



**HAL**  
open science

# Contribution aux méthodes de synthèse de correcteurs d'ordres réduits sous contraintes de robustesse et aux méthodes de réduction de modèles pour la synthèse robuste en boucle fermée

Hoang Bao Le

## ► To cite this version:

Hoang Bao Le. Contribution aux méthodes de synthèse de correcteurs d'ordres réduits sous contraintes de robustesse et aux méthodes de réduction de modèles pour la synthèse robuste en boucle fermée. Automatique / Robotique. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2010. Français. NNT: . tel-00567209

**HAL Id: tel-00567209**

**<https://theses.hal.science/tel-00567209v1>**

Submitted on 18 Feb 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITE DE GRENOBLE  
INSTITUT POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE**

*N° attribué par la bibliothèque*

|\_|\_|\_|\_|\_|\_|\_|\_|\_|\_|\_|\_|\_|\_|\_|\_|

**THESE**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'Université de Grenoble  
délivré par l'Institut polytechnique de Grenoble**

***Spécialité : Automatique - Productique***

préparée au Laboratoire de Conception et d'Intégration des Systèmes (LCIS)

dans le cadre de **l'Ecole Doctorale**

**«*Electronique, Electrotechnique, Automatique et Traitement du Signal*»**

présentée et soutenue publiquement

par

LE Hoang Bao

le 29 Novembre 2010

**TITRE**

***Contribution aux méthodes de synthèse de correcteurs d'ordres réduits  
sous contraintes de robustesse et aux méthodes de réduction de  
modèles pour la synthèse robuste en boucle fermée***

**DIRECTEUR DE THESE  
M. MENDES Eduardo**

**JURY**

M. DUC Gilles	, Rapporteur
M. LAROCHE Edouard	, Rapporteur
M. MENDES Eduardo	, Directeur de thèse
M. KARIMI Alireza	, Examineur
M. SENAME Olivier	, Examineur



**Grenoble INP**

No. attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**THESE**

*pour obtenir le grade de*

**DOCTEUR de Grenoble INP**

***Spécialité : AUTOMATIQUE-PRODUCTIQUE***

préparée au LCIS (Laboratoire de Conception et d'Intégration des Systèmes)

dans le cadre de l'Ecole Doctorale :

**Electronique, Electrotechnique, Automatique, Traitement du Signal**

*présentée et soutenue publiquement*

*par*

**Hoang Bao LE**

*le 29/11/2010*

**Titre :**

**Contribution aux méthodes de synthèse de correcteurs  
d'ordres réduits sous contraintes de robustesse et aux  
méthodes de réduction de modèles pour la synthèse robuste en  
boucle fermée**

***Directeur :***

Eduardo Mendes

Professeur, Grenoble INP



# Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein de l'équipe Modélisation, Analyse et Commande des systèmes (MACSY) du Laboratoire de Conception et d'Intégration des Systèmes (LCIS).

Avant tout, j'adresse mes sincères remerciements aux membres du jury pour l'honneur qu'il me font en acceptant d'examiner mes travaux.

J'aimerais remercier mon directeur de thèse, Monsieur le Professeur **Eduardo MENDES** de m'avoir encadré durant ces trois années de thèse. Je le remercie pour sa disponibilité, ses conseils précieux. Je le remercie de m'avoir fait profiter de sa grande compétence et son expérience qui m'ont permis de mener à bien ce travail. Je lui exprime toute ma gratitude, ma reconnaissance et mon respect le plus profond.

J'adresse mes remerciements à Monsieur le Professeur **Gilles DUC** et Monsieur le Professeur **Edouard LAROCHE** d'avoir accepté de rapporter sur ce travail de thèse. Je les remercie pour l'ensemble des commentaires et remarques qui ont permis d'améliorer de manière significative le document.

Je remercie chaleureusement Monsieur **Alireza KARIMI** et Monsieur le Professeur **Olivier SENAME** d'avoir accepté d'examiner ce travail de thèse. Je leur exprime toute ma gratitude.

Je n'oublie pas de remercier mes collègues de l'équipe MACSY ainsi que l'ensemble des membres et personnels du laboratoire LCIS et de l'école ESISAR qui ont largement contribué à la bonne ambiance de travail au quotidien.



## *Dédicaces*

*Je dédie ce travail à mes chers et aimables parents qui étaient toujours là pour me soutenir ; et à mon adorable épouse Thanh. Qu'ils trouvent dans ces mots l'amour profond que je porte pour eux.*



# Liste des publications

## Revue avec comité de lecture

[LM1] H. B. Le, et E. Mendes, *Model Reduction Method for Robust Control Design*, soumis à Automatica en Juillet 2010.

## Articles dans des conférences internationales avec actes

[LM2] H. B. Le, et E. Mendes, *Model Reduction for Robust Control of System under Technological Constraints*, soumis à IFAC World Congress 2011, Milan, Italie, 28 Août - 2 Septembre 2011.

[LM3] H. B. Le, et E. Mendes, *Une méthode d'identification par relais associée à une synthèse robuste de correcteur d'ordre réduit*, dans Sixième Conférence Internationale Francophone d'Automatique CIFA, Nancy, France, Juin 2010.

[LM4] H. B. Le, et E. Mendes, *Optimal Control for High Order Systems with Fixed PI Controller Based on Model Reduction and Constrained Optimization*, in Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control CDC09, pages 4036-4041, Shanghai, Chine, Décembre 2009.

[LM5] H. B. Le, et E. Mendes, *Optimal Control of Second-Order Linear Systems with Fixed Proportional-Integral Structure Controller*, in Proceedings of the European Control Conference ECC09, pages 2566-2571, Budapest, Hongrie, Août 2009.

[LM6] H. B. Le, et E. Mendes, *Optimal Control of First Order Linear Systems with Fixed Proportional-Integral Structure Controller*, in Proceedings of the IEEE 10th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, pages 1799-1804, Hanoi, Vietnam, Décembre 2008.

[LM7] R. Nouailletas, H. B. Le, E. Mendes, et D. Koenig *New Hybrid Model and Switched PI Observer for Dry Friction Systems*, in Proceedings of the 17th IFAC World Congress, pages 7504-7509, Séoul, Corée du Sud, Juillet 2008.

## **Article dans des conférences nationales avec actes**

[LM8] H. B. Le, et E. Mendes, *Méthodologie semi-analytique d'analyse et de synthèse de correcteurs sous contrainte d'ordre* dans *MajecSTIC*, Marseille, France, Octobre 2008.

# Table des matières

Remerciements . . . . .	iii
Dédicaces . . . . .	v
Liste des publications . . . . .	vii
Table des matières . . . . .	xii
Table des figures . . . . .	xvi
Liste des tableaux . . . . .	xvii
<b>1 Introduction générale</b>	<b>1</b>
1.1 Contexte et problématique . . . . .	2
1.2 État de l’art général . . . . .	3
1.3 Contribution de la thèse . . . . .	4
1.4 Organisation du mémoire . . . . .	7
<b>2 Synthèse optimale de correcteurs d’ordres réduits fixés sous contraintes de robuste- tesse</b>	<b>9</b>
2.1 Introduction . . . . .	10
2.2 Méthodologie générale de synthèse . . . . .	11
2.2.1 Démarche de la méthode . . . . .	11
2.2.2 Cahier des charges . . . . .	15
2.3 Correcteurs utilisés et systèmes étudiés . . . . .	20
2.3.1 Structures des correcteurs utilisés . . . . .	20
2.3.2 Base de modèles génériques . . . . .	21
2.4 Initialisation de l’algorithme d’optimisation . . . . .	23
2.4.1 Cas simple . . . . .	23
2.4.2 Cas général . . . . .	23
2.5 Formulation analytique du problème d’optimisation pour système du second ordre commandé par correcteur du premier ordre . . . . .	29
2.5.1 Formulation analytique du problème d’optimisation . . . . .	29
2.5.2 Résolution du problème d’optimisation . . . . .	32
2.6 Comparaison avec d’autres méthodes de synthèse de correcteurs . . . . .	34
2.6.1 Asservissement de vitesse d’un moteur à courant continu . . . . .	34
2.6.2 Régulation de niveau d’un réservoir d’eau . . . . .	38
2.7 Conception du feed-forward . . . . .	38
2.7.1 Principe de la commande par platitude . . . . .	40

2.7.2	Commande par platitude pour système linéaire à minimum de phase . . . .	41
2.7.3	Commande par platitude pour système linéaire à non minimum de phase .	41
2.7.4	Prise en compte des contraintes physiques . . . . .	42
2.7.5	Résultats en simulation . . . . .	43
2.8	Conclusion . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Réduction de modèle et Identification expérimentale</b>	<b>47</b>
3.1	Introduction . . . . .	49
3.2	Quelques méthodes de réduction de modèle dans la littérature . . . . .	49
3.2.1	Méthode de troncature modale . . . . .	50
3.2.2	Approximation de Padé ou des moments . . . . .	51
3.2.3	Méthode de troncature équilibrée . . . . .	51
3.2.4	Autres approches . . . . .	52
3.2.5	Réduction de modèle pour la commande . . . . .	53
3.3	Réduction de modèle dans le cas général . . . . .	53
3.3.1	Réduction de modèle pour la synthèse robuste en boucle fermée . . . . .	53
3.3.2	Méthode de réduction de modèle pour la synthèse robuste en boucle fermée	56
3.3.3	Détermination des paramètres du modèle réduit . . . . .	58
3.3.4	Résultats en simulation obtenus avec les systèmes de benchmark . . . . .	59
3.3.5	Diminution du conservatisme de la méthode de réduction de modèle . . . .	66
3.3.6	Réduction de modèle dans le cas de fonctions de transfert en boucle ou- verte ayant un comportement double intégrateur . . . . .	69
3.3.7	Commande robuste pour systèmes à paramètres incertains . . . . .	72
3.4	Caractéristiques du système de commande . . . . .	76
3.4.1	Configuration du système de commande . . . . .	77
3.4.2	Bruit de mesure . . . . .	78
3.4.3	Limitation du gain du correcteur en hautes fréquences . . . . .	79
3.5	Réduction de modèle en tenant compte de contraintes pratiques . . . . .	80
3.5.1	Réduction de modèle en assurant la marge de module en boucle fermée .	81
3.5.2	Réduction de modèle en assurant la marge de phase en boucle fermée . .	81
3.5.3	Application expérimentale : Procédé thermique . . . . .	82
3.6	Identification expérimentale pour obtenir le modèle réduit . . . . .	88
3.6.1	Méthode d'identification expérimentale basée sur une commande à relais	88
3.6.2	Application expérimentale : Boule en sustentation dans un tube . . . . .	90
3.7	Conclusion . . . . .	96
<b>4</b>	<b>Logiciels et Applications</b>	<b>99</b>
4.1	Introduction . . . . .	100
4.2	Systèmes du premier ordre . . . . .	100
4.2.1	Logiciel d'aide à la synthèse de correcteurs optimaux d'ordre 1 sous contraintes de robustesse . . . . .	100
4.2.2	Comparaison avec la synthèse convexe . . . . .	107
4.3	Systèmes du second ordre . . . . .	108

4.3.1	Logiciel d'aide à la synthèse de correcteurs optimaux d'ordre 2 sous contraintes de robustesse . . . . .	108
4.3.2	Comparaison avec la synthèse convexe . . . . .	109
4.4	Systèmes d'ordres élevés - Commande d'un véhicule sous-marin autonome . . .	112
4.4.1	Logiciel d'aide à la détermination du modèle réduit . . . . .	112
4.4.2	Commande d'un véhicule sous-marin autonome (VSA) . . . . .	114
4.5	Systèmes à paramètres incertains . . . . .	116
4.6	Conclusion . . . . .	119
<b>5</b>	<b>Conclusion générale et Perspectives</b>	<b>121</b>
	<b>Annexes</b>	<b>127</b>
A	Calcul de la fonction objectif . . . . .	127
B	Formulations analytiques pour la synthèse de correcteurs sur la base de modèles génériques . . . . .	127
B.1	Système du premier ordre contrôlé par un correcteur d'ordre 1 . . . . .	128
B.2	Système du premier ordre avec retard contrôlé par un correcteur d'ordre 1	131
B.3	Système du second ordre contrôlé par un correcteur d'ordre 1 . . . . .	132
B.4	Système du second ordre avec zéro contrôlé par un correcteur d'ordre 1 .	133
B.5	Système du premier ordre contrôlé par un correcteur d'ordre 2 . . . . .	134
B.6	Système du premier ordre avec retard contrôlé par un correcteur d'ordre 2	136
B.7	Système du second ordre avec zéro contrôlé par un correcteur d'ordre 2 .	137
B.8	Système du second ordre contrôlé par un correcteur d'ordre 2 . . . . .	139
C	Système double intégrateur contrôlé par un correcteur Proportionnel Dérivée . . .	139
C.1	Expressions analytiques . . . . .	139
C.2	Logiciel associé . . . . .	142
D	Extension pour les systèmes en temps discrets . . . . .	142
D.1	Système du 1 <sup>er</sup> ordre contrôlé par un correcteur PI numérique . . . . .	144
D.2	Système du 2 <sup>nd</sup> ordre contrôlé par un correcteur PI numérique . . . . .	147
D.3	Système du 1 <sup>er</sup> ordre contrôlé par un correcteur PID numérique . . . . .	148
D.4	Système du 2 <sup>nd</sup> ordre contrôlé par un correcteur PID numérique . . . . .	149
D.5	Logiciel associé . . . . .	150
E	Preuves . . . . .	152
E.1	Preuve du lemme 3.3.1 . . . . .	152
E.2	Preuve de la proposition 1 . . . . .	152
E.3	Preuve de la proposition 2 . . . . .	154
E.4	Preuve du lemme 3.4.1 . . . . .	154
E.5	Preuve de la proposition 3 . . . . .	155
E.6	Preuve du théorème 2 . . . . .	156
E.7	Preuve de la proposition 4 . . . . .	156
F	Logiciel d'aide à la synthèse optimale globale par la synthèse convexe . . . . .	156
F.1	Principe de la synthèse convexe . . . . .	157
F.2	Utilisation du logiciel . . . . .	163

---

G	Distance <i>nu-gap</i> et marge de stabilité généralisée . . . . .	165
H	Méthode du premier harmonique . . . . .	165
H.1	Approximation du premier harmonique . . . . .	165
H.2	Existence des cycles limites . . . . .	167
<b>Bibliographie</b>		<b>177</b>

# Table des figures

1.1	Contributions de la thèse . . . . .	5
2.1	Schéma classique du système en boucle fermée . . . . .	11
2.2	Schéma standard du système de régulation . . . . .	12
2.3	Interprétation géométrique de la norme $H_\infty$ . . . . .	16
2.4	Interprétation géométrique de la norme $H_2$ . . . . .	16
2.5	Interprétation géométrique des marges de robustesse . . . . .	17
2.6	Marge de phase et Amortissement en boucle fermée . . . . .	19
2.7	Marge de phase et dépassement . . . . .	19
2.8	Bonne marge de phase mais mauvaise marge de module . . . . .	20
2.9	Domaines de recherche de solutions . . . . .	25
2.10	Domaine de recherche des paramètres du correcteur d'ordre 1 pour le système du premier ordre : $A(x_1, M_\varphi)$ (courbe tiret), $A(x_1, M_{md})$ (courbe continue) . . . . .	27
2.11	Domaine de recherche des paramètres du correcteur d'ordre 1 pour le système du second ordre : $S_2(x_1)$ (courbe continue) . . . . .	27
2.12	Domaine de recherche des paramètres du correcteur d'ordre 1 pour le système du second ordre avec zéro $\tau < 0$ (en haut) et $\tau > 0$ (en bas). $S_2(x_1)$ (courbes continues) . . . . .	28
2.13	Domaine de recherche des paramètres du correcteur d'ordre 1 pour le système du premier ordre avec retard : $S_2(x_1)$ (courbe continue) . . . . .	29
2.14	Domaine faisable et point optimal . . . . .	33
2.15	Inverse de la fonction objectif . . . . .	35
2.16	Domaine faisable des paramètres du correcteur . . . . .	36
2.17	Réponses temporelles sans bruit de mesure : OPT (continu), A-OPT (tiret), et $H_\infty$ (pointillé-tiret) . . . . .	37
2.18	Réponses temporelles avec bruit de mesure : OPT (continu), A-OPT (tiret), et $H_\infty$ (pointillé-tiret) . . . . .	37
2.19	Réponses temporelles vis-à-vis de la référence et de la perturbation de commande : OPT (continu), et NCO (pointillé) . . . . .	39
2.20	Schéma de commande par platitude pour système linéaire à minimum de phase . . . . .	41
2.21	Schéma de commande par platitude pour système linéaire à non minimum de phase . . . . .	42
2.22	Trajectoires désirées sur la sortie . . . . .	44
2.23	Commande feed-forward . . . . .	45

2.24	Réponses temporelles vis-à-vis d'une référence (unité pour $t \geq 0$ ) et d'une perturbation de commande ( $d_u = 1$ pour $t \geq 18$ ) : trajectoire désirée $y_d$ (continu), sortie $y_p$ avec feed-forward (tiret) et sans feed-forward (pointillé-tiret) . . . . .	45
3.1	Diagrammes de Bode en gain du modèle réduit $H_{1r}$ (continu mince), modèle réduit $H_{2r}$ (continu en gras) et modèle complet $H$ (tiret) . . . . .	57
3.2	Diagrammes de Bode pour $H_2$ : modèle réduit (continu) et modèle complet (tiret)	61
3.3	Diagramme de Bode de la fonction de transfert de boucle $L_r(s) = H_{3r}(s)C(s)$ .	61
3.4	Diagrammes de Nyquist de la fonction de transfert de boucle pour le système complet $L(s) = H_2(s)C(s)$ (tiret) et pour le système réduit $L_r(s) = H_{2r}(s)C(s)$ (continu) . . . . .	63
3.5	Réponses temporelles pour le système complet (continu) et le système réduit (tiret) pour $H_1$ . . . . .	63
3.6	Réponses temporelles pour le système complet (continu) et le système réduit (tiret) pour $H_2$ . . . . .	64
3.7	Réponses temporelles pour le système complet (continu) et le système réduit (tiret) pour $H_3$ . . . . .	64
3.8	Réponses temporelles pour le système complet (continu) et le système réduit (tiret) pour $H_4$ . . . . .	65
3.9	Procédure de diminution du conservatisme de la méthode . . . . .	67
3.10	Réponses temporelles pour le système complet $H_2$ avec les correcteurs obtenus avant (courbe mince) et après (courbe en gras) la diminution du conservatisme de la méthode . . . . .	68
3.11	Diagrammes de Bode en boucle ouverte du système complet $L(s)$ (tiret) et du système réduit $L_r$ (bleu continu) . . . . .	71
3.12	Diagrammes de Nyquist en boucle ouverte du système complet $L(s)$ (tiret) et du système réduit $L_r$ (bleu continu) . . . . .	71
3.13	Réponses temporelles pour le système complet (continu) et le système réduit (tiret)	72
3.14	Diagrammes de Bode du modèle de synthèse (tiret), des modèles perturbés (continu) et du modèle nominal (point) . . . . .	73
3.15	Comparaison de marges de robustesse obtenues avec les différents correcteurs : MR-ROB1 (astérisque), RST (cercle) and $H_\infty$ (diamant) . . . . .	74
3.16	Réponses temporelles vis-à-vis d'un échelon de référence : MR-ROB1 (bleu continu), RST (rouge point-tiret) and $H_\infty$ (noir tiret) . . . . .	75
3.17	Diagrammes de Bode du modèle de synthèse (tiret), des modèle perturbés (continu) et du modèle nominal (point) . . . . .	75
3.18	Réponses temporelles vis-à-vis d'un échelon de référence : MR-ROB1 (continu) et MR-ROB2 (tiret) . . . . .	76
3.19	Maquette d'un procédé thermique . . . . .	83
3.20	Détermination de la pulsation $\omega_0$ . . . . .	84
3.21	Diagrammes de Bode du modèle réduit (continu) et du modèle complet (tiret) . .	85
3.22	Diagrammes de Black-Nichols pour le système réduit (continu) et le système complet (tiret) . . . . .	86

3.23	Fonctions de sensibilité du système réduit (continu) et du système complet (tiret)	86
3.24	Réponse de la sortie vis-à-vis de la référence et d'une perturbation de commande de type échelon . . . . .	86
3.25	Expérimentation pour mesurer la marge de phase . . . . .	87
3.26	Mesure de la marge de phase de $H(s)$ contrôlé par $C(s)$ : sortie du relais (graphe supérieur), entrée du relais (graphe inférieur) . . . . .	87
3.27	Expérimentation pour mesurer la marge de module . . . . .	88
3.28	Mesure de la marge de module de $H(s)$ contrôlé par $C(s)$ : sortie du relais (graphe supérieur), entrée du relais (graphe inférieur) . . . . .	89
3.29	Identification expérimentale par relais avec retard . . . . .	89
3.30	Principe d'identification par relais avec retard . . . . .	91
3.31	Vue de la balle en sustentation dans un tube . . . . .	91
3.32	Comparaison des diagrammes de Bode des modèles complet, mesuré et identifié de la balle dans un tube . . . . .	93
3.33	Comparaison des marges de robustesse entre système réduit et système complet (correcteur PI) . . . . .	94
3.34	Comparaison fréquentielle entre PI et RST . . . . .	95
3.35	Comparaison temporelle entre PI (trait continu) et RST (trait pointillé) . . . . .	96
4.1	Interface graphique du logiciel de synthèse de correcteurs d'ordre 1 . . . . .	101
4.2	Système LTI SISO en boucle fermée considéré . . . . .	102
4.3	Définition du système à contrôler . . . . .	102
4.4	Spécification du cahier des charges . . . . .	103
4.5	Valeurs initiales des paramètres (facultatif) . . . . .	104
4.6	Paramètres du correcteur optimal obtenu . . . . .	104
4.7	Caractéristiques obtenues en boucle fermée . . . . .	105
4.8	Graphiques proposés par le logiciel . . . . .	106
4.9	Paramètres auxiliaires . . . . .	107
4.10	Interface graphique du logiciel de synthèse de correcteurs d'ordre 2 . . . . .	110
4.11	Interface graphique du logiciel de réduction de modèle . . . . .	113
4.12	Diagrammes de Bode : modèle complet (rouge tiret), modèle réduit (bleu continu)	115
4.13	Réponses indicielles vis-à-vis d'une référence : OPT (bleu continu), HIFOO (rouge tiret) . . . . .	115
4.14	Réponses indicielles vis-à-vis d'un échelon de perturbation de commande : OPT (bleu continu), HIFOO (rouge tiret) . . . . .	116
4.15	L'interface graphique du logiciel d'aide à la détermination de modèle pour systèmes à multi-paramètres . . . . .	117
4.16	Diagrammes de Bode du modèle de synthèse (tiret), des modèles perturbés (continu) et du modèle nominal (point) . . . . .	117
4.17	Comparaison de marges de robustesse obtenues avec les différents correcteurs : OPT (cercle), HIFOO (astérisque) . . . . .	118
4.18	Réponses indicielles vis-à-vis d'une référence pour l'ensemble des valeurs des paramètres du système : OPT (bleu continu), HIFOO (rouge tiret) . . . . .	119

---

1	Interface graphique du logiciel d'aide à la synthèse d'un correcteur PD optimal pour système double intégrateur . . . . .	141
2	Logiciel d'aide à la synthèse d'un correcteur PD optimal pour le système double intégrateur : visualisation de courbes . . . . .	143
3	Schéma de la boucle fermée en temps discret . . . . .	144
4	Interface graphique du logiciel d'aide à la synthèse d'un correcteur PI-PID optimal en temps discret . . . . .	151
5	Logiciel d'aide à la synthèse d'un correcteur PI-PID optimal en temps discret : visualisation des courbes . . . . .	153
6	Garantie de la marge de module obtenue pour le système d'ordre complet . . . . .	155
7	Schéma standard de la boucle fermée . . . . .	157
8	Paramétrisation de Youla-Kucera . . . . .	159
9	Interface graphique du logiciel d'aide à la synthèse convexe d'un correcteur en temps discret . . . . .	164
10	Système bouclé contenant un élément non-linéaire . . . . .	166
11	Fonction relais . . . . .	167

# Liste des tableaux

2.1	Choix des marges de robustesse . . . . .	17
2.2	Domaines de recherche de solutions pour les correcteurs d'ordre 1 avec $X = [K \ z_c]^T$ . . . . .	26
2.3	Asservissement de vitesse d'un moteur à courant continu . . . . .	35
2.4	Asservissement de vitesse d'un moteur à courant continu - Relaxation de la contrainte de bruit . . . . .	38
2.5	Régulation de niveau d'un réservoir d'eau . . . . .	39
3.1	Modèles réduits pour $H_1 - H_4$ . . . . .	60
3.2	Validation des modèles réduits pour les systèmes $H_1 - H_4$ . . . . .	62
3.3	Correcteurs obtenus et propriétés en boucle fermée pour $H_1 - H_4$ . . . . .	62
3.4	Amélioration de performances par la diminution du conservatisme de la méthode . . . . .	68
3.5	Correcteur obtenu et propriétés en boucle fermée . . . . .	71
3.6	Propriétés des correcteurs pour l'ensemble des valeurs des paramètres du système . . . . .	73
3.7	Comparaison entre deux modèles de synthèse (3.36) et (3.37) . . . . .	75
3.8	Propriétés en boucle fermée du système complet et réduit . . . . .	84
3.9	Paramètres du modèle réduit . . . . .	85
3.10	Estimation de la marge de phase . . . . .	88
3.11	Paramètres du modèle réduit . . . . .	92
3.12	Résultats des régulateurs pour <i>Spec1</i> . . . . .	93
4.1	Comparaison entre la méthode proposée et la synthèse convexe pour les systèmes du premier ordre . . . . .	108
4.2	Comparaison entre la méthode proposée et la synthèse convexe pour les systèmes du second ordre . . . . .	111
4.3	Comparaison de correcteurs pour la commande d'un véhicule sous-marin autonome . . . . .	115
4.4	Propriétés des correcteurs pour l'ensemble des valeurs des paramètres du système . . . . .	118



# Chapitre 1

## Introduction générale

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Contexte et problématique</b>	<b>2</b>
<b>1.2</b>	<b>État de l'art général</b>	<b>3</b>
<b>1.3</b>	<b>Contribution de la thèse</b>	<b>4</b>
<b>1.4</b>	<b>Organisation du mémoire</b>	<b>7</b>

---

## 1.1 Contexte et problématique

De nombreux procédés industriels peuvent être modélisés par des systèmes linéaires invariants dans le temps (LTI). En conséquence, au cours des dernières décennies, de nombreuses méthodes avancées de synthèse de commandes ont été développées pour de tels systèmes. On peut citer la synthèse optimale LQG [1], la commande robuste  $H_\infty$  [2], [3], [4], ou la synthèse convexe [5] avec le formalisme LMI [6] et Q-paramétrisation [7], [8]. Pourtant, ces méthodes sont encore insuffisamment ou pas utilisées dans l'industrie. Plusieurs raisons peuvent expliquer ce constat :

- Tout d'abord, les méthodes avancées de l'automatique reposent sur un modèle mathématique du système physique contrôlé qui n'est souvent obtenu qu'aux prix d'efforts considérables. En pratique, le modèle du système physique, utilisé pour la synthèse de la commande, doit être précisément construit dans cette optique là. En effet, d'un côté s'il est « trop » complexe, il est inexploitable pour la synthèse, d'un autre côté, s'il est « trop » simple, il ne rend pas suffisamment bien compte du comportement du système.
- Puis, ces approches produisent le plus souvent des correcteurs d'ordres élevés qui ne sont pas souhaités en pratique. En effet, dans un contexte industriel, due aux contraintes du coût de fabrication et d'implémentation, les régulateurs d'ordres réduits sont le plus souvent désirés [9].
- Enfin, ces méthodes sont d'un abord difficile pour un praticien non spécialiste du domaine. En effet, le lien entre les données d'entrée de ces méthodes et les souhaits pratiques des praticiens n'est pas toujours immédiat. Par exemple, avec la synthèse  $H_\infty$ , les spécifications du cahier des charges doivent être traduites en des contraintes fréquentielles. Cette traduction se fait par essais/erreurs, jusqu'à obtention d'une synthèse satisfaisante, car il n'existe pas encore une méthodologie pour la détermination des contraintes fréquentielles à partir d'un cahier des charges donné [10].

Ainsi, les méthodes simples, telles que la très ancienne méthode de Ziegler-Nichols [11], de réglage des correcteurs sont très largement répandues dans l'industrie car elles ne demandent que très peu de temps et d'effort à l'ingénieur pour le choix des gains du régulateur. En effet, ce type de méthode requiert simplement un essai expérimental relativement aisé à réaliser, puis à partir de l'obtention de deux ou trois grandeurs relatives à l'essai, les gains du régulateur, dont la structure est imposée, sont déterminés par des abaques ou des formules très simples. Le principal inconvénient de ce type de méthode est que, ne disposant pas de modèle du système, l'ingénieur ne pourra faire que très peu d'analyse du système contrôlé même en utilisant les outils informatiques maintenant disponibles. De plus, la robustesse du système ne pourra pas être garantie, la prise en compte de contraintes physiques inhérentes au système réel se fera de manière largement sous-optimale, etc.

Il est donc nécessaire de rendre les méthodes avancées de l'automatique plus accessibles aux utilisateurs industriels. Pour cela, nos développements devront in fine être intégrés à des outils logiciels facilitant la procédure de conception d'un système de commande.

C'est dans cette perspective que s'inscrit notre travail. La thèse s'est déroulée dans le cadre d'une Allocation Doctorale de Recherche MESR au sein du groupe MACSY (Modélisation, Analyse et Commande des Systèmes dynamiques) du LCIS de octobre 2007 à octobre 2010.

Le groupe MACSY travaille depuis plusieurs années, sur la modélisation et la commande des systèmes physiques dynamiques. Le laboratoire dispose de plusieurs systèmes expérimentaux (systèmes mécatroniques, thermiques, hydrauliques) et collabore avec des partenaires industriels tels que le centre d'ingénierie hydraulique d'EDF, VALEO transmissions ou SKF-Aerospace pour qui la problématique adressée par cette thèse constitue un réel intérêt. Les collaborations avec les partenaires industriels nous ont permis, d'une part de mieux comprendre les besoins industriels d'avoir des outils de synthèse automatique de correcteurs linéaires d'ordres réduits, et d'autre part de tenir compte dans nos démarches des contraintes physiques et technologiques qui limitent les performances atteignables par les systèmes.

L'objet de notre travail est de deux ordres. Premièrement, les outils développés, bien qu'ils utilisent des méthodes avancées de l'automatique, doivent être accessibles à un ingénieur voire à un technicien non spécialiste de l'automatique. L'utilisateur n'aura pas à définir, par exemple, des filtres de pondération fréquentielle ou à réitérer la synthèse jusqu'à obtenir des diagrammes de Bode ou de Nyquist satisfaisant le cahier des charges car il est souvent dans l'incapacité de les interpréter. Deuxièmement, les correcteurs développés devront être d'ordres réduits (ordre 1, ou 2) afin de faciliter l'implantation pratique, et robustes aux incertitudes (variation des paramètres du système et/ou entrées inconnues).

## 1.2 État de l'art général

Le développement d'outils logiciels d'aide à la synthèse de correcteurs optimaux d'ordres réduits pour systèmes linéaires nécessite le rapprochement de plusieurs connaissances concernant la commande robuste, les problèmes d'optimisation, les approches fréquentielles classiques... Nous rappelons ci-dessous brièvement quelques éléments majeurs permettant de mieux situer notre travail.

Les techniques dites classiques, introduites dans les années 40, permettent d'exprimer certaines spécifications sur différents diagrammes tels que les diagrammes de Bode [12], Nyquist [13] et Black-Nichols [14]. Basée sur ces outils graphiques, la méthode de Ziegler-Nichols a été présentée [15] pour régler les paramètres de correcteurs de type PID qui sont très largement répandus dans les boucles d'asservissement industrielles. Une autre méthode classique, dite QFT (Quantitative Feedback Theory) [16], est basée sur le modelage du transfert de la boucle ouverte sur le diagramme de Black-Nichols.

Dans les années 70, avec les premiers développements des calculateurs numériques on a vu se développer la commande optimale de type LQ/LQG [1]. Ces méthodes permettent de considérer certaines spécifications de performance (e.g. critère énergétique).

La loi de commande doit être robuste vis-à-vis d'incertitudes de modèles (e.g. incertitudes sur les paramètres, dynamiques non modélisées, perturbations). Cette demande fait apparaître les méthodes dites robustes dans les années 80, telles que la synthèse  $H_\infty$  [17],  $H_2$  [18] et la  $\mu$ -analyse [19], [20]. Ces approches permettent d'imposer des spécifications de performance et de robustesse en terme de la norme  $H_\infty$  et/ou de la norme  $H_2$ . Les spécifications sont traduites par l'utilisation de filtres de pondération fréquentielle [21] ou par un modelage préalable de la boucle ouverte (loop-shaping) [22]. Ces méthodes résultent des progrès concernant la résolution

d'équations matricielles (Lyapunov, Riccati) ou de problèmes d'optimisation sous contraintes d'inégalités matricielles linéaires (LMI). Dans le même courant, les années 90 ont été marquées par la synthèse convexe [23] avec le formalisme LMI [24].

Après ce rappel succinct de grandes périodes dans l'évolution de l'automatique, plusieurs constats peuvent être retenus :

- Les paramètres des correcteurs d'ordres réduits (e.g. PID) sont souvent réglés "à la main" par des formules empiriques.
- Les synthèses par des méthodes avancées telles que LQG, ou placement des pôles de la boucle fermée peuvent mener à un correcteur dont la dimension est celle du système (de type PID si le système est du second ordre). Les méthodes de synthèse telles que synthèse  $H_\infty/H_2$ , ou synthèse convexe conduisent à des correcteurs d'ordres élevés même si le système est d'ordre réduit en raison des filtres de pondération ajoutés (synthèse  $H_\infty/H_2$ ) ou due à la paramétrisation de Youla (synthèse convexe).
- Il manque des méthodes avancées avec contrainte sur l'ordre du correcteur. Dans la littérature récente, il existe une toolbox libre Matlab dénommée HIFOO (H-Infinity Fixed-Order Optimization) [25] permettant la synthèse de correcteurs d'ordres fixés en minimisant la norme  $H_\infty$  de transferts de la boucle fermée pour les systèmes linéaires. HIFOO utilise un algorithme hybride d'optimisation locale non-convexe non-lisse qui est composé d'une méthode de quasi-Newton (BFGS), de paquets (bundle) et d'échantillonnage de gradients [26]. Cet algorithme hybride est implémenté dans une autre toolbox libre HANSO (Hybrid Algorithm for Non-Smooth Optimization) [27]. Comme d'autres méthodes de synthèse de type  $H_\infty$ , HIFOO ne permet pas d'imposer explicitement des contraintes de synthèse, c'est l'utilisateur qui doit traduire des spécifications en des filtres de pondérations. Voir aussi Karimi *et al.* [28] pour la synthèse  $H_\infty$  d'ordre fixé via l'optimisation convexe.

Dans ce mémoire, nous allons rapprocher la méthode de synthèse et la structure du correcteur en développant une méthode de synthèse automatique de correcteurs d'ordres réduits fixés, et des outils associés. Cela a pour but de donner accès aux industriels aux méthodes avancées de l'automatique. Nous comptons mettre à profit les nombreux algorithmes existants permettant de résoudre de manière efficace les problèmes convexes, quadratiques et même non convexes si des informations supplémentaires sont disponibles.

### 1.3 Contribution de la thèse

La contribution de la thèse est résumée par le schéma de la figure 1.1. Dans le cadre de cette thèse, nous avons considéré les systèmes LTI à contrôler qui sont soumis à des contraintes physiques et technologiques, telles que, la précision du capteur, la saturation de l'actionneur, les résolutions des CAN et CNA, etc. Ces contraintes, comme nous allons le montrer dans le chapitre 3, limitent la bande passante atteignable en boucle fermée. Il s'en suit qu'il suffit de modéliser et d'analyser ces systèmes dans une bande de fréquence limitée et non pas sur toutes les fréquences.

Une difficulté majeure lors du développement des lois de commande est l'étape préalable d'obtention d'un modèle de comportement ou de connaissance du système réel. Nous avons d'abord déterminé une base de modèles génériques d'ordres réduits (e.g. d'ordre 1 ou 2) qui

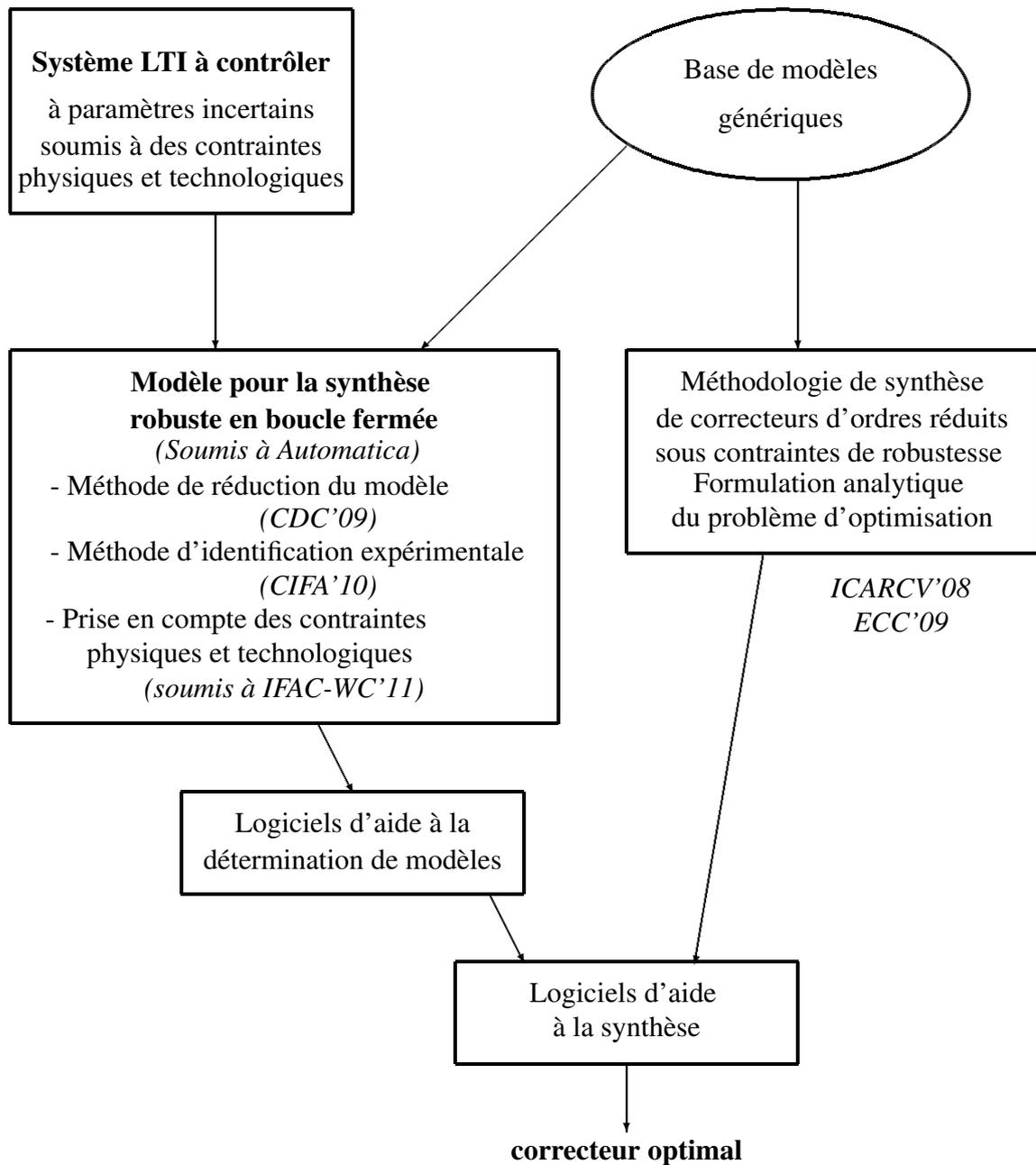


FIGURE 1.1 – Contributions de la thèse

puisse rendre compte d'une classe suffisamment large de systèmes rencontrés dans le cadre industriel dans le but de les contrôler en boucle fermée. En pratique, beaucoup de systèmes rencontrés sont d'ordre 1 ou 2, un outil d'aide à la synthèse automatique de correcteurs optimaux pour ce genre de systèmes serait donc d'un grand intérêt.

Nous avons proposé et démontré les propriétés qu'un modèle utilisé pour la synthèse doit satisfaire pour que la robustesse en boucle fermée du système à contrôler soit garantie. Basé sur ces résultats, nous avons développé plusieurs approches :

- Dans le cas des systèmes d'ordres élevés, une méthode de réduction de modèle est nécessaire. Puisque la bande passante atteignable en boucle fermée est limitée, un système d'ordre élevé peut être suffisamment bien approché par un modèle d'ordre réduit, sur une bande de fréquence limitée. Nous avons proposé une méthode de réduction de modèle, où le modèle d'ordre élevé est approché par un modèle réduit dans la base de modèles génériques en assurant que les marges de robustesse, obtenues avec le correcteur conçu basé sur le modèle réduit, seront au moins les mêmes avec le modèle d'ordre élevé. Contrairement aux méthodes de réduction de modèle existantes [29], [30], [31], notre méthode de réduction de modèle est dédiée à la synthèse de lois de commande qui garantiront la robustesse obtenue pour le système réel.
- Dans le cas des systèmes à paramètres incertains, la méthode proposée peut être utilisée pour déterminer un modèle de synthèse de manière à ce qu'un correcteur conçu basé sur ce modèle garantit les marges de robustesse pour l'ensemble des valeurs des paramètres du système.
- Lorsque le modèle du système à contrôler n'est pas disponible, nous avons développé une méthode d'identification expérimentale basée sur la méthode du relais permettant d'obtenir un modèle réduit dans la base de modèles génériques. La méthode est basée sur l'identification du diagramme de Bode du système à commander dans une zone de fréquence considérée, par l'utilisation d'une commande à relais stabilisant le système en boucle fermée autour du point de fonctionnement désiré. Le balayage fréquentiel est obtenu par l'insertion de retards appropriés dans la boucle.

Nous avons proposé une méthodologie d'analyse et de synthèse de correcteurs optimaux d'ordres réduits fixés (e.g. d'ordre 1 ou 2) pour satisfaire un cahier des charges simple déterminé par l'utilisateur. Plus précisément, la méthode consiste à déterminer un correcteur de structure donnée qui optimise le rejet de la perturbation de commande de type échelon, au sens de la norme  $H_2$ , en respectant des contraintes de robustesse, i.e, marge de module minimum, marge de phase minimum, amplification maximum du bruit de mesure sur la commande. L'objectif de conception et les contraintes de robustesse sont exprimés sous la forme de normes  $H_2$  et  $H_\infty$  converties ensuite en des fonctionnelles analytiques en fonction des gains inconnus du correcteur. Enfin, le problème de synthèse du correcteur est formulé en un problème d'optimisation non linéaire sous contraintes qui est résolu numériquement. En s'appuyant sur la base des modèles génériques d'ordres réduits, la méthode aboutit à une formulation d'optimisation mixte  $H_2/H_\infty$  semi-analytique. Cette formulation permet de mieux comprendre l'impact de chaque paramètre du régulateur sur la performance, la stabilité et la robustesse du système bouclé. Cela n'est pas le cas avec les méthodes de synthèse numériques [32], [33], [34]. De plus, la méthode proposée permet également d'avoir une représentation graphique des compromis entre différentes spécifi-

cations de conception.

Pour rendre l'approche plus accessible à un usage industriel, à partir des méthodes proposées, des outils logiciels ont été élaborés au cours de la thèse :

- Logiciels d'aide à la synthèse optimale de régulateurs d'ordres réduits fixés sous contraintes de robustesse
- Logiciels d'aide à la détermination de modèles utilisés pour la synthèse robuste en boucle fermée

## 1.4 Organisation du mémoire

Dans le chapitre 2, on présente une méthode de synthèse optimale de correcteurs d'ordres réduits fixés sous contraintes de robustesse. L'objectif de synthèse est d'obtenir un rejet optimal d'une perturbation de commande de type échelon. L'effet de cette perturbation sur la sortie du système est évalué par la norme  $H_2$  de la fonction de transfert correspondante qui sera minimisée. Les contraintes de robustesse, telles que la marge de module désirée et l'impact du bruit de mesure sur la commande sont évaluées par la norme  $H_\infty$  des fonctions de transfert correspondantes. La contrainte de marge de phase est exprimée par une inégalité calculée à partir du transfert de boucle. Le problème de synthèse est ensuite formulé en un problème d'optimisation sous contraintes. La formulation analytique du problème est introduit. On présente également les modèles du système et les structures du correcteur sur lesquels les expressions analytiques de l'objectif et des contraintes sont calculées en fonction de gains inconnus du correcteur. Se basant sur les expressions analytiques obtenues, une étude du choix du point initial se fait pour faciliter la résolution du problème d'optimisation. L'efficacité de la méthode est montrée à l'aide d'applications et de comparaisons avec d'autres méthodes. La méthode proposée est dédiée à la synthèse des lois de commande feedback, afin de pouvoir assurer des spécifications de poursuite, on présente une méthode d'élaboration des lois de commande feedforward qui est fondée sur le principe de platitude.

Le chapitre 3 est dédié au problème de réduction de modèle pour la synthèse robuste en boucle fermée. On commence par présenter quelques méthodes de réduction existantes dans la littérature. Puis on présente une nouvelle approche de réduction de modèle qui assure qu'avec le correcteur synthétisé à l'aide du modèle réduit, les marges de robustesse obtenues pour le système réel seront meilleures que celles obtenues pour le modèle réduit. Les modèles réduits et la méthode de détermination des paramètres sont aussi introduits. D'ailleurs, on montre que l'approche proposée peut être utilisée aussi pour déterminer un modèle nominal d'un système à paramètres incertains. Quelques résultats obtenus en simulation sont présentés. Puis on présente les caractéristiques physiques et technologiques du système de commande qui doivent être prises en compte lors de la conception des lois de commande. La méthode de réduction de modèle est ensuite modifiée en tenant compte de ces caractéristiques. Une application expérimentale est présentée pour valider la méthode. On termine ce chapitre par l'introduction d'une méthode d'identification expérimentale permettant d'obtenir le modèle réduit du système. Cette méthode d'identification est illustrée à travers une application expérimentale.

Dans le chapitre 4, on développe des outils logiciels d'aide à la conception. A partir d'un

cahier des charges précisant la confiance a priori sur le modèle du système à commander, et de la connaissance des niveaux de bruit présent sur la mesure et toléré sur la commande, ces outils devront produire des correcteurs optimaux d'ordre réduit (i.e. d'ordre 1 ou 2). Un outil d'aide à l'obtention du modèle réduit est aussi présenté. L'efficacité de notre approche est illustrée à travers des modèles de benchmark de systèmes du premier ordre et second ordre. Un cas d'application aux systèmes d'ordres élevés, la commande robuste d'un véhicule sous-marin autonome, est aussi abordé. Les résultats sont comparés avec ceux obtenus par la synthèse convexe [5] et l'outil HIFOO [25].

On termine ce mémoire par une conclusion générale et quelques perspectives. Les preuves des théorèmes proposés et les détails des calculs sont présentés en annexe. En annexe, nous présentons aussi l'extension de la méthode de synthèse proposée pour des systèmes en temps discret.

# Chapitre 2

## Synthèse optimale de correcteurs d'ordres réduits fixés sous contraintes de robustesse

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>10</b>
<b>2.2</b>	<b>Méthodologie générale de synthèse</b>	<b>11</b>
2.2.1	Démarche de la méthode	11
2.2.2	Cahier des charges	15
<b>2.3</b>	<b>Correcteurs utilisés et systèmes étudiés</b>	<b>20</b>
2.3.1	Structures des correcteurs utilisés	20
2.3.2	Base de modèles génériques	21
<b>2.4</b>	<b>Initialisation de l'algorithme d'optimisation</b>	<b>23</b>
2.4.1	Cas simple	23
2.4.2	Cas général	23
<b>2.5</b>	<b>Formulation analytique du problème d'optimisation pour système du second ordre commandé par correcteur du premier ordre</b>	<b>29</b>
2.5.1	Formulation analytique du problème d'optimisation	29
2.5.2	Résolution du problème d'optimisation	32
<b>2.6</b>	<b>Comparaison avec d'autres méthodes de synthèse de correcteurs</b>	<b>34</b>
2.6.1	Asservissement de vitesse d'un moteur à courant continu	34
2.6.2	Régulation de niveau d'un réservoir d'eau	38
<b>2.7</b>	<b>Conception du feed-forward</b>	<b>38</b>
2.7.1	Principe de la commande par platitude	40
2.7.2	Commande par platitude pour système linéaire à minimum de phase	41
2.7.3	Commande par platitude pour système linéaire à non minimum de phase	41
2.7.4	Prise en compte des contraintes physiques	42
2.7.5	Résultats en simulation	43
<b>2.8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>46</b>

---

## 2.1 Introduction

De nombreux procédés industriels peuvent être modélisés par des systèmes linéaires invariants dans le temps. En conséquence, au cours des dernières décennies, de nombreuses méthodes avancées de commande ont été développées pour de tels systèmes. Les plus reconnues sont la commande Linéaire Quadratique Gaussienne [35], la synthèse convexe [36], la commande  $H_\infty$  [2]. Ces méthodes ont été appliquées avec succès [37], [38], [39], [40], [41]. Néanmoins, quelques inconvénients, qui les rendent insuffisamment utilisées dans l'industrie, peuvent être mentionnés. Premièrement, les techniques de commande avancées mènent le plus souvent à des régulateurs d'ordre élevé et leur implantation peut être économiquement problématique. Deuxièmement, le cahier des charges ne peut pas être imposé directement. En effet, avec la synthèse  $H_\infty$ , il est délicat d'établir les filtres de pondération ou de modelage qui permettent de satisfaire le cahier des charges. La synthèse convexe nécessite de traduire les spécifications en des contraintes LMI (Inégalités Matricielles Linéaires). Tandis que la difficulté de la commande optimale LQG repose sur le choix des matrices de pondérations.

Ainsi, les méthodes, telles que la très ancienne méthode de Ziegler-Nichols, sont très largement répandues dans l'industrie car elles ne nécessitent aucun modèle du système et conduisent à des correcteurs de type PI ou PID ayant un ordre réduit. Par contre, elles ne permettent pas l'analyse du système et l'optimisation du fonctionnement.

Entre les deux extrêmes, nous proposons ici une méthode semi analytique d'analyse et de synthèse de correcteurs sous contraintes d'ordre qui soit simple, i.e facilement utilisable par un ingénieur, mais suffisamment complète pour pouvoir utiliser les outils modernes de l'automatique. Plus précisément, la méthode consiste à déterminer un correcteur de structure donnée qui minimise l'influence de la perturbation de type d'échelon sur la sortie en respectant des contraintes de robustesse, i.e, marge de module minimum, marge de phase minimum, amplification maximum du bruit de mesure. L'objectif de conception et les contraintes de robustesse sont exprimés sous la forme de normes  $H_2$  et  $H_\infty$  converties ensuite en des fonctionnelles analytiques en termes des gains inconnus du correcteur. Enfin, le problème de synthèse du correcteur est formulé en un problème d'optimisation non linéaire sous contraintes qui est résolu numériquement. De plus, la méthode repose sur des modèles génériques qui peuvent rendre compte d'une classe suffisamment large de systèmes rencontrés dans l'industrie.

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord présenter la méthodologie de synthèse optimale du correcteur d'ordre réduit sous contraintes de robustesse. Ensuite, les structures de correcteur et les modèles génériques sur lesquels a porté la méthode proposée seront abordés. Pour illustrer les résultats, nous donnerons également la formulation analytique du problème de synthèse dans les cas d'un système du seconde ordre contrôlé par un correcteur d'ordre 1. Les calculs pour l'ensemble des modèles génériques et des structures de correcteurs sont détaillés en annexe B. L'extension de la méthode de synthèse aux systèmes en temps discret est présentée en annexe D.

Étant donné que la méthode proposée ne traite que les propriétés en boucle fermée, (e.g. la stabilité, le rejet de perturbations, la robustesse vis-à-vis des incertitudes du procédé, l'impact du bruit de mesure sur la commande), un correcteur feed-forward pourra être nécessaire pour satisfaire les spécifications de poursuite de la référence. Nous compléterons notre approche par l'utilisation, par exemple, du concept de platitude permettant de prendre en compte, lors de la

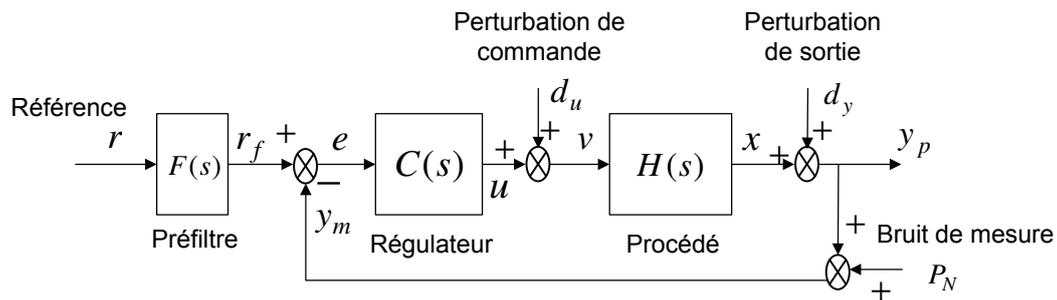


FIGURE 2.1 – Schéma classique du système en boucle fermée

génération des trajectoires désirées, des contraintes physiques du système telles que la saturation de l'actionneur, la valeur maximale de la sortie, etc.

Nous terminerons ce chapitre en comparant la méthode proposée avec d'autres méthodes de synthèse existantes dans la littérature, au moyen de deux applications : asservissement de vitesse d'un moteur à courant continu et régulation de niveau d'un réservoir d'eau avec retard.

## 2.2 Méthodologie générale de synthèse

L'approche proposée est une technique de synthèse semi-analytique de correcteurs d'ordres fixés à partir de modèles génériques simples qui garantit les performances et robustesse obtenues pour le système réel. Le schéma classique d'une boucle de régulation est représenté dans la figure 2.1, où  $H(s)$  est le procédé,  $C(s)$  est le régulateur de boucle permettant de stabiliser le système en boucle fermée et de rejeter les perturbations,  $F(s)$  est le préfiltre utilisé pour ajuster la poursuite de la référence. Il y a quatre signaux externes agissant sur le système : la perturbation de commande  $d_u$ , la perturbation de sortie  $d_y$ , le bruit de mesure  $P_N$ , et la référence  $r$ . Les deux sorties à surveiller sont la sortie du procédé  $y_p$  et la variable de commande  $u$ .

Le schéma classique de la figure 2.1 peut être mis sous la forme standard représentée par la figure 2.2, où  $w$  représente les entrées externes,  $z$  comporte les variables à réguler,  $y$  sont les signaux disponibles pour la synthèse de commande, et  $u$  est la sortie du correcteur. Bien que le procédé à commander soit à une seule entrée et une seule sortie (SISO), le système bouclé est à multi-entrées et multi-sorties (MIMO) : quatre entrées  $w = [r \ d_u \ d_y \ P_N]^T$ , deux sorties  $z = [y_p \ u]^T$ . Le fait qu'il y ait plusieurs entrées de perturbation et deux sorties considérées avec de plus une contrainte d'ordre sur  $C(s)$ , amène, non pas à un problème de détermination directe du correcteur, mais à un problème d'optimisation sous contraintes.

### 2.2.1 Démarche de la méthode

#### Stratégie de synthèse

Le correcteur  $K = [CF \ -C]$  dans la figure 2.2 est à deux degrés de liberté, le régulateur de boucle fermée  $C(s)$  et le filtre de la consigne  $F(s)$ . La procédure de conception est donc

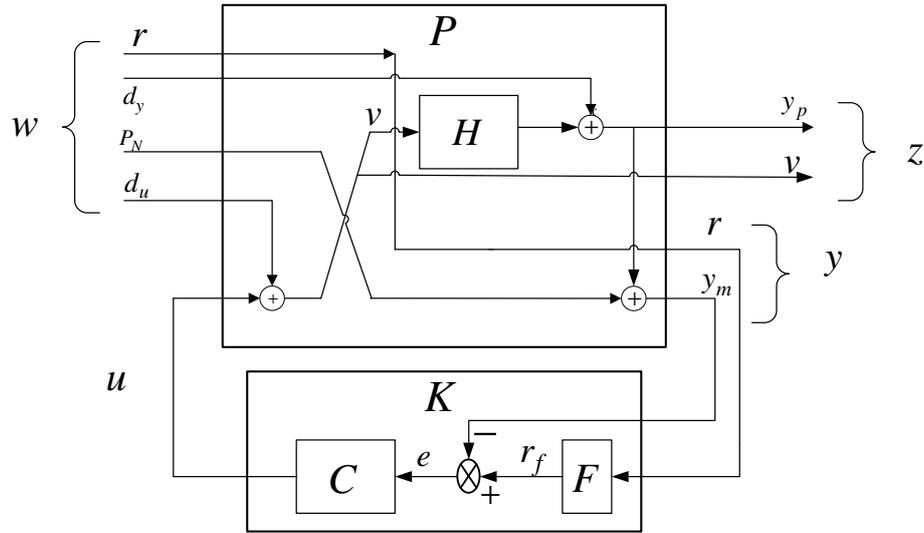


FIGURE 2.2 – Schéma standard du système de régulation

constituée de deux étapes. Tout d'abord,  $C(s)$  est synthétisé de manière à minimiser l'impact de la perturbation de commande  $d_u$  de type échelon sur la sortie du procédé  $y_p$  en respectant les contraintes de robustesse, i.e. marge de module, marge de phase et amplification du bruit sur la commande. Ensuite, le préfiltre  $F(s)$  est conçu afin de satisfaire les spécifications de poursuite de la référence. Par exemple, l'utilisation du concept de platitude permet de prendre en compte, lors de la génération des trajectoires désirées, les contraintes physiques du système telles que la saturation de l'actionneur, la valeur maximale de la sortie, etc.

### Contrainte d'ordre du correcteur

Pour des contraintes d'implantation et de temps de calcul [42], dans un contexte industriel, des correcteurs d'ordre réduit sont largement utilisés. C'est la raison pour laquelle, nous traitons directement la contrainte d'ordre du correcteur lors de la conception de la loi de commande. Ce correcteur est fonction d'un vecteur de gains inconnus  $X \in \Omega^{n_c}$ , avec  $\Omega^{n_c}$  l'ensemble de valeurs possibles pour  $X$  et  $n_c$  le nombre de gains de  $C(s, X)$ .

$$C(s, X) \text{ avec des gains inconnus } X \in \Omega^{n_c} \quad (2.1)$$

### Objectif de synthèse

La quantité à optimiser, minimisée dans notre cas, est l'impact de la perturbation de commande de type échelon sur la sortie. Ceci correspond à un objectif industriel très important d'un système asservi (le rejet de perturbations constantes). Cet impact est évalué par la norme  $H_2$  du transfert  $H_{y_p d_u - s}$  :

$$H_{y_p d_u - s} = \frac{H}{1 + HC} \frac{1}{s + \alpha} \Big|_{\alpha \rightarrow 0} \quad (2.2)$$

où le paramètre  $\alpha > 0$  rend  $H_{y_p d_{u-s}}$  asymptotiquement stable, condition nécessaire pour calculer la norme  $H_2$  (voir annexe A).

### Contraintes de synthèse

**La stabilité en boucle fermée** est une contrainte préalable qui sera exprimée en appliquant le critère de Routh.

Les contraintes « habituelles » d'un système asservi seront également prises en compte : robustesse par rapport aux incertitudes sur le processus à commander ou à son évolution au cours du temps. Ces contraintes sont prises en compte sous la forme de marges de module  $M_{md}$  et de phase  $\varphi_d$ .

**La marge de module** est exprimée par la norme  $H_\infty$  de la fonction de sensibilité :

$$\|H_{y_p d_y}\|_\infty = \left\| \frac{1}{1 + HC} \right\|_\infty = \|S(s)\|_\infty \leq \frac{1}{M_{md}} \quad (2.3)$$

où  $M_{md} \in (0, 1)$  est la marge de module désirée. L'intégrale de Bode indique que la marge de module maximale est bornée par les pôles instables [43].

**La marge de phase** requiert que :

$$\pi + \arg H(j\omega_{gc}) + \arg C(j\omega_{gc}) \geq \varphi_d \quad (2.4)$$

où  $\varphi_d$  est la marge de phase désirée, et  $\omega_{gc}$  est la pulsation de croisement, solution de l'équation suivante :

$$|H(j\omega_{gc})| \cdot |C(j\omega_{gc})| = 1 \quad (2.5)$$

**L'impact du bruit de mesure sur la commande**  $N_{max}$  est une contrainte pratique très importante parce qu'elle permet d'éviter l'usure prématurée de l'actionneur, de diminuer la consommation d'énergie, le bruit sonore et l'excitation des dynamiques non modélisées situées en hautes fréquences. Cette contrainte est exprimée en une inégalité de la norme  $H_\infty$  du transfert entre  $P_N$  et  $u$  :

$$\|H_{uP_N}\|_\infty|_{\omega \geq \omega_N} = \|SC\|_\infty|_{\omega \geq \omega_N} \leq N_{max} \quad (2.6)$$

où  $\omega_N$  est la pulsation minimale du bruit de mesure. Avec l'inégalité (2.7), (2.6) est satisfaite en considérant (2.3).

$$\|C\|_\infty|_{\omega \geq \omega_N} \leq M_{md}N_{max} \quad (2.7)$$

#### Remarque 2.2.1 (Limitation de gain du correcteur en hautes fréquences)

De 2.7, nous voyons que le bruit de mesure limite le gain du correcteur en hautes fréquences et donc limite la bande passante admissible en boucle fermée. Nous reviendront sur cet aspect dans le chapitre 3. ♦

### Formulation du problème d'optimisation

Avec (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) et (2.7), le problème de conception peut être formulé en un problème d'optimisation :

$$\arg \min_{X \in \Omega^{n_c}} f_0(X) = \|H_{y_p d_{u-s}}(X)\|_2 \quad (2.8)$$

sous les contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) Stabilité en boucle fermée} \\ \text{ii) } \|C\|_\infty|_{\omega > \omega_N} \leq M_{md} N_{max} \\ \text{iii) } \left\| \frac{1}{1+HC} \right\|_\infty \leq \frac{1}{M_{md}} \\ \text{iv) } \pi + \arg H(j\omega_{gc}) + \arg C(j\omega_{gc}) \geq \varphi_d \\ \text{avec } |H(j\omega_{gc})| \cdot |C(j\omega_{gc})| = 1 \end{array} \right. \quad (2.9)$$

La contrainte d'ordre du correcteur (2.1) est intégrée dans (2.9) en termes de gains inconnus du correcteur.

