

**Méthodes asymptotico-numériques
pour des problèmes issus
de la physique des plasmas
et de la modélisation des interactions
sociales**

Laurent Navoret

Soutenance de thèse

Institut de Mathématiques de Toulouse, Université de Toulouse 3 - Paul Sabatier
Mercredi 30 juin 2010

1 Introduction

Problèmes asymptotiques

Limite quasi-neutre dans les plasmas

Limite hydrodynamique avec contrainte géométrique

Limite de congestion

2 Limite quasi-neutre dans les plasmas

Reformulation du système Vlasov-Poisson

Méthode PICAP

Résultats numériques

3 Limite de congestion

Etude de la transition congestionnée/non-congestionnée

Simulations numériques

4 Conclusion

Introduction

Problèmes asymptotiques :

$$P^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} P^0$$

- ⇒ ε paramètre du problème = **échelle** spatiale et temporelle du phénomène physique par rapport à l'observateur
- ⇒ Intérêt de P_0 : “**simplification**” du problème, seule l'information pertinente est conservée

Exemples :

- 1 Physique des plasmas (gaz de particules chargées, ions et électrons)
→ **rapides oscillations des électrons**
- 2 Mouvement collectif dans les populations animales
→ **description macroscopique d'un banc de poissons**

Introduction

Problèmes asymptotiques :

$$P^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} P^0$$

- ⇒ ε paramètre du problème = **échelle** spatiale et temporelle du phénomène physique par rapport à l'observateur
- ⇒ Intérêt de P_0 : “**simplification**” du problème, seule l'information pertinente est conservée

Difficultés :

- limite singulière : P^ε et P^0 ont des natures mathématiques distinctes
→ analyses asymptotiques délicates
- Connaissance de P^0 partielle
→ méthodes numériques préservant l'asymptotique

Introduction

Problèmes asymptotiques :

$$P^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} P^0$$

- ⇒ ε paramètre du problème = **échelle** spatiale et temporelle du phénomène physique par rapport à l'observateur
- ⇒ Intérêt de P_0 : “**simplification**” du problème, seule l'information pertinente est conservée

Méthodes numériques préservant l'asymptotique [Jin] :

- Consistance et stabilité asymptotique
 - ingrédients : reformulation du problème + implication
- Schémas numériques valides pour P^ε et P^0
 - Pas de décomposition de domaine à effectuer

Exemple 1 : Limite quasi-neutre dans les plasmas

Plasma = gaz composé de particules chargées, ions et électrons

- Particules interagissent via leur propre champ électrostatique

Quasi-neutralité :

- Longueur de Debye λ_D : échelle des déséquilibres de charges

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{k_B T_0 \epsilon_0}{e^2 n_0}}$$

- Non neutralité électrique observable à des longueurs $\leq \lambda_D$
- L longueur caractéristique du problème
- $\lambda_D \ll L$: le plasma est quasi-neutre

Limite quasi-neutre dans les plasmas

Echelle temporelle :

Fréquence plasma ω_p : fréquence des oscillations dues aux déséquilibres de charges

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e}}$$

Difficultés numériques : Contraintes de stabilité pour un schéma numérique explicite sont

$$\Delta x \leq \lambda_D, \quad \Delta t \leq (\omega_p)^{-1}$$

Méthode préservant l'asymptotique quasi-neutre¹ : consistance et stabilité avec $\Delta x \geq \lambda_D, \Delta t \geq (\omega_p)^{-1}$

1. [Degond, Deluzet, LN, Sun, Vignal, JCP, 2010]

Exemple 2 : Limite hydrodynamique avec contrainte géométrique

- Contexte : modélisation du mouvement collectif dans les populations animales



Banc de poissons en moulin

Modèle de Vicsek

[Vicsek,95][Degond,Motsch,07]

→ modèle d'alignement

Modèle de Vicsek

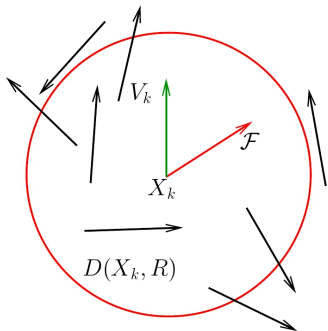
N particules : positions $X_k \in \mathbb{R}^2$, vitesses $V_k \in \mathbb{R}^2$, avec $|V_k| = 1$

$$\frac{dX_k}{dt} = V_k$$

$$dV_k = (Id - V_k \otimes V_k) \left(\nu \bar{V}_k dt + \sqrt{2} dB_t^k \right)$$

V_k = Direction moyenne dans le disque de rayon R

dB_t^k = Bruit blanc



- $|V_k|^2 = 1 \Rightarrow \frac{dV_k}{dt} \perp V_k$

$\Rightarrow (Id - V_k \otimes V_k) =$ matrice de projection orthogonale sur la droite orthogonale à V_k .

