



**HAL**  
open science

# Applications du concept d'Exergie à l'énergétique de l'atmosphère. Les notions d'enthalpies utilisables sèche et humide.

Pascal Marquet

► **To cite this version:**

Pascal Marquet. Applications du concept d'Exergie à l'énergétique de l'atmosphère. Les notions d'enthalpies utilisables sèche et humide.. Climatologie. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 1994. Français. NNT: . tel-00572254

**HAL Id: tel-00572254**

**<https://theses.hal.science/tel-00572254v1>**

Submitted on 1 Mar 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse préparée par :

**Pascal MARQUET**

pour obtenir le titre de

**Docteur de l'université Paul Sabatier  
de TOULOUSE**

(arrêté ministériel du 30 mars 1992)

**Spécialité : METEOROLOGIE**

**APPLICATIONS DU CONCEPT D'EXERGIE  
A L'ENERGETIQUE DE L'ATMOSPHERE.  
LES NOTIONS D'ENTHALPIES UTILISABLES  
SECHE ET HUMIDE**

thèse préparée au sein de

**l'U.F.R. : "ASTROPHYSIQUE – GEOPHYSIQUE et  
TECHNIQUES STATIALES**

Soutenue le 10 juin 1994, devant le jury composé de :

- D. CADET     Directeur de thèse
- R. SADOURNY     Rapporteur
- R. P. PEARCE     Rapporteur
- G. VEDRENNE
- J. F. GELEYN

## **REMERCIEMENTS**

Je tiens tout d'abord à remercier Daniel Cadet qui a assuré l'encadrement et le suivi de cette thèse. Je lui suis reconnaissant de m'avoir accueilli pendant plus de deux ans au Laboratoire de Météorologie Dynamique dans son équipe de Climatologie et Météorologie Tropicale.

Je suis également reconnaissant à Robert Sadourny pour l'aide qu'il m'a apporté lors de la valorisation des premiers résultats.

Que Messieurs Antoine Lasserre-Bigory et Jean-François Mahfouf, pour leurs lectures indulgentes des premières versions de ces travaux, soient très chaleureusement remerciés.

Je remercie aussi vivement Jean-François Royer et Jean-François Geleyn pour les suggestions précieuses concernant la généralisation au cas d'une thermodynamique humide de l'atmosphère. Je remercie aussi Jean-Philippe Lafore qui a attiré mon attention sur les contributions de T. G. Shepherd.

Plusieurs conseils et assistances d'une grande importance m'ont été prodigués par Alain Joly et Jean Marc Audoin. Je leur adresse mes très sincères remerciements ainsi qu'à Marc Pontaud qui, à deux reprises, s'est intéressé à confronter les premiers résultats avec des simulations numériques et à qui revient l'idée du chemin externe pour l'énergie.

Je suis enfin très reconnaissant à Bruno Lacroix et Catherine Gouverneur pour leur relecture attentive et les nombreux commentaires qui ont aidé à clarifier ce mémoire, ainsi qu'à Emmanuel Legrand pour la traduction de l'article de Rant qui est reproduite en annexe.

## AVANT-PROPOS

Les travaux qui ont conduit à la soutenance de cette thèse ont débuté pendant les six derniers mois de la scolarité d'ingénieur de la météorologie, ils ont été poursuivis au cours de deux années de formation par la recherche (janvier 1988 à juillet 1990). Ces travaux ont été effectués au Laboratoire de Météorologie Dynamique du CNRS (Ecole Polytechnique), dans l'équipe de météorologie tropicale dirigée par Daniel Cadet.

La motivation première était une meilleure compréhension de l'énergétique de la circulation de la mousson africaine. Il est cependant apparu que les résultats obtenus pendant ces deux années dépassaient le cadre strict de la météorologie tropicale. La découverte de propriétés nouvelles concernant l'énergétique de l'atmosphère a transformé les buts initiaux en une étude essentiellement théorique, avec une application à un cas de cyclogénèse active à petite échelle sur l'Europe.

Plusieurs articles et contributions portant directement sur le sujet de cette thèse ont été publiés et présentés : Marquet (1990a, 1990b, 1991, 1993), Pontaud et al. (1990). Ce mémoire reprendra, en annexe C, l'intégrale du contenu de l'article de Marquet (1993) qui correspond à l'application de la théorie au cas d'une atmosphère humide. L'application au cas de l'atmosphère sèche qui est décrite dans les autres articles sera intégralement reformulée pour former le corps de ce mémoire, avec une présentation de nouveaux résultats.

## RESUME

Le concept d'énergie utilisable a été introduit par les fondateurs de la thermodynamique. Il correspond en fait à la "puissance motrice" de Carnot, les concepts d'énergie et d'entropie n'apparaissant que plus tardivement. Depuis plus de cent cinquante ans, Gibbs, Kelvin, Tait, Maxwell, Gouy, Stodola, Jouguet, Rant et de nombreux autres thermodynamiciens ont tous redécouvert ou développé l'idée d'une qualité supérieure d'énergie qui, contrairement à l'énergie elle-même, n'est pas conservée au cours des transformations naturelles. L'idée de la dissipation de l'énergie utilisable est d'ailleurs directement reliée à celle de création d'entropie et d'irréversibilité.

L'énergie utilisable est la partie de l'énergie qui est virtuellement convertible en travail. Elle est connue sous divers noms tels que "motivity", "availability", énergie utilisable, enthalpie utilisable, travail maximal, "technische Arbeitsfähigkeit", ou plus récemment exergie. Le terme exergie (travail extractible) semble maintenant s'imposer dans la littérature thermodynamique.

Les applications de ce concept sont nombreuses. Particulièrement pertinentes au début de ce siècle pour l'amélioration des performances des machines à vapeur, les propriétés de l'exergie s'étendent dorénavant aux systèmes ouverts ou fermés, en régimes stationnaire ou permanent, pour des fluides monophasés ou en présence de réactions chimiques. De plus, à l'instar de l'entropie de Shannon, des liens étroits avec la théorie générale de l'information apportent via la fonction de Kullback une assise théorique solide.

Une notion d'énergie utilisable a également été formalisée en météorologie par Margules en 1903, puis par Lorenz en 1955, afin de caractériser les échanges d'énergie qui se produisent au sein du fluide atmosphérique. L'énergie utilisable correspond à une partie relativement petite de la somme des énergies gravitationnelle et interne. On obtient ainsi une énergie qui, en ordre de grandeur, avoisine l'énergie cinétique. Les raisonnements qui ont conduit à cette version météorologique sont indépendants de la démarche thermodynamique générale.

Les propriétés de l'énergie utilisable de Lorenz ont conduit à une meilleure compréhension de la circulation générale atmosphérique : (i) par une explication du maintien du mouvement malgré les phénomènes dissipatifs (viscosité et friction) ; (ii) en mettant l'accent sur l'importance des chauffages différentiels (pôles-équateur et océans-continent) en tant que sources d'énergie utilisable ; (iii) avec une séparation des énergies en parties zonales moyennes et en perturbations par rapport à celles-ci, ceci conduisant à la définition de l'énergétique des systèmes d'ondes baroclines.

Mais la théorie de Lorenz est essentiellement globale. Elle ne permet pas l'étude énergétique exacte de phénomènes locaux tels que les grands thalwegs et dorsales quasi-stationnaires, les moussons, les ondes baroclines isolées, les cyclones, les lignes de grains ou les contributions relatives de de la

troposphère et de la stratosphère.

L'objet de cette thèse est l'étude, dans le cadre de l'énergétique de l'atmosphère, des propriétés de la fonction enthalpie utilisable spécifique qui est une des formes locale de l'exergie. Cette fonction possède une formulation simple et elle est définie mathématiquement en tout point de l'atmosphère. Dans l'approximation du gaz parfait et sec, elle s'écrit :  $a_h = (h - h_r) - T_r(s - s_r)$  où  $h$  est l'enthalpie et  $s$  l'entropie. On a introduit un état thermodynamique particulier de température  $T_r$  et de pression  $p_r$ , repéré par l'indice  $r$ .

Les propriétés de cette fonction sont pour la plupart analogues à celles de l'énergie utilisable de Lorenz. Elle est cependant exempte d'approximation, avec de plus la possibilité d'étudier des phénomènes limités dans l'espace (sur l'horizontale et la verticale). Cette fonction enthalpie utilisable généralise dans sa version hydrostatique diverses autres fonctions introduites en météorologie (Dutton, Van Mieghem, Pearce), c'est aussi un des cas particuliers de la pseudo-énergie récemment introduite par Shepherd.

On présente l'étude de l'énergétique d'une onde barocline sur l'Europe occidentale effectuée à l'aide de  $a_h$ , avec la séparation en une partie zonalement symétrique et en perturbations par rapport à celle-ci. Les contributions dues aux flux aux frontières ainsi que plusieurs termes de conversion présentent une cohérence qui était absente dans les versions locales de la théorie de Lorenz.

L'application au cas d'une atmosphère non-hydrostatique est mathématiquement fondée, bien que la formulation obtenue par Karlsson à l'aide de l'autre forme locale de l'exergie peut, par certains aspects, apparaître plus prometteuse.

Une généralisation au cas de l'atmosphère humide a été obtenue, avec un nouveau réservoir énergétique qui dépend de la chaleur latente potentiellement libérable par les formes liquide et solide de l'eau atmosphérique. Cette version semble être la généralisation humide recherchée par Lorenz.

# **1 INTRODUCTION.**

## **1.1 Motivations.**

### **1.1.1 De l'importance de l'énergie en météorologie.**

La notion de transformation de l'énergie est à la base des équations de la mécanique des fluides. Cette affirmation qui donne toute son importance à l'objet même de cette thèse mérite d'être justifiée en quelques mots. Pour écrire l'équation du mouvement ( $\vec{u}$ ), la loi de Newton suffit et, a priori, celle-ci ne fait pas directement appel à des concepts énergétiques. Mais pour obtenir l'équation de l'énergie interne ( $e_i$ ), il faut partir du premier principe de la thermodynamique ( $e_i + \vec{u}^2/2 + gz$ ), puis soustraire les équations de l'énergie cinétique ( $e_c = \vec{u}^2/2$ ) et de l'énergie potentielle ( $gz$ ). L'équation d'évolution de la température étant une conséquence de celle de l'énergie interne ( $e_i = c_v T + C^{ste}$ ), il s'avère que les principes de l'énergétique contrôlent l'essentiel de la thermodynamique de l'atmosphère. Et c'est finalement la dynamique qui se trouve indirectement influencée par l'intermédiaire des couplages entre les équations (pronostiques pour  $\vec{u}$  et  $T$ , diagnostiques pour la version hydrostatique de la relation de continuité  $\text{div}(\rho\vec{u}) + \partial\rho/\partial t = 0$  et l'équation d'état  $p = \rho R T$ ).

L'énergie est sans cesse convertie au sein du fluide atmosphérique entre ces différentes formes : interne, cinétique et potentielle. Ce simple fait explique un nombre important de phénomènes météorologiques. Il ne faut cependant pas oublier l'énergie latente qui est liée aux changements d'état du constituant eau atmosphérique (vapeur, liquide, glace). Ce quatrième poste énergétique est important, il contrôle en grande partie l'évolution de nombreux systèmes météorologiques. C'est le cas de la convection, des perturbations baroclines, des lignes de grains, des cyclones ou encore des phénomènes de mousson. L'énergie latente est toutefois souvent présentée en tant que terme source ou puits pour l'énergie interne et non pas comme un réservoir à part entière. Les deux approches – réservoir et source/puits – seront utilisées dans la suite de cette thèse. L'approche novatrice en forme de réservoir sera obtenue par une généralisation au cas humide de la théorie sèche.

Considérons l'équilibre énergétique de la planète Terre. En première approximation, le système constitué de l'atmosphère, des terres émergées et des océans n'est soumis qu'à une seule contrainte extérieure : le flux d'énergie en provenance du soleil sous forme de rayonnement dans la gamme visible. La croûte terrestre isole par hypothèse le système géophysique externe des influences du manteau. Les radiations électromagnétiques constituent la cinquième forme de l'énergie véhiculée au sein du fluide atmosphérique (les énergies électrique et nucléaire seront négligées dans cette étude). Une grande partie du rayonnement visible incident atteint la terre sans être altérée. Le bilan énergétique à la surface (terres, glaciers, océans) résulte d'un équilibre entre une réflexion de ce rayonnement incident (albédo), un réchauffement dû à l'absorption de ce rayonnement et

un refroidissement dû à l'émission d'un rayonnement infrarouge au taux de  $\sigma_B T^4$  d'après la loi de Stefan. En fait, la vapeur d'eau atmosphérique, les nuages, l'ozone ( $O_3$ ), les gaz à effet de serre ( $H_2O$ ,  $CO_2$ ) sont autant de composants actifs pour l'absorption, la réflexion et l'émission de rayonnement. Le profil vertical de température est déterminé par la contrainte d'un équilibre radiatif pour chaque niveau de l'atmosphère, le problème étant compliqué par les effets combinés de la turbulence et de la convection qui redistribuent l'énergie selon la verticale. En tenant compte de toutes ces influences et interactions, on obtient une structure verticale moyenne qui correspond à un équilibre dit radiatif-convectif. L'atmosphère est alors décomposée en différentes couches, chacune d'entre elles est caractérisée par un gradient vertical de température positif (stratosphère et thermosphère), négatif (troposphère et mésosphère) ou très faible (tropopause, stratopause et mésopause).

Le bilan net d'énergie entrant au sommet de l'atmosphère a été directement mesuré depuis l'espace grâce aux observations réalisées par les satellites. En moyenne annuelle, on observe que les tropiques sont excédentaires (plus de  $100 W m^{-2}$ ) alors que les zones polaires sont déficitaires (jusqu'à  $-150 W m^{-2}$ ). Ce déséquilibre étant permanent, un mécanisme compensateur doit réaliser le transfert de l'énergie des zones tropicales où elle est reçue en provenance du soleil vers les pôles où elle est évacuée en direction de l'espace. Ce sont les océans et l'atmosphère qui assurent, à parts sensiblement égales, cette fonction. Le transport atmosphérique peut être séparé en deux composantes : le mouvement moyen et les perturbations par rapport à celui-ci. Sous les tropiques, c'est le mouvement méridien moyen qui est le plus efficace, par l'intermédiaire de la cellule de Hadley qui transforme les énergies interne et latente des basses couches en énergie potentielle de pesanteur et qui exporte cette dernière en altitude vers les zones tempérées. Ce sont alors les mouvements transitoires baroclines (les perturbations) qui prennent le relais pour achever le transport de cette énergie vers les pôles. C'est là un premier exemple de l'importance des mécanismes de transport et de transformation de l'énergie en météorologie.

Le chauffage solaire peut donc être considéré comme le véritable moteur des mouvements de l'atmosphère. Il apparaît que le cheminement de l'énergie au sein du système terres-océans-atmosphère s'organise afin d'éviter l'accumulation à long terme de l'énergie dans ce système. Cette nécessité logique n'a pas que des implications diagnostiques ou pédagogiques. Parmi toutes les représentations imaginables des mouvements atmosphériques, seuls ceux qui assurent en moyenne ce transfert de l'énergie à travers les mouvements moyens puis transitoires sont possibles. Le respect des bilans des diverses formes d'énergie servent de guide pour une analyse phénoménologique correcte de l'atmosphère.

Les premières études historiques de la circulation générale ont utilisé ces contraintes énergétiques, d'autant plus que seules les approximations les plus simples des équations de Navier-Stokes étaient

alors connues. Mais l'importance de l'énergie en météorologie se mesure également en observant l'étendue de son utilisation dans les nouvelles techniques d'investigation. Depuis l'avènement des simulations numériques, il est en effet beaucoup fait appel aux propriétés énergétiques pour calibrer et valider la dynamique et les paramétrisations physiques, c'est à dire pour tester la bonne représentation des phénomènes externes au modèle atmosphérique ou d'échelle trop fine pour être représentée par ce modèle. Les progrès dans la qualité des simulations et dans la puissance des calculateurs permettent dorénavant l'étude du climat et de l'impact sur ce dernier des modifications naturelles ou artificielles de l'environnement. Tous ces résultats ne pourraient pas être interprétés sans s'être assuré au préalable du caractère réaliste des grands bilans énergétiques, hydrologiques, de la masse, de l'humidité, etc. Et au delà, les contraintes énergétiques interviennent souvent pour aider à la construction de ces paramétrisations elles-mêmes. On peut citer en théorie de la turbulence les méthodes dites de fermeture qui utilisent l'énergie cinétique turbulente. Les paramétrisations physiques utilisent quant à elles en permanence les propriétés thermodynamiques, à travers les températures potentielles  $\theta$  et  $\theta'_w$ , mais aussi à travers les chaleurs latentes qui sont directement liées aux transformations énergétiques de l'atmosphère humide. On peut aussi citer la diffusion verticale de l'énergie statique sèche qui est définie par  $c_p T + gz$  (du type enthalpie + énergie potentielle).

De manière plus générale et à l'instar des autres domaines de la physique, ce sont l'ensemble des grandes lois de conservation qui ont permis de mieux comprendre l'organisation des mouvements atmosphériques. Citons quelques exemples. La forme de la cellule de Hadley et l'existence des vents alizés proviennent des contraintes de conservation du moment cinétique en association avec la force de Coriolis. Pour les mouvements verticaux, les variations de l'entropie ( $s$ ), ou autrement dit des températures potentielles sèches ( $\theta$ ) et humides ( $\theta'_w$ ), contrôlent les mécanismes de convection. D'autre part, l'instabilité symétrique résulte d'une compétition entre la conservation de la quantité de mouvement absolue et la conservation de l'entropie. Quant aux phénomènes d'instabilités barotrope et barocline, ils sont fortement reliés aux lois de conservation du tourbillon absolu  $\vec{\zeta}_a = \vec{\nabla} \times \vec{u} + 2 \vec{\Omega}$  et du tourbillon potentiel  $\vec{\zeta}_a \cdot \vec{\nabla}(\theta)/\rho$ . On peut encore invoquer l'approximation des écoulements bidimensionnels quasi-géostrophiques où le tourbillon potentiel  $q = f + \vec{\nabla}^2(\psi) + f_0^2 \partial_p[\partial_p(\psi)/\sigma_0]$  est un invariant linéaire de la fonction de courant  $\psi$ , alors que l'enstrophie  $[f + \vec{\nabla}^2(\psi)]^2$  et l'enstrophie potentielle  $q^2/2$  sont deux invariants quadratiques.

Disposant de nombreux paramètres tels que  $(p, \rho, T, e_i, h, \vec{u}, \vec{\zeta}_a, e_c, \theta, s)$ , l'ensemble des mouvements atmosphériques devraient pouvoir être analysés à l'aide des études diagnostiques de ces seules quantités en liaison avec les lois générales de la thermodynamique. En fait, pour les problèmes dynamiques, une quantité moins triviale comme le tourbillon potentiel  $\vec{\zeta}_a \cdot \vec{\nabla}(\theta)/\rho$  est couramment utilisée pour comprendre le développement des ondes baroclines. En introduisant des quantités plus

complexes qui contiennent des dérivées spatiales et des produits scalaires, on perd a priori en simplicité et en précision de calcul. Seules les nombreuses propriétés originales et pertinentes qui en découlent justifient la recherche et l'utilisation de ces termes plus complexes.

### 1.1.2 Du concept d'énergie utilisable.

Il en va de même en ce qui concerne le domaine de l'énergétique où, comme pour les exemples précédents, des lois de conservation existent qui font appel à des combinaisons diverses de  $p$ ,  $T$ ,  $e_i$ ,  $h$  ou  $s$ . Le caractère conservatif de ces combinaisons est subordonné à la vérification de certaines hypothèses. Elles correspondent en général à des évolutions adiabatiques et réversibles des phénomènes, à l'approximation des fluides non visqueux, ou encore à la stationnarité de certains termes.

Dans le domaine de l'hydrodynamique, la loi de Bernoulli est la plus ancienne et la plus connue de ces lois de conservation. Elle indique que la quantité  $h + \vec{u}^2/2 + gz$  peut parfois être traitée comme un invariant particulaire, aussi bien pour les fluides incompressibles que compressibles.

En thermodynamique mais aussi en météorologie, une autre loi de conservation s'est avérée féconde. Elle met en jeu le concept d'énergie utilisable qui est une combinaison de  $e_i$  et  $s$ , ou  $h$  et  $s$ . Examinons sur deux exemples physiques simples comment se caractérise la partie de l'énergie d'un système qui est potentiellement convertible en énergie mécanique (cinétique), autrement dit l'énergie utilisable du système. Il pourra être utile de revenir à ces deux exemples lors de l'étude des systèmes plus complexes comme l'atmosphère, les démarches étant pour l'essentiel similaires.

*(a) Le pendule mécanique ponctuel.*

On sait que l'énergie potentielle de pesanteur  $E_p$  n'est définie qu'à une constante additive près, liée à une hauteur conventionnelle notée  $z_c$  sur la figure (1) avec  $(E_p)_c \equiv 0$ . Lors du mouvement du pendule et en négligeant le frottement il y a un échange permanent entre l'énergie cinétique  $E_c = m \vec{u}^2/2$  et l'énergie potentielle  $E_p = m g (z - z_c)$ . La définition de  $\vec{u}$ , et donc celle de l'énergie cinétique, est également arbitraire puisque c'est un repère relatif lié au point d'application du pendule qui est implicitement choisi. Il existe une position particulière  $z = z_0$  qui représente un des équilibres du système. C'est l'équilibre stable d'élévation minimale. Pour cette position, la valeur de l'énergie potentielle est minimale, elle vaut  $(E_p)_0 = m g (z_0 - z_c)$ .

En présence de frottements, le système est dissipatif et le pendule s'immobilise rapidement à cette position stable  $z = z_0$ . En négligeant le frottement, le système devient non-dissipatif et l'énergie utilisable pour la transformation en énergie cinétique est définie par :

$$A \equiv E_p - (E_p)_0 = m g (z - z_0) \geq 0 ,$$

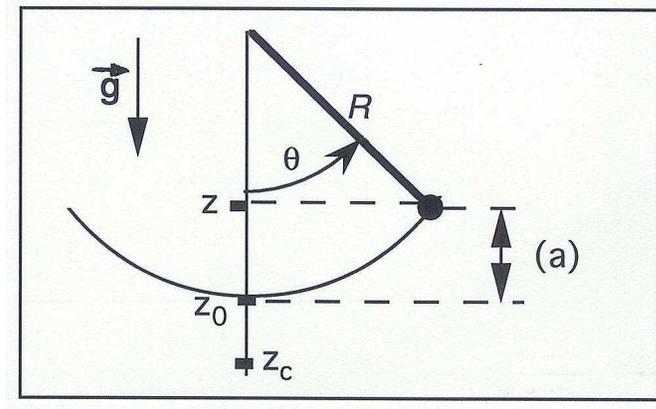


FIG. 1 – *Le pendule mécanique*

$$\text{avec } A = m g \mathcal{R} [1 - \cos(\theta)] \approx m g \mathcal{R} \theta^2 / 2,$$

où la grandeur  $\mathcal{R}$  est la longueur du pendule.

La loi de conservation de l'énergie se traduit par  $A + E_c = C^{ste}$ , ce qui signifie que l'énergie passe continuellement de la forme cinétique ( $E_c$ ) à la forme utilisable ( $A$ ) et inversement. Cette énergie utilisable est positive, nulle uniquement pour l'état de référence  $z = z_0$ . L'énergie potentielle est linéaire en  $z$ . C'est aussi le cas pour  $A(z)$  qui est cependant approximativement quadratique en  $A(\theta)$ . On remarquera que l'état de référence est atteint par le système avec une énergie cinétique qui est maximale, correspondant à la libération de toute l'énergie potentielle disponible. Les ordres de grandeur de  $A$  et  $E_c$  sont comparables. Ce n'est pas le cas pour  $A$  et  $E_p$  puisqu'une position arbitrairement basse de  $z_c$  conduit à des valeurs très élevées de  $m g (z_0 - z_c)$ . L'introduction de l'énergie utilisable  $A$  revient à ne plus donner d'importance physique à l'indétermination du niveau zéro de  $E_p$ , ceci par la prise en compte de la géométrie particulière du problème. Elle se résume ici à la cote  $z_0$  de l'élévation minimale du pendule.

(b) *Le liquide incompressible.*

Soit un liquide incompressible contenu dans un bassin avec une surface libre qui est repérée par l'élévation  $z$ . Pour ce système, on a aussi deux formes d'énergies : l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de pesanteur. On néglige l'effet des frottements ainsi que les effets thermiques. Pour l'ensemble du fluide de la figure (2),

l'énergie cinétique est  $E_c = \{e_c\}$ , avec la notation  $\{\dots\}$  pour indiquer une intégration spatiale sur l'ensemble de la masse contenue dans le bassin. L'énergie cinétique spécifique est  $e_c = \vec{u}^2 / 2$ . La densité est constante et égale à  $\rho$ . L'énergie potentielle de pesanteur vaut  $E_p = \{e_p\} = \{g(z - z_c)\}$ , qui s'écrit  $\frac{1}{2} \rho g \iint_{\mathcal{S}} (z - z_c)^2 dx dy + C$ , où  $C$  est une constante d'intégration arbitraire qui dépend de la profondeur et de la définition arbitraire du niveau zéro  $z_c$  de l'énergie potentielle. On a noté par  $\mathcal{S}$  la section horizontale du bassin.

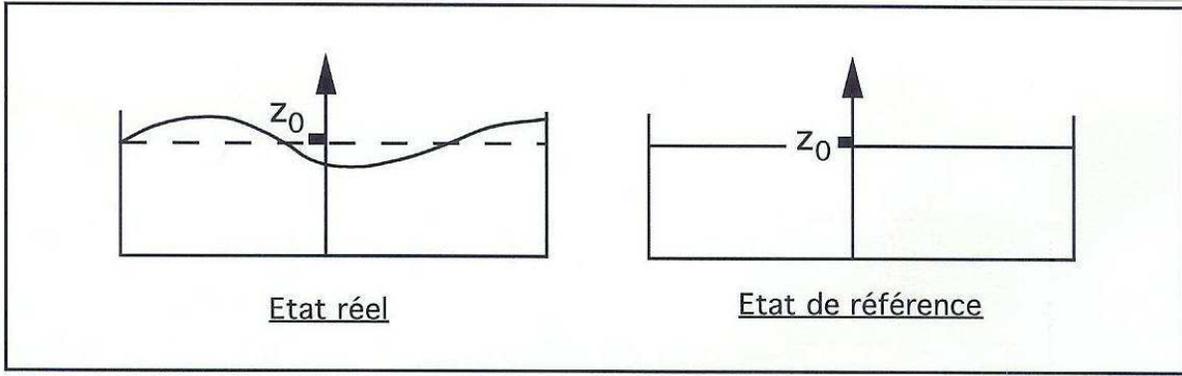


FIG. 2 – *Le liquide incompressible*

On peut, ici encore, aisément définir la forme de l'état de référence par  $z_0 = \bar{z}$  : c'est l'élévation moyenne de la surface libre. C'est un état qui peut être théoriquement atteint par le système à partir de n'importe quel état initial, même si la réalisation effective de cette transformation globale semble peu réaliste (tous les points de la surface libre devraient au même instant se trouver à la cote  $z = z_0$  en ayant une vitesse non nulle et très grande). En utilisant la propriété  $z_0 = \bar{z}$ , l'énergie utilisable  $A$  est définie par :

$$A = E_p - (E_p)_0 = \frac{1}{2} \rho g \iint_S (z^2 - z_0^2) dx dy = \frac{1}{2} \rho g \iint_S (z - z_0)^2 dx dy \geq 0.$$

C'est une grandeur positive, quadratique en  $z - z_0$ . Cette dernière propriété est également vérifiée par  $E_p$  dont le signe n'est cependant pas déterminé du fait de la valeur  $C$  inconnue. En absence de frottement, on a la loi de conservation globale  $A + E_c = C^{ste}$  et l'état de référence est atteint lorsque le fluide possède l'énergie cinétique maximale et l'énergie utilisable minimale (dans l'état de référence  $A = 0$ ). Pour le cas du fluide incompressible, l'énergie utilisable  $A$  représente l'énergie des perturbations de la surface libre. L'aspect géométrique de l'état de référence coïncide avec l'état de repos naturel du fluide, alors que les dynamiques de ces deux états diffèrent fondamentalement. Remarquons enfin que les ordres de grandeur de  $E_c$  et de  $A$  sont comparables bien que l'énergie potentielle  $E_p = \{g(z - z_c)\}$  puisse être rendue très grande en faisant varier arbitrairement  $z_c$ . On a éliminé les conséquences physiques de l'indétermination du niveau zéro de  $E_p$ .

(c) *L'atmosphère.*

Comme pour le pendule et le cas du liquide incompressible, l'atmosphère possède un invariant énergétique qui est la somme de l'énergie cinétique et d'une énergie qui est dite utilisable.

Pour découvrir la formulation de cette énergie utilisable il s'agit, ici encore, de trouver la portion de l'énergie qui est virtuellement convertible en énergie cinétique. Mais l'atmosphère met en jeu cette fois trois formes d'énergie au lieu de deux : cinétique ( $e_c = \vec{u}^2/2$ ), potentielle de pesanteur ( $e_p = gz + C^{ste}$ ) et aussi interne ( $e_i = c_v T + C^{ste}$ ). En outre, le gaz parfait qui compose par hypothèse

l'atmosphère est compressible. Il n'est plus aussi simple de deviner la nature des éventuels états de référence.

La somme de l'énergie potentielle et de l'énergie interne est représentée par la fonction enthalpie  $H$  et, comme pour les exemples (a) et (b), seule une faible partie de l'enthalpie globale  $H$  est transformable en énergie cinétique  $E_c$ . L'enthalpie spécifique  $h = c_p T + C^{ste}$  n'est en effet définie qu'à une constante additive près. L'enthalpie  $h$  n'est donc pas connue de manière absolue. En introduisant une référence arbitraire  $h_0$  correspondant à une température moyenne  $T_0 \approx 250$  K, comparons les ordres de grandeur de  $h - h_0$  et de  $e_c$  :

$$\left. \begin{array}{ll} c_p (T - T_0) \text{ pour } h - h_0 & \longrightarrow \approx 50 \text{ kJ(kg)}^{-1} \\ \bar{u}^2 / 2 \text{ pour } e_c & \longrightarrow \approx 0.5 \text{ kJ(kg)}^{-1} \end{array} \right\} \implies H - H_0 \gg E_c.$$

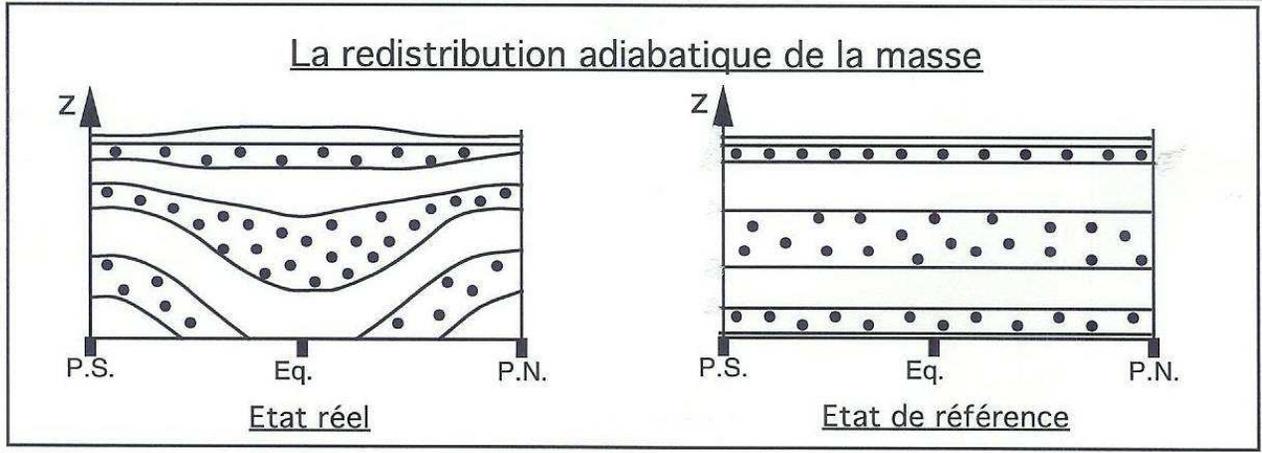
La forte disproportion entre les réservoirs globaux  $H - H_0$  et  $E_c$  fait penser que la différence d'enthalpie  $H - H_0$  n'est effectivement pas la quantité pertinente pour évaluer les échanges avec l'énergie cinétique.

Pour définir la portion de l'enthalpie qui est réellement convertible en une autre forme d'énergie, il faut découvrir parmi toutes les configurations du fluide atmosphérique les états de référence, c'est à dire les distributions qui possèdent l'enthalpie minimale, et donc celles qui sont atteintes avec une énergie cinétique maximale d'après la loi de conservation adiabatique et hydrostatique  $E_c + H = C^{ste}$ . On a utilisé la relation classique  $H = E_i + E_p$  qui est vraie en absence de relief pour une atmosphère hydrostatique. Ces états de référence doivent permettre de définir une énergie utilisable qui est, en ordre de grandeur, comparable à  $E_c$ .

Depuis les travaux de Margules (1905), généralisés par Lorenz (1955), l'énergie utilisable globale de l'atmosphère  $A$  est en effet présentée de cette manière. Lorenz suppose que l'état de référence est atteint par une évolution adiabatique de l'état réel de l'atmosphère. Pour toute distribution des champs de température et de pression de l'état réel, on obtient un ensemble de surfaces d'égale entropie où  $\theta = T (p_{00}/p)^{R/c_p}$  est une constante. L'entropie valant  $s = c_p \ln(\theta) + C^{ste}$ , on peut traduire simplement l'hypothèse de mouvements adiabatiques de l'atmosphère ( $\dot{q} = 0$ ) en disant que ces surfaces "iso- $\theta$ " deviennent des surfaces matérielles : les particules fluides ne les traversent pas. Ceci est dû à la propriété locale  $d\theta/dt = (\theta \dot{q})/(c_p T) = 0$ .

L'état de référence de Lorenz est défini par le réarrangement adiabatique de l'atmosphère qui vérifie les propriétés suivantes :

- les surfaces "iso- $\theta$ ", "iso- $p$ " et "iso- $T$ " sont horizontales,
- le profil vertical est stable ( $\partial\theta/\partial z > 0$ ),
- la masse comprise entre deux surfaces "iso- $\theta$ " est conservée par le réarrangement.



En moyenne zonale, on obtient schématiquement les états réel et de référence de la figure (3). Par définition, l'énergie potentielle utilisable  $A$  de Lorenz est l'excès de l'enthalpie  $H$  de l'atmosphère sur l'enthalpie  $H_r$  de l'état de référence associé. On a donc :

$$A \equiv H - H_r \geq 0, \quad \text{avec} \quad A + E_c = C^{ste}. \quad (1)$$

Cette dernière propriété de conservation n'est vérifiée que sous certaines hypothèses assez strictes :

- mouvements adiabatiques au cours de la redistribution,
- l'équilibre vertical reste hydrostatique,
- il n'y a pas de relief,
- les profils verticaux sont stables ( $\partial\theta/\partial z > 0$ ).

On retrouve avec (1) les propriétés mentionnées en (b) dans le cadre du fluide incompressible, généralisées ici au cadre compressible.

De manière approchée, l'énergie utilisable de Lorenz  $A = H - H_r$  s'écrit comme l'intégrale sur le volume de l'atmosphère d'une intégrande  $a_L$  définie par :

$$A \approx A_L = \iiint_{\mathcal{M}} a_L \, dm = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{(T - \bar{T})^2}{2\bar{\sigma}} \, dx \, dy \, dp \geq 0, \quad (2)$$

où  $\bar{\sigma}(p)$  est un paramètre de stabilité,  $\bar{T}(p)$  est la moyenne isobare de la température et où la coordonnée pression  $dp = -\rho g \, dz$  a été utilisée dans un cadre hydrostatique. Hormis les hypothèses précédentes qui conduisent à la loi de conservation (1), celles utilisées pour obtenir cette approximation correspondent à des développements limités spatiaux pour passer de la représentation verticale en  $\theta$  à la représentation en  $p$ . L'énergie potentielle utilisable  $A_L$  dépend donc principalement de deux effets qui proviennent respectivement du numérateur et du dénominateur de  $a_L$ , c'est à dire

- de la variance de la température sur une surface isobare :  $\overline{(T - \bar{T})^2}$ ,
- de la stabilité verticale en moyenne isobare  $\bar{\sigma}$ .

### 1.1.3 La problématique.

La notion d'énergie utilisable est au coeur des préoccupations de cette thèse. Ce concept a été introduit et redécouvert par un grand nombre de physiciens (météorologistes ou thermodynamiciens), avec presque autant d'approches différentes du problème. La définition donnée ci-dessus est celle de Lorenz (1955) qui est la plus célèbre dans le domaine de la météorologie. Il a pu expliquer grâce à cette quantité globale  $A_L$  la production, le transport et la dissipation de l'énergie au sein de l'atmosphère. Il a formalisé mathématiquement l'impact des contributions respectives des mouvements de grande échelle et des perturbations par rapport à celui-ci, en expliquant la persistance de la circulation générale malgré la dissipation due à la viscosité et aux frottements. Les détails de la théorie de Lorenz seront abordés progressivement au cours de cette thèse, par comparaison avec les résultats qui seront obtenus.

Toutes ces implications météorologiques de l'approche de Lorenz ne pouvaient pas être obtenue à partir des quantités  $E_i$ ,  $H$  ou  $S$  considérées individuellement. Une des raisons est que les enthalpies globales  $H$  ou  $H_r$  ne sont pas quadratiques en  $T$ , seule la combinaison  $A_L$  l'est. La séparation de Lorenz en valeurs zonales moyennes et en perturbations par rapport à celles-ci dépend fondamentalement de ce caractère quadratique en  $T$  de l'énergie utilisable. On a en effet  $T = \overline{T} + T'$  et  $A$  dépend d'après (2) de  $\overline{(T')^2}$ . Si on note par  $T^\lambda$  la moyenne zonale et par  $T_\lambda$  la perturbation à cette moyenne zonale, on a  $T' = T_\lambda + (T^\lambda - \overline{T}) = T_\lambda + T_\varphi^\lambda$ . La quantité  $T_\varphi^\lambda$  représente l'écart entre la moyenne zonale et la moyenne isobare  $\overline{T} = T^{\lambda\varphi}$ . On obtient finalement  $\overline{(T')^2} = \overline{(T_\varphi^\lambda)^2} + \overline{(T_\lambda)^2}$ . Comme  $\overline{T_\lambda} = \overline{T_\varphi^\lambda} = 0$ , on n'aurait pas obtenu cette séparation à partir d'une fonction linéaire de  $T$  ou de  $T'$ . Lorenz a défini les réservoirs énergétiques  $A_Z$  et  $A_E$  tels que  $A_L = A_Z + A_E$ . Le terme  $\overline{(T_\varphi^\lambda)^2}$  correspond à l'énergie globale  $A_Z$ , le terme  $\overline{(T_\lambda)^2}$  correspond à  $A_E$ . Cette séparation  $\overline{(T')^2} = \overline{(T_\varphi^\lambda)^2} + \overline{(T_\lambda)^2}$  est donc fondamentale et elle provient essentiellement du caractère quadratique de  $A_L$ . Elle conduit à la définition des conversions barotropes et baroclines qui déterminent classiquement en météorologie les phénomènes de frontogénèse et qui influencent plus généralement le développement des phénomènes ondulatoires.

La problématique qui a conduit aux travaux de recherche exposés dans cette thèse est la suivante.

La théorie de Lorenz étant bien connue dans le monde de la météorologie et depuis longtemps appliquée à des problèmes très divers, le besoin de rénover cette théorie peut apparaître superflu. Il correspond pourtant à trois nécessités de natures mathématique et physique qui vont maintenant être expliquées.

L'énergie utilisable de Lorenz est la différence entre l'enthalpie de l'atmosphère et l'enthalpie de l'état de référence associé. Mais, on le verra plus loin, cette définition n'est pas celle que les

thermodynamiciens emploient. De plus, l'expression (2) est obtenue à l'aide d'approximations, alors que l'expression exacte qui utilise la coordonnée verticale  $\theta$  est malaisée à manipuler. Un troisième inconvénient provient du caractère global de la théorie de Lorenz. Mathématiquement, seule est fondée l'étude de l'énergie utilisable pour l'ensemble de l'atmosphère, ou pour des systèmes d'étendue plus limitée mais périodiques. Ceci provient en particulier des intégrations par parties utilisées pour démontrer la relation classique  $H = E_i + E_p$  sous les hypothèses adéquates. L'étude des phénomènes locaux (perturbations baroclines, jets, moussons, lignes de grains, cyclones, ...) ne peut a priori pas être entreprise à l'aide de  $A_L$ . On mentionnera aussi la question assez délicate de la pertinence de l'état de référence de Lorenz qui doit être d'enthalpie minimale (ou au moins extrémale) mais qui ne semble pas pouvoir représenter un état réellement accessible du système. En effet, on obtient après redistribution de la masse un état qui est bien représenté géométriquement par la figure (3), mais dont la dynamique associée reste indéterminée et probablement irréaliste du fait de son énergie cinétique qui a été rendue maximale.

On peut se demander dans quelles mesures l'ensemble de ces faiblesses ne pourraient pas être corrigées en introduisant une autre forme de l'énergie utilisable. On désire :

- se rapprocher d'avantage des résultats qui ont été développés dans le cadre de la thermodynamique générale et de la physique statistique ;
- obtenir une formulation aussi simple que celle de  $A_L$ , mais avec une absence ou un minimum d'approximations ;
- ne pas faire appel à la notion d'état de référence d'énergie cinétique maximale ;
- avoir un champ d'application allant des études globales aux investigations régionales et locales, avec une prise en compte des flux aux frontières des domaines limités.

Rien ne garantit a priori le succès de cette démarche, la fonction recherchée devant être quadratique en  $T$  et l'ensemble des propriétés globales pertinentes déjà obtenues avec la formulation de Lorenz devant être préservées. Cependant, il existe bien une telle fonction locale. Elle correspond à une des formes du concept d'énergie utilisable développée en thermodynamique, mais qui semble peu connue dans le domaine de la météorologie.

## **1.2 Historique de l'exergie.**

### **1.2.1 Les balbutiements.**

Pour bien comprendre la genèse de la notion d'énergie utilisable, on peut d'abord se tourner vers Brunhes (1909) qui a clairement décrit au début du siècle les premiers temps de l'histoire de ce concept. L'analyse de cette démarche thermodynamique nous amènera au concept moderne d'exergie qui synthétise les deux idées d'énergie et d'enthalpie utilisables.

Dès 1824, Sadi Carnot a réfléchi aux implications pratiques et théoriques de la transformation de la chaleur en effets utiles. Il est nécessaire de bien se replacer dans le contexte scientifique de cette époque. Les quantités telles que l'énergie, l'entropie ou la température absolue n'étaient pas encore définies. Carnot a appelé en toute généralité "puissance motrice" le pouvoir d'action qui est contenu dans tout phénomène naturel et qui est capable de provoquer en retour des transformations non spontanées telles que l'élévation d'une masse d'eau, le passage de chaleur d'un corps froid à un corps chaud, ou encore le chargement d'accumulateurs électriques. Carnot a montré qu'en ce qui concerne la chaleur, c'est l'existence et le maintien de différences de température qui crée la puissance motrice (les sources chaudes et froides). W. Thomson (alias Lord Kelvin) utilisera un peu plus tard les remarques de Carnot pour définir avec Joule au milieu du dix-neuvième siècle la notion moderne de température absolue, ceci en méditant l'idée de valeur utile de l'énergie pour chaque intervalle de température.

Il faut ici insister sur un point : la puissance motrice ne correspond pas à l'énergie du système mais bien à son énergie utilisable, les deux quantités n'étant pas du tout synonymes. En effet, si on refroidit la seule source froide sans changer la source chaude, un système peut voir son énergie décroître alors que sa puissance motrice augmente. A l'inverse, un système isolé évoluant librement tend à égaliser les hétérogénéités spatiales et, l'énergie restant constante, sa puissance motrice diminue et tend même vers zéro (on ne peut plus obtenir de travail thermique d'un système homotherme).

C'est Lord Kelvin qui a appelé "énergie mécanique" ce que nous connaissons depuis Clausius sous le nom d'énergie. Kelvin a parfaitement distingué les deux notions d'énergie et d'énergie utilisable en définissant le concept de "dissipation de l'énergie". Il en a donné, semble-t-il, la première évaluation numérique en fonction de la distribution de la température. Soit un corps de capacité calorifique constante  $C$  dont la température  $T_0$  est également constante à l'exception d'une petite région où on a  $T = T(x, y, z)$ . Thomson a montré que la quantité de travail qui peut être fournie par ce système s'écrit :

$$W = C T_0 \iiint [(T/T_0 - 1) - \ln(T/T_0)] dx dy dz \geq 0. \quad (3)$$

Cette expression, obtenue dès 1853, indique que le travail extractible  $W$  est positif, nul si  $T = T_0$  en tout point : la puissance motrice s'annule quand toute hétérogénéité spatiale a disparu. On présente en (3) une expression adaptée qui emploie la notation moderne pour la température absolue  $T$ . Partant d'un état quelconque du système, la valeur  $W$  donnée par (3) est le maximum d'énergie que ce système peut fournir au monde extérieur. On remarque que  $W$  est une fonction quadratique, le développement de  $\ln[1 + (T - T_0)/T_0]$  à l'ordre le plus bas en  $(T - T_0)/T_0$  donnant  $W \approx C \iiint (T - T_0)^2 / (2 T_0) dx dy dz$  (Thomson ne mentionne pas cette propriété).

Dans les années qui suivirent, le terme puissance motrice a progressivement disparu pour laisser la place à la dénomination d'énergie utilisable qui semble due à Maxwell (1871) (available energy). Tait (1879) et Thomson (1879) ont aussi oublié l'appellation originelle de Carnot en proposant le terme anglais "motivity". Entre temps, le concept d'entropie a été dégagé par Clausius en 1865 et les idées de conservation de l'énergie et d'augmentation d'entropie forment depuis les bases de la thermodynamique à travers les premier et second principes. Parallèlement à Clausius, Tait avait proposé une autre approche : l'idée d'une dégradation de l'énergie qui correspond à une perte de qualité de l'énergie ou à une baisse de l'énergie utilisable. On retrouve, pour employer des termes plus modernes, la notion d'augmentation naturelle de l'entropie.

La manière dont est enseignée la thermodynamique repose de nos jours sur les deux concepts d'énergie et d'entropie. Comme souvent dans l'histoire des sciences, on s'aperçoit qu'il aurait pu en être autrement et, bien que l'idée d'énergie utilisable ait été un guide conceptuel pour plusieurs des thermodynamiciens du dix-neuvième siècle, seules les versions dérivées d'énergie libre ( $F = E_i - TS$ ) et d'enthalpie libre ( $G = H - TS$ ) sont véritablement connues à présent. Les fonctions  $F$  et  $G$  ne sont pourtant que la restriction de l'énergie utilisable aux systèmes chimiques isothermes et isochores pour  $F$ , isothermes et isobares pour  $G$ . L'énergie utilisable traite le cas plus général des systèmes qui possèdent des hétérogénéités de température, de densité ou de pression.

On pourra se reporter aux articles originaux de Thomson (1853), Tait (1879) et de Thomson (1879) dont les photocopies sont fournies en annexe A.

### 1.2.2 De la variation d'entropie totale.

Pour mieux comprendre l'imbrication des notions d'énergie interne ( $E_i$ ), d'entropie ( $S$ ) et d'énergie utilisable ( $A$ ), choisissons l'approche graphique suivante de Gibbs (1873) qui a été reprise par Landau et Lifchitz (1976). Cette approche permet d'obtenir de manière générale et pédagogique une expression de  $A$  en fonction de l'énergie interne, de l'entropie ainsi que des autres variables d'état. C'est dans l'ouvrage de Maxwell (1871) qu'une telle expression reliant  $A$  avec  $E_i$  et  $S$  est, semble-t-il, apparue pour la première fois.

Les préoccupations industrielles à la fin du dix-neuvième et au début du vingtième siècle étaient principalement dictées par l'amélioration de la performance des machines thermiques à vapeur ou à explosion. La présentation qui suit constitue la modélisation de l'aspect statique de ces problèmes et conduit à la définition de l'énergie utilisable (section 1.2.3). L'approche dynamique traitant des fluides en mouvements sera ensuite abordée avec l'introduction naturelle de la fonction enthalpie utilisable (1.2.4).

Une portion de fluide à la pression  $p$  et à la température  $T$  est entourée par un thermostat à la

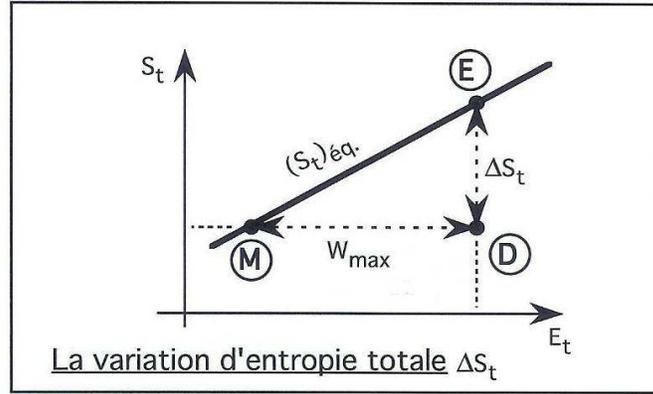


FIG. 4 – L'approche de Gibbs.

température  $T_0$ . Cherchons le travail maximal que le système formé par le fluide et le thermostat peut fournir au monde extérieur.

On suppose que le système possède une énergie totale  $E_t$  et une entropie totale  $S_t$ . On peut représenter, en suivant Gibbs (1873), tout état du système par un point dans le diagramme  $(E_t, S_t)$  de la figure (4). Il y a en particulier une courbe d'équilibre telle que  $(S_t)_{éq.}$  ne dépend que de  $E_t$ . La propriété fondamentale de l'équilibre statistique (imposé par le thermostat) est l'existence d'une température d'équilibre  $T_0$  donnée par

$$\frac{d(S_t)_{éq.}}{dE_t} = \frac{1}{T_0}.$$

La température  $T_0$  étant constante par hypothèse, la courbe d'équilibre est une droite.

L'énergie utilisable est par définition le travail maximal que le système total peut fournir au monde extérieur au cours de transformations naturelles. Partant d'un état de déséquilibre noté **D** sur la figure (4), l'état d'équilibre de même énergie totale est noté **E**, alors que l'état d'équilibre obtenu en préservant l'entropie totale est noté **M**. En partant de **D**, l'entropie totale ne peut que croître (second principe) et les points d'équilibre possibles sont entre **M** et **E** ou au delà de **E**. On a donc  $(S_t)_{éq.} \geq (S_t)_{\mathbf{D}} = (S_t)_{\mathbf{M}}$  et  $(S_t)_{éq.} \geq (S_t)_{\mathbf{M}}$  implique  $(E_t)_{éq.} \geq (E_t)_{\mathbf{M}}$ . L'expression de la variation maximale d'énergie du système est donc :

$$W_{max} = (E_t)_{\mathbf{D}} - (E_t)_{\mathbf{M}}, \quad \text{avec} \quad \frac{d(S_t)_{éq.}}{dE_t} \equiv \frac{1}{T_0} = \frac{\Delta(S_t)}{W_{max}}.$$

Finalement, l'énergie utilisable a pour expression générale :

$$A \equiv W_{max} = T_0 \Delta(S_t). \quad (4)$$

On a obtenu une formulation qui démontre l'existence d'un lien étroit entre la valeur de l'énergie utilisable  $A$  d'un système et la variation d'entropie totale  $\Delta(S_t)$  de ce même système au cours du passage vers l'état d'équilibre. Ce lien est la température  $T_0$  du thermostat.

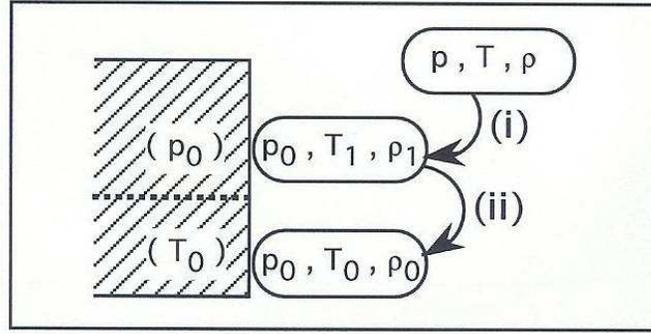


FIG. 5 – L'énergie utilisable.

### 1.2.3 L'énergie utilisable.

Cherchons maintenant l'expression de l'énergie utilisable en fonction des variables thermodynamiques générales. On considère une particule fluide de masse unité qui est supposée être un gaz parfait aux conditions  $(p, T, \rho)$ . On dispose d'un thermostat qui est à la fois une source infinie de chaleur à la température  $T_0$  et de travail à la pression  $p_0$ . La température  $T_0$  et la pression  $p_0$  sont supposées constantes.

Calculons la variation d'entropie totale quand le système particule + thermostat subit les transformations thermodynamiques suivantes (voir la figure 5) :

- (i) la particule passe de  $(p, T, \rho)$  à  $(p_0, T_1, \rho_1)$  par une adiabatique irréversible, ceci en subissant l'influence du thermostat qui joue le rôle d'une source de travail de pression ;
- (ii) la particule passe de  $(p_0, T_1, \rho_1)$  à  $(p_0, T_0, \rho_0)$  par une isobare irréversible, ceci en entrant en contact avec le thermostat qui joue le rôle d'une source de chaleur et qui impose la pression  $p_0$ .

En utilisant le résultat (4), l'énergie utilisable de la particule fluide vaut  $a = T_0 \Delta(S_t)$  et, tous calculs faits, on trouve l'expression

$$a = \Delta(e_i + p_0 \nu - T_0 s) = e_i - (e_i)_0 + p_0(\nu - \nu_0) - T_0(s - s_0), \quad (5)$$

où  $e_i$  et  $s$  sont les valeurs spécifiques de l'énergie interne et de l'entropie de la particule fluide,  $\nu = 1/\rho$  étant son volume spécifique.

Ce résultat est obtenu à l'aide de considérations classiques de thermodynamique où l'indice "TH" indique le thermostat et l'indice "P" indique la particule fluide.

– Au cours de la transformation (i),  $(\Delta S)_{TH} = 0$  pour le thermostat (il n'échange pas de chaleur), alors que  $(\Delta S)_P = c_p \ln(T_1/T) - R \ln(p_0/p)$  pour le fluide. C'est la variation de l'entropie pour un gaz parfait.

– Pour la transformation (ii),  $(\Delta S)_{TH} = c_p (T_1 - T_0)/T_0$  alors que  $(\Delta S)_P = c_p \ln(T_0/T_1)$ . En effet, le thermostat reçoit la quantité de chaleur  $c_p (T_1 - T_0)$  en restant à la température  $T_0$ , la variation d'entropie du gaz parfait se faisant à la pression constante  $p_0$ .

– Au cours de **(i)** la température  $T_1$  est déterminée par les égalités  $(\Delta e_i)_P = c_v (T_1 - T) = (W)_P = -p_0(\nu_1 - \nu)$  et les trois relations d'état  $p = \rho RT$ ,  $p_0 = \rho_1 RT_1$  et  $p_0 = \rho_0 RT_0$ . On obtient finalement l'expression

$$\Delta (S_t) = c_v [(T/T_0 - 1) - \ln(T/T_0)] + R [(\rho_0/\rho - 1) - \ln(\rho_0/\rho)] \quad (6)$$

qui conduit à (5) si on revient aux définitions de  $e_i - (e_i)_0 = c_v (T - T_0)$  et de  $s - s_0 = c_p \ln(T/T_0) - R \ln(p/p_0)$

D'après (5) l'énergie utilisable est la variation de la grandeur  $e_i + p_0 \nu - T_0 s$  au cours du passage vers l'état d'équilibre (Landau et Lifchitz (1976)). Pour le cas plus particulier où les pressions  $p$  et  $p_0$  sont égales, on obtient

$$a = \Delta (e_i - T_0 s) = e_i - (e_i)_0 - T_0 (s - s_0). \quad (7)$$

Cette dernière relation fait l'objet d'un chapitre entier du livre de Maxwell (1871). C'est sous cette forme que la majorité des traités de thermodynamique ultérieurs mentionnent le concept d'énergie utilisable.

On retrouve avec le premier terme de (6) la dépendance en  $T$  décrite dans l'expression (3), obtenue par Thomson en 1853. Les deux termes de (6) sont positifs et de type quadratique. Ceci provient des propriétés de la fonction  $\mathcal{F}$  qui est définie par :

$$\mathcal{F}(X) = X - \ln(1 + X) \geq 0 \quad ; \quad \mathcal{F}(X) = X^2/2 + o(X^2). \quad (8)$$

Les valeurs de  $X$  dans (6) sont  $X_T = (T - T_0)/T_0$  et  $X_\rho = (\rho_0 - \rho)/\rho$ . On obtient  $\Delta (S_t) = c_v \mathcal{F}(X_T) + R \mathcal{F}(X_\rho)$ .

#### 1.2.4 L'enthalpie utilisable. Première approche.

Les cours de thermodynamique nous enseignent que, pour les fluides en mouvement, la notion d'enthalpie est souvent plus pertinente que celle d'énergie. Il en va de même pour la notion d'enthalpie utilisable qui se substitue à l'énergie utilisable si on désire étudier les machines thermiques qui sont traversées par des fluides en régime permanent ou périodique.

Illustrons cette affirmation par un exemple inspiré du livre de Martinot-Lagarde (1971). Un fluide en régime quasi-permanent et périodique traverse une turbine (voir la figure 6). La période correspond ici au déplacement d'un des éléments du rotor. Le fluide entre par la section gauche et balaye pendant la durée  $dt$  le volume [1]. A la sortie, il balaye pendant le même temps le volume [2]. A chaque instant et en chaque point, le fluide échange de la chaleur avec les parois de la turbine qui sont par hypothèse maintenues à la température  $T_0$ . Le fluide crée également un travail sur les aubes du rotor, ce travail est ensuite transmis à l'arbre en rotation.

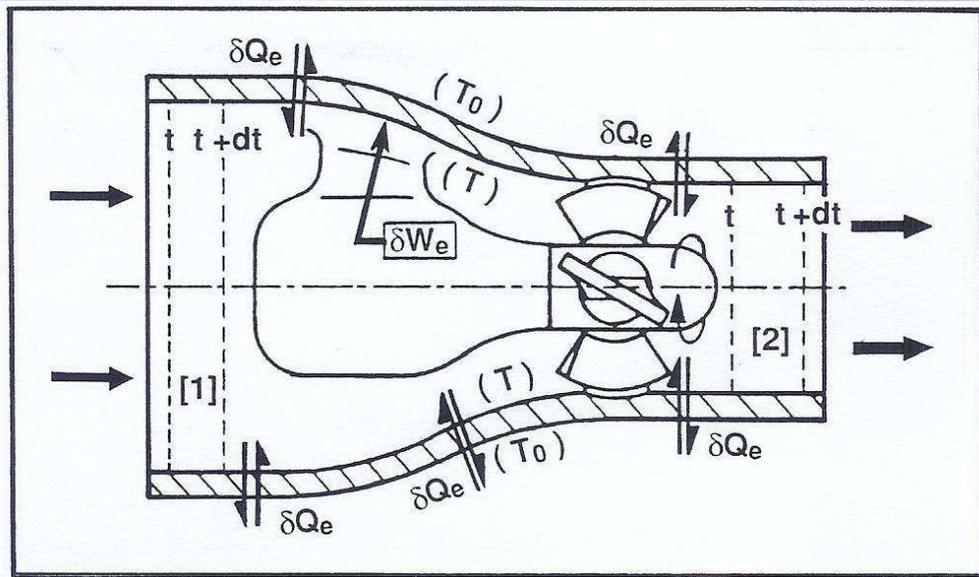


FIG. 6 – L'enthalpie utilisable d'une turbine.

La question est la suivante : les conditions thermodynamiques du fluide et de la turbine étant connues, quel est le travail maximal  $W_{max}$  récupérable sur l'arbre du rotor ?

Il est possible de répondre à cette question. La réponse fournit de surcroît une formulation analytique pour  $W_{max}$  en fonction des variations entre l'entrée et la sortie de la turbine de l'enthalpie, de l'entropie et de l'énergie cinétique du fluide.

Pendant la durée  $\Delta t$ , une masse  $dm$  traverse la turbine et va de la section d'entrée à la section de sortie. On néglige l'influence de l'énergie potentielle de pesanteur qui doit être prise en compte pour les fortes dénivellations éventuelles entre les niveaux d'admission et d'échappement. Le premier principe appliqué à cette masse de fluide au cours de son trajet donne alors classiquement :

$$dm [(H + E_c)_2 - (H + E_c)_1] = \sum(\delta Q_f) + \sum(\delta W_f) = -\sum(\delta Q_e) - \sum(\delta W_e).$$

Il apparaît au premier membre la variation de l'enthalpie  $H$  et de l'énergie cinétique  $E_c$ . On trouve au deuxième membre la sommation des énergies reçues sous forme de chaleur ( $\delta Q_f$ ) et du travail reçu ( $\delta W_f$ ) localement par le fluide au cours de son déplacement entre l'entrée et la sortie. Inversement, la turbine et le rotor reçoivent l'énergie sous forme de chaleur  $\delta Q_e = -\delta Q_f$  en provenance du fluide, alors que le travail  $\delta W_e = -\delta W_f$  est reçu par l'arbre du rotor.

Le travail maximal récupérable sur l'arbre est la maximum de  $\sum(\delta W_e)/dm$ . La relation issue du premier principe montre que si  $(H + E_c)_2$  et  $(H + E_c)_1$  sont connus, il reste à calculer  $\sum(\delta Q_e)$ . Appliquons alors le deuxième principe afin de pouvoir éliminer  $\sum(\delta Q_e)$  entre les deux relations. Pour la masse  $dm$  de fluide et pendant la durée  $\Delta t$  on a :

$$dm (S_2 - S_1) = -\sum(\delta Q_e/T) + \sum(\delta W_i/T) \geq 0.$$

Lors du déplacement du fluide, l'échange  $\delta Q_f = -\delta Q_e$  avec la turbine se produit à la température  $T$  pour le fluide, les parois de la turbine restant à la température  $T_0$ . On a écrit une égalité où les irréversibilités se traduisent par le terme  $\sum (\delta W_i/T) \geq 0$  où  $\delta W_i$  est le travail non-compensé.

On écrit alors l'égalité mathématique suivante :

$$\begin{aligned} -\sum (\delta Q_e/T) + \sum (\delta W_i/T) &= -(\sum \delta Q_e)/T_0 + dm \Pi /T_0, \\ \text{avec : } dm \Pi &= \sum [(1 - T_0/T) \delta Q_e] + T_0 \sum (\delta W_i/T). \end{aligned}$$

Or  $\delta W_i \geq 0$  et  $(T - T_0) \delta Q_e \geq 0$ . Cette dernière inégalité est vérifiée pour les échanges spontanés de chaleurs :  $\delta Q_e$  est positif si  $T > T_0$ ,  $\delta Q_e$  est négatif si  $T < T_0$ . Ceci signifie que la turbine reçoit de la chaleur si elle est plus froide que le fluide, et inversement. On a donc par sommation :  $\Pi \geq 0$ . Les premier et second principes peuvent alors être combinés pour donner par élimination de  $\sum (\delta Q_e)$  :

$$\sum (\delta W_e)/dm = -(H + E_c)_2 + (H + E_c)_1 + T_0 (S_2 - S_1) - \Pi.$$

Comme  $\Pi$  est positif, on obtient le résultat annoncé :

$$W_{max} = -[(H - T_0 S)_2 - (H - T_0 S)_1] - [(E_c)_2 - (E_c)_1]. \quad (9)$$

Ainsi, le travail maximal récupérable sur l'arbre ne dépend que de la variation entre l'entrée et la sortie de la somme de l'énergie cinétique et de la fonction enthalpie utilisable qui s'écrit  $H - T_0 S$ .

Un tel résultat n'est pas général. Il faut d'une part que le mouvement du fluide soit quasi-stationnaire ou périodique. Sinon, les expressions des travaux d'admission et de refoulement du fluide qui permettent de passer de l'énergie à l'enthalpie dans le premier principe ne pourraient pas être employées. D'autre part, il faut que  $\Pi$  soit positif, ce qui impose l'existence d'une paroi maintenue à température constante ( $T_0$  ici). Il n'est en particulier pas possible d'obtenir une expression pour  $W_{max}$  à partir des seuls premier et deuxième principes sans autre hypothèse.

Cette présentation est simple et pratique au sens où on répond à la question que tout ingénieur peut se poser : comment optimiser le rendement d'une turbine. Le résultat montre que la fonction  $H - T_0 S$  est plus riche en informations que les termes  $H$ ,  $T_0$  et  $S$  pris séparément.

### 1.2.5 L'enthalpie utilisable. Deuxième approche.

Il est aussi possible de retrouver la formulation (9) avec la méthode plus théorique de Gibbs exposée à la section 1.2.2.

Montrons en effet que pour un thermostat à la température  $T_r$  l'expression de l'enthalpie utilisable  $a_h$  peut être obtenue à partir d'une variation d'entropie totale qui donne, d'après (4) :  $a_h = W_{max} = T_r \Delta(S_t)$ .

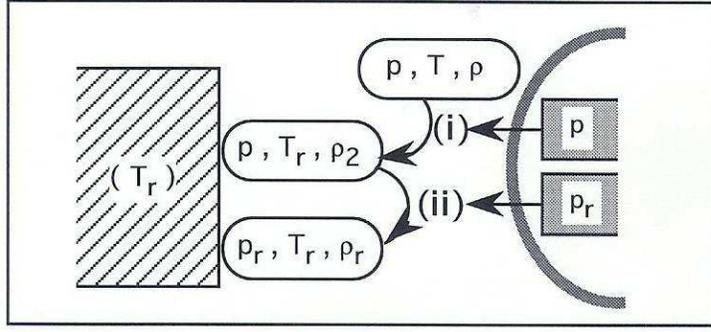


FIG. 7 – *L'enthalpie utilisable.*

Le système est constitué d'une particule fluide de masse unité et d'un thermostat à la température  $T_r$ . Le fluide est un gaz parfait aux conditions initiales  $(p, T, \rho)$ . Contrairement à la section (1.2.3), le thermostat n'est pas une source de travail. Tout travail de pression s'effectuera ici par l'intermédiaire d'opérateurs extérieurs adéquats qui, par hypothèse, n'interviennent pas dans le décompte de la variation d'entropie.

Calculons la variation d'entropie totale quand le système particule fluide + thermostat subit les transformations thermodynamiques suivantes (voir la figure 7) :

- (i) la particule passe de  $(p, T, \rho)$  à  $(p, T_r, \rho_2)$  par une transformation isobare irréversible, ceci en entrant en contact avec le thermostat qui joue le rôle d'une source de chaleur (la pression est maintenue constante à la valeur  $p$  par l'opérateur) ;
- (ii) la particule passe de  $(p, T_r, \rho_2)$  à  $(p_r, T_r, \rho_r)$  par une transformation isotherme irréversible, l'opérateur amenant la pression à la valeur  $p_r$ , la particule pouvant rester en contact avec le thermostat mais sans avoir à échanger de chaleur avec celui-ci.

Tous calculs faits, on trouve l'expression

$$\begin{aligned}
 a_h &= \Delta (h - T_r s) = h - h_r - T_r (s - s_r) \\
 &= c_p T_r [(T/T_r - 1) - \ln(T/T_r)] + R T_r \ln(p/p_r).
 \end{aligned} \tag{10}$$

où  $h$  et  $s$  sont les valeurs spécifiques de l'enthalpie et de l'entropie de la particule fluide. On a utilisé les définitions  $h - h_r = c_p (T - T_r)$  et  $s - s_r = c_p \ln(T/T_r) - R \ln(p/p_r)$ .

Ce résultat (10) est obtenu à l'aide de considérations classiques de thermodynamique où, comme à la section (1.2.3), l'indice "TH" indique le thermostat et l'indice "P" indique la particule fluide.

– Au cours de la transformation isobare (i),  $(\Delta S)_{TH} = c_p (T - T_r)/T_r$  pour le thermostat, alors que la variation de l'entropie pour un gaz parfait donne :  $(\Delta S)_P = c_p \ln(T_r/T)$ .

– Pour la transformation isotherme (ii),  $(\Delta S)_{TH} = 0$  et  $(\Delta S)_P = -R \ln(p_r/p)$ .

D'après (10) l'enthalpie utilisable est la variation de la grandeur  $h - T_r s$  au cours de la transformation de mise à l'équilibre. C'est sous cette forme que plusieurs ouvrages de thermodynamique

mentionnent le concept d'enthalpie utilisable. Le travail maximal récupérable est donné par  $a_h$ . On retrouve ainsi le résultat de la section précédente concernant l'optimisation du rendement d'une turbine.

Dans (10) le terme  $(T/T_r - 1) - \ln(T/T_r)$  traduit, comme pour l'énergie utilisable, la dépendance quadratique en  $T$  de Thomson à travers la fonction  $\mathcal{F}(X) = X - \ln(1 + X)$ . Par rapport à l'énergie utilisable, le deuxième terme  $R T_r \ln(p/p_r)$  ne dépend plus de la densité  $\rho$  mais de la pression  $p$ . Ce deuxième terme n'est pas quadratique en  $p$  et il peut prendre au contraire des valeurs positives ou négatives suivant que  $p > p_r$  ou que  $p < p_r$ .

### 1.2.6 L'exergie.

Cette brève approche historique montre que les concepts d'énergie et d'enthalpie utilisables sont anciens. Ils ont été découverts par les fondateurs de la thermodynamique au dix-neuvième siècle : Carnot, Kelvin, Tait, Maxwell, Gibbs. Les présentations et les applications diffèrent beaucoup suivant les auteurs.

Mais ces notions ont été redécouvertes indépendamment par d'autres thermodynamiciens comme Gouy (1889) et Stodola (1898). En partant de toutes ces contributions, les notions d'énergie et d'enthalpie utilisables ont été de mieux en mieux étudiées. On peut citer les travaux de Jouguet (1907), Darrieus (1931), Keenan (1932, 1951) et de Marchal (1956).

C'est Rant (1956) qui a proposé le nom "exergie", du grec *ex* (tiré) et *erg* (travail). On pourra se reporter à l'annexe B où une traduction de l'article de Rant est présentée. L'exergie d'un système est ainsi le travail que l'on peut retirer d'un système donné. Cela correspond bien en essence aux définitions données par Thomson en (1.2.1) ou par Gibbs en (1.2.2), ou encore lors de l'étude de la turbine en (1.2.4).

Il est nécessaire d'insister sur la différence entre l'énergie utilisable qui est associée à la fonction  $e_i - T_0 s$  et l'énergie libre qui est représentée par  $e_i - T s$ . Les grandeurs  $e_i$  et  $s$  dépendent de la grandeur  $T$  et non de  $T_0 \neq T$ . De même, l'enthalpie utilisable et l'enthalpie libre diffèrent comme  $h - T_r s$  et  $h - T s$ , c'est à dire par la température extérieure constante  $T_r$  du thermostat et la température intérieure  $T$  du fluide qui est variable.

Il suffit de reprendre l'exemple de la turbine pour comprendre que la fonction  $h - T s$  ne saurait servir au calcul pratique du travail maximal extractible. L'enthalpie libre n'intervient que pour les systèmes isothermes et isobares où plus aucun travail de nature thermique ou mécanique ne peut être produit. Pour ces systèmes, seule l'énergie chimique peut encore être utilisée et la quantité  $\mu \equiv h - T s$  est aussi appelée le potentiel chimique. C'est la présence de gradients de potentiel

$\vec{\nabla}(\mu)$  qui, pour les milieux actifs, produisent les réactions chimiques qui peuvent être utilisées pour fournir un certain travail.

## 2 L'ENTHALPIE UTILISABLE SECHE DE L'ATMOSPHERE.

### 2.1 La définition de $a_h$ .

Dans cette partie l'atmosphère est constituée d'un gaz parfait et sec composé d'azote, d'oxygène, d'argon et de dioxyde de carbone dans des proportions immuables (fractions molaires respectives de 78.09%, 20.95%, 0.93% et 0.03%). On examinera ultérieurement le cas plus complexe et plus réaliste d'une atmosphère humide où la vapeur d'eau pourra se présenter sous ses trois formes : vapeur, liquide et solide.

L'approximation du gaz sec consiste à développer les équations sans tenir compte explicitement de l'eau atmosphérique. L'impact thermodynamique du cycle de l'eau (changements d'état, interactions avec le rayonnement) est entièrement résumé dans un terme source/puits dans l'équation de la température qui est noté ( $\dot{q}$ ).

La composition chimique étant invariable, les variables thermodynamiques sont la pression  $p$ , la température  $T$  et la densité  $\rho$ . L'équation d'état qui relie ces trois quantités est  $p = \rho R T$  (voir l'annexe D pour la liste des symboles).

Les valeurs locales spécifiques (ou massiques) des fonctions énergie interne  $e_i$ , enthalpie  $h$  et entropie  $s$  correspondent aux grandeurs extensives  $\rho e_i$ ,  $\rho h$  et  $\rho s$  qui prennent un sens physique en tout point de l'atmosphère. Les grandeurs massiques  $e_i$ ,  $h$  et  $s$  sont définies de manière relative, par référence aux grandeurs  $(e_i)_r$ ,  $h_r$  et  $s_r$  qui sont associées à la température  $T_r$  et à la pression  $p_r$ . Pour une unité de masse du fluide et dans la gamme des températures et des pressions observées dans l'atmosphère, on a :

$$e_i = (e_i)_r + c_v (T - T_r), \quad (11)$$

$$h = h_r + c_p (T - T_r), \quad (12)$$

$$s = s_r + c_p \ln(\theta/\theta_r) = s_r + c_p \ln(T/T_r) - R \ln(p/p_r), \quad (13)$$

$$\text{avec } \theta = T (p_{00}/p)^{R/c_p} \quad \text{et} \quad \theta_r = T_r (p_{00}/p_r)^{R/c_p}. \quad (14)$$

On suppose l'existence d'une température constante  $T_r$  et d'une pression constante  $p_r$ . Les valeurs numériques de ces deux quantités seront définies ultérieurement mais on peut prendre en première approximation  $T_r \approx 250K$  et  $p_r \approx 370hPa$ . On définit l'enthalpie utilisable spécifique  $a_h$  en utilisant la formulation locale (10) de la section (1.2.5) avec les propriétés (11) à (14) :

$$a_h \equiv h - h_r - T_r (s - s_r) = (h - T_r s) - (h_r - T_r s_r), \quad (15)$$

$$a_h = c_p T_r [(T/T_r - 1) - \ln(T/T_r)] + R T_r \ln(p/p_r), \quad (16)$$

$$a_h = c_p T_r \mathcal{F}(T/T_r - 1) + R T_r \ln(p/p_r), \quad (17)$$

$$\text{où } \mathcal{F}(X) \equiv X - \ln(1 + X) = \int_0^X \frac{y}{1 + y} dy = X^2/2 + o(X^2). \quad (18)$$

La forme (15) indique que  $a_h$  est indépendante des valeurs absolues arbitraires de  $h_r$  et de  $s_r$  puisque seules les différences  $h - h_r$  et  $s - s_r$  interviennent. Ces différences sont calculables d'après (12) et (13). On voit plus précisément avec la forme (16) que la connaissance de  $T$ ,  $T_r$ ,  $p$  et  $p_r$  suffit pour déterminer sans ambiguïté la valeur numérique de  $a_h$  en tout point.

La forme (17) montre que l'enthalpie utilisable se décompose en la somme d'une fonction de  $T$  et d'une fonction de  $p$  :

$$a_h(T, p) = a_T(T) + a_p(p), \quad (19)$$

$$\text{avec} \quad a_T = c_p T_r [(T/T_r - 1) - \ln(T/T_r)] = c_p T_r \mathcal{F}(T/T_r - 1), \quad (20)$$

$$\text{et} \quad a_p = R T_r \ln(p/p_r). \quad (21)$$

La propriété (18) concernant la fonction  $\mathcal{F}$  donne à  $a_T(T)$  un caractère quadratique et positif en  $X_T = T/T_r - 1 = (T - T_r)/T_r$ .

## 2.2 Les équations hydrostatiques.

L'introduction de l'enthalpie utilisable  $a_h$  réalisée à la section précédente est purement formelle et mathématique. Elle ne repose pas vraiment sur une motivation physique telle que la recherche du travail maximal qui est le guide des différentes approches thermodynamiques exposées dans les parties (1.1) et (1.2).

La pertinence météorologique de la fonction locale  $a_h$  repose dans cette thèse sur l'ensemble des propriétés qui sont vérifiées par cette fonction. C'est dans le cadre de l'approximation hydrostatique des équations du fluide atmosphérique que ces propriétés sont les plus nombreuses. On mentionne en annexe A l'utilisation des fonctions enthalpie et énergie utilisables pour le cas des équations non-hydrostatiques.

Les équations d'évolution du gaz parfait et sec sont exprimées dans le référentiel en rotation lié à la terre. Le vecteur rotation est  $\vec{\Omega}$ , de module  $\Omega$ . Ces équations utilisent la notion de dérivée particulaire ou matérielle  $d/dt \equiv \partial/\partial t + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}$  où le vecteur vitesse tridimensionnel  $\vec{u} = \vec{u}_h + w \vec{k}$  est la somme du vecteur horizontal  $\vec{u}_h$  et du vecteur vitesse verticale  $w \vec{k}$ . En absence d'hypothèse hydrostatique mais en utilisant l'approximation de la pellicule mince, les équations de base s'écrivent :

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}(p) - f \vec{k} \times \vec{u} + \vec{g} + \vec{F}, \quad (22)$$

$$c_p \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + \dot{q}, \quad (23)$$

$$0 = \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{u}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}). \quad (24)$$

L'équation (22) détermine l'évolution de la vitesse et traduit la loi de Newton. L'équation (23) correspond au premier principe de la thermodynamique. L'équation (24) est l'expression de la conservation de la masse au cours du déplacement de la particule fluide. C'est l'équation de continuité.

Le terme  $\vec{F}$  regroupe les termes de frottements visqueux ou provoqués par le contact avec la surface. Le terme  $\dot{q}$  correspond aux sources et puits de chauffage par radiation, conduction, dissipation moléculaire et relâchement ou absorption de chaleur latente (la paramétrisation des changements d'état de l'eau atmosphérique). Le terme d'accélération centrifuge est utilisé implicitement pour définir le géoïde qui intervient ici à travers la verticale  $\vec{k}$ . Le vecteur  $\vec{g} = -g\vec{k}$  est la gravité locale qui est orthogonale au géoïde. À côté de l'accélération relative  $d/dt(\vec{u})$ , l'accélération de Coriolis s'écrit  $-f\vec{k} \times \vec{u}$  où  $f = 2\Omega \sin(\varphi)$  est le facteur de Coriolis qui dépend de la latitude  $\varphi$ .

L'approximation hydrostatique consiste à imposer la contrainte locale  $dp \equiv -\rho g dz$  sur la verticale. En utilisant l'équation d'état, le géopotential  $\Phi = gz$  vérifie :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} \equiv -\frac{1}{\rho} = -\frac{RT}{p}. \quad (25)$$

Des modifications importantes doivent alors être apportées aux équations (22) à (24) pour qu'elles soient cohérentes avec cette hypothèse hydrostatique.

– On considère l'équation de la seule composante horizontale  $\vec{u}_h$  du vent, la composante verticale  $w$  n'étant plus déterminée de manière pronostique.

– On utilise la formulation de la coordonnée verticale pression de Kasahara (1974). La vitesse verticale qui remplace  $w = dz/dt$  est classiquement notée  $\omega = dp/dt$ . La dérivée lagrangienne (matérielle) devient

$$d/dt \equiv (\partial/\partial t)_p + \vec{u}_h \cdot \vec{\nabla}_p + \omega \partial/\partial p = \partial/\partial t + \vec{u}_h \cdot \vec{\nabla}_p + \omega \partial/\partial p. \quad (26)$$

On gardera en effet la notation  $\partial/\partial t$  pour le cas hydrostatique, en n'oubliant pas que ces tendances eulériennes sont calculées à  $x$ ,  $y$  et  $p$  constants. Le gradient horizontal  $\vec{\nabla}_p$  est, lui aussi, calculé à pression constante.

L'ensemble des équations hydrostatiques qui remplacent (22) à (24) est formé par l'équation (25) et par le système :

$$\frac{d\vec{u}_h}{dt} = -\vec{\nabla}_p(\Phi) - f\vec{k} \times \vec{u}_h + \vec{F}_h, \quad (27)$$

$$c_p \frac{dT}{dt} = \frac{R}{p} \omega T + \dot{q}, \quad (28)$$

$$0 = \text{div}_p(\vec{u}_h) + \frac{\partial \omega}{\partial p}. \quad (29)$$

Le plus grand changement provient de l'équation de continuité (29) qui n'est plus pronostique et qui devient une relation diagnostique entre  $\vec{u}_h$  et  $\omega$ . L'équation de la température (28) est pratiquement inchangée, on a juste utilisé les définitions  $\omega = dp/dt$  et  $p = \rho R T$ , sans oublier la modification implicite (26) de la dérivée matérielle. L'équation du mouvement est la projection de (22) sur le plan horizontal ( $\vec{u} \rightarrow \vec{u}_h$ ;  $\vec{F} \rightarrow \vec{F}_h$ ;  $\vec{g} \rightarrow 0$ ), le terme de gradient de pression se transformant, tous calculs faits, en un vecteur horizontal  $-\vec{\nabla}_p(\Phi)$ .

La véritable énergie cinétique est  $e_c = \vec{u} \cdot \vec{u} / 2$  et celle du vent horizontal est notée  $e_k = \vec{u}_h \cdot \vec{u}_h / 2$ . L'équation de  $e_c$  est obtenue par une multiplication scalaire de (22) par  $\vec{u}$ . De même, l'équation hydrostatique de  $e_k$  est obtenue par une multiplication scalaire de (27) par  $\vec{u}_h$ . On obtient :

$$\frac{d e_k}{d t} = -\vec{u}_h \cdot \vec{\nabla}_p(\Phi) + \vec{u}_h \cdot \vec{F}_h. \quad (30)$$

Mais on peut aussi exprimer (30) à l'aide de la divergence du flux de géopotentiel qui s'écrit, en utilisant (25) et (29) :

$$B(\Phi) \equiv \text{div}_p(\Phi \vec{u}_h) + \frac{\partial}{\partial p}(\Phi \omega) = +\vec{u}_h \cdot \vec{\nabla}_p(\Phi) - \frac{R}{p} \omega T. \quad (31)$$

On obtient en utilisant (31) une forme synonyme de (30) :

$$\frac{d e_k}{d t} = -B(\Phi) - \frac{R}{p} \omega T + \vec{u}_h \cdot \vec{F}_h. \quad (32)$$

On remarque que le terme  $-R \omega T / p$  apparaît avec des signes contraires dans (32) et (28). Ce terme sera interprété comme un terme de conversion hydrostatique entre l'énergie cinétique du vent horizontal et l'enthalpie.

On notera au passage que l'équation pour l'entropie (13) se déduit de (28) pour donner

$$T \frac{d s}{d t} = c_p \frac{d T}{d t} - \frac{R}{p} \omega T = \dot{q}, \quad (33)$$

où  $\dot{q}$  apparaît clairement comme un taux de chauffage massique de la particule fluide au cours de son déplacement.

### **2.3 Les équations de l'enthalpie utilisable massique d'ordre 0.**

Dans le cadre hydrostatique, l'équation d'évolution de  $a_h$  est obtenue en calculant la dérivée matérielle de (16) et en utilisant la relation  $\omega = dp/dt$  ainsi que l'expression (28). On trouve :

$$\frac{d a_h}{d t} = c_p \left(1 - \frac{T_r}{T}\right) \frac{d T}{d t} + \frac{R}{p} \omega T_r = \frac{R}{p} \omega T + \left(1 - \frac{T_r}{T}\right) \dot{q}. \quad (34)$$

Par rapport au premier principe (28), le terme de conversion avec  $e_k$  est inchangé. Les termes de chauffage qui sont regroupés dans  $\dot{q}$  sont cette fois modulés par le facteur  $1 - T_r/T$  appelé facteur de Carnot.

On peut dès à présent définir un cycle énergétique hydrostatique qui met en jeu les deux termes  $a_h$  et  $e_k$ , de manière analogue au cycle enthalpique local qui est construit à partir de  $h$  et  $e_k$  :

$$\begin{cases} d(h)/dt = -C(h, e_k) + g_h, \\ d(e_k)/dt = +C(h, e_k) - B(\Phi) - d_h. \end{cases} \quad (35)$$

On a utilisé (28) avec la relation  $dh/dt = c_p dT/dt$  ainsi que (32) et (31). Les notations de (35) correspondent à

$$C(h, e_k) = -\frac{R}{p} \omega T, \quad (36)$$

$$d_h = -\vec{u}_h \cdot \vec{F}_h, \quad (37)$$

$$g_h = \dot{q}. \quad (38)$$

$C(h, e_k)$  est le terme de conversion entre  $h$  et  $e_k$ . La dissipation de l'énergie cinétique du vent horizontal  $d_h$  doit être positive alors que le terme de chauffage de l'équation de l'enthalpie est noté  $g_h$ .

Le cycle local de l'enthalpie utilisable est défini à partir de (34) :

$$\begin{cases} d(a_h)/dt = -C(h, e_k) + g_a, \\ d(e_k)/dt = +C(h, e_k) - B(\Phi) - d_h. \end{cases} \quad (39)$$

La seule différence entre (39) et (35) est le terme de chauffage de l'équation de l'enthalpie utilisable

$$g_a = \left(1 - \frac{T_r}{T}\right) \dot{q} = \eta_T \dot{q} \quad (40)$$

qui contient le facteur de Carnot  $\eta_T = 1 - T_r/T$  qui est défini localement.

La séparation (19) de  $a_h$  en la somme  $a_T + a_p$  laisse penser qu'un autre cycle, plus précis, peut être construit à l'aide des trois composantes  $a_p$ ,  $a_T$  et  $e_k$ . On trouve

$$\begin{cases} d(a_p)/dt = -C(a_p, a_T), \\ d(a_T)/dt = -C(h, e_k) + C(a_p, a_T) + g_a, \\ d(e_k)/dt = +C(h, e_k) - B(\Phi) - d_h, \end{cases} \quad (41)$$

où le terme de conversion entre  $a_p$  et  $a_T$  est

$$C(a_p, a_T) = -\frac{R}{p} \omega T_r. \quad (42)$$

Ces deux cycles (39) et (41) sont semblables au cycle enthalpique classique (35). Il était important de se rapprocher des résultats déjà connus pour interpréter les différents termes de (39) et de (41) en tant que conversions, divergences de flux et sources/puits. Comme on le verra plus loin, cette classification est toujours un peu arbitraire en dehors de tout contexte physique connu.

La seule modification  $g_h \rightarrow g_a$  est minime mathématiquement mais très importante physiquement. Sur elle repose une des propriétés fondamentales de la théorie globale de Lorenz qui est obtenue ici à partir d'une définition véritablement locale pour chacun des termes. La différence essentielle entre  $h$  et  $a_h$  correspond en fait à la différence entre l'énergie et la puissance motrice telle que décrite en (1.2.1) par Carnot et Thomson.

Il y a génération d'enthalpie dès que  $g_h = \dot{q}$  est positif. Ceci n'est plus vrai pour  $a_h$  et il faut qu'il y ait en moyenne réchauffement des zones chaudes et/ou refroidissement des zones froides pour que l'enthalpie utilisable augmente. Ceci provient de la forme de l'expression  $g_a = \eta_T \dot{q} = (T - T_r) \dot{q} / T$ . Le terme  $g_a$  est positif si  $(T - T_r) > 0$  et  $\dot{q} > 0$ , ou encore si  $(T - T_r) < 0$  et  $\dot{q} < 0$ . L'enthalpie peut donc rester constante ( $\dot{q} = 0$  en moyenne sur un domaine) alors que  $a_h$  peut dans le même temps augmenter ou diminuer suivant le signe de la corrélation de  $\eta_T$  et de  $\dot{q}$ . De même, un chauffage  $\dot{q}$  positif et uniforme ne provoque pas forcément une augmentation de  $a_h$ , tout dépend de la distribution de  $(T - T_r)/T$ .

Les deux cycles (39) et (41) possèdent un sens local en tout point de l'atmosphère. Ils définissent les transformations de l'énergie qui accompagnent le déplacement de chaque particule fluide. Ce sont les cycles les plus simples qui seront dits d'ordre 0. Cette dénomination sera utilisée pour différencier les prochains cycles d'ordre 1 et 2 qui correspondront à l'utilisation de termes de perturbation par rapport à des moyennes de plus en plus fines (d'abord isobares, puis isobares et zonales).

## **2.4 Le cycle hydrostatique et isobare d'exergie d'ordre 1.**

### **2.4.1 Les composantes énergétiques d'ordre 1.**

Le véritable succès du cycle de Lorenz provient de la définition des conversions barotropes et baroclines qui est obtenue grâce à une séparation des composantes énergétiques en parties zonales moyennes et en perturbations, le cycle de Lorenz est un cycle d'ordre 2. Avant de construire le cycle analogue d'ordre 2 qui est généré par la fonction enthalpie utilisable, commençons par transformer dans cette section  $a_T$  à l'aide d'une séparation en moyennes isobares et en écarts par rapport à celles-ci. Le cycle obtenu sera d'ordre 1.

Comme indiqué en (1.1.3), on décompose toute grandeur  $\xi$  en  $\xi = \bar{\xi} + \xi'$  où  $\bar{\xi}$  est la moyenne isobare et où  $\xi'$  est l'écart local à cette moyenne. On a au préalable délimité un domaine cylindrique

selon la verticale qui s'appuie sur une surface inférieure formée par un élément de la surface terrestre. La moyenne isobare de  $\xi$  sur une couche élémentaire  $\mathcal{S}$  de ce domaine est

$$\bar{\xi}(p) = \frac{1}{\Sigma} \iint_{\mathcal{S}} \xi(\lambda, \varphi, p) \cos(\varphi) d\lambda d\varphi, \quad (43)$$

où  $\Sigma = \iint_{\mathcal{S}} \cos(\varphi) d\lambda d\varphi$  mesure la valeur de la projection horizontale de  $\mathcal{S}$ .

Reportons la séparation  $T = \bar{T} + T'$  dans la définition (20) de  $a_T$ . On peut présenter mathématiquement le résultat sous la forme de trois termes  $a_S$ ,  $a_B$  et  $a_{c(SB)}$  :

$$a_T = a_S + a_B + a_{c(SB)}, \quad (44)$$

$$a_S = c_p T_r \left[ \left( \frac{\bar{T}}{T_r} - 1 \right) - \ln\left(\frac{\bar{T}}{T_r}\right) \right] = c_p T_r \mathcal{F}\left(\frac{\bar{T} - T_r}{T_r}\right), \quad (45)$$

$$a_B = c_p T_r \left[ \left( \frac{T}{\bar{T}} - 1 \right) - \ln\left(\frac{T}{\bar{T}}\right) \right] = c_p T_r \mathcal{F}\left(\frac{T'}{\bar{T}}\right), \quad (46)$$

$$a_{c(SB)} = c_p T_r \left( \frac{\bar{T}}{T_r} - 1 \right) \left( \frac{T}{\bar{T}} - 1 \right) = c_p \left( 1 - \frac{T_r}{\bar{T}} \right) T', \quad (47)$$

$$\text{avec } a_S = c_p T_r \mathcal{F}(X_S), \quad a_B = c_p T_r \mathcal{F}(X_B), \quad a_{c(SB)} = c_p T_r X_S X_B, \quad (48)$$

$$\text{où } X_S = \frac{\bar{T}}{T_r} - 1 = \frac{\bar{T} - T_r}{T_r} \quad \text{et} \quad X_B = \frac{T}{\bar{T}} - 1 = \frac{T'}{\bar{T}}. \quad (49)$$

Il faut insister ici sur le fait que, d'un point de vue physique, ces composantes énergétiques  $a_S$ ,  $a_B$  et  $a_{c(SB)}$  n'ont pas de véritable sens local. Il ne faut voir en ces définitions que de simples intégrandes utilisées dans des fonctions qui utilisent des moyennes isobares. Il est, par exemple, possible d'étudier les propriétés de  $\overline{a_B}$  ou encore de  $\overline{B[a_{c(SB)}]}$ . Mais il n'y a pas lieu d'étudier la signification physique de la distribution spatiale de quantités telles que  $a_{c(SB)} = c_p T_r X_S X_B$  ou même  $a_S$ .

La composante  $\overline{a_B}$  dépend d'après (46) des variations de la température sur la surface isobare. C'est la composante dite barocline de  $\overline{a_h}$ . La composante  $\overline{a_S}$  dépend d'après (45) des variations du profil vertical de  $\bar{T}(p)$  par rapport à la valeur de référence  $T_r$ . C'est la composante dite de stabilité statique qui s'annule si  $\bar{T} = T_r$ . Les dénominations de barocline et de stabilité statique proviennent de l'étude de Pearce (1978) qui sera commentée ultérieurement. La composante complémentaire (47) s'annule en moyenne isobare ( $\overline{a_{c(SB)}} = 0$  car  $\overline{T'} \equiv 0$  et  $c_p T_r (1 - T_r/\bar{T})$  est constant). Mais il est important de remarquer que  $\overline{B[a_{c(SB)}]}$  n'est pas identiquement nul, ce terme sera présent dans le prochain cycle énergétique en moyenne isobare.

