



HAL
open science

Etude de la dynamique non-linéaire des écoulements chauffés et soumis à des champs magnétiques

Anas El Gallaf

► **To cite this version:**

Anas El Gallaf. Etude de la dynamique non-linéaire des écoulements chauffés et soumis à des champs magnétiques. Sciences de l'ingénieur [physics]. Ecole Centrale de Lyon, 2009. Français. NNT : 2009ECDL0024 . tel-00569060

HAL Id: tel-00569060

<https://theses.hal.science/tel-00569060>

Submitted on 24 Feb 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE CENTRALE DE LYON
- UNIVERSITÉ DE LYON -

Étude de la dynamique non-linéaire des écoulements chauffés et soumis à des champs magnétiques

Anas EL GALLAF
anas.el-gallaf@ec-lyon.fr

12 juillet 2010

Numéro d'ordre : 200924

ANNÉE 2009

THÈSE

présentée devant
L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir
le titre de DOCTEUR
SPÉCIALITÉ MÉCANIQUE DES FLUIDES

par

Anas EL GALLAF

Étude de la dynamique non-linéaire des
écoulements chauffés et soumis à des champs
magnétiques

Soutenue le 27 novembre 2009 devant la Commission d'Examen

JURY

Président: M. B. ROUX
Examineurs: M. H. BENHADID
M. J-P. GARANDET (Rapporteur)
M. D. HENRY
M. L. MARTIN WITKOWSKI
M. A. MOJTABI (Rapporteur)
M. R. TOUIHRI

Remerciements

Ces années de thèse ont été effectuées au Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique. A ce titre, je tiens tout d'abord à remercier Monsieur Michel Lance, directeur du laboratoire, pour m'avoir accueilli au sein de son laboratoire ainsi que Messieurs Daniel Juvé et Jean-Louis Guyader, directeurs du département MFAE et de l'école doctorale MEGA dans lesquels cette étude a été menée.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Monsieur Daniel Henry, directeur de recherche au CNRS, pour avoir assuré la direction scientifique de cette thèse. Ses conseils avisés ainsi que son ouverture d'esprit ont largement contribué à l'aboutissement de ce travail. J'ai pu par ailleurs apprécier au cours de notre collaboration ses qualités humaines et ses encouragements constants ont été d'un grand soutien. Je le remercie par ailleurs pour la confiance qu'il m'a accordée, sa disponibilité ainsi que l'amitié qu'il m'a témoignée tout au long de ce travail.

Je remercie chaleureusement Monsieur Hamda Ben Hadid, professeur à l'université de Lyon, avec qui j'ai pu partager des longues journées à mettre en place des codes de simulations numériques pour ce travail. Son expérience a toujours été la source de conseils éclairés qui m'ont permis d'avancer dans mes recherches.

Mes remerciements vont également à Monsieur Ridha Touihri, maître de conférences à Tunis, pour la collaboration fructueuse que nous avons eue ensemble au cours de ce travail. Nos discussions au sujet des instabilités ont été à la base de développements prometteurs. En outre, cette collaboration s'est déroulée dans une ambiance amicale que j'ai particulièrement appréciée.

Je remercie Monsieur Bernard Roux, directeur de recherche au CNRS, pour avoir assuré la présidence du jury de cette thèse. Je remercie vivement Monsieur Jean-Paul Garandet, directeur de recherche au CEA ainsi que Monsieur Abdelkader Mojtabi, professeur à l'université de Toulouse, pour avoir accepté d'être rapporteurs et pour avoir porté une attention rigoureuse et critique à ce mémoire. Mes souvenirs à Monsieur Mojtabi remontent à bien longtemps, et sa passion ainsi que son engagement envers les sciences physiques m'ont toujours poussé à approfondir les concepts physiques de la nature qui nous entoure.

Table des matières

1	Introduction et motivations	7
2	Éléments bibliographiques	13
2.1	Cadre général de l'étude	13
2.2	Apparition et évolution de l'instabilité de Rayleigh-Bénard	13
2.3	Instabilité de Rayleigh-Bénard-Marangoni	15
2.4	Mécanismes de déstabilisation des fluides en rotation	16
2.5	Écoulements chauffés soumis à un champ magnétique tournant	17
2.6	Écoulements chauffés soumis à un champ magnétique constant	18
2.7	Vers une stabilisation des bains fondus	20
3	Équations de conservation	25
3.1	Présentation générale	25
3.2	Dynamique des fluides conducteurs	26
3.2.1	Mise sous forme adimensionnelle	26
3.2.2	Conditions aux limites de type rigide-rigide	27
3.2.3	Conditions aux limites de type rigide-libre	27
3.3	Cadre de la théorie MHD	29
3.4	Description d'un fluide conducteur	29
3.4.1	Loi d'Ohm généralisée	29
3.4.2	Équations de Maxwell	30
3.4.3	Équation d'induction et force de Laplace	30
3.5	Application à la métallurgie	31
3.5.1	Principes de base	31
3.5.2	Équations en brassage circulaire	32
3.5.3	Application d'un champ magnétique constant	37
4	Méthodes numériques d'intégration	39
4.1	Préambule	39
4.2	Classe des équations aux dérivées partielles	39
4.3	Discrétisation du problème : méthodes spectrales	40
4.3.1	Formulation faible et polynômes d'interpolation	41
4.3.2	Définition des éléments isoparamétriques	42
4.4	Les méthodes d'intégration temporelle	43
4.4.1	Formulation vitesse-pression instationnaire	43
4.4.2	Méthode de projection	43
4.5	Modes normaux, dynamique linéaire et stabilité	44
4.6	Caractérisation et extraction des modes propres dominants	45
4.6.1	Les méthodes de projection	46
4.6.2	Processus d'Arnoldi adapté au problème	46
4.7	Application à la recherche directe des seuils de bifurcation	47
4.8	Variation de l'amplitude de l'instabilité avec la distance au seuil	47

4.9	La technique de continuation	49
4.9.1	Prédiction	49
4.9.2	Correction	50
4.9.3	Implémentation de la méthode	51
4.10	Application et validation des méthodes numériques	52
4.10.1	La force de Laplace	52
4.10.2	Convection thermique	53
4.10.3	Le système magnétohydrodynamique	53
4.11	Couplages multiphysique et thermomécanique	54
5	Dynamique de la convection en présence d'une surface libre	57
5.1	Préambule	57
5.2	Stabilité linéaire de l'écoulement diffusif	58
5.2.1	Influence du confinement sur les seuils primaires	59
5.2.2	Influence des effets liés à la surface libre	59
5.3	Convection non linéaire	62
5.3.1	Diagrammes de bifurcation	63
5.3.2	Suivi des seuils secondaires	69
5.4	Comparaison des résultats avec le cas rigide-rigide	72
6	Dynamique de la convection en présence d'un champ magnétique	81
6.1	Préambule	81
6.2	Convection en présence d'un champ magnétique constant	81
6.2.1	Evolution des seuils et des structures primaires	81
6.2.2	Dynamique des écoulements stationnaires soumis à un champ magnétique constant pour un fluide avec $Pr = 1$	84
6.2.3	Dynamique des écoulements stationnaires soumis à un champ magnétique constant pour un liquide métallique	91
6.3	Convection en présence d'un champ magnétique tournant	95
6.3.1	Dynamique axisymétrique de la convection sous champ magnétique tournant	95
6.3.2	Dynamique tridimensionnelle de la convection sous champ magnétique tournant	101
7	Conclusion	103
	Bibliographie	105
	Index	112
	Résumé/Abstract	114

1. Introduction et motivations

Dans notre compréhension actuelle, l'apparition et l'évolution des structures dans les systèmes macroscopiques proviennent souvent d'effets morphologiques inattendus et fort diversifiés. Les états qui caractérisent ces effets ne peuvent pas être représentés comme une superposition d'états élémentaires (qui traduiraient ainsi une proportionnalité avec leurs causes) ; il faut prendre en compte des interactions non-linéaires qui ouvrent la porte à une multiplicité de régimes qualitativement différents. Ces états peuvent coexister ou entrer en compétition et transiter spontanément ou aux temps longs, ce qui conduit à un ordre, sinon désordre global apparent. C'est ainsi que la structure du flocon de neige ou celle de l'abdomen de la mouche drosophile sont des conséquences insoupçonnées d'une dynamique non-linéaire sous-jacente. Le développement d'outils mathématiques et le développement intense des méthodes de calculs numériques, couplés à une augmentation continue, pour ne pas dire exponentielle, de la puissance des ordinateurs, fait que diverses disciplines allant des sciences naturelles, physiques, chimiques ou biologiques à la sociologie ou encore à l'économie, connaissent un essor considérable en terme de prédictibilité. Le comportement fluide est sans doute l'un des piliers moteurs ayant poussé cette discipline à se développer, en particulier la situation où une couche horizontale de liquide chauffée par le bas présente une stratification de densité potentiellement instable dans un champ de gravité vertical.

Les mécanismes d'instabilité qui se développent dans les milieux continus conduisent à des structures dissipatives. Dans les équations de l'hydrodynamique par exemple, les possibilités de transports macroscopiques sont assurés par le produit scalaire du champ de vitesse et du gradient local de la quantité transportée sous la forme d'un terme quadratique. À l'équilibre, ce terme quadratique peut être négligé et les équations d'évolution deviennent linéaires ; la solution possède alors les mêmes propriétés de symétrie spatio-temporelles que les contraintes appliquées. Au delà de cet état d'équilibre, les non-linéarités poussent le système à bifurquer vers des états stables nouveaux, caractérisés par des brisures de symétrie du système initial : la réponse à un système originellement uniforme soumis à une contrainte stationnaire peut être périodique en temps et/ou en espace. Ces nouveaux états sont appelés structures dissipatives pour souligner le rôle paradoxal de la dissipation qui, bien que devant amortir les fluctuations, peut contribuer de façon constructive à la formation de structures macroscopiques organisées au delà d'une certaine contrainte critique appliquée. Ces états, observables dans la nature, se superposent aux états appartenant à la branche thermodynamique (possédant les mêmes propriétés de symétrie que l'état initial) obtenus par extrapolation progressive de la solution d'équilibre et qui peuvent ne pas être stables, c'est-à-dire impuissants face à de quelconques perturbations (aussi petites soient-elles) venant alors imposer les structures nouvelles de l'écoulement.

Dans les milieux fluides considérés comme conducteurs du courant électrique, un champ magnétique peut se déplacer à travers le fluide suivant une loi de diffusion magnétique, où la constante de diffusion est la résistivité du fluide. D'autre part, les forces électromagnétiques (dites forces de Laplace) appliquées à la matière le long des lignes de courant, modifient le mouvement du fluide initial. Ainsi apparaît une interaction des effets électromagnétiques et hydrodynamiques, dont l'importance est caractérisée par le nombre de Reynolds magnétique. Ce dernier est proportionnel à la conductivité électrique du fluide, à sa vitesse et aux dimensions de l'écoulement. Dans les systèmes physiques assez grands et bons conducteurs, où il semblerait *a priori* que la résistivité puisse être ignorée, cette dernière peut tout de même être importante et provoquer beaucoup d'instabilités, notamment dans les plasmas. Cette résistivité augmentée est habituellement le résultat de la formation de structures à petite échelle, telles les courants électriques

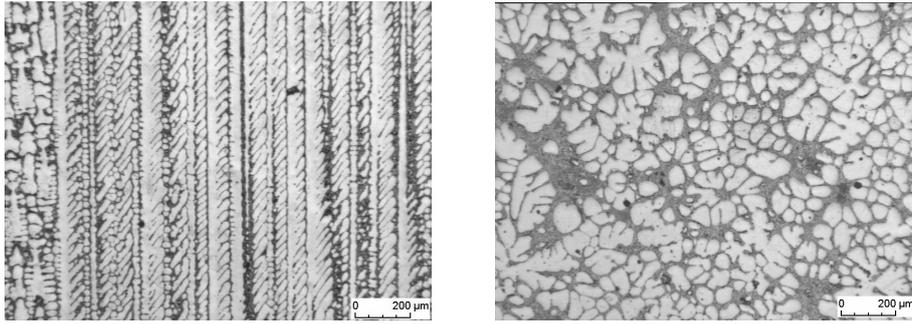


FIG. 1.1 – Mouvements de convection contrôlés par un champ magnétique permettant une influence sur la structure et les propriétés mécaniques des pièces de fonderie. Sans champ magnétique - avec un champ magnétique tournant ($B = 10 \text{ mT}$, $f = 50 \text{ Hz}$). Photos tirées de [24].

en strates ou des turbulences électroniques et magnétiques localisées (*e.g.* l'instabilité électrothermique dans les plasmas à fort paramètre de Hall). Les applications aux gaz ionisés et aux plasmas sont utilisées de manière théorique en confinement (stabilisation, expulsion ou compression), en particulier les plasmas chauds thermonucléaires présents dans les machines à fusion par confinement magnétique (comme les tokamaks) ou les dispositifs à striction magnétique (comme la Z-machine). La magnétohydrodynamique est aussi directement au cœur d'applications technologiques sous forme de machines électromagnétiques sans pièce mobile, appelées des convertisseurs MHD, qui agissent sur le fluide au moyen de la force de Laplace et qui peuvent être utilisées soit pour la génération d'électricité (générateur MHD), l'accélération de fluides (accélérateur MHD) ou encore leur freinage. Dans le cas particulier d'un plasma créé dans de l'air atmosphérique pour des applications aéronautiques, on parlera alors de magnétoaérodynamique (MAD).

Des développements industriels importants concernent les métaux liquides, notamment le pompage électromagnétique du sodium utilisé dans les réacteurs nucléaires ou le brassage du gallium dans certains traitements métallurgiques. L'industrie des matériaux nécessite en effet un contrôle rigoureux des mouvements se déclenchant dans la phase de solidification lors des procédés de croissance cristalline. La croissance des cristaux se fait par dépôt ordonné sur un germe des constituants du cristal contenus dans une phase à partir de l'état fondu en solution ou en vapeur et provoque ainsi un transport de chaleur et de masse. Expérimentalement, il s'avère que des striations de composants dans le cristal, en d'autres termes des impuretés locales, affectent la perfection de la structure souhaitée. Ces défauts trouvent leurs origines dans les comportements thermiques et massiques au sein du bain fondu. L'expérience montre en effet que les fluctuations de température associées aux variations temporelles du champ de vitesse sont à l'origine de la non-uniformité de concentration du dopant dans le cristal solidifié [62] ; il devient alors primordial de détecter l'ensemble des scénarios convectifs susceptibles d'émerger afin de proposer des moyens pour les retarder ou les accélérer. Une méthode de stabilisation avérée est l'utilisation d'un champ magnétique, les cristaux étant conducteurs de l'électricité dans leur phase liquide (figure 1.1). L'application d'un champ magnétique tournant sur le bain fondu présente par exemple, par rapport à tout procédé de centrifugation mécanique traditionnel, l'avantage considérable d'exercer des forces motrices au sein même du métal liquide, minimisant de fait tout effort qui pourrait être exercé par un corps solide sur le fluide. De plus, les températures de travail de la plupart des métaux rendent souvent mal aisée l'utilisation de moyens de rotation mécaniques pour des raisons d'usure ou de contraintes thermiques. Différentes équipes de recherche se sont développées ces dernières années, ayant pour cible la compréhension et la réalisation de ce procédé prometteur : l'Institut de Physique de l'Académie des Sciences de Lettonie, le centre de recherche de Dresden-Rossendorf (ForschungsZentrum Dresden) qui s'occupent principalement des études théoriques et expérimentales de l'application du champ magnétique tournant, le groupe Convection et Instabilités du Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur qui tend à modéliser numériquement et au moyen d'outils asymptotiques sophistiqués le comportement théorique du fluide conducteur.

L'étude scientifique de la convection thermique commence avec les expériences de Bénard et l'analyse théorique de Rayleigh au début du 20ème siècle. Ce sujet de mécanique des fluides connaît un intérêt considérable, car le mécanisme d'instabilité qui s'y développe est particulièrement intuitif et le protocole expérimental s'opère de façon suffisamment propre pour permettre une comparaison détaillée entre les résultats théoriques et les expériences. A la limite où les contraintes thermiques deviennent assez importantes, on observe une amorce des mouvements organisés dans l'espace sous forme cellulaire. La procédure théorique de la détection des seuils primaires d'instabilité consiste à effectuer une étude de stabilité linéaire et à évaluer le comportement des perturbations au cours du temps et/ou de l'espace. Au cours des dernières décades, les travaux expérimentaux développés ont été marqués par la reconnaissance du rôle des effets de confinement qui permettent de contrôler les structures convectives. Lorsque le confinement latéral devient petit (en supposant que ce confinement est défini comme le rapport entre l'extension latérale et l'épaisseur de la couche fluide), la structure spatiale des modes est gelée et il ne peut se former qu'un nombre déterminé de rouleaux [75]. De plus, les seuils d'instabilité de ces modes sont très séparés les uns des autres de sorte que l'on peut facilement contrôler le nombre de modes excités. Dans le cas contraire de confinement étendu, le champ convectif n'est ordonné qu'à l'échelle locale ; les cellules de convection subissent une dégénérescence de position.

Problématique

Le contrôle des mouvements convectifs est un enjeu majeur dans la prédiction des écoulements soumis à des contraintes extérieures. Ce domaine, encore en cours de recherche, relève aussi bien d'un intérêt fondamental de part sa dynamique complexe et des moyens mathématiques sophistiqués requis, que d'un intérêt pratique permettant aux industriels un bon dimensionnement de leurs installations. L'étude des mouvements thermiques peut aujourd'hui être considérée comme bien comprise et l'on retrouve les applications liées aux différents mouvements dans les systèmes de refroidissement, les dépôts chimiques en phase vapeur, les brûleurs de montgolfières qui réchauffent l'air par dessous et font ainsi monter la nacelle, etc. Les phénomènes de couplages magnétohydrodynamiques ont connu un intérêt considérable depuis les années 1960, surtout du point de vue théorique. A cette époque, le dispositif expérimental n'était pas encore opérationnel et il n'existait pas de véritables moyens pour confirmer les prédictions théoriques.

Aujourd'hui, plusieurs centres de recherche disposent d'un dispositif permettant d'appliquer un champ magnétique (*e.g.* le projet PROMISE de Dresden, figure 1.2) et les premières prédictions théoriques semblent parfaitement concorder avec les résultats expérimentaux [6, 47, 112]. En soumettant le bain fondu (souvent de géométrie cylindrique) à un champ magnétique tournant, un mouvement de rotation du fluide peut se superposer aux mouvements de convection thermique et les résultats expérimentaux montrent clairement une diminution des fluctuations de température pour un champ magnétique de quelques milliteslas seulement [112]. Qualitativement, la force électromagnétique azimutale appliquée va générer un mouvement global de rotation qui, par analogie avec certaines situations géophysiques de grande échelle, donnera à l'écoulement une tendance à la bidimensionnalisation et étouffera certains mouvements de recirculation. Cependant, le chemin suivi par le courant électrique dépend de plusieurs facteurs et la connaissance des circuits de courant induit est difficile à déterminer *a priori*. La bonne conductivité électrique des métaux liquides permet aussi d'appliquer un champ magnétique constant, c'est-à-dire indépendant du temps, capable de freiner toute circulation de fluide en lien notamment avec des gradients thermiques. Les pertes énergétiques liées à ces mouvements convectifs peuvent ainsi être minimisées. Il est donc important d'apporter une explication détaillée du mode d'action du champ magnétique sur les systèmes fluides chauffés en cavité cylindrique afin d'en assurer les meilleures performances.

Dans l'optique d'établir une étude détaillée des transitions d'écoulements et particulièrement les transitions oscillatoires des écoulements magnétohydrodynamiques chauffés, ce travail entre dans la thématique générale des Phénomènes Convectifs Couplés du Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique. L'interprétation physique des structures convectives sera systématiquement comparée aux modèles théoriques présents dans la littérature et la caractérisation des solutions sera établie soit par simulation

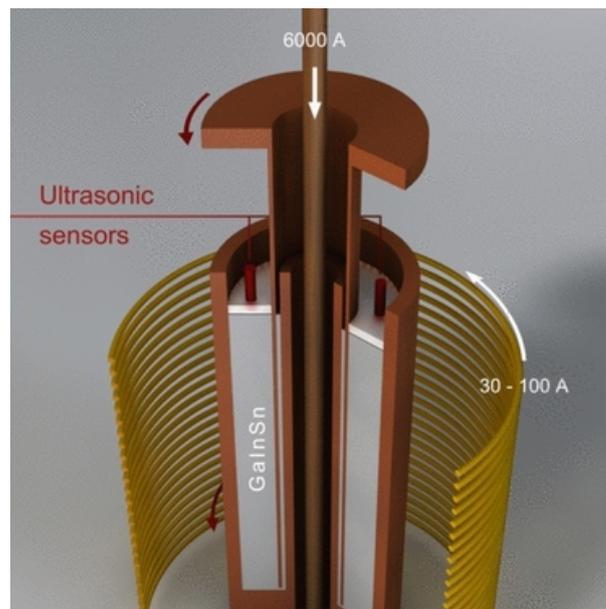


FIG. 1.2 – Schéma du montage expérimental PROMISE du centre de Dresden pour l'étude de la stabilisation des bains fondus. Photo appartenant au centre de recherche FZD de Dresden.

numérique directe soit par des méthodes de continuation.

Plan du mémoire

La première partie de ce travail est consacrée à la revue bibliographique du problème à résoudre. Après avoir replacé le sujet dans son contexte le plus actuel, nous exposons les équations continues sur lesquelles repose notre discrétisation numérique. L'outil numérique que nous allons ensuite définir utilise la méthode des éléments spectraux isoparamétriques pour la discrétisation spatiale des équations du problème. La méthode de continuation qui nous permettra de détecter et de raccorder l'ensemble des branches de solutions reflétant les différents scénarios convectifs présents dans notre système utilise la matrice Jacobienne sans toutefois que celle-ci soit calculée explicitement, ceci permettant de minimiser les ressources en mémoire pour nos calculs. Le produit matrice-vecteur de la Jacobienne (connu à un préconditionnement près) correspondra à une itération en temps du système linéarisé : la résolution des systèmes linéaires va donc faire appel à des méthodes itératives du type gradient conjugué.

La première étude que nous allons présenter considère une couche fluide chauffée par le bas, confinée dans une géométrie cylindrique verticale. La surface supérieure de la cavité est libre et à cette surface, nous tenons compte du transfert thermique à travers une condition aux limites faisant intervenir un nombre de Biot, ainsi que de l'équilibre des forces de tension superficielle qui fait intervenir un nombre de Marangoni. Dans cette instabilité de Rayleigh-Bénard-Marangoni, les structures convectives correspondent à des modes de Fourier, et le nombre de Rayleigh critique dépend du rapport de forme de la cavité, et des nombres de Biot et de Marangoni qui caractérisent cette surface libre. Lorsque la convection se déclenche sous la forme d'un mode axisymétrique $m = 0$, l'évolution non-linéaire montre la coexistence de différentes structures convectives, des structures axisymétriques avec écoulement montant ou descendant au centre de la cavité et des structures correspondant à des combinaisons de modes qui apparaissent sur des branches secondaires sous-critiques.

Dans la deuxième étude, nous allons nous intéresser à l'influence d'un champ magnétique sur les instabilités mises en évidence dans le cas thermique pur. Deux configurations seront envisagées, l'une considérant un champ magnétique constant horizontal et l'autre un champ magnétique tournant. Les

résultats de l'analyse linéaire sont tout d'abord présentés sous forme de diagrammes de stabilité, montrant la stabilisation des seuils primaires en fonction de l'intensité du champ magnétique imposé. Nous montrons ensuite que l'action du champ magnétique constant et horizontal sur la dynamique non-linéaire de la convection favorise la présence d'imperfections au niveau des seuils de bifurcation secondaires, en particulier au niveau des bifurcation fourches sous-critiques qui donnaient naissance à des nouvelles combinaisons de modes. Enfin, la dynamique non-linéaire du mode axisymétrique obtenue en configuration rigide-rigide (de type Rayleigh-Bénard) est étudiée pour différentes intensités de champ magnétique tournant.

2. Éléments bibliographiques

2.1 Cadre général de l'étude

L'objectif de ce chapitre est de recenser quelques travaux piliers de l'instabilité thermo-gravitationnelle provoquée par l'application d'un gradient vertical de température sur une couche confinée de fluide comportant une surface supérieure libre, communément appelée instabilité de Rayleigh-Bénard-Marangoni. Dans cette situation, le fluide est initialement au repos et progressivement chauffé par le bas jusqu'à ce que les propriétés diffusives de freinage ne puissent plus absorber la remontée par poussée d'Archimède des particules chaudes, engendrant ainsi une recirculation globale de fluide.

La présence d'une surface libre confère au fluide une contrainte d'équilibre modifiée par rapport au cas purement rigide, tant sur le plan thermique que dynamique, la friction visqueuse étant plus importante dans la situation où les conditions aux limites sont de type non-glisement. Outre la poussée d'Archimède, le gradient de température va générer un gradient de tension de surface qui entraînera également un mouvement de fluide. De façon générale, les effets liés à la surface supérieure libre prédominent sur les effets liés à la gravité pour les cavités aplaties [29]. Nous commençons par exposer les principaux travaux expérimentaux et théoriques sur le sujet, ce qui nous permettra de dégager les principaux paramètres du problème ainsi que les hypothèses de modélisation. Avant cela, nous reprenons plus en détail le cas où les deux parois haut et bas de notre cylindre d'étude sont rigides (instabilité de Rayleigh-Bénard), ce qui nous permettra de comparer plus en détail les deux configurations et de bien cerner l'influence de la surface libre sur l'instabilité primaire. Sauf mention du contraire, l'ensemble des résultats et postulats concernent l'unique configuration où les parois latérales sont thermiquement adiabatiques et les parois haut/bas (ou bas) parfaitement conductrices.

Enfin, les différentes approches concernant la modélisation des écoulements de fluides conducteurs soumis à des champs magnétiques tournant puis constant seront abordées. L'ensemble des résultats présentés considèrent que le champ tournant est uniforme en z (c'est-à-dire invariant selon la hauteur du cylindre) et à vitesse angulaire ω constante ; le champ magnétique constant est uniforme dans la direction dans laquelle il est appliqué. Mentionnons aussi que le fluide conducteur soumis à ces différents champs magnétiques est Newtonien et à masse volumique constante au cours du temps. Lorsque des fluctuations de température apparaissent, elles évoluent de sorte que la masse volumique du fluide peut être considérée à tout instant comme constante, excepté dans le terme de poussée gravitationnelle, où elle varie linéairement autour d'une température de référence.

2.2 Apparition et évolution de l'instabilité de Rayleigh-Bénard

La convection de Rayleigh-Bénard qui concerne l'étude des mouvements qui apparaissent dans une couche fluide confinée par deux plaques planes dont celle du dessous est maintenue à une température supérieure à celle du dessus a fait l'objet d'un nombre considérable de travaux depuis le début du 20ème siècle. L'instabilité primaire, qui se traduit par l'apparition spontanée de cellules de convection organisées (aux formes plus ou moins complexes selon les conditions expérimentales) au delà d'un certain écart de température, peut aujourd'hui être considérée comme bien comprise, aussi bien en termes de seuil d'instabilité (analyse linéaire) qu'en termes de structure d'écoulement (analyse faiblement non-linéaire). La

Rapport d'aspect R/H	mode critique
[0 : 0.8]	$m = 1$
[0.8 : 1.6]	$m = 0$
[1.6 : 2.2]	$m = 1$
[2.2 : 2.6]	$m = 0$
[2.6 : 3]	$m = 1$

TAB. 2.1 – Mode critique en fonction du rapport d'aspect R/H défini comme le rayon de la cellule sur la hauteur. Résultats tirés de Charlson *et al.* [23] et Hardin *et al.* [57].

naissance de la convection thermique à partir d'un état de base peut être élucidée quantitativement au travers d'outils mathématiques plus ou moins sophistiqués (méthode de perturbation singulière, problème aux valeurs propres généralisées) et son évolution par rapport à un paramètre de forçage par méthode de continuation [59]. Lorsque les amplitudes du champ de perturbation sont suffisamment petites, les effets non-linéaires générées par ces perturbations peuvent être négligés et une étude de stabilité linéaire permet de déterminer précisément le comportement de ces perturbations qui peuvent souvent être décomposées comme une superposition linéaire de modes spatiaux de Fourier. Les études théoriques en géométrie confinée montrent que les bifurcations sont désignées par identification aux développements azimutaux de Fourier et des brisures de symétries qu'elles engendrent [25, 1, 91]. Pour la configuration cylindrique, l'ensemble des symétries du problème appartient au groupe $\mathcal{O}(2) \times \mathcal{Z}_2$, où le groupe $\mathcal{O}(2)$ englobe l'ensemble des rotations par rapport à l'axe du cylindre et des réflexions par rapport à tout plan vertical contenant cet axe du cylindre, et le groupe \mathcal{Z}_2 la réflexion par rapport au plan horizontal central.

Depuis les travaux de Charlson et Sani [22], nous comprenons mieux l'influence primordiale du rapport d'aspect de la géométrie d'étude sur la valeur des seuils primaires. L'étude axisymétrique montre en effet que la présence d'un confinement latéral impose une valeur du seuil thermique supérieure à celle en couche infinie. Ceci est principalement dû au fait que le confinement du système impose l'ordre de grandeur du nombre d'onde critique de l'instabilité. Les auteurs ont également mené une étude plus générale du problème en considérant des perturbations tridimensionnelles sous forme de modes azimutaux [23] et montré que la structure-même de l'instabilité primaire dépendait du confinement. Lorsque le nombre d'onde critique est du même ordre de grandeur que la taille de la cellule, la structure spatiale des modes est contrainte (il ne peut se former qu'un nombre limité de rouleaux) et les seuils d'instabilité de ces modes sont suffisamment séparés les uns des autres, de sorte que l'on peut facilement contrôler le nombre de modes excités [76]. Dans le cas contraire de géométries à confinement étendu (les cavités aplaties), le champ convectif n'est ordonné qu'à l'échelle locale et les cellules de convection subissent une dégénérescence de position. Les interactions entre modes sont de fait nombreuses [4]. L'émergence d'un mode critique axisymétrique dépend du rapport de forme. Charlson et Sani, mais aussi Buell et Catton [17], Hardin *et al.* [57], Touihri *et al.* [107] confirment ce postulat à travers des méthodes d'analyse linéaire de stabilité théoriques et numériques. Le tableau 2.1 recense les modes critiques observés au seuil en fonction des gammes de rapport d'aspect. La connaissance précise des phénomènes se produisant à la transition de deux types de modes en fonction de la taille de la cavité ne peut pas directement être élucidée par les outils de l'analyse linéaire de stabilité. En ce point double [34, 102] où cette transition a lieu, deux vecteurs propres deviennent instables pour la même valeur critique [106], avec deux structures différentes. La difficulté à lever cette méconnaissance est toujours d'actualité.

Dans le régime convectif, au-delà du seuil primaire, on remarque qu'un phénomène déterministe au niveau microscopique se traduit par une manifestation non déterministe au niveau macroscopique. Ainsi, on peut parfaitement prédire l'apparition des cellules de convection, mais absolument pas prévoir leur sens de rotation. La plus infime perturbation dans les conditions initiales d'expérimentation produira un effet observable et mesurable. En conséquence, la différence de température à laquelle la convection apparaît est un point de bifurcation, et l'évolution du système peut être analysée à l'aide d'un diagramme de bifurcation. La différence de température critique correspondant au point de bifurcation dépend de la

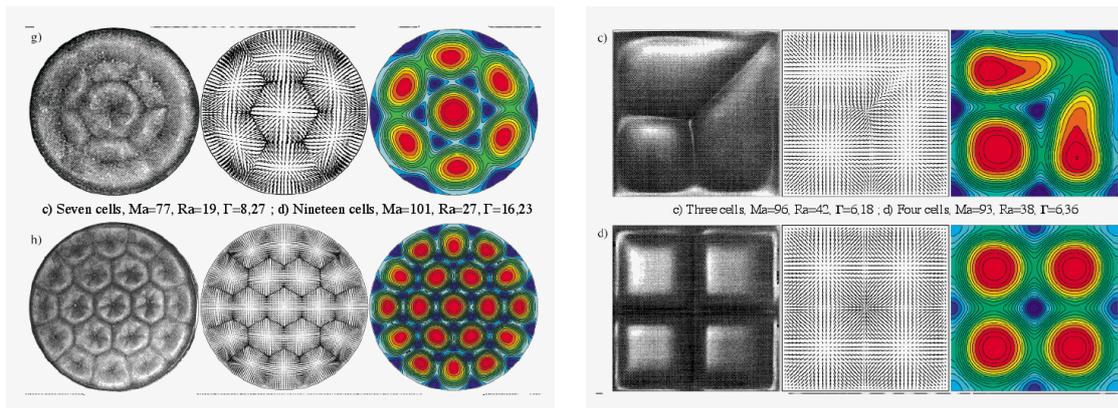


FIG. 2.1 – Écoulements de Rayleigh-Bénard-Marangoni en récipient circulaire et rectangulaire de faible extension latérale : comparaison entre expériences et simulation numérique. Vues de dessus de la structure de l'écoulement cellulaire (expérience), du champ de vitesse à l'interface et du champ de température (simulations). Figures tirées de [84].

viscosité du fluide, de sa conductivité thermique et des dimensions physiques de l'expérience. La variation de l'une des composantes locales de vitesse en un point donné en fonction du nombre de Rayleigh (ou de son équivalent, au nombre de Prandtl près, le nombre de Grashof) montre que toutes les transitions sont de type fourche super-critique [107, 86]. Le seuil Ra_c primaire associé (ou nombre de Rayleigh critique) ne varie pas en fonction du nombre de Prandtl Pr . Dans le domaine non-linéaire, le rôle du nombre de Prandtl se fait cependant fortement ressentir et l'origine des instabilités montre que lorsque ce nombre tend vers une valeur unité (en partant des métaux liquides $Pr \approx 0.02$), les effets thermiques s'accroissent au dépend des effets dynamiques.

2.3 Instabilité de Rayleigh-Bénard-Marangoni

Depuis les travaux de Nield [92] parus en 1964, le seuil théorique en couche infinie à ne pas dépasser pour observer l'écoulement thermiquement stratifié est connu pour les effets couplés de la thermogravitation et de l'effet Marangoni. Parmi les travaux expérimentaux de la convection de Rayleigh-Bénard-Marangoni, nous retrouvons les expériences de Koschmieder et Prah [70] qui ont considéré l'instabilité dans des petites cavités rectangulaires et dans des cavités circulaires pour y étudier les effets du confinement et des conditions aux limites sur les seuils et les structures convectives primaires. Johnson et Narayanan [63] ont réalisé des expérimentations sur deux types de géométries cylindriques et ont montré la possibilité d'obtenir un écoulement oscillatoire. Les résultats des expériences de Cerisier [19] (figure 2.1) qui ont été retrouvés numériquement par Medale [84] ont montré que quelque soit la forme du récipient contenant le fluide, il naît toujours des cellules de convection sous forme hexagonale ; le nombre et l'agencement de ces cellules dépend fortement de la forme du récipient. Les travaux du trio Davis, Homsy et Rosenblat [104, 103], mais encore de Dauby *et al.* [30] ou Johnson *et al.* [63] se sont proposés de mener une étude théorique complète du sujet en considérant des parois latérales à vorticité nulle (vorticity-free). Dijkstra dans une série de publications a fait une étude bidimensionnelle [33] puis tridimensionnelle [35, 36, 37] de l'unique instabilité de Marangoni dans des cavités rectangulaires et trouva de bons accords avec les valeurs expérimentales pour les plus petites cavités. Les travaux de Dauby *et al.* [30, 29] dans les géométries rectangulaires ont souligné les résultats théoriques pour une certaine gamme de cavités, tant dans le domaine linéaire que faiblement non-linéaire. Bergeon *et al.* [12] ont montré l'importance des imperfections liées à la forme des cavités dont il faut tenir compte lors des modélisations numériques. En effet, une imperfection géométrique (de l'ordre du 10ème) sur le rapport de forme d'une géométrie quasi-carrée engendre des écoulements qui s'avèrent être différents des cavités parfaitement carrées. Ces petites imperfections agissent d'autant plus fortement sur la dynamique non-linéaire du système lorsque

l'on s'éloigne du seuil primaire. Par ailleurs, une autre étude dynamique des écoulements sujets à l'instabilité de Bénard-Marangoni menée par Bergeon *et al.* [11] montre que les effets non-linéaires au delà de la bifurcation primaire entraînent une multitude de solutions distinctes, mêlant bifurcations fourches et bifurcations trans-critiques. Dans cette dernière étude, les auteurs ont comparé les résultats de l'instabilité du fluide mono-constituant à ceux d'un mélange binaire lorsque l'effet Soret est pris en compte.

Dans les cavités à sections circulaires, Vrentas *et al.* [113] ont réalisé une approche linéaire axisymétrique en considérant les deux cas extrêmes, où seul un effet déstabilisant est pris en compte ($Ma \equiv 0$ ou $Ra \equiv 0$). Ils ont comparé leurs résultats avec ceux de Charlson et Sani [22] pour l'instabilité gravitationnelle. Une approche non-linéaire basée sur une interpolation de points de bifurcations proposée par Wagner [114] permet d'être en harmonie avec les travaux axisymétriques de Nield [92] pour les géométries d'extension latérale infinie. Zaman et Narayanan [117] ont également étudié le problème linéarisé de Rayleigh-Bénard-Marangoni pour confirmer les résultats jusqu'alors réalisés. Ils se sont notamment intéressés aux cavités à grand rapport de forme. Ils ont observé que selon la taille des cellules, les résultats de l'instabilité de Marangoni (en absence de gravité) différaient plus ou moins des simulations expérimentales jusqu'alors menées. L'approche de Dauby *et al.* [29] est basée sur une méthode numérique utilisant une décomposition spectrale de l'espace. De plus, contrairement au cas où l'un des deux paramètres est maintenu constant pour ainsi déterminer la valeur critique du second, la recherche du taux d'amplification nul a été effectuée sur les deux paramètres de contrôle dont les variations sont couplées, car fonctions tous les deux de la différence de température motrice.

Assemat *et al.* [5] montrent au travers de diagrammes de bifurcation que les écoulements de Marangoni en micro-gravité sont sujets à une bifurcation primaire axisymétrique doivent être étudiés dans les deux cas de figures, respectivement lorsque le fluide remonte au centre de la cavité et redescend, car les courbes d'évolution des états stationnaires ne se superposent pas d'une part, et d'autre part les bifurcations secondaires sont engendrées par des perturbations différentes, ce qui donne des structures d'écoulement différentes. Parmi les études sur les sources d'instabilités liées au gradient vertical de température, nous retrouvons également les travaux de Rahal *et al.* [100] et Cerisier *et al.* [20] qui prennent en compte la déformation de la surface libre. Contrairement aux études jusqu'alors présentées, l'écoulement induit peut dans cette approche déformer la surface libre à travers un gradient de pression induit. Les seuils primaires ne sont plus indépendants de la nature du fluide (représenté par le nombre de Prandtl), ce qui a pour effet d'augmenter l'ordre de la codimension du système. D'après les résultats de leur étude, la dynamique à faible nombre de Biot transite rapidement vers un écoulement oscillatoire tandis qu'à plus fort nombre de Biot, elle se voit réduite. Le mécanisme dominant de l'instabilité est celui provoqué par le couplage de la gravité et de la déformation de la surface libre [110].

2.4 Mécanismes de déstabilisation des fluides en rotation

L'utilisation d'un champ magnétique tournant est un moyen permettant d'engendrer ou de contrôler des écoulements de métaux liquides. Considérons à cet effet un volume fluide élémentaire en rotation uniforme autour d'un axe cylindrique. Contrairement aux écoulements visqueux de type Couette où la mise en mouvement est engendrée par une rotation des parois latérales solides, l'application d'un champ magnétique tournant au fluide conducteur conduit à une rotation des particules fluides dans l'ensemble de la géométrie d'étude (en effet, l'information ne se propage plus par diffusion visqueuse mais agit directement sur chacune des particules). La présence des parois latérales rigides impose la nullité du champ de vitesse sur ces frontières; un écoulement particulier de couche limite doit alors être associé au profil cinématique. L'écoulement est donc astreint à une instabilité de type Görtler dans la couche limite se développant le long de la paroi concave courbe pour les forts taux de rotation. Richardson [101] est le premier à avoir établi en 1974 l'existence d'un paramètre seuil au delà duquel une structure en paires de rouleaux contra-rotatifs (appelés rouleaux de Taylor) apparaît le long des parois rigides lorsque la géométrie est supposée d'extension verticale infinie. Ce cas académique résultant d'une analyse de stabilité temporelle linéaire (où les perturbations recherchées sont axisymétriques et stationnaires) révèle

que l'écoulement azimuthal représenté par la vitesse :

$$u_{\varphi}(r) = (D/\nu) (Tm/8) \left(1 - 4 (r/D)^2\right) (r/D)$$

devient instable au delà de la valeur seuil :

$$Tm_c = 0.933 \times 10^5$$

avec

$$\lambda_c = 0.48 D,$$

où λ_c est la longueur d'onde critique, D le diamètre de la cellule, ν la viscosité cinématique du fluide, u_{φ} la vitesse azimuthale et Tm_c le nombre de Taylor magnétique critique. La taille des paires de rouleaux est de l'ordre du rayon du cylindre. Au delà de cette instabilité, l'auteur a montré qu'une bifurcation secondaire s'opère avec les caractéristiques suivantes :

$$Tm_c = 4.757 \times 10^5$$

et

$$\lambda_c = 0.22 D,$$

donc sous la forme de tores concentriques deux fois plus petits que les précédents.

Lorsque la géométrie est de hauteur finie, elle est confinée par les deux plateaux supplémentaires sur lesquels des conditions d'adhérence vont s'exercer. Aux tous premiers instants de la mise en rotation, les lignes de courant sont des cercles concentriques (il n'y a pas d'autres structures particulières visibles dans l'écoulement) ; toutefois, on observe rapidement que cet écoulement primaire s'enrichit d'un écoulement secondaire sous la forme de deux rouleaux toroïdaux contra-rotatifs dans le plan méridien de la cavité. En effet, en raison de la rotation du fluide et de la force centrifuge qu'elle crée, une dépression apparaît sur l'axe du cylindre. Mais cette dépression va être plus faible près des faces supérieure et inférieure en raison de la plus faible rotation causée par l'adhérence sur ces faces. Il en résulte un écoulement le long de l'axe du cylindre qui va des faces supérieure et inférieure vers le centre du cylindre, cet écoulement retournant le long des parois latérales. Cet écoulement est connu sous le nom de pompage d'Ekman (Ekman pumping) et se manifeste dès lors qu'un fluide est mis en rotation dans une géométrie fermée. La présence des parois haut/bas aura aussi pour conséquence l'apparition d'une instabilité de couche limite dans les deux couches limites horizontales, parfois appelées couches de Bödewadt en référence aux travaux pionniers (1940) de cet auteur sur le sujet [15].

2.5 Écoulements chauffés soumis à un champ magnétique tournant

Comme nous l'avons vu, les écoulements anisothermes sont sujets à une instabilité thermique lorsque les mécanismes stabilisants (conductivité thermique, viscosité cinématique) ne parviennent pas à atténuer les perturbations de température. Un écoulement stationnaire peut se développer spontanément lorsque le gradient de température est horizontal ou au delà d'un certain seuil pour les configurations chauffées par le bas (instabilité de Rayleigh-Bénard). Dans cette dernière configuration, le critère d'instabilité est contrôlé par le nombre de Rayleigh. Le transfert de chaleur au sein du fluide est modifié au passage de cette valeur critique : inférieur à cette valeur critique, le transfert s'opère essentiellement par conduction, tandis qu'au-delà, la convection prend de l'importance dans le transfert.

Parmi les publications traitant du couplage entre les phénomènes de flottaison et de champ magnétique tournant en géométrie cylindrique, nous retrouvons les travaux de Friedrich *et al.* [42]. Cet auteur a cherché à présenter l'influence du champ tournant sur l'instabilité de Rayleigh-Bénard. Pour cela, il a fait appel à deux paramètres de contrôle, qui sont le nombre de Taylor magnétique et le nombre de Rayleigh en considérant une cavité diamètre/hauteur unité. Il est bien connu qu'en absence de champ magnétique,

le premier mode instable pour une telle cellule est un mode asymétrique à un rouleau [107, 105]. En augmentant progressivement le nombre de Taylor magnétique (à nombre de Rayleigh fixé), le brassage électromagnétique modifie l'agencement de la structure thermique et retarde l'apparition des fluctuations de température critiques : le seuil de convection est augmenté. Il existe une gamme de valeurs des deux paramètres où les perturbations d'origine thermique sont fortement atténuées, voire éradiquées. Ces résultats ont été retrouvés expérimentalement par Volz et Mazuruk [112] : à travers un dispositif conçu pour enregistrer les phénomènes instationnaires, ils ont mis en place un diagramme (figure 2.3) reliant la différence de température appliquée à l'intensité de champ magnétique tournant. Ce diagramme fait ressortir la présence de cinq états d'écoulement possibles. En partant d'un écoulement sans champ magnétique, ils montrent que le premier mode thermique est emporté par l'écoulement azimutal lorsqu'on augmente l'intensité du champ tournant (zone Ω_1). Si la différence de température est ensuite augmentée (en conservant constante l'induction magnétique alors imposée), les forces de flottaison prennent le dessus sur la force de Laplace et le mode aura tendance à s'immobiliser à nouveau. Volz et Mazuruk insistent sur le fait qu'une fois les forces de flottaison dominantes, le mode se stabilise sur une orientation donnée et que l'on retombe dans le scénario classique de l'instabilité de Rayleigh-Bénard.

L'application d'un gradient de température horizontal peut être obtenu en imposant un profil parabolique de température sur les parois latérales du cylindre et en maintenant adiabatiques les deux disques le délimitant [90]. Pour un nombre de Rayleigh modéré (*e.g.* $Ra = 10^4$), on observe dans les métaux liquides un mouvement de particules ascendant le long de la paroi périphérique chaude et descendant le long de l'axe de symétrie, formant ainsi un rouleau toroïdal de convection. En augmentant le nombre de Rayleigh, un deuxième rouleau, de taille nettement inférieure au premier, se forme près des coins de la géométrie (figure 2.2). Par augmentation graduelle du nombre de Taylor magnétique, Mößner constate que la force de Laplace n'agit sur l'écoulement thermique que lorsque le rapport entre la force électromagnétique et la force de flottaison est proche de un pour cent. Dans ce cas là, les deux mouvements convectifs en compétition se superposent et un scénario particulier de convection mixte se déclenche, traduisant un renforcement des mouvements de convection au-dessus de la demi-hauteur de la cellule et une quasi annulation du champ de vitesse en dessous. Enfin, pour les valeurs plus petites du rapport Ra/Tm , l'écoulement devient clairement dominé par le champ magnétique ; les structures qui émergent sont celles que l'on rencontre en absence de champ thermique, avec toutefois une légère accélération des particules fluides près des bords supérieurs.

Dans ce système, une multitude de transitions d'écoulements peut s'opérer, traduisant les compétitions entre les forces volumiques auxquelles le système est soumis (force de flottaison et force azimutale de Laplace) face aux possibilités de freinage (par viscosité cinématique et diffusivité thermique). Comme nous l'avons vu, les trois mécanismes de déstabilisation sont l'instabilité de Rayleigh-Bénard due au gradient de température, l'instabilité centrifuge de Taylor-Görtler proche des parois latérales ainsi que l'instabilité de Bödewadt qui opère sur les couches limites le long des deux plaques horizontales du cylindre. Pour une description détaillée des mouvements susceptibles d'émerger, ces trois phénomènes doivent être quantifiés simultanément. Notons également que les instabilités d'origine visqueuse (qui naissent dans les couches limites) s'opèrent à des valeurs du paramètre de Taylor magnétique Tm bien plus grandes que celles où les phénomènes thermiques peuvent interagir [115], ce qui permet un découplage (donc une certaine simplification) du problème en fonction de la valeur de Tm .

2.6 Écoulements chauffés soumis à un champ magnétique constant

Nous avons vu que la superposition d'un champ magnétique tournant sur un écoulement chauffé permet d'agir sur la structure thermique et de retarder en particulier les premiers mouvements de convection, lorsque le système est soumis à l'instabilité de Rayleigh-Bénard. Les mouvements liés au champ magnétique tournant s'imposent rapidement, pour des toutes petites valeurs d'inductions magnétiques [55]. Un autre moyen efficace de retarder la convection est d'appliquer un champ magnétique constant, dirigé le long d'une direction privilégiée. Contrairement au champ tournant, le champ magnétique con-

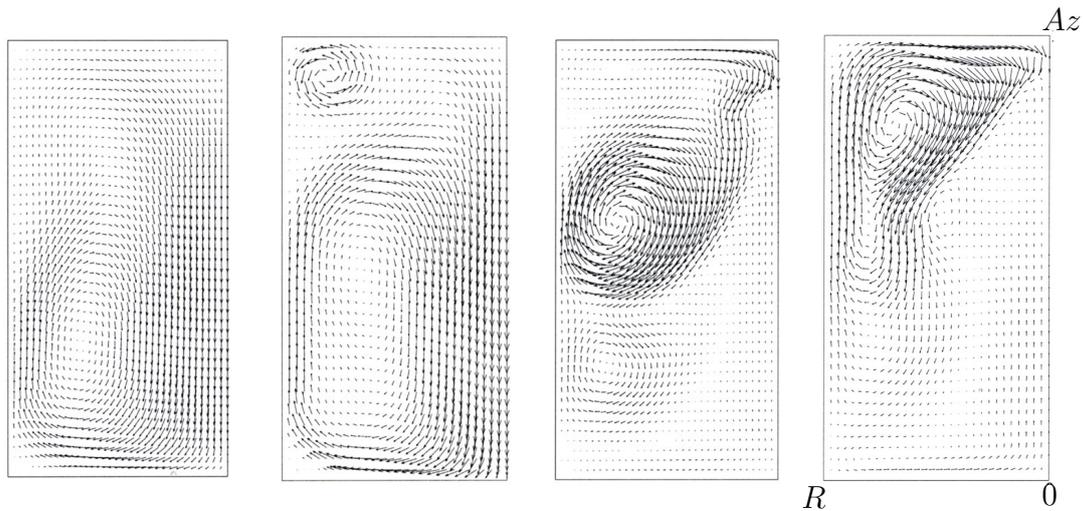


FIG. 2.2 – Champs de base pour différentes valeurs des paramètres de contrôle : les deux premiers cas correspondent à un nombre de Rayleigh de l'ordre de $Ra = 10^4$ et $Ra = 10^5$ respectivement ($Tm = 0$), le troisième cas correspond à un cas où $Ra = Tm = 10^4$ et le dernier à $Ra = 10^4$, $Tm = 2 \times 10^4$, d'après [90].

stant permet un fort freinage de tout mouvement au sein du système. Cependant, une quantité plus importante d'induction magnétique est nécessaire pour retarder de manière significative le déclenchement de l'instabilité de Rayleigh-Bénard [107, 61]. Des études sur l'action simultanée de ces deux champs magnétiques [90, 55] ont révélé qu'une très bonne maîtrise des mouvements convectifs était possible, meilleure que lorsque ces deux champs agissaient séparément sur le système. Les mouvements secondaires associés au champ magnétique tournant arrivent en effet à être retardés par l'application du champ magnétique constant. Cela permet donc d'augmenter considérablement le taux de rotation du champ magnétique (peu gourmand en ressources énergétiques) tout en gardant un contrôle sur les phénomènes d'instabilités. D'après Grants et Gerbeth [55], un champ magnétique en cusp (figure 2.4) superposé au champ magnétique tournant supprime même davantage les recirculations méridiennes associées au champ magnétique tournant.

