers (voir l'exemple) ;
- le passage par la base canonique fait perdre l'interprétation géométrique utilisée dans les pFormes. Pour la poursuite de nos travaux, un développement intéressant consisterait à étudier de façon plus approfondie l'approche de [DER 88].

### 2.1.1.2 Cas d'une courbe dans une forme de dimension supérieure

Nous souhaitons généraliser l'immersion d'une courbe de degré  $p$  dans des formes de dimensions supérieures (que nous limitons à 3). Dans [BEZ 86], il est avancé (p.147) que le degré d'une courbe dans un volume est  $(mp_u + np_v + rp_g)$ , sachant que  $p_u$ ,  $p_v$  et  $p_g$  sont les degrés des fonctions polynomiales définissant la courbe selon les trois directions.

Les écritures vectorielle ou matricielle, appliquées dans chacune des directions, permettent de montrer que le degré  $P$  d'une courbe dans une forme de dimension supérieure est égal à la somme des degrés de la forme immergente, respectivement multipliés par les degrés des formes polynomiales de la courbe dans le domaine paramétrique  $p_u$ ,  $p_v$  et  $p_g$  (Tab. 2-1).

	<b>pSurface <math>m, n</math></b>	<b>pVolume <math>m, n, r</math></b>
<b>ipCourbe <math>P</math></b>	$(mp_u + np_v)$	$(mp_u + np_v + rp_g)$

Tab. 2-1 : Degré global d'une courbe immergée

### 2.1.1.3 Généralisation

Les résultats du tableau (Tab. 2-1) peuvent être généralisés par la relation

$$P = \sum_i m_i p_i \quad (2.25)$$

avec une sommation sur  $i \in [1,3]$  pour un volume et  $i \in [1,2]$  pour une surface selon :

- $P$  le degré global de la courbe immergée ;
- $m_i$  le degré de la fonction polynomiale définissant la forme immergente dans la direction  $i$  ;
- $p_i$  le degré de la fonction polynomiale définissant la courbe immergée dans la direction  $i$ .

### 2.1.2 Détermination des points de contrôle d'une courbe immergée

Le degré d'une forme immergée étant ainsi déterminé, on se propose à présent d'identifier ses points de contrôle dans l'espace global. Nous présentons deux méthodes de calcul à cet effet. L'une, utilisée dans [MAR 04] et [FAR 90], adopte l'interpolation d'une courbe par l'approche de Vandermonde et nous la généraliserons au cas de la surface et du volume ; l'autre utilise les propriétés d'écriture dans la base canonique.

2.1.2.1 Interpolation

Les formes pascaliennes, comme toute forme à pôle, n'interpolent pas les points de contrôle à l'exception des extrémités. Si on considère  $(n+1)$  points uniformément répartis sur une courbe de degré  $n$ , aux abscisses  $\frac{i}{n}$  avec  $i \in [0, n]$ , on peut exprimer ces  $(n+1)$  points en fonction des  $(n+1)$  points de contrôle cherchés en utilisant l'algorithme de De Casteljau

$$p^n\left(\frac{i}{n}\right) = \sum_{j=0}^n p_j B_j^n\left(\frac{i}{n}\right) \quad (2.26)$$

qui peut s'écrire comme un produit scalaire sous la forme matricielle

$$p^n\left(\frac{i}{n}\right) = \left[ B_0^n\left(\frac{i}{n}\right) \quad \dots \quad B_n^n\left(\frac{i}{n}\right) \right] \cdot \begin{bmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Ce raisonnement, mené pour l'ensemble des  $(n+1)$  points, mène au système linéaire suivant pour le calcul des coordonnées des points de contrôle

$$\begin{bmatrix} p^n(0) \\ p^n\left(\frac{i}{n}\right) \\ \vdots \\ p^n(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0^n(0) & \dots & B_n^n(0) \\ B_0^n\left(\frac{i}{n}\right) & \dots & B_n^n\left(\frac{i}{n}\right) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ B_0^n(1) & \dots & B_n^n(1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Les  $(n+1)$  points sont connus et le déterminant de la matrice des polynômes de Bernstein est non nul, puisqu'ils forment une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$  ; la matrice est donc inversible. Cette dernière peut néanmoins être composée d'autres polynômes. Dans le cas de courbes autres que les courbes de Bézier, on la nomme alors matrice de Vandermonde généralisée [FAR 90].

Par inversion du système linéaire (2.28),  $(n+1)$  points de contrôle sont obtenus

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0^n(0) & \dots & B_n^n(0) \\ B_0^n\left(\frac{i}{n}\right) & \dots & B_n^n\left(\frac{i}{n}\right) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ B_0^n(1) & \dots & B_n^n(1) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} p^n(0) \\ p^n\left(\frac{i}{n}\right) \\ \vdots \\ p^n(1) \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Cette méthode est toutefois sujette aux approximations numériques et peut poser un problème de mauvais conditionnement de la matrice des polynômes. Dans certains cas, l'interpolation conduit à un échec pour la détermination des points de contrôle.

2.1.2.2 Utilisation de la base canonique

Lors du calcul du degré d'une courbe immergée dans une surface  $p^{m,n}$ , nous avons utilisé l'écriture dans la base canonique pour aboutir à la définition générale (2.24). Les points de cette définition sont précisés par les vecteurs de la matrice ligne. A l'aide de ces points  $[q_n]$ , les points de contrôle  $[p_n]$  de la courbe peuvent alors être déterminés par résolution du système

$$[p_n] = [M_n]^{-1} \cdot [q_n] \quad (2.30)$$

### 2.1.2.3 Discussion sur les deux méthodes

La méthode par interpolation génère des imprécisions numériques. Une première erreur se produit ainsi lorsqu'on cherche les coordonnées des points régulièrement répartis sur la courbe (solution tronquée de la forme polynomiale). Une fois ceux-ci obtenus, nous inversons la matrice des coefficients de Bernstein, opération sujette à un possible mauvais conditionnement et conduisant là aussi à une aggravation des erreurs.

La seconde méthode a un avantage théorique car les points de contrôle de la courbe immergée sont déterminés à partir des points de contrôle de la surface, ce qui garantit une solution mathématique unique. Toutefois, [FAR 87] et [FAR 88] montrent que la forme de Bernstein est numériquement plus stable que la forme monomiale. [DAN 89] démontre cependant les risques de mauvais conditionnement de la matrice  $[M_n]$  et déconseille ainsi la conversion dans la base monomiale.

Pour la suite, nous généralisons l'immersion des surfaces et des volumes en utilisant la première méthode par interpolation.

## 2.2 ipSurfaces

### 2.2.1 Degré d'une surface immergée

Rappelons-nous la définition possible d'une surface, en la décrivant comme une courbe à pôles se déplaçant le long d'un certain nombre de courbes à pôles données. La définition des formes de dimension supérieure à 1 se décline ainsi à partir de « l'être élémentaire » courbe. En connaissant le degré de ces courbes dans chacune des directions de l'espace paramétrique, nous en déduisons le degré de la forme. On détermine donc le degré global de la surface immergée en déterminant successivement le degré global de « la courbe qui se déplace », puis celui des courbes parcourues. Nous rassemblons les résultats dans le tableau (Tab. 2-2)

	<b>pSurface <math>m, n</math></b>	<b>pVolume <math>m, n, r</math></b>
<b>ipSurface <math>P, P'</math></b>	$(mp_u + np_v), (mp'_u + np'_v)$	$(mp_u + np_v + rp_g), (mp'_u + np'_v + rp'_g)$

Tab. 2-2 : Degré global d'une surface immergée

### 2.2.2 Détermination des points de contrôle d'une surface immergée

Soit une surface  $p^{m,n}$ , déjà définie d'après ( 2.20 ) en partie 2 par

$$p^{m,n}(u,v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n p_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v) \text{ avec } u \text{ et } v \in [0,1] \quad (2.31)$$

Son l'écriture sous forme matricielle revient d'après ( 2.43 ) en partie 2 à

$$[p^{m,n}(u,v)]^T = [B_m] \cdot [P_{m,n}] \cdot [B_n] = [B_0^m(u) \quad \dots \quad B_m^m(u)] \cdot \begin{bmatrix} p_{0,0} & \dots & p_{0,n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{m,0} & \dots & p_{m,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_0^n(v) \\ \vdots \\ B_n^n(v) \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Dans le cas de l'interpolation de cette surface, nous disposons d'un tableau de  $(m+1) \times (n+1)$  points que la surface doit interpoler. Le système ( 2.32 ) doit ainsi être vérifié pour chaque paire  $(u_i, v_j)$ , ce qui conduit à  $(n+1) \times (m+1)$  équations dont on peut écrire la réunion des termes sous la forme matricielle suivante

$$\begin{bmatrix} p^{m,n}(0,0) & p^{m,n}\left(0,\frac{1}{n}\right) & \cdots & p^{m,n}(0,1) \\ p^{m,n}\left(\frac{1}{m},0\right) & \cdots & \cdots & p^{m,n}\left(\frac{1}{m},1\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p^{m,n}(1,0) & p^{m,n}\left(1,\frac{1}{n}\right) & \cdots & p^{m,n}(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0^m(0) & \cdots & B_m^m(0) \\ B_0^m\left(\frac{i}{m}\right) & \cdots & B_m^m\left(\frac{i}{m}\right) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ B_0^m(1) & \cdots & B_m^m(1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{0,0} & \cdots & p_{0,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{m,0} & \cdots & p_{m,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_0^n(0) & \cdots & B_n^n(0) \\ B_0^n\left(\frac{i}{n}\right) & \cdots & B_n^n\left(\frac{i}{n}\right) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ B_0^n(1) & \cdots & B_n^n(1) \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Comme dans le cas de l'interpolation d'une courbe, les matrices  $[B_m]$  et  $[B_n]$  sont des matrices de Vandermonde. Les points de contrôle, termes de la matrice  $[p_{m,n}]$ , sont obtenus à partir de (2.33) en calculant

$$[p_{m,n}] = [B_m]^{-T} \cdot [p^{m,n}(u,v)] \cdot [B_n]^{-1} \quad (2.34)$$

Les conditions d'existence des matrices inverses sont toujours respectées car les polynômes de Bernstein, formant une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ , assurent la non nullité des deux déterminants.

Toutefois, pour résoudre (2.34), nous n'inversons pas explicitement les deux matrices mais nous exploitons la forme produit tensoriel de la surface. Le problème est ainsi décomposé en deux sous-problèmes d'interpolation monodimensionnelle.

En posant

$$[p^{m,n}(u,v)] = [D] \cdot [B_n] \quad (2.35)$$

avec

$$[D] = [B_m]^T \cdot [p_{m,n}] \quad (2.36)$$

où  $[D]$  est composé de  $(m+1)$  lignes et  $(n+1)$  colonnes, alors (2.35) peut-être interprétée comme l'interpolation monodimensionnelle répétée sur les  $(m+1)$  courbes ayant toutes la même matrice de Vandermonde  $[B_m]$ . Connaissant  $[D]$ , nous pouvons résoudre (2.36), vue cette fois comme une interpolation monodimensionnelle répétée sur les  $(n+1)$  courbes ayant toutes la même matrice  $[B_n]$ .

## 2.3 ipVolumes

### 2.3.1 Degré d'un volume immergé

Etendons l'approche faite sur les surfaces immergées au cas des volumes. Nous pouvons en effet les décrire comme une surface à pôles se déplaçant le long d'un certain nombre de courbes à pôles données. Le degré de ces courbes dans les directions de l'espace paramétrique, donne le degré de la forme. De la même façon, nous généralisons le degré d'une forme immergée dans une forme de dimension égale ou supérieure à partir de celle de la courbe immergée. On précise donc le degré global du volume immergé en calculant successivement le degré global des trois directions paramétriques en fonction de l'espace immergent. Nous récapitulons les résultats dans le tableau (Tab. 2-3).

	<b>pSurface <math>m, n</math></b>	<b>pVolume <math>m, n, r</math></b>
<b>ipVolume <math>P, P', P''</math></b>	/	$(mp_u + np_v + rp_g), (mp'_u + np'_v + rp'_g), (mp''_u + np''_v + rp''_g)$

Tab. 2-3 : Degré global d'un volume immergée

### 2.3.2 Détermination des points de contrôle d'un volume immergé

Nous abordons le cas du volume comme une déclinaison du cas de la surface, lui-même décliné du cas de la courbe. L'interpolation tridimensionnelle est alors décomposée en trois sous-problèmes d'interpolations monodimensionnelles.

## 2.4 Conclusion

Nous avons mis en place dans ce chapitre les moyens d'obtention :

- des coordonnées des points de contrôle globaux de courbes définies dans le domaine paramétrique d'une forme de dimension supérieure ;
- des coordonnées des points de contrôle globaux de surfaces et de volumes définies dans le domaine paramétrique d'une forme de dimension égale ou supérieure.

Cette base théorique va nous permettre de développer des outils d'aide à la conception d'enveloppes complexes par l'identification d'ipFormes dans des pFormes. Nous allons ainsi proposer un panel de solutions techniques et/ou mécaniques, reposant sur l'exploitation des sous-formes d'une forme.

### 3 DEVELOPPEMENT D'OUTILS PAR IMMERSION DANS UNE PSURFACE

Dans la troisième partie du mémoire, nous proposons des solutions de réseaux structuraux sur une pSurface donnée et dont les orientations sont calculées à partir des caractéristiques locales des points de la forme. Toutefois, les courbes ainsi générées sont constituées par un ensemble dense de points en coordonnées globales. Ce ne sont pas des entités paramétrées de type pCourbe (à l'exception des lignes isoparamétriques), ce qui présente des désavantages pour l'exploitation des informations géométriques qu'elles contiennent (repère local, courbure, torsion...). D'autres désagréments, en lien avec la création d'un fichier de calcul, ont également émergés à l'occasion de l'étude mécanique comparant plusieurs maillages.

Ces inconvénients pratiques motivent ainsi le développement d'un autre outil de génération de maillages, basé sur l'utilisation des ipCourbes et auxquelles l'ensemble des fonctions développées peut être appliqué.

#### 3.1 ipCourbes quelconques

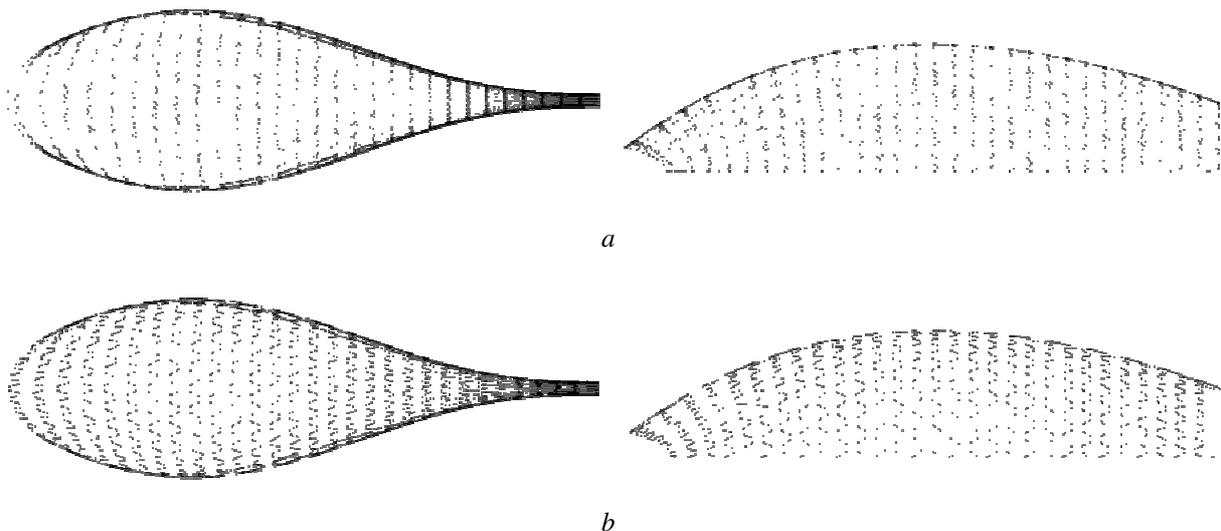
##### 3.1.1 Définition

Rappelons qu'une ipCourbe (pCourbe immergée) est l'image d'une pCourbe définie dans le domaine paramétrique de la surface. Nous avons exposé au §2.2 les moyens de calculer le polygone de contrôle en global d'une courbe définie localement en  $(u, v)$ . L'ensemble de points obtenu par subdivision est alors considéré comme une courbe tracée sur cette surface.

##### 3.1.2 Intérêts technologique et mécanique

Les plans de découpe utilisés pour le calepinage d'une enveloppe par des éléments de matière dépendent généralement du tracé de lignes aux parcours particuliers (Fig. 3-1 a,b). De plus, la production de plans ou de documents techniques pour un édifice complexe peut nécessiter des représentations non classiques (plan, élévation...). C'est pourquoi l'outil de tracé de pCourbes immergées est un complément aux lignes isoparamétriques, qui offre une plus grande liberté de choix.

Sur le plan mécanique, cela permet aussi d'avoir une flexibilité de conception pour déterminer des éléments structuraux primaires ou secondaires de fixation d'un bardage (Fig. 3-1 c,d). Une analyse en comportement devra néanmoins valider ce choix géométrique.



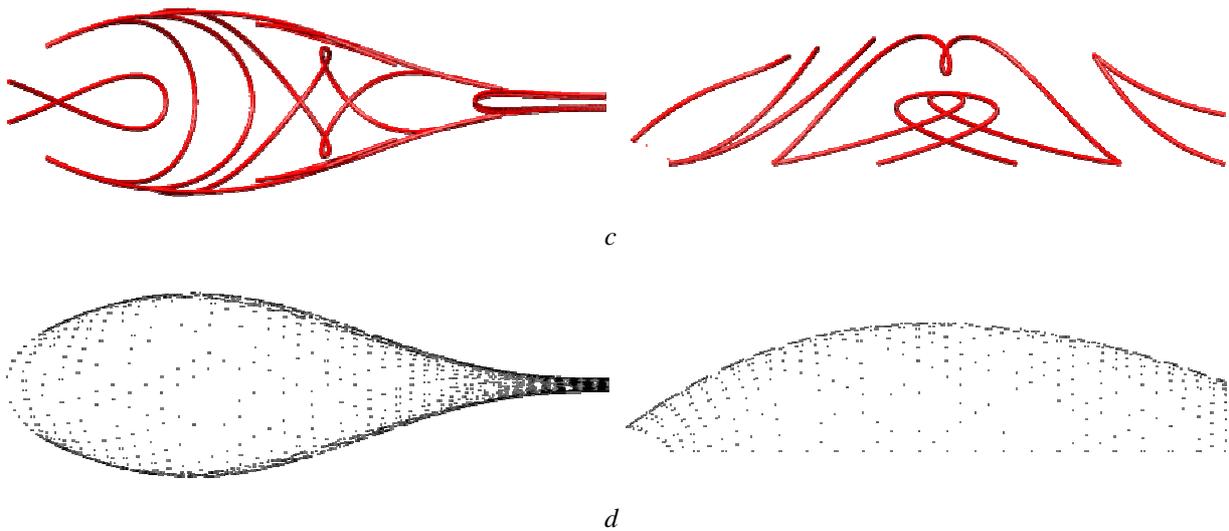


Fig. 3-1: pCourbes immergées dans une pSurface

### 3.1.3 Commentaires

Les possibilités de parcours sur la surface offrent une large liberté formelle pour générer des réseaux. Pour un nombre élevé de points de contrôle, certaines instabilités de calcul peuvent néanmoins apparaître pour chacune des deux approches (instabilité de l'interpolation ou du calcul avec la base monomiale). Toutefois, les pCourbes immergées présentent un grand intérêt car elles sont des pFormes et que nous pouvons ainsi leur appliquer l'ensemble des méthodes développées pour obtenir des informations géométriques.

## 3.2 ipCourbes géodésiques

### 3.2.1 Définition

Nous avons déjà cité les travaux de [PHA 01a] et [PHA 01b] qui proposent une minimisation de la longueur d'une courbe immergée dans une surface de Bézier par la méthode du gradient conjugué, et dont les points de contrôle locaux décrivant la courbe dans la surface sont les variables d'optimisation.