#### Remarque 2.2.2 (Généricité et Difficulté)

*L'approche proposée est tout à fait générale mais la difficulté consiste à résoudre, dans le cas général, le problème d'optimisation.* ♦

La résolution de ce problème non-linéaire passe par une première étape où la fonction objectif de (2.8) et les contraintes (2.9) sont exprimées sous la forme de fonctionnelles non linéaires en fonction des gains du correcteur. Pour cela, nous rappelons un lemme et un théorème qui permettent de calculer et d'évaluer la norme  $H_2$  et la norme  $H_\infty$  d'un transfert linéaire en temps continu.

#### Lemme 2.2.1 (Calcul de la norme $H_2$ [5])

Considérons  $G(s) \sim \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ , une réalisation minimale de la fonction de transfert  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ , avec  $A$  asymptotiquement stable, i.e. toutes ses valeurs propres sont strictement négatives. La norme  $H_2$  de la fonction de transfert  $G(s)$  est calculée par :

$$\|G(s)\|_2 = \sqrt{\text{trace}(CW_{ctr}C^T)} = \sqrt{\text{trace}(B^T W_{obs}B)} \quad (2.10)$$

où  $W_{ctr}$  et  $W_{obs}$  sont les grammians de commandabilité et d'observabilité, respectivement, solutions des équations de Lyapunov suivantes :

$$AW_{ctr} + W_{ctr}A^T + BB^T = 0 \quad (2.11)$$

$$A^T W_{obs} + W_{obs}A + C^T C = 0 \quad (2.12)$$

■

**Théorème 1 (Évaluation de la norme  $H_\infty$  [44])**

La matrice Hamiltonienne associée avec le transfert  $G(s)$  est donnée par :

$$Ham_\gamma(s) = \begin{bmatrix} A + BR^{-1}D^TC & -BR^{-1}B^T \\ C^T(I + DR^{-1}D^T)C & -(A + BR^{-1}D^TC)^T \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

avec  $R = \gamma^2 I - D^T D > 0$ , alors  $\|G(s)\|_\infty < \gamma$  si et seulement si tout  $Ham_\gamma(s)$  ne possède aucune valeur propre imaginaire. ■

**Remarque 2.2.3 (Norme  $H_2$  vs Norme  $H_\infty$ )**

- Nous avons choisi la norme  $H_2$  comme critère de performance et la norme  $H_\infty$  comme critères de robustesse. En effet, la norme  $H_\infty$  représente la valeur maximale de la fonction de transfert. La minimisation de cette norme est donc centrée sur une seule fréquence, le pire cas. C'est pour cela qu'elle est souvent considérée comme critère de robustesse. La figure 2.3 illustre l'interprétation physique de la norme  $H_\infty$ . Tandis que la norme  $H_2$  représente l'énergie du signal de sortie. La minimisation de cette norme est donc distribuée sur toutes les fréquences. Ainsi cette norme représente la performance moyenne, donc elle est souvent choisie comme critère de performance. La figure 2.4 illustre l'interprétation géométrique de la norme  $H_2$ , la racine carrée de la surface au-dessous la fonction de transfert.
- Malgré l'association de ces deux normes, la méthode proposée n'est pas une approche mixte  $H_2/H_\infty$  répandue dans la littérature [45]. En effet, nous traitons en plus les contraintes de l'ordre du correcteur et de la marge de phase. ◆

Dans une deuxième étape, le problème non convexe est résolu numériquement. Afin de maximiser la probabilité d'obtenir une solution optimale au problème, un pré-calcul est effectué automatiquement afin de déterminer un point de départ pour les gains du correcteur qui satisfait les contraintes et qui se trouve dans la zone connexe où se situe la valeur optimale au sens de (2.8) sous les contraintes (2.9) (nous reviendrons sur cette étape dans les sections 2.4 et 2.5).

## 2.2.2 Cahier des charges

L'objectif de donner accès à la méthode proposée à un ingénieur voire à un technicien non spécialiste de l'automatique, nécessite que le cahier des charges, donnée d'entrée de la méthode, soit "compréhensible" et lié directement aux spécifications niveau "utilisateur". Nous avons développé le cahier des charges dans cette optique là.

Les trois paramètres de conception :  $N_{max} > 0$ ,  $M_{md} \in (0, 1)$ , et  $\varphi_d$  sont directement liés aux propriétés en boucle fermée et peuvent être utilisés pour ajuster le compromis entre la performance et la robustesse.

Le paramètre  $N_{max}$  est lié à l'atténuation du bruit de mesure sur la commande qui est une contrainte pratique important permettant d'éviter l'usure prématurée de l'actionneur, de diminuer la consommation d'énergie, etc. Par contre, cette contrainte limite le gain du correcteur en

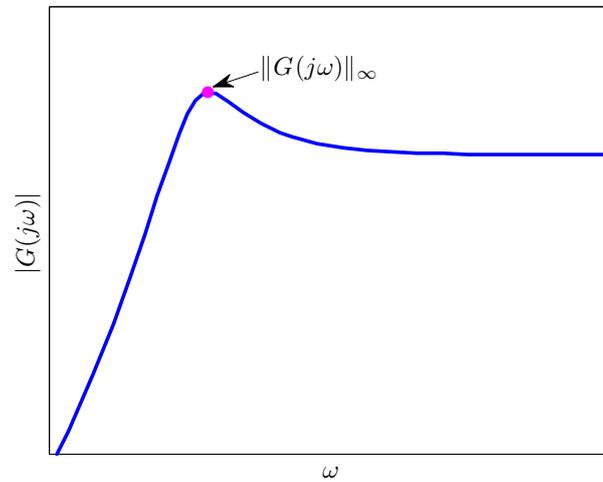
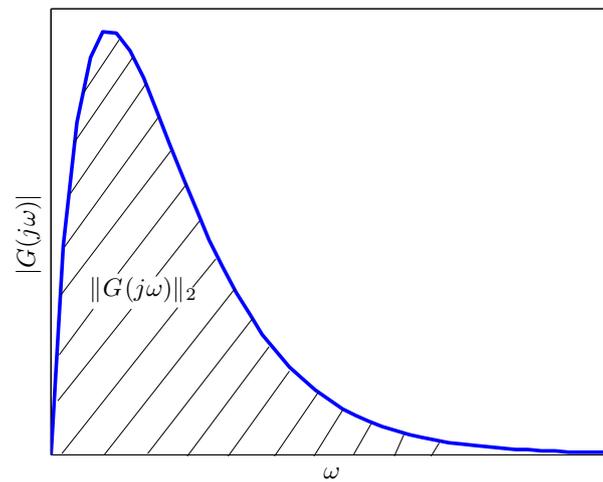
FIGURE 2.3 – Interprétation géométrique de la norme  $H_\infty$ FIGURE 2.4 – Interprétation géométrique de la norme  $H_2$

TABLE 2.1 – Choix des marges de robustesse

1 <sup>er</sup> cas	$M_{md} = 0.5$ et $\varphi_d = 45^\circ$
2 <sup>e</sup> cas	$M_{md} = 0.8$ et $\varphi_d = 60^\circ$

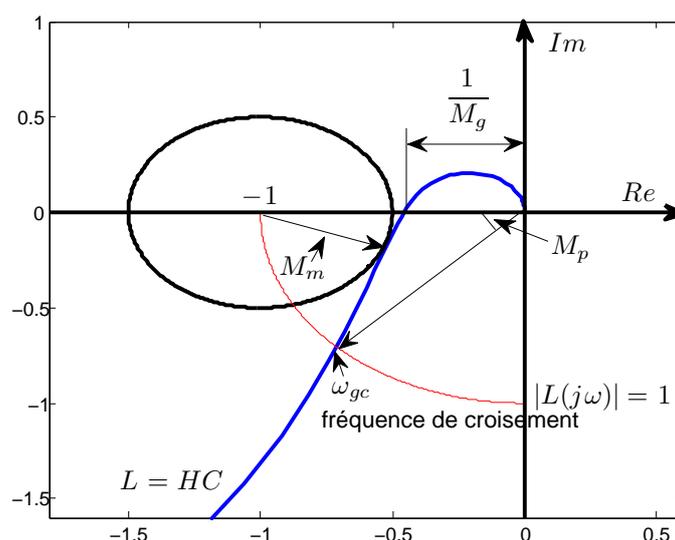


FIGURE 2.5 – Interprétation géométrique des marges de robustesse

hautes fréquences, et donc la performance du système en terme de bande passante atteignable. Concernant le choix de  $N_{max}$ , le praticien utilisateur de la méthode devra donner l'amplitude expérimentale du bruit de mesure  $P_N$  ainsi que l'amplitude acceptable du bruit qu'il souhaite sur la commande  $b_u$ .  $N_{max}$  est alors calculé par le rapport entre ces deux quantités.

$$N_{max} = \frac{(b_u)_{cc}}{(P_N)_{cc}} \quad (2.14)$$

où  $(b_u)_{cc}$  est l'amplitude crête-à-crête du bruit acceptable sur la commande et  $(P_N)_{cc}$  est l'amplitude crête-à-crête du bruit de mesure.

Quant à  $M_m$  et  $\varphi_d$ , ces paramètres assurent la robustesse du correcteur vis-à-vis d'incertitudes de modèles. Concernant le choix de leurs valeurs, la méthode peut proposer à l'utilisateur :

- 1<sup>er</sup> cas : l'utilisateur a confiance dans le modèle du procédé et celui-ci est invariant. Dans ce cas, il pourra prendre les marges de robustesse usuelles,  $M_{md} = 0.5$  et  $\varphi_d = 45^\circ$ .
- 2<sup>e</sup> cas : Autrement, c'est-à-dire, le modèle du procédé présente des incertitudes. Dans ce cas, des marges plus sécurisées pourront être choisies,  $M_{md} = 0.8$  et  $\varphi_d = 60^\circ$ .

L'intérêt de l'approche proposée est que l'utilisateur ne spécifie que  $N_{max}$  selon (2.14) et le couple  $(M_{md}, \varphi_d)$  selon la table 2.1.

Pour justifier le choix des marges de module et de phase comme critères de robustesse, nous rappelons d'abord les notions de marges de robustesse.

**Rappel 2.2.1 (Marges de robustesse)**

Considérons le diagramme de Nyquist du transfert de boucle ouverte  $L(j\omega) = H(j\omega)C(j\omega)$  de la figure 2.5. La marge de module représente la distance minimale entre le transfert de boucle et le point critique -1. La marge de phase est liée au point où le gain du transfert de boucle est unitaire. La marge de gain représente la distance entre le point critère et le point où la phase du transfert de boucle vaut  $-\pi$ . ♦

La marge de module est donc une mesure plus globale que les marges de gain et de phase. En effet, la marge de module impose une borne supérieure de la fonction de sensibilité sur toutes les fréquences, et pas seulement aux deux fréquences associées aux marges de gain et de phase. Par ailleurs, il a été démontré qu'une valeur de la marge de module garantit une borne inférieure des marges de phase et de gain [46].

$$M_g \geq 20 \log_{10} \left( \frac{1}{1 - M_m} \right) \quad [dB] \quad (2.15)$$

$$M_p \geq 2 \arcsin \left( \frac{M_m}{2} \right) \quad [rad] \quad (2.16)$$

La marge de module est donc prioritairement choisie comme mesure de robustesse. Nous considérons en plus la marge de phase parce que généralement, plus la marge de phase est élevée, plus le système est amorti. Ce constat peut être expliqué en observant le diagramme de Black-Nichols. Sur la figure 2.6, nous traçons les diagrammes de Nyquist de deux systèmes en boucle ouverte : l'un présente une marge de phase de  $34^\circ$  (SYS 1) et l'autre présente une marge de phase de  $55^\circ$  (SYS 2). Plus la marge de phase est élevée, plus le diagramme de Black est susceptible d'être éloigné d'un contour iso-gain en boucle fermée de valeur élevée. Le système en boucle fermée a de fortes probabilités d'être moins oscillant. Sur la figure 2.6, le système SYS 1 est proche du contour iso-gain de 6 dB, le système SYS 2 est proche du contour iso-gain de 0 dB. Le système SYS 1 présente donc un dépassement en boucle fermée plus important que celui du système SYS 2 (confer les réponses indicielles présentées dans la figure 2.7).

La considération simultanée de la marge de module et de la marge de phase est donc nécessaire dans certains cas puisqu'il y a de systèmes ayant une bonne marge de module mais une marge de phase insuffisante, ou ayant une bonne marge de phase mais une mauvaise marge de module (voir remarque 2.2.4)<sup>1</sup>.

1. Si l'utilisateur ne veut pas prendre en compte de la marge de phase, il choisit pour  $\varphi_d$  une valeur inférieure à la borne inférieure de marge de phase assurée par la marge de module (2.16)

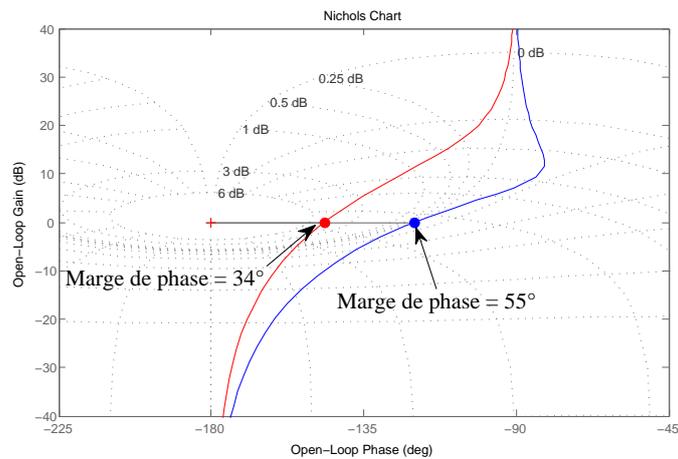


FIGURE 2.6 – Marge de phase et Amortissement en boucle fermée

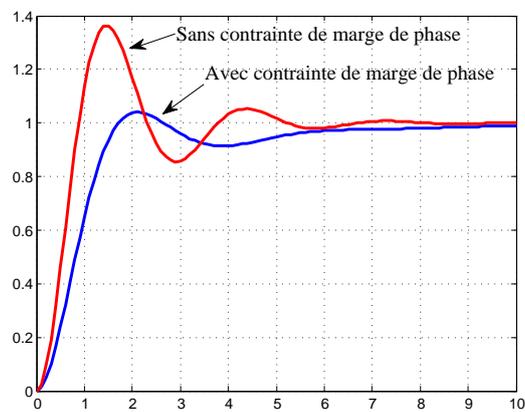


FIGURE 2.7 – Marge de phase et dépassement

**Remarque 2.2.4 (Bonne marge de phase mais mauvaise marge de module)**

Considérons un système à retard et un correcteur proportionnel, le transfert de boucle est donné par :

$$L(s) = H(s).C(s) = \frac{e^{-2s}}{(s + 1)^2} \cdot 10$$

Le diagramme de Nyquist de ce système est présenté dans la figure 2.8. Bien que la marge de phase soit supérieure à 51°, la marge de module est mauvaise. Il est bien connu que la marge de phase ne donne aucune garantie sur la marge de module. ♦

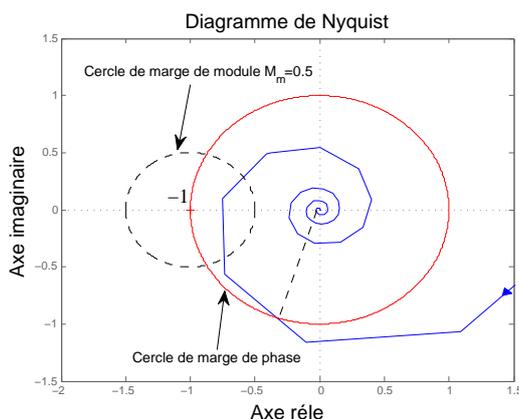


FIGURE 2.8 – Bonne marge de phase mais mauvaise marge de module

## 2.3 Correcteurs utilisés et systèmes étudiés

### 2.3.1 Structures des correcteurs utilisés

Dans les dernières décennies, bien que de nombreuses commandes avancées aient été développées et appliquées avec succès à beaucoup d'applications réelles, les commandes proportionnelle-intégrale (PI) ou proportionnelle-intégrale-dérivée (PID) restent encore largement utilisées dans les boucles d'asservissements industrielles. On peut d'une part expliquer ce constat par le fait que la limitation des ressources de calcul numérique dans la production de masse requiert l'utilisation de régulateurs simples. D'autre part, dans la plupart des applications industrielles, une bonne synthèse d'un correcteur PID peut satisfaire le cahier des charges. D'ailleurs, les modules de commande PID sont essentiellement les seuls offerts par les fournisseurs de systèmes de commande. Ce sont les raisons pour lesquelles, nous avons opté pour trois structures de correcteur : correcteur PI, correcteur proportionnel-dérivé (PD) et correcteur d'ordre deux.

1. Le correcteur PI est donné par :

$$C(s, X) = \frac{K(s + z_c)}{s}, \quad X = [K \quad z_c]^T \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \quad (2.17)$$

avec deux paramètres inconnus à déterminer,  $K \in \mathbb{R}$  et  $z_c \in \mathbb{R}_+^*$ , l'ensemble des nombres réels strictement positifs. Nous avons adopté un correcteur à minimum de phase, i.e. tous ses zéros se situent dans le demi-plan à gauche de l'axe imaginaire car un correcteur à non-minimum de phase, i.e. zéro à partie réelle positive, diminue la marge de phase du système.

2. Le correcteur PD avec filtre de l'action dérivée est donné par :

$$C(s, X) = \frac{K(s + s_1)}{s + s_2} \quad X = [K \quad s_1 \quad s_2]^T \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^{*2} \quad (2.18)$$

Le correcteur doit être stable et à minimum de phase. Cela impose la condition  $s_1, s_2 \in \mathbb{R}_+^*$ . Ce type de correcteur est typiquement utilisé pour stabiliser un processus comportant une

double intégration. Dans ce cas, le critère à minimiser sera l'impact de la perturbation de commande de type impulsion sur la sortie. En effet, en raison de l'absence de l'action intégrale, il est impossible de rejeter une perturbation de commande de type échelon.

3. Le correcteur d'ordre deux est donné par :

$$C(s, X) = \frac{K(s^2 + as + b)}{s(s + p_c)}, \quad X = [K \quad a \quad b \quad p_c]^T \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^3 \quad (2.19)$$

Le correcteur doit être stable et à minimum de phase. Cela impose la condition  $a, b, p_c \in \mathbb{R}_+^*$ .

Nous avons montré que pour satisfaire la condition de stabilité en boucle fermée, le gain  $K$  du correcteur et le gain  $G$  du système à contrôler doivent avoir le même signe (confer la section 2.5). Sans perte de généralité, nous supposons dans la suite :  $G > 0$  puis  $K > 0$ . Le domaine de paramètres du correcteur est donc :

$$X \in \mathbb{R}_+^{*n_c} \quad (2.20)$$

où  $n_c$  est le nombre de paramètres du correcteur.

Une littérature très riche sur la synthèse des régulateurs PID est disponible [11], [47], [33], [48]. Cependant, le plus souvent, ces méthodes ne considèrent pas à la fois les marges de module et de phase. De plus, l'influence du bruit de mesure sur la commande qui est un aspect pratique très important n'est pas toujours traité. Dans [49], un régulateur de type PID est synthétisé de manière à minimiser l'influence des perturbations en basses fréquences (i.e. minimiser le rapport entre le temps intégral et le gain proportionnel  $T_i/K_p$ ) en respectant les contraintes sur les marges de gain et de phase, et une borne supérieure du gain proportionnel  $K_{p_{max}}$ . Bien que la limitation du correcteur en hautes fréquences soit gérée, la détermination explicite de  $K_{p_{max}}$  n'est pas présentée. Dans [50], une méthode de réglage de correcteur PID robuste est présentée. Cette méthode repose sur un placement des pôles multimodèles et minimise l'effet du bruit de mesure. Cependant, le rejet de la perturbation de commande n'est pas optimisé et les marges de robustesse ne sont pas considérées explicitement.

Bien que nous ayons mené nos études sur ces trois types de correcteurs, la méthode proposée est applicable à toute structure de correcteur.

### 2.3.2 Base de modèles génériques

La méthodologie de synthèse proposée est générique. Néanmoins, le problème d'optimisation est résolu de manière très efficace si nous disposons d'une formulation analytique du problème. Cette formulation a été développée pour un ensemble de modèles génériques d'ordre réduit de processus. Nous justifierons par la suite le choix de ces modèles (voir chapitre 3 sur la réduction du modèle). Nous présentons dans cette section les modèles de systèmes pour lesquels nous avons développé une formulation analytique ou semi-analytique.

1. Le modèle du premier ordre est donné par :

$$H(s) = \frac{G}{s + p_0} \quad (2.21)$$

avec  $p_0, G \in \mathbb{R}$ ,  $|p_0|, |G| < \infty$ . Plusieurs cas peuvent être considérés, e.g. :

- système stable  $p_0 > 0$
- système instable  $p_0 < 0$
- intégrateur  $p_0 = 0$

2. Le modèle du second ordre est donné par :

$$H(s) = \frac{G}{(s + p_1)(s + p_2)} \quad (2.22)$$

avec  $p_1, p_2, G \in \mathbb{R}$ ,  $|p_1|, |p_2|, |G| < \infty$ .

Plusieurs cas peuvent être considérés, e.g. :

- système stable  $p_1 > 0 \wedge p_2 > 0$
- système instable  $p_1 < 0 \vee p_2 < 0$
- système intégrateur  $p_1 = 0 \vee p_2 = 0$
- double intégrateur  $p_1 = 0 \wedge p_2 = 0$

Nous n'avons pas traité de pôles complexes, mais cela n'augmente pas la complexité du problème d'optimisation.

3. Le modèle du second ordre avec un zéro est donné par :

$$H(s) = \frac{G(\tau s + 1)}{(s + p_1)(s + p_2)} \quad (2.23)$$

avec  $\tau \in \mathbb{R}^*$ ,  $p_1, p_2, G \in \mathbb{R}$ ,  $|\tau|, |p_1|, |p_2|, |G| < \infty$ .

Plusieurs cas peuvent être considérés, e.g. :

- système stable et à minimum de phase  $p_1 > 0 \wedge p_2 > 0 \wedge \tau > 0$
- système stable et à non-minimum de phase  $p_1 > 0 \wedge p_2 > 0 \wedge \tau < 0$
- système instable et à minimum de phase  $p_1 < 0 \vee p_2 < 0 \wedge \tau > 0$
- système instable et à non-minimum de phase  $p_1 < 0 \vee p_2 < 0 \wedge \tau < 0$
- système intégrateur et à minimum de phase  $p_1 = 0 \vee p_2 = 0 \wedge \tau > 0$
- système intégrateur et à non-minimum de phase  $p_1 = 0 \vee p_2 = 0 \wedge \tau < 0$
- double intégrateur et à minimum de phase  $p_1 = 0 \wedge p_2 = 0 \wedge \tau > 0$
- double intégrateur et à non-minimum de phase  $p_1 = 0 \wedge p_2 = 0 \wedge \tau < 0$

Nous n'avons pas traité de pôles complexes, mais cela n'augmente pas la complexité du problème d'optimisation.

4. Le modèle du premier ordre avec un retard de  $T$  secondes est approché par :

$$H(s) = \frac{G}{s + p_0} \frac{(-s + \omega_d)}{(s + \omega_d)} \quad (2.24)$$

avec  $\omega_d \in \mathbb{R}_+$ ,  $p_0, G \in \mathbb{R}$ ,  $|\omega_d|, |p_0|, |G| < \infty$ .

Le retard de  $T$  secondes a été approché par la méthode de Padé du premier ordre  $e^{-Ts} \approx \frac{(-s + \omega_d)}{(s + \omega_d)}$  avec  $\omega_d = 2/T$ .

Ces modèles génériques peuvent représenter les dynamiques le plus souvent rencontrées dans les applications industrielles. Dans le cas des systèmes d'ordres élevés, il est indispensable de faire appel à une méthode de réduction permettant d'approcher le modèle d'ordre élevé par l'un des modèles génériques d'ordres réduits. Une méthode de réduction de modèle pour la synthèse robuste en boucle fermée sera présentée au chapitre 3.

## 2.4 Initialisation de l'algorithme d'optimisation

Le problème d'optimisation (2.8)-(2.9) est non convexe à cause de la contrainte d'ordre du correcteur, alors la solution obtenue est un optimum local et dépend fortement du point initial. La formulation analytique offre donc un grand intérêt. En effet, l'exploitation des fonctionnelles analytiques des fonctions objectifs et des contraintes donne la possibilité de choisir un point initial faisable (i.e. satisfaction de toutes les contraintes). Cela permet de maximiser la possibilité de trouver un "bon" optimum (qui n'est pas loin de l'optimum global). Une approche permettant de trouver une solution initiale du problème (2.8)-(2.9) sera abordée dans la suite. Nous commencerons par présenter quelques notations :

### Définition 2.4.1 (Point faisable)

Un point  $(x_{1fs}, x_{2fs})$ , dans le plan  $\mathbb{R}_+^{n_c}$ , satisfaisant toutes les contraintes (2.9) est un point faisable du problème (2.8)-(2.9).

### Définition 2.4.2 (Domaine faisable)

L'ensemble de tous les points faisables est appelé le domaine faisable  $D_{fs}$  du problème (2.8)-(2.9).

### Définition 2.4.3 (Point optimal)

Soit le point  $X^* \in D_{fs}$ , si  $f_0(X^*) = \inf_{X \in D_{fs}} f_0(X)$  alors  $X^*$  est un point optimal du problème (2.8)-(2.9), et la valeur  $f_0^* = f_0(X^*)$  est la valeur optimale.

### 2.4.1 Cas simple

Dans le cas simple où la fonction objectif et les contraintes d'inégalités sont exploitables, l'étude analytique de ces fonctionnelles permet de trouver des points initiaux faisables permettant à l'algorithme de converger vers la solution globale (confer la section 2.5 et la vérification dans le chapitre 4).

### 2.4.2 Cas général

Dans le cas général où la fonction objectif et/ou les contraintes d'inégalités sont "trop" complexes, l'exploitation analytique de l'ensemble des fonctionnelles n'est pas réalisable. Par contre,

une étude partielle de ces fonctionnelles permet de déterminer deux types de domaine de paramètres du correcteur (confer la figure 2.9) :

- un domaine connexe  $D_2$  tel qu'à l'extérieur de ce domaine ne se trouvent que des points non faisables (i.e. au moins une contrainte n'est pas respectée) et qu'à l'intérieur de ce domaine se trouvent des points stables (i.e. la contrainte de stabilité en boucle fermée est satisfaite) et satisfaisants la condition de bruit.
- un ou plusieurs domaines connexes  $D_{fs}$  tels qu'un point se situant dans ces domaines satisfait toutes les contraintes.

Nous discutons les avantages de la connaissance de domaines  $D_2$  et  $D_{fs}$  :

- Le domaine des paramètres du correcteur est réduit de  $\mathbb{R}_+^{n_c}$  (selon (2.20)) à  $D_2$ . *La recherche de solutions du problème d'optimisation dans le domaine réduit  $D_2$  est donc moins coûteuse et plus rapide.*
- Une des difficultés d'un problème non-convexe est que l'affirmation de l'existence d'une solution faisable peut être très difficile. La connaissance de domaines  $D_{fs}$  offre un grand avantage, nous pouvons prendre un point quelconque dans  $D_{fs}$  comme une solution faisable.

Dans le cas du correcteur d'ordre 1 (2.17), nous avons les domaines suivants pour l'ensemble des modèles génériques :

$0 < x_1 \leq K_{max} = M_{md}N_{max}$  est la condition d'amplification du bruit de mesure sur la commande.

**Modèle du premier ordre :**

$A(x_1, M_{md}) = \frac{1}{2G\gamma(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1})} \frac{(Gx_1 + p_0)^2 \gamma^2 - p_0^2}{x_1}$  est la condition de marge de module désirée  $M_{md} = 1/\gamma$ .

$A(x_1, M_\varphi)$  est une condition sur la marge de module équivalente  $M_\varphi$  qui assure la marge de phase désirée selon (2.16).

**Modèle du second ordre :**  $S(x_1) = \frac{(p_1 + p_2)(Gx_1 + p_1 p_2)}{x_1}$  est la condition de stabilité en boucle fermée.

**Modèle du second ordre avec zéro :**  $S_1 = \frac{-(p_1 + p_2)}{G\tau}$ ,  $S_2(x_1) = \frac{(p_1 + p_2 + G\tau x_1)(p_1 p_2 + Gx_1)}{Gx_1(1 - \tau(p_1 + p_2 + G\tau x_1))}$ , et  $S_3 = 1/\tau - p_1 - p_2$  sont les conditions de stabilité en boucle fermée.

**Modèle du premier ordre avec retard :**  $S_1 = \frac{p_0 + 2/T}{G}$  et  $S_2(x_1) = \frac{(p_0 + 2/T - Gx_1)(p_0 + Gx_1)(2/T)}{Gx_1(p_0 + 4/T - Gx_1)}$  sont les conditions de stabilité en boucle fermée.

La table 2.2 récapitule les domaines  $D_2$  et  $D_{fs}$  ainsi que les points initiaux du correcteur d'ordre 1 (2.17) pour l'ensemble des modèles génériques. Les détails de calcul se trouvent en annexe B. Nous pouvons déterminer le domaine faisable uniquement pour le cas le plus simple (le système du premier ordre).

La figure 2.10 représente les domaine  $D_2$  et  $D_{fs}$  pour le système du premier ordre. Les figures 2.11-2.13 représentent les domaine  $D_2$  pour les systèmes du second ordre, du second ordre avec zéro et du premier ordre avec retard. Comme nous le voyons, les domaines  $D_2$  sont non-convexes mais ils sont connexes. Il faudra donc utiliser un algorithme de résolution adapté aux domaines connexes et lui fournir un point initial dans le domaine de résolution.

Si un domaine faisable  $D_{fs}$  est connu, nous pourrions choisir un point initial dans ce domaine. Si ce n'est pas le cas, des points initiaux potentiellement faisables seront générés de façon aléa-

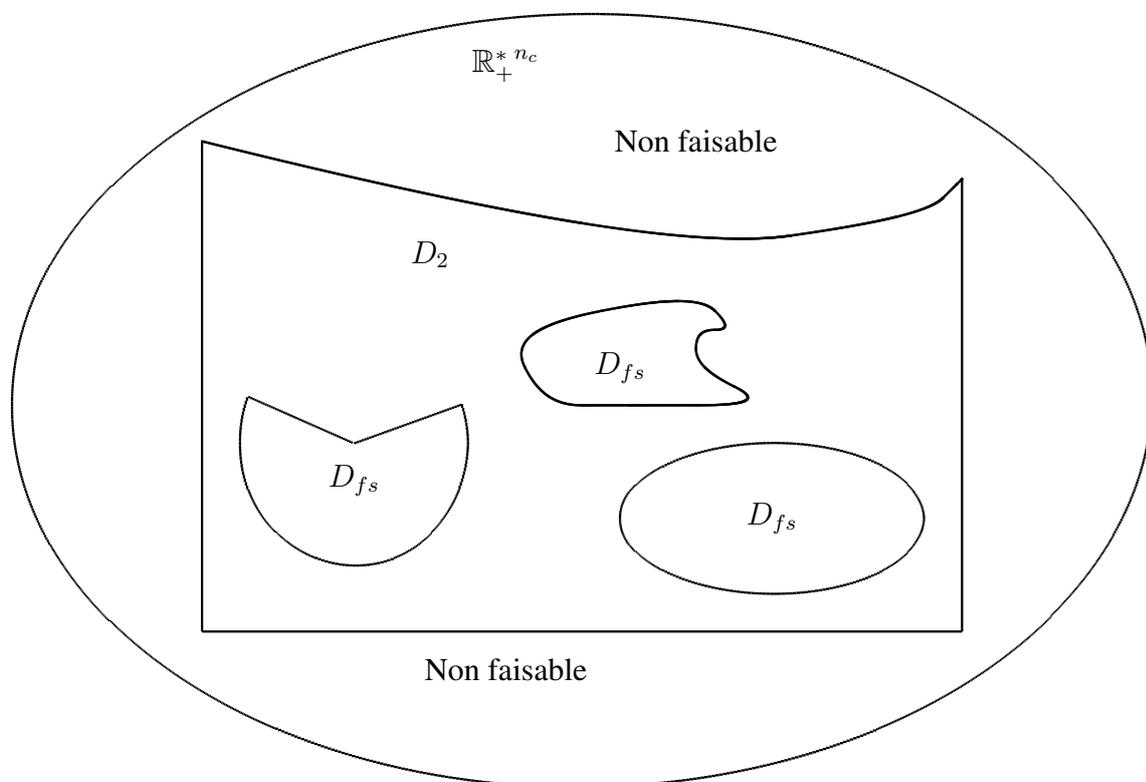


FIGURE 2.9 – Domaines de recherche de solutions

TABLE 2.2 – Domaines de recherche de solutions pour les correcteurs d'ordre 1 avec  $X = [K \ z_c]^T$ 

Modèles génériques	$D_{fs}$	$D_2$	$X_{init}$
$\frac{G}{s+p_0}$	$\{0 < x_1 \leq K_{max},$ $0 < x_2 \leq A(x_1, M_\varphi)\}$	$\{0 < x_1 \leq K_{max},$ $0 < x_2 \leq A(x_1, M_{md})\}$	$x_1 = K_{max},$ $x_2 = A(x_1 =$ $K_{max}, M_\varphi)$
$\frac{G}{(s+p_1)(s+p_2)}$		$\{0 < x_1 \leq K_{max},$ $0 < x_2 < S(x_1)\}$	Cf. section 2.5
$\frac{G(\tau s+1)}{(s+p_1)(s+p_2)}$		$\mathbb{R}_+^{*2} \setminus$ $\{x_1 < \min(K_{max}, S_3),$ $x_2 < S_2(x_1)\}$	$x_1 =$ $\min(K_{max}, S_3),$ $x_2 = \min(p_1, p_2)$
		$\{0 < x_1 <$ $\min(K_{max}, S_1),$ $0 < x_2 < S_2(x_1)\}$	$x_2 =$ $\min(p_1, p_2),$ $x_1 = S_2^{-1}(x_2)$
$\frac{G}{s+p_0} e^{-Ts}$		$\{0 < x_1 <$ $\min(K_{max}, S_1),$ $0 < x_2 < S_2(x_1)\}$	$x_2 = p_0,$ $x_1 = S_2^{-1}(x_2)$

toire ou par une technique appropriée (e.g. dichotomie) dans le domaine  $D_2$ . On pourra éventuellement comparer les solutions obtenues à partir de points initiaux différents et la solution retenue est celle qui amènera à la plus petite valeur du critère (2.8).

Dans le cas de la synthèse d'un correcteur d'ordre 2 (2.19), les paramètres initiaux seront obtenus à partir de la synthèse d'un correcteur d'ordre 1 (si celui-ci existe) avec  $(K)_{C_2} = (K)_{C_1}$ ,  $a = z_c + p_c$ ,  $b = z_c p_c$ , et  $p_c = cte$ .

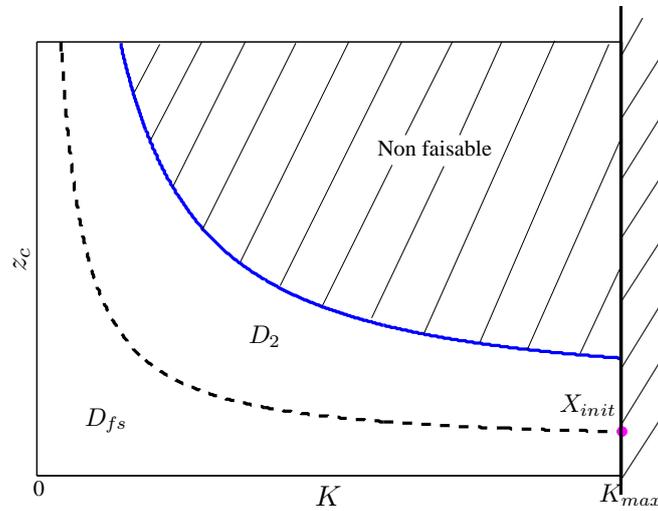


FIGURE 2.10 – Domaine de recherche des paramètres du correcteur d'ordre 1 pour le système du premier ordre :  $A(x_1, M_\varphi)$  (courbe tiret),  $A(x_1, M_{md})$  (courbe continue)

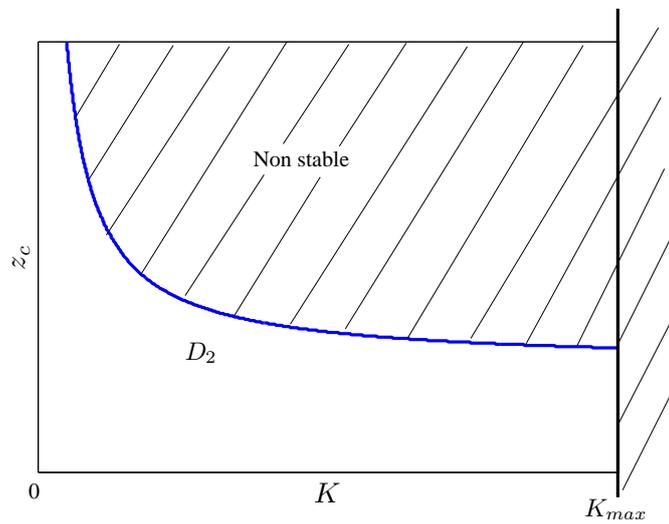


FIGURE 2.11 – Domaine de recherche des paramètres du correcteur d'ordre 1 pour le système du second ordre :  $S_2(x_1)$  (courbe continue)

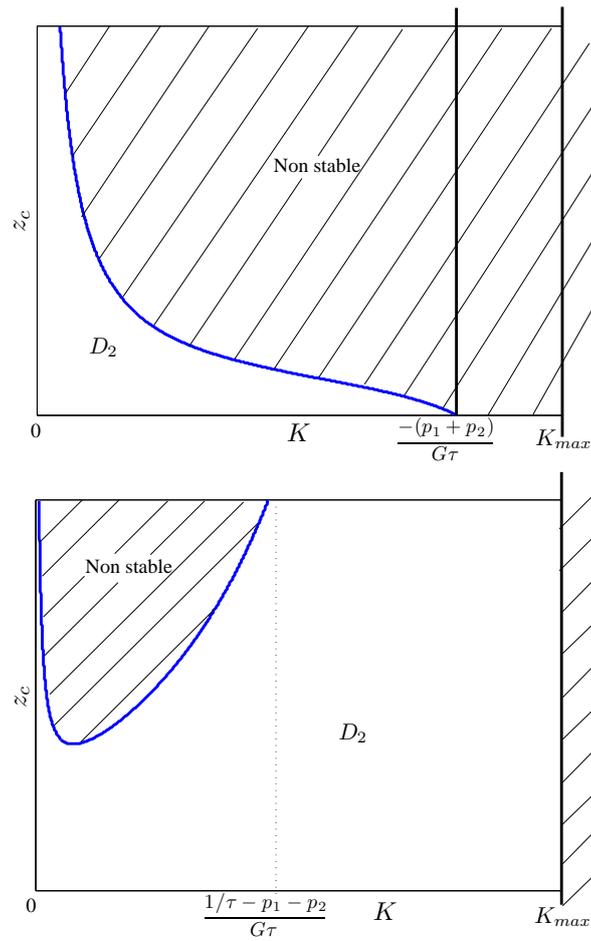


FIGURE 2.12 – Domaine de recherche des paramètres du correcteur d'ordre 1 pour le système du second ordre avec zéro  $\tau < 0$  (en haut) et  $\tau > 0$  (en bas).  $S_2(x_1)$  (courbes continues)

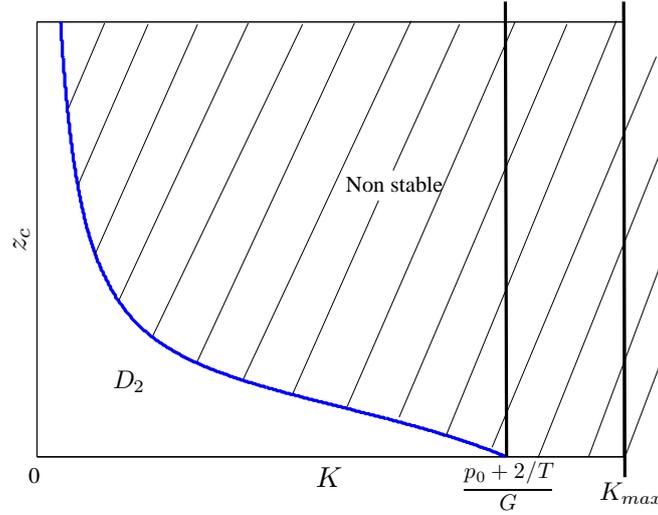


FIGURE 2.13 – Domaine de recherche des paramètres du correcteur d'ordre 1 pour le système du premier ordre avec retard :  $S_2(x_1)$  (courbe continue)

## 2.5 Formulation analytique du problème d'optimisation pour système du second ordre commandé par correcteur du premier ordre

Le problème d'optimisation défini en (2.8) et (2.9) a une formulation analytique en tenant compte du modèle du système et du correcteur choisi. Dans cette section, pour illustrer la méthode proposée, nous considérons un système du second ordre défini en (2.22) :  $H(s) = \frac{G}{(s+p_1)(s+p_2)}$ , avec  $G/(p_1 p_2)$  le gain statique, et  $-p_1, -p_2 \in \mathbb{R}$  les pôles du système. Nous prenons, par exemple, un correcteur du premier ordre (PI) défini dans (2.17) :  $C(s, X) = \frac{K(s+z_c)}{s}$ ,  $X = [K \ z_c]^T \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ . Dans ces conditions, il y aura deux inconnues à déterminer : le gain  $K$  et le zéro  $z_c$ . Les formulations analytiques des problèmes d'optimisation des modèles génériques contrôlés par les correcteurs utilisés sont présentées en annexe B.

### 2.5.1 Formulation analytique du problème d'optimisation

#### Stabilité en boucle fermée

En appliquant le critère de Routh à l'équation caractéristique du système bouclé :

$$s^3 + (p_1 + p_2)s^2 + (GK + p_1 p_2)s + GKz_c = 0 \quad (2.25)$$

nous obtenons les conditions nécessaires et suffisantes sur les gains du correcteur et les pôles du système :

$$\begin{cases} GKz_c > 0 \\ p_1 + p_2 > 0 \\ (p_1 + p_2)(GK + p_1 p_2) - GKz_c > 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

Puisque  $z_c$  est positif, la première condition de (2.26) montre que  $K$  et  $G$  doivent avoir le même signe. Sans perte de généralité, nous supposons dans la suite :  $G > 0$  puis  $K > 0$  (i.e.  $G, K \in \mathbb{R}_+^*$ ).

La deuxième condition de (2.26) indique la limitation du correcteur PI, e.g. son incapacité à stabiliser certains processus. En effet, un correcteur PI ne peut pas stabiliser : un double intégrateur ( $p_1 + p_2 = 0$ ), un processus instable avec deux pôles instables ( $p_1 + p_2 < 0$ ), et un processus instable ayant un pôle instable dont la valeur absolue est supérieure à celle du pôle stable ( $p_1 + p_2 < 0$ ).

### Contrainte de la marge de module

Une expression analytique de la troisième contrainte de (2.9) sera obtenue en utilisant le théorème 1. Pour cela, nous exprimons tout d'abord la fonction de sensibilité :

$$S(s) = \frac{s^3 + (p_1 + p_2)s^2 + p_1p_2s}{s^3 + (p_1 + p_2)s^2 + (GK + p_1p_2)s + GKz_c} \quad (2.27)$$

La matrice Hamiltonienne associée à  $S(s)$  est donnée par :

$$Ham_\gamma(s) = \begin{bmatrix} -a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b + \frac{d-b}{\gamma^2-1} & 0 & 1 & 0 & -\frac{(d-b)^2}{\gamma^2-1} & \frac{(d-b)c}{\gamma^2-1} \\ -c - \frac{c}{\gamma^2-1} & 0 & 0 & 0 & \frac{(d-b)c}{\gamma^2-1} & -\frac{c^2}{\gamma^2-1} \\ \frac{\gamma^2}{\gamma^2-1} & 0 & 0 & a & b - \frac{d-b}{\gamma^2-1} & c + \frac{c}{\gamma^2-1} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

avec  $a = p_1 + p_2$ ,  $b = GK + p_1p_2$ ,  $c = GKz_c$ ,  $d = p_1p_2$ , et  $\gamma = \frac{1}{M_{md}}$ .

L'équation caractéristique de la matrice (2.28) est :

$$\lambda^6 + a_\lambda \lambda^4 + b_\lambda \lambda^2 + c_\lambda = 0 \quad (2.29)$$

avec :  $a_\lambda = -\frac{1}{\gamma^2-1}(-2b\gamma^2 + 2d + a^2\gamma^2 - a^2)$ ,  $b_\lambda = -\frac{1}{\gamma^2-1}(2ac\gamma^2 - b^2\gamma^2 + d^2)$ ,  $c_\lambda = -\frac{c^2\gamma^2}{\gamma^2-1}$ .

Finalement, nous obtenons les conditions nécessaires et suffisantes pour que la contrainte de la marge de module soit satisfaite :

$$\begin{cases} \text{si } R > 0, & -\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{R}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{R}}{2}} + \frac{a_\lambda}{3} < 0 \\ \text{si } R = 0, & \begin{cases} -3q/p + a_\lambda/3 < 0 \\ 3q/2p + a_\lambda/3 < 0 \end{cases} \\ \text{si } R < 0, & \left[ -2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{-q}{2} \sqrt{\frac{-27}{p^3}} \right) + \frac{2k\pi}{3} \right] + \frac{a_\lambda}{3} \right]_{k=\{1,2,3\}} < 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

avec  $p = b_\lambda - \frac{a_\lambda^2}{3}$ ,  $q = \frac{a_\lambda}{27}(2a_\lambda^2 - 9b_\lambda) + c_\lambda$ ,  $R = \frac{4}{27}p^3 + q^2$ .

### Contrainte de la marge de phase

De (2.17) et (2.22), cette contrainte devient :

$$\varphi_d - \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega_{gc}}{z_c} + \arctan \frac{\omega_{gc}}{p_1} + k_1\pi + \arctan \frac{\omega_{gc}}{p_2} + k_2\pi \leq 0 \quad (2.31)$$

avec  $k_{i=1,2} = \begin{cases} 0, p_i \geq 0 \\ 1, p_i < 0 \end{cases}$ , et  $\omega_{gc}$ , la pulsation de croisement, solution positive de l'équation obtenue par (2.5) :

$$\frac{GK \sqrt{\omega_{gc}^2 + z_c^2}}{\omega_{gc} \sqrt{(\omega_{gc}^2 + p_1^2)(\omega_{gc}^2 + p_2^2)}} = 1 \quad (2.32)$$

### L'impact du bruit de mesure sur la commande

L'amplitude du bruit de mesure est un paramètre très important qui conditionne comme on va le voir la bande passante, donc la dynamique, du système bouclé. Le bruit de mesure est supposé être localisé dans les hautes fréquences. Pourtant, cette notion de hautes fréquences est difficilement quantifiable et dépend de chaque système physique traité. De manière générale, nous noterons  $\omega_N > 0$  la pulsation à partir de laquelle on désire considérer l'effet du bruit sur la commande. Généralement, cette pulsation est supérieure à la bande passante du système et en particulier nous supposons :

$$\omega_N > \omega_{gc} = \sup_{|H(j\omega)| \cdot |C(j\omega)|=1} \omega \quad (2.33)$$

Notons qu'un correcteur PI se comporte comme un gain en hautes fréquences :

$$\|C\|_{\infty} = \left\| \frac{K(j\omega + z_c)}{j\omega} \right\|_{\infty} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} |K| \quad (2.34)$$

Alors nous pouvons supposer que :  $\|C\|_{\infty}|_{\omega \geq \omega_N} \approx |K|$  qui est valide pour  $\omega_N \geq 10z_c$ . La deuxième contrainte de (2.9) peut donc s'exprimer par :

$$|K| \leq M_{md} N_{max} \quad (2.35)$$

### Fonction objectif

De (2.17) et (2.22), la fonction objectif (2.8) peut s'exprimer en utilisant Lemme 2.2.1 :

$$\|H_{y_p d_{u-s}}(X)\|_2 = \sqrt{\frac{(p_1 + p_2)G/2}{x_1 x_2 [(p_1 + p_2)(Gx_1 + p_1 p_2) - Gx_1 x_2]}} \quad (2.36)$$

avec  $x_1 = K$  et  $x_2 = z_c$ .

La contrainte de la stabilité en boucle fermée (2.26) implique que la norme  $H_2$  (2.36) est calculable.

Avec la deuxième condition de (2.26), l'hypothèse  $G > 0$  et la monotonie de la fonction racine carrée, il vient que la minimisation de (2.36) est équivalente à minimiser la fonction suivante :

$$f_0(X) = \frac{1}{x_1 x_2 [(p_1 + p_2)(Gx_1 + p_1 p_2) - Gx_1 x_2]} \quad (2.37)$$

### Problème d'optimisation non-linéaire avec contraintes

Maintenant, nous pouvons donner la formulation analytique du problème d'optimisation (2.8)-(2.9) avec le vecteur des inconnus  $X = [x_1 \ x_2]^T \equiv [K \ z_c]^T \in \mathbb{R}_+^{*2}$  :

$$\arg \min_{X \in \mathbb{R}_+^{*2}} f_0(X) = \frac{1}{x_1 x_2 [(p_1 + p_2)(Gx_1 + p_1 p_2) - Gx_1 x_2]} \quad (2.38)$$

sous les contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) f_1(X) = -Gx_1 x_2 < 0 \\ 2) f_2(X) = -(p_1 + p_2)(Gx_1 + p_1 p_2) + Gx_1 x_2 < 0 \\ 3) f_3(X) = x_1 - M_{md} N_{max} \leq 0 \\ 4) f_4(X) = \begin{cases} \text{si } R > 0, & -\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{R}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{R}}{2}} + \frac{a_\lambda}{3} < 0 \\ \text{si } R = 0, & (-3q/p + a_\lambda/3 < 0) \wedge (3q/2p + a_\lambda/3 < 0) \\ \text{si } R < 0, & \left[ -2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{-q}{2} \sqrt{\frac{-27}{p^3}} \right) + \frac{2k\pi}{3} \right] + \frac{a_\lambda}{3} \right]_{k=\{1,2,3\}} < 0 \end{cases} \\ 5) f_5(X) = \varphi_d - \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega_{gc}}{x_2} + \arctan \frac{\omega_{gc}}{p_1} + \arctan \frac{\omega_{gc}}{p_2} + k_{i=1,2} \pi \leq 0 \\ \text{avec } \frac{Gx_1 \sqrt{\omega_{gc}^2 + x_2^2}}{\omega_{gc} \sqrt{(\omega_{gc}^2 + p_1^2)(\omega_{gc}^2 + p_2^2)}} = 1, k_{i=1,2} = \begin{cases} 0, p_i \geq 0 \\ 1, p_i < 0 \end{cases} \\ 6) f_6(X) = -X < 0 \end{array} \right. \quad (2.39)$$

et la condition de faisabilité ( $p_1 + p_2 > 0$ ) (voir (2.26)).

Le problème de synthèse du correcteur a été reformulé en un problème d'optimisation non linéaire qui peut être résolu numériquement par l'utilisation de la puissance informatique disponible aujourd'hui [51].

## 2.5.2 Résolution du problème d'optimisation

### Définition 2.5.1 (Courbe de niveau)

Une courbe de niveau  $H$  est une courbe qui joint tous les points situés à la même altitude  $H$ , i.e.  $f_0(X) = H$ .

Dans la suite, nous dénotons  $x_{1m} = \min x_{1fs}$ ,  $x_{1M} = \max x_{1fs}$  et  $x_{2m} = \min x_{2fs}$ ,  $x_{2M} = \max x_{2fs}$ , les bornes inférieures et supérieures de  $x_{1fs}$  et  $x_{2fs}$ , respectivement.

L'approche présentée consiste en deux étapes : d'abord le domaine faisable  $D_{fs}$  est déterminé, puis le point optimal est recherché dans ce domaine faisable. Les propriétés des fonctionnelles dans (2.38)-(2.39) seront exploitées afin de faciliter la détermination du point optimal.

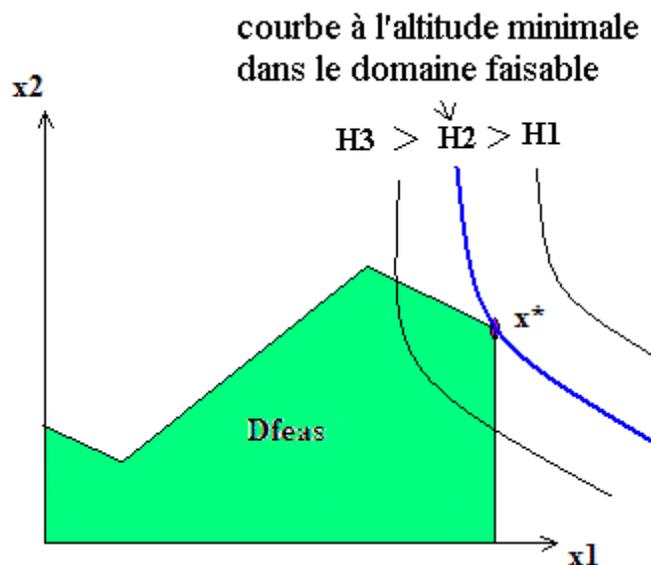


FIGURE 2.14 – Domaine faisable et point optimal

Pour évaluer l'évolution de la fonction objectif selon les deux variables  $x_1, x_2$ , Nous étudions les dérivées partielles du premier ordre :

**Dérivée partielle du premier ordre par rapport à  $x_1$**  La dérivée partielle de la fonction objectif (2.38) par rapport à  $x_1$  est donnée par :

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_1} = \frac{-[(p_1 + p_2)(2Gx_1 + p_1p_2) - 2Gx_1x_2]}{x_1^2x_2[(p_1 + p_2)(Gx_1 + p_1p_2) - Gx_1x_2]^2} \quad (2.40)$$

- Dans le domaine  $[0 \leq x_{1m} \leq x_1 \leq x_{1M}, x_{2m} \leq x_2 \leq p_1 + p_2]$ , pour une valeur fixée de  $x_2 = x_{20} \leq p_1 + p_2$ , la dérivée partielle de la fonction objectif par rapport à  $x_1$  est strictement négative, i.e.  $f_0$  décroissante selon  $x_1$ . Ainsi, la solution optimale de  $x_1$  sera l'intersection entre la courbe de niveau minimal de  $f_0$  et le domaine faisable. Ce constat est illustré dans la figure 2.14. Une solution est

$$X' = [x_{1M} \quad x_{20}]^T \quad (2.41)$$

- Dans le domaine  $[0 \leq x_{1m} \leq x_1 \leq x_{1M}, p_1 + p_2 \leq x_2 \leq x_{2M}]$ , pour une valeur fixée de  $x_2$ , la fonction objectif (2.38) selon  $x_1$  a un minimum en  $x_{1opt} = \frac{(p_1+p_2)p_1p_2}{2G(x_{20}-p_1-p_2)}$ . Une solution est donc

$$X'' = [\min(x_{1M}, \max(x_{1opt}, x_{1m})) \quad x_{20}]^T \quad (2.42)$$

**Dérivée partielle du premier ordre par rapport à  $x_2$**  La dérivée partielle de la fonction objectif (2.38) par rapport à  $x_2$  est donnée par :

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_2} = \frac{-[(p_1 + p_2)(Gx_1 + p_1p_2) - 2Gx_1x_2]}{x_1x_2^2[(p_1 + p_2)(Gx_1 + p_1p_2) - Gx_1x_2]^2} \quad (2.43)$$

Pour une valeur fixée  $x_{10} \in [x_{1m}, x_{1M}]$ , la fonction objectif (2.38) selon  $x_2$  a un minimum en  $x_{2opt} = (p_1 + p_2) \left( \frac{1}{2} + \frac{p_1 p_2}{2Gx_{10}} \right)$ . Une solution est donc

$$X''' = [x_{10} \quad \min(x_{2M}, \max(x_{2opt}, x_{2m}))]^T \quad (2.44)$$

Finalement, nous pouvons prendre la solution initiale comme :

$$X_{init} = \arg \min \{f_0(X'), f_0(X''), f_0(X''')\} \quad (2.45)$$

Le problème d'optimisation est non convexe, la solution obtenue sera un optimum local et dépend fortement du point initial. La formulation analytique offre donc un grand intérêt. En effet, le pré-calcul permet de choisir un point initial qui n'est pas loin de l'optimum global. Dans le cas général où la formulation analytique est plus compliquée et difficile à exploiter, le programme va choisir un point initial faisable (i.e. satisfaisant toutes les contraintes) de façon aléatoire dans le domaine  $D_2$  (confer la section 2.4).

## 2.6 Comparaison avec d'autres méthodes de synthèse de correcteurs

Dans cette section, la méthode proposée sera illustrée et comparée avec d'autres méthodes existantes dans la littérature au moyen deux exemples : asservissement de vitesse d'un moteur à courant continu et régulation de niveau d'un réservoir d'eau.

### 2.6.1 Asservissement de vitesse d'un moteur à courant continu

Considérons un problème d'asservissement de vitesse d'un moteur à courant continu. La méthode proposée, dénotée OPT, sera comparée avec la méthode de l'Optimum Symétrique, dénotée A-OPT [11] et la synthèse  $H_\infty$  [2]. Les paramètres du moteur, le cahier des charges et les résultats obtenus sont présentés dans la table 2.3.

L'inverse de la fonction objectif est présentée dans la figure 2.15. La solution optimale est le point à l'altitude maximale situé dans le domaine faisable.

La figure 2.16 illustre le domaine faisable et le domaine infaisable (la région au-dessus des courbes de marge de module et de marge de phase). Dans notre cas, la contrainte de la marge de phase est plus stricte que celle de la marge de module. Le domaine faisable est donc la région en-dessous de la courbe de marge de phase. C'est une zone connexe. Ainsi, la solution optimale est l'intersection entre la courbe de niveau minimal de la fonction objectif et le côté droit du domaine faisable. La solution optimale trouvée correspond à la valeur initiale  $f_0(X')$  dans (2.41).

Nous pouvons assurer que la solution trouvée est le meilleur minimum correspondant au cahier des charges présenté dans la table 2.3. En effet, selon l'étude de la section 2.5.2, la norme  $H_2$  est minimisée en augmentant le gain  $K$  du correcteur. Ici, nous avons atteint la valeur maximale accessible du gain  $K$  qui est limité par la contrainte de bruit de mesure. *Nous voyons l'intérêt d'avoir une formulation analytique du problème d'optimisation : bien que nous ne puissions pas*

TABLE 2.3 – Asservissement de vitesse d'un moteur à courant continu

Paramètres du moteur : Constante de couple $K_m = 0.108Nm/A$ Inductance du moteur $L = 0.18H$ , Résistance du moteur $R = 4\Omega$ , Inertie du moteur $J = 0.09kgm^2$ Coefficient du frottement visqueux $K_f = 0.2Nms/rad$ $\Rightarrow G = \frac{K_m}{JL} = 6.7, p_1 = \frac{K_f}{J} = 2.2, p_2 = \frac{R}{L} = 22.2$							
Cahier des charges : $N_{max} = 20, M_{md} = 0.5, \varphi_d = 45^\circ$							
Méthode	Temps de calculs [s]	$K$	$z_c$	$\ H_{ypd_{u-s}}\ _2$	$M_m$	$P_m$	$\ H_{uP_N}\ _\infty$
OPT	1	10	7.6	0.0214	0.7	$45^\circ$	10
A-OPT	inconnu <sup>2</sup>	36.8	2.2	0.0122	0.8	$65^\circ$	40
$H_\infty$	inconnu <sup>3</sup>	correcteur d'ordre 4 <sup>4</sup>		0.641	0.9	$85^\circ$	10

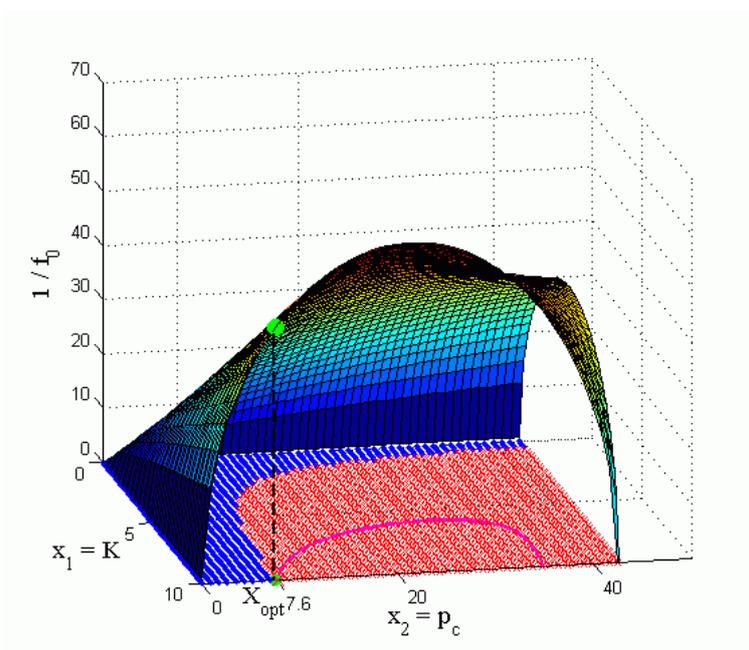


FIGURE 2.15 – Inverse de la fonction objectif

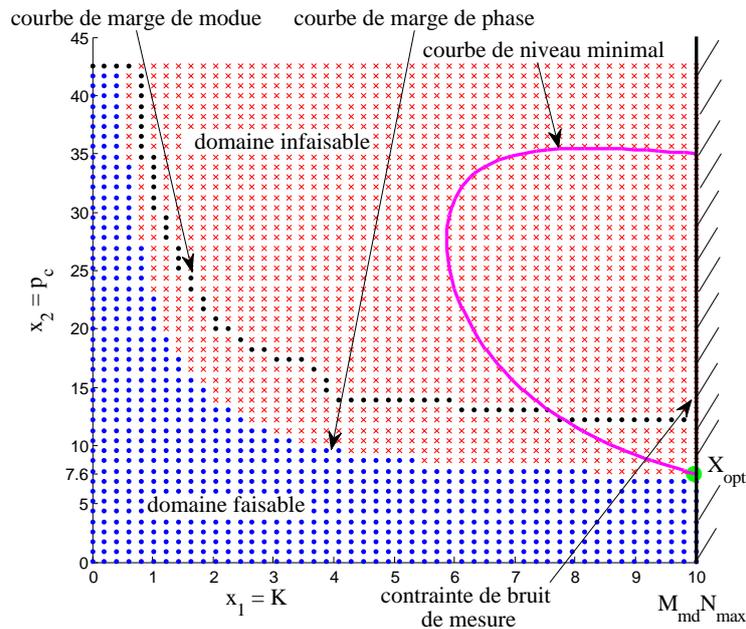


FIGURE 2.16 – Domaine faisable des paramètres du correcteur

*affirmer l'optimalité globale de la solution trouvée, elle est la meilleure que nous puissions faire avec le cahier des charges donné.*

Les réponses à la référence et à la perturbation de commande sont présentées dans les figures 2.17 (sans bruit de mesure) et 2.18 (avec bruit de mesure). Nous avons utilisé un préfiltre d'ordre 2  $F(s)$  de pulsation naturelle  $\omega_{ref} = \omega_{gc}/2$  pour réduire le dépassement. En présence de bruit de mesure  $P_N = \pm 5\%|r| = \pm 0.05$ , le correcteur PI, synthétisé par la méthode proposée OPT, garantit que le bruit sur la commande est inférieur à  $\pm N_{max}|P_N| = 1$ .