Le cycle énergétique recherché doit résulter d'un équilibre entre les termes issus de l'enthalpie utilisable et ceux provenant de l'énergie cinétique. De manière cohérente avec la séparation  $T = \bar{T} + T'$  qui conduit à (44), étudions les séparations suivantes des composantes zonale  $u$  et méridienne

$v$  du vent horizontal  $u = \bar{u} + u'$  et  $v = \bar{v} + v'$ . On obtient les contributions locales de l'énergie cinétique qui seront notées  $k_S$ ,  $k_B$  et  $k_{c(SB)}$  par symétrie avec l'étude précédente de  $a_T$  :

$$e_k = \frac{1}{2} (u^2 + v^2) = k_S + k_B + k_{c(SB)}, \quad (50)$$

$$k_S = \frac{1}{2} [(\bar{u})^2 + (\bar{v})^2], \quad (51)$$

$$k_B = \frac{1}{2} [(u')^2 + (v')^2], \quad (52)$$

$$k_{c(SB)} = u' \bar{u} + v' \bar{v}. \quad (53)$$

La séparation (44) est générale au sens où elle correspond à une propriété mathématique de la fonction  $\mathcal{F}(X) = X - \ln(1 + X) : \forall X_1 > -1, \forall X_2 > -1$  et si  $X_1 + X_2 + X_1 X_2 > -1$ , on a

$$\mathcal{F}(X_1 + X_2 + X_1 X_2) = \mathcal{F}(X_1) + \mathcal{F}(X_2) + X_1 X_2.$$

De même, la séparation (50) provient du caractère quadratique de l'énergie cinétique :  $\forall x_1, \forall x_2, (x_1 + x_2)^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2 + 2 x_1 x_2$ .

La décomposition (44) est assez naturelle. On la retrouve, au moins dans son esprit, dans d'autres études énergétiques telles que la théorie de la turbulence ou les théories de l'énergie utilisable. Il suffit de se rappeler que  $\mathcal{F}(X) \approx X^2/2$  et les expressions de (45) et de (46) deviennent :  $a_S \approx c_p (\bar{T} - T_r)^2 / (2 T_r)$  et  $a_B \approx c_p T_r (T')^2 / [2 (\bar{T})^2]$ . La décomposition (50) de l'énergie cinétique est moins fréquente, sinon en théorie de la turbulence. On ne la trouve pratiquement jamais dans les théories météorologiques de l'énergie utilisable. Une des raisons est que la composante  $\bar{a}_S$  n'intervient que dans l'étude de Pearce (1978) et, en son absence, il n'y a pas lieu d'employer la séparation (50). Pour justifier plus clairement celle-ci, étudions le cycle d'ordre 1 obtenu à partir des quatre composantes  $(\bar{a}_S, \bar{a}_B, \bar{k}_S, \bar{k}_B)$ .

### 2.4.2 Le cycle énergétique d'ordre 1.

Ce cycle traite des échanges d'énergie au sein d'une couche isobare d'épaisseur élémentaire d'un domaine limité. On va chercher, pour chacune des quatre composantes représentées par  $e$ , des équations de bilan sous la forme

$$\overline{\partial_t(e)} = \partial_t(\bar{e}) = -\overline{B(e)} + \sum_i C_i + (\bar{g} \text{ ou } \bar{d}), \quad (54)$$

$$\text{avec } \overline{\partial_t(e)} + \overline{B(e)} = \frac{d\bar{e}}{dt}. \quad (55)$$

On a noté  $C_i$  les termes de conversions isobares,  $\bar{g}$  ou  $\bar{d}$  étant les moyennes isobares des sources/puits ou des termes de dissipation. D'autres termes seront présents comme des flux ou des conversions en provenance des formes d'énergie autres que  $\bar{a}_S$ ,  $\bar{a}_B$ ,  $\bar{k}_S$  ou  $\bar{k}_B$  (par exemple  $\bar{\Phi}$ ).

D'après (54), on étudie bien l'évolution de  $\bar{e}$  sur la surface isobare, c'est à dire  $\partial_t(\bar{e})$ . Mais, d'après (31), le terme  $\overline{B(e)}$  représente le flux de la contribution locale  $e$  au bord de la surface ( $\overline{\text{div}_p(e \vec{u}_h)}$ ), ainsi que la dérivée verticale du flux vertical de  $e$  :  $\partial(\bar{e}\bar{\omega})/\partial p$ . Comme  $e$  n'a pas de signification physique locale, ni  $\overline{B(e)}$  ni  $\overline{de/dt}$  n'ont de sens physique clair, à l'inverse de  $\partial_t(\bar{e})$ . Le cycle qui va être construit fait cependant apparaître de manière naturelle et cohérente les expressions mathématiques  $\overline{\partial e/\partial t}$  et  $\overline{B(e)}$ , ceci pour chacune des quatre composantes.

Après l'application des opérateurs  $\overline{\partial_t(e)}$  et  $-\overline{B(e)}$  à  $e = (\overline{a_S}, \overline{a_B}, \overline{k_S}, \overline{k_B})$ , on obtient à l'issue de nombreux calculs et réorganisations de termes l'expression suivante du cycle hydrostatique d'ordre 1 en moyenne isobare :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\partial_t(a_S)} = -\overline{B(a_S)} - C(\overline{a_S}, \overline{k_S}) - C(\overline{a_S}, \overline{a_B}) - \overline{B(a_{c(SB)})} - \overline{B(a_p)} + \overline{g_S}, \\ \overline{\partial_t(a_B)} = -\overline{B(a_B)} - C(\overline{a_B}, \overline{k_B}) + C(\overline{a_S}, \overline{a_B}) + \overline{g_B}, \\ \overline{\partial_t(k_S)} = -\overline{B(k_S)} + C(\overline{a_S}, \overline{k_S}) - C(\overline{k_S}, \overline{k_B}) - \overline{B(k_{c(SB)})} + C(\overline{\Phi}, \overline{k_S}) - \overline{d_S}, \\ \overline{\partial_t(k_B)} = -\overline{B(k_B)} + C(\overline{a_B}, \overline{k_B}) + C(\overline{k_S}, \overline{k_B}) + C(\overline{\Phi}, \overline{k_B}) - \overline{d_B}. \end{array} \right. \quad (56)$$

Les calculs sont exacts au sens où aucune autre approximation n'a été employée hormis les hypothèses de la pellicule mince et de l'équilibre hydrostatique qui conduisent aux équations (27), (28) et (29).

Les termes de conversion sont :

$$C(\overline{a_S}, \overline{k_S}) = -\frac{R}{p} \overline{\omega T}, \quad (57)$$

$$C(\overline{a_B}, \overline{k_B}) = -\frac{R}{p} \overline{\omega' T'}, \quad (58)$$

$$C(\overline{a_S}, \overline{a_B}) = -c_p \overline{\omega' T'} p^{-\kappa} \partial_p \left[ p^\kappa (1 - T_r/\overline{T}) \right], \quad (59)$$

$$C(\overline{k_S}, \overline{k_B}) = -\left[ \overline{u' \omega'} \partial_p(\overline{u}) + \overline{v' \omega'} \partial_p(\overline{v}) \right], \quad (60)$$

$$C(\overline{\Phi}, \overline{k_S}) = -\left[ \overline{u} \partial_x(\overline{\Phi}) + \overline{v} \partial_y(\overline{\Phi}) + \overline{\omega} \partial_p(\overline{\Phi}) \right] = -\overline{(\vec{u}_h) \cdot \vec{\nabla}_p(\Phi)} + \frac{R}{p} \overline{\omega T}, \quad (61)$$

$$C(\overline{\Phi}, \overline{k_B}) = -\left[ \overline{u' \omega'} \partial_x(\overline{\Phi}) + \overline{v' \omega'} \partial_y(\overline{\Phi}) + \overline{\omega' \omega'} \partial_p(\overline{\Phi}) \right] = -\overline{(\vec{u}_h)' \cdot \vec{\nabla}_p(\Phi)} + \frac{R}{p} \overline{\omega' T'}. \quad (62)$$

Les termes de bord s'écrivent :

$$\overline{B(\overline{\Phi})} = -C(\overline{\Phi}, \overline{k}) = -C(\overline{\Phi}, \overline{k_S}) - C(\overline{\Phi}, \overline{k_B}), \quad (63)$$

$$\overline{B(a_p)} = -C(\overline{a_p}, \overline{a_S}) = \frac{R}{p} \overline{\omega T_r}. \quad (64)$$

Les termes de chauffage différentiel et les termes de dissipation sont :

$$\overline{g_S} = (1 - T_r/\overline{T}) \overline{(\dot{q})}, \quad (65)$$

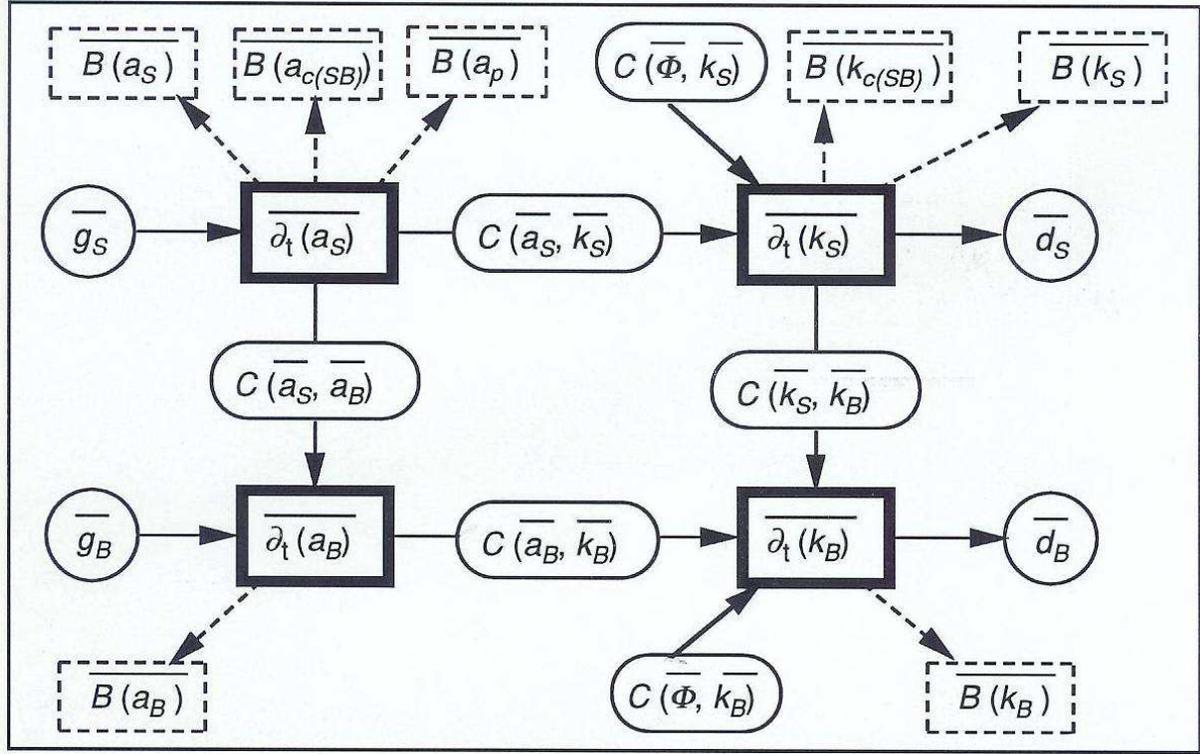


FIG. 8 – Le cycle de l'enthalpie utilisable (ordre 1).

$$\bar{g}_B = \frac{T_r}{\bar{T}} \overline{[(1 - \bar{T}/T) \dot{q}]}, \quad (66)$$

$$\bar{d}_S = - \left( \bar{u} \bar{F}_x + \bar{v} \bar{F}_y \right), \quad (67)$$

$$\bar{d}_B = - \left( \bar{u}' \bar{F}_x' + \bar{v}' \bar{F}_y' \right). \quad (68)$$

Les deux autres termes  $\overline{B(a_{c(SB)})}$  et  $\overline{B(k_{c(SB)})}$  sont directement calculés par (31) en utilisant les définitions (47) et (53).

On peut présenter le cycle (56) de manière plus schématique (voir la figure 8). La présence d'une structure en boucle fermée entre  $\overline{\partial_t(a_S)}$ ,  $\overline{\partial_t(a_B)}$ ,  $\overline{\partial_t(k_S)}$  et  $\overline{\partial_t(k_B)}$  se traduit par l'absence d'unicité de la décomposition (56). On peut en effet ajouter une valeur donnée à  $C(\bar{a}_S, \bar{k}_S)$  et  $C(\bar{k}_S, \bar{k}_B)$ , à condition de retrancher la même valeur à  $C(\bar{a}_S, \bar{a}_B)$  et  $C(\bar{a}_B, \bar{k}_B)$ . Ce faisant, toutes les équations de (56) sont encore vérifiées.

La justification de la décomposition (50) est directement liée à la séparation de la conversion (36)  $\overline{C(h, e_k)} = -R \bar{\omega} \bar{T} / p$  qui devient dans (54) la somme  $C(\bar{a}_B, \bar{k}_B) + C(\bar{a}_S, \bar{k}_S) = -R (\bar{\omega}' \bar{T}' + \bar{\omega} \bar{T}) / p$ . La plupart des études météorologiques traitant de l'énergie utilisable supposent que  $\bar{\omega} = 0$ , ce qui n'est vrai que pour les surfaces isobares entourant complètement le globe. La conversion  $C(\bar{a}_S, \bar{k}_S)$  est alors strictement nulle. Mais pour des études plus locales,  $\bar{\omega}$  n'est pas nul et les deux conversions  $C(\bar{a}_B, \bar{k}_B)$  et  $C(\bar{a}_S, \bar{k}_S)$  doivent être étudiées. Il faut entre autre savoir si on peut négliger  $C(\bar{a}_S, \bar{k}_S)$  devant  $C(\bar{a}_B, \bar{k}_B)$  pour les domaines pas trop petits où  $\bar{\omega}$  doit être faible. Pour répondre à cette

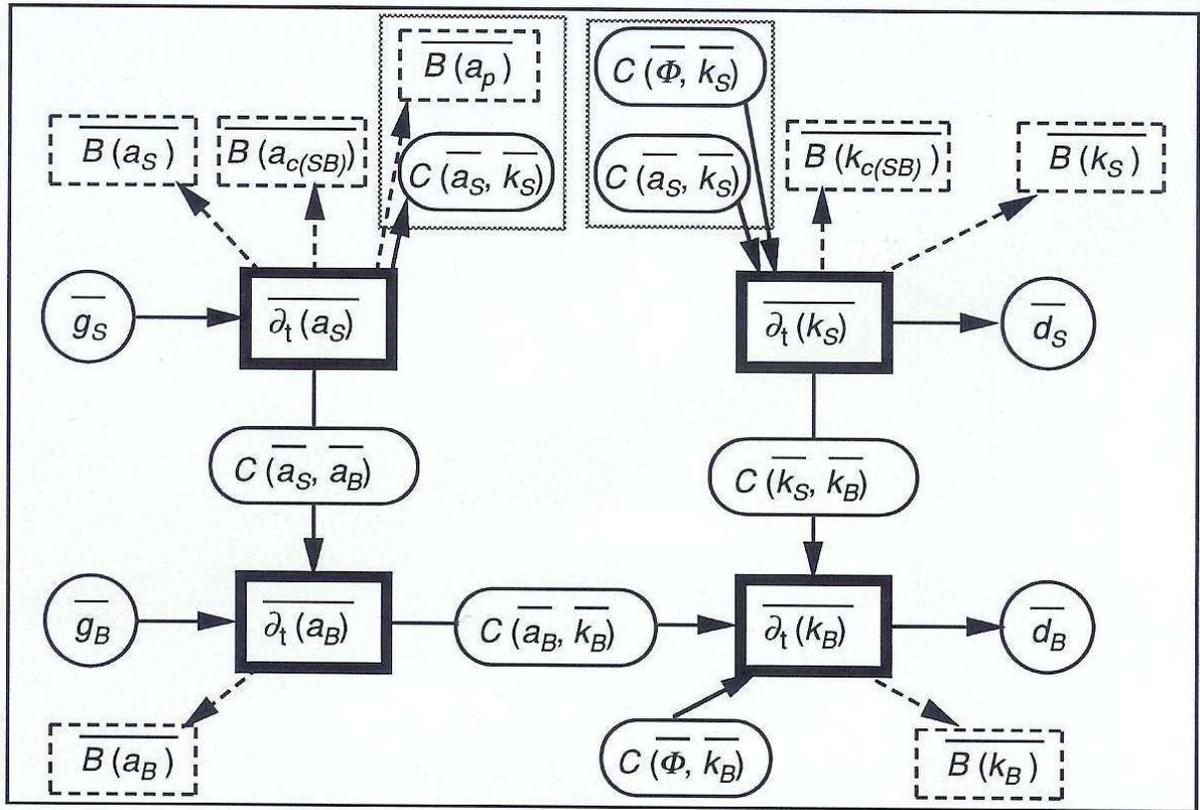


FIG. 9 – Le cycle de l’enthalpie utilisable (ordre 1). Version ouverte.

question on peut considérer que, pour un domaine d’étendue synoptique,  $\overline{\omega}$  est de l’ordre du dixième des valeurs de  $\omega'$ , voire même du même ordre de grandeur. Mais la valeur de  $\overline{T}$  est typiquement dix à cent fois plus grande que les contributions locales  $T'$ . Le produit  $\overline{\omega}\overline{T}$  est donc dix à cent fois plus grand que  $\overline{\omega}'T'$ . La conversion  $C(\overline{a_S}, \overline{k_S})$  domine largement  $C(\overline{a_B}, \overline{k_B})$  et doit être équilibrée dans  $\overline{\partial_t(a_S)}$  et  $\overline{\partial_t(k_S)}$  par des termes de même ordre de grandeur. Ce sont à l’évidence les termes  $\overline{B(a_p)} = R \overline{\omega} T_r / p$  et  $C(\overline{\Phi}, \overline{k_S}) = -(\overline{u_h}) \cdot \overline{\nabla_p}(\overline{\Phi}) + R \overline{\omega} \overline{T} / p$ . On voit sur la figure (8) que ces ”grands” termes définissent un chemin principal  $-\overline{B(a_p)} = C(\overline{a_p}, \overline{a_S}) \leftrightarrow C(\overline{a_S}, \overline{k_S}) \leftrightarrow C(\overline{k_S}, \overline{\Phi}) = -C(\overline{\Phi}, \overline{k_S})$ . Ce chemin principal est bien séparé des boîtes baroclines  $\overline{\partial_t(a_B)}$  et  $\overline{\partial_t(k_B)}$ . On garantit ainsi une certaine stabilité au calcul de ces parties baroclines en évitant la présence simultanée de termes d’ordre de grandeur trop différents. On a fait apparaître une sorte de cycle externe entre  $\overline{a_p}$ ,  $\overline{a_S}$ ,  $\overline{k_S}$  et  $\overline{\Phi}$ . Le cycle interne sera obtenu par la séparation classique de  $\overline{a_B}$  et  $\overline{k_B}$  en leurs contributions zonalement symétriques et asymétriques : on retrouvera l’analogie du cycle d’ordre 2 de Lorenz.

Il existe une autre méthode pour s’affranchir des problèmes posés par les grands termes. Il s’agit de remplacer la somme  $-C(\overline{a_S}, \overline{k_S}) - \overline{B(a_p)}$  par  $+R \overline{\omega} (\overline{T} - T_r) / p$  dans l’équation de  $\overline{a_S}$ , puis de remplacer  $C(\overline{a_S}, \overline{k_S}) + C(\overline{\Phi}, \overline{k_S})$  par  $-(\overline{u_h}) \cdot \overline{\nabla_p}(\overline{\Phi})$  dans l’équation de  $\overline{k_S}$ . Il n’y a plus de communication directe entre  $\overline{a_S}$  et  $\overline{k_S}$ , le transfert d’énergie  $-R \overline{\omega} \overline{T} / p$  créé par les ascendances et subsidences moyennes a été retiré du cycle au profit de termes d’ordre de grandeur plus faible.

On obtient le schéma donné par la figure (9) où on n'a plus une structure en boucle fermée mais une structure ouverte entre les quatre composantes énergétiques  $\overline{a_S}$ ,  $\overline{a_B}$ ,  $\overline{k_S}$  et  $\overline{k_B}$ .

Il est bien sûr toujours possible de garder une représentation plus conventionnelle en faisant la somme des deux dernières équations de (56). Le cycle complet (56) qui se traduit par la figure (8) est cependant plus riche d'information et, avec la réunion des réservoirs  $\overline{k_S}$  et  $\overline{k_B}$  en  $\overline{e_k}$ , la symétrie visible sur cette figure serait rompue.

### 2.4.3 Les interprétations physiques.

On a expliqué que le cycle (56) d'ordre 1 n'est pas déterminé de manière unique. Il faut donc s'assurer que chacun des termes (57) à (68) qui le composent possède une signification physique satisfaisante.

En premier lieu, les tendances euleriennes et les termes de bord vérifient l'équation lagrangienne (55) qui constitue bien physiquement une certaine forme d'équation de bilan. Toutefois, les quantités  $a_S$ ,  $a_B$ ,  $k_S$  et  $k_B$  ne représentent pas des énergies utilisables locales. Seules les moyennes isobares  $\overline{a_S}$ ,  $\overline{a_B}$ ,  $\overline{k_S}$  et  $\overline{k_B}$  ont un sens physique, en liaison avec la version (54) de l'équation de bilan.

Les termes de bord  $\overline{B(a_c(SB))}$  et  $\overline{B(k_c(SB))}$  sont des contreparties mathématiques générées par les séparations (44) et (50) qui conduisent à  $\overline{a_T} = \overline{a_S} + \overline{a_B}$  et  $\overline{e_k} = \overline{k_S} + \overline{k_B}$ .

En utilisant (25), le terme de conversion  $C(\overline{a_B}, \overline{k_B}) = -R \overline{\omega' T'} / p$  est interprété comme un flux vertical de géopotential  $+\overline{\omega' \partial_p(\Phi')}$ , le terme  $\omega = dp/dt$  étant en première approximation proportionnel et de signe contraire à  $w = dz/dt$ . La dépendance en  $-\overline{\omega' T'}$  signifie que  $C(\overline{a_B}, \overline{k_B})$  est positif si  $\omega'$  et  $T'$  sont corrélés négativement. Il y a libération d'enthalpie utilisable barocline en énergie cinétique si, en moyenne sur la couche isobare, on a ascendance des zones chaudes et subsidence des zones froides.

Cette libération correspond paradoxalement à une tendance à l'augmentation de l'énergie potentielle de la couche isobare. En effet, sous l'hypothèse hydrostatique, le géopotential moyen est  $\Phi_G = \iiint \Phi dp / \iiint dp$ . C'est une sorte de centre de gravité si on reprend l'approximation de la pellicule mince et plate. En négligeant les effets latéraux, son évolution  $d\Phi_G/dt$  s'écrit  $\iiint (d\Phi/dt) dp / \iiint dp$  dont la contribution verticale vaut, d'après (26),  $\iiint (\omega \partial\Phi/\partial p) dp / \iiint dp$ . Pour une surface isobare de cette intégrale spatiale, la variation de  $\Phi_G$  dépend donc du signe de  $\overline{\omega \partial_p(\Phi)} = \overline{\omega} \partial_p(\overline{\Phi}) + \overline{\omega' \partial_p(\Phi')}$ . Une valeur positive de  $\overline{\omega' \partial_p(\Phi')} = C(\overline{a_B}, \overline{k_B})$  correspond bien à une tendance à l'augmentation de  $\Phi_G$  avec dans le même temps une conversion de  $\overline{a_B}$  en  $\overline{k_B}$ .

Le paradoxe provient des analogies du pendule et du liquide incompressible pour lesquels c'est une baisse du centre de gravité, et donc de l'énergie potentielle, qui crée la génération d'énergie cinétique.

Ce n'est pas le cas pour l'atmosphère et l'explication réside dans la différence fondamentale entre l'enthalpie utilisable  $A_h$  et l'enthalpie  $H$ . Pour une atmosphère hydrostatique, on a proportionnalité entre  $H$  et l'énergie potentielle  $E_p$ . Le problème revient à comprendre pourquoi l'enthalpie augmente alors que l'enthalpie utilisable diminue au profit de l'énergie cinétique  $E_k$ . Mais on a vu dans la section (2.3) que c'est le terme  $g_a = (T - T_r) \dot{q} / T$  qui est le terme source d'enthalpie utilisable. Un chauffage sensiblement uniforme qui correspond à une élévation moyenne de l'enthalpie, et donc de l'énergie potentielle, est ainsi compatible avec une diminution de l'enthalpie utilisable si ce chauffage se traduit par une réduction des hétérogénéités spatiales de température. C'est le cas si  $C(\overline{a_B}, \overline{k_B})$  est positif.

On peut étendre ces remarques à l'ensemble des termes de conversion de (56). Leur signification physique peut être résumée de la façon suivante :

L'augmentation de l'énergie cinétique et la baisse d'enthalpie utilisable sont provoquées par la diminution du contraste des grandeurs thermodynamiques (température, géopotentiel, densité). Plus généralement, et à l'exemple des théories de la turbulence, les conversions opèrent à contre-gradient.

Ainsi le paradoxe apparent concernant  $C(\overline{a_B}, \overline{k_B}) = -R \overline{\omega' T'} / p$  disparaît si on explique cette conversion par la tendance à diminuer les hétérogénéités de température sur une couche isobare. On a conversion de  $\overline{a_B}$  en  $\overline{k_B}$  si les zones chaudes sont refroidies par détente ( $\omega < 0$ ) et si les zones froides sont réchauffées par compression ( $\omega > 0$ ).

De même, le terme  $C(\overline{a_S}, \overline{k_S}) = -R \overline{\omega T} / p = +\overline{\omega} \partial_p(\overline{\Phi})$  correspond clairement à une tendance à l'élévation du géopotentiel moyen s'il y a production de  $\overline{k_S}$  au dépend de  $\overline{a_S}$  (on a  $C(\overline{a_S}, \overline{k_S}) > 0$  pour  $\overline{\omega} < 0$ , puisque  $\partial_p(\overline{\Phi}) < 0$ ). Ce résultat est naturel puisqu'il s'agit en fait d'une tendance à la diminution du contraste vertical de volume massique  $\overline{\alpha} = \overline{1/\rho} = -\partial_p(\overline{\Phi})$ . Il y a diminution de  $\overline{a_S}$  si les surfaces isobares sont détendues vers les zones de basses densité ( $\overline{\omega} < 0$ ), ou encore si ces surfaces vont à contre-gradient de densité.

Pour interpréter le terme  $C(\overline{k_S}, \overline{k_B}) = -[\overline{u' \omega'} \partial_p(\overline{u}) + \overline{v' \omega'} \partial_p(\overline{v})]$ , il faut d'abord remarquer que la partition de  $\overline{e_k}$  en  $\overline{k_S} = [(\overline{u})^2 + (\overline{v})^2]/2$  et  $\overline{k_B} = [(\overline{u'})^2 + (\overline{v'})^2]/2$  est analogue à la séparation réalisée à l'échelle fine de la particule quand on introduit les notions d'énergie cinétique moyenne et d'énergie cinétique turbulente. Ce terme de conversion  $C(\overline{k_S}, \overline{k_B})$  s'interprète ici comme une production dynamique de turbulence :  $\overline{k_S} - (\mathcal{P}_d) \rightarrow \overline{k_B}$ . Une valeur positive de  $\mathcal{P}_d$  correspond à une réduction des cisaillements verticaux de vent  $\partial_p(\overline{u})$  et  $\partial_p(\overline{v})$  par une conversion d'énergie du mouvement moyen en énergie cinétique turbulente  $\overline{k_B}$ . Dans ce cas, les perturbations tirent leur énergie directement du mouvement moyen par une cascade directe.

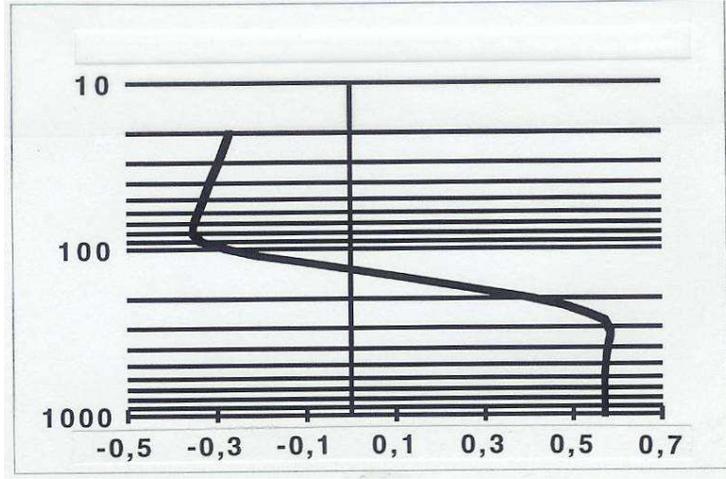


FIG. 10 – Le facteur de stabilité.

La dernière conversion  $C(\overline{a_S}, \overline{a_B})$  opère entre  $\overline{a_S}$  et  $\overline{a_B}$ . En développant la dérivée verticale de (59) et en utilisant (58) on peut aussi écrire

$$C(\overline{a_S}, \overline{a_B}) = C(\overline{a_B}, \overline{k_B}) \left[ \frac{\overline{T} - T_r}{\overline{T}} + \frac{c_p p}{R \overline{T}} \frac{T_r}{\overline{T}} \frac{\partial \overline{T}}{\partial p} \right]. \quad (69)$$

Le terme entre crochets est un facteur de stabilité qui vaut sensiblement 0.55 dans toute la troposphère pour  $p > 250 hPa$ . Il prend des valeurs négatives de l'ordre de  $-0.3$  dans la stratosphère pour  $p < 100 hPa$ . La figure (10) représente un profil vertical typique de ce facteur de stabilité. La conversion (69) est donc moitié moindre et du même signe que  $C(\overline{a_B}, \overline{k_B})$  dans la troposphère, elle vaut le tiers de  $C(\overline{a_B}, \overline{k_B})$  en étant de signe contraire dans la stratosphère. La variation de ce facteur de stabilité est dominée dans (69) par l'impact du terme en dérivée par rapport à  $p$  de la température (la seconde partie du crochet).

Le terme de bord  $\overline{B(\Phi)}$  a été séparé en deux termes de conversion avec le réservoir de géopotiel :  $-C(\overline{\Phi}, \overline{k_S})$  et  $-C(\overline{\Phi}, \overline{k_B})$ . On a en effet posé  $\overline{B(\Phi)} = -C(\overline{\Phi}, \overline{e_k})$ , la moyenne isobare  $\overline{B(\Phi)}$  représentant le bilan du transport de  $\Phi$  au travers des frontières de la surface isobare élémentaire. Il suffit en effet de calculer  $\overline{d\Phi/dt}$  et on trouve, à coté de la tendance eulerienne à  $p$  constant, le terme  $\overline{B(\Phi)}$  qui est présent avec un signe opposé dans l'équation de  $e_k$ .

Comme pour  $\overline{B(\Phi)}$ , le terme de bord  $-\overline{B(a_p)} = -R \overline{\omega} T_r / p$  est également un terme de conversion, cette fois entre les réservoirs  $\overline{a_p}$  et  $\overline{a_S}$ . On le vérifie en calculant la moyenne isobare de la dérivée de  $a_p$ . La tendance eulerienne à  $p$  constant est nulle et il apparaît la quantité  $\overline{B(a_p)} = -C(\overline{a_p}, \overline{a_S})$  qui est présente avec un signe opposé dans l'équation de  $a_S$ .

L'équation de  $\overline{a_S}$  contient le terme  $\overline{g_S} = (1 - T_r / \overline{T}) (\overline{q})$ . De part la présence du facteur  $1 - T_r / \overline{T}$  qui est positif dans la basse troposphère ( $T > T_r = 250K$ ) et qui est négatif au dessus, ce sont les chauffages différentiels verticaux qui engendrent  $\overline{a_S}$ . Pour que  $\overline{g_S}$  soit positif, les couches inférieures

et chaudes doivent être réchauffées et les couches plus élevées et froides doivent être refroidies. C'est bien le cas en moyenne dans les basses couches (proximité du sol et absorption du rayonnement solaire), c'est aussi vrai pour les couches plus élevées (déperdition par rayonnement infrarouge).

L'équation de la composante barocline  $\overline{a_B}$  évolue par le terme de chauffage spécifique  $\overline{g_B} = (T_r/\overline{T}) [(1 - \overline{T}/T) \dot{q}]$ . Comme pour  $\overline{g_S}$ , la présence du facteur  $1 - \overline{T}/T$  en modulation du terme  $\dot{q}$  indique que ce sont les chauffages différentiels horizontaux qui engendrent  $\overline{a_B}$ . Il y a production d'énergie si les parties chaudes de la surface isobare sont réchauffées et/ou les parties froides sont refroidies.

Les deux dissipations  $\overline{d_S} = -[\overline{u F_x} + \overline{v F_y}]$  et  $\overline{d_B} = -[\overline{u' F_x'} + \overline{v' F_y'}]$  représentent les pertes d'énergie cinétique dues aux dissipations moléculaires et visqueuses et dues aux effets de friction avec le sol. La dissipation de l'énergie cinétique du vent moyen  $\overline{k_S}$  est l'opposée du produit scalaire des moyennes isobares du vent et de  $\vec{F}$ . La dissipation de la contribution  $\overline{k_B}$  est l'opposée de la corrélation des perturbations de vent et de celles de  $\vec{F}$ .

## **2.5 Le cycle hydrostatique d'exergie d'ordre 2.**

### **2.5.1 Les composantes énergétiques d'ordre 2.**

L'introduction mathématique (15) de la fonction enthalpie utilisable a permis la construction du cycle (56). C'est un cycle hydrostatique d'ordre 1 qui provient des séparations des diverses quantités en moyennes isobares et en écarts par rapport à celles-ci. On a :  $\forall \xi, \xi = \bar{\xi} + \xi'$ , où  $\bar{\xi}$  est la moyenne isobare définie par (43).

Les propriétés de ce cycle d'ordre 1 sont déjà nombreuses et pertinentes puisqu'on retrouve les résultats fondamentaux propres aux énergies utilisables météorologiques (voir la section précédente). La seule étude à avoir décomposé le réservoir  $\overline{a_T}$  en  $\overline{a_S} + \overline{a_B}$  est celle de Pearce (1978). L'article de Pearce ne pouvait néanmoins traiter que le système atmosphérique global puisqu'il pose dès le départ  $\overline{\omega} = 0$ . De plus, la partie  $\overline{a_p}$  de  $\overline{a_h}$  n'apparaît pas dans l'approche de Pearce. Or on a vu dans la section (2.4) que ces deux propriétés ( $\overline{\omega} \neq 0$  et présence de  $\overline{a_p}$ ) sont essentielles pour parvenir à équilibrer de manière exacte les équations du cycle (56) quand ce dernier est appliqué à un domaine limité où le bilan des flux aux frontières du domaine n'est pas nul. Le cycle d'ordre 1 donné par (56) semble donc approprié aux calculs sur domaines limités.

Les études énergétiques de l'atmosphère utilisent cependant une décomposition plus poussée des différents termes. Il est en effet nécessaire de tenir compte du fait que les variables météorologiques présentent pour la plupart d'entre elles des variations méridiennes qui dominent en ordre de grandeur les variations zonales, ou dont les variations méridiennes ont un caractère quasi-permanent. On pense

immédiatement aux gradients nord-sud des champs de température et de terme de chauffage (les valeurs sont maximums aux tropiques et minimums aux pôles). Les champs de vent, par la présence des grands jets quasi-permanents, peuvent également donner une structure méridienne marquée. Ceci est d'autant plus important que, pour les études sur domaines limités, ces jets de vents forts peuvent imposer toute la structure moyenne du champ de vitesse sur le domaine.

Comme pour les autres études météorologiques, une fois isolée la moyenne isobare  $\bar{\xi} = \xi^{\lambda\varphi}$  des diverses quantités, étudions la séparation de  $\xi' = \xi - \bar{\xi}$  en moyennes zonales  $\xi^\lambda$  et en écarts à celles-ci  $\xi_\lambda$ . On a choisi une notation qui a déjà été mentionnée en (1.1.3). Elle évite l'emploi des crochets, astérisques et primes dont les significations varient suivant les auteurs et dont la lourdeur rend les formules parfois difficilement lisibles.

Pour une surface isobare limitée par les longitudes  $\lambda_1 < \lambda_2$  et par les latitudes  $\varphi_1 < \varphi_2$ , les moyennes zonales  $\xi^\lambda$  et méridienne  $\xi^\varphi$  sont définies par :

$$\xi^\lambda(\varphi, p) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \xi(\lambda, \varphi, p) d\lambda, \quad (70)$$

$$\xi^\varphi(\lambda, p) = \frac{1}{\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \xi(\lambda, \varphi, p) \cos(\varphi) d\varphi. \quad (71)$$

Ces définitions sont cohérentes avec (43), on a  $\bar{\xi} = \xi^{\lambda\varphi} = (\xi^\lambda)^\varphi = (\xi^\varphi)^\lambda$ .

Avec ces notations, la décomposition (44) peut être poursuivie en posant l'identité  $T = \bar{T} + T_\varphi^\lambda + T_\lambda$ . La quantité  $T_\varphi^\lambda = T^\lambda - T^{\lambda\varphi}$  représente les écarts du profil méridien moyen à la valeur isobare moyenne. C'est un terme d'ordre 1 qui tient compte des variations méridiennes des moyennes zonales. Le terme  $T_\lambda = T - T^\lambda$  est un terme d'ordre 2. C'est l'écart de la température locale à la moyenne zonale à la même latitude. L'autre terme d'ordre 2 ( $T_\varphi = T - T^\varphi$ ) ne sera pas utilisé. Comme annoncé, on privilégie la présence de profils méridiens de moyennes zonales et on n'étudie les structures zonales qu'en tant que perturbations.

Partant des séparations  $a_h = a_p + a_T$  et  $a_T = a_S + a_B + a_{c(SB)}$ , le report de  $T' = T_\varphi^\lambda + T_\lambda$  dans (46) donne les composantes suivantes de  $a_B$  :

$$a_B = a_Z + a_E + a_{c(ZE)}, \quad (72)$$

$$a_Z = c_p T_r \left[ (T^\lambda/\bar{T} - 1) - \ln(T^\lambda/\bar{T}) \right] = c_p T_r \mathcal{F} \left( \frac{T^\lambda}{\bar{T}} \right), \quad (73)$$

$$a_E = c_p T_r \left[ (T/T^\lambda - 1) - \ln(T/T^\lambda) \right] = c_p T_r \mathcal{F} \left( \frac{T}{T^\lambda} \right), \quad (74)$$

$$a_{c(ZE)} = c_p T_r \left( \frac{T^\lambda}{\bar{T}} - 1 \right) \left( \frac{T}{T^\lambda} - 1 \right) = c_p T_r \frac{T_\varphi^\lambda}{\bar{T}} \frac{T_\lambda}{T^\lambda}, \quad (75)$$

$$\text{avec } a_Z = c_p T_r \mathcal{F}(X_Z), \quad a_E = c_p T_r \mathcal{F}(X_E), \quad a_{c(ZE)} = c_p T_r X_Z X_E, \quad (76)$$

$$\text{où } X_Z = \frac{T^\lambda}{\overline{T}} - 1 = \frac{T_\varphi^\lambda}{\overline{T}} \quad \text{et} \quad X_E = \frac{T}{\overline{T}^\lambda} - 1 = \frac{T_\lambda}{\overline{T}^\lambda}. \quad (77)$$

On a obtenu un ensemble de termes dont la structure mathématique est l’analogie de (44) à (49).

Par symétrie entre les parties thermodynamique et cinétique de l’énergie, on pose  $u' = u_\varphi^\lambda + u_\lambda$  et  $v' = v_\varphi^\lambda + v_\lambda$ . On peut alors poursuivre la séparation de  $e_k = k_S + k_B + k_{c(SB)}$  en reportant les expressions précédentes de  $u'$  et  $v'$  dans (52). On écrit les composantes suivantes de  $k_B$  :

$$k_B = k_Z + k_E + k_{c(ZE)}, \quad (78)$$

$$k_Z = \frac{1}{2} \left[ (u_\varphi^\lambda)^2 + (v_\varphi^\lambda)^2 \right], \quad (79)$$

$$k_E = \frac{1}{2} \left[ (u_\lambda)^2 + (v_\lambda)^2 \right], \quad (80)$$

$$k_{c(ZE)} = u_\varphi^\lambda u_\lambda + v_\varphi^\lambda v_\lambda. \quad (81)$$

On a ici encore une analogie très nette avec les équations (50) à (53). Ces analogies proviennent de la même utilisation des identités  $\mathcal{F}(X_1 + X_2 + X_1 X_2) = \mathcal{F}(X_1) + \mathcal{F}(X_2) + X_1 X_2$  pour l’enthalpie utilisable et  $(x_1 + x_2)^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2 + 2 x_1 x_2$  pour l’énergie cinétique.

Comme dans la section (2.4.1), les valeurs  $a_Z$ ,  $a_E$ ,  $k_Z$ ,  $k_E$ ,  $a_{c(ZE)}$  et  $k_{c(ZE)}$  ne doivent pas être interprétées localement. Ce sont de simples contributions numériques et seule la moyenne isobare de ces quantités, ou la moyenne isobare d’une fonction de ces quantités, a un sens physique. On pense ici à  $\overline{a_Z}$  ou  $\overline{B[a_{c(ZE)}]}$  par exemple.

Autant les formulations (73) et (74) sont très proches de celles contenues dans l’article de Pearce (1978), autant la séparation de l’énergie cinétique en  $\overline{k_Z}$  et  $\overline{k_E}$  telles que définies par (79) et (80) ne sont pas habituelles à l’ensemble des approches météorologiques de l’énergie utilisable. Le terme  $\overline{k_E}$  ne pose pas de problème, c’est bien la forme qu’a choisie Lorenz dans ces différentes études. Mais la formulation généralement admise pour  $\overline{k_Z}$  correspond dans cette étude à la somme  $\overline{k_Z} + \overline{k_S}$ . Cette autre vision revient à décomposer les composantes du vent en  $u = u^\lambda + u_\lambda$  et  $v = v^\lambda + v_\lambda$ . Les valeurs  $u^\lambda$  et  $v^\lambda$  donnent  $\overline{k_Z} + \overline{k_S}$ , alors que  $u_\lambda$  et  $v_\lambda$  donnent  $\overline{k_E}$ .

Il a été décidé dans cette thèse de préserver au maximum la symétrie entre l’enthalpie utilisable et l’énergie cinétique. Aussi a-t-il été choisi de garder les six composantes  $\overline{a_S}$ ,  $\overline{a_Z}$ ,  $\overline{a_E}$  et  $\overline{k_S}$ ,  $\overline{k_Z}$ ,  $\overline{k_E}$  qui forment la base du cycle d’ordre 2 qui va maintenant être établi. Il sera toutefois à tout moment possible de retrouver les équations météorologiques plus habituelles pour  $\overline{k_Z}$  en faisant la somme des équations relatives à  $\overline{k_S}$  et  $\overline{k_Z}$ .

### 2.5.2 Le cycle énergétique d’ordre 2.

Comme dans la section (2.4.2), ce cycle traite des échanges d’énergie au sein d’une couche isobare d’épaisseur élémentaire d’un domaine limité. Les calculs numériques des équations d’évolution

des six composantes énergétiques  $\overline{a_S}$ ,  $\overline{a_Z}$ ,  $\overline{a_E}$  et  $\overline{k_S}$ ,  $\overline{k_Z}$ ,  $\overline{k_E}$  sont très lourds et il n'est pas question de les reproduire ici.

Un des guides pour trouver le réarrangement adéquat des termes est la volonté de maintenir une symétrie élevée entre les diverses composantes de mêmes types ( $S$ ,  $Z$  et  $E$ , ou encore  $a$  et  $k$ ). Comme pour le cycle (56), aucune approximation n'est faite autre que celles qui ont conduit aux équations de base (27), (28) et (29). Ainsi est-il assuré qu'aucun terme n'a été oublié dans les six équations, chacun d'entre eux devant pouvoir être interprété comme une conversion, un terme de chauffage différentiel, une dissipation ou un terme de bord. Un autre guide pour mener à bien les calculs est l'espoir de retrouver les expressions de Lorenz pour les conversions fondamentales entre  $\overline{a_Z}$ ,  $\overline{a_E}$ ,  $\overline{k_Z}$  et  $\overline{k_E}$ . La différence principale avec l'approche de Lorenz résidera dans la présence de conversions et de termes de bord qui ne sont pas nuls pour un domaine limité.

Pour déterminer la forme analytique du cycle énergétique hydrostatique d'ordre 2, on part des expressions (45) et (73) à (75) pour l'enthalpie utilisable, avec les formulations (51) et (79) à (81) pour la partie énergie cinétique. On applique ensuite les opérateurs  $\overline{\partial_t(\dots)}$  et  $-\overline{B(\dots)}$  à ces six composantes énergétiques et, après avoir effectué les réarrangements nécessaires, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\partial_t(a_S)} = -\overline{B(a_S)} - C(\overline{a_S}, \overline{k_S}) - C(\overline{a_S}, \overline{a_Z}) - C(\overline{a_S}, \overline{a_E}) - \overline{B[a_{c(SB)}]} - \overline{B(a_p)} \quad + \overline{g_S}, \\ \overline{\partial_t(a_Z)} = -\overline{B(a_Z)} - C(\overline{a_Z}, \overline{k_Z}) + C(\overline{a_S}, \overline{a_Z}) - C(\overline{a_Z}, \overline{a_E}) - \overline{B[a_{c(ZE)}]} \quad + \overline{g_Z}, \\ \overline{\partial_t(a_E)} = -\overline{B(a_E)} - C(\overline{a_E}, \overline{k_E}) + C(\overline{a_S}, \overline{a_E}) + C(\overline{a_Z}, \overline{a_E}) \quad + \overline{g_E}, \\ \overline{\partial_t(k_S)} = -\overline{B(k_S)} + C(\overline{a_S}, \overline{k_S}) - C(\overline{k_S}, \overline{k_Z}) - C(\overline{k_S}, \overline{k_E}) - \overline{B[k_{c(SB)}]} + C(\overline{\Phi}, \overline{k_S}) - \overline{d_S}, \\ \overline{\partial_t(k_Z)} = -\overline{B(k_Z)} + C(\overline{a_Z}, \overline{k_Z}) + C(\overline{k_S}, \overline{k_Z}) - C(\overline{k_Z}, \overline{k_E}) - \overline{B[k_{c(ZE)}]} + C(\overline{\Phi}, \overline{k_Z}) - \overline{d_Z}, \\ \overline{\partial_t(k_E)} = -\overline{B(k_E)} + C(\overline{a_E}, \overline{k_E}) + C(\overline{k_S}, \overline{k_E}) + C(\overline{k_Z}, \overline{k_E}) \quad + C(\overline{\Phi}, \overline{k_E}) - \overline{d_E}. \end{array} \right. \quad (82)$$

La symétrie du cycle (82) apparaît mieux sur le schéma de la figure (11). On retrouve le chemin externe principal  $-\overline{B(a_p)} = C(\overline{a_p}, \overline{a_S}) \leftrightarrow C(\overline{a_S}, \overline{k_S}) \leftrightarrow C(\overline{k_S}, \overline{\Phi}) = -C(\overline{\Phi}, \overline{k_S})$  entre les composantes énergétiques  $\overline{a_p}$ ,  $\overline{a_S}$ ,  $\overline{k_S}$  et  $\overline{\Phi}$ . On voit aussi que l'analogie du cycle de Lorenz entre  $\overline{a_Z}$ ,  $\overline{a_E}$ ,  $\overline{k_Z}$  et  $\overline{k_E}$  est bien séparé de ce chemin principal de l'énergie. Le cycle de Lorenz devient avec cette présentation un cycle interne qui se trouve en quelque sorte protégé des influences des grands termes  $\overline{B(a_p)}$ ,  $C(\overline{a_S}, \overline{k_S})$  et  $C(\overline{\Phi}, \overline{k_S})$ .

Dans ce cycle (82), les équations de  $\overline{a_S}$  et de  $\overline{k_S}$  sont pratiquement inchangées par rapport au

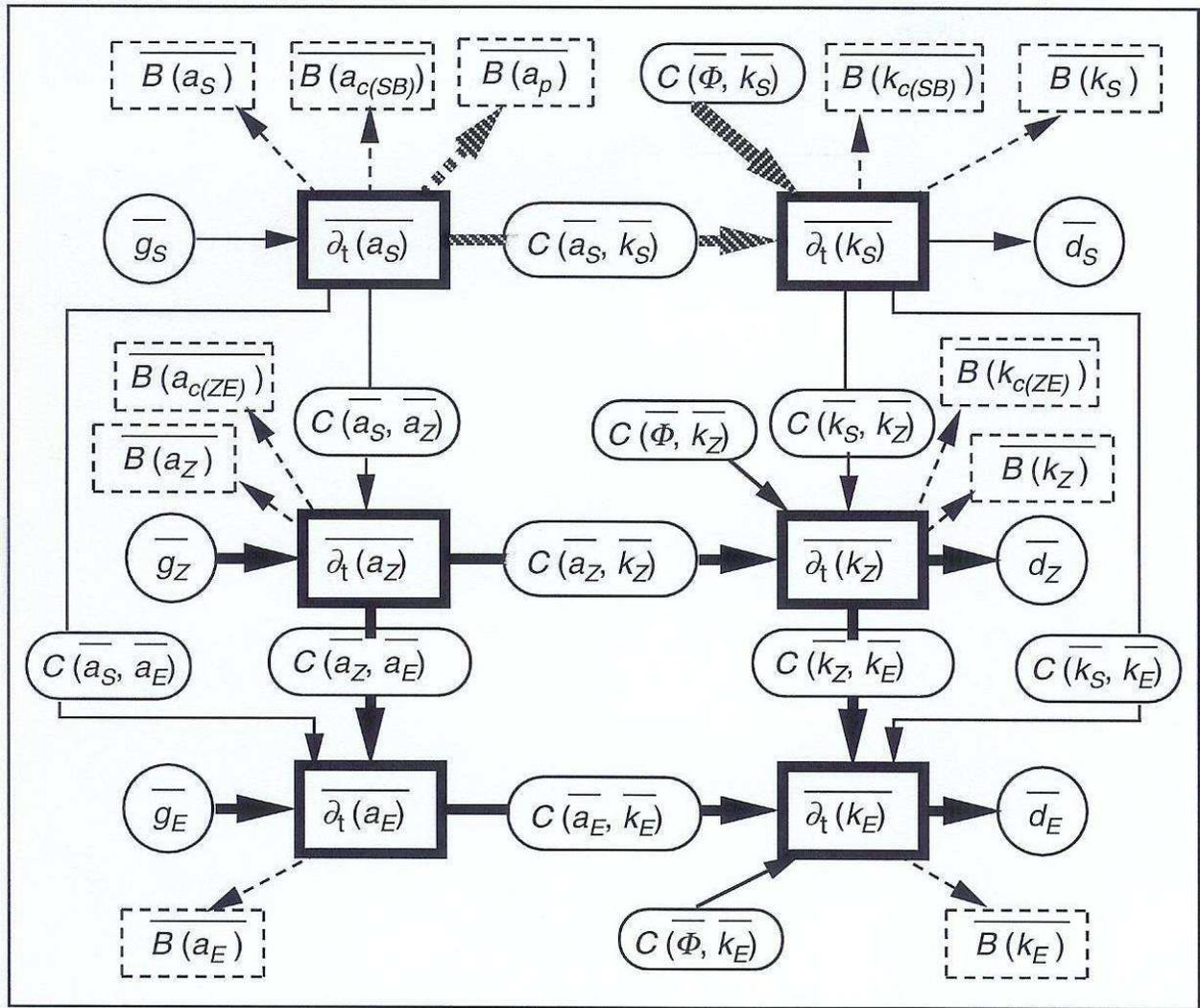


FIG. 11 – Le cycle de l'enthalpie utilisable (ordre 2).

cycle (56) et on se reportera à la section (2.4.2) pour obtenir leur formulation. On a juste séparé les conversions  $C(\overline{a_S}, \overline{a_B})$  et  $C(\overline{k_S}, \overline{k_B})$  en  $C(\overline{a_S}, \overline{a_Z}) + C(\overline{a_S}, \overline{a_E})$  et en  $C(\overline{k_S}, \overline{k_Z}) + C(\overline{k_S}, \overline{k_E})$ , respectivement. On a posé

$$C(\overline{a_S}, \overline{a_Z}) = -c_p \overline{(\omega_\varphi^\lambda T_\varphi^\lambda)} p^{-\kappa} \partial_p \left[ p^\kappa (1 - T_r/\overline{T}) \right], \quad (83)$$

$$C(\overline{a_S}, \overline{a_E}) = -c_p \overline{(\omega_\lambda T_\lambda)} p^{-\kappa} \partial_p \left[ p^\kappa (1 - T_r/\overline{T}) \right], \quad (84)$$

$$C(\overline{k_S}, \overline{k_Z}) = - \left[ \overline{(u_\varphi^\lambda \omega_\varphi^\lambda)} \partial_p(\overline{u}) + \overline{(v_\varphi^\lambda \omega_\varphi^\lambda)} \partial_p(\overline{v}) \right], \quad (85)$$

$$C(\overline{k_S}, \overline{k_E}) = - \left[ \overline{(u_\lambda \omega_\lambda)} \partial_p(\overline{u}) + \overline{(v_\lambda \omega_\lambda)} \partial_p(\overline{v}) \right]. \quad (86)$$

De même, les deux conversions  $C(\overline{a_B}, \overline{k_B})$  et  $C(\overline{\Phi}, \overline{k_B})$  ont été séparées selon

$$C(\overline{a_Z}, \overline{k_Z}) = - \frac{R}{p} \overline{\omega_\varphi^\lambda T_\varphi^\lambda}, \quad (87)$$

$$C(\overline{a_E}, \overline{k_E}) = - \frac{R}{p} \overline{\omega_\lambda T_\lambda}, \quad (88)$$

$$C(\overline{\Phi}, \overline{k_Z}) = - \left[ \overline{u_\varphi^\lambda \partial_x(\Phi)} + \overline{v_\varphi^\lambda \partial_y(\Phi)} + \overline{\omega_\varphi^\lambda \partial_p(\Phi)} \right] = - \overline{(\vec{u}_h)_\varphi^\lambda \cdot \vec{\nabla}_p(\Phi)} + \frac{R}{p} \overline{\omega_\varphi^\lambda T_\varphi^\lambda}, \quad (89)$$

$$C(\overline{\Phi}, \overline{k_E}) = - \left[ \overline{u_\lambda \partial_x(\Phi)} + \overline{v_\lambda \partial_y(\Phi)} + \overline{\omega_\lambda \partial_p(\Phi)} \right] = - \overline{(\vec{u}_h)_\lambda \cdot \vec{\nabla}_p(\Phi)} + \frac{R}{p} \overline{\omega_\lambda T_\lambda}. \quad (90)$$

Les termes nouveaux de (82) sont les tendances isobares de  $a_Z$ ,  $a_E$ ,  $k_Z$  et  $k_E$  ainsi que les termes de bilan aux frontières correspondants. Les autres bilans isobares  $\overline{B[k_c(ZE)]}$  et  $\overline{B[a_c(ZE)]}$  sont calculés à partir de (75) et de (81) qui sont reportés dans (31).

Les derniers termes de conversion  $C(\overline{a_Z}, \overline{a_E})$  et  $C(\overline{k_Z}, \overline{k_E})$  qui appartiennent au cycle interne valent

$$C(\overline{a_Z}, \overline{a_E}) = -c_p \left[ \overline{(v_\lambda T_\lambda)^\lambda \partial_y \left( \frac{T_r}{\overline{T}} \frac{T_\varphi^\lambda}{T_\lambda} \right)} + \overline{(\omega_\lambda T_\lambda)^\lambda p^{-\kappa} \partial_p \left( p^\kappa \frac{T_r}{\overline{T}} \frac{T_\varphi^\lambda}{T_\lambda} \right)} \right], \quad (91)$$

$$C(\overline{k_Z}, \overline{k_E}) = - \left[ \overline{u_\lambda v_\lambda \partial_y(u_\varphi^\lambda)} + \overline{v_\lambda v_\lambda \partial_y(v_\varphi^\lambda)} + \overline{u_\lambda \omega_\lambda \partial_p(u_\varphi^\lambda)} + \overline{v_\lambda \omega_\lambda \partial_p(v_\varphi^\lambda)} \right]. \quad (92)$$

Le terme de chauffage différentiel  $\overline{g_S}$  et le terme de dissipation  $\overline{d_S}$  sont toujours donnés par (65) et (67). Les nouveaux termes de chauffage différentiel et de dissipation propres au cycle (82) sont

$$\overline{g_Z} = \frac{T_r}{\overline{T}} \overline{[(1 - \overline{T}/T^\lambda) \dot{q}]}, \quad (93)$$

$$\overline{g_E} = \overline{(T_r/T^\lambda) [(1 - T^\lambda/\overline{T}) \dot{q}]}, \quad (94)$$

$$\overline{d_Z} = - \left( \overline{u_\varphi^\lambda (F_x)_\varphi^\lambda} + \overline{v_\varphi^\lambda (F_y)_\varphi^\lambda} \right), \quad (95)$$

$$\overline{d_E} = - \left( \overline{u_\lambda (F_x)_\lambda} + \overline{v_\lambda (F_y)_\lambda} \right). \quad (96)$$

Il est possible d'employer la même méthode qu'en (2.4.2) pour éliminer les problèmes de stabilité de calcul dus aux grands termes  $C(\overline{a_S}, \overline{k_S})$ ,  $\overline{B(a_p)}$  et  $C(\overline{\Phi}, \overline{k_S})$ . Ce faisant, le chemin externe

principal se trouve coupé et on retrouve, pour la partie supérieure de la figure (11), l'analogue de la figure (9). Avec cette transformation, il reste le cycle interne de Lorenz qui communique avec les réservoirs  $\overline{a_S}$  et  $\overline{k_S}$  par l'intermédiaire des conversions  $C(\overline{a_S}, \overline{a_Z})$ ,  $C(\overline{a_S}, \overline{a_E})$ ,  $C(\overline{k_S}, \overline{k_Z})$  et  $C(\overline{k_S}, \overline{k_E})$ , comme pour Pearce (1978).

Il est alors tentant de revenir à la formulation de Lorenz et de regrouper les deux réservoirs qui sont notés  $\overline{k_S}$  et  $\overline{k_Z}$  dans cette étude. Il y aurait cependant apparition d'une asymétrie entre les parties enthalpie utilisable et énergie cinétique. De plus le résidu  $C(\overline{a_S}, \overline{k_S}) + C(\overline{\Phi}, \overline{k_S})$  influencerait directement un des réservoirs du cycle interne de Lorenz. Ces deux propriétés ne sont pas souhaitables pour la raison suivante. Le cycle d'ordre 2 représenté par la figure (11) est a priori applicable à n'importe quelle échelle. Si on décrit l'évolution thermodynamique d'une bande zonale d'extension méridienne infinitésimale,  $T_\varphi^\lambda = u_\varphi^\lambda = v_\varphi^\lambda = 0$  et les réservoirs qui sont notés  $\overline{a_Z}$  et  $\overline{k_Z}$  dans cette étude sont strictement nuls. A l'inverse, dans l'étude d'une bande méridienne d'extension zonale très petite,  $T_\lambda = u_\lambda = v_\lambda = 0$  et ce sont les composantes  $\overline{a_E}$  et  $\overline{k_E}$  qui sont identiquement nulles. Seule la formulation symétrique (82) permet de passer facilement du cas général d'un domaine limité quelconque aux cas extrêmes mentionnés ci-dessus (ou même encore au cas de la parcelle fluide où seuls  $\overline{a_S}$  et  $\overline{k_S}$  ne sont pas nuls). Il suffit d'imaginer sur la figure (11) de couper à la demande les liaisons entre les réservoirs qui deviennent nuls. On voit que l'on préserve à chaque fois un cycle à quatre composantes ( $\overline{a_S}$ ,  $\overline{k_S}$ ,  $\overline{a_E}$  et  $\overline{k_E}$ , ou  $\overline{a_S}$ ,  $\overline{k_S}$ ,  $\overline{a_Z}$  et  $\overline{k_Z}$ ) dont les diverses liaisons sont déjà présentes dans la figure (11).

### 2.5.3 Les interprétations physiques.

Comme pour le cycle d'ordre 1, il faut maintenant interpréter chacun des termes du cycle d'ordre 2 défini par (82). On utilisera la proposition de la section (2.4.3) selon laquelle l'augmentation de l'énergie cinétique et la baisse de l'enthalpie utilisable sont provoquées par la diminution des contrastes thermodynamiques, ces conversions opérant à contre-gradient.

Une vision tridimensionnelle de la figure (11) se traduit par une structure en prisme à base triangulaire entre les six réservoirs, les conversions formant les arêtes de ce prisme (voir la figure 12). Il y a donc trois cycles à quatre composantes (les faces rectangulaires) et deux cycles à trois composantes (les côtés latéraux triangulaires). Chacun de ces cycles apporte une indétermination provoquée par la possibilité d'ajouter et de retrancher de manière adéquate aux conversions un terme donné. L'ensemble de la manipulation laisse inchangée les bilans aux sommets, c'est à dire les évolutions des réservoirs (voir l'exemple de la section 2.4.2).

Il est donc important de s'assurer que le choix qui a été fait pour les termes de (82) est conforme aux interprétations physiques habituelles.

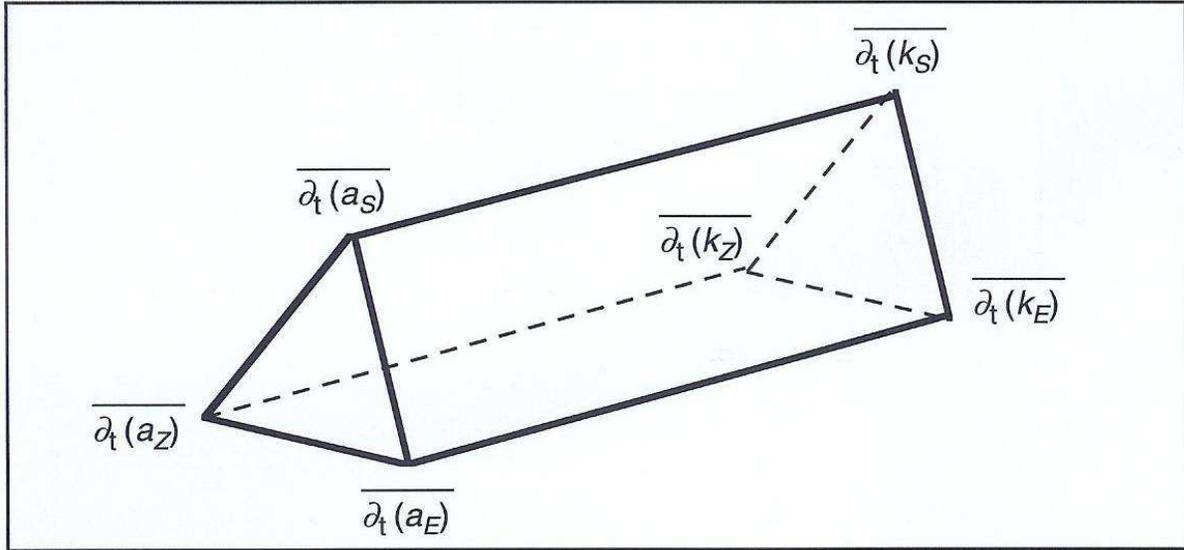


FIG. 12 – La vision tridimensionnelle du cycle d'ordre 2.

Les tendances euleriennes et les termes de bord vérifient l'équation lagrangienne (55) qui constitue une forme d'équation de bilan. Comme pour le cycle d'ordre 1, seules les moyennes isobares ont un sens physique et non les intégrandes de ces moyennes. Les termes de bord  $\overline{B(a_c(ZE))}$  et  $\overline{B(k_c(ZE))}$  sont des contreparties mathématiques engendrées par les séparations (72) et (78).

En utilisant (25) et en remarquant que les moyennes zonales et méridiennes sont calculées à pression constante, on peut permuter ces moyennes avec la dérivée par rapport à  $p$  et les deux conversions  $C(\overline{a_Z}, \overline{k_Z}) = -R \overline{\omega_\varphi^\lambda T_\varphi^\lambda} / p$  et  $C(\overline{a_E}, \overline{k_E}) = -R \overline{\omega_\lambda T_\lambda} / p$  s'écrivent comme des flux verticaux de géopotential  $+\overline{\omega_\varphi^\lambda \partial_p(\Phi_\varphi^\lambda)}$  et  $+\overline{\omega_\lambda \partial_p(\Phi_\lambda)}$ . L'interprétation en terme de flux vertical est justifiée si on tient compte du fait que le terme  $\omega = dp/dt$  est en première approximation proportionnel et de signe contraire à  $w = dz/dt$ .

On a vu d'autre part à la section (2.4.3) que la conversion  $C(\overline{a_B}, \overline{k_B}) = -R \overline{\omega' T'} / p = \overline{\omega' \partial_p(\Phi')}$  était positive si  $\omega'$  et  $T'$  sont corrélés négativement. Il en résulte une tendance à l'augmentation du géopotential moyen de l'atmosphère, alors que l'enthalpie utilisable barocline diminue puisque cette corrélation négative se traduit par une réduction des perturbations de température sur la surface isobare. Les mêmes raisonnements s'appliquent à  $C(\overline{a_Z}, \overline{k_Z})$  et  $C(\overline{a_E}, \overline{k_E})$ . Mais il faut d'abord préciser quelque peu la signification physique de  $\overline{a_Z}$ ,  $\overline{a_E}$ ,  $\overline{k_Z}$  et  $\overline{k_E}$ .

Les composantes  $\overline{a_Z}$  et  $\overline{k_Z}$  dépendent de termes en  $\xi_\varphi^\lambda$  (avec  $\xi = T, u, \text{ ou } v$ ). On a représenté sur la figure (13) un champ de  $\xi$  qui est exempt de variation zonale. Les valeurs de  $\xi_\varphi^\lambda$  sont représentées par les flèches. Ce sont les écarts entre la moyenne zonale à une certaine latitude (les traits gras) et la valeur moyenne isobare (le plan grisé).

Les composantes  $\overline{a_E}$  et  $\overline{k_E}$  dépendent de la même façon de termes en  $\xi_\lambda$ . La figure (14) est plus

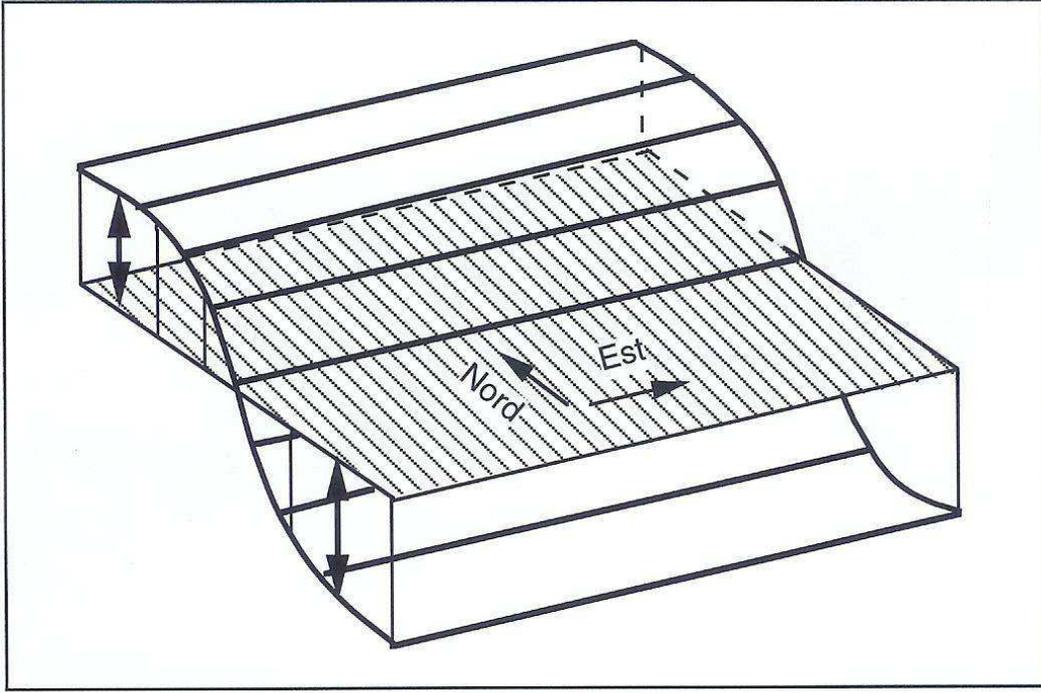


FIG. 13 – La dépendance en  $\xi_\varphi^\lambda$  de  $\overline{a_Z}$  et  $\overline{k_Z}$ .

générale que la figure (13), le champ  $\xi$  présentant des variations à la fois zonales et méridiennes. Les moyennes zonales de  $\xi$  sont les mêmes que sur la figure (14). La flèche représente la quantité  $\xi_\lambda$  en un point de la frontière nord du domaine. C'est l'écart entre la valeur du champ en ce point et la valeur de la moyenne zonale à la même latitude (le trait horizontal plein).

La conversion  $C(\overline{a_Z}, \overline{k_Z}) = -\overline{\omega_\varphi^\lambda T_\varphi^\lambda} / p$  est souvent notée  $C_Z$  pour se rappeler qu'elle opère entre les composantes "en  $Z$ " de (82). La conversion  $C_Z$  est interprétée en imaginant les champs de moyennes zonales  $\omega^\lambda$  et  $T^\lambda$ .  $C_Z$  est positif si les perturbations aux moyennes isobares respectives  $\omega_\varphi^\lambda$  et  $T_\varphi^\lambda$  sont corrélées négativement. On observe alors une réduction des contrastes nord-sud de température  $T_\varphi^\lambda = T^\lambda - \overline{T}$  par un refroidissement lié à une détente des zones chaudes et par un réchauffement obtenu par compression des zones froides, ces détentes et compressions étant réalisées par les contrastes nord-sud des moyennes zonales de  $\omega$  :  $\omega_\varphi^\lambda = \omega^\lambda - \overline{\omega}$ . Typiquement, ce sont les cellules de Hadley et de Ferrel qui contribuent au cycle énergétique de la circulation générale à travers ce terme  $C_Z$ . Ces cellules participent à  $C_Z$  avec des signes contraires et il apparaît que le bilan global de  $C_Z$  pour le globe est de signe indéterminé. A une échelle plus fine que celle de la circulation générale, on pourra étudier les phénomènes de brise ou de circulation en rouleau ou en bande en appliquant le cycle (82) à des domaines limités englobant ces processus.

La conversion  $C_E = C(\overline{a_E}, \overline{k_E}) = -\overline{\omega_\lambda T_\lambda} / p$  opère entre les composantes "en  $E$ " de (82). Il faut regarder les variations de  $\omega$  et  $T$  sur un cercle de latitude donné où les perturbations par rapport aux moyennes zonales respectives sont  $\omega_\lambda = \omega - \omega^\lambda$  et  $T_\lambda = T - T^\lambda$ . La conversion  $C_E$

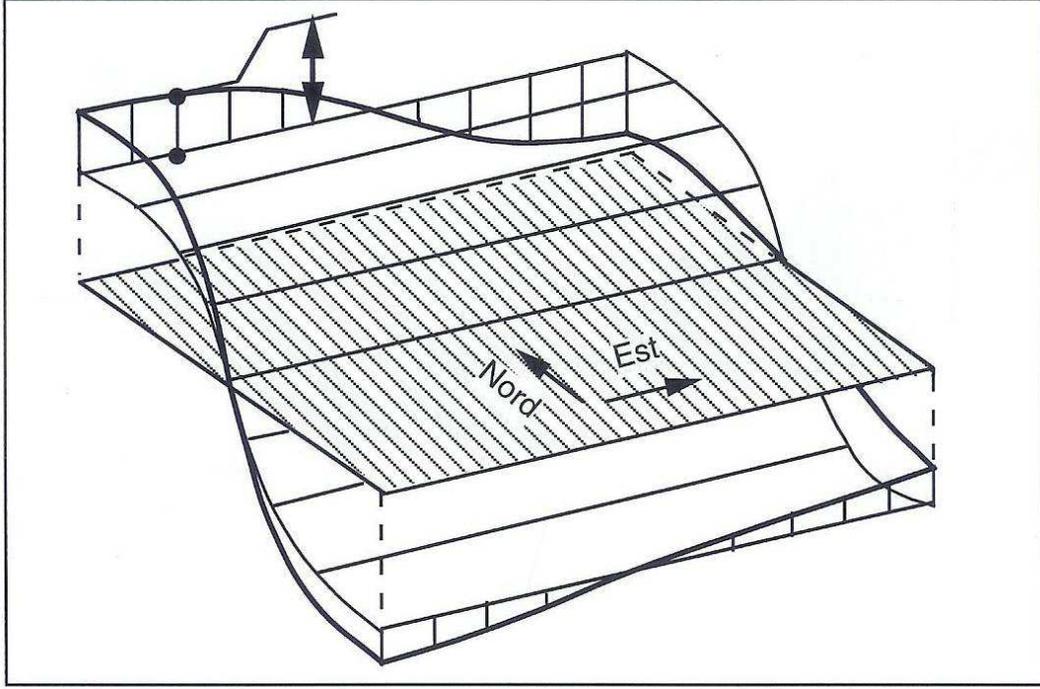


FIG. 14 – La dépendance en  $\xi_\lambda$  de  $\bar{a}_E$  et  $\bar{k}_E$ .

est positive si en moyenne sur chaque cercle de latitude les zones plus chaudes sont détendues et les zones plus froides sont comprimées. Ces détentes et compressions doivent être considérées ici en faisant abstraction des mouvements verticaux moyens  $\omega^\lambda$  dont les effets sont déjà pris en compte dans  $C_Z$ . Typiquement, les perturbations baroclines des zones tempérées contribuent beaucoup à cette conversion  $C_E$ , l'ascendance de l'air chaud frontal et la subsidence dans la traîne en air froid donnant une conversion de  $\bar{a}_E$  vers  $\bar{k}_E$  fortement positive. La quantité  $C_E$  est la conversion dite barocline de l'énergie utilisable en énergie cinétique.

La conversion  $C_A = C(\bar{a}_Z, \bar{a}_E)$  donnée par (91) se compose de deux termes. Le deuxième qui comprend une dérivée par rapport à  $p$  s'interprète en partie comme  $C(\bar{a}_S, \bar{a}_B)$  à la section (2.4.3). On peut écrire

$$\begin{aligned}
 -c_p \overline{(\omega_\lambda T_\lambda)^\lambda p^{-\kappa} \partial_p \left( p^\kappa \frac{T_r}{T} \frac{T_\varphi^\lambda}{T^\lambda} \right)} &= -c_p \overline{(\omega_\lambda T_\lambda)_\varphi^\lambda p^{-\kappa} \partial_p \left( p^\kappa \frac{T_r}{T} \frac{T_\varphi^\lambda}{T^\lambda} \right)} \\
 + C(\bar{a}_E, \bar{k}_E) \left[ \overline{\left( \frac{T_r}{T} - \frac{T_r}{T^\lambda} \right)} + \frac{c_p p}{R} \partial_p \overline{\left( \frac{T_r}{T} - \frac{T_r}{T^\lambda} \right)} \right]. & \quad (97)
 \end{aligned}$$

A côté de du terme en  $(\omega_\lambda T_\lambda)_\varphi^\lambda$ , la seconde partie de l'équation (97) est analogue à (69) et l'expression entre crochets est un terme de stabilité qui module la conversion barocline  $C(\bar{a}_E, \bar{k}_E)$  pour donner cette partie "verticale" de  $C_A$ . Quant au premier terme de  $C_A$  qui comprend une dérivée nord-sud  $\partial_y = (r_T)^{-1} \partial_\varphi$ , il s'écrit aussi

$$-c_p \overline{(v_\lambda T_\lambda)^\lambda \partial_y \left( \frac{T_r}{T} \frac{T_\varphi^\lambda}{T^\lambda} \right)} = -c_p \overline{(v_\lambda T_\lambda)^\lambda T_r \frac{1}{(T^\lambda)^2} \frac{\partial T^\lambda}{\partial y}}. \quad (98)$$

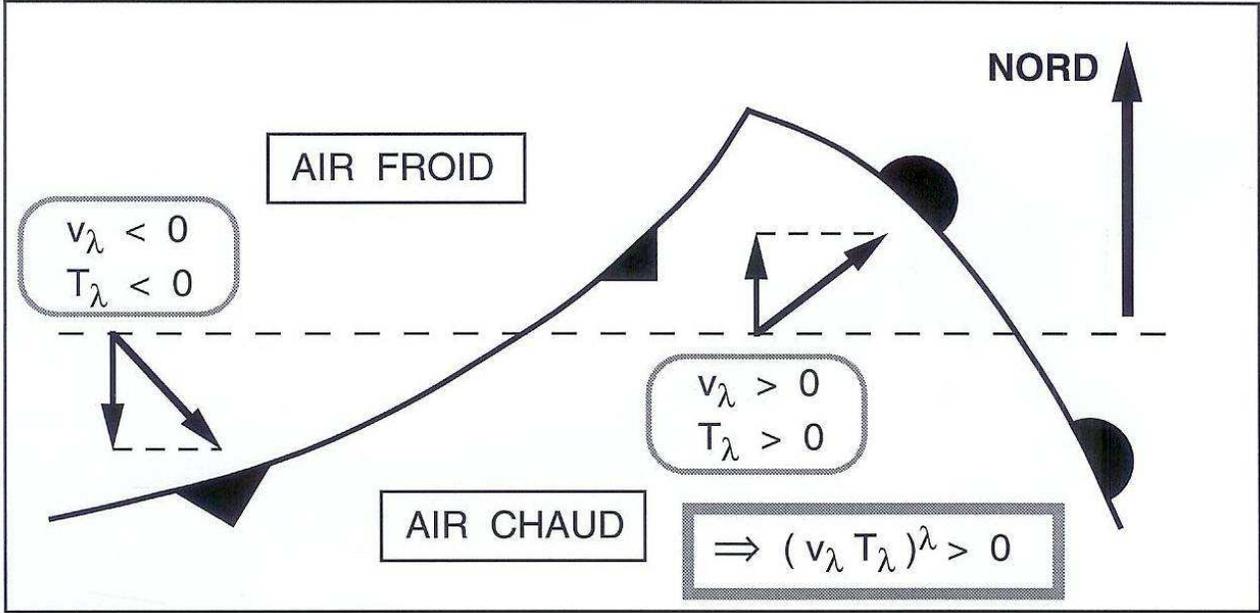


FIG. 15 – L'influence d'une perturbation barocline sur la partie "horizontale" de la conversion  $C_A = C(\overline{a_Z}, \overline{a_E})$ .

A grande échelle,  $\partial_y(T^\lambda)$  est négatif dans l'hémisphère nord et cette partie horizontale de  $C_A$  est alors du même signe que  $c_p (v_\lambda T_\lambda)^\lambda$  qui représente une contribution au transport de chaleur sensible  $h = c_p T + C^{ste}$  vers le nord. La partie (98) de  $C_A$  est plus généralement positive si elle opère à contre gradient, c'est à dire si le flux méridien de chaleur sensible tend à diminuer les gradients isobares nord-sud des moyennes zonales de température  $T^\lambda$ . C'est le cas pour les perturbations baroclines des zones tempérées d'après le schéma de la figure (15) où  $v_\lambda T_\lambda > 0$ .

Les applications météorologiques au cas de la circulation générale ont montré que la partie "horizontale" (98) est prépondérante devant (97). Mais ce résultat peut ne pas être vrai pour un domaine limité. La quantité  $C_A$  est la conversion dite barocline de l'enthalpie utilisable ( $\overline{a_Z}$  en  $\overline{a_E}$ ), elle est réalisée par l'intermédiaire des perturbations synoptiques de même nom. L'ensemble des conversions  $C_A$  et  $C_E$  forment, à l'intérieur du cycle interne de Lorenz, le chemin barocline des conversions d'énergie qui, au moins pour l'étude globale de la circulation générale, explique la création de l'énergie cinétique des perturbations ( $\overline{k_E}$ ) au dépend des gradients méridiens de température ( $\overline{a_Z}$ ). Cette importance du chemin barocline de l'énergie doit être démontrée à nouveau pour les études de systèmes plus locaux où les gradients horizontaux est-ouest, ou même verticaux, peuvent devenir prédominants.

On a retrouvé dans le cycle (82) trois des quatre conversions de Lorenz, c'est à dire  $C_Z = C(\overline{a_Z}, \overline{k_Z})$ ,  $C_E = C(\overline{a_E}, \overline{k_E})$  et  $C_A = C(\overline{a_Z}, \overline{a_E})$ . La quatrième conversion est  $C(\overline{k_Z}, \overline{k_E})$  qui est classiquement notée  $C_K$ . Elle est désignée sous le nom de conversion barotrope de l'énergie cinétique moyenne  $\overline{k_Z}$  en énergie cinétique des perturbations  $\overline{k_E}$ . En fait, on a vu que la formulation de

Lorenz correspondait à un échange entre ce qui est noté  $\overline{k_S} + \overline{k_Z}$  et  $\overline{k_E}$  dans la présente étude. La réunion des deux réservoirs  $\overline{k_S}$  et  $\overline{k_Z}$  revient à ne plus faire apparaître explicitement  $C(\overline{k_S}, \overline{k_Z})$  dans (82) et sur la figure (11). D'autre part, les termes  $\overline{B[k_c(SB)]}$  et  $\overline{B[k_c(ZE)]}$ ,  $C(\overline{\Phi}, \overline{k_S})$  et  $C(\overline{\Phi}, \overline{k_Z})$ ,  $\overline{d_S}$  et  $\overline{d_Z}$  sont regroupés deux à deux. Quant à la conversion  $C_K$  de Lorenz entre  $\overline{k_S} + \overline{k_Z}$  et  $\overline{k_E}$ , elle est constituée par la somme  $C(\overline{k_S}, \overline{k_E}) + C(\overline{k_Z}, \overline{k_E})$  qui s'écrit, en utilisant (86) et (92) et en remarquant que  $\partial_y(\overline{u}) = \partial_y(\overline{v}) = 0$ , sous la forme

$$- \left[ \overline{u_\lambda v_\lambda \partial_y(u^\lambda)} + \overline{v_\lambda v_\lambda \partial_y(v^\lambda)} + \overline{u_\lambda \omega_\lambda \partial_p(u^\lambda)} + \overline{v_\lambda \omega_\lambda \partial_p(v^\lambda)} \right]. \quad (99)$$

La formulation de Lorenz ne sera pas utilisée dans cette thèse et on notera  $C_K = C(\overline{k_Z}, \overline{k_E})$ . Les deux premiers termes de (99) sont identiques à ceux de (92) et les applications météorologiques ont montré qu'à l'échelle globale les termes de (92) qui dépendent de la dérivée méridienne sont plus importants que les termes qui dépendent de la dérivée par rapport à  $p$ . Le changement de formulation pour cette conversion  $C_K$  ne sera donc visible que pour les études sur domaines limités pour lesquelles, de toute façon, l'approche de Lorenz ne pouvait pas être utilisée. On remarquera que l'équation (92) est proche de (91) au sens où tous les termes s'écrivent, en notations abrégées, sous la forme  $\overline{(v)_\lambda (\dots)_\lambda \partial_y[(\dots)_\varphi^\lambda]}$  ou  $\overline{(\omega)_\lambda (\dots)_\lambda \partial_p[(\dots)_\varphi^\lambda]}$ . La forme (92) est cohérente avec les théories de la turbulence qui indiquent que les flux portent sur l'échelle des perturbations, ici  $(u)_\lambda$  et  $(v)_\lambda$  en association avec  $\overline{k_E}$ , alors que les gradients portent sur l'échelle la plus grande, ici  $(u)_\varphi^\lambda$  et  $(v)_\varphi^\lambda$  en association avec  $\overline{k_Z}$ . On retrouve une règle analogue pour la formulation de Lorenz (99) où les gradients sont calculés par rapport à  $(u)^\lambda$  et  $(v)^\lambda$ , en association avec l'échelle la plus grande  $\overline{k_S} + \overline{k_Z} = \overline{[(u^\lambda)^2 + (v^\lambda)^2]}/2$ .

La conversion barotrope  $C_K = C(\overline{k_Z}, \overline{k_E})$  est donc donnée par (92) et elle s'interprète comme une production dynamique de turbulence  $\overline{k_Z} - (\mathcal{P}_d) \rightarrow \overline{k_E}$ , ou encore comme une tendance à la diminution des gradients isobares nord-sud et verticaux de quantité de mouvement. On prendra comme exemple le terme  $-\overline{u_\lambda v_\lambda \partial_y(u^\lambda)} = -\overline{(u_\lambda v_\lambda)^\lambda \partial_y(u^\lambda)}$  pour lequel un gradient méridien  $\partial_y(u^\lambda)$  positif est atténué par un flux méridien  $(u_\lambda v_\lambda)^\lambda$  négatif, ce qui conduit bien à une contribution positive de  $C_K$ . Encore une fois, même si les études globales ont montré que c'est ce premier terme  $-\overline{u_\lambda v_\lambda \partial_y(u^\lambda)}$  qui est important dans (92), les études locales qui peuvent être entreprises à partir de cette équation peuvent modifier les poids relatifs des différents termes qui la composent. Le signe de  $(u_\lambda v_\lambda)^\lambda$  dépend globalement de l'inclinaison des axes de thalweg et des dorsales. On le voit sur la figure (16) où la plus faible composante zonale du flux de nord-ouest par rapport aux flux de sud-ouest se traduit par des valeurs de  $u_\lambda$  et de  $v_\lambda$  qui sont de même signe. On a dans cet exemple un flux de quantité de mouvement zonal qui est dirigé vers le nord. En moyenne sur le globe, on observe une valeur négative de  $C_K$ . On a paradoxalement une alimentation de  $\overline{k_Z}$  au dépend de l'énergie cinétique des perturbations  $\overline{k_E}$ , il y a une stabilisation barotrope de l'écoulement. Il s'agit d'une remontée de l'énergie cinétique dans le spectre des mouvements de petite échelle vers

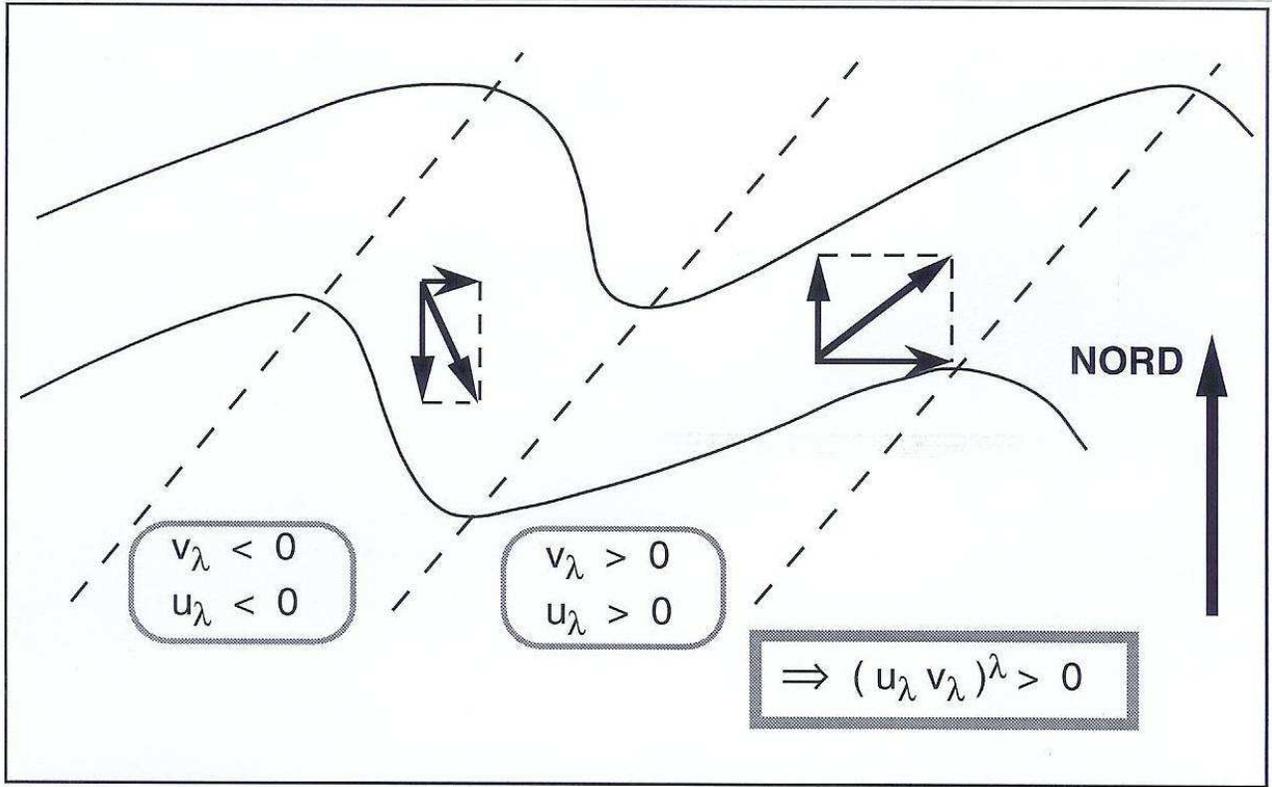


FIG. 16 – L'influence de l'inclinaison des axes de thalweg et de dorsales sur la partie "horizontale" de la conversion  $C_K = C(\overline{k_Z}, \overline{k_E})$ .

les mouvements de grande échelle, en accord avec les théories de la turbulence bidimensionnelle. A l'inverse, des valeurs positives de  $C_K$  traduisent une instabilité barotrope. Ce mécanisme est souvent invoqué pour expliquer la création de quelques phénomènes locaux (instabilité des jets, par exemple sur l'Afrique). Le cycle (82) est particulièrement bien adapté pour appréhender ce genre de phénomène local, à la fois selon l'horizontale et selon la verticale.

La partition de la conversion  $C(\overline{a_S}, \overline{a_B})$  en  $C(\overline{a_S}, \overline{a_Z}) + C(\overline{a_S}, \overline{a_E})$  ne modifie pas le raisonnement exposé en (2.4.3). On a ici encore

$$C(\overline{a_S}, \overline{a_Z}) = C(\overline{a_Z}, \overline{k_Z}) \left[ \frac{\overline{T} - T_r}{\overline{T}} + \frac{c_p p}{R \overline{T}} \frac{T_r}{\overline{T}} \frac{\partial \overline{T}}{\partial p} \right], \quad (100)$$

$$C(\overline{a_S}, \overline{a_E}) = C(\overline{a_E}, \overline{k_E}) \left[ \frac{\overline{T} - T_r}{\overline{T}} + \frac{c_p p}{R \overline{T}} \frac{T_r}{\overline{T}} \frac{\partial \overline{T}}{\partial p} \right]. \quad (101)$$

Le facteur de stabilité entre crochets est le même que dans (69). Ses valeurs sont données par la figure (10).

L'autre partition de  $C(\overline{k_S}, \overline{k_B})$  en  $C(\overline{k_S}, \overline{k_Z}) + C(\overline{k_S}, \overline{k_E})$  s'interprète, comme  $C(\overline{k_Z}, \overline{k_E})$ , en terme de production dynamique de turbulence. Il y a production si  $\overline{k_S} \rightarrow \overline{k_Z}$ ,  $\overline{k_S} \rightarrow \overline{k_E}$  ou  $\overline{k_Z} \rightarrow \overline{k_E}$ , les réservoirs  $(\overline{k_S}, \overline{k_Z}, \overline{k_E})$  étant rangés dans cet ordre de la plus grande vers la plus petite des échelles

de turbulence.

Les deux dernières conversions opèrent entre  $\overline{\Phi}$  et  $\overline{k_Z}$  ou entre  $\overline{\Phi}$  et  $\overline{k_E}$ . Les formulations (89) et (90) de  $C(\overline{\Phi}, \overline{k_Z})$  et  $C(\overline{\Phi}, \overline{k_E})$  sont analogues à l'expression (62) pour  $C(\overline{\Phi}, \overline{k_B}) = C(\overline{\Phi}, \overline{k_Z}) + C(\overline{\Phi}, \overline{k_E})$ . Les différences avec (62) consistent en la présence des perturbations  $u_\varphi^\lambda$ ,  $v_\varphi^\lambda$  et  $\omega_\varphi^\lambda$  pour  $C(\overline{\Phi}, \overline{k_Z})$ , des perturbations  $u_\lambda$ ,  $v_\lambda$  et  $\omega_\lambda$  pour  $C(\overline{\Phi}, \overline{k_E})$ .

En utilisant des approximations évidentes de (93) et de (94), les termes de chauffage différentiel  $\overline{g_Z}$  et  $\overline{g_E}$  dépendent principalement des corrélations entre  $T_\varphi^\lambda$  et  $(\dot{q})_\varphi^\lambda$  pour  $\overline{g_Z}$ , des corrélations entre  $T_\lambda$  et  $(\dot{q})_\lambda$  pour  $\overline{g_E}$ . Ces termes  $\overline{g_Z}$  et  $\overline{g_E}$  sont positifs en présence de chauffages différentiels efficaces au sens où il faut avoir un réchauffement des zones déjà chaudes et un refroidissement des zones déjà froides, l'effet global étant une accentuation des contrastes de température. Pour  $\overline{g_Z}$  il faut apprécier l'état fort/faible des chauffages et l'état chaud/froid des particules atmosphériques en analysant les variations nord-sud des moyennes zonales. Pour  $\overline{g_E}$  il faut définir ces chauffages différentiels sur chaque cercle de latitude, indépendamment les uns des autres.

Le terme  $\overline{g_Z}$  forme le moteur pour la circulation atmosphérique à grande échelle. Il est lié au contraste pôle-équateur de température et de chauffage qui sont en moyenne corrélés négativement, ce qui implique  $\overline{g_Z} > 0$  sur le globe.

Le terme  $\overline{g_E}$  est moins important à grande échelle, il dépend principalement des contrastes zonaux dus à la distribution des zones continentales et maritimes. Il peut cependant devenir primordial pour un domaine limité s'il existe dans la région d'étude un contraste terre/océan qui peut, en fonction de l'évolution diurne et en association avec les systèmes de brise par exemple, engendrer de fortes valeurs de  $\overline{g_E}$ .