- contrainte géométrique**
- Quantité de mouvement non conservée

Modèle de Vicsek

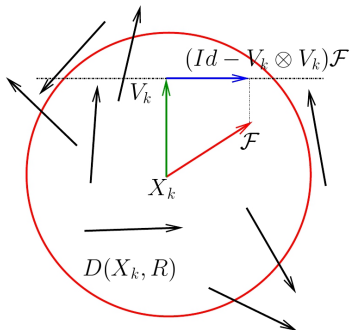
N particules : positions $X_k \in \mathbb{R}^2$, vitesses $V_k \in \mathbb{R}^2$, avec $|V_k| = 1$

$$\frac{dX_k}{dt} = V_k$$

$$dV_k = (Id - V_k \otimes V_k) \left(\nu \bar{V}_k dt + \sqrt{2} dB_t^k \right)$$

V_k = Direction moyenne dans le disque de rayon R

dB_t^k = Bruit blanc



- $|V_k|^2 = 1 \Rightarrow \frac{dV_k}{dt} \perp V_k$

$\Rightarrow (Id - V_k \otimes V_k) =$ matrice de projection orthogonale sur la droite orthogonale à V_k .

- **contrainte géométrique**
- Quantité de mouvement non conservée

Modèle macroscopique de Vicsek

Dynamique à grande échelle?

Difficulté : manque des lois de conservation

Modèle macroscopique de Vicsek obtenu par **limite hydrodynamique** [Degond, Motsch, 07], à l'aide des invariants collisionnels généralisés

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (c_1 \rho u) = 0$$

$$\partial_t u + c_2 u \cdot \nabla_x u = \frac{d}{\nu} (Id - u \otimes u) \frac{\nabla_x \rho}{\rho}$$

$$|u| = 1$$

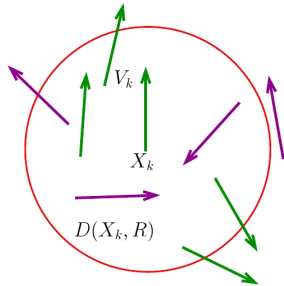
→ dynamique des quantités macroscopiques : densité $\rho(x, t)$, direction moyenne $u(x, t)$.

Extension du modèle

- Objectif : modéliser le déplacement des moutons
- Deux populations : particules immobiles $\eta_k = 0$
particules mobiles $\eta_k = 1$

1- Modèle de Vicsek au sein des deux populations

2- Passages de l'état immobile à l'état mobile : η_k processus de saut markovien avec un taux de transition dépendant de l'alignement local avec la population cible



→ Dérivation de la dynamique macroscopique lorsque les interactions de Vicsek prédominent sur les changement d'état :

- Equilibres : $\rho = \rho_0 + \rho_1 = k(\rho_1)$ et $\Omega_0 = \pm\Omega_1$
- Modèle macroscopique non conservatif

Analyse numérique du modèle macroscopique de Vicsek²

- Système hyperbolique non-conservatif

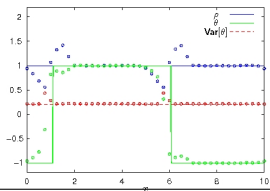
$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (c_1 \rho u) = 0$$

$$\partial_t u + c_2 u \cdot \nabla_x u = \frac{d}{\nu} (Id - u \otimes u) \frac{\nabla_x \rho}{\rho}, \quad |u| = 1$$

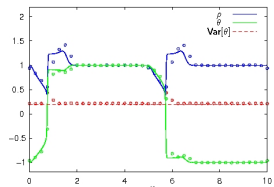
- Multitude de solution : non-unicité des solutions (discontinues)
 - problème asymptotique **incomplet**
 - quelle solution sélectionner ?

Méthode : Utilisation du schéma numérique pour sélectionner la “bonne” solution : celle qui correspond au système particulaire

Méthode conservative



Méthode de splitting



Exemple 3 : Limite de congestion³

Contexte : mouvement collectif dans les populations animales



- **congestion** : contrainte de non-chevauchement des particules
 - existence d'une **densité maximale** ρ^*
 - transition entre les zones congestionnées et les zones non-congestionnées

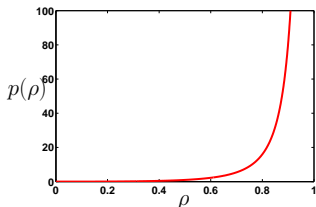
Force de répulsion singulière

Modèle macroscopique : système hyperbolique non-conservatif

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho \Omega) = 0$$

$$\partial_t \Omega + (\Omega \cdot \nabla_x) \Omega + (Id - \Omega \otimes \Omega) \mathcal{F}_r = (Id - \Omega \otimes \Omega) \mathcal{F}_a$$

$$\mathcal{F}_r(\rho) = \nabla_x p(\rho) \quad \text{et} \quad p(\rho) \rightarrow +\infty \text{ lorsque } \rho \rightarrow \rho^*$$



Modèle asymptotique : transition entre des régions compressibles et des régions incompressibles

→ Dynamique de cette transition ?

