HAL
open science

Etat d'autocontrainte des grilles de tenségrité. Vers l'identification sous sollicitation naturelle

Nicolas Angellier

To cite this version:

Nicolas Angellier. Etat d'autocontrainte des grilles de tenségrité. Vers l'identification sous sollicitation naturelle. Matériaux. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2008. Français. NNT : . tel-00567072

HAL Id: tel-00567072

https://theses.hal.science/tel-00567072v1

Submitted on 18 Feb 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE MONTPELLIER II
SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

T H E S E

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE MONTPELLIER II

Discipline : Mécanique Génie Civil

Ecole Doctorale : Information, Structures, Systèmes

présentée et soutenue publiquement

par

ANGELLIER Nicolas

Le 9 juillet 2008

Titre :

ETAT D'AUTOCONTRAINTE DES GRILLES DE TENSEGRITE. VERS L'IDENTIFICATION SOUS SOLLICITATION NATURELLE.

JURY

M.	BENET Jean Claude	Professeur	, Président
M.	CROSNIER Bernard	Professeur	, Directeur de Thèse
M.	DUBE Jean François	Maître de Conférences	, Co-Directeur
M.	BREYSSE Denys	Professeur	, Rapporteur
M.	DAUDEVILLE Laurent	Professeur	, Rapporteur
M.	GORNET Laurent	Professeur	, Examinateur

REMERCIEMENTS

Qu'il me soit permis de remercier ici toutes les personnes qui, d'une manière ou d'une autre, ont contribué à l'aboutissement de ces travaux de thèse :

Mes premiers remerciements vont à Jean Claude Bénet, qui, après avoir été mon directeur de stage en DEA, puis mon tuteur pédagogique durant le monitorat, a accepté de présider le jury lors de ma soutenance.
Je remercie vivement messieurs Denys Breysse, Laurent Daudeville et Laurent Gornet qui ont accepté de rapporter et examiner ce travail.
Bernard Crosnier et Jean François Dubé ont été mes encadrants durant ces 4 années et je les remercie de m'avoir accompagné jusqu'ici.

Une seconde salve de remerciements s'adresse à tous les membres du LMGC, et en particulier aux membres de l'équipe Conception en Structures, ainsi qu'aux équipes pédagogiques des départements Génie Mécanique et Productique, Science et Génie des Matériaux et surtout Génie Civil de l'IUT de Nîmes, pour leur accueil et leurs conseils.
Le petit Nicolas remercie André Chrysoochos.
Je tiens à remercier plus personnellement Gilles Camp, Alain Clary, Gérard Denaeyer et Yves El Kaïm pour les heures passées à m'aider à la Halle de Mécatronique ainsi que Jeannine Blanc, Danièle Bros, Thierry Vigo, Gilles Réquilé, Gilbert Gobbo et Elisabeth Boulet pour leur aide en matière bibliographique, informatique et administrative.
Enfin, un merci spécial à Reine, qui s'occupe si bien de nous.

La troisième vague de remerciements vient éclabousser un grand nombre de personnes en même temps : tous les doctorants côtoyés au LMGC, en particulier Julien Averseng et la promotion 2004-2007 (Emilien, Bruno, Félix, Anne Laure, Romain, Florent), Nadine Tilloy de l'I2S, les moniteurs rencontrés en formation, Françoise Blanc du CIES, Marie Christiane Arlery du département STICS, ainsi que Monsieur Champeau de l'Université Paris Sud.

Les remerciements privés ont déjà eu lieu en privé : ma famille, mes amis, ma compagne.

REMERCIEMENTS **3**

INTRODUCTION **7**

1 LA MINIGRILLE, OBJET DE L'ETUDE EXPERIMENTALE **11**

1.1 INTRODUCTION 11
1.2 TENSEGRITE ET AUTOCONTRAINTE 11
1.2.1 La tenségrité 11
1.2.2 L'autocontrainte 13
1.3 LES GRILLES DE TENSEGRITE, LA MINIGRILLE 16
1.3.1 Les grilles de tenségrité 16
1.3.2 La minigrille 18
1.4 ETUDE NUMERIQUE : AUTOCONTRAINTE ET CHOIX DES APPUIS 22
1.4.1 Tenségrité 2000 22
1.4.2 Autocontrainte et choix des appuis 23
1.5 PROBLEMATIQUE EXPERIMENTALE : PROCEDURE DE MISE EN TENSION 29
1.5.1 Identification de l'état actuel 29
1.5.2 Corrections sur les longueurs des éléments actifs 33
1.5.3 Problèmes soulevés 35
1.6 CONCLUSION 37

2 MOYENS INSTRUMENTAUX MIS EN OEUVRE **39**

2.1 INTRODUCTION 39
2.2 LE TENSIOMETRE 40
2.2.1 Conception du tensiomètre 40
2.2.2 Mise en service du prototype 46
2.2.3 Conclusion 53
2.3 LES JAUGES 54
2.3.1 Problématique 54
2.3.2 Choix des montages de jauges 55
2.3.3 Réalisation des montages et étalonnage 57
2.3.4 Instrumentation 61
2.4 LE TACHEOMETRE 63
2.4.1 Introduction 63
2.4.2 Description du matériel et du protocole expérimental 63
2.4.3 Mesure de la géométrie réelle 65
2.4.4 Champ des déplacements des nœuds de la structure chargée 66
2.5 CONCLUSION 69

3 RESULTATS DE L'ETUDE EXPERIMENTALE **71**

3.1 INTRODUCTION 71
3.2 MODELISATION NUMERIQUE DES ELEMENTS DE LA GRILLE 72
3.2.1 Comportement mécanique des éléments 72
3.2.2 Validation de la modélisation numérique des éléments 81
3.3 IDENTIFICATION DE L'ETAT D'AUTOCONTRAINTE 90
3.3.1 Objectifs 90
3.3.2 Identification avec la géométrie réelle 91
3.3.3 Mise en tension 93
3.3.4 Différences jauges/câbles 94
3.3.5 Calage sur la mesure du champ de déplacements 96
3.4 CONCLUSION 98

4 ETUDES NUMERIQUES SUR L'IDENTIFICATION DE L'ETAT D'AUTOCONTRAINTE **99**

4.1 INTRODUCTION 99
4.2 ETUDES NUMERIQUES MENEES SUR LA MINIGRILLE 100
4.2.1 Relation entre l'autocontrainte et les modes propres 100
4.2.2 Corrélation entre les modes propres et l'identification de l'autocontrainte 103
4.2.3 Etude pour un état d'autocontrainte réaliste 107
4.2.4 Identification de l'autocontrainte par la méthode du décrément aléatoire 112
4.2.5 Conclusion 116
4.3 ETUDES NUMERIQUES MENEES SUR UNE GRANDE GRILLE DE TENSEGRITE 117
4.3.1 La grande grille, autocontrainte et modes propres 117
4.3.2 Corrélation entre les modes propres et l'identification de l'autocontrainte 121
4.3.3 Autres études numériques 124
4.4 CONCLUSION 128

CONCLUSION **129**

ANNEXES **131**

BIBLIOGRAPHIE **143**

TABLE DES FIGURES ET DES TABLEAUX **147**

NOTATIONS UTILISEES **151**

INTRODUCTION

L'étude des systèmes de tenségrité

Les développements et les recherches dans le domaine des systèmes de tenségrité, dont la paternité est attribuée à Kenneth Snelson ([Sne65], [Sne73]), Richard Buckminster Fuller ([Ful60], [Ful73] et David George Emmerich ([Emm64], [Emm88]) dans les années 60 (figure 1), connaissent un essor important depuis les deux dernières décennies.

En effet, cette classe à part parmi les structures spatiales, systèmes réticulés à contraintes initiales, suscite un engouement particulier lié à la promesse de conception de structures légères et visuellement transparentes qui trouvent leur place dans l'architecture d'aujourd'hui. Leurs possibilités d'application dans le génie civil sont étendues, notamment de par leur légèreté et leur grande portée.
Du point de vue expérimental, l'avènement d'un nombre non négligeable de réalisations concrètes (Kawaguchi [KHPF95], Kono et Al. [KCSK00], Passera&Pedretti [Ped98]), qui viennent enrichir le champ des recherches, marque une étape cruciale pour le développement de ces systèmes sur le plan industriel. L'un des derniers verrous à briser pour y parvenir réside dans le contrôle opérationnel de l'autocontrainte, qui assure la stabilité et la rigidité, afin de maintenir un état fonctionnel optimal sous sollicitations extérieures.

L'équipe Conception en Structures du Laboratoire de Mécanique et Génie Civil (LMGC) de l'Université Montpellier II s'emploie maintenant depuis de nombreuses années à franchir cette nouvelle étape décisive. Son expérience dans le domaine de la tenségrité est reconnue. Elle a largement contribué au développement théorique et expérimental de la conception des systèmes de tenségrité et à la compréhension de leur comportement statique et dynamique. En 2000, l'aboutissement du projet Tensarch® (Raducanu et Motro [MR02]), marqué par la réalisation d'une grille plane de grandes dimensions occupant 80m² (figure 2) et dont le principe constructif a fait l'objet d'un dépôt de brevet, a démontré la faisabilité de la conception et la réalisation de telles structures.

Figure 1. Snelson (Needle Tower) –Fuller – Emmerich (Composite Polyhedra).

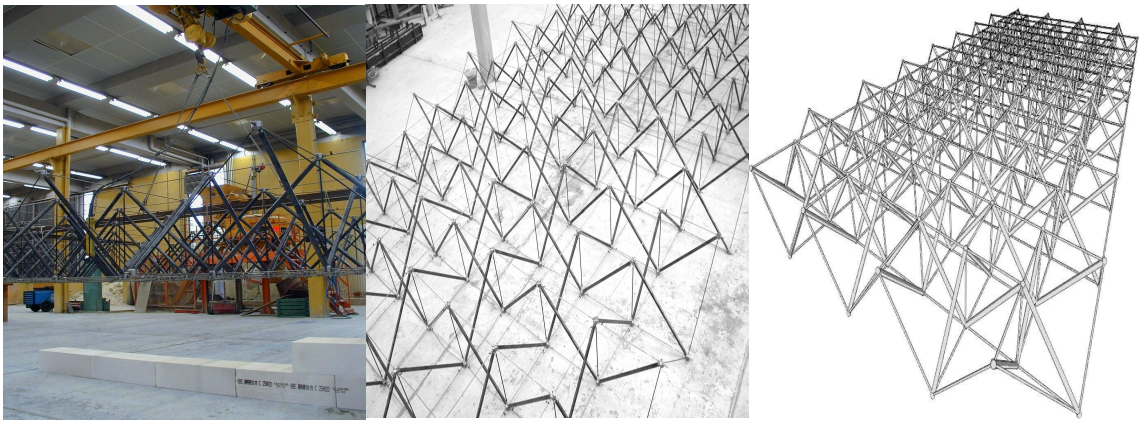


Figure 2. Projet Tensarch.

Depuis lors, l'équipe profite pleinement de cet outil de travail expérimental à sa disposition. Dernièrement, des avancées importantes ont été effectuées avec les résultats obtenus dans la maîtrise du contrôle :

- de l'état d'autocontrainte [AC04-1],
- de l'état géométrique et dynamique en service [AC04-2].

C'est dans ce contexte particulièrement engageant et stimulant qu'a pris forme mon sujet de thèse sur le « contrôle de structures légères sous excitation naturelle ».

Plan de cette étude

Les travaux présentés dans ce document s'inscrivent dans la continuité des recherches menées depuis les années 2000 au sein de l'axe dynamique de l'équipe sur la compréhension du comportement mécanique réel des structures de tenségrité.
L'objectif immédiat est de répondre à certaines questions soulevées par les premières études expérimentales :

- la validité des choix instrumentaux utilisés jusqu'alors pour la mesure des efforts des éléments,
- la validité de la méthode mise au point pour l'identification de l'état d'autocontrainte qui assure la stabilité et la rigidité de ces structures,
- la validité des modélisations utilisées pour les simulations numériques du comportement mécanique de ces structures.

Pour ce faire, la mise au point et la mise en place de nouveaux moyens de mesures dédiés se sont avérées indispensables.
Ceux-ci permettent de vérifier certaines hypothèses sur le comportement mécanique réel et d'améliorer sa modélisation. Ils apportent aussi des réponses sur la problématique de l'identification de l'état d'autocontrainte. Notamment sur la possibilité d'élaboration d'autres méthodes transposables au cas complexe de structures en place. C'est ce qui constitue l'objectif à long terme de ces recherches.

Dans ce manuscrit, le lecteur peut dénombrer quatre parties.

Dans la première partie, sont présentés les systèmes de tenségrité en général, et les grilles de tenségrité en particulier. On découvre ainsi l'objet de l'étude expérimentale : la minigrille, choisie pour sa relative simplicité. Une étude numérique préliminaire renseigne sur les états d'autocontrainte et sur le choix des conditions d'appuis. La méthode d'identification de l'autocontrainte et la mise en tension de la minigrille sont aussi présentées.

La deuxième partie traite de la mise en place des nouveaux moyens instrumentaux spécifiques à cette nouvelle étude et se décompose en trois chapitres qui décrivent respectivement :

- l'élaboration d'un prototype de tensiomètre pour la mesure de la tension des câbles,
- la mise en œuvre de montages de jauges pour la mesure des efforts dans les barres et les tirants,
- l'utilisation d'un tachéomètre pour la mesure de la géométrie réelle de la minigrille et des champs de déplacement des nœuds sous chargement.

Je développe dans la troisième partie les résultats obtenus par les moyens instrumentaux mis en œuvre. Ils apportent des précisions sur la modélisation des différents éléments de la minigrille. Ils permettent aussi d'aborder expérimentalement la problématique de l'identification de l'état d'autocontrainte de la minigrille.

Enfin, la quatrième partie traite numériquement de l'identification de l'état d'autocontrainte de la minigrille sous différents aspects. L'objectif affiché est l'ouverture vers le contrôle en place sous excitation naturelle et le diagnostic de ruine de ce type de structures.

1 LA MINIGRILLE, OBJET DE L'ETUDE EXPERIMENTALE

1.1 Introduction

Cette première partie présente la notion de tenségrité. Une définition largement acceptée est donnée et illustrée par une analogie avec les systèmes pneumatiques. Le principe de l'autocontrainte est exposé avec la méthode de conception des grilles de tenségrité. Ces rappels permettent au lecteur de mieux cerner l'objet de l'étude expérimentale : la minigrille. Des simulations numériques préliminaires donnent des indications intéressantes sur l'état d'autocontrainte et le choix judicieux des conditions d'appuis. La méthode que nous utilisons pour identifier cet état d'autocontrainte et mettre en tension la minigrille est décrite. Le lecteur pourra trouver force de détails supplémentaires dans les premières parties des thèses respectives de messieurs Averseng [Ave04] et Sanchez [San05] dont les études bibliographiques sont très complètes et sur lesquelles repose le début de cette partie.

1.2 Tenségrité et autocontrainte

1.2.1 La tenségrité

Nous devons l'invention du mot tenségrité à Richard Buckminster Fuller qui contracta les mots *Tensional* et *Integrity* [Ful62] pour décrire ces structures dont les composants comprimés semblent flotter en équilibre au milieu des éléments tendus et qu'il évoquait comme des « systèmes tels que des îlots de compression dans un océan de tensions ».

Une définition communément admise d'un système de tenségrité est celle proposée par René Motro qui le décrit comme un « système dans un état d'auto équilibre stable, qui comprend un ensemble discontinu de composants comprimés à l'intérieur d'un continuum de composants tendus » [Mot03]. Cette définition peut être appliquée à des structures dédiées au génie civil. Les éléments constitutifs de la structure doivent alors être compatibles avec des sollicitations déterminées. Ainsi, les composants comprimés peuvent être des barres, tandis que les composants tendus peuvent être des câbles ou des tirants. Tous ces éléments sont connectés par des noeuds. Dans ce cas, la stabilité et la rigidité de la structure sont régies par la présence d'un état d'autocontrainte, état d'efforts internes présent en l'absence de tout chargement extérieur, dans une configuration géométrique de référence.

Un parallèle immédiat peut être fait avec les systèmes pneumatiques dont la forme et la rigidité sont obtenues par la présence d'un fluide sous pression maintenu à l'intérieur d'une enveloppe sous tension. On y rencontre trois configurations :

- relâchée : autocontrainte nulle, forme indéterminée (figure 3a),
- limite : autocontrainte nulle, aucune rigidité mais forme déterminée (figure 3b),
- autocontrainte : rigidité et forme déterminées (figure 3c).

Les structures réticulées spatiales et tout particulièrement les systèmes de tenségrité, du fait de l'existence de nombreuses articulations, peuvent être le siège de mécanismes.
En continuant avec la même analogie, il est aisé de constater que la dureté ressentie est directement fonction de la pression de gonflage et non des caractéristiques matérielles ; de même, la raideur apparente d'un système de tenségrité, selon une certaine direction, évoluera selon le niveau d'autocontrainte mis en place. Dans les deux cas, il s'agit de la mobilisation partielle ou complète de mécanismes infinitésimaux qui lui confèrent dans ce cas un comportement non linéaire et qui est fonction de l'état de contraintes internes. Ces mécanismes sont les déplacements qui ne sollicitent pas les éléments, c'est-à-dire qu'ils n'induisent aucune déformation relative longitudinale dans les composants, et donc aucune contrainte [Vas97]. Un mécanisme est dit infinitésimal lorsque ces déformations sont nulles jusqu'à un certain ordre. L'ordre d'un mécanisme est le degré de déplacement au-delà duquel il y a déformation longitudinale des éléments. Un mécanisme est dit fini lorsque les déformations restent strictement nulles, quels que soient les déplacements engendrés (comme dans le cas des mouvements des corps rigides), soit un ordre infini.

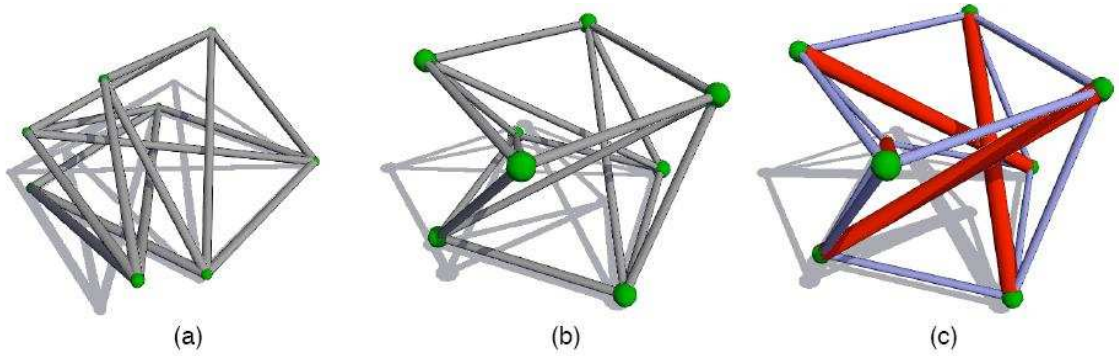


Figure 3. Les trois états d'un système autocontraint.

1.2.2 L'autocontrainte

1.2.2.1 Equilibre d'un système

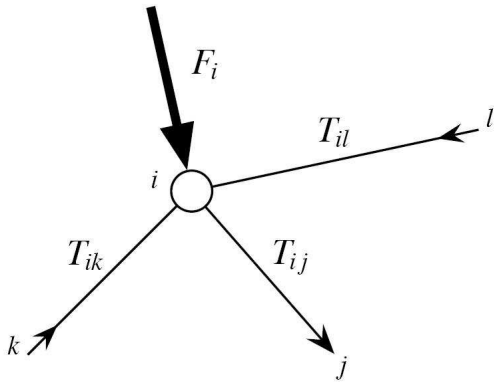


Figure 4. Equilibre d'un nœud.

L'équilibre d'un système est obtenu quand tous ses nœuds sont en équilibres. L'équilibre statique d'un noeud *i* (figure 4) s'écrit comme suit :

$$\sum_{j \neq i} T_{ij} + F_i = 0 \tag{1.1}$$

T_{ij} représente l'effort interne de l'élément reliant le noeud *j* au noeud *i*, et F_i l'effort extérieur appliqué au noeud *i*. Les efforts internes sont fonction de l'allongement de chaque élément et s'expriment comme suit :

$$T_i = E_i A_i \frac{l_i - l_i^{lib}}{l_i^{lib}} \tag{1.2}$$

Où E_i est le module d'Young, A_i l'aire de la section droite, l_i la longueur actuelle et l_i^{lib} la longueur de fabrication, ou longueur libre. On note x_i, y_i, z_i les coordonnées spatiales du noeud *i*, et l_{ij}^0 la longueur de l'élément reliant les noeuds *i* et *j* dans la configuration géométrique de référence. La projection de l'équation (1.1) sur les trois axes donne :

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\neq i} T_{ij}\,\frac{x_j - x_i}{l_{ij}^0} + F_i^{\,x} = 0\\
&\sum_{j\neq i} T_{ij}\,\frac{y_j - y_i}{l_{ij}^0} + F_i^{\,y} = 0\\
&\sum_{j\neq i} T_{ij}\,\frac{z_j - z_i}{l_{ij}^0} + F_i^{\,z} = 0
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Cette fois, T_{ij} est l'expression algébrique de la force dans l'élément (i, j), reliant le noeud i au noeud j.

Cette équation d'équilibre peut être simplifiée en introduisant la densité de force q_{ij} de chaque élément (i, j) :

$$q_{ij} = \frac{T_{ij}}{l_{ij}^0} \tag{1.4}$$

La relation (1.3) pour un noeud devient alors :

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\neq i} q_{ij}\left(x_j - x_i\right) + F_i^{\,x} = 0\\
&\sum_{j\neq i} q_{ij}\left(y_j - y_i\right) + F_i^{\,y} = 0\\
&\sum_{j\neq i} q_{ij}\left(z_j - z_i\right) + F_i^{\,z} = 0
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Le système d'équations obtenu en appliquant les équations (1.5) à tous les noeuds de la structure est la forme globale matricielle suivante :

$$\boldsymbol{Aq} = \boldsymbol{f} \tag{1.6}$$

Avec $\boldsymbol{A}$ la matrice d'équilibre de la structure (de dimension bx$3n$), $\boldsymbol{q}$ le vecteur des densités de forces des b éléments, et $\boldsymbol{f}$ le vecteur du chargement extérieur agissant sur les n noeuds.

1.2.2.2 Autocontrainte

L'autocontrainte est l'ensemble des forces internes présent à l'état initial en l'absence de chargement extérieur. Cet état d'équilibre correspond à un champ de densité de forces $\boldsymbol{q_0}$ satisfaisant :

$$\boldsymbol{Aq_0} = \boldsymbol{0} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{q_0} \in ker\boldsymbol{A} \tag{1.7}$$

L'état d'autocontrainte peut être exprimé sur la base du sous-espace $ker\boldsymbol{A}$. Cette base, notée $\boldsymbol{S}$, est composée de plusieurs états d'autocontrainte fondamentaux. Un état fondamental peut être de deux natures : total s'il sollicite tous les composants d'un système, partiel sinon. La base $\boldsymbol{S}$ doit correspondre à un état d'autocontrainte total.

La base d'autocontrainte $\boldsymbol{S}$ ne peut être utilisée directement car la matrice d'équilibre $\boldsymbol{A}$ ne tient pas compte du comportement unilatéral des éléments ni de leur contrainte limite. L'état d'autocontrainte qui répond aux limites mécaniques des éléments est appelé conforme. Il peut être créé à partir d'une base d'autocontrainte constituée d'états conformes [San05] ou directement par combinaison linéaire de la base $\boldsymbol{S}$ [QKAM03] :

$$\boldsymbol{q_0} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\alpha} \tag{1.8}$$

Les composantes du vecteur $\boldsymbol{\alpha}$ sont choisies pour satisfaire la conformité du comportement mécanique des éléments.

D'un point de vue complémentaire, les allongements relatifs $\boldsymbol{e}$ des éléments s'écrivent en fonction du champ de déplacement $\boldsymbol{d}$ des nœuds de la structure par une relation de compatibilité qui se met sous une forme matricielle simple [Vas97], dans l'hypothèse de petits déplacements :

$$\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{d} = \boldsymbol{e} \tag{1.9}$$

Ainsi, les mécanismes d'ordre au moins égal à 1 (les déplacements nodaux tels qu'il n'y ait pas de modification de l'état de contrainte du système, c'est-à-dire sans variation de la longueur des composants au premier ordre) sont l'ensemble des déplacements $\boldsymbol{d_0}$ appartenant au noyau $ker\boldsymbol{A}^t$. De tels déplacements sont stabilisés par une rigidité de nature géométrique liée à l'état de contraintes internes. Vassart propose un test de stabilité basé sur l'énergie élastique apportée par les perturbations géométriques dues à ces mécanismes infinitésimaux. Une augmentation du niveau d'énergie indique en effet que le système se situe dans un creux d'énergie potentielle, donc dans un état d'équilibre stable, c'est-à-dire que s'il est légèrement éloigné de celui-ci, il y revient (figure 5). Dans le cas contraire, le système autocontraint est instable et il faut stabiliser les mécanismes en ajoutant un nouvel élément ou en choisissant des conditions aux limites plus restrictives. Parmi les mécanismes finis, les six mouvements de solide

rigide sont un cas particulier que l'on élimine classiquement en imposant des conditions d'appuis isostatiques.

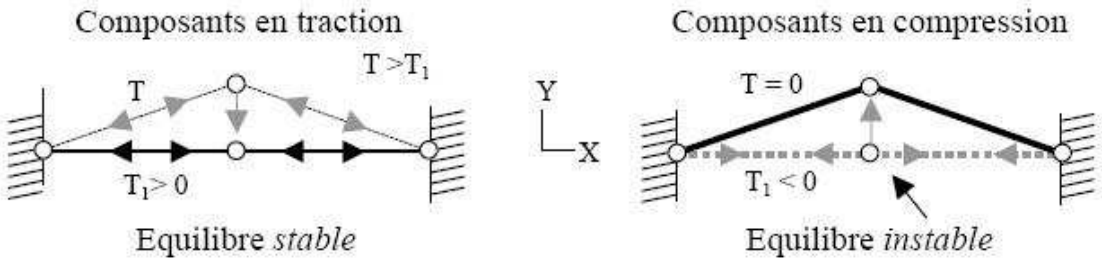


Figure 5. Mécanisme infinitésimal et stabilité de la position d'équilibre.

1.3 Les grilles de tenségrité, la minigrille

1.3.1 Les grilles de tenségrité

On dénombre trois groupes de systèmes de tenségrité :

- les modules élémentaires (configuration structurale de tenségrité qui possède un seul état d'autocontrainte) et les systèmes formés par l'assemblage de ces modules (multimodule) [Mot90] : par exemple, on peut former des grilles planes à partir de modules élémentaires possédant des bases en forme de polygone régulier et de base supérieure inscrite et assemblés de manière répétitive selon deux directions sur des pavages réguliers,
- la combinaison de modules élémentaires et d'autres composants à condition que le système complet puisse être autocontraint,
- les systèmes construits à partir de deux nappes de réseaux de câbles reliées par des ensembles de barres et de câbles.

On s'intéresse précisément à ce dernier groupe de systèmes de tenségrité, particuliers dans la mesure où ils ne reposent pas sur l'agglomération de modules. Les dispositifs de barres, de câbles et de tirants qui relient les deux nappes de câbles sont nommés écarteurs et permettent la mise en tension de l'ensemble. Les nappes sont formées par des réseaux réguliers de câbles connectés aux intersections du maillage par des nœuds. Les écarteurs sont répartis à l'intérieur et assemblés sur ces nœuds. Chaque nœud des nappes appartient au moins à un écarteur (figure 6).

Plusieurs systèmes de ce type ont été proposés par V. Raducanu [Rad01]. Par exemple, on s'intéresse au détail des écarteurs utilisés pour le projet Tensarch ainsi que sa décomposition par éléments. On décortique ainsi son principe constructif qui suit le processus décrit ci-dessus (figure 7).

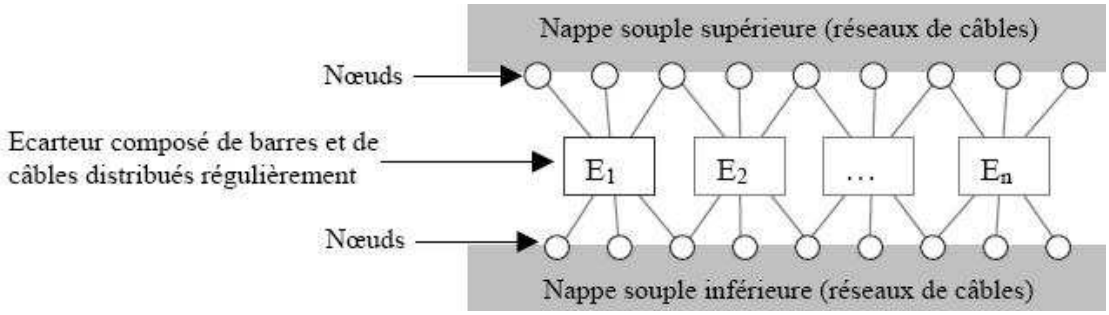


Figure 6. Système de tenségrité sur des réseaux réguliers de câbles.

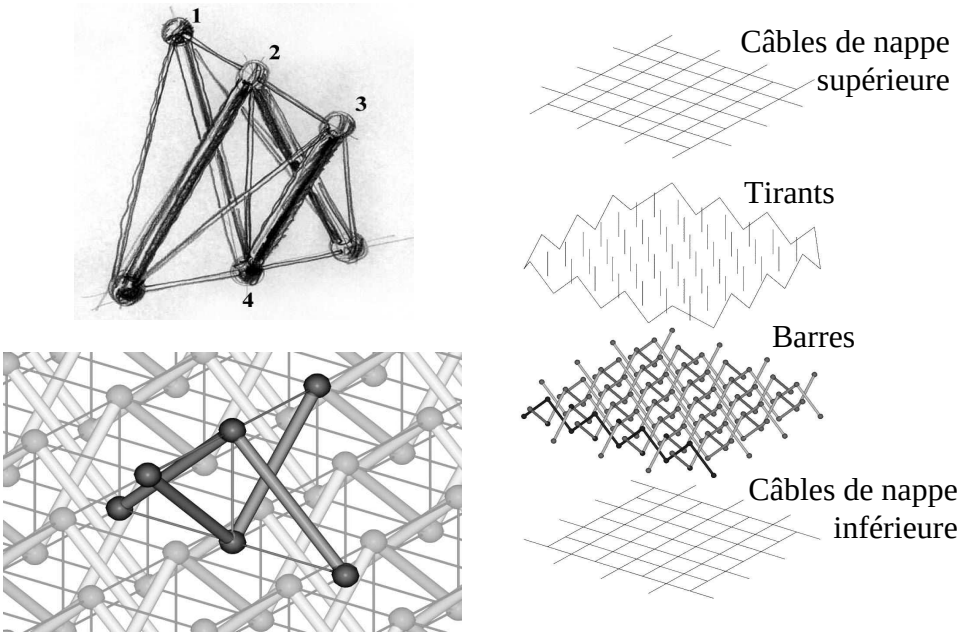


Figure 7. Ecarteur et décomposition de la grille Tensarch.

1.3.2 La minigrille

Il s'agit du prototype de la grande grille réalisée pour le projet Tensarch® [MR02]. C'est une grille plane bidirectionnelle à double nappe de câbles dont le motif de base reprend le principe de l'écarteur : deux à deux les barres forment des V perpendiculaires et opposés séparés par un tirant vertical dont on peut faire varier la longueur. Le système complet est représenté et les composants (nappes de câbles et écarteurs) sont dissociés sur la même vue (figure 8). L'intérêt évident de cette grille pour notre étude expérimentale est son faible nombre d'éléments.

Elle est constituée de 81 éléments reliés par des nœuds (figure 9):

- 24 barres (tubes creux) en compression dont la liaison se fait par emboîtement simple dans le nœud, par l'intermédiaire d'un manchon adapté, et des éléments en tension, à savoir :
- 36 câbles,
- 9 tirants verticaux,
- 12 tirants périphériques d'entretoisement.

Les caractéristiques principales des éléments sont décrites dans le tableau 1.

Type d'élément	Longueur (m)	Module d'Young (MPa)	Section (m²)	Inertie (m^4)	Masse volumique (kg/m^3)	Limite élastique (kN)
Barres	1,13	$2,0.10^5$	$3,30.10^{-4}$	$1,80.10^{-8}$	7800	30
Câbles	0,80	$1,6.10^5$	$5,03.10^{-5}$	$2,01.10^{-10}$	7160	18
Tirants verticaux	0,80	$1,7.10^5$	$7,85.10^{-5}$	$4,91.10^{-10}$	7720	78
Tirants de côté/coin	1,13/1,38	$2,0.10^5$	$5,03.10^{-5}$	$2,01.10^{-10}$	7500	50

Tableau 1. Caractéristiques des éléments de la minigrille.

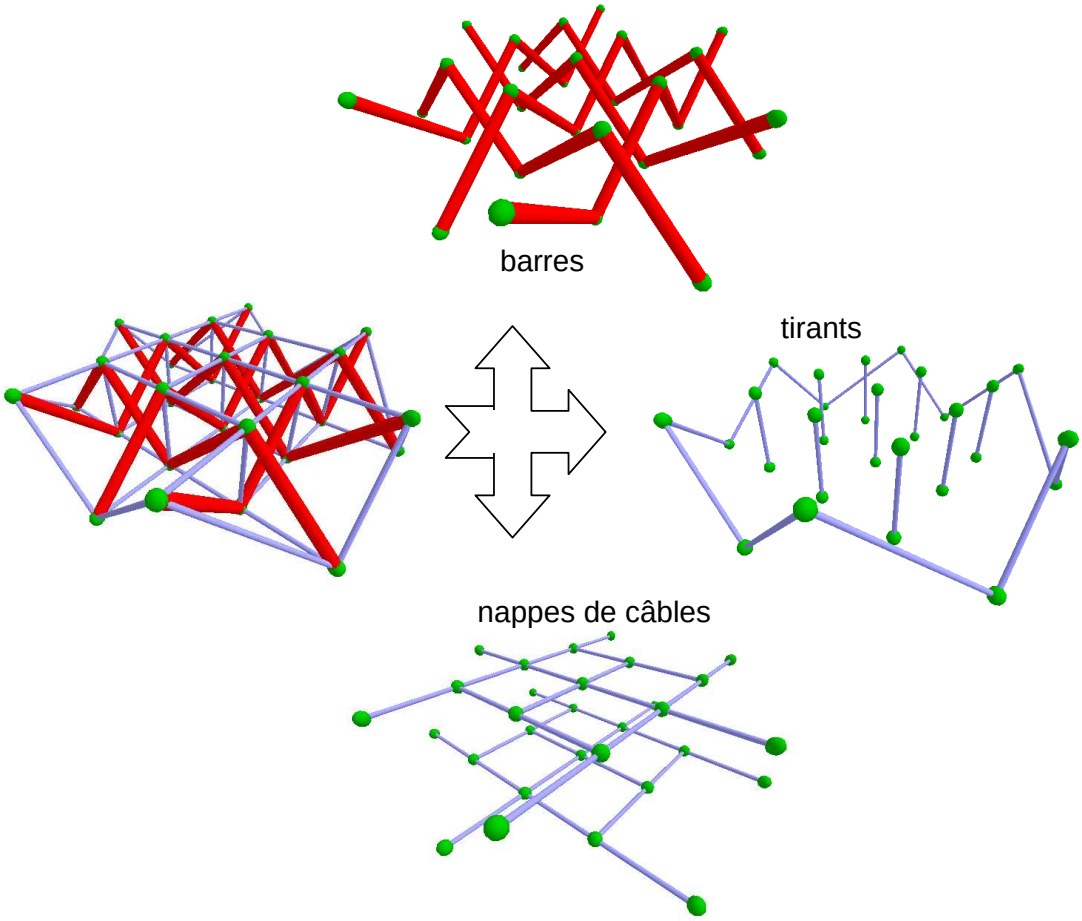


Figure 8. Principe constructif de la minigrille.

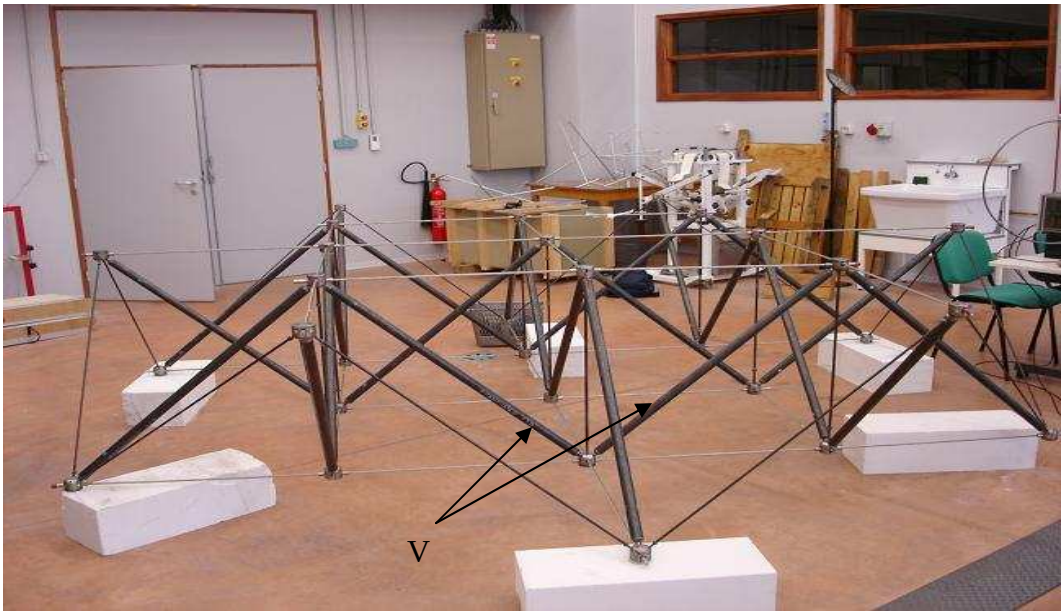


Figure 9. La minigrille, vue d'ensemble.

Les nœuds sont les éléments les plus délicats car ils réalisent l'assemblage et la transmission des efforts entre des éléments de natures très différentes (figure 10). Ce sont des nœuds en acier, usinés tels que les axes des alésages (pour les barres) et de taraudage (pour les tiges) concourent au même point. Seules les nappes des câbles orthogonales n'y convergent pas, mais l'incidence est à priori faible.

Les câbles sont aussi des éléments très sensibles de la structure :

- alors que les barres sont généralement peu sollicitées par rapport à leur capacité de résistance, la pré-tension de la structure peut engendrer dans les câbles une contrainte proche de la limite d'élasticité,
- étant connectés les uns aux autres au sein des deux nappes continues (inférieure et supérieure), ils assurent la stabilité et la raideur de l'ensemble. La dégradation d'un câble va avoir une influence sur toute ou partie de la structure ce qui risque de changer fondamentalement la rigidité de l'ensemble.

Les éléments de câbles de 0,8m de long sont répartis en 6 câbles longitudinaux et 6 câbles transversaux (longueur 3,2m/1,6m) en monotoron 19 fils (12+6+1) d'acier inoxydable pour un diamètre moyen de 8mm.

Des sertissages assurent le positionnement des nœuds. Ce positionnement est réalisé par insertion du nœud entre deux sertissages avec une précision inférieure à 1mm (figure 11). Les sertissages ont un diamètre de 14,3mm et ont une longueur de 2cm pour les nœuds courants et 4cm pour les nœuds d'extrémités.

La limite de rupture du câble est de 54kN. Leur limite élastique est de 18kN. On estime l'effort repris par le câble lors de la précontrainte (hors chargement) à environ 5kN. On peut donc s'autoriser une surtension du câble lors du chargement de la grille de plus de 10kN.

Les tirants sont les éléments actifs de la structure qui permettent de la mettre en tension. La méthode de réglage choisie dans ce système est le vissage des tiges dans les nœuds (figure 12). Elles sont filetées avec des pas inversés aux extrémités. Ces filetages ont fait l'objet d'un retaraudage en début de campagne expérimentale pour assurer une bonne efficacité et éviter tout glissement. Des écrous et des contre écrous sont vissés en bout de filets et soudés pour assurer une bonne prise lors du serrage. C'est un moyen simple, peu onéreux et ne nécessitant aucun matériel lourd, donc tout à fait envisageable

dans un cadre industriel. Une rotation de 2π sur la tige produit une variation de longueur libre de 2 filets, soit ici 3mm.

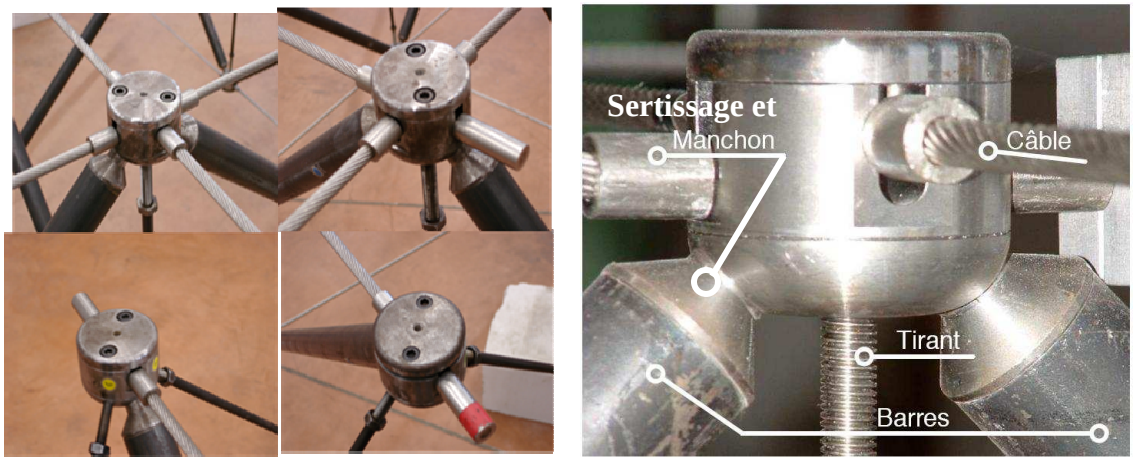


Figure 10. Nœuds de la minigrille, assemblage des éléments.

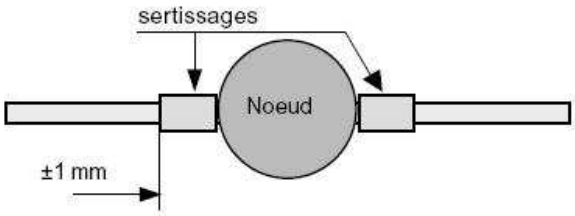


Figure 11. Insertion du nœud entre deux sertissages.

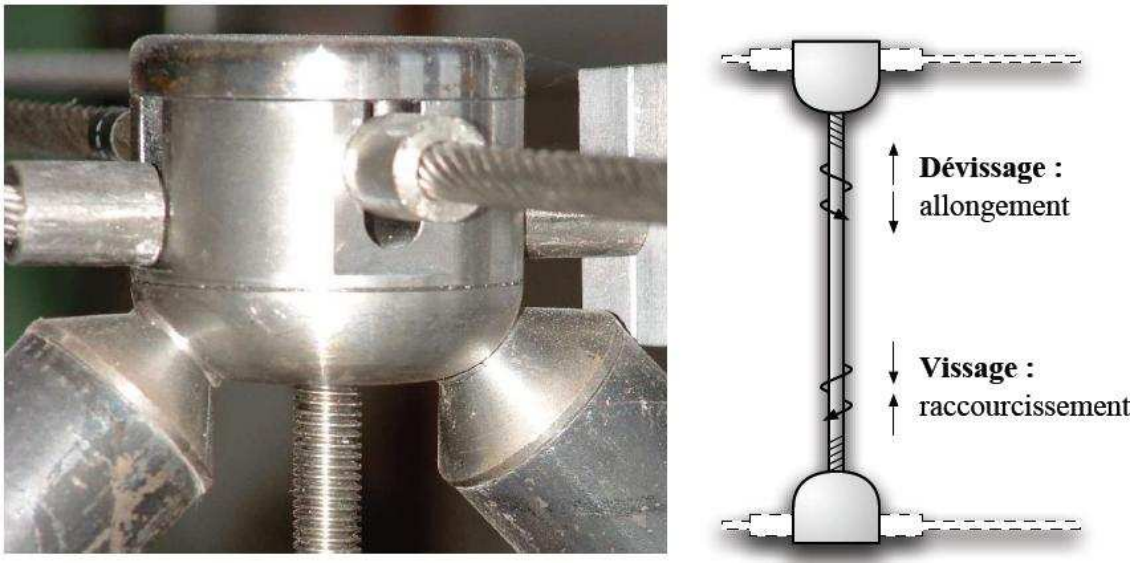


Figure 12. Vissage des tiges dans les nœuds.

1.4 Etude numérique : autocontrainte et choix des appuis

1.4.1 Tenségrité 2000

Nous disposons d'un code de calcul spécifique qui permet de déterminer les états d'autocontrainte de base et les mécanismes d'une structure à partir de ses données géométriques et de ses conditions limites. Il s'agit du logiciel Tenségrité 2000 (noté T2000 par la suite), développé par Jérôme Quirant du LMGC [Qui00]. Le modèle de base est un système réticulé parfait, où seuls les trois degrés de liberté en déplacement de chaque nœud sont considérés. Le chargement est donc constitué des efforts ponctuels aux nœuds. L'autocontrainte est prise en compte grâce à la connaissance des longueurs initiales de fabrication. Le relâchement des câbles ou la prise en compte de grands déplacements imposent d'utiliser un schéma de résolution non linéaire, de type Newton-Raphson.

Dans le fichier de données on doit rentrer les données de la structure c'est-à-dire la position des nœuds, les connectivités des éléments et leur type (barre ou câble) et les conditions limites (figure 13). Ces données permettent de calculer la base d'autocontrainte. Le module d'Young, la section, et la longueur libre de fabrication permettent de définir un état d'autocontrainte précis et de faire des calculs mécaniques. Il suffit alors de fournir le chargement extérieur sous la forme d'une matrice de forces ponctuelles. Certains de ces éléments sont précisés dans l'Annexe A.

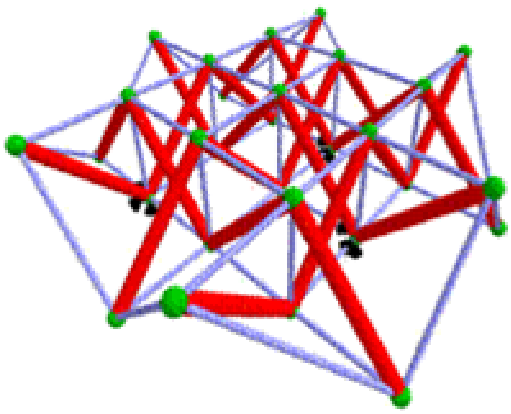


Figure 13. Modélisation d'une grille de tenségrité.

Les résultats fournis par le logiciel ont été validés par une comparaison avec d'autres codes conventionnels (Abaqus, Castem).

Par ailleurs, ce code de calcul a le grand avantage d'être évolutif. Par exemple, dans le cadre de la mise en tension (abordée dans le deuxième chapitre de cette partie), il faut injecter des variations de longueur de fabrication simulant l'allongement ou le raccourcissement des câbles actifs. La modification des procédures de calcul de la matrice de rigidité et des efforts internes permet de simuler cette procédure manuelle de réglage. Cela constitue une étape importante dans la méthodologie de mise en autocontrainte.

1.4.2 Autocontrainte et choix des appuis

On choisit de poser la structure sur sa nappe inférieure. Il est possible d'envisager deux cas simples distincts : soit on choisit 3 nœuds d'appuis, soit on choisit 4 nœuds d'appuis (figure 14).