Les deux dissipations  $\overline{d_Z}$  et  $\overline{d_E}$  données par (95) et (96) représentent les puits de  $\overline{k_Z}$  et de  $\overline{k_E}$  provoqués par les dissipations moléculaires et visqueuses d'une part, par les effets de friction avec le sol d'autre part. Les corrélations entre  $(\vec{u}_h)_\varphi^\lambda$  et  $(\vec{F})_\varphi^\lambda$  pour  $\overline{d_Z}$  et entre  $(\vec{u}_h)_\lambda$  et  $(\vec{F})_\lambda$  pour  $\overline{d_E}$  sont cohérentes avec les échelles spatiales impliquées dans  $\overline{k_Z}$  et  $\overline{k_E}$  (il s'agit des perturbations méridiennes des moyennes zonales pour  $\overline{k_Z}$ , des perturbations zonales pour  $\overline{k_E}$ ).

## 2.6 Les définitions de $T_r$ et de $p_r$ .

Les formulations (15) à (17) de  $a_h$ , ainsi que l'ensemble des résultats qui en découlent, dépendent des variables thermodynamiques  $T$  et  $p$ , mais aussi des deux constantes  $T_r$  et  $p_r$  qui ont été supposées constantes au cours de l'ensemble des calculs des sections précédentes. Il faut maintenant donner les définitions mathématiques et physiques de ces constantes qui seront directement reliées à des contraintes intégrales, une d'entre elles dérivant de la propriété locale suivante.

### 2.6.1 La loi de conservation locale.

La loi de conservation locale hydrostatique vérifiée par  $a_h$  est une loi de Bernoulli. On le vérifie en faisant la somme des deux équations d'évolution de  $a_h$  et de  $e_k$  (39) et en utilisant la relation  $d\Phi/dt = \partial_t(\Phi)_p + B(\Phi)$  :

$$\frac{d}{dt} (a_h + e_k + \Phi) = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_p + \left( 1 - \frac{T_r}{T} \right) \dot{q} + \vec{u}_h \cdot \vec{F}_h. \quad (102)$$

La quantité  $a_h + e_k + \Phi$  est ainsi conservée au cours du déplacement d'une particule fluide si  $\Phi$  est stationnaire au point considéré de la surface isobare et si en ce même point  $(1 - T_r/T) \dot{q}$  est nul, de même que  $\vec{u}_h \cdot \vec{F}_h$ . Ces deux dernières conditions correspondent à une absence de chauffage différentiel ( $\dot{q} = 0$  ou  $T = T_r$ ), avec une absence de dissipation due à la viscosité ou à la friction avec le sol.

Cette loi de Bernoulli est importante car elle montre qu'il y a un véritable échange entre les trois formes d'énergie  $e_k$ ,  $e_p = \Phi$  et  $a_h$ . L'enthalpie utilisable acquiert à ce titre une signification physique locale en tant que réservoir énergétique, au même titre que l'enthalpie qui vérifie elle aussi une loi de Bernoulli où le chauffage différentiel  $(1 - T_r/T) \dot{q}$  est remplacé par le chauffage direct  $\dot{q}$ .

### 2.6.2 La loi de conservation globale.

On part de la loi locale de Bernoulli (102) que l'on réécrit sous la forme alternative  $d/dt(a_h + e_k) = -B(\Phi) + (1 - T_r/T) \dot{q} - d$ . Par intégration sur l'ensemble de l'atmosphère,  $a_h$  devient  $A_h$  alors que  $e_k$  devient  $E_k$ . La dérivée de la somme  $A_h + E_k$  s'écrit

$$\frac{d}{dt} (A_h + E_k) = \frac{d}{dt} \left[ \iiint_{\mathcal{M}} \rho (a_h + e_k) dx dy dz \right] = \iiint_{\mathcal{M}} \rho \frac{d}{dt} (a_h + e_k) dx dy dz.$$

L'intégrale de  $B(\Phi)$  sur le globe étant nulle — il reste l'intégrale du flux de  $\Phi$  normal à la surface terrestre —, on obtient par remplacement de  $d/dt(a_h + e_k)$  :

$$\frac{d}{dt} (A_h + E_k) = \iiint_{\mathcal{M}} \left( 1 - \frac{T_r}{T} \right) \dot{q} dm - \iiint_{\mathcal{M}} (d) dm, \quad (103)$$

où l'élément de masse est  $dm = \rho dx dy dz$  et où  $d = \vec{u}_h \cdot \vec{F}_h$ . La relation (103) indique qu'en absence de chauffage différentiel  $(1 - T_r/T) \dot{q}$  et en absence de dissipation  $d$  la somme  $A_h + E_k$  est conservée. L'enthalpie utilisable globale  $A_h$  apparaît bien comme un réservoir qui communique avec l'énergie cinétique globale  $E_k$ .

### 2.6.3 La constante $T_r$ .

La source de  $A_h + E_k$  est donc le chauffage différentiel global  $\iiint_{\mathcal{M}} (1 - T_r/T) \dot{q} dm$ . En appliquant les idées de Lorenz (1967) et de Pearce (1978), il paraît souhaitable que tout chauffage uniforme  $\dot{q} = C^{ste}$  induise une production nulle de  $A_h + E_k$ , ce qui impose qu'à chaque instant  $\iiint_{\mathcal{M}} [1 - T_r(t)/T] dm = 0$ . Mais, avec cette définition, la température  $T_r(t)$  dépend du temps et on utilisera une contrainte plus générale qui va rendre  $T_r$  constant dans le temps.

La température  $T_r$  sera déterminée dans cette thèse en disant que tout chauffage uniforme dans l'espace et sur un certain intervalle de temps  $\Delta t = t_2 - t_1$  implique une production nulle de  $A_h + E_k$ . On obtient la relation intégrale suivante où  $M$  est la masse totale de l'atmosphère :

$$\frac{1}{T_r} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \iiint_{\mathcal{M}} \frac{1}{T} \frac{dm}{M} \right] dt, \quad (104)$$

$1/T_r$  étant ainsi la moyenne spatio-temporelle de  $1/T$ . Une valeur caractéristique de  $T_r$  est 250K dans les conditions climatiques actuelles.

### 2.6.4 La constante $p_r$ .

Une des propriétés qui doit être vérifiée par la fonction enthalpie utilisable est que  $A_h = A_T + A_p = 0$  pour une certaine distribution de  $T$  et de  $p$  que l'on peut identifier avec un "état de référence".

La propriété locale " $a_T = c_p T_r \mathcal{F}(T/T_r - 1) = 0 \iff T = T_r$ " indique que l'intégrale  $A_T$  est nulle pour une atmosphère isotherme à la température  $T_r$ . On le vérifie en utilisant la propriété de positivité de la fonction quadratique  $\mathcal{F}(X) = X - \ln(1 + X) = X^2/2 + o(X^2)$ .

A l'inverse, la composante  $a_p = R T_r \ln(p/p_r)$  peut prendre un signe quelconque et l'intégrale  $A_p = R T_r \iiint_{\mathcal{M}} \ln[p/p_r(t)] dm = 0$  est nulle si  $\ln[p_r(t)]$  est la moyenne spatiale de  $\ln(p)$ .

On pourra définir la pression  $p_r$  de manière similaire à  $T_r$  en imposant l'annulation de  $A_p$  en moyenne sur l'atmosphère et sur un certain intervalle de temps :

$$\ln(p_r) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \iiint_{\mathcal{M}} \ln(p) \frac{dm}{M} \right] dt, \quad (105)$$

$\ln(p_r)$  étant alors la moyenne spatio-temporelle de  $\ln(p)$ . Une valeur caractéristique de  $p_r$  est  $p_{00}/e \approx 368 \text{ hPa}$  (la valeur de  $p_r$  pour une colonne hydrostatique s'étendant de la pression  $p_{00} = 1000 \text{ hPa}$  jusqu'à  $p = 0$ ).

Il est toutefois possible de choisir d'autres définitions pour  $p_r$  puisque la valeur exacte de  $p_r$  n'influence pas les calculs numériques des cycles (56) et (82), sinon pour le calcul de la composante

$a_p$  elle-même. Mais cette composante n'intervient dans les équations que par le terme de bord  $B(a_p) = R\omega T_r / p$  qui ne dépend pas explicitement de  $p_r$ . L'intérêt de définir  $p_r$  à l'aide de (105) par annulation de  $A_p$  réside dans la volonté de se rapprocher des résultats de Pearce (1978) où implicitement  $A_p = 0$ .

## 2.7 Les généralisations.

L'introduction en (2.1) de la fonction enthalpie utilisable massique a permis la construction de cycles énergétiques de plus en plus complexes. Le chemin principal de l'énergie (41) entre  $a_p$ ,  $a_T$ ,  $e_k$  et  $\Phi$  a d'abord été obtenu en (2.1). On a ensuite séparé les champs en deux échelles spatiales : les moyennes isobares ( $\bar{\xi}$ ) et les perturbations par rapport à celles-ci ( $\xi'$ ). Le cycle d'ordre 1 qui en découle est donné par le système (56) de la section (2.4.2). Le cycle le plus complet (82) de la section (2.5.2) provient de la définition de trois échelles spatiales : les moyennes isobares  $\bar{\xi} = \xi^{\lambda\varphi}$ , les écarts entre les moyennes zonales et les moyennes isobares  $\xi_\varphi^\lambda = \xi^\lambda - \xi^{\lambda\varphi}$ , les écarts entre les valeurs des champs et leurs moyennes zonales  $\xi_\lambda = \xi - \xi^\lambda$ . Ce dernier cycle, d'ordre 2, étend l'approche météorologique de Lorenz au cas des domaines limités aux frontières ouvertes.

En guise de généralisation, il serait souhaitable que la formulation mathématique de ce cycle d'ordre 2 soit indépendante des directions horizontales du repère local, afin d'obtenir une application optimale de (82) à l'étude énergétique d'un domaine limité quelconque. Le problème se pose par exemple pour une circulation de brise où la ligne de côte est parallèle à la direction nord-sud. Il serait dans ce cas plus judicieux d'utiliser la séparation en  $\bar{\xi}$ ,  $\xi_\lambda^\varphi = \xi^\varphi - \xi^{\lambda\varphi}$  et  $\xi_\varphi = \xi - \xi^\varphi$  des champs, la symétrie évidente de cette circulation particulière justifiant l'emploi de la moyenne méridienne  $\xi^\varphi$  au lieu de la moyenne zonale  $\xi^\lambda$ . On peut aussi poser le problème de l'inclinaison des zones de vents forts qui justifierait l'utilisation de repères parallèles à ces jets, les axes formant un certain angle avec les directions zonales et méridiennes naturelles.

Une telle étude n'a pas été abordée, mais il semble qu'un changement de repère impliquant une rotation globale de toutes les variables thermodynamiques et cinématiques laisse invariant le cycle (82). Cette invariance est obtenue si les composantes  $u$  et  $v$  de  $\vec{u}_h$ , celles de  $\vec{F}_h$ , les opérateurs dérivées partielles  $\partial_x$  et  $\partial_y$ , ainsi que les moyennes  $\xi^{\lambda\varphi}$ ,  $\xi^\lambda$  et  $\xi^\varphi$  sont tous définis en accord avec les nouvelles directions des axes de coordonnées  $\lambda^*$  et  $\varphi^*$ . Ce changement de repère doit en particulier préserver la géométrie sphérique, les angles et les distances. La transformation qui convient est une rotation rigide tridimensionnelle globale des axes de coordonnées. On voit sur les équations de base (27) à (29) que le seul terme qui poserait un problème est l'accélération de Coriolis  $-f \vec{k} \times \vec{u}_h$  où la dépendance de  $f$  en  $2\Omega \sin(\varphi)$  dans le repère naturel géographique ne serait plus aussi simple après rotation du pôle (la partie en  $\sin(\varphi)$  devient une fonction complexe des nouvelles coordonnées  $\lambda^*$  et  $\varphi^*$ ). Mais ce terme de Coriolis disparaît après la multiplication scalaire

avec  $\vec{u}_h$  pour donner l'équation (30) qui constitue la base des cycles (56) et (82). L'invariance des équations de l'énergétique atmosphérique vis à vis de la rotation des axes de coordonnées nécessite donc l'absence de travail de la force de Coriolis, ce qui est vrai.

Une autre généralisation consiste à poursuivre les séparations de l'énergie utilisable  $A_h$  et de l'énergie cinétique  $E_k$  en échelles de perturbations zonales de plus en plus fines, à l'aide d'un examen séparé du comportement de chaque harmonique zonale de Fourier  $A_h(n)$  et  $E_k(n)$ . Il s'agit d'obtenir concrètement les équations d'évolution des  $A_h(n)$  et  $E_k(n)$  pour une troncature  $n = 0$  à  $N$ . Cette méthode a été appliquée à l'étude de nombreuses circulations atmosphériques, à la suite des travaux de Saltzman (1957). On citera comme exemple l'article de Depradine (1980).

Il est également possible de s'en tenir à la séparation de Lorenz et au calcul des termes du cycle (82), puis de réaliser à partir des résultats numériques obtenus une analyse de Fourier temporelle des termes afin d'évaluer l'intensité des différentes fréquences dans les échanges énergétiques (pour les réservoirs, les conversions, les termes de bord, les sources et les puits).

### **3 L'ENERGIE UTILISABLE EN METEOROLOGIE.**

A l'exception de l'exposé en (1.2) de l'historique du concept thermodynamique d'exergie, la notion d'enthalpie utilisable et les propriétés qui en découlent n'ont été brièvement comparées dans le chapitre (2) qu'aux deux approches météorologiques de Lorenz (1955, 1967) et de Pearce (1978). Ce chapitre (3) est consacré à une présentation succincte de l'ensemble des études atmosphériques jugées importantes. Comme en thermodynamique, on constatera que le concept d'énergie utilisable a été abordé en météorologie avec des points de vue fort nombreux et souvent différents. Il ne faut pas exclure que certaines contributions originales aient pu échapper à l'inventaire qui va suivre.

#### **3.1 Margules.**

Un des premiers exposés météorologique spécifiquement consacré à la notion d'énergie utilisable est celui de Margules (1905) — "On the energy of storms" — qui a été commenté et repris par Normand (1946).

La motivation de Margules est la recherche d'une explication à l'origine et au maintien des systèmes perturbés et des tempêtes, en mettant l'accent sur la création de l'énergie cinétique.

La première constatation est qu'il est improbable que toute l'énergie potentielle ou thermique créée par les échanges de chaleur puisse être intégralement transformée en énergie cinétique. On remarque en effet qu'une masse de  $1\text{ kg}$  possédant la vitesse importante de  $30\text{ ms}^{-1}$  correspond à une énergie cinétique de  $450\text{ J}$ . Or, une simple élévation isobare de la température de  $1\text{ K}$  pour cette même masse crée une augmentation de son énergie interne de  $1004\text{ J}$ . Il y a donc un déséquilibre frappant entre les effets thermique et cinématique au sein de l'atmosphère.

Margules construit son raisonnement sur l'étude de colonnes finies d'atmosphère qui sont par hypothèse isolées des influences extérieures (elles sont par exemple entourées de murs verticaux). La partie supérieure de ces colonnes est fermée par un piston de pression constante et leur base est constituée par la surface terrestre qui est supposée plane. On se reportera à la figure (17 a).

En partant d'un état quelconque de cette colonne représenté sur la figure (17 b) par les surfaces d'égale entropie  $\theta_4 > \dots > \theta_1$ , Margules démontre que tout autre état de la colonne obtenu à partir de (b) par une évolution adiabatique de chaque élément de masse (sans échange de chaleur ni de friction) doit posséder la même énergie totale. Autrement dit  $\Delta(E_c + E_p + E_i) = 0$ .

Si la colonne (b) est initialement au repos sans être en équilibre thermodynamique, elle se met naturellement en mouvement et cherche à atteindre un état final (c) d'équilibre stable. Margules postule que cet état est stratifié, les surfaces isobares et les isothermes étant horizontales, ainsi que les surfaces d'égale entropie. Par ailleurs, l'entropie  $s = c_p \ln(\theta) + C^{ste}$  et la température potentielle

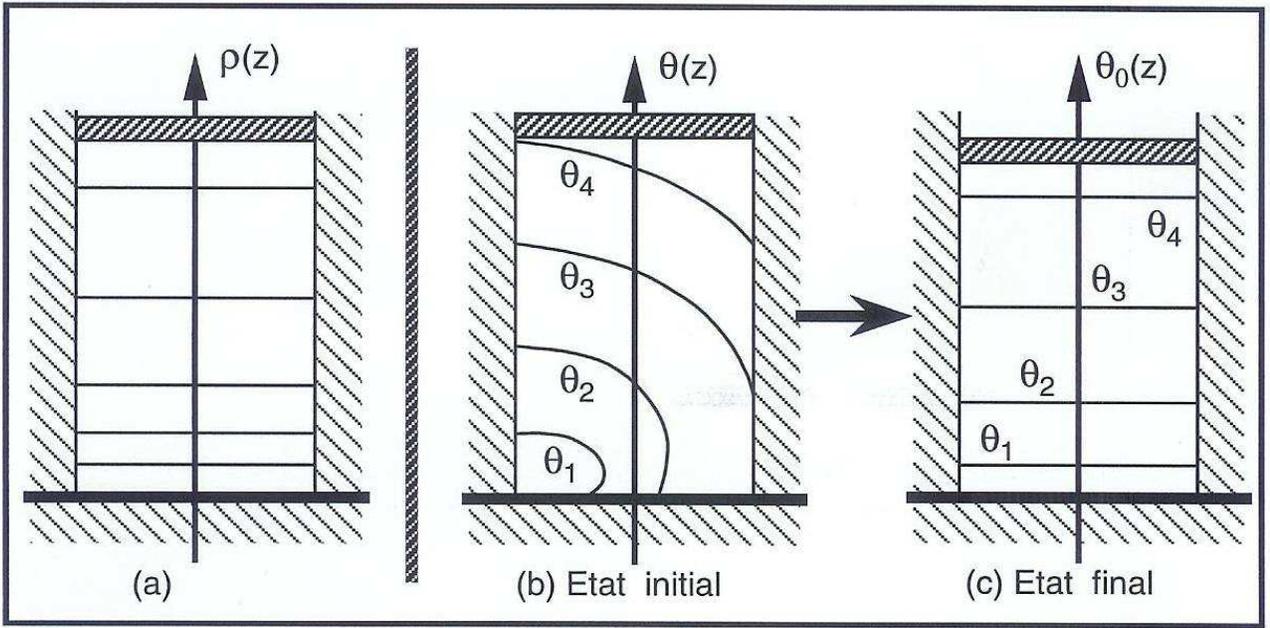


FIG. 17 – Margules (1905) et la notion de redistribution adiabatique de la masse d’une colonne atmosphérique. (a) : une colonne isolée ; (b) : une distribution de température potentielle vérifiant  $\theta_1 < \dots < \theta_4$  ; (c) : la redistribution adiabatique stratifiée associée.

$\theta = T (p_{00}/p)^\kappa$  doivent être des fonctions croissantes de  $z$  dans l’état final.

Pour construire l’état d’équilibre stable, on part de l’état initial où on recherche les masses de plus petite entropie que l’on place au bas de la colonne finale. On procède ensuite en prenant les entropies de plus en plus élevées de manière à former progressivement, par empilement, l’état final stratifié horizontalement et d’entropie croissante avec  $z$ . Dans cet état stratifié, les masses de même entropie peuvent être interchangeables sans modifier la structure thermodynamique de la colonne.

La loi de conservation de l’énergie totale s’applique à la transformation de l’état initial (I) à l’état final (F) :  $(E_c + E_p + E_i)_I = (E_c + E_p + E_i)_F$ . L’énergie cinétique disponible est alors défini par Margules par l’accroissement maximal  $\Delta(E_c) = (E_c)_F - (E_c)_I = (E_p + E_i)_I - (E_p + E_i)_F$ . L’expression  $(E_p + E_i)_F$  est la plus petite valeur que la somme des énergies potentielle et interne peut acquérir au cours de n’importe quelle évolution adiabatique qui part de l’état initial.

Margules appelle  $EPT = E_p + E_i$  l’énergie potentielle totale de la colonne. Pour une atmosphère hydrostatique avec  $dp = -\rho g dz$  et  $p = \rho RT$ , on trouve pour une colonne de base unité s’étendant de  $p_0(z_0)$  à  $p_h(z_h) < p_0$  :

$$E_p = \int_{z_0}^{z_h} (g z) \rho dz = \int_{p_h}^{p_0} z dp = [z p]_{p_h}^{p_0} + \int_{z_0}^{z_h} (R T) \rho dz,$$

où on a réalisé une intégration par parties. Mais l’enthalpie  $H$  de la colonne est l’intégrale de

$h = e_i + RT$ . L'énergie potentielle totale de la colonne finie s'écrit finalement

$$EPT = E_p + E_i = \int_{z_0}^{z_h} (g z + e_i) \rho dz = H + [z p]_{p_h}^{p_0}. \quad (106)$$

L'égalité  $H = E_p + E_i$  entre l'enthalpie et l' $EPT$  n'est obtenue que si le terme tout intégré est nul, c'est à dire si  $z_0 p_0 = 0$  et  $z_h p_h \rightarrow 0$ . Comme  $p_0 \neq 0$ ,  $z_0 p_0 = 0$  nécessite une absence de relief ( $z_0 = 0$ ). Le terme  $z_h p_h$  quant à lui ne tend vers 0 que pour les très grandes altitudes ( $p_h$  décroît exponentiellement avec  $z_h$ ).

L'application de la méthode de Margules à des situations concrètes montre que des colonnes réalistes d'atmosphère en déséquilibre thermodynamique peuvent générer après réarrangement adiabatique de leur masse des vents de l'ordre de  $15 \text{ ms}^{-1}$  correspondant à  $\Delta(E_c) \approx 225 \text{ J}$ . Même si l'hypothèse d'isolement thermique et mécanique de la colonne est irréaliste, les valeurs obtenues pour l'énergie cinétique libérable sont en bon accord avec les observations.

L'idée novatrice importante qu'il faut retenir de l'étude de Margules est l'introduction de l'état final stratifié d'énergie potentielle totale  $EPT = E_p + E_i$  minimale. Cet état final est accessible à partir d'une colonne d'atmosphère après un réarrangement adiabatique des éléments de masse de cette colonne.

La méthode préconisée par Margules n'a guère été appliquée dans sa forme originelle, sinon dans les ouvrages pédagogiques sur l'énergétique de l'atmosphère. On mentionnera toutefois l'essai de Quinet (1972) comme un exemple de calcul direct de l'énergie disponible de Margules  $\mathcal{A} = (E_p + E_i)_I - (E_p + E_i)_F$ .

Il faut enfin mentionner que Margules ne fait pas référence aux études de Thomson, Maxwell, Gibbs, Gouy ou Stodola. Il ne fait pas de liaison entre les notions thermodynamiques d'énergie et d'enthalpie utilisables et le concept d'énergie cinétique disponible, marquant et orientant ainsi un bon nombre des études météorologiques ultérieures.

### 3.2 Lorenz.

On aborde ici une des contributions majeures de l'énergétique atmosphérique. Il ne sera pas possible de décrire en détails tous les calculs qui, par ailleurs, sont devenu classiques dans les ouvrages de météorologie dynamique. On prendra toutefois la peine de décrire assez précisément les hypothèses nécessaires à l'obtention des termes énergétiques de Lorenz. Les équations d'évolution et les cycles seront ensuite simplement énoncés, sans démonstration et en ayant pour but la comparaison avec les résultats obtenus dans la partie (2.5) de cette thèse.

L'approche de Margules a fortement influencé les travaux de Lorenz dont les théories traitant

de l'atmosphère sèche débutent avec l'article de 1955 qui a été poursuivi par l'étude de 1960, une synthèse étant proposée dans la contribution de 1967.

En 1955, Lorenz part des acquis de Margules en généralisant ses résultats établis pour des colonnes verticales au cadre de l'atmosphère prise dans son ensemble. Pour Lorenz, l'atmosphère est constituée d'une juxtaposition de telles colonnes s'étendant du sol où la pression est  $p_S$  jusqu'à la limite supérieure qui est de pression nulle. Pour une colonne de surface unité qui est par hypothèse homogène horizontalement, la somme des énergies interne et potentielle forme l'énergie potentielle totale  $EPT_{col.} = (E_p)_{col.} + (E_i)_{col.}$  de Margules qui est donnée par (106). Lorenz suppose implicitement que le terme tout intégré  $[z p]_0^{p_S}$  est nul, ce qui traduit une absence de relief ( $z_S = 0$ ). On obtient alors pour une colonne d'atmosphère en équilibre hydrostatique une simple égalité entre l'énergie potentielle totale et l'enthalpie :

$$EPT_{col.} = H_{col.} = \int_0^\infty h \rho dz = \int_0^{p_S} h \frac{dp}{g}.$$

Pour calculer la fonction enthalpie  $h$ , on doit se donner une référence  $h_0$  qui vérifie  $h = c_p T + (h_0 - c_p T_0)$ . Le terme entre parenthèse  $h_0 - c_p T_0$  est une constante quand on traite de l'air sec de composition invariable et son intégrale sur la colonne sera noté  $\mathcal{C}_0$ . On a donc

$$EPT_{col.} = \int_0^{p_S} c_p T \frac{dp}{g} + \mathcal{C}_0. \quad (107)$$

Lorenz utilise ensuite la température potentielle  $\theta = T (p_{00}/p)^\kappa$  comme variable verticale, en supposant que  $\partial(\theta)/\partial z > 0$ , ce qui traduit une absence d'instabilité verticale sèche en rendant licite le changement de variable  $p \leftrightarrow \theta$ . On obtient après substitution et intégration par parties en  $\theta$  de (107) :

$$\begin{aligned} EPT_{col.} &= \frac{c_p}{g p_{00}^\kappa} \int_0^{p_S} \theta p^\kappa dp + \mathcal{C}_0 \\ &= \frac{c_p}{g (\kappa + 1) p_{00}^\kappa} \left( [\theta p^{\kappa+1}]_0^{p_S} + \int_{\theta_S}^\infty p^{\kappa+1} d\theta \right) + \mathcal{C}_0. \end{aligned} \quad (108)$$

La variable  $\theta$  varie de  $\theta_S$  à  $+\infty$  entre le sol et la limite supérieure de pression nulle. Regardons d'abord le terme tout intégré  $[\theta p^{\kappa+1}]_0^{p_S}$ . Pour  $p \rightarrow 0$ , le produit  $\theta p^{\kappa+1}$  varie comme  $T p p_{00}^\kappa$  qui tend vers 0 avec  $p$ . Il reste le terme  $\theta_S p_S^{\kappa+1}$  qui peut être transformé si on prolonge mathématiquement la pression  $p$  pour  $0 \leq \theta \leq \theta_S$ . On pose  $p(\theta \leq \theta_S) \equiv p_S$ . Dans ces conditions, l'intégrale de  $p(\theta)$  entre  $\theta = 0$  et  $\theta = \theta_S$  est égale à  $\theta_S p_S^{\kappa+1}$  et l'enthalpie de la colonne s'écrit finalement sous la forme

$$EPT_{col.} = H_{col.} = \frac{c_p}{g (\kappa + 1) p_{00}^\kappa} \int_0^\infty p^{\kappa+1} d\theta + \mathcal{C}_0.$$

On trouve pour l'ensemble de l'atmosphère

$$EPT = H = \frac{c_p}{g (\kappa + 1) p_{00}^\kappa} \iint_S \left( \int_0^\infty p^{\kappa+1} d\theta + \mathcal{C}_0 \right) d\Sigma, \quad (109)$$

alors que l'intégrale de (108) donne

$$EPT = H = \frac{c_p}{g p_{00}^\kappa} \iint_S \left( \int_0^{p_s} \theta p^\kappa dp + C_0 \right) d\Sigma. \quad (110)$$

### 3.2.1 L'APE de Lorenz.

C'est par l'intermédiaire de ces deux formulations de l'*EPT* – (109) et (110) – que Lorenz a proposé en 1955 et 1960 les définitions suivantes de l'énergie potentielle utilisable *APE* et de la stabilité statique globale *GSS*.

L'énergie potentielle utilisable est la partie de l'*EPT* ou de l'enthalpie globale de l'atmosphère qui est virtuellement convertible en énergie cinétique. Or on sait en suivant les idées de Margules que l'état de référence qui possède une enthalpie minimale et une énergie cinétique maximale est représenté par une configuration stratifiée des champs  $p$ ,  $T$  et  $\theta$  en fonction de la hauteur  $z$  au dessus de la surface terrestre.

On vérifie l'hypothèse de Margules en partant de la forme (109) de  $H$ . Si l'état de référence est obtenu à partir de l'état réel par un réarrangement adiabatique des particules atmosphériques, la masse comprise entre deux surfaces quelconques d'égale entropie est conservée. La pression en tout point de l'état de référence a donc pour valeur la moyenne de la pression sur la surface d'égale entropie de même température potentielle  $\theta$  dans l'état réel. On note  $p_r(\theta) = \langle p \rangle_\theta$  cette pression de l'état de référence. Le réarrangement est schématisé par les figures (18 a) et (18 b). L'énergie potentielle utilisable de Lorenz est obtenue en calculant la différence entre  $H$  et  $H_r$  :

$$APE = H - H_r = \frac{c_p}{g(\kappa + 1) p_{00}^\kappa} \iint_S \int_0^\infty \left( p^{\kappa+1} - [p_r(\theta)]^{\kappa+1} \right) d\theta d\Sigma. \quad (111)$$

On remarque que la constante arbitraire  $C_0$  disparaît lors du passage de (109) à (111). Ce résultat était souhaité, l'*APE* devenant ainsi indépendante des origines conventionnelles des fonctions énergie potentielle et énergie interne. Le fait que  $C_0$  ait la même valeur dans l'état réel et dans l'état de référence est une conséquence de la conservation de la masse au cours du réarrangement. D'autre part la fonction *APE* est bien positive et elle est nulle uniquement pour l'état de référence. On peut le vérifier en toute rigueur puisque  $\kappa = R/c_p > 0 \Rightarrow \langle p^{\kappa+1} \rangle_\theta - (\langle p \rangle_\theta)^{\kappa+1} \geq 0$ , mais on le voit déjà en réalisant un développement limité à l'ordre deux en  $p^* = p - p_r(\theta)$  :

$$APE \approx \frac{R}{2g p_{00}^\kappa} \iint_S \int_0^\infty [p_r(\theta)]^{\kappa+1} \left( \frac{p^*}{p_r(\theta)} \right)^2 d\theta d\Sigma. \quad (112)$$

L'*APE* dépend, d'après cette forme (112), de la variance de la pression sur les surfaces d'égale entropie et elle est bien positive. L'annulation se produit pour  $p^* = 0 \Rightarrow p = p_r(\theta)$  en tout point de l'atmosphère, ce qui signifie que l'état est stratifié horizontalement et qu'il coïncide avec l'état de référence de l'*APE*.

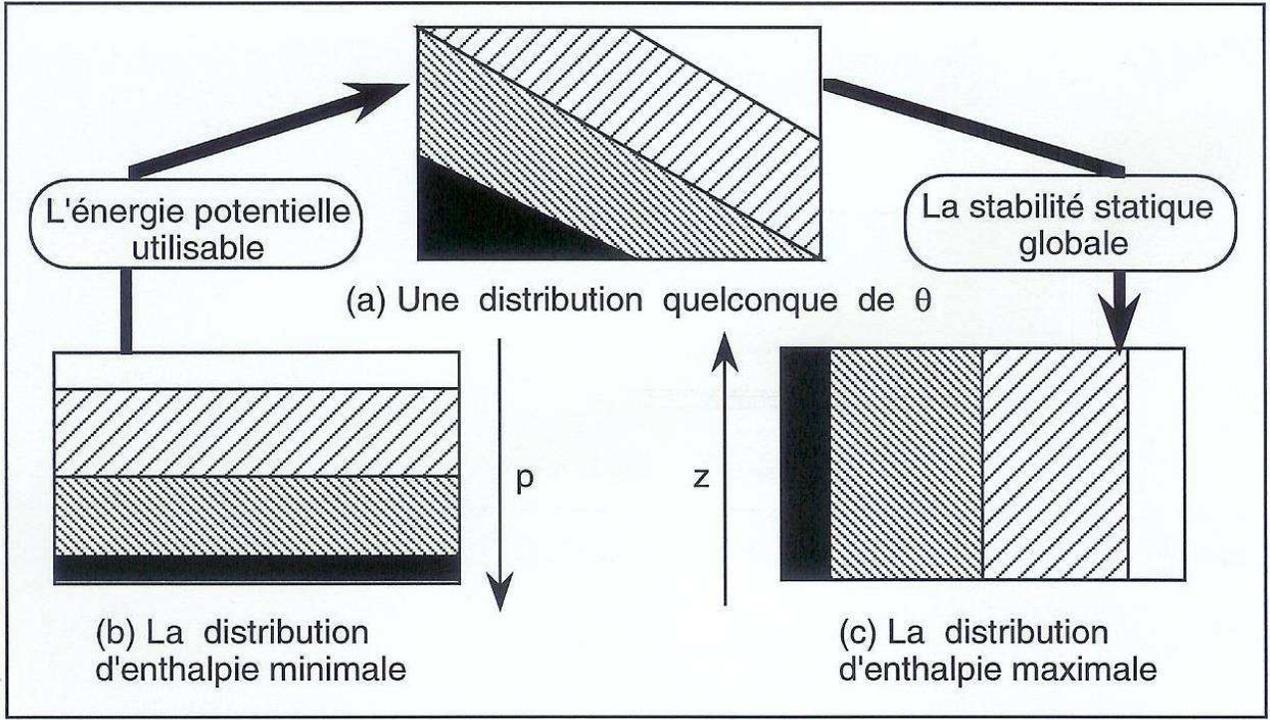


FIG. 18 – Les états de référence de Lorenz. En (a) une distribution quelconque de  $\theta$ . En (b) l'état de référence de l'énergie potentielle utilisable. En (c) l'état de référence de la stabilité statique globale.

### 3.2.2 La GSS de Lorenz.

De manière analogue à l'énergie potentielle utilisable, la stabilité statique globale est une quantité qui mesure l'écart de l'atmosphère à un état théorique de référence qui est représenté sur la figure (18) par le diagramme (c) où les surfaces d'égale entropie ont été rendues verticales après un réarrangement adiabatique de la masse. En partant de la forme (110) de  $H$  et en remarquant que dans ce nouvel état de référence stratifié verticalement chaque colonne verticale a une température potentielle constante, on définit la stabilité statique globale par la différence  $H_G - H$ . L'expression de l'enthalpie  $H_G$  de cet état de référence est obtenue en remplaçant dans (110)  $\int_0^{p_S} \theta p^\kappa dp = \theta p_S^{\kappa+1}/(1 + \kappa)$  par l'intégrale  $\int_0^{p_S} \theta p_S^\kappa/(1 + \kappa) dp$ . La différence  $GSS = H_G - H$  a donc pour expression

$$GSS = \frac{c_p}{g p_{00}^\kappa} \iint_S \int_0^{p_S} \theta \left( \frac{p_S^\kappa}{1 + \kappa} - p^\kappa \right) dp d\Sigma. \quad (113)$$

On peut alors modifier, comme pour le cas de l'APE, l'intégrale de (113) en utilisant la variable verticale  $\theta$  et en supposant que  $\partial\theta/\partial z > 0$ . On trouve après intégration par parties :

$$GSS = \frac{c_p}{g(\kappa + 1) p_{00}^\kappa} \iint_S \int_{\theta_S}^\infty (p_S^\kappa - p^\kappa) p d\theta d\Sigma. \quad (114)$$

Une autre façon d'exprimer (114) en revenant à la coordonnée verticale pression est

$$GSS = - \frac{c_p}{g(\kappa + 1) p_{00}^\kappa} \iint_S \int_0^{p_S} (p_S^\kappa - p^\kappa) p \frac{\partial\theta}{\partial p} dp d\Sigma. \quad (115)$$

On obtient une moyenne pondérée du terme de stabilité statique  $\partial\theta/\partial z = -\rho g \partial\theta/\partial p$ , d'où le nom donné à  $GSS$ . Comme pour l'énergie potentielle utilisable de Lorenz, la stabilité statique globale est positive et n'est pas influencée par la constante arbitraire  $C_0$ . La propriété  $GSS \geq 0$  se démontre à partir de l'expression (114) en observant que  $p_S^\kappa > p^\kappa$  en tout point de chaque colonne et que  $\partial\theta/\partial p < 0$ .

### 3.2.3 Les interprétations globales de l'APE et de la GSS.

Les résultats précédents indiquent que dans l'hypothèse très théorique où l'atmosphère ne peut évoluer qu'à travers des mouvements adiabatiques – c'est à dire  $\dot{q} = 0$  ou encore  $d/dt(\theta) = 0$  –, les deux états de Lorenz représentent des extremums de l'enthalpie. On a en effet pour tout réarrangement adiabatique de la masse :  $H_G \geq H \geq H_r$ . Le maximum  $H_G$  est atteint pour  $GSS = 0$  alors que le minimum  $H_r$  correspond à  $APE = 0$ .

En présence d'une transformation réelle de l'atmosphère ( $\dot{q} \neq 0$ ), les états de référence évoluent au cours du temps, ce qui implique que les changements de l'énergie potentielle utilisable et de la stabilité statique globale sont provoqués par les modifications conjointes de  $H$  et  $H_r$  pour l'APE, celles de  $H_G$  et  $H$  pour la  $GSS$ . Les inégalités  $H_G(t) \geq H(t) \geq H_r(t)$  restent vérifiées à tout instant, on a donc  $APE(t) \geq 0$  et  $GSS(t) \geq 0$ .

Trois points importants doivent être mentionnés pour souligner le caractère essentiellement global des deux fonctions  $APE$  et  $GSS$ . Les intégrations par parties qui conduisent aux équations (111) et (114) font que les fonctions  $p^\kappa(\lambda, \varphi, \theta)$ ,  $p_r^\kappa(\theta)$  et  $p(\lambda, \varphi, \theta) p_S^\kappa(\lambda, \varphi)$  qui forment les intégrandes des intégrales verticales sur la variable  $\theta$  ne représentent pas des termes spécifiques attachés à un point particulier. On résume le problème en disant que les intégrations par parties "délocalisent" les termes physiques selon la verticale.

D'autre part, le fait de réunir les enthalpies  $H_G$  et  $H$ , de même que  $H$  et  $H_r$ , en des intégrales uniques  $GSS$  et  $APE$  est certes fondé mathématiquement, mais les points de coordonnées  $(\lambda, \varphi, \theta)$  n'ont a priori aucun lien physique quand ils sont pris dans l'état réel et dans les deux états de référence. On ne sait rien de la position réelle d'arrivée des particules fluides après les réarrangements adiabatiques qui conduisent aux états de référence.

De plus, la forme même des éléments de masse est modifiée. Si on a dans l'état réel une particule fluide élémentaire de masse  $\rho dx dy dz = -g^{-1} (\partial p/\partial\theta) dx dy d\theta$ , la même particule a pour masse dans l'état de référence de l'APE :  $-g^{-1} (\partial p_r/\partial\theta) dx_r dy_r d\theta$ . Comme  $(\partial p/\partial\theta) \neq (\partial p_r/\partial\theta)$  on doit avoir  $dx_r dy_r \neq dx dy$ . Autrement dit, les intégrales verticales dans l'espace  $(x, y, \theta)$  ne représentent pas, pour l'état réel et les états de référence, des colonnes de masses identiques. Il doit y avoir une compensation horizontale sur les surfaces d'égale entropie et ce n'est que dans les

expressions globales (111) et (114) que les masses sont les mêmes (égales à celle de l'atmosphère).

### 3.2.4 APE, GSS et énergie cinétique.

Lors d'une évolution adiabatique de l'atmosphère prise dans son ensemble, l'énergie potentielle utilisable se transforme en énergie cinétique et vice versa. En présence de termes de chauffage  $\dot{q} \neq 0$ , l'évolution de l'enthalpie globale  $H = \iiint_{\mathcal{M}} (h) dm$  devient :

$$\frac{d}{dt}(H) = \iiint_{\mathcal{M}} \frac{R}{p} \omega T dm + \iiint_{\mathcal{M}} (\dot{q}) dm. \quad (116)$$

A partir des équations (111) et (114) où  $p_S(\lambda, \varphi)$  est supposée uniforme, on établit les équations suivantes

$$\frac{d}{dt}(APE) = \iiint_{\mathcal{M}} \frac{R}{p} \omega T dm + \iiint_{\mathcal{M}} \left( 1 - \frac{[p_r(\theta)]^\kappa}{p^\kappa} \right) \dot{q} dm, \quad (117)$$

$$\frac{d}{dt}(GSS) = - \iiint_{\mathcal{M}} \frac{R}{p} \omega T dm - \iiint_{\mathcal{M}} \left( 1 - \frac{p_S^\kappa}{(\kappa + 1) p^\kappa} \right) \dot{q} dm, \quad (118)$$

$$\frac{d}{dt}(E_k) = - \iiint_{\mathcal{M}} \frac{R}{p} \omega T dm - \iiint_{\mathcal{M}} (d) dm. \quad (119)$$

On obtient donc les trois relations de conservation

$$\frac{d}{dt}(E_k + APE) = \iiint_{\mathcal{M}} \left( 1 - \frac{[p_r(\theta)]^\kappa}{p^\kappa} \right) \dot{q} dm - \iiint_{\mathcal{M}} (d) dm, \quad (120)$$

$$\frac{d}{dt}(E_k - GSS) = \iiint_{\mathcal{M}} \left( 1 - \frac{p_S^\kappa}{(\kappa + 1) p^\kappa} \right) \dot{q} dm - \iiint_{\mathcal{M}} (d) dm, \quad (121)$$

$$\frac{d}{dt}(APE + GSS) = \frac{d}{dt}(H_G - H_r) = - \iiint_{\mathcal{M}} \left( p_r^\kappa - \frac{p_S^\kappa}{\kappa + 1} \right) \frac{\dot{q}}{p^\kappa} dm. \quad (122)$$

On retrouve avec l'équation (120) une forme similaire au résultat (103) de cette thèse concernant l'enthalpie utilisable globale. Le chauffage différentiel de Lorenz est une modulation de  $\dot{q}$  par le facteur d'efficacité  $\eta_L = 1 - [p_r(\theta)]^\kappa / p^\kappa$ , alors que le facteur d'efficacité de l'enthalpie utilisable est  $\eta_T = 1 - T_r / T$ . Mais si on pose  $T_\theta(\theta) = \theta [p_r(\theta) / p_{00}]^\kappa$ , alors  $\eta_L(\theta) = 1 - T_\theta / T$  et on voit que la différence entre  $\eta_L$  et  $\eta_T$  est due à la dépendance de  $T_\theta$  avec  $\theta$  alors que  $T_r$  est constant dans l'étude présente.

Pour l'équation (121), le facteur d'efficacité est  $\eta_S = 1 - p_S^\kappa / [(\kappa + 1) p^\kappa]$ . Avec  $p_S \approx 1000 hPa$ , on trouve  $p_S / (\kappa + 1)^{1/\kappa} \approx 415 hPa$  et  $\eta_S$  est positif dans la basse troposphère, pour  $p > 415 hPa$ . Le caractère différentiel joue pour  $GSS$  entre la basse troposphère et les couches situées au dessus. Le terme de production de  $GSS$  possède ainsi un comportement qui est proche de celui de l' $APE$ , avec un signe contraire.

L'ensemble de ces remarques indique que la stabilité statique globale représente en quelque sorte le complémentaire de l' $APE$  entre les valeurs extrêmes  $H_r$  et  $H_G$  (voir la figure 19 a). Mais

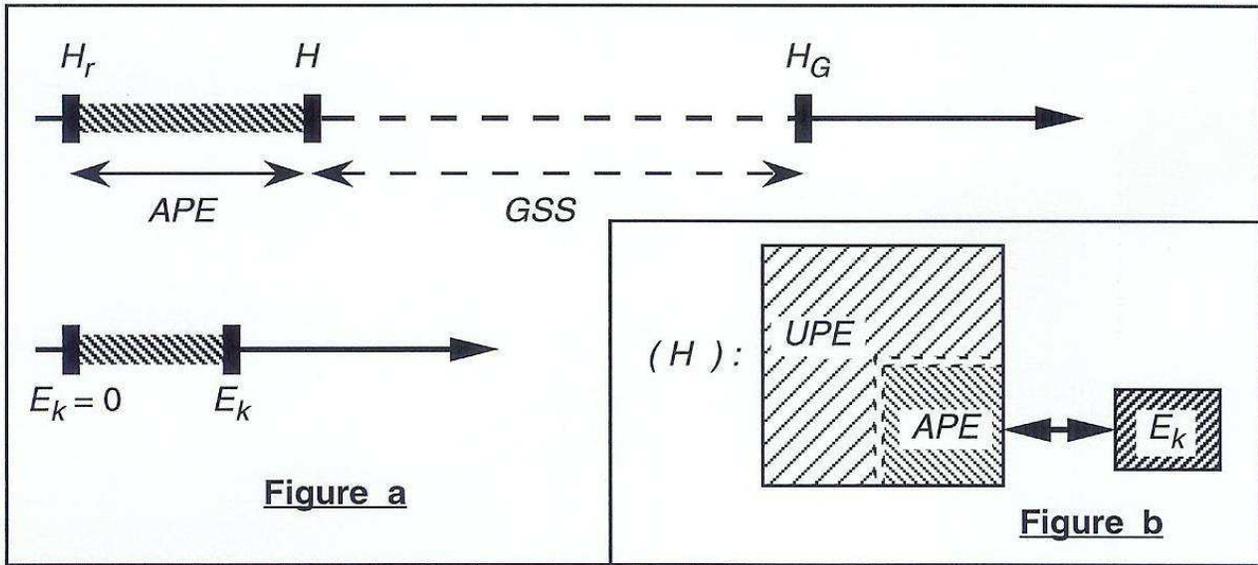


FIG. 19 – Une représentation schématique des trois quantités  $APE$ ,  $GSS$  et  $E_k$ . Sur la figure (a) : une vision utilisant les axes de l'enthalpie et de l'énergie cinétique. Sur la figure (b) : la vision en termes de réservoirs énergétiques.

il ne faut pas confondre la quantité  $GSS$  avec l'énergie potentielle inutilisable  $UPE$  qui est le complémentaire de l' $APE$  dans l'enthalpie  $H$  :  $UPE = H - APE$ .

Pour des évolutions adiabatiques et sans dissipation, les équations (120) à (122) signifient que les sommes  $E_k + APE$ ,  $E_k - GSS$  et  $APE + GSS$  sont constantes. Une baisse de l' $APE$  se fait ainsi au profit de l'énergie cinétique et de la stabilité statique globale, la somme  $APE + GSS = H_G - H_r$  restant constante. En particulier, une augmentation de l'énergie cinétique s'accompagne d'une stabilisation de l'atmosphère qui s'explique par la forme de la conversion  $-R \overline{\omega T} / p$  dont la partie  $-R \overline{\omega' T'}$  /  $p$  montre que l' $APE$  décroît et  $E_k$  augmente si les zones chaudes montent ( $dp/dt < 0$ ) et si les zones froides descendent ( $dp/dt > 0$ ). Ces processus impliquent une augmentation de la stabilité statique locale  $\partial\theta/\partial z$ .

A l'inverse, une baisse de l' $APE$  ne se fait pas forcément au dépend de l'énergie potentielle inutilisable. On a d'après (116) et (117)  $d/dt(UPE) = \iiint_{\mathcal{M}} (p_r^\kappa / p^\kappa) \dot{q} dm$  et pour une transformation adiabatique  $d/dt(UPE) = 0$  alors que, dans ce cas, les évolutions  $-d/dt(APE)$ ,  $d/dt(GSS)$  et  $d/dt(E_k)$  sont égales au terme de conversion  $C(APE, E_k) = -\iiint_{\mathcal{M}} R \omega T / p dm$ . On voit ainsi, à l'appui de la figure (19 b), que  $E_k$  communique de la même façon avec les réservoirs  $H$  et  $APE$  par l'intermédiaire de  $C(H, E_k) = C(APE, E_k)$ , la partie inutilisable  $UPE$  n'évoluant que par les chauffages non différentiels et inefficaces.

Il faut en fait nettement différencier la stabilité statique globale de Lorenz de la composante de stabilité statique  $A_S$  qui est issue de l'enthalpie utilisable  $A_h = A_p + A_S + A_B$  et qui a été

introduite historiquement par Pearce (1978). Dans cette thèse,  $A_S$  est une partie de  $A_h$  et son évolution dépend d'après (56) et (65) d'un chauffage différentiel  $(1 - T_r/\bar{T}) \bar{q}$ , comme pour  $GSS$ . Cet éventuel rapprochement entre  $A_S$  et  $GSS$  a été proposé par quelques personnes et il fallait décrire précisément les différences et les similitudes entre les deux quantités.

### 3.2.5 Ordres de grandeur.

La forme dite exacte de l' $APE$  (111) possède une approximation donnée par l'intégrale (112). Mais il est mal commode de travailler avec la coordonnée  $\theta$ . Une expression encore plus approchée a été obtenue par Lorenz à la suite de nombreuses hypothèses qui ne seront pas exposées ici. Elle utilise la coordonnée verticale  $p$  (ou  $z$ ) :

$$APE \approx A_L = \iiint_{\mathcal{M}} a_L \, dm = \iiint_{\mathcal{M}} \frac{g}{2} \frac{(T')^2}{\bar{\sigma}} \, dm = \iint_S \int_0^{ps} \frac{(T')^2}{2\bar{\sigma}} \, dp \, d\Sigma \quad (123)$$

où, comme dans l'équation (2) de la section (1.1.2),  $T' = T - \bar{T}$  est l'écart à la moyenne isobare  $\bar{T}(p)$  et où  $\bar{\sigma}$  est un paramètre de stabilité lié au profil vertical de  $\bar{T}(p)$  :

$$\bar{\sigma}(p) = \frac{g p}{R} \left[ \frac{R}{c_p} \frac{\bar{T}}{p} - \frac{\partial \bar{T}}{\partial p} \right] = - \frac{g \bar{T}}{R} \frac{\partial \ln(\theta)}{\partial \ln(p)} = - \frac{g \bar{T}}{R c_p} \frac{\partial \bar{s}}{\partial \ln(p)}. \quad (124)$$

La forme approchée  $A_L$  dépend ainsi de la variance de la température sur les surfaces isobares entourant le globe, mais aussi du paramètre de stabilité  $\bar{\sigma}(p)$  qui est lié à la variation selon la verticale de la moyenne isobare de l'entropie  $-\partial \bar{s}/\partial \ln(p)$

On doit comparer l'ordre de grandeur de l'énergie potentielle  $A_L$  donnée par (123) avec celui de l'enthalpie qui correspond, d'après (107), à

$$\Delta(H) = H - H_0 = \iint_S \int_0^{ps} \frac{c_p (T - T_0)}{g} \, dp \, d\Sigma, \quad (125)$$

où  $T_0$  est une valeur caractéristique constante (par exemple  $250 K$ ). Comparer  $A_L$  et  $\Delta(H)$  revient à comparer les valeurs des intégrandes  $(T')^2 / (2\bar{\sigma})$  et  $c_p |T - T_0| / g$  en prenant typiquement  $|T'| \approx 15 K$  et  $|T - T_0| \approx 30 K$ . Pour évaluer  $\bar{\sigma}$  on se sert de la dernière expression de (124) où dans la troposphère  $\partial \bar{s}/\partial \ln(p) \approx c_p \Rightarrow \bar{\sigma} \approx -g \bar{T} / R$ . On s'est placé hors de la couche limite où on pourrait avoir localement  $\partial s/\partial \ln(p) = 0$  dans les zones neutres. On trouve finalement  $\bar{\sigma} \approx 2 K^2 m^{-1}$  et les quantités  $H - H_0$ ,  $A_L$  et  $E_k$  sont approximativement dans les proportions  $c_p |T - T_0| / g$ ,  $(T')^2 / (2\bar{\sigma})$  et  $\|\vec{u}_h\|^2 / (2g)$ , soit respectivement  $3000 m$ ,  $55 m$  et  $5 m$  avec  $\|\vec{u}_h\| \approx 10 m s^{-1}$ . On obtient  $E_k/\Delta H \approx 1/600$  et  $E_k/A_L \approx 1/10$ , avec  $A_L/\Delta H \approx 1/60$ . Ainsi,  $A_L$  est très inférieure à  $\Delta H$  est on est bien dans le cadre de la figure (19 b) où  $E_k$  communique avec un sous réservoir  $A_L$  qui ne possède qu'un seul ordre de grandeur d'écart, au lieu de plus de deux entre  $E_k$  et  $\Delta H$ .

Lorenz a donc réussi à isoler un sous réservoir de  $H$  qui a de bonnes propriétés : il est positif, nul pour l'atmosphère de référence, il est en ordre de grandeur peu différent de  $E_k$  et la conversion adiabatique entre  $E_k$  et l' $APE$  est la même que celle entre  $E_k$  et  $H$ . Mais la forme approchée (123) qui seule conduit à des résultats exploitables théoriquement et numériquement possède un inconvénient important :  $\bar{\sigma}$  est très faible – voire nul – dans la couche limite ce qui rend les valeurs de  $(T')^2 / (2\bar{\sigma})$  très élevées – voire infinies – près du sol. C'est la zone de l'atmosphère où les hypothèses de Lorenz sont les moins bien vérifiées.

Pour évaluer l'ordre de grandeur de la stabilité statique globale  $GSS$  on utilise une forme approchée de (115) où on pose  $p \partial\theta/\partial p \approx p \partial\bar{\theta}/\partial p = -R (p_{00}/p)^\kappa \bar{\sigma}/g$  :

$$GSS \approx \frac{R c_p}{g (\kappa + 1)} \left( \iiint_S d\Sigma \right) \int_0^{p_S} \left[ \left( \frac{p_S}{p} \right)^\kappa - 1 \right] \bar{\sigma} \frac{dp}{g}. \quad (126)$$

On sait que  $\bar{\sigma}$  avoisine  $1.5 K^2 m^{-1}$  dans la troposphère où  $[(p_S/p)^\kappa - 1]$  varie de 0 à 1. Au dessus, dans la stratosphère,  $\bar{\sigma}$  est proche de  $3 K^2 m^{-1}$  et  $[(p_S/p)^\kappa - 1]$  varie typiquement de 0 à  $1 K^2 m^{-1}$  entre 1000 et 200 hPa, puis atteint  $4 K^2 m^{-1}$  au dessus. Ainsi l'intégrande  $R c_p [(p_S/p)^\kappa - 1] \bar{\sigma} / [g^2 (\kappa + 1)]$  varie de 0 et 2000 m jusqu'à 200 hPa, atteignant 9000 m au dessus. On obtient donc en valeur intégrées  $GSS \approx \Delta H/3$  puisque l'intégrande  $c_p |T - T_0| / g$  de  $\Delta H$  est de l'ordre de 3000 m. Par conséquent,  $GSS \approx 20 A_L \approx 20 APE$ , ce qui justifie la disproportion des positions de  $H_r$ ,  $H$  et  $H_G$  dans le premier schéma de la figure (19 a).

### 3.2.6 Le cycle de Lorenz.

Lorenz s'est servi de la forme approchée (123) de l'énergie utilisable  $A_L$  pour déterminer le cycle d'énergie de l'atmosphère. Ce cycle global relie entre elles les évolutions de  $A_L$  et de l'énergie cinétique  $E_k$ , en ayant auparavant séparé les réservoirs globaux en quatre composantes :  $(A_L)_Z + (A_L)_E$  et  $(K_L)_Z + (K_L)_E$ .

Si on utilise les notations de la section (2.5.1), les composantes de Lorenz s'écrivent

$$(A_L)_Z = \iiint_{\mathcal{M}} \frac{g}{2\bar{\sigma}} (T_\varphi^\lambda)^2 dm, \quad (127)$$

$$(A_L)_E = \iiint_{\mathcal{M}} \frac{g}{2\bar{\sigma}} (T_\lambda)^2 dm, \quad (128)$$

$$(K_L)_Z = \iiint_{\mathcal{M}} \frac{1}{2} \left[ (u^\lambda)^2 + (v^\lambda)^2 \right] dm, \quad (129)$$

$$(K_L)_E = \iiint_{\mathcal{M}} \frac{1}{2} \left[ (u_\lambda)^2 + (v_\lambda)^2 \right] dm. \quad (130)$$

On voit que la plus grande différence avec les expressions de la section (2.5.1) de cette thèse provient de la présence des réservoirs  $A_p$  et  $A_S$  qui n'existent pas avec l'approche de Lorenz, ainsi que dans la décomposition adoptée ici de  $(K_L)_Z$  en  $K_S + K_Z$ .

D'après les développements au premier ordre en  $X$  de  $\mathcal{F}(X)$  et en considérant les expressions (73) et (74), les composantes  $A_Z$  et  $A_E$  de l'enthalpie utilisable sont les intégrales des fonctions  $[c_p T_r/(\bar{T})^2] (T_\varphi^\lambda)^2/2$  et  $[c_p T_r/(T^\lambda)^2] (T_\lambda)^2/2$ . Ces fonctions locales sont proches dans leurs formes des numérateurs des intégrandes de  $(A_L)_Z$  et  $(A_L)_E$ , alors que l'information apportée par le dénominateur  $\bar{\sigma}$  des expressions de Lorenz est en quelque sorte reportée dans la composante de stabilité statique  $A_S$ . De plus, l'intégrale  $A_p$  est nulle par définition de  $p_r$ .

On conclut que l'ensemble constitué des réservoirs  $A_S$ ,  $A_Z$  et  $A_E$  qui sont issus de l'enthalpie utilisable n'est pas fondamentalement différent du couple  $(A_L)_Z$  et  $(A_L)_E$  de Lorenz. Il faut considérer ces deux approches comme complémentaires et sensiblement équivalentes tant que l'on reste à l'échelle globale.

La séparation de  $(K_L)_Z$  en  $K_S + K_Z$  qui est réalisée dans la section (2.5) constitue un changement par rapport à la vision de Lorenz et les implications physiques de cette modification vont être mis en évidence en comparant le cycle d'ordre deux (82) de la section (2.5.2) avec le cycle global de Lorenz qui s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t(A_L)_Z = -(C_L)_A - (C_L)_Z + (G_L)_Z, \\ \partial_t(A_L)_E = +(C_L)_A - (C_L)_E + (G_L)_E, \\ \partial_t(K_L)_Z = -(C_L)_K + (C_L)_Z - (D_L)_Z, \\ \partial_t(K_L)_E = +(C_L)_K + (C_L)_E - (D_L)_E. \end{cases} \quad (131)$$

Ce cycle (131) n'est pas exact du fait des approximations de la formulation (123) de  $A_L$ , auxquelles s'ajoutent les développements limités et les abandons de corrélations triples lors des calculs des évolutions temporelles de  $(A_L)_Z$  et de  $(A_L)_E$ . A l'inverse, on rappelle que tout les termes du cycle isobare (82) sont établis de manière exacte.

Le cycle de Lorenz (131) correspond aux expressions suivantes :

$$(G_L)_Z = + \iiint_{\mathcal{M}} \frac{g}{c_p \bar{\sigma}} (\dot{q})_\varphi^\lambda (T)_\varphi^\lambda dm, \quad (132)$$

$$(G_L)_E = + \iiint_{\mathcal{M}} \frac{g}{c_p \bar{\sigma}} (\dot{q})_\lambda (T)_\lambda dm, \quad (133)$$

$$(D_L)_Z = - \iiint_{\mathcal{M}} (\vec{u}_h)^\lambda \cdot (\vec{F}_h)^\lambda dm, \quad (134)$$

$$(D_L)_E = - \iiint_{\mathcal{M}} (\vec{u}_h)_\lambda \cdot (\vec{F}_h)_\lambda dm, \quad (135)$$

et

$$(C_L)_Z = - \iiint_{\mathcal{M}} \frac{R}{p} \omega^\lambda T^\lambda dm = - \iiint_{\mathcal{M}} \frac{R}{p} \omega_\varphi^\lambda T_\varphi^\lambda dm, \quad (136)$$

$$(C_L)_E = - \iiint_{\mathcal{M}} \frac{R}{p} \omega_\lambda T_\lambda dm, \quad (137)$$

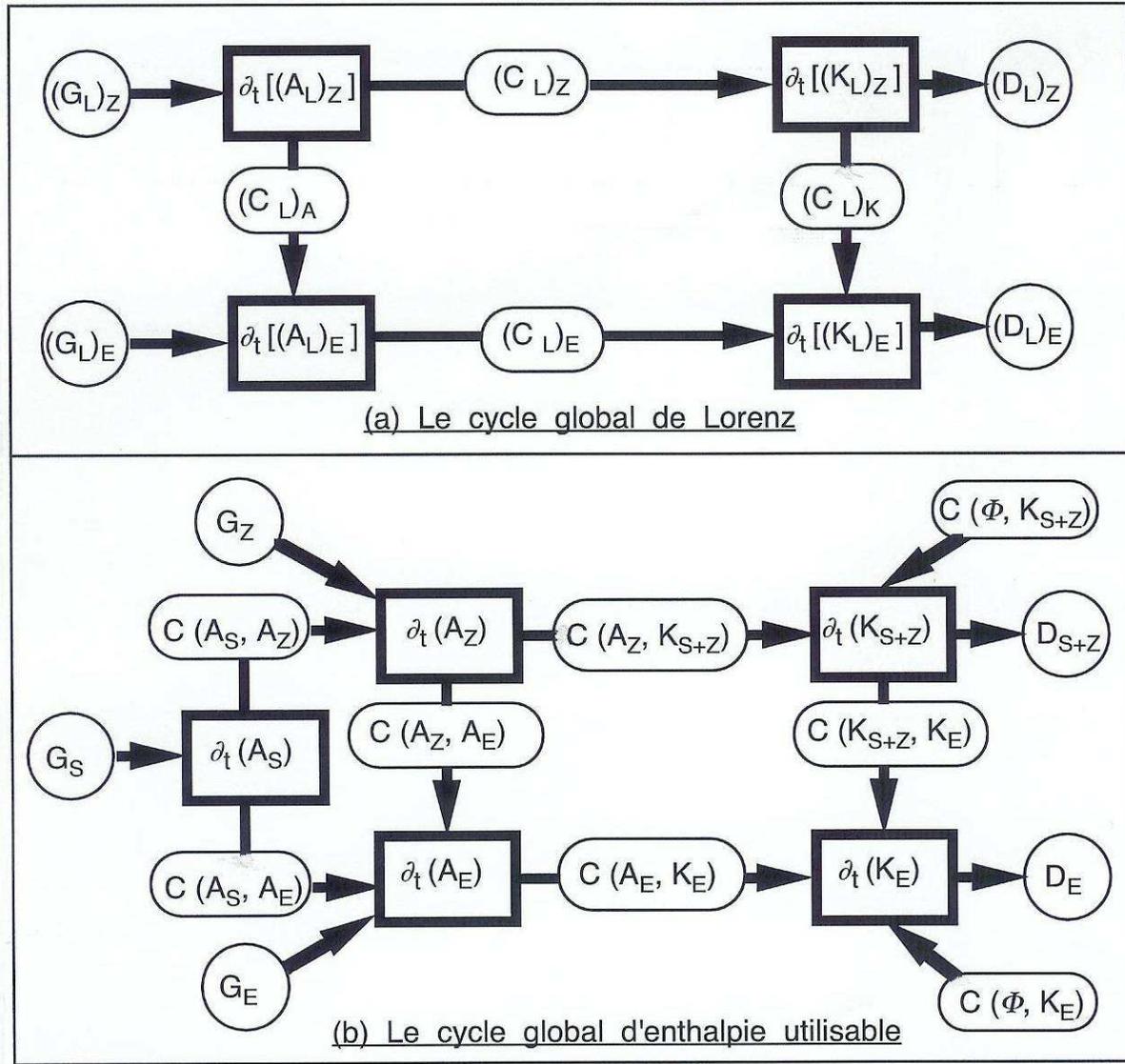


FIG. 20 – Les schémas des cycles énergétiques globaux. (a) le cycle de Lorenz. (b) le cycle de l'enthalpie utilisable.

$$(C_L)_A = - \iiint_{\mathcal{M}} \frac{\bar{\theta}}{\bar{T}} \left[ (v_\lambda T_\lambda)^\lambda \frac{\partial}{\partial y} + (\omega_\lambda T_\lambda)^\lambda \frac{\partial}{\partial p} \right] \left( \frac{g}{\bar{\sigma}} \frac{\bar{T}}{\bar{\theta}} T_\varphi^\lambda \right) dm, \quad (138)$$

$$\begin{aligned} (C_L)_K = & - \iiint_{\mathcal{M}} \left[ \cos(\varphi) (u_\lambda v_\lambda)^\lambda \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u^\lambda}{\cos(\varphi)} \right) + (u_\lambda \omega_\lambda)^\lambda \frac{\partial}{\partial p} (u^\lambda) \right] dm \\ & - \iiint_{\mathcal{M}} \left[ \cos(\varphi) (v_\lambda v_\lambda)^\lambda \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v^\lambda}{\cos(\varphi)} \right) + (v_\lambda \omega_\lambda)^\lambda \frac{\partial}{\partial p} (v^\lambda) \right] dm \\ & - \iiint_{\mathcal{M}} \frac{\tan(\varphi)}{r_T} \left[ (u_\lambda u_\lambda)^\lambda + (v_\lambda v_\lambda)^\lambda \right] (v^\lambda) dm. \end{aligned} \quad (139)$$

Pour réaliser une comparaison avec le cycle global d'enthalpie utilisable il suffit d'intégrer selon la verticale le cycle (82) en supposant que les moyennes isobares sont étendues à l'ensemble du globe. Par cette méthode, les termes de divergence de flux  $\overline{B(\dots)}$  disparaissent, ainsi que tous les termes

qui contiennent  $\bar{\omega} = \omega^\lambda \varphi \equiv 0$ . Pour rendre les cycles plus comparables, on utilisera les notations  $K_{S+Z} = K_S + K_Z$  et  $D_{S+Z} = D_S + D_Z$ .

Les résultats sont schématisés sur la figure (20) qui indique une similitude entre l'approche de Lorenz et celle de cette thèse. On remarque en intégrant (87) et (88) que l'on a les égalités strictes  $(C_L)_Z = C(A_Z, K_Z)$  et  $(C_L)_E = C(A_E, K_E)$ . On a aussi d'après (67), (95) et (96)  $(D_L)_Z = D_{S+Z}$  et  $(D_L)_E = D_E$ . En revanche, en intégrant (93) et (94), on observe que les termes de chauffage différentiel  $G_Z$  et  $G_E$  sont différents de  $(G_L)_Z$  et  $(G_L)_E$  :  $G_Z$  est l'intégrale de  $[T_r/(\bar{T}T^\lambda)]\dot{q}T_\varphi^\lambda$  et  $G_E$  est l'intégrale de  $[T_r/(TT^\lambda)]\dot{q}T_\lambda$ . Ces expressions ne sont toutefois pas très différentes de (132) et (133). Les propriétés du chauffage différentiel sont en particulier préservées avec la formulation de l'enthalpie utilisable du fait de la présence des termes  $T_\varphi^\lambda$  et  $T_\lambda$ . Pour la conversion  $C(A_Z, A_E)$ , on voit que l'intégrale de (91) n'est pas très différente de  $(C_L)_A$  puisqu'on remplace  $c_p T_r/(\bar{T}T^\lambda)$  par  $g/\bar{\sigma}$ . Pour la conversion  $C(K_{S+Z}, K_E)$ , les intégrales de (86) et de (92) conduisent à une expression plus simple que celle de  $(C_L)_K$  (on ne garde que les deux premières lignes de (139) où on a enlevé les facteurs  $\cos(\varphi)$  aux numérateurs et aux dénominateurs).

Il est a priori surprenant que les termes  $C(\Phi, K_{S+Z})$  et  $C(\Phi, K_E)$  ne soient pas présents dans le cycle de Lorenz, alors que les autres termes qui touchent les réservoirs  $K_{S+Z}$  et  $K_E$  sont presque identiques dans les deux approches. La différence ne semble pas être entièrement due aux disparités constatées entre les conversions  $(C_L)_K$  et  $C(K_{S+Z}, K_E)$ . Il est en fait possible qu'une erreur se soit glissée dans l'une ou l'autre des formulations, bien que les calculs liés à l'enthalpie utilisable soient dépourvus d'approximation et que de plus les résultats ainsi obtenus soient assez proches des apports postérieurs aux articles de Lorenz. On fait ici référence aux études de Brennan et Vincent (1980) et Michaelides (1987) où, comme dans cette thèse, existent des termes notés  $B\Phi_Z$  et  $B\Phi_E$  qui correspondent sensiblement à  $C(\Phi, K_{S+Z})$  et  $C(\Phi, K_E)$  et qui ne sont pas nuls globalement.

### **3.3 Van Mieghem.**

Un des inconvénients de la méthode de Lorenz provient du caractère irréaliste de l'état de référence. En effet, l'enthalpie des différents réarrangements adiabatiques de l'état réel présente un minimum  $H_r$  qui correspond à un état stratifié horizontalement. Mais cet état stratifié est très certainement inaccessible dynamiquement et Lorenz (1955) indique lui même qu'un mouvement purement zonal formant un vortex circumpolaire – en équilibre avec une distribution de température adéquate – est stable et constant dans le temps. Dans ce cas il n'y a pas de transformation de l'énergie utilisable  $A = H - H_r \neq 0$  en énergie cinétique. Il semble donc que l'état de référence de Lorenz est associé à un minimum absolu de l'enthalpie qu'il serait souhaitable de remplacer par un état d'enthalpie simplement extrême et plus réaliste.

Van Mieghem (1956) a montré qu'il était possible de définir une énergie utilisable modifiée dont le zéro est, par exemple, associé à cet état de mouvement circumpolaire zonal stable. Cet extremum de l'énergie potentielle totale  $E_p + E_i$  est obtenu en employant un principe variationnel. Les études de Van Mieghem n'ont cependant pas débouchées sur des résultats pratiques tels qu'un cycle d'énergie utilisable comparable à (82) ou (131).

### 3.4 Dutton.

La démarche de Dutton (1967, 1973) constitue une transition entre les deux contributions précédentes et les études qui suivront.

Dans leur approche de 1967, Dutton et Johnson ont synthétisé et développé les résultats de Lorenz et Van Mieghem en reprenant l'idée du calcul des extremums par une méthode variationnelle. Ils ont également proposé d'étendre le domaine de validité du concept d'énergie potentielle utilisable au cas des processus non-hydrostatiques. Mais les deux apports fondamentaux de cette synthèse de 1967 sont d'une part la volonté de rechercher un lien entre l'énergie utilisable et l'entropie de l'atmosphère, d'autre part la remarque qu'une recherche des états de références pertinents n'est justifiée que si l'atmosphère tend véritablement à atteindre ces états. La quête de tels états attracteurs de l'atmosphère ne pouvant probablement pas aboutir analytiquement, Dutton et Johnson plaident en définitive pour considérer l'énergie utilisable comme un simple guide pour comprendre la nature des transformations énergétiques. Pour eux ce concept d'énergie utilisable ne peut pas servir d'outil pour expliquer en détail l'organisation de la circulation générale, il n'est en particulier pas possible de se servir de cette approche pour discerner comment l'atmosphère privilégie telle ou telle organisation de sa dynamique et de sa thermodynamique.

Dans la contribution de 1973, Dutton approfondit l'examen des liens entre l'entropie, l'énergie totale et la masse de l'atmosphère. Il fait référence à l'étude thermodynamique de Gibbs (1873) et il définit une quantité  $N$  qu'il appelle "énergie entropique". L'idée maîtresse est de tenir compte de la deuxième loi de la thermodynamique et d'abandonner l'état de référence de Lorenz d'enthalpie minimum pour s'intéresser à l'état d'entropie maximum qui sera repéré par l'indice 0. On reconnaît dans cette démarche l'approche de Gibbs qui est expliquée dans la section (1.2.2) où l'énergie utilisable  $A$  d'un système entouré par un thermostat est reliée en toute généralité à la variation d'entropie totale  $\Delta(S_t)$  par  $A \equiv T_0 \Delta(S_t)$  où  $T_0$  est la température du thermostat. Dutton pose quant à lui  $\mathcal{N} \equiv T_0 (S_0 - S)$  où  $T_0$  est une température constante. Les démarches sont donc très similaires, bien qu'il ne soit pas fait usage du terme énergie utilisable – ou exergie – pour désigner  $\mathcal{N}$ . Comme dans cette thèse, le fait de se référer à la fonction entropie permet d'expliquer la production de l'énergie entropique – de l'énergie utilisable – par une destruction de l'entropie globale de l'atmosphère par l'intermédiaire des chauffages différentiels. Ces derniers maintiennent

une organisation de la structure thermodynamique : les zones les plus chaudes reçoivent en moyenne de l'énergie alors que les zones les plus froides continuent à en perdre.

L'état d'entropie maximum est un état de repos qui possède une entropie  $S_0$ , une masse  $M_0$  et une énergie totale  $(E_t)_0 = (E_p)_0 + (E_i)_0$ . Les valeurs  $S$ ,  $M$  et  $E_t = E_p + E_i + E_k$  correspondent à l'état réel. Les deux états ont par définition la même masse et la même énergie totale :  $M = M_0$  et  $(E_p)_0 + (E_i)_0 = E_p + E_i + E_k$ . Comme Lorenz, Dutton se place exclusivement à l'échelle globale, les intégrales portant suivant les cas sur l'élément de volume commun  $d\tau$  ou sur les éléments de masse respectifs  $dm = \rho d\tau$  et  $dm_0 = \rho_0 d\tau$ . Cette méthode empêche tout retour à une vision locale, toute fonction locale d'intégrale nulle pouvant être ajoutée sans changer la théorie, mais en modifiant profondément les interprétations physiques.

Les entropie et énergie interne spécifiques sont définies en fonction des variables thermodynamiques par  $s - s_0 = c_v \ln(T/T_0) + R \ln(\rho_0/\rho)$  et  $e_i - (e_i)_0 = c_v (T - T_0)$ . Les équations d'état sont  $p = \rho R T$  et  $p_0(z) = \rho_0(z) R_0 T_0$ . D'autre part, Dutton montre que l'état d'entropie maximum implique que la variable  $\rho_0$  dépend de la variable  $z$  selon  $\rho_0(z) = \rho_0(0) \exp[-g z/(R T_0)]$ , la température  $T_0$  et la pression  $p_0(0)$  valant  $(E_t)_0 \equiv M c_p T_0$  et  $p_0(0) \equiv g \langle M \rangle$  si  $\langle M \rangle$  est la masse par unité de surface. La conservation de la masse se traduit par

$$\begin{aligned} M_0 - M &= \iiint_{\mathcal{M}_0} dm_0 - \iiint_{\mathcal{M}} dm = \iiint_{\mathcal{V}} \rho_0 d\tau - \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\tau, \\ M_0 - M &= \iiint_{\mathcal{V}} (\rho_0 - \rho) d\tau = 0. \end{aligned}$$

On comprend sur cet exemple que la cellule commune aux deux états est l'élément de volume  $d\tau$  et que dans la dernière intégrale le terme  $(\rho_0 - \rho)$  ne peut pas représenter une grandeur spécifique puisque les deux masses  $dm_0$  et  $dm$  sont différentes.

En suivant la même méthode, l'énergie entropique a pour expression

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= T_0 (S_0 - S) = \iiint_{\mathcal{V}} T_0 (\rho_0 s_0 - \rho s) d\tau \\ &= \iiint_{\mathcal{V}} T_0 \rho (s_0 - s) d\tau + \iiint_{\mathcal{V}} T_0 (\rho_0 - \rho) (s_0 - s_c) d\tau. \end{aligned} \quad (140)$$

On a ajouté le terme constant  $s_c(T_c, \rho_c)$  sans modifier le résultat (il donne une intégrale nulle puisque  $M = M_0$ ). En développant les valeurs spécifiques de  $s$  et  $s_0$  et avec la propriété  $\ln[\rho_0(z)/\rho] = \ln[\rho_0(0)/\rho] - g z/(R T_0)$ , on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= -T_0 \iiint_{\mathcal{M}} \left[ c_v \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + R \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \right] dm + T_0 \iiint_{\mathcal{V}} c_v (\rho_0 - \rho) \ln\left(\frac{T_0}{T_c}\right) d\tau \\ &\quad - T_0 \iiint_{\mathcal{V}} R (\rho_0 - \rho) \left[ \ln\left(\frac{\rho_0(0)}{\rho_c}\right) - \frac{g z}{R T_0} \right] d\tau. \end{aligned}$$

La deuxième intégrale est nulle car c'est un produit des termes constants  $c_v T_0$  et  $\ln(T_0/T_c)$  par  $M_0 - M = 0$ . De même, dans la dernière intégrale, le terme en  $\ln[\rho_0(0)/\rho_c]$  s'annule et seuls restent

$$\begin{aligned} \mathcal{N} = & -T_0 \iiint_{\mathcal{M}} \left[ c_v \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) + R \ln \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right) \right] dm \\ & + \iiint_{\mathcal{V}} \rho_0 g z d\tau - \iiint_{\mathcal{V}} \rho g z d\tau . \end{aligned}$$

Les deux dernières intégrales sont égales à  $(E_p)_0$  et  $E_p$ , respectivement. Mais d'après la conservation de l'énergie totale  $(E_p)_0 - E_p = E_i - (E_i)_0 + E_k$ . On trouve finalement

$$\mathcal{N} = T_0 \Sigma_{(1)} + E_k , \quad (141)$$

avec

$$T_0 \Sigma_{(1)} = \iiint_{\mathcal{M}} c_v T_0 \left[ \frac{T}{T_0} - 1 - \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) \right] dm - \iiint_{\mathcal{M}} R T_0 \ln \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right) dm , \quad (142)$$

$$T_0 \Sigma_{(1)} = \iiint_{\mathcal{M}} [e_i - (e_i)_0 - T_0 (s - s_0)] dm , \quad (143)$$

où la quantité  $T_0 \Sigma_{(1)}$  est appelée énergie entropique statique par Dutton (l'énergie cinétique a été séparée dans (143) de cette partie  $T_0 \Sigma_{(1)}$  qui est dite statique).

Le caractère global de la théorie de Dutton peut être utilisé pour ajouter un terme d'intégrale nulle. C'est le cas pour la grandeur  $RT_0(\rho_0/\rho - 1)$  dont l'intégrale globale vaut  $RT_0(M_0 - M) = 0$ . On obtient alors une deuxième forme pour l'énergie entropique statique de Dutton

$$T_0 \Sigma_{(2)} = \iiint_{\mathcal{M}} c_v T_0 \left[ \frac{T}{T_0} - 1 - \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) \right] dm + \iiint_{\mathcal{M}} R T_0 \left[ \frac{\rho_0}{\rho} - 1 - \ln \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right) \right] dm , \quad (144)$$

$$T_0 \Sigma_{(2)} = \iiint_{\mathcal{M}} c_v T_0 \mathcal{F} \left( \frac{T}{T_0} - 1 \right) dm + \iiint_{\mathcal{M}} R T_0 \mathcal{F} \left( \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right) dm \geq 0 , \quad (145)$$

$$T_0 \Sigma_{(2)} = \iiint_{\mathcal{M}} \left[ e_i - (e_i)_0 + p_0 \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) - T_0 (s - s_0) \right] dm . \quad (146)$$

Cette autre forme de l'énergie entropique statique est positive et quadratique à la fois en  $T/T_0 - 1$  et  $\rho_0/\rho - 1$ . Ces résultats découlent directement des propriétés de la fonction  $\mathcal{F}(X) = X - \ln(1+X) \approx X^2/2$ . La première forme  $T_0 \Sigma_{(1)}$  n'est positive et quadratique que par rapport à la variable  $T/T_0 - 1$ . C'est aussi le cas pour l'enthalpie utilisable qui est introduite dans cette thèse.

Les intégrandes  $e_i - (e_i)_0 - T_0 (s - s_0)$  et  $e_i - (e_i)_0 + p_0 [(\rho)^{-1} - (\rho_0)^{-1}] - T_0 (s - s_0)$  sont formellement identiques aux expressions thermodynamiques de l'énergie utilisable établies au dix-neuvième et au début du vingtième siècle. Sans rappeler les approches fondatrices de Thomson et de Gibbs, on pense entre autres à Maxwell (1871), Gouy (1889), Darrieus (1931), Keenan (1932, 1951). Aussi ne semble-t-il pas indispensable de reprendre la terminologie d'énergie entropique

statique préconisée par Dutton. On a préféré employer dans cette thèse le terme enthalpie utilisable pour la quantité  $a_h = h - h_r - T_r (s - s_r)$ . Cette dénomination a l'avantage de se référer aux études thermodynamiques citées ci-dessus. L'expression plus générale d'exergie introduite en 1956 par Rant regroupe les deux notions d'énergie et d'enthalpie utilisable en tant que travail extractible d'un système, elle a été également employée pour  $a_h$ .

Une différence importante entre l'état de référence de Dutton et l'état isotherme introduit dans cette thèse est le fait que la pression  $p_0$  et la densité  $\rho_0$  décroissent exponentiellement avec  $z$  :  $p_0(z) = p_0(0) \exp[-g z / (R T_0)]$ , alors que  $p_r \approx p_0(0)/e$  est une constante dans  $a_h$ . En revanche les températures  $T_0$  et  $T_r$  sont comparables (ce sont, de manière approchée, une moyenne simple pour  $T_0$  et une moyenne harmonique pour  $T_r$ ). En fait, une manipulation mathématique permet de transformer  $a_h$  en introduisant le profil vertical de pression  $p_0(z) \approx e p_r \exp[-g z / (R T_0)]$ . On trouve, en partant de l'équation (16) :

$$a_h \approx c_p T_r \mathcal{F}(T/T_r - 1) + R T_r \ln(p/p_0(z)) + [R T_r - g z] . \quad (147)$$

Il aurait ainsi été possible de prendre un état de référence thermodynamique similaire à celui de Dutton, au dépend d'une modification qui se traduit par l'apparition d'un terme  $R T_r - g z = g(z_r - z) = \Phi_r - \Phi$ , où  $z_r$  est la hauteur caractéristique de l'atmosphère  $z_r = R T_r / g \approx 7300 \text{ m}$ .

Dutton a ensuite proposé une séparation de l'énergie entropique statique en une composante  $T_0 \widehat{\Sigma}_{(1)}$  dépendant des moyennes zonales  $(\widehat{\dots})$  et une composante  $T_0 \Sigma'_{(1)}$  dépendant des écarts à ces moyennes  $(\dots)'$ . On remplace pour cette partie la variable  $\rho$  par le volume massique  $\alpha = 1/\rho$  et Dutton pose :

$$T_0 \widehat{\Sigma}_{(1)} = \iiint_{\mathcal{M}} c_v T_0 \left[ \frac{\widehat{T}}{T_0} - 1 - \ln \left( \frac{\widehat{T}}{T_0} \right) \right] dm - \iiint_{\mathcal{M}} R T_0 \ln \left( \frac{\widehat{\alpha}}{\alpha_0} \right) dm , \quad (148)$$

$$T_0 \Sigma'_{(1)} = - \iiint_{\mathcal{M}} c_v T_0 \ln \left( \frac{T}{\widehat{T}} \right) dm - \iiint_{\mathcal{M}} R T_0 \ln \left( \frac{\alpha}{\widehat{\alpha}} \right) dm . \quad (149)$$

Cette décomposition semble différente de celles choisies dans cette thèse. Contrairement à ce qui est fait dans les sections (2.4.1) et (2.5.1), Dutton n'utilise pas explicitement la propriété de la fonction  $\mathcal{F} : \mathcal{F}(X_1 + X_2 + X_1 X_2) = \mathcal{F}(X_1) + \mathcal{F}(X_2) + X_1 X_2$ . En fait, l'intégrale du terme  $c_v T_0 (T/\widehat{T} - 1) = c_v T_0 T' / \widehat{T}$  peut être ajoutée à l'équation (149) – l'intégrale de ce terme est nul – pour donner un terme  $c_v T_0 \mathcal{F}(T/\widehat{T})$ . On retrouve alors le même type de décomposition que dans les sections (2.4.1) et (2.5.1).

On voit que les résultats de Dutton sont essentiellement globaux et que la comparaison avec les autres approches thermodynamiques et météorologiques de l'énergie utilisable n'était pas facilitée par les notations et les termes employés qui sont atypiques. On peut toutefois dire que l'énergie entropique est la première application des propriétés de l'exergie à l'énergétique de l'atmosphère, même si Dutton n'y fait pas référence, à l'exception de la méthode de Gibbs.

En fait, l'énergie entropique statique n'est pas vraiment différente des concepts précédemment obtenus en thermodynamique. Pour le cas d'une atmosphère hydrostatique, on peut démontrer un rapprochement entre  $A_h$  et  $T_0 \Sigma$ . On part de (142) avec  $e_p = \Phi = gz$ , en se rappelant que l'intégrale de  $e_i + e_p$  est l'enthalpie  $H = E_p + E_i$  et en supposant  $p_r \approx p_0(0) / e : T_0 \Sigma_{(1)} \approx A_h = A_T + A_p$ . Mais ce choix  $p_r \approx p_0(0) / e$  possède une autre implication. Pour cette valeur particulière et pour une atmosphère hydrostatique on a annulation de la composante  $A_p$  de l'enthalpie utilisable. On a en définitive  $T_0 \Sigma_{(1)} \approx A_T$ , ce qui est le résultat de Thomson (1853).

### 3.5 Pichler.

Dans son article de 1977, Pichler interprète – semble-t-il pour la première fois – l'intégrande de l'énergie entropique statique de Dutton en terme de fonction massique attachée à une particule fluide. Les opérateurs dérivée matérielle, gradient et divergence peuvent alors être appliqués à cette grandeur massique.

Pichler choisit la première forme  $T_0 \Sigma_{(1)}$  qui est par définition l'intégrale de la fonction énergie entropique statique spécifique  $T_0 \sigma_{(1)}$ . On obtient, d'après l'équation (142) :

$$T_0 \Sigma_{(1)} = \iiint_{\mathcal{M}} T_0 \sigma_{(1)} dm, \quad (150)$$

$$T_0 \sigma_{(1)} = c_v T_0 \left[ \frac{T}{T_0} - 1 - \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) \right] - R T_0 \ln \left( \frac{\rho_0(z)}{\rho} \right), \quad (151)$$

$$T_0 \sigma_{(1)} = c_v T_0 \left[ \frac{T}{T_0} - 1 - \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) \right] - R T_0 \ln \left( \frac{\rho_0(0)}{\rho} \right) + \Phi. \quad (152)$$

On a utilisé les relations  $\rho_0(z) = \rho_0(0) \exp[-gz/(RT_0)]$  et  $\Phi = gz$ .

En partant de la relation (152) et en remarquant que pour  $p_0(0)$  constant l'équation d'état  $p_0(0) = \rho_0(0) RT_0$  implique  $[\rho_0(0)]^{-1} d/dt[\rho_0(0)] = (T_0)^{-1} d/dt(T_0)$ , la dérivée matérielle de  $T_0 \sigma_{(1)}$  s'écrit dans un cadre général non-hydrostatique sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [T_0 \sigma_{(1)}] &= \frac{d\Phi}{dt} + c_v \left( 1 - \frac{T_0}{T} \right) \frac{dT}{dt} - R T_0 \operatorname{div}(\vec{u}) \\ &+ \left[ R - R \ln \left( \frac{\rho_0(0)}{\rho} \right) - c_v \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) \right] \frac{dT_0}{dt}. \end{aligned} \quad (153)$$

L'équation de l'énergie interne se déduit de (28) et s'écrit  $c_v dT/dt = -RT \operatorname{div}(\vec{u}) + \dot{q}$ . Son report dans l'équation (153) donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [T_0 \sigma_{(1)}] &= \frac{d\Phi}{dt} - RT \operatorname{div}(\vec{u}) + \left( 1 - \frac{T_0}{T} \right) \dot{q} \\ &+ \left[ R - R \ln \left( \frac{\rho_0(0)}{\rho} \right) - c_v \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) \right] \frac{dT_0}{dt}. \end{aligned} \quad (154)$$

Si on excepte les quantités entre crochets qui sont en facteur de la variation de  $T_0(t)$ , on retrouve le terme de chauffage différentiel  $(1 - T_0/T)\dot{q}$  qui est présent dans l'équation de l'enthalpie utilisable spécifique (34), avec les deux autres termes  $d/dt(\Phi)$  et  $-RT \operatorname{div}(\vec{u})$ . Ces deux dernières expressions s'écrivent aussi  $\vec{u} \cdot \vec{\nabla}(\Phi)$  et  $-\rho^{-1} \operatorname{div}(p\vec{u}) + \rho^{-1} \vec{u} \cdot \vec{\nabla}(p)$ . Il est alors possible d'identifier les conversions d'énergie entre  $T_0 \sigma_{(1)}$ ,  $e_c = \vec{u} \cdot \vec{u}/2$  et  $\Phi$  puisque, dans un cadre non-hydrostatique, on a d'après (22)

$$\frac{d}{dt}(e_c) = -\frac{1}{\rho} \vec{u} \cdot \vec{\nabla}(p) - \vec{u} \cdot \vec{\nabla}(\Phi) + \vec{u} \cdot \vec{F}. \quad (155)$$

Il apparaît que la conversion entre  $T_0 \sigma_{(1)}$  et  $e_c$  a pour forme  $-\rho^{-1} \vec{u} \cdot \vec{\nabla}(p)$ , alors que le terme de divergence  $-\rho^{-1} \operatorname{div}(p\vec{u})$  implique classiquement que c'est le flux d'enthalpie aux frontières du domaine qui entre dans le bilan local de l'énergie interne. De même, le terme  $-\vec{u} \cdot \vec{\nabla}(\Phi)$  est une conversion entre  $T_0 \sigma_{(1)}$  et  $e_c$ .

Ces résultats montrent que la forme locale de Pichler se comporte comme la somme de l'énergie interne et de l'énergie potentielle, les seules différences étant la présence logique du facteur d'efficacité  $(1 - T_0/T)$  et celle des termes en facteur de la variation de  $T_0(t)$ . L'énergie entropique spécifique se révèle être le pendant de l'enthalpie utilisable spécifique pour le cas non-hydrostatique.

### 3.6 Pearce, Blackburn.

Les résultats exposés dans cette thèse sont très proches de ceux de Pearce (1978). Cette étude de 1978 est un prolongement de celles de Lorenz sans référence explicite à celles de Dutton. Pearce part de considérations globales pour définir la fonction énergie utilisable de l'atmosphère. C'est la différence importante avec l'approche exposée dans cette thèse concernant la fonction enthalpie utilisable spécifique.

L'idée maîtresse de Pearce est de considérer que la recherche précise du meilleur état de référence, comme l'on fait Lorenz et Van Mieghem, ne peut pas servir de point de départ pour la définition de la fonction énergie utilisable. Les nouvelles contraintes devront porter sur la forme que doivent prendre les conversions, les sources et les puits d'énergie.

Pearce introduit une température  $T_m$  qui est la moyenne harmonique de la température, autrement dit  $1/T_m = M^{-1} \{1/T\}$  si on note par  $\{\dots\}$  l'intégrale  $\iint_{\mathcal{M}} \{\dots\} dm$  sur l'ensemble de la masse  $M$  de l'atmosphère. La température  $T_r$  qui intervient dans l'enthalpie utilisable est ainsi une moyenne à long terme de  $T_m$ . L'énergie utilisable  $A = \{a\}$  est définie par la combinaison suivante entre l'enthalpie  $H = \{h\}$ , l'entropie  $S = \{s\}$  et la température  $T_m$  :

$$\frac{d}{dt}(A) = \frac{d}{dt}(H) - T_m \frac{d}{dt}(S). \quad (156)$$

Cette relation est semblable à l'intégrale de (15) :  $A_h = H - T_r S - (H_r - T_r S_r)$ . Mais la définition (156) en terme de dérivée temporelle ne détermine  $A$  qu'à une constante près, l'absence d'un terme  $H_m - T_m S_m$  dans (156) n'ayant a priori pas d'incidence sur l'interprétation physique de la théorie globale de Pearce. La fonction  $H - T_m S$  n'étant pas explicitement introduite, ce n'est qu'après des développements limités spatiaux et temporels que la fonction  $A$  est déterminée comme une solution de (156) :

$$A \approx c_p \left\{ \frac{(T - T_m)^2}{2 T_m} \right\}. \quad (157)$$

On a supposé ici que  $T_m$  est sensiblement égal à la température moyenne  $M^{-1} \{T\}$ . On retrouve une forme approchée de (20) qui est obtenue en tenant compte du développement  $\mathcal{F}(X) \approx X^2/2 \Rightarrow a_T(T) \approx c_p (T - T_r)^2/(2 T_r)$ .

Pratiquement tous les résultats globaux exposés dans cette thèse ont été obtenus par Pearce sous des formes sensiblement analogues. Il a introduit les composantes barocline et de stabilité statique qui sont proches des intégrales de (45) et de (46) :

$$A_S \approx c_p \left\{ \frac{(\bar{T} - T_m)^2}{2 T_m} \right\}, \quad (158)$$

$$A_B \approx c_p \left\{ \frac{(T - \bar{T})^2}{2 T_m} \right\}. \quad (159)$$

Ce sont bien des approximations de (45) et de (46) si on tient compte de  $\mathcal{F}(X) \approx X^2/2$ .

La séparation en moyennes zonales et en écarts à celles-ci a également été étudiée par Pearce qui pose, avec l'utilisation des notations du chapitre (2.5) :

$$A_Z \approx c_p \left\{ \frac{(T_\varphi^\lambda)^2}{2 T_m} \right\}, \quad (160)$$

$$A_E \approx c_p \left\{ \frac{(T_\lambda)^2}{2 T_m} \right\}. \quad (161)$$

Ce sont également des approximations des intégrales de (73) et de (74), respectivement.

Ainsi, toutes les composantes énergétiques (157) à (161) sont des approximations de résultats de cette thèse. Plusieurs des composantes issues de l'enthalpie utilisable sont toutefois absentes de l'étude de Pearce. C'est le cas de  $a_p$ ,  $a_{c(SB)}$  et  $a_{c(ZE)}$  dont les intégrales globales sont nulles et qui ne pouvaient pas être découvertes à partir de (156).