Modèle asymptotique incomplet : analyse plus fine pour le compléter
analyse numérique

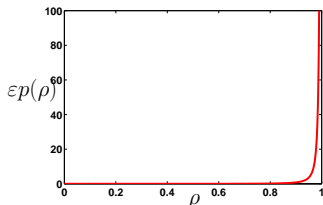
Force de répulsion singulière

Modèle macroscopique : système hyperbolique non-conservatif

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho \Omega) = 0$$

$$\partial_t \Omega + (\Omega \cdot \nabla_x) \Omega + (Id - \Omega \otimes \Omega) \mathcal{F}_r = (Id - \Omega \otimes \Omega) \mathcal{F}_a$$

$$\mathcal{F}_r(\rho) = \nabla_x p(\rho) \quad \text{et} \quad p(\rho) \rightarrow +\infty \text{ lorsque } \rho \rightarrow \rho^*$$



Modèle asymptotique : transition entre des régions compressibles et des régions incompressibles

→ Dynamique de cette transition ?

Modèle asymptotique incomplet : analyse plus fine pour le compléter
analyse numérique

Plan

1 Introduction

Problèmes asymptotiques

Limite quasi-neutre dans les plasmas

Limite hydrodynamique avec contrainte géométrique

Limite de congestion

2 Limite quasi-neutre dans les plasmas

Reformulation du système Vlasov-Poisson

Méthode PICAP

Résultats numériques

3 Limite de congestion

Etude de la transition congestionnée/non-congestionnée

Simulations numériques

4 Conclusion

Système Vlasov-Poisson

But : Méthode préservant l'asymptotique quasi-neutre

Hypothèse : ions immobiles, de densité n_0

- $f(x, v, t)$ densité d'électrons pour des temps $t \geq 0$ dans l'espace des phases : positions $x \in \mathbb{R}^d$, vitesses $v \in \mathbb{R}^d$.
- Système Vlasov-Poisson

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_x \phi \cdot \nabla_v f = 0 \quad (\text{équation de Vlasov})$$

$$\lambda \Delta_x \phi = n_0 - n \quad (\text{équation de Poisson})$$

- $\lambda = \lambda_D / L$: longueur de Debye adimensionnée
densité des électrons : $n = \int f \, dv$
 - Lorsque $\lambda \rightarrow 0$, **équation de Poisson dégénère** : $n_0 - n = 0$
 - on perd numériquement la possibilité de calculer le potentiel
 - **Reformulation de l'équation de Poisson**

Equation de Poisson de reformulée

Equation sur les moments : **densité** $n(x, t) = \int f(x, v, t) dv$

quantité de mouvement $nu(x, t) = \int f(x, v, t) v dv$

$$\partial_t n + \nabla_x \cdot nu = 0$$

$$\partial_t(nu) + \nabla_x \cdot S = n \nabla_x \cdot \phi, \quad S = \int f(x, v, t) (v \otimes v) dv$$

Reformulation de l'équation de Poisson

- 1 Dériver en temps l'éq. densité

$$\partial_t^2 n + \partial_t \nabla_x \cdot nu = 0$$

- 2 Dériver en espace l'éq. quantité de mouvement

$$\partial_t \nabla_x (nu) + \nabla_x^2 \cdot S = \nabla_x \cdot (n \nabla_x \cdot \phi)$$

- 3 Soustraire les deux équations obtenues et utiliser l'équation de Poisson $\lambda^2 \Delta_x \phi = n_0 - n$

On obtient l'**équation de Poisson reformulée** :

$$\nabla_x \cdot ((\lambda^2 \partial_t^2 + n) \nabla_x \cdot \phi) = -\nabla_x^2 : S$$

→ Ne dégénère pas quand $\lambda \rightarrow 0$

Principe de la méthode PIC

Méthode Particle-In-Cell (PIC)

- On approche la distribution initiale par des particules numériques

$$f_0(x, v) = \sum_i \omega_i \delta(x - x_i(0)) \otimes \delta(v - v_i(0))$$

- La solution associée est alors

$$f(x, v, t) = \sum_i \omega_i \delta(x - X_i(t)) \otimes \delta(v - V_i(t))$$

$$\frac{dX_i}{dt}(t) = V(t)$$

$$X_i(0) = x_i(0)$$

$$\frac{dV_i}{dt}(t) = \nabla_x \phi(X_i(t), t)$$

$$V_i(0) = v_i(0)$$

→ Discrétisation des équations de Newton

→ Calcul du potentiel ϕ sur un maillage spatial grâce une discrétisation de l'équation de Poisson