Comme nous le voyons dans la figure 2.18, la méthode A-OPT présente un niveau inacceptable de bruit sur la commande. La synthèse  $H_\infty$  possède de meilleures marges de robustesse, mais l'ordre du correcteur est supérieur (d'ordre 4 soit égal à l'ordre du système plus l'ordre des filtres de pondération). L'ordre élevé du correcteur  $H_\infty$  n'est pas désirable en pratique car cela pose un problème d'implantation. De plus, la synthèse  $H_\infty$  effectuée présente un mauvais rejet de la perturbation de commande (voir les valeurs de la norme  $H_2$  dans dans la table 2.3). Le correcteur  $H_\infty$  a été élaboré après le correcteur PI. Ainsi, les filtres de pondération ont été choisis en connaissant les performances obtenues par le correcteur PI. Sinon, il aurait été plus délicat de choisir les filtres de pondération. Le correcteur PI conçu par la méthode proposée respecte le cahier des charges.

La contrainte de bruit de mesure limite le gain du correcteur en hautes fréquences (nous reviendrons sur cette propriété dans le prochain chapitre). C'est pour cette raison que dans la

2. les gains du correcteur sont calculés "à la main" par des formules données
3. temps de calcul dépend du temps de choix des filtres de pondération fréquentielle (qui est réalisé par essais/erreurs) et du temps de résolution du problème standard  $H_\infty$
4. pôles =  $[0 \quad 35.1 \quad 196.5 \quad 372.3]$ , zéros =  $[1.377 \quad 22.79]$ , gain =  $1.582 \times 10^6$

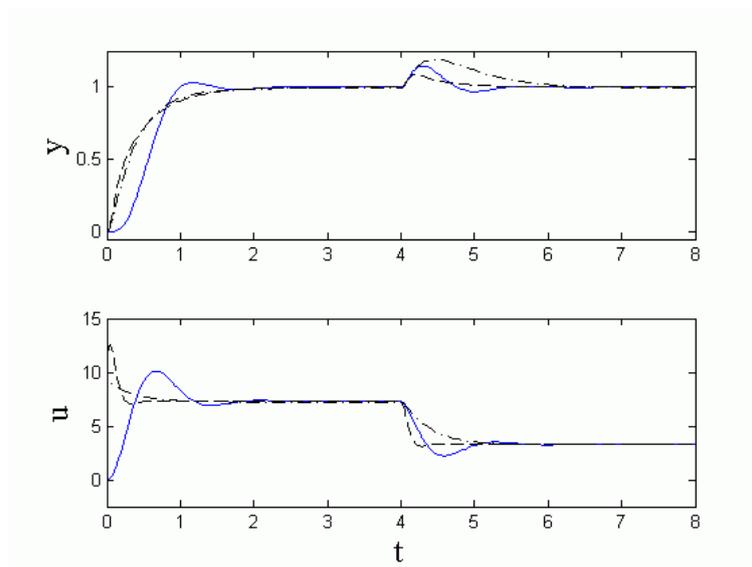


FIGURE 2.17 – Réponses temporelles sans bruit de mesure : OPT (continu), A-OPT (tiret), et  $H_\infty$  (pointillé-tiret)

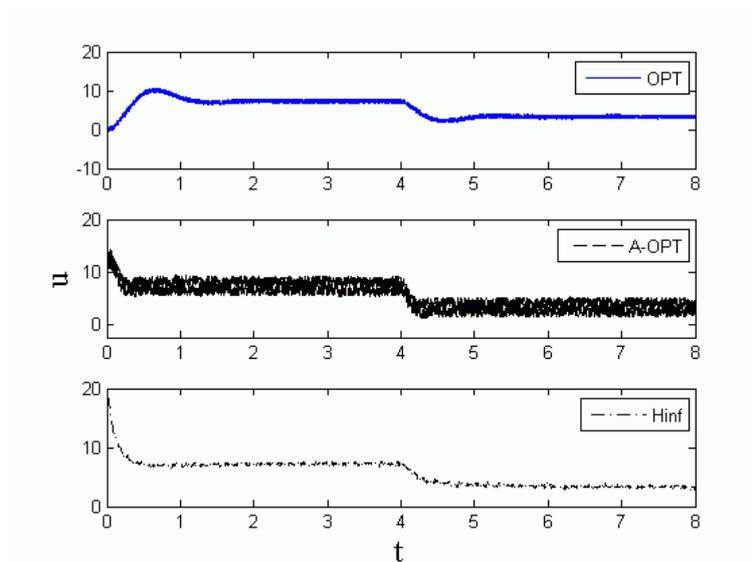


FIGURE 2.18 – Réponses temporelles avec bruit de mesure : OPT (continu), A-OPT (tiret), et  $H_\infty$  (pointillé-tiret)

TABLE 2.4 – Asservissement de vitesse d'un moteur à courant continu - Relaxation de la contrainte de bruit

Cahier des charges : $N_{max} = 40$ , $M_{md} = 0.8$ , $\varphi_d = 65^\circ$							
Méthode	Temps de calculs [s]	$K$	$z_c$	$\ H_{y_p d_{u,s}}\ _2$	$M_m$	$P_m$	$\ H_{uP_N}\ _\infty$
OPT	4	39	2	0.012	0.8	$65^\circ$	40
A-OPT	inconnu <sup>5</sup>	36.8	2.2	0.0122	0.8	$65^\circ$	40

table 2.3 notre méthode présente une valeur de la norme  $H_2$  plus grande que celle de la méthode A-OPT. Nous réalisons une nouvelle synthèse en relaxant la contrainte de  $N_{max}$ . Les résultats obtenus sont présentés dans la table 2.4. Maintenant, notre méthode présente les mêmes performances que la méthode A-OPT.

## 2.6.2 Régulation de niveau d'un réservoir d'eau

Nous considérons le problème de régulation de niveau d'un réservoir d'eau. Autour d'un point de fonctionnement, la dynamique entre le débit d'entrée et le niveau d'eau est modélisée par un intégrateur avec retard :

$$H(s) = \frac{1}{Bs} e^{-Ts}$$

où  $B$  est la section du réservoir,  $T$  est le retard. Pour ce système, nous allons utiliser le modèle de synthèse (2.24).

La méthode proposée (OPT) est comparée avec la méthode Optimisation Non-Convexe (NCO) [52]. Les paramètres du système, et les résultats obtenus sont présentés dans la table 2.5. La synthèse du correcteur est basée sur le modèle approché, mais les résultats sont calculés avec le modèle réel. Les marges de robustesse sont respectées sur le système réel. La méthode proposée présente un meilleur rejet de perturbation de commande avec de meilleures marges de robustesse.

Les réponses à la référence et à la perturbation de commande sont présentées dans la figure 2.19. Nous avons utilisé un préfiltre  $F(s)$  d'ordre 2 de pulsation naturelle  $\omega_{ref} = \omega_{gc}/2$  pour réduire le dépassement.

## 2.7 Conception du feed-forward

La méthode proposé dans la section 2.2 se focalise sur la synthèse d'un correcteur de la boucle fermée qui satisfait les contraintes de robustesse. Afin d'atteindre les spécifications temporelles vis-à-vis de l'entrée de référence, telles que, le temps de réponse, le dépassement, la saturation de la commande, il est nécessaire d'utiliser un pré-traitement de la référence. Jusqu'à présent, nous avons utilisé un filtre du second ordre  $F(s)$  dont le paramètre de réglage est la pulsation

5. les gains du correcteur sont calculés "à la main" par des formules données

TABLE 2.5 – Régulation de niveau d'un réservoir d'eau

Paramètres du système : Section du réservoir $B = 1m^2$ , Retard $T = 1s$					
Cahier des charges : $N_{max} = 20$ dB, $M_{md} = 0.5$ , $\varphi_d = 45^\circ$					
Méthode	$\ H_{y_p d_{u,s}}\ _2$	$K$	$z_c$	$M_m$	$P_m$
OPT	3.27	0.649	0.139	0.53	$45^\circ$
NCO	3.45	0.488	0.269	0.51	$32^\circ$

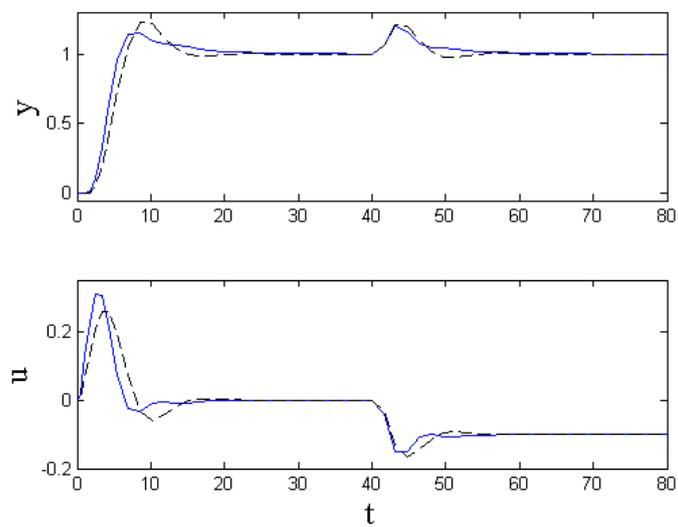


FIGURE 2.19 – Réponses temporelles vis-à-vis de la référence et de la perturbation de commande : OPT (continu), et NCO (pointillé)

de coupure. Si avec ce filtre les spécifications ne sont pas atteintes, une commande feed-forward plus sophistiquée peut être déterminée en utilisant le concept de platitude différentielle. Nous commencerons par présenter le principe de ce type de commande.

### 2.7.1 Principe de la commande par platitude

La commande par platitude a été proposée et développée, dans les années quatre-vingt-dix par Fliess et al. [53]. Cette approche permet de prendre en compte explicitement les trajectoires désirées pour certaines grandeurs du système. L'avantage principal de cette méthode est de pouvoir tenir compte, lors de la génération des trajectoires souhaitées, des contraintes physiques, telles que dynamiques limitées de la sortie et saturations des actionneurs. Pour pouvoir utiliser cette méthode, le système à commander doit satisfaire la propriété de platitude. Nous commencerons donc par définir la notion de platitude.

#### Définition 2.7.1 (Système plat)

Un système défini par :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (2.46)$$

avec l'état  $x(t)$  et la commande  $u(t)$ , est plat s'il existe un vecteur  $z(t)$ , ayant la dimension de  $u(t)$  tel que :

$$z(t) = g(x(t), u(t), \dot{u}(t), \dots, u(t)^{(q)}) \quad (2.47)$$

dont les composantes soient différentiellement indépendantes, et des applications  $\phi, \psi$  telles que :

$$x(t) = \phi(z(t), \dot{z}(t), \dots, z(t)^{(r)}) \quad (2.48)$$

$$u(t) = \psi(z(t), \dot{z}(t), \dots, z(t)^{(r+1)}) \quad (2.49)$$

ou  $q$  et  $r$  sont deux entiers. Le vecteur  $z(t)$  s'appelle la sortie plate du système.

#### Remarque 2.7.1

- La sortie plate est composée d'un ensemble de variables (2.47) qui permet de paramétrer toutes les autres variables du système, telles que l'état (2.48) et la commande (2.49).
- Vu que les composantes de  $z(t)$  sont différentiellement indépendantes, la sortie plate regroupe toutes les variables libres (sans contraintes) du système.
- Selon la relation (2.47), la sortie plate ne dépend que de l'état et de la commande, elle est donc une variable endogène du système.
- Dans le cas d'un système linéaire, le système est plat si et seulement si il est commandable.

◆

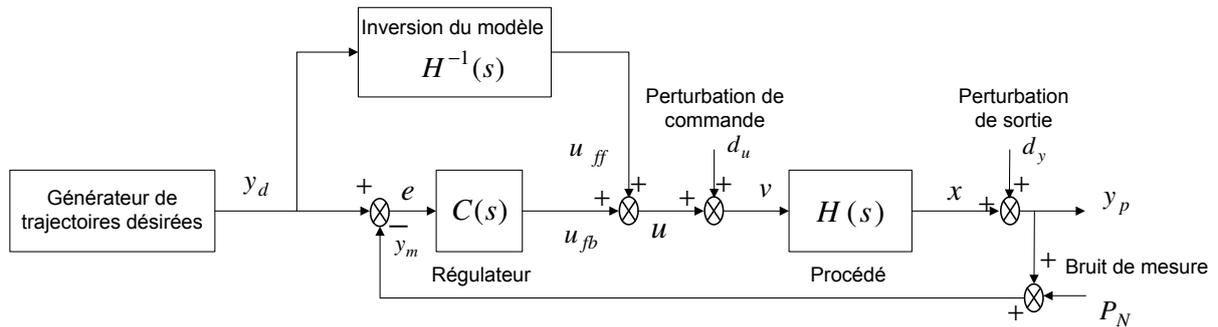


FIGURE 2.20 – Schéma de commande par platitude pour système linéaire à minimum de phase

Dans l'hypothèse d'un modèle parfait, si nous souhaitons poursuivre des trajectoires désirées  $z_d(t)$ , il suffit d'imposer une commande en boucle ouverte établie par la relation (2.49) :

$$u_{ff}(t) = \psi(z_d(t), \dot{z}_d(t), \dots, z_d(t)^{(r+1)}) \quad (2.50)$$

Cette commande s'appelle la commande nominale (feed-forward). La condition pour pouvoir élaborer la commande feed-forward est que la trajectoire désirée doit être dérivable au moins  $(r + 1)$  fois. En pratique, le modèle n'est jamais parfait. D'ailleurs, la poursuite de trajectoire souhaitée n'est pas un critère unique. Mais surtout, le système doit être robuste vis-à-vis des perturbations, du bruit de mesure, etc. Par conséquent, il est essentiel de rajouter une commande de rétroaction (feedback)  $u_{fb} = C(s)(z_d - z)$ , où  $C(s)$  est le correcteur de boucle fermée permettant de corriger l'écart entre la sortie plate  $z$  et la référence  $z_d$ . La commande totale est donc :

$$u(t) = u_{ff}(t) + u_{fb}(t) \quad (2.51)$$

## 2.7.2 Commande par platitude pour système linéaire à minimum de phase

Dans le cas d'un système linéaire à minimum de phase, où la sortie du procédé est la sortie plate à asservir  $z \equiv y$ , le principe de la commande par platitude repose sur le schéma de commande de la figure 2.20. D'abord, le correcteur de boucle fermée  $C(s)$  est conçu par la méthode proposée précédemment. Puis, les trajectoires désirées sont calculées de manière à satisfaire les contraintes physiques. La commande feed-forward est obtenue par l'inversion du modèle :

$$U_{ff}(s) = \frac{Y_d(s)}{H(s)} \quad (2.52)$$

## 2.7.3 Commande par platitude pour système linéaire à non minimum de phase

Dans le cas d'un système à non minimum de phase, l'inversion du modèle pose un problème d'instabilité, i.e. les zéros à non minimum de phase deviennent des pôles instables. Pour contourner ce problème, nous implanterons les commandes selon le schéma de la figure 2.21. Le système

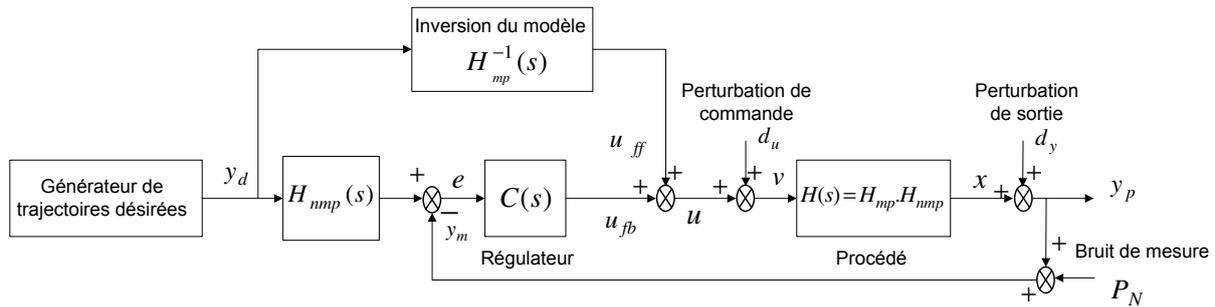


FIGURE 2.21 – Schéma de commande par platitude pour système linéaire à non minimum de phase

est décomposé en deux parties :

$$H(s) = H_{mp}(s) \cdot H_{nmp}(s) \quad (2.53)$$

avec la partie à minimum de phase  $H_{mp}(s)$  (i.e. les parties réelles des zéros sont strictement négatives) et la partie à non minimum de phase  $H_{nmp}(s)$  (i.e. les parties réelles des zéros sont strictement positives). La commande feed-forward sera obtenue par l'inversion du modèle de la partie à minimum de phase.

**Exemple - Décomposition d'un système à non minimum de phase :** Soit un système d'ordre trois avec retard :

$$H(s) = \frac{e^{-15s}}{(s+1)^3} \quad (2.54)$$

Soit la décomposition :

$$H(s) = H_{mp}(s) \cdot H_{nmp}(s) \quad (2.55)$$

où

$$H_{mp}(s) = \frac{1}{(s+1)^3}, \quad H_{nmp}(s) = e^{-15s}$$

Le retard sera considéré comme la partie à non minimum de phase. Il peut être approché par l'approximation de Padé, par exemple, d'ordre 1 :

$$H_{nmp}(s) = e^{-15s} \approx \frac{-s + 2/15}{s + 2/15}$$

il y a donc un zéro à non minimum de phase.

## 2.7.4 Prise en compte des contraintes physiques

La génération de trajectoires désirées peut être obtenue de différentes manières. Afin d'assurer la contrainte de dérivabilité tout au long de la trajectoire et d'avoir la liberté dans l'imposition de contraintes physiques, nous envisageons généralement des polynômes d'interpolation. Dans la plupart des applications, nous considérons les contraintes physiques suivantes :

- Saturation de l'actionneur :  $|u(t)| \leq U_{max}$
- Dépassement de la sortie :  $|y(t)| \leq Y_{max}$
- Borne des dérivées du premier ordre et du second ordre de la sortie, par exemple, si la sortie est la position, il peut être nécessaire de borner la vitesse et l'accélération :  $|\dot{y}(t)| \leq \dot{Y}_{max}$ , et  $|\ddot{y}(t)| \leq \ddot{Y}_{max}$ .

La procédure suivante présente les étapes pour générer les trajectoires souhaitées en tenant compte de contraintes physiques.

**Principe 2.7.1 (Génération de trajectoire en tenant compte de contraintes physiques)**

- Imposer des points de passage  $y(t_i) = y_i$  tels que  $|y(t_i)| \leq Y_{max}$ .  
Imposer des contraintes de dérivabilité en ces points  $y(t_i)^{(j)} = y_i^j$  tel que  $|\dot{y}(t_i)| \leq \dot{Y}_{max}$  et que  $|\ddot{y}(t_i)| \leq \ddot{Y}_{max}$ .
  - Imposer des contraintes de continuité aux points de passage
  - Prendre en compte  $u_{ff}(t) = \psi(y_d(t), \dot{y}_d(t), \dots, y_d(t)^{(r+1)})$  pour imposer la contrainte de la saturation de l'actionneur
  - Toutes les contraintes donnent un ensemble d'équations et d'inéquations en termes de coefficients inconnus de polynômes de trajectoires à déterminer
  - Résoudre cet ensemble d'équations et d'inéquations pour obtenir les trajectoires souhaitées avec la prise en compte de contraintes physiques
- (voir Gomez-Bravo et al. [54] pour la génération des trajectoires polynomiales de type splines-cubiques). ♦

## 2.7.5 Résultats en simulation

Soit un système d'ordre deux à retard :

$$H(s) = \frac{e^{-3s}}{(s+1)^2}$$

Le problème est de déterminer une loi de commande pour que le système bouclé satisfasse le cahier des charges suivant :

1. Le meilleur rejet possible d'une perturbation de commande de type échelon au sens de la norme  $H_2$
2. Une marge de module supérieure à  $M_{md} = 0.5$
3. Une marge de phase supérieure à  $\varphi_d = 45^\circ$
4. En présence d'un bruit de mesure de  $\pm 0.05V$  de la sortie, le bruit sur la commande devra être inférieur à  $\pm 0.1V$ , soit  $N_{max} = \frac{0.1}{0.05} = 2$
5. La saturation de l'actionneur  $[-10V, +10V]$ , soit  $U_{max} = 10$
6. La réponse temporelle à un échelon unité doit satisfaire : temps de réponse moins de 1s, 50% de la valeur finale en moins de 0.5s, dépassement moins de 5% (e.g.  $Y_{max} = 1.05$ ),  $\dot{Y}_{max} \leq 3$ ,  $\ddot{Y}_{max} \leq 6$

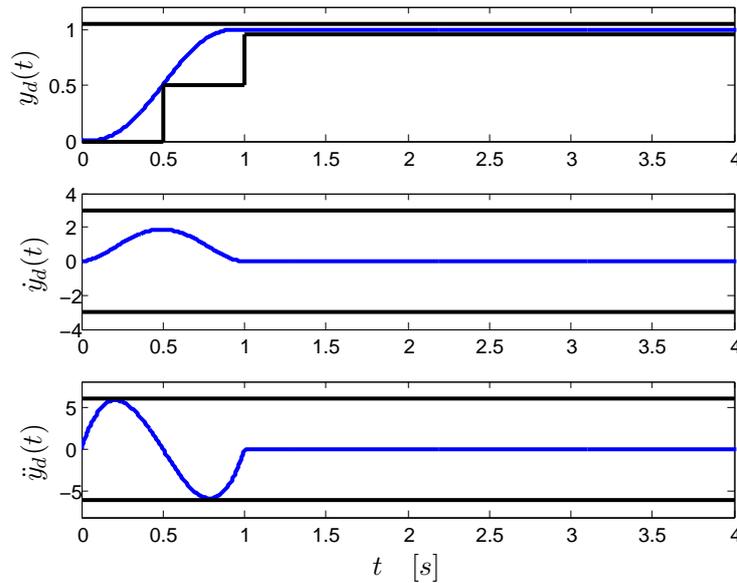


FIGURE 2.22 – Trajectoires désirées sur la sortie

Les quatre premières contraintes peuvent être satisfaites par la synthèse d'un correcteur feedback en utilisant la méthode proposée précédemment. Les deux dernières contraintes sont gérées par une commande feed-forward basée sur la platitude. Vu que le système étudié est à non minimum de phase, afin de pouvoir appliquer la commande par platitude, nous le factorisons :

$$H(s) = \underbrace{\frac{1}{(s+1)^2}}_{H_{mp}(s)} \cdot \underbrace{e^{-3s}}_{H_{nmp}(s)}$$

En utilisant la Procédure 2.7.1 nous obtenons la trajectoire désirée :

$$y_d(t) \begin{cases} 0, & t = 0 \\ 6t^5 - 15t^4 + 10t^3, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$$

La commande feed-forward est calculée à partir de la partie à minimum de phase :

$$u_{ff}(t) = y_d(t) + 2\dot{y}_d(t) + \ddot{y}_d(t)$$

La figure 2.22 présente les trajectoires désirées respectant les contraintes sur la sortie du système. La commande feed-forward est présentée dans la figure 2.23. Comme nous le voyons, la contrainte de la saturation de l'actionneur a été respectée.

Les réponses à la référence et à la perturbation de commande sont présentées dans la figure 2.24. Avec la commande feed-forward, la sortie du système a bien suivi sa trajectoire désirée. Nous pouvons constater que la commande feed-forward a permis de considérablement accélérer la sortie du système vis-à-vis de l'entrée de référence tout en respectant les contraintes imposées.

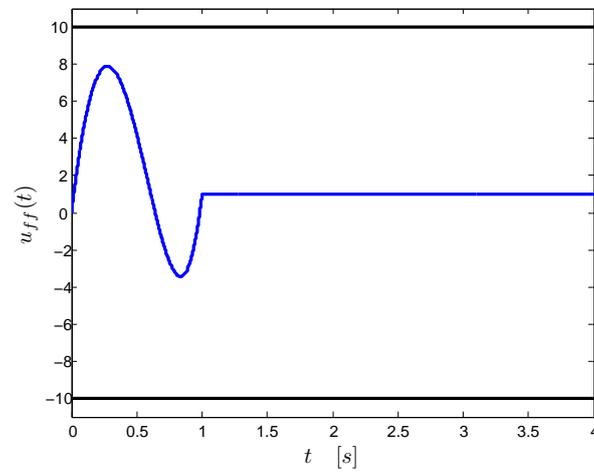


FIGURE 2.23 – Commande feed-forward

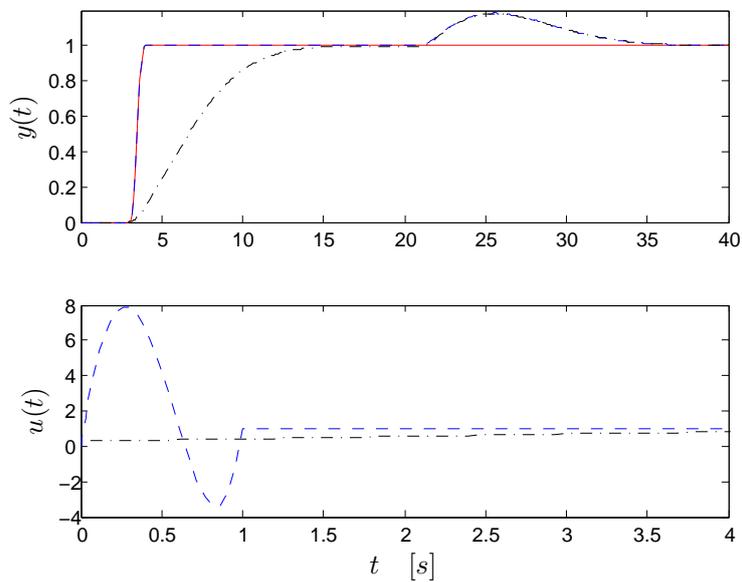


FIGURE 2.24 – Réponses temporelles vis-à-vis d'une référence (unité pour  $t \geq 0$ ) et d'une perturbation de commande ( $d_u = 1$  pour  $t \geq 18$ ) : trajectoire désirée  $y_d$  (continu), sortie  $y_p$  avec feed-forward (tiret) et sans feed-forward (pointillé-tiret)

## 2.8 Conclusion

Selon [55], [56], plus de quatre-vingt-dix pour cent des régulateurs utilisés en pratique sont des correcteurs de type PI ou PID. Ce constat peut être expliqué, d'une part, par le fait que l'industrie nécessite des régulateurs de complexité restreinte en raison du coût de production. D'autre part, les régulateurs PID sont usuellement utilisés dans le monde industriel depuis longtemps et donc sont connus par les praticiens. Pourtant, il n'y a pas ou peu de méthodes simples faisant appel à des approches modernes de synthèse largement acceptées dans le milieu industriel pour synthétiser des régulateurs de complexité fixée. C'est la motivation du travail présenté dans ce chapitre.

Nous avons proposé une méthodologie semi-analytique d'analyse et de synthèse de correcteurs avec une structure donnée en respectant des contraintes de robustesse. Il y a quelques différences principales entre cette méthode et celles reportées dans la littérature.

Premièrement, l'approche considère à la fois les contraintes sur la marge de module et la marge de phase.

Deuxièmement, l'influence du bruit de mesure est considérée explicitement et apparaît comme un facteur majeur qui limite la bande passante.

Troisièmement, l'avantage de cette méthode est d'aboutir à une formulation analytique qui permet une résolution numérique efficace du problème formulé. En effet, à l'aide de la formulation analytique obtenue, nous pouvons déterminer un domaine réduit stable (i.e. dans ce domaine se trouvent des paramètres du correcteur stabilisant le système en boucle fermée). Dans ce domaine, des points initiaux sont déterminés pour maximiser la possibilité de trouver une solution optimale.

Quatrièmement, et c'est là le point majeur, le praticien aura à choisir des contraintes de synthèse très simples (confiance ou non dans le modèle du système et niveau de bruit accepté sur la commande) pour déterminer les paramètres du correcteur d'ordre réduit qu'il désire après avoir également déterminé un modèle de son processus à contrôler dans une base de modèles génériques. L'ensemble des modèles génériques proposé permet d'appliquer la méthode à de nombreux systèmes rencontrés dans les applications industrielles. Au chapitre 3, nous présentons une méthode permettant de déterminer des modèles de synthèse dans la base de modèles génériques pour les systèmes à contrôler.

Une fois que le correcteur de boucle a été déterminé, une demande complémentaire réside dans l'élaboration de la loi de commande feed-forward permettant de répondre aux spécifications temporelles vis-à-vis de la référence. A ce sujet, nous avons proposé également une approche par platitude qui donne la possibilité de tenir compte, lors de la génération des trajectoires de référence, des contraintes physiques, telles que la saturation de l'actionneur.

# Chapitre 3

## Réduction de modèle et Identification expérimentale

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>49</b>
<b>3.2</b>	<b>Quelques méthodes de réduction de modèle dans la littérature</b>	<b>49</b>
3.2.1	Méthode de troncature modale	50
3.2.2	Approximation de Padé ou des moments	51
3.2.3	Méthode de troncature équilibrée	51
3.2.4	Autres approches	52
3.2.5	Réduction de modèle pour la commande	53
<b>3.3</b>	<b>Réduction de modèle dans le cas général</b>	<b>53</b>
3.3.1	Réduction de modèle pour la synthèse robuste en boucle fermée	53
3.3.2	Méthode de réduction de modèle pour la synthèse robuste en boucle fermée	56
3.3.3	Détermination des paramètres du modèle réduit	58
3.3.4	Résultats en simulation obtenus avec les systèmes de benchmark	59
3.3.5	Diminution du conservatisme de la méthode de réduction de modèle	66
3.3.6	Réduction de modèle dans le cas de fonctions de transfert en boucle ouverte ayant un comportement double intégrateur	69
3.3.7	Commande robuste pour systèmes à paramètres incertains	72
<b>3.4</b>	<b>Caractéristiques du système de commande</b>	<b>76</b>
3.4.1	Configuration du système de commande	77
3.4.2	Bruit de mesure	78
3.4.3	Limitation du gain du correcteur en hautes fréquences	79
<b>3.5</b>	<b>Réduction de modèle en tenant compte de contraintes pratiques</b>	<b>80</b>
3.5.1	Réduction de modèle en assurant la marge de module en boucle fermée	81
3.5.2	Réduction de modèle en assurant la marge de phase en boucle fermée	81
3.5.3	Application expérimentale : Procédé thermique	82

<b>3.6</b>	<b>Identification expérimentale pour obtenir le modèle réduit</b>	<b>88</b>
3.6.1	Méthode d'identification expérimentale basée sur une commande à relais	88
3.6.2	Application expérimentale : Boule en sustentation dans un tube	90
<b>3.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>96</b>

---

### 3.1 Introduction

Dans le chapitre 2, il a été proposé une méthode de conception de régulateurs d'ordres réduits (i.e. d'ordre 1 ou 2), dont l'objectif de synthèse est d'obtenir un rejet optimal de la perturbation de type échelon agissant sur l'entrée du procédé. Le critère à minimiser est la norme  $H_2$  de la fonction de transfert entre la perturbation de commande et la sortie du processus à contrôler, en respectant des contraintes de robustesse, telles que la marge de module désirée, la marge de phase désirée, et l'amplification maximum du bruit sur la commande. Pour cela, le problème de synthèse du correcteur a été reformulé en un problème d'optimisation sous contraintes avec un ensemble de fonctions analytiques en termes des gains inconnus du correcteur. Afin d'obtenir la formulation analytique, la méthode est basée sur un ensemble de modèles génériques d'ordres réduits. Lorsque le modèle du procédé est d'ordre élevé, une méthode de réduction de modèle est nécessaire. C'est la raison pour laquelle, nous proposons dans ce chapitre, une méthode de réduction de modèle, où le modèle d'ordre élevé est approché par un modèle réduit dans une base de modèles génériques en assurant que les marges de robustesse, obtenues avec la correcteur conçu basé sur le modèle réduit, seront au moins les mêmes avec le modèle d'ordre élevé.

Lorsque le modèle du procédé n'est pas disponible, nous proposons également une méthode d'identification expérimentale basée sur la méthode du relais permettant d'obtenir le modèle réduit utilisé pour la synthèse du correcteur.

La suite de ce chapitre est organisée comme suit. Dans la deuxième section, nous commencerons par présenter brièvement quelques méthodes de réduction de modèle existantes dans la littérature : méthode par troncature modale, approximation de Padé, troncature équilibrée ou les méthodes de réduction basées sur minimisation de la norme  $H_\infty$  via LMI ou sur la métrique de distance  $\nu$ . Puis, la troisième section abordera notre méthode de réduction de modèle pour la synthèse de correcteurs dans le cas général qui sera illustrée à travers un ensemble de systèmes de benchmark. Ensuite, dans la quatrième section, nous allons indiquer les contraintes technologiques et physiques du système de commande qui doivent être considérées lors de la conception de lois de commande. Ceci est à la base de la justification de l'approche proposée basée sur des modèles de processus d'ordre réduit. La section 5 adaptera la méthode de réduction de modèle en prenant en compte les caractéristiques technologiques et physiques du système. Une application expérimentale à un procédé thermique sera aussi discutée. Dans la section 6, nous détaillerons la technique d'identification expérimentale proposée pour obtenir le modèle réduit du système réel. Cette technique sera illustrée à travers un système expérimental, la boule en sustentation dans un tube. Nous terminerons ce chapitre en résumant les principaux avantages des méthodes proposées.

### 3.2 Quelques méthodes de réduction de modèle dans la littérature

En raison des exigences de précision de l'ingénierie des systèmes complexes, des modèles d'ordres élevés sont souvent nécessaires pour représenter les systèmes réels [57]. Par contre, la mise en oeuvre de régulateurs basés sur les modèles d'ordres élevés pourra s'avérer être une

tâche très coûteuse en capacité de calcul. En effet, les méthodes avancées de synthèse de correcteurs, telles que LQG [1],  $H_\infty/H_2$  [45], ou synthèse convexe [5] produisent généralement des correcteurs ayant un ordre comparable à celui du système [58]. Toutefois, en pratique, des régulateurs d'ordres réduits sont souvent exigés pour la mise en oeuvre en temps réel. Par conséquent, la réduction de modèle joue un rôle fondamental dans la conception de commandes pour les systèmes dynamiques. Dans la littérature, de nombreuses méthodes ont été développées pour réduire l'ordre d'un système donné. Ici, nous insistons particulièrement sur le rôle de la réduction de modèle pour la synthèse du régulateur.

Nous allons d'abord énoncer le problème de réduction de modèle. Considérons un système linéaire invariant dans le temps (LTI) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

d'ordre  $n = \dim(A)$ . La fonction de transfert associée est donnée par :

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (3.2)$$

Le problème de réduction de modèle consiste à déterminer un système réduit :

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t) &= A_r x_r(t) + B_r u(t) \\ y_r(t) &= C_r x_r(t) + D_r u(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

d'ordre  $r$ , avec  $r \ll n$ , et sa fonction de transfert :

$$H_r(s) = C_r(sI - A_r)^{-1}B_r + D_r \quad (3.4)$$

de manière à ce que le comportement du modèle réduit soit aussi proche que possible de celui du modèle original selon un certain critère.

Nous discuterons dans la suite de certaines méthodes les plus couramment utilisées pour les systèmes linéaires. Dans la littérature, il semble qu'il existe trois approches très répandues : la méthode de troncature modale [59], l'approximation de Padé ou des moments [60], [61], et la méthode de troncature équilibrée [62].

### 3.2.1 Méthode de troncature modale

Reposant sur le fait que les modes lents, i.e. les valeurs propres dont les valeurs absolues des parties réelles sont les plus petites, caractérisent la dynamique à long terme de la sortie du système, la méthode par troncature modale consiste à capter seulement ces modes dominants dans le modèle d'ordre réduit. L'erreur d'approximation est évaluée par la borne supérieure de la norme  $\|H - H_r\|_\infty$ . La technique de troncature modale est souvent efficace lorsque le modèle d'ordre élevé est obtenu par la méthode des éléments finis (FEM) pour les structures flexibles. Cette méthode est principalement utilisée dans la dynamique des structures, en particulier dans l'aéronautique.

L'avantage de la méthode par troncature modale est que les pôles du modèle d'ordre réduit sont exactement ceux du système réel. Cet aspect est important, par exemple dans les applications d'analyse des vibrations vu que les résonances les plus importantes sont retenues dans le modèle d'ordre réduit. Néanmoins, cette approche est assez réductrice, car elle ne prend en compte pas les oscillations provoquées par des modes ayant une grande partie imaginaire ; et le comportement transitoire n'est pas totalement pris en compte. En général, cette approche joue un rôle moins important dans l'analyse des systèmes dynamiques.

### 3.2.2 Approximation de Padé ou des moments

La fonction de transfert  $H(s)$  peut être développée autour de  $s_0$  par :

$$H(s) = m_0 + m_1(s - s_0) + m_2(s - s_0)^2 + m_3(s - s_0)^3 + \dots \quad (3.5)$$

Les  $m_i$  sont appelés les moments du système (3.1) en  $s_0$ . Le problème d'approximation des moments consiste à trouver un modèle réduit :

$$H_r(s) = \hat{m}_0 + \sum_{i=1}^r \hat{m}_i(s - s_0)^i \quad (3.6)$$

de sorte que le modèle réduit correspond à un certain nombre de moments, i.e.  $m_i = \hat{m}_i$ , pour  $i = 1, 2, \dots, r$ . Ce problème peut être résolu par l'utilisation de la procédure de Lanczos [63], [64], la méthode Anoldi [65], ou la méthode de Krylov [66].

Un inconvénient de la technique des moments est que le modèle d'ordre réduit ne fournit qu'une bonne approximation locale.

### 3.2.3 Méthode de troncature équilibrée

Une réalisation sous forme équilibrée d'un système LTI est une représentation d'état dont ses gramiens de contrôlabilité  $W_c$  et d'observabilité  $W_o$ , sont diagonaux et égaux [67] :

$$W_c = W_o = \text{diag}(\sigma_1 I_{m_1}, \dots, \sigma_q I_{m_q}) \quad (3.7)$$

où  $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_q$  sont appelées les valeurs singulières de Hankel du système, et  $m_i$  sont le degré de multiplicité de  $\sigma_i$ , avec  $\sum_{i=1}^q m_i = n$ . Notons que ces gramiens sont les solutions des équations de Lyapunov suivantes :

$$\begin{aligned} AW_c + W_c A^T + BB^T &= 0 \\ A^T W_o + W_o A + CC^T &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

La méthode de troncature équilibrée, introduite par Moore [68], s'appuie sur la troncature des états ayant une valeur singulière de Hankel petite car ces états sont moins contrôlables et observables. L'idée principale de la troncature équilibrée est donc que les états qui sont moins contrôlables et observables peuvent être éliminés sans impact significatif sur la réponse du système. De plus, le système d'ordre réduit obtenu par cette méthode est équilibré et stable. Ses gramiens

sont  $\hat{W}_c = \hat{W}_o = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ . La norme  $H_\infty$  de l'erreur entre le système d'origine et celui d'ordre réduit est bornée par la somme des valeurs singulières tronquées.

$$\|H - H_r\|_\infty \leq \sum_{k=r+1}^q \sigma_k \quad (3.9)$$

Pour la plupart des systèmes dynamiques, les valeurs singulières de Hankel diminuent très rapidement. Par conséquent, la troncature des petites valeurs singulières de Hankel n'a pas un impact significatif sur la dynamique du système. Les techniques équilibrées sont disponibles dans différents logiciels tels que le logiciel Matlab, avec différentes variantes, telles que l'approximation de la norme de Hankel [69] ou l'approximation par des perturbations singulières [70]. Cependant, cette approche est souvent appropriée seulement pour des systèmes à petite ou moyenne taille parce que les équations de Lyapunov demandent beaucoup d'efforts de calcul. Une étude comparative de ces techniques peut être trouvée dans [29].

Dans certains cas, l'exigence de précision de l'approximation sur certains intervalles de fréquences (e.g. intervalles de fréquence de fonctionnement ou de résonance) est plus importante que sur d'autres. Pour faire face à ce problème, la troncature équilibrée a été étendue par l'introduction de fonctions de pondération [67], [71], [72]. Néanmoins, le choix des fonctions de pondération appropriées peut être assez difficile et demande une certaine expertise.

### 3.2.4 Autres approches

Récemment, il y a des approches fondées sur la métrique de distance  $\nu$  [73] ou la minimisation de la norme  $H_\infty$  ou de la norme  $H_2$  via LMI [74], [75], [76].

**Réduction de modèle basée sur la minimisation de la norme  $H_\infty/H_2$  via LMI.** Le critère à minimiser est la norme  $H_\infty$  ou la norme  $H_2$  de l'erreur de réduction. Ainsi, cette approche donne une plus petite erreur d'approximation que les méthodes précédentes [31]. Le problème de réduction de modèle est formulé comme un problème d'optimisation via LMI avec une contrainte d'ordre. Par contre, en présence de la contrainte d'ordre, ce problème d'optimisation devient non convexe et difficile à résoudre. Beaucoup de recherches ont été faites pour surmonter cette difficulté. Dans [77], Geromel et al. ont proposé de remplacer la contrainte non-convexe par une contrainte linéaire en fixant a priori une variable.

Dans [74], il est introduit une méthode de réduction de modèle basée sur la norme  $H_\infty$  dans un intervalle spécifique de fréquences. Avec l'aide du lemme généralisé de Kalman-Yakubovich-Popov, le problème est converti en un problème d'optimisation convexe en termes de LMI.

Dans un article récent [78], les auteurs ont présenté une méthode de réduction de modèle basée sur la norme  $l_\infty$  pour des systèmes à temps discret via LMI, dans laquelle la performance dans le domaine temporel est considérée comme un critère à minimiser.

**Réduction de modèle dans la métrique de distance  $\nu$ .** Toutes les méthodes ci-dessus gèrent l'erreur d'approximation (e.g. la norme  $H_\infty$  de l'erreur entre le modèle d'ordre complet et celui

d'ordre réduit) qui ne reflète que les différences de comportements en boucle ouverte. Toutefois, dans le contexte de la réduction de modèle pour la commande, il est souhaitable de quantifier les différences de comportements en boucle fermée. Il est bien connu que la métrique de distance  $\nu$  [79], [80], [81] mesure les différences entre les systèmes en boucle ouverte en termes du comportement en boucle fermée [82], [83], [84], [85]. Cantoni a proposé une méthode qui garanti que la distance  $\nu$  entre le système complet et le modèle réduit est inférieure à une valeur donnée [73], [86], [87], [88], [30]. Le problème est résolu par deux LMI et une contrainte d'ordre.

### 3.2.5 Réduction de modèle pour la commande

Dans le contexte de la réduction de modèle pour la synthèse de correcteurs [89], le modèle réduit doit être, d'une part, assez "bon" pour une synthèse de correcteurs à base de modèle, d'autre part, suffisamment simple afin de pouvoir obtenir un correcteur d'ordre réduit pour l'implantation en temps réel. Les méthodes précédentes ne traitent, pour la plupart, que les propriétés du modèle du processus à contrôler sans la prise en compte du correcteur, i.e. un correcteur basé sur le modèle d'ordre réduit ne garantit pas les propriétés de robustesse quand il est appliqué au système réel.

Dans le cadre de la conception de régulateur de rétroaction, le modèle d'ordre réduit est utilisé uniquement comme un moyen pour synthétiser le correcteur. Par conséquent, la chose la plus importante n'est pas l'erreur d'approximation, mais les propriétés en boucle fermée. Dans [90], Hovland a proposé une méthode de conception pour la commande prédictive basée sur le modèle d'ordre réduit avec une garantie de la stabilité. Le papier [91] a présenté une méthode de synthèse du correcteur de type PID basée sur la réduction de modèle. Toutefois, dans ces deux travaux, la robustesse n'a pas été traitée.

## 3.3 Réduction de modèle dans le cas général

La méthode proposée dans ce travail consiste à approcher le système d'ordre élevé par un modèle réduit en assurant qu'avec le correcteur conçu à l'aide du modèle réduit, les marges de robustesse pour le système initial d'ordre élevé seront au moins égales à celles obtenues pour le système réduit. Dans cette section, la méthode concerne le cas général où l'impact du bruit de mesure sur la commande n'est pas considéré comme une contrainte de conception.

### 3.3.1 Réduction de modèle pour la synthèse robuste en boucle fermée

Considérons à nouveau le schéma du système en boucle fermée de la figure 2.1. Nous allons d'abord énoncer le problème de réduction de modèle pour la commande robuste.

**Énoncé du problème :** Considérons un procédé LTI stable monovariante (SISO), caractérisé soit par une fonction de transfert  $H(s)$  d'ordre  $n$  ( $n \geq 1$ ), soit par un diagramme de Bode satisfaisant les propriétés suivantes :

$$\forall \omega \geq 0 : \frac{\partial \arg H(j\omega)}{\partial \omega} < 0 \quad (3.10)$$

L'objectif est de trouver un modèle réduit  $H_r(s)$  de sorte que, avec un régulateur  $C(s)$  conçu à l'aide de ce modèle réduit, les marges de robustesse obtenues avec le système réel  $H(s)$  sont au moins celles obtenues avec le modèle réduit  $H_r(s)$ . ■

La condition (3.10) signifie que la phase du système est monotone décroissante. Cette condition de monotonie de phase est remplie par la plupart des systèmes rencontrés en pratique.

### Remarque 3.3.1

En général, il est intéressant de choisir un modèle réduit d'ordre 1 ou 2. ♦

### Remarque 3.3.2

Les marges de robustesse de l'énoncé du problème, selon le cas, peuvent être la marge de module ou la marge de phase, ou bien les deux. ♦

### Remarque 3.3.3

Dans le cas où le processus est déjà d'ordre 1 ou 2 et que ses paramètres sont incertains ou varient lentement, la méthode proposée n'est évidemment plus une méthode de réduction, mais peut être utilisée pour garantir les marges de robustesse pour l'ensemble des valeurs des paramètres constants du système (confer la section 3.3.7). ♦

### Lemme 3.3.1

Pour les systèmes donnés par (3.10) avec le schéma de la figure 2.1, la marge de phase est supérieure à une valeur désirée  $\varphi_d$  (généralement  $\varphi_d = \{45^\circ, 60^\circ\}$ ), si et seulement si la pulsation de croisement  $\omega_{gc}$  satisfait :

$$\omega_{gc} \leq \omega_{max} \quad (3.11)$$

avec  $\arg H(j\omega_{max}) = -\pi + \varphi_d - \varphi_{max}$ , où  $\varphi_{max}$  est l'avance de phase maximum rajoutée par le correcteur utilisé.

**Preuve** Voir annexe E.1 ■

Le problème de réduction d'ordre dans le cas général pour des systèmes stables LTI SISO satisfaisant (3.10) sera traité en utilisant les résultats suivants.

### Proposition 1

Considérons deux systèmes linéaires stables LTI SISO  $H(s)$  et  $H_r(s)$  satisfaisant (3.10) et les conditions suivantes :

$$\forall \omega \in [0; \omega_{max}] : \begin{cases} C1 : |H_r(j\omega)| \geq |H(j\omega)| \\ C2 : \arg H_r(j\omega) \leq \arg H(j\omega) \end{cases} \quad (3.12)$$

avec  $\omega_{max}$  définie dans le lemme 3.3.1.

Soit le correcteur  $C(s)$  synthétisé à l'aide de  $H_r(s)$ , de manière à ce que :

$$\forall \omega \in [0; \omega_{max}] : \begin{cases} C1 : \frac{\partial |L_r(j\omega)|}{\partial \omega} < 0 \\ C2 : \frac{\partial \arg L_r(j\omega)}{\partial \omega} < 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

et que :

$$P_{mr} \geq \varphi_d$$

où  $L_r(s) = H_r(s)C(s)$  la fonction de transfert en boucle ouverte,  $P_{mr}$  la marge de phase obtenue et  $\varphi_d$  la marge de phase désirée.

Alors la marge de phase  $P_m$  obtenue pour  $L(s) = H(s)C(s)$  satisfera :

$$P_m \geq P_{mr} \geq \varphi_d \quad (3.14)$$

**Preuve** Voir annexe E.2 ■

La proposition 1 montre que, sous certaines conditions, un correcteur basé sur un modèle d'ordre réduit approprié, peut garantir la marge de phase pour le système complet. En outre, il suffit d'approcher le système réel sur un intervalle de fréquence fini  $[0; \omega_{max}]$ , et non pour toutes les fréquences. La pulsation  $\omega_{max}$  est déterminée par deux facteurs :  $\varphi_d$  la marge de phase souhaitée (définie dans le cahier des charges), et  $\varphi_{max}$  l'avance de phase maximum rajoutée par le correcteur (selon le choix du type de correcteur).

Les conditions (3.12) signifie que le modèle réduit doit être déterminé de telle façon que le gain du modèle réduit soit supérieur ou égal à celui du système et que la phase du modèle réduit soit inférieure ou égale à celle du système. Les conditions (3.13) disent simplement que le gain et la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte  $L_r(s)$  doivent être monotones décroissantes.

### Proposition 2

Considérons deux systèmes linéaires stables LTI SISO  $H(s)$  et  $H_r(s)$  satisfaisant (3.10) et (3.12). Avec le correcteur  $C(s)$ , conçu à l'aide de  $H_r(s)$ , satisfaisant :

$$\forall \omega \geq 0 : \begin{cases} C1 : \frac{\partial |L_r(j\omega)|}{\partial \omega} < 0 \\ C2 : \frac{\partial \arg L_r(j\omega)}{\partial \omega} < 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

et :

$$M_{mr} \geq M_{md}$$

où  $L_r(s) = H_r(s)C(s)$  la fonction de transfert en boucle ouverte,  $M_{mr}$  la marge de module obtenue et  $M_{md}$  la marge de module désirée.

Alors la marge de module  $M_m$  obtenue pour  $L(s) = H(s)C(s)$  satisfera :

$$M_m \geq M_{mr} \geq M_{md} \quad (3.16)$$

**Preuve** Voir annexe E.3 ■

La proposition 2 montre que, sous certaines conditions, un correcteur, basé sur un modèle réduit approprié, peut garantir la marge de module pour le système complet. Toutefois, la condition (3.15) qui doit être vérifiée sur toutes les fréquences est plutôt contraignante. Dans la section 3.5, nous allons montrer que cette condition peut être relaxée en tenant compte des contraintes pratiques, telles que, l'impact du bruit du capteur  $P_N$  sur le signal de commande  $u$ , la configuration matérielle, etc.

Basé sur les résultats des propositions 1 et 2, nous développons une méthode de réduction de modèle pour la synthèse robuste en boucle fermée présentée dans la section suivante.

### 3.3.2 Méthode de réduction de modèle pour la synthèse robuste en boucle fermée

La méthode consiste à déterminer un modèle d'ordre réduit  $H_r$  tel que les propositions 1 et 2 soient satisfaites, et que le critère suivant soit minimisé<sup>1</sup> :

$$\min J = \alpha_1 \Delta_{G_\infty} + \alpha_2 \Delta_{G_2} + \alpha_3 \Delta_{\varphi_\infty} \quad (3.17)$$

où  $\alpha_i|_{i=1,2,3} \geq 0$  sont des coefficients de pondération, et :

$$\begin{aligned} \Delta_{G_\infty} &= \max(|H_r| - |H|) \\ \Delta_{G_2} &= \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} (|H_r| - |H|)^2 d\omega \\ \Delta_{\varphi_\infty} &= \max(|\arg H - \arg H_r|) \end{aligned}$$

Le premier terme  $\Delta_{G_\infty}$  représente l'écart de gain maximum entre  $H$  et  $H_r$ . Le deuxième terme  $\Delta_{G_2}$  qui est la valeur efficace de l'écart de gain entre  $H$  et  $H_r$ , représente l'écart de gain moyen dans l'intervalle de fréquences de fonctionnement  $[\omega_{min}; \omega_{max}]$ . Le troisième terme  $\Delta_{\varphi_\infty}$  représente l'écart de phase maximum entre  $H$  et  $H_r$ .

La figure 3.1 représente les diagrammes de Bode en gain du modèle complet (courbe tiret) et de deux modèles réduits possibles  $H_{1r}$  (courbe continue mince) et  $H_{2r}$  (courbe continue en gras). Le modèle réduit  $H_{1r}$  présente un plus grand écart moyen  $\Delta_{G_2}$ , tandis que le modèle réduit  $H_{2r}$  présente un plus grand écart maximum  $\Delta_{G_\infty}$ . Il est donc souhaitable de tenir compte de ces deux critères pour le choix du modèle réduit.

Les coefficients de pondération peuvent être choisis comme suit :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1/G \\ \alpha_2 &= 1/ \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} |H|^2 d\omega \\ \alpha_3 &= 1/|\arg H(j\omega_{max})| \end{aligned} \quad (3.18)$$

avec  $G$  le gain statique de  $H$  si  $H$  ne possède pas de pôle en 0 sinon  $\alpha_1 = 1$ .

Ce choix des coefficients de pondération permet de normer les différents écarts dans le critère (3.17).

1. d'autres critères d'optimisation pourront être choisis

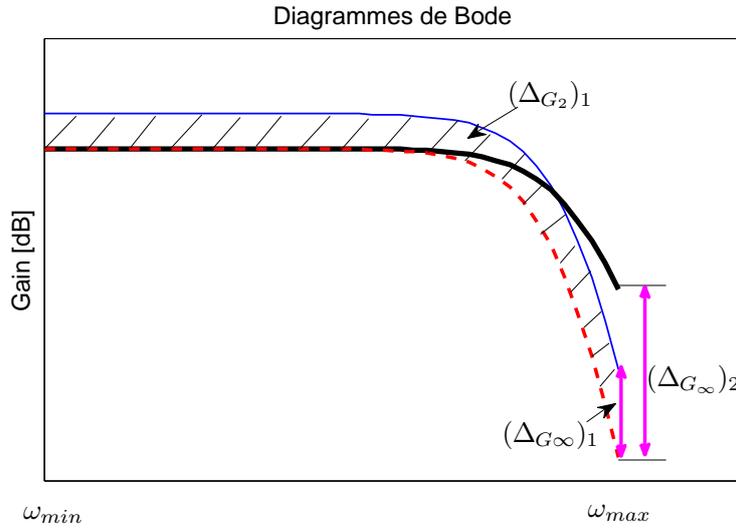


FIGURE 3.1 – Diagrammes de Bode en gain du modèle réduit  $H_{1r}$  (continu mince), modèle réduit  $H_{2r}$  (continu en gras) et modèle complet  $H$  (tiret)

### Formulation du problème d'optimisation de réduction de modèle

Avec les propositions 1 et 2 et le critère d'optimisation (3.17), le problème de réduction de modèle peut être formulé en un problème d'optimisation :

$$\arg \min_{\theta, \forall \omega \in [0, \omega_{max}]} J = \alpha_1 \max(|H_r| - |H|) + \alpha_2 \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} (|H_r| - |H|)^2 d\omega + \alpha_3 \max(|\arg H - \arg H_r|) \quad (3.19)$$

sous les contraintes (3.10) et (3.12).

$\theta$  est le vecteur de paramètres à déterminer du modèle d'ordre réduit  $H_r$  ;  $\omega_{max}$ , représentant la zone de fréquences de fonctionnement du système à contrôler, est définie dans le lemme 3.3.1 ;  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont les coefficients de pondération (3.18).

Quelle que soit la méthode de synthèse du correcteur basée sur le modèle réduit (sous réserve que les conditions (3.13) soient satisfaites), les marges de robustesse obtenues pour le système complet sont meilleures que celles obtenues pour le système réduit.

Néanmoins, la méthode pourrait avoir quelques aspects conservatifs qu'on va discuter ci-dessous :

- Les performances dynamiques obtenues pour le système complet peuvent être inférieures à celles obtenues pour le système réduit suivant le choix du critère (3.19) et sa minimisation. Cependant, si le critère d'optimisation (3.19) est bien choisi et minimisé (i.e. le modèle réduit et le modèle complet sont proches) l'écart de performances obtenues pour les systèmes complet et réduit peut être non significatif.
- Le correcteur est synthétisé avec le modèle réduit en satisfaisant les marges de robustesse définies dans le cahier des charges. Mais les marges de robustesse obtenues pour le système complet sont toujours supérieures aux marges désirées et peuvent être quelques fois bien

plus grandes.

Nous reviendront sur ces aspects conservatifs dans la section 3.3.5 dans laquelle nous proposons une procédure itérative pour réduire le conservatisme de la méthode.

Dans la section suivante, nous proposons une structure candidate pour le modèle réduit et discutons de sa validation.

### 3.3.3 Détermination des paramètres du modèle réduit

Une structure pour le modèle réduit doit tout d'abord être choisie. Plusieurs modèles peuvent être candidats pour le modèle réduit, par exemple, on peut choisir le suivant :

$$H_r(s) = \frac{G_r}{1 + \frac{s}{\omega_{0r}}} \frac{(-s + \omega_d)}{(s + \omega_d)} \quad (3.20)$$

Il est évident que le modèle (3.20) satisfait la propriété (3.10). Il y a trois paramètres à déterminer  $\theta = [G_r \ \omega_{0r} \ \omega_d]$ . Nous distinguons deux cas possibles :

#### 1<sup>er</sup> cas : le modèle d'ordre élevé du système est disponible.

Les trois paramètres  $G_r$ ,  $\omega_{0r}$ , et  $\omega_d$  sont déterminés par la résolution du problème d'optimisation (3.19).

La structure du modèle réduit (3.20) offre quelques avantages. En effet, la première partie est un premier ordre permettant d'approcher le gain (satisfaction de C1 de (3.12)), tandis que la deuxième partie, de gain unité, est utilisée pour approcher la phase (satisfaction de C2 de (3.12)). Le majeur avantage du choix de cette forme est donc que les paramètres du modèle réduit peuvent être déterminés indépendamment l'un après l'autre. Le problème d'optimisation (3.19) devient un problème plus simple :

$$\begin{cases} (G_r)_{opt} = \max_{\forall \omega \in [0, \omega_{max}]} |H(j\omega)| \\ (\omega_{0r})_{opt} = \min_{|H_r(j\omega)| \geq |H(j\omega)|, \forall \omega \in [0, \omega_{max}]} \omega_{0r} \\ (\omega_d)_{opt} = \max_{\arg H_r(j\omega) \leq \arg H(j\omega), \forall \omega \in [0, \omega_{max}]} \omega_d \end{cases} \quad (3.21)$$

Dans le cas des systèmes d'ordres élevés ayant un comportement intégrateur, le modèle réduit (3.20) est modifié en :

$$H_r(s) = \frac{G_r}{s} \frac{(-s + \omega_d)}{(s + \omega_d)} \quad (3.22)$$

et le problème (3.21) devient :

$$\begin{cases} (G_r)_{opt} = \min_{|H_r(j\omega)| \geq |H(j\omega)|, \forall \omega \in [0, \omega_{max}]} G_r \\ (\omega_d)_{opt} = \max_{\arg H_r(j\omega) \leq \arg H(j\omega), \forall \omega \in [0, \omega_{max}]} \omega_d \end{cases} \quad (3.23)$$

#### Remarque 3.3.4 (Validation du modèle réduit en boucle fermée après la synthèse de correcteur)

! Pour valider le modèle réduit en boucle fermée après la synthèse de correcteur, nous utili-

sons la distance  $\delta_\nu$  [79], et la marge de stabilité généralisée  $b$  [85] pour établir le critère de validation. Le modèle réduit est validé si :

$$\begin{cases} \delta_\nu(H, H_r) < b(C, H_r) \\ b(C, H_r) \leq b(C, H) \end{cases} \quad (3.24)$$

La première condition de (3.24) garantit que quel que soit le correcteur  $C(s)$ , stabilisant le modèle réduit  $H_r(s)$ , il stabilise également le modèle complet  $H(s)$ . La deuxième assure que les marges de stabilité obtenues pour le système complet  $L(s) = H(s)C(s)$  sont supérieures ou égales à celles obtenues pour le système réduit  $L_r(s) = H_r(s)C(s)$ . (Voir annexe G pour les définitions de  $\delta_\nu$  et  $b$ ). ♦

### 2<sup>e</sup> cas : le modèle du système n'est pas disponible.

Dans ce cas, nous utilisons une méthode d'identification expérimentale qui sera présentée dans la section 3.6, pour obtenir directement le modèle réduit.

### 3.3.4 Résultats en simulation obtenus avec les systèmes de benchmark

L'efficacité de la méthode de réduction de modèle sera illustrée à l'aide d'un ensemble de systèmes représentatifs qui sont souvent rencontrés dans l'industrie [47], [92].

$$\begin{aligned} H_1(s) &= \frac{e^{-15s}}{(s+1)^3} \\ H_2(s) &= \frac{1}{(s+1)(1+0.2s)(1+0.04s)(1+0.008s)} \\ H_3(s) &= \frac{1}{(s+1)^4}, \quad H_4(s) = \frac{1-2s}{(s+1)^3} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Les trois premiers modèles captent les dynamiques typiques dans la commande de processus. Le modèle  $H_1$  est un système ayant un grand retard,  $H_2$  est un système possédant des modes rapides et lents,  $H_3$  est un système avec des pôles répétés. Le modèle  $H_4$  a un zéro à non minimum de phase, ce qui est rare dans la commande de processus, mais il est considéré pour démontrer la large applicabilité de la méthode proposée. Tous les systèmes satisfont la condition de monotonie de phase (3.10).

Pour illustrer l'approche proposée, considérons le problème de conception : Étant donné des systèmes du benchmark (3.25), déterminer des correcteurs d'ordre 2 tels que les systèmes en boucle fermée suivant la figure 2.1 satisfont le cahier des charges suivant :

$$\begin{aligned} &\text{Rejet optimal de la perturbation de commande de type échelon} \\ &\text{Marge de module désirée } M_{md} \geq 0.5 \\ &\text{Marge de phase désirée } \varphi_d \geq 45^\circ \end{aligned} \quad (3.26)$$

Nous commençons par appliquer la méthode proposée pour déterminer les modèles réduits. D'abord, nous estimons la bande de fréquences sur laquelle le modèle complet sera approché. En

TABLE 3.1 – Modèles réduits pour  $H_1 - H_4$ 

Système		$H_1(s)$	$H_2(s)$	$H_3(s)$	$H_4(s)$
$H_r$	$G_r$	1	1	1	1
	$\omega_{0r}$		0.981	0.504	1.74
	$\omega_d$	0.992	10	0.764	0.331
$\omega_{max}$ [rad/s]		0.17	10	1	0.832
$\Delta_{\varphi_\infty}$		24°	11.3°	11.5°	16°
$\alpha_1 \Delta_{G_\infty}$		2e-3	0.059	0.2	0.052
$\alpha_2 \Delta_{G_2}$		4.4e-4	0.026	0.055	0.018
$\alpha_3 \Delta_{\varphi_\infty}$		0.136	0.063	0.064	0.09
$J$		0.138	0.149	0.319	0.016

pratique, l'avance de phase maximale qui peut être ajoutée par un correcteur d'ordre 2 est  $\varphi_{max} = 45^\circ$  si nous souhaitons avoir un correcteur propre. Selon le lemme 3.3.1, il vient  $\arg H(j\omega_{max}) = -\pi$ . Les modèles réduits ont été déterminés en minimisant le critère (3.19) tout en respectant les conditions de (3.12). La table 3.1 donne les résultats obtenus.