L'application d'un champ magnétique constant sur un système fluide chauffé va favoriser la génération de fines couches proche des parois [89]. Ces couches limites deviennent d'autant plus importantes que la valeur du nombre de Hartmann, défini comme le rapport de la force magnétique de Laplace sur les forces visqueuses, est grande. Lorsque ces couches limites sont perpendiculaires à la direction du champ magnétique, on parle de couches de Hartmann et pour des couches parallèles au champ magnétique, de couches parallèles. Différentes études asymptotiques [21, 2, 89, 43] ont permis d'établir des relations entre épaisseur de couche limite, profil de vitesse et nombre de Hartmann. En fonction de la valeur imposée de ce dernier nombre et de la direction du champ magnétique, des structures fondamentalement différentes s'organisent autour des écoulements convectifs. Dans la limite des nombres de Hartmann élevés, le gradient de vitesse dans le coeur de l'écoulement est constant sauf dans les deux couches de Hartmann au voisinage des parois normales au champ magnétique. Dans le cadre d'une étude sur une configuration de croissance cristalline de type Bridgman horizontal, où le gradient thermique est horizontal, Garandet *et al.* [43] montrent que cette solution de coeur est applicable partout à l'exception d'une couche limite d'étendue $Ha^{-1/2}$ à proximité du mur froid. Ben Hadid et Henry [7] montrent que les écoulements soumis au même gradient horizontal de température subissent en fonction de la direction imposée du champ magnétique une organisation cellulaire et des profils de vitesse spécifiques, en lien avec le courant électrique induit. La nature des parois délimitant le système magnétohydrodynamique est par ailleurs cruciale, les courants induits pouvant les pénétrer dans certaines conditions ou former des boucles tout autour. A titre d'exemple, Bessaih *et al.* [14] observa que des parois électriquement conductrices amortissaient les écoulements de convection et que la force de Laplace subit une distribution non-uniforme le

long des parois.

Les travaux de Juel *et al.* [64] se sont focalisés sur les effets tridimensionnels dont il faut tenir compte lors de la modélisation numérique des bains fondus confinés dans des cavités rectangulaires à moyen rapport d'aspect. Dans son procédé expérimental, Juel recherche les différents états stationnaires des écoulements soumis à un gradient horizontal de température et trouve des résultats en bon accord avec ceux de l'analyse numérique 3D pour une large gamme de nombres de Grashof. En superposant à cet écoulement de convection différentes directions de champs magnétiques constants, les auteurs [60] montrent ensuite que le champ magnétique supprime les oscillations liées à la bifurcation de Hopf de manière plus efficace lorsqu'il est appliqué perpendiculairement au gradient thermique que parallèlement. Le nombre de Grashof critique lié à la bifurcation de Hopf varie exponentiellement avec le nombre de Hartmann. L'analyse du terme d'énergie de cisaillement responsable de l'instabilité montre que sa décroissance lorsque Ha est augmenté est due à la diminution du cisaillement de l'écoulement de base, mais aussi, et de façon prépondérante, à la décroissance des fluctuations de vitesse normalisées par la dissipation. Cette décroissance est due à l'évolution des fluctuations de vitesse qui deviennent faibles dans le coeur du système où elles sont actives pour la déstabilisation alors qu'elles restent plus fortes avec de forts gradients dans les couches limites où s'effectue la dissipation.

2.7 Vers une stabilisation des bains fondus

La croissance des cristaux engendre des mouvements thermo-solutaux pouvant dégrader la qualité des matériaux. Les striations dues aux fluctuations de température et/ou de masse peuvent être contrôlées et, par suite, diminuées par l'application d'un champ magnétique. Pour un champ magnétique tournant, lorsque la vitesse de rotation est suffisamment élevée (typiquement 10^5 fois plus que la vitesse caractéristique de diffusion massique), l'action de la force de Laplace sur le fluide est entièrement caractérisée par l'induction magnétique et la vitesse de rotation du champ magnétique. Une augmentation quadratique de la vitesse de rotation entraîne un même brassage qu'une augmentation linéaire de l'induction magnétique, ce qui permet à l'industrie métallurgique d'adapter au mieux la consommation énergétique du dispositif. Cette consommation, en pratique toujours inférieure à la consommation nécessaire en champ statique¹, peut également être ajustée en fonction du rayon de la géométrie.

En superposant graduellement aux mouvements instationnaires de convection thermo-solutaux un champ magnétique tournant, l'écoulement est d'abord caractérisé par des fluctuations de température de basse fréquence et de hautes amplitudes² (0.01Hz, 3°C). L'amplitude de ces fluctuations est par la suite fortement diminuée (0.2°C), tandis que la fréquence est augmentée (0.1Hz). Dold et Benz [40] stipulent que les effets thermogravitationnels et magnétiques doivent évoluer conjointement selon $Gr \sim \sqrt{Tm}$ afin d'observer des régimes phénoménologiquement identiques (figure 2.5). Il est souvent fréquent d'imposer un champ thermique stabilisant (méthode de Bridgman verticale) au bain fondu et d'utiliser le champ magnétique tournant afin de réduire les phénomènes de couches limites diffusives, intensifier le transport massique vers le front cristallin, contrôler la forme de l'interface solide-liquide lors du tirage dirigé, etc. L'apparition des rouleaux de Taylor que nous avons vu précédemment (paragraphe 2.4) provoque des fluctuations de température atteignant des amplitudes jusqu'à 0.3°C.

Afin d'élargir la plage du nombre de Taylor magnétique donnant ainsi de meilleures stabilisations, Walker et Martin Witkowski se sont interrogés sur l'effet simultané que pouvait avoir une rotation générée par des parois rigides mobiles et l'application d'un champ magnétique tournant autour du même axe [115]. Ils ont ainsi considéré une rotation du cylindre dans le sens du champ magnétique tournant ainsi qu'en sens inverse. Les résultats de leur travail ont souligné le caractère déstabilisant de la rotation contra-rotative du cylindre ainsi que l'augmentation de la valeur critique du nombre de Taylor lorsque le cylindre est mis en rotation dans le même sens que le champ magnétique tournant. Pour des conditions aux limites prenant en compte l'inhomogénéité radiale causée par la différence des conductivités thermiques des

¹En effet, pour qu'un mouvement significatif apparaisse, l'induction magnétique en champ statique requiert un minimum de $100mT$, alors qu'en champ tournant elle n'excède pas $10mT$ [40].

²L'ensemble des amplitudes présentés sont des amplitudes crête-à-crête

phases solide et liquide, Marty *et al.* [82] ont montré que l'écoulement thermoconvectif d'un métal liquide présent notamment dans les installations de croissance cristalline peut faire l'objet d'une instabilité de type couche de mélange. Cette dernière est responsable de l'apparition de fluctuations de vitesse et de température au-delà d'une valeur critique du nombre de Grashof.

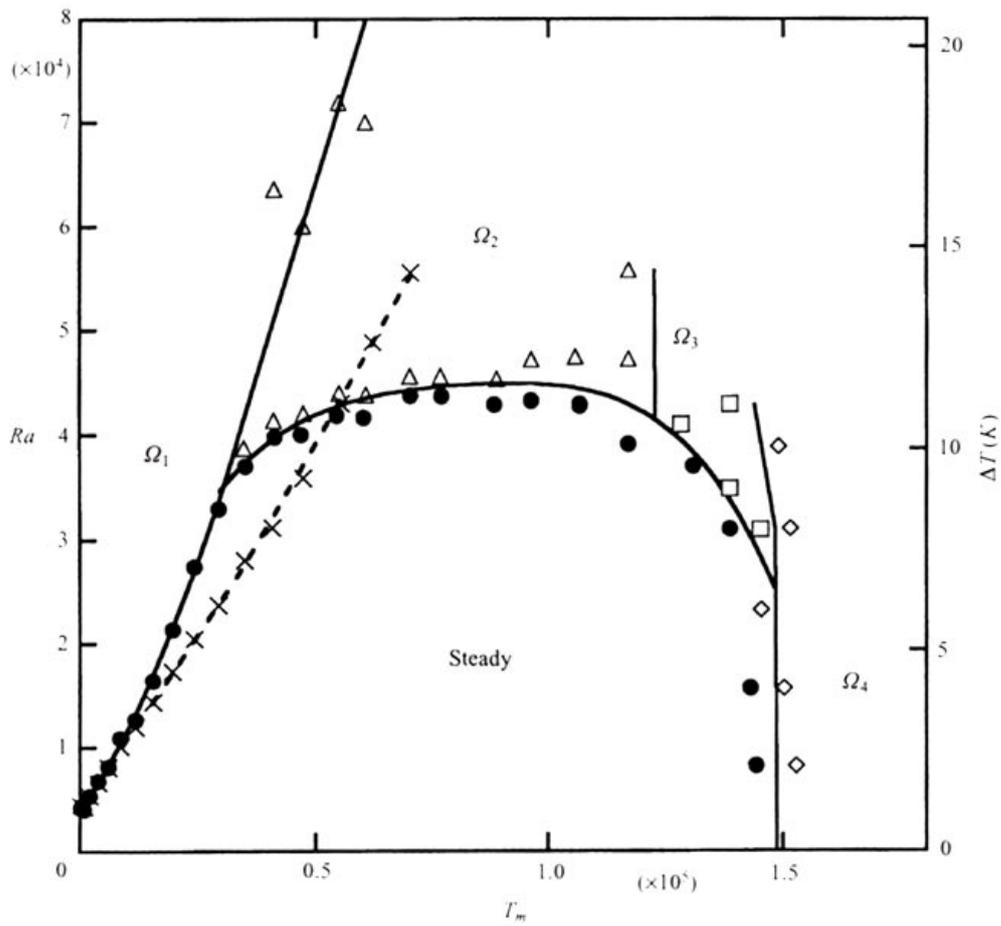


FIG. 2.3 – Écoulements observés expérimentalement par Volz et Mazuruk [112] représentés dans un diagramme reliant le nombre de Rayleigh Ra au nombre de Taylor magnétique T_m pour du gallium liquide.

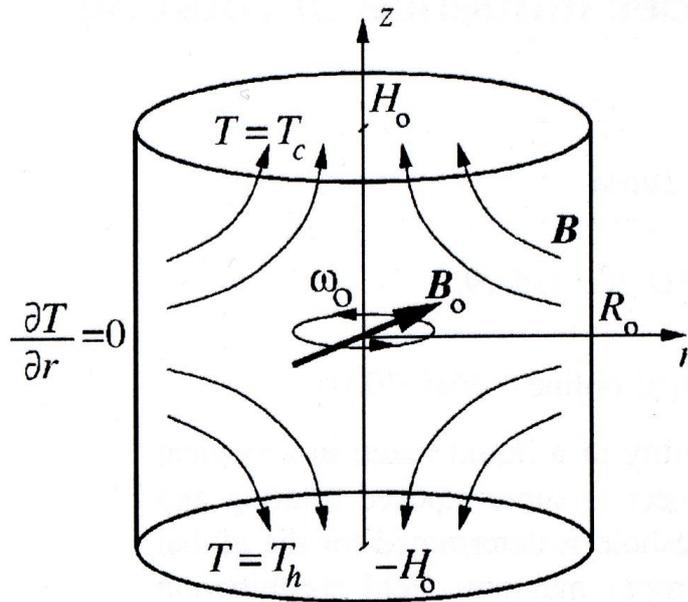


FIG. 2.4 – Schéma du système magnétohydrodynamique sous l'influence d'un champ magnétique tournant B_0 et d'un champ constant en cusp B . Tiré de [55].

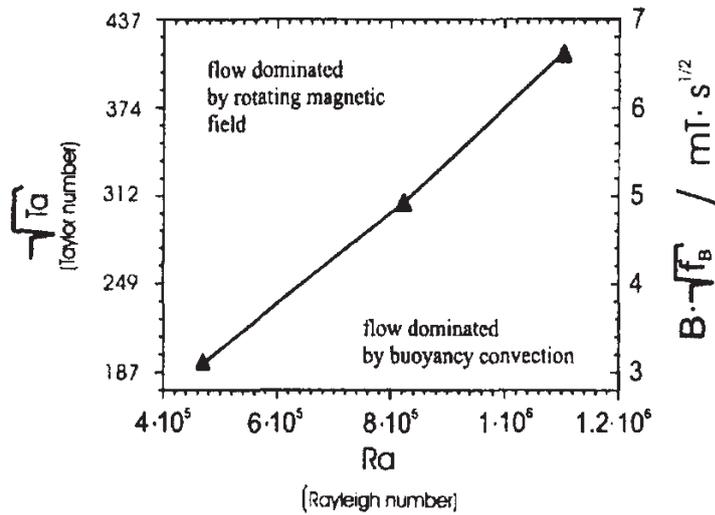


FIG. 2.5 – Proportionnalité entre la racine carrée du nombre de Taylor magnétique et le nombre de Rayleigh. La courbe représente les seuils de changement de régimes, soit dominés par les effets de flottaison (cadre bas), soit par les effets de champ magnétique (cadre du dessus). Courbe tirée de [40].

3. Équations de conservation

3.1 Présentation générale

L'objectif de notre travail est d'étudier dans un premier temps la nature et le régime des différents mouvements de convection présents dans un écoulement chauffé par le bas de façon à bien comprendre l'origine des différentes structures observables. Nous considérons à cet effet l'écoulement d'un fluide confiné dans une géométrie cylindrique de rapport de forme A , défini comme le rapport entre le rayon et la hauteur de la cavité : $A = R/H$. Les températures aux extrémités de cette cavité seront maintenues constantes lorsque l'on s'intéressera à la configuration rigide-rigide (figure 3.1) et constante à la paroi du bas avec une loi d'équilibre thermique en haut de la géométrie lorsque la configuration comprendra une surface supérieure libre (figure 3.2). Des effets de sollicitations extérieures, comme un champ magnétique (statique ou tournant) seront ensuite abordés, de façon à mieux comprendre leur action sur le liquide conducteur et à estimer leur aptitude à contrôler les écoulements mis en évidence en leur absence. C'est à cet effet que l'ensemble des équations (avec ou sans champ) que nous allons présenter découlent du formalisme général de la magnétohydrodynamique, le formalisme fluide pouvant être vu comme un cas particulier du dernier.

La magnétohydrodynamique (MHD dans la suite du manuscrit) parfois appelée aussi hydromagnétique, est une branche de la physique permettant d'étudier les propriétés aussi bien des conducteurs liquides que des plasmas (avec toutefois des approximations différentes) lorsqu'ils sont soumis à un champ magnétique. A ses débuts, cette théorie décrivait les propriétés dynamiques des métaux liquides comme le mercure ou les alliages sodium-potassium en présence de champ magnétique. La MHD a subi d'importants développements, initiés en particulier au cours des années 1930-1950 par Hannes Alfvén, à travers l'étude de problèmes astrophysiques ; on assiste surtout à l'avènement de cette théorie à partir des années 1950 lorsque la MHD a bénéficié de l'intérêt de la communauté des physiciens pour la production d'énergie électrique par fusion nucléaire contrôlée dans les tokamaks. Dans ces machines, le confinement du plasma, dont la matière baryonique doit fusionner, ne peut se faire par contact solide à cause de la température extrêmement élevée de la matière. L'action d'un champ magnétique fort, imposant le mouvement des particules conductrices, est une des voies envisagées.

En parallèle, depuis les années 1950, différents projets spatiaux puis des programmes d'observations ont établi l'omniprésence de la matière ionisée et du champ magnétique dans l'Univers, confirmant ainsi l'intuition d'Hannes Alfvén. La MHD a donc également trouvé dans l'astrophysique un champ très riche d'applications ; celles-ci s'étendent sur un spectre large couvrant, entre autres, la physique spatiale et l'étude des environnements planétaires, la physique de la couronne solaire, la formation stellaire, les études portant sur le milieu interstellaire, etc.

Un milieu conducteur fluide sujet à un champ magnétique et à des courants induits voit, sur des échelles de temps et d'espace appropriées, sa dynamique considérablement modifiée par rapport à un fluide non conducteur. Cependant, les équations sur lesquelles est fondée la théorie MHD sont les équations de l'hydrodynamique auxquelles il faut toutefois ajouter les équations d'évolution du champ électromagnétique. Mais la caractéristique majeure de la MHD a trait à l'importance du couplage entre le fluide et le champ. Ce couplage peut s'exercer dans un sens donné ou être réciproque. Les systèmes MHD sont donc des

milieux complexes, extrêmement non linéaires, et dont la physique doit être traitée de façon élaborée.

3.2 Dynamique des fluides conducteurs

Les phénomènes relevant de la MHD sont décrits par un système d'équations constitué de la réunion des équations de Maxwell et des équations de l'hydrodynamique avec un couplage plus au moins fort à travers la loi d'Ohm et la force de Laplace. Pour la dynamique du système, on écrit classiquement les équations de Navier-Stokes auxquelles on ajoute la force \mathbf{f} comme simple force volumique supplémentaire. Les approximations usuelles en hydrodynamique anisotherme sont pour la plupart respectées, notamment l'approximation d'Oberbeck-Boussinesq pour les petites fluctuations de température. Nous supposons ainsi que l'excitation des charges électriques ne perturbe pas l'équilibre thermodynamique local.

Dans un milieu continu en équilibre local, les flux en un point donné de l'espace et à un instant donné sont déterminés par les valeurs des affinités en ce point et à cet instant ; les variables en termes desquelles sont habituellement exprimés les résultats expérimentaux ne sont pas celles intervenant dans les équations théoriques générales (formulées en termes d'affinités et de flux¹), on utilise en pratique des coefficients de transport semi-empiriques (tel la conductivité thermique de Fourier ou la conductivité électrique d'Ohm) qui traduisent, en régime stationnaire, une variation linéaire des flux avec des forces exprimées comme des gradients de quantités telles que la température, la concentration, etc. Contrairement à des mélanges où des gradients thermiques peuvent engendrer des flux solutaux (effet Soret), nous supposerons qu'il n'y a pas d'effets croisés de ce genre. Les perturbations thermiques sont provoquées par un écart croissant de température ΔT , vertical et ascendant ; en se basant sur les fondements de la mécanique des milieux continus hors d'équilibre, les équations hydrodynamiques autour de la température T_f s'écrivent dans le champ de gravité \mathbf{g} :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = k \nabla^2 T \quad (3.1a)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \beta (T - T_f) \mathbf{g} + \mathbf{f} \quad (3.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.1c)$$

où ρ , c_p , β , k et ν désignent respectivement la masse volumique du fluide conducteur, sa capacité calorifique, son coefficient d'expansion thermique, sa conductivité thermique et sa viscosité cinématique, grandeurs toutes supposées constantes en espace et en temps. Selon la définition des parois auxquelles nous aurons affaire, différentes conditions limites doivent être jointes à ce système d'équations.

3.2.1 Mise sous forme adimensionnelle

Le système réunissant les équations de conservation de chacune des quantités physiques peut être exprimé sous forme adimensionnelle, avec des grandeurs de référence. La longueur caractéristique sera L_0 , le temps cinématique caractéristique choisi sera l'échelle temporelle de relaxation visqueuse $t_0 = L_0^2/\nu$, la vitesse de référence est U_0 , la pression caractéristique choisie sera basée sur $\mu U_0/L_0$ et l'écart de température $T - T_f$ est normalisé par rapport à la différence de température $\Delta T = T_c - T_f$ appliquée entre le bas et le haut de la cavité. On peut donc écrire :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + Re (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta = Pr^{-1} \nabla^2 \theta \quad (3.2a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + Re (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} + Gr Re^{-1} \theta \mathbf{e}_z + \mathbf{f} \quad (3.2b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.2c)$$

Apparaissent avec cette mise sous forme adimensionnelle les nombres sans dimension suivants : le nombre de Reynolds $Re = U_0 L_0/\nu$ basé sur la vitesse caractéristique de l'écoulement, les nombres de Grashof

¹La discipline qui traite de ces phénomènes est la physique statistique hors d'équilibre.

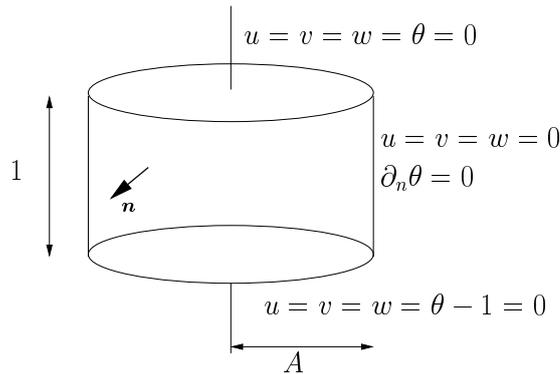


FIG. 3.1 – Configuration modèle de la géométrie rigide-rigide.

$Gr = \beta \Delta T g L_0^3 / \nu^2$ ainsi que le nombre de Prandtl $Pr = \nu / \kappa$. Il est à noter qu'ici le nombre de Reynolds Re n'est pas un paramètre de contrôle de l'écoulement ; il permet juste d'adapter au mieux le champ de vitesse selon la configuration envisagée. Ainsi, pour des écoulements où les phénomènes de transport par convection thermique sont prépondérants, on pourra retenir l'échelle $Re \equiv \sqrt{Gr}$.

3.2.2 Conditions aux limites de type rigide-rigide

Nous considérons ici que l'ensemble des parois délimitant le système fluide sont rigides (figure 3.1). Le champ de vitesse qui s'annule sur le bord du domaine Ω s'écrit :

$$\mathbf{u} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.3)$$

Les parois délimitant notre système fluide sont adiabatiques latéralement et parfaitement conductrices en haut et en bas. En définissant par \mathbf{n} la normale extérieure au domaine et en choisissant comme longueur de référence la hauteur de la cellule ($L_0 = H$), les conditions aux limites latérales portant sur la température peuvent s'écrire :

$$\frac{\partial\theta}{\partial n} \Big|_{r=A} = 0 \quad (3.4)$$

et les conditions sur les parois haut/bas :

$$\theta \Big|_{z=1} = 0 \quad \text{et} \quad \theta \Big|_{z=0} = 1. \quad (3.5)$$

A partir de ces conditions aux limites et du système d'équations (3.2), l'état conductif de base, valable sans force extérieure \mathbf{f} , correspond à un profil linéaire de température le long de la coordonnée verticale z :

$$\mathbf{u}_0 = 0, \quad \theta_0(z) = 1 - z. \quad (3.6)$$

3.2.3 Conditions aux limites de type rigide-libre

En l'absence de la paroi supérieure (figure 3.2), une loi de transfert permet d'exprimer le transfert thermique entre le fluide à surface libre et l'air environnant :

$$-k \frac{\partial T}{\partial z} = h(T - T_g), \quad (3.7)$$

h représentant le coefficient d'échange thermique et T_g la température moyenne de l'air environnant. Cette condition aux limites (3.7) sur le flux de chaleur génère un état conductif qui correspond à un profil linéaire de température le long de la verticale :

$$T(z) = -\frac{Bi}{1 + Bi} (T_c - T_g) \frac{z}{H} + T_c, \quad (3.8)$$

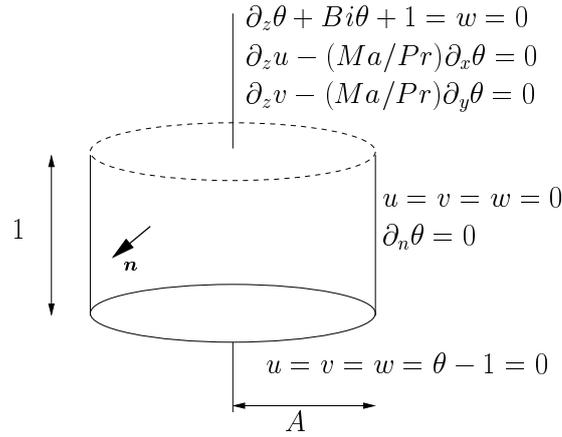


FIG. 3.2 – Configuration modèle de la géométrie rigide-libre.

avec une température à la surface supérieure libre $T_f = -Bi(T_c - T_g)/(1 + Bi) + T_c$, soit une différence de température effective existant entre le bas et le haut du fluide en situation diffusive :

$$\Delta T = T_c - T_f = Bi \frac{T_c - T_g}{1 + Bi}. \quad (3.9)$$

Dans ces dernières équations (3.8) et (3.9), $Bi = hL_0/k$ est le nombre de Biot. La mise sous forme adimensionnelle des équations de conservation à surface libre peut ainsi reposer sur cette définition de ΔT . L'état conductif de base (3.8) s'écrira alors encore $\theta_0(z) = 1 - z$, et la condition aux limites (3.7) deviendra :

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = -Bi\theta - 1. \quad (3.10)$$

La surface libre est plane et indéformable et soumise à des efforts de tensions de surface σ . Cette tension superficielle σ peut convenablement être décrite par une équation de premier ordre :

$$\sigma = \bar{\sigma} (1 + \gamma (T - \bar{T})), \quad (3.11)$$

où $\bar{\sigma}$ est la tension superficielle de référence prise à la température moyenne \bar{T} et γ une constante. Le long de la surface libre, la vitesse verticale w est nulle et l'équilibre des contraintes visqueuses donnent les conditions sur u et v :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = MaPr^{-1} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (3.12a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = MaPr^{-1} \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad (3.12b)$$

$$w = 0. \quad (3.12c)$$

Le nombre Ma de Marangoni reliant les variations motrices de tensions superficielles aux freinages par viscosité s'écrit : $Ma = \Delta T L_0 \sigma_0 \gamma / \rho \nu \kappa$.

La vision de dimensionnement de la température que nous venons de définir a notamment été proposé par Dauby *et al.* [29] et permet de balayer une large gamme de valeurs du nombre de Biot, allant jusqu'à la valeur limite $Bi \equiv 0$. Une autre convention de dimensionnement de la température a été utilisée par Vrentas *et al.* [113]. Elle est basée sur la différence de température entre la plaque inférieure chauffée et l'environnement extérieur gazeux. L'expression mathématique de la température s'écrit alors $\theta' = (T - T_g)/(T_c - T_g)$, ce qui transforme l'équation (3.8) en :

$$\theta'_0(z) = 1 - \frac{Bi}{1 + Bi} z, \quad (3.13)$$

satisfaisant bien la condition aux limites thermique à la surface libre qui s'écrit ici $\partial_z \theta' + Bi \theta' = 0$. Les nombres de Grashof et de Marangoni sont alors affectés par cette convention de température et sont reliés à la convention utilisée par Dauby par :

$$Gr' = Gr \frac{(1 + Bi)}{Bi} \quad \text{et} \quad Ma' = Ma \frac{(1 + Bi)}{Bi}. \quad (3.14)$$

Les nombres de Marangoni et de Grashof dépendront implicitement du nombre de Biot. Cette façon de prendre en compte la condition limite thermique en surface est bien expliquée dans la publication de Dijkstra [38]. Cette manière de dimensionner la température est par ailleurs équivalente à la précédente pour les nombres de Biot infinis, où la température le long de la surface supérieure est égale à la température de l'air ambiant ($T_f \equiv T_g$). Pour les petites valeurs de Bi , particulièrement $Bi = 0$, ce dimensionnement n'est plus approprié, car les valeurs des nombres Gr' et Ma' divergent (tandis qu'elles restent finies pour Gr et Ma). Nous allons exposer dans la suite du manuscrit l'ensemble des résultats concernant l'analyse de stabilité de l'écoulement diffusif en utilisant les paramètres exprimés à partir de la différence de température effective existant entre le bas et le haut du fluide (convention utilisée par Dauby).

Nous allons étudier les différents écoulements de convection générés par un chauffage par le bas dans la cavité cylindrique verticale avec surface supérieure libre ; des études ont déjà été réalisées dans le cas d'un cylindre rigide-rigide (*e.g.* Touihri *et al.* [107]). Sur ces écoulements de convection (sans force de Laplace \mathbf{f}), nous étudierons ensuite l'influence de \mathbf{f} , générée sur le fluide conducteur par un champ magnétique.

3.3 Cadre de la théorie MHD

Une description MHD réaliste de la dynamique d'un système fluide conducteur impose que les propriétés du milieu et des processus qui s'y développent répondent le plus exactement possible aux hypothèses, parfois sévères, sur lesquelles repose cette théorie. Le champ électromagnétique, seul élément qui en milieu conducteur différencie formellement la MHD de l'hydrodynamique, a une influence sur le mouvement uniquement par le champ magnétique ; les forces électriques, qu'elles soient d'origine électromagnétique ou électrostatique (produites par d'éventuelles variations locales dans la densité de charge), sont négligeables car, dans une très bonne approximation, le fluide MHD est localement neutre (en conservant néanmoins des courants non nuls). La MHD repose donc simplement sur une vision hydrodynamique du fluide incluant toutefois les forces de Laplace dues à l'action du champ magnétique sur les courants ; quant à l'évolution du champ électromagnétique, elle est bien entendu déterminée par les équations de Maxwell. La fermeture du système se fait à travers une loi d'Ohm reliant la densité de courant - et donc les mouvements de la matière - au champ électromagnétique.

3.4 Description d'un fluide conducteur

Afin de pouvoir définir des grandeurs physiques dans un fluide, les particules doivent rester localisées. L'approximation fluide n'est donc valable que dans la mesure où les conditions thermodynamiques varient peu sur des distances de l'ordre du libre parcours moyen, trajectoire suivie par une particule sans être défléchie, pour des temps déterminés par l'agitation thermique ; les processus de délocalisation sont en fait responsables des phénomènes de transport. La description d'un fluide sous-entend que toutes les espèces chimiques sont suffisamment couplées pour être thermalisées et suivre une distribution de Maxwell unique. Ce couplage doit bien sûr s'opérer entre les éléments d'une même espèce chimique mais également entre chacune des populations dans le cas d'un plasma. En hydrodynamique, dans des milieux suffisamment denses, l'approximation fluide est validée par des collisions qui transfèrent de la quantité de mouvement entre les particules de façon très efficace, via des interactions de type Van der Waals.

3.4.1 Loi d'Ohm généralisée

L'établissement de la loi d'Ohm pour un fluide conducteur, c'est-à-dire d'une loi reliant les mouvements de la matière aux densités volumiques de courant, au champ électrique \mathbf{E} et au champ magnétique \mathbf{B}

est à la base de la théorie MHD et peut être un point délicat, notamment pour les plasmas. Cette loi traduit en terme de courant la réponse d'un milieu conducteur immobile à un champ électrique via la conductivité électrique σ_e . Elle prend la forme d'une simple relation de proportionnalité dans le référentiel où le fluide est localement au repos ; sa traduction dans le référentiel lié au laboratoire se fait par une transformation de Lorentz sur le tenseur de Maxwell décrivant le champ électromagnétique. Dans l'approximation classique valide pour la MHD, la loi d'Ohm s'écrit dans le référentiel du laboratoire :

$$\mathbf{j} = \sigma_e (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (3.15)$$

La loi d'Ohm formulée ici est une forme réduite de l'expression la plus générale établie en physique des plasmas dans le cadre d'un modèle simplifié. Elle cache en fait toute la micro-physique de la population d'électrons qui dépend du type de plasma rencontré. Dans un plasma chaud complètement ionisé par exemple, un courant peut être produit d'une part à travers le gradient de la pression du gaz d'électrons dans une direction parallèle au champ magnétique et peut être d'autre part généré par un effet Hall dans la direction perpendiculaire à \mathbf{B} . La loi d'Ohm s'écrit alors sous une forme tensorielle et la relation (3.15) n'est plus valable que dans le cas limite des plasmas complètement ionisés sans effets Hall [13]. Cependant, quel que soit le milieu conducteur considéré, pour des champs magnétiques pas trop grands et des fréquences pas trop élevées, l'expression de la loi d'Ohm énoncée reste largement valable.

3.4.2 Équations de Maxwell

L'ensemble des équations fluides montre comment vont évoluer les grandeurs physiques sous l'action d'éventuels champs de forces extérieurs. Nous allons à présent voir comment évoluent ces champs électromagnétiques \mathbf{E} et \mathbf{B} . Cette évolution se décrit naturellement par les quatre équations de Maxwell que nous exprimons dans le système MKSA :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (3.16a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.16b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (3.16c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.16d)$$

auxquelles on ajoute la loi d'Ohm (3.15). Le diamagnétisme des milieux dilués que sont les fluides électroconducteurs est très faible, on peut donc se permettre d'approximer la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique à celles du vide $\epsilon \simeq \epsilon_0$ et $\mu \simeq \mu_0$, avec $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ et $\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2) \approx 8.854 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$.

Dans la limite relativiste à laquelle nous allons nous intéresser, la forme réduite de la relation d'Ampère s'écrit :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (3.17)$$

en accord avec la conservation de la charge, qui requiert un courant à divergence nulle, c'est-à-dire un courant circulant sur des boucles fermées sans accumulation de charges.

3.4.3 Équation d'induction et force de Laplace

Les phénomènes de couplage entre le champ de vitesse et le champ magnétique que rassemble la MHD peuvent être à caractère fort lorsque les deux champs s'influencent mutuellement ou faible si un champ influence l'autre sans contrepartie. Lorsque le champ magnétique induit reste suffisamment faible pour être négligé devant le champ externe appliqué, on observe la formation d'un courant électrique qui va réagir avec le champ magnétique pour créer une force volumique de Laplace² $\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ s'opposant à la cause qui lui donne naissance (*i.e.* l'écoulement) et qui tendra à retarder le mouvement du fluide. Le champ

²Dans la littérature anglo-saxonne cette force est appelée force de Lorentz

Substance	L_0 (m)	U_0 (ms^{-1})	D_m (m^2s^{-1})	t_0 (s)	R_m
Mercure	0.1	0.1	1	0.01	0.01
Sodium liquide	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
Plasma de laboratoire	1	100	10	0.1	10
Noyau terrestre	10^7	0.1	1	10^{14}	10^6
Gaz interstellaire	10^{17}	10^3	10^3	10^{31}	10^{17}

TAB. 3.1 – Diffusivités magnétiques D_m et nombres de Reynolds magnétiques R_m pour quelques écoulements MHD, pour des longueurs L_0 , des vitesses U_0 et des temps t_0 caractéristiques.

magnétique est décrit par une équation de diffusion, pilotée par un coefficient de diffusion magnétique $D_m = 1/\mu_0\sigma_e$:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = D_m \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (3.18)$$

L'équation (3.18) exprime le fait que toute perturbation locale de \mathbf{B} tend à s'atténuer par diffusion selon le schéma classique d'une courbe Gaussienne : la largeur augmente comme la racine carré du temps et l'amplitude décroît comme l'inverse de cette largeur (de façon à ne pas être en contradiction avec l'équation de conservation (3.16b) de Maxwell). En un temps de l'ordre de t , la distance de diffusion parcourue est de l'ordre de $\sqrt{D_m t}$; la pénétration d'un champ alternatif de pulsation ω est limitée à une couche dont l'épaisseur est de l'ordre de $\sqrt{D_m/\omega}$: c'est l'effet de peau. Un paramètre important qui mesure cet effet est le paramètre d'écran $R_\omega = \omega L_0^2/D_m$ qui, en termes de rapport de fréquences, traduit cette pénétration du champ magnétique dans le fluide conducteur. La condition $R_\omega \ll 1$ implique que le temps caractéristique de diffusion des gradients magnétiques sur l'épaisseur du film magnétique (qui représente le terme caractéristique d'établissement d'un profil de champ stationnaire) est beaucoup plus petit que le temps caractéristique $1/\omega$ d'évolution de l'écoulement. Si cette condition est réalisée, l'écoulement magnétodiffusif pourra être considéré comme quasi-stationnaire.

Les phénomènes de diffusion sont indépendants de \mathbf{u} : dans ce cas limite, il n'y a aucune convection de \mathbf{B} par la matière. Le nombre qui mesure le flux de convection du champ magnétique sur le flux diffusif est le nombre de Reynolds magnétique $R_m = U_0 L_0/D_m$, analogue au nombre de Reynolds hydraulique, où la viscosité cinématique s'apparie au coefficient effectif de diffusion magnétique. Nous donnons à titre d'illustration quelques valeurs numériques de ce coefficient au tableau 3.1. La restriction de couplage faible entre le champ dynamique et le champ magnétique impose à ce nombre d'être le plus petit possible. Dans le cas limite contraire de très fort Reynolds magnétique, les lignes de champ sont attachées aux éléments fluides à tout instant. On parle alors de MHD idéale. Cette discipline connaît son essor en astrophysique ; l'équation de transport qui modélise la MHD non-résistive s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (3.19)$$

3.5 Application à la métallurgie

Les métaux offrent l'avantage énorme d'avoir une conductivité électrique $\sigma_e \sim 10^6 S.m^{-1}$ environ 10^5 fois plus grande que celle des liquides ordinaires (pour l'eau, $\sigma_e \sim 10 S.m^{-1}$). Par suite, on comprend facilement la possibilité de produire des forces magnétiques (proportionnelles à σ_e) suffisantes pour maintenir un bain fondu en sustentation (lévitation) pour le façonner (formage), le pulvériser (pulvérisation), le mettre en mouvement (brassage). Une revue des travaux de recherche encore récents dans le domaine du brassage va être proposée ; il est toutefois essentiel de commencer par clarifier les notations et hypothèses utilisées dans ce domaine.

3.5.1 Principes de base

Dans le domaine de la métallurgie, le champ magnétique est le plus souvent imposé, soit directement à l'aide de stators générant des champs magnétiques constants [89], tournants [112], propagatifs [45], ou plus

généralement alternatifs, soit à l'aide de nappes de courant qui viennent générer, conformément à la loi de Biot et Savart le champ magnétique induit. Ce dernier peut alors agir sur le fluide par l'intermédiaire de la force de Laplace dans l'équation du mouvement. Intéressons-nous aux effets d'interaction entre champs dynamique et magnétique. L'équation d'induction est purement diffusive d'après les valeurs avancées au tableau 3.1, le nombre de Reynolds magnétique restant de l'ordre de 0.1 pour les métaux liquides. Le champ magnétique alternatif peut entraîner le fluide dans son ensemble si l'effet de peau le lui permet. L'échelle temporelle du champ magnétique varie indépendamment de celle du fluide et la plus petite des deux sera responsable d'une première instabilité. Le terme $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ de la loi d'Ohm ne peut ainsi être négligé que sous la condition de faible induction magnétique $Z_\omega = U_0/\omega L_0 \ll 1$. Le terme $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ de l'équation du mouvement est quant à lui soit quantifié à travers le nombre de Taylor magnétique $Tm = B_0^2 L_0^4 \sigma_e \omega / \rho \nu^2$ qui mesure le rapport entre la force de Laplace et la force visqueuse lorsque le champ magnétique est tournant, soit à travers le nombre de Hartmann $Ha = B_0 L_0 \sqrt{\sigma_e / \rho \nu}$ qui mesure le même rapport de forces lorsque le champ magnétique est constant. En se rapportant aux valeurs numériques (tableau 3.1), on voit que Z_ω reste de l'ordre de 10^{-3} pour les métaux liquides lorsqu'ils sont soumis à des pulsations $2\pi \times 50 < \omega < 2\pi \times 60 \text{ Hz}$ (valeurs de pulsations souvent utilisées [6]). Cette dernière constatation implique que le champ magnétique tournant peut être calculé directement à partir du courant imposé \mathbf{j} , indépendamment de la vitesse \mathbf{u} , par résolution des équations de Maxwell. Il y a donc découplage partiel entre les équations de Navier-Stokes et les équations de Maxwell : nous sommes dans le cas de régime à interaction faible. Afin de se fixer les idées, nous allons décrire les mécanismes fondamentaux qui régissent le comportement d'un métal liquide soumis à un champ magnétique dans une géométrie cylindrique et vérifier les différents postulats formulés.

3.5.2 Équations en brassage circulaire

Un champ magnétique tournant autour d'une colonne de métal liquide crée des forces qui la mettent en rotation. L'échelle temporelle du champ magnétique est basée sur sa pulsation ω . Toutes les grandeurs qui suivent seront exprimées sous leur forme adimensionnelle. Dans un repère cartésien, le champ tournant peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{e}_B(t) = -\sin t \mathbf{e}_x + \cos t \mathbf{e}_y. \quad (3.20)$$

Dans cette description, nous avons négligé l'effet de peau et supposé que le champ magnétique pénètre donc parfaitement dans l'ensemble du cylindre circulaire. A partir des équations de Maxwell il est alors possible de définir le vecteur potentiel \mathbf{A} issu du caractère conservatif du champ magnétique (3.16b) :

$$A_z(x, y, t) = x \cos t + y \sin t.$$

En régime quasi-permanent, le champ électrique \mathbf{E} est irrotationnel, il dérive d'un potentiel scalaire ϕ ; son expression générale qui prend en compte l'instationnarité du champ magnétique (3.16c) à travers le vecteur potentiel \mathbf{A} peut s'écrire en projection sur la base cartésienne :

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - (x \sin t - y \cos t) \mathbf{e}_z. \quad (3.21)$$

La densité de courant est responsable du couplage entre champ magnétique et champ dynamique ; ne disposant *a priori* pas de références pour le champ de vitesse, on la définit comme étant simplement U_0 . L'expression du courant se met sous la forme :

$$\mathbf{j} = -\nabla\phi - (x \sin t - y \cos t) \mathbf{e}_z + Z_\omega \mathbf{u} \times \mathbf{e}_B \quad (3.22)$$

et doit vérifier la condition $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$. Cette dernière équation peut s'écrire :

$$\nabla^2 \phi = Z_\omega (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_B. \quad (3.23)$$

Le paramètre intervenant dans ces équations $Z_\omega = U_0/\omega L_0$ caractérise bien le couplage entre champ cinématique et champ magnétique. Le cas limite de faible couplage entre les différents champs ($Z_\omega \ll 1$) permet de négliger le membre de droite de l'équation de Poisson, qui devient alors une simple équation de Laplace. La densité de courant varie sans l'influence du champ cinématique et les équations de Maxwell

peuvent donc être résolues indépendamment des équations hydrodynamiques.

Comme nous l'avons vu, la force motrice de Laplace est le produit vectoriel de la densité de courant par le champ magnétique imposé. Compte tenu des différents résultats obtenus, son expression se met sous la forme d'une somme d'une partie irrotationnelle, rotationnelle et déviatrice selon :

$$\mathbf{f} = -TmRe^{-1} (\nabla\Phi - \nabla \times \mathbf{U} + Z_\omega \tilde{\mathbf{u}}). \quad (3.24)$$

La grandeur scalaire $\Phi(x, y, t) = (x^2 + y^2)(\sin 2t - \cos 2t)$ est analogue à une pression et le terme $\mathbf{U}(-\phi \sin t, \phi \cos t, (x^2 + y^2)/4)^T$ est responsable de l'accélération du fluide. La fréquence de rotation du potentiel Φ est deux fois plus importante que celle du potentiel vecteur \mathbf{U} : la force électromagnétique est la somme d'une force moyenne tournant à la pulsation ω et d'une force fluctuante. Le vecteur vitesse de déviation (dû au double produit mixte) est, quant à lui, indépendant du temps et simplement défini par $\tilde{\mathbf{u}} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_B) \mathbf{e}_B - \mathbf{u}$. Il s'annule lorsque la vitesse du fluide est colinéaire au champ magnétique et vaut $-\mathbf{u}$ dans le cas où le champ de vitesse est perpendiculaire au champ magnétique imposé.

Il est possible de décomposer le potentiel électrique dans une base de cosinus et sinus selon :

$$\phi(x, y, z, t) = \phi_1(x, y, z) \sin t + \phi_2(x, y, z) \cos t, \quad (3.25)$$

ce qui permet d'obtenir une expression élégante de la force moyennée en temps de Laplace dans le repère cartésien :

$$\bar{\mathbf{f}} = -\frac{1}{2}TmRe^{-1} \left(\nabla \times \begin{pmatrix} -\phi_1 \\ \phi_2 \\ (x^2 + y^2)/2 \end{pmatrix} + Z_\omega \begin{pmatrix} u \\ v \\ 2w \end{pmatrix} \right). \quad (3.26)$$

Conditions aux limites

Nous supposons que les parois délimitant la géométrie de notre système sont rigides et électriquement isolantes. Il s'en suit l'annulation du champ de vitesse et de la projection normale de la densité de courant le long des frontières. Cette configuration quasi idéale s'obtient en plaçant par exemple autour du système une culasse magnétique de très grande perméabilité. Les lignes de champ électrique se referment alors au sein du fluide. Ce cas est difficile à obtenir en laboratoire et constitue l'un des défis majeurs de la modélisation expérimentale. Volz et Mazuruk [112] confinent le métal liquide (gallium) dans du cuivre. Les propriétés physico-chimiques de ce matériau, ainsi qu'un voltage modéré assurant des vitesses de rotation pas trop importantes, permet aux expérimentateurs de justifier l'adiabaticité électrique de leurs parois. Il se forme en effet sur chacune des interfaces cuivre-gallium une fine couche d'oxyde électriquement isolante. Enfin, pour les conditions portant sur le champ thermique, la configuration type de Rayleigh-Bénard nécessite que les parois latérales soient adiabatiques et les plaques supérieure et inférieure parfaitement conductrices, assurant ainsi des températures uniformes, T_c en bas et T_f en haut (avec $T_c > T_f$). Ici encore, le cuivre se prête bien à assurer l'uniformité du champ de température aux bornes de la cellule. Quant aux conditions d'imperméabilité, celles-ci sont assurées par un confinement latéral de polyméthacrylate de méthyle (PMMA).

En définissant par \mathbf{n} la normale unitaire extérieure au domaine Ω , de frontière $\partial\Omega$, la condition d'imperméabilité électrique s'écrit :

$$\left. \frac{\partial\phi}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = -(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n})(x \sin t - y \cos t). \quad (3.27)$$

En se référant à la décomposition du potentiel électrique (3.25), l'équation de Poisson (3.23), munie des conditions aux limites (3.27), donne les systèmes suivants :

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi_1 = -Z_\omega (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_x \\ \left. \frac{\partial\phi_1}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = -(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}) x \end{cases} \quad (3.28a)$$

et

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi_2 = Z_\omega (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_y \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}) y. \end{cases} \quad (3.28b)$$

Les deux systèmes ainsi définis ne possèdent pas de solutions *a priori* évidentes et doivent être discrétisés numériquement (ensemble avec le système (3.2)). Cela dit, la résolution des potentiels électriques devient très simple lorsque les termes proportionnels aux rotationnels de vitesses sont négligés, c'est-à-dire sous l'hypothèse de faible couplage : $Z_\omega \ll 1$. Il existe en effet une solution analytique (proposée en 1997 par Mazuruk *et al.* [83]) donnant le profil des potentiels dont l'expression analytique est donnée au travers de fonctions de Bessel. Il suffit alors simplement d'injecter la solution dans l'expression de la force de Laplace et de résoudre le problème dynamique. L'objet du paragraphe suivant est de résumer les points principaux de cette démarche.

Résolution analytique de la force de Laplace

Afin de simplifier la résolution des systèmes (3.28a) et (3.28b), nous projetons les deux expressions scalaires de potentiels électriques dans une base cylindrique. Nous assumons que la vitesse du bain fluide est suffisamment petite devant celle du champ magnétique, en d'autres termes que l'inégalité $Z_\omega \ll 1$ est pleinement respectée. Ainsi, en définissant par ψ_1, ψ_2 les potentiels exprimés en fonction de (r, φ, z) , nous obtenons (avec comme longueur de référence $L_0 = D$ le diamètre de la cellule et comme rapport de forme $Az = H/D$) :

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi_1 = 0 \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \Big|_{r=1/2} = 0 \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \Big|_{z=0, Az} = 0 \end{cases} \quad (3.29a)$$

et

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi_2 = 0 \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \Big|_{r=1/2} = 0 \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \Big|_{z=0, Az} = r. \end{cases} \quad (3.29b)$$

Le système (3.29a) implique que la fonction ψ_1 est identiquement nulle sur tout le domaine Ω ; une solution du système (3.29b) peut être obtenue en effectuant une séparation des variables. Compte tenu des conditions aux limites, les solutions peuvent être recherchées sous la forme :

$$\psi_{2n}(r, z) = \left(A_n \cosh(\lambda_n z) + B_n \sinh(\lambda_n z) \right) \mathcal{J}_1(\lambda_n r)$$

où \mathcal{J}_1 est la fonction de Bessel de première espèce. Les valeurs propres λ_n sont les n premières racines positives de l'équation :

$$\frac{d\mathcal{J}_1(\lambda_n)}{d\lambda_n} = 0, \quad (3.30)$$

et les coefficients A_n et B_n sont tels que

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1 - \cosh(2\lambda_n Az)}{\sinh(2\lambda_n Az)} B_n \\ B_n &= \frac{1}{\lambda_n (\lambda_n^2 - 1) \mathcal{J}_1(\lambda_n)}. \end{aligned}$$

En rassemblant ces informations, la solution finale peut s'écrire sous la forme :

$$\psi_2(r, z) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{J}_1(2\lambda_n r)}{\lambda_n (\lambda_n^2 - 1) \mathcal{J}_1(\lambda_n)} \frac{\cosh(2\lambda_n z) - \cosh(2\lambda_n (Az - z))}{\sinh(2\lambda_n Az)} \quad (3.31)$$

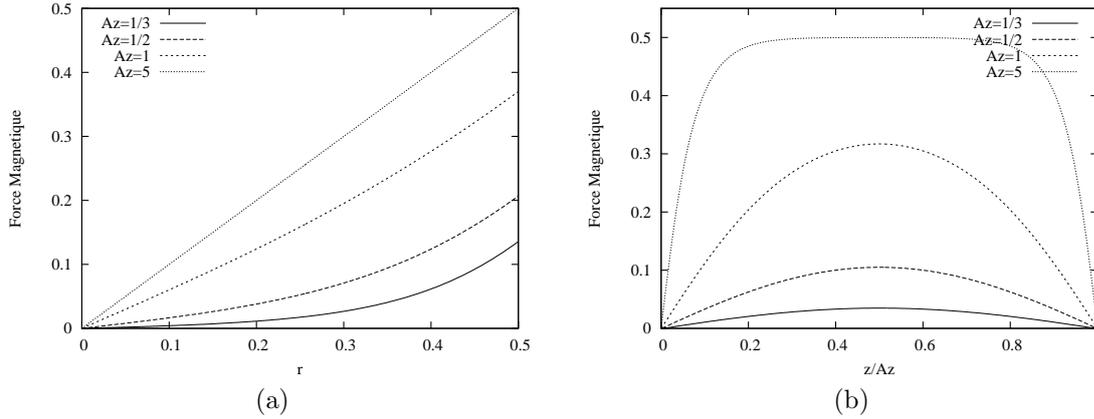


FIG. 3.3 – Distribution radiale (a) (resp. verticale (b)) évaluée en $z = Az/2$ (resp. $r = 1/2$) de la force de Laplace calculée analytiquement pour différents rapports d'aspects. Au delà d'un certain rapport d'aspect, la distribution de force atteint un plateau, permettant de négliger l'action du potentiel électrique.

et la force volumique de Laplace peut alors être déduite de l'équation générale (3.26) avec les simplifications qui s'y imposent. Les seuls termes non nuls sont alors compris dans la composante azimutale de la force moyennée qui s'écrit :

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} Tm Re^{-1} \left(r - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{J}_1(2r\lambda_n)}{(\lambda_n^2 - 1) \mathcal{J}_1(\lambda_n)} \frac{\sinh(2\lambda_n z) + \sinh(2\lambda_n(Az - z))}{\sinh(2\lambda_n Az)} \right) \mathbf{e}_\varphi \quad (3.32)$$

La figure 3.3 montre le comportement de la force magnétique en fonction de la hauteur z et du rayon r de la géométrie. On remarque que pour des rapports d'aspects suffisamment grands (au delà de $Az = 5$), la force atteint un régime asymptotique : l'évolution en z devient constante dans le cœur du système et l'évolution en r varie linéairement.