Dans les deux cas, de nombreuses configurations viables existent et pour chacune d'elle, on peut faire varier le nombre de degrés de liberté bloqués. On cherche à connaître le nombre d'états d'autocontrainte de base qui résultent de chacune de ces configurations à l'aide du logiciel T2000. On constate que pour conserver un nombre réduit d'états d'autocontrainte de base (à savoir 2), seul le cas de 3 appuis reste en lice. Si on s'intéresse au nombre de mécanismes présents dans ces configurations, une nouvelle restriction apparaît. En effet des mécanismes supplémentaires peuvent être créés si les nœuds d'appuis se trouvent sur une même ligne. En ne gardant que les cas où les 9 degrés de liberté sont bloqués, on s'assure de n'avoir que 2 mécanismes. Le choix se porte donc sur 3 appuis complètement bloqués et répartis de manière non symétrique. Finalement, dans ce type de configuration la minigrille est un système relativement simple puisqu'elle possède seulement :

- deux états d'autocontrainte de base : un état central et un état global, notés respectivement *EA1* et *EA2*,
- deux mécanismes.

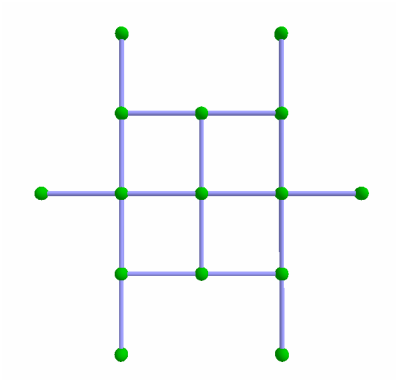


Figure 14. Visualisation de la nappe inférieure de nœuds.

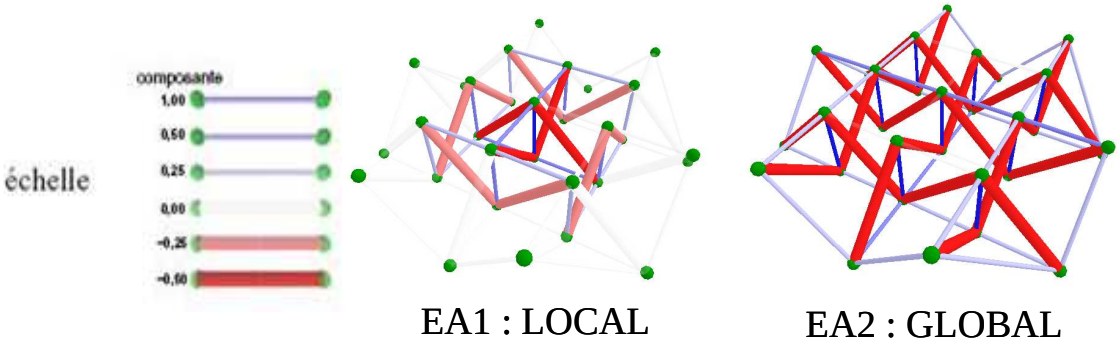


Figure 15. Etats d'autocontrainte de base de la minigrille.

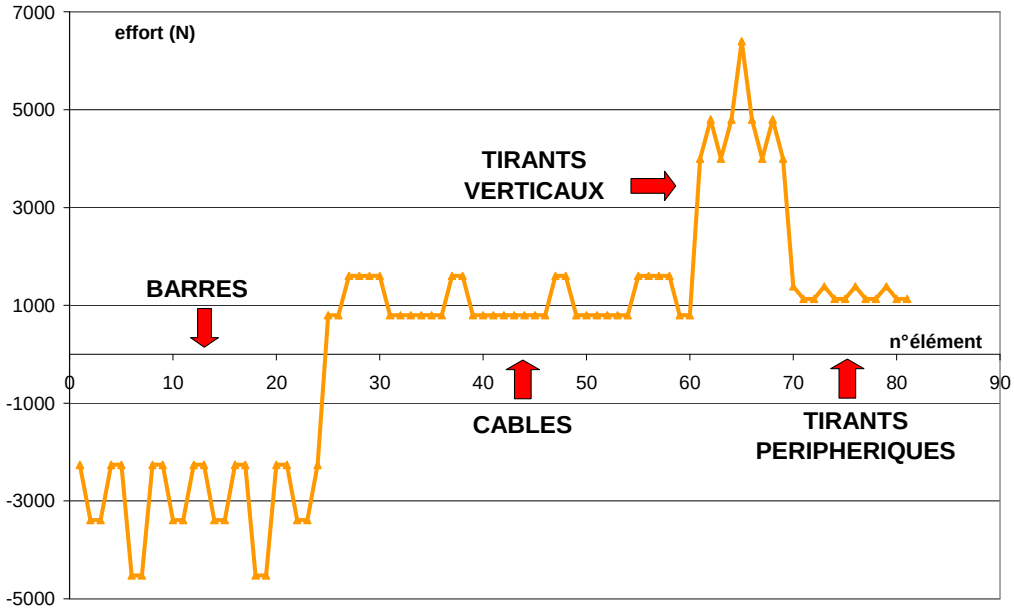


Figure 16. Combinaison des états d'autocontrainte de base de la minigrille.

Les éléments barres comprimés sont tracés en rouge et les tirants en bleu. L'opacité varie en fonction de la valeur du coefficient de contrainte appliqué : allant du transparent pour 0 à l'opaque pour 1 avec les valeurs intermédiaires 0,25, 0,5 et 0,75 (figure 15).

C'est à partir de ces états que l'on est en mesure de construire un état d'autocontrainte qui assure la stabilité de la structure et les états limites de service que l'on s'impose. Pour un rapport 0,5 entre les deux coefficients de pondération *a* et *b* de chaque état d'autocontrainte de base ($a*EA1 + b*EA2$) on obtient une répartition des forces dans les éléments la plus homogène possible (figure 16).

En effet l'écart entre les valeurs extrêmes diffère selon les éléments. S'il est en perpétuelle croissance pour les barres et les tirants verticaux au fur et à mesure que *a* augmente par rapport à *b*, celui-ci est constant pour les tirants périphériques et surtout il possède un minimum pour les câbles. Cette valeur particulière du rapport *a/b* minimise aussi le nombre de valeurs distinctes dans les éléments : 3 niveaux de compression pour les barres, 3 niveaux de tension dans les tirants verticaux, 2 niveaux pour les câbles et 2 niveaux pour les tirants périphériques. Cet état est un état cible privilégié pour la structure étudiée (figure 17), et on peut faire varier son niveau global pour atteindre des valeurs réalistes des efforts dans les éléments afin d'avoir un état que l'on appellera « état réaliste » (la limite élastique des barres sera atteinte pour *a* supérieur à 6600).
Partant de ce choix de conditions d'appuis et d'état d'autocontrainte, le code par éléments finis Cast3M [VCM88] est utilisé pour les prospections numériques plus avancées. Gardant en tête les objectifs expérimentaux futurs, une étude est menée sur l'établissement des fréquences propres et leur évolution en fonction du niveau d'autocontrainte (figure 18).

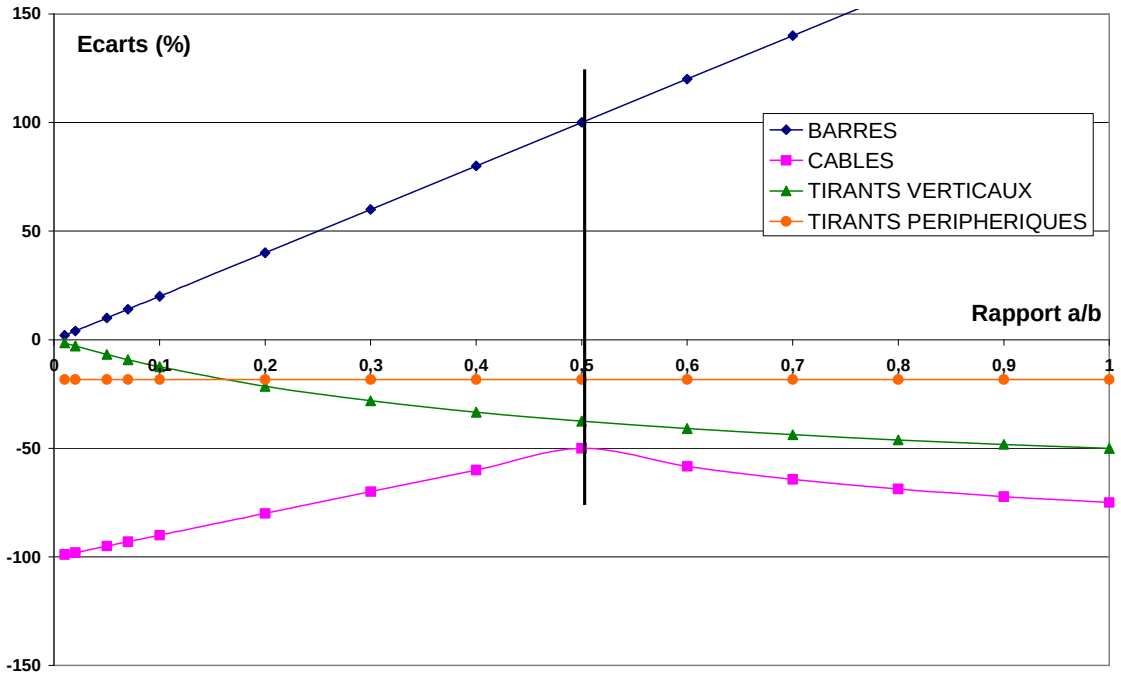


Figure 17. Ecarts des valeurs extrêmes des efforts dans les éléments.

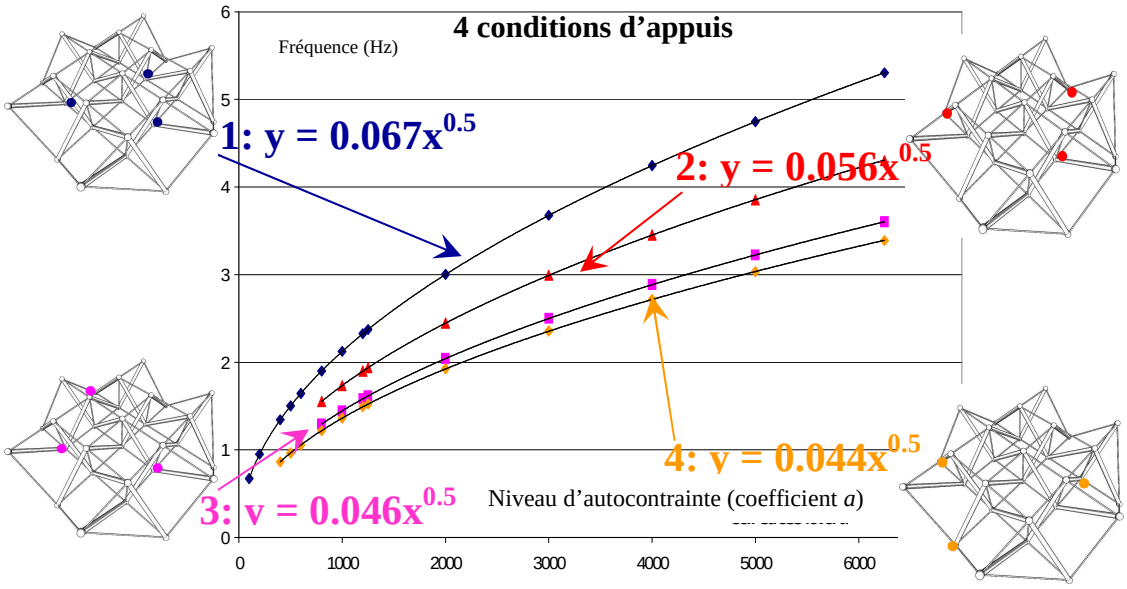


Figure 18. Fréquence du premier mode propre en fonction du niveau d'autocontrainte.

On trouve une variation en racine carrée du premier mode qui a une amplitude de quelques hertz dans la gamme accessible des niveaux de tension. Pour les modes suivants, l'évolution de la fréquence est quasi linéaire et faible (figure 19).

Il nous est alors possible de sélectionner les conditions d'appuis qui donnent les modes propres les plus sensibles au niveau d'autocontrainte. On peut trouver une explication des différences observées selon le type de mécanisme rencontré (figure 20) : les conditions d'appuis 3 et 4 ne présentent qu'un seul mécanisme de cisaillement identifiable localisé sur une ligne de nœuds laissée libre de tout appui et voient leur réponse fréquentielle en fonction du niveau d'autocontrainte inférieure à celle de la condition d'appuis 2 qui possède deux lignes de nœuds libres qui présentent un mécanisme de cisaillement chacune. Le mécanisme obtenu avec la condition d'appuis 1, dont la réponse est plus large, est un mécanisme global de rotation des nœuds périphériques libres autour des nœuds d'appuis au centre.

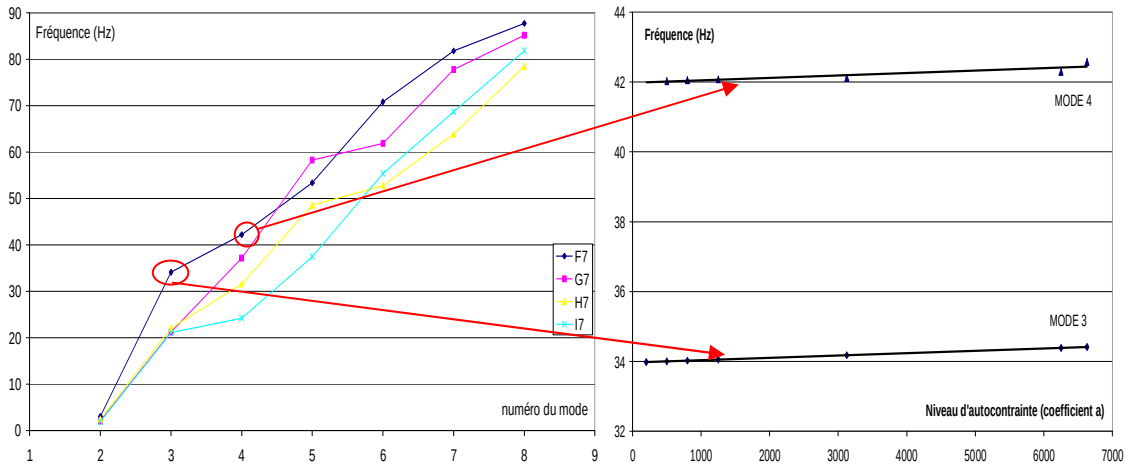


Figure 19. Fréquence des modes pour les 4 conditions d'appuis, évolution linéaire des modes 3 et 4.

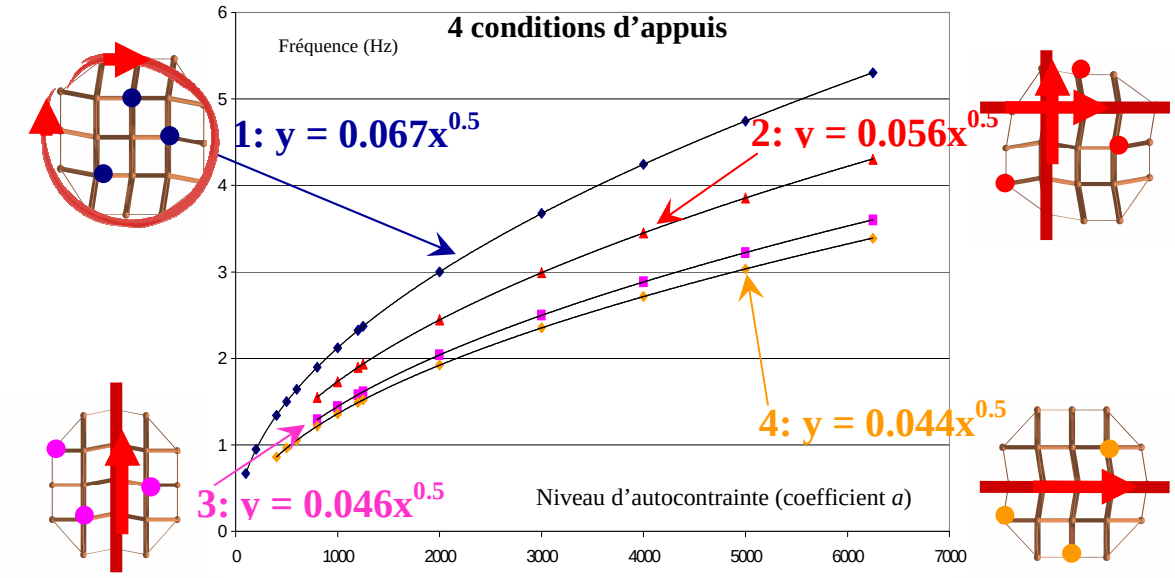


Figure 20. Mécanismes liés aux appuis et évolution de la fréquence du premier mode propre.

1.5 Problématique expérimentale : procédure de mise en tension

1.5.1 Identification de l'état actuel

La mise en autocontrainte d'un système de tenségrité dans un état final cible s'effectue en deux étapes principales : l'identification de l'état actuel (état présent dans la structure à l'issue du montage) suivie de la mise en tension proprement dite par l'application de corrections sur les longueurs des éléments actifs (figure 21).

L'identification de l'état actuel, noté T^a, consiste à déterminer l'état de tous les efforts internes à partir d'un nombre limité de mesures effectuées. En effet, le nombre important d'éléments interdit d'en mesurer les efforts de manière exhaustive. On pose donc l'hypothèse que l'on peut déduire de ce nombre limité de mesures les sollicitations dans les autres composants, et donc l'état des efforts dans l'ensemble de la structure. Il s'agit alors de caler un état généré par la base d'autocontrainte sur le résultat des mesures [Ave04]. Ce calage s'effectue par la méthode de l'inverse généralisé ou pseudo-inverse de Moore-Penrose ([Moo20, Pen55]). Un exemple concret d'illustration de cette méthode est proposé dans l'Annexe B.

Les efforts des éléments tendus sont obtenus par mesure indirecte grâce à la méthode des cordes vibrantes : quand on fait vibrer un élément en tension (tirant ou câble) par l'application d'un choc, la valeur de la fréquence de vibration donne le niveau de tension si l'on dispose d'une bonne loi d'étalonnage (figure 22).

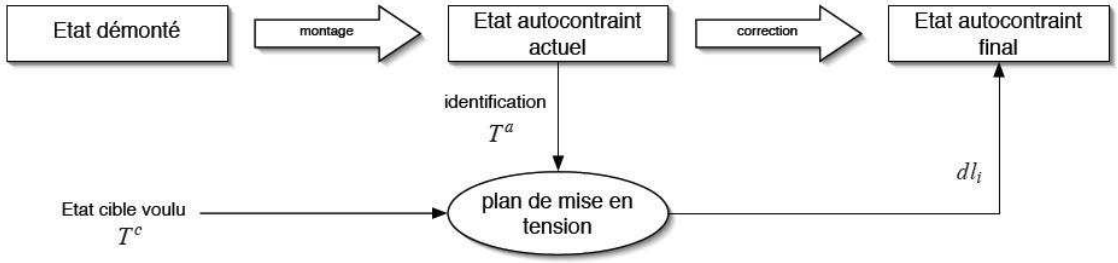


Figure 21. Principe de la méthodologie de mise en tension.

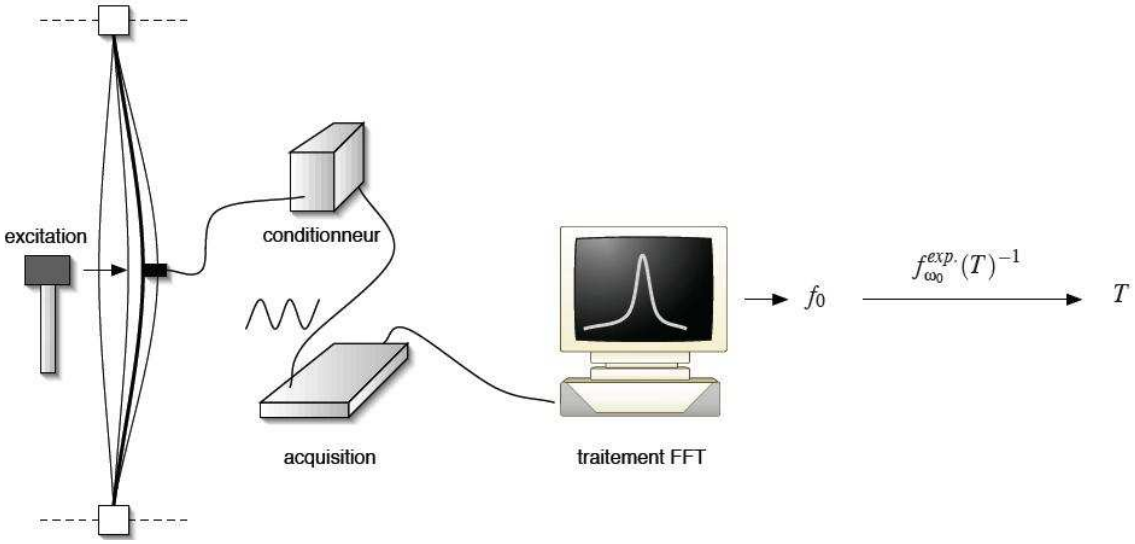


Figure 22. Principe des mesures de la tension dans un composant tendu.

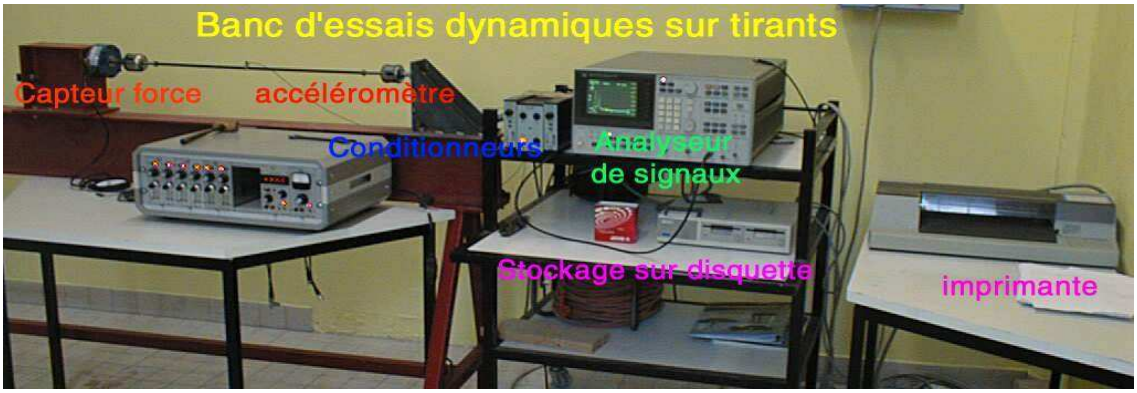


Figure 23. Dispositif d'étalonnage des mesures de tension des tirants.

Le dispositif utilisé pour obtenir la loi d'étalonnage est composé d'un banc de tension équipé d'un capteur de force pour connaître la tension dans l'élément. L'élément est doté d'un accéléromètre relié à un analyseur de signaux (figure 23). Cette chaîne de mesure permet d'obtenir la tension dans l'élément et sa fréquence fondamentale de vibration.
La tension des tirants verticaux est donc définie par une loi force-fréquence étalonnée sur ce banc [CC03]. Pour la vérifier, j'ai réalisé des tests sur le banc de tension afin d'obtenir des coefficients actualisés (figure 24).

Des essais dynamiques identiques ont été réalisés pour établir la relation fréquence-tension des câbles (figure 25). Nous disposions là encore de la loi d'étalonnage correspondante (figure 26) établie par Bernard Crosnier et Franck Cévaër [CC03] et réactualisée pour l'occasion.
L'hypothèse de la corde vibrante sur le banc d'étalonnage est adaptée au cas du câble tendu car les écarts entre l'expérimental et la théorie n'excèdent pas 15% dès lors que la tension dépasse 0,7 kN. Dans ce cas, la rigidité de flexion est négligeable devant la rigidité de traction et les liaisons peuvent être modélisées par des articulations aux extrémités du câble.

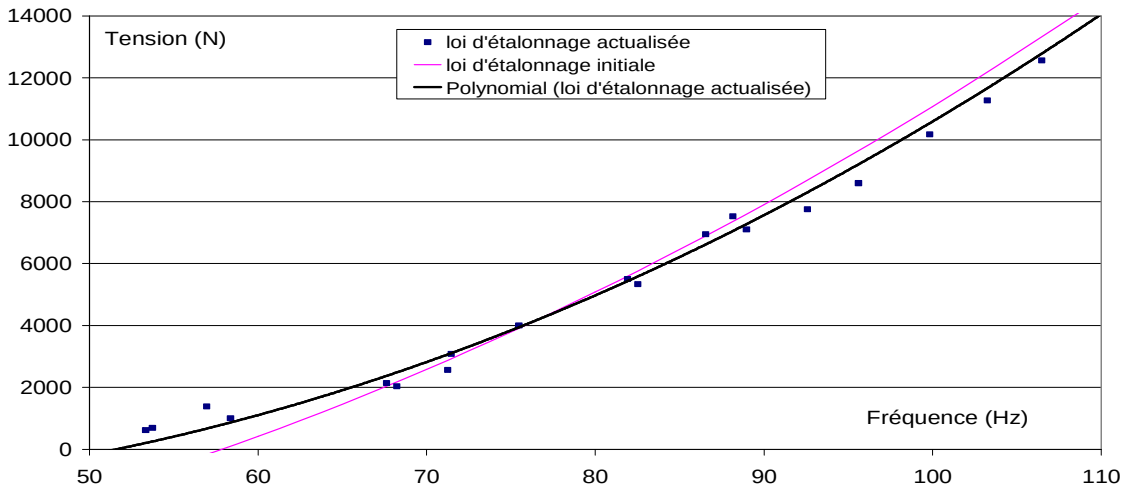


Figure 24. Loi d'étalonnage force-fréquence pour les tirants verticaux.

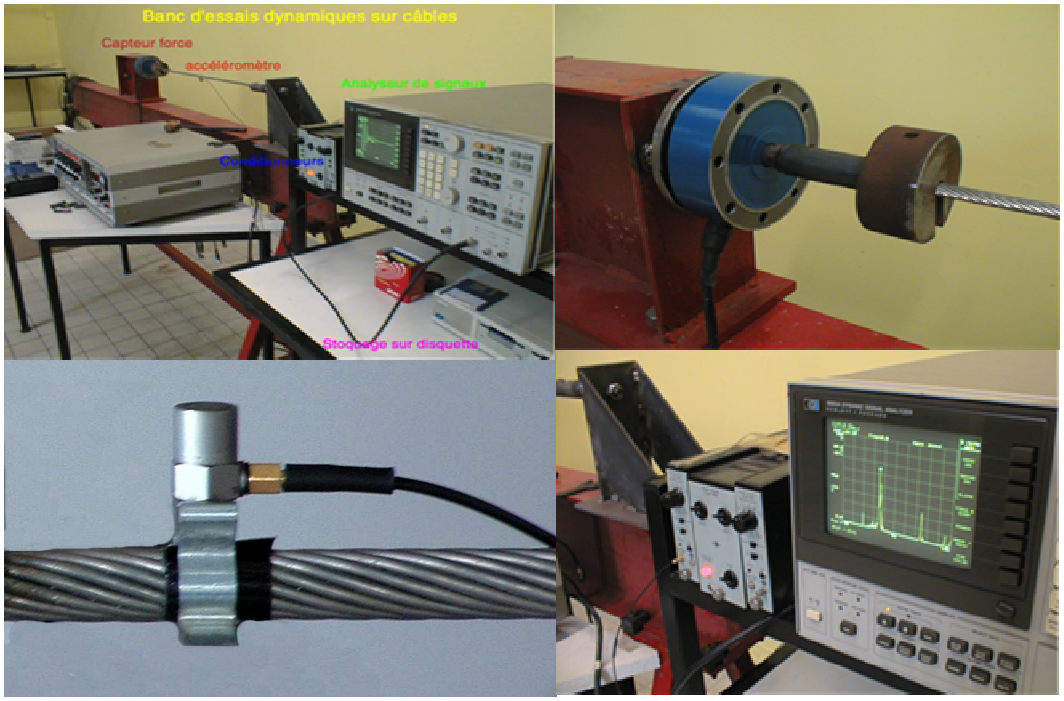


Figure 25. Dispositif d'étalonnage des mesures de tension des câbles.

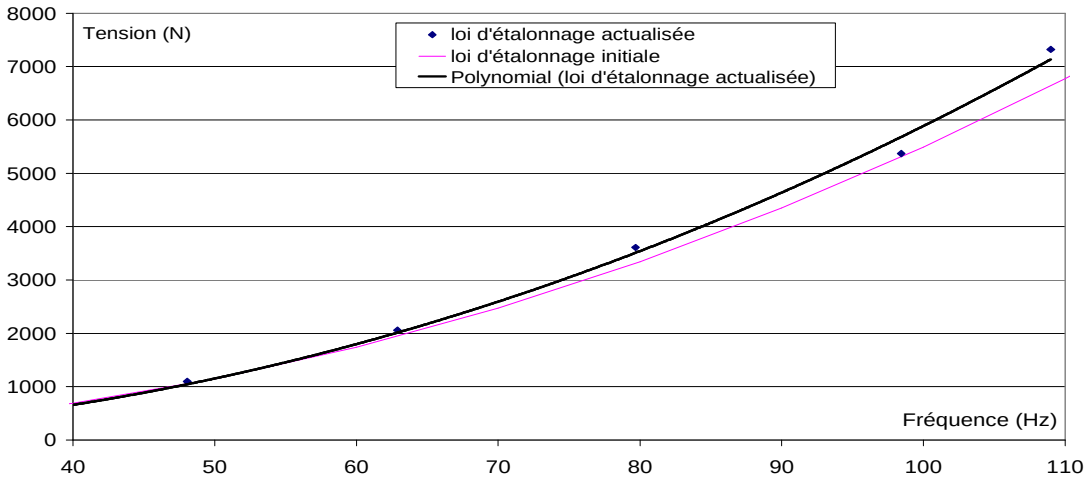


Figure 26. Loi d'étalonnage force-fréquence pour les câbles.

1.5.2 Corrections sur les longueurs des éléments actifs

Une fois identifié l'état initial par les mesures de tension, on peut déduire les longueurs de fabrication nécessaires en utilisant une méthode des moindres carrés (inverse généralisé), en faisant l'hypothèse que la géométrie est celle de référence (0,8m entre nœuds).

On crée alors une base d'influence (variation d'autocontrainte suite à une variation unitaire, 1mm par exemple, de la longueur de fabrication l^{lib}) pour tous les câbles actifs potentiels, avec en données une grille en état intermédiaire entre l'état actuel et l'état cible. La procédure définie dans le logiciel T2000 prend en entrée la liste des câbles actifs utilisés et sort les variations de tension.

On projette ensuite la variation d'autocontrainte voulue (état final – état actuel) dans cette base d'influence en utilisant l'inverse généralisé. On en déduit un vecteur des variations de longueur libre nécessaires. Pour le choix des câbles actifs, on ne garde que ceux dont la variation de longueur est jugée significative. On re-projette dans le plan de longueurs libres.

On effectue le découpage des variations afin de rester au plus proche du chemin linéaire entre l'état actuel et l'état final (figure 27) : cela permet d'éviter des niveaux d'effort intermédiaires élevés qui rendraient le vissage difficile. En entrée dans le logiciel T2000 on retrouve l'état actuel T^a, l'état cible T^c et le tableau des variations unitaires (base d'influence).

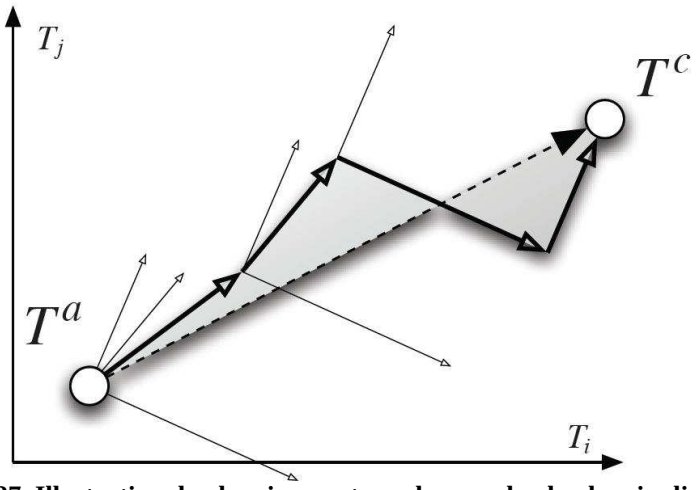


Figure 27. Illustration du cheminement au plus proche du chemin direct.

On se retrouve donc avec un plan de variation de longueurs libres ordonné. Il ne reste plus qu'à simuler le processus pour obtenir des variations de longueurs réelles, mesurables que l'on peut mettre en place. Cette procédure prend en entrée la liste des câbles actifs, leur variation l^{lib} associée et fournit les efforts internes (pour contrôler que l'on va bien vers l'état cible) et les allongements réels.

Dans la minigrille, une variation de longueur d'un millimètre des tirants conduit à une variation d'effort non négligeable (de l'ordre du kilo Newton). Un réglage manuel en boucle ouverte, c'est-à-dire sans vérification du geste (au mieux, on peut contrôler un intervalle d'un quart de tour) parait donc très peu fiable, sans compter les frottements et l'élasticité en torsion des tiges. L'introduction d'une boucle de retour dans la procédure de réglage d'un élément, permet de contrôler la longueur des éléments actifs au cours des opérations.

Julien Averseng [Ave01] a construit un outil spécifique destiné à des mesures précises de variations de longueur, le tout étant portable, léger et simple d'utilisation. L'instrument se présente sous la forme d'une tige télescopique affichant les variations de longueurs sous forme numérique. Il s agit à la base d'un pied à coulisse à affichage numérique auquel ont été greffées deux tiges en acier léger. La précision est affichée au 1/100ème de millimètre sur une course de 200mm. En raison des dispositifs d'assemblage avec les tiges, la course est en fait réduite à 140mm, ce qui est suffisant. Une des deux tiges est démontable, ce qui permet de l'échanger avec une autre et d'effectuer des mesures dans un autre intervalle de longueur. Au total, trois dispositifs de mesures ont été réalisés, pour s'adapter aux domaines de mesure correspondants aux trois longueurs d'éléments actifs dans la structure : tirants verticaux, tirants périphériques, tirants de coin (figure 28). Cet outil permet d'effectuer la mesure de distance nu à nu entre les nœuds par comparaison avec une longueur calibrée connue. Pour atteindre la distance entre les centres des nœuds, il faut bien sûr rajouter deux fois la distance du centre à la surface considérée du nœud, ce dont on a tenu compte pour la fabrication des tiges amovibles.

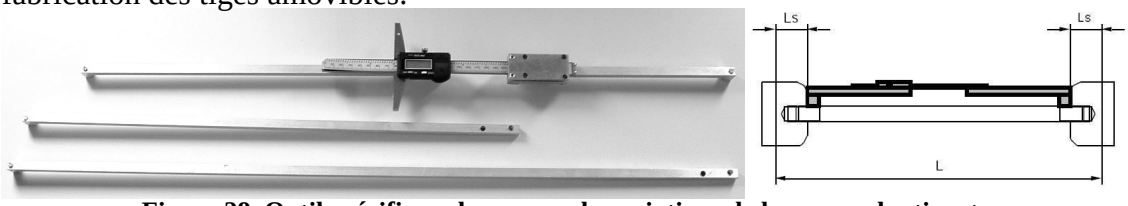


Figure 28. Outil spécifique de mesure de variations de longueur des tirants.

1.5.3 Problèmes soulevés

Après avoir élaboré et testé cette méthode, Julien Averseng se prête à quelques réflexions intéressantes : *« En général, et au vu des résultats utilisant uniquement les tirants verticaux, les corrections restent faibles et le modèle numérique montre un comportement linéaire. A l'issue de la simulation du processus, on arrive parfaitement à l'état cible. Ce modèle est forcément différent de la structure réelle donc après implémentation, l'état final identifié n'est pas à l'état cible, bien qu'étant très proche. L'hypothèse de linéarité permet tout de même de converger assez vite vers l'état cible, malgré les erreurs introduites dans les mesures et lors du réglage. La convergence parfaite du modèle ne permet pas d'aller plus loin. Il faut construire un modèle plus complexe, par éléments poutre par exemple, mais il faudrait y associer une autocontrainte adaptée. »*

De plus, des anomalies sont constatées sur les mesures effectuées :

- une variation de tension normalisée sur le tirant central ne donne pas les variations de tension théoriquement attendues dans les autres tirants verticaux (figure 29),
- des décalages avec la théorie sont observés entre les mesures des tensions dans les câbles et les mesures des tensions dans les tirants (figure 30).

Cela amène à penser qu'une partie de l'énergie n'est pas transformée en tension. On peut formuler l'hypothèse que cette énergie se retrouve sous forme de torsion dans les tirants lors de la mise en tension ou bien sous forme de flexion dans les barres. On peut alors s'inquiéter de la validité de la mesure indirecte des tensions utilisée pour tous les éléments tendus. Et au final s'interroger sur le comportement réel de la structure : peut-on se contenter de la modéliser comme un système réticulé parfait ?

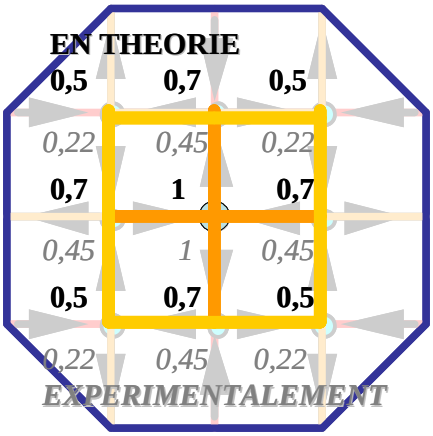


Figure 29. Confrontation des variations théoriques et expérimentales de tension dans les tirants verticaux.

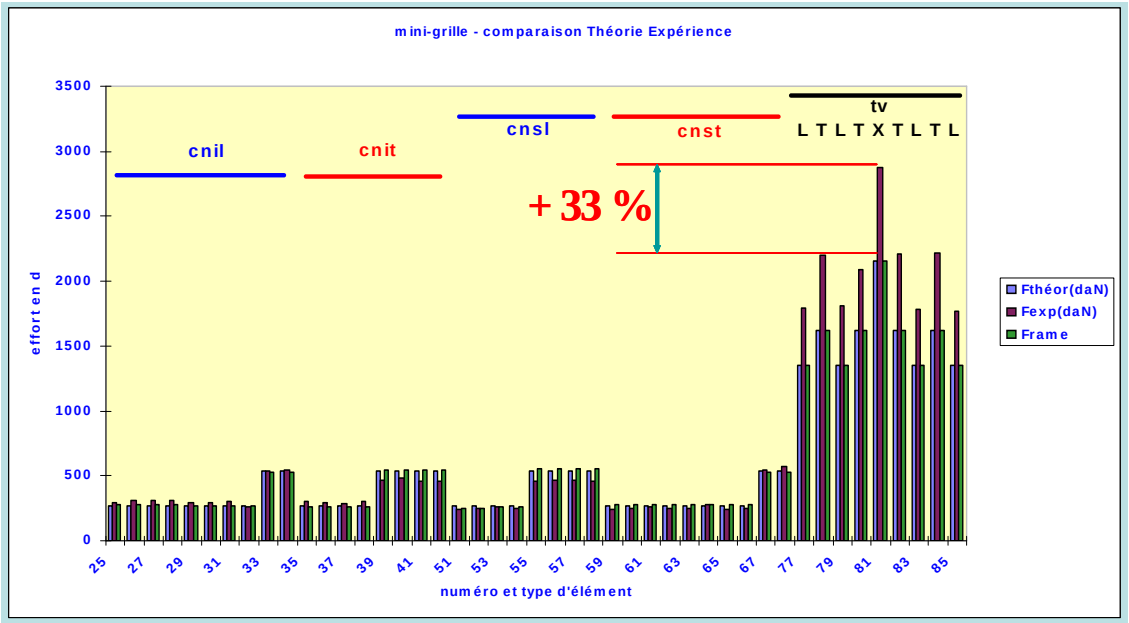


Figure 30. Ecarts expérimentaux sur les valeurs de tension entre les tirants verticaux et les câbles.

1.6 Conclusion

Cette première partie introductive et essentiellement bibliographique a permis d'aborder les notions essentielles concernant les systèmes de tenségrité, notamment l'autocontrainte qui régit leur stabilité et leur rigidité. La minigrille, objet de l'étude expérimentale a été présentée. Grâce au logiciel dédié Tenségrité2000, on peut constater la relative simplicité de cette structure. Dans le cas de conditions d'appuis bien définies, elle ne possède que deux états d'autocontrainte de base. Cela justifie pleinement son utilisation dans le cadre de cette étude expérimentale. Cependant, on ne peut se contenter des seuls moyens instrumentaux existants et qui ont été utilisés pour élaborer les méthodes d'identification de l'état d'autocontrainte et de mise en tension des structures de tenségrité. Pour chercher à comprendre et diminuer les écarts constatés avec ces méthodes et explorer de nouvelles voies, il est nécessaire de mettre en place de nouveaux moyens instrumentaux. C'est pourquoi une campagne complète d'instrumentation de la minigrille débute ces travaux. Celle-ci est détaillée dans la partie suivante.

2 MOYENS INSTRUMENTAUX MIS EN OEUVRE

2.1 Introduction

Les études expérimentales antérieures sur la minigrille ont abouti à la mise au point d'une méthode de mise en tension par l'identification de l'état d'autocontrainte actuel. Cependant, celle-ci souffre d' *« un contexte technologique assez restrictif. La mesure indirecte n'a pu que rajouter des incertitudes lors de l'identification. Il est probable que les performances de cette méthodologie seraient meilleures dans le cas d'une structure conçue de manière à permettre une mesure directe des tensions, au moins dans une partie de ses éléments »* [AC04-1]. Ces propos tenus par Julien Averseng en conclusion de sa thèse annoncent le préalable indispensable à toute poursuite de l'étude expérimentale : instrumenter plus complètement la minigrille avec des moyens spécifiques adaptés qui permettent d'effectuer des comparaisons avec les anciens afin de vérifier leur validité. D'autres points à aborder exigent aussi un complément d'instrumentation : *« la structure réelle n'est pas parfaitement réticulée, contrairement aux hypothèses du modèle théorique (…). L'énergie non restituée au niveau des câbles est vraisemblablement emmagasinée sous forme d'énergie de déformation de flexion au niveau des barres comprimées. »* [CC03]. De même, la géométrie de la structure réelle risque de différer de la géométrie théorique parfaite. Il est donc important de pouvoir la mesurer pour estimer l'influence que cela peut avoir.

Dans cette partie, nous présentons les nouveaux moyens instrumentaux mis en place pour tenter de répondre à ces questions :

- un prototype de tensiomètre pour la mesure de la tension dans les câbles est élaboré,
- des montages de jauges sont mis en place sur les tirants et les barres pour mesurer directement les efforts de ces éléments,
- un tachéomètre est utilisé afin de connaître la géométrie réelle de la minigrille et étudier le comportement mécanique sous chargement.

2.2 Le tensiomètre

2.2.1 Conception du tensiomètre

2.2.1.1 Cahier des charges

Un projet d'élaboration d'un prototype de tensiomètre pour déterminer la tension dans les câbles sommeille dans les cartons depuis de nombreuses années. Cet outil complémentaire doit permettre de déterminer directement la tension et de la confronter avec les résultats obtenus par la méthode des cordes vibrantes utilisée jusqu'alors. Un montage de flexion trois points applique un déplacement transverse au point médian avec un capteur de déplacement associé à un capteur de force. Si il semble parfaitement convenir pour un câble à extrémités fixes, ou de longueur très grande, il faut encore démontrer qu'il est aussi adapté aux spécificités d'un système de tenségrité en état d'autocontrainte. En effet, ces structures sont constituées d'éléments câbles de faible longueur et surtout avec des extrémités élastiques. Le souci majeur concerne la fiabilité de la mesure à effectuer puisque cette mesure elle-même risque de modifier la tension en place du câble et de tous les autres éléments.

Ce projet en est arrivé au stade de la rédaction d'un cahier des charges précis à respecter. L'appareil à réaliser a pour fonction d'appliquer sur un câble, sous l'action d'une force, le déplacement d'un point du câble centré entre deux appuis fixes. La mesure de plusieurs couples *(F,d)* de la force appliquée et du déplacement qui en résulte, permet de déterminer la tension dans l'élément câble. L'effort appliqué par l'appareil sur le câble est inférieur ou égal à 500 daN, et le déplacement du point central inférieur à 3 cm. Le dispositif de mesure de la force appliquée au point central du dispositif, est intégré au bâti du tensiomètre. Les mesures sont enregistrées par un système d'acquisition, afin de calculer la tension du câble testé. Le calcul de la tension du câble est effectué directement par le dispositif d'acquisition.

2.2.1.2 Approche théorique

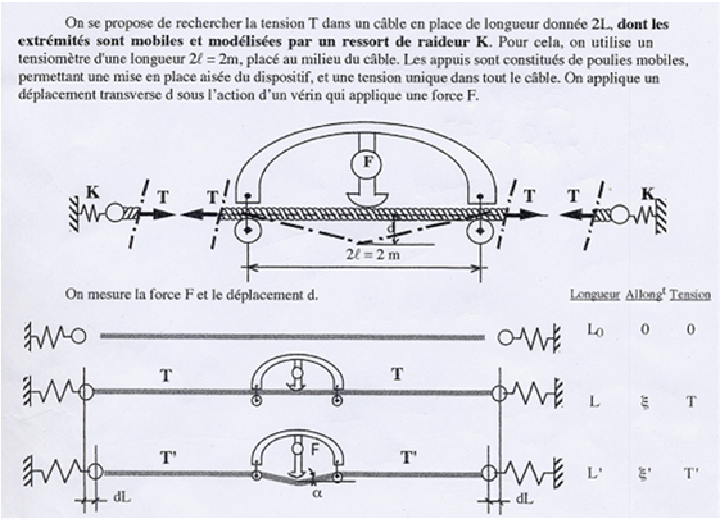


Figure 31. Schéma de fonctionnement d'un tensiomètre trois points.

La figure 31 décrit le fonctionnement d'un tensiomètre trois points[1] : on applique un déplacement qui impose une force transverse au câble. Ses extrémités sont considérées mobiles et sont modélisées par un ressort. Les appuis du dispositif sont des poulies qui permettent :

- une mise en place du dispositif facilitée,
- une unicité de la tension dans tout le câble,
- une réduction des risques d'endommagement du câble par le dispositif (en opposition avec un dispositif à mâchoires bloquant les appuis)

L'expression de la tension *T* du câble (dont on suppose l'inertie en flexion négligeable) en fonction de la force *F* et du déplacement *d* est décrite en trois étapes détaillées dans l'Annexe C :

- l'expression de la variation de la déformation,
- l'expression de la tension,
- une simplification.

[1] N. KAZI AOUAL, F. CEVAER : Enoncé d'un examen de DEA (mars 1997)

L'équilibre en configuration déformée permet d'obtenir la relation entre l'effort mesuré *F*, la tension *T* et le déplacement mesuré *d* :

$$F = \frac{2T}{\ell} d + \left(\frac{k_0 K}{k_0 + K} \right) \frac{d^3}{\ell^2} \tag{2.1}$$

En réécrivant l'expression (2.1), on obtient une formulation de la tension *T* du câble en fonction du déplacement *d* et de la force *F*. Ce sont ces données qui sont mesurées expérimentalement dans le dispositif présenté figure 31.

$$T = \frac{\ell}{2} \left(\frac{F_1}{d_1} - \frac{d_1}{d_2} \frac{(d_1 F_2 - d_2 F_1)}{(d_2{}^2 - d_1{}^2)} \right) \tag{2.2}$$

Théoriquement deux mesures suffisent pour trouver la valeur de la tension du câble en s'affranchissant de la raideur équivalente des appuis du câble et sans s'inquiéter du domaine de la courbe *F-d* dans lequel on réalise le dépouillement.

2.2.1.3 Approche numérique

Il s'agit de s'assurer qu'une modélisation numérique des mécanismes mis en jeu par ce dispositif sur un câble tendu corrobore le modèle théorique développé. Nous utilisons le code par éléments finis Cast3m et le logiciel Tenségrité 2000. Ces simulations permettent d'estimer l'influence de paramètres tel que l'écartement des poulies ou d'inconnues telle que la raideur équivalente des appuis du câble, pour nous aider dans le dimensionnement du tensiomètre à réaliser.