C'est donc l'absence de  $H_m - T_m S_m$  dans la définition (156) qui empêche l'établissement d'une théorie locale et exacte de l'énergie utilisable. Pearce a pourtant fait usage de l'intégrande de (157)

pour définir une fonction locale  $a \approx c_p (T - T_m)^2 / (2T_m)$ . L'équation d'évolution de cette quantité est obtenue de manière approchée. Pearce obtient :

$$\frac{da}{dt} \approx \frac{R}{p} \omega (T - T_m) \left[ 1 + \left( \frac{T - T_m}{T_m} \right) \right] + \frac{T}{T_m} \left( 1 - \frac{T_m}{T} \right) \dot{q}$$

qui se simplifie, pour  $(T - T_m) \ll T_m$  et  $T/T_m \approx 1$ , en

$$\frac{da}{dt} \approx \frac{R}{p} \omega T - \frac{R}{p} \omega T_m + \left( 1 - \frac{T_m}{T} \right) \dot{q}. \quad (162)$$

Par rapport à l'équation de l'enthalpie utilisable (34), il apparaît une conversion supplémentaire  $-R \omega T_m/p$  qui correspondrait à la dérivée d'une éventuelle composante de pression  $a_p(p)$  :  $d/dt(a_p) = d/dt[RT_m \ln(p/p_m)]$ . L'absence de  $a_p$  dans la théorie de Pearce fait que cette équation locale (162) ne peut pas être cohérente avec celle de l'énergie cinétique.

Pearce a aussi appliqué ses résultats à une étude de la convection sur un domaine limité avec des flux aux frontières. Il a utilisé la décomposition de  $A$  en  $A_S + A_B$ , mais sans que les flux des composantes  $a_p$  et  $a_{c(SB)}$  interviennent (voir les résultats de la section (2.4) concernant le cycle d'ordre 1). Malgré ces insuffisances, l'importance physique des conversions entre  $A_S$  et  $A_B$  est démontrée par Pearce, ainsi que la supériorité de la nouvelle formulation de  $A = A_S + A_B$  par rapport à celle de Lorenz.

Si on reste à l'échelle globale, les résultats de Pearce sont pratiquement exacts à l'approximation  $\mathcal{F}(X) \approx X^2/2$  près et ils sont comparables à ceux de cette thèse. À côté des composantes énergétiques  $A$ ,  $A_S$ ,  $A_B$ ,  $A_Z$  et  $A_E$ , Pearce a étudié précisément les différentes conversions entre ces formes d'énergies et l'énergie cinétique, en les comparant avec les conversions de Lorenz. Une application à un ensemble de perturbations baroclines a permis de quantifier numériquement les différences avec la formulation de Lorenz.

Le changement le plus important concerne l'évolution temporelle de  $A_Z$  qui, dans l'étude du train d'onde baroclines de Pearce, est moitié moindre que celle de la composante  $(A_L)_Z$  de Lorenz. De même, la conversion  $C(A_Z, A_E)$  vaut la moitié de la conversion de Lorenz  $(C_L)_A$ . Mais dans la formulation de Pearce existe l'autre conversion  $C(A_S, A_E)$  qui est numériquement comparable à  $C(A_Z, A_E)$ . L'ensemble de ces résultats est alors cohérent puisque dans ce cas  $(C_L)_A \approx C(A_S, A_E) + C(A_Z, A_E)$ . Ceci justifie l'interprétation physique de la partition du réservoir de Lorenz  $A_L = (A_L)_Z + (A_L)_E$  en trois composantes  $A = A_S + A_Z + A_E$ , aussi bien pour l'étude de Pearce que pour la fonction enthalpie utilisable  $A_h$  introduite ici.

Le lien entre une forme de l'énergie entropique statique de Dutton et l'énergie utilisable de Pearce a été établi par Blackburn (1983). L'énergie entropique statique considérée par ce dernier semble

être l'analogue de la partie  $A_T$  de l'énergie utilisable :

$$T_0 \Sigma_{(3)} = \iiint_{\mathcal{M}} c_p T_0 \left[ \frac{T}{T_0} - 1 - \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) \right] dm \equiv A_T \approx c_p \left\{ \frac{(T - T_m)^2}{2 T_m} \right\}. \quad (163)$$

On retrouve le rapprochement mentionné à la fin du chapitre (3.4) :  $T_0 \Sigma_{(1)} \approx A_h \approx A_T = T_0 \Sigma_{(3)}$ .

### 3.7 McHall.

Dans une étude récente de 1990, McHall a repris les travaux de Lorenz et de Dutton afin de rechercher un nouvel état de référence. Une nouvelle fonction globale appelée énergie potentielle utilisable maximale est définie, comme pour Lorenz, par  $\Lambda_{max} = H_1 - H_2$  où  $H_1$  est l'enthalpie de l'état réel et où  $H_2$  est l'enthalpie d'un certain état de référence.

L'idée de McHall est d'employer un principe variationnel pour déterminer cet état de référence parmi les états de l'atmosphère accessibles à travers une transformation conservant globalement à la fois l'entropie  $s = c_p \ln(\theta) + C^{ste}$  et la température potentielle  $\theta$ . La conservation de l'entropie est analogue à la contrainte de réversibilité de la transformation dans la théorie de Lorenz, alors que l'état de référence de Dutton correspond à une variation maximale de cette entropie. La conservation conjointe de  $\theta$  n'est pas présente dans les théories de Lorenz et de Dutton et il n'est pas fait usage de la contrainte de Dutton concernant la conservation de l'énergie totale au cours du réarrangement.

L'énergie potentielle utilisable maximale  $\Lambda_{max} = H_1 - H_2$  est l'intégrale de  $c_p (T_1 - T_2)$ , c'est donc aussi l'intégrale de  $c_p p^\kappa (\theta_1 - \theta_2) / p_{00}^\kappa$ . Le calcul des variations portera donc sur la fonction

$$\Gamma = p^\kappa (\theta_1 - \theta_2) + \lambda_T \ln(\theta_2) + \lambda_p \theta_2.$$

L'extremum de  $H_1 - H_2$  est obtenue par la condition  $\partial \Gamma / \partial \theta_2 = 0$ , ce qui donne une expression de la température potentielle dans l'état final en fonction des constantes  $T_*$  et  $p_*$  qui sont reliées aux multiplicateurs de Lagrange par  $\lambda_T = T_* p_{00}^\kappa$  et  $\lambda_p = -\epsilon p_*^\kappa$  où  $-\epsilon$  est le signe de  $\lambda_p$  avec  $p_* \geq 0$ . La condition  $\partial \Gamma / \partial \theta_2 = 0$  implique que l'état final vérifie

$$\theta_2 = \theta_2(p) = T_* \frac{p_{00}^\kappa}{p^\kappa + \epsilon p_*^\kappa}.$$

Les deux constantes  $T_*$  et  $p_*$  sont obtenues numériquement en imposant les deux conservations de la température et de l'entropie au cours du réarrangement. Les intégrales portent sur la masse de l'atmosphère qui s'étend, par hypothèse, entre les niveaux de pression  $p_T$  et  $p_S = p_{00}$ . Si on note par  $\overline{(\dots)}(p)$  la moyenne isobare et si  $M$  est la masse du domaine  $p_T \leq p \leq p_S$  considéré, on doit avoir :

$$\begin{aligned} T_* p_{00}^\kappa \left( \iiint_{\mathcal{M}} \frac{dm}{p^\kappa + \epsilon p_*^\kappa} \right) &= \iiint_{\mathcal{M}} \overline{\theta}(p) dm, \\ M \ln(T_* p_{00}^\kappa) &= \iiint_{\mathcal{M}} \ln(p^\kappa + \epsilon p_*^\kappa) dm + \iiint_{\mathcal{M}} \overline{\ln(\theta)}(p) dm. \end{aligned}$$

Les valeurs numériques de  $T_*$  et  $p_*$  sont obtenues par la résolution de ces deux équations où la température potentielle  $\theta(\lambda, \varphi, p)$  de l'état réel est connu. Pour que le logarithme ait un sens il faut que  $p^\kappa + \epsilon p_*^\kappa$  soit strictement positif.

L'énergie potentielle utilisable maximum de McHall a finalement pour expression

$$\begin{aligned}\Lambda_{max} &= H_1 - H_2 = \frac{c_p}{p_{00}^\kappa} \iiint_{\mathcal{M}} p^\kappa [\theta - \theta_2(p)] dm , \\ \Lambda_{max} &= c_p \iiint_{\mathcal{M}} \left[ T - T_* \left( \frac{p^\kappa}{p^\kappa + \epsilon p_*^\kappa} \right) \right] dm .\end{aligned}\tag{164}$$

Il faut mentionner que les notations de l'article de McHall font un emploi systématique des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_T$  et  $\lambda_p$ , sans introduction des valeurs caractéristiques  $T_*$  et  $p_*$ . Il n'est pas possible de préciser davantage la formulation analytique de (164) par manque d'information sur les deux constantes  $T_*$  et  $p_*$ .

McHall s'est principalement intéressé à l'influence de la stabilité verticale  $-\partial\theta/\partial p$  sur l'énergie potentielle utilisable maximale d'une colonne. Mais il n'a pas vraiment abordé l'étude des conversions entre l'énergie cinétique et cette nouvelle forme d'énergie utilisable.

### 3.8 Shepherd.

L'approche mathématique de Shepherd (1993) concernant la notion d'énergie potentielle utilisable est novatrice et est plus générale que les précédentes. Il constate que l'établissement des différentes formes d'énergies utilisables nécessite de manière systématique, à côté de la loi de conservation adiabatique de l'énergie totale, l'emploi d'autres lois de conservation.

C'est le cas de Lorenz qui utilise la conservation de la masse comprise entre chaque surface d'égale entropie. C'est le cas de Dutton pour lequel c'est la masse globale qui est invariante. C'est aussi le cas pour l'étude de McHall où à la fois l'entropie et la température potentielle sont des invariants globaux.

Shepherd désire répondre aux questions suivantes.

- Pourquoi doit-on utiliser des lois de conservations autres que celle de l'énergie totale (la somme des énergies cinétique, interne et potentielle) ?
- quelles sont, en toute généralité, ces autres lois ?
- Existe-t-il une méthode systématique pour construire les différentes formes d'énergie utilisable ?

Pour trouver les réponses à ces questions, on pourrait faire appel à une formulation hamiltonienne canonique de la dynamique des fluides où chaque symétrie de la théorie implique une loi de conservation particulière via le théorème de Noether et où les états d'équilibre sont associés à des extremums de l'hamiltonien. Mais ce n'est pas possible pour l'atmosphère.

La difficulté vient de ce que la version eulerienne des équations du mouvement ne se prête pas à cette mise en forme. Cette version dérive certes d'un système hamiltonien mais celui-ci est non-canonique et il n'y a pas de tels liens entre les symétries de la théorie et les lois de conservation sous-jacentes. De plus, les éventuels états d'équilibre ne sont pas associés à des extremums de l'hamiltonien non-canonique. Shepherd précise cependant que c'est justement cette structure non-canonique qui nécessite l'introduction de lois de conservation additionnelles afin de définir, pour le cas des états de base en équilibre et au repos, une notion d'énergie utilisable qui soit quadratique autour de ces états d'équilibre. Ces lois sont celles qui mettent en jeu les invariants dits de Casimir. On construit ainsi des quantités qui seront appelées les pseudo-énergies du système vis à vis de l'état de base.

De manière générale, un système hamiltonien se met sous la forme

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \mathcal{J}_{ij} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u_j}, \quad (165)$$

où  $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$  est le vecteur des variables dynamiques,  $\mathcal{H}$  est l'hamiltonien du système,  $\delta/\delta\vec{u}$  est la dérivée variationnelle et où  $\mathcal{J}_{ij}$  est le tenseur de Poisson. Le système est dit canonique si  $\mathcal{J}_{ij}$  est non-dégénéré (ou inversible), il est dit non-canonique si  $\mathcal{J}_{ij}$  est dégénéré (ou non-inversible).

Un système canonique vérifiant (165) est synonyme des deux équations classiques  $\dot{q}_i = \partial \mathcal{H}/\partial p_i$  et  $\dot{p}_i = -\partial \mathcal{H}/\partial q_i$ . Si un tel système possède un état de base en équilibre et stationnaire  $\vec{U}$ , l'hamiltonien  $\mathcal{H}$  est une fonction quadratique de  $\delta\vec{u} = \vec{u} - \vec{U}$  et cet état de base est un extremum de  $\mathcal{H}$ .

Mais pour un système non-canonique,  $\mathcal{H}$  est en général une fonction seulement linéaire de  $\delta\vec{u} = \vec{u} - \vec{U}$  et on veut construire une nouvelle fonctionnelle qui soit, elle, quadratique en  $\delta\vec{u}$ . On appelle invariants de Casimir  $\mathcal{C}$  les solutions de

$$\mathcal{J}_{ij} \frac{\delta \mathcal{C}}{\delta u_j} = 0.$$

Les solutions ne sont pas identiquement nulles puisque  $\mathcal{J}_{ij}$  n'est pas inversible et que le noyau n'est pas vide. Pour un état de base stationnaire  $\vec{U}$  les invariants  $\mathcal{C}$  vérifient

$$\mathcal{J}_{ij} \frac{\delta \mathcal{C}}{\delta u_j} = 0 \quad \text{avec} \quad \left. \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u_j} \right|_{\vec{U}} = - \left. \frac{\delta \mathcal{C}}{\delta u_j} \right|_{\vec{U}}. \quad (166)$$

Shepherd introduit alors la quantité  $\mathcal{A}$  qui est définie à l'aide de l'hamiltonien  $\mathcal{H}$  et des invariants de Casimir  $\mathcal{C}$  :

$$\mathcal{A}[\vec{u}] \equiv \mathcal{H}[\vec{u}] - \mathcal{H}[\vec{U}] + \mathcal{C}[\vec{u}] - \mathcal{C}[\vec{U}]. \quad (167)$$

On a plus particulièrement les propriétés  $\partial \mathcal{A}/\partial t = 0$  et  $\delta \mathcal{A} = O[(\delta\vec{u})^2]$ , ce qui signifie que  $\mathcal{A}$  est un invariant stationnaire et quadratique en  $\delta\vec{u} = \vec{u} - \vec{U}$ . C'est la pseudo-énergie du système

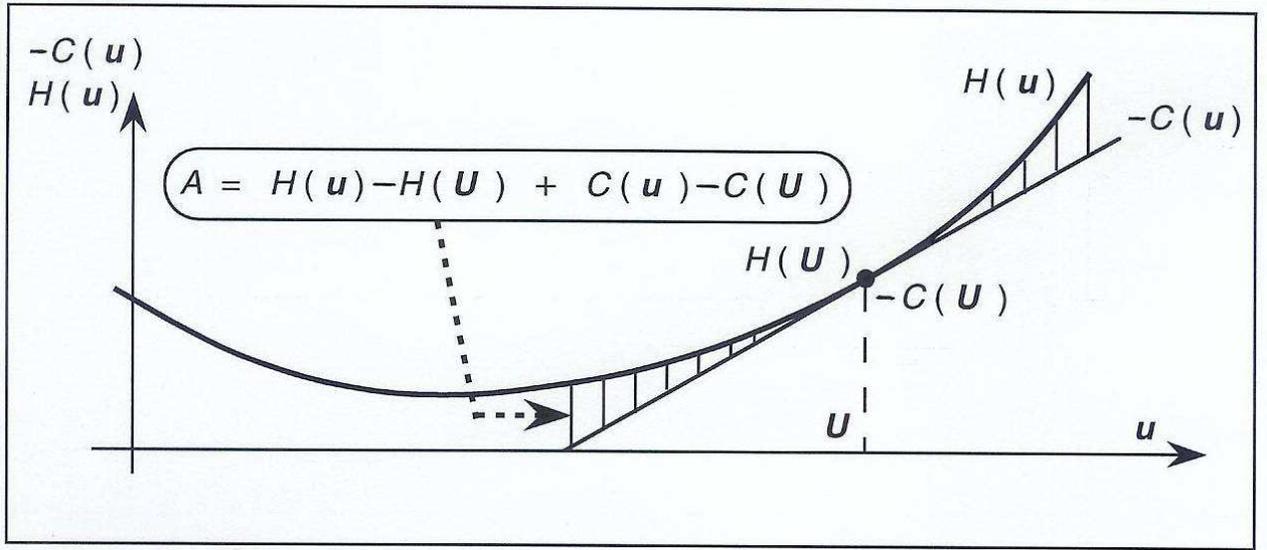


FIG. 21 – Une analogie à une dimension de la relation entre la pseudo-énergie de Shepherd et la forme de l’hamiltonien. Les invariants de Casimir forment, au signe près, le plan vectoriel tangent qui sert de référence pour la définition de la fonctionnelle quadratique  $\mathcal{A}$ .

autour de l’état de repos dont le domaine de validité s’étend à distance finie de  $\vec{U}$ . Ce n’est pas un invariant linéarisé, la loi de conservation obtenue est rigoureusement exacte.

On peut dire que les invariants de Casimir forment, au signe près, la variété vectorielle tangente en  $\vec{U}$  à  $\mathcal{H}$  et la quantité  $\mathcal{A}$  définie par (167) représente l’énergie du système autour de  $\vec{U}$  en prenant pour référence cette variété vectorielle tangente en  $\vec{U}$  (voir le schéma de la figure (21) pour un vecteur d’état  $\mathbf{U}$  à une seule dimension).

Pour retrouver les résultats de Lorenz, Shepherd part de l’hamiltonien pour un gaz parfait et hydrostatique qui est la somme de l’énergie cinétique du vent horizontal  $(\vec{u}_h)^2/2$  et de l’enthalpie  $c_p T = c_p \theta \Pi(p)$  avec  $\Pi(p) = (p/p_0)^{\kappa}$ .

$$\mathcal{H} \equiv \iiint_{\mathcal{M}} \left[ \frac{(\vec{u}_h)^2}{2} + c_p \theta \Pi(p) \right] dm . \quad (168)$$

Les calculs détaillés de Shepherd (1993) donnent un exemple d’invariant de Casimir autour d’un état de base qui est au repos,  $\vec{u}_h = 0$ , et qui vérifie  $\theta = \theta_0(p)$ . Cette classe d’invariant s’écrit sous la forme

$$\mathcal{C} \equiv + \iiint_{\mathcal{M}} C(\theta) dm ,$$

où  $C(\theta)$  est une fonction de  $\theta$  seulement. Si on prend pour  $C(\theta)$  une distribution ”porte” entre  $\theta$  et  $\theta + \delta\theta$ , on retrouve la propriété de Lorenz de conservation de la masse entre ces deux surfaces d’égale entropie. Mais on se place ici dans le cas plus général où  $\theta_0(p)$  est quelconque.

L'hamiltonien (168) correspond aux dérivées fonctionnelles

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \vec{u}_h} &: \vec{u}_h \\ \text{et } \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \theta} &: c_p \Pi(p) . \end{aligned}$$

La seconde de ces relations détermine la forme de  $dC(\theta)/d\theta$  par report dans la définition (166), soit  $\delta \mathcal{H} / \delta \theta = -\delta \mathcal{C} / \delta \theta : C(\theta) = -c_p \Pi(p)$ , ce qui donne après intégration

$$C(\theta) = - \int^{\theta} c_p \Pi[\mathcal{P}(\theta')] d\theta' , \quad (169)$$

où on a supposé la condition de stabilité  $\partial\theta_0/\partial p < 0$  pour définir la fonction réciproque  $p = \mathcal{P}[\theta_0(p)] = \theta_0^{-1}(p)$ .

La pseudo-énergie de Shepherd est obtenue en reportant l'hamiltonien (168) et l'intégrale spatiale de (169) dans la définition (167), ce qui donne en notant par  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{C}_0$  les valeurs dans l'état de base au repos :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} - \mathcal{H}_0 &= \iiint_{\mathcal{M}} \frac{(\vec{u}_h)^2}{2} dm + c_p \iiint_{\mathcal{M}} (\theta - \theta_0) \Pi(p) dm , \\ \mathcal{H} - \mathcal{H}_0 &= \iiint_{\mathcal{M}} \frac{(\vec{u}_h)^2}{2} dm + c_p \iiint_{\mathcal{M}} \left( \int_{\theta_0}^{\theta} \Pi[\mathcal{P}(\theta_0)] d\theta' \right) dm , \\ \mathcal{C} - \mathcal{C}_0 &= -c_p \iiint_{\mathcal{M}} \left( \int_{\theta_0}^{\theta} \Pi[\mathcal{P}(\theta')] d\theta' \right) dm , \end{aligned}$$

soit :

$$\mathcal{A} = (\mathcal{H} - \mathcal{H}_0) + (\mathcal{C} - \mathcal{C}_0) \equiv \iiint_{\mathcal{M}} \left[ \frac{(\vec{u}_h)^2}{2} + a \right] dm = E_k + A , \quad (170)$$

$$\mathcal{A} = E_k - c_p \iiint_{\mathcal{M}} \int_0^{\theta - \theta_0} \left( \Pi[\mathcal{P}(\theta'' + \theta_0)] - \Pi[\mathcal{P}(\theta_0)] \right) d\theta'' dm , \quad (171)$$

où on a effectué le changement de variable  $\theta'' = \theta' - \theta_0$ .

L'équation (171) représente l'énergie potentielle utilisable qui est associée à l'intégrande de (171) " $(\vec{u}_h)^2/2 + a$ " qui possède, d'après Shepherd, une signification physique locale. Il montre dans l'article de 1993 que la partie linéarisée de (171) correspond, si  $\theta_0(p)$  est la moyenne isobare de la température potentielle, à la formule approchée en coordonnée pression de l'énergie potentielle utilisable de Lorenz.

Toutes ces propriétés de positivité, de comportement quadratique, d'interprétation physique locale de l'intégrande et d'absence de linéarisation ont été mentionnées comme étant des points forts de la fonction enthalpie utilisable  $a_h = (h - h_r) - T_r (s - s_r)$  qui est le propos de cette thèse. Cette

fonction  $a_h$  doit donc logiquement être une forme particulière de la formule générale (171) de Shepherd. Il reste à le vérifier puisque ce dernier n'a relié (171) qu'à la seule formulation atmosphérique de Lorenz.

Et c'est effectivement le cas si on prend comme état de base une parcelle fixée à la température  $T_r$  et à la pression  $p_r$  qui sont deux constantes. On a alors  $\theta_0(p) = \theta_r = T_r (p_{00}/p_r)^\kappa = C^{ste}$  et  $\Pi_0[p] = \Pi_r[p] = (p_r/p_{00})^\kappa = T_r/\theta_r$ . Mais pour cet état de base, le calcul de l'énergie utilisable ne doit pas être entrepris à partir de (171) puisque l'hypothèse d'existence de la fonction réciproque de  $\theta_0(p)$  a été employée pour obtenir cette relation et que cette fonction réciproque n'existe pas pour  $\theta_0(p) = \theta_r = C^{ste}$ . On doit revenir à la forme (167) et s'en tenir à une formulation qui ne nécessite pas l'inversion de  $\theta_0(p)$ . Même si Shepherd ne donne pas cette relation il est facile de l'établir en partant des expressions de  $\mathcal{H} - \mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{C} - \mathcal{C}_0$  précédentes mais en les exprimant à l'aide des températures  $T$  et  $T_0$  et des températures potentielles  $\theta$  et  $\theta_0$ . On obtient

$$\mathcal{A} = \iiint_{\mathcal{M}} \frac{(\vec{u}_h)^2}{2} dm + \iiint_{\mathcal{M}} \left[ c_p (T - T_0) - c_p \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{T_0(\theta')}{\theta'} d\theta' \right] dm . \quad (172)$$

Cette formulation est par certains aspects plus simple et d'application plus pratique que (171). Pour  $T_0(\theta') = T_r$  et  $\theta_0 = \theta_r$  constants et avec la propriété  $c_p \ln(\theta/\theta_r) = c_p \ln(T/T_r) - R \ln(p/p_r)$ , on trouve à partir de (172) le résultat pressenti :

$$\mathcal{A}_{(1)} = \iiint_{\mathcal{M}} \left[ \frac{(\vec{u}_h)^2}{2} + a_h \right] dm . \quad (173)$$

L'enthalpie utilisable est ainsi un des cas particuliers évidents de la formulation hydrostatique générale de Shepherd. Concrètement, les parties  $\mathcal{H} - \mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{C} - \mathcal{C}_0$  sont respectivement égales, pour cet exemple, à la différence d'enthalpie  $H - H_r$  et à  $-T_r (S - S_r)$ .

Il subsiste toutefois une certaine incohérence puisque dans la théorie de Shepherd l'état de base doit être en équilibre et la fonction  $\mathcal{A}$  doit être positive et quadratique. Ce n'est a priori pas le cas ici puisque la partie  $a_p = R T_r \ln(p/p_r)$  de l'enthalpie utilisable  $a_p$  n'a pas de signe défini et n'est pas quadratique à l'ordre le plus bas. De plus, l'état de base  $\theta_0(p) = \theta_r = C^{ste}$  ne représente pas une atmosphère isotherme en équilibre, mais comme indiqué ci-dessus une parcelle isolée d'atmosphère de référence.

Pour pallier ces inconvénients, regardons la forme que prend la pseudo-énergie qui correspond d'après (171) ou (172) à une véritable atmosphère isotherme à la température constante  $T_r$  avec  $\theta_0(p) = \theta_r = T_r (p_{00}/p)^\kappa$  et  $\Pi[\mathcal{P}(\theta'')] = T_r/\theta''$ . Le résultat montre que la partie non cinétique de l'énergie  $\mathcal{A}$  est l'intégrale  $A_T$  de la composante spécifique  $a_T = c_p [(T - T_r) - T_r \ln(T/T_r)]$  de l'enthalpie utilisable. C'est la forme originelle de Thomson (1853) et l'approximation à l'ordre le

plus bas en  $T/T_r - 1$  de cette composante  $A_T$  redonne le résultat obtenu par Pearce ou Blackburn :

$$\mathcal{A}_{(2)} = \iiint_{\mathcal{M}} \left[ \frac{(\vec{u}_h)^2}{2} + a_T \right] dm \approx E_k + \iiint_{\mathcal{M}} c_p \frac{(T - T_r)^2}{2 T_r} dm . \quad (174)$$

La composante  $a_T$  est bien positive et quadratique en  $T/T_r - 1$  à l'ordre la plus bas. Mais, comme signalé en (3.6), l'équation d'évolution de  $a_T$  est donnée par l'équation (162) et l'absence de la composante  $a_p$  se traduit par la présence de la conversion  $-R \omega T_r/p$  qui ne peut pas être équilibrée par un terme équivalent dans l'équation de l'énergie cinétique. Il semble que la présence de la composante  $a_p$  soit logique et nécessaire afin de tenir compte de la présence de cette conversion.

L'enthalpie utilisable spécifique  $a_h$  est donc cohérente à la fois localement et globalement pour une atmosphère hydrostatique. On a par ailleurs démontré en (3.4) que dans ce cas l'énergie entropique statique de Dutton est égale à  $A_T \approx A_h$ , ce qui représente une bonne approximation des résultats de Pearce et de Blackburn d'après  $\mathcal{F}(X) \approx X^2/2$ .

Toutes ces approches globales sont donc équivalentes et toutes sont reliées à la pseudo-énergie pour le cas de l'état de base isotherme. Une telle unification de ces différentes études atmosphériques n'avait jamais été obtenue auparavant. La pseudo-énergie de Shepherd semble bien généraliser l'ensemble des théories météorologiques de l'énergie utilisable, y compris l'approche de l'enthalpie utilisable décrite dans cette thèse.

Pour terminer, il faut signaler que l'énergie utilisable introduite par McHall ne semble pas se déduire simplement des formulations (171) ou (172). La raison qui pourrait expliquer une telle absence de lien avec la théorie présentée par Shepherd est que McHall utilise deux lois de conservation additionnelles. Il préserve à la fois l'intégrale de  $\ln(\theta)$  et celle de  $\theta$ , alors que Shepherd ne prévoit pas cette triple contrainte quand on adjoint celle concernant l'énergie totale.

## 4 L'ETUDE D'UNE ONDE BAROCLINE.

Les résultats de la section (2) concernant l'énergétique des couches isobares d'un domaine limité ont été présentés de manière mathématique et les quelques implications physiques prévisibles ont juste été mentionnées, sans être étayées par des études de cas réels ou à partir de résultats de simulations numériques d'écoulements atmosphériques. Même si l'approche de Shepherd (1993) semble procurer une assise théorique solide à la notion d'enthalpie utilisable, il fallait entreprendre une telle étude pratique qui, par ailleurs, n'a pas été publiée dans les articles de Marquet (1990 a) ou (1991).

### 4.1 La méthodologie.

Il s'agit d'appliquer plus particulièrement les résultats de la section (2.5) à l'étude des conversions isobares d'énergie au sein d'un domaine limité et ouvert. La valeur des différentes composantes de la fonction enthalpie utilisable, ainsi que leurs évolutions et les autres termes du cycle sont évalués pour chacune des échéances de la vie d'une onde barocline.

Le choix s'est porté sur la situation du 27 au 29 avril 1992 qui a vu se développer une dépression secondaire dans un flux d'ouest-sud-ouest sur le proche Atlantique et l'Europe de l'ouest. Cette situation a été mal prévue par les modèles numériques français opérationnels de l'époque (Emeraude et Peridot), même à 24 h d'échéance.

Il est souhaitable, à l'occasion de cette étude, de valider les quatre points suivants.

- Le développement d'une dépression secondaire au milieu d'une circulation générale plus complexe se traduit-elle par un signal identifiable sur les cycles isobares d'enthalpie utilisable ?
- Ce signal, s'il existe, peut-il être appréhendé à partir d'un échantillonnage temporel de 6 heures entre les prévisions ou entre les analyses vérifiantes ?
- Ce signal peut-il être appréhendé en partant des données interpolées sur les niveaux isobares, sans utiliser les véritables niveaux verticaux du modèle ?
- Quelle est la nature exacte des conversions d'énergie lors de la phase de développement et celle de décroissance de la dépression secondaire ? Retrouve-t-on les schémas habituels – instabilité barocline puis stabilisation barotrope – à propos des cyclogénèses principales ?

La difficulté concernant le premier point vient de la double validation qu'il faut mener à la fois sur les calculs des termes du cycle d'enthalpie utilisable et sur la présence d'un signal correspondant à la dépression. C'est en fait l'incapacité du modèle spectral de l'époque en troncature T79 à bien prévoir l'évolution du phénomène, associée à l'amélioration de cette prévision avec le modèle actuel (Arpege dans sa version dite étirée de résolution proche de T330 sur le domaine), qui va permettre de répondre à la question. La présence d'une conversion bien visible pour le modèle étiré et qui

serait absente ou plus faible avec le modèle de plus basse résolution sera interprétée comme un signal probablement lié à la dépression secondaire.

Le deuxième point est important puisque la plupart des cycles d'assimilation des modèles numériques sont basés sur une fréquence de  $6 h$  entre deux analyses successives. Toute éventuelle mise en œuvre opérationnelle d'un produit dérivé de l'étude des cycles énergétiques devra utiliser cet échantillonnage de  $6 h$ . La contrainte sous-jacente qu'il faut également valider est la possibilité de calculer les dérivées temporelles des réservoirs énergétiques à partir de différences finies entre deux ou trois échéances consécutives. On a ainsi étudié deux séries de prévisions. Pour la première série les fichiers sont disponibles toutes les  $2 h$ , alors que pour la deuxième on calcule les tendances avec les mêmes fichiers mais en ne gardant qu'un intervalle de  $6 h$ .

Il ne sera pas vraiment répondu au troisième point, sinon par la comparaison avec les résultats obtenus lors des précédentes études sur le comportement des trains d'ondes baroclines qui ont été réalisés à partir des champs calculés sur les niveaux verticaux d'un modèle.

Quant au quatrième point, c'est bien sûr le plus intéressant pour la compréhension des phénomènes météorologiques. Mais il faut d'abord répondre positivement aux trois questions qui le précèdent avant de pouvoir aborder avec une confiance raisonnable l'interprétation physique des résultats.

## **4.2 La situation météorologique.**

Pendant toute la période entre le 23 et le 27 avril 1992 l'Europe occidentale et le proche Atlantique ont été soumis à une vaste situation dépressionnaire avec un minimum très prononcé au sud de l'Islande qui a dirigé un flux rapide d'ouest à sud-ouest sur la France où de nombreuses perturbations se sont succédées.

La situation qui est retenue pour cette étude débute vers le 26 avril aux alentours du 40 ouest et avec une dépression qui se déplace rapidement vers l'ouest en se creusant pour aborder les côtes de la Bretagne dans la soirée du 27. Le centre de la dépression se déplace ensuite rapidement en Manche pour atteindre la mer Baltique dans la journée du 29 (voir la figure 22). Le minimum de pression est atteint le 28 avril vers  $6 h$  TU, il est voisin de  $996 hPa$  (la source est FRONT 92). Le front froid associé balaye la France dans la journée du 28 avec des rafales atteignant  $80$  à  $90 km/h$  en surface près de la Manche.

En altitude, l'arrivée de cette dépression sur la France coïncide avec le développement d'une dorsale Atlantique et l'isolement d'un profond thalweg sur le 10 est (voir la figure 23), avec l'isolement d'un minimum qui se produira le 30 avril sur le golfe de Gênes.

On a reporté sur les figures (22) et (23) le domaine d'étude qui est délimité par les latitudes 45

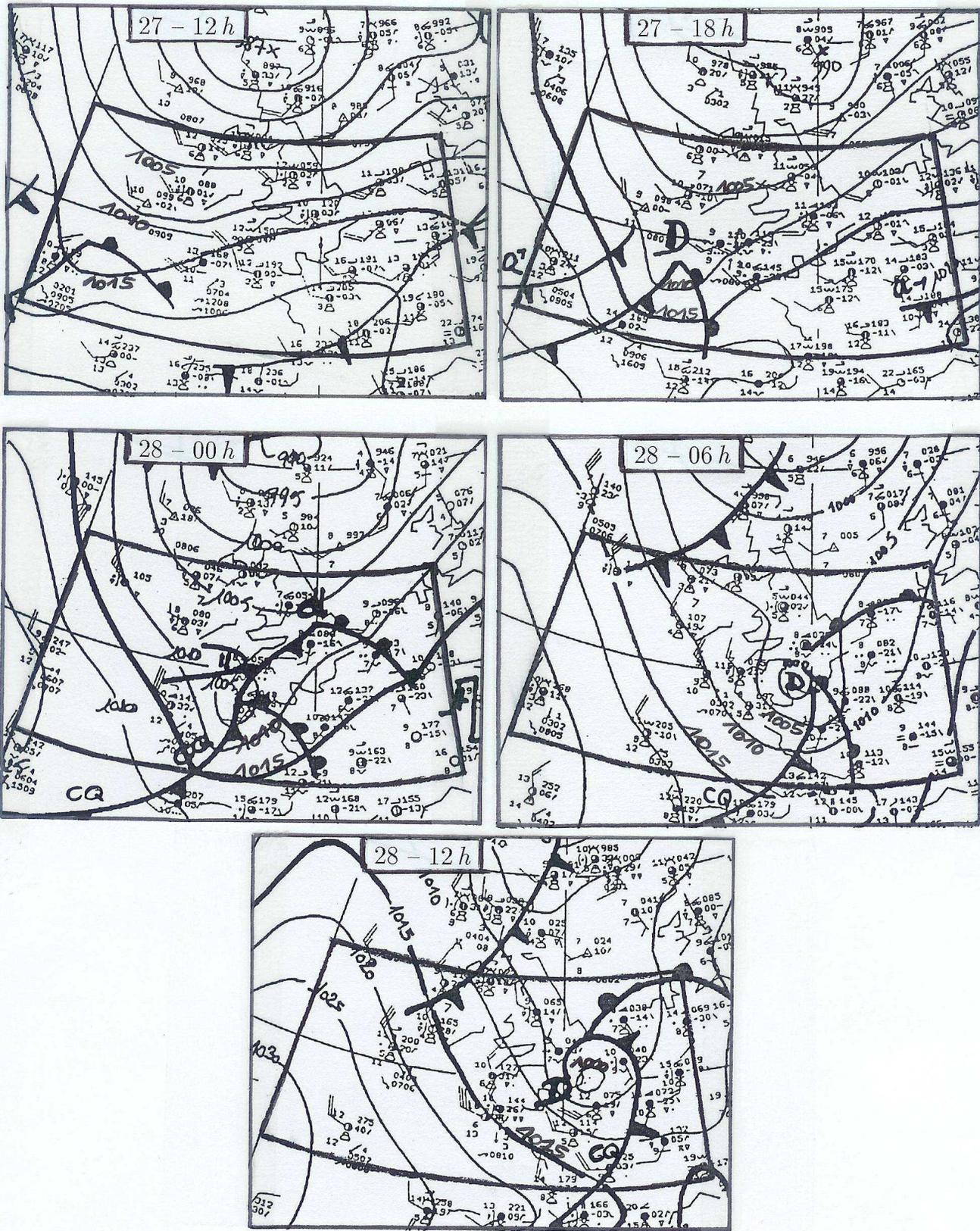


FIG. 22 – Pression réduite au niveau de la mer. La situation du 27 avril 1992 à 12 h au 28 avril à 12 h par pas de 6 h. On observe en surface un déplacement rapide de la dépression associée au fronts "Q". Le minimum, inférieur à 1000 hPa, est atteint entre 6 h et 12 h le 28 avril.

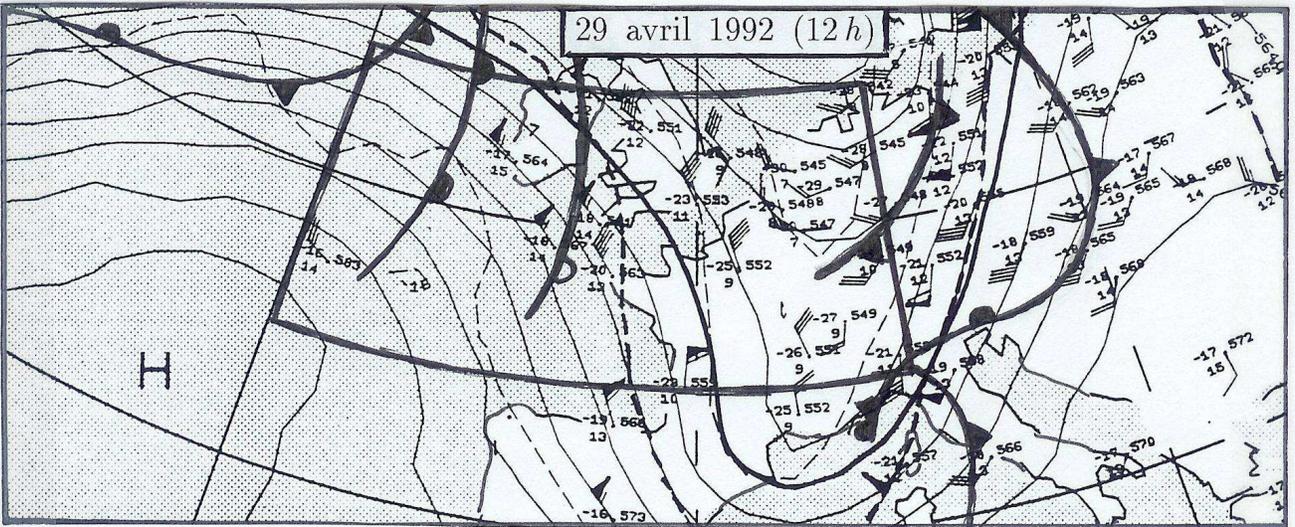
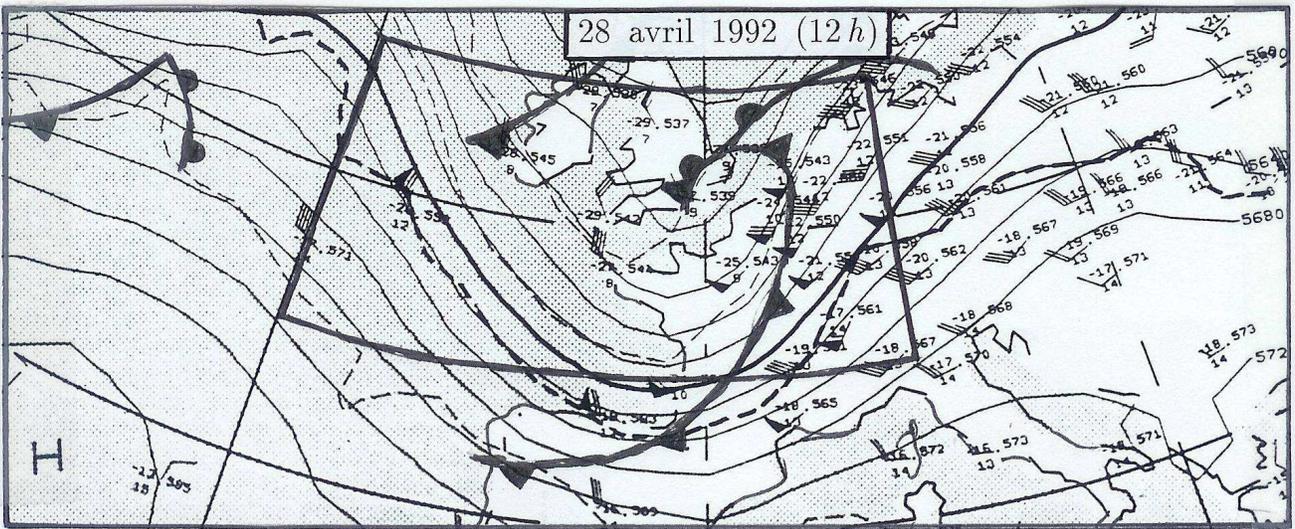
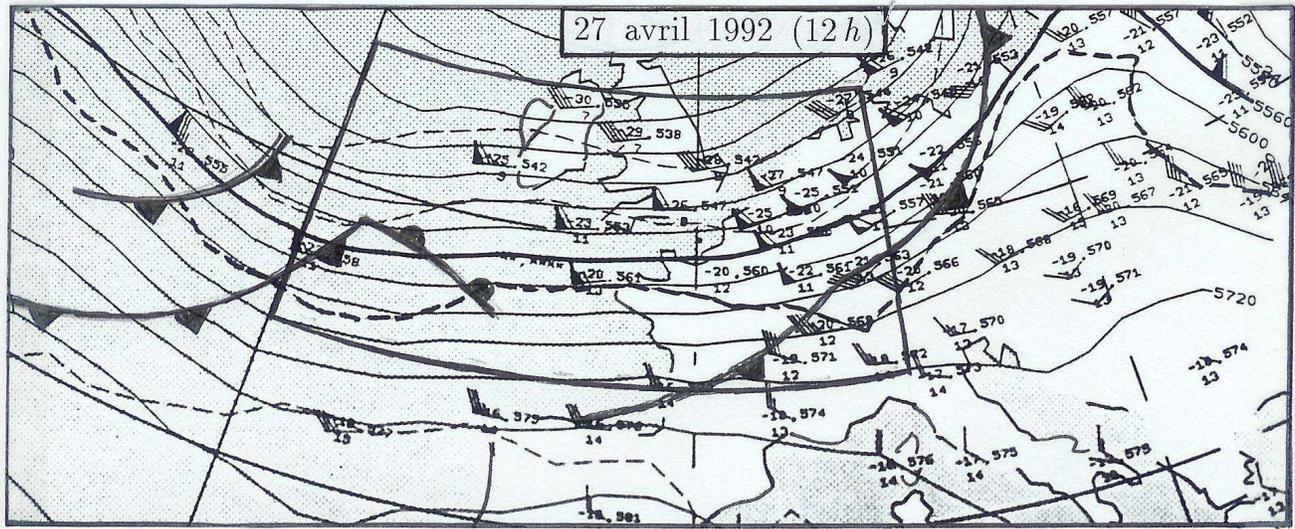


FIG. 23 – Géopotiel à 500 hPa. La situation du 27 avril 1992 à 12 h au 29 avril à 12 h par pas de 24 h. On observe en altitude le développement d'une dorsale Atlantique avec la création d'un profond thalweg sur le 10 est, ceci à partir du 29 avril.

et 55 nord et par les longitudes 20 ouest et 10 est. On voit que l'essentiel du trajet du coeur de la dépression sera contenu dans ce domaine d'étude. Les flux aux frontières doivent a priori être importants si on considère les gradients de pression, ceux de géopotential et les vents observés. On se place ainsi dans les conditions de test idéales pour répondre aux questions de la section précédente.

Le domaine d'étude aux frontières ouvertes est traversé par un phénomène rapide de petite échelle. Il s'agit d'une dépression dite secondaire qui est d'échelle sous-synoptique et dont l'étude détaillée devra faire l'objet de la campagne FRONTS 96. Une étude préliminaire d'Ayrault et Jousset (1993) a permis de conclure que le mécanisme d'instabilité barotrope pourrait être à l'origine du développement des ondulations le long des fronts. C'est ce type de résultat qu'il faut si possible infirmer ou confirmer sur l'exemple considéré, si toutefois cet exemple s'avère représentatif de cette classe de phénomènes.

### **4.3 Les simulations numériques.**

Le système de prévision français était doté en avril 1992 de deux types de modèles numériques. L'un, appelé Emeraude, est un modèle spectral global à la troncature triangulaire  $T79$  avec 15 niveaux verticaux, soit une résolution horizontale approximative de  $170\text{ km}$ . L'autre, appelé Peridot, est un modèle en points de grille  $119 \times 119$  à la résolution de  $35\text{ km}$  centré sur la Bretagne, avec également 15 niveaux verticaux. C'est le modèle global Emeraude qui fournit les conditions aux limites pour le modèle couplé à maille fine Peridot.

Depuis le mois d'octobre 1992, le modèle Emeraude a été remplacé par la version à maille uniforme d'un nouveau modèle appelé Arpege, le modèle Peridot continuant à fournir les prévisions à échelle fine sur l'Europe occidentale jusqu'au mois d'octobre 1993. A cette date, la version du modèle Arpege utilisant une maille variable a été mise en opérationnel, en remplaçant par un modèle unique les deux modèles couplés précédents (Arpege maille uniforme / Peridot). Cette maille variable correspond à une transformation conforme qui se traduit par une résolution qui varie continûment entre le pôle dit d'intérêt et le pôle dit de désintérêt. Pour un modèle spectral global de troncature triangulaire  $T95$  et un facteur d'étirement  $c = 3.5$ , on peut considérer en première approximation que les troncatures équivalentes en ces deux pôles valent respectivement  $c$  fois et  $1/c$  fois la troncature nominale, soit pour cet exemple qui correspond à la première version opérationnelle d'Arpege à  $T330$  sur la France (au lieu de coordonnées  $2.5784$  est,  $46.46885$  nord) et  $T27$  vers l'Australie. Les résolutions équivalentes sont respectivement de  $40\text{ km}$  et de  $500\text{ km}$ . On se reportera à Courtier et Geleyn (1988) et à Courtier et al. (1991) pour la description du modèle Arpege.

Pour réaliser l'étude énergétique de cette thèse il a été décidé de ne pas utiliser les sorties du

modèle Emeraude, mais de lui préférer le modèle Arpege à maille uniforme qui se comporte comme le modèle Emeraude sur la situation du 26 au 29 avril 1992. La version à maille variable d'Arpege a ensuite été étudiée sur la même période. Ainsi seule l'influence de l'étirement interviendra pour la comparaison entre les deux expériences. Les versions d'Arpege qui ont été utilisées sont  $T79$ ,  $c = 1$ , 15 niveaux hybrides pour le modèle à maille uniforme et  $T95$ ,  $c = 3.5$ , 21 niveaux hybrides pour le modèle à maille variable. Deux cycles d'assimilation ont été refaits, l'un avec le modèle ( $T79$ ,  $c = 1$ ), l'autre avec le modèle ( $T95$ ,  $c = 3.5$ ). Ces cycles ont débuté sur le réseau du 26 à 00 UTC. Puis deux prévisions à 48h ont été lancées en partant du 27 à 00 UTC avec les modèles à mailles uniforme et variable.

Par manque de temps, le calcul des cycles n'a pas été effectué à partir des modèles Emeraude et Peridot, bien que la méthode puisse être appliquée aux fichiers issus de ces modèles.

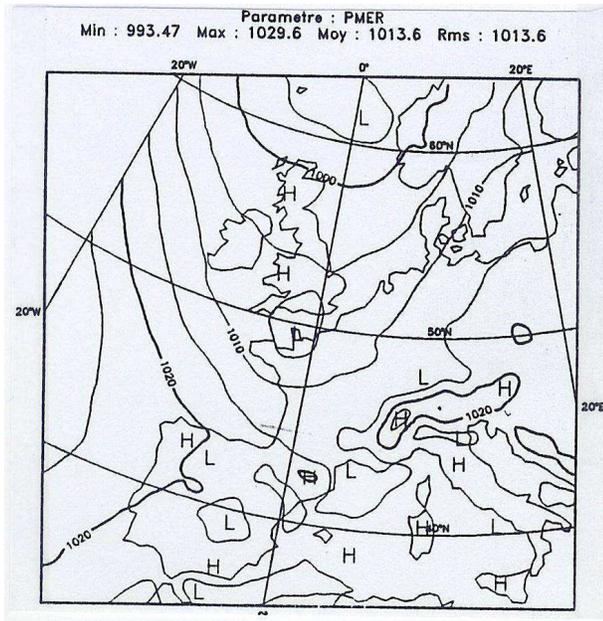
La qualité des différents modèles Peridot, Arpege uniforme et Arpege à maille variable sera jugée brièvement par l'examen des cartes pour les prévisions à 30 h d'échéance, soit pour le 28 à 6 h qui correspond au creusement maximum de la dépression. C'est le moment où le centre d'action est localisé en Manche et sur le Cotentin (voir la figure 22).

On voit sur les cartes de la figure (24) que pour la pression réduite au niveau de la mer l'analyse initialisée vérifiante qui est présentée est celle du modèle Arpege à maille variable. C'est l'analyse qui semble la plus proche de la réalité. Le minimum de pression est voisin de 1002 hPa, alors qu'il se situe vers 996 hPa en réalité. On voit surtout que, des trois modèles, c'est le modèle Arpege à maille variable qui donne la meilleure prévision du phénomène, avec une isobare à 1010 hPa qui descend jusqu'à la Vendée alors que Peridot ou Arpege à maille uniforme laisse cette isobare sur le sud de l'Angleterre.

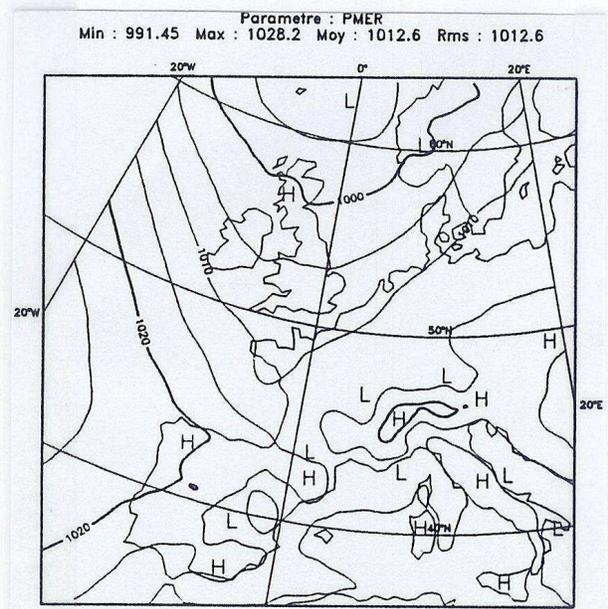
Les cartes du géopotentiel à 500 hPa, qui ne seront pas présentées, indiquent également que c'est la prévision du modèle Arpege à maille variable qui est la meilleure, avec un thalweg qui n'est pas assez marqué pour les modèles Peridot et Arpege à maille uniforme.

La dynamique de la situation est elle aussi mieux rendue avec le modèle Arpege à maille variable. On le remarque sur la figure (25) où à 400 hPa la présence de vents supérieurs à 45 m/s dans la traîne postérieure de nord-ouest est plus proche des valeurs analysées (55 m/s) que pour les autres modèles. C'est aussi le cas à 850 hPa où la présence d'un renforcement supérieur à 15 m/s dans le flux de sud-ouest sur le bassin parisien est mal vu par le modèle Arpege à maille uniforme et par Peridot (cartes non montrées ici). De manière générale c'est la structure méridienne du flux associée à la dépression qui est imparfaitement représentée par ces deux derniers modèles.

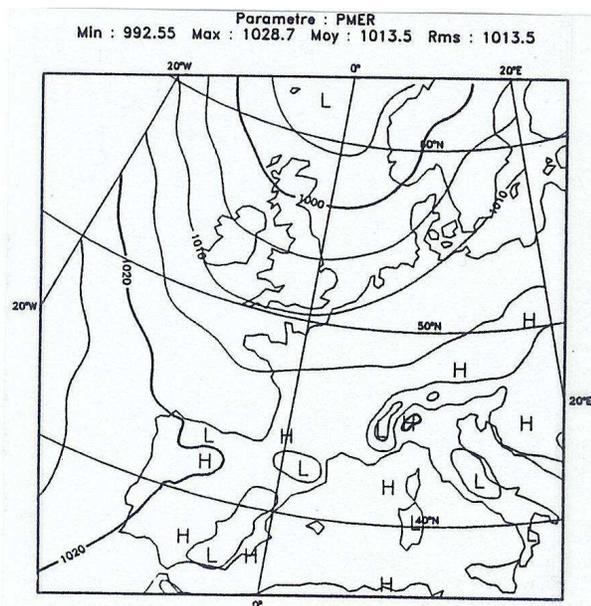
On en déduit que les champs de masse et de mouvement, bien qu'imparfaits, sont nettement



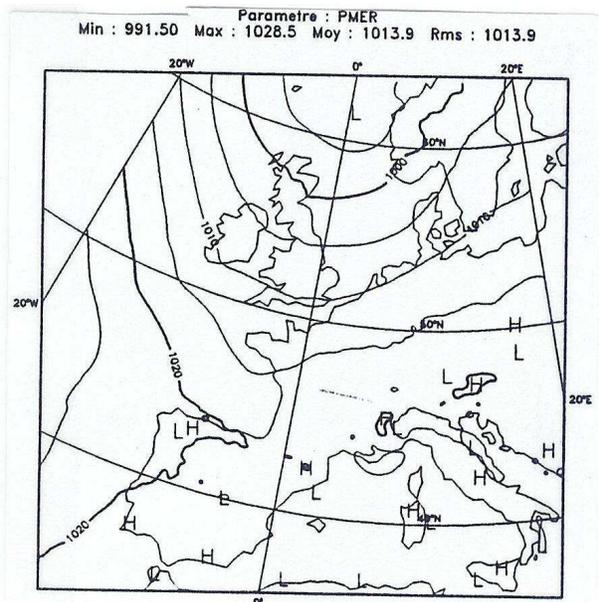
L'analyse initialisée AS



Le modèle ARS



Le modèle ARP



Le modèle PER

FIG. 24 – Les trois prévisions à 30 h d'échéance et l'analyse vérifiante pour le 28 avril 1992 à 6 h. Le paramètre est la pression réduite au niveau de la mer (écartement de 5 hPa). On montre les prévisions des modèles Arpege à maille uniforme (ARP), Arpege à maille variable (ARS) et Peridot (PER). L'analyse initialisée (AS) est celle du modèle à maille variable.

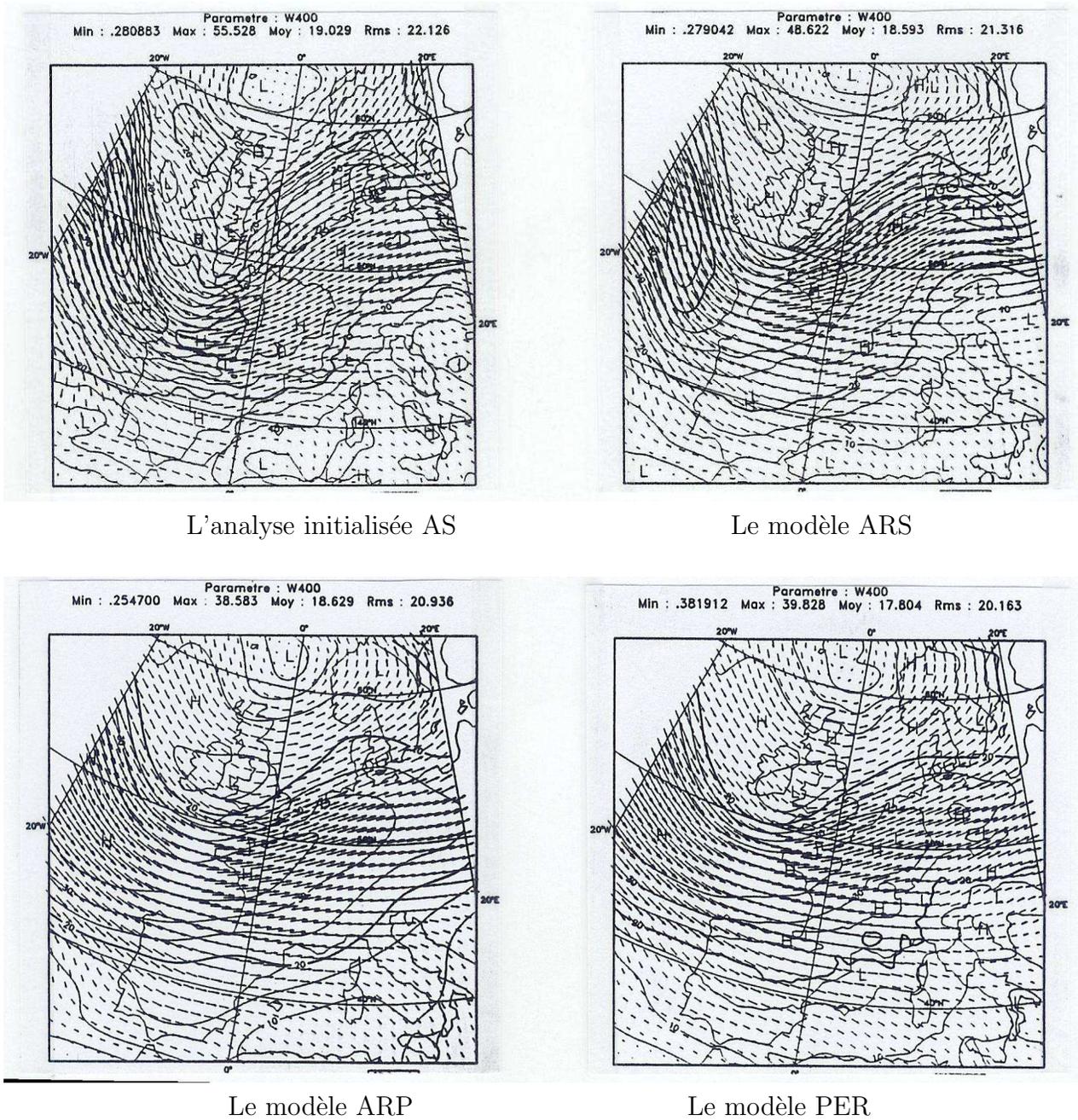


FIG. 25 – Les trois prévisions à 30 h d'échéance et l'analyse vérifiante pour le 28 avril 1992 à 6 h. Le paramètre est le vent à 400 hPa avec les isotaches en traits continus (écartement de 5 m/s). On montre les prévisions des modèles Arpege à maille uniforme (ARP), Arpege à maille variable (ARS) et Peridot (PER). L'analyse (AS) est celle du modèle à maille variable.

mieux prévus par le modèle Arpege à maille variable que par les autres modèles.

Il est important de remarquer que les différences entre les prévisions sont principalement liées à la dépression secondaire et pas vraiment à la situation générale de plus grande échelle. En conséquence, une différence de comportement énergétique entre les versions à maille uniforme ou à maille variable d'Arpege pourra être interprétée comme un signal lié à cette dépression secondaire. Cette propriété sera utilisée par la suite pour rechercher les signaux spécifiques à l'activité de cette dépression et c'est finalement le fait que les prévisions d'Arpege à maille uniforme sont de qualité médiocre qui permettra paradoxalement de mieux comprendre l'énergétique d'un phénomène d'échelle sous-synoptique.

Toutefois, le modèle à maille uniforme reproduisant en partie le phénomène, on peut s'attendre à ce que l'énergétique de ce modèle contienne également une partie de l'information pertinente. Il faudra en particulier essayer de différencier les effets du thalweg qui s'établit à partir du 27 sur le domaine d'étude avec les effets de la dépression secondaire.

Les cycles d'assimilation des deux versions d'Arpege ont débuté la veille de la date de base pour les prévisions, c'est à dire le 26 avril. C'est une même prévision du modèle Emeraude qui a servi de point de départ aux deux cycles. Il aurait en fait été préférable de réaliser une durée d'assimilation d'au minimum trois jours avant le lancement des prévisions. On constate cependant que les deux versions d'Arpege ont déjà acquis une certaine indépendance vis à vis du point de départ commun puisque les prévisions, d'après les figures (24) et (25), ont déjà commencé à se différencier.

Une autre façon d'améliorer la qualité de ces prévisions aurait été de prendre en compte dans la phase d'assimilation, autant que possible, le réseau d'observation complémentaire qui a été obtenu lors de cet épisode du 26 au 29 avril 1992. Cette situation a en effet coïncidé avec la campagne anglaise FRONT 92 où des mesures aéroportées ont été effectuées et où des sondes ont été lancées. Ces mesures semblent malheureusement avoir été entreprises dans une phase assez tardive du développement de la dépression secondaire, principalement le 27 avril, entre 12 h et 21 h. Il n'est donc pas certain que l'impact de ces observations complémentaires sur le cycle d'assimilation soit très important pour la prévision à 30 h d'échéance à partir du 27 avril à 0 h qui est étudiée ici.

#### **4.4 Le calcul des cycles.**

L'idéal serait de réaliser l'ensemble des calculs diagnostiques à partir des données brutes des modèles, en respectant très exactement le relief, les grilles horizontales, les niveaux verticaux et l'arrangement choisi pour les différentes variables pronostiques et diagnostiques en chaque point de grille et sur les niveaux verticaux hybrides. Ce n'est qu'en prenant ces précautions que les variables

seront exemptes de bruits et d'erreurs de calcul, en particulier pour les paramètres vitesse verticale et divergence qui seront utilisés dans le calcul des cycles isobares d'exergie, mais aussi pour le paramètre tourbillon isobare qui ne sera pas étudié ici.

De tels calculs sont effectivement réalisés dans le modèle Arpege, aussi bien avec la maille uniforme que pour la maille variable. Mais ces diagnostics par domaines horizontaux (en abrégé DDH) n'incluent pas les calculs des cycles d'énergie utilisable. De plus, une partie des informations concernant le vent n'est pas disponible pour la maille variable, du moins dans la version présente du code.

Aussi a-t-il été décidé de développer un module informatique de calcul des cycles isobares d'enthalpie utilisable en choisissant comme fichiers d'entrée les champs interpolés en niveaux pression correspondant à la banque de données analysées et prévues de Météo-France (la BDAP). Tous les modèles cités (Arpege, Emeraude, Peridot), mais aussi celui du centre européen de prévision à moyenne échéance, sont susceptibles d'alimenter la BDAP. Ce module de calcul des cycles peut ainsi servir d'outil d'investigation du comportement énergétique de ces modèles.

Les champs sont disponibles sur divers domaines et pour des résolutions adaptées à chacun d'entre eux. Mais, pour cette thèse, un domaine particulier a été créé. Comme indiqué précédemment, on a reporté sur les figures (22) et (23) le domaine d'étude qui est délimité par les latitudes 45 et 55 nord et par les longitudes 20 ouest et 10 est. La résolution est de  $0.25 dg$  en longitude et en latitude, ce qui donne une grille de  $121 \times 41$  points sur l'horizontale. La résolution verticale est de 16 niveaux de pression (1000 à 800  $hPa$  par pas de 50, puis 700 à 300  $hPa$  par pas de 100, ensuite 250 à 100  $hPa$  par pas de 50 et enfin les niveaux 70 et 50  $hPa$ ).

Outre le champ de pression réduite au niveau de la mer, les champs lus pour chacun de ces niveaux sont : les géopotentiels, les températures, les deux composantes horizontales du vent et la vitesse verticale. Les phénomènes extrapolés sous le relief seront malheureusement pris en compte, une limitation des diagnostics aux seules parties aériennes pertinentes pourra faire l'objet d'une future version du code informatique.

Les géopotentiels et les vitesses verticales ne sont pas filtrés (bien que cette possibilité existe maintenant pour ces deux champs de la BDAP) et c'est au départ la présence d'un bruit important près des reliefs qui a motivé le calcul d'un nouveau champ de vitesse verticale. En fait, le raisonnement qui a prévalu est que les trois contraintes qui sont utilisées dans les calculs analytiques des cycles sont : (i) l'équation d'état  $p = \rho R T$  ; (ii) l'équation de l'équilibre hydrostatique  $\partial \Phi / \partial p = -RT / p$  ; (iii) l'équation de continuité  $\text{div}_p(\vec{u}_h) + \partial \omega / \partial p = 0$ . C'est principalement la troisième de ces contraintes qui n'est pas vérifiée par les champs  $\vec{u}_h$  et  $\omega$  de la BDAP et ce déséquilibre est très préjudiciable pour la précision des calculs des cycles. Pour respecter simul-

tanément les trois contraintes il ne sera pas fait usage d'un filtre, ni de la méthode dite cinématique, ni de l'équation dite "en omega". Même si les filtres réduisent le bruit, l'équation de continuité n'est pas vérifiée numériquement. La méthode cinématique permet certes de calculer une nouvelle vitesse verticale, mais au prix d'une modification du champ de divergence associé et il faudrait corriger en conséquence le champ de vent. Quant à l'équation "en omega", elle dérive d'une approximation quasi-géostrophique qu'il n'a pas paru souhaitable d'introduire pour l'étude du comportement énergétique d'un phénomène tel que cette dépression secondaire de petite échelle.

Il a donc été simplement décidé de conserver les champs  $\Phi$ ,  $T$  et  $\vec{u}_h$  tels qu'ils sont fournis par la BDAP, puis de calculer un nouveau champ de vitesse verticale  $\omega^*$  par une simple intégration verticale la divergence, ceci en partant du niveau supérieur à la pression  $50 hPa$  où  $\omega(1) \equiv \omega^*(1)$  est faible.

Il a été vérifié sur un exemple que la nouvelle vitesse verticale est réaliste. Elle est en fait proche de celle de la BDAP, excepté sous les reliefs où les méthodes d'extrapolation de la BDAP semblent mises en défaut. Le calcul de la divergence isobare du vent ainsi que l'intégration verticale de cette quantité sont effectués de manière aussi cohérente que possible avec les définitions de la grille horizontale et des niveaux verticaux qui sont ensuite utilisés pour les calculs des cycles énergétiques. Il a été contrôlé que l'équation de continuité est vérifiée avec une bonne approximation, mais il n'y a pas égalité stricte puisque les opérateurs numériques de dérivée verticale et d'intégration verticale ne sont pas rigoureusement inverses l'un de l'autre.

Le paramètre humidité n'est pas pris en compte dans cette version du code. Un premier essai de généralisation a toutefois été entrepris par des stagiaires de l'école nationale de la météorologie en 1993 en appliquant les résultats de la théorie humide qui sont exposés dans l'article de Marquet (1993).

Le domaine horizontal de calcul est surdimensionné par une rangée supplémentaire de points pour que les calculs des dérivées horizontales qui sont des schémas centrés d'ordre 2 couvrent le domaine intérieur. Le schéma de dérivée verticale est également centré et du deuxième ordre, sauf pour les deux extrémités inférieure et supérieure où c'est un schéma décentré du premier ordre qui est employé. Les tendances temporelles sont obtenues soit par des différences décentrées avant ou arrière entre deux fichiers consécutifs, soit par un schéma centré d'ordre 2 entre trois fichiers qui peuvent ne pas être équidistants.

Le code informatique du module de calcul des diagnostics a été développé à l'image de celui du modèle Arpege. Il utilise le principe du pilotage externe par une 'namelist' où on précise la géométrie du domaine d'investigation et les types de diagnostics désirés (niveaux verticaux, moyennes entre deux niveaux de pression déterminés, etc).

## 4.5 Les résultats.

Tous les résultats qui vont être présentés dans les sections qui suivent intéressent l'ensemble du domaine d'étude. Ce sont des valeurs intégrées entre les niveaux  $1000\text{ hPa}$  et  $50\text{ hPa}$ . Les unités sont en  $10^5\text{ J m}^{-2}$  pour les énergies, en  $W\text{ m}^{-2} = 0.864\ 10^5\text{ (J m}^{-2})/\text{jour}$  pour les termes des équations d'évolution de ces énergies (tendances, conversions, générations, dissipations, convergences des flux aux frontières). Les termes de dissipation et de génération ne sont pas calculés directement. Ils sont obtenus en tant que résidus des équations, tous les autres termes pouvant être calculés.

L'étude de la structure verticale des termes énergétiques constitue pourtant la finalité de cette thèse et cette étude sera effectivement entreprise dès que la méthode du calcul numérique des cycles sera validée par comparaison aux résultats antérieurs obtenus par d'autres auteurs. Il sera probablement nécessaire de reprendre un cycle d'assimilation plus complet sur cette situation, avec une version plus récente du code du modèle Arpege, en profitant également des possibilités nouvelles de troncatures plus élevées de ce modèle ( $T159$ ,  $c = 3.5$ , 27 niveaux verticaux en utilisant une dynamique semi-lagrangienne, soit  $T556$  sur la France). Il sera sans doute aussi utile de s'intéresser à d'autres situations de cyclogénèse encore plus marquées qui se sont développées pendant l'année 1993.

### 4.5.1 L'échantillonnage temporel.

Les sorties du modèle Arpege ont été sauvegardées avec une fréquence de  $2\text{ h}$  pour obtenir une bonne précision. Mais, pour la partie assimilation, on ne dispose au mieux que d'une fréquence de  $6\text{ h}$ . Toute volonté de mise en œuvre opérationnelle des résultats issus de cette étude devra pourtant comporter une méthode de validation, la référence étant constituée par les cycles calculés à partir des fichiers d'analyse de l'assimilation.

Il est donc très important de vérifier que le calcul des cycles n'est pas trop influencé par cet échantillonnage temporel de  $6\text{ h}$ . Pour ce faire, une prévision pour le modèle Arpege  $T79$  a été effectuée sur la base du 28 à  $0\text{ h}$  et les cycles ont été calculés à partir des mêmes sorties toutes les  $2\text{ h}$  et  $6\text{ h}$ . Si la plupart des termes énergétiques sont peu affectés par cet échantillonnage, le calcul des tendances euleriennes est à l'inverse bien moins précis en cas de fréquence de  $1/6\text{ h}^{-1}$  et les termes de dissipation et de chauffage différentiel qui sont des quantités résiduelles des équations pourraient devenir irréalistes si les erreurs étaient trop importantes.

On voit sur les figures (26) et (27) que pour les termes touchant le réservoir  $K_E$  il y a un bon accord entre les deux méthodes de calcul. L'échantillonnage de  $6\text{ h}$  est certes moins précis, mais l'évolution de la tendance  $\partial K_E / \partial t$  est bien reproduite avec des maximums relatifs à  $10\text{ W/m}^{-2}$  et  $-1\text{ W/m}^{-2}$

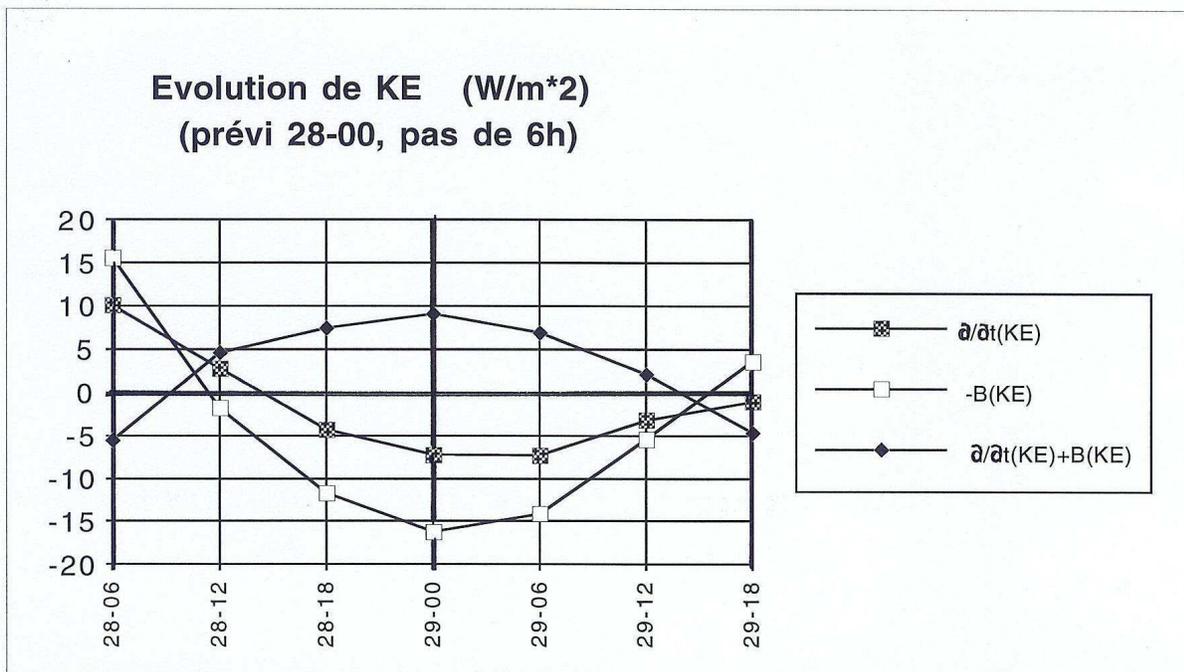
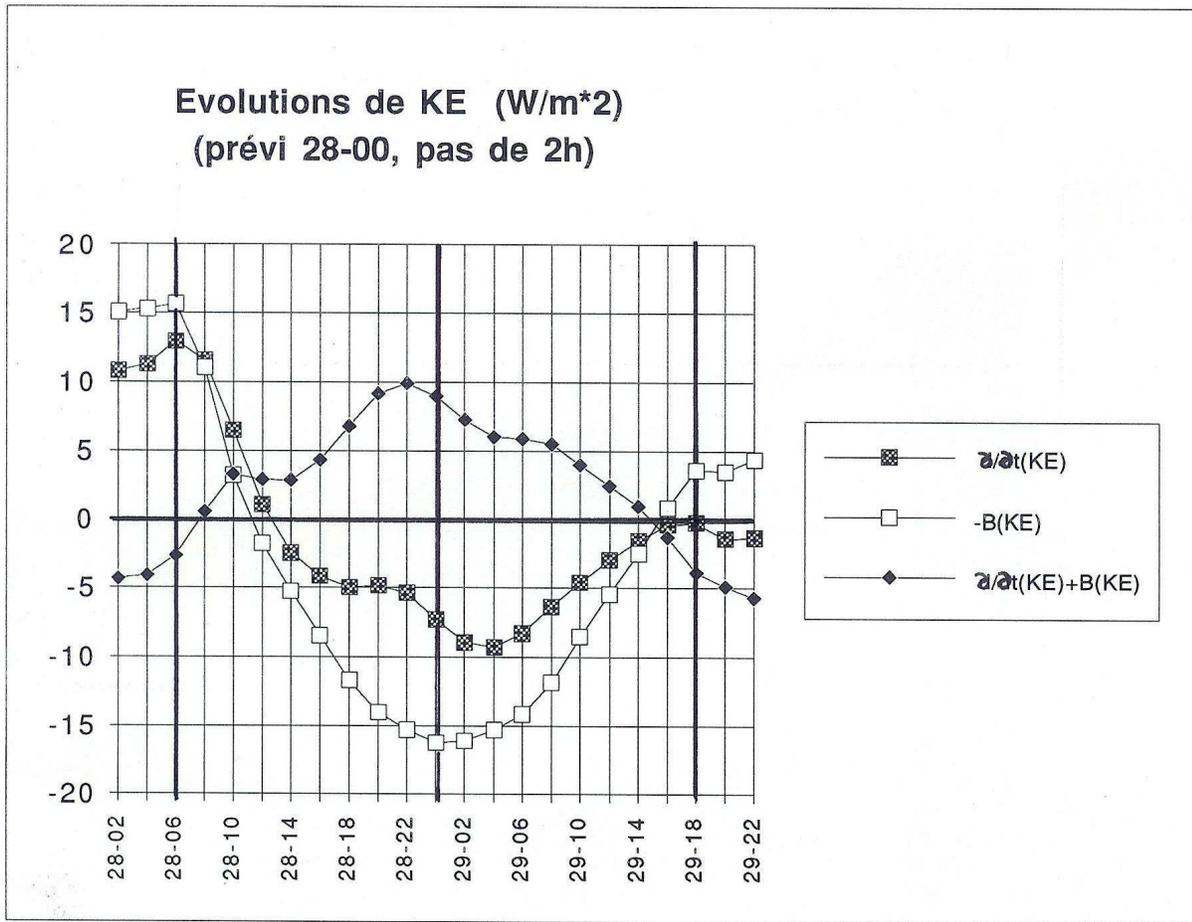


FIG. 26 – Les évolutions du réservoir énergétique  $K_E$  pour la prévision à 48 h de base le 28 avril 1992 à 0 h. La tendance eulerienne est  $\partial K_E / \partial t$ , la convergence du flux aux frontières est  $-\iint_{\mathcal{M}} \overline{B(k_E)} dm$ , alors que la dérivée totale moyenne est  $\iint_{\mathcal{M}} (\overline{dk_E/dt}) dm = \partial K_E / \partial t + \iint_{\mathcal{M}} \overline{B(k_E)} dm$ . On montre les deux types de calcul avec les échantillonnages de 2 h et de 6 h.

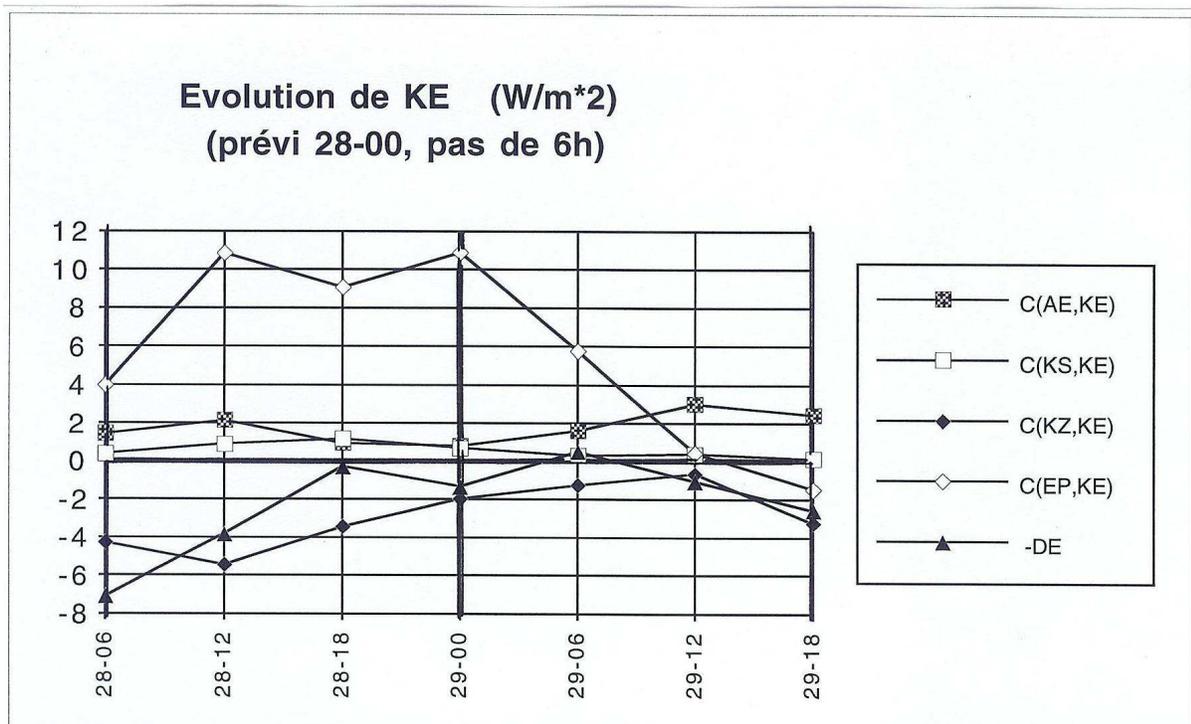
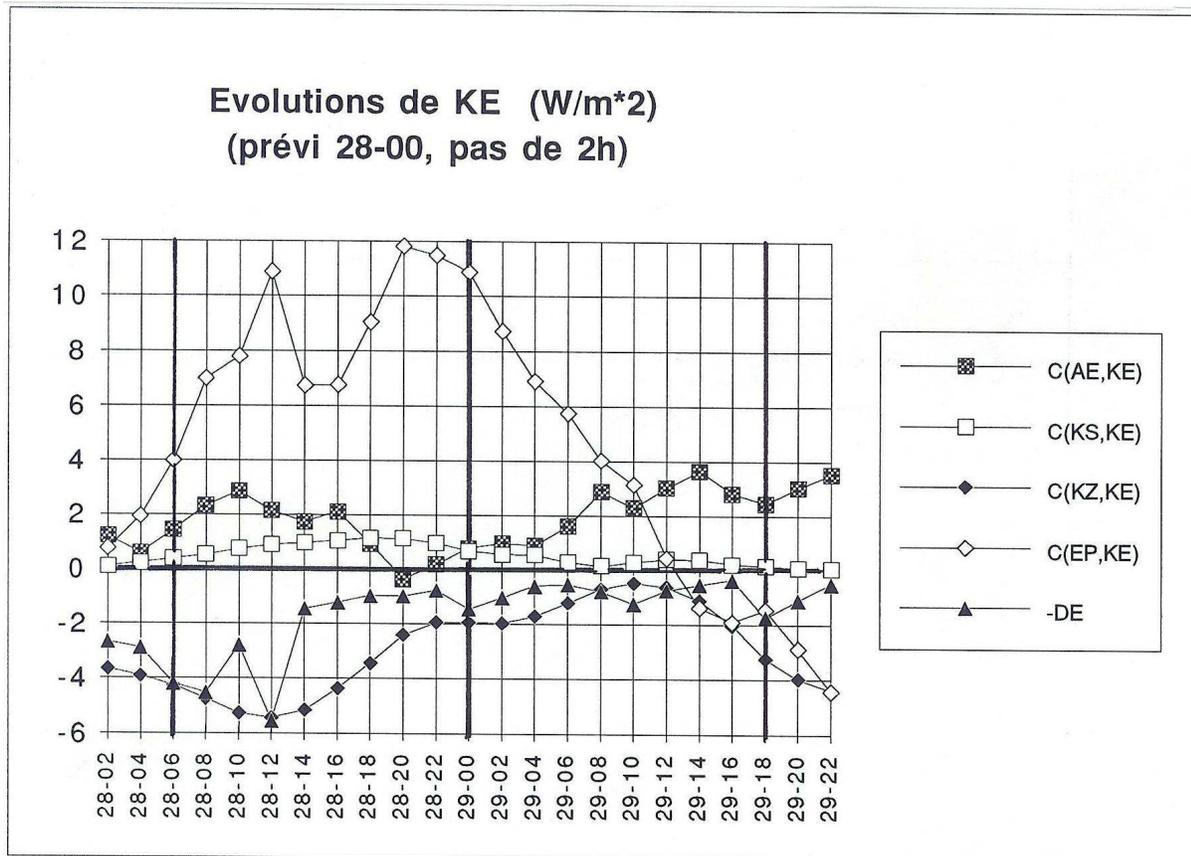


FIG. 27 – On présente, comme pour la figure précédente, les évolutions des termes de conversion et de dissipation du réservoir  $K_E$ . On montre les deux types de calcul avec les échantillonnages de 2h et de 6h.

respectivement en début et en fin de période et avec un minimum à  $-16 W/m^{-2}$  autour du 29 à 0 h. La dissipation  $-D_E$  est elle aussi bien reproduite avec des valeurs logiquement négatives et qui restent modérées. Ce n'était pas le cas pour Brennan et Vincent (1980) et Michaelides (1987) où il est mentionné que le terme  $C(\overline{\Phi}, \overline{k_E})$  ne pouvait pas être calculé avec précision, le résidu de ces études étant en fait défini par  $C(\overline{\Phi}, \overline{k_E}) - \overline{d_E}$  qui pouvait prendre des valeurs positives ou négatives.

Même si les détails de l'évolution de  $\partial K_E / \partial t$  sont masqués avec l'échantillonnage de 6 h, il faut rappeler que les phénomènes présents dans cette étude sont de petite échelle et qu'ils évoluent rapidement à l'intérieur et à travers le domaine d'étude. Le test est en fait très sévère et il semble qu'une comparaison pourra être effectuée à l'avenir entre les cycles énergétiques de l'assimilation et ceux calculés à partir des prévisions avec un échantillonnage de 6 h.

Ceci ouvre la possibilité d'une utilisation à des fins opérationnelles pour les trois points suivants : (i) apprécier le degré de cyclogénèse pour différents sous-domaines d'une prévision ; (ii) trouver de manière automatique les zones de cyclogénèse active ; (iii) fournir de nouveaux scores de qualité des prévisions par comparaison aux analyses. Ces scores seraient caractéristiques de l'énergétique et de la dynamique du modèle et ils seraient complémentaires des autres scores plus classiques qui quantifient une information de type distance entre champs prévus et analysés (écarts-types et moyennes des erreurs, corrélations de tendances et d'anomalies).

#### 4.5.2 L'étude de Pearce.

Il est intéressant de rappeler les résultats de Pearce (1978) qui a étudié l'énergétique du système d'ondes baroclines décrit dans Simmons et Hoskins (1978). C'est un ensemble périodique de nombre d'onde 6. Le modèle ne comprend pas de terme de chauffage différentiel ( $G_S = G_Z = G_E = 0$ ).

C'est entre les jours 4 et 8 que ce train d'onde a connu son développement maximal, la circulation redevenant progressivement zonale entre les jours 10 et 13. La figure (28) montre les évolutions entre les jours 0 et 14 pour plusieurs des énergies et des conversions qui interviennent dans cette thèse. Ces quantités sont intégrées sur l'ensemble du domaine. Comme  $A_S \gg A_Z \approx A_E$ , les évolutions sont tracées par différence avec les valeurs à l'instant initial :  $A_S - (A_S)_{(0)}$ ,  $A_Z - (A_Z)_{(0)}$  et  $A_E - (A_E)_{(0)}$ .

Les décroissances de  $A_Z$  et de  $A_S$  traduisent une diminution des contrastes moyens de température, méridiens pour  $A_Z$ , verticaux pour  $A_S$ . On retrouve l'effet connu des perturbations baroclines sous les latitudes tempérées : elles transportent la chaleur vers le nord et vers les hautes altitudes en réduisant les gradients moyens de température associés. Le passage par un maximum pour  $A_E$

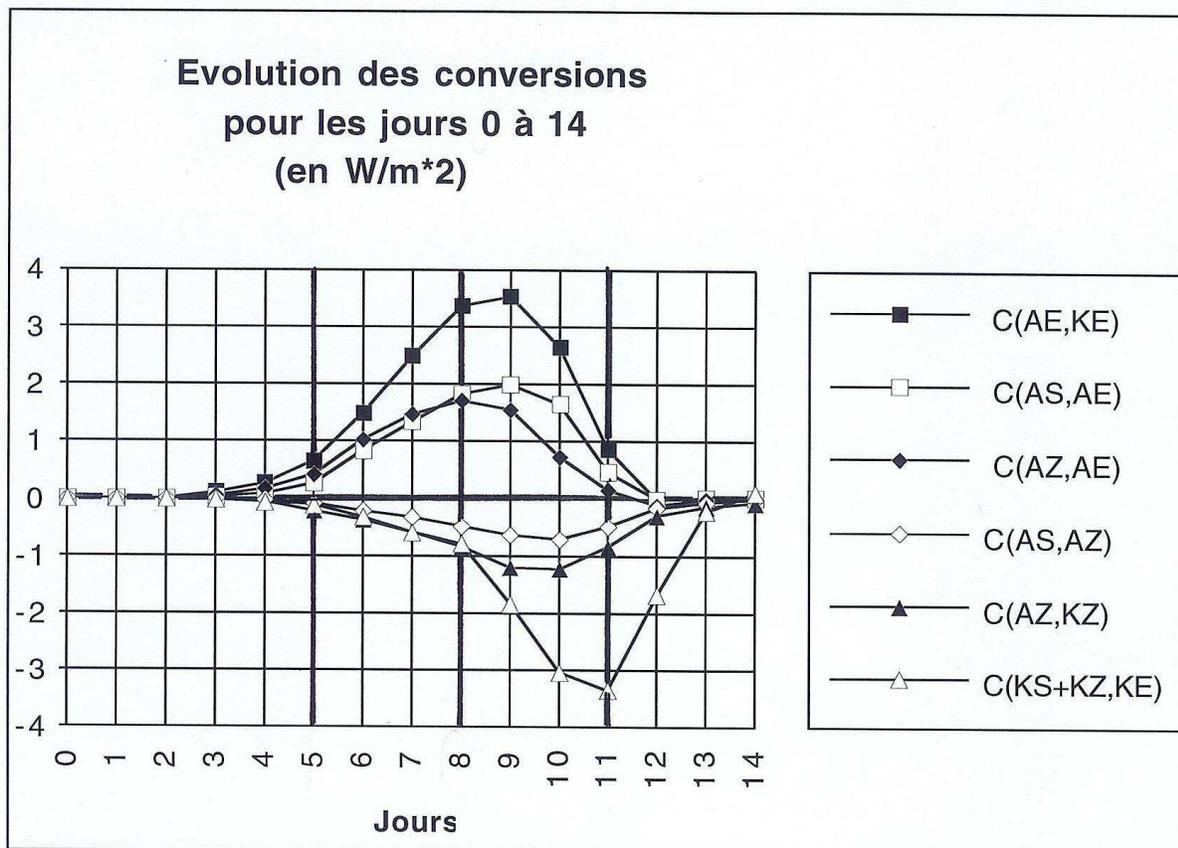
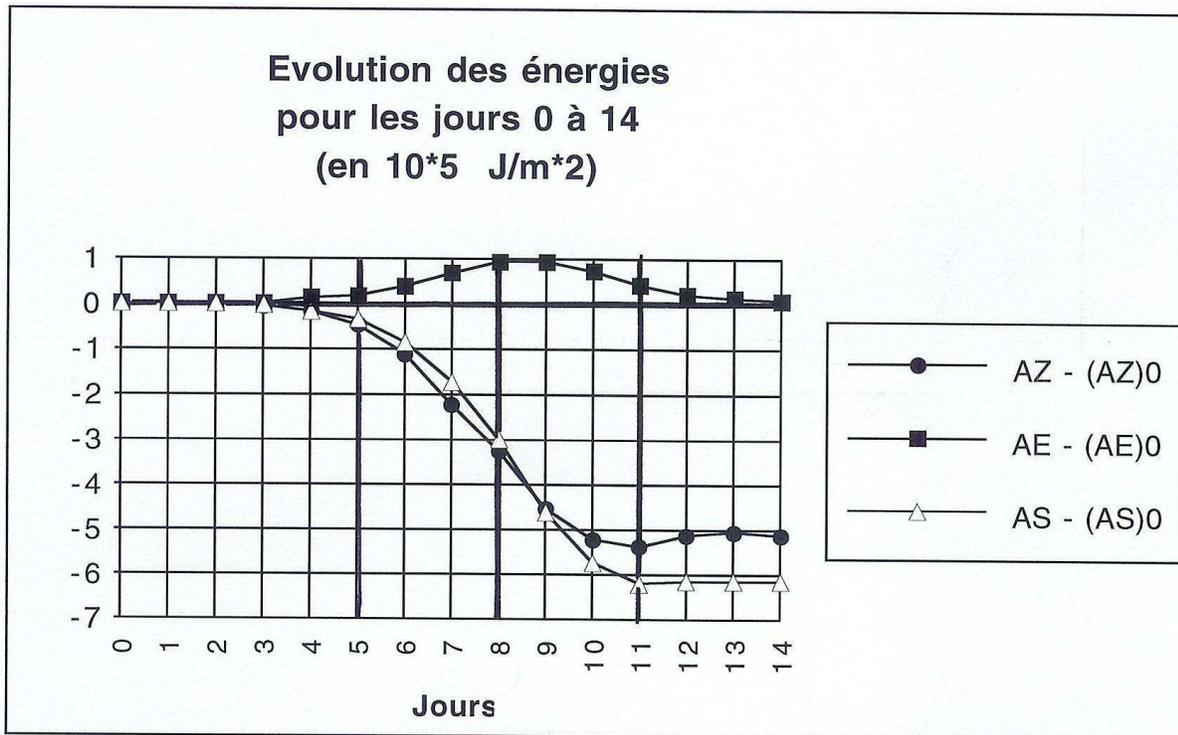


FIG. 28 – Les évolutions au cours des quatorze premiers jours de la simulation de Simmons et Hoskins (1978) pour trois réservoirs énergétiques et pour certaines conversions, d'après l'étude de Pearce (1978).

au voisinage du jour 8 correspond au développement extrême des perturbations baroclines associées à des contrastes zonaux de température importants sur chaque cercle de latitude (présence de structures méridiennes marquées).

Les conversions énergétiques s'organisent pour rendre compte des évolutions des réservoirs. Ce sont les trois conversions  $C(A_S, A_E)$ ,  $C(A_Z, A_E)$  et  $C(A_E, K_E)$  qui dominent entre les jours 3 et 10, ce qui explique la croissance de  $A_E$  aux dépens de  $A_S$  et de  $A_Z$ , avec dans le même temps une transformation de  $A_E$  en  $K_E$  qui est immédiate puisque  $C(A_S, A_E) + C(A_Z, A_E) \approx C(A_E, K_E)$ . On retrouve le chemin barocline classique qui génère les perturbations ( $K_E$  passe par un maximum). La nouveauté par rapport à l'approche de Lorenz vient de la séparation de  $C(A_S + A_Z, A_E)$  en deux conversions indépendantes, leur somme étant sensiblement égale à la conversion  $(C_L)_A$  entre les réservoirs  $(A_L)_Z$  et  $(A_L)_E$  de Lorenz. Le retour à la circulation zonale provient principalement de la conversion  $C(K_S + K_Z, K_E)$  qui est largement négative au delà du jour 10, avec de plus  $C(A_S, A_Z) < 0$  et  $C(A_Z, K_Z) < 0$ .