Remarque. Supposons que l'on ait affaire à une géométrie d'extension verticale infinie. Il ne subsiste alors de l'expression (3.32) de la force magnétique que le terme proportionnel au rayon ; le potentiel électrique n'intervient alors plus. Il existe dans ce cas particulier une solution analytique simple du champ de vitesse pour l'écoulement laminaire stationnaire qui s'écrit :

$$\mathbf{u}(r) = \Omega(r) r \mathbf{e}_\varphi, \quad (3.33)$$

la vitesse de rotation $\Omega(r)$ étant définie comme $\Omega(r) = (Tm/8)(1 - 4r^2)$. La traduction du brassage dû au champ magnétique est cachée dans le nombre de Taylor magnétique. La figure 3.4 montre le profil de degrés 3 de vitesse en fonction du rayon pour un nombre de Taylor magnétique $Tm = 500$.

On vient de montrer qu'il existait une solution pour laquelle champs magnétique et dynamique étaient complètement dissociés. Cette hypothèse forte de départ peut paraître assez sévère et peu réaliste, cependant des expériences numériques [105, 53, 116] montrent que les bains fondus s'opèrent bel et bien avec ces hypothèses. Cela dit, différentes études théoriques ont tenté de rechercher des solutions où la rétroaction entre les champs est plus importante. Dans le paragraphe suivant, nous décrivons l'une de ces études.

Solution analytique en régime modéré

Lorsque la pulsation des forces électromagnétiques demeure sans effet sur le champ de vitesse, l'écoulement est dominé par les forces d'inertie. Considérons à cet effet un régime hydrodynamiquement établi³,

³Cette hypothèse implique indirectement que la longueur verticale du cylindre est soit suffisamment grande soit même infinie. On peut à cet effet imposer des conditions aux limites de glissement aux deux extrémités de la cavité.

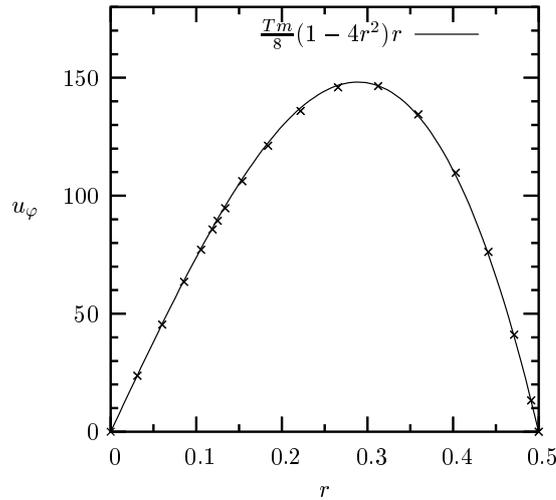


FIG. 3.4 – Vitesse azimutale en fonction du rayon de la cavité pour un nombre de Taylor magnétique $Tm = 500$ dans une géométrie d’extension verticale infinie. Le modèle analytique reprend l’expression (3.33) de vitesse et le modèle numérique modélise la force de Laplace donnée par (3.32) dans un cylindre de grande envergure où des conditions de glissement pour la vitesse sont imposées aux parois haut/bas - code spectral.

c’est-à-dire un champ dynamique où toutes les grandeurs physiques sont uniformes en z (*i.e.* $\frac{\partial}{\partial z} \equiv 0$). En explicitant ces conditions aux limites, il apparaît que les composantes radiale u_r et azimutale u_φ de vitesse sont indépendantes de la composante axiale u_z et du potentiel électrique. De plus, la composante radiale du champ de pression de l’écoulement unidirectionnel équilibre l’accélération centrifuge des couches fluides et la vitesse azimutale ne dépend que du nombre de Taylor magnétique et s’écrit :

$$u_\varphi(r) = \left(2r - \frac{\mathcal{I}_1\left(2r\sqrt{\frac{Tm}{2}}\right)}{\mathcal{I}_1\left(\sqrt{\frac{Tm}{2}}\right)} \right), \quad (3.34)$$

\mathcal{I}_1 étant la fonction de Bessel modifiée de première espèce. Le profil de vitesse de la solution de vitesse azimutale est tracé sur la figure 3.5. Il permet de voir que l’augmentation du nombre de Taylor magnétique donne au profil cinématique une tendance d’évolution linéaire dans le cœur du système. L’expression reliant la composante axiale de vitesse au potentiel électrique met en évidence un aplatissement du profil de vitesse axiale dans la région centrale de la géométrie. Ces résultats ont été obtenus en 1977 par Alemany et Moreau [3].

Les études théoriques citées montre que sous certaines conditions, il est possible de prédire théoriquement l’allure du champ de vitesse engendré par un champ magnétique tournant. Ces résultats constituent, rappelons-le, une classe d’écoulements plan-parallèles et sont souvent à l’origine de divers scénarios tumultueux et désordonnés, les phénomènes de transport par convection étant plus efficaces que les mécanismes de diffusion. De plus, les phénomènes de bords liés au caractère fini des cellules réelles (alors négligés dans l’étude en régime modéré) sont responsables d’une recirculation globale du fluide (pompage d’Ekman). Ces solutions ne sont que des esquisses face à la multitude des solutions possibles et observables. Une approche pour analyser le passage d’un mode d’écoulement à un autre est l’utilisation de modèles initialement développés pour décrire des systèmes proches d’une transition de phase. Dans ces approches, on utilise un développement limité d’une variable caractéristique du degré d’évolution de la transition en fonction d’un paramètre de contrôle représentant la distance au seuil. Il est alors possible de déterminer le caractère stable ou instable de l’écoulement et de calculer les seuils de transition d’écoulement. Cette approche, initialement développée par le physicien Landau, constitue à l’heure actuelle l’une des démarches d’étude de stabilité les plus fructueuses. Des techniques de continuation adaptées au suivi de ces points de

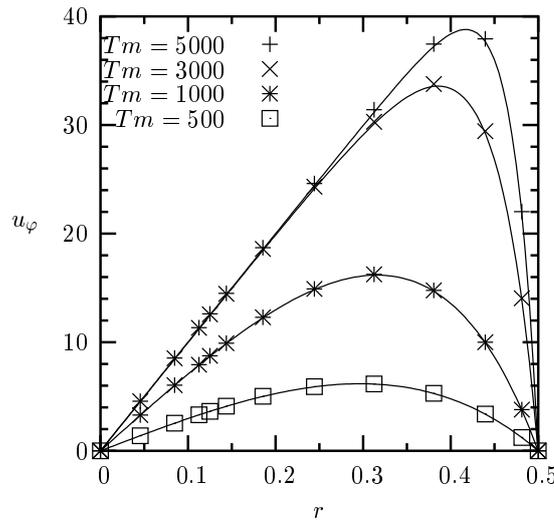


FIG. 3.5 – Vitesse azimutale en fonction du rayon de la cavité pour un nombre de Reynolds tournant $Re_\omega = \frac{\omega L_o^2}{\nu} = 100$ et des nombres de Taylor magnétiques $Tm = 500, 1000, 3000, 5000$: comparaison de la méthode numérique (points) et du modèle théorique (traits pleins) proposé par [3] - code spectral.

bifurcation permettent alors d'établir de véritables cartes d'écoulements en fonction du paramètre Tm de contrôle. Notons enfin que ces profils théoriques ont permis de valider nos codes de simulation numérique présentés au chapitre 4.

3.5.3 Application d'un champ magnétique constant

L'application d'un champ magnétique constant dans une direction privilégiée du système chauffé permet d'agir sur la dynamique de la structure thermique. Contrairement à l'application d'un champ alternatif, il n'existe pas d'échelle temporelle propre pour le champ magnétique constant ; les vitesses de référence seront basées sur la vitesse de l'écoulement engendré. Outre le champ magnétique imposé, il existe un champ magnétique induit. Lorsque le nombre de Reynolds magnétique est suffisamment petit, ce champ induit peut être négligé devant le champ imposé de sorte que le champ magnétique total reste constant. Le champ électrique dérive d'un potentiel scalaire $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ et la loi d'Ohm s'exprime simplement comme étant :

$$\mathbf{j} = -\nabla\phi + \mathbf{u} \times \mathbf{e}_B, \quad (3.35)$$

ce qui nécessite une équation de fermeture sur le potentiel électrique qui est obtenue à partir de l'équation de conservation du courant $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$. Cette équation sur ϕ s'écrit :

$$\nabla^2\phi = \mathbf{e}_B \cdot (\nabla \times \mathbf{u}). \quad (3.36)$$

La force volumique permettant de décrire le système MHD est définie comme :

$$\mathbf{f} = Ha^2 Re^{-1} (-\nabla\phi + \mathbf{u} \times \mathbf{e}_B) \times \mathbf{e}_B. \quad (3.37)$$

Il reste ainsi à rajouter au système MHD dynamique des conditions aux limites portant sur les courants électriques.

Conditions aux limites

Afin de fermer le problème, nous utilisons la condition d'imperméabilité électrique $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = 0$ en projection sur la frontière du domaine, qui peut s'écrire sous la forme compacte :

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = (\mathbf{u} \times \mathbf{e}_B) \cdot \mathbf{n}. \quad (3.38)$$

Sur les parois latérales et la paroi du bas, nous aurons ainsi :

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0. \quad (3.39)$$

Selon que le champ magnétique sera appliqué verticalement ($\mathbf{e}_B \equiv \mathbf{e}_z$) ou dans la direction du plan, la condition (3.38) projetée sur la surface libre sera respectivement nulle ou fonction des composantes (u, v) de vitesse.

Nous allons nous intéresser au cas où le champ magnétique statique est dirigé selon la direction $\mathbf{e}_B = \mathbf{e}_x$, et on parlera alors de champ magnétique horizontal. Dans cette situation, la condition sur ϕ à la surface libre s'écrit :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=1} = -v. \quad (3.40)$$

Nous continuons ce mémoire par la présentation des méthodes numériques qui nous ont permis d'évaluer les différents comportements dynamiques de notre problème.

4. Méthodes numériques d'intégration

4.1 Préambule

Le champ magnétique se présente dans les systèmes MHD comme une composante majeure sur le plan dynamique : il met en jeu des énergies comparables sinon plus importantes que les autres formes d'énergie présentes (cinétique ou thermique par exemple). En dépit de leur importance, nombre de problèmes fondamentaux impliquant un champ magnétique restent mal compris ; c'est en particulier le cas des processus de dynamo, présents de la planétologie à l'astrophysique galactique, ou encore le cas de la solidification dirigée de type Bridgman ou Czochralski.

Ces différents systèmes sont évidemment extrêmement complexes, car ils mettent en jeu à la fois des échelles spatiales et temporelles variées. L'étude de ces systèmes passe nécessairement par la résolution en temps et en espace des équations aux dérivées partielles déterminant l'évolution des mouvements MHD ; la compréhension de leurs comportements non linéaires et non stationnaires impose que les recherches se fassent au moyen d'outils numériques généralement lourds, nécessitant l'utilisation de supercalculateurs.

Nous commençons par présenter les principes élémentaires de résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP dans la suite du manuscrit) avant de décrire brièvement quelques codes utilisés lors de ce travail de caractérisation des seuils de bifurcation. De façon générale, pour comprendre les techniques numériques et avancer dans nos propres développements, nous nous sommes inspirés de la littérature. Nous avons consulté les ouvrages de référence de Deville [32] et de Canuto [18] ainsi que les travaux de Bergeon *et al.* [11] qui décrivent de façon précise les méthodes numériques utilisées en géométrie rectangulaire pour la détermination des phénomènes convectifs dans la situation de Bénard-Marangoni ; les articles de Karniadakis *et al.* [66], Gottlieb et Orszag [52] et Leriche *et al.* [72, 73] sont également d'un grand intérêt par rapport à nos développements numériques.

4.2 Classe des équations aux dérivées partielles

La modélisation d'un système physique conduit à un jeu d'équations aux dérivées partielles du second ordre que l'on peut toujours en pratique ramener à des EDPs du premier ordre. D'un point de vue mathématique, suivant la manière dont les EDPs propagent l'information, elles sont dites hyperboliques, paraboliques, ou elliptiques. Les premières sont dominées par des processus de propagation d'ondes, les secondes admettent comme solutions des ondes amorties et présentent les propriétés de l'équation de diffusion. Quant aux troisièmes, elliptiques, elles ne donnent pas lieu à la propagation d'onde mais sont dominées par les phénomènes de diffusion (équation de Poisson).

L'absence de dissipation confère au système d'équations un caractère hyperbolique ; l'introduction de viscosité modifie la nature mathématique des EDPs qui présentent alors des aspects paraboliques voire elliptiques lorsque la dissipation est dominante. Evidemment, sur le plan numérique il faut développer des méthodes d'intégration adaptées aux différentes formes de propagation de l'information, principale-

ment à cause des disparités de temps caractéristiques. Lorsque le système d'équations ne présente pas un caractère hyperbolique, parabolique ou elliptique dominant, les schémas doivent traiter de façon convenable chacun de ces comportements; des méthodes envisagées telles que les méthodes de découpage, fractionnement temporels - temporal splitting method - consistent à séparer chaque contribution de nature différente dans les opérateurs d'évolutions, puis à les traiter par un algorithme approprié en appliquant successivement chaque nouveau schéma au résultat du précédent pour finalement constituer une itération.

Comme un grand nombre de modèles issus de la mécanique des milieux continus, notre système s'écrit sous la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles paraboliques (ou de systèmes d'équations différentielles ordinaires), le temps étant la variable naturelle décrivant l'évolution du système. On parle ainsi de systèmes dynamiques pour les équations différentielles ordinaires et on appelle nombre de degrés de liberté le nombre d'équations couplées du système. Une première approche pour l'étude de ces équations d'évolution consiste à rechercher les équilibres, c'est-à-dire les solutions stationnaires ne présentant pas d'évolution temporelle. On dit qu'un équilibre est stable si une petite perturbation de cet équilibre évolue dans le temps en restant petite et en convergeant vers zéro. Le système revient alors dans sa position d'équilibre. Ces équilibres ont donc de grandes chances d'être observés sur le système physique étudié ou sur la simulation numérique du modèle proposé. L'étape suivante consiste à faire varier un ensemble de paramètres contrôlant le système, comme par exemple l'intensité du forçage ou les dimensions géométriques du domaine. On regarde alors ce que deviennent les équilibres du modèle, en particulier ceux qui étaient stables avant de modifier les paramètres de contrôle. Lorsqu'en variant les valeurs des paramètres de contrôle, un équilibre stable devient instable ou disparaît, on dit que l'on est en présence d'une bifurcation.

Dans ce chapitre, nous supposerons que les degrés de liberté \mathbf{q} forment un espace complet dans un espace de phase adapté. Les équations d'évolution seront décrites symboliquement sous la forme

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathcal{F}(\mathbf{q}, \beta, t), \quad (4.1)$$

où $\mathcal{F} \equiv \mathcal{L} + \mathcal{N}$ est une fonctionnelle non-linéaire reliant les degrés de liberté des différentes équations d'évolution (u, v, w, p , etc.) aux paramètres de forçage β (Tm, Gr , ect.). Lorsque \mathcal{F} ne fait pas apparaître explicitement le temps t , on parle de système autonome; dans le cas contraire, on dira que le système est forcé. L'étude envisagée ne considère que le cas autonome, le forçage appliqué au fluide conducteur à travers la force de Laplace étant pris sous sa forme moyenné en temps. Parmi les paramètres de forçage, nous isolons le paramètre principal β gouvernant la stabilité de la configuration de base des paramètres de contrôle secondaires; nous traitons le problème en codimension 1 ($\beta \in \mathbb{R}$).

Le traitement du problème physique fluide par le calcul numérique se fera en plusieurs étapes: entre autres, suite à la modélisation mathématique du problème posé, il convient de discrétiser à la fois l'espace et les équations d'évolution. La discrétisation de l'espace consiste à lui substituer un réseau de points, ou maillage, possédant une géométrie et une résolution adaptées à la physique étudiée; il est évident que, plus le pas de la grille est fin, plus la solution discrète exacte est proche de la solution analytique. Une fois le maillage défini, les équations peuvent à leur tour être discrétisées, au moyen d'un schéma d'intégration en temps et en espace, pour conduire à un système algébrique.

4.3 Discrétisation du problème : méthodes spectrales

Il s'agit de mettre en place à l'aide des principes hérités de la formulation variationnelle (ou formulation faible) un algorithme discret mathématique permettant de résoudre une EDP sur un domaine compact avec conditions aux bornes de type Dirichlet (valeurs aux bornes) ou Neumann (gradients aux bornes). La formulation faible effectue une réduction de l'ordre des dérivées partielles par une intégration par parties, ce qui permet d'agrandir les espaces dans lesquelles la solution numérique sera construite. Cette discrétisation passe par la définition d'un espace de fonctions tests approprié sur lequel les solutions de la formulation faible sont exactes. Cela nécessite la définition d'un maillage du domaine d'étude en fragments disjoints qui permet de définir une base fonctionnelle sur laquelle on projette la

fonction inconnue de notre EDP sous la forme de développements en séries tronquées, tel des fonctions trigonométriques pour des configurations aux conditions aux limites périodiques ou des polynômes orthogonaux (Legendre, Chebychev) dans le cadre général de conditions aux limites quelconques. Ainsi, on obtient une formulation algébrique du problème continu initial. Il reste cependant à déterminer les caractéristiques de la méthode ainsi développée, notamment l'unicité de l'éventuelle solution ou encore la stabilité numérique du schéma de résolution. Il est essentiel de trouver une estimation juste de l'erreur liée à la discrétisation et montrer que la méthode ainsi écrite converge, c'est-à-dire que l'erreur tend vers zéro si la finesse du maillage tend elle-aussi vers zéro.

Notons P_N l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à $N \in \mathbb{N}$ dans chaque direction spatiale. Dans la méthode des éléments spectraux, les fonctions de base sont construites dans P_N . Cette méthode englobe donc le cas limite des éléments finis où les polynômes sont, rappelons-le, de degré inférieur ou égal à deux. Cette description permet ainsi de décrire très précisément chacun des polynômes, tout en évitant de découper le domaine en un trop grand nombre d'éléments. La convergence vers la solution du problème est obtenue soit en augmentant le nombre d'éléments et en gardant fixe le degré polynomial (méthode souvent utilisée en éléments finis), soit en gardant fixe le nombre de sous-domaines et en augmentant le degré du polynôme. Dans la méthode des éléments spectraux, nous utilisons une combinaison de ces deux méthodes.

4.3.1 Formulation faible et polynômes d'interpolation

Commençons tout d'abord par définir les différents espaces de Sobolev nécessaires à l'écriture des formulations faibles et principalement l'espace de Hilbert $H^1(\Omega)$ et l'espace de Lebesgue $L^2(\Omega)$ associés à notre domaine d'étude $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ces espaces, nécessaires pour se placer dans les conditions d'utilisation du théorème de Lax-Milgram, assurent existence et unicité de la solution. L'espace $L^2(\Omega)$ est défini comme l'espace des fonctions mesurables et de carrés sommables sur Ω . Pour toute fonction $u \in L^2(\Omega)$ on définit une norme égale à :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par :

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) / \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n\},$$

et pour toute fonction $u \in H^1(\Omega)$, on peut définir la norme :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \left(|u(x)|^2 + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right) dx \right)^{1/2}.$$

La formulation faible de notre système consiste à chercher une solution $u \in H^1(\Omega)$ qui vérifie l'égalité :

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

où $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ et $L(\cdot)$ une forme linéaire sur $H^1(\Omega)$. Il s'agit désormais de trouver une approximation u_h de la solution exacte u du problème. Le polynôme d'interpolation de Lagrange de la solution u sera défini sur une grille construite à partir des racines du polynôme de Legendre. Pour ce faire, nous allons choisir un sous-espace affine V_h de $H^1(\Omega)$ constitué de fonctions polynomiales de Lagrange, définies sur chacun des éléments d'étude Ω . Ces fonctions d'interpolations d'ordre N , notées L_N , vérifient l'équation de Sturm-Liouville :

$$\frac{d}{dr} \left((1-r^2) \frac{dL_N(r)}{dr} \right) + N(N+1)L_N(r) = 0,$$

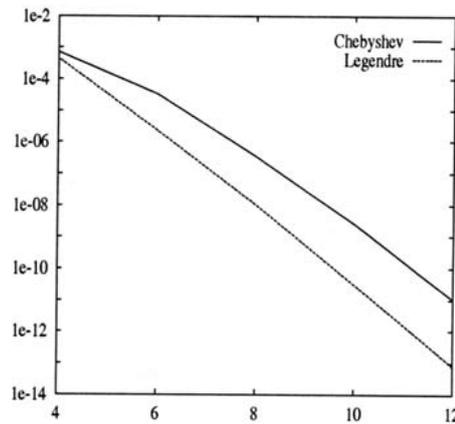


FIG. 4.1 – Comparaison entre les précisions de collocation de Legendre et Chebychev. Evolution de l'erreur en fonction du nombre de points de collocations pour le problème bidimensionnel type de Poisson $\nabla^2 u = -2\pi^2 \cos \pi x \cos \pi y$, muni de conditions aux limites homogènes en $x, y = \pm 1/2$, d'après [106].

et constituent une famille polynomiale orthogonale. Il n'existe pas d'expressions analytiques compactes donnant explicitement les polynômes L_N ; on peut cependant les exprimer soit à travers une formule de Rodrigues soit sous la forme d'une relation de récurrence :

$$\begin{aligned} L_0(r) &= 1, & L_1(r) &= r \\ (N+1)L_{N+1}(r) &= (2N+1)rL_N(r) - NL_{N-1}(r) & \forall N \geq 1. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Les points de collocations de Gauss-Lobatto-Legendre sont les racines de l'expression $(1-r^2)L'_N(r) = 0$, où L'_N est la dérivée du polynôme de Legendre de degré N . Un tel choix de points va nous permettre d'évaluer de façon très précise l'intégrale d'une fonction continue sur le support V_h . La formule d'intégration de Gauss-Lobatto-Legendre lie l'intégrale d'une fonction à la somme de ses valeurs munie d'un poids $w_i = 2/[N(N+1)L_N^2(r_i)]$, $\forall i \in \mathbb{N}$, selon la relation fondamentale :

$$\int_{\Omega} g d\Omega = \sum_{i=0}^N w_i g(r_i) \quad \forall g \in P_{2N-1}$$

et nous permet alors d'évaluer l'ensemble des grandeurs de la formulation variationnelle.

Remarque. Le choix selon lequel la famille de polynômes retenus n'était pas celle de Chebychev réside du fait que la décroissance de l'écart de la solution numérique à la solution réelle est moins rapide que lorsque la discrétisation est de type Gauss-Lobatto-Legendre [106]. Ce résultat a été vérifié par Touihri (figure 4.1) pour la résolution d'un problème elliptique avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes.

4.3.2 Définition des éléments isoparamétriques

Dans le cas où le domaine d'étude est carré, si on utilise des éléments de type P_N , les noeuds de la frontière de la grille sont effectivement sur la frontière du domaine même si on les calcule à partir d'un élément de référence. Par contre, si le bord est courbe, ce n'est plus vrai. L'utilisation d'éléments isoparamétriques va permettre de faire en sorte que tous les noeuds frontières soient effectivement sur le bord. Le principe de cette méthode est donc de transformer géométriquement un domaine courbe en un domaine carré par le biais de produits tensoriels traduisant des interpolations finies. Une description détaillée de la méthode avec des exemples bidimensionnels simples est proposée dans [106].

4.4 Les méthodes d'intégration temporelle

La physique qui entre en jeu dans les écoulements que nous considérons est non seulement tridimensionnelle mais aussi fortement instationnaire avec des comportements temporels souvent complexes. C'est pourquoi il est indispensable de disposer de schémas numériques stables et robustes en espace et en temps afin de caractériser précisément ces situations compliquées. Les problèmes linéaires qui découlent de la discrétisation temporelle et spatiale sont de si grande taille qu'il s'avère inévitable de recourir à une procédure de découpage ; une première résolution d'un champ de vitesse intermédiaire (à caractère non incompressible) est menée et sera ensuite projeté dans le sous-espace des fonctions solénoïdales.

4.4.1 Formulation vitesse-pression instationnaire

Nous considérons donc les équations incompressibles de Navier-Stokes décrivant l'écoulement instationnaire d'un liquide soumis à une force volumique \mathbf{f} :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (4.3a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (4.3b)$$

Cet ensemble d'équations est résolu avec les conditions aux limites et initiales appropriées qui s'écrivent respectivement comme des conditions homogènes de type Dirichlet pour la vitesse ($\mathbf{u} = 0$) et comme un champ de vitesse incompressible au départ de l'intégration temporelle :

$$\mathbf{u}(x, t = 0) = \mathbf{u}_0(x) \quad (4.4a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0. \quad (4.4b)$$

Le problème défini est bien posé. Nous souhaitons résoudre ce système sous sa formulation vitesse-pression [32] et appliquons pour cela l'opérateur divergence à l'équation (4.3a) qui permet d'obtenir, sous la contrainte locale (4.3b), une équation de Poisson pour la pression :

$$\nabla^2 p = -\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{f} \right), \quad (4.5)$$

munie de la condition aux limites

$$\mathbf{n} \cdot \nabla p = -\mathbf{n} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \mathbf{f} \right). \quad (4.6)$$

La difficulté majeure à modéliser le mouvement des particules fluides obéissant aux équations (4.3) réside dans la présence du terme d'advection non linéaire de transport. Ce dernier génère des bifurcations conduisant à des changements qualitatifs des solutions dans l'espace de phase, ainsi que des transitions et des scénarios turbulents. Nous allons donner dans le paragraphe qui suit une méthode de discrétisation temporelle originellement proposée par Karniadakis *et al.* [66] et qui a la vertu d'être particulièrement bien adaptée aux problèmes instationnaires de convection.

4.4.2 Méthode de projection

Une intégration de l'équation (4.3a) entre t^n et $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ donne :

$$\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n)} = - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \nabla p dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \nabla^2 \mathbf{u} dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{f} dt. \quad (4.7)$$

En commutant les opérateurs d'espace et de temps agissant sur la pression, on peut écrire :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \nabla p dt = \nabla \int_{t^n}^{t^{n+1}} p dt = \Delta t \nabla p^{(n+1)}, \quad (4.8)$$

de sorte que la pression $p^{(n+1)}$ assure la condition d'incompressibilité du champ de vitesse au nouveau pas de temps. Les termes linéaires seront approximés par un schéma implicite de type Adams-Moulton d'ordre k et le terme d'advection par un schéma explicite d'Adams-Bashforth d'ordre l .

A ce niveau de l'étude, nous décomposons les termes non-linéaires, les termes à divergence nulle et les termes visqueux en trois sous-problèmes distincts permettant de corriger l'estimation du terme non-linéaire. Pour cela, nous devons disposer de la solution de Poisson (4.5) munie de la condition de Neumann (4.6). Le schéma de découpage pourra s'écrire :

étape 1 évaluation d'un champ intermédiaire $\hat{\mathbf{u}}$ (prédiction) selon :

$$\hat{\mathbf{u}} = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \mathbf{u}^{(n-j)} - \Delta t \left[\sum_{j=0}^{l-1} \beta_j \mathbf{u}^{(n-j)} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(n-j)} - \mathbf{f}^{(n+1)} \right] \quad (4.9)$$

étape 2 restitution du caractère incompressible du champ de vitesse à travers le gradient de pression :

$$\hat{\hat{\mathbf{u}}} = \hat{\mathbf{u}} - \Delta t \nabla p^{(n+1)} \quad (4.10)$$

étape 3 ajout de la viscosité :

$$\gamma_0 \mathbf{u}^{(n+1)} = \hat{\hat{\mathbf{u}}} - \Delta t \nabla^2 \mathbf{u}^{(n+1)} \quad (4.11)$$

où $\alpha_i, \beta_i, \gamma_0$ sont des poids de développement donnés dans le tableau 4.1.

Ce schéma de découpage est bâti sur les hypothèses selon lesquelles le champ $\hat{\mathbf{u}}$ est incompressible et satisfait aux conditions limites inhomogènes de Dirichlet $\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}$, où \mathbf{g} est la condition limite du champ $\hat{\mathbf{u}}$ à la frontière du domaine d'étude. L'équation de Poisson reliant le champ $\hat{\mathbf{u}}$ à la pression, munie de sa condition aux limites, devient alors :

$$\nabla^2 p^{(n+1)} = \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{u}}}{\Delta t} \right) \quad (4.12)$$

$$\Delta t \nabla p^{(n+1)} \cdot \mathbf{n} = -(\mathbf{g} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{n} \quad (4.13)$$

ce qui n'assure pas la condition d'incompressibilité de l'écoulement sur la frontière. Afin de remédier à ces erreurs, les conditions aux limites portant sur la pression sont directement extraites de l'équation (4.6) sous la forme :

$$\mathbf{n} \cdot \nabla p^{(n+1)} = -\mathbf{n} \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \left(-\mathbf{u}^{(n-j)} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(n-j)} + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}^{(n-j)}) - \mathbf{f}^{(n+1)} \right) \right). \quad (4.14)$$

Cette décomposition a été appliquée et validée dans les géométries cylindriques par [107] et [111] dans le cas où la force volumique \mathbf{f} correspond au terme de flottaison pour un système assujéti à un gradient vertical de température. Il s'ensuit une équation supplémentaire traduisant la conservation de la chaleur au sein du fluide qui est résolue par un schéma similaire mais toutefois simplifié à celui de la quantité de mouvement. En effet, la température n'est plus contrainte à l'étape 2 du découpage, qui devient alors inutile. Notons enfin que l'intégration de cette équation de la chaleur a lieu en premier et permet d'avoir une estimation du terme de flottaison au temps $(n+1)$ au moment de résoudre l'équation de Navier-Stokes.

4.5 Modes normaux, dynamique linéaire et stabilité

Contrairement aux méthodes globales de stabilité (*e.g.* la méthode de l'énergie), la classe des perturbations à fluctuations infinitésimales est gouvernée par des équations linéaires, plus faciles à manipuler. Considérons à cet effet un régime \mathbf{q} permanent, c'est-à-dire un régime temporel asymptotique atteint,

poids	ordre 1	ordre 2	ordre 3
α_0	1	2	3
α_1	0	-1/2	-3/2
α_2	0	0	1/3
γ_0	1	3/2	11/6
β_0	1	2	3
β_1	0	-1	-3
β_2	0	0	1

TAB. 4.1 – Poids des développements aux différents ordres d'intégration en temps, d'après [66].

après extinction d'éventuels transitoires¹. Usuellement, cet état de base possède les mêmes propriétés de symétrie en temps et en espace que les contraintes appliquées. L'état de base vérifie un système de la forme :

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathcal{L} \cdot \mathbf{q} + \mathcal{N}(\mathbf{q}) = 0, \quad (4.15)$$

où $\mathcal{L} \cdot \mathbf{q} \equiv \nabla^2 \mathbf{q}$ et $\mathcal{N}(\mathbf{q}) \equiv -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{q}$. Ce régime permanent est observable s'il est stable vis-à-vis de perturbations infinitésimales. Soient \mathbf{q}' une autre solution et \mathbf{h} la petite perturbation (l'écart à l'équilibre) définie par :

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= \mathbf{q}' - \mathbf{q} \\ \mathbf{h} &\ll \mathbf{q}. \end{aligned}$$

Au premier ordre, l'évolution de \mathbf{h} est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{h}}{dt} &= \left(\mathcal{L} + \left. \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}} \right) \cdot \mathbf{h} \\ &= \mathcal{L}_{\mathcal{F}} \cdot \mathbf{h}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

En principe, la solution générale du problème linéarisé s'obtient par superposition de solutions élémentaires isolées par projection sur les vecteurs propres de $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$, si les valeurs propres ne sont pas dégénérées [75]. Dans ce cas là, l'opérateur linéaire peut toujours être écrit sous forme diagonale. L'évolution d'une superposition arbitraire $\mathbf{h} = \sum_n A_n X_n$, où A_n est le coefficient d'amplitude du mode X_n , s'examine sous forme de propriétés algébriques du problème linéarisé. Les valeurs propres peuvent être réelles (problème auto-adjoint) ou apparaître par paires de valeurs complexes conjuguées. Dans ce cas-ci, la dépendance temporelle de l'amplitude A_n est donnée par un taux de croissance σ_n qui pilote le caractère stable ($\sigma_n < 0$), instable ($\sigma_n > 0$) ou marginal ($\sigma_n = 0$) du mode et par une pulsation ω_n caractérisant son caractère stationnaire ($\omega_n = 0$) ou oscillatoire ($\omega_n \neq 0$). Mathématiquement, on pourra écrire :

$$A_n(t) = e^{\sigma_n t} (\cos \omega_n t + i \sin \omega_n t).$$

Une instabilité linéaire se développe dès lors qu'au moins un mode est instable. Les modes propres peuvent être ordonnés par valeur décroissante de leur taux de croissance; le mode le plus instable est souvent appelé le mode le plus dangereux (ou dominant).

4.6 Caractérisation et extraction des modes propres dominants

La méthode ici utilisée pour le calcul des valeurs propres les plus instables et de leurs vecteurs propres associés est la méthode d'Arnoldi. La méthode d'Arnoldi est une méthode de projection basée sur les sous-espaces de Krylov qui permet de déterminer le spectre d'une matrice de très grande taille par construction itérative de matrices de Hessenberg.

¹La distinction entre transitoire et régime permanent suppose l'existence d'une dissipation qui garantisse la perte de mémoire des conditions initiales.

4.6.1 Les méthodes de projection

Une méthode de projection consiste à réduire la taille du problème initial en le projetant sur un sous-espace K orthogonalement au sous-espace L de départ. On résout ensuite le problème projeté et on réintègre la solution trouvée dans l'espace de départ en la considérant comme solution approchée du problème initial de manière itérative. Le sous-espace K de Krylov d'ordre m généré par la matrice A et le vecteur v est l'espace

$$K_m = \{v, Av, A^2v, \dots, A^{m-1}v\}.$$

Hormis la méthode d'Arnoldi, les méthodes orthogonales basées sur les sous-espaces de Krylov sont très courantes ; on peut citer la méthode des gradients conjugués, GMRES ou BICG.

4.6.2 Processus d'Arnoldi adapté au problème

ARPACK (ARNoldi PACKage) est une bibliothèque de sous-programme Fortran77 permettant de rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de grosses matrices. Elle est basée sur les algorithmes itératifs de Lanczos/Arnoldi. La méthode d'Arnoldi a été utilisée par Bergeon *et al.* [11] pour l'étude de la convection de Bénard-Marangoni et reprise par Touihri *et al.* [107] pour des études tridimensionnelles en cavités cylindriques. Le but étant d'extraire un nombre déterminé de valeurs propres de l'opérateur linéaire du système (4.16), nous devons fournir explicitement l'expression de $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$. La méthode d'Arnoldi ne demande pas de connaître explicitement la matrice Jacobienne au voisinage du vecteur q_0 , mais seulement de connaître le résultat de son action sur un vecteur perturbation. Comme cet opérateur est directement évalué sur \mathbf{h} , une astuce pour estimer sa valeur est de recourir à un jeu d'écriture. En effet, le système (4.16) se résout formellement sous la forme :

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{h}(0) e^{\mathcal{L}_{\mathcal{F}}t}.$$

La méthode d'Arnoldi appliquée au système discrétisé permet alors de calculer la valeur propre λ de $e^{\mathcal{L}_{\mathcal{F}}\Delta t}$. La valeur propre λ_L de la Jacobienne $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ est alors simplement obtenue en calculant $\lambda_L = \ln(\lambda)/\Delta t$.

La manière dont la méthode d'Arnoldi est implémentée suit l'idée originellement proposée par Mamun et Tuckerman [74] pour l'étude des écoulements de Couette. En se reportant au schéma général de la discrétisation temporelle à l'ordre 1, où les termes linéaires sont estimés au temps $(n+1)$ et les autres termes au temps (n) , les valeurs aux points du maillage du champ \mathbf{h} vérifient :

$$\frac{\mathbf{h}^{(n+1)} - \mathbf{h}^{(n)}}{\Delta t} = \mathcal{L} \cdot \mathbf{h}^{(n+1)} + \left. \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}, \beta} \cdot \mathbf{h}^{(n)}. \quad (4.17)$$

Cette version est la version linéarisée de l'équation d'évolution à laquelle obéit le vecteur propre. Elle peut aussi s'écrire :

$$\mathbf{h}^{(n+1)} = (\mathcal{I} - \Delta t \mathcal{L})^{-1} \left[\mathcal{I} + \Delta t \left. \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}, \beta} \right] \mathbf{h}^{(n)}, \quad (4.18)$$

où \mathcal{I} est la matrice unité. La Jacobienne au voisinage du vecteur \mathbf{q} que l'on cherche à estimer va demander de connaître l'image de son application sur un vecteur. Or, la linéarisation de (4.18) peut s'écrire :

$$\delta \mathbf{h}^{(n+1)} = \left[\mathcal{I} + \Delta t \left(\mathcal{L} + \left. \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}, \beta} \right) \right] \mathbf{h}^{(n)} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (4.19)$$

$$\approx e^{\mathcal{L}_{\mathcal{F}}\Delta t} \mathbf{h}^{(n)}. \quad (4.20)$$

Nous fournissons ainsi l'image d'un vecteur par application de la fonction exponentielle $e^{\mathcal{L}_{\mathcal{F}}\Delta t}$ à l'aide du schéma temporel. Cette image correspond à un pas de temps de la discrétisation du système linéarisé. Cela nous permettra ainsi d'obtenir les valeurs propres de l'opérateur $e^{\mathcal{L}_{\mathcal{F}}\Delta t}$. Afin d'assurer une bonne précision de nos calculs, nous avons fixé le pas de temps à $\Delta t = 10^{-5}$ et demandé en général le calcul des 10 valeurs propres les plus instables.

4.7 Application à la recherche directe des seuils de bifurcation

Lorsque la partie réelle d'une valeur propre, soit le taux d'amplification, change de signe, on identifie un point de bifurcation. La détermination précise de ce dernier peut se faire à travers une méthode de Newton, particulièrement bien adaptée pour déterminer rapidement (vitesse de convergence quadratique des approximations successives) ces points de transition. Une fois ce point connu, nous pourrions modifier un des autres paramètres du problème et reconverger vers la nouvelle solution rapidement, la solution convergée ayant servi de prédicteur pour le nouveau système à résoudre.

Au point de bifurcation, qui correspond à une solution stationnaire \mathbf{q} de notre problème, la Jacobienne est singulière vis-à-vis d'un vecteur propre critique \mathbf{h} (réel ou complexe) dont nous fixons l'une des composantes pour que ce vecteur ne soit pas identiquement nul. En notant par \mathbf{e}_l^T la transposée du lème vecteur unitaire, la recherche d'un point de bifurcation oscillatoire de pulsation ω se résoud par :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{q}, \beta) + \mathcal{L} \cdot \mathbf{q} &= 0, \\ [\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \beta) + \mathcal{L}] \mathbf{h}_r + \omega \mathbf{h}_i &= 0, \\ [\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \beta) + \mathcal{L}] \mathbf{h}_i - \omega \mathbf{h}_r &= 0, \\ (\mathbf{h}_r)_l - k_1 &= 0, \\ (\mathbf{h}_i)_l - k_2 &= 0, \end{aligned} \quad (4.21)$$

et chaque pas de Newton est donné par :

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \mathcal{N}_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \beta) + \mathcal{L} & 0 & 0 & \mathcal{N}_{\beta}(\mathbf{q}, \beta) & 0 \\ \mathcal{N}_{\mathbf{q},\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \beta) \mathbf{h}_r & \mathcal{N}_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \beta) + \mathcal{L} & \omega & \mathcal{N}_{\mathbf{q},\beta}(\mathbf{q}, \beta) \mathbf{h}_r & \mathbf{h}_i \\ \mathcal{N}_{\mathbf{q},\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \beta) \mathbf{h}_i & -\omega & \mathcal{N}_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \beta) + \mathcal{L} & \mathcal{N}_{\mathbf{q},\beta}(\mathbf{q}, \beta) \mathbf{h}_i & -\mathbf{h}_r \\ 0 & \mathbf{e}_l^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{e}_l^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{q} \\ \delta \mathbf{h}_r \\ \delta \mathbf{h}_i \\ \delta \beta \\ \delta \omega \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} \mathcal{N}(\mathbf{q}, \beta) + \mathcal{L} \cdot \mathbf{q} \\ [\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \beta) + \mathcal{L}] \mathbf{h}_r + \omega \mathbf{h}_i \\ [\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \beta) + \mathcal{L}] \mathbf{h}_i - \omega \mathbf{h}_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &\leftarrow \mathbf{q} + \delta \mathbf{q}, \\ \mathbf{h}_r &\leftarrow \mathbf{h}_r + \delta \mathbf{h}_r, \\ \mathbf{h}_i &\leftarrow \mathbf{h}_i + \delta \mathbf{h}_i, \\ \beta &\leftarrow \beta + \delta \beta, \\ \omega &\leftarrow \omega + \delta \omega. \end{aligned}$$

Dans ce système, $\mathcal{N}_{\mathbf{q}} = \partial \mathcal{N} / \partial \mathbf{q}$ est la Jacobienne de \mathcal{N} par rapport à \mathbf{q} , $\mathcal{N}_{\beta} = \partial \mathcal{N} / \partial \beta$ la Jacobienne par rapport à β , $\mathcal{N}_{\mathbf{q},\mathbf{q}} = \partial^2 \mathcal{N} / \partial \mathbf{q}^2$ la Jacobienne d'ordre 2 par rapport à \mathbf{q} et $\mathcal{N}_{\mathbf{q},\beta} = \partial^2 \mathcal{N} / \partial \mathbf{q} \partial \beta$ est la Jacobienne de \mathcal{N} par rapport à \mathbf{q} et β .

4.8 Variation de l'amplitude de l'instabilité avec la distance au seuil

L'analyse linéaire que nous venons de définir nous renseigne sur la valeur du seuil et sur la forme des solutions au voisinage de ce dernier. Dans le domaine faiblement non-linéaire, ce sont les amplitudes d'équilibre de la vitesse qui sont étudiées : les termes non linéaires sont traités comme étant des perturbations au système dynamique. Lorsque le mode critique est amplifié, toute perturbation infligée pour provoquer un éloignement de l'état initial ne peut plus être stabilisée par les mécanismes amortisseurs. Dans le cas général où la fonctionnelle \mathcal{F} est d'ordre n , une bifurcation locale a lieu dès lors qu'au moins une des valeurs propres de la Jacobienne a une valeur positive. Cette bifurcation peut être stationnaire ou oscillatoire. Le développement au troisième ordre du système dynamique peut s'écrire sous la forme :

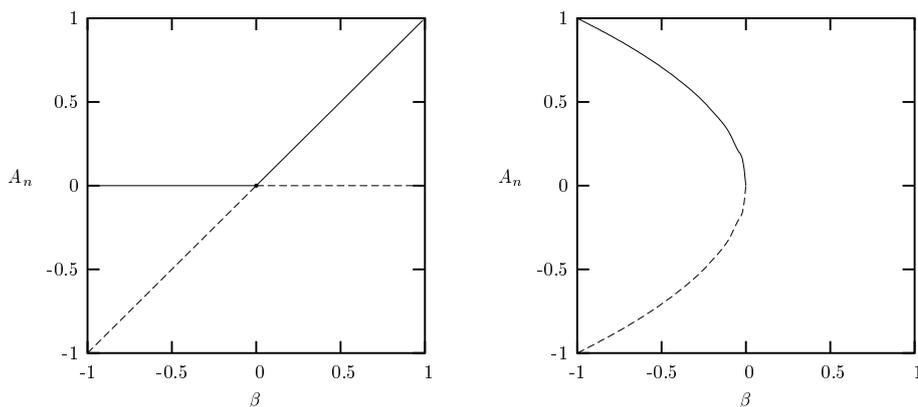


FIG. 4.2 – Exemples de situations pour une bifurcation trans-critique (à gauche) et un noeud-col (à droite). Les états stables (en traits pleins) deviennent instables (en pointillés) après le franchissement du point de bifurcation.

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \mathcal{L}_{\mathcal{F}} \cdot \mathbf{h} + \mathcal{N}_{\mathcal{F}}^2(\mathbf{h}, \mathbf{h}, \beta) + \mathcal{N}_{\mathcal{F}}^3(\mathbf{h}, \mathbf{h}, \mathbf{h}, \beta),$$

où les modes normaux sont exprimés sous la forme $\mathbf{h} = \sum_n A_n X_n$.

Nous allons présenter les grandes classes de bifurcations stationnaires en présentant les amplitudes des modes stationnaires.

Bifurcation noeud-col. Une première grande classe des équations d'amplitudes s'écrit sous la forme

$$\frac{dA_n}{dt} = \beta + A_n^2.$$

Il est clair que seules les valeurs négatives ou nulles du forçage engendrent un point d'équilibre. Lorsque $\beta < 0$, il coexiste deux solutions opposées $\pm\sqrt{-A_n}$, respectivement stables et instables, tandis que pour $A_n = 0$, un seul point d'équilibre est observé. Ce point n'est plus hyperbolique et on parle alors de noeud-col fixe. Une bifurcation noeud-col est une bifurcation locale où les points fixes se collisionnent et s'annihilent mutuellement (graphique de droite de la figure 4.2). Cette bifurcation est souvent associée aux phénomènes d'hystérésis. Au franchissement d'un noeud-col, le système conserve ses symétries.

Bifurcation trans-critique. La forme normale d'une bifurcation trans-critique s'écrit :

$$\frac{dA_n}{dt} = \beta A_n - A_n^2.$$

Cette équation possède deux points fixes en $A_n = 0$ et $A_n = \beta$. Lorsque le paramètre β est négatif, le point fixe en $A_n = 0$ est stable et le point $A_n = \beta$ instable. Pour $\beta > 0$, c'est le point $A_n = 0$ qui devient instable et $A_n = \beta$ stable. La bifurcation a donc lieu en $\beta = 0$, assurant un échange de stabilité. Comme le montre le graphique de gauche de la figure 4.2, la branche des solutions bifurquées traverse la branche de base $A_n = 0$; une telle bifurcation se manifeste dans les systèmes ne brisant pas de symétries à la bifurcation.

Bifurcation fourche. Les systèmes brisant certaines symétries lors de la bifurcation (comme la configuration de Rayleigh-Bénard où la symétrie haut/bas est toujours brisée au déclenchement du mouvement) répondent à des équations du type :

$$\frac{dA_n}{dt} = \beta A_n \pm A_n^3.$$

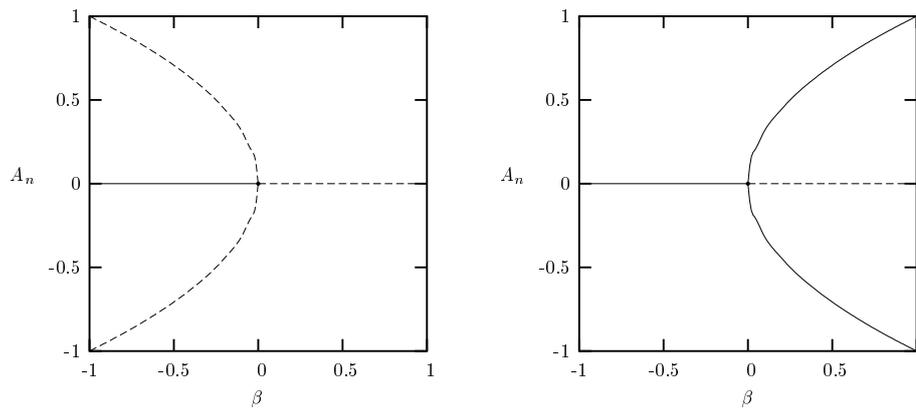


FIG. 4.3 – Exemple de situation pour une bifurcation fourche, sous-critique à gauche et super-critique à droite. Les solutions instables sont en pointillés tandis que les solutions stables sont en traits pleins.

Dans le cas où le signe devant le terme cubique est positif (resp. négatif), on est en présence d'une bifurcation fourche sous-critique (resp. super-critique). Dans le cas sous-critique, pour $\beta < 0$ l'équilibre en $A_n = 0$ est stable et il existe deux équilibres instables en $A_n = \pm\sqrt{-\beta}$ et pour $\beta > 0$ le seul équilibre en $A_n = 0$ est instable. Dans le cas super-critique, pour les valeurs négatives de β , il existe un point d'équilibre stable en $A_n = 0$. Pour $\beta > 0$, il existe un équilibre instable en $A_n = 0$ et deux états stables en $A_n = \pm\sqrt{\beta}$ (figure 4.3). Le saut vers la branche qui bifurque s'accompagne d'une perte de symétrie du système.

Les résultats présentés permettent de dégager de manière explicite les comportements majeurs se produisant à la suite d'une bifurcation. Ils sont obtenus à l'aide de développements en série tronqués et sont de fait valables à proximité des seuils, d'où la dénomination d'analyse faiblement non linéaire. Lorsque l'on s'éloigne davantage des points de bifurcations, une méthode consistante permettant de bien prendre en considération les phénomènes non-linéaires doit être envisagée ; nous présentons ci-dessous la méthode de continuation qui a la vertu d'être particulièrement bien adaptée aux phénomènes dynamiques auxquels nous allons nous intéresser.

