



**HAL**  
open science

# Modélisation tridimensionnelle d'impacts hydrodynamiques pour l'étude du tossage des bulbes d'étrave

Alan Tassin

► **To cite this version:**

Alan Tassin. Modélisation tridimensionnelle d'impacts hydrodynamiques pour l'étude du tossage des bulbes d'étrave. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université de Bretagne occidentale - Brest, 2010. Français. NNT: . tel-00569015

**HAL Id: tel-00569015**

**<https://theses.hal.science/tel-00569015>**

Submitted on 24 Feb 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT**  
**de l'UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE**

sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne

ÉCOLE DOCTORALE SICMA [E.D. 373]

Mention :

**Sciences Pour l'Ingénieur**

Spécialité :

**Mécanique des Matériaux, des Structures et des Fluides**

Présentée par :

**Alan TASSIN**

**Modélisation tridimensionnelle d'impacts  
hydrodynamiques pour l'étude du tossage des bulbes  
d'étrave.**

Soutenue le 30 novembre 2010 devant le jury composé de :

|                      |                                    |                     |
|----------------------|------------------------------------|---------------------|
| M. Yves-Marie SCOLAN | Ecole Centrale de Marseille        | <i>Rapporteur</i>   |
| M. M'hamed SOULI     | Université Lille 1                 | <i>Rapporteur</i>   |
| M. Pierre FERRANT    | Ecole Centrale de Nantes           | <i>Examineur</i>    |
| M. Blaise NSOM       | Université de Bretagne Occidentale | <i>Examineur</i>    |
| M. Jean-Marc LAURENS | ENSIETA                            | <i>Directeur</i>    |
| M. Nicolas JACQUES   | ENSIETA                            | <i>Co-encadrant</i> |
| M. Alain NÊME        | ENSIETA                            | <i>Invité</i>       |
| M. Bruno LEBLÉ       | DCNS                               | <i>Invité</i>       |

Laboratoire Brestois de Mécanique et des Systèmes EA4325  
ENSIETA/Université de Bretagne Occidentale/ENIB  
2 rue François Verny, 29806 Brest Cedex 9



A ma mère





---

# Remerciements

Je remercie les membres du jury d'avoir participé à ma soutenance et particulièrement Yves-Marie Scolan et M'hamed Souli qui ont bien voulu être rapporteurs de ma thèse. Je remercie Nicolas Jacques, vaillant encadrant de mon travail, pour sa compétence, sa disponibilité et sa patience. Merci également à Alain Nême, qui a su être là quand il le fallait. Je remercie Bruno Leblé, Ghislaine Coat, Marc Paugam et l'ensemble du service CSB pour leur accueil et leur précieuse aide à l'intégration dans l'entreprise DCNS.

Je remercie l'ensemble des membres du Laboratoire Brestois de Mécanique et des Systèmes et particulièrement mes compagnons de route thésards. Mes chaleureuses pensées vont à ceux qui sauront les recevoir, au risque d'en oublier certains. Merci de l'accueil au rez-de-chaussée, merci aux relecteurs, merci à Aboulghit pour tous ces beaux essais.

Je remercie ma famille et mes amis pour leur présence avant, pendant et après ces événements importants de la vie. Merci aux personnes qui m'ont motivé à poursuivre dans cette voie que je n'osais prendre.





---

# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| Remerciements  | iii       |
| Table des matières   | v         |
| Table des figures  | ix        |
| Liste des tableaux   | xiii      |
| Nomenclature   | xv        |
| <b>1 Introduction</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1 L'impact hydrodynamique  | 1         |
| 1.1.1 Importance des problèmes d'impact hydrodynamique dans le domaine naval         | 1         |
| 1.1.2 Autres problèmes d'impact hydrodynamique                                       | 6         |
| 1.1.3 Le cas des bulbes d'étrave   | 7         |
| 1.2 Travaux existants sur la modélisation d'impacts hydrodynamiques tridimensionnels | 8         |
| 1.2.1 Simulations numériques basées sur des approches de type CFD                    | 9         |
| 1.2.2 Modèles simplifiés   | 11        |
| 1.3 Orientation des travaux et organisation du mémoire                               | 13        |
| <b>2 Résolution du problème de Wagner tridimensionnel</b>                            | <b>15</b> |
| 2.1 Théorie de Wagner  | 15        |
| 2.1.1 Ecoulement potentiel non linéarisé au cours d'un impact                        | 15        |
| 2.1.2 Problèmes de Wagner bidimensionnel et axisymétrique                            | 16        |
| 2.1.3 Problème de Wagner tridimensionnel   | 21        |
| 2.2 Méthode de résolution du problème de Wagner tridimensionnel                      | 21        |
| 2.2.1 Principe de la méthode   | 22        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 2.2.2    | Modèle éléments de frontière pour le calcul de l'élévation de la surface libre . . . . .              | 26        |
| 2.2.3    | Algorithme de résolution du système non linéaire 2.21 . . . . .                                       | 31        |
| 2.2.4    | Conditions initiales : $\mathbf{A}^{(0)}$ . . . . .   | 32        |
| 2.2.5    | Validation de la méthode de résolution du problème de Wagner 3D . . . . .                             | 33        |
| 2.3      | Conclusion . . . . .  | 41        |
| <b>3</b> | <b>Calcul de la pression hydrodynamique d'impact</b>  | <b>43</b> |
| 3.1      | Modèle de Logvinovich modifié tridimensionnel (MLM 3D) . . . . .                                      | 44        |
| 3.2      | Calcul du potentiel des vitesses de Wagner $\varphi^{(w)}$ . . . . .                                  | 45        |
| 3.2.1    | Equation intégrale pour le calcul de $\varphi^{(w)}$ . . . . .  | 45        |
| 3.2.2    | Solution analytique approchée pour $\varphi^{(w)}$ . . . . .  | 46        |
| 3.2.3    | Exemples de calculs de $\varphi^{(w)}$ pour des surfaces asymétriques . . . . .                       | 47        |
| 3.3      | Dérivation de $\phi$ . . . . .  | 52        |
| 3.3.1    | Calcul de $\hat{\varphi}_{,t}^{(w)}$ . . . . .  | 52        |
| 3.3.2    | Calcul de $\nabla\hat{\varphi}^{(w)}$ . . . . .   | 53        |
| 3.4      | Résumé . . . . .  | 53        |
| <b>4</b> | <b>Essais et simulations numériques par éléments finis d'impacts hydrodynamiques tridimensionnels</b> | <b>55</b> |
| 4.1      | Essais d'impacts hydrodynamiques . . . . .  | 55        |
| 4.1.1    | Moyen d'essai . . . . .   | 55        |
| 4.1.2    | Maquettes étudiées . . . . .  | 59        |
| 4.1.3    | Répétabilité des essais . . . . .   | 62        |
| 4.2      | Simulations numériques par éléments finis d'impacts hydrodynamiques . . . . .                         | 67        |
| 4.2.1    | Outil de calcul . . . . .   | 67        |
| 4.2.2    | Influence du maillage . . . . .   | 70        |
| 4.2.3    | Influence de la raideur de contact . . . . .  | 73        |
| 4.2.4    | Comparaison des résultats de simulation avec quelques résultats de la littérature . . . . .           | 73        |
| <b>5</b> | <b>Etude d'impacts hydrodynamiques tridimensionnels</b>   | <b>77</b> |
| 5.1      | Formes tridimensionnelles ayant deux plans de symétrie . . . . .                                      | 78        |
| 5.1.1    | Paraboloïde elliptique . . . . .  | 78        |
| 5.1.2    | Dièdre-cône . . . . .   | 80        |
| 5.1.3    | Pyramide . . . . .  | 83        |
| 5.1.4    | Cylindre-Sphère . . . . .   | 84        |
| 5.2      | Formes tridimensionnelles ayant un seul plan de symétrie . . . . .                                    | 85        |
| 5.2.1    | Cône incliné . . . . .  | 85        |
| 5.2.2    | Cône asymétrique . . . . .  | 86        |
| 5.2.3    | Paraboloïde asymétrique . . . . .   | 91        |
| 5.3      | Cône avec vitesse d'avance . . . . .  | 93        |
| 5.4      | Conclusion . . . . .  | 97        |

---

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 5.4.1    | Avantages...   | 97         |
| 5.4.2    | ... et limites du modèle proposé   | 98         |
| 5.4.3    | Voie possible d'amélioration du modèle concernant la prise en compte de la vitesse d'avance    | 98         |
| <b>6</b> | <b>Conclusions et perspectives</b>   | <b>101</b> |
| 6.1      | Conclusions  | 101        |
| 6.2      | Perspectives   | 102        |
| <b>A</b> | <b>Comparaison de différents modèles analytiques d'impact hydrodynamique</b>                   | <b>105</b> |
| <b>B</b> | <b>Représentation intégrale du potentiel des vitesses de Wagner <math>\varphi^{(w)}</math></b> | <b>123</b> |
| B.1      | Ecriture de l'équation intégrale 3.9 régissant $\varphi^{(w)}$                                 | 123        |
| B.2      | Passage à la limite de l'équation 3.10 régissant $\varphi_{,z}^{(w)}$                          | 124        |
|          | <b>Références</b>  | <b>127</b> |





---

# Table des figures

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1.1  | Tossage de la frégate De Grasse. . . . .   | 3  |
| 1.2  | Endommagement du catamaran à grande vitesse HSS 1500 Stena suite à un impact hydrodynamique de type <i>wetdeck slamming</i> (Lavroff <i>et al.</i> (2010)). . . . .  | 4  |
| 1.3  | Concept d'étrave X-bow pour réduire les effets du slamming (source : <a href="http://www.ulsteingroup.com">http://www.ulsteingroup.com</a> ). . . . .  | 4  |
| 1.4  | Illustration du phénomène de ballonnement (Colagrossi <i>et al.</i> (2006)). . .   | 5  |
| 1.5  | Maillage d'une structure de plate-forme flottante (Malenica <i>et al.</i> (2010)).   | 5  |
| 1.6  | Essais d'impacts de vagues sur une structure cylindrique circulaire verticale (Zang <i>et al.</i> (2010)). . . . .   | 5  |
| 1.7  | Amerrissage d'urgence d'un avion de ligne A320 sur la rivière Hudson en 2009 (source : <a href="http://en.wikipedia.org/wiki/US_Airways_Flight_1549">http://en.wikipedia.org/wiki/US_Airways_Flight_1549</a> ) . . . . . | 6  |
| 1.8  | Essai d'impact sur l'eau en chute libre d'un hélicoptère (Toso (2009)). . .  | 6  |
| 1.9  | Capsule Apollo à l'approche de l'amerrissage (Wang et Lyle (2007)). . .  | 7  |
| 1.10 | Vue de la partie du bulbe d'étrave en composite de la frégate anti-sous-marine Primauguet (source : Naval Experts de Juin 2009, magazine externe de DCNS). . . . .   | 8  |
| 1.11 | Distribution de pression sur une carène obtenue par Schellin et el Moctar (2007) à l'aide de la méthode VOF. . . . .   | 10 |
| 1.12 | Simulation SPH de l'impact d'une carène sur l'eau (Maruzewski <i>et al.</i> (2009)). . . . .   | 10 |
| 1.13 | Simulation de l'amerrissage de la capsule Apollo par Wang et Lyle (2007) à l'aide du code de calcul par éléments finis LS-DYNA. . . . .  | 10 |
| 1.14 | Comparaison de la surface de contact obtenue par Takagi (2004) avec la solution analytique exacte de Scolan et Korobkin (2001) pour un paraboloïde elliptique. . . . .   | 12 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1.15 | Solution du problème de Wagner pour une pyramide obtenue par Gazzola (2007).   | 12 |
| 2.1  | Simplification du corps impactant en plaque plane. $\mathbf{U}$ représente la vitesse au sein du domaine fluide  | 16 |
| 2.2  | Ecoulement instantané idéalisé selon la théorie de Wagner  | 17 |
| 2.3  | Géométrie de la surface du fluide idéalisée selon la théorie de Wagner   | 18 |
| 2.4  | Discontinuité de déplacement engendrée par une erreur sur le rayon de la surface mouillée pour un cône. Le déplacement est calculé par la méthode des éléments de frontière. | 20 |
| 2.5  | Problème d'impact hydrodynamique 3D et son approximation dans la théorie de Wagner.  | 21 |
| 2.6  | Description de la ligne de contact.  | 23 |
| 2.7  | Effet d'une perturbation $\Delta a_1$ sur le déplacement de la surface libre dans le cas d'un cône.  | 25 |
| 2.8  | Déplacement $z$ au niveau de la ligne de contact pour une erreur $\Delta a_1$ .  | 25 |
| 2.9  | Effet de $\Delta a_2$ sur le déplacement de la surface libre.  | 25 |
| 2.10 | Déplacement $z$ au niveau de la ligne de contact pour une erreur $\Delta a_2$ .  | 25 |
| 2.11 | Domaine fluide d'étude.  | 27 |
| 2.12 | Interpolation linéaire du déplacement dans le direction radiale normalisée.  | 28 |
| 2.13 | Maillage normalisé de la surface libre dans le repère $(\mathbf{C}, \xi, \theta)$ .  | 29 |
| 2.14 | Maillage de la surface libre autour d'une surface mouillée de forme elliptique.  | 29 |
| 2.15 | Répartition des points de <i>collocation</i> dans le repère $(\mathbf{C}, \xi, \theta)$ .  | 31 |
| 2.16 | Élévation de la surface libre lors de l'impact d'un cône d'angle $15^\circ$  | 34 |
| 2.17 | Ligne de contact d'un paraboløide elliptique ( $k = 2/3$ )   | 35 |
| 2.18 | Ligne de contact d'un paraboløide elliptique ( $k = 1/3$ )   | 37 |
| 2.19 | Surface mouillée d'un paraboløide elliptique décalé de $\Delta x = 0,05$ m suivant l'axe $x$ .   | 38 |
| 2.20 | Surface mouillée d'une pyramide à base carrée  | 41 |
| 3.1  | Position des différents repères  | 44 |
| 3.2  | Comparaison entre la distribution du potentiel des vitesses calculé à l'aide du modèle analytique et d'un calcul par éléments finis sur la surface mouillée (cas 1)          | 48 |
| 3.3  | Comparaison entre le potentiel des vitesses calculé à l'aide du modèle analytique et d'un calcul par éléments finis le long de l'axe $x$ (cas 1)                             | 49 |
| 3.4  | Comparaison entre la distribution du potentiel des vitesses calculé à l'aide du modèle analytique et d'un calcul par éléments finis sur la surface mouillée (cas 2)          | 50 |
| 3.5  | Comparaison entre le potentiel des vitesses calculé à l'aide du modèle analytique et d'un calcul par éléments finis le long de l'axe $x$ (cas 2)                             | 50 |
| 3.6  | Comparaison de la distribution du potentiel des vitesses sur la surface mouillée d'un cône asymétrique   | 51 |

---

|      |   |    |
|------|---|----|
| 3.7  | Comparaison du potentiel des vitesses sur l'axe $x$ (cône asymétrique)  | 52 |
| 4.1  | Machine de choc   | 56 |
| 4.2  | Maquette d'un cône montée en bout de piston et moyens de mesures  | 56 |
| 4.3  | Enregistrement de la vitesse au cours de l'impact d'un cône d'angle $30^\circ$ pour une consigne de vitesse de 20 m/s   | 58 |
| 4.4  | Contribution de l'effort inertiel lors de l'impact d'un cône d'angle $30^\circ$ pour une consigne de vitesse de 20 m/s  | 58 |
| 4.5  | Dessin de définition de la maquette triconique ( $l = 25$ mm, $R_1 = 90$ mm, $R_2 = 135$ mm, $R_3 = 160$ mm)  | 59 |
| 4.6  | Plan de la maquette parabolöide elliptique  | 60 |
| 4.7  | Plan de la maquette dièdre-cône   | 60 |
| 4.8  | Plan de la maquette pyramide  | 61 |
| 4.9  | Plan de la maquette cylindre-sphère   | 62 |
| 4.10 | Mesures du coefficient de slamming au cours de l'impact de la maquette dièdre-cône  | 63 |
| 4.11 | Comparaison de différentes mesures du coefficient de slamming au cours de l'impact de la maquette parabolöide elliptique  | 64 |
| 4.12 | Relevé des périodes d'oscillation sur les mesures d'effort aux différentes vitesses d'impact pour le parabolöide elliptique.  | 65 |
| 4.13 | Mesures du coefficient de slamming au cours de l'impact de la maquette triconique   | 66 |
| 4.14 | Description mixte Eulérienne et Lagrangienne  | 68 |
| 4.15 | Illustration de la méthode Volume-Of-Fluid (VOF)  | 68 |
| 4.16 | Principe du couplage par pénalité dans le module CEL d'ABAQUS/Explicit. (Source : Abaqus (2008))  | 69 |
| 4.17 | Description du domaine fluide pour la simulation de l'impact du parabolöide elliptique  | 71 |
| 4.18 | Effet de la taille de maille dans la zone fine sur l'effort hydrodynamique d'impact pour le parabolöide elliptique. Cas 1 : $l_e = 2$ mm, $2,1 \times 10^6$ éléments. Cas 2 : $l_e = 3$ mm, $0,9 \times 10^6$ éléments.                           | 72 |
| 4.19 | Effet de la taille du domaine fluide sur l'effort hydrodynamique d'impact pour le parabolöide elliptique. Cas 2 : $L_2 = 265$ mm, $h_1 = 530$ mm, $0,9 \times 10^6$ éléments. Cas 3 : $L_2 = 530$ mm, $h_1 = 795$ mm, $1,7 \times 10^6$ éléments. | 72 |
| 4.20 | Effet de la raideur de contact sur l'effort hydrodynamique lors de l'impact de la maquette cylindre-sphère ( $V_z = 12$ m/s).   | 73 |
| 4.21 | Evolution du coefficient de slamming au cours de l'impact d'une sphère de rayon $R$   | 75 |
| 5.1  | Distribution du coefficient de pression lors de l'impact d'un parabolöide elliptique  | 79 |
| 5.2  | Vues en coupe de la distribution de pression pour la maquette dièdre-cône   | 79 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 5.3  | Evolution du coefficient de slamming au cours de l'impact du paraboløide elliptique . . . . .   | 80  |
| 5.4  | Surfaces mouillées successives lors de l'impact de la maquette dièdre-cône  | 81  |
| 5.5  | Distribution du coefficient de pression lors de l'impact de la maquette dièdre-cône . . . . .   | 81  |
| 5.6  | Distribution de coefficient de pression le long des axes $x$ et $y$ pour la maquette dièdre-cône . . . . .  | 82  |
| 5.7  | Evolution du coefficient de slamming au cours de l'impact de la maquette dièdre-cône . . . . .  | 83  |
| 5.8  | Evolution du coefficient de slamming au cours de l'impact d'une pyramide à base carrée d'angle $15^\circ$ . . . . .   | 84  |
| 5.9  | Evolution du coefficient de slamming au cours de l'impact de la maquette cylindre-sphère ( $N_a = 7$ ) . . . . .  | 85  |
| 5.10 | Impact d'un cône incliné . . . . .  | 86  |
| 5.11 | Distribution du coefficient de pression lors de l'impact d'un cône asymétrique ( $N_a = 11$ ) . . . . .   | 88  |
| 5.12 | Distribution du coefficient de pression lissé lors de l'impact d'un cône asymétrique ( $N_a = 11$ ) . . . . .   | 89  |
| 5.13 | Distribution du coefficient de pression le long de l'axe $x$ lors de l'impact d'un cône asymétrique ( $N_a = 11$ ) . . . . .  | 89  |
| 5.14 | Evolution du coefficient de slamming au cours de l'impact d'un cône asymétrique . . . . .   | 90  |
| 5.15 | Evolution du moment adimensionnel au cours de l'impact d'un cône asymétrique . . . . .  | 90  |
| 5.16 | Ligne de contact ( $\Gamma^{(w)}$ ) et ligne d'intersection ( $\Gamma^{(vk)}$ ) pour l'impact d'un paraboløide asymétrique ( $N_a = 11$ ) . . . . .                           | 92  |
| 5.17 | Evolution du coefficient de slamming au cours de l'impact d'un paraboløide asymétrique . . . . .  | 92  |
| 5.18 | Evolution du moment adimensionnel au cours de l'impact d'un paraboløide asymétrique . . . . .   | 93  |
| 5.19 | Effet de la vitesse d'avance sur la distribution du coefficient de pression le long de l'axe $x$ pour des cônes de $5^\circ$ et $15^\circ$ . . . . .                          | 95  |
| 5.20 | Décalage relatif du centre de poussée hydrodynamique par rapport au point $\mathbf{O}$ en fonction de la vitesse d'avance pour des cônes de $5^\circ$ et $15^\circ$ . . . . . | 96  |
| 5.21 | Effet de la vitesse d'avance sur l'effort vertical adimensionnel ( $f(\beta)$ ) pour des cônes d'angle $\beta$ . . . . .  | 97  |
| B.1  | Définitions des points $\mathbf{p}$ et $\bar{\mathbf{p}}$ . . . . .   | 123 |



---

# Liste des tableaux

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 2.1 | Coefficients de Fourier de la ligne de contact d'un cône . . . . .  | 24 |
| 2.2 | Comparaison des calculs de surface mouillée pour le parabolöide elliptique avec $k = 2/3$ . . . . .   | 36 |
| 2.3 | Calculs de la masse ajoutée pour un parabolöide elliptique. . . . .   | 37 |
| 2.4 | Comparaison des calculs de surface mouillée pour un parabolöide décentré. . . . .   | 39 |
| 4.1 | Performances de la machine de choc : ce tableau présente, en fonction de la vitesse d'impact souhaitée, l'effort maximal et la course sur laquelle cette vitesse peut être maintenue. . . . . | 57 |
| 4.2 | Comparaison des calculs et mesures de l'effort adimensionnel ( $f(\beta)$ ) pour différents cônes d'angle $\beta$ . . . . .   | 74 |



# Nomenclature

|                         |   |
|-------------------------|---|
| $t$                     | temps   |
| $h(t)$                  | profondeur de pénétration   |
| $c(t)$                  | demi-largeur ou rayon de la surface mouillée (cas 2D)                         |
| $f(x_0, y_0)$           | fonction décrivant la forme du corps dans $R_0$                               |
| $a(\theta, t)$          | fonction décrivant le rayon de $\Gamma^{(w)}$                                 |
| $\hat{a}(\theta, t)$    | approximation de $a(\theta, t)$ par une série de Fourier tronquée             |
| $a_i(t)$                | coefficients de Fourier décrivant de la fonction $\hat{a}(\theta, t)$         |
| $a^{(vk)}(\theta_0, t)$ | fonction décrivant le rayon de $\Gamma^{(vk)}$                                |
| $N_a$                   | nombre de coefficients de Fourier de la fonction $\hat{a}(\theta, t)$         |
| $N_q$                   | nombre de coefficients de Fourier de la fonction $\eta(\xi, \theta)$          |
| $x_c(t)$                | position du point référence $\mathbf{C}$ sur l'axe $x_0$                      |
| $(r, \theta)$           | coordonnées polaires dans $R$ sur le plan $z = 0$                             |
| $(\xi, \theta)$         | coordonnées polaires normalisées dans $R$ ( $\xi = r/\hat{a}(\theta, t)$ )    |
| $\eta$                  | élévation de la surface libre   |
| $\hat{\eta}$            | approximation de $\eta$ par des séries de Fourier tronquées                   |
| $\eta_i(\xi_k)$         | coefficients de Fourier décrivant l'approximation de $\eta$                   |
| $N_r$                   | nombre d'intervalles pour l'approximation de $\eta$ dans la direction radiale |
| $\theta_i$              | positions angulaires des points de <i>collocation</i>                         |
| $\xi_k$                 | positions radiales normalisées du bord des éléments                           |
| $\rho$                  | masse volumique du fluide   |
| $p(x_1, y_1, z_1, t)$   | pression hydrodynamique au sein du fluide                                     |
| $P(x_0, y_0, t)$        | pression hydrodynamique agissant sur la surface mouillée                      |
| $C_p$                   | coefficient de pression   |
| $\tilde{C}_p$           | coefficient de pression lissé   |
| $F_z$                   | effort vertical d'impact hydrodynamique                                       |
| $M_y$                   | moment selon $y_0$ au point le plus bas du solide                             |
| $C_s$                   | coefficient de slamming (effort adimensionnel)                                |

|                                |  |
|--------------------------------|--|
| $C_m$                          | moment adimensionnel   |
| $S_{max}$                      | aire de la surface projetée de la maquette                                     |
| $H$                            | profondeur de pénétration adimensionnalisée                                    |
| $\Omega$                       | domaine fluide   |
| $\partial\Omega$               | frontière du domaine fluide  |
| $SL$                           | surface libre  |
| $SM$                           | surface mouillée   |
| $SL^{(w)}$                     | projection de $SL$ sur le plan $z = 0$   |
| $SM^{(w)}$                     | projection de $SM$ sur le plan $z = 0$   |
| $\Gamma$                       | ligne de contact ( $\Gamma = SL \cap SM$ )                                     |
| $\Gamma^{(w)}$                 | projection de $\Gamma$ sur le plan $z = 0$                                     |
| $\Gamma^{(vk)}$                | ligne d'intersection de von Karman   |
| $R_0(O, x_0, y_0, z_0)$        | repère lié au corps  |
| $R_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$      | repère fixe  |
| $R(\mathbf{C}, x, y, z)$       | repère lié au point de référence $\mathbf{C}$                                  |
| $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$ | vitesse absolue du corps impactant   |
| $\mathbf{U} = (U_x, U_y, U_z)$ | vitesse d'une particule fluide   |
| $\mathbf{C}$                   | point de référence pour la description polaire de $\Gamma^{(vk)}$              |
| $\mathbf{p}, \mathbf{q}$       | points de l'espace $\mathbb{R}^3$  |
| $\mathbf{A}$                   | vecteur composé des coefficients $a_i(t)$                                      |
| $G(\mathbf{p}, \mathbf{q})$    | fonction de <i>Green</i> en $\mathbf{q}$ associée à une source en $\mathbf{p}$ |
| $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$    | flux normal associé à $G(\mathbf{p}, \mathbf{q})$                              |

---

# Introduction

Ce mémoire présente les travaux réalisés au sein du Laboratoire Brestois de Mécanique et des Systèmes au cours d'une thèse CIFRE en collaboration avec le groupe de construction navale DCNS et l'ENSIETA. Ces travaux concernent la modélisation de l'impact hydrodynamique, avec pour application l'étude du tossage des bulbes d'étrave. Dans ce premier chapitre, le contexte industriel et scientifique, ainsi que l'orientation donnée à ces travaux sont présentés.

## 1.1 L'impact hydrodynamique

L'impact hydrodynamique désigne l'ensemble des phénomènes survenant lorsqu'un solide et un liquide en mouvement l'un par rapport à l'autre entrent en contact. Le « plat » que subit un nageur lorsqu'il n'effectue pas correctement son plongeon est un bon exemple d'impact hydrodynamique de la vie courante. Dans ce cas, c'est le solide qui est en mouvement et qui heurte un liquide au repos. L'inverse peut également se produire, lors de l'impact d'une goutte sur un solide au repos, par exemple.

### 1.1.1 Importance des problèmes d'impact hydrodynamique dans le domaine naval

Les impacts hydrodynamiques se manifestent sous différentes formes dans le domaine naval (voir la revue de [ISSC Committee I.2 \(2006\)](#)). Par exemple, des mouvements de grande amplitude d'un navire peuvent entraîner une sortie de l'eau d'une partie de sa carène (figure 1.1a) suivie d'une entrée dans l'eau (figure 1.1b), au cours de laquelle le navire subit un impact hydrodynamique. Dans ce cas, on parle de tossage ou de slamming. Ce phénomène affecte principalement l'étrave (bow-flare slamming) et les bordés de fonds (bottom slamming) situés à l'avant du navire. Sur

certaines bateaux équipés de propulseurs POD, du fait de leur forme aplatie, les bordés de fonds situés à l'arrière du navire peuvent également être soumis à des impacts hydrodynamiques (aftbody slamming, voir [Kapsenberg \*et al.\* \(2006\)](#)). Certains catamarans rapides sont également soumis à des impacts hydrodynamiques au passage d'une grosse vague sur la partie de la coque qui relie les deux flotteurs et qui se trouve hors de l'eau en temps normal (wetdeck slamming, voir [Lavroff \*et al.\* \(2010\)](#)).

Les impacts hydrodynamiques se traduisent par des chargements transitoires élevés qui peuvent endommager la structure sous l'effet du choc. La figure 1.2 présente la photo d'un catamaran à grande vitesse endommagé à la suite d'un impact hydrodynamique. Les chocs liés aux impacts hydrodynamiques entraînent également des vibrations de l'ensemble de la structure, on parle dans ce cas de fouettement (whipping), ce qui peut entraîner à long terme un endommagement par fatigue (voir [Tuitman et Malenica \(2008\)](#) et [Faltinsen \(2005\)](#)).

Les chargements d'impacts hydrodynamiques sont aujourd'hui, dans une certaine mesure, pris en compte lors du dimensionnement des structures navales. Certains architectes les prennent en compte dès la conception des formes du navire. A titre d'exemple, le concept d'étrave inversée X-bow, conçu entre autres pour réduire les effets du slamming, est présenté par la figure 1.3.

L'impact hydrodynamique se manifeste d'autres manières dans le domaine naval et offshore. Par exemple, le ballonnement (sloshing) du gaz liquéfié dans les cuves des méthaniers peut générer des impacts de masses de fluide importantes sur les parois de ces cuves. Ce phénomène est largement étudié aujourd'hui et est illustré par la figure 1.4 où l'on peut voir différents clichés d'essais de ballonnement dans une cuve rectangulaire ([Colagrossi \*et al.\* \(2006\)](#)). Les structures offshore sont, quant à elles, soumises à des impacts de vagues. La figure 1.5 représente la structure d'une plate-forme flottante ([Malenica \*et al.\* \(2010\)](#)). On peut observer la présence de piliers verticaux de formes cylindriques circulaires. Ces piliers étant soumis à des impacts de vagues, différentes études sont consacrées à ce phénomène. A titre d'illustration, la figure 1.6 montre une photo d'essai en bassin sur un cylindre circulaire vertical semi-immersé ([Zang \*et al.\* \(2010\)](#)).



(a) Etrave émergée



(b) Etrave immergée

FIGURE 1.1 – Tossage de la frégate De Grasse.



FIGURE 1.2 – Endommagement du catamaran à grande vitesse HSS 1500 Stena suite à un impact hydrodynamique de type *wetdeck slamming* (Lavroff *et al.* (2010)).



FIGURE 1.3 – Concept d'étrave X-bow pour réduire les effets du slamming (source : <http://www.ulsteingroup.com>).

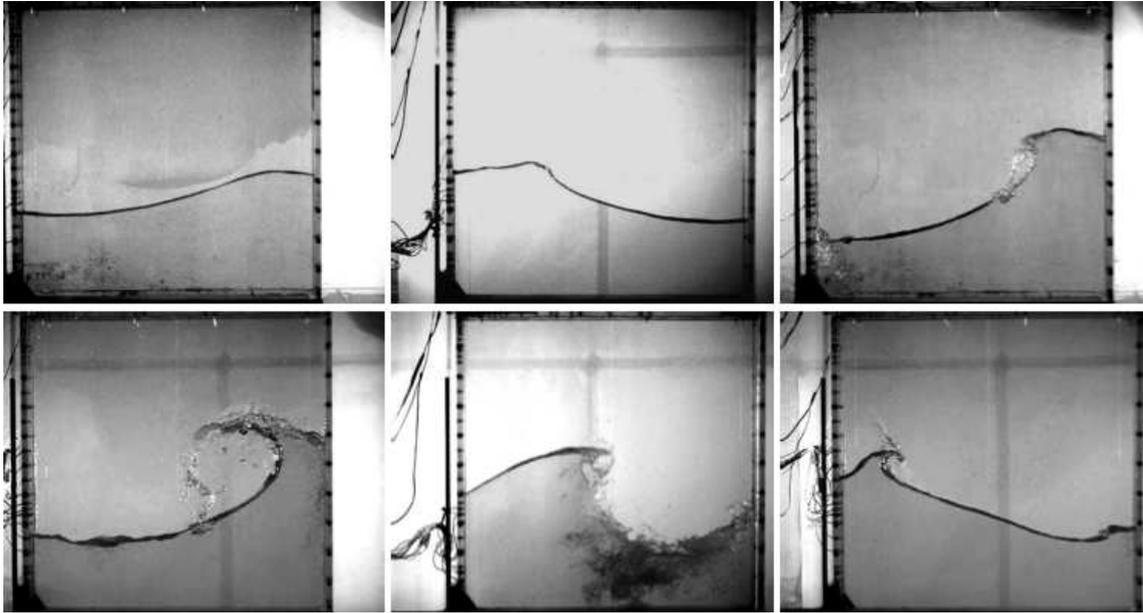


FIGURE 1.4 – Illustration du phénomène de ballotement (Colagrossi *et al.* (2006)).

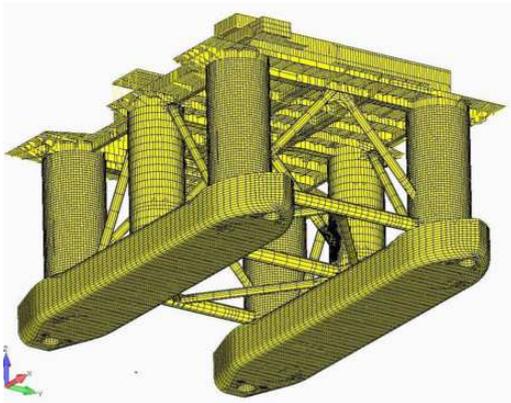


FIGURE 1.5 – Maillage d'une structure de plate-forme flottante (Malenica *et al.* (2010)).



FIGURE 1.6 – Essais d'impacts de vagues sur une structure cylindrique circulaire verticale (Zang *et al.* (2010)).

### 1.1.2 Autres problèmes d'impact hydrodynamique

On retrouve des cas d'impact hydrodynamique dans différents champs d'applications, notamment dans les secteurs de l'aéronautique et du spatial. D'ailleurs, les premiers modèles d'impact hydrodynamique proposés par [von Karman \(1929\)](#) puis [Wagner \(1931\)](#) étaient motivés par l'étude de l'amerrissage des hydravions. Aujourd'hui, dans le secteur aéronautique, le problème de l'amerrissage d'urgence (ditching) est un sujet d'actualité, aussi bien pour les avions que pour les hélicoptères (voir [Malleron \(2009\)](#) et [Toso \(2009\)](#)), comme le montrent la photo de l'amerrissage d'urgence d'un avion de ligne sur la rivière Hudson présentée à la figure 1.7, et la figure 1.8 présentant un essai d'impact sur eau d'un hélicoptère. Notons que l'amerrissage se distingue du tossage par un rapport vitesse horizontale / vitesse verticale plus important. D'importants travaux ont également été réalisés dans le domaine aérospatial, liés au retour des capsules spatiales (voir la revue bibliographique consacrée aux applications spatiales de [Seddon et Moatamedi \(2006\)](#)). Une photo de la capsule Appolo à l'approche de l'amerrissage est présentée à la figure 1.9 à titre d'illustration.



FIGURE 1.7 – Amerrissage d'urgence d'un avion de ligne A320 sur la rivière Hudson en 2009 (source : [http://en.wikipedia.org/wiki/US\\_Airways\\_Flight\\_1549](http://en.wikipedia.org/wiki/US_Airways_Flight_1549))



FIGURE 1.8 – Essai d'impact sur l'eau en chute libre d'un hélicoptère ([Toso \(2009\)](#)).



FIGURE 1.9 – Capsule Apollo à l’approche de l’amerrissage (Wang et Lyle (2007)).

### 1.1.3 Le cas des bulbes d’étrave

La problématique du dimensionnement des bulbes d’étrave en composite présents sur les fré gates intéresse la société DCNS. En plus de la fonction classique d’un bulbe d’étrave de réduction de la résistance à l’avancement, ces bulbes doivent assurer la protection d’un sonar de coque. Cette dernière fonction implique des contraintes de transparence acoustique et donc requiert l’utilisation de matériaux composites qui nécessitent plus de précautions d’emploi que les matériaux métalliques. La partie en composite du bulbe d’étrave de la frégate anti-sous-marine Primauguet est visible sur la figure 1.10. Comme on a pu le voir sur la figure 1.1a, de par leur position sur le navire, ces structures en composite sont soumises à des chargements d’impacts hydrodynamiques. Ce sont les chargements critiques pour le dimensionnement de ce type de bulbes d’étrave. Ce dimensionnement repose aujourd’hui plus sur l’expérience que sur des calculs précis des chargements d’impacts hydrodynamiques.

L’objectif de cette thèse est de modéliser les chargements hydrodynamiques lors du tossage des bulbes d’étrave. Les vitesses d’impact peuvent être déduites de calculs de tenue à la mer et sont considérées comme une donnée d’entrée du problème.

Comme on peut le voir sur la figure 1.10, le bulbe d’étrave est beaucoup moins élancé que le navire dans son ensemble. En effet, la longueur des sections horizontales du bulbe est seulement de l’ordre de 2 à 3 fois plus importante que la largeur de ces sections. Nous pouvons anticiper qu’une approche basée sur la méthode des tranches, qui consisterait à effectuer des calculs bidimensionnels sur des sections verticales de la structure, est inadaptée pour des structures si peu élancées. En effet, dans le cas d’un paraboloïde elliptique, en se basant sur la théorie classique de Wag-



FIGURE 1.10 – Vue de la partie du bulbe d'étrave en composite de la frégate anti-sous-marine Primauguet (source : Naval Experts de Juin 2009, magazine externe de DCNS).

ner 2D et 3D, [Scolan et Korobkin \(2001\)](#) ont montré qu'une approche basée sur la méthode des tranches conduisait à une surestimation de l'effort d'impact hydrodynamique, par rapport à l'approche tridimensionnelle, pouvant atteindre 30% pour la plage d'élancement nous intéressant. Il est donc nécessaire d'adopter une approche réellement tridimensionnelle pour traiter correctement le problème de l'impact hydrodynamique des bulbes d'étrave.

## 1.2 Travaux existants sur la modélisation d'impacts hydrodynamiques tridimensionnels

Dans ce paragraphe, nous passons en revue les différentes méthodes permettant de traiter des problèmes tridimensionnels d'impact hydrodynamique. Globalement, deux stratégies ont été adoptées pour traiter ces problèmes. La première repose sur l'utilisation de méthodes de simulation généralistes issues du monde de la mécanique des fluides numérique que nous appellerons méthodes de type CFD pour « Computational Fluid Dynamics ». La puissance des calculateurs actuels permet maintenant d'effectuer des simulations de ce type en 3D. D'un autre côté, certains chercheurs ont développé des outils dédiés aux problèmes d'impacts basés sur des théories simplifiées comme la théorie de Wagner. L'avantage de ces « modèles simplifiés » réside bien sûr dans des besoins en ressources informatiques bien inférieurs.

### 1.2.1 Simulations numériques basées sur des approches de type CFD

Différentes méthodes permettent d'effectuer des simulations d'écoulements avec surface libre. Deux approches sont possibles pour la description du mouvement du fluide : les descriptions Eulérienne et Lagrangienne.

L'utilisation de la description Eulérienne de l'écoulement nécessite l'utilisation de techniques spéciales pour suivre et mettre à jour la position de la surface libre, telles que les méthodes Volume-Of-Fluid (VOF) et Level-Set. La méthode VOF a été utilisée par Kleefsman *et al.* (2005) et Aquelet *et al.* (2006) pour traiter des problèmes d'impact hydrodynamique. Colicchio *et al.* (2005) utilisent la méthode Level-Set pour simuler différents écoulements impliquant des impacts.

L'utilisation de la description Lagrangienne permet d'éviter le problème de suivi d'interface. Les méthodes particulières, ou sans maillage, telles que la « Smoothed Particle Hydrodynamics » (SPH), voir Monaghan (2005), et la « Particle Finite Element Method » (PFEM), voir Idelsohn *et al.* (2004), sont basées sur un formalisme purement Lagrangien. L'absence de maillage permet d'éviter les problèmes de distorsion des mailles qui rendent difficiles d'utilisation les méthodes Lagrangiennes utilisant des techniques de discrétisation conventionnelles, telles que la méthode des éléments finis. Les méthodes particulières ont connu un fort développement ces dernières années. Il est maintenant possible d'effectuer des calculs avec plusieurs dizaines de millions de particules (Oger *et al.* (2007) et Maruzewski *et al.* (2009)).

Si la plupart des travaux réalisés à l'aide de ces méthodes concernent des applications bidimensionnelles, on trouve quelques exemples de calculs tridimensionnels d'impacts hydrodynamiques. Schellin et el Moctar (2007) présentent des simulations du tossage d'une carène de navire ravitailleur offshore réalisées à l'aide de la méthode VOF (code COMET). Le champ de pression estimé de cette manière est présenté à la figure 1.11. Maruzewski *et al.* (2009) présentent des résultats de calculs de slamming tridimensionnels par la méthode SPH sur une carène complète ainsi que des comparaisons avec des essais (figure 1.12). Wang et Lyle (2007) présentent des résultats de simulations tridimensionnelles de l'amerrissage de la capsule spatiale Appolo obtenus à l'aide du code de calcul par éléments finis LS-Dyna (figure 1.13). Toso (2009) a réalisé des simulations d'impacts sur eau d'un hélicoptère complet à l'aide d'un modèle éléments finis Lagrangien et des simulations d'amerrissage d'un avion à l'aide d'un modèle mixte éléments finis-SPH avec le code commercial PAM-CRASH.

Ces méthodes sont intégrées dans différents codes de calcul commerciaux mais leur utilisation dans un contexte industriel ne peut encore se faire que de manière limitée. Le principal frein réside dans l'importance des ressources informatiques nécessaires pour mettre en oeuvre de pareils calculs. Par exemple, la simulation

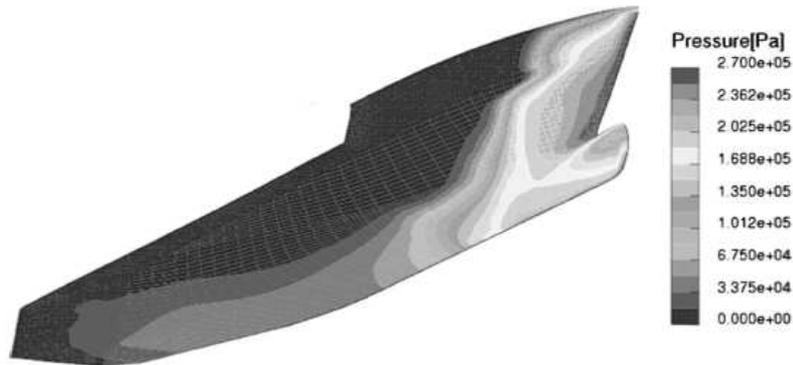
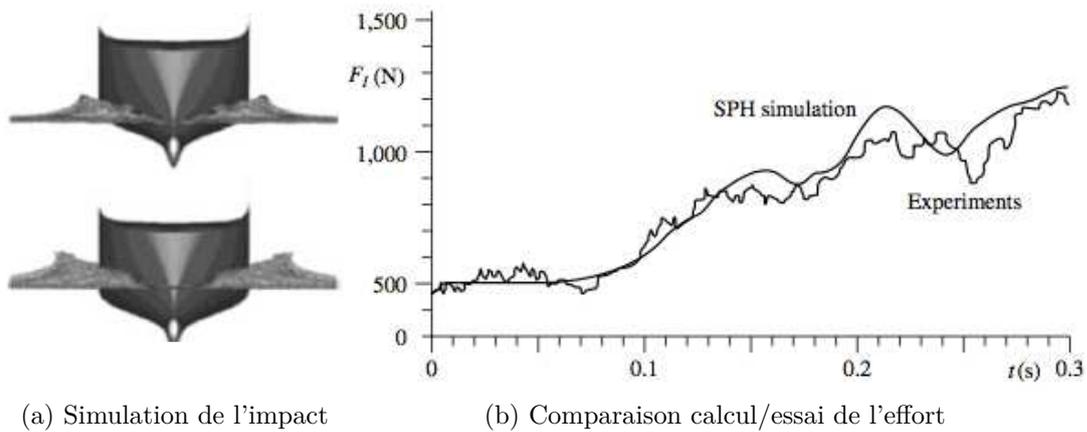


FIGURE 1.11 – Distribution de pression sur une carène obtenue par [Schellin et el Moctar \(2007\)](#) à l'aide de la méthode VOF.



(a) Simulation de l'impact

(b) Comparaison calcul/essai de l'effort

FIGURE 1.12 – Simulation SPH de l'impact d'une carène sur l'eau ([Maruzewski et al. \(2009\)](#)).

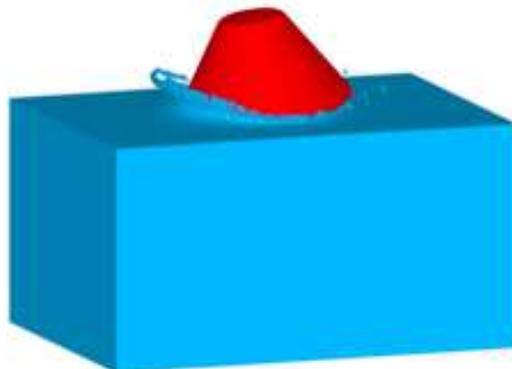


FIGURE 1.13 – Simulation de l'amerrissage de la capsule Apollo par [Wang et Lyle \(2007\)](#) à l'aide du code de calcul par éléments finis LS-DYNA.

présentée par la figure 1.12 implique 2,4 millions de particules et a nécessité 1 jour de calcul sur un ordinateur CRAY XD1 avec 16 processeurs. En outre, l'obtention de résultats fiables avec ces méthodes nécessite de réaliser de nombreux tests pour déterminer des paramètres de calcul adéquats ( finesse de la discrétisation, taille du domaine de calcul ...). Il est donc judicieux de s'intéresser aussi aux modèles simplifiés d'impact hydrodynamique.

### 1.2.2 Modèles simplifiés

De nombreuses méthodes simplifiées ont été développées pour traiter l'impact hydrodynamique bidimensionnel mais beaucoup moins de travaux ont été consacrés au cas tridimensionnel. Ces méthodes s'appuient sur la théorie du potentiel des vitesses et, pour la plupart, sur la théorie de Wagner. Le frein au développement de modèles de Wagner tridimensionnels réside notamment dans la difficulté à déterminer la surface de contact entre le fluide et le solide (problème de Wagner). [Scolan et Korobkin \(2001\)](#) ont résolu analytiquement le problème de Wagner tridimensionnel dans le cas d'un paraboléide elliptique. [Korobkin et Scolan \(2006\)](#) ont ensuite proposé une solution linéarisée basée sur une technique de développement asymptotique autour d'une solution axisymétrique connue. Cette approche n'est valable que pour des solides impactants quasi-axisymétriques. [Takagi \(2004\)](#) a développé une méthode de résolution du problème de Wagner 3D basée sur la formulation en potentiel des déplacements. Dans cette méthode, le potentiel des déplacements sur la surface du liquide est approximé à l'aide de facettes où ce dernier est supposé constant. Une méthode itérative permet de déterminer les facettes appartenant à la surface de contact avec le solide. Par conséquent, cette dernière est toujours constituée d'un ensemble de facettes rectangulaires, n'offrant que peu de précision concernant sa géométrie (figure 1.14). D'ailleurs, [Takagi](#) reconnaît que si son approche permet d'estimer l'effort hydrodynamique global, elle ne permet pas de déterminer correctement la distribution de pression au niveau de la surface de contact. Plus récemment, une méthode de résolution générale plus précise a été développée par [Gazzola \(2007\)](#). Dans cette dernière méthode, le problème de Wagner 3D est formulé sous forme d'inégalités variationnelles, ce formalisme a été introduit par [Korobkin \(1982\)](#). Dans l'approche de [Gazzola](#), la surface mouillée est décrite comme un ensemble de noeuds. Pour améliorer la précision que l'on peut atteindre, [Gazzola](#) utilise une méthode de maillage adaptatif qui permet d'augmenter la densité du maillage près de la périphérie de la surface mouillée (figure 1.15), mais cela au prix d'une augmentation des temps de calcul. Concernant la prédiction des chargements hydrodynamiques, [Gazzola](#) propose de calculer la pression à l'aide de l'équation de Bernoulli linéarisée et en dérivant deux fois le potentiel des déplacements à l'aide d'une formule de différence finie. La question de la précision de cette approche est laissée en suspens.

