



**HAL**  
open science

# Modélisation de matériaux supraconducteurs : application à un limiteur de courant

Joseph Duron

► **To cite this version:**

Joseph Duron. Modélisation de matériaux supraconducteurs : application à un limiteur de courant. Energie électrique. Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), 2006. Français. NNT : . tel-00574732

**HAL Id: tel-00574732**

**<https://theses.hal.science/tel-00574732v1>**

Submitted on 8 Mar 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# MODÉLISATION DE MATÉRIAUX SUPRACONDUCTEURS - APPLICATION À UN LIMITEUR DE COURANT

THÈSE N° 3469 (2006)

PRÉSENTÉE LE 24 MARS 2006

À LA FACULTÉ INFORMATIQUE ET COMMUNICATIONS

Laboratoire de systèmes non-linéaire

SECTION DES SYSTÈMES DE COMMUNICATION

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

**Joseph DURON**

ingénieur électricien, Institut National Polytechnique de Grenoble, France  
et de nationalité française

acceptée sur proposition du jury:

Prof. B. Rimoldi, président du jury

Prof. M. Hasler, directeur de thèse

Dr M. Decroux, rapporteur

Prof. A.-Ch. Rufer, rapporteur

Prof. P. Tixador, rapporteur



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Lausanne, EPFL

2006



*À toutes les personnes  
qui me sont chères*



## Résumé

L'objectif principal de cette thèse est la modélisation de matériaux supraconducteurs, et plus particulièrement, de ceux dits à haute température critique. Ce travail est divisé en deux parties distinctes : dans un premier temps, nous nous intéressons à la reconstruction de la distribution dynamique du courant dans la section d'un ruban supraconducteur à l'aide d'un modèle décrivant son comportement global. Ensuite, nous nous focalisons sur la modélisation électromagnétique et thermique par éléments finis des supraconducteurs en régime sur-critique, c'est à dire au-delà du courant critique  $I_c$ .

Une introduction à la supraconductivité est faite dans le premier chapitre de ce travail, présentant les propriétés physiques principales que possède un matériau supraconducteur.

Ensuite, nous décrivons les différents modèles existants permettant de décrire le comportement d'un échantillon supraconducteur. En se basant sur le modèle de *Bean*, nous proposons une nouvelle méthode permettant d'évaluer la distribution du courant dans la section d'un ruban monofilamentaire à partir de la mesure du profil magnétique à sa surface. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux données par une modélisation certes plus précise, mais aussi plus complexe : l'utilisation de la méthode des éléments finis.

Cette dernière sera largement utilisée dans la seconde partie de ce travail, qui traite de la modélisation de matériaux en régime sur-critique. Ceci nécessite d'introduire une formulation différente de l'habituelle loi de puissance  $E_c(J/J_c)^n$  pour décrire le comportement électrique du matériau dans une plage de courant plus importante, incluant les régimes sur-critiques. Pour cela, nous proposons une méthode originale, permettant d'approcher des mesures effectuées sur des échantillons d'YBCO et autorisant la description de la transition de l'état supraconducteur vers l'état normal. La dépendance en température a aussi été introduite afin d'étudier les phénomènes thermiques qui se produisent. Il est ainsi possible de résoudre de manière couplée les équations électromagnétiques et thermiques du problème : la résolution d'un pas de temps électromagnétique conduit à la connaissance des pertes locale. Ces pertes sont injectées dans le modèle thermique, et permet de calculer l'augmentation de température correspondante. Ce résultat est alors utilisé pour modifier les paramètres électriques en vue de la résolution du prochain pas de temps.

Finalement, cette méthode a été utilisée afin de simuler le comportement d'un limiteur de courant supraconducteur. Le comportement global du système peut être reproduit par le modèle numérique implémenté, autorisant ainsi l'étude des variables locales, telles que la densité de courant ou le profil de température. Les résultats obtenus peuvent être utilisés afin d'optimiser les performances du dispositif selon des critères spécifiques. C'est ainsi que nous avons proposé une modification de la géométrie permettant d'éviter un possible emballement thermique qui pourrait conduire à la destruction du système. Sur la base de cette proposition, des modifications ont été apportées au design du dispositif, et sont actuellement testées.

Mots clés : modélisation numérique, supraconductivité, limiteur de courant.



## Abstract

This thesis is focused on the modelling of superconducting materials, and in particular, high-temperature superconducting materials. This work is divided in two parts: first, the dynamic magnetic field mapping obtained by measurements is used in order to reconstruct the dynamic current distribution inside a tape assuming a model describing its global behavior. In the second part, superconductors in over-critical regime have been both electrically and thermally modeled with a finite element method. Calculations have been applied on a current limiter and compared to a constructed and measured device at the University of Geneva.

The first chapter is an introduction to high-temperature superconducting materials, where the main superconducting physical properties used are presented. Next, we introduce the different existing models which can be used for describing the behavior of a superconducting tape. With the help of the *Bean* model, a novel method to evaluate the current distribution in a mono-filamentary superconducting tape from surface magnetic field measurements is proposed. The obtained results are compared with more precise, but more complex, methods like finite element modeling, which will be used for the second part of this work. The last part is focused on the modelization of superconducting material in over-critical regime. To achieve this goal, we need to introduce a different expression than the usual  $E_c(J/J_c)^n$  power-law for describing the electric behavior of the material in a much wider current range covering over-critical excursion. The original proposition we made is able to fit the measurements made on YBCO tapes, allowing to describe the transition from the superconducting to the normal state. Then, to taking into account the thermal phenomena, the temperature dependence of the electrical parameters has been introduced in order to solve a coupled electromagnetic and thermal problem: solving a time step of the electromagnetic part leads to the knowledge of the local losses. These losses are injected inside the thermal part. The resulting temperature computation is used to modify the electrical parameters for the next time step. Finally, this method has been applied in order to simulate a superconducting current limiter. The global behavior of the device can be reproduced by the implemented numerical model, which also allows the study of the local variables, like current density distribution or temperature profile. The obtained results can be used to optimize a device according to specific criteria. In particular, we have proposed geometric modifications for avoiding possible local thermal runaway, which can lead to the destruction of the device. This proposition has been inspired the new design, which is now tested.

Keywords: numerical modelling, superconductivity, fault current limiter.





# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Remerciements</b>   | <b>5</b>  |
| <b>Préambule</b>   | <b>7</b>  |
| Petit historique . . . . .   | 7         |
| Propriétés générales . . . . .   | 8         |
| Grandeurs critiques . . . . .  | 11        |
| Surface critique . . . . .   | 15        |
| Motivations de cette thèse . . . . .   | 15        |
| <br>   |           |
| <b>I Problème inverse</b>  | <b>17</b> |
| <br>   |           |
| <b>1 Introduction</b>  | <b>19</b> |
| 1.1 Motivations . . . . .  | 19        |
| 1.2 Pourquoi ne pas mesurer la densité de courant $J$ ? . . . . .                    | 19        |
| 1.3 Proposition . . . . .  | 20        |
| <br>   |           |
| <b>2 Équations électromagnétiques décrivant le comportement d'un supraconducteur</b> | <b>21</b> |
| 2.1 Relation $B(H)$ . . . . .  | 21        |
| 2.2 Relation $E(J)$ . . . . .  | 22        |
| 2.3 Modèle de l'état critique, modèle de <i>Bean</i> . . . . .                       | 22        |
| 2.4 Résumé des équations . . . . .   | 24        |
| 2.5 Exemple . . . . .  | 24        |
| <br>   |           |
| <b>3 Algorithme de recherche</b>   | <b>27</b> |
| 3.1 Présentation du système de mesures . . . . .                                     | 27        |
| 3.2 Calcul du profil magnétique produit par une distribution de courant . . . . .    | 28        |
| 3.3 Inversion du problème . . . . .  | 32        |
| <br>   |           |
| <b>4 Résultats obtenus</b>   | <b>33</b> |
| 4.1 Comparaison des densités de courant . . . . .                                    | 34        |
| 4.2 Amélioration du modèle . . . . .   | 35        |
| 4.3 Travail futur . . . . .  | 37        |
| <br>   |           |
| <b>II Modélisation par éléments finis</b>  | <b>39</b> |
| <br>   |           |
| <b>5 Introduction</b>  | <b>41</b> |

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| <b>6</b>  | <b>Introduction à la méthode des éléments finis</b>                             | <b>43</b> |
| 6.1       | Un problème aux limites unidimensionnel . . . . .                               | 43        |
| 6.2       | Discrétisation . . . . .  | 44        |
| 6.3       | Problème faible . . . . .   | 44        |
| 6.4       | Méthode de Galerkin . . . . .   | 45        |
| 6.5       | La méthode des éléments finis de degré 1 . . . . .                              | 46        |
| <b>7</b>  | <b>Présentation du logiciel « Flux »</b>  | <b>51</b> |
| 7.1       | Présentation du module électromagnétique . . . . .                              | 51        |
| 7.2       | Séparation des phénomènes électriques et magnétiques . . . . .                  | 52        |
| 7.3       | Partie magnétique . . . . .   | 52        |
| 7.4       | Partie électrique . . . . .   | 54        |
| 7.5       | Partie thermique . . . . .  | 54        |
| 7.6       | Description générale d'une géométrie et résolution . . . . .                    | 56        |
| 7.7       | Choix d'une formulation pour l'étude d'un dispositif supraconducteur . . . . .  | 57        |
| <b>8</b>  | <b>Loi de modélisation des couches minces d'YBCO</b>                            | <b>59</b> |
| 8.1       | Mesures $\rho - I$ . . . . .  | 59        |
| 8.2       | Limitations de la loi de puissance $E = f(J)$ utilisée habituellement . . . . . | 60        |
| 8.3       | Proposition d'un nouveau modèle $E = f(J)$ . . . . .                            | 60        |
| 8.4       | Implémentation sous le logiciel « Flux » . . . . .                              | 63        |
| 8.5       | Implémentation de la fonction : . . . . .                                       | 69        |
| 8.6       | Dépendance en champ magnétique des paramètres . . . . .                         | 70        |
| <b>9</b>  | <b>Simulation électro-thermique couplée</b>                                     | <b>71</b> |
| 9.1       | Dépendance en température des paramètres électriques . . . . .                  | 72        |
| 9.2       | Tracé de la courbe $\rho = f(J, T)$ pour le matériau supraconducteur . . . . .  | 74        |
| 9.3       | Paramètres thermiques . . . . .   | 74        |
| 9.4       | Coefficient d'échange avec le bain . . . . .                                    | 76        |
| 9.5       | Couplage des équations électriques et thermiques . . . . .                      | 78        |
| 9.6       | Méthode de résolution d'un problème couplé sous « Flux » . . . . .              | 78        |
| <b>10</b> | <b>Application : modélisation d'un limiteur de courant supraconducteur</b>      | <b>81</b> |
| 10.1      | Présentation du système réel . . . . .  | 82        |
| 10.2      | Modélisation de la géométrie . . . . .  | 83        |
| 10.3      | Résultats obtenus pour la partie électromagnétique seule . . . . .              | 85        |
| 10.4      | Résultats lors de la prise en compte de la température . . . . .                | 88        |
| 10.5      | Modélisation des conditions d'un court-circuit . . . . .                        | 89        |
| 10.6      | Simulation d'un défaut intervenant sur un maximum de tension . . . . .          | 90        |
| 10.7      | Simulation d'un défaut intervenant sur un zéro de tension . . . . .             | 92        |
|           | <b>Conclusion et perspectives</b>   | <b>97</b> |
| <b>A</b>  | <b>Programmation de la fonction <math>E = f(J, T)</math> en langage FORTRAN</b> | <b>99</b> |

# Remerciements

Ce mémoire de thèse est le résultat de trois années de travail passées au sein du laboratoire des systèmes non linéaires (LANOS) de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL). Cependant, il n'est pas le fruit d'un travail exclusivement solitaire, et de nombreuses personnes m'ont particulièrement aidé durant ces années, soit par leur collaboration, soit par leur amitié, leur soutien ou leur simple présence. Par ces quelques lignes, je tiens à leur adresser ma plus sincère reconnaissance.

Tout d'abord, je voudrais témoigner ma gratitude envers le Prof. Martin Hasler et le Dr. Bertrand Dutoit pour la confiance qu'ils m'ont accordée en me permettant de réaliser une thèse au sein de leur laboratoire, aux Dr. Michel Decroux et Dr. Louis Antognazza de l'Université de Genève qui ont développé le limiteur de courant et réalisé les mesures, ainsi qu'aux membres du LANOS, anciens comme actuels, pour l'ambiance amicale qu'ils ont fait et font régner dans ce laboratoire.

Les simulations numériques ont été implémentées sous le logiciel « Flux ». La réalisation de celles-ci aurait été plus longue et difficile sans l'expérience et les précieux conseils de Francesco Grilli et Svetlomidir Stavrev qui m'ont transmis leur savoir-faire dans la modélisation de matériaux supraconducteurs. Un remerciement particulier au Dr. Daho Taghezout et à Gilles Dutoit de la société Applied Magnetics (distributeur suisse du logiciel "Flux"), qui m'ont fourni un support technique de qualité chaque fois que j'en ai eu besoin. Toute ma reconnaissance également à Géraldine Conti, Philip Immoberdorf et Peter Buehlmann pour leur collaboration durant le stage ou le projet de semestre qu'ils ont effectué sous mon encadrement.

Trois années sans le soutien inestimable d'ami(e)s seraient un échec. Un grand merci donc à tous ceux et toutes celles qui ont été à mes côtés, et qui m'ont aidé ou encouragé. Je voudrais plus spécialement adresser un clin d'œil à Charlotte Eidenbenz, Sophie Baumgartner, Claire et Jérémie Chabloz, Kali et Louis Grandjean, Céline Freymond, Maryline et Vincent Porchet, Julian Fleury, Sébastien Mariethoz, Sara Furrer, Chantal et Thomas Gauglhofer, Lucienne Bussy, Martine Schlaeppli, Simona et Christophe Hebeisen, Marina Kaempfer et Christian Albrecht, Emmanuel Marthe, Hélène Nigg, Annmarie McCaig, Thomas Hélie, ainsi qu'aux membres du groupe des "JM.Jistes", en particulier Jérôme Prévost, Daniel Diolosa, Andreia Semedo et Beniamino Di Martino. Mille excuses à ceux que je n'ai pas cités sur cette liste, sachez que vous êtes tous et toutes dans mes pensées.

Enfin, je tiens à exprimer ma reconnaissance à ma famille pour son soutien et ses encouragements durant toutes ces années, et plus particulièrement à mes parents pour m'avoir donné la chance de faire des études universitaires correspondant à mes souhaits.



# Préambule

## Petit historique

L'histoire de la supraconductivité commence en 1911 dans un laboratoire de l'Université de Leiden aux Pays-Bas. Heike Kammerling-Onnes, qui s'est intéressé auparavant à la liquéfaction de l'hélium, étudie les propriétés des métaux à basse température, à la température de l'hélium liquide plus exactement. C'est alors que Gilles Holst, étudiant dans ce laboratoire, observa la disparition brutale de la résistivité du mercure lorsque la température devenait légèrement inférieure à 4.2 K. Les propriétés extraordinaires observées sur la conduction électrique ont conduit à l'appellation de ce nouvel état : "état supraconducteur".

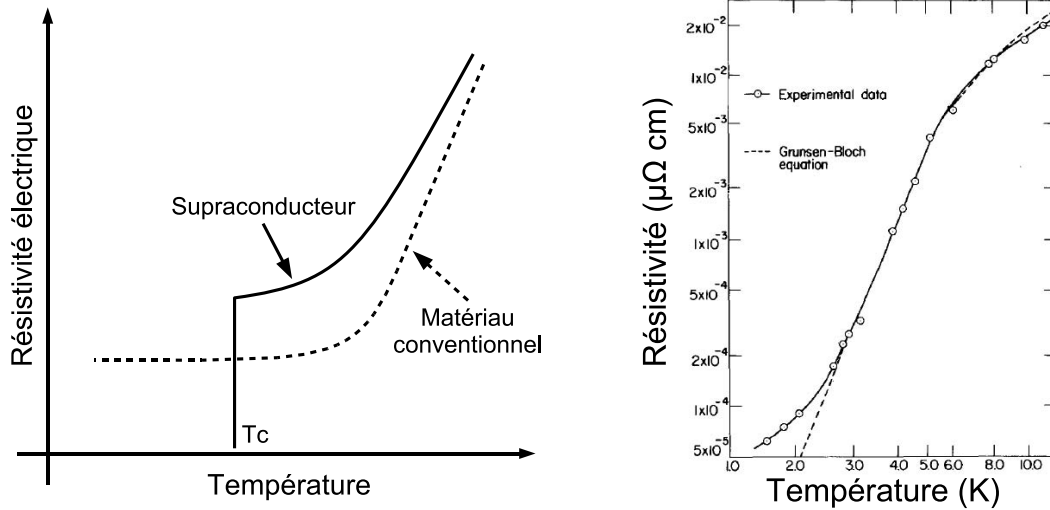
|      |   |
|------|---|
| 1908 | Liquéfaction de l'hélium  |
| 1911 | H. Kammerling-Onnes découvre la supraconductivité du mercure en dessous de 4.2 K [1]  |
| 1933 | W. Meissner et R. Ochsenfeld découvre le diamagnétisme parfait associé à l'état supraconducteur   |
| 1935 | Théorie de London sur le comportement électrodynamique des supraconducteurs   |
| 1957 | J. Bardeen, N. Cooper et J.R. Schrieffer propose une explication quantique de la supraconductivité (théorie BCS)  |
| 1961 | Confirmation expérimentale de la valeur du fluxoïde (quantum de flux) $\phi_0 = \frac{h}{2 e }$ . Cette découverte prouve l'existence de paires de Cooper |
| 1962 | B. D. Josephson prédit de manière théorique l'effet tunnel des paires de Cooper à travers une couche mince isolante (oxyde)                               |
| 1965 | Fabrication de câbles en NbTi   |
| 1974 | Record de température critique (films de Nb <sub>3</sub> Ge vaporisé avec $T_c = 23.4$ K)   |
| 1974 | Fabrication de câbles multifilamentaires en Nb <sub>3</sub> Ge avec un stabilisateur en bronze  |
| 1986 | J. G. Bednorz et K. A. Müller découvrent la supraconductivité à 30 K dans des composés La – Ba – Cu – O   |
| 1987 | Supraconductivité à 92 K dans les composés YBa <sub>2</sub> Cu <sub>3</sub> O <sub>7-<math>\delta</math></sub>  |
| 1993 | $T_c = 135$ K des composés HgBa <sub>2</sub> Ca <sub>2</sub> Cu <sub>3</sub> O <sub>8-<math>\delta</math></sub>   |
| 2001 | Découverte des propriétés supraconductrices du composé MgB <sub>2</sub>   |

TAB. 1: Petit historique de la supraconductivité

# Propriétés générales

## Résistivité

C'est le phénomène le plus connu et le plus remarquable : en dessous d'une certaine température, appelée température critique ( $T_c$ ), la résistivité d'un matériau supraconducteur devient brutalement non mesurable (figure 1). Pour le mercure, cette chute brutale intervient lorsque la température  $T$  est de l'ordre de 4.2 K.