4.9 La technique de continuation

La méthode de continuation a pour but de tracer les courbes de réponses du système dynamique pour une variation finie du paramètre β de contrôle. Ainsi, nous disposons de l'ensemble des branches thermodynamiques du système pour une certaine gamme de ces paramètres, ce qui permet une étude dynamique complète. Le tracé des solutions par continuation repose en général sur la recherche des états stationnaires de \mathcal{F} par itérations de Newton. Un algorithme de prédiction/correction, où le prédicteur fournit une estimation de la solution à β^{p+1} (à partir des solutions déjà calculées à β^p ou avant), qui est ensuite améliorée par le correcteur permet d'obtenir la solution recherchée. Chaque couple de prédicteur et correcteur constitue donc une technique de continuation qui dépend du choix de la paramétrisation envisagée.

4.9.1 Prédiction

Pour tracer la courbe de réponse, on peut calculer la solution pour un ensemble de valeurs de β fixé : on parle alors de continuation séquentielle. Son inconvénient est qu'elle ne permet pas le suivi de la courbe lorsque celle-ci se retourne (*e.g.* au franchissement d'un noeud-col). Une stratégie pour remédier à ce problème est de recourir à une méthode de type pseudo arclength [67, 11] qui lie le paramètre d'avancement de la courbe de réponse à la contrainte (figure 4.4). La méthode que nous avons utilisée est une méthode de paramétrisation locale qui fait intervenir un certain paramètre de choix comparant les

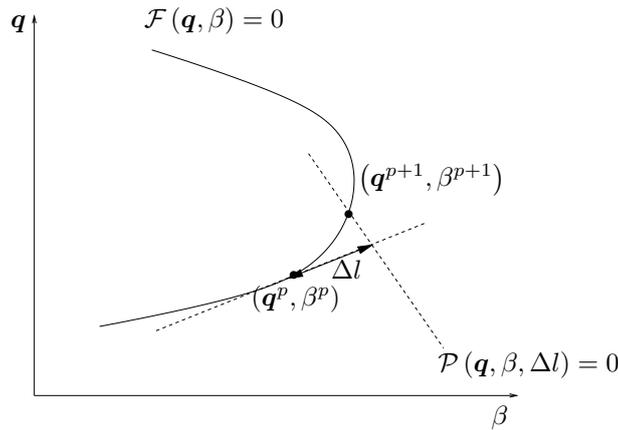


FIG. 4.4 – Méthode de continuation de type pseudo arclength.

variations relatives de vitesse aux variations relatives du paramètre de continuation.

Le prédicteur est un algorithme qui permet de prédire une estimation des points $(\mathbf{q}^{p+1}, \beta^{p+1})$ de la solution recherchée, à partir des solutions trouvées précédemment. L'estimation fournie par le prédicteur est alors prise comme premier itéré dans le processus incrémental, ce qui assure une meilleure convergence. Une grande famille de prédicteurs est basée sur l'interpolation polynomiale. Ces prédicteurs requièrent le stockage des $N + 1$ derniers points calculés, si on désigne par N le degré du polynôme d'interpolation. Le principe est de déterminer les coefficients vectoriels du polynôme qui passe par ces $N + 1$ points, l'interpolation étant réalisée sur les abscisses β^{p-N+i} ($i = 0, N$). Le point prédit sera alors l'extrapolation suivant cette courbe polynomiale, se situant à l'abscisse β^{p+1} . Pour les polynômes de Lagrange de degré N (équation (4.2)) l'estimation sera :

$$\mathbf{q}^{p+1} = \sum_{i=0}^N L_i \mathbf{q}^{p-N+i} \quad (4.23)$$

$$\beta^{p+1} = \sum_{i=0}^N L_i \beta^{p-N+i}. \quad (4.24)$$

En pratique, il est déconseillé d'utiliser des polynômes d'ordre élevé, pour des raisons de stockage et de détérioration de l'approximation (phénomène de Runge [41]). Une interpolation quadratique, voire linéaire suffit en général à obtenir une bonne prédiction de la solution.

4.9.2 Correction

L'estimation fournie par un prédicteur ne satisfait pas en général l'équation de la courbe de réponse. Il est alors nécessaire de la corriger. La correction n'est pas à proprement dit une méthode ou un algorithme, mais plutôt une stratégie pour gérer l'équation de paramétrisation. La correction correspond soit à un solveur soit à un algorithme de minimisation qui tend à résoudre un système éventuellement augmenté d'une équation de paramétrisation. Parmi les grandes classes de correcteurs, nous retrouvons le correcteur de Newton qui se ramène à une succession de résolutions de systèmes linéaires. Les correcteurs par minimisation au sens des moindres carrés présentent l'avantage de ne pas nécessiter d'équations de paramétrisation. Dans les deux cas de figure tout de même, une bonne adaptation du pas de continuation est primordiale. En effet, les valeurs prises pour ces incréments peuvent d'un côté s'avérer être trop grandes et ainsi donner une mauvaise approximation initiale (trop éloignée de la solution exacte) et par conséquent nécessiter de nombreuses itérations avant de converger, et d'un autre côté, un pas trop faible conduit à un nombre de points à calculer excessif. Afin d'optimiser au mieux le temps de calcul, l'emploi d'un pas variable est souhaitable.

4.9.3 Implémentation de la méthode

La méthode de continuation retenue est basée sur une correction par méthode de Newton d'une extrapolation linéaire voire quadratique (selon l'avancement le long de la trajectoire) d'une solution convergée. La présence de bifurcations secondaires le long d'une trajectoire permet également de construire des prédicteurs pour aller vers ces branches secondaires. Ces prédicteurs peuvent être en effet estimés comme la superposition de la solution au point de bifurcation et du vecteur propre critique associé modulo un certain poids. Le suivi des nouvelles branches de solutions peut alors être à son tour réalisé. La paramétrisation utilise un taux d'avancement relatif au nombre d'itérations mis par le solveur de Newton pour converger, ce taux d'avancement pouvant aussi être réduit en cas d'échec de convergence dû par exemple à la présence de points de rebroussement sur la courbe. C'est une paramétrisation sélective qui consiste soit à fixer une composante de \mathbf{q} , soit β . Au voisinage d'un point de rebroussement, la variation relative du taux $\delta\beta/\beta$ entre deux itérations successives devient petite par rapport à la variation relative de vitesse $\delta\mathbf{q}/\mathbf{q}$ en un point donné. Tant que le rapport de ces taux ne descend pas en dessous d'une certaine valeur, la correction de l'extrapolation se fait à β constant ; dans le cas contraire, une des inconnues du problème (celle à plus grande variation par exemple) est fixée, laissant le paramètre de continuation devenir à son tour une inconnue du problème.

L'adaptation de la méthode de Newton au code de discrétisation temporelle présente un léger remaniement d'écriture des équations initiales d'évolution. En effet, pour faciliter, voire contourner le calcul et le stockage de la matrice Jacobienne, un préconditionnement adapté s'impose. Nous avons repris l'inspiration de Mamun et Tuckerman [74]. Afin d'intégrer la méthode de Newton, nous considérons le schéma modifié suivant :

$$\frac{\mathbf{q}^{(n)} - \mathbf{q}^{(n-1)}}{\Delta t} = \mathcal{N}(\mathbf{q}^{(n)}, \beta) + \mathcal{L} \cdot \mathbf{q}^{(n+1)}, \quad (4.25)$$

qui peut se réécrire sous la forme :

$$\mathbf{q}^{(n+1)} - \mathbf{q}^{(n)} = -\mathcal{L}^{-1} \left[\mathcal{N}(\mathbf{q}^{(n)}, \beta) + \mathcal{L} \cdot \mathbf{q}^{(n)} \right]. \quad (4.26)$$

Considérons à cet effet le système sous sa forme stationnaire, soit

$$\mathcal{N}(\mathbf{q}, \beta) + \mathcal{L} \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (4.27)$$

que nous souhaitons résoudre avec la méthode de Newton. Chaque pas de Newton peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \mathbf{q}} \Big|_{\mathbf{q}, \beta} + \mathcal{L} \right] \delta \mathbf{q} &= -[\mathcal{N}(\mathbf{q}, \beta) + \mathcal{L} \cdot \mathbf{q}], \\ \mathbf{q} &\leftarrow \mathbf{q} + \delta \mathbf{q}. \end{aligned}$$

Afin d'accroître la convergence de l'inversion itérative, nous résolvons plutôt

$$-\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \mathbf{q}} \Big|_{\mathbf{q}, \beta} + \mathcal{L} \right] \delta \mathbf{q} = -(-\mathcal{L}^{-1}) [\mathcal{N}(\mathbf{q}, \beta) + \mathcal{L} \cdot \mathbf{q}], \quad (4.28)$$

où l'opérateur $-\mathcal{L}^{-1}$ se révèle comme préconditionneur (*i.e.* inverse approximatif de $\mathcal{N} + \mathcal{L}$) du système. Si nous calculons le système linéaire (4.28) par une méthode itérative de gradient conjugué, nous n'avons besoin que de fournir sa partie de droite ainsi que le résultat du produit matrice-vecteur qui constitue la partie de gauche. En se référant à l'équation (4.26), nous voyons que la partie de droite de (4.28) peut être obtenue en effectuant un pas de temps et le produit matrice-vecteur en effectuant un pas de temps du système linéarisé. La matrice Jacobienne n'est ainsi jamais stockée ou construite. L'algorithme GMRES de la librairie NSPCG a été utilisé comme solveur itératif [68]. Bien que cet algorithme soit gourmand en mémoire, il s'est avéré bien plus robuste que l'algorithme BI-CGSTAB déjà utilisé par Touihri [107].

Regardons enfin le système à résoudre lorsque la paramétrisation détecte un rebroussement. La valeur du paramètre est considérée comme une variable supplémentaire et l'une des composantes de \mathbf{q} est fixée.

La différentiation du système augmenté amène à chaque itération de Newton à résoudre l'inversion de :

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \mathbf{q}} \Big|_{\mathbf{q}, \beta} + \mathcal{L} \right] \delta \mathbf{q} - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \beta} \Big|_{\mathbf{q}, \beta} \right] \delta \beta &= -(-\mathcal{L}^{-1}) [\mathcal{N}(\mathbf{q}, \beta) + \mathcal{L} \cdot \mathbf{q}], \\ \mathbf{q} &\leftarrow \mathbf{q} + \delta \mathbf{q}, \\ \beta &\leftarrow \beta + \delta \beta. \end{aligned}$$

Le second membre de la partie de gauche de cette égalité peut être à son tour résolu par une modification du schéma d'intégration en temps du système dynamique.

4.10 Application et validation des méthodes numériques

L'idée principale des méthodes de fractionnement est d'utiliser simultanément des schémas explicites, adaptés aux problèmes de transports convectifs (mais qui demanderaient en revanche des pas de temps très petits pour capter l'ensemble des phénomènes diffusifs présents), ainsi que des schémas implicites adaptés aux phénomènes diffusifs (mais qui au contraire deviendraient très coûteux en temps de calcul pour modéliser les termes non linéaires). Des comparaisons entre solveurs numériques utilisant ou non des méthodes de fractionnements temporelles ont été menées par Leriche [72, 73] et montrent que bien que les aspects théoriques préconisent une convergence moins évidente pour le modèle fractionné, les expériences confirment une meilleure précision numérique de ce dernier.

Il s'agit désormais de valider notre méthode de fractionnement sur notre système MHD. Rappelons que cette méthode présente des résultats très satisfaisants pour les géométries rectangulaires [11] et cylindriques [107] lorsque les mouvements convectifs générés restent modestes, notamment pour simuler le développement de l'instabilité de Rayleigh-Bénard ou de Rayleigh-Bénard-Marangoni. Notre système étant toutefois un système en rotation, le brassage au sein de la cavité est plus important et les premières bifurcations susceptibles d'émerger sont oscillatoires. Avant d'exploiter les résultats relatifs à la validation de la discrétisation spatio-temporelle de notre code numérique, nous exposons rapidement les résultats numériques obtenus pour le calcul des potentiels électriques. Ces derniers sont indépendants du temps, la précision de leur résolution numérique ne dépend que de la discrétisation spatiale.

4.10.1 La force de Laplace

Un point culminant dans notre validation numérique est en effet lié à la force volumique \mathbf{f} de Laplace. Celle-ci présente l'avantage de pouvoir s'exprimer sous la forme d'une solution analytique simple lorsque l'on admet que les courants induits ne sont pas influencés par le champ de vitesse. L'écriture mathématique de cette force fait alors intervenir des fonctions de Bessel dont la convergence est rapidement assurée. Le modèle général complet nécessite quant à lui la résolution d'un problème elliptique, fonction des potentiels électriques et de la vitesse \mathbf{u} de l'écoulement et dont les conditions aux limites sont imposées par des gradients. Afin de se placer dans des conditions similaires à la solution analytique, nous supprimons la contribution cinématique lors de la résolution des équations des potentiels électriques, ce qui, mathématiquement, revient à résoudre une équation de deuxième ordre pour les potentiels. A titre de comparaison, nous donnons dans le tableau 4.2 quelques valeurs numériques de la force de Laplace calculée analytiquement et numériquement.

La résolution de la force motrice de Laplace montre que pour une discrétisation spatiale fine, l'approximation numérique concorde parfaitement avec le modèle analytique, en particulier dans le cœur du système. De façon générale, lorsqu'une solution est constituée d'un ensemble d'harmoniques, la convergence de cette solution est moins pertinente aux frontières du système. Cela dit, l'erreur relative maximale de notre code numérique n'excède pas le millième, ce qui montre le bon comportement de la résolution de \mathbf{f} . Par ailleurs, le choix selon lequel la cavité choisie est plutôt aplatie ($Az = H/D = 0.5$) permet de mieux cibler les erreurs numériques liées aux phénomènes de recirculation électrique près des bords.

$N_{xy} \times N_z = 405 \times 10$			$N_{xy} \times N_z = 845 \times 16$		
modèle analytique	modèle numérique	rayon	modèle analytique	modèle numérique	rayon
0.103424493	0.103367195	0.50	0.103424493	0.103432711	0.50
0.055757862	0.055756406	0.38	0.062965568	0.062965537	0.40
0.025340869	0.025340789	0.24	0.013534583	0.013534581	0.15
0.003601844	0.003601848	0.05	0.004827200	0.004827200	0.06

$N_{xy} \times N_z = 1445 \times 16$			$N_{xy} \times N_z = 1445 \times 30$		
modèle analytique	modèle numérique	rayon	modèle analytique	modèle numérique	rayon
0.103424493	0.103431145	0.50	0.103424493	0.103424011	0.50
0.056276942	0.056276930	0.38	0.056276942	0.056276941	0.38
0.014159307	0.012261638	0.14	0.010264436	0.010264436	0.12
0.005436407	0.005436407	0.07	0.003693557	0.003693557	0.05

TAB. 4.2 – Validation numérique de la force de Laplace : comparaison des modèles analytique et numérique en quelques points caractéristiques de la section à mi-hauteur pour un rapport de forme $Az = H/D = 0.5$ et différents maillages.

Maillage	(245 × 10)	(320 × 10)	(320 × 12)
$m = 0, Ma = 0, Bi = 100, A = 1.5$	1212.6346	1212.6259	1212.6255
$m = 0, Ma = 0, Bi = 1, A = 1.5$	885.28735	885.28721	885.28443
$m = 1, Ma = 100, Bi = 1, A = 1.5$	1585.7177	1585.7091	1585.7119
$m = 1, Ma = 100, Bi = 1, A = 0.5$	3106.0106	3106.0240	3106.1205

TAB. 4.3 – Nombre de Rayleigh critique correspondant aux seuils primaires pour différentes valeurs des paramètres. Validation du maillage.

4.10.2 Convection thermique

Afin de modéliser les écoulements de convection avec surface libre, nous avons utilisé un maillage comprenant $(N_{xy} \times N_z) = (336 \times 10)$ points de collocation, où N_{xy} représente le nombre de points dans le plan (x, y) et N_z le nombre de points le long de la verticale du cylindre d'étude. Comme le montre le tableau 4.3, ce maillage permet une simulation précise des seuils primaires de convection pour l'ensemble des valeurs des paramètres que nous allons considérer. En comparant nos résultats avec ceux présents dans la littérature, nous trouvons un très bon accord des valeurs avancées, notamment avec les résultats récents de Dauby *et al.* [29] (tableau 4.4).

4.10.3 Le système magnétohydrodynamique

Nous choisissons un rapport de forme $Az = H/D = 1$ et considérons dans un premier temps l'écoulement isotherme généré par un nombre de Taylor magnétique modéré $Tm = 10^4$. Ce choix partic-

Auteur	Vrentas [113]	Dauby [29]	présent travail
$m = 0, Ma = 0, Bi = 0.1, A = 1$	1565.9	1426.2	1426.0
$m = 0, Ma = 0, Bi = 1, A = 1$	1628.2	1482.1	1481.8

TAB. 4.4 – Nombre de Rayleigh critique correspondant aux seuils primaires pour différentes valeurs des paramètres du problème. Validation bibliographique.

grandeur	ordre 1			ordre 3
	$\Delta t = 10^{-1}$	$\Delta t = 10^{-2}$	$\Delta t = 10^{-3}$	$\Delta t = 10^{-5}$
U_{\max}	16.7002782	16.7002788	16.7002789	16.7002790
W_{\max}	2.68992170	2.68992068	2.68992051	2.68992060
U_j	-6.51975965	-6.5197602	-6.5197603	-6.5197603
W_j	-0.70975370	-0.7097531	-0.7097530	-0.7097531

TAB. 4.5 – Comparaison des différentes grandeurs cinématiques (valeurs en un point j donné et valeurs maximales) pour un rapport de forme $Az = H/D = 1$ et $Tm = 10^4$ pour différents ordres du schéma en temps et différents pas de temps Δt ($N_{xy} \times N_z = 1445 \times 50$).

grandeur	ordre 3			
	405×10	845×20	845×30	1445×50
U_{\max}	16.7002292	16.7002789	16.7002777	16.7002790
W_{\max}	2.5445557	2.67895396	2.68284461	2.68992060

TAB. 4.6 – Comparaison des différentes grandeurs cinématiques maximales pour un rapport de forme $Az = H/D = 1$ et $Tm = 10^4$ pour un pas de temps $10^{-5} \leq \Delta t \leq 10^{-4}$ ajusté selon le maillage (schéma en temps à l'ordre 3).

ulier réside dans le fait qu'une seule solution est obtenue pour cette configuration, évitant de fait toute ambiguïté qu'aurait engendrée la proximité d'autres solutions stables voisines. Le code spectral est utilisé pour différents ensembles de paramètres algorithmiques (pas de temps, nombre de points de discrétisation, ordre en temps du schéma) et les comparaisons portent sur les grandeurs cinématiques maximales ou en des points particuliers de la cavité. Le critère de convergence utilisé est basé sur la différence de deux termes successifs normalisée par le pas de temps.

L'ordre 1, peu précis et en pratique assez peu utilisé pour les évolutions temporelles, témoigne ici d'une assez bonne efficacité pour la recherche de solutions stationnaires stables. D'après le tableau 4.5, la correction apportée par la petitesse du pas de temps reste assez peu significative. En effet, en inspectant les valeurs de la variable locale U_j de vitesse en un point arbitraire du maillage, on constate que l'écart relatif reste inférieur à 10^{-7} . L'ordre 3 en temps du schéma numérique souligne la bonne convergence des résultats d'ordre 1. Ces résultats, qui sont basés sur un maillage relativement fin (1445×50 noeuds), montrent que lorsqu'un état stationnaire unique existe, un simple schéma du premier ordre à petit pas de temps suffit. Cependant, lorsque le nombre de Taylor magnétique est augmenté, un ensemble de solutions stables, stationnaires et oscillatoires coexistent et l'ordre 1 ne permet plus de reproduire de manière satisfaisante les transitions vers les solutions ainsi que les solutions oscillatoires. Il paraît alors utile d'utiliser le schéma à l'ordre 3 dont le tableau 4.6 montre l'évolution de la solution en fonction de la taille du maillage.

4.11 Couplages multiphysique et thermomécanique

Une simulation numérique du procédé a été développée et implémentée dans les codes de calcul de COMSOL MULTIPHYSICS par le biais de COMSOL SCRIPT. Ceci permet le calcul du couplage thermique-dynamique en régime stationnaire. L'objectif est de réduire les temps de calculs de ces types de couplages par rapport au code spectral de calcul. La géométrie d'étude et le maillage, ainsi que les équations aux

conditions limites, sont directement générés sur l'interface java de COMSOL MULTIPHYSICS ; le suivi par continuation des solutions, ainsi que l'ensemble de l'étude de stabilité est programmée en Matlab.

La structure mathématique du logiciel de simulation numérique COMSOL MULTIPHYSICS repose sur un système aux dérivées partielles résolu avec la méthode des éléments finis. Il allie généralité de modèles physiques (mécanique des fluides, électromagnétisme, thermique) et puissance de calcul, lui permettant d'étudier un grand nombre d'interactions entre différents phénomènes. Selon la taille et la nature du système, on pourra choisir une résolution directe (UMFPACK) ou itérative (MULTIGRID) du système évolutif ou stationnaire. Le maillage plan (resp. 3D) par défaut est triangulaire (tétraédrique), il peut aussi être défini comme quadrilatère (parallélépipédique). Le système initial présentant de prime abord des symétries évidentes, il est préférable de choisir un maillage parallélépipédique. De plus, ce dernier nous permet de garder un maillage similaire à celui utilisé dans le code spectral (figures 4.5 et 4.6 pour le maillage et une comparaison des données numériques).

Les solutions stationnaires sont recherchées par une méthode de Newton amortie - damped Newton method - où le facteur d'amortissement est ajusté en fonction du résidu de chaque itération. Le domaine d'attraction des solutions est alors élargi par rapport à la méthode classique de Newton. A l'approche de bifurcations, le système peut alors facilement sauter d'une branche à une autre selon le degré d'attraction de chacune des solutions. Pour le suivi d'une solution particulière, il est alors préférable de fixer le taux d'amortissement. Lorsque l'on désire trouver une solution encore inconnue, la méthode amortie peut faciliter la convergence vers cette dernière en lui donnant par exemple une certaine impulsion initiale. Le logiciel propose un solveur paramétrique utilisant la méthode de Newton de façon itérative. Chaque solution trouvée est utilisée comme condition initiale pour le paramètre suivant et le pas est ajusté en fonction de la vitesse de convergence de l'itération de Newton. Les valeurs propres peuvent également être connues. Le solveur correspondant cherche à linéariser les équations autour d'une solution particulière. COMSOL utilise une méthode d'Arnoldi implicitement réitérée - implicitly restarted Arnoldi method - de la bibliothèque fortran ARPACK.

Lorsque l'on désire modéliser un écoulement transitoire ou oscillatoire, COMSOL propose de recourir au solveur temporel. Par défaut, ce solveur cherche à converger vers des solutions stationnaires, aux temps longs : les paramètres sont réglés de sorte à dépasser le plus rapidement possible les éventuels transitoires. Il est cependant possible de régler le pas de temps et les tolérances, qui seront néanmoins sous-divisés si l'algorithme ne converge pas. Le schéma temporel repose sur une méthode de différentiation rétrograde - backward differentiation formula - qui peut être utilisée de l'ordre un à cinq. Notons enfin que l'on n'est pas tenu à stocker l'ensemble des solutions à chaque pas de temps, une option appropriée permettant sa spécification.

COMSOL MULTIPHYSICS semble s'avérer être une alternative souple et précise pour décrire les écoulements auxquels nous avons affaire. Cela est particulièrement vrai pour l'étude des écoulements bidimensionnels. Les solutions convergent rapidement et un post-traitement immédiat sur l'ensemble des points du maillage est possible. Ces résultats peuvent par ailleurs être exportés pour des visualisations plus fines. Quelques limitations sont tout de même présentes, notamment pour les calculs à géométrie tridimensionnelle. Les ressources en terme de mémoire augmentent alors très rapidement pour des maillages appropriés. Alors qu'avec le maillage spectral, une discrétisation 845×21 demande une ressource inférieure à 6GB (pour un calcul direct de bifurcation oscillatoire, qui demande le stockage simultané de la solution et des deux vecteurs propres correspondant), COMSOL en utilise plus de 16GB pour un simple calcul de solutions. L'utilisation de la méthode itérative MULTIGRID ne permet pas de décrire les écoulements tournants de manière efficace. Cette méthode ne s'applique qu'aux discrétisations triangulaires distribuées aléatoirement dans le domaine - free mesh. De plus, les maillages provisoires peuvent engendrer des artefacts robustes qui seront ensuite extrapolés vers la solution finale. Les travaux de Grants et Gerbeth [53] sur l'instabilité du champ magnétique tournant soulignent en effet qu'un maillage insuffisant peut générer des solutions parasites sous la forme de rouleaux de Taylor.

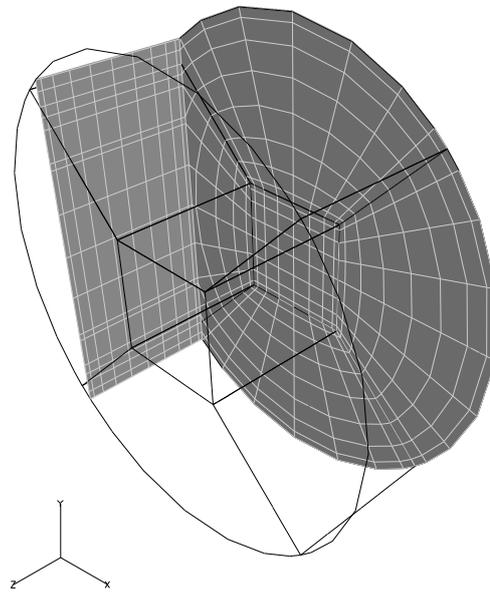


FIG. 4.5 – Maillage utilisé comme support de la géométrie cylindrique, aussi bien lors de l'utilisation du code spectral que du code éléments finis ($N_{xy} \times N_z = 320 \times 10$).

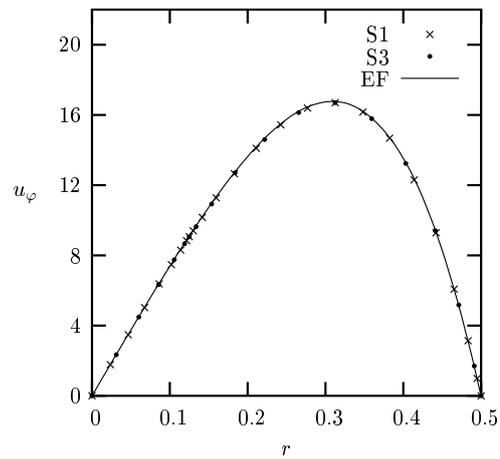


FIG. 4.6 – Comparaison de la vitesse azimutale maximale exprimée le long du rayon du cylindre pour les trois formulations, spectrale à l'ordre 1 (S1), à l'ordre 3 (S3) et éléments finis. Vitesses obtenues pour un nombre de Taylor magnétique $Tm = 10^4$, une géométrie de rapport de forme $AzH/D = 1$ et un nombre de Rayleigh nul. Configuration rigide-rigide.

5. Dynamique de la convection en présence d'une surface libre

5.1 Préambule

La manière dont la convection va se développer va dépendre des symétries du système. Les symétries des équations et conditions aux limites présentes dans notre cavité cylindrique avec surface libre correspondent au groupe $\mathcal{O}(2)$, ce dernier étant généré par les rotations autour de l'axe vertical z et les réflexions par rapport aux plans verticaux contenant cet axe. Ces symétries sont également celles de l'état diffusif. Ces propriétés d'invariance par rotation font que les modes propres qui apparaissent autour de la solution diffusive et dont certains vont déstabiliser cette solution et déclencher un mouvement sont des modes azimutaux, dont la dépendance selon l'angle azimutal peut être exprimé sous la forme $e^{im\varphi}$ (illustration des trois premiers modes azimutaux à la figure 5.1). Les bifurcations axisymétriques qui correspondent à un mode $m = 0$ et gardent la symétrie $\mathcal{O}(2)$ du système seront des bifurcations trans-critiques associées à une unique valeur propre critique. Ces bifurcations trans-critiques génèrent un état super-critique distinct de son homologue sous-critique sous la forme de deux branches de solutions différentes. Concernant les bifurcations liées au mode $m = 1$, l'invariance par rotation sera brisée et il y aura conservation d'une unique symétrie de réflexion par rapport à un plan vertical. La bifurcation associée au mode $m = 1$ génère ainsi un nombre infini de solutions équivalentes définies à une rotation près. Cette bifurcation est appelée bifurcation fourche circulaire et est associée à une valeur propre double. Enfin, pour la dynamique liée au mode $m = 2$, l'invariance par rotation est également brisée, mais deux symétries de réflexion par rapport à deux plans verticaux perpendiculaires sont conservées. Nous obtenons encore une bifurcation fourche circulaire, également associée à une valeur propre double.

L'ensemble de l'étude présentée dans ce chapitre considère le cas où le fluide est de nombre de Prandtl unité ($Pr = 1$). Les fluides usuels se rapprochant le plus de cette valeur sont l'ensemble des fluides transparents. Une conséquence directe du choix de ces fluides est que les nombres de Grashof et de Rayleigh s'identifient parfaitement. Rappelons à ce stade que les seuils primaires d'une instabilité thermique ne dépendent que du nombre de Rayleigh (indépendamment de la nature du fluide), tant que la surface

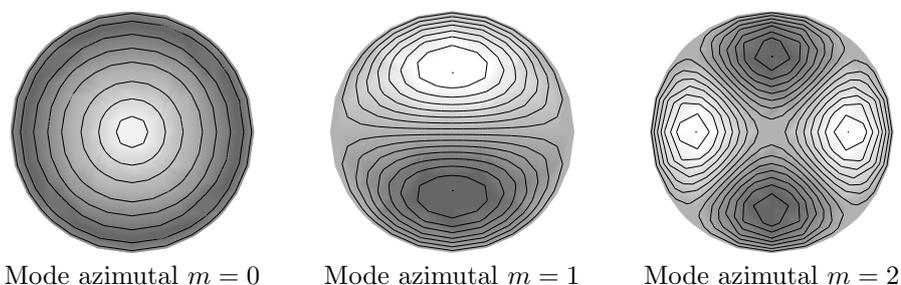


FIG. 5.1 – Modes propres évalués au voisinage des points de bifurcation primaire. Sont représentées les iso-lignes de la vitesse verticale dans le plan horizontal central de la géométrie cylindrique d'étude.

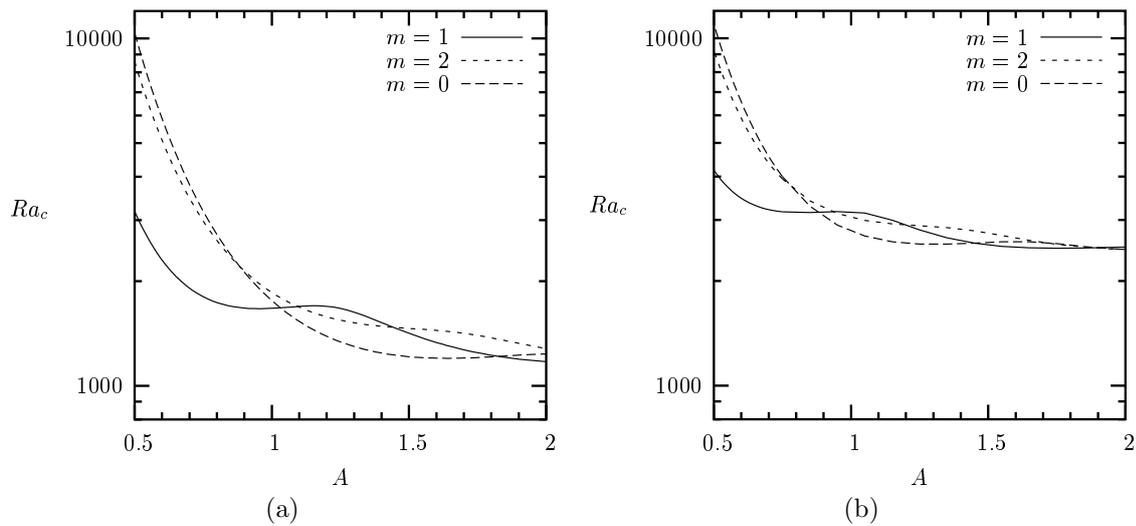


FIG. 5.2 – Evolution des seuils Ra_c des trois principaux modes primaires ($m = 0$, $m = 1$ et $m = 2$) en fonction du rapport de forme A pour (a) un nombre de Biot $Bi = 100$ et un nombre de Marangoni $Ma = 0$ et (b) $Bi = 1$ et $Ma = 500$ ($Pr = 1$).

supérieure libre reste plane et indéformable au cours du temps. Les métaux liquides ont la propriété de diffuser environ cent fois mieux la chaleur que la quantité de mouvement, ce qui se traduit par le fait que la survie de la structure thermique est allongée par rapport aux fluides usuels que nous considérons dans ce chapitre. L'influence de la convection sur les métaux liquides fera l'objet du prochain chapitre.

Nous commençons par présenter le suivi du seuil primaire Ra_c de convection en fonction des différents paramètres du problème, à savoir le rapport d'aspect de la cellule soulignant l'impact du confinement sur la naissance de la convection, le nombre de Marangoni traduisant les efforts liés à la tension de surface ainsi que le nombre de Biot quantifiant le transfert de chaleur à la surface libre entre le fluide d'étude et le milieu environnant. Le suivi des structures convectives au delà d'un certain nombre de ces seuils primaires de convection en fonction du nombre de Rayleigh sera alors présenté dans un deuxième temps sous la forme de diagrammes de bifurcation qui mettront aussi en évidence des transitions vers des branches secondaires. Nous regarderons ensuite l'effet du nombre de Biot sur les points de bifurcations secondaires et donnerons enfin quelques résultats qui comparent l'étude de la convection en présence d'une surface libre au cas rigide-rigide.

5.2 Stabilité linéaire de l'écoulement diffusif

Dans notre cavité cylindrique chauffée par le bas, un mouvement global de fluide ne peut apparaître qu'au delà d'un seuil critique, caractérisé par exemple par le nombre de Rayleigh critique. Ce seuil de déclenchement du mouvement est en général obtenu par analyse de stabilité linéaire de la solution diffusive de base qui consiste à calculer les valeurs propres du système aux perturbations linéarisé autour de cette solution de base. Dans notre cas, nous n'écrivons ni ne résolvons ce système, mais nous utilisons la procédure de suivi des points de bifurcation (*cf.* paragraphe 4.7). En raison des propriétés d'axisymétrie de notre problème et de la solution de base, nous avons vu que les modes propres qui vont initier la convection (modes primaires) sont des modes de Fourier. Nous nous intéresserons aux trois modes principaux qui sont les modes $m = 0$, 1 et 2.

5.2.1 Influence du confinement sur les seuils primaires

Intéressons-nous à l'influence du rapport d'aspect de la cellule sur la naissance de la convection. La figure 5.2 montre l'évolution des seuils des trois premiers modes de Fourier sous la forme de diagrammes de stabilité. Comme le souligne la figure 5.2(a) pour $Bi = 100$ et $Ma = 0$, le rapport de forme A de la géométrie d'étude agit de façon significative sur l'émergence des modes primaires. Pour $A = 0.5$, soit une cavité assez compacte (hauteur=diamètre), nous observons que le mode critique (celui dont le seuil d'apparition Ra_c est le plus bas) est un mode asymétrique à un rouleau $m = 1$. Ce mode reste critique jusqu'à des géométries de rapport de forme $A \approx 1$, puis c'est le mode axisymétrique $m = 0$ qui s'impose jusqu'à $A \approx 1.8$, puis à nouveau le mode $m = 1$. Seuls les modes critiques mènent à des écoulements stables tandis que les seuils plus élevés sont responsables de branches initialement instables. Nous voyons que l'effet de confinement latéral (diminution de A) contrôle les structures convectives, à savoir que la structure spatiale de ces modes est contrainte (il ne peut se former qu'un nombre limité de rouleaux, et pour A faible, le mode $m = 1$ à un rouleau est dominant) et les seuils d'instabilité de ces modes sont de plus en plus séparés les uns des autres. Les seuils de chacun des modes décroissent régulièrement avec l'augmentation de A mais de façon non monotone. En effet, nous observons sur la gamme de A tracée des zones de fortes décroissance, suivies de zones de faible décroissance ou même de croissance. Proche des zones de changements de courbure, le nombre de rouleaux change. Ce sont des rouleaux initialement infinitésimaux qui croissent et se développent en accord avec les propriétés de symétrie du mode en question. Les minimas ou pseudo-minimas indiquent les zones où une configuration particulière de mode est propice. Comme les trois modes de Fourier considérés ont des propriétés de symétrie différentes, les courbes peuvent se croiser. Pour les cavités les plus aplaties (forte valeur de A), les modes ont des seuils proches les uns des autres, car tous peuvent s'adapter au type de géométrie : il leur suffit de rajouter des rouleaux vers la périphérie, comme le montre la figure 5.3 pour le mode $m = 1$. Le mode critique change donc régulièrement.

Cet effet du confinement est très général et se retrouve quelles que soient les valeurs des autres paramètres Bi et Ma avec seulement des décalages dans la transition entre les modes (figures 5.2(a), 5.2(b)). Le changement plus rapide de structures convectives avec A observé pour $Bi = 1$ et $Ma = 500$ fait penser que dans ce cas la longueur d'onde de la structure convective de base (taille du rouleau élémentaire) est plus petite. La prédominance du mode asymétrique à un rouleau $m = 1$ se retrouve aussi bien pour les cavités à faible valeur de A que celles où A est plus grand, au delà du domaine où le mode $m = 0$ est dominant. La prédominance du mode $m = 2$ n'est pas observée sur la gamme des valeurs tracées. Mentionnons enfin que pour le cas $Ma = 0$ et $Bi = 100$, la valeur limite de Ra_c pour des cylindres très aplaties (à rapport d'aspect A infini) est proche de 1100. Cette valeur théorique a été obtenue par Nield en 1967 [93] pour une configuration où la couche fluide est confinée entre une surface inférieure rigide et une surface supérieure libre, toutes deux maintenues à des températures uniformes (cas équivalent à $Bi \rightarrow \infty$ dont le cas $Bi = 100$ est une bonne approximation).

5.2.2 Influence des effets liés à la surface libre

L'influence des nombres de Biot et de Marangoni (liés à la surface libre) sur les seuils primaires de convection est présentée sur la figure 5.4. Nous traçons dans le premier diagramme de stabilité (figure 5.4(a)) la variation du nombre de Rayleigh critique correspondant au mode $m = 0$ en fonction du nombre de Biot Bi pour une cavité de rapport d'aspect $A = 1.5$ et différentes valeurs du nombre de Marangoni Ma . Quelque soit Ma , le nombre de Rayleigh critique Ra_c tend pour les fortes valeurs de Bi vers une valeur asymptotique légèrement supérieure à $Ra_c \approx 1200$. La convergence vers cette valeur asymptotique est obtenue respectivement par décroissance et croissance monotone pour les valeurs du nombre de Marangoni $Ma \geq 100$ et $Ma \leq 50$. L'évolution est moins prononcée lorsque l'on se situe proche des valeurs $50 \leq Ma \leq 100$. Un comportement similaire est obtenu pour les seuils critiques des autres modes, par exemple pour le mode critique $m = 1$ d'une cavité de rapport de forme $A = 0.75$ (figure 5.4(b)). La croissance/décroissance est également monotone pour toutes les valeurs du nombre de Marangoni vers la valeur critique $Ra_c \approx 1800$ obtenue pour $Bi \rightarrow \infty$. Afin de s'assurer que la forte variation de Bi que nous balayons n'influe pas sur le caractère critique du mode en question, nous avons tracé sur la figure 5.5 l'effet de Bi sur les deux premiers modes critiques pour deux rapports d'aspects, $A = 0.75$ et $A = 1$.

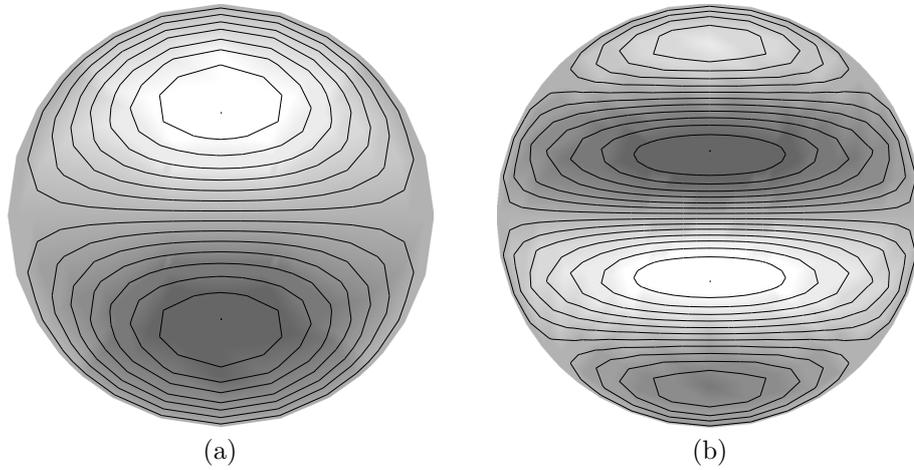


FIG. 5.3 – Exemples de modes $m = 1$ à un (a) et trois (b) rouleaux. Les symétries du mode sont bien équivalentes. Selon la taille de la cavité, on observe l'une ou l'autre des configurations.

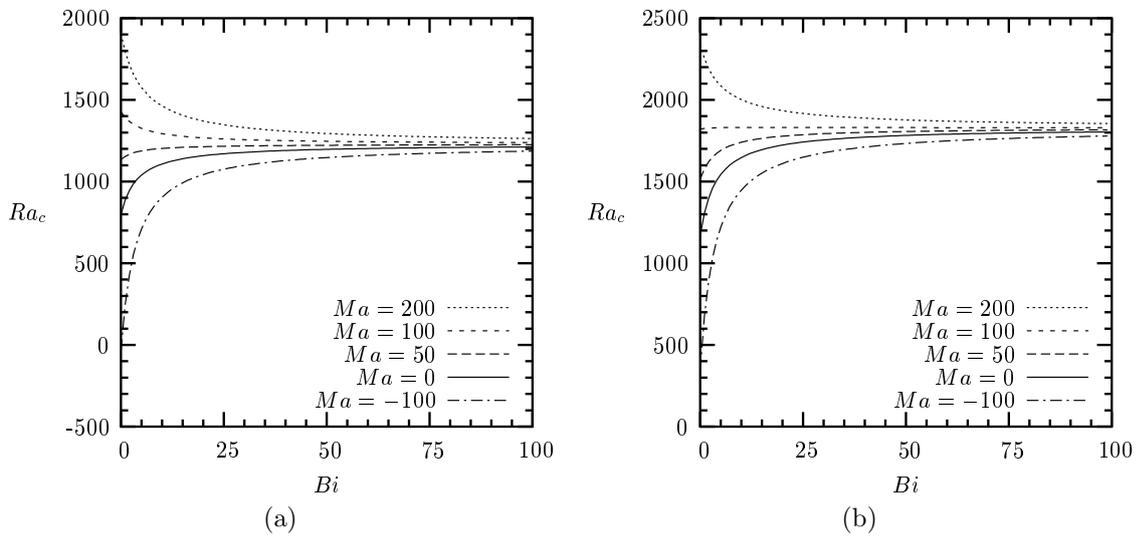


FIG. 5.4 – Evolution du seuil Ra_c en fonction du nombre de Biot Bi pour différentes valeurs du nombre de Marangoni Ma pour (a) le mode critique $m = 0$ dans le cas d'une cavité de rapport de forme $A = 1.5$ et (b) le mode critique $m = 1$ pour $A = 0.75$ ($Pr = 1$).

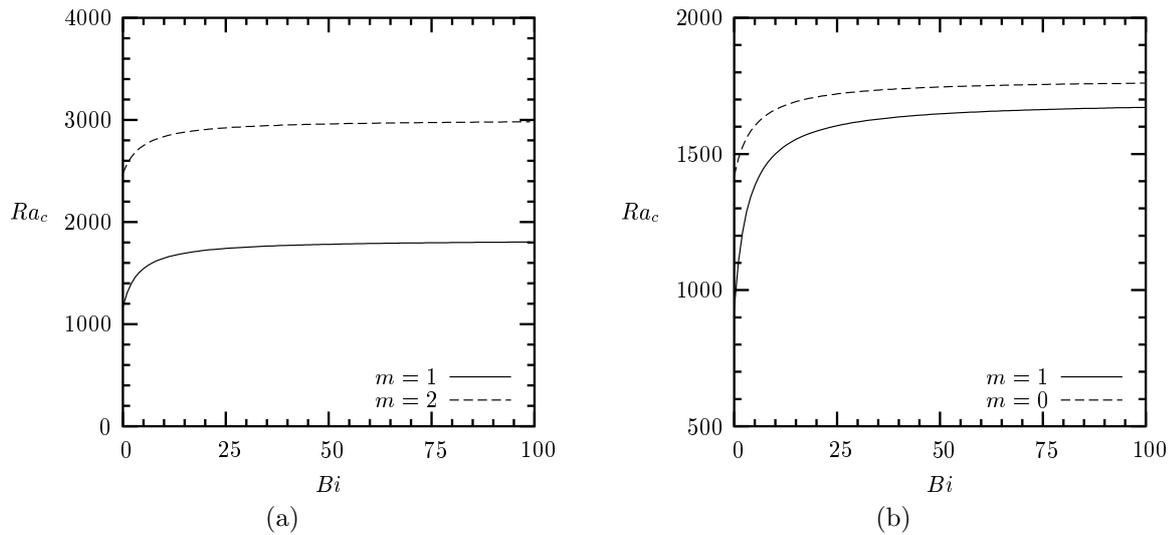


FIG. 5.5 – Evolution des seuils Ra_c des modes critiques $m = 1$, $m = 2$, $m = 0$ en fonction du nombre de Biot Bi pour une valeur du nombre de Marangoni $Ma = 0$. Cas d'une cavité de rapport de forme (a) $A = 0.75$ et (b) $A = 1$. Il n'y a pas de croisements entre les modes dus à la variation de Bi .

Nous voyons clairement que les modes ne se chevauchent pas, même pour le cas délicat à $A = 1$, où les deux modes critiques sont très rapprochés.

Afin de mieux comprendre l'influence du nombre de Marangoni sur le seuil critique Ra_c de convection, nous présentons sur la figure 5.6 la variation de Ra_c en fonction de Ma . Les courbes critiques sont données pour quatre valeurs du nombre de Biot ($Bi = 0, 1, 10$ et 100) pour le cas $A = 0.75$, c'est-à-dire pour un mode critique $m = 1$. L'ensemble des quatre courbes (obtenues pour différents Bi) augmentent de manière monotone avec Ma . Notons que cette variation est plutôt prononcée pour $Bi = 0$ et plutôt faible pour $Bi = 100$. Les quatre courbes se rejoignent à une valeur commune de Ma proche de $Ma = 100$. Le seuil critique vaut alors $Ra_c \approx 1830$. Le seuil Ra_c ne dépend plus du nombre de Biot Bi pour cette valeur particulière de Ma . Cette valeur de Ma délimite deux zones, l'une relative aux grandes valeurs de Ma , où l'augmentation de Bi s'avère déstabilisante et l'autre relative aux faibles valeurs de Ma , où l'augmentation de Bi est stabilisante *i.e.* retarde l'apparition de l'écoulement.

Considérons à présent l'influence de Ma en comparaison avec le cas sans tension de surface. Notons tout d'abord qu'avec notre définition de Ma , les valeurs positives de Ma sont stabilisantes, favorisant l'augmentation des seuils Ra_c tandis que les valeurs négatives de Ma sont déstabilisantes, diminuant de fait les valeurs du nombre de Rayleigh critique. La valeur de Ra_c décroît vers zéro pour une certaine valeur négative de Ma (que l'on peut dénoter par Ma_c) et qui dépend de la valeur de Bi . Cela correspond au problème de Marangoni pur. Mentionnons enfin que pour les valeurs négatives de Ma en deçà de Ma_c , la naissance de la convection est obtenue pour des valeurs négatives de Ra_c , c'est-à-dire pour des situations à stratification stable de température. Dans ces situations, les effets de tension de surface sont très fortement déstabilisants, et la convection peut donc apparaître même en présence d'effets de flottaison stabilisants.

Nous avons montré que l'influence de la tension de surface (à travers le nombre de Marangoni) était forte pour les faibles valeurs de Bi tandis qu'elle est faible pour les fortes valeurs de Bi . Afin de mener à bien notre argumentation, nous devons garder en mémoire que la tension de surface est pilotée par les perturbations de température à la surface libre. Ces perturbations dépendent du nombre de Biot et sont très faibles pour les fortes valeurs de Bi où la température à la surface libre peut être considérée comme pratiquement figée à la valeur 0. Ces perturbations sont par contre bien moins contraintes aux faibles

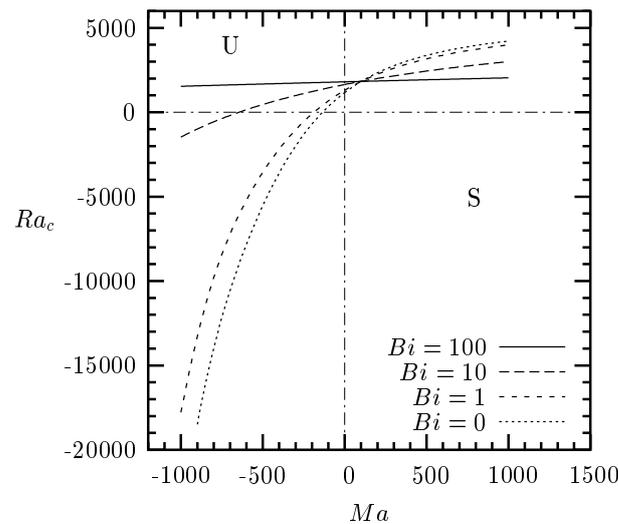


FIG. 5.6 – Evolution du seuil Ra_c du mode critique $m = 1$ en fonction du nombre de Marangoni Ma pour différentes valeurs du nombre de Biot Bi dans le cas d'une cavité de rapport de forme $A = 0.75$ ($Pr = 1$). La zone U correspond au domaine instable et la zone S au domaine stable.

valeurs de Bi où la condition limite à la surface répond à la condition de flux imposé.

Voyons comment évolue l'effet de Bi avec Ma . A $Ma = 0$, il n'y a pas d'effets liés aux tensions de surface; cependant les conditions aux limites thermiques le long de la surface libre vont influencer sur les perturbations de température qui se développent à l'intérieur du système. En effet, les petites valeurs de Bi vont favoriser ces perturbations et auront ainsi un effet déstabilisant sur la convection. Pour des valeurs négatives de Ma , la tension de surface a un effet déstabilisant sur la convection qui est favorisé par les petites valeurs de Bi . Cela renforce l'influence déstabilisante des petites valeurs de Bi . Enfin, mentionnons que pour les valeurs positives de Ma , deux effets opposés entrent en compétition. Les petites valeurs de Bi auront tendance à favoriser la déstabilisation due aux effets de flottaison, mais aussi la stabilisation due à la tension de surface. En conséquence, pour des valeurs croissantes de Ma , l'influence déstabilisante initiale des petites valeurs de Bi va décroître, jusqu'à une certaine valeur de Ma (que l'on appellera Ma_B) où le nombre de Biot n'a plus d'influence sur la naissance de la convection. A Ma_B , les modifications induites sur les fluctuations de température par le changement de Bi doivent toujours affecter chacun des effets liés à la flottaison volumique et aux tensions de surface, mais sans changer leur contribution globale de déstabilisation. Au delà de Ma_B , les petites valeurs de Bi auront une influence stabilisatrice, car l'augmentation des perturbations de température favorise alors de manière dominante la stabilisation due à la tension de surface.