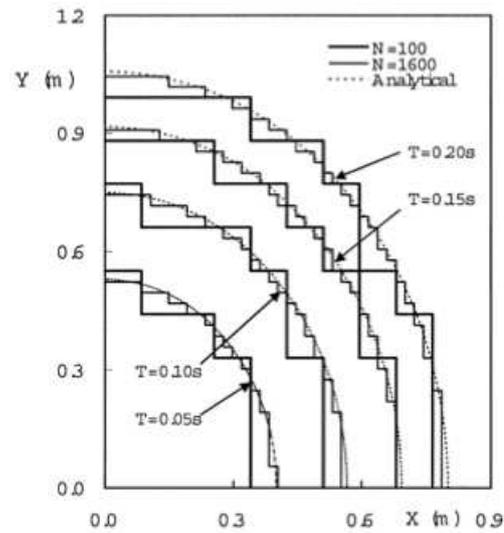
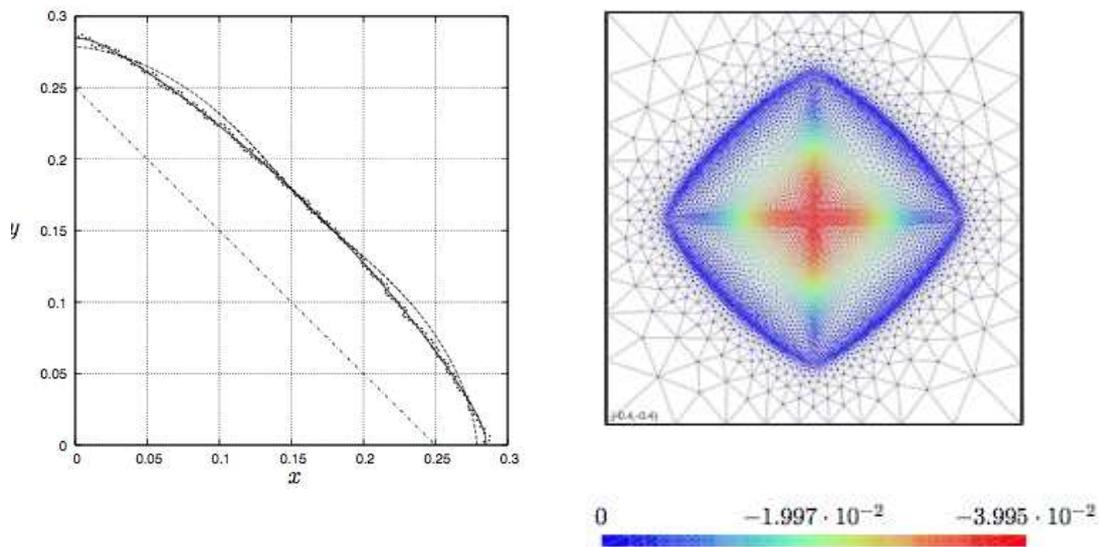


FIGURE 1.14 – Comparaison de la surface de contact obtenue par Takagi (2004) avec la solution analytique exacte de Scolan et Korobkin (2001) pour un paraboloïde elliptique.



(a) Ligne de contact (Trait plein et points : Gazzola (2007), Tirets ; Korobkin et Scolan (2006) ; Tirets mixtes : von Karman).

(b) Maillage final obtenu grâce à la technique de maillage adaptatif (l'échelle des couleurs décrit le potentiel des déplacements).

FIGURE 1.15 – Solution du problème de Wagner pour une pyramide obtenue par Gazzola (2007).

Kim (2005) et Malenica (2007) ont mis au point des modèles 3D de von Karman « généralisés ». Dans cette approche, la surface mouillée est simplement définie en considérant l'intersection entre la forme du corps et la surface initiale du fluide. Par contre, contrairement à la théorie de von Karman (1929) originelle, la géométrie exacte du corps est prise en compte pour le calcul du potentiel des vitesses. Néanmoins, compte-tenu de la sous-estimation de la surface mouillée qu'implique la théorie de von Karman, il est probable que cette approche sous-estime également les efforts hydrodynamiques.

Chezian (2003) et Faltinsen et Chezian (2005) présentent des travaux conséquents portant sur la modélisation du slamming en 3D à l'aide d'un modèle de Wagner généralisé. La validité de cette approche est vérifiée au travers de comparaisons avec une série d'impacts sur eau en chute libre. Il convient cependant de noter que ce modèle n'a été développé que pour un type de géométrie (un cylindre circulaire prolongé de deux hémisphères à ses extrémités).

## 1.3 Orientation des travaux et organisation du mémoire

Afin de proposer des méthodes alternatives et complémentaires aux approches de type CFD, il semble intéressant de développer des modèles d'impact simplifiés tridimensionnels. Il est d'ailleurs intéressant de noter que des modèles simplifiés 2D basés sur la théorie de Wagner ont servi de références pour valider plusieurs outils de simulation numérique (Oger *et al.* (2006), Aquelet *et al.* (2006), Qian *et al.* (2006), Gong *et al.* (2009)). Un modèle de Wagner 3D permettrait donc d'effectuer des comparaisons intéressantes avec des outils de simulation numérique tridimensionnels.

Nous avons choisi de baser les travaux présentés dans ce mémoire sur la théorie de Wagner classique. Nous pensons que cela permettra d'obtenir un compromis intéressant entre la précision des résultats, la facilité de mise en oeuvre et le temps de calcul. En effet, si dans le cas 2D, les modèles dits « de Wagner généralisés » présentent un certain intérêt en termes de précision (Malleron (2009)), leur extension au cas 3D, comme le proposent Chezian (2003) et Faltinsen et Chezian (2005), semble être assez lourde à mettre en oeuvre. L'inconvénient des modèles de Wagner généralisés est d'être incompatibles avec la formulation en potentiel des déplacements. Une telle approche nécessite donc d'utiliser un schéma d'intégration temporelle et d'effectuer un grand nombre de calculs de potentiel des vitesses au cours de l'impact, ce qui représente un coût important en termes de temps de calculs. La formulation du problème de Wagner en termes de potentiel des déplacements permet de déterminer la surface de contact à un instant donné indépendamment des instants précédents.

Comme nous l'avons vu, la mise au point d'une méthode numérique basée sur

la théorie de Wagner (formulée en potentiel des déplacements) a été l'objet des travaux de [Takagi \(2004\)](#) et [Gazzola \(2007\)](#). Dans notre étude, nous nous attaquons également au problème de Wagner 3D, mais en utilisant une approche différente qui repose sur l'utilisation d'une description paramétrique analytique de la surface de contact. Cette approche devrait permettre d'améliorer la précision concernant la description de la surface de contact entre le fluide et le solide impactant, ce qui nous semble un prérequis à des prévisions fiables de pression hydrodynamique.

Compte-tenu du contexte industriel motivant ces travaux, la validation et l'évaluation des performances des outils développés nous semble un point important afin que ces outils puissent être utilisés à l'avenir au sein de bureaux d'études. Nous avons pour cela mis en place des essais d'impacts tridimensionnels. Des simulations numériques (de type CFD) ont également été réalisées à l'aide du code de calcul par éléments finis ABAQUS/Explicit afin d'évaluer la précision de cet outil et les difficultés associées à son utilisation pour la simulation d'impacts hydrodynamiques.

Le chapitre [2](#) présente la théorie de Wagner et la méthode que nous proposons pour déterminer la géométrie de la surface de contact lors de l'impact. Le chapitre [3](#) détaille la méthode que nous avons adoptée pour le calcul de la pression hydrodynamique agissant sur le solide impactant. Le chapitre [4](#) présente le dispositif et le protocole expérimental utilisés pour valider le modèle numérique, ainsi que les simulations numériques que nous avons réalisées à l'aide du code de calcul par éléments finis ABAQUS/Explicit. Le chapitre [5](#) présente différents cas d'étude pour lesquels nous comparons et analysons les différentes approches adoptées.

---

# Résolution du problème de Wagner tridimensionnel

## 2.1 Théorie de Wagner

Le but de ce premier paragraphe est de présenter les hypothèses du modèle de Wagner. Le lecteur peut se référer à [Faltinsen \(2005\)](#) pour une introduction particulièrement pédagogique à ce modèle et à [Oliver \(2002\)](#) pour une étude plus approfondie sur ses bases théoriques. La formulation du problème aux limites non linéaire vérifié par l'écoulement est tout d'abord rappelée. Le problème de Wagner bidimensionnel (2D) et axisymétrique (axi) est ensuite présenté et quelques aspects du problème sont abordés. Enfin la formulation du problème de Wagner tridimensionnel (3D) en potentiel des déplacements est présentée.

### 2.1.1 Ecoulement potentiel non linéarisé au cours d'un impact

En négligeant les phénomènes physiques autres que l'inertie du fluide, il est possible de décrire l'écoulement autour d'un corps impactant une surface de fluide à une vitesse  $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$  à l'aide de la théorie du potentiel des vitesses. Les hypothèses les plus importantes sont les suivantes :

- 1) il existe une zone du solide en contact avec l'eau dont la taille augmente au cours du temps,
- 2) le fluide est non visqueux et incompressible,
- 3) l'écoulement est irrotationnel,
- 4) la gravité est négligée.

A partir de ces hypothèses, on peut établir le problème aux limites régissant le potentiel des vitesses  $\varphi$  défini ci-dessous :

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 & , \text{ dans le domaine fluide} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 = 0 & , (x, y, z) \in SL \\ \nabla\varphi \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} & , (x, y, z) \in SM \\ \varphi \rightarrow 0 & , x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty \end{cases}, \quad (2.1)$$

où  $SL$  désigne la surface libre et  $SM$  la surface mouillée du corps,  $\mathbf{n}$  est la normale à la surface du solide. La déformation de la surface libre est régie par l'équation suivante :

$$\frac{D\mathbf{X}}{Dt} = \nabla\varphi, \quad (2.2)$$

où  $\mathbf{X}$  est un vecteur décrivant la position d'un point de la surface libre et  $\frac{D}{Dt}$  désigne la dérivée particulaire. Ce problème est très complexe à résoudre. [Zhao et Falinsen \(1993\)](#) proposent toutefois un modèle éléments de frontière non linéaire dédié aux problèmes 2D. Cette approche a été améliorée et étendue aux problèmes axisymétriques par [Battistin et Iafrati \(2003\)](#). A notre connaissance, aucune méthode 3D n'a été développée pour traiter le problème aux limites non linéaire complet.

### 2.1.2 Problèmes de Wagner bidimensionnel et axisymétrique

Dans le cas 2D (et axi), la surface mouillée est définie par sa demi-largeur (et son rayon)  $c(t)$ . L'hypothèse majeure de Wagner consiste à considérer que, pour des corps aplatis, la géométrie de la surface du fluide demeure proche de sa position initiale ( $z = 0$ ). De ce fait, il est possible d'appliquer les conditions aux limites de la surface du fluide au niveau de la surface libre initiale (voir figure 2.1). On parle également de « projection » des conditions aux limites sur la surface initiale du liquide.

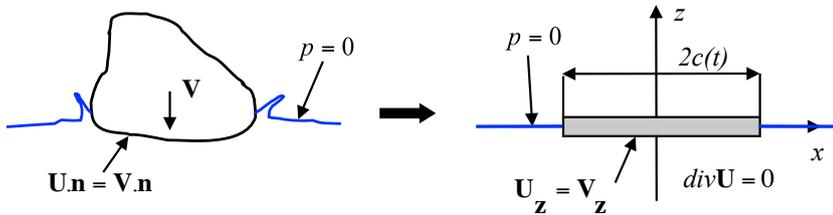


FIGURE 2.1 – Simplification du corps impactant en plaque plane.  $\mathbf{U}$  représente la vitesse au sein du domaine fluide

L'écoulement instantané peut être résolu en termes de potentiel des vitesses. De plus, la condition aux limites dynamique au niveau de la surface libre est linéarisée, ce qui conduit à l'écoulement instantané idéalisé décrit par la figure 2.2.

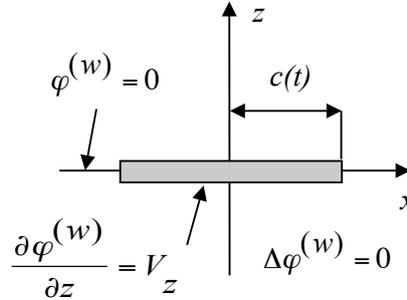


FIGURE 2.2 – Écoulement instantané idéalisé selon la théorie de Wagner

Le potentiel des vitesses  $\varphi^{(w)}$  est solution du système suivant :

$$\begin{cases} \Delta \varphi^{(w)} = 0 & , z < 0 \\ \frac{\partial \varphi^{(w)}}{\partial z} = V_z & , (|x| \leq c(t), z = 0) \\ \varphi^{(w)} = 0 & , (|x| \geq c(t), z = 0) \\ \varphi^{(w)} \rightarrow 0 & , x^2 + z^2 \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.3)$$

On peut remarquer que cet écoulement est identique à celui autour d'une plaque (2D) ou d'un disque (axi) de demi-largeur largeur ou de rayon  $c(t)$ .

Il est important de noter que la demi-largeur mouillée  $c(t)$  est également une inconnue du problème. L'évolution de cette grandeur est régie par une équation dans laquelle interviennent la forme du corps, la profondeur de pénétration et l'élévation de la surface libre appelée condition de Wagner. Cette équation traduit la coïncidence géométrique entre la surface libre et le corps impactant au point de contact (voir figure 2.3) et s'écrit :

$$f(c(t)) - h(t) = \eta(c(t), t) = \int_0^t U_z(c(t), 0, \tau) d\tau, \quad (2.4)$$

où  $f(x)$  et  $\eta(x, t)$  sont respectivement les fonctions décrivant la forme du corps et l'élévation de la surface libre. Ces fonctions vérifient les conditions suivantes :  $f(0) = 0$  et  $\eta(x, 0) = 0$ .

La profondeur de pénétration  $h(t)$  s'obtient en intégrant la vitesse d'impact au cours du temps ( $h(t) = \int_0^t |V_z| dt$ ) et l'élévation de la surface libre  $\eta(x, t)$  s'obtient en intégrant la vitesse instantanée au niveau de la surface libre au cours du temps. Cette vitesse  $\mathbf{U} = \nabla \varphi^{(w)}$  s'obtient à partir de la solution analytique du problème

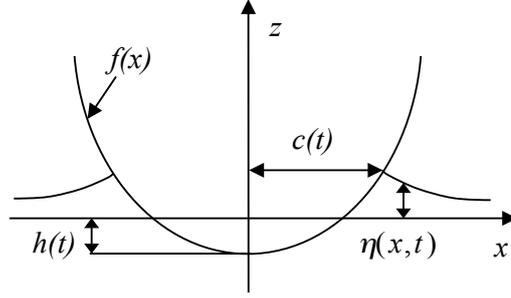


FIGURE 2.3 – Géométrie de la surface du fluide idéalisée selon la théorie de Wagner

2.3 en fonction de la largeur mouillée instantanée :

$$U_z(x, 0, t) = \frac{\partial \varphi^{(w)}}{\partial z}(x, 0, t). \quad (2.5)$$

Il faut donc résoudre le problème suivant :

$$f(c(t)) - h(t) = \eta(c(t), t) = \int_0^t \frac{\partial \varphi^{(w)}}{\partial z}(c(t), 0, \tau) d\tau. \quad (2.6)$$

Ce problème peut également être formulé en introduisant le potentiel des déplacements  $\psi$  qui est défini comme l'intégrale du potentiel des vitesses  $\varphi^{(w)}$  au cours du temps (Korobkin (1982), Howison *et al.* (1991)) :

$$\psi(x, z, t) = \int_0^t \varphi^{(w)}(x, z, \tau) d\tau. \quad (2.7)$$

De la même manière que le gradient du potentiel des vitesses représente le vecteur vitesse, le gradient du potentiel des déplacements représente le vecteur déplacement. Le potentiel des déplacements est alors solution du système suivant :

$$\begin{cases} \Delta \psi = 0 & , z < 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} = f(x) - h(t) & , (|x| \leq c(t), z = 0) \\ \psi = 0 & , (|x| \geq c(t), z = 0) \\ \psi \rightarrow 0 & , x^2 + z^2 \rightarrow \infty \end{cases}. \quad (2.8)$$

Ainsi, le problème de Wagner 2D ou axi consiste à trouver  $c(t)$  tel que le déplacement vérifiant 2.8 soit continu entre la surface libre et la surface mouillée :

$$\lim_{|x| \rightarrow c(t)^+} \frac{\partial \psi}{\partial z}(x, 0) = f(c(t)) - h(t). \quad (2.9)$$

Notons que l'introduction du potentiel des déplacements est possible du fait que la géométrie du domaine fluide dans le cadre de la théorie de Wagner ne change pas

au cours du temps.

La formulation du problème de Wagner en termes de potentiel des déplacements présente plusieurs avantages. D'une part, elle permet de déterminer la surface mouillée à chaque instant indépendamment des instants précédents. D'autre part, le potentiel des déplacements (solution de 2.8) présente de meilleures propriétés de régularité que le potentiel des vitesses (solution de 2.3) lorsque la surface mouillée est exacte. Le déplacement vertical est continu en  $c(t)$  alors que la vitesse verticale est infinie en  $|x| = c(t)^+$ .

**Remarque : Discontinuité du déplacement induite par une « erreur » sur la géométrie de la surface mouillée.**

Le système 2.8 peut être résolu pour une valeur  $c(t)$  ne vérifiant pas la condition de Wagner (2.9). Dans ce cas, la solution obtenue est discontinue. Ce phénomène est illustré par la figure 2.4. Les différentes déformées de la surface libre, obtenues pour différentes valeurs du rayon de la surface mouillée, montrent que le déplacement de la surface libre est bien continu lorsque le rayon  $c(t)$  considéré est égal à la valeur théorique  $c_{th}(t)$  (courbe rouge). En revanche, lorsque la valeur du rayon est différente de la valeur théorique (courbes bleues), le déplacement de la surface libre est discontinu au niveau de  $c(t)$ . Nous observons de plus que cette discontinuité est d'autant plus importante que la différence entre la valeur de  $c(t)$  utilisée pour le calcul et sa valeur théorique (pour laquelle la condition de Wagner est vérifiée) est grande. Ainsi, cette discontinuité apparaît comme une mesure de l'erreur effectuée sur l'estimation du rayon de la surface mouillée. Cette propriété est à la base du fonctionnement de l'algorithme que nous avons développé pour résoudre le problème de Wagner 3D et qui est présenté plus loin dans ce chapitre.

Il est également important de noter que si les profils de surface libre tracés sur la figure 2.4 présentent une élévation finie en  $|x| = c(t)$ , cela vient du fait que le problème aux limites 2.8 a été résolu numériquement (voir modèle éléments de frontière présenté au paragraphe 2.2.2). En effet, la solution exacte du problème aux limites 2.8 présente en réalité un déplacement infini en  $|x| = c(t)$  lorsque  $c(t) \neq c_{th}(t)$ . Cette singularité est une conséquence de la singularité de la vitesse en  $|x| = c(t)$ .

Dans le cas d'un cône ou d'une surface axisymétrique, nous allons examiner l'effet d'une sous-estimation du rayon de la surface mouillée sur le déplacement. Soient  $c(t)$  le rayon considéré de la surface mouillée à l'instant  $t$  et  $c_{th}(t)$  la solution théorique à ce même instant. Dans le cas où la surface mouillée est sous-estimée ( $c(t) < c_{th}(t)$ ), du fait que la fonction  $c(t)$  est strictement croissante, on peut trouver un instant  $t_0$  antérieur à  $t$  ( $t_0 < t$ ), tel que  $c(t) = c_{th}(t_0)$ . D'après la définition du potentiel des déplacements, on peut décomposer le déplacement issu de la résolution du problème

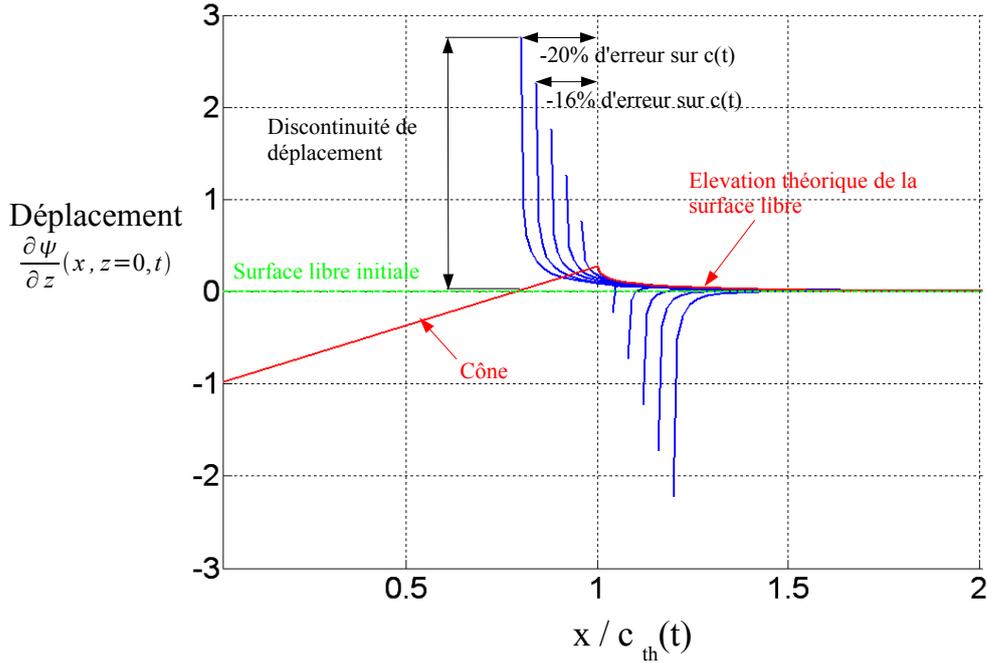


FIGURE 2.4 – Discontinuité de déplacement engendrée par une erreur sur le rayon de la surface mouillée pour un cône. Le déplacement est calculé par la méthode des éléments de frontière.

2.13 de la façon suivante :

$$\eta(x, t) = \int_0^{t_0} \frac{\partial \varphi^{(w)}}{\partial z}(x, 0, \tau) d\tau + \int_{t_0}^t \frac{\partial \varphi^{(w)}}{\partial z}(x, 0, t_0) d\tau, \quad (2.10)$$

avec  $\varphi^{(w)}(x, z, t)$  le potentiel des vitesses solution du système 2.3. La première partie du membre de droite de l'équation 2.10 représente le déplacement au point  $(x, 0)$  pour la solution du problème de Wagner théorique au temps  $t_0$  ( $c(\tau) = c_{th}(\tau)$  pour  $\tau \leq t_0$ ). La deuxième partie du membre de droite traduit une intégration de la vitesse pour une largeur mouillée de rayon  $c_{th}(t_0)$  fixe par rapport à la variable d'intégration.

Dans le cas axisymétrique, la vitesse verticale au niveau de la surface libre est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{\partial \varphi^{(w)}}{\partial z}(x, 0, t_0) = -\frac{2|V_z|}{\pi} \left[ \arcsin \left( \frac{c_{th}(t_0)}{x} \right) - \frac{c_{th}(t_0)}{\sqrt{x^2 - c_{th}(t_0)^2}} \right]. \quad (2.11)$$

On remarque facilement que la vitesse est singulière au niveau de la ligne de contact ( $x = c_{th}(t_0)$ ). Par conséquent, le déplacement est infini au niveau de la ligne de contact :

$$\lim_{x \rightarrow c_{th}(t_0)^+} \frac{\partial \varphi^{(w)}}{\partial z}(x, 0, t_0) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c_{th}(t_0)^+} \int_{t_0}^t \frac{\partial \varphi^{(w)}}{\partial z}(x, 0, t_0) d\tau = +\infty. \quad (2.12)$$

### 2.1.3 Problème de Wagner tridimensionnel

Dans le cas tridimensionnel (3D) illustré par la figure 2.5, le potentiel des déplacements est solution du système suivant :

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 & , z < 0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial z} = f(x, y) - h(t) & , SM^{(w)} \\ \psi = 0 & , SL^{(w)} \\ \psi \rightarrow 0 & , x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty \end{cases} . \quad (2.13)$$

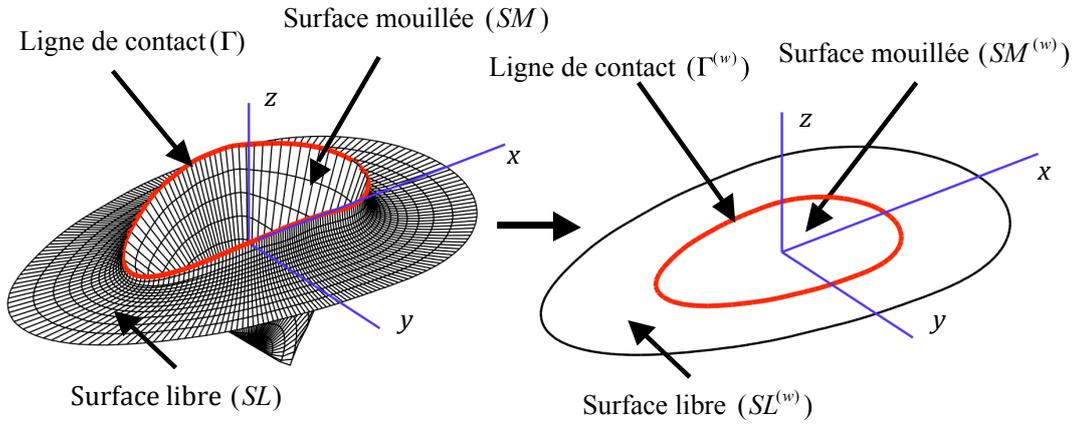


FIGURE 2.5 – Problème d’impact hydrodynamique 3D et son approximation dans la théorie de Wagner.

La difficulté du problème de Wagner 3D par rapport aux cas 2D et axi réside dans le fait que la géométrie de la surface de contact entre le fluide et le solide est maintenant définie, non plus par un seul paramètre, mais par la courbe  $\Gamma^{(w)}$  (figure 2.5) que nous appellerons la ligne de contact. La position de  $\Gamma^{(w)}$  est définie par la condition de Wagner, qui en 3D s’écrit :

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow \Gamma^{(w)} \\ (x,y) \in SL^{(w)}}} \frac{\partial\psi}{\partial z}(x, y, 0, t) = f(x, y) - h(t). \quad (2.14)$$

## 2.2 Méthode de résolution du problème de Wagner tridimensionnel

Le problème de Wagner tridimensionnel consiste à déterminer la ligne de contact notée  $\Gamma^{(w)}$  de façon à ce que la condition de Wagner (2.14) soit respectée. A notre connaissance, une solution analytique exacte de ce problème n’existe que pour le cas où la ligne de contact est elliptique. C’est pourquoi nous proposons une méthode numérique permettant de calculer une solution approchée de  $\Gamma^{(w)}$ .

### 2.2.1 Principe de la méthode

Supposons que la position de la ligne de contact  $\Gamma^{(w)}$  admette une représentation paramétrique de la forme :

$$\Gamma^{(w)} : \begin{cases} x_0 = a(\theta, t) \cos(\theta) + x_c(t) \\ y_0 = a(\theta, t) \sin(\theta) \end{cases}, \quad (2.15)$$

avec  $\theta \in [0; 2\pi]$ . Comme on peut le voir sur la figure 2.6,  $x_c(t)$  représente l'abscisse d'un point de référence  $\mathbf{C}$  et la fonction  $a(\theta, t)$  la distance entre la ligne de contact et ce point de référence, dans la direction définie par l'angle  $\theta$ . Nous proposons d'approximer la fonction  $a(\theta, t)$  par une série de Fourier tronquée  $\hat{a}(\theta, t)$  :

$$\hat{a}(\theta, t) = \sum_{i=0}^{N_a-1} a_i(t) \cos(i\theta), \quad (2.16)$$

où  $N_a$  est le nombre de termes de cette série. Cette approximation réduit donc le champ d'application de la méthode. En effet, elle suppose entre autres que la surface de contact soit connexe et que  $\Gamma^{(w)}$  soit une courbe régulière. Il est par contre possible de généraliser cette approche à des formes non symétriques en introduisant des termes en  $\sin(i\theta)$  dans l'expression 2.16.

Le choix du point de référence  $\mathbf{C}$  est important car il conditionne le nombre d'harmoniques nécessaires pour une description précise de  $\Gamma^{(w)}$ . Certains tests nous amènent à penser que la position idéale de  $\mathbf{C}$  serait le centre de la surface mouillée. Malheureusement, il n'est évidemment pas possible de déterminer cette position avant d'avoir déterminé la surface elle-même. Pour cette raison,  $\mathbf{C}$  est choisi comme le centre de la surface de von Karman. Cette dernière est délimitée par la ligne d'intersection  $\Gamma^{(vk)}$ , intersection entre le corps et le plan  $z = 0$  ( $(x_0, y_0) \in \Gamma^{(vk)} \Leftrightarrow f(x_0, y_0) - h(t) = 0$ ). Avec ce choix, il n'y a pas de risque que  $\mathbf{C}$  soit hors de la surface mouillée. L'abscisse  $x_c(t)$  du centre de la surface délimitée par  $\Gamma^{(vk)}$  a pour expression :

$$x_c(t) = \frac{2 \int_0^{2\pi} [a^{(vk)}(\theta_0, t)]^3 \cos(\theta_0) d\theta_0}{3 \int_0^{2\pi} [a^{(vk)}(\theta_0, t)]^2 d\theta_0}, \quad (2.17)$$

$a^{(vk)}(\theta_0, t)$  désigne la fonction décrivant le rayon de la courbe  $\Gamma^{(vk)}$  par rapport au point  $(0, 0)$ , figure 2.6.

L'approximation de la ligne de contact proposée présente l'avantage d'une description continue de la ligne de contact tout en réduisant le nombre de degrés de liberté. Il reste cependant difficile de déterminer de façon directe les coefficients  $a_i(t)$  de telle sorte que la condition de Wagner soit respectée (2.14), ce qui nous oblige à utiliser un schéma itératif. Ne connaissant pas a priori la ligne de contact, nous sommes contraints de faire une première hypothèse sur la forme de la surface

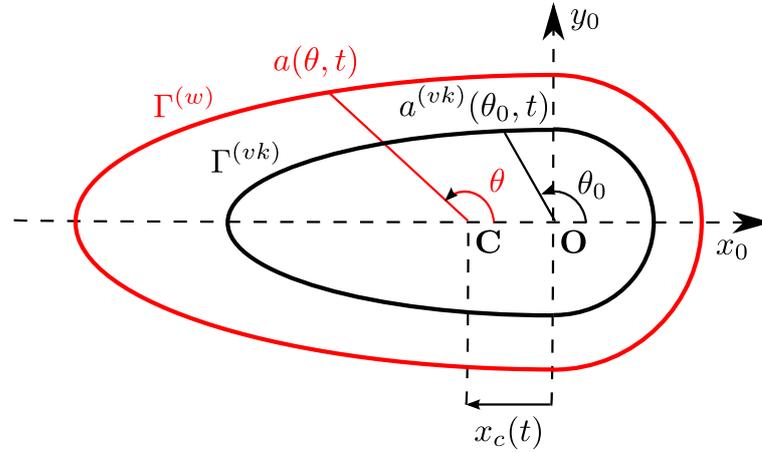


FIGURE 2.6 – Description de la ligne de contact.

mouillée. Par conséquent, la résolution du système d'équations 2.13 conduira à une discontinuité du déplacement de part et d'autre de  $\Gamma^{(w)}$ , représentée par la fonction  $E_T$  définie ci-dessous :

$$E_T(\theta, t) = \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial z}(\hat{a}(\theta, t) \cos(\theta), \hat{a}(\theta, t) \sin(\theta), 0)}_{\text{Déplacement du côté de la surface libre}} - \underbrace{[f(\hat{a}(\theta, t) \cos(\theta) + x_c(t), \hat{a}(\theta, t) \sin(\theta), 0) - h(t)]}_{\text{Hauteur du corps sur } \Gamma}. \quad (2.18)$$

Etant donnée l'approximation de la ligne de contact introduite, on ne pourra annuler  $E_T$  pour tout  $\theta$ . Une démarche possible consisterait à déterminer la ligne de contact vérifiant au mieux la condition de Wagner en introduisant un critère à minimiser tel que la moyenne de la valeur absolue de l'erreur locale :

$$e_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |E_T(\theta, t)| d\theta. \quad (2.19)$$

Bien qu'il soit possible de résoudre ce problème par différents algorithmes d'optimisation, il nous semble plus efficace en termes de temps de calcul d'utiliser une autre méthodologie. Nous proposons d'introduire une mesure de l'erreur  $e_i(t)$  sur chaque coefficient de Fourier  $a_i(t)$  décrivant la ligne de contact en décomposant l'erreur en une série de Fourier tronquée :

$$e_i(t) = \int_0^{2\pi} E_T(\theta, t) \cos(i\theta) d\theta. \quad (2.20)$$

Ainsi, la condition de Wagner est remplacée par le système d'équations non linéaires défini ci-dessous :

$$\mathbf{E}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}, \quad (2.21)$$

avec  $\mathbf{A} = {}^t(a_0(t), a_1(t), \dots, a_{N_a-1}(t))$  et  $\mathbf{E} = {}^t(e_0(t), e_1(t), \dots, e_{N_a-1}(t))$ . Ce système est résolu par la méthode itérative présentée au paragraphe 2.2.3.

Afin de mieux justifier cette approche, nous allons observer son comportement sur un cas simple. Pour cela, nous allons considérer la solution approchée d'un cône avec  $Na = 5$  et calculer le déplacement de la surface libre pour différentes erreurs  $\Delta a_i(t)$  sur les coefficients de Fourier décrivant la ligne de contact.

**Exemple : Impact d'un cône avec un angle de relèvement de  $15^\circ$ .**

Le problème de Wagner admet une solution analytique dans le cas d'un cône. Le rayon de la surface mouillée  $c(t)$  est donné par :

$$c(t) = \frac{4h(t)}{\pi \tan(\beta)}, \quad (2.22)$$

où  $\beta$  désigne l'angle de relèvement du cône (angle entre la tangente du corps dans la direction radiale et le plan horizontal). La solution convergée du problème de Wagner obtenue à l'aide de l'équation 2.21 pour  $Na = 5$  et pour un enfoncement unitaire ( $h(t) = 1$ ) est présentée au tableau 2.1.

| Solution   | $a_0(t)$ | $a_1(t)$             | $a_2(t)$              | $a_3(t)$             | $a_4(t)$             |
|------------|----------|----------------------|-----------------------|----------------------|----------------------|
| Analytique | 4,7518   | 0                    | 0                     | 0                    | 0                    |
| Numérique  | 4,7485   | $1,9 \times 10^{-3}$ | $-8,1 \times 10^{-4}$ | $1,0 \times 10^{-5}$ | $1,8 \times 10^{-3}$ |

TABLE 2.1 – Coefficients de Fourier de la ligne de contact d'un cône

Afin d'illustrer le principe d'analyse de l'erreur de continuité du champ de déplacement, nous allons observer l'effet d'une perturbation  $\Delta a_i$  autour de la solution numérique convergée  $a_i(t)$  indiquée dans le tableau 2.1.

Considérons tout d'abord une perturbation  $\Delta a_1 = 0,1$ , soit une perturbation de l'ordre de  $\Delta a_1/|a_0(t), a_1(t), \dots, a_4(t)| \approx 2\%$ . La résolution du problème aux limites 2.8 pour cette ligne de contact incorrecte conduit à l'élévation de la surface libre présentée sur la figure 2.7. L'élévation de la surface libre le long de la ligne de contact est tracée à la figure 2.8. Il apparaît clairement que l'erreur  $\Delta a_1$  affecte principalement la composante  $e_1(t)$  de l'erreur.

Considérons à présent une erreur  $\Delta a_2/|a_0(t), a_1(t), \dots, a_4(t)| \approx 2\%$  sur le coefficient  $a_2(t)$ . De la même manière, on observe sur les figures 2.9 et 2.10 qu'une erreur

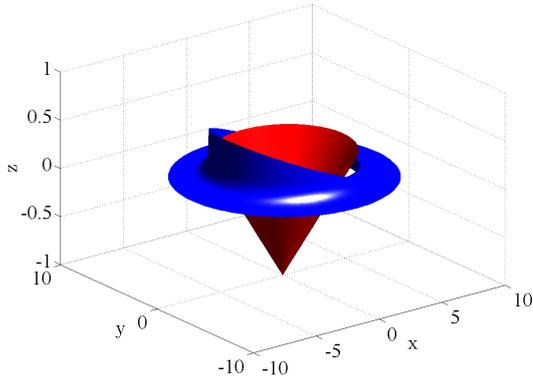


FIGURE 2.7 – Effet d’une perturbation  $\Delta a_1$  sur le déplacement de la surface libre dans le cas d’un cône.

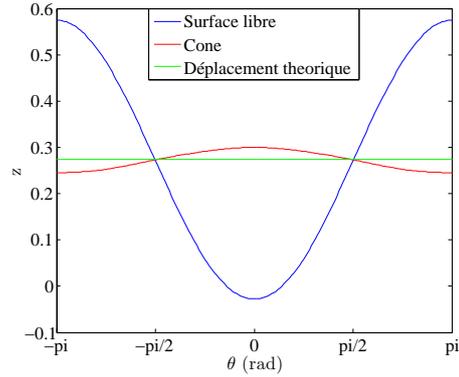


FIGURE 2.8 – Déplacement  $z$  au niveau de la ligne de contact pour une erreur  $\Delta a_1$ .

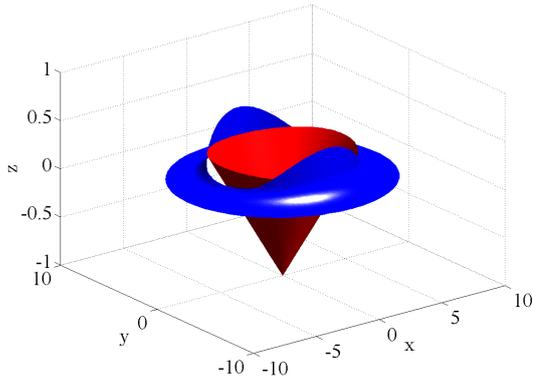


FIGURE 2.9 – Effet de  $\Delta a_2$  sur le déplacement de la surface libre.

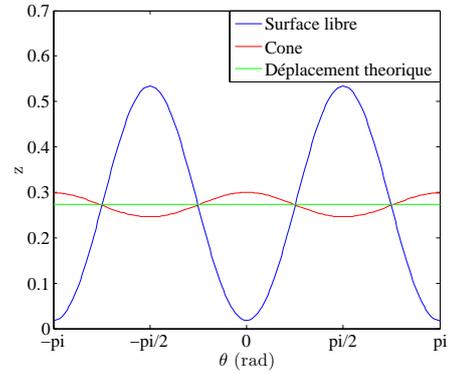


FIGURE 2.10 – Déplacement  $z$  au niveau de la ligne de contact pour une erreur  $\Delta a_2$ .

$\Delta a_2 = 0, 1$  affecte essentiellement la composante  $e_2$  de l’erreur.

Les deux cas considérés ci-dessus montrent qu’il y a un faible couplage entre les différentes composantes de la série de Fourier (une valeur importante de  $e_i$  indique principalement une erreur sur  $a_i$ ). Cela semble indiquer que les composantes de la discontinuité de déplacement qui ne sont pas prises en compte du fait de la troncature ne pourraient pas être annulées en jouant sur les  $N_a$  premières valeurs de  $a_i$ . Cela justifie le fait de calculer les coefficients  $a_i$  (pour  $i$  de 0 à  $N_a - 1$ ) en résolvant le système 2.21. La convergence de la méthode proposée en fonction du nombre d’harmoniques sera étudiée dans la suite du chapitre.

La mise en oeuvre de la méthode proposée nécessite de calculer le déplacement au niveau de la surface libre, solution du système 2.13, pour une ligne de contact

donnée. Le paragraphe 2.2.2 présente un modèle éléments de frontière dédié à ce problème. Le système d'équations 2.21 est ensuite résolu par la méthode présentée au paragraphe 2.2.3.

## 2.2.2 Modèle éléments de frontière pour le calcul de l'élévation de la surface libre

### Transformation du problème fluide en équations intégrales

Le potentiel des déplacements vérifie l'équation de Laplace rappelée ci-dessous :

$$\Delta\psi(x, y, z) = 0, \quad z < 0 \quad (2.23)$$

Les solutions de l'équation de Laplace sont entièrement déterminées par les conditions aux limites. Cette propriété est exploitée par la méthode des éléments de frontière (voir Bonnet (1995)). Le potentiel au sein du domaine fluide peut être exprimé par la représentation intégrale suivante :

$$\kappa(\mathbf{p})\psi(\mathbf{p}) = \iint_S \{\psi_{,n}(\mathbf{q})G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - \psi(\mathbf{q})H(\mathbf{p}, \mathbf{q})\} dS_{\mathbf{q}}, \quad (2.24)$$

où  $\psi_{,n} = \nabla\psi \cdot \mathbf{n}$  avec  $\mathbf{n}$  la normale extérieure à la surface  $S$ , la frontière du domaine fluide  $\Omega$ . L'équation 2.24 est valable pour tout point  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$  où  $\psi$  est régulier.

La fonction de Green  $G$  la plus courante correspond à une source ponctuelle unitaire en milieu infini placée en  $\mathbf{p}$  et a pour expression :

$$G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{4\pi r} \quad \text{et} \quad H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{1}{4\pi r^2} r_{,n}, \quad (2.25)$$

avec  $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{q} - \mathbf{p}|$  la distance euclidienne entre  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  et  $r_{,n}$  la dérivée de  $r$  dans la direction  $\mathbf{n}$  :

$$r_{,n} = r_{,i}n_i = \frac{q_i - p_i}{r} n_i. \quad (2.26)$$

$\kappa(\mathbf{p})$  dépend de la fonction de Green utilisée. Pour une source ponctuelle unitaire en milieu infini :

$$\begin{cases} \kappa = 0 & \text{si } \mathbf{p} \notin \Omega \\ \kappa = 1 & \text{si } \mathbf{p} \in \Omega - \partial\Omega \\ \kappa = 1/2 & \text{si } \mathbf{p} \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.27)$$

Dans notre cas, le domaine d'étude  $\Omega$  correspond au demi-espace infini  $z \leq 0$  de  $\mathbb{R}^3$  (voir la figure 2.11). Sous l'hypothèse que le potentiel et le flux décroissent suffisamment rapidement à l'infini :  $\psi = O(r^{-1})$  et  $\psi_{,n} = O(r^{-2})$  (hypothèse vérifiée

si  $\Delta\psi = 0$ ; Bonnet (1995)), l'intégrale sur les faces inférieures ( $z < 0$ ) est nulle. L'équation 2.24 se réduit donc à l'équation 2.28 ci-dessous :

$$\kappa(\mathbf{p})\psi(\mathbf{p}) = \iint_{SL^{(w)}+SM^{(w)}} \{\psi_{,n}(\mathbf{q})G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - \psi(\mathbf{q})H(\mathbf{p}, \mathbf{q})\} dS_q \quad (2.28)$$

En prenant  $\mathbf{p} \in SL^{(w)}$ , on remarque que  $\psi(\mathbf{p}) = 0$  et  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$ . Par conséquent, le flux  $\psi_{,z}$  (le déplacement vertical dans notre cas) est régi par l'équation suivante :

$$\iint_{SL^{(w)}+SM^{(w)}} \psi_{,z}G(\mathbf{p}, \mathbf{q})dS_q = 0. \quad (2.29)$$

On en conclut que l'élévation de la surface libre est uniquement régie par le déplacement imposé sur la surface mouillée. Cette équation nous servira à résoudre numériquement le problème 2.13 par la méthode de *collocation* en introduisant la discrétisation du champ de déplacement proposée au paragraphe 2.2.2.

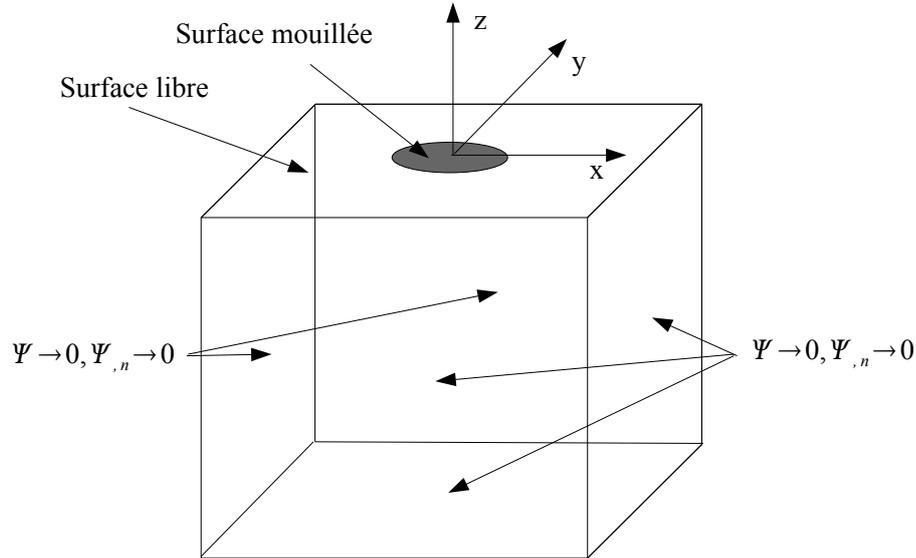


FIGURE 2.11 – Domaine fluide d'étude.