A titre d'exemple, la figure 3.2 représente les diagrammes de Bode du modèle complet et du modèle réduit pour  $H_2$ . Sur la plage de fréquences de fonctionnement  $[0; \omega_{max}] rad/s$ , le modèle réduit satisfait les conditions (3.12).

Une fois les modèles réduits obtenus, nous synthétisons des correcteurs d'ordres 2 de type PID en utilisant la méthode de synthèse de correcteur proposée dans le chapitre 2 pour satisfaire le cahier des charges (3.26). La structure du correcteur est donnée par :

$$C(s, X) = \frac{K(s^2 + as + b)}{s(s + p_c)} \quad (3.27)$$

### Remarque 3.3.5

Le correcteur (3.27) n'est utilisé que pour valider le modèle réduit en boucle fermée. Notons que la méthode de réduction de modèle proposée ne dépend pas de la méthode de synthèse du correcteur. ♦

A titre d'exemple, la figure 3.3 représente les diagrammes de Bode de la fonction de transfert de boucle  $L_r(s) = H_{2r}(s)C(s)$  pour  $H_2$ . Comme nous le voyons, le correcteur synthétisé satisfait les conditions (3.15) : le gain et la phase de  $L_r$  sont monotones décroissants.

En utilisant les correcteurs obtenus et les modèles d'ordres complets (3.25), les modèles d'ordres réduits sont validés selon le critère de validation (3.24). La distance  $\nu$  et les marges de stabilité généralisées sont données dans la table 3.2. Comme nous le voyons, tous les modèles réduits ont été validés. Ce résultat confirme bien que la méthode proposée de réduction de modèle garantit, grâce aux propositions 1 et 2, que les marges de robustesse obtenues avec le modèle complet sont meilleures que celles déterminées avec le modèle réduit.

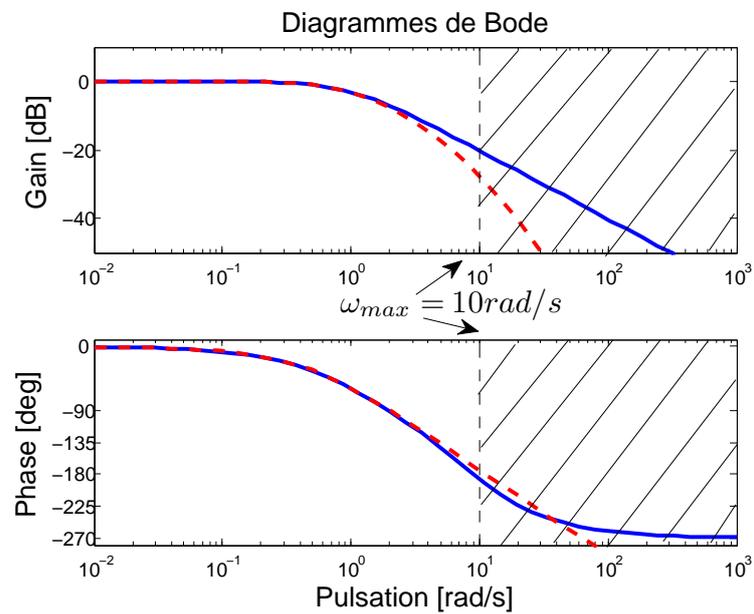
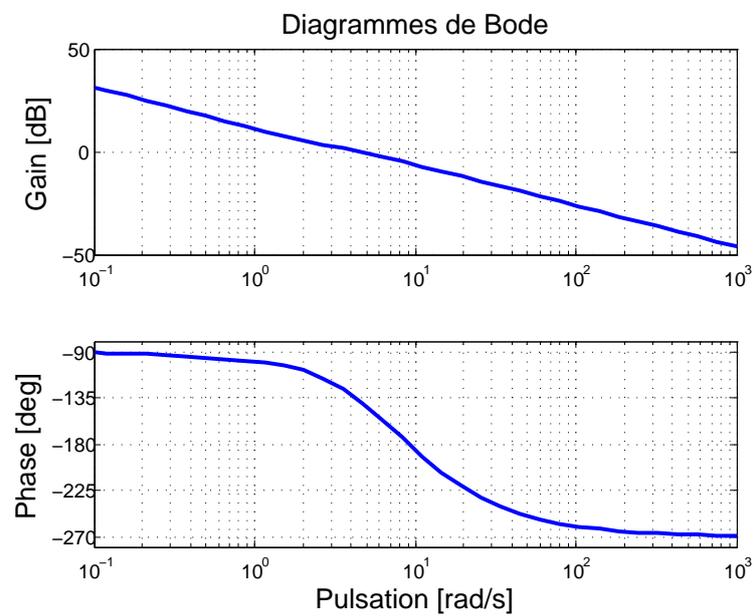
FIGURE 3.2 – Diagrammes de Bode pour  $H_2$  : modèle réduit (continu) et modèle complet (tiret)FIGURE 3.3 – Diagramme de Bode de la fonction de transfert de boucle  $L_r(s) = H_{3r}(s)C(s)$

TABLE 3.2 – Validation des modèles réduits pour les systèmes  $H_1 - H_4$ 

Système	$\delta_\nu(H, H_r) <$	$b(C, H_r) \leq$	$b(C, H)$
$H_1(s)$	0.42	0.7	0.75
$H_2(s)$	0.06	0.29	0.42
$H_3(s)$	0.23	0.47	0.62
$H_4(s)$	0.43	0.7	0.7

TABLE 3.3 – Correcteurs obtenus et propriétés en boucle fermée pour  $H_1 - H_4$ 

Système	$K$	$a$	$b$	$p_c$	$M_m$	$P_m [^\circ]$	$\ H_{y_{p.d_u.s}}\ _2$	$\omega_{gc}$ [rad/s]	$\omega_{max}$ [rad/s]
$H_{1r}$ $H_1$	3	0.6	0.1	8.5	0.5	45	5.72	0.036	0.17
					0.7	65	4.57	0.036	
$H_{2r}$ $H_2$	5	3	2.2	3	0.5	45	0.19	4.42	10
					0.6	55	0.18	3.49	
$H_{3r}$ $H_3$	5	0.928	0.328	4.5	0.5	59	1.13	0.352	1
					0.7	66	1	0.339	
$H_{4r}$ $H_4$	4.132	1.408	0.427	12	0.5	62	2.32	0.158	0.832
					0.6	73	2.12	0.161	

Les propriétés des correcteurs obtenus sont résumées dans la table 3.3. Notons que les correcteurs ont été conçus avec  $N_{max} = 10$ , ceci signifie que si le bruit de mesure est de 1% de la valeur maximum de la sortie, le niveau du bruit présent sur la commande est au maximum de 10%. Les deux dernières colonnes représentent la pulsation de coupure  $\omega_{gc}$  (liée à la bande passante) et la pulsation  $\omega_{max}$  du lemme 3.3.1.

Les résultats de la table 3.3 indiquent que, avec le correcteur conçu à l'aide du modèle réduit, les marges de robustesse obtenues pour le système complet sont meilleures que celles obtenues avec le système réduit. A titre d'exemple, la figure 3.4 illustre cela pour le système  $H_2$ . Ces résultats valident la méthode de réduction proposée : *avec le correcteur basé sur le modèle réduit, les marges de robustesse obtenues pour le système complet sont meilleures que celles obtenues pour le système réduit.*

Néanmoins, comme nous l'avons mentionné dans la section 3.3.2, la méthode proposée présente quelques aspects conservatifs :

- Les performances dynamiques obtenues pour le système complet peuvent être inférieures à celles obtenues pour le système réduit. Ici, le rejet de perturbation de commande de type échelon (confer les valeurs de norme  $H_2$  dans la table 3.3) obtenu pour le système complet est meilleur que celui obtenu pour le système réduit. Par contre, concernant la bande passante (confer les valeurs de  $\omega_{gc}$  dans la table 3.3) : les systèmes  $H_2, H_3$  présentent des valeurs de  $\omega_{gc}$  légèrement plus petites que celles des systèmes réduits, le système  $H_4$

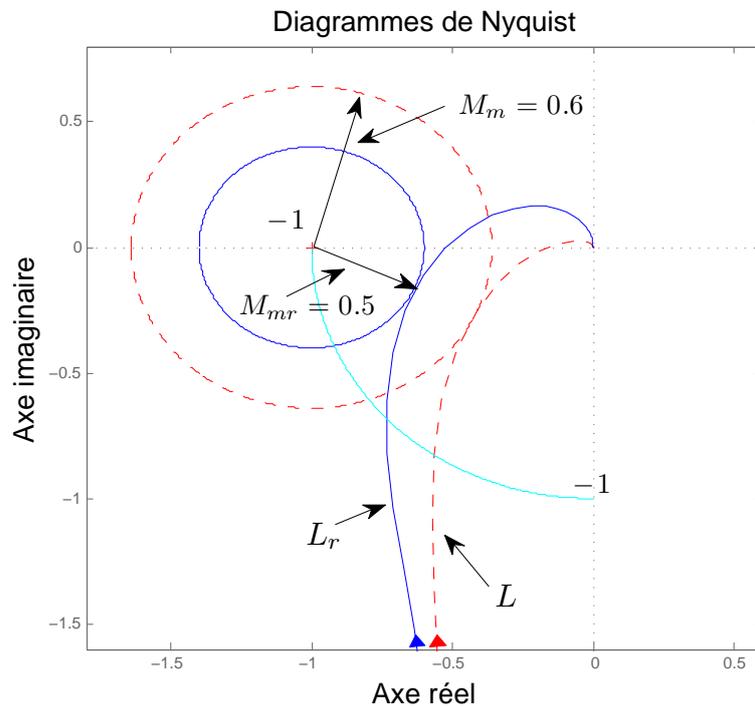


FIGURE 3.4 – Diagrammes de Nyquist de la fonction de transfert de boucle pour le système complet  $L(s) = H_2(s)C(s)$  (tiret) et pour le système réduit  $L_r(s) = H_{2r}(s)C(s)$  (continu)

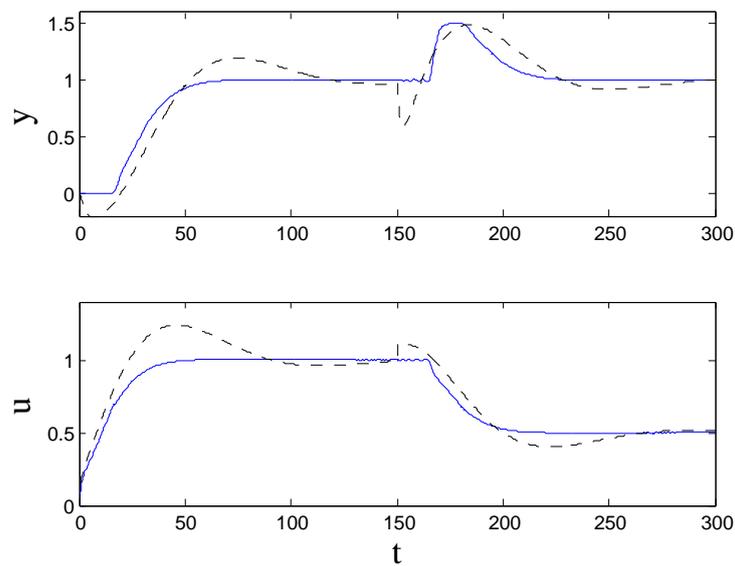


FIGURE 3.5 – Réponses temporelles pour le système complet (continu) et le système réduit (tiret) pour  $H_1$

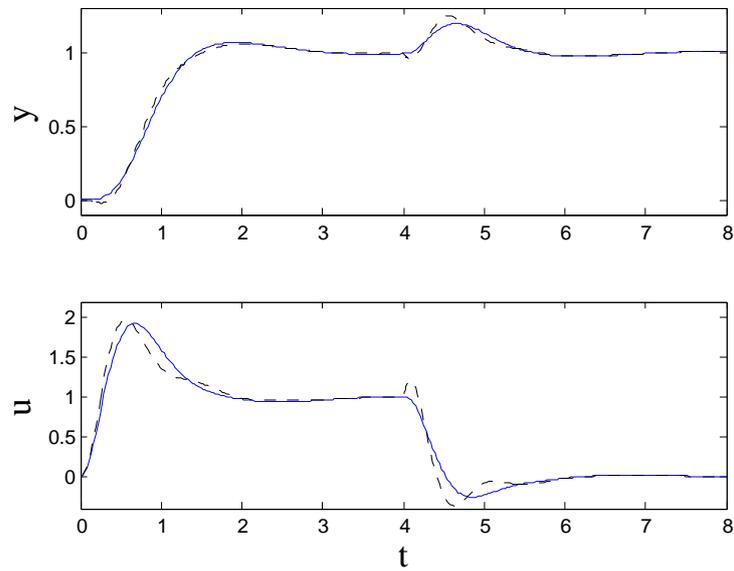


FIGURE 3.6 – Réponses temporelles pour le système complet (continu) et le système réduit (tiret) pour  $H_2$

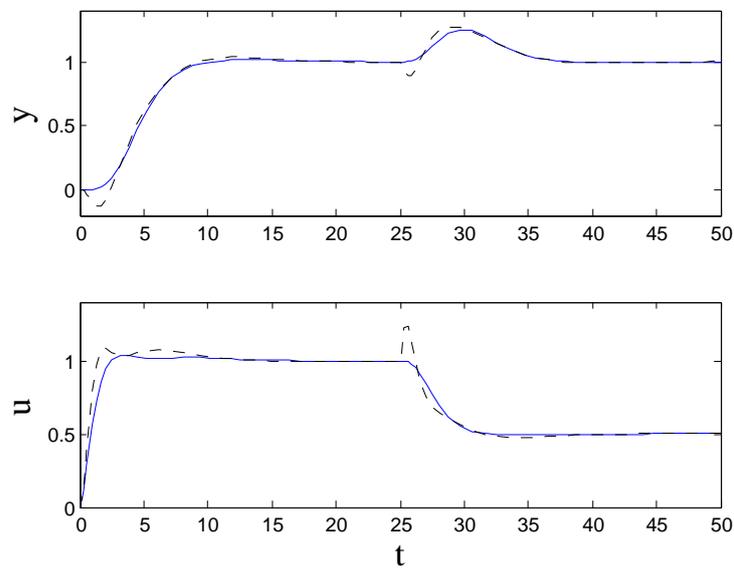


FIGURE 3.7 – Réponses temporelles pour le système complet (continu) et le système réduit (tiret) pour  $H_3$

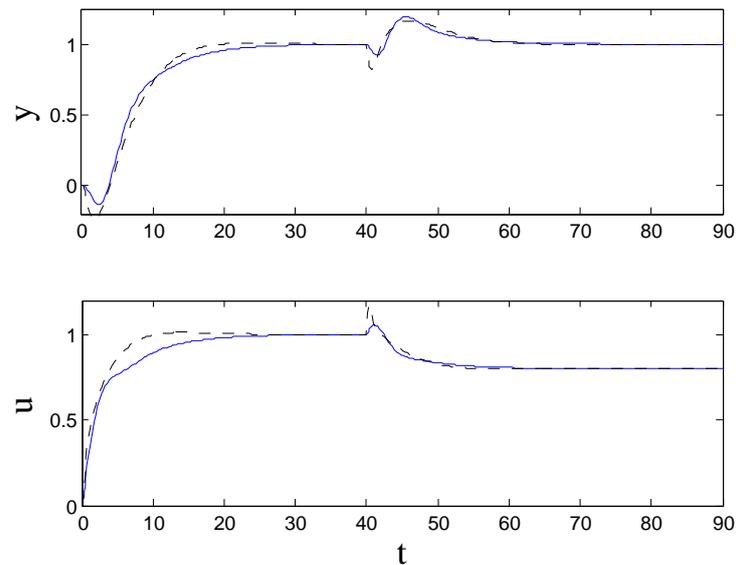


FIGURE 3.8 – Réponses temporelles pour le système complet (continu) et le système réduit (tiret) pour  $H_4$

présente une valeur de  $\omega_{gc}$  légèrement plus grande que le système réduit, et le système  $H_1$  présente une même valeur de  $\omega_{gc}$ .

- Les marges de robustesse obtenues pour les systèmes complets sont largement meilleures que les marges de robustesse désirées. Si nous arrivons à diminuer les marges pour le système complet, aux valeurs désirées pourrions nous gagner en performance dynamique ?

Les réponses de la sortie à la référence et à la perturbation de commande de type échelon sont représentées dans les figures 3.5-3.8. Nous voyons que le rejet de la perturbation de type échelon obtenu pour le système réel est meilleur que celui pour le système réduit. Malgré les légères différences de  $\omega_{gc}$  données dans la table 3.3, les résultats temporels vis-à-vis de l'entrée de référence avec les systèmes complets sont comparables avec ceux des systèmes réduits.

### 3.3.5 Diminution du conservatisme de la méthode de réduction de modèle

Afin d'améliorer les performances dynamiques obtenues pour les systèmes réels d'ordres complets, nous proposons dans cette section une procédure itérative pour diminuer l'éventuel conservatisme de la méthode de réduction de modèle.

**Le principe** est de diminuer progressivement la marge de module et/ou la marge de phase utilisée pour la synthèse du correcteur avec le modèle réduit jusqu'à obtenir des marges de robustesse pour le système complet "proches" des marges désirées.

La procédure de diminution du conservatisme de la méthode est résumée dans la figure 3.9.

#### Procédure 3.3.1 (Diminution du conservatisme de la méthode de réduction de modèle)

Notons  $M_{md}$  et  $\varphi_d$  les marges de module et de phase respectivement, définies dans le cahier des charges.  $m$  et  $p$  sont les marges de module et de phase respectivement, utilisées pour la synthèse de correcteur basée sur le modèle réduit.  $M$  et  $P$  sont les marges de module et de phase respectivement, obtenues pour le système complet.  $M_r$  et  $P_r$  sont les marges de module et de phase respectivement, obtenues pour le système réduit.

Pour initialiser la procédure : mettre  $m = M_{md}$  et  $p = \varphi_d$ .

1. Synthétiser un correcteur basé sur le modèle réduit en respectant  $m$  et  $p$ . Calculer les marges de robustesse  $M$  et  $P$  obtenues pour le système complet, et pour le système réduit  $M_r$ ,  $P_r$ . Calculer les écarts relatifs entre les marges<sup>2</sup> :

$$\Delta_m = \frac{M - M_r}{M_r} \quad \Delta_p = \frac{P - P_r}{P_r} \quad (3.28)$$

2. Vérifier la condition  $[(\Delta_m \leq 10\%) \wedge (\Delta_p \leq 10\%)]$ .  
Si OUI arrêter la procédure.  
Si NON aller à l'étape 3.
3. Vérifier la condition  $[(\Delta_p > 10\%) \wedge (P > \varphi_d)]$ .  
Si OUI effectuer  $p = p - \delta_p$  (e.g.  $\delta_p = 5^\circ$ ) et revenir à l'étape 1.  
Si NON aller à l'étape 4.
4. Vérifier la condition  $[(\Delta_m > 10\%) \wedge (M > M_{md})]$ .  
Si OUI effectuer  $m = m - \delta_m$  (e.g.  $\delta_m = 0.05$ ) et revenir à l'étape 1.  
Si NON arrêter la procédure. ◆

Les nouveaux correcteurs obtenus après la procédure de diminution du conservatisme sont indiqués dans la table 3.4. Les pulsations de coupures et les normes  $H_2$  avant l'application de la procédure sont aussi présentées. Nous voyons que les performances ont été améliorées tout en respectant le cahier des charges (3.26). A titre d'exemple, la figure 3.10 compare les réponses temporelles pour le système complet  $H_2$  obtenues avant et après la diminution du conservatisme. Comme nous le voyons, les performances dynamique et du rejet de la perturbation de commande ont été améliorées.

2. par construction de la méthode de réduction de modèle  $M \geq M_r$  et  $P \geq P_r$

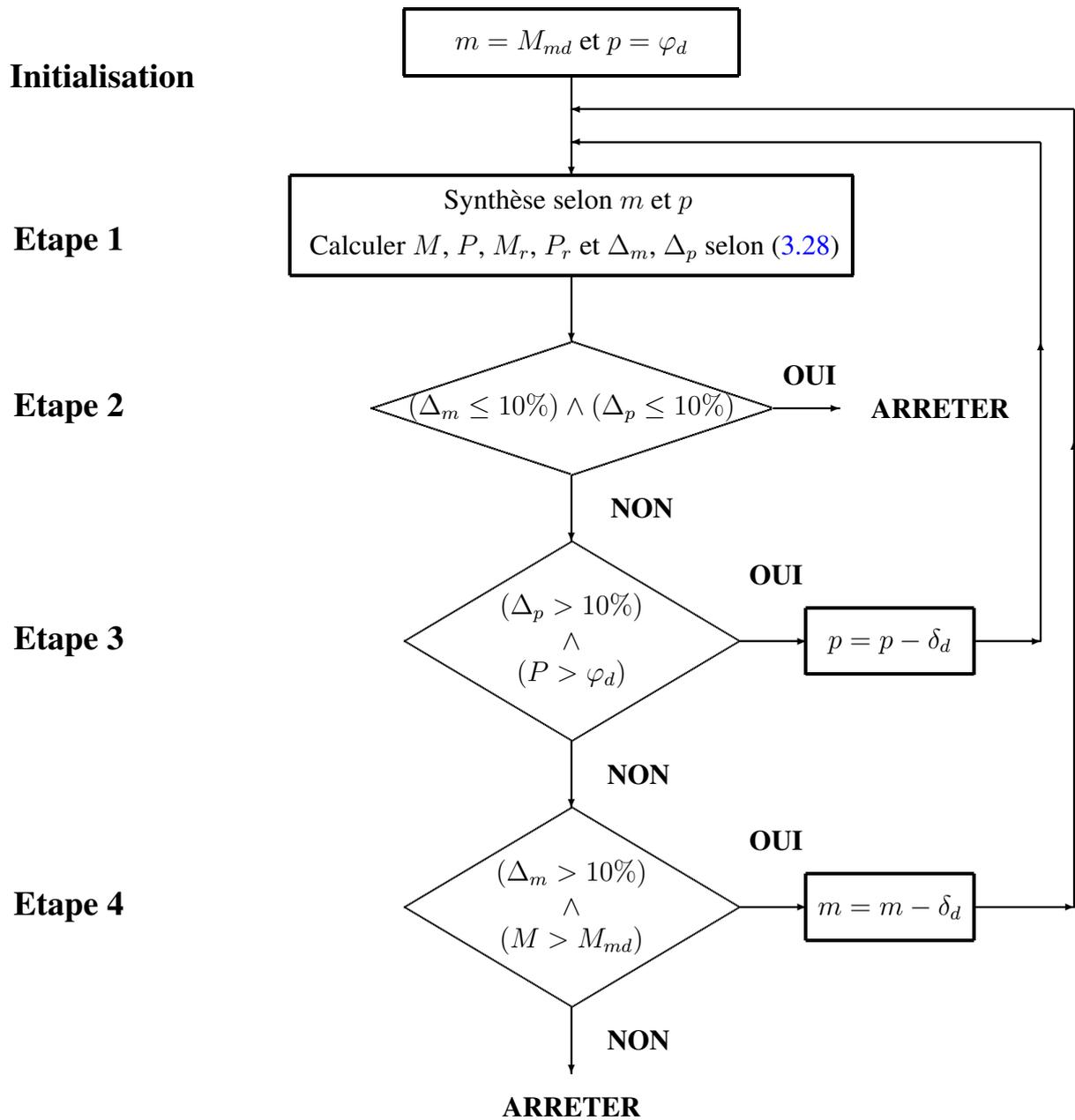
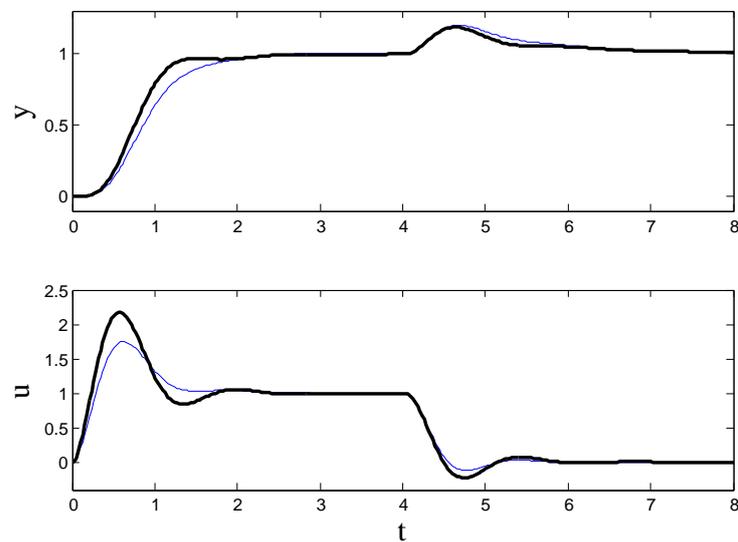


FIGURE 3.9 – Procédure de diminution du conservatisme de la méthode

TABLE 3.4 – Amélioration de performances par la diminution du conservatisme de la méthode

Système		$H_1(s)$	$H_2(s)$	$H_3(s)$	$H_4(s)$
$K_a$		5	5	5	5
$a$		0.6	4	1.6	1.37
$b$		0.09	2.6	0.35	0.427
$p_c$		8	3.2	4.5	12
$M_m$		0.5	0.57	0.5	0.5
$P_m[^\circ]$		51	45	52	68
$\omega_{gc}$	avant	0.036	3.49	0.339	0.161
	après	0.058	3.86	0.569	0.202
$\ H_{y_p d_{u-s}}\ _2$	avant	4.57	0.18	1	2.12
	après	4.2	0.157	0.826	2.03

FIGURE 3.10 – Réponses temporelles pour le système complet  $H_2$  avec les correcteurs obtenus avant (courbe mince) et après (courbe en gras) la diminution du conservatisme de la méthode

### 3.3.6 Réduction de modèle dans le cas de fonctions de transfert en boucle ouverte ayant un comportement double intégrateur

Considérons un système en boucle ouverte ayant un comportement double intégrateur, i.e. la phase démarre de  $-180^\circ$ . Les conditions C2 de (3.15) et (3.29) (la condition de décroissance de la phase) ne sont plus vérifiées car le correcteur ajoute de l'avance de phase pour stabiliser le système en boucle fermée. Dans ce cas nous remplaçons les propositions 1 et 2 par les deux corollaires suivants.

#### Corollaire 1

Considérons deux systèmes linéaires stables LTI SISO  $H(s)$  et  $H_r(s)$  satisfaisant (3.10) et (3.12).

Soit le correcteur  $C(s)$  synthétisé à l'aide de  $H_r(s)$ , de manière à ce que :

$$\forall \omega \in [\omega_{gc}; \omega_{max}] : \begin{cases} C1 : \frac{\partial |L_r(j\omega)|}{\partial \omega} < 0 \\ C2 : \frac{\partial \arg L_r(j\omega)}{\partial \omega} < 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

et que :

$$P_{mr} \geq \varphi_d$$

où  $L_r(s) = H_r(s)C(s)$  est la fonction de transfert en boucle ouverte,  $P_{mr}$  la marge de phase obtenue,  $\varphi_d$  la marge de phase désirée,  $\omega_{gc}$  la pulsation de coupure ( $|L(j\omega_{gc})| = 1$ ),  $\omega_{max}$  définie dans le lemme 3.3.1.

Alors la marge de phase  $P_m$  obtenue pour  $L(s) = H(s)C(s)$  satisfera :

$$P_m \geq P_{mr} \geq \varphi_d \quad (3.30)$$

**Preuve** La démonstration suit la même démarche de celle de la proposition 1. ■

De la même manière on peut obtenir la conservation de la marge de module.

#### Corollaire 2

Considérons deux systèmes linéaires stables LTI SISO  $H(s)$  et  $H_r(s)$  satisfaisant (3.10) et (3.12).

Soit le correcteur  $C(s)$  synthétisé à l'aide de  $H_r(s)$ , de manière à ce que :

$$\forall \omega \geq \omega_{gc} : \begin{cases} C1 : \frac{\partial |L_r(j\omega)|}{\partial \omega} < 0 \\ C2 : \frac{\partial \arg L_r(j\omega)}{\partial \omega} < 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

et que :

$$M_{mr} \geq M_{md}$$

où  $L_r(s) = H_r(s)C(s)$  est la fonction de transfert en boucle ouverte,  $M_{mr}$  la marge de module obtenue,  $M_{md}$  la marge de module désirée,  $\omega_{gc}$  la pulsation de coupure ( $|L(j\omega_{gc})| = 1$ ).

Alors la marge de module  $M_m$  obtenue pour  $L(s) = H(s)C(s)$  satisfera :

$$M_m \geq M_{mr} \geq M_{md} \quad (3.32)$$

**Preuve** La démonstration suit la même démarche de celle de la proposition 2. ■

La différence entre le corollaire 1 et la proposition 1, est qu'il suffit de vérifier les conditions (3.29) sur la plage de fréquences  $[\omega_{gc}; \omega_{max}]$  où les marges de phases sont calculées, mais pas sur  $[0; \omega_{max}]$ . La différence entre le corollaire 2 et la proposition 2, est que les conditions (3.31) doivent être vérifiées pour  $\omega \geq \omega_{gc}$ , mais pas pour  $\omega \geq 0$ .

Ces deux corollaires permettent d'appliquer la méthode de réduction au cas où le transfert de boucle ouverte a un comportement double intégrateur. L'inconvénient est que la synthèse du correcteur  $C(s)$  n'est plus indépendante du système complet. En effet, après la synthèse de  $C(s)$  à l'aide du modèle réduit  $H_r(s)$ , on applique ce correcteur au modèle complet  $H(s)$  pour déterminer la pulsation  $\omega_{gc}$ , puis on vérifie si les conditions (3.29) et (3.31) sont satisfaites. Néanmoins, en pratique, si le critère d'optimisation (3.19) est bien minimisé, nous aurons  $\omega_{gc} \approx \omega_{gcr}$ .

**Exemple** Considérons un système ayant un comportement intégrateur :

$$H(s) = \frac{1}{s(s+1)^2} \quad (3.33)$$

L'objectif est de déterminer un correcteur d'ordre 2 donné par (3.27) satisfaisant le cahier des charges (3.26). Le système et le correcteur ont tous les deux un comportement intégrateur. Le système en boucle ouverte a donc un comportement double intégrateur.

D'abord, le modèle réduit est déterminé :

$$H_r(s) = \frac{1}{s} \frac{(-s + 0.992)}{(s + 0.992)} \quad (3.34)$$

avec le critère optimal  $J=3.2e-3$ . La table 3.5 donne les résultats obtenus. Comme nous le voyons les marges de robustesse obtenues pour  $H$  sont meilleures que celles obtenues pour  $H_r$ . La figure 3.11 montre que la condition C2 de (3.29) n'est pas vérifiée sur  $[0; \omega_{max}]$ , mais vérifiée sur  $[\omega_{gc}; \omega_{max}]$ . Cela est suffisant pour garantir que  $P_m \geq P_{mr} \geq \varphi_d$  suivant le corollaire 1.

La figure 3.12 représente les transferts de boucle ouverte dans le plan de Nyquist. Nous voyons que les conditions (3.31) sont vérifiées pour  $\omega \geq \omega_{gc}$ . Cela est suffisant pour garantir que  $M_m \geq M_{mr} \geq M_{md}$  suivant le corollaire 2.

Les réponses de la sortie à la référence et à la perturbation de commande de type échelon sont représentées dans les figures 3.13. Malgré les légères différences de la norme  $H_2$  et de  $\omega_{gc}$  données dans la table 3.5, les résultats temporels du système complet sont très proches avec ceux du système réduit.

TABLE 3.5 – Correcteur obtenu et propriétés en boucle fermée

Système	$K$	$a$	$b$	$p_c$	$M_m$	$P_m [^\circ]$	$\ H_{y_p d_{u-s}}\ _2$	$\omega_{gc}$ [rad/s]	$\omega_{max}$ [rad/s]
$H_r$	5	1.25	0.1	11.4	0.5	45	5.04	0.576	1
$H$					0.7	49	4.91	0.459	

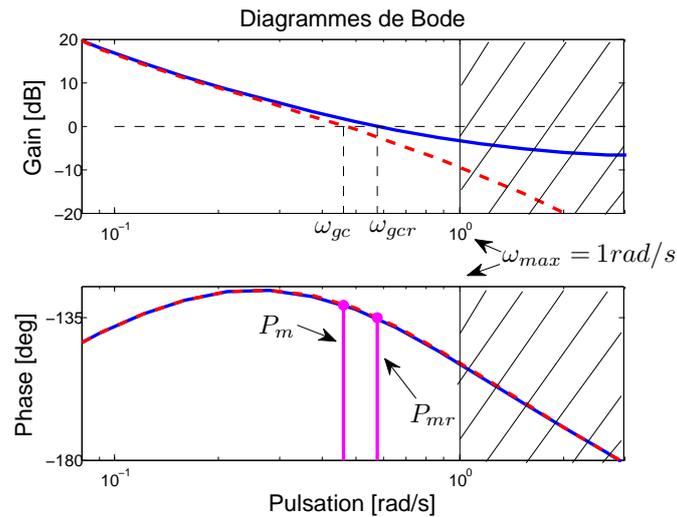


FIGURE 3.11 – Diagrammes de Bode en boucle ouverte du système complet  $L(s)$  (tiret) et du système réduit  $L_r$  (bleu continu)

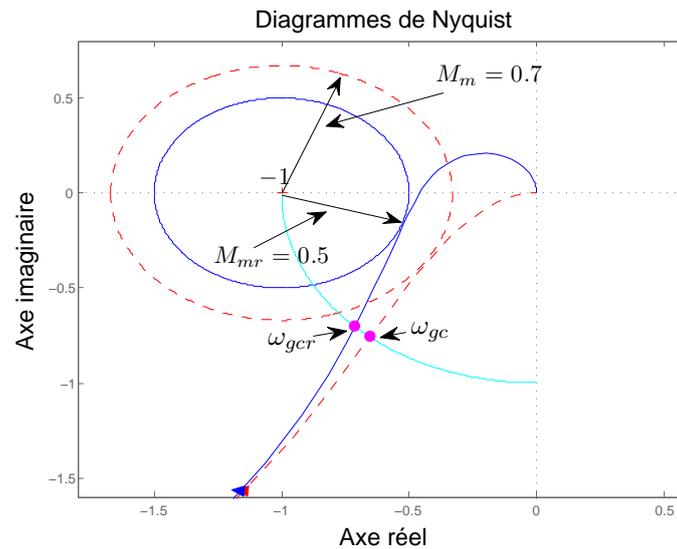


FIGURE 3.12 – Diagrammes de Nyquist en boucle ouverte du système complet  $L(s)$  (tiret) et du système réduit  $L_r$  (bleu continu)

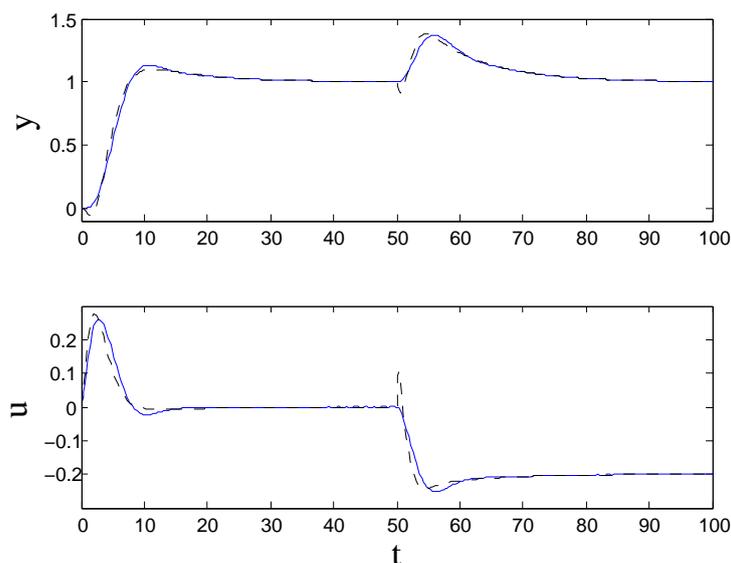


FIGURE 3.13 – Réponses temporelles pour le système complet (continu) et le système réduit (tiret)

### 3.3.7 Commande robuste pour systèmes à paramètres incertains

Comme nous l'avons mentionné dans la remarque 3.3.3, la méthode proposée peut être utilisée non seulement pour la réduction de modèle, mais aussi pour la commande robuste de systèmes à paramètres incertains. Prenons le problème de commande suivant : Soit un système du second ordre<sup>3</sup> :

$$P(s) = \frac{G_0}{\frac{1}{\omega_p^2} s^2 + \frac{2m}{\omega_p} s + 1} \quad (3.35)$$

où ses paramètres varient lentement :  $G_0 \in [0.8; 1.2]$ ,  $\omega_p \in [0.8; 1.2]$ , et  $m \in [0.6; 1]$ . Les paramètres nominaux sont :  $G_{0nom} = 1$ ,  $\omega_{pnom} = 1$ , et  $m_{nom} = 1$ .

L'objectif est de synthétiser un correcteur robuste satisfaisant les marges de robustesse  $M_{md} = 0.5$ ,  $\varphi_d = 45^\circ$  pour l'ensemble des valeurs possibles des paramètres du système.

Notre méthode consiste à déterminer un modèle de synthèse, de telle sorte qu'un correcteur conçu à l'aide de ce modèle garantira les marges de robustesse pour l'ensemble des valeurs des paramètres du système.

Nous prenons le modèle de synthèse de la même forme que (3.35)<sup>4</sup>. Par la résolution du problème d'optimisation (3.19), le modèle de synthèse obtenu est donné par :

$$H_{syn1}(s) = \frac{8}{\frac{1}{0.54^2} s^2 + \frac{2*0.75}{0.54} s + 1} \quad (3.36)$$

La figure 3.14 représente les diagrammes de Bode pour l'ensemble des valeurs des paramètres du système et du modèle de synthèse (3.36). Pour démontrer que l'approche proposée est in-

3. les systèmes d'ordres plus élevés à paramètres incertains peuvent aussi être traités
4. d'autres modèles pourront être choisis, par exemple le modèle (3.20)

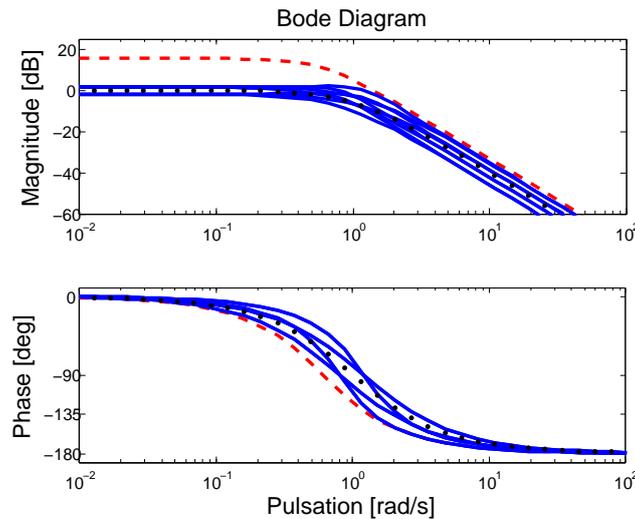


FIGURE 3.14 – Diagrammes de Bode du modèle de synthèse (tiret), des modèles perturbés (continu) et du modèle nominal (point)

TABLE 3.6 – Propriétés des correcteurs pour l'ensemble des valeurs des paramètres du système

Méthode	Complexité du correcteur	Plus petites marges de robustesse	
		$M_m$	$P_m$ [°]
MR-ROB1	second ordre	0.82	55.7
RST	second ordre	0.64	39.7
$H_\infty$	12 <sup>ème</sup> ordre	0.82	71.2

dépendante de la méthode de synthèse, à partir de ce modèle, nous synthétisons également un correcteur par placement des pôles en boucle fermée.

Nous comparons notre approche, notée MR-ROB1, à deux autres approches : notées (RST) et  $H_\infty$ . La méthode RST synthétise un correcteur par placement des pôles en boucle fermée à l'aide du modèle nominal. La méthode  $H_\infty$  détermine un correcteur robuste via  $\mu$ -synthèse [19], [93]. Les résultats sont indiqués dans la table 3.6. Comme nous le voyons, la plus petite marge de phase obtenue par le correcteur RST n'a pas respecté la spécification. Le correcteur basé sur le modèle de synthèse (MR-ROB1) et le correcteur robuste  $H_\infty$  ont satisfait les spécifications. Par contre, le correcteur robuste  $H_\infty$  est d'ordre très élevé (12<sup>ème</sup> ordre).

La figure 3.15 représente les marges de robustesse obtenues pour l'ensemble des valeurs des paramètres du système avec les trois correcteurs. Comme nous le voyons, les marges de robustesse obtenues par les correcteurs  $H_\infty$  et MR-ROB1 sont meilleures que celles obtenues par le correcteur RST. Les réponses temporelles de la figure 3.16 montrent que notre approche n'est pas conservatrice vis-à-vis de la performance (bande passante) par rapport aux autres approches (RST basé sur le modèle nominal et  $H_\infty$  robuste via  $\mu$ -analyse) malgré le grand écart de gain

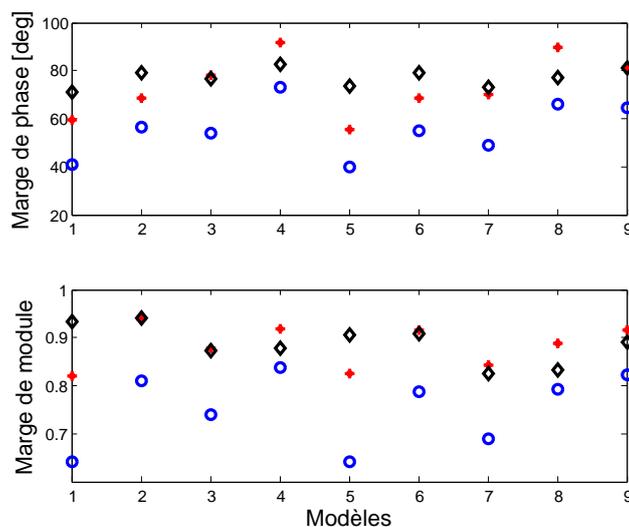


FIGURE 3.15 – Comparaison de marges de robustesse obtenues avec les différents correcteurs : MR-ROB1 (astérisque), RST (cercle) and  $H_\infty$  (diamant)

statique (voir la figure 3.14) entre les modèles du système et le modèle réduit utilisé pour la synthèse.

L'avantage de notre approche est que le modèle réduit permet le développement de correcteurs robustes de complexité faible (ici, d'ordre 2) afin d'être embarquées sur des systèmes de commande ayant de très fortes contraintes de ressources matérielles et de calcul.

Maintenant si nous prenons le modèle de synthèse de la forme (3.20). Par la résolution du problème d'optimisation (3.19), le modèle de synthèse obtenu est donné par :

$$H_{syn2}(s) = \frac{1.2(-s + 0.67)}{\left(\frac{s}{17} + 1\right)(s + 0.67)} \quad (3.37)$$

La figure 3.17 représente les diagrammes de Bode pour l'ensemble des valeurs des paramètres du système et du modèle de synthèse (3.37).

Nous comparons le correcteur basé sur le modèle (3.36) (MR-ROB1) et l'autre basé sur le modèle (3.37), dénoté MR-ROB2. La table 3.7 résume les propriétés obtenues avec ces deux correcteurs. Les valeurs du critère  $J$  (3.19) sont aussi présentées. Comme nous le voyons, le modèle (3.36) présente une valeur de  $J$  plus petite que celle du modèle (3.37). Il est donc préférable de choisir le modèle (3.36) pour la synthèse de correcteur. Cela peut être vu sur les figures 3.14 et 3.17 : le modèle (3.36) est plus "proche" du système à contrôler que le modèle (3.37).

La figure 3.18 compare les réponses temporelles obtenues pour l'ensemble des valeurs des paramètres du système réel avec deux correcteurs MR-ROB1 et MR-ROB2. Comme nous le voyons, au niveau de la performance, le choix du modèle (3.36) est moins conservatif que celui du modèle (3.37).

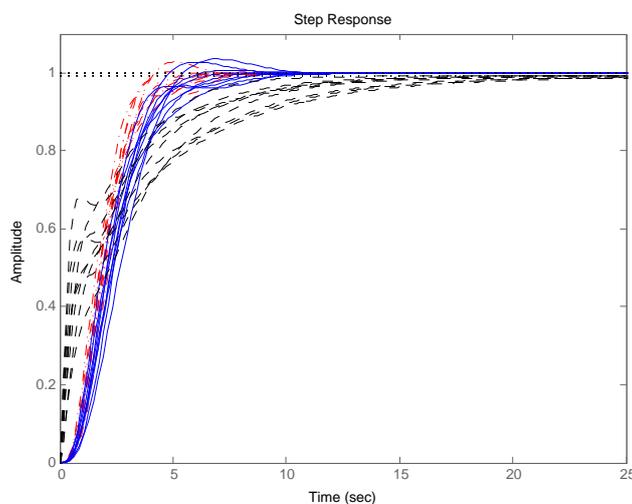


FIGURE 3.16 – Réponses temporelles vis-à-vis d'un échelon de référence : MR-ROB1 (bleu continu), RST (rouge point-tiret) and  $H_\infty$  (noir tiret)

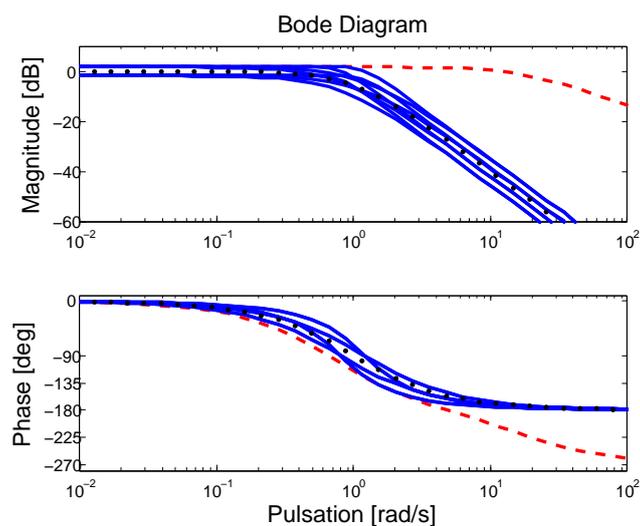


FIGURE 3.17 – Diagrammes de Bode du modèle de synthèse (tiret), des modèle perturbés (continu) et du modèle nominal (point)

TABLE 3.7 – Comparaison entre deux modèles de synthèse (3.36) et (3.37)

Méthode	$J$	Plus petites marges de robustesse		$\omega_{gc}$ [rad/s]
		$M_m$	$P_m$ [°]	
MR-ROB1	0.4	0.82	55.7	0.736
MR-ROB2	0.77	0.7	70	0.212

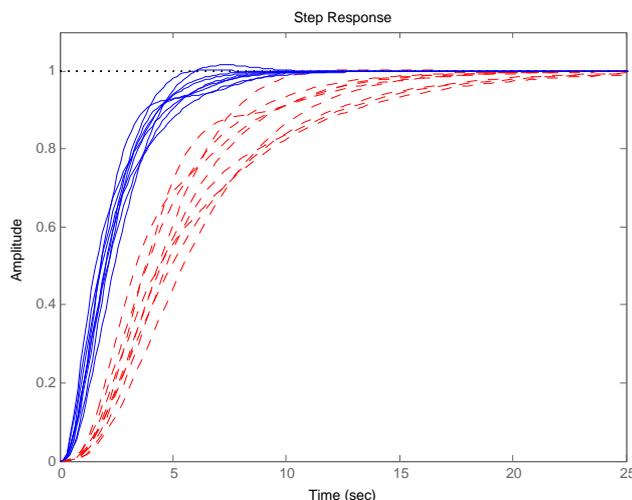


FIGURE 3.18 – Réponses temporelles vis-à-vis d'un échelon de référence : MR-ROB1 (continu) et MR-ROB2 (tiret)

### 3.4 Caractéristiques du système de commande

De nos jours, les systèmes de commande sont quasi exclusivement implantés sur des systèmes numériques de commande pour des raisons évidentes de coût, de compacité et de souplesse d'utilisation. Les dispositifs de commande, tels que microprocesseurs, convertisseurs analogique-numérique (CAN), convertisseurs numérique-analogique (CNA), capteurs, actionneurs, ..., jouent donc un rôle incontournable et doivent être pris en compte lors de la conception des lois de commande. Par conséquent, un système de commande réel est soumis à des contraintes physiques et technologiques, par exemple, la précision du capteur, la saturation de l'actionneur, les résolutions des CAN et CNA, etc.

Les grandeurs en entrées et sortie du système sont des grandeurs physiques (e.g. la tension en Volt est la plus utilisée) qui évoluent dans une plage bien définie. Par exemple, en entrées, les convertisseurs analogique-numérique recevant les signaux des capteurs n'acceptent que des signaux dans une plage bien définie, typiquement  $y \in [0; 5V]$ . De même en sortie, le convertisseur numérique-analogique ne délivre qu'un signal dans une plage définie, typiquement  $u \in [0; 5V]$ . Le plus souvent, pour ne pas dire toujours, pour des raisons pratiques les concepteurs utilisent des plages de variation des signaux en entrées et en sorties de même valeurs normalisées. Les plus fréquemment utilisées sont  $[0; 5V]$ ,  $[-5V; 5V]$ ,  $[0; 3.3V]$ ,  $[0; 10V]$ ,  $[-10V; 10V]$ . Une fois ceci pris en compte, nous pouvons en déduire des contraintes qu'il faudra satisfaire lors de la synthèse de correcteurs.

Dans cette section, nous allons donner une formalisation de ces aspects et la section suivante prendra en compte ces contraintes physiques pour la réduction de modèle.

### 3.4.1 Configuration du système de commande

Nous commencerons par introduire quelques notations :

$$y \in [\underline{y}; \bar{y}] \subset \mathfrak{R}, -\infty < \underline{y} < \bar{y} < \infty$$

$$u \in [\underline{u}; \bar{u}] \subset \mathfrak{R}, -\infty < \underline{u} < \bar{u} < \infty$$

où  $\underline{y}$  et  $\bar{y}$ ,  $\underline{u}$  et  $\bar{u}$  sont les valeurs minimales et maximales de la sortie et de la commande, respectivement.

Sans perte de généralité, nous supposons dans la suite :  $\underline{y} = -\bar{y}$  et  $\underline{u} = -\bar{u}$ . De plus, nous noterons :

$$\alpha_{IO} = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} \quad (3.38)$$

$\alpha_{IO}$  sera, comme nous l'avons indiqué plus haut, le plus souvent choisi égal à 1.

Considérons un système physique linéaire invariant représenté par sa fonction de transfert  $H(s)$  telle que  $Y(s) = H(s).U(s)$ . Nous considérons un système ne possédant pas de pôle sur le l'axe imaginaire, c'est-à-dire un système où le gain statique est borné :  $H(s=0) = G_0 < \infty$ . Dans ces conditions, afin que tout le domaine de variation de la sortie  $y$  puisse être atteint, au moins en régime statique, avec des valeurs admissibles de l'entrée  $u$ , nous devons avoir :

$$\bar{y} \leq G_0 \bar{u} \quad (3.39)$$

Il est important de noter que ce gain statique  $G_0$  n'est pas seulement dépendant du processus mais de toute la chaîne d'acquisition et de la mise en forme analogique des signaux envoyés à l'actionneur et reçus des capteurs.

Des relations (3.38) et (3.39), il vient :

$$\alpha_{IO} \leq G_0 \quad \text{ou} \quad \frac{G_0}{\alpha_{IO}} \geq 1 \quad (3.40)$$

Le rapport  $\frac{G_0}{\alpha_{IO}}$  est donc ajusté par les gains de la chaîne d'acquisition de manière à satisfaire le compromis dynamique/précision. En effet, pour  $\frac{G_0}{\alpha_{IO}}$  proche de 1, toute la plage de fonctionnement de la sortie  $y$  sera atteinte lorsque l'entrée  $u$  évolue dans sa propre plage. Par contre, la dynamique du système bouclé sera proche de la dynamique propre de  $H(s)$  en boucle ouverte. Afin d'obtenir des dynamiques supérieures en boucle fermée par rapport à celle en boucle ouverte, le rapport  $\frac{G_0}{\alpha_{IO}}$  devra être largement plus grand que 1. Mais une trop grande valeur prise par ce rapport entraînera une diminution de la précision de la commande. En effet, supposons  $\frac{G_0}{\alpha_{IO}} = 100$  et un paramètre  $\alpha_{IO} = 1$  (comme c'est souvent le cas en pratique), cela voudra dire que la valeur maximum de la sortie sera atteinte pour une valeur d'à peine 1% de la commande maximale  $\bar{u}$ . Une telle configuration nécessiterait une très grande précision de la commande  $u$  et une très grande insensibilité au bruit serait aussi nécessaire. Typiquement, en pratique le rapport  $\frac{G_0}{\alpha_{IO}} \in [2; 10]$ .

### 3.4.2 Bruit de mesure

L'amplitude du bruit de mesure est un paramètre très important qui conditionne comme on va le voir la bande passante, donc la dynamique du système bouclé. Le bruit de mesure est supposé être localisé dans les hautes fréquences. Cette notion de hautes fréquences est difficilement quantifiable et dépend de chaque système physique traité. De manière générale, nous noterons  $\omega_N > 0$  la pulsation à partir de laquelle on désire considérer l'effet du bruit sur la commande. Généralement, cette pulsation est supérieure à la pulsation de croisement du système en boucle ouverte et en particulier nous supposons :

$$\omega_N \geq \omega_{gc} = \sup_{\omega} \arg(\|L(j\omega)\| = 1) \quad (3.41)$$

C'est-à-dire que  $\omega_N$  est supérieure à la plus grande pulsation à laquelle le module de la fonction de transfert de boucle  $L(j\omega) = H(j\omega)C(j\omega)$  vaut 1.

Une donnée expérimentale importante est l'amplitude ou la valeur efficace du bruit  $\|P_N\|_{2,\omega \geq \omega_N}$  sur la grandeur mesurée  $y$ , nous définirons le paramètre  $\beta_y$  par :

$$\|P_N\|_{2,\omega \geq \omega_N} := \beta_y \bar{y} \quad (3.42)$$

Typiquement,  $\beta_y \in [0.01; 0.1]$ , i.e. le niveau de bruit sur la mesure peut aller de 1% à 10% de l'amplitude maximale du signal de sortie mesurée.

Une autre caractéristique importante pour l'implantation expérimentale reliée directement à un fonctionnement accepté du système est le niveau de bruit toléré sur la commande  $\|U_N\|_{2,\omega \geq \omega_N}^{max}$ . Nous définirons le paramètre  $\beta_u$  de la façon suivante :

$$\|U_N\|_{2,\omega \geq \omega_N}^{max} := \beta_u \bar{u} \quad (3.43)$$

Notons dès maintenant que ce paramètre du cahier des charges est relié au rapport  $\frac{G_0}{\alpha_{IO}}$ . En effet, nous pouvons redéfinir le niveau de bruit accepté sur la commande en fonction de l'amplitude de commande  $u_0|_{y=\bar{y}}$  pour obtenir une amplitude maximum de la sortie  $\bar{y}$  par :

$$\|U_N\|_{2,\omega \geq \omega_N}^{max} := \beta_{u_0} u_0|_{y=\bar{y}} \quad (3.44)$$

Sachant que :

$$u_0|_{y=\bar{y}} := \frac{\bar{y}}{G_0} \quad (3.45)$$

De (3.38) et (3.45), il vient :

$$u_0|_{y=\bar{y}} = \frac{\alpha_{IO}}{G_0} \bar{u} \quad (3.46)$$

En remplaçant (3.44) dans (3.46), nous obtenons :

$$\|U_N\|_{2,\omega \geq \omega_N}^{max} = \beta_{u_0} \frac{\alpha_{IO}}{G_0} \bar{u} \quad (3.47)$$

De (3.43) et (3.47), nous déduisons :

$$\beta_u = \beta_{u_0} \frac{\alpha_{IO}}{G_0} \quad (3.48)$$

La relation (3.48) montre que le paramètre  $\beta_u$ , donné dans le cahier des charges, est évidemment relié au rapport  $\frac{G_0}{\alpha_{IO}}$ . Par conséquent, en établissant le cahier des charges, pour qu'il soit faisable, les concepteurs doivent tenir compte de la configuration matérielle.

**Exemple :** si nous tolérons un niveau de bruit sur la commande égal à 10% de  $u_0$ , valeur nécessaire pour obtenir une amplitude maximum de la sortie  $\bar{y}$ , il vient  $\beta_{u_0} = 0.1$  et si par ailleurs le rapport  $\frac{G_0}{\alpha_{IO}} = 100$ , il vient  $\beta_u = 0.001$  ce qui est une valeur extrêmement difficile à obtenir expérimentalement et comme on va le voir par la suite limiterait considérablement le gain en hautes fréquences du correcteur et par voie de conséquence la bande passante du système en boucle fermée.

### 3.4.3 Limitation du gain du correcteur en hautes fréquences

Jusqu'à présent, nous avons vu que l'impact du bruit de mesure sur le signal de commande joue un rôle évident dans la conception du correcteur. Plus précisément, le bruit du capteur limite le gain en hautes fréquences du correcteur. Ce fait est démontré dans le lemme suivant.

#### Lemme 3.4.1

Soit le système bouclé de la figure 2.1 avec  $H(s)$  une fonction de transfert telle que le gain statique  $|H(0)| = G_0 < \infty$ ,

Soit un correcteur  $C(s)$  tel que la marge de module  $M_m = \min_{\omega \geq 0} |1 + H(j\omega)C(j\omega)| \geq M_{md}$ , avec  $M_{md}$  la marge de module désirée,

Soit  $[\omega_N; \infty[$  avec  $\omega_N > 0$ , la bande de fréquence du bruit présent sur la mesure de la sortie  $y$ ,

La valeur efficace du bruit présent sur la commande  $\|U_N\|_{2, \omega \geq \omega_N}$  sera inférieure à  $\|U_N\|_{2, \omega \geq \omega_N}^{max}$  si  $\|C(s)\|_{\infty, \omega \geq \omega_N} \leq M_{md} \frac{\beta_{u_0}}{\beta_y} \frac{1}{G_0}$ , avec  $\beta_{u_0}$ ,  $\beta_y$  et  $\omega_N$  définis par (3.44), (3.42) et (3.41).

**Preuve** Voir annexe E.4 ■

**Exemple :** Considérons deux cas expérimentaux classiques :

$\beta_{u_0} = 0.1$ ,  $\beta_y = 0.05$ ,  $M_{md} = 0.5$  avec  $G_0 = 1$  puis  $G_0 = 10$ .

$\beta_y = 0.05$  indique une amplitude du bruit de mesure de 5% de l'amplitude maximum de la sortie.  $\beta_{u_0} = 0.1$  indique que nous désirons que le bruit sur la commande soit d'au maximum de 10% de l'amplitude de la commande nécessaire à l'obtention de la sortie maximum en régime statique.

Avec ces valeurs des paramètres, d'après le lemme 3.4.1, il vient que la valeur maximum du gain du correcteur dans la bande de fréquence du bruit est donnée par  $\|C(s)\|_{\infty, \omega \geq \omega_N} \leq 1$  avec  $G_0 = 1$  et par  $\|C(s)\|_{\infty, \omega \geq \omega_N} \leq 0.1$  avec  $G_0 = 10$ .

Nous voyons l'importance de cette contrainte, en effet si nous avons synthétisé dans le cas  $G_0 = 1$ , un correcteur dont le gain en hautes fréquences  $\|C(s)\|_{\infty, \omega \geq \omega_N} = 10$ , le bruit sur la commande serait d'une amplitude égale à 100% de l'amplitude de la commande nécessaire en régime statique, ce qui est inacceptable en pratique.

En conséquence, l'amplitude du bruit du capteur limite fortement la bande passante obtenue en boucle fermée. Ainsi, il suffit que le modèle d'ordre réduit, utilisé pour la synthèse du correc-

teur, approche bien le système complet sur une bande de fréquence finie, mais pas nécessairement sur toutes les fréquences. Nous allons démontrer ce fait dans la prochaine section.

### 3.5 Réduction de modèle en tenant compte de contraintes pratiques

Dans cette section, nous allons modifier la méthode proposée dans la section 3.3 en tenant compte des contraintes pratiques mentionnées dans la section 3.4. Tout d'abord, nous montrons l'effet du bruit du capteur sur la robustesse à travers la proposition suivante.

#### Proposition 3

Considérons le système bouclé de la figure 2.1 avec  $H(s)$  une fonction de transfert telle que le gain statique  $|H(0)| = G_0 < \infty$ . Soit la pulsation  $\omega_0 > 0$  telle que :

$$\frac{G_0\omega_0}{\omega} \geq |H(j\omega)|, \quad \forall \omega \geq 0 \quad (3.49)$$

Soit un correcteur  $C(s)$ , qui satisfait le lemme 3.4.1, tel que la marge de module  $M_{m1} = \min_{\omega \leq \omega_1} |1 + H(j\omega)C(j\omega)| \geq M_{md}$ , avec  $1 > M_{md} > 0$  la marge de module désirée. Soit les paramètres  $\beta_{u_0}$  et  $\beta_y$  définis par (3.44) et (3.42). Si

$$\omega_1 \geq \frac{\beta_{u_0}}{\beta_y} \frac{M_{md}}{1 - M_{md}} \omega_0 \quad (3.50)$$

alors nous avons pour la marge de module globale :

$$M_m = \min_{\omega \geq 0} |1 + H(j\omega)C(j\omega)| \geq M_{md} \quad (3.51)$$

**Preuve** Voir annexe E.5 ■

Cette proposition nous permet, sous les conditions énoncées, de montrer que la marge de module obtenue sur la bande limitée  $[0; \omega_1]$  s'étend à toute la plage de fréquences. Autrement dit, nous avons simplement besoin de synthétiser un correcteur garantissant la marge de module sur une bande de fréquence limitée, pour que la marge de module globale sur toutes les fréquences soit également garantie.

**Exemple :** Prenons un système expérimental tel que :

$$\beta_{u_0} = 0.1, \beta_y = 0.05, M_{md} = 0.5$$

Il vient  $\omega_1 \geq \frac{0.1}{0.05} \frac{0.5}{1-0.5} \omega_0 = 2\omega_0$ , avec  $\omega_0$  satisfaisant (3.49). Il suffira donc d'assurer que la marge de module est obtenue sur la bande  $[0; 2\omega_0]$ , et non pas pour  $\omega \geq 0$ .