Le câble est modélisé par des éléments élastiques isotropes de type barre. Les caractéristiques du matériau sont la longueur du câble, le diamètre, le module d'Young, le coefficient de Poisson et la masse volumique. Les paramètres variables sont l'espacement des poulies, la tension dans le câble *T*, le déplacement *d* imposé par le tensiomètre et la raideur équivalente des appuis du câble *K*. Concernant ce dernier paramètre, il a été traité de façon particulière. En effet, on peut remarquer que les appuis élastiques sont équivalents à une longueur de câble plus importante avec appuis fixes. Pour s'en convaincre, il faut porter son attention sur le coefficient du second membre au troisième degré en *d* de la formule théorique de *F*.

Dans le cas d'appuis fixes, il vaut $k_0 = \frac{ES}{L_0}$ (K infini), tandis qu'il s'écrit $\left(\frac{k_0 K}{k_0 + K}\right)$ si l'on considère des appuis élastiques.

Rien n'interdit de mettre la valeur de K sous la forme d'un multiple de k_0, soit $K = \beta * k_0$ et on obtient finalement une nouvelle expression pour ce terme :

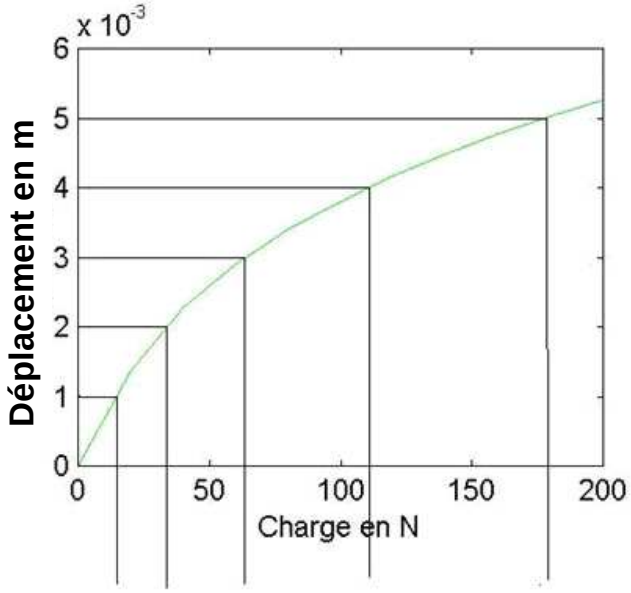
$$\left(\frac{k_0 K}{k_0 + K}\right) = \frac{\beta}{\beta + 1} k_0 = k_0'$$

Ceci équivaut à la configuration d'appuis fixes avec $k_0' = \frac{\beta}{\beta + 1} \frac{ES}{L_0}$

Donc dans le cas d'un câble dont les caractéristiques de section S et de module d'Young E sont connues et fixées, c'est le paramètre de longueur qui est pondéré par un coefficient sans dimension. Au final nous avons une longueur équivalente $L_0' = \frac{\beta + 1}{\beta} L_0$ d'un câble avec appuis fixes qui a le même comportement qu'un câble à appuis élastiques de longueur moindre. Pour les simulations, le problème des conditions limites est réglé de cette manière.

La procédure PASAPAS de Cast3m permet de simuler le chargement, c'est-à-dire le déplacement imposé sur le câble, en grands déplacements et grandes rotations à partir de toutes les données énumérées ci-dessus.
Le dépouillement consiste alors en l'extraction de la force nécessaire pour imposer le déplacement du câble. Une courbe force-déplacement est alors construite. Elle est caractéristique de la tension du câble et de la raideur de ses appuis.

Nous effectuons la comparaison entre les résultats théoriques obtenus pour une tension fixée et les résultats numériques obtenus avec Cast3m et avec Tenségrité 2000 (figure 32).



Tenségrité2000	14,62	34,14	64,23	110,56	177,90
Castem	14,23	33,82	64,13	110,52	178,37
Théorie	14,23	33,82	64,13	110,53	178,39

Figure 32. Comparaison théorie/simulations de la force appliquée en fonction du déplacement pour une tension fixée.

On note la très bonne concordance entre les valeurs des forces pour des déplacements imposés avec les trois méthodes, laquelle est quasiment parfaite entre la théorie et la modélisation sous Cast3m. Le calcul des tensions qui en découle donnera donc des résultats eux aussi concordants.

Le tableau 2 présente la même comparaison entre la théorie et la modélisation sous cast3m avec une large gamme de valeurs de la raideur des appuis du câble (ici le coefficient β associé). Cette fois encore, la force pour des déplacements imposés concorde parfaitement.

β	d (mm)	1	2	3	4	5
10	Castem	14,15	33,16	61,94	105,34	168,24
	Théorie	14,15	33,17	61,94	105,33	168,21
1	Castem	13,78	30,24	52,07	81,95	122,57
	Théorie	13,78	30,24	52,06	81,93	122,52
0.1	Castem	13,42	27,32	42,20	58,55	76,86
	Théorie	13,42	27,32	42,19	58,53	76,82
0.01	Castem	13,34	26,74	40,25	53,92	67,81
	Théorie	13,34	26,74	40,24	53,90	67,77

Tableau 2. Comparaison théorie/simulation de la force (en Newton) appliquée pour un déplacement imposé et une tension fixée en faisant varier le coefficient β.

Une attention particulière a été portée sur les efforts susceptibles d'être supportés par les poulies pour le choix du matériau les constituant. Par exemple, dans le cas d'une tension de câble de 20kN et une forte rigidité des appuis du câble (β =10000), avec un déplacement conséquent de 5mm, la simulation prévoit que la poulie ne va supporter que 1kN. Ces dernières sont finalement faites en bakélite et ont un diamètre de 60mm.

Nous pouvons aussi vérifier numériquement l'influence de l'espacement des poulies. S'il est inférieur à une vingtaine de centimètres, on observe une augmentation conséquente de la force à appliquer pour un déplacement donné. Cela peut risquer d'endommager le dispositif de mesure de la force du tensiomètre. Un espacement supérieur à 30cm implique quant à lui, pour un déplacement donné du câble, une diminution de la précision sur la détermination de la raideur des appuis.

2.2.2 Mise en service du prototype

2.2.2.1 Fabrication

On peut rappeler que le choix de fabriquer cet instrument de mesure au sein du laboratoire fait écho à la faible gamme existante pour ce type d'appareillages dédiés à des câbles de si petite dimension. Généralement cette technologie de tensiomètres trois points est plutôt utilisée sur des câbles de longue portée et de grand diamètre (câbles sur le réseau électrique haute tension par exemple). A titre indicatif, le coût d'un tensiomètre spécifique est supérieur au millier d'euros.

L'élaboration du prototype s'est concentrée autour de deux points. La prise en compte des résultats théoriques et numériques pour optimiser le dimensionnement du tensiomètre. L'utilisation d'outils existants pour réduire le temps de réalisation.

La pièce principale est récupérée sur un banc d'essai de laboratoire pour la reconnaissance harmonique de textile. Il s'agit d'un système de guidage tiré du dispositif pour tendre une membrane.

C'est sur ce chariot guidé linéairement par une vis que l'on a placé les instruments de mesure à notre disposition, à savoir :

- un capteur de déplacement laser MX1A-MX1B (Chauvin-Arnoux) qui permet la mesure de distance précise et sans contact. Il a une étendue de mesure de 30 à 50mm avec une résolution de 10µm pour une distance de référence de 9cm. Une cible fixe lui sert de repère.
- une tige en Duralumin (module d'Young de 73000MPa, diamètre de 12mm) est équipée d'un montage de jauges « demi-pont complet » (explicité dans le chapitre sur les montages de jauges). Ce dispositif vient déformer le câble en faisant office de capteur de force.

Une plaque métallique recevant les poulies qui bloquent le câble lors du déplacement du chariot vient compléter la fabrication du tensiomètre (figure 33).

L'acquisition s'effectue en temps réel sur Labview. Les relevés de force et de déplacement en fonction du temps provenant du montage de jauges et du capteur laser sont récupérés via une carte d'acquisition Texas Instrument et filtrés pour diminuer le bruit (figure 34). Cela permet de visualiser la courbe force-déplacement pour toute la durée du chargement au lieu de se contenter de quelques couples (*F,d)* (figure 35).

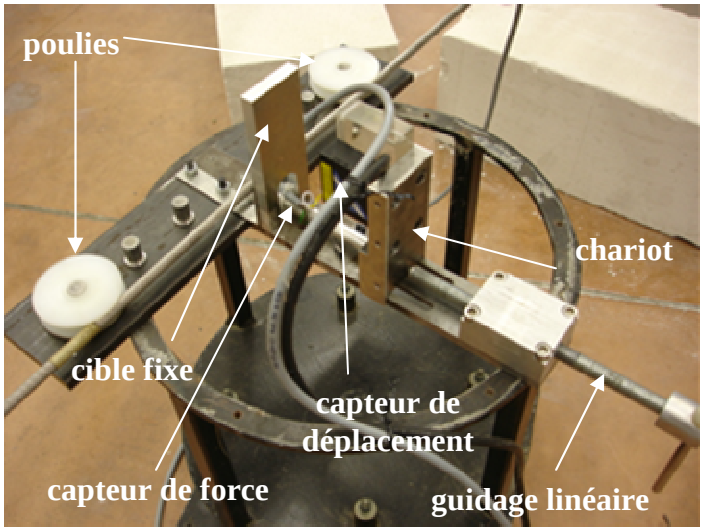


Figure 33. Vue du tensiomètre.

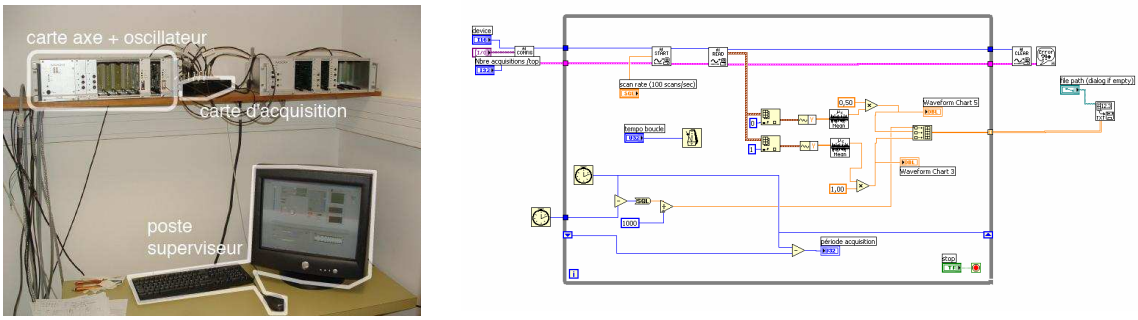


Figure 34. Dispositif d'acquisition des données, instrument virtuel Labview.

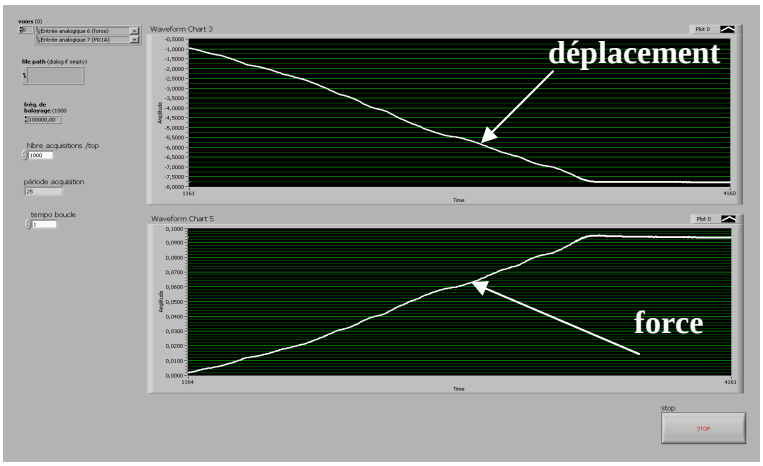


Figure 35. Acquisition par Labview des données de force et de déplacement du tensiomètre.

2.2.2.2 Dépouillement et étalonnage

Comme expliqué dans le volet théorique, on utilise les valeurs de la force et du déplacement acquises lors d'un chargement du câble par le tensiomètre. Pour l'essai sur un câble tendu à 4700N sur le banc de tension, l'allure de la courbe expérimentale répond bien aux attentes et valide le principe de fonctionnement du prototype (figure 36).

Une partie linéaire est présente pour de faibles déplacements. Si on se reporte à la formule 2.1 on note que la valeur de la pente est $\frac{2T}{\ell}$ ce qui permet de retrouver la tension dans le câble. L'inflexion pour de plus grands déplacements contient quant à elle l'information concernant la raideur des appuis. Ils sont considérés comme symétriques dans la théorie. Si cela est vraisemblablement le cas sur le banc de tension, il n'en est pas forcément de même dans la minigrille. On peut aussi utiliser la formule (2.1) pour calculer cette raideur apparente des appuis connaissant celle du câble et la demi-longueur d'écartement des poulies.

Dans l'exemple présenté, on obtient une tension de 3400N. Dans ce cas, la méthode accuse donc un écart conséquent de 28% par rapport à la valeur réelle. On trouve une raideur de 0,35MN/m ce qui correspond à des appuis relativement fixes. On note que quelle que soit la valeur de la tension mesurée par la suite sur banc de tension, la valeur de la raideur des appuis du câble est restée constante.

Ceci conforte le bon fonctionnement du banc de tension.

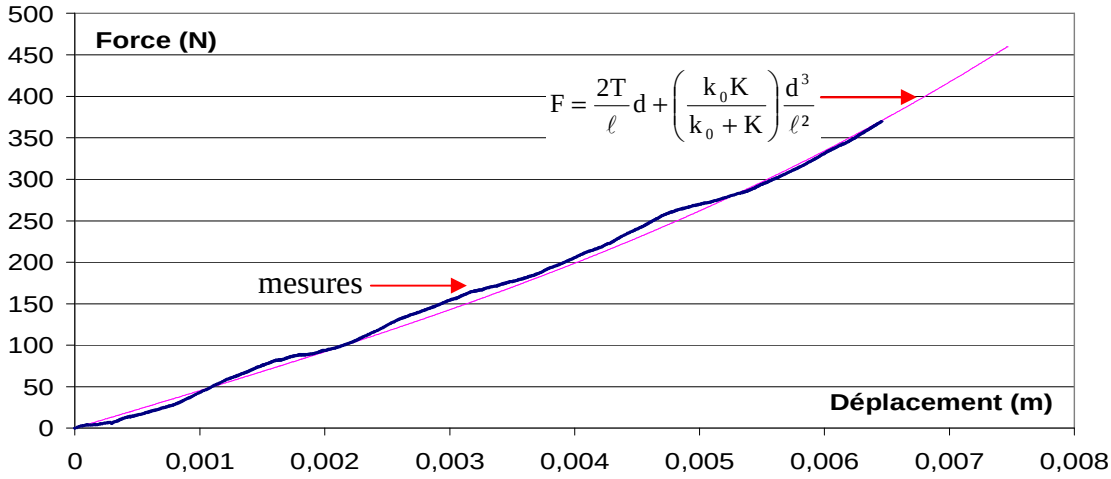


Figure 36. Courbe force-déplacement expérimentale et théorique.

Une façon alternative d'obtenir la tension est de se servir de la formule (2.2). Il s'agit alors de trouver l'écart optimal entre les deux couples (F_1,d_1) et (F_2,d_2) sélectionnés pour la formule, les déplacements étant appliqués à vitesse à peu près constante. On balaye ensuite toute la courbe *F-d* afin d'obtenir un nombre non négligeable de valeurs de la tension à moyenner. Si les couples choisis ont des déplacements trop rapprochés, on obtient un grand nombre de valeurs pour la tension mais on observe des résultats fortement bruités. Si les déplacements des couples sont trop éloignés, nous ne disposons alors pas d'un panel suffisant de valeurs de la tension car la plage de mesures exploitables se trouve très réduite. En ordonnée, nous avons la valeur de la tension et en abscisses le déplacement imposé. La moyenne est ici de 4,1kN au lieu des 3,4kN trouvés par l'autre méthode réduisant l'écart avec la valeur réelle à 13% ce qui reste non négligeable (figure 37).

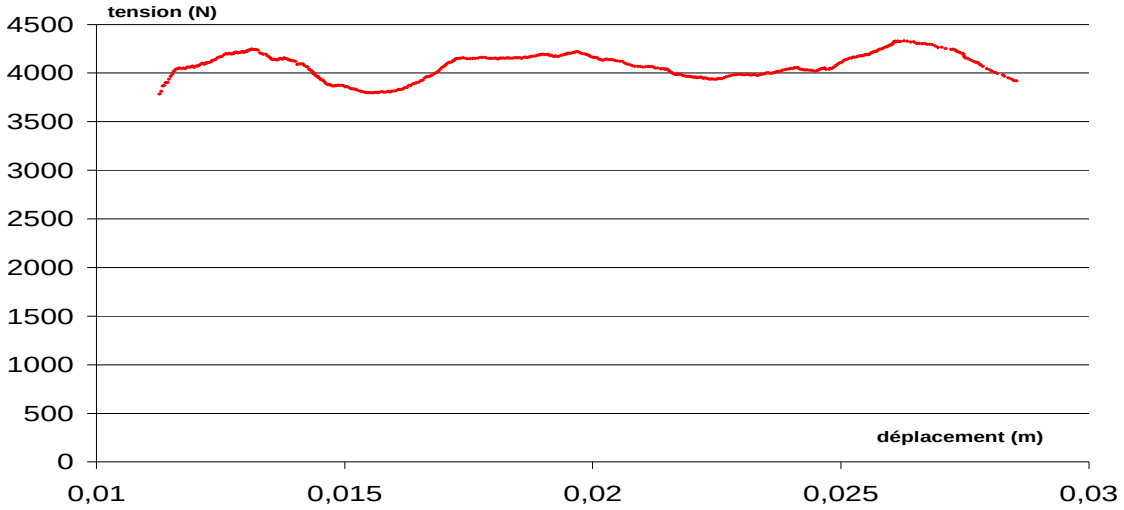


Figure 37. Détermination de la tension dans le câble par la formule (2.2).

Nous observons des oscillations régulières qui vont donner un écart type élevé sur la valeur moyenne trouvée pour cet essai. L'hypothèse avancée est que ces oscillations sont dues au mauvais guidage du chariot. En effet leur demi-période correspond à des déplacements d'environ 0,8 à 0,9mm qui peuvent être liés au pas de vis de 1,75mm.

Pour régler ce problème du guidage et tenter d'améliorer la précision du tensiomètre, nous montons un nouveau chariot (de la marque THK) plus performant (figure 38).

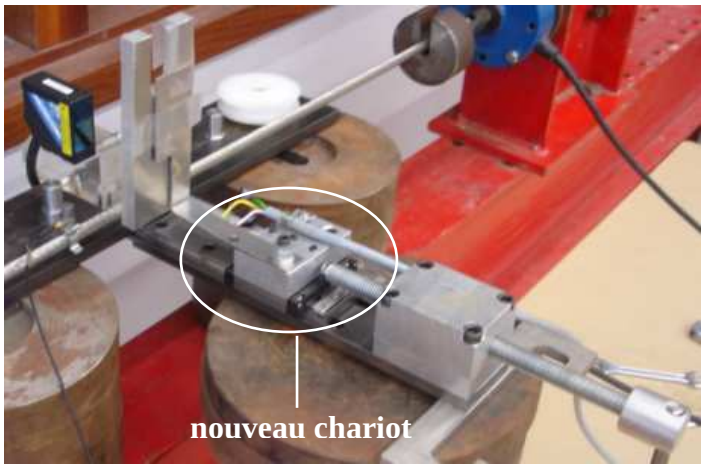


Figure 38. Le tensiomètre équipé du nouveau chariot de guidage.

Comme on peut le constater sur la figure 39, les oscillations disparaissent complètement. L'incertitude liée à la méthode de dépouillement pour les valeurs des tensions est ainsi minimisée.

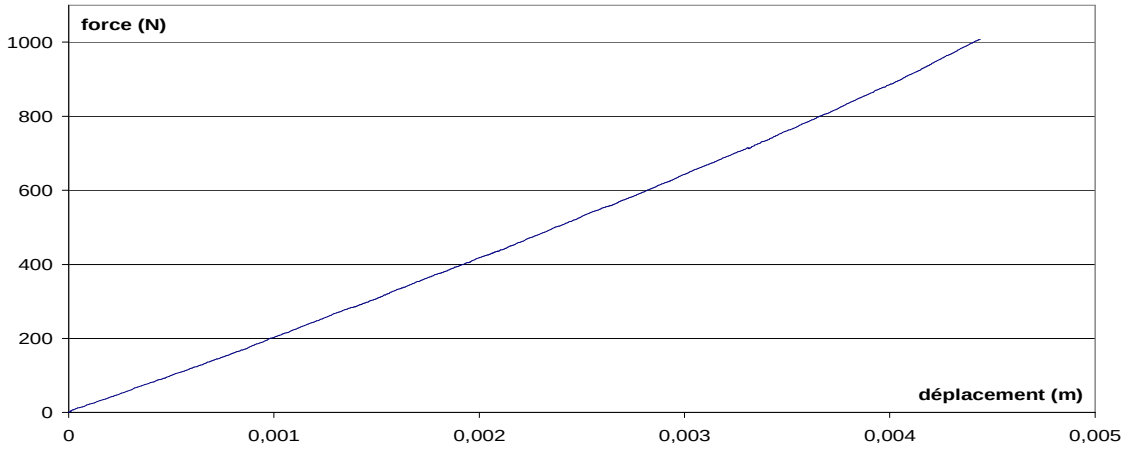


Figure 39. Courbe force-déplacement obtenue par le tensiomètre avec le nouveau guidage.

Des campagnes d'essais ont été effectuées sur banc de tension. Elles ont été l'occasion de se familiariser à l'utilisation de ce nouvel outil et au dépouillement des données brutes obtenues, mais surtout d'estimer la précision de notre appareillage.

Pour des valeurs variées de la tension T_{capt} dans le câble (connue grâce au capteur de force de référence du banc) nous avons effectué la mesure T_{tensio} avec le tensiomètre.

La figure 40 montre que les écarts relatifs pénalisent la précision des mesures dans le cas des faibles tensions. Le tensiomètre semble mieux adapté dès que le câble est très tendu. On peut estimer que pour des valeurs de tensions supérieures à 5kN, l'erreur descend sous le seuil des 20% ce qui est loin des objectifs affichés.

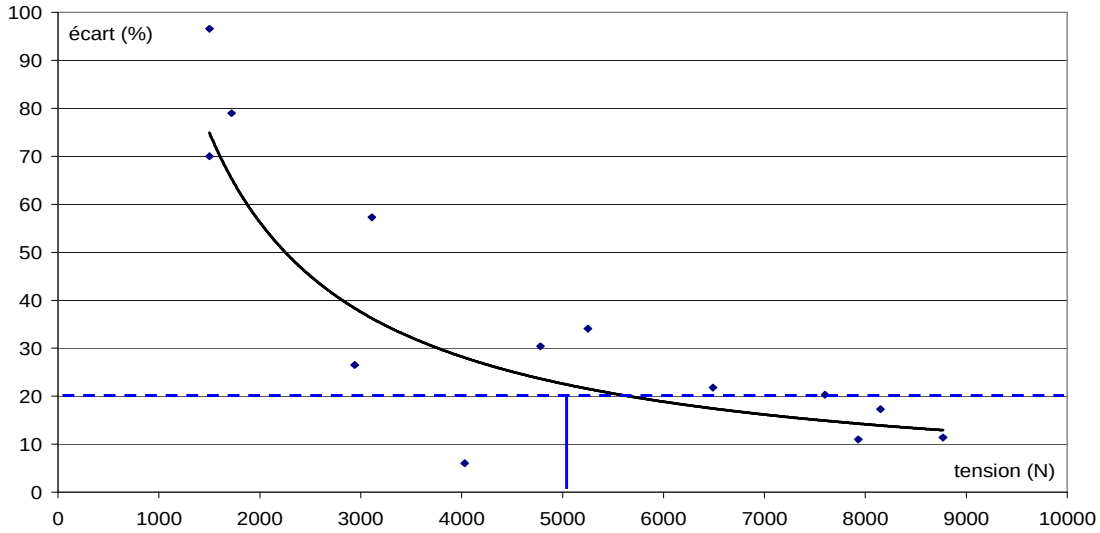


Figure 40. Ecarts observés avec le nouveau guidage.

Des essais effectués sur un câble de diamètre 2mm avec un écartement des poulies de 20cm donnent de meilleurs résultats : pour de faibles tensions comprises entre 300 et 500N, l'écart entre la tension déterminée par le tensiomètre et la tension de référence du capteur de force du banc de tension n'excède pas 5% (tableau 3). Cela signifie que les mauvais résultats obtenus sur les câbles de 8mm à ces niveaux de tension ne viennent pas des limites de sensibilité du dispositif et cela conforte aussi sa bonne polyvalence vis-à-vis des diamètres de câbles.

T_{capt} (N)	T_{tensio} (N)	Ecart (%)
510	489	-4
460	466	1
450	470	2
430	450	4
430	441	2
420	402	-4
300	285	-5

Tableau 3. Comparaison des résultats obtenus avec un câble de diamètre 2mm

On peut conclure de ses résultats que la formule théorique utilisée pour le dépouillement des données de force et déplacement menant à la détermination de la tension du câble, conférant au câble un comportement de type BARRE, ne rend pas compte de la réalité observée pour les basses tensions quand le diamètre du câble est élevé au regard du diamètre des poulies et de leur écartement. En effet, une telle configuration implique des contacts non ponctuels entre le câble et les poulies lors de la déformation du câble. On a pu ainsi vérifier expérimentalement que cet effet est d'autant plus vrai que l'écart entre les poulies est faible : on voit sur la figure 40, que pour un écartement entre poulies de 30cm, l'écart constaté pour une tension de 1500N est de l'ordre 100%. Par ailleurs, en effectuant des essais avec un écartement de 20cm, on observe un écart qui atteint 150% pour ce niveau de tension. L'effet indésirable observé pour les basses tensions a donc été accentué par le rapprochement des poulies.

Pour approfondir l'étude, on simule le tensiomètre sur le banc de tension (avec la raideur des appuis déterminée expérimentalement). On compare alors les valeurs de la force appliquée pour un déplacement imposé données par la formule théorique avec celles obtenues par des modélisations de type BARRE ou POUTRE pour le câble. La modélisation BARRE donne logiquement des résultats quasiment identiques à la théorie développée. Ainsi, on peut constater que dans notre cas expérimental, le comportement mécanique du câble de la minigrille de diamètre 8mm n'est pas parfaitement modélisé par la théorie développée, alors qu'il l'est quasiment dans le cas d'un câble de diamètre 2mm (figure 41). Il est à noter qu'en passant d'un écartement des poulies de 30cm à un écartement de 20cm, tous les autres paramètres restant constants, cette simulation prédit un écart plus grand avec la théorie, confortant ainsi l'observation expérimentale décrite précédemment.

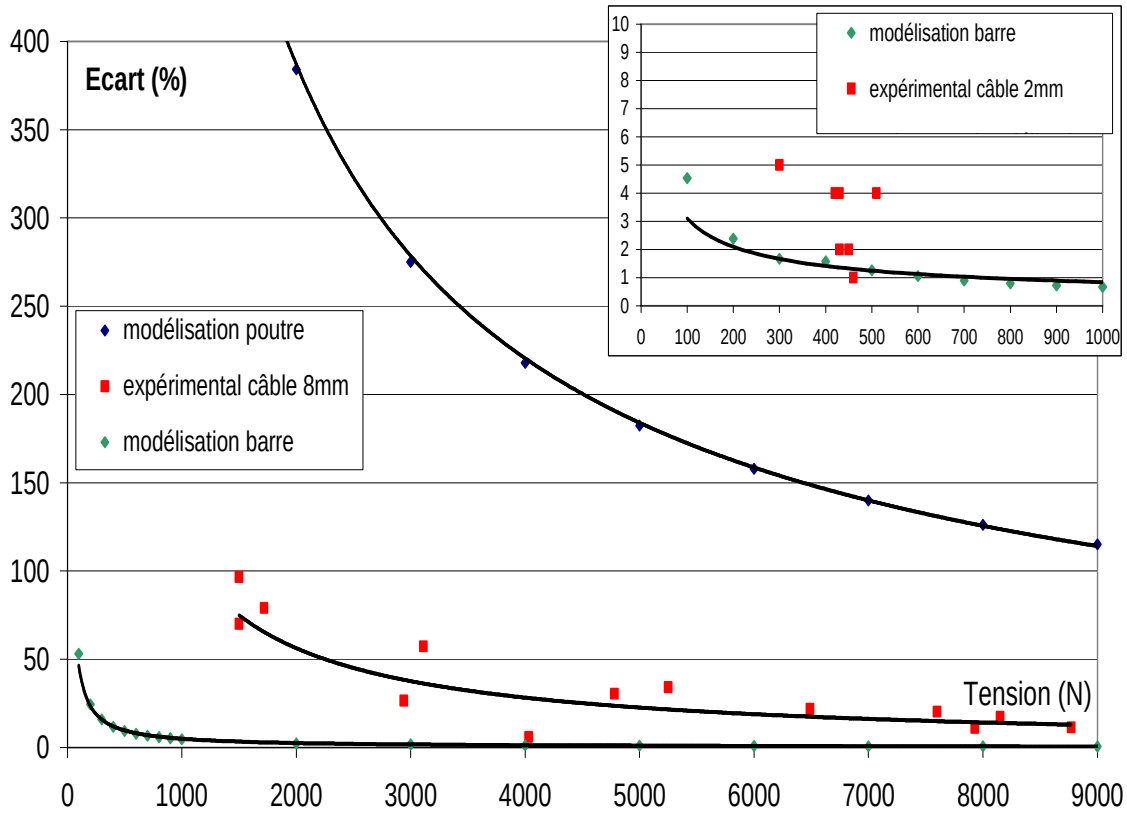


Figure 41. Ecarts des modélisations par rapport à la formule théorique, écart des mesures par rapport à la tension réellement appliquée.

2.2.3 Conclusion

En conclusion, ces campagnes d'essais ont validé le principe de fonctionnement du tensiomètre pour des câbles en tension. Il est à noter que ce tensiomètre est tout à fait adaptatif, de par la possibilité de faire varier l'écart entre les poulies, lesquelles sont amovibles. On peut donc adapter le montage pour des câbles de longueurs et sections différentes. L'élaboration du prototype offre un nouvel outil de mesure directe de tensions dans les câbles. Une fois les améliorations nécessaires pour atteindre une meilleure précision effectuées, il sera possible de passer à une phase de mise en service. Des campagnes d'essais approfondies devraient permettre d'étudier plus particulièrement la raideur des appuis. Celle-ci donne une information non négligeable sur l'état de tension général de la structure et donc sur son comportement mécanique. Nous avons utilisé le tensiomètre sur les câbles en place de la minigrille pour effectuer des comparaisons avec la méthode des cordes vibrantes. Ces essais sont détaillés dans la partie consacrée aux résultats sur la modélisation des éléments.

2.3 Les jauges

2.3.1 Problématique

L'objectif est multiple : détecter la présence de flexion dans les barres, comparer les mesures des montages de jauges avec celles de la méthode des cordes vibrantes et utiliser ces mesures pour l'identification de l'état d'autocontrainte et la mise en tension.

En effet, si la méthode d'identification par pseudo-inverse ainsi que celle de mise en tension vers un état cible de Julien Averseng semblent robustes, un doute persiste sur la validité des mesures des efforts. C'est en partie la raison pour laquelle nous avons décidé de chercher un autre moyen d'obtenir les efforts dans les éléments. Notre choix s'est rapidement porté sur l'utilisation de montages de jauges qui présentent de multiples avantages ([Avr67], [NH67]). Les mesures directes permettent d'effectuer une comparaison utile avec les mesures obtenues par la méthode des cordes vibrantes. De plus, les barres peuvent être instrumentées. Nous pouvons lever le doute sur la présence de flexion dans les barres à l'aide d'un montage de jauges adapté. Nous définissons les montages dont nous avons besoin pour mesurer la tension dans les tirants ; la compression et la flexion dans les barres ([LGA96], [Rob04]). Une fois les montages testés et validés nous devons intégrer les éléments instrumentés au sein de la minigrille.

2.3.2 Choix des montages de jauges

On distingue les deux types d'éléments à instrumenter : les tirants et les barres. Pour les barres, en plus de la détermination de la compression, on veut aussi vérifier la présence ou non de flexion**.** Pour les tirants, on cherche à ne déterminer que la tension**.** Cela conduit à envisager des montages de jauges différents adaptés à chacun des effets à mesurer.

La description des jauges choisies, des CEA-06-250UW-350, est donnée par le fabricant Vishay (figure 42).

Il faut noter qu'il s'agit de jauges à 350 ohms et surtout que le facteur de jauge $\mathfrak{F}$ est de 2,105 à 0,5% près.

Les trois types de ponts sélectionnés sont les suivants :

- quart de pont pour déterminer la tension dans les tirants : une jauge unique est placée dans le champ de déformations,
- demi pont pour déterminer la compression dans les barres : deux jauges actives sont montées sur des bras opposés ce qui permet d'éliminer les effets de flexion,
- pont complet pour déterminer la flexion dans les barres : on utilise quatre jauges actives dont deux adjacentes subissant l'effet de Poisson.

Le principe de leur branchement et la valeur de leur signal de sortie sont explicités sur la figure 43. On note U_0 la tension de sortie en mV et U la tension d'excitation en V. Les déformations sont exprimées en µm/m.

On trouve dans la notice des conditionneurs les schémas de branchements des montages de jauges réalisables (figure 44).

Le détail de branchement des trois montages dans l'ordre de pont décroissant est donné dans l'Annexe D : on y explique aussi pourquoi il est finalement décidé d'équiper les tirants du même montage demi-pont complet (sensiblement différent du montage demi-pont initialement préconisé) que les barres.

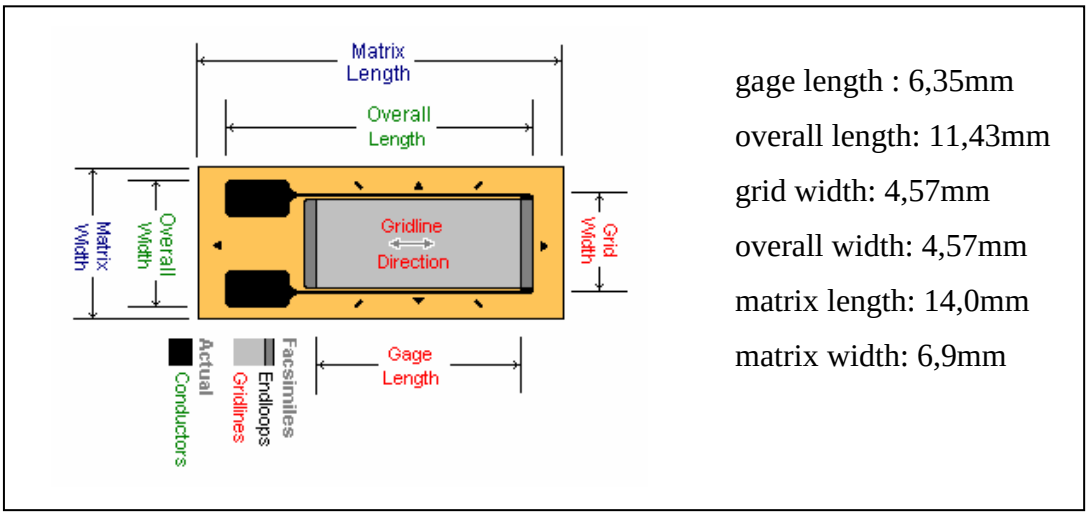
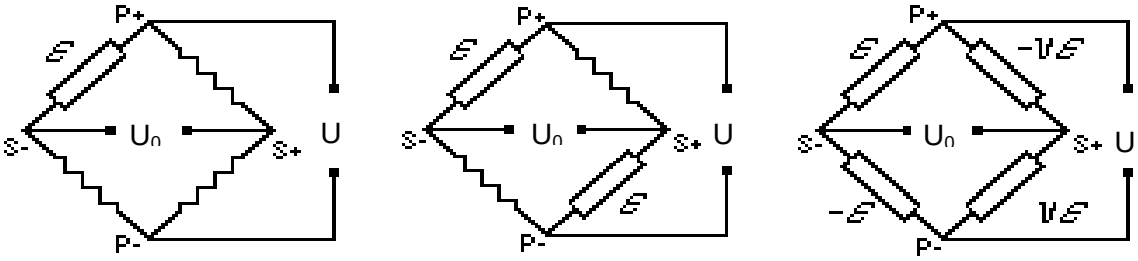


Figure 42. Description des jauges utilisées pour les montages.

Quart de pont | Demi pont | Pont complet



$$\frac{U_0}{U} = \mathfrak{F}\,\frac{\varepsilon\times10^{-3}}{4} \qquad \frac{U_0}{U} = \mathfrak{F}\,\frac{\varepsilon\times10^{-3}}{2} \qquad \frac{U_0}{U} = \mathfrak{F}\,\frac{\varepsilon(1+\nu)\times10^{-3}}{2}$$

Figure 43. Principe de fonctionnement des montages de jauges sélectionnés.

Les fils marqués « R » doivent être de même longueur et section pour une meilleure stabilité et un meilleur équilibre

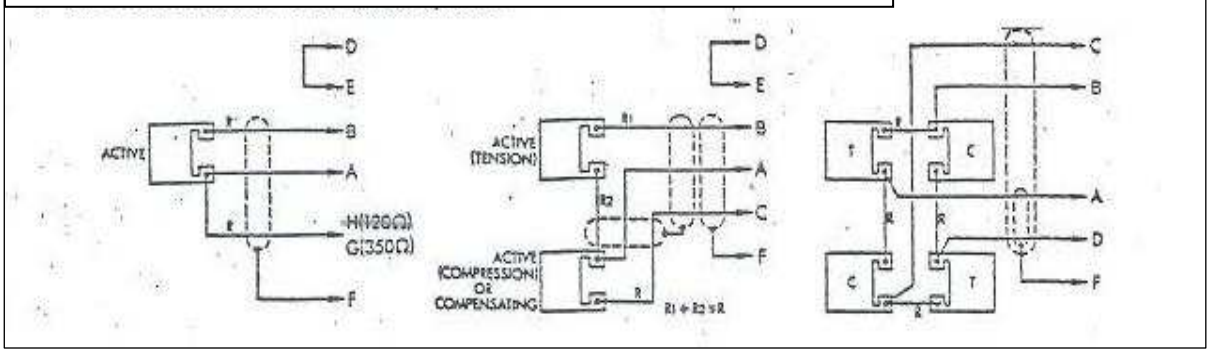


Figure 44. Schémas de branchements des montages autorisés sur nos conditionneurs : quart de pont, demi pont, pont complet.

2.3.3 Réalisation des montages et étalonnage

Le collage des jauges est un art délicat qui suit des étapes bien précises. La soudure des fils sur les jauges et les prises doit être très minutieuse (figure 45). Les câbles de liaisons sont solidement attachés aux éléments instrumentés pour ne pas bouger et arracher les jauges.

On peut voir sur les photos les montages définitifs sur les éléments prêts à être testés : quatre barres équipées pour mesurer la flexion et la compression, trois tirants verticaux et deux tirants périphériques (figure 46).

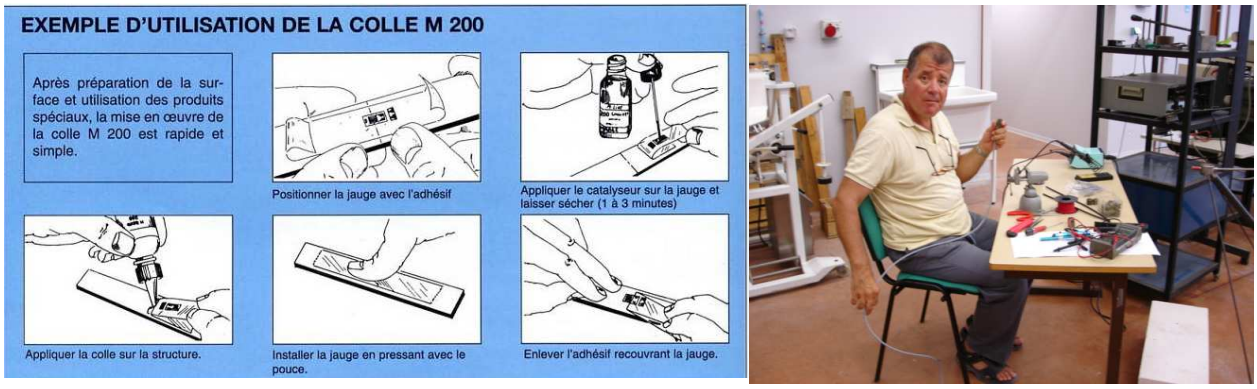


Figure 45. Collage des jauges, soudure des connectiques.

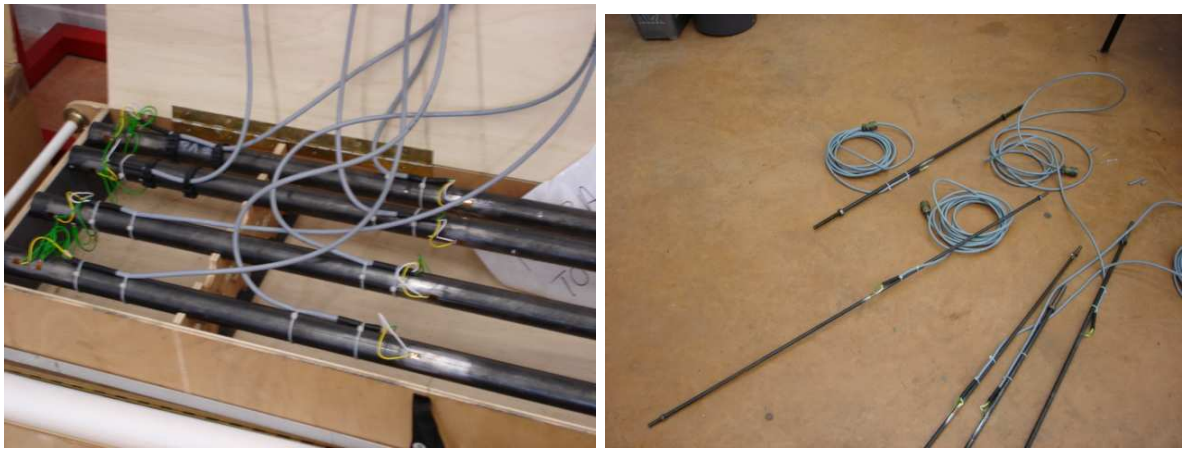


Figure 46. Montages de jauges montés sur les différents éléments de la minigrille.

2.3.3.1 Etalonnage des tirants

L'étalonnage des tirants s'effectue sur le banc de tension équipé d'un capteur de force (figure 47) pour vérifier la bonne linéarité de l'ensemble pour la gamme de tension que l'on utilise avec la minigrille. Pour le capteur de force de référence, on calcule le gain ($G/2$) à appliquer aux conditionneurs afin d'obtenir une lecture directe en daN à partir de son étendue de mesure (5000N), son facteur de jauge (4,259mV/V) et la tension d'excitation (10V). On obtient une valeur de 58,7N/mV.

Le gain ($G/2$) correspondant au montage demi-pont complet dont sont équipés les tirants est de 63,4N/mV pour les tirants verticaux (10mm) et de 47,8N/mV pour les tirants périphériques (8mm). Ces gains sont calculés à partir de la formule de la figure 43, car intervenant au niveau de la tension de sortie, et dépendent donc du facteur de jauge, de la tension d'excitation, de la section de l'élément et de son module d'Young.

Les tests sur tirants révèlent une différence entre les tirants verticaux dont le diamètre est de 10mm et les tirants périphériques de diamètre 8mm. Pour ces derniers l'étalonnage donne des mesures T_{jaug} qui concordent avec les mesures T_{capt} du capteur de force à moins de 5% près. Pour les tirants verticaux, un écart conséquent de 15% en moyenne est observé (figure 48). La seule hypothèse qui peut être émise, est une erreur sur la valeur du gain. Or celui-ci est calculé à partir des données du facteur de jauge, identique dans les deux cas, de la section S et du module d'Young E. Ce dernier est considéré comme étant le même quel que soit la nature du tirant, mais force est de constater que les résultats obtenus prêchent pour une reconsidération de sa valeur pour les tirants verticaux. La valeur passe de $2{,}0.10^5$ MPa à $1{,}7.10^5$ MPa (mise à jour dans le tableau 1 des caractéristiques des éléments).

Figure 47. Banc de tension pour l'étalonnage des tirants.

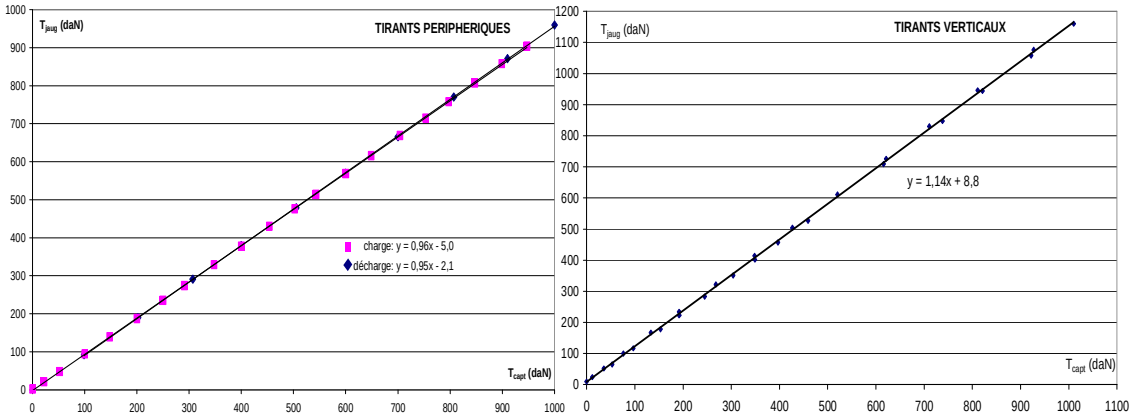


Figure 48. Comparaisons entre les montages de jauges et le capteur de force pour les tirants.

2.3.3.2 Etalonnage des barres

Par l'apposition de poids successifs, on compare la valeur donnée par le montage de jauges pour la compression des barres avec celle du capteur de force. Le gain ($G/2$) pour le montage de jauges des barres vaut 308,8N/mV. Le montage se comporte tout à fait bien puisque l'écart entre le capteur de force et les mesures par jauges est inférieur à 3% (figure 49).

Que ce soit pour la tension dans les tirants ou pour la compression dans les barres, ces tests permettent de valider la méthode de mesure.

Pour la flexion, le montage est finalement identique à celui de la compression pour les barres qui vient d'être validé. Comme nous nous intéressons seulement à la détection de la flexion et non à sa mesure quantitative, l'étalonnage s'avère inutile. Il sera néanmoins possible d'estimer la valeur du moment fléchissant pour un gain fixé à condition qu'on s'assure que les jauges soient situées de part et d'autre de l'axe médian de la poutre.

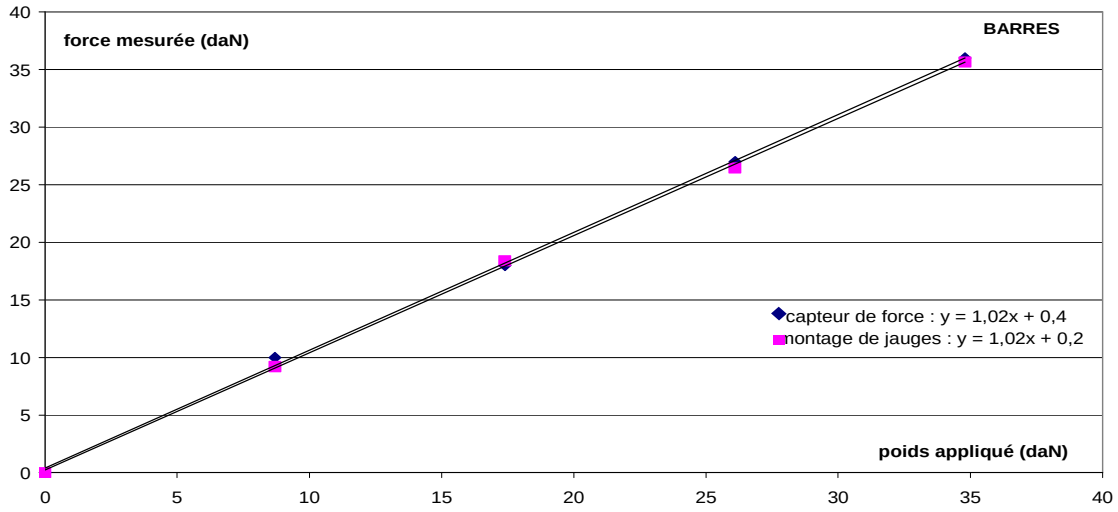


Figure 49. Etalonnage du montage de jauges pour les barres.