### Discrétisation du champ de déplacement

On peut observer dans les différents cas 3D traités dans la littérature que le champ de déplacement présente une bonne régularité dans la direction angulaire. De ce fait, comme pour la ligne de contact, afin de réduire le nombre d'inconnues,

le champ de déplacement est approximé par des séries de Fourier dans la direction orthoradiale du système de coordonnées polaires  $(\xi, \theta)$  :

$$\hat{\eta}(\xi, \theta) = \sum_{i=0}^{Nq-1} \eta_i(\xi) \cos(i\theta), \quad (2.30)$$

où  $\xi \in [1; +\infty]$  et  $\theta \in [0; 2\pi]$  sont issus du changement de variables :  $(x, y) = (\xi \hat{a}(\theta, t) \cos(\theta), \xi \hat{a}(\theta, t) \sin(\theta))$  et  $\eta = \frac{\partial \psi}{\partial z}$  représente l'élévation de la surface libre. Nous supposons que  $\eta$  est nul à partir d'une certaine valeur de  $\xi$  que nous noterons  $\xi_{max}$ . L'intervalle  $[1; \xi_{max}]$  est ensuite subdivisé en un certain nombre de sous-intervalles  $[\xi_k; \xi_{k+1}]$ . Au sein de chacun d'eux, le déplacement est interpolé linéairement à partir des valeurs nodales  $\eta_i(\xi_k)$  :

$$\eta_i(\xi) = \frac{\eta_i(\xi_{k+1}) - \eta_i(\xi_k)}{\xi_{k+1} - \xi_k} (\xi - \xi_k) + \eta_i(\xi_k), \quad \xi \in [\xi_k; \xi_{k+1}]. \quad (2.31)$$

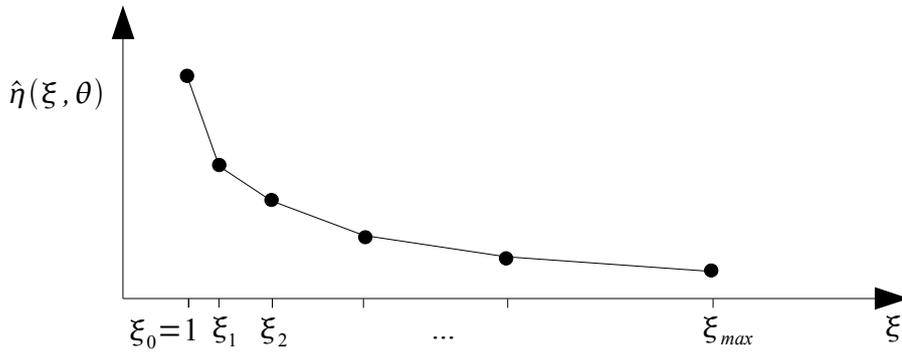


FIGURE 2.12 – Interpolation linéaire du déplacement dans la direction radiale normalisée.

Ainsi, les éléments s'apparentent à des couronnes dans le repère polaire  $(\mathbf{C}, \xi, \theta)$  et les noeuds à des cercles. Afin de décrire correctement le déplacement au voisinage de la ligne de contact, un maillage fin est nécessaire dans cette région. Le déplacement présentant par contre des gradients moins importants loin de la surface mouillée, le maillage peut être plus grossier dans cette région. Pour ces raisons, nous utilisons un maillage dont la finesse évolue progressivement. La taille des éléments est définie par une suite géométrique de raison  $\alpha$  :

$$\xi_{k+2} - \xi_{k+1} = \alpha(\xi_{k+1} - \xi_k). \quad (2.32)$$

Différentes caractéristiques du maillage peuvent ainsi être maîtrisées par les paramètres suivants :

- 1)  $b = \frac{\xi_{N_r} - \xi_{N_r-1}}{\xi_1 - \xi_0}$  : ratio entre le plus grand et le plus petit élément,
- 2)  $N_r$  : nombre d'éléments dans la direction radiale,
- 3)  $\xi_{max}$  : taille du domaine fluide suivant la direction  $\xi$  (notons que  $\xi_{N_r} = \xi_{max}$ ).

Ainsi :

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{(\xi_{N_r} - 1)(1 - \alpha)}{1 - \alpha^{N_r}} + 1 \\ \alpha = b^{\frac{1}{N_r-1}} \end{cases} \quad (2.33)$$

Grâce à l'utilisation des variables  $\xi$  et  $\alpha$ , le maillage s'adapte automatiquement à la forme de la surface mouillée et garantit une bonne répartition des noeuds. Les éléments couronnés dans le repère polaire  $(\mathbf{C}, \xi, \theta)$  de la figure 2.13 sont déformés par le changement de variable  $(x, y) = (\xi \hat{a}(\theta, t) \cos(\theta), \xi \hat{a}(\theta, t) \sin(\theta))$ . Le cas d'une surface mouillée de forme elliptique conduit au maillage représenté sur la figure 2.14 ci-dessous :

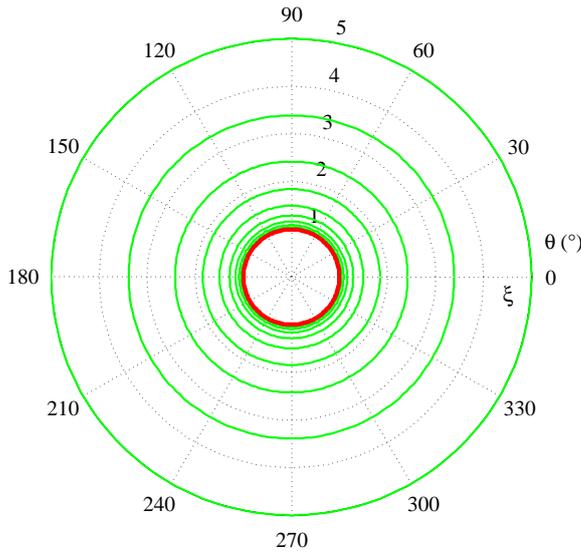


FIGURE 2.13 – Maillage normalisé de la surface libre dans le repère  $(\mathbf{C}, \xi, \theta)$ .

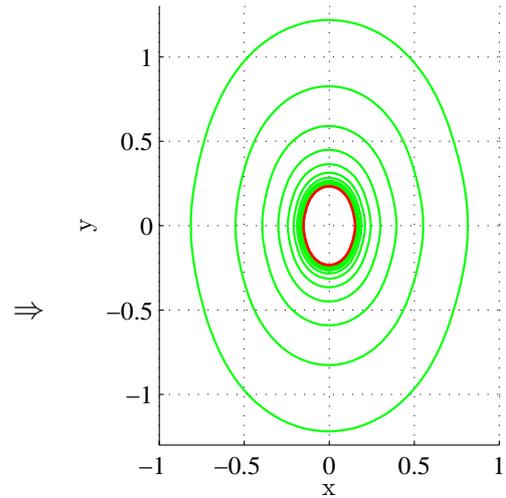


FIGURE 2.14 – Maillage de la surface libre autour d'une surface mouillée de forme elliptique.

### Construction du problème discrétisé

En introduisant la forme discrétisée du déplacement, l'équation intégrale 2.29 devient :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\hat{\eta}(\xi, \theta) \hat{a}^2(\theta, t) \xi}{r} d\xi d\theta = - \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \frac{[f(\xi, \theta) - h(t)] \hat{a}^2(\theta, t) \xi}{r} d\xi d\theta, \quad (2.34)$$

avec  $r = \sqrt{(\xi \hat{a}(\theta, t) \cos(\theta) - x_p + x_c(t))^2 + (\xi \hat{a}(\theta, t) \sin(\theta) - y_p)^2}$  la distance du point  $\mathbf{p}$  de coordonnées cartésiennes  $(x_p, y_p)$  et  $x_c(t)$  la position du point de référence  $\mathbf{C}$  sur l'axe  $x_0$ .

L'approximation du champ de déplacement  $\eta(\xi, \theta)$  implique  $N_q \times (N_r + 1)$  inconnues à déterminer. Pour cela, nous utilisons une méthode de *collocation* qui consiste à écrire  $N_q \times (N_r + 1)$  fois l'équation 2.29 pour différents points  $\mathbf{p}$ . Le choix de ces points de *collocation* est important car il agit directement sur le conditionnement du système discret obtenu. D'après Bonnet (1995), il est conseillé de placer les points de *collocation* au niveau des noeuds afin de maximiser les termes diagonaux du système à résoudre<sup>1</sup>. Dans notre cas particulier, il est possible de placer les points de *collocation* aux bords des éléments. L'équation intégrale 2.29 requiert cependant que le potentiel et son flux normal vérifient certaines hypothèses de régularité au niveau du point  $\mathbf{p}$  (Bonnet (1995)). En particulier, il n'est pas correct de placer un point de *collocation* à un endroit où la solution peut présenter une discontinuité. Ainsi, il ne faut pas placer de point de *collocation* au niveau de la ligne de contact (voir paragraphe 2.1.2). Par conséquent, les points de *collocation* sont placés en  $\xi = \xi_k$  pour  $k = 1$  à  $N_r$  mais les points les plus proches de la ligne de contact sont placés en  $\xi = (\xi_0 + \xi_1)/2$ . Il n'y a par contre pas de noeuds, au sens classique du terme, dans la direction angulaire. Il est néanmoins possible de maximiser l'influence des coefficients  $\xi_i$  en plaçant les points de *collocation* en  $\theta_i$  tels que  $|\cos(i\theta_i)| = 1$ . Du fait de la symétrie du corps considéré et de la ligne de contact par rapport au plan  $x - z$ , il faut veiller à ce qu'il n'y ait pas de points de *collocation* symétriques par rapport au plan  $x - z$  (car deux points symétriques génèrent la même équation), ce qui se traduit par la condition suivante :  $\cos(\theta_i) \neq \cos(\theta_j), \forall i \neq j$ . Nous pensons qu'il est également souhaitable de répartir les points de *collocation* de façon homogène. On s'attachera donc à maximiser la distance minimale entre 2 points de *collocation*.

La stratégie proposée conduit à la répartition illustrée sur la figure 2.15 pour  $N_q = 7$ ,  $N_r = 5$ ,  $b = 10$  et  $\xi_{N_r} = 5$ .

La méthode de *collocation* permet d'obtenir un système d'équations linéaires de la forme :

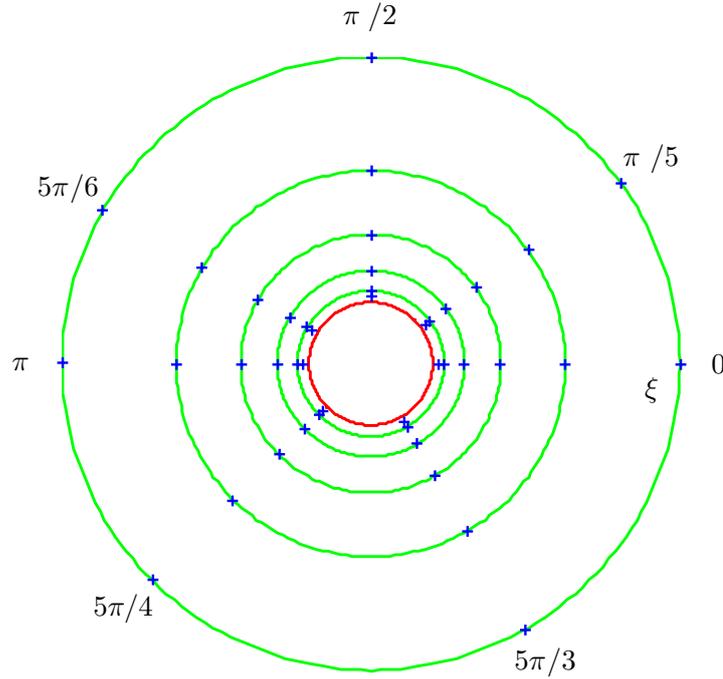
$$\mathbf{G} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}(\xi_0) \\ \boldsymbol{\eta}(\xi_1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\eta}(\xi_{N_r}) \end{Bmatrix} = \mathbf{B}, \quad (2.35)$$

avec  $\boldsymbol{\eta}(\xi_k) = {}^t(\eta_0(\xi_k), \eta_1(\xi_k), \dots, \eta_{N_q-1}(\xi_k))$ . Chaque ligne de la matrice  $\mathbf{G}$  et du second membre  $\mathbf{B}$  correspond à un point de *collocation*. Ainsi, le coefficient  $G_{ij}$  est le coefficient d'influence de l'inconnue  $\eta_l(\xi_k)$  pour le point de collocation numéro  $i$ , avec  $j = k \times N_q + l + 1$ .

Ce système d'équations linéaires est résolu par une méthode classique de type factorisation QR.

---

1. Notons que pour cela, il est également nécessaire que les inconnues soient numérotées dans un ordre bien précis.


 FIGURE 2.15 – Répartition des points de *collocation* dans le repère  $(\mathbf{C}, \xi, \theta)$ .

### 2.2.3 Algorithme de résolution du système non linéaire

#### 2.21

Afin de trouver une solution approchée de la surface mouillée  $\Gamma^{(w)}$ , nous avons proposé de chercher une solution approchée  $\hat{a}(\theta, t)$  sous forme d'une série de Fourier dont les coefficients sont solution du système  $\mathbf{E}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$  (voir paragraphe 2.2.1). En introduisant la fonction  $\mathbf{F}$  définie par :

$$\mathbf{F}(\mathbf{A}) = \mathbf{E}(\mathbf{A}) + \mathbf{A}, \quad (2.36)$$

le système 2.21 est équivalent à :

$$\mathbf{F}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}. \quad (2.37)$$

Ce dernier peut être résolu par différentes méthodes itératives. La méthode du point fixe, par exemple, consiste à résoudre l'équation 2.37 en utilisant le schéma itératif suivant :

$$\mathbf{A}^{(n+1)} = \mathbf{F}(\mathbf{A}^{(n)}), \quad (2.38)$$

où  $n$  est le numéro de l'itération.

La contractance sur  $\mathbb{R}^{N_a}$  de la fonction  $\mathbf{F}$  assure la convergence et l'unicité du point fixe. Cette propriété reste difficile à démontrer dans notre cas. Quoi qu'il en

soit, la convergence d'un schéma de point fixe peut être améliorée en remplaçant la fonction  $\mathbf{F}(\mathbf{A})$  par une autre fonction  $\mathbf{G}(\mathbf{A})$  conduisant à la même solution. Par exemple,  $\mathbf{G}(\mathbf{A}) = \alpha\mathbf{F}(\mathbf{A}) + (1 - \alpha)\mathbf{A}$ . Le paramètre  $\alpha$  est généralement appelé coefficient de relaxation. Reste le problème de choisir une valeur de  $\alpha$  maximisant la vitesse de convergence.

Küttler et Wall (2008) proposent une méthode du point fixe avec relaxation dynamique basée sur la méthode d'Aitken dans laquelle  $\alpha$  est mis à jour à chaque itération. L'application de cette méthode à notre problème conduit au schéma itératif suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{A}^{(n+1)} = \mathbf{A}^{(n)} + \alpha^{(n)}\mathbf{E}^{(n)} \\ \alpha^{(n+1)} = -\alpha^{(n)} \frac{{}^t\mathbf{E}^{(n)} \times (\mathbf{E}^{(n+1)} - \mathbf{E}^{(n)})}{|\mathbf{E}^{(n+1)} - \mathbf{E}^{(n)}|^2} \end{cases}, \quad (2.39)$$

en notant  $\mathbf{E}^{(n)} = \mathbf{E}(\mathbf{A}^{(n)})$  le vecteur erreur associé à la ligne de contact définie par  $\mathbf{A}^{(n)}$  à l'itération  $n$ . La valeur de  $\alpha^{(0)}$  doit être initialisé de façon à garantir la convergence,  $\alpha^{(0)}$  doit donc être proche de 0. Du fait de la mise à jour de  $\alpha$ , une faible valeur de  $\alpha^{(0)}$  n'est pas très pénalisante en termes de vitesse de convergence car la valeur optimale de  $\alpha$  est généralement obtenue dès la seconde itération. On peut donc imposer par sécurité une valeur de  $\alpha^{(0)}$  de l'ordre de  $10^{-4}$ .

Il est nécessaire de définir un critère de convergence pour déterminer quand arrêter les itérations. Le déplacement augmentant avec la profondeur de pénétration, un critère de convergence  $\epsilon$  inversement proportionnel à la profondeur de pénétration  $h(t)$  garantit une précision relative sur  $\mathbf{A}$  indépendante de la profondeur de pénétration. Le critère choisi est le suivant :

$$|e_i^{(n)}(t)|/h(t) < \epsilon. \quad (2.40)$$

Pour la plupart des calculs réalisés, nous avons utilisé  $\epsilon = 4 \times 10^{-4}$ , les paramètres de maillage étant :  $N_r = 20$ ,  $N_q = 4$ ,  $b = 100$  et  $\xi_{N_r} = 5$ . L'exemple présenté au paragraphe 2.2.1 montre qu'avec ce maillage et ce critère de convergence l'erreur relative sur la première composante  $a_0(t)$  est inférieure à 0,07%. Il convient néanmoins de noter que la précision que l'on peut atteindre concernant la surface mouillée dépend du maillage utilisé et notamment de sa finesse au voisinage de la zone de contact. Pour des maillages trop grossiers, il est possible de ne pas pouvoir atteindre  $\epsilon = 4 \times 10^{-4}$ .

#### 2.2.4 Conditions initiales : $\mathbf{A}^{(0)}$

La bon fonctionnement et le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir la convergence dépendent des conditions initiales. Il faut en particulier que  $\mathbf{A}^{(0)}$  soit tel que les contraintes suivantes soient vérifiées :

$$\hat{a}(\theta)^{(0)}(t) > 0, \theta \in [0, 2\pi] \quad (2.41)$$

En l'absence de connaissance a priori de la ligne de contact, nous suggérons d'initialiser la ligne de contact à l'aide de la solution de von Karman  $\Gamma^{(vk)}$ , c'est-à-dire la ligne de contact entre le corps et la surface initiale du fluide au repos définie par :

$$(x_0, y_0) \in \Gamma^{(vk)} \Leftrightarrow f(x_0, y_0) = h(t) \quad (2.42)$$

De cette façon, les termes  $a_i^{(0)}(t)$  correspondront à la série de Fourier tronquée décrivant la courbe  $\Gamma^{(vk)}$ . Le terme  $a_0^{(0)}(t)$  étant le plus important, il est possible de se contenter d'initialiser ce seul terme et de laisser les autres à 0. Dans le cas où la ligne de contact doit être déterminée à plusieurs instants, la solution initiale à un instant donné (autre que le premier) est extrapolée à l'aide des solutions convergées aux instants précédents. Cela permet de réduire le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre le critère de convergence.

### 2.2.5 Validation de la méthode de résolution du problème de Wagner 3D

Différents cas d'étude sont présentés dans ce paragraphe afin de valider la méthode de calcul de la ligne de contact. Les résultats sont comparés avec des résultats analytiques et numériques de référence.

#### Cas d'un cône d'angle 15°

Les résultats présentés au paragraphe 2.2.1 dans le cas de l'impact d'un cône constituent une première validation simple de la méthode. On peut observer sur le tableau 2.1 que, d'une part, la composante  $a_0(t)$  est calculée précisément, et d'autre part, les harmoniques supérieures sont bien négligeables devant la composante  $a_0(t)$ .

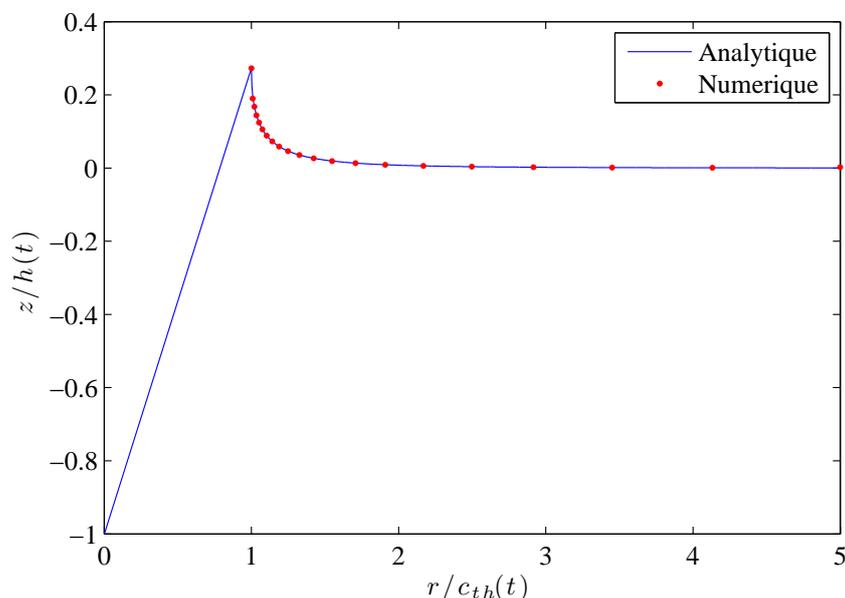
Dans le cas d'un cône, l'élévation théorique de la surface libre s'obtient facilement en intégrant la vitesse au niveau de la surface libre au cours du temps. On utilisera pour cela l'équation 2.22, donnant l'évolution du rayon de la surface mouillée, et la formule ci-dessous donnant la vitesse autour d'un disque circulaire de rayon  $c$  (voir [Scolan et Korobkin \(2001\)](#)) :

$$U_z(r, c) = \frac{-2|V_z|}{\pi} \left[ \arcsin\left(\frac{c}{r}\right) - \frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}} \right], \quad (2.43)$$

ce qui conduit à :

$$\eta(r, t) = \frac{-2h(t)}{\pi} \left[ \arcsin\left(\frac{c(t)}{r}\right) + \frac{2}{c(t)} \sqrt{r^2 - c(t)^2} - \frac{2r}{c(t)} \right]. \quad (2.44)$$

La figure 2.16 montre que l'élévation de la surface libre calculée numériquement est en bonne adéquation avec la solution analytique.


 FIGURE 2.16 – Elévation de la surface libre lors de l’impact d’un cône d’angle  $15^\circ$ 

### Cas d’un parabolôïde elliptique

Le parabolôïde elliptique est un cas d’étude intéressant pour lequel [Scolan et Korobkin \(2001\)](#) présentent une solution analytique. Cette solution est construite par une méthode inverse. Dans cette méthode, l’évolution temporelle de la ligne de contact est supposée connue et l’on détermine la forme du corps impactant qui conduit à cette évolution de la surface mouillée à partir de la condition de Wagner. Le champ d’application de la solution proposée par [Scolan et Korobkin \(2001\)](#) est restreint aux corps ayant une ligne de contact elliptique définie par exemple par la courbe paramétrée suivante pour  $\theta \in [0 ; 2\pi]$  :

$$\begin{cases} x = d_1(t) \cos \theta \\ y = d_2(t) \sin \theta \end{cases} . \quad (2.45)$$

Une évolution de la ligne de contact telle que  $d_1(t) = \delta_1 \sqrt{h(t)}$  et  $d_2(t) = \delta_2 \sqrt{h(t)}$  conduit à une géométrie  $f(x, y)$  de la forme suivante :

$$f(x, y) = D_1 x^2 + D_2 y^2, \quad (2.46)$$

dont les coefficients  $D_1$  et  $D_2$  sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \frac{1}{\delta_1^2 k^2} \left[ 2 - k^2 \frac{D(e)}{E(e)} \right], & k &= \delta_1 / \delta_2, & E(e) &= \int_0^{\pi/2} (1 - e^2 \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta, \\
 D_2 &= \frac{1}{\delta_2^2} \left[ 1 + k^2 \frac{D(e)}{E(e)} \right], & e &= \sqrt{1 - k^2}, & K(e) &= \int_0^{\pi/2} (1 - e^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} d\theta, \\
 D(e) &= [K(e) - E(e)] / e^2.
 \end{aligned}$$

Considérons le paraboloid elliptique pour lequel la surface de contact a un élanement  $k = 2/3$  défini par les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} d_1(t) = 0,160 \text{ m} \\ d_2(t) = 0,240 \text{ m} \\ h(t) = 2,40 \times 10^{-2} \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_1 \approx 1,5447780 \text{ m}^{-1} \\ D_2 \approx 0,56634313 \text{ m}^{-1} \end{cases} . \quad (2.47)$$

La figure 2.17 ci-dessous présente les résultats obtenus par la méthode numérique pour différents nombres d'harmoniques. On peut observer une rapide convergence de la solution approchée vers la solution analytique lorsque  $N_a$  augmente, ce malgré le fait que la forme de la ligne de contact théorique présente un nombre infini d'harmoniques. Cinq harmoniques semblent suffisantes pour décrire correctement la surface mouillée. Ceci est confirmé par les données présentées dans le tableau 2.2.

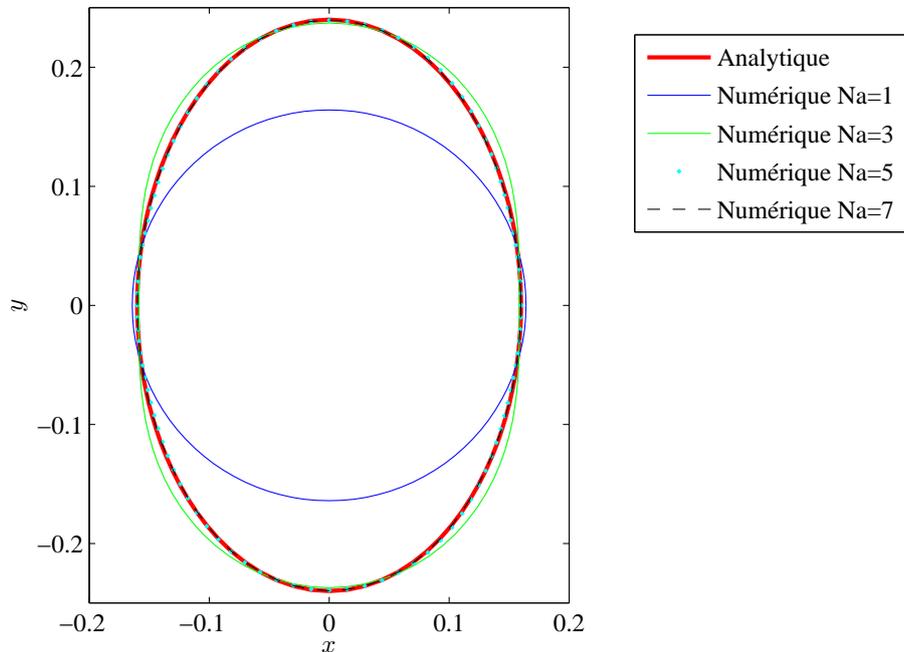


FIGURE 2.17 – Ligne de contact d'un paraboloid elliptique ( $k = 2/3$ )

| $N_a$      | 1               | 3                 | 5                | 7                | Analytique       |
|------------|-----------------|-------------------|------------------|------------------|------------------|
| $a_0(t)$   | $1,642.10^{-1}$ | $1,978.10^{-1}$   | $1,936.10^{-1}$  | $1,938.10^{-1}$  | $1,940.10^{-1}$  |
| $a_1(t)$   | 0               | $-1,094.10^{-14}$ | $-3,798.10^{-4}$ | $-1,915.10^{-6}$ | 0                |
| $a_2(t)$   | 0               | $-3,933.10^{-2}$  | $-3,973.10^{-2}$ | $-3,910.10^{-2}$ | $-3.899.10^{-2}$ |
| $a_3(t)$   | 0               | 0                 | $4,837.10^{-4}$  | $7,892.10^{-5}$  | 0                |
| $a_4(t)$   | 0               | 0                 | $6,245.10^{-3}$  | $5,954.10^{-3}$  | $5,858.10^{-3}$  |
| $a_5(t)$   | 0               | 0                 | 0                | $-3,942.10^{-5}$ | 0                |
| $a_6(t)$   | 0               | 0                 | 0                | $-9,272.10^{-4}$ | $-9,773.10^{-4}$ |
| Nb. d'it.  | 7               | 8                 | 11               | 10               | 0                |
| $e_T/h(t)$ | 35,1%           | 8,4%              | 1,2%             | 0,2%             | 0                |

TABLE 2.2 – Comparaison des calculs de surface mouillée pour le paraboloïde elliptique avec  $k = 2/3$ .

Considérons à présent un paraboloïde plus élancé avec  $k = 1/3$  défini par les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} d_1(t) = 0,160 \text{ m} \\ d_2(t) = 0,480 \text{ m} \\ h(t) = 2,40 \times 10^{-2} \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_1 \approx 1,726 \text{ m}^{-1} \\ D_2 \approx 0,121 \text{ m}^{-1} \end{cases} . \quad (2.48)$$

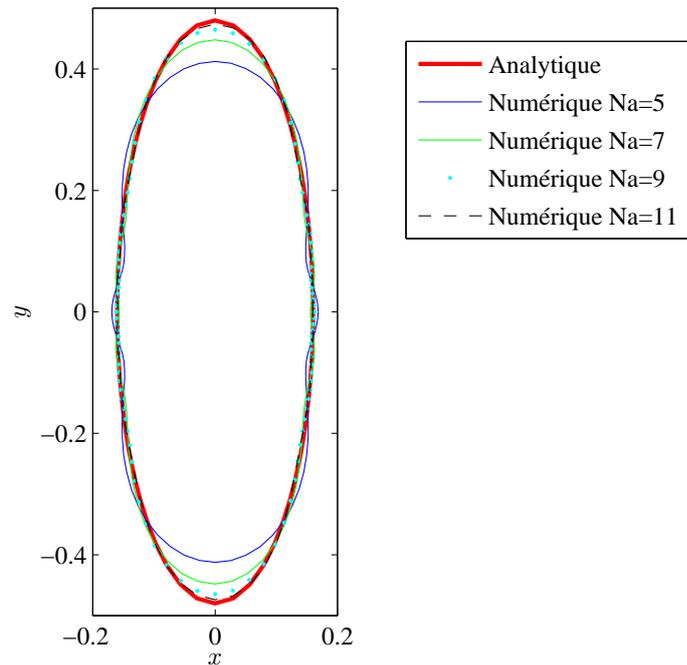
Les résultats de calcul de la ligne de contact pour différents nombres d'harmoniques sont présentés par la figure 2.18. On remarque clairement qu'une surface de contact élancée nécessite un plus grand nombre d'harmoniques qu'une ligne de contact peu élancée. Avec  $k = 1/3$ , nous pouvons considérer que la géométrie de la ligne de contact est correctement décrite en utilisant 9 harmoniques.

Afin d'évaluer la précision des différentes solutions numériques obtenues en termes d'effort, il est intéressant de calculer la « masse ajoutée » de la surface mouillée. Dans le cadre de la théorie de Wagner, cette dernière est donnée par :

$$M_a = -\frac{\rho}{|V_z|} \iint_{SM^{(w)}(t)} \varphi^{(w)}(x, y, 0, t) dx dy, \quad (2.49)$$

où  $\varphi^{(w)}$  est le potentiel des vitesses solution du système d'équations 3.8. La méthode utilisée pour le calcul de  $\varphi^{(w)}$  est présentée au chapitre suivant.

Les masses ajoutées correspondant aux différentes estimations de la surface mouillée pour les deux élancements considérés sont présentées au tableau 2.3. Les


 FIGURE 2.18 – Ligne de contact d'un paraboloidé elliptique ( $k = 1/3$ )

masses ajoutées sont évaluées à titre indicatif avec une masse volumique unitaire ( $\rho = 1 \text{ kg.m}^{-3}$ ). Comme attendu, on observe la convergence vers la solution analytique lorsque  $N_a$  augmente. Nous observons également qu'il n'est pas nécessaire de déterminer la surface mouillée avec une précision extrême pour obtenir une bonne évaluation de la masse ajoutée. Par exemple, dans le cas où  $k = 1/3$ , la géométrie de la surface mouillée obtenue pour  $N_a = 7$  présente des différences assez marquées par rapport à la solution analytique mais la masse ajoutée obtenue est proche de sa valeur exacte (la différence relative est inférieure à 4%).

| $k = 2/3$ |                       | $k = 1/3$ |                       |
|-----------|-----------------------|-----------|-----------------------|
| $N_a$     | $M_a(\text{kg})$      | $N_a$     | $M_a(\text{kg})$      |
| 1         | $5,90 \times 10^{-3}$ | 5         | $2,14 \times 10^{-2}$ |
| 3         | $1,03 \times 10^{-2}$ | 7         | $2,23 \times 10^{-2}$ |
| 5         | $9,69 \times 10^{-3}$ | 9         | $2,27 \times 10^{-2}$ |
| 7         | $9,70 \times 10^{-3}$ | 11        | $2,29 \times 10^{-2}$ |
| Théorique | $9,73 \times 10^{-3}$ | Théorique | $2,31 \times 10^{-2}$ |

TABLE 2.3 – Calculs de la masse ajoutée pour un paraboloidé elliptique.

### Paraboloïde elliptique décentré

Afin de valider l'aptitude de la méthode à traiter des formes non-symétriques, il est possible d'étudier le cas d'un paraboloïde elliptique symétrique en imposant un point de référence  $\mathbf{C}$  différent du centre de la surface mouillée. Considérons la forme définie par  $f(x, y) \approx 1,418(x - \Delta x)^2 + 0,517y^2$ , avec  $\Delta x = 0,05$  m, pour un enfoncement  $h(t) = 22,8$  mm. Le décalage  $\Delta x$  représente environ un tiers du demi-axe de la ligne de contact. La figure 2.19 présente différentes solutions numériques ainsi qu'une solution de référence obtenue par décalage de la solution du même paraboloïde elliptique centré en  $x = 0$  pour  $Na = 5$ . Bien sûr, à cause du décalage introduit, des harmoniques impaires apparaissent (voir tableau 2.4). En comparant ces données avec celles du tableau 2.2, on observe également qu'à nombre d'harmoniques égal l'erreur globale est plus importante pour une forme asymétrique que pour une forme équivalente symétrique, ce qui confirme l'importance de la position du point de référence.

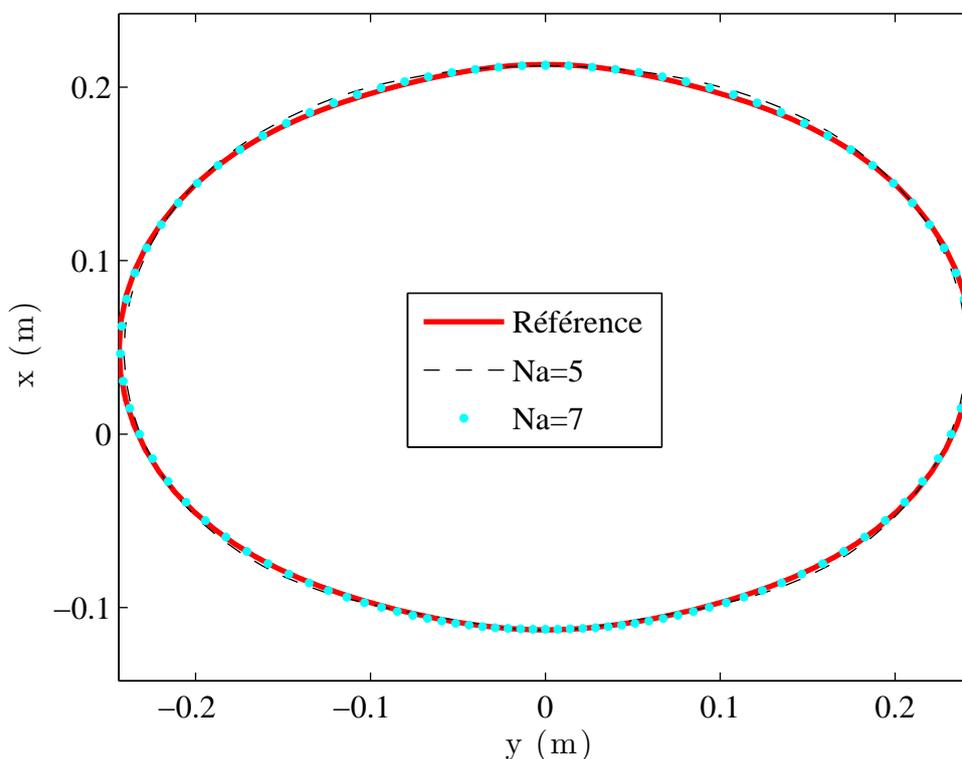


FIGURE 2.19 – Surface mouillée d'un paraboloïde elliptique décalé de  $\Delta x = 0,05$  m suivant l'axe  $x$ .

| $Na$       | 5                       | 7                       |
|------------|-------------------------|-------------------------|
| $a_0(t)$   | $1,934 \times 10^{-1}$  | $1,929 \times 10^{-1}$  |
| $a_1(t)$   | $6,039 \times 10^{-2}$  | $5,982 \times 10^{-2}$  |
| $a_2(t)$   | $-3,456 \times 10^{-2}$ | $-3,438 \times 10^{-2}$ |
| $a_3(t)$   | $-1,075 \times 10^{-2}$ | $-1,171 \times 10^{-2}$ |
| $a_4(t)$   | $3,815 \times 10^{-3}$  | $4,397 \times 10^{-3}$  |
| $a_5(t)$   | 0,000                   | $1,942 \times 10^{-3}$  |
| $a_6(t)$   | 0,000                   | $-4,195 \times 10^{-4}$ |
| $e_T/h(t)$ | 3%                      | 0,6%                    |

TABLE 2.4 – Comparaison des calculs de surface mouillée pour un paraboloidé décentré.

### Pyramide à base carrée d'angle $15^\circ$

Le cas d'une pyramide à base carrée est intéressant du fait de la présence d'arêtes vives. [Gazzola \(2007\)](#), [Gazzola et al. \(2005\)](#) et [Korobkin et Scolan \(2006\)](#) ont montré que la ligne de contact pour une telle forme était néanmoins régulière. Le déplacement le long de la ligne de contact  $\eta(\xi_0)$  n'étant par contre uniquement de régularité  $C_1$  par morceaux, ce cas d'étude pourrait être défavorable à notre méthode du fait de la régularité  $C_\infty$  intrinsèque aux séries de Fourier (risque d'apparition du phénomène de Gibbs).

Considérons une pyramide d'angle de relèvement  $\gamma$  dont la forme est définie ci-dessous :

$$\begin{cases} f(x, y) = \tan \gamma |x| & , \theta(x, y) \in [-\pi/4; \pi/4] \cup [3\pi/4; 5\pi/4] \\ f(x, y) = \tan \gamma |y| & , \theta(x, y) \in [\pi/4; 3\pi/4] \cup [-3\pi/4; -\pi/4] \end{cases} \quad (2.50)$$

Dans ce cas, le problème de Wagner peut être reformulé en introduisant les variables adimensionnelles  $x_1 = x \tan \gamma / h(t)$ ,  $y_1 = y \tan \gamma / h(t)$ ,  $z_1 = z \tan \gamma / h(t)$  et  $\psi_1(x_1, y_1, z_1) = \frac{\tan \gamma}{h(t)^2} \psi \left( \frac{x_1 h(t)}{\tan \gamma}, \frac{y_1 h(t)}{\tan \gamma}, \frac{z_1 h(t)}{\tan \gamma} \right)$ . Le problème aux limites (2.13) devient alors :

$$\begin{cases} \Delta \psi_1 = 0 & , z_1 < 0 \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial z_1} = f_1(x_1, y_1) - 1 & , (x_1, y_1, z_1) \in SM_1^{(w)} \\ \psi_1 = 0 & , (x_1, y_1, z_1) \in SL_1^{(w)} \\ \psi_1 \rightarrow 0 & , x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.51)$$

avec la fonction  $f_1$  définie par :

$$\begin{cases} f_1(x_1, y_1) = |x_1| & , \theta_1(x_1, y) \in [-\pi/4; \pi/4] \cup [3\pi/4; 5\pi/4] \\ f_1(x_1, y_1) = |y_1| & , \theta_1(x_1, y_1) \in [\pi/4; 3\pi/4] \cup [-3\pi/4; -\pi/4] \end{cases}. \quad (2.52)$$

La condition de Wagner devient alors :

$$\lim_{\substack{(x_1, y_1) \rightarrow \Gamma_1^{(w)} \\ (x_1, y_1) \in SL_1^{(w)}}} \frac{\partial \psi_1}{\partial z_1}(x_1, y_1, 0) = f_1(x_1, y_1) - 1. \quad (2.53)$$

On en déduit que  $\Gamma_1^{(w)}$  ne dépend ni de  $\gamma$ , ni de  $h(t)$ . Il est possible de construire toutes les solutions à partir de  $\Gamma_1^{(w)}$  en faisant le changement de variables inverse :  $(x_1, y_1) \in \Gamma_1^{(w)} \Leftrightarrow (x, y) \in \Gamma^{(w)}$ .

La figure 2.20 montre la ligne de contact prédite par la méthode proposée, ainsi que les résultats obtenus par [Gazzola \(2007\)](#) avec la méthode des inégalités variationnelles et par [Korobkin et Scolan \(2006\)](#) en utilisant une méthode de perturbation. On observe que notre solution numérique est proche de la solution numérique de référence de [Gazzola \(2007\)](#) mais qu'un grand nombre d'harmoniques est nécessaire pour atteindre cette précision ( $N_a = 15$ ). On remarque également que la solution analytique approchée de [Korobkin et Scolan \(2006\)](#) est une bonne estimation de la ligne de contact et qu'elle apporte une amélioration considérable à la solution de von Karman.

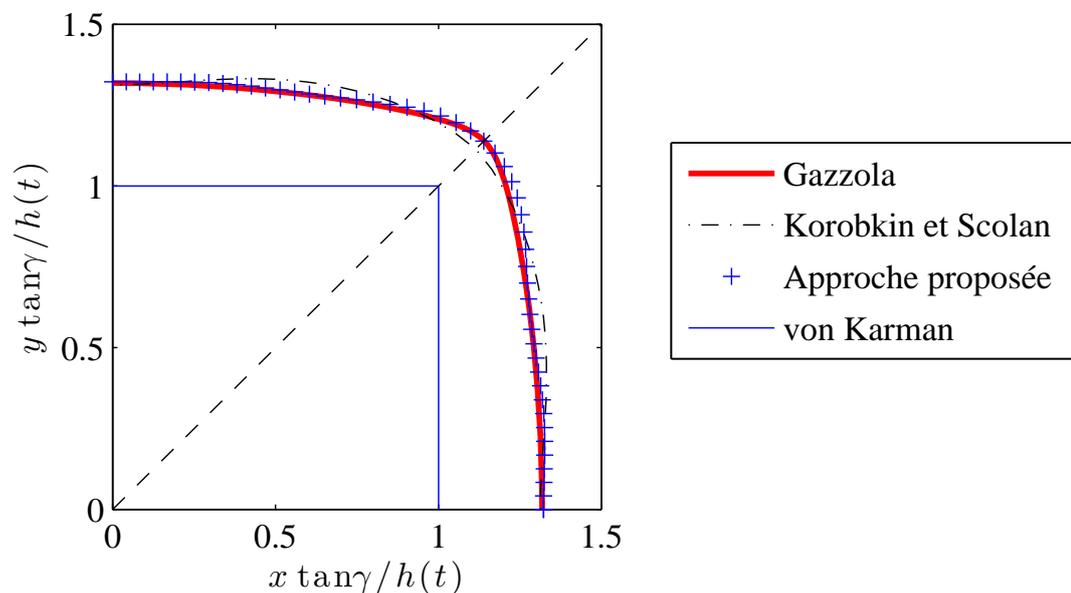


FIGURE 2.20 – Surface mouillée d’une pyramide à base carrée

## 2.3 Conclusion

La méthode numérique proposée dans ce chapitre permet de déterminer la géométrie de la surface de contact lors de l’impact d’un solide tridimensionnel. Pour la mise en oeuvre et la programmation de cette méthode, nous nous sommes limités à des formes présentant un plan de symétrie, mais elle pourrait être aisément adaptée à des formes sans symétrie (en incluant des termes en sinus dans la série de Fourier décrivant le rayon de la surface de contact). Il serait également possible de prendre en compte une rotation du corps ; ceci dans les limites de la théorie de Wagner qui impose, qu’à un instant donné, la surface mouillée englobe les surfaces mouillées des instants précédents. On a pu voir que l’élancement du corps avait une influence importante sur le nombre d’harmoniques nécessaires pour une bonne estimation de la ligne de contact. Enfin, malgré l’approximation du rayon par une série de Fourier, la méthode fournit des résultats convenables pour des formes présentant des arêtes vives.



---

## Calcul de la pression hydrodynamique d'impact

La méthode présentée au chapitre 2 permet de déterminer l'évolution de la surface mouillée au cours de l'impact. Dans ce chapitre, nous allons présenter la méthode utilisée pour calculer la pression hydrodynamique agissant sur la surface mouillée. Nous utiliserons le modèle de Logvinovich modifié qui a été étendu afin de prendre en compte la vitesse horizontale lors du calcul de la pression (paragraphe 3.1). La détermination du potentiel des vitesses de Wagner nécessaire dans le cadre du modèle de Logvinovich modifié est ensuite détaillée au paragraphe 3.2. Des cas tests sont présentés pour validation.

Dans ce chapitre,  $R_1(x_1, y_1, z_1)$  désigne un repère fixe,  $R_0(x_0, y_0, z_0)$  désigne un repère lié au corps impactant et  $R(x, y, z)$  désigne le repère lié au point de référence  $\mathbf{C}$  de la description polaire de la ligne de contact. La vitesse horizontale  $V_x$  étant considérée constante durant l'impact (et  $V_y = 0$ ), le décalage entre  $\mathbf{O}_1$  et  $\mathbf{O}$  est égal à  $V_x t$  (voir figure 3.1).

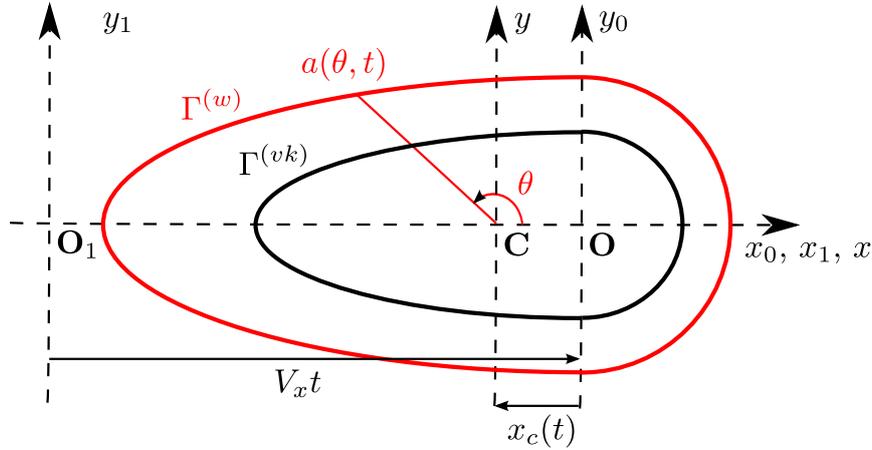


FIGURE 3.1 – Position des différents repères

### 3.1 Modèle de Logvinovich modifié tridimensionnel (MLM 3D)

Le modèle de Logvinovich modifié a d'abord été proposé par [Korobkin \(2004\)](#) pour le cas 2D et a ensuite été étendu au cas 3D dans [Korobkin \(2005\)](#). Le MLM présente un certain nombre d'avantages. Tout d'abord, comme nous l'avons indiqué, une variante 3D de ce modèle existe déjà. En outre, le MLM est simple et aisé à programmer. De plus, ce modèle est plus précis que d'autres modèles basés sur la théorie de Wagner. Dans le cas de problèmes 2D et axisymétriques, il a été observé que le MLM permettait de déterminer les efforts d'impact hydrodynamique avec une remarquable précision, [Tassin \*et al.\* \(2010\)](#) (voir annexe A).