D'après la section (2.5.3), la partie horizontale de la conversion  $C(A_Z, A_E)$  représente le transfert de chaleur vers le nord qui est provoqué par le flux méridien d'enthalpie qui opère à contre-gradient du contraste méridien sud-nord de température. La partie verticale de cette conversion est en général négligeable à grande échelle.

La conversion  $C(A_S, A_E)$  représente l'impact du flux vertical d'enthalpie qui a pour effet d'augmenter la stabilité verticale en rapprochant le profil moyen de température du profil isotherme  $\bar{T}(p) = T_r$ , ce qui diminue  $A_S$ . La conversion  $C(A_S, A_Z)$  est formellement identique à  $C(A_S, A_E)$ , cette dernière traduisant l'effet des écarts aux moyennes zonales, la conversion  $C(A_S, A_Z)$  exigeant un raisonnement à partir des écarts entre les moyennes zonales et les moyennes isobares.

Pour la conversion  $C(A_E, K_E)$ , l'interprétation physique est donnée par l'effet des ascendances des zones chaudes et de la subsidence des zones froides, à condition de regarder les variations des phénomènes sur chaque cercle de latitude. On a vu dans la section (2.5.3) qu'il s'agit aussi d'un flux vertical de géopotentiel : ascendances des zones de bas géopotentiels, subsidences des zones de haut géopotentiel. L'ensemble de ces flux correspond à une diminution des contrastes de température et de géopotentiel sur chaque cercle de latitude. Les mêmes arguments peuvent être utilisés pour la conversion  $C(A_Z, K_Z)$ , à condition de raisonner à partir des moyennes zonales de température et de géopotentiel et de rechercher les mécanismes qui conduisent à la diminution des contrastes méridiens associés.

Quant à la conversion  $C(K_S + K_Z, K_E)$ , elle correspond principalement aux deux premiers termes de la formulation (99) qui sont négatifs si les flux de quantité de mouvement ont tendance à stabiliser l'écoulement (transformation des perturbations méridiennes du mouvement en une circulation

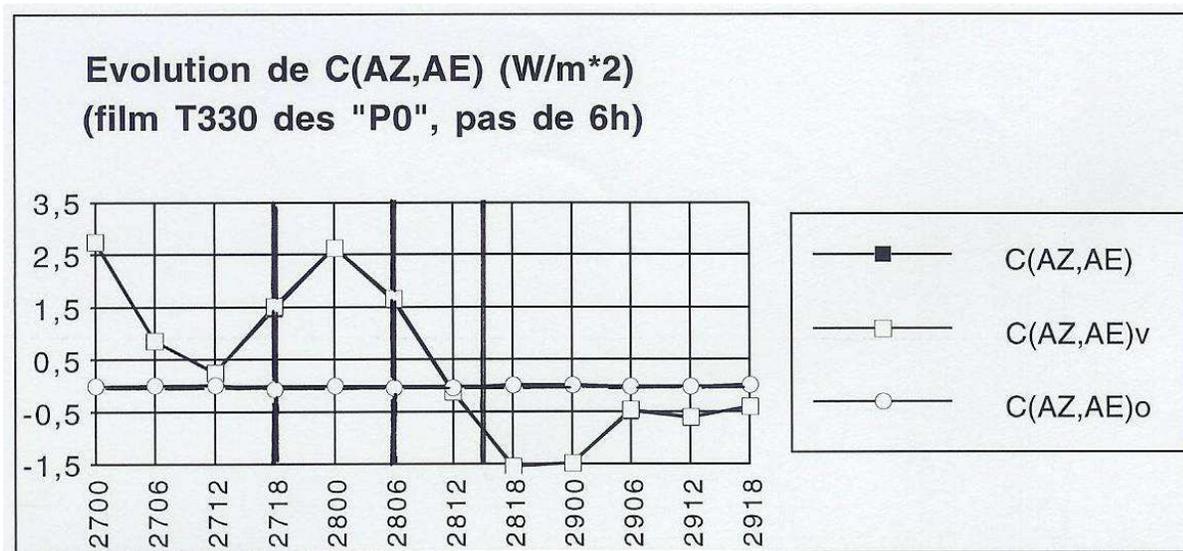


FIG. 29 – Les deux parties "horizontales" et "verticales" de la composante  $C(A_Z, A_E)$ . La partie verticale  $C(A_Z, A_E)_O$  est négligeable devant  $C(A_Z, A_E)_V$ .

purement zonale). C'est bien le cas pour le système de train d'ondes baroclines étudié par Pearce (1978) où en fin d'évolution, entre les jours 9 et 12, de fortes valeurs négatives sont observées.

On remarque qu'à grande échelle  $C(A_S, A_Z)$  et  $C(A_Z, K_Z)$  sont faibles par rapport aux autres conversions, elles ne dépassent guère  $-1 W/m^{-2}$ .

#### 4.5.3 Les parties "horizontales" et "verticales" des conversions.

On a rappelé à la section précédente que plusieurs des conversions définies aux sections (2.4.2) et (2.5.2) possèdent des termes qui dépendent des structures "horizontales" ou "verticales" du vent (dépendant de  $u$ ,  $v$  ou  $\omega$ ). Cette dépendance provient soit de la présence de ces termes  $u$ ,  $v$  ou  $\omega$  en facteur des expressions, soit de la présence de dérivées par rapport aux variables associées  $x$ ,  $y$  ou  $p$ . C'est par exemple le cas pour  $C(A_Z, A_E)$  qui est l'intégrale verticale de (91). On obtient deux termes notés  $C(A_Z, A_E)_V$  et  $C(A_Z, A_E)_O$  respectivement pour la partie dépendant de  $v_\lambda T_\lambda$  et celle dépendant de  $\omega_\lambda T_\lambda$ . Il est généralement admis qu'à grande échelle c'est  $C(A_Z, A_E)_V$  qui prédomine.

La prédominance de  $C(A_Z, A_E)_V$  est également vérifiée pour l'étude présente d'une dépression secondaire de petite échelle sur un domaine limité. Pour le montrer, examinons l'évolution des conversions sur la période du 27 à 0 h au 29 à 18 h, en partant des analyses initialisées du cycle d'assimilation pour le modèle Arpege dans sa version étirée T330. On voit sur la figure (29) que les carrés noirs sont superposés aux carrés blancs et qu'avec une bonne précision il est en effet possible de négliger  $C(A_Z, A_E)_O$ .

De même, les conversions  $C(K_S, K_Z)$ ,  $C(K_S, K_E)$  et  $C(K_Z, K_E)$  sont les intégrales verticales de (85), (86) et (92). Les deux premières conversions se séparent comme pour  $C(A_Z, A_E)$  en termes dépendant des composantes zonale ( $u$ ) et méridienne ( $v$ ) du vent. La troisième conversion  $C(K_Z, K_E)$  est plus complexe puisqu'elle se compose de quatre termes qui dépendent des produits  $u_\lambda v_\lambda$ ,  $v_\lambda v_\lambda$ ,  $u_\lambda \omega_\lambda$  et  $v_\lambda \omega_\lambda$ . Ces termes seront respectivement notés  $C(K_Z, K_E)_{UV}$ ,  $C(K_Z, K_E)_{VV}$ ,  $C(K_Z, K_E)_{UO}$  et  $C(K_Z, K_E)_{VO}$  sur les graphiques de la figure (30).

On voit sur cette figure que la conversion  $C(K_S, K_Z)$  dépend essentiellement du terme de conversion "zonale"  $C(K_S, K_Z)_U$ , la partie "méridienne"  $C(K_S, K_Z)_V$  restant très faible tout au long de la période. Il en va autrement pour la conversion  $C(K_S, K_E)$  qui est par ailleurs plus importante que  $C(K_S, K_Z)$ . C'est la partie  $C(K_S, K_E)_V$  qui prédomine, à l'exception du tout début de la période avant le 27 à 6 h. Quant à la conversion  $C(K_Z, K_E)$  qui domine les deux autres  $C(K_S, K_Z)$  et  $C(K_S, K_E)$ , on voit que les deux parties "horizontales" l'emportent sur les deux parties "verticales". Et c'est en fait  $C(K_Z, K_E)_{VV}$  qui donne la contribution la plus forte à la conversion totale pour la période qui coïncide avec la présence de la dépression dans le domaine (autour du 28 à 6 h).

On ne retrouve donc pas le résultat obtenu à plus grande échelle. Le fait de s'intéresser à un domaine limité peut donner un poids important à pratiquement tous les termes de ces conversions, sauf peut être pour les parties "verticales" qui semblent pouvoir toujours être négligées devant les parties "horizontales". Il faudrait atteindre le niveau de la méso-échelle pour voir ces termes "verticaux" devenir importants. D'après les figures (22) et (23) les structures méridiennes dominent largement, même si les variations des moyennes zonales ne semblent pas très marquées. Les fortes valeurs de la composante  $v$  dans le domaine expliquent probablement les différences observées avec les résultats classiques de grande échelle où les variations sud-nord des moyennes zonales  $u^\lambda$  prédominent devant celles de  $v^\lambda$ . Ce n'est pas le cas ici.

Etudions maintenant les trois conversions  $C(\Phi, K_S)$ ,  $C(\Phi, K_Z)$  et  $C(\Phi, K_E)$  qui sont les intégrales verticales de (61), (89) et (90). Le calcul de ces quantités est en général très sensible aux erreurs numériques et les divers auteurs préfèrent souvent les évaluer en tant que résidus des équations, en même temps que les dissipations  $D_S$ ,  $D_Z$  et  $D_E$ .

Ces trois conversions sont séparées en trois parties où apparaissent en facteur des dérivées les composantes  $u$ ,  $v$  et  $\omega$  du vent. En utilisant les notations  $C(\dots, \dots)_U$ ,  $C(\dots, \dots)_V$  et  $C(\dots, \dots)_O$  pour ces trois parties, on a reporté sur la figure (31) les évolutions sur la période du 27 à 0 h au 29 à 18 h pour les analyses initialisées du modèle Arpege à maille variable.

On observe en premier lieu que les valeurs de la composante  $C(\Phi, K_S)$  sont très élevées : entre  $-600 W/m^{-2}$  et  $400 W/m^{-2}$ . La partie  $C(\Phi, K_S)_U$  est pratiquement égale mais de signe contraire à  $C(\Phi, K_S)_V$ , la troisième partie  $C(\Phi, K_S)_O$  étant prépondérante. Les valeurs de  $C(\Phi, K_S)_U$  et

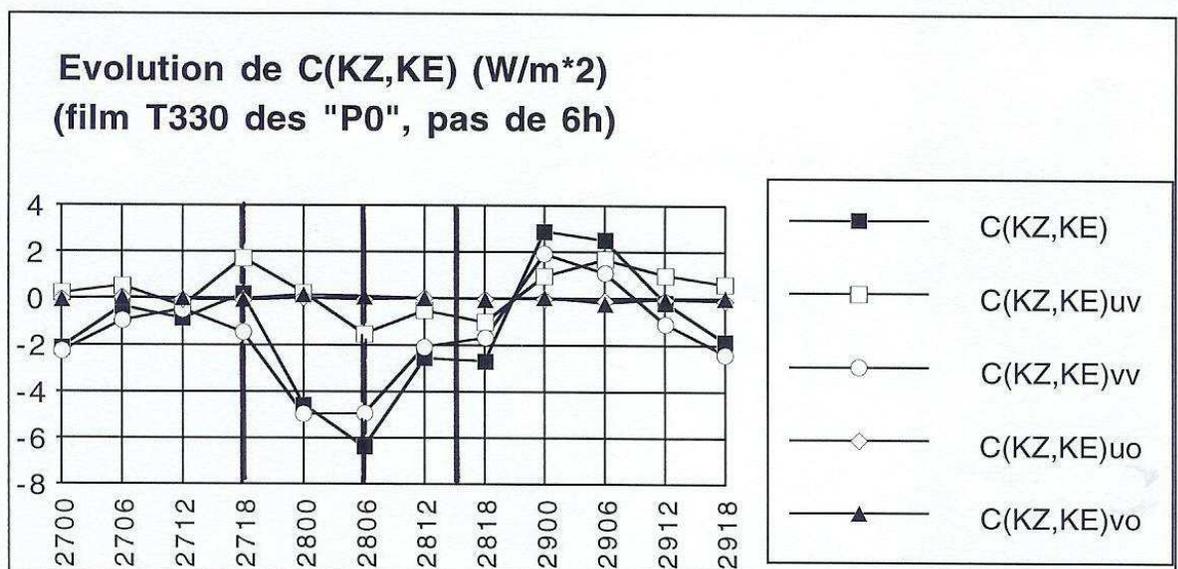
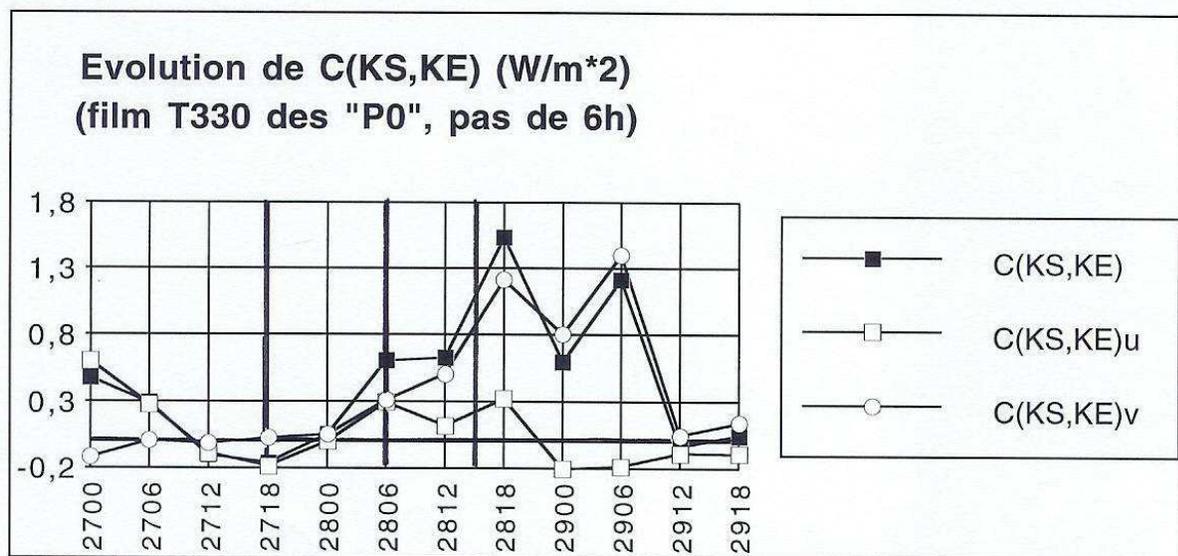
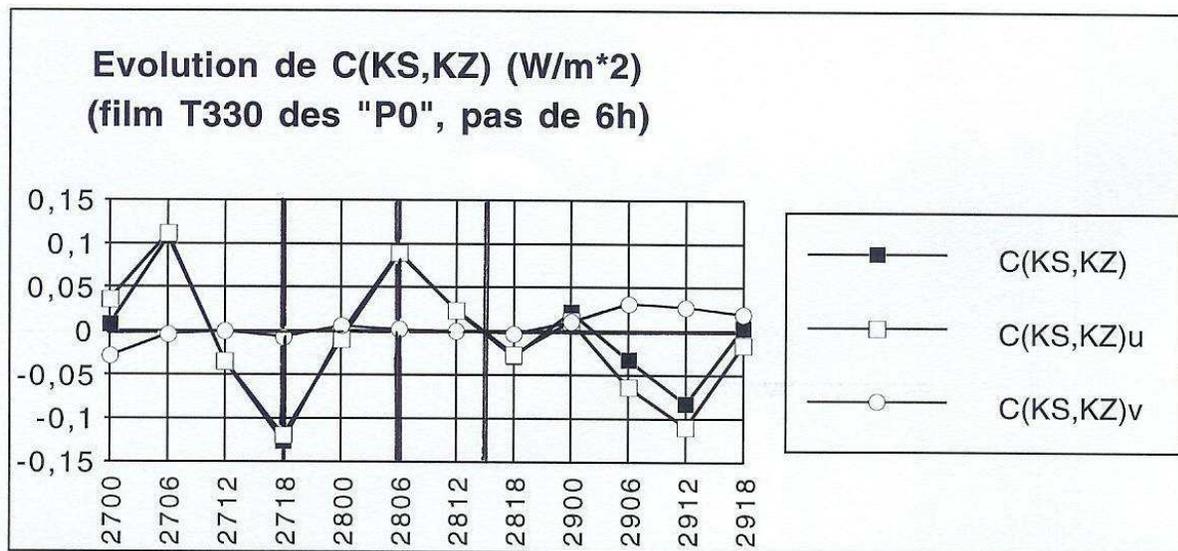


FIG. 30 – Les différentes parties des conversions  $C(K_S, K_Z)$ ,  $C(K_S, K_E)$  et  $C(K_Z, K_E)$ .

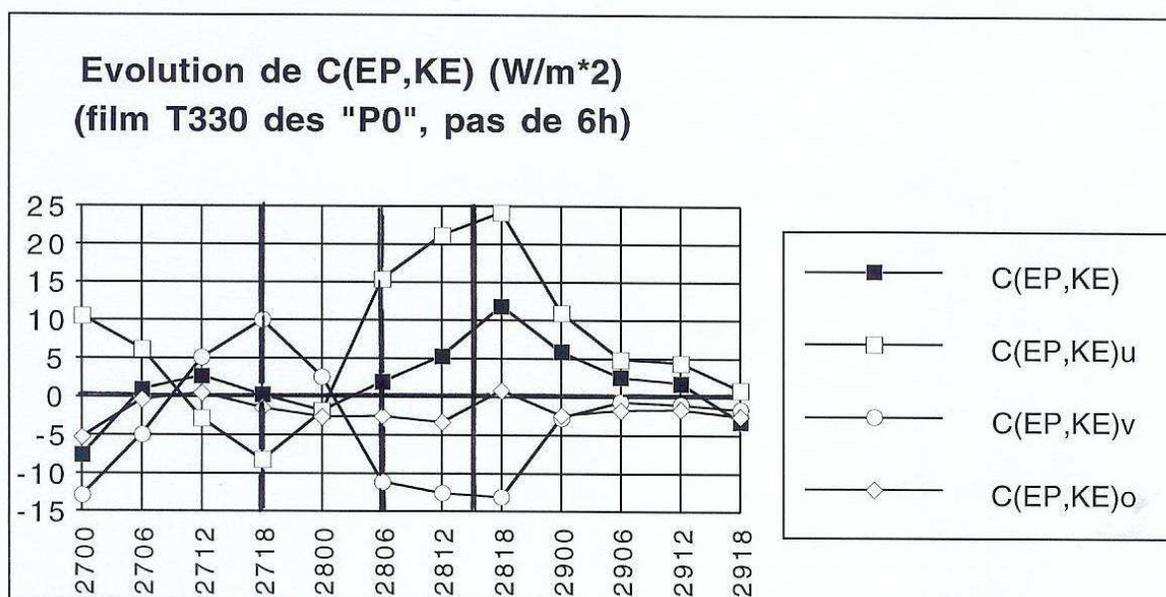
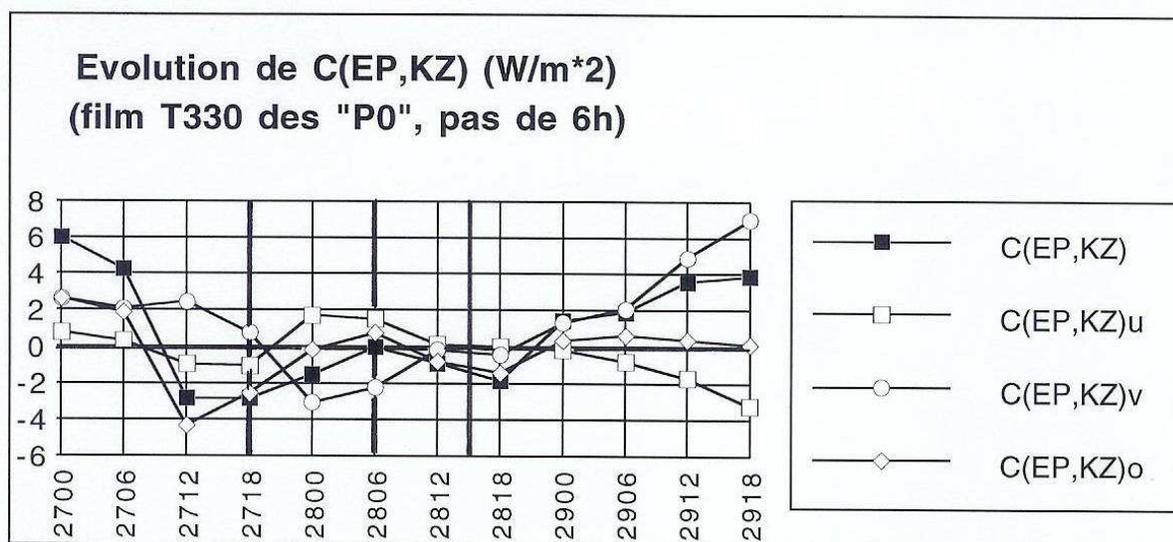
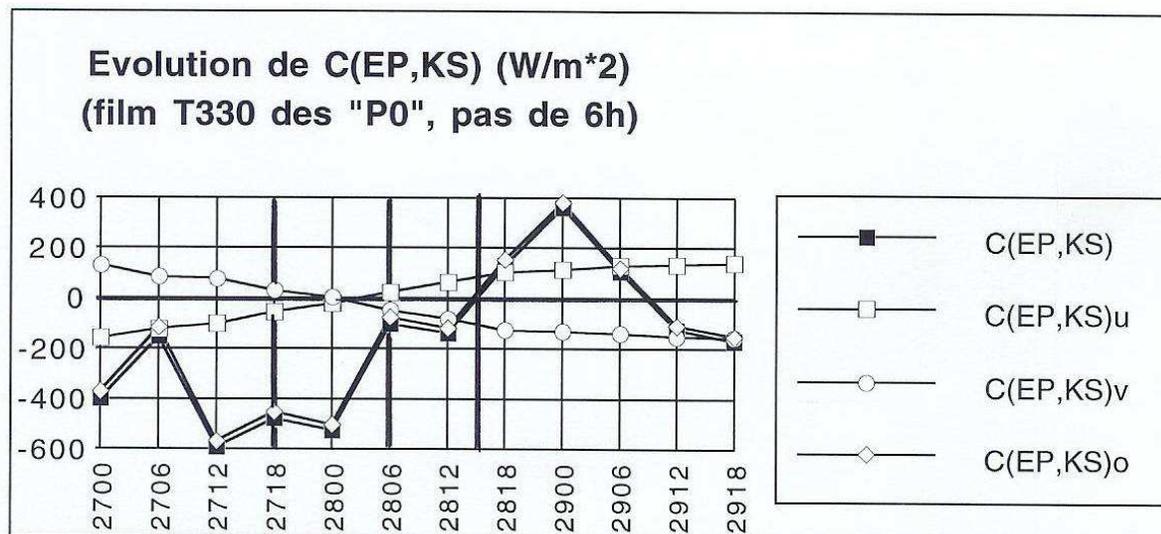


FIG. 31 – Les différentes parties des conversions  $C(\Phi, K_S)$ ,  $C(\Phi, K_Z)$  et  $C(\Phi, K_E)$ .

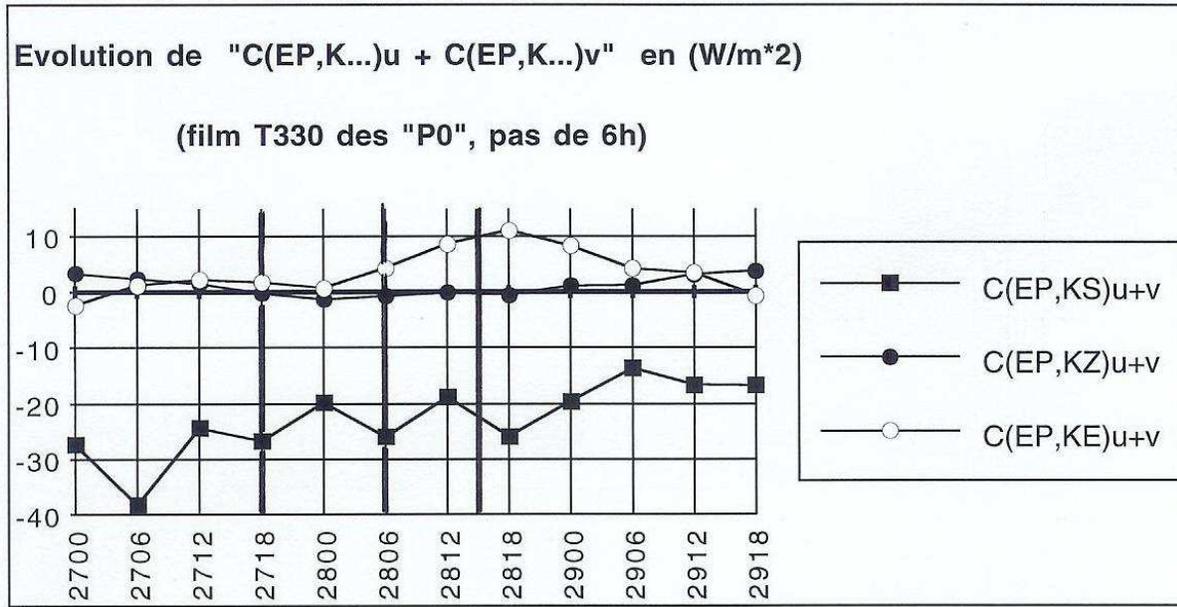


FIG. 32 – Les évolutions de la conversion avec  $KS$  :  $C(\Phi, K_S)_U + C(\Phi, K_S)_V$ , de la conversion avec  $KZ$  :  $C(\Phi, K_Z)_U + C(\Phi, K_Z)_V$  et de la conversion avec  $KE$  :  $C(\Phi, K_E)_U + C(\Phi, K_E)_V$ .

$C(\Phi, K_S)_V$  sont élevées : entre  $-150 W/m^{-2}$  et  $150 W/m^{-2}$ . Ces résultats doivent être expliqués en détails, étant donné l'impact physique de termes aussi grands.

D'après l'équation (61), des erreurs sur les calculs de  $\bar{\omega}$  influent beaucoup sur  $C(\Phi, K_S)$  par l'intermédiaire de  $R\bar{\omega}\bar{T}/p$ . Il faut en effet remarquer que dans cette expression c'est la température  $\bar{T}$  qui intervient, avec des valeurs comprises entre  $215 K$  et  $310 K$ . Usuellement, dans les études globales ou de grande échelle, on pose  $\bar{\omega} = 0$  et seule la corrélation  $R\bar{\omega}'T'/p$  avec  $|T'| \approx 15 K$  intervient via la conversion  $C(\Phi, K_B)$  qui est donnée par (62). Cette différence d'un facteur 20 entre  $\bar{T}$  et  $T'$  explique la grande sensibilité à la bonne détermination de  $\bar{\omega}$ . La présence de ce grand terme  $C(\Phi, K_S)$  influe sur le réservoir  $K_S$  mais, par l'intermédiaire de la conversion  $C(A_S, K_S)$  et du terme  $B(A_P)$ , les bilans de  $A_S$  et de  $K_S$  restent cohérents. On a appelé "chemin externe principal" à la section (2.5.2) ce trajet  $C(\Phi, K_S) \leftrightarrow -C(A_S, K_S) \leftrightarrow B(A_P)$  qui dépend essentiellement de  $\bar{\omega}$ . C'est donc par le biais de la diminution et de l'augmentation de la masse comprise entre les couches isobares que le chemin externe principal est alimenté. Ces flux de masse doivent être contrebalancés par des flux aux frontières correspondants qui sont présents via  $C(\Phi, K_S)$ .

L'autre résultat  $C(\Phi, K_S)_U \approx -C(\Phi, K_S)_V$  signifie que  $\bar{u}\overline{\partial_x(\Phi)} \approx -\bar{v}\overline{\partial_y(\Phi)}$ . Cette égalité traduit simplement la propriété, bien vérifiée sous les latitudes tempérées et dans l'atmosphère libre, de l'équilibre géostrophique du champ de vent horizontal et du champ de gradient de géopotential. L'évolution de la somme  $C(\Phi, K_S)_U + C(\Phi, K_S)_V$  qui est représentée sur la figure (32) montre que le bilan est stable et réaliste, ce qui prouve bien sûr que l'équilibre géostrophique est respecté, mais surtout que les calculs réalisés à partir des fichiers interpolés sur les niveaux isobares sont

réalisés avec une précision suffisante pour pouvoir corrélérer les champs de vents avec les gradients de géopotentiels.

Analysons maintenant sur la figure (31) l'évolution de la conversion  $C(\Phi, K_Z)$ . On voit que les valeurs sont là aussi réalistes, elles sont comparables à celles de  $C(K_Z, K_E)$  qui ont été étudiées précédemment. Elles varient entre  $-4 W/m^{-2}$  et  $7 W/m^{-2}$ . Mais, cette fois, il n'y a pas de terme qui prédomine et les trois parties sont à tour de rôle importantes. Il faut insister ici sur le fait que les valeurs ne présentent pas d'instabilité de calcul liée à l'évaluation des gradients de géopotentiel.

Quant à la conversion  $C(\Phi, K_E)$ , la figure (31) montre que les valeurs restent également modérées, elles varient entre  $-7 W/m^{-2}$  et  $12 W/m^{-2}$ . Il y a d'autre part, comme pour la composante  $C(\Phi, K_S)$ , une relation assez étroite entre les deux parties "horizontales" :  $C(\Phi, K_E)_U \approx -C(\Phi, K_E)_V$ . C'est en fait aussi le cas pour la conversion précédente, on a sensiblement  $C(\Phi, K_Z)_U \approx -C(\Phi, K_Z)_V$ . On retrouve ainsi pour ces deux conversions la traduction en terme énergétique de la propriété de l'équilibre géostrophique mentionnée à propos de  $C(\Phi, K_S)$ . On voit sur la figure (32) que la somme  $C(\Phi, K_Z)_U + C(\Phi, K_Z)_V$  évolue peu, alors que la quantité  $C(\Phi, K_E)_U + C(\Phi, K_E)_V$  présente un extremum autour du 28 à 18 h, c'est à dire juste après le creusement maximum de la dépression.

Il ressort de ces analyses que l'impact des grandes contraintes atmosphériques que sont la relation hydrostatique, l'équation de continuité et l'équilibre géostrophique se trouve en quelque sorte rejeté sur les deux grand réservoirs  $A_S$  et  $K_S$ . Le cycle interne entre  $A_Z$ ,  $A_E$ ,  $K_Z$  et  $K_E$  est alors protégé des erreurs de calcul sur les grands termes  $C(\Phi, K_S)$ ,  $C(A_S, K_S)$  et  $B(A_P)$ . On se reportera à la figure (11) qui constitue une vision schématique des cycles externes et internes. Ces remarques justifient la séparation de  $E_k$  en trois réservoirs  $K_S$ ,  $K_Z$  et  $K_E$ , alors que les autres études ont porté sur les deux réservoirs  $K_S + K_Z$  et  $K_E$  avec le risque de faire porter sur le cycle interne de Lorenz entre  $A_Z$ ,  $A_E$ ,  $K_S + K_Z$  et  $K_E$  les conversions  $C(\Phi, K_S)$  et  $C(A_S, K_S)$  qui ne peuvent pas être calculées avec précision. C'est le cas pour les études sur domaine limité de Brennan et Vincent (1980) et Michaelides (1987) où l'absence de prise en compte de  $\bar{\omega} \neq 0$  se traduisait par des valeurs irréalistes des dissipations qui étaient calculées en tant que résidus.

La confrontation à une application numérique issue d'une situation réelle de dépression secondaire semble ainsi confirmer le bien-fondé de cette séparation de  $E_k$  en trois composantes énergétiques avec l'isolement du réservoir d'énergie cinétique du vent moyen sur le domaine  $K_S$ . Même si l'intérêt de cette démarche devient à peu près évidente pour le cas d'un domaine limité, il devrait en être de même pour les études globales comme celle de Lorenz (1955) puisque le vent moyen zonal n'est pas nul (présence des jets stratosphériques).

#### 4.5.4 Le cycle d'assimilation en T330.

On a vu à la section (4.2) que c'est le cycle d'assimilation du modèle Arpege dans sa version à maille variable (T330 sur la France) qui est le plus proche de la réalité. Il a été par ailleurs montré à la section (4.5.1) qu'il était possible de se fier à une étude utilisant des fichiers équidistants avec un espacement de  $6 h$ . C'est le cas pour la série des analyses initialisées qui sont extraites d'un cycle d'assimilation qui a débuté le 26 avril 1992 à  $0 h$ . Les calculs énergétiques qui vont être présentés dans cette section portent sur cette série d'analyses initialisées entre le 27 à  $0 h$  et le 29 à  $18 h$ . La raison pour laquelle les analyses (non-initialisées) elles-mêmes n'ont pas été utilisées vient de ce que les fichiers d'analyse du modèle Peridot ne pouvaient pas être traités à la fois par le module de calcul des cycles et par le module de sortie de cartes. Il avait semblé important, avant que le modèle Arpege à maille variable n'apparaisse comme le plus proche de la réalité, de ne pas éliminer la possibilité d'utiliser comme référence le modèle Peridot si ce dernier s'était avéré le meilleur.

##### (a) Les énergies.

Commençons par l'étude des évolutions des six réservoirs énergétiques principaux  $A_S$ ,  $A_Z$ ,  $A_E$ ,  $K_S$ ,  $K_Z$  et  $K_E$  qui sont reportées sur la figure (33). On rappelle qu'il s'agit de quantités intégrées sur l'ensemble du domaine d'étude qui est décrit à la section (4.4). Les réservoirs  $A_B = A_Z + A_E$  et  $K_B = K_Z + K_E$  ont été reportés sur la figure (32) mais ils ne seront pas étudiés sinon par l'intermédiaire des réservoirs  $A_Z$ ,  $A_E$ ,  $K_Z$  et  $K_E$ . Pour pallier au problème des fortes valeurs des réservoirs  $A_S$  et  $K_S$  il sera fait usage de la présentation de Pearce (1978) mentionnée à la section (4.2). Il s'agit de prendre comme référence la valeur initiale à la date du 27 avril 1992 à  $0 h$  et de tracer, pour chaque composante énergétique, la différence avec sa valeur initiale.

On reconnaît sensiblement le scénario de l'onde barocline étudié par Pearce qui est résumé sur la figure (28) pour les réservoirs  $A_S$ ,  $A_Z$  et  $A_E$ . Le maximum de développement de l'onde barocline se situe au jour 8 dans l'étude de Pearce, il est localisé ici autour du 28 entre  $6 h$  et  $12 h$ . On l'a vu à partir des cartes à la section (4.2), on le voit aussi sur la figure (33) où  $K_E$  passe par un maximum assez prononcé le 28 à  $12 h$ . Comme pour l'onde barocline de Pearce, le réservoir  $A_S$  décroît au cours de la période et le développement de la dépression secondaire s'accompagne d'une libération d'énergie de  $9 \cdot 10^5 J/m^{-2}$ . Mais contrairement à la figure (28) le réservoir  $A_Z$  ne présente pas de variations notables, sinon une lente diminution entre le 27 à  $12 h$  et le 29 à  $0 h$ , une diminution qui est moins intense que dans l'étude de Pearce ( $-1.5 \cdot 10^5 J/m^{-2}$  contre  $-5.5 \cdot 10^5 J/m^{-2}$ ). Le réservoir  $A_E$  présente des variations plus lentes pour la dépression secondaire que pour l'onde barocline, même si l'augmentation qui s'étend ici sur toute la période du 27 à  $6 h$  au 29 à  $12 h$  induit au total un gain de  $3 \cdot 10^5 J/m^{-2}$  par rapport à la valeur au 27 à  $6 h$ .

Les réservoirs  $K_S$ ,  $K_Z$  et  $K_E$  n'étaient pas présentés dans Pearce (1978). On voit sur la figure

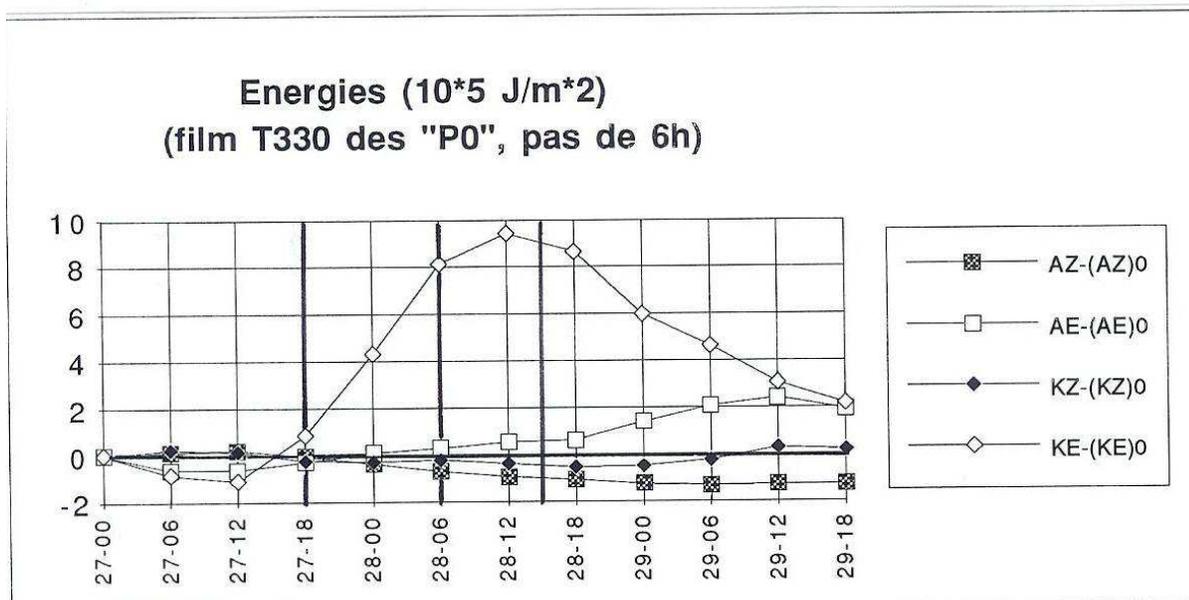
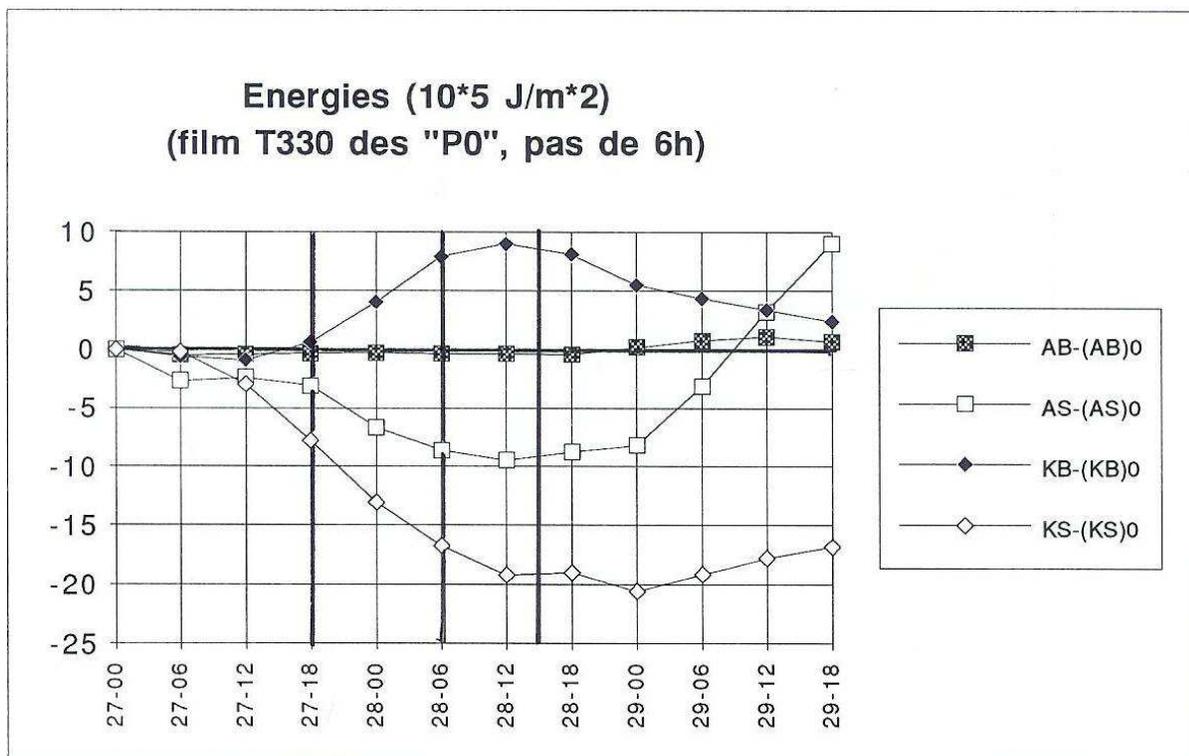


FIG. 33 – Les évolutions des réservoirs  $A_S$ ,  $A_B$ ,  $A_Z$ ,  $A_E$ ,  $K_S$ ,  $K_B$ ,  $K_Z$  et  $K_E$ . On prend comme référence les valeurs de ces composantes à la date du 27 avril 1992 à 0 h. Les calculs sont réalisés à partir de la série des analyses initialisées du modèle Arpege à maille variable (T330 sur la France).

(33) que la mise en place du thalweg et le développement de la dépression secondaire se traduisent par une forte augmentation de  $K_E$  et une forte diminution de  $K_S$ , le réservoir  $K_Z$  restant faible mais décroissant lui aussi entre le 27 à 12 h et le 28 à 18 h.

L'ensemble de ces résultats peut être interprété de la manière suivante. Le fait que  $A_Z$  soit faible est logique puisqu'il dépend des contrastes sud-nord des moyennes zonales des températures. Ce contraste est élevé à grande échelle, il est beaucoup plus faible ici sur un domaine limité où à l'inverse ce sont les variations zonales des composantes du vent et de la température qui sont prépondérantes. L'établissement du profond thalweg se traduit en effet par de fortes valeurs de  $A_E$  en fin de période (près de  $3 \cdot 10^5 J/m^{-2}$ ) qui sont provoquées par un important contraste ouest-est de température. La diminution de  $K_S$  relève du même phénomène puisque le passage progressif, en altitude, d'une circulation très rapide et presque zonale est suivie par l'établissement d'une circulation plus faible avec surtout des vents méridiens élevés qui s'annulent en moyenne sur le domaine, la composante zonale  $K_Z$  devenant ainsi beaucoup plus faible ainsi que la composante moyenne  $K_S$ .

On remarque sur la figure (33) que l'évolution de  $K_E \approx K_B$  est bien corrélée avec celle de  $A_S$ , aussi bien en ordre de grandeur qu'en opposition de phase. Cette hypothèse d'un lien étroit entre  $K_E$  et  $A_S$  est plausible puisqu'elle correspond au résultat de Pearce sur l'origine du développement de l'onde barocline par une diminution des contrastes sud-nord et verticaux de température :  $C(A_S, A_E) + C(A_Z, A_E) \approx C(A_E, K_E)$  avec  $C(A_S, A_E) \approx C(A_Z, A_E)$ . Ici, comme on a de faibles valeurs de  $A_Z$ , on peut supposer que  $C(A_S, A_E)$  doit être importante et que l'évolution de la dépression secondaire est intimement liée à l'évolution du profil vertical de température.

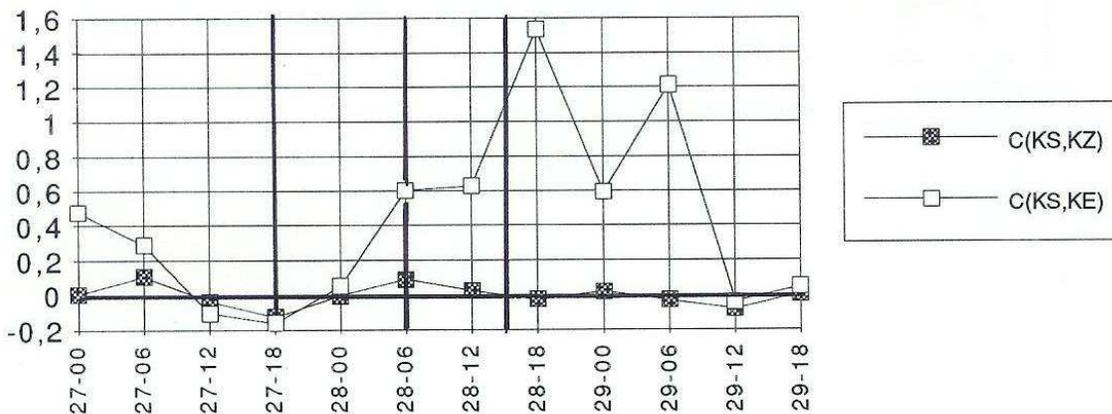
### (b) Les conversions.

Parmi tous les termes qui seront étudiés dans cette section, il paraît logique de regrouper les différentes conversions entre les réservoirs principaux  $A_S$ ,  $A_Z$ ,  $A_E$ ,  $K_S$ ,  $K_Z$  et  $K_E$ , à l'exclusion des autres conversions avec le réservoir d'énergie potentielle de pesanteur.

On voit sur la figure (34) que les deux conversions  $C(K_S, K_Z)$  et  $C(K_S, K_E)$  sont faibles, voire négligeables pour  $C(K_S, K_Z)$ , par comparaison aux autres conversions, en particulier par rapport à  $C(K_Z, K_E)$ ,  $C(A_E, K_E)$  ou même  $C(A_Z, K_Z)$ . Le réservoir du mouvement moyen  $K_S$  est donc pratiquement isolé du cycle interne, les conversions avec  $K_Z$  ou  $K_E$  étant pratiquement inexistantes.

Avant d'interpréter les évolutions des autres conversions, il faut se rappeler que la dépression secondaire est absente du domaine au début de l'étude (le 27 avril 1992 à 0 h). C'est vers le 27 à 12 h que le creusement débute et qu'elle rentre dans la région de l'étude, à l'est de la longitude 20 dg ouest. On remarque sur la figure (34) un signal très net autour de cette date qui voit les

**Conversions (W/m<sup>2</sup>)  
(film T330 des "P0", pas de 6h)**



**Conversions (W/m<sup>2</sup>)  
(film T330 des "P0", pas de 6h)**

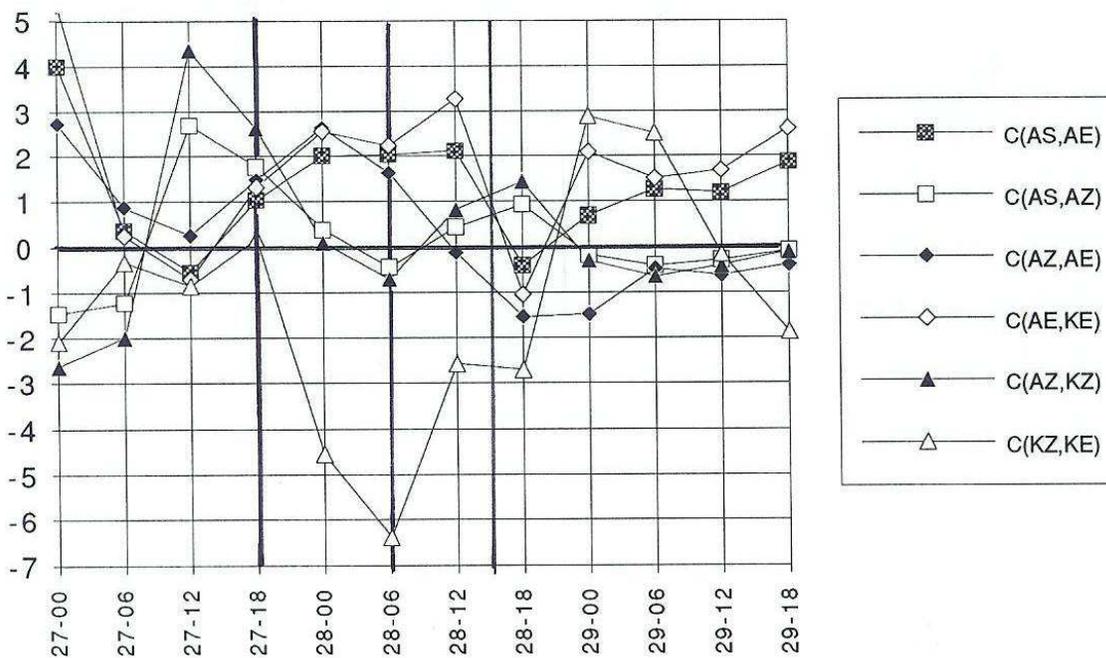


FIG. 34 – Les évolutions des conversions d'énergie entre les réservoirs  $A_S$ ,  $A_Z$ ,  $A_E$ ,  $K_S$ ,  $K_Z$  et  $K_E$ . Les calculs sont réalisés à partir de la série des analyses initialisées du modèle Arpege à maille variable (T330 sur la France).

conversions  $C(A_S, A_Z)$  et  $C(A_Z, K_Z)$  changer de signe brutalement.

Il semble préférable, dans un premier temps, de se concentrer sur la période de développement de la dépression secondaire lorsqu'elle se trouve nettement à l'intérieur du domaine, c'est à dire du 27 à 18 h au 28 à 15 h. Après cette date, la perturbation commence à s'évacuer par le bord nord-est du domaine. Les deux dates ont été renforcées sur les graphiques, ainsi que le maximum d'activité de la dépression qui est fixé au 28 à 6 h.

Dans cet intervalle, on retrouve pratiquement les mêmes résultats que Pearce (voir la figure 28). Les trois conversions  $C(A_S, A_E)$ ,  $C(A_Z, A_E)$  et  $C(A_E, K_E)$  sont sensiblement égales dans cette étude en passant de la valeur  $0 W/m^{-2}$  à la valeur  $2 W/m^{-2}$  entre le 27 à 12 h et le 28 à 0 h, pour décroître après le 28 à 12 h. C'est ensuite, avec un petit décalage temporel, la conversion  $C(K_Z, K_E)$  qui devient fortement négative à partir du 28 à 0 h, pour atteindre des valeurs voisines de  $-6 W/m^{-2}$ .

Le mécanisme d'instabilité barocline est ainsi initié au début de l'intervalle et, au moins d'après l'énergétique globale du domaine, c'est par ce mécanisme et non par celui de l'instabilité barotrope que la dépression secondaire semble se développer. Quant à la phase de maturité et de dégénérescence qui se traduit par les valeurs négatives de  $C(K_Z, K_E)$ , elle semble plus précoce que dans l'étude de Pearce.

On fait ici l'hypothèse que les interprétations qui viennent d'être données correspondent bien à la seule dépression secondaire. Cela reste à démontrer et l'étude des deux prévisions avec les deux versions du modèle Arpege qui sera faite à la section suivante sera consacrée à la recherche de ces signaux propres à cette dépression. Etant donné la présence de ces conversions typiques des développements baroclines qui sont visiblement en phase avec l'intervalle de présence de la dépression dans le domaine d'étude, il est probable que l'hypothèse sera avérée, au moins partiellement pour ce qui concerne les phénomènes de conversion.

### (c) Le chemin externe principal.

On a vu à la section précédente que les trois termes  $C(A_S, K_S)$ ,  $C(\Phi, K_S)$  et  $B(A_P)$  qui dépendent directement de  $\bar{\omega}$  forment le chemin externe principal de l'énergie qui est dû aux variations de la masse comprise entre les couches isobares du domaine limité.

L'évolution de ces trois termes est tracée sur la figure (35) où on voit nettement que  $-C(A_S, K_S) \approx C(\Phi, K_S) \approx B(A_P)$  et que les valeurs sont effectivement très élevées (de l'ordre de  $500 W/m^{-2}$  en ordre de grandeur).

Les fortes valeurs de ces trois quantités ne seront pas utilisées par la suite de manière indépendante. Seules les sommes  $-C(A_S, K_S) - B(A_P)$  et  $C(A_S, K_S) + C(\Phi, K_S)$  seront calculées dans

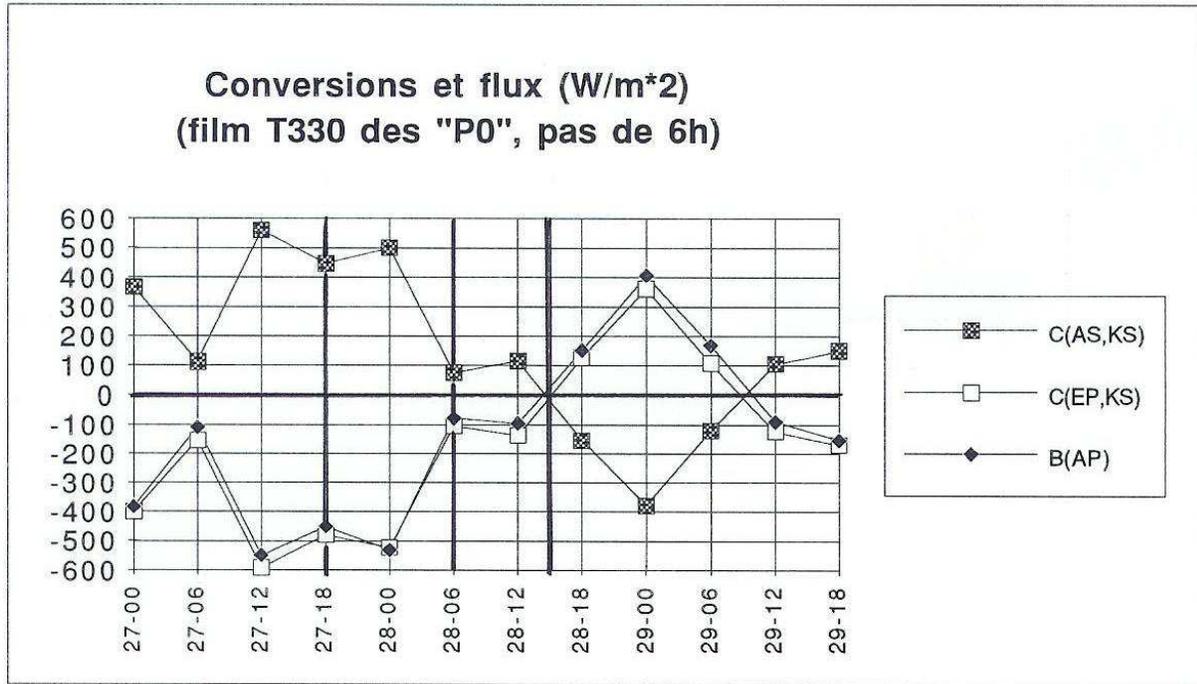


FIG. 35 – Les grands termes  $C(A_S, K_S)$ ,  $C(\Phi, K_S)$  et  $B(A_P)$  qui dépendent directement de  $\bar{\omega}$ . Les calculs sont réalisés à partir de la série des analyses initialisées du modèle Arpege à maille variable (T330 sur la France).

les bilans de  $K_S$  et de  $A_S$ , respectivement. Ces sommes sont égales aux intégrales verticales de  $R\bar{\omega}(\bar{T} - T_r)/p$  et  $-\bar{u}\partial_x(\Phi) - \bar{v}\partial_y(\Phi)$ . On a vu d'autre part à la section (4.5.3) que les deux parties de la deuxième intégrale s'équilibraient d'après la relation géostrophique entre le vent et les gradients de géopotentiels. Si on note par  $\vec{u}_h$  le vecteur vent horizontal de composantes  $(u, v)$ , par  $f$  le facteur de Coriolis et par  $\vec{u}_g$  le vent géostrophique de composantes  $f^{-1}\partial_y(\Phi)$  et  $-f^{-1}\partial_x(\Phi)$ , la somme  $C(A_S, K_S) + C(\Phi, K_S)$  est l'intégrale verticale de  $f\vec{k} \cdot (\vec{u}_h \times \vec{u}_g)$  qui quantifie l'agéostrophisme de l'écoulement. Cette somme devrait donc être du même ordre de grandeur que les autres termes du bilan de  $K_S$ . Mais les valeurs de l'autre somme  $-C(A_S, K_S) - B(A_P)$  ne sont pas forcément faibles puisque les moyennes isobares  $\bar{\omega}$  interviennent toujours et que le terme  $\bar{T} - T_r$  n'est pas vraiment faible (il est voisin de 30 K). On peut donc s'attendre à une certaine imprécision résiduelle dans l'étude de la composante  $A_S$ .

#### (d) L'évolution de $A_S$ .

Abordons maintenant l'étude des bilans des six réservoirs en commençant par  $A_S$ . Les six graphiques qui suivront seront organisés de la même façon.

On trouve dans la partie supérieure le tracé des évolutions des moyennes sur le domaine :

- (i) de la tendance eulerienne  $\partial(\dots)/\partial t$  ;
- (ii) de la convergence du flux aux frontières de l'énergie considérée  $-B(\dots)$  ;
- (iii) de la dérivée lagrangienne associée  $d(\dots)/dt$ . La

quantité (...) est la grandeur "locale" associée à chacune des énergies, c'est par exemple  $k_E = [(u_\lambda)^2 + (v_\lambda)^2]/2$  pour le réservoir  $K_E$ , ou  $a_S = c_p T_r \mathcal{F}(T/T_r - 1)$  pour  $A_S$ . Ces grandeurs "locales" ne représentent pourtant pas des énergies attachées à une parcelle donnée, les moyennes et les écarts à ces moyennes dépendent en effet du domaine horizontal de l'étude. Ainsi, l'interprétation physique des moyennes de  $-B(\dots)$  ou de  $d(\dots)/dt$  pourra ne pas être aussi claire que celle de la tendance eulerienne.

La partie inférieure des graphiques regroupe les tracés des évolutions des autres termes des équations de bilan. Ce sont les moyennes des conversions, des termes de chauffage différentiel et des termes de dissipation sur l'ensemble du domaine d'étude. On trouvera pour certains réservoirs des termes de bord tels que l'intégrale verticale de  $-\overline{B(a_{c(SB)})}$  dont l'interprétation sera, elle aussi, délicate.

Le réservoir  $A_S$  représente la partie de l'enthalpie utilisable qui est générée par les écarts entre le profil vertical de la moyenne isobare des températures  $\overline{T}(p)$  et le profil constant  $T_r$ . Pour ce réservoir, on voit sur la figure (36) que le terme de chauffage différentiel  $G_S$  présente des variations erratiques qui sont en opposition de phase avec celles de la somme  $-C(A_S, K_S) - B(A_P)$ . Comme il a été mentionné dans la section précédente, ceci signifie que le calcul de cette somme n'est pas assez précis et que les erreurs commises sur les calculs de  $\overline{\omega}$  empêchent un calcul réaliste de  $G_S$  en tant que résidu de l'équation de bilan. On le vérifie en traçant l'évolution de la quantité  $-C(A_S, K_S) - B(A_P) + G_S$  qui varie entre  $-2 W/m^{-2}$  et  $11 W/m^{-2}$  (graphique non fourni).

Ces erreurs de calcul liées à la présence du terme  $\overline{\omega}$  ne portent que sur ce réservoir  $A_S$ , les deux autres composantes  $A_Z$  et  $A_E$  ne seront pas touchées par ce problème. Les termes du cycle interne se trouvent protégés par l'isolement de ce réservoir d'énergie cinétique du mouvement moyen.

Il est tout de même possible, malgré ces imprécisions, de répondre à certaines questions. Il apparaît que le terme d'advection  $-B(A_S)$  est positif et qu'il ne dépasse pas  $7 W/m^{-2}$ , ce qui ne peut pas rendre compte des valeurs de  $\partial/\partial t(A_S)$  qui sont d'abord fortement négatives et qui décroissent ensuite entre le 27 à 18 h et le 28 à 15 h (elles varient entre  $-10 W/m^{-2}$  et  $2 W/m^{-2}$ ). Parmi les autres termes, y compris la somme  $-C(A_S, K_S) - B(A_P) + G_S$ , on voit que c'est en fait l'advection  $-B(A_{SB})$  qui domine l'équation de bilan pour  $A_S$  avec des valeurs qui sont en bon accord avec celles des tendances du réservoir sur toute la période du 27 à 0 h au 29 à 18 h.

Il n'est pas simple de donner une interprétation physique à ce terme d'advection de la quantité  $a_{c(SB)} = c_p (1 - T_r/\overline{T}) T'$ . On peut toutefois en déduire que la présence de ce terme qui provient de la séparation mathématique de  $a_T$  en  $a_S + a_B + a_{c(SB)}$  qui a été obtenue à la section (2.4.1) est cruciale pour fermer le bilan de  $A_S$ . Ce n'est que pour les études globales où les intégrales de la divergence des flux s'annulent qu'il est possible de négliger ces termes d'advection. Il ne faut pas

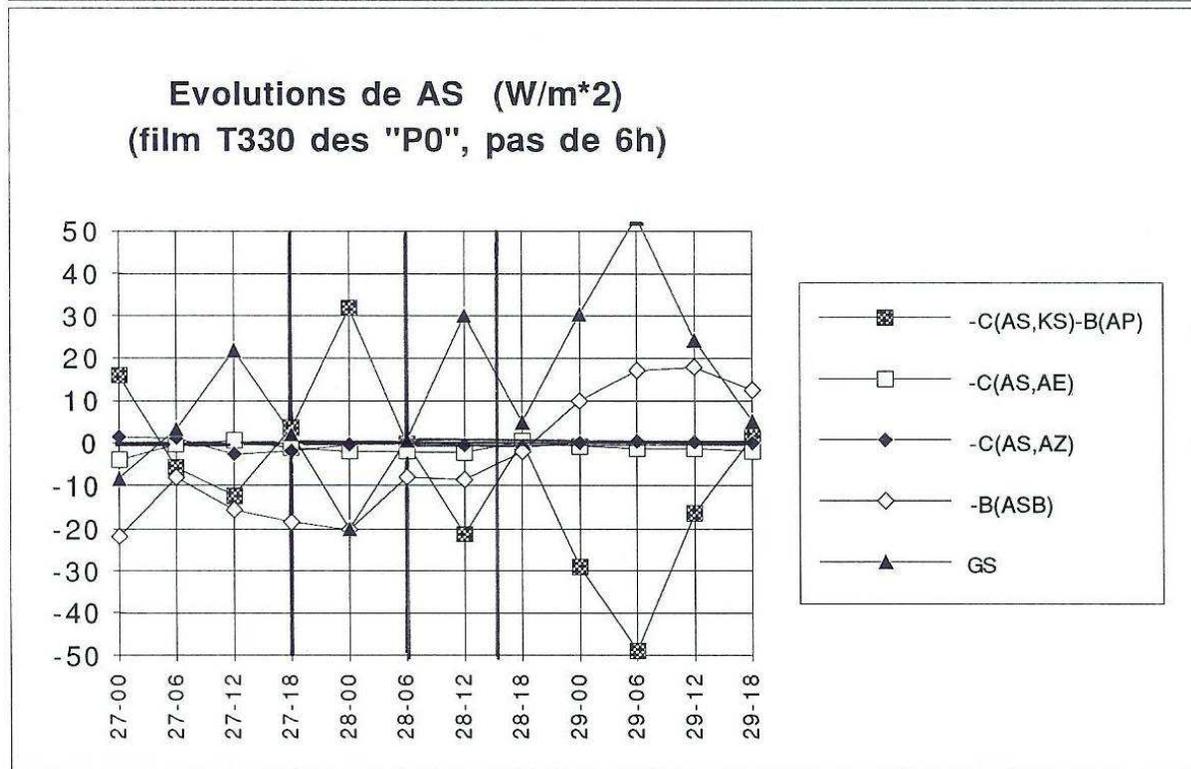
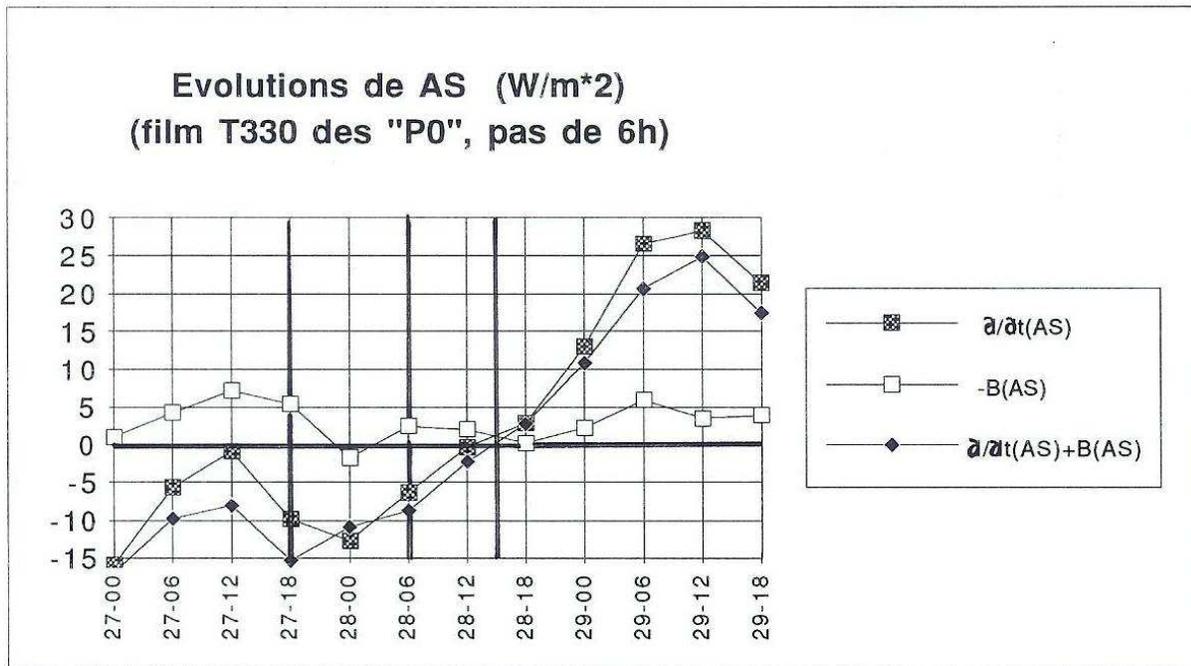


FIG. 36 – Les évolutions des différents termes du bilan du réservoir  $A_S$ , calculées à partir de la série des analyses initialisées du modèle Arpege à maille variable (T330 sur la France).

le faire pour les études sur un domaine limité.

L'hypothèse avancée à la partie **(a)** de cette section concernant un lien privilégié entre la croissance de  $K_E$  et la décroissance simultanée de  $A_S$  ne semble plus aussi claire après l'analyse du bilan de  $A_S$  puisque les termes de conversion barocline  $-C(A_S, A_Z)$  et  $-C(A_S, A_E)$  interviennent très peu dans ce bilan.

### **(e) L'évolution de $A_Z$ .**

Le réservoir  $A_Z$  représente la partie de l'enthalpie utilisable qui est générée par les contrastes méridiens (sud-nord) des moyennes zonales des températures,  $A_Z$  dépend de  $T_\varphi^\lambda = T^\lambda(\varphi, p) - \overline{T}(p)$ . Le bilan de  $A_Z$  semble plus précis que celui de  $A_S$ . On voit sur la figure (37) que les valeurs du chauffage différentiel  $G_Z$  sont en effet réalistes (entre  $-1 W/m^{-2}$  et  $1.5 W/m^{-2}$ ). On remarque aussi que les valeurs négatives de la tendance  $\partial/\partial t(A_Z)$  entre le 27 à 18 h et le 28 à 15 h sont beaucoup plus faibles que celles de  $A_S$ . Ce résultat était prévisible puisqu'on a vu dans la partie **(a)** que la décroissance de  $A_Z$  était peu marquée.

Le signal provoqué par la rentrée dans le domaine d'étude de la dépression autour du 27 à 12 h est très net. Il se traduit par une modification importante de l'ensemble des termes du bilan.

La diminution de  $A_Z$  au moment où cette dépression se trouve à l'intérieur du domaine d'étude provient de trois termes qui sont négatifs dans cette période :  $-C(A_Z, K_Z)$  d'une part, mais surtout  $-C(A_Z, A_E)$  et  $-B(A_Z)$ . C'est en fait la conversion barocline  $-C(A_Z, A_E)$  qui prédomine, même si l'advection négative de  $a_Z$  à travers les frontières qui est voisine de  $-0.5 W/m^{-2}$  n'est pas négligeable.

Ici encore, le terme  $-B(A_{ZE})$  est important dans cette période du développement de la dépression et du thalweg associé. Les valeurs dépassent  $1 W/m^{-2}$  et contribuent à atténuer le chemin barocline des conversions d'énergie.

La sortie de la dépression du domaine d'étude s'accompagne également d'une modification profonde des termes, toutes les conversions changeant en même temps de signe autour du 28 à 12 h.

### **(f) L'évolution de $A_E$ .**

Le réservoir  $A_E$  représente la partie de l'enthalpie utilisable qui est générée par les contrastes zonaux (ouest-est) de température,  $A_E$  dépend de  $T_\lambda = T(\lambda, \varphi, p) - T^\lambda(\varphi, p)$ . On a vu à la partie **(a)** que  $A_E$  croissait régulièrement tout au long de la période du 27 à 0 h au 29 à 18 h. Les tendances  $\partial/\partial t(A_E)$  qui sont reportées sur la figure (38) reproduisent cette variation avec des

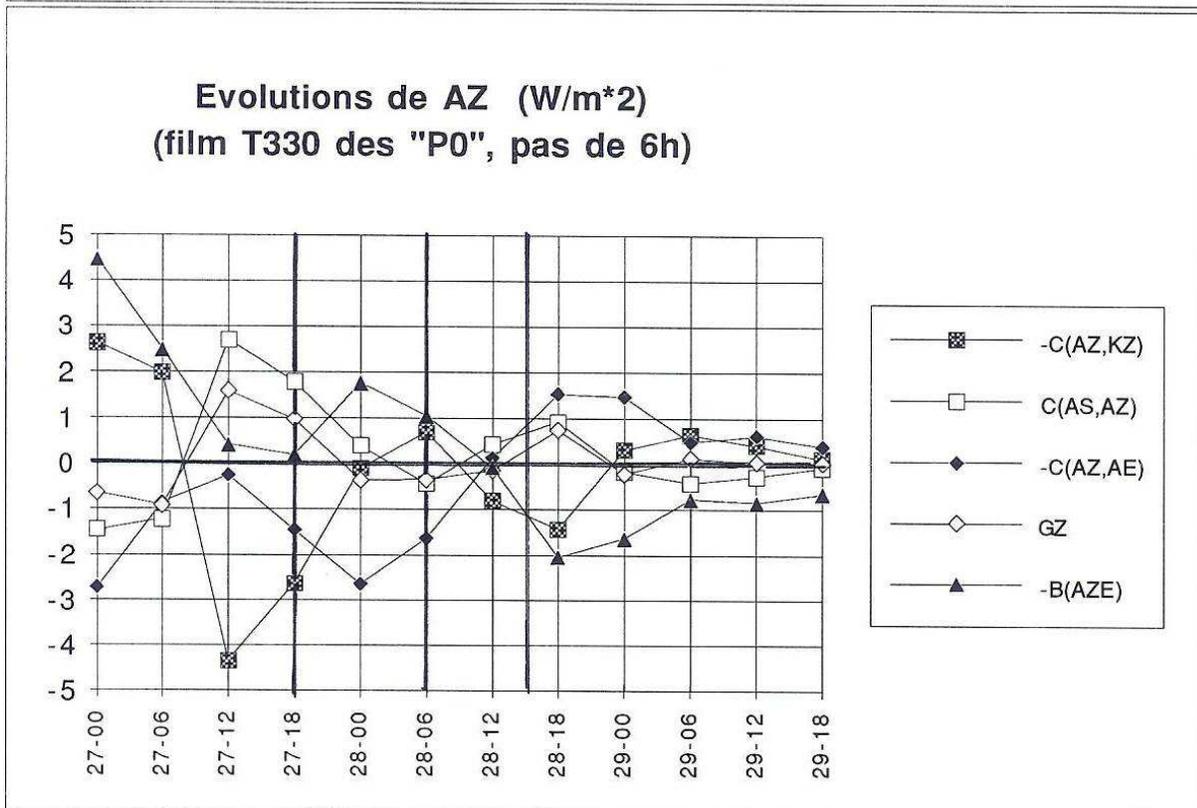
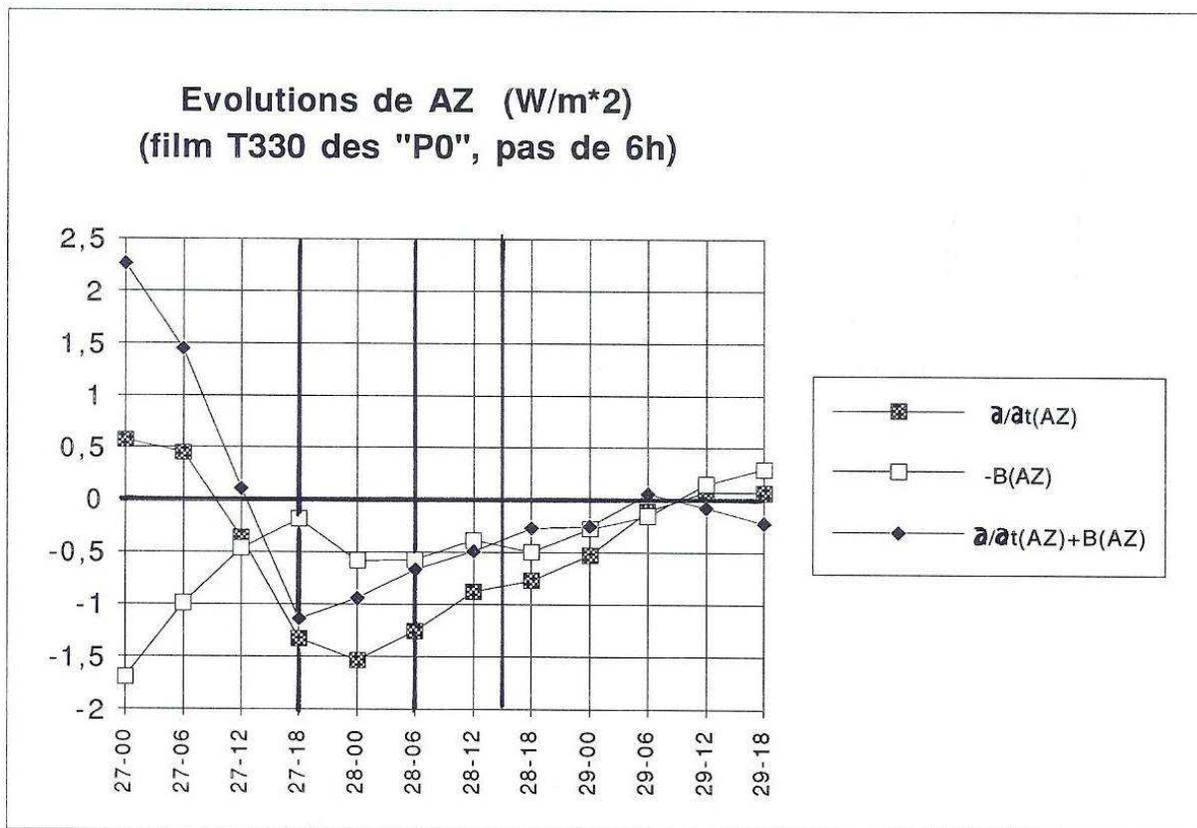
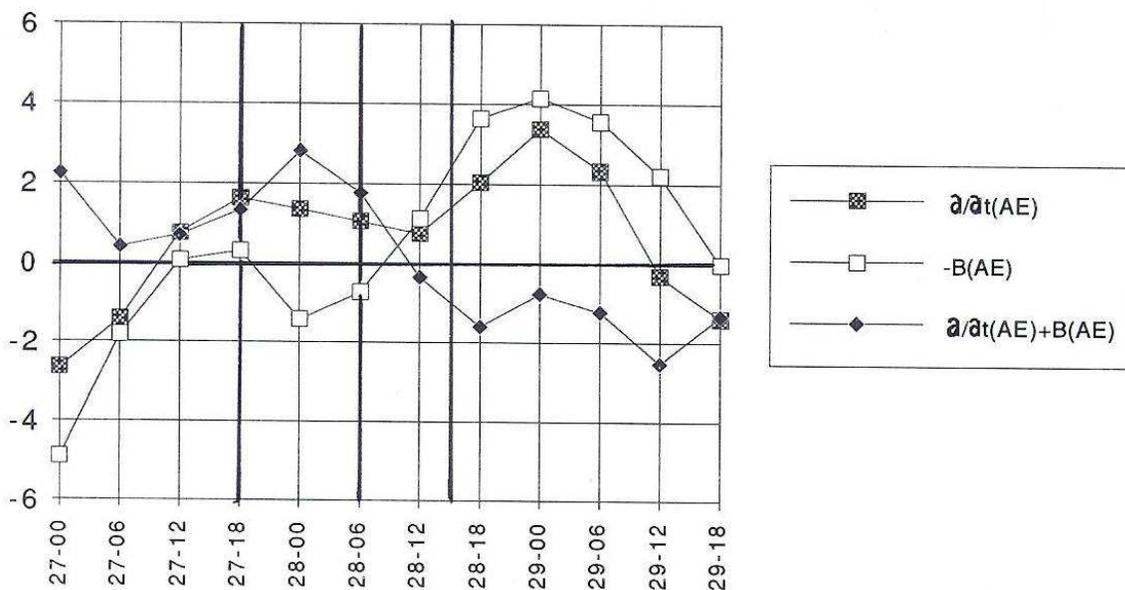


FIG. 37 – Les évolutions des différents termes du bilan du réservoir  $A_Z$ , calculées à partir de la série des analyses initialisées du modèle Arpege à maille variable (T330 sur la France).

**Evolutions de AE (W/m<sup>2</sup>)  
(film T330 des "P0", pas de 6h)**



**Evolutions de AE (W/m<sup>2</sup>)  
(film T330 des "P0", pas de 6h)**

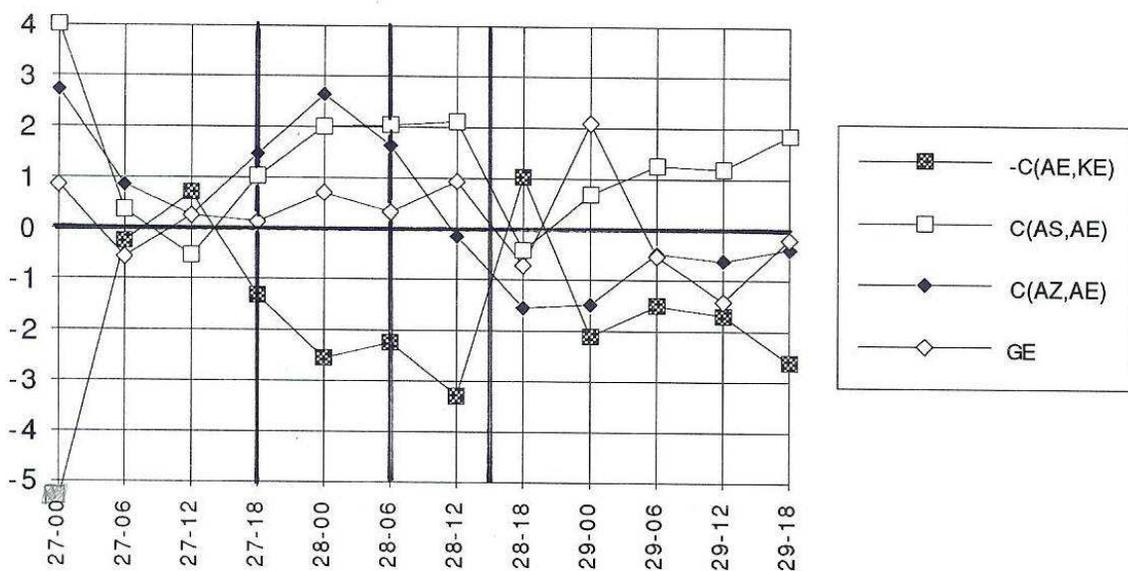


FIG. 38 – Les évolutions des différents termes du bilan du réservoir  $A_E$ , calculées à partir de la série des analyses initialisées du modèle Arpege à maille variable (T330 sur la France).

valeurs positives voisines de  $2W/m^{-2}$ .

On remarque, comme pour  $A_Z$ , que la période du 27 à 18 h au 28 à 15 h où la dépression est à l'intérieur du domaine d'étude est très particulière. On observe des changements importants au moment de l'entrée et de la sortie, aussi bien pour les conversions que pour l'advection de  $a_E$  à travers les frontières (les valeurs de  $-B(A_E)$  sont voisines de zéro uniquement pendant la période de présence de la dépression).

Le chemin barocline de l'énergie est bien visible entre le 27 à 18 h et le 28 à 15 h. On a  $C(A_S, A_E) \approx C(A_Z, A_E) \approx +2W/m^{-2}$ , avec dans le même temps  $-C(A_E, K_E) \approx -2W/m^{-2}$ . Il y a donc à la fois alimentation de  $A_E$  et transfert de l'énergie vers  $K_E$ . L'égalité  $C(A_S, A_E) \approx -C(A_E, K_E)$ , ou du moins la très forte corrélation négative qui est observée sur la figure (38), est due à la présence du même facteur  $\overline{\omega_\lambda T_\lambda}$  dans les deux termes de conversion. La croissance de  $A_E$  est renforcée par le chauffage différentiel  $G_E$  qui est positif, il est de l'ordre de  $0.5W/m^{-2}$ .

### (g) L'évolution de $K_S$ .

Le réservoir  $K_S$  représente l'énergie cinétique du vent moyen sur le domaine. La figure (39) traduit en terme de tendance négative la baisse importante de ce réservoir constatée dans la partie (a) qui est suivie d'une légère augmentation au delà du 29 à 0 h.

Au moment de la présence de la dépression et du développement du thalweg associé dans le domaine d'étude, on voit que ce sont l'advection  $-B(K_{SB})$  et la somme  $C(A_S, K_S) + C(\Phi, K_S)$  qui prédominent avec des valeurs aussi fortes que  $\pm 40W/m^{-2}$ . Cette somme reste toujours négative sur la période et c'est sur les variations du terme  $-B(K_{SB})$  que reposent celles de  $\partial/\partial t(K_S)$ . En effet, pendant la période du 27 à 18 h au 28 à 15 h, le terme  $-B(K_{SB})$  s'annule pratiquement alors que la contribution agéostrophique  $C(A_S, K_S) + C(\Phi, K_S)$  reste proche de  $-25W/m^{-2}$ .

On rappelle que le terme complémentaire  $k_{c(SB)} = u'\bar{u} + v'\bar{v}$  provient de la séparation du réservoir d'énergie cinétique qui a été obtenue à la section (2.4.1) :  $e_k = k_S + k_B + k_{c(SB)}$ . Cette décomposition locale est mathématiquement fondée et l'application numérique qui est présentée ici démontre l'importance extrême du terme  $-B(K_{SB})$  afin de fermer le bilan de  $K_S$ .

Quant à l'advection de  $k_S$ , elle n'est pas très importante pour le bilan global, le terme  $-B(K_S)$  ne dépassant pas  $3W/m^{-2}$  en valeur absolue. De même, les conversions  $-C(K_S, K_E)$  et  $-C(K_S, K_Z)$  sont négligeables pour l'évolution de  $K_S$ .

Contrairement au bilan du réservoir  $A_S$  et au manque de précision sur le calcul du chauffage différentiel  $G_S$ , la dissipation  $D_S$  paraît ici assez réaliste, même si elle n'est pas toujours négative et si les valeurs dépassent parfois  $5W/m^{-2}$  en valeur absolue. Elle est en tout cas très inférieure

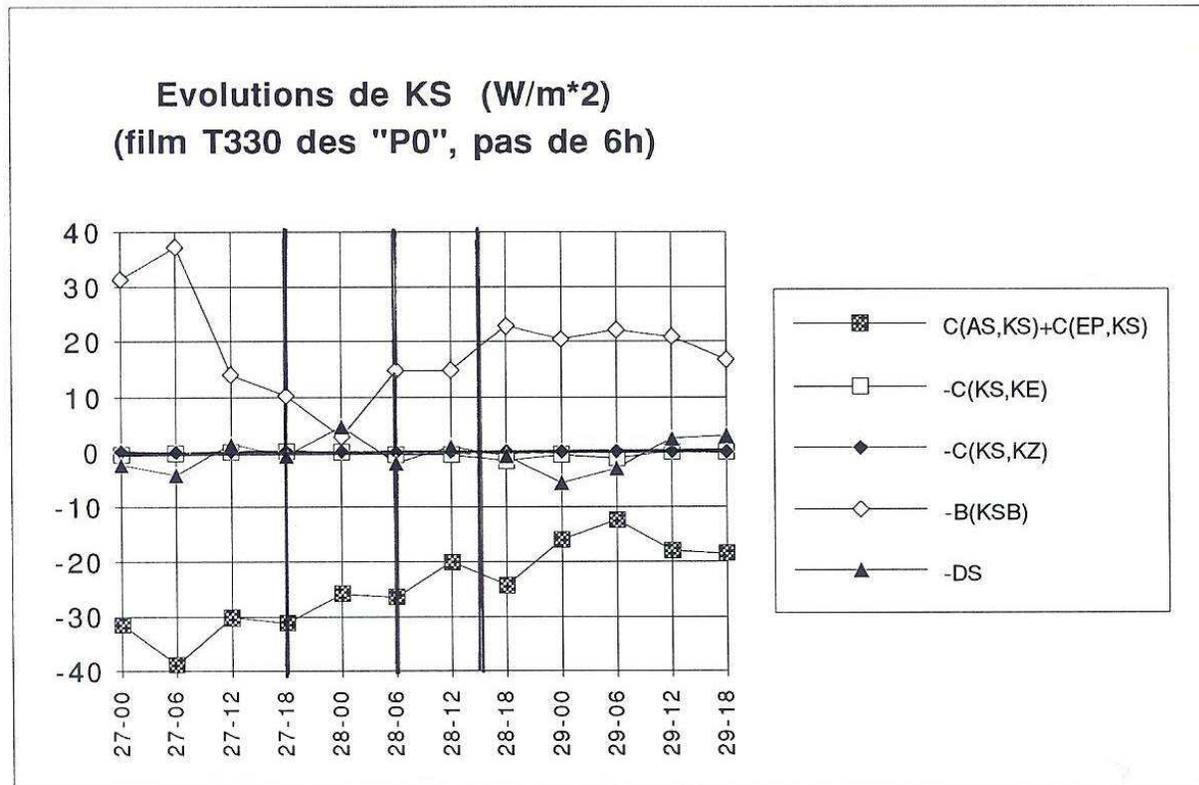
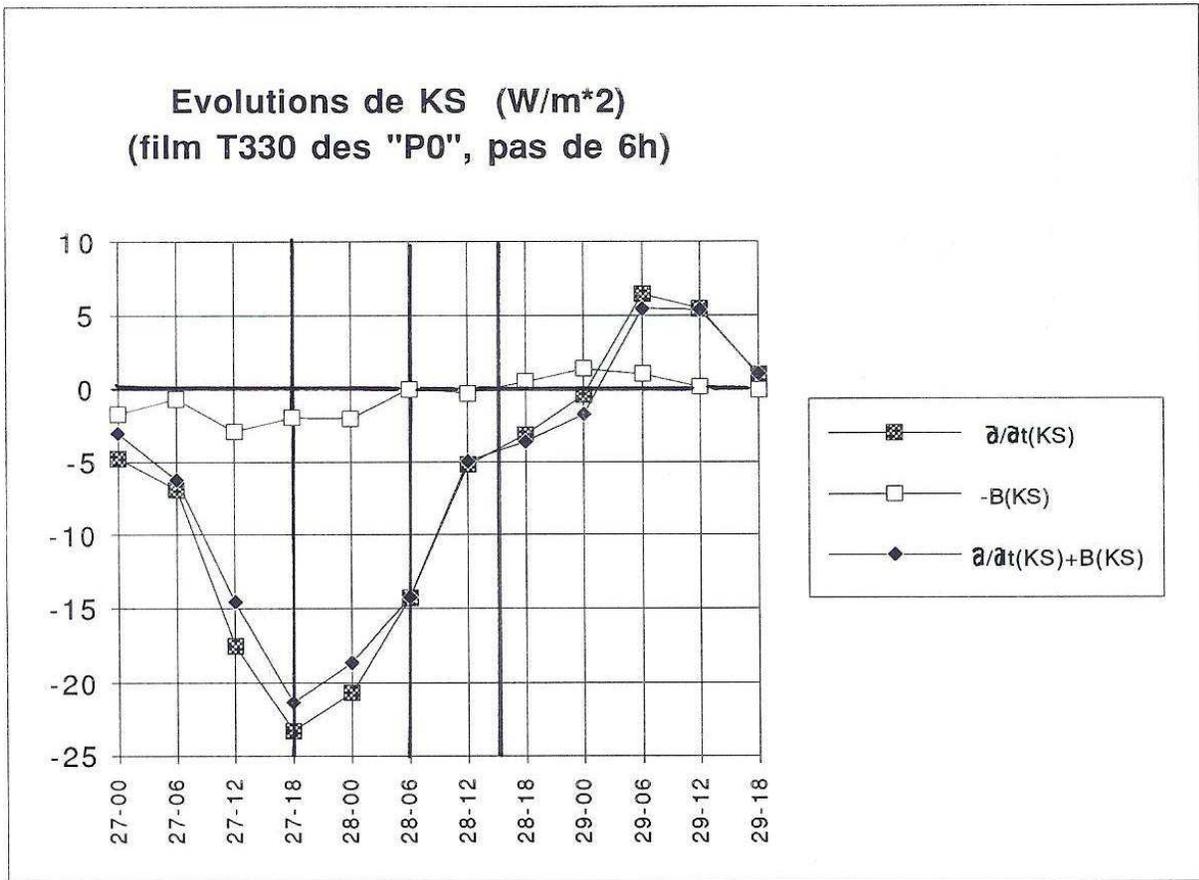


FIG. 39 – Les évolutions des différents termes du bilan du réservoir  $K_S$ , calculées à partir de la série des analyses initialisées du modèle Arpege à maille variable (T330 sur la France).

aux deux termes  $-B(K_{SB})$  et  $C(A_S, K_S) + C(\Phi, K_S)$ .

### (h) L'évolution de $K_Z$ .

Le réservoir  $K_Z$  représente l'énergie cinétique du mouvement en moyennes zonales ( $u^\lambda$  et  $v^\lambda$ ), à l'exclusion du mouvement moyen lui-même qui a été isolé dans  $K_S$ . La forme "locale" associée est  $k_Z = [(u^\lambda - \bar{u})^2 + (v^\lambda - \bar{v})^2] / 2$ .

On voit sur la figure (40) que les valeurs de la tendance  $\partial/\partial t(K_Z)$  sont faibles, elles sont inférieures à  $2W/m^{-2}$  en valeurs absolues. On a vu en effet à la partie (a) que le réservoir  $K_Z$  variait peu et, d'après la figure (33), ces faibles variations oscillent tout au long de la période. Il ne s'agit donc pas de rechercher les termes du bilan qui pourraient expliquer les tendances de  $K_Z$ , il doit se produire des compensations entre les conversions et les termes d'advection.

Pour la période du 27 à 18 h au 28 à 15 h, on observe effectivement un équilibre entre la conversion  $-C(K_Z, K_E)$  et l'advection  $-B(K_{ZE})$  d'une part, entre  $C(A_Z, K_Z)$  et  $C(\Phi, K_Z)$  d'autre part. Il y a ainsi au premier ordre un transfert d'énergie en provenance du réservoir  $A_E$  et une évacuation simultanée à travers les frontières du domaine, en donnant une fois encore une grande importance à un terme de bord.

On constate que la conversion  $-C(K_Z, K_E)$  qui est positive traduit une tendance à la stabilisation barotrope de l'écoulement ( $K_E \rightarrow K_Z$ ), y compris dans la phase de développement de la dépression.

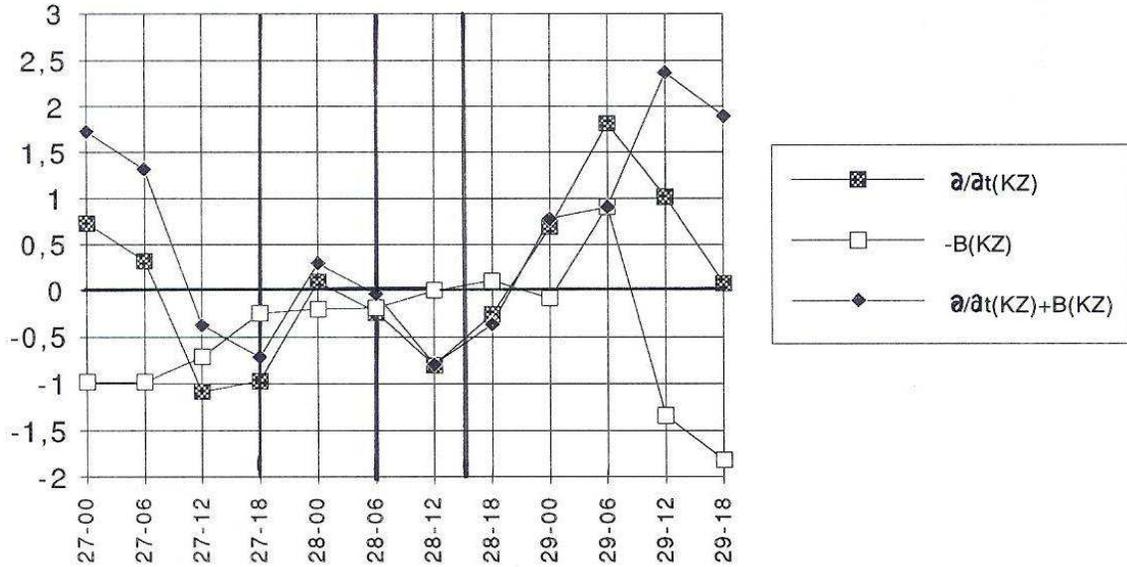
Comme pour le réservoir  $A_E$ , l'arrivée et la sortie de la dépression dans le domaine d'étude se traduisent par des changements importants dans les signes de la plupart des termes du bilan.