2.3.4 Instrumentation

Dans l'opération d'instrumentation de la minigrille, le nombre d'éléments instrumentés est limité par le nombre de voies disponibles sur nos conditionneurs de jauges Vishay 2120. Nous disposons d'un conditionneur à 8 voies de mesures et d'un conditionneur à 6 voies, soit 14 voies disponibles (figure 50).

Nous recherchons alors la configuration optimale pour utiliser au mieux nos quatorze voies de mesures en instrumentant de manière astucieuse les barres et les tirants de la minigrille afin d'en retirer le maximum d'informations. Nous devons pour cela utiliser la répartition des états d'autocontrainte et les symétries. La minigrille possède deux états d'autocontrainte : un central et un global. De même la symétrie par rapport aux axes xOz et yOz (figure 51) de la minigrille est prise en compte pour l'instrumentation des éléments périphériques.

La vue en perspective de la minigrille permet de visualiser la stratégie adoptée (figure 52). Les barres instrumentées nécessitent deux voies de mesures chacune : on choisit les quatre barres centrales (*B1*, *B2*, *B3* et *B4*) car elles permettent de tester la symétrie des efforts par rapport aux nœuds centraux dont on pourra vérifier les équilibres. Les tirants instrumentés nécessitent une voie de mesures chacun. On choisit parmi les tirants verticaux, le tirant central (*TV1*), un tirant latéral (*TV2*) et un tirant d'angle (*TV3*). Pour les tirants périphériques, notre choix se porte sur deux tirants latéraux (*TP1* et *TP2*) et un tirant d'angle (*TP3*) consécutifs.

On obtient un total de quatorze voies de mesures : huit pour les barres qui sont donc associées au conditionneur huit voies, six pour les tirants qui eux sont reliés au conditionneur six voies.

Figure 50. Conditionneurs Vishay utilisés pour les mesures d'efforts.

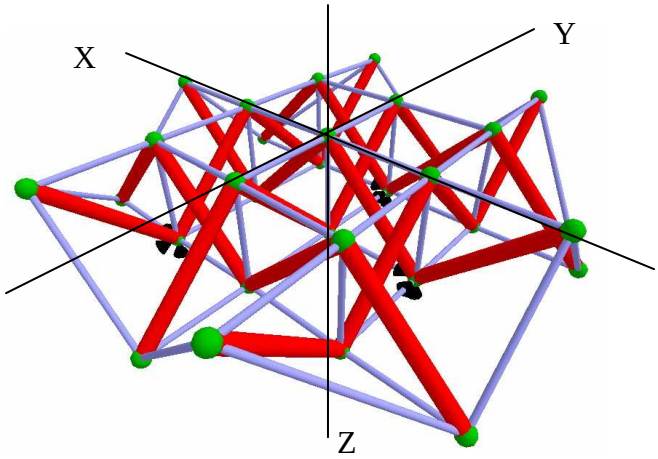


Figure 51. Visualisation de la symétrie de la minigrille.

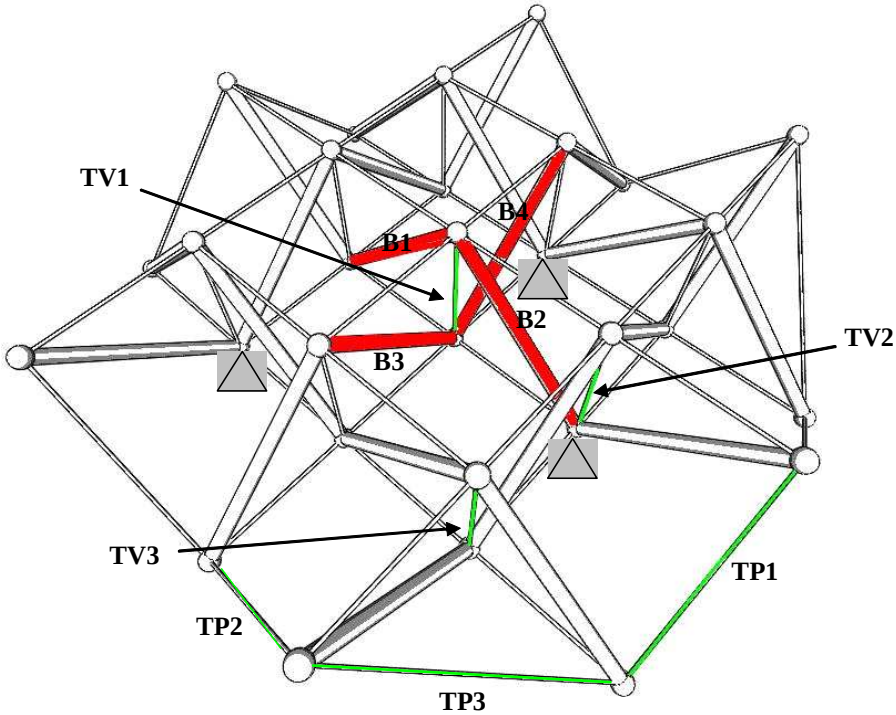


Figure 52. Instrumentation de la minigrille.

2.4 Le tachéomètre

2.4.1 Introduction

Dans le cadre de la grille réelle deux points peuvent venir perturber la géométrie théorique :

- les défauts de fabrication et d'assemblage qui apportent sans doute des écarts au niveau des longueurs escomptées des éléments,

- l'effet non négligeable du poids propre sur la géométrie initiale de la minigrille.

Il apparaît essentiel de vérifier si l'utilisation de la géométrie parfaite pour les simulations numériques est pertinente. Pour cela, et dans la poursuite de l'instrumentation de la grille, l'équipe s'est dotée d'un nouvel outil performant dédié : un tachéomètre qui permet la mesure de la position et des déplacements de tous les nœuds de la structure.

2.4.2 Description du matériel et du protocole expérimental

L'équipe a acquis un tachéomètre LEICA TDA5005 associé à des cibles réflecteurs coin cube creux CCR 1,5 qui offre une précision de 0,2mm (figure 53). C'est une avancée considérable aux vues des moyens disponibles jusqu'alors. Pour la mesure des positions des nœuds on ne disposait que de 5 capteurs laser de déplacements. Cela rendait difficile la mesure de la position précise des 30 noeuds de la minigrille pour obtenir sa géométrie réelle.

Certains aménagements ont du être apportés sur les noeuds pour pouvoir fixer et centrer la cible du tachéomètre. Des supports spécifiques pour loger précisément les cibles ont été usinés et pour les nœuds inférieurs un dispositif plus complexe a été créé (figure 54). En offrant deux logements pour les cibles symétriquement répartis de part et d'autre du nœud, le dispositif permet de limiter les problèmes d'occultation de la visée par les nombreux éléments de la structure (rotation possible) et d'assurer un bon centrage.

Pour déterminer la géométrie réelle à l'aide des mesures effectuées, il faut appliquer des corrections de position. Selon le type de nœuds, la distance du coin cube au centre du nœud diffère. Les noeuds qui reçoivent un tirant vertical ont une distance bord/centre de 12,25mm. Pour ceux qui n'en reçoivent pas cette distance est de 9mm. De plus les chapeaux qui bloquent les câbles n'ont pas la même hauteur pour les noeuds de la nappe inférieure (11mm) et ceux de la nappe supérieure (8mm).

Les mesures se font par nappe. Pour la nappe supérieure il n'y a pas de difficulté particulière : tous les nœuds sont aisément accessibles. Dans le cas de la nappe inférieure, une double mesure par nœud dont on effectue la moyenne est nécessaire.

Figure 53. Vue du tachéomètre, visée d'un coin cube.

Figure 54. Aménagements pour le positionnement des cibles sur les nœuds.

2.4.3 Mesure de la géométrie réelle

La mesure de la position des 30 nœuds étant effectuée, nous pouvons les comparer aux positions de la géométrie parfaite. Nous constatons l'effet des défauts : de fabrication, d'assemblage, ainsi que du poids propre, par des décalages atteignant jusqu'à deux centimètres par rapport aux 30 positions théoriques (figure 55).

Ces décalages sont distribués de façon tout à fait aléatoire. Cela se répercute sur la longueur des éléments par des différences qui atteignent le centimètre. On rappelle que c'est la longueur des éléments qui détermine les états de base d'autocontrainte et qu'une variation de longueur de 1mm des tirants conduit à une variation d'effort de l'ordre de 1kN. Pour se rendre compte de l'effet des décalages de la géométrie on représente la nappe supérieure avec les positions verticales réelles amplifiées. On voit bien que la nappe n'est pas parfaitement plane (figure 56).

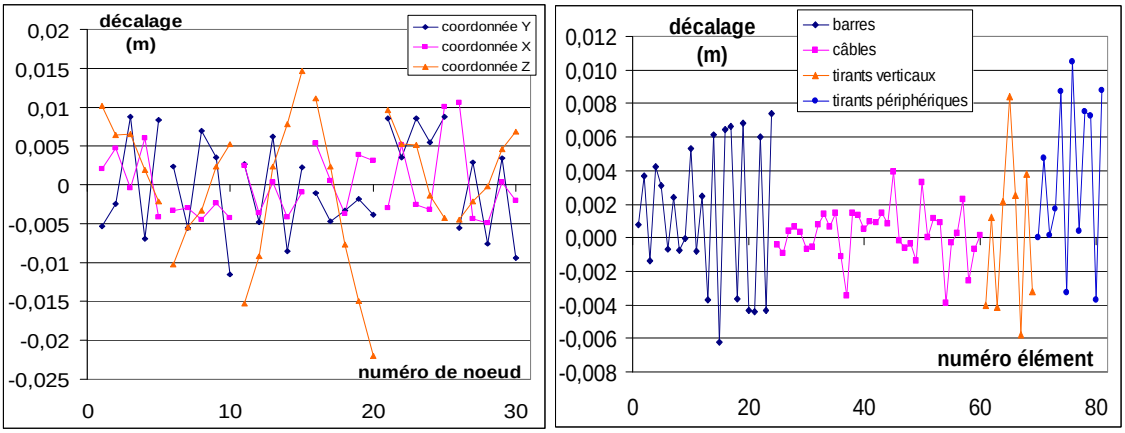


Figure 55. Décalages de la géométrie réelle : positions des nœuds, longueurs des éléments.

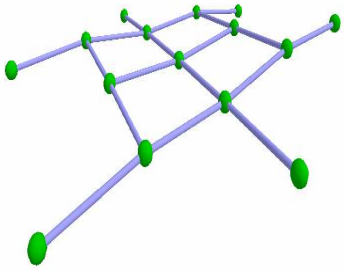


Figure 56. Visualisation de la nappe supérieure.

2.4.4 Champ des déplacements des nœuds de la structure chargée

2.4.4.1 Simulations préliminaires

Une première étude numérique est effectuée avec tenségrité 2000 et Cast3m. Un chargement ponctuel de 1kN est placé au nœud central de la nappe supérieure. Nous utilisons trois rigidités (niveau d'autocontrainte) différentes. Nous vérifions tout d'abord que les deux logiciels donnent les mêmes résultats. Ils apparaissent identiques à 0,25% près que ce soit pour les efforts dans les éléments ou les déplacements des nœuds suite à un chargement.

Les déplacements prévus sont très faibles : de l'ordre du dixième de millimètre dans les trois directions de l'espace avec des variations extrêmement faibles en fonction du niveau d'autocontrainte. Dans cette configuration, nous sommes dans une gamme de déplacements peu accessibles aux mesures avec l'impossibilité de distinguer des états d'autocontrainte différents. Pour augmenter ces déplacements, on peut envisager d'augmenter la charge. Cette solution présente deux problèmes :

- du point de vue expérimental, avec la difficulté technique d'avoir un chargement trop conséquent,
- la possibilité de perte d'autocontrainte : pertes de tension dans les câbles, barres défaites. La conformité de la structure se trouve alors mise en défaut.

Tout cela conduit à préférer un chargement non ponctuel et périphérique pour augmenter les amplitudes de déplacements pour des chargements accessibles expérimentalement.

Une étude numérique a été menée en ce sens avec les conditions d'appuis choisies dans la première partie et un chargement fixé des six nœuds périphériques de la nappe inférieure pour deux états d'autocontrainte ayant des niveaux très distincts (contrôlés par les coefficients *a* et *b*). Les déplacements verticaux prévus des 15 nœuds de la nappe supérieure sont compris entre 1mm et 1cm (exception faite des nœuds au dessus des appuis). Nous sommes cette fois dans une gamme de déplacements tout à fait accessibles aux mesures. Il est même possible d'envisager de distinguer les niveaux d'autocontraintes puisqu'ils conduisent à des écarts de 3mm (figure 57). Cela nous permet d'estimer qu'avec une précision de 0,2mm, on pourrait discriminer des états dont les coefficients *a* auraient des écarts inférieurs à 300.

2.4.4.2 Mesures

Pour les mesures de déformation de la grille sous chargement, on rappelle que le nombre limité de capteurs de déplacements laser oblige de choisir un nombre tout autant limité de nœuds. Le tachéomètre offre donc la possibilité de cartographier la déformation de la structure entière, par nappe complète. La rigidité de la grille étant élevée dès la mise en autocontrainte nous devons appliquer des efforts suffisamment importants pour obtenir une déformée mesurable. L'application successive de poids aux six nœuds périphériques de la nappe inférieure, préalablement équipés de supports de poids, permet d'atteindre un chargement total de presque 200kg (figure 58).

Nous observons expérimentalement une évolution linéaire des déplacements des 15 nœuds de la nappe supérieure en fonction du poids appliqué (figure 59). Si la majorité des noeuds descendent, quelques-uns montent. Le déplacement de certains nœuds atteint 1cm tandis que pour d'autres, il ne dépasse pas 1mm.

Nous disposons donc d'un outil aux applications multiples. Nous pouvons en effet étudier l'influence de la géométrie réelle sur l'état d'autocontrainte de la minigrille. De plus, la possibilité de mesurer la déformée totale de la minigrille sous chargement va permettre de compléter les confrontations avec nos simulations pour affiner la modélisation. Si nous atteignons une précision assez élevée, nous pouvons envisager l'identification de l'état d'autocontrainte par la mesure de la déformée sous chargement. Ceci remplacerait avantageusement la méthode par mesure des efforts dans les éléments qui est assez lourde à mettre en œuvre dans le cadre de structures en place.

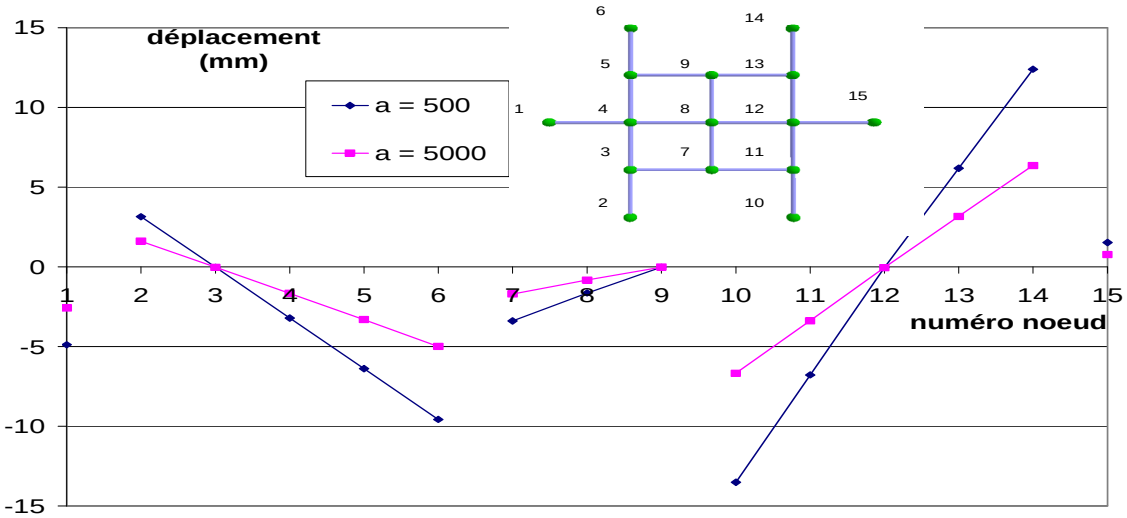


Figure 57. Comparaison numérique entre deux niveaux d'autocontrainte des déplacements des nœuds de la nappe supérieure pour un chargement donné.

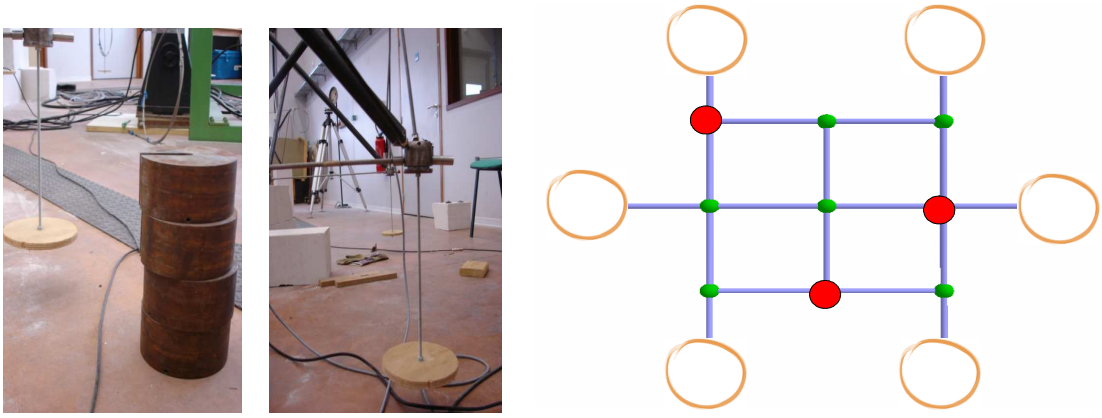


Figure 58. Emplacements des poids utilisés pour le chargement de la grille.

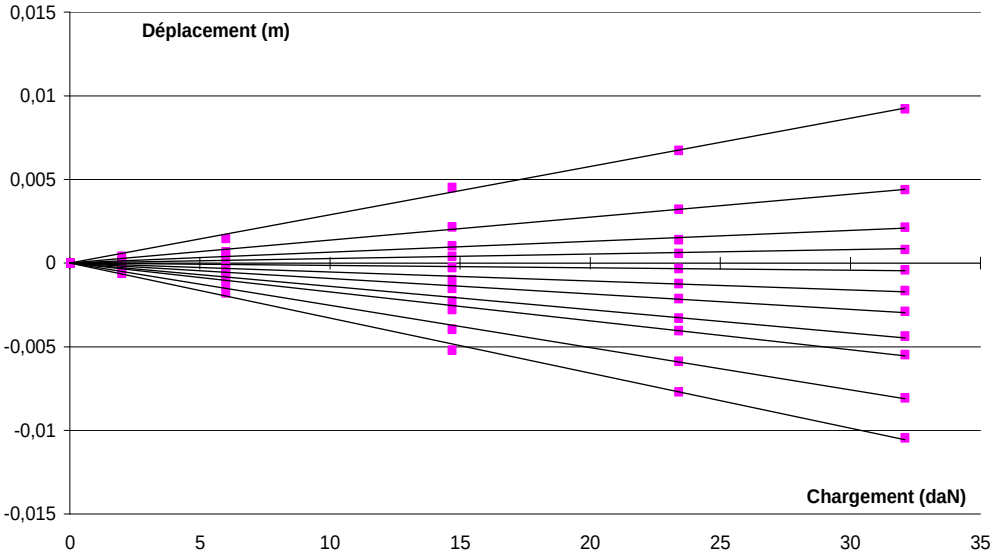


Figure 59. Evolution expérimentale des déplacements verticaux des nœuds de la nappe supérieure en fonction du chargement appliqué.

2.5 Conclusion

Pour répondre aux attentes nées des précédentes études expérimentales menées sur la minigrille, pour avancer dans la compréhension de son comportement mécanique et pour explorer de nouvelles voies intéressantes, nous avons instrumenté notre structure plus complètement avec de nouveaux moyens de mesure.

Par la mise au point d'un tensiomètre et la mise en place de montages de jauges dédiés, nous focalisons notre attention sur la mesure des efforts dans tous les éléments : câbles, tirants et barres. Les étalonnages effectués on montré que nous avions des mesures fiables. De cette manière nous sommes en mesure d'effectuer des comparaisons avec la méthode de mesure indirecte utilisée jusqu'alors. Nous pouvons ainsi vérifier sa validité et celle de la modélisation numérique utilisée pour les simulations. L'objectif est d'étudier la possibilité d'affiner l'identification de l'état d'autocontrainte d'une structure de tenségrité.

L'utilisation d'un tachéomètre ouvre quant à elle de nouveaux horizons dans l'étude expérimentale de la minigrille. En effet, il offre la possibilité de mesure globale de sa géométrie ainsi que celle de sa déformée sous chargement. Cette fois encore, le but de ces études est d'estimer l'influence et l'utilité de ses nouvelles données dans l'identification de l'état de tension applicable à une structure de tenségrité en place.

3 RESULTATS DE L'ETUDE EXPERIMENTALE

3.1 Introduction

Dans cette partie, je présente les résultats obtenus sur la minigrille à l'aide des mesures effectuées avec les moyens instrumentaux décrits dans la partie précédente.

La modélisation des éléments de la minigrille en éléments finis BARRE ne leur autorise de recevoir que des efforts normaux. Nous cherchons à savoir s'il faut reconsidérer cette hypothèse qui semble simplificatrice pour les barres et les tirants. Nous les soupçonnons de subir des moments de flexion, ce qui signifierait devoir les modéliser en éléments finis POUTRE. Les moyens d'agir sont les suivants :

- pour les barres, la possibilité de détecter, s'il y en a, la flexion grâce aux montages de jauges dédiés peut permettre de statuer si ces éléments ne subissent que des efforts normaux,
- pour les tirants, les mesures d'efforts à l'aide des montages de jauges associées à des mesures vibratoires sur les tirants placés dans la minigrille, peuvent renseigner sur la justesse de la loi force fréquence obtenue sur le banc d'étalonnage.

Si cette modélisation en éléments POUTRE a une incidence sur les simulations du comportement de la structure, nous pouvons alors effectuer deux tests pour départager les deux modélisations :

- la comparaison des champs de déplacements des nœuds simulés avec les champs mesurés par le tachéomètre.
- la comparaison des fréquences propres simulées de la structure avec la mesure expérimentale des fréquences.

La question de la validité de la méthode d'identification de l'état d'autocontrainte utilisant des mesures indirectes et une géométrie parfaite est aussi posée. Nous devons donc chercher à estimer si :

- les mesures directes permettent d'affiner l'identification,
- la géométrie réelle influence les états d'autocontrainte de base,
- la mesure des champs de déplacement des nœuds sous chargement peut être utilisée pour réaliser une identification de l'état d'autocontrainte.

3.2 Modélisation numérique des éléments de la grille

3.2.1 Comportement mécanique des éléments

3.2.1.1 Résultats préliminaires

A l'aide des différents montages de jauges et du tensiomètre, il nous est possible de répondre à deux questions simples :

- peut-on vérifier l'équilibre des noeuds ?
- y a-t-il de la flexion dans les barres ?

Aux deux questions nous sommes en mesure de répondre par l'affirmative. En effet, l'instrumentation des 4 barres centrales et du tirant vertical central nous permet de vérifier directement l'équilibre des deux nœuds centraux. Dans le tableau 4, sont représentés les efforts qui arrivent au nœud supérieur et les vérifications de l'équilibre : les écarts sont calculés grâce aux angles présents entre les éléments directement liés à leurs longueurs respectives. Par exemple, la tension de 1144daN du tirant vertical est verticalement équilibrée par la compression dans les barres inclinées de 45 degrés : $821\times\sqrt{2}+804\times\sqrt{2}=1149$ daN. L'écart n'est donc que de 5daN. Il est fait de même pour les autres équilibres.

Composant	Effort (daN)	Equilibre (écart en daN)
Tirant vertical	-1144	
Barre 1	821	$\frac{821+804}{\sqrt{2}}-1144=5$
Barre 2	804	
Câble 1	-98	$\frac{821-804}{\sqrt{2}}-98+88=2$
Câble 2	-88	
Câble 3	-438	491-438 = 53
Câble 4	-491	

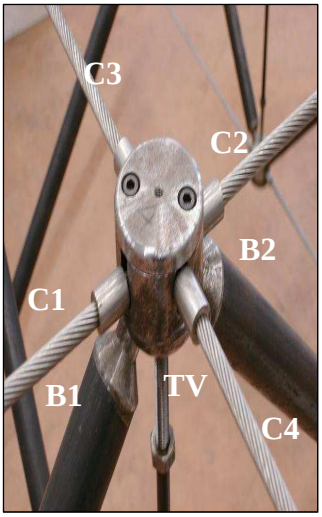


Tableau 4. Equilibre d'un nœud.

On constate donc que verticalement, la compression des barres s'équilibre presque parfaitement avec la tension dans le tirant. Il en est de même horizontalement avec la tension dans les câbles qui sont dans le plan des barres. Sur la campagne de mesure l'écart n'excède pas 15% pour les deux autres câbles. L'équilibre est donc bien respecté. Il en est de même pour le nœud inférieur. Cette observation permet de conforter la validité des mesures des efforts puisque les moyens de mesures (tensiomètre, montages de jauges) sont indépendants les uns des autres.

Concernant les soupçons sur la présence de flexion dans les barres, ceux-ci sont confirmés grâce aux montages de jauges spécifiques qui équipent les 4 barres instrumentées. Quelle que soit l'orientation des sections sur lesquelles les jauges sont collées, et quelle que soit l'état d'autocontrainte de la minigrille, le montage détecte une flexion non nulle. Dans l'exemple présenté, nous avons un moment de flexion à 0,3daN.m (déformation relative de $0{,}13.10^{-4}$) pour les barres comprimées à 810daN (déformation relative de $1{,}21.10^{-4}$). Une explication réside dans les défauts de longueurs de fabrications et d'assemblage, qui ont été mis en évidence par la mesure de la géométrie réelle qui présente des décalages non négligeables avec la géométrie théorique parfaite. Ceci permet de considérer que les éléments ne possèdent pas que des efforts normaux. Ces constatations ont une influence sur la façon de modéliser les éléments dans les simulations numériques. En effet, jusqu'à présent les modélisations considèrent que les éléments ne reprennent que des efforts normaux en l'absence de tout moment de flexion.

3.2.1.2 Loi des cordes vibrantes pour les câbles

Des mesures de tension T_{tensio} à l'aide du tensiomètre sur les 18 câbles de la nappe inférieure de la minigrille ont servi à confronter les résultats avec les mesures de tension $T_{fréq}$ obtenues par la méthode des cordes vibrantes (figure 60). On observe une bonne corrélation entre ces mesures indépendantes (droite dont la pente est proche de la valeur 1) qui donne du crédit aux valeurs obtenues avec le tensiomètre. On remarque que ces valeurs se regroupent en trois groupes distincts correspondant à l'autocontrainte présente dans la minigrille (figure 61).

On constate la même tendance que pour les essais sur banc : la précision est nettement meilleure pour des valeurs de tensions élevées. Pour les basses tensions, le tensiomètre ne donne pas des mesures fiables (figure 62). Cependant le seuil des 20% semble être atteint dès environ 2500N contre 5000N dans le cas du banc de tension.

Afin d'affiner la précision effective du tensiomètre, et compte tenu de l'analyse concernant la modélisation du câble en POUTRE ou BARRE (chapitre 2.2.2.2), on peut envisager d'utiliser la courbe de tendance en puissance de la figure 62 comme courbe de référence : pour des valeurs mesurées sur les câbles de la minigrille, on peut estimer l'erreur sur la détermination de la tension. Cela s'apparenterait à une calibration du tensiomètre (comme en font les constructeurs de tels matériels) pour nous épargner d'utiliser un modèle théorique plus complexe (ne négligeant pas l'inertie en flexion du câble par exemple) rendant la dépouillement des mesures plus difficile. Cependant, cette courbe en puissance est visiblement sensible à la raideur des appuis (puisqu'elle était différente pour les essais sur banc de tension) et dépendra donc vraisemblablement du niveau d'autocontrainte.

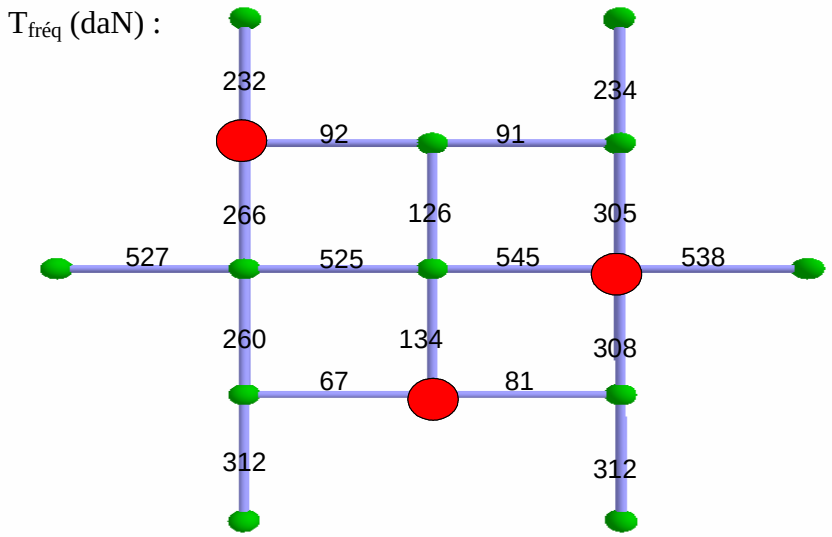


Figure 60. Valeurs des tensions dans les câbles de la nappe inférieure obtenues par la méthode des cordes vibrantes.

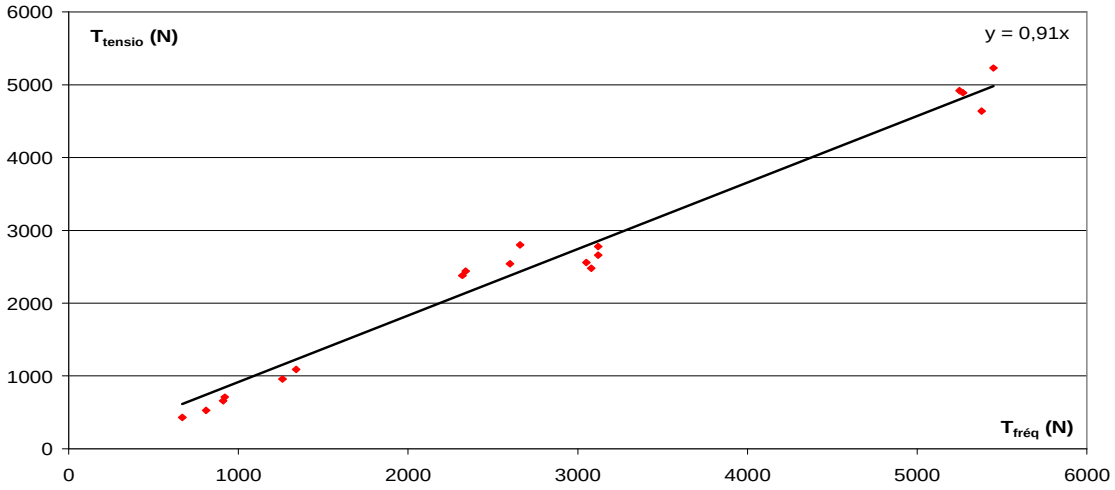


Figure 61. Comparaison des tensions obtenues avec le tensiomètre et la méthode des cordes vibrantes dans les câbles de la nappe inférieure.

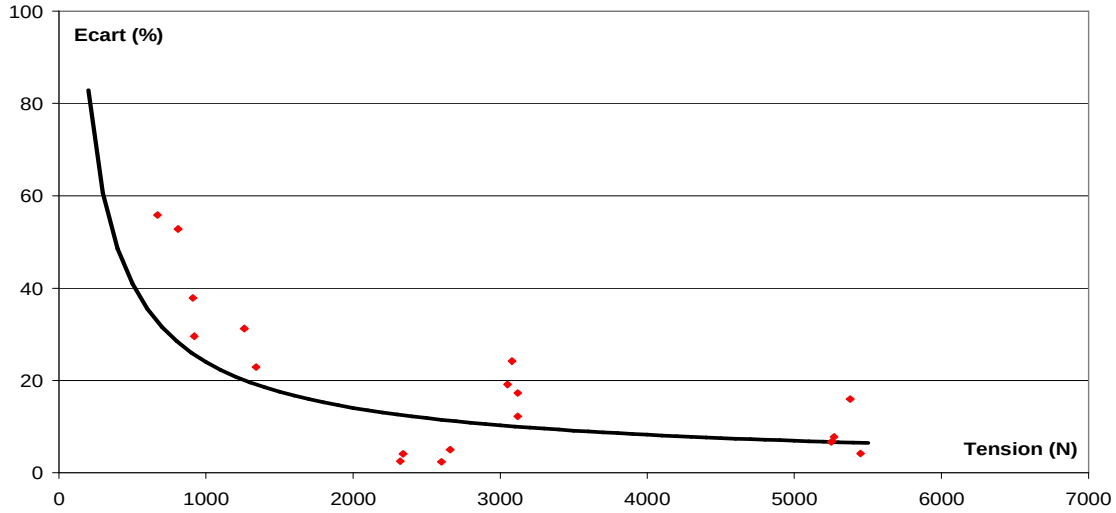


Figure 62. Ecarts relatifs de tension constatés entre les deux méthodes en fonction de la tension.

Outre la mesure simple de la tension, nous avons aussi pour objectif d'étudier la raideur des conditions limites des câbles. Dans la seconde partie nous avons vu qu'il était possible d'estimer celle-ci à l'aide de l'inflexion de la courbe force-déplacement en notre possession suite à une mesure effectuée au tensiomètre.

Sur la figure 63 nous avons marqué sur chaque câble la valeur mesurée du rapport β entre la raideur du câble k_0 = 20MN/m et la raideur des appuis K. On obtient des valeurs comprises entre 5.10^{-5} et 4.10^{-3}.

La valeur maximale de K est donc inférieure à 0,1MN/m. On descend même jusqu'à des valeurs de K proches de 0,001MN/m. On observe aussi que les câbles liés à un appui fixe de la minigrille ont une raideur plus élevée que ceux reliés à des nœuds courants. Dans le cas des câbles placés sur le banc de tension, la valeur moyenne de β est de $1{,}5.10^{-2}$ et donc K vaut 0,35MN/m ce qui correspond à des appuis quasiment fixes. Les liaisons peuvent donc ici être considérées comme non fixes. Les valeurs de raideur s'étalent sur une assez large gamme. Ces faibles raideurs peuvent expliquer la bonne concordance entre la tension obtenue par le tensiomètre et celle obtenue par les cordes vibrantes. La simulation du tensiomètre avec ces nouvelles raideurs d'appuis prédit une réduction de l'écart observé avec la théorie par rapport à l'écart obtenu avec la raideur élevée des appuis du banc de tension.

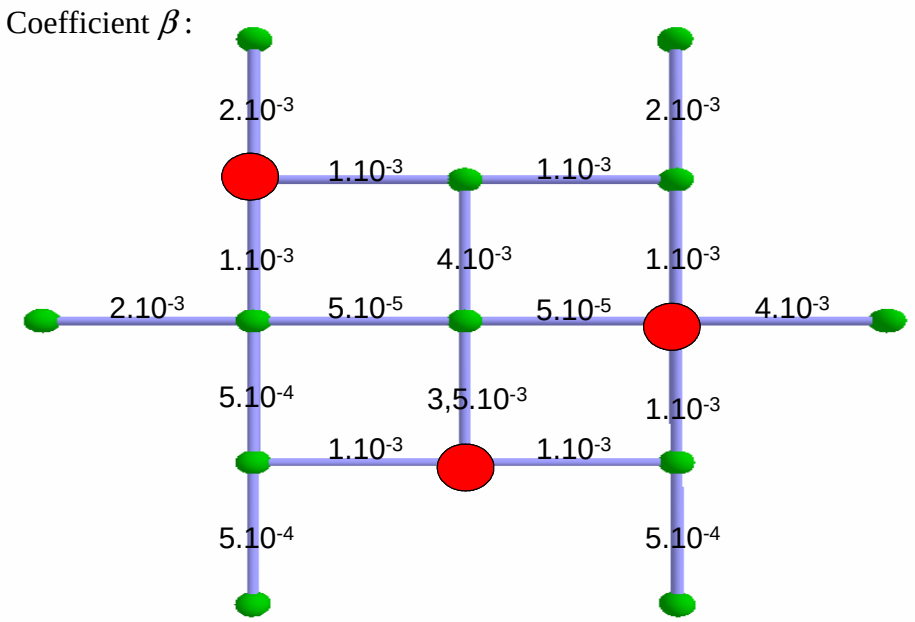


Figure 63. Valeurs du coefficient β obtenues par les mesures au tensiomètre

Cependant, une limite à cette démarche réside dans le fait que la raideur n'est sûrement pas symétrique entre les deux appuis. La question est de savoir si l'on est en mesure d'identifier cette dissymétrie ou si l'on doit se contenter d'une valeur moyenne. En raisonnant de câble en câble d'une même ligne on peut néanmoins estimer quelle extrémité du câble a la raideur la plus élevée.

Ces essais ont permis de confirmer la validité du principe de fonctionnement du tensiomètre pour des câbles en place dans la minigrille, pour lesquels les raideurs des appuis apparaissent variées. La modélisation des câbles n'est pas remise en cause puisque les deux méthodes s'accordent sur les mesures obtenues. Enfin, il est à noter que pour des structures en place, la méthode des cordes vibrantes utilisée en laboratoire est difficilement transposable sans instrumentation lourde. Le tensiomètre autonome s'avère donc un outil précieux pour les ausculter.

3.2.1.3 Loi force-fréquence des tirants

Nous disposons maintenant pour les tirants de la mesure des tensions grâce aux montages de jauges, ce qui permet d'effectuer des essais avec des tirants intégrés à la minigrille. Les mesures ont été effectuées sur les trois tirants instrumentés : le tirant central *TV1*, le tirant de côté *TV2* et le tirant de coin *TV3*. Nous remarquons que même si les mesures ne sont pas totalement dispersées, à une fréquence donnée correspond trois tensions distinctes : chaque tirant semble déjà ne pas avoir exactement la même loi en fréquence (figure 64). De plus, la loi d'étalonnage définie sur le banc de tension surestime nettement la tension pour une fréquence donnée. Force est donc de constater que les coefficients de la loi force-fréquence d'étalonnage sur banc ne conviennent pas pour les tirants en place dans la minigrille. Les caractéristiques des tirants étant identiques, il semble que les conditions limites jouent un rôle dans cette loi de fréquence, les conditions du banc n'étant de toute évidence pas compatibles avec celles in-situ. De plus les conditions limites des tirants en place semblent légèrement différentes pour chacun d'eux. Pour vérifier cette hypothèse, nous avons simulé :

- les essais sur banc en jouant sur les conditions limites,
- le comportement du tirant central en place en fonction du niveau d'autocontrainte de la minigrille (figure 65).

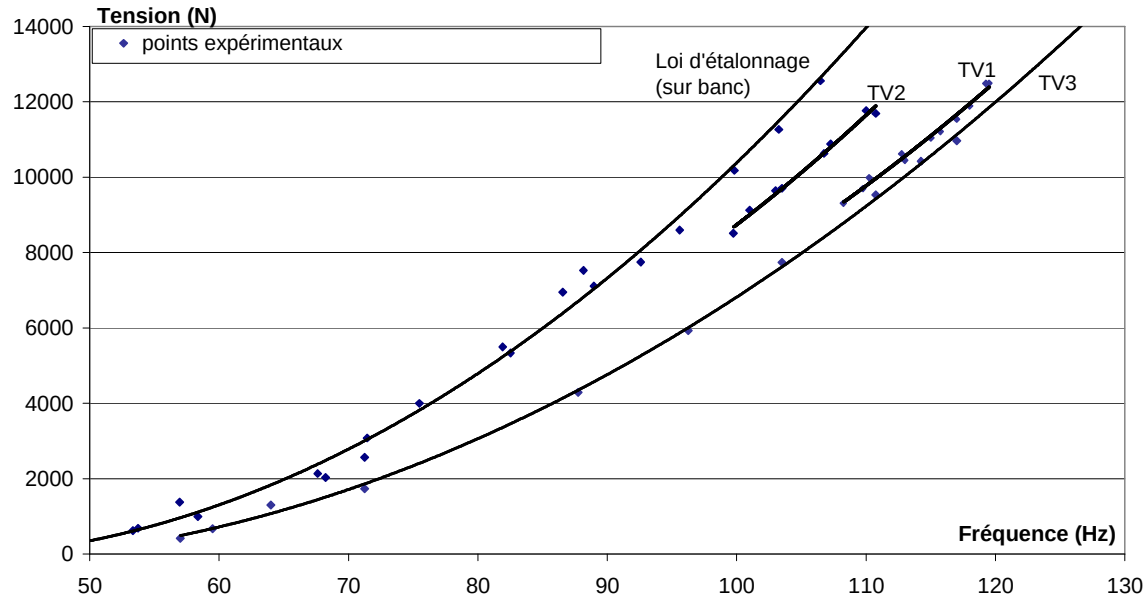


Figure 64. Comparaison des mesures effectuées sur banc avec celles des tirants en place.

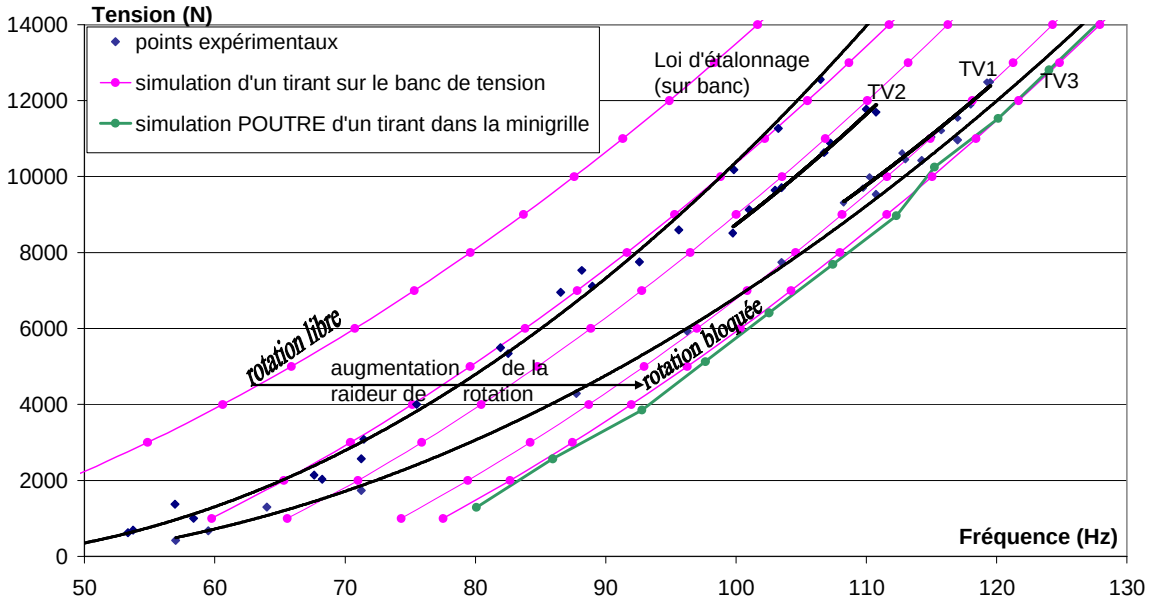


Figure 65. Confrontation simulations/mesures pour les lois de fréquences des tirants verticaux.

Les simulations du banc de tension montrent qu’en ajustant le blocage en rotation des nœuds, on peut retrouver les courbes expérimentales des tirants pour les hautes fréquences. Les lois d’étalonnage utilisées sur le banc correspondent à des nœuds presque libres en rotation ce qui correspond à un comportement de type BARRE pour le tirant considéré installé sur le banc. C'est-à-dire qu’il ne peut recevoir que des efforts normaux et ne possède pas de rigidité en flexion. Nous voyons pour le tirant *TV3* (points expérimentaux reliés par une courbe de tendance sur la figure 65) qu’au départ de sa mise en place, la courbe démarre avec un faible blocage. La conception des nœuds avec l’assemblage des barres associées aux câbles de nappe fait que la rotation des nœuds aux extrémités des tirants est empêchée. Cette liberté de rotation est d’autant plus réduite que le niveau de tension du tirant est élevé car les barres sont liées et bloquent partiellement le noeud. Par contre, la simulation du tirant en place montre que sous autocontrainte la loi de fréquence coïncide avec la courbe correspondant à des nœuds complètement bloqués ce qui correspond à un comportement de type POUTRE. C’est-à-dire possédant une rigidité en flexion. Pour la simulation nous n’augmentons pas seulement la tension dans un tirant mais le niveau d’autocontrainte de l’ensemble de la structure. Les barres apportent de la rigidité en rotation mais les câbles aussi. Cette différence de procédure apporte naturellement une rigidité supplémentaire en rotation pour la structure simulée.

Nous étendons cette simulation aux autres tirants verticaux en place et observons à chaque fois une loi similaire à celle de la poutre bi-encastrée quelle que soit la position de ceux-ci (central, côté ou coin). On observe le même phénomène pour un tirant périphérique (figure 66).

On a ainsi la confirmation du comportement POUTRE des tirants. Il faut en tenir compte dans les modélisations. Les barres et les tirants doivent être modélisés par des éléments POUTRE alors que les câbles peuvent rester modélisés par des éléments BARRE. Cela doit bien évidemment être validé par d’autres tests.

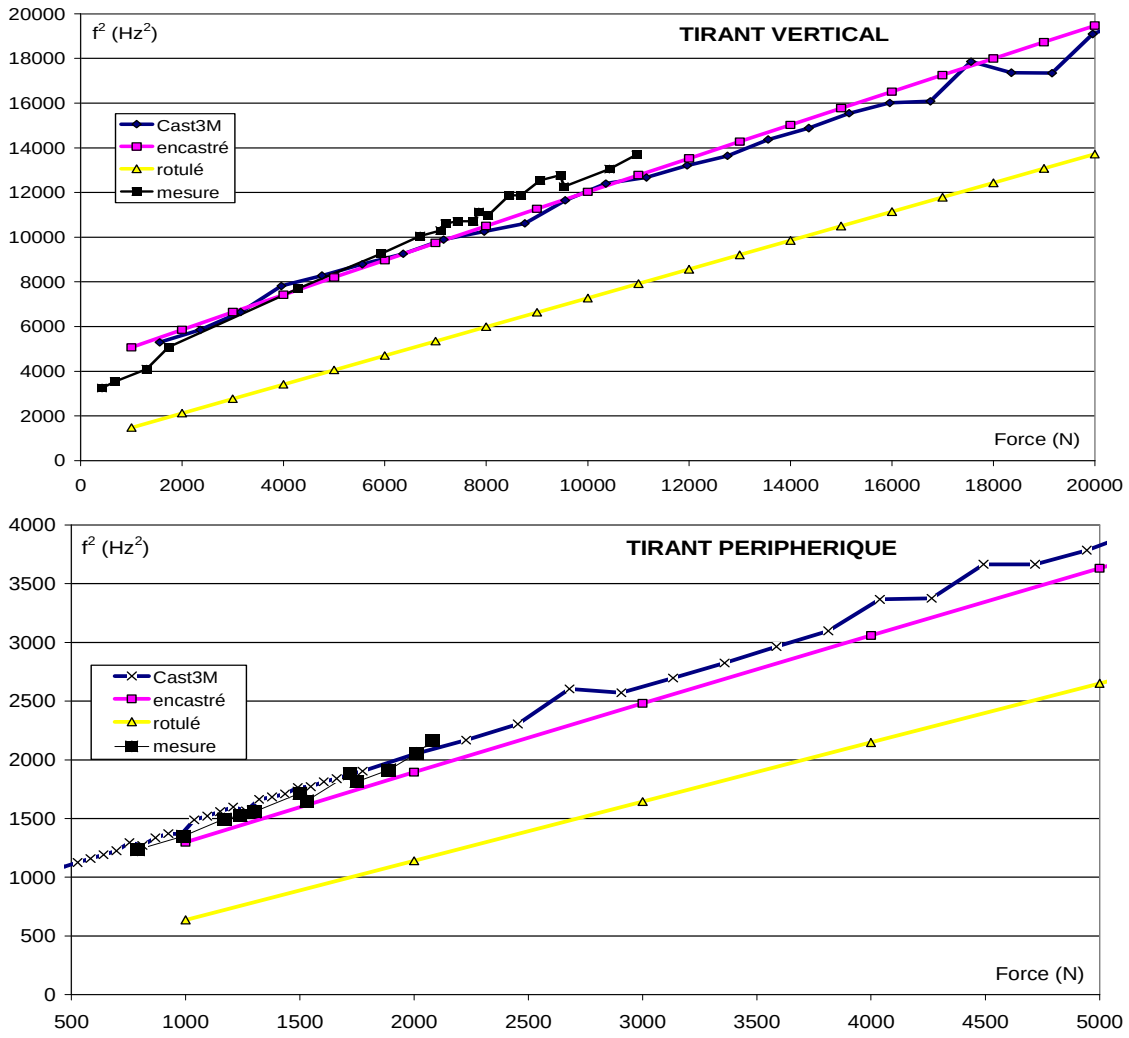


Figure 66. Comportement vibratoire simulé et mesuré des tirants verticaux et périphériques comparé aux comportements théoriques d'éléments bi-articulés ou bi-encastrés.