Dans le MLM, la surface de contact est calculée par le modèle de Wagner classique. Le calcul de la pression incorpore des termes supplémentaires provenant du problème potentiel non linéaire initial 2.1. Ainsi, la pression au sein du fluide est donnée par l'équation de Bernoulli complète rappelée ci-dessous :

$$p(x_1, y_1, z_1, t) = -\rho \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 \right). \quad (3.1)$$

En supposant que le corps impactant a un mouvement de translation à vitesse constante  $\mathbf{V} = {}^t(V_x, V_y, V_z)$ , la pression  $P$  et le potentiel des vitesses  $\phi$  sur le corps (en un point de coordonnées  $(x_0, y_0)$  dans le repère  $R_0$  lié au corps) sont définis par :

$$P(x_0, y_0, t) = p(x_0 + V_x t, y_0 + V_y t, f(x_0, y_0) - h(t), t) \quad (3.2)$$

$$\phi(x_0, y_0, t) = \varphi(x_0 + V_x t, y_0 + V_y t, f(x_0, y_0) - h(t), t). \quad (3.3)$$

En utilisant la condition cinématique imposée sur la surface mouillée :

$$\nabla\varphi \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \varphi_{,x} \\ \varphi_{,y} \\ \varphi_{,z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -f_{,x} \\ -f_{,y} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -f_{,x} \\ -f_{,y} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

on peut exprimer la pression sur le corps en fonction du potentiel  $\phi$  sous la forme suivante :

$$P(x_0, y_0, t) = \rho \left[ -\phi_{,t} + V_x \phi_{,x} + V_y \phi_{,y} + H \frac{f_{,x} \phi_{,x} + f_{,y} \phi_{,y}}{1 + |\nabla f|^2} + \frac{f_{,x} f_{,y} \phi_{,x} \phi_{,y}}{1 + |\nabla f|^2} - \frac{1}{2} \frac{(1 + f_{,y}^2) \phi_{,x}^2 + (1 + f_{,x}^2) \phi_{,y}^2 - H^2}{1 + |\nabla f|^2} \right], \quad (3.5)$$

avec  $H = -f_{,x} V_x - f_{,y} V_y + V_z$ .

On peut remarquer que, par rapport au problème potentiel non linéaire 2.1, aucune hypothèse supplémentaire n'a été introduite pour établir l'équation 3.5. Cependant, le calcul du potentiel  $\varphi$  solution du système 2.1 est complexe et ne peut se faire qu'en utilisant un modèle éléments de frontière non linéaire. L'idée du modèle MLM consiste à approximer  $\varphi$  à l'aide du potentiel issu de la théorie de Wagner classique et d'un développement limité autour de la surface  $z = 0$ . Ainsi, en notant  $\varphi^{(w)}(x_0, y_0, t)$  le potentiel des vitesses de Wagner exprimé dans le repère  $R_0$  lié au corps, le potentiel est approximé par :

$$\begin{aligned} \phi(x_0, y_0, t) &\approx \varphi^{(w)}(x_0, y_0, f(x_0, y_0) + V_z t, t) \\ &\approx \varphi^{(w)}(x_0, y_0, 0, t) + [f(x_0, y_0) + V_z t] \times \varphi_{,z_0}^{(w)} \Big|_{z_0=0}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Or, d'après les conditions aux limites imposées au potentiel des vitesses de Wagner sur la surface mouillée (voir système 3.8) :

$$\phi(x_0, y_0, t) \approx \varphi^{(w)}(x_0, y_0, 0, t) + V_z (f(x_0, y_0) + V_z t). \quad (3.7)$$

Cette approximation permet d'éviter la résolution lourde du système d'équations 2.1 mais requiert cependant le calcul de  $\varphi^{(w)}$  et de ses différentes dérivées partielles.

## 3.2 Calcul du potentiel des vitesses de Wagner

$\varphi^{(w)}$

### 3.2.1 Equation intégrale pour le calcul de $\varphi^{(w)}$

Le potentiel des vitesses de Wagner est régi par le système d'équations que nous rappelons ci-dessous :

$$\begin{cases} \Delta \varphi^{(w)} = 0 & , z < 0 \\ \varphi^{(w)} = 0 & , (x_0, y_0, 0) \in SL^{(w)} \\ \varphi_{,z}^{(w)} = V_z & , (x_0, y_0, 0) \in SM^{(w)} \\ \varphi^{(w)} \rightarrow 0 & , x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.8)$$

La solution de ce système admet la représentation intégrale suivante pour un point  $\mathbf{p}$  tel que  $z_p < 0$  (voir annexe B.1) :

$$\varphi^{(w)}(x_p, y_p, z_p, t) = -\frac{z_p}{2\pi} \iint_{SM^{(w)}} \frac{\varphi^{(w)}(x_q, y_q, 0, t) dx_q dy_q}{\left((x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + z_p^2\right)^{3/2}}. \quad (3.9)$$

La dérivation de cette équation par rapport à  $z_p$  conduit à :

$$\begin{aligned} \varphi_{,z}^{(w)}(x_p, y_p, z_p, t) = & -\frac{1}{2\pi} \iint_{SM^{(w)}} \frac{\varphi^{(w)}(x_q, y_q, 0, t) dx_q dy_q}{\left((x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + z_p^2\right)^{3/2}} \\ & + \frac{3z_p^2}{2\pi} \iint_{SM^{(w)}} \frac{\varphi^{(w)}(x_q, y_q, 0, t) dx_q dy_q}{\left((x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + z_p^2\right)^{5/2}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Le passage à la limite de l'équation 3.10 en  $z_p = 0^-$  détaillé à l'annexe B.2 conduit à l'équation intégrale suivante :

$$\begin{aligned} 2\pi|V_z| = & \iint_{SM^{(w)}} \frac{\left[\varphi^{(w)}(x_q, y_q, 0, t) - \varphi^{(w)}(x_p, y_p, 0, t)\right] dx_q dy_q}{\left[(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2\right]^{3/2}}, \\ & - \varphi^{(w)}(x_p, y_p, 0, t) \int_0^{2\pi} \frac{1}{a(\theta, t)} d\theta \end{aligned} \quad (3.11)$$

avec  $a(\theta, t)$  la distance entre un point de la ligne de contact et le point  $\mathbf{p}$ . L'équation intégrale 3.11 régit le potentiel des vitesses de Wagner sur la surface mouillée et permet de déterminer une approximation de  $\varphi^{(w)}$  par une forme particulière présentée au paragraphe 3.2.2.

### 3.2.2 Solution analytique approchée pour $\varphi^{(w)}$

Dans le cas d'une ligne de contact elliptique de demi-axes  $d_1(t)$  et  $d_2(t)$ , le potentiel des vitesses de Wagner  $\varphi^{(w)}$  sur la surface mouillée admet la solution analytique suivante :

$$\varphi^{(w)}(x, y, 0, t) = -\frac{|V_z|d_1(t)}{E(e)} \sqrt{1 - x^2/d_1(t)^2 - y^2/d_2(t)^2}, \quad (3.12)$$

avec  $V_z$  la composante verticale de la vitesse d'impact et  $E(e)$  défini par l'équation 2.46.

On peut remarquer que l'expression 3.12 est de la forme  $A\sqrt{1 - r^2/a(\theta, t)^2}$ , avec  $(r, \theta)$  le système de coordonnées polaires du repère  $R$  et  $a(\theta, t)$  la fonction décrivant le rayon de la ligne de contact. Il semble par conséquent intéressant d'utiliser cette forme particulière pour des surfaces mouillées de formes plus générales mais régulières. On propose donc d'approximer le potentiel des vitesses de Wagner  $\varphi^{(w)}$  par une forme approchée  $\hat{\varphi}^{(w)}$  définie dans le repère  $R$  centré en  $\mathbf{C}$  :

$$\varphi^{(w)}(x_0, y_0, 0, t) \approx \hat{\varphi}^{(w)}(x_0 - x_c, y_0, 0, t) = A(t) \sqrt{1 - \frac{r^2}{\hat{a}(\theta, t)^2}}. \quad (3.13)$$

$r$  et  $\theta$  désignent les coordonnées polaires dans le repère  $R$ , on a donc :

$$\begin{cases} x_0 - x_c(t) = r \cos \theta \\ y_0 = r \sin \theta \end{cases}, \quad (3.14)$$

$x_c(t)$  étant l'abscisse du point de référence dans le repère  $R_0$ . Cette approximation implique un point d'arrêt en  $x_0 = x_c(t)$ . Si ce choix est évident pour une surface mouillée comportant deux axes de symétrie ( $x_c(t) = 0$ ), il est par contre plus discutable pour des formes plus générales. Néanmoins, une étude basée sur des calculs par éléments finis du potentiel des vitesses de Wagner, pour des plaques planes de formes assez générales, nous a permis de constater que le point d'arrêt se situait près de l'isobarycentre de la surface. Il apparaît que le point de référence  $\mathbf{C}$  est lui aussi proche de l'isobarycentre de la surface mouillée. Les quelques exemples présentés en fin de paragraphe illustreront ce point.

L'introduction de la fonction 3.13 dans l'équation 3.11 en choisissant un point  $\mathbf{p}$  en  $(x_p, y_p, z_p) = (x_c(t), 0, 0)$  conduit à :

$$2\pi|V_z| = \int_0^{2\pi} \int_0^{\hat{a}(\theta, t)} \frac{[A(t)\sqrt{1 - r^2/\hat{a}(\theta, t)^2} - A(t)] r dr d\theta}{r^3} - A(t) \int_0^{2\pi} \frac{1}{\hat{a}(\theta, t)} d\theta. \quad (3.15)$$

Pour établir l'équation 3.15, le changement de variables  $(x_q, y_q) = (r \cos \theta + x_c(t), r \sin \theta)$  a été utilisé. En notant  $\xi = r/\hat{a}(\theta, t)$ , l'équation 3.15 peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} 2\pi|V_z| &= -A(t) \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{d\xi d\theta}{\hat{a}(\theta, t) [\sqrt{1 - \xi^2} + 1]} + \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\hat{a}(\theta, t)} \right\} \\ &= -\frac{\pi}{2} A(t) \int_0^{2\pi} \frac{1}{\hat{a}(\theta, t)} d\theta. \end{aligned} \quad (3.16)$$

L'évaluation de l'intégrale régulière ci-dessus ne pose pas de problème particulier.

### 3.2.3 Exemples de calculs de $\varphi^{(w)}$ pour des surfaces asymétriques

Trois exemples de calculs du potentiel des vitesses de Wagner pour des surfaces non symétriques sont présentés ci-dessous. Afin de valider l'approche, nous comparons les résultats de calculs par éléments finis à la solution approchée  $\hat{\varphi}^{(w)}$  obtenue par la méthode que nous venons de décrire. Les deux premiers exemples ne représentent pas des surfaces mouillées réelles mais des formes particulières qui nous ont semblé intéressantes. Pour ces deux cas, le point de référence a été placé au centre de la surface considérée. Le troisième exemple est par contre issu d'un calcul de surface mouillée ; le point de référence correspond au centre de la surface de von Kármán.

### Cas 1 : Surface asymétrique

La première surface mouillée est définie par  $\hat{a}(\theta) = 1 + 0.2 \cos \theta + 0.2 \cos 3\theta$ . La figure 3.2 ci-dessous présente la distribution du potentiel approché ainsi qu'une solution numérique issue d'un calcul par éléments finis. On remarque que la distribution du potentiel est globalement bien décrite par la forme approchée.

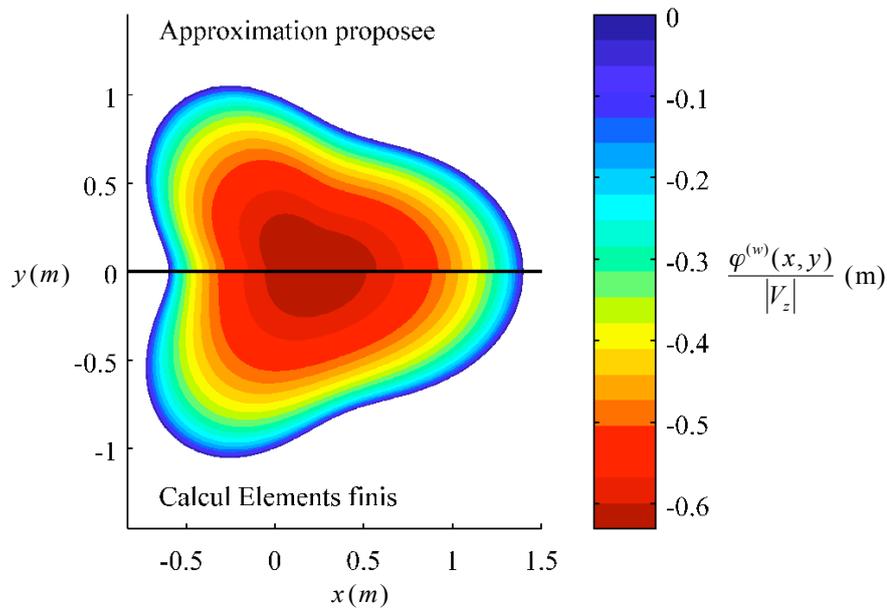


FIGURE 3.2 – Comparaison entre la distribution du potentiel des vitesses calculé à l'aide du modèle analytique et d'un calcul par éléments finis sur la surface mouillée (cas 1)

La figure 3.3 compare la distribution du potentiel des vitesses le long de l'axe  $x$ . Les niveaux du potentiel sont globalement bien respectés sur une telle forme de surface mouillée. La position du centre de la surface est proche de la position du point d'arrêt prédite par le calcul par éléments finis.

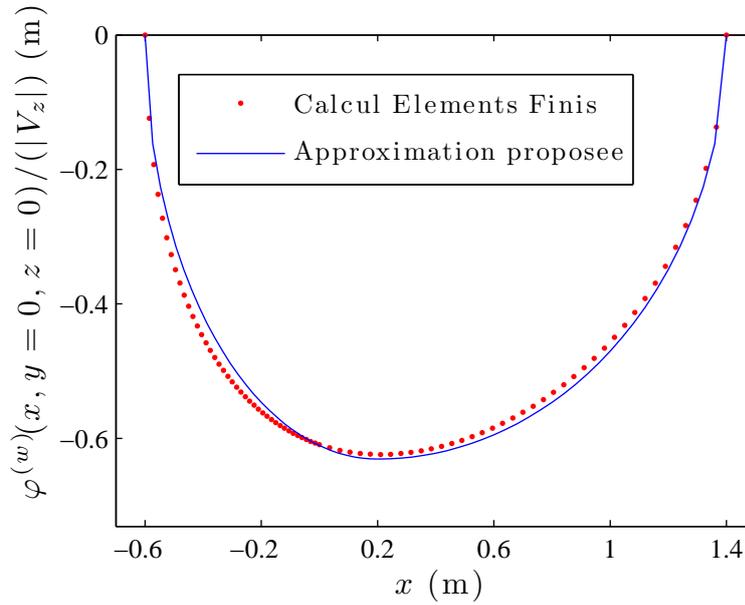


FIGURE 3.3 – Comparaison entre le potentiel des vitesses calculé à l’aide du modèle analytique et d’un calcul par éléments finis le long de l’axe  $x$  (cas 1)

### Cas 2 : Surface elliptique asymétrique

La seconde forme de surface mouillée considérée est composée de deux secteurs d’ellipse définis ci-dessous :

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 & , x \geq 1 \\ (x-1)^2/3^2 + y^2 = 1 & , x \leq 1 \end{cases} \quad (3.17)$$

La figure 3.4 montre de légères différences entre la solution approchée et la solution numérique de référence en ce qui concerne la répartition. Ceci semble lié à un léger décalage entre la position réelle du point d’arrêt (prévue par le calcul éléments finis) et le centre de la surface. En effet, l’écart  $\Delta x$  entre le point d’arrêt et le centre de la surface est d’environ 0.2 m, soit environ 5% de l’étendue de la surface mouillée dans la direction  $x$ .

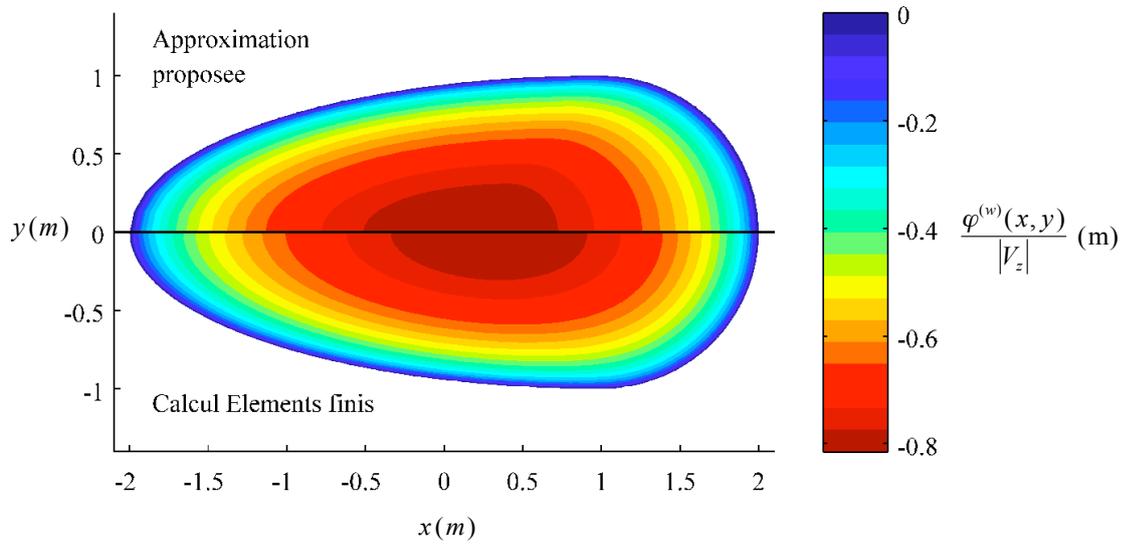


FIGURE 3.4 – Comparaison entre la distribution du potentiel des vitesses calculé à l'aide du modèle analytique et d'un calcul par éléments finis sur la surface mouillée (cas 2)

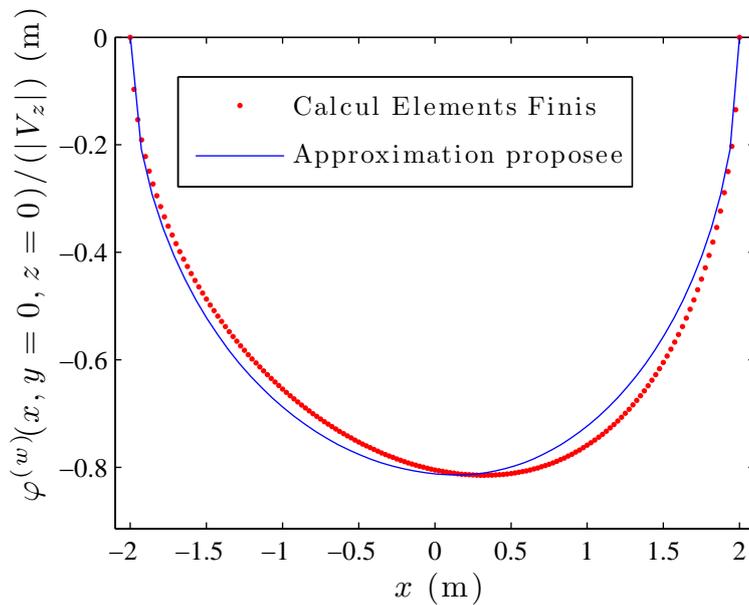


FIGURE 3.5 – Comparaison entre le potentiel des vitesses calculé à l'aide du modèle analytique et d'un calcul par éléments finis le long de l'axe  $x$  (cas 2)

### Cas 3 : Surface mouillée d'un cône asymétrique

Nous étudions à présent le cas d'une surface mouillée obtenue par la méthode présentée au chapitre 2 pour un cône non symétrique dont la géométrie est donnée

dans le chapitre 5 (paragraphe 5.2.2). Dans le cas du cône asymétrique, la forme de la surface mouillée n'évolue pas au cours de l'impact et la taille de la surface mouillée est proportionnelle à la profondeur de pénétration. Les résultats de calculs par éléments finis et de l'approximation proposée précédemment sont présentés à la figure 3.6. Le système de coordonnées est centré sur le point de référence  $\mathbf{C}$ . On peut observer sur la figure 3.7 que la position du point d'arrêt est très proche de 0. On vérifie ainsi que l'approximation de la position du point d'arrêt par la position du point de référence est réaliste. De plus, un calcul de la position du centre de la surface mouillée montre que l'écart entre le centre de la surface mouillée et le point de référence est inférieur à 1% de l'étendue de la surface mouillée dans la direction  $x$ .

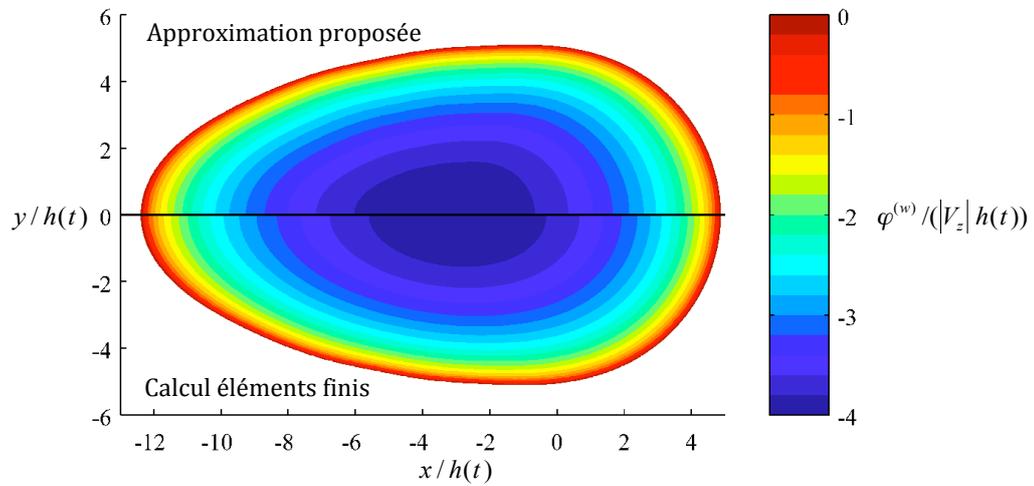
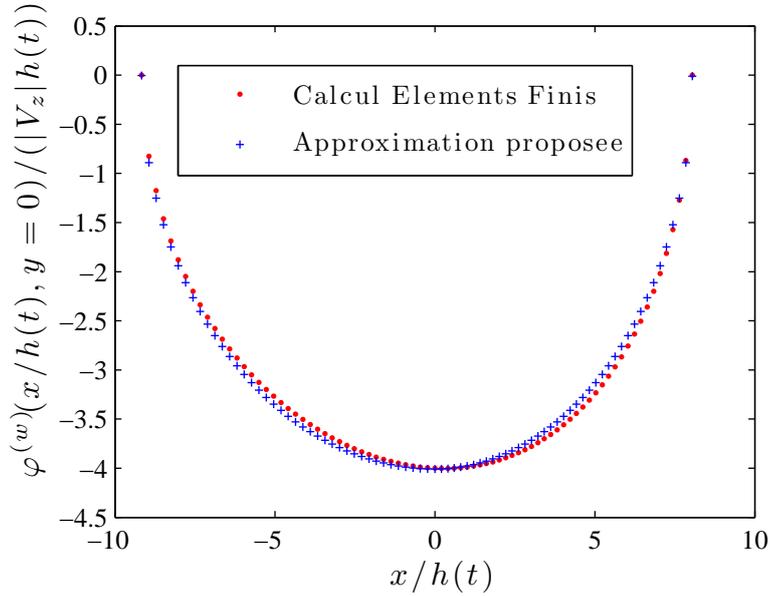


FIGURE 3.6 – Comparaison de la distribution du potentiel des vitesses sur la surface mouillée d'un cône asymétrique


 FIGURE 3.7 – Comparaison du potentiel des vitesses sur l'axe  $x$  (cône asymétrique)

### 3.3 Dérivation de $\phi$

L'introduction de l'approximation du potentiel des vitesses de Wagner dans l'équation 3.7 conduit à :

$$\phi(x_0, y_0, t) \approx \hat{\phi}^{(w)}(x_0 - x_c(t), y_0, 0, t) + V_z(f(x_0, y_0) + V_z t). \quad (3.18)$$

Ainsi, les dérivées partielles de  $\phi$  deviennent :

$$\begin{cases} \phi_{,t}(x_0, y_0, t) \approx \hat{\phi}_{,t}^{(w)}(x_0 - x_c(t), y_0, 0, t) - \frac{dx_c(t)}{dt} \hat{\phi}_{,x}^{(w)}(x_0 - x_c(t), y_0, 0, t) + V_z^2 \\ \phi_{,x}(x_0, y_0, t) \approx \hat{\phi}_{,x}^{(w)}(x_0 - x_c(t), y_0, 0, t) + f_{,x} V_z \\ \phi_{,y}(x_0, y_0, t) \approx \hat{\phi}_{,y}^{(w)}(x_0 - x_c(t), y_0, 0, t) + f_{,y} V_z \end{cases} \quad (3.19)$$

#### 3.3.1 Calcul de $\hat{\phi}_{,t}^{(w)}$

Repartons de l'approximation du potentiel des vitesses de Wagner :

$$\hat{\phi}^{(w)}(r, \theta, 0, t) = A(t) \sqrt{1 - r^2 / \hat{a}(\theta, t)^2}. \quad (3.20)$$

En dérivant  $\hat{\phi}^{(w)}$  par rapport au temps, on obtient :

$$\hat{\phi}_{,t}^{(w)}(r, \theta, 0, t) = \frac{dA(t)}{dt} \sqrt{1 - r^2 / \hat{a}(\theta, t)^2} + A(t) \frac{\partial \hat{a}(\theta, t)}{\partial t} \frac{r^2}{\hat{a}^3(\theta, t)} \left[ 1 - \left( \frac{r}{\hat{a}(\theta, t)} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (3.21)$$

### 3.3.2 Calcul de $\nabla \hat{\varphi}^{(w)}$

Par définition,

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_{,x}^{(w)} = \frac{\partial \hat{\varphi}^{(w)}}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\varphi}^{(w)}}{\partial \theta} \sin \theta \\ \hat{\varphi}_{,y}^{(w)} = \frac{\partial \hat{\varphi}^{(w)}}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\varphi}^{(w)}}{\partial \theta} \cos \theta \end{cases}. \quad (3.22)$$

Il faut donc évaluer les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{\varphi}^{(w)}}{\partial r} = -\frac{A(t)r}{\hat{a}^2(\theta, t)} \left[ 1 - \left( \frac{r}{\hat{a}(\theta, t)} \right)^2 \right]^{-1/2} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}^{(w)}}{\partial \theta} = A(t) \frac{\partial \hat{a}(\theta, t)}{\partial \theta} \frac{r^2}{\hat{a}^3(\theta, t)} \left[ 1 - \left( \frac{r}{\hat{a}(\theta, t)} \right)^2 \right]^{-1/2}. \end{cases} \quad (3.23)$$

On a  $\partial \hat{a}(\theta, t)/\partial \theta = \sum_{i=1}^{N_a-1} -ia_i(t) \sin(i\theta)$  et  $\partial \hat{a}(\theta, t)/\partial t = \sum_{i=1}^{N_a-1} (da_i(t)/dt) \cos(i\theta)$ . Les variables nécessaires pour calculer la pression sont :  $dx_c(t)/dt$ ,  $dA(t)/dt$  et  $da_i(t)/dt$ . Deux méthodes ont été testées pour estimer ces dernières. Dans la première, elles sont calculées par différence finie à partir des valeurs de  $x_c$ ,  $A$  et  $a_i$  obtenues avec la méthode présentée au chapitre 2. Par exemple,

$$\frac{dx_c(t)}{dt} \approx \frac{x_c(t + \delta t) - x_c(t)}{\delta t}. \quad (3.24)$$

Dans la seconde méthode, les valeurs  $x_c$ ,  $A$  et  $a_i$  sont calculées pour un certain nombre d'instants  $t_i$ . A partir de là, une représentation continue de  $x_c(t)$ ,  $A(t)$  et  $a_i(t)$  est construite en utilisant des splines cubiques. Il est ensuite possible de calculer les dérivés à n'importe quel instant (compris entre les valeurs mini et maxi prises par  $t_i$ ). Cette façon de faire est intéressante lorsque l'on souhaite calculer le champ de pression pour un grand nombre d'instants (par exemple si l'on souhaite le transférer vers un code de calcul de structure pour réaliser une simulation en dynamique).

## 3.4 Résumé

Nous avons présenté la méthodologie utilisée pour calculer le champ de pression agissant sur le corps impactant. Elle repose sur :

- le modèle de Logvinovich modifié,
- un calcul analytique approché du potentiel des vitesses.

Cette méthode est simple dans sa mise en oeuvre et rapide au point de vue des temps de calcul. De plus, comme nous le verrons dans les chapitres suivants, elle semble

suffisamment précise pour de nombreuses applications. Cependant, nous constatons également que le calcul analytique du potentiel des vitesses montre ses limites dans certains cas, en particulier en présence de vitesse d'avance. Dans ce cas, une alternative pourrait être l'utilisation d'un modèle éléments de frontière dans l'esprit de celui utilisé dans le chapitre précédent pour le calcul de l'élévation de la surface mouillée.

---

# Essais et simulations numériques par éléments finis d'impacts hydrodynamiques tridimensionnels

Différents moyens ont été mis en oeuvre afin d'obtenir des données pouvant servir à valider le modèle qui a été présenté dans les deux chapitres précédents :

- Des mesures expérimentales d'efforts hydrodynamiques agissant lors de l'impact de solides 3D ont été réalisées et sont présentées dans le paragraphe 4.1.
- Des simulations numériques par éléments finis ont été conduites avec le code commercial ABAQUS/Explicit (paragraphe 4.2).

## 4.1 Essais d'impacts hydrodynamiques

Ce paragraphe présente succinctement le dispositif et protocole expérimental, les maquettes étudiées et quelques aspects sur la répétabilité des essais.

### 4.1.1 Moyen d'essai

Ces essais ont été réalisés à l'aide de la machine de choc de l'ENSIETA. Celle-ci permet d'effectuer des essais d'impact sur eau et sur structure. On peut voir sur la figure 4.1 les différents éléments constitutifs du dispositif d'essai. Lors des essais d'impact sur eau, le bassin, visible en arrière plan, est placé sous la machine et est rempli d'eau. Pour avoir une idée de la taille du dispositif, nous noterons que les dimensions du bassin sont *longueur*  $\times$  *largeur*  $\times$  *hauteur* = 3 m  $\times$  2 m  $\times$  2 m. La maquette d'essai est fixée au bout du piston à l'aide d'une pièce intermédiaire appelée araignée. L'instrumentation utilisée lors des essais est montrée par la figure 4.2 :

- Des jauges extensométriques sont collées sur le piston et servent à mesurer l'effort appliqué.
- Un accéléromètre est fixé sur la maquette et permet de déterminer les variations de vitesse durant l'essai.

- Un dispositif électrique (non visible sur la photo) mesure la résistance électrique entre la maquette et une plaque de cuivre placée au fond du bassin. Cela permet de détecter le moment de premier contact entre la maquette et l'eau, car à cet instant la résistance mesurée chute subitement.

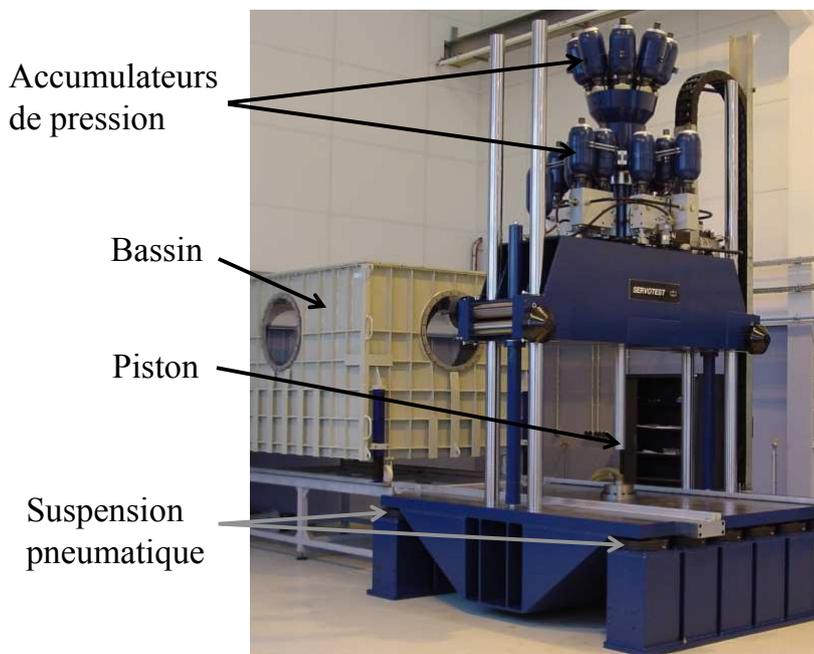


FIGURE 4.1 – Machine de choc

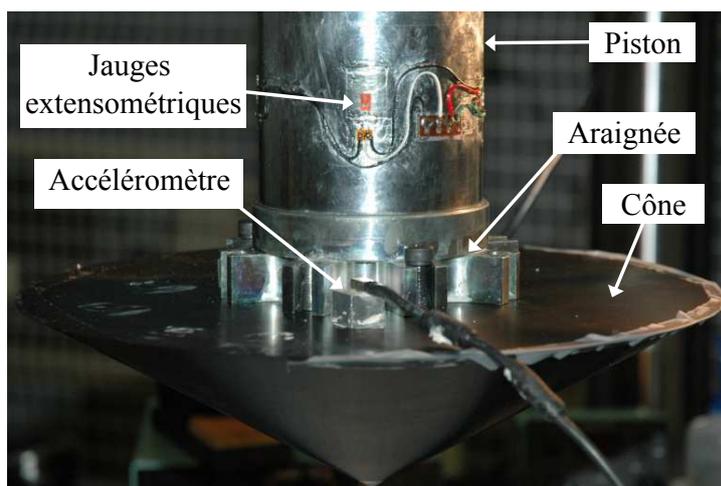


FIGURE 4.2 – Maquette d'un cône montée en bout de piston et moyens de mesures

Les principaux intérêts de cette machine sont de pouvoir contrôler la vitesse d'impact durant l'essai, d'effectuer des essais à grande vitesse et de mettre en oeuvre des efforts importants (voir tableau 4.1). La figure 4.3 montre un exemple d'enregis-

| Vitesse (m/s) | Effort max. (kN) | Course (mm) |
|---------------|------------------|-------------|
| 20            | 100              | 150         |
| 10            | 200              | 300         |

TABLE 4.1 – Performances de la machine de choc : ce tableau présente, en fonction de la vitesse d'impact souhaitée, l'effort maximal et la course sur laquelle cette vitesse peut être maintenue.

trement de la vitesse au cours de l'impact d'un cône d'angle  $30^\circ$  pour une consigne de vitesse de 20 m/s. On peut voir que les variations de vitesse sont largement inférieures à 5% durant l'impact. Ces faibles variations de vitesse peuvent toutefois entraîner des efforts inertiels non négligeables du fait de la masse de la maquette (15 à 20 kg). La mesure de l'accélération permet de corriger les effets inertiels en soustrayant l'effort inertiel ( $F_{inertiel}$ ) de l'effort total mesuré ( $F_{total}$ ). L'effort hydrodynamique ( $F_{hyd}$ ) est donc obtenu de la façon suivante :

$$F_{hyd} = F_{total} - F_{inertiel}. \quad (4.1)$$

L'effort inertiel est obtenu en appliquant le principe fondamental de la dynamique :

$$F_{inertiel} = m \frac{dV}{dt}, \quad (4.2)$$

où  $m$  représente la masse en mouvement comprise sous les jauges extensométriques (maquette+araignée+vis+extrémité du piston+...). Le profil de vitesse tracé sur la figure 4.3 conduit aux efforts présentés à la figure 4.4. Dans ce cas, la correction apportée à l'effort total reste assez faible.

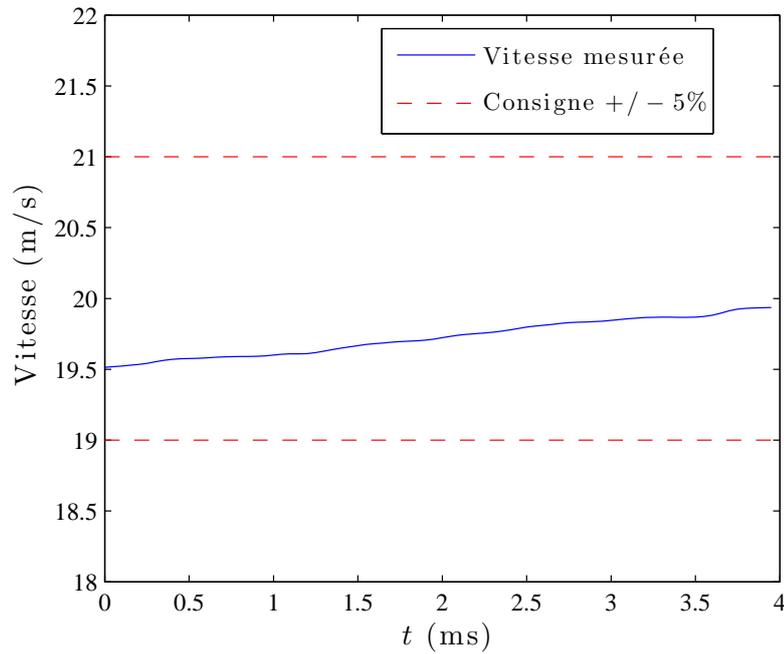


FIGURE 4.3 – Enregistrement de la vitesse au cours de l'impact d'un cône d'angle  $30^\circ$  pour une consigne de vitesse de 20 m/s

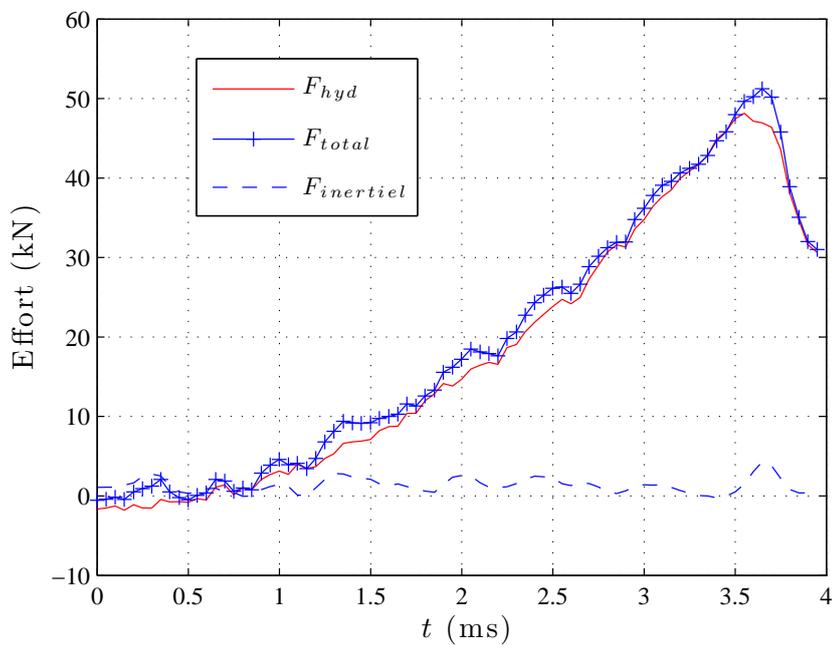


FIGURE 4.4 – Contribution de l'effort inertiel lors de l'impact d'un cône d'angle  $30^\circ$  pour une consigne de vitesse de 20 m/s

### 4.1.2 Maquettes étudiées

Cinq maquettes ont été réalisées par usinage dans un bloc d'aluminium 7075. Différents critères ont été pris en compte lors de la conception de ces maquettes :

- L'effort d'impact maximal doit être inférieur aux capacités de la machine (voir tableau 4.1) mais doit être supérieur à 24 kN (pour des raisons liées à la précision du capteur d'effort).
- La masse des maquettes doit être inférieure à 80 kg.
- Les déplacements induits par l'effort d'impact doivent être suffisamment faibles pour que la maquette puisse être considérée comme rigide (de l'ordre de la tolérance de fabrication).

Les différentes maquettes réalisées sont présentées ci-dessous.

#### Forme triconique

La forme triconique est une forme de révolution dont la section est présentée à la figure 4.5. On peut voir que cette forme s'apparente à celle d'un cône avec localement trois angles de relèvement différents.

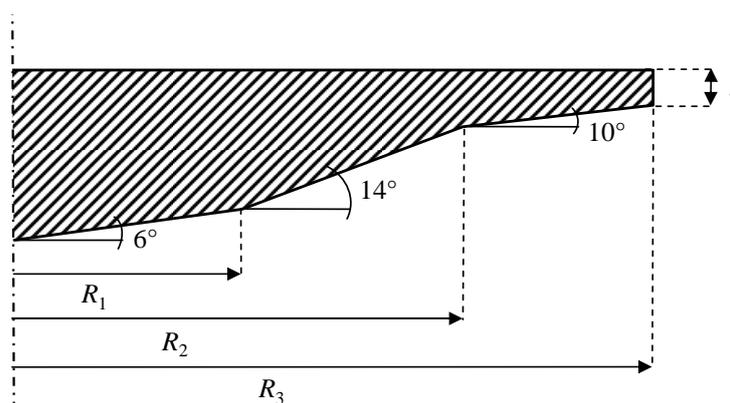


FIGURE 4.5 – Dessin de définition de la maquette triconique ( $l = 25$  mm,  $R_1 = 90$  mm,  $R_2 = 135$  mm,  $R_3 = 160$  mm)

#### Paraboloïde elliptique

La maquette du paraboloïde elliptique est construite à partir de la fonction  $f(x, y) = 1.418x^2 + 0.517y^2$ . Cette forme est tronquée comme indiqué sur la figure 4.6.

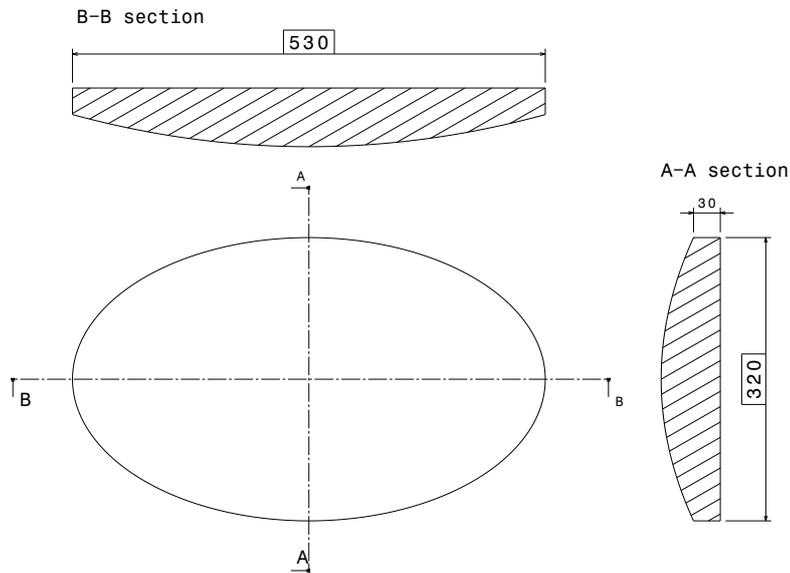


FIGURE 4.6 – Dessin de définition de la maquette du paraboloid elliptique

### Dièdre-cône

La forme dièdre-cône décrite par la figure 4.7 est composée d'une partie centrale en forme de dièdre d'angle de relèvement  $15^\circ$  et de deux extrémités en forme de demi-cône.

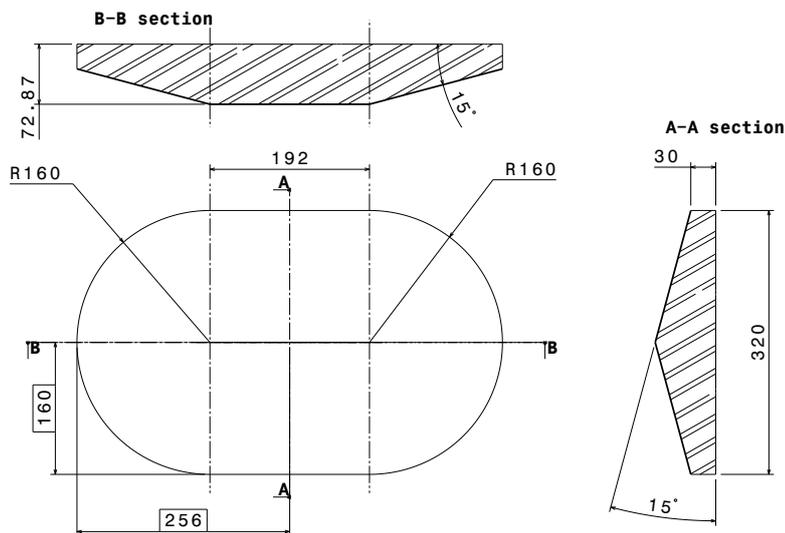


FIGURE 4.7 – Dessin de définition de la maquette dièdre-cône

## Pyramide

Cette maquette représente une pyramide à base carrée d'angle  $15^\circ$ . On peut voir sur la figure 4.8 que les arêtes de la pyramide sont orientées dans les directions  $0^\circ$  et  $90^\circ$ . Ce choix a été fait car il devrait permettre à l'avenir une installation plus facile de capteurs de pression Tekscan. Ces derniers se présentent sous la forme d'une feuille se collant directement sur la pièce (pas de perçage nécessaire).

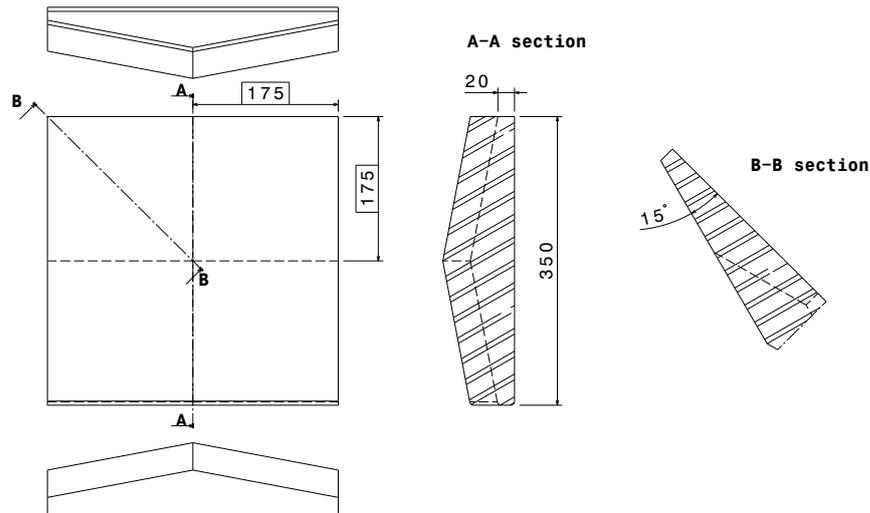


FIGURE 4.8 – Dessin de définition de la maquette pyramide

## Cylindre-sphère (non testée)

La forme cylindre-sphère décrite par la figure 4.9 est inspirée de la forme étudiée par [Faltinsen et Chezian \(2005\)](#). Cette forme est composée d'une partie centrale en forme de cylindre circulaire et d'extrémités en forme de demi-calotte sphérique. Malheureusement, à cause de problèmes d'indisponibilité de la machine de choc, il n'a pas été possible de tester cette maquette jusqu'à aujourd'hui. Cette forme a néanmoins été étudiée au travers de simulations numériques.