(a) Pour un matériau conventionnel et supraconducteur [2]

(b) Pour un fil de mercure ( $T_c = 4.2 \text{ K}$ ) [3]

FIG. 1: Évolution de la résistivité en fonction de la température.

Des expériences reposant sur la décroissance exponentielle de l'induction magnétique générée par le courant circulant dans une bobine supraconductrice soigneusement court-circuitée montrent que la résistivité chute aux alentours de  $10^{-24} \Omega \text{ m}$ . La constante de temps  $\tau = L/R$  du circuit électrique est alors supérieure à 100 millénaires. Paradoxalement, la résistivité d'un matériau supraconducteur à l'état normal (c'est-à-dire non supraconducteur) est élevée, de l'ordre du  $\mu\Omega \text{ m}$ . Pour comparaison, la résistivité du cuivre à 90 K est de  $\rho_{\text{Cu}}(90 \text{ K}) = 0.003 \mu\Omega \text{ m} = 0.3 \mu\Omega \text{ cm}$ .

## Aimantation

Un matériau supraconducteur n'est pas seulement un conducteur parfait. Dans l'état normal, il est non magnétique, son comportement n'est pas modifié par la présence d'un champ magnétique. En revanche, en dessous de la température critique, il devient diamagnétique : son aimantation est négative, pour des champs magnétiques inférieurs à une certaine valeur appelée champ critique ( $H_c$ ). Ce diamagnétisme, sous certaines conditions, peut être pratiquement parfait. Le supraconducteur expulse alors totalement l'induction magnétique, et ce indépendamment des conditions initiales. La susceptibilité magnétique  $\chi$  est alors égale à  $-1$ . Cet effet est appelé *effet Meissner*.

Ce comportement diamagnétique distingue les matériaux supraconducteurs des matériaux parfaitement conducteurs. Un matériau dont seule la résistivité s'annule (conducteur parfait) présente une hystérésis magnétique. En champ croissant, ce matériau va se comporter comme un supraconducteur : des courants induits en surface vont écranter l'induction

magnétique extérieure. Par contre, en champ décroissant à partir de  $H_c$ , les courants induits dans le conducteur parfait vont s'opposer à la variation d'induction (loi de Lenz) alors que dans un supraconducteur, les courants induits vont s'annuler. Le tableau 2 ci-après illustre cette distinction entre conducteur parfait et supraconducteur lors d'un refroidissement sous champ magnétique externe.

|   |  | Refroidissement puis suppression du champ $B_e$ |                                    |                                 |
|---|--|---|------------------------------------|---------------------------------|
|   |  | →   |                                    |                                 |
|   |  | $T = 300\text{ K}$<br>$B_e \neq 0\text{ T}$     | $T < T_c$<br>$B_e \neq 0\text{ T}$ | $T < T_c$<br>$B_e = 0\text{ T}$ |
| Conducteur<br>parfait ( $\rho = 0$ )                      |  |   |                                    |                                 |
| Supraconducteur<br>idéal ( $\rho = 0$ et<br>$\chi = -1$ ) |  |   |                                    |                                 |

TAB. 2: Comparaison entre le comportement magnétique d'un conducteur parfait et celui d'un supraconducteur idéal.

## Chaleur spécifique

En l'absence de champ magnétique, un saut de chaleur spécifique est associé au passage de l'état normal vers l'état supraconducteur à la température critique  $T_c$ . Ce saut est de faible valeur, de l'ordre de quelques centaines de  $\text{mJg}^{-1}\text{K}^{-1}$  (figure 2). Il n'est en général pas pris en compte dans les simulations ou les études de matériaux, mais associé aux deux propriétés précédentes il permet de confirmer clairement les propriétés supraconductrices d'un matériau.

## Gap électronique

On montre que ce saut de chaleur spécifique (figure 2) implique l'existence d'un gap d'énergie entre l'état fondamental et les excitations du système, comme dans un semi-conducteur. Son existence est associée à la présence d'états liés de deux électrons : les paires de *Cooper* [5].

## Présentation d'un ruban supraconducteur à haute température critique

Un échantillon supraconducteur est un conducteur électrique composé d'un cœur et d'un stabilisateur. Le cœur, en noir sur les figures 3, 4 et 5, est réalisé à l'aide de brins supraconducteurs torsadés et noyé dans une matrice résistive appelée stabilisateur. Ce dernier sert à assurer la stabilité électrique (lors d'un "quençh"), thermique et mécanique de l'échantillon. Il est en général composé d'un alliage contenant majoritairement de l'argent. Pour des supraconducteurs de type "couches minces", on utilise un alliage d'or.



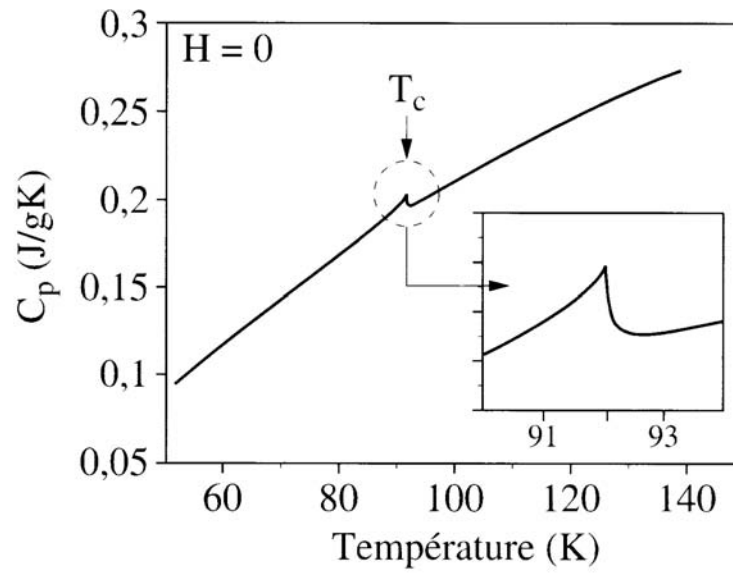


FIG. 2: Chaleur spécifique d'un échantillon d'YBCO [4].

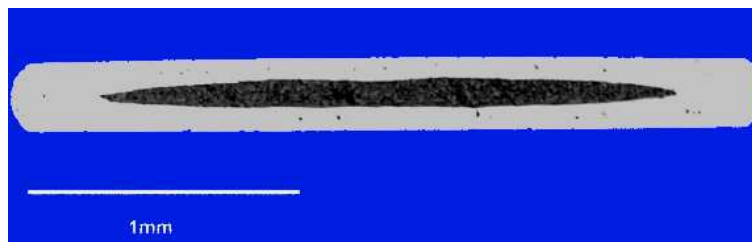


FIG. 3: Ruban monofilamentaire supraconducteur.



FIG. 4: Ruban composé de 19 filaments supraconducteurs.

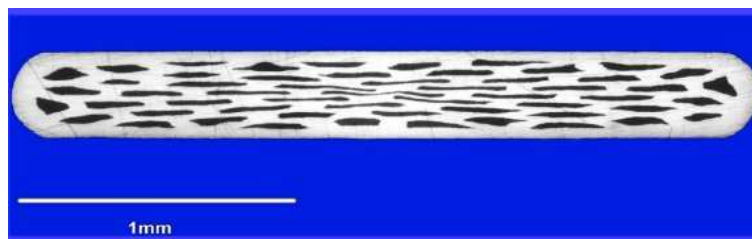


FIG. 5: Ruban composé de 55 filaments supraconducteurs.

La fabrication d'un ruban passe par différentes étapes qui varient selon les matériaux et les performances que l'on désire. Un exemple de processus pour des échantillons de NbTi est

représenté à la figure 6.

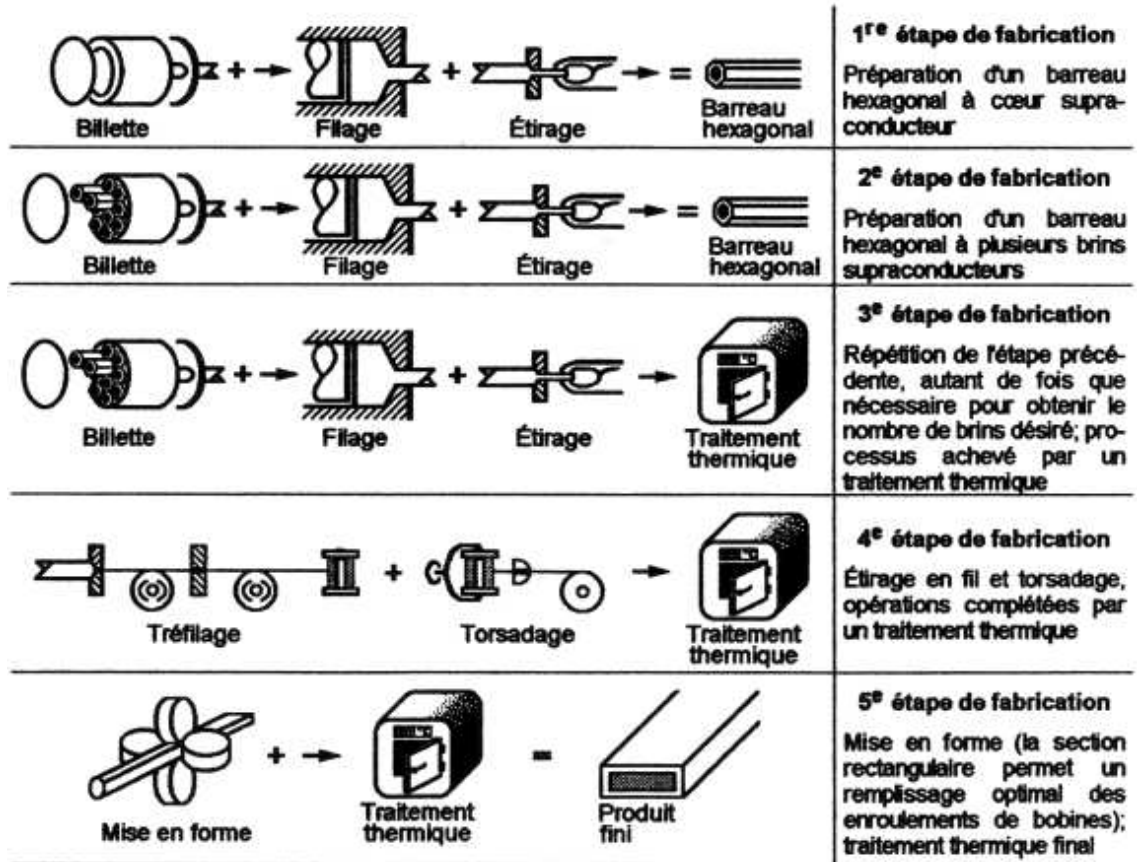


FIG. 6: Étapes nécessaires à la fabrication d'un ruban NbTi.

## Grandeurs critiques

L'absence de pertes électriques dans un supraconducteur existe seulement dans un domaine restreint défini par trois paramètres appelés "grandeurs critiques".

### Température critique $T_c$

La température critique est très variable en fonction de la nature du (des) matériau(x) composant(s) le supraconducteur (figure 7). Inférieure à 23 K pour les matériaux conventionnels, la température critique est comprise entre 100 et 130 K pour plusieurs matériaux découverts depuis 1986. Ces derniers sont appelés supraconducteurs à haute température critique.

Ils sont particulièrement intéressants puisqu'ils peuvent être utilisés à la température de l'azote liquide (77 K), gaz présent en abondance dans l'atmosphère, et dont la production est bien moins coûteuse que celle de l'hélium liquide.

### Champs critiques $H_{c1}$ et $H_{c2}$

La supraconductivité est détruite si l'échantillon est soumis à un champ magnétique, y compris son champ magnétique propre lorsqu'un courant le traverse. Tous les matériaux n'ont cependant pas le même comportement, et on distingue deux types de supraconducteurs.

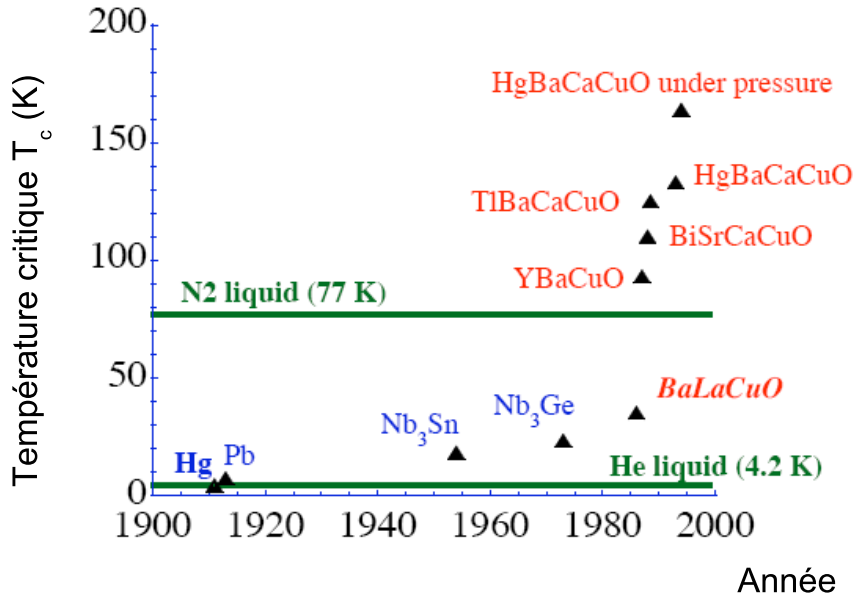


FIG. 7: Température critique et année de découverte de quelques matériaux supraconducteurs [6].

**Supraconducteurs de type I :** Les supraconducteurs de type I ne possèdent qu'un seul champ critique  $H_c$  : le champ critique thermodynamique. Ils expulsent totalement l'induction magnétique tant que celle-ci est inférieure à  $\mu_0 H_c$  (figures 8 et 9). L'induction critique  $\mu_0 H_c$  de ces matériaux est faible, de l'ordre de 100 mT. De ce fait, elle limite beaucoup leur utilisation dans le domaine de l'électrotechnique, sauf éventuellement dans le cadre de lignes électriques.

On définit un paramètre  $\lambda_L$  appelé longueur de pénétration de London. Sa valeur est donnée par l'équation :

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m : \text{masse de l'électron} \\ n_s : \text{densité d'électrons supraconducteurs} \\ e : \text{charge de l'électron} \end{cases} \quad (1)$$

Bien que  $\lambda_L$  soit un paramètre intrinsèque au matériau, son ordre de grandeur est de l'ordre de la dizaine de nm. Il représente la longueur de pénétration du champ magnétique dans le matériau  $h(x) = H_{ext} \exp(-x/\lambda_L)$  (figure 10).

**Supraconducteurs de type II :** Les matériaux supraconducteurs de type II possèdent deux champs critiques notés  $H_{c1}$  et  $H_{c2}$  (figure 8). La valeur de  $H_{c2}$  est en général bien plus élevée que celle de  $H_{c1}$ , et  $\mu_0 H_{c2}$  peut atteindre des dizaines de teslas. Cette particularité à supporter des champs magnétiques importants les rend très attrayants pour l'électrotechnique.

En dessous du premier champ critique  $H_{c1}$ , leur comportement, tout comme celui des supraconducteurs de type I, est parfaitement diamagnétique. Au-delà, le diamagnétisme devient partiel et le matériau est alors dans l'état mixte. Son aimantation diminue avec le champ pour s'annuler complètement lorsqu'il est égal à  $H_{c2}$ . Le matériau passe alors à l'état normal.

### État mixte, réseau de vortex

La répartition de l'induction magnétique au sein d'un supraconducteur de type II dans l'état mixte n'est pas uniforme. En effet, l'induction magnétique apparaît uniquement en

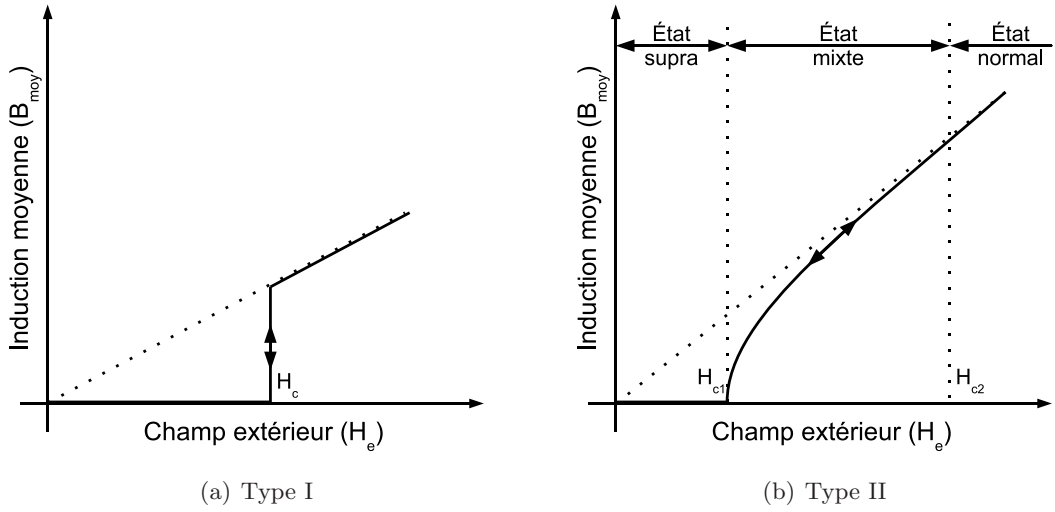


FIG. 8: Induction magnétique dans un matériau supraconducteur parfait.

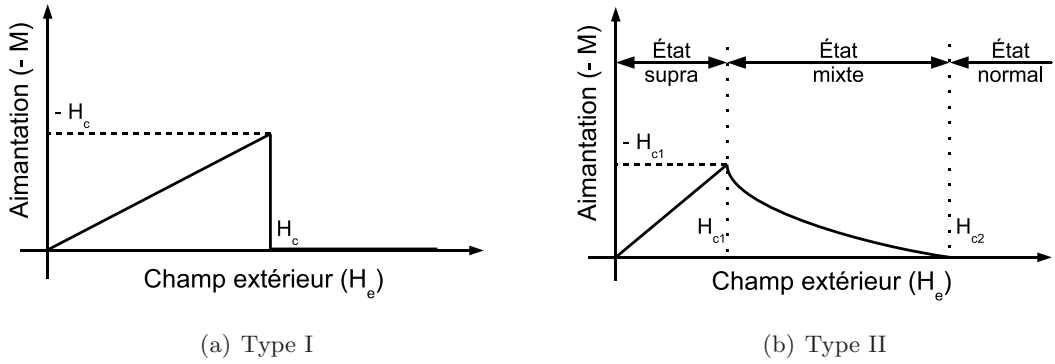


FIG. 9: Magnétisation dans un matériau supraconducteur parfait.

différents points (figure 11). Pour un matériau sans défaut, ces points forment un réseau triangulaire.