PIC classique et PIC AP

Méthode PIC classique :

- 1 méthode explicite

$$\frac{X_i^{m+1} - X_i^m}{\Delta t} = V_i^{m+1} \quad \frac{V_i^{m+1} - V_i^m}{\Delta t} = \nabla_x \phi^m(X_i)$$

- 2 Discrétisation (diff. finies) de l'équation de Poisson :

$$\lambda^2 \Delta_x \phi^m = n_0 - n^m$$

Méthode PIC AP :

- 1 méthode **semi-implicite** → **Stabilité**

$$\frac{X_i^{m+1} - X_i^m}{\Delta t} = V_i^{m+1} \quad \frac{V_i^{m+1} - V_i^m}{\Delta t} = \nabla_x \phi^{m+1}(X_i)$$

- 2 Discrétisation (diff. finies) de l'équation de Poisson reformulée :

$$\lambda^2 \frac{\Delta_x \phi^{m+1} - 2\Delta_x \phi^m + \Delta_x \phi^{m-1}}{\Delta t^2} - \nabla_x \cdot (n^m \nabla_x \phi^{m+1}) = -\nabla_x^2 : S^m$$

Schémas PIC AP

Deux stratégies :

- **PICAP 1** : utiliser l'équation de Poisson $\lambda^2 \Delta_x \phi^m = n_0 - n^m$
 $\lambda^2 \Delta_x \phi^{m-1} = n_0 - n^{m-1}$

$$\lambda^2 \frac{\Delta_x \phi^{m+1} - 2(n_0 - n^m) + \Delta_x (n_0 - n^{m-1})}{\Delta t^2} - \nabla_x \cdot (n^m \nabla_x \phi^{m+1}) = -\nabla_x^2 : S^m$$

→ pour calculer ϕ^1 , valeur de n^1 ?

- **PICAP 2** : utiliser l'éq. densité $n^m - n^{m1} = (\Delta t) \Delta_x \cdot (nu)^m$

$$\lambda^2 \frac{\Delta_x \phi^{m+1} - (n_0 - n^m) + (\Delta t) \Delta_x \cdot (nu)^m}{\Delta t^2} - \nabla_x \cdot (n^m \nabla_x \phi^{m+1}) = -\nabla_x^2 : S^m$$

Remarque : 1) Consistance $\lambda \rightarrow 0$ avec l'équation de Poisson reformulée
2) même coût que la méthode classique

Résultats numériques

- Comparaison avec la méthode Direct-Implicit [Langdon,83] (méthode de prédiction correction)
- Cas test d'expansion de plasma : électrons + ions (5×10^6 particules)

Ions :

$$f_{i0}(x, v) = n_{i0}(x)M_i(v), \quad n_{i0} = \begin{cases} n_0 & \text{pour } 0 \leq x \leq 20\lambda \\ 0 & \text{pour } x \geq 20\lambda \end{cases}$$

Electrons :

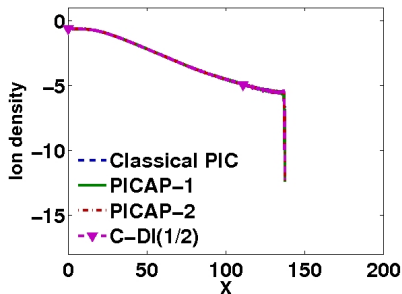
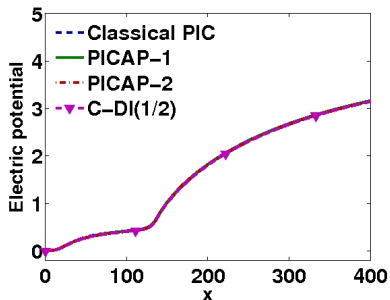
$$f_{e0}(x, v) = n_{e0}(x)M_e(v), \quad n_{e0} = n_0 \exp(\phi)$$

M_i, M_e : maxwelliennes

Résultats numériques

- Comparaison avec la méthode Direct-Implicit [Langdon,83] (méthode de prédiction correction)
- Cas test d'expansion de plasma : électrons + ions (5×10^6 particules)