Nos travaux sur les formes immergées et sur l'identification de leurs points de contrôle locaux et globaux nous invitent ainsi à tester une construction similaire. Nous proposons donc une méthode de détermination de lignes géodésiques entre deux points, alors définies paramétriquement comme des ipCourbes dans une pSurface.

### 3.2.2 Application

En employant une méthode de minimisation, on va chercher à approcher le plus court chemin entre deux points  $P_I$  et  $P_F$  en se plaçant dans l'espace paramétrique de la surface. A ces deux points de l'espace global correspondent deux points  $p_I$  et  $p_F$  appartenant au domaine paramétrique. L'objectif est de minimiser la longueur de la courbe immergée dans la surface ; cette minimisation pouvant se faire par rapport aux points de contrôle locaux décrivant la courbe dans la surface. Nous décrivons ci-après le processus implémenté.

#### **Immersion**

Un segment  $g^1$ , dont les deux points de contrôle  $g_0$  et  $g_1$  correspondent aux points  $p_I$  et  $p_F$ , est initialement immergé dans la surface. Nous avons donc localement

$$g^1(t) = \sum_{i=0}^1 g_i B_i^1(t) = g_0(1-t) + g_1 t = p_I(1-t) + p_F t \quad (3.1)$$

L'élévation du degré de cette courbe fournit des points de contrôle locaux supplémentaires et régulièrement répartis. Les deux points de contrôle extrémaux sont  $p_I$  et  $p_F$ , alors que les points de contrôle intermédiaires jouent le rôle de paramètres libres pour l'optimisation. Soit

$$g^n(t) = \sum_{i=0}^n g_i B_i^n(t) \quad (3.2)$$

avec  $g_0 = p_I$ ,  $g_n = p_F$  et où les autres points  $g_i$  sont les variables d'optimisation pour  $i \in [1, n-1]$ .

### Calcul de la longueur

La longueur de la pCourbe dépend du niveau de récursion précisé. Le résultat de cette subdivision fournit un tableau de points  $g^n(t) = P(x, y, z)$  appartenant à la courbe. Numériquement, la longueur est ainsi calculée par sommation de la distance entre chacun des points.

$$L = \sum_i \left\| \Delta g^n(t) \right\| \quad (3.3)$$

### Minimisation

L'algorithme de Nelder-Mead [NEL 65] est ensuite utilisé pour rechercher un minimum local de la longueur de la courbe immergée en fonction des points de contrôle intermédiaires. Cette méthode d'optimisation non linéaire est disponible dans la librairie Scipy (langage python). Les résultats du calcul donnent la position des points de contrôle locaux, puis sont exportés vers l'outil de pFormes.

### Raffinement

On dispose toutefois de deux moyens de raffinement du résultat. L'augmentation de la subdivision de la courbe améliore la précision de calcul de la longueur et l'augmentation du degré fournit des paramètres d'optimisation supplémentaires, aux dépens toutefois du temps de calcul et du risque de divergence.

#### 3.2.3 Commentaires

La méthode d'optimisation exploite les avantages du paramétrage, tel que l'interpolation des extrémités et l'expression des repères locaux, sans le recours à la géométrie différentielle. Le concept d'immersion possède un grand intérêt de simplification. De plus, nous pouvons spécifier une liste de points d'extrémité entre lesquels des géodésiques seront calculées pour générer directement un réseau sur l'ensemble de la surface. L'absence de bibliothèque scientifique en autolisp nous a cependant contraints à utiliser un langage plus approprié pour effectuer les calculs.

Comme l'analysaient déjà [PHA 01a] et [PHA 01b], le principe de cette approche s'expose simplement mais les moyens de son implémentation et de sa validation soulèvent de nombreuses questions inhérentes aux algorithmes d'optimisation, telles que l'obtention d'un minimum local ou global et l'influence des conditions d'initialisation. Nous affranchissant de ces considérations purement théoriques, nous proposons néanmoins une analyse des résultats en fonction de plusieurs critères :

- l'influence du degré local de la courbe sur la convergence ;
- les longueurs comparées à celles des courbes obtenues d'après la méthode de tir proposée en partie 3 ;
- la valeur de l'angle entre les normales de la courbe obtenue et de la surface aux points de subdivision.

La pSurface pS33 illustrée sur la figure (Fig. 3-2) est ainsi choisie pour l'étude comparative entre les deux méthodes dont sont montrés des tracés (Fig. 3-5).

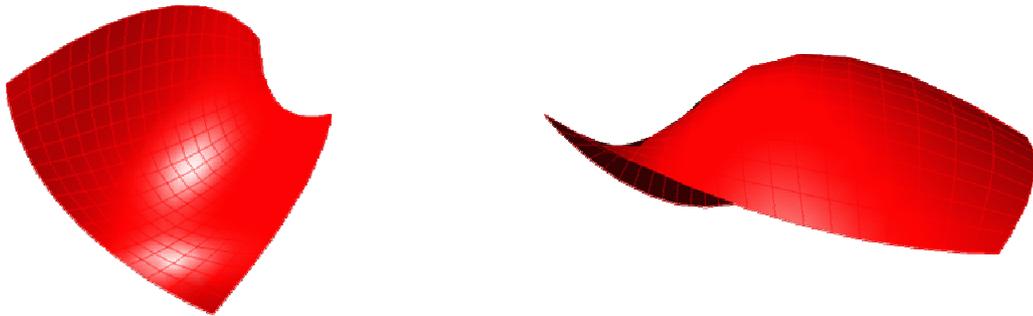


Fig. 3-2: pS33, pSurface d'initialisation

### Influence du degré local de la courbe sur la convergence :

A partir de la géométrie de référence, des tests successifs étudiant la convergence du calcul d'optimisation ont mis en évidence une meilleure minimisation de la longueur des courbes pour un degré local égal à 4 (Fig. 3-3). En deçà, le nombre de points de contrôle n'est pas optimisé pour fournir assez de variables de déplacement de la courbe. Cela se perçoit essentiellement sur le cas *Géod1*. Au-delà, l'effet inverse se produit pour le cas *Géod 5* et le calcul diverge en raison d'une augmentation indésirable du nombre de variables d'optimisation.

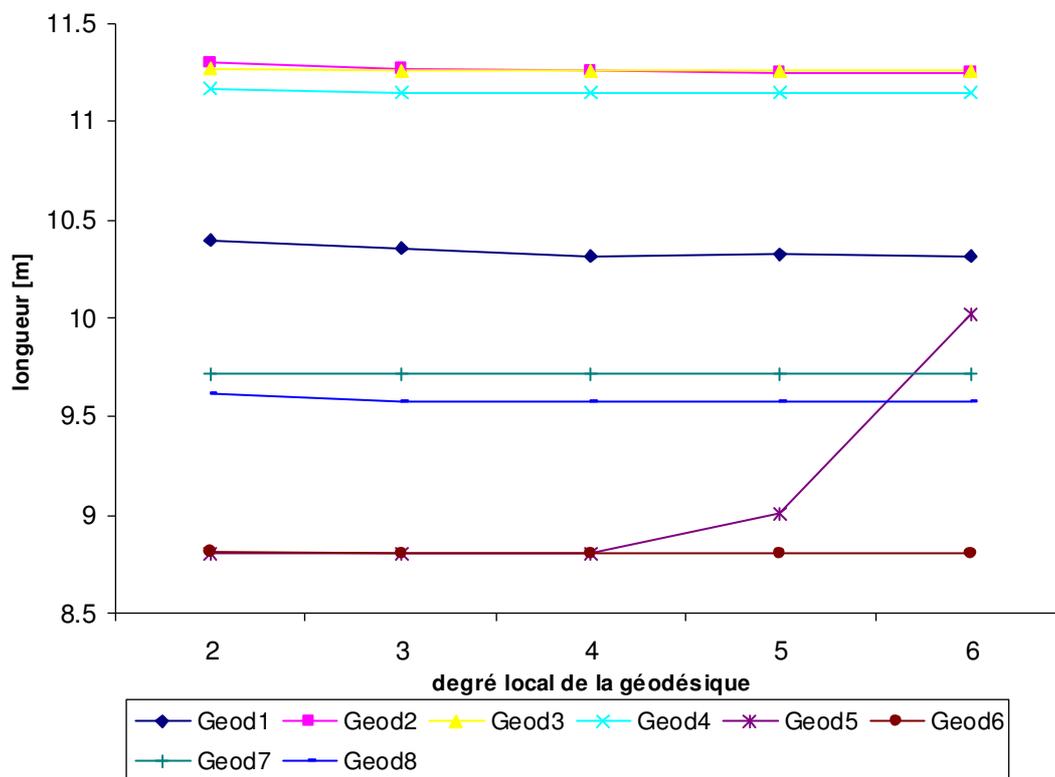


Fig. 3-3: Graphe de l'influence du degré sur la longueur de l'ipCourbe

### Longueurs comparées à celles des courbes obtenues par la méthode de tir :

Partant d'un calcul d'une minimisation de la longueur pour un réseau de courbes immergées de degré local égal à 4, nous comparons les longueurs obtenues par rapport à celles de la méthode de tir (Tab. 3-1). Les résultats indiquent une erreur négligeable, inférieure à 0.02% pour l'ensemble, à

l'exception de *Géod 1* qui présente 0.19% de différence. Cette erreur dépend toutefois davantage des modes de représentation de chacune des courbes, basés sur la subdivision pour l'ipCourbe et sur le pas d'incréméntation pour la méthode de tir. Cette première analyse ne permet néanmoins pas de statuer définitivement sur la méthode d'optimisation choisie.

	Minimisation L	Méthode de tir	Erreur %
Geod1	10.31	10.29	0.19
Geod2	11.254	11.252	0.02
Geod3	11.256	11.255	0.01
Geod4	11.149	11.149	0.00
Geod5	8.802	8.801	0.01
Geod6	8.808	8.808	0.00
Geod7	9.714	9.714	0.00
Geod8	9.576	9.576	0.00

Tab. 3-1 : Comparaison de longueurs obtenues selon les deux méthodes

### Valeur de l'angle entre les normales de la courbe obtenue et de la surface aux points de subdivision :

La comparaison des longueurs ne suffit pas comme seul critère de validation. Une autre caractéristique des géodésiques concernant la colinéarité de la normale à la courbe et de la normale à la surface et doit être vérifiée. Ce critère revient à calculer la courbure géodésique qui doit être nulle en tout point. Nous constatons ainsi une grande disparité des valeurs, à l'exception des courbes *Géod 6, 7, 8 et 4*, si l'on omet les deux pics observés pour cette dernière (Fig. 3-4). Ces constats sont confirmés par la visualisation des différentes valeurs angulaires (Fig. 3-5).

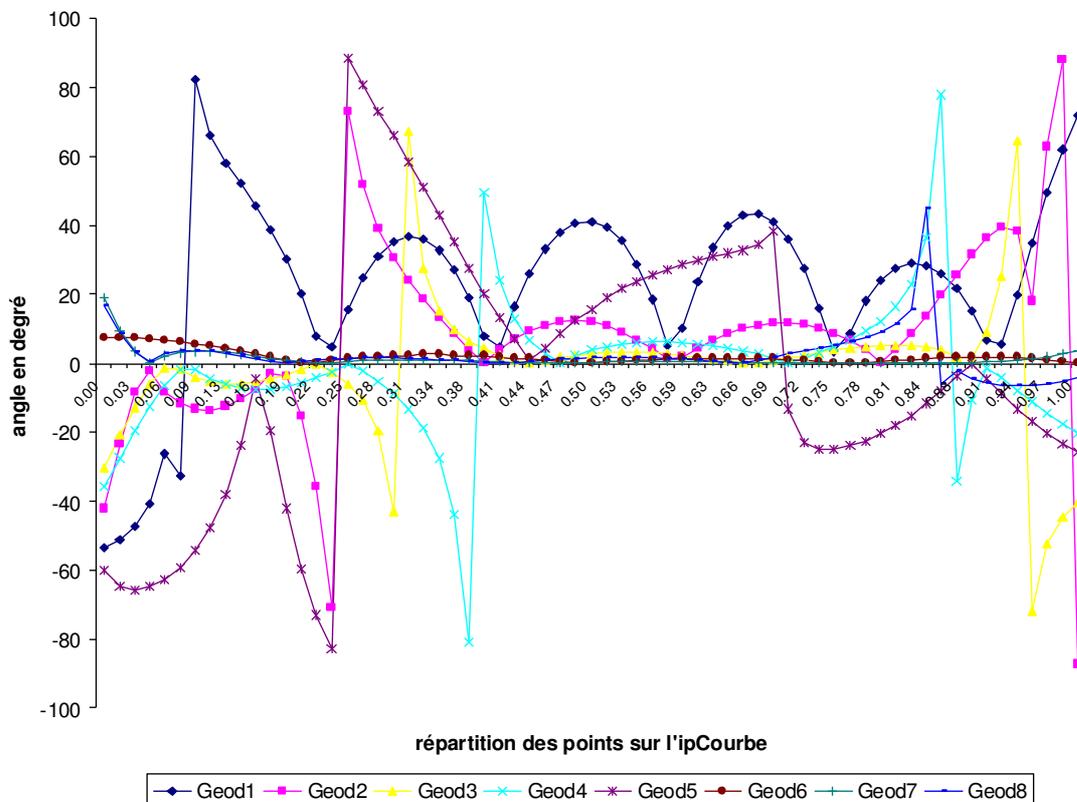


Fig. 3-4: Graphe de la valeur de l'angle entre les normales aux courbes immergées et celles de la surface

Nous pouvons en conclure que, sur les huit courbes immergées obtenues, seules quatre d'entre elles vérifient les deux critères de minimisation locale de la longueur et de la courbure géodésique quasi-

nulle. Visuellement, les courbes *Géod 1* et 2 présentent un écart significatif (Fig. 3-5) avec celles de référence.

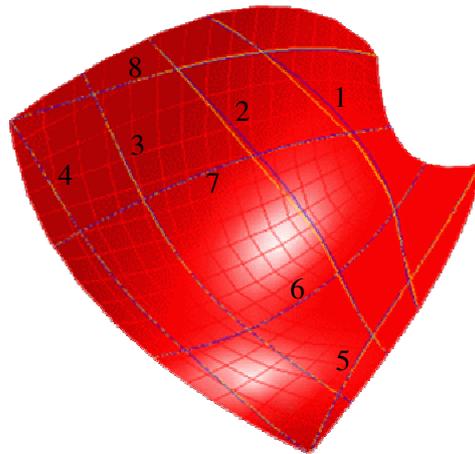


Fig. 3-5: Comparaison visuelle des résultats

### 3.2.4 Conclusion

L'approche par minimisation de la longueur d'une ipCourbe nécessite donc des améliorations. Pour cela, nous pourrions envisager l'ajout d'un critère de minimisation sur la courbure géodésique. En l'état actuel, la méthode de tir joignant deux points par dichotomie d'un intervalle angulaire, telle que nous l'avons exposée en partie 3, demeure comparativement la plus satisfaisante.

D'autre part, cette première tentative d'exploitation des points de contrôle locaux ouvre d'autres domaines de prospection. En effet, les critères d'optimisation ont été abordés d'un point de vue strictement géométrique. Or, les points de contrôle définis dans le domaine paramétrique pourraient aussi servir de variables pour un problème d'optimisation minimisant un critère mécanique particulier (flèche, contrainte, etc.). Une telle perspective peut être prometteuse, autorisant un couplage entre les aspects géométriques et mécaniques.

## 3.3 ipSurfaces

### 3.3.1 Définition

Une surface immergée (introduite dans le §2.2) est considérée comme l'image d'une pSurface définie dans le domaine paramétrique d'une autre pSurface. A partir des points de contrôle déclarés localement en  $(u, v)$ , nous calculons la surface dont le réseau de contrôle est défini dans le repère global. L'ensemble de points obtenu par subdivision est alors considéré comme une surface tracée sur la surface choisie comme domaine paramétrique de définition.

### 3.3.2 Intérêt technologique

Déjà plusieurs fois cité, nous rappelons le projet de l'EMP de Gehry & Partners qui a nécessité le développement d'algorithmes de calepinage de la surface totale de l'enveloppe, alors représentée à l'aide de carreaux de Bézier [SHE 02]. Les panneaux furent définis sur la base des coordonnées du domaine paramétrique le long des courbes isoparamétriques (Fig. 3-6 et Fig. 3-7). Il ne s'agit donc pas de surfaces immergées, mais de lignes forcées à être localisées sur les directions isoparamétriques, donc dépendantes de la paramétrisation choisie.

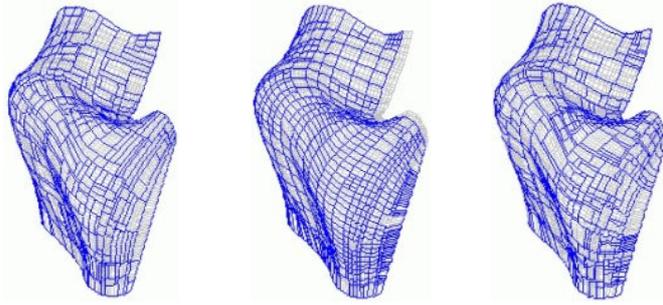


Fig. 3-6: Plusieurs résultats de calepinage de la surface



Fig. 3-7: Détail de réalisation

Au-delà de ce bâtiment, la réalisation d'une enveloppe nécessite souvent la mise en place de panneaux de matériaux laissant apparaître clairement les joints du calepinage. Ces zones de discontinuité de la surface soulignent clairement son « écriture » architecturale. Les récents projets de station de métro à Innsbruck conçus par Z. Hadid illustrent particulièrement cet aspect (Fig. 3-8).



Fig. 3-8: Stations de métro - Zaha Hadid – Innsbruck – Autriche – 2007

### 3.3.3 Application

L'approche théorique et algorithmique utilisée pour définir de telles surfaces par leurs points de contrôle dans le domaine paramétrique ou dans l'espace global est détaillée au §2.2. La méthode que nous avons développée consiste à généraliser l'inversion des matrices de Vandermonde au cas des pSurfaces dans des formes de dimension égale ou supérieure (pVolume). Des possibilités de calepinage d'une surface de référence (Fig. 3-9) sont proposées pour comparer les propositions obtenues entre l'emploi des directions isoparamétriques (Fig. 3-10) et celui des ipSurfaces (Fig. 3-11).

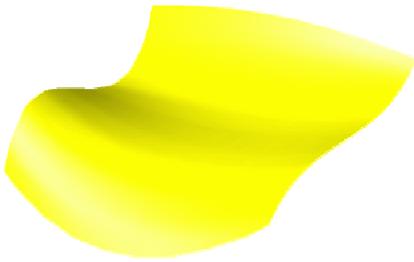


Fig. 3-9: pSurface de référence

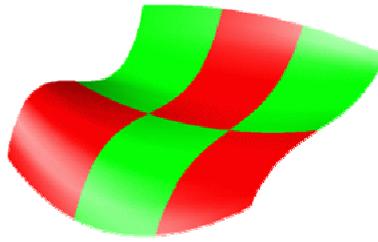


Fig. 3-10: Calepinage selon les isoparamétriques

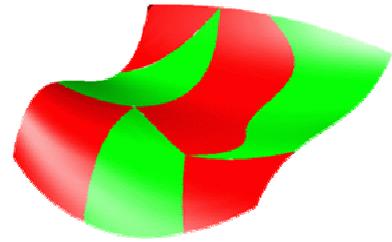


Fig. 3-11: Quelques possibilités de panélisations par des ipSurfaces

### 3.3.4 Commentaires

Les parcours sur la surface sont diversifiés et offrent une grande liberté formelle pour générer des panélisations. L'inversion matricielle utilisée pour l'interpolation peut toutefois générer des erreurs numériques créant des disjonctions d'un panneau à l'autre, ces risques augmentant avec le nombre de points de contrôle. Le calepinage d'une surface réclame ainsi une étude attentive afin de limiter les problèmes de discontinuité.