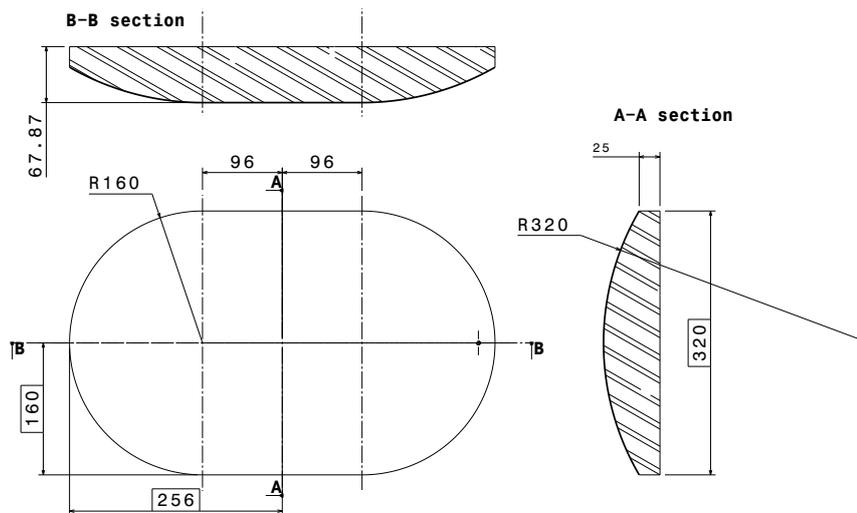


FIGURE 4.9 – Dessin de définition de la maquette cylindre-sphère

### 4.1.3 Répétabilité des essais

Lors des campagnes expérimentales précédentes, il a été observé que le contrôle de la vitesse durant l'essai conduisait à une très bonne répétabilité des essais. La répétabilité des essais et l'analyse de l'erreur ont été étudiées en détail par [Nême et El Malki Alaoui \(2009\)](#) dans le cas d'essais sur des cônes avec différents angles de relèvement. Nous présentons dans ce paragraphe une synthèse des phénomènes observés au cours des différents essais. Afin de comparer les essais à différentes vitesses d'impact, l'effort hydrodynamique est adimensionnalisé en introduisant le coefficient de slamming  $C_s$  défini par :

$$C_s = F_z / (0,5\rho V_z^2 S_{max}), \quad (4.3)$$

où  $F_z$  représente l'effort vertical d'impact hydrodynamique et  $S_{max}$  représente l'aire de la surface projetée de la maquette étudiée. Par exemple, dans le cas de la maquette du parabolôïde elliptique dont le dessin de définition est présenté à la figure 4.6, la surface projetée est un disque elliptique d'aire  $S_{max} = \pi \times 0,16 \times 0,265 \text{ m}^2$ . La profondeur de pénétration est également adimensionnalisée en introduisant le paramètre  $H$  défini par :

$$H = h(t) / S_{max}^{1/2}. \quad (4.4)$$

L'ensemble des essais réalisés vise à valider l'estimation des efforts d'impacts hydrodynamiques sur des pièces rigides et à vitesse constante. La campagne d'essais a montré que toutes les maquettes étudiées ne se comportaient pas de la même manière. Les maquettes dièdre-cône et pyramide conduisent à des résultats très proches

quelle que soit la vitesse d'impact considérée alors que pour les maquettes paraboloides elliptique et forme triconique, la courbe  $C_s$ - $H$  mesurée n'est pas totalement indépendante de la vitesse d'impact.

Considérons tout d'abord le cas de la maquette dièdre-cône. La figure 4.10 présente deux séries de mesures de l'effort hydrodynamique pour deux vitesses d'impact différentes. On peut voir qu'il n'y a que très peu de dispersion entre les six essais considérés et que la vitesse d'impact n'a pas d'influence sensible.

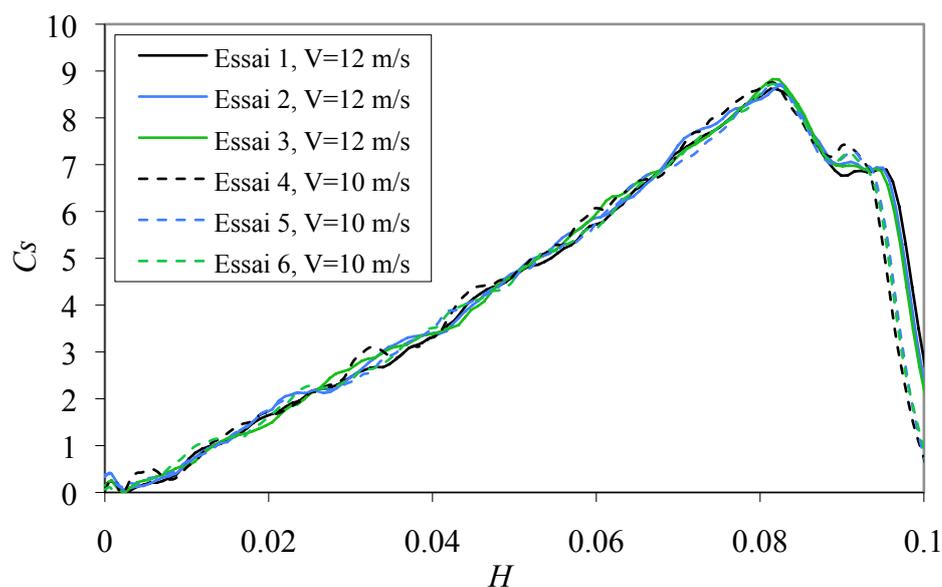


FIGURE 4.10 – Mesures du coefficient de slamming au cours de l'impact de la maquette dièdre-cône

Considérons ensuite le cas de la maquette paraboloides elliptique. La figure 4.11 présente deux séries de mesures de l'effort hydrodynamique au cours de l'impact. On constate une bonne répétabilité des essais pour des vitesses identiques mais de légères différences apparaissent entre des essais à vitesses différentes. Ces courbes semblent osciller autour d'une courbe maîtresse. Afin d'analyser ces oscillations, nous avons estimé leur période. La figure 4.12 montre les points utilisés pour estimer cette grandeur. Ces relevés conduisent à une période d'oscillation comprise entre 0,848 et 0,916 ms. Cette période d'oscillation est proche de la période du premier mode propre de la maquette hors d'eau qui se situe autour de 1 ms (cette valeur a été déterminée par un calcul de structure par éléments finis). Ces oscillations révèlent donc des vibrations de la maquette induites par l'impact hydrodynamique. Il est vrai que l'effort évolue beaucoup plus rapidement dans le cas du paraboloides elliptique que dans le cas du dièdre-cône (figure 4.10), ce qui provoque des vibrations sous l'effet du « choc ».

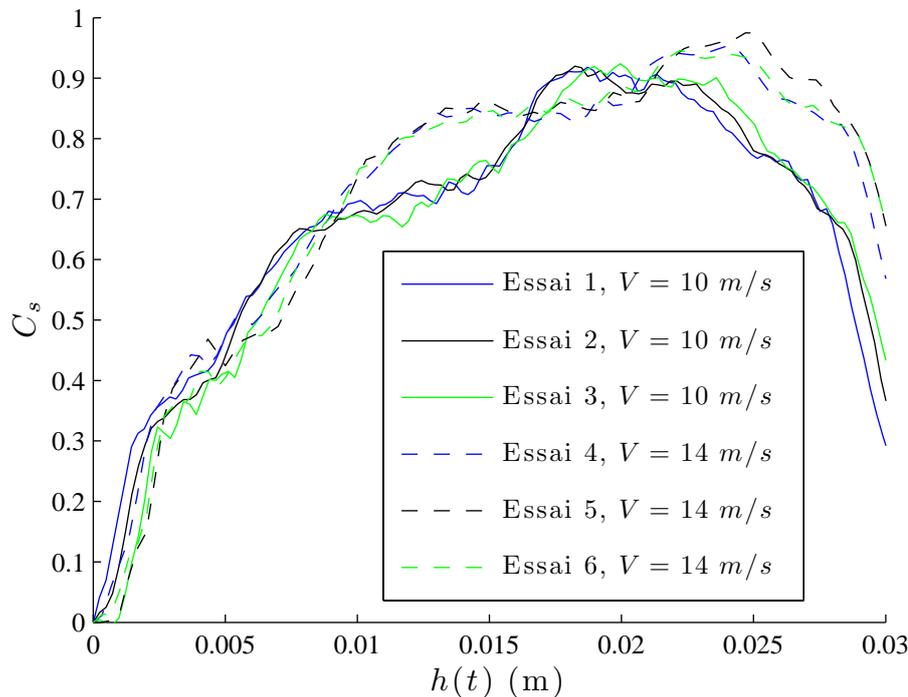


FIGURE 4.11 – Comparaison de différentes mesures du coefficient de slamming au cours de l'impact de la maquette parabolöide elliptique

Dans le cas de la forme triconique, on observe également des effets dynamiques bien que l'évolution de l'effort d'impact soit plus douce que dans le cas du parabolöide elliptique. Comme on peut le voir sur la figure 4.13, il y a peu de dispersion entre deux essais à vitesse égale mais de légères différences assimilables à des oscillations apparaissent pour des vitesses d'impact différentes à partir de  $h(t)/R_3 \approx 0,046$ . Cette profondeur de pénétration coïncide avec l'instant où la surface mouillée atteint le premier changement d'angle de relèvement. L'effort chute alors brutalement du fait que l'angle de relèvement augmente subitement au niveau de la ligne de contact. Contrairement au cas du parabolöide elliptique, ce n'est pas une augmentation mais une chute brutale de l'effort qui induit des vibrations de la maquette triconique.

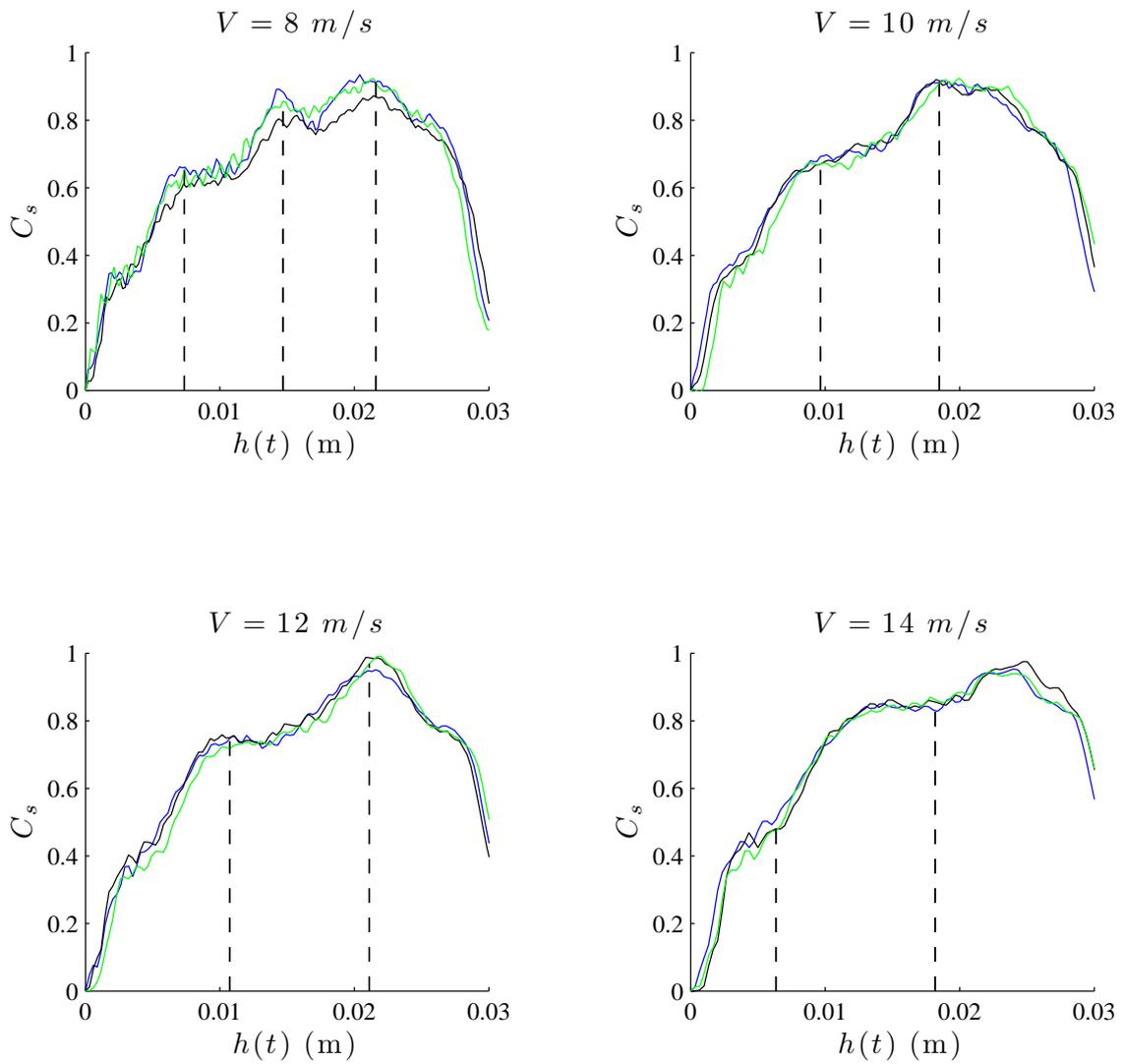


FIGURE 4.12 – Relevé des périodes d'oscillation sur les mesures d'effort aux différentes vitesses d'impact pour le paraboloïde elliptique.

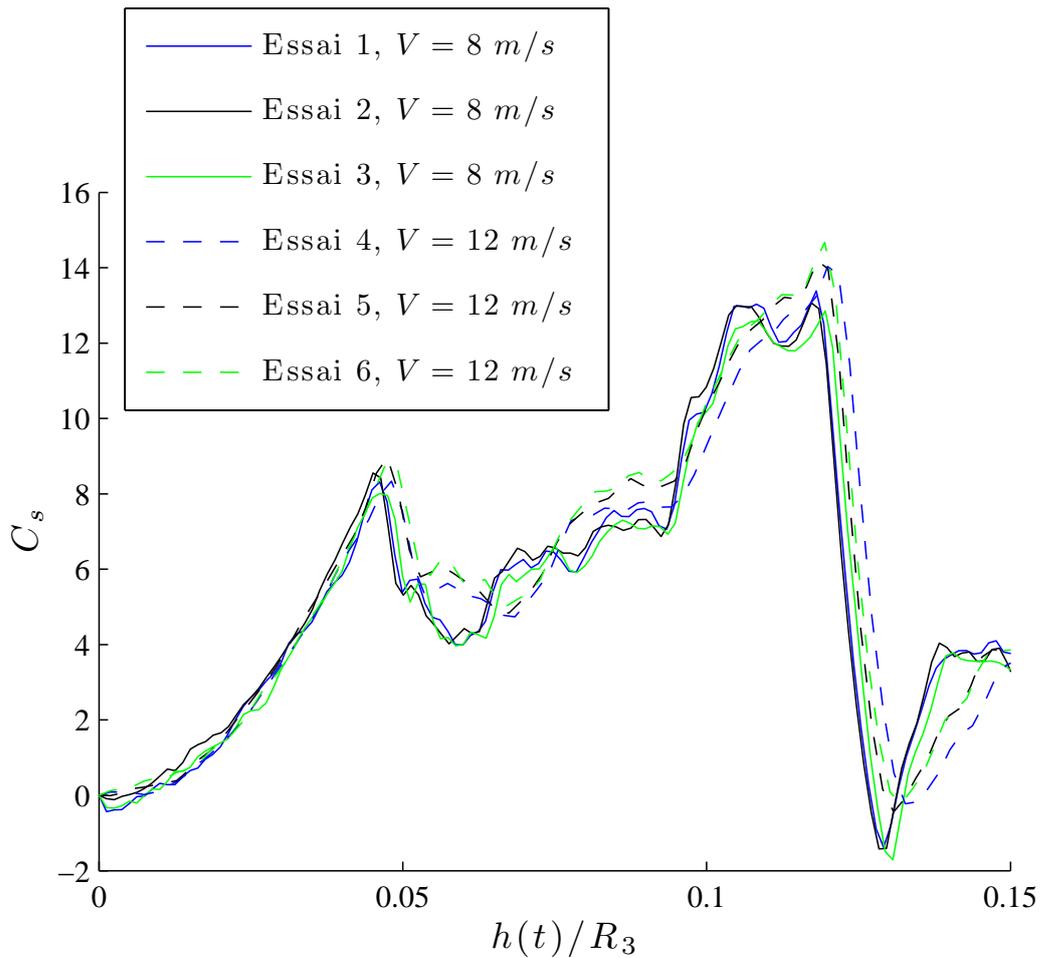


FIGURE 4.13 – Mesures du coefficient de slamming au cours de l'impact de la maquette triconique

## 4.2 Simulations numériques par éléments finis d'impacts hydrodynamiques

Nous utilisons le module de « Couplage Euler-Lagrange » (CEL) du logiciel de calcul par éléments finis ABAQUS/Explicit (version 6.7-EF1) qui permet de simuler des écoulements à surface libre avec interaction fluide/structure. Les principes de base de cette méthodologie sont présentés au paragraphe 4.2.1. L'influence du maillage (taille du domaine et finesse) sur la simulation est ensuite étudiée à travers l'exemple du paraboloïde elliptique au paragraphe 4.2.2. Quelques difficultés liées à la modélisation du couplage sont présentées au paragraphe 4.2.3. Enfin, deux cas de référence sont traités pour valider l'outil de simulation au paragraphe 4.2.4. Cet outil nous servira de moyen de comparaison pour l'étude de formes non symétriques pour lesquelles nous n'avons pas réalisé d'essais.

### 4.2.1 Outil de calcul

Les principes de la méthode CEL sont décrits en détail dans [Aquelet \(2004\)](#) et dans un chapitre de l'ouvrage de [Souli et Sigrist \(2009\)](#). Il faut noter que ces documents sont dédiés à la méthode CEL qui est implantée dans le code Ls-Dyna. Nous disposons de moins d'informations concernant le fonctionnement du module CEL du code ABAQUS. Nous présentons cependant les points importants de cette méthode, d'un point de vue utilisateur, en se basant sur la documentation d'ABAQUS.

La méthode CEL repose sur l'utilisation de deux domaines de calcul différents : un domaine Eulérien sert à la description de l'écoulement du (ou des) fluide(s) et un domaine Lagrangien correspond au solide. Comme le montre la figure 4.14, ces deux domaines sont généralement superposés. En d'autres termes, il n'est pas nécessaire que les maillages du domaine Eulérien et du solide soient coïncidents. Cela simplifie grandement la réalisation de ceux-ci et permet d'utiliser un maillage structuré pour le domaine fluide. L'interaction entre le solide et les fluides présents dans le domaine Eulérien est traitée à l'aide d'un algorithme par pénalisation qui sera brièvement décrit par la suite.

Un élément du maillage Eulérien peut contenir du fluide, du vide ou un mélange des deux. Cet aspect est géré par un modèle de type Volume-Of-Fluid (VOF). Dans un tel modèle, une variable appelée fraction volumique est introduite dans chaque cellule. Cette variable indique la fraction du volume de la cellule qui est remplie de fluide. Dans le cas d'un modèle multiphasique, une fraction volumique est associée à chaque phase en présence. La figure 4.15 donne un exemple de répartition de la fraction volumique correspondant à une goutte de fluide de forme elliptique. Dans une représentation VOF, on repère le passage d'une phase à une autre par une variation progressive de la fraction volumique. Il n'y a donc pas de description précise de la frontière entre les deux phases (même s'il existe différentes méthodes

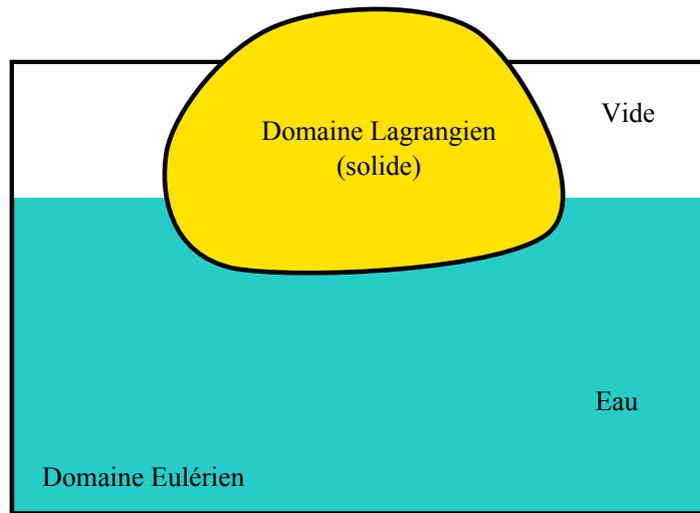


FIGURE 4.14 – Description mixte Eulerienne et Lagrangienne

pour « reconstruire au mieux » l'interface à partir de l'information sur les fractions volumiques).

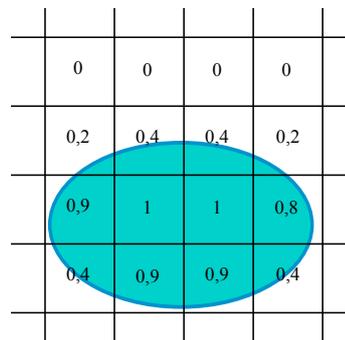


FIGURE 4.15 – Illustration de la méthode Volume-Of-Fluid (VOF)

L'interaction entre le fluide et le solide se traduit classiquement par une condition de non pénétration du fluide dans le solide. Pour faire respecter une telle condition, il est nécessaire de déterminer la géométrie de la frontière du domaine fluide. Différentes méthodes peuvent être utilisées pour cela (voir [Souli et Sigrist \(2009\)](#) et [Zaleski](#)). La méthode de couplage entre le fluide et le solide utilisée par ABAQUS est basée sur une méthode inspirée de la modélisation du contact solide/solide par une méthode de pénalisation (voir [Wriggers \(2006\)](#) et [Belytschko \*et al.\* \(2000\)](#)). Le principe d'une méthode de pénalisation est d'appliquer un effort réparti proportionnel à la distance de pénétration du fluide dans le solide (figure 4.16). L'algorithme de couplage par pénalité implique donc un paramètre, la raideur de contact de l'interface, dont la qualité des résultats dépend. Si la raideur est trop faible, une in-

terpénétration trop importante entre le fluide et le solide peut survenir. D'un autre côté, une raideur de contact trop grande conduit par contre à des oscillations importantes des efforts de contact et oblige à réduire significativement le pas de temps de calcul pour garantir la stabilité du schéma d'intégration temporelle explicite. [Aquelet et al. \(2006\)](#) proposent un couplage par pénalité avec amortissement pour réduire les oscillations des efforts de contact. Dans le cas de l'impact hydrodynamique de dièdres, [Aquelet \(2004\)](#) a montré que le facteur de pénalité permettant d'obtenir des niveaux de pression proches de ceux du modèle analytique de [Zhao et Faltinsen \(1993\)](#) doit être 17 fois plus important pour un dièdre d'angle de relèvement de  $4^\circ$  que pour un dièdre de  $30^\circ$ . Dans le cas d'une structure telle qu'un cylindre, dont la tangente varie selon la position, [Aquelet](#) suggère d'ajuster le facteur de pénalité localement en fonction de l'angle de relèvement de l'élément solide par rapport à la surface libre initiale, ce qui n'est pas possible avec ABAQUS. En effet, ABAQUS détermine automatiquement la raideur de contact utilisée en choisissant celle-ci en fonction de la raideur des éléments de part et d'autre de la surface de contact. Cette méthode peut paraître quelque peu arbitraire mais présente des avantages :

- Tout d'abord, la raideur de contact augmente naturellement lorsque le maillage est raffiné. Par conséquent, l'erreur sur la condition de non pénétration liée à la méthode de pénalisation diminue lorsque l'on raffine le maillage.
- Avec la raideur de contact déterminée par défaut par ABAQUS, le pas de temps du schéma d'intégration (limité à la limite de stabilité du schéma d'intégration temporelle) est peu affecté par le couplage par pénalité (d'après la documentation, la réduction du pas de temps est de 5 %).

Notons que, même si la raideur de contact est choisie de manière automatique par ABAQUS, l'utilisateur peut affecter ce choix. Il est en effet possible de multiplier la raideur par défaut par un coefficient appelé « scaling factor ». Ce point sera rediscuté par la suite (paragraphe 4.2.3).

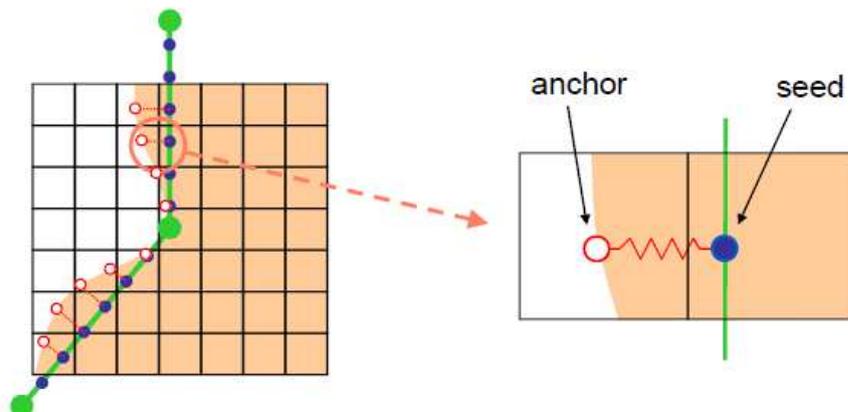


FIGURE 4.16 – Principe du couplage par pénalité dans le module CEL d'ABAQUS/Explicit. (Source : [Abaqus \(2008\)](#))

Les simulations effectuées se basent sur l'hypothèse d'un fluide compressible non visqueux dont l'équation d'état est définie par :

$$p = K(1 - \rho_0/\rho), \quad (4.5)$$

où  $p$  représente la pression,  $K$  est le module de compressibilité du fluide,  $\rho$  sa masse volumique et  $\rho_0$  sa masse volumique initiale. Bien que la compressibilité du fluide soit prise en compte, les vitesses d'impact considérées pour les simulations sont déterminées de sorte que la compressibilité du fluide n'influence que très peu les résultats afin de pouvoir effectuer des comparaisons avec les résultats issus du modèle incompressible proposé dans les chapitres précédents.

Afin de réduire la taille du domaine fluide autour de l'objet tout en évitant des réflexions d'ondes parasites, des conditions aux limites non-réfléchissantes sont appliquées sur les frontières du domaine fluide, ce qui se traduit par la condition suivante :

$$p = \rho c U_n, \quad (4.6)$$

où  $c$  représente la célérité du son dans le fluide ( $c = \sqrt{K/\rho_0}$ ) et  $U_n$  la composante de vitesse normale à la frontière du domaine fluide.

## 4.2.2 Influence du maillage

Dans ce paragraphe nous allons illustrer l'influence du maillage sur les résultats de calculs dans le cas de l'impact du paraboloïde elliptique décrit à la figure 4.6 avec une vitesse de 12 m/s. Le domaine fluide considéré (vert) ainsi que le corps impactant (rouge) sont décrits par la figure 4.17. On remarque qu'un seul quart du domaine est modélisé du fait des symétries du problème d'impact. Le domaine est partitionné en plusieurs régions afin de pouvoir définir des tailles de maille différentes dans chaque région. Le domaine Eulérien représenté en vert a une forme de pavé. Une petite portion du domaine eulérien n'est pas représentée afin de mieux visualiser le domaine Lagrangien coloré en rouge. Les différents paramètres fixes sont donnés en *mm* :  $L_1 = 300$ ,  $l_1 = 180$ ,  $h_2 = 36$ ,  $h_3 = 50$ . Les paramètres étudiés sont  $L_2$ ,  $l_2$ ,  $h_1$  et la taille de maille  $l_e$  dans la zone fine. Les trois cas suivants ont été considérés :

Cas 1 :  $l_e = 2$ ,  $L_2 = 265$ ,  $l_2 = 160$ ,  $h_1 = 530$ ,  $2,1 \times 10^6$  éléments

Cas 2 :  $l_e = 3$ ,  $L_2 = 265$ ,  $l_2 = 160$ ,  $h_1 = 530$ ,  $0,9 \times 10^6$  éléments

Cas 3 :  $l_e = 3$ ,  $L_2 = 530$ ,  $l_2 = 320$ ,  $h_1 = 795$ ,  $1,7 \times 10^6$  éléments

La figure 4.18 illustre l'influence de la taille des éléments dans la zone de contact sur les niveaux d'effort et la figure 4.19 montre l'influence de la taille du domaine fluide. On peut voir que la taille de maille influence directement le niveau de bruit sur le signal d'effort. La taille du domaine influence surtout le niveau de l'effort à la fin de l'impact. L'effort correspondant au cas 1 devient supérieur d'environ 3,4% à l'effort issu du cas 3 à l'approche de l'immersion totale de la maquette. Cela indique que le domaine fluide pour le cas 1 est trop petit pour que les résultats soient tout à fait représentatifs d'un impact en milieu infini.

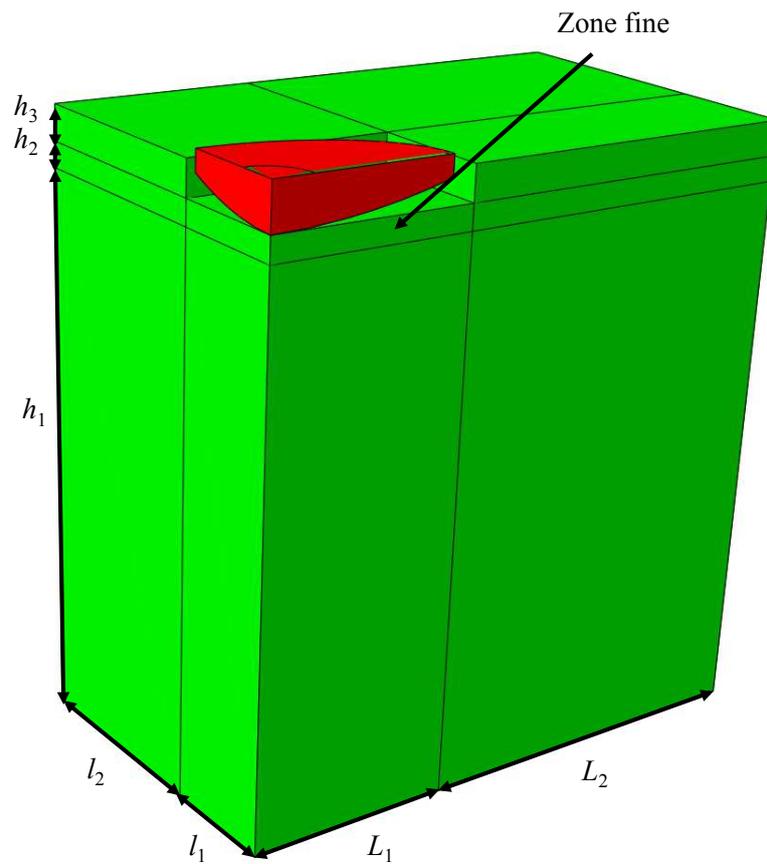


FIGURE 4.17 – Description du domaine fluide pour la simulation de l'impact du parabolôïde elliptique

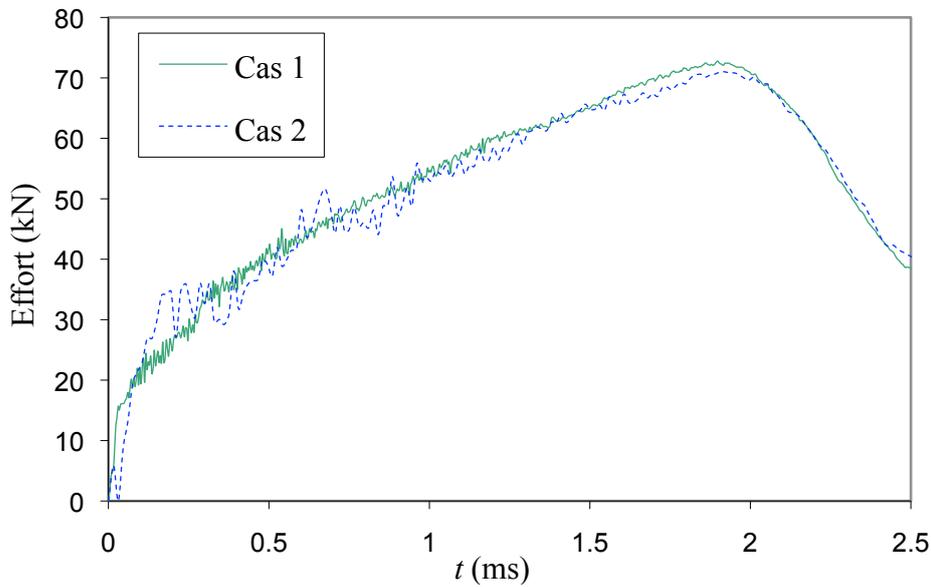


FIGURE 4.18 – Effet de la taille de maille dans la zone fine sur l'effort hydrodynamique d'impact pour le paraboloïde elliptique. Cas 1 :  $l_e = 2$  mm,  $2,1 \times 10^6$  éléments. Cas 2 :  $l_e = 3$  mm,  $0,9 \times 10^6$  éléments.

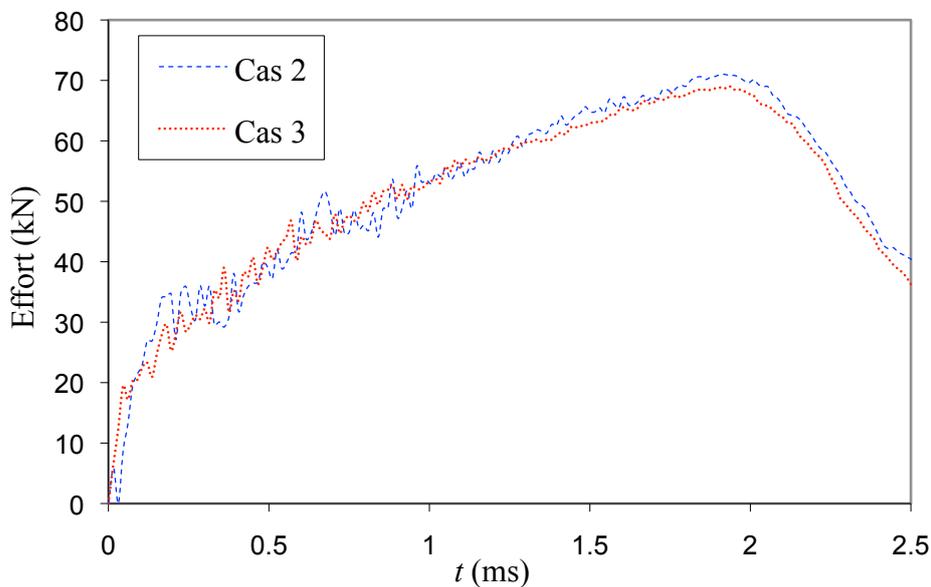


FIGURE 4.19 – Effet de la taille du domaine fluide sur l'effort hydrodynamique d'impact pour le paraboloïde elliptique. Cas 2 :  $L_2 = 265$  mm,  $h_1 = 530$  mm,  $0,9 \times 10^6$  éléments. Cas 3 :  $L_2 = 530$  mm,  $h_1 = 795$  mm,  $1,7 \times 10^6$  éléments.

### 4.2.3 Influence de la raideur de contact

Nous allons à présent illustrer l'influence de la raideur de contact sur l'estimation de l'effort d'impact hydrodynamique dans le cas de la maquette cylindre-sphère définie au paragraphe 4.1.2. Cette maquette est constituée d'une partie centrale en forme de cylindre circulaire, ce qui entraîne une montée de l'effort très rapide au début de l'impact. La figure 4.20 compare l'évolution de l'effort hydrodynamique au cours de l'impact pour trois raideurs de contact différentes (pour cela, nous avons utilisé la paramètre « scaling factor » évoqué précédemment). Notons qu'avec cette maquette les courbes d'efforts sont toutes assez bruitées (ce phénomène est d'autant plus marqué que la raideur de contact est forte). Pour contourner ce problème, les résultats présentés à la figure 4.20 ont été préalablement filtrés à l'aide d'un filtre passe-bas de type Butterworth avec une fréquence de coupure de 50 kHz. On peut voir sur la figure 4.20 que le facteur de pénalité a tendance à réduire l'oscillation que l'on observe au début de l'impact ( $0 < t < 0,3$  ms). Le facteur de pénalité le plus important conduit par contre à une instabilité de l'effort autour de 0,8 ms. Il apparaît donc que l'impact de cette maquette est particulièrement délicat à traiter avec ABAQUS/Explicit.

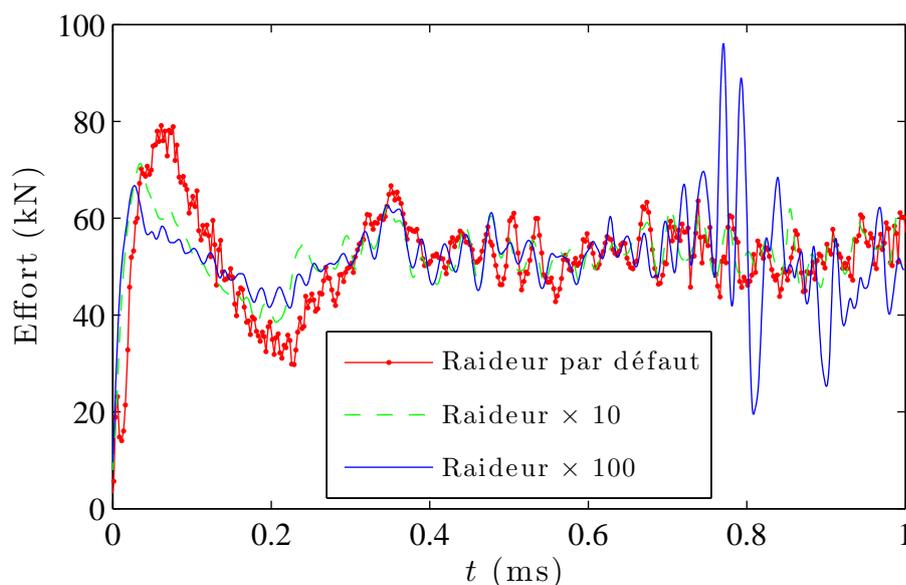


FIGURE 4.20 – Effet de la raideur de contact sur l'effort hydrodynamique lors de l'impact de la maquette cylindre-sphère ( $V_z = 12$  m/s).

### 4.2.4 Comparaison des résultats de simulation avec quelques résultats de la littérature

Nous proposons de comparer les résultats de simulation avec des résultats de référence dans le cas d'un cône et d'une sphère.

### Cônes

Une campagne d'essais exhaustive sur des cônes d'angle  $7^\circ$ ,  $15^\circ$  et  $30^\circ$  a été menée sur la machine de choc (Nême et El Malki Alaoui (2009)). Cette base de données est utilisée pour la validation des estimations d'efforts hydrodynamiques. Dans le cas d'un cône, l'effort adimensionnel  $f(\beta)$  est habituellement défini par :

$$f(\beta) = \frac{F_z \tan^3 \beta}{\rho V_z^4 t^2}. \quad (4.7)$$

Les résultats issus des calculs et des essais présentés au tableau 4.2 montrent qu'il est possible de déterminer correctement l'effort d'impact à l'aide des simulations ABAQUS.

| $\beta$ ( $^\circ$ ) | 7    | 15   | 30   |
|----------------------|------|------|------|
| $f(\beta)$ Abaqus    | 7,17 | 6,01 | 4,62 |
| $f(\beta)$ Exp.      | 6,79 | 6,18 | 4,75 |

TABLE 4.2 – Comparaison des calculs et mesures de l'effort adimensionnel ( $f(\beta)$ ) pour différents cônes d'angle  $\beta$

### Sphère

Dans le cas d'une sphère de rayon  $R$ , le coefficient de slamming ( $C_s$ ) ou effort adimensionnel est défini par :

$$C_s = \frac{F_z}{0,5\rho V_z^2 \pi R^2}. \quad (4.8)$$

Les résultats d'efforts issus des calculs par éléments finis sont comparés à différents résultats de référence de la littérature. Parmi les résultats présentés sur la figure 4.21 se trouvent l'approche numérique potentielle non linéarisée de Battistin et Iafrati (2003), les essais de Nisewanger (1961) et de Baldwin et Steves (1975). L'évolution de l'effort d'impact hydrodynamique est globalement bien évaluée par le calcul par éléments finis. Ce dernier semble toutefois surestimer l'effort en fin d'impact par rapport aux essais et au résultat numérique de Battistin et Iafrati (2003). On remarque également que le niveau de bruit sur l'effort est relativement important sur l'ensemble du calcul. On retrouve des niveaux de bruit plus importants sur les signaux d'efforts issus des calculs par éléments finis dans le cas d'une maquette à fond plat, comme la sphère, que dans le cas d'une maquette avec un angle de relèvement minimal non nul, comme un cône ou une pyramide (des résultats seront présentés dans le chapitre suivant).

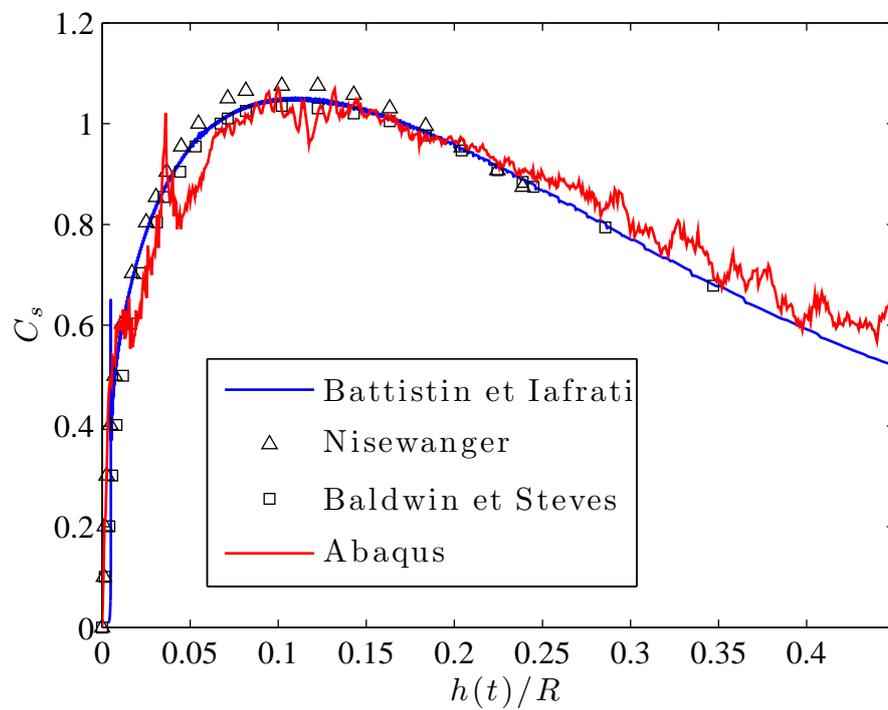


FIGURE 4.21 – Evolution du coefficient de slamming au cours de l'impact d'une sphère de rayon  $R$



## Etude d'impacts hydrodynamiques tridimensionnels

Ce chapitre présente des résultats de calculs d'impacts pour différentes géométries tridimensionnelles. Les champs de pression et les efforts hydrodynamiques obtenus par la méthode développée sont présentés. Ces résultats sont comparés à des résultats issus de calculs par éléments finis réalisés avec ABAQUS, ainsi qu'aux résultats d'essais présentés dans le chapitre précédent. Comme nous le verrons, la comparaison des résultats numériques avec ceux des essais permet de valider les deux approches numériques en ce qui concerne l'estimation de l'effort hydrodynamique.

Les résultats de calculs ont été adimensionnalisés et sont présentés en termes de coefficient de pression, coefficient de slamming (effort adimensionnel), moment adimensionnel et profondeur de pénétration relative. Le coefficient de pression ( $C_p$ ) est défini par :

$$C_p = p / (0,5\rho V_z^2). \quad (5.1)$$

Le coefficient de slamming ( $C_s$ ) est défini par :

$$C_s = F_z / (0,5\rho V_z^2 S_{max}). \quad (5.2)$$

Le moment adimensionnel de slamming ( $C_m$ ) est défini par :

$$C_m = M_y / (0,5\rho V_z^2 S_{max}^{3/2}), \quad (5.3)$$

où  $M_y$  est le moment induit par la pression hydrodynamique selon  $y$  au point le plus bas du solide impactant. La profondeur de pénétration relative ( $H$ ) est définie par :

$$H = h(t) / S_{max}^{1/2}. \quad (5.4)$$

$S_{max}$  représente l'aire de la surface projetée de la maquette étudiée. Par exemple, dans le cas de la maquette du paraboloïde elliptique dont le dessin de définition est présenté par la figure 4.6, la surface projetée est un disque elliptique d'aire  $S_{max} = \pi \times 0,16 \times 0,265 \text{ m}^2$ .

## 5.1 Formes tridimensionnelles ayant deux plans de symétrie

### 5.1.1 Paraboloïde elliptique

La forme du paraboloïde elliptique étudié est définie par la fonction  $f(x, y) = 1,418x^2 + 0,517y^2$  m. Le dessin de définition de la maquette utilisée est présenté à la figure 4.6. La distribution du coefficient de pression pour une profondeur de pénétration de 22,8 mm est présentée par la figure 5.1. Pour cette profondeur de pénétration, la surface mouillée est proche de la surface totale de la maquette. Des zones de pression importante apparaissent à proximité de la ligne de contact. Des vues en coupe de la distribution du coefficient de pression le long des axes  $x$  et  $y$  mettent en évidence des différences importantes au niveau des pics de pression (voir figure 5.2). Pour comprendre cela, nous pouvons noter que Wagner (1931), en analysant localement l'écoulement au bord de la surface de contact (dans la zone où se forme un jet) lors de l'impact d'un dièdre, a montré que la pression maximale dans cette zone était proportionnelle à  $\rho(dc/dt)^2$ , où  $c$  est la demi-largeur de la surface de contact (voir également Howison *et al.* (1991)). Il a ensuite été montré que cette analyse était également valide pour certains problèmes tridimensionnels (Scolan et Korobkin (2003)). Si le MLM ne repose pas sur l'analyse locale du jet se formant au bord de la surface de contact, il prévoit également (au moins dans le cas 2D) que le pic de pression est proportionnel au carré de la vitesse d'expansion de la ligne de contact (Korobkin (2004)). Dans le cas du paraboloïde elliptique, la surface mouillée croît de manière homothétique (sa forme ne change pas). Par conséquent, la vitesse de propagation de la ligne de contact est plus importante dans la direction de l'axe  $y$  que dans celle de l'axe  $x$ . Cela explique que le pic de pression soit maximal sur l'axe  $y$ .

La figure 5.3 décrit l'évolution de l'effort hydrodynamique au cours de l'impact. Nous observons que les résultats obtenus par l'approche proposée sont très proches des résultats issus des calculs par éléments finis. On remarque également que les résultats d'essais oscillent légèrement autour des résultats de calcul. Ces oscillations s'expliquent par des vibrations de la maquette sous l'effet de l'impact et ont été discutées dans le paragraphe 4.1.3. L'augmentation rapide du coefficient de slamming lors des premiers instants de l'impact est une particularité des formes à fond plat ( $\nabla f(0,0) = \mathbf{0}$ ), ce qui provoque des vibrations importantes de la maquette. La chute du coefficient de slamming que l'on observe à la fin de l'impact pour un enfoncement relatif  $H \approx 0,065$  est due à l'immersion totale de la surface inférieure de la maquette. La théorie de Wagner n'est plus applicable au-delà de cette profondeur de pénétration, c'est pourquoi la courbe correspondant à notre approche est interrompue avant ce moment.