5.3 Convection non linéaire

Afin de tracer de manière assez exhaustive le développement non-linéaire de la convection, nous présentons dans un premier temps des diagrammes de bifurcation pour des cas bien spécifiques et étendons ensuite notre domaine d'étude en suivant l'évolution des bifurcations secondaires en fonction des paramètres pertinents de notre problème. La plupart des solutions obtenues dans nos diagrammes peuvent être caractérisées par leurs propriétés de symétrie : l'écoulement axisymétrique est généré par un mode axisymétrique $m = 0$ au travers d'une bifurcation trans-critique avec deux branches de solutions distinctes et les écoulements asymétriques $m = 1$ et $m = 2$ apparaissent au travers de bifurcations fourches circulaires avec un nombre infini de solutions équivalentes définies à une rotation près. Le choix de la variable tracée en fonction de notre paramètre de continuation Ra est la vitesse verticale w évaluée en un point arbitraire de notre domaine discrétisé. Nous ne précisons pas à quel endroit cette valeur est

choisie sauf pour le cas particulier où la vitesse verticale est celle au centre de la cavité que nous notons w_0 . Avec ce choix particulier, les solutions équivalentes générées au travers d'une bifurcation fourche circulaire apparaissent sur une unique courbe, alors que les deux branches de solutions générées au travers d'une bifurcation trans-critique sont distinctes. Précisons que dans ces diagrammes de bifurcation les bifurcations stationnaires (primaires ou secondaires) sont représentées par des points noirs tandis que les bifurcations oscillatoires sont représentées par des cercles. Les états stationnaires stables (resp. instables) sont représentés par des lignes continues (resp. discontinues); enfin, les représentations graphiques des écoulements montrent la vitesse verticale w au niveau du plan horizontal central ($z = 1/2$) de la cavité, les zones sombres (resp. claires) indiquant des valeurs de vitesse négatives $w < 0$ (resp. positives $w > 0$).

5.3.1 Diagrammes de bifurcation

Nous présentons tout d'abord deux diagrammes de bifurcation obtenus sans effet Marangoni ($Ma = 0$) pour une cellule de rapport d'aspect $A = 1.5$, où la bifurcation primaire engendre un écoulement axisymétrique. Deux valeurs du nombre de Biot ont été choisies, $Bi = 100$ et $Bi = 1$.

Convection à fort nombre de Biot

L'aspect global du diagramme de bifurcation pour $Bi = 100$ est présenté sur la figure 5.7 et un graphique donnant l'allure générale des trois premiers modes primaires est donné sur la figure 5.8. L'état de base est stable jusqu'à la valeur $Ra_c \equiv Ra_{P_0} = 1213$ où une bifurcation trans-critique engendre un écoulement $m = 0$. Deux branches de solutions émergent alors de ce point, l'une super-critique où le fluide remonte vers la surface libre le long des parois latérales et l'autre sous-critique où le fluide remonte le long de l'axe central du cylindre. Au point de bifurcation, la solution super-critique est stable alors que la solution sous-critique est instable et ne se stabilise qu'au delà d'un noeud-col. Cependant, le diagramme ne permet pas de distinguer la gamme d'hystérésis présente à la naissance de la convection entre la bifurcation trans-critique et le noeud-col; la branche sous-critique se restabilise très rapidement au travers du noeud-col. Ce phénomène d'hystérésis restera tout au long de notre étude trop petit pour apparaître clairement sur nos diagrammes de bifurcation; il sera néanmoins présent à chacune des bifurcations trans-critiques obtenues à partir de l'état de base. La deuxième bifurcation primaire apparaît au point $Ra_{P_1} = 1417$; c'est une bifurcation fourche super-critique circulaire engendrant un mode $m = 1$ avec deux valeurs propres critiques. Comme nous le voyons sur la figure 5.8, ce mode $m = 1$ est un mode à trois rouleaux. Comme cette bifurcation se produit après la première bifurcation primaire (de multiplicité égale à un), la solution diffusive délimitée par $Ra_{P_0} < Ra < Ra_{P_1}$ est une fois instable, puis devient trois fois instable pour $Ra_{P_1} < Ra < Ra_{P_2}$. La troisième bifurcation primaire émerge au point $Ra_{P_2} = 1463$ et engendre un mode $m = 2$. La solution diffusive devient alors cinq fois instable au delà de Ra_{P_3} . Les deux branches de solutions qui émergent de la solution diffusive sous la forme de modes $m = 1$ et $m = 2$ de Fourier restent toujours instables et ne seront de fait plus considérées dans la suite de l'analyse de ce diagramme.

L'évolution non-linéaire des branches de solutions générées par le mode axisymétrique devient rapidement complexe. En effet, la branche super-critique (représentée de façon spécifique sur la figure 5.9) reste stable jusqu'à la bifurcation secondaire $Ra_{S_1} = 10112$. En ce point de bifurcation, la perturbation critique est de type $m = 1$ et engendre ainsi une bifurcation fourche circulaire. La figure 5.9 montre que cette dernière est sous-critique et la branche fille $m = 0/1$ résultante (ne possédant plus qu'un plan vertical de symétrie) est une fois instable. Cette branche évolue dans le sens des valeurs décroissantes de Ra jusqu'à un point de rebroussement (point noeud-col à $Ra = 6134$) au delà duquel la courbe évolue dans le sens des Ra croissants. En ce point, une nouvelle valeur propre déstabilise le système et la branche reste par la suite instable. Cette branche $m = 0/1$ évolue avec une structure d'écoulement devenant de plus en plus symétrique par rapport à un second plan et se raccorde finalement au point $Ra_{S'_1} = 5782$ avec une solution de type $m = 0/2$. Le suivi de cette nouvelle branche de solutions (instable au point $Ra_{S'_1}$) vers les Ra décroissants montre qu'elle ne se restabilise qu'au travers d'un noeud-col en $Ra = 2382$. Cette nouvelle solution est ainsi observable pour $Ra > 2382$ et possède deux plans perpendiculaires verticaux de symétrie. Elle va évoluer vers un écoulement oscillatoire via une bifurcation de Hopf en $Ra_{H_1} = 8325$.

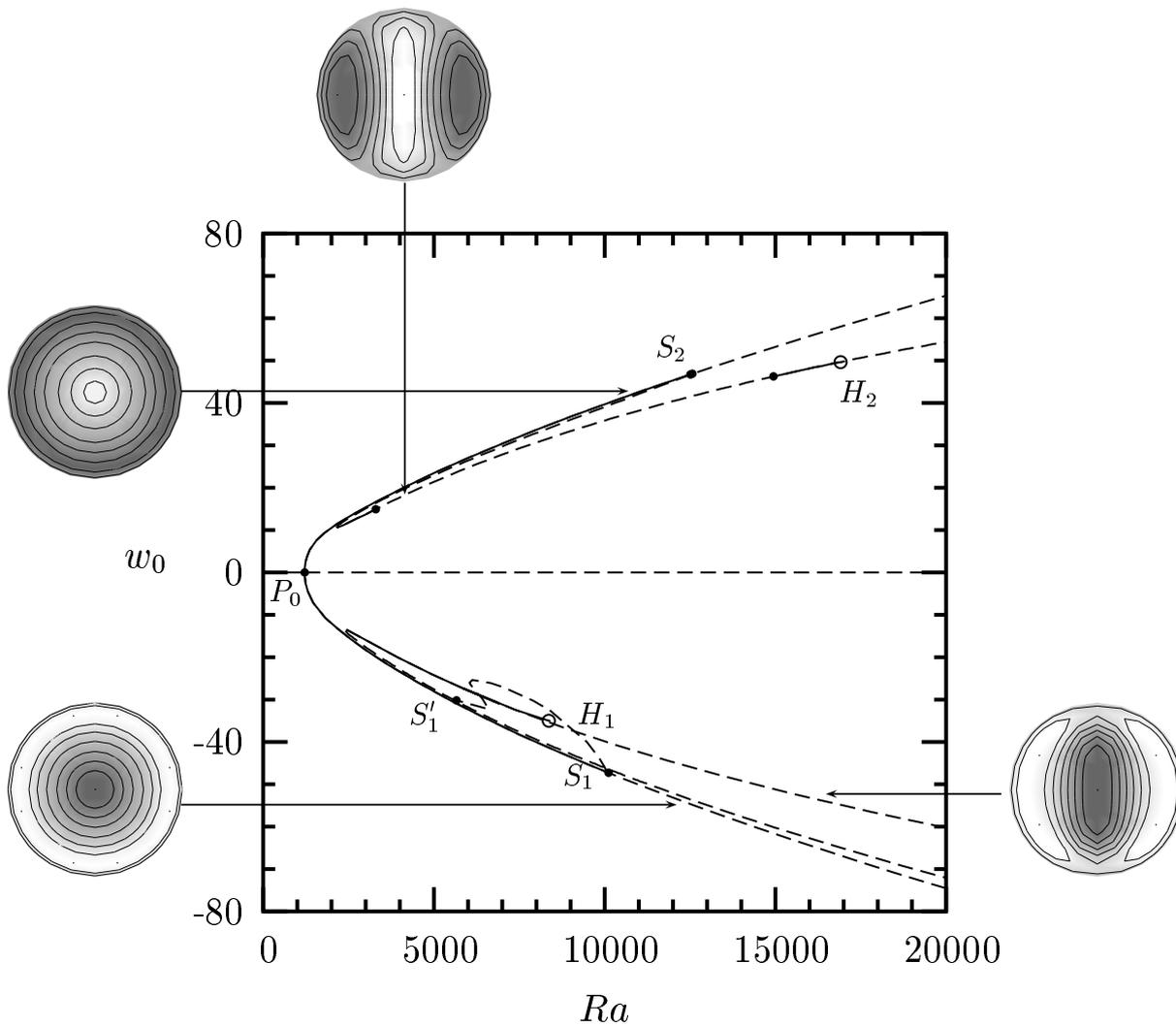


FIG. 5.7 – Allure générale du diagramme de bifurcation pour une configuration $A = 1.5$, $Ma = 0$, $Bi = 100$, $Pr = 1$. Evolution de la composante verticale de vitesse w_0 au centre de la cavité en fonction de Ra .

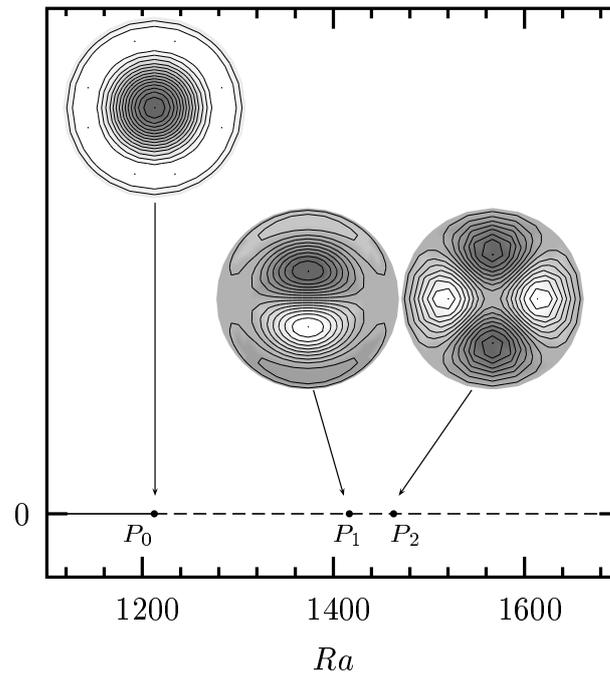


FIG. 5.8 – Graphique présentant les iso-lignes de la vitesse verticale dans le plan horizontal central de la géométrie d'étude pour les trois premiers modes critiques. La bifurcation engendrée au point P_0 est trans-critique tandis que celles aux points P_1 et P_2 sont fourches circulaires super-critiques. Seule la bifurcation trans-critique génère des états stables ($A = 1.5$, $Ma = 0$, $Bi = 100$, $Pr = 1$).

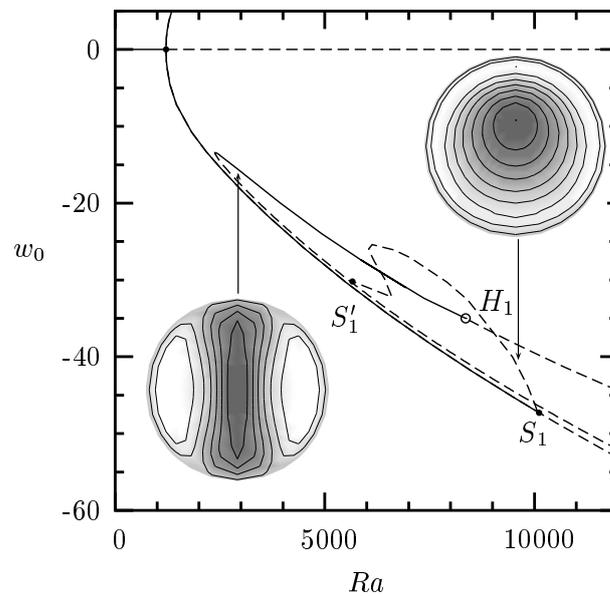


FIG. 5.9 – Partie super-critique de la branche axisymétrique pour la configuration $A = 1.5$, $Ma = 0$, $Bi = 100$, $Pr = 1$.

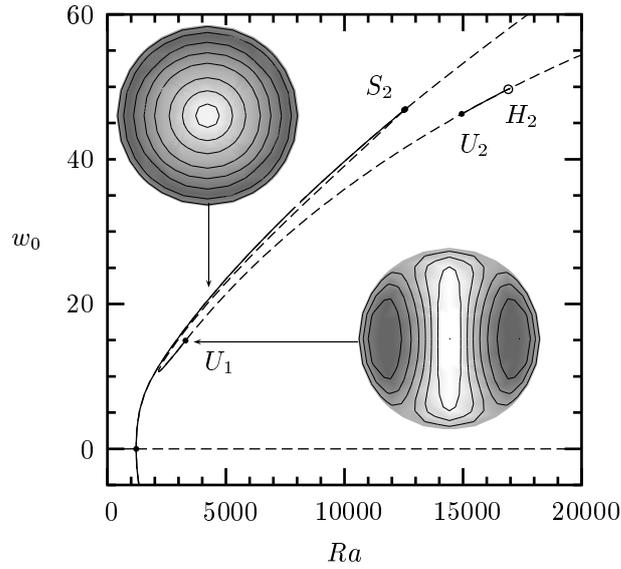


FIG. 5.10 – Partie sous-critique de la branche axisymétrique pour la configuration $A = 1.5$, $Ma = 0$, $Bi = 100$, $Pr = 1$.

La branche sous-critique représentée de façon spécifique sur la figure 5.10 demeure stable (à l'exception du petit intervalle d'hystérésis entre Ra_{P_0} et le noeud-col associé) jusqu'au point $Ra_{S_2} = 12513$, où une bifurcation fourche circulaire a lieu. La perturbation critique associée à cette bifurcation est de type $m = 2$ avec deux plans perpendiculaires verticaux de symétrie. La branche de solutions naissant ici est également sous-critique et donc une fois instable. Cette branche progresse dans le sens des valeurs décroissantes de Ra puis rebrousse chemin au travers d'un noeud-col en $Ra = 2154$ où elle se stabilise (figure 5.10). Cependant, cette branche se déstabilise assez vite en $Ra_{U_1} = 3293$ et ne se restabilise qu'en $Ra_{U_2} = 14948$ avant de se déstabiliser à nouveau au travers d'une bifurcation de Hopf en $Ra_{H_2} = 16908$. La perturbation critique qui vient déstabiliser le système le long de l'intervalle $Ra_{U_1} < Ra < Ra_{U_2}$ possède les symétries du mode $m = 2$, mais est orientée d'un angle de 45° par rapport à la perturbation critique en Ra_{S_2} . Cette perturbation brise les deux symétries de réflexion mais conserve toutefois la symétrie par rapport à l'axe du cylindre. L'évolution du taux d'amplification de cette perturbation (présentée sur la figure 5.11) montre une croissance jusqu'à un maximum en $Ra \approx 10900$ pour rechuter ensuite et changer de signe en Ra_{U_2} . C'est bien la même perturbation qui est donc responsable de la perte et du regain de stabilité le long de la branche de solutions $m = 0/2$. Malgré de multiples tentatives, il n'a pas été possible d'obtenir les branches prenant naissance en Ra_{U_1} et Ra_{U_2} .

Convection à faible nombre de Biot

Nous allons nous intéresser maintenant au diagramme de bifurcation obtenu pour un nombre de Biot $Bi = 1$. Les aspects phénoménologiques globaux de l'écoulement convectif présentent quelques différences par rapport au cas $Bi = 100$ précédent tout en conservant des similitudes. Les bifurcations primaires associées aux modes $m = 0$, $m = 2$ et $m = 1$ naissent dans le même ordre¹ et seule la première bifurcation donne naissance à un état stable. Cette dernière, associée à un mode axisymétrique, est trans-critique et les branches de solutions associées émergent à $Ra_{P_0} = 885$. Deux branches distinctes sont obtenues, l'une sous-critique évoluant vers les w_0 positifs (avec les particules fluides montant le long de l'axe du cylindre) et l'autre super-critique évoluant vers les w_0 négatifs (avec les particules montant le long des parois rigides). L'évolution non-linéaire de la branche super-critique représentée sur la figure 5.12 montre qu'elle ne devient définitivement instable qu'au delà d'une bifurcation secondaire $Ra_{S_1} = 9465$, où une perturbation de type $m = 1$ vient la déstabiliser. Une bifurcation fourche circulaire génère ainsi une

¹Les valeurs respectives des seuils des bifurcations primaires sont : $Ra_{P_0} = 885$, $Ra_{P_2} = 1023$, $Ra_{P_1} = 1115$.

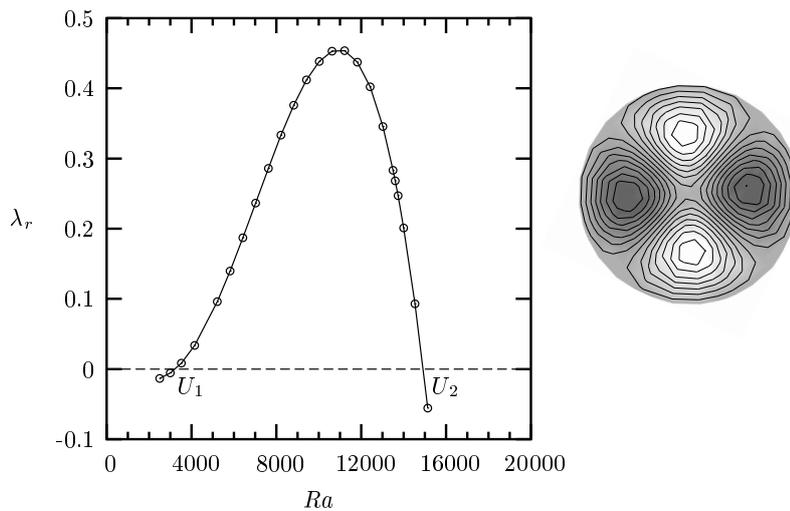


FIG. 5.11 – Taux d’amplification de la perturbation critique venant déstabiliser puis restabiliser la branche fille $m = 0/2$ naissant à partir de la partie sous-critique de la branche primaire $m = 0$. Configuration correspondant à $A = 1.5$, $Ma = 0$, $Bi = 100$.

branche fille $m = 0/1$ qui émerge de façon sous-critique et est une fois instable. La nouvelle branche évolue dans le sens des Ra décroissants jusqu’au passage d’un noeud-col en $Ra = 8028$, pour enfin évoluer vers les Ra croissants. Cette solution ne parvient plus à se restabiliser (modulo un quelconque rattachement à une autre branche de solutions qui, elle, parviendrait à se stabiliser). La dynamique à partir du point Ra_{S_1} est par ailleurs assez complexe : la branche $m = 0/1$ qui naît une fois instable devient rapidement deux fois instable puis c’est une bifurcation oscillatoire qui vient s’ajouter. Le système parvient à stabiliser une valeur propre stationnaire au franchissement du noeud-col, cependant, même aux plus fortes valeurs de Ra , la solution restera instable. Notons également la présence de deux points de bifurcation, $Ra_{U'_1} = 1335$ et $Ra_{U'_2} = 3053$, où la branche axisymétrique se déstabilise avant de se restabiliser. Les éventuelles branches de solutions qui pourraient naître de ces points n’ont pas pu être mises en évidence ; cependant, la perturbation responsable de cet échange de stabilité est la même ; elle correspond à un mode $m = 2$ de Fourier.

Contrairement à la branche super-critique qui n’arrive plus à se stabiliser une fois le point Ra_{S_1} franchi, la branche sous-critique (figure 5.13) connaît une dynamique riche et nouvelle par rapport au cas $Bi = 100$ précédent. Cette branche sous-critique reste stable jusqu’au point $Ra_{S'_2} = 3706$, où une bifurcation fourche circulaire associée à un mode $m = 1$ se produit. La bifurcation est super-critique et la solution fille $m = 0/1$ est stable. Cette branche de solutions restera stable jusqu’à une bifurcation de Hopf en $Ra_{H'_2} = 5567$. Le suivi ultérieur de la branche $m = 0/1$ montre qu’elle finit par se rattacher à la branche $m = 0/2$ au point $Ra_{S''_2} = 7417$ avec ici encore une dynamique assez complexe. En effet, à partir de $Ra_{H'_2}$, la branche $m = 0/1$ devient instable en lien avec les deux valeurs propres complexes conjuguées qui ont transité. On dira que la solution est une fois oscillatoirement instable. Le suivi de cette perturbation critique en fonction de Ra (figure 5.14) montre qu’au delà de $Ra \approx 6785$, deux valeurs propres stationnaires sont créées à partir des valeurs propres complexes conjuguées. Il y a un phénomène de collision des valeurs propres complexes conjuguées sur l’axe réel. Une deuxième bifurcation de Hopf apparaît un peu plus tard sur cette même branche, suivie elle-aussi d’un phénomène similaire de collision des valeurs propres complexes conjuguées (en $Ra = 5885$). Parmi les deux nouvelles valeurs propres stationnaires, l’une parvient à se restabiliser rapidement, diminuant l’ordre d’instabilité de la branche. En fait, à proximité du point $Ra_{S''_2}$, la branche $m = 0/1$ est trois fois instable ; après rattachement à la branche $m = 0/2$, le système reste trois fois instable dans la gamme des Ra croissants et devient une fois instable dans la gamme des Ra décroissants (la bifurcation au point $Ra_{S''_2}$ est fourche circulaire et

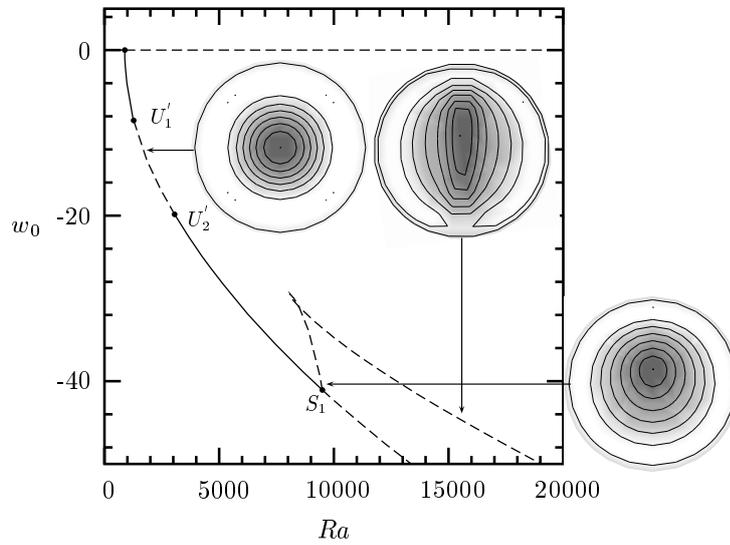


FIG. 5.12 – Diagramme de bifurcation de la partie super-critique de la branche axisymétrique pour la configuration $A = 1.5$, $Ma = 0$, $Bi = 1$, $Pr = 1$.

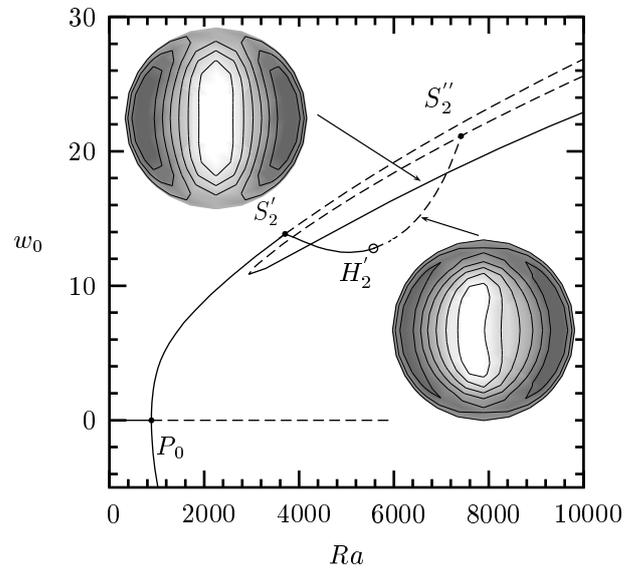


FIG. 5.13 – Diagramme de bifurcation de la partie sous-critique de la branche axisymétrique pour la configuration $A = 1.5$, $Ma = 0$, $Bi = 1$, $Pr = 1$.

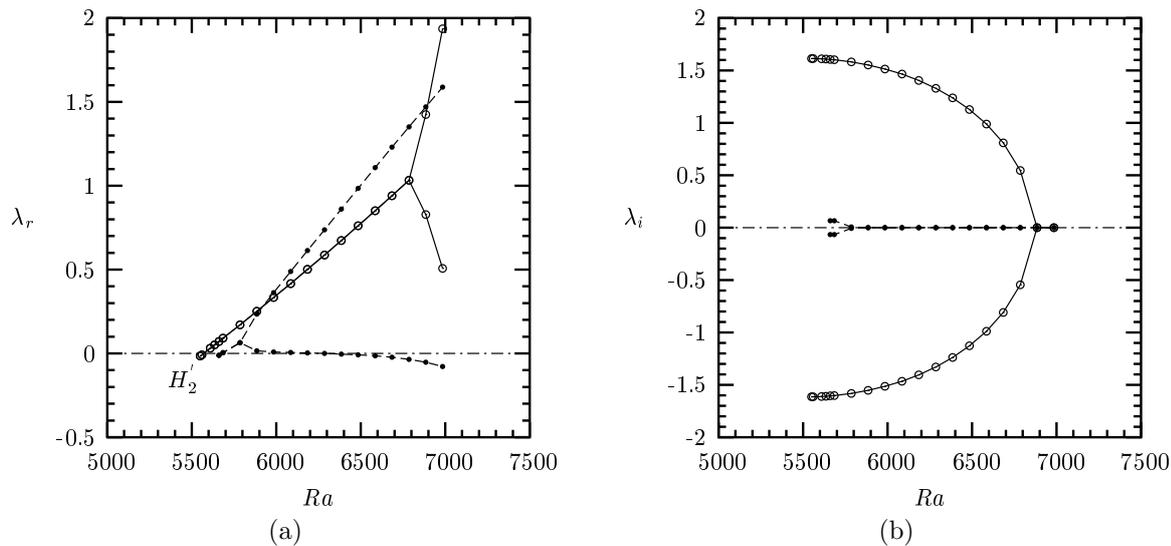


FIG. 5.14 – Evolution des valeurs propres critiques le long de la branche $m = 0/1$ après le seuil Ra_{H_2} . Les deux valeurs propres initialement oscillatoires se divisent chacune en deux valeurs propres stationnaires. Partie réelle (a) et partie imaginaire (b) des valeurs propres en fonction de Ra .

stabilise deux valeurs propres) pour se stabiliser après rebroussement en un noeud-col ($Ra = 2937$). Le système conservera cette stabilité pour de plus fortes valeur de Ra .

Nous pouvons résumer les séquences stables des solutions observables lors d'une expérience pour un fluide transparent ($Pr = 1$) confiné dans une géométrie cylindrique à rapport de forme $A = 1.5$ dont les propriétés de la surface libre vérifient $Ma = 0$ et $Bi = 1$. En incrémentant progressivement la température de la plaque inférieure, un écoulement axisymétrique naîtra spontanément, où les particules fluides soit monteront le long de l'axe du cylindre et redescendront le long des parois (assurant ainsi la conservation de la masse), soit monteront le long des parois rigides. Dans le premier cas de figure, l'écoulement évoluera vers un état oscillatoire après avoir bifurqué vers un état $m = 0/1$ et dans le second cas, il passera également vers un état oscillatoire mais à partir d'un état $m = 0/2$ (avec deux plans de symétrie). Cependant, en partant d'une forte valeur du nombre de Rayleigh et en la diminuant, le système progressera toujours vers un état stationnaire avec les symétries du mode $m = 0/2$. Nous avons ici un phénomène intéressant d'hystérésis pour cet écoulement de convection.

5.3.2 Suivi des seuils secondaires

Afin de voir comment les deux diagrammes présentés au paragraphe 5.3.1 sont inter-connectés, nous avons suivi l'évolution des seuils principaux, primaires ou secondaires, stationnaires ou de Hopf, en fonction de Bi . Il est ainsi possible de voir comment évolue le domaine d'existence des solutions observables lorsque l'on passe d'un cas limite à l'autre. Rappelons que le cas $Bi = 100$ correspond à une configuration où les perturbations de température à la surface libre sont fortement contraintes de sorte que la température à la surface libre peut être considérée comme constante. Regardons à cet effet les points de bifurcation obtenus à $Bi = 100$. La branche super-critique du mode axisymétrique primaire apparue en Ra_{P_0} se déstabilise en Ra_{S_1} , où une branche sous-critique $m = 0/1$ apparaît pour se connecter à une branche $m = 0/2$ en Ra_{S_1} . Le suivi de cette dernière branche vers les Ra décroissants se stabilise au passage d'un noeud-col pour bifurquer via une bifurcation de Hopf en Ra_{H_1} . La figure 5.15(a) suit l'ensemble de ces quatre points pour les Bi décroissants. On voit que leur variation est très faible jusqu'à $Bi = 20$. L'écart relatif ΔRa basé sur la valeur de Ra à $Bi = 100$ ne dépasse pas les 8% : la dynamique non-linéaire reste inchangée dans son ensemble, aussi bien en terme de structure d'écoulement qu'au niveau des valeurs des seuils. Cependant, pour les plus faibles valeurs de Bi , on observe une augmentation importante de

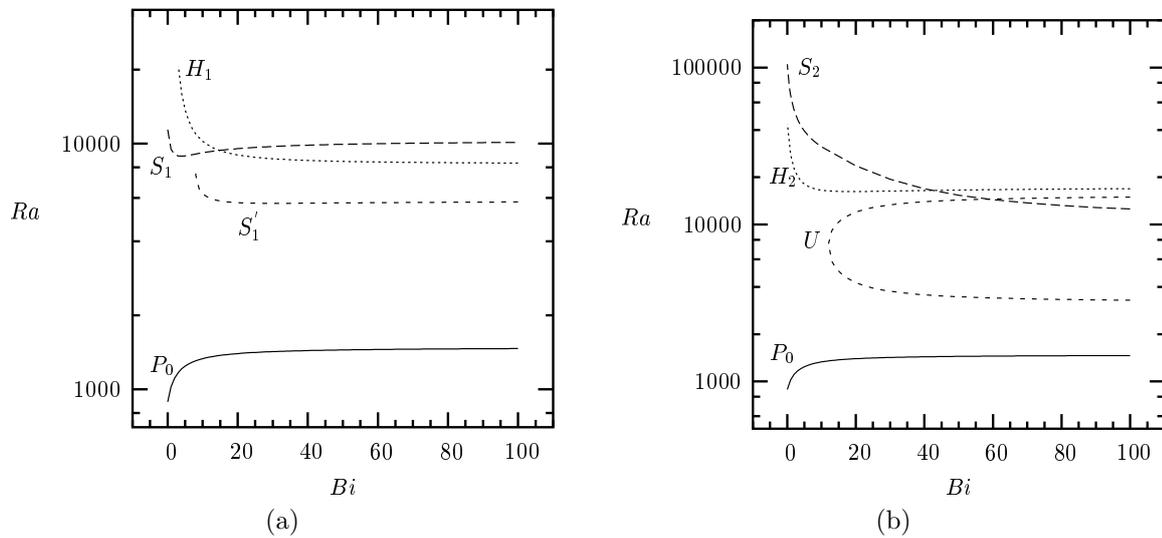


FIG. 5.15 – Suivi pour Bi décroissant des seuils secondaires obtenus à partir des branches (a) super-critique et (b) sous-critique du diagramme de bifurcation calculé pour $A = 1.5$, $Ma = 0$, $Bi = 100$, $Pr = 1$. Le seuil primaire Ra_{P_0} est donné pour comparaison.

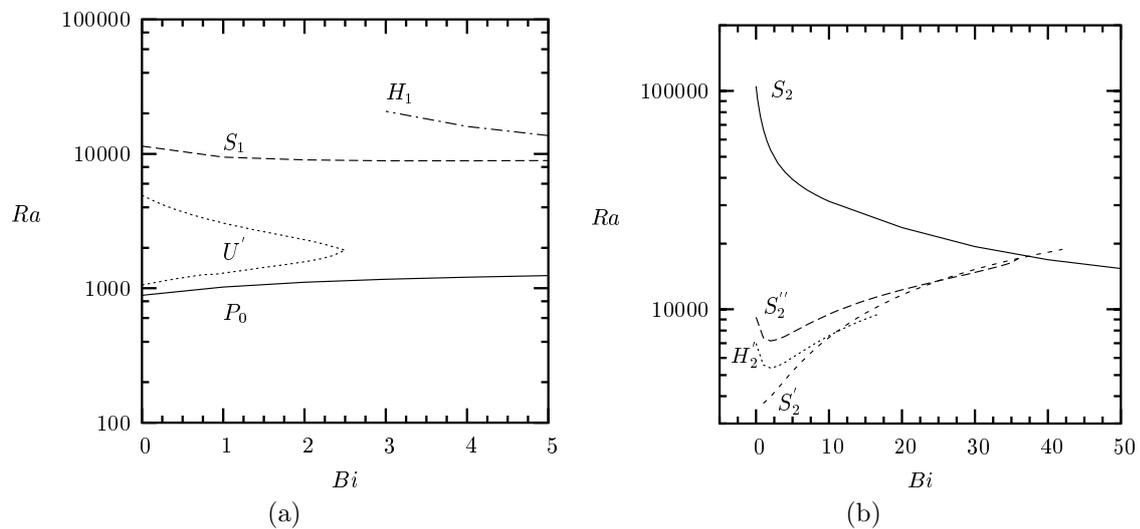


FIG. 5.16 – Suivi pour Bi croissant des seuils secondaires obtenus à partir des branches (a) super-critique et (b) sous-critique du diagramme de bifurcation calculé pour $A = 1.5$, $Ma = 0$, $Bi = 1$, $Pr = 1$. Le seuil primaire Ra_{P_0} est donné pour comparaison.

ces seuils, quelques-uns ne pouvant être suivis jusqu'au cas limite $Bi = 0$. Tout d'abord, le seuil Ra_{S_1} subit en deçà de $Bi = 20$ une légère diminution avant d'augmenter pour atteindre sa valeur maximum $Ra_{S_1}|_{Bi=0} = 11392$. Les deux autres seuils secondaires $Ra_{S'_1}$ et Ra_{H_1} n'ont pu être obtenus que pour les écoulements allant respectivement jusqu'à $Bi = 8$ et $Bi = 3$, où leurs valeurs maximales respectives sont $Ra_{S'_1}|_{Bi=8} = 7432$ et $Ra_{H_1}|_{Bi=3} = 20692$, valeurs atteintes par une croissance régulière. Le suivi des points $Ra_{U'_1}$ et $Ra_{U'_2}$ obtenus dans le diagramme à $Bi = 1$ montre (figure 5.16(a)) que ces points collapent aux alentours de $Bi \approx 2.5$ et n'entrent plus en jeu aux plus forts Bi .

Regardons ce qu'il en est pour la partie sous-critique de la branche primaire. Comme le montre la figure 5.15(b), seule la variation du seuil de Hopf Ra_{H_2} suit une évolution assez similaire à celle de son homologue Ra_{H_1} . Jusqu'à $Bi = 20$, sa variation est quasi nulle et elle augmente ensuite fortement pour atteindre son maximum en $Ra_{H_2}|_{Bi=0} = 69788$. Le seuil Ra_{S_2} à partir duquel la solution $m = 0/2$ naît, connaît une croissance régulière tout au long des valeurs décroissantes de Bi , arrivant à son maximum $Ra_{S_2}|_{Bi=0} = 105198$. Nous avons vu que cette branche de solution évoluait dans le sens des Ra décroissants pour ensuite franchir un noeud-col et se stabiliser. Nous avons également mis en évidence une déstabilisation accompagnée d'une restabilisation de la solution aux points Ra_{U_1} et Ra_{U_2} . Le suivi de ces deux points de bifurcation montre une augmentation progressive du premier et une diminution progressive du second jusqu'au point de collision mutuel en $Ra_U = 7550$ pour $Bi \approx 12$. En deçà de cette valeur de Bi , la déstabilisation de la solution $m = 0/2$ entre Ra_{U_1} et Ra_{U_2} n'a plus lieu. Le taux d'amplification de cette perturbation a une allure parabolique (figure 5.11) pour les fortes valeurs de Bi ; la diminution progressive de la valeur de Bi entraîne une décroissance globale de cette courbe jusqu'au cas limite où son maximum n'arrive plus à transiter.

Nous voyons que contrairement à la branche super-critique, les points principaux de bifurcation restent présents jusqu'au cas $Bi = 0$ (hormis les points liés à la perturbation stationnaire de la branche $m = 0/2$). Ces bifurcations sont toujours présentes mais leurs valeurs sont fortement modifiées. En fait, ces bifurcations ne sont plus les premières à venir rajouter des branches de solutions au système dynamique. La bifurcation Ra_{S_2} par exemple n'est plus la première de la branche super-critique du mode primaire axisymétrique. La valeur du noeud-col de la branche $m = 0/2$ n'évolue pas beaucoup par rapport à la valeur du seuil primaire Ra_{P_0} , contrairement à Ra_{S_2} . En effet, l'écart relatif de la distance du noeud-col au seuil primaire est approximativement de l'ordre de deux, tandis que l'écart de la distance du seuil secondaire au seuil primaire avoisine les 18 pour $Bi = 100$ et monte jusqu'à 100 pour $Bi = 0$. La sous-criticité de la branche $m = 0/2$ devient donc plus importante aux faibles valeurs de Bi . Cependant, comme le souligne la figure 5.16(b), les valeurs des seuils $Ra_{S'_2}$, $Ra_{S''_2}$, $Ra_{H'_2}$ obtenues pour $Bi = 1$ sont largement en dessous de celle du seuil Ra_{S_2} pour les petites valeurs de Bi . Il est donc intéressant d'analyser leurs variations pour les Bi croissants.

La variation des points de bifurcation $Ra_{S'_2}$ et $Ra_{H'_2}$ avec Bi est assez similaire pour les faibles valeurs de Bi et correspond à une diminution brusque suivie d'une augmentation régulière, tandis que le point $Ra_{S'_2}$ présente une augmentation monotone. Néanmoins, au delà de $Bi = 17$, la bifurcation de Hopf liée à $Ra_{H'_2}$ disparaît et $Ra_{S'_2}$ qui continue à augmenter finit par disparaître à son tour pour $Bi = 36$, au point d'intersection des seuils primaires de la branche axisymétrique sous-critique, $Ra_{S'_2}$ et Ra_{S_2} (les autres points d'intersection du diagramme ne sont pas de vrais points d'intersection, mais des points où ces seuils ont des valeurs identiques, mais sans être sur la même portion de courbe). Nous avons complété ces informations par des suivis de la branche $m = 0/1$ (qui naît en $Ra_{S'_2}$) pour $Bi = 40$ et $Bi = 17$. Pour ces valeurs de Bi , la branche $m = 0/1$ est sous-critique et présente un noeud-col où elle change de direction, alors que pour $Bi = 1$, cette branche est super-critique (figure 5.13).

D'après toutes ces informations, nous pouvons conclure que lorsque les points de bifurcation Ra_{S_2} et $Ra_{S'_2}$ (donnant naissance respectivement aux branches $m = 0/2$ et $m = 0/1$) se croisent pour Bi décroissant, la branche $m = 0/1$ vient se refermer sur la branche $m = 0/2$ au point de bifurcation $Ra_{S'_2}$ qui est alors créé. La branche $m = 0/1$ qui est d'abord sous-critique pour les fortes valeurs de Bi devient super-critique pour une valeur de Bi située dans l'intervalle $1 \leq Bi \leq 17$. On peut aussi penser que le point de bifurcation de Hopf qui existe pour les petites valeurs de Bi disparaît par collision avec le

noeud-col.

Nous avons montré au travers du suivi des seuils secondaires de bifurcation que la dynamique qui règne dans les systèmes à surface supérieure libre était complexe lorsque l'on prenait en compte l'effet du transfert thermique à la surface libre. Rappelons que l'étude ne considérait que le cas limite où les tensions de surfaces étaient négligées ($Ma = 0$) et que nous avons considéré une cavité de rapport de forme $A = 1.5$ pour laquelle le seuil primaire de déclenchement des mouvements correspond à un mode axisymétrique avec création de deux branches distinctes, sous critique et super-critique. Les caractéristiques principales de la dynamique qui se développe à partir de ces deux branches sont la présence de bifurcations secondaires liées à des modes $m = 1$ et $m = 2$ et qui donnent naissance à des branches qui peuvent interagir, et le caractère fortement sous-critique de ces bifurcations secondaires. Concernant la branche sous-critique, la diminution du nombre de Biot entraîne le changement d'ordre d'apparition des modes $m = 1$ et $m = 2$, ce qui amène des modifications importantes de la dynamique. Les modifications sont un peu moins importantes pour la branche super-critique où quelque soit le nombre de Biot, la première transition secondaire correspond toujours à un mode $m = 1$.

Les résultats que nous avons pu mettre en évidence pour ces écoulements en cavité cylindrique chauffée avec surface supérieure libre à travers nos outils d'analyse de stabilité linéaire et non-linéaire sont particulièrement riches. Nous obtenons des scénarios sous-critiques qui n'étaient pas habituels dans la situation où les deux surfaces haute et basse étaient rigides (cas rigide-rigide). Nous proposons pour clore ce chapitre une comparaison de ces deux configurations.

5.4 Comparaison des résultats avec le cas rigide-rigide

Ce chapitre est présenté sous la forme d'un article à paraître dans le journal *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*. Il présente des comparaisons entre les résultats obtenus pour une cavité avec surface supérieure libre ($Bi = 100$, $Ma = 0$) et une cavité avec surface supérieure rigide. En ce qui concerne les aspects linéaires, les comparaisons portent sur l'influence du confinement latéral à travers le rapport de forme A . Les calculs non-linéaires rendent ensuite bien compte des différences affectant les scénarios d'émergence des branches secondaires à partir de l'écoulement axisymétrique.

Instabilities and bifurcations due to buoyancy in a cylindrical container heated from below with and without a free surface

Anas El Gallaf^a, Ridha Touihri^b, Daniel Henry^a, Hamda Ben Hadid^a

^aLaboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, CNRS/Université de Lyon,
Ecole Centrale de Lyon / Université Lyon 1 / INSA de Lyon,
ECL, 36 Avenue Guy de Collongue, 69134 Ecully Cedex, France

^bLAMSIN, ENIT, Campus Universitaire, Le Belvédère, BP 37, 1002 Tunis, Tunisie

Received 06/23/2009; accepted after revision 10/01/2009

Presented by Jean-Baptiste Leblond

Abstract

Three-dimensional simulations of the buoyant convection in a cylindrical container heated from below are presented. Both the thresholds for the onset of the convection and the nonlinear evolution of this convection are calculated. The simulations concern two configurations: a cavity with a rigid upper surface (Rigid-Rigid case) and a cavity with a non-constrained free surface (Rigid-Free case). The results show a similar variation of the primary thresholds with the aspect ratio for the two configurations. In contrast, the non-linear evolution of the convection is much changed between the two configurations. In particular, subcritical secondary branches with a very large subcriticality are obtained in the R-F case. *To cite this article: A. El Gallaf et al., C. R. Mécanique 333 (2009).*

Key words: Computational fluid dynamics; stability; buoyant flow; free surface; cylindrical cavity; bifurcation analysis

Mots-clés : Mécanique des fluides numérique; stabilité; convection naturelle; surface libre; cavité cylindrique; analyse des bifurcations

1. Introduction

Convection arising in a layer heated from below is a classical problem in fluid mechanics. This problem has more recently induced new research activities to take into account finite-size containers, particularly cylindrical containers. When the layer is confined between two rigid upper and lower boundaries, the flow

Email addresses: anas.el-gallaf@ec-lyon.fr (Anas El Gallaf), ridha.touihri@ipeim.rnu.tn (Ridha Touihri), daniel.henry@ec-lyon.fr (Daniel Henry), hamda.benhadid@univ-lyon1.fr (Hamda Ben Hadid).

is buoyancy driven and the governing parameter is the well-known Rayleigh number. For a comprehensive introduction and a bibliographical review of the buoyancy driven instability in closed cylindrical containers, we refer to the work of Touihri *et al.* [1] and the references therein. The dynamics and the bifurcation scenarios become more complicated in the presence of an upper free surface, especially since there is a geometry related inhomogeneity. The flow patterns observed above the critical thresholds are strongly influenced by the absence of reflection symmetry in the mid-plane of the container. A consequence is the prevalence of hexagonal structures in extended domains. In comparison to the closed container (Rigid-Rigid case), the presence of an upper free surface (Rigid-Free case) also allows the development of an extra driving mechanism due to the surface tensions. This mechanism is denoted as the Marangoni effect and its influence is quantified by the Marangoni number. The respective influence of gravity and capillarity on the onset of convective flows largely depends on the thickness of the layer (height of the container). For a fixed container radius, this dependence is observed with respect to the aspect ratio A (=radius/height) of the container. In small aspect ratio boxes, the flow is mainly gravity driven while the Marangoni effect is dominant for flattened boxes. In boxes of intermediate sizes, both effects can be effective and the problem is known as the Marangoni-Bénard problem. The reference experimental work on the Marangoni-Bénard instability in circular containers has been performed by Koschmieder and Prahl [2]. More recent works have measured the free surface deformation associated with the flow pattern [3,4]. Linear stability studies on the Marangoni-Bénard problem have taken into account the simultaneous variation of the Marangoni and Rayleigh numbers when the applied vertical temperature difference is progressively increased (Zaman and Narayanan [5], Dauby *et al.* [6]). They verified that for small aspect ratios buoyancy is dominant while for large aspect ratios Marangoni effect is dominant. They made comparisons with the experiments of Koschmieder and Prahl [2] and found critical values 20% higher than in the experiments. The three-dimensional studies about the non-linear evolution of the convection in cylindrical containers are few. We can mention the recent work of Assemat *et al.* [7] in the case of the pure Marangoni convection.

Our work is devoted to the buoyancy driven convection in cylindrical containers. We want to see the influence played by the dynamical condition at the upper boundary. For that, both R-R situations with a solid upper surface (no-slip condition) and R-F situations with a non-constrained free surface are considered. In both cases, the temperature at the upper surface will be considered as nearly uniform, either fixed or resulting from a high Bi number. Three-dimensional simulations using continuation techniques will be performed which will allow to calculate both the thresholds for the onset of convection and the non-linear evolution of the emerging convective flows. The governing equations and the numerical techniques will be briefly described in the next section. Results will be presented in section 3 and a conclusion summarizing the main observations will then be given.

2. Governing equations

We consider an incompressible fluid layer confined in a cylinder between two (Rigid-Rigid case) or one (Rigid-Free case) perfectly heat-conducting horizontal circular plates and a lateral adiabatic side wall. The cylinder of aspect ratio $A = R/H$ is exposed to a vertical gravitation acceleration g and to a vertical temperature gradient $\Delta T/H = (T_b - T_t)/H$ directed from bottom to top. T_b and T_t are the bottom and top temperatures in the diffusive regime, respectively, H is the layer thickness (or cylinder height) and R the cylinder radius. The fluid is assumed to be Newtonian with constant physical properties, except that the fluid density ρ depends linearly on temperature in the buoyancy term.

For the R-F case, a Newton law of cooling, $-\lambda\partial_z T = h(T - T_g)$, expresses the heat transfer between the free surface and the ambient gas at constant temperature T_g (λ is the liquid thermal conductivity, and h is the heat exchange coefficient). As a consequence, $T_t = [-Bi(T_b - T_g)/(1 + Bi)] + T_b$, where

$Bi = hH/\lambda$ is the Biot number. Moreover, the upper surface is assumed to be flat and free of surface tension.

The convective flow is governed by the incompressible Navier-Stokes equations coupled to an energy equation. Using H , H^2/ν , ν/H and ΔT (ν is the kinematic viscosity) as scales for length, time, velocity and temperature (the dimensionless temperature is $\theta = (T - T_t)/\Delta T$), these equations take the following form:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} + RaPr^{-1}\theta \mathbf{e}_z, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta = Pr^{-1} \nabla^2 \theta, \quad (3)$$

where $Pr = \nu/\kappa$ is the Prandtl number and $Ra = \beta g \Delta T H^3 / (\nu \kappa)$ is the Rayleigh number (κ is the thermal diffusivity and β the thermal expansion coefficient). Knowing that no-slip boundary conditions are applied at the rigid walls, the boundary conditions are given by

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 \quad \text{at} \quad r = A, \quad (4)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{and} \quad \theta = 1 \quad \text{at} \quad z = 0, \quad (5)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{and} \quad \theta = 0 \quad \text{at} \quad z = 1, \quad (\text{R-R}) \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = w = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} + Bi\theta + 1 = 0 \quad \text{at} \quad z = 1. \quad (\text{R-F}) \quad (7)$$

The conductive rest state solution corresponds to a linear temperature profile along the vertical coordinate which, in dimensionless form, is given by $\theta(z) = 1 - z$.