### 3.5.1 Réduction de modèle en assurant la marge de module en boucle fermée

Maintenant, un théorème moins contraignant que la proposition 2 sera présenté. En effet, nous allons montrer qu'avec la prise en compte du bruit de mesure et des contraintes expérimentales, nous avons seulement besoin de vérifier la condition (3.15) sur une plage de fréquence finie  $[0; \omega_1]$ .

#### Théorème 2

Considérons le système bouclé de la figure 2.1 avec une fonction de transfert  $H(s)$  satisfaisant (3.49), (3.10) et de gain statique  $|H(0)| = G_0 < \infty$ .

Soit une autre fonction de transfert  $H_r(s)$  satisfaisant (3.10) et les conditions suivantes :

$$\forall \omega \in [0, \omega_1] : \begin{cases} \text{C1} : |H_r(j\omega)| \geq |H(j\omega)| \\ \text{C2} : \arg H_r(j\omega) \leq \arg H(j\omega) \end{cases} \quad (3.52)$$

avec la pulsation  $\omega_1$  définie par (3.50).

Soit un correcteur  $C(s)$ , conçu à l'aide de  $H_r(s)$ , satisfaisant :

$$\forall \omega \in [0, \omega_1] : \begin{cases} \text{C1} : \frac{\partial |L_r(j\omega)|}{\partial \omega} < 0 \\ \text{C2} : \frac{\partial \arg L_r(j\omega)}{\partial \omega} < 0 \end{cases} \quad (3.53)$$

et  $M_{mr} = \min_{\omega \leq \omega_1} |1 + L_r(j\omega)| \geq M_{md}$ ,

alors la marge de module globale obtenue pour  $L(s) = C(s)H(s)$  satisfera :

$$M_m \geq M_{md} \quad (3.54)$$

**Preuve** Voir annexe E.6 ■

A l'aide de la proposition 3, le théorème 2 montre que le modèle réduit a seulement besoin d'approcher le système complet sur une plage limitée de fréquences  $[0; \omega_1]$ , puis un correcteur synthétisé à l'aide du modèle réduit garantira la marge de module globale obtenue pour le système complet. De plus, la pulsation  $\omega_1$  est déterminée selon les caractéristiques propres du système par (3.50).

### 3.5.2 Réduction de modèle en assurant la marge de phase en boucle fermée

Dans la section 3.3, après la proposition 1, la plage de fréquence, sur laquelle le système complet est approché, dépend du type de correcteur utilisé (i.e.  $\omega_{max}$  dépend de l'avance de phase maximale ajoutée par le correcteur). Avec la prise en compte des contraintes expérimentales, la proposition suivante considère une bande de fréquences  $[0; \omega_1]$  dépendant seulement des propriétés du système. En effet, quel que soit le correcteur utilisé, la pulsation  $\omega_1$  sera déterminée par quatre facteurs :  $\beta_y$  (selon la configuration matérielle) ;  $M_{md}$  marge de module souhaitée et  $\beta_{u0}$  (selon le cahier des charges) ; et  $\omega_{0r}$  (selon le système).

**Proposition 4**

Soit  $H(s)$  et  $H_r(s)$  deux systèmes LTI SISO, satisfaisant (3.10) et les conditions suivantes :

$$\forall \omega \in [0; \omega_1] : \begin{cases} C1 : |H_r(j\omega)| \geq |H(j\omega)| \\ C2 : \arg H_r(j\omega) \leq \arg H(j\omega) \end{cases} \quad (3.55)$$

avec  $\omega_1$  définie par (3.50).

Soit un correcteur  $C(s)$ , conçu à l'aide de  $H_r(s)$ , satisfaisant :

$$\forall \omega \in [0; \omega_1] : \begin{cases} C1 : \frac{\partial |L_r(j\omega)|}{\partial \omega} < 0 \\ C2 : \frac{\partial \arg L_r(j\omega)}{\partial \omega} < 0 \end{cases} \quad (3.56)$$

et :

$$P_{mr} \geq \varphi_d$$

où  $L_r(s) = H_r(s)C(s)$  est la fonction de transfert en boucle ouverte,  $P_{mr}$  la marge de phase obtenue et  $\varphi_d$  la marge de phase désirée. Alors la marge de phase  $P_m$  obtenue pour  $L(s) = H(s)C(s)$  satisfera :

$$P_m \geq P_{mr} \geq \varphi_d \quad (3.57)$$

**Preuve** Voir annexe E.7 ■

La différence entre cette proposition et la proposition 1 est la plage de fréquence sur laquelle le système complet est approché. En effet, tandis que dans la proposition 1, la pulsation  $\omega_{max}$  dépend à la fois du système et du correcteur, dans cette proposition la pulsation  $\omega_1$  ne dépend plus du correcteur. Nous voyons bien que chaque système de commande réel est soumis à sa propre limitation de performance, i.e. la bande passante est limitée quel que soit le correcteur utilisé. Il peut donc être plus intéressant d'utiliser un correcteur simple pour faciliter l'implantation en temps réel.

### 3.5.3 Application expérimentale : Procédé thermique

#### Configuration du système

La maquette d'un procédé thermique est présentée dans la figure 3.19. Le principe de fonctionnement est le suivant : une résistance chauffante, contrôlée par une tension (0-10V), génère de la chaleur qui est transférée dans le tube grâce à un ventilateur. Un capteur de température, de type sonde à thermistance, délivre un signal (0 - 10V) qui indique la température en un certain point du tube. La mesure présente un bruit de  $\|P_n\|_{2, \omega \geq \omega_N} = 0.2V$ . L'utilisation de l'information fournie par le capteur permet de mettre en oeuvre une commande de la résistance chauffante de manière à ce que la température dans le tube atteigne la valeur désirée. En outre, le contrôleur doit aussi être capable de rejeter les perturbations, telles que la variation de vitesse du ventilateur ou l'obstruction partielle à la sortie du tube. Considérons le cahier des charges :

- marge de module désirée  $M_{md} \geq 0.5$  et marge de phase désirée  $\varphi_d \geq 45^\circ$

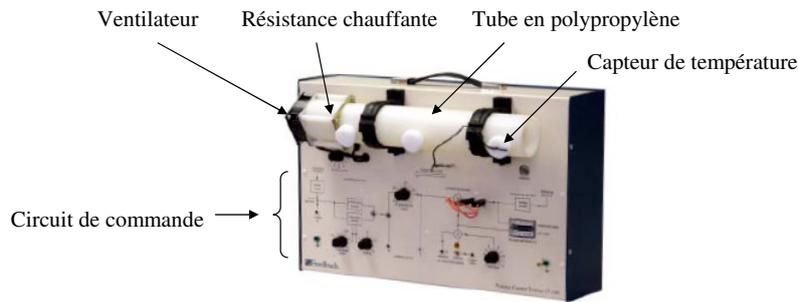


FIGURE 3.19 – Maquette d'un procédé thermique

- rejet optimal de la perturbation de commande de type échelon
- niveau de bruit toléré sur la commande =  $10\%u_0$ , il vient  $\beta_{u_0} = 0.1$ .

Par la modélisation et l'identification des éléments du système (résistance chauffante, tube et sonde à thermistance), le modèle complet du système est donné, autour d'un point de fonctionnement, par :

$$H(s) = \frac{0.9e^{-0.2s}}{(0.5s + 1)^2} \quad (3.58)$$

### Remarque 3.5.1

Si l'information du système n'est pas disponible, le modèle du système peut être obtenu par la méthode d'identification proposée dans la section 3.6. ♦

Avec cette configuration, il vient  $G_0 = 0.9$ ,  $\alpha_{IO} = 1$ ,  $\beta_y = 0.02$ .

### Détermination du modèle réduit

Nous commencerons par la détermination de la plage de fréquence sur laquelle le modèle complet sera approché par le modèle réduit. L'utilisation du modèle complet (3.58) permet de déterminer la pulsation  $\omega_0$  définie par (3.49).

$$\omega_0 = \arg \min_{\frac{G_0\omega_0}{\omega} \geq |H(j\omega)|, \forall \omega \geq 0} \omega_0 = 1 \text{ rad/s} \quad (3.59)$$

La figure 3.20 illustre la détermination de  $\omega_0$  par l'équation (3.49).

Maintenant la pulsation  $\omega_1$  peut être calculée par (3.50) :

$$\omega_1 = \frac{0.1}{0.02} \frac{0.5}{1 - 0.5} 1 = 5 \text{ rad/s} \quad (3.60)$$

Par la résolution du problème d'optimisation (3.19) en remplaçant  $\omega_{max}$  par  $\omega_1$ , le modèle réduit (3.20) est obtenu :

$$H_r(s) = \frac{0.9}{1 + \frac{s}{1.44}} \frac{(-s + 3.46)}{(s + 3.46)} \quad (3.61)$$

avec le critère minimal  $J = 0.24$ .

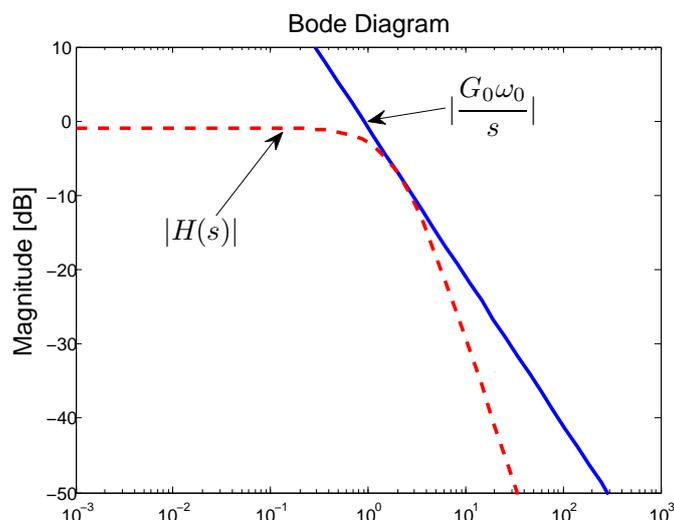
FIGURE 3.20 – Détermination de la pulsation  $\omega_0$ 

TABLE 3.8 – Propriétés en boucle fermée du système complet et réduit

Système	$K$	$T_i$	$T_d$	$a_d$	$M_m$	$P_m$ [°]	$\ H_{y_p d u_s}\ _2$
$H_r$	1.43	0.811	0.147	0.9	0.50	54	0.442
$H$					0.65	59	0.4

L'illustration des conditions de (3.52) est représentée par la figure 3.21. Comme nous le voyons, le modèle réduit approche correctement le modèle complet dans la bande de fréquences considérée  $[0; \omega_1]$ . Il est important de noter que  $\omega_1$  dépend seulement des propriétés du système.

### Validation du modèle réduit en boucle fermée

Pour valider le modèle réduit (3.61) en boucle fermée, nous allons concevoir un correcteur PID :

$$C(s) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d}{a_d} s} \right) \quad (3.62)$$

satisfaisant le cahier des charge. Ce correcteur est synthétisé par l'utilisation la méthode du chapitre 2. Les résultats de la synthèse sont présentés dans la table 3.8.

Comme nous l'avons mentionné, le bruit de mesure limite le gain du correcteur en hautes fréquences (voir le lemme 3.4.1) :

$$\|C(s)\|_{\infty, \omega \geq \omega_N} \leq M_{md} \frac{\beta_{u_0}}{\beta_y} \frac{1}{G_0} = 0.5 \frac{0.1}{0.02} \frac{1}{0.9} = 2.8 \quad (3.63)$$

Ici, le gain du correcteur PID en hautes fréquences est  $K(1 + a_d) = 2.72 \leq 2.8$ .

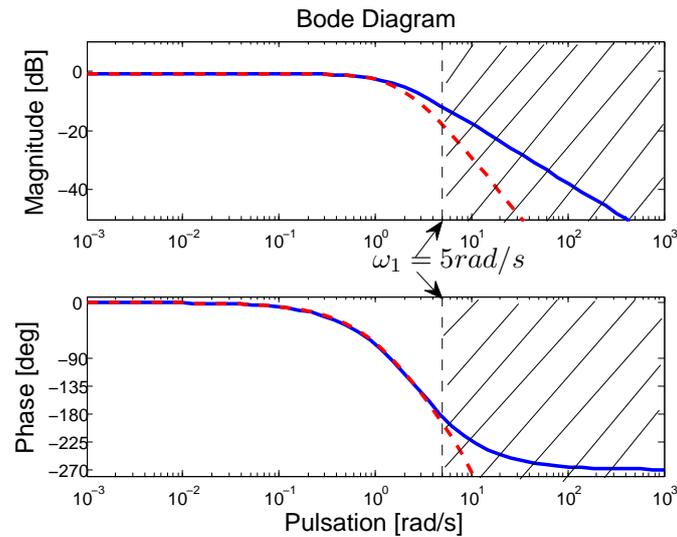


FIGURE 3.21 – Diagrammes de Bode du modèle réduit (continu) et du modèle complet (tiret)

TABLE 3.9 – Paramètres du modèle réduit

$G_r$	$\omega_{0r}$	$\omega_d$	$\delta_\nu(H, H_r) <$	$b(C, H_r) \leq$	$b(C, H)$
0.9	1.44	3.46	0.123	0.434	0.440

**Validation en simulation** Tout d’abord, le modèle d’ordre réduit est validé en simulation en utilisant le modèle complet (3.58) et le correcteur (3.62). Le diagramme de Black-Nichols de la figure 3.22 montre que les conditions de monotonie (3.56) sont respectées. La table 3.11 montre que le critère de validation (3.24) est vérifié. Les figures 3.22-3.23 illustrent qu’avec le même contrôleur, les marges de phase et de module obtenues pour le système complet sont supérieures à celles obtenues pour le système d’ordre réduit.

**Validation expérimentale** Maintenant, le régulateur déterminé à partir du modèle d’ordre réduit est implanté expérimentalement.

La figure 3.24 représente la réponse de la sortie vis-à-vis de la référence et d’une perturbation de commande de type échelon. Avec la spécification  $\beta_{u0} = 0.1$  nous avons garanti que le niveau du bruit présent sur la commande est inférieur à  $\|U_N\|_{2, \omega \geq \omega_N}^{max} := \beta_{u0} \frac{\alpha_{IO}}{G_0} \bar{u} = 0.1 \frac{1}{0.9} 10 = 1.1V$ . Ici, en pratique le niveau du bruit présent sur la commande est  $0.5V$ .

Pour valider le modèle réduit en pratique, il est nécessaire d’estimer la marge de phase réelle et la marge de module réelle. Nous allons présenter deux expérimentations basées sur la méthode de relais qui permettent d’estimer les marges de robustesse réelles pour le système en boucle fermée.

*Mesure de la marge de phase* [94], [95]

La figure 3.25 montre l’expérimentation permettant de mesurer la marge de phase du système

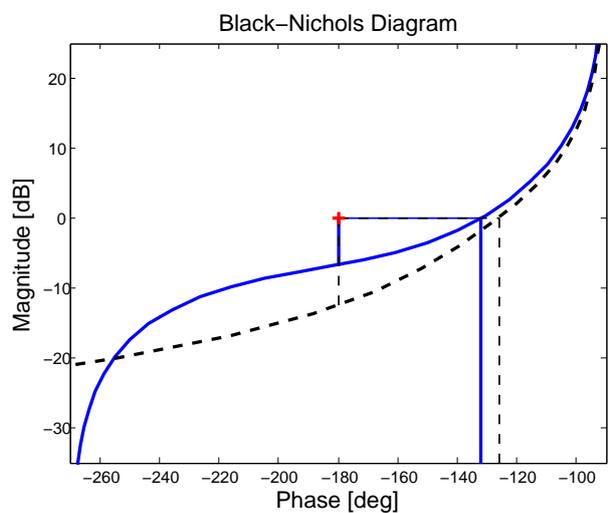


FIGURE 3.22 – Diagrammes de Black-Nichols pour le système réduit (continu) et le système complet (tiret)

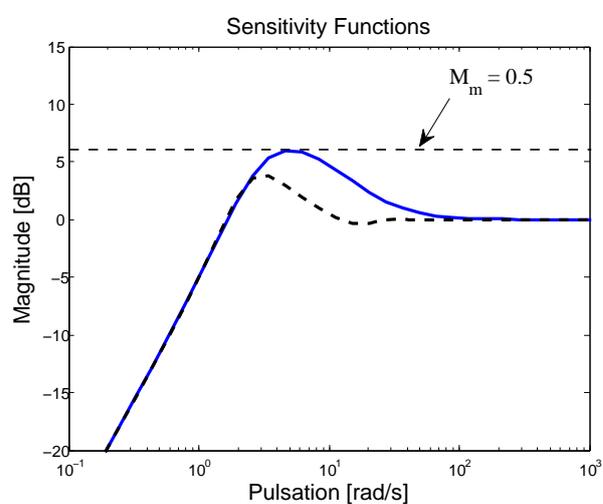


FIGURE 3.23 – Fonctions de sensibilité du système réduit (continu) et du système complet (tiret)

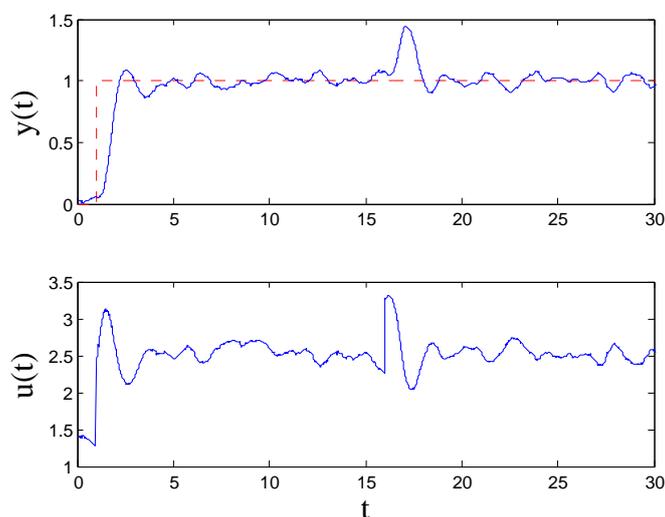


FIGURE 3.24 – Réponse de la sortie vis-à-vis de la référence et d'une perturbation de commande de type échelon

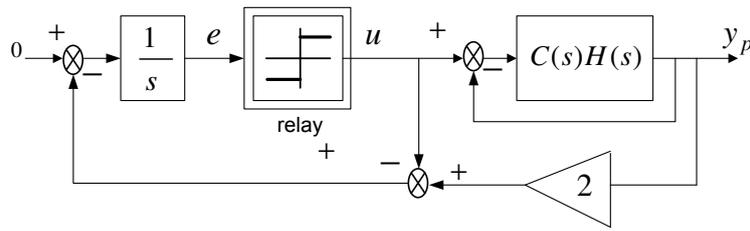
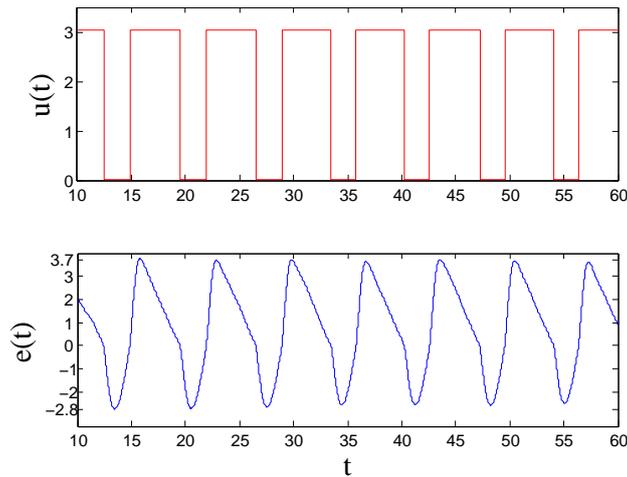


FIGURE 3.25 – Expérimentation pour mesurer la marge de phase

FIGURE 3.26 – Mesure de la marge de phase de  $H(s)$  contrôlé par  $C(s)$  : sortie du relais (graphe supérieur), entrée du relais (graphe inférieur)

en boucle fermée. La marge de phase  $P_m$  est estimée par :

$$P_m = \pi - \arctan \frac{\pi e_{pp} \omega_c}{4u_{pp}} \quad (3.64)$$

où  $e_{pp}$  et  $u_{pp}$  sont les amplitudes crête-à-crête de l'entrée et de la sortie du relais, respectivement. La pulsation critique  $\omega_c$  est déterminée à partir de la période des oscillations  $T_c$  :

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T_c} \quad (3.65)$$

La figure 3.26 représente l'entrée et de la sortie du relais. Les détails de mesure sont indiqués dans la table 3.10. La marge de phase estimée est effectivement supérieure à celle du système réduit et proche de celle obtenue avec le modèle complet du système.

*Mesure de la marge de module [33], [96]*

La figure 3.27 représente l'expérimentation d'estimation de la marge de module. Il est démontré que pour une valeur de  $\alpha$  suffisamment grande, le système est passif. Par conséquent, pour estimer la marge de module, nous commençons par une valeur de  $\alpha$  assez grande, puis nous réduisons progressivement la valeur de  $\alpha$  jusqu'à l'apparition d'oscillations. Cette valeur  $\alpha_c$  est

TABLE 3.10 – Estimation de la marge de phase

$e_{pp}$	$u_{pp}$	$T_c$	$\omega_c$	marge de phase estimée
6.5	3	5.928	1.06	$58^\circ$

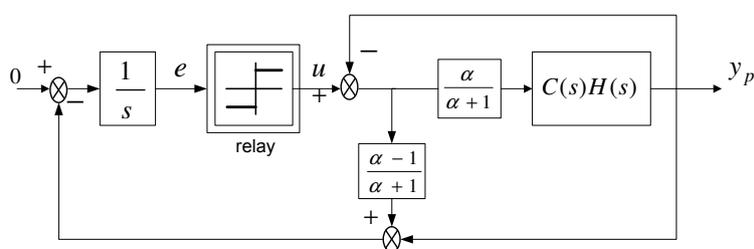


FIGURE 3.27 – Expérimentation pour mesurer la marge de module

l'inverse de la marge de module :

$$M_m = \frac{1}{\alpha_c} \quad (3.66)$$

A la valeur  $\alpha_c = 1.5$  nous obtenons les oscillations représentées dans la figure 3.28. Ainsi, la marge de module estimée est  $\frac{1}{1.5} = 0.67$  qui est une valeur très proche de celle obtenue théoriquement avec le modèle complet du système.

## 3.6 Identification expérimentale pour obtenir le modèle réduit

L'identification est nécessaire pour obtenir le modèle réduit dans le cas où le modèle du procédé est inconnu. Cette section présente une méthode d'identification du diagramme de Bode du système à commander dans une zone fréquentielle particulière par l'utilisation d'une commande à relais stabilisant le système en boucle fermée autour d'un point de fonctionnement désiré. Sur la base du diagramme de Bode obtenu, un modèle réduit du processus sera déterminé en utilisant la méthode de réduction de modèle proposée précédemment.

### 3.6.1 Méthode d'identification expérimentale basée sur une commande à relais

La figure 3.29 représente l'expérimentation permettant d'identifier le diagramme de Bode du procédé, où  $P(s)$  est le procédé à identifier. Dans [97] et [98], un système à relais avec retard est utilisé pour le réglage automatique du régulateur de type PID mais pas pour l'identification du modèle du procédé.

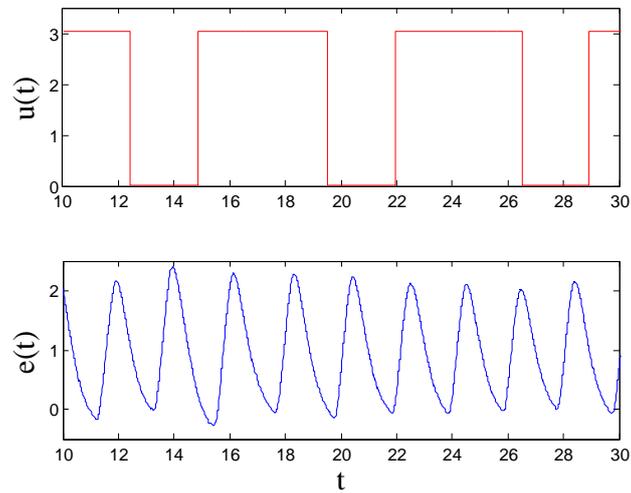


FIGURE 3.28 – Mesure de la marge de module de  $H(s)$  contrôlé par  $C(s)$  : sortie du relais (graphe supérieur), entrée du relais (graphe inférieur)

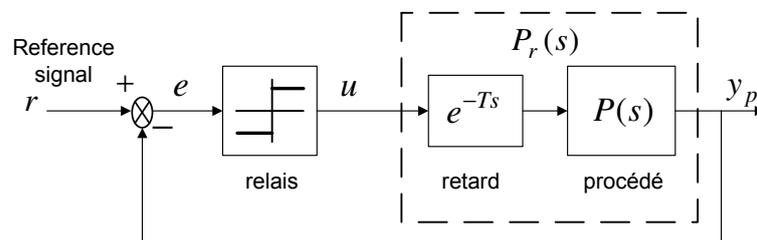


FIGURE 3.29 – Identification expérimentale par relais avec retard

Le principe de l'identification par relais avec retard proposée ici est illustré dans la figure 3.30. Dans le cadre de l'approximation au 1<sup>er</sup> harmonique (voir annexe H), le relais permet d'identifier le point critique (point tel que  $\arg P(j\omega) = -180^\circ$ ) [11].  $P_r(j\omega)$  est composé par le procédé  $P(j\omega)$  associé à un retard de  $T$  secondes modélisé par  $e^{-Ts}$ . Sur le diagramme de Nyquist,  $P_r(j\omega)$  est une image de  $P(j\omega)$  avec une rotation d'un angle égal à  $-T\omega$  :

$$\begin{cases} |P_r(j\omega)| = |P(j\omega)| \\ \arg P_r(j\omega) = \arg P(j\omega) - T\omega \end{cases} \quad (3.67)$$

L'identification du point  $A(\omega_u)$  sur  $P_r(j\omega)$  permet de déduire le point  $B(j\omega_u)$  sur  $P(j\omega)$ . La phase de  $P(j\omega)$  au point  $B(\omega_u)$  est donnée par :

$$\arg P(j\omega_u) = -180^\circ + T\omega_u \quad (3.68)$$

où  $\omega_u$  est la pulsation critique de  $P_r$  :  $\arg P_r(j\omega_u) = -180^\circ$ . Le gain du procédé  $P(j\omega)$  à la pulsation  $\omega_u$  est donné, au sens du premier harmonique, par :

$$|P(j\omega_u)| = \frac{\pi a}{4d} \quad (3.69)$$

où  $a$  est l'amplitude crête-à-crête de la sortie  $Y_p(t)$  et  $d$  l'amplitude crête-à-crête de la commande  $u(t)$ . La période des oscillations  $T_u$  permet de déterminer la pulsation critique  $\omega_u$  :

$$\omega_u = \frac{2\pi}{T_u} \quad (3.70)$$

En modifiant la valeur du retard  $T$  nous pouvons balayer toute la zone fréquentielle du procédé telle que le retard de phase est inférieure à  $180^\circ$ . Une fois que le diagramme de Bode du procédé est obtenu, le modèle réduit est déterminé par la méthode présentée dans les sections 3.3 et 3.5.

### 3.6.2 Application expérimentale : Boule en sustentation dans un tube

La méthode d'identification proposée sera illustrée à travers un système expérimental : la boule en sustentation dans un tube.

#### Description du système

La balle en sustentation dans un tube grâce à un flux d'air, disponible au Laboratoire LCIS à Valence, est représentée sur la figure 3.31. Le principe de fonctionnement du système est le suivant : une micro-turbine commandée en tension (0-10V) génère un flux d'air qui permet d'appliquer une force sur la balle de manière à pouvoir la maintenir en sustentation dans le tube. En outre, un capteur de distance, basé sur le principe des ultra-sons, renvoie un signal (0-10V) qui indique la distance entre le haut de la balle et 10 cm sous le capteur. L'utilisation de l'information délivrée par le capteur permet de mettre en pratique une commande de la micro-turbine de manière à asservir la position de la balle dans le tube. Le système est commandé par un PC grâce à un système de prototypage rapide.

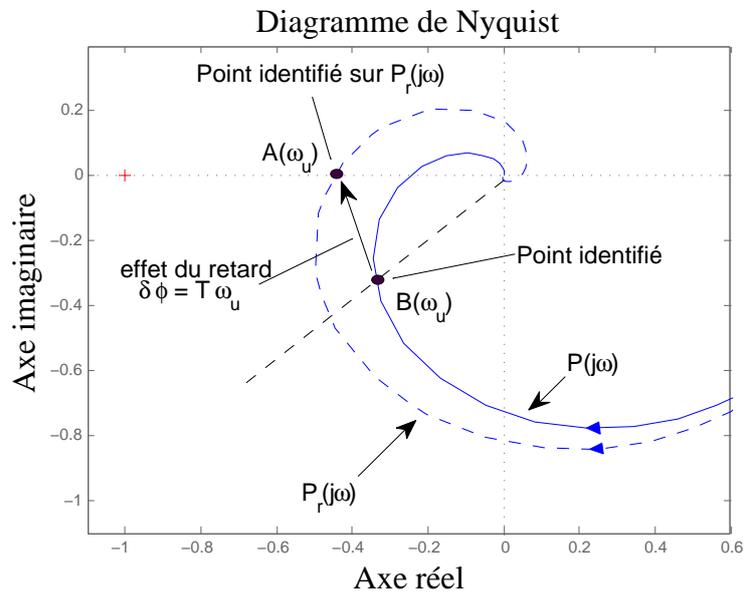


FIGURE 3.30 – Principe d’identification par relais avec retard

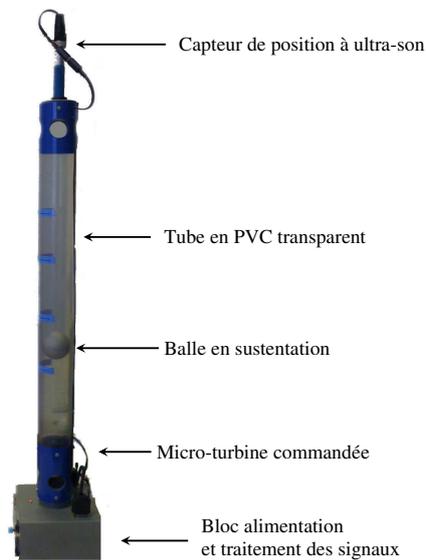


FIGURE 3.31 – Vue de la balle en sustentation dans un tube

TABLE 3.11 – Paramètres du modèle réduit

$G_r$	$\omega_d$	$\delta_v(H, H_r) <$	$b(C, H_r) \leq$	$b(C, H)$
-65	5.17	0.004	0.028	0.038

Par la modélisation et l'identification des éléments du système (la balle, le capteur et la micro-turbine), le modèle complet du système est donné, autour d'un point de fonctionnement, par :

$$H(s) = \frac{-65.5}{2.02 \times 10^{-5}s^4 + 0.007328s^3 + 0.3836s^2 + s} \quad (3.71)$$

Le modèle (3.71) est utilisé par la suite uniquement pour évaluer l'efficacité de la méthode proposée. Notons le gain négatif en raison de la disposition du capteur.

### Identification du modèle réduit

La boule en sustentation dans le tube a un comportement intégrateur, nous utilisons le modèle réduit (3.22). A partir des points de gain mesurés et des points de phase mesurés, par l'utilisation de la méthode présentée dans la section 3.3.2, le modèle réduit est déterminé. Les paramètres du modèle réduit sont indiqués dans la table 3.11.

La figure 3.32 montre les points mesurés du diagramme de Bode, le modèle réduit identifié  $H_r(s)$  et le modèle complet  $H(s)$ . Dans la zone de fréquences considérée  $[0; 3]rad/s$ , les gains mesurés par la méthode du relais avec retard sont proches de ceux du modèle complet. Par contre, pour la phase certains points sont relativement distants. De plus, le modèle réduit a été déterminé afin de respecter les conditions (3.12) (le diagramme de Bode en amplitude de  $H_r$  est au-dessus des gains mesurés, et celui de la phase est en-dessous des points de phase mesurés) et de minimiser graphiquement les distances entre les diagrammes de Bode des points mesurés et du modèle réduit selon le principe du critère (3.19).

Le principal avantage de la méthode d'identification proposée est que le modèle réduit peut être déterminé après seulement quelques points mesurés du diagramme de Bode ; ici, 5 points mesurés auraient été suffisants. Le temps et les efforts expérimentaux sont donc beaucoup moins importants que ceux nécessaires à la détermination du modèle complet (3.71). D'autant plus que ces points peuvent être obtenus par une procédure automatisée. De plus, les marges de robustesse après la synthèse du correcteur, sont garanties pour le système réel.

### Synthèse d'un régulateur PI

Nous choisissons un régulateur  $C(s)$  d'ordre 1 type PI avec la structure suivante :

$$C_{PI}(s) = K \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right) \quad (3.72)$$

où  $K$  est le gain de boucle et  $T_I$  est le temps intégral.

*Détermination du cahier des charges* : pour utiliser la méthode proposée au chapitre 2, l'utilisateur a principalement besoin de déterminer l'amplification maximale du bruit de mesure sur

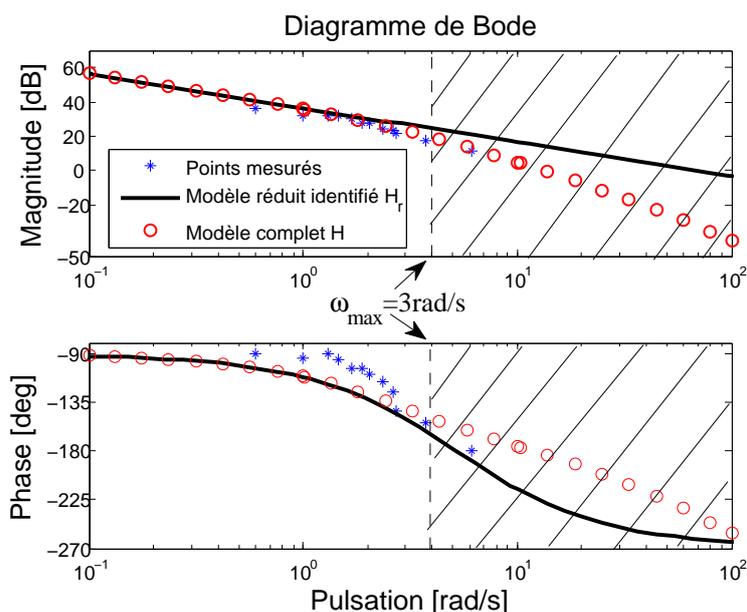


FIGURE 3.32 – Comparaison des diagrammes de Bode des modèles complet, mesuré et identifié de la balle dans un tube

TABLE 3.12 – Résultats des régulateurs pour *Spec1*

Méthode	$K$	$T_I$	$M_m$	$P_m$ [°]	$N_{max}$	$M_{ret}$	$\omega_{gc}$	$\ H_{y_p d_{u_{-s}}}\ _2$
RST	$\xi^{ème}$ -ordre		0.6	45	0.1	0.38	2.05	4.25
PI-MR	-0.023	3	0.683	48	0.03	0.61	1.54	56.8

la commande. Dans notre cas, la mesure de la position de la balle fournie par le capteur est entachée d'un bruit d'amplitude maximale  $\pm 0.35V$ . Supposons que l'on souhaite que l'amplitude du bruit sur la commande ne dépasse pas  $\pm 0.035V$ , le paramètre de conception  $N_{max}$  sera donné par  $N_{max} = bruit_u / bruit_{y_p} = 0.035 / 0.35 = 0.1$ . Les deux autres paramètres de conception peuvent prendre les valeurs usuelles suivantes :

- si le procédé ne varie pas dans le temps et le modèle est considéré correct, *Spec1* :  $M_{md} = 0.5$  et  $\varphi_d = 45^\circ$
- sinon, *Spec2* :  $M_{md} = 0.8$  et  $\varphi_d = 60^\circ$

En utilisant le correcteur synthétisé, le modèle réduit a été validé à posteriori en boucle fermée selon les critères (3.24). La table 3.11 donne les paramètres du modèle réduit identifié, ainsi que les critères de validation.

Les résultats obtenus sont résumés dans la table 3.12 (les marges sont calculées en utilisant le modèle complet (3.71)). La marge de retard  $M_{ret}$  et la pulsation de croisement  $\omega_{gc}$  sont aussi présentées. La figure 3.33 montre que les marges de robustesse obtenues pour le système complet sont supérieures à celles obtenues avec le modèle réduit. Rappelons que la synthèse est réalisée à

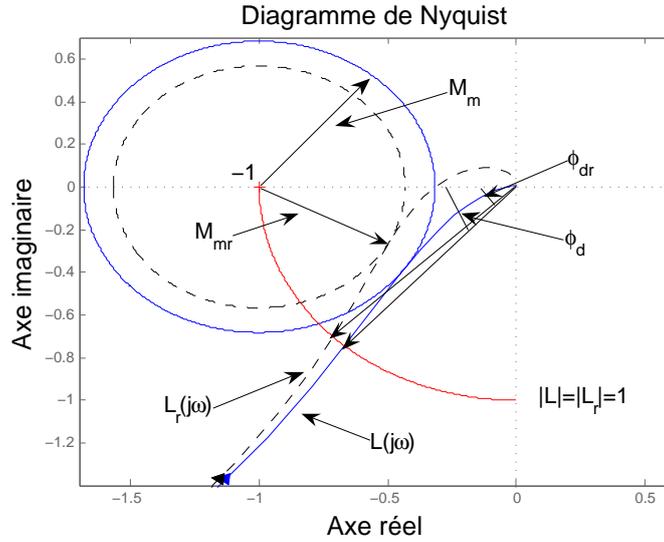


FIGURE 3.33 – Comparaison des marges de robustesse entre système réduit et système complet (correcteur PI)

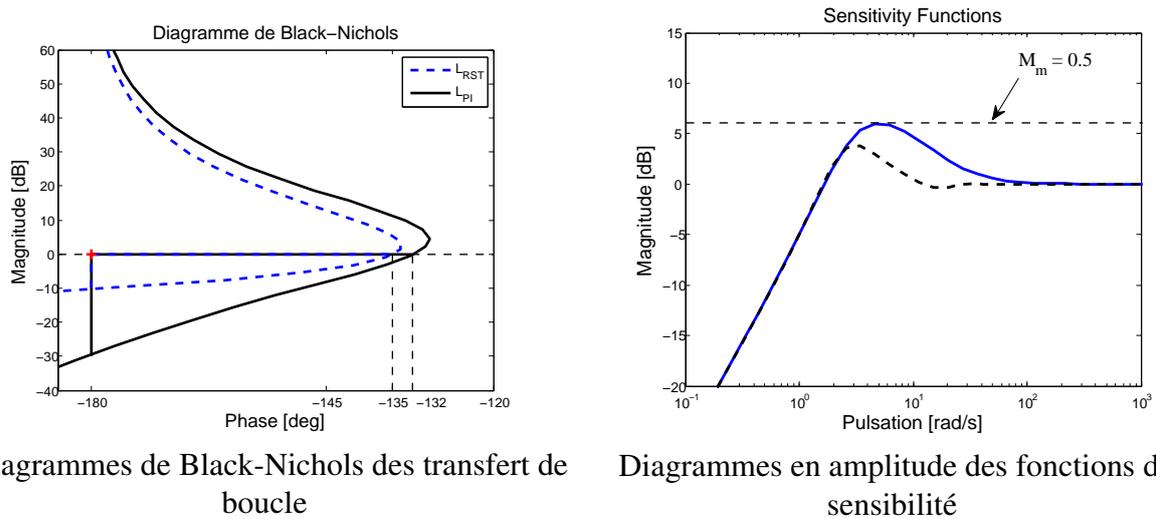
l'aide du modèle réduit et en considérant les spécifications *Spec1*. Malgré la nette différence de la norme  $H_2$ , nous le verrons dans la suite, cela n'a pas un impact très important sur les réponses temporelles obtenues expérimentalement.

Un correcteur sous forme RST a été déterminé à partir du modèle complet (3.71) par placement des pôles de la boucle fermée (le pôle dominant est placé en  $-1.8 \text{ rad/s}$ ). Les performances de ce correcteur sont également présentées dans la table 3.12. La figure 3.34 indique les marges de robustesse : marges de gain et de phase sur le diagramme de Black-Nichols (gauche) et marge de module sur le diagramme en amplitude des fonctions de sensibilité (droite). Les marges obtenues avec le correcteur PI synthétisé par la méthode proposée sont comparables avec celles du RST d'ordre 5.

$N_{max}$  vs limitation de performance : La contrainte pratique  $N_{max}$  limite le gain du correcteur en hautes fréquences, donc limite la performance du système en boucle fermée en terme de bande passante maximale obtenue. Dans le cas du système de la boule, la pente en hautes fréquences du système est  $-40 \text{ dB/dec}$ , la bande passante maximale sera donc donnée par :

$$\log \omega_{BPmax} = \begin{cases} \log \omega_0 + \left| \frac{20 \log N_{max}}{-40} \right|, & N_{max} \geq 1 \\ \log \omega_0 - \left| \frac{20 \log N_{max}}{-40} \right|, & N_{max} < 1 \end{cases} \quad (3.73)$$

où  $\omega_0$  est la pulsation de croisement du système à contrôler ; ici avec (3.71)  $\omega_0 = 13.5 \text{ rad/s}$ . L'équation (3.73) donne la bande passante maximale qui peut être obtenue en boucle fermée quel que soit le correcteur utilisé ; ici,  $\omega_{BPmax} = 4.3 \text{ rad/s}$ . Avec le correcteur PI, le cahier des charges *Spec1* est obtenu avec la bande de passante  $\omega_{gc} = 1.38 \text{ rad/s}$ . Le correcteur sous forme RST permet d'augmenter la bande passante à  $\omega_{gc} = 2.05 \text{ rad/s}$ .



Diagrammes de Black-Nichols des transfert de boucle

Diagrammes en amplitude des fonctions de sensibilité

FIGURE 3.34 – Comparaison fréquentielle entre PI et RST

### Résultats expérimentaux

Le régulateur PI obtenu par la méthode proposée (PI-MR) est comparé au correcteur sous forme RST obtenu par placement des pôles de la boucle fermée. La figure 3.35 donne les résultats obtenus expérimentalement par l'application d'un échelon sur la consigne (gauche) et sur la perturbation de commande (droite). Les résultats temporels avec le correcteur PI-MR sont comparables avec ceux du régulateur RST d'ordre 5 malgré la très nette différence de la norme  $H_2$  donnée par la table 3.12.

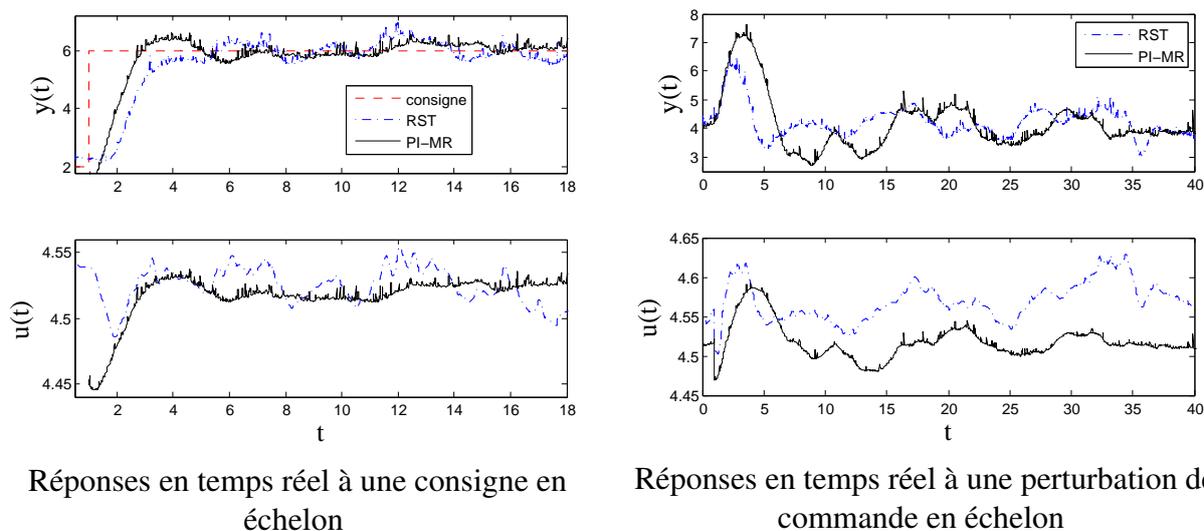


FIGURE 3.35 – Comparaison temporelle entre PI (trait continu) et RST (trait pointillé)

### 3.7 Conclusion

Une méthode de réduction de modèle qui garantit les marges de robustesse obtenues en boucle fermée pour le système complet a été présentée. L'approche proposée traite d'abord le cas général, puis le cas où les caractéristiques du système de commande sont prises en compte. L'efficacité de l'approche proposée a été démontrée au moyen d'un ensemble de systèmes de benchmark qui captent une large classe de modèles de processus, par exemple, intégrateur, à grand retard, avec zéro à non minimum de phase. Un procédé thermique expérimental a été également étudié et a permis de valider la méthode.

La méthode proposée a deux avantages principaux. Premièrement, avec le contrôleur basé sur le modèle réduit, les marges de robustesse obtenues pour le système réel seront meilleures que celles obtenues pour le système réduit. Deuxièmement, la plage de fréquence sur laquelle nous approchons le système réel est finie, et elle peut être déterminée en fonction des caractéristiques technologiques du système de contrôle.

Néanmoins, la méthode peut amener à quelques aspects conservatifs. En effet, les marges de robustesse obtenues pour le système complet sont meilleures que celles pour le système réduit, elles peuvent donc être trop grandes par rapport aux marges désirées. Ceci peut entraîner des performances dynamiques obtenues pour le système complet moins satisfaisantes que celles obtenues pour le système réduit. Nous avons développé une procédure itérative pour réduire le conservatisme de la méthode.

L'approche proposée peut être utilisée pour différentes applications, entre autres :

- Si le modèle du système est d'ordre élevé, la méthode proposée permet de trouver un modèle réduit qui sera utilisé pour synthétiser un contrôleur robuste d'ordre réduit en association avec la méthode de synthèse du correcteur proposée dans le chapitre 2.
- Si le modèle du système est inconnu, la méthode proposée peut être utilisée conjointement

avec la méthode d'identification proposée dans la section 3.6 pour déterminer le modèle réduit.

- Dans le cas des systèmes à paramètres constants incertains, la méthode proposée peut être utilisée pour trouver un modèle de synthèse avec lequel il est possible de concevoir un contrôleur garantissant les marges de robustesse pour toute la famille du système.



# Chapitre 4

## Logiciels et Applications

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>100</b>
<b>4.2</b>	<b>Systèmes du premier ordre</b>	<b>100</b>
4.2.1	Logiciel d'aide à la synthèse de correcteurs optimaux d'ordre 1 sous contraintes de robustesse	100
4.2.2	Comparaison avec la synthèse convexe	107
<b>4.3</b>	<b>Systèmes du second ordre</b>	<b>108</b>
4.3.1	Logiciel d'aide à la synthèse de correcteurs optimaux d'ordre 2 sous contraintes de robustesse	108
4.3.2	Comparaison avec la synthèse convexe	109
<b>4.4</b>	<b>Systèmes d'ordres élevés - Commande d'un véhicule sous-marin autonome</b>	<b>112</b>
4.4.1	Logiciel d'aide à la détermination du modèle réduit	112
4.4.2	Commande d'un véhicule sous-marin autonome (VSA)	114
<b>4.5</b>	<b>Systèmes à paramètres incertains</b>	<b>116</b>
<b>4.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>119</b>

---

## 4.1 Introduction

Les travaux de thèse que nous avons présentés ont pour but de répondre à une demande forte du monde industriel de l'application des méthodes avancées de l'automatique à la synthèse de correcteurs linéaires d'ordres réduits. Nous nous sommes focalisé sur des systèmes LTI SISO souvent rencontrés en pratique. Notre démarche vise au développement d'outils d'aide à la synthèse de correcteurs d'ordres réduits et d'outils d'aide à la détermination de modèles du système à contrôler. Dans ce chapitre nous allons présenter les outils logiciels développés dans cette thèse et évaluer l'efficacité de notre approche en la comparant avec la synthèse convexe [5] et l'outil HIFOO [25].

Nous commencerons par étudier des systèmes du premier ordre dans la section 2 et puis des systèmes du second ordre dans la section 3. Les logiciels d'aide à la synthèse de correcteurs d'ordres réduits fixés sont aussi présentés. L'efficacité de l'approche proposée sera montrée en comparant avec la synthèse convexe.

Dans la section 4 nous présenterons un cas d'application - la commande robuste d'un véhicule sous-marin autonome (VSA). Dans ce cas, le système d'ordre élevé est approché par un modèle réduit par la méthode de réduction présentée dans le chapitre 3 de telle sorte que le correcteur basé sur ce modèle réduit garantira les marges de robustesse pour le système réel d'ordre élevé. A l'issue de la détermination du modèle réduit, une synthèse de correcteur est réalisée. La section 5 présentera une autre application de l'approche proposée - la commande robuste d'un système à paramètres constants incertains. Les résultats obtenus sont comparés avec le logiciel récent HIFOO.

## 4.2 Systèmes du premier ordre

Dans cette section, nous allons évaluer la méthode de synthèse proposée à travers un benchmark de systèmes du premier ordre utilisés dans la littérature. L'efficacité de la méthode de synthèse proposée sera démontrée en la comparant avec la synthèse convexe.

Nous commençons par présenter le logiciel d'aide à la synthèse de correcteur optimal d'ordre 1 sous contraintes de robustesse, développé dans le cadre de cette thèse.

### 4.2.1 Logiciel d'aide à la synthèse de correcteurs optimaux d'ordre 1 sous contraintes de robustesse

#### Présentation générale

A partir d'un cahier des charges donné par l'utilisateur, le logiciel **First Order Optimal Controller Designer** fournit des correcteurs optimaux d'ordre 1 pour un ensemble de systèmes génériques définis dans les équations (2.21)-(2.24) (confer le chapitre 2).

Nous avons développé ce logiciel en utilisant l'outil **GUIDE** de **MATLAB®** (version R2007a)(en anglais, GUIDE est l'abréviation de « Graphical User Interface Development Environment », soit Environnement de Développement d'Interface Utilisateur Graphique). L'interface

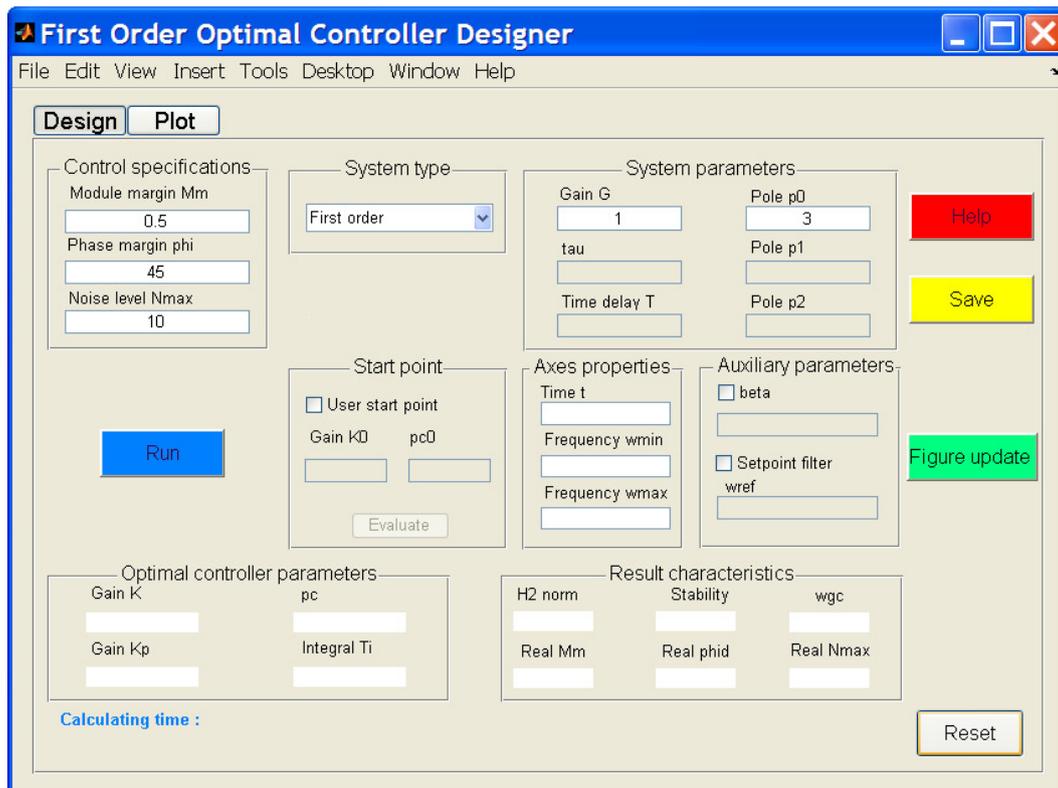


FIGURE 4.1 – Interface graphique du logiciel de synthèse de correcteurs d'ordre 1

du logiciel *Optimal\_Controller* est représenté dans la figure 4.1.

Il y a deux onglets : **Design** et **Plot**. Sur l'onglet **Design**, nous pouvons définir le système à commander par sa fonction de transfert, spécifier le cahier des charges, proposer un correcteur initial ou modifier des paramètres supplémentaires, e.g. l'échelle des graphes, etc. Les résultats obtenus (tels que les paramètres du correcteur, les marges de robustesse, la valeur minimale de la fonction objectif, etc.) sont présentés aussi sur l'onglet **Design**.

L'onglet **Plot** permet de visualiser les diagrammes de Bode et les réponses temporelles.

La procédure de synthèse du correcteur avec le logiciel **Optimal\_Controller** est résumée en trois étapes :

- Définition du système à commander (Choix du modèle et indication des paramètres du modèle)
- Spécification du cahier des charges (marge de module minimum, marge de phase minimum, amplification maximum du bruit de mesure sur la commande)

En appuyant sur le bouton **Run**, le logiciel fournit un correcteur optimal satisfaisant le cahier des charges si la solution existe avec les contraintes données. Sinon, une procédure de relaxation des contraintes est utilisée (voir plus loin "Obtention du correcteur optimal").

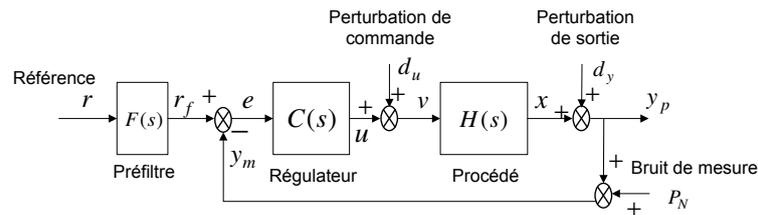


FIGURE 4.2 – Système LTI SISO en boucle fermée considéré

FIGURE 4.3 – Définition du système à contrôler

### Rappel de la méthode de synthèse du correcteur

Le système LTI SISO en boucle fermée considéré est représenté par la figure 4.2 où les variables suivantes ont été définies :

- $u$  : l'entrée de commande du procédé
- $y_p$  : la sortie du procédé à réguler
- $e$  : l'entrée du correcteur

et les entrées exogènes :

- $r$  : l'entrée de consigne
- $d_u$  : l'entrée de perturbation de commande
- $P_N$  : le bruit présent sur la sortie mesurée
- $d_y$  : l'entrée de perturbation de sortie

et les sorties considérées :

- $r_f$  : la consigne filtrée ou la référence
- $y_m$  : la sortie mesurée
- $x$  : la sortie du procédé

Le logiciel fournit des correcteurs optimaux qui optimisent le rejet d'une perturbation de commande de type *échelon* au sens de la norme  $H_2$ . Les contraintes de robustesse sont la marge de module, la marge de phase et l'amplification du bruit de mesure sur la commande. Le problème d'optimisation sous contraintes est résolu en utilisant la fonction *fmincon* de **MATLAB**.

### Définition du système à contrôler

Il est possible de choisir entre 4 types de systèmes :

- Premier ordre  $H(s) = \frac{G}{s+p_0}$
- Second ordre  $H(s) = \frac{G}{(s+p_1)(s+p_2)}$

Control specifications	
Module margin Mm	0.5
Phase margin phi	45
Noise level Nmax	10

FIGURE 4.4 – Spécification du cahier des charges

- Premier ordre avec retard  $H(s) = \frac{Ge^{-Ts}}{s+p_0}$
- Second ordre avec zéro  $H(s) = \frac{G(\tau s+1)}{(s+p_1)(s+p_2)}$

Pour chaque type de système choisi, les cases des paramètres correspondants sont actives pour saisir leur valeurs (confer la figure 4.3).

### Détermination du cahier des charges

L'utilisateur détermine trois spécifications désirées (confer la figure 4.4) :

- Marge de module désirée  $M_m \in ]0; 1[$ . Ses valeurs usuelles sont 0, 5; 0, 8
- Marge de phase désirée  $\varphi_d > 0$ . Ses valeurs usuelles sont  $45^\circ$ ;  $60^\circ$
- Amplification maximum du bruit de mesure sur la commande  $N_{max}$ . En connaissant le niveau de bruit présent sur la sortie mesurée  $P_N$ , et le niveau de bruit accepté sur la commande  $U_N$ ,  $N_{max}$  sera calculé par :  $N_{max} = \frac{U_N}{P_N}$ .

### Vecteur initial de paramètres (facultatif)

L'algorithme d'optimisation nécessite une valeur initiale du vecteur des paramètres. Si l'option *User start point* n'est pas cochée (confer la figure 4.5), le logiciel propose des paramètres initiaux (confer le chapitre 2).

Si l'option *User start point* est cochée, l'utilisateur doit donner une valeur initiale du vecteur des paramètres. Selon le correcteur choisi, les cases des paramètres correspondants sont actives pour saisir leur valeurs. Si la valeur initiale donnée n'est pas faisable (i.e. le cahier des charges n'est pas satisfait), le programme proposera une valeur initiale qui remplit le cahier des charges. Le bouton **Evaluate** permet d'évaluer la valeur initiale donnée.

FIGURE 4.5 – Valeurs initiales des paramètres (facultatif)

FIGURE 4.6 – Paramètres du correcteur optimal obtenu

### Obtention du correcteur optimal

L'appui sur le bouton **Run** lance la recherche du correcteur. Le logiciel fournit un correcteur optimal d'ordre 1

$$\frac{K(s + p_c)}{s}$$

qui satisfait le cahier des charges si celui-ci est faisable. Dans le cas contraire, le logiciel relaxe certaines conditions : tout d'abord  $N_{max}$ , puis ne prend plus en compte la marge de phase, puis diminue la marge de module. Les paramètres du correcteur optimal sont affichés (confer la figure 4.6). Les paramètres de la forme usuelle des correcteurs PI sont aussi présentés. La relation entre le correcteur d'ordre 1 utilisé et la forme usuelle des correcteurs PI :

$$PI(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (4.1)$$

est donnée par :

$$\begin{cases} K_p &= K \\ T_i &= \frac{1}{p_c} \end{cases} \quad (4.2)$$

Les caractéristiques obtenues en boucle fermée sont aussi affichées (confer la figure 4.7). Ce sont la norme  $H_2$  de la fonction de transfert entre la perturbation de commande de type échelon unité et la sortie, la stabilité en boucle fermée, la fréquence de croisement  $\omega_{gc}$ , les marges de robustesse réelles et le gain en hautes fréquences de la fonction de transfert entre le bruit de

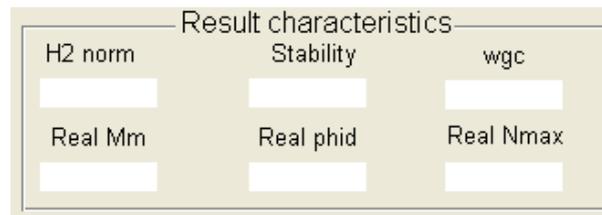


FIGURE 4.7 – Caractéristiques obtenues en boucle fermée

mesure et la commande. En appuyant sur le bouton **Save** les résultats sont sauvegardés dans un fichier.

### Visualisation des graphiques

Le programme propose 6 graphiques différents pour visualiser les résultats obtenus. Après l'exécution du programme de synthèse (appui sur le bouton **Run**), l'onglet **Plot** permet de voir les graphiques. La figure 4.8 représente les graphiques présentés sur l'onglet **Plot**. Au total, 12 courbes sont représentées.

- La colonne de gauche représente les diagrammes de Bode en amplitude (en haut) et en phase (en bas). Les différents transferts sont différenciés par leurs couleurs : correcteur  $C(s)$  (vert), procédé  $H(s)$  (rouge) et fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{bo}(s) = H(s).C(s)$  (bleu)
- La colonne du milieu représente les diagrammes de Bode en amplitude de la fonction de sensibilité (en haut) et de la fonction de transfert entre le bruit de mesure et la commande (en bas)
- La colonne de droite représente les réponses indicielles de la sortie (en haut) de la commande (en bas) à un échelon de consigne (rouge) et à un échelon de la perturbation de commande de type échelon unité (bleu)

### Les paramètres auxiliaires

La figure 4.9 représente les paramètres auxiliaires. Ils permettent de modifier l'intervalle de fréquence des 4 graphiques représentant les diagrammes de Bode via les cases *Frequency wmin* et *Frequency wmax*. La durée de simulation des réponses temporelles sont modifiée par la case *Time t*. Pour que le changement soit effectué, après avoir saisi les valeurs désirées, il faut appuyer sur le bouton **Figure update**. Suite à l'appui sur le bouton **Figure update**, l'onglet **Plot** est activé automatiquement pour que l'utilisateur puisse voir les changements sur les graphiques.