3.2.2 Validation de la modélisation numérique des éléments

3.2.2.1 Déformée de la grille sous chargement

En utilisant les mesures des déplacements verticaux prises par le tachéomètre, on constate que la modélisation éléments finis utilisée par Tenségrité 2000 et Cast3m de type BARRE pour tous les éléments donne un comportement non linéaire ne rendant pas compte de la réalité mesurée. Ceci est flagrant pour 4 des nœuds périphériques de la nappe supérieure. En utilisant des éléments de type POUTRE pour les barres et les tirants, on retrouve l'évolution linéaire du déplacement en fonction du chargement (figure 67). Ce résultat confirme donc bien l'étude menée sur le comportement vibratoire des éléments. En effet, on vient de voir que la relation force-fréquence mesurée sur les tirants relève d'un comportement poutre de ces éléments.

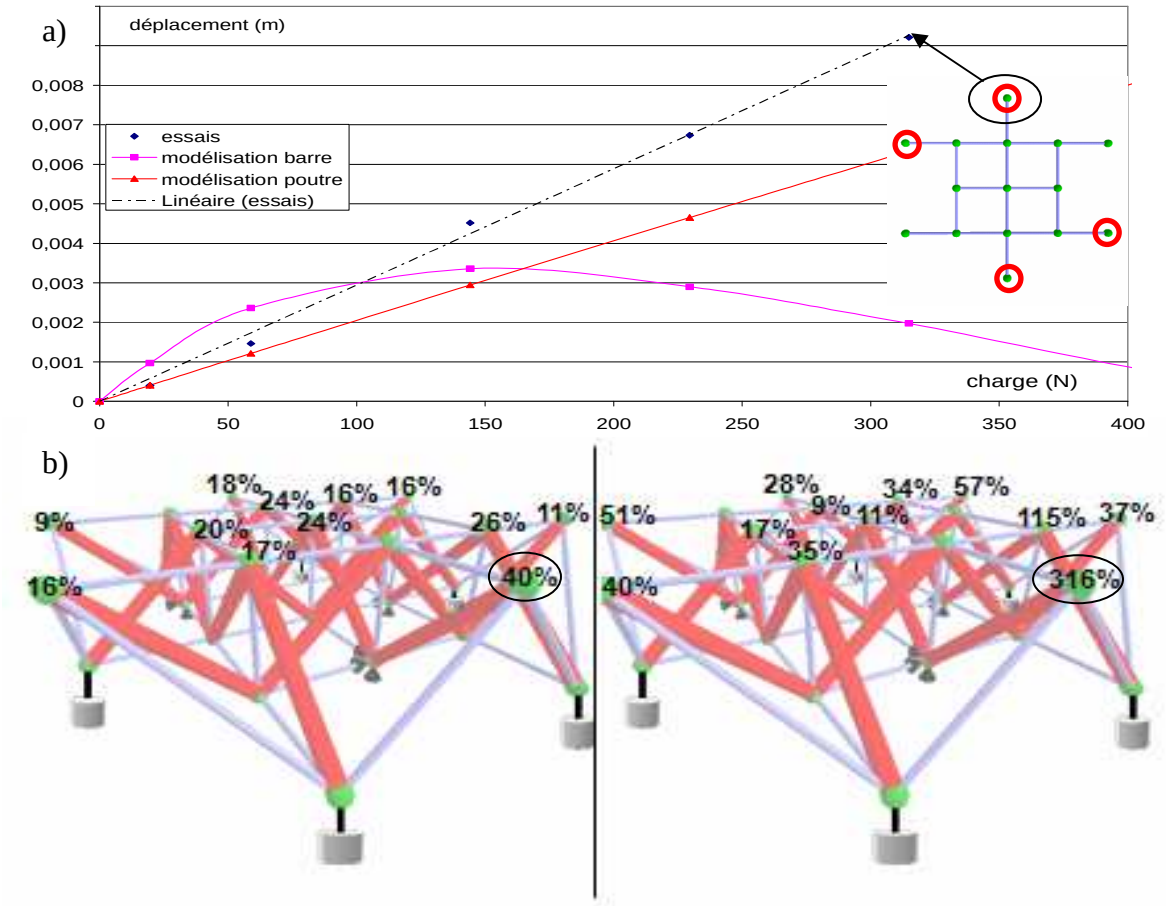


Figure 67. a) Confrontation entre l'évolution expérimentale des déplacements et les simulations selon la modélisation utilisée pour les éléments. b) Ecarts entre les simulations et l'expérience à la fin du chargement (320 daN par nœud chargé).

Maintenant que l'on dispose d'une bonne modélisation numérique de nos éléments, on est en mesure de confronter les résultats qu'elle nous donne aux mesures effectuées pour un chargement donné : ici on place des masses de 26,1kg sur chacun des 6 nœuds périphériques de la nappe inférieure (figure 68).

La précision obtenue apparaît assez acceptable puisque, à l'exclusion des nœuds situés au dessus des appuis, nous avons un écart maximum de 16% pour un des nœuds périphériques (tableau 5). L'écart moyen est de 11% seulement sur des déplacements allant du millimètre au centimètre.

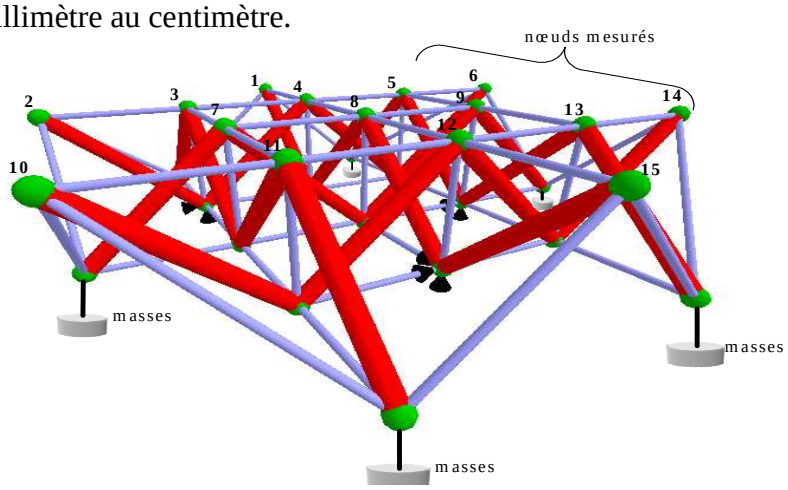


Figure 68. Chargement de la minigrille et nœuds mesurés.

Nœud	Mesuré (m)	Simulé (m)
1	$-4{,}47\ 10^{-3}$	$-3{,}96\ 10^{-3}$
2	$2{,}61\ 10^{-3}$	$2{,}20\ 10^{-3}$
3	$-3{,}00\ 10^{-4}$	$-2{,}07\ 10^{-4}$
4	$-2{,}98\ 10^{-3}$	$-2{,}60\ 10^{-3}$
5	$-5{,}76\ 10^{-3}$	$-5{,}02\ 10^{-3}$
6	$-8{,}44\ 10^{-3}$	$-7{,}43\ 10^{-3}$
7	$-2{,}96\ 10^{-3}$	$-2{,}63\ 10^{-3}$
8	$-1{,}62\ 10^{-3}$	$-1{,}39\ 10^{-3}$
9	$-4{,}00\ 10^{-4}$	$-1{,}97\ 10^{-4}$
10	$-1{,}10\ 10^{-2}$	$-9{,}88\ 10^{-3}$
11	$-5{,}65\ 10^{-3}$	$-5{,}10\ 10^{-3}$
12	$-2{,}60\ 10^{-4}$	$-2{,}60\ 10^{-4}$
13	$4{,}78\ 10^{-3}$	$4{,}49\ 10^{-3}$
14	$9{,}94\ 10^{-3}$	$9{,}19\ 10^{-3}$
15	$9{,}60\ 10^{-4}$	$8{,}95\ 10^{-4}$
Ecart moyen		11%

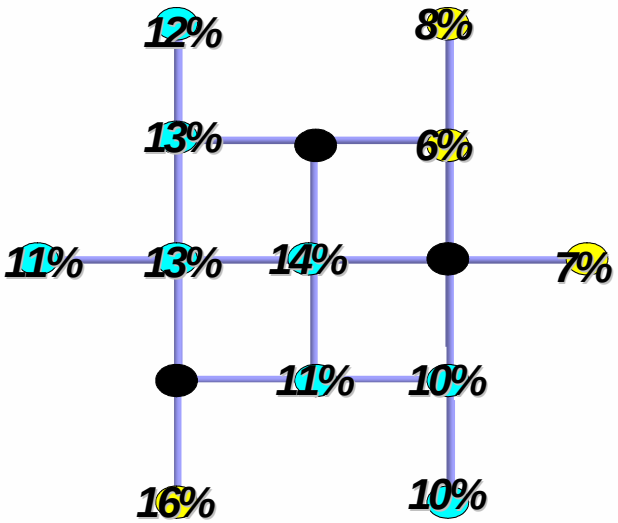


Tableau 5. Comparaison des déplacements mesurés et simulés.

3.2.2.2 Fréquences propres de la grille

Nous reprenons ici l’étude numérique avec Cast3m portant sur l’établissement des fréquences des modes propres et leur évolution en fonction du niveau d’autocontrainte qui nous a orienté dans le choix des appuis de la minigrille (figures 18 à 20). Nous modélisons cette fois les barres et les tirants en éléments POUTRE et constatons que pour nos conditions d’appuis, les niveaux et évolutions des modes propres se trouvent changés de manière non négligeable par rapport à la modélisation initiale en éléments BARRE. Nous observons notamment qu’en ce qui concerne le premier mode, l’évolution en fonction du niveau d’autocontrainte n’est plus en racine carrée comme l’était celle du premier mode donnée par la modélisation initiale et que la réponse en fréquence du mode est sensiblement supérieure dans le cadre de la nouvelle modélisation (figure 69). Il est à noter que nous avons vérifié que ces différences ne remettent néanmoins pas en cause le choix de la condition d’appuis de la minigrille fait dans la première partie.

Il s’agit de savoir si cette nouvelle modélisation rend mieux compte du comportement réel de la structure. Pour cela, nous disposons des résultats expérimentaux de J. Jaen [Jae07], tirés de son étude sur l’amortissement d’une structure de tenségrité en fonction du niveau d’autocontrainte. Elle a été menée sur la minigrille dans le cadre de son stage de Master en Mécanique et Ingénierie. J’en décris brièvement ci-dessous la chaîne d’acquisition et le protocole expérimental (figure 70).

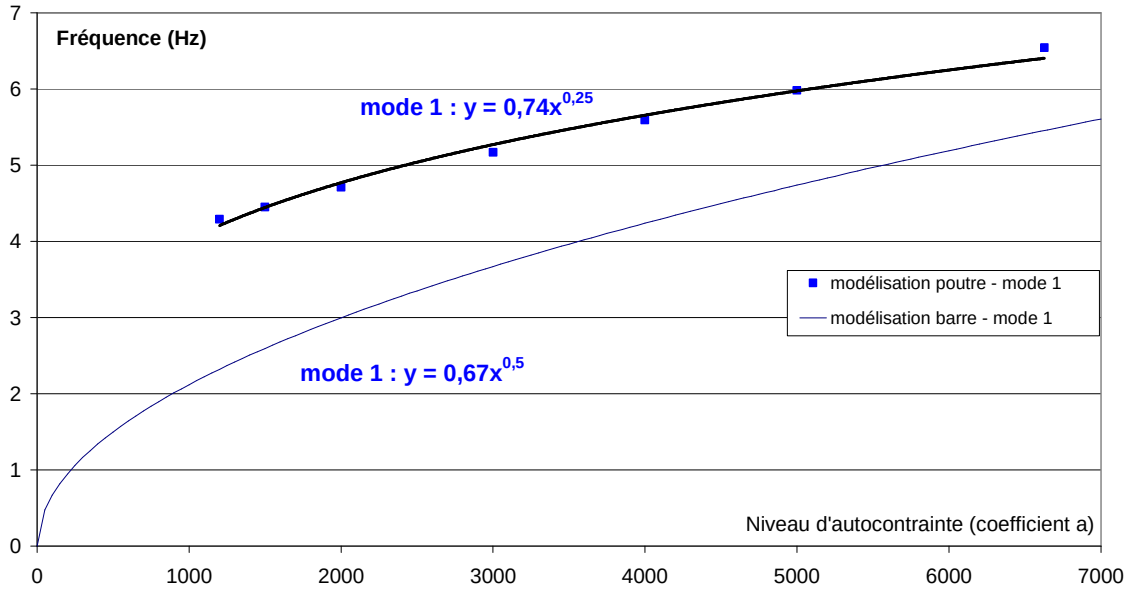


Figure 69. Comparaison des modélisations POUTRE et BARRE pour l'évolution du premier mode.

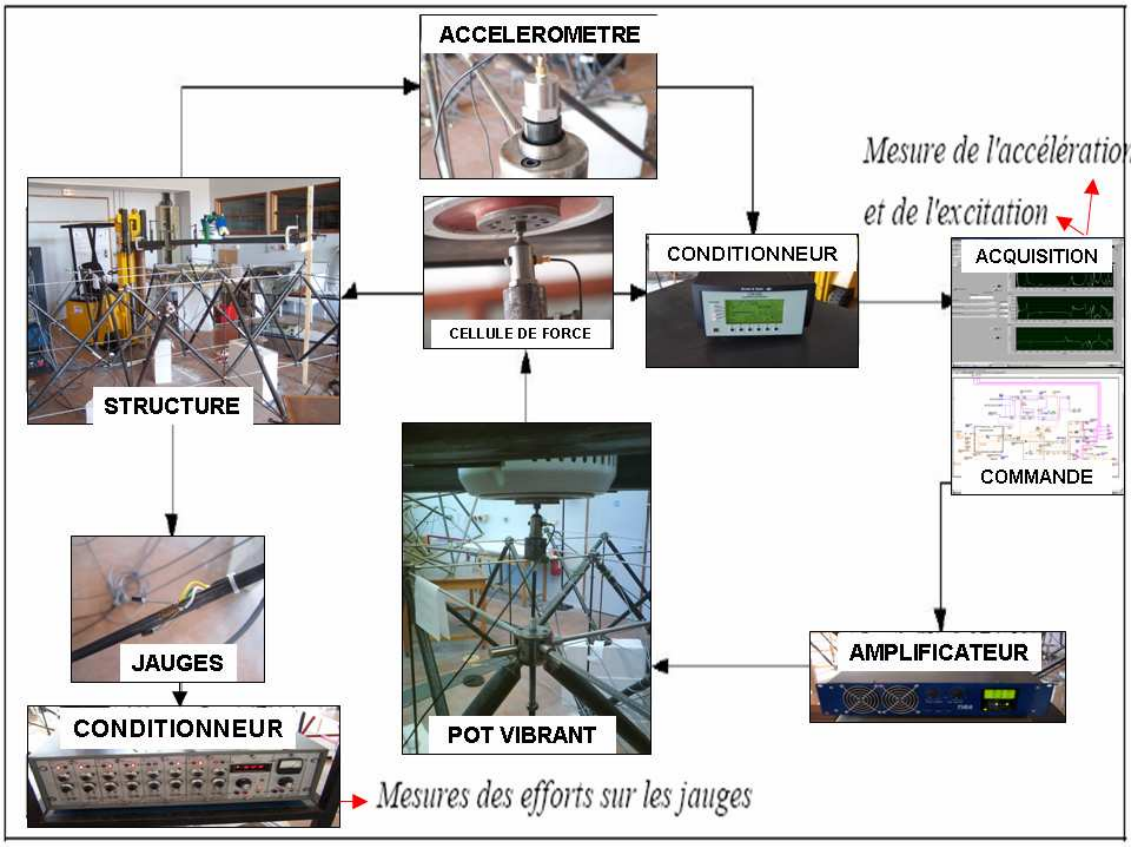


Figure 70. Chaîne de mesure des modes propres de la minigrille.

L’excitation de la structure est appliquée verticalement sur un noeud de la nappe supérieure par un pot vibrant dont la force nominale est de 200N pouvant balayer des fréquences allant de 0 à 7kHz et commandé par des signaux générés par le logiciel Labview et amplifiés par un amplificateur.

On réalise un balayage sinusoïdal à fréquence variable, qui permet de repérer plusieurs modes de la structure à la fois. Il génère des fréquences allant de 0 à 100Hz (car on ne s’intéresse qu’aux premiers modes) avec toutes les 5 périodes une incrémentation de 1Hz des fréquences générées. Il a été choisi une amplitude du signal source modérée de 1V gardée constante dans tous les essais et une fréquence d'échantillonnage de 200Hz.

On cherche à éliminer l'ensemble des bruits parasites lors de la mesure et favoriser l’identification des paramètres modaux de la structure. Le pot vibrant dont le poids est de plus de 30kg est donc suspendu afin de le mettre dans des conditions libre/libre. Un chariot autoporteur est utilisé pour soutenir les rails auxquels le pot est fixé via des tendeurs.

Le pot vibrant est relié physiquement à la structure par l'intermédiaire d'une tête d'impédance B&K qui mesure l'effort appliqué. L’acquisition des réponses est réalisée par des accéléromètres B&K qui fournissent une tension proportionnelle à l'accélération subie suivant leur axe. Les signaux des capteurs piézo-électriques sont amplifiés par un conditionneur Nexus B&K.

On visualise la réponse en fréquence (FRF) Force/Accélération et on extrait son amplitude, ses parties réelles et imaginaires afin d'identifier les modes. Les résultats montrent une FRF en amplitude avec un certain nombre de modes identifiables dans la bande de fréquence balayée (figure 71).

Nous portons notre étude sur 3 des 4 séries d’essai menées par J. Jaen pour étudier l’évolution de la réponse de la structure à un chargement identique en un même point sur des configurations d’autocontrainte différentes obtenues par vissage ou dévissage d’éléments actifs particuliers à chaque série (figure 72).

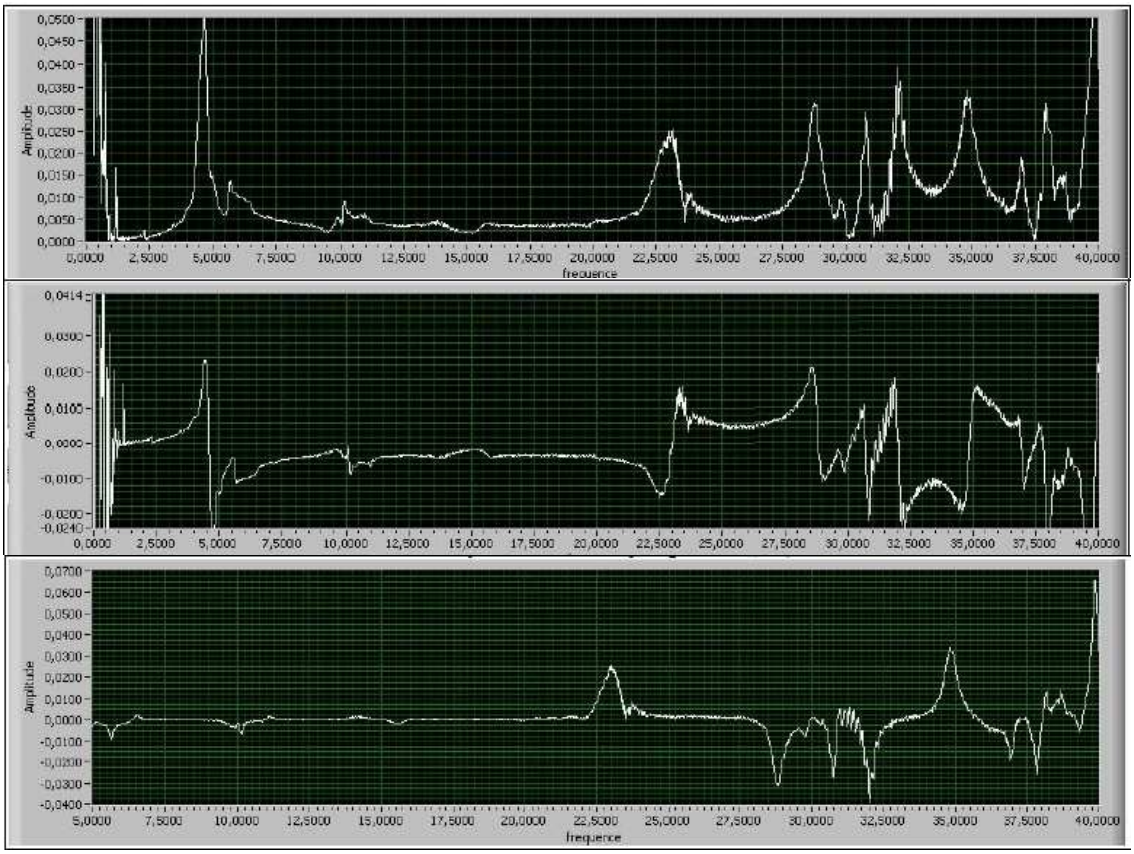


Figure 71. Amplitude, partie réelle et partie imaginaire de la FRF (ms-2/N) en fonction de la fréquence (Hz).

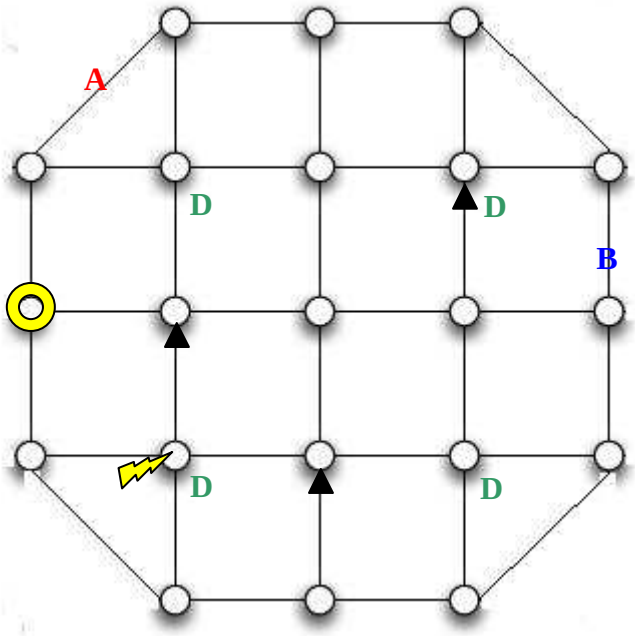


Figure 72. Eléments sollicités pour chaque série d'essais (A, B, D) – Nœuds concernés par l'excitation (éclair), la mesure (rond) et les appuis (triangles).

Série A : modification de l'état d'autocontrainte par action de dévissage sur 1 tirant périphérique de coin.
Série B : modification de l'état d'autocontrainte par action de dévissage sur 1 tirant périphérique de côté.
Série D : modification de l'état d'autocontrainte par action de vissage égale sur les 4 tirants verticaux de coin.

Dans le cas des séries A et B, les coefficients de pondération de chaque état d'autocontrainte de base identifiés évoluent différemment : le coefficient *a* diminue tandis que le coefficient *b* augmente, faisant passer le rapport *a/b* d'environ 3 à 0,5. On observe en conséquence une augmentation de la fréquence du premier mode.
Dans le cas de la série D, *a* et *b* augmentent conjointement, laissant le rapport *a/b* quasiment inchangé aux alentours de la valeur 0,1 (pour ce rapport la limite élastique des câbles est atteinte pour *a* supérieur à 1800). La fréquence du premier mode voit là encore sa valeur augmenter (tableau 6, figure 73).

La comparaison des fréquences expérimentales à celles données par les simulations menées pour les valeurs de *a* et *b* identifiées expérimentalement permettent de constater une bonne concordance entre elles, puisque les écarts maximums rencontrés ne dépassent pas les 10% (tableau 7).

Dans le cas de la série D, ces écarts sont même inférieurs à 3%. De plus, le vissage des 4 tirants verticaux de coins a permis de garder un rapport *a/b* constant, permettant de voir l'évolution de la fréquence en fonction du seul niveau d'autocontrainte. La simulation avec la modélisation POUTRE donne une évolution quasiment identique et l'on peut alors l'extrapoler à des niveaux d'autocontrainte plus élevés non atteints par l'expérience (figure 74).

On peut donc conclure que la modélisation en éléments POUTRE est confortée par les résultats expérimentaux et supplante définitivement la modélisation en éléments BARRE.

Exp. A	*a*	*b*	*a/b*	Fréquence (Hz)
n° 1	2055	736	2,8	4,16
n° 2	1895	1189	1,6	4,29
n° 3	1792	1477	1,2	4,33
n° 4	1649	1916	0,9	4,55
n° 5	1565	2101	0,75	4,52
n° 6	1364	2597	0,53	4,74
n° 7	1343	2725	0,49	4,77

Exp. B	*a*	*b*	*a/b*	Fréquence (Hz)
n° 1	1995	750	2,7	4,16
n° 2	1896	1026	1,85	4,22
n° 3	1819	1252	1,45	4,33
n° 4	1734	1505	1,15	4,49
n° 5	1674	1678	1	4,49
n° 6	1648	1792	0,9	4,53
n° 7	1574	1993	0,8	4,60
n° 8	1506	2205	0,7	4,68

Exp. D	*a*	*b*	*a/b*	Fréquence (Hz)
n° 1	188	1380	0,14	3,90
n° 2	284	2524	0,11	4,26
n° 3	337	2973	0,11	4,39
n° 4	388	3461	0,11	4,49
n° 5	420	3849	0,11	4,65
n° 6	455	4267	0,11	4,65

Tableau 6. Etat d'autocontrainte et fréquence mesurée du premier mode de la minigrille pour chaque série.

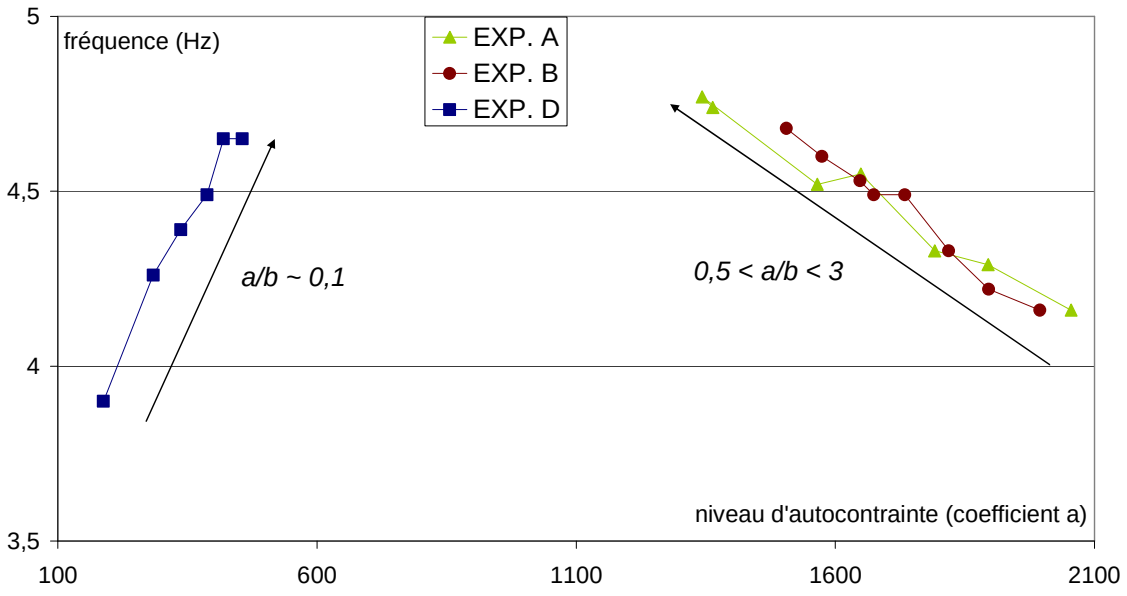


Figure 73. Evolution de la fréquence du premier mode en fonction du niveau d'autocontrainte pour chaque série.

Exp. A	*a*	*a/b*	Fréquence (Hz)	Ecart (%)
n° 1	2055	2,8	3,98	4,3
n° 2	1895	1,6	4,08	5,0
n° 3	1792	1,2	4,13	4,6
n° 4	1649	0,9	4,22	7,3
n° 5	1565	0,75	4,26	5,8
n° 6	1364	0,53	4,35	8,2
n° 7	1343	0,49	4,38	8,2

Exp. B	*a*	*a/b*	Fréquence (Hz)	Ecart (%)
n° 1	1995	2,7	3,98	4,3
n° 2	1896	1,85	4,03	4,5
n° 3	1819	1,45	4,08	5,8
n° 4	1734	1,15	4,13	8,0
n° 5	1674	1	4,17	7,1
n° 6	1648	0,9	4,19	7,5
n° 7	1574	0,8	4,23	8,0
n° 8	1506	0,7	4,27	8,8

Exp. D	*a*	*a/b*	Fréquence (Hz)	Ecart (%)
n° 1	188	0,14	3,94	-1,0
n° 2	284	0,11	4,23	0,7
n° 3	337	0,11	4,34	1,1
n° 4	388	0,11	4,45	0,9
n° 5	420	0,11	4,53	2,6
n° 6	455	0,11	4,63	0,4

Tableau 7. Etat d'autocontrainte et fréquence simulée du premier mode de la minigrille pour chaque série – Ecarts avec les valeurs expérimentales.

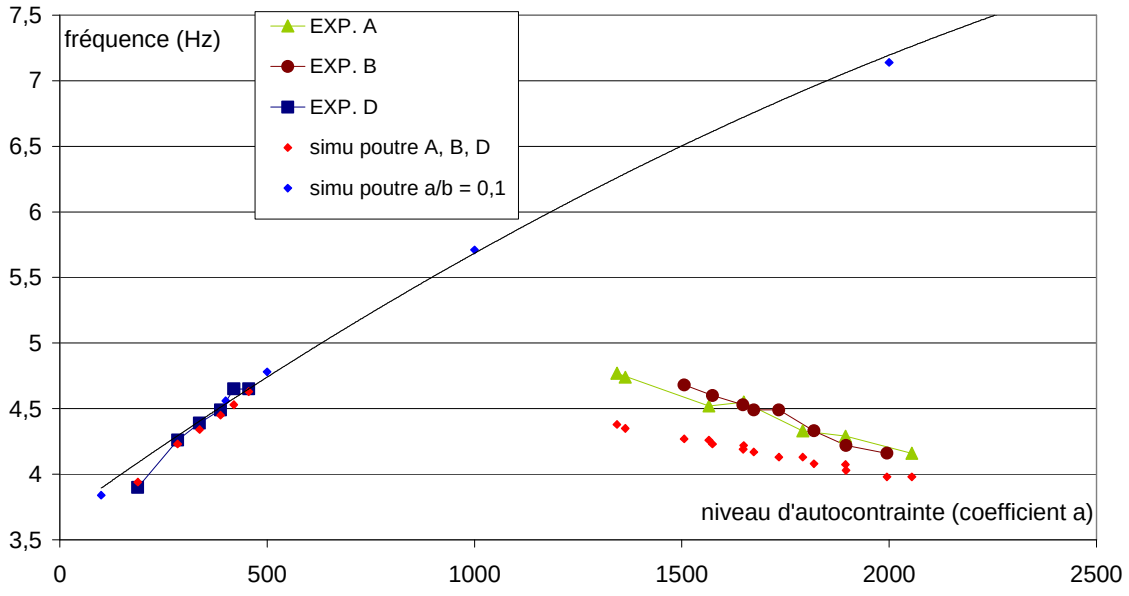


Figure 74. Comparaison des fréquences du premier mode mesurées et simulées.

3.3 Identification de l'état d'autocontrainte

3.3.1 Objectifs

La méthode d'identification pseudo-inverse utilisée par Julien Averseng a fait ses preuves. Elle ne se cantonne cependant qu'à la mesure de tension (avec la méthode des cordes vibrantes dont on a vu les faiblesses) dans les 9 tirants verticaux. Je dispose maintenant d'outils supplémentaires. Grâce aux montages de jauges, nous avons accès à la tension dans des tirants verticaux, à la compression de certaines barres ainsi qu'à la tension de tirants périphériques. Ces informations confèrent une répartition plus riche pour l'identification. De plus il est possible d'ajouter toutes les valeurs des tensions des câbles des 2 nappes. Une meilleure identification permet un affinage de la mise en tension et donc de réduire les écarts entre simulation et expérimentation. Le tachéomètre permet d'obtenir la géométrie réelle. On va maintenant pouvoir vérifier si cette donnée affine l'identification de l'autocontrainte.

Le but visé est double : élaborer une méthode d'identification de l'état d'autocontrainte de structures de tenségrité sur site et, à terme, tenter de réaliser des diagnostics de ruine sur celles-ci. La mesure des positions des nœuds et de leur champ de déplacements sous chargements (statique, dynamique, ambiant) semble une voie prometteuse pour atteindre ces deux objectifs. Le tachéomètre de grande précision dont nous sommes équipés devient donc la pièce maîtresse du protocole expérimental dédié à la grille.

3.3.2 Identification avec la géométrie réelle

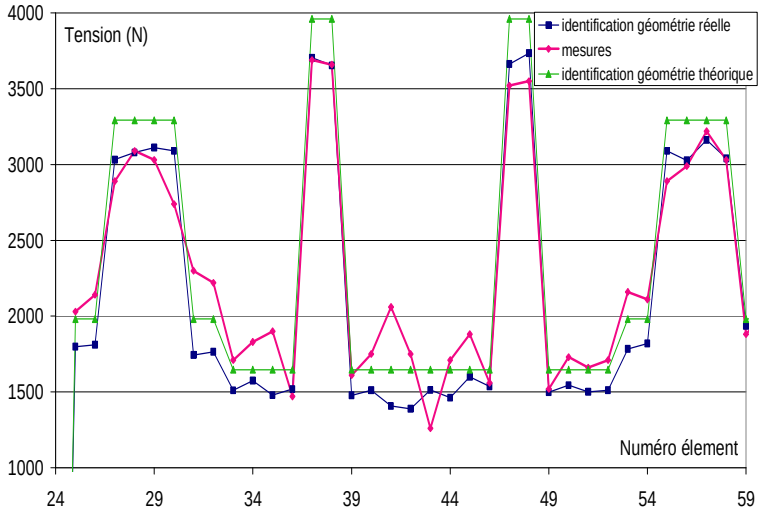
Nous avons observé des décalages non négligeables entre la géométrie théorique utilisée jusqu'alors et la géométrie réelle. Il est donc nécessaire d'étudier l'influence de la géométrie réelle sur la détermination des états d'autocontrainte de base de la minigrille De cette manière nous allons pouvoir re-tester la validité de la méthode d'identification d'Averseng explicitée dans la première partie et voir si le comportement mécanique de la minigrille en est affecté.

Des simulations préliminaires ont montré une certaine robustesse des états de base. En effet, en décalant les positions des nœuds périphériques de 1cm vers le haut ou le bas, les états de base restent inchangés à quelques pourcents près.

La répartition plus erratique des décalages de la géométrie réelle est beaucoup plus complexe à traiter pour le logiciel T2000. Cependant, il parvient à retrouver deux états de base *EA1'* et *EA2'*. Leurs deux vecteurs diffèrent de ceux établis pour la géométrie parfaite. Mais leur combinaison linéaire avec des coefficients de pondération *a'* et *b'* permet d'atteindre des états d'autocontrainte semblables (figure 75).

Ces nouveaux états très voisins des états théoriques présentent des irrégularités des efforts dans les éléments effectivement observées lors des mesures, notamment dans les câbles. Il faut noter que la méthode de l'inverse généralisée n'est pas transposable aux câbles et nous utilisons le solveur excel pour caler les états générés à l'état mesuré. Nous parvenons à descendre à des écarts de moins de 10%. On peut aussi remarquer que la valeur optimale du rapport entre les deux coefficients de pondération *a* et *b*, pour laquelle la répartition des forces dans les éléments est la plus homogène possible, s'en voit modifiée, ici légèrement inférieure à 0,4 contre 0,5 pour la géométrie théorique (figure 76).

Pour conclure, les très faibles écarts des efforts identifiés avec les deux géométries (inférieurs à 1,5%) ne disqualifient pas l'utilisation de la géométrie théorique pour l'identification. Il n'est pas nécessaire de réaliser la mesure de la géométrie réelle pour identifier correctement l'état d'autocontrainte de la structure.



Coefficients identifiés avec la géométrie théorique :

a = 2476, b = 4115 (a/b = 0,60)

Coefficients identifiés avec la géométrie réelle :

a' = 1141, b' = 2433 (a'/b' = 0,47)

Figure 75. Comparaison des états identifiés selon la géométrie utilisée avec l'état mesuré.

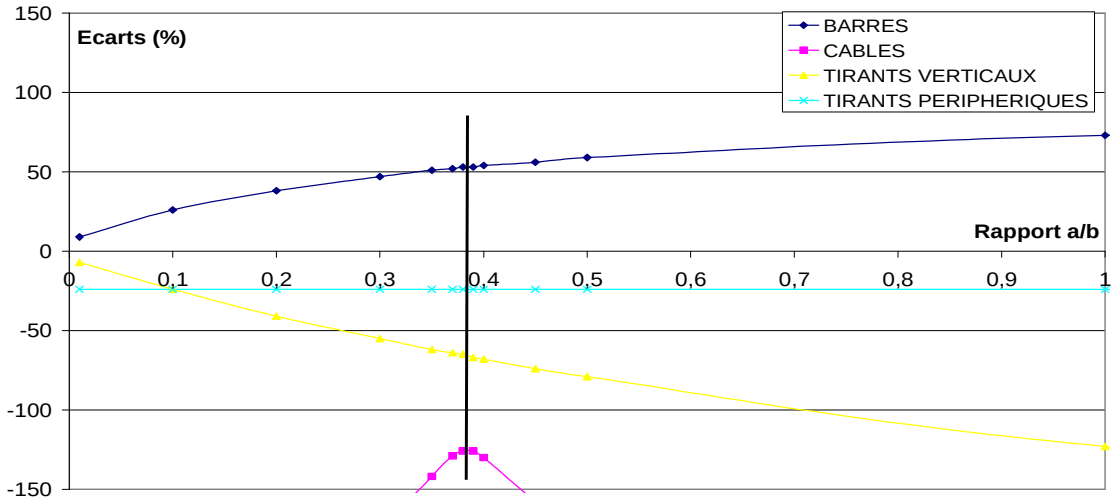


Figure 76. Nouveaux écarts des valeurs extrêmes des efforts dans les éléments.

3.3.3 Mise en tension

Pour mettre en tension la grille nous utilisons toujours la méthode mise au point par Averseng décrite dans la première partie. L'identification initiale de l'état d'autocontrainte α_id s'effectue avec la méthode de l'inverse généralisée à partir des mesures des efforts *T_mes* dans les barres et les tirants équipés de montages de jauges et des 2 vecteurs tension de base associés *T_0i* et *T_1i*. Nous parvenons ainsi à des écarts entre l'état identifié *T_id* et l'état mesuré *T_mes* inférieurs à 10% pour les efforts mesurés dans les éléments (tableau 8). On note dans cet exemple, l'ajout, par rapport à l'instrumentation initiale (figure 52), de la barre notée *B5* qui relie la barre *B2* au tirant *TV2* et l'utilisation du seul tirant périphérique *TP1*.

On effectue alors la procédure de mise en tension qui nous donne les allongements réels des éléments actifs à effectuer pour atteindre l'état cible α_cible visé. Pour vérifier la bonne mise en tension, nous identifions l'état obtenu. Nous observons qu'il correspond en fait à l'état intermédiaire (milieu entre l'état initial et l'état cible) α_interm utilisé dans la procédure de mise en tension. En doublant les allongements prévus nous parvenons cependant à atteindre l'état cible avec une très bonne précision. La procédure de mise en tension reste donc utilisable en l'état.

Il faudra tout de même chercher à comprendre la cause de ce défaut, qui n'avait pas été soulevé auparavant. Les mesures des efforts dans les tirants par la méthode des cordes vibrantes donnant des valeurs erronées, cela peut avoir conduit à l'illusion du bon fonctionnement de la mise en tension. Maintenant que nous disposons de mesures d'efforts fiables, les doutes peuvent s'orienter sur les valeurs des allongements réels données par le logiciel T2000.

Eléments Mesurés	***T_0i***	***T_1i***	***T_mes* (N)**	α_id	***T_id* (N)**	**Ecarts**	α_interm	α_cible
B5	0	-1,13	-2380	*a* = 2560	-2230	6,40%	*a* =2280	*a* = 2000
B2	-2,26	-1,13	-7930	*b* = 1970	-8020	-1,14%	*B* = 2980	*b* = 4000
B1	-2,26	-1,13	-8010		-8020	-0,13%		
B3	-2,26	-1,13	-8140		-8020	1,47%		
B4	-2,26	-1,13	-8120	*a/b* = 1,30	-8020	1,23%		*a/b* = 0,5
TV1	1,6	1,6	7070		7250	-2,49%		
TV3	0,8	1,6	5110		5200	-1,73%		
TV2	1,6	1,6	7300		7250	0,73%		
TP1	0	0,57	1170		1110	4,80%		

Tableau 8. Identification de l'état d'autocontrainte.

3.3.4 Différences jauges/câbles

Il est à noter que les mesures des efforts par les jauges et celles effectuées sur les câbles, qui vérifient l'équilibre des nœuds, ne donnent pas la même identification de l'état d'autocontrainte. En effet, l'identification de l'état d'autocontrainte en utilisant les câbles (solveur excel) amène à des écarts de l'ordre de 35% avec celui identifié à partir des mesures des jauges (pseudo-inverse ou solveur excel qui donnent des résultats identiques) avec un rapport *a/b* presque inchangé (figure 77). Par le passé, en utilisant la méthode des cordes vibrantes appliquée aux tirants, le même type d'écart a été observé. La correction apportée par les montages de jauges n'efface donc pas cette anomalie. Comme nous avons cependant vu que chacune des méthodes de mesure d'efforts (montages de jauges et tensiomètre) a été testée à l'aide d'un capteur de force de référence identique sur le banc de tension, il nous faut trouver une solution qui, à défaut d'expliquer l'anomalie, puisse permettre de choisir laquelle des deux est la plus viable.

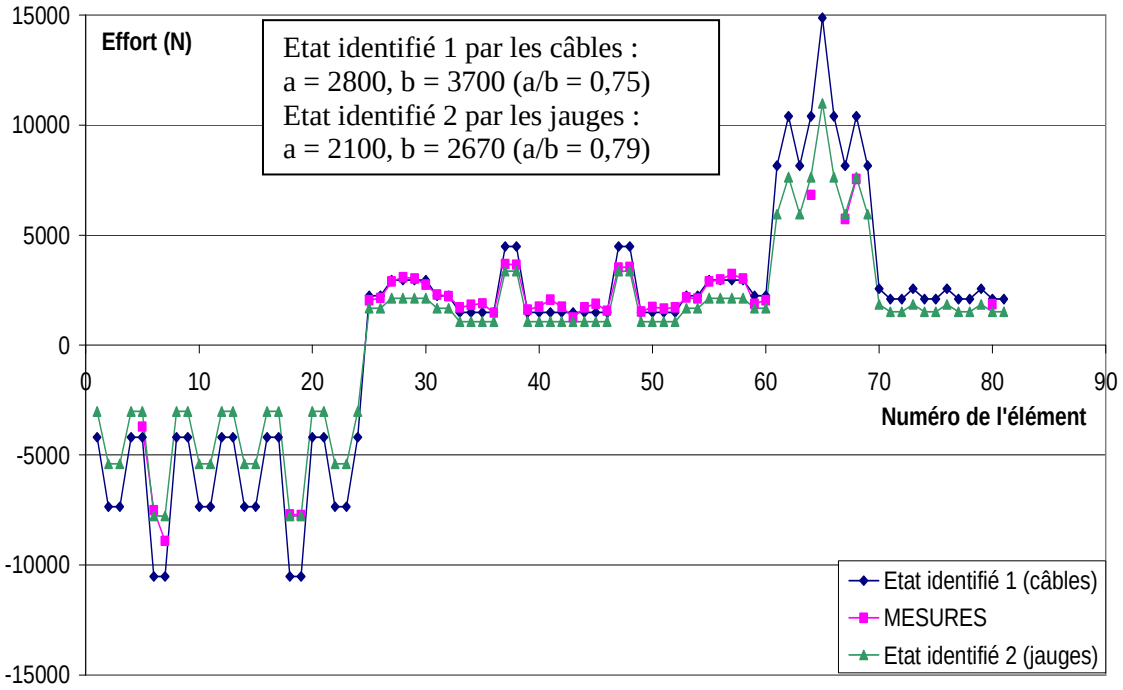


Figure 77. Etats identifiés à partir des mesures d'efforts par les câbles et par les jauges.

C'est à ce stade que les mesures de champ de déplacements sous chargement interviennent à nouveau. En effet, si elles ont pu permettre de valider l'hypothèse de la modélisation des éléments de la minigrille, on peut envisager que dans ce cas aussi elles puissent servir à trancher entre les deux méthodes de mesures. On cherche ainsi à déterminer laquelle des deux identifications (câbles ou jauges) permet une simulation du champ de déplacements sous chargement la plus approchée du champ de déplacement mesuré. Cela constitue en fait une première tentative d'utilisation du tachéomètre pour mettre au point une méthode d'identification de l'état d'autocontrainte d'une structure de tenségrité en place en s'affranchissant de la mesure de ces efforts.

La mesure des efforts sert à identifier l'état d'autocontrainte à partir duquel on peut simuler le champ de déplacement sous chargement que l'on compare avec celui effectivement mesuré (figure 78). L'écart obtenu en utilisant les résultats à partir des mesures des efforts dans les câbles est supérieur à 20% en moyenne. Nous obtenons un écart moyen de seulement 11% à partir de l'état identifié par les mesures de jauges. Les mesures sur les barres et les tirants permettent donc d'identifier un état qui correspond le mieux au comportement global de la structure sous chargement.