In the three-dimensional cylindrical cavity, the governing equations are solved using a spectral element method [1]. The time discretization is carried out using a semi-implicit splitting scheme and a continuation technique based on a Newton solver is implemented, which allows both steady state solving and direct calculation of the bifurcation points as described in Henry and Ben Hadid [8]. The primary bifurcation points at which convection is triggered need first to be calculated. Due to the symmetries of the problem which include those of the $\mathcal{O}(2)$ symmetry group, the modes which are involved are Fourier modes with an azimuthal variation expressed as $\exp(im\varphi)$ (principally the $m = 0, 1$ and 2 modes). Then the steady solutions branches which emerge at these bifurcation points can be followed by continuation and bifurcation diagrams showing how these solutions evolve and are connected can be plotted.

3. Results

3.1. Accuracy and precision

After mesh refinement tests, a mesh with $(N_{xy} \times N_z) = (320 \times 10)$ points has been chosen for all calculations, where N_{xy} represents the number of points in the circular section of the cylinder and N_z the number of points in the vertical direction. This mesh enables a precise computation of the critical thresholds for the whole range of parameters considered (accuracy estimated at 0.1%). A good agreement was found between our results and those given by previous authors (Touihri *et al.* [1] for the R-R case and Dauby *et al.* [6] for the R-F case). As an example, Touihri *et al.* estimated a first transition at $Ra_c = 2260.13$ for R-R cavities with $A = 1$ and our code gives $Ra_c = 2260.06$. For R-F cavities with

$Bi = 1$, Dauby *et al.* found a critical value $Ra_c = 1628.20$ for an aspect ratio $A = 1$ to be compared with our $Ra_c = 1628.11$.

3.2. Thresholds for the onset of convection

The thresholds Ra_c for the onset of convection (which are independent of Pr) are given in Fig. 1 as a function of the aspect ratio A for the R-R case (Fig. 1(a)) and the R-F case for $Bi = 100$ (good approximation for a thermally conducting upper boundary) (Fig. 1(b)). Only the lowest thresholds corresponding to the first three Fourier modes are plotted, and the true critical threshold at which a stable convective flow is first triggered is given by the lowest value. For both R-R and R-F cases, there is a clear stabilization effect induced on the thresholds by the confinement. The evolution of the critical threshold is also not regular because, depending on the aspect ratio, different modes are involved. For the small values of A (narrow cylinders with A roughly below 1), a one-roll $m = 1$ mode is involved at the critical threshold, whereas for larger A (flat cylinders for which the lateral constraint is weaker) different modes are successively involved, first the axisymmetric $m = 0$ mode and then again the $m = 1$ mode. In fact, for small values of A , the lateral confinement constrains the convective structures (only a limited number of convective rolls can be formed). This explains that the convective one roll $m = 1$ mode is dominant for cells having very small values of A . For larger A , it is the axisymmetric (two-roll) $m = 0$ mode which is then preferred, before the $m = 1$ mode becomes again dominant. This $m = 1$ mode has in fact evolved with the increase of A and is now a three-roll structure. The evolution from one roll to three rolls by the simultaneous creation of two small rolls along the boundaries is initiated in the range $1.1 < A < 1.3$ where changes of curvatures are observed in the critical curves for this mode. This evolution also keeps all the symmetries of the $m = 1$ mode. Finally, for large values of A , the critical modes have closer thresholds as the modes can easily adapt themselves to the geometry by adding extra rolls near the end walls.

If the evolution of the thresholds look similar in the R-R and R-F cases, a more detailed comparison between the two cases show that the values of A at which the transitions between the modes occur are slightly larger for the R-F case: the first transition from $m = 1$ to $m = 0$ is changed from $A \approx 0.91$ for the R-R case to $A \approx 1.03$ for the R-F case, and the second transition from $m = 0$ to $m = 1$ is changed from $A \approx 1.57$ to $A \approx 1.85$. Moreover, the values of the thresholds are larger in the R-R case than in the R-F case ($Ra_c = 11191$ compared to $Ra_c = 3212$ and $Ra_c = 1371$ compared to $Ra_c = 1185$ for $A = 0.5$ and 2 , respectively) which indicates a stabilization induced by the upper rigid boundary, this stabilization being particularly strong for small aspect ratio cylinders. Finally, the differences in the boundary conditions between the R-R and R-F cases create differences in the symmetries: a reflection symmetry with respect to the horizontal mid-plane is effective in the R-R case, but does not exist in the R-F case. This will affect the nature of the first bifurcations: in the R-R case, this reflection symmetry is broken at the onset of convection so that all these bifurcations are pitchforks whereas in the R-F case, only the bifurcations associated with non-axisymmetric modes ($m \geq 1$) are pitchforks as the bifurcation associated with the axisymmetric mode does not break any symmetry and is then transcritical. In the next section, we will see how differently the primary axisymmetric flows will evolve in the two R-R and R-F cases.

3.3. Nonlinear evolution of the convection

The nonlinear evolution of the steady convective regimes initiated at the primary thresholds is depicted through bifurcation diagrams. These diagrams show the vertical velocity w_0 at the center of the cavity as a function of the Rayleigh number Ra . Stable regimes are plotted as solid lines and unstable regimes as dashed lines. With the choice of w_0 , the bifurcations associated to the axisymmetric mode appear symmetric when they are pitchforks (the solutions on one branch are obtained from those on the other

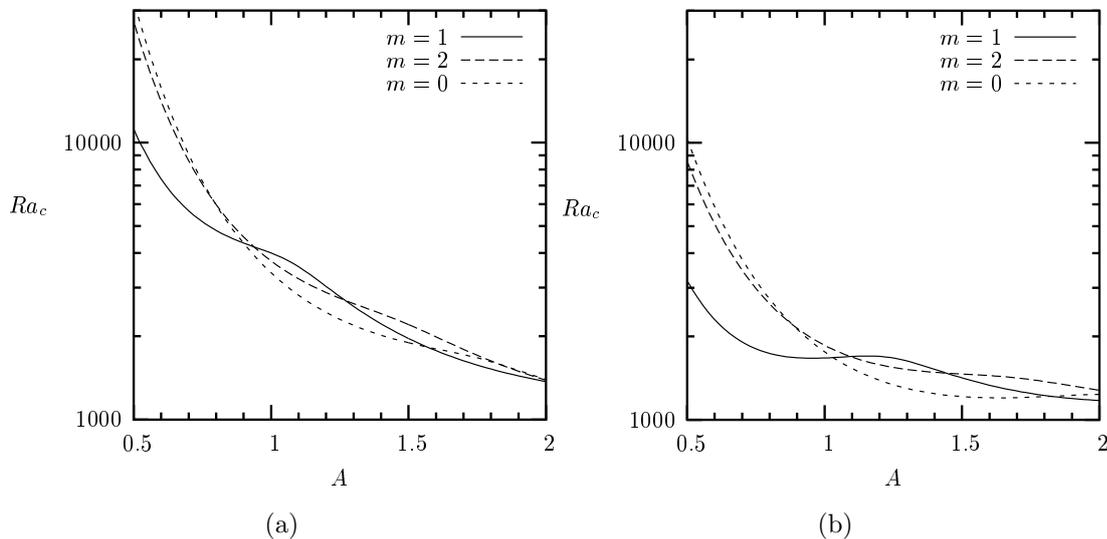


Figure 1. Evolution of the primary thresholds Ra_c for the onset of buoyancy induced convection in a cylindrical container as a function of the aspect ratio A . The three main convective modes (Fourier modes $m = 0, 1$ and 2) are considered. The results are shown for (a) the R-R case (solid upper boundary) and (b) the R-F case (non-constrained free upper boundary).

by reflexion in z) and they appear non-symmetric when they are transcritical. In the former case, we therefore only need to present the evolution of one of the two branches. In the diagrams, the flows on the different branches are also depicted through plots of the vertical velocity w at midheight, with dark (light) shading indicating $w < 0$ ($w > 0$). The calculations have been done for $Pr = 1$.

The bifurcation diagram given in Fig. 2 has been obtained in the R-R case for an aspect ratio $A = 1$. As shown in Fig. 1(a), for this aspect ratio convection is initiated by an axisymmetric $m = 0$ mode at $Ra_c = 2260$. The bifurcation is a supercritical pitchfork and the two branches of dynamically equivalent axisymmetric solutions remain stable until a secondary bifurcation point located at $Ra_S = 3003$. The destabilization at this point is associated with critical $m = 2$ modes and the supercritically emerging branches correspond to solutions defined to within a rotation around the cylinder axis (circular pitchfork bifurcation). These $m = 0/2$ solutions (combination of the axisymmetric $m = 0$ solution and $m = 2$ modes) consist of two counter-rotating and parallel rolls which preserve two symmetries, i.e. the reflection symmetries with respect to the two vertical central planes either parallel or perpendicular to the roll axes. The $m = 0/2$ branches are stable up to another steady bifurcation point. Another bifurcation diagram was obtained for a cylinder of aspect ratio $A = 1.5$. This bifurcation diagram is simpler as the primary axisymmetric flow initiated at a pitchfork bifurcation point at $Ra_c = 1895$ remains stable in the range of studied Rayleigh numbers ($Ra < 20000$).

The bifurcation diagram in the R-F case for an aspect ratio $A = 1.5$ and a Biot number $Bi = 100$ is shown in Fig. 3. This bifurcation diagram looks very different from those obtained in the R-R case. The conduction state is stable up to $Ra_c = 1212$ where it is now a transcritical bifurcation which is associated to the onset of the axisymmetric flow. Two branches of axisymmetric solutions emerge, the upper one which is also represented in Fig. 4(a) being subcritical (the subcriticality is so weak that it cannot be seen on the figure) and the lower one which can be seen more clearly in Fig. 4(b) supercritical. On the upper branch (up-flow along the axis of the cylinder), the flow remains stable up to $Ra_{S_2} = 12512$ where critical $m = 2$ eigenmodes generate a circle of $m = 0/2$ solutions. These branches, however, bifurcate subcritically so that the solutions are unstable until a saddle-node bifurcation at $Ra = 2154$ where they are stabilized. The branches are further destabilized by a steady mode in the range $3292 < Ra < 14948$

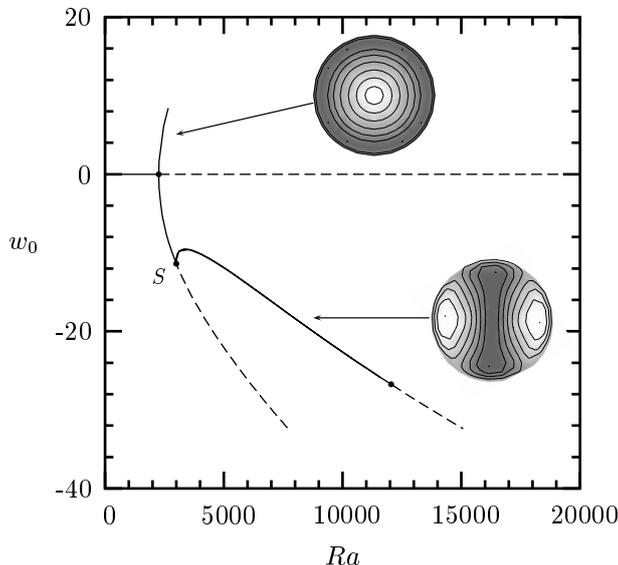


Figure 2. Bifurcation diagram for the buoyancy induced convection developing in a cylinder with a solid upper boundary (R-R case) and an aspect ratio $A = 1$ ($Pr = 1$). Continuous lines indicate stable states and dashed lines unstable states. Black dots indicate steady bifurcation points and circles Hopf bifurcation points. Insets show vertical velocity contours in the horizontal mid-plane of the cylinder.

before they reach a Hopf bifurcation point at $Ra_{H_2} = 16908$. On the lower branch (down-flow in the center of the cavity), the scenario to reach the $m = 0/2$ solutions is still more complex. The axisymmetric flow remains stable up to $Ra_{S_1} = 10112$, but the destabilization is now associated to $m = 1$ eigenmodes. The circle of $m = 0/1$ solutions (with only one vertical plane of symmetry) bifurcate subcritically and are then unstable. Such branches remain unstable and after different saddle-node bifurcations they terminate at a bifurcation point at $Ra_{S'_1} = 5656$ where they reach branches of unstable $m = 0/2$ solutions. The $m = 0/2$ solutions remain unstable for increasing Ra . For decreasing Ra , they are eventually stabilized at a saddle-node bifurcation at $Ra = 2382$, before they reach a Hopf bifurcation point at $Ra_{H_1} = 8361$.

4. Conclusion

We have numerically computed the thresholds for the onset of the buoyant convection and the nonlinear evolution of this buoyant convection in three-dimensional vertical cylinders heated from below, with a strongly conducting upper surface and adiabatic side walls. Calculations performed for either a rigid upper surface (R-R case) or a non-constrained free surface (R-F case) allowed to emphasize the influence of the constraint at the upper surface. It was shown that the influence of the aspect ratio on the primary thresholds is not much changed between the two cases, except that the thresholds are lower in the case of the free surface and that the transitions between the different modes are delayed to larger aspect ratios. On the contrary, the bifurcation diagrams showing the nonlinear evolution of the flow are much changed between the two cases. Calculations performed in the range of aspect ratios where the onset of convection is to an axisymmetric flow have shown that in the R-R case the two equivalent axisymmetric primary branches bifurcate supercritically to $m = 0/2$ states. In contrast, in the R-F case the two non-equivalent axisymmetric primary branches are connected to the $m = 0/2$ states through subcritical transitions, either directly for one of the axisymmetric branches or through intermediate $m = 0/1$ states for the other

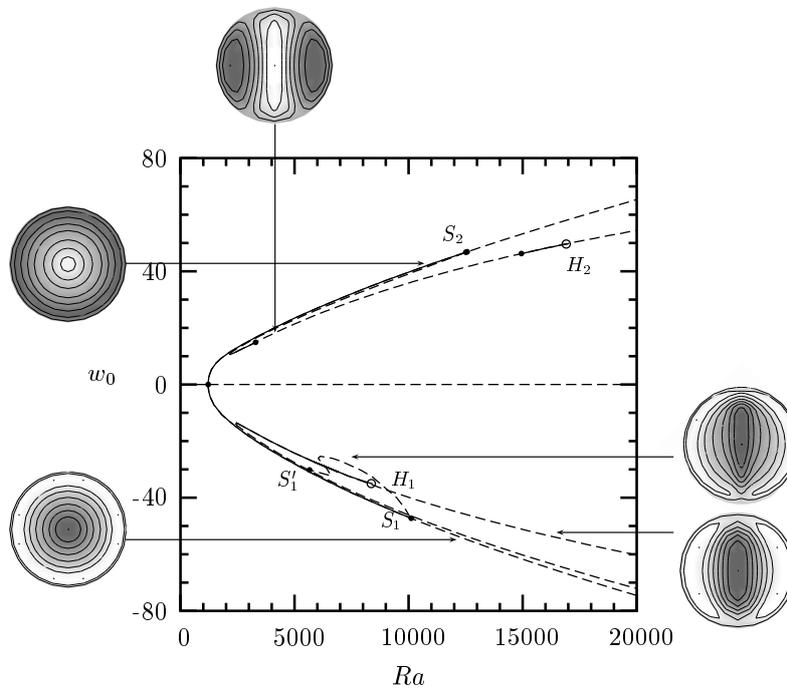


Figure 3. Bifurcation diagram for the buoyancy induced convection developing in a cylinder with a non-constrained free upper boundary (R-F case) and an aspect ratio $A = 1.5$ ($Pr = 1$). Continuous lines indicate stable states and dashed lines unstable states. Black dots indicate steady bifurcation points and circles Hopf bifurcation points. Insets show vertical velocity contours in the horizontal mid-plane of the cylinder.

branch. Moreover, the subcritical transitions lead to branches with a very strong subcriticality so that in a large range of Rayleigh number values many different solutions co-exist at fixed parameter values.

Acknowledgments

The calculations were carried out on a NEC-SX8 computer with the support of the CNRS through the Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique.

References

- [1] R. Touihri, H. Ben Hadid, D. Henry, On the onset of convective instabilities in cylindrical cavities heated from below. I. Pure thermal case, *Phys. Fluids* **11** (1999), pp. 2078-2088.
- [2] E.L. Koschmieder, S.A. Prah, Surface-tension-driven Bénard convection in small containers, *J. Fluid Mech.* **215** (1990), pp. 571-583.
- [3] P. Cerisier, S. Rahal, H. Azuma, Pattern dynamics of the Bénard-Marangoni instability in a medium aspect ratio container, In *Second International Symposium on Instability and Bifurcations in Fluid Dynamics*, *J. Physics: Conference Series* **64** (2007), 012004.
- [4] S. Rahal, P. Cerisier, H. Azuma, Bénard-Marangoni convection in a small circular container: influence of the Biot and Prandtl numbers on pattern dynamics and free surface deformation, *Exp. Fluids* **43** (2007), pp. 547-554.

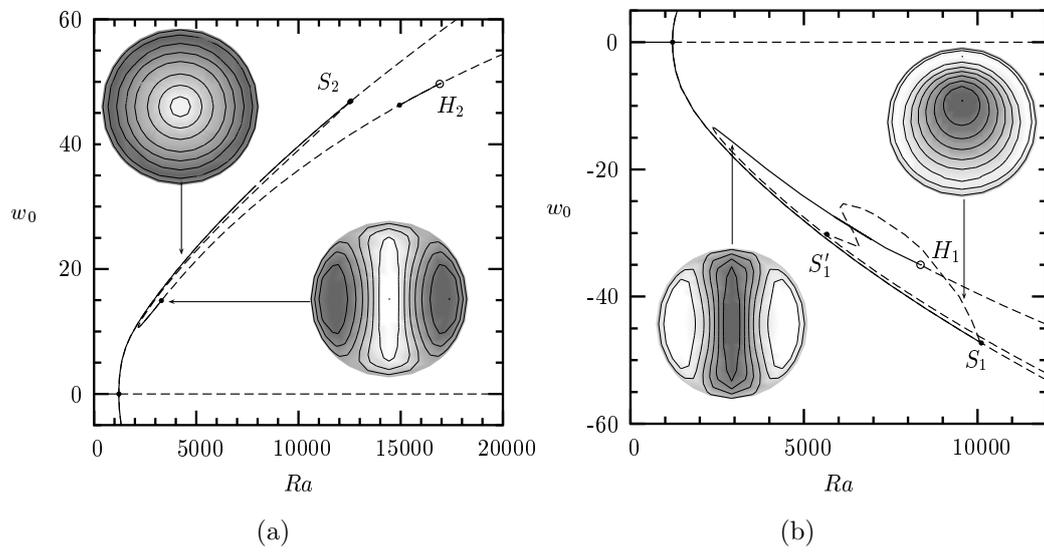


Figure 4. Zooms on the evolution of the subcritical (a) and supercritical (b) primary branches of the bifurcation diagram shown in Fig. 3.

- [5] A.A. Zaman, R. Narayanan, Interfacial and buoyancy-driven convection - The effect of geometry and comparison with experiments, *J. Colloid Interface Sci.* **179** (1996), pp. 151-162.
- [6] P.C. Dauby, G. Lebon, E. Bouhy, Linear Bénard-Marangoni instability in rigid circular containers, *Phys. Rev. E* **56** (1997), pp. 520-530.
- [7] P. Assemat, A. Bergeon, E. Knobloch, Nonlinear Marangoni convection in circular and elliptical cylinders, *Phys. Fluids* **19** (2007), 104101.
- [8] D. Henry, H. Ben Hadid, Multiple flow transitions in a box heated from the side in low-Prandtl-number fluids, *Phys. Rev. E* **76** (2007), 016314.

6. Dynamique de la convection en présence d'un champ magnétique

6.1 Préambule

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'action d'un champ magnétique sur les instabilités de convection dans une cavité cylindrique avec ou sans surface libre. Nous conservons la même configuration de base, à savoir que le chauffage est imposé par le bas et que la surface supérieure est plane et indéformable. L'ensemble des parois confinant le fluide conducteur sur lequel sera soumis le champ magnétique seront considérées comme électriquement isolantes, de sorte que les courants électriques induits ne pourront pas pénétrer dans ces parois.

Nous nous intéresserons tout d'abord à l'action d'un champ magnétique constant horizontal, puis à celle d'un champ magnétique tournant. Dans les deux cas, nous considérerons l'effet engendré par le champ magnétique sur les seuils primaires de convection, puis étudierons l'évolution des structures convectives non-linéaires en présence du champ magnétique.

6.2 Convection en présence d'un champ magnétique constant

Nous considérons dans ce cas la cavité cylindrique avec surface libre qui a beaucoup été étudiée au chapitre précédent, mais nous fixerons les paramètres Bi et Ma à des valeurs bien déterminées, $Bi = 100$ et $Ma = 0$, correspondant à une température assez figée en haut de la cavité et à l'absence d'effets de tension de surface. Nous choisissons d'étudier l'action d'un champ magnétique constant horizontal, qui a en général un effet de stabilisation sur la convection, mais aussi un effet de modification des structures convectives en raison de changements dans les symétries du système.

Nous commençons par définir les différents modes primaires obtenus en présence d'un champ magnétique horizontal, puis étudions comment leurs seuils d'apparition varient avec le rapport d'aspect de la cavité A et le nombre de Hartmann Ha . En ce qui concerne la dynamique non-linéaire, nous reprenons la configuration correspondant au diagramme de bifurcation tracé à la figure 5.7 du chapitre précédent et étudions en détails les modifications induites par la présence d'un champ magnétique horizontal. Nous abordons enfin le cas plus précis des métaux liquides (caractérisés par des faibles valeurs du nombre de Prandtl), en particulier le cas du gallium liquide ($Pr = 0.0286$) ; ce dernier est en effet souvent utilisé dans les procédés industriels. Nous présentons la dynamique de la convection dans ce cas, sans champ magnétique puis avec le champ magnétique horizontal.

6.2.1 Evolution des seuils et des structures primaires

Tout comme au chapitre précédent, il est important de bien analyser les symétries du système étudié. L'application d'un champ magnétique horizontal va favoriser une direction par rapport à l'invariance azimutale précédente, brisant ainsi les symétries initiales de la configuration thermique pure. La configuration cylindrique avec surface libre soumise au champ magnétique horizontal ne possède plus que les

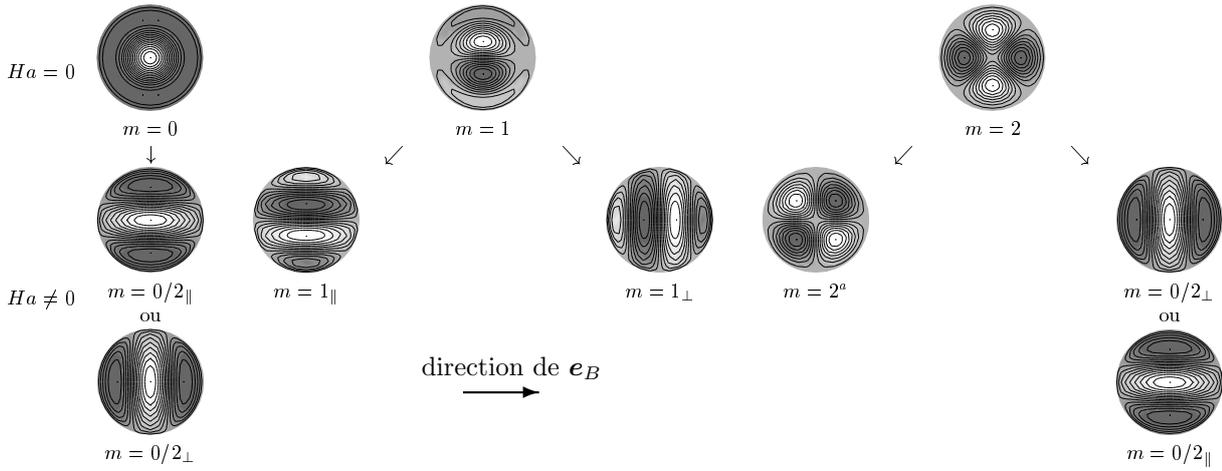


FIG. 6.1 – Evolution des trois premiers modes de Fourier par application d'un champ magnétique horizontal. Le schéma représente les trois modes $m = 0$, $m = 1$ et $m = 2$ (les modes $m = 1$ et $m = 2$ étant définis à une rotation près) pour $Ha = 0$, puis les différentes possibilités de modes lorsque $Ha \neq 0$, $m = 0/2_{||}$, $m = 2^a$, $m = 0/2_{\perp}$, $m = 1_{||}$ et $m = 1_{\perp}$. Les modes $m = 0$ et $m = 2$ peuvent tous les deux se stabiliser en des modes $m = 0/2_{||}$ ou $m = 0/2_{\perp}$; nous verrons que c'est le mode le plus instable sans champ qui va donner le mode $m = 0/2_{||}$ et l'autre donnera le mode $m = 0/2_{\perp}$. Les tracés représentent les iso-valeurs de vitesse verticale à mi-hauteur de la cavité.

réflexions par rapport à deux plans verticaux passant par l'axe du cylindre :

- le plan contenant la direction du champ magnétique,
- le plan perpendiculaire à la direction du champ magnétique,

sachant que toutes les autres symétries du cas thermique pur sont brisées. Pour cette configuration avec surface libre, nous passons ainsi du groupe de symétrie $\mathcal{O}(2)$ au groupe $\mathcal{Z}_2 \times \mathcal{Z}_2$.

En présence du champ magnétique horizontal, les trois premiers modes de Fourier $m = 0$, $m = 1$, $m = 2$ donnent naissance à cinq modes distincts, les modes $m = 0/2_{||}$, $m = 2^a$, $m = 0/2_{\perp}$, $m = 1_{||}$ et $m = 1_{\perp}$. Cette transformation des modes est illustrée sur la figure 6.1. Le mode $m = 1$, défini à une rotation près sans champ, engendre les deux modes $m = 1_{||}$ et $m = 1_{\perp}$ dont l'axe des rouleaux est orienté respectivement parallèlement et perpendiculairement à la direction du champ appliqué. Ces nouveaux modes brisent l'une des symétries du groupe $\mathcal{Z}_2 \times \mathcal{Z}_2$, mais conservent l'autre. Concernant les deux autres modes $m = 0$ et $m = 2$, ils n'évoluent pas de façon indépendante en présence du champ magnétique horizontal. En effet, le mode axisymétrique $m = 0$ (qui ne peut plus être axisymétrique en présence du champ horizontal) se transforme en un mode $m = 0/2_{||}$ ou en un mode $m = 0/2_{\perp}$, tandis que le mode $m = 2$ (défini à une rotation près sans champ) se transforme en deux modes, le mode $m = 2^a$ dont les lignes de vitesse verticale nulle sont orientées selon les directions principales horizontales x et y^1 et un autre mode qui est ou bien le mode $m = 0/2_{\perp}$ ou le mode $m = 0/2_{||}$. Cette transformation des modes $m = 0$ et $m = 2$ sous champ magnétique horizontal est visible sur la figure 6.2 qui donne l'évolution en fonction du rapport de forme A des seuils critiques pour les modes $m = 0$ et $m = 2$ (sans champ) et pour les modes $m = 0/2_{||}$, $m = 0/2_{\perp}$ et $m = 2^a$ en présence d'un champ correspondant à $Ha = 3$. Ces seuils Ra_c sont exprimés par $Ra_c - Ra_0$, c'est à dire par leur écart avec le seuil Ra_0 du mode $m = 0$ pour $Ha = 0$. On y voit que les courbes critiques pour les modes $m = 0$ et $m = 2$ se coupent en $A \approx 0.9$, tandis que celles pour les modes $m = 0/2_{||}$, $m = 0/2_{\perp}$ et $m = 2^a$ ne se coupent plus. La raison en est que sans champ magnétique les modes $m = 0$ et $m = 2$ ont des symétries différentes, ce qui autorise leurs courbes critiques à se couper, tandis les modes $m = 0/2_{||}$ et $m = 0/2_{\perp}$ (qui peuvent venir

¹ce mode $m = 2^a$ est le seul mode qui brise les deux symétries du système.

aussi bien du mode $m = 0$ que du mode $m = 2$) ont des symétries identiques (ils conservent les deux symétries du groupe $\mathcal{Z}_2 \times \mathcal{Z}_2$) et leurs courbes critiques ne peuvent se couper. Cette figure montre aussi clairement que le mode $m = 0/2_{\parallel}$ vient du mode $m = 2$ pour $A < 0.9$ et du mode $m = 0$ pour $A > 0.9$, c'est à dire que le mode $m = 0/2_{\parallel}$ (qui est un mode peu stabilisé car le champ est parallèle à l'axe des rouleaux) vient de celui des deux modes $m = 0$ et $m = 2$ qui apparaissait le premier (le plus instable) pour $Ha = 0$. Le mode $m = 0/2_{\perp}$ vient au contraire de celui des deux modes qui n'apparaissait qu'en second pour $Ha = 0$, c'est à dire le mode $m = 0$ pour $A < 0.9$ et le mode $m = 2$ pour $A > 0.9$.

L'influence du rapport d'aspect de la cavité sur les seuils primaires dans une situation avec champ horizontal est présentée sur la figure 6.3 pour $Ha = 3$. Nous voyons que ce sont les modes dont l'axe des rouleaux est parallèle à la direction du champ magnétique appliqué qui sont les modes dominants, plus précisément le mode $m = 0/2_{\parallel}$ pour $1.05 < A < 1.5$ et le mode $m = 1_{\parallel}$ pour $0.5 < A < 1.05$. Au contraire les modes dont l'axe des rouleaux est perpendiculaire à la direction du champ magnétique appliqué ont des seuils plus élevés. Les courbes des seuils pour les modes $m = 1_{\parallel}$ et $m = 1_{\perp}$ connaissent des variations assez similaires avec A , ces courbes passant toutes les deux par des minima pour $A \approx 0.9$ et des changements de courbure (passage d'un mode à un rouleau vers un mode à trois rouleaux) pour $A \approx 1.075$. Comme nous l'avons déjà vu, les courbes des seuils pour les modes $m = 0/2_{\parallel}$, $m = 2^a$ et $m = 0/2_{\perp}$ ne se coupent plus. La courbe pour le mode $m = 2^a$ (qui est issue de la courbe du mode $m = 2$ pour $Ha = 0$) se situe entre les courbes pour les modes $m = 0/2_{\parallel}$ et $m = 0/2_{\perp}$. Elle est quasi-confondue avec la courbe du mode $m = 0/2_{\parallel}$ pour des rapports d'aspect $A < 0.8$, puis quasi-confondue avec celle du mode $m = 0/2_{\perp}$ pour $A > 1.2$, tandis qu'elle évolue différemment dans le domaine intermédiaire, autour de l'ancien point d'intersection des modes $m = 0$ et $m = 2$ pour $Ha = 0$. Notons que ces courbes sont obtenues pour $Ha = 3$. Il paraît clair que ces courbes vont s'éloigner les unes des autres lorsque le nombre de Hartmann Ha va augmenter.

L'influence du nombre de Hartmann Ha sur les seuils Ra_c des modes primaires est montrée plus en détails sur la figure 6.4. L'ensemble des courbes présentées sur la figure augmentent en fonction de Ha , confirmant bien le rôle stabilisant du champ magnétique constant. Toutefois les modes sont stabilisés en fonction de Ha à des vitesses différentes. Les modes dont l'axe des rouleaux est orienté dans la direction perpendiculaire au champ sont très fortement stabilisés; ceux dont l'axe est orienté dans la direction parallèle au champ ont une stabilisation plus faible, et le mode $m = 2^a$ a une stabilisation intermédiaire. Remarquons que c'est le mode $m = 1$ qui présente les stabilisations extrêmes, c'est à dire la plus forte pour le mode $m = 1_{\perp}$ et la plus faible pour le mode $m = 1_{\parallel}$. La plus forte stabilisation du mode $m = 0/2_{\parallel}$ par rapport au mode $m = 1_{\parallel}$ explique le décalage du point d'intersection des modes dominants vers les plus fortes valeurs de A (ce point passe par exemple de $A = 0.9$ pour $Ha = 0$ à $A = 1.05$ pour $Ha = 3$). Ces différences d'évolution avec Ha entraînent des croisements entre les courbes. Ainsi, le mode $m = 1_{\perp}$ qui provient du mode $m = 1$ en $Ra = 1417$ apparaît avant les modes $m = 2^a$ et $m = 0/2_{\perp}$ jusqu'à la valeur $Ha = 2.5$, puis sa courbe critique croise successivement celles des deux autres modes pour devenir ensuite le mode le plus stable des cinq modes étudiés. Notons que la figure 6.4 montre bien l'évolution des modes en présence du champ magnétique horizontal pour $A = 1.5$. Le mode dominant $m = 0$ donne le mode $m = 0/2_{\parallel}$, le mode $m = 1$ défini à une rotation près donne les modes $m = 1_{\parallel}$ et $m = 1_{\perp}$ dont les seuils se séparent peu à peu avec l'augmentation de Ha , et le mode $m = 2$ défini à une rotation près donne les modes $m = 2^a$ et $m = 0/2_{\perp}$ qui se séparent plus lentement.

Les changements de symétries que nous avons évoqués (passage du groupe $\mathcal{O}(2)$ au groupe $\mathcal{Z}_2 \times \mathcal{Z}_2$ quand un champ magnétique horizontal est appliqué) peuvent modifier les caractéristiques des bifurcations primaires qui vont être rencontrées. La bifurcation trans-critique associée au mode axisymétrique $m = 0$ va rester trans-critique, car les nouveaux modes possibles $m = 0/2_{\parallel}$ et $m = 0/2_{\perp}$ ne brisent aucune des symétries du groupe $\mathcal{Z}_2 \times \mathcal{Z}_2$. La bifurcation du mode $m = 2$ qui évolue vers $m = 0/2_{\parallel}$ ou $m = 0/2_{\perp}$ va elle-aussi devenir trans-critique et être associée à une unique valeur propre. Ces bifurcations trans-critiques vont générer deux branches non équivalentes, une branche super-critique stable et une branche sous-critique instable qui se restabilisera au franchissement d'un noeud-col. Par contre, les bifurcations liées aux modes $m = 1_{\parallel}$, $m = 1_{\perp}$ et $m = 2^a$ seront des bifurcations fourches car elles brisent au moins une des deux symétries du groupe $\mathcal{Z}_2 \times \mathcal{Z}_2$. Ces bifurcations ne sont plus des bifurcations fourches circulaires

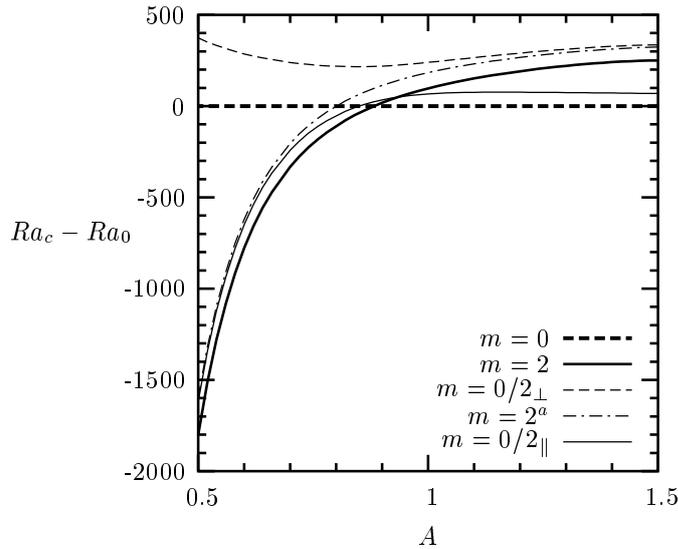


FIG. 6.2 – Seuils primaires pour les modes $m = 0$ et $m = 2$ sans champ magnétique ($Ha = 0$) et pour les modes $m = 0/2_{\parallel}$, $m = 0/2_{\perp}$ et $m = 2^a$ qui en résultent en présence d'un champ magnétique horizontal ($Ha = 3$ sur la figure). Ces seuils Ra_c sont donnés en fonction du rapport d'aspect de la cavité A et exprimés par $Ra_c - Ra_0$, c'est à dire leur écart avec le seuil Ra_0 du mode $m = 0$ pour $Ha = 0$. Les résultats ont été obtenus pour $Bi = 100$, $Ma = 0$ et $Pr = 1$.

en raison de la perte de l'invariance par rotation du système, et elles ne sont plus associées qu'à une unique valeur propre. Ces modifications des symétries pourront aussi entraîner des modifications des bifurcations secondaires. Mentionnons en particulier les bifurcations secondaires qui conduisent de la solution axisymétrique vers des solutions $m = 0/2$. Comme la solution axisymétrique est déjà modifiée en une solution de type $m = 0/2$ en présence du champ, ces bifurcations secondaires sont amenées à disparaître et à laisser place à des bifurcations imparfaites. Nous préciserons tout cela au paragraphe suivant lors de l'étude des diagrammes de bifurcation.

6.2.2 Dynamique des écoulements stationnaires soumis à un champ magnétique constant pour un fluide avec $Pr = 1$

Nous avons présenté au paragraphe 5.3.1 les effets non-linéaires de la convection naturelle présents dans les configurations cylindriques lorsque le mode primaire était un mode axisymétrique. Il naît alors deux branches de solutions, identiques en terme de structures (mode $m = 0$) mais distinctes en terme de dynamique, donnant à leur tour naissance à des types de régimes convectifs secondaires différents. Nous reprenons pour cette première étude du champ magnétique la configuration obtenue pour les paramètres précédents : $Pr = 1$, $Ma = 0$, $Bi = 100$, et $A = 1.5$ et imposons au système un champ magnétique horizontal et constant dans la direction e_x . L'intensité de ce champ magnétique est caractérisé par le nombre de Hartmann Ha que nous avons fixé dans cette première étude à une faible valeur, $Ha = 1$, de façon à se focaliser sur l'effet structurant du champ magnétique horizontal. Contrairement au cas thermique pur où nous avons préféré tracer des diagrammes de bifurcation donnant l'évolution de la vitesse verticale évaluée au centre de la cavité (w_0), nous avons choisi ici de donner w en un point quelconque de la cavité. En effet, le cas thermique pur est caractérisé par une dégénérescence des solutions définies à une rotation près et dont les branches représentatives sont toutes confondues lorsque l'on trace w_0 . Néanmoins, w_0 est moins adapté pour les solutions avec champ magnétique, car les différentes branches de solutions qui se séparent sous l'action du champ magnétique restent très rapprochées si on garde ce tracé (d'autant plus que Ha est faible) et c'est pour cela que nous avons plutôt choisi de tracer w en un point quelconque.

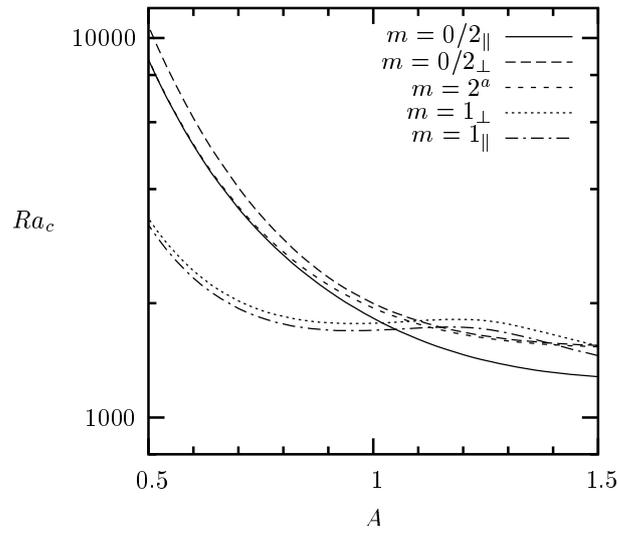


FIG. 6.3 – Evolution des seuils Ra_c des modes primaires en fonction du rapport de forme A pour une situation avec champ magnétique horizontal ($Ha = 3$). Les résultats ont été obtenus pour $Bi = 100$, $Ma = 0$ et $Pr = 1$.

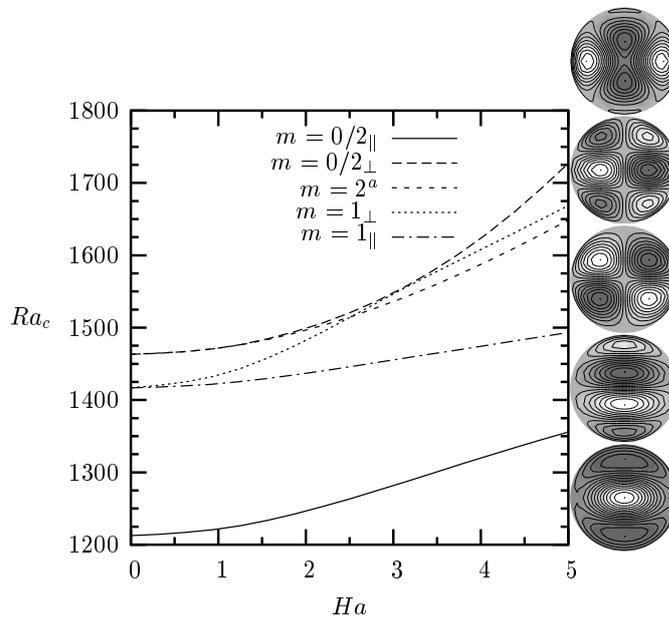


FIG. 6.4 – Stabilisation des trois premiers modes critiques par application d'un champ magnétique horizontal, exprimée à travers la variation de leurs seuils Ra_c en fonction de Ha . Les tracés représentent les iso-valeurs de vitesse verticale à mi-hauteur de la cavité pour $Ha = 5$. Les modes dont l'axe des rouleaux est perpendiculaire au champ magnétique sont fortement stabilisés. Ces résultats ont été obtenus pour $A = 1.5$, $Bi = 100$, $Ma = 0$ et $Pr = 1$.

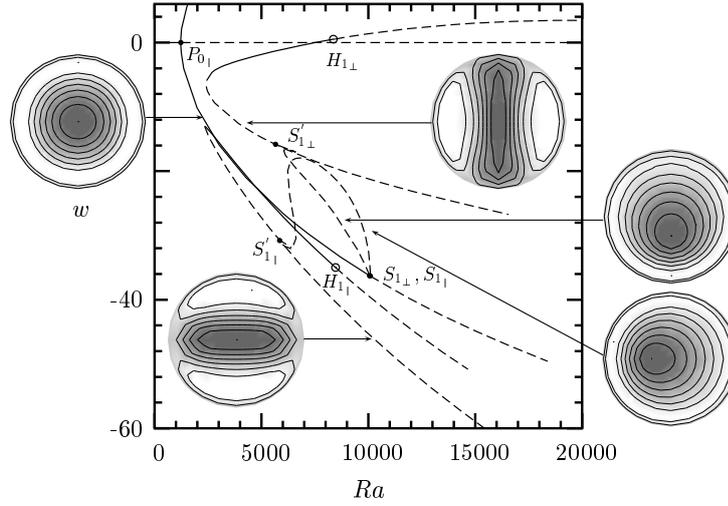


FIG. 6.5 – Diagramme de bifurcation de la partie super-critique de la branche axisymétrique pour la configuration $A = 1.5$, $Ma = 0$, $Bi = 100$, $Ha = 1$ ($Pr = 1$).

Diagramme de bifurcation

L'écoulement de repos linéairement stratifié en température reste stable jusqu'à la valeur $Ra_{P_{0\parallel}} = 1222$, où une bifurcation trans-critique génère un écoulement $m = 0/2_{\parallel}$, dont l'axe des rouleaux est orienté dans la direction du champ magnétique. Deux branches de solutions sont obtenues. La branche correspondant au cadran inférieur $w < 0$ (resp. $w > 0$) reflète la descente (resp. la montée) du fluide le long de l'axe du cylindre avec la remontée (resp. redescende) le long des parois et cette bifurcation est super-critique (resp. sous-critique). Comme pour le cas thermique pur, un phénomène d'hystérésis est présent entre le point de bifurcation et le noeud-col (la branche sous-critique naît instable et se stabilise au travers d'un noeud-col). Mais l'hystérésis est très petit et n'apparaît pas sur nos diagrammes de bifurcation. En raison de la levée de dégénérescence due au champ magnétique, les bifurcations primaires présentes le long de l'axe $w = 0$ sont plus nombreuses que dans le cas thermique pur, à savoir qu'après le mode $m = 0/2_{\parallel}$, ce sont respectivement les modes $m = 1_{\parallel}$, $m = 1_{\perp}$, $m = 2^a$ puis $m = 0/2_{\perp}$ qui se manifestent. La stabilisation des modes primaires $m = 1$ par le champ magnétique horizontal donne deux modes $m = 1_{\parallel}$ et $m = 1_{\perp}$ qui deviennent instables à des valeurs aux seuils $Ra_{P_{1\parallel}} = 1422$ et $Ra_{P_{1\perp}} = 1434$, et le mode primaire $m = 2$ donne deux modes $m = 2^a$ et $m = 0/2_{\perp}$ qui deviennent instables pour $Ra_{P_{2^a}} = 1471$ et $Ra_{P_{2_{\perp}}} = 1472$. Comme prévu, à partir du mode $m = 1$, nous obtenons comme premier mode le moins stabilisé le mode $m = 0/1_{\parallel}$ dont l'axe des rouleaux est dirigé parallèlement à la direction du champ magnétique, puis comme mode plus stabilisé le mode $m = 0/1_{\perp}$ dont l'axe des rouleaux est dirigé perpendiculairement à la direction du champ magnétique. Concernant les autres modes, nous sommes dans le cas ($A = 1.5$) où c'est le mode $m = 0$ qui précédait le mode $m = 2$ dans la situation sans champ. C'est pour cela que c'est le mode axisymétrique qui donne le mode $m = 0/2_{\parallel}$, tandis qu'à partir du mode $m = 2$ sont obtenus le mode $m = 2^a$ (moins stabilisé) puis le mode $m = 0/2_{\perp}$. L'ensemble des solutions obtenues à partir des modes $m = 1_{\parallel}$, $m = 1_{\perp}$, $m = 2^a$ et $m = 0/2_{\perp}$ ne parviennent pas à se stabiliser tout au long de la gamme de Ra considérée.

La branche primaire super-critique représentée sur la figure 6.5 reste observable le long des Ra croissants jusqu'au point de bifurcation secondaire $Ra_{S_{1\perp}} = 10061$. La perturbation responsable de sa perte de stabilité est de type $m = 1_{\perp}$. Contrairement au cas thermique pur où le mode $m = 1$ (défini à une rotation près et qui devenait critique en Ra_{S_1}) était associé à une valeur propre double, l'application du champ magnétique dans la direction e_x dissocie le point critique en deux points distincts $Ra_{S_{1\perp}}$ et $Ra_{S_{1\parallel}}$. Ces deux points restent cependant très rapprochés (figure 6.6(a)) ; la valeur du deuxième seuil est égale à $Ra_{S_{1\parallel}} = 10087$. Afin de bien comprendre l'évolution de ces points, nous avons suivi leur évolution à partir

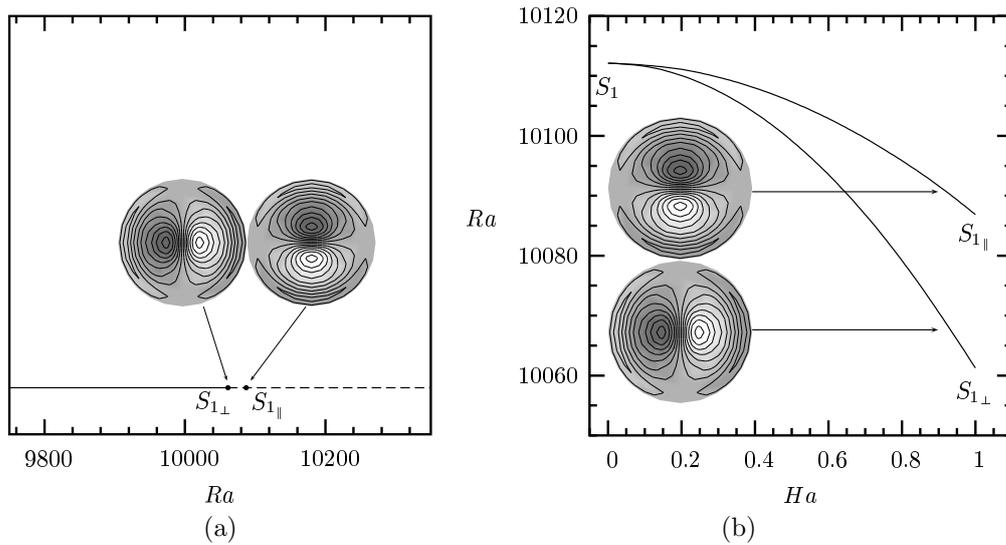


FIG. 6.6 – (a) Zoom présentant les deux points de bifurcations fourches présents sur la branche super-critique de la solution $m = 0/2_{\parallel}$ ainsi que les perturbations critiques correspondantes. (b) Suivi du point secondaire Ra_{S_1} en fonction du nombre de Hartmann Ha . Le champ magnétique horizontal sépare le point double critique en deux points simples, à partir desquels deux branches de solutions $m = 0/1_{\perp}$, $m = 0/1_{\parallel}$ naissent. Résultats obtenus pour $A = 1.5$, $Ma = 0$, $Bi = 100$, $Ha = 1$, $Pr = 1$.

de cette configuration pour $Ha = 1$ jusqu'au cas thermique pur $Ha = 0$. La figure 6.6(b) montre bien comment le champ magnétique agit sur la bifurcation Ra_{S_1} pour dissocier les seuils des modes $m = 1_{\perp}$ et $m = 1_{\parallel}$. Notons que les seuils décroissent ici avec l'augmentation de Ha et que c'est le seul lié à $m = 1_{\parallel}$ qui décroît le moins. Ce sont deux branches de solutions de type $m = 0/1$ qui émergent alors de ces deux points. Elles diffèrent clairement l'une de l'autre par les symétries différentes des solutions : la symétrie conservée (parmi les deux symétries de la branche $m = 0/2_{\parallel}$) n'est pas la même. Les bifurcations correspondantes sont des fourches sous-critiques. Les branches filles correspondantes sont instables à leur naissance. Elles évoluent en restant instables de façon similaire au cas thermique pur jusqu'à se reconnecter à des solutions $m = 0/2$ aux points $Ra_{S'_{1\perp}} = 5848$ et $Ra_{S'_{1\parallel}} = 5657$, passant durant leur évolution d'une solution à un unique plan de symétrie (orienté parallèlement ou perpendiculairement au champ magnétique appliqué) à une solution à deux plans de symétrie perpendiculaires. Les deux nouvelles branches $m = 0/2_{\perp}$ et $m = 0/2_{\parallel}$ se stabilisent toutes les deux au passage d'un noeud-col en $Ra = 2428$ (valeur identique obtenue pour les deux cas) puis bifurquent vers un état oscillatoire via une bifurcation de Hopf en $Ra_{H_{1\perp}} = 8362$ et $Ra_{H_{1\parallel}} = 8462$.