En pratique, pour réduire le dépassement sur la réponse indicielle de la sortie, l'action proportionnelle peut n'agir que partiellement sur la référence (paramètre  $\beta$ ). La forme pratique de la commande est comme suit :

$$U = K_p \left[ (\beta R - Y_p) + \frac{1}{T_i s} (R - Y_p) \right] \quad (4.3)$$

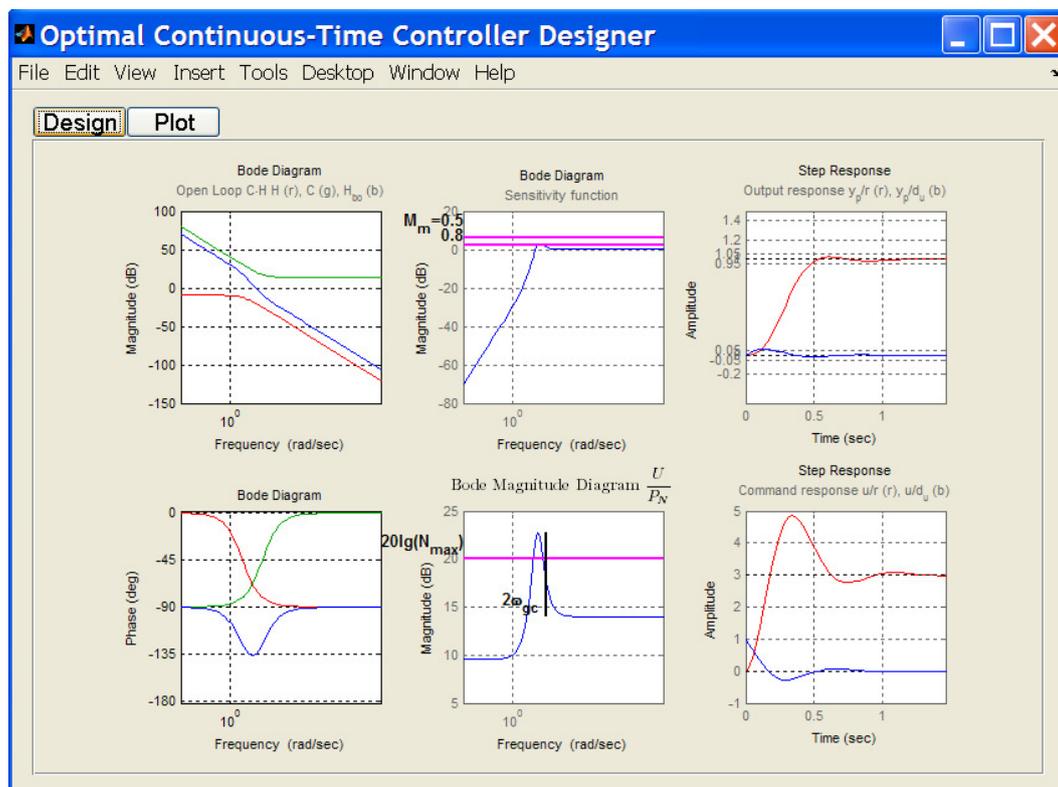


FIGURE 4.8 – Graphiques proposés par le logiciel

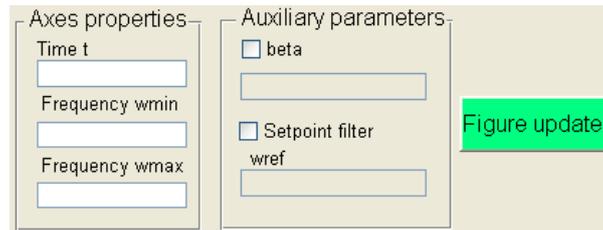


FIGURE 4.9 – Paramètres auxiliaires

où les paramètres  $K_p$ ,  $T_i$  sont définis dans (4.1).  $U$ ,  $R$  et  $Y_p$  sont la commande, la référence et la sortie du système, respectivement.

En cochant l'option *beta*, la forme pratique est activée et nous pouvons saisir la valeur de  $\beta$  comprise entre 0 et 1.

Si l'option *Setpoint filter* est cochée, le logiciel permet aussi de rajouter un préfiltre du second ordre sur la référence de type échelon unité :

$$F(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_{ref}^2} + \frac{2s}{\omega_{ref}} + 1} \quad (4.4)$$

La pulsation  $\omega_{ref}$  est calculée automatiquement par le logiciel pour éliminer le dépassement ( $\omega_{ref}$  est prise égale à la pulsation de résonance de la boucle fermée). L'utilisateur peut aussi donner une autre pulsation  $\omega_{ref}$  en la saisissant dans la case *wref*.

## 4.2.2 Comparaison avec la synthèse convexe

Nous considérons des systèmes du premier ordre représentés par le modèle suivant :

$$G_1 = \frac{G_0}{\tau s + 1} \quad (4.5)$$

ce type de modèle est utilisé dans la littérature [11], [92] avec différentes valeurs du couple  $(G_0, \tau)$ .

Considérons le cahiers des charges :

- Rejet optimal de perturbation de commande de type échelon au sens de la norme  $H_2$
- Marge de module supérieure ou égale à  $M_{md} = 1$
- Amplification maximale du bruit de mesure sur la commande inférieure ou égale à  $N_{max} = 40$  ( $\|H_{uP_N}\|_\infty \leq 40$ )

Nous utilisons le logiciel présenté précédemment pour synthétiser des correcteurs d'ordre 1 satisfaisant le cahier des charges. La méthode de synthèse proposée dénotée OPT est comparée avec la synthèse convexe dénotée CVX [5], [99] (voir annexe F où nous avons développé un logiciel d'aide à la synthèse convexe). Les résultats obtenus sont présentés dans la table 4.1. Comme nous le voyons, les correcteurs d'ordre 1 fournis par la méthode OPT présentent les mêmes performances que celles par la synthèse convexe (voir valeurs de  $\|H_{y_p d_{u-s}}\|_2$  dans 4.1). Les temps

TABLE 4.1 – Comparaison entre la méthode proposée et la synthèse convexe pour les systèmes du premier ordre

Système	Méthode	$n_{cont}$	$t_{CPU}$ [s]	$\ H_{y_p d_{u-s}}\ _2$	$M_m$	$\ H_{uPN}\ _\infty$
(1, 1)	CVX	3	6.8	0.0061	1	40
	OPT	1	0.06	0.0061	1	40
(1, 8)	CVX	3	4.4	0.017	1	40
	OPT	1	0.06	0.017	1	40
(1, 1.26)	CVX	3	5.1	0.0069	1	40
	OPT	1	0.08	0.0069	1	40
$(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$	CVX	3	7.27	0.0043	1	40
	OPT	1	0.11	0.0043	1	40
(1, 0.1)	CVX	3	5.2	0.002	1	40
	OPT	1	0.12	0.002	1	40

de calcul pour obtenir les correcteurs par la méthode OPT sont plus faibles que ceux par la méthode de synthèse convexe. Pour les mêmes performances et robustesses obtenues, la synthèse convexe fournit des correcteurs d'ordres plus élevés (d'ordre 3 par rapport à d'ordre 1 par la méthode OPT). L'efficacité de la méthode proposée est ainsi montrée sur ces quelques exemples. Donc, dans le cas des systèmes du premier ordre, le meilleur compromis performance/robustesse peut être obtenu en utilisant des correcteurs d'ordres 1 synthétisés par une méthode appropriée (comme la méthode proposée).

### 4.3 Systèmes du second ordre

Dans cette section, nous allons évaluer la méthode de synthèse proposée à travers un benchmark de systèmes du second ordre utilisés dans la littérature. L'efficacité de la méthode de synthèse proposée sera démontrée en la comparant avec la synthèse convexe.

Nous commençons par présenter le logiciel d'aide à la synthèse de correcteur optimal d'ordre 2, sous contraintes de robustesse, développé dans le cadre de cette thèse.

#### 4.3.1 Logiciel d'aide à la synthèse de correcteurs optimaux d'ordre 2 sous contraintes de robustesse

L'interface du logiciel est représentée dans la figure 4.10. L'utilisation du logiciel de synthèse de correcteurs d'ordre 2 est identique à celui du logiciel pour la synthèse d'ordre 1 présenté dans 4.2.1. Les paramètres de la forme usuelle des correcteurs PID sont aussi présentés. La relation entre le correcteur d'ordre 2 utilisé  $C(s) = \frac{K(s^2+as+b)}{s(s+p_c)}$  et la forme usuelle du correcteur de type

PID :

$$PID_f(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d s}{\alpha}} \right) \quad (4.6)$$

est donnée par :

$$\begin{cases} K_p &= \frac{K(ap_c - b)}{p_c^2} \\ T_i &= \frac{ap_c - b}{bp_c} \\ T_d &= \frac{p_c^2 - ap_c + b}{p_c(ap_c - b)} \\ \alpha &= \frac{p_c^2 - ap_c + b}{ap_c - b} \end{cases} \quad (4.7)$$

et inversement :

$$\begin{cases} K &= (1 + \alpha)K_p \\ a &= \frac{\alpha T_i + T_d}{T_i T_d (1 + \alpha)} \\ b &= \frac{\alpha}{T_i T_d (1 + \alpha)} \\ p_c &= \frac{\alpha}{T_d} \end{cases} \quad (4.8)$$

En pratique, pour réduire le dépassement sur la réponse indicielle de la sortie à une consigne en échelon, l'action proportionnelle peut n'agir que partiellement sur la référence. De plus, l'action dérivée n'agit pas sur la référence afin d'éviter des variations trop brusques des actionneurs. La forme pratique de la commande est finalement comme suit :

$$U = K_p \left[ (\beta R - Y_p) + \frac{1}{T_i s} (R - Y_p) - \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d s}{\alpha}} Y \right] \quad (4.9)$$

où les paramètres  $K_p$ ,  $T_i$ ,  $T_d$  et  $\alpha$  sont définis dans (4.6).

### 4.3.2 Comparaison avec la synthèse convexe

Nous considérons des systèmes du second ordre représentés par les modèles suivants :

$$G_{21} = \frac{G_0}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \quad (4.10)$$

$$G_{22} = \frac{G_0}{s(T s + 1)} \quad (4.11)$$

$$G_{23} = \frac{G_0}{s^2} \quad (4.12)$$

ces types de modèles sont utilisés dans la littérature [42], [11], [34] avec différentes valeurs des paramètres :  $(G_0, T_1, T_2)$  pour  $G_{21}$ ,  $(G_0, T)$  pour  $G_{22}$ , et  $(G_0)$  pour  $G_{23}$ . Le modèle  $G_{22}$  représente un processus intégrateur, le modèle  $G_{23}$  représente un double intégrateur.

Considérons le cahiers des charges suivant :

- Rejet optimal d'une perturbation de commande de type échelon au sens de la norme  $H_2$
- Marge de module supérieure ou égale à  $M_{md} = 0.5$

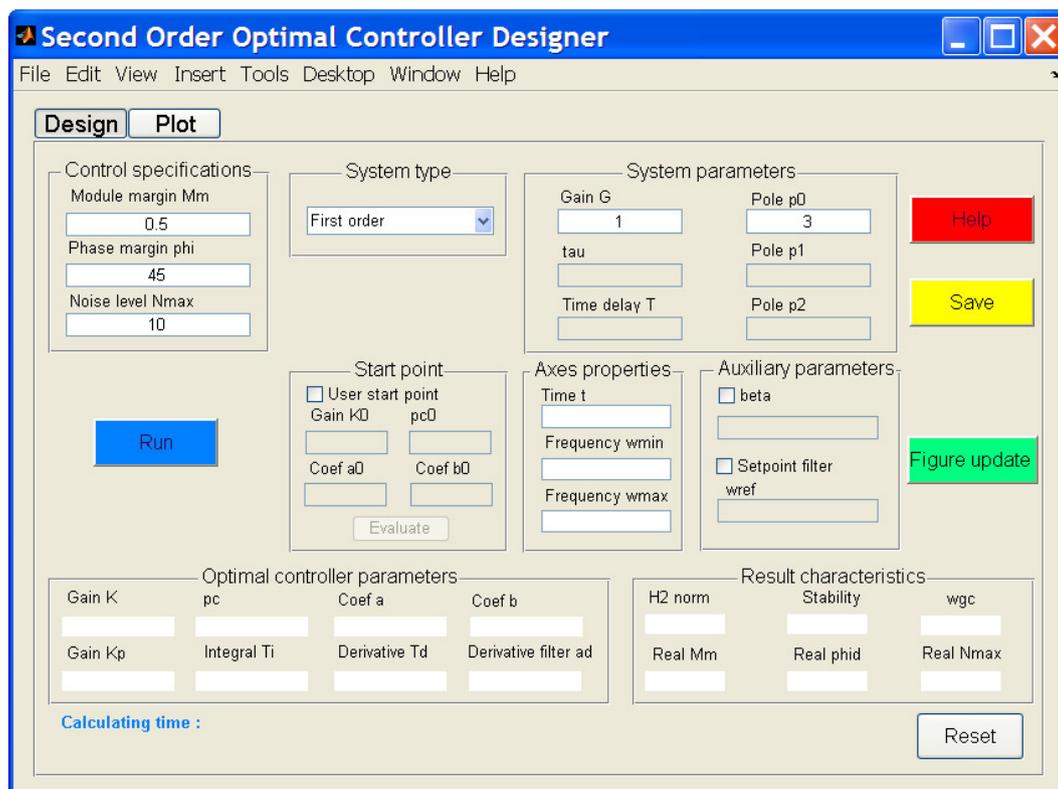


FIGURE 4.10 – Interface graphique du logiciel de synthèse de correcteurs d'ordre 2

TABLE 4.2 – Comparaison entre la méthode proposée et la synthèse convexe pour les systèmes du second ordre

Système	Méthode	$n_{cont}$	$t_{CPU}$ [s]	$\ H_{y_p d_{u-s}}\ _2$	$M_m$	$\ H_{uP_N}\ _\infty$ [dB]
$G_{21}(1, 1, 1)$	CVX	4	4.22	0.034	0.67	35
	OPT	2	15.8	0.034	0.69	35
$G_{21}(1, 10, 1)$	CVX	4	3.63	0.0544	0.72	34
	OPT	2	17.1	0.0544	0.74	34
$G_{21}(1, 300, 50)$	CVX	4	4.45	0.352	0.7	35
	OPT	2	7	0.352	0.65	35
$G_{22}(1, 0.1)$	CVX	4	7.7	0.0181	0.7	34.6
	OPT	2	16.8	0.0181	0.6	34.6
$G_{23}(1)$	CVX	4	4.5	0.041	0.6	37.7
	OPT	2	21	0.041	0.52	37.7

- Amplification maximale du bruit de mesure sur la commande inférieure ou égale à  $N_{max} = 40$  dB ( $\|H_{uP_N}\|_\infty \leq 40$  dB)

Nous utilisons le logiciel présenté précédemment pour synthétiser des correcteurs d'ordre 2 satisfaisant le cahier des charges. La méthode de synthèse proposée dénotée OPT est comparée avec la synthèse convexe dénotée CVX [5], [99] (voir annexe F où nous avons développé un logiciel d'aide à la synthèse convexe). Les résultats obtenus sont présentés dans la table 4.2. Comme nous le voyons, les correcteurs d'ordre 2 fournis par la méthode OPT présentent les mêmes performances que celles obtenues par la synthèse convexe (voir valeurs  $\|H_{y_p d_{u-s}}\|_2$  dans la table 4.2). Pour les mêmes performances et robustesses obtenues, la synthèse convexe fournit des correcteurs d'ordres plus élevés (d'ordre 4 par rapport à d'ordre 2 par la méthode OPT). L'efficacité de la méthode proposée est ainsi montrée. Dans le cas des systèmes du second ordre, le meilleur compromis performance/robustesse peut être obtenu en utilisant des correcteurs d'ordres 2 synthétisés par une méthode appropriée (comme la méthode proposée).

## 4.4 Systèmes d'ordres élevés - Commande d'un véhicule sous-marin autonome

Dans cette section, nous allons évaluer la méthode de synthèse proposée pour systèmes d'ordres élevés à travers un cas d'étude utilisé dans la littérature [100] : la commande robuste d'un véhicule sous-marin autonome. L'efficacité de la méthode de synthèse proposée sera démontrée en comparant avec les résultats obtenus dans [101] par le logiciel HIFOO.

Le système d'ordre élevé est d'abord approché par un modèle réduit un utilisant la méthode de réduction présenté dans le chapitre 3. Nous commençons par présenter le logiciel d'aide à la réduction de modèle développé pendant cette thèse.

### 4.4.1 Logiciel d'aide à la détermination du modèle réduit

#### Présentation générale

A partir du système d'ordre complet à réduire et de l'intervalle de fréquences sur lequel on désire approcher le système d'ordre complet définis par l'utilisateur, le logiciel *ContModelRed* détermine un modèle d'ordre réduit (e.g. d'ordre 2) qui sera utilisé pour la synthèse de la commande robuste.

Nous avons développé ce logiciel en utilisant le langage de **MATLAB**® (version R2007a). L'utilisateur décrit le système d'ordre complet à réduire et la plage de fréquences sur laquelle il désire l'approcher dans un fichier spécifique.

Au lancement du logiciel **ContModelRed**, une fenêtre s'ouvre permettant de choisir le fichier décrivant le système d'ordre complet à réduire. Le logiciel détermine ensuite le modèle réduit selon la méthode décrite au chapitre 3 et présente le résultat. L'interface graphique du logiciel **ContModelRed** est représentée dans la figure 4.11.

#### Obtention des résultats

Le programme propose 3 graphiques différents pour visualiser les résultats obtenus (confer la figure 4.11). Au total, 6 courbes sont représentées.

- La colonne de gauche représente les diagrammes de Bode en amplitude (en haut) et en phase (en bas) : le modèle d'ordre complet (bleu continu), le modèle d'ordre réduit (rouge tiret). Le trait vertical (noir tiret) indique la pulsation  $w_{red}$  (pulsation maximale d'approximation). A gauche de ce trait se trouve la zone de fréquence considérée sur laquelle le modèle réduit approche le modèle complet.
- A droite en bas se trouvent les réponses indicielles : le modèle d'ordre complet (bleu continu), le modèle d'ordre réduit (rouge tiret).

En appuyant sur le bouton **SavePar** les résultats sont sauvegardés dans un fichier.

Nous pouvons changer l'échelle des graphiques en modifiant les valeurs correspondantes dans le fichier décrivant le système, puis appuyer sur le bouton **ReLoad** pour recharger le fichier, les graphiques sont mis à jour.

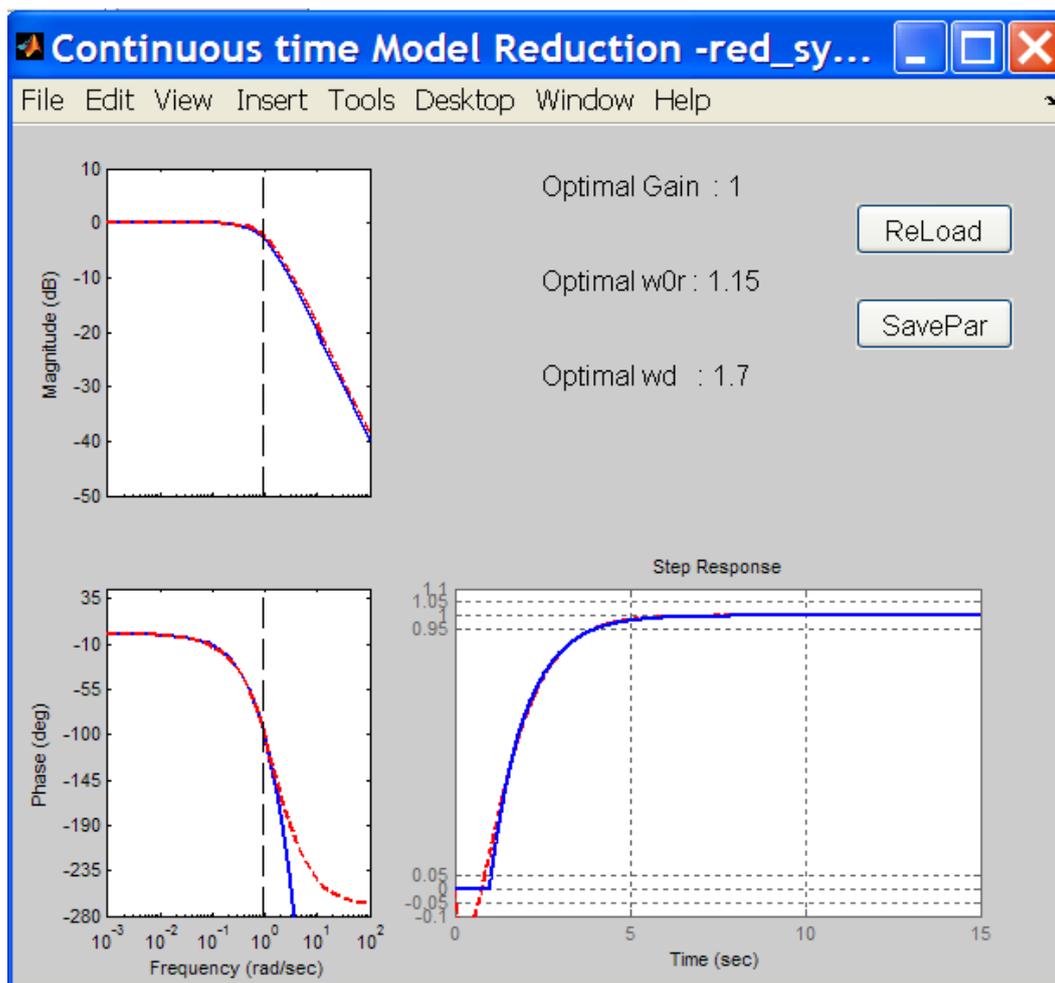


FIGURE 4.11 – Interface graphique du logiciel de réduction de modèle

#### 4.4.2 Commande d'un véhicule sous-marin autonome (VSA)

Nous considérons la commande de l'angle de lacet d'un VSA. Le modèle linéarisé entre la commande et l'angle de lacet est donné par :

$$G_{\psi}(s) = -\frac{92.94(s + 1.044)}{s(s + 9.121)(s + 7.69)(s + 1.702)} \quad (4.13)$$

Considérons le cahier des charges suivant [101] :

- Erreur statique nulle vis-à-vis de la référence de type échelon avec bande passante  $\omega_{BP} \approx 3 \text{ rad/s}$
- Marge de module supérieure ou égale à 0.5

En utilisant le logiciel de réduction présenté dans la section précédente, nous obtenons un modèle réduit :

$$H_{\psi}(s) = -\frac{1.2(-s + 8.03)}{s(s + 8.03)} \quad (4.14)$$

La figure 4.12 représente les diagrammes de Bode du modèle complet (4.13) (rouge tiret) et du modèle réduit (4.14) (bleu continu). Comme nous le voyons, dans l'intervalle de fréquence de fonctionnement du système (i.e.  $\omega_{max} \approx 3\omega_{BP}$ ), le modèle complet est bien approché par le modèle réduit selon la méthode décrite au chapitre 3.

Nous allons comparer notre approche, dénotée OPT, avec celle basée sur le logiciel HIFOO dans [101]. La méthode HIFOO synthétise un correcteur par la minimisation de la norme  $H_{\infty}$  de la fonction de sensibilité à l'aide du modèle complet (4.13). Notre approche synthétise un correcteur à l'aide du modèle réduit (4.14) par l'utilisation de la méthode de synthèse présentée dans le chapitre 2 (avec  $M_{md} = 0.5$ ,  $\varphi_d = 45^\circ$ ,  $N_{max} = 10$ , sans utiliser le pré-filtre). Le correcteur d'ordre 2 obtenu par HIFOO :

$$K_{hifoo} = -\frac{2.12s^2 + 10.73s + 21.67}{s^2 + 5.756s + 8.214}$$

Le correcteur d'ordre 2 obtenu par OPT :

$$K_{opt} = -3.3 \frac{s^2 + 7.64s + 0.756}{s(s + 8.9)}$$

Les résultats sont indiqués dans la table 4.3 (les résultats sont calculés en utilisant le modèle complet (4.13)). Les pulsations de coupure (liés à la bande passante) sont aussi indiquées. Les deux méthodes fournissent des correcteurs d'ordre 2 (voir  $n_{cont}$  dans la table 4.3). Comme nous le voyons, la performance dynamique (pulsation de coupure) présentée par OPT est meilleure que celle obtenue par HIFOO avec les mêmes marges de robustesse. De plus, OPT présente un temps de calcul rapide. Tandis que HIFOO demande à l'utilisateur de déterminer les filtres de pondération, ceci peut être délicat et nécessite beaucoup d'expertise.

La figure 4.13 donne les réponses indicielles vis-à-vis de la référence de type échelon. Comme nous le voyons, OPT présente une dynamique plus rapide que HIFOO. La figure 4.14 représente les réponses indicielles vis-à-vis d'un échelon de perturbation de commande. Le correcteur HIFOO, n'ayant pas d'action intégrale, ne permet pas de rejeter la perturbation de commande de type échelon.

TABLE 4.3 – Comparaison de correcteurs pour la commande d'un véhicule sous-marin autonome

Méthode	$n_{cont}$	$t_{CPU}$ [s]	$M_m$	$P_m$	$\ H_{P_{Nu}}\ _\infty$	$\omega_{gc}$ [rad/s]
OPT	2	16.45	0.7	61°	3.3	3.03
HIFOO	2	16.42	0.68	63°	2.2	2.16

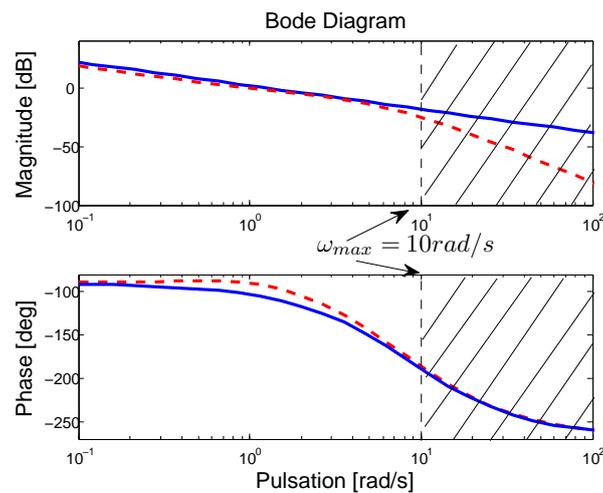


FIGURE 4.12 – Diagrammes de Bode : modèle complet (rouge tiret), modèle réduit (bleu continu)

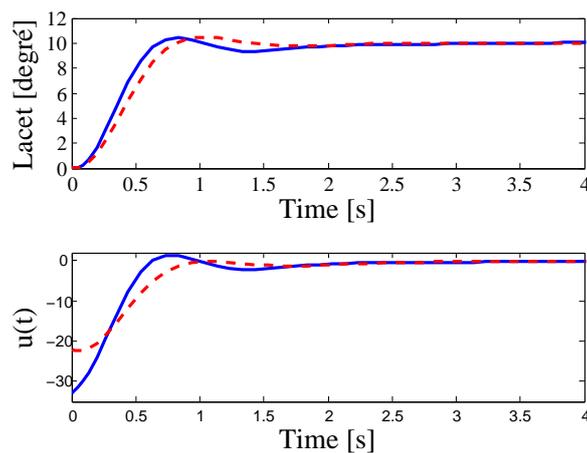


FIGURE 4.13 – Réponses indicielles vis-à-vis d'une référence : OPT (bleu continu), HIFOO (rouge tiret)

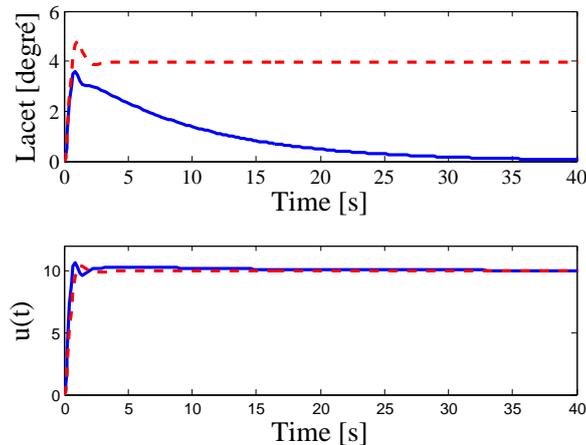


FIGURE 4.14 – Réponses indicielles vis-à-vis d'un échelon de perturbation de commande : OPT (bleu continu), HIFOO (rouge tiret)

## 4.5 Systèmes à paramètres incertains

Reprenons le cas du véhicule sous-marin autonome de la section 4.4. Nous considérons l'asservissement de vitesse selon l'axe longitudinal du VSA. Le modèle linéarisé entre la commande et la vitesse est donné par :

$$G_v(s) = \frac{G_0}{(s+a)(s+b)} \quad (4.15)$$

où ses paramètres varient lentement de  $\pm 20\%$  de leur valeur nominale. Les paramètres nominaux sont :  $G_{0nom} = 2.864 \times 10^3$ ,  $a_{nom} = 0.439$ , et  $b_{nom} = 4.195$ .

Pour évaluer notre approche, considérons le problème de synthèse : Concevoir un correcteur satisfaisant le cahier des charges :

- marges de robustesse  $M_{md} = 0,5$ ,  $\varphi_d = 45^\circ$  pour l'ensemble des valeurs possibles des paramètres du système
- erreur statique nulle vis-à-vis de la référence de type échelon

Notre méthode consiste à déterminer un modèle de synthèse, de telle sorte qu'un correcteur conçu à l'aide de ce modèle garantira les marges de robustesse pour l'ensemble des paramètres du système. Nous avons développé un logiciel d'aide à la détermination de modèle pour systèmes à multi-paramètres en utilisant la méthode proposée dans le chapitre 3. L'interface graphique du logiciel est présentée dans la figure 4.15. En utilisant ce logiciel, le modèle de synthèse obtenu est donné par :

$$H_v(s) = \frac{6.5 * 10^{-3}}{\frac{s^2}{0.8^2} + \frac{2*1.6}{0.8}s + 1} \quad (4.16)$$

La figure 4.16 représente les diagrammes de Bode pour l'ensemble des valeurs possibles des paramètres du système et du modèle de synthèse obtenu selon la méthode décrite au chapitre 3.

Nous allons comparer notre approche, dénotée OPT, avec HIFOO. La méthode HIFOO dans [101] synthétise un correcteur par la minimisation de la norme  $H_\infty$  de la fonction de sensibilité

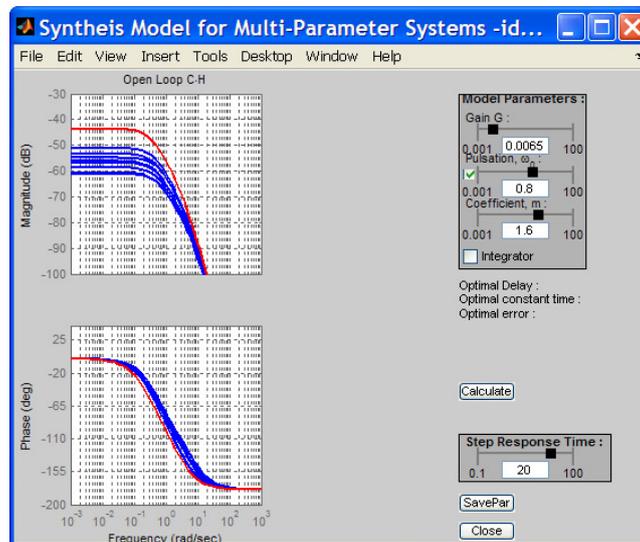


FIGURE 4.15 – L’interface graphique du logiciel d’aide à la détermination de modèle pour systèmes à multi-paramètres

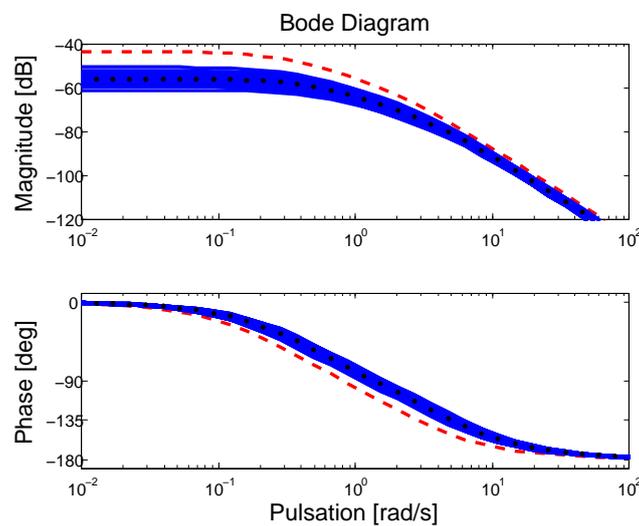


FIGURE 4.16 – Diagrammes de Bode du modèle de synthèse (tiret), des modèles perturbés (continu) et du modèle nominal (point)

TABLE 4.4 – Propriétés des correcteurs pour l'ensemble des valeurs des paramètres du système

Méthode	$n_{cont}$	$t_{CPU}$ [s]	Plus petites marges de robustesse	
			$M_m$	$P_m$
OPT	1	1.64	0.86	$72^\circ$
HIFOO	1	30.39	0.58	$43^\circ$

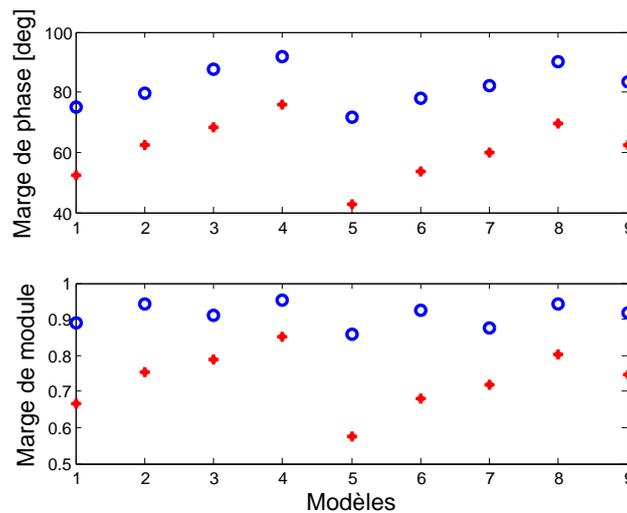


FIGURE 4.17 – Comparaison de marges de robustesse obtenues avec les différents correcteurs : OPT (cercle), HIFOO (astérisque)

à l'aide du modèle nominal (4.15). Notre approche synthétise un correcteur à l'aide du modèle (4.16) par l'utilisation de la méthode de synthèse présentée dans le chapitre 2. Les résultats sont indiqués dans la table 4.4. Les deux méthodes fournissent des correcteurs d'ordre 1 (voir  $n_{cont}$  dans la table 4.4). Comme nous le voyons, la marge de phase la plus petite obtenue par HIFOO n'a pas respecté la spécification. Les marges de robustesse les plus petites obtenues par OPT sont meilleures que celles obtenues par HIFOO. De plus, l'utilisation de HIFOO peut être délicat parce que l'utilisateur doit traduire le cahier des charges en des gabarits fréquentiels, puis construire le système augmenté qui est la donnée d'entrée de HIFOO.

La figure 4.17 représente les marges de robustesse obtenues pour l'ensemble des valeurs des paramètres du système avec les deux correcteurs (OPT-cercle bleu, HIFOO-astérisque rouge). Comme nous le voyons, les marges de robustesse obtenues par OPT sont meilleures que celles obtenues par HIFOO. La figure 4.18 illustre les réponses indicielles vis-à-vis de la référence de type échelon pour l'ensemble des valeurs des paramètres du système avec les deux correcteurs (OPT-bleu continu, HIFOO-rouge tiret). La méthode OPT présente une dynamique plus rapide que HIFOO. De plus, HIFOO présente des dépassements importants.

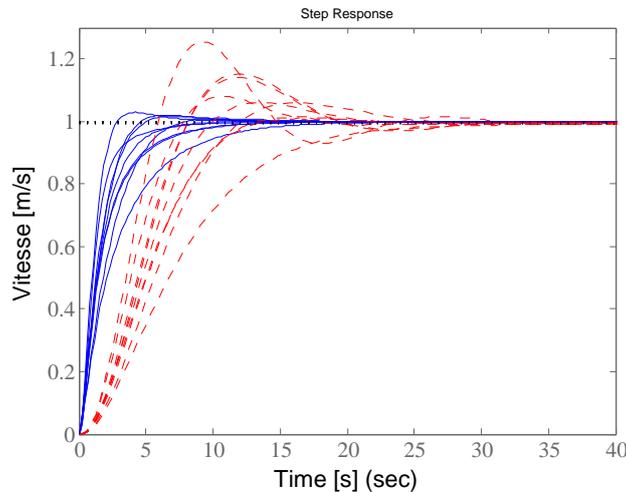


FIGURE 4.18 – Réponses indicielles vis-à-vis d’une référence pour l’ensemble des valeurs des paramètres du système : OPT (bleu continu), HIFOO (rouge tiret)

## 4.6 Conclusion

Nous avons montré l’efficacité de l’approche de synthèse proposée dans le chapitre 2 à travers des modèles de benchmark représentant des systèmes du premier ordre et du second ordre souvent rencontrés en pratique. L’approche proposée dans le chapitre 2 impose une contrainte d’ordre sur le correcteur, le problème de synthèse devient non-convexe. Bien qu’en général, une telle approche ne peut pas garantir l’optimalité globale de la solution obtenue, en comparant avec la synthèse convexe (qui garantit l’optimalité globale), l’approche proposée, pour des systèmes du premier ordre et du second ordre, est tout à fait efficace car les solutions obtenues étaient les points optimaux globaux données par la synthèse convexe. Notre approche avec les outils associés offre donc un grand intérêt car la plupart des systèmes rencontrés dans les boucles d’asservissement industrielles sont d’ordre 1 ou 2.

L’application de la méthode de synthèse proposée aux systèmes d’ordres élevés a été montrée à l’aide d’une application, la commande robuste d’un véhicule sous-marin autonome. Le système d’ordre élevé est d’abord approché sur l’intervalle de fréquence de fonctionnement par un modèle réduit en utilisant la méthode de réduction présentée dans le chapitre 3 qui garantit qu’un correcteur basé sur ce modèle réduit assurera des marges de robustesse pour le système d’ordre élevé. Dans le cas des systèmes à paramètres incertains, la méthode de réduction proposée peut être utilisée pour déterminer un modèle de synthèse. Le correcteur synthétisé à l’aide de ce modèle garantit des marges de robustesse pour l’ensemble des valeurs des paramètres du système à contrôler. L’efficacité de l’approche a été démontrée en comparant avec HIFOO.

Par rapport à la toolbox HIFOO, les logiciels développés dans ce travail sont aussi efficaces mais avec une utilisation plus simple. En effet, HIFOO demande à l’utilisateur de traduire le cahier des charges en des gabarits fréquentiels et puis de construire le système augmenté qui est la donnée d’entrée de HIFOO. Le choix de filtres de pondération fréquentielle est souvent le fruit d’un grand nombre d’allers et de retours entre le choix des paramètres de filtres et l’analyse des

spécifications désirées. Lorsque le système à contrôler change, cette procédure doit être recommencée. Par ailleurs, le choix de filtres de pondération fréquentielle peut générer une quantité importante de conservatisme induite par le traitement du problème multi-objectifs. Dans le contexte industriel, l'utilisateur est tout de même souvent dans l'incapacité de le faire. Au contraire, avec les logiciels proposés, l'utilisateur n'a besoin que de définir le système à contrôler et de déterminer un cahier des charges simple et "compréhensible" (marge de module désirée et/ou marge de phase désirée et/ou amplification maximum du bruit de mesure sur la commande).

# Chapitre 5

## Conclusion générale et Perspectives

Nous avons présenté dans ce mémoire de thèse des résultats relatifs à la synthèse de correcteurs optimaux d'ordres réduits fixés sous contraintes de robustesse, et à la réduction de modèles pour la synthèse robuste en boucle fermée. Dans le but de rendre l'approche proposée plus accessible à un usage industriel, nos développements in fine ont été intégrés à des outils logiciels d'aide à la conception d'un système de commande. Dans ce chapitre nous commençons par récapituler les contributions de la thèse, leurs avantages ainsi que leurs aspects conservatifs. Puis, nous allons discuter quelques perspectives pour la suite des travaux.

Nous avons donné dans le deuxième chapitre une méthodologie semi-analytique de synthèse optimale de correcteurs linéaires d'ordres réduits fixés en respectant des contraintes de robustesse telles que la marge de module désirée, la marge de phase désirée et l'amplification maximum du bruit de mesure sur la commande. Les résultats obtenus ont été publiés dans [LM5], [LM6], [LM8]. Cette méthodologie présente plusieurs caractéristiques :

- L'ordre du correcteur est fixé a priori.
- L'objectif de synthèse est d'optimiser le rejet de la perturbation de commande de type échelon. A la différence d'autres méthodes dans lesquels le rejet de perturbations est estimé par le critère de l'intégrale de l'erreur [47], [49], notre approche considère directement l'effet de la perturbation de commande en minimisant la norme  $H_2$  du transfert entre un échelon de la perturbation de commande et la sortie du système à contrôler. De plus, l'approche permet d'imposer simultanément les marges de module et de phase de façon explicite. L'impact du bruit de mesure sur la commande, étant une contrainte pratique très important, est aussi considéré. La contrainte de marge de module et de bruit de mesure sont évaluées par la norme  $H_\infty$  des fonctions de transfert correspondantes. La contrainte de marge de phase est exprimée par une inégalité calculée à partir du transfert de la boucle ouverte .
- Le problème de synthèse est formulé en un problème d'optimisation non-linéaire non-convexe sous contraintes. Pour cela, l'objectif de synthèse et les contraintes de robustesse sont convertis en des fonctionnelles analytiques en termes des gains inconnus du correcteur à déterminer. La formulation du problème d'optimisation permet de profiter des nombreux algorithmes existants pour le résoudre de manière efficace.

Nous avons déterminé une base de modèles génériques d'ordres réduits qui peut prendre en compte grand nombre de systèmes rencontrés dans les boucles d'asservissement industrielles. Un ensemble de structures de correcteur d'ordre réduit a été aussi choisi. A partir de la base de modèles génériques et de l'ensemble de correcteurs, la méthodologie de synthèse a été appliquée pour élaborer des formulations analytiques des problèmes d'optimisation. Dans un premier temps, la méthodologie s'est focalisée sur les performances et la robustesse de la boucle de rétroaction (feedback) (i.e. rejet de la perturbation de commande, stabilité, marges de robustesse et impact du bruit de mesure sur la commande). Dans un deuxième temps, pour répondre aux spécifications temporelles vis-à-vis de la référence, nous avons proposé également une approche par platitude qui donne la possibilité de tenir compte, lors de la génération des trajectoires de référence, des contraintes physiques, telles que la saturation de l'actionneur. Quelques résultats en comparaison avec d'autres méthodes de synthèse ont montré l'efficacité de la méthode de synthèse proposée. Cette méthode présente des avantages importants suivants :

- Du point de vue théorique, la formulation analytique du problème d'optimisation offre la possibilité d'analyser le compromis entre différentes spécifications et de mieux comprendre l'impact de chaque paramètre du correcteur sur la performance, la stabilité et la robustesse du système bouclé ce qui n'est pas le cas avec les méthodes de synthèse numériques.
- Du point de vue pratique, la possibilité de choisir la structure et l'ordre du correcteur offre un grand intérêt dans le cadre industriel car ceci permet le développement de correcteurs robustes de complexité faible afin d'être implantés sur des systèmes de commande ayant de très fortes contraintes de ressources matérielles et de calcul. D'ailleurs, c'est là le point majeur, la simplicité d'utilisation de la méthode. En effet, pour l'utiliser, l'utilisateur aura à choisir des contraintes de synthèse très simples telles que confiance ou non dans le modèle du système et niveau de bruit accepté sur la commande.

Néanmoins, le conservatisme de la méthodologie proposée repose sur la non-convexité due à la contrainte d'ordre du correcteur. Pour un problème d'optimisation non-convexe, la solution obtenue sera un optimum local et dépend fortement du point initial. Pour contourner ce problème, en profitant des formulations analytiques, nous avons déterminé les domaines faisables où les points initiaux sont choisis de manière à maximiser la possibilité de trouver une solution optimale.

Dans le troisième chapitre, nous avons proposé et démontré les propriétés qu'un modèle utilisé pour la synthèse doit satisfaire afin que la robustesse en boucle fermée du système à commander soit garantie. Se fondant sur ces propriétés plusieurs applications ont été développées :

- Pour les systèmes d'ordres élevés, nous avons développé une méthode de réduction de modèle, où le modèle d'ordre élevé est approché par un modèle réduit dans la base de modèles génériques en assurant que les marges de robustesse, obtenues avec le correcteur conçu basé sur le modèle réduit, seront au moins les mêmes avec le modèle d'ordre élevé. Cependant, la méthode de réduction proposée est indépendante de la méthode de synthèse. Des résultats de comparaisons via un ensemble de systèmes de benchmark ont montré l'intérêt de la méthode. Ces travaux ont été publiés dans [LM4].
- Dans le cas des systèmes à paramètres incertains, la méthode proposée peut être utilisée pour déterminer un modèle de synthèse de manière à ce qu'un correcteur conçu basé sur

ce modèle garantit les marges de robustesse pour l'ensemble des valeurs des paramètres du système.

- Lorsque le modèle du système à contrôler n'est pas disponible, nous avons développé une méthode d'identification expérimentale basée sur la méthode du relais permettant d'obtenir un modèle réduit dans la base de modèles génériques. La méthode est basée sur l'identification du diagramme de Bode du système à commander par l'utilisation d'une commande à relais stabilisant le système en boucle fermée autour du point de fonctionnement désiré. Le balayage fréquentiel est obtenu par l'insertion de retards appropriés dans la boucle. L'avantage majeur de cette approche est que le modèle identifié peut être obtenu après seulement quelques points mesurés de la réponse harmonique du système à contrôler. Le temps et les efforts expérimentaux sont donc beaucoup moins importants que ceux nécessaires à la détermination d'un modèle complet. L'efficacité de la méthode a été montrée à travers un système expérimental, la balle en sustentation dans un tube. Les résultats d'identification ont été publiés dans [LM3].

Nous avons aussi présenté des contraintes physiques et technologiques auxquelles sont soumis les systèmes de commande réels, telles que la précision du capteur, la saturation de l'actionneur, les résolutions des CAN et CNA, etc. Ces contraintes, comme nous l'avons démontré, limitent la bande passante atteignable en boucle fermée. Il s'en suit qu'il suffit de modéliser et d'analyser les systèmes soumis à ces contraintes dans une bande de fréquences limitée et non pas sur toutes les fréquences. C'est pour cette raison qu'un système d'ordre élevé peut être suffisamment bien approché par un modèle d'ordre réduit. Les résultats ont été montrés via un système expérimental, le procédé thermique. Ces travaux ont été publiés dans [LM2].

L'approche proposée a deux avantages principaux. Premièrement, avec le correcteur basé sur le modèle réduit, les marges de robustesse obtenues pour le système réel seront meilleures que celles obtenues pour le système réduit. Deuxièmement, la plage de fréquences sur laquelle nous approchons le système réel est finie, et elle peut être déterminée en fonction des caractéristiques technologiques du système de contrôle. Néanmoins, la méthode pourrait avoir quelques aspects conservatifs : les performances obtenues pour le système complet peuvent être plus ou moins bonnes que celles obtenues pour le système réduit ; les marges de robustesse obtenues pour le système complet sont toujours supérieures aux marges désirées et peuvent être quelques fois bien plus grandes. Pour remédier à ce problème, nous avons développé une procédure itérative afin de réduire le conservatisme de la méthode. Les travaux présentés dans ce chapitre ont été publiés dans [LM1].

Nous avons présenté dans le quatrième chapitre quelques logiciels développés pendant cette thèse :

- Logiciels d'aide à la synthèse optimale de correcteurs d'ordres réduits fixés sous contraintes de robustesse.
- Logiciels d'aide à la détermination de modèles utilisés pour la synthèse robuste en boucle fermée.

Les résultats de comparaisons avec la synthèse convexe ont montré que pour les systèmes du premier ordre et du second ordre, la méthode de synthèse proposée peut atteindre une solution optimale globale avec un correcteur d'ordre réduit (e.g. d'ordre 1 ou 2). Les logiciels ont été com-

parés avec HIFOO (un outil de synthèse de correcteur d'ordre réduit basé sur la synthèse  $H_\infty$ ). Par rapport à HIFOO, les logiciels offrent la simplicité d'utilisation. L'utilisateur n'a besoin que de définir le système à contrôler et déterminer un cahier des charges simple et "compréhensible" (marge de module désirée et/ou marge de phase désirée et/ou amplification maximum du bruit de mesure sur la commande). Ce n'est pas le cas de HIFOO qui demande à l'utilisateur de traduire le cahier des charges en des gabarits fréquentiels et puis de construire le système augmenté qui est la donnée d'entrée de HIFOO. Dans un contexte industriel, l'utilisateur est tout de même souvent dans l'incapacité de le faire.

## Perspectives

L'objectif principal de cette thèse était de développer des outils d'aide à la synthèse de correcteurs optimaux d'ordres réduits fixés sous contraintes de robustesse, et à la réduction de modèles pour la synthèse robuste en boucle fermée. Les principes des approches ont été implémentés dans des logiciels dont l'interface utilisateur permet de rendre les approches transparentes ; la connaissance fine de l'approche n'est en effet pas indispensable pour pouvoir l'utiliser. Il y a plusieurs perspectives pour la suite des travaux.

Tout d'abord, la base des modèles génériques et l'ensemble des structures de correcteurs étudiés pourront être enrichis. Typiquement, les modèles ayant des pôles complexes conjugués pourront être pris en compte.

L'approche proposée a aussi été étendue au cas discret mais sans la prise en compte de la marge de module. Un travail reste à mener pour intégrer cette contrainte fondamentale de robustesse.

La méthode d'identification proposée se fonde sur l'approximation du premier harmonique qui donne généralement de bons résultats pour des systèmes d'ordres relatifs élevés. Avec des systèmes d'ordres relatifs faibles, l'erreur d'estimation du modèle pourrait être significative. Il serait intéressant d'étudier plus finement l'applicabilité cette approche, ou de développer une évolution de celle-ci, pour des systèmes d'ordres relatifs faibles.

Concernant la résolution du problème d'optimisation, une étude plus approfondie sur l'utilisation d'algorithmes d'optimisation spécifiques doit être envisagée. Par exemple, il pourrait être judicieux d'utiliser différents algorithmes d'optimisation pour obtenir une approche hybride adaptée au problème traité. Ceci pourrait amener à avoir des résultats théoriques sur le problème complexe de l'existence d'une ou plusieurs solutions (question de la faisabilité d'un cahier des charges), et in fine d'obtenir un optimum global. Il nous semble que la formulation analytique du problème d'optimisation que nous proposons se prête bien à ces études, d'autant plus que nous avons montré que les domaines d'existence des paramètres des correcteurs recherchés sont des sous-ensembles de l'espace des réels, en utilisant d'une part les contraintes de robustesse et d'autre part les contraintes liées à l'implantation pratique des correcteurs. Voir *Apkarian et al.* [102] et *Gumussoy et al.* [103] pour des méthodes d'optimisation non-lisses.

Toujours dans le cadre de la synthèse contrainte de correcteurs d'ordres réduits, une extension significative de l'approche de synthèse et de réduction de modèle, proposées dans ce travail, serait l'extension aux systèmes multi-variables (multi-entrées et multi-sorties, MIMO). Une première étape pourrait être d'utiliser le concept de Relative Gain Array pour déterminer les paires optimales d'entrées-sorties pour le système MIMO, puis utilisant le fait que la méthode proposée dans ce travail pour les systèmes SISO est basée sur la minimisation de l'impact des perturbations de commande, synthétiser un correcteur optimal en ce sens pour chaque paire et introduire des termes de pré-compensation (feedforward) pour diminuer l'impact des couplages. Les modèles réduits de synthèse de correcteur pour chaque paire entrée-sortie seraient obtenus, si nécessaire, à l'aide de la méthode de réduction de modèle proposée dans ce travail. Voir *Zheng et al.* [104] et *Hernandez-Torres et al.* [105] pour la synthèse de correcteurs de type PID multivariable via l'approche LMI.



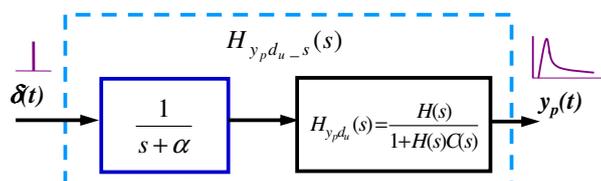
# Annexes

## A Calcul de la fonction objectif

Pour un système asymptotiquement stable, la norme  $H_2$  du système représente l'énergie de la sortie  $\|y(t)\|_2$  pour une entrée impulsionnelle  $u(t) = \delta(t)$ .

Pour une entrée de type échelon  $d_u(t) = 1(t)$ , l'énergie de la sortie peut ne pas être bornée.

Le transfert de la perturbation de commande  $d_u$  vers la sortie  $y_p$ , donné par  $H_{y_p d_u}(s) = \frac{H(s)}{1+H(s)C(s)}$ , est stable EB-SB (entrée bornée - sortie bornée) par le choix de  $C(s)$ . Le transfert  $H_{y_p d_{u-s}}(s) = \frac{1}{s+\alpha} H_{y_p d_u}(s)$  sera aussi stable EB-SB avec  $\alpha > 0$ . La norme  $H_2$  du transfert  $H_{y_p d_{u-s}}(s)$  est donc bornée. Nous pouvons donc toujours calculer la norme  $H_2$  du transfert  $H_{y_p d_{u-s}}(s)$  (avec  $C(s)$  stabilisant  $H_{y_p d_u}(s)$ ).



**Sens de la norme**  $\|H_{y_p d_{u-s}}(X)\|_2$  ( $X$  est le vecteur des paramètres du correcteur) :

- si  $H_{y_p d_u}(s=0) = 0$  et  $\alpha \rightarrow 0$  alors  $\|H_{y_p d_{u-s}}(X)\|_2 \rightarrow \|y_p\|_2$  pour  $d_u(t) = 1(t)$ .
- si  $H_{y_p d_u}(s=0) \neq 0$  alors  $\|H_{y_p d_{u-s}}(X)\|_2$  est un indicateur défini positif de l'impact de  $d_u$  de type échelon sur la sortie  $y_p$ .

En conclusion, la minimisation de  $\|H_{y_p d_{u-s}}(X)\|_2$  permet d'optimiser le rejet de perturbation de commande de type échelon.

La valeur de  $\alpha$  est choisie de sorte que  $\alpha \ll \min |\operatorname{Re}(\text{pôles de } H_{y_p d_u})|$ . En pratique,  $\alpha = 1e^{-6}$  est le plus souvent suffisant.

## B Formulations analytiques pour la synthèse de correcteurs sur la base de modèles génériques

Dans cette section, nous détaillons les expressions analytiques de la méthode de synthèse de correcteurs proposée dans le chapitre 2. Les calculs sont effectués pour l'ensemble des modèles génériques contrôlés par les correcteurs utilisés (confer la section 2.3 du chapitre 2).

## B.1 Système du premier ordre contrôlé par un correcteur d'ordre 1

Le modèle du système du premier ordre s'écrit :  $H(s) = \frac{G}{s+p_0}$ .

Le modèle du correcteur d'ordre 1 :  $C(s) = \frac{K(s+z_c)}{s}$ .

**Fonction objectif** La fonction de transfert entre un échelon de la perturbation de commande et la sortie s'écrit :

$$H_{y_p d_u_s}(s) = \frac{H}{1+HC} \frac{1}{s+\alpha} \Big|_{\alpha \rightarrow 0} \quad (1)$$

où le paramètre  $\alpha$  assure que le transfert  $H_{y_p d_u_s}(s)$  est asymptotiquement stable. La norme  $H_2$  de  $H_{y_p d_u_s}(s)$  sera calculée en utilisant le lemme 2.2.1 du chapitre 2. La représentation d'état s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bd_u \\ y_p &= Cx \end{cases} \quad (2)$$

où  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ ,  $A = \begin{bmatrix} a & 1 & b \\ c & 0 & d \\ e & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = [0 \ G \ 0]^T$ ,  $C = [1 \ 0 \ 0]$ , avec  $a = -p_0 - \alpha - KG$ ,  $b = G$ ,  $c = -p_0\alpha - KG\alpha$ ,  $d = G\alpha$ ,  $e = -Kz_c$ .

Maintenant, nous calculons le gramien de commandabilité, solution de l'équation de Lyapunov :

$$AW_{ctr} + W_{ctr}A^T + BB^T = 0 \quad (3)$$

$$W_{ctr} = W_{ctr}^T = \begin{bmatrix} w_1 & w_{12} & w_{13} \\ w_{12} & w_2 & w_{23} \\ w_{13} & w_{23} & w_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$BB^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & G^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$AW_{ctr} = \begin{bmatrix} \frac{aw_1 + w_{12} + bw_{13}}{cw_1 + dw_{13}} & \frac{aw_{12} + w_2 + bw_{23}}{cw_{12} + dw_{23}} & \frac{aw_{13} + w_{23} + bw_3}{cw_{13} + dw_3} \\ ew_1 & ew_{12} & ew_{13} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$W_{ctr}A^T = (AW_{ctr})^T = \begin{bmatrix} \frac{aw_1 + w_{12} + bw_{13}}{w_{23} + bw_3} & \frac{cw_1 + dw_{13}}{cw_{13} + dw_3} & \frac{aw_{13} + ew_1}{ew_{13}} \\ \frac{aw_{12} + w_2 + bw_{23}}{w_{23} + bw_3} & \frac{cw_{12} + dw_{23}}{cw_{13} + dw_3} & \frac{ew_{12}}{ew_{13}} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (11) : 2aw_1 + 2w_{12} + 2bw_{13} = 0 \\ (12) : aw_{12} + w_2 + bw_{23} + cw_1 + dw_{13} = 0 \\ (13) : aw_{13} + w_{23} + bw_3 + ew_1 = 0 \\ (22) : 2cw_{12} + 2dw_{23} = -G^2 \\ (23) : cw_{13} + dw_3 + ew_{12} = 0 \\ (33) : 2ew_{13} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$\Rightarrow w_1 = \frac{G^2}{2(ac + ed + abe)} \Big|_{\alpha \rightarrow 0} = \frac{G}{2Kz_c(p_0 + KG)} \quad (9)$$

La norme  $H_2$  :

$$\|H_{y_p d_{u-s}}\|_2 = \sqrt{CW_{ctr}C^T} = \sqrt{w_1} = \sqrt{\frac{G}{2Kz_c(p_0 + KG)}} \quad (10)$$

**Stabilité en boucle fermée** La fonction de sensibilité s'écrit :

$$S(s) = \frac{y_p}{d_y} = \frac{1}{1 + HC} = \frac{s^2 + p_0s}{s^2 + (GK + p_0)s + GKz_c} \quad (11)$$

Le critère de Routh donne :

N° de ligne		
1	1	$GKz_c$
2	$GK + p_0$	0
3	$GKz_c$	

Le système est stable en boucle fermée si et seulement si tous les éléments de la première colonne du tableau de Routh possèdent le même signe :

$$\begin{cases} GK + p_0 > 0 \\ GKz_c > 0 \end{cases} \quad (12)$$

**Contrainte de marge de module** La contrainte de marge de module s'écrit :

$$\|S(s)\|_\infty \leq \frac{1}{M_{md}} = \gamma \quad (13)$$

où  $S(s)$  est la fonction de sensibilité définie dans (11),  $M_{md}$  est la marge de module désirée.

La norme  $H_\infty$  de  $S(s)$  sera évaluée en utilisant le théorème 1 du chapitre 2.

La matrice hamiltonnienne associée s'écrit :

$$Ham_\gamma(s) = \begin{bmatrix} A + BR^{-1}D^TC & -BR^{-1}B^T \\ C^T(I + DR^{-1}D^T)C & -(A + BR^{-1}D^TC)^T \end{bmatrix} \quad (14)$$

avec  $R = \gamma^2 I - D^T D > 0$ ,  $(A, B, C, D)$  est la représentation d'état de  $S(s)$ .

L'inégalité (13) est vraie si et seulement si aucune valeur propre de la matrice hamiltonnienne (14) se situe sur l'axe imaginaire.

On cherche d'abord la représentation d'état de  $S(s)$  :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bd_y \\ y_p &= Cx + Dd_y \end{cases} \quad (15)$$

où  $x = [x_1 \quad x_2]^T$ ,  $A = \begin{bmatrix} -a & 1 \\ -b & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = [-GK \quad -b]^T$ ,  $C = [1 \quad 0]$ ,  $D = 1$ , avec  $a = GK + p_0$ ,  $b = GKz_c$ .

La matrice hamiltonnienne (14) devient :

$$Ham_{\gamma}(s) = \left[ \begin{array}{cc|cc} -a - \frac{GK}{\gamma^2-1} & 1 & -\frac{G^2K^2}{\gamma^2-1} & -\frac{bGK}{\gamma^2-1} \\ -b - \frac{b}{\gamma^2-1} & 0 & -\frac{bGK}{\gamma^2-1} & -\frac{b^2}{\gamma^2-1} \\ \hline \frac{\gamma^2}{\gamma^2-1} & 0 & a + \frac{GK}{\gamma^2-1} & b + \frac{b}{\gamma^2-1} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \quad (16)$$

Le polynôme caractéristique de (16) s'écrit :

$$\lambda^4 + b_{\lambda}\lambda^2 + c_{\lambda} = 0 \quad (17)$$

avec  $b_{\lambda} = \frac{p_0^2 + (2b-a^2)\gamma^2}{\gamma^2-1}$ ,  $c_{\lambda} = \frac{b^2\gamma^2}{\gamma^2-1}$ .

Enfin, la condition pour qu'aucune valeur propre ne se situe sur l'axe imaginaire est :

$$z_c < \frac{1}{2G\gamma(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1})} \frac{(GK + p_0)^2\gamma^2 - p_0^2}{K} \quad (18)$$

**Contrainte de marge de phase** La fonction de transfert en boucle ouverte s'écrit :

$$H_{bo}(s) = HC = \frac{GK(s + z_c)}{s(s + p_0)} \quad (19)$$

Le transfert harmonique :

$$H_{bo}(j\omega) = HC = \frac{GK(j\omega + z_c)}{j\omega(j\omega + p_0)} \quad (20)$$

Le gain :

$$|H_{bo}(j\omega)| = \frac{GK\sqrt{\omega^2 + z_c}}{\omega\sqrt{\omega^2 + p_0}} \quad (21)$$

La phase :

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\omega}{z_c} - \arctan \frac{\omega}{p_0} - \frac{\pi}{2} \quad (22)$$

La marge de phase est le déphasage de la réponse fréquentielle par rapport à  $-\pi$  pour la pulsation  $\omega_{gc}$  correspondant à un gain unité :

$$M_p = \pi + \varphi(\omega_{gc}) \quad (23)$$

La condition de marge de phase :

$$\arctan \frac{\omega}{z_c} - \arctan \frac{\omega}{p_0} \geq \varphi_d - \frac{\pi}{2} \quad (24)$$

Rappelons que :

$$\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x - y}{1 + xy} \quad (25)$$

Avec (25) la contrainte de marge de phase (24) devient :

$$z_c \leq \frac{p_0 \omega_{gc} - h \omega_{gc}^2}{\omega_{gc} + h p_0} \quad \begin{cases} h = \tan(\varphi_d - \frac{\pi}{2}), p_0 \geq 0 \\ h = \tan(\varphi_d + \frac{\pi}{2}), p_0 < 0 \end{cases} \quad (26)$$

où la pulsation de croisement  $\omega_{gc}$  est la solution positive de l'équation suivante obtenue de (21) :

$$\frac{GK \sqrt{\omega^2 + z_c}}{\omega \sqrt{\omega^2 + p_0}} = 1 \quad (27)$$

**Amplification maximale du bruit** La contrainte de l'amplification maximale du bruit s'écrit :

$$\|H_{un}\|_{\infty}|_{\omega \geq \omega_N} = \|SC\|_{\infty}|_{\omega \geq \omega_N} \leq N_{max} \quad (28)$$

En considérant (13), (28) est satisfaite si :

$$\|C(s)\|_{\infty}|_{\omega \geq \omega_N} \leq M_{md} N_{max} \quad (29)$$

Prenons  $\omega_N$ , nous pouvons écrire :

$$\|C(s)\|_{\infty}|_{\omega \geq \omega_N} \leq |K| \sqrt{1 + \frac{z_c^2}{\omega_N^2}} = |K| \sqrt{1 + \frac{1}{100}} \approx |K| \quad (30)$$

Enfin, la contrainte de l'amplification maximale du bruit est satisfaite si :

$$|K| \leq M_{md} N_{max} \quad (31)$$

## B.2 Système du premier ordre avec retard contrôlé par un correcteur d'ordre 1

Le modèle du système du premier ordre avec retard s'écrit :  $H(s) = \frac{G}{s+p_0} e^{-Ts}$ . Le retard est approché par la méthode de Padé au premier ordre :

$$e^{-Ts} \approx \frac{-s + L}{s + L} \quad (32)$$

avec  $L = \frac{2}{T}$ .