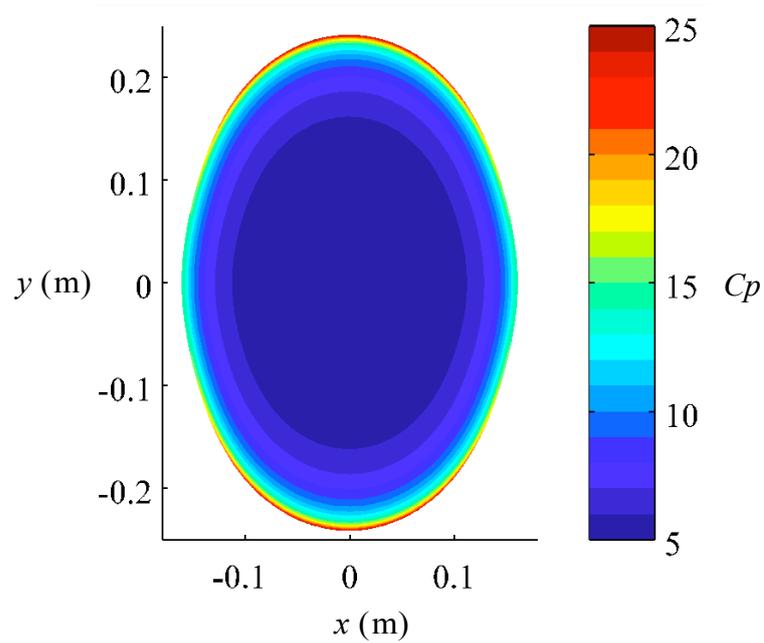


FIGURE 5.1 – Distribution du coefficient de pression lors de l’impact de la maquette du parabolôïde elliptique pour une profondeur de pénétration de 22,8 mm ( $N_a = 5$ )

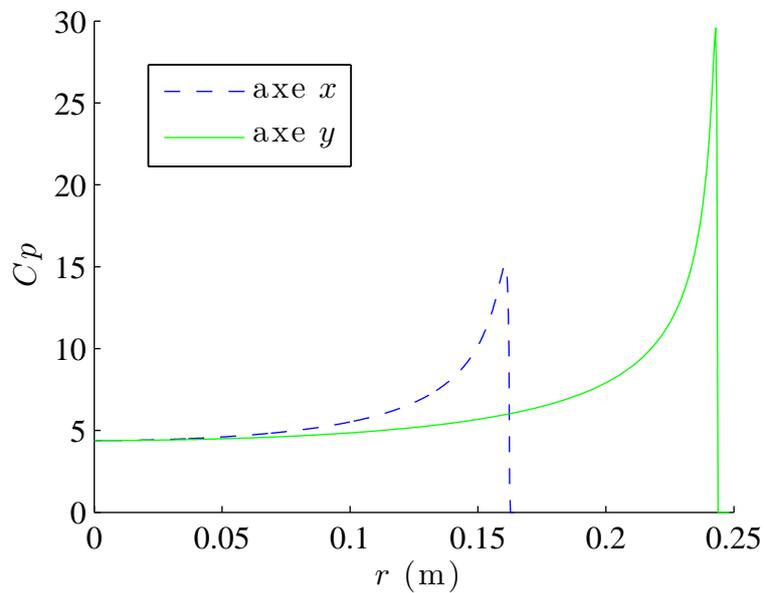


FIGURE 5.2 – Vues en coupe de la distribution du coefficient de pression lors de l’impact de la maquette du parabolôïde elliptique pour une profondeur de pénétration de 22,8 mm ( $N_a = 5$ )

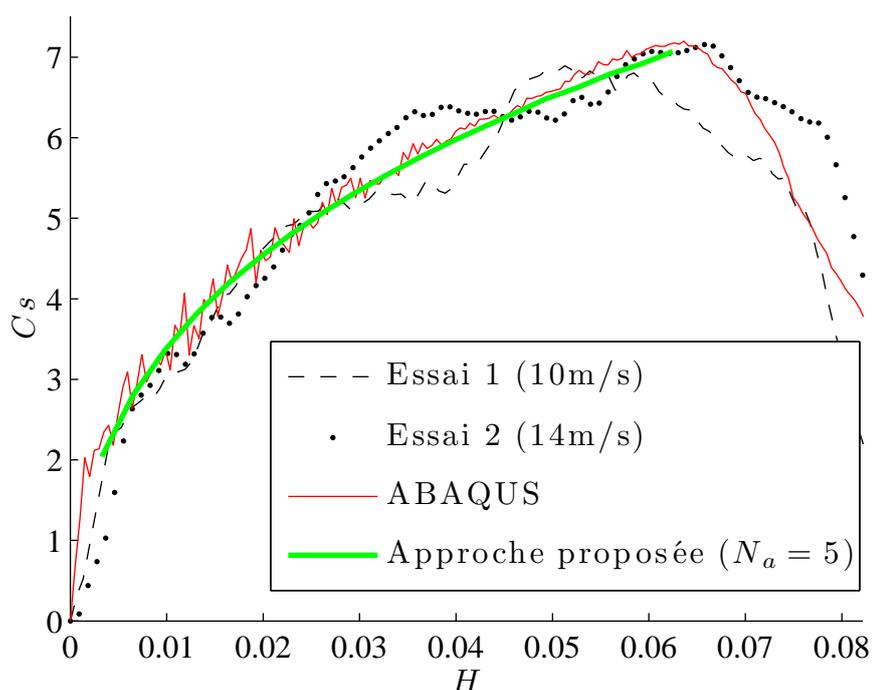


FIGURE 5.3 – Evolution du coefficient de slamming au cours de l'impact du paraboloïde elliptique

### 5.1.2 Dièdre-cône

Les lignes de contact obtenues pour 4 profondeurs de pénétration différentes sont tracées sur la figure 5.4. Contrairement au cas du paraboloïde, l'expansion de la surface de contact n'est pas homothétique, on peut voir que l'élanement de la surface mouillée (longueur / largeur) varie significativement au cours de l'impact. A l'instant initial de l'impact, l'élanement de la ligne de contact est infini puis décroît rapidement pour atteindre une valeur de 3,7 pour un enfoncement de 6 mm. L'élanement atteint ensuite successivement des valeurs de 2,3 , 1,9 et 1,7 pour des enfoncements de 12, 18 et 24 mm.

La figure 5.5 décrit la distribution de coefficient de pression pour un enfoncement de 18 mm. Comme nous le voyons, les zones où la pression est la plus forte sont toujours situées sur la périphérie de la surface de contact. Il est par contre intéressant de noter que la pression est maximale le long de l'axe  $y$  (figure 5.6). Cela signifie que le pic de pression n'est pas situé à l'endroit le plus éloigné du centre de la surface de contact. Mais, comme nous l'avons noté, dans le cas du dièdre-cône, la surface mouillée ne croît pas homothétiquement et la vitesse d'expansion n'est pas forcément maximale aux endroits les plus éloignés de son centre. Cela est visible sur la figure 5.4.

L'évolution du coefficient de slamming au cours de l'impact est présentée à la

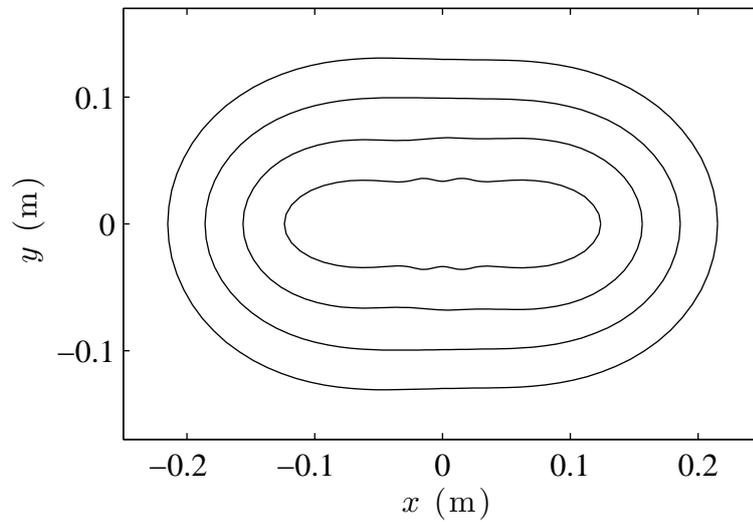


FIGURE 5.4 – Surfaces mouillées successives lors de l’impact de la maquette dièdre-cône pour différentes profondeurs de pénétration : 6, 12, 18 et 24 mm avec  $N_a = 7$

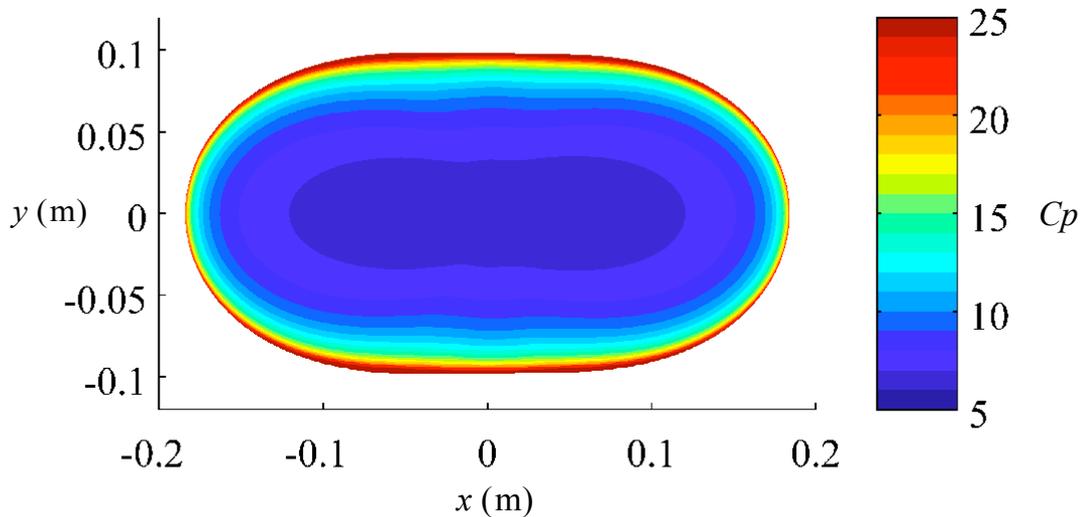


FIGURE 5.5 – Distribution du coefficient de pression lors de l’impact de la maquette dièdre-cône pour une profondeur de pénétration de 18 mm ( $N_a = 5$ )

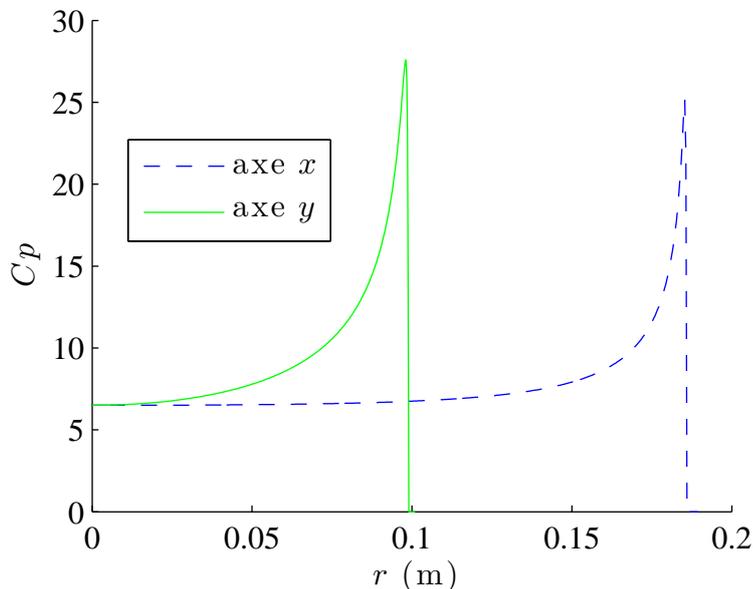


FIGURE 5.6 – Distribution de coefficient de pression le long des axes  $x$  et  $y$  lors de l'impact de la maquette dièdre-cône pour une profondeur de pénétration de 18 mm ( $N_a = 5$ )

figure 5.7. On remarque que le profil de la courbe est différent de celui de la courbe correspondant au parabolôide. La montée en effort est plus douce et s'apparente à celle d'un dièdre. Comme nous le voyons, les résultats obtenus avec l'approche proposée et avec ABAQUS sont très proches des résultats expérimentaux. Le résultat d'un calcul par la méthode des tranches basé sur le modèle analytique 2D avec raccord asymptotique de [Zhao et Faltinsen \(1993\)](#) (voir annexe A) est également présenté à titre de comparaison. On voit clairement que la méthode des tranches surestime le coefficient de slamming et que l'approche proposée apporte une amélioration considérable.

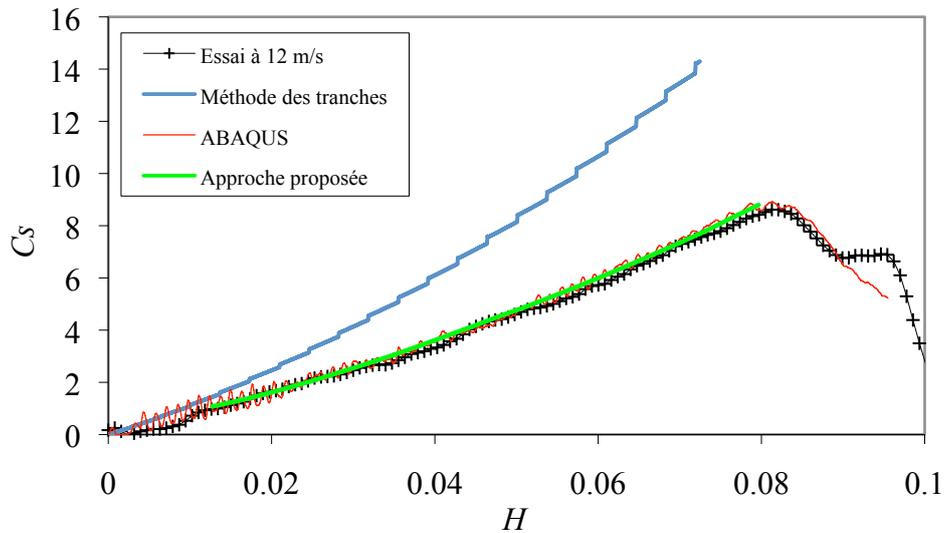


FIGURE 5.7 – Evolution du coefficient de slamming au cours de l’impact de la maquette dièdre-cône

### 5.1.3 Pyramide

On s’intéresse à présent au cas d’une pyramide à base carrée d’angle  $15^\circ$ , déjà discuté dans le paragraphe 2.2.5. L’évolution du coefficient de slamming au cours de l’impact est présentée à la figure 5.8. Le profil de la courbe d’évolution du coefficient de slamming s’apparente à celui d’un cône. En effet, le coefficient de slamming évolue comme le carré de la profondeur de pénétration. Les trois approches adoptées conduisent à des résultats très proches, ce qui confirme la capacité de notre approche à traiter des formes non régulières.

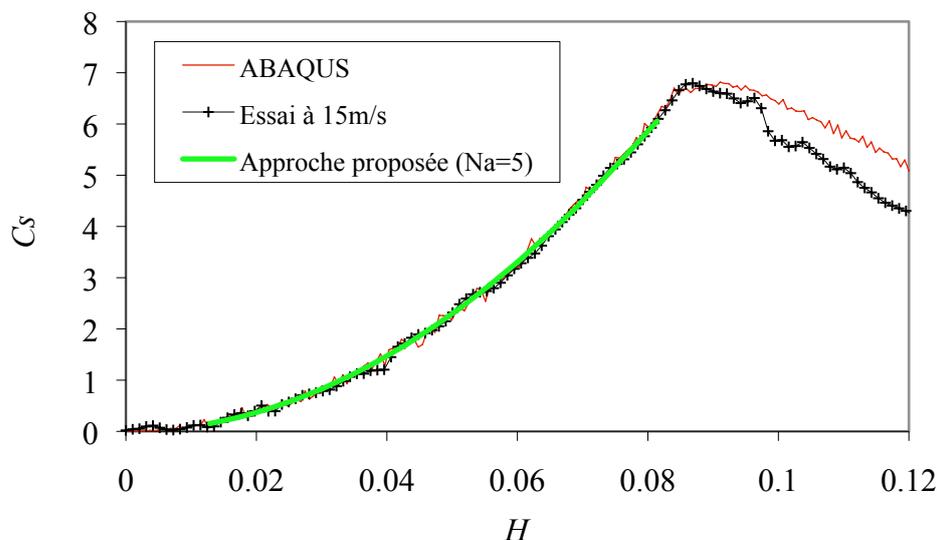


FIGURE 5.8 – Evolution du coefficient de slamming au cours de l'impact d'une pyramide à base carrée d'angle  $15^\circ$

#### 5.1.4 Cylindre-Sphère

On s'intéresse à présent au cas de la maquette cylindre-sphère présentée à la figure 4.9. L'évolution du coefficient de slamming au cours de l'impact est présentée à la figure 5.9. On a pu voir au paragraphe 4.2.3 que, pour cette configuration, les résultats des simulations numériques effectuées avec ABAQUS dépendaient fortement de la raideur de contact. De ce fait, nous avons souhaité représenter les résultats obtenus pour les trois valeurs différentes de raideur de contact testées. Il a été observé au paragraphe 4.2.3 que l'augmentation de la raideur de contact avait tendance à réduire l'oscillation de la courbe d'effort au début de l'impact. Nous voyons que les résultats obtenus avec notre approche sont plus proches de ceux obtenus par ABAQUS avec la valeur la plus élevée de la raideur de contact, cela semble confirmer que cette oscillation n'est pas physique mais liée à la mauvaise gestion du contact dans ABAQUS/Explicit pour une telle forme. Les résultats obtenus par [Chezhian \(2003\)](#), bien que provenant de simulations d'impacts à vitesse variable, semblent également aller dans ce sens (aucune oscillation n'était observée).

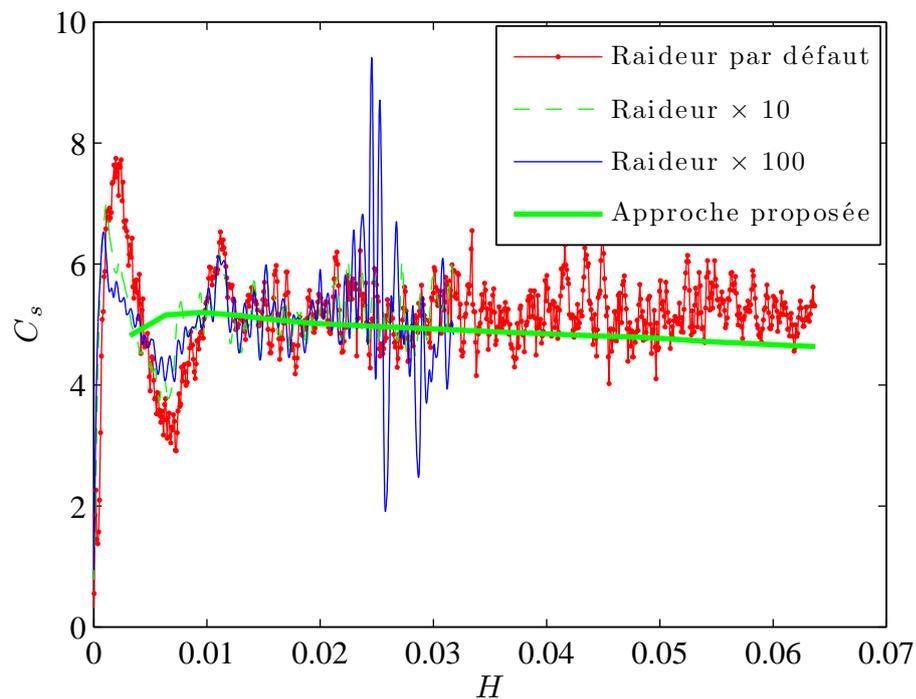


FIGURE 5.9 – Evolution du coefficient de slamming au cours de l’impact de la maquette cylindre-sphère ( $N_a = 7$ ).

## 5.2 Formes tridimensionnelles ayant un seul plan de symétrie

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à des formes non symétriques par rapport au plan  $y-z$  afin de valider notre approche sur de telles formes. Nous avons étudié pour cela trois formes particulières : un cône incliné, un cône asymétrique et une forme non symétrique inspirée d’un parabolöide elliptique que l’on appellera parabolöide asymétrique.

### 5.2.1 Cône incliné

Le problème de l’impact d’un cône incliné a été étudié par [Korobkin et Scolan \(2006\)](#). Dans cette étude, une solution analytique approchée a été obtenue à l’aide d’une méthode de développement asymptotique dans laquelle on recherche la solution du problème comme une perturbation d’une solution axisymétrique connue. Le domaine de validité de l’approche proposée par [Korobkin et Scolan \(2006\)](#) est donc limité au cas des cônes faiblement inclinés. Notons également que le calcul des efforts dans le travail de [Korobkin et Scolan \(2006\)](#) repose sur la théorie de Wagner originelle. Cela signifie que la pression hydrodynamique est calculée à l’aide de

l'équation de Bernoulli linéarisée :

$$p(x, y, t) = -\rho \frac{\partial \varphi^{(w)}}{\partial t}(x, y, 0, t). \quad (5.5)$$

Par conséquent, par souci de cohérence, les résultats obtenus à l'aide de l'approche que nous proposons et présentés dans ce paragraphe ont été calculés en utilisant l'équation de Bernoulli linéarisée (5.5) au lieu du modèle de Logvinovich modifié. L'évolution de l'effort adimensionnel (équation 4.7) en fonction de l'angle d'inclinaison ( $\alpha$ ) dans le cas d'un cône d'angle de relèvement  $\beta=15^\circ$  est présentée à la figure 5.10. On peut voir que l'approche proposée par Korobkin et Scolan (2006) tend asymptotiquement vers la solution issue de notre approche pour des faibles angles d'inclinaison. La solution analytique sous-estime ensuite légèrement l'effort d'impact lorsque l'angle d'inclinaison devient plus important ( $\approx 5\%$  pour  $\alpha = 5^\circ$ ). Ces résultats tendent à valider la programmation et la mise en oeuvre du modèle que nous proposons.

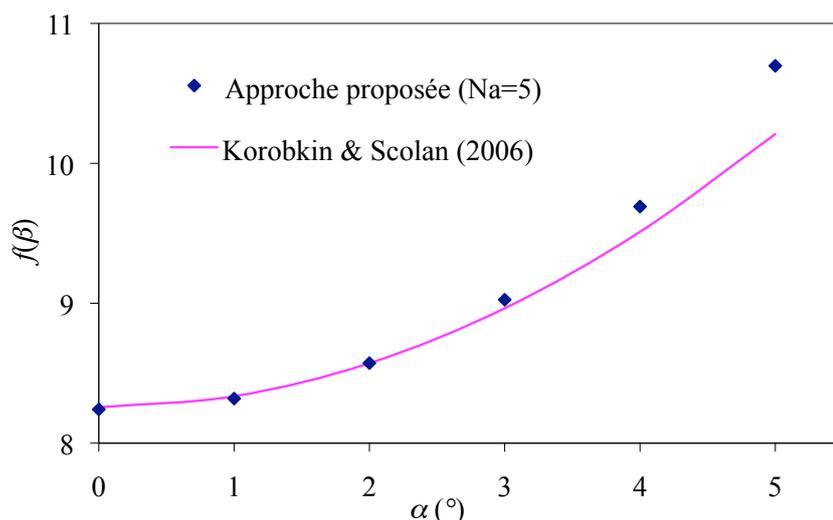


FIGURE 5.10 – Evolution de l'effort adimensionnel ( $f(\beta)$ ) lors de l'impact d'un cône d'angle  $\beta = 15^\circ$  en fonction de l'angle d'inclinaison ( $\alpha$ ).

## 5.2.2 Cône asymétrique

Le cône asymétrique est défini par la fonction suivante :

$$\begin{cases} f(x, y) = \tan \beta \sqrt{x^2 + y^2} & x > 0 \\ f(x, y) = \tan \beta \sqrt{(x/3)^2 + y^2} & x < 0 \end{cases}. \quad (5.6)$$

Notons que pour les simulations ABAQUS, le cône a été tronqué à une hauteur de  $z = \tan \beta \times 0,175$ . Cela donne une surface projetée  $S_{max}$  égale à  $2\pi \times 0,175^2 =$

0,1924 m<sup>2</sup>. La même valeur est utilisée pour adimensionnaliser les résultats de l'approche proposée.

De la même façon que pour l'impact d'une pyramide (voir paragraphe 2.2.5), la taille de la surface mouillée évolue proportionnellement à la profondeur de pénétration et sa forme demeure invariante à tout moment de l'impact. Le point de référence se situe en  $x_c(t) \tan \beta/h(t) \approx -0,84$  pour une telle surface. La distribution de coefficient de pression issue de notre approche pour  $\beta=15^\circ$  est présentée à la figure 5.11. Nous avons souhaité comparer cette distribution avec celle provenant d'une simulation ABAQUS. Cela n'est pas sans poser de problèmes car, en général, les distributions de pression fournies par ABAQUS sont fortement bruitées. Cela est certainement lié à l'algorithme de couplage par pénalisation utilisé par ce code pour gérer l'interaction fluide-structure (voir Aquelet (2004) et Aquelet *et al.* (2006) pour une étude plus approfondie sur ce problème). Afin de rendre plus « lisible » la distribution de pression obtenue par ABAQUS, nous l'avons lissée en utilisant une intégrale de convolution spatiale avec un noyau Gaussien :

$$\tilde{C}_p(x, y, 0) = \frac{1}{K} \iint_S C_p(x', y', 0) \exp^{-(r/L)^2} dx' dy', \quad (5.7)$$

où  $C_p$  et  $\tilde{C}_p$  désignent respectivement la distribution initiale et celle lissée,  $S$  désigne la surface  $z = 0$ ,  $K = \iint_S \exp^{-(r/L)^2} dx' dy'$  avec  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . La longueur de lissage a été choisie telle que  $L = 0,3 \times h(t)$ . Les distributions de coefficient de pression lissées obtenues par ABAQUS et notre approche sont tracées sur la figure 5.12. Comme on peut le voir sur la figure 5.13 sur laquelle sont tracées les distributions de coefficient de pression le long de l'axe  $x$ , le lissage affecte surtout le niveau des pics de pression au voisinage de la ligne de contact. On peut tout de même observer une différence importante entre les niveaux des pics de pression de part et d'autre de la surface mouillée liée à la dissymétrie du corps impactant. En effet, dans le plan  $x - z$ , l'angle de relèvement est d'environ  $5^\circ$  pour  $x < 0$  et de  $15^\circ$  pour  $x > 0$ .

Sur l'ensemble de la surface mouillée (figure 5.12), la distribution de pression obtenue par notre approche semble fidèle à celle issue du calcul par éléments finis. Un pic de pression important apparaît cependant sur la distribution de pression issue du calcul par éléments finis à proximité de la pointe du cône alors qu'aucun pic n'est visible sur les résultats issus de notre approche. Il est clair que du fait de la dissymétrie de notre cône, il existe un écoulement transversal au niveau de sa pointe. De plus, l'on comprend que cet écoulement peut être perturbé localement à cause de la singularité géométrique que constitue la pointe du cône, ce qui peut être à l'origine du pic de pression observé. Un écoulement transversal peut également apparaître dans le cas 2D pour des dièdres non symétriques et/ou en présence d'une vitesse horizontale. Riccardi et Iafrati (2004), Semenov et Iafrati (2006) et Semenov et Yoon (2009) ont étudié de manière théorique ce type d'écoulement. Les

modèles développés dans ces études prédisent un champ de pression présentant de très forts gradients au niveau de l'arête vive. Judge *et al.* (2004) ont également montré expérimentalement qu'une vitesse horizontale importante pouvait conduire à un décollement de l'écoulement en aval de l'arête vive. Le cas 2D reste cependant très différent du cône asymétrique étudié. En effet, dans le cas 3D, on pourrait penser que l'effet de la singularité géométrique devrait être plus localisé et moindre. De plus, les modèles 2D existants ne montrent pas la présence d'un pic de pression important mais une forte dépression très localisée au niveau de l'arête vive. Il est sûr que la pointe du cône peut créer des perturbations de l'écoulement à son niveau qui peuvent être à l'origine du pic de pression observé. Cependant, l'intensité de ce pic est comparable à celle des pics de pression observés sur les bords de la surface mouillée, ce qui nous semble un peu surprenant. De notre point de vue, il faut considérer avec une certaine réserve le pic de pression prédit par les calculs éléments finis. Tout d'abord, ces simulations sont effectuées avec des maillages relativement grossiers et nous ne pouvons pas garantir qu'ils soient capables de décrire tous les détails de l'écoulement avec précision. De plus, il est possible que l'écoulement à proximité d'une géométrie singulière soit influencé par les effets de la viscosité, qui ne sont pas pris en compte dans les simulations présentées ici.

L'évaluation du coefficient de slamming et du moment adimensionnel sont illustrées par les figures 5.14 et 5.15, respectivement. On peut voir que les deux approches conduisent à des résultats très similaires.

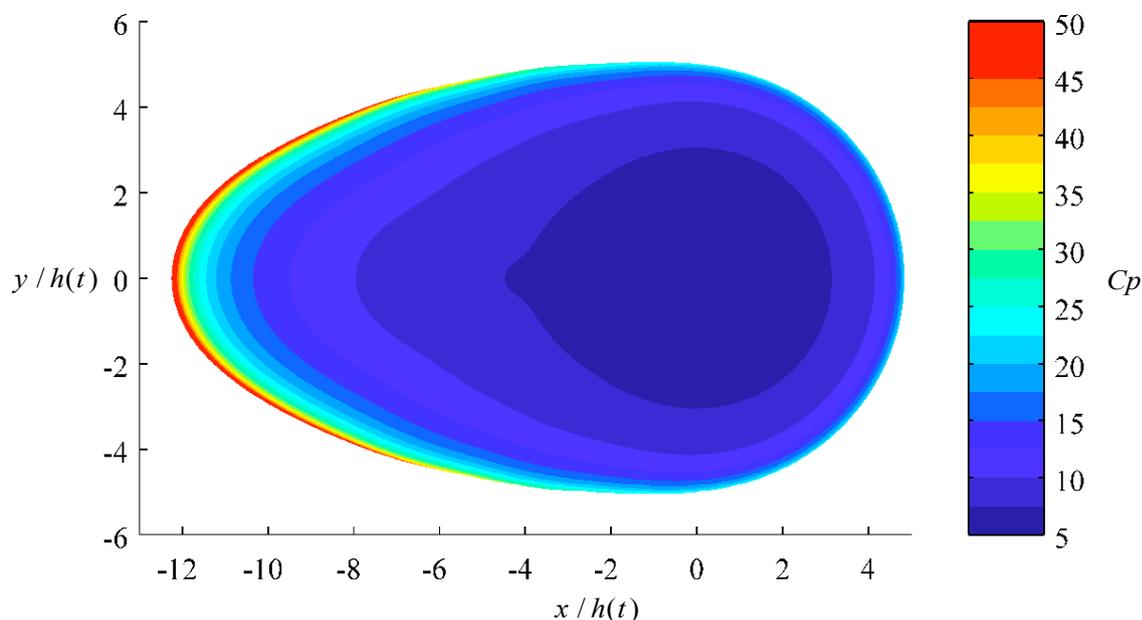


FIGURE 5.11 – Distribution du coefficient de pression lors de l'impact d'un cône asymétrique ( $N_a = 11$ )

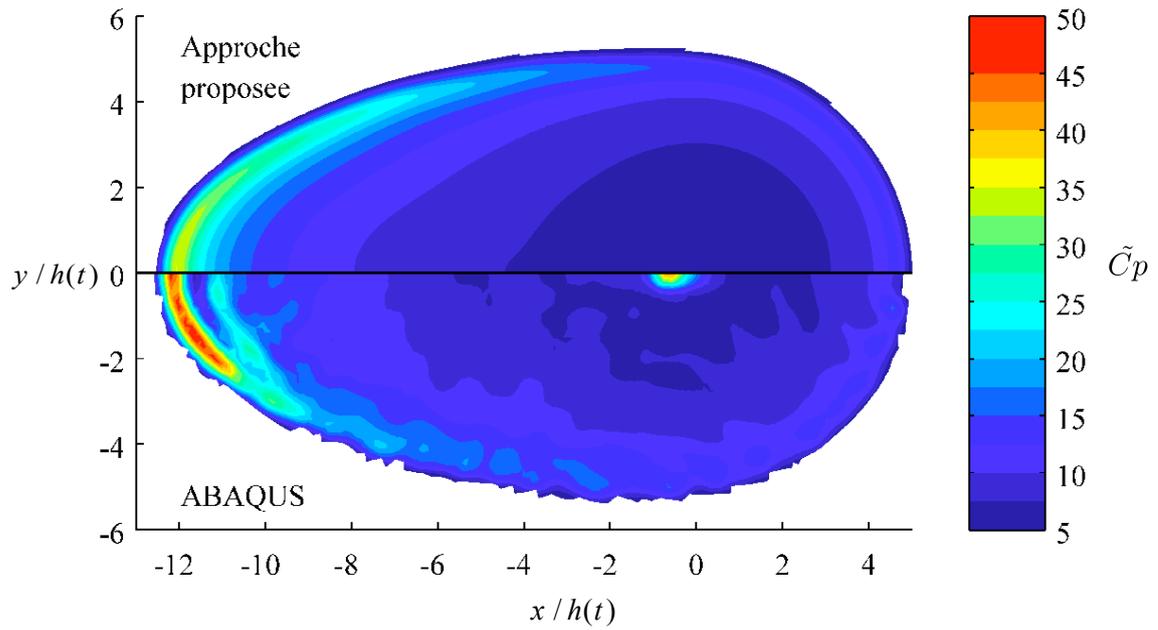


FIGURE 5.12 – Distribution du coefficient de pression lissé lors de l’impact d’un cône asymétrique ( $N_a = 11$ )

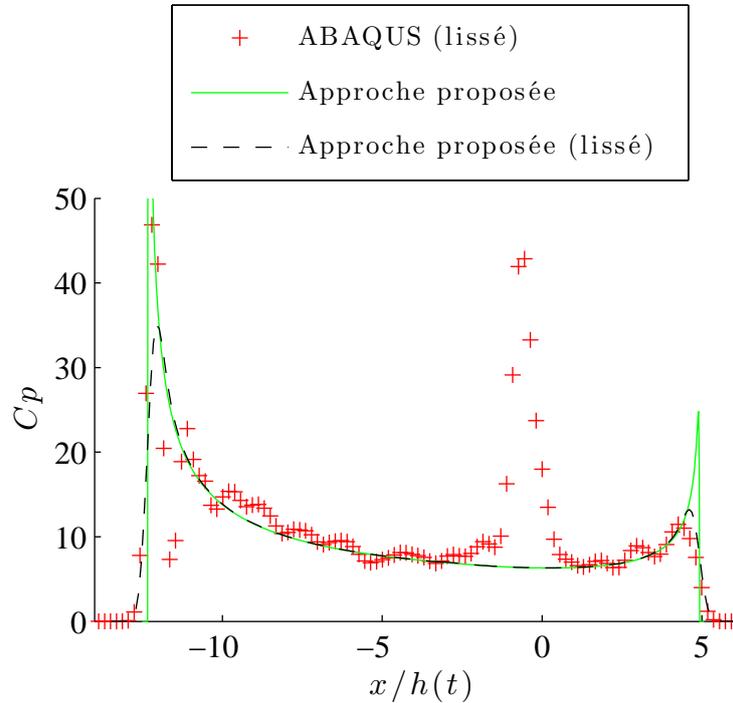


FIGURE 5.13 – Distribution du coefficient de pression le long de l’axe  $x$  lors de l’impact d’un cône asymétrique ( $N_a = 11$ )

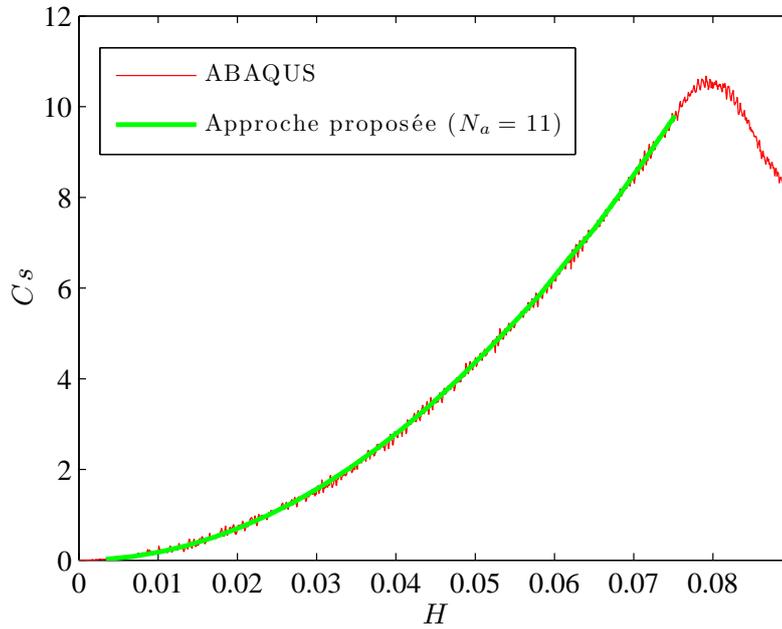


FIGURE 5.14 – Evolution du coefficient de slamming au cours de l'impact d'un cône asymétrique

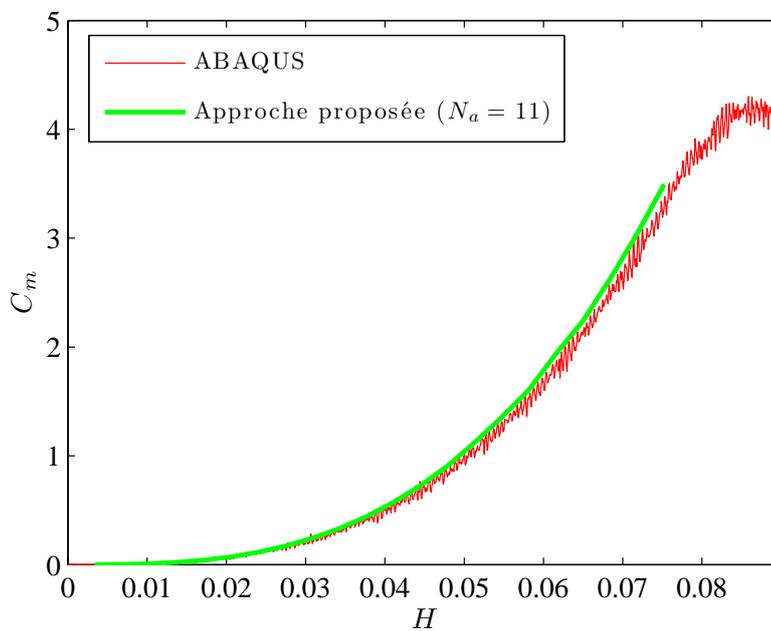


FIGURE 5.15 – Evolution du moment adimensionnel au cours de l'impact d'un cône asymétrique

### 5.2.3 Paraboloïde asymétrique

Nous allons maintenant étudier l'impact d'un paraboloïde asymétrique dont la géométrie est définie par la fonction suivante :

$$\begin{cases} f(x, y) = 1,418(x^2 + y^2) & x > 0 \\ f(x, y) = 1,418[(x/3)^2 + y^2] & x < 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

Comme pour le cône asymétrique, la géométrie du paraboloïde asymétrique est tronquée à une hauteur de  $z = 1,418 \times 0,175^2 \text{m}$  ( $S_{max} = 0,1924 \text{ m}^2$ ).

Nous avons observé que, comme pour le paraboloïde elliptique, la surface de contact évolue de manière homothétique au cours de l'impact. Ainsi, la ligne de contact tracée sur la figure 5.16 est normalisée par rapport à la racine carrée de la profondeur de pénétration. Les estimations du coefficient de slamming et du moment adimensionnel sont présentées aux figures 5.17 et 5.18. On observe que les deux approches conduisent à des résultats relativement proches. Les calculs par éléments finis semblent légèrement sous-estimer le moment résultant du champ de pression hydrodynamique. On remarque également une légère oscillation de l'effort hydrodynamique au début de l'impact. Il est difficile d'apporter des conclusions définitives sur cet aspect car, comme nous l'avons déjà indiqué, les problèmes d'impact de solides ayant un fond plat sont les plus délicats à traiter pour ABAQUS. De plus, avec le corps que nous considérons, il n'est possible de considérer qu'une seule symétrie pour réduire la taille du domaine de calcul. Par conséquent, nous avons dû utiliser des tailles de maille plus importantes que pour les solides ayant deux plans de symétrie (pour des raisons liées à la mémoire disponible sur le ordinateur utilisé pour réaliser ces simulations).

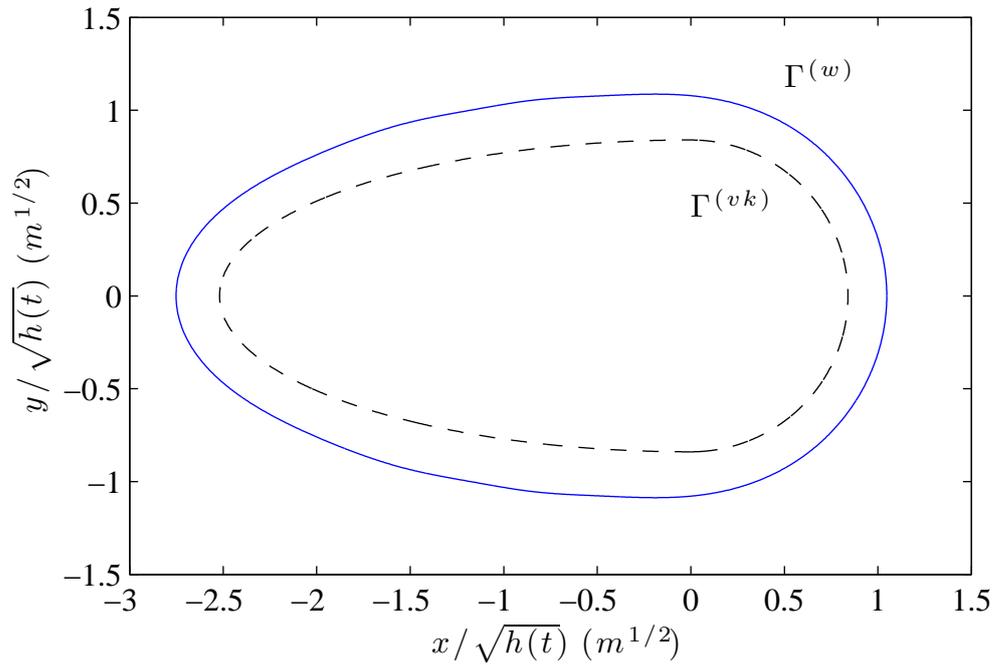


FIGURE 5.16 – Ligne de contact ( $\Gamma^{(w)}$ ) et ligne d'intersection ( $\Gamma^{(vk)}$ ) pour l'impact d'un parabolöide asymétrique ( $N_a = 11$ )

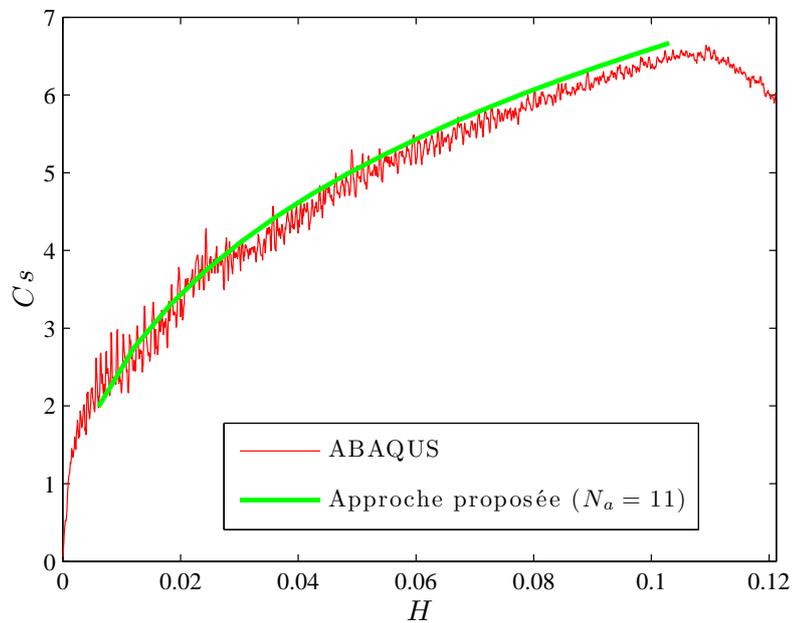


FIGURE 5.17 – Evolution du coefficient de slamming au cours de l'impact d'un parabolöide asymétrique

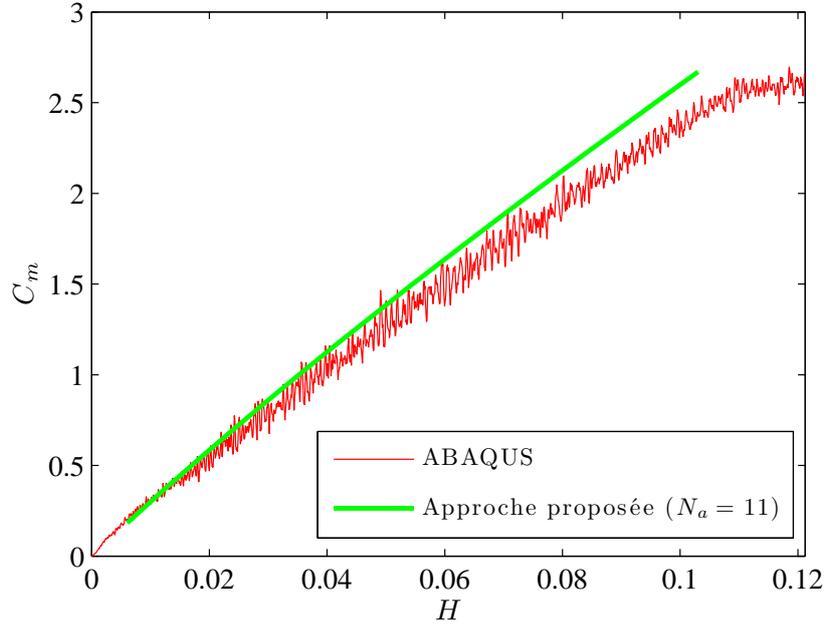


FIGURE 5.18 – Evolution du moment adimensionnel au cours de l'impact d'un paraboloïde asymétrique

### 5.3 Cône avec vitesse d'avance

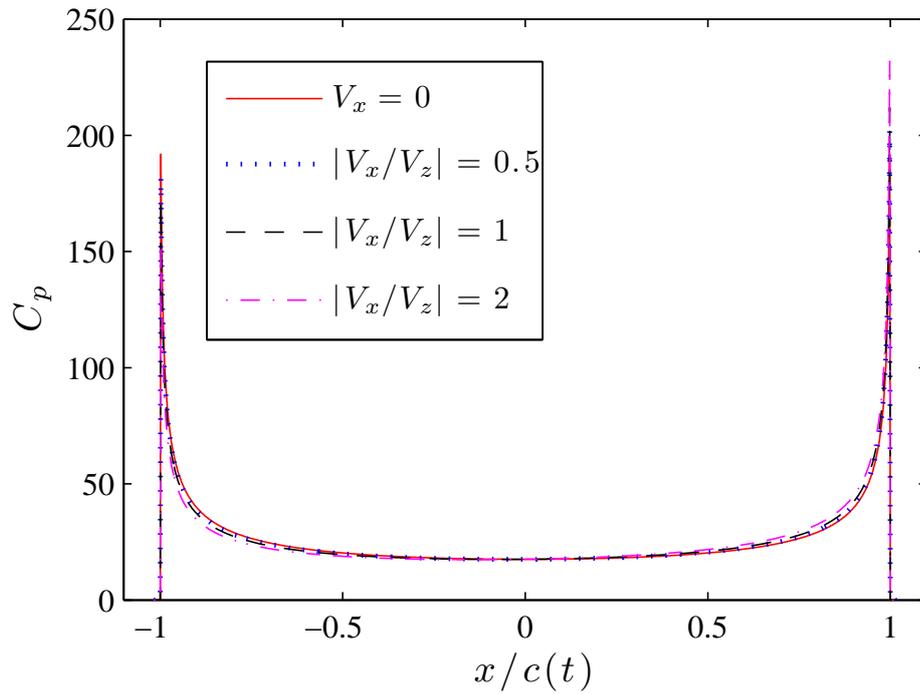
Nous considérons à présent l'impact d'un cône d'angle de relèvement  $\beta$  avec une vitesse d'avance de l'ordre de la vitesse verticale ( $0 \leq V_x \leq 2|V_z|$ ). Les figures 5.19a et 5.19b, représentant la distribution de coefficient de pression le long de l'axe  $x$  pour des cônes d'angle  $\beta=5^\circ$  et  $\beta=15^\circ$ , montrent comme l'on peut s'y attendre que la vitesse d'avance entraîne une dissymétrie de la distribution de coefficient de pression. Cette dissymétrie est mesurée en considérant le moment résultant au niveau de la pointe du cône généré par le champ de pression agissant sur le cône. Les résultats sont présentés en calculant le facteur adimensionnel défini par :

$$\delta_c = -\frac{M_y}{F_z c_{th}(t)}, \quad (5.9)$$

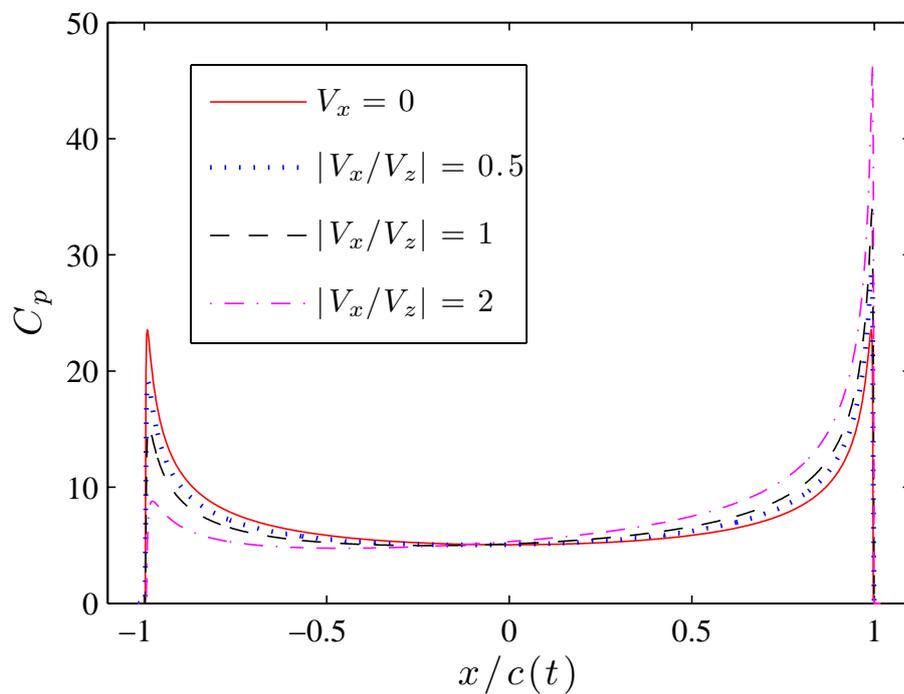
où  $M_y$  représente le moment selon  $y_0$  au niveau de la pointe du cône,  $F_z$  la composante verticale de l'effort d'impact hydrodynamique et  $c_{th}(t)$  le rayon de la surface mouillée issu de la théorie de Wagner (voir équation 2.22).  $\delta_c$  représente donc le décalage relatif du centre de poussée des forces hydrodynamiques par rapport à la taille de la surface mouillée. Les figures 5.20a et 5.20b illustrent l'évolution de  $\delta_c$  en fonction du rapport  $V_x/V_z$  pour des cônes d'angle  $5^\circ$  et  $15^\circ$ . Il est intéressant de voir que  $\delta_c$  évolue linéairement avec le rapport  $V_x/V_z$ . On remarque également que la différence entre les résultats issus des simulations numériques par éléments finis et notre approche est importante. Ceci montre que le modèle ne rend compte que

d'une partie des effets de la vitesse d'avance. On remarque aussi que l'erreur est du même ordre de grandeur pour les deux cônes considérés. Une piste pour améliorer la prise en compte des effets liés à la vitesse d'avance sera évoquée à la fin de ce chapitre.