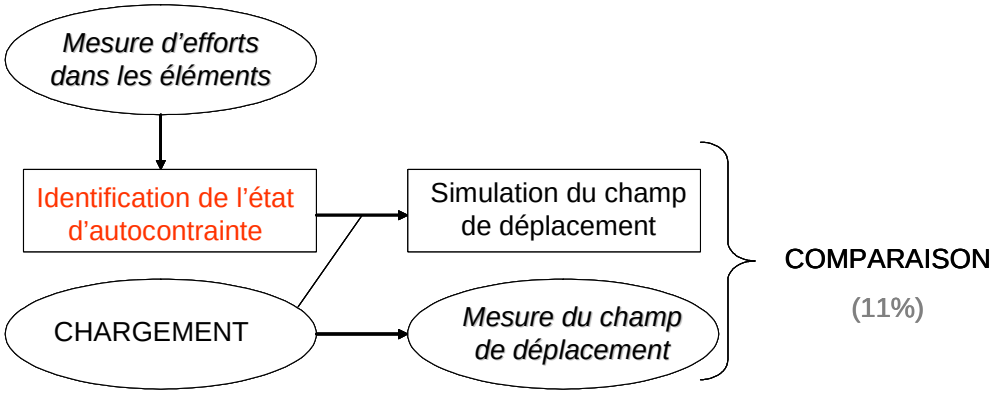


Figure 78. Schéma de principe de l'établissement de la comparaison mesure/simulations des champs de déplacements.

3.3.5 Calage sur la mesure du champ de déplacements

Pour estimer si la précision atteinte suffit pour permettre d'effectuer l'identification avec la mesure de champ de déplacements, il faut caler le résultat de la simulation avec la mesure en jouant sur les coefficients *a* et *b*. Un nouveau schéma pour tenter d'identifier l'état d'autocontrainte voit ainsi le jour (figure 79) puisque la corrélation entre champ simulé et champ mesuré permet théoriquement d'obtenir les coefficients de pondération des états d'autocontrainte de base.

Une étude numérique a montré que pour deux niveaux d'autocontrainte ayant un rapport 10, la différence entre les déplacements des nœuds pour un chargement donné allait de 0,7 à 7mm en dehors des appuis (tableau 9). On peut estimer que la précision du tachéomètre permet de discriminer des états aussi éloignés.

Cependant, malgré la bonne précision de la simulation du champ de déplacements, l'état identifié avec ce schéma accuse une différence assez sensible avec celui qui nous sert de référence puisqu'elle s'élève à 35%. Il est à noter que pour un chargement donné, les valeurs des déplacements verticaux des 15 nœuds de la nappe supérieure obtenues avec la géométrie théorique et la géométrie réelle concordent presque parfaitement. On a ainsi la confirmation que la géométrie théorique suffit. Pour espérer pouvoir se contenter de cette méthode pour identifier efficacement l'état d'autocontrainte de la grille, il est nécessaire de parvenir à améliorer encore la précision des mesures et/ou des simulations. Nous avons néanmoins ouvert expérimentalement la voie pour l'utilisation d'une telle méthode, ce qui est encourageant pour la suite de ces travaux dans la mesure où nous nous sommes limités jusqu'ici au chargement statique. De plus, on peut noter que les faibles dimensions de la minigrille ne jouent pas en faveur de la mesure des champs de déplacements. La grande grille apparaîtra certainement comme un meilleur objet d'études dans ce contexte. Il est aussi évident qu'à l'avenir il faut se tourner vers des chargements dynamiques qui puissent valider l'utilisation des chargements naturels pour les structures en place.

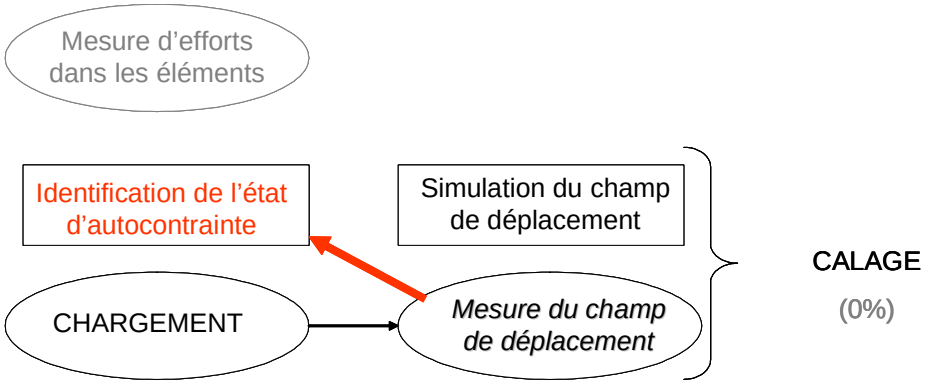


Figure 79. Schéma de principe de calage de l'état d'autocontrainte à partir de la mesure des champs de déplacements.

Nœud	*a*=500, *b*=2**a* (m)	*a*=5000, *b*=2**a* (m)	nœud	*a*=500, *b*=2**a* (m)	*a*=5000, *b*=2**a* (m)
1	$-4{,}88\ 10^{-3}$	$-2{,}57\ 10^{-3}$	9	$-2{,}09\ 10^{-5}$	$-1{,}44\ 10^{-5}$
2	$3{,}15\ 10^{-3}$	$1{,}61\ 10^{-3}$	10	$-1{,}35\ 10^{-2}$	$-6{,}67\ 10^{-3}$
3	$-2{,}78\ 10^{-5}$	$-2{,}43\ 10^{-5}$	11	$-6{,}77\ 10^{-3}$	$-3{,}37\ 10^{-3}$
4	$-3{,}21\ 10^{-3}$	$-1{,}66\ 10^{-3}$	12	$-4{,}58\ 10^{-5}$	$-3{,}94\ 10^{-5}$
5	$-6{,}38\ 10^{-3}$	$-3{,}30\ 10^{-3}$	13	$6{,}19\ 10^{-3}$	$3{,}17\ 10^{-3}$
6	$-9{,}56\ 10^{-3}$	$-4{,}98\ 10^{-3}$	14	$1{,}24\ 10^{-2}$	$6{,}36\ 10^{-3}$
7	$-3{,}38\ 10^{-3}$	$-1{,}70\ 10^{-3}$	15	$1{,}53\ 10^{-3}$	$7{,}75\ 10^{-4}$
8	$-1{,}63\ 10^{-3}$	$-8{,}33\ 10^{-4}$		écart moyen	$3\ 10^{-3}$

Tableau 9. Déplacements simulés pour deux états d'autocontrainte distincts.

3.4 Conclusion

Les résultats présentés dans ce chapitre montrent la pertinence des moyens instrumentaux mis en œuvre. En effet, grâce à leurs mesures, il a été mis évidence la faiblesse de la modélisation numérique initiale des structures de tenségrité dont le comportement des éléments était trop simplifié. Dans le cas de grilles réelles, les barres et les tirants ne peuvent plus être modélisés comme des éléments ne recevant que des efforts normaux. Ils vont aussi subir de la flexion et leur rigidité en flexion doit donc être prise en compte dans nos simulations. Nous avons vu comment cela a permis de trouver des résultats cohérents dans le cadre des mesures de déplacements des nœuds sous chargement statique et des fréquences propres.

Les résultats obtenus sur la minigrille, permettent de montrer que l'utilisation de la géométrie réelle n'apporte pas un plus convaincant pour l'identification de l'état d'autocontrainte. Et ce malgré les inévitables défauts de fabrication et d'assemblage qui conduisent à des longueurs et des efforts dans les éléments assez inhomogènes. Cette possibilité de mesure apparaît néanmoins précieuse quand on ne dispose pas de la géométrie théorique.

Les résultats sur la mesure des champs de déplacements des nœuds sous chargement statique sont suffisamment prometteurs pour espérer utiliser directement ces mesures de champ pour identifier l'autocontrainte des grilles de tenségrité en s'affranchissant des mesures lourdes des efforts dans les différents éléments.

Dès lors, le tachéomètre, apparaît en mesure d'aider à la détermination de l'état et du niveau d'autocontrainte. Dans cette optique, on peut envisager de contrôler le niveau d'autocontrainte au cours du temps voire de diagnostiquer d'éventuelles ruines. Par exemple la rupture d'un câble a une influence sur l'ensemble de la structure que ce soit sur la géométrie ou sur l'autocontrainte du fait de la continuité des éléments tendus. L'objectif reste d'utiliser les sollicitations naturelles (vent, température…) comme chargement. Il faut donc vérifier la pertinence de notre démarche pour des chargements dynamiques lents.

4 ETUDES NUMERIQUES SUR L'IDENTIFICATION DE L'ETAT D'AUTOCONTRAINTE

4.1 Introduction

La mesure des déplacements ou des accélérations des nœuds d'une grille de tenségrité sous chargement statique ou dynamique ([ADV00], [Mae00]) doit permettre de remonter à l'état de contrainte de la structure par analyse inverse, en s'épargnant la mesure illusoire de l'effort interne d'un grand nombre d'éléments ([Bar82], [BC97]). Nous menons des simulations numériques qui permettent de montrer la pertinence d'une démarche utilisant la méthode de Levenberg-Marquardt [WP94], qui consiste en la minimisation d'une fonction d'erreur $\Im$, pour retrouver les coefficients pondérateurs des états d'autocontrainte élémentaires [Dub04]. L'identification est réalisée en utilisant un chargement défini qui est le même pour la structure de référence et celle d'identification. On cherche notamment à déterminer s'il existe une corrélation entre l'influence des modes propres sur l'état d'autocontrainte et son identification.

Il est cependant utopique de connaître parfaitement la sollicitation d'une structure en place. Le champ de déplacements des noeuds a donc une certaine variabilité mais qui n'est pas complètement aléatoire. En effet, elle résulte de la variabilité du champ de forces appliqué mais aussi du comportement de la structure. Pour palier le problème de variabilité temporelle du chargement et donc du champ de déplacements résultant, nous choisissons d'utiliser la technique de décrément aléatoire ([ABI99], [Ibr77]). Cette méthode de filtrage permet d'éliminer les composantes variables d'un signal. Ainsi, le champ de déplacements que l'on obtient après ce filtrage, correspond à peu près au champ obtenu sous chargement constant. Nous décrivons la méthode du décrément aléatoire avec une vérification sur un signal bruité. Nous étudions ensuite l'efficacité d'identification en utilisant cette méthode, comparée à une identification avec chargement connu.

Nous étendons ensuite ces études exploratoires à une structure de tenségrité plus complexe : la grande grille qui possède plus d'états d'autocontrainte élémentaires. Nous cherchons à vérifier la pertinence de ce type de démarche à des structures réalistes pour l'identification de l'état d'autocontrainte mais aussi de l'état d'endommagement des éléments d'une structure, qui peut être supposé directement lié à l'effort qu'ils reprennent, ce qui est primordial lorsque celle-ci est en service.

4.2 Etudes numériques menées sur la minigrille

4.2.1 Relation entre l'autocontrainte et les modes propres

Dans une structure de tenségrité, l'autocontrainte apporte la rigidité de l'ensemble. Il est donc normal qu'elle influe sur les modes propres de la structure. Nous cherchons à déterminer numériquement l'influence de chaque état élémentaire d'autocontrainte sur la variation des fréquences propres de la minigrille. Elle est mise en autocontrainte, en conservant les conditions d'appuis définies dans la première partie, par la combinaison des deux états élémentaires *EA1* et *EA2*. La combinaison de référence est choisie de manière à avoir un rapport 1 (pour lequel la limite d'élasticité des barres se situe à *a* supérieur à 8000) entre les deux coefficients *a* et *b* respectivement associés aux deux états :

$$a = 2000 \; ; \; b = 2000$$

Ainsi, nous allons pouvoir comparer leur influence respective sur les fréquences propres tout en conservant des valeurs réalistes pour les efforts dans les éléments. Avec cet état d'autocontrainte, nous calculons les cinq premiers modes propres de la structure à l'aide du code de calcul par éléments finis Cast3m (figure 80). On note que les deux premiers modes ont des fréquences voisines de 5Hz tandis que les trois suivants ont des fréquences proches de la valeur de 30Hz.

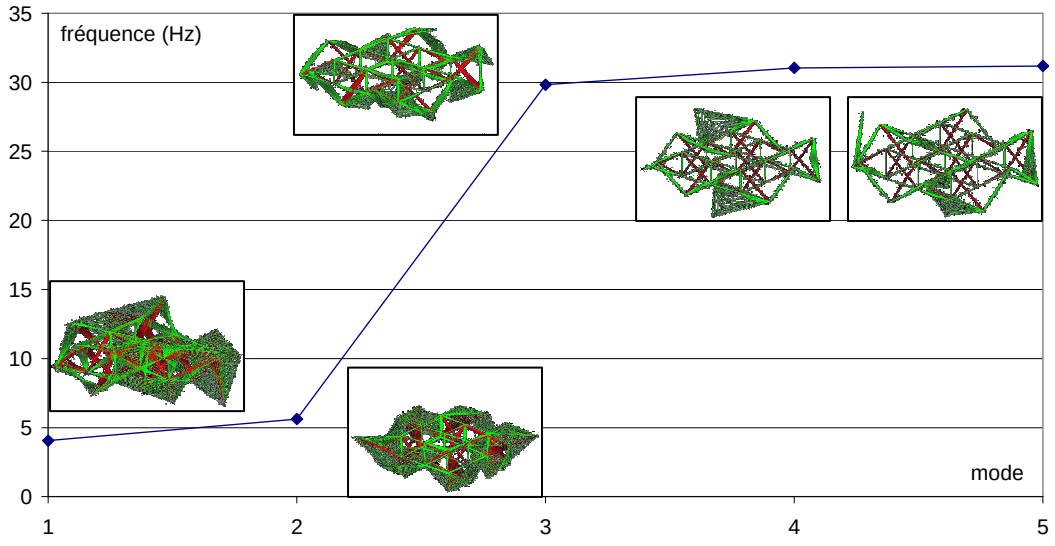


Figure 80. Fréquences propres de référence de la minigrille.

Pour étudier la sensibilité de ces fréquences par rapport aux deux états d'autocontrainte, chaque coefficient de pondération de la base d'autocontrainte est affecté d'une variation identique $\Delta\alpha$ = 200 (α étant ici alternativement *a* ou *b*). Cela fait donc une variation relative $\frac{\Delta\alpha}{\alpha_0}$ de 10 % pour les coefficient *a* et *b* initialement à 2000. La variation d'un coefficient se fait indépendamment de l'autre. Le tableau 10 récapitule les valeurs associées aux différentes fréquences propres pour la variation de chaque coefficient.

Etat	Mode	1	2	3	4	5
2000 ; 2000	fréquences (Hz)	4,056	5,619	29,824	31,0423	31,187
	masses généralisées (kg)	22,14	21,24	1,54	0,61	0,58
2200 ; 2000	fréquences (Hz)	4,076	5,622	29,826	31,0421	31,186
2000 ; 2200	fréquences (Hz)	4,1025	5,637	30,399	31,9637	32,134

Tableau 10. Caractéristiques des modes en fonction de l'état d'autocontrainte.

A partir des données précédentes nous calculons le gradient de fréquence par rapport à la variation du coefficient de pondération de la base d'autocontrainte : $\frac{\Delta f}{\Delta\alpha}$

Si ce rapport est petit, alors une petite variation de α implique une petite variation de f. De même s'il est grand alors une petite variation de α implique une grande variation de f.

En prenant l'inverse du rapport on peut établir les relation suivantes :

$$\frac{\Delta f}{\Delta\alpha} \text{ petit} \Rightarrow \frac{\Delta\alpha}{\Delta f} \text{ grand} \Rightarrow f \text{ influe beaucoup sur } \alpha .$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta\alpha} \text{ grand} \Rightarrow \frac{\Delta\alpha}{\Delta f} \text{ petit} \Rightarrow f \text{ influe peu sur } \alpha .$$

La figure 81 montre le rapport $\frac{\Delta f}{\Delta \alpha}$ pour les deux états d'autocontrainte élémentaires en fonction des cinq premières fréquences propres. On observe une différence de comportement très marquée entre les deux états : tandis que pour l'état 1 le rapport est faible et diminue avec l'augmentation de la fréquence, la tendance s'inverse pour l'état 2 avec un rapport dont la valeur est bien plus élevée.

On constate finalement qu'en moyenne c'est le mode 2 qui a la variation $\frac{\Delta f}{\Delta \alpha}$ la plus petite. Ce mode semble donc avoir une plus grande influence sur les coefficients de pondération des états d'autocontrainte. Nous devons vérifier si cette relation qui existe entre l'état d'autocontrainte et les modes propres influe sur la qualité de l'identification de l'autocontrainte.

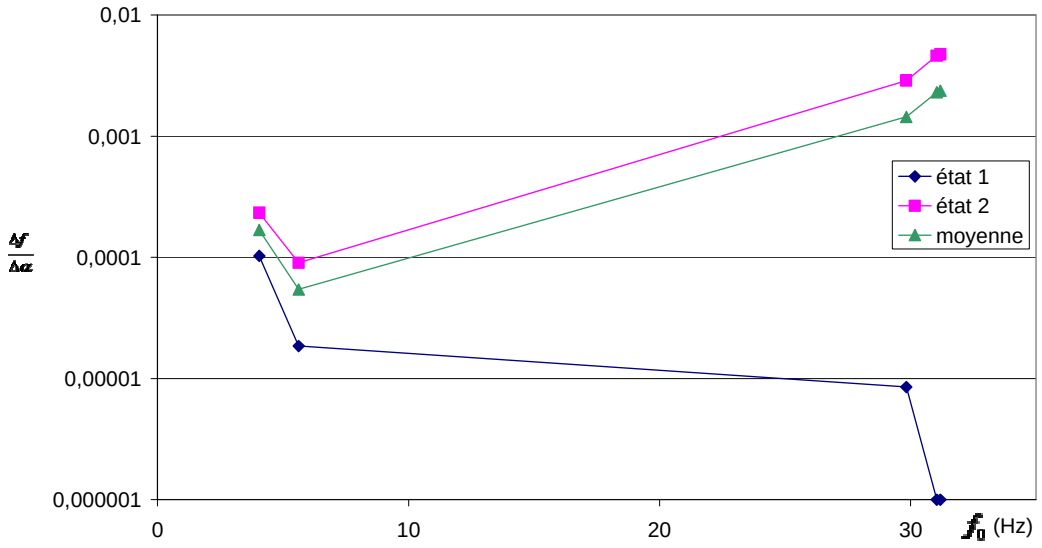


Figure 81. Impact des états d'autocontrainte sur la fréquence des modes de vibration.

4.2.2 Corrélation entre les modes propres et l'identification de l'autocontrainte

Nous allons étudier l'influence du mode propre sur l'identification de l'autocontrainte. Pour réaliser l'identification nous utilisons l'évolution du champ d'accélération de la structure [DC04]. On définit l'état d'autocontrainte initial {2000 ; 2000} pour la structure de référence. La minigrille est excitée par une force ponctuelle sinusoïdale de fréquence correspondant à un des cinq premiers modes propres. Les accélérations de tous les noeuds de la structure sont calculées et stockées. Ce champ d'accélération sert de référence pour l'identification par analyse inverse.

L'identification est effectuée en partant d'un état d'autocontrainte défini par tirage aléatoire {3241,6 ; 2230} proche ce celui de référence. La procédure d'identification utilise la méthode de Levenberg-Marquardt [WP94], classée dans la catégorie des méthodes quasi-Newton (elle condense la méthode de Newton et celle du gradient). Cette procédure a pour but de minimiser une fonction d'erreur $\Im(P)$. Ce potentiel $\Im$ est composé de la différence entre le champ d'accélération simulé et le champ d'accélération de référence :

$$\Im(P) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\left(R(P,t) - R_{ref}(t)\right)}{\frac{\max\left(R_{ref}\right) + \min\left(R_{ref}\right)}{2}}\right)^T \left(\frac{\left(R(P,t) - R_{ref}(t)\right)}{\frac{\max\left(R_{ref}\right) + \min\left(R_{ref}\right)}{2}}\right)\right]$$

avec P le vecteur des paramètres à identifier, R la réponse temporelle du champ d'accélération de la structure simulée, R_{ref} la réponse du champ d'accélération de la structure à identifier.

L'algorithme de résolution peut se résumer au schéma suivant :

$$\text{minimiser } \Im(P) = \frac{1}{2} f(x)^T f(x)$$

étape 0 : choix du vecteur de départ x^0, l'indice d'itération $k = 0$

étape I : à chaque itération k, on calcule $f(x^k)$ et son gradient $\nabla f(x^k)$

étape II : on détermine Δx^k en résolvant le système suivant

$$\left(\nabla f(x^k)^T \nabla f(x^k) + \mu^k I\right)\Delta x^k = \nabla f(x^k)^T f(x)$$

étape III : la solution optimale devient le point $x^{(k+1)} = x^k - \lambda^k \Delta x^k$

avec $k = k + 1$

x^k est le vecteur de variables à l'itération k, f est la fonction à minimiser, μ^k est un coefficient positif (méthode de Newton si nul, méthode du gradient si infini), λ^k est un coefficient positif donnant l'amplitude de recherche (la direction étant donnée par la résolution de l'étape II). Le produit $\nabla f(x^k)^T \nabla f(x^k)$ de l'étape II est une approximation de Hessien, de la méthode originale, qui permet d'avoir un système toujours inversible.

Les paramètres que l'on identifie sont les coefficients de pondération a et b des états élémentaires d'autocontrainte. L'identification est alors effectuée avec la différence entre la réponse de la structure numérique et celle de référence. La figure 82 montre la variation de la fonction d'erreur $\Im$ pour chaque mode d'excitation.

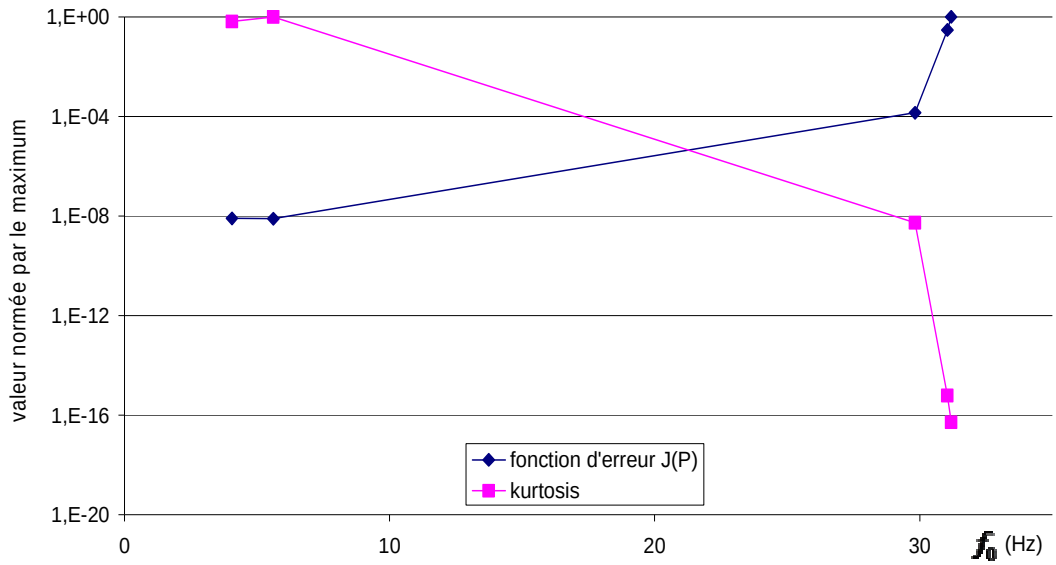


Figure 82. Évolution de l'erreur sur le coefficient d'état pour chaque mode calculé.

Seuls les modes 1 et 2 obtiennent une erreur inférieure à 10^{-8} alors que pour les modes 3 à 5 l'erreur dépasse 10^{-4}. L'évolution du moment centré d'ordre 4 (kurtosis) de la différence entre le champ d'accélération de référence et celui issu de l'identification montre qu'il est maximum pour le mode 2 (suivi de près par le mode 1). Sachant que plus le moment centré d'ordre 4 est grand plus la distribution des écarts ($R(P\ ,t) - R_{ref}(t)$) est centrée autour de la moyenne [Dub04], on peut donc supposer que les modes 1 et 2 donnent l'identification la plus précise des coefficients de pondération.

La figure 83 présente l'évolution de l'erreur (différence entre le coefficient de référence et celui identifié) relative des deux coefficients de pondération pour chaque identification. Le coefficient de pondération de l'état 1 est moins bien identifié que celui de l'état 2 quel que soit le mode de vibration utilisé pour l'identification. Ce dernier est bien identifié pour les modes 1, 2, 3. Ce n'est que pour ces deux premiers modes que l'on parvient à une bonne identification des deux états simultanément avec une erreur moyenne relative convenable : 19% pour le mode 1 et 8% pour le mode 2 (ce qui correspond à un erreur maximale inférieure à 1kN sur les efforts dans les éléments). Ce résultat est en accord avec l'analyse effectuée sur la fonction d'erreur.

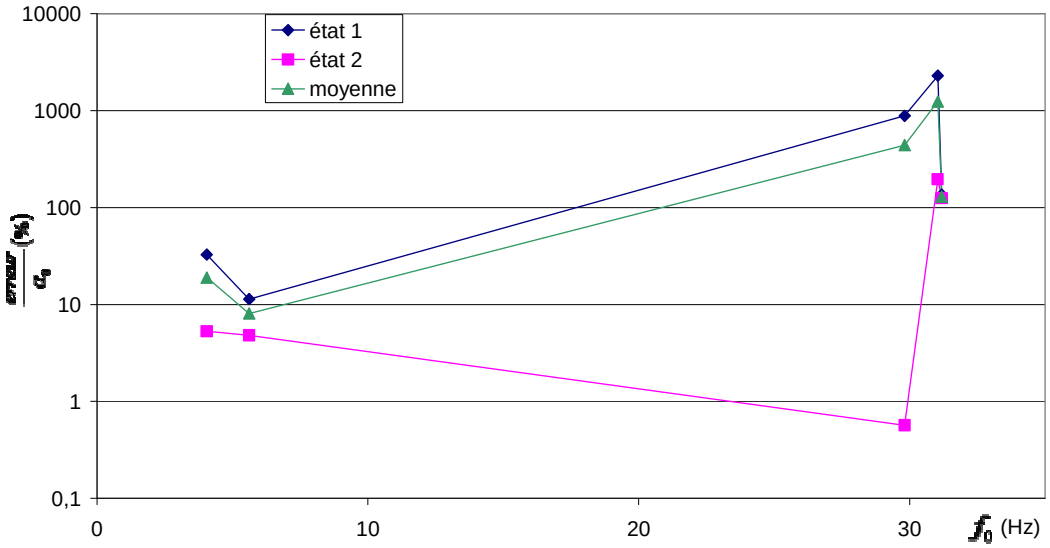


Figure 83. Évolution de l'erreur quadratique sur les coefficients d'états en fonction du mode calculé.

En traçant l'évolution de l'erreur relative en fonction du rapport $\frac{\Delta f}{\Delta \alpha}$ (figure 84), nous pouvons remarquer que de manière générale, pour obtenir une faible erreur, il faut un rapport faible, ce qui correspond aux modes dont la fréquence influe beaucoup sur l'état d'autocontrainte. C'est ici clairement le cas pour le mode 2. On peut tout de même noter que le mode 5 donne une meilleure identification que les modes 3 et 4 alors qu'il est celui dont la fréquence influe le moins sur l'état d'autocontrainte.

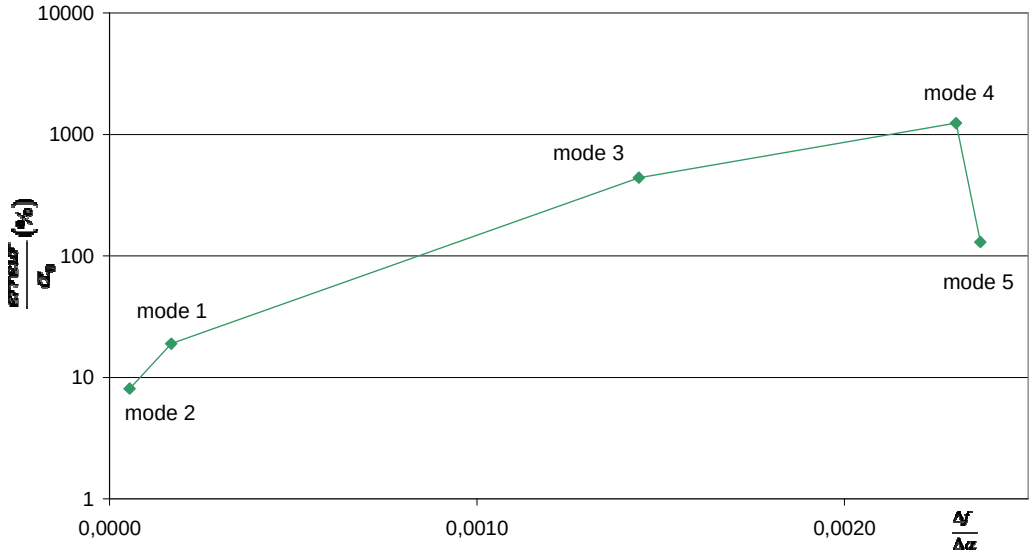


Figure 84. Corrélation entre la relation fréquence–coefficient d'état et l'erreur d'identification.

4.2.3 Etude pour un état d'autocontrainte réaliste

Nous allons compléter l'analyse précédente par une étude identique menée avec un état d'autocontrainte réaliste pour la minigrille. Nous choisissons donc une combinaison des deux états élémentaires qui minimise le rapport entre les valeurs extrêmes des forces dans les éléments de même type. Cela correspond à un rapport 0,5 entre les deux coefficients *a* et *b* respectivement associés aux états de base *EA1* et *EA2* (figures 15 et 16), en conservant toujours les mêmes conditions d'appuis. La combinaison de référence choisie est :

$$a = 2000 \; ; \; b = 4000$$

La force maximale dans les éléments est bien en dessous de leur limite élastique mais aussi de la résistance des filetages des noeuds d'ancrage et de la force de glissement des sertissages des câbles de nappe. Avec cet état d'autocontrainte réaliste, nous recalculons les cinq premiers modes propres de la structure (figure 85).

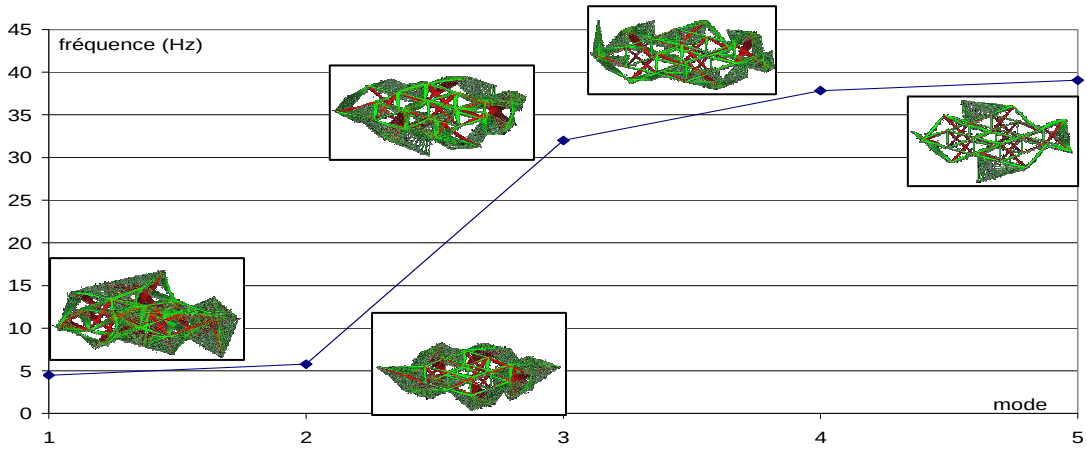


Figure 85. Fréquences propres de référence de la minigrille.

La variation des fréquences entre l'état initial {2000 ; 2000} et l'état réaliste {2000 ; 4000} concorde bien avec l'étude de sensibilité menée auparavant. Par exemple, la fréquence du mode 2 évolue très peu tandis que pour les modes 3, 4, 5 cette évolution est suffisamment conséquente pour rendre leurs fréquences bien distinctes. On note surtout qu'il y a eu une inversion des modes 4 et 5. De plus pour les modes 3 et 4' (anciennement 5), les masses généralisées ont été multipliées par un facteur supérieur à 5 alors qu'elles restent stables pour les modes 1, 2 et 5' (anciennement 4).

Chaque coefficient de pondération de la base d'autocontrainte est alors à nouveau affecté de la variation $\Delta\alpha$ = 200. Cela fait donc toujours une variation relative de 10 % pour le coefficient *a* initialement à 2000 et seulement de 5% pour le coefficient *b* égal à 4000. Le tableau 11 récapitule les valeurs associées aux différentes fréquences propres pour la variation de chaque coefficient.

état	Mode	1	2	3	4'	5'
2000 ; 4000	fréquences (Hz)	4,496	5,783	32,002	37,840	39,050
	masses généralisées (kg)	23,73	21,18	9,75	3,12	0,74
2200 ; 4000	fréquences (Hz)	4,514	5,786	32,006	37,843	39,053
2000 ; 4200	fréquences (Hz)	4,537	5,798	32,063	38,077	39,676

Tableau 11. Caractéristiques des modes en fonction de l'état d'autocontrainte.

Le rapport $\frac{\Delta f}{\Delta\alpha}$ pour les deux états d'autocontrainte élémentaires en fonction des cinq premières fréquences propres donne toujours une différence de comportement marquée entre les deux états (figure 86). Il est à noter que si on tenait compte de la variation relative du coefficient dans ce rapport, cette différence serait encore plus prononcée vu que le coefficient *b* vaut le double du coefficient *a*. Cependant l'évolution du rapport pour les deux états est nettement moins marquée que précédemment.

Cette fois-ci encore c'est le mode 2 qui a la variation $\frac{\Delta f}{\Delta\alpha}$ la plus petite. On peut donc penser que ce mode a une plus grande influence sur les coefficients de pondération des états d'autocontrainte et on peut s'attendre à ce qu'il nous donne une bonne erreur pour l'identification des coefficients *a* et *b*.

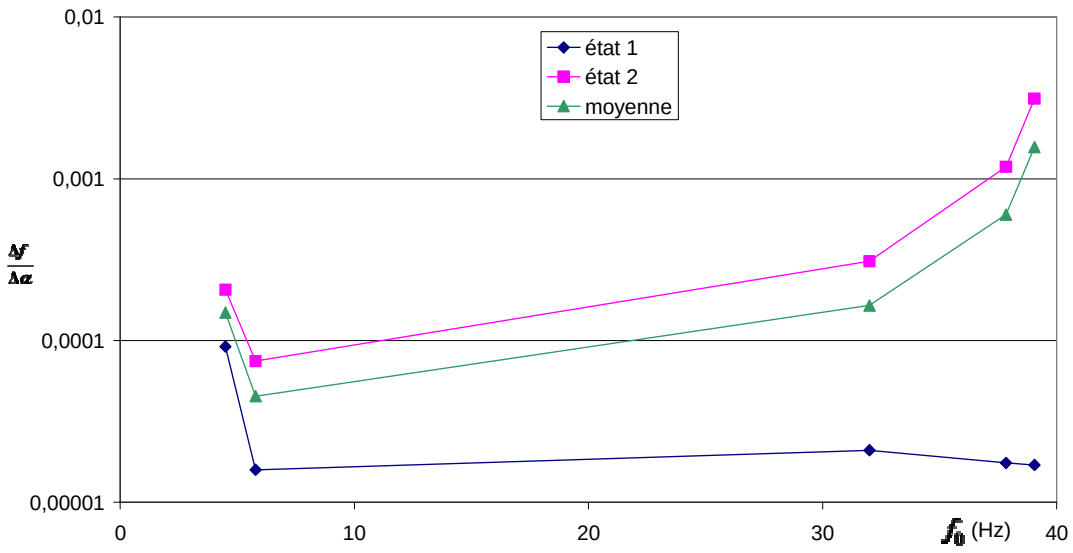


Figure 86. Impact des états d'autocontrainte sur la fréquence des modes de vibration.

La méthode d'identification reste inchangée. On démarre du nouvel état d'autocontrainte aléatoire suivant : {3241,6 ; 4460}. La figure 87 montre la variation de la fonction d'erreur $\Im$ pour chaque mode d'excitation. On remarque tout d'abord que la fonction d'erreur n'est pas minimale pour le mode 2 mais pour le mode 1. De plus, le mode 4' mène à une fonction d'erreur faible alors que le rapport $\frac{\Delta f}{\Delta \alpha}$ qui lui est associé est élevé. Pour le mode 3, il se produit l'inverse. On peut aussi noter que le rapport entre la fonction d'erreur maximale (mode 5') et la fonction d'erreur minimale (mode 1) est inférieur à 10^7 tandis qu'il valait plus de 10^8 dans le cas où les coefficients *a* et *b* étaient égaux. En fait, la valeur minimale y était équivalente et la valeur maximale bien plus élevée.

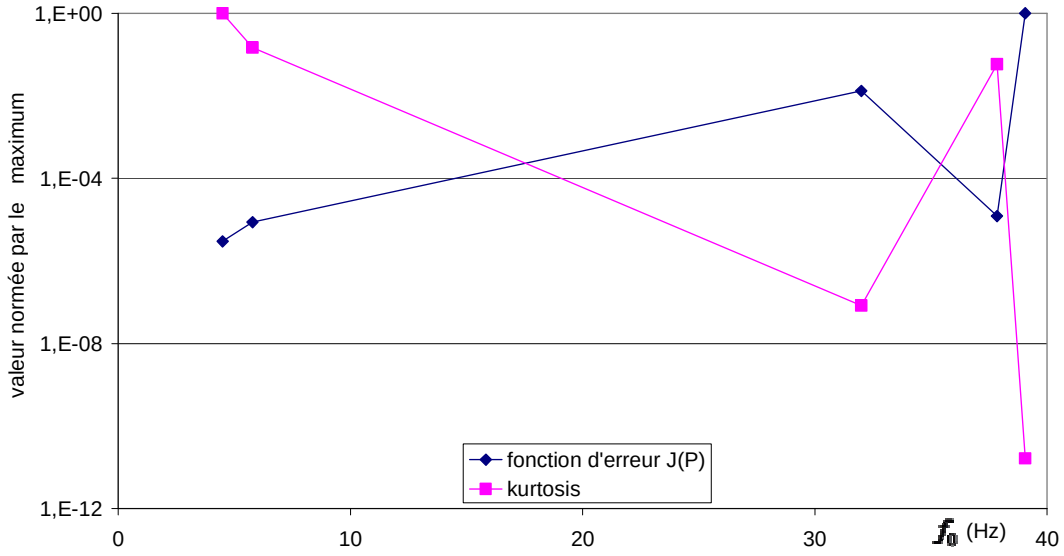


Figure 87. Évolution de l'erreur sur le coefficient d'état pour chaque mode calculé.

L'évolution de l'erreur relative des deux coefficients de pondération pour chaque identification est présentée figure 88. L'état 2 est bien identifié quel que soit le mode de vibration utilisé pour l'identification. Comme précédemment, avec les deux premiers modes on parvient à une bonne identification des deux états simultanément avec une erreur moyenne relative très convenable (inférieure à 10% pour les deux modes). Mais surtout, on observe que le mode 4' conduit à une erreur relative encore plus faible pour les deux états et inférieure à 1% en moyenne (ce qui correspond à un erreur maximale inférieure à 200N sur les efforts dans les éléments). Ce résultat ne pouvait pas être prédit par l'analyse effectuée sur la fonction d'erreur et encore moins par l'étude de l'impact des états d'autocontrainte sur les fréquences des modes de vibration qui semblait exclure le mode 4' comme bon candidat à l'identification au profit du mode 3. Néanmoins il est intéressant de constater pour ces deux modes qui ont vu leur masse généralisée augmenter significativement que l'erreur a le plus diminué.

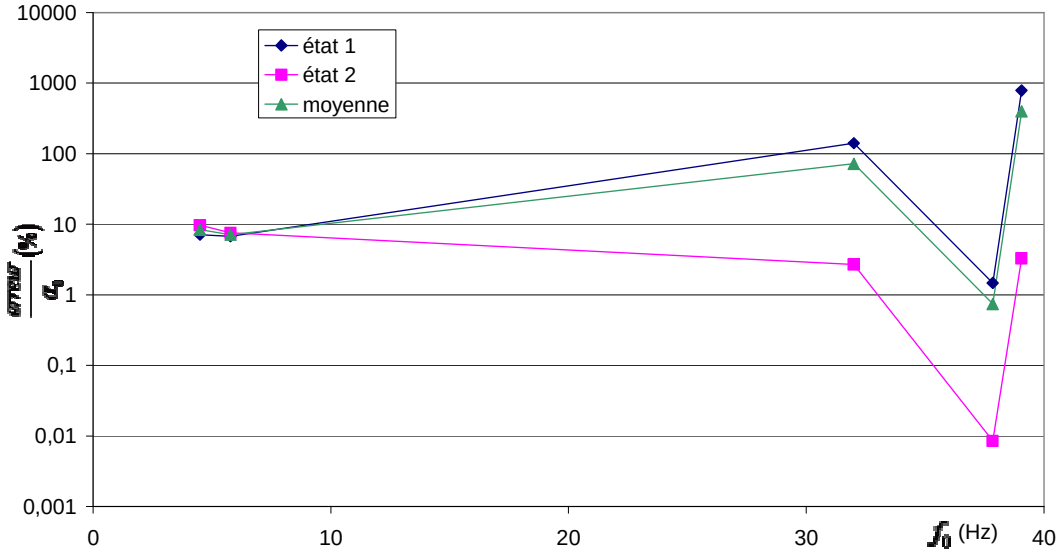


Figure 88. Évolution de l'erreur quadratique sur les coefficients d'états en fonction du mode calculé.

L'influence de la fréquence d'excitation sur l'identification des coefficients de pondération de l'autocontrainte de la minigrille est certaine. Seule l'utilisation des modes 1 et 2 donnent des résultats corrects et stables pour l'identification des 2 coefficients *a* et *b* quel que soit l'état d'autocontrainte de référence. Au final, la corrélation entre l'influence de l'état d'autocontrainte sur le mode propre et la qualité de l'identification n'est pas flagrante (figure 89).

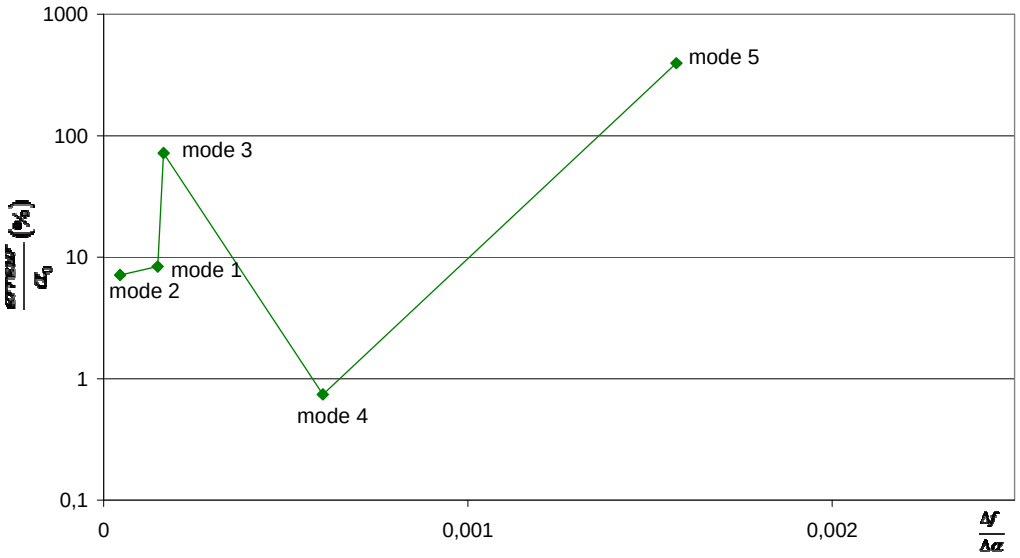


Figure 89. Corrélation entre la relation fréquence–coefficient d'état et l'erreur d'identification.

4.2.4 Identification de l'autocontrainte par la méthode du décrément aléatoire

On a vu que l'on ne pouvait pas clairement discriminer les modes propres pour réaliser l'identification. De ce fait l'utilisation d'un chargement temporel quelconque peut donner des résultats du même ordre. Une méthode de filtrage du bruit afférent à un chargement temporel de type vent existe : la méthode du décrément aléatoire. Dans ce paragraphe, nous regardons la pertinence de cette méthode pour notre problème.
De manière simplifiée, la méthode du décrément aléatoire est une technique de filtrage qui permet d'extraire la trace constante d'un signal bruité. Elle élimine toutes les composantes variables du signal. En effet un champ de déplacement statique mesuré sur site peut être bruité par plusieurs sources : nous pouvons par exemple avoir une sollicitation extérieure de type vent ou température. Celle-ci peut être décrite comme une fonction sinusoïdale bruitée par un bruit. Les imperfections de mesure apportent aussi un bruit. Pour résumer, on peut décomposer le signal mesuré en trois parties :

$$X_{\text{mes}}(t) = X_{\text{stat}} + X_{\text{sinus}}(\text{t}) + X_{\text{bruit}}(\text{t})$$

X_{mes} est la mesure, X_{stat} est sa partie constante, X_{sinus} provient du chargement sinusoïdal et X_{bruit} est la composante issue de l'ensemble du bruit. A partir du signal mesuré X_{mes}, on peut retrouver le signal initial constant X_{stat}. Le décrément aléatoire est égal à la partie stable du signal dans le cadre de signaux stationnaires bruités par un bruit blanc gaussien. Soit X(t) un signal stochastique. Le décrément aléatoire Dxx est défini par :

$$Dxx(\tau) = E[X(t+\tau) \mid T_X(t)]$$

$E[\tau]$ est la moyenne des morceaux de signaux répondant à la condition de déclenchement T_X. Cette condition de déclenchement devrait être un seuil, mais compte tenu du fait que l'on analyse des signaux discrets cette condition est définie par :

$$T_{X(t)} = \{a_1 \leq X(t) < a_2,\ b_1 \leq \dot{X}(t) < b_2\}$$

La figure 90 présente le principe du calcul du décrément aléatoire dans le cas d'un déclenchement par un seuil unique.

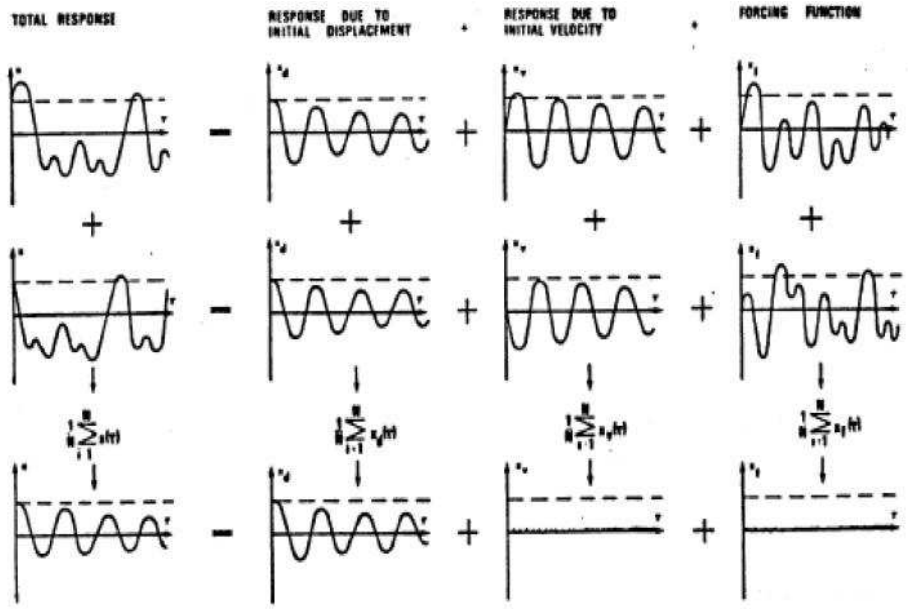


Figure 90. Technique du décrément aléatoire [Ibr77].

A chaque fois que la fonction passe le seuil, le signal temporel restant est décalé de la valeur de l'instant pour laquelle la coupure a eu lieu. On obtient alors une série de signaux identiques mais décalés temporellement. Le décrément aléatoire est la somme des ces signaux divisée par le nombre des signaux ainsi extraits. Cette méthode n'est valable que si le nombre des signaux extraits est suffisamment important. Il faut donc avoir un signal initial suffisamment grand ou un seuil de déclenchement suffisamment faible. Par la suite chaque noeud utilise sa propre fonction seuil et nous n'utilisons pas la corrélation entre les noeuds.