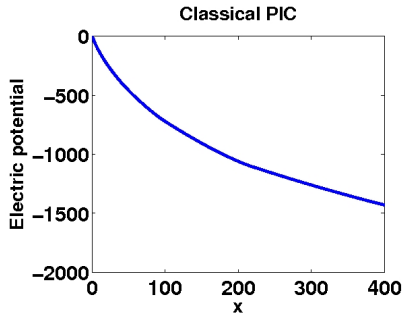
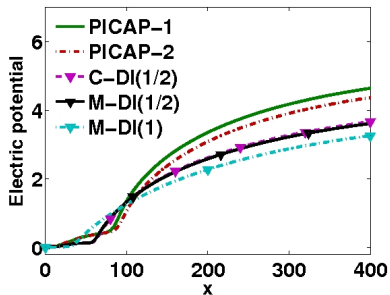
Cas résolu, $\Delta t = 0.05\omega^1$, $\Delta x = 0.2\lambda$



Résultats numériques

- Comparaison avec la méthode Direct-Implicit [Langdon,83] (méthode de prédiction correction)
- Cas test d'expansion de plasma : électrons + ions (5×10^6 particules)

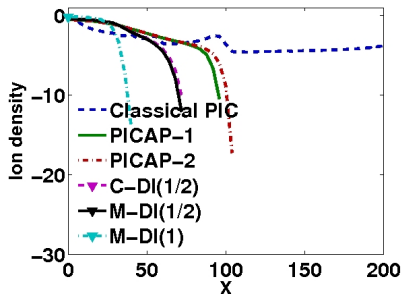
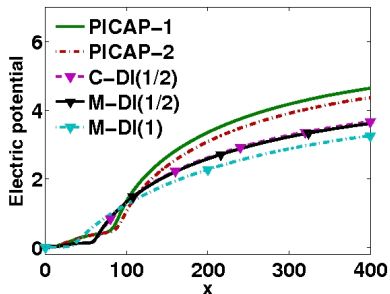
Cas sous-résolu, $\Delta t = 3\omega^{-1}$, $\Delta x = 4\lambda$



Résultats numériques

- Comparaison avec la méthode Direct-Implicit [Langdon,83] (méthode de prédiction correction)
- Cas test d'expansion de plasma : électrons + ions (5×10^6 particules)

Cas sous-résolu, $\Delta t = 3\omega^{-1}$, $\Delta x = 4\lambda$



Plan

1 Introduction

Problèmes asymptotiques

Limite quasi-neutre dans les plasmas

Limite hydrodynamique avec contrainte géométrique

Limite de congestion

2 Limite quasi-neutre dans les plasmas

Reformulation du système Vlasov-Poisson

Méthode PICAP

Résultats numériques

3 Limite de congestion

Etude de la transition congestionnée/non-congestionnée

Simulations numériques

4 Conclusion

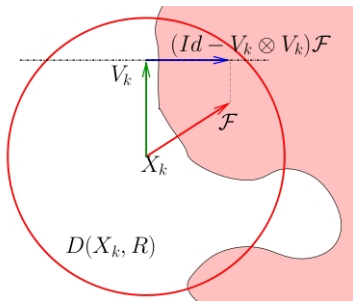
Dérivation du modèle macroscopique

Contexte : mouvement collectif dans les populations animales

- modèle d'attraction-répulsion (sans alignement)
- N particules : positions $X_k \in \mathbb{R}^2$
vitesses $V_k \in \mathbb{R}^2$, avec $|V_k| = 1$

$$\frac{dX_k}{dt} = V_k$$

$$\frac{dV_k}{dt} = (\text{Id} - V_k \otimes V_k) \left(\underbrace{\mathcal{F}_k^a}_{\text{attraction}} - \underbrace{\mathcal{F}_k^r}_{\text{répulsion}} \right)$$



- \mathcal{F}_k^a dans la direction du centre de masse dans le disque de rayon R_a
- \mathcal{F}_k^r dans la direction du centre de masse dans le disque de rayon R_r

$$R_r < R_a$$

Dérivation du modèle macroscopique

Force de répulsion singulière :

- $F_k^r = \nu_k^r \xi_k^r$
- $\xi_k =$ barycentre de la distribution de masse dans $D(X_k, R_r)$
- l'intensité ν_k dépend de la densité de particules présentes dans le disque de répulsion

$$\nu_k^r = \nu^r \left(\frac{\pi d^2 \sum_{j, |X_j - X_k| \leq R_r} 1}{\pi R_r^2} \right) \quad \begin{array}{l} \nu_r \text{ tend vers } +\infty \text{ quand la densité locale} \\ \text{tend vers la densité maximale} \end{array}$$

Dérivation de la dynamique à grande échelle :

- Limite hydrodynamique : changement d'échelle de description

$$\tilde{x} = \eta x, \quad \tilde{t} = \eta t$$

$R_r = O(\eta) \rightarrow$ force de répulsion locale

$R_a = O(1) \rightarrow$ force d'attraction non locale

- Fermeture monocinétique

Modèle macroscopique et congestion

Modèle pour la densité $\rho(x, t)$, direction $u(x, t) \in \mathbb{S}^1$

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot \rho u = 0,$$

$$\partial_t u + u \cdot \nabla_x u + (Id - u \otimes u) \nabla_x p(\rho) = (Id - u \otimes u) \mathcal{F}_a$$