La figure 5.21 présente l'évolution de l'effort vertical adimensionnel  $f(\beta)$  (équation 4.7) en fonction de la vitesse d'avance relative. Nous voyons que l'effort vertical n'est pas affecté par la vitesse d'avance. Cette observation est conforme aux conclusions des travaux de [Korobkin \(1988\)](#).

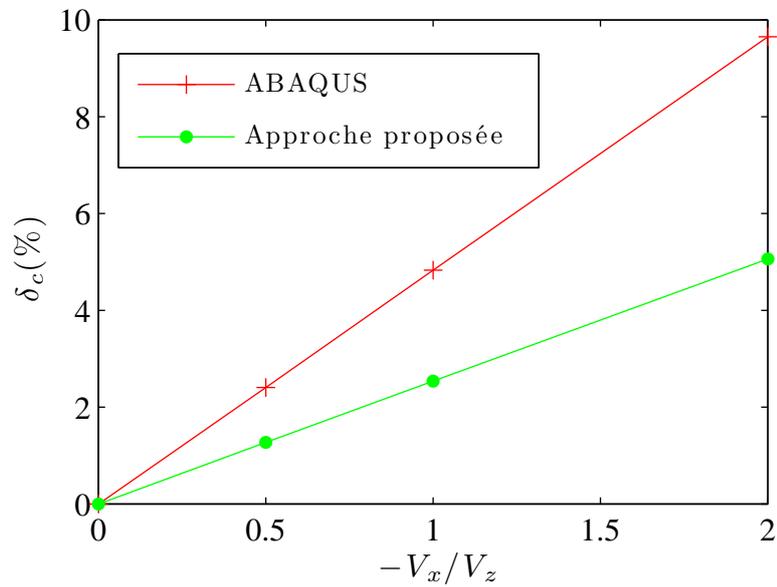


(a) Cône 5°

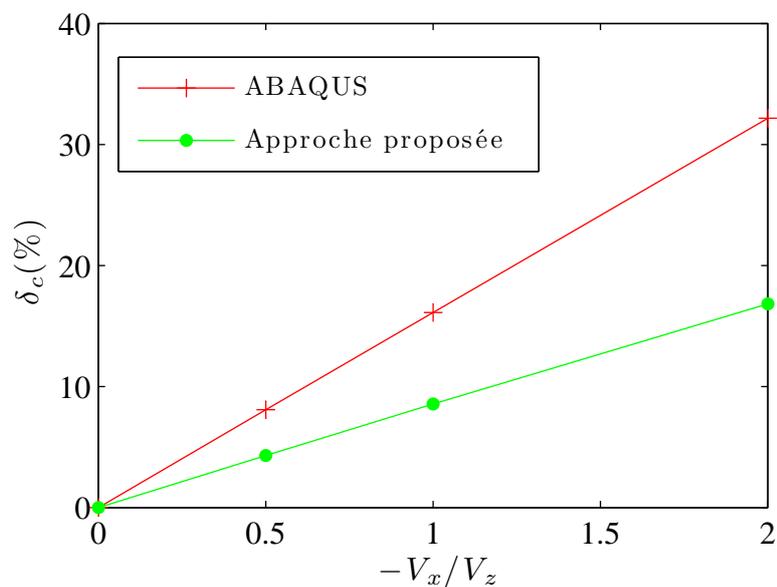


(b) Cône 15°

FIGURE 5.19 – Effet de la vitesse d'avance sur la distribution du coefficient de pression le long de l'axe  $x$  pour des cônes de 5° et 15°.



(a) Cône 5°



(b) Cône 15°

FIGURE 5.20 – Décalage relatif du centre de poussée hydrodynamique par rapport au point  $\mathbf{O}$  en fonction de la vitesse d'avance pour des cônes de 5° et 15°

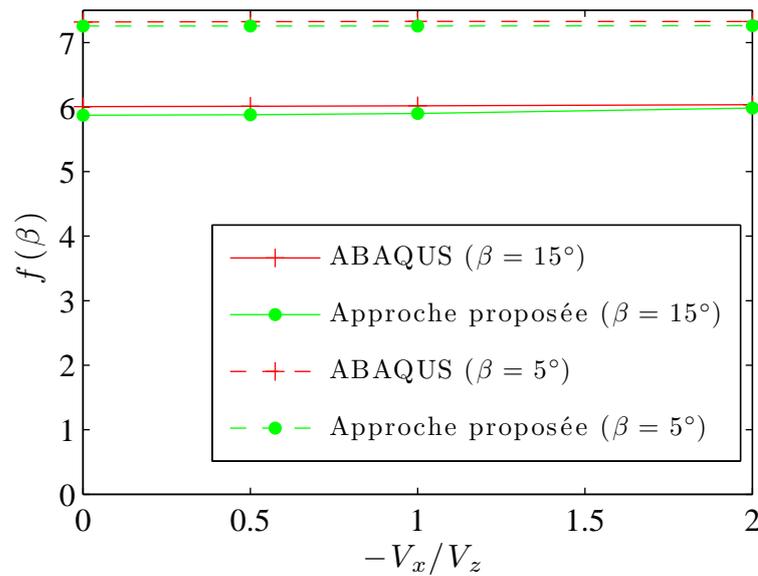


FIGURE 5.21 – Effet de la vitesse d’avance sur l’effort vertical adimensionnel ( $f(\beta)$ ) pour des cônes d’angle  $\beta$ .

## 5.4 Conclusion

### 5.4.1 Avantages...

Les différentes formes tridimensionnelles étudiées montrent que le modèle proposé permet de déterminer avec précision les chargement hydrodynamiques associés à des impacts tout en gardant des temps de calcul raisonnables.

Le modèle tridimensionnel apporte en particulier de nettes avancées par rapport à un modèle basé sur la méthode des tranches.

De plus, sa mise en oeuvre est bien plus aisée que celle de simulations « complètes » telles que celles que nous avons effectuées avec ABAQUS/Explicit. Tout d’abord, les ressources informatiques nécessaires sont bien moins importantes : un calcul avec le modèle proposé peut être réalisé sur un ordinateur portable avec des temps de calcul entre quelques minutes et quelques dizaines de minutes, alors qu’une simulation ABAQUS d’un problème 3D requiert l’utilisation d’un maillage pouvant comporter plusieurs millions d’éléments et va occuper un ordinateur doté de capacité importante en terme de mémoire vive pendant plusieurs heures voire plusieurs jours. De plus, l’obtention de résultats fiables avec ces simulations nécessite de faire un certain nombre de tests pour déterminer des paramètres de calculs appropriés (maillage et raideur de contact en particulier). Il est également intéressant de noter que l’approche proposée étant basée sur la théorie de Wagner, sa précision est la meilleure dans l’étude des premiers instants de l’impact de corps à fond plat. C’est-

à-dire pour les cas les plus difficiles à traiter pour les méthodes de type CFD (voir le cas du cylindre-sphère et [Jacques et al. \(2010\)](#)).

### 5.4.2 ... et limites du modèle proposé

Si le modèle proposé est tout à fait adapté aux corps plats, il est sûr qu'en contrepartie sa précision sera moins bonne pour des corps ayant des angles de relèvement très importants. Ce point n'est pas apparu dans ce chapitre car nous nous sommes concentrés sur l'étude des effets tridimensionnels et les corps considérés n'ont pas d'angles de relèvement trop importants. L'effet de grands angles de relèvement a par contre été étudié plus en détail pour des cas 2D et axisymétriques (voir annexe A). Cette étude a montré que, si les prévisions d'efforts obtenues en se basant sur le MLM sont toujours très bonnes, les champs de pression peuvent présenter des différences importantes avec les calculs non linéaires. Une autre limitation est apparue lors de l'étude de l'impact oblique d'un cône. Dans ce cas, les prévisions de notre modèle ne sont pas satisfaisantes. Cela indique que les termes additionnels que nous avons inclus dans le modèle de Logvinovich modifié ne sont pas suffisants pour rendre compte des changements de la distribution de pression induits par la vitesse d'avance.

### 5.4.3 Voie possible d'amélioration du modèle concernant la prise en compte de la vitesse d'avance

Nous pensons que la prise en compte des effets de la vitesse d'avance pourrait être améliorée en adoptant une approche différente pour le calcul du potentiel des vitesses. Nous nous appuyons pour cela sur les travaux de [Howison et al. \(2004\)](#). En effet, dans le cas bidimensionnel, ces derniers indiquent qu'en présence d'une vitesse d'avance (de l'ordre de la vitesse verticale) le potentiel des vitesses devrait être calculé en considérant la condition aux limites suivante au niveau de la surface mouillée :

$$\frac{\partial \varphi^{(w)}}{\partial z}(x, 0) = V_z - V_x f_{,x}. \quad (5.10)$$

Nous voyons que cette dernière expression fait intervenir un terme additionnel lié à la vitesse d'avance. Il serait intéressant d'étendre l'analyse d'[Howison et al.](#) aux problèmes tridimensionnels. Nous devons préciser que le modèle analytique que nous utilisons pour le calcul du potentiel des vitesses ne sera plus adapté si une condition aux limites telle que 5.10 est utilisée. En effet, avec ce modèle analytique, la condition aux limites n'est vérifiée qu'au niveau d'un seul point (le point de référence utilisé pour la description de la ligne de contact). Si cela n'est pas grave lorsqu'une condition aux limites homogène est considérée, l'approche analytique n'est plus applicable avec la condition aux limites modifiée. Pour résoudre ce nouveau problème aux limites, il sera nécessaire de développer un modèle éléments de frontière similaire à celui que

nous utilisons pour calculer l'élevation de la surface mouillée lors de la détermination de la surface mouillée (voir chapitre [2](#)).



---

# Conclusions et perspectives

## 6.1 Conclusions

Le problème de la modélisation des chargements hydrodynamiques subis par les bulbes d'étrave lors d'impacts hydrodynamiques a été étudié par trois approches différentes. Un modèle d'impact hydrodynamique tridimensionnel basé sur la théorie de Wagner a tout d'abord été développé. Des essais et des simulations numériques par éléments finis d'impacts hydrodynamiques ont également été réalisés afin de valider le modèle de Wagner proposé et de comparer les différentes approches numériques.

Concernant la modélisation basée sur la théorie de Wagner, celle-ci repose sur deux éléments principaux. Une méthode numérique basée sur la méthode des éléments de frontière a été proposée pour résoudre le problème de Wagner tridimensionnel de façon approchée et une méthode simple a été proposée pour calculer la pression hydrodynamique en se basant sur le modèle de Logvinovich modifié proposé par [Korobkin \(2004\)](#). La pertinence de l'approche proposée a été montrée en étudiant plusieurs problèmes d'impacts de solides tridimensionnels et en comparant des résultats d'essais et de simulations pour ces différents cas. Nous avons montré que la méthode était non seulement précise et moins exigeante en termes de ressources informatiques, mais était également beaucoup plus facile d'utilisation qu'un logiciel de simulation numérique tel qu'ABAQUS/Explicit.

Pour la plupart des cas étudiés, les résultats des différentes modélisations et des essais, quand ils sont disponibles, concordent tout à fait. Cet agrément donne confiance en la validité des résultats qui sont présentés. Ces derniers pourraient donc être utilisés par d'autres chercheurs travaillant sur la modélisation d'impacts hydrodynamiques pour valider les méthodes qu'ils développent.

## 6.2 Perspectives

Nous avons observé que l'approche proposée pour prendre en compte la vitesse d'avance n'était pas suffisante. Une voie d'amélioration a été proposée pour compléter cette approche mais, par faute de temps, nous n'avons pas pu mettre en oeuvre cette idée. Il serait intéressant d'étudier ce point à l'avenir.

Nos travaux ont été restreints à l'étude d'impacts de solides animés d'un mouvement de translation uniforme à vitesse constante sur la surface plane d'un liquide au repos. De plus, les solides considérés sont supposés avoir au moins un plan de symétrie. Nous pensons qu'il serait relativement facile d'étendre la méthode proposée à des formes non symétriques en intégrant des termes complémentaires (en sinus) dans la description paramétrique de la ligne de contact. La prise en compte d'une vitesse d'impact variable, ainsi qu'un mouvement de rotation du solide impactant, est tout à fait compatible avec la méthode que nous proposons. D'ailleurs, inclure ces aspects dans l'algorithme de calcul de la ligne de contact ne demanderait que des modifications informatiques mineures. Par contre, le modèle utilisé pour calculer la pression hydrodynamique nécessiterait d'être revu plus en profondeur. En particulier, dans le cas d'un solide ayant une vitesse de rotation, un calcul analytique du potentiel des vitesses n'est plus suffisant. Le développement d'un modèle éléments de frontière sera nécessaire pour cela. Nous pensons qu'il est également possible d'inclure les effets d'une élévation initiale de la surface libre (liée par exemple à la présence de vagues).

Même si ce point n'a pas été présenté dans le mémoire, nous avons développé un programme permettant de transférer les distributions de pression calculées vers un code de calcul de structures (ABAQUS). Cependant, le problème des interactions fluide-structure lors de l'impact reste ouvert. Une solution pragmatique consisterait à appliquer le champ de pression sur la structure et à utiliser des éléments acoustiques pour reproduire les effets liés à la présence du fluide (masse ajoutée et amortissement acoustique). Une telle méthode pose néanmoins le problème pratique du suivi de l'évolution de la hauteur d'eau au cours de l'impact. Ensuite, cette approximation n'est valable que pour des petites perturbations de la vitesse de la structure par rapport au mouvement de corps rigide. L'idée d'un couplage complet entre un code de calcul de structure et le modèle de Wagner développé à l'aide d'un schéma itératif nous semble peu intéressante, car cela entraînerait des temps de calcul vite importants et n'est sans doute pas nécessaire dans les cas qui nous intéressent directement. En effet, l'architecture des bulbes d'étrave fait qu'il est peu probable que sa géométrie change beaucoup sous l'effet des efforts d'impact. Ainsi, une approche plus raisonnable pourrait peut être consister à calculer tout d'abord l'évolution de la surface mouillée au cours de l'impact à partir de la forme initiale du solide (déjà évoqué par [Gazzola \(2007\)](#)) puis à prendre en compte les variations de vitesses de la structure au niveau de la surface mouillée dans le MLM lors du calcul de la pression.

Enfin, différents travaux utilisent des modèles simplifiés 2D pour étudier les phénomènes de fouettement (whipping) induits par des impacts hydrodynamiques ([Tuitman \(2010\)](#)). Notre méthode pourrait donc être intégrée à de telles approches pour mieux rendre compte des aspects tridimensionnels des impacts hydrodynamiques. De la même manière, cela laisse entrevoir la possibilité de prendre en compte les effets du slamming de façon tridimensionnelle lors de l'étude de la tenue à la mer des navires.



---

## **Comparaison de différents modèles analytiques d'impact hydrodynamique**

Cette annexe présente une étude comparative de différents modèles analytiques d'impact hydrodynamique basés sur la théorie de Wagner. ces travaux ont été publiés dans International Journal of Multiphysics. Différents cas 2D et axisymétriques ont été étudiés afin d'évaluer les différents modèles. Les distributions de pression et les efforts hydrodynamiques sont comparés à des résultats de simulations numériques ainsi qu'à des résultats expérimentaux. Nous avons conclu de cette étude que le Modèle de Logvinovich modifié (MLM) est nettement plus précis que les autres modèles considérés, en particulier concernant la prédiction de l'effort hydrodynamique total.

# Assessment and comparison of several analytical models of water impact

**Alan Tassin<sup>1,2</sup>, Nicolas Jacques<sup>1</sup>,  
Aboughit El Malki Alaoui<sup>1</sup>,  
Alain Nême<sup>1</sup>, Bruno Leblé<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Laboratoire Brestois de Mécanique et des Systèmes (EA 4325 LBMS),  
ENSIETA/Université Européenne de Bretagne, 2 rue François Verny,  
29806 Brest cedex 9, France

<sup>2</sup>DCNS - Ing. Navire Armé, DCSE/CSB, rue Choiseul, 56311 Lorient  
Cedex, France

E-mail addresses: alan.tassin@ensieta.fr; nicolas.jacques@ensieta.fr;  
aboughit.elmalkialaoui@ensieta.fr; alain.neme@ensieta.fr;  
bruno.leble@dcnsgroup.com

## **ABSTRACT**

This paper deals with the accuracy of several analytical models for the prediction of the hydrodynamic force and pressure distribution acting on a body entering initially calm water. The problem of water entry is important for the analysis of slamming loads undergone by boats operating in waves, as well as of the steady behaviour of high-speed planing vessels. The considered models are briefly described and the obtained results are compared to those of numerical computations and experimental observations for a number of two-dimensional and axisymmetric cases of water impact.

**Keywords:** water impact, slamming, Wagner theory.

## **1. INTRODUCTION**

The design of naval and offshore structures includes the consideration of water impact related loads. An example of water impact problem is the slamming of a ship's bow in heavy sea conditions. Slamming loads can induce important transient stresses and affect the integrity of local structural components. Slamming also causes global effects on ship structures such as whipping, a transient vibration of the ship that may cause significant fatigue damage [1–2].

It is now possible to solve complex hydrodynamic impact problems using Computational Fluid Dynamics (CFD) techniques [3–6]. Nevertheless, CFD methods require large computational resources, which prohibits their use for preliminary design. As a result, analytical models of water impact are still useful tools for engineering applications. Pioneering work on the subject was performed by von Karman [7], who was concerned with seaplane landing problems. The model of von Karman was subsequently refined by Wagner [8] by taking into account the local uprise of the water to determine the wetted surface (contact surface between the impacting body and the fluid). The Wagner model was originally restricted to two-dimensional problems and was afterwards extended to axisymmetric cases by Chuang [9]. Recently, Scolan and Korobkin [10] have used the Wagner method to study the impact of three-dimensional bodies. The Wagner theory is based on the so-called “flat disc assumption”. This means that the boundary conditions are linearized and imposed on the initially flat liquid free surface. It is obvious that this assumption is only valid for an impacting body with small deadrise angle (angle between the

tangent to the body profile and the initial free surface). Besides, the Wagner theory predicts an infinite pressure at the intersection between the surface of the impacting body and the liquid free surface. The singularity is integrable (when the pressure is computed with a linearized form of the Bernoulli equation) and the hydrodynamic force acting on the impacting body can be determined. Nevertheless, it has been observed that the Wagner theory overpredicts the impact loads [2, 11]. Several pieces of work have been done to develop more accurate simplified models of water impact. Some models were obtained using the method of matched asymptotic expansions in which the jet flow occurring in the vicinity of the intersection between the free surface and the body is taken into account [12, 13]. The extension of this method to three-dimensional problems has been discussed by Scolan and Korobkin [14]. Other semi-analytical models are based on the generalized Wagner theory [15–18]. In this case, only the boundary condition on the free surface is linearized, the body boundary condition being imposed on the actual position of the body. It should be noted that the models based on the generalized Wagner approach are much more complex than Wagner models and, for arbitrary sections, the instantaneous flow around the body must be computed numerically. In addition, to our knowledge, axisymmetric generalized Wagner models are not available. The models proposed by Korobkin [11] are based on Wagner's flat-disc approximation, but the shape of the impacting body and the nonlinear term of the Bernoulli equation are taken into account in an approximate way.

The present work is dedicated to the assessment and comparison of several models of water impact. Contrary to previous work on the subject [12, 19], the present study is not restricted to two-dimensional bodies having a simple geometry. Three analytical models have been considered: the model of Zhao and Faltinsen [13], which is based on the matched asymptotic expansions method, the modified Logvinovich model and a simplified generalized Wagner model, which have been proposed by Korobkin [11]. These models are based on the flat disk assumption. They are therefore easy to implement and can be used as engineering tools. Besides, they can be applied to both two-dimensional and axisymmetric problems. The accuracy of the three models is investigated through comparisons with results of finite elements computations and with experimental data.

## 2. THE WAGNER THEORY OF WATER IMPACT

### 2.1. BASIC ASSUMPTIONS

The problem of a two-dimensional symmetric body or an axisymmetric body penetrating vertically into an unbounded liquid domain initially at rest is considered. The body is assumed to be rigid and its velocity to be constant in the present study. It is assumed that the liquid's inertia dominates the forces acting on the body during the typical duration of the impact. The effects of viscosity, surface tension, compressibility, gravity and air-cushion are neglected. The flow is assumed to be irrotational.

Wagner supposed that, during the initial stage of impact of a blunt body, the deadrise angle remains small and that the liquid surface is close to its initial position. Consequently, the instantaneous fluid flow is more or less the same as if the fluid was loaded by a flat plate. Thus, within the Wagner approach, the body surface boundary condition is imposed on the initial flat position of the liquid free surface (Figure 1). The free surface boundary is also simplified by considering a linearized form of the Bernoulli equation:

$$p = -\rho \partial \phi / \partial t, \quad (1)$$

where  $\rho$  is the fluid density,  $p$  is the hydrodynamic pressure and  $\phi$  is the velocity potential. Therefore, under Wagner's assumptions, the velocity potential satisfies the following set of equations:

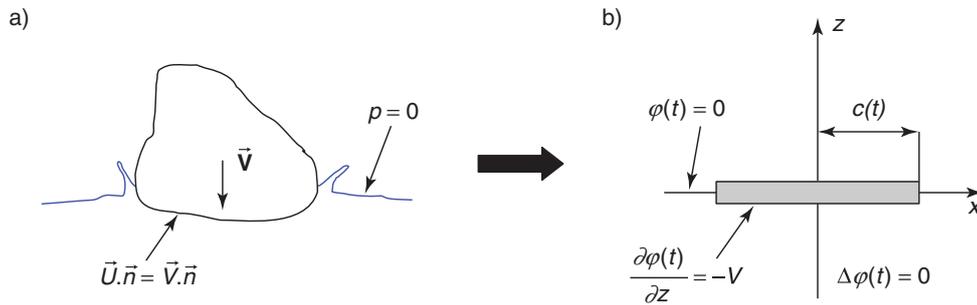


Figure 1 Sketches of the water entry problem (a) and its approximation within the Wagner theory (b).

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0 \\ \varphi = 0 & z = 0, |x| > c(t) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -V & z = 0, |x| < c(t) \\ \varphi \rightarrow 0 & \sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2)$$

where  $V$  is the velocity of the impacting body and  $c$  is the half-length of the contact region. The solution of this boundary-value problem is well-known for both the two-dimensional (2D) [2, 8] and axisymmetric (axi.) [10] cases. The velocity potential in the contact region ( $|x| < c(t)$ ) can be written in the following form:

$$\begin{cases} \varphi = -V \sqrt{c(t)^2 - x^2}, 2D \\ \varphi = -2V \sqrt{c(t)^2 - x^2} / \pi, \text{axi.} \end{cases} \quad (3)$$

At this stage, the wetted surface width  $c(t)$  is unknown and has to be determined.

### 2.2. DETERMINATION OF THE WETTED SURFACE

The half-length of the wetted surface  $c(t)$  corresponds to the abscissa of the point of intersection between the body surface and the water free surface (Figure 2). It is therefore necessary to compute the elevation of the free surface to determine  $c(t)$ . The analytical

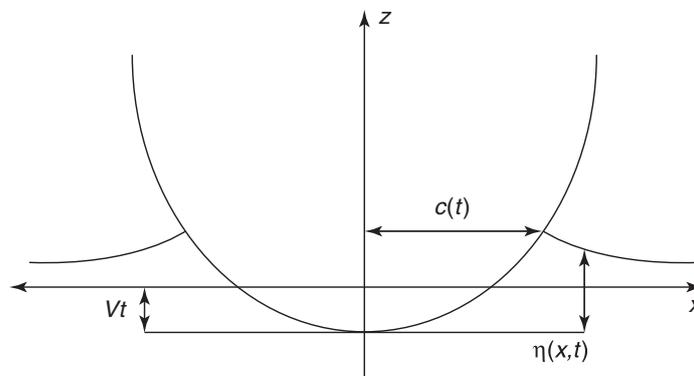


Figure 2 Definition of geometric parameters.

solution for the velocity potential makes it possible to express the relative vertical velocity  $U_r$  between a point on the free surface and the body (for  $|x| > c(t)$ ) as:

$$\begin{cases} U_r(x,t) = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + V = \frac{V|x|}{\sqrt{x^2 - c(t)^2}}, & \text{2D} \\ U_r(x,t) = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + V = \frac{-2V}{\pi} \left[ \arcsin\left(\frac{c(t)}{x}\right) - \frac{c(t)}{\sqrt{x^2 - c(t)^2}} \right] + V, & \text{axi.} \end{cases} \quad (4)$$

As mentioned above, within the Wagner approach, the free surface condition is  $\varphi = 0$ . Consequently, the horizontal velocity is zero on the free surface. Thus, the relative elevation of the free surface  $\eta(x, t)$  can be obtained by the time integration of the relative velocity  $U_r$ :

$$\eta(x, t) = \int_0^t U_r(x, \tau) d\tau \quad . \quad (5)$$

At the intersection between the body surface and the free surface, the relative elevation  $\eta$  is equal to the initial position of the body shape (Figure 2):

$$f(c(t)) = \eta(c(t), t). \quad (6)$$

where function  $f$  describes the body shape. Eqn. (6) is often referred to as the Wagner condition and makes it possible to find the wetted surface as a function of time. However, a closed-form solution for  $c(t)$  can only be derived for simple shapes (wedge, parabola, cone and axisymmetric paraboloid). For arbitrary sections, the Wagner condition must be solved numerically. The method used in the present work is presented in Appendix.

### 3. MODELS FOR THE PRESSURE DISTRIBUTION

This section presents several analytical models for the prediction of the hydrodynamic pressure distribution on the impacting body. These models are based on the velocity potential provided by the Wagner theory.

#### 3.1. ORIGINAL WAGNER MODEL [8]

By considering the Bernoulli equation,

$$p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho (\nabla \varphi)^2, \quad (7)$$

and the velocity potential in the contact region, Eqn. (3), the distribution of pressure acting on a solid entering a liquid at constant velocity can be written in the following form:

$$\begin{cases} p(x) = \frac{\rho V c}{\sqrt{c^2 - x^2}} \frac{dc}{dt} - \frac{\rho V^2 c^2}{2(c^2 - x^2)}, & \text{2D} \\ p(x) = \frac{2\rho V c}{\pi \sqrt{c^2 - x^2}} \frac{dc}{dt} - \frac{2\rho V^2 x^2}{\pi^2 (c^2 - x^2)} - \frac{\rho V^2}{2}, & \text{axi.} \end{cases} \quad (8)$$

It should be noticed that the pressure is negative and infinite at  $|x| = c(t)$ . Moreover, the singularity is not integrable. Wagner indicated that Eqn. (8) is expected to provide an accurate estimation of the pressure only near the centre of the contact region. In this region, the second term of the right-hand side of Eqn. (8) is much smaller than the first term. Thus, Wagner suggested that this term (which corresponds to the quadratic term of the Bernoulli equation) should be disregarded when calculating the total hydrodynamic force acting on the body. In other words, Wagner suggested that the hydrodynamic pressure should be computed using the linearized Bernoulli, Eqn. (1). This gives:

$$\begin{cases} p(x) = \frac{\rho Vc}{\sqrt{c^2 - x^2}} \frac{dc}{dt}, 2D \\ p(x) = \frac{2\rho Vc}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}} \frac{dc}{dt}, \text{axi.} \end{cases} \tag{9}$$

In this case, the pressure remains positive on the whole body surface but is still infinite at  $|x| = c(t)$ . However, the singularity is integrable.

### 3.2. ZHAO AND FALTINSEN MODEL [13]

The infinite pressure predicted by the original Wagner model is of course unphysical and Wagner indicated that a detailed analysis of the jet flow occurring near the intersection between the body and the free surface is required to obtain the correct pressure near  $|x| = c(t)$ . This analysis was already performed by Wagner. However, Wagner did not know how to match the local jet flow solution and the one obtained from the flat plate approximation. This problem was overcome for the first time by Cointe and Armand [12] using the method of matched asymptotic expansions. Thanks to this technique, a composite pressure distribution valid on the whole contact area was obtained.

The Zhao and Faltinsen model (ZFM) [13] is also based on the method of matched asymptotic expansions. For  $|x| < c(t)$ , the pressure distribution is of the form:

$$\begin{cases} p(x) = \frac{\rho Vc}{\sqrt{c^2 - x^2}} \frac{dc}{dt} - \frac{\rho Vc}{\sqrt{2c(c-x)}} \frac{dc}{dt} + 2\rho \left(\frac{dc}{dt}\right)^2 \frac{\sqrt{\tau}}{(1 + \sqrt{\tau})^2}, 2D \\ p(x) = \frac{2\rho Vc}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}} \frac{dc}{dt} - \frac{2\rho Vc}{\pi\sqrt{2c(c-x)}} \frac{dc}{dt} + 2\rho \left(\frac{dc}{dt}\right)^2 \frac{\sqrt{\tau}}{(1 + \sqrt{\tau})^2}, \text{axi.} \end{cases} \tag{10}$$

For  $x \geq c(t)$ , the pressure is related to the jet flow solution:

$$p(x) = 2\rho \left(\frac{dc}{dt}\right)^2 \frac{\sqrt{\tau}}{(1 + \sqrt{\tau})^2}. \tag{11}$$

$\tau$  is a positive number that is solution of the following equation:

$$x - c = (\delta/\pi)(-\ln \tau - 4\sqrt{\tau} - \tau + 5), \tag{12}$$

where  $\delta$  is the thickness of the jet:

$$\begin{cases} \delta = \pi V^2 2c / [4dc/dt]^2, 2D \\ \delta = V^2 c / (2\pi [dc/dt]^2), \text{axi.} \end{cases} \quad (13)$$

It should be noted that the original model of Zhao and Faltinsen [13] was dedicated to two-dimensional problems. Its extension to axisymmetric problems was proposed by Scolan [20].

### 3.3. MODIFIED LOGVINOVITCH MODEL AND SIMPLIFIED GENERALIZED WAGNER MODEL OF KOROBKIN [11]

Korobkin generalized Wagner's ideas in a different way. In his work, Korobkin analysed several models of water impact including the generalized Wagner model [15], the Vorus model [21] and the Logvinovich model. He suggested that better predictions of the hydrodynamic pressure could be achieved by taking into account nonlinear effects related to the quadratic term of the Bernoulli equation and to the real geometry of the wetted surface. From this analysis, he derived two new models of water impact.

The distributions of pressure  $P(x, t)$  and of velocity potential  $\phi(x, t)$  on the wetted surface are defined by:

$$P(x, t) = p(x, f(x) - h(t), t), \quad (14)$$

$$\phi(x, t) = \varphi(x, f(x) - h(t), t), \quad (15)$$

where  $h(t)$  is the penetration depth of the impacting body  $h(t) = Vt$  and function  $f$  describes the body shape.  $\varphi$  is the velocity potential corresponding to the exact water impact problem (with no linearization of the boundary conditions). By using the body surface boundary condition:

$$\varphi_{,z} = \varphi_{,x} f_{,x} - V, \quad (16)$$

the pressure distribution can be written in the following form:

$$P(x, t) = -\rho \left[ \phi_{,t} + \frac{f_{,x} V}{1 + f_{,x}^2} \phi_{,x} + \frac{1}{2} \frac{\phi_{,x}^2 - V^2}{1 + f_{,x}^2} \right]. \quad (17)$$

It should be pointed out that this expression is only based on the assumption that the flow is potential. However, the computation of the pressure  $P(x, t)$  requires the velocity potential  $\varphi(x, z, t)$ , which can only be determined using numerical methods. To overcome this difficulty, it was proposed that  $\varphi(x, z, t)$  should be approximated with the use of the velocity potential  $\varphi^{(w)}$  obtained from the classical Wagner theory:

$$\varphi(x, z, t) \approx \varphi^{(w)}(x, z - d(t), t), \quad (18)$$

where  $d(t)$  is the  $z$ -coordinate of the plane on which the boundary conditions are projected in the Wagner theory. Moreover, the wetted surface is computed according to the Wagner theory, see section 2.2. Then, a first order Taylor expansion of  $\varphi^{(w)}$  around  $z = d(t)$  is used to simplify the computation of  $\phi(x, t)$ .

In the Modified Logvinovich Model (MLM), the linearization of the water entry problem is performed around the initial liquid level,  $d(t) = 0$ , leading to the following expression:

$$\phi(x, t) \approx \phi^{(w)}(x, 0, t) - V[f(x) - h(t)], \quad (19)$$

In the Generalized Wagner Model (GWM), the linearization is performed around a flat surface at the height of the intersection between the body and the free surface,  $d(t) = f(c(t)) - h(t)$ , leading to the following expression:

$$\phi(x, t) \approx \phi^{(w)}(x, 0, t) - V[f(x) - f(c(t))]. \quad (20)$$

The pressure distributions are then obtained by inserting Eqn. (19) and Eqn. (20) into Eqn. (17).

#### 4. NUMERICAL SIMULATIONS

For comparison purposes, numerical simulations of water impact have been performed with the finite element software ABAQUS/Explicit. For these simulations, water is modelled as a compressible viscous fluid:

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + 2\mu\underline{\underline{D}}', \quad \text{with} \quad p = K \left( 1 - \frac{V}{V_0} \right), \quad (21)$$

where  $\underline{\underline{\sigma}}$  is the Cauchy stress tensor and  $\underline{\underline{D}}'$  is the deviatoric part of the strain rate tensor.  $K$  and  $\mu$  are respectively the bulk modulus and the viscosity (in this analysis,  $K = 2.03 \times 10^9$  Pa,  $\mu = 0.001$  Pa.s).

Water impact problems involve high velocity flows and cannot be treated effectively with Lagrangian methods. Thus, for the present simulations, the Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) formulation of the ABAQUS software has been used. ALE formulations combine the features of Lagrangian and Eulerian analyses and make it possible to overcome the difficulties due to mesh distortion. The ALE technique of ABAQUS is based on the operator splitting method. This means that each analysis increment consists of a Lagrangian phase (in which the mesh moves with the fluid flow) followed by an advection phase. During the latter stage, the following tasks are performed: First, a new mesh is created in order to reduce mesh distortion. Then, the element state variables (stress and density) and the nodal velocities are transferred from the old mesh to the new mesh.

The fluid mesh consists of two areas. The first one is located near the impact surface where the fluid undergoes a large amount of deformation. In this area, a fine ALE mesh of 4-node quadrilateral elements (ABAQUS CPE4R for two-dimensional problems and CAX4R for axisymmetric problems) is used; the mesh size is about  $150 \mu\text{m}$ . Out of this area, the deformation of the fluid remains moderate. Therefore, a Lagrangian mesh of linear triangular elements is used (Figure 3). The size of the fluid domain has been chosen in order to avoid any effect of the boundary conditions at its exterior surface. Indeed, in the present computations, the fluid compressibility is taken into account. Therefore, the impact generates acoustic waves, which reflect back as it reaches the boundary of the fluid domain. To prevent any interaction between the impacting body and the reflected waves, the following condition should be fulfilled:

$$L \geq \frac{c_0 T}{2}, \quad (22)$$

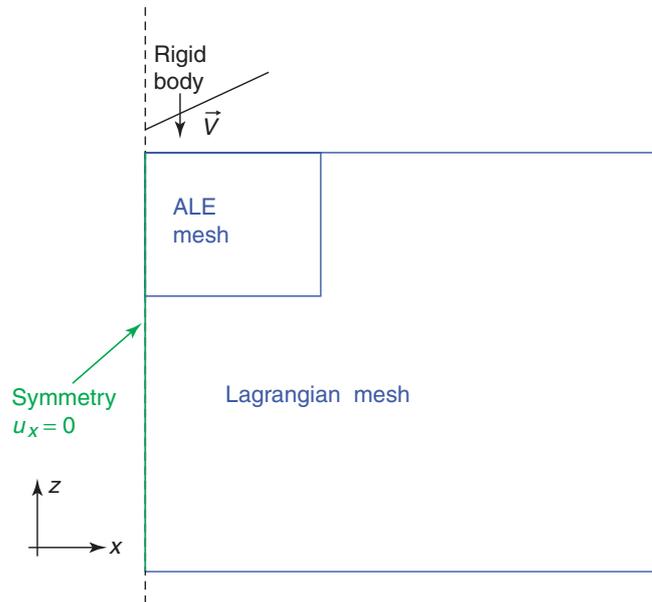


Figure 3 Sketch of the finite element model.

where  $L$  is the distance between the impact area and the exterior surface of the fluid domain,  $T$  is the time period simulated and  $c_0$  is the speed of sound ( $c_0 = \sqrt{K/\rho}$ ). The impacting solid is modelled as a rigid body. Frictionless contact is used to describe the interaction between the fluid and the impacting body.

## 5. RESULTS

In this section, several test cases are presented. The results derived from the analytical models are compared with those of the finite element simulations and with experimental data.

### 5.1. WEDGES AND CONES

Figure 4 displays distributions of pressure coefficient  $C_p$  along the surface of a wedge entering water at constant velocity for several values of the deadrise angle. The pressure coefficient is defined as:

$$C_p = 2P/(\rho V^2). \quad (23)$$

For the smallest deadrise angle (Figure 4.a), the pressure distributions predicted by the analytical models are in close agreement with the numerical results. As the deadrise angle increases, more pronounced discrepancies are observed (Figure 4.b and Figure 4.c). Even if the MLM and the GWM overestimate the peak pressure, they seem to be more accurate than the ZFM. Figure 5 compares the nondimensional force on a wedge as a function of the deadrise angle. In addition to the results obtained with ZFM, MLM, GWM and ABAQUS, the slamming forces provided by the original Wagner theory and the similarity solution are also displayed. The similarity solution results were obtained by Zhao and Faltinsen [13] using the analytical formulation proposed by Dobrovolskaya [22]. The similarity solution does not require any assumption concerning the shape of the liquid surface. Therefore, it is often considered as a reference solution for the problem of wedge entry into an incompressible ideal fluid. It is, however, not an exact solution since it is implicitly given in terms of integral equations, which must be solved numerically. One observes that the similarity solution is very closed to the

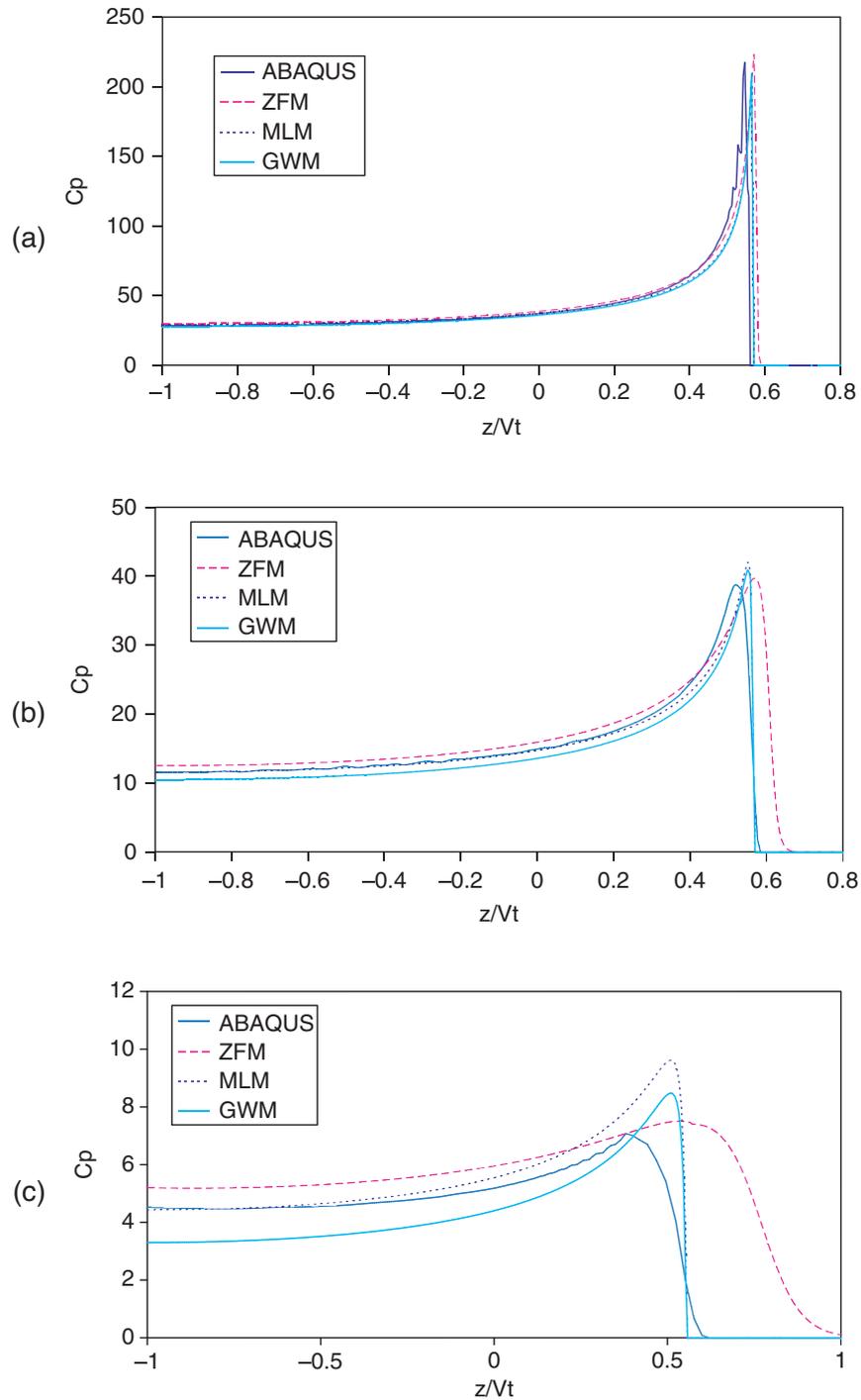


Figure 4 Distribution of pressure coefficient (eqn (23)) on a wedge entering water at constant velocity for several values of deadrise angle  $\beta$ . (a)  $\beta = 6^\circ$ , (b)  $\beta = 14^\circ$ , (c)  $\beta = 30^\circ$ .  $z$  is the vertical distance between the body position and the initial calm free surface.