L'évolution de la branche sous-critique générée à partir de la bifurcation primaire est représentée sur la figure 6.7. On y voit que la solution ne reste stable que sur une gamme de nombres de Rayleigh, bien réduite par rapport au cas thermique pur ($Ra = 7573$ comparé à $Ra_{S_2} = 12513$). En ce point se produit un rebroussement de la courbe de solution, caractéristique d'un noeud-col, avec perte de stabilité. La solution garde les symétries du système et évolue dans le sens des Ra décroissants jusqu'à un second noeud-col en $Ra = 2123$, où la courbe se restabilise. Le système évoluera ensuite pour les Ra croissants jusqu'au point $Ra_{U_{1\parallel}} = 3942$, où à nouveau une déstabilisation, qui sera suivie d'une restabilisation de la solution par une même perturbation, a lieu. La restabilisation s'effectue pour $Ra_{U_{2\parallel}} = 14881$ avant que le système ne rencontre une bifurcation de Hopf en $Ra_{H_{2\parallel}} = 17322$. L'ensemble de ces solutions correspond à un mode $m = 0/2_{\parallel}$ avec une accentuation plus forte de la non axisymétrie lorsque l'on progresse le long de la branche. Nous voyons aussi que cette solution naît comme solution primaire et que son évolution se fait sans points de rattachement avec d'autres courbes de solutions. L'évolution est par contre marquée par une forte présence de noeuds-cols. Ce scénario est caractéristique d'une bi-

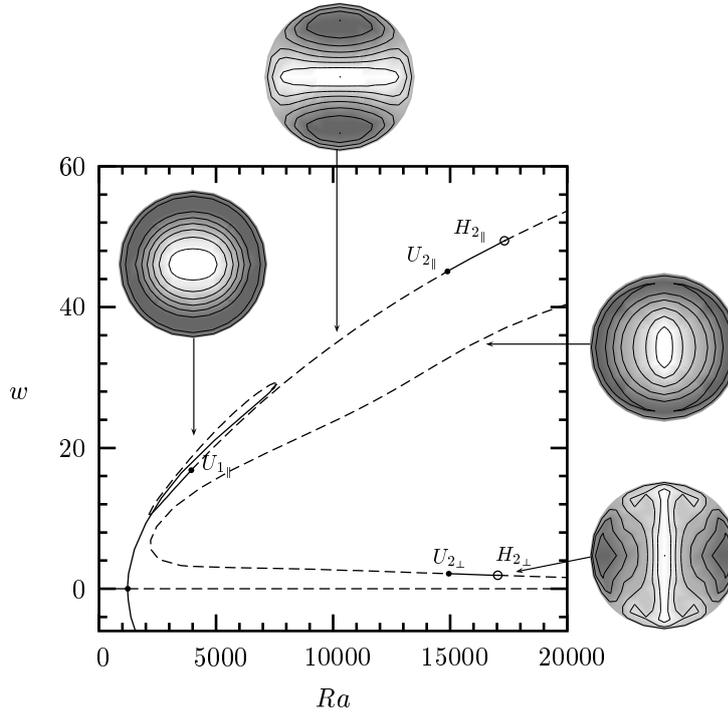


FIG. 6.7 – Diagramme de bifurcation de la partie sous-critique de la branche axisymétrique pour la configuration $A = 1.5$, $Ma = 0$, $Bi = 100$, $Ha = 1$, $Pr = 1$. On observe une bifurcation fourche imparfaite.

furcation initialement fourche circulaire sous-critique qui a subi une imperfection. Dans notre cas, cette imperfection est liée à la présence du champ magnétique horizontal qui détruit l'invariance par rotation de notre système. Nous notons aussi que la perturbation obtenue dans le cas thermique pur qui venait déstabiliser puis restabiliser la branche $m = 0/2$ est toujours présente et qu'elle se manifeste au niveau des points $Ra_{U_{1||}}$ et $Ra_{U_{2||}}$. Nous avons suivi l'évolution du taux d'amplification en fonction de Ra (figure 6.8(a)) et voyons qu'elle suit une forme similaire à son homologue en thermique pur. Il existe aussi une autre branche correspondant à un mode $m = 0/2_{\perp}$, mais qui est déconnectée de la branche principale. Cette branche change de direction à un noeud-col correspondant à une faible valeur de Ra , mais reste toujours instable, excepté au delà d'un point de bifurcation stationnaire en $Ra_{U_{2\perp}} = 14942$ et avant de rencontrer une bifurcation de Hopf en $Ra_{H_{2\perp}} = 17029$. Ici encore, nous avons tracé l'évolution du taux d'amplification de la perturbation critique en fonction de Ra pour la portion de branche contenant $Ra_{U_{2\perp}}$ (figure 6.8(b)). Nous voyons que cette perturbation ressemble à celle de la branche $m = 0/2_{||}$, mais que cependant elle ne parvient plus à se stabiliser aux plus faibles valeurs de Ra . Le taux d'amplification de la perturbation qui correspond à un mode $m = 2$ ne change de signe qu'en $Ra_{U_{2\perp}}$.

En résumé, un premier écoulement de convection est obtenu, pour une configuration $Ma = 0$, $Bi = 100$, $Ha = 1$, $Pr = 1$ dans une géométrie de rapport d'aspect $A = 1.5$, à partir de la valeur critique $Ra_{P_{0||}}$. La bifurcation qui donne naissance en ce point aux premiers mouvements de convection est trans-critique avec une branche sous-critique et une branche super-critique, toutes deux avec les propriétés de symétrie du mode $m = 0/2_{||}$, soit des rouleaux rangés dans la direction du champ magnétique appliqué. La partie super-critique de la solution passe par deux points de bifurcations fourches secondaires très rapprochés. De ces derniers émergent alors deux branches distinctes $m = 0/1_{||}$ et $m = 0/1_{\perp}$ qui évoluent respectivement vers des états $m = 0/2_{||}$ et $m = 0/2_{\perp}$ et qui parviennent à se stabiliser après le franchissement d'un noeud-col. La branche sous-critique reste quant à elle stable jusqu'au passage d'un point noeud-col où elle perd sa stabilité. La courbe passe alors par un deuxième noeud-col et regagne sa stabilité. Ce scénario

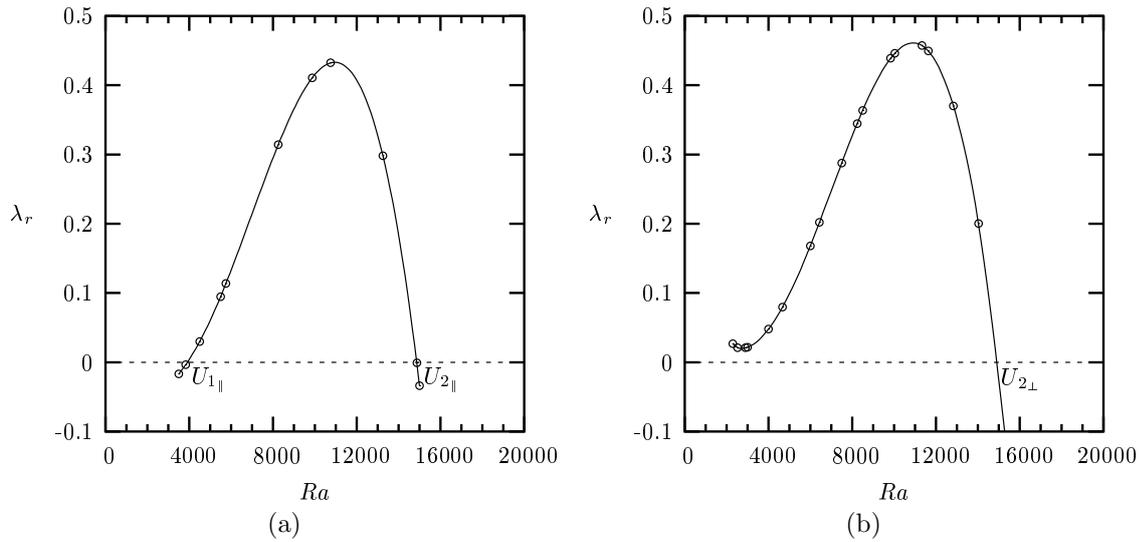


FIG. 6.8 – Taux d'amplification des perturbations critiques venant restabiliser les branches (a) $m = 0/2_{\parallel}$ et (b) $m = 0/2_{\perp}$ présentes dans le cadran supérieur du diagramme de bifurcation (figure 6.7). Configuration correspondant à $A = 1.5$, $Ha = 1$, $Ma = 0$, $Bi = 100$, $Pr = 1$.

caractéristique d'une bifurcation fourche sous-critique imparfaite implique la présence d'une deuxième branche; cette branche orientée perpendiculairement à la première est totalement déconnectée, rebrousse chemin au travers d'un noeud-col proche du deuxième noeud-col de son homologue et ne parvient pas à se stabiliser. Notons cependant que la stabilité de cette branche déconnectée change, passant de une fois instable avant le noeud-col à deux fois instable ensuite. Comme la branche primaire est déjà de type $m = 0/2_{\parallel}$ à sa naissance, le point Ra_{S_2} qui assurait la connection entre la solution axisymétrique et ce nouveau mode pour le cas thermique pur n'a plus lieu d'exister; il se transforme en un noeud-col. Au contraire, le point Ra_{S_1} qui assurait la connection entre la solution axisymétrique et une solution $m = 0/1$ (sur la branche super-critique) se conserve, mais se duplique. Chaque nouveau point correspond à une bifurcation fourche car une des deux symétries de la solution $m = 0/2_{\parallel}$ est brisée lors de ces transitions. Notons enfin que la valeur du point Ra_{S_1} n'a pas beaucoup évolué avec le champ magnétique (l'écart relatif n'excède pas les 0.3%), alors que l'écart relatif entre la bifurcation secondaire Ra_{S_2} (pour le cas thermique pur) et le noeud-col de la branche sous-critique a baissé de près de 40%. Nous allons présenter une analyse théorique des bifurcations fourches circulaires sous-critiques imparfaites, soulignant notamment la disparition du point Ra_{S_2} lors de l'application du champ magnétique horizontal.

Modèle théorique des bifurcations fourches circulaires sous-critiques imparfaites

Afin de mieux comprendre les résultats de l'analyse non-linéaire, nous proposons une petite analyse théorique des bifurcations fourches circulaires sous-critiques imparfaites. Pour cela, nous présentons les équations d'amplitude associées à ces bifurcations, munies d'une petite perturbation ϵ pour tenir compte de l'imperfection. Ces équations peuvent s'écrire en fonction de la variable complexe A :

$$\frac{dA}{dt} = \beta A + |A|^2 A - |A|^4 A + \epsilon. \quad (6.1)$$

En développant la variable A par $A = R e^{i\phi}$ (avec $R > 0$), on obtient :

$$\frac{dR}{dt} = \beta R + R^3 - R^5 + \epsilon \cos \phi, \quad (6.2)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\epsilon \sin \phi}{R}. \quad (6.3)$$

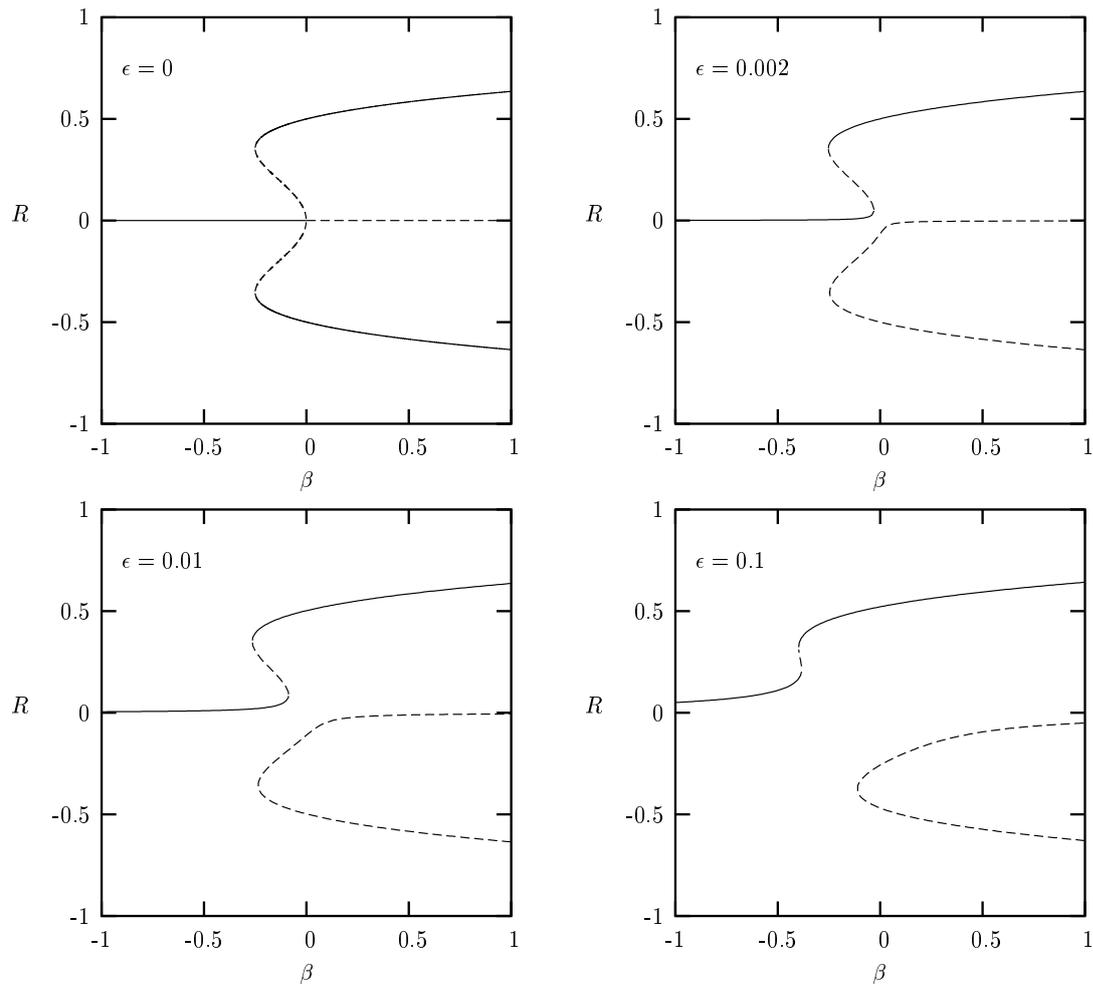


FIG. 6.9 – Modèle d'une bifurcation fourche circulaire sous-critique, soit parfaite, soit imparfaite.

D'après (6.3), pour $\epsilon = 0$, les zéros stationnaires sont obtenus pour $\phi = 0$ et $\phi = \pi$. Pour $\phi = 0$, les zéros stationnaires sont solutions de $\beta R + R^3 - R^5 + \epsilon = 0$ (solutions qui sont stables le long de la direction de ϕ) et pour $\phi = \pi$, ils sont solutions de $\beta R + R^3 - R^5 - \epsilon = 0$ (et instables le long de la direction de ϕ). Pour $\epsilon = 0$, les zéros existent pour tout ϕ et sont neutres le long de la direction de ϕ . L'ensemble des zéros pour $\phi = 0$ et $\phi = \pi$ peuvent être vus comme ceux de $\beta R + R^3 - R^5 + \epsilon = 0$, en considérant à la fois $R \geq 0$ et $R \leq 0$. C'est la manière dont ces solutions sont représentées sur la figure 6.9.

On voit bien sur cette figure 6.9 comment évolue la bifurcation fourche sous-critique en fonction de l'imperfection représentée par le paramètre ϵ . Lorsque ce dernier est nul (cas parfait) on observe deux branches de solutions symétriques, instables à leur naissance et qui se restabilisent au passage d'un noeud-col. Ces deux solutions représentent en fait le cercle de solutions équivalentes définies à une rotation ϕ près. Lorsque le paramètre ϵ est pris en compte dans le système, on n'obtient plus que les deux branches de solutions, mais elles se déconnectent. Celle des branches qui est raccordée à la solution de base initiale (stable) garde les propriétés de stabilité de la branche initiale à $\epsilon = 0$, car il y a attirance vers cette solution (donc stabilité) dans la direction ϕ . L'autre branche (déconnectée de la branche de base initiale mais connectée à la partie instable de cette branche de base) devient une fois de plus instable en raison d'une instabilité dans la direction ϕ (la zone instable sous-critique devient deux fois instable et la zone au delà du noeud-col une fois instable). L'invariance par rapport à ϕ est brisée et plus la valeur de ϵ est augmentée, plus les deux courbes s'éloignent. On remarque aussi que pour les plus fortes valeurs de ϵ , les portions de courbes sous-critiques se réduisent (avant de disparaître), de sorte que le système semble perdre la mémoire du cas parfait originel à $\epsilon = 0$.

6.2.3 Dynamique des écoulements stationnaires soumis à un champ magnétique constant pour un liquide métallique

Nous voulons désormais étudier l'influence d'un champ magnétique horizontal sur la convection générée dans un métal liquide. Les métaux liquides conduisent bien la chaleur et l'électricité. Parmi les métaux qui restent liquides à la température ambiante, on peut citer le césium, le gallium, le mercure, le rubidium. Ils sont caractérisés par une faible valeur du nombre de Prandtl ($0.01 < Pr < 0.05$). Le fluide d'étude sera le gallium liquide ($Pr = 0.0286$) pour lequel nous calculerons des diagrammes de bifurcation. Les scénarios convectifs obtenus lors du cas fondamental précédent pour $Pr = 1$ nous permettront de cerner précisément les phénomènes non-linéaires présents, bien que la dynamique entre les deux fluides va beaucoup changer. Nous tracerons des diagrammes de bifurcation en donnant la vitesse verticale en un point particulier de la géométrie d'étude en fonction du nombre de Rayleigh. Des profils de vitesse seront également présentés.

Effet du champ magnétique sur la bifurcation primaire trans-critique

La figure 6.10 présente le diagramme de bifurcation obtenu pour les paramètres $Bi = 100$, $Ma = 0$, $Ha = 0$, dans une géométrie $A = 1.5$ et pour du gallium liquide ($Pr = 0.0286$). Dans ce premier diagramme, nous montrons la dynamique liée uniquement aux effets de température lorsque l'on augmente celle-ci. Le chauffage est toujours assuré par le bas de la géométrie et la surface libre est plane et indéformable. La bifurcation primaire est une bifurcation trans-critique associée à une simple valeur propre qui a lieu au point $Ra_{P_0} = 1213$. Deux branches de solutions stables et distinctes évoluent à partir de ce point, l'une (celle où le fluide remonte au centre de la cavité) sous-critique et la deuxième super-critique. Un phénomène d'hystérésis est néanmoins ici aussi présent. La branche super-critique de l'écoulement axisymétrique évolue dans le sens des Ra croissants et au point $Ra_{S_1} = 1564$, une bifurcation fourche circulaire super-critique associée à une valeur propre double déstabilise la branche qui devient deux fois instable. De ce point secondaire naît un cercle de branches $m = 0/2$ stables (définies à une rotation près), et le système évolue ainsi jusqu'à devenir oscillatoire à partir du point $Ra_{H_1} = 1739$, caractérisé par une bifurcation de Hopf. Notons que la branche axisymétrique deux fois déstabilisée évolue également via une bifurcation de Hopf en $Ra_{H'_1} = 1775$. Au contraire, la dynamique de la branche sous-critique $m = 0$ reste inchangée (stable) sur une plus large gamme du nombre de Rayleigh et n'évolue qu'en $Ra_{H_2} = 4281$ via une bifurcation de Hopf.

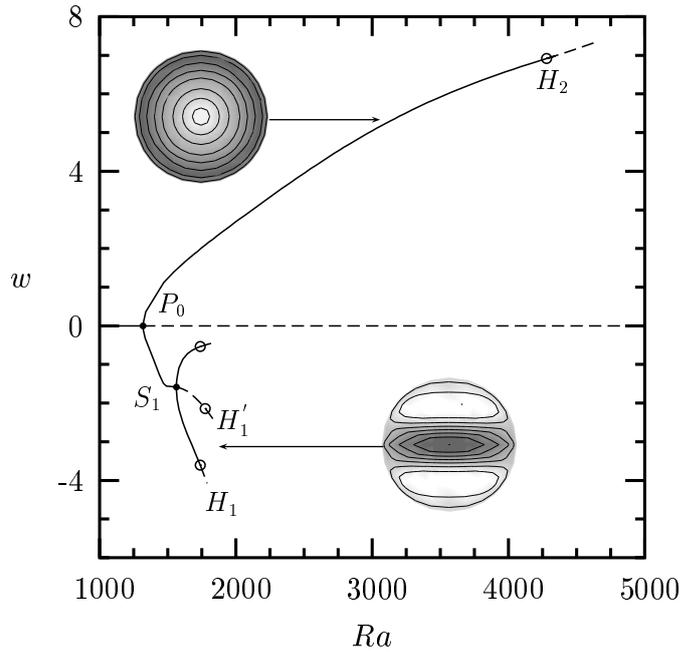


FIG. 6.10 – Diagramme de bifurcation de la configuration $A = 1.5$, $Ma = 0$, $Bi = 100$, $Ha = 0$, $Pr = 0.0286$. La branche primaire transite soit directement vers un écoulement oscillatoire soit en passant d'abord par un écoulement $m = 0/2$ via une bifurcation fourche super-critique.

L'influence d'un champ magnétique horizontal sur la dynamique que nous venons de décrire va entraîner que le mode primaire ne sera plus un mode axisymétrique, mais un mode de type $m = 0/2_{\parallel}$. Le changement, peu perceptible pour Ha petit, devient très net pour des valeurs suffisamment élevées de Ha , comme par exemple $Ha = 10$. Nous traçons sur la figure 6.11 l'évolution non-linéaire de la configuration précédente ($A = 1.5$, $Ma = 0$, $Bi = 100$, $Pr = 0.0286$) pour $Ha = 10$. Le métal liquide voit ainsi sa dynamique tout d'abord évoluer à partir d'une bifurcation trans-critique en $Ra_{P_{0\parallel}} = 1595$ avec deux branches de solutions $m = 0/2_{\parallel}$ distinctes. La branche super-critique reste stable jusqu'au point de bifurcation de Hopf en $Ra_{H_{1\parallel}} = 1959$. Comme nous l'avons déjà vu, la bifurcation en Ra_{S_1} (qui conduisait vers une solution $m = 0/2_{\parallel}$) devait disparaître en raison de l'application du champ magnétique horizontal. Nous pouvons observer que pour $Ha = 10$, le souvenir de cette bifurcation s'est complètement dissipé, car la solution va assez directement vers le point $Ra_{H_{1\parallel}}$ sans explorer le voisinage de Ra_{S_1} . La branche déconnectée (dont l'axe des rouleaux est perpendiculaire au champ magnétique) est instable et très éloignée de la branche stable. C'est pourquoi nous ne représentons sur le graphique que la branche stable. La branche sous-critique va quant à elle rester stable sur une plus petite gamme de Ra (que pour $Ha = 0$), jusqu'au point $Ra_{S_{2\parallel}} = 2873$, où une perturbation de type $m = 1_{\parallel}$ vient déstabiliser la solution. Cette perturbation favorise la génération d'une branche ne présentant plus qu'un seul plan de symétrie, perpendiculaire au champ magnétique imposé. Cette nouvelle solution, notée $m = 0/2/1_{\parallel}$ est stable, tandis que la branche mère $m = 0/2_{\parallel}$ devient alors une fois instable.

La connection entre ces deux diagrammes de bifurcation est montrée sur la figure 6.12 au travers du suivi de tous les points de bifurcation en fonction de Ha . On y voit que la valeur de la bifurcation primaire Ra_{P_0} est continuellement stabilisée tout au long des Ha croissants. Il y a donc bien une stabilisation progressive des mouvements de convection du gallium liquide par le champ magnétique horizontal. Concernant la première bifurcation secondaire Ra_{S_1} , qui vient déstabiliser la branche primaire super-critique, elle disparaît dès que $Ha \neq 0$. Ce point Ra_{S_1} donne naissance à un point noeud-col, sur une branche déconnectée. Nous n'avons pu suivre l'augmentation de la valeur de ce noeud-col que sur un petit domaine de Ha ($Ha < 1$). La bifurcation de Hopf Ra_{H_1} qui était présente sur les branches qui naissent à

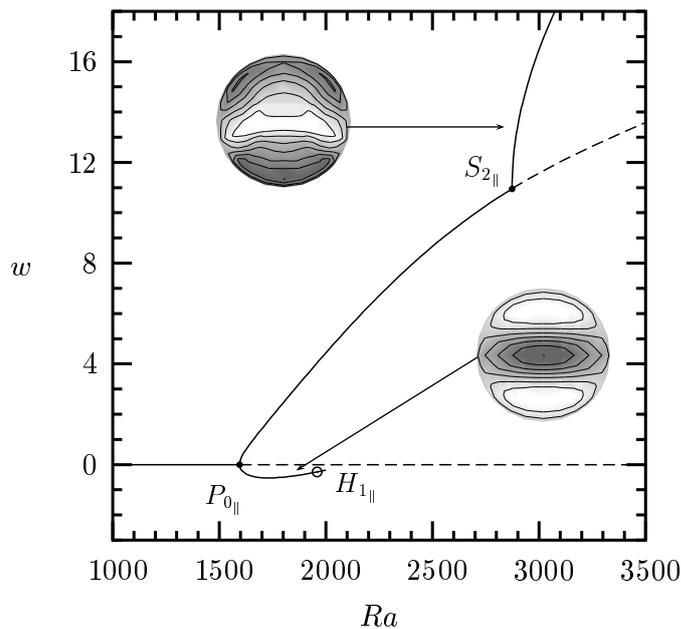


FIG. 6.11 – Diagramme de bifurcation de la configuration $A = 1.5$, $Ma = 0$, $Bi = 100$, $Ha = 10$, $Pr = 0.0286$. La branche super-critique transite directement via une bifurcation de Hopf tandis que la branche sous-critique subit une première bifurcation stationnaire.

partir de ce point se stabilise approximativement à la même allure que le point primaire tout au long des valeurs de Ha considéré. Concernant la bifurcation de Hopf Ra_{H_2} sur la branche primaire sous-critique, elle subit une forte variation et n'est plus dominante au-delà de $Ha = 2.5$. A $Ha = 2.7$ apparaît le point stationnaire $Ra_{S_{2\parallel}}$, point à partir duquel la branche $m = 0/2/1_{\parallel}$ émerge et qui reste présent jusqu'à $Ha = 10$.

Effet du champ magnétique sur la bifurcation primaire super-critique

Pour terminer, nous proposons une étude sur une géométrie plus réduite, de rapport de forme $A = 0.5$. Pour cette configuration, ce n'est plus le mode $m = 0$ qui s'impose en premier, mais le mode asymétrique $m = 1$. La bifurcation qui est associée à ce point est une bifurcation fourche circulaire super-critique avec une valeur propre double qui lui est associée. Nous traçons sur la figure 6.13(a) le diagramme de bifurcation lié à cette nouvelle configuration pour un nombre de Hartmann $Ha = 0$. L'écoulement asymétrique à un rouleau (défini à une rotation près) s'impose à partir de $Ra = 3731$ et demeure observable jusqu'à des valeurs de Ra supérieures à 7000. Ici aussi, les branches de solutions générées à partir des autres bifurcations primaires ne parviennent jamais à se stabiliser et n'interagissent pas avec la solution stable. La stabilisation du point primaire en fonction de Ha (figure 6.13(b)) donne deux modes, un premier avec l'axe de ses rouleaux dirigé parallèlement au champ magnétique et l'autre perpendiculairement. C'est bien le premier mode qui s'impose tout au long de la stabilisation. Il subit un écart relatif $\Delta Ra_{\parallel} = 0.7$, tandis que le second évolue de $\Delta Ra_{\perp} = 4.3$. Nous voyons que l'application d'un champ magnétique horizontal garde un même type de structure que pour $Ha = 0$, mais avec une orientation bien définie. Le diagramme de bifurcation associé à la stabilisation du mode $m = 1$ (obtenu pour une configuration géométrique $A = 0.5$ et pour $Ha = 10$) est donné sur la figure 6.14. Le point de déclenchement du mouvement s'opère au delà de la valeur $Ra = 4148$ en un point de bifurcation fourche super-critique. Les deux branches de type $m = 1_{\parallel}$ (symétriques l'une de l'autre) qui apparaissent restent aussi observables jusqu'à des valeurs de Ra supérieures à 7000. Rappelons que cette étude considère le cas où la surface libre est plane et indéformable, à fort nombre de Biot et nombre de Marangoni nul.

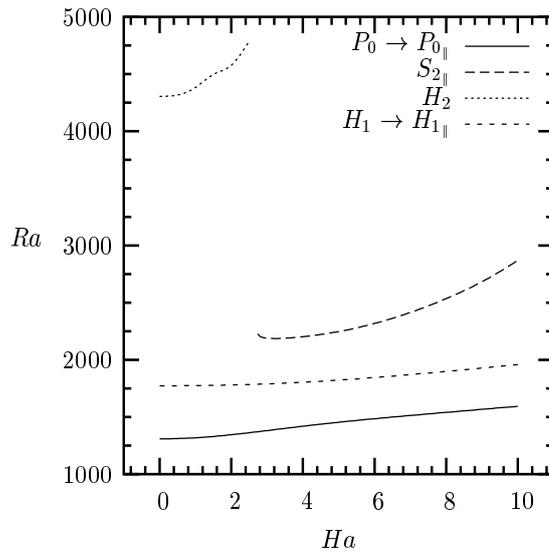


FIG. 6.12 – Suivi des seuils de bifurcations en fonction de Ha permettant de relier les deux diagrammes de bifurcations présentés pour $Ha = 0$ et $Ha = 10$ pour du gallium liquide ($Pr = 0.0286$). Configuration correspondant à $A = 1.5$, $Ma = 0$, $Bi = 100$.

Un autre moyen très efficace de stabiliser la convection naturelle est d'appliquer un champ magnétique tournant. Une moindre proportion d'induction magnétique est en effet nécessaire pour stabiliser davantage les seuils primaires. Les prochains paragraphes étudient son influence dans une configuration rigide-rigide de type Rayleigh-Bénard.

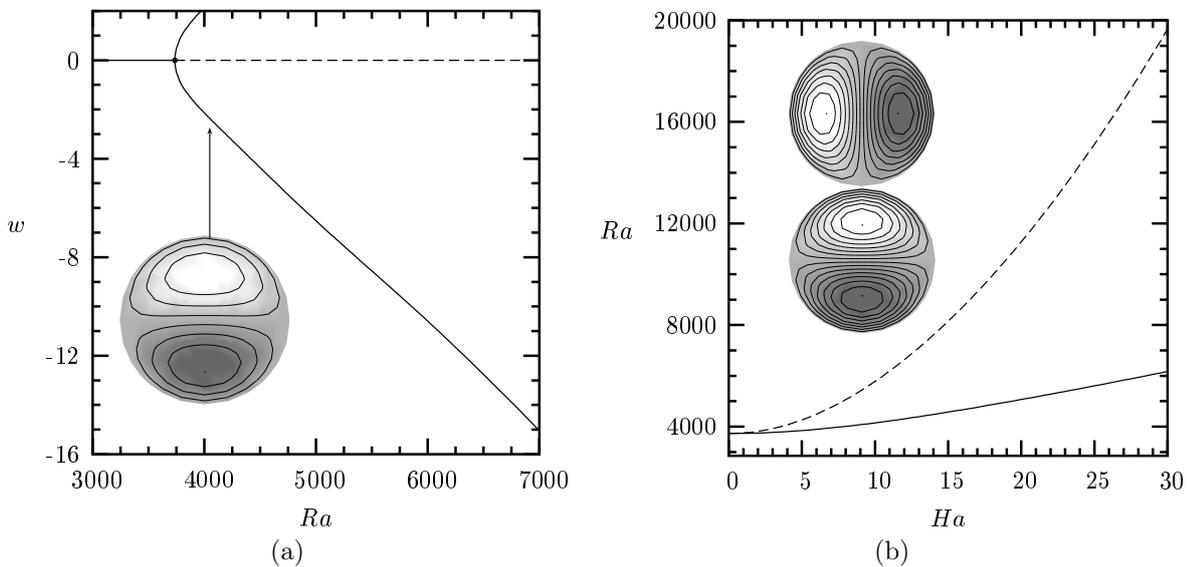


FIG. 6.13 – (a) Diagramme de bifurcation correspondant à du gallium liquide ($Pr = 0.0286$) confiné dans une géométrie de rapport d'aspect $A = 0.5$ avec les propriétés suivantes : $Ha = 0$, $Ma = 0$, $Bi = 100$. (b) Stabilisation du seuil primaire correspondant à un mode $m = 1$ sous l'effet du champ magnétique horizontal. Deux courbes critiques sont obtenues correspondant à un mode $m = 1_{\parallel}$ (le moins stabilisé) et un mode $m = 1_{\perp}$ (le plus stabilisé).

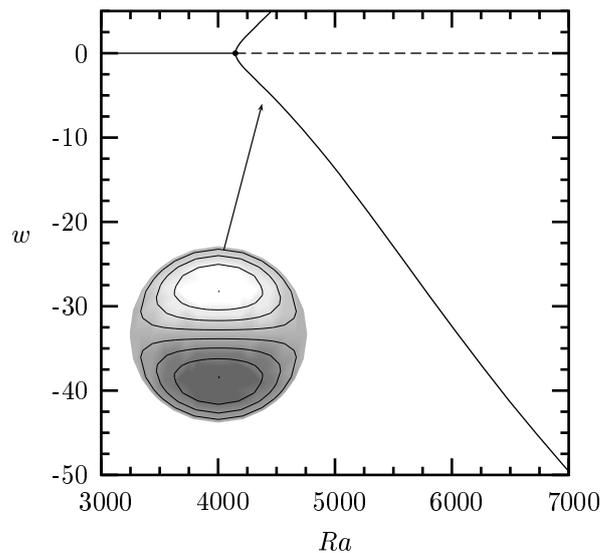


FIG. 6.14 – Diagramme de bifurcation correspondant à du gallium liquide ($Pr = 0.0286$) confiné dans une géométrie de rapport d'aspect $A = 0.5$, soumis à un champ magnétique constant d'intensité $Ha = 10$, avec les propriétés suivantes : $Ma = 0$, $Bi = 100$.

6.3 Convection en présence d'un champ magnétique tournant

Nous nous intéressons ici aux écoulements de convection naturelle soumis à un champ magnétique tournant. La géométrie d'étude est un cylindre à section circulaire muni de deux plaques (supérieure et inférieure) rigides et planes. Dans une première étude de l'action du champ magnétique tournant sur l'instabilité de Rayleigh-Bénard, nous considérons une approche axisymétrique du problème. Après exposition des résultats de cette étude, nous finissons l'étude avec une modélisation tridimensionnelle du sujet, visant à caractériser l'évolution des trois premiers modes dominants de Fourier en fonction du nombre de Taylor magnétique Tm .

6.3.1 Dynamique axisymétrique de la convection sous champ magnétique tournant

Contrairement au cas tridimensionnel précédent, les équations du mouvement de ce paragraphe sont discrétisées sur un support bidimensionnel, rectangulaire, de rapport rayon/hauteur = $A = 0.5$, avec des mailles structurées de taille plus ou moins importante selon la complexité de l'écoulement. Les résultats seront d'abord présentés sous la forme de diagrammes de stabilité montrant la variation du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction du nombre de Taylor magnétique Tm . Comme aux chapitres précédents, les suivis des seuils primaires ont été obtenus pour différentes valeurs du nombre de Prandtl Pr , caractéristiques soit des métaux liquides soit des fluides transparents. Des diagrammes de bifurcations qui évaluent la vitesse verticale w ($z = 1/2, r = A/2$) en fonction de Ra viennent ensuite illustrer le comportement dynamique non-linéaire au delà de la bifurcation primaire. Ici encore, les diagrammes sont illustrés par les iso-lignes de la vitesse verticale, qui sont montrées dans un plan méridien central de la cavité (plan de calcul : $0 < z < 1$ et $0 < r < A$). L'analyse linéaire et non-linéaire se focalisera ici uniquement sur la dynamique axisymétrique du mode $m = 0$. Nous gardons la même convention qu'auparavant pour le tracé de ces diagrammes de bifurcation, à savoir que les points \bullet représentent des bifurcations stationnaires et les boules \circ les bifurcations de Hopf. De plus, les croix \times représentent la collision de deux valeurs propres complexes conjuguées sur l'axe réel. L'ensemble des résultats a été obtenu avec le code COMSOL MULTIPHYSICS que nous avons présenté au chapitre 4.

Analyse de stabilité linéaire

Dans la convection en absence de champ magnétique, la bifurcation primaire est indépendante du nombre de Prandtl et le seuil critique ne dépend que du rapport de forme A de la cellule. Le mode axisymétrique (ou mode $m = 0$ de Fourier) est le mode critique pour des cavités de rapport de forme $0.9 < A < 1.55$. Pour des rapports de forme voisins (sur l'intervalle $0.5 < A < 2$), c'est le mode $m = 1$ qui est le mode critique et le mode $m = 0$ n'apparaît qu'en deuxième ou troisième. En se plaçant dans une géométrie de rapport de forme $A = 0.5$ et en incrémentant progressivement la valeur du nombre de Taylor magnétique à partir de la valeur seuil obtenue sans champ, nous observons la présence de deux régimes qualitativement différents, pour les deux valeurs limites du nombre de Prandtl, $Pr = 1$ et $Pr = 0.01$ (figure 6.15). Notons que contrairement au champ magnétique constant, un champ magnétique tournant génère un écoulement de base à vitesse non-nulle, ce qui implique notamment une dépendance des seuils primaires avec Pr . En l'absence de champ magnétique tournant ($Tm = 0$), le mode $m = 0$ qui se déstabilise en premier est un mode stationnaire qui, pour les petites valeurs de Tm , conserve ce caractère stationnaire. Au delà d'une certaine valeur de Tm , cette bifurcation stationnaire laisse la place à une bifurcation de Hopf caractérisée par une pulsation critique non nulle. Pour $Pr = 1$, la transition entre bifurcation stationnaire et bifurcation oscillatoire se fait autour de $Tm \approx 2800$, tandis que pour $Pr = 0.01$, cette transition a lieu à $Tm \approx 8000$. La perte de stationnarité de la première bifurcation axisymétrique est illustrée sur la figure 6.16 pour un nombre de Prandtl $Pr = 0.01$. On y voit que la branche de bifurcation stationnaire a une forte croissance en fonction de Tm et qu'elle rencontre en un point de transition bien défini une branche de bifurcation oscillatoire dont la croissance avec Tm est plus faible. La pulsation associée à cette bifurcation oscillatoire est nulle au point de transition et croît avec l'augmentation de Tm .

La raison pour laquelle nous avons préféré approfondir la dynamique du champ axisymétrique réside dans la richesse des phénomènes dynamiques que ce mode présente, en lien avec la rotation du fluide autour de l'axe de symétrie. Nore *et al.* [98] soulignent cette richesse du mode $m = 0$ dans le cas où l'écoulement n'est pas soumis à un champ thermique ($Ra \equiv 0$) et que c'est la rotation des parois haut/bas de la cellule (qui tournent dans le même sens) qui engendre le mouvement de rotation. L'écoulement que les auteurs ont étudié est potentiellement instable au delà d'un certain taux de vitesse angulaire imposé; l'étude de la stabilité du mode axisymétrique $m = 0$ (bien qu'il ne soit pas critique sur la gamme de rapports d'aspects qu'ils ont considérés) montre qu'il existe une paire de bifurcations fourches interconnectée à une bifurcation de Hopf et que cette (ces) perturbation(s) peut (peuvent) par conséquent engendrer une nature différente de transition (uniquement stationnaire ou d'abord oscillatoire suivie d'une restabilisation stationnaire) selon la valeur du rapport de forme de la géométrie.

Notre situation de Rayleigh-Bénard sous champ magnétique tournant présente aussi des changements similaires liés à des valeurs propres critiques tantôt stationnaires, tantôt oscillatoires. Afin de mieux comprendre notre situation et de voir le parallèle avec l'écoulement de Nore *et al.* [98], nous allons étudier la dynamique des écoulements induits par ces perturbations pour deux valeurs distinctes de Tm , l'une avant la transition lorsque la perturbation engendre un premier écoulement convectif stationnaire et l'autre après la transition lorsque la perturbation engendre un écoulement oscillatoire. Nous nous intéresserons aussi au suivi des valeurs propres au voisinage des points de bifurcation.

Dynamique des écoulements induits

Dans ce paragraphe, pour une cavité de rapport d'aspect $A = 0.5$ et pour $Pr = 0.01$, nous étudierons la dynamique des écoulements pour les deux régimes stationnaires ($Tm < 8000$) et oscillatoire ($Tm > 8000$) que nous avons évoqués. Nous présentons des suivis de valeurs propres et des diagrammes de bifurcation.

Écoulements induits par la convection thermique pour un nombre de Taylor magnétique $Tm = 6000$

Le suivi des valeurs propres autour d'un point de bifurcation permet d'avoir une vision nette du spectre de la Jacobienne du système dynamique. D'après la figure 6.17 qui trace le taux d'amplification de la valeur propre la plus dangereuse (pour les modes axisymétriques) ainsi que sa pulsation critique

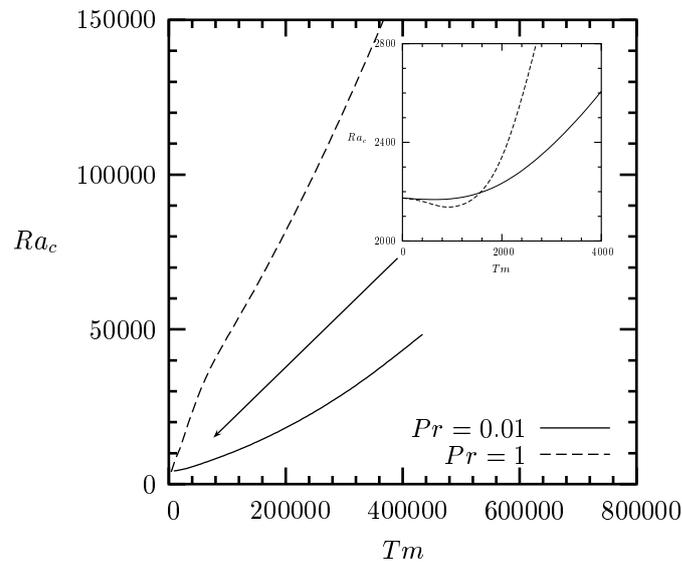


FIG. 6.15 – Évolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c (associé à un mode axisymétrique) en fonction du nombre de Taylor magnétique Tm pour deux valeurs du nombre de Prandtl. Sont représentées dans le petit cadran (qui est un zoom du grand cadran) les bifurcations stationnaires et dans le grand cadran les bifurcations oscillatoires. En effet, les bifurcations initialement stationnaires deviennent oscillatoires au delà d'une certaine limite en Tm . Lorsque la valeur de Pr est petite, le système conserve sur une plus grande gamme de Tm les points de bifurcation stationnaires que lorsque la valeur de Pr est plus élevée. Le rapport de forme est fixé à $A = 0.5$.

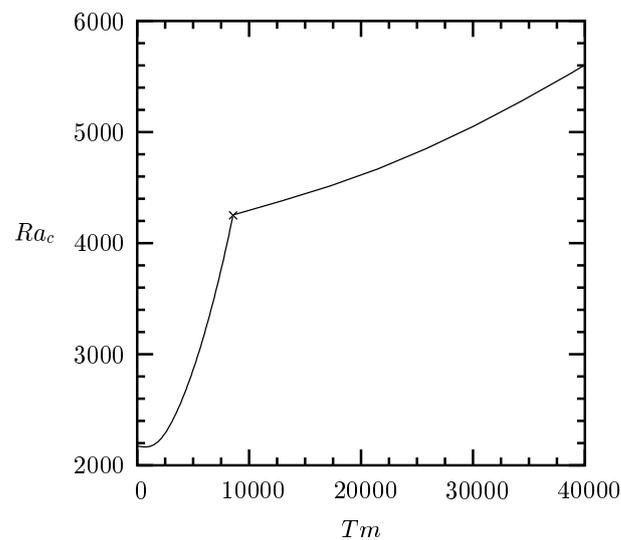


FIG. 6.16 – Passage continu du régime stationnaire (avant \times) au régime oscillatoire (après \times) de la bifurcation thermique primaire vers un mode axisymétrique pour un nombre de Prandtl $Pr = 0.01$. Le rapport de forme est fixé à $A = 0.5$.

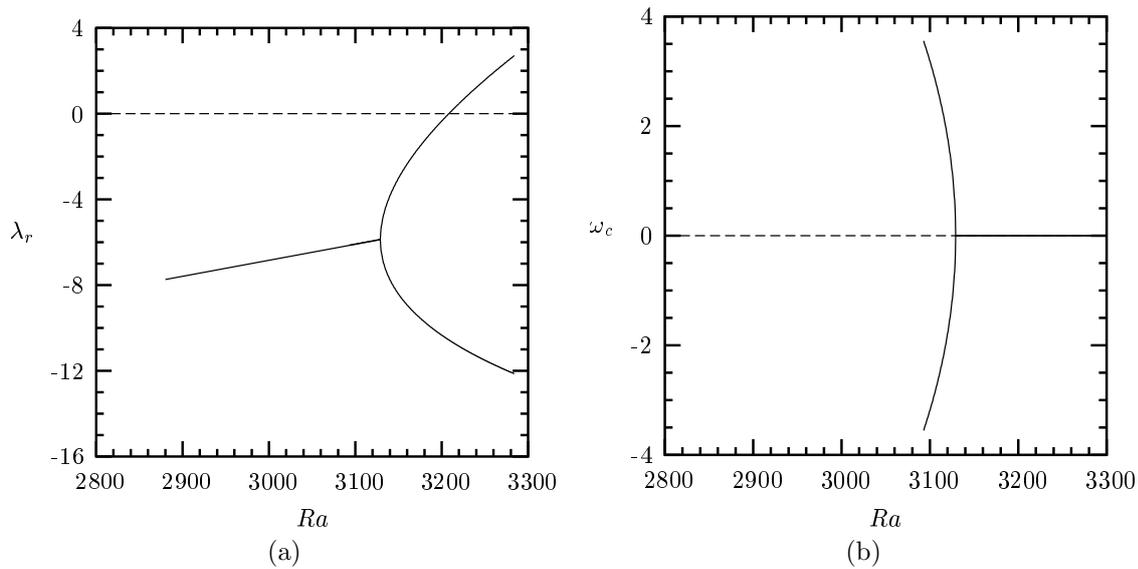


FIG. 6.17 – Évolution de la valeur propre dominante (pour les modes axisymétriques) en fonction du nombre de Rayleigh pour un nombre de Taylor magnétique $Tm = 6000$ et un nombre de Prandtl $Pr = 0.01$. Taux d'amplification (a) et pulsation critique (b) en fonction de Ra . La bifurcation primaire est stationnaire. Le rapport de forme est fixé à $A = 0.5$.

correspondante en fonction de Ra , on voit que cette valeur propre résulte d'une fusion entre deux valeurs propres complexes conjuguées. Comme ce phénomène de collision des valeurs propres complexes conjuguées sur l'axe réel se produit à $Ra = 3123$, soit avant le changement de signe de la partie réelle, la bifurcation primaire est stationnaire. A partir de cette perturbation, nous pouvons tracer le diagramme de bifurcation représenté sur la figure 6.18, qui montre que cette bifurcation primaire est de type fourche super-critique. La bifurcation a lieu en $Ra_c = 3208$ et elle est accompagnée par une perte de la stabilité de la solution initiale, qui devient de fait une fois instable. La branche bifurquée, caractérisée par la perte de symétrie haut/bas de la solution de base, est stable et évolue ensuite via une bifurcation de Hopf en $Ra = 16784$ vers un écoulement oscillatoire. Cette branche bifurquée peut se distinguer de la branche de base par la présence d'un seul rouleau toroïdal. Ce rouleau toroïdal dû à la convection thermique occupe toute la hauteur de la cavité et vient renforcer un des rouleaux toroïdaux du champ de base généré à partir du pompage d'Ekman. Dans le cas présenté, le rouleau thermique vient renforcer l'écoulement d'Ekman du bas de la cavité, et c'est pour cela qu'il est plus intense en bas. Il existe bien sur une branche symétrique correspondant à un écoulement thermique tournant dans le sens opposé et venant renforcer l'écoulement d'Ekman du haut de la cavité.

Écoulements induits par la convection thermique pour un nombre de Taylor magnétique $Tm = 12000$

Dans ce cas de figure, la valeur propre la plus dangereuse est une valeur propre complexe conjuguée qui, avec la croissance de Ra , s'éclate en deux valeurs propres stationnaires. Nous retrouvons ici le même phénomène de collision des valeurs propres complexes conjuguées sur l'axe réel que précédemment à l'exception près que la collision a ici lieu après la bifurcation primaire. Les valeurs propres stationnaires créées à la collision s'éloignent brusquement (figure 6.19) du chemin quasi-linéaire de la valeur propre initiale (tant qu'elle était complexe conjuguée) et alors que l'une des deux valeurs propres se déstabilise davantage, la deuxième parvient à changer de signe. Il y a ainsi une restabilisation stationnaire partielle du système. Notons aussi que le comportement de la pulsation critique tend progressivement vers zéro en fonction de Ra à l'approche du point d'éclatement. Le diagramme de bifurcation qui illustre les branches de solutions issues de ces valeurs propres est tracé sur la figure 6.20. Il montre qu'une dynamique assez riche se produit au delà du seuil primaire. Le seuil primaire qui a lieu en $Ra_c = 4019$ est caractéristique

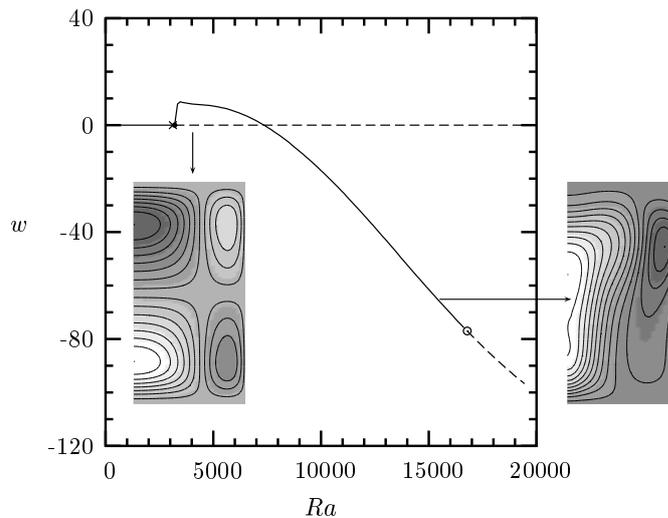


FIG. 6.18 – Diagramme de bifurcation pour $Tm = 6000$ et $Pr = 0.01$. Évolution de la composante verticale de vitesse en fonction du nombre de Rayleigh. La fusion des valeurs propres oscillatoires se fait juste avant la bifurcation primaire qui génère une branche fourche super-critique. Sont aussi représentées les iso-valeurs de la vitesse verticale w dans le plan méridien moyen de la cellule pour caractériser les écoulements sur chacune des branches. Le rapport de forme est fixé à $A = 0.5$.

d'une bifurcation de Hopf. Le système entre alors dans un cycle limite caractérisé par une pulsation temporelle $\omega_T = 27.64$. Nous avons réalisé une intégration numérique de la solution évolutive afin de visionner à différents instants le comportement de cette solution (figure 6.21) et voyons qu'après un certain temps d'adaptation (aux alentours de $t = 28$), le système oscille périodiquement avec une période $T = 0.23$ (correspondant bien à la pulsation prédite par l'analyse de stabilité linéaire) et une amplitude $w|_{\max} = 7.1$. En suivant la dynamique de la solution de base au delà de la bifurcation de Hopf primaire, cette solution devient une fois oscillatoirement instable. En raison de l'éclatement des valeurs propres conjuguées en deux valeurs propres stationnaires au point $Ra = 5920$, la solution devient ensuite deux fois instable. Du point $Ra = 6450$ (point de restabilisation d'une des valeurs propres stationnaires) naît une branche également deux fois instable. La solution de base devient alors une fois instable au delà de $Ra = 6450$. La bifurcation stationnaire associée à la restabilisation partielle de la branche de base est fourche sous-critique. Elle génère deux solutions définies à une symétrie haut/bas près. Ces nouvelles solutions se distinguent de la solution de base par une plus forte zone de recirculation en haut (resp. en bas) de la cellule. Notons aussi qu'une autre branche de solutions (accompagnée de son homologue déduit par la symétrie haut/bas) a été mise en évidence. Cette dernière ne se raccorde pas à la solution de base sur la gamme de Ra considérée; nous observons cependant que cette solution a une structure convective semblable à la solution qui naissait à partir de la bifurcation primaire, dans le cas précédent $Tm = 6000$.