La dissipation  $-D_Z$  est assez réaliste, surtout pendant la période de présence de la dépression dans le domaine d'étude où le terme d'advection  $-B(K_Z)$  est lui aussi négligeable. Le manque de précision sur le calcul des tendances aurait pu laisser craindre une certaine instabilité dans la détermination du bilan de  $K_Z$  et du terme de dissipation en tant que résidu. Ce n'est pas vraiment le cas, même si les valeurs deviennent assez fortes et peut-être douteuses ensuite. Elles atteignent  $-4W/m^{-2}$  en fin de période où le calcul des tendances devient visiblement erratique (voir l'évolution de  $K_Z$  sur la figure 33).

### (i) L'évolution de $K_E$ .

Le réservoir  $K_E$  représente l'énergie cinétique des écarts aux moyennes zonales de  $u$  et aux moyennes zonales de  $v$ . La forme locale associée est  $k_E = [(u - u^\lambda)^2 + (v - v^\lambda)^2] / 2$ . C'est, a priori, la composante énergétique qui traduit la présence des dépressions, des thalwegs, mais aussi

**Evolutions de KZ (W/m<sup>2</sup>)  
(film T330 des "P0", pas de 6h)**



**Evolutions de KZ (W/m<sup>2</sup>)  
(film T330 des "P0", pas de 6h)**

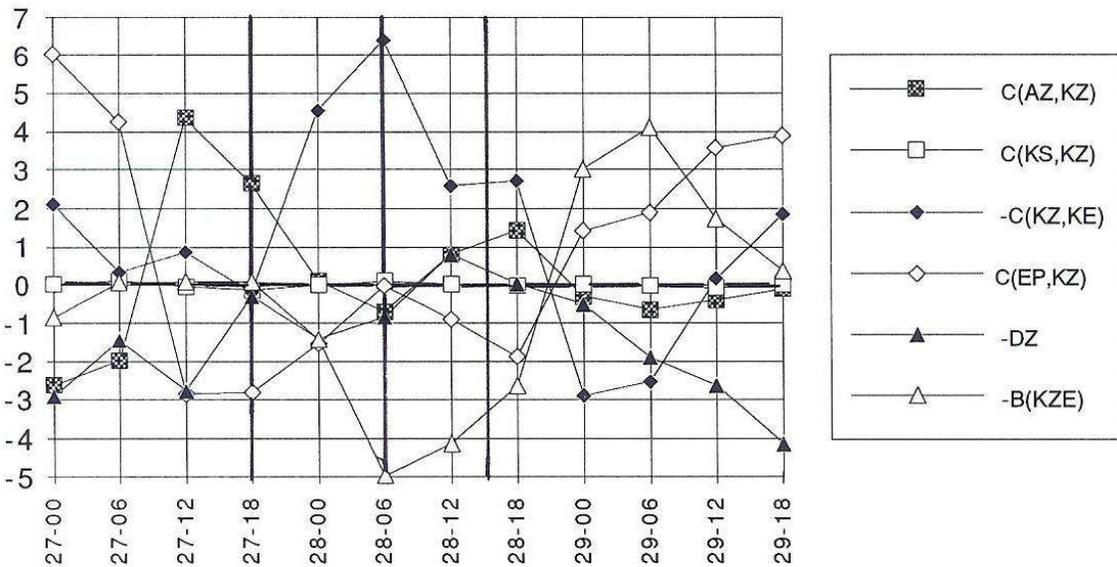


FIG. 40 – Les évolutions des différents termes du bilan du réservoir  $K_Z$ , calculées à partir de la série des analyses initialisées du modèle Arpege à maille variable (T330 sur la France).

des dorsales. Toutes ces structures qui représentent des mouvements méridiens très accentués ne peuvent pas être discernées à partir de l'analyse des valeurs de  $K_E$ , surtout sur un domaine limité où l'un quelconque de ces trois phénomènes peut se retrouver isolé.

On voit sur la figure (41) que pour la période du 27 à 12 h au 28 à 12 h, on observe une forte croissance du réservoir avec des valeurs élevées de la tendance  $\partial/\partial t(K_Z)$  (jusqu'à  $17 W/m^{-2}$ ), avec ensuite une décroissance du réservoir entre le 28 à 18 h et le 29 à 18 h. On retrouve en fait les observations de la partie (a) où on a vu sur la figure (33) que  $K_E$  passait par un maximum le 28 avril entre 6 h et 12 h. Ces résultats sont également cohérents avec l'établissement visible sur les figures (22) et (23) à la section (4.2) du thalweg et de la dépression secondaire dans le domaine.

Ces évolutions de  $K_E$  auraient pu être reliées aux seuls mécanismes d'instabilités barocline ou barotrope. On voit sur la figure (41) que ce n'est pas le cas et que le terme dominant est l'advection de  $K_E$  à travers les frontières du domaine ( $21 W/m^{-2}$  le 28 à 0 h). Ceci constitue un résultat important de cette application numérique à une situation réelle de cyclogénèse sur un domaine limité.

La conversion  $C(A_E, K_E)$  est pourtant bien positive avec des valeurs qui ne sont pas négligeables (voisines de  $2.5 W/m^{-2}$  autour du 28 à 0 h). Mais cette conversion est contrebalancée par  $C(K_Z, K_E)$  qui est négative et qui représente un transfert de  $K_E$  vers  $K_Z$  à un taux dépassant  $-5 W/m^{-2}$  pendant la même période. On obtient en définitive, en ne raisonnant qu'à partir des termes de conversion, un simple transfert de  $A_E$  vers  $K_Z$ , l'énergie ne faisant que transiter par  $K_E$ .

Il faut signaler que la dissipation  $D_E$  est assez importante et qu'elle n'est négative que pendant la période de présence de la dépression dans le domaine. On observe autrement des valeurs qui dépassent  $4 W/m^{-2}$  qui peuvent être le signe de certaines imprécisions dans les calculs du bilan de  $K_E$ .

#### **4.5.5 Les prévisions en T330 et T79.**

L'étude des bilans énergétiques a révélé des comportements énergétiques qui ressemblent à ceux qui conduisent au développement des systèmes d'onde baroclines. Mais une interrogation demeure concernant l'identification de ces signaux de cyclogénèse avec la présence de la dépression secondaire à l'intérieur du domaine d'étude. Il n'est a priori pas possible de séparer les effets de cette dépression avec ceux qui sont dus à la circulation de plus grande échelle.

Comme indiqué à la section (4.3), la prévision de base le 27 avril 1992 à 0 h est de bien meilleure qualité avec le modèle Arpege à maille variable (T330 sur la France) qu'avec la version à maille uniforme (T79). Cette section sera ainsi réservée à la recherche des différences entre les termes

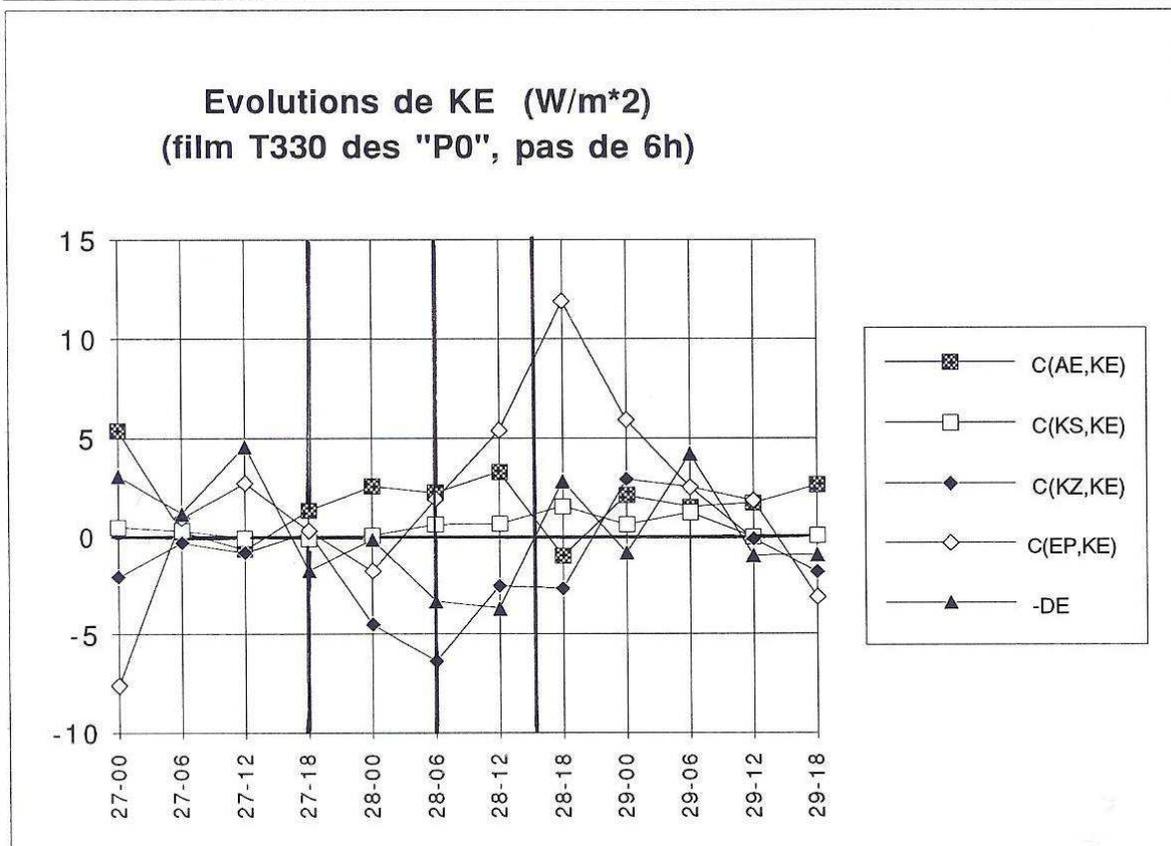
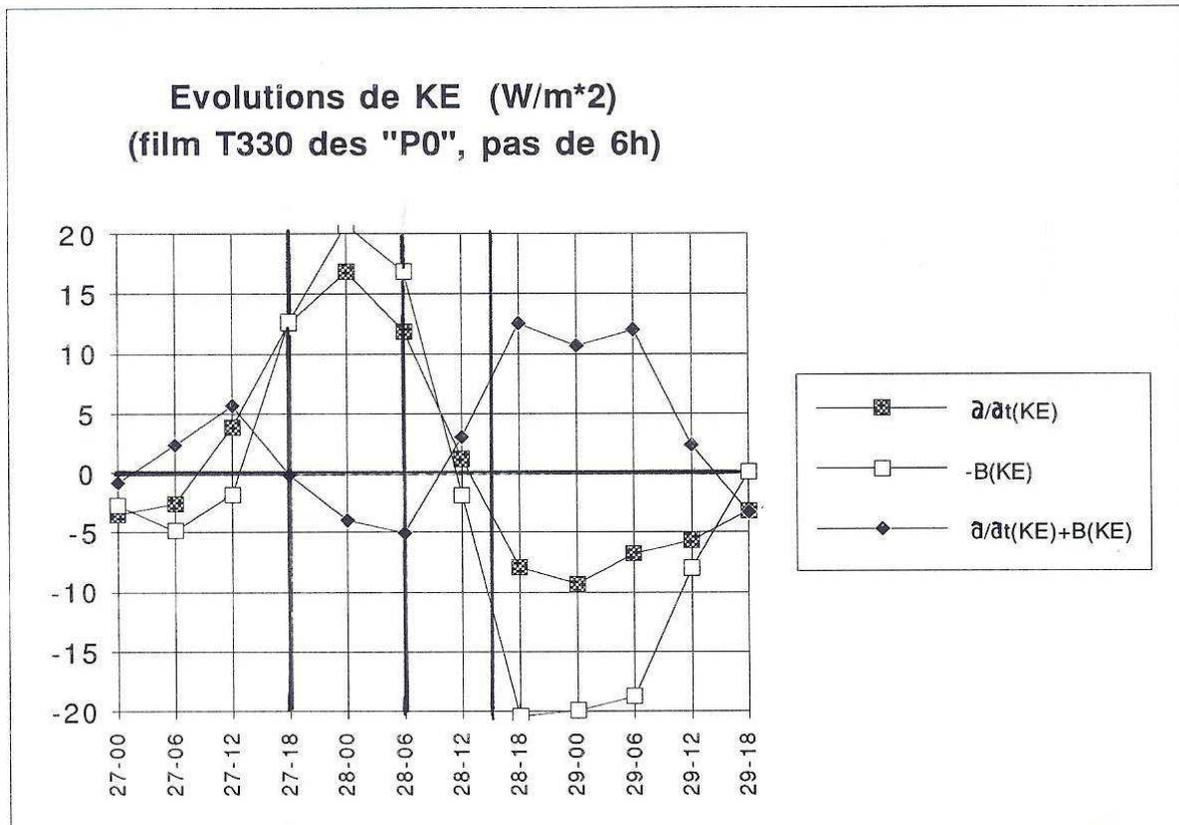


FIG. 41 – Les évolutions des différents termes du bilan du réservoir  $K_E$ , calculées à partir de la série des analyses initialisées du modèle Arpege à maille variable (T330 sur la France).

énergétiques des deux prévisions, avec comme référence les résultats obtenus à partir de la série des analyses initialisées de la version à maille variable. Le cas favorable serait d’obtenir des différences marquées entre les cycles des prévisions, avec un accord entre les cycles des prévisions du modèle à maille variable et les cycles de la série des analyses. Il n’est toutefois pas question de montrer tous les résultats de cette comparaison, seuls les plus marquants sont exposés dans cette section.

**(a) Le réservoir  $K_E$ .**

L’évolution des réservoirs  $A_Z$ ,  $A_E$ ,  $K_Z$  et  $K_E$  du cycle interne sont reportées sur la figure (42). Concernant la composante  $K_E$  on observe une forte croissance entre le 27 à 12 h et le 28 à 8 h pour le modèle à maille variable en T330. Pour l’autre version en T79 l’évolution est plus lente, elle s’étale entre le 27 à 12 h et le 28 à 16 h. Ces résultats sont en assez bon accord avec ceux de la figure (33) pour ce qui concerne la chronologie, même si la précision de 6 h de cette figure ne permet pas de situer avec précision le maximum et de savoir si la prévision en T330 ne serait pas un peu en avance ou si la prévision en T79 ne serait pas un peu en retard.

Les valeurs numériques de  $K_E$  sont globalement trop faibles pour les deux prévisions. On ne retrouve pas le pic vers  $9.5 \cdot 10^5 \text{ J/m}^{-2}$  le 28 à 12 h pour les cycles des analyses. Les valeurs de  $K_E$  pour les deux prévisions restent inférieures à  $6 \cdot 10^5 \text{ J/m}^{-2}$ .

Cette différence de comportement du réservoir  $K_E$  est très nette entre les deux prévisions et il se trouve que  $K_E$  représente justement l’énergie cinétique des perturbations de vent  $u - u^\lambda$  et  $v - v^\lambda$  qui, on l’a vu à la section (4.3), sont mieux vues par la version à maille variable du modèle Arpege.

Il est ainsi logique d’attribuer ces disparités entre les valeurs de  $K_E$  à la différence entre les simulations des phénomènes directement associés à la dépression secondaire.

Il est aussi possible de situer dans le temps l’intervalle où ces différences sont visibles : entre le 27 à 12 h et le 28 à 15 h. C’est la période de présence de la dépression dans le domaine d’étude, ce qui est cohérent avec l’interprétation précédente.

Les évolutions des autres composantes  $A_Z$ ,  $A_E$  et  $K_Z$  ne présentent pas d’écarts aussi nets entre les deux prévisions. C’est aussi le cas pour les réservoirs  $A_S$  et  $K_S$  dont les graphiques ne sont pas présentés ici.

**(b) Les conversions.**

On montre sur la figure (43) les évolutions des termes de conversion pour les prévisions des deux versions du modèle Arpege. Ces évolutions devront être comparées aux résultats de la figure (34) qui constituent la référence de cette étude.

On remarque sur la figure (43) que le plus grand changement est lié à la conversion

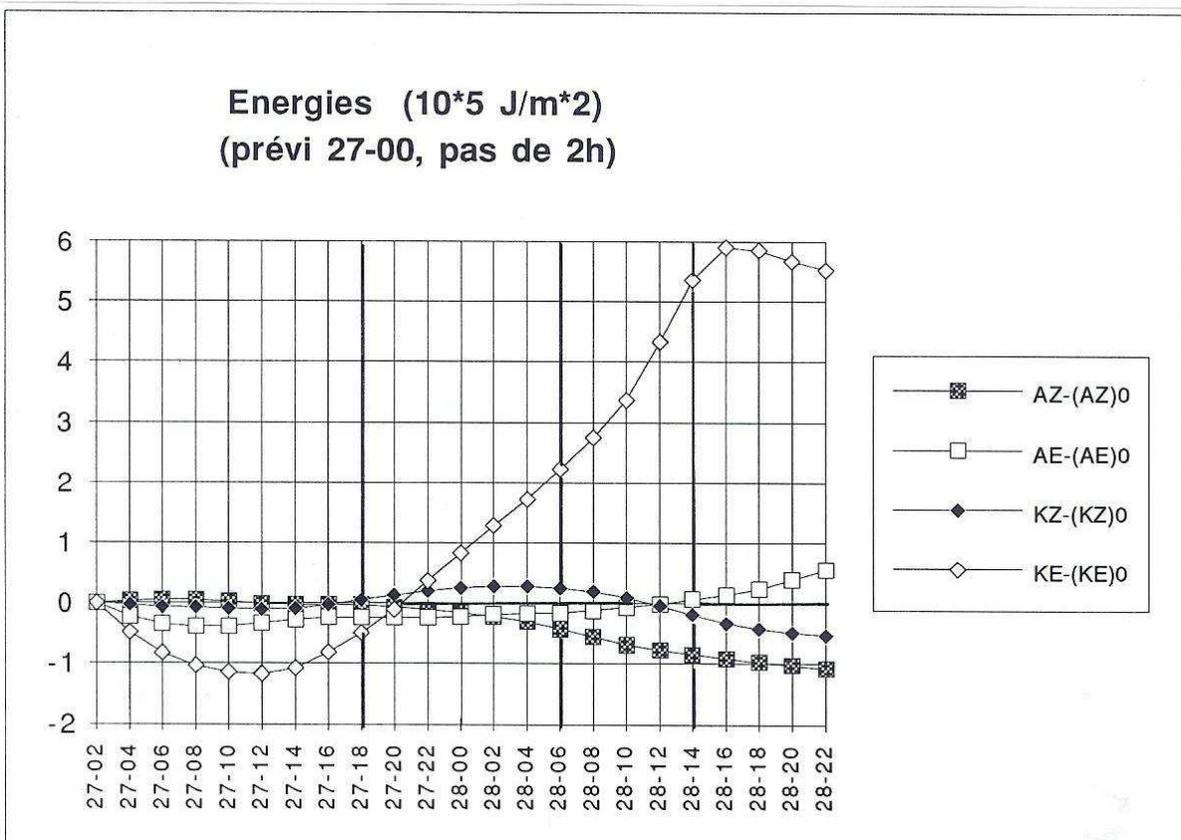
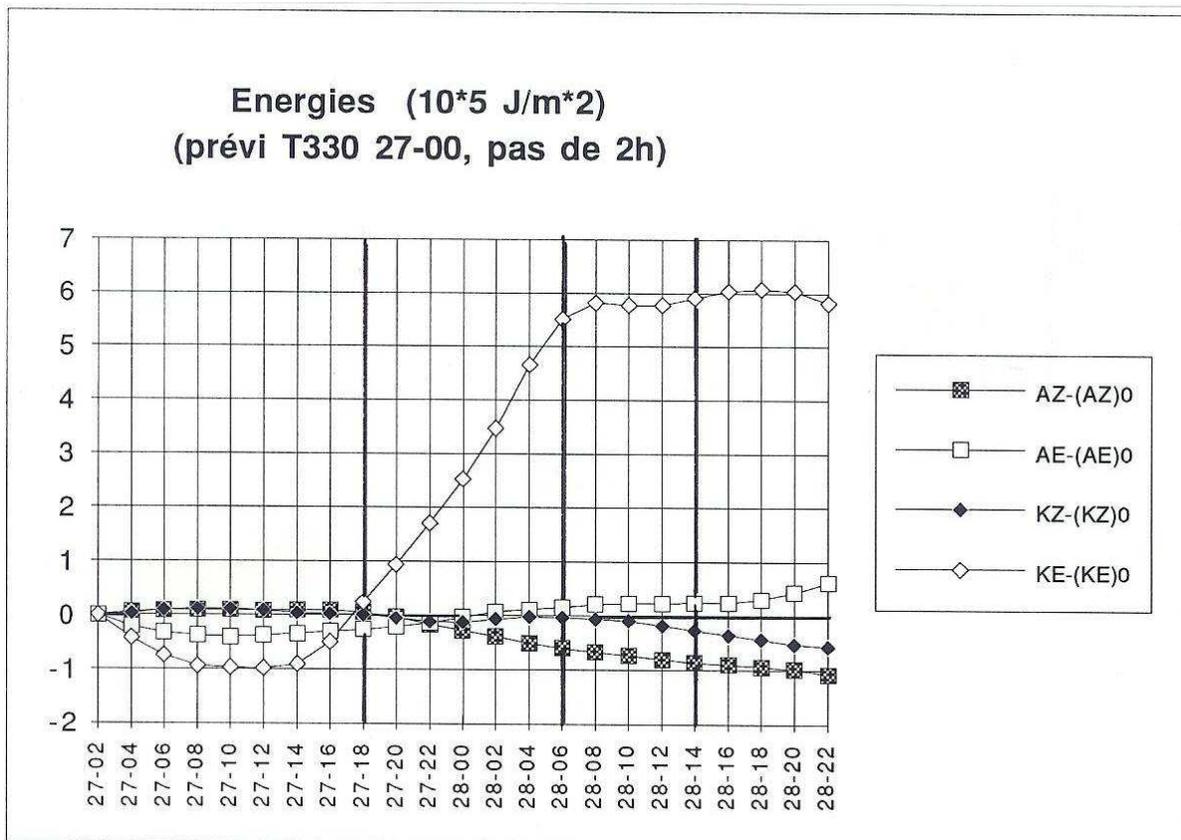


FIG. 42 – Les évolutions des quatre réservoirs  $A_Z$ ,  $A_E$ ,  $K_Z$  et  $K_E$  pour les deux prévisions à 48 h de base le 27 avril 1992 à 0 h. En haut : pour la version à maille variable d'Arpege (T330 sur la France); en bas : pour la version à maille uniforme (T79).

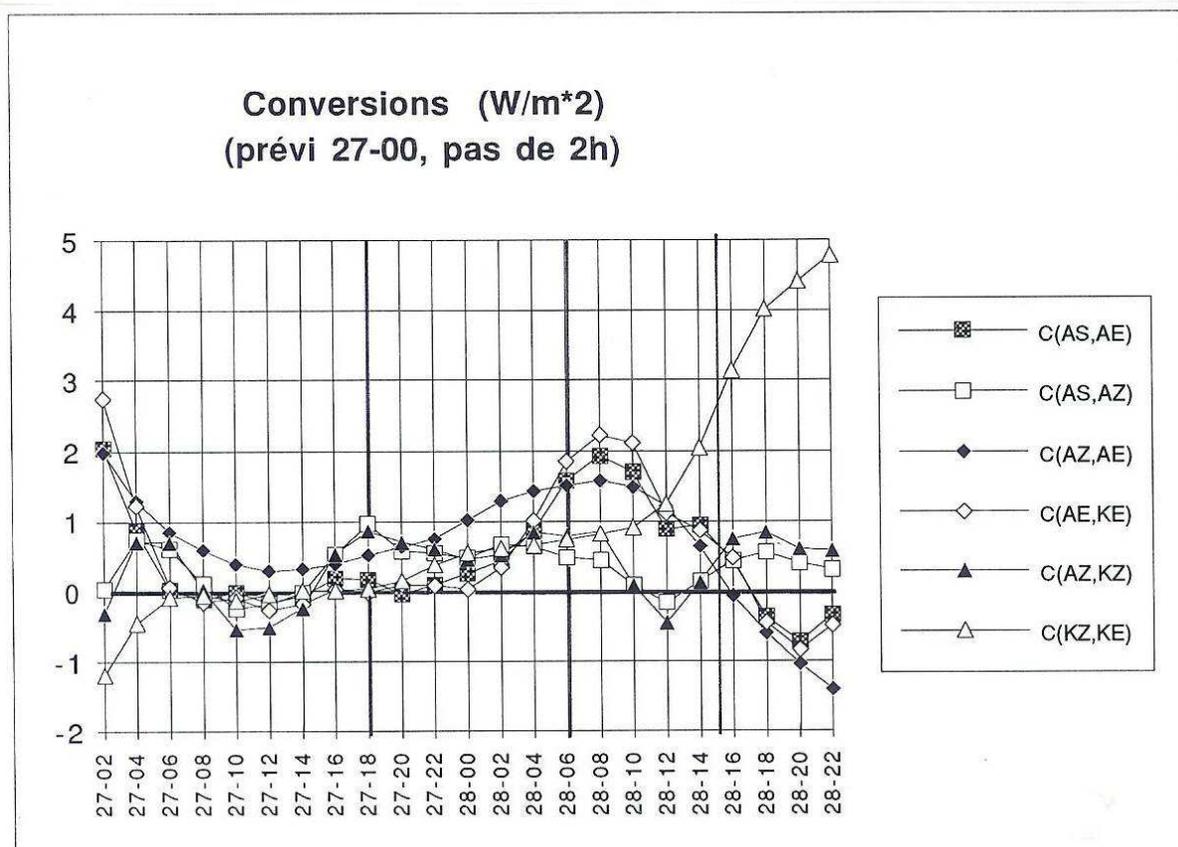
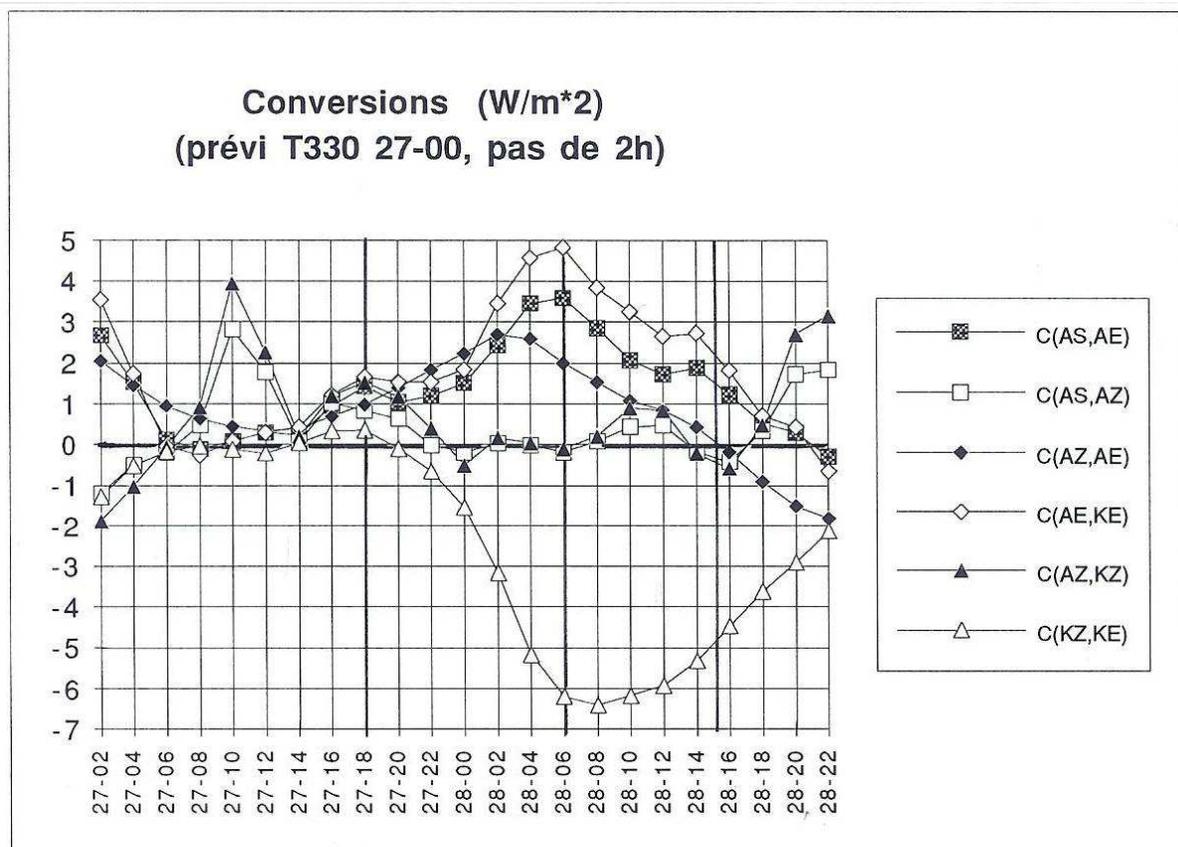


FIG. 43 – Les évolutions des conversions pour les deux prévisions à 48 h de base le 27 avril 1992 à 0 h. En haut : pour la version à maille variable d'Arpege (T330 sur la France) ; en bas : pour la version à maille uniforme (T79).

$C(K_Z, K_E)$ . Comme prévu à la partie (a) précédente, il s'agit d'une des deux conversions qui influent directement sur le réservoir  $K_E$ . L'autre conversion  $C(A_E, K_E)$  présente elle aussi des différences assez importantes entre les deux versions des prévisions du modèle Arpege, à l'avantage du modèle à maille variable.

On voit en effet d'après les figures (43) et (34) que c'est, de manière beaucoup plus nette que pour l'évolution de  $K_E$ , la prévision de la version à maille variable en T330 qui est la plus réaliste. La conversion  $C(K_Z, K_E)$  est décroissante entre le 27 à 18 h et le 28 à 6 h, aussi bien pour les cycles des analyses que pour les cycles de la prévision en T330. Les valeurs sont dans les deux cas de l'ordre de  $-6.4 W/m^{-2}$  le 28 à 6 h. Pour la prévision en T79 on observe au contraire une croissance lente et régulière irréaliste de cette conversion pendant cette période qui coïncide avec la présence de la dépression dans le domaine (assez bien vue en T330, mal vue en T79).

Pour la conversion  $C(A_E, K_E)$  ce sont les valeurs issues de la prévision en T330 qui sont les plus réalistes. Elles sont proches de  $2 W/m^{-2}$  dès le 28 à 0 h à la fois pour les analyses et pour la prévision en T330, alors qu'elles ne dépassent guère  $0.5 W/m^{-2}$  à  $1 W/m^{-2}$  avec la prévision en T79.

On observe une activité plus importante pour les quatre conversions  $C(A_S, A_E)$  et  $C(A_Z, A_E)$  d'une part,  $C(A_E, K_E)$  et  $C(K_Z, K_E)$  d'autre part au moment de la présence de la dépression dans le domaine d'étude. Ces conversions passent par des maximums plus marqués pour les cycles énergétiques issus de la prévision en T330. Ces maximums se produisent un peu plus tôt pour la prévision du modèle à maille variable (avant le 28 à 6 h, alors que pour le modèle à maille uniforme ces maximums sont atteints autour du 28 à 8 h). Cependant, cette activité semble parfois trop importante pour la version T330 du modèle Arpege si on prend les cycles énergétiques des analyses comme références.

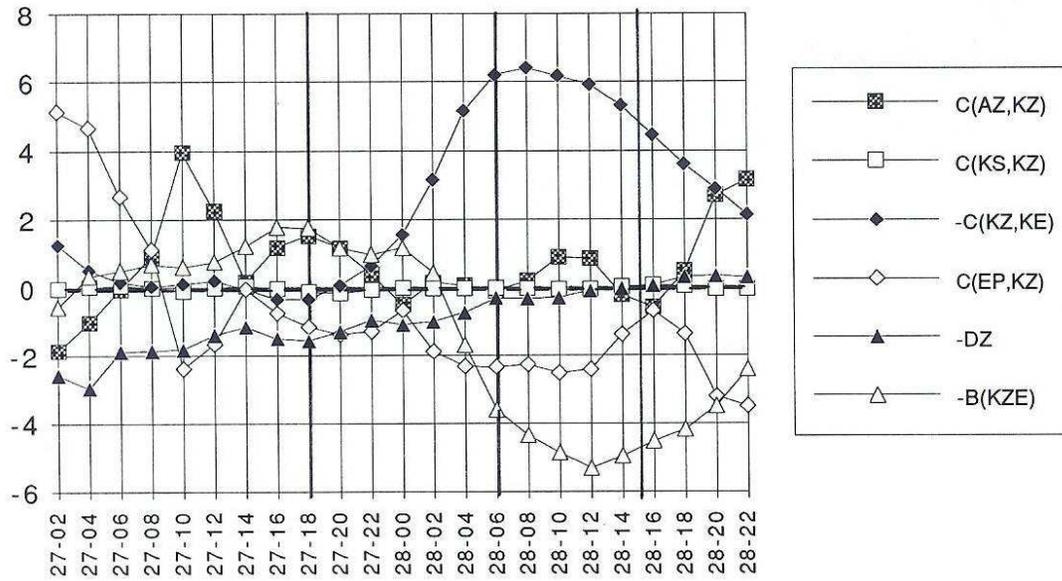
On peut voir sur la figure (43) un signal assez net aux environs du 27 à 12 h sur les conversions  $C(A_S, A_Z)$  et  $C(A_Z, K_Z)$  issues du modèle Arpege en T330. On ne voit rien de comparable pour la version en T79 de ce modèle. Le même signal a cependant été observé sur la figure (34) pour les cycles issus des analyses. Il semble ainsi que quelque chose soit réellement entré ou sorti à cette période dans le domaine. On pense évidemment à la rentrée par le bord ouest de la dépression secondaire qui s'accompagne d'une déformation des champs au voisinage de cette frontière.

### (c) Les évolutions des termes du bilan de $K_Z$ .

On montre sur la figure (44) les évolutions des termes du bilan de  $K_Z$  pour les deux versions des prévisions du modèle Arpege, à l'exception de  $\partial(K_Z)/\partial t$  et  $-B(K_Z)$ .

On retrouve le problème de mauvais comportement du terme de conversion  $-C(K_Z, K_E)$

**Evolutions de KZ (W/m<sup>2</sup>)  
(prévi T330 27-00, pas de 2h)**



**Evolutions de KZ (W/m<sup>2</sup>)  
(prévi 27-00, pas de 2h)**

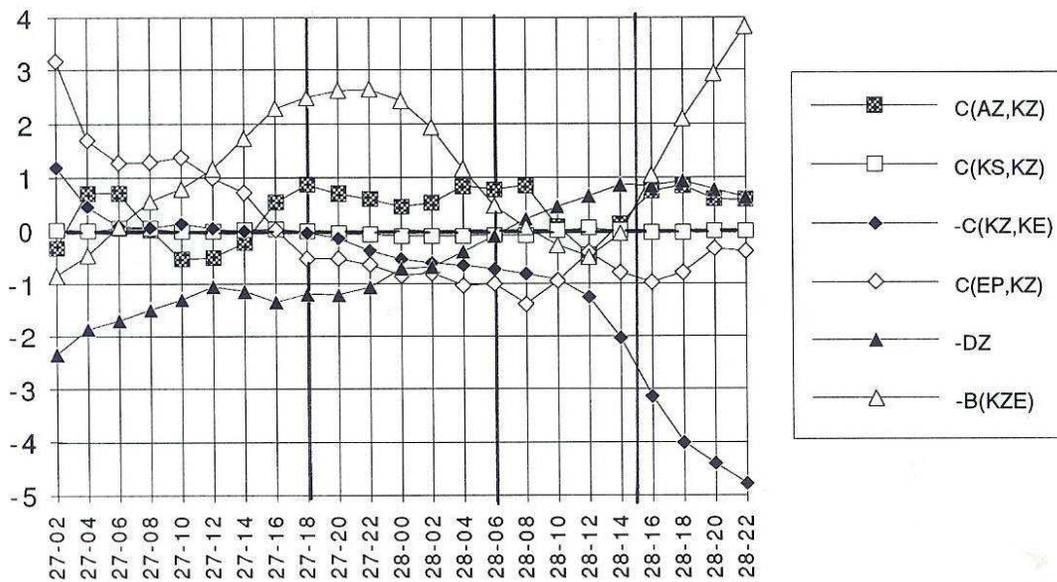


FIG. 44 – Les évolutions des termes du bilan de  $K_Z$  pour les deux prévisions à 48 h de base le 27 avril 1992 à 0 h. En haut : pour la version à maille variable d'Arpege (T330 sur la France) ; en bas : pour la version à maille uniforme (T79).

qui touche évidemment le bilan de  $K_Z$ . Comme l'évolution du réservoir  $K_Z$  est faible (voir la partie **(h)** de la section 4.5.4), aussi bien pour les cycles des analyses que pour les cycles des deux prévisions (figures non fournies), une telle différence dans l'évolution de  $-C(K_Z, K_E)$  doit être compensée par une modification correspondante pour au moins un autre des termes du bilan.

C'est effectivement le cas et on voit sur la figure (44) que c'est l'advection de  $k_{c(ZE)}$  à travers les frontières du domaine d'étude qui est également mal prévue avec la version *T79* du modèle Arpege. Les termes  $-B(K_{ZE})$  et  $-C(K_Z, K_E)$  s'équilibrent à tout moment, avec un signal marqué après le 28 à 4 h qui était déjà bien visible sur la figure (40).

Comme précédemment à la partie **(b)** de cette section, on observe sur la figure (44) des changements aux environs du 27 à 12 h concernant les conversions  $C(A_Z, K_Z)$  et  $C(\Phi, K_Z)$  qui semblent s'équilibrer, leurs évolutions étant sensiblement en opposition de phase. Le comportement de  $C(\Phi, K_Z)$  est, là aussi, bien vu avec la version *T330* d'Arpege (faire la comparaison avec la figure 40). Ceci confirme l'hypothèse de l'influence de la rentrée de la dépression dans le domaine d'étude.

**(d) Les évolutions des termes du bilan de  $K_E$ .**

On montre sur les figures (45) et (46) les évolutions des termes du bilan de  $K_E$  pour les deux versions des prévisions du modèle Arpege.

Il apparaît d'après la figure (45) que les évolutions de  $\partial(K_E)/\partial t$  et de  $-B(K_E)$  ne sont réalistes que pour la version  $T330$  d'Arpege où la période de forte croissance est bien confinée entre le 27 à 18 h et le 28 à 12 h. Les valeurs sont toutefois moins élevées que pour les cycles énergétiques issus des analyses de référence (voir la figure 41). Ces remarques sont en accord avec les observations de la partie **(a)** de cette section. Pour la version  $T79$  d'Arpege on obtient une croissance trop lente qui se prolonge jusqu'au 28 à 15 h.

D'autre part on a sensiblement  $\partial(K_E)/\partial t \approx -B(K_E)$  pour la première partie de la prévision jusqu'au 28 à 6 h et le bilan  $\partial(K_E)/\partial t + B(K_E)$  est quasiment nul avant cette date. Ce n'est pas le cas pour les analyses de référence où ce bilan est négatif sur la figure (41) entre le 28 à 0 h et le 28 à 6 h (il est voisin de  $-5 W/m^{-2}$ ). Après cette date, ce bilan devient fortement positif (voisin de  $13 W/m^{-2}$ ) à partir du 28 à 18 h, après l'évacuation de la perturbation par le bord nord-est du domaine.

Puisque l'on sait déjà que les conversions  $C(A_E, K_E)$  et surtout  $C(K_Z, K_E)$  sont mal prévues avec la version  $T79$  d'Arpege, il doit y avoir des différences pour d'autres termes du bilan de  $K_E$  entre les deux versions des prévisions d'Arpege.

En fait, les valeurs anormalement positives de  $C(K_Z, K_E)$  pour la version  $T79$  ne sont que partiellement compensées par les valeurs positives mais plus faibles de  $C(A_E, K_E)$  pour la période du 28 à 2 h au 28 à 15 h. Le bilan de ces deux termes pour la version  $T79$  conduit aux valeurs anormalement positives de la tendance du réservoir  $K_E$  après le 28 à 8 h.

Il semble que l'interprétation de la partie **(i)** de la section (4.5.4) selon laquelle le réservoir  $K_E$  évolue principalement en fonction du terme de bord  $-B(K_E)$  ne doivent pas être remise en cause. Il faut juste mentionner l'impact non négligeable des deux conversions  $C(A_E, K_E)$  et  $C(K_Z, K_E)$  qui influent principalement au moment de la présence de la dépression dans le domaine d'étude.

Les calculs semblent suffisamment précis puisque même pour la version  $T79$  du modèle Arpege on constate que les valeurs de la dissipation  $-D_E$  restent négatives et réalistes.

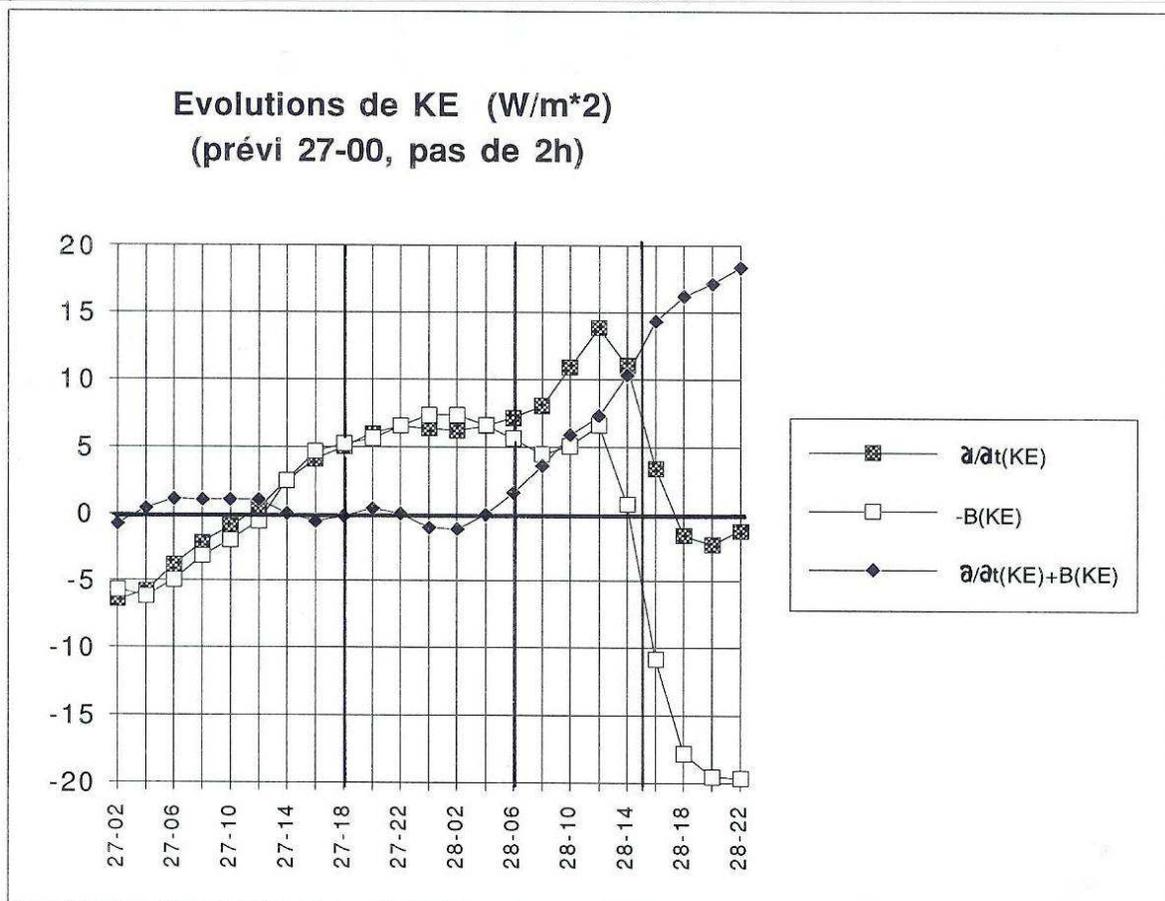
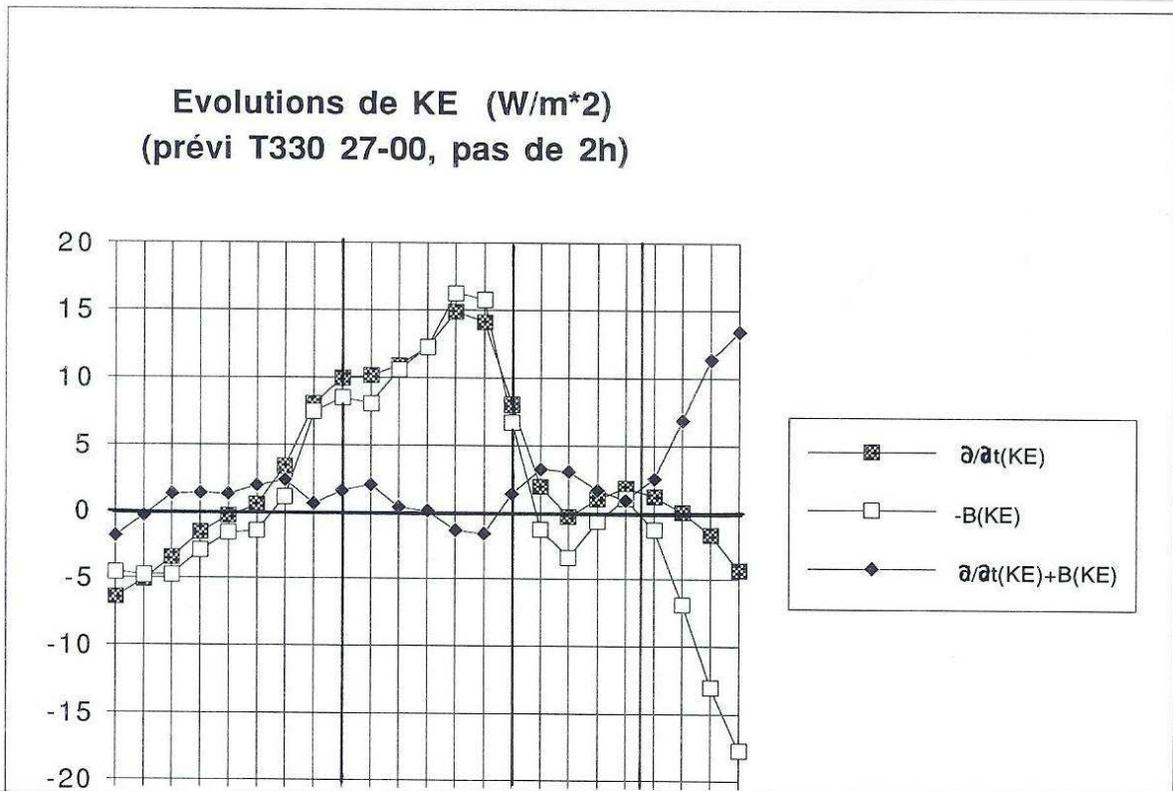


FIG. 45 – Les évolutions des termes de tendance et d'advection de  $K_E$  pour les deux prévisions à 48 h de base le 27 avril 1992 à 0 h. En haut : pour la version à maille variable d'Arpege (T330 sur la France); en bas : pour la version à maille uniforme (T79).

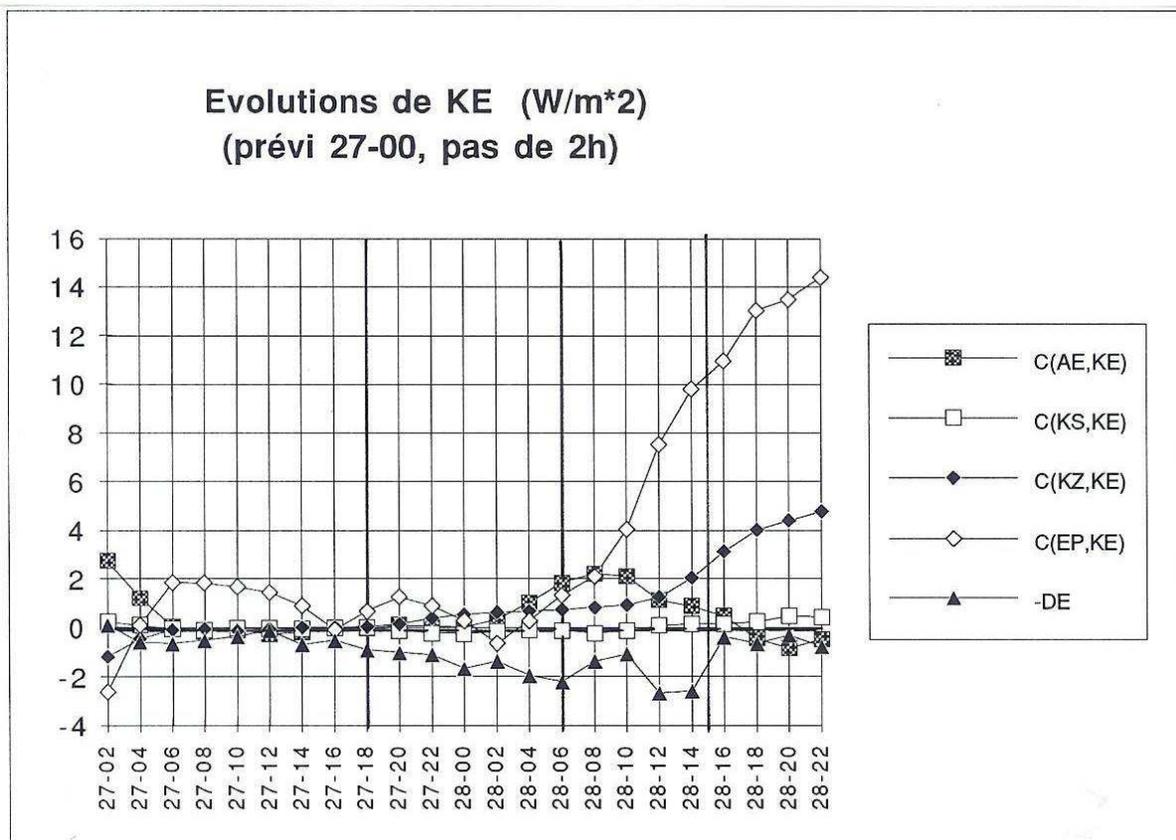
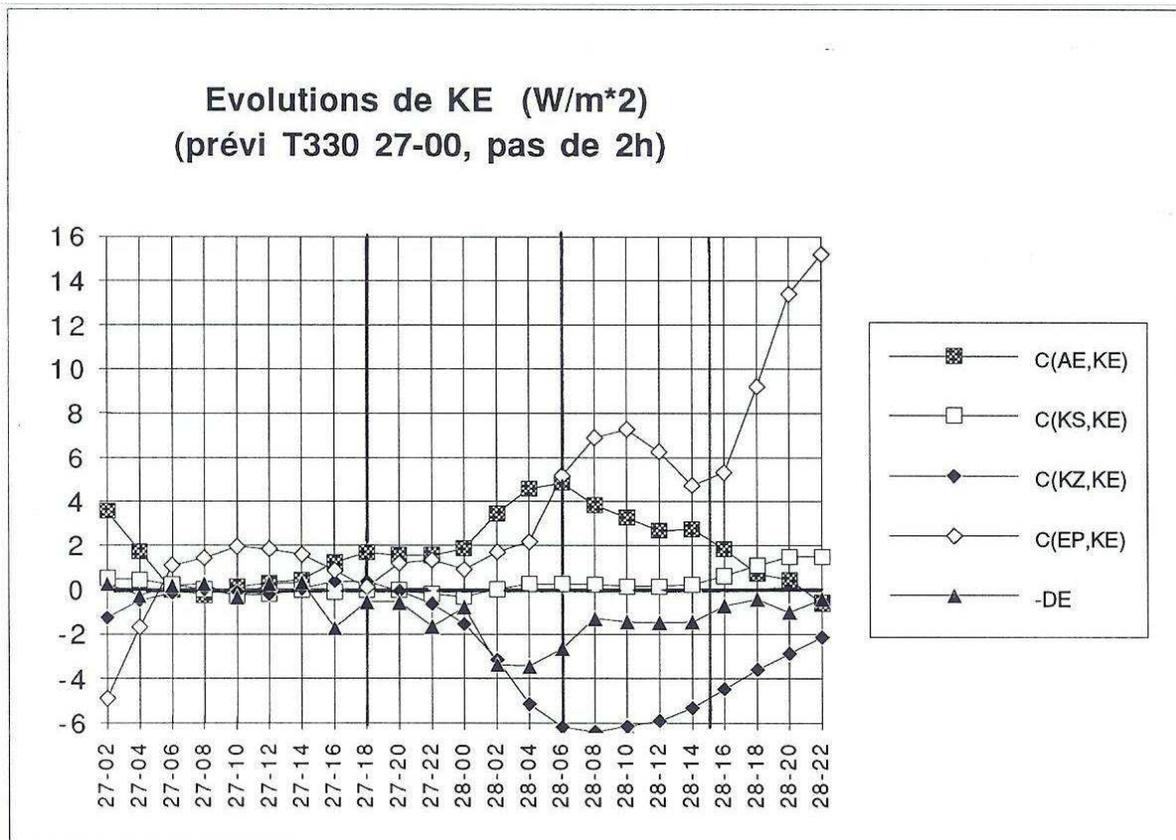


FIG. 46 – Les évolutions des autres termes du bilan de  $K_E$  pour les deux prévisions à 48 h de base le 27 avril 1992 à 0 h. En haut : pour la version à maille variable d'Arpege (T330 sur la France); en bas : pour la version à maille uniforme (T79).

## 4.6 Une synthèse des résultats.

Cette étude concrète d'un phénomène météorologique d'échelle sous-synoptique a-t-elle permis de répondre aux quatre questions de la section (4.1) ?

La première et la quatrième de ces questions sont les plus importantes au point de vue de la signification physique des résultats de cette thèse. La dépression secondaire qui entre, se développe et ressort du domaine d'étude induit-elle un signal énergétique visible et interprétable sur les cycles isobares d'enthalpie utilisable ? Peut-on raisonner en terme de comportements barocline et/ou barotrope avec cette étude sur un domaine limité ? Et si oui quelles sont les différences avec les résultats classiques concernant les cyclogénèses principales ?

La deuxième et la troisième question sont d'ordre plus pratique, mais leur importance n'est pas moindre puisque sur elles reposent la possibilité de mettre en œuvre facilement des applications opérationnelles pour caractériser de manière objective le degré de cyclogénèse des modèles numériques. Est-il possible de raisonner à partir des fichiers analysés et prévus avec un échantillonnage de  $6 h$ , les tendances étant calculées par des différences finies entre ces fichiers ? Est-il possible d'utiliser les champs interpolés sur les niveaux isobares et non sur les niveaux hybrides des modèles ?

Il ressort de cette étude du comportement énergétique d'une dépression secondaire qu'il est effectivement possible d'utiliser la version globale du cycle isobare d'enthalpie utilisable qui est donné par (82).

On a d'abord montré à la section (4.5.1) que l'échantillonnage temporel de  $6 h$  est suffisant, en particulier pour rendre compte de l'évolution du réservoir  $K_E$  qui est le marqueur du développement de la dépression. Les résultats sont comparables à ceux obtenus avec un échantillonnage de  $2 h$ , même si les détails fins des évolutions ne peuvent pas être obtenus avec une précision équivalente quand la résolution de  $6 h$  est employée. Le test de comparaison était pourtant sévère puisque le phénomène météorologique est de petite échelle et qu'il varie très vite, tant en intensité qu'en localisation.

Il semble que des signaux très nets traduisent la présence, plus ou moins marquée, suivant les analyses ou les prévisions, de la dépression secondaire à l'intérieur du domaine d'étude. Les cycles isobares d'enthalpie utilisable sont donc pertinents pour mettre en évidence, et pour apprécier quantitativement, les phénomènes de type cyclogénèse de petite échelle.

L'analyse des termes des cycles énergétiques traduit effectivement sans ambiguïté le fait que la prévision du modèle Arpege est de meilleure qualité avec la version à maille variable. On le voit si on compare l'évolution du réservoir  $K_E$ , celle de la conversion  $C(A_E, K_E)$  et surtout celle de  $C(K_Z, K_E)$ . L'étude des cycles est ainsi cohérente avec l'analyse synoptique des cartes de pression

réduite au niveau de la mer, de géopotentiel et de vent qui est brièvement décrite à la section (4.3).

Même si ces différences de qualité dans les prévisions des champs de base ( $T$ ,  $\Phi$  et  $\vec{u}_h$ ) devaient être associées à certains impacts sur les termes énergétiques, le fait que ces différences se produisent justement au moment de la présence de la dépression dans le domaine d'étude ne peut pas être dû au hasard. Il faut remarquer qu'aux moments où, d'après les cartes synoptiques, la dépression entre dans le domaine et qu'elle en ressort, plusieurs termes énergétiques pertinents sont brutalement modifiés. Il faut enfin noter que les différences les plus fortes portent sur les tendances de  $K_E$ , sur la conversion  $C(K_Z, K_E)$  et sur le terme de bord  $-B(K_{ZE})$ . Pour les deux premiers d'entre eux il s'agit de signaux indubitablement liés à des phénomènes de cyclogénèse.

L'étude des conversions entre les différents réservoirs permet de retrouver, dans ses grandes lignes, les résultats de l'étude de Pearce (1978). D'après les figures (28) et (43) on observe en effet dans la phase de développement de l'onde des valeurs positives pour les conversions  $C(A_S, A_E)$ ,  $C(A_Z, A_E)$  et  $C(A_E, K_E)$ . C'est l'initiation du chemin barocline classique des ondes synoptiques, mais on la retrouve ici appliquée à la phase de développement d'une dépression secondaire.

Les figures (28) et (43) sont pratiquement comparables si on change les échelles temporelles. Le cycle de vie est voisin de  $6j$  à  $8j$  pour le train d'onde barocline d'échelle synoptique étudié par Pearce, il est voisin de  $1j$  à  $1.5j$  pour cette analyse d'une dépression secondaire.

On observe aussi, avec un retard beaucoup moins grand pour cette dépression secondaire que pour les ondes synoptiques étudiées par Pearce ( $2h$  contre  $2j$  !), des valeurs négatives de la conversion  $C(K_Z, K_E)$ . Il s'agit d'une stabilisation barotrope de l'écoulement avec une tendance à la décroissance des perturbations ( $K_E$ ) au profit des mouvements à symétrie zonale ( $K_Z$ ). Pour la dépression secondaire, les valeurs négatives de  $C(K_Z, K_E)$  sont plus fortes en valeurs absolues que les valeurs positives de  $C(A_E, K_E)$ , ceci pendant toute la durée de présence du phénomène dans le domaine d'étude.

Peut-on en conclure que le mécanisme de stabilisation barotrope est dominant au cours du développement de la dépression? On a vu en fait que les mécanismes qui contrôlent le bilan de  $K_E$  ne sont pas explicables à partir de ces seuls termes de conversion  $C(K_Z, K_E)$  et  $C(A_E, K_E)$ . On observe au contraire, pour les bilans de  $A_S$ ,  $K_S$  et  $K_E$ , des contributions très importantes dues à différents flux aux frontières :  $-B(A_{SB})$  pour  $A_S$ ,  $-B(K_{SB})$  pour  $K_S$  et  $-B(K_E)$  pour  $K_E$ .

C'est la plus grande différence avec les approches énergétiques qui portent sur des domaines fermés ou globaux. Les flux sont importants dans cette étude sur domaine limités aux frontières ouvertes, ils deviennent même prépondérants pour les bilans de  $A_S$ ,  $K_S$

et  $K_E$ .

On arrive au résultat paradoxal suivant qui indique que les signaux qui traduisent des activités baroclines puis barotropes dans le domaine sont manifestes et sont en phase avec la présence de la dépression secondaire, mais qu'ils sont souvent négligeables devant des termes de flux au frontières.

A-t-on alors le droit d'interpréter ces conversions, de type barocline et barotrope, comme il est d'usage de le faire? Il faut sans doute répondre, au moins partiellement, par l'affirmative. En effet, même si ces conversions ne sont pas les seules à influencer sur les bilans des réservoirs, elles correspondent physiquement à des flux de quantité de mouvement ou à des flux d'enthalpie dont l'influence météorologique est bien réelle afin de créer ou de réduire les contrastes spatiaux de quantité de mouvement ou de température.

Il faudrait vérifier, en agrandissant progressivement le domaine d'étude, que les termes d'advection deviennent de moins en moins importants et que, dans le même temps, les termes de conversion ne sont pas notablement modifiés. Il est probable que les flux d'enthalpie sont en ce sens plus stables que les flux de quantité de mouvement, ces derniers devant être plus sensibles à des calculs réalisés sur des domaines limités.

Il suffit de se reporter aux équations (88) et (92) par exemple pour se rendre compte que la conversion dite barotrope  $C(K_Z, K_E)$  qui est donnée par (92) dépend principalement de  $\overline{v_\lambda v_\lambda \partial_y(v^\lambda)}$  d'après les résultats de la section (4.5.3). Il est difficile de deviner le signe de cette quantité d'après la figure (25). Le terme de dérivée sud-nord de la moyenne zonale de la composante  $v$ , c'est à dire  $\partial_y(v^\lambda)$ , est en particulier très sensible au positionnement du domaine d'étude. Il est en tout cas surprenant que les deux cartes de vent des deux prévisions d'Arpege puissent donner des valeurs aussi différentes pour  $C(K_Z, K_E)$ .

Il est à l'inverse plus simple de deviner le signe de la conversion  $C(A_E, K_E)$  qui est donnée par (88) et qui ne dépend que de la corrélation entre les mouvements verticaux et la température :  $\overline{\omega_\lambda T_\lambda}$ . Cette corrélation est forte pour la structure barocline puisque la traîne de nord-ouest est associée à une zone de subsidence et que le flux chaud et humide de sud-ouest est en phase avec une zone d'ascendance.

Ainsi, d'après les figures (45) et (46), les valeurs toujours positives de  $C(K_Z, K_E)$  obtenues avec la version à maille uniforme d'Arpege en T79 se traduisent par une croissance régulière du réservoir  $K_E$ . De même, les valeurs fortement négatives obtenues avec la version en T330 sont apparemment cohérentes avec l'arrêt de l'augmentation de ce même réservoir  $K_E$  au delà du 28 à 6h. On a pourtant montré précédemment que ces conversions sont petites par rapport aux termes d'advection. On a également précisé qu'il ne fallait sans doute pas chercher à interpréter la

conversion dite barotrope  $C(K_Z, K_E)$  avec une aussi grande confiance, pour des domaines limités, que pour les autres termes de conversion.

Doit-on alors imaginer que le domaine d'étude choisi est trop petit et donne trop d'importance aux phénomènes advectifs ? Ce n'est probablement pas le cas pour tous les termes puisque, au moins dans les premières heures du développement de la dépression, celle-ci se trouve pour sa plus grande partie incluse dans le domaine (voir la figure (22) entre le 27 à 18 h et le 28 à 6 h).

Ces réflexions incitent à définir une attitude raisonnable qui consiste à interpréter les termes de conversion comme de véritables traceurs de l'activité des dépressions synoptiques ou sous-synoptiques.

Dans les applications à des domaines limités aux frontières ouvertes, des termes de bord importants apparaissent qui, même si ces derniers dominent les autres, n'invalident pas les notions physiques sous-jacentes aux termes de conversion. Ces propriétés physiques indiquent que les conversions sont positives si les flux sont à contre-gradient. Ils tendent alors à réduire les contrastes de température, de géopotentiel ou de vent.

Si on fait confiance à l'interprétation des termes de conversion, on peut par exemple émettre l'hypothèse que le fait que la dépression reste assez modérée (le creusement maximal ne dépasse pas 996 hPa) est peut être dû aux valeurs très négatives de  $C(K_Z, K_E)$  pour la version à maille variable d'Arpege en T330. A l'inverse, les valeurs de  $C(A_E, K_E)$  ne sont vraiment positives que pour cette version en T330, ce qui est cohérent avec l'observation de la croissance initiale beaucoup moins forte du réservoir  $K_E$  dans le cas de la version en T79.

Il est d'ailleurs envisageable de définir une quantité représentative de l'activité barocline dans le domaine, ce peut être la somme des trois conversions favorables aux développements baroclines :  $C(A_S, A_E) + C(A_Z, A_E) + C(A_E, K_E) = \mathcal{B}$ . On remarquera que ces trois conversions interviennent dans le bilan du réservoir  $A_E$  avec des signes différents (+, + et - respectivement).

On a tracé sur la figure (47) les évolutions de cette quantité  $\mathcal{B}$ , les évolutions de la tendance du réservoir  $K_E$  ainsi que celles de l'ensemble des termes de conversions du cycle (82).

Il semble que cette quantité  $\mathcal{B}$  soit assez bien représentative de la présence de la dépression secondaire dans le domaine d'étude, au moins pour cet exemple. Il faudrait bien sûr confronter cette quantité – ou d'autres – avec l'étude journalière des situations météorologiques, ceci sur une durée assez longue et à partir des fichiers d'analyse et de prévision avec un échantillonnage de 6 h. On pourrait imaginer un pavage régulier couvrant l'Europe occidentale et la partie ouest de l'Atlantique avec des boîtes horizontales de 20 dg de largeur en longitude et de 10 dg de largeur en latitude.

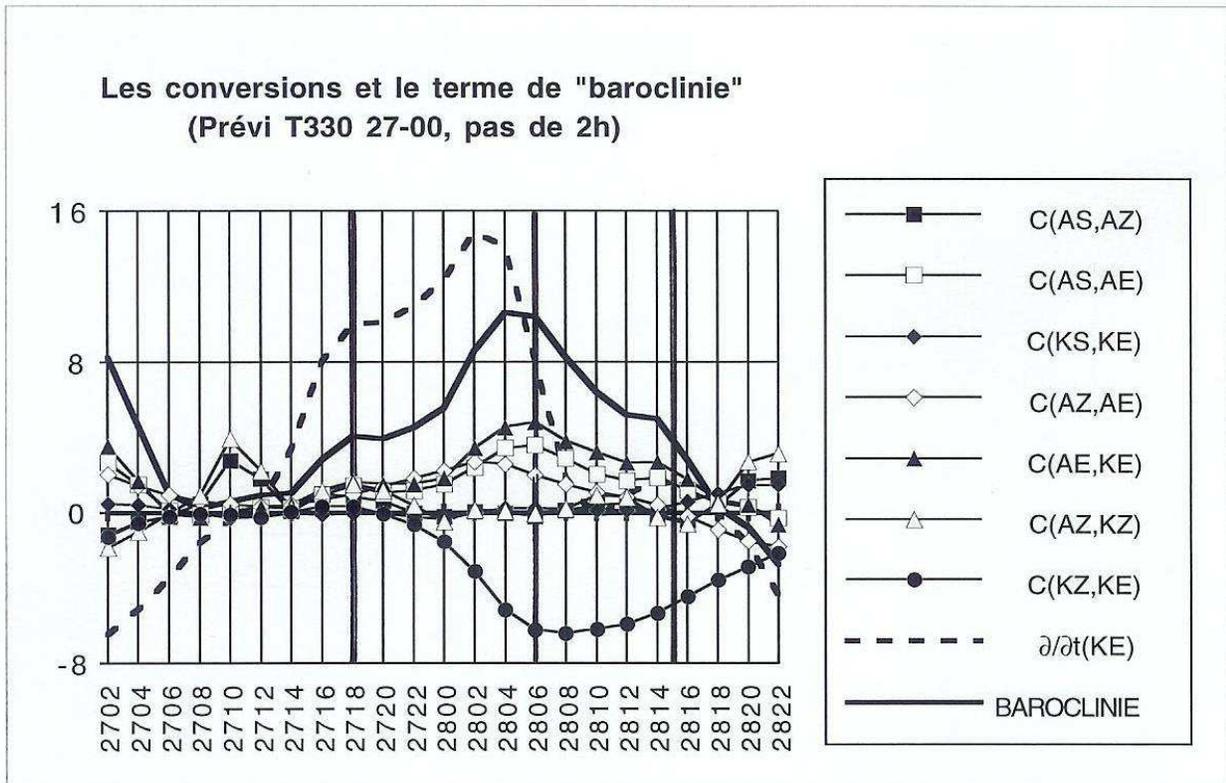


FIG. 47 – Une tentative de définition d'un "traceur d'activité barocline" pour la prévision du 27 à 0h de la version à maille variable du modèle Arpege (T330). Le traceur est la somme  $\mathcal{B} = C(A_S, A_E) + C(A_Z, A_E) + C(A_E, K_E)$  (en trait plein renforcé). Le trait pointillé renforcé est la tendance du réservoir  $K_E$ . On a reporté autrement l'ensemble des autres termes de conversion.

L'attitude raisonnable précédente revient à maintenir l'interprétation donnée par Lorenz et Pearce aux termes de conversion, et ceci même pour les applications à des domaines limités et ouverts. Pour que cela soit possible, il faut peut-être supposer que la présence de "flux aux frontières" importants puisse être une conséquence des évolutions internes au domaine, et non la cause ? Ou alors supposer que la définition qui a été choisie pour ces flux ne soit pas assez précise, ou qu'elle soit inexacte ?

En fait seules les évolutions des réservoirs qui sont représentées ici par les dérivées eulériennes  $\partial(\dots)/\partial t$  ont une signification physique assez claire. Ce n'est pas le cas pour les termes de bord qui sont notés  $-B(\dots)$  et qui représentent l'intégrale sur le domaine de la convergence du flux "advecté" par le mouvement  $(u, v, \omega)$ . Des termes comme  $-B(K_{SB})$  ou même simplement  $-B(K_E)$  sont mathématiquement nécessaires pour équilibrer les bilans, mais il n'est pas très logique de parler d'advection par le vecteur  $(u, v, \omega)$  de quantités telles que  $k_{c(SB)}$  ou  $k_E$  qui ne possèdent pas de signification physique locale.

Le même problème se pose pour l'interprétation physique de la somme de la dérivée eulérienne et du terme d'advection  $\partial(K_E)/\partial t + B(K_E)$  qui représente, d'après (55), l'intégrale sur le domaine d'étude de la "dérivée totale de  $k_E$ ". Cette notion de dérivée totale de  $k_E$  n'a pas de sens physique local et, bien que les sommes  $\partial(\dots)/\partial t + B(\dots)$  aient été reportées sur plusieurs des graphiques des sections (4.5.4) et (4.5.5), l'analyse de leurs évolutions n'a pas été entreprise.

Ces flux aux frontières et ces conversions ne sont pourtant pas des termes nouveaux puisque la plupart d'entre eux ont déjà été employés dans les études antérieures de Muench (1965), Brennan et Vincent (1980) et Michaelides (1987). Mais Plumb (1983) a montré que les définitions usuelles des termes de conversion et des flux ne sont pas rigoureuses et qu'elle conduisent parfois à des incohérences lorsque l'on confronte les comportements énergétiques calculés avec ceux observés ou ceux prévus par des modèles conceptuels simples.

Plus précisément le problème vient de la prise en compte, dans les moyennes isobares sur un domaine limité, d'une partie de la structure perturbée de l'écoulement. Si on prend l'exemple du flux  $\overline{\omega T} = \overline{\omega} \overline{T} + \overline{\omega' T'}$ , la partie  $\overline{\omega} \overline{T}$  qui est généralement interprétée comme le flux vertical de  $T$  dû aux mouvements moyens est en réalité partiellement influencée par les flux dus aux perturbations. Plumb a construit un nouveau cycle énergétique en utilisant les "moyennes eulériennes transformées" de Andrews et McIntyre (1976). Il s'agit d'appliquer des corrections aux valeurs moyennes des composantes du vent  $(\overline{u}, \overline{v}, \overline{\omega})$  afin de se rapprocher des valeurs que donneraient une vision lagrangienne de l'écoulement.

Mais avant même d'appliquer ces corrections, Plumb a choisit une formulation des équations du bilan qui est différente de la forme (54) de la section (2.4.2). Il obtient deux formulations distinctes, l'une qui s'applique aux valeurs moyennes des énergies (par exemple  $\overline{a_s}$  qui dépend de  $\overline{T}$ ), l'autre

qui s'applique aux termes de perturbation (par exemple  $\overline{a_B}$  qui dépend de  $\overline{(T')^2}$ ). Si l'état de base est purement zonal  $(\overline{u}, 0, 0)$ , les équations de bilan deviendraient d'après Plumb :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \overline{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) (\overline{a_S}) = \sum_i C_i + \overline{g_S}, \quad (175)$$

$$\frac{\partial \overline{a_B}}{\partial t} = \sum_j C_j + \overline{g_B}. \quad (176)$$

Le réservoir  $K_E$  obéirait à la seconde équation de bilan (176) et le problème du flux important pour  $-B(K_E)$  serait reporté avec cette formulation dans de nouveaux termes de conversion  $C_j$  en liaison avec d'autres formes d'énergie. La croissance du réservoir  $K_E$  pour le domaine limité de cette étude apparaîtrait alors sans doute plus logique puisqu'elle serait reliée à une autre forme d'énergie par un terme de conversion.

Toutes ces modifications ne pourraient être apportées qu'au prix de profonds changements, tant dans la formulation mathématique que dans l'interprétation physique des termes et des résultats. Il a semblé plus pertinent pour cette thèse de rester fidèle dans un premier temps aux approches antérieures classiques de Lorenz et de Pearce, dans la mesure où il fallait déjà tester les nouveautés que sont : (i) les nouveaux réservoirs issus de la fonction enthalpie utilisable ; (ii) l'application au cas d'une cyclogénèse secondaire sur un domaine limité.

Un développement ultérieur de la thèse portera certainement sur la rationalisation de la démarche avec, si cela est possible, la prise en compte des remarques de Plumb. L'avantage qui est déjà acquis sur pratiquement toutes les études précédentes réside dans l'absence d'approximation dans la définition des réservoirs et dans le calcul des cycles. L'autre avantage acquis est la séparation du cycle interne de type Lorenz du chemin externe principal qui est la source principale d'erreurs de calcul dans d'autres études.

## 5 L'EXEGIE HUMIDE DE L'ATMOSPHERE.

Toute la démarche exposée jusque là dans cette thèse a reposé sur l'approximation de l'atmosphère "sèche". Les particules fluides sont supposées être composées de gaz parfaits et inertes chimiquement (azote, oxygène, argon et dioxyde de carbone). L'eau présente dans l'atmosphère n'est pas intervenu directement, sous aucune de ses trois phases (vapeur, liquide ou solide).

Les processus de changement de phase ou d'interaction avec les rayonnements visibles et infra-rouge sont pourtant d'une extrême importance pour toute la gamme des mouvements atmosphériques. C'est le cas à grande comme à petite échelle (des perturbations synoptiques aux brouillards locaux), l'influence s'étalant de la surface jusqu'à la stratosphère (les différents systèmes nuageux stratiformes ou convectifs, y compris l'effet de serre).

Les énergies échangées lors de ces mécanismes physiques de changements d'état sont en effets très importants. Une évaluation numérique simple le montre si on compare d'une part l'élévation de la température de  $1 K$  pour une parcelle d'air humide de  $1 kg$  contenant  $1 g/kg$  de vapeur d'eau, d'autre part le changement d'état de  $1 g$  de cette vapeur d'eau en eau liquide. Comme  $c_p \approx 10^3 J kg^{-1} K^{-1}$  et  $L_v \approx 2.5 \cdot 10^6 J kg^{-1}$ , les variations d'énergie associées sont respectivement de  $1000 J$  et de  $2500 J$ . Ainsi, les changements d'état induisent des effets comparables ou même plus importants que ceux, purement thermiques, qui ont été étudiés jusque là avec l'approximation de l'atmosphère "sèche".

En fait, une partie de ces effets sont pris en compte dans l'approche "sèche" puisque les équations (23) ou (28) contiennent un terme "source" ( $\dot{q}$ ) qui regroupe les effets de chauffage dus aux changements d'état et aux interactions avec le rayonnement. Mais cette vision n'est pas complètement satisfaisante pour l'esprit. Il serait préférable de considérer dans l'ensemble des équations qu'une parcelle fluide est un mélange d'une composante d'air sec et de proportions variables des trois phases de l'eau (vapeur, liquide et glace), le terme source  $\dot{q}$  ne prendrait plus en compte les processus de changements de phase qui deviendraient implicites à travers les évolutions de l'enthalpie de la parcelle.

Est-ce à dire que l'ensemble des résultats concernant les notions d'énergie ou d'enthalpie utilisables, tant en météorologie qu'en thermodynamique, sont inexacts pour le cas réaliste d'une atmosphère humide? Ce n'est sûrement pas le cas. D'ailleurs, la plupart des auteurs ont tenté de généraliser leur version sèche de la théorie en raisonnant à partir de parcelle humide d'atmosphère, ces généralisations humides étant le plus souvent basées sur la même démarche théorique que celle introduite pour le cas sec.

Lorenz (1978, 1979) a obtenu une généralisation humide de l'approche de 1955 qui n'a pas

débouchée sur une formulation analytique simple, la méthode de calcul étant essentiellement numérique. Lorenz déplore cette absence de formulation théorique facilement exprimable à partir des fonctions énergie interne, enthalpie ou entropie de l’atmosphère. On mentionnera tout de même l’application de Randall et Wang (1992) qui ont utilisé les résultats humides de Lorenz pour définir une énergie potentielle disponible convective généralisée (*GCAPÉ*).

Livesey et Dutton (1976) ont également généralisé l’approche de Dutton (1973) au cas d’une atmosphère humide. L’énergie entropique statique humide  $y$  est définie non seulement pour le cas de l’atmosphère, mais plus largement pour l’ensemble des fluides géophysiques en incluant le cas des solutions simples (comme l’eau de mer où les gradients de salinité sont des sources d’énergie utilisable). On a vu à la fin de la section (3.4) que l’énergie entropique statique sèche  $T_0 \Sigma_{(1)}$  est égale à l’enthalpie utilisable  $A_h$  si on intègre sur l’ensemble de l’atmosphère et si on suppose que l’atmosphère est en équilibre hydrostatique. De même, la version humide de Livesey et Dutton correspond en fait aux résultats obtenus en thermodynamique par Evans (1969, 1980) et Karlsson (1990), entre autres, qui seront décrits ci-après.

Les articles de McHall (1990b et 1991) sont consacrés à l’application du concept d’énergie potentielle utilisable maximale  $\Lambda_{max}$  introduit dans McHall (1990a) au cas de profils verticaux d’atmosphère humide. Comme pour le cas sec (voir la section 3.7), la version humide dépend de deux constantes  $p_*$  et  $T_*$  qui sont déterminées numériquement. La formulation finale n’est donc pas très simple d’utilisation pour les études théoriques, elle ne pallie donc pas les insuffisances mentionnées par Lorenz.

On voit que les différentes approches météorologiques sont, comme pour le cas sec, assez éloignées ou déconnectées des travaux réalisés en thermodynamique fondamentale.

On peut pourtant citer l’étude de Szargut et Styrylska (1969) où est proposée une théorie de l’exergie de l’air humide, ou celles de Evans (1969, 1980) qui a inventé le nom *essergie* pour désigner l’exergie générale des systèmes chimiquement réactifs.

L’étude plus récente de Karlsson (1990) est à la frontière des applications météorologiques et des principes généraux de la physique statistique. Comme Evans, Karlsson a utilisé comme point de départ la notion de ”fonction de Kullback”. Si un macro-système à la probabilité  $p_j$  d’occuper l’état  $j$ , l’entropie d’information vaut  $-\sum_j p_j \log_2(p_j)$ . Le gain d’information associé au remplacement d’une distribution  $p_j^0$  (correspondant à un état d’équilibre du système) par une distribution générale  $p_j$  est alors égal à la fonction de Kullback qui vaut :  $\mathcal{K} = -\sum_j p_j \log_2(p_j^0/p_j)$ . Karlsson définit ensuite l’exergie spécifique de l’atmosphère par  $b = k_B T_0 \mathcal{K}$  où  $k_B$  est la constante de Boltzmann et où  $T_0$  est la température constante de la distribution d’équilibre  $p_j^0$ .

La démarche est a priori complètement différente de celles exposées jusqu’à présent. Les résultats

sont pourtant très proches de ceux décrits par Livesey et Dutton puisque la fonction exergie statique spécifique de Karlsson vaut, comme pour ce dernier et comme pour Evans :  $b_s = [e_i - (e_i)_0] + p_0 \sum_k [\nu_k - (\nu_0)_k] - T_0 [s - s_0]$ . Les notations sont classiques, les volumes spécifiques valant  $\nu_k = 1/\rho_k$  pour chaque constituant  $k$  (air sec + les trois phases de l'eau) et l'indice "0" représentant l'état d'équilibre isotherme de référence. Les valeurs spécifiques sont obtenues par une sommation sur les grandeurs partielles  $(e_i)_k$  et  $(s)_k$  qui se rapportent à chaque constituant  $k$ . On a par exemple  $s = \sum_k m_k s_k$ , où  $m_k$  est la concentration du constituant  $k$ .

Les liens avec les autres approches sont encore plus clairs si on calcule cette exergie statique spécifique en termes de température et de densité. On trouve la même formulation que pour l'équation (145) de la section (3.4) :  $b_s = c_v T_0 \mathcal{F}(T/T_0 - 1) + \sum_k R_k T_0 \mathcal{F}[(\rho_0)_k/\rho_k - 1]$ .

Comme pour les autres contributions météorologiques, il a été décidé de généraliser l'approche défendue dans cette thèse de l'enthalpie utilisable au cas plus réaliste de l'atmosphère humide.

On trouvera dans l'annexe A une copie de l'article de Marquet (1993) qui a été précédé par la communication de Marquet (1990b) aux ateliers de modélisation du C.N.R.M. à Toulouse. La généralisation exposée dans cet article repose sur la notion de variation d'entropie totale qui est inspirée de Gibbs (1873) et qui a été exposée dans les sections (1.2.2) et (1.2.5) de cette thèse.

Il a été décidé de reprendre le contenu de l'article de Marquet (1993) car peu de développement de la version humide ont été réalisés depuis sa parution. Ce n'est pas le cas pour la version sèche puisque l'article de Marquet (1991) ne contenait pas le cycle isobare donné par (82) qui est l'analogue des cycles de Lorenz et de Pearce. L'application numérique de la section (4) de cette thèse concernant ce cycle d'ordre 2 est, elle aussi, nouvelle. Ce sont ces développements récents qui ont motivé la réécriture complète de la version sèche.

Comme dans l'article de Marquet (1991) concernant la fonction enthalpie utilisable sèche spécifique  $a_h$ , les résultats principaux de la version humide spécifique  $a_m$  sont les suivants.

- On obtient une formulation mathématique simple pour  $a_m$  qui relie les fonctions entropies, enthalpies et potentiels chimiques des différents constituants.
- La fonction  $a_m + e_G + e_K$  obéit à une loi d'évolution locale de Bernoulli.
- Les propriétés globales vérifiées par  $A_m + E_K$  généralisent celles vérifiées par  $A_h + E_K$ .
- Il est possible, comme pour le cas sec, de définir des composantes  $a_T$  et  $a_p$ , avec l'apparition d'une composante propre aux phases condensées  $a_l$ . On a  $a_m = a_T + a_p + a_l$ .
- La composante  $a_T$  est là aussi quadratique du fait de la présence de la fonction  $\mathcal{F}(T/T_r - 1)$ .

Les calculs thermodynamiques ont été développés dans cet article de Marquet (1993) en suivant l'approche générale de De Groot et Masur (1962) et en s'inspirant de l'étude de Hauf et Höller

(1987). Ces résultats prennent en compte des particules fluides formées d'air sec, de vapeur d'eau, d'eau liquide et de glace.

Un des nouveaux résultats obtenus avec l'approche humide est la formulation de  $a_m$  à l'aide d'une température potentielle qui est notée  $\theta^*$ . Elle est assez proche de la température entropique  $\theta_S$  de Hauf et Höller (1987), avec toutefois l'avantage d'une formulation qui est symétrique entre les phases liquide et solide. C'était le principal problème posé par la température entropique qui, elle, était dissymétrique.

On peut signaler que cette température potentielle  $\theta^*$  a été utilisée par J. G. Geleyn pour réaliser certains calculs dans les modules physiques du modèle Arpege. La symétrie a permis de traiter de manière homogène le fait que les précipitations peuvent être liquides ou solides dans ce modèle.

Une application numérique sommaire est présentée dans l'article de Marquet (1993). Elle consiste à évaluer les différentes composantes de  $a_m$  pour la partie basse d'un profil caractéristique d'un cumulus. Il est apparu que les termes correctifs dus à la présence de la vapeur d'eau et de gouttelettes nuageuses suspendues se révèlent importants en comparaison des autres termes énergétiques, y compris devant certains des termes déjà introduits pour la théorie sèche.

## 6 CONCLUSION.

Le but principal de ce mémoire est de démontrer l'importance de la notion d'enthalpie utilisable pour les études énergétiques de l'atmosphère.

On a indiqué dans le premier chapitre que c'est la notion d'énergie utilisable qui a été découverte en premier par Carnot au dix-neuvième siècle sous le nom de "puissance motrice". Cette notion est donc plus intuitive que celles, plus contemporaines, de température absolue, d'énergie interne, d'entropie ou d'enthalpie. La partie dite "utilisable" de l'énergie d'un système thermodynamique représente le travail maximal que ce système peut fournir au monde extérieur, d'où le nom "exergie" introduit par Rant qui signifie "travail extractible". L'exergie est différente de zéro en présence d'hétérogénéités, par exemple de température, de pression ou de densité. L'augmentation ou la diminution de l'exergie sont provoquées par l'accentuation ou l'atténuation des contrastes spatiaux des différentes variables thermodynamiques du système considéré.

Les concepts d'énergie et d'enthalpie utilisables ont été ensuite formalisés au siècle dernier par des physiciens tels que Gibbs, Maxwell ou Lord Kelvin. Le développement et l'optimisation des machines à vapeur ont en effet incité les thermodynamiciens à donner des règles pratiques pour calculer l'exergie d'un système en partant des fonctions température absolue, entropie, énergie interne et enthalpie.

Ces notions d'énergie et d'enthalpie utilisables ont été redécouvertes tout au long du vingtième siècle, aussi bien en thermodynamique que dans le domaine de la météorologie. Les études météorologiques de Margules (1903) et de Lorenz (1955) n'ont pas mentionné les liens qui existent avec les approches thermodynamiques fondamentales qui les ont précédées. C'est Dutton qui a repris les travaux de Gibbs, en 1973, pour obtenir pour la première fois une formulation qui est comparable à celles employées par ailleurs en thermodynamique. Mais l'impact très important de l'article de Lorenz, ainsi que la formulation atypique utilisée par Dutton, ne semble pas avoir permis aux résultats de ce dernier de trouver un vaste champ d'application en météorologie. De même, les recherches sur l'énergétique de l'atmosphère ont fait peu d'usage des résultats obtenus par Pearce en 1978 qui constituent, pourtant, de bonnes approximations de ceux découverts en thermodynamique.

Les premières théories météorologiques de l'exergie (Dutton et Pearce) possédaient le défaut de ne pas pouvoir être appliquées à des domaines limités aux frontières ouvertes. C'est la volonté de définir une telle fonction "locale" de l'exergie qui a conduit à la redécouverte, au cours de cette thèse, des propriétés de la fonction enthalpie utilisable  $a_h$  décrite au deuxième chapitre de ce mémoire. Une étude bibliographique a rapidement indiqué que cette fonction n'était pas nouvelle

puisque'il s'agit très exactement de celle introduite au siècle dernier par plusieurs thermodynamiciens pour connaître le travail maximal extractible d'une machine thermique traversée par un fluide. Il a donc été décidé de considérer la fonction  $a_h$  comme une véritable fonction thermodynamique, à l'instar de l'énergie interne ou de l'entropie. Mais le caractère novateur de cette approche par rapport à celle plus connue de Lorenz a nécessité, paradoxalement, une justification très soignée des propriétés locales et globales de cette fonction  $a_h$ . Il ne s'agit pourtant que de l'application logique au cas particulier de l'atmosphère de résultats généraux découverts en thermodynamique. Ainsi, l'importance des chauffages différentiels est directement liée aux idées originelles de Carnot, le "facteur d'efficacité"  $\eta_T = 1 - T_r / T$  étant d'ailleurs usuellement appelé un "facteur de Carnot".

La nouveauté introduite dans ce mémoire vient de la définition d'une quantité spécifique, et donc locale, de l'enthalpie utilisable. En fait, il est apparu que Pichler avait déjà étudié en 1977 la forme spécifique d'une des formes de l'énergie entropique de Dutton. On peut aussi trouver une autre définition locale de l'exergie de l'atmosphère dans la thèse de Karlsson (1990). L'approche défendue au deuxième chapitre participe donc de cette volonté de posséder une formulation locale applicable, après intégration, à une grande variété de phénomènes allant des études des systèmes de brise à celles de la circulation générale de l'atmosphère, en passant par celles des perturbations baroclines.

Il n'y a pourtant pas de vraie opposition entre les différentes démarches météorologiques. On a en effet montré dans le troisième chapitre que, pour le cas d'une atmosphère hydrostatique, la pseudo-énergie de Shepherd (1993) correspondait à une synthèse des résultats de Lorenz, Dutton, Pearce et de ceux exposés dans cette thèse. Chacun de ces résultats représente une pseudo-énergie particulière de l'atmosphère qui est obtenue en spécifiant un état thermodynamique de référence approprié.

Le véritable but de toute étude énergétique d'un fluide en mouvement est la compréhension des mécanismes de conversion d'énergie qui se produisent en son sein. Pour cette application au cas de l'atmosphère, la recherche préalable d'une expression mathématique de la fonction exergie qui devait être aussi simple et aussi rigoureuse que possible a cependant été préférée à une application numérique trop précoce. Les propriétés mathématiques et les interprétations physiques des bilans énergétiques associés à cette fonction locale devaient découler naturellement de sa structure mathématique. La fonction enthalpie utilisable répond effectivement à ces exigences et à ces attentes.

Les propriétés mathématiques et physiques de l'enthalpie utilisable sèche spécifique  $a_h$  ont été décrites dans le deuxième chapitre. Pour le cas d'un domaine limité où on privilégie la structure moyenne zonale de l'écoulement, on a pu définir le cycle isobare d'enthalpie utilisable d'ordre deux

donné par (82). Ce cycle est construit à partir d'une séparation des réservoirs énergétiques en six composantes :  $\overline{a_S}$ ,  $\overline{a_Z}$  et  $\overline{a_E}$  d'une part,  $\overline{k_S}$ ,  $\overline{k_Z}$  et  $\overline{k_E}$  d'autre part. Les composantes  $\overline{a_E}$  et  $\overline{k_E}$  sont comparables à celles de Lorenz et de Pearce. De même, les deux composantes  $\overline{a_S}$  et  $\overline{a_Z}$  sont pratiquement identiques à celles de Pearce. Les deux composantes  $\overline{k_S}$  et  $\overline{k_Z}$  sont à l'inverse différentes de celles de Lorenz et de Pearce.

Cette innovation à été dictée par la recherche d'une symétrie entre les séparations de l'enthalpie utilisable et celles de l'énergie cinétique. L'avantage qui découle de ce choix est la séparation en un chemin principal de l'énergie ( $\overline{a_p} \leftrightarrow \overline{a_S} \leftrightarrow \overline{k_S} \leftrightarrow \overline{\Phi}$ ) et en un cycle interne qui correspond au cycle de Lorenz ( $\overline{a_Z} \leftrightarrow \overline{a_E} \leftrightarrow \overline{k_E} \leftrightarrow \overline{k_Z} \leftrightarrow \overline{a_Z}$ ). C'est sur le chemin principal que portent les "grands" termes de conversion qui sont liés aux mouvements verticaux moyens  $\overline{w}$ . A l'inverse, aucun des termes du cycle interne ne dépend de  $\overline{w}$ . La version du cycle de Lorenz qui est proposée dans ce mémoire sur la figure (11) est ainsi préservée d'une présence simultanée, sur un même réservoir, de termes d'ordres de grandeur trop différents.

On retrouve en fait l'origine des démarches météorologiques de Margules et de Lorenz. La grande différence d'ordre de grandeur entre l'enthalpie  $H$  et l'énergie cinétique  $E_k$  de l'atmosphère indique que ce n'est pas l'enthalpie qui est pertinente pour étudier les conversions avec  $E_k$ . Même si l'enthalpie utilisable  $A_h$  est plus proche de  $E_k$  en ordre de grandeur, elle est tout de même encore importante et on a pour une surface isobare  $\overline{a_S} \gg \overline{a_Z} \approx \overline{a_E}$ . Il fallait donc que ce terme  $\overline{a_S}$  soit contrebalancé par un autre "grand" terme de (82). Il s'agit de  $\overline{k_S}$  et les valeurs des quatre réservoirs  $\overline{a_Z}$ ,  $\overline{a_E}$ ,  $\overline{k_Z}$  et  $\overline{k_E}$  sont effectivement comparables et plus faibles, ce qui justifie l'introduction de  $\overline{k_S}$ . Et d'ailleurs, pour le cas ultime où le domaine horizontal d'étude devient très petit au point où les valeurs de  $u$ ,  $v$  et  $T$  sont pratiquement constantes sur le domaine, le cycle de Lorenz s'annule et seul reste le chemin principal de l'énergie. Il est donc logique d'isoler le réservoir  $\overline{k_S}$  – l'énergie cinétique de la moyenne isobare du vent – si on veut que le cycle (82) puisse être appliqué à l'ensemble des phénomènes météorologiques qui vont de l'échelle globale à celle du plus petit domaine compatible avec l'hypothèse hydrostatique.