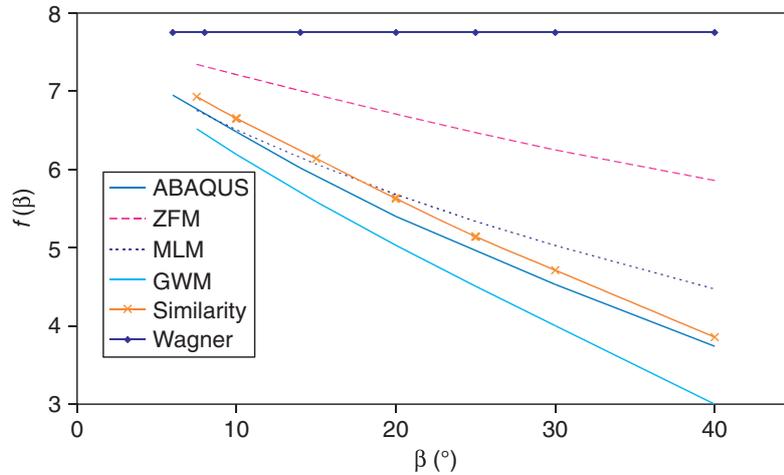


Figure 5 Force coefficient,  $f(\beta) = (F \tan(\beta)^2)/(\rho LV^3 t)$ , for a wedge of length  $L$  entering water at constant velocity as a function of the deadrise angle  $\beta$ .

results of the finite element computations. As expected, the original Wagner model only provides a poor prediction of the slamming forces. The ZFM is not very much accurate. For a deadrise angle of  $40^\circ$ , the slamming load predicted by the ZFM is 56% greater than the results of the finite element method (or of the similarity solution). The MLM and the GWM provide better estimations of the slamming loads.

Figure 6 shows pressure distributions acting on a cone for several values of the deadrise angle. As in the 2D case, the accuracy of the analytical models decreases with the deadrise angles. However, the pressure distributions predicted by the MLM and the GWM seem to be more affected by large values of the deadrise angle than in the 2D case. In particular, the pressure near the centre of the contact surface is underestimated. The evolution of the nondimensional force acting on a cone with the deadrise angle is plotted in Figure 7. The results of experimental tests ( $\beta = 7^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ ) carried out at ENSIETA using a hydraulic shock machine are also shown in Figure 7. More details about the experimental set-up can be found in [23]. One observes that the MLM predicts the slamming force much better than the ZFM and the GWM. For deadrise angles up to  $40^\circ$ , the relative difference between the results of the MLM and those of the numerical simulations are smaller than 6.2%.

## 5.2. CIRCULAR CYLINDER AND SPHERE

The impact of a circular cylinder and of a sphere of radius  $R$  at constant velocity is studied. Figure 8 presents the slamming force acting on the cylinder predicted by the analytical and numerical models, together with the experimental data of Cointe and Armand [12]. The ZFM is again shown to overpredict the slamming loads. Among the analytical models examined in the present study, the MLM seems to provide the most accurate results. Figure 9 presents the slamming load acting on the sphere. It appears that the accuracy of the GWM and the ZFM are very bad in this case. It is interesting to point out that, for a relative penetration  $Vt/R$  equal to 0.1, the local deadrise angle at the intersection between the sphere surface and the liquid surface is equal to  $32^\circ$ . In this case, the slamming load predicted by the GWM is 32% smaller than the one obtained from the ABAQUS simulation. This discrepancy is significantly greater than the one observed for a cone with a deadrise angle of  $32^\circ$  (23%), see Figure 7. This indicates that the accuracy of the analytical models depends on the shape of the impacting body and not only on the maximum value of the deadrise angle.

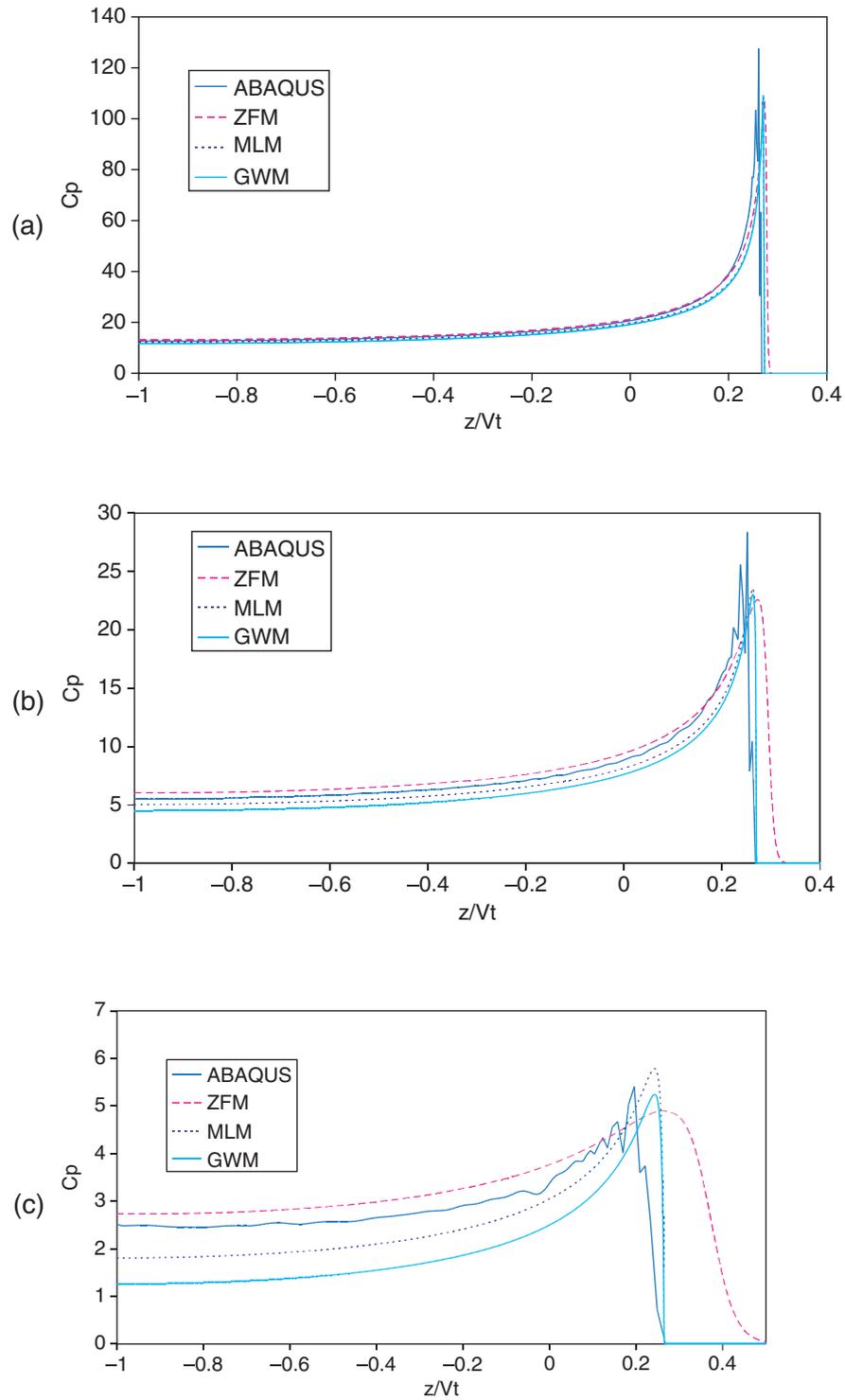


Figure 6 Distribution of pressure coefficient (eqn (23)) on a cone entering water at constant speed for several values of deadrise angle  $\beta$ . (a)  $\beta = 7^\circ$ , (b)  $\beta = 15^\circ$ , (c)  $\beta = 30^\circ$ .

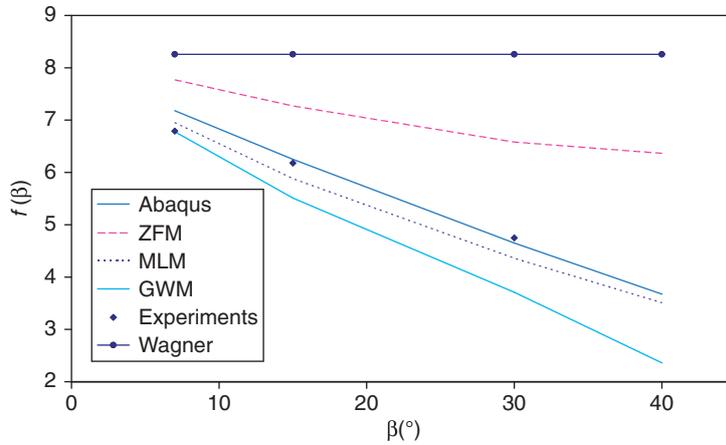


Figure 7 Force coefficient,  $f(\beta) = (F \tan(\beta)^3)/(\rho V^4 t^2)$ , for a cone entering water at constant velocity as a function of the deadrise angle  $\beta$ .

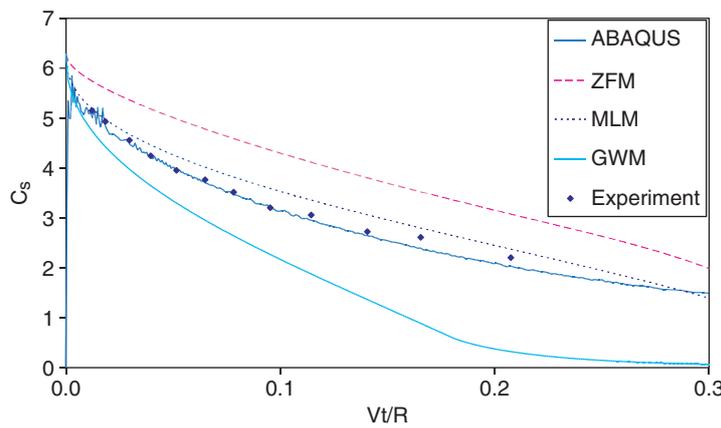


Figure 8 Nondimensional Slamming load,  $C_s = F/(\rho V^2 RL)$ , on a circular cylinder of radius  $R$  and length  $L$  as a function of the nondimensional submergence.

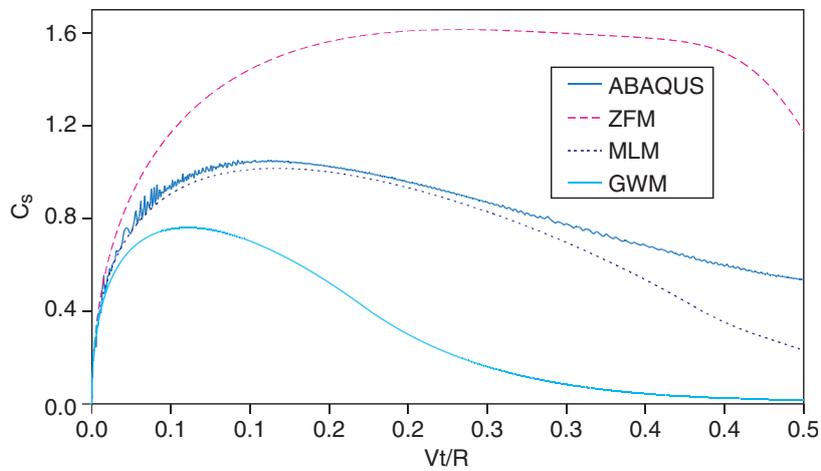


Figure 9 Nondimensional Slamming load,  $C_s = 2F/(\rho V^2 \pi R^2)$ , on a sphere of radius  $R$  as a function of the nondimensional submergence.

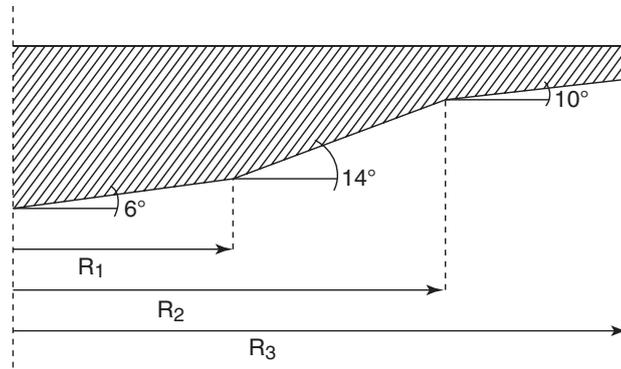


Figure 10 Axisymmetric body with knuckles ( $R_1 = 90$  mm,  $R_2 = 135$  mm,  $R_3 = 160$  mm)

### 5.3. AXISYMMETRIC BODY WITH KNUCKLES

In this section, the impact of an axisymmetric body with sharp changes of the local deadrise angle is considered (Figure 10). Figure 11 presents the force acting on this body entering water at constant speed (12 m/s) predicted by the different models and measured during impact tests performed on the ENSIETA hydraulic shock machine. At the beginning of the impact, the load increases until the relative submergence is equal to 0.045. At this moment ( $Vt/R_3 \approx 0.045$ ), the point of intersection between the body shape and the liquid free surface reaches the first knuckle and a rapid drop of the load is observed. It should be noticed that the analytical models predict sharper drops of the force than the finite element model and the experiments. This difference will be explained below. Then, the force increases for the second time, but at a lower rate. The change in the curves' slopes for  $Vt/R_3 \approx 0.09$  corresponds to the instant when the free surface reaches the second change of deadrise angle. Figure 12 presents the distributions of pressure obtained with the MLM and a finite element simulation at three instants of time. At time  $t_1$ , the intersection point has not reached the first knuckle yet and the pressure distribution is similar to the pressure distribution on a cone (Figure 6.a). The fluid's compressibility is taken into account in the ABAQUS simulation. Therefore,

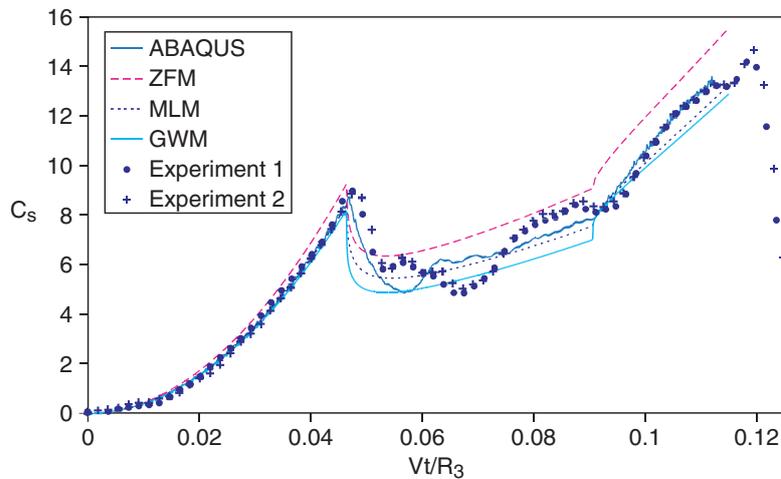


Figure 11 Nondimensional Slamming load,  $C_s = 2F/(\rho V^2 \pi R_3^2)$ , acting on the axisymmetric body with knuckles (Figure 10) as a function of the nondimensional submergence.

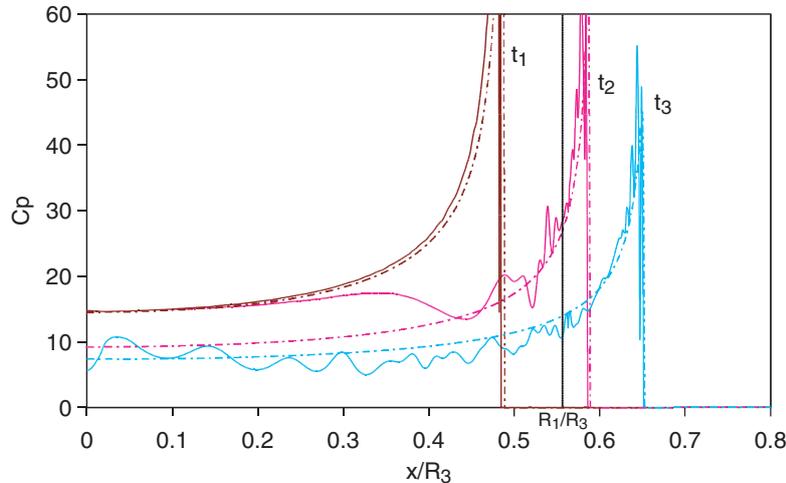


Figure 12 Distribution of pressure coefficient (Eqn. (23)) on the axisymmetric body with knuckles (Figure 10) for three different penetration depths ( $Vt_1/R_3 = 4.04 \times 10^{-2}$ ,  $Vt_2/R_3 = 4.94 \times 10^{-2}$  and  $Vt_3/R_3 = 5.84 \times 10^{-2}$ ). Solid lines: ABAQUS, Dotted dashed lines: MLM.

when the contact surface reaches the first knuckle ( $c = R_1$ ), a release wave is generated and propagates at finite speed toward the centre of the contact surface. That is the reason why, at time  $t_2$ , the pressure has dropped near the edge of the contact surface ( $0.45 < x/R_3 < 0.58$ ), but it has not changed near the centre. Of course, such a complex phenomenon cannot be described by the MLM, which assumes that the fluid is incompressible. In that case, the hydrodynamic pressure drops rapidly on the whole contact surface when the local deadrise angle changes. That is why the MLM predicts a sharper drop of the total force after the first peak ( $Vt/R_3 \approx 0.045$ ) than the ABAQUS simulation (Figure 11).

## 6. CONCLUSIONS

Three analytical models of water impact have been tested against results of finite element computations and experimental data. These models are based on the simplified theory of water impact introduced by Wagner [8] and make it possible to estimate pressure distributions and slamming forces without having to resort to complex numerical computations. The accuracy of these models depends on the maximum deadrise angle but also on the shape of the impacting body. Besides, this study has revealed differences between the two-dimensional and axisymmetric cases. For example, the pressure distributions obtained with the MLM and the GWM are much more affected by large values of the deadrise angle in the axisymmetric case than in the two-dimensional case. When the total hydrodynamic load is considered, the MLM is clearly more accurate than the other two models. It is, for example, the only model able to provide an estimation of the slamming load acting on a sphere consistent with the finite element simulation. An additional advantage of the MLM is that a three-dimensional version of this model is already available [24].

## REFERENCES

- [1] Tuitman, J., Malenica, S., Some aspects of whipping response of container ships, *23rd International Workshop on Water Waves and Floating Bodies*. Jeju, 2008.
- [2] Faltinsen, O. M., *Hydrodynamics of high-speed marine vehicles*. Cambridge University Press, New York, 2005, 286–341.

- [3] Kleefsman, K. M. T., Fekken, G., Veldman, A. E. P., Iwanowski, B. and Buchner, B., A Volume-of-Fluid based simulation method for wave impact problems. *Journal of Computational Physics*. 2005, 206(1), 363–393.
- [4] Aquelet, N., Souli, M. and Olovsson, L., Euler-Lagrange coupling with damping effects: Application to slamming problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2006, 195(1–3), 110–132.
- [5] Oger, G., Doring, M., Alessandrini, B. and Ferrant, P., Two-dimensional SPH simulations of wedge water entries, *Journal of Computational Physics*. 2006, 213(2), 803–822.
- [6] Schellin, T. and el Moctar, O., Numerical prediction of impact-related wave loads on ships, *Journal of offshore mechanics and arctic engineering*. 2007, 129(1), 39–47.
- [7] von Karman, T., The impact of seaplane floats during landing, NACA Technical note no. 321, 1929.
- [8] Wagner, H., Landing of seaplanes, NACA Technical Memorandum no. 622, 1931.
- [9] Chuang, S., Theoretical investigations on slamming of cone-shaped bodies, *Journal of Ship Research*. 1969, 13, 276–283.
- [10] Scolan, Y.-M. and Korobkin, A. A., Three-dimensional theory of water impact. Part 1. Inverse Wagner problem, *Journal of Fluid Mechanics*. 2001, 440, 293–326.
- [11] Korobkin, A. A., Analytical models of water impact, *European Journal of Applied Mathematics*. 2004, 15, 821–838.
- [12] Cointe, R. and Armand, J.-L., Hydrodynamic impact analysis of a cylinder, *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*. 1987, 109, 237–243.
- [13] Zhao, R. and Faltinsen, O. M., Water entry of two-dimensional bodies, *Journal of Fluid Mechanics*. 1993, 246, 593–612.
- [14] Scolan, Y.-M. and Korobkin, A. A., Energy distribution from vertical impact of a three-dimensional solid body onto the flat free surface of an ideal fluid, *Journal of Fluids and Structures*. 2003, 17, 275–286.
- [15] Faltinsen, O. M., Water entry of a wedge with finite deadrise angle, *Journal of Ship Research*. 2002, 46(1), 39–51.
- [16] Mei, X., Liu, Y., and Yue, D. K. P., On the water impact of general two-dimensional sections, *Applied Ocean Research*. 1999, 21, 1–15.
- [17] Malleron, N., Scolan Y.-M., and Korobkin, A. A., Some aspects of a generalized Wagner model, *22<sup>nd</sup> International Workshop on Water Waves and Floating Bodies*. Plitvice, 2007.
- [18] Yettou, E.-M., Desrochers, A., Champoux, Y., A new analytical model for pressure estimation of symmetrical water impact of a rigid wedge at variable velocities, *Journal of Fluids and Structures*. 2007, 23(3), 501–522.
- [19] Engle, A. and Lewis, R., A comparison of hydrodynamic impacts prediction methods with two dimensional drop test data, *Marine Structures*. 2003, 16(2), 175–182.
- [20] Scolan, Y.-M., Hydroelastic behaviour of a conical shell impacting on a quiescent-free surface of an incompressible liquid, *Journal of Sound and Vibration*. 2004, 277(1–2), 163–203.
- [21] Vorus, W. S., A flat cylinder theory for vessel impact and steady planing resistance, *Journal of Ship Research*. 1996, 40(2), 89–106.
- [22] Dobrovol'skaya, Z. N., On some problems of similarity flow of fluid with a free surface, *Journal of Fluid Mechanics*. 1969, 36, 805–829.
- [23] Constantinescu, A., El Malki Alaoui, A., Nême, A., Rigo, P., Numerical and Experimental studies of simple geometries in slamming, *Proceedings of the 19<sup>th</sup> International Offshore and Polar Engineering Conference*. Osaka, 2009.
- [24] Korobkin, A. A., Three-dimensional nonlinear theory of water impact, *Proceedings of the 18<sup>th</sup> International Congress of Mechanical Engineering*. Ouro Preto, 2005.

## Appendix: Determination of the wetted surface for arbitrary sections

In this appendix, a simple method is presented to compute the half-length of the contact surface  $c(t)$  for general sections. This method is valid for both the two-dimensional and axisymmetric cases. As explained in section 2,  $c(t)$  is obtained by solving the Wagner condition, eqn (6), which can be rewritten as:

$$f(c(t)) = \int_0^t U_r(c(t), \tau) d\tau \quad . \quad (\text{A.1})$$

The relative vertical velocity  $U_r$  between a particle on the free surface and the impacting body is of the form (see Eqn. (4)):

$$U_r(x, t) = V \cdot g(x, c(t)). \quad (\text{A.2})$$

Let us introduce function  $\mu$  which defines the ratio between the velocity of the impacting body and the speed of the expansion of the wetted surface:

$$\mu(c) = V \frac{dt}{dc}. \quad (\text{A.3})$$

This function allows to rewrite the Wagner condition, Eqn. (A.1), in the following form:

$$f(c) = \int_0^c \mu(\gamma) g(c, \gamma) d\gamma. \quad (\text{A.4})$$

Let us suppose that the range of values of interest for  $c(t)$  is  $[0, c_{\max}]$ . This interval is divided into several subintervals  $[c_{k-1}, c_k]$  and over each subinterval  $\mu(c)$  is assumed to be linear:

$$\mu(c) = \mu_{k-1} + \frac{c - c_{k-1}}{c_k - c_{k-1}} (\mu_k - \mu_{k-1}). \quad (\text{A.5})$$

where  $\mu_k = \mu(c_k)$ . Thus, the Wagner condition becomes:

$$f(c_i) = \sum_{k=1}^i \left( \int_{c_{k-1}}^{c_k} \mu(\gamma) g(c_i, \gamma) d\gamma \right). \quad (\text{A.6})$$

The integrals that appear in the right-hand side of eqn (A.6) can be calculated analytically. Therefore, the coefficient  $\mu_i$  is obtained from the previous coefficients ( $\mu_j, j = 0$  to  $i-1$ ) and from  $f(c_i)$ .  $\mu_0$  is set to 0 for a flat bottom impacting body, to  $2f(c_1)/(\pi c_1)$  for a two-dimensional body with an apex and to  $\pi f(c_1)/(4c_1)$  for an axisymmetric body with an apex. Once the coefficients  $\mu_k$  have been determined, the depths of penetration  $D_i$  corresponding to each value of  $c_i$  are obtained by integrating eqn (A.3):

$$D_i = D_{i-1} + \int_{c_{i-1}}^{c_i} \mu(\gamma) d\gamma = D_{i-1} + \frac{(\mu_i - \mu_{i-1})(c_i - c_{i-1})}{2} \quad \text{for } i > 0 \text{ and } D_0 = 0. \quad (\text{A.7})$$

Thus, a table of wetted surface length values versus penetration depth is obtained. The length at a given depth is simply interpolated from this table of data.



## Représentation intégrale du potentiel des vitesses de Wagner

 $\varphi^{(w)}$ 

### B.1 Ecriture de l'équation intégrale 3.9 régissant $\varphi^{(w)}$

L'équation 3.9 provient de l'écriture de l'équation intégrale générale 2.24 pour une fonction de Green particulière  $G^D$  s'annulant en  $z = 0$ . Une telle fonction s'obtient en faisant la différence entre la fonction de Green correspondant à une source ponctuelle au point  $\mathbf{p}$  et celle correspondant à une source ponctuelle au point  $\bar{\mathbf{p}}$ , symétrique de  $\mathbf{p}$  par rapport au plan  $z = 0$  (figure B.1) :  $G^D = G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - G(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{q})$

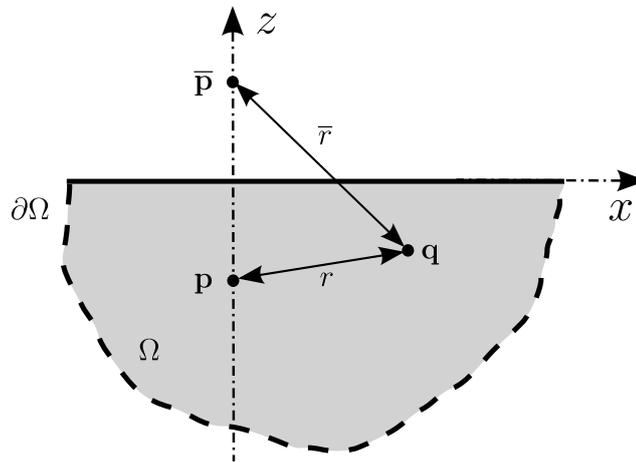


FIGURE B.1 – Définitions des points  $\mathbf{p}$  et  $\bar{\mathbf{p}}$

L'équation intégrale ainsi obtenue est donc :

$$\varphi^{(w)}(\mathbf{p}) = \iint_{\partial\Omega} \left\{ \varphi_{,n}^{(w)}(\mathbf{q}) [G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - G(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{q})] - \varphi^{(w)}(\mathbf{q}) [H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - H(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{q})] \right\} dS_q$$

(B.1)

Lorsque la taille du domaine  $\Omega$  tend vers l'infini, la contribution des régions d'intégration telles que  $z_q < 0$  dans l'intégrale B.1 est nulle du fait de la vitesse de décroissance du potentiel à l'infini. La surface d'intégration  $\partial\Omega$  est donc réduite à la surface  $SM^{(w)} + SL^{(w)}$  pour les mêmes raisons qu'au paragraphe 2.2.2. D'autre part :

$$[G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - G(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{q})]_{z_q=0} = 0 \quad (\text{B.2})$$

D'après la définition de  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  (équation 2.25) :

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - H(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{q}) = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{r_{,n}}{r^2} - \frac{\bar{r}_{,n}}{\bar{r}^2} \right) = -\frac{1}{4\pi} \left[ \frac{q_i - p_i}{r^3} n_i - \frac{q_i - \bar{p}_i}{\bar{r}^3} n_i \right] \quad (\text{B.3})$$

On a  $r|_{z_q=0} = \bar{r}|_{z_q=0}$ . De plus, au niveau de  $SM^{(w)} + SL^{(w)}$ ,  $\mathbf{n} = {}^t(0, 0, 1)$ , donc :

$$\left( \frac{r_{,n}}{r^2} - \frac{\bar{r}_{,n}}{\bar{r}^2} \right) \Big|_{z_q=0} = \left( \frac{q_i - p_i}{r^3} n_i \right) \Big|_{z_q=0} - \left( \frac{q_i - \bar{p}_i}{\bar{r}^3} n_i \right) \Big|_{z_q=0} = \frac{-z_p}{r^3} - \frac{z_p}{\bar{r}^3} \quad (\text{B.4})$$

Or,  $\varphi^{(w)}(\mathbf{q}) = 0 \forall \mathbf{q} \in SL^{(w)}$ , d'où :

$$\varphi^{(w)}(\mathbf{p}) = -\frac{z_p}{2\pi} \iint_{SM^{(w)}} \frac{\varphi^{(w)}(\mathbf{q})}{r^3} dS_q. \quad (\text{B.5})$$

## B.2 Passage à la limite de l'équation 3.10 régissant $\varphi_{,z}^{(w)}$

L'équation intégrale 3.10 ainsi écrite est singulière en  $z_p = 0$ . Afin d'en évaluer la limite en  $z_p = 0^-$ , l'équation 3.10 est reformulée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \varphi_{,z}^{(w)}(x_p, y_p, z_p, t) = & -\frac{1}{2\pi} \iint_{SM^{(w)}} \frac{\varphi^{(w)}(x_q, y_q, 0, t) - \varphi^{(w)}(x_p, y_p, 0, t)}{\left( (x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + z_p^2 \right)^{3/2}} dx_q dy_q \\ & + \frac{1}{2\pi} \varphi^{(w)}(x_p, y_p, 0, t) \times I_2 + I_3, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

avec :

$$I_2 = \iint_{SM^{(w)}} \frac{-\left( (x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + z_p^2 \right) + 3z_p^2}{\left( (x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + z_p^2 \right)^{5/2}} dx_q dy_q \quad (\text{B.7})$$

$$I_3 = \frac{3z_p^2}{2\pi} \iint_{SM^{(w)}} \frac{\varphi^{(w)}(x_q, y_q, 0, t) - \varphi^{(w)}(x_p, y_p, 0, t)}{\left( (x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + z_p^2 \right)^{5/2}} dx_q dy_q \quad (\text{B.8})$$

En effectuant le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} x_q - x_p = r \cos \theta \\ y_q - y_p = r \sin \theta \end{cases}, \quad (\text{B.9})$$

l'intégrale  $I_2$  devient :

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{a(\theta,t)} \left\{ \frac{-1}{(r^2 + z_p^2)^{3/2}} + \frac{3z_p^2}{(r^2 + z_p^2)^{5/2}} \right\} r dr d\theta. \quad (\text{B.10})$$

En intégrant selon la variable  $r$ , on obtient :

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{(r^2 + z_p^2)^{1/2}} - \frac{z_p^2}{(r^2 + z_p^2)^{3/2}} \right]_0^{a(\theta,t)} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{a(\theta,t)^2}{(a(\theta,t)^2 + z_p^2)^{3/2}} d\theta. \quad (\text{B.11})$$

D'où :

$$\lim_{z_p \rightarrow 0^-} I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a(\theta,t)} d\theta. \quad (\text{B.12})$$

Décomposons à présent l'intégrale  $I_3$  en  $I_{3a} + I_{3b}$  de la façon suivante :

$$I_{3a} = \frac{3z_p^2}{2\pi} \iint_{SM^{(w)} - S_\epsilon} \frac{\varphi^{(w)}(x_q, y_q, 0, t) - \varphi^{(w)}(x_p, y_p, 0, t)}{\left( (x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + z_p^2 \right)^{5/2}} dx_q dy_q, \quad (\text{B.13})$$

$$I_{3b} = \frac{3z_p^2}{2\pi} \iint_{S_\epsilon} \frac{\varphi^{(w)}(x_q, y_q, 0, t) - \varphi^{(w)}(x_p, y_p, 0, t)}{\left( (x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + z_p^2 \right)^{5/2}} dx_q dy_q, \quad (\text{B.14})$$

avec  $S_\epsilon \in SM^{(w)}$ , un voisinage de  $(x_p, y_p)$  de rayon  $R_\epsilon$ . Sous l'hypothèse de régularité du potentiel  $\varphi^{(w)}$  sur le domaine  $SM^{(w)} - S_\epsilon$  :

$$\lim_{z_p \rightarrow 0^-} I_{3a} = 0. \quad (\text{B.15})$$

En faisant l'hypothèse que  $\varphi^{(w)}$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $S_\epsilon$ , on peut faire un développement limité de  $[\varphi^{(w)}(x_q, y_q, 0, t) - \varphi^{(w)}(x_p, y_p, 0, t)]$  suivi du changement de variables B.9, ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} I_{3b} &= \frac{3z_p^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_\epsilon} \frac{r \cos \theta \varphi_{,x}^{(w)}(x_p, y_p, 0, t) + r \sin \theta \varphi_{,y}^{(w)}(x_p, y_p, 0, t) + O(r^2)}{(r^2 + z_p^2)^{5/2}} r dr d\theta \\ &= \frac{3z_p^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_\epsilon} \frac{O(r^2)}{(r^2 + z_p^2)^{5/2}} r dr d\theta = 3z_p^2 \int_0^{R_\epsilon} O\left(\frac{r^3}{(r^2 + z_p^2)^{5/2}}\right) dr \\ &= -z_p^2 O\left(\left[\frac{2z_p^2 + 3r^2}{(r^2 + z_p^2)^{3/2}}\right]_0^{R_\epsilon}\right) = -z_p^2 O\left(\frac{2z_p^2 + 3R_\epsilon^2}{(R_\epsilon^2 + z_p^2)^{3/2}} - \frac{1}{z_p}\right) \end{aligned}$$

(B.16)

D'où :

$$\lim_{z_p \rightarrow 0^-} I_{3b} = 0. \quad (\text{B.17})$$



---

## Références

- ABAQUS (2008). Fluid-structure simulation with CEL in ABAQUS/Explicit. *In 2008 Abaqus regional user's meeting.*
- AQUELET, N. (2004). *Modélisation de l'impact hydrodynamique par un couplage fluide-structure.* Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille.
- AQUELET, N., SOULI, M. et OLOVSSON, L. (2006). Euler-Lagrange coupling with damping effects : Application to slamming problems. *Computer Methods in applied mechanics and engineering*, 195(1-3):110–132.
- BALDWIN, L. et STEVES, H. X. (1975). Vertical water entry of spheres. *NSWC/WOL/TR 75-49 White Oax Laboratory Silver Spring MD USA.*
- BATTISTIN, D. et IAFRATI, A. (2003). Hydrodynamic loads during water entry of two-dimensional and axisymmetric bodies. *Journal of Fluids and Structures*, 17:643–664.
- BELYTSCHKO, T., LIU, W. K. et MORAN, B. (2000). *Nonlinear finite elements for continua and structures.* Wiley J.
- BONNET, M. (1995). *Equations intégrales et éléments de frontière. Applications en mécanique des solides et des fluides.* CNRS Éd. - Eyrolles.
- CHEZHIAN, M. (2003). *Three-dimensional analysis of slamming.* Thèse de doctorat, Norwegian University of Science and Technology.
- COLAGROSSI, A., PALLADINO, F., GRECO, M., LUGNI, C. et FALTINSEN, O. M. (2006). Experimental and numerical investigation of 2D sloshing : scenarios near the critical filling depth. *In 21<sup>st</sup> Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Loughborough, UK.

- COLICCHIO, G., LANDRINI, M. et CHAPLIN, J. R. (2005). Level-set computations of free surface rotational flows. *Journal of Fluids Engineering*, 72:1111–1121.
- FALTINSEN, O. M. (2005). *Hydrodynamics of High-Speed Marine Vehicles*. Cambridge University Press.
- FALTINSEN, O. M. et CHEZHIAN, M. (2005). A generalized Wagner method for three-dimensional slamming. *Journal of Ship Research*, 49:279–287.
- GAZZOLA, T. (2007). *Contributions aux problèmes d’impacts non-linéaires : le problème de Wagner couplé*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris.
- GAZZOLA, T., KOROBKIN, A. A., MALENICA, S. et SCOLAN, Y.-M. (2005). Three-dimensional Wagner problem using variational inequalities. In *20<sup>th</sup> International Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Spitsbergen, Norway.
- GONG, K., H.LIU et WANG, B.-L. (2009). Water entry of a wedge based on SPH model with an improved boundary treatment. *Journal of Hydrodynamics*, 21(6): 750–757.
- HOWISON, S. D., OCKENDON, J. R. et OLIVER, J. M. (2004). Oblique slamming, planing and skimming. *Journal of Engineering Mathematics*, 48:321–337.
- HOWISON, S. D., OCKENDON, J. R. et WILSON, S. K. (1991). Incompressible water-entry problems at small deadrise angles. *Journal of Fluid Mechanics*, 222:215–230.
- IDELSOHN, S. R., OÑATE, E. et DEL PIN, F. (2004). The particle finite element method : a powerful tool to solve incompressible flows with free-surfaces and breaking waves. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61:964–989.
- ISSC COMMITTEE I.2 (2006). Environmental and operational loads from waves, wind, current, ice, slamming, sloshing, weight distribution and operational factors. In *16<sup>th</sup> International Ship and Offshore Structures Congress*, Southampton, UK.
- JACQUES, N., CONSTANTINESCU, A., KERAMPRAN, S. et NÊME, A. (2010). Comparaison de différentes approches pour la simulation numérique d’impacts hydrodynamiques. *Revue Européenne de Mécanique Numérique*.
- JUDGE, C., TROESCH, A. et PERLIN, M. (2004). Initial water impact of a wedge at vertical and oblique angles. *Journal of Engineering Mathematics*, 48:279–303.
- KAPSENBERG, G. K., VANT’T VEER, A. P., HACKETT, J. P. et LEVADOU, M. M. D. (2006). Aftbody slamming and whipping loads. In *SNAME 2003 Annual Meeting*, San Francisco, CA, Etats-unis.
- KIM, Y. (2005). Numerical analysis of three-dimensional slamming forces in waves. In *20<sup>th</sup> International Workshop on Water Waves and Floating Bodies 2005*, Spitsbergen, Norway.

- 
- KLEEFSMAN, K. M. T., FEKKEN, G., VELDMAN, A. E. P., IWANOWSKI, B. et BUCHNER, B. (2005). A volume-Of-Fluid based simulation method for wave impact problems. *Journal of Computational Physics*, 206:363–393.
- KOROBKIN, A. A. (1982). Formulation of penetration problem as a variational inequality. *Din Sploshnoi Sredy*, 58:73–79.
- KOROBKIN, A. A. (1988). Inclined entry of a blunt profile into an ideal fluid. *Mekhanika Zhidkosti i Gaza*, 3:145–150.
- KOROBKIN, A. A. (2004). Analytical models of water impact. *European Journal of Applied Mathematics*, 15:821–838.
- KOROBKIN, A. A. (2005). Three-dimensional nonlinear theory of water impact. In *18<sup>th</sup> International Congress of Mechanical Engineering*, Ouro Preto, MG.
- KOROBKIN, A. A. et SCOLAN, Y.-M. (2006). Three-dimensional theory of water impact. Part 2. Linearized Wagner problem. *Journal of Fluid Mechanics*, 549:343–373.
- KÜTTLER, U. et WALL, W. A. (2008). Fixed-point fluid-structure interaction solvers with dynamic relaxation. *Computational Mechanics*, 43:61–72.
- LAVROFF, J., DAVIS, M., HOLLOWAY, D. et THOMAS, G. (2010). Slamming of high-speed catamarans in severe sea conditions investigated by hydroelastic segmented model experiments. In *28<sup>th</sup> Symposium on Naval Hydrodynamics*, Pasadena, California, Etats-unis.
- MALENICA, S. (2007). Hydro structure interactions in seakeeping. In *International Workshop on Coupled Methods in Numerical Dynamics*, Dubrovnik, Croatia.
- MALENICA, S., SIRETA, F. X., BIGOT, F., DERBANNE, Q. et CHEN, X. B. (2010). An efficient hydro structure interface for mixed panel-stick hydrodynamic model. In *25<sup>th</sup> Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Harbin, China.
- MALLERON, N. (2009). *Contribution à l'étude des interactions fluide-structure pour l'analyse de l'impact hydrodynamique d'un système de flottabilité d'hélicoptère*. Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille.
- MARUZEWSKI, P., LE TOUZÉ, D., OGER, G. et AVELLAN, F. (2009). SPH high-performance computing simulations of rigid solids impacting the free-surface of water. *Journal of Hydraulic Research*, 47 Extra Issue:126–134.
- MONAGHAN, J. J. (2005). Smoothed Particle Hydrodynamics. *Reports on Progress in Physics*, 68:1703–1759.
- NISEWANGER, C. R. (1961). Experimental determination of pressure distribution on a sphere during water entry. *VAVWEPS Rep. No. 7808*.

- NÊME, A. et EL MALKI ALAOUI, A. (2009). Essais de tossage normal sur cônes rigides. *In Session ATMA*, Paris.
- OGER, G., DORING, M., ALESSANDRINI, B. et FERRANT, P. (2006). Two-dimensional SPH simulations of wedge water entries. *Journal of Computational Physics*, 213(2):803–822.
- OGER, G., LE TOUZÉ, D., ALESSANDRINI, B. et MARUZEWSKI, P. (2007). A new parallelized 3D SPH model : resolution of water entry problems and scalability study. *In SPHERIC workshop*.
- OLIVER, J. M. (2002). *Water entry and related problems*. Thèse de doctorat, St Anne's College - University of Oxford.
- QIAN, L., CAUSON, D. M., MINGHAM, C. G. et INGRAM, D. M. (2006). A free-surface capturing method for two fluid flows. *Proceedings of the Royal Society A*, 462:21–42.
- RICCARDI, G. et IAFRATI, A. (2004). Water impact of an asymmetric floating wedge. *Journal of Engineering Mathematics*, 49:19–39.
- SCHELLIN, T. E. et EL MOCTAR, O. (2007). Impact-related wave loads on ships. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 129:39–47.
- SCOLAN, Y.-M. et KOROBKIN, A. A. (2001). Three-dimensional theory of water impact. Part 1. Inverse Wagner problem. *Journal of Fluid Mechanics*, 440:293–326.
- SCOLAN, Y.-M. et KOROBKIN, A. A. (2003). Energy distribution from vertical impact of a three-dimensional solid body onto the flat free surface of an ideal fluid. *Journal of Fluids and Structures*, 17:275–286.
- SEDDON, C. M. et MOATAMED, M. (2006). Review of water entry with aerospace applications. *International Journal of Impact Engineering*, 32(7):1045–1067.
- SEMENOV, Y. A. et IAFRATI, A. (2006). On the nonlinear water entry problem of asymmetric wedges. *Journal of Fluid Mechanics*, 547:231–256.
- SEMENOV, Y. A. et YOON, B.-S. (2009). Onset of flow separation for the oblique water impact of a wedge. *Physics of Fluids*, 21.
- SOULI, M. et SIGRIST, J.-F. (2009). *Interaction fluide-structure*. Hermès-Lavoisier.
- TAKAGI, K. (2004). Numerical evaluation of three-dimensional water impact by the displacement potential formulation. *Journal of Engineering Mathematics*, 48:339–352.

- 
- TASSIN, A., JACQUES, N., EL MALKI ALAOU, A., NÊME, A. et LEBLÉ, B. (2010). Assessment and comparison of several analytical models of water impact. *International Journal of Multiphysics*, 4:125–140.
- TOSO, N. R. S. (2009). *Contribution to the modelling and simulation of aircraft structures impacting on water*. Thèse de doctorat, Universät Stuttgart.
- TUITMAN, J. (2010). *Hydro-elastic response of ship structures to slamming induced whipping*. Thèse de doctorat, Delft University of Technology.
- TUITMAN, J. et MALENICA, S. (2008). Some aspects of whipping response of container ships. In *23<sup>rd</sup> Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Jeju, Korea.
- VON KARMAN, T. (1929). The impact of seaplane floats during landing. *NACA Technical Notes 321*.
- WAGNER, H. (1931). Landing of seaplanes. *NACA Technical Notes 622*.
- WANG, J. T. et LYLE, K. H. (2007). Simulating space capsule water landing with explicit finite element method. In *48<sup>th</sup> AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, Honolulu, Hawaiï.
- WRIGGERS, P. (2006). *Computational Contact Mechanics*. Springer Verlag.
- ZALESKI, S. (non daté). Computation of multiphase flow by volume of fluid and higher-order front tracking methods. Notes de cours de l'Université Pierre et Marie Curie Paris 6 disponibles sur : <http://www.lmm.jussieu.fr/~zaleski/index.html>.
- ZANG, J., MORGAN, G., STRINGER, R., P. TAYLOR, ORSZAGHOVA, J., GRICE, J. et TELLO, M. (2010). Steep wave and breaking wave impact on offshore wind turbine foundations - ringing re-visited. In *25<sup>th</sup> Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Harbin, China.
- ZHAO, R. et FALTINSEN, O. M. (1993). Water entry of two-dimensional bodies. *Journal of Fluid Mechanics*, 246:593–612.





## Résumé

L'objectif de ces travaux est de déterminer les chargements hydrodynamiques agissant lors du tossage de structures navales. La connaissance de ces chargements est par exemple importante pour le dimensionnement de bulbes d'étrave en composites abritant un sonar. Nous nous sommes orientés vers le développement d'un modèle d'impact hydrodynamique tridimensionnel basé sur la théorie de Wagner. Cette approche constitue un compromis intéressant entre précision des résultats, facilité de mise en œuvre et temps de calcul. Dans le modèle proposé, le problème de Wagner tridimensionnel est formulé en termes de potentiel des déplacements. Une méthode numérique originale est proposée pour déterminer la ligne de contact de façon approchée. La pression est ensuite calculée en utilisant le modèle de Logvinovich modifié. L'ensemble de l'approche proposée a été appliquée à différentes formes tridimensionnelles. Ces résultats ont été comparés à des résultats d'essais d'impacts hydrodynamiques à vitesse constante réalisés à l'aide d'une machine de choc hydraulique. De plus, des résultats issus de simulations par éléments finis d'impacts hydrodynamiques ont été réalisées. L'ensemble des résultats présentés démontre les capacités prédictives de l'approche proposée ainsi que ses avantages pour une utilisation en bureau d'étude.

## Abstract

The present work deals with the modelling of water impacts in order to determine the hydrodynamic loads occurring during bulbous bow slamming. A three-dimensional model of water impact based on the Wagner theory has been developed. Such an approach is attractive, as it is accurate for blunt bodies and requires low computational resources. A new numerical method is proposed to solve the three-dimensional Wagner problem by using the displacement potential approach and the Boundary Element Method. The hydrodynamic pressure is determined with the modified Logvinovich model. The proposed approach has been used to study several three-dimensional bodies. In addition, experimental tests have been carried out by using a hydraulic shock machine and CFD investigations have been made using a Finite Element software. A very good agreement between the three approaches has been observed. Furthermore, the efficiency of the proposed approach highlights the possibility of using it as a practical tool for preliminary design or optimization.