La mise au point de l'outil de pSurfaces immergées apporte donc un choix conséquent dans la localisation et la disposition des panneaux de bardage sur une enveloppe. De plus, le contrôle des propriétés géométriques de chaque panneau, comme sa courbure gaussienne, peut faciliter sa faisabilité de mise en œuvre.

## 3.4 Conclusion

Nous avons pu mettre en évidence des applications des ipFormes immergées dans des pSurfaces. Les travaux sur les ipCourbes ouvrent des perspectives en réponse aux questions soulevées lors du comparatif de différents maillages structurels. Nous constatons ainsi l'inconvénient de travailler sur des lignes non paramétrées et la génération de pCourbes immergées approchant les lignes géodésiques d'une pSurface est une première avancée importante. Nous encourageons la poursuite de ces travaux afin de les étendre à d'autres lignes particulières.

De plus, l'extension du contrôle sur les pCourbes immergées profite directement à celle des pSurfaces immergées. Par exemple, la maîtrise du calepinage des surfaces complexes constitue un véritable enjeu et motive le développement de ce savoir-faire. La plupart des propositions réalisées à ce jour suivent les trajectoires des lignes isoparamétriques et l'immersion offre une plus grande liberté de choix pouvant répondre de façon plus adaptée à des exigences devant concilier des aspects esthétique, mécanique ou technique.

## 4 OPERATEURS DE DEFORMATION

« Le processus de modélisation géométrique peut-être décomposé en deux phases : la construction des objets ou surfaces puis leur déformation. Ces deux étapes sont nécessaires dès que l'objet est trop complexe pour être créé directement sous sa forme définitive. » S. Coquillart [COQ 90a].

### 4.1 Théorie de la transformation

Nous souhaitons, au préalable, faire quelques commentaires sur la théorie de la transformation proposée par D'Arcy Thompson [THO 42], dont les travaux sur les mécanismes du développement présentent des analogies avec notre problématique. Son approche de la morphogenèse part de l'hypothèse que les structures vivantes évoluent selon des règles mathématiques et physiques. Pour se représenter une évolution des formes complexes en constante transformation, D'Arcy Thompson élabore alors un modèle quantitatif qui lui permet de construire un outil de génération basé sur des règles simples. Sa théorie de la transformation considère ainsi que les « forces » qui transforment les formes organiques sont représentables par une grille cartésienne soumise à des déformations. Il révèle ainsi des similitudes topologiques de l'évolution (Fig. 4-1 à Fig. 4-4). Les limites de cette proposition zoomorphique sortent toutefois du champ de notre réflexion ; nous en soulignons seulement le recours à la géométrie pour comprendre et apporter des éléments d'analyse sur la complexité de la représentation.

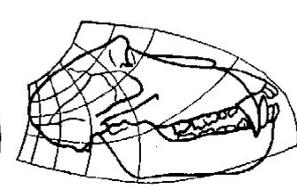
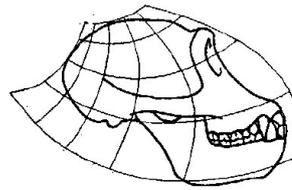
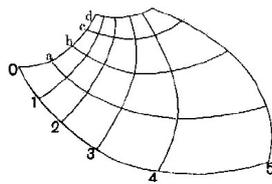
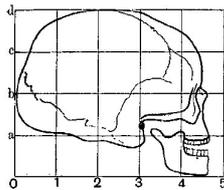


Fig. 4-1: Crâne humain

Fig. 4-2: Grille déformée

Fig. 4-3: Crâne de chimpanzé

Fig. 4-4: Crâne de babouin

### 4.2 Points de contrôle

Une pForme est un ensemble de sous-formes définies par leurs points de contrôle. Il existe ainsi une hiérarchie logique dans cet emboîtement de sous-formes aux dimensions décroissantes. Un volume est constitué de surfaces, elles-mêmes constituées de courbes constituées de points de contrôle. Toute pForme peut donc être manipulée et modifiée en utilisant les sous-formes la générant, ce jusqu'aux points de contrôle.

Prenons exemple sur la translation d'un unique point du réseau d'une surface en considérant une surface dont le point courant  $M(u, v)$  est défini par

$$p^{m,n}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n p_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v) \quad (4.1)$$

Le déplacement selon un vecteur  $\vec{D}$  d'un seul point  $p_{i,j}$  parmi les points du réseau fournit une nouvelle surface définie par [DEM 98]

$$p'^{m,n}(u, v) = p_{0,0} B_0^m(u) B_0^n(v) + \dots + (p_{i,j} + \vec{D}) B_i^m(u) B_j^n(v) + \dots + p_{m,n} B_m^m(u) B_n^n(v) \quad (4.2)$$

soit, après simplification

$$p'^{m,n}(u, v) = p^{m,n}(u, v) + B_i^m(u) B_j^n(v) \vec{D} \quad (4.3)$$

Nous voyons ainsi d'après ( 4.3 ) que tous les points de la surface subissent un déplacement parallèle au vecteur  $\vec{D}$ , dont l'intensité varie selon les valeurs des paramètres liés aux variations des polynômes de Bernstein.

Nous pouvons observer sur l'exemple d'une pS33 l'effet généré par la translation d'un de ses points de contrôle (Fig. 4-5 et Fig. 4-6).

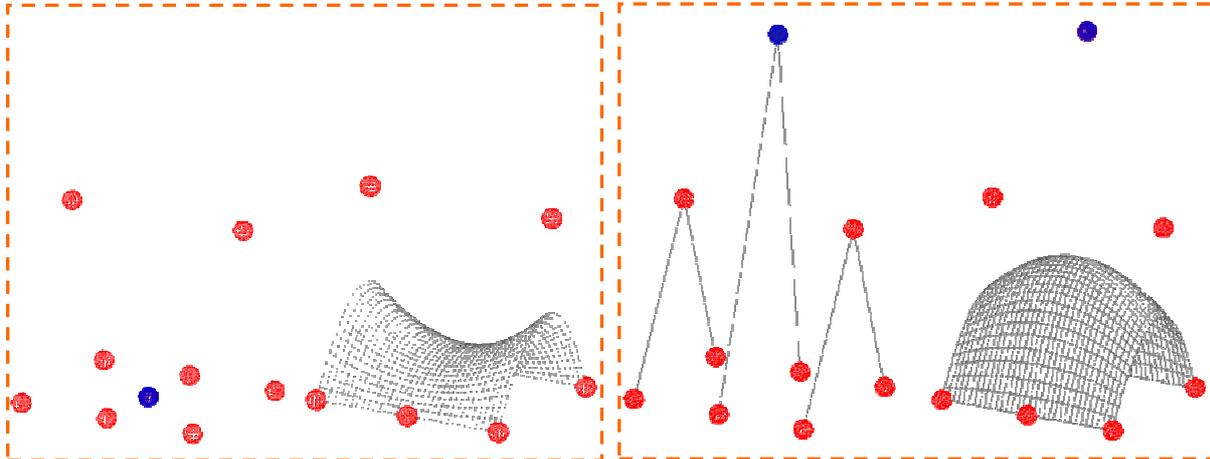


Fig. 4-5: pSurface initiale pS33

Fig. 4-6: Déplacement d'un point de contrôle

L'illustration suivante permet de voir les conséquences d'une translation dans le repère global de trois points de contrôle d'une portion de cylindre (Fig. 4-7). La surface résultante est alors déformée dans son intégralité (Fig. 4-8).

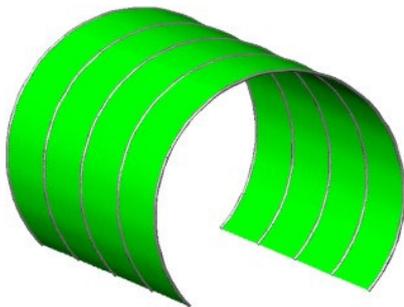


Fig. 4-7: Une portion de cylindre

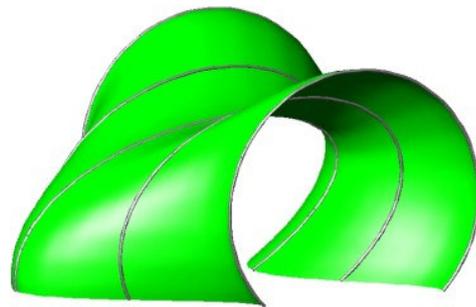


Fig. 4-8: Déplacement de trois point de contrôle

Cette méthode de déformation géométrique est qualifiée d'indirecte, car l'utilisateur n'agit pas directement sur la forme mais utilise ses points de contrôle comme outil de transformation. Dans le contexte de formes non-standard, le nombre de points de contrôle à déplacer dépend de la taille de la région à déformer et peut devenir important. Par conséquent, il devient difficile et parfois hasardeux de maîtriser la génération d'un objet géométrique complexe par ce biais. C'est pourquoi une autre méthode de déformation indirecte, caractérisée par une approche géométrique, a été développée.

### 4.3 « Free-form deformation »

La méthode de déformation décrite précédemment, consistant à déplacer des points de contrôle, n'est pas satisfaisante parce que la forme, la taille et la position de la déformation sont contraintes par la géométrie de la pForme. Or, les formes paramétrées se révèlent d'une grande utilité en constituant un repère local paramétré (1D pour les courbes, 2D pour les surfaces et 3D pour les volumes) dans lequel nous pouvons redéfinir une pForme en l'immergeant. Du point de vue de l'utilisateur, la géométrie de la pForme dans l'espace global demeure cachée. Il déclare localement la pForme immergée, d'un degré simplifié dans un espace plus complexe qui devient un outil de génération et de transformation. Cet outil, dit de « free-form deformation » permet d'immerger un modèle géométrique puis à déformer

l'espace de définition (2D, 3D ou de dimension supérieure) plutôt que de travailler directement sur la géométrie d'une pForme déclarée dans l'espace global. Les déformations générées sur la pForme englobante sont alors automatiquement transmises au modèle.

#### 4.3.1 Rappel historique

J. Ferguson [FER 64] initialisa cette approche sans toutefois en donner une application pratique. Le potentiel des volumes paramétrés était également connu de S. Coons [COO 64], mais P. Bézier fut le premier à percevoir l'utilité de cet outil en terme d'application industrielle pour la conception automobile [BEZ 78]. Dans une autre communauté scientifique, T.W. Sederberg et S.R Parry [SED 86] redécouvrirent cette méthode et l'utilisèrent pour réaliser des environnements graphiques. Leur approche était néanmoins limitée à l'immersion dans un volume parallélépipédique qui restreignait à des déformations arbitraires et l'obtention de formes circulaires. L'extension aux cas des formes immergentes prismatiques ou non, sphériques par exemple, fut proposée par S. Coquillart [COQ 90b] qui marqua sa contribution en nommant cet outil : « Extended free form deformation ». Motivées par le domaine de l'animation numérique et de la conception industrielle, ces recherches en sont aujourd'hui au « Fully free form deformation ». Les déformations géométriques atteignent alors un stade de convivialité optimale où l'utilisateur agit sur l'espace immergeant à son insu, en manipulant interactivement et directement la forme immergée [SUM 07].

#### 4.3.2 Principe d'utilisation

Les travaux rappelés ci-dessus évoquent la méthode d'un point de vue mathématique. Les pFormes ont certes des expressions analytiques, que nous avons présentées en partie 2, mais cet aspect nécessaire à l'implémentation d'algorithmes demeure caché pour l'utilisateur qui peut continuer à s'en faire une simple représentation géométrique récursive. La possibilité de représenter une pForme immergée dans une autre par la même construction géométrique étendue à des espaces courbes justifie pleinement l'approche pascalienne des formes gauches.

##### 4.3.2.1 Référentiel paramétrique

On considère le référentiel global défini par trois vecteurs unités dans lesquelles les coordonnées sont  $(x, y, z)$ . Dans ce référentiel, nous déclarons un solide de degrés  $m$ ,  $n$  et  $p$  selon respectivement chacune de ses directions et constituant un nouveau référentiel triparamétrique. Ce dernier est appelé « treillis » dont les nœuds sont les points de contrôle  $p_{i,j,k}$  où  $i \in [0, m]$ ,  $j \in [0, n]$  et  $k \in [0, r]$ .

##### 4.3.2.2 Déformation du treillis et coordonnées des points immergés

Soit  $M(u, v, g)$ , un point défini dans ce nouveau référentiel tel que  $u, v, g \in [0, 1]$  afin qu'il reste contenu dans le volume. Chaque déplacement par translation ou rotation des points de contrôle du volume définit un nouvel espace paramétrique, à partir duquel nous pouvons obtenir les nouvelles coordonnées de la forme immergée transformée avec les coordonnées actualisées des points de contrôle du volume.

##### 4.3.2.3 Synthèse

Les étapes à suivre sont ainsi les suivantes :

- une pForme est créée, constituant un repère local ;
- une autre pForme de dimension inférieure ou égale est immergée dans la première, en la déclarant dans ce repère ;
- la première pForme constituant le repère local est transformée par translation, rotation ou homothétie ;
- la pForme immergée suit les déformations appliquées.

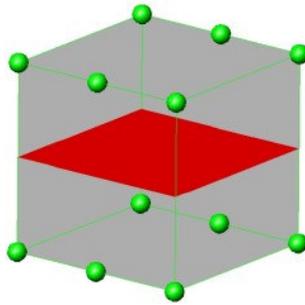


Fig. 4-9: pS22 immergée dans un pV232

Afin d'illustrer les potentialités de la free form deformation, nous présentons sur un exemple élémentaire les conséquences des transformations d'un cube pV232 sur la forme d'une facette pS22 immergée (Fig. 4-9).

Les modifications ne sont appliquées que sur les quatre points de contrôle de la surface intermédiaire du cube. Les figures suivantes montrent premièrement une translation (Fig. 4-10), suivie d'une rotation (Fig. 4-11) puis d'une homothétie (Fig. 4-12).

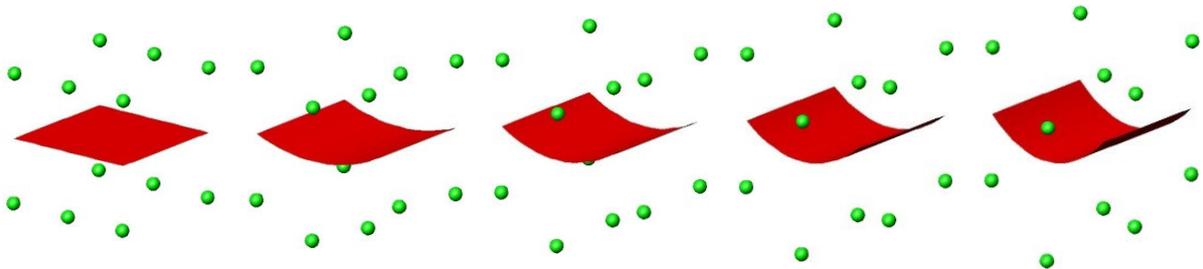


Fig. 4-10: Translation de la surface intermédiaire du cube

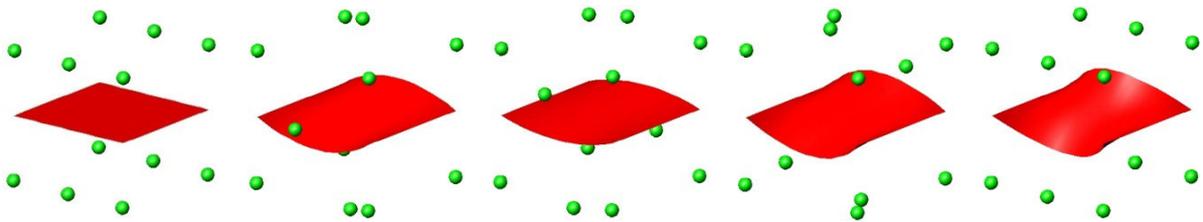


Fig. 4-11: Rotation

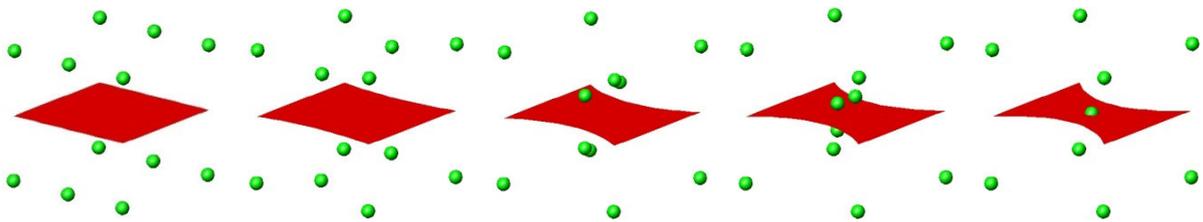


Fig. 4-12: Homothétie

Cette approche fournit un outil de transformation pouvant simuler « géométriquement » parlant la torsion, la flexion, le cisaillement. De simples opérations intuitives sur l'espace englobant permettent de gérer la création de formes complexes. En effet, aboutir au même résultat en utilisant directement les points de contrôle de la surface dans le référentiel global serait une opération fastidieuse, voire problématique. L'opportunité de se placer dans un espace plus complexe offre l'avantage de simplifier en retour le problème auquel est confronté le concepteur s'il demeure dans le référentiel cartésien 3D.

## 5 CAS D'APPLICATION

### 5.1 Présentation du projet

Les Ruralies (Fig. 5-1) sont des espaces muséographiques réalisés en 2007 sur une aire d'autoroute en Charente-Poitou. L'ingénierie du projet fut menée par M. Malinowsky (bureau d'études Alto). Face à la complexité géométrique de la forme et de sa réalisation, le cabinet d'architecture, démuni, s'en est remis à l'expérience de ce bureau d'études. Pour les mêmes raisons, seuls des artisans répondirent à l'appel d'offre lancé pour la réalisation du projet.

La génération de cette surface est typiquement à classer dans les formes analytiques dans la mesure où elle est entièrement construite à partir du cercle. La structure primaire est ainsi composée d'arcs en anse de panier (Fig. 5-2), réalisés en tubes galvanisés joints par boulonnages au raccord des deux rayons de courbure. Leur diamètre constant (193,7mm) permet de garantir une épaisseur identique de la peau et une optimisation de la quantité de matière a pu s'effectuer en jouant sur l'épaisseur des tubes.

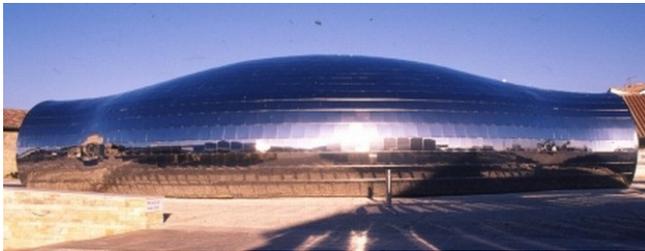


Fig. 5-1: Les Ruralies – Malinowsky – France – 2007



Fig. 5-2: Arcs en anse de panier

Des tubes carrés cintrés selon des rayons de courbure constants constituent la structure secondaire (Fig. 5-3). Leur assemblage sur les arcs est réalisé par un modèle unique de nœud autorisant un réglage selon trois axes de rotations. Deux épaisseurs de contre-plaqué (Fig. 5-4) sont ensuite fixées sur la structure secondaire en face extérieure, puis étanchéifiées (Fig. 5-5). Enfin, sur les faces intérieure et extérieure, des rails de fixation viennent accueillir des éléments en acier inoxydable qui finaliseront l'aspect de surface. La grande irrégularité dimensionnelle des éléments de bardage proposés par le bureau d'études nécessita une découpe de chacun par machine à commande numérique.



Fig. 5-3: Structure secondaire



Fig. 5-4: Panneaux contre-plaqués



Fig. 5-5: Etanchéité et fixation du bardage final

Nous proposons de revenir sur le mode de génération du maillage qui couvre la face intérieure, en raison de la difficulté du calepinage de ses éléments hexagonaux (Fig. 5-6) sur cette surface gauche. M. Malinowski a proposé trois solutions issues d'une construction faisant appel à un simple compas. L'approche par immersion nous a alors conduit à une autre proposition dont nous discuterons de la pertinence.