Nous allons comparer l'efficacité d'identification utilisant un chargement connu à celle utilisant un chargement bruité sur la minigrille. Pour les deux identifications le calcul est le même, seul l'état de référence est différent. En effet, les simulations numériques de la structure ne peuvent se faire qu'avec un chargement défini. L'état de référence pour le chargement connu est défini par le chargement statique de la structure. L'état de référence pour le chargement bruité est défini par la combinaison du chargement statique, d'un chargement sinusoïdal et d'un bruit blanc gaussien. Le champ de déplacements des noeuds de la structure est alors utilisé pour la fonction d'erreur.

Le chargement statique est composé de forces verticales de 600N disposées sur les noeuds inférieurs périphériques. Le chargement sinusoïdal vertical est imposé sur tous les noeuds de la nappe supérieure. La période d'excitation sinusoïdale est de 5Hz, avec une amplitude de 10N. Le bruit est un bruit blanc gaussien de moyenne 0,1 et d'écart type 0,3 multiplié par l'amplitude de chargement de 10N (figure 91). Les déplacements sont de quelques millimètres. La différence relative entre le champ de déplacement obtenu avec le chargement statique et celui obtenu par le chargement total et après filtrage n'excède pas 7%.

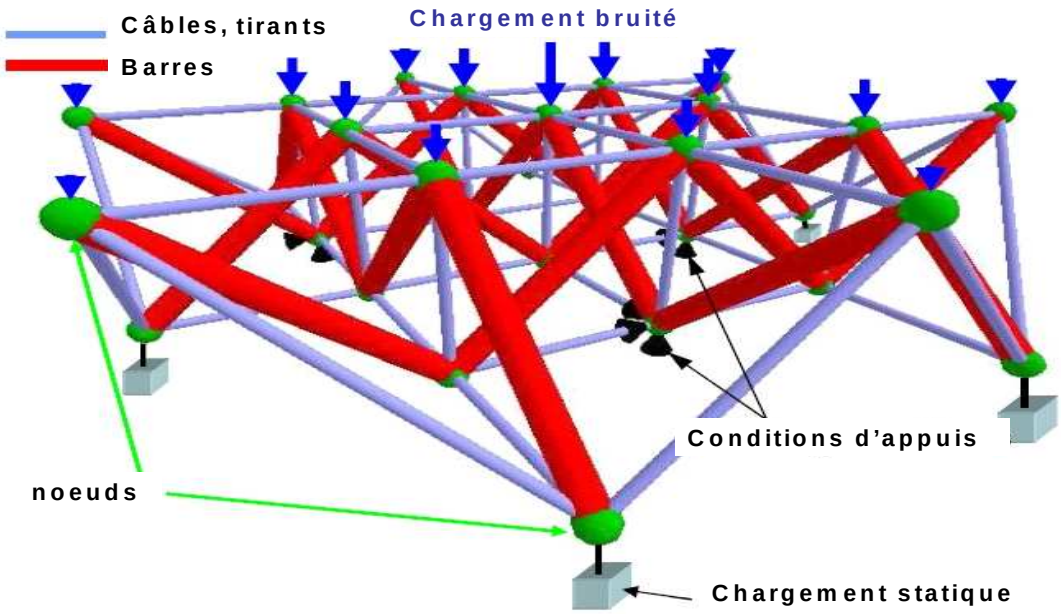


Figure 91. Chargement de la minigrille.

Le critère de convergence est un critère quadratique défini sur le champ de déplacements vertical Uz :

$$\Im = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{Uz_{simu} - Uz_{ref}}{\left(\frac{Max(Uz_{ref}) + Min(Uz_{ref})}{2}\right)}\right)^{T}\left(\frac{Uz_{simu} - Uz_{ref}}{\left(\frac{Max(Uz_{ref}) + Min(Uz_{ref})}{2}\right)}\right)\right\}$$

Le nombre d'itérations pour l'identification est limité à 50 et la convergence est obtenue quand le critère $\Im$ est inférieur à 10^{-7} ou quand la variation est inférieure à 10^{-8}.
Pour la structure de référence, le coefficient a = 3000 et le coefficient b = 6000. On applique sur ces coefficients une fonction aléatoire gaussienne de moyenne 1 et d'écart type 0,2 afin d'obtenir le jeu de départ de l'identification. Ce jeu est sensé représenter une dérive de l'autocontrainte. Les coefficients initiaux pour l'identification sont a = 4862 et b = 6690.

En utilisant le chargement statique connu, la convergence sur le champ de déplacements est parfaite (figure 92). Pour le chargement bruité l'arrêt des itérations est obtenu car la variation du critère devient très faible. L'erreur initiale est plus faible pour la seconde identification et pourtant la procédure d'identification à plus de mal à converger vers un minimum. Les paramètres obtenus à la fin de la procédure d'identification sont donnés dans le tableau 12.

paramètres	*a*	*b*
référence	3000	6000
initiaux	4862	6690
identification avec charge connue	3257	5871
identification avec charge bruitée	4128	6315

Tableau 12. Résultat de l'identification.

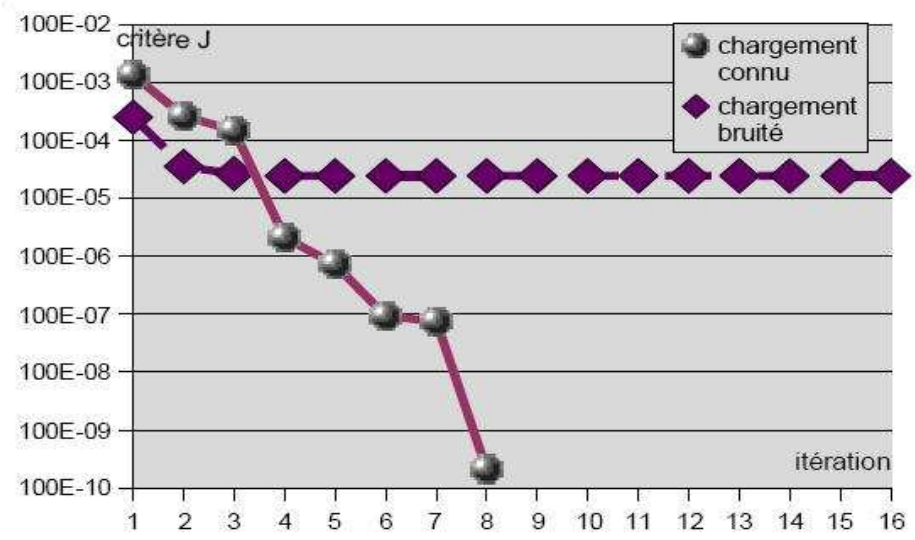


Figure 92. Evolution du critère d'erreur en déplacement au cours des itérations.

L'erreur sur le paramètre *a* est de 8,6% pour la première identification et de 36,6% pour la seconde. Pour le paramètre *b* les résultats sont plus proches : 2,1% pour la première identification et 5,2% pour la seconde.

Il est clair que l'identification utilisant un champ de déplacements approximatif donne un moins bon résultat que lorsque le champ de déplacements n'est pas bruité. Toutefois, l'erreur n'est que de 5,2% sur un coefficient et nous n'avons utilisé que la composante diagonale du décrément aléatoire vectoriel. En effet, nous n'avons pas utilisé la corrélation entre les noeuds. Cette corrélation est obtenue par croisement des critères de seuil. On peut espérer trouver une convergence plus correcte.

4.2.5 Conclusion

Ces résultats sont encourageants et permettent de définir le choix des modes utilisés pour réaliser l'identification de l'état d'autocontrainte de la minigrille. Par contre, l'influence des fréquences propres sur les états d'autocontrainte élémentaires n'apparaît pas comme un bon indicateur pour déterminer rapidement ce choix sur une structure de tenségrité. De plus, on peut estimer que dans le cas d'un chargement bruité l'utilisation de la méthode du décrément aléatoire apparaît être une bonne solution. Après cette phase d'expérimentation numérique, il faudra bien évidemment passer à des validations expérimentales. Mais avant cela, la question qui se pose est de savoir si ce type de démarche réussit aussi sur une grille de tenségrité plus réaliste que la minigrille. En effet, celle-ci a été choisie pour sa simplicité. Une structure réelle sera plus complexe avec un nombre d'éléments bien supérieur tout comme le nombre d'états élémentaires à combiner pour la mettre en autocontrainte.

4.3 Etudes numériques menées sur une grande grille de tenségrité

4.3.1 La grande grille, autocontrainte et modes propres

Nous menons l'étude de corrélation entre modes propres et identification de l'état d'autocontrainte sur une grande grille de tenségrité, quart de la grille du projet Tensarch' dont la minigrille est le prototype. Cette grille à double nappe faite environ 6,4 m de long, 3,2 m de large et 0,8 m de haut (figure 93).

Figure 93. La grande grille de tenségrité.

Les états d'autocontraintes fondamentaux de la grande grille sont visualisés sur la figure 94. La base d'autocontrainte est formée de 6 états fondamentaux. On peut noter que les états localisés 2 et 4 et que les états localisés 1 et 5 sont symétriques l'un de l'autre par rapport au centre de la grille.

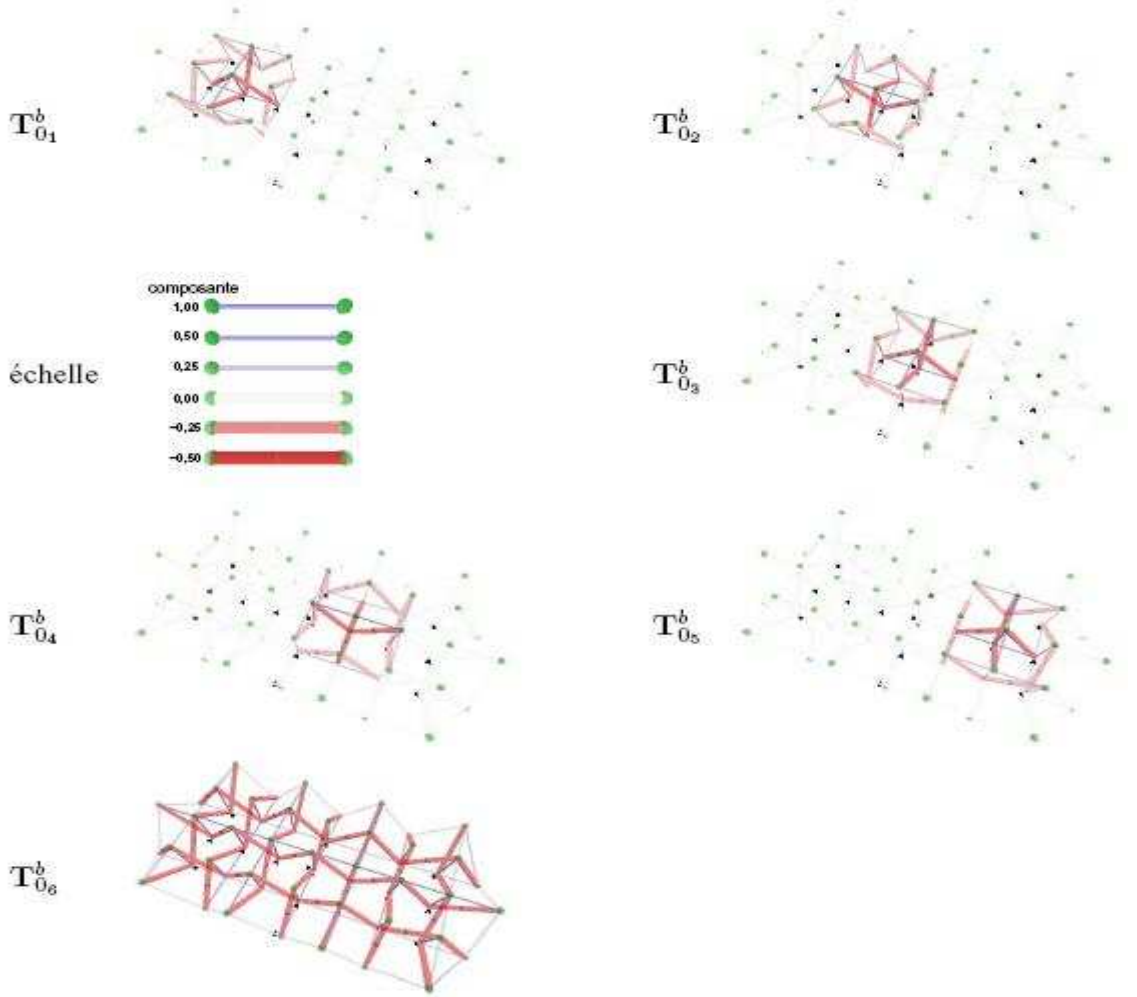


Figure 94. États d'autocontrainte élémentaires conformes.

Pour la mise en autocontrainte, nous choisissons deux combinaisons des états élémentaires distincts :

- la première donne le même poids à chacun des états élémentaires et vaut {10000 ; 10000 ; 10000 ; 10000 ; 10000 ; 10000} pour pouvoir étudier la sensibilité des fréquences par rapport à ces six états,

- la seconde vaut {10000 ; 1 ; 10000 ; 1 ; 10000 ; 10000} ce qui permet, en affectant un poids quasi-nul aux états 2 et 4, de construire un état d'autocontrainte réaliste. On minimise ainsi le rapport entre les valeurs extrêmes des forces dans les éléments de même type. Et de plus, la force maximale dans les câbles est limitée à 16kN ce qui correspond à la moitié de la résistance des filetages des noeuds d'ancrage et au 2/3 de la force de glissement des sertissages des câbles de nappe.

Avec ces deux états d'autocontrainte, nous calculons les neuf premiers modes propres de la structure (figure 95). On constate qu'il n'y a pas de différence significative sur les valeurs des fréquences propres entre les deux états. Les modes 2 et 3 ont des fréquences quasiment identiques très proches de 18Hz et voient leur ordre inversé quand on passe d'un état à l'autre. Pour éviter toute confusion on les notera alors 2' et 3' pour l'état d'autocontrainte réaliste. Concernant les masses généralisées, elles restent quasiment inchangées lors du passage d'un état à l'autre.

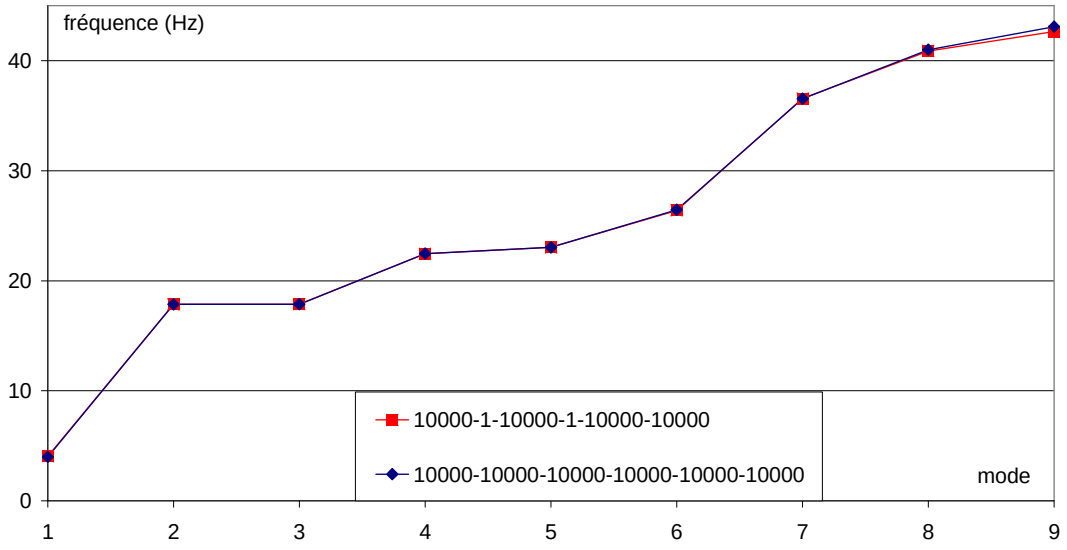


Figure 95. Fréquences propres de référence de la grande grille.

L'étude de sensibilité de ces neuf fréquences par rapport aux six états d'autocontrainte s'effectue par la variation de chaque coefficient de pondération de la base d'autocontrainte $\Delta\alpha$ = 1000. Cela fait une variation relative $\frac{\Delta\alpha}{\alpha_0}$ de 10 % pour l'état d'autocontrainte dont les six coefficients ont le même poids. Pour l'état d'autocontrainte réaliste cette variation relative grimpe à 100000% pour les états 2 et 4 affectés de coefficients valant 1. La variation de chaque coefficient se fait toujours de manière indépendante : quand un coefficient varie, les autres restent à leur valeur initiale.

La figure 96 montre le rapport $\frac{\Delta f}{\Delta \alpha}$ pour les six états d'autocontrainte élémentaires en fonction des neuf premières fréquences propres.

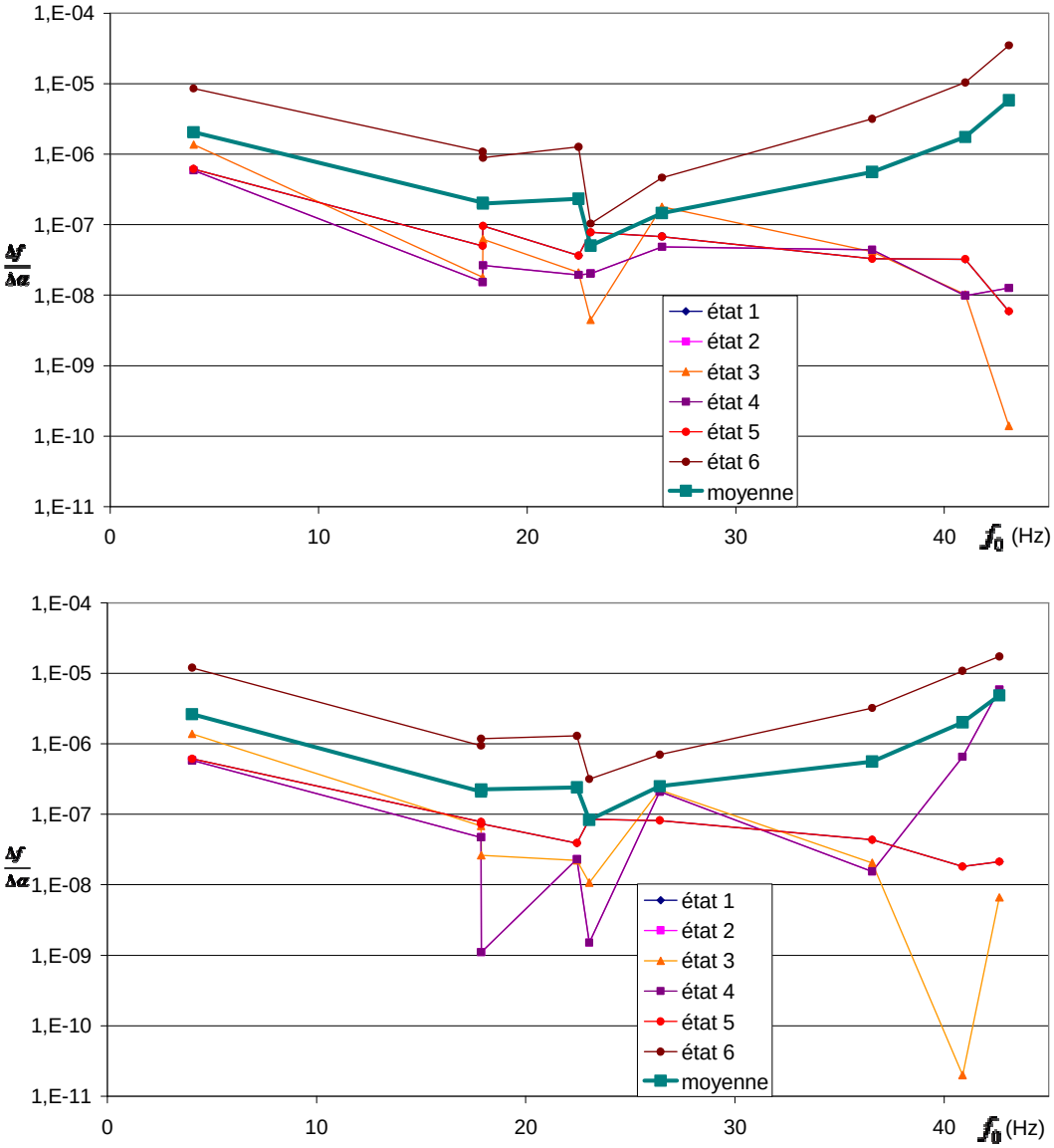


Figure 96. Impact des états d'autocontrainte sur la fréquence des modes de vibration pour les deux états d'autocontrainte de référence.

La première observation concerne le comportement similaire des états 1 et 5 d'une part et des états 2 et 4 d'autre part. De plus, ces états 2 et 4, quand ils sont affectés du même coefficient que les autres états, présentent un comportement assez stable vis-à-vis des neuf modes, tout comme les états 1 et 5. Ce comportement pour les états 2 et 4 apparaît beaucoup plus erratique dans le cas de l'état d'autocontrainte réaliste. L'utilisation de la

variation relative du coefficient de pondération y aurait d'ailleurs fait apparaître un décalage vers le bas conséquent par rapport aux autres états. Pour l'état 3, le rapport $\frac{\Delta f}{\Delta \alpha}$ a des valeurs qui naviguent à un niveau similaire aux états 1, 5, 2 et 4. Par contre, pour l'état 6 qui correspond à un état élémentaire global, ce rapport est très nettement au dessus des autres états et, comme pour la minigrille, c'est ce type de mode qui dicte pour l'essentiel le profil de la moyenne de $\frac{\Delta f}{\Delta \alpha}$ en fonction des modes.

On constate finalement qu'en moyenne c'est le mode 5 qui a la variation $\frac{\Delta f}{\Delta \alpha}$ la plus petite. Ce mode semble donc avoir une influence légèrement plus grande sur les coefficients de pondération des états d'autocontrainte.

4.3.2 Corrélation entre les modes propres et l'identification de l'autocontrainte

L'identification est effectuée en partant des états d'autocontrainte aléatoires {16208 ; 11150 ; 8831 ; 9810 ; 10644 ; 8215} et {16208 ; 1,115 ; 8831 ; 0, 981 ; 10644 ; 8215} proches de ceux de référence et on obtient les fonctions d'erreur exposées dans la figure 97. Dans les deux cas la fonction d'erreur est bien minimale pour le mode 5. Le mode 7 se détache aussi nettement des modes restant dans les deux cas alors que son influence sur l'état d'autocontrainte n'apparaissait pas particulièrement élevée.

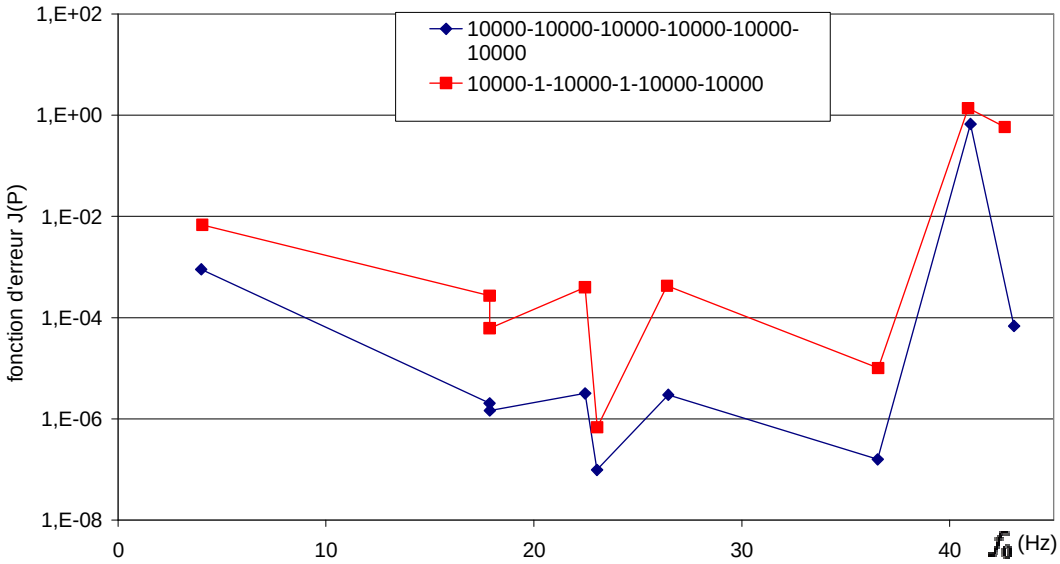


Figure 97. Évolution de l'erreur sur le coefficient d'état pour chaque mode calculé.

Pour l'état d'autocontrainte avec les coefficients de pondération des six états élémentaires égaux, on observe que pour quasiment tous les modes (sauf le mode 6) l'erreur relative d'identification de l'état 6 est minimale (figure 98). En moyenne la meilleure identification est réalisée avec le mode 7 (5%) et la pire avec le mode 8 (380%). Pour les autres modes, l'erreur relative oscille entre des valeurs convenables (de 15 à 35%). Le mode 5 dont on attendait beaucoup ne se démarque pas particulièrement.

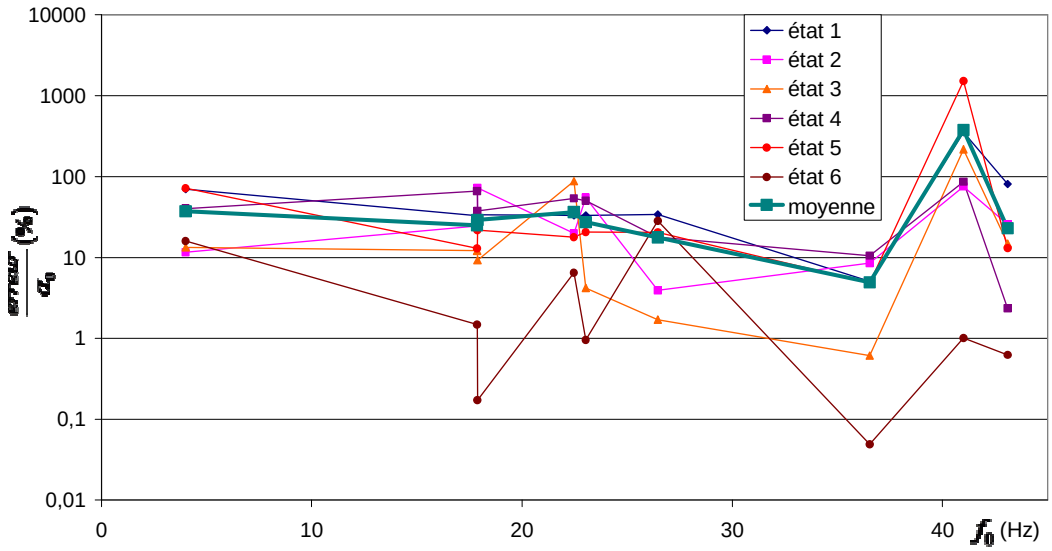


Figure 98. Évolution de l'erreur quadratique sur les coefficients d'états en fonction du mode calculé.

Pour l'état d'autocontrainte réaliste, on remarque immédiatement qu'il est illusoire de vouloir identifier avec précision les très faibles coefficients des états 2 et 4 (figure 99). Leur prise en compte conduit même à un mauvais choix de mode pour l'identification. En fait, pour identifier précisément les coefficients des autres états élémentaires, le mode 5 s'avère cette fois le meilleur candidat puisque l'erreur relative associée est de seulement 5,5%. Pourtant au final, le seul mode qui garde une erreur relative stable et faible lors du passage entre les deux états d'autocontrainte est le mode 7. C'est donc celui qu'il faudra privilégier pour l'identification d'autant que la fréquence qui y est associée est plus isolée que ne l'est celle du mode 5 serré de près par les modes 4 et 6. De plus, il semble que l'on ne perde pas en précision pour l'identification par rapport à la minigrille malgré le nombre plus élevé d'états élémentaires en jeu.

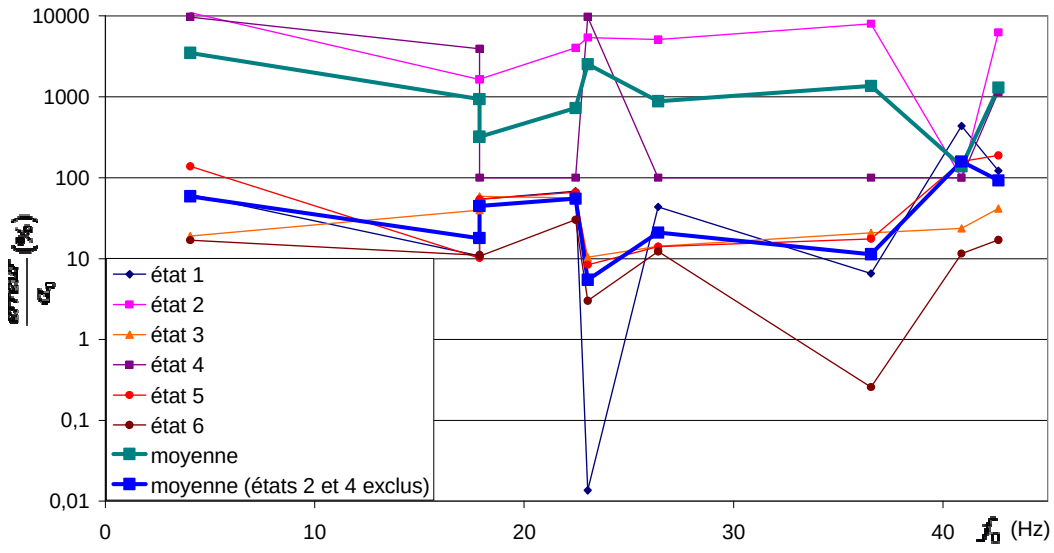


Figure 99. Évolution de l'erreur quadratique sur les coefficients d'états en fonction du mode calculé.

Au final, et comme pour la minigrille, on ne note pas de corrélation particulière entre l'influence de la fréquence sur l'état d'autocontrainte et la performance de l'identification (figure 100). On peut simplement conclure que les modes pour lesquels les deux états d'autocontrainte sont à chaque fois à peu près convenablement identifiés (modes 2 à 7) influent plus sur ces états d'autocontrainte que les autres modes (modes 1, 8 et 9) quand on prend soin de ne pas tenter d'identifier des coefficients d'états élémentaires trop faibles.

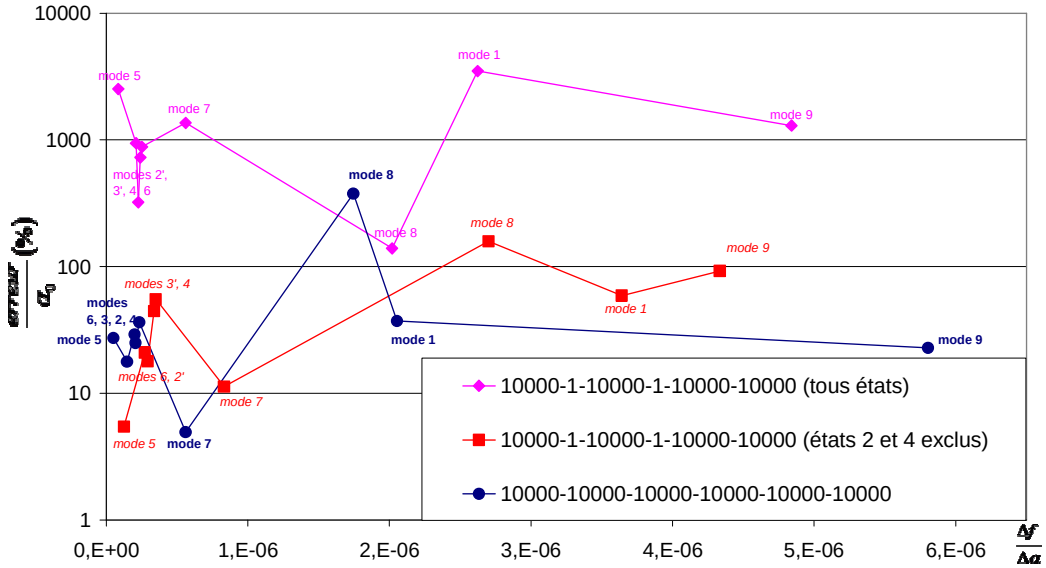


Figure 100. Corrélation entre la relation fréquence–coefficient d'état et l'erreur d'identification.

4.3.3 Autres études numériques

A l'origine, l'étude qui vient d'être présentée en utilisant une modélisation POUTRE pour les barres et les tirants, a été menée sur la grande grille avec la modélisation BARRE et des caractéristiques (module d'Young, coefficient de Poisson, masse volumique) non actualisées de ces éléments. Il est intéressant d'effectuer la comparaison des résultats obtenus des deux modélisations pour l'état d'autocontrainte réaliste. Le passage d'une modélisation à l'autre influe très légèrement sur les fréquences des 9 premiers modes. L'actualisation des coefficients crée par contre un décalage plus marqué (figure 101).

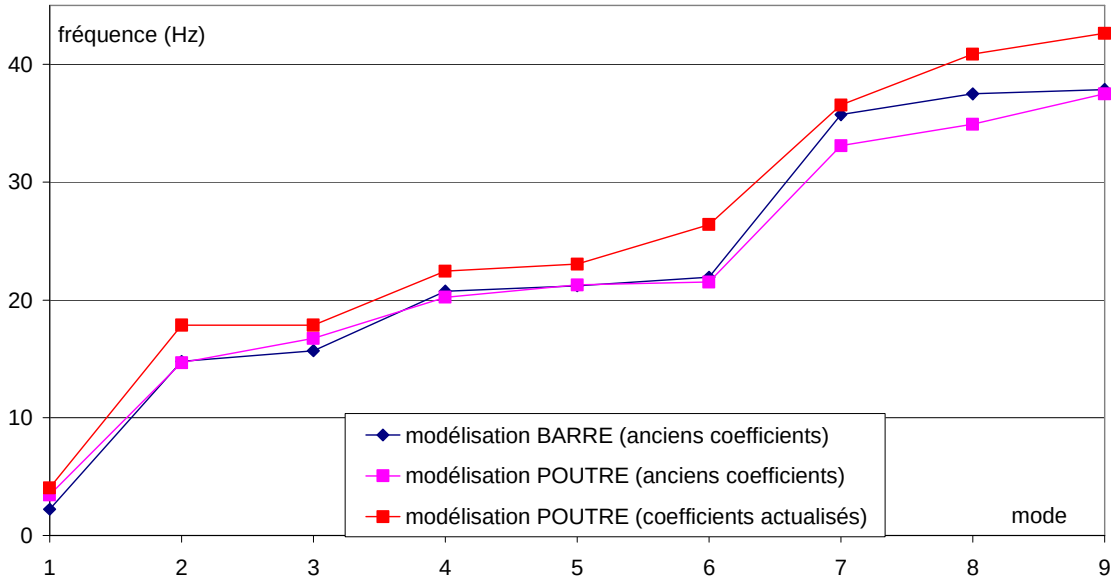


Figure 101. Fréquences propres de la grande grille selon la modélisation utilisée.

Sur la figure 102, on remarque que dans l'ensemble l'influence des modes sur l'autocontrainte est moins marquée avec la modélisation BARRE qu'avec la modélisation POUTRE. En plus, cette modélisation amène à considérer le mode 2 comme seul candidat valable pour une identification de l'autocontrainte plus précise que celle prévue par la modélisation POUTRE. Elle prédit que les autres modes (et notamment les modes 5 et 7) ne permettent pas d'obtenir une identification fiable.

Lors du passage à une validation expérimentale de ce type de méthode, cela nous aurait probablement conduit à de mauvais choix donnant des résultats bien moins précis qu'escomptés. Avec la modélisation POUTRE, dont on a montré la validité dans

plusieurs domaines, le mode 2 affiche une identification vingt fois moins précise qu'avec la modélisation BARRE.

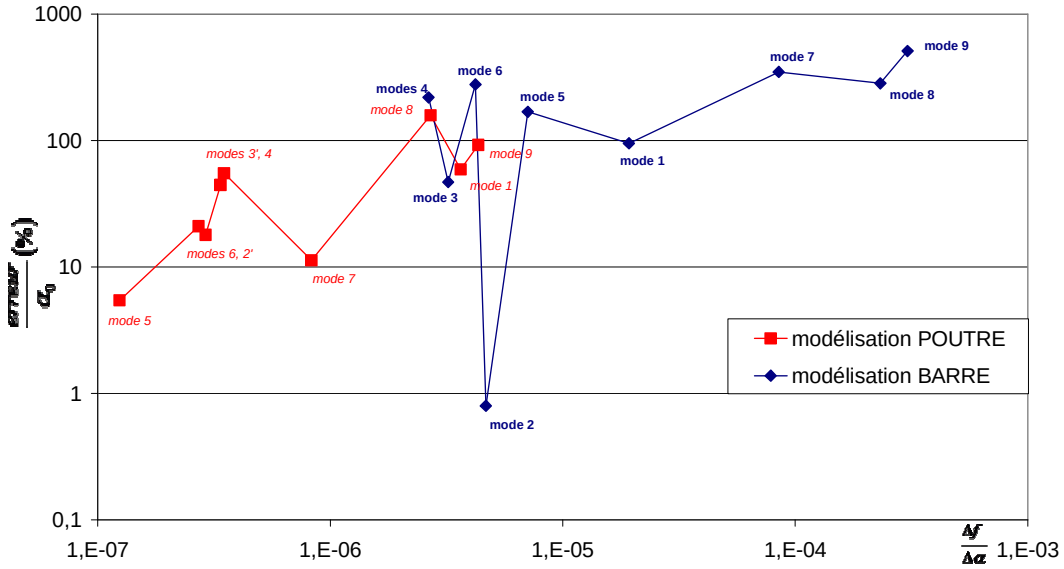


Figure 102. Corrélation entre la relation fréquence–coefficient d'état et l'erreur d'identification.

Cette étude avec la modélisation BARRE a néanmoins été l'occasion d'explorer un peu plus les possibilités offertes par la démarche utilisée. Par exemple nous avons utilisé directement les fréquences propres pour l'identification. Dans ce cas, le potentiel à minimiser $\Im(P)$ est alors construit avec les valeurs des fréquences propres et nous regardons l'évolution de l'identification en faisant deux séries de simulation. Dans l'hypothèse d'un problème linéaire six mesures doivent suffire à l'identification des six paramètres des états d'autocontrainte.

La première série utilise les six premiers modes et les six derniers. Les résultats montrent que les six premiers modes permettent d'obtenir la convergence de la fonction d'erreur $\Im$ (figure 103 (a)). La figure 103 (b) montre l'évolution de l'erreur vraie en fonction des itérations. L'erreur vraie est calculée comme suit :

$$erreur_vraie = \frac{1}{\left(\frac{\alpha_{ref_{\min}} + \alpha_{ref_{\max}}}{2}\right)} \sqrt{\sum_{i=1,6} \left(\alpha_i(P) - \alpha_{iref}\right)^2}$$

On constate que l'identification des paramètres est loin d'être parfaite avec les six premiers modes et encore moins avec les six derniers.

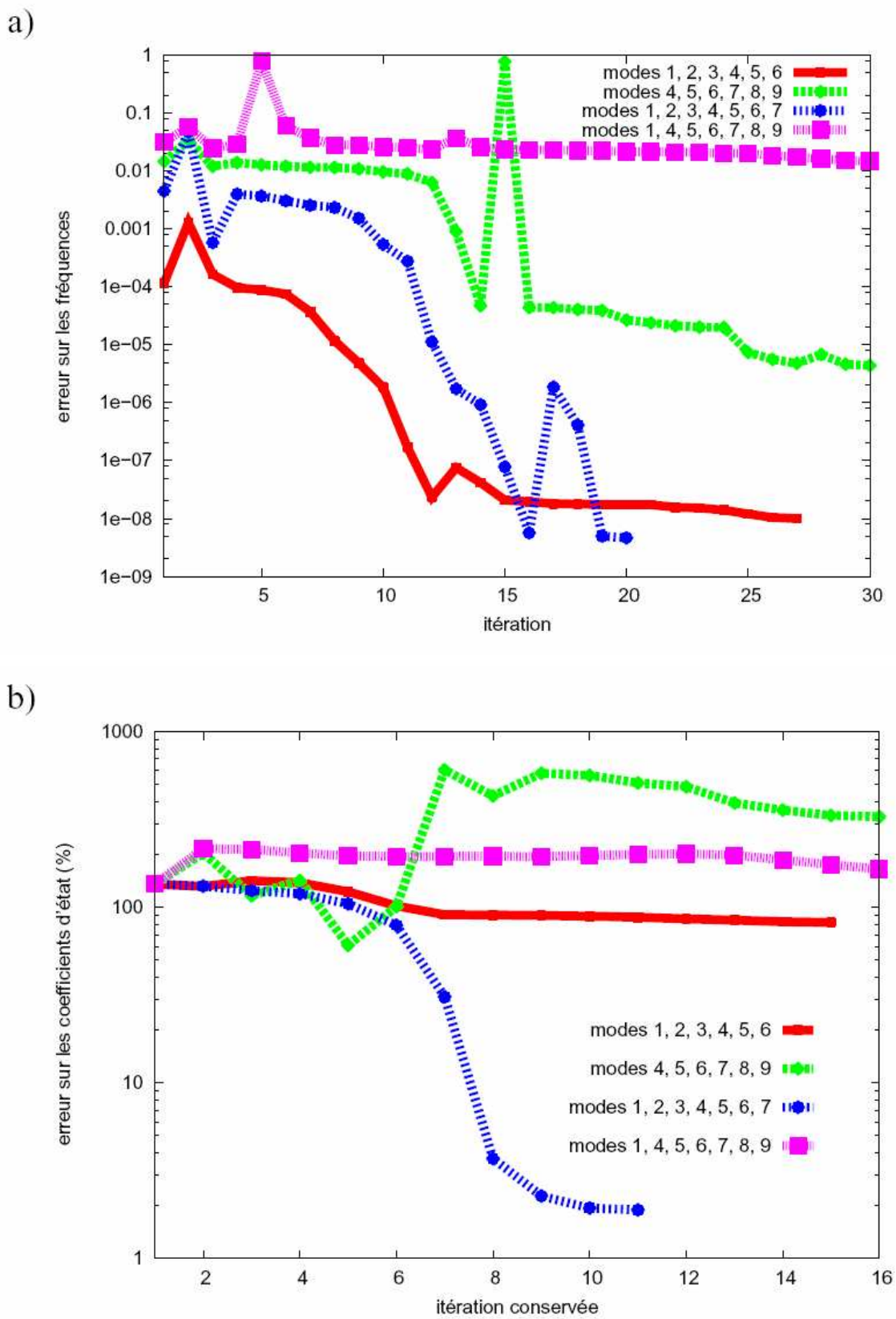


Figure 103. Évolution des erreurs en fonction des itérations a) erreur sur les fréquences, b) erreur sur les paramètres à identifier.

Dans la seconde série, nous avons utilisé sept modes afin d'améliorer la convergence vers la solution. Seule l'utilisation des modes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (qui sont les sept modes ayant les plus faibles valeurs d'impact des états sur la fréquence) permet d'obtenir une parfaite identification des paramètres.

Enfin, des études numériques antérieures ont aussi porté sur l'identification de la perte de tension de câbles en analysant la réponse temporelle de la grande grille [DC04].
Le problème a été envisagé suivant plusieurs cas :

- le premier consiste à détendre un câble vertical,
- le second un câble de la nappe supérieure,
- le troisième le câble de la périphérie.

Toujours en utilisant la minimisation de la fonctionnelle $\Im$ par la méthode de Levenberg-Marquardt sur la mesure de la déformée sous chargement statique, il a été montré qu'il est possible de retrouver la tension d'une série de câbles qui ont subi une perte de tension de 25% par rapport à leur état de conception.

Il est certain qu'il sera très intéressant de mener à nouveau la totalité de ces études prometteuses avec la modélisation POUTRE pour la minigrille et la grande grille pour disposer d'informations précieuses avant de passer aux vérifications expérimentales indispensables pour valider tous ces résultats numériques.

4.4 Conclusion

Les études numériques que nous avons menées sur la minigrille et la grande grille ont permis de confirmer que la mesure des déplacements ou des accélérations des nœuds d'une grille de tenségrité sous chargement statique ou dynamique permettait de remonter à l'état de contrainte de la structure par analyse inverse. En effet, nos simulations numériques montrent la pertinence de l'utilisation de la méthode de Levenberg-Marquardt pour retrouver les coefficients pondérateurs des états d'autocontrainte élémentaires avec une précision très satisfaisante dans des conditions réalistes. Elles mettent en évidence l'absence de corrélation directe entre l'influence des modes propres sur l'état d'autocontrainte et son identification, ce qui implique que pour d'autres grilles de tenségrité que la minigrille et la grande grille, le choix des fréquences propres à utiliser nécessitera le même type d'études. L'utilisation de la méthode du décrément aléatoire [Ibr77] semble être une voie prometteuse pour l'identification de l'autocontrainte sous chargement bruité. Cela nous intéresse au plus haut point dans le cas de structures en places subissant des sollicitations naturelles. Pour finir, tous ces résultats sont très encourageants car ils laissent apercevoir la possibilité d'identification de l'état d'endommagement des éléments d'une grille de tenségrité avec le même type de démarche. Toutes ces études verront leur prolongement naturel dans leur mise en pratique expérimentale pour parvenir au suivi en service d'une structure de tenségrité. Nous disposons des outils expérimentaux pour cela.

CONCLUSION

Contributions à l'étude des systèmes de tenségrité

Dans un premier temps, en abordant les notions essentielles concernant les systèmes de tenségrité et en présentant une première étude numérique sur l'état d'autocontrainte de la minigrille, nous avons pu justifier l'utilisation de ce prototype dans le cadre de notre étude expérimentale. Les problèmes expérimentaux de mise en tension que nous avons soulevés ont de plus montré l'urgence d'une campagne complète d'instrumentation pour avancer dans la compréhension du comportement mécanique des grilles de tenségrité et explorer de nouvelles voies.

C'est la mise en place des nouveaux moyens instrumentaux que nous avons développée dans un second temps avec la mise au point d'un tensiomètre et des montages de jauges dédiés pour mesurer les efforts dans les éléments et l'utilisation d'un tachéomètre pour la mesure de la géométrie et de la déformée de la minigrille. L'objectif est d'estimer l'influence et l'utilité des nouvelles données pour affiner une méthode d'identification de l'état de tension qui soit applicable à une structure de tenségrité en place.

C'est ce à quoi nous nous sommes attachés ensuite en montrant la pertinence des moyens instrumentaux mis en œuvre. En effet, ils ont permis de mettre en évidence la faiblesse de la modélisation numérique initiale des structures de tenségrité. Le comportement des barres et des tirants éléments est trop simplifié. Ils ne peuvent plus être modélisés comme des éléments ne recevant que des efforts normaux et leur rigidité en flexion doit être prise en compte dans les simulations. Cela a notamment donné des résultats concluants pour la simulation des déplacements des nœuds sous chargement statique et la simulation des fréquences propres. Nous avons aussi pu montrer que l'utilisation de la géométrie réelle n'apporte pas un plus convaincant pour l'identification de l'état d'autocontrainte. Mais surtout, nous avons ouvert la piste de la mesure des champs de déplacements des nœuds sous chargement pour l'identification de l'autocontrainte des grilles de tenségrité afin de s'affranchir des mesures lourdes des efforts dans les différents éléments.

Pour finir, nous avons numériquement exploré plus avant cette voie en confirmant la pertinence de la mesure des déplacements ou des accélérations des nœuds d'une grille

de tenségrité sous chargement statique ou dynamique pour identifier l'état d'autocontrainte. La voie vers l'identification de l'état d'autocontrainte et de l'état d'endommagement sous sollicitations naturelles a ainsi été ouverte.