Notons qu'un comportement assez semblable des valeurs propres axisymétriques est obtenu dans le travail de Nore *et al.* [98]. Dans notre cas, nous avons une mise en rotation obtenue par champ magnétique tournant (paramétrée par Tm) et un chauffage thermique (paramétré par Ra). Dans le cas de Nore, on a aussi une mise en rotation qui est générée par le mouvement des parois et le deuxième paramètre est le rapport d'aspect A de la cellule. Selon la valeur de A , l'éclatement de la valeur propre dominante se réalise avant ou après qu'elle ait transité.

Les perturbations thermiques peuvent imposer à un écoulement initialement au repos une structure dissipative complexe, notamment à travers les phénomènes non-linéaires qu'elles engendrent. Une stabilisation de ces perturbations, c'est-à-dire un retardement de la convection peut être espérée en superposant un écoulement azimutal de rotation au système dynamique, cette rotation ayant pour effet d'étouffer les mouvements de recirculation à petite échelle. Cependant, cette rotation provoque elle-même une circula-

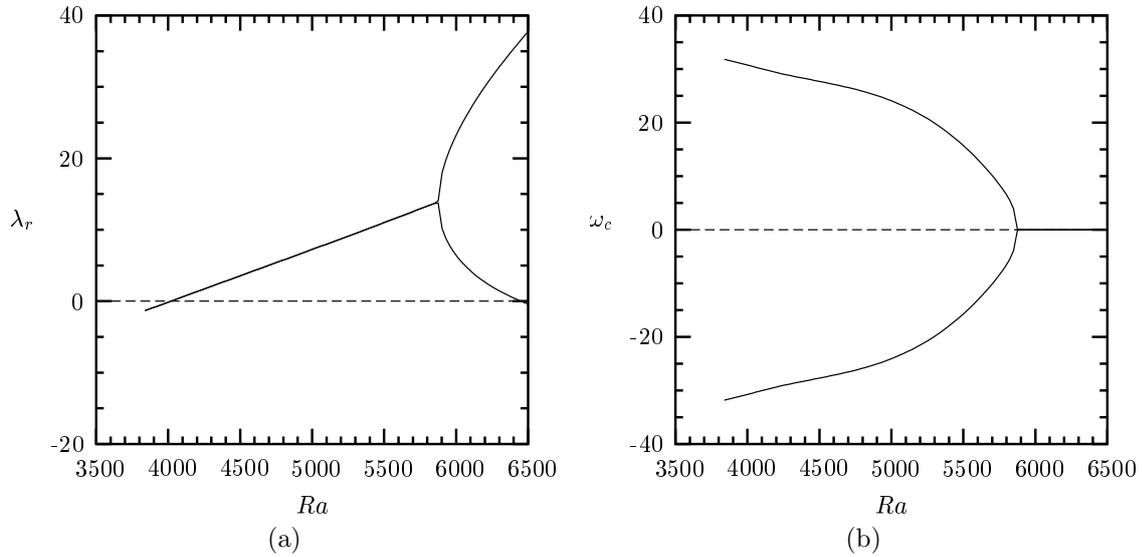


FIG. 6.19 – Évolution de la valeur propre dominante (pour les modes axisymétriques) en fonction du nombre de Rayleigh pour un nombre de Taylor magnétique $Tm = 12000$ et un nombre de Prandtl $Pr = 0.01$. Taux d'amplification (a) et pulsation critique (b) en fonction de Ra . La perturbation déstabilise le système sous forme d'un cycle limite et il y a ensuite une restabilisation stationnaire partielle. Le rapport de forme est fixé à $A = 0.5$.

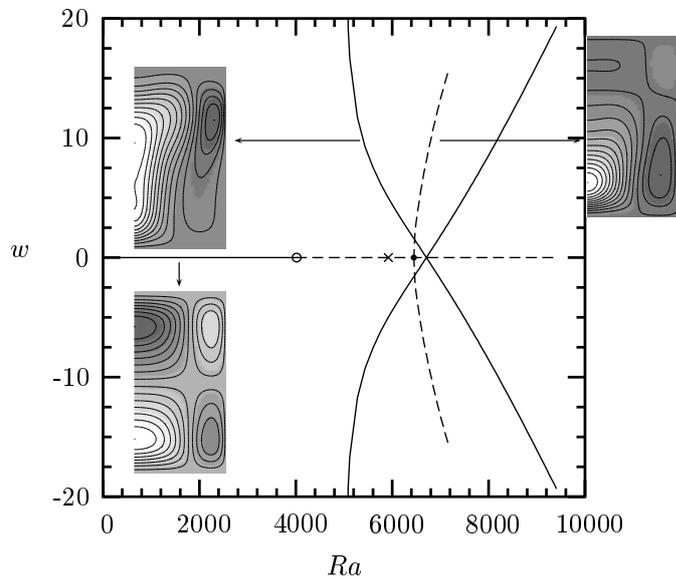


FIG. 6.20 – Diagramme de bifurcation pour $Tm = 12000$ et $Pr = 0.01$. Évolution de la composante verticale de vitesse en fonction du nombre de Rayleigh. La fusion des valeurs propres oscillatoires se fait juste après la bifurcation primaire oscillatoire qui génère un cycle limite. Sont aussi représentées les iso-valeurs de la vitesse verticale w dans le plan méridien moyen de la cellule pour caractériser les écoulements sur chacune des branches. Le rapport de forme est fixé à $A = 0.5$.

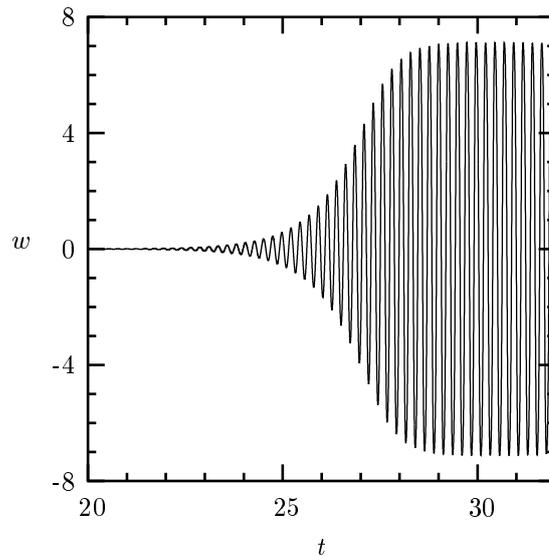


FIG. 6.21 – Évolution temporelle de la vitesse verticale pour $Tm = 12000$, $Pr = 0.01$ et $Ra = 4480$. La période d'oscillation vaut $T = 0.23$, soit une pulsation équivalente à $\omega_T = 27.6$.

tion globale de fluide lorsque la géométrie d'étude est finie. La présente étude révèle que selon le taux de rotation imposé, une compétition entre phénomènes de flottaison et d'advection se manifeste à un niveau plus au moins important selon la nature du fluide. Une étude tridimensionnelle devrait nous permettre d'avoir une vision plus large sur l'ensemble des phénomènes présents dans notre configuration cylindrique. Une étude a déjà été réalisée par Walker *et al.* [115], visant à approfondir le rôle du nombre de Prandtl Pr sur les seuils primaires. Nous considérerons deux valeurs du nombre de Prandtl dans notre étude.

6.3.2 Dynamique tridimensionnelle de la convection sous champ magnétique tournant

Nous terminons notre étude sur la stabilisation des modes de Fourier les plus dangereux par le champ magnétique tournant. Comme nous l'avons énoncé, c'est le mode $m = 1$ qui s'impose pour les géométries de rapport de forme $A = 0.5$ en absence de champ magnétique. La résolution du problème de Rayleigh-Bénard montre que ce sont ensuite les modes $m = 2$, puis $m = 0$ qui se manifestent, mais que les branches venant de ces modes ne parviennent jamais à se stabiliser. L'application du champ magnétique tournant (quantifiée à travers le nombre de Taylor magnétique Tm) va bouleverser l'ordre d'apparition des différents modes (en particulier lorsque Tm devient de plus en plus fort) et le mode axisymétrique deviendra le mode critique au delà d'une certaine valeur de Tm . Rappelons à cet égard que dans le cas étudié par Nore [98], le mode $m = 0$ ne se manifestait jamais comme mode dominant sur leur gamme d'étude. Nous présentons les résultats de la stabilisation des trois premiers modes de Fourier par le champ tournant.

Comme le montre la figure 6.22 pour deux nombres de Prandtl différents, le champ magnétique augmente progressivement les valeurs aux seuils des modes du système. Le mode $m = 0$ apparaît en troisième lorsque $Tm = 0$ et subit la dynamique que nous avons décrit au paragraphe précédent, à savoir que c'est d'abord une branche de seuils stationnaires qui se stabilise jusqu'à la formation d'une branche de seuils oscillatoires. Cette dernière évolue seule pour les plus fortes valeurs de Tm : la branche stationnaire qui a subi une très forte variation disparaît assez rapidement du diagramme de stabilité. Par contre, l'évolution de la branche oscillatoire du mode $m = 0$ est plus lente que celle des modes $m = 1$ et $m = 2$ et c'est la courbe du mode $m = 0$ qui finit par devenir critique. Le mode $m = 0$ s'impose alors, tout d'abord face au mode $m = 2$ comme le montre la figure 6.22(a) pour $Pr = 0.01$ puis face au mode $m = 1$

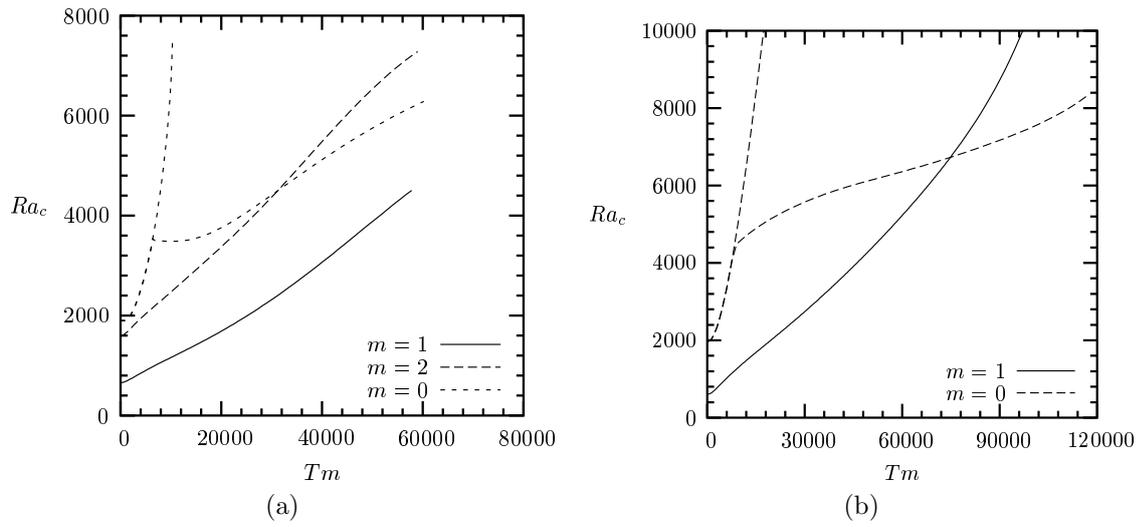


FIG. 6.22 – Évolution des seuils primaires de la convection en fonction du nombre de Taylor magnétique pour un nombre de Prandtl (a) $Pr = 0.01$ et (b) $Pr = 0.0286$. Le mode $m = 2$ n'est jamais le plus critique. Son évolution n'a pas été calculée pour $Pr = 0.0286$.

initialement critique (figure 6.22(b) pour $Pr = 0.0286$). Le croisement des courbes $m = 0$ et $m = 1$ pour le gallium liquide ($Pr = 0.0286$) se fait à $Tm = 66600$. Le mode axisymétrique est alors le mode dominant et le reste pour les valeurs plus élevées de Tm .

7. Conclusion

Ce travail de thèse propose une étude numérique du développement de la convection dans les systèmes fluides chauffés et soumis à des champs magnétiques. Une discrétisation spectrale de la géométrie d'étude cylindrique permet une haute précision des calculs numériques. La méthode de continuation qui permet de suivre pas à pas la dynamique complexe qui se produit au-delà de la première bifurcation repose sur une discrétisation temporelle à plusieurs étapes et sur l'utilisation de la méthode de Newton pour la résolution des équations non-linéaires. Elle nous a permis de déterminer les branches de solutions stables et instables présentes dans les diagrammes de bifurcation et a été étendue au calcul précis des points de bifurcation. A chaque étape de Newton le système linéarisé est résolu par une méthode de gradient biconjugué en évitant le calcul coûteux de la Jacobienne.

La dynamique d'un fluide confiné dans une géométrie cylindrique avec surface supérieure libre a d'abord été traité. Nous avons ainsi pu déterminer les seuils critiques d'instabilité (nombre de Rayleigh critique Ra_c) lorsque ce fluide était chauffé progressivement par le bas pour différents rapports de forme de la géométrie et propriétés de la surface libre. Les résultats obtenus ont été calculé pour un ensemble de contraintes mécaniques (représentées par le nombre adimensionnel de Marangoni Ma) et de contraintes thermiques (évaluées par le nombre de Biot Bi) assez large, couvrant ainsi la plupart des fluides usuels. Nous avons montré que les perturbations de température à la surface libre agissent d'une moindre façon sur l'effet Marangoni lorsque le nombre de Biot est fort, car la température à cette surface répond à une condition de température imposée. Au contraire, une faible valeur du nombre de Biot contraint moins les perturbations et celles-ci agissent pleinement sur les mouvements de convection à travers l'effet Marangoni, les favorisant ou les retardant suivant le signe de Ma .

Les structures convectives au-delà des seuils primaires montrent qu'un fluide à surface supérieure libre fortement contrainte (fort nombre de Biot, nombre de Marangoni nul) connaît des scénarios compliqués qui répondent à une dynamique complexe, mêlant bifurcations fourches sous-critiques et noeud-cols. Lorsque le mode primaire est le mode axisymétrique, on observe deux branches de solutions distinctes qui donnent naissance à des écoulements aux propriétés de symétries différentes et qui évoluent tous deux vers des états oscillatoires. Le long de la branche super-critique, le mode axisymétrique est déstabilisé par une perturbation asymétrique à un rouleau (mode $m = 1$ de Fourier) avant de bifurquer vers une solution aux allures d'un mode $m = 0/2$, alors que le long de la branche sous-critique, le passage au mode $m = 0/2$ est réalisé dès la première bifurcation secondaire. Rappelons aussi que l'ensemble des bifurcations est sous-critique, avec des sous-criticités importantes, alors que le cas rigide-rigide ne présentait que des bifurcations fourches super-critiques. Une étude à plus faible valeur du nombre de Biot a révélé que le système transitait plus rapidement vers un état oscillatoire. C'est une perturbation de type $m = 1$ qui déstabilise maintenant les deux branches axisymétriques super et sous-critiques. Les solutions secondaires obtenues ont des symétries similaires ($m = 0/1$) mais des structures convectives différentes. Pour la branche super-critique, la solution $m = 0/1$ qui émerge de façon sous-critique ne se stabilise pas, tandis que pour la branche super-critique, la solution $m = 0/1$, stable à son apparition, conduit vers une branche $m = 0/2$ qui se stabilise au delà d'un noeud-col.

Nous avons étudié la stabilisation des écoulements de convection que nous venons de présenter dans le cas d'un champ magnétique constant, dirigé horizontalement sur la géométrie cylindrique. Le champ magnétique constant retarde bien les premiers mouvements de convection, et agit de manière signifi-

tive sur les propriétés de symétrie du système. Il désorganise l'ensemble des structures observées en son absence. L'imperfection directionnelle infligée par son action va lever la dégénérescence qui existait entre les solutions apparues en des bifurcations fourches circulaires, en favorisant deux directions parallèle ou perpendiculaire à ce champ. Ces bifurcations fourches circulaires pourront se dédoubler en deux bifurcations fourches, ou devenir imparfaites avec apparition de noeuds-cols et d'une branche déconnectée. Concernant la magnétohydrodynamique des métaux liquides, sous l'action d'un champ magnétique, les structures convectives (originellement axisymétriques) naissent directement avec les symétries du mode $m = 0/2_{\parallel}$. Pour un nombre de Hartmann assez fort ($Ha = 10$), ces structures voient leur évolution modifiée avec suppression de certaines transitions stationnaires et apparition de nouvelles. La stabilisation de l'écoulement rigide-rigide de Rayleigh-Bénard par un champ magnétique tournant se révèle plus efficace pour retarder le déclenchement de la convection thermique que la stabilisation par champ magnétique constant, stabilisation approfondie par Touihri [106] lors de ses travaux de thèse soutenus en 1998. Cependant, les seuils primaires ne sont plus stationnaires à l'exception du mode axisymétrique qui conserve son caractère stationnaire sur une petite gamme de valeurs de Tm jusqu'à une valeur critique. La rotation influe sur ce déclenchement qui de stationnaire devient oscillatoire, à l'exception du mode $m = 0$ de Fourier, pour qui la transition reste stationnaire jusqu'à une certaine valeur critique du nombre de Taylor magnétique.

Ces travaux de recherche réalisés sur les structures convectives des écoulements fluides chauffés par le bas avec surface supérieure libre ont mené à diverses communications orales, présentées au colloque du groupement de recherche Micropesanteur Fondamentale et Appliquée (GdR MFA'08) d'Aussois, à l'international symposium on Bifurcations and Instabilities in Fluid Dynamics (BIFD'09) à Nottingham et au Congrès Français de Mécanique (CFM'09) de Marseille. Les travaux relatifs au champ magnétique constant et tournant seront quant à eux présentés dans l'international conference on Electromagnetic Processing of Materials (EPM'09) de Dresden. Ces résultats qui constituent un premier pas dans la modélisation non-linéaire des métaux liquides soumis à des gradients de température et à des champs magnétiques peuvent être étendus à l'étude non-linéaire des écoulements oscillatoires qui se développent lorsque le champ magnétique est tournant. Les premières simulations par intégrations successives de la solution évolutive (DNS) semblent mettre en évidence des cycles limites super-critiques mais aussi sous-critiques. Quelques DNS opérées pour les écoulements à surface libre au delà des bifurcations de Hopf semblent également donner tantôt des cycles limites clairs, tantôt des indications de comportements complexes pouvant être reliés à des cycles limites sous-critiques.

L'instabilité de l'écoulement de rotation lié au champ magnétique tournant pour de forts Tm est difficile à mettre en évidence. Quelques papiers [53, 54, 69] tentent d'expliquer par des méthodes d'analyse de stabilité l'origine précise de cette instabilité. Les auteurs se rejoignent toutefois sur l'idée selon laquelle la discrétisation du système à résoudre est difficile à mettre en oeuvre, car ce dernier est mal conditionné (système aux valeurs propres dégénéré, grand nombre de vecteurs propres parasites lié au gradient de pression) et demande en outre un (très) grand nombre de points de collocation dans l'ensemble des directions de l'espace pour déterminer de façon précise les seuils d'instabilité. Des méthodes multigrilles sont *a priori* à exclure car elles génèrent des solutions parasites robustes [53] liées aux maillages intermédiaires, ce qui rend la résolution du système encore plus difficile. Rappelons aussi que la force motrice de cet écoulement de rotation est dirigée selon l'azimut et que le problème (même sous l'hypothèse simplificatrice d'axisymétrie) doit également prendre en compte cette direction supplémentaire. Il serait tout de même intéressant de pouvoir réaliser des calculs jusqu'à ces fortes valeurs de Tm et de développer des méthodes de continuation adaptées au suivi des comportements oscillatoires afin de pouvoir étudier numériquement les riches scénarios convectifs mis en évidence expérimentalement par Volz et Mazuruk [112].

Bibliographie

- [1] AHLERS, G. 1989 Experiments on bifurcations and one-dimensional patterns in nonlinear systems far from equilibrium. *Lectures in Sciences of Complexity* pp. 175–224, addison-Wesley (NY).
- [2] ALBOUSSIÈRE, T., GARANDET, J-P. & MOREAU, R. 1996 Asymptotic analysis and symmetry in MHD flows. *Phys. Fluids* **8**, 2215–2226.
- [3] ALEMANY, A. & MOREAU, R. 1977 Écoulement d'un fluide conducteur de l'électricité en présence d'un champ magnétique tournant. *J. Méc.* **16**, 625–646.
- [4] ASSEMAT, PAULINE 2008 Dynamique non-linéaire des écoulements confinés : Application à l'instabilité de Marangoni-Bénard et aux écoulements entre surfaces texturées. PhD thesis, Université Paul Sabatier Toulouse 3.
- [5] ASSEMAT, P., BERGEON, A. & KNOBLOCH, E. 2007 Nonlinear Marangoni convection in circular and elliptical cylinders. *Phys. Fluids* **19**, 104101.
- [6] BARZ, R.U., GERBETH, G., WUNDERWALD, U., BUHRIG, E. & GELFGAT, YU.M. 1997 Modelling of the isothermal melt flow due to rotating magnetic fields in crystal growth. *J. Cryst. Growth* **180**, 410–421.
- [7] BEN HADID, H. & HENRY, D. 1996 Numerical simulation of convective three-dimensional flows in a horizontal cylinder under the action of a constant magnetic field. *J. Cryst. Growth* **166** (436-673).
- [8] BEN HADID, H., VAUX, S. & KADDECHE, S. 2001 Three-dimensional flow transitions under a rotating magnetic field. *J. Cryst. Growth* **230**, 57–62.
- [9] BERGEON, A. & HENRY, D. 2000 A continuation method applied to the study of three-dimensional Rayleigh-Bénard and Marangoni-Bénard instabilities. *Notes Num. Fluid Mech.* **74**, 33–44.
- [10] BERGEON, A., HENRY, D. & BEN HADID, H. 1998 2D and 3D Marangoni pattern selection in shallow cavities. *Advances Space Research* **22**, 1223–1226.
- [11] BERGEON, A., HENRY, D., BEN HADID, H. & TUCKERMAN, L.S. 1998 Marangoni convection in binary mixtures with Soret effect. *J. Fluid Mech.* **375**, 143–177.
- [12] BERGEON, A., HENRY, D. & KNOBLOCH, E. 2001 Three-dimensional Marangoni-Bénard flows in square and nearly square containers. *Phys. Fluids* **13**, 92–98.
- [13] BERTON, R. 1997 *Magnétohydrodynamique*. Masson.
- [14] BESSAÏH, R., KADJA, M. & MARTY, PH. 1999 Effect of wall electrical conductivity and magnetic field orientation on liquid metal flow in a geometry similar to the horizontal Bridgman configuration for crystal growth. *Int. J. Heat Mass Transfer* **42**, 4345–4363.
- [15] BÖDEWADT, U.T. 1940 Die Drehströmung über festem Grund. *Z. Angew. Math. Mech.* **20**, 241–253.
- [16] BOROŃSKA, K. & TUCKERMAN, L.S. 2006 Standing and travelling waves in cylindrical Rayleigh-Bénard convection. *J. Fluid Mech.* **559**, 279–298.

- [17] BUELL, J.C. & CATTON, I. 1983 The effect of wall conduction on the stability of a fluid in a right circular cylinder heated from below. *J. Heat Transfer* **105**, 255–260.
- [18] CANUTO, C., HUSSAINI, M., QUARTERONI, A. & ZANG, T. 2007 *Spectral Methods. Evolution to Complex Geometries and Applications to Fluid Dynamics*. Springer Verlag.
- [19] CERISIER, P., JAEGER, M., MEDALE, M. & RAHAL, S. 1998 Mechanical coupling of convective rolls in a rectangular box. *J. Heat Transf.* **120**, 1008–1018.
- [20] CERISIER, P., RAHAL, S. & AZUMA, H. 2007 Pattern dynamics of the Bénard-Marangoni instability in a medium aspect ratio container. In *Second International Symposium on Instability and Bifurcations in Fluid Dynamics, J. Physics : Conference Series*, vol. 64.
- [21] CHANDRASEKHAR, S. 1961 *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Clarendon Press Oxford.
- [22] CHARLSON, G.S. & SANI, R.L. 1970 Thermoconvective instability in a bounded cylindrical fluid layer. *Int. J. Heat Mass Transfer* **13**, 1479–1496.
- [23] CHARLSON, G.S. & SANI, R.L. 1971 On thermoconvective instability in a bounded cylindrical fluid layer. *Int. J. Heat Mass Transfer* **14**, 2147–2160.
- [24] CRAMER, A., ECKERT, S., GALINDO, V., GERBETH, G., WILLERS, B. & WITKE, W. 2004 Liquid metal model experiments on casting and solidification processes. *J. Materials Sci.* **39**, 7285–7294.
- [25] CRAWFORD, J.D. & KNOBLOCH, E. 1991 Symmetry and symmetry-breaking bifurcations in fluid mechanics. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **23**, 601–639.
- [26] CROSS, M.C, DANIELS, P.G., HOHENBERG, P.C. & SIGGIA, E.D. 1983 Phase winding solutions in a finite container above the convective threshold. *J. Fluid Mech.* **127**, 155–183.
- [27] DAHLBERG, E. 1972 On the action of a rotating magnetic field on a conducting liquid. *Aktiebolaget Atomenergi Tech. Rep.* **AE 447**.
- [28] DAUBY, P.C. & LEBON, G. 1996 Bénard-Marangoni instability in rigid rectangular containers. *J. Fluid Mech.* **329**, 25–64.
- [29] DAUBY, P.C., LEBON, G. & BOUHY, E. 1997 Linear Bénard-Marangoni instability in rigid circular containers. *Phys. Rev. E* **56**, 520–530.
- [30] DAUBY, P.C., LEBON, G., COLINET, P. & LEGROS, J.C. 1993 Hexagonal Marangoni convection in a rectangular box with slippery walls. *Quart. J. Mech. Applied Math.* **46**, 683–707.
- [31] DAVIDSON, P.A. 1992 Swirling flow in an axisymmetric cavity of arbitrary profile, driven by a rotating magnetic field. *J. Fluid Mech.* **245**, 669–699.
- [32] DEVILLE, M.O., FISCHER, P.F. & MUND, E.H. 2002 *High-Order Methods for Incompressible Fluid Flow*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics.
- [33] DIJKSTRA, H.A. 1992 Marangoni convection in rectangular containers. *J. Fluid Mech.* **243**, 73–102.
- [34] DIJKSTRA, H.A. 1992 On the structure of cellular solutions in Rayleigh-Bénard-Marangoni flows in small aspect ratio containers. *J. Fluid Mech.* **243**, 73–102.
- [35] DIJKSTRA, H.A. 1995 Surface tension driven flows in three-dimensional boxes. 1 : Linear stability. *Microgravity Science and Technology* **7**, 307–312.
- [36] DIJKSTRA, H.A. 1995 Surface tension driven flows in three-dimensional boxes. 2 : A bifurcation study. *Microgravity Science and Technology* **8**, 70–77.
- [37] DIJKSTRA, H.A. 1995 Surface tension driven flows in three-dimensional boxes. 3 : The formation of hexagonal patterns. *Microgravity Science and Technology* **8**, 155–162.

- [38] DIJKSTRA, H.A. 1998 Test problem : Rayleigh-Bénard convection for the EUROFTAC/EUROMECH Colloquium. *Eurofac/Euromech Colloquium*, vol. 383.
- [39] DOLD, P. & BENZ, K.W. 1995 Convective temperature fluctuations in liquid Gallium in dependence on static and rotating magnetic fields. *Crist. Res. Technol.* **30**, 1135–1145.
- [40] DOLD, P. & BENZ, K.W. 1999 Rotating magnetic fields : Fluid flow and crystal growth applications. *Progr. Crystal Growth Charact. Mater.* **38**, 7–38.
- [41] FERRARD, J.M. 1998 *Maths et Maple*. Dunod.
- [42] FRIEDRICH, J., LEE, Y.S., FISCHER, B., KUPFER, C., VIZMAN, D. & MÜLLER, G. 1999 Experimental and numerical study of Rayleigh-Bénard convection affected by a rotating magnetic field. *Phys. Fluids* **11**, 853–861.
- [43] GARANDET, J-P., ALBOUSSIÈRE, T. & MOREAU, R. 1992 Buoyancy driven convection in a rectangular enclosure with a transverse magnetic field. *Int. J. Heat Mass Transfer* **35**, 741–748.
- [44] GELFGAT, A.YU. 1998 On different modes of Rayleigh-Bénard instability in two- and three-dimensional rectangular enclosures. In *Continuation Methods in Fluid Mechanics* (ed. D. Henry & A. Bergeon).
- [45] GELFGAT, A.YU. 2005 On three-dimensional instability of a traveling magnetic field driven flow in a cylindrical container. *J. Cryst. Growth* **279**, 276–288.
- [46] GELFGAT, A.YU., BAR-YOSEPH, P.Z. & SOLAN, A. 2001 Effect of axial magnetic field on three-dimensional instability of natural convection in a vertical Bridgman growth configuration. *J. Cryst. Growth* **230**, 63–72.
- [47] GELFGAT, YU.M. & GELFGAT, A.YU. 2004 Experimental and numerical study of rotating magnetic field driven flow in cylindrical enclosures with different aspect ratios. *Magneto hydrodynamics* **40**, 147–160.
- [48] GELFGAT, YU.M., KRUMIN, J. & ABRICKA, M. 1999 Rotating magnetic field as a means to control the hydrodynamics and heat transfer in single crystal growth processes. *J. Cryst. Growth*, vol. 198, pp. 59–71.
- [49] GELFGAT, YU.M. & PRIEDE, J. 1995 MHD flows in a rotating magnetic field (a review). *Magneto hydrodynamics* **31**, 188–200.
- [50] GOLUBITSKY, M. & STEWART, I. 2002 *The Symmetry Perspective*. Birkhauser Verlag.
- [51] GOLUBITSKY, M., STEWART, I. & SCHAEFFER, D.G. 1998 *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*. Springer-Verlag.
- [52] GOTTLIEB, D.O. & ORSZAG, S.A. 1990 Numerical analysis of spectral methods : Theory and applications. *NFS-CBMS Monograph* **10**, 2237–2245.
- [53] GRANTS, I. & GERBETH, G. 2001 Stability of axially symmetric flow driven by a rotating magnetic field in a cylindrical cavity. *J. Fluid Mech.* **431**, 407–426.
- [54] GRANTS, I. & GERBETH, G. 2002 Linear three-dimensional instability of a magnetically driven rotating flow. *J. Fluid Mech.* **463**, 229–239.
- [55] GRANTS, I. & GERBETH, G. 2004 Rayleigh-Bénard instability in a cylinder under influence of rotating and steady magnetic fields. *Phys. Fluids* **16**, 2088–2096.
- [56] GRANTS, I. & GERBETH, G. 2007 The suppression of temperature fluctuations by a rotating magnetic field in a high aspect ratio Czochralski configuration. *J. Cryst. Growth* **308**, 298–296.

- [57] HARDIN, G.R., SANI, R.L., HENRY, D. & ROUX, B. 1990 Buoyancy-driven instability in a vertical cylinder : Binary fluids with Soret effect. Part 1 : General theory and stationary stability results. *Int. J. Num. Meth. Fluids* **10**, 79–117.
- [58] HENRY, D. & BEN HADID, H. 2007 Multiple flow transitions in a box heated from the side in low-Prandtl-number fluids. *Phys. Rev. E* **76**, 016314.
- [59] HENRY, D. & BERGEON, A. 2000 *Continuation Methods in Fluid Dynamics*. Vieweg-Verlag.
- [60] HENRY, D., JUEL, A., BEN HADID, H. & KADDECHE, S. 2008 Directionel effect of a magnetic field on oscillatory low-Prandtl-number convection. *Phys. Fluids* **20**, 034104.
- [61] HOUCHEMS, B.C., MARTIN WITKOWSKI, L. & WALKER, J.S. 2002 Rayleigh-Bénard instability in a vertical cylinder with a vertical magnetic field. *J. Fluid Mech.* **469**, 189–207.
- [62] HURLE, D.T.J. & RUDOLPH, P. 2004 A brief history of defect formation, segregation, faceting, and twinning in melt-grown semiconductors. *J. Cryst. Growth* **264**, 550–564.
- [63] JOHNSON, D. & NARAYANAN, R. 1996 Experimental observation of dynamic mode switching in interfacial-tension-driven convection near a codimension two point. *Phys. Rev. E* **54**, 3102–3104.
- [64] JUEL, A., MULLIN, T., BEN HADID, H. & HENRY, D. 2001 Three-dimensional free convection in molten gallium. *J. Fluid Mech.* **436**, 267–281.
- [65] KAISER, TH. & BENZ, K.W. 1998 Taylor vortex instabilities induced by a rotating magnetic field : A numerical approach. *Phys. Fluids* **10**, 1104–1110.
- [66] KARNIADAKIS, G.E., ISRAELI, M. & ORSZAG, S.A. 1990 High-order splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.* **97**, 414–443.
- [67] KELLER, H.B. 1997 Numerical solutions of bifurcation and non linear eigenvalue problem. *Application of bifurcation theory* pp. 359–384.
- [68] KINCAID, D.R., OPPE, T.C. & JOUBERT, W.D. 1989 An overview of NSPCG : A nonsymmetric preconditioned conjugate gradient package. *Comput. Phys. Comm.* pp. 283–293.
- [69] KOAL, K., STILLER, J. & GRUNDMANN, R. 2007 Linear and nonlinear instability in a cylindrical enclosure caused by a rotating magnetic field. *Phys. Fluids* **19**, 088107.
- [70] KOSCHMIEDER, E.L. & PRAHL, S.A. 1990 Surface-tension-driven Bénard convection in small containers. *J. Fluid Mech.* **215**, 571–583.
- [71] KUHLMANN, H.C. 1998 *Thermocapillary Convection in Models of Crystal Growth*. Springer-Verlag.
- [72] LERICHE, E. & LABROSSE, G. 2000 High-order direct Stokes solvers with or without temporal splitting : Numerical investigations of their comparative properties. *J. Sci. Comput.* **22**, 1386–1410.
- [73] LERICHE, E., PERCHAT, E., LABROSSE, G. & DEVILLE, M.O. 2006 Numerical evaluation of the accuracy and stability properties of high-order direct Stokes solvers with or without temporal splitting. *J. Sci. Comput.* **26**, 25–43.
- [74] MAMUN, C. & TUCKERMAN, L.S. 1995 Asymmetry and Hopf bifurcation in spherical couette flow. *Phys. Fluids* **7**, 80–91.
- [75] MANNEVILLE, P. 1990 *Structures dissipatives chaos et turbulence*. Collection Aléa Saclay.
- [76] MANNEVILLE, P. 2004 *Instabilités, Chaos et Turbulence*. Les éditions de l'École Polytechnique.
- [77] MARTIN WITKOWSKI, L. & MARTY, PH. 1998 Influence de l'effet de peau sur la rotation d'un rotor fluide. *Eur. Phys. J. AP* **1**, 77–85.

- [78] MARTIN WITKOWSKI, L., MARTY, PH. & WALKER, J.S. 2001 Liquid-metal flow in a finite-length cylinder with a high-frequency rotating magnetic field. *J. Fluid Mech.* **436**, 131–143.
- [79] MARTIN WITKOWSKI, L. & WALKER, J.S. 2002 Solutocapillary instabilities in liquid bridges. *Phys. Fluids* **14**, 2647–2656.
- [80] MARTIN WITKOWSKI, L., WALKER, J.S. & MARTY, PH. 1999 Nonaxisymmetric flow in a finite-length cylinder with a rotating magnetic field. *Phys. Fluids* **11**, 1821–1826.
- [81] MARTY, PH., MARTIN WITKOWSKI, L., TROMBETTA, P., TOMASINO, T. & GARANDET, J-P. 1999 *On the stability of rotating MHD flows*, pp. 327–343. Kluwer Academic Publisher.
- [82] MARTY, PH., TROMBETTA, P. & GARANDET, J-P. 1998 Contrôle de la stabilité d'un écoulement thermoconvectif par un champ magnétique tournant. *C. R. Méc.* **326**, 185–190.
- [83] MAZURUK, K., RAMACHANDRAN, N., VOLZ, M.P. & GILLIES, D. 1997 Study of frequency effects of a rotating magnetic field on fluid flow in vertical cylinders. *Spie Proceedings Series* **3123**.
- [84] MEDALE, M. & CERISIER, P. 2002 Numerical simulation of Bénard-Marangoni convection in small aspect ratio containers. *Num. Heat Transf. A* **42**, 55–72.
- [85] MEDALE, M. & COCHELIN, B. 2009 A parallel computer implementation of the asymptotic numerical method to study thermal convection instabilities. *J. Comput. Phys.* Doi : 10.1016/j.jcp.2009.07.032.
- [86] MILLOUR, EHOARN 2001 Convection thermique d'un liquide binaire confiné dans un cylindre vertical. PhD thesis, Université Paris-Sud 11.
- [87] MOFFATT, H.K. 1965 On fluid flow induced by a rotating magnetic field. *J. Fluid Mech.* **22**, 521–528.
- [88] MOFFATT, H.K. 1978 Rotation of a liquid metal under the action of a rotating magnetic field. *In Proceedings of the Second Bat-Sheva International Seminar* pp. 45–62.
- [89] MOREAU, R. 1990 *Magnetohydrodynamics*. Kluwer Academic Publisher.
- [90] MÖSSNER, R. & GERBETH, G. 1999 Buoyant melt flows under the influence of steady and rotating magnetic fields. *J. Cryst. Growth* **197**, 341–354.
- [91] NEWELL, A. 1989 The dynamics and analysis of patterns. *Lectures in Sciences of Complexity* pp. 107–173, addison-Wesley (NY).
- [92] NIELD, D.A. 1964 Surface tension and buoyancy effects in cellular convection. *J. Fluid Mech.* **19**, 341–352.
- [93] NIELD, D.A. 1967 The thermohaline Rayleigh-Jeffreys problem. *J. Fluid Mech.* **29**, 545–558.
- [94] NIKRITYUK, P.A., ECKERT, K. & GRUNDMANN, R. 2006 Axisymmetric modelling of the mixing of two miscible liquid metals driven by a rotating magnetic field.
- [95] NIKRITYUK, P.A., ECKERT, K. & GRUNDMANN, R. 2006 Numerical study of a laminar melt flow driven by a rotating magnetic field in enclosed cylinders with different aspect ratios. *Acta Mechanica* **186**, 17–35.
- [96] NIKRITYUK, P.A., ECKERT, K. & GRUNDMANN, R. 2006 A numerical study of unidirectional solidification of a binary metal alloy under influence of a rotating magnetic field. *Int. J. Heat Mass Transfer* **49**, 1501–1515.
- [97] NIKRITYUK, P.A., UNGARISH, M., ECKERT, K. & GRUNDMANN, R. 2005 Spin-up of a liquid metal flow driven by a rotating magnetic field in a finite cylinder : A numerical and an analytical study. *Phys. Fluids* **17**, 067101.

- [98] NORE, C., TARTAR, M., DAUBE, O. & TUCKERMAN, L.S. 2004 Survey of instability thresholds of flow between exactly counter-rotating disks. *J. Fluid Mech.* **511**, 45–65.
- [99] PETRONE, G., CHÉNIER, E. & LAURIAT, G. 2004 Stability of free convection in air-filled horizontal annuli : Influence of the radius ratio. *Int. J. Heat Mass Transfer* **47**, 3889–3907.
- [100] RAHAL, S., CERISIER, P. & AZUMA, H. 2007 Bénard-Marangoni convection in a small circular container : Influence of the Biot and Prandtl numbers on pattern dynamics and free surface deformation. *Exp. Fluids* **43**, 547–554.
- [101] RICHARDSON, A.T. 1974 On the stability of a magnetically driven rotating fluid flow. *J. Fluid Mech.* **63**, 593–605.
- [102] ROSENBLAT, S. 1982 Thermal convection in a vertical cylinder. *J. Fluid Mech.* **122**, 395–410.
- [103] ROSENBLAT, S., DAVIS, S. & HOMSY, G. 1982 Nonlinear Marangoni convection in bounded layers - 1. Circular cylindrical containers. *J. Fluid Mech.* **120**, 91–122.
- [104] ROSENBLAT, S., HOMSY, G. & DAVIS, S. 1982 Nonlinear Marangoni convection in bounded layers - 2. Rectangular cylindrical containers. *J. Fluid Mech.* **120**, 123–138.
- [105] TOMASINO, T. & MARTY, PH. 2004 Three-dimensional stability of a rotating MHD flow. *Acta Mechanica* **172**, 135–150.
- [106] TOUIHRI, RIDHA 1998 Stabilité des écoulements dans une cavité cylindrique chauffée par le bas en présence d'un champ magnétique. PhD thesis, École Centrale de Lyon.
- [107] TOUIHRI, R., BEN HADID, H. & HENRY, D. 1999 On the onset of convective instabilities in cylindrical cavities heated from below. 1. Pure thermal case. *Phys. Fluids* **11**, 2078–2088.
- [108] TOUIHRI, R., BEN HADID, H. & HENRY, D. 1999 On the onset of convective instabilities in cylindrical cavities heated from below. 2. Effect of a magnetic field. *Phys. Fluids* **11**, 2089–2100.
- [109] UNGARISH, M. 1997 The spin-up of liquid metal driven by a rotating magnetic field. *J. Fluid Mech.* **347**, 105–118.
- [110] VANHOOK, S., SCHATZ, M., MCCORMICK, W., SWIFT, J. & SWINNEY, H. 1997 Long-wavelength surface-tension-driven Benard convection : Experiment and result. *J. Fluid Mech.* **345**, 45–78.
- [111] VAUX, S., BEN HADID, H. & HENRY, D. 2006 Study of the hydrodynamic instabilities in a differentially heated horizontal circular cylinder corresponding to a Bridgman growth configuration. *J. Cryst. Growth* **290**, 674–682.
- [112] VOLZ, M.P. & MAZURUK, K. 2001 An experimental study of the influence of a rotating magnetic field on Rayleigh-Bénard convection. *J. Fluid Mech.* **444**, 79–98.
- [113] VRENTAS, J.S., NARAYANAN, R. & AGRAWAL, S.S. 1981 Free surface convection in a bounded cylindrical geometry. *Int. J. Heat Mass Transfer* **24**, 1513–1529.
- [114] WAGNER, C., FRIEDRICH, R. & NARAYANAN, R. 1994 Comments on the numerical investigation of Rayleigh and Marangoni convection in a vertical circular cylinder. *Phys. Fluids* **6**, 1425–1433.
- [115] WALKER, J.S. & MARTIN WITKOWSKI, L. 2004 Linear stability analysis for a rotating cylinder with a rotating magnetic field. *Phys. Fluids* **16**, 2294–2299.
- [116] WALKER, J.S., VOLZ, M.P. & MAZURUK, K. 2004 Rayleigh-Bénard instability in a vertical cylinder with a rotating magnetic field. *Int. J. Heat Mass Transfer* **47**, 1877–1887.
- [117] ZAMAN, A.A. & NARAYANAN, R. 1996 Interfacial and buoyancy-driven convection - The effect of geometry and comparison with experiments. *J. Colloid Interface Sci.* **179**, 151–162.

Index

- bifurcation, 36
- bifurcation fourche, 45
- bifurcation fourche circulaire, 53
- bifurcation noeud-col, 44
- bifurcation sous-critique, 45
- bifurcation super-critique, 45
- bifurcation trans-critique, 44, 53

- champ électrique, 25
- champ magnétique, 25, 28
- champ thermique, 29
- coefficient d'expansion thermique, 22
- coefficient de diffusion magnétique, 26
- conductivité électrique, 25, 27
- conductivité thermique, 22
- confinement, 7

- effet de peau, 27, 28
- équation de Poisson, 29
- équations de Maxwell, 26, 28
- équations de Navier-Stokes, 28
- équations différentielles ordinaires, 36

- fluide conducteur, 25, 27
- fonctions de Bessel, 30
- force d'inertie, 31
- force de Laplace, 28
- force fluctuante, 29
- force moyennée, 29, 30
- force visqueuse, 28
- force volumique de Laplace, 26, 30

- instabilité de Bödewadt, 16
- instabilité de Marangoni, 13
- instabilité de Rayleigh-Bénard, 11, 16
- instabilité de Rayleigh-Bénard-Marangoni, 11
- instabilité primaire, 11, 12
- instabilité secondaire, 14
- interpolation de Gauss-Lobatto-Legendre, 38
- interpolation de Lagrange, 37, 46

- loi d'Ohm, 25

- méthode d'Arnoldi, 41, 42
- méthode de continuation, 45
- méthode de discrétisation temporelle, 39

- méthode de fractionnement, 48
- méthode de projection, 41, 42
- méthode des éléments isoparamétriques, 38
- méthode des éléments spectraux, 37
- magnétohydrodynamique, 6, 21
- mode critique, 41
- mode instable, 41

- nombre de Biot, 14
- nombre de Grashof, 13, 20, 22
- nombre de Hartmann, 28
- nombre de Prandtl, 13, 22
- nombre de Rayleigh, 13, 15
- nombre de Reynolds magnétique, 27
- nombre de Taylor magnétique, 16, 28

- paramètre d'écran, 27
- pompage d'Ekman, 15, 20

- rouleaux de Taylor, 14

- systèmes dynamiques, 36

- vecteur potentiel, 28

Résumé

Nous présentons dans cette étude le développement de la convection à partir de différentes perturbations de l'état conductif d'une couche fluide confinée dans une cavité cylindrique, chauffée par le bas et avec une surface supérieure libre. La discrétisation spatiale du domaine repose sur la méthode des éléments spectraux et les itérations temporelles sont assurées par une méthode splitting. Au déclenchement de la convection, les structures convectives correspondent à des modes de Fourier, et les seuils critiques dépendent du rapport de forme de la cavité, et des nombres de Biot et de Marangoni qui caractérisent la surface libre. Les transitions d'écoulements au-delà du seuil primaire sont caractérisées quantitativement en fonction du nombre de Rayleigh pour différentes valeurs du nombre de Biot et $Ma = 0$. Les résultats présentés sont obtenus en résolvant l'ensemble des équations non-linéaires de conservation à travers une méthode de continuation. Lorsque la convection se déclenche sous la forme d'un mode axisymétrique $m = 0$, l'évolution non-linéaire montre la coexistence de différentes structures convectives, des structures axisymétriques avec écoulement montant ou descendant au centre de la cavité et des structures correspondant à des combinaisons de modes qui apparaissent sur des branches secondaires sous-critiques.

L'action d'un champ magnétique constant est ensuite étudiée pour des fluides conducteurs dans une même configuration comprenant une surface supérieure libre. Nous montrons l'effet stabilisateur du champ magnétique sur les seuils primaires ainsi que son action sélective sur les différents modes de convection. Nous analysons l'évolution des structures convectives au delà de ces seuils et montrons comment le champ magnétique modifie les transitions entre ces structures. En soumettant le bain fondu à un champ magnétique tournant, le mouvement de rotation du fluide se superpose aux mouvements de convection thermique et on observe une diminution des fluctuations de température et un retard du déclenchement de l'instabilité de Rayleigh-Bénard (lorsque les deux parois haut/bas du bain sont rigides). La rotation influe sur ce déclenchement qui de stationnaire devient oscillatoire, à l'exception du mode $m = 0$ de Fourier, pour qui la transition reste stationnaire jusqu'à une certaine valeur critique du nombre de Taylor magnétique. La dynamique de l'écoulement axisymétrique de part et d'autre de cette valeur critique sera étudiée en détail.

Mots clés : Mécanique des fluides numérique, convection naturelle, magnétohydrodynamique, cavité cylindrique, analyse des bifurcations

Abstract

The growth of thermal convection out of different perturbations of the conductive base state is investigated using a spectral element time-stepping code. The fluid is subject to a vertical heat transfer in a cylindrical cavity with an upper free surface corresponding to the so-called Rayleigh-Bénard-Marangoni situation and the heat exchange through the free surface is evaluated via the Biot number. The results of the stability diagrams show that the evolution of the primary thresholds are largely influenced by the Biot number, the Marangoni number, and the aspect ratio of the cavity. Flow transitions are elucidated in quantitative detail as a function of the Rayleigh number for different Biot numbers in the tension free limit $Ma = 0$. The results shown are obtained by solving the full nonlinear field equations numerically among a continuation method. When an axisymmetric $m = 0$ Fourier mode is obtained at onset, the non-linear evolution shows the coexistence of different convective structures, the axisymmetric structures with up-flow or down-flow at the center and mixed-mode structures which appear on secondary subcritical branches.

The action of a constant magnetic field is then considered for melts in the same type of configuration with an upper free surface. We show the global stabilizing effect of the magnetic field on the primary bifurcation thresholds and the selective effect on the different instability modes. We also analyze the evolution of the convective structures above the thresholds and show how the magnetic field modifies the transitions between these structures.

When applying a magnetic body forcing in the azimuthal direction (RMF), one can damp the unavoidable thermal fluctuations inside the melt and delay the transition to the Rayleigh-Bénard instability (for rigid-rigid circular plates at top and bottom). The rotation effect also changes the transitions from steady to oscillatory, except for the $m = 0$ Fourier mode where the transition is first steady until a critical Taylor number and then becomes oscillatory. The dynamics of the transitions to the axisymmetric flow, below and above this value of critical magnetic Taylor number, is particularly interesting and will be described.

Keywords : Computational fluid dynamics, buoyant flow, magnetohydrodynamics, cylindrical cavity, bifurcation analysis