Le modèle utilisé pour calculer le correcteur est le modèle approché :

$$H(s) = \frac{G}{s + p_0} \frac{-s + L}{s + L} \quad (33)$$

Le correcteur d'ordre 1 :  $C(s) = \frac{K(s+z_c)}{s}$ .

Avec la même démarche de la section B.1, nous obtenons les expressions suivantes :

### Fonction objectif

$$\|H_{y_p d_{u-s}}\|_2 = \sqrt{\frac{G}{2Kz_c} \frac{GKz_c + L(L + p_0 - GK)}{(L + p_0 - GK)(Lp_0 + GLK - GKz_c) - GLKz_c}} \quad (34)$$

### Stabilité en boucle fermée

$$\begin{cases} p_0 + L - GK > 0 \\ [p_0L + GK(L - z_c)](p_0 + L - GK) - GLKz_c > 0 \\ GLKz_c > 0 \end{cases} \quad (35)$$

### Contrainte de marge de module

$$\begin{cases} -\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{R}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{R}}{2}} + \frac{a_\lambda}{3}, R > 0 \\ \begin{bmatrix} -3q/p + a_\lambda/3 \\ 3q/2p + a_\lambda/3 \end{bmatrix}, R = 0 \\ \begin{bmatrix} -2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{-q}{2} \sqrt{\frac{-27}{p^3}} \right) + \frac{2k\pi}{3} \right] \\ + \frac{a_\lambda}{3} \end{bmatrix}_{k=\{1,2,3\}}, R < 0 \end{cases} < 0 \quad (36)$$

où  $p = b_\lambda - \frac{a_\lambda^2}{3}$ ,  $q = \frac{a_\lambda}{27}(2a_\lambda^2 - 9b_\lambda) + c_\lambda$ ,  $R = \frac{4}{27}p^3 + q^2$

avec  $a_\lambda = -\frac{1}{\gamma^2-1}(-2b\gamma^2 + 2e + a^2\gamma^2 - d^2)$ ,  $b_\lambda = -\frac{1}{\gamma^2-1}(2ac\gamma^2 - b^2\gamma^2 + e^2)$ ,  $c_\lambda = -\frac{c^2\gamma^2}{\gamma^2-1}$

où  $a = p_0 + L - GK$ ,  $b = p_0L + GK(L - z_c)$ ,  $c = GLKz_c$ ,  $d = p_0 + L$ ,  $e = p_0L$ ,  $\gamma = 1/M_{md}$ .

### Contrainte de marge de phase

$$\varphi_d - \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega_{gc}}{z_c} + \arctan \frac{\omega_{gc}}{p_0} + \frac{2}{L}\omega_{gc} \leq 0 \quad (37)$$

où  $\omega_{gc}$ , la pulsation de croisement, est la solution positive de l'équation :

$$\left( GK \sqrt{\omega_{gc}^2 + z_c^2} \right) / \left( \omega_{gc} \sqrt{\omega_{gc}^2 + p_0^2} \right) = 1 \quad (38)$$

### Amplification maximale du bruit

$$|K| \leq M_{md} N_{max} \quad (39)$$

## B.3 Système du second ordre contrôlé par un correcteur d'ordre 1

Le modèle du système du second ordre s'écrit :  $H(s) = \frac{G}{(s+p_1)(s+p_2)}$ .

Le correcteur d'ordre 1 :  $C(s) = \frac{K(s+z_c)}{s}$ .

Avec la même démarche de la section B.1, nous obtenons les expressions suivantes :

**Fonction objectif**

$$\|H_{y_p d_{u-s}}\|_2 = \sqrt{\frac{(p_1 + p_2)G/2}{Kz_c[(p_1 + p_2)(GK + p_1p_2) - GKz_c]}} \quad (40)$$

**Stabilité en boucle fermée**

$$\begin{cases} GKz_c > 0 \\ p_1 + p_2 > 0 \\ (p_1 + p_2)(GK + p_1p_2) - GKz_c > 0 \end{cases} \quad (41)$$

**Contrainte de marge de module**

$$\begin{cases} -\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{R}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{R}}{2}} + \frac{a_\lambda}{3}, R > 0 \\ [-3q/p + a_\lambda/3 \quad 3q/2p + a_\lambda/3]^T, R = 0 \\ \left[ -2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{-q}{2} \sqrt{\frac{-27}{p^3}} \right) + \frac{2k\pi}{3} \right] + \frac{a_\lambda}{3} \right]_{k=\{1,2,3\}}^T, R < 0 \end{cases} < 0 \quad (42)$$

où  $p = b_\lambda - \frac{a_\lambda^2}{3}$ ,  $q = \frac{a_\lambda}{27}(2a_\lambda^2 - 9b_\lambda) + c_\lambda$ ,  $R = \frac{4}{27}p^3 + q^2$   
 avec  $a_\lambda = \frac{2\gamma^2 GK}{\gamma^2 - 1} - (p_1^2 + p_2^2)$ ,  $b_\lambda = \frac{-(2ac\gamma^2 - b^2\gamma^2 + d^2)}{\gamma^2 - 1}$ ,  $c_\lambda = \frac{-c^2\gamma^2}{\gamma^2 - 1}$   
 où  $a = p_1 + p_2$ ,  $b = GK + p_1p_2$ ,  $c = GKz_c$ ,  $d = p_1p_2$ ,  $\gamma = 1/M_{md}$ .

**Contrainte de marge de phase**

$$\varphi_d - \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega_{gc}}{z_c} + \arctan \frac{\omega_{gc}}{p_1} + \arctan \frac{\omega_{gc}}{p_2} + k_{i=1,2}\pi \leq 0 \quad (43)$$

où  $k_{i=1,2} = \begin{cases} 0, p_i \geq 0 \\ 1, p_i < 0 \end{cases}$ , et  $\omega_{gc}$ , la pulsation de croisement, est la solution positive de l'équation :

$$\frac{GK\sqrt{\omega_{gc}^2 + z_c^2}}{\omega_{gc}\sqrt{(\omega_{gc}^2 + p_1^2)(\omega_{gc}^2 + p_2^2)}} = 1 \quad (44)$$

**Amplification maximale du bruit**

$$|K| \leq M_{md}N_{max} \quad (45)$$

**B.4 Système du second ordre avec zéro contrôlé par un correcteur d'ordre 1**

Le modèle du système du second ordre avec zéro s'écrit :  $H(s) = \frac{G(\tau s + 1)}{(s + p_1)(s + p_2)}$ .

Le correcteur d'ordre 1 :  $C(s) = \frac{K(s + z_c)}{s}$ .

Avec la même démarche de la section B.1, nous obtenons les expressions suivantes :

### Fonction objectif

$$\|H_{ypd_{u-s}}\|_2 = \sqrt{G \frac{G\tau K z_c + p_1 + p_2 + G\tau K}{2K z_c \{ [p_1 p_2 + GK(\tau z_c + 1)](p_1 + p_2 + G\tau K) - GK z_c \}}} \quad (46)$$

### Stabilité en boucle fermée

$$\begin{cases} GK z_c > 0 \\ p_1 + p_2 + GK\tau > 0 \\ (p_1 p_2 + GK(\tau z_c + 1))(p_1 + p_2 + G\tau K) - GK z_c > 0 \end{cases} \quad (47)$$

### Contrainte de marge de module

$$\begin{cases} -\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{R}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{R}}{2}} + \frac{a_\lambda}{3}, R > 0 \\ [-3q/p + a_\lambda/3 \quad 3q/2p + a_\lambda/3]^T, R = 0 \\ \left[ -2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{-q}{2} \sqrt{\frac{-27}{p^3}} \right) + \frac{2k\pi}{3} \right] + \frac{a_\lambda}{3} \right]_{k=\{1,2,3\}}^T, R < 0 \end{cases} < 0 \quad (48)$$

où  $p = b_\lambda - \frac{a_\lambda^2}{3}$ ,  $q = \frac{a_\lambda}{27}(2a_\lambda^2 - 9b_\lambda) + c_\lambda$ ,  $R = \frac{4}{27}p^3 + q^2$

avec  $a_\lambda = -\frac{1}{\gamma^2-1}(-2b\gamma^2 + 2e + a^2\gamma^2 - d^2)$ ,  $b_\lambda = -\frac{1}{\gamma^2-1}(2ac\gamma^2 - b^2\gamma^2 + e^2)$ ,  $c_\lambda = -\frac{c^2\gamma^2}{\gamma^2-1}$

où  $a = p_1 + p_2 + GK\tau$ ,  $b = p_1 p_2 + GK(\tau z_c + 1)$ ,  $c = GK z_c$ ,  $d = p_1 + p_2$ ,  $e = p_1 p_2$ ,  $\gamma = 1/M_{md}$ .

### Contrainte de marge de phase

$$\varphi_d - \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega_{gc}}{z_c} - \arctan \tau \omega_{gc} + \arctan \frac{\omega_{gc}}{p_1} + \arctan \frac{\omega_{gc}}{p_2} + k_{i=1,2}\pi \leq 0 \quad (49)$$

où  $k_{i=1,2} = \begin{cases} 0, p_i \geq 0 \\ 1, p_i < 0 \end{cases}$ , et  $\omega_{gc}$ , la pulsation de croisement, est la solution positive de l'équation :

$$\frac{GK \sqrt{(\omega_{gc}^2 + z_c^2)(\tau^2 \omega_{gc}^2 + 1)}}{\omega_{gc} \sqrt{(\omega_{gc}^2 + p_1^2)(\omega_{gc}^2 + p_2^2)}} = 1 \quad (50)$$

### Amplification maximale du bruit

$$|K| \leq M_{md} N_{max} \quad (51)$$

## B.5 Système du premier ordre contrôlé par un correcteur d'ordre 2

Le modèle du système du premier ordre s'écrit :  $H(s) = \frac{G}{s+p_0}$ .

Le modèle du correcteur d'ordre 2 :  $C(s) = \frac{K(s^2+as+b)}{s(s+p_c)}$ .

Avec la même démarche de la section B.1, nous obtenons les expressions suivantes :

**Fonction objectif**

$$\|H_{y_p d_{u-s}}\|_2 = \sqrt{\frac{G}{2Kb} \frac{GKb + p_c^2(p_0 + p_c + GK)}{(p_0 p_c + GK a)(p_0 + p_c + GK) - GKb}} \quad (52)$$

**Stabilité en boucle fermée**

$$\begin{cases} p_0 + p_c + GK > 0 \\ GKb > 0 \\ (p_0 p_c + GK a)(p_0 + p_c + GK) - GKb > 0 \end{cases} \quad (53)$$

**Contrainte de marge de module**

$$\begin{cases} -\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{R}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{R}}{2}} + \frac{a_\lambda}{3}, R > 0 \\ \begin{bmatrix} -3q/p + a_\lambda/3 & 3q/2p + a_\lambda/3 \end{bmatrix}^T, R = 0 \\ \left[ -2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{-q}{2} \sqrt{\frac{-27}{p^3}} \right) + \frac{2k\pi}{3} \right] + \frac{a_\lambda}{3} \right]_{k=\{1,2,3\}}^T, R < 0 \end{cases} < 0 \quad (54)$$

où  $p = b_\lambda - \frac{a_\lambda^2}{3}$ ,  $q = \frac{a_\lambda}{27}(2a_\lambda^2 - 9b_\lambda) + c_\lambda$ ,  $R = \frac{4}{27}p^3 + q^2$

avec  $a_\lambda = -\frac{1}{\gamma^2-1}(-2a_2\gamma^2 + 2e + a_3^2\gamma^2 - d^2)$ ,  $b_\lambda = -\frac{1}{\gamma^2-1}(2a_1a_3\gamma^2 - a_2^2\gamma^2 + e^2)$ ,  $c_\lambda = -\frac{a_1^2\gamma^2}{\gamma^2-1}$

où  $a_1 = GKb$ ,  $a_2 = p_0 p_c + GK a$ ,  $a_3 = p_0 + p_c + GK$ ,  $d = p_0 + p_c$ ,  $e = p_0 p_c$ ,  $\gamma = 1/M_{md}$ .

**Contrainte de marge de phase**

$$\arctan \frac{a\omega_{gc}}{b - \omega_{gc}^2} + k_1\pi - \arctan \frac{\omega_{gc}^2 - p_0 p_c}{\omega_{gc}(p_0 + p_c)} - k_2\pi \geq \varphi_d \quad (55)$$

où

$$k_1 = \begin{cases} 0, b - \omega_{gc}^2 \geq 0 \\ 1, b - \omega_{gc}^2 < 0 \end{cases},$$

$$k_2 = \begin{cases} 0, p_0 + p_c \geq 0 \\ 1, p_0 + p_c < 0 \end{cases},$$

et  $\omega_{gc}$ , la pulsation de croisement, est la solution positive de l'équation :

$$\frac{GK \sqrt{(a\omega_{gc})^2 + (b - \omega_{gc}^2)^2}}{\omega_{gc} \sqrt{(\omega_{gc}^2 + p_c^2)(\omega_{gc}^2 + p_0^2)}} = 1 \quad (56)$$

**Amplification maximale du bruit**

$$|K| \leq M_{md} N_{max} \quad (57)$$

## B.6 Système du premier ordre avec retard contrôlé par un correcteur d'ordre 2

Le modèle du système du premier ordre avec retard s'écrit :  $H(s) = \frac{G}{s+p_0}e^{-Ts}$ . Le retard est approché par la méthode de Padé au premier ordre :

$$e^{-Ts} \approx \frac{-s+L}{s+L} \quad (58)$$

avec  $L = \frac{2}{T}$ .

Le modèle utilisé pour calculer le correcteur est le modèle approché :

$$H(s) = \frac{G}{s+p_0} \frac{-s+L}{s+L} \quad (59)$$

Le correcteur d'ordre 2 :  $C(s) = \frac{K(s^2+as+b)}{s(s+p_c)}$ .

Avec la même démarche de la section B.1, nous obtenons les expressions suivantes :

### Fonction objectif

$$\|H_{y_p d_u - s}\|_2 = \sqrt{\frac{G}{2KbL} \frac{a_1 a_2 + a_1 a_4 L^2 + p_c^2 a_1 a_4 + L^2 p_c^2 a_4 a_3 - L^2 p_c^2 a_2}{a_2 a_3 a_4 - a_2^2 - a_1 a_4^2}} \quad (60)$$

où

$$\begin{aligned} a_1 &= GKbL \\ a_2 &= p_c p_0 L + GK(aL - b) \\ a_3 &= p_0 L + p_c(p_0 + L) + GK(L - a) \\ a_4 &= p_0 + L + p_c - GK \end{aligned} \quad (61)$$

### Stabilité en boucle fermée

$$\begin{cases} a_1 = GKbL > 0 \\ a_2 = p_c p_0 L + GK(aL - b) > 0 \\ a_3 = p_0 L + p_c(p_0 + L) + GK(L - a) > 0 \\ a_4 = p_0 + L + p_c - GK > 0 \\ a_4 a_3 - a_2 > 0 \\ a_2(a_3 a_4 - a_2) - a_1 a_4^2 > 0 \end{cases} \quad (62)$$

**Contrainte de marge de module** Le polynôme caractéristique s'écrit :

$$\lambda^8 + a_\lambda \lambda^6 + b_\lambda \lambda^4 + c_\lambda \lambda^2 + d_\lambda = 0 \quad (63)$$

où

$$a_\lambda = \frac{2a_3 \gamma^2 - 2b_2 - a_4^2 \gamma^2 + b_3^2}{\gamma^2 - 1},$$

$$b_\lambda = \frac{2a_1\gamma^2 - 2a_2a_4\gamma^2 + 2b_1b_3 + a_3^2\gamma^2 - b_2^2}{\gamma^2 - 1},$$

$$c_\lambda = \frac{-a_2^2\gamma^2 + 2a_1a_3\gamma^2 + b_1^2}{\gamma^2 - 1},$$

$$d_\lambda = \frac{a_1^2\gamma^2}{\gamma^2 - 1}.$$

avec  $a_1, a_2, a_3, a_4$  définis dans (61), et :

$$\begin{aligned} b_1 &= p_c p_0 L \\ b_2 &= p_0 L + p_c(p_0 + L) \\ b_3 &= p_c + p_0 + L \end{aligned} \quad (64)$$

Enfin, nous obtenons la condition nécessaire et suffisante assurant la contrainte sur la marge de module :

$$Re\{\lambda_i\} \neq 0 \quad (65)$$

### Contrainte de marge de phase

$$\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{a\omega_{gc}}{b - \omega_{gc}^2} + k\pi - \arctan \frac{\omega_{gc}}{p_c} - \arctan \frac{\omega_{gc}}{p_0} - k_0\pi - 2 \arctan \frac{\omega_{gc}}{L} \geq \varphi_d \quad (66)$$

où  $k_0 = \begin{cases} 0, p_0 \geq 0 \\ 1, p_0 < 0 \end{cases}$ ,  $k = \begin{cases} 0, b - \omega_{gc}^2 \geq 0 \\ 1, b - \omega_{gc}^2 < 0 \end{cases}$  et  $\omega_{gc}$ , la pulsation de croisement, est la solution positive de l'équation :

$$\frac{GK \sqrt{(a\omega_{gc})^2 + (b - \omega_{gc}^2)^2}}{\omega_{gc} \sqrt{(\omega_{gc}^2 + p_c^2)(\omega_{gc}^2 + p_0^2)}} = 1 \quad (67)$$

### Amplification maximale du bruit

$$|K| \leq M_{md} N_{max} \quad (68)$$

## B.7 Système du second ordre avec zéro contrôlé par un correcteur d'ordre 2

Le modèle du système du second ordre avec zéro s'écrit :  $H(s) = \frac{G(\tau s + 1)}{(s + p_1)(s + p_2)}$ .

Le correcteur d'ordre 2 :  $C(s) = \frac{K(s^2 + as + b)}{s(s + p_c)}$ .

### Fonction objectif

$$\|H_{y_p d_{u-s}}\|_2 = \sqrt{\frac{G}{2Kb} \frac{p_c^2(cd - e) + cf + \tau^2 f(cp_c^2 + e)}{(cd - e)e - c^2 f}} \quad (69)$$

avec

$$\begin{aligned} c &= p_1 + p_2 + G\tau K + p_c \\ d &= p_1 p_2 + G(1 + \tau a)K + (p_1 + p_2)p_c \\ e &= GK(a + \tau b) + p_1 p_2 p_c \\ f &= GKb \end{aligned} \quad (70)$$

**Stabilité en boucle fermée**

$$\begin{cases} c > 0 \\ cd - e > 0 \\ e(cd - e) - c^2f > 0 \\ f > 0 \end{cases} \quad (71)$$

avec  $c, d, e, f$  définis dans (70).

**Contrainte de marge de module** La fonction de sensibilité s'écrit :

$$S(s) = \frac{s^4 + ms^3 + gs^2 + hs}{s^4 + cs^3 + ds^2 + es + f} \quad (72)$$

avec  $c, d, e, f$  définis dans (70), et

$$\begin{aligned} m &= p_1 + p_2 + p_c \\ g &= p_1p_2 + (p_1 + p_2)p_c \\ h &= p_1p_2p_c \end{aligned} \quad (73)$$

La matrice Hamiltonienne associée avec  $S(s)$  est donnée par :

$$Ham_\gamma(s) = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{11} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \quad (74)$$

où

$$h_{11} = \begin{bmatrix} -c + \frac{m-c}{\gamma^2-1} & 1 & 0 & 0 \\ -d + \frac{g-d}{\gamma^2-1} & 0 & 1 & 0 \\ -e + \frac{h-e}{\gamma^2-1} & 0 & 0 & 1 \\ -f - \frac{f}{\gamma^2-1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (75)$$

$$h_{12} = \frac{1}{\gamma^2-1} \begin{bmatrix} -(m-c)^2 & -(m-c)(g-d) & -(m-c)(h-e) & (m-c)f \\ -(m-c)(g-d) & -(g-d)^2 & -(h-e)(g-d) & f(g-d) \\ -(m-c)(h-e) & -(h-e)(g-d) & -(h-e)^2 & f(h-e) \\ (m-c)f & f(g-d) & f(h-e) & -f^2 \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$h_{21} = \frac{\gamma^2}{\gamma^2-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (77)$$

$$h_{22} = -ham_{11}^T \quad (78)$$

Le polynôme caractéristique de (74) s'écrit :

$$\lambda^8 + a_\lambda \lambda^6 + b_\lambda \lambda^4 + c_\lambda \lambda^2 + d_\lambda = 0 \quad (79)$$

où

$$\begin{aligned} a_\lambda &= \frac{2d\gamma^2 - 2g - c^2\gamma^2 + m^2}{\gamma^2 - 1}, \\ b_\lambda &= \frac{2f\gamma^2 - 2ce\gamma^2 + 2hm + d^2\gamma^2 - g^2}{\gamma^2 - 1}, \\ c_\lambda &= \frac{-e^2\gamma^2 + 2df\gamma^2 + h^2}{\gamma^2 - 1}, \\ d_\lambda &= \frac{f^2\gamma^2}{\gamma^2 - 1}. \end{aligned}$$

avec  $c, d, e, f$  définis dans (70), et  $m, g, h$  définis dans (73). Enfin, nous obtenons la condition nécessaire et suffisante assurant la contrainte sur la marge de module :

$$Re\{\lambda_i\} \neq 0 \quad (80)$$

### Contrainte de marge de phase

$$\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{a\omega_{gc}}{b - \omega_{gc}^2} + k\pi + \arctan \tau\omega_{gc} - \arctan \frac{\omega_{gc}}{p_c} - \arctan \frac{\omega_{gc}}{p_1} - \arctan \frac{\omega_{gc}}{p_2} - k_{i=1,2}\pi \geq \varphi_d - \quad (81)$$

où  $k_{i=1,2} = \begin{cases} 0, p_i \geq 0 \\ 1, p_i < 0 \end{cases}$ ,  $k = \begin{cases} 0, b - \omega_{gc}^2 \geq 0 \\ 1, b - \omega_{gc}^2 < 0 \end{cases}$  et  $\omega_{gc}$ , la pulsation de croisement, est la solution positive de l'équation :

$$\frac{GK \sqrt{[(b - \omega_{gc}^2)^2 + (a\omega_{gc})^2](\tau^2\omega_{gc}^2 + 1)}}{\omega_{gc} \sqrt{(\omega_{gc}^2 + p_1^2)(\omega_{gc}^2 + p_2^2)(\omega_{gc}^2 + p_c^2)}} = 1 \quad (82)$$

### Amplification maximale du bruit

$$|K| \leq M_{md} N_{max} \quad (83)$$

## B.8 Système du second ordre contrôlé par un correcteur d'ordre 2

Les expressions analytiques peuvent être obtenus selon les résultats dans la section B.7 en mettant  $\tau = 0$ .

## C Système double intégrateur contrôlé par un correcteur Proportionnel Dérivée

### C.1 Expressions analytiques

Considérons un cas particulier du système double intégrateur :

$$H(s) = \frac{G}{s^2} \quad (84)$$

Le correcteur proportionnel-dérivée avec une action dérivée filtrée :

$$C(s, X) = \frac{K(s + s_1)}{s + s_2} \quad X = [K \quad s_1 \quad s_2]^T \in \mathfrak{R}^3 \quad (85)$$

Nous utilisons un correcteur stable et à minimum de phase (i.e. un correcteur avec de zéros à partie réelle négative) parce que des zéros à non-minimum de phase, (i.e. zéros à partie réelle positive) réduisent la marge de phase. Ainsi les paramètres du correcteur doivent vérifier :  $[s_1 \quad s_2] \in \mathfrak{R}_+^2$ .

**Fonction objectif** La norme  $H_2$  du transfert entre la perturbation de commande de type échelon et la sortie s'écrit :

$$\|H_{y_p d_{u-s}}\|_2 = \frac{Gx_1x_2 + x_3^3}{2x_1^2x_2(x_3 - x_2)} \quad (86)$$

avec  $x_1 = K$ ,  $x_2 = s_1$ ,  $x_3 = s_2$ .

**Stabilité interne**

$$\begin{cases} s_2 > 0 \\ s_2 > s_1 \\ GK > 0 \end{cases} \quad (87)$$

**Contrainte de marge de phase**

$$\arctan \frac{\omega_{gc}}{s_1} - \arctan \frac{\omega_{gc}}{s_2} \geq \varphi_d \quad (88)$$

où la pulsation de croisement  $\omega_{gc}$  est la solution positive de l'équation :

$$\frac{GK \sqrt{\omega_{gc}^2 + s_1^2}}{\omega_{gc}^2 \sqrt{\omega_{gc}^2 + s_2^2}} = 1 \quad (89)$$

**Contrainte de marge de module** La marge de module est supérieur ou égale  $M_{md}$  si et seulement si le polynôme suivant :

$$p^6 + \frac{2GK\gamma^2 - s_2^2\gamma^2 + s_2^2}{\gamma^2 - 1}p^4 + \frac{GK\gamma^2(GK - 2s_1s_2)}{\gamma^2 - 1}p^2 - \frac{G^2K^2s_1^2\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \quad (90)$$

avec  $\gamma = 1/M_{md}$ , ne possède aucune racine située sur l'axe imaginaire.

**Amplification maximale du bruit**

$$|K| \leq M_{md}N_{max} \quad (91)$$

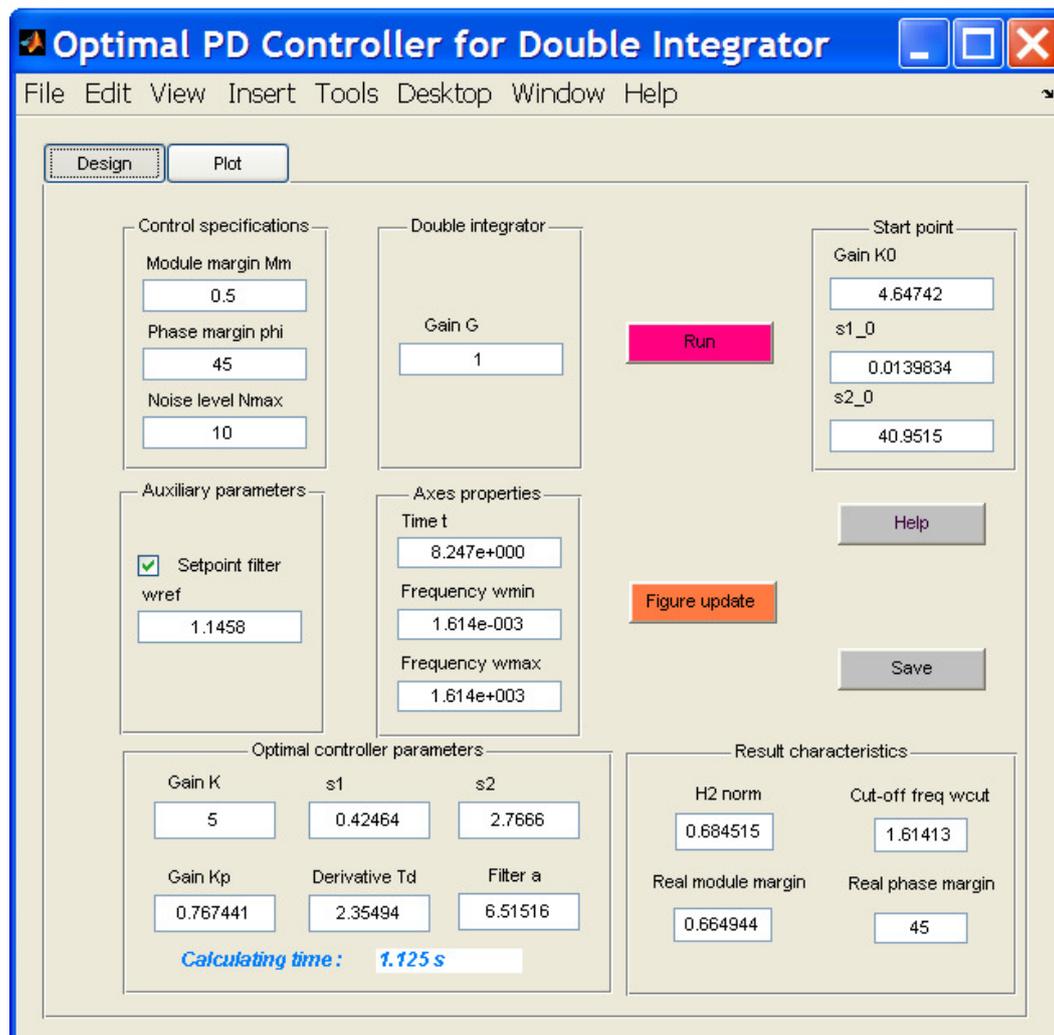


FIGURE 1 – Interface graphique du logiciel d'aide à la synthèse d'un correcteur PD optimal pour système double intégrateur

## C.2 Logiciel associé

Nous avons développé un logiciel d'aide à la synthèse du correcteur PD optimal pour système double intégrateur. La figure 1 représente l'interface du logiciel. Le correcteur optimal PD est obtenu en deux étapes :

- Définition du gain  $G$  du système double intégrateur
- Définition du cahier des charges

Puis en appuyant sur le bouton **Run**, le logiciel calcule et présente le résultat. Le bouton **Save** permet de sauvegarder les résultats dans un fichier.

Le logiciel présente aussi les paramètres de la forme usuelle du correcteur PD :

$$PD(s) = \frac{K_p(1 + T_d s)}{1 + \frac{T_d}{a}s} \quad (92)$$

Les relations entre (85) et (92) sont données par :

$$\begin{cases} K_p &= \frac{K s_1}{s_2} \\ T_d &= \frac{1}{s_1} \\ a &= \frac{s_2}{s_1} \end{cases} \quad (93)$$

$$\begin{cases} K &= a K_p \\ s_1 &= \frac{1}{T_d} \\ s_2 &= \frac{a}{T_d} \end{cases} \quad (94)$$

L'onglet **Plot** du logiciel représente les graphiques permettant de visualiser les résultats (confer la figure 2).

## D Extension pour les systèmes en temps discrets

De nos jours, les systèmes de commande sont quasi exclusivement implantés sur des systèmes numériques de commande pour des raisons évidentes de coût, de compacité et de souplesse d'utilisation. Dans l'optique numérique, les méthodes de synthèse du correcteur peuvent se diviser en deux grandes familles :

- *Synthèse par les méthodes du temps continu et méthodes de numérisation.* Généralement, lorsque la fréquence d'échantillonnage du système est au moins dix fois supérieure à la bande passante du système bouclé en temps continu, il est alors acceptable de synthétiser le correcteur en temps continu puis de le numériser.
- *Synthèse directe du correcteur en temps discret.* L'intérêt est que les aspects numériques (e.g. période d'échantillonnage, etc.) peuvent être considérés directement lors de la synthèse du correcteur. De plus, le correcteur obtenu en temps discret est prêt à être implanté.

Par contre, l'inconvénient est que le calcul est plus compliqué qu'en temps continu.

La méthode de synthèse de correcteurs abordée dans le chapitre 2 est développée en premier temps pour les systèmes à temps continu. Dans cette section la méthode proposée sera étendue aux systèmes en temps discret.

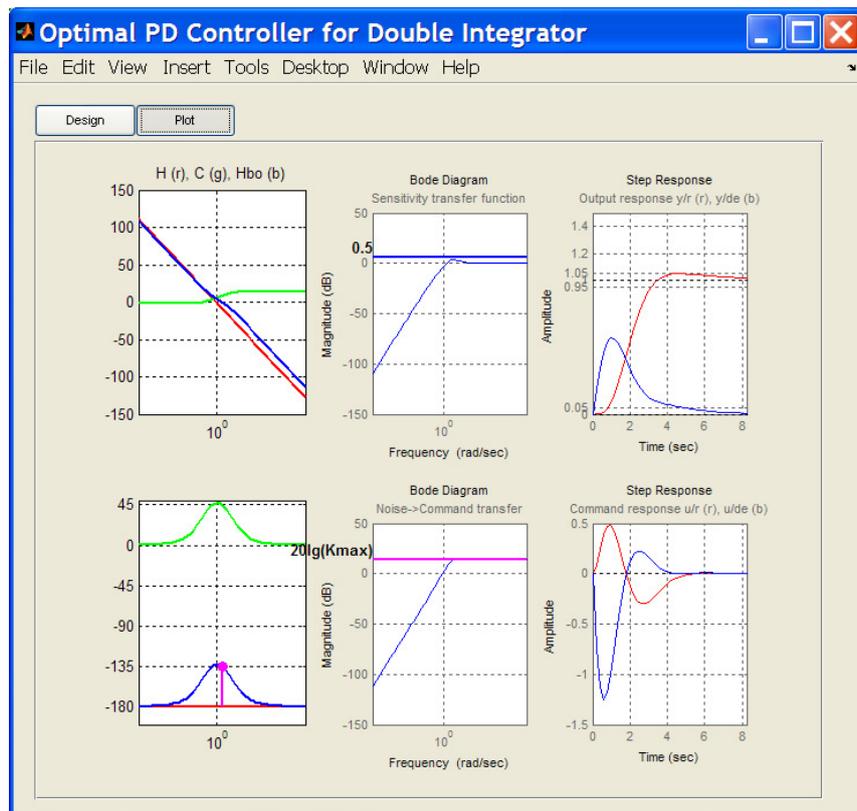


FIGURE 2 – Logiciel d’aide à la synthèse d’un correcteur PD optimal pour le système double intégrateur : visualisation de courbes

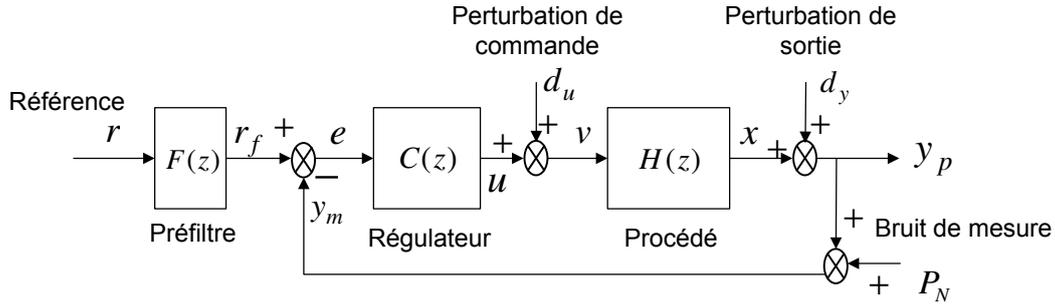


FIGURE 3 – Schéma de la boucle fermée en temps discret

Considérons le schéma bouclé en temps discret représenté dans la figure 3, où  $H(z)$  est le système à contrôler,  $C(z)$  est le correcteur de feedback à déterminer,  $F(z)$  est le préfiltre de feedforward.

Pour le cas discret, nous traitons le problème de synthèse suivant :

**Problème de synthèse :** Déterminer un correcteur numérique stabilisant qui optimise le rejet d'un échelon de la perturbation de commande, tout en respectant les contraintes de robustesse, telles que la marge de phase et l'amplification du bruit de mesure sur la commande. Ce problème est formulé en un problème d'optimisation sous contraintes :

$$\arg \min_{X \in \Omega^{n_c}} \|H_{y_p d_u - s}(X)\|_2 \quad (95)$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} \text{i) Stabilité en boucle fermée} \\ \text{ii) } \|H_{u P_N}\|_{\infty} |_{\omega \geq \omega_N} \leq N_{max} \\ \text{iii) } \pi + \arg H(j\omega_{gc}) + \arg C(j\omega_{gc}) \geq \varphi_d \\ \text{avec } |H(j\omega_{gc})| \cdot |C(j\omega_{gc})| = 1 \end{cases} \quad (96)$$

où  $X$  est le vecteur de paramètres inconnus du correcteur à déterminer,  $n_c$  est le nombre de paramètres du correcteur,  $\Omega$  est le domaine des paramètres du correcteur,  $\|H_{y_p d_u - s}(X)\|_2$  est la norme  $H_2$  de la fonction de transfert entre un échelon de la perturbation de commande  $d_u$  et la sortie  $y_p$ ,  $H_{u P_N}$  est le transfert entre le bruit de mesure  $P_N$  et la commande  $u$ ,  $\omega_N$  est la fréquence à partir de laquelle l'effet du bruit est considéré,  $\varphi_d$  est la marge de phase désirée, et  $N_{max}$  est l'amplification maximum du bruit sur la commande.

## D.1 Système du 1<sup>er</sup> ordre contrôlé par un correcteur PI numérique

Le problème d'optimisation (95)-(96) est maintenant déployé en prenant en compte le modèle du processus et le correcteur choisi. Le processus du premier ordre est décrit par :

$$H(z) = \frac{G}{z - z_0} \quad (97)$$

où  $z_0$  est le pôle,  $G/(1 - z_0)$  est le gain statique. Si  $|z_0| < 1$ , le système est stable en boucle ouverte, si  $|z_0| > 1$  le système est instable en boucle ouvert, et si  $z_0 = 1$ , le système est un intégrateur.

Le correcteur proportionnel intégral en temps discret s'écrit :

$$C(z) = K \frac{z - z_c}{z - 1} \quad (98)$$

Nous choisissons un correcteur à minimum de phase (i.e. un correcteur avec un zéro à l'intérieur du cercle unité) parce que des zéros non-minimum de phase, (i.e. zéros en dehors du cercle unité) réduisent la marge de phase. Ainsi  $|z_c| < 1$ .

**Fonction objectif** Le transfert entre la perturbation de commande de type échelon et la sortie s'écrit :

$$H_{y_p d_{u-s}}(z) = \frac{GT_e}{z^2 + (1 + a)z - b} \quad (99)$$

avec  $a = GK - z_0 - 2$  et  $b = GKz_c - z_0$ .

La représentation d'état s'écrit :

$$\begin{cases} x(k+1) = A_d x(k) + B_d d_u(k) \\ y_p(k) = C_d x(k) + D_d d_u(k) \end{cases} \quad (100)$$

avec

$$\begin{aligned} A_d &= \begin{bmatrix} -a - 1 & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix} & B_d &= \begin{bmatrix} 0 \\ GT_e \end{bmatrix} \\ C_d &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & D_d &= 0 \end{aligned}$$

La norme  $H_2$  est donnée par :

$$\|H\|_2 = \sqrt{\text{trace}(CWC^T + DD^T)} \quad (101)$$

où  $W$  est le gramien de commandabilité en temps discret, solution de l'équation Lyapunov en temps discret :

$$AWA^T - W + BB^T = 0 \quad (102)$$

La fonction objectif s'écrit :

$$\|H_{y_p d_{u-s}}\|_2 = |G|T_e \sqrt{\frac{1 - b}{(1 + b)(a + b)(b - a - 2)}} \quad (103)$$

**Stabilité interne** La fonction de sensibilité s'écrit :

$$S(z) = \frac{1}{1+HC} = \frac{(z-z_0)(z-1)}{z^2+(1+a)z-b} \quad (104)$$

Le tableau de Jury s'écrit :

$N^\circ$ de ligne				
1	1	$1+a$	$-b$	
2	$-b$	$1+a$	1	
3	$1-b^2$	$(1+a)(1+b)$		
4	$(1+a)(1+b)$	$1-b^2$		
5	$\frac{(1+b)(a+b)(b-a-2)}{1-b}$			

Les conditions de stabilité s'écrivent :

$$\begin{cases} 1-b^2 > 0 \\ \frac{(1+b)(a+b)(b-a-2)}{1-b} > 0 \end{cases}$$

équivalentes à

$$\begin{cases} -1 < b < 1 \\ a+b < 0 \\ b-a-2 < 0 \end{cases} \quad (105)$$

#### Remarque D.1

Avec la troisième condition de Eq. (105), on a :

$$\begin{cases} z_c < 1, & GK > 0 \\ z_c > 1, & GK < 0 \end{cases}$$

◆

#### Contrainte de marge de phase

$$\varphi_d - \arctan \frac{\sin T_e \omega_{gc}}{\cos T_e \omega_{gc} - z_c} - k_c \pi + \arctan \frac{\sin T_e \omega_{gc}}{\cos T_e \omega_{gc} - z_0} + k_0 \pi + \arctan \frac{\sin T_e \omega_{gc}}{\cos T_e \omega_{gc} - 1} + k_1 \pi \leq 0 \quad (106)$$

avec

$$\begin{cases} k_c = 0, & \cos T_e \omega_{gc} - z_c > 0 \\ k_c = 1, & \cos T_e \omega_{gc} - z_c < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_0 = 0, & \cos T_e \omega_{gc} - z_0 > 0 \\ k_0 = 1, & \cos T_e \omega_{gc} - z_0 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = 0, & \cos T_e \omega_{gc} - 1 > 0 \\ k_1 = 1, & \cos T_e \omega_{gc} - 1 < 0 \end{cases}$$

**Amplification maximale du bruit**

$$|K| < N_{max} M_{md} \quad (107)$$

**D.2 Système du 2<sup>nd</sup> ordre contrôlé par un correcteur PI numérique**

Maintenant, nous considérons un système du second ordre en temps discret :

$$H(z) = \frac{G(z - n_1)}{(z - z_1)(z - z_2)} \quad (108)$$

Nous utilisons le correcteur PI numérique de (98). Avec la même démarche que la section précédente, nous obtenons les expressions de la fonction objectif et des contraintes comme suit :

**Fonction objectif** La norme  $H_2$  du transfert entre la perturbation de commande de type échelon et la sortie s'écrit :

$$\|H_{y_p d_{u-s}}\|_2 = |G|T_e \sqrt{\frac{(1 + n_1^2)(a_1 + 1 - a_0 a_2 - a_0^2) + 2n_1(a_2 - a_0 a_1)}{(a_0 + a_1 + a_2 + 1)(a_0 + a_2 - a_1 - 1)(a_0^2 - a_0 a_2 - 1 + a_1)}} \quad (109)$$

avec  $a_0 = GK n_1 z_c - z_1 z_2$ ,  $a_1 = z_1 z_2 + z_1 + z_2 - GK(n_1 + z_c)$ ,  $a_2 = GK - z_1 - z_2 - 1$ .

**Stabilité interne** Les conditions de stabilité s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3+a_2-a_1-3a_0}{a_0+a_1+a_2+1} > 0 \\ \frac{3-a_2-a_1+3a_0}{a_0+a_1+a_2+1} > \frac{1-a_2+a_1-a_0}{3+a_2-a_1-3a_0} \\ \frac{1-a_2+a_1-a_0}{a_0+a_1+a_2+1} < 0 \end{array} \right. \quad (110)$$

**Contrainte de marge de phase**

$$\begin{aligned} \varphi_d - \arctan \frac{\sin T_e \omega_{gc}}{\cos T_e \omega_{gc} - z_c} - k_c \pi - \arctan \frac{\sin T_e \omega_{gc}}{\cos T_e \omega_{gc} - n_1} - k_n \pi + \arctan \frac{\sin T_e \omega_{gc}}{\cos T_e \omega_{gc} - z_1} + k_1 \pi \\ + \arctan \frac{\sin T_e \omega_{gc}}{\cos T_e \omega_{gc} - z_2} + k_2 \pi + \arctan \frac{\sin T_e \omega_{gc}}{\cos T_e \omega_{gc} - 1} \leq 0 \end{aligned}$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} k_c = 0, \quad \cos T_e \omega_{gc} - z_c > 0 \\ k_c = 1, \quad \cos T_e \omega_{gc} - z_c < 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = 0, \quad \cos T_e \omega_{gc} - z_1 > 0 \\ k_1 = 1, \quad \cos T_e \omega_{gc} - z_1 < 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_2 = 0, \quad \cos T_e \omega_{gc} - z_2 > 0 \\ k_2 = 1, \quad \cos T_e \omega_{gc} - z_2 < 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_n = 0, \quad \cos T_e \omega_{gc} - n_1 > 0 \\ k_n = 1, \quad \cos T_e \omega_{gc} - n_1 < 0 \end{array} \right.$$

### Amplification maximale du bruit

$$|K| \leq M_{md} N_{max} \quad (111)$$

### D.3 Système du 1<sup>er</sup> ordre contrôlé par un correcteur PID numérique

Dans cette section le système du premier ordre (97) est contrôlé par un correcteur PID numérique avec la structure suivante :

$$C(z) = K \frac{z^2 + az + b}{(z-1)(z-z_c)} \quad (112)$$

Nous utilisons un correcteur stable et à minimum de phase. Ainsi :

$$\begin{cases} |z_c| < 1 \\ \frac{2(1-b)}{1+a+b} > 0 \\ \frac{1-a+b}{1+a+b} > 0 \end{cases} \quad (113)$$

Avec la même démarche que la section précédente, nous obtenons les expressions de la fonction objectif et des contraintes comme suit :

#### Fonction objectif

$$\|H_{ypd_{u-s}}\|_2 = |G|T_e \sqrt{\frac{(1+z_c^2)(a_1+1-a_0a_2-a_0^2) + 2z_c(a_2-a_0a_1)}{(a_0+a_1+a_2+1)(a_0+a_2-a_1-1)(a_0^2-a_0a_2-1+a_1)}} \quad (114)$$

avec  $a_0 = GKb - z_0z_c$ ,  $a_1 = GKa + z_0z_c + z_0 + z_c$ ,  $a_2 = GK - z_0 - z_c - 1$ .

#### Stabilité interne

$$\begin{cases} \frac{3+a_2-a_1-3a_0}{a_0+a_1+a_2+1} > 0 \\ \frac{3-a_2-a_1+3a_0}{a_0+a_1+a_2+1} > \frac{1-a_2+a_1-a_0}{3+a_2-a_1-3a_0} \\ \frac{1-a_2+a_1-a_0}{a_0+a_1+a_2+1} < 0 \end{cases} \quad (115)$$

#### Contrainte de marge de phase

$$\begin{aligned} \varphi_d - \arctan \frac{a \sin T_e \omega_{gc} + \sin 2T_e \omega_{gc}}{\cos 2T_e \omega_{gc} + a \cos T_e \omega_{gc} + b} - k\pi + \arctan \frac{\sin T_e \omega_{gc}}{\cos T_e \omega_{gc} - z_0} + k_0\pi \\ + \arctan \frac{\sin T_e \omega_{gc}}{\cos T_e \omega_{gc} - z_c} + k_c\pi + \arctan \frac{\sin T_e \omega_{gc}}{\cos T_e \omega_{gc} - 1} \leq 0 \end{aligned}$$

où :

$$\begin{cases} k = 0, & \cos 2T_e \omega_{gc} + a \cos T_e \omega_{gc} + b > 0 \\ k = 1, & \cos 2T_e \omega_{gc} + a \cos T_e \omega_{gc} + b < 0 \\ \begin{cases} k_0 = 0, & \cos T_e \omega_{gc} - z_0 > 0 \\ k_0 = 1, & \cos T_e \omega_{gc} - z_0 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} k_c = 0, & \cos T_e \omega_{gc} - z_c > 0 \\ k_c = 1, & \cos T_e \omega_{gc} - z_c < 0 \end{cases} \end{cases}$$

### Amplification maximale du bruit

$$|K| \leq M_{md} N_{max} \quad (116)$$

## D.4 Système du 2<sup>nd</sup> ordre contrôlé par un correcteur PID numérique

Dans cette section le système du second ordre (108) est contrôlé par un correcteur PID numérique (112). Avec la même démarche que la section précédente, nous obtenons les expressions de la fonction objectif et des contraintes comme suit :

### Fonction objectif

$$\begin{aligned} \|H_{y_p d_{u-s}}\|_2^2 = & (GT_e)^2 (-1 + b_3^2 a_3^2 a_0^3 + b_3^2 a_0^2 a_2 - b_4^2 a_0 a_3^2 + b_4^2 a_1 a_3 + b_4^2 a_0^2 a_2 + b_3^2 a_3 a_1 + \dots \\ & 4a_2 a_0 a_3^2 - a_2^2 a_1 a_3 + b_3^2 a_3^2 a_1^2 - b_3^2 a_2 a_3^2 + 2b_3 a_1^2 a_3 - 2b_3 a_1 a_2^2 - 2b_3 a_1 a_2 + \dots \\ & -2b_3 a_0 a_1 - 2b_3 a_0^2 a_1 + 2b_3 a_0^2 a_3 + 2b_3 a_0^3 a_3 + 2b_4 a_1^2 a_2 - 2b_4 a_1 a_3 - 2b_4 a_2^2 a_0 + \dots \\ & 2b_4 a_0 a_3^2 + 2b_4 a_1^2 a_0 - 2b_4 a_0 a_2 + 2b_4 a_2^2 a_0^2 + 2b_4 a_0^3 a_2 + b_3^2 a_3^3 a_1 + b_4^2 a_1^2 + \dots \\ & -2a_0^2 a_3 a_1 + 2b_3^2 a_2 a_0 a_3^2 - b_4^2 a_0 a_3 a_1 - a_0 - a_2 - 2b_3^2 a_0^2 a_3 a_1 + 2a_1^2 a_0 a_2 + \dots \\ & a_2^2 a_0 a_3^2 - b_4^2 a_0 - 2b_3^2 a_2 a_1 a_3 + b_3^2 a_0^2 - a_3^3 a_0 a_1 - 4a_2 a_1 a_3 - 3b_3^2 a_0 a_3 a_1 + \dots \\ & b_3^2 a_1^2 + 2b_3 a_0^2 a_3 a_2^2 - 2b_3 a_0^2 a_3^2 a_1 + 2b_3 a_0^2 a_3 a_2 + 2b_3 a_0^3 a_3 a_2 + \dots \\ & -2b_4 a_0^2 a_3 a_1 + 2b_3 a_0 a_3 a_2 - 2b_3 a_1 a_0^2 a_2 - 2b_3 b_4 a_2 a_3 + 2b_3 a_1^2 a_2 a_3 + \dots \\ & 2b_3 a_0 a_3 a_1^2 - 2b_3 a_0 a_3^2 a_1 - 2b_3 a_1 a_2 a_0 + b_4^2 a_0^3 + 2b_3 b_4 a_0^2 a_3 - 2b_3 b_4 a_0^2 a_1 + \dots \\ & -2b_3 b_4 a_0 a_1 - 2b_3 b_4 a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - b_3^2 - b_4^2 + 2b_3 b_4 a_0^3 a_3 + \dots \\ & 2b_3 b_4 a_1 a_3^2 + b_3^2 a_0^3 - 2b_3 b_4 a_0 a_3^3 + 2b_3 b_4 a_1^2 a_3 - 3a_0 a_3 a_1 + a_0^2 a_2 + \dots \\ & a_0^3 - b_4^2 a_2 - a_2^2 a_0 - a_2 a_3^2 - a_3^4 a_0 - a_2^2 a_0 a_3 a_1 - 2a_0^2 a_3 a_1 a_2 + a_3^2 a_0^2 a_2 + \dots \\ & a_3^2 a_1^2 + a_3^3 a_1 + a_2^2 a_0^3 + a_2^2 a_0^2 + a_2^3 + a_2^3 a_0^2 - a_2^2 a_0^2 + a_2^2 a_0^3 + \dots \\ & a_2^2 a_1^2 - 2a_2^3 a_0 - b_3^2 a_2 + b_3^2 a_3^2 + 2b_3 b_4 a_0^2 a_3 a_2 - 2b_3 b_4 a_0 a_3^2 a_1 + \dots \\ & -2b_3 a_1 a_2 a_0 a_3^2 + 2b_3 b_4 a_0 a_3 a_2 - 2b_4 a_0 a_3 a_1 a_2 + b_3^2 a_3^2 a_0^2 - b_3^2 a_0 + \dots \\ & b_4^2 a_0^2 + b_3^2 a_3^2 a_0^2 a_2 - b_3^2 a_3^4 a_0 - b_3^2 a_3^3 a_0 a_1) / \\ & (-a_0^3 + a_0^2 + a_0^2 a_2 - a_0 a_3 a_1 + a_0 a_3^2 + a_0 - 2a_0 a_2 + a_1 a_3 + a_1^2 + a_2 - 1) / \\ & (-a_2 + 1 - a_0 - a_1 - a_3) / (-a_2 - 1 - a_0 + a_1 + a_3) \end{aligned} \quad (117)$$

avec  $a_3 = GK - z_1 - z_2 - z_c - 1$ ,  $a_2 = GK(a - n_1) + (z_1 + z_2)(1 + z_c) + z_1 z_2 + z_c$ ,  
 $a_1 = GK(b - a n_1) - z_1 z_2 (1 + z_c) - (z_1 + z_2) z_c$ ,  $a_0 = z_1 z_2 z_c - GK b n_1$ ,  $b_3 = -(n_1 + z_c + a_3)$ ,  
 $b_4 = n_1 z_c + a_3 (n_1 + z_c + a_3) - a_2$ .

### Stabilité interne

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - a_0^2 > 0 \\ (1 - a_0^2)^2 - (a_1 - a_0 a_3)^2 > 0 \\ [(1 - a_0^2)^2 - (a_1 - a_0 a_3)^2]^2 > [(1 - a_0^2)(a_2 - a_0 a_2) - (a_1 - a_0 a_3)(a_3 - a_0 a_1)]^2 \\ [(1 - a_0^2)(a_3 - a_0 a_1) - (a_1 - a_0 a_3)(a_2 - a_0 a_2)]^2 < (1 - a_0^2)^2 \end{array} \right. \quad (118)$$

### Contrainte de marge de phase

$$\begin{aligned} \varphi_d - \arctan \frac{a \sin T_e \omega_{gc} + \sin 2T_e \omega_{gc}}{\cos 2T_e \omega_{gc} + a \cos T_e \omega_{gc} + b} - k\pi - \arctan \frac{\sin T_e \omega_{gc}}{\cos T_e \omega_{gc} - n_1} - k_n \pi + \dots \\ \arctan \frac{\sin T_e \omega_{gc}}{\cos T_e \omega_{gc} - z_1} + k_1 \pi + \arctan \frac{\sin T_e \omega_{gc}}{\cos T_e \omega_{gc} - z_2} + k_2 \pi + \dots \\ \arctan \frac{\sin T_e \omega_{gc}}{\cos T_e \omega_{gc} - z_c} + k_c \pi + \arctan \frac{\sin T_e \omega_{gc}}{\cos T_e \omega_{gc} - 1} \leq 0 \end{aligned}$$

où :

$$\begin{cases} k = 0, & \cos 2T_e \omega_{gc} + a \cos T_e \omega_{gc} + b > 0 \\ k = 1, & \cos 2T_e \omega_{gc} + a \cos T_e \omega_{gc} + b < 0 \end{cases}$$

$$i = 1, 2 \begin{cases} k_i = 0, & \cos T_e \omega_{gc} - z_i > 0 \\ k_i = 1, & \cos T_e \omega_{gc} - z_i < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_c = 0, & \cos T_e \omega_{gc} - z_c > 0 \\ k_c = 1, & \cos T_e \omega_{gc} - z_c < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_n = 0, & \cos T_e \omega_{gc} - n_1 > 0 \\ k_n = 1, & \cos T_e \omega_{gc} - n_1 < 0 \end{cases}$$

### Amplification maximale du bruit

$$|K| \leq M_{md} N_{max} \quad (119)$$

## D.5 Logiciel associé

Nous avons développé un logiciel d'aide à la synthèse du correcteur PI-PID optimal en temps discret. La figure 4 représente l'interface du logiciel. Ce logiciel considère les systèmes du premier ordre (97) et du second ordre (108) contrôlés par des correcteurs PI (98) et PID (112). Le correcteur optimal PI-PID numérique est obtenu en deux étapes :

- Définition des paramètres du système à contrôler
- Définition du cahier des charges

Puis en appuyant sur le bouton **Run**, le logiciel calcule et présente le résultat. Le bouton **Save** permet de sauvegarder les résultats dans un fichier.

Le logiciel présente aussi les paramètres de la forme usuelle du correcteur PI ou PID numérique :

$$PI(z) = K_p \left( 1 + \frac{K_i z}{z-1} \right) \quad (120)$$

$$PID(z) = K_p \left[ 1 + \frac{K_i z}{z-1} + K_d (1 - z_d) \frac{z-1}{z-z_d} \right] \quad (121)$$

Les relations entre (98) et (120) sont données par :

$$\begin{cases} K_p = K z_c \\ K_i = \frac{z_c - 1}{z_c} \end{cases} \quad (122)$$

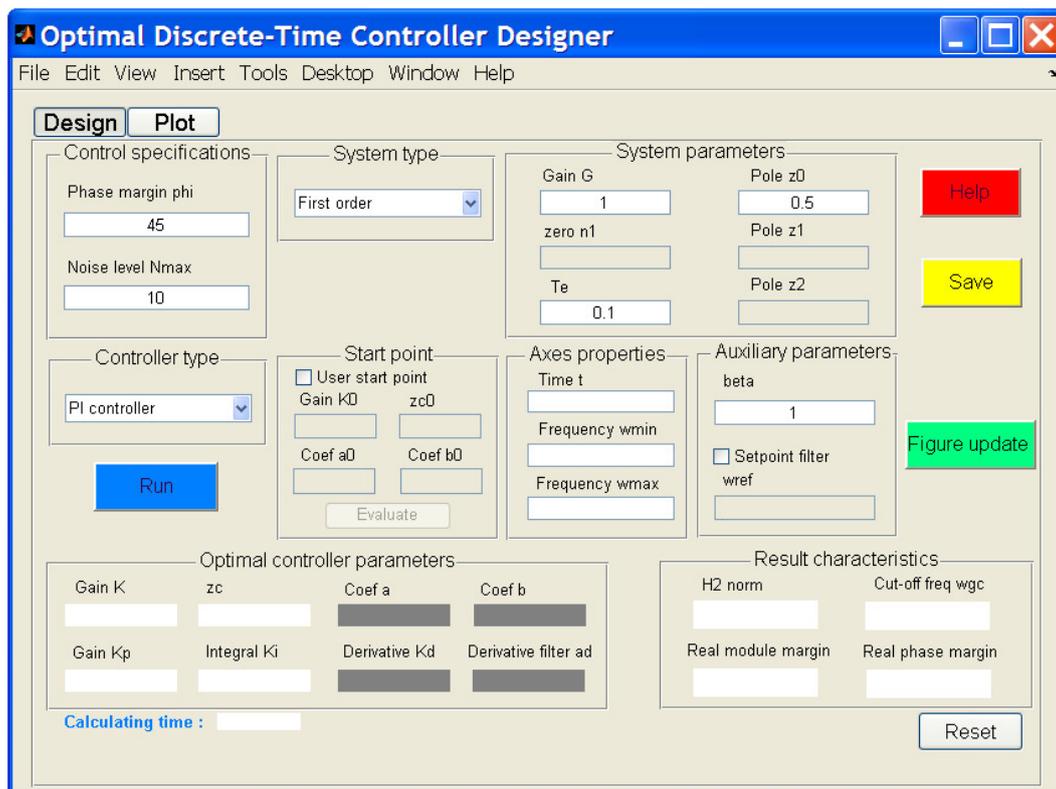


FIGURE 4 – Interface graphique du logiciel d'aide à la synthèse d'un correcteur PI-PID optimal en temps discret

$$\begin{cases} K &= K_p(1 + K_i) \\ z_c &= \frac{1}{1+K_i} \end{cases} \quad (123)$$

Les relations entre (112) et (121) sont données par :

$$\begin{cases} K &= K_p [1 + K_i + K_d(1 - z_d)] \\ a &= \frac{-1-z_d(1+K_i)+2K_d(1-z_d)}{1+K_i+K_d(1-z_d)} \\ b &= \frac{z_d+K_d(1-z_d)}{1+K_i+K_d(1-z_d)} \\ z_c &= z_d \end{cases} \quad (124)$$

où  $z_d = e^{\frac{-a_d}{K_d}}$

$$\begin{cases} K_d &= \frac{z_c^2 + az_c + b}{[z_c(b-1) - 2b - a](1-z_c)} \\ K_i &= \frac{z_c}{b} + \frac{1-b}{K} (1 - z_c) K_d - 1 \\ K_p &= \frac{K}{1+K_i+K_d(1-z_c)} \\ z_d &= z_c \\ a_d &= -K_d \ln(z_c) \end{cases} \quad (125)$$

L'onglet **Plot** du logiciel représente les graphiques permettant de visualiser les résultats (confer la figure 5). Le pré-filtre  $F(z)$  est obtenu via la transformation en  $Z$  du filtre de second ordre.

$$F(z) = Z\left(\frac{1}{\frac{s^2}{\omega_{ref}} + \frac{2s}{\omega_{ref}} + 1}\right) \quad (126)$$

## E Preuves

### E.1 Preuve du lemme 3.3.1

La marge de phase du système d'ordre complet est :  $M_p = \pi + \arg H(j\omega_{gc}) + \arg C(j\omega_{gc})$  avec  $|H(j\omega_{gc})||C(j\omega_{gc})| = 1$ .

$$M_p \geq \varphi_d \Rightarrow \arg H(j\omega_{gc}) + \arg C(j\omega_{gc}) \geq -\pi + \varphi_d$$

il vient  $\arg H(j\omega_{gc}) \geq -\pi + \varphi_d - \varphi_{max}$ . De (3.10)  $\partial \arg H(j\omega)/\partial \omega \leq 0$ , nous obtenons :  $\omega_{gc} \leq \omega_{max}$ .