Perspectives de ces travaux

Les perspectives sont nombreuses et certaines sont déjà en cours de réalisation.
Malgré nos efforts, certaines questions restent en suspens : comment expliquer que les mesures d'efforts dans les câbles mènent à l'identification d'un état d'autocontrainte de toute évidence erroné par rapport à celui identifié par la mesure des efforts dans les tirants et les barres par les montages de jauges ? Pourquoi la procédure de mise en tension minimise les corrections sur les longueurs des éléments actifs à appliquer pour atteindre un état cible ? Pour y répondre, il sera peut être nécessaire d'intégrer dans le logiciel Tenségrité 2000, le fait que les éléments des grilles de tenségrité ne reçoivent pas seulement des efforts normaux.
Numériquement, les études sur l'identification de l'état d'autocontrainte sous sollicitations naturelles doivent être complétées pour pouvoir transférer les méthodes utilisées au cas expérimental : que ce soit pour la minigrille et la grande grille, nous envisageons de poursuivre les études sur l'identification de l'état d'endommagement des éléments et sur l'utilisation de la méthode du décrément aléatoire.
Expérimentalement, des améliorations sont à envisager : le prototype de tensiomètre doit voir sa précision significativement augmentée et son encombrement diminué pour pouvoir remplacer définitivement et avantageusement la méthode des cordes vibrantes mal adaptée à des structures en place. Le protocole et le dispositif expérimental de la mesure des champs de déplacements des nœuds par le tachéomètre doivent être affinés pour pouvoir avancer dans l'utilisation de ces données pour l'identification de l'état d'autocontrainte en complément ou remplacement de la mesure des efforts.
Toutes ces perspectives trouvent naturellement leur place dans les travaux en cours dans l'équipe sur le déploiement d'anneaux de tenségrité.

ANNEXES

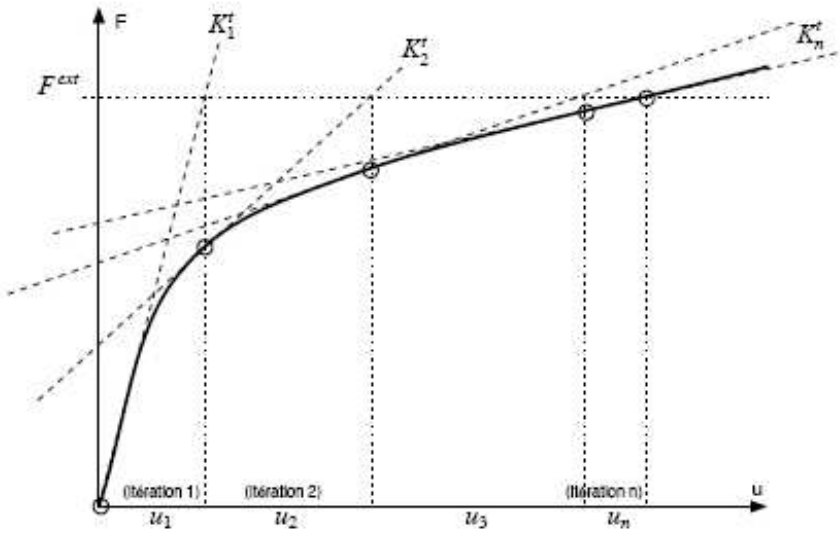
Annexe A :

Eléments complémentaires sur la détermination des états d'autocontrainte de base de la minigrille par le logiciel T2000.

Principe de résolution non-linéaire de type Newton-Raphson :

L'équilibre statique d'un système de tenségrité conduit au système à résoudre, de forme classique : $[K^t_k]\{u_k\} = \{f_k^{ext}\} + \{f_k^{int}\}$ où, au pas k

$[K^t_k]$ représente la matrice de rigidité tangente,
$\{f_k^{ext}\}$ les charges nodales extérieures à équilibrer,
$\{f_k^{int}\}$ les efforts internes, fonction de la géométrie, des caractéristiques des éléments et des longueurs de fabrication. Le second membre est aussi noté résidu du système.



A chaque étape, on actualise les déplacements ainsi que les efforts internes et la matrice de rigidité, jusqu'à ce que le résidu atteigne un critère de convergence fixé. La matrice tangente élémentaire $[K^{el}]$ d'un composant est la somme d'une matrice élastique $[K^e]$ et d'une matrice de rigidité géométrique $[K^g]$ qui sont de la forme :

$$[K^{el}] = \begin{bmatrix} [K^{e+g}] & -[K^{e+g}] \\ -[K^{e+g}] & [K^{e+g}] \end{bmatrix} \; avec \; [K^{e+g}] = \begin{bmatrix} \frac{E_i A_i}{l_i^{lib}} & & \\ & \frac{T_i}{l_i} & \\ & & \frac{T_i}{l_i} \end{bmatrix}$$

Fichier de données T2000 pour la minigrille : il se compose en deux parties.

1) Position des nœuds et conditions d'appuis :

La minigrille possède 30 nœuds distants de 0,8m répartis en deux nappes (inférieure : Z = 0, supérieure Z = 0,8). Les 3 nœuds d'appuis de la nappe inférieure 9, 13 et 17 (répartis de manière non symétrique) sont bloqués dans les 3 directions.

	X	Y	Z	blocages		
1	0	0.8	0	0	0	0
2	0.8	0.8	0.8	0	0	0
3	1.6	0.8	0	0	0	0
4	2.4	0.8	0.8	0	0	0
5	3.2	0.8	0	0	0	0
6	0	1.6	0.8	0	0	0
7	0.8	1.6	0	0	0	0
8	1.6	1.6	0.8	0	0	0
9	2.4	1.6	0	1	1	1
10	3.2	1.6	0.8	0	0	0
11	0	2.4	0	0	0	0
12	0.8	2.4	0.8	0	0	0
13	1.6	2.4	0	1	1	1
14	2.4	2.4	0.8	0	0	0
15	3.2	2.4	0	0	0	0
16	0.8	0	0.8	0	0	0
17	0.8	0.8	0	1	1	1
18	0.8	1.6	0.8	0	0	0
19	0.8	2.4	0	0	0	0
20	0.8	3.2	0.8	0	0	0
21	1.6	0	0	0	0	0
22	1.6	0.8	0.8	0	0	0
23	1.6	1.6	0	0	0	0
24	1.6	2.4	0.8	0	0	0
25	1.6	3.2	0	0	0	0
26	2.4	0	0.8	0	0	0
27	2.4	0.8	0	0	0	0
28	2.4	1.6	0.8	0	0	0
29	2.4	2.4	0	0	0	0
30	2.4	3.2	0.8	0	0	0

2) Connectivité des nœuds et caractéristiques des éléments :

La minigrille possède 81 éléments. Les éléments comprimés (type = 0) sont des barres (numéro 1 à 24). Les éléments tendus (type = 1) sont soit des câbles (numéro 25 à 60) soit des tirants verticaux (numéro 61 à 69) ou périphériques (numéro 70 à 81) : de côté ou de coin.

	Nœud1	Nœud2	Type	Module d'Young (Pa)	Section (m²)	Longueur (m)
1	1	2	0	2.0e+11	3.30e-4	1.13137
2	2	3	0	2.0e+11	3.30e-4	1.13137
...						
...						
25	2	22	1	1.6e+11	5.03e-5	0.8
26	22	4	1	1.6e+11	5.03e-5	0.8
...						
...						
61	2	17	1	1.7e+11	7.85e-5	0.8
62	22	3	1	1.7e+11	7.85e-5	0.8
...						
...						
70	1	16	1	2.0e+11	5.03e-5	1.38564
71	16	21	1	2.0e+11	5.03e-5	1.13137
…						

Ce fichier de données permet au logiciel T2000 de calculer la base d'autocontrainte conforme de la minigrille, ses mécanismes ainsi que d'effectuer des calculs mécaniques.

Annexe B :

Illustration sur la minigrille de la méthode d'identification de l'état d'autocontrainte par l'utilisation du pseudo-inverse.

L'identification de l'état actuel, noté T^a, consiste à déterminer l'état de tous les efforts internes à partir d'un nombre limité de mesures effectuées. Il s'agit de caler un état généré par la base d'autocontrainte sur le résultat des mesures.

Soit *[T_i]* le sous-ensemble des vecteurs de la base d'autocontrainte (ici au nombre de 2 et associés aux états de base *EA1* et *EA2* obtenus grâce au logiciel T2000) limité aux lignes qui concernent uniquement les éléments mesurés et *{T_mes}* le vecteur des mesures effectuées.
On recherche le vecteur $\{\alpha_id\}$ (composé ici des 2 coefficients de pondération *a* et *b*) tel que la différence : $\{d\} = [T_i]\{\alpha_id\} - \{T_mes\}$ soit minimale.

Plusieurs procédés numériques de minimisation sont envisageables, comme par exemple le simplexe. Nous utilisons ici la méthode simple de l'inverse généralisé ou pseudo-inverse (Moore-Penrose) de la matrice *[T_i]*.
Chercher le minimum de *{d}* peut être vu comme la recherche d'une distance minimale entre le point mesuré *{T_mes}* et le sous-espace, noyau de la matrice d'équilibre, généré par la famille de vecteurs *[T_i]*.
L'état identifié $\{T_id\} = [T_i]\{\alpha_id\}$ doit alors être le point de ce sous-espace le plus proche de *{T_mes}*, c'est-à-dire : $(\{T_id\} - \{T_mes\})^t[T_i] = 0$

{T_id} est donc la projection orthogonale, au sens du produit scalaire, de *{T_mes}* sur le sous-espace généré par *[T_i]* ce qui mène à :

$$\{\alpha_id\} = \left([T_i]^t.[T_i]\right)^{-1}[T_i]^t\{T_mes\}$$

où l'on retrouve l'expression de l'inverse généralisé (ou pseudo-inverse) de *[T_i]*.

Cette solution s'apparente au minimum trouvé par une recherche des moindres carrés. Le vecteur *{α_id}*, solution de l'identification, est une représentation de l'état actuel dans la base d'autocontrainte.

Concrètement, l'application de cette formule sur la minigrille est illustrée par un exemple expérimental détaillé dans le tableau suivant :

Eléments	**Fréq (Hz)**	***T_mes* (N)**	***T_1i***	***T_2i***	***α_id***	***T_id* (N)**	**Ecarts**
61	94,8	9340	0,8	1,6	*a* = 1900 *b* = 5053 (*a/b* = 0,37)	9600	-2,83%
62	99,6	10950	1,6	1,6		11120	-1,59%
63	96,2	9840	0,8	1,6		9600	2,39%
64	100,4	11210	1,6	1,6		11120	0,76%
65	109,2	14290	0,8	1,6		14160	0,88%
66	100	11080	1,6	1,6		11120	-0,40%
67	96,2	9840	0,8	1,6		9600	2,39%
68	99,4	10880	1,6	1,6		11120	-2,25%
69	95,6	9650	0,8	1,6		9600	0,47%

Le vecteur des efforts *{T_mes}* est ici obtenu à partir des mesures de fréquences dans les 9 tirants verticaux actifs (par la suite on a utilisé les efforts obtenus grâce aux montages de jauges équipant un certain nombre de barres et de tirants).

A partir des 2 vecteurs des états d'autocontrainte de base *[T_1i]* et *[T_2i]* (respectivement associés à l'état local *EA1* et à l'état global *EA2*), on identifie les coefficients *a* et *b* qui permettent de construire le vecteur d'efforts *[T_id]*.

La comparaison avec le vecteur *{T_mes}* permet de contrôler la précision de l'identification. En appliquant les coefficients *a* et *b* pour l'ensemble des éléments de la structure, on s'approche ainsi au plus près de l'état actuel T^a.

Annexe C :

Détermination de l'expression de la tension *T* dans le câble en fonction de la force *F* et du déplacement *d* imposés par le tensiomètre.

Expression de la variation de déformation

Comme point de départ, on se propose d'écrire les allongements avant et après le chargement en fonction des demi-longueurs du câble associées *L* et *L'* et de sa demi-longueur libre L_0.

Par définition, la déformation du câble sous tension *T* et la déformation sous tension *T'* après application de la déviation transversale sont :

$$\xi = \frac{L - L_0}{L_0} \quad \text{pour la tension } T \qquad \text{(C.1)}$$

$$\xi' = \frac{L' - L_0}{L_0} \quad \text{pour la tension } T' \qquad \text{(C.2)}$$

On peut aussi exprimer la longueur *L'* de manière géométrique. On trouve :

$$L' = L + \ell\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) - dL \qquad \text{(C.3)}$$

avec *dL* l'allongement du ressort modélisant la condition limite du câble, α l'angle formé par le câble déformé et 2ℓ la distance séparant les appuis du dispositif de mesure.

A partir de ces équations, nous sommes en mesure d'exprimer la différence des allongements. En reportant (C.3) dans la différence (C.1) – (C.2), on obtient :

$$\xi' - \xi = \frac{\ell\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) - dL}{L_0} \qquad \text{(C.4)}$$

Expression de la tension

La contrainte dans le câble peut s'écrire de deux manières. Soit en fonction de la tension, soit en fonction de l'allongement.

Les contraintes pour les deux configurations sont respectivement :

$$\sigma = \frac{T}{S} = E\xi \tag{C.5}$$

$$\sigma' = \frac{T'}{S} = E\xi' \tag{C.6}$$

On peut alors calculer la variation de tension en fonction de la variation de déformation :

$$T' - T = \Delta T = ES(\xi' - \xi) \tag{C.7}$$

En reportant (C.4) dans (C.7) on obtient :

$$\Delta T = ES\frac{\ell\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) - dL}{L_0} \tag{C.8}$$

L'analyse de l'équilibre du point d'application du déplacement transverse nous donne la relation entre l'effort mesuré *F* et la tension *T'* :

$$T' = \frac{F}{2\sin\alpha} \tag{C.9}$$

L'équilibre des conditions limites du câble donne les expressions suivantes :

$$T' = K(L' - L_0) \tag{C.10}$$

$$T = K(L - L_0) \tag{C.11}$$

Avec *K* la raideur des appuis du câble supposés symétriques.

De la différence (C.10) - (C.11) on déduit :

$$T' = T + KdL \tag{C.12}$$

On peut donc calculer $T = T' - \Delta T$ en utilisant (C.9) pour *T'* et (C.12) pour éliminer le terme *dL* qui apparaît dans *ΔT*.

En posant $k_0 = \frac{ES}{L_0}$ la raideur du câble, on obtient :

$$T = \frac{F}{2\sin\alpha} - \frac{k_0 K}{k_0 + K}\ell\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) \tag{C.13}$$

Simplification

Pour simplifier cette formulation, nous allons voir de quelle manière il est possible de s'affranchir des termes en sinus et cosinus.

Dans le dispositif réalisé, il apparaît clairement que le déplacement imposé *d* est très faible comparé aux autres longueurs.

En supposant donc $d << \ell$, on utilise les développements limités :

$\sin\alpha \cong \alpha$ qui permet d'écrire $\alpha \cong \frac{d}{\ell} << 1$,

$\cos\alpha \cong 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ et $\frac{1}{\cos\alpha} = 1 + \frac{\alpha^2}{2}$.

Ce qui donne :

$$T \cong \frac{F}{2\alpha} - \frac{k_0 K}{k_0 + K}\ell\frac{\alpha^2}{2} \tag{C.14}$$

Il suffit de remplacer α pour obtenir :

$$T = \frac{F\ell}{2d} - \left(\frac{k_0 K}{k_0 + K}\right)\frac{d^2}{2\ell} \tag{C.15}$$

L'expression finale donne *F* en fonction de *d :*

$$F = \frac{2T}{\ell}d + \left(\frac{k_0 K}{k_0 + K}\right)\frac{d^3}{\ell^2} \tag{C.16}$$

Au premier ordre nous avons :

$$\frac{\partial F}{\partial d} = \frac{2T}{\ell} + \left(\frac{k_0 K}{k_0 + K}\right)\frac{3d^2}{\ell^2} \xrightarrow[d\to 0]{} \frac{2T}{\ell} \tag{C.17}$$

On peut en conclure que la valeur de la pente à l'origine de la courbe *F-d* est proportionnelle à la tension *T*. Et cela signifie qu'une seule mesure peut suffire pour obtenir cette information si on prend un couple proche de l'origine de la courbe. Encore faut-il être sûr de se trouver dans cette zone.

Pour connaître la raideur équivalente des appuis du câble, on peut écrire :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial d^2} = \left(\frac{k_0 K}{k_0 + K}\right)\frac{6d}{\ell^2} \qquad \text{(C.18)}$$

On réécrit l'expression (C.16) pour obtenir une formulation de la tension T du câble en fonction du déplacement d et de la force F. Ce sont ces données qui sont mesurées expérimentalement dans le dispositif présenté figure 31.

Si on pose $F = \frac{2T}{\ell} d + \left(\frac{k_0 K}{k_0 + K}\right)\frac{d^3}{\ell^2} = c_1 d + c_2 d^3$

Pour deux couples de mesures (F_1, d_1) et (F_2, d_2) on a

$$F_1 = c_1 d_1 + c_2 d_1^3$$

$$F_2 = c_1 d_2 + c_2 d_2^3$$

En combinant les deux expressions on trouve le paramètre c_2.

$$d_1 F_2 = c_1 d_2 d_1 + c_2 d_2^3 d_1$$

$$d_2 F_1 = c_1 d_1 d_2 + c_2 d_1^3 d_2$$

$$d_1 F_2 - d_2 F_1 = c_2 (d_1 d_2^3 - d_2 d_1^3) = c_2 d_1 d_2 (d_2^2 - d_1^2)$$

$$c_2 = \frac{d_1 F_2 - d_2 F_1}{d_1 d_2 (d_2^2 - d_1^2)}$$

En le reportant dans l'expression d'une des forces on obtient la relation entre la tension et les mesures.

$$F_1 - c_2 d_1^3 = c_1 d_1 = \frac{2T}{\ell} d_1$$

$$\frac{2T}{\ell} = \frac{F_1}{d_1} - c_2 d_1^2$$

$$T = \frac{\ell}{2}\left(\frac{F_1}{d_1} - c_2 d_1^2\right)$$

$$T = \frac{\ell}{2}\left(\frac{F_1}{d_1} - \frac{d_1}{d_2}\frac{(d_1 F_2 - d_2 F_1)}{(d_2^2 - d_1^2)}\right) \qquad \text{(C.19)}$$

Théoriquement deux mesures suffisent pour trouver la valeur de la tension du câble en s'affranchissant de la raideur équivalente des appuis du câble.

Annexe D :

Détail de branchement des trois montages de jauges.

Le montage pont complet

Un capteur de flexion monté en pont complet comprend quatre jauges, situées de part et d'autre de l'axe de flexion de l'axe neutre de la poutre (figure D.1). On trouve sur un même coté une jauge L_1 placée dans l'axe longitudinal mesurant la déformation longitudinale ε alors qu'une jauge T_1 transverse mesure l'effet de Poisson $-\nu\varepsilon$. Symétriquement, on place deux jauges de façon identique, la jauge longitudinale L_2 mesure alors $-\varepsilon$ et celle transverse T_2 mesure $\nu\varepsilon$. En disposant sur les branches adjacentes les jauges subissant l'effet de Poisson on obtient un rapport de tension proportionnel à la déformation longitudinale ε, donc à la force appliquée.

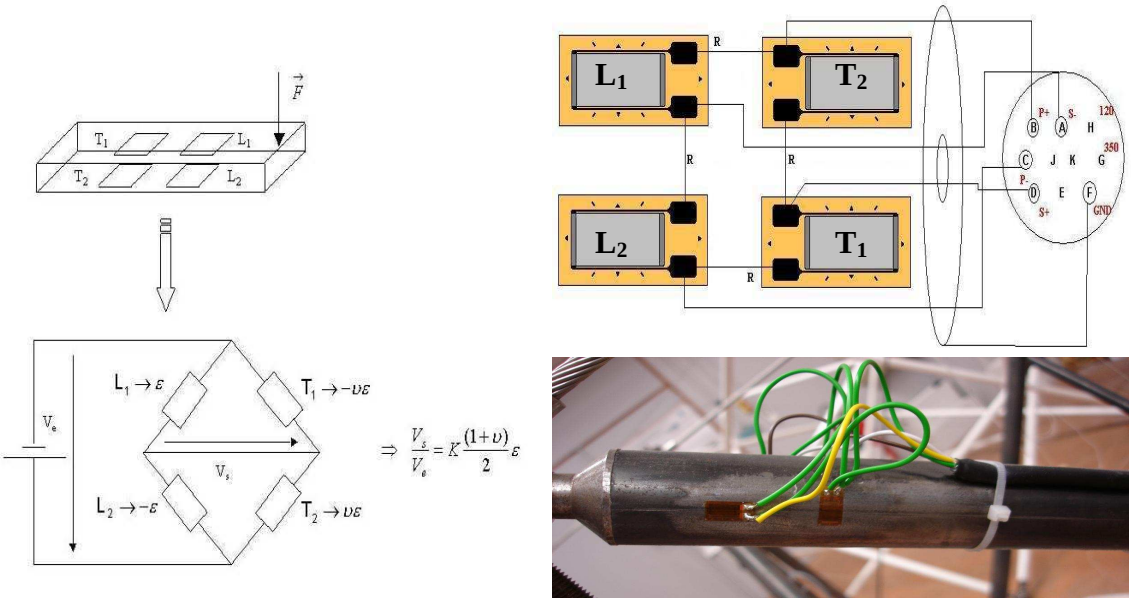


Figure D.1. Montage en pont complet pour la mesure de la flexion.

Le montage demi pont

Avec la configuration de la figure D.2, on obtient l'effort de compression à l'exclusion de l'effet de flexion, en collant les deux jauges au milieu de la barre dans une position diamétralement opposée, parallèlement au sens de la sollicitation de compression (ε). Pour ce montage en demi pont, même s'il est théoriquement réalisable, sa mise en œuvre avec nos conditionneurs est en fait impossible du fait des connectiques particulières. En effet, le seul montage en demi pont autorisé par ceux-ci est celui avec deux jauges sur des bras adjacents et non celui où elles sont sur des bras opposés. La solution du problème réside en la construction d'un montage pont complet décrit ci-dessus où l'on remplace les deux jauges actives perpendiculaires à la force axiale par des résistances de 350 ohms (figure D.3). Elles font office de jauges inactives. En théorie, ce montage se comporte comme un demi pont. On le nomme demi pont complet.

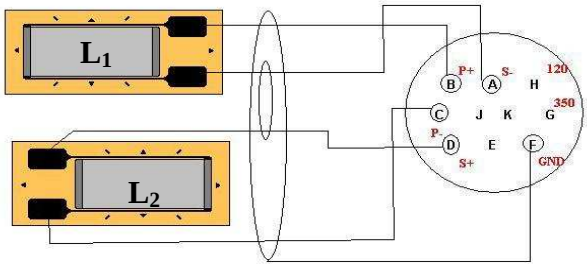


Figure D.2. Montage demi pont.

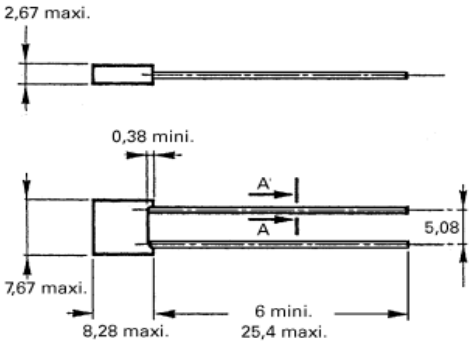


Figure D.3. Résistances pour le nouveau montage pont complet remplaçant le demi pont.

Le montage quart de pont

Pour le montage en quart de pont (figure D.4), on colle la jauge au milieu du tirant, dans le sens de la sollicitation de tension (ε). Les premiers tests réalisés montrent que ce montage quart de pont s'avère tout à fait inadapté. En effet, les mesures sont très fluctuantes en fonction de la position relative de la jauge sur le tirant. En fait, l'alignement imparfait des extrémités du tirant induit des moments de flexion qui perturbent la mesure. Il est alors décidé d'équiper les tirants du même montage en demi pont complet que les barres pour s'affranchir de ces effets perturbateurs.

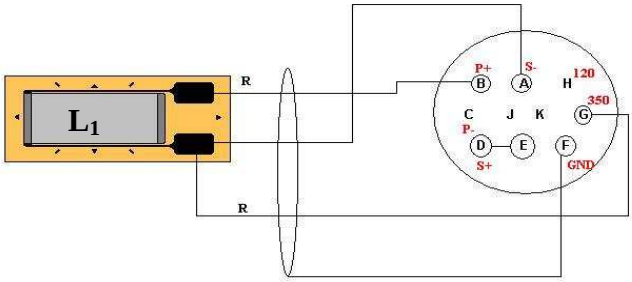


Figure D.4. Montage quart de pont.

BIBLIOGRAPHIE

[ABI99] J.C. Asmussen, R. Brinker, S.R. Ibrahim (1999) *Statical theory of the vector random decrement technique,* Journal of Sound and Vibration, vol 226(2), pp. 329-344.

[AC04-1] J. Averseng, B. Crosnier (2004) *Prestressing tensegrity systems - Application to multiple selfstress state structures,* International Journal of Structural Stability and Dynamics, vol. 4 (4), p. 543-557.

[AC04-2] J. Averseng, B. Crosnier (2004) *Static and dynamic robust control of tensegrity systems,* Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures, vol. 45 (3), p. 169-174

[ADV00] K. V. D. Abeele, J. DeVisscher (2000) *Damage assessment in reinforced concrete using spectral and temporal nonlinear vibration techniques,* Cement and Concrete Research, vol. 30, p. 1453-1464.

[Ave01] J. Averseng (2001) *Méthodologie de la mise en autocontrainte des systèmes de tenségrité,* DEA, dir. B. Crosnier, M.N. Kazi Aoual, LMGC, Université Montpellier II, 05.07.01, 46p.

[Ave04] J. Averseng (2004) *Mise en oeuvre et contrôle des systèmes de tenségrité,* Thèse de Doctorat de l'Université Montpellier II, dir. B. Crosnier, J.F. Dubé, p. 150 p

[Avr67] J. Avril (1967) *Manuel d'analyse expérimentale des contraintes, jauges, photostress, capteurs,* Budd.

[Bar82] V. Barcilon (1982) *Inverse mode problems for the vibrating beam in the free-clamped configuration,* Philosophical Transaction of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Transaction, vol. 304, n° 1483, p. 211-251.

[BC97] N. Bicanic, H.-P. Chen (1997) *Damage identification in framed structures using natural frequencies,* International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 40, p. 4451-4468.

[CC03] B. Crosnier, F. Cévaër. (2003) *Stratégies de mise en précontrainte dans les systèmes de tenségrité et contrôle,* Revue Française de Génie Civil – Tenségrité : analyse et projets, vol. 7, N°3, 343-355.

[DC04] J. F. Dubé, B. Crosnier (2004) *Identification of cables slackening by analyzing the temporal response of the structure,* in R. Motro (ed.), CDROM of IASS 2004, Shell and Spatial Structures from Models to Realization, p. 8.

[Dub04] J.F. Dubé (2004) *Identification de l'endommagement d'une poutre par analyse vibratoire,* Revue Française de Génie-Civil, vol. 8, p. 203-218.

[Emm64] D. G. Emmerich. (1964) *Construction de Réseaux Autotendants,* Brevet N°1.377.290.

[Emm88] D. G. Emmerich. (1988) *Structures tendues et autotendantes, Edition de* Ecole d'Architecture de Paris, La Villette.

[Ful60] R. B. Fuller. (1960) *New ideas made visual, Portfolio & Art News annual,* N°4, The Art Foundation Press.

[Ful62] R. B. Fuller. (1962) *Tensile_integrity structures,* US. Patent N°3.063.521.

[Ful73] R. B. Fuller. (1973) *The dymaxion world of Buckminster Fuller.* Anchoor Books, New York.

[Ibr77] S.R. Ibrahim (1977) *Random decrement technique for modal identification of structures,* the AIAA Journal of Spacecraft and Rockets, vol. 14, No. 11, pp 696-700.

[Jae07] J. Jaen (2007) *Etude de l'amortissement d'une structure de tenségrité en fonction du niveau d'autocontrainte.* Mémoire de Master Mécanique et Ingénieries de l'ENSMM réalisé au Laboratoire de Mécanique et Génie Civil.

[KCSK00] Y. Kono, K. K. Choong, T. Shimada, et H. Kunieda. (2000) *An experimental investigation of a type of double layer tensegrity grids.* Journal of IASS, 41(131).

[KHPF95] K. Kawaguchi, Y. Hangai, S. Pellegrino, et H. Furuya. (1995) *Shape and stress control analysis of prestressed truss structures.* Journal of Reinforced Plastics and Composites.

[LGA96] J. L. Le Goër, J. Avril (1996) *Capteurs à jauges extensométriques,* Techniques de l'Ingénieur – Mesures mécaniques et dimensionnelles, R1860.

[Mae00] J. Maek, al. (2000) *Damage identification in reinforced concrete structures by dynamic stiffness determination,* Eng. Structures, vol. 22, p. 1339-1349.

[Moo20] E.H. Moore (1920) *On the reciprocal of the general algebraic matrix.* Bulletin of the American Mathematical Society 26: 394-395.

[Mot90] R. Motro, *Tensegrity Systems and Geodesic Domes,* International Journal of Space Structures, vol 5, Nos. 3&4, 1990.

[Mot03] R. Motro. (2003) *Tensegrity : Structural systems for the future,* Kogan Page Science, London

[MR02] R. Motro, V. Raducanu. (2002) *Tensarch project,* In Thomas Telford, editor, Fifth international conference on space structures, pages 57-66, University of Survey, Guildford, UK; P. Disney and G. Parke.

[NH67] Neubert, K. P. Hermann (1967) *Strain gauges : kinds and uses,* Macmillan : St Martin's press.

[Ped98] M. Pedretti. (1998) *Smart tensegrity structures for the swiss expo 2001*. In LSA 98, Lightweight structures in architecture engineering and construction, pages 684-691.

[Pen55] R. Penrose (1955) *A generalized inverse for matrices*. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 51: 406-413.

[QKAM03] J. Quirant, M. N. Kazi-Aloual, et R. Motro. (2003) *Designing tensegrity systems : the case of a double layer grid.* Engineering Structures, 25 : 1121-1130.

[Qui00] J. Quirant (2000) *Systèmes de tenségrité et autcontrainte : qualification, sensibilité et incidence sur le comportement.* Thèse, Laboratoire de Mécanique et Génie Civil.

[Rad01] V. Raducanu. (2001) *Architecture et système constructif : cas des systèmes de tenségrité.* Thèse, Université Montpellier 2.

[Rob04] P. Robert (2004) *Des jauges, des ponts… et une solution de câblage pour chaque cas,* Mesures, n° 767, p. 57-60.

[San05] L. R. Sanchez. (2005) *Contribution à l'étude mécanique des systèmes de tenségrité,* Thèse, Université Montpellier 2.

[Sne65] K. Snelson. (1965) *Continous Tension, Discontinous Compression Structures,* US. Patent N°3.169.611.

[Sne73] K. Snelson. (1973) *Tensegrity Mast.* Shelter Publications, Bolinas, Californie.

[Vas97] N. Vassart. (1997) *Recherche de forme et stabilité des systèmes réticulés autocontraints – Application aux systèmes de tenségrité,* Thèse, Université Montpellier 2.

[VCM88] P. Verpeaux, T. Charras, A. Millard (1988) *Castem2000, une approche moderne du calcul des structures.* In J.M Fouet, P. Ladevèze, and R. Ohayon, editors, Calcul des structures et intelligence artificielle.

[WP94] E. Walter, L. Prontazo (1994) *Identification de modèles paramétriques à partir de données expérimentales,* Masson.

TABLE DES FIGURES ET DES TABLEAUX

Figure 1. Snelson (Needle Tower) –Fuller – Emmerich (Composite Polyhedra). 8
Figure 2. Projet Tensarch..... 8
Figure 3. Les trois états d'un système autocontraint. 12
Figure 4. Equilibre d'un nœud..... 13
Figure 5. Mécanisme infinitésimal et stabilité de la position d'équilibre. 16
Figure 6. Système de tenségrité sur des réseaux réguliers de câbles..... 17
Figure 7. Ecarteur et décomposition de la grille Tensarch. 17
Figure 8. Principe constructif de la minigrille. 19
Figure 9. La minigrille, vue d'ensemble..... 19
Figure 10. Nœuds de la minigrille, assemblage des éléments. 21
Figure 11. Insertion du nœud entre deux sertissages. 21
Figure 12. Vissage des tiges dans les nœuds. 21
Figure 13. Modélisation d'une grille de tenségrité. 22
Figure 14. Visualisation de la nappe inférieure de nœuds. 24
Figure 15. Etats d'autocontrainte de base de la minigrille. 24
Figure 16. Combinaison des états d'autocontrainte de base de la minigrille. 24
Figure 17. Ecarts des valeurs extrêmes des efforts dans les éléments. 26
Figure 18. Fréquence du premier mode propre en fonction du niveau d'autocontrainte. 26
Figure 19. Fréquence des modes pour les 4 conditions d'appuis, évolution linéaire des modes 3 et 4. 28
Figure 20. Mécanismes liés aux appuis et évolution de la fréquence du premier mode propre. 28
Figure 21. Principe de la méthodologie de mise en tension. 30
Figure 22. Principe des mesures de la tension dans un composant tendu. 30
Figure 23. Dispositif d'étalonnage des mesures de tension des tirants. 30
Figure 24. Loi d'étalonnage force-fréquence pour les tirants verticaux..... 32
Figure 25. Dispositif d'étalonnage des mesures de tension des câbles. 32
Figure 26. Loi d'étalonnage force-fréquence pour les câbles. 32
Figure 27. Illustration du cheminement au plus proche du chemin direct. 33
Figure 28. Outil spécifique de mesure de variations de longueur des tirants. 34
Figure 29. Confrontation des variations théoriques et expérimentales de tension dans les tirants verticaux. 36
Figure 30. Ecarts expérimentaux sur les valeurs de tension entre les tirants verticaux et les câbles. 36
Figure 31. Schéma de fonctionnement d'un tensiomètre trois points. 41
Figure 32. Comparaison théorie/simulations de la force appliquée en fonction du déplacement pour une tension fixée. 44
Figure 33. Vue du tensiomètre. 47
Figure 34. Dispositif d'acquisition des données, instrument virtuel Labview. 47
Figure 35. Acquisition par Labview des données de force et de déplacement du tensiomètre. 47
Figure 36. Courbe force-déplacement expérimentale et théorique..... 48
Figure 37. Détermination de la tension dans le câble par la formule (2.2). 49
Figure 38. Le tensiomètre équipé du nouveau chariot de guidage. 50

Figure 39. Courbe force-déplacement obtenue par le tensiomètre avec le nouveau guidage. 50
Figure 40. Ecarts observés avec le nouveau guidage. 51
Figure 41. Ecarts des modélisations par rapport à la formule théorique, écart des mesures par rapport à la tension réellement appliquée. 53
Figure 42. Description des jauges utilisées pour les montages. 56
Figure 43. Principe de fonctionnement des montages de jauges sélectionnés. 56
Figure 44. Schémas de branchements des montages autorisés sur nos conditionneurs : quart de pont, demi pont, pont complet. 56
Figure 45. Collage des jauges, soudure des connectiques. 57
Figure 46. Montages de jauges montés sur les différents éléments de la minigrille. 57
Figure 47. Banc de tension pour l'étalonnage des tirants. 59
Figure 48. Comparaisons entre les montages de jauges et le capteur de force pour les tirants. 59
Figure 49. Etalonnage du montage de jauges pour les barres. 60
Figure 50. Conditionneurs Vishay utilisés pour les mesures d'efforts. 62
Figure 51. Visualisation de la symétrie de la minigrille. 62
Figure 52. Instrumentation de la minigrille. 62
Figure 53. Vue du tachéomètre, visée d'un coin cube. 64
Figure 54. Aménagements pour le positionnement des cibles sur les nœuds. 64
Figure 55. Décalages de la géométrie réelle : positions des nœuds, longueurs des éléments. 65
Figure 56. Visualisation de la nappe supérieure. 65
Figure 57. Comparaison numérique entre deux niveaux d'autocontrainte des déplacements des nœuds de la nappe supérieure pour un chargement donné. 68
Figure 58. Emplacements des poids utilisés pour le chargement de la grille. 68
Figure 59. Evolution expérimentale des déplacements verticaux des nœuds de la nappe supérieure en fonction du chargement appliqué. 68
Figure 60. Valeurs des tensions dans les câbles de la nappe inférieure obtenues par la méthode des cordes vibrantes. 75
Figure 61. Comparaison des tensions obtenues avec le tensiomètre et la méthode des cordes vibrantes dans les câbles de la nappe inférieure. 75
Figure 62. Ecarts relatifs de tension constatés entre les deux méthodes en fonction de la tension. 75
Figure 63. Valeurs du coefficient β obtenues par les mesures au tensiomètre. 76
Figure 64. Comparaison des mesures effectuées sur banc avec celles des tirants en place. 78
Figure 65. Confrontation simulations/mesures pour les lois de fréquences des tirants verticaux. 78
Figure 66. Comportement vibratoire simulé et mesuré des tirants verticaux et périphériques comparé aux comportements théoriques d'éléments bi-articulés ou bi-encastrés. 80
Figure 67. a) Confrontation entre l'évolution expérimentale des déplacements et les simulations selon la modélisation utilisée pour les éléments. b) Ecarts entre les simulations et l'expérience à la fin du chargement (320 daN par nœud chargé). 81
Figure 68. Chargement de la minigrille et nœuds mesurés. 82
Figure 69. Comparaison des modélisations POUTRE et BARRE pour l'évolution du premier mode. 84

Figure 70. Chaîne de mesure des modes propres de la minigrille. 84
Figure 71. Amplitude, partie réelle et partie imaginaire de la FRF (ms-2/N) en fonction de la fréquence (Hz). 86
Figure 72. Eléments sollicités pour chaque série d'essais (A, B, D) – Nœuds concernés par l'excitation (éclair), la mesure (rond) et les appuis (triangles). 86
Figure 73. Evolution de la fréquence du premier mode en fonction du niveau d'autocontrainte pour chaque série. 88
Figure 74. Comparaison des fréquences du premier mode mesurées et simulées. 89
Figure 75. Comparaison des états identifiés selon la géométrie utilisée avec l'état mesuré. 92
Figure 76. Nouveaux écarts des valeurs extrêmes des efforts dans les éléments. 92
Figure 77. Etats identifiés à partir des mesures d'efforts par les câbles et par les jauges. 94
Figure 78. Schéma de principe de l'établissement de la comparaison mesure/simulations des champs de déplacements. 95
Figure 79. Schéma de principe de calage de l'état d'autocontrainte à partir de la mesure des champs de déplacements. 97
Figure 80. Fréquences propres de référence de la minigrille. 100
Figure 81. Impact des états d'autocontrainte sur la fréquence des modes de vibration. 102
Figure 82. Évolution de l'erreur sur le coefficient d'état pour chaque mode calculé. . 104
Figure 83. Évolution de l'erreur quadratique sur les coefficients d'états en fonction du mode calculé. 105
Figure 84. Corrélation entre la relation fréquence–coefficient d'état et l'erreur d'identification. 106
Figure 85. Fréquences propres de référence de la minigrille. 107
Figure 86. Impact des états d'autocontrainte sur la fréquence des modes de vibration. 109
Figure 87. Évolution de l'erreur sur le coefficient d'état pour chaque mode calculé. . 110
Figure 88. Évolution de l'erreur quadratique sur les coefficients d'états en fonction du mode calculé. 111
Figure 89. Corrélation entre la relation fréquence–coefficient d'état et l'erreur d'identification. 111
Figure 90. Technique du décrément aléatoire [Ibr77]. 113
Figure 91. Chargement de la minigrille. 114
Figure 92. Evolution du critère d'erreur en déplacement au cours des itérations. 115
Figure 93. La grande grille de tenségrité. 117
Figure 94. États d'autocontrainte élémentaires conformes. 118
Figure 95. Fréquences propres de référence de la grande grille. 119
Figure 96. Impact des états d'autocontrainte sur la fréquence des modes de vibration pour les deux états d'autocontrainte de référence. 120
Figure 97. Évolution de l'erreur sur le coefficient d'état pour chaque mode calculé. . 121
Figure 98. Évolution de l'erreur quadratique sur les coefficients d'états en fonction du mode calculé. 122
Figure 99. Évolution de l'erreur quadratique sur les coefficients d'états en fonction du mode calculé. 123
Figure 100. Corrélation entre la relation fréquence–coefficient d'état et l'erreur d'identification. 123

Figure 101. Fréquences propres de la grande grille selon la modélisation utilisée. 124
Figure 102. Corrélation entre la relation fréquence–coefficient d'état et l'erreur d'identification. 125
Figure 103. Évolution des erreurs en fonction des itérations a) erreur sur les fréquences, b) erreur sur les paramètres à identifier. 126

Tableau 1. Caractéristiques des éléments de la minigrille..... 18
Tableau 2. Comparaison théorie/simulation de la force (en Newton) appliquée pour un déplacement imposé et une tension fixée en faisant varier le coefficient β. 45
Tableau 3. Comparaison des résultats obtenus avec un câble de diamètre 2mm 52
Tableau 4. Equilibre d'un nœud. 72
Tableau 5. Comparaison des déplacements mesurés et simulés..... 82
Tableau 6. Etat d'autocontrainte et fréquence mesurée du premier mode de la minigrille pour chaque série. 88
Tableau 7. Etat d'autocontrainte et fréquence simulée du premier mode de la minigrille pour chaque série – Ecarts avec les valeurs expérimentales. 89
Tableau 8. Identification de l'état d'autocontrainte..... 93
Tableau 9. Déplacements simulés pour deux états d'autocontrainte distincts. 97
Tableau 10. Caractéristiques des modes en fonction de l'état d'autocontrainte. 101
Tableau 11. Caractéristiques des modes en fonction de l'état d'autocontrainte. 108
Tableau 12. Résultat de l'identification. 115

NOTATIONS UTILISEES

PARTIE 1 :

T_{ij}	Effort interne de l'élément reliant le noeud *j* au noeud *i* ou expression algébrique de la force dans l'élément (*i, j*), reliant le noeud i au noeud j.
F_i	Effort extérieur appliqué au noeud *i*
E_i	Module d'Young de l'élément *i*
A_i	Aire de la section droite de l'élément *i*
l_i	Longueur actuelle de l'élément *i*
l_i^{lib}	Longueur de fabrication, ou longueur libre de l'élément *i*
x_i, y_i, z_i	Coordonnées spatiales du noeud *i*
l_{ij}^0	Longueur de l'élément reliant les noeuds *i* et *j* dans la configuration géométrique de référence
q_{ij}	Densité de force de chaque élément (*i, j*)
$\boldsymbol{A}$	Matrice d'équilibre de la structure (de dimension bx$3n$)
$\boldsymbol{q}$	Vecteur des densités de forces des *b* éléments
$\boldsymbol{q_0}$	Champ de densité de force qui satisfait l'état d'équilibre
$ker\mathbf{A}$	Base de sous espace
$\boldsymbol{S}$	Base d'autocontrainte
$\boldsymbol{\alpha}$	Vecteur dont les composantes satisfont la conformité du comportement mécanique des éléments
$\boldsymbol{e}$	Allongements relatifs des éléments
$\boldsymbol{d}$	Champ de déplacement des nœuds de la structure
$\boldsymbol{d_0}$	Ensemble des déplacements appartenant au noyau $ker\boldsymbol{A}^t$
EA1 et *EA2*	Etats d'autocontrainte de base de la minigrille avec la géométrie théorique
a et *b*	Coefficients de pondération de chaque état d'autocontrainte de base
T^a	Etat actuel
T^c	Etat cible

PARTIE 2 :

F	Force appliquée par le tensiomètre
d	Déplacement imposé au câble par le tensiomètre
T	Tension du câble
T'	Tension du câble après application de la déviation transversale
L	Demi-longueur du câble avant le chargement
L'	Demi-longueur du câble après le chargement
L_0	Demi-longueur libre du câble
ξ	Déformation du câble sous tension T
ξ'	Déformation du câble sous tension T'
dL	Allongement du ressort en réaction
α	Angle formé par le câble déformé
ℓ	Moitié de la distance séparant les appuis du dispositif de mesure
σ	Contrainte dans le câble sous tension T
σ'	Contrainte dans le câble sous tension T'
E	Module d'Young du câble
ΔT	Variation de tension du câble
K	Raideur des appuis supposés symétriques
k_0	Raideur du câble
S	Section du câble
c_1 et c_2	Coefficients associés aux déplacements dans la formule de F
β	Facteur multiplicatif
L_0'	Longueur équivalente
T_{capt}	Tension du câble mesurée avec le capteur de force
T_{tensio}	Tension du câble mesurée avec le tensiomètre
$\mathfrak{F}$	Facteur de jauge
ε	Déformation de la jauge
E	Tension d'excitation
E_0	Tension de sortie
ν	Coefficient de Poisson de l'élément

L1 et *L2*	Jauges longitudinales du montage pont complet
T1 et *T2*	Jauges transverses du montage pont complet
G	Gain du conditionneur
B1, B2, B3, B4	Barres instrumentées
TV1, TV2, TV3	Tirants verticaux instrumentés
TP1, TP2, TP3	Tirants périphériques instrumentés

PARTIE 3 :

EA1' et *EA2'*	Etats d'autocontrainte de base de la minigrille avec la géométrie réelle
a' et *b'*	Coefficients de pondérations de chaque état d'autocontrainte de base avec la géométrie réelle
α_id	Etat d'autocontrainte initial identifié
α_cible	Etat cible visé
α_interm	Etat milieu entre l'état initial et l'état cible
T_mes	Efforts mesurés dans les barres et les tirants instrumentés
T_id	Efforts identifiés dans les barres et les tirants instrumentés
T_0i, T_1i	Vecteurs de tension de base
B5	Barre instrumentée qui relie la barre B2 et le tirant TV2

PARTIE 4 :

α_0	Valeurs initiales des coefficients de pondération de la base d'autocontrainte
f_0	Valeurs initiales des fréquences propres
$\Delta\alpha$	Variation des coefficients de pondération de la base d'autocontrainte
Δf	Gradient des fréquences propres
$\Im$	Fonction d'erreur à minimiser dans la méthode de Levenberg-Marquardt
P	Vecteur des paramètres à identifier
R	Réponse temporelle du champ d'accélération de la structure simulée
$R_{réf}$	Réponse temporelle du champ d'accélération de la structure à identifier
Uz	Déplacement vertical

X_{mes}	Mesure d'un signal stochastique
X_{stat}	Composante constante du signal
X_{sinus}	Composante issue du chargement sinusoïdal
X_{bruit}	Composante issue de l'ensemble du bruit
D_{XX}	Décrément aléatoire
T_X	Condition de déclenchement
E_τ	Moyenne des morceaux de signaux répondant à la condition de déclenchement

RESUME en français

Les recherches sur les systèmes de tenségrité, classe à part parmi les structures spatiales, systèmes réticulés à contraintes initiales, structures légères et visuellement transparentes, connaissent un essor important. L'un des derniers verrous à briser pour qu'ils soient développés sur le plan industriel réside dans le contrôle opérationnel de l'autocontrainte, qui assure la stabilité et la rigidité, afin de maintenir un état fonctionnel optimal sous sollicitations extérieures. On présente dans ce travail des études expérimentales et numériques qui explorent cette voie.

La mise au point de nouveaux moyens de mesures dédiés permet de vérifier certaines hypothèses sur le comportement mécanique réel et d'améliorer la modélisation d'une grille de tenségrité. Ils apportent des réponses sur la problématique de l'identification en place de l'état d'autocontrainte.

Numériquement, on approfondit la possibilité d'élaboration de méthodes d'identification transposables au cas complexe de structures en place. Des méthodes de type Levenberg-Marquardt et décrément aléatoire sont ainsi testées sur des grilles de tenségrité. A terme, l'objectif est le contrôle en place sous excitation naturelle et le diagnostic de ruine des systèmes de tenségrité.

TITRE en anglais

Selfstress state of a tensegrity grid: toward identification under natural loading.

RESUME en anglais

Tensegrity systems are lightweight reticulate space structures. A selfstress state is necessary to their stability and rigidity and has to be controlled in service. We present in this work experimental and numerical studies which has shed light on a number of hitherto unexplored points concerning the identification of the selfstress state. We have thereby increased our understanding of the functioning of the Tensarch® project tensegrity grid, including the control under natural loading. The aim of these studies is to exploit tensegrity systems in civil engineering.

DISCIPLINE

Mécanique, Génie Civil (CNU section 60)

MOTS-CLES

TENSEGRITE – AUTOCONTRAINTE – SOLLICITATION NATURELLE

INTITULE ET ADRESSE DE L'U.F.R. OU DU LABORATOIRE :

Laboratoire de Mécanique et Génie Civil - UMR 5508
CC. 048, Place Eugène Bataillon 34095 Montpellier