Il faut insister, à l'occasion de cette synthèse des résultats, sur le fait qu'aucune linéarisation n'a été effectuée. Certes, plusieurs états de référence ont été introduits pour obtenir le cycle (82). Il s'agit du profil constant de température  $T_r$  pour l'ordre 0, des profils moyens  $\overline{T}(p)$ ,  $\overline{u}(p)$  et  $\overline{v}(p)$  au premier ordre, des moyennes zonales  $T^\lambda(\varphi, p)$ ,  $u^\lambda(\varphi, p)$  et  $v^\lambda(\varphi, p)$  au deuxième ordre. Certes, les grandeurs spécifiques  $T$ ,  $u$  et  $v$  ont ensuite été développées selon des écarts à ces moyennes successives. Mais les formules qui ont permis ces développements sont exactes et aucun terme n'a été négligé au cours des calculs qui conduisent au cycle (82). Les formules sont  $\mathcal{F}(X_1 + X_2 + X_1 X_2) = \mathcal{F}(X_1) + \mathcal{F}(X_2) + X_1 X_2$  pour les composantes de l'enthalpie utilisable et  $(x_1 + x_2)^2/2 = (x_1)^2/2 + (x_2)^2/2 + x_1 x_2$  pour celles de l'énergie cinétique.

Ces développements reposent sur le caractère quadratique des deux fonctions  $\mathcal{F}(X) = X - \ln(1+X) \approx X^2/2$  et  $x^2/2$ , respectivement pour l'enthalpie utilisable et pour l'énergie cinétique. Le caractère quadratique de l'expression de l'enthalpie utilisable  $a_h$  est fondamental. C'est une des propriétés que doit vérifier la pseudo-énergie de Shepherd dont dérive l'enthalpie utilisable. Si  $a_h$  avait été seulement linéaire en  $T - T_r$  il n'aurait pas été possible de définir d'autres composantes représentant les perturbations par rapport aux moyennes isobares et zonales. L'autre propriété qui est vérifiée par la pseudo-énergie de Shepherd, et donc par  $a_h$ , est le domaine de validité qui s'étend aux valeurs arbitrairement élevées de la perturbation  $T - T_r$ . C'est aussi le cas pour l'approche de Dutton, mais ce n'est pas vrai pour les versions de Lorenz et de Pearce où des approximations sont nécessaires dès le stade de la définition des composantes énergétiques. L'enthalpie utilisable est donc à la fois cohérente localement et exempte d'approximation.

Tous les résultats présentés au deuxième chapitre et cette manière d'introduire la démarche qui conduit à la fonction enthalpie utilisable spécifique n'ont été découverts que récemment. Les premières contributions de Marquet (1990a) et de Pontaud et al. (1990) ne pouvaient donc pas aborder le cycle d'ordre deux qui a été obtenu à l'occasion de la rédaction de ce mémoire, ni partir de la synthèse décrite par Shepherd en 1993.

La tentative réalisée au troisième chapitre d'une description succincte de la plupart des approches météorologiques associées à la notion d'exergie ou d'énergie utilisable répond au besoin de combler le manque d'article météorologique de synthèse sur ce sujet, à l'image de ceux de Haywood (1974) ou de Kestin (1980) en thermodynamique.

Le quatrième chapitre est consacré à une application numérique du cycle énergétique issu de l'enthalpie utilisable et le choix s'est arrêté sur l'étude du comportement des bilans énergétiques pour une dépression secondaire d'échelle sous-synoptique. Le domaine d'étude est limité horizontalement avec des frontières latérales ouvertes, mais les termes des bilans sont intégrés sur la verticale pour cette première application. Une comparaison a été faite entre les comportements de deux versions du système de prévision Arpege avec des résolutions spatiales respectivement voisines de  $170\text{ km}$  et de  $40\text{ km}$  sur le domaine d'intérêt. C'est avec la résolution la plus élevée de  $40\text{ km}$  que les prévisions sont les plus proches de la réalité.

De la synthèse des résultats effectuée à la section (4.6) on retire les enseignements suivants.

La présence, le développement et la sortie de la dépression du domaine d'étude se traduisent par des signaux visibles sur les termes du bilan énergétique. On retrouve principalement un comportement barocline pour les conversions classiques entre les réservoirs :  $(A_S, A_Z) \rightarrow A_E \rightarrow K_E$ .

Mais il apparaît que les évolutions des réservoirs  $A_S$ ,  $K_S$  et  $K_E$  sont dominées par plusieurs termes d’advection d’énergie à travers les frontières. Les conversions baroclines sont petites devant  $-B(A_{SB})$ ,  $-B(K_{SB})$  et  $-B(K_E)$  qui contrôlent les évolutions de  $A_S$ ,  $K_S$  et  $K_E$ , respectivement. Ce résultat constitue une des différences importantes avec les études globales de Lorenz ou de Pearce. Comme les ordres de grandeur des termes de chauffage différentiel et de dissipation qui sont calculés en tant que résidus des bilans sont réalistes, on peut supposer que les autres termes du cycle sont cohérents et que ces grands termes de bord correspondent réellement à des transferts d’énergie à travers les frontières, du moins avec l’interprétation déduite du cycle (82).

Pourtant, même si les termes classiques du chemin barocline de l’énergie ne sont plus prépondérants dans les bilans d’enthalpie utilisable, les termes de conversions sont la traduction de flux d’enthalpie et de quantité de mouvement qui se produisent effectivement au sein du domaine. Ces termes de conversion sont représentatifs de l’intensité de la dépression secondaire.

Ce résultat a été confirmé en comparant à la section (4.5.5) les cycles énergétiques pour les deux prévisions du modèle Arpege. La mauvaise prévision avec la version à 170 km se traduit par des termes de conversion trop faibles, voire même irréalistes pour  $C(K_Z, K_E)$ . La bonne prévision avec la version à 40 km se traduit, elle, par un bon accord entre les bilans prévus et les bilans calculés à partir d’une série d’analyses vérifiantes.

Cette idée de comparer les comportements prévu et analysé des bilans énergétiques correspond au besoin de posséder des outils opérationnels pour apprécier l’aspect dynamique des champs météorologiques. La quantité  $\mathcal{B} = C(A_S, A_E) + C(A_Z, A_E) + C(A_E, K_E)$  introduite à la section (4.6) est un exemple de tels produits dérivés qui pourraient être testés à l’issue de ce travail. Il fallait alors montrer qu’un échantillonnage de 6 h pour les champs analysés et prévus était suffisant pour apprécier la qualité de ces bilans. Cela a été fait à la section (4.5.1).

Certes, ces conversions ne sont pas nouvelles, ce sont pratiquement les mêmes que celles de Lorenz et de Pearce. Mais elles se trouvent ici replacées dans un cadre théorique qui autorise leur application à des études sur domaines limités. De plus, il a été mentionné que la formulation (82) du cycle énergétique pouvait sans doute être améliorée en prenant en compte les remarques de Plumb (1983). Si les grands termes de bord qui sont responsables des variations observées de  $K_E$  pouvaient devenir de nouveaux termes de conversion possédant des interprétations physiques claires, d’autres quantités dérivées telles que  $\mathcal{B}$ , mais incluant ces nouveaux termes, pourraient être imaginées et testées.

Il faudra, bien sûr, entreprendre l’étude de la structure verticale des bilans énergétiques. Cette investigation est possible puisque, d’après la structure du cycle (82), les équations sont définies pour chaque niveau isobare. Il s’agira, si possible, d’apporter des éléments de réponse pour préciser

les importances relatives des différentes couches horizontales sur le développement énergétique des perturbations. On retrouve les préoccupations qui ont motivé, il y a cinq ans, toute cette étude : l'analyse énergétique des éléments verticaux de la mousson africaine.

Il sera sans doute nécessaire, à l'avenir, de réaliser le calcul des cycles énergétiques directement à partir des fichiers du système Arpege, en utilisant probablement des outils dérivés des "Diagnostics par Domaines Horizontaux". Il sera surtout indispensable de confirmer ou d'infirmier les hypothèses qui ont été avancées au quatrième chapitre quant à l'interprétation des résultats. D'autres situations météorologiques, si possible plus dynamiques, possédant un déplacement éventuellement moins rapide, devront être étudiées avant tout essai de confrontation avec des méthodes opérationnelles.

## **A** ANNEXE : Thomson (1853, 1879), Tait (1879).

On présente dans cette annexe A les trois articles du "London, Edinburgh and Dublin PHILOSOPHICAL MAGAZINE and JOURNAL OF SCIENCE" publiés par

- W. Thomson (1853), 'On the restoration of mechanical energy from an unequally heated space'
- P. J. Tait (1879), 'On the dissipation of energy'
- W. Thomson (1879), 'On thermodynamic motivity'.

Il apparaît que les questions qui sont posées et les réponses qui sont données dans ces articles sont très modernes puisque la notion de "thermodynamic motivity" correspond à celle d'exergie.

Dans l'article de Thomson (1853), on remarquera que l'équation (8) à la page (105) correspond à l'équation (3) de ce mémoire, ou encore à l'intégrale  $A_T$  de la composante  $a_T$  de l'enthalpie utilisable qui est définie par (20). Il faut bien sûr reprendre les notations modernes puisque dans l'équation (8) de Thomson l'échelle absolue de température est obtenue si  $\alpha = 0$ . De même l'équivalent mécanique de la chaleur  $J$  doit être égal à 1 avec les unités actuelles. Ce sont ensuite les correspondances  $t \rightarrow T$  et  $T \rightarrow T_0 = T_r$  qui permettent d'affirmer que le résultat obtenu dès 1853 par Thomson coïncide avec celui de la partie  $A_T$  de l'enthalpie utilisable.

On trouve avec l'équation (4) à la page (350) de Thomson (1879) une autre expression pour  $A_T$  sous la forme d'une somme sur le volume du système de l'intégrale entre  $T_r$  et  $T$  de l'expression  $c(1 - T_r/T)$  qui est le produit de la capacité calorifique  $c$  par le facteur de Carnot  $1 - T_r/T$ .

W. Thomson, 1853

Phil Mag., 5, 30, 4<sup>e</sup> series, 102-105.

XVII. *On the Restoration of Mechanical Energy from an unequally heated space.* By Prof. W. THOMSON\*.

WHEN heat is diffused by conduction from one part to another of an unequally heated body, the body is put into such a state that it is *impossible* to derive as much mechanical effect of a non-thermal kind† from it as could have been derived from the body in its given state‡. Hence, if a body be given in an envelope impermeable to heat, with its different parts at different temperatures, a *dissipation* of mechanical energy within it, going on until the temperatures of all its parts become the same, can only be avoided by immediately restoring a portion of its mechanical energy from the state of heat, and equalizing the temperature of all its parts, wholly by the operation of perfect thermo-dynamic engines. Let T be the uniform tempe-

\* Communicated by the Author.

† [Note added Jan. 14, 1853.] Instead of "mechanical effect of a non-thermal kind," I should have said simply *potential energy*, had I at the time of writing this paper learned the use of the admirable terms "potential" and "actual" introduced by Mr. Rankine in his paper "On the Transformation of Energy" (communicated to the Glasgow Philosophical Society at its last meeting, Jan. 5, and published in the present number of the *Philosophical Magazine*), to designate the two kinds of energy which I had previously distinguished by the inconvenient adjectives of "statical" and "dynamical." (See *Proc. Roy. Soc. Edinb.* Feb. 16. 1852; or *Phil. Mag.* Oct. 1852, p. 304.)

‡ Proceedings of the Royal Society of Edinburgh for Feb. 16, 1852, (p. 139), or p. 305 of the last Volume of this Journal. The formulæ given in that paper which have reference to the subject of the present communication, require corrections, which are indicated in "Errata" published in the last Number.

perature to which the body is brought by this process of restoration; let  $t$  be the temperature of the body in its given condition at any point  $xyz$ ; and let  $cdt \cdot dx \, dy \, dz$  be the quantity of heat that an infinitely small element,  $dx \, dy \, dz$ , of the body at this point must part with to go down in temperature from  $t$  to  $t - dt$ . Let us suppose that this quantity of heat enters a perfect thermodynamic engine, of which the hot part is at the temperature  $t$ , and the cold part at the temperature  $T$ . The quantity of work that will be derived from it will be

$$dx \, dy \, dz \, J \cdot cdt \cdot \left(1 - \epsilon^{\frac{-1}{J} \int_T^t \mu dt}\right) \dots \dots \dots (a),$$

where  $\mu$  denotes Carnot's function, and  $J$  the mechanical equivalent of the thermal unit (see Dynamical Theory of Heat, § 25, Trans. Royal Soc. Edinb. 1851, or Phil. Mag. Aug. 1852), and the part of it rejected as waste into the refrigerator at the temperature  $T$  will be

$$dx \, dy \, dz \cdot cdt \cdot \epsilon^{\frac{-1}{J} \int_T^t \mu dt} \dots \dots \dots (b),$$

or

$$\frac{dx \, dy \, dz \cdot cdt \cdot \epsilon^{\frac{-1}{J} \int_0^t \mu dt}}{\epsilon^{\frac{-1}{J} \int_0^T \mu dt}} \dots \dots \dots (c),$$

Hence the whole work obtained by lowering, by means of a perfect thermo-dynamic engine, the temperature of the element  $dx \, dy \, dz$  from  $t$  to  $T$  is

$$dx \, dy \, dz \int_T^t J \cdot cdt \cdot \left(1 - \epsilon^{\frac{-1}{J} \int_T^t \mu dt}\right) \dots \dots \dots (d);$$

and the part of the heat taken from this element, which is rejected into the refrigerator, is

$$\frac{dx \, dy \, dz \int_T^t cdt \cdot \epsilon^{\frac{-1}{J} \int_0^t \mu dt}}{\epsilon^{\frac{-1}{J} \int_0^T \mu dt}},$$

or

$$\frac{dx \, dy \, dz \left\{ \int_0^t cdt \cdot \epsilon^{\frac{-1}{J} \int_0^t \mu dt} - \int_0^T cdt \cdot \epsilon^{\frac{-1}{J} \int_0^t \mu dt} \right\}}{\epsilon^{\frac{-1}{J} \int_0^T \mu dt}} \dots \dots \dots (e).$$

These expressions are of course equally applicable to parts of the body of which the temperatures are lower than  $T$ ; and, without change of form, will express respectively (in virtue of the algebraic signs corresponding to any case in which  $t$  is  $< T$ ), (d) the quantity of work obtained by *raising* the temperature of an element  $dx \, dy \, dz$  from  $t$  to  $T$  by heat drawn from a source at the temperature  $T$  by means of a thermo-dynamic engine, and (e) the

*negative quantity* of heat given to the part of the engine at the temperature T in this process. Now if such a process be completed for every part of the body without either taking or giving heat by communication with other bodies, the whole quantity of heat given to the refrigerators at T by the engines worked from all the parts of the body for which  $t > T$ , must be equal to the whole quantity given by the sources at T to the engines working to raise the temperature of those parts of the body for which  $t < T$ ; or, algebraically, the sum of the quantities of heat given by all the engines to the parts of them at T must be 0, that is, according to (e),

$$\frac{\iiint dx dy dz \left\{ \int_0^t c dt \cdot \epsilon^{\frac{-1}{J} \int_0^t \mu dt} - \int_0^T c dt \cdot \epsilon^{\frac{-1}{J} \int_0^t \mu dt} \right\}}{\epsilon^{\frac{-1}{J} \int_0^T \mu dt}} = 0 \quad (1).$$

From this we deduce

$$\iiint dx dy dz \cdot \int_0^T c dt \cdot \epsilon^{-\frac{1}{J} \int_0^t \mu dt} = \iiint dx dy dz \int_0^t c dt \cdot \epsilon^{\frac{-1}{J} \int_0^t \mu dt} \quad (2),$$

by which the value of T may be found. When T is determined, the whole work obtained in the process may be calculated by adding all the terms given by the expression (d); and thus, if W denote its value, we find

$$W = J \iiint dx dy dz \int_T^t c dt \cdot (1 - \epsilon^{\frac{-1}{J} \int_T^t \mu dt}) \quad (3).$$

The first member of the former of these equations may be put into a simpler form if we take  $\Theta$  to denote the thermal capacity of the whole body at the temperature  $\theta$ , a quantity which must generally be considered as a function of  $\theta$ . Thus, if  $c_\theta dx dy dz$  denote the thermal capacity of the portion  $dx dy dz$  when at the temperature  $\theta$ , we have

$$\iiint c_\theta dx dy dz = \Theta \quad \dots \quad (4);$$

and the equation becomes

$$\int_0^T \Theta d\theta \cdot \epsilon^{\frac{-1}{J} \int_0^\theta \mu dt} = \iiint dx dy dz \int_0^t c dt \cdot \epsilon^{\frac{-1}{J} \int_0^t \mu dt} \quad (5).$$

In order that there may be data enough for solving the problem, the nature of the given body must be specified so that the value of  $c$  for each point  $xyz$  is known, not only for the given initial temperature  $t$  of that point, but for all other temperatures through which we have to suppose it to vary in this investigation; and  $\Theta$  is therefore to be regarded as a known function of  $\theta$ . Hence the value of the integral  $\int_0^\theta \Theta d\theta \cdot \epsilon^{\frac{-1}{J} \int_0^\theta \mu dt}$

may be regarded as a known function of  $\theta$ , and may be tabulated for different values of this variable. The value of  $\theta$ , for which this function is equal to the second member of equation (5), is the required quantity T.

The solution of the problem may be put under a very simple form, if the thermal capacity of each part of the body be independent of the temperature, in the following manner. Let the temperature of the body be measured according to an absolute scale, founded on the values of Carnot's function, and expressed by the following equation,

$$t = \frac{J}{\mu} - \alpha \dots \dots \dots (6),$$

where  $\alpha$  is a constant which might have any value, but ought to have for its value the reciprocal of the coefficient of compressibility of air, in order that the system of measuring temperature here adopted may agree approximately with that of the air-thermometer. Then we have

$$\epsilon^{-\frac{1}{J} \int_0^t \mu dt} = \frac{\alpha}{t + \alpha}, \text{ and } \epsilon^{-\frac{1}{J} \int_0^\theta \mu dt} = \frac{\alpha}{\theta + \alpha};$$

and since, according to the hypothesis that is now made,  $\Theta$  is constant, the first member of equation (5) becomes simply

$\Theta \alpha \log \frac{T + \alpha}{\alpha}$ ; and we have explicitly, for the value of T, the equation

$$T = \alpha \left\{ \epsilon^{\Theta} \frac{\frac{1}{J} \iiint \log \frac{t + \alpha}{\alpha} \cdot c \, dx \, dy \, dz}{\iiint \log(t + \alpha) \cdot c \, dx \, dy \, dz} - 1 \right\} \quad \text{modern:}$$

$t \rightarrow T$   
 $\mu \rightarrow \mu_r$

$(7),$

$$T = \epsilon \frac{\iiint c \, dx \, dy \, dz}{\iiint c \, dx \, dy \, dz} - \alpha;$$

$\alpha \rightarrow 0$   
 $c \rightarrow c_p$

$(8).$

or and equation (3) takes the simpler form,

$$W = J \iiint c \, dx \, dy \, dz \left( t - T - (T + \alpha) \log \frac{t + \alpha}{T + \alpha} \right) \quad \text{modern:}$$

$J = 1$

$(8).$

If the given body be of infinite extent, and if the temperature of all parts of it have a uniform value,  $T$ , with the exception of a certain limited space of finite extent through which there is a given varied distribution of temperature, any of the equations (2), (5), or (7) leads to the result

$$T = T,$$

which might have been foreseen without analysis. In this case, then, equation (3) gives (in terms of a definite integral of which the elements vanish for all points at which  $t$  has the value  $T$ ) the work that may be obtained by bringing the temperature of all the matter to  $T$ ; and the same result is expressed more simply by (8) when the specific heat of all the matter in the space through which the initial distribution of temperature is non-uniform does not vary with the temperature.

1 Acton Square, Salford, Manchester,  
 December 28, 1852.

Phil. Mag. S. 4. Vol. 5. No. 30. Feb. 1853.

LIV. *On the Dissipation of Energy.* By Prof. P. G. TAIT.

To Sir W. Thomson, F.R.S.

(1879)  
344-346

MY DEAR THOMSON,—

I ADDRESS you as one of the Editors of the Philosophical Magazine, but also specially as the first proponent of the doctrine of the Dissipation of Energy. I do so because Prof. Clausius, in the second part of the new edition of his work on Thermodynamics, has challenged your claim to the well-known expression for the amount of heat dissipated in a non-reversible cycle. I think that the time has come for you to speak out on the subject, so as, if possible, to prevent further unnecessary discussions.

I shall endeavour, so far as I can, to keep to matters of scientific importance; but I must introduce the subject by a reference to the comments made by Prof. Clausius upon a somewhat slipshod passage (§ 178) of my little work on 'Thermodynamics.' That passage refers to the integral

$$\int \frac{dq}{t},$$

to which I believe Rankine first called attention, but which is essentially connected with your doctrine.

I cannot altogether complain of Prof. Clausius's comments, because I cannot account for my having called the above integral (in the way in which I have employed it) a *positive* quantity, except by supposing that in the revision of the first proof of my book I had thoughtlessly changed the word "negative" to "positive." This might easily happen from my having used a novel term, "practical value," in a somewhat ambiguous manner, at one place confounding it with "realized value." That the whole section was meant to bear the construction forced on it by Prof. Clausius is, I think, sufficiently disproved by its opening sentence, not to speak of the fact that no one in this country has so interpreted it.

But there is a graver matter involved than any such mere slips of the pen; for Prof. Clausius asserts that the method I employ (and which I certainly obtained from your paper of 1852) is inapplicable to any but reversible cycles. This, I think, is equivalent to denying altogether your claims in the matter. I therefore quote the whole passage, correcting, however, the above-mentioned slip, and slightly extending the latter part to make my meaning perfectly clear.

"§ 178. The real dynamical value of a quantity,  $dq$ , of "heat is  $Jdq$ , whatever be the temperature of the body which

“ contains it. But the extreme practical value is only

$$J \frac{t-t_0}{t} dq$$

“ where  $t$  is the temperature of the body, and  $t_0$  the lowest  
“ available temperature. This value may be written in the  
“ form

$$Jdq - Jt_0 \frac{dq}{t}$$

“ Hence, in any cyclical process whatever, if  $q_1$  be the whole  
“ heat taken in, and  $q_0$  that given out, the practical value is

$$J(q_1 - q_0) - Jt_0 \int \frac{dq}{t}.*$$

“ Now the realized value is

$$J(q_1 - q_0)$$

“ by the first law; and if the cycle be *reversible*, this must be  
“ equal to the extreme practical value. Hence, in this parti-  
“ cular case,

$$\int \frac{dq}{t} = 0.$$

“ But in general this integral has a finite negative value,  
“ because in non-reversible cycles the realized value of the heat  
“ is always less than

$$J(q_1 - q_0) - Jt_0 \int \frac{dq}{t},$$

“ which is the extreme practical value.

“ Hence the amount of heat lost needlessly, *i. e.* rejected in  
“ excess of what is necessarily rejected to the refrigerator for  
producing work, is

$$-t_0 \int \frac{dq}{t}.$$

“ This is Thomson’s expression for the amount of heat *dissipated*  
“ during the cycle (Phil. Mag. and Proc. R. S. E. 1852, ‘On a  
“ Universal Tendency in Nature to Dissipation of Energy’).  
“ It is, of course, an immediate consequence of his important  
“ formula for the work of a perfect engine.

“ [It is very desirable to have a word to express the *availa-*  
“ *bility* for work of the heat in a given magazine; a term for  
“ that possession, the waste of which is called dissipation.]”

As I based the greater part of the last chapter of my work

\* On this formula Prof. Clausius remarks, “Die Unrichtigkeit dieses  
“ Resultates lässt sich leicht aus dem blossen Anblicke der Formel  
“ erkennen”!

on your papers, mainly because they appeared to me to be greatly superior to all others on the subject in the three very important qualities of simplicity, conciseness, and freedom from hypothesis, I am anxious to know whether the above passage meets with your approval.

From Prof. Clausius's comments it appears, as I have already said, that he considers the method I have adopted from you to be one which cannot be applied except to *reversible* cycles, and which, therefore, it is absurd to employ in any argument connected with dissipation of energy.

Prof. Clausius also disputes the correctness of my reference to your paper in the *Philosophical Magazine*, as containing the above expression for the heat dissipated. You ought to be a competent authority on such a question as this.

I do not now reply to the many other remarks of Prof. Clausius, simply because they refer to myself, my motives, and my book, and not to the principles or the history of science. As the matter affects you, however, I may mention that Professor Clausius attributes to me the real authorship of the paper on "Energy" which we jointly wrote for 'Good Words,' and which has been often referred to in the *Philosophical Magazine*.

But the passage in brackets in the extract above indicates a want of proper nomenclature, which would, I think, be well met by the publication of the paper on *Thermodynamic Motivity*, read by you some years ago to the Royal Society of Edinburgh.

38 George Square, Edinburgh,  
March 17th, 1879.

Yours truly,  
P. G. TAIT.

(1879)

Phil. Mag. 7, 44  
5eme series

Note by Sir W. Thomson on the preceding Letter. 346-348

The passage quoted, with amendments, by Professor Tait from his 'Thermodynamics,' seems to me perfectly clear and accurate. Taken in connexion with the sections which preceded it in the original, its meaning was unmistakable; and a careful reader could have found little or no difficulty in making for himself the necessary corrections with which Professor Tait now presents it. It is certainly not confined to reversible cycles; but, on the contrary, it gives an explicit expression for the amount of energy dissipated, or, as I put it, "absolutely and irrecoverably wasted" in operations of an irreversible character. My original article "On a Universal Tendency in Nature to the Dissipation of Mechanical Energy,"

communicated to the Royal Society of Edinburgh in April 1852, and published in the 'Proceedings' of the Society for that date, and republished in the Philosophical Magazine for 1852, second half year, is a sufficient answer to the challenge referred to in the opening sentence of Professor Tait's letter.

I think Professor Tait quite right in referring also to that paper for the formula  $t_0 \int \frac{dq}{t}$ . The whole matter is contained

in the formula  $w\epsilon^{-\frac{1}{J} \int_T^S \mu dt}$ , which is given explicitly in that paper. At the top of the next page in the Philosophical Magazine reprint the following passage occurs:—"If the system

of thermometry adopted be such that  $\mu = \frac{J}{t + \alpha}$ , that is, if we agree to call  $\frac{J}{\mu} - \alpha$  the *temperature* of a body, for which  $\mu$  is

the *value* of Carnot's function ( $\alpha$  and  $J$  being constants), &c.;"

and on the word "adopted" the following footnote is given:

"According to Mayer's 'hypothesis' this system coincides

"with that in which equal differences of temperature are defined

"as those with which the same mass of air under constant

"pressure has equal differences of volume, provided  $J$  be the

"mechanical equivalent of the thermal unit, and  $\frac{1}{\alpha}$  the coeffi-

"cient of expansion of air." Here the true foundation of the

absolute thermodynamic scale now universally adopted was, I

believe, for the first time given. I had previously, in Part III.

of my "Dynamical Theory of Heat," published in the Transactions

of the Royal Society of Edinburgh, and in the Philosophical

Magazine for 1852, second half-year, taking advantage

of a suggestion made to me by Joule, in a letter of date De-

cember 9, 1848, shown that the assumption  $\mu = \frac{J}{\alpha + t}$  reduces

the formula  $w\epsilon^{-\frac{1}{J} \int_T^S \mu dt}$  to  $w \frac{\alpha + T}{\alpha + S}$ : and I used this transforma-

tion in the concluding formulas of the article referred to by

Professor Tait (corrected in the *errata* of Phil. Mag. 1853,

first half-year). It was not, however, until the experiments

by Joule and myself, made in the course of the years 1852,

1853, and the early part of 1854, on the thermal effects of

forcing air and other gases through porous plugs, had proved

that my proposed thermodynamic scale agreed as nearly with

the scale of an air-thermometer as different air-thermometers

agreed with one another, that I definitively adopted it in fun-

damental formulas of thermodynamics. Thus, for example,

in Part VI. ("Thermo-electric Currents") of my "Dynamical

Theory of Heat," published in the Transactions of the Royal Society of Edinburgh for May 1854, and in the Philosophical Magazine for 1855, first half-year, the formula

$$\frac{H_t}{t} + \frac{H_{t'}}{t'} + \dots + \frac{H_{t^{(n-1)}}}{t^{(n-1)}} + \frac{H_{t^{(n)}}}{t^{(n)}} = 0$$

is given as an equivalent for

$$\Sigma \alpha_t = \Sigma \alpha_t \left( 1 - \epsilon^{-\frac{1}{J} \int_T^t \mu dt} \right),$$

which was first published in the Proceedings of the Royal Society of Edinburgh for 1851, and Phil. Mag. 1852, first half-year. Tait had actually quoted the formula from my 1854 paper in § 176 of his book, and so left absolutely no foundation for Professor Clausius' objection to his saying "This is Thomson's expression &c.," quoted in his letter above.

As to the 'Good Words' article on Energy which appeared under our joint names, Professor Tait and I are equally responsible for its contents. I claim my full share of the "scientific patriotism" commended in that article, and cannot assent to Professor Clausius' giving all the credit of it to Professor Tait.

In compliance with the concluding sentence of Professor Tait's letter, I hope in the course of a few days to write out, and send to the Philosophical Magazine for publication, a short statement of the communication on Thermodynamic Motivity which I made *vivâ voce* to the Royal Society of Edinburgh on April 3rd, 1876.

(1879)

LV. On Thermodynamic Motivity.

By Sir W. THOMSON, F.R.S.\*

Phil Mag.

744  
348-352

**A**FTER having for some years felt with Professor Tait the want of a word "to express the Availability for work of the heat in a given magazine, a term for that possession "the waste of which is called Dissipation"†, I suggested three years ago the word *Motivity* to supply this want, and made a verbal communication to the Royal Society of Edinburgh defining and illustrating the application of the word; but as the communication was not given in writing, only the title of the paper, "Thermodynamic Motivity," was published. In consequence of Professor Tait's letter to me, published in the present Number of the Philosophical Magazine, I now offer,

\* Communicated by the Author.

† Tait's 'Thermodynamics,' first edition (1868), § 178: quoted also in Professor Tait's letter in the present Number of the Philosophical Magazine.

for publication in the Proceedings of the Royal Society of Edinburgh and in the Philosophical Magazine, the following short abstract of the substance of that communication.

In my paper on the Restoration of Energy from an Unequally Heated Space, published in the Philosophical Magazine in January 1853, I gave the following expression for the amount of "mechanical energy" derivable from a body, B, given with its different parts at different temperatures, by the equalization of the temperature throughout to one common temperature\* T, by means of perfect thermodynamic engines,

$$W = J \iiint dx dy dz \int_T^t c dt (1 - \epsilon^{-\frac{1}{J} \int_T^t \mu dt}), \quad . \quad . \quad (1)$$

where  $t$  denotes the temperature of any point  $x, y, z$  of the body,  $c$  the thermal capacity of the body's substance at that point and that temperature,  $J$  Joule's equivalent, and  $\mu$  Carnot's function of the temperature  $t$ .

Further on in the same paper a simplification is introduced thus:—

"Let the temperature of the body be measured according to an absolute scale, founded on the values of Carnot's function, and expressed by the following equation,

$$t = \frac{J}{\mu} - \alpha,$$

"where  $\alpha$  is a constant which may have any value, but ought to have for its value the reciprocal of the expansibility of air,

\* In the present article I suppose this temperature to be the given temperature of the medium in which B is placed; and thermodynamic engines to work with their recipient and rejectant organs respectively in connexion with some part of B at temperature  $t$ , and the endless surrounding matter at temperature T. In the original paper this supposition is introduced subordinately at the conclusion. The chief purpose of the paper was the solution of a more difficult problem, that of finding the value of T,—a kind of average temperature of B to fulfil the condition that the quantities of heat rejected and taken in by organs of the thermodynamic engines at temperature T are equal. The burden of the problem was the evaluation of this thermodynamic average; and I failed to remark that when the value which the solution gave for T is substituted in the formula of the text it reduces to  $J \iiint dx dy dz \int_T^t c dt$ , which was not instantly obvious from the analytical form of my solution, but which we immediately see must be the case by thinking of the physical meaning of the result; for the sum of the excesses of the heats taken in above those rejected by all the engines must, by the first law of thermodynamics, be equal to the work gained by the supposed process. This important simplification was first given by Professor Tait in his 'Thermodynamics' (first and second editions). It does not, however, affect the subordinate problem of the original paper, which is the main problem of this one.

*Phil. Mag.* S. 5. Vol. 7. No. 44. May 1879. 2 F

“in order that the system of measuring temperature here adopted may agree approximately with that of the air-thermometer. Then we have

$$e^{-\frac{1}{J} \int_0^t \mu dt} = \frac{\alpha}{t + \alpha} \dots \dots \dots (2)$$

It was only to obtain agreement with the zero of the ordinary Centigrade scale of the air-thermometer that the  $\alpha$  was needed; and in the joint paper by Joule and myself, published in the Transactions of the Royal Society (London) for June 1854, we agreed to drop it, and to define temperature simply as the reciprocal of Carnot's function, with a constant coefficient proper to the unit or degree of temperature adopted. Thus definitively, in equation (6) of § 5 of that paper, we took  $t = \frac{J}{\mu}$ , and have used this expression ever since as the expression for temperature on the arbitrarily assumed thermodynamic scale. With it we have

$$e^{-\frac{1}{J} \int_T^t \mu dt} = \frac{T}{t}; \quad \dots \dots \dots (3)$$

and by substitution (1) becomes

$$W = J \iiint dx dy dz \int_T^t c dt \left(1 - \frac{T}{t}\right).$$

$J = 1$
$T \rightarrow T_r$
$t \rightarrow T$
$c \rightarrow c_p$

Suppose now B to be surrounded by other matter all at a common temperature T. The work obtainable from the given distribution of temperature in B by means of perfect thermodynamic engines is expressed by the formula (4). If, then, there be no circumstances connected with the gravity, or elasticity, or capillary attraction, or electricity, or magnetism of B in virtue of which work can be obtained, that expressed by (4) is what I propose to call the whole Motivity of B in its actual circumstances. If, on the other hand, work is obtainable from B in virtue of some of these other causes, and if V denote its whole amount, then

$$\mathcal{M} = V + W \dots \dots \dots (5)$$

is what I call the whole Motivity of B in its actual circumstances according to this more comprehensive supposition.

We may imagine the whole Motivity of B developed in an infinite variety of ways. The one which is obvious from the formula (5) is first to keep every part of B unmoved, and to take all the work producible by perfect thermodynamic engines equalizing its temperature to T; and then keeping it rigorously at this temperature, to take all the work that can

be got from it elastically, cohesively, electrically, magnetically, and gravitationally, by letting it come to rest unstressed, dis-electrified, demagnetized, and in the lowest position to which it can descend. But instead of proceeding in this one definite way, any order of procedure whatever leading to the same final condition may be followed; and, provided nothing is done which cannot be undone (that is to say, in the technical language of thermodynamics, provided all the operations be reversible), the same whole quantity of work will be obtained in passing from the same initial condition to the same final condition, whatever may have been the order of procedure. Hence the *Motivity* is a function of the temperature, volume, figure, and proper independent variables for expressing the cohesive, the electric, and the magnetic condition of B, with the gravitational potential of B simply added (which, when the force of gravity is sensibly constant and in parallel lines, will be simply the product of the gravity of B into the height of its centre of gravity above its lowest position). So also is the *Energy* of a body B (as I first pointed out, for the case of B a fluid, in Part V. of my *Dynamical Theory of Heat*, in the *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* for December 15, 1851, entitled, "On the Quantities of Mechanical Energy contained in a Fluid in Different States as to Temperature and Density"). Consideration of the *Energy* and the *Motivity*, as two functions of all the independent variables specifying the condition of B completely in respect to temperature, elasticity, capillary attraction, electricity, and magnetism, leads in the simplest and most direct way to demonstrations of the theorems regarding the thermodynamic properties of matter which I gave in Part III. of the *Dynamical Theory of Heat* (March 1851); in "Part VI. of *Dynamical Theory, Thermo-electric Currents*," (May 1, 1854); in a paper in the *Proceedings for 1858 of the Royal Society of London*, entitled, "On the Thermal Effect of Drawing out a Film of Liquid;" and in a communication to the *Royal Society of Edinburgh* (*Proc. R. S. E.* 1869-70), "On the Equilibrium of Vapour at the Curved Surface of a Liquid;" and in my article on the *Thermoelastic and Thermomagnetic Properties of Matter*, in the first number of the *Quarterly Journal of Mathematics* (April 1855); and in short articles in *Nichol's Cyclopædia*, under the titles "Thermomagnetism, Thermo-electricity, and Pyroelectricity," put together and republished with additions in the *Philosophical Magazine* for January 1878, under the title "On the Thermoelastic, Thermomagnetic, and Pyroelectric Properties of Matter."

It would be beyond the scope of the present article to enter

352

Dr. C. W. Siemens on the Transmission and

in detail into these applications, which were merely indicated in my communication to the Royal Society of Edinburgh of three years ago, as a very short and simple analytical method of setting forth the whole non-molecular theory of Thermodynamics.

University of Glasgow,  
April 11, 1879.

## **B** ANNEXE : Rant (1955).

On trouvera dans cette annexe B l'article de Rant (1955) où le terme "exergie" est défini pour la première fois.

Une traduction en français de cet article, proposée par E. Legrand de Météo-France, est également fournie.

On voit que le nom exergie provient du préfixe grec "ex" qui signifie "tiré de" et du nom grec "erg" qui signifie "travail".

Ainsi, l'exergie d'un système est le travail (maximum) extractible de ce système. Ce nom est déjà utilisé dans plusieurs cours de thermodynamique et, même si le nom d'énergie utilisable est maintenant très connu en météorologie depuis les travaux de Margules et de Lorenz, il semble judicieux de choisir ce nom pour parler de manière générique d'énergie utilisable, d'enthalpie utilisable, d'énergie entropique ou de pseudo-énergie.

DK 536.7: 662.614.2

22, p. 36-37

### Energie, ein neues Wort für „technische Arbeitsfähigkeit“

Geht ein Körper von einem Zustand in einen anderen über, so wird dabei das überhaupt mögliche Maximum an Arbeit umgesetzt, wenn die Zustandsänderung in umkehrbarer Weise vor sich geht. Jedem beliebigen Zustand, d. h. jeder „Energie“ ist eine solche „technische Arbeitsfähigkeit“ oder kurz „Arbeitsfähigkeit“ zugeordnet<sup>1)</sup>. Die Berechnungsvorschrift für diese Arbeitsfähigkeit hängt jedoch von der Art der Energie ab. Für die meisten Energiearten (z. B. kinetische Energie, elektrische Energie) ist die Arbeitsfähigkeit gleich der Energie.

Von besonderer Bedeutung bei der Definition von Wirkungsgraden sind Zustandsänderungen, bei denen sich anfangs nicht im Gleichgewicht befindliche Körper mit der Temperatur  $T_u$  und dem Druck  $p_u$  der Umgebung ins Gleichgewicht setzen; die Größen  $T_u$  und  $p_u$  stellen dabei gegebene, unveränderliche Bezugsgrößen dar. Handelt es sich z. B. um einen geschlossenen Wärmekraftprozeß, bei dem nur Wärmemengen  $Q$  in den Bilanzkreis ein- und austreten, so stellt die Größe  $Q(T - T_u)/T$  mit  $T$  als der Ausgangstemperatur die Arbeitsfähigkeit dar. Treten aber auch Stoffströme in den Bilanzkreis ein (z. B. bei Turbinen aller Art, bei Verbrennungsmotoren oder bei Dampfkraft-Anlagen), so erhält die Arbeitsfähigkeit die Form  $i - i_0 - T_u(s - s_0)$ . Dabei bedeuten  $i$  und  $i_0$  die Enthalpien sowie  $s$  und  $s_0$  die Entropien vor und nach dem Ausgleich<sup>2)</sup>.

Es wäre denkbar, daß es noch unbekannte Energieformen gibt, für die man die Arbeitsfähigkeit nach anderen Vorschriften berechnen muß. Im Schrifttum wurde der Begriff der Arbeitsfähigkeit allerdings an dem besonderen Beispiel der „stoffgebundenen“ Energie klar herausgearbeitet, weshalb er zunächst etwas zu sehr an diese Energieform gebunden erscheint<sup>3)4)5)6)7)8)</sup>. Bei der Analyse von Prozessen, bei denen verschiedene Stoffe und Energieformen verarbeitet werden, gelangt man beim Aufstellen von Bilanzen der Arbeitsfähigkeiten völlig zwanglos und logisch zu der hier dargestellten Erweiterung dieses Begriffes. Ganz analog schlägt P. Graßmann einen gemeinsamen Begriff für alle „technischen Leistungen“ vor.

Es muß also darauf hingewiesen werden, daß man zunächst den Begriff der technischen Arbeitsfähigkeit definierte und dann erst nach den Berechnungsverfahren suchte<sup>9)</sup>, daß ihre Berechnung in Abhängigkeit von der Energie je nach der Energieform verschiedene Gestalt annimmt, und daß die Enthalpie

<sup>1)</sup> E. Schmidt (Thermodynamik. 5. Aufl. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953; insbes. S. 109) nennt sie die „technische maximale Arbeit“. Das Wort „technische Arbeitsfähigkeit“ für diese bereits vorher schon mehrfach im Schrifttum verwendete Größe wurde zuerst von F. Bošnjaković eingeführt (vgl. hierzu F. Bošnjaković: Technische Thermodynamik. Bd. 1. Dresden und Leipzig 1935).

<sup>2)</sup> Bei einer Dampfmaschine mit adiabater Expansion und mit Kondensation bei der Umgebungs-Temperatur  $T_u$  sind z. B.  $i$  die Enthalpie des Frischdampfes,  $i_0$  die des Kondensats und  $T_u(s - s_0)$  die an die Umgebung abgeführte Kondensationswärme.

<sup>3)</sup> Graßmann, P.: Die technische Arbeitsfähigkeit als praktische Rechengröße. Arch. ges. Wärmetechn. Bd. 2 (1951) S. 161/66.

<sup>4)</sup> Graßmann, P.: Zur allgemeinen Definition des Wirkungsgrades. Chemie-Ing.-Techn. Bd. 22 (1950) S. 77/80.

<sup>5)</sup> Graßmann, P.: Über den Wirkungsgrad von Kälteprozessen. Kältetechn. Bd. 4 (1952) S. 52/57.

<sup>6)</sup> Glaser, H.: Der Gütegrad von Wärmeaustauschern. Chemie-Ing.-Techn. Bd. 21 (1949) S. 95/99.

<sup>7)</sup> Nesselmann, K.: Der Wirkungsgrad thermodynamischer Prozesse und sein Zusammenhang mit der Umgebungstemperatur. Allg. Wärmetechn. Bd. 4 (1953) S. 141/47.

<sup>8)</sup> Graßmann, P., u. C. Kämmerer: Was bedeutet das Wort Wirkungsgrad? Z. VDI Bd. 96 (1954) S. 980/81.

<sup>9)</sup> Bei der Enthalpie lag umgekehrt erst der physikalische Inhalt fest, und es galt, einen Begriff dafür zu prägen.

nur in der Berechnungsvorschrift für die Arbeitsfähigkeit von stoffgebundenen Energien vorkommt. Die Arbeitsfähigkeit stellt eine reine und tatsächlich gewinnbare Arbeit dar.

Die technische Arbeitsfähigkeit ist heute in der Technik und in der Physik zu einer so wichtigen Größe geworden, daß man nach einer Anregung von R. Plank danach trachten sollte, eine neue Benennung einzuführen, die Aussicht auf allgemeine Anerkennung im internationalen wissenschaftlichen Sprachschatz hat<sup>10)</sup>. Ein von U. Grigull stammender Vorschlag, die technische Arbeitsfähigkeit als „Ekthalpie“ zu benennen<sup>11)</sup>, ist nach Ansicht des Verfassers nicht annehmbar; denn aus dem Vorstehenden geht klar hervor, daß die Arbeitsfähigkeit keine „Thalpie“ (Wärme), also auch keine „Ekthalpie“ (Wärmeausbeute), sondern eine echte Arbeit darstellt<sup>12)</sup>. Nachfolgend wird gezeigt, daß man an Hand der Forderungen, die bei der Neuprägung eines international einzuführenden Wortes gestellt werden müssen, zu einem allgemeinen Schema gelangt. In diesem erhalte die technische Arbeitsfähigkeit zwangsläufig den Namen „Exergie“, der hiermit für den internationalen Gebrauch empfohlen sei.

Ein Ausdruck, der in jeder Hinsicht international annehmbar sein soll, darf — aus Gründen der Gleichberechtigung — nicht aus Elementen einer lebenden Sprache bestehen. Es kommt deshalb nur eine klassische Sprache in Frage, etwa Lateinisch oder Griechisch. Hinzu treten als weitere Forderungen:

1. Der Ausdruck muß kurz sein, damit man aus ihm leicht Ableitungen bilden kann. Dies ist besonders für die romanischen und die slawischen Sprachen wichtig, bei denen im Gegensatz zu den germanischen Sprachen (besonders zur deutschen Sprache) nur eine beschränkte Möglichkeit besteht, neue Bezeichnungen lediglich durch Aneinanderfügen von Wörtern zu bilden. Die Ableitungen bildet man meist mittels Vor- oder Nachsilben, was nur bei kurzen Stammwörtern bequem ist. Deshalb kommt kein aus mehreren Hauptwörtern zusammengesetzter Ausdruck in Frage.
2. Der Ausdruck soll aus sich selbst heraus verständlich sein, also die Definition des Begriffes enthalten, damit umständliche Erklärungen entfallen können. Eine solche Definition besteht aber bekanntlich aus zwei Teilen, dem „genus proximum“ (dem nachfolgenden Stammwort) und der vorausgehenden „differentia specifica“ (dem kennzeichnenden Unterscheidungswort). Die lebenden Sprachen verlangen außerdem z. T. noch ein Element, durch das der Ausdruck im Wortschatz richtig eingeordnet wird; dies geschieht immer durch Nachsilben (—ung, —eit, —ie, —st, usw.). Man sieht, daß ein derartiger Ausdruck aus mindestens drei Silben bestehen muß (es können aber auch mehr sein). Einige Beispiele der vielen aus dem Griechischen hergeleiteten Ausdrücke dieser Art sind die folgenden:

<sup>10)</sup> Es sei hier daran erinnert, daß H. Kamerlingh-Onnes auf dem Internationalen Kältetagekongreß in Rom im Jahre 1928 vorgeschlagen hatte, den an sich unzutreffenden Begriff des „Wärmeinhalts“ für die Summe aus der inneren Energie und der Verdrängungsarbeit durch den Begriff „Enthalpie“ zu ersetzen, der heute als internationales Fachwort allgemein üblich ist.

<sup>11)</sup> In Anlehnung an das Wort Enthalpie als der wörtlichen Übersetzung des Wortes Wärmeinhalt ins Griechische (ἔξ θερμότητος = Wärme, Hitze; ἔξ θερμότητος = warm machen; θερμότητος = sich erwärmen).

<sup>12)</sup> Auch die technische adiabate Arbeit ist keine „Thalpie“; sie wird nur aus der Enthalpie berechnet (als Enthalpieunterschied). Diese Aussage beinhaltet den äußerst wichtigen Unterschied zwischen einer Definition und einer Rechenvorschrift. Man sollte Wörter nicht aus einer Berechnungsformel herleiten, wenn eine klare Definition des Begriffes selbst vorliegt, aus der erst die Formeln zum Berechnen der durch den Begriff bestimmten Größe erhalten wurden.

Differentia specifica:	Genus proximum:	Nachsilbe
Sym	path	ie
Sym	phon	ie
Kako	phon	ie
Mel	od	ie
Kom	öd	ie
Aut	ark	ie
Demo	krat	ie
Ek	tom	ie
En	erg	ie
Apo	log	ie
Hypo	troph	ie.

3. Der Ausdruck soll sich in ein u. U. schon bestehendes System von Ausdrücken für verwandte oder ähnliche Begriffe zwanglos einfügen. Die thermodynamische Größe, für die ein neuer Ausdruck gesucht wird, ist zumindest nahe verwandt mit den Zustandsgrößen. Für einige von diesen sind bereits aus dem Griechischen hergeleitete Ausdrücke in Gebrauch; (innere) Energie, Enthalpie, Entropie. In dieses Schema muß sich der neue Ausdruck einpassen.

4. Der Ausdruck soll ethymologisch an verwandte Ausdrücke angeschlossen werden, jedoch von ihnen so verschieden sein, daß Verwechslungen ausgeschlossen bleiben<sup>13</sup>.

5. Der Ausdruck soll wohlklingend sein.

Aus diesen Forderungen geht hervor, daß „ie“ die zweckmäßigste Nachsilbe sein wird. Da es sich bei dem untersuchten Begriff um eine Arbeit handelt, muß als Stammsilbe (als genus proximum) das griechische Wort erg (on) hierfür erscheinen. Nun ist noch die richtige Vorsilbe zu wählen, die die spezifische Eigenart, die differentia specifica, hervorhebt. Hierfür gilt die Forderung, daß der neue Begriff die Arbeit bezeichnen soll, die aus einem System herausgeholt werden kann. „Aus“ heißt auf Griechisch „ek“ vor Konsonanten bzw. „ex“ vor Vokalen.

Damit lautet der neue Begriff **Exergie**; er erfüllt praktisch alle aufgestellten Forderungen, und der Buchstabe x unterscheidet ihn klar vom verwandten Begriff der Energie, so daß trotz der Analogie in der Wortbildung jede Verwechslung ausgeschlossen bleibt. Der Ausdruck kann in jede germanische, romanische oder slawische Sprache eingeführt werden; er lautet z. B. auf deutsch Exergie, auf englisch exergy, auf französisch exergie, auf spanisch exergia, auf italienisch essergia und auf slawisch eksergija.

Ljubljana

DF 596

Eingegangen am 17. 11. 1955

Z. Rant

<sup>13</sup> So wären z. B. im Deutschen zwischen Enthalpie und Ekthalpie bzw. noch mehr im Italienischen zwischen Entalpia und Ettalpia leicht Hörverwechslungen möglich.

## Exergie, un mot nouveau pour "capacité de travail technique"

Quand un corps passe d'un état donné à un autre, le maximum de travail possible est délivré si la transition est réversible. A chaque état, c'est-à-dire à chaque "énergie", il est associé une telle "capacité de travail technique", ou en bref une "capacité de travail"<sup>1)</sup>. La règle permettant de calculer cette capacité de travail dépend néanmoins du type d'énergie. Dans la plupart des cas (par exemple énergie cinétique, énergie électrique), la capacité de travail se confond avec l'énergie.

Les transformations d'état, où les corps en présence ne sont pas initialement en équilibre avec la température  $T_e$  et la pression  $p_e$  de l'environnement, ont une signification particulière dans la définition des rendements; les grandeurs  $T_e$  et  $p_e$  représentent des grandeurs de référence données, immuables. S'il s'agit par exemple d'un processus thermique fermé, dans lequel une quantité de chaleur  $Q$  entre et sort, alors la quantité  $Q(T - T_e) / T$ ,  $T$  étant la température de sortie, représente la capacité de travail. Si de plus un flux de matière entre dans le système (comme dans les turbines de toute sorte, les moteurs à combustion ou dans des machines à vapeur), alors cette capacité de travail prend la forme  $i - i_0 - T_e(s - s_0)$ . Ici  $i$  et  $i_0$  représentent les enthalpies,  $s$  et  $s_0$  étant les entropies, avant et après la mise en équilibre<sup>2)</sup>.

Il serait tout-à-fait imaginable qu'il existe encore des formes d'énergie inconnues, pour lesquelles la capacité de travail doive se calculer différemment. Dans la littérature, la notion de capacité de travail est en tout cas traitée clairement comme l'exemple particulier de l'énergie "liée à la matière", de sorte qu'elle apparaît ensuite liée trop fortement à cette forme d'énergie<sup>3)4)5)6)7)8)</sup>. Par l'analyse des processus par lesquels différentes matières et formes d'énergie sont transformées, on parvient absolument sans contrainte et de manière logique, en établissant le bilan des capacités de travail, à l'extension de cette notion qui est présentée ici. De manière totalement analogue, *P. Graßmann* propose un concept commun pour toutes les "puissances techniques".

Il faut aussi remarquer que l'on a d'abord défini la notion de capacité de travail technique, et seulement après cherché la méthode de calcul<sup>9)</sup>, que son calcul, dépendant de l'énergie, prend à chaque fois une forme différente selon la forme d'énergie considérée, et que l'enthalpie ne s'applique qu'à la capacité de travail d'énergies liées à la matière. La capacité de travail représente un pur travail effectivement disponible.

La capacité de travail technique est devenue aujourd'hui, dans les domaines de la technique et de la physique, une grandeur d'une importance telle que l'on devrait suivre la proposition de *R. Planck* de lui trouver une nouvelle appellation, avec la perspective d'une reconnaissance générale dans le vocabulaire de la communauté scientifique<sup>10)</sup>. Une proposition de *U. Grigull*, visant à appeler la capacité de travail "Ecthalpie"<sup>11)</sup>, n'est pas acceptable du point de vue de l'auteur; en effet il ressort de ce qui précède que la capacité de travail ne représente pas une "thalpie" (chaleur), et pas non plus une "ecthalpie" (dégagement de chaleur) mais bien un réel travail<sup>12)</sup>. Nous allons montrer que l'on parvient, en suivant les exigences qui s'imposent dans l'invention d'un nouveau vocable destiné à être introduit internationalement, à un schéma général, et qu'en l'appliquant, la capacité de travail technique reçoit inévitablement le nom de "Exergie", qui est de plus recommandé pour un emploi international.

Une expression qui doit en tout état de cause être acceptable internationalement ne doit pas — pour des raisons d'équité — provenir d'éléments d'une langue vivante. Il ne peut être question que d'une langue classique, comme le latin ou le grec. A cela s'ajoutent des contraintes supplémentaires:

1. L'expression doit être courte, pour que l'on puisse facilement s'en servir pour fabriquer des dérivés. Cela est particulièrement important pour les langues latines et slaves, dans lesquelles, au contraire des langues germaniques (et spécialement de l'allemand), il n'y a que des possibilités limitées de formation de nouvelles désignations par simple agglomération de mots existants. On réalise surtout ces agglomérats au moyen de préfixes ou de suffixes, ce qui n'est approprié que pour des racines courtes. C'est pourquoi il n'est pas question ici d'expressions construites à partir de plusieurs racines principales.
2. L'expression visée doit être compréhensible en elle-même, c'est-à-dire contenir la définition du concept, pour pouvoir se dispenser d'explications complémentaires. Une telle définition contient cependant deux parties, le "genus proximum" (la racine de rattachement) et la "differentia specifica" (la racine qui exprime la différence avec les mots voisins). Les langues vivantes exigent de surcroît un élément, grâce auquel l'expression s'intègre bien au vocabulaire:

ceci s'obtient toujours par des suffixes (—té, —isme, —ie etc...). On voit donc qu'une telle expression doit contenir au minimum trois syllabes (il peut y en avoir plus). Voici quelques exemples des nombreuses expressions héritées du grec de la sorte:

Differentia specifica	Genus proximum	Suffixe
Sym	path	ie
Sym	phon	ie
Caco	phon	ie
Mel	od	ie
Com	ed	ie
Aut	arc	ie
Demo	crat	ie
Ec	top	ie
En	erg	ie
Apo	log	ie
Hyper	troph	ie
A	troph	ie

- L'expression doit s'intégrer facilement à un système préexistant d'expressions désignant des notions apparentées ou voisines. La grandeur thermodynamique, pour laquelle on recherche une expression, est au minimum très proche des grandeurs d'état. Pour quelques unes d'entre elles, on utilise des expressions tirées du grec: énergie (interne), enthalpie, entropie. La nouvelle expression doit se couler dans ce moule.
- Si l'expression doit se rapprocher au point de vue étymologique des expressions voisines, elle doit néanmoins en différer suffisamment pour que toute confusion soit exclue<sup>13</sup>).
- L'expression doit sonner joliment.

De ces exigences il ressort que "ie" est le suffixe le plus approprié. Comme il s'agit, dans le concept que nous examinons, d'un travail, la syllabe racine (le genus proximum) doit être le mot grec erg(on). Il reste donc à choisir le préfixe idoine, qui traduit la particularité spécifique, la differentia specifica. A cet effet il s'impose que le nouveau concept représente le travail que l'on peut tirer d'un système donné. "(Tiré) de" se dit en grec "ec" devant une consonne, respectivement "ex" devant une voyelle.

Ainsi construit, le nom de la nouvelle notion est exergie: il satisfait pratiquement à toutes les exigences posées, et la lettre "x" le distingue clairement de son parent l'énergie, de sorte que, malgré l'analogie dans la construction du mot, toute confusion soit exclue. L'expression peut être reproduite dans

les langues germaniques, latines ou slaves: cela donne par exemple Exergie en allemand, en anglais exergy, en français exergie, en espagnol exergia, en Italie essergia et en slave eksergija.

Lubljanja

DF 596

Entrepris le 17/11/1955

Z. Rant

<sup>1)</sup> *E. Schmidt* (Thermodynamik 5e édition Berlin/Göttingen Heidelberg 1953; en part. p.109) l'appelle le "travail technique maximal". L'expression "capacité de travail technique" pour cette grandeur déjà employée bien des fois dans la littérature a été introduite pour la première fois par *F. Bosnjakovic* : (cf. *F. Bosnjakovic* : Technische Thermodynamik Vol. 1 Dresde et Leipzig 1935).

<sup>2)</sup> Dans une machine à vapeur à expansion adiabatique et avec condensation à la température de l'environnement  $T_e$ ,  $i$  désigne l'enthalpie de la vapeur froide,  $i_0$  celle du condensat, et  $T_e (s - s_0)$  la chaleur de condensation apportée à l'environnement.

<sup>3)</sup> *Graßmann, P.*: Die technische Arbeitsfähigkeit als praktische Rechengröße (la capacité de travail technique comme variable pratique). Arch. ges. Wärmetechn. Vol. 2 (1951) p. 161/66.

<sup>4)</sup> *Graßmann, P.*: Zur allgemeinen Definition des Wirkungsgrades (pour une définition générale des rendements). Chemie-Ing.-Techn. Vol. 22 (1950) p.77/80.

<sup>5)</sup> *Graßmann, P.*: Über den Wirkungsgrad von Kälteprozessen (sur le rendement des processus de refroidissement). Kältetechn. Vol. 4 (1952) p. 52/57.

<sup>6)</sup> *Glaser, H.*: Der Gütegrad von Wärmeaustauschern (le niveau de qualité des échanges de chaleur). Chemie-Ing.-Techn. Vol. 21 (1949) p. 95/99.

<sup>7)</sup> *Nesselmann, K.*: Der Wirkungsgrad thermodynamischer Prozesse und sein Zusammenhang mit der Umgebungstemperatur (le rendement des processus thermodynamiques et sa relation avec la température d'environnement). Allg. Wärmetechn. Vol. 4 (1953) p. 141/47.

<sup>8)</sup> *Graßmann, P.* et *C. Kämmerer*: Was bedeutet das Word Wirkungsgrad ? (Que signifie le mot rendement ?) VDI Vol. 96 (1954) p. 980/81.

<sup>9)</sup> Dans le cas de l'enthalpie, le contenu physique a été inversement constaté en premier, puis on a dû ensuite inventer le concept.

<sup>10)</sup> On doit se souvenir ici que *H. Kammerlingh-Onnes*, au congrès international sur le froid tenu à Rome en 1928, avait proposé de remplacer le notion erronée de "contenu en chaleur" pour la somme de l'énergie interne et du travail de refoulement par la notion d'"enthalpie", qui est maintenant passée communément dans le vocabulaire spécialisé.

<sup>11)</sup> A l'appui du choix d'enthalpie comme traduction mot-à-mot en grec de "contenu en chaleur" ( $\tau\omicron$   $\theta\alpha\lambda\pi\omicron\varsigma$  = chaleur, moiteur;  $\theta\alpha\lambda\pi\epsilon\iota\nu$  = chauffer;  $\theta\alpha\lambda\pi\iota\alpha\nu$  = se chauffer).

<sup>12)</sup> Même le travail technique adiabatique n'est pas une "Thalpie": il n'est calculé qu'à base d'enthalpie (comme différence d'enthalpies). Ceci met l'accent sur la différence fondamentale qui existe entre une nouvelle définition et une simple règle de calcul. On ne devrait pas fabriquer des mots à partir d'une formule de calcul quand une définition claire de la notion suggère elle-même de n'en tirer que les formules pour le calcul d'une grandeur donnée.

<sup>13)</sup> On pourrait ainsi par exemple facilement confondre à l'oreille en allemand Enthalpie et Ekthalpie, et plus encore en italien entalpia et ettalpia.

## **C** ANNEXE : Marquet (1993).

On a reproduit dans cette annexe C l'article de Marquet (1993) concernant l'application de la théorie de l'exergie au cas de l'atmosphère humide, avec la définition de la fonction enthalpie utilisable humide spécifique " $a_m$ ".

On se reportera à la section (5) de ce mémoire où on trouvera une présentation et un résumé des points importants de cet article.

# Exergy in meteorology: Definition and properties of moist available enthalpy

By PASCAL MARQUET

*Meteo-France, SCEM/Previ/Compas, 42 avenue G. Coriolis, 31057 Toulouse Cedex, France*

(Received 30 October 1991; revised 28 September 1992)

## SUMMARY

The exergy of the dry atmosphere can be considered as another aspect of the meteorological theories of available energies. The local and global properties of the dry available enthalpy function, also called flow exergy, were investigated in a previous paper.

The concept of exergy is well defined in thermodynamics, and several generalizations to chemically reacting systems have already been made. Similarly, the concept of moist available enthalpy is presented in this paper in order to generalize the dry available enthalpy to the case of a moist atmosphere. It is a local exergy-like function which possesses a simple analytical expression where only two unknown constants are to be determined, a reference temperature and a reference pressure.

The moist available enthalpy,  $a_m$ , is defined in terms of a moist potential change in total entropy. The local function  $a_m$  can be separated into temperature, pressure and latent components. The latent component is a new component that is not present in the dry case. The moist terms have been estimated using a representative cumulus vertical profile. It appears that the modifications brought by the moist formulation are important in comparison with the dry case. Other local and global properties are also investigated and comparisons are made with some other available energy functions used in thermodynamics and meteorology.

## 1. INTRODUCTION

The basis of the modern concept of exergy was introduced by W. Thomson (1853, 1879), later Lord Kelvin. He defined as motivity the amount of work that a system can produce by evolving from an initially heterogeneous distribution of temperature to a constant equilibrium value. Since then the concept of motivity (known as available energy) has been rediscovered and generalized in many articles and monographs dealing with thermodynamics (see the historical review in Haywood (1974) or Kestin (1980)). Nowadays, the available part of the energy is often called the *exergy* of a system, whereas its untransformable part is sometimes called the *anergy*, which corresponds to a dead state of the same system.

The terms exergy and anergy are not used in atmospheric science, but several analogous concepts have been introduced in meteorology: (i) the available kinetic energy by Margules (1905); (ii) the available potential energies by Lorenz (1955, 1967), Van Mieghem (1956), Dutton and Johnson (1967), Pearce (1978) and McHall (1990a, 1990b); (iii) the global static entropic energy by Dutton (1973, 1976) and its local version by Pichler (1977); and (iv) the entropic potential energy by Blackburn (1983).

A connection between the thermodynamical concept of exergy and some of these global meteorological approaches (i) to (iv) was proposed in Karlsson (1990) and in Marquet (1990a, 1991 (collectively referred to as MM hereafter)). For instance, it was shown in MM that the local concept of dry available enthalpy  $a_h = (h - h_r) - T_r(s - s_r)$  generalizes some of the results of (i) to (iii). This local function  $a_h(p, T)$  can be used as a Lagrangian energy quantity (see list of symbols in the appendix), yielding a Bernoulli equation verified by  $a_h + e_K + e_G$  and leading to new local non-hydrostatic or hydrostatic energy cycles. It is also easy to take into account an uneven topography and dry static instabilities (i.e. where  $\partial s / \partial z < 0$ ).

It is explained in MM that, for an isobaric layer of a limited space region, the expected hydrostatic conversion term  $-R\bar{\omega}\bar{T}/p$  and two new boundary fluxes appear. These terms cannot be obtained by starting with any local approach of the theory of Lorenz. However, using such a local approach and assuming  $\bar{\omega} \equiv 0$ , Muench (1965), Brennan and Vincent (1980) and Michaelides (1987) have all mentioned large unbalanced residuals. Pontaud *et al.* (1990) have shown that these residuals could correspond to the new conversion and flux terms obtained with the available enthalpy formulation where  $\bar{\omega} \neq 0$ , leading to local energy cycles that are more balanced. All these results show that the introduction of a local exergy-like concept is relevant in meteorology, in agreement with the local approaches of Pichler (1977) and Karlsson (1990).

Nevertheless, the dry available enthalpy only deals with the energetics of the atmosphere when considered as a dry ideal gas with parametrized diabatic heating. This is a crude approximation of the reality, and accordingly Lorenz (1978, 1979) proposed a moist version of the available energy concept. Livezey and Dutton (1976) also generalized on the concept of static entropic energy,  $T_0\Sigma$ , to simple-solution fluid systems (cloudy air or salt water). As for thermodynamics, Szargut and Styrylska (1969) proposed a theory of exergetic processes in moist air and Evans (1969, 1980) coined the term *essergy* (for *essential aspect of energy*) when he studied the exergy of salt water, the principle of desalination and, more generally, chemically reacting thermodynamic systems. However, the word *essergy* has not really spread in thermodynamic literature and so the term *exergy* will be used in this paper. In recent years McHall (1991) derived a moist version of his theory, and Karlsson (1990) investigated the exergy exchanges in the atmosphere when considered as a fluid mixture with chemical reactions, including numerical investigations made at the European Centre for Medium-range Weather Forecasts with a general circulation model.

Similarly, the purpose of this paper is to define an exergy-like local function called moist available enthalpy and denoted by  $a_m$ . It is expected to be the natural generalization of the dry version,  $a_h$ .

The differences between the various entropic or available energies introduced in meteorology—see (i) to (iv) above—mainly concern the definition of the reference state of minimum total potential energy. Using another approach, the *essergy* function introduced by Evans (1969) in thermodynamics, and the exergy function studied by Karlsson (1990) in meteorology, are derived from a fundamental concept of statistical physics: the ‘information gain’, also called ‘Kullback function’ (Kullback 1959) or ‘contrast’. The moist available enthalpy will be introduced differently in this paper, starting from a moist generalization of the concept of potential change in total entropy ( $\Delta S = a_h/T_r$ ) which is another approach to the dry available enthalpy (see MM).

To begin with, the general thermodynamic assumptions are set out in section 2. The moist potential change in total entropy is then defined in section 3 together with the analytical expression of the specific moist available enthalpy function  $a_m$  and its various components. In section 4 a representative vertical profile of a cumulus cloud is used to estimate the orders of magnitudes of the components of  $a_m$ . The thermodynamic equations and the equations for the moist energy components are reviewed in section 5. A local moist energy cycle and the local moist Bernoulli equation are then introduced in section 6. Integral properties shown in section 7 lead to possible definitions of  $T_r$  and  $p_r$  (two constants to be determined in  $a_m$ ). In section 8 the moist available enthalpy is expressed in terms of an associated moist potential temperature. Finally, conclusions and remarks are contained in section 9.

It should be mentioned that most of the following results have appeared first in French in Marquet (1990b).

## 2. MOIST THERMODYNAMICS

The general thermodynamic assumptions that are used throughout this study are based on the thermodynamic local-state theory (De Groot and Mazur 1962; Glansdorff and Prigogine 1971), together with some common meteorological approximations (see Hauf and Höller (1987), referred to as HH hereafter). To enable easy reference these hypotheses are labelled in this paper by  $\mathcal{H}_n$ . The notations and symbols used in this paper have been chosen according to HH.

- $\mathcal{H}_1$  The atmosphere consists of four components at the same temperature  $T$  denoted by the subscripts or the superscripts 0 to 3 for dry air, water vapour, liquid water (stable or supercooled) and ice respectively. Precipitation falling at  $T'_w$  (the so-called wet-bulb temperature) cannot explicitly be taken into account.
- $\mathcal{H}_2$  Ideal gas and pure form assumptions are for ideally mixed gases and condensed phases respectively. Salt dissolved in drops or ice crystals is ignored.
- $\mathcal{H}_3$  Local-state theory is valid: the local-state functions defined in 'thermodynamic' (pressure, temperature, energy, enthalpy, entropy, . . .) remain valid in non-equilibrium thermodynamics; the first-order Chapman–Enskog development is a good enough approximation to the distribution function (otherwise entropy would depend explicitly on gradients of  $\rho$  and  $T$ ); variations of  $T$  and  $p$  are 'small enough' between two collisions (mean free path); continuum physics can be applied, leading to the concept of a fluid parcel; gases are not too rarefied (for practical purpose  $p > 10^{-1}$  Pa or  $z < 100$  km); plasmas or shock waves cannot be investigated. For these assumptions see, for example, Prigogine (1949), Meixner and Reik (1959) and Lebon and Mathieu (1981).
- $\mathcal{H}_4$  The specific heats at constant volume and pressure ( $c_v^j$  and  $c_p^j$ ,  $j = 0$  to 3) together with the gas constants ( $R^i$ ,  $i = 0$  and 1) are temperature-independent. The normal transition between liquid water and ice occurs at the triple point temperature  $T_{tr} = 273.16$  K and is pressure-independent. Metastable supercooled water can exist.
- $\mathcal{H}_5$  Under- or super-saturation does not exist anywhere. The saturation pressures denoted by  $p^{i1}(T)$  with  $i = 2$  or 3 are those over an infinite and plane surface of liquid (for  $i = 2$ ) or ice (for  $i = 3$ ).
- $\mathcal{H}_6$  Thermodynamic and kinematic effects of drop or ice crystal size spectra are not taken into account.
- $\mathcal{H}_7$   $\partial h / \partial p = 0$  for the condensed phases. The specific volumes of condensed phases are neglected in the equation of state and in the Clausius–Clapeyron equation: only specific volumes of gases are considered.
- $\mathcal{H}_8$  Turbulent fluxes are only molecular ones, although Reynolds terms (the macroscopic parametrized turbulence) could implicitly be included into the source and sink terms of the thermodynamic equations.
- $\mathcal{H}_9$  Kinetic energy of diffusion is not taken into account. This is justified if the time derivative of the various components with respect to the barycentric motion may be neglected (see De Groot and Mazur 1962).

Any atmospheric parcel is completely determined by the partial pressures  $p^0$  and  $p^1$ , the temperature  $T$  and the concentrations  $m^k = \rho^k / \rho$  ( $k = 0$  to 3) where  $\rho^k$  and  $\rho \equiv \sum_k \rho^k$  are the partial and total densities respectively. The mixing ratios of water components are  $r^k = m^k / m^0$  ( $k = 1$  to 3), the total mixing ratio of water is  $r^t = r^1 + r^2 + r^3$  and the total concentration of water is  $m^t = m^1 + m^2 + m^3$ . All these definitions and notations are chosen according to HH.

In a parcel each component  $k = 0$  to 3 moves with the uniform partial velocity  $\mathbf{v}^k$ , and the barycentric velocity  $\mathbf{v}$  of the parcel is defined by  $\rho\mathbf{v} = \rho^k\mathbf{v}^k$  (Einstein's summation convention over Latin or Greek letters is used throughout this paper). The material barycentric time-derivative operator is defined by  $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}\cdot\nabla$ , where the second term is the barycentric advection.

The change in concentration  $D(m^k)/Dt$  can be split into the sum

$$\frac{D(m^k)}{Dt} = \frac{D_e(m^k)}{Dt} + \frac{D_i(m^k)}{Dt} \quad (1)$$

where the external ( $D_e/Dt$ ) and internal ( $D_i/Dt$ ) changes in concentration are

$$\frac{D_e(m^k)}{Dt} = -(\rho)^{-1}\nabla\cdot\mathbf{J}^k \quad (2)$$

$$\frac{D_i(m^k)}{Dt} = (\rho)^{-1}\mathcal{F}^k. \quad (3)$$

The change  $D_e(m^k)/Dt$  is created by a transfer of mass across the boundaries of the open parcel and the change  $D_i(m^k)/Dt$  corresponds to the mass produced within the parcel. They depend, respectively, on the 'diffusion flux'  $\mathbf{J}^k = \rho^k(\mathbf{v}^k - \mathbf{v})$ ,  $k = 0$  to 3, and the 'convergence of the phase fluxes'  $\mathcal{F}^k$ ,  $k = 1$  to 3, due to the chemical changes of state:  $1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3$ .

Various local-state functions are either intensive ( $p$ ,  $T$ ) or extensive ( $e_i^k$ ,  $h^k$ ,  $s^k$ , . . .). Any extensive function  $\psi = m^k\psi^k$  can be put in the alternative form

$$\psi = m^k\psi^k = m^0\psi^0 + m^1\psi^1 + m^2(\psi^2 - \psi^1) + m^3(\psi^3 - \psi^1) \quad (4)$$

where  $m^1$  is associated with the water vapour component  $\psi^1$ , differently to HH where  $m^1$  is associated with the liquid water component  $\psi^2$ . For instance, the specific—namely per unit mass—enthalpy,  $h$ , entropy,  $s$  and internal energy,  $e_i$ , read

$$h = m^k h^k = e_i + p/\rho = m^0 h^0 + m^1 h^1 - m^2 l_{21} - m^3 l_{31} \quad (5)$$

$$s = m^k s^k \quad (6)$$

$$e_i = m^k e_i^k \quad (7)$$

where  $l_{ij} = h^j - h^i$  are the latent heats.

Using  $\mathcal{H}_5$  the following identity holds whatever the thermodynamic state of the parcel is, and can help to simplify several formulae (if one of the condensed phases is present the moist air is saturated and the logarithm is zero, on the other hand if the moist air is not saturated there is no condensed phase):

$$m^2 \ln(p^1/p^{21}) = m^3 \ln(p^1/p^{31}) \equiv 0. \quad (8)$$

Using  $\mathcal{H}_7$  Kirschhoff's law ( $i, j = 1, 2, 3$ ) and the local Clausius–Clapeyron equation ( $i = 2, 3$ ) are respectively

$$\frac{d}{dT}(l_{ij}) = c_p^j - c_p^i, \quad \text{and} \quad T \frac{d}{dT} \ln(p^{i1}) = \frac{l_{i1}}{R^1 T}. \quad (9)$$

These equations will often be used in the following integral form with the use of  $\mathcal{H}_4$ :

$$l_{ij}(T) = l_{ij}(T_r) + (c_p^j - c_p^i)(T - T_r) = (l_{ij})_r + (c_p^j - c_p^i)T_r X \quad (10)$$

$$R^1 T_r \ln\{p^{i1}(T)/p^{i1}(T_r)\} = l_{i1}(T)(1 - T_r/T) - (c_p^1 - c^i)T_r \mathcal{F}(X) \quad (11)$$

where  $T_r$  is a constant temperature. Equation (11) holds for  $i = 2$  or  $3$ . The function  $\mathcal{F}(X) = X - \ln(1 + X)$  is introduced with  $X = (T - T_r)/T_r$ .

### 3. THE MOIST AVAILABLE ENTHALPY

Section 3(a) deals with the dry and moist versions of the 'potential change in total entropy'. The results of the moist version are used in section 3(b) as a starting point to define  $a_m$ . However, section 3(a) may well be omitted on a first reading of this paper, considering section 3(b) as the mathematical definition of the local function  $a_m$ .

#### (a) Introduction

The concept of dry 'potential change in total entropy' is defined in MM. It is denoted by  $\Delta_d S^\circ = a_h/T_r$  and can be compared with the expression  $\Delta S_t = R_{\max}/T_0$  of Landau and Lifchitz (1976, §20).

Landau and Lifchitz have used a geometric approach following the method introduced by Gibbs (1873). The problem is to define the available part of the total energy, namely the part of the energy that a system can release when undergoing a spontaneous process towards an equilibrium state. The system consists of a body surrounded by a medium at constant pressure  $p_0$  and temperature  $T_0$ . The total entropy of the body and medium is  $S_t$ , and the total energy is  $E_t$ . Use of an  $S_t$ - $E_t$  diagram enables each state of the system to be represented by a point. The equilibrium curve,  $(S_t)_{\text{eq}}$ , is the so-called 'surface of dissipated energy' introduced by Gibbs (1873); it only depends on  $E_t$  and is a straight line if the medium is a thermostat (see Fig. 1). The slope of this equilibrium curve is related to the equilibrium temperature by  $d(S_t)_{\text{eq}}/dE_t \equiv 1/T_0$ . If the body is not in equilibrium with the medium and if the point B represents this general state in Fig. 1, the distance BA is the 'capacity for entropy'  $\Delta S_t$ , whereas the distance CB is the 'available energy'  $R_{\max}$  (this terminology was used by Gibbs). According to the second law of thermodynamics any real thermodynamic process results in an increase of the total entropy. Therefore, starting from B, the attainable equilibrium points are located above the value  $(S_t)_B$ , and the maximum variation in total energy is reached when the equilibrium end state is C. This special process is the reversible one where the final total entropy has not changed  $(S_t)_C = (S_t)_B$ . The consequence of the second law is that the distance CB is

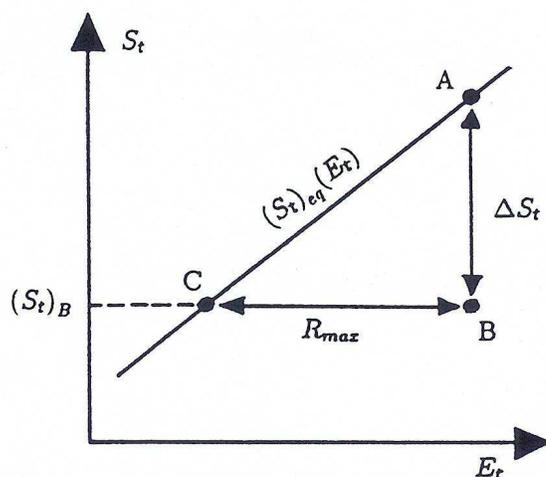


Figure 1.  $S_t$ - $E_t$  diagram with the equilibrium curve  $(S_t)_{\text{eq}}$  and the non-equilibrium state B.  $\Delta S_t$  is the change in total entropy and  $R_{\max}$  is the available energy.

a maximum and represents the available energy. The change in total entropy and the available energy are thus simply connected by the slope of the equilibrium curve:  $\Delta S_t = R_{\max}/T_0$ .

The available enthalpy  $a_h$  can also be related to a change in total entropy  $\Delta_d S^\circ$ :

$$\Delta_d S^\circ = a_h/T_r = \frac{\{h - h_r(T_r)\}}{T_r} - \{s - s_r(T_r, P_r)\} \quad (12)$$

where two undetermined constants  $T_r$  and  $P_r$  are introduced. It is demonstrated in Marquet (1991) that, for the dry atmosphere case,  $\Delta_d S^\circ$  is the change in total entropy of a conceptual system undergoing two prescribed processes. This system consists of a unit mass parcel of dry ideal gas  $(T, p)$ , and a mere conceptual thermostat at  $T_r$ . The dry irreversible processes are: first an isobaric change of the parcel from  $(T, p)$  to  $(T_r, p)$  coming into contact with the thermostat, then a sudden isothermal and adiabatic change from  $(T_r, p)$  to  $(T_r, P_r)$ . In fact the second process involves a work reservoir at  $P_r$ , but the change in total entropy  $\Delta_d S^\circ$  is only related to the unit mass parcel and the thermostat. The work exchanged between the parcel and the work reservoir is not considered as available for the system, the work reservoir is a free source of work. This is the main difference between the concept of available energy and available enthalpy.

For the available energy case one can similarly consider a unit mass parcel associated with a work and heat reservoir at  $T_r$  and  $p_r$ . The two new irreversible processes are: first a sudden and adiabatic change from  $(T, p)$  to  $(T_1, p_r)$  coming into contact with the work reservoir, where  $T_1$  is the temporary equilibrium value; and then an isobaric change from  $(T_1, p_r)$  to  $(T_r, p_r)$  coming into contact with the thermostat. The changes in total entropy  $\Delta_1 S_t$  and  $\Delta_2 S_t$  occurring during these two new processes lead to the following available energy formulation:  $a_e = T_r(\Delta_1 S_t + \Delta_2 S_t) = \{e_i - (e_i)_r\} + p_r(1/\rho - 1/\rho_r) - T_r(s - s_r)$ . This is the available energy function used among others by Landau and Lifchitz (1976), Livezey and Dutton (1976) and Karlsson (1990).

The moist generalization that is considered in this paper is made of a unit mass moist parcel verifying  $\mathcal{H}_{1,\dots,9}$  assumptions, a conceptual thermostat at  $T_r \leq T_{tr} = 273.16$  K, a moist *dead state* (at temperature  $T_r$  and total pressure  $p_r$ ) and finally four thermochemical processes. The moist potential change in total entropy is denoted by  $\Delta_m S^\circ$ .

The dead state is a saturated moist air parcel at  $T_r$ , in possible chemical equilibrium with an infinite and plane surface of ice, thus  $p_r^1 = p^{31}(T_r)$  according to  $\mathcal{H}_5$ . There is no condensed phase:  $r^2 = r^3 = 0$  and  $r^1 = r^{31}$  (the saturation mixing ratio over ice). The total pressure  $p_r = p_r^0 + p_r^1$  and the temperature  $T_r$  are supposed to be two constants. From  $\mathcal{H}_5$  the partial pressure of the dry-air component in the dead state only depends on  $T_r$  and  $p_r$ :  $p_r^0(T_r, p_r) = p_r - p^{31}(T_r)$ .

The dead state is a passive environment in that the chemical potential of water vapour,  $\mu_r^1$ , and the chemical potential of ice,  $\mu_r^3$ , are the same (ice is the stable condensed phase at  $T_r$ ). The partial chemical potential is defined in thermodynamics as  $\mu^k(T, p) = h^k(T) - Ts^k(T, p)$ , for each component  $k = 0$  to 3.

Let us define the following sequence of thermochemical processes undergone by the unit mass moist parcel and involving the thermostat:

(i) an isothermal ( $T$ ) and adiabatic reversible separation of the parcel into its different parts. The separation of the gases is realized via semi-permeable membranes. The condensed phases are in equilibrium with the respective gas partial pressures. The final state can be called the separate component state. This can be summarized by:

$$(p^0, p^1; m^k, k = 0 \text{ to } 3) \leftrightarrow (p^0, m^0) + (p^1, m^1) + (p^{21}, m^2) + (p^{31}, m^3);$$

(ii) if metastable phases are present (e.g. supercooled water) they are transformed (at  $T$  and  $p$ ) into the more stable form at  $T$ , using heat exchanges with the thermostat if needed;

(iii) an irreversible and isobaric change from  $T$  to  $T_r$  coming into contact with the thermostat, the final phase being the more stable one at  $T_r$ ; and

(iv) a sudden and isothermal irreversible change of pressure at  $T_r$ , to reach  $(p_r^0, T_r)$  conditions for dry air and  $(p_r^{31}, T_r)$  for all components 1 to 3 (the final phase being the more stable one at  $T_r$ ). The work reservoir involved in this adiabatic process is supposed to be a free source of work.

The change in total entropy is zero for all components during the adiabatic and irreversible process (i). Introducing the notation  $b^k = (h^k - h_r^k) - T_r(s^k - s_r^k)$  where the subscript  $r$  denotes the dead state, the value of the moist change in total entropy for the dry-air component  $(\Delta_m S^o)^0$  along the path (i) to (iv) can be computed according to Marquet (1991):  $(\Delta_m S^o)^0 = b^0/T_r$ . Indeed, (iii) and (iv) correspond in this case to the dry processes of MM recalled at the beginning of this section, and the processes (i) and (ii) are ineffective for the dry-air component.

It is more difficult to carry out the computation of  $(\Delta_m S^o)^k$  for the water components ( $k = 1, 2, 3$ ) because numerous cases must be investigated depending on the various changes of phase that can occur along the path (i) to (iv). There are in fact eight different cases. Each of them is depicted in the  $p$ - $T$  diagram of Fig. 2 by possible initial points  $E_{1,\dots,8}$  and the common final state  $E_r$  (the gaseous saturated dead state). If  $p_r^1 = p_r^{31}(T_r)$  and  $p_0 = p^{31}(T_0) = p^{21}(T_0)$ , where  $T_0 = T_{tr}$ , these states can be briefly defined as:

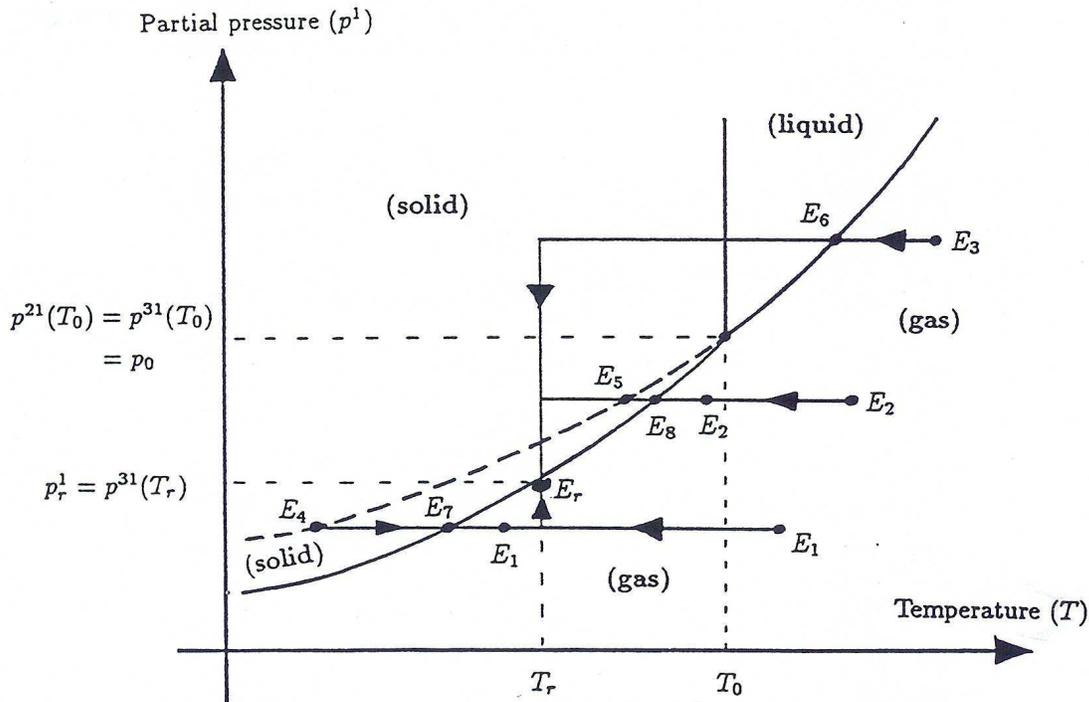


Figure 2.  $p$ - $T$  diagram with a representation of the different paths for each water component between the real states  $E_k$  ( $k = 1$  to  $8$ ) and the fixed thermodynamic reference state  $E_r$ .

- $E_1$ : water vapour at  $p^1 \leq p_r^1$  (always gaseous)  
 $E_2$ : water vapour at  $p^1, p_r^1 \leq p^1 \leq p_0$  (gas  $\leftrightarrow$  solid  $\leftrightarrow$  gas)  
 $E_3$ : water vapour at  $p^1 \geq p_0$  (gas  $\leftrightarrow$  liquid  $\leftrightarrow$  solid  $\leftrightarrow$  gas)  
 $E_4$ : supercooled liquid water at  $T \leq T_r$  (liquid  $\leftrightarrow$  solid  $\leftrightarrow$  gas)  
 $E_5$ : supercooled liquid water at  $T, T_r \leq T \leq T_0$  (liquid  $\leftrightarrow$  solid  $\leftrightarrow$  gas)  
 $E_6$ : normal liquid water at  $T \geq T_0$  (liquid  $\leftrightarrow$  solid  $\leftrightarrow$  gas)  
 $E_7$ : ice at  $T \leq T_r$  (solid  $\leftrightarrow$  gas)  
 $E_8$ : ice at  $T, T_r \leq T \leq T_0$  (solid  $\leftrightarrow$  gas).

The computations of  $(\Delta_m S^o)^k$  are somewhat long, but they are consistent since the cases  $E_{1,2,3}$ ,  $E_{4,5,6}$  and  $E_{7,8}$  respectively lead to the following expressions  $a_m^1, a_m^2$  and  $a_m^3$  for the partial moist available enthalpies:

$$a_m^0 \equiv T_r(\Delta_m S^o)^0 = b^0 \quad (13)$$

$$a_m^1 \equiv T_r(\Delta_m S^o)^1 = b^1 + (\mu_r^1 - \mu_r) = b^1 \quad (14)$$

$$a_m^2 \equiv T_r(\Delta_m S^o)^2 = b^2 + (\mu_r^2 - \mu_r) \quad (15)$$

$$a_m^3 \equiv T_r(\Delta_m S^o)^3 = b^3 + (\mu_r^3 - \mu_r) = b^3. \quad (16)$$

The result  $a_m^0$  for  $k=0$  is recalled and  $\mu_r = \mu_r^1 = \mu_r^3$  denotes the reference chemical potential of water elements in the dead state ( $\mu_r^k = h_r^k - T_r s_r^k$ ). The hypotheses  $\mathcal{H}_{1,2,4,5,6,7}$  together with the integral forms (10) and (11) of Eq. (9) have all been used to work out Eqs. (13) to (16).

### (b) Definition of $a_m$

Let us assume that  $a_m$  is an extensive state function  $a_m = m^k a_m^k$ . The subscript  $r$  denotes the moist dead state described in section 3(a). It is a passive environment represented by a saturated moist parcel at  $T_r \leq T_0 = 273.16$  K and without a condensed phase. The partial available enthalpies  $a_m^k$  are defined by Eqs. (13) to (16) where  $b^k = (h^k - h_r^k) - T_r(s^k - s_r^k)$ . Using these definitions the analytical expression of the local moist available enthalpy is

$$a_m = m^k(h^k - h_r^k) - T_r m^k(s^k - s_r^k) + m^2(\mu_r^2 - \mu_r^3). \quad (17)$$

At first sight one could note a dissymmetry, with an arbitrary importance given to liquid water through  $m^2$ ; but this equation really is symmetric with respect to water components ( $i = 1$  to 3). The two terms  $m^1(\mu_r^1 - \mu_r^3)$  and  $m^3(\mu_r^3 - \mu_r^1)$  coming from Eqs. (14) and (16) could be included in Eq. (17), but they are zero because  $\mu_r^1 = \mu_r^3$ . The only dissymmetry is the fact that ice is a more stable component than liquid water at  $T_r$ .

An alternative form can be derived using Eqs. (5) and (6) with  $\mu_r^k = h_r^k - T_r s_r^k$  to give

$$a_m = h - T_r s - m^k \mu_r^k + m^2(\mu_r^2 - \mu_r^3)$$

where the last term  $\mu_r^3$  can be replaced by  $\mu_r^1$ . The transformation (4) is then applied to  $-m^k \mu_r^k$  with  $\mu_r^3 = \mu_r^1$ , yielding

$$a_m = h - T_r s - m^0 \mu_r^0 - m^1 \mu_r^1. \quad (18)$$

From Eq. (17) one can verify that  $a_m$  is independent of any arbitrary choice for the absolute values of energy, enthalpy or entropy. Indeed the enthalpies  $h^k - h_r^k$  and the entropies  $s^k - s_r^k$  can be expressed in terms of  $T - T_r$  and  $p^k/p_r^k$ . They are respectively,  $c_p^k(T - T_r)$  and  $c_p^k \ln(T/T_r) - R^k \ln(p^k/p_r^k)$ , except for the entropy of the condensed

phases which is  $c^k \ln(T/T_r)$ ,  $k = 2$  and  $3$ . The last term  $\mu_r^2 - \mu_r^3$  in Eq. (17) corresponds to the chemical affinities related to the water vapour:  $\mathcal{A}^i = \mu^1 - \mu^i \equiv R^1 T \ln(p^1/p^i)$ ,  $i = 2$  or  $3$ . And  $\mathcal{A}_r^3 - \mathcal{A}_r^2$  yields  $\mu_r^2 - \mu_r^3 = R^1 T_r \ln\{p_r^{21}(T_r)/p_r^{31}(T_r)\}$  which only depends on  $T_r$ .

On the contrary, the values of zero-entropies are used in HH to derive the entropy temperature. Standard chemical values for enthalpy and entropy are also introduced in many technical papers in order to derive the 'standard chemical exergy' for each chemical element (see, for example, Szargut (1980); Ahrendts (1980); Morris and Szargut (1986)).

Equation (18) gives the more general definition of  $a_m$  in terms of  $h$  and  $s$ . It must be remarked that each term of this expression (i.e.  $h$ ,  $s$ ,  $\mu_r^0$  and  $\mu_r^1$ ) cannot be separately determined without assuming unnecessary agreed reference values for  $h$  and  $s$ . Indeed, even if  $h^1$ ,  $h^2$  and  $h^3$  are linked through the latent heats  $l_{ij} = h^j - h^i$ ,  $h^0$  cannot be connected with the others for lack of chemical reaction between dry air and water elements. Nevertheless, Eq. (18) is interesting in that it reveals that  $a_m$  exactly varies as  $h - T_r s$  for a closed parcel (i.e. if  $m^0$  and  $m^1$  are two constants). Moreover  $a_m$  simply varies as  $h$  for a closed parcel with adiabatic and reversible motion ( $s$  is also a constant in that case). This last property will be investigated in section 8, yielding the definition of a conservative potential temperature.