Fig. 5-6: Calepinage d'hexagones (face intérieure)

## 5.2 Le compas comme outil

La surface présentant deux axes de symétrie (Fig. 5-7), cela a permis d'en considérer seulement un quart (Fig. 5-8). La forme des hexagones résulte ensuite des intersections issues d'une combinaison d'arcs et de rayons de cercle.

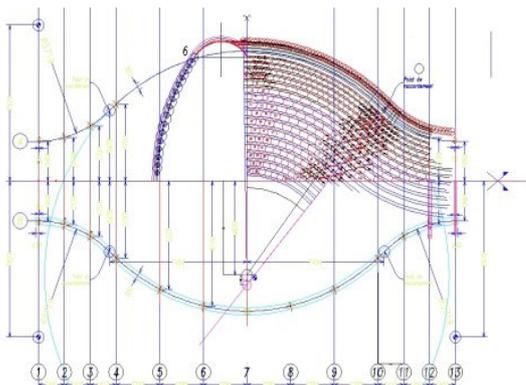


Fig. 5-7: Double symétrie de la surface

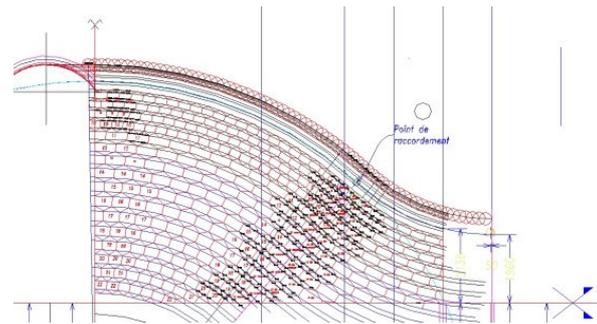


Fig. 5-8: Quart de la surface

Avec cette approche, le bureau d'études n'a pu s'affranchir de fortes irrégularités au point de raccordement des rayons de courbure ainsi qu'au sommet, comme illustré ci-dessous à partir de diverses propositions qu'il a étudiées (Fig. 5-9 à Fig. 5-11)

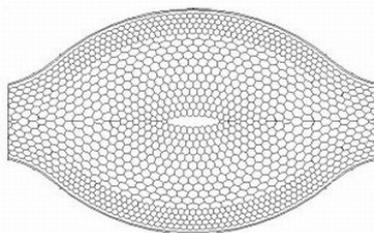


Fig. 5-9: Proposition 1

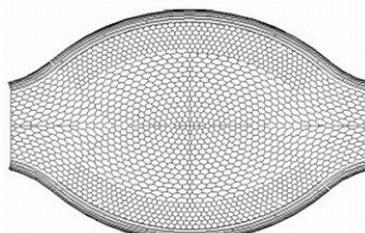


Fig. 5-10: Proposition 2

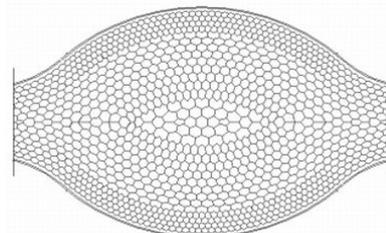
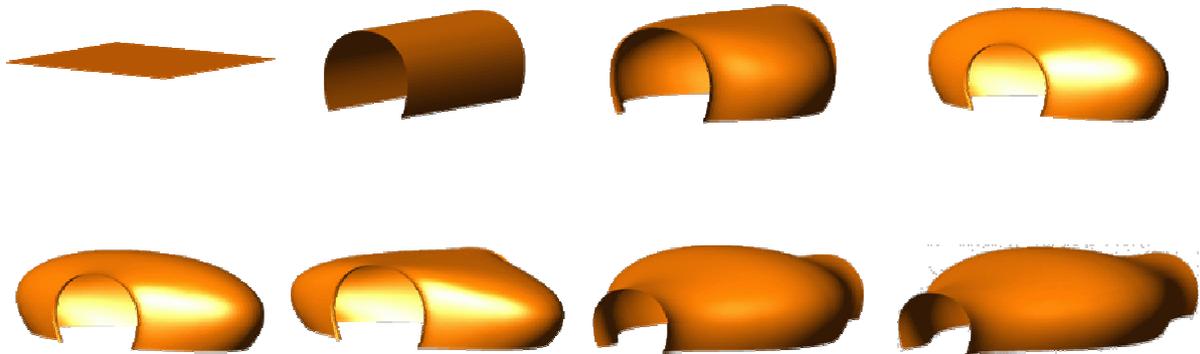


Fig. 5-11: Proposition 3

## 5.3 Les pFormes comme outil

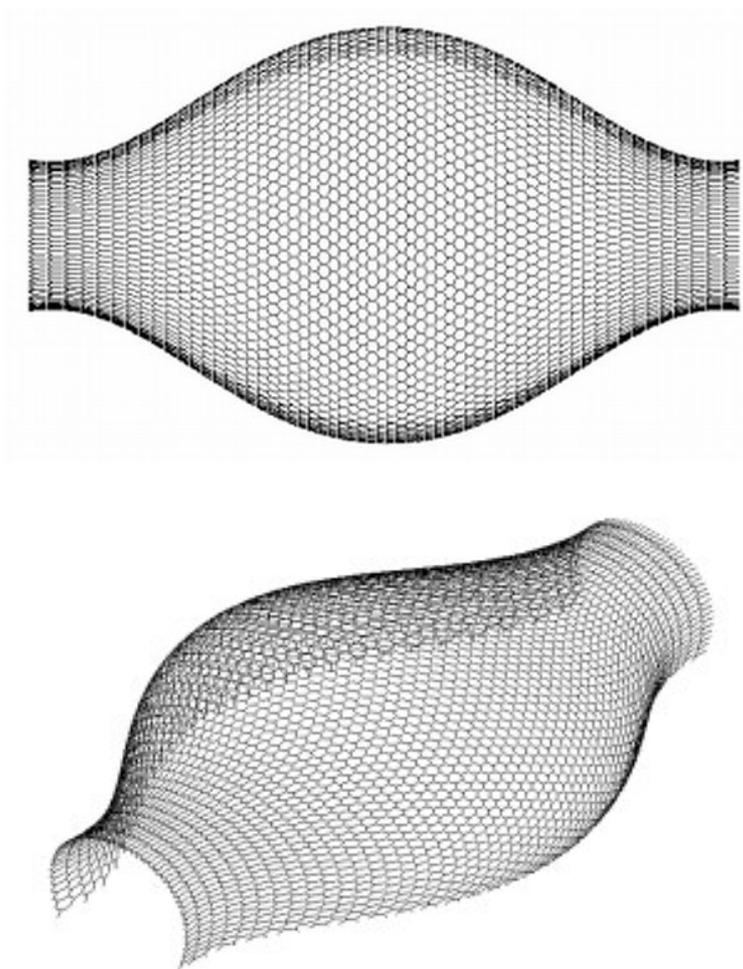
L'approche par pFormes nécessite de se placer d'un tout autre point de vue. La surface est ainsi d'abord générée dans sa totalité par l'immersion d'une facette élémentaire pS22 dans un volume pV793, de degrés élevés dans les directions  $u$  et  $v$  afin de se donner une grande liberté de déformation.

La forme est alors approchée par une combinaison de transformations (rotations, homothéties et translations) appliquées au cube qui se répercutent sur la pS22 immergée (Fig. 5-12).



*Fig. 5-12: Free form deformation sur les Ruralies*

Le résultat est une pSurface continue, totalement définie dans l'espace global et hors du cube. L'utilisation d'un algorithme rudimentaire générant des hexagones dans un carré unité, en fonction d'une densité paramétrable, donne alors des coordonnées de points. Leurs images par l'application de la transformation fournissent ensuite le calepinage recherché (Fig. 5-13).



*Fig. 5-13: Calepinage pForme*

## 5.4 Commentaires

L'emploi du compas a généré un résultat tout à fait satisfaisant, néanmoins astreint, par définition, à l'arc de cercle et à une double symétrie simplificatrice pour la conception. De plus, ce processus n'est pas paramétré : chaque solution de maillage proposée requiert une reprise totale du dessin, ce qui est très pénalisant en temps et rend peu ouverte toute discussion pour envisager d'éventuelles modifications.

Par comparaison, on observe que l'intérêt de l'outil de pFormes immergées a résulté en une grande régularité du maillage, absente dans les premières propositions. Nous nous sommes par ailleurs également affranchis des difficultés de fermeture en sommet et de raccord en zone d'inflexion.

De plus, l'éventail formel offert par l'approche pFormes est moins limitatif. Les besoins de symétrie et d'arcs de cercle perdent leur utilité sur le dessin, bien que leur intérêt reste ouvert au niveau du coût de fabrication et de mise en œuvre. Enfin, grâce au paramétrage, le choix du motif de maillage immergé dans la surface peut-être plus adapté aux désirs de l'architecte. La taille des hexagones est une simple variable dans un algorithme et une multitude de propositions peut en découler.

Ce constat à partir d'un cas d'étude réel révèle tout l'intérêt de l'approche par pFormes, aussi bien en terme de possibilité de communication avec l'architecte que d'ingénierie.

## 6 DEVELOPPEMENTS PROSPECTIFS

### 6.1 Fractals

« *Clouds are not spheres, mountains are not cones, coastlines are not circles, and bark is not smooth, nor does lightning travel in a straight line.* » B. Mandelbrot [MAN 82].

#### 6.1.1 Introduction

En 1975, B. Mandelbrot introduisit le terme « fractal » pour décrire des courbes irrégulières générées par un langage algorithmique grâce auquel des formes complexes peuvent naître à partir de règles de transformations simples. Par opposition à la géométrie euclidienne, la géométrie fractale offre une meilleure description des formes naturelles. Depuis les années 80, le développement de l'informatique graphique, combinant calcul et visualisation, a permis la représentation de figures géométriques bien définies mais jusqu'alors invisibles [TOS 99]. Les fractals sont quotidiennement observables dans les lignes des nuages, des montagnes ou la croissance des arbres et suscitent des engouements conceptuels applicables à la médecine, la sociologie, l'économie... et l'architecture.

#### 6.1.2 Applications à l'architecture

Les logiques de prolifération de type fractal irriguent aujourd'hui encore la création architecturale, comme le confirment les récents projets lauréats du Grand Egyptian Museum (Fig. 6-1) de H. Peng Architectes, ou du plus modeste Auditorium de Saint-Cyprien (Fig. 6-2) de D. Serero. Les couvertures de ces propositions sont respectivement inspirées par le triangle de Sierpinski et l'arbre fractal.



Fig. 6-1: Grand Musée d'Égypte – 2011 / 2012

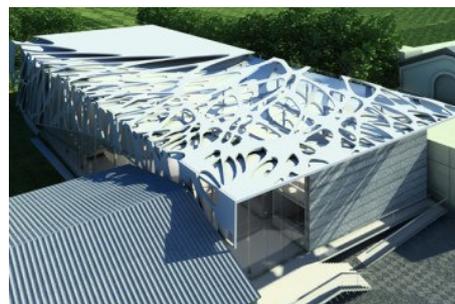


Fig. 6-2: Auditorium de St Cyprien – 2008

Le terminal n°3 de l'aéroport de Stuttgart (Fig. 6-3) montre la réalisation de structures arborescentes 3D. La ramification progressive des éléments tubulaires par l'intermédiaire de nœuds de connection moulés permet de répartir les supports de la toiture tout en limitant l'emprise au sol.



Fig. 6-3: Terminal 3 – Gerkan Marg & Partner – Stuttgart – Allemagne – 2004

L'architecture fractale conserve ainsi toute son actualité, comme peut aussi en témoigner l'un des thèmes d'une équipe de recherche à l'EPFL (Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne) qui s'est consacrée à la « géométrie fractale et à ses applications dans le domaine de la construction ». Ce projet

interdisciplinaire regroupe des mathématiciens et des chercheurs / ingénieurs en construction selon l'objectif de développer une nouvelle approche de la conception et de la production de l'architecture free-form. Une enveloppe fractale (Fig. 6-4) composée de panneaux en bois plans (Fig. 6-5) est l'une de leurs études [STO 08] emblématique.

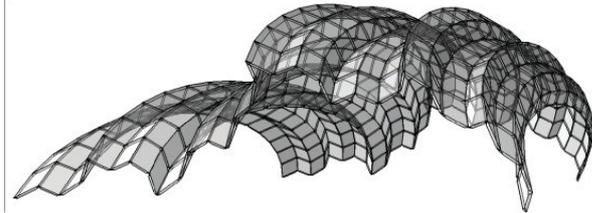


Fig. 6-4: Enveloppe fractale avec épaisseur

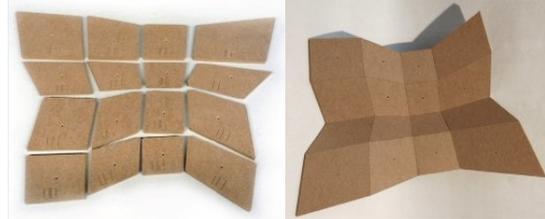


Fig. 6-5: Eléments plans du prototype

### 6.1.3 Propositions

Les enveloppes parcourues par pavage fractal dans les précédents projets (Fig. 6-1 et Fig. 6-2) sont planes. On retrouve cette limitation à une géométrie simple dans [FEN 07] qui propose une étude comparative de différents pavages fractals rigidifiant une coque conique. Cela traduit la difficulté de générer géométriquement un maillage sur une surface plus complexe.

Toutefois, la possibilité de faire « croître » une arborescence sur une surface gauche apparaît comme une évolution logique et fructueuse que nous proposons de tester. Chacun des points d'un maillage fractal (Fig. 6-6) étant connu, nous pouvons alors les immerger dans une surface gauche et obtenir, par exemple, une forme déformée du triangle de Sierpinski (Fig. 6-7).

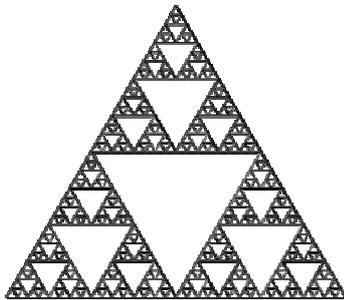


Fig. 6-6: Triangle de Sierpinski

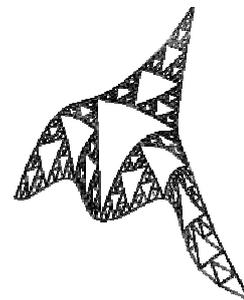


Fig. 6-7: Triangle de Sierpinski immergé dans une pSurface

De façon similaire, la proposition pour l'Auditorium de Saint Cyprien pourrait être ré-interprétée et apposée sur une surface courbe. Partant de l'approche de D. Serero, nous avons ainsi tout d'abord travaillé sur un arbre fractal plan (Fig. 6-8 à Fig. 6-10).

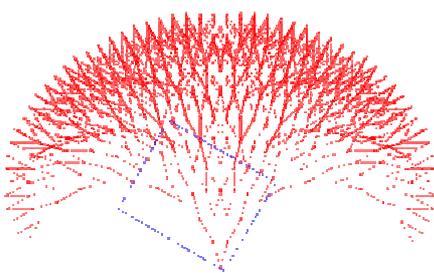


Fig. 6-8: Arbre fractal (10 itérations)



Fig. 6-9: Détail

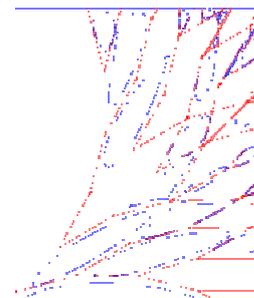


Fig. 6-10: Conception des ouvertures

Ensuite, chacune des données a été transférée dans un espace paramétrique arbitraire pour obtenir l'allure déformée de l'arborescence (Fig. 6-11 à Fig. 6-16).

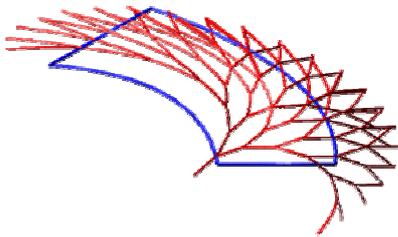


Fig. 6-11: Arbre fractal immergé

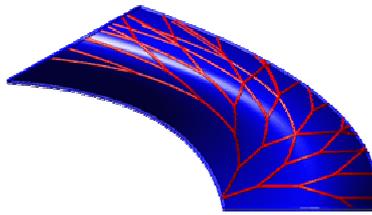


Fig. 6-12: Détail immergé

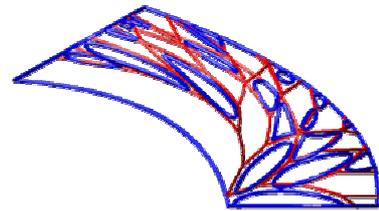


Fig. 6-13: Conception des ouvertures

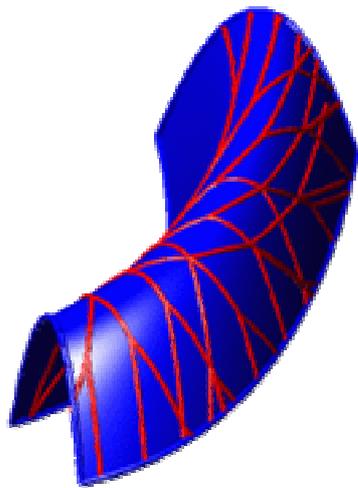


Fig. 6-14: Arbre fractal immergé

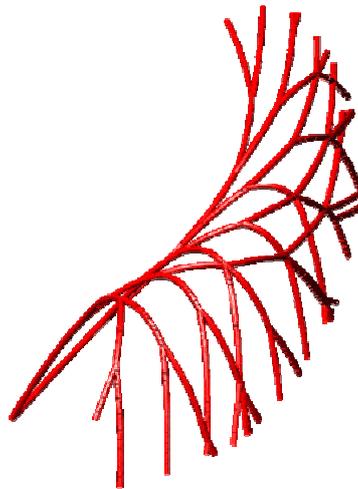


Fig. 6-15: Réseau structurel

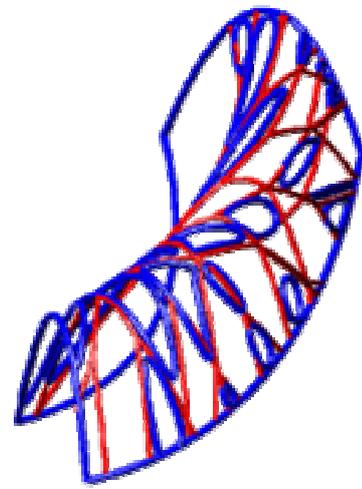


Fig. 6-16: Découpe des ouvertures

#### 6.1.4 Remarques

Les logiques proliférantes, que l'on retrouve dans les morphogénèses organiques, peuvent avoir des applications pertinentes dans la conception des structures complexes. Nos développements sur les ipFormes ont ainsi permis d'identifier des outils capables de générer de telles organisations et d'en proposer des exemples sur le triangle de Sierpinsky et l'arbre fractal. En effet, la figure (Fig. 6-15) montre que le réseau fractal parcourant la surface pourrait être envisagé comme localisation des éléments porteurs de l'enveloppe. Une hiérarchie des sections, similaire au projet de l'aéroport de Stuttgart (Fig. 6-3), pourrait également être utilisée. Enfin, une extension vers des arrangements fractals dans des volumes étendrait certainement nos propositions à l'étude de structures tridimensionnelles.

## 6.2 Grille en tenségrité non-standard

### 6.2.1 Introduction

Les systèmes en tenségrité ont été succinctement cités en première partie de nos travaux dans la famille des formes mécaniques. Ils représentent l'archétype du système complexe pour lequel la forme résulte du couplage entre les éléments. L'agencement tridimensionnel des composants leur confère un caractère non-standard sans avoir nécessairement recours à la courbure. La réalisation d'une simple grille plane soulève cependant des difficultés, tant au niveau de l'ingénierie de calcul que de la confection des nœuds de connexion. Elles n'enlèvent toutefois rien à leurs intérêts géométriques et mécaniques.