Les points, représentés en blanc sur l'image magnéto-optique de la figure 12 sont de fait des "tubes" qui traversent le matériau. Ils sont tous caractérisés par exactement le même flux magnétique, le fluxoïd, noté  $\phi_0$  et d'expression :

$$\phi_0 = \frac{h}{2e} = 2.07 \cdot 10^{-15} \text{ Wb} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} h : \text{constante de Planck} \\ e : \text{charge de l'électron} \end{cases} \quad (2)$$

Ainsi, le cœur de chaque tube est dans l'état normal. Il laisse pénétrer l'induction magnétique. Le reste du matériau est dans l'état supraconducteur. Des courants annulaires persistants, appelés "supra-courants", circulent sur une distance  $\lambda_L$  autour de chaque cœur pour annuler le champ. Ces courants, de type tourbillonnaire, ont donné le nom de vortex (tourbillon) à cette structure microscopique.

### Densité de courant critique $J_c$ et courant critique $I_c$

**Supraconducteurs de type I :** Le courant critique d'un supraconducteur de type I est lié au champ critique  $H_c$ . Il peut être déterminé par la règle de *Silsbee* : c'est le courant qui

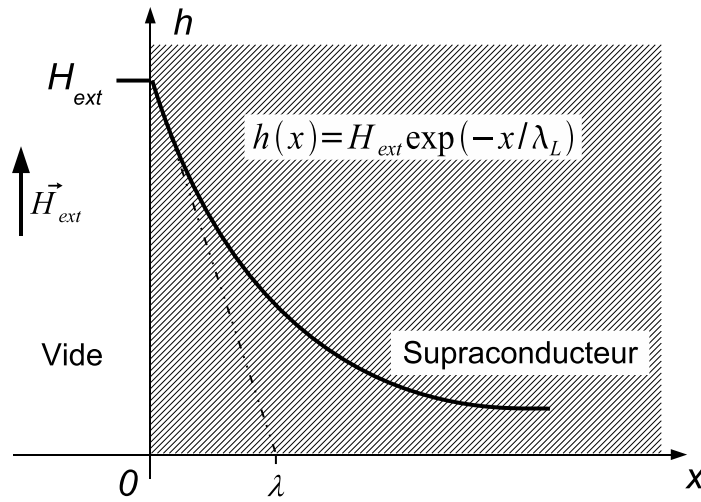


FIG. 10: Pénétration du champ magnétique dans un supraconducteur de type I.

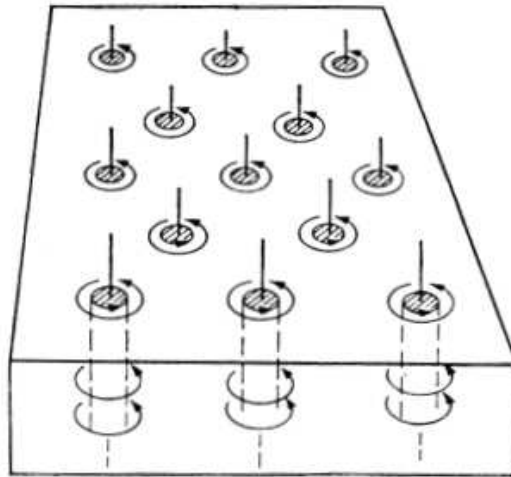


FIG. 11: Réseau de vortex dans un matériau supraconducteur de type II [7].

créé le champ critique  $H_c$  à la surface du conducteur. Il est donc aisé de trouver le courant critique d'un cylindre de diamètre  $D$  :  $I_c = \pi D H_c$ .

**Supraconducteurs de type II :** La densité de courant critique pour un matériau de type II est liée à l'ancrage des vortex. Lorsque la force électromagnétique dépasse la force d'ancrage, les vortex commencent à se déplacer. Ce déplacement induit un champ électrique non nul aux bornes du matériau et provoque une dissipation importante d'énergie.

Comme cette dissipation apparaît progressivement, le courant critique  $I_c$  est défini à l'aide d'un critère. Le plus commun pour ces matériaux est celui du  $\mu\text{V cm}^{-1}$  : c'est le courant qui traverse l'échantillon lorsque la tension aux bornes de l'échantillon correspond à un champ électrique de  $1\mu\text{V cm}^{-1}$ .

À partir de cette mesure, on calcule deux densités de courant critique :

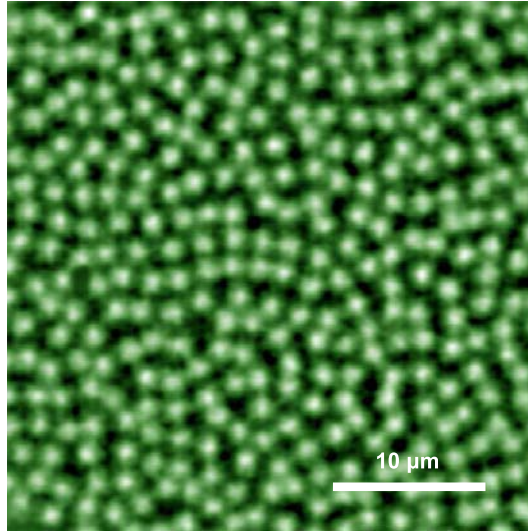


FIG. 12: Image magnéto-optique d'un réseau de vortex dans un matériau NbSe<sub>2</sub> à 4 K pour un champ magnétique  $H_{ext} = 7 \text{ Oe} \approx 557 \text{ Am}^{-1}$  [8]. Cette valeur correspond à une induction magnétique d'environ 0.7 mT dans l'air.

$$\begin{aligned}
 J_c &= I_c / S_{\text{supra}} && \text{avec } S_{\text{supra}} \text{ section supraconductrice} \\
 J_e &= I_c / S_{\text{échantillon}} && \text{avec } S_{\text{échantillon}} \text{ section totale}
 \end{aligned}$$

On entend par section totale la somme des sections de la partie supraconductrice et de la partie stabilisatrice.

## Surface critique

Il existe une dépendance entre les grandeurs  $T_c$ ,  $H_c$  et  $J_c$ . L'utilisation d'un supraconducteur avec un minimum de pertes nécessite qu'il soit placé dans des conditions où son état est non dissipatif. Il est donc nécessaire de connaître les limites à ne pas dépasser afin de ne pas sortir de cette zone d'utilisation optimale en termes de pertes.

On appelle surface critique la surface qui délimite l'état non dissipatif la surface dans le plan  $[T, H, J]$  (figure 13).

## Motivations de cette thèse

Cette thèse traite de la modélisation numérique des supraconducteurs. Sa principale originalité réside dans l'extension du modèle  $E(J)$  décrivant le comportement électrique du matériau afin de prendre en compte le passage de l'état intermédiaire à l'état normal, ainsi que dans la prise en compte des phénomènes thermiques causés par les pertes importantes lorsque le courant dépasse le courant critique  $I_c$ . Il est particulièrement important de tenir compte de ces phénomènes lors du développement de systèmes risquant d'être exposés à des régimes sur-critiques sévères, comme c'est le cas par exemple pour un limiteur de courant inséré dans un réseau électrique. La possibilité de réaliser des simulations numériques permet de prédire le comportement électrique et thermique du système, et d'optimiser les paramètres géométriques en vue d'en améliorer les performances.

Ce travail est divisé en deux parties distinctes :

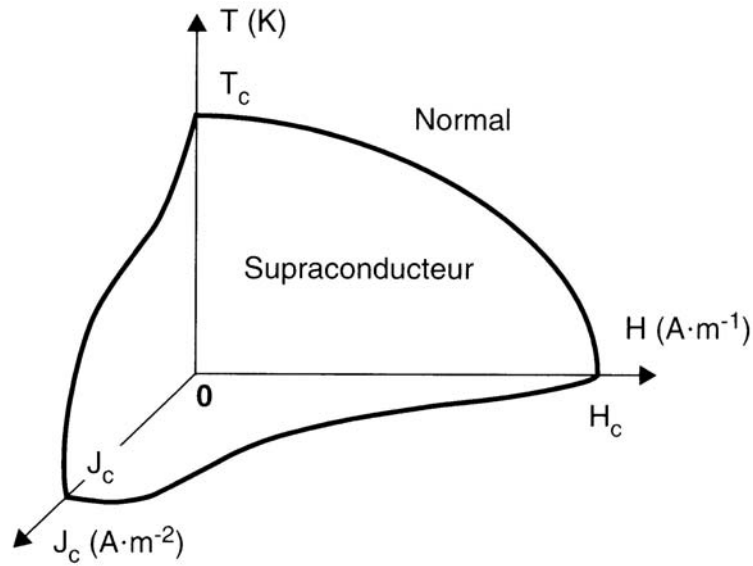


FIG. 13: La supraconductivité ne se manifeste que dans la région où  $T$ ,  $H$  et  $J$  sont inférieurs aux valeurs critiques  $T_c$ ,  $H_c$  et  $J_c$  respectivement [2].

- La première partie est consacrée à l'étude de la répartition dynamique du courant dans un échantillon supraconducteur à l'aide d'un modèle global. En particulier, ce modèle nous permettra de reconstruire, à partir de la mesure du champ magnétique à la surface du conducteur, une approximation de la densité locale de courant dans un ruban.
- Nous traiterons ensuite de la modélisation de matériaux supraconducteurs en régime sur-critique à l'aide de la méthode des éléments finis. Nous verrons comment réaliser une simulation électromagnéto-thermique couplée, prenant en compte la modification des paramètres électriques due à l'augmentation de la température. Nous validerons les résultats obtenus en les comparant aux mesures réalisées sur un limiteur de courant.

Première partie

**Problème inverse**





# Chapitre 1

## Introduction

Cette première partie est consacrée à la recherche de la distribution de courant dynamique dans un échantillon supraconducteur.

### 1.1 Motivations

La connaissance de la répartition du courant dans un échantillon supraconducteur est un élément important pour la compréhension des propriétés conductrices particulières observées. Plus spécialement, la connaissance de cette répartition dynamique en régime alternatif est nécessaire à la détermination des pertes dans un ruban.

De plus, le courant critique global  $I_c$  d'un ruban dépend de ses caractéristiques géométriques et de la densité de courant critique locale  $J_c$ . S'il est possible de calculer une carte de la distribution du courant dans un ruban, cette méthode pourra être utilisée dans des processus de contrôle de qualité car elle permettra la détection et la localisation de défauts dans l'échantillon.

### 1.2 Pourquoi ne pas mesurer la densité de courant $J$ ?

Il paraît en effet plus simple de réaliser des mesures sur un échantillon afin de connaître la densité de courant  $J$  dans un ruban supraconducteur. Diverses méthodes existent pour cela, comme celle proposée par B. ten Haken [9] qui consiste à appliquer un gradient magnétique passant par zéro. De cette manière, le fort champ magnétique externe ( $B > \mu_0 H_c$ ) fait que la quasi-totalité du ruban est à l'état normal, sauf la région que l'on souhaite mesurer. En déplaçant cette région et en mesurant sa densité de courant critique  $J_c$ , il est possible d'évaluer la qualité de l'échantillon. Cependant, cette technique possède le désavantage de ne pas maintenir les conditions de mesure stables : en effet, d'une part, le test du ruban se fait sous champ magnétique, ce qui n'est pas forcément une condition nominale d'utilisation du ruban, et d'autre part, une région soumise à un champ nul à un instant  $t$  se retrouve soumise à un champ magnétique important à un instant  $t + \Delta t$ .

Il est aussi possible de passer par l'analyse des cycles d'hystérésis magnétiques [10], ou par des mesures magnéto-optique [11], cependant toutes ces techniques demandent une préparation particulière de l'échantillon ou bien une calibration précise des appareils de mesures [12].

### 1.3 Proposition

Nous proposons donc de reconstruire cette répartition de courant à l'aide des mesures de champ magnétique faites à la surface de l'échantillon à l'aide de sondes de Hall. L'utilisation de ce type de sondes ne nécessite aucune préparation particulière de l'échantillon si ce n'est les opérations courantes permettant de réaliser les connections électriques et son refroidissement à température cryogénique.

Ce problème est un problème dit "inverse" : partant de la conséquence d'un phénomène, nous tentons de retrouver la cause de celui-ci. Il est fréquent que les problèmes inverses soient des problèmes mathématiquement mal définis. En effet, il peut y avoir plusieurs solutions, dans notre cas plusieurs distributions de courant, qui conduiraient à la même conséquence.

Il conviendra donc de formuler certaines simplifications afin de limiter le nombre de solutions possibles, et de réduire ainsi la complexité du problème. Nous poserons donc les équations qui décrivent le comportement électromagnétique d'un supraconducteur en nous plaçant dans l'hypothèse du modèle de *Bean*. Ensuite, nous présenterons le système de mesure qui nous permettra d'obtenir le profil dynamique du champ magnétique à la surface. Ces données seront enfin traitées afin de reconstruire la répartition du courant dans la section supraconductrice du conducteur.

## Chapitre 2

# Équations électromagnétiques décrivant le comportement d'un supraconducteur

Macroscopiquement, les équations de *Maxwell* restent valables pour décrire les phénomènes électromagnétiques qui se produisent dans un supraconducteur. En se plaçant en régime quasi-stationnaire (les courants de déplacement sont considérés comme nuls), elles s'écrivent :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \text{div}(\vec{B}) = 0 \quad ; \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{H}) = \vec{J} \quad (2.1)$$

Comme pour les autres conducteurs, les équations suivantes viennent compléter les équations de *Maxwell* :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad ; \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \text{ou} \quad \vec{E} = \rho \vec{J} \quad (2.2)$$

Dans les équations (2.1) et (2.2) :

- $\vec{E}$  est le champ électrique (en  $\text{Vm}^{-1}$ ),
- $\vec{B}$  est le champ d'induction magnétique (en T),
- $\vec{H}$  est le champ magnétique (en  $\text{Am}^{-1}$ ),
- $\vec{J}$  est la densité de courant électrique (en  $\text{Am}^{-2}$ ),
- $\sigma$  est la conductivité du milieu (en  $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ ),
- $\rho$  est la résistivité du milieu (en  $\Omega\text{m}$ ),
- $\mu$  est la perméabilité magnétique du milieu (en  $\text{Hm}^{-1}$ ).

### 2.1 Relation $B(H)$

L'induction magnétique  $B$  à l'intérieur d'un matériau en fonction du champ externe  $H$  et de l'aimantation  $M$  est donné par l'expression :

$$B = \mu_0 H + \mu_0 M = (1 + \chi)\mu_0 H = \mu_0 \mu_r H \quad (2.3)$$

Nous avons vu qu'un supraconducteur était diamagnétique, c'est à dire que  $B$  est nul à l'intérieur du matériau, lorsque  $H < H_{c1}$ . Ceci entraîne que  $M = -H$  et  $\chi = -1$ . En revanche, lorsque le champ  $H$  est supérieur à  $H_{c1}$ , le matériau supraconducteur n'est plus diamagnétique. Comme le champ critique  $H_{c1}$  d'un supraconducteur de type II est de valeur faible, l'induction  $B$  auquel il est soumis lors de son utilisation est en général bien supérieure à  $\mu_0 H_{c1}$ . Il peut donc être considéré comme macroscopiquement non magnétique [4].

On peut alors écrire  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$  (figure 2.1).

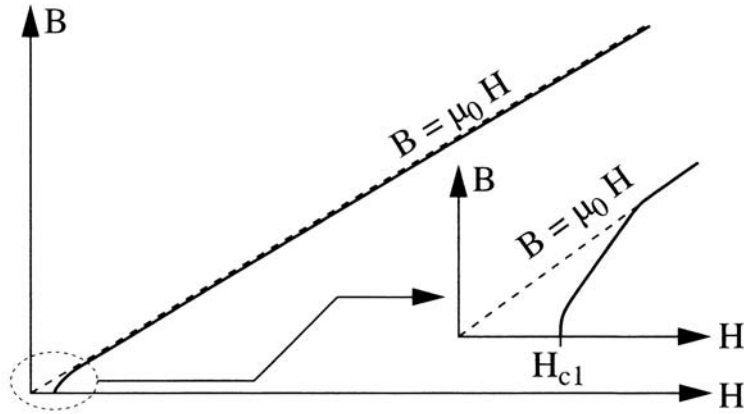


FIG. 2.1: Caractéristique  $B(H)$  d'un supraconducteur [4].

## 2.2 Relation $E(J)$

À partir de mesures courant-tension sur un échantillon, on peut déduire la caractéristique expérimentale  $V(I)$  qui se met habituellement sous la forme d'une loi de puissance. Si l'on admet que cette caractéristique reste valable pour la densité de courant, la relation  $E(J)$  s'écrit :

$$E = E_c \left( \frac{J}{J_c} \right)^n \quad (2.4)$$

Dans l'équation (2.4), l'exposant  $n$  dépend non seulement du matériau, mais aussi de la température et de l'induction. Plus l'exposant  $n$  est élevé, et plus la transition est raide (figure 2.2).

Le paramètre  $n$  est parfois considéré comme un indicateur de la qualité d'un ruban : plus il est élevé et plus le brin est d'excellente qualité. En effet, dans ce cas, pour des densités de courant et une valeur de  $n$  faibles, les pertes en régime sous-critique sont plus élevées que pour une valeur élevée de l'exposant (figure 2.1). De plus, dans ce dernier cas, le courant critique peut alors être déterminé sans ambiguïté dès lors qu'une tension apparaît aux bornes de l'échantillon.

La relation (2.4) peut être introduite dans un programme informatique afin de déterminer les grandeurs électromagnétiques. Analytiquement, elle devient cependant difficilement utilisable, sauf dans le cas où  $n$  est grand. Alors, ce paramètre peut être considéré comme infini. Cette hypothèse conduit au modèle de l'état critique que nous développons ci-après.