The moist available enthalpy defined by Eqs. (17) and (18) is different from the flow essergy function  $e_i + p_0 v - T_0 s - m^k \mu_0^k$  (Evans 1969 or 1980; Landau and Lifchitz 1976 §96; Livezey and Dutton 1976; Karlsson 1990). The local approach of Karlsson and the global approach of Livezey and Dutton are different from the present one because in their papers the reference state is defined with a reference pressure  $p_0^k(z)$  which varies as  $\exp(-z/H^k)$ . The reference entropy  $s_0^k(T_0, p_0^k(z))$  is not a constant, and the reference chemical potential  $\mu_0^k(z)$  is equal to  $h_0^k - T_0 s_0^k(z)$ . Equation (18) is more similar to the definition of the stationary flow availability function  $h - T_0 s - m^k \mu_0^k$  given by Evans and quoted in Ahrendts (1980), or the flow exergy  $h - T_0 s - m^k \mu_0^k(z)$  defined in Karlsson (1990), except for the term  $m^1 \mu_r^1$  in place of  $\sum_{k=1}^3 m^k \mu_0^k$ .

### (c) The components of $a_m$

In order to show in what sense  $a_m$  is a generalization of the dry function  $a_h$  (MM),  $a_m$  must be further transformed. Starting from Eq. (17) the first two terms  $m^k(h^k - h_r^k) = c_p(T - T_r)$  and  $m^k T_r(s^k - s_r^k)$  can be transformed with (4) to give respectively

$$\begin{aligned} & \{m^0 c_p^* - m^2(c_p^1 - c^2) - m^3(c_p^1 - c^3)\} T_r X \\ & \{m^0 c_p^* - m^2(c_p^1 - c^2) - m^3(c_p^1 - c^3)\} T_r \ln(1 + X) - m^0 R^0 T_r \ln(p^0/p_r^0) - \\ & \qquad \qquad \qquad - m^1 R^1 T_r \ln(p^1/p_r^1). \end{aligned}$$

The specific heats  $c_p = m^k c_p^k$  and  $c_p^* = c_p^0 + r^1 c_p^1$  have been introduced as well as the variable  $X = (T - T_r)/T_r$ . The last term of Eq. (17) is computed as  $\mu_r^2 - \mu_r^3 = R^1 T_r \ln(p_r^{21}/p_r^{31})$ . A new form is then obtained for  $a_m$  using the function  $\mathcal{F}(X) = X - \ln(1 + X)$ :

$$\begin{aligned} a_m = & m^0 c_p^* T_r \mathcal{F}(X) - [m^2(c_p^1 - c^2) + m^3(c_p^1 - c^3)] T_r \mathcal{F}(X) + \\ & + m^0 R^0 T_r \ln(p^0/p_r^0) + m^1 R^1 T_r \ln(p^1/p_r^1) + m^2 R^1 T_r \ln(p_r^{21}/p_r^{31}). \end{aligned}$$

The last step is to use the property  $p_r^{31} = p_r^1$  together with Eq. (11) to transform the last term and the terms between square brackets into an expression involving pressures and

latent heats

$$-(m^2 l_{21} + m^3 l_{31}) (1 - T_r/T) + (m^2 + m^3) R^1 T_r \ln(p^1/p_r^{31}) - \\ - [m^2 R^1 T_r \ln(p^1/p_r^{21}) + m^3 R^1 T_r \ln(p^1/p_r^{31})]$$

where the last term between square brackets is zero according to Eq. (8).

After these manipulations one obtains the separation of  $a_m$  into three moist energy components:

$$a_m = a_T + a_l + a_p, \text{ with:} \quad (19)$$

$$a_T = m^0 c_p^* T_r \mathcal{F}(X) \geq 0 \quad (20)$$

$$\text{where } \mathcal{F}(X) \geq 0 \quad (21)$$

$$a_l = -(m^2 l_{21} + m^3 l_{31}) \left(1 - \frac{T_r}{T}\right) \quad (22)$$

$$a_p = m^0 R^0 T_r \ln(p^0/p_r^0) + m^1 R^1 T_r \ln(p^1/p_r^{31}). \quad (23)$$

The dry case is defined by  $m^1 = m^2 = m^3 = m^t = 0$ ,  $m^0 = 1$ ,  $p^0 = p$  and  $p_r^0 = P_r$  where  $P_r$  is the reference pressure introduced in the dry available enthalpy approach (see the beginning of section 3(a)). In the dry case  $a_m$  reduces to  $a_h = a_m^0 = b^0$ , and both  $a_T$  and  $a_p$  are the same as the temperature and pressure components already defined in MM ( $c_p^* \rightarrow c_p^0$  in Eq. (20)). The functions  $a_T$  and  $a_p$  in Eqs. (20) and (23) are called the moist temperature and pressure components of  $a_m$ .

The *latent* component  $a_l$  is a new one. It is different from zero only if there is a condensed phase inside the parcel (i.e.  $m^2 \neq 0$  or  $m^3 \neq 0$ ). Since  $l_{21} \geq 0$  and  $l_{31} \geq 0$ , the sign of  $a_l$  is the same as  $-(T - T_r)$ . One can recognize in Eq. (22) the so-called efficiency factor  $\eta_T = 1 - T_r/T$  introduced in the available and static entropic energy theories and also used in the dry available enthalpy approach. But in the present moist theory  $\eta_T$  appears directly in the formulation of the latent-energy component, whereas it was involved in the previous studies only at the stage of the prognostic equations for the energy components. It should be noticed that, from Eqs. (20) to (22),  $a_T$  and  $a_l$  vanish if  $T = T_r \Leftrightarrow \mathcal{F}(X) = 0 \Leftrightarrow \eta_T = 0$ .

#### 4. NUMERICAL EVALUATIONS

The local available enthalpy function  $a_m$  was separated in section 3(c) into the three components  $a_T$ ,  $a_l$  and  $a_p$ . They are natural generalizations of the temperature and pressure components derived for the dry case, namely  $(a_T)_d = c_p^0 T_r \mathcal{F}(X)$  and  $(a_p)_d = R^0 T_r \ln(p^0/P_r)$ . The latent heat part  $a_l$  does not exist in the dry case.

In this section an attempt is made to estimate the orders of magnitudes of these moist components. A representative vertical profile of a cumulus cloud with liquid cloud water is used (see Fig. 3). There is neither ice nor precipitable liquid water. Air is saturated above the 850 hPa level. The profiles of the mixing ratios of water vapour  $r^1$ , cloud liquid water  $r^2$ , as well as the total mixing ratio of water  $r^t = r^1 + r^2$  are shown in Fig. 4. Values of  $r^1$  and  $r^t$  are about  $10 \text{ g kg}^{-1}$ , and values of  $r^2$  are about  $1.5 \text{ g kg}^{-1}$ .

The impact of moisture on the definition of available enthalpy is firstly the appearance of a new term  $a_l$ , secondly the modification of the dry components by terms depending on  $r^t$  ( $a_T$  and  $a_p$ ). The moist components can be rewritten as  $a_T = m^0 \{(a_T)^0 + (a_T)^t\}$  and

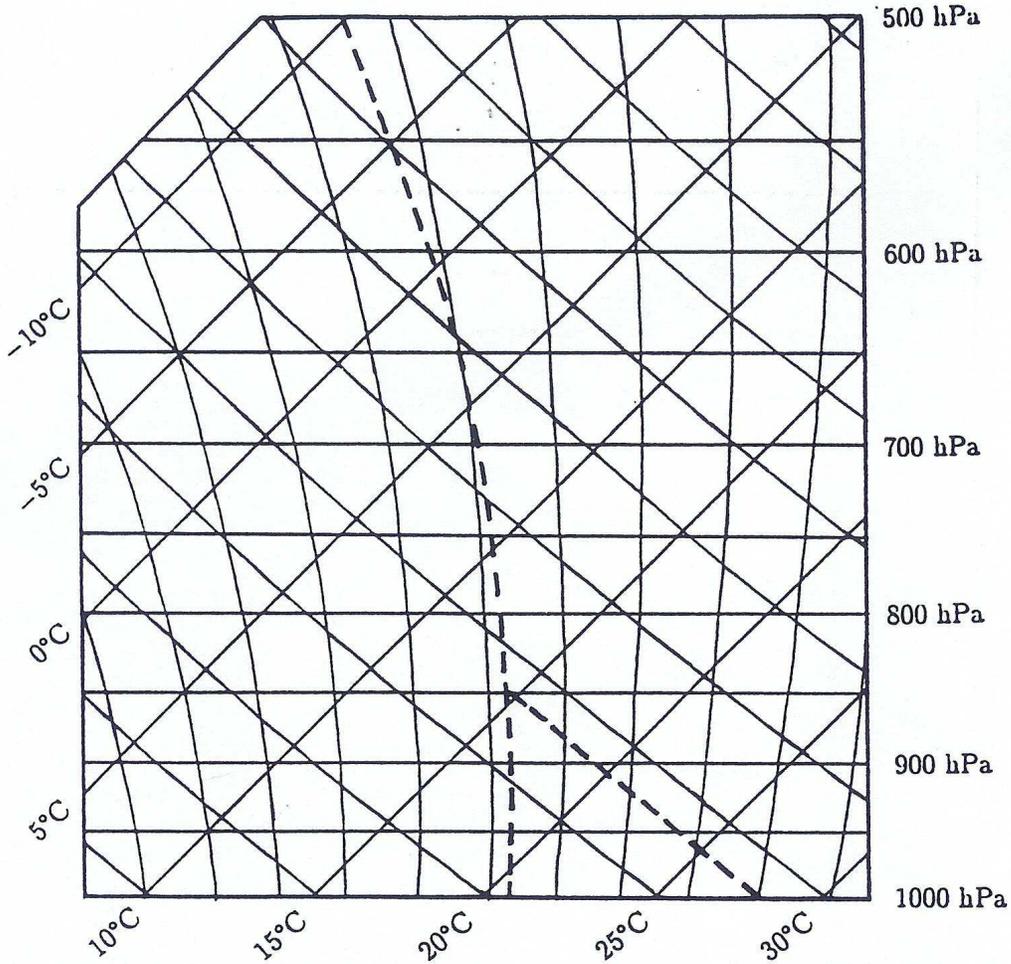


Figure 3. A representative vertical profile of a cumulus (dew points and state curve on a Skew-emagram for  $p \geq 500$  hPa).

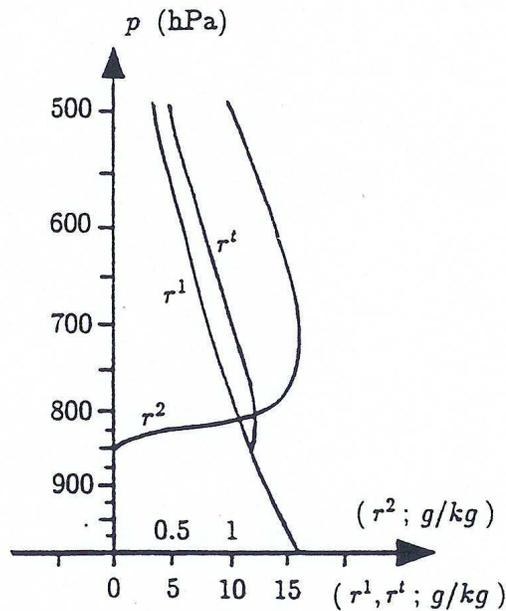


Figure 4. Profiles of the mixing ratios of water vapour,  $r^1$ , and cloud liquid water,  $r^2$ , with the corresponding profile of total mixing ratio of water,  $r^t = r^1 + r^2$ . Note that different scales are used for  $r^2$  and  $r^1$  and  $r^t$ .

$a_p = m^0\{(a_p)^0 + (a_p)^1\}$ , with

$$(a_T)^0 = c_p^0 T_r \mathcal{F}(X), \quad (a_T)^1 = r^1 c_p^1 T_r \mathcal{F}(X),$$

$$(a_p)^0 = R^0 T_r \ln(p^0/p_r^0), \quad (a_p)^1 = r^1 R^1 T_r \ln(p^1/p_r^1).$$

The dead state is defined by the constants  $T_r = 251$  K,  $p_r^1 = 0.85$  hPa and  $p_r^0 = 369.15$  hPa.

The vertical profiles of  $(a_T)^0$  is depicted on Fig. 5. (It is similar to the lower part,  $p \geq 500$  hPa, of Fig. 6(a) in MM.) The profile of the water pressure component  $(a_p)^1$  is also shown in Fig. 5. The values of  $(a_p)^1(p)$  are greater than the values of the dry-air temperature component  $(a_T)^0(p)$ . The moist correction to  $a_p$  is thus an important one. It can be as high as  $5 \text{ kJ kg}^{-1}$  and the ratio  $(a_p)^1/(a_p)^0$  (not shown) is about 7% for  $p \geq 700$  hPa.

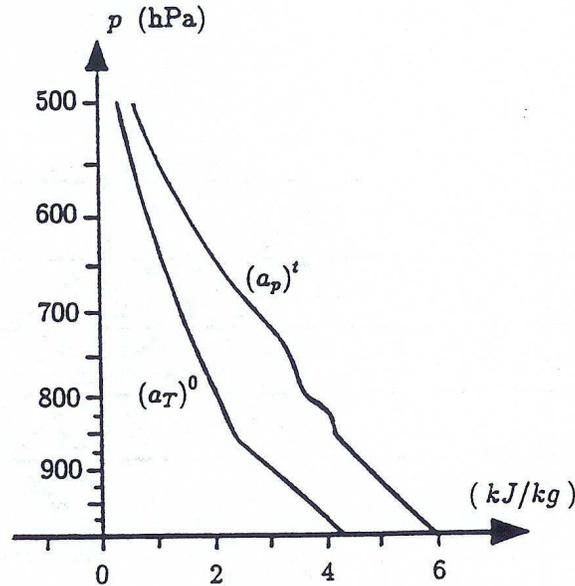


Figure 5. Vertical profiles of  $(a_T)^0$  and  $(a_p)^1$ .

The vertical profiles of  $a_l$  and  $(a_T)^1$  are depicted on Fig. 6. The values of  $a_l(p)$  are about  $-0.4 \text{ kJ kg}^{-1}$ , one order of magnitude less than  $(a_T)^0(p)$  or  $(a_p)^1(p)$ , but in fact it is an important contribution to the available enthalpy budget because  $0.4 \text{ kJ kg}^{-1}$  is a typical value for the dry baroclinicity component (see Fig. 6(b) of Marquet (1991).) This result still holds with the isobaric average of the latent component ( $a_l$  is always negative and the average value is close to the order of magnitude).

As for the values of  $(a_T)^1(p)$ , they do not exceed  $0.1 \text{ kJ kg}^{-1}$ —which is small in comparison with all other components—but the ratio  $(a_T)^1/(a_T)^0$  is greater than 2% for  $p \geq 700$  hPa and it could be important to take  $(a_T)^1$  into account in a fine exergetic budget.

These evaluations are not thorough however. The impacts of the ice cloud component and the precipitable liquid water (or ice) should have been investigated. The precipitable mixing ratio can indeed be as high as  $8 \text{ g kg}^{-1}$ , a value which is five times the liquid cloud water content  $r^2$ . However, as explained in section 2, liquid precipitation cannot be taken into account in the present exergetic analysis ( $\mathcal{H}_1$ ). The effects of the presence of ice, either the cloud or the precipitable part, are not studied in the present paper. From  $\mathcal{H}_1$  solid precipitation is indeed outside the scope of this exergy approach, although a profile of cloud ice crystals could have been considered.

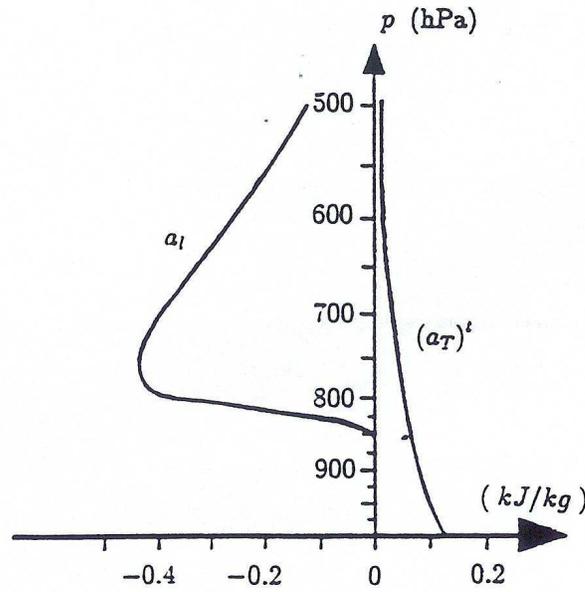


Figure 6. Vertical profiles of  $(a_l)$  and  $(a_T)^l$ .

The preliminary conclusion from these results is that the use of the moist available enthalpy concept could prove to be useful in analyses of mesoscale systems where conversions involving the terms  $a_l$ ,  $(a_T)^l$  or  $(a_p)^l$  could be of the same magnitude as the other main conversions.

5. THERMODYNAMIC EQUATIONS

To study the conversions that occur in local, mesoscale or global systems, the local budget of  $a_m$  must be related to the local budgets of the other forms of energy (potential, kinetic). The objective of this section is thus to derive an analytical expression for  $D(a_m)/Dt$ , with  $D/Dt$  obtained from section 2 and  $a_m$  from section 3(b) in terms of  $h$  and  $s$ . The knowledge of the first (for  $h$ ) and second (for  $s$ ) laws of thermodynamics can thus serve this purpose.

Using  $\mathcal{H}_{1,\dots,9}$ , and following De Groot and Mazur (1962), these laws can be rewritten as

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} + (\varepsilon + q) - \frac{1}{\rho} \mathbf{J}^k \cdot \nabla(h^k) + h^k \frac{D_e}{Dt}(m^k) \tag{24}$$

$$T \frac{Ds}{Dt} = (\varepsilon + q) - \frac{1}{\rho} \mathbf{J}^k \cdot \nabla(h^k) + T s^k \frac{D_e}{Dt}(m^k) - \mu^k \frac{D_i}{Dt}(m^k) \tag{25}$$

where the positive Rayleigh function  $\varepsilon = (\rho)^{-1} (\sigma \cdot \nabla) \cdot \mathbf{v}$  is the specific dissipation of mechanical energy ( $\sigma$  is the viscous stress tensor), and where  $q$  is the specific heating rate:  $q = -\rho^{-1} \nabla \cdot \mathbf{J}_{iq}$ . The inner heat flux,  $\mathbf{J}_{iq}$ , is caused by conduction and radiation, but not by changes of phase which are explicitly taken into account by internal changes in enthalpy:  $D_i(h^k)/Dt$ .

The prognostic equations for the barycentric velocity  $\mathbf{v}$ , the specific kinetic energy of the barycentric motion ( $e_K = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} / 2$ ) and the specific gravitational energy ( $e_G = \Phi =$

gz) are

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla(p) + \frac{1}{\rho}\nabla\cdot(\sigma) + \mathbf{g} - f\mathbf{k} \times \mathbf{v} + \mathbf{F}_r \quad (26)$$

$$\frac{De_K}{Dt} = +\mathbf{g}\cdot\mathbf{v} - \frac{1}{\rho}\mathbf{v}\cdot\nabla(p) - \varepsilon + \frac{1}{\rho}\nabla\cdot(\sigma\cdot\mathbf{v}) + \mathbf{v}\cdot\mathbf{F}_r \quad (27)$$

$$\frac{De_G}{Dt} = -\mathbf{g}\cdot\mathbf{v} \quad (28)$$

where  $\mathbf{F}_r$  represents external forces like friction and where  $f$  is the Coriolis parameter.

The local-budget equation for  $a_m$  can then be obtained using Eq. (18) with  $D(\mu_r^0)/Dt = D(\mu_r^1)/Dt = 0$

$$\frac{D(a_m)}{Dt} = \frac{D(h)}{Dt} - T_r \frac{D(s)}{Dt} - \mu_r^0 \frac{D(m^0)}{Dt} - \mu_r^1 \frac{D(m^1)}{Dt}.$$

With the use of Eqs. (24) and (25), one obtains

$$\begin{aligned} \frac{D(a_m)}{Dt} &= (\rho)^{-1} \frac{D(p)}{Dt} + \eta_T(\varepsilon + q) - \eta_T(\rho)^{-1} \mathbf{J}^k \cdot \nabla(h^k) + \\ &+ (h^k - T_r s^k) \frac{D_e(m^k)}{Dt} + (T_r/T) \mu^k \frac{D_i(m^k)}{Dt} - \left[ \mu_r^0 \frac{D(m^0)}{Dt} + \mu_r^1 \frac{D(m^1)}{Dt} \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

The first term of the second line of Eq. (29) is the sum  $(h^k - T_r s^k)\{D(m^k)/Dt - D_i(m^k)/Dt\}$ . The second term is the sum  $(T_r/T)(h^k - T_r s^k) D_i(m^k)/Dt$ . The terms between the square brackets can also be transformed using Eq. (4) applied to  $\mu_r^k = h^k - T_r s_r^k$  to give the sum  $-(h_r^k - T_r s_r^k) D(m^k)/Dt + (\mu_r^2 - \mu_r^1) D(m^2)/Dt$ , where the property  $\mu_r^3 \equiv \mu_r^1$  is used to cancel the term containing  $D(m^3)/Dt$ . Adding these three sums leads to the budget equation for  $a_m$ .

$$\begin{aligned} \frac{Da_m}{Dt} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \mathbf{v}\cdot\nabla(p) + \eta_T(\varepsilon + q) - \eta_T \frac{1}{\rho} \mathbf{J}^k \cdot \nabla(h^k) + \\ &+ (h^k - h_r^k) \frac{D(m^k)}{Dt} - \eta_T h^k \frac{D_i(m^k)}{Dt} + (\mu_r^2 - \mu_r^1) \frac{D(m^2)}{Dt}. \end{aligned} \quad (30)$$

Similarly to Eq. (17) all the terms in Eq. (30) can be computed independently of any choice for the absolute value of  $h$  or  $s$ . This is true for  $\nabla(h^k) = c_p^k \nabla(T)$ ,  $h^k - h_r^k = c_p^k (T - T_r)$  and  $\mu_r^2 - \mu_r^1 = R^1 T_r \ln(p_r^{21}/p_r^{31})$ . It is also true for the sum  $h^k D_i(m^k)/Dt$  which only depends on the latent heats ' $l_{\alpha\beta}$ ' and the chemical changes of  $\alpha$  element into  $\beta$  element ' $D_i(m_\alpha^\beta)/Dt$ ':

$$h^k \frac{D_i(m^k)}{Dt} = \frac{1}{2} l_{\alpha\beta} \frac{D_i(m_\alpha^\beta)}{Dt} = l_{21} \frac{D_i(m_2^1)}{Dt} + l_{32} \frac{D_i(m_3^2)}{Dt} + l_{31} \frac{D_i(m_3^1)}{Dt} \quad (31)$$

where more precisely

$$\left. \begin{aligned} \frac{D_i(m^1)}{Dt} &= + \frac{D_i(m_2^1)}{Dt} + \frac{D_i(m_3^1)}{Dt} \\ \frac{D_i(m^2)}{Dt} &= - \frac{D_i(m_2^1)}{Dt} + \frac{D_i(m_3^2)}{Dt} \\ \frac{D_i(m^3)}{Dt} &= - \frac{D_i(m_3^2)}{Dt} - \frac{D_i(m_3^1)}{Dt} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

It must be remarked that Eq. (30) is a symmetric equation with respect to the water components  $k = 1$  to 3. The only dissymmetry lies in the choice of a dead state saturated with respect to ice ( $\mu_r^3 \equiv \mu_r^1$ ). The consequence is the missing of the term  $(\mu_r^3 - \mu_r^1)D(m^3)/Dt$ .

Equation (24) is the equation for the enthalpy; but neither enthalpy nor energy can be computed numerically for lack of knowledge of their absolute values, contrary to the temperature which is the physical associated concept and which is easy to measure. After some manipulations, using Eqs. (1) to (3) and the property  $\nabla(h^k) = c_p^k \nabla(T)$ , an equation for the temperature can be derived from Eq. (24), yielding

$$c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} + (\varepsilon + q) - \frac{1}{\rho} c_p^k \mathbf{J}^k \cdot \nabla(T) - h^k \frac{D_i(m^k)}{Dt}. \quad (33)$$

According to Eq. (31) the last term of this equation can be computed and, as expected, Eq. (33) is a well-founded prognostic equation for  $T$ .

## 6. LOCAL PROPERTIES

### (a) A local energy cycle

The local energy cycle will not be investigated in its more general form. Some hypotheses will be made in order to simplify the formulae. The aim in this first study is to forget the contributions due to various irreversibilities.

After some manipulation the three terms on the second line of Eq. (29) can be put in the form

$$(h^k - T_r s^k) \frac{D_e(m^k)}{Dt} + (\mu_r^0 - \mu_r^1) \frac{D_e(m^1)}{Dt} + \frac{T_r}{T} \left\{ (\mu^2 - \mu^1) \frac{D_i(m^2)}{Dt} + (\mu^3 - \mu^1) \frac{D_i(m^3)}{Dt} \right\}.$$

This last expression is obtained without approximation. Indeed, there is no chemical reaction between dry air and the water element, and from Eq. (1)  $D_i(m^0)/Dt = D_i(m^1)/Dt = 0$ . Another consequence is  $D(m^0)/Dt = -D(m^1)/Dt = -D_e(m^1)/Dt$ . Then the terms between square brackets of the second line of Eq. (29) can be rewritten as  $(\mu_r^0 - \mu_r^1) D_e(m^1)/Dt$ . As for the term  $(T_r/T) \mu^k D_i(m^k)/Dt$ , it can be transformed using  $D_i(m^1)/Dt = -D_i(m^2)/Dt - D_i(m^3)/Dt$ .

The parcel is now supposed to be closed and inviscid  $\sigma = 0$ ,  $\varepsilon = 0$ ,  $\mathbf{J}^k = 0 \Rightarrow \forall k: D_e/Dt(m^k) = 0$ . The first and second terms of the last expression cancel because  $D_e(m^k)/Dt = 0$ . The last terms also cancel out as far as changes of phase are reversible (i.e. if  $\mu$  is the same in each phase of the chemical reaction). Indeed, using Eqs. (32), these last terms can be rewritten as

$$\frac{T_r}{T} \left\{ (\mu^1 - \mu^2) \frac{D_i(m_2^1)}{Dt} + (\mu^2 - \mu^3) \frac{D_i(m_3^2)}{Dt} + (\mu^1 - \mu^3) \frac{D_i(m_3^1)}{Dt} \right\}$$

and if one of the  $D_i(m_\beta^\alpha)/Dt$  is not zero, the corresponding  $(\mu^\alpha - \mu^\beta)$  is zero. Therefore Eq. (30) reduces to the simplified form  $D(a_m)/Dt = \rho^{-1} D(p)/Dt + \eta_T q$ .

Under all these assumptions Eqs. (27), (28) and the simplified form of Eq. (30) yield the local energy cycle for an inviscid and closed parcel:

$$\left. \begin{aligned} D/Dt(a_m) &= \rho^{-1} \partial p / \partial t + \rho^{-1} \mathbf{v} \cdot \nabla(p) + \eta_T q \\ D/Dt(e_K) &= + \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \rho^{-1} \mathbf{v} \cdot \nabla(p) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_r \\ D/Dt(e_G) &= - \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

The terms  $-\varepsilon$  and  $\rho^{-1}\nabla\cdot(\sigma\cdot v)$  are zero in the kinetic equation according to the hypotheses of a closed and inviscid parcel. The local cycle (34) is a moist generalization of the dry available enthalpy cycle investigated in MM and, like  $a_h$  and  $a_m$ , can be considered as a moist Lagrangian energy-like quantity.

If the previous assumptions were not verified, some other terms would appear in  $D(a_m)/Dt$  and in  $D(e_K)/Dt$ . These terms would take account of irreversibilities caused by change of phase, diffusion fluxes or viscosity. Non-equilibrium thermodynamics deals with these irreversibility terms (see, for example, De Groot and Mazur 1962). A full local cycle with the five components  $\{e_G, e_K; a_T, a_p, a_i\}$  can also be obtained, separating  $a_m$  into  $\{a_T, a_p, a_i\}$  in (34).

### (b) The Bernoulli equation

Adding the three equations of (34) gives:

$$\frac{D}{Dt}(a_m + e_K + e_G) = \rho^{-1}\partial p/\partial t + \eta_T q + v\cdot F_r. \quad (35)$$

Equation (35) shows that  $a_m + e_K + e_G$  is a constant along any particular streamline of an adiabatic frictionless and reversible steady flow if the parcels are assumed to be inviscid and closed with, however, possible reversible internal changes of phase of water components inside them. Equation (35) is the moist generalization of the dry Bernoulli equation of Marquet (1991).

This moist Bernoulli equation demonstrates that, if the required assumptions are verified,  $a_m$  exactly varies as  $-(e_K + e_G)$  during the motion of the parcel. Therefore energy conversions *really occur* between the various forms  $a_m$ ,  $e_K$  and  $e_G$ .

According to the local cycle (34) a set of conversion terms is given by  $C_{(G,K)} = +g\cdot v$  and  $C_{(m,K)} = -\rho^{-1}v\cdot\nabla(p)$ , insofar as the other terms are interpreted as sources and sinks. As usual, however, this interpretation of physical conversions is not unambiguous (Johnson and Downey 1982). Other sets of conversion or source/sink terms can be defined in (34) provided the Bernoulli equation (35) remains unchanged.

## 7. INTEGRAL PROPERTIES

The objectives of this section are to derive a global conservation law verified by the total moist available enthalpy  $A_m$  and to give definitions for the two undetermined quantities  $T_r$  and  $p_r^0$ .

The local moist property  $\rho^{-1}\partial p/\partial t = D(RT)/Dt - \rho^{-1}\nabla\cdot(pv)$  holds true, provided that  $R = m^0R^0 + m^1R^1$  and  $p = p^0 + p^1$ . Starting with the integral form of this moist property together with the integral form of Eq. (35), it can be demonstrated that for an adiabatic frictionless and reversible motion of inviscid and closed atmospheric parcels:

$$\frac{d}{dt}(A_m + E_K) = \frac{d}{dt}\{H - (E_i + E_G)\}. \quad (36)$$

The velocity component normal to the earth's surface is supposed to be zero.

For a hydrostatic atmosphere and if there is no topography  $H \equiv E_i + E_G$ , but in that case  $E_K$  must be replaced in (36) by the kinetic energy of horizontal motion  $E'_K$ :

$$\frac{d}{dt}(A_m + E'_K) = 0. \quad (37)$$

Under these assumptions the global hydrostatic conservation law (37) is equivalent to the one derived by Lorenz (1955, 1967). It is a moist generalization of the dry conservation law  $d(A_h + E'_k)/dt$  derived in Marquet (1991).

Similarly to MM the temperature  $T_r$  can be defined so that  $1/T_r$  is the space-time average over the whole moist atmosphere of  $1/T$ . This choice implies that a uniform—in space and time—heating rate does not generate moist available enthalpy in space-time average. All terms in Eq. (27) which possess  $\eta_T = 1 - T_r/T$  as a multiplicative factor are subject to this property, in particular  $(\varepsilon + q)$ . The value of  $T_r$  can be estimated as 250 K.

If  $T_r$  is known, the saturating pressure  $p_r^1 = p^{31}(T_r)$  and the two energy components  $a_T$  and  $a_l$  are determined completely at each point of the atmosphere. Following MM the pressure  $p_r^0 = p_r - p^{31}(T_r)$  can then be defined so that the third energy component,  $a_p$ , cancels out by space-time averaging. In this problem the known variables are  $m^0$ ,  $m^1$ ,  $T_r$ ,  $p^0$  and  $p^1$ , and  $p_r^0$  is the unknown quantity. The value of  $p_r^0$  can be estimated as  $p_{00}/e \approx 368$  hPa.

Using Eq. (23), and the notations of the appendix, these definitions can be summarized by:

$$\frac{1}{T_r} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{\mathcal{M}} \left( \frac{1}{T} \right) \frac{dm}{M} \quad (38)$$

and

$$\ln(p_r^0) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{\mathcal{M}} \left\{ \frac{m^0}{M^0} \ln(p^0) + \frac{m^1}{M^0} \frac{R^1}{R^0} \ln(p^1/p_r^{31}) \right\} \frac{dm}{M} \quad (39)$$

where  $M^0$  is the space-time average of the water vapour concentration  $m^0$ .

## 8. THE MOIST POTENTIAL TEMPERATURE

The function  $a_m$  defined by Eq. (18) can be written in an alternative way in order to introduce a moist potential temperature denoted by  $\theta^*$ . Using a method initiated in HH the sum  $s - m^0 s_r^0 - m^1 s_r^1$  which is the entropy part of  $a_m$  can be expressed in terms of  $m^0 c_p^* \ln(\theta^*/\theta_r^*)$ , where  $c_p^* \equiv c_p^0 + r^1 c_p^1$  and  $p_{00} = 10^5$  Pa:

$$a_m = h - m^0 h_r^0 - m^1 h_r^1 - m^0 c_p^* T_r \ln(\theta^*/\theta_r^*) \quad (40)$$

with

$$\frac{\theta^*}{\theta_r^*} = \frac{T(p^0/p_{00})^{-R^0/c_p^*} (p^1/p_{00})^{-R^1 r^1/c_p^*}}{T_r(p_r^0/p_{00})^{-R^0/c_p^*} (p_r^1/p_{00})^{-R^1 r^1/c_p^*}} \exp\left(-\frac{r^2 l_{21} + r^3 l_{31}}{c_p^* T}\right). \quad (41)$$

This result is obtained starting from Eq. (18) of section 3(a) written in the form  $a_m = (h - m^0 h_r^0 - m^1 h_r^1) - T_r(m^k s^k - m^0 s_r^0 - m^1 s_r^1)$ . The enthalpy parts will not be changed. The entropy parts can be transformed using Eq. (4) applied to  $m^k s^k$ , yielding  $m^0(s^0 - s_r^0) + m^1(s^1 - s_r^1) + m^2(s^2 - s^1) + m^3(s^3 - s^1)$ . The next step is to express the various differences of entropy, with the introduction of the chemical potentials and the

latent heats for  $s^2 - s^1$  and  $s^3 - s^1$

$$s^0 - s_r^0 = c_p^0 \ln(T/T_r) - R^0 \ln(p^0/p_r^0)$$

$$s^1 - s_r^1 = c_p^1 \ln(T/T_r) - R^1 \ln(p^1/p_r^1)$$

$$s^2 - s^1 = (\mu^1 - \mu^2)/T - (h^1 - h^2)/T = R^1 \ln(p^1/p^{21}) - l_{21}/T$$

$$s^3 - s^1 = (\mu^1 - \mu^3)/T - (h^1 - h^3)/T = R^1 \ln(p^1/p^{31}) - l_{31}/T.$$

The moist available enthalpy becomes

$$\frac{a_m}{T_r} = \frac{h - m^0 h_r^0 - m^1 h_r^1}{T_r} - m^0 c_p^* \ln(T/T_r) - m^0 R^0 \ln(p^0/p_r^0) - m^0 r^1 R^1 \ln(p^1/p_r^1) - \\ + m^0 (r^2 l_{21} + r^3 l_{31})/T + R^1 [m^2 \ln(p^1/p^{21}) + m^3 \ln(p^1/p^{31})].$$

The terms between the square brackets are zero according to Eq. (8) and the result is then obtained because Eqs. (40) and (41) are just another way of writing it using logarithms and exponentials.

The quantity  $\theta^*$  is analogous from (41) to the entropic temperature  $\theta_s$  of HH, while  $\theta^*$  seems to generalize the ice liquid potential temperature  $\theta_{il}$  of Tripoli and Cotton (1981), provided that  $\theta_r^*$  is associated with the denominator of (41) and if  $\theta^*$  is the product of the numerator and the exponential term.

Using the present notations,  $\theta_s$  is defined in HH by  $s = m^0 s_r^0 + m^1 s_r^1 + m^0 (c_p^0 + r^1 c_p^1) \ln(\theta_s/T_r)$ . In this study,  $\theta^*$  is similarly related to the entropy by  $s = m^0 s_r^0 + m^1 s_r^1 + m^0 (c_p^0 + r^1 c_p^1) \ln(\theta^*/\theta_r^*)$ . As noted in HH, conceptual problems could arise with the  $\theta_s$  formulation if liquid water is not present in the moist parcel (i.e. if  $r^2 = 0$  but  $r^1 = r^1 + r^3 \neq 0$ ). Indeed it could be difficult to interpret the terms  $m^1 s^2$  and  $r^1 c_p^2$  in this case, whereas in the various terms of (40) and (41) only the water vapour element which is always present is involved through  $m^1 h_r^1$ ,  $m^1 s_r^1$  and  $r^1 c_p^1$ . This is more consistent.

The advantage of introducing  $\theta^*$  by (40) lies in a property already mentioned in section 3(b). For an adiabatic ( $q = 0$ ) and reversible ( $(\mu^\alpha - \mu^\beta) D_i(m_\beta^a)/Dt = 0$ ) motion of an inviscid ( $\varepsilon = 0$ ) and closed ( $D_c(m^k)/Dt = 0$  and  $J^k = 0$ ) parcel:  $D(a_m - h)/Dt = -T_r D(s)/Dt = 0$ . This property can be derived from Eqs. (24) and (30) together with the remarks made at the beginning of section 6(a):

$$0 = \frac{T}{T_r} \frac{D(a_m - h)}{Dt} = -(\varepsilon + q) + \frac{1}{\rho} J^k \nabla(h^k) - T s^k \frac{D_c(m^k)}{Dt} + \frac{T}{T_r} (\mu_r^0 - \mu_r^1) \frac{D_c(m^1)}{Dt} + \\ + \left\{ (\mu^1 - \mu^2) \frac{D_i(m_2^1)}{Dt} + (\mu^2 - \mu^3) \frac{D_i(m_3^2)}{Dt} + (\mu^1 - \mu^3) \frac{D_i(m_3^1)}{Dt} \right\}. \quad (42)$$

For such a motion,  $a_m - h$ ,  $m^0 h_r^0 + m^1 h_r^1$ ,  $m^0 c_p^* T_r$  and  $\theta_r^*$  are all constants and one can deduce from Eqs. (40) to (42) the conservation of

$$\theta^* = T \left( \frac{p^0}{p_{00}} \right)^{-R^0/c_p^*} \left( \frac{p^1}{p_{00}} \right)^{-R^1 r^1/c_p^*} \exp \left( -\frac{r^2 l_{21} + r^3 l_{31}}{c_p^* T} \right) \quad (43)$$

during the motion of the parcel. This conservative property holds whatever the state of the parcel or its evolution with time (saturated or not, with liquid water or ice). The quantity  $\theta^*$  can be called the moist potential temperature associated with the moist entropy,  $s$ , and with the moist available enthalpy,  $a_m$ .

## 9. CONCLUDING REMARKS

In this paper the moist available enthalpy  $a_m$  is defined as a local exergy-like function. The concept of potential change in total entropy has been used to generalize the dry

available enthalpy  $a_h$  to the moist atmosphere case, different from the real exergy approach where a Kullback function can be used. A moist reference dead state is introduced to define  $a_m$ , but the name 'reference' does not here have the same meaning as it is understood in the meteorological approach of available energy. It is not a reference state which could be constructed from a given state of the atmosphere neither to minimize the total moist enthalpy (Lorenz), nor to maximize the total entropy with some constraints (Dutton). It is a chemically stable local state, a passive environment, and any parcel of the real atmosphere can reach this reference dead state separately from each other.

The mathematical expression of  $a_m$  is simple and analytical, this corresponds to Lorenz's (1978, 1979) demand. In fact it is possible to put  $a_m$  into various synonymous forms, such as Eqs. (17), (18), (19) and (40). Each of these forms yields a special property satisfied by  $a_m$ . Equation (17) means that  $a_m$  is independent of any arbitrary choice for the absolute values of energy, enthalpy or entropy functions. Equation (18) shows that  $a_m$  is similar to what is called flow-exergy in thermodynamics. Equation (19) is the separation of  $a_m$  into the three components  $a_T$ ,  $a_l$  and  $a_p$ . These components are the generalizations of the same components already defined with the dry available enthalpy, except for the latent part,  $a_l$ , which is a new one. Eq. (40) serves as an introduction for the moist potential temperature,  $\theta^*$ , which satisfies conservative properties.

Moreover, using the local-state theory as moist thermodynamics, the local function  $a_m$  leads to:

- (i) a moist Bernoulli law satisfied by  $a_m + e_G + e_K$ ;
- (ii) a moist local energy cycle involving  $a_m$ ,  $e_G$  and  $e_K$ ; and
- (iii) a moist integral hydrostatic conservative property satisfied by  $A_m + E'_K$ .

Another property is that  $a_m$ , like  $a_h$  in the dry study (Marquet 1991), is only partially convex. Indeed, only  $\mathcal{F}(X)$  and  $a_T$  are positive and convex in  $X$ . On the contrary, for an ideal gas, the exergy function  $\{e_i - (e_i)_r\} + p_r\{(\rho)^{-1} - (\rho_r)^{-1}\} - T_r(s - s_r)$  is convex since it can be rewritten as the sum of two terms depending on the function  $\mathcal{F}(X) = X - \ln(1 + X)$ :  $c_v T_r \mathcal{F}(T/T_r - 1) + RT_r \mathcal{F}(\rho_r/\rho - 1)$ . The possibility of cancelling out the integral of  $a_p$  is used in this study to define the value of  $p_r$ , it is not possible to have this result with a convex function.

The purpose of the present paper is to show that the exergy-like function  $a_m$  verifies *at the same time* all the properties recalled in this section. It is a general thermodynamic quantity which was not easy to guess from the two laws of thermodynamics, although the moist version (Eqs. (19) to (23)) requires only modest modification of the expression for the dry case.

The author is aware of the theoretical nature of the present paper. At this point numerical evaluations of the various concepts and functions introduced in this study must still be realized with case studies, for instance for an open moist synoptic-scale system. It is a knowledge of the conversion terms which would be the more revealing of the interest of this exergetic analysis. An attempt is, however, made in section 4 to estimate the orders of magnitude of the moist available enthalpy components with a vertical profile that simulates a cumulus cloud. It is found that the moist contributions are important in comparison with the dry version. The results of a synoptic-scale study using dry and moist versions of the available enthalpy concept will be presented in a future paper. The dry and moist exergy cycles will be applied with the hydrostatic assumption, stressing the problem of the various energy conversions between isobaric layers of an open limited atmospheric domain, including the study of boundary fluxes.

The various results derived in this paper can, however, be applied from now on. The first step is to determine the two constants  $T_r$  and  $p_r$  according to the definitions (38)

and (39). It is also possible to use prescribed realistic values such as 251 K and 370 hPa. The moist available enthalpy components can then be computed from Eqs. (19) to (23). The budget equation for  $a_m$  can be studied starting from Eq. (30), or with the suitable assumptions from the simplified Eq. (34). The simplified moist available enthalpy cycle is not very different from other enthalpy cycles and it is not very interesting in this form, except it was necessary to demonstrate that this cycle exists with the moist formulation. On the contrary the Bernoulli equation (35) can be useful in order to develop some qualitative or quantitative arguments such as Convective Available Potential Energy considerations or Carnot heat-engine analogy applied to convection or cyclone problems for instance. Finally, the conservative properties of the moist potential temperature defined by Eqs. (40), (41) and (43), which solely come from the second law of thermodynamics, can serve as accurate air-mass analysis.

On a more general point of view, it could be interesting to find a function of statistical physics similar to the Kullback function in order to provide another consistent physical meaning to  $a_m$ . It would also be worth taking into account precipitation which falls at  $T'_w \neq T$  in unsaturated air. This implies generalizing  $a_m$  using, for instance, thermodynamics of a thermally heterogeneous medium. Finally, we may ask whether these moist functions could be used as moist prognostic variables in numerical models dealing with liquid water or ice.

#### ACKNOWLEDGEMENTS

This work has been partially performed during a two-year post-engineering-school stay at the Laboratoire de Météorologie Dynamique, Ecole Polytechnique, France. I thank Dr D. L. Cadet for his support during this study and I am also grateful to J. F. Geleyn and J. F. Royer for their helpful suggestions. Thanks are also due to R. P. Pearce and the anonymous reviewer for their constructive comments.

#### APPENDIX

##### *General*

The subscript r denotes the values in the reference dead state (like in  $p_r$  and  $T_r$ ). The subscripts or superscripts  $i, j, k, \alpha$  and  $\beta$  are used to denote partial values: 0 for dry air, 1 for water vapour, 2 for liquid water (stable or supercooled) and 3 for ice. When they are repeated twice in two different terms, these subscripts or superscripts represent an implicit sum over the values 0 to 3 (for example,  $a_m = m^k a_m^k = \sum_{k=0}^3 m^k a_m^k$ ).

##### *Basic thermodynamics*

$T, p, \theta$	Temperature, total pressure, potential temperature
$h, e_i, s$	Specific enthalpy, internal energy, entropy
$H, E_i, S$	Integrated forms of $h, e_i, s$
$\rho^k, \rho = \sum_{k=0}^3 \rho^k$	Partial and total densities
$v = 1/\rho$	Specific volume
$m^k = \rho^k/\rho$ ( $k = 0$ to 3)	Concentrations
$m^t = m^1 + m^2 + m^3$	Total concentration of the water element
$r^k = m^k/m^0$ ( $k = 1$ to 3)	Mixing ratios
$r^t = r^1 + r^2 + r^3$	Total mixing ratio of the water element
$p^0, p^1$	Partial pressures for dry air and water vapour ( $p = p^0 + p^1$ )

$R^i$  ( $i = 0$  and  $1$ )  
 $c_p^j, c_v^j$  ( $j = 0$  to  $3$ )

$c_p = m^k c_p^k$   
 $c_p^* = c_p^0 + r^1 c_p^1$   
 $T_{tr} = 273.16 \text{ K}$   
 $l_{ij} = h^j - h^i$   
 $T_w'$   
 $p^{il}(T)$

$\mu^k = h^k - Ts^k$   
 $\mathcal{A}^i = \mu^1 - \mu^i$

Gas constants:  $R = m^0 R^0 + m^1 R^1$

Specific heats at constant pressure and volume.

For condensed phases  $j = 2$  and  $j = 3$ :  $c_p^j = c_v^j = c^j$

Total specific heats at constant pressure

A notation used in section 7 (and in section 3(c))

Triple-point temperature

Latent heat ( $i$  to  $j$  transformation)

Wet-bulb temperature

Saturating pressure over liquid water ( $i = 2$ ) and ice ( $i = 3$ )

Chemical potentials of the elements  $k = 0$  to  $3$

Chemical affinities related to  $i$  form ( $i = 2$  and  $3$ ) and water vapour

### Basic kinematics

$e_K, e_G$

Specific kinetic and potential energy

$E_K, E_G$

Integrated forms of  $e_K, e_G$

$E'_K$

Integrated kinetic energy of the horizontal wind

$z, \omega$

Upward distance, vertical wind component in isobaric coordinate

$\bar{\omega}; \bar{T}$

Isobaric average of  $\omega$  and  $T$

$\partial/\partial t, D/Dt$

Eulerian and Lagrangian derivative

$d/dt$

Natural time derivative (function of  $t$  only)

$D_c/Dt, D_i/Dt$

External and internal Lagrangian change in time

$D_i(m_\alpha^\beta)/Dt$

Chemical Lagrangian rate of change of  $\alpha$  into  $\beta$  element

$\mathbf{v} = \rho^k \mathbf{v}^k / \rho$

Barycentric velocity of the parcel

$\mathbf{v}^k$

Partial velocity of the element  $k$  in the parcel

$\mathbf{J}^k$

Diffusion flux of the element  $k$

$\mathcal{J}^k$

Phase flux of the element  $k$

$\mathbf{J}_{iq}$

The inner heat flux

$\mathbf{q} = -(\rho)^{-1} \nabla \cdot \mathbf{J}_{iq}$

The specific heating rate

$\sigma$

Viscous stress tensor

$\varepsilon = (\rho)^{-1} (\sigma \cdot \nabla) \cdot \mathbf{v}$

Positive Rayleigh function

$\Phi$

Geopotential

$\mathbf{g}$

The gravity force

$\mathbf{k}$

The unit upward vertical vector

$g = \mathbf{g} \cdot \mathbf{k}$

Magnitude of gravity

$\mathbf{F}_r$

External forces

$C_{(G,K)}, C_{(m,K)}$

Conversion terms between  $e_G$  and  $e_K$ , and  $a_m$  and  $e_K$  respectively

### Exergy theory

$p_r = p_r^0 + p_r^1, T_r$

Reference dead state pressures and temperature (moist case)

$P_r$

Reference pressure for the dry enthalpy case

$a_h, a_m$

Specific dry and moist available enthalpy

$a_m^k = T_r (\Delta_m S^o)^k, k = 0$  to  $3$

Partial moist available enthalpy ( $a_m = m^k a_m^k$ )

$b^k = (h^k - h_r^k) - T_r (s^k - s_r^k)$

Notation used in section 3(a)

$a_e$

Specific available energy

$a_T, a_l, a_p$	Specific temperature, latent and pressure components of $a_m$
$A_h, A_m, A_T, A_l, A_p$	Integrated forms of $a_h, a_m, a_T, a_l, a_p$
$T_0 \Sigma$	Static entropic energy
$\theta^*; \theta_r^*$	Moist potential temperatures (real and reference values)
$\theta_S$	Entropic temperature (Hauf and Höller 1987)
$\mathcal{F}(X) = X - \ln(1 + X)$	The positive function used in the temperature moist component $a_T$ (section 3(c)): $X = T/T_r - 1 = (T - T_r)/T_r$
$\eta_T = 1 - T_r/T = (T - T_r)/T$	Efficiency factor
$R_{\max}$	Maximum delivered work or available energy (Landau and Lifchitz 1976, §20, except they use $R_{\min}$ to denote the maximum delivered work as a minimum received work)
$T_0$	Temperature of the thermostat
$T_1$	Equilibrium temperature used in the definition of $a_e$ see section 3(a)
$\Delta_1 S_t$ and $\Delta_2 S_t$	Two changes in total entropy used in the definition of $a_e$ , see section 3(a)
$\Delta S_t = R_{\max}/T_0$	Difference in total entropy between the real state and the associated equilibrium state of temperature $T_0$ (Landau and Lifchitz 1976, §20)
$(E_t)$	Total energy (for a unit mass parcel plus a thermostat)
$(S_t)$	Total entropy (for a unit mass parcel plus a thermostat)
$\Delta S$	Change in total entropy (for any process involving the system 'unit mass parcel plus thermostat')
$(S_t)_{\text{eq}}$	Equilibrium curve
$\Delta_d S^o$	Dry potential change in total entropy
$\Delta_m S^o = m^k (\Delta_m S^o)^k$	Moist (total, partial for $k = 0$ to 3) potential change in total entropy.
<i>Other quantities</i>	
$p_{00} = 10^5 \text{ Pa}$	Conventional pressure
$\mathcal{H}_n$	Label for the hypothesis number $n$
$H^k$	Equivalent height
$t_2, t_1, \Delta t = t_2 - t_1$	Times, a time interval
$M^0$	Space-time average of $m^0$
$dm, M$	Element of mass, mass of the atmosphere
$\mathcal{M}$	Mass integrating domain of the atmosphere
$\psi$	Dummy specific function.

## REFERENCES

- Ahrendts, J. 1980 Reference states. *Energy*, 5, 667-677
- Blackburn, M. 1983 'An energetic analysis of the general atmospheric circulation'. Department of Meteorology thesis. University of Reading
- Brennan, F. E., Vincent, D. G. 1980 Zonal and eddy components of the synoptic-scale energy budget during intensification of hurricane Carmen (1974). *Mon. Weather Rev.*, 108, 954-965
- De Groot, S. R. and Mazur, P. 1962 *Non-equilibrium thermodynamics*. North-Holland Pub. Company, Amsterdam
- Dutton, J. A. 1973 The global thermodynamics of atmospheric motion. *Tellus*, 25, (2), 89-110
- 1976 *The ceaseless wind*. McGraw-Hill
- Dutton, J. A. and Johnson, D. R. 1967 The theory of available potential energy and a variational approach to atmospheric energetics. Pp. 333-436, in Vol. 12 of *Advance in geophysics*. Academic Press, New York and London
- Evans, R. B. 1969 'A proof that exergy is the only consistent measure of potential work', Doctor of Philosophy thesis. Thayer School of Engineering, Dartmouth College. Hanover
- 1980 Thermoeconomic isolation and essergy analysis. *Energy*, 5, 805-821
- Gibbs, J. W. 1873 A method of geometrical representation of the thermodynamic properties of substance by means of surfaces. *Trans. Connecticut Acad.*, 2, 382-404. (Pp. 33-54 in Vol. 1 of *The collected works of J. W. Gibbs*, 1928. Longmans Green and Co.)
- Glansdorff, P. and Prigogine, I. 1971 *Structure stabilité et fluctuations*. Masson et Cie, Paris
- Hauf, T. and Höller, H. 1987 Entropy and potential temperature. *J. Atmos. Sci.*, 44, (20), 2887-2901
- Haywood, R. W. 1974 A critical review of the theorems of thermodynamic availability, with concise formulations. *J. Mech. Eng. Sci.* Part 1: Availability, 16, (3) 160-173. part 2: Irreversibility, 16, (4), 258-267
- Johnson, D. R. and Downey, W. K. 1982 On the energetics of open systems. *Tellus*, 34, (5), 458-470
- Karlsson, S. 1990 'Energy, entropy and exergy in the atmosphere'. Institute of Physical Resource Theory thesis. Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden
- Kestin, J. 1980 Availability: the concept and associated terminology. *Energy*, 5, 679-692
- Kullback, S. 1959 *Information theory and statistics*, John Wiley & Sons, New York and London
- Landau, L. D. and Lifchitz, E. M. 1976 *Statistical physics* (third edition). Pergamon Press, London
- Lebon, G. and Mathieu, Ph. 1981 Étude comparée de diverses théories de thermodynamique du non-équilibre. *Entropie*, 100, 75-86
- Livezey, R. E. and Dutton, J. A. 1976 The entropic energy of geophysical fluid systems. *Tellus*, 28, (2), 138-157
- Lorenz, E. N. 1955 Available potential energy and the maintenance of the general circulation. *Tellus*, 7, (2), 157-167
- 1967 *The nature and theory of the general circulation of the atmosphere*. World Meteorological Organization
- 1978 Available energy and the maintenance of a moist circulation. *Tellus*, 30, (1), 15-31
- 1979 Numerical evaluation of moist available energy. *Tellus*, 31, (3), 230-235
- McHall, Y. L. 1990a Available potential energy in the atmosphere. *Meteorol. Atmos. Phys.*, 42, 39-55
- 1990b Generalized available potential energy. *Adv. Atmos. Sci.*, 7, (4), 395-408
- 1991 Available equivalent potential energy in moist atmospheres. *Meteorol. Atmos. Phys.*, 45, 113-123
- Margules, M. 1905 On the energy of storms, Smithsonian miscellaneous collections, 51, 4, 533-595, 1910 (Translation by C. Abbe from 'Über die energie der stürme'. *Jahrb. Zentralanst. Meteorol.*, 40, 1-26, 1905)

- Marquet, P. 1990a La notion d'enthalpie utilisable: application à l'énergétique atmosphérique. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **310**, série II, 1387–1392
- 1990b 'L'exergie de l'atmosphère. Définition et propriétés de l'enthalpie utilisable humide'. Pp. 81–86 in *Atelier de modélisation de l'atmosphère*. Available from: Météo France, C.N.R.M. 31057 Toulouse Cedex, France
- 1991 On the concept of exergy and available enthalpy: application to atmospheric energetics. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **117**, 449–475
- Meixner, J. and Reik, H. G. 1959 Thermodynamik der irreversiblen prozesse. *Enc. of Physics*, **III/2**. Springer, Berlin
- Michaelides, S. C. 1987 Limited area energetics of Genoa cyclogenesis. *Mon. Weather Rev.*, **115**, 13–26
- Morris, D. R. and Szargut, J. 1986 Standard chemical exergy of some elements and compounds on the planet Earth. *Energy*, **11**, (8), 733–755
- Muench, H. S. 1965 On the dynamics of the wintertime stratosphere circulation. *J. Atmos. Sci.*, **22**, 349–360
- Pearce, R. P. 1978 On the concept of available potential energy. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **104**, 737–755
- Pichler, H. 1977 Die bilanzgleichung für die statischer entropische Energie der Atmosphäre. *Arch. Met. Geophys Biokl., Ser. A*, **26**, 341–347
- Pontaud, M., Marquet, P., Bernard-Boussiere, I., Muzellec, A., Vincent, C. and Finet, A. 1990 'Résultats numériques d'un cycle énergétique local appliqué à une perturbation'. Pp. 87–92 in *Atelier de modélisation de l'atmosphère*. Available from: Météo France, C.N.R.M. 31057 Toulouse Cedex, France
- Prigogine, I. 1949 Le domaine de validité de la thermodynamique des phénomènes irréversibles. *Physica*, **15**, 272–284
- Szargut, J. 1980 International progress in second law analysis. *Energy*, **5**, 709–718
- Szargut, J. and Styrylska, T. 1969 Die exergetische analyse von prozessen der feuchten luft. *Heiz. Lüft. Haustechn.*, **20**, (5), 173–178
- Thomson, W. 1853 On the restoration of mechanical energy from an unequally heated space. *Phil. Mag.*, **5**, 4e series, 102–105
- 1879 On thermodynamic motivity. *Phil. Mag.*, **7**, 5e series, 348–352
- Tripoli, G. J. and Cotton, W. R. 1981 The use of ice-liquid water potential temperature as a thermodynamic variable in deep atmospheric models. *Mon. Weather Rev.*, **109**, 1094–1102
- Van Mieghem, J. 1956 The energy available in the atmosphere for conversion into kinetic energy. *Beitr. Phys. Atmos.*, **29**, 129–142

## D ANNEXE : Liste des symboles.

### Grandeurs cinématiques et géométriques

$t$  : le temps.

$\vec{u} = \vec{u}_h + w \vec{k}$  : le vent tridimensionnel ( $\vec{u}$ ) formé de la partie purement horizontale ( $\vec{u}_h$ ) et de la partie purement verticale ( $w \vec{k}$ ).

$e_c = \vec{u} \cdot \vec{u} / 2$  : l'énergie cinétique du vent tridimensionnel.

$e_k = \vec{u}_h \cdot \vec{u}_h / 2$  : l'énergie cinétique du vent horizontal.

$E_c, E_k$  : Les valeurs intégrées de  $e_c$  et de  $e_k$ .

$\partial/\partial t = \partial_t$  : la dérivée partielle par rapport au temps à  $(\lambda, \varphi, p)$  ou à  $(\lambda, \varphi, z)$  constants, suivant le contexte.

$\partial/\partial p = \partial_p$  : la dérivée partielle par rapport à la pression.

$\partial/\partial \theta = \partial_\theta$  : la dérivée partielle par rapport à  $\theta$ .

$\lambda, \varphi$  : les coordonnées angulaires de longitude et de latitude.

$r_T$  : le rayon moyen de la terre.

$z$  : l'altitude au dessus du géoïde de référence.

$\partial/\partial \lambda = \partial_\lambda$  : la dérivée partielle par rapport à  $\lambda$ .

$\partial/\partial \varphi = \partial_\varphi$  : la dérivée partielle par rapport à  $\varphi$ .

$\partial/\partial x = (r_T \cos(\varphi))^{-1} \partial_\lambda$  : la dérivée partielle par rapport à la direction zonale.

$\partial/\partial y = (r_T)^{-1} \partial_\varphi$  : la dérivée partielle par rapport à la direction méridienne.

$d/dt = \partial_t + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} = (\partial/\partial t)_p + \vec{u}_h \cdot \vec{\nabla}_p + \omega \partial/\partial p$  : l'opérateur dérivée matérielle, ou dérivée totale, qui est la somme de la tendance eulerienne et du terme d'advection.

$\vec{\nabla}, \vec{\nabla}_p$  : l'opérateur de gradient (respectivement tridimensionnel et horizontal isobare).

$w = dz/dt$  : la vitesse verticale.

$\omega = dp/dt$  : la vitesse verticale en coordonnée dite "pression".

$\text{div}, \text{div}_p$  : les divergences tridimensionnelle et horizontale isobare, respectivement.

$-B(\xi) = -\text{div}_p(\xi \vec{u}_h) - \partial_p(\xi \omega)$  : le "terme de bord" associé à  $\xi$ , ou encore la convergence du flux de  $\xi$ .

$\vec{g} = -g \vec{k}$  : le vecteur accélération de la pesanteur, de module  $g$ .

$\vec{\Omega}$  : le vecteur rotation relative de la terre, de module  $\Omega$ .

$f = 2 \Omega \sin(\varphi)$  : le facteur de Coriolis.

$\xi^\lambda, \xi^\varphi$  : les moyennes zonale et méridienne de  $\xi$ , respectivement.

$\xi_\lambda = \xi - \xi^\lambda, \xi_\varphi = \xi - \xi^\varphi$  : les écarts aux moyennes zonale et méridienne, respectivement.

$\bar{\xi} = \xi^{\lambda\varphi}$  : la moyenne isobare de la quantité  $\xi$ .

$\xi' = \xi - \bar{\xi}$  : l'écart à la moyenne isobare de  $\xi$ .

$\vec{F}$ ,  $\vec{F}_h$  : les vecteurs de frottements tridimensionnel et horizontal, respectivement.

### Grandeurs thermodynamiques générales.

$T$ ,  $p$ ,  $\theta = T(p_{00}/p)^\kappa$  : la température, la pression, la température potentielle.

$\theta'_w$  : une température potentielle humide.

$h$ ,  $e_i$ ,  $s$  : l'enthalpie, l'énergie interne et l'entropie en grandeurs spécifiques (par unité de masse).

$H$ ,  $E_i$ ,  $S$  : l'enthalpie, l'énergie interne et l'entropie en grandeurs intégrées.

$\Phi = e_p = gz$  : le géopotentiel, ou l'énergie potentielle spécifique.

$E_p$  : l'énergie potentielle intégrée.

$F = E_i - TS$  : l'énergie libre.

$G = H - TS$  : l'enthalpie libre.

$\mu = h - Ts$  : le potentiel chimique (l'enthalpie libre massique).

$\rho$ ,  $\nu = 1/\rho$  : la masse volumique et le volume massique, respectivement.

$R$ ,  $c_v$ ,  $c_p$  : la constante des gaz et les capacités calorifiques à volume constant et à pression constante, respectivement.

$\kappa = R/c_p$ .

$L_v$  : (à la section 5) la chaleur latente de vaporisation.

$\dot{q}$  : le réchauffement massique dû aux phénomènes de radiation, de conduction et de relâchement ou d'absorption de chaleur latente.

$\sigma_B$  : (dans la section 1.1.1) la constante de Stefan.

### Variables liées à l'exergie.

$T_r$ ,  $T_0$  : suivant le contexte, des températures constantes de référence.

$p_r$ ,  $p_0(z)$  : suivant le contexte, les pressions de référence qui sont constante et variable avec  $z$ , respectivement.

$p_S$  : la pression de surface.

$h_r$ ,  $h_0$  : suivant le contexte, des enthalpies de référence.

$(e_i)_r$ ,  $(e_i)_0$  : suivant le contexte, des énergies internes de référence.

$s_r$ ,  $s_0$  : suivant le contexte, des entropies de référence.

$a$ ,  $a_e$ ,  $a_h$ ,  $a_L$  : des notations pour l'énergie utilisable spécifique ( $a$ ,  $a_e$ ), l'enthalpie utilisable spécifique ( $a_h$ ) et la forme "locale" de l'énergie potentielle utilisable approchée de Lorenz ( $a_L$ ).

$A$ ,  $A_e$ ,  $A_h$ ,  $A_L$  : comme précédemment, mais pour les valeurs intégrées.

$a_m$  : l'enthalpie utilisable spécifique de l'atmosphère humide.

$a_p$ ,  $A_p$ ,  $a_T$ ,  $A_T$ ,  $a_S$ ,  $A_S$ ,  $a_B$ ,  $A_B$ ,  $a_Z$ ,  $A_Z$ ,  $a_E$ ,  $A_E$ ,  $a_{c(SB)}$ ,  $a_{c(ZE)}$  : les grandeurs spécifiques

et intégrées des différentes composantes de  $a_h$  et de  $A_h$ .

$\mathcal{F}(X) = X - \ln(1 + X)$  : une fonction égale à  $X^2/2$  à l'ordre le plus bas en  $X \approx 0$ .

$X_T = T/T_r - 1$  et  $X_\rho = \rho_0/\rho - 1$  : deux valeurs typiques pour  $X$ .

$\eta_T = 1 - T_r/T$ ,  $\eta_p$ ,  $\eta_S$  : les trois facteurs de Carnot (ou facteurs d'efficacité) les plus utilisés : respectivement pour l'enthalpie utilisable ( $\eta_T$ ), pour l'énergie utilisable de Lorenz ( $\eta_p$ ), pour la stabilité statique globale de Lorenz ( $\eta_S$ ).

$W$  et  $W_{max}$  : le travail et le travail maximal dans les approches de Thomson ou de Gibbs.

$\delta Q$  et  $\delta W$  : les échanges d'énergie sous forme de chaleur et les travaux échangés pour la turbine de la section (1.2.4).

$\Pi$  : (dans la section 1.2.4) une quantité positive.

$(A_L)_Y$ ,  $(K_L)_Y$ ,  $(C_L)_Y$ ,  $(G_L)_Y$ ,  $(D_L)_Y$  : les quantités du cycle de Lorenz. Ce sont les énergies utilisables, les énergies cinétiques, les termes de conversion, les termes de chauffage différentiel et les dissipations, respectivement. Les valeurs possibles pour  $Y$  sont :  $Z$ ,  $E$ ,  $K$  et  $A$ , suivant le contexte.

$\bar{\sigma}$  : (dans la théorie de Lorenz) un paramètre de stabilité.

$C(xx, yy)$  : une notation générale pour les termes de conversion, positifs si l'énergie passe de  $xx$  à  $yy$ .

$EPT$ ,  $APE$ ,  $GSS$ ,  $UPE$  : dans les théories de Margules et de Lorenz, les sigles pour l'énergie potentielle totale, l'énergie potentielle utilisable, la stabilité statique globale et l'énergie potentielle inutilisable, respectivement.

$E_t$ ,  $S_t$ ,  $\Delta(S_t)$  : l'énergie totale, l'entropie totale et la variation de l'entropie totale dans la section (1.2.2).

$T_0 \Sigma$ ,  $\mathcal{N} = T_0 \Sigma + E_k$  : l'énergie entropique statique et l'énergie entropique de la théorie de Dutton, respectivement

$\Lambda_{max} = H_2 - H_1$ ,  $T_*$ ,  $p_*$  : l'énergie potentielle utilisable maximale de McHall qui dépend des deux constantes  $T_*$  et  $p_*$ .

$\mathcal{J}_{ij}$ ,  $\mathcal{H}$  : le tenseur de Poisson et l'Hamiltonien dans l'approche de Shepherd.

$\vec{u}$ ,  $\vec{U}$ ,  $\delta/\delta \vec{u}$  : (pour Shepherd) le vecteur d'état, le vecteur d'état de l'état de base et la dérivée variationnelle, respectivement.

$\delta \vec{u} = \vec{u} - \vec{U}$  (pour Shepherd) la perturbation du vecteur d'état autour de l'état de base.

$\Pi(p) = (p/p_{00})^\kappa = T/\theta$  : (pour Shepherd)

$\mathcal{C}$ ,  $C(\theta)$  : (pour Shepherd) les invariants de Casimir et l'intégrande de ces invariants pour l'étude présentée à la section (3.8).

$\mathcal{A}$  : la pseudo-énergie de Shepherd.

$\mathcal{K}$  : la fonction de Kullback dans l'approche de Karlsson (la section 5).

$k_B$  : (pour Karlsson) la constante de Boltzmann.

$b_s$  : (pour Karlsson) l'exergie statique spécifique.

$\theta_S$  : (dans la section 5) la température entropique de Hauf et Höller.

### **Autres notations.**

$p_{00}$  : une pression de référence (1000 *hPa*).

$t_2, t_1, \Delta t = t_2 - t_1$  : les instants et l'intervalle de temps utilisés pour définir les moyennes spatio-temporelles.

$\xi$  : une notation souvent utilisée pour désigner une grandeur indéterminée.

$\mathcal{M}, \mathcal{S}$  : les domaines d'intégration sur la masse et sur une surface isobare, respectivement.

$\mathcal{R}$  : la longueur du pendule dans la section (1.1.2a).

$\{\dots\}$  : une notation pour désigner l'intégrale sur la masse du bassin de la section (1.1.2b).

$M$  : la masse totale de l'atmosphère.

## Références

- Ahrendts J., 1980, Reference states. *Energy*, **5**, 667–677.
- Andrews D. G. et McIntyre M. E., 1976, Planetary waves in horizontal and vertical shear : the generalized Eliassen-Palm relation and the mean zonal acceleration. *J. Atmos. Sci.*, **33**, 2031–2048.
- Ayrault F. et Jousset C., juin 1993, Réalité des cyclogénèses sur l’Atlantique nord. *Note de travail de l’E.N.M.* n° **383** , 144 pages. Météo France, Paris.
- Blackburn M., 1983, ‘An energetic analysis of the general atmospheric circulation’. Thesis of the department of Meteorology. University of Reading. U.K.
- Brennan F. E., Vincent D. G., 1980, Zonal and eddy components of the synoptic-scale energy budget during intensification of hurricane Carmen (1974). *Mon. Weather Rev.*, **108**, 954–965.
- Brunhes B., 1909, La dégradation de l’énergie. (Réédition 1991) *Champs. Flammarion*
- Courtier P., J. F. Geleyn, 1988, A global numerical weather prediction model with variable resolution : Application to the shallow-water equations. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **114**, 1321–1346.
- Courtier P., C. Freydier, J. F. Geleyn, F. Rabier, M. Rochas, 1991, The Arpege Project at Météo-France. *Note de travail "ARPEGE"*, 38 pages n° **22**. Météo-France. Paris.
- Darrieus M. G., 1931, L’évolution des centrales thermiques et la notion d’énergie utilisable. *Sciences et industrie*, **204**, 122–126.
- De Groot S. R. and Mazur P., 1962, *Non-equilibrium thermodynamics*. North-Holland Pub. Company. Amsterdam.
- Depradine C. A., 1980, Energetics of large-scale motion in the Tropics during GATE at 250mb. *Mon. Wea. Rev.* , **108**, 886–895.
- Dutton J. A. and Johnson D. R., 1967, The theory of available potential energy and a variational approach to atmospheric energetics. Pp. 333–436, in Vol. 12 of *Advances in Geophysics* . Academic Press, New York and London.
- Dutton J. A., 1973, The global thermodynamics of atmospheric motion. *Tellus*, **25**, (2), 89–110.
- Dutton J. A., 1976, *The ceaseless wind*. McGraw-Hill.
- Evans R. B., 1969, ‘A proof that exergy is the only consistent measure of potential work’, Thesis for the degree Doctor of Philosophy. Thayer school of Engineering. Dartmouth college. Hanover.

- Evans R. B., 1980, Thermoeconomic isolation and essergy analysis. *Energy*, **5**, 805–821.
- Gibbs, J. W., 1873, A method of geometrical representation of the thermodynamic properties of substance by means of surfaces. *Trans. Connecticut Acad.*, **2**, 382–404. (Pp 33–54 in Vol. 1 of *The collected works of J. W. Gibbs*, 1928. Longmans Green and Co.)
- Glansdorff P. and Prigogine I., 1971, *Structure stabilité et fluctuations*. Masson et Cie. Paris.
- Gouy L. G., 1889, Sur l'énergie utilisable. *Journal de physique théorique et appliquée*, 2eme série, **VIII**, 501–518.
- McHall Y. L., 1990(a), Available potential energy in the atmosphere. *Meteorol. Atmos. Phys.*, **42**, 39–55.
- McHall Y. L., 1990(b), Generalized available potential energy. *Adv. Atmos. Sci.*, **7**, (4), 395–408.
- McHall Y. L., 1991, Available equivalent potential energy in moist atmospheres. *Meteorol. Atmos. Phys.*, **45**, 113–123.
- Hauf T. et Höller H., 1987, Entropy and potential temperature. *J. Atmos. Sci.*, **44**, (20), 2887–2901.
- Haywood R. W., 1974, A critical review of the theorems of thermodynamic availability, with concise formulations. *J. Mech. Eng. Sci.*; part 1 : Availability, **16**, (3), 160–173 ; part 2 : Irreversibility, **16**, (4), 258–267.
- Johnson D. R. and Downey W. K., 1982, On the energetics of open systems. *Tellus*, **34**, (5), 458–470.
- Jouguet E., 1907, Le théorème de M. Gouy et quelques-unes de ses applications. *Revue de Mécanique*, **20**, 213–238.
- Karlsson S., 1990, 'Energy, Entropy and Exergy in the atmosphere'. Thesis of the Institute of Physical Resource Theory. Chalmers University of Technology. Göteborg, Sweden.
- Kasahara A., 1974, Various vertical coordinate systems used for numerical weather prediction. *Mon. Weather Rev.*, **102**, 509–522.
- Keenan J. H., 1932, A study of thermodynamic availability in the steam power plant. *Mech. Engng*, **54**, 195–204.
- Keenan J. H., 1951, Availability and irreversibility in thermodynamics. *Br. J. of Appl. Phys.*, **2**, 183–192.
- Kestin J., 1980, Availability : the concept and associated terminology. *Energy*, **5**, 679–692.

- Kullback S., 1959, *Information theory and statistics*, John Wiley & sons. New York and London.
- Landau L. D. and Lifchitz E. M., 1976, *Statistical physics* (third edition). Pergamon Press, London.
- Lebon G. et Mathieu Ph., 1981, étude comparée de diverses théories de thermodynamique du non-équilibre. *Entropie*, **100**, 75–86.
- Livezey R. E. and Dutton J. A., 1976, The entropic energy of geophysical fluid systems. *Tellus*, **28**, (2), 138–157.
- Lorenz E. N., 1955, Available potential energy and the maintenance of the general circulation. *Tellus*, **7**, (2), 157–167.
- Lorenz E. N., 1960, Energy and numerical weather prediction. *Tellus*, **12**, 364–373.
- Lorenz E. N., 1967, *The nature and theory of the general circulation of the atmosphere*. W.M.O.
- Lorenz E. N., 1978, Available energy and the maintenance of a moist circulation. *Tellus*, **30**, (1), 15–31.
- Lorenz E. N., 1979, Numerical evaluation of moist available energy. *Tellus*, **31**, (3), 230–235.
- Marchal R., 1956. *La thermodynamique et le théorème de l'énergie utilisable*. Dunot, Paris.
- Margules M., 1905, On the energy of storms, Smithsonian Miscellaneous collections, 51, 4, 533–595, 1910. (Translation by C. Abbe from 'Über die energie der stürme'. *Jahrb. Zentralanst. Meteorol.*, **40**, 1–26, 1905).
- Marquet P., 1990 (a), La notion d'enthalpie utilisable : application à l'énergétique atmosphérique. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **310** série II, 1387–1392.
- Marquet P., 1990 (b), L'exergie de l'atmosphère. Définition et propriétés de l'enthalpie utilisable humide. *Atelier de modélisation de l'atmosphère*, Pp.81–86. Disponible auprès de : Météo France, C.N.R.M. 31057 Toulouse Cedex, France.
- Marquet P., 1991, On the concept of exergy and available enthalpy : application to atmospheric energetics. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **117**, 449–475.
- Marquet P., 1993, Exergy in meteorology : Definition and properties of moist available enthalpy. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **119**, 567–590.
- Martinot-Lagarde A., 1971. *Thermique classique*. Dunot, Paris.
- Maxwell J. C., 1871, THE HEAT. "La chaleur" dans son édition française par G. Mouret *Bibliothèque des actualités industrielles*, B. TIGNOL EDITEUR, 1891

- Meixner J. and Reik H. G., 1959, Thermodynamik der irreversiblen prozesse. *Enc. of Physics*, **III/2**. Springer, Berlin.
- Michaelides S. C., 1987, Limited area energetics of Genoa cyclogenesis. *Mon. Weather Rev.*, **115**, 13–26.
- Morris D. R. and Szargut J., 1986, Standard chemical exergy of some elements and compounds on the planet Earth. *Energy*, **11**, (8), 733–755.
- Muench H. S., 1965, On the dynamics of the wintertime stratosphere circulation. *J. Atmos. Sci.*, **22**, 349–360.
- Normand Sir C., 1946, Energy in the atmosphere. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **72**, 145–167.
- Pearce R. P., 1978, On the concept of available potential energy. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **104**, 737–755.
- Pichler H., 1977, Die bilanzgleichung für die statischer entropische Energie der Atmosphäre. *Arch. Met. Geoph. Biokl.*, Ser.A, **26**, 341–347.
- Plumb R. A., 1983, A new look at the energy cycle. *J. Atmos. Sci.*, **40**, 1669–1688.
- Pontaud M., Marquet P., Bernard-Boussier I., Muzellec A., Vincent C., and Finet A., 1990, Résultats numériques d'un cycle énergétique local appliqué à une perturbation. *Atelier de modélisation de l'atmosphère*, Pp.87–92. Disponible auprès de : Météo France, C.N.R.M. 31057 Toulouse Cedex, France.
- Prigogine I., 1949, Le domaine de validité de la thermodynamique des phénomènes irréversibles. *Physica*, **15**, 272–284.
- Quinet A., 1972, Une méthode numérique pour le calcul de l'énergie potentielle disponible au sens de Margules. *Beitr. Phys. Atmos.*, **45**, 72–83
- Randall D. A. et Wang J., 1992, The moist available energy of a conditionally unstable atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, **49**, 240–255.
- Rant Z., 1956, Exergie, ein neues Wort für 'Technische Arbeitsfähigkeit'. *Forsch. Ing. Wes.*, **22**, 36–37.
- Saltzman B., 1957, Equations governing the energetics of the larger scales of atmospheric turbulence in the domain of wave number. *J. Meteor.*, **14**, 513–523.
- Shepherd T. G., 1993, A unified theory of available potential energy. *Atmosphere-Ocean*, **31**, 1–26.

- Simmons A. J., Hoskins B. J., 1978, The life cycles of some nonlinear baroclinic waves. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 414–432.
- Stodola, 1898, Die Kreisprozesse der Gasmachine. *Zeit. V. D. I.*, **42**, (39), 1086–1091.
- Szargut J., 1980, International progress in second law analysis. *Energy*, **5**, 709–718.
- Szargut J. and Styrylska T., 1969, Die exergetische analyse von prozessen der feuchten luft. *Heiz. Lüft. Haustechn.*, **20**, (5), 173–178.
- Tait P. G., 1879, On the dissipation of energy. *Phil. Mag.*, **7**, 44, 5e series, 344–346.
- Thomson W., 1853, On the restoration of mechanical energy from an unequally heated space. *Phil. Mag.*, **5**, 30, 4e series, 102–105.
- Thomson W., 1879, On thermodynamic motivity. *Phil. Mag.*, **7**, 44, 5e series, 346–352.
- Tripoli G. J. and Cotton W. R., 1981, The use of ice-liquid water potential temperature as a thermodynamic variable in deep atmospheric models. *Mon. Wea. Rev.*, **109**, 1094–1102.
- Van Mieghem J., 1956, The energy available in the atmosphere for conversion into kinetic energy. *Beitr. Phys. Atmos.*, **29**, 129–142.

# Table des figures

1	<i>Le pendule mécanique . . . . .</i>	10
2	<i>Le liquide incompressible . . . . .</i>	11
3	<i>L'atmosphère. La vision de Lorenz . . . . .</i>	13
4	<i>L'approche de Gibbs. . . . .</i>	18
5	<i>L'énergie utilisable. . . . .</i>	19
6	<i>L'enthalpie utilisable d'une turbine. . . . .</i>	21
7	<i>L'enthalpie utilisable. . . . .</i>	23
8	<i>Le cycle de l'enthalpie utilisable (ordre 1). . . . .</i>	35
9	<i>Le cycle de l'enthalpie utilisable (ordre 1). Version ouverte. . . . .</i>	36
10	<i>Le facteur de stabilité. . . . .</i>	39
11	<i>Le cycle de l'enthalpie utilisable (ordre 2). . . . .</i>	44
12	<i>La vision tridimensionnelle du cycle d'ordre 2. . . . .</i>	47
13	<i>La dépendance en <math>\xi_\varphi^\lambda</math> de <math>\overline{a_Z}</math> et <math>\overline{k_Z}</math>. . . . .</i>	48
14	<i>La dépendance en <math>\xi_\lambda</math> de <math>\overline{a_E}</math> et <math>\overline{k_E}</math>. . . . .</i>	49
15	<i>L'influence d'une perturbation barocline sur la partie "horizontale" de la conversion <math>C_A = C(\overline{a_Z}, \overline{a_E})</math>. . . . .</i>	50
16	<i>L'influence de l'inclinaison des axes de thalweg et de dorsales sur la partie "horizontale" de la conversion <math>C_K = C(\overline{k_Z}, \overline{k_E})</math>. . . . .</i>	52
17	<i>Margules (1905) et la notion de redistribution adiabatique de la masse d'une colonne atmosphérique. (a) : une colonne isolée; (b) : une distribution de température potentielle vérifiant <math>\theta_1 &lt; \dots &lt; \theta_4</math>; (c) : la redistribution adiabatique stratifiée associée. . . . .</i>	59
18	<i>Les états de référence de Lorenz. En (a) une distribution quelconque de <math>\theta</math>. En (b) l'état de référence de l'énergie potentielle utilisable. En (c) l'état de référence de la stabilité statique globale. . . . .</i>	63
19	<i>Une représentation schématique des trois quantités APE, GSS et <math>E_k</math>. Sur la figure (a) : une vision utilisant les axes de l'enthalpie et de l'énergie cinétique. Sur la figure (b) : la vision en termes de réservoirs énergétiques. . . . .</i>	66
20	<i>Les schémas des cycles énergétiques globaux. (a) le cycle de Lorenz. (b) le cycle de l'enthalpie utilisable. . . . .</i>	70
21	<i>Une analogie à une dimension de la relation entre la pseudo-énergie de Shepherd et la forme de l'hamiltonien. Les invariants de Casimir forment, au signe près, le plan vectoriel tangent qui sert de référence pour la définition de la fonctionnelle quadratique <math>\mathcal{A}</math>. . . . .</i>	83

22	<i>Pression réduite au niveau de la mer. La situation du 27 avril 1992 à 12 h au 28 avril à 12 h par pas de 6 h. On observe en surface un déplacement rapide de la dépression associée au fronts "Q". Le minimum, inférieur à 1000 hPa, est atteint entre 6 h et 12 h le 28 avril. . . . .</i>	89
23	<i>Géopotential à 500 hPa. La situation du 27 avril 1992 à 12 h au 29 avril à 12 h par pas de 24 h. On observe en altitude le développement d'une dorsale Atlantique avec la création d'un profond thalweg sur le 10 est, ceci à partir du 29 avril. . . . .</i>	90
24	<i>Les trois prévisions à 30 h d'échéance et l'analyse vérifiante pour le 28 avril 1992 à 6 h. Le paramètre est la pression réduite au niveau de la mer (écartement de 5 hPa). On montre les prévisions des modèles Arpege à maille uniforme (ARP), Arpege à maille variable (ARS) et Peridot (PER). L'analyse initialisée (AS) est celle du modèle à maille variable. . . . .</i>	93
25	<i>Les trois prévisions à 30 h d'échéance et l'analyse vérifiante pour le 28 avril 1992 à 6 h. Le paramètre est le vent à 400 hPa avec les isotaches en traits continus (écartement de 5 m/s). On montre les prévisions des modèles Arpege à maille uniforme (ARP), Arpege à maille variable (ARS) et Peridot (PER). L'analyse (AS) est celle du modèle à maille variable. . . . .</i>	94
26	<i>Les évolutions du réservoir énergétique <math>K_E</math> pour la prévision à 48 h de base le 28 avril 1992 à 0 h. La tendance eulerienne est <math>\partial K_E / \partial t</math>, la convergence du flux aux frontières est <math>-\iint_{\mathcal{M}} \overline{B(k_E)} dm</math>, alors que la dérivée totale moyenne est <math>\iiint_{\mathcal{M}} (\overline{dk_E/dt}) dm = \partial K_E / \partial t + \iiint_{\mathcal{M}} \overline{B(k_E)} dm</math>. On montre les deux types de calcul avec les échantillonnages de 2 h et de 6 h. . . . .</i>	99
27	<i>On présente, comme pour la figure précédente, les évolutions des termes de conversion et de dissipation du réservoir <math>K_E</math>. On montre les deux types de calcul avec les échantillonnages de 2 h et de 6 h. . . . .</i>	100
28	<i>Les évolutions au cours des quatorze premiers jours de la simulation de Simmons et Hoskins (1978) pour trois réservoirs énergétiques et pour certaines conversions, d'après l'étude de Pearce (1978). . . . .</i>	102
29	<i>Les deux parties "horizontales" et "verticales" de la composante <math>C(A_Z, A_E)</math>. La partie verticale <math>C(A_Z, A_E)_O</math> est négligeable devant <math>C(A_Z, A_E)_V</math>. . . . .</i>	104
30	<i>Les différentes parties des conversions <math>C(K_S, K_Z)</math>, <math>C(K_S, K_E)</math> et <math>C(K_Z, K_E)</math>. . .</i>	106
31	<i>Les différentes parties des conversions <math>C(\Phi, K_S)</math>, <math>C(\Phi, K_Z)</math> et <math>C(\Phi, K_E)</math>. . . . .</i>	107
32	<i>Les évolutions de la conversion avec <math>KS : C(\Phi, K_S)_U + C(\Phi, K_S)_V</math>, de la conversion avec <math>KZ : C(\Phi, K_Z)_U + C(\Phi, K_Z)_V</math> et de la conversion avec <math>KE : C(\Phi, K_E)_U + C(\Phi, K_E)_V</math>. . . . .</i>	108

33	<i>Les évolutions des réservoirs <math>A_S</math>, <math>A_B</math>, <math>A_Z</math>, <math>A_E</math>, <math>K_S</math>, <math>K_B</math>, <math>K_Z</math> et <math>K_E</math>. On prend comme référence les valeurs de ces composantes à la date du 27 avril 1992 à 0 h. Les calculs sont réalisés à partir de la série des analyses initialisées du modèle Arpege à maille variable (T330 sur la France).</i> . . . . .	111
34	<i>Les évolutions des conversions d'énergie entre les réservoirs <math>A_S</math>, <math>A_Z</math>, <math>A_E</math>, <math>K_S</math>, <math>K_Z</math> et <math>K_E</math>. Les calculs sont réalisés à partir de la série des analyses initialisées du modèle Arpege à maille variable (T330 sur la France).</i> . . . . .	113
35	<i>Les grands termes <math>C(A_S, K_S)</math>, <math>C(\Phi, K_S)</math> et <math>B(A_P)</math> qui dépendent directement de <math>\bar{\omega}</math>. Les calculs sont réalisés à partir de la série des analyses initialisées du modèle Arpege à maille variable (T330 sur la France).</i> . . . . .	115
36	<i>Les évolutions des différents termes du bilan du réservoir <math>A_S</math>, calculées à partir de la série des analyses initialisées du modèle Arpege à maille variable (T330 sur la France).</i> . . . . .	117
37	<i>Les évolutions des différents termes du bilan du réservoir <math>A_Z</math>, calculées à partir de la série des analyses initialisées du modèle Arpege à maille variable (T330 sur la France).</i> . . . . .	119
38	<i>Les évolutions des différents termes du bilan du réservoir <math>A_E</math>, calculées à partir de la série des analyses initialisées du modèle Arpege à maille variable (T330 sur la France).</i> . . . . .	120
39	<i>Les évolutions des différents termes du bilan du réservoir <math>K_S</math>, calculées à partir de la série des analyses initialisées du modèle Arpege à maille variable (T330 sur la France).</i> . . . . .	122
40	<i>Les évolutions des différents termes du bilan du réservoir <math>K_Z</math>, calculées à partir de la série des analyses initialisées du modèle Arpege à maille variable (T330 sur la France).</i> . . . . .	124
41	<i>Les évolutions des différents termes du bilan du réservoir <math>K_E</math>, calculées à partir de la série des analyses initialisées du modèle Arpege à maille variable (T330 sur la France).</i> . . . . .	126
42	<i>Les évolutions des quatre réservoirs <math>A_Z</math>, <math>A_E</math>, <math>K_Z</math> et <math>K_E</math> pour les deux prévisions à 48 h de base le 27 avril 1992 à 0 h. En haut : pour la version à maille variable d'Arpege (T330 sur la France); en bas : pour la version à maille uniforme (T79).</i> . . . . .	128
43	<i>Les évolutions des conversions pour les deux prévisions à 48 h de base le 27 avril 1992 à 0 h. En haut : pour la version à maille variable d'Arpege (T330 sur la France); en bas : pour la version à maille uniforme (T79).</i> . . . . .	129

44	<i>Les évolutions des termes du bilan de <math>K_Z</math> pour les deux prévisions à 48 h de base le 27 avril 1992 à 0 h. En haut : pour la version à maille variable d'Arpege (T330 sur la France); en bas : pour la version à maille uniforme (T79).</i> . . . . .	131
45	<i>Les évolutions des termes de tendance et d'advection de <math>K_E</math> pour les deux prévisions à 48 h de base le 27 avril 1992 à 0 h. En haut : pour la version à maille variable d'Arpege (T330 sur la France); en bas : pour la version à maille uniforme (T79).</i> . .	134
46	<i>Les évolutions des autres termes du bilan de <math>K_E</math> pour les deux prévisions à 48 h de base le 27 avril 1992 à 0 h. En haut : pour la version à maille variable d'Arpege (T330 sur la France); en bas : pour la version à maille uniforme (T79).</i> . . . . .	135
47	<i>Une tentative de définition d'un "traceur d'activité barocline" pour la prévision du 27 à 0 h de la version à maille variable du modèle Arpege (T330). Le traceur est la somme <math>\mathcal{B} = C(A_S, A_E) + C(A_Z, A_E) + C(A_E, K_E)</math> (en trait plein renforcé). Le trait pointillé renforcé est la tendance du réservoir <math>K_E</math>. On a reporté autrement l'ensemble des autres termes de conversion.</i> . . . . .	140

# Table des matières

<b>1</b>	<b><u>INTRODUCTION.</u></b>	<b>6</b>
1.1	<u>Motivations.</u>	6
1.1.1	<u>De l'importance de l'énergie en météorologie.</u>	6
1.1.2	<u>Du concept d'énergie utilisable.</u>	9
1.1.3	<u>La problématique.</u>	14
1.2	<u>Historique de l'exergie.</u>	15
1.2.1	<u>Les balbutiements.</u>	15
1.2.2	<u>De la variation d'entropie totale.</u>	17
1.2.3	<u>L'énergie utilisable.</u>	19
1.2.4	<u>L'enthalpie utilisable. Première approche.</u>	20
1.2.5	<u>L'enthalpie utilisable. Deuxième approche.</u>	22
1.2.6	<u>L'exergie.</u>	24
<b>2</b>	<b><u>L'ENTHALPIE UTILISABLE SECHE DE L'ATMOSPHERE.</u></b>	<b>26</b>
2.1	<u>La définition de <math>a_h</math>.</u>	26
2.2	<u>Les équations hydrostatiques.</u>	27
2.3	<u>Les équations de l'enthalpie utilisable massique d'ordre 0.</u>	29
2.4	<u>Le cycle hydrostatique et isobare d'exergie d'ordre 1.</u>	31
2.4.1	<u>Les composantes énergétiques d'ordre 1.</u>	31
2.4.2	<u>Le cycle énergétique d'ordre 1.</u>	33
2.4.3	<u>Les interprétations physiques.</u>	37
2.5	<u>Le cycle hydrostatique d'exergie d'ordre 2.</u>	40
2.5.1	<u>Les composantes énergétiques d'ordre 2.</u>	40
2.5.2	<u>Le cycle énergétique d'ordre 2.</u>	42
2.5.3	<u>Les interprétations physiques.</u>	46
2.6	<u>Les définitions de <math>T_r</math> et de <math>p_r</math>.</u>	53
2.6.1	<u>La loi de conservation locale.</u>	54
2.6.2	<u>La loi de conservation globale.</u>	54
2.6.3	<u>La constante <math>T_r</math>.</u>	55
2.6.4	<u>La constante <math>p_r</math>.</u>	55
2.7	<u>Les généralisations.</u>	56
<b>3</b>	<b><u>L'ENERGIE UTILISABLE EN METEOROLOGIE.</u></b>	<b>58</b>
3.1	<u>Margules.</u>	58
3.2	<u>Lorenz.</u>	60

3.2.1	<u>L'APE de Lorenz.</u>	62
3.2.2	<u>La GSS de Lorenz.</u>	63
3.2.3	<u>Les interprétations globales de l'APE et de la GSS.</u>	64
3.2.4	<u>APE, GSS et énergie cinétique.</u>	65
3.2.5	<u>Ordres de grandeur.</u>	67
3.2.6	<u>Le cycle de Lorenz.</u>	68
3.3	<u>Van Mieghem.</u>	71
3.4	<u>Dutton.</u>	72
3.5	<u>Pichler.</u>	76
3.6	<u>Pearce, Blackburn.</u>	77
3.7	<u>McHall.</u>	80
3.8	<u>Shepherd.</u>	81
4	<u>L'ETUDE D'UNE ONDE BAROCLINE.</u>	87
4.1	<u>La méthodologie.</u>	87
4.2	<u>La situation météorologique.</u>	88
4.3	<u>Les simulations numériques.</u>	91
4.4	<u>Le calcul des cycles.</u>	95
4.5	<u>Les résultats.</u>	98
4.5.1	<u>L'échantillonnage temporel.</u>	98
4.5.2	<u>L'étude de Pearce.</u>	101
4.5.3	<u>Les parties "horizontales" et "verticales" des conversions.</u>	104
4.5.4	<u>Le cycle d'assimilation en T330.</u>	110
4.5.5	<u>Les prévisions en T330 et T79.</u>	125
4.6	<u>Une synthèse des résultats.</u>	136
5	<u>L'EXEGIE HUMIDE DE L'ATMOSPHERE.</u>	143
6	<u>CONCLUSION.</u>	147
A	<u>ANNEXE : Thomson (1853, 1879), Tait (1879).</u>	153
B	<u>ANNEXE : Rant (1955).</u>	167
C	<u>ANNEXE : Marquet (1993).</u>	172
D	<u>ANNEXE : Liste des symboles.</u>	197