En effet, les outils classiques de génération limitent ces configurations spatiales à utiliser des transformations géométriques élémentaires. A l'inverse, les outils numériques développés pour déterminer leur position d'équilibre conduisent à des systèmes très irréguliers et peu enclins à une compréhension immédiate. Il nous semble toutefois que les grilles en tenségrité ont les potentialités nécessaires pour exprimer une richesse morphologique comparable, voire inspirée, de celles des formes flexibles.

Comme ces structures sont trop complexes pour être générées directement sous leur forme définitive, l'utilisation de l'outil paramétrique est des plus appropriés. Nous proposons donc de leur appliquer les opérateurs de déformation géométrique pour en explorer les possibilités formelles et générer des grilles en tenségrité à double courbure.

### 6.2.2 Etat de l'art

Un aperçu historique non exhaustif montre l'évolution des configurations formelles pour des systèmes en tenségrité présentant de la courbure. Le lecteur pourra se référer à la littérature spécialisée [MOT 05] pour plus de précisions.

#### 6.2.2.1 Systèmes uni-directionnels

La recherche de configurations courbes s'est d'abord appliquée à une seule direction de l'espace. On retrouve ainsi les propositions d'assemblage de modules pour générer un tore (Fig. 6-17) ou un arc (Fig. 6-18). La courbure est ici produite par modifications de longueurs des composants barres et/ou câbles.

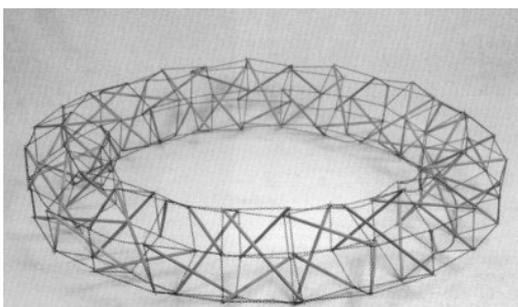


Fig. 6-17: Tore en tenségrité – D. Emmerich



Fig. 6-18: Arc en tenségrité – R. Motro

#### 6.2.2.2 Systèmes bi-directionnels

L'étape suivante a mené à l'assemblage de modules dans les deux directions de l'espace pour créer des grilles courbes. Les configurations géométriques proposées sont construites sur des transformations élémentaires que l'outil génératif de « Formex Algèbre » [NOO 93] permettait par exemple d'écrire selon une représentation numérique (Fig. 6-19 et Fig. 6-20).

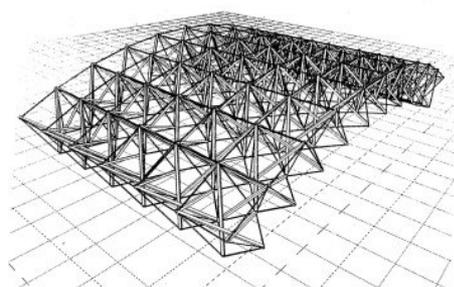


Fig. 6-19: Grille cylindrique



Fig. 6-20: Grilles à double courbure

### 6.2.2.3 Systèmes irréguliers

Des méthodes de résolution numérique de l'équilibre ont ensuite permis d'étendre la recherche de formes [ZHA 06] [BAU 06]. Des configurations irrégulières ont ainsi pu être développées à des fins de modélisation de systèmes biologiques. Ces applications sortent du cadre de nos travaux mais nous en proposons des illustrations pour mettre en évidence l'absence de continuité entre des systèmes à double courbure, résultant de transformations élémentaires, et ceux irréguliers (Fig. 6-21 et Fig. 6-22) dont la génération contrôlée est peu accessible au concepteur.

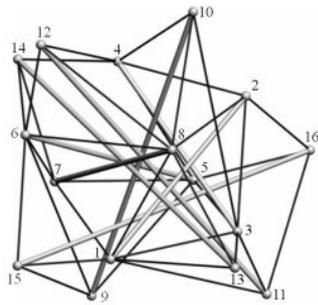


Fig. 6-21: Modèle numérique d'un système en tensegrité irrégulier

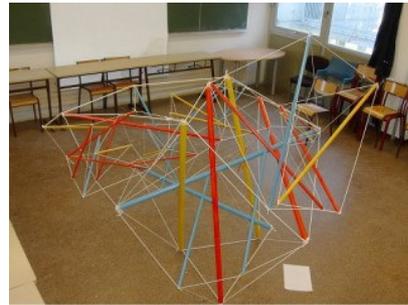


Fig. 6-22: Modèle physique d'un système en tensegrité irrégulier

### 6.2.3 Opérateur de déformation appliqué à la morphogenèse des systèmes en tensegrité

Par analogie avec la proposition de D'Arcy Thompson, nous retrouvons ici le désarroi des ingénieurs face à l'absence d'outils quantitatifs permettant de décrire la génération de certains systèmes complexes. Nous proposons ainsi d'utiliser l'opérateur de déformation pour procéder à la morphogenèse d'une grille en tensegrité à double courbure.

Un module de tensegrité hexagonal et régulier, du type proposé par [NGU 07], est tout d'abord choisi comme module élémentaire (Fig. 6-23).

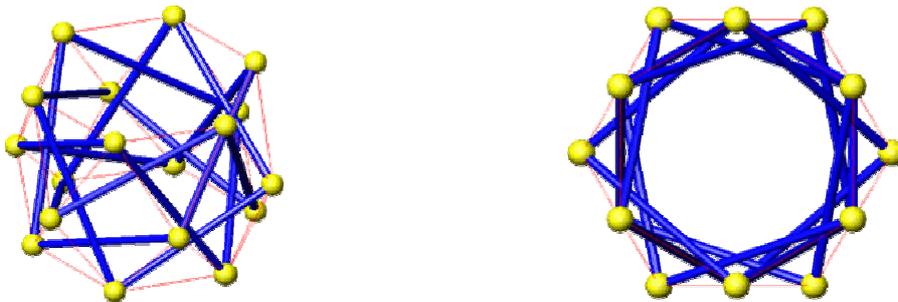


Fig. 6-23: Module de référence

La forme de ses faces donne des possibilités de pavage pour construire une grille plane. Les coordonnées des nœuds du système sont alors connues et définies dans le domaine paramétrique d'un volume de référence (comme expliqué au §4.2.2.2). Les déformations du treillis produisent ainsi un nouvel espace paramétrique. Ses transformations sont suivies par les nœuds de la grille, exprimés en coordonnées dans le repère global pour représenter la structure relationnelle de barres et de câbles. En fonction du volume de référence et des transformations appliquées, nous produisons ainsi de la simple courbure (Fig. 6-24), de la double courbure positive (Fig. 6-25) ou négative (Fig. 6-26).

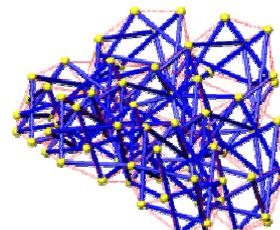
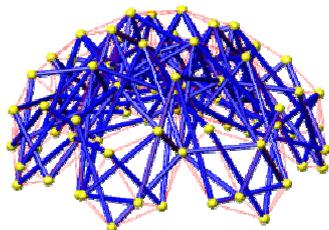
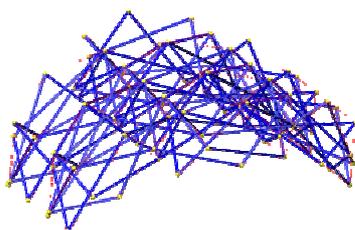


Fig. 6-24: Grille à simple courbure    Fig. 6-25: Grille à double courbure positive    Fig. 6-26: Grille à double courbure négative

L'extension de ce principe géométrique peut aussi conduire vers des modulations de courbure (Fig. 6-27) dont la génération est inaccessible si l'on se restreint aux outils traditionnels de représentation. On pourrait alors évoquer le concept de « tenségrité non-standard ».

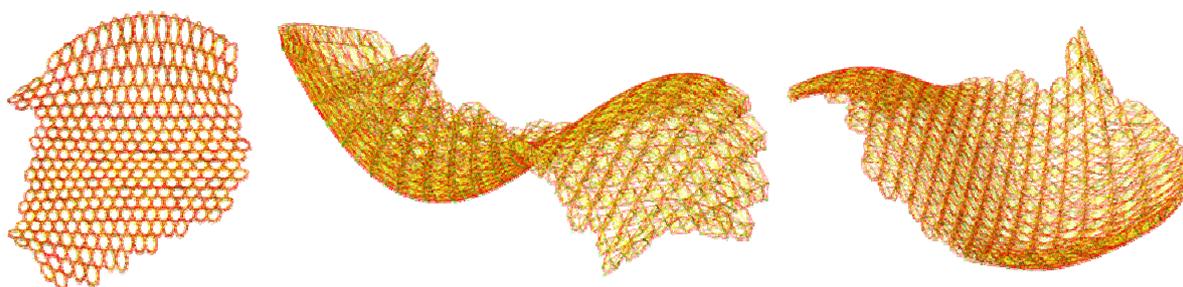


Fig. 6-27: Grille en tenségrité non-standard

#### 6.2.4 Conclusion

Le couplage entre la génération de pFormes et les opérateurs de déformation se révèle être une solution pour introduire des critères de morphologie structurale à des systèmes complexes. La richesse formelle atteinte ouvre de larges perspectives de recherche. En effet, nous soulignons que les résultats proposés ici sont limités à des études géométriques. Il conviendrait bien entendu de poursuivre ces développements en les associant à des études mécanique et technique. Ces travaux sont de nature exploratoire et il ne s'agit pas de chercher à les appliquer en l'état pour l'ingénierie du bâtiment. Les configurations complexes ainsi générées peuvent également concerner d'autres domaines, comme celui des matériaux, et il serait plus juste de parler dans ce cas d'un possible « matériau en tenségrité ».

## 7 CONCLUSION

La dernière partie de ce travail a permis de développer le concept géométrique d'immersion avec un objectif opérationnel orienté vers la résolution de problèmes spécifiques au processus de conception des enveloppes complexes. En effet, l'approche géométrique par pFormes a le grand intérêt d'être transposable aux formes immergées.

D'abord issues d'un mode de génération géométrique, ces formes sont ensuite formalisées afin d'en poursuivre l'exploitation. Des ipCourbes et des ipSurfaces peuvent ainsi être définies en dehors des pFormes dans lesquelles ces objets sont initialement spécifiés. De cette façon, les formes immergées deviennent des pFormes à part entière, auxquelles l'ensemble des opérateurs développés est applicable.

Cette base théorique nous permet aussi d'étendre les outils d'aide à la conception pour compléter le panel de solutions techniques et/ou mécaniques déjà proposé en troisième partie :

- les possibilités de parcours sur une surface par des ipCourbes multiplient les choix possibles pour des réseaux structuraux ou des pavages géométriques ;
- la double définition des ipFormes, soit par rapport au domaine paramétrique de la pForme immergente, soit par rapport à l'espace global, est exploité pour approcher des courbes géodésiques par des pCourbes. Les points de contrôle locaux servent de variables pour la recherche d'un minimum local de la longueur, le passage aux points de contrôle globaux déterminant ensuite totalement la pCourbe qui approche la ligne géodésique reliant deux points cibles ;
- les ipSurfaces apportent des alternatives pertinentes au calepinage d'une enveloppe par des panneaux, généralement positionnés selon des surfaces reparamétrées à partir des directions isoparamétriques ;
- le couplage existant entre une forme et ses formes immergées nous amène au principe de « free form deformation » applicable à la morphogenèse des enveloppes flexibles.

L'opportunité de disposer d'informations suffisantes sur le projet non-standard des Ruralies nous a guidés vers ce cas d'étude pour tester les alternatives apportées par les outils d'immersion et en révéler les intérêts pour des calepinages complexes.

Enfin, ces travaux sur l'immersion nous ont conduit à exposer des développements exploratoires sur la génération de réseaux fractals, comme le triangle de Sierpinsky ou les arborescences proliférantes sur des enveloppes gauches. Un autre développement s'est tourné vers la génération de grilles en tenségrité présentant la richesse formelle des formes flexibles et inaccessibles par les outils classiques.

L'étude des formes immergées ouvre plusieurs perspectives de développement tant au niveau des courbes que des surfaces et, au-delà, des volumes. Nous envisageons ainsi la poursuite de ces travaux afin d'étendre, par exemple, la détermination de pCourbes approchant des lignes particulières comme les lignes de courbure. D'autres part, les points de contrôle pourraient servir de variables pour optimiser des exigences mécaniques de résistance ou de rigidité. De plus, ces développements sur les ipCourbes profiteraient directement aux ipSurfaces. Nous savons que le calepinage des surfaces complexes est un véritable problème lors du processus de conception car il concentre des compromis esthétique, mécanique et technique. L'enrichissement de ce savoir-faire contribuerait ainsi à la diversification des solutions opérationnelles.



## **CONCLUSION**



La morphologie structurale identifie la transmission de l'information entre acteurs d'un projet comme critère majeur d'opérabilité et de constructibilité rationnelle. Nous avons ainsi montré que l'atomisation du processus de conception revient, dans le cas des formes flexibles, à singulariser le paramètre de Forme en raison de l'inadaptation des logiciels actuels à en communiquer sa génération et ses implications. Révélant ainsi les limites des outils morphologiques disponibles, nous avons souhaité en proposer de nouveaux. Parmi les diverses stratégies possibles, il nous a paru nécessaire de positionner la Forme au centre de notre réflexion pour en démontrer, a contrario, le potentiel unificateur.

Nos travaux se sont alors orientés vers l'apport d'une approche géométrique des formes gauches, basée sur des règles génératives simples qui assurent une compréhension de leur génération. Les formes pascaliennes, ou pFormes, se sont avérées répondre à ces attentes. En effet, cette approche permet une continuité depuis l'esquisse jusqu'au modèle numérique et à la réalisation, comme nos expérimentations auprès d'un public multi-disciplinaire ont permis de le vérifier. En rendant plus accessibles des objets complexes, les différents acteurs d'un projet partagent alors un vocabulaire qui leur permet d'échanger et les assiste dans la résolution de problèmes de conception spécifiques et récurrents dans l'architecture non-standard.

Cette base théorique mène ensuite vers le développement d'outils opérationnels. L'exploitation des informations géométriques contenues dans ces formes sert alors à faire émerger des solutions mécaniques et techniques. Cet enrichissement de la palette d'outils de l'ingénieur lui donne ainsi les moyens de parvenir avec l'architecte à de meilleurs compromis. Nous avons à cet effet développé un ensemble de fonctionnalités qui ont été implémentées dans un logiciel utilisé par la plupart des bureaux d'études et des concepteurs. Ces outils permettent d'aborder deux situations particulières du processus de conception :

- la morphologie est préalablement fixée

Nous donnons alors la possibilité de créer des réseaux structuraux ou des calepinages de surfaces grâce à la génération de courbes particulières (lignes de courbures, asymptotiques, géodésiques et d'écoulement) ainsi que de pCourbes et de pSurfaces immergées. L'immersion de réseaux à logique proliférante de type fractal est également une approche féconde et à développer. D'autre part, les possibilités de « panélisation » d'une enveloppe par des ipSurfaces apportent d'autres réponses aux solutions couramment adoptées.

- la morphologie doit faire l'objet d'une recherche de forme

Ce processus est généralement contraint à respecter des critères technologiques particuliers. Les outils ainsi proposés aident à la génération d'enveloppes réglées, développables ou composées de quadrangles plans. Pour ces dernières, diverses approches sont suggérées, parmi lesquelles un algorithme innovant généralisant les surfaces dites de « translation ». De plus, les avantages des formes paramétriques ont conduit nos réflexions vers la génération de pVolumes particuliers, alors présentés comme une extension des surfaces de Coons. Enfin, la création de pFormes et d'ipFormes nous a incité à appliquer des outils de déformation et de « free form deformation » aux problématiques de conception. Des formes complexes, voire inaccessibles par les outils classiques, sont ainsi réalisables en conservant une représentation géométrique des transformations utilisées. Nous en présentons une application au cas des grilles de tensegrité permettant d'accroître leur richesse formelle vers celle des formes flexibles.

Chacun de ces outils est par ailleurs porteur de perspectives de développements. Nous souhaitons ainsi poursuivre l'étude des formes immergées afin de diversifier leur capacité à répondre sur un plan géométrique à des contraintes mécaniques et technologiques, tout en s'orientant vers davantage de rationalisation et d'efficacité (maximisation d'éléments identiques, répétitivité de motifs, etc). D'autre part, il serait intéressant d'étendre les outils de génération par pFormes au cas des B-splines non uniformes, et par extension à celui des nurbs, pour avoir une plus grande richesse formelle tout en conservant l'intérêt de cette approche. Sur un plan mécanique, nous avons suggéré le bénéfice d'utiliser les points de contrôle pour la définition géométrique nécessaire à un calcul de structure

(éléments finis ou densité de contraintes). De plus, en exploitant la « concentration d'informations » qu'ils portent, ils pourraient servir de variables d'optimisation pour respecter des exigences de rigidité ou de résistance.

Dans le contexte actuel de crise financière et de préoccupations climatiques, la tendance d'une architecture non-standard, ambitieuse et indifférente aux exaspérations qu'elle suscite, va probablement devoir revenir à plus de rationalité et rediscuter de ses propositions formelles. Nos travaux apportent alors une contribution pour permettre une meilleure maîtrise du processus de conception, garant d'une plus grande liberté de création, et avoir une communication plus efficace entre les intervenants d'un projet.

## **ANNEXE A**

### **Eléments de théorie des courbes**



## 1 INTRODUCTION

La description des propriétés locales des courbes et surfaces appartient au domaine de la géométrie différentielle. Cette discipline est largement basée sur les travaux des pionniers comme L. Euler (1707-1783), C. Monge (1746-1818) et C.F. Gauss (1777-1855). L'outil principal pour la démonstration de résultats généraux est l'utilisation de systèmes de coordonnées locales, dans lesquels les propriétés géométriques sont plus facilement décrites et étudiées. Ces rappels de géométrie différentielle [LAR 78] [FAR 90] sont indispensables à l'introduction d'un vocabulaire utilisé dans les parties 2 et 3 de nos travaux.

## 2 ECRITURE PARAMETRIQUE

La définition d'une courbe dans l'espace  $\mathfrak{R}^3$  sous forme paramétrique présente l'intérêt d'une simplification des écritures. Il s'agit d'une approche dans laquelle les coordonnées d'un point  $M$  de la courbe vont être exprimées en fonction d'un paramètre  $u$  quelconque mais généralement inclus dans un intervalle unitaire  $[0,1]$  (Fig. 2-1). On obtient ainsi le vecteur :

$$\vec{M}(u) = \begin{bmatrix} x = x(u) \\ y = y(u) \\ z = z(u) \end{bmatrix} \text{ avec } u \in [0,1] \subset \mathfrak{R} \quad (2.1)$$

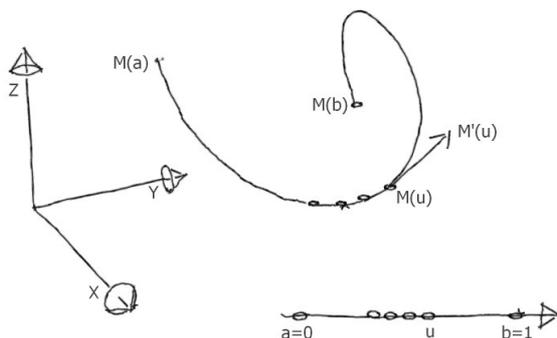


Fig. 2-1: Courbe paramétrée dans l'espace

Le paramètre  $u$  peut représenter le temps, la courbe étant alors la trajectoire du point  $M$ .

Nous nous restreignons à une paramétrisation régulière de la courbe en faisant l'hypothèse que :

$$\frac{d\vec{M}(u)}{du} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{du} = x'(u) \\ \frac{dy}{du} = y'(u) \\ \frac{dz}{du} = z'(u) \end{bmatrix} = \vec{M}' \neq 0 \text{ avec } u \in [0,1] \quad (2.2)$$

Introduisons à présent l'abscisse curviligne  $s$  d'un point de la courbe, qui représente la longueur qui sépare sur la courbe un point courant d'un point fixe.