## 2.3 Modèle de l'état critique, modèle de *Bean*

### 2.3.1 Modèle de l'état critique

L'hypothèse de ce modèle est que le coefficient  $n$  est considéré comme infini [13]. Ainsi, la caractéristique  $E(J)$ , représentée à la figure 2.3 se traduit mathématiquement par l'expression suivante :

$$J = J_c(|B|) \frac{E}{|E|} \quad (2.5)$$

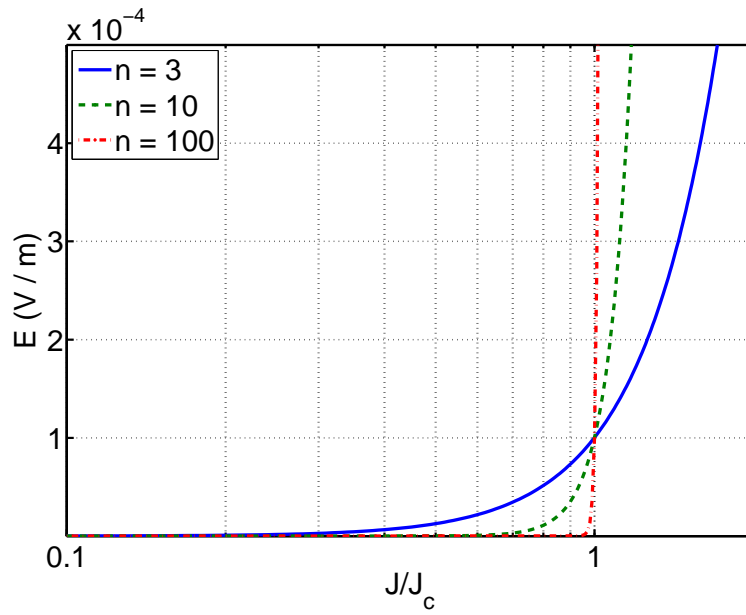


FIG. 2.2: Caractéristique  $E(J)$  d'un supraconducteur.

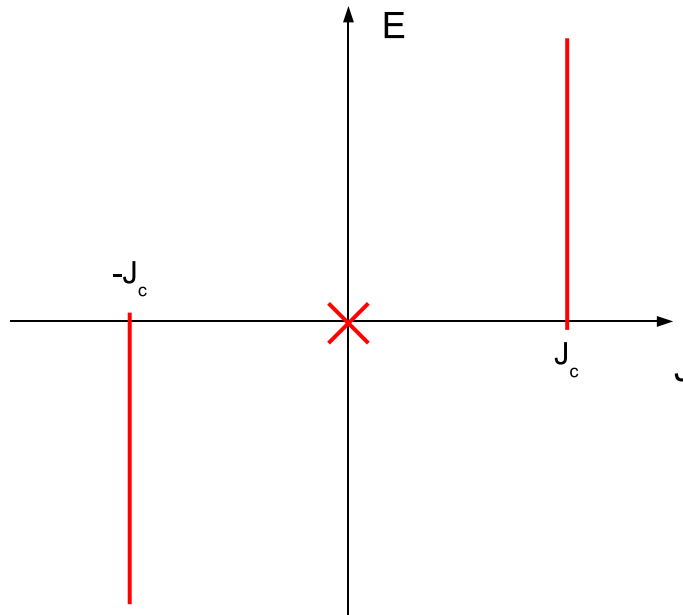


FIG. 2.3: Caractéristique  $E(J)$  d'un supraconducteur, modèle de l'état critique.

Par conséquent, la densité de courant  $J$  ne peut prendre que trois valeurs distinctes :  $-J_c$ ,  $0$  ou  $+J_c$ . Néanmoins, dans ce modèle, la valeur de  $J_c$  peut-être dépendante de l'induction  $\vec{B}$ .

### 2.3.2 Modèle de *Bean*

Afin de permettre le développement de calculs analytiques, il est nécessaire d'ajouter une simplification supplémentaire au modèle de l'état critique en supprimant la dépendance en champ magnétique de la densité de courant critique  $J_c$ . Ce nouveau modèle est connu sous

le nom de modèle de *Bean* [14].

## 2.4 Résumé des équations

Les équations décrivant le comportement électromagnétique d'un supraconducteur sont résumées dans le tableau 2.1 suivant :

|                           |  |
|---------------------------|--|
| Équations de Maxwell      | $\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$<br>$\text{div}(\vec{B}) = 0$<br>$\vec{\text{rot}}(\vec{H}) = \vec{J}$ |
| Milieu non magnétique     | $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$  |
| Relation $E(J)$           | $E = E_c \left(\frac{J}{J_c}\right)^n$   |
| Modèle de l'état critique | $J = 0$ ou $J = \pm J_c$<br>$\Rightarrow \vec{\text{rot}}(\vec{H}) = \pm J_c( \vec{B} )$ ou 0  |
| Modèle de <i>Bean</i>     | $J_c$ indépendant de $ \vec{B} $<br>$\Rightarrow \vec{\text{rot}}(\vec{H}) = \pm J_c$ ou 0   |

TAB. 2.1: Équations décrivant le comportement électromagnétique d'un matériau supraconducteur

## 2.5 Exemple

Dans le but d'illustrer le modèle de *Bean* sur lequel nous nous appuyerons, nous allons étudier le cas d'un fil de longueur infinie et de diamètre  $2a$ , soumis à un champ magnétique externe variable (figure 2.4). Le cas d'un fil de longueur finie nécessiterait la prise en compte des conditions aux limites, en particulier du champ démagnétisant [15], que nous n'exposerons pas dans ce travail.

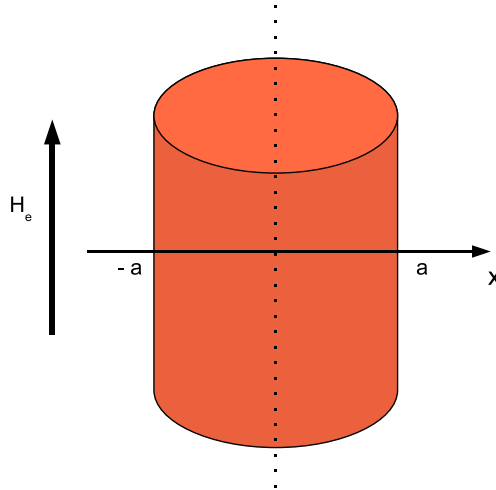


FIG. 2.4: Fil supraconducteur de largeur  $2a$  soumis à un champ magnétique  $H_e$ .

On suppose les conditions initiales suivantes ( $t = 0$ ) :

- le fil est vierge, c'est à dire qu'aucun courant n'est présent,
- le champ externe est nul, soit  $H_e = 0$ .

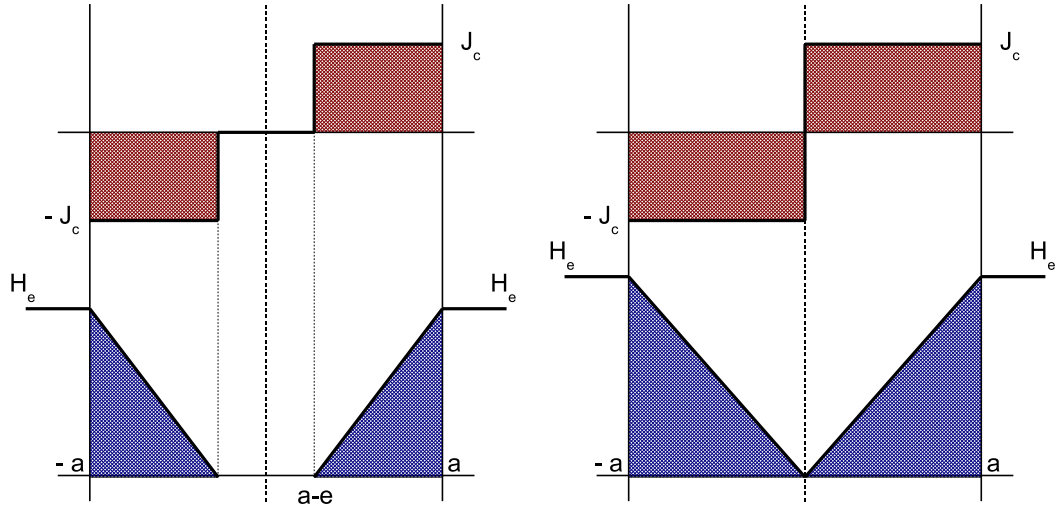


FIG. 2.5: Répartition de l'induction et des courants dans un fil supraconducteur soumis à un champ magnétique externe  $H_e$  croissant.

Lorsque le champ  $H_e$  commence à augmenter, des courants sont induits, en sens inverse, à partir de l'extérieur de la circonférence externe du fil afin d'écranter le champ magnétique à l'intérieur du conducteur (figure 2.5). Cet effet est comparable à l'effet de peau dans un conducteur conventionnel, à la différence que ces courants ne sont pas amortis par la résistivité du matériau et persistent donc lorsque  $\partial H_e / \partial t = 0$ .

La résolution des équations données au tableau 2.1 nous donne :

Tant que  $H_e \leq J_c a$ , on a :

$$\begin{cases} 0 < x < a - e & J = 0, B = 0 \\ a - e < x < a & J = J_c, B = \mu_0 (H_e + J_c(x - a)) \\ e = \frac{H_e}{J_c} \end{cases} \quad (2.6)$$

Lorsque  $H_e > J_c a$ , les courants ne peuvent plus se développer car ils sont limités par la valeur de la densité de courant critique  $J_c$ . L'aimantation au centre de la plaque devient alors non nulle.

Enfin, lorsque le champ magnétique externe  $H_e$  diminue, la répartition des courants s'inverse de manière à s'opposer à cette variation. Des courants, toujours de sens opposé, se développent de nouveau à partir de l'extérieur de la plaque (figure 2.6).

On montre que le comportement électrique du matériau est identique lorsque l'on applique un courant alternatif à la place d'un champ magnétique externe [16]. En particulier, le changement du signe de  $\partial I / \partial t$  entraîne la pénétration, de l'extérieur du ruban vers l'intérieur, d'une zone dans laquelle la densité de courant est opposée à l'état précédent [17].



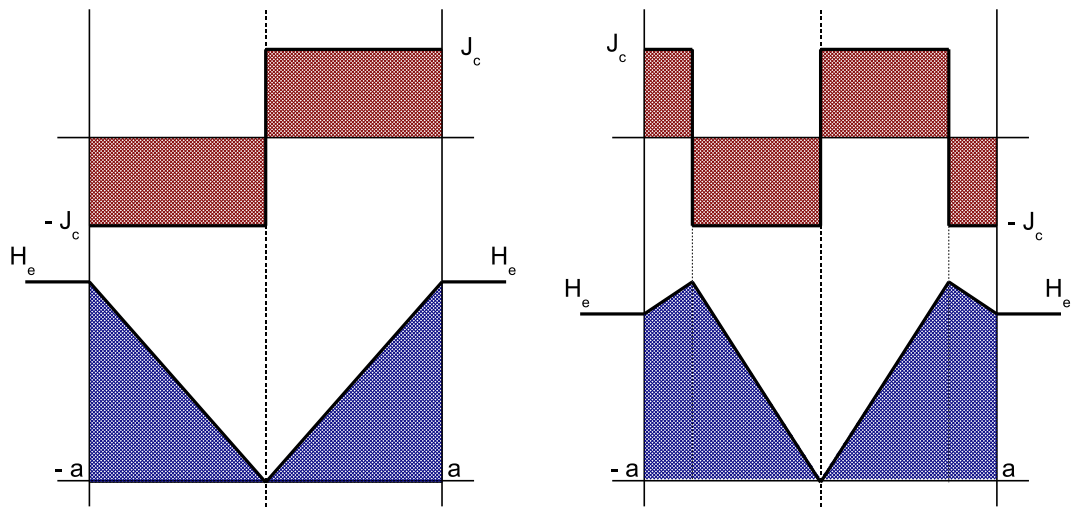


FIG. 2.6: Répartition de l'induction et des courants dans un fil supraconducteur soumis à un champ magnétique externe  $H_e$  décroissant.

## Chapitre 3

# Algorithme de recherche

### 3.1 Présentation du système de mesures

Le système de mesures utilisé est représenté, de manière simplifiée, à la figure 3.1. Il est composé d'un générateur de signaux permettant la commande synchronisée d'une carte d'acquisition digitale 16 voies (résolution : 12 bits) et d'un amplificateur de courant alimentant l'échantillon supraconducteur (figure 3.1). Les sondes de Hall sont excitées à l'aide d'un signal sinusoïdal de fréquence 1000 Hz et on réalise 4 mesures successives sur une période de ce signal. Ainsi, pour un courant à fréquence industriel (50 Hz), il est possible d'obtenir 20 mesures sur une période.

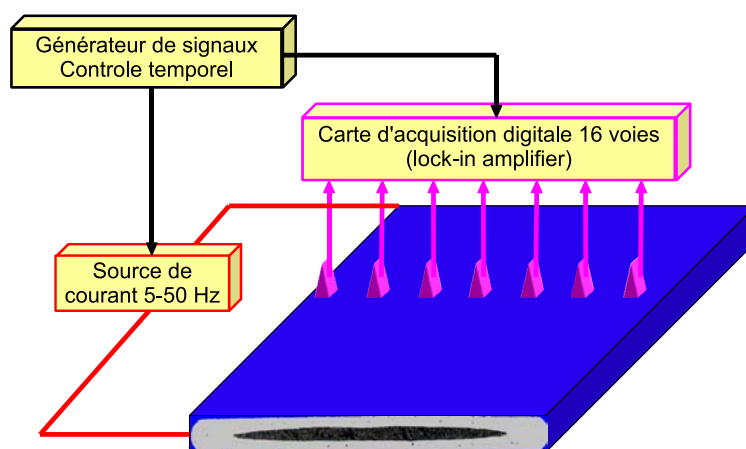


FIG. 3.1: Diagramme simplifié du système de mesures.

Les sondes de Hall sont disposées à une distance de 0.1 mm de la surface du ruban que l'on souhaite tester, et permettent de mesurer la composante verticale du champ magnétique. Afin d'augmenter la résolution spatiale, elles sont dépendantes d'une tête mobile pilotée par des moteurs "pas-à-pas". Grâce à ce dispositif mécanique, il est possible de les déplacer par pas de  $3.5 \mu\text{m}$  [18] et de répéter les mesures afin d'obtenir une cartographie du champ magnétique au-dessus de l'échantillon. Une photo de ce dispositif mécanique est donnée à la figure 3.2.

Il est ainsi possible d'obtenir l'évolution de la composante verticale du champ magnétique pour un cycle (figures 3.3 et 3.4).

Lorsque l'on analyse le profil magnétique pour  $t \approx 10 \text{ ms}$ , soit un courant  $I \approx 0 \text{ A}$ , on remarque qu'il n'est pas nul (figure 3.5), sauf au centre du ruban. Ce phénomène est

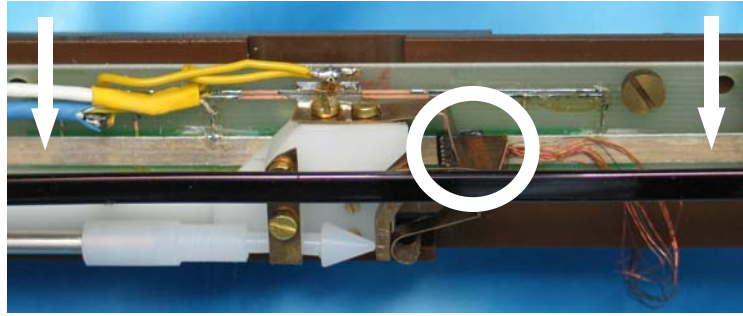


FIG. 3.2: Tête mobile supportant les 7 sondes de Hall. Le cercle blanc indique la position des sondes, tandis que les flèches blanches désignent l'échantillon.

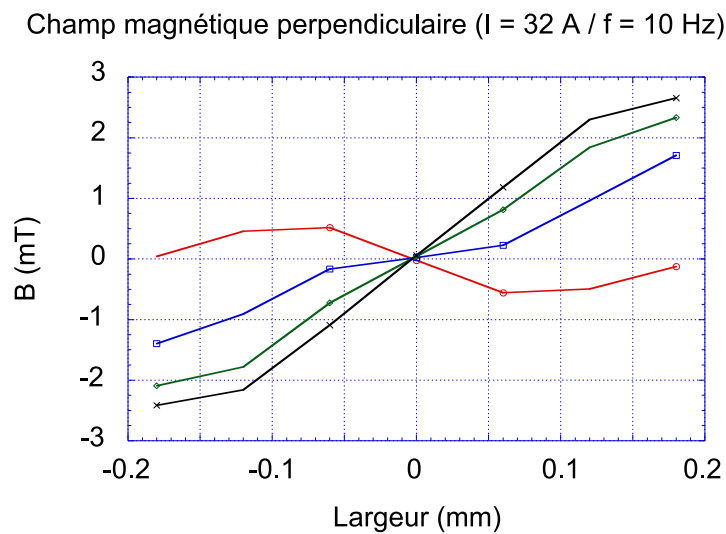


FIG. 3.3: Exemple de profils magnétiques obtenus pour différentes valeurs de temps. L'échantillon utilisé est un ruban Bi-2223/Ag mono-filamentaire de courant critique  $I_c = 82 \text{ A}$  à  $77 \text{ K}$ .

caractéristique du comportement d'un matériau supraconducteur : comme nous l'avons vu au chapitre précédent, lorsque la dérivée du courant change de signe, l'état antérieur est mémorisé, car une zone au sein de laquelle le signe de la densité de courant locale est égal au signe de  $dI/dt$  commence à pénétrer, à partir de l'extérieur de l'échantillon vers l'intérieur. Ainsi, bien que le courant total  $I$  puisse être nul, la densité de courant locale peut ne pas être nulle. Cette situation conduit à la présence d'un profil champ magnétique à la surface de l'échantillon.

### 3.2 Calcul du profil magnétique produit par une distribution de courant

La résolution d'un problème inverse nécessite la connaissance du problème direct, c'est à dire savoir calculer le profil magnétique produit par une distribution de courant donnée. Pour cela, nous appliquons le théorème d'Ampère énoncé ci-dessous :

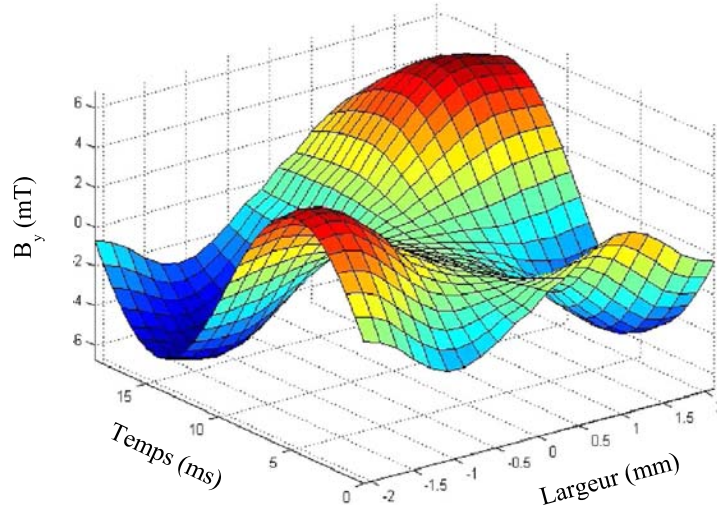


FIG. 3.4: Profil du champ magnétique obtenu pour un ruban Bi-2223/Ag mono-filamentaire de courant critique  $I_c = 82$  A à 77 K. Le courant alimentant l'échantillon est un courant sinusoïdal  $I = \hat{I} \sin(2\pi ft)$ . La valeur de  $\hat{I}$  est choisie proche de  $I_c$ , soit 70 A et  $f = 50$  Hz.