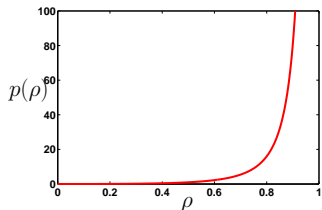
$$|u| = 1$$

Pression singulière : $p(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \rho^*} +\infty$

Apparition de deux dynamiques :

Pour $\rho < \rho^* \rightarrow$ faible répulsion

Pour $\rho \sim \rho^* \rightarrow$ congestion



Pour accentuer cette différence : $p \rightarrow \varepsilon p$

- pour $\rho < \rho^*$, $\varepsilon p(\rho^\varepsilon) = O(\varepsilon)$

- $\varepsilon p(\rho^\varepsilon(x, t)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \text{si } \rho^\varepsilon(x, t) \rightarrow \rho < \rho^* \\ \bar{p}(x, t) \in [0, +\infty[& \text{si } \rho^\varepsilon(x, t) \rightarrow \rho^* \end{cases}$

$\Rightarrow \bar{p}$ nouvelle inconnue du problème dans les zones congestionnées

Modèle macroscopique et congestion

Modèle pour la densité $\rho(x, t)$, direction $u(x, t) \in \mathbb{S}^1$

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot \rho u = 0,$$

$$\partial_t u + u \cdot \nabla_x u + (Id - u \otimes u) \nabla_x p(\rho) = 0$$

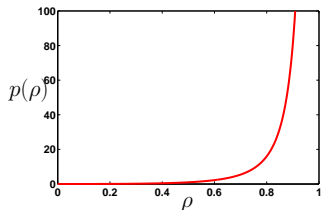
$$|u| = 1$$

Pression singulière : $p(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \rho^*} +\infty$

Apparition de deux dynamiques :

Pour $\rho < \rho^* \rightarrow$ faible répulsion

Pour $\rho \sim \rho^* \rightarrow$ congestion



Pour accentuer cette différence : $p \rightarrow \varepsilon p$

- pour $\rho < \rho^*$, $\varepsilon p(\rho^\varepsilon) = O(\varepsilon)$

- $\varepsilon p(\rho^\varepsilon(x, t)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \text{si } \rho^\varepsilon(x, t) \rightarrow \rho < \rho^* \\ \bar{p}(x, t) \in [0, +\infty[& \text{si } \rho^\varepsilon(x, t) \rightarrow \rho^* \end{cases}$

$\Rightarrow \bar{p}$ nouvelle inconnue du problème dans les zones congestionnées

Modèle macroscopique et congestion

Modèle pour la densité $\rho(x, t)$, direction $u(x, t) \in \mathbb{S}^1$

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot \rho u = 0,$$

$$\partial_t u + u \cdot \nabla_x u + (Id - u \otimes u) \nabla_x p(\rho) = 0$$

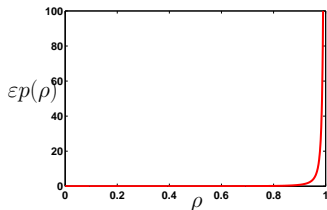
$$|u| = 1$$

Pression singulière : $p(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \rho^*} +\infty$

Apparition de deux dynamiques :

Pour $\rho < \rho^* \rightarrow$ faible répulsion

Pour $\rho \sim \rho^* \rightarrow$ congestion



Pour accentuer cette différence : $p \rightarrow \varepsilon p$

- pour $\rho < \rho^*$, $\varepsilon p(\rho^\varepsilon) = O(\varepsilon)$

- $\varepsilon p(\rho^\varepsilon(x, t)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \text{si } \rho^\varepsilon(x, t) \rightarrow \rho < \rho^* \\ \bar{p}(x, t) \in [0, +\infty[& \text{si } \rho^\varepsilon(x, t) \rightarrow \rho^* \end{cases}$

$\Rightarrow \bar{p}$ nouvelle inconnue du problème dans les zones congestionnées

Modèle biphasique

Modèle macroscopique :

$$\partial_t \rho^\varepsilon + \nabla_x \cdot \rho^\varepsilon u^\varepsilon = 0$$

$$\partial_t u^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla_x u^\varepsilon + (Id - u^\varepsilon \otimes u^\varepsilon) \varepsilon \nabla_x p(\rho^\varepsilon) = 0$$

$$|u^\varepsilon| = 1$$

- $\varepsilon p(\rho^\varepsilon(x, t)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \text{si } \rho^\varepsilon(x, t) \rightarrow \rho < \rho^* \\ \bar{p}(x, t) \in [0, +\infty[& \text{si } \rho^\varepsilon(x, t) \rightarrow \rho^* \end{cases}$
- Dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, deux phases :