On a  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$  si le système d'axes est orthogonal, ou encore  $ds^2 = (x'^2 + y'^2 + z'^2) du^2$  selon le paramètre  $u$ . Cette paramétrisation de la longueur d'arc de la courbe est invariante.

### 3 REPERE DE FRENET

L'introduction du repère de Frenet, un repère de coordonnées locales lié à tout point  $M(u)$  de la courbe, facilite la description des propriétés locales de la courbe en ce point. Les premiers termes de l'expansion de Taylor de  $\vec{M}(u + \Delta u)$  en  $u$  sont donnés par :

$$\vec{M}(u + \Delta u) = \vec{M} + \vec{M}' \Delta u + \vec{M}'' \frac{1}{2} \Delta u^2 + \vec{M}''' \frac{1}{6} \Delta u^3 + \dots \quad (3.1)$$

Supposons que les trois premières dérivées existent et soient linéairement indépendantes. Alors,  $\vec{M}', \vec{M}'', \vec{M}'''$  forment un système affine de coordonnées locales d'origine  $M$ . Dans ce système,  $\vec{M}(u)$  est représenté par ses coordonnées canoniques :

$$\begin{bmatrix} \Delta u + \dots \\ \frac{1}{2} \Delta u^2 + \dots \\ \frac{1}{6} \Delta u^3 + \dots \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

A partir de ce repère local affine, on obtient un repère local cartésien orthonormal d'origine  $M$  et d'axes  $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$  grâce à la méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt (Fig. 3-1 et Fig. 3-2) :

$$\vec{t} = \frac{\vec{M}'}{\|\vec{M}'\|}, \quad \vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{t}, \quad \vec{b} = \frac{\vec{M}' \wedge \vec{M}''}{\|\vec{M}' \wedge \vec{M}''\|} \quad (3.3)$$

où  $\vec{t}$  est le vecteur tangent,  $\vec{n}$  le vecteur normal et  $\vec{b}$  le vecteur binormal. Le trièdre trirectangle  $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$  attaché à chaque point de la courbe étudiée est appelé repère de Frenet ; son orientation varie lorsque  $M$  parcourt la courbe. La variation du repère de Frenet en fonction de  $u$  fournit des informations concernant le comportement de la courbe dans l'espace.

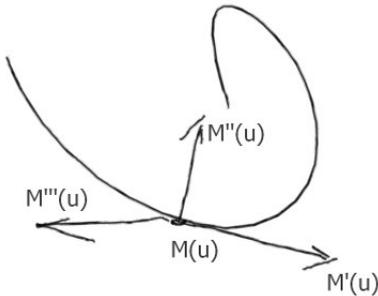


Fig. 3-1: Repère local affine

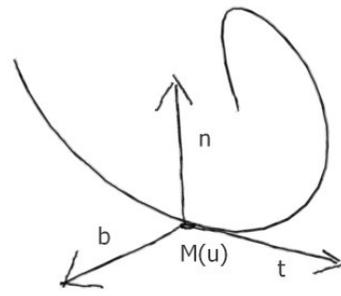


Fig. 3-2: Repère de Frenet

Précisons que le plan  $(\vec{t}, \vec{n})$  est le plan osculateur,  $(\vec{n}, \vec{b})$  le plan normal et  $(\vec{t}, \vec{b})$  le plan rectifiant.

### 4 FORMULES DE SERRET-FRENET

C'est un principe fondamental en géométrie différentielle que d'exprimer les changements locaux du repère en fonction du repère lui-même. Les formules résultantes sont particulièrement simples si on utilise la paramétrisation de longueur d'arc  $s$ . Le vecteur unitaire  $\vec{t}$  tangent à la courbe est ainsi défini par rapport à  $s$  par :

$$\vec{t} = \frac{\vec{M}'}{\|\vec{M}'\|} = \frac{d\vec{M}}{du} \frac{du}{ds} = \frac{d\vec{M}}{ds} \text{ car } \frac{1}{\|\vec{M}'\|} = \frac{du}{ds} \quad (4.1)$$

Comme  $\vec{t}^2 = 1$ , stipulant que la courbe est parcourue à la vitesse unité, on obtient  $\vec{t} \cdot \frac{d\vec{t}}{ds} = 0$ , qui traduit l'orthogonalité de ces 2 vecteurs.

On pose alors :

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R} = \rho \vec{n} \quad (4.2)$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur normal,  $R$  le rayon de courbure et  $\rho$  la courbure.

Par suite, on montre que les calculs de  $\frac{d\vec{n}}{ds}$  et  $\frac{d\vec{b}}{ds}$  fournissent les écritures suivantes :

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{\vec{t}}{R} - \frac{\vec{b}}{T} = -\rho \vec{t} - \tau \vec{b} \quad (4.3)$$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \tau \vec{n} \quad (4.4)$$

où  $T$  est le rayon de torsion et  $\tau$  la torsion.

Les trois formules de Serret-Frenet sont ainsi définies (Fig. 4-1) :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{t}}{ds} = \rho \vec{n} \\ \frac{d\vec{n}}{ds} = -\rho \vec{t} - \tau \vec{b} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} = \tau \vec{n} \end{cases} \quad (4.5)$$

Grâce à ces formules, la forme des projections de la courbe sur ses trois plans principaux peut être précisée. Ces résultats ne sont valables que si  $\rho$  et  $\tau$  sont non nuls en  $M$ . Dans le cas contraire, on obtient d'autres configurations (paramétrisation non régulière) sur lesquelles nous n'insisterons pas.

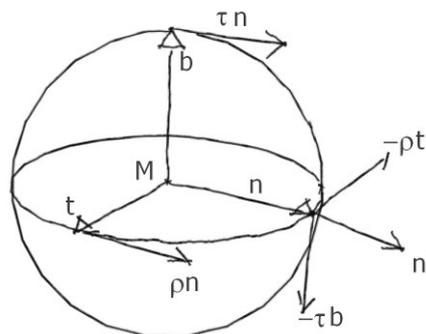


Fig. 4-1: Signification géométrique des formules de Serret-Frenet

## 5 CALCUL DE LA COURBURE ET DE LA TORSION

La courbure  $\rho$  et la torsion  $\tau$  peuvent être exprimées à la fois en fonction de l'abscisse curviligne  $s$  et en fonction du paramètre initial  $u$ .

$$\frac{d\vec{M}}{ds} = \frac{d\vec{M}}{du} \frac{du}{ds} \quad (5.1)$$

$$\frac{d^2\vec{M}}{ds^2} = \frac{d^2\vec{M}}{du^2} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + a \frac{d\vec{M}}{du} \quad (5.2)$$

$$\frac{d^3\vec{M}}{ds^3} = \frac{d^3\vec{M}}{du^3} \left(\frac{du}{ds}\right)^3 + b \frac{d^2\vec{M}}{du^2} + c \frac{d\vec{M}}{du} \quad (5.3)$$

$a$ ,  $b$  et  $c$  étant des fonctions qui s'éliminent par la suite.

$$\frac{d\vec{M}}{ds} \wedge \frac{d^2\vec{M}}{ds^2} = \frac{1}{\left\| \frac{d\vec{M}}{du} \right\|^3} \frac{d\vec{M}}{du} \wedge \frac{d^2\vec{M}}{du^2} \quad (5.4)$$

Ou encore :

$$\vec{t} \wedge \rho \vec{n} = \frac{\vec{M}' \wedge \vec{M}''}{\left\| \vec{M}' \right\|^3} \quad (5.5)$$

L'expression de la courbure s'en déduit :

$$\rho = \frac{\left\| \vec{M}' \wedge \vec{M}'' \right\|}{\left\| \vec{M}' \right\|^3} \quad (5.6)$$

De même pour la torsion :

$$\left( \frac{d\vec{M}}{ds}, \frac{d^2\vec{M}}{ds^2}, \frac{d^3\vec{M}}{ds^3} \right) = \frac{1}{\left\| \frac{d\vec{M}}{du} \right\|^6} \left( \frac{d\vec{M}}{du}, \frac{d^2\vec{M}}{du^2}, \frac{d^3\vec{M}}{du^3} \right) \quad (5.7)$$

Or comme,

$$\left( \frac{d\vec{M}}{ds}, \frac{d^2\vec{M}}{ds^2}, \frac{d^3\vec{M}}{ds^3} \right) = \left( \vec{t}, \rho \vec{n}, \frac{d\rho}{ds} \vec{n} - \rho(\rho \vec{t} + \tau \vec{b}) \right) = -(\vec{t}, \rho \vec{n}, \rho \tau \vec{b}) = -\rho^2 \tau \quad (5.8)$$

l'expression de la torsion est :

$$\tau = -\frac{1}{\rho^2} \frac{(\vec{M}', \vec{M}'', \vec{M}''')}{\left\| \vec{M}' \right\|^6} = -\frac{(\vec{M}', \vec{M}'', \vec{M}''')}{\left\| \vec{M}' \wedge \vec{M}'' \right\|^2} \quad (5.9)$$

La courbure et la torsion ont une signification géométrique en considérant un point  $\vec{M}(s)$  sur la courbe et un point suivant  $\vec{M}(s + \Delta s)$ . Soit  $\Delta\alpha$  l'angle entre les deux vecteurs tangents  $\vec{t}(s)$  et  $\vec{t}(s + \Delta s)$  et

soit  $\Delta\beta$  l'angle entre les deux vecteurs binormaux  $\vec{b}(s)$  et  $\vec{b}(s + \Delta s)$  (angles exprimés en radians). On vérifie que  $\Delta\alpha = \rho \Delta s + \dots$  et  $\Delta\beta = -\tau \Delta s + \dots$  donc, lorsque  $\Delta s$  tend vers  $ds$ , on a :

$$\rho = \frac{d\alpha}{ds} \text{ et } \tau = -\frac{d\beta}{ds} \quad (5.10)$$

La courbure  $\rho$  et la torsion  $\tau$  font référence aux vitesses angulaires respectives de  $\vec{t}$  et  $\vec{b}$  lorsque le repère se déplace en fonction du paramètre  $s$ . Elles sont indépendantes de la paramétrisation courante de la courbe. Ce sont également des invariants euclidiens de la courbe, c'est-à-dire qu'elles ne sont pas modifiées par un mouvement de corps rigide. Enfin, chacune des deux fonctions continues  $\rho = \rho(s) > 0$  et  $\tau = \tau(s)$  définit d'une manière unique (excepté les mouvements de corps rigide) une courbe de courbure  $\rho$  et de torsion  $\tau$ . La torsion indique l'écart local de la courbe par rapport à son plan osculateur ; elle est nulle pour une courbe plane. Le signe de la torsion a une signification géométrique.



## **ANNEXE B**

### **Eléments de théorie des surfaces**



## 1 INTRODUCTION

En poursuite de l'annexe A, nous proposons des rappels de géométrie différentielle [LAR 78] [FAR 90], nécessaires à l'introduction du vocabulaire utilisé dans les parties 2, 3 et 4 de nos travaux, et concernant les propriétés des surfaces.

## 2 ECRITURE PARAMETRIQUE

Les coordonnées d'un point  $M$  d'une surface peuvent être définies dans une forme implicite  $f(x, y, z) = 0$ . Toutefois, la forme paramétrée en fonction des paramètres  $u$  et  $v$  quelconques mais généralement inclus dans un intervalle unitaire  $[0,1]$  est plus utile pour ce qui nous concerne

$$\vec{M}(u, v) = \begin{bmatrix} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{bmatrix} \text{ avec } u, v \in [0,1] \subset \mathfrak{R} \quad (2.1)$$

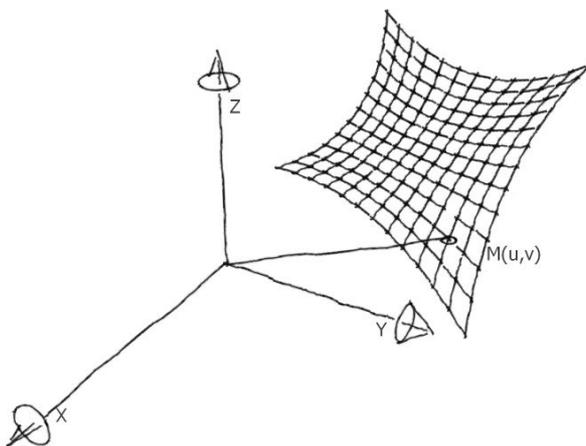


Fig. 2-1: Surface paramétrée dans l'espace

Une courbe tracée sur la surface peut aussi être définie implicitement en liant  $u$  et  $v$ , soit  $\phi(u, v) = 0$ . Si on fixe un des deux paramètres, le point  $M$  décrit une courbe coordonnée ou isoparamétrique. La surface est couverte d'un réseau de ces courbes, c'est-à-dire par deux familles de courbes à un paramètre. Les dérivées partielles  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}$  et  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$  définissent les tangentes aux courbes coordonnées.

Pour éviter d'éventuels problèmes de normales indéfinies, on suppose que

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \neq \vec{0} \quad (2.2)$$

c'est-à-dire que, par analogie avec la description en annexe A, les courbes isoparamétriques sont régulières et n'ont aucun point de tangence.

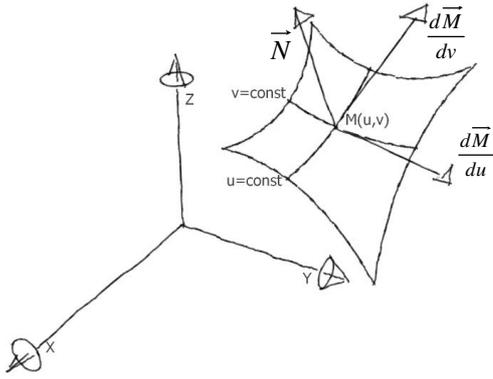
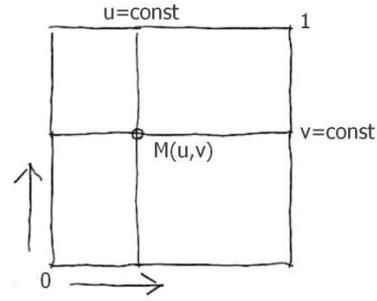
Fig. 2-2: Repère local au point  $M(u,v)$  d'une surface

Fig. 2-3: Analogie avec le domaine paramétrique

Soit  $ds$  l'élément d'arc infinitésimal ; l'élément carré de longueur  $ds^2$  est appelé première forme fondamentale :

$$ds^2 = d\vec{M}^2 = \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} dv \right)^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \quad (2.3)$$

où,  $E, F, G$  sont les coefficients de la première forme fondamentale.

$$E = \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \right)^2, \quad F = \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \quad \text{et} \quad G = \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \right)^2 \quad (2.4)$$

### 3 REPERE LOCAL

Les dérivées partielles  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}$  et  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$  en un point  $M$  engendrent le plan tangent à la surface en  $M$ . La normale  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$  au plan tangent coïncide avec la normale à la surface en  $M$ . On définit alors le vecteur unitaire normal :

$$\vec{N} = \frac{\frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \right\|} = \frac{1}{H} \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \right) \quad (3.1)$$

où  $H$  est le discriminant de la première forme fondamentale.

$$H = \left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \right\| = \sqrt{EG - F^2} \quad (3.2)$$

Avec les vecteurs non normalisés  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}$  et  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$ ,  $\vec{N}$  forme un système de coordonnées locales en  $M$ , généralement non orthogonal et nommé repère de Gauss. Ce repère joue pour les surfaces un rôle analogue à celui du repère de Frenet pour les courbes.

#### 4 FORMULES DE DARBOUX

Considérons une courbe immergée dans une surface. On lui attache un trièdre de Frenet  $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$  ainsi que le trièdre  $(\vec{t}, \vec{c}, \vec{N})$  de la surface ;  $\vec{N}$  étant la normale à la surface en  $M$  et  $\vec{c}$  un vecteur unitaire du plan tangent tel que  $(\vec{t}, \vec{c}, \vec{N})$  soit un trièdre direct. Soit  $\theta$  l'angle  $(\vec{n}, \vec{N})$  orienté suivant  $\vec{t}$ .

Le calcul de  $\frac{d\vec{t}}{ds}, \frac{d\vec{c}}{ds}, \frac{d\vec{N}}{ds}$  en fonction de  $\vec{t}, \vec{c}, \vec{N}$ , à l'aide des expressions de changement de repère et des formules de Serret-Frenet conduit aux écritures suivantes :

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \rho \vec{N} \cos \theta + \rho \vec{c} \sin \theta \quad (4.1)$$

$$\frac{d\vec{c}}{ds} = -\rho \vec{t} \sin \theta - \vec{N} \left( \tau - \frac{d\theta}{ds} \right)$$

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \rho \vec{t} \cos \theta + \vec{c} \left( \tau - \frac{d\theta}{ds} \right)$$

On a ainsi les trois formules dites de Darboux :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{t}}{ds} = \rho_n \vec{N} + \rho_g \vec{c} \\ \frac{d\vec{c}}{ds} = -\rho_g \vec{t} - \tau_g \vec{N} \\ \frac{d\vec{N}}{ds} = -\rho_n \vec{t} + \tau_g \vec{c} \end{cases} \quad (4.2)$$

avec,

$$\begin{cases} \rho_n = \rho \cos \theta \\ \rho_g = \rho \sin \theta \\ \tau_g = \tau - \frac{d\theta}{ds} \end{cases} \quad (4.3)$$

où  $\rho_n$  est la courbure normale,  $\rho_g$  la courbure géodésique et  $\tau_g$  la torsion géodésique.

La courbure normale et la torsion géodésique ne dépendent que de la surface et de la tangente à la courbe, et non pas de la courbe elle-même, dont dépend en revanche la courbure géodésique.

#### 5 COURBURE NORMALE

Par projection sur  $\vec{t}$  de la troisième formule de Darboux, nous obtenons l'expression de la courbure normale  $\rho_n$  :

$$\rho_n = -\vec{t} \cdot \frac{d\vec{N}}{ds} = -\frac{d\vec{M}}{ds} \cdot \frac{d\vec{N}}{ds} = -\frac{\left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} dv \right) \cdot \left( \frac{\partial \vec{N}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{N}}{\partial v} dv \right)}{ds^2} \quad (5.1)$$

mais  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \cdot \vec{N} = 0$  et  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \cdot \vec{N} = 0$  d'où par dérivation :

$$\frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial u^2} \cdot \vec{N} + \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{N}}{\partial u} = 0 \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial u \partial v} \cdot \vec{N} + \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{N}}{\partial v} = 0 \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial u \partial v} \cdot \vec{N} + \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{N}}{\partial u} = 0 \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial v^2} \cdot \vec{N} + \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{N}}{\partial v} = 0 \quad (5.5)$$

Par substitution dans ( 5.1 ), nous en déduisons l'expression de la courbure normale :

$$\rho_n = \vec{N} \cdot \frac{\left( \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial v^2} dv^2 \right)}{ds^2} \quad (5.6)$$

grâce à ( 3.1 ), on a donc :

$$\rho_n = \frac{d\psi^2}{ds^2} \quad (5.7)$$

où apparaît la deuxième forme quadratique fondamentale,

$$d\psi^2 = L du^2 + 2 M du dv + N dv^2 \quad (5.8)$$

avec les coefficients de la seconde forme fondamentale  $L, M, N$  :

$$L = \frac{D}{H} \text{ et } D = \left( \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \right) \quad (5.9)$$

$$M = \frac{D'}{H} \text{ et } D' = \left( \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial u \partial v}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \right) \quad (5.10)$$

$$N = \frac{D''}{H} \text{ et } D'' = \left( \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial v^2}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \right) \quad (5.11)$$

## 6 DIRECTIONS PRINCIPALES

La courbure normale dans la direction  $(du, dv)$  est obtenue par le rapport de la deuxième forme quadratique fondamentale sur la première :

$$\rho_n = \frac{L du^2 + 2 M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2 F du dv + G dv^2} \quad (6.1)$$

En posant :

$$\frac{dv}{du} = \lambda \quad (6.2)$$

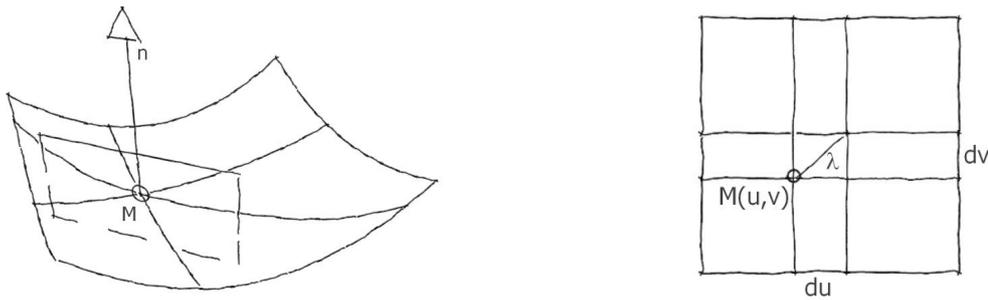


Fig. 6-1: Section normale d'une surface

alors ( 6.1 ) devient :

$$\rho_n(\lambda) = \frac{L + 2M\lambda + N\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2} \quad (6.3)$$

Les extremums de  $\rho_n$  sont obtenus pour :

$$\rho_n = \frac{M + N\lambda}{F + G\lambda} = \frac{L + M\lambda}{E + F\lambda} \quad (6.4)$$

L'équation aux directions principales s'en déduit :

$$(NF - GM)\lambda^2 + (NE - GL)\lambda + ME - FL = 0 \quad (6.5)$$

Dans le cas particulier où  $L/M/N = E/F/G$ , la courbure normale ne dépend pas de  $\lambda$ . Les points ayant cette propriété sont appelés « ombilics ». Un ombilic d'une surface est un point où les rayons de courbures des sections normales sont tous égaux entre eux.