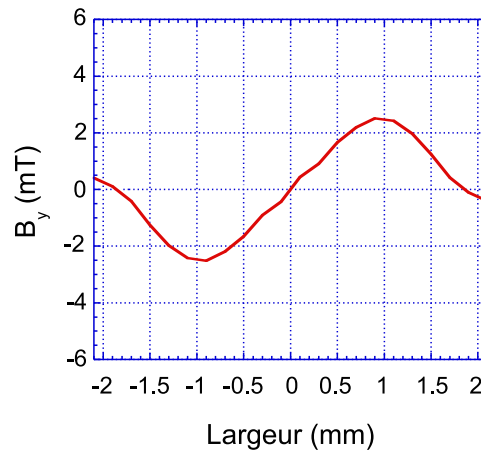


FIG. 3.5: Profil magnétique obtenu à  $t \approx 10$  ms, soit  $I \approx 0$  A.

### 3.2.1 Théorème d'Ampère

**Théorème d'Ampère dans le vide.** *Considérons dans le vide une courbe fermée orientée  $C$  et une surface  $S$  s'appuyant sur cette courbe. L'orientation de la courbe  $C$  définit, conformément à la règle d'orientation positive de l'espace, une normale positive en tout point de la surface  $S$ . La circulation du vecteur induction magnétique divisé par  $\mu_0$  est égale au courant  $I$  traversant la surface  $S$  :*

$$\oint_C \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{l} = I_s \quad (3.1)$$

*Si le courant  $I$  traverse  $N$  fois la surface définie par la courbe  $C$ , alors la circulation est égale à  $N \cdot I$ .*

### 3.2.2 Conducteur infiniment long

Ainsi, un conducteur rectiligne de longueur infinie parcouru par un courant  $I$  (figure 3.6) crée, en tout point de l'espace, une induction magnétique  $B$  donnée par :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r} \vec{u} \quad \text{avec } \vec{u} \text{ vecteur unitaire orthoradial} \quad (3.2)$$

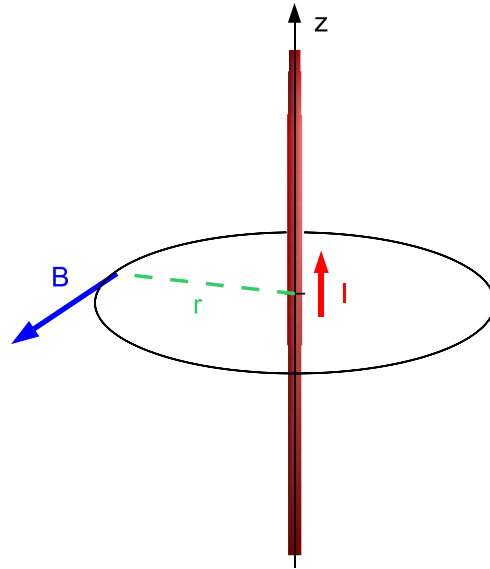


FIG. 3.6: Application du théorème d'Ampère à un conducteur rectiligne.

### 3.2.3 Conducteur de section rectangulaire

Considérons maintenant un conducteur dont la section est rectangulaire, comme représenté à la figure 3.7. Ce conducteur peut être divisé en petits éléments  $dS$ , de longueur infinitésimale, parcourus par une densité de courant  $J$  circulant perpendiculairement à  $dS$ .

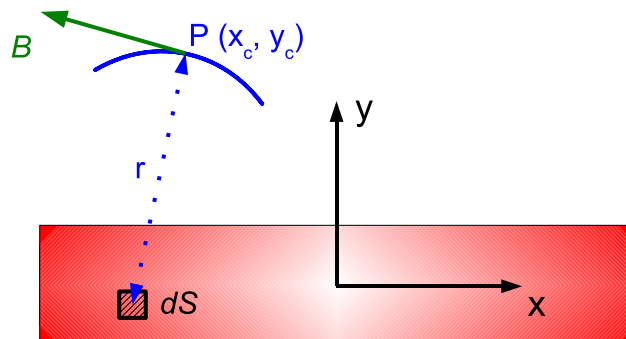


FIG. 3.7: Application du théorème d'Ampère à un conducteur de section rectangulaire.

Ainsi, le champ magnétique créé par la circulation du courant  $I$  dans le conducteur en un point  $P$  de l'espace, de coordonnées  $(x_c, y_c)$ , s'exprime par la relation suivante :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{2 \operatorname{sign}(J) |J|}{\sqrt{(x_c - x)^2 + (y_c - y)^2}} \vec{u} dS \quad (3.3)$$

avec  $\vec{u}$  un vecteur unitaire orthoradial

Les composantes horizontale  $x$  et verticale  $y$  du champ se déduisent de l'expression (3.3) et s'écrivent de la manière suivante :

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{2 \operatorname{sign}(J) |J|}{\sqrt{(x_c - x)^2 + (y_c - y)^2}} \frac{(y_c - y)}{\sqrt{(x_c - x)^2 + (y_c - y)^2}} dS \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \int_S \operatorname{sign}(J) |J| \frac{(y_c - y)}{(x_c - x)^2 + (y_c - y)^2} dS \\ B_y &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{2 \operatorname{sign}(J) |J|}{\sqrt{(x_c - x)^2 + (y_c - y)^2}} \frac{(x_c - x)}{\sqrt{(x_c - x)^2 + (y_c - y)^2}} dS \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \int_S \operatorname{sign}(J) |J| \frac{(x_c - x)}{(x_c - x)^2 + (y_c - y)^2} dS \end{aligned} \quad (3.4)$$

### 3.2.4 Cas d'un matériau supraconducteur

En faisant l'hypothèse que les lois décrivant le comportement électromagnétique du matériau sont celles du modèle de *Bean*, et en connaissant la distribution de la densité de courant dans la partie supraconductrice, il est ainsi possible d'utiliser l'équation (3.4) afin de calculer le profil magnétique que l'on mesurerait à l'aide du dispositif présenté au début de ce chapitre :

$$B_y = \frac{\mu_0}{2\pi} J_c \int_S \operatorname{sign}(J) \frac{(x_c - x)}{(x_c - x)^2 + (y_c - y)^2} dS$$

Ainsi, pour une densité de courant donnée, par exemple celle représentée à la figure 3.8, le champ magnétique mesuré par le capteur situé aux coordonnées  $x_c$  et  $y_c$  de l'espace est donné par l'expression suivante [19] :

$$B_y(x_c y_c) = \sum_{\text{zones}} \frac{\mu_0}{2\pi} J_c \int \int \operatorname{sign}(J) \frac{(x_c - x)}{(x_c - x)^2 + (y_c - y)^2} dx dy \quad (3.5)$$

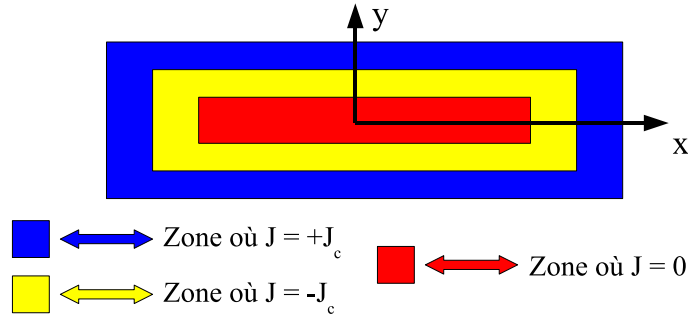


FIG. 3.8: Exemple de distribution de courant en se plaçant dans les hypothèses du modèle de *Bean*.

### 3.3 Inversion du problème

Cependant, nous désirons reconstruire, à partir du profil magnétique mesuré au dessus de l'échantillon, la distribution de la densité de courant circulant dans l'échantillon monofilamentaire supraconducteur. Les dimensions de ce dernier sont données au tableau 3.1.

|                                       |                                   |
|---------------------------------------|-----------------------------------|
| Largeur de échantillon                | 4.05 mm                           |
| Hauteur de échantillon                | 0.27 mm                           |
| Largeur de la partie supraconductrice | 3.00 mm                           |
| Hauteur de la partie supraconductrice | 0.22 mm                           |
| Densité de courant critique           | $1.02 \cdot 10^8 \text{ Am}^{-2}$ |
| Courant critique                      | 68.238 A                          |

TAB. 3.1: Caractéristique de l'échantillon supraconducteur utilisé.

Une première simplification est de considérer qu'aucun courant ne circule dans le stabilisateur. Comme le modèle de *Bean* n'est valable que pour  $I \leq I_c$ , cette hypothèse est acceptable. Ensuite, nous modéliserons le cœur supraconducteur comme un cœur rectangulaire, malgré l'écrasement que l'on constate sur les bords des filaments (figures 4 et 5 du préambule). De ce fait, la géométrie du ruban se rapproche de la configuration représentée à la figure 3.8.

En supposant une distribution de densité de courant connue, définie par quatre variables  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  et  $x_4$  délimitant les différentes zones (figure 3.9), et par la résolution du problème direct donnée par l'expression (3.5), il nous est possible de calculer la composante verticale du champ magnétique pour un capteur situé aux coordonnées  $x_c$  et  $y_c$  de l'espace.

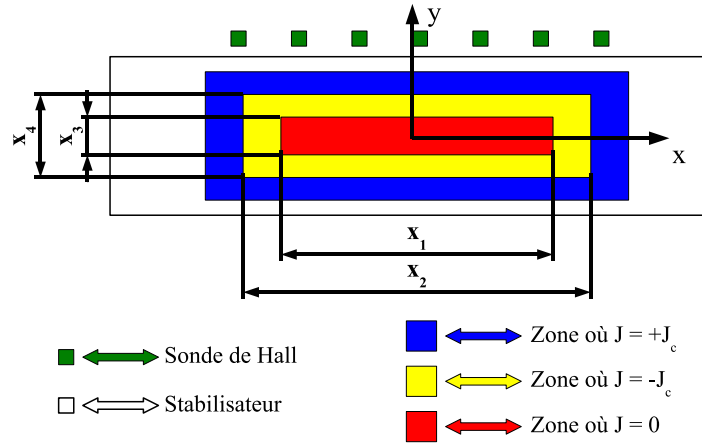


FIG. 3.9: Schéma représentatif des 4 variables que nous souhaitons déterminer.

En appliquant une méthode des moindres carrés, il nous est ainsi possible de minimiser la fonction suivante, définie par la différence calculée entre le profil magnétique mesuré et le profil magnétique calculé, afin de rechercher la valeur des quatre variables recherchées [18] :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sqrt{\sum_{\text{capteurs}} (B_{y \text{ mesuré}} - B_{y \text{ calculé}})^2} \quad (3.6)$$

## Chapitre 4

# Résultats obtenus

L'échantillon est alimenté par un courant sinusoïdal connu, d'expression  $i(t) = \hat{I} \sin(2\pi ft)$  avec  $\hat{I} = 60.2$  A et  $f = 50$  Hz. Lorsque nous appliquons la méthode présentée au chapitre 3 pour  $\omega t = \pi/2$  (soit lorsque le courant est maximal), nous obtenons le résultat représenté à la figure 4.1. Nous remarquons une bonne correspondance entre le profil reconstruit grâce à la recherche des variables  $x_1, x_2, x_3$  et  $x_4$  en comparaison avec le profil mesuré par les sondes de Hall.

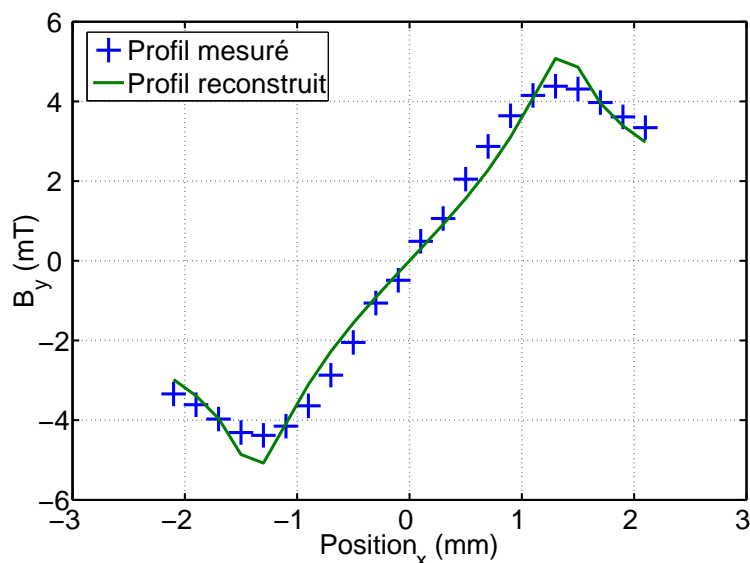


FIG. 4.1: Comparaison entre le profil reconstruit par la méthode des moindres carrés et le profil mesuré pour  $\omega t = \pi/2$ .

Afin de permettre une vérification ces quatre valeurs obtenues, nous utiliserons les résultats du logiciel de simulation numérique « Flux », logiciel que nous présenterons en détails dans le cadre de la seconde partie de cette thèse. Ce programme, dont les résultats ont été largement validés avec des mesures [17] [20], permet de simuler le comportement d'un dispositif électromagnétique conventionnel ou supraconducteur en deux dimensions ou en trois dimensions. Ainsi, nous avons la possibilité de comparer la carte de la densité de courant obtenue grâce à notre modèle avec celle obtenue grâce aux simulations éléments finis.



## 4.1 Comparaison des densités de courant

Les résultats sont présentées ci-après pour  $\omega t = 3\pi/4$  (figure 4.2),  $\omega t = 3\pi/2$  (figure 4.3),  $\omega t = 7\pi/4$  (figure 4.4),  $\omega t = 5\pi/2$  (figure 4.5) et  $\omega t = 3\pi$  (figure 4.6).

On remarque en particulier une très bonne correspondance entre les résultats donnés par la méthode des éléments finis, et la distribution reconstituée à l'aide des mesures de champ magnétique. Cependant, le modèle que nous avons développé possède un inconvénient majeur : de par l'évaluation de la double intégrale de la formule (3.5), la résolution de la recherche des valeurs de  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  et  $x_4$  par une méthode des moindres carrés est lente. Il faut en effet environ une minute sur une machine de type Intel Xeon - 1.7 GHz pour résoudre un profil magnétique mesuré. De plus, comme aucun traitement numérique n'est réalisé sur les mesures, celles-ci sont bruitées, rendant la convergence de la méthode des moindres carrés plus difficile.

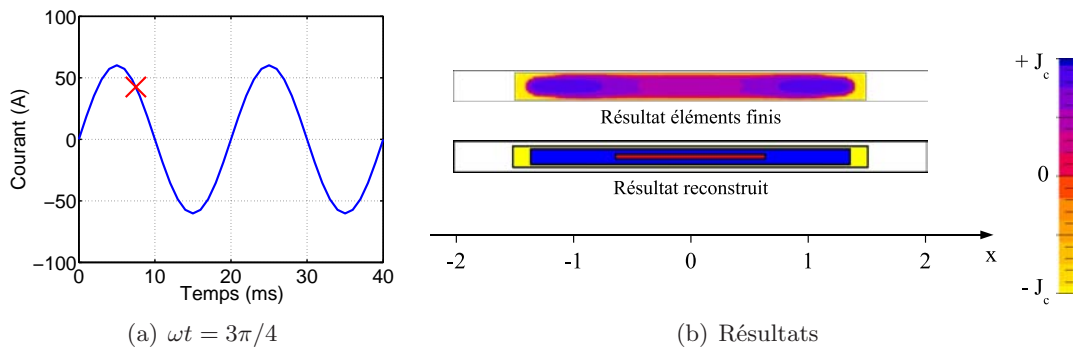


FIG. 4.2: Comparaison entre le modèle et le résultat d'une simulation éléments finis ( $n = 15$ ).

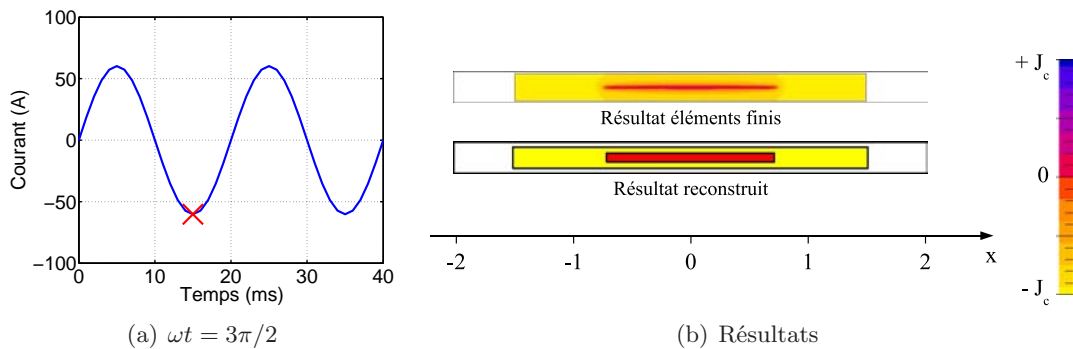


FIG. 4.3: Comparaison entre le modèle et le résultat d'une simulation éléments finis ( $n = 15$ ).

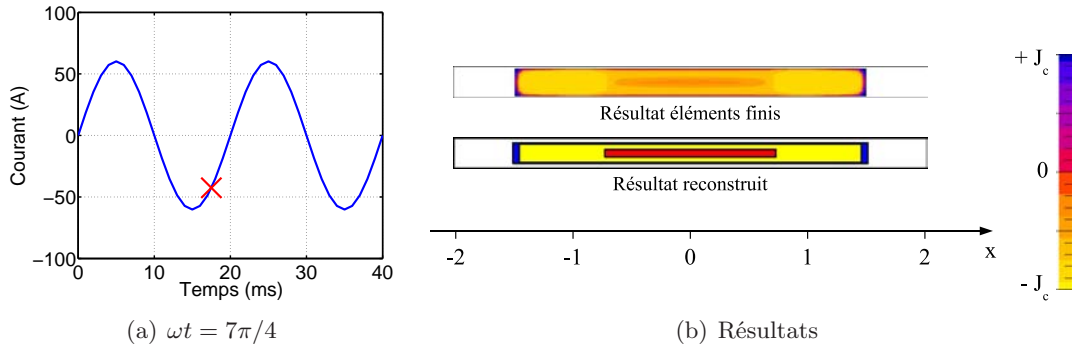


FIG. 4.4: Comparaison entre le modèle et le résultat d'une simulation éléments finis ( $n = 15$ ).