Dans la **phase diluée** $\rho < \rho^*$,

$$|u| = 1$$

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot \rho u = 0$$

$$\partial_t u + u \cdot \nabla_x u = 0$$

$$\bar{p} = 0$$

Dans la **phase congestionnée** $\rho = \rho^*$

$$|u| = 1$$

$$\rho = \rho^*, \quad \nabla_x \cdot u = 0$$

$$\partial_t u + u \cdot \nabla_x u$$

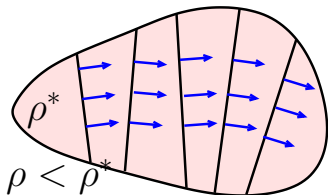
$$+ (Id - u \otimes u) \nabla_x \bar{p} = 0$$

Dynamique des gaz sans pression

Euler incompressible

La phase congestionnée

- Euler incompressible avec contrainte sur le module de la vitesse
- $\nabla_x \cdot u = 0$ et $|u| = 1$
 - u constant sur les droites orthogonales à u
 - u est constant



- équation elliptique satisfaite par \bar{p} sur chaque droite

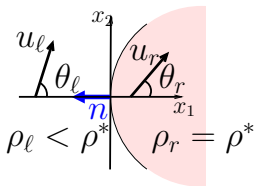
$$-\nabla_x \cdot ((Id - u \otimes u) \nabla_x \bar{p}) = \nabla_x^2 : (u \otimes u)$$

- conditions aux limites? Non fournies par l'analyse asymptotique formelle
- modèle asymptotique **incomplet**

Conditions à l'interface

- Résolution du problème de Riemann 1D à travers l'interface entre les régions congestionnées $C_t = \{x, \rho(x) = \rho^*\}$ et les régions diluées

$$\cos \theta = u \cdot n$$



- Le système 1D avec $\varepsilon > 0$ est non conservatif
→ il existe une forme conservative

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho \cos \theta) = 0$$

$$\partial_t \Psi(\cos \theta) + \partial_x (\Phi(\cos \theta) + \varepsilon p(\rho)) = 0$$

$$\Psi(u) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+u}{1-u} \right), \quad \Phi(u) = -\log \left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \right)$$

- non unicité de la forme conservative
mais des caractéristiques communes

Conditions à l'interface

- Limite $\varepsilon \rightarrow 0$ des solutions des problèmes de Riemann (analyse du comportement géométrique de courbes de raréfaction et de choc)
- interface **Congestionnée** ($\rho = \rho^*$) / **diluée** ($0 < \rho < \rho^*$)
→ les conditions de Rankine-Hugoniot donnent le saut de pression et la vitesse à l'interface

$$\bar{p}|_{\partial C_t} = \frac{[\Psi(u \cdot n)][\rho(u \cdot n)]}{[\rho]} - [\Phi(u \cdot n)]$$
$$\sigma = \frac{[\rho(u \cdot n)]}{[\rho]}$$

- interface **Congestionnée** ($\rho = \rho^*$) / **Vide** ($\rho = 0$)

$$\bar{p}|_{\partial C_t} = 0$$
$$\sigma = u \cdot n$$

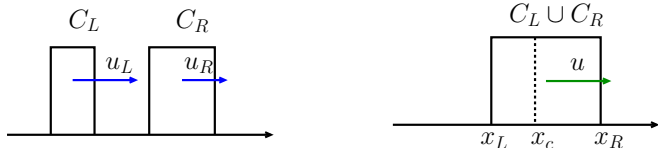
Conditions à l'interface

- **Collision** entre deux régions **congestionnée**

→ problème de Riemann ne fournit pas de solution : $\bar{p} = \infty$

→ en 1D, collision entre deux domaines congestionnés de taille finis avec un Dirac en temps sur la pression

- $\bar{p} = \pi(x)\delta(t - t_c)$, t_c instant de collision



- u déterminée par

$$(\Psi(u) - \Psi(u_L))(x_c - x_L) + (\Psi(u) - \Psi(u_R))(x_R - x_c) = 0$$

- analogie avec les modèles biphasiques [Bouchut et al.]

→ en 2D, géométrie de la collision plus compliquée...