Dans le cas général,  $\rho_n$  est une fonction de  $\lambda$ . Lorsque le vecteur tangent unitaire balaie le plan tangent [KAR 99],  $\rho_n(\lambda)$  est une fonction quadratique rationnelle qui prend des valeurs extrêmes en  $\rho_1$  et  $\rho_2$  correspondant aux racines  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de l'équation aux directions principales. Les quantités  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont toujours réelles et définissent des directions correspondantes dans le plan tangent appelées les directions principales. Rappelons la démonstration sur l'orthogonalité des directions principales.

$$d\vec{M}_1 = \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} du_1 + \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} dv_1 \quad \text{et} \quad d\vec{M}_2 = \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} du_2 + \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} dv_2 \quad (6.6)$$

avec  $d\vec{M}_1$  et  $d\vec{M}_2$ , première et seconde directions.

$$d\vec{M}_1 \cdot d\vec{M}_2 = E du_1 du_2 + F(du_1 dv_2 + du_2 dv_1) + G dv_1 dv_2 = E + F(\lambda_2 + \lambda_1) + G\lambda_1\lambda_2 \quad (6.7)$$

or, d'après ( 6.5 ), nous avons :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{GL - NE}{NF - GM} \quad \text{et} \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{ME - FL}{NF - GM} \quad (6.8)$$

On en tire le résultat annoncé :

$$d\vec{M}_1 \cdot d\vec{M}_2 = 0 \quad (6.9)$$

## 7 COURBURES PRINCIPALES

En éliminant  $\lambda$  dans ( 6.4 ), nous obtenons :

$$\lambda = \frac{F\rho_n - M}{N - G\rho_n} = \frac{E\rho_n - L}{M - F\rho_n} \quad (7.1)$$

Nous retrouvons ainsi l'équation aux courbures principales ( 7.2 ) dont la résolution permet d'obtenir  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , respectivement les courbures principales maximale et minimale.

$$(EG - F^2)\rho_n^2 + (2FM - EN - GL)\rho_n + LN - M^2 = 0 \quad (7.2)$$

## 8 COURBURES MOYENNE C ET TOTALE K

Nous tirons également de ( 7.2 ) l'expression de la courbure moyenne :

$$C = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2) = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} \quad (8.1)$$

Ainsi que celle de la courbure totale (ou gaussienne) :

$$K = \rho_1\rho_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (8.2)$$

La courbure gaussienne dépend des coefficients de la première et de la seconde forme fondamentales. Un résultat, très important et dû à Gauss, est que  $K$  peut ne s'exprimer qu'en fonction de E, F et G et de leurs termes dérivés. Connue sous le nom de *theorema egregium*, il stipule que  $K$  ne dépend que de la géométrie intrinsèque de la surface. La courbure gaussienne ne change donc pas si la surface est déformée d'une manière qui conserve les mesures de longueurs à sa surface.

Un point ombilic n'est pas un méplat ; sa courbure gaussienne ne s'annule pas et ils sont isolés [POU 05], à l'exception de la sphère pour laquelle tous les points sont ombilics. Les méplats, ou points plats, sont des points de la surface en lesquels  $K$  et  $C$  s'annulent simultanément.

## 9 CLASSIFICATION DES SURFACES

Les surfaces sont classiquement différenciées selon un critère basé sur le signe de leur courbure gaussienne :

- lorsque  $K < 0$  :  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont de signes opposés, ce qui permet d'identifier les surfaces à double courbure négative (ou inverse) tels que le paraboloid hyperbolique ou les surfaces de révolution à méridien concave ;
- lorsque  $K = 0$  : l'une des courbures principales est nulle, ce qui permet d'identifier les surfaces à simple courbure tels que les cônes, les cylindres, les surfaces engendrées par les tangentes à une courbe gauche. On démontre que ces surfaces sont développables, c'est-à-dire applicables sur un plan sans recouvrement ni déchirure ;
- lorsque  $K > 0$  :  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont de mêmes signes ce qui permet d'identifier les surfaces à double courbure positive tels que la sphère, l'ellipsoïde, les surfaces de révolution à méridien convexe.

Certaines surfaces peuvent changer de courbure suivant les zones et sont ainsi de type hybride, comme le tore (Fig. 9-2) ou les surfaces de révolution dont le méridien possède un point d'inflexion.

Le signe de la courbure gaussienne à une signification géométrique intéressante que l'on révèle par l'implication du théorème d'Euler. Les courbures en un point  $M$  dans des directions différentes ne sont

pas indépendantes les unes des autres. En prenant les lignes de courbure comme lignes isoparamétriques, la courbure normale peut s'écrire [FAR 90]

$$\rho_n(\lambda) = \rho_1 \cos^2 \phi + \rho_2 \sin^2 \phi \tag{9.1}$$

où  $\phi$  est l'angle entre  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}$  et le vecteur tangent  $\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \frac{dv}{dt}$  de la courbe considérée.

Or, en utilisant les coordonnées polaires  $r = \sqrt{R}$  et  $\phi$  pour un point  $y$  du plan tangent en  $M$ , ses coordonnées cartésiennes s'écrivent :

$$y_1 = \sqrt{R} \cos \phi \text{ et } y_2 = \sqrt{R} \sin \phi \tag{9.2}$$

enfin, en posant

$$\rho_1 = \frac{1}{R_1} \text{ et } \rho_2 = \frac{1}{R_2} \tag{9.3}$$

le théorème d'Euler prend la forme :

$$\frac{y_1^2}{\rho_1} + \frac{y_2^2}{\rho_2} = 1 \tag{9.4}$$

La relation (9.4) est l'équation d'une conique appelée l'indicatrice de Dupin (Fig. 9-1). Ses points  $y$ , dans la direction donnée par  $\phi$ , sont à la distance  $\sqrt{R}$  de  $M$  et les axes de l'indicatrice correspondent aux directions principales. Comme un renversement de la direction de la normale change le signe du rayon de courbure, cette conique est :

- une paire d'hyperboles si  $K < 0$  ;
- une paire de ligne parallèles si  $K = 0$  (mais  $H \neq 0$ , ce qui exclut les méplats) ;
- une ellipse si  $K > 0$ .

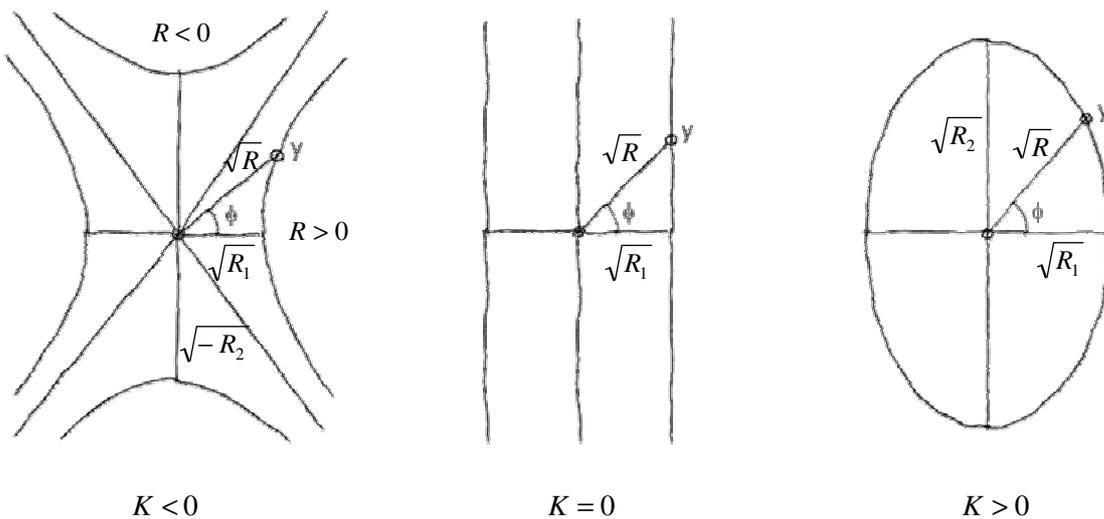


Fig. 9-1: Indicatrice de Dupin dans les cas hyperbolique, parabolique et elliptique

Géométriquement, l'indicatrice de Dupin peut-être interprétée comme l'intersection de la surface avec un plan parallèle au plan tangent en  $M$ , décalé d'une distance  $\varepsilon = \frac{1}{2m^2}$ , où  $m$  correspond au facteur de réduction à l'échelle  $\frac{1}{m}$  de l'indicatrice [FAR 90].

Un autre vocabulaire mathématique s'introduit alors pour la classification des surfaces ou de leurs portions :

- Lorsque  $K < 0$  : la surface est hyperbolique en ce point ;
- Lorsque  $K = 0$  : la surface est parabolique en ce point ;
- Lorsque  $K > 0$  : la surface est elliptique en ce point.

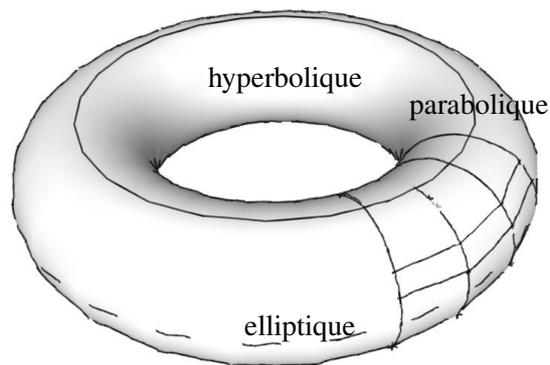


Fig. 9-2: Régions de points elliptiques, paraboliques et hyperboliques sur un tore

## **BIBLIOGRAPHIE**



- [AAN 08] Aanhaanen J., Demuyter J.Y., Bagneris M., Silvestri C., Motro R., Collective paper with students, Introducing pascalian forms to large scale physical models, IASS, Acapulco, Mexique, 27-31.10.2008.
- [ALM 07] Almegaard H., "The curvature coordinate system", IASS symposium, Venice, Italy, 2007.
- [AND 94] Andrade J., Sur une propriété mécanique des lignes géodésiques, Bulletin de la S.M.F., tome 22, PP.186-189, 1894.
- [ARC 04] Architecture Non-Standard, Catalogue de l'exposition, ed. Centre Pompidou, 2004.
- [AUD 99] Audoly B., Courbes rigidifiant les surfaces, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 328 pp. 313-316, 1999.
- [AUD 00] Audoly B., Elasticité et géométrie: de la rigidité des surfaces à la délamination en fil de téléphone, PhD thesis, ENS Physique, 2000.
- [AUM 91] Aumann G., Interpolation with developable Bézier Patches, Computer Aided Geometric Design, n°8, pp.409-420, 1991.
- [AUM 03] Aumann G., A simple algorithm for designing developable Bézier surfaces, Computer Aided Geometric design, vol. 20, pp. 601-619, 2003.
- [BAG 08] Bagnérís M., Motro R., Maurin B., Marty A., Pauli N., Structural morphology issues in free form design, International Journal of Space Structures, Vol. 23 N°2, pp.79-87, 2008.
- [BAL 03] Balmond C., Caroll C., Forster B., Simmonds T., Engineering Marsyas at the Tate Modern, The Arup Journal, janvier 2003.
- [BAL 05] Baldassini N., Glass and Geometry, Glass Processing days, 2005.
- [BAL 06] Balmond C., Cecil Balmond, ed. Noriko Tsukui, A+U publishing CO., Ltd, Tokyo, Japan, 2006.
- [BAR 84] Barnes M.R., Wakefield D.S., Dynamic relaxation applied to form finding and analysis of tension structures, Proc. Int., Conf., on Air Supported Structures, Bristol, pp.1-13, 1984.
- [BAU 06] Baudriller H., Maurin B., Cañadas P., Montcourrier P., A. Parmeggiani A., Bettache N., Form-finding of complex tensegrity structures application to cell cytoskeleton modelling, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Mécanique, vol. 334, n°11, pp.662-668, 2006.
- [BEZ 78] Bézier P., General Distortion of an ensemble of biparametric patches, Computer Aided Design, Vol.10, n°2, pp.116-120, 1978.
- [BEZ 82a] Bézier P., Petite histoire d'une idée bizarre (1), Bulletin de la section d'histoire des usines Renault, Tome 4, n°24, pp. 256-268, juin 1982.
- [BEZ 82b] Bézier P., Petite histoire d'une idée bizarre (2), Bulletin de la section d'histoire des usines Renault, Tome 4, n°25, pp. 319-33, décembre 1982.
- [BEZ 83] Bézier P., Imaginatique, inventique, créatique, innovatique, systémique, productique, etc., Journal des Arts et Métiers, juin 1983.
- [BEZ 86] Bézier P., Mathématiques et CAO, Volume 4, Courbes et Surfaces, Editions Hermès, Paris, 1986.
- [BOE 99] Boehm W., Müller A., On de Casteljau's algorithm, Computer-Aided Geometric Design, n° 16, pp.587-605, 1999.
- [BOO 78] De Boor C., A practical guide to splines, Springer, 1978.
- [BRA 02] Bradshaw R., Campbell D., Gargari M., Mirmiran A., Tripeny P., Special Structures: Past, Present, and Future, Journal of structural engineering, June 2002.

- [BUR 99] Burry M., Truman R., Falla J., Antoni Gaudi: Expiatory Church of the Sagrada Familia Barcelona 1882 - , Phaidon Press, 1999.
- [CAC 97] Cache B., Terre meuble, éd. HYX, 1997.
- [CAS 59] De Casteljau P., Outillage méthodes calcul, Enveloppe Soleau 40.040, Institut National de la Propriété Industrielle, Paris, 1959.
- [CAS 63] De Casteljau P., Courbes et surfaces à pôles, Microfiche P 4147-1, André Citroën Automobile SA, Paris, pp.1- 58, 1963.
- [CAS 85] De Casteljau P., Mathématiques et CAO, Volume 2, Formes à pôles, Editions Hermès, Paris, 1985.
- [CHA 70] Chasles M., Rapport sur les progrès de la géométrie, Imprimerie nationale, Paris, 1870.
- [CHA 74] Chaikin G.M., An algorithm for high-speed curve generation, Computer Graphics and image processing, n°3, pp.346-349, 1974.
- [CHA 98] Chalfant J.S., Meakawa T., Design for manufacturing using B-spline developable surfaces, J.Ship production, vol.42, n°3, pp.207-215, 1998.
- [CHI 00] Chilton J., The engineer's contribution to contemporary architecture, ed. Thomas Telford Publishing, Londres, 2000.
- [CHO 95] Choï D., Sur la rigidité géométrique des surfaces. Application à la théorie des coques élastiques minces, PhD thesis, Université Paris 6, 1995.
- [CHU 02] Chu C.H., Séquin C.H., Developable Bézier patches: properties and design, Computer-Aided Design, n°34, pp511-527, 2002.
- [CHU 05] Chupin J.P., Le bogue tectonique (la loi de chute du corps dans l'espace architectural), extrait de "Le projet tectonique", textes réunis et présentés par Chupin J.P. et Simmonet C., Collection Archigraphy, Les Grands Ateliers, Infolio Editions, 2005.
- [COH 29] Cohn-Vossen S., Unstarre geschlossene Flächen. Math. Annalen 102 10, 1929.
- [COO 64] Coons S., Surfaces for Computer-aided design, Technical report, MIT, 1964.
- [COQ 87] Coquillart S., Computing offsets of B-spline curves, Computer-Aided Design, vol.19, n°6, pp.305-309, 1987.
- [COQ 90a] Coquillart S., Extended Free-Form Deformation: A Sculpturing tool for 3D geometric modelling, Rapport de Recherche de l'INRIA, No. 1250, 21pp, juin 1990.
- [COQ 90b] Coquillart S., Extended Free-Form Deformation: A Sculpturing tool for 3D geometric modelling, Computer Graphics, Vol. 24, n°4, août 1990.
- [COR 08] Cordelier J., Urbanisme : A Metz, un ovni nommé Pompidou, magazine Le point, n°1864, 06-2008.
- [COU 03] Couchot E., Hilaire N., L'art numérique, Champs-Flammarion, Paris, 2003.
- [CUI 03] Cui C., Ohmori H., Sasaki M., Computational morphogenesis of 3D structures by extended ESO method, Journal of International Association for Shell and Spatial Structures, vol.44, pp.56-61, 2003.
- [DAN 89] Daniel M., Daubisse J.C., The numerical problem of using Bézier curves and surfaces in the power basis, Computer Aided Geometric Design, vol.6, n°2, pp.121-128, 1989.
- [DEM 98] Demengel G., Pouget J.P., Modèles de Bézier, des B-splines et des nurbs, Ellipses, édition marketing S.A, 1998.
- [DER 88] Derose T.D., Composing Bézier Simplexes, ACM Transactions on graphics, Vol.7, n°3, pp.198-221, 1988.
- [FAR 86] Farouki R.T., The approximation of non-degenerate offset surfaces, Computer Aided