### E.2 Preuve de la proposition 1

La marge de phase du système d'ordre réduit est donnée par :

$$P_{mr} = \pi + \arg L_r(j\omega_{gcr}), \text{ with } |L_r(j\omega_{gcr})| = 1$$

La marge de phase du système d'ordre complet est donnée par :

$$P_m = \pi + \arg L(j\omega_{gc}), \text{ with } |L(j\omega_{gc})| = 1$$

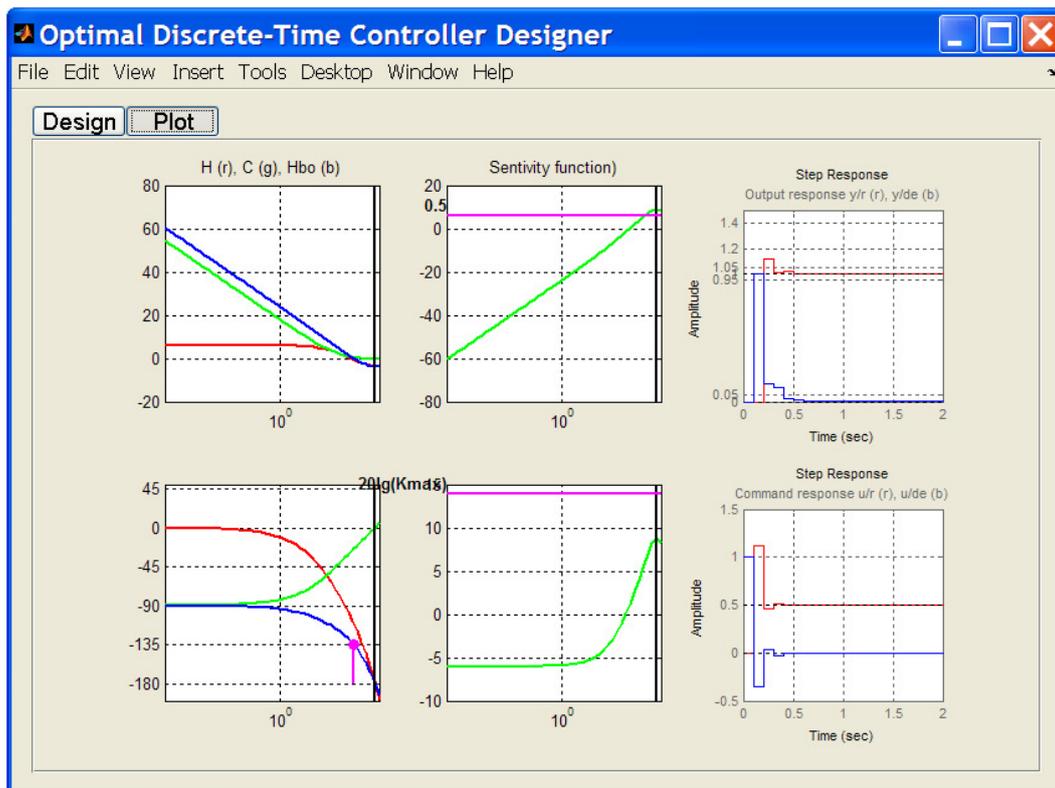


FIGURE 5 – Logiciel d'aide à la synthèse d'un correcteur PI-PID optimal en temps discret : visualisation des courbes

D'abord nous allons démontrer que  $\omega_{gc} \leq \omega_{gcr}$ . Pour cela, supposons que  $\omega_{gc} > \omega_{gcr}$ , parce que  $\omega_{gc}$  et  $\omega_{gcr}$  sont inférieures à  $\omega_{max}$  (voir lemme 3.3.1), nous utilisons C1 de (3.13) pour déduire :

$$|L_r(j\omega_{gc})| < |L_r(j\omega_{gcr})| \quad (127)$$

De C1 dans (3.12), il vient :

$$|L_r(j\omega)| \geq |L(j\omega)|, \forall \omega \in [0; \omega_{max}] \quad (128)$$

De (127) et (128), nous obtenons :  $1 = |L(j\omega_{gc})| < |L_r(j\omega_{gcr})| = 1$ . Ceci est contradictoire. Ainsi, nous avons :

$$\omega_{gc} \leq \omega_{gcr} \quad (129)$$

De C2 dans (3.12), il vient :

$$\arg L_r(j\omega) \leq \arg L(j\omega), \forall \omega \in [0, \omega_{max}] \quad (130)$$

De C2 dans (3.13) et (129), nous avons  $\arg L_r(j\omega_{gcr}) \leq \arg L_r(j\omega_{gc})$ , en outre de (130) nous obtenons  $\arg L_r(j\omega_{gc}) \leq \arg L(j\omega_{gc})$ . Enfin, il vient  $\arg L_r(j\omega_{gcr}) \leq \arg L(j\omega_{gc})$ , i.e.  $P_m \geq P_{mr} \geq \varphi_d$ .

### E.3 Preuve de la proposition 2

Nous commencerons par démontrer que les diagrammes de Nyquist de  $L(j\omega)$  et  $L_r(j\omega)$  ne peuvent pas se croiser sur la plage de fréquence  $[0; +\infty)$ . En effet, si les diagrammes de Nyquist de  $L(j\omega)$  et  $L_r(j\omega)$  peuvent se croiser :

$$\exists \omega_1, \omega_2 \in [0; +\infty) : \begin{cases} |L_r(j\omega_1)| = |L(j\omega_2)| \\ \arg L_r(j\omega_1) = \arg L(j\omega_2) \end{cases} \quad (131)$$

D'abord, de (128) et C1 dans (3.15), la première équation de (131) implique que :  $\omega_2 < \omega_1$ . Puis, de (130) et C2 dans (3.15), la deuxième équation de (131) implique que :  $\omega_2 > \omega_1$ . Ceci est contradictoire. Donc les diagrammes de Nyquist de  $L(j\omega)$  et  $L_r(j\omega)$  ne peuvent pas se croiser.

De C2 dans (3.15), et le fait que les diagrammes de Nyquist de  $L(j\omega)$  et  $L_r(j\omega)$  ne peuvent pas se croiser, il vient que le diagramme de Nyquist de  $L(j\omega)$  reste à droite celui de  $L_r(j\omega)$  par rapport au point  $(-1, 0)$  comme illustré dans la figure 6. Alors,  $M_m \geq M_{mr} \geq M_{md}$ .

### E.4 Preuve du lemme 3.4.1

Considérons le schéma de la figure 2.1, la fonction de transfert entre le bruit de mesure et la commande est donnée par :

$$\frac{U}{P_N} = \frac{-C(s)}{1 + H(s)C(s)} \quad (132)$$

Le correcteur  $C(s)$  est synthétisé tel que la marge de module soit satisfaite, il vient :

$$\left\| \frac{1}{1 + H(s)C(s)} \right\|_{\infty} = \frac{1}{M_m} \leq \frac{1}{M_{md}} \quad (133)$$

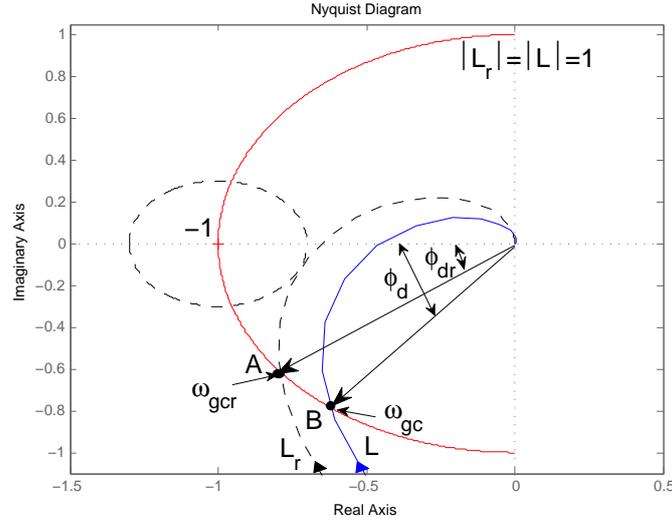


FIGURE 6 – Garantie de la marge de module obtenue pour le système d'ordre complet

De (132) et (133), il vient :

$$\frac{\|U_N\|_{2,\omega \geq \omega_N}}{\|P_N\|_{2,\omega \geq \omega_N}} \leq \frac{\|C(s)\|_{\infty,\omega \geq \omega_N}}{M_{md}} \quad (134)$$

Par ailleurs, de (3.42), (3.43), (3.48) et (3.38) nous déduisons :

$$\frac{\|U_N\|_{2,\omega \geq \omega_N}^{max}}{\|P_N\|_{2,\omega \geq \omega_N}} = \frac{\beta_{u_0}}{\beta_y} \frac{1}{G_0} \quad (135)$$

Ainsi, si  $\|C(s)\|_{\infty,\omega \geq \omega_N} \leq M_{md} \frac{\beta_{u_0}}{\beta_y} \frac{1}{G_0}$ , de (134), nous obtenons :

$$\frac{\|U_N\|_{2,\omega \geq \omega_N}}{\|P_N\|_{2,\omega \geq \omega_N}} \leq \frac{\beta_{u_0}}{\beta_y} \frac{1}{G_0} \quad (136)$$

Enfin, de (135) et (136), il vient :  $\|U_N\|_{2,\omega \geq \omega_N} \leq \|U_N\|_{2,\omega \geq \omega_N}^{max}$ .

### E.5 Preuve de la proposition 3

Tout d'abord, nous allons démontrer que si  $|H(j\omega)C(j\omega)|_{\omega \geq \omega_1} \leq 1 - M_{md}$  alors  $M_m|_{\omega \geq \omega_1} \geq M_{md}$ . Pour démontrer cela, traçons dans le plan de Nyquist, un cercle de rayons  $M_{md}$  centré en  $(-1, j0)$ , et un autre cercle de rayon  $1 - M_{md}$  à l'origine. Ainsi, si  $|H(j\omega)C(j\omega)|_{\omega \geq \omega_1} \leq 1 - M_{md}$ , ceci implique que la courbe image de  $H(j\omega)C(j\omega)$  reste dans le second cercle qui ne coupe pas le cercle lié à la marge de module, alors  $M_m|_{\omega \geq \omega_1} \geq M_{md}$ .

Prenons dans le lemme 3.4.1 avec  $\omega_N = \omega_1$ , il vient alors :

$$\|C(j\omega)\|_{\infty,\omega \geq \omega_1} \leq M_{md} \frac{\beta_{u_0}}{\beta_y} \frac{1}{G_0} \quad (137)$$

De (3.49) et (137), il vient :

$$\|H(j\omega)\|_{\infty, \omega \geq \omega_1} \cdot \|C(j\omega)\|_{\infty, \omega \geq \omega_1} \leq M_{md} \frac{\beta_{u_0} \omega_0}{\beta_y \omega_1} \quad (138)$$

Rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|H(j\omega)C(j\omega)\|_{\infty, \omega \geq \omega_1} \leq \|H(j\omega)\|_{\infty, \omega \geq \omega_1} \cdot \|C(j\omega)\|_{\infty, \omega \geq \omega_1} \quad (139)$$

De (138) et (139), il vient :

$$\|H(j\omega)C(j\omega)\|_{\infty, \omega \geq \omega_1} \leq M_{md} \frac{\beta_{u_0} \omega_0}{\beta_y \omega_1} \quad (140)$$

Si  $\omega_1 \geq \frac{\beta_{u_0}}{\beta_y} \frac{M_{md}}{1-M_{md}} \omega_0$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{\beta_{u_0} \omega_0}{\beta_y \omega_1} \leq \frac{1}{M_{md}}$$

$$\Leftrightarrow M_{md} \frac{\beta_{u_0} \omega_0}{\beta_y \omega_1} \leq 1 - M_{md} \quad (141)$$

De (140) et (141) nous obtenons :  $\|H(j\omega)C(j\omega)\|_{\infty, \omega \geq \omega_1} \leq 1 - M_{md}$ , et donc comme montré précédemment, il vient  $M_m|_{\omega \geq \omega_1} \geq M_{md}$ . Enfin, nous avons :  $M_m = \min_{\omega \geq 0} |1 + H(j\omega)C(j\omega)| \geq M_{md}$ .

## E.6 Preuve du théorème 2

Avec la même démarche de la démonstration de la proposition 2, il vient :  $M_m|_{\omega \leq \omega_1} \geq M_{mr}|_{\omega \leq \omega_1} \geq M_{md}$ . Puis en appliquant la proposition 3, nous obtenons :  $M_m|_{\omega \geq 0} \geq M_{md}$ .

## E.7 Preuve de la proposition 4

La démonstration suit la même démarche que celle de la proposition 1.

# F Logiciel d'aide à la synthèse optimale globale par la synthèse convexe

Ce logiciel reprend les travaux présentés dans [5], [99].

**Intérêt** : Le correcteur optimal trouvé est une solution globale.

**Inconvénient** : Le correcteur obtenu a un degré qui n'est pas fixé a priori et qui pourra s'avérer être bien supérieur à celui du système à contrôler. Une phase de réduction de la taille du correcteur devra être envisagée.

**Difficulté** : La paramétrisation de Youla-Kucera et la traduction des spécifications en des conditions LMIs mènent à un problème d'optimisation qui est très sensible numériquement (à cause du rajout de plusieurs variables auxiliaires provenant des conditions LMIs).

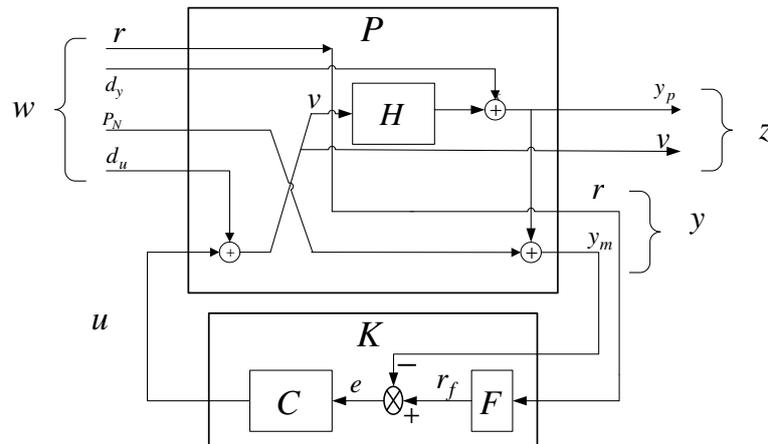


FIGURE 7 – Schéma standard de la boucle fermée

## F.1 Principe de la synthèse convexe

### Forme standard du problème de synthèse

Pour appliquer la synthèse convexe, tout d'abord, le schéma classique de la boucle fermée de la figure 4.2 doit être mis sous forme standard représentée dans la figure 7, où  $w$  représente les entrées externes,  $z$  comporte les variables à réguler,  $y$  sont les signaux disponibles à la mesure, et  $u$  est la sortie du correcteur. Dans notre cas :

$$w = [r \quad d_u \quad d_y \quad P_N]^T \quad z = [y_p \quad u]^T \quad y = [r \quad y_m]^T$$

Le système  $P$  est partitionné comme suit :

$$P = \begin{bmatrix} P_{zw}(s) & P_{zu}(s) \\ P_{yw}(s) & P_{yu}(s) \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_w & B_u \\ \hline C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y & D_{yw} & D_{yu} \end{array} \right] \quad (142)$$

$P$  relie les sorties et les entrées comme suit :

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{zw}(s) & P_{zu}(s) \\ P_{yw}(s) & P_{yu}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (143)$$

La représentation d'état est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_w w + B_u u \\ z = C_z x + D_{zw} w + D_{zu} u \\ y = C_y x + D_{yw} w + D_{yu} u \end{cases} \quad (144)$$

#### Remarque F.1

Il est important de noter qu'un correcteur  $K(s)$  stabilise  $P$  si et seulement si  $K(s)$  stabilise

|  $P_{yu}$  [67] car  $P$  et  $P_{yu}$  partagent la même matrice dynamique  $A$ .

La matrice de transfert en boucle fermée entre les entrées externes et les sorties à réguler est donnée par la Transformation Fractionnaire Linéaire inférieure ( $LFT_l$ , "lower Linear Fractional Transformation") entre  $P$  et  $K$  :

$$H_{zw} = LFT_l(P, K) = P_{zw} + P_{zu}K(I - P_{yu}K)^{-1}P_{yw} \quad (145)$$

Dans notre cas :

$$P_{zw} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & H \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (146)$$

$$P_{zu} = \begin{bmatrix} H \\ 1 \end{bmatrix} \quad (147)$$

$$P_{yw} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & H \end{bmatrix} \quad (148)$$

$$P_{yu} = \begin{bmatrix} 0 \\ H \end{bmatrix} \quad (149)$$

Le correcteur  $K(s)$  est donné par :

$$K = \begin{bmatrix} FC & -C \\ (r) & (y_m) \end{bmatrix} \quad (u) \quad (150)$$

Avec les équations (146)-(150), (145) devient :

$$H_{zw} = \begin{bmatrix} FHCS & S & -HCS & HS \\ FCS & -CS & -CS & S \end{bmatrix} \begin{matrix} (y_p) \\ (v) \end{matrix} \quad (151)$$

$$\begin{matrix} (r) & (d_y) & (P_N) & (d_u) \end{matrix}$$

où la fonction de sensibilité est définie comme suit :

$$S \triangleq \frac{1}{1 + HC} \quad (152)$$

La synthèse convexe consiste à définir un problème d'optimisation convexe où la fonction objectif et les contraintes seront formulées par des fonctions LMI qui sont convexes vis-à-vis du paramètre de Youla-Kucera. La procédure de la paramétrisation de Youla-Kucera sera présentée dans le paragraphe suivant.

### Paramétrisation de Youla-Kucera

La paramétrisation de Youla-Kucera [5] donne un ensemble convexe  $\mathcal{H}$ , en termes du paramètre de Youla-Kucera  $Q(s)$ , matrice de transfert stable. La figure 8 récapitule la procédure pour obtenir la paramétrisation de Youla-Kucera.

- Tout d'abord, un contrôleur nominal  $K_{nom}$  stabilisant le système initial  $P(s)$  est déterminé.

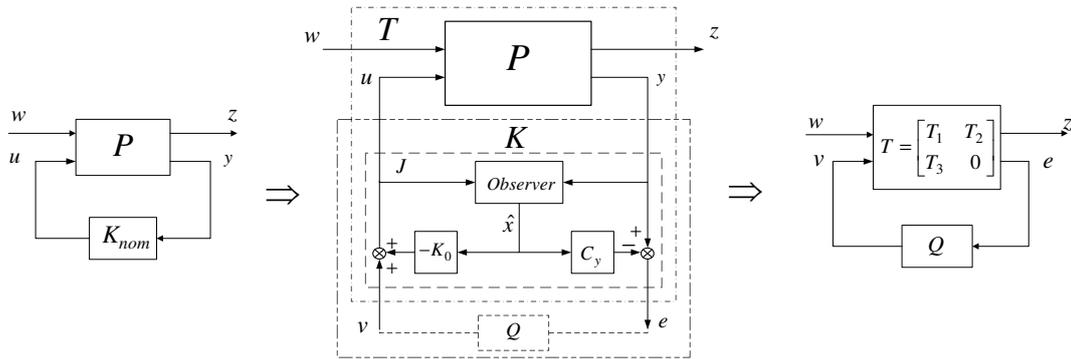


FIGURE 8 – Paramétrisation de Youla-Kucera

- Puis le correcteur nominal  $K_{nom}$  est augmenté de telle sorte qu'il produit une sortie auxiliaire  $e$  (de la même dimension que  $y$ ) et qu'il accepte une entrée auxiliaire  $v$  (de la même dimension que  $u$ ). Cette augmentation est réalisée dans le respect que le transfert en boucle fermée entre  $v$  et  $e$  soit égal à zéro. Le correcteur augmenté est nommé  $J(s)$  :

$$\begin{bmatrix} u \\ e \end{bmatrix} = J(s) \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} \quad (153)$$

Maintenant, le système en boucle fermée  $T$  peut être déterminé. En fait,  $T$  est l'interconnexion de  $P$  et  $J$  en éliminant  $u$  et  $y$  :

$$T = LFT_l(P, J) \quad (154)$$

$$\begin{bmatrix} z \\ e \end{bmatrix} = T(s) \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} \quad (155)$$

- Enfin,  $v$  et  $e$  sont reliés par une matrice de transfert stable  $Q$  de dimension  $n_u \times n_y$  :

$$v = Qe \quad (156)$$

$Q$ , nommé paramètre de Youla-Kucera, est le paramètre de synthèse. Tous les contrôleurs  $K$  stabilisant  $P$  peuvent être générés à partir du correcteur nominal  $K_{nom}$  et du paramètre  $Q$  :

$$\mathcal{K} = \{K(s) = LFT_l(J, Q) \mid Q \text{ stable}\} \quad (157)$$

De plus, l'ensemble convexe de matrices de transfert stables en boucle fermée  $H_{zw}$  est donné par :

$$\mathcal{H} = \{H_{zw} = LFT_l(T, Q) = T_1 + T_2QT_3 \mid Q \text{ stable}\} \quad (158)$$

où  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  sont des matrices de transfert stables, telles que :

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (z) \\ (e) \\ (w) & (v) \end{matrix} \quad (159)$$

Une méthode générale pour obtenir la paramétrisation de Youla-Kucera commence par la détermination d'un contrôleur nominal qui est un contrôleur par retour d'état avec observateur. Ensuite, ce contrôleur nominal est augmenté par l'injection d'une variable de commande auxiliaire  $v$  :

$$u = -K_0\hat{x} + v \quad (160)$$

La commande auxiliaire  $v$  n'influence pas l'erreur d'estimation de l'observateur. Nous prenons l'erreur de prédiction de sortie comme la sortie  $e$  du système augmenté  $T$  :

$$e = y - C_y\hat{x} \quad (161)$$

L'exigence selon laquelle le transfert en boucle fermée entre  $v$  et  $e$  vaut zéro est satisfaite parce que l'erreur d'estimation de l'observateur est incontrôlable par  $v$ , et donc l'erreur de prédiction de sortie est aussi incontrôlable par  $v$ . Ici, l'erreur de prédiction de sortie est traitée par un transfert stable  $Q$  avant d'être ajoutée à la variable de commande.

L'équation de l'observateur est donnée par :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_u u + L_0(y - C_y\hat{x}) \quad (162)$$

La matrice de transfert du correcteur nominal :

$$K_{nom}(s) = -K_0(sI - A + B_u K_0 + L_0 C_y)^{-1} L_0 \quad (163)$$

La représentation d'état du correcteur augmenté  $J$  :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A - B_u K_0 - L_0 C_y)\hat{x} + L_0 y + B_u v \\ u = -K_0\hat{x} + v \\ e = y - C_y\hat{x} \end{cases} \quad (164)$$

La représentation d'état de la matrice de transfert  $T$  est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - B_u K_0 \hat{x} + B_w w + B_u u \\ \dot{\hat{x}} = L_0 C_y x + (A - B_u K_0 - L_0 C_y - L_0 D_{yu} K_0)\hat{x} \\ \quad + L_0 D_{yw} w + (L_0 D_{yu} B_u) v \\ z = z x - D_{zu} K_0 \hat{x} + D_{zw} w + D_{zu} v \\ e = C_y x + (-D_{yu} K_0 - C_y)\hat{x} + D_{yw} w + D_{yu} v \end{cases} \quad (165)$$

Les matrices de transfert  $T_1$ ,  $T_2$ , et  $T_3$  seront obtenues comme suit :

$$\begin{bmatrix} T_1(s) & T_2(s) \\ T_3(s) & 0 \end{bmatrix} = C_T (sI - A)^{-1} B_T + D_T \quad (166)$$

où

$$\begin{aligned} A_T &= \begin{bmatrix} A & -B_u K_0 \\ L_0 C_y & A - B_u K_0 - L_0 C_y - L_0 D_{yu} K_0 \end{bmatrix} \\ B_T &= \begin{bmatrix} B_w & B_u \\ L_0 D_{yw} & B_u + L_0 D_{yu} \end{bmatrix} \\ C_T &= \begin{bmatrix} C_z & -D_{zu} K_0 \\ C_y & -C_y - D_{yu} K_0 \end{bmatrix} \\ D_T &= \begin{bmatrix} D_{zw} & D_{zu} \\ D_{yw} & D_{yu} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si la représentation d'état de  $Q$  est :

$$\begin{cases} \dot{x}_Q &= A_Q x_Q + B_Q e \\ v &= C_Q x_Q + D_Q e \end{cases} \quad (167)$$

alors le correcteur  $K$  est obtenu par l'interconnexion entre  $J$  et  $Q$  en éliminant  $e$  et  $v$ . La représentation d'état de  $K$  est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= (A - B_u K_0 - L_0 C_y - B_u D_Q C_y) \hat{x} + B_u C_Q x_Q \\ &\quad + (L_0 + B_u D_Q) y \\ \dot{x}_Q &= -B_Q C_y \hat{x} + A_Q x_Q + B_Q y \\ u &= (-K_0 - D_Q C_y) \hat{x} + C_Q x_Q + D_Q y \end{cases} \quad (168)$$

La matrice de transfert  $K(s)$  sera :

$$K(s) = C_K (sI - A_K)^{-1} B_K + D_K \quad (169)$$

où

$$\begin{aligned} A_K &= \begin{bmatrix} A - B_u K_0 - L_0 C_y - B_u D_Q C_y & B_u C_Q \\ & -B_Q C_y & A_Q \end{bmatrix} \\ B_K &= \begin{bmatrix} L_0 + B_u D_Q \\ B_Q \end{bmatrix} \\ C_K &= \begin{bmatrix} -K_0 - D_Q C_y & C_Q \end{bmatrix} \\ D_K &= D_Q \end{aligned}$$

La complexité du correcteur  $K(s)$  dépend du système  $P$  et du paramètre  $Q$  (i.e. l'ordre de  $K =$  l'ordre de  $P +$  l'ordre de  $Q$ ).

### Formulation convexe du problème de synthèse

Le plus grand intérêt de la paramétrisation de Youla-Kucera est que le problème de conception du contrôleur peut être formulé en un problème d'optimisation convexe, en terme de paramètre  $Q$ . La solution optimale  $Q_{opt}$  génère le contrôleur optimal  $K_{opt}$  qui est l'optimum global. En général,  $Q$  est recherché dans une sous-espace de dimension finie :

$$Q(\Theta) = \sum_{i=1}^N \theta_i Q_i \quad (170)$$

où  $\Theta = [\theta_1 \dots \theta_N] \in \mathbb{R}^N$  et  $Q_1, \dots, Q_N$  sont des matrices de transfert stables.

Soit  $\phi_0, \dots, \phi_m$  des fonctions convexes en termes du paramètre  $\Theta$ , alors le problème

$$\begin{aligned} \text{minimiser selon } Q &: \phi_0(T_1 + T_2 Q T_3) \\ \text{sous contraintes} & \quad \phi_1(T_1 + T_2 Q T_3) \leq 0 \\ & \quad \vdots \\ & \quad \phi_m(T_1 + T_2 Q T_3) \leq 0 \end{aligned} \quad (171)$$

est un problème d'optimisation convexe.

### Traduction du cahier des charges en conditions LMIs

**LMI pour la spécification de la norme  $H_2$**  Soit un transfert  $H$  ayant une représentation d'état  $(A, B, C, D)$ . La contrainte de la norme  $H_2$ ,  $\|H\|_2 \leq \gamma$  est équivalente à une contrainte LMI selon  $X$  et  $\theta$  :

$$\begin{bmatrix} X & D(\Theta) & C(\Theta)W^{\frac{1}{2}} \\ D(\Theta)^T & I & 0 \\ W^{\frac{1}{2}}C(\Theta)^T & 0 & I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (172)$$

$$\begin{aligned} X = X^T &> 0 \\ \text{Trace}(X) &\leq \gamma^2 \end{aligned}$$

où le gramien de contrôlabilité  $W = W^T > 0$  est la solution de l'équation de Lyapunov  $AW + WA^T + BB^T = 0$ .

**LMI pour la spécification de la norme  $H_\infty$**  La contrainte de la norme  $H_\infty$ ,  $\|H\|_\infty \leq \gamma$  est équivalente à une contrainte LMI selon  $P$  et  $\Theta$  :

$$\begin{bmatrix} A^T P A - P & A^T P B & C(\Theta)^T \\ B^T P A & B^T P B - \gamma^2 I & D(\Theta)^T \\ C(\Theta) & D(\Theta) & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (173)$$

$$P = P^T > 0$$

### Formulation du problème de synthèse convexe

Considérons le schéma standard de la boucle fermée dans la figure 7. L'objectif de synthèse **OBJ** est de minimiser la norme  $H_2$  de la fonction de transfert entre la perturbation de commande ( $d_u$ ) et la sortie du processus ( $y_p$ )  $\min \|H_{y_p-d_u}\|_2$ .

Les contraintes sont :

**C1 Marge de module  $M_{md}$ .** Cette contrainte peut être exprimée comme  $\|H_{y_p-d_y}\|_\infty \leq \frac{1}{M_{md}}$ .

**C2 Erreur statique nulle.** La réponse de la sortie du processus  $y_p$  à un échelon de référence  $r$  doit être égale à un. Cette contrainte peut être exprimée comme  $H_{y_p-r}(z=1) = 1$ .

**C3 Dépassement.** Le dépassement ne doit pas dépasser  $G_{rmax}$ . Cette contrainte peut être exprimée comme  $\|H_{y_p-r}\|_\infty \leq G_{rmax}$ .

**C4 Erreur de régulation.** La réponse de la sortie du processus  $y_p$  à un échelon de perturbation de commande  $d_u$  en régime statique doit être nulle. Cette contrainte peut être exprimée comme  $H_{y_p-d_u}(z=1) = 0$ .

**C5 Amplification maximale du bruit de mesure sur la commande.** Cette contrainte peut être exprimée comme  $\|H_{u-P_N}\|_\infty \leq N_{max}$ .

**Formulation de LMIs** Maintenant, nous pouvons reformuler le problème de synthèse en un problème d'optimisation convexe en utilisant la paramétrisation de Youla-Kucera.

Tout d'abord, en utilisant la synthèse LQG, on détermine un gain de retour  $K_0$  et le gain d'observation  $L_0$ . Cette étape peut être non nécessaire si le système en boucle ouverte est stable.

Toutefois, avec l'expérience, il est recommandé d'effectuer cette étape parce que cela rend le problème d'optimisation mieux conditionné.

Selon l'équation (156),  $Q$  est une matrice de transfert de dimension  $n_v \times n_e$ . Selon les équations (160) et (161), il vient  $n_v = n_u$  et  $n_e = n_y$ . Soit  $Q$  est de dimension  $n_u \times n_y$ . Ici,  $n_u = 1$ ,  $n_y = 2$ . Le paramètre Youla est donc choisi comme :

$$Q(\Theta) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n Q\theta_i z^{-i+1} & \sum_{i=nQ+1}^{2nQ} \theta_i z^{-i+nQ+1} \end{bmatrix} \quad (174)$$

où  $nQ + 1$  est le degré de  $Q$  (i.e. degré du polynôme  $p(z^{-1})$ ). Comme nous le voyons, dans notre cas,  $Q$  est une matrice de transfert ayant une ligne et deux colonnes.  $Q$  contient deux transferts :  $Q_1(z) = \sum_{i=1}^n Q\theta_i z^{-i+1}$  et  $Q_2(z) = \sum_{i=nQ+1}^{2nQ} \theta_i z^{-i+nQ+1}$ .

Selon (172), chacune des contraintes **C1-C5**, mène à deux LMIs en terme de  $\Theta$ . Au total, les contraintes mènent aux dix LMIs  $\phi_1, \dots, \phi_{10}$ .

Selon (173), l'objectif **OBJ** mène à une LMI en terme de  $\Theta$   $\phi_{11}$ . Nous prenons  $\phi_0 = \gamma^2$ .

Enfin, nous obtenons un problème d'optimisation convexe en terme de  $\Theta$  (171) avec un ensemble de onze LMIs à résoudre. Ce problème peut être résolu en utilisant **MATLAB** avec les toolbox **YALMIP** et **SeDuMi**.

## F.2 Utilisation du logiciel

### Présentation générale

A partir du cahier des charges défini par l'utilisateur, le logiciel **ConvexDesign** détermine un correcteur optimal global par synthèse convexe.

Nous avons développé ce logiciel en utilisant le langage de **MATLAB**®. (version R2007a), la toolbox libre **YALMIP**<sup>1</sup> [106] (version R20100702) et le solveur libre **SeDuMi**<sup>2</sup> [107] (version 1.1).

### Obtention du résultat

Le programme propose 3 graphiques différents pour visualiser les résultats obtenus (confer la figure 9). Au total, 12 courbes sont représentées.

- La colonne de gauche représente les diagrammes de Bode en amplitude (en haut) et en phase (en base). Les différents transferts sont différenciés par leur couleur : correcteur  $C(s)$  (vert), procédé  $H(s)$  (rouge) et fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{bo}(s) = H(s).C(s)$  (bleu)

1. L'avantage de YALMIP par rapport à LMILAB de MATLAB et que YALMIP permet d'écrire des LMIs d'une façon plus claire et plus rapide. De plus, YALMIP permet aussi de choisir plusieurs algorithmes qui sont plus efficaces que LMILAB

2. SeDuMi est un solveur de LMI peut être appelé dans YALMIP. Le solveur SeDuMi est plus rapide et plus efficace que le solveur LMILAB de MATLAB

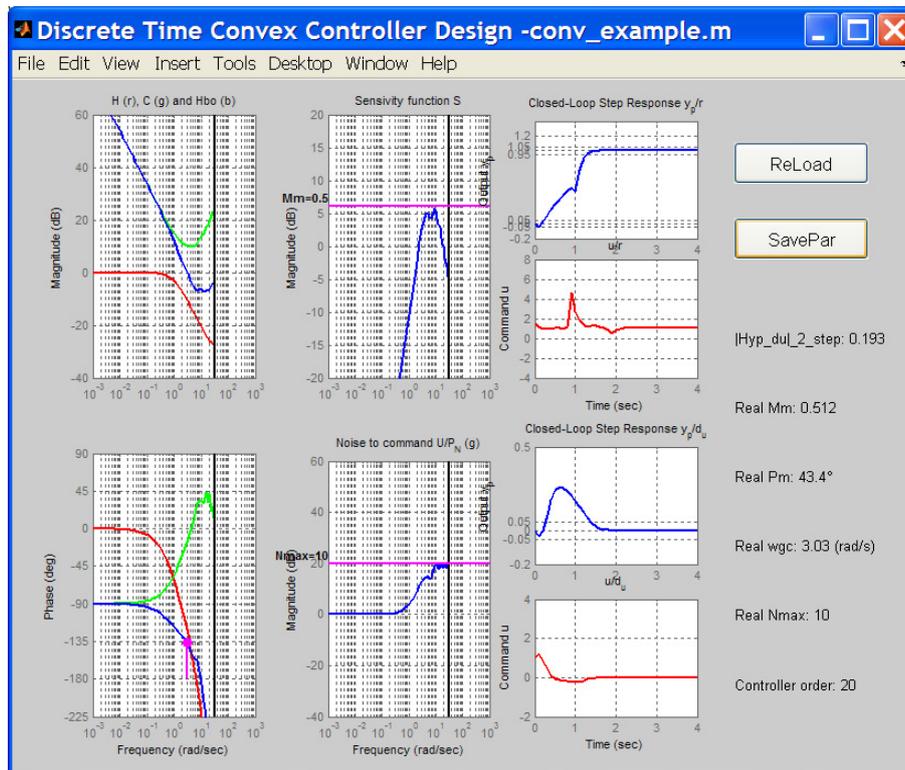


FIGURE 9 – Interface graphique du logiciel d'aide à la synthèse convexe d'un correcteur en temps discret

- La colonne du milieu représente les diagrammes de Bode en amplitude de la fonction de sensibilité (en haut) et de la fonction de transfert entre le bruit de mesure et la commande (en bas).
- A droite en bas se trouve les réponses indicielles, du haut vers le bas :
  - réponse de la sortie vis-à-vis un échelon de référence
  - réponse de la commande vis-à-vis un échelon de référence
  - réponse de la sortie vis-à-vis un échelon de perturbation de commande
  - réponse de la commande vis-à-vis un échelon de perturbation de commande

En appuyant sur le bouton **SavePar** les résultats sont sauvegardés dans un fichier.

## G Distance *nu-gap* et marge de stabilité généralisée

La distance  $\delta_\nu$  entre le modèle complet et le modèle réduit, notée  $\delta_\nu(H, H_r)$ , est donnée par ([108]) :

$$\delta_\nu(H, H_r) = \left\| \frac{H - H_r}{(1 + H^*H)^{-1/2}(1 + H_r^*H_r)^{-1/2}} \right\|_\infty \quad (175)$$

où  $H^*$  est la matrice transposée de la matrice conjuguée de  $H$ .

La marge de stabilité généralisée obtenue pour le système  $H$  avec le correcteur  $C$ , notée  $b(C, H)$  est donnée par ([85]) :

$$b(C, H) = \begin{cases} \left\| \begin{bmatrix} H \\ I \end{bmatrix} (I - CH)^{-1} [-C \quad I] \right\|_\infty^{-1}, & \text{si } (C, H) \text{ est stable} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (176)$$

## H Méthode du premier harmonique

La méthode du premier harmonique (*describing function analysis*) peut être utilisée, afin d'analyser et de prédire approximativement le comportement de certains systèmes non-linéaires comportant des éléments tels que saturations, relais, seuils, etc.

Cette méthode consiste, sous certaines conditions, à remplacer la partie non-linéaire d'un système, par une fonction de transfert généralisée (*describing function*) afin de pouvoir étendre aux systèmes non-linéaires les nombreuses méthodes d'analyse fréquentielle valables pour les systèmes linéaires.

### H.1 Approximation du premier harmonique

La méthode du premier harmonique, dans sa version de base, n'est applicable que sous certaines conditions :

- Principe de séparation : le système considéré (figure 10), ne possède qu'un seul élément non linéaire dans la boucle. Néanmoins, cet élément peut-être la réunion de plusieurs éléments non-linéaires

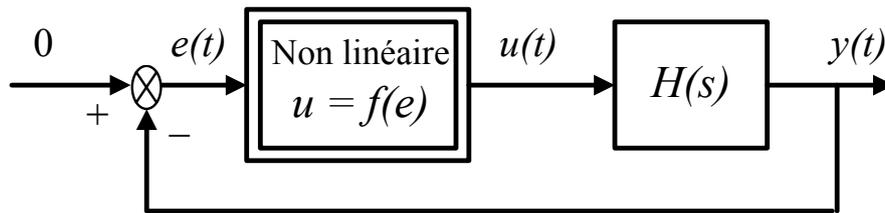


FIGURE 10 – Système bouclé contenant un élément non-linéaire

- Invariance temporelle de l'élément non-linéaire. Il ne dépend donc pas de la fréquence du signal à son entrée
- Les éléments linéaires se comportent comme des filtres passe-bas (filtrage des harmoniques d'ordre supérieur)
- la non-linéarité est impaire (i.e. la fonction représentant la non-linéarité  $f$  est symétrique par rapport à l'origine)

Considérons la transmission d'un signal sinusoïdal dans l'élément non linéaire :  $e(t) = A \sin(\omega t)$ , alors pour beaucoup de systèmes non-linéaires rencontrés en pratique la sortie  $u(t)$  sera également un signal périodique, pas nécessairement sinusoïdale, qui admet généralement une infinité d'harmonique.  $u(t)$  peut être décomposée en série de Fourier :

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \quad (177)$$

où :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \quad (178)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos(n\omega t) dt \quad (179)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin(n\omega t) dt \quad (180)$$

avec  $T$  la période des oscillations. Le terme statique  $a_0$  est nul si la non-linéarité est impaire.

Chaque harmonique est filtré par le système linéaire et se retrouve par la suite à nouveau en entrée de la non-linéarité. Les systèmes linéaires sont, de manière très générale, strictement causaux et vont atténuer les harmoniques supérieurs. La méthode du premier harmonique consiste à ne considérer que l'harmonique fondamental ( $n = 1$ ) et suppose que les harmoniques supérieurs sont complètement filtrés par le système linéaire :

$$u(t) \approx u_1(t) = a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) = D \sin(\omega t + \phi) \quad (181)$$

où :

$$D(A, \omega) = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad (182)$$

$$\phi(A, \omega) = \arctan\left(\frac{a_1}{b_1}\right) \quad (183)$$

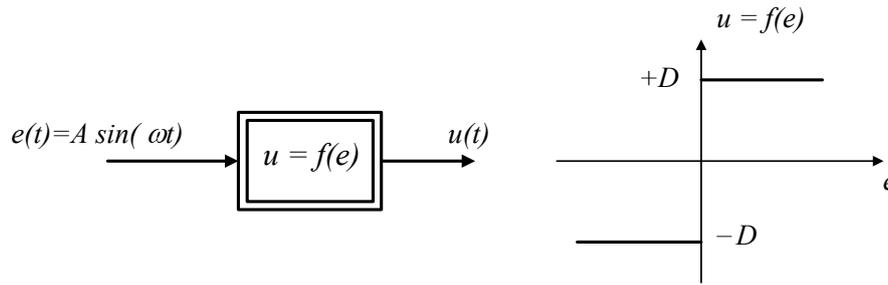


FIGURE 11 – Fonction relais

L'approximation du premier harmonique sera donc d'autant plus justifiée que la fonction de transfert linéaire  $H(s)$  est de type passe-bas d'ordre élevé.

La fonction de transfert généralisée d'un élément non linéaire, notée  $N(A, \omega)$  est le rapport entre la composante fondamentale de la sortie de l'élément non linéaire et l'entrée sinusoïdale :

$$N(A, \omega) = \frac{D e^{j(\omega t + \phi)}}{A e^{j\omega t}} = \frac{D}{A} e^{j\phi} \quad (184)$$

Il est important de noter que la fonction de transfert généralisée n'est définie que pour une entrée sinusoïdale et n'a de sens que si le système est dans un régime périodique oscillatoire.

La fonction de transfert généralisée d'un relais (figure 11) est :

$$N(A, \omega) = \frac{4D}{\pi A} \quad (185)$$

## H.2 Existence des cycles limites

Dans le cadre de l'approximation du premier harmonique, la non-linéarité est remplacée par sa fonction de transfert généralisée  $N(A, \omega)$ . Supposons que le système est le siège d'oscillations permanentes. Ainsi, les variables internes doivent satisfaire les relations suivantes :

$$e = -y \quad (186)$$

$$u = N(A, \omega)e \quad (187)$$

$$y = H(j\omega)u \quad (188)$$

Ainsi :

$$y = -H(j\omega)N(A, \omega)y \quad (189)$$

Comme  $y \neq 0$ , il vient :

$$H(j\omega)N(A, \omega) + 1 = 0 \quad (190)$$

ou encore :

$$H(j\omega) = -\frac{1}{N(A, \omega)} \quad (191)$$



# Bibliographie

- [1] J. Doyle. Guaranteed margins for LQG regulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 23(4) :756–757, August 1978.
- [2] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis. State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(8) : 831–847, August 1989.
- [3] G. Duc and S. Le Ballois.  $H_\infty$  control of a flexible arm : Coprime factors design using the gap metric. In *Proceedings of the Third IEEE International Conference on Control Applications*, volume 2, pages 1317–1322, Glasgow, UK, August 1994.
- [4] E. Laroche, Y. Bonnassieux, H. Abou-Kandil, and J. Louis. Controller design and robustness analysis for induction machine-based positioning system. *Control Engineering Practice*, 12(6) :757–767, June 2004.
- [5] S. Boyd and C. Barrat. *Linear Controller Design : Limits of Performance*. Prentice Hall, 1991.
- [6] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali. The LMI control toolbox. volume 3, pages 2038–2041, December 1994.
- [7] D. Youla, J. Bongiorno, and H. Jabr. Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers part I : The single-input-output case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21(1) : 3–13, February 1976.
- [8] M. Abbas-Turki, G. Duc, and B. Clement. LMI formulations for designing controllers according to time response and stability margin constraints. In *Proceedings of the 44<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005*, pages 5740–5745, Seville, Spain, December 2005.
- [9] F. Le Mauff and G. Duc. Design of a controller for a steam generator of a power plant using robust control and genetic algorithm. In *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Control Applications*, pages 1050–1055, Glasgow, UK, September 2002.
- [10] F. Le Mauff and G. Duc. Design of a fixed structure controllers with respect to various specifications using robust control and genetic algorithm. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 4994–4999, Anchorage, AK, USA, May 2002.

- [11] K. Åström and T. Häggglund. *PID Controllers : Theory, Design, and Tuning*. Instrument Society of America, 1995.
- [12] Bode H. W. Relations between attenuation and phase in feedback amplifier design. *Bell System Technical Journal*, 19 :421–454, 1940.
- [13] Nyquist Harry. Regeneration theory. *Bell System Technical Journal*, 11 :126–147, 1932.
- [14] Black H. S. Stabilized feedback amplifiers. *Bell System Technical Journal*, 13 :1–18, 1934.
- [15] J. G. Ziegler and Nichols N. B. Optimum settings for automatic controllers. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 64 :759–768, 1942.
- [16] Issac W. Horowitz. *Synthesis of Feedback Systems*. Academic Press, New York, 1963.
- [17] G. Zames and B. A. Francis. A new approach to classical frequency methods : Feedback and minimax sensitivity. In *Proceedings of the 20<sup>th</sup> IEEE Conference on the Decision and Control*, volume 20, pages 867–874, December 1981.
- [18] P. Apkarian, D. Noll, and A. Rondepierre. Mixed  $H_2/H_\infty$  control via nonsmooth optimization. In *Proceedings of 48<sup>th</sup> the Conference on Decision and Control*, pages 6460–6465, Shanghai, China, December 2009.
- [19] Gilles Duc and Stéphane Font. *Commande  $H_\infty$  et  $\mu$ -analyse des outils pour la robustesse*. Hermes Science Publication, Paris, 1999.
- [20] E. Laroche, H. Koç, D. Knittel, and M. De Mathelin. Web winding system robustness analysis via  $\mu$ -analysis. In *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Control Applications*, pages 948–953, México, September 2001.
- [21] S. Font, G. Duc, and F. Carrère.  $H_\infty$  control of a magnetic bearing. In *Proceedings of the Third IEEE International Conference on Control Applications*, volume 1, pages 581–585, Glasgow, UK, August 1994.
- [22] S. Mammar and G. Duc. Loop shaping  $H_\infty$  design : Application to the robust stabilization of a helicopter. *Control Engineering Practice*, 1(2) :349–356, April 1993.
- [23] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, England, 2004.
- [24] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and Balakrishnan V. Linear matrix inequalities in system and control theory. In *Proceedings Annual Allerton Conference on Communication, Control and Computing*, pages 237–246, USA, 1993.
- [25] S. Gumussoy, D. Henrion, M. Millstone, and M. L. Overton. Multiobjective robust control with HIFOO 2.0. In *Proceedings of the 6th IFAC Symposium on Robust Control Design*, Haifa, Israel, June 2009.

- [26] J.V. Burke, D. Henrion, A.S. Lewis, and M.L. Overton. Stabilization via nonsmooth, nonconvex optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(11) :1760–1769, November 2006.
- [27] J. V. Burke, D. Henrion, A. S. Lewis, and M. L. Overton. HIFOO - a Matlab package for fixed-order controller design and H-infinity optimization. In *Proceedings of the 5th IFAC Symposium on Robust Control Design*, Toulouse, France, July 2006.
- [28] A. Karimi and G. Galdos. Fixed-order  $H_\infty$  controller design for nonparametric models by convex optimization. *Automatica*, 46(8) :1388–1394, August 2010.
- [29] S. Gugercin and A. C. Antoulas. A comparative study of 7 algorithms for model reduction. In *Proceedings of the 39<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2367– 2372, Australia, December 2000.
- [30] G. Buskes. *Model order reduction in the  $\nu$ -gap metric*. PhD thesis, Department of Electrical and Electronic Engineering, the University of Melbourne, Melbourne, Australia, December 2007.
- [31] A. Megretski. H-infinity model reduction with guaranteed suboptimality bound. In *Proceedings of the 2006 American Control Conference*, pages 448–453, Minnesota, USA, June 2006.
- [32] H. Panagopoulos, K. J. Åström, and T. Hägglund. A numerical method for design of PI controllers. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications*, pages 417–422, USA, October 1997.
- [33] D. Garcia, A. Karimi, and R. Longchamp. Robust proportional integral derivative controller tuning with specifications on the infinity-norm of sensitivity functions. *IET Control Theory Application*, 1(1) :263–272, January 2007.
- [34] A. A. Voda and I. D. Landau. A method for the auto-calibration of PID controllers. *Automatica*, 31(1) :41–53, 1995.
- [35] C. Barrat and S. Boyd. Example of exact trade-offs in linear controller design. *IEEE Control Systems Magazine*, 9(1) :49–52, January 1989.
- [36] S. Boyd and C. Barrat. Closed-loop convex analysis of performance limits for linear control systems. In *Symp. Comp. Aided Control System. Design*, pages 301–304, USA, March 1992.
- [37] S. Le Ballois and G. Duc.  $H_\infty$  control of a satellite platform : Coprime factors design versus multi-block approach. In *Proceedings of the Second IEEE International Conference on Control Applications*, pages 977–982, Vancouver, BC, Canada, September 1993.

- [38] P. Ambos, G. Duc, and CM. Falinower. Loop shaping  $H_\infty$  design applied to the steam generator level control in EDF nuclear power plant. In *Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Control Applications*, pages 751–756, Dearborn, MI, USA, September 1996.
- [39] W. Bachta, P. Renaud, E. Laroche, A. Forgione, and J. Gangloff. Design and control of a new active cardiac stabilizer. In *Proceedings of the 2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 404–409, San Diego, CA, USA, October 29 - November 2 2007.
- [40] L. Cuvillon, E. Laroche, J. Gangloff, and M. De Mathelin. GPC versus  $H_\infty$  control for fast visual servoing of a medical manipulator including flexibilities. In *Proceedings of the 2007 IEEE/RSJ International Conference on Robotics and Automation*, pages 4044–4049, Barcelona, Spain, April 2005.
- [41] D. Knittel, E. Laroche, D. Gigan, and H. Koç. Tension control for winding systems with two-degrees-of-freedom  $H_\infty$  controllers. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 39(1) :113–120, January/February 2003.
- [42] O. Yaniv and M. Nagurka. Robust PI controller design satisfying sensitivity and uncertainty specifications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(11) :2069–2072, November 2003.
- [43] G. Stein. Respect the unstable. *IEEE Control System Magazine*, 23(4) :12–25, August 2003.
- [44] S. Boyd, V. Balakrishnan, and P. Kabamba. On computing the  $H_\infty$  norm of a transfer matrix. Number 3, pages 2412–2417, June 1988.
- [45] H. A. Hindi, B. Hassibi, and S. P. Boyd. Multiobjective  $H_2/H_\infty$  optimal control via finite dimensional Q-parametrization and linear matrix inequalities. Number 5, pages 3244–3249, June 1998.
- [46] O. Yaniv. *Quantitative Feedback Design of Linear and Nonlinear Control Systems*. Kluwer Academic Publishers in Norwell, MA, USA, 1999.
- [47] H. Panagopoulos, K. J. Åström, and T. Hägglund. Design of PID controllers based on constrained optimization. In *IEE Proceedings of Control Theory Application*, volume 149, pages 32–40, January 2002.
- [48] A. Karimi, D. Garcia, and R. Longchamp. PID controller tuning using bode’s integrals. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 11(6) :812–821, November 2003.
- [49] T. S. Schei. Automatic tuning of PID controllers based on transfer function estimation. *Automatica*, 30(12) :1983–1989, December 1994.

- [50] E. Laroche, E. Mendes, J. Louis, Y. Bonnassieux, and Abou-Kandil. Une méthode de réglage de correcteur PID robuste pour transitique rapide. *Journal européen des systèmes automatisés*, 36(5) :709–722, 2002.
- [51] P. E. Gill, W. Murray, and M. H. Wright. *Practical Optimization*. Academic Press, London, 1981.
- [52] K. J. Åström, H. Panagopoulos, and T. Hägglund. Design of PI controllers based on non-convex optimization. *Automatica*, 34(5) :585–601, May 1998.
- [53] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, and P. Rouchon. A Lie-bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(5) :922–937, May 1999.
- [54] F. Gomez-Bravo, F. Cuestab, A. Ollerob, and A. Viguriab. Continuous curvature path generation based on-spline curves for parking manoeuvres. *Robotics and Autonomous Systems*, 56 :360–372, 2008.
- [55] J. J. E. Oviedo, T. Boelen, and P. V. Overschee. Robust advanced PID control (RaPID) : PID tuning based on engineering specifications. *IEEE Control Systems Magazine*, 26(1) : 15–19, February 2006.
- [56] Garcia Daniel. *Auto-ajustement de régulateurs PID robustes dans le domaine fréquentiel*. PhD thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, May 2006.
- [57] C. Speltino, D. DI Domenico, and A. Stefanopoulou. Comparison of reduced order lithium-ion battery models for control applications. In *Proceedings of the 48<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3276–3281, Shanghai, China, December 2009.
- [58] E. Gildin, R. H. Bishop, Antoulas A. C., and D. Sorensen. An educational perspective to model and controller reduction of dynamical systems. In *Proceedings of the 46<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, USA, December 2007.
- [59] E. Davison. A method for simplifying linear dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11(1) :93–101, January 1966.
- [60] A. Astolfi. A new look at model reduction by moment matching for linear systems. In *Proceedings of the 46<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4361–4366, New Orleans, USA, December 2007.
- [61] R. Eid, B. Salimbahrami, and B. Lohmann. Equivalence of Laguerre-based model order reduction and moment matching. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(6) :1104–1108, June 2007.
- [62] M. G. Safonov and R. Y. Chiang. A Schur method for balanced-truncation model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(7) :729–733, July 1989.

- [63] C. Lanczos. An iteration method for the solution of the eigenvalue problem for linear differential and integral operators. *Journal of Research of National Bureau of Standards*, 45(4) :255–282, October 1950.
- [64] S. Gugercin and A. C. Antoulas. An  $H_2$  error expression for the Lanczos procedure. In *Proceedings of the 42<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, USA, December 2003.
- [65] M. Lai, C. Chu, and W. Feng. MIMO interconnects order reductions by using the global Arnoldi algorithm. In *Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Greec, December 2006.
- [66] B. Salimbahrami, R. Eid, and B. Lohmann. On the choice of an optimal interpolation point in Krylov-based order reduction. In *Proceedings of the 47<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4209–4214, Mexico, December 2008.
- [67] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, 1996.
- [68] B. C. Moore. Principal component analysis in linear systems : Controllability, observability and model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(2) :17–31, February 1981.
- [69] M. G. Safonov, R. Y. Chiang, and D. J. N. Limebeer. Optimal Hankel model reduction for nonminimal systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(4) :496–502, April 1990.
- [70] Y. Liu and Anderson B. D. O. Singular perturbation approximation of balanced systems. In *Proceedings of the 28<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1355–1360, USA, December 1989.
- [71] P. Houllis and V. Sreeram. A parametrized controller reduction technique via a new frequency weighted model reduction formulation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(5) :1087–1093, May 2009.
- [72] V. Sreeram and S. Sahlan. Improved results on frequency weighted balanced truncation. In *Proceedings of the 48<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3250–3255, Shanghai, China, December 2009.
- [73] M. Cantoni. On model reduction in the  $\nu$ -gap metric. In *Proceedings of the 40<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3665–3670, Florida, USA, December 2001.
- [74] X. Du and G. Yang.  $H_\infty$  model reduction of linear continuous-time systems over finite frequency interval-LMI based approach. In *2009 American Control Conference*, pages 5725–5730, St. Louis, USA, June 2009.
- [75] L. Li and I. R. Petersen. A Gramian-based approach to model reduction for uncertain systems. In *Proceedings of the 46<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, USA, December 2007.

- [76] C. Valentin and G. Duc. LMI-based algorithms for frequency weighted optimal  $H_2$ -norm model reduction. In *Proceedings of the 36<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, pages 767–772, San Diego, CA, USA, December 1997.
- [77] J. C. Geromel, R. G. Egas, and F. R. R. Kawaoka.  $H_\infty$  model reduction with application to flexible systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(3) :402–406, March 2005.
- [78] S. Schuler and F. Allgöwer.  $l_\infty$ -gain model reduction for discrete-time systems via LMIs. In *2009 American Control Conference*, pages 5701–5706, St. Louis, USA, June 2009.
- [79] G. Vinnicombe. Frequency domain uncertainty and the graph topology. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(9) :1371–1383, September 1993.
- [80] Glenn Vinnicombe. *Measuring the Robustness of Feedback Systems*. PhD thesis, Department of Engineering, University of Cambridge, Cambridge, England, 1993.
- [81] G. Vinnicombe. The robustness of feedback systems with bounded complexity controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(6), June 1996.
- [82] M. Cantoni and G. Vinnicombe. Controller discretization : A gap metric framework for analysis and synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(11), November 2004.
- [83] M. Cantoni and G. Vinnicombe. Linear feedback systems and the graph topology. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(5), May 2002.
- [84] K. Glover, G. Vinnicombe, and G. Papageorgiou. Guaranteed multi-loop stability margins and the gap metric. *Proceedings of the 39<sup>th</sup> IEEE Conference on the Decision and Control*, December 2000.
- [85] J. H. Steele and G. Vinnicombe. Closed-loop time-domain model validation in the nu-gap metric. In *Proceedings of the 40<sup>th</sup> IEEE Conference on the Decision and Control*, pages 4332–4337, USA, December 2001.
- [86] M. Cantoni. A characterisation of the gap metric for approximation problems. In *Proceedings of the 45<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, pages 5359–5364, San Diego, USA, December 2006.
- [87] G. Buskes and M. Cantoni. Reduced order approximation in the  $\nu$ -gap metric. In *Proceedings of the 46<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4367–4372, USA, December 2007.
- [88] G. Buskes and M. Cantoni. A step-wise procedure for reduced order approximation in the  $\nu$ -gap metric. In *Proceedings of the 47<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4855–4860, Mexico, December 2008.
- [89] A. Alleyne, S. Brennan, B. Rasmussen, R. Zhang, and Y. Zhang. Controls and experiments : Lessons learned. *IEEE Control Systems Magazine*, 23(5) :20–34, October 2003.

- [90] S. Hovland, C. Lovass, J. T. Gravdahl, and G. C. Goodwin. Stability of model predictive control based on reduced-order models. In *Proceedings of the 47<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4067–4072, Mexico, December 2008.
- [91] A. J. Isaksson and S. F. Graebe. Analytical PID parameter expressions for higher order systems. *Automatica*, 35(6) :1121–1130, June 1999.
- [92] K. H. Ang, G. Chong, and Y. Li. PID control system analysis, design, and technology. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 13(4) :559–576, July 2005.
- [93] L. Barbé, B. Bayle, E. Laroche, and M. De Mathelin. User adapted control of force feedback teleoperators : Evaluation and robustness analysis. In *2008 IEEE/RSJ International Conference on*, pages 418–423, Nice, France, September 2008.
- [94] Schei T. S. Closed-loop tuning of PID controllers. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 2971–2975, Chicago, USA, June 1992.
- [95] R. Longchamp and Piguet Y. Closed-loop estimation of robustness margins by the relay method. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 2687–2691, Washington, USA, June 1992.
- [96] D. Garcia, A. Karimi, and R. Longchamp. Infinity norm measurement of sensitivity function based on limit cycles in a closed-loop experiment. In *7<sup>th</sup> European Control Conference*, Cambridge, UK, September 2003.
- [97] A. Leva. PID autotuning algorithm based on relay feedback. *IEE proceedings*, 140(5) : 328–338, September 1993.
- [98] A. Besançon-Voda and H. Roux-Buisson. Another version of the relay feedback experiment. *Journal of Process Control*, 7(4) :303–308, 1997.
- [99] J. Oishi and V. Balakrishnan. Linear controller design for the NEC laser bonder via LMI optimization. In *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*, pages 295–307. SIAM, 1999.
- [100] Z. Feng and R. Allen. Reduced order  $H_\infty$  control of an autonomous underwater vehicle. *Control Engineering Practice*, 12(12) :1511–1520, December 2004.
- [101] S. Gumussoy, M. Millstone, and M. L. Overton.  $H^\infty$  strong stabilization via HIFOO, a package for fixed-order controller design. In *Proceedings of the 47<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4135–4140, Cancun, Mexico, December 2008.
- [102] P. Apkarian and D. Noll. Nonsmooth  $H_\infty$  synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(1) :71–86, 2006.
- [103] S. Gumussoy and Overton M. L. Fixed-order  $H^\infty$  controller design via HIFOO, a specialized nonsmooth optimization package. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 2750–2754, Seattle, Washington, USA, June 2008.

- 
- [104] F. Zheng, Q. G. Wang, and T. H. Lee. On the design of multivariable PID controllers via LMI approach. *Automatica*, 38 :517–526, March 2002.
- [105] D. Hernandez-Torres, D. Riu, and O. Sename. Design and experimental validation of a robust control method for a hybrid fuel power generation system. In *IEEE Energy Conversion Congress & Expo 2010*, pages 4482–4489, Atlanta, USA, 2010.
- [106] J. Löfberg. YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *Proceedings of the Computer Aided Control System Design Conference*, pages 284–289, Taipei, Taiwan, 2004. URL <http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip>.
- [107] J. F. Sturm. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software Online*, 11-12 :625–653, October 1999. URL <http://sedumi.ie.lehigh.edu/>.
- [108] I. A. Landau and G. Zito. *Digital Control Systems - Design Identification and Implementation*. Springer, London, 2005.



## Résumé

Les systèmes LTI à contrôler sont soumis à des contraintes physiques et technologiques. Nous avons montré que celles-ci limitent la bande passante atteignable en boucle fermée. Il s'en suit qu'il suffit de modéliser et d'analyser ces systèmes dans une bande de fréquences limitée, et non pas sur toutes les fréquences, et que l'utilisation de correcteurs d'ordres réduits est tout à fait efficace.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la synthèse de correcteurs d'ordres réduits fixés sous contraintes de robustesse, et à la réduction de modèles pour de tels systèmes. La méthode proposée consiste à déterminer un correcteur de structure donnée qui optimise le rejet de la perturbation de commande de type échelon au sens de la norme  $H_2$ , en respectant des contraintes de robustesse, i.e. marge de module minimum, marge de phase minimum et amplification maximum du bruit de mesure sur la commande. En s'appuyant sur une base de modèles génériques d'ordres réduits, la méthode aboutit à une formulation d'optimisation mixte  $H_2/H$ -infini semi-analytique de la fonction objectif et de contraintes d'inégalités en termes des gains inconnus du correcteur. Lorsque le système à contrôler est d'ordre élevé, nous proposons une méthode de réduction de modèle avec garantie de marges de robustesse en boucle fermée afin d'obtenir les paramètres des modèles génériques d'ordres réduits. Si le modèle du système à contrôler n'est pas disponible, nous présentons une méthode d'identification expérimentale par la méthode du relais sur la base de modèles génériques.

Dans le but de rendre l'approche proposée plus accessible à un usage industriel, nos développements in fine ont été intégrés à des outils logiciels d'aide à la conception d'un système de commande.

## Mots clés

Système LTI, contrainte pratique, correcteur d'ordre réduit fixé, robustesse, optimisation, modèle générique, réduction de modèle, identification expérimentale, logiciel de synthèse

---

## Title

Contribution to synthesis methods for reduced fixed-order controllers with robustness constraints and to model reduction methods for robust control

## Abstract

LTI systems are subject to physical and technological constraints. We have shown that these constraints limit the achievable bandwidth in closed loop. Consequently, it is sufficient to model and analyze these systems on a limited frequency band, and not on all frequencies, and that low order controllers may give full satisfaction.

In this thesis, we are interested to the design of reduced fixed-order controller with robustness constraints, and to the model reduction for such systems. The proposed method consists in determining a fixed structure controller that optimizes the rejection of a step load disturbance, with respect to robustness constraints, i.e. minimum module margin, minimum phase margin and maximum amplification of measurement noise. Based on a base of reduced-order generic models, the method yields a semi-analytical mixed  $H_2/H$ -infinity optimization formulation with objective function and inequality constraints in terms of controller gains. When the system to be controlled is of high order, to obtain the parameters of generic models, we propose a model reduction method with the guarantee of closed-loop robustness margins. If the system model is not available, we present an experimental identification method by the relay feedback relied on the base of generic models.

In order to make the proposed approach more accessible to industrial use, our developments have been incorporated into software tools to help the control system design.

## Key words

LTI system, practical constraint, reduced fixed-order controller, robustness, optimization, generic model, model reduction, experimental identification, software tool

---