→ **analyse asymptotique incomplète**

Simulations numériques⁴

- Simulations numériques
- Sans contrainte sur la vitesse : système d'Euler avec pression singulière

$$u \in \mathbb{R}^2$$

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho u) = 0$$

$$\partial_t(\rho u) + \nabla_x \cdot (\rho u \otimes u) + \varepsilon \nabla_x p(\rho) = 0$$

- Schémas préservant l'asymptotique $\varepsilon \rightarrow 0$
 - **grande vitesse d'onde** dans les domaines incompressibles :
limite bas-Mach dans les domaines congestionnés
 - la stabilité requiert de l'implicite
 - **capturer** numériquement la dynamique de l'interface

Méthode semi-implicite :

- ① Implicite pour la densité ρ :

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \nabla_x \cdot (\rho u)^{n+1} = 0$$

- ② semi-implicite pour la quantité de mouvement ρu :

$$\frac{(\rho u)^{n+1} - (\rho u)^n}{\Delta t} + \nabla_x \cdot \left(\frac{(\rho u)^n \otimes (\rho u)^n}{\rho^n} \right) + \varepsilon \nabla_x p(\rho^{n+1}) = 0,$$

En injectant l'éq. sur ρu dans l'éq. sur ρ , on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \rho^{n+1} - (\Delta t^2)\varepsilon \Delta_x p(\rho^{n+1}) &= \rho^n - (\Delta t) \nabla_x \cdot (\rho u)^n \\ &\quad + (\Delta t^2) \nabla_x^2 : \left(\frac{(\rho u)^n \otimes (\rho u)^n}{\rho^n} \right) \end{aligned}$$

→ résolution en la variable p , inverser $p(\rho)$

→ **contrainte sur la densité maximale satisfaite**

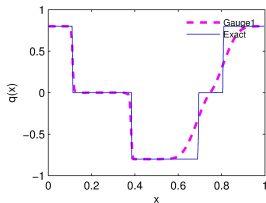
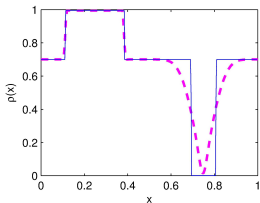
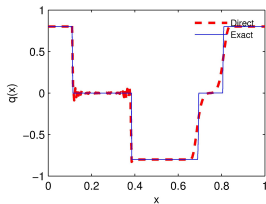
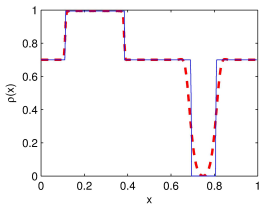
Simulations numériques

Méthode directe

- adaptation de la méthode [Degond,Min]
- splitting : pression explicite $p_0(\rho^n)$ et pression implicite $p_1(\rho^{n+1})$

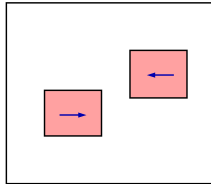
Méthode de jauge

- méthode directe + décomposition de Hodge [Degond,Liu]

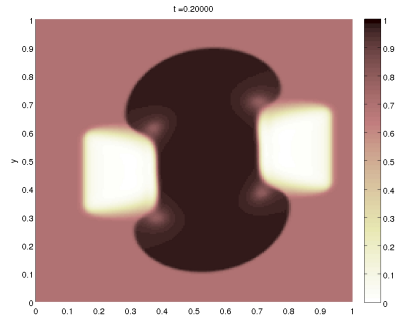
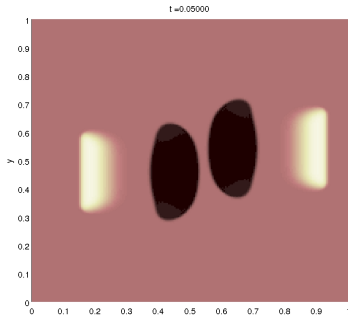


Simulations numériques

- Condition initiale : $\rho_0(x) = 0.7$



- Collision



Plan

1 Introduction

Problèmes asymptotiques

Limite quasi-neutre dans les plasmas

Limite hydrodynamique avec contrainte géométrique

Limite de congestion

2 Limite quasi-neutre dans les plasmas

Reformulation du système Vlasov-Poisson

Méthode PICAP

Résultats numériques

3 Limite de congestion

Etude de la transition congestionnée/non-congestionnée

Simulations numériques

4 Conclusion

Conclusion

- Analyse asymptotique : modèle de Vicsek, limite de congestion
- Méthodes numériques préservant les asymptotiques

Perspectives :

- Dissipation de l'énergie cinétique → amélioration de la méthode PICAP
- Analyse de paramètres du modèle d'attraction-répulsion microscopique
- Ajouter la congestion dans le modèle de Vicsek

Remerciements

Mes directeurs de thèse : Pierre Degond & David Sanchez

Les membres de mon jury :

Naoufel Ben Abdallah	Frédéric Pascal
Didier Bresch	Olivier Pironneau
Bertrand Maury	Guy Theraulaz

Tous mes collaborateurs (IMT,CRCA)