- Geometric Design, vol.3, n°1, pp.15–43, 1986.
- [FAR 87] Farouki R.T., Rajan V.T., On the numerical condition of polynomials in Bernstein form, *Computer Aided Geometric Design*, vol.4, n°3, pp.191-216, 1987.
- [FAR 88] Farouki R.T., Rajan V.T., Algorithms for polynomials in Bernstein form, *Computer Aided Geometric Design*, vol.5, pp.1-26, 1988.
- [FAR 90] Farin G., *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design, A Practicle Guide, Second Edition*, Academic Press, Inc, 399pp, 1990.
- [FAR 02] Farin G., Hoschek J., Kim M.S., *Handbook of Computer Aided Geometric Design*, North-Holland Editions, 2002.
- [FEN 07] Fenu L., Madeddu T., Pusole P., On the design of shells stiffened with ribs with fractal patterns, IASS symposium, Venice, Italy, 2007.
- [FER 64] Ferguson J., Multivariate Curve interpolation, *J ACM*, Vol. 11, n°2, pp.221-228, 1964.
- [FLO 91] Floater M.S., Derivatives of rational Bézier curves, *Computer Aided Geometric Design*, vol. 9, n° 3, August 1992, Pages 161-174.
- [FOR 72] Forrest A.R., Interactive interpolation and approximation by Bézier polynomials, *The Computer J.* vol.15, n°1, pp. 71-79, 1972 ; ré-édition dans *Computer-Aided Design*, vol.22, n°9, pp.527-537, 1990.
- [FRA 95] Frampton K., *Studies in tectonic culture, the poetics of construction in nineteenth and twentieth century architecture*, ed. John Cava, the MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1995.
- [FRE 04] Fréchuret M., *Le mou et ses formes, essais sur quelques catégories de la sculpture du XX<sup>e</sup> siècle*, Editions Jacqueline Chambon, Nîmes, 2004.
- [GLY 04] Glymph J., Shelden D., Ceccato C., Mussel J., Schober H., A parametric strategy for free-form glass structures using quadrilateral planar facets, *Automation in Construction*, n°13, pp.187-202, 2004.
- [GRO 07] Grohmann M., Bollinger K., New structures for exhibition buildings, IASS Porceedings, Venize, Italie, 2007.
- [GUT 91] Gutierrez C., Sotomayor J., *Lines of curvature and Umbilical Points on Surfaces*, IMPA, 1991.
- [HEN 06] Hensel M., Menges A., Weinstock M., Techniques and technologies in morphogenetic Design, *Architectural Design*, vol.76, n°2, mars-avril 2006.
- [HOS 93] Hoschek J., Lasser D., Schumaker L.L, *Fundamentals of computer-aided geometric design*, A.K. Peters, Ltd, 1993.
- [HOT 00] Hotz I., Hagen H., Visualizing geodesics, *Proceedings IEEE Visualization*, Salt Lake City, UT, pp. 311-318, 2000.
- [CZA 08] Czarny O., Huysmans G., Bézier surfaces and finite elements for MHD simulations, *Journal of computational Physics*, vol.227, pp.7423-7445, 2008.
- [IKE 04] Verb, *Matters*, n°2, Architecture Boogazine, ed. ACTAR, Barcelone, 2004.
- [KAP 02] Kapoor A., *Marsyas*, Tate Publishing, London, England, 2002.
- [KAR 99] Karamian P.X.K., *Coques élastiques minces, hyperboliques inhibées : calcul du problème limite par éléments finis et non réflexion des singularités*, PhD thesis, Université de Caen, 1999.
- [KAW 01] Kawaguchi K.I., Zhen-Yu L., A study of trapezoidal three-strut tension system, *Proceedings of the IASS symposium*, Nagoya, Japan, 09-13/10/2001.
- [KIM 08] Kimura T., Ohmori H., Computational morphogenesis of free form shells, *Journal of International Association for Shell and Spatial Structures*, vol.49, n°3, pp.175-180,

- 2008.
- [KLA 83] Klass R., An offset spline approximation for plane cubic splines, *Computer-Aided Design*, vol.15, n°5, 1983.
- [KLO 86] Klok F., Two moving coordinate frames for sweeping along a 3D trajectory, *Computer-Aided Geometric Design*, n°3, pp.217-229, 1986.
- [KWI 96] Kwinter S., *Contribution to flying the bullet, or when did the future begins?*, Princeton Architectural Press, New York, 1996.
- [LAN 92] Lang J., Röschel O., Developable (1, n) – Bézier surfaces, *Computer Aided Geometric design*, n°. 9, pp. 291-298, 1992.
- [LAR 78] Larger J.-C., Ketoff S., Maillé M., *Introduction au calcul des structures en résilles*. CSFTA. ISBN 2-85259-040-9, 1978.
- [LAW 05] Lawson B., Oracles, draughtsmen, and agents: the nature of knowledge and creativity in design and the role of IT, *Automation in construction*, Vol. 14, pp.383-391, 2005.
- [LIN 07] Linkwitz K., Experiences on teaching “analytical form finding of lightweight tension structures”, the necessity of relevant special education, *International Conference on Textile Composites and Inflatable Structures, Structural Membrane*, eds. Onate E., Kroplin B., Barcelone, Espagne, 2007.
- [LIU 06] Liu Y., Pottmann H., Wallner J., Yang Y.L., Wang W., Geometric modeling with conical meshes and developable surfaces, *ACM Transactions on Graphics, Proceeding of ACM SIGGRAPH 2006*, vol.25, n°3, pp.681-689, 2006.
- [LYN 99] Lynn G., *Animate form*, Princeton Architectural Press, 1999.
- [MAE 93] Maekawa T., Patrikalakis N., Computation of singularities and intersections of offsets of planar curves, *Computer Aided Geometric Design*, vol.10, pp.407-429, 1993.
- [MAE 96a] Maekawa T., Wolter F., Patrikalakis N., Umbilics and lines of curvature for shape interrogation, *Computer Aided Geometric Design*, vol.13, pp.133-161, 1996.
- [MAE 96b] Maekawa T., Computation of shortest paths on free-form parametric surfaces. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, vol.118, n°4, pp.499-508, December 1996.
- [MAE 97] Maekawa T., Cho W., Patrikalakis N., Computation of self intersections of offsets of Bézier surface patches, *Journal of Mechanical Design, ASME Transactions*, vol.119, n°2, pp.275-283, 1997.
- [MAE 98] Maekawa T., Design and tessellation of B-spline developable surfaces, *ASME Trans. J. Mech. Design*, n°120, pp.463-461, 1998.
- [MAE 99] Maekawa T., An overview of offset curves and surfaces, *Computer Aided Design*, vol.31, pp.165-173, 1999.
- [MAN 82] Mandelbrot B., *The fractal Geometry of Nature : Updated and Augmented*, Macmillan, 1982.
- [MAR 09] Marinetti F.T., *Manifeste du futurisme*, 1909.
- [MAR 94] Marhl M., Akman V., On the correct determination of rotational angles for twisted-profiled sweep objects, *Computers & Graphics*, n° 18, pp.691-694, 1994.
- [MAR 96] Marhl M., Guid N., Oblonsek C., Horvat M., Extensions of sweep surface constructions, *Computers & Graphics*, vol.20, n°6, pp.893-903, 1996.
- [MAR 04] Marty A., *Pascalien Forms, Essay on Curved Shapes*, Editions de l'Espérou, Montpellier, 192 pp, 2004.
- [MAR 05] Marty A., Straight away on curved spaces. *Computational Aesthetics in Graphics, Visualization and Imaging*. Editors L. Neumann, M. Sbert, B. Gooch, W. Purgathofer,

- 2005.
- [MAU 98] Maurin B., Motro R., The surface stress density method as a form-finding tool for tensile membranes, *Engineering Structures*, vol.20, n°8, pp.712-719, 1998.
- [MEE 87] Meek J.L., Tan K.Y., Post-Formfinding determination of geodesic lines in cutting pattern design for membrane structures, *Space structures*, 1987.
- [MIH 06] Mihailescu M., Gurzau M., Effort determination of loaded shells of Bézier surfaces, *Proceedings of the IASS symposium, Beijing, China, 16-19/10/2006*.
- [MOT 93] Motro R., *Structural Morphology*, Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures, Special Issue 7 papers, Vol. 34, n° 113, 1993.
- [MOT 05] Motro R., *Tenségrité*, éd. Hermès Lavoisier, 2005.
- [NEL 65] Nelder J.A., Mead R., A simplex method for function minimization, *Computer Journal*, vol.7, pp.308-313, 1965.
- [NGU 07] Nguyen A.D., Quirant J., Cevaer F., Dube J.F., Study of mechanical behaviour and foldability of the pentagonal-based tensegrity ring, *Proceedings of the IASS symposium, Venice, Italy, 03-06/12/2007*.
- [NOO 93] Nooshin H., Disney P., Yamamoto C., *Formian: The programming language of formex algebra*, University of Surrey Publication, 1993.
- [OHM 06] Ohmori H., Hamada H., Computational morphogenesis of shells with free curved surface considering both designer's preference and structural rationality, *Proceeding of IASS – APCS, Beijing, Chine, pp.512-513, 2006*.
- [PAT 89] Patrikalakis N.M., Badris L., Offsets of curves on rational B-splines surfaces, *Engineering with computers*, n°5, pp. 39-46, 1989.
- [PHA 88] Pham B., Offset approximation of uniform B-splines, *Computer-Aided Design* vol.20, n°8, pp.471–474, 1988.
- [PHA 92] Pham B., Offset curves and surfaces: a brief survey, *Computer-Aided Design*, vol.24, n°4, pp.223–229, 1992.
- [PHA 01a] Pham-Trong V., Szafran N., Biard L., Pseudo-geodesics on three-dimensional surfaces and pseudo-geodesic meshes, *Numerical Algorithms*, n°26, pp.305–315, 2001.
- [PHA 01b] Pham-Trong V., Détermination géométrique de chemins géodésiques sur des surfaces de subdivision, thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2001.
- [PIC 05] Picon A., *L'architecture et le virtuel : vers une nouvelle matérialité*, extrait de "Le projet tectonique", textes réunis et présentés par Chupin J.P. et Simmonet C., Collection Archigraphy, Les Grands Ateliers, Infolio Editions, 2005.
- [PIC 07] Picon A., *Entretien, Dossier (R)évolution structurelle*, D'Architecture, n°168, 2007.
- [PIE 97] Piegl L., Tiller W., *The Nurbs Book*, 2nd Edition, Springer, 1997.
- [PIE 99] Piegl L.A., Tiller W., Computing offsets of Nurbs curves and surfaces, *Computer Aided Geometric Design*, vol.31, pp.147-156, 1999.
- [POL 98] Polthier K., Schmies M., Straightest geodesics on polyhedral surfaces. Hege H-C, Polthier K., editors. *Visualization & Mathematics*. Heidelberg-Springer pp.135-150, 1998.
- [POT 95a] Pottmann H., Rational curves and surfaces with rational offsets, *Computer Aided Geometric Design*, vol.12, pp.175-192, 1995.
- [POT 95b] Pottmann H., Farin G., Developable rational Bézier and B-splines surfaces, *Computer Aided Geometric Design*, vol.12, pp.513-531, 1995.
- [POT 07a] Pottmann H., Asperl A., Hofer M., Kilian A., *Architectural Geometry*, Bentley Institute Press, 2007.

- [POT 07b] Pottmann H., Liu Y., Wallner J., Bobenko A., Wang W., Geometry of Multi-layer Freeform Structures for Architecture, International conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, ACM SIGGRAPH 2007, San Diego, California, 2007.
- [POT 08a] Pottmann H., Schiftner A., Bo P., Schmiedhofer H., Wang W., Baldassini N., Wallner J., Freeform surfaces from single curved panels, International conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, ACM SIGGRAPH 2008, Los Angeles, California, 2008.
- [POT 08b] Pottmann H., Geometry of architectural freeform structures, ACM Symposium on Solid and Physical Modeling, Proceedings of the 2008 ACM symposium on solid and physical modelling, Stony Brook, New York, 2008.
- [POU 05] Pouget M., Geometry of surfaces: from the estimation of local differential quantities to the robust extraction of global differential features, PhD thesis, Université de Sophia-Antipolis, 2005.
- [PUG 07] Pugnale A., Sassone M., Morphogenesis and structural optimisation of shell structures with the aid of a genetic algorithm, Journal of International Association for Shell and Spatial Structures, vol.48, n°3, pp.161-166, 2007.
- [RAB 02] Rabut C., On Pierre Bézier's life and motivations, Computer-Aided Design n° 34, pp.493-510, 2002.
- [RAV 02] Ravi Kumar G.V.V., Shastry K.G., Prakash B.G., Computing non-self-intersecting offsets of Nurbs surfaces, Computer-Aided Design, vol.34, pp.209-228, 2002.
- [RAV 03] Ravi Kumar G.V.V., Prabha Srinivasan, Devaraja Hollaa V., Shastrya K.G., Prakash B.G., 2003. Geodesic curve computations on surfaces. Computer Aided Geometric Design, vol.20, pp. 119-133, 2003.
- [RAZ 08] Razavi A., Digital Design, Architecture intérieure Cree, n°339, Décembre 2008.
- [ROZ 04] Rozsnyo R., Semmler K.D., Optimal control of geodesics in Riemannian manifolds, Appl. Numer. Anal. Comput. Math., vol.1, n°3, pp. 507-515, 2004.
- [SAS 05] Sasaki M., Flux structure, Toto Ltd, Japan, 2005.
- [SCH 07] Schlaich J., Justiz S., Kemmler R., Let's welcome FFD – by leading it in the right direction!, lettre ouverte distribuée lors de l'IASS 2007, Venise, Italy, 2007. [info@sbp.de](mailto:info@sbp.de)
- [SED 86] Sederberg T.W., Parry S.R., Free-Form Deformation of Solids Geometric models, Computer Graphics, Vol. 20, n°4, pp. 151-160, 1986.
- [SED 92] Sederberg T.W., Buehler D.B., Offset of polynomial Bézier curves: Hermite approximation with error bounds, Mathematical methods in computer aided geometric design II, Lyche T., Schumaker L.L., editors, San Diego, California, Academic Press, pp.549–558, 1992.
- [SHE 74] Sheck H.J., The force density method for form-finding and computation of networks, Computer methods in applied Mechanics and Engineering 3, pp.115-134, 1974.
- [SHE 02] Sheldon D.R., "Digital Surface representation and the constructibility of Gehry's Architecture", PhD Thesis, MIT, 2002.
- [SHI 04] Shih F.Y., Gaddipati V., Geometric modelling and representation based on sweep mathematical morphology, Information Sciences, n°171, pp.213-231, 2005.
- [SLA 08] Equipe de recherche SLA, ENSAM, SLA, Structures Légères pour l'Architecture, travaux 2006-2007, Editions de l'Espérou, Collection Formes-Forces, 2008.
- [STO 08] Stotz I., Gouaty G., Weinand Y., Iterative Geometric Design for Architecture, Advances in Architectural Geometry, Vienna, Austria, 2008.
- [SUM 07] Sumner R., Schmid J., Pauly M., Embedded Deformation for Shape Manipulation,

- ACM Trans. Graph. 26, 3, Article 80, 7pp, juillet 2007.
- [THO 42] D'Arcy Thompson, On Growth and Form, Cambridge University Press, 1942.
- [TOM 89] Tomlow J., Das Modell, The Model, El Modelo, IL 34, Institute of Lightweight Structures, University of Stuttgart, ed. Frei Otto, 1989.
- [TOS 99] Tosan E., Rondet-Mignotte M., Géométrie fractale, Informatique et Art plastique, Colloque « Créativité et informatique », Rencontres Musicales Pluridisciplinaires, Musique en Scène, Bibliothèque Municipale de Lyon, pp.79-86, 1999.
- [TUC 97] Tucker C.L., Forming of advanced composites. Gutowski, T.G. Edition, Advanced Composites Manufacturing. Wiley, New York, 1997.
- [VER 03] Verre bombé dans les deux sens pour une verrière de 108 panneaux, Verre Plat Magazine, Novembre 2003.
- [VES 75] Vesprille K., Computer aided design applications of the rational B-spline approximation form. PhD thesis, Syracuse University, 1975.
- [VER 97] Bureau Veritas, Recommandations pour la conception des ouvrages permanents de couverture textile, Annales du bâtiment et des travaux publics, septembre 1997.
- [WES 97] Wester T., Structural Morphology, a New Challenge in Engineering and Architecture, IASS International Symposium on Shell and Spatial Structures, Singapore, Malaysia, 1997.
- [WIN 08] Winslow P., Pellegrino S., Sharma S.B., Mapping two-way grids onto free-form surfaces, Journal of International Association for Shell and Spatial Structures, vol.49, n°2, pp.123-130, 2008.
- [ZHA 05] Zhang Q.-L., Luo X.-Q., A FEM model for finding geodesic on discrete surfaces composed of triangles. Journal of the international association for shell and spatial structures, vol. 47, n°150, 2006.
- [ZHA 06] Zhang L., Maurin B., Motro R., Form-finding of non regular tensegrity systems, Journal of Structural Engineering, vol. 132, n°4, pp.1435-1440, 2006.

- Sites internet

Encyclopédie des formes mathématiques remarquables : <http://www.mathcurve.com>

Les pFormes selon A. Marty : <http://amartyfree.free.fr/alain.marty/index.php?page=pformes>

Wiki bilingue sur les pFormes mis en ligne pour le workshop aux Grands Ateliers de l'Isle d'Abeau : [http://amartyfree.free.fr/pF\\_epsilon/index.php?view=start](http://amartyfree.free.fr/pF_epsilon/index.php?view=start)

Wiki de l'Ecole Nationale Supérieure d'Architecture de Montpellier sur l'optionnel d'infographie réalisé en Master 2 : [http://ensam.wiki.free.fr/S9/infographie\\_2008/](http://ensam.wiki.free.fr/S9/infographie_2008/)

Les Grands Ateliers de l'Isle d'Abeau : <http://www.lesgrandsateliers.net/>

- Logiciels cités

Sketchup : <http://sketchup.google.com/>

Blender : <http://www.blender.org/>

Autocad : <http://www.autodesk.fr/>

Robot : <http://www.autodesk.fr/adsk/servlet/index?siteID=458335&id=12412327>

Catia : <http://www.3ds.com/products/catia/>

Rhino : <http://www.fr.rhino3d.com/>

---

## **CONTRIBUTION A LA CONCEPTION ET A LA REALISATION DES MORPHOLOGIES NON-STANDARD : LES FORMES PASCALIENNES COMME OUTIL**

Ces dernières décennies sont marquées par l'émergence de formes architecturales caractérisées par une absence d'orthogonalité. Incités par le progrès de la représentation numérique, des architectes génèrent des projets aux formes complexes dits « non-standard » dont la réalisation soulève de nombreux problèmes. Cette étude vise à apporter des éléments de réponse en centrant la réflexion autour du paramètre de forme, de sa génération à sa réalisation, en assurant une meilleure opérabilité entre les acteurs du processus de conception (architectes/ingénieurs/entrepreneurs). La première partie du mémoire positionne cette tendance architecturale dans le contexte actuel et propose une classification des formes à partir de la morphologie structurale. Nous mettons ainsi en évidence les cas où la forme s'exclut des autres paramètres de conception et pour lesquels les outils de l'ingénierie révèlent leurs limites. La deuxième partie présente un nouvel outil de génération basé sur les formes pascaliennes ou pFormes. Cette approche géométrique des formes gauches utilise des règles génératives simples, ce qui assure une compréhension et une maîtrise de leur génération tout en conduisant à des potentialités opérationnelles. La troisième partie propose un panel d'outils basés sur l'exploitation des propriétés géométriques pour élaborer des solutions d'ordres mécanique et technique. La quatrième partie étend cette démarche aux formes immergées. La pertinence et l'efficacité de ces propositions sont discutées à partir d'études de cas. Par ailleurs, des développements sur des alternatives morphologiques innovantes sont présentés et soulignent leur richesse sur le plan structurel, mécanique et technologique.

---

### **MOTS-CLES**

Architecture non-standard, morphologie structurale, processus de conception, outils de génération, formes paramétrées, formes pascaliennes, pFormes.

---

### **CONCEPTUAL DESIGN AND CONSTRUCTIBILITY OF NON-STANDARD MORPHOLOGIES: PASCALIAN FORMS AS GENERATIVE TOOL**

These last decades differ by the emergence of new architectural forms characterized by an absence of orthogonality. Digital tools drive architects to projects with complex forms referred as "non-standard". Nevertheless, their constructibility results in numerous issues. This study aims at focusing on the shape, from its initial generation to its construction, in order to improve a better interoperability between partners of the design process (architects, engineers and technicians). The first part identifies this tendency in the current context and proposes a classification of forms relying on a structural morphology analysis. Then, peculiarities for which the shape is excluded from the other design parameters are revealed as well as the limitations of the engineering tools. The second part presents a generative tool based on pascalian forms or pForms. This geometrical approach relies on simple rules which allow to understand and grasp the generative process of complex shapes. Following this theoretical development, we work on operational potentialities. The third part proposes a set of tools based on the exploitation of the geometrical properties to elaborate solutions on mechanical and technical levels. The fourth part extends these objectives by using the potential of immersed forms. The relevance and the efficiency of the propositions are discussed on case-studies. Finally, exploratory developments present fruitful structural, mechanical and technological alternatives in perspectives of applications.

---

### **KEY-WORDS**

Non-standard architecture, structural morphology, design process, generative tool, parametric forms, pascalian forms, pForms.

---

### **MECANIQUE ET GENIE CIVIL**

---

**Laboratoire de Mécanique et Génie Civil (LMGC) - UMR CNRS 5508  
CC 048  
Université de Montpellier II  
Place Eugène Bataillon  
34095 Montpellier cedex 5  
France**