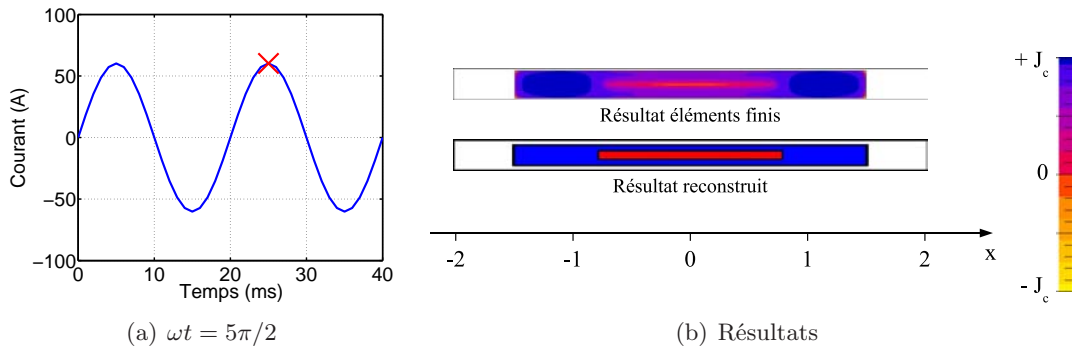


FIG. 4.5: Comparaison entre le modèle et le résultat d'une simulation éléments finis ( $n = 15$ ).

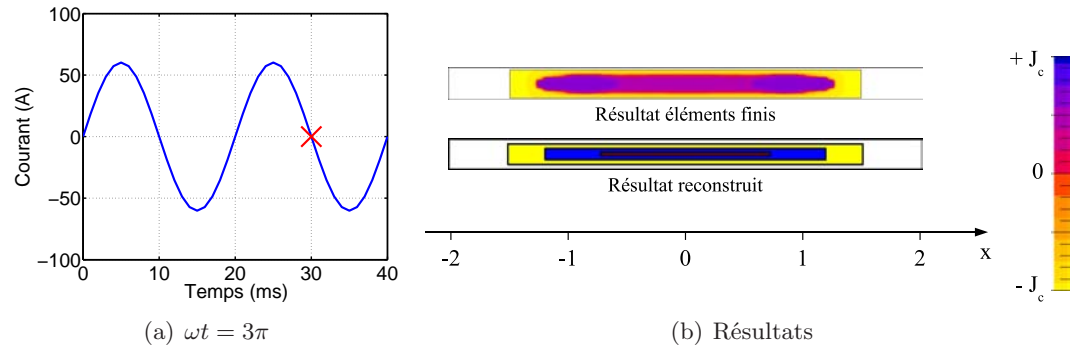


FIG. 4.6: Comparaison entre le modèle et le résultat d'une simulation éléments finis ( $n = 15$ ).

## 4.2 Amélioration du modèle

Afin d'optimiser la vitesse de résolution du problème inverse, nous allons supprimer l'évaluation de la double intégration présente dans l'équation (3.5). Pour cela, nous allons discrétiser la section en de petits éléments  $dS$ , et nous approcherons le courant  $I = \int JdS$  par un courant  $I$  qui circule au centre de gravité de  $dS$  (figure 4.7). Si le pas d'espace lié à la discrétisation prise est suffisamment petit, l'erreur commise sera négligeable.

De cette manière, le temps de calcul pour la recherche de la distribution du courant dans le supraconducteur est divisée par 5, passant d'une minute à environ dix secondes.

De plus, la discrétisation autorise une autre amélioration : à la place des zones parfaitement rectangulaires que nous avons utilisées (figure 3.8), nous pouvons maintenant considérer

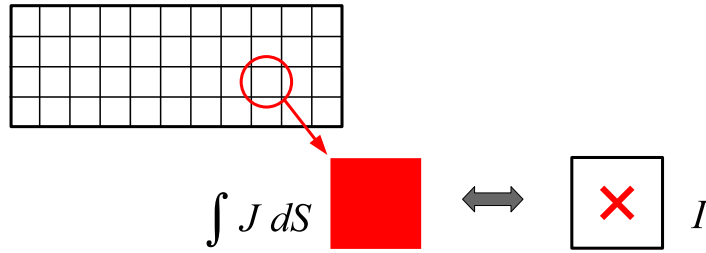


FIG. 4.7: Amélioration du modèle : discrétisation et approche de  $\int J dS$  par un courant  $I$  qui circule au centre de gravité de  $dS$ .

une configuration composée d'éléments de forme elliptique, comme cela est illustré à la figure 4.8. De cette manière, notre modélisation géométrique se rapproche plus de la configuration réelle d'un ruban supraconducteur.

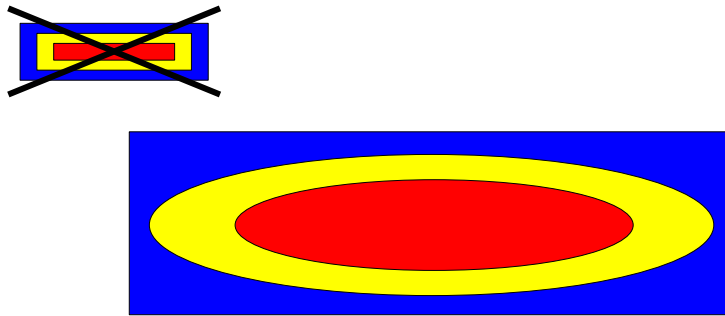


FIG. 4.8: Amélioration du modèle : les zones considérées seront remplacées par des rectangles à bord arrondis.

Les résultats ainsi obtenus pour  $\omega t = \pi/2$ ,  $\omega t = \pi$ ,  $\omega t = 3\pi/2$  et  $\omega t = 2\pi$  sont représentés respectivement aux figures 4.9, 4.10, 4.11 et 4.12. En particulier, bien que le modèle de *Bean* soit un modèle décrivant le comportement d'un supraconducteur de manière très simplifiée, la correspondance entre les distributions de courant obtenues par la méthode des éléments finis et celles obtenues à l'aide de notre modèle est satisfaisante.

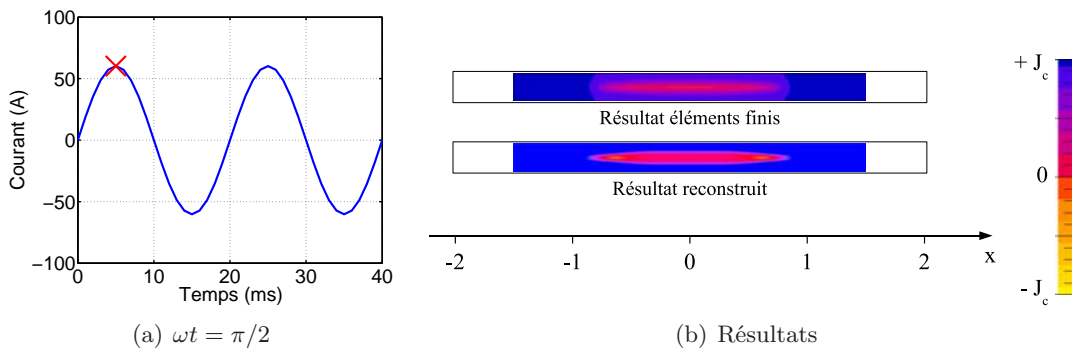


FIG. 4.9: Comparaison entre le modèle et le résultat d'une simulation éléments finis ( $n = 15$ ).

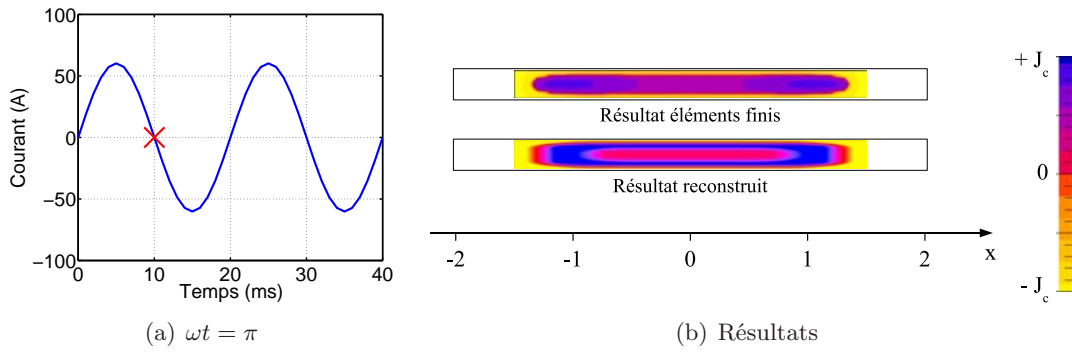


FIG. 4.10: Comparaison entre le modèle et le résultat d'une simulation éléments finis ( $n = 15$ ).

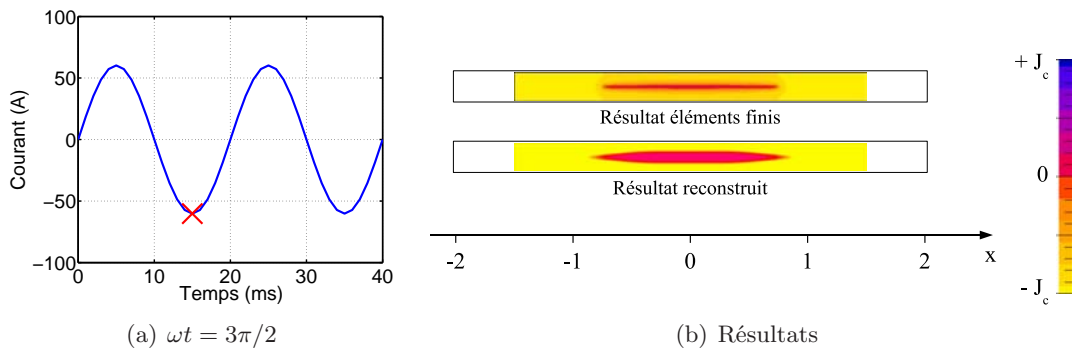


FIG. 4.11: Comparaison entre le modèle et le résultat d'une simulation éléments finis ( $n = 15$ ).

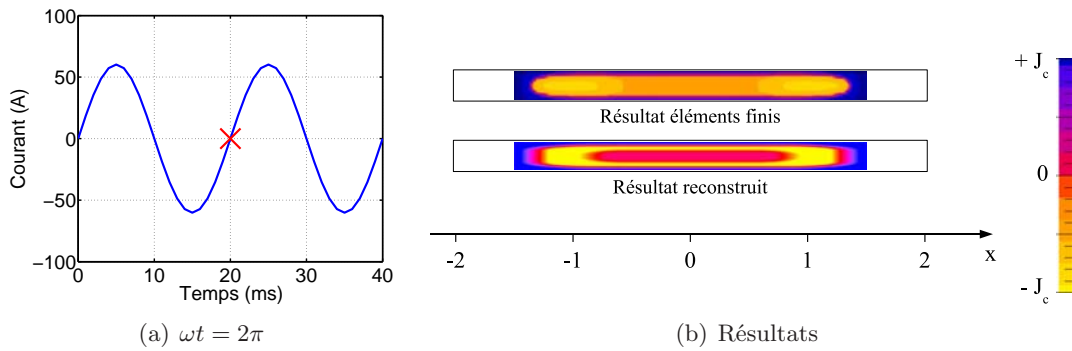


FIG. 4.12: Comparaison entre le modèle et le résultat d'une simulation éléments finis ( $n = 15$ ).

### 4.3 Travail futur

La modélisation implémentée actuellement ne permet de prendre en compte que des rubans monofilamentaires. Hors, la majorité des rubans produits sont multifilamentaires. La discrétisation mise en place pourrait permettre de modéliser ces derniers. Cette amélioration est nécessaire si l'on désire appliquer cette méthode dans un cadre plus général. De plus, afin d'assurer la convergence de la méthode des moindres carrés, il conviendrait de mettre en place un traitement adéquat sur les mesures afin de supprimer le bruit magnétique ambiant qui s'ajoute au signal que l'on souhaite traiter. Ce bruit entraîne l'impossibilité de diminuer la différence  $B_{y\text{mesuré}} - B_{y\text{calculé}}$  et peut même, dans certains cas, empêcher la résolution correcte du problème.



Deuxième partie

Modélisation par éléments finis



# Chapitre 5

## Introduction

Cette seconde partie traite de la modélisation de supraconducteurs en régime sur-critique. L'objectif est de mettre en place une simulation où les équations électromagnétiques et thermiques sont résolues.

Lorsque le courant dépasse largement le courant critique  $I_c$ , la résistivité du matériau devient comparable et même supérieure à la résistivité des matériaux conducteurs conventionnels comme le cuivre, l'aluminium ou l'argent. La densité de pertes dans les régions conductrices, donnée par l'expression  $\rho J^2$ , devient très importante et provoque une élévation de température conduisant rapidement au dépassement de la température critique  $T_c$ . Le domaine de fonctionnement se trouve alors largement en dehors de la surface critique.

Ce type de comportement est utilisé par les limiteurs de courant. Insérés dans un réseau électrique, ces derniers sont "transparents" puisque leur impédance est très faible lorsque les conditions d'exploitation sont nominales ( $I_n \lesssim I_c$ ). Lorsqu'un court-circuit apparaît sur le réseau, l'intensité  $I_{cc}$  peut, selon la nature du défaut, atteindre rapidement dix fois le courant nominal  $I_n$  et peut provoquer des dommages importants sur les équipements. L'ajout en série dans le circuit d'un limiteur de courant permet d'éviter une trop forte surintensité : en effet, le matériau supraconducteur devient alors très résistif, et l'impédance du réseau, faible en exploitation nominale, augmente rapidement.

La création d'un modèle numérique permettra de reproduire le comportement électromagnétique et thermique du matériau, en vue de l'optimisation du système selon les critères énoncés dans la référence [21].

Le modèle de l'état critique, présenté au chapitre 2, présente l'avantage d'être une modélisation simple du comportement d'un matériau supraconducteur. Il est principalement utilisé lorsqu'on désire obtenir rapidement des résultats analytiques, ou dans le cadre de problèmes physiques mal définis, tels que la recherche de la distribution de courant  $J$  à partir des mesures de champ magnétique. Ce modèle présente cependant deux inconvénients majeurs :

- il ne permet pas la prise en compte des variations des paramètres en fonction de la température,
- le courant total  $I$  peut être au maximum égal à  $I_c$  puisque la densité de courant  $J$  ne peut prendre que trois valeurs ( $-J_c$ ,  $0$  ou  $+J_c$ ).

Une méthode, certes plus coûteuse en temps de calcul, permet néanmoins de résoudre de tels problèmes : l'utilisation de la méthode des éléments finis. Par ailleurs, les résultats obtenus peuvent être des grandeurs locales ( $J$ ,  $E$ ) comme des grandeurs globales du système (courant total  $I$ , tension  $V$ ). Nous possédons en outre une solide expérience dans ce domaine au laboratoire des systèmes non-linéaires (LANOS), que ce soit en deux dimensions [17] ou en trois dimensions [20].

Cette partie traitera de la modélisation du comportement électrique du matériau supraconducteur  $E = f(J)$  adaptée aux fortes densités de courant, ainsi que de la prise en compte



des phénomènes thermiques qui modifient ce comportement. Elle se terminera par l'analyse et l'amélioration de la géométrie d'un limiteur de courant, ainsi que par la simulation de ce système lorsqu'il est en régime de limitation et la comparaison des résultats obtenus avec des mesures effectuées en laboratoire.

## Chapitre 6

# Introduction à la méthode des éléments finis

De nombreux ouvrages, orientés soit vers le domaine mathématique, soit vers le domaine de l'ingénierie, présentent dans les détails la méthode des éléments finis. Un exemple simple d'application de cette méthode est donné dans ce chapitre, mais on se reportera à l'ouvrage d'introduction à l'analyse numérique [22] pour un développement mathématique plus complet et une présentation des éléments finis d'ordre 2 et supérieur. De plus, le livre du Prof. E.-G. Thompson [23] propose une introduction avancée dans la mise en œuvre informatique de la méthode à l'aide d'exemples concrets, accompagnés parfois de la programmation en langage C de tout ou partie du problème.

La méthode des éléments finis est un outil mathématique qui permet de résoudre des problèmes dont les valeurs aux limites sont connues (contraintes). Initialement appliquée dans le but d'obtenir des solutions d'équations différentielles linéaires, la méthode a été étendue à la résolution de problèmes non-linéaires.

### 6.1 Un problème aux limites unidimensionnel

Soit le problème représenté à la figure 6.1 : un fil conducteur parcouru par un courant  $I$  est maintenu faiblement tendu à ses extrémités. On applique un champ magnétique  $B$ , dirigé horizontalement, tel que représenté à la figure 6.1. Ce fil est donc soumis à une force dont l'intensité est donnée par la loi de Laplace :  $d\vec{f}(x) = I\vec{dl} \wedge \vec{B}$ .

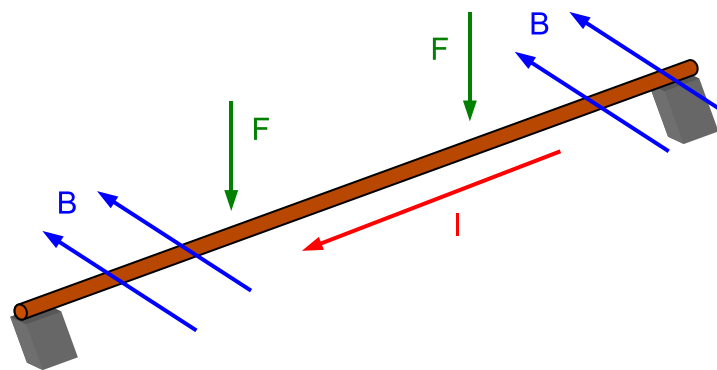


FIG. 6.1: Un fil conducteur parcouru par un courant  $I$  et soumis à un champ magnétique  $\vec{B}$  subit une force  $\vec{F}$  dont la direction et l'intensité sont données par la loi de Laplace.

Cette force va provoquer le déplacement du fil, comme illustré à la figure 6.2, sauf aux extrémités  $x = 0$  et  $x = 1$ , où ce déplacement est nul. Nous souhaitons connaître, pour tout point d'abscisse  $x$ , le déplacement vertical  $u(x)$ . Ce problème est analogue l'analyse mécanique d'une poutre appuyée en ses extrémités et en fléchissement.

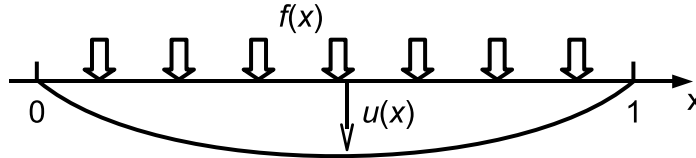


FIG. 6.2: Déplacement vertical du fil conducteur.

L'équation du système est la suivante :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

L'équation (6.1) est une équation différentielle du second ordre dont l'intégration fait apparaître deux constantes. Les deux conditions  $u(0) = 0$  et  $u(1) = 0$ , appelées conditions aux limites, nous permettront de déterminer ces constantes.

La complexité du problème (6.1) est conditionnée par la fonction  $f(x)$ . Si par exemple cette fonction est une constante, il est possible de trouver la solution de manière analytique. Cependant, la détermination de la fonction  $u(x)$  peut rapidement devenir difficile selon la nature de  $f(x)$ . La méthode des éléments finis propose d'approcher les valeurs de la solution en discrétisant le problème, c'est-à-dire en le transformant en un problème proche, mais qui comporte un nombre fini de valeurs à calculer.

## 6.2 Discrétisation

Divisons l'intervalle  $[0, 1]$  en  $N + 1$  parties ( $N$  étant un entier positif), comme dans la figure 6.3. On pose  $h = 1/(N + 1)$ , et on note  $x_i = ih$  avec  $i = 0, 1, 2, 3, \dots, N, N + 1$  les points de discrétisation.

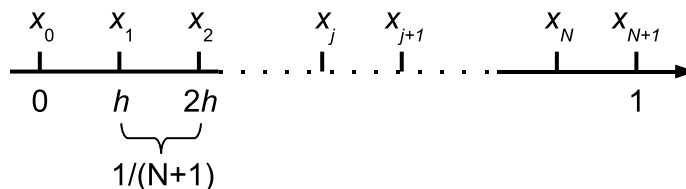


FIG. 6.3: Discrétisation de l'intervalle  $[0, 1]$  et nœuds de discrétisation.

## 6.3 Problème faible

Multiplions la première équation de (6.1) par une fonction  $v$  une fois continûment dérivable sur  $]0, 1[$  ( $v \in C_1(]0, 1[, \mathbb{R})$ ). Si nous l'intégrons sur l'intervalle  $]0, 1[$ , nous obtenons :

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

Intégrons par partie le premier terme. Nous avons alors :

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

Si nous imposons à  $v$  d'être nulle en  $x = 0$  et  $x = 1$ , alors nous sommes ramenés à l'égalité suivante :

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx \quad \forall v \in C_1([0, 1], \mathbb{R}) \quad (6.2)$$

Soit maintenant  $V$  l'ensemble de toutes les fonctions  $g$  continues, de première dérivée  $g'$  continue par morceau et telles que  $g(0) = g(1) = 0$ . La proposition  $g'$  continue par morceau signifie que  $g'$  existe et est continue, sauf éventuellement en un nombre fini de points où  $g'$  pourrait ne pas exister, mais posséderait une limite à gauche et à droite. La somme de deux fonctions de  $V$  reste un élément de  $V$ , tout comme le produit d'une fonction de  $V$  par un nombre réel.  $V$  possède donc une structure d'espace vectoriel.

Nous allons maintenant chercher  $u \in V$  qui satisfait l'expression (6.2) pour toute fonction  $v \in V$ .

L'équation (6.2) est appelée problème faible, ou forme variationnelle du problème défini par l'équation (6.1). Puisque nous avons déduit le problème (6.2) du problème (6.1), il est évident que toute solution  $u$  de (6.1) est solution de (6.2). On peut démontrer que (6.2) a une et une seule solution  $u$  qui est celle du problème (6.1).

## 6.4 Méthode de Galerkin

Basée sur la formulation faible (6.2), nous présentons maintenant la méthode de Galerkin, qui est le point de départ de toutes les méthodes d'éléments finis et des méthodes spectrales.

Si  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  sont  $N$  fonctions linéairement indépendantes de  $V$ , on peut alors construire un sous-espace vectoriel de  $V$ , que l'on notera  $V_h$ , engendré par les combinaisons linéaires des fonctions  $\varphi_i$ . Nous verrons à la section 6.5 comment choisir les fonctions  $\varphi_i$  et comment engendrer ce sous-espace  $V_h$ .

$V_h$  est l'ensemble de toutes les fonctions  $g$  qui peuvent s'exprimer sous la forme :

$$g(x) = \sum_{i=1}^N g_i \varphi_i(x) \quad \text{avec } g_i \in \mathbb{R} \text{ et } N \in \mathbb{N}^*$$

Il est alors possible de reformuler le problème (6.2) de cette manière : trouver une fonction  $u_h \in V_h$  telle que :

$$\int_0^1 u_h'(x)v_h'(x)dx = \int_0^1 f(x)v_h(x)dx \quad \text{pour toute fonction } v_h \in V_h \quad (6.3)$$

L'équation (6.3) est une approximation de Galerkin de l'équation (6.2). Puisque la solution  $u_h$  est cherchée dans  $V_h$ , on peut donc écrire :

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x) \quad \text{où } u_1, u_2, \dots, u_N \text{ sont } N \text{ nombres réels à déterminer}$$

Si nous prenons  $v_h = \varphi_j$ ,  $1 \leq j \leq N$  dans l'équation (6.3), le problème est de chercher  $u_1, u_2, \dots, u_N$  tels que :

$$\sum_{i=1}^N u_i \int (\varphi'_i(x)\varphi'_j(x)dx) = \int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx \quad \text{pour tout } j = 1, 2, \dots, N \quad (6.4)$$

Soit  $A$  la matrice  $N \times N$  des coefficients  $A_{ij} = \int_0^1 \varphi'_i(x)\varphi'_j(x)dx$ ,  $\vec{u}$  le vecteur de composantes  $u_1, u_2, \dots, u_N$  et  $\vec{f}$  le vecteur dont la  $j^{\text{ième}}$  composante est égale à  $f_j = \int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx$ .

Le problème (6.3) ou (6.4) est alors équivalent à résoudre le système linéaire d'inconnue  $\vec{u}$  suivant :

$$A\vec{u} = \vec{f} \quad (6.5)$$

## 6.5 La méthode des éléments finis de degré 1

La méthode des éléments finis, basée sur la méthode de Galerkin, revient à faire un choix judicieux des fonctions  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  définissant  $V_h$ . Les contraintes suivantes doivent cependant être respectées :

- la matrice  $A$  doit être une matrice creuse au sens où elle doit contenir un grand nombre d'éléments nuls. De cette manière, les méthodes numériques telles que la décomposition  $LU$  ou la méthode de *Jacobi* sont bien adaptées pour la résolution du système linéaire (6.5),
- la solution  $u_h$  du problème (6.3) doit converger vers la solution  $u$  du problème (6.2) lorsque le nombre  $N$  de fonctions linéairement indépendantes de  $V$  devient grand.

La méthode commence par le choix pour chaque  $i$  des fonctions  $\varphi$  de telle sorte que :

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{si } x \leq x_{i-1} \quad \text{ou} \quad x \geq x_{i+1} \end{cases} \quad (6.6)$$

Une représentation de la fonction  $\varphi_i$  (parfois appelée "fonction chapeau" à cause de sa forme) est faite à la figure 6.4.

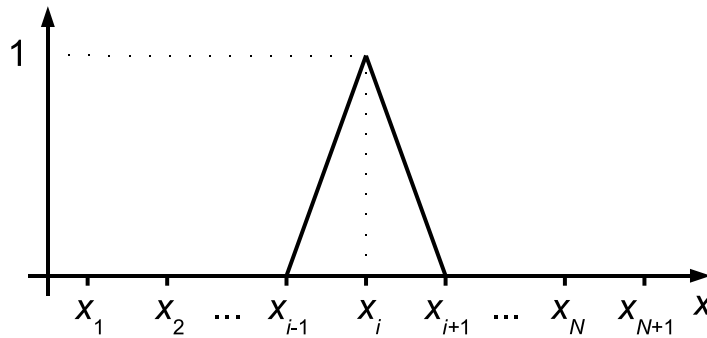


FIG. 6.4: Représentation d'une fonction de base  $\varphi$ .

Une autre expression de la fonction  $\varphi_i$  est :

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} \quad 0 \leq j \leq N+1$$

où  $\varphi_i|_{[x_{j-1}, x_j]}$  est un polynôme de degré 1  $1 \leq j \leq N+1$

Les fonctions  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_N$  sont par définition linéairement indépendantes. Elles constituent une base du sous-espace de fonctions  $V_h$ . Nous dirons ainsi que :

- $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N, x_{N+1}$  sont les *nœuds* de la discrétisation,
- $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_N, x_{N+1}]$  sont les *éléments géométriques*,
- $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  sont les *fonctions de base* du sous-espace  $V_h$  de type éléments finis de degré 1 *associées aux nœuds* intérieurs  $x_1, x_2, \dots, x_N$ .

Si  $g \in V_h$  alors  $g$  est une combinaison linéaire des  $\varphi_i$ , c'est-à-dire :

$$g(x) = \sum_{i=1}^N g_i \varphi_i(x)$$

Un exemple de fonction  $g$  est représenté à la figure 6.5. Nous pouvons remarquer que  $g(x_j) = g_j$  pour  $1 \leq j \leq N$ , que  $g(0) = g(1) = 0$  et que  $g$  est une fonction affine sur chaque élément géométrique.

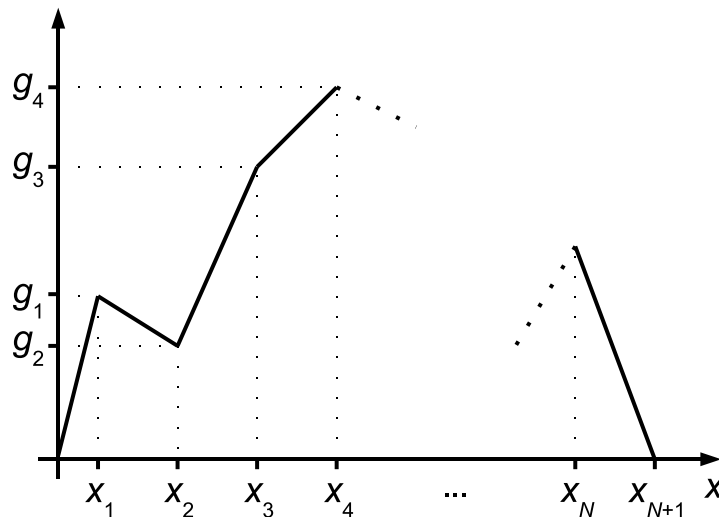


FIG. 6.5: Un exemple de fonction  $g$ .

Nous avons vu à la section 6.4 que pour résoudre le problème nous devons :

- construire la matrice  $A$ ,
- construire le vecteur  $\vec{f}$ ,
- résoudre le système linéaire  $A\vec{u} = \vec{f}$ .

Les coefficients de la matrice  $A$  se calculent à l'aide de la formule :

$$A_{ij} = \int_0^1 \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) dx \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq N$$

Nous obtenons :

$$\int_0^1 \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) dx = \begin{cases} 2/h & \text{si } i = j, \\ -1/h & \text{si } |i - j| = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les composantes du vecteur  $\vec{f}$  s'obtiennent en calculant  $\int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx$  pour  $1 \leq j \leq N$ . Pour évaluer ces intégrales, nous pouvons utiliser la méthode d'intégration numérique dite "formule composite des trapèzes".

**Formule composite des trapèzes.** Nous désirons approcher numériquement la quantité  $\int_0^1 l(x)dx$ . Comme l'intervalle  $[0, 1]$  est déjà découpé en petits intervalles  $[x_i, x_{i+1}]$ , nous pouvons écrire :

$$\int_0^1 l(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} l(x)dx$$

La formule composite du trapèze représente l'aire hachurée de la figure 6.6 et s'écrit :

$$\sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} l(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{2} (l(x_i) + l(x_{i+1}))$$

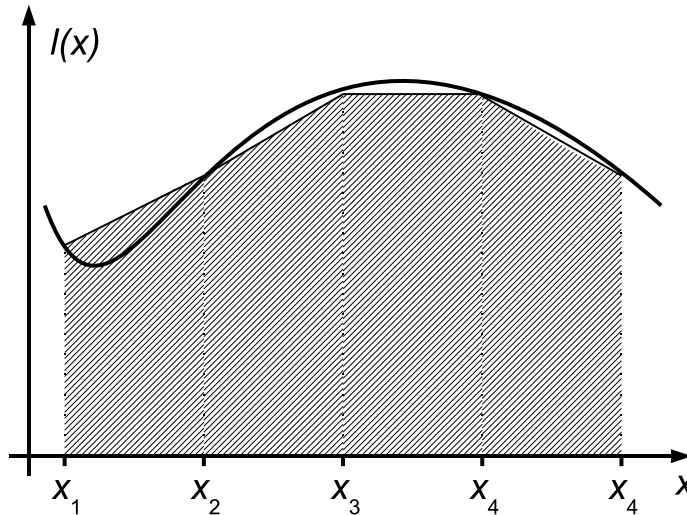


FIG. 6.6: Formule du trapèze pour approcher  $\int l(x)dx$ .

Si nous appliquons cette formulation au calcul de  $\vec{f}$ , nous obtenons :

$$f_j = \int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx \approx hf(x_j) \quad (6.7)$$

Connaissant  $A$  et  $\vec{f}$ , il est alors aisé de résoudre le système de  $N$  équations dont les inconnues sont les  $N$  valeurs des composantes du vecteur  $\vec{u}$ .

On peut démontrer que l'erreur  $|u - u_h|$  commise par l'utilisation d'une méthode de Galerkin est bornée. En particulier, pour la méthode des éléments finis de degré 1, lorsque la discrétisation est régulière, nous avons l'estimation d'erreur suivante :

$$|u - u_h|_1 \leq Ch \quad \text{où } C \text{ est une constante indépendante de } N, \text{ mais dépendante de } u \quad (6.8)$$

Quand la discrétisation n'est plus uniforme, on peut démontrer (voir [22]) que l'estimation d'erreur (6.8) devient :

$$|u - u_h|_1 \leq C \max_{0 \leq i \leq N} |x_{i+1} - x_i|$$

De plus, lorsque les fonctions de base de  $V_h$  sont définies par des polynômes de degré plus élevé que 1, la précision de la méthode augmente.

Notons pour finir que la théorie des éléments finis, bien qu'originellement conçue pour la résolution de problèmes linéaires, peut être étendue à la recherche de solutions pour des problèmes non-linéaires à l'aide d'algorithmes itératifs qui permettent de linéariser les phénomènes. De ce fait, elle est applicable dans des cadres tout à fait généraux, couvrant bon nombre d'applications physiques, comme la mécanique, l'électromagnétisme ou la thermodynamique, et en particulier dans le cadre de la modélisation de dispositifs supraconducteurs [24].





## Chapitre 7

# Présentation du logiciel « Flux »

Le logiciel « Flux », développé par la société Cedrat [25], et distribué en Suisse par la société *Applied Magnetics*, est un logiciel de Conception Assistée par Ordinateur (C.A.O.) destiné à l'électrotechnique, permettant de modéliser des phénomènes électromagnétiques bidimensionnels ou tridimensionnels par la méthode des éléments finis. Il comprend :

- un descripteur géométrique,
- un descripteur des propriétés physiques,
- un mailleur automatique,
- un solveur,
- un module d'exploitation des résultats.

Dans sa version 8.10 (commercialisée en 2004) et ses versions supérieures, un module de résolution de problèmes thermiques a été ajouté, permettant actuellement de résoudre des simulations thermiques, ou de réaliser une étude magnéto-harmonique couplée thermique-transitoire.

Nous exposons dans ce chapitre les principales possibilités du logiciel, les équations résolues et les critères de choix d'une des formulations disponibles correspondant au problème que l'on souhaite modéliser.

### 7.1 Présentation du module électromagnétique

Le module électromagnétique permet la résolution de problèmes électriques et/ou magnétiques. Il serait trop long de donner tous les détails concernant chaque application possible et les équations résolues pour chaque formulation. Ces informations sont contenues dans les manuels utilisateurs du logiciel. On s'y reportera pour obtenir des informations exhaustives. Nous ne présenterons donc que les caractéristiques principales de ces différentes formulations.

#### 7.1.1 Équations résolues

Les équations résolues sont basées sur les équations de *Maxwell* :

- Maxwell-Gauss :  $\text{div}(\vec{D}) = q$ ,
- Maxwell-Faraday :  $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ,
- Conservation du flux magnétique :  $\text{div}(\vec{B}) = 0$ ,
- Maxwell-Ampère :  $\text{rot}(\vec{H}) = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ .

À ces quatre équations viennent s'ajouter les équations constitutives de la matière :

- Caractéristique des milieux conducteurs :  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ ,
- Caractéristique des milieux magnétiques :  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ,
- Caractéristique des milieux diélectriques :  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ .

Dans ces équations :

- $\vec{E}$  est le champ électrique (en  $\text{Vm}^{-1}$ ),
- $\vec{B}$  est le champ d'induction magnétique (en T),
- $\vec{H}$  est le champ magnétique (en  $\text{Am}^{-1}$ ),
- $\vec{J}$  est la densité de courant électrique (en  $\text{Am}^{-2}$ ),
- $\vec{D}$  est le champ de déplacement (en  $\text{Asm}^{-2}$ ),
- $q$  est la charge électrique (en C),
- $\sigma$  est la conductivité du milieu (en  $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ ),
- $\mu$  est la perméabilité magnétique du milieu (en  $\text{Hm}^{-1}$ ),
- $\epsilon$  est la permittivité électrique du milieu (en  $\text{Fm}^{-1}$ ).

## 7.2 Séparation des phénomènes électriques et magnétiques

Avec pour objectif de faciliter la résolution de problèmes électromagnétiques, il est possible de simplifier les équations de base en découplant les équations en champs électriques  $\vec{E}$  et  $\vec{D}$  et les équations en champs magnétiques  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$ . Les équations de Maxwell peuvent alors s'écrire différemment conduisant alors à une écriture pour les systèmes magnétiques et à une autre écriture pour les systèmes électriques. Le domaine de validité de cette simplification dépend des matériaux, des fréquences de travail, de la géométrie et de la taille du domaine d'étude. Cependant, elle est habituellement considérée comme valide pour des fréquences  $f < 1$  GHz. Entre 1 et 10 GHz, cette simplification peut, selon les cas, rester valable, mais au-delà de 10 GHz, il n'est plus possible de séparer les équations électriques des équations magnétiques.

## 7.3 Partie magnétique

### 7.3.1 Ce que l'on peut modéliser avec Flux

Au niveau du logiciel, les différents régimes magnétiques correspondent à différentes applications physiques. D'une façon générale, une application magnétique traite des phénomènes magnétiques créés par des courants stationnaires, des courants variables ou sinusoïdaux, ainsi que des aimants.

Les trois applications physiques disponibles sont les applications magnétostatique, magnétique transitoire et magnéto-harmonique. Les caractéristiques principales de ces trois applications sont présentées dans le tableau 7.1 ci-après.

| Application            | Le champ magnétique est créé par des ...                            | L'application permet la prise en compte ...                     |
|------------------------|---|---|
| magnétostatique        | courants stationnaires (régime permanent) ou aimants                |   |
| magnétique transitoire | courants variables (régime variable, régime transitoire) ou aimants | des courants induits et effets de peau, des effets de proximité |
| magnéto-harmonique     | courants sinusoïdaux (régime permanent)                             | des courants induits et effets de peau, des effets de proximité |

TAB. 7.1: Tableau descriptif des régimes magnétiques pouvant être simulés.

### 7.3.2 Couplage avec un circuit électrique

Il arrive que l'analyse des dispositifs électromagnétiques soit rendue complexe par l'alimentation ou la nature de la charge du circuit électrique connectée. Il peut en effet s'avérer difficile de récupérer les valeurs des tensions et/ou des courants aux bornes des conducteurs constituant le dispositif à analyser. « Flux » propose un module spécifique permettant de décrire un circuit électrique d'alimentation ou de charge. Les équations électriques ainsi obtenues sont ensuite introduites dans le logiciel de calcul de champs magnétiques lors de la phase de résolution du problème. Ainsi, la prise en compte d'un circuit électrique externe se fait séparément, simplifiant la description générale du problème à résoudre.

Dans le cas de la description d'un ruban supraconducteur, nous avons vu en introduction que celui-ci était constitué d'une partie supraconductrice et d'un stabilisateur en parallèle. L'alimentation en courant du système sera décrite par le circuit électrique représenté à la figure 7.1. Ainsi, les régions supraconductrices et le stabilisateur pourront être assignés aux composants correspondants du circuit.

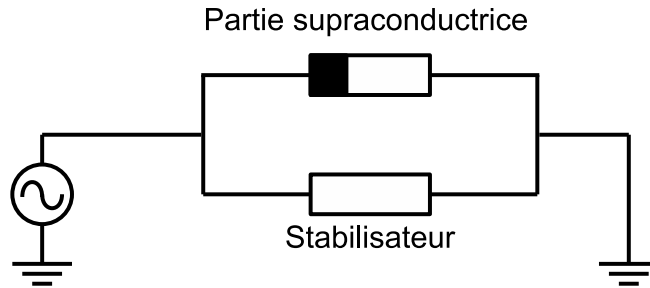


FIG. 7.1: Circuit électrique décrivant un ruban supraconducteur et son alimentation.

Ce couplage circuit est disponible avec les applications magnétique-transitoire et magnéto-harmonique.

### 7.3.3 Forme des équations

Pour un système magnétique, on se place dans l'hypothèse des régimes quasi-stationnaires et on néglige la variation du champ de déplacement  $\vec{D}$  en fonction du temps. Cette hypothèse provient du fait que, dans la majorité des conducteurs en régime de fonctionnement nominal, la densité de courant  $J$  est proportionnelle au champ électrique  $E$ , et est bien supérieure aux courants de déplacement  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ . On peut alors négliger ce terme dans les équations [26].

Les équations générales du module électromagnétique données au début de ce chapitre s'écrivent alors de la façon suivante :

- Maxwell-Faraday :  $\vec{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ,
- Conservation du flux magnétique :  $\text{div}(\vec{B}) = 0$ ,
- Maxwell-Ampère :  $\vec{rot}(\vec{H}) = \vec{J}$ ,
- Caractéristique des milieux conducteurs :  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ ,
- Caractéristique des milieux magnétiques :  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ .

Dans ces équations, les paramètres  $\sigma$  et  $\mu$  caractérisant le matériau peuvent être non linéaire.

## 7.4 Partie électrique

### 7.4.1 Ce que l'on peut modéliser avec Flux

À nouveau, au niveau du logiciel, les différents régimes électriques correspondent à différentes applications physiques. Les trois applications physiques disponibles sont les applications électrostatique, conduction électrique et électro-harmonique. Leurs caractéristiques sont présentées dans le tableau 7.2 ci-après.

| Application           | Description  | Caractéristiques principales             |
|-----------------------|--|--|
| électro-statique      | étude de systèmes de charges électriques à l'équilibre   |  |
| conduction électrique | étude des courants électriques dans les milieux conducteurs sans prendre en compte les phénomènes magnétiques qui en résultent | régime permanent (courants continus)     |
| électro-harmonique    | étude des milieux diélectriques en régime harmonique en tenant compte des pertes diélectriques et/ou ohmiques                  | régime harmonique (courants sinusoïdaux) |

TAB. 7.2: Tableau de description des régimes électriques pouvant être simulés.

Le couplage avec un circuit électrique est disponible pour les applications conduction électrique et électro-harmonique.

### 7.4.2 Forme des équations

Pour un système électrique, on suppose que le champ magnétique ne modifie pas la distribution de courant  $J$  dans les conducteurs. Cela se traduit par la nullité du terme  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ .

Les équations à résoudre s'écrivent alors sous la forme suivante :

- Maxwell-Gauss :  $\text{div}(\vec{D}) = q$ ,
- Maxwell-Faraday :  $\text{rot}(\vec{E}) = 0$ ,
- Maxwell-Ampère :  $\text{rot}(\vec{H}) = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ,
- Caractéristique des milieux conducteurs :  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ ,
- Caractéristique des milieux diélectriques :  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ .

Dans ces équations, les paramètres  $\sigma$  et  $\epsilon$  caractérisant le matériau peuvent être non linéaire.

## 7.5 Partie thermique

Le module thermique permet de résoudre des problèmes thermiques en régime permanent ou transitoire. Ce module ayant été ajouté récemment au logiciel, nous le présentons donc plus en détails.

### 7.5.1 Que peut-on modéliser avec « Flux » et comment ?

Les échanges thermiques par conduction sont entièrement pris en compte par le logiciel. La convection, qui implique le transfert d'énergie depuis ou vers un fluide, ainsi que le

rayonnement ne sont pas directement modélisables. On pourra cependant en tenir compte au niveau des frontières entre le dispositif et le milieu extérieur par l'imposition de conditions aux limites adaptées.

Comme pour la partie électromagnétique, les différents régimes thermiques correspondent à différentes applications physiques. Les deux applications physiques disponibles sont les applications thermique permanent et thermique transitoire. Ces caractéristiques de ces applications sont décrites dans le tableau 7.3 ci-après.

| Le régime ... | est traité avec l'ap-<br>plication ... | les sources thermiques<br>sont ...       |
|---------------|--|--|
| permanent     | thermique permanent                    | constantes dans le temps                 |
| transitoire   | thermique transitoire                  | constantes ou variables dans<br>le temps |

TAB. 7.3: Tableau descriptif des régimes thermiques pouvant être simulés.

Le régime transitoire correspond aux cas où les sources thermiques sont constantes ou variables dans le temps. Un exemple d'application thermique transitoire où la source est constante serait l'étude de la température interne d'un four lorsque le chauffage de celui-ci est mis en route. L'autre cas correspond à l'étude des systèmes dont les sources thermiques sont variables dans le temps, comme par exemple l'étude de la température d'un dispositif supraconducteur alimenté par un courant sinusoïdal d'amplitude supérieure à son courant critique  $I_c$ .

## 7.5.2 Résultats obtenus après résolution

Les résultats significatifs que l'on peut obtenir sont la répartition de la température ( $T$ ) au sein du système étudié, ainsi que les flux thermiques échangés avec le milieu extérieur au niveau des frontières du système étudié.

### 7.5.3 Équations résolues

Les équations utilisées, avec la température  $T$  comme variable d'état, reposent sur :

- la loi de Fourier :  $\vec{\varphi} = -[\lambda]\overrightarrow{grad}(T)$ ,
- l'équation de la chaleur (1<sup>er</sup> principe de la thermodynamique) :  $\text{div}(\vec{\varphi}) + C_{Th} \frac{\partial T}{\partial t} = q$ .

où :

- $\vec{\varphi}$  est la densité de flux de chaleur,
- $[\lambda]$  est le tenseur de conductivité thermique (en  $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ),
- $C_{Th}$  est la capacité calorifique (en  $\text{Jm}^{-3}\text{K}^{-1}$ ),
- $q$  est la densité volumique de puissance thermique source (en  $\text{Wm}^{-3}$ ).

**Application thermique permanent :** La condition de calcul pour une application thermique permanent est la suivante :  $dT/dt = 0$  (régime permanent : la température ne varie pas en fonction du temps). Les équations s'écrivent de la façon suivante :

- $\vec{\varphi} = -[\lambda]\overrightarrow{grad}(T)$ ,
- $\text{div}(\vec{\varphi}) = q$ .

L'équation résolue par la méthode des éléments finis devient alors :

$$\text{div} \left( -[\lambda]\overrightarrow{grad}(T) \right) = q \quad (7.1)$$

**Application thermique transitoire :** Dans cette application, la condition de calcul est  $dT/dt \neq 0$  (régime transitoire ou régime variable : la température varie en fonction du temps). Les équations s'écrivent donc :

- $\vec{\varphi} = -[\lambda]\overrightarrow{grad}(T)$ ,
  - $\text{div}(\vec{\varphi}) + C_{Th} \frac{\partial T}{\partial t} = q$ .
- L'équation résolue est :

$$\text{div} \left( -[\lambda]\overrightarrow{grad}(T) \right) + C_{Th} \frac{\partial T}{\partial t} = q \quad (7.2)$$

#### 7.5.4 Conditions initiales et conditions aux limites

Les équations précédentes décrivent la propagation de la chaleur dans un milieu pouvant être isotrope ou anisotrope. À ces équations viennent s'ajouter la prise en compte d'éventuelles conditions initiales, ainsi que les conditions aux limites, c'est-à-dire à la frontière avec d'autres milieux.

**Condition initiales :** Elles peuvent être de différents types :

- température uniforme dans tout le domaine d'étude,
- température non uniforme, c'est-à-dire températures différentes sur tous les nœuds du domaine d'étude (limité aux cas d'étude en deux dimensions actuellement).

**Conditions aux limites :** Elles peuvent être de cinq types et correspondent à :

- Une température  $T_0$  est imposée sur la frontière. La température peut dépendre du temps et même varier le long de la frontière. Le cas le plus simple est  $T = T_0 = \text{cste}$  sur toute la frontière.
- Une densité de flux de chaleur  $\vec{\varphi}$  est imposée sur la frontière (source de chaleur entrante ou sortante). Par convention, le flux de chaleur  $\vec{\varphi}$  est négatif lorsqu'il sort de la surface. Un cas particulier est  $\vec{\varphi} = 0$ , ce qui signifie que la paroi est isolée thermiquement (on dit aussi adiabatique). Il n'y a alors pas d'échange thermique avec le milieu extérieur.
- Un transfert de chaleur par convection avec le milieu ambiant :  $\vec{\varphi} \cdot \vec{n} = -h (T - T_a)$  avec  $h$  le coefficient d'échange convectif en  $\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$  et  $T_a$  la température ambiante en K. Par convention, le flux de chaleur  $\vec{\varphi}$  est négatif lorsqu'il sort de la surface, c'est à dire lorsque la différence de température  $T - T_a$  est positive.
- Un transfert de chaleur par rayonnement avec le milieu ambiant :  $\vec{\varphi} \cdot \vec{n} = -\epsilon\sigma(T^4 - T_a^4)$  avec  $\epsilon$  le coefficient d'échange radiatif (ou émissivité) et  $\sigma$  la constante de Stephan-Boltzmann ( $\sigma = 5,675 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$ ). Par convention, le flux de chaleur  $\vec{\varphi}$  est négatif lorsqu'il sort de la surface, c'est à dire lorsque la différence de température  $T - T_a$  est positive.
- Un transfert de chaleur par convection et rayonnement :  $\vec{\varphi} \cdot \vec{n} = -h(T - T_a) - \epsilon\sigma(T^4 - T_a^4)$ .

## 7.6 Description générale d'une géométrie et résolution

La description d'une géométrie en vue d'une simulation sous un logiciel d'éléments finis, et en particulier sous Flux, se déroule selon l'ordre suivant :

- En premier lieu, il convient de décrire la géométrie en supprimant les détails non essentiels. Dans le cas d'une optimisation géométrique prévue, les coordonnées des points seront paramétrées de façon à simplifier les modifications ultérieures de la géométrie.

- La phase de maillage permet de discrétiser la géométrie. Un maillage automatique au moyen du mailleur par défaut donne souvent des résultats convenables, mais on pourra spécifier celui-là en assignant manuellement une discrétisation particulière.
- Le choix d'un modèle et d'une formulation vont déterminer les paramètres physiques nécessaires à la résolution du problème.
- L'introduction des propriétés physiques permet de décrire les matériaux et de les coupler aux volumes ou surfaces de la géométrie, d'introduire les conditions aux limites. Il convient aussi de décrire le circuit électrique couplé s'il y a lieu.
- Le lancement de la résolution et l'exploitation des résultats. Des capteurs fictifs peuvent être introduits de manière à recueillir l'évolution de certaines variables, comme par exemple le champ électrique en un point particulier de la géométrie.

## 7.7 Choix d'une formulation pour l'étude d'un dispositif supraconducteur

Comme nous l'avons décrit précédemment, le logiciel « Flux » dispose de trois formulations électriques (électrostatique, conduction électrique et électro-harmonique), de trois formulations magnétiques (magnétostatique, magnétique transitoire et magnéto-harmonique), ainsi que deux applications thermiques (thermique permanent et thermique transitoire).

Les formulations statiques, qu'elles soient électriques, magnétiques ou thermiques, doivent être écartées car nous souhaitons alimenter notre dispositif supraconducteur à l'aide d'une source de courant ou d'une source de tension sinusoïdale. Cette condition nous permet d'écartier aussi la formulation "conduction électrique", adaptée à l'étude des régimes permanents.

Le comportement électrique non-linéaire d'un matériau supraconducteur fait qu'il est impossible d'utiliser une formulation harmonique, qui impose un régime sinusoïdal linéaire.

Dans le cadre de la modélisation de matériaux supraconducteurs, il convient donc d'employer l'application magnétique transitoire. Cette dernière permettra en outre d'introduire éventuellement une dépendance en fonction du champ magnétique local des paramètres  $J_c$  et  $n$  décrivant le comportement électrique du matériau.

Il existe différentes manières de résoudre les équations de *Maxwell* par la méthode des éléments finis [27] ; En particulier, il existe la formulation  $A - V$  s'appuyant sur le potentiel vecteur magnétique et le potentiel scalaire électrique [28], ou encore la formulation  $T - T_0 - \Phi$  [29] qui utilise le potentiel vecteur courant  $T$  et le potentiel scalaire magnétique  $\Phi$ . Le potentiel vecteur auxiliaire  $T_0$  est utilisé afin de permettre un couplage avec la description externe d'un circuit électrique. Nous utiliserons donc cette dernière formulation, car cette possibilité de couplage nous permettra d'imposer un courant de transport qui circulera dans les parties conductrices du système simulé.

La modélisation de la partie thermique, quand à elle, utilisera la formulation transitoire disponible dans ce module.





## Chapitre 8

# Loi de modélisation des couches minces d'YBCO

Ce chapitre présente le comportement électrique de couches minces d'YBCO en régime sur-critique. À partir de mesures réalisées à l'Université de Genève sur des échantillons sans stabilisateur, nous développerons une expression  $E = f(J)$  permettant la description électrique du matériau supraconducteur en vue de sa modélisation par éléments finis. Enfin, nous décrirons les modalités d'introduction de cette propriété non-standard au sein du logiciel « Flux ».

### 8.1 Mesures $\rho - I$

Dans le cadre du développement d'un limiteur de courant supraconducteur, les mesures de résistivité réalisées par l'Université de Genève sur des couches minces d'YBCO [30] sont représentées à la figure 8.1. Nous pouvons remarquer que la plage de variation de la résistivité est comprise entre  $10^{-3} \mu\Omega \text{ cm}$  et  $10^2 \mu\Omega \text{ cm}$ , ce qui représente 5 ordres de grandeur.

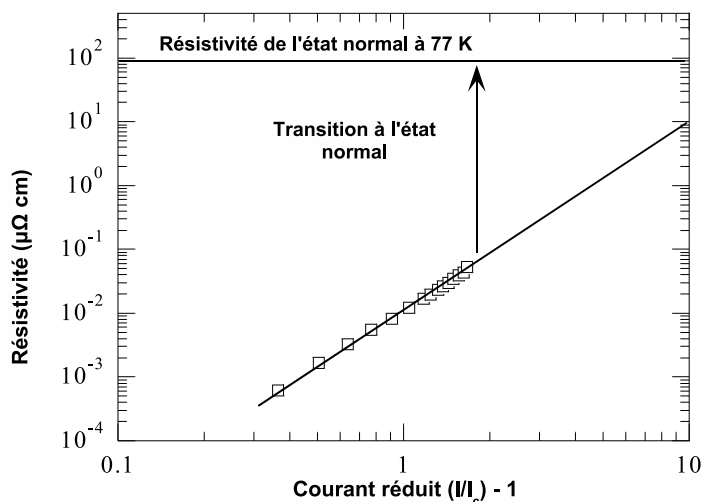


FIG. 8.1: Mesures  $\rho - I$  effectuées par l'Université de Genève [30].

D'après ces mesures, nous pouvons distinguer trois situations différentes selon la valeur du courant  $I$  traversant l'échantillon :

1. En dessous du courant critique  $I_c$ , la précision des appareils de mesure utilisés n'est pas adaptée pour obtenir des valeurs exploitables pour le champ électrique  $E$ . Ceci est tout à fait normal car nous sommes intéressés par des valeurs de résistivité en régime sur-critique. Nous considérerons alors  $E$  comme nul dans ce cas.
2. De  $I_c$  à  $3I_c$ , les forces électromagnétiques agissant sur les vortex deviennent plus importantes que les forces d'ancrage. Certains vortex se retrouvent libérés et se déplacent ("flux-creep"), produisant des pertes dans le matériau et l'apparition d'une tension. Le réseau liant les vortex entre eux est modifié, mais n'est pas détruit. On remarque que les mesures suivent une loi de puissance de type  $E = E_0 \left(\frac{J}{J_c} - 1\right)^n$ . Tracée dans un plan logarithmique avec comme abscisses  $J/J_c - 1$ , la courbe  $E(J)$  est linéaire (voir la figure 8.1).
3. Au-delà de  $3I_c$ , les forces électromagnétiques agissant sur le réseau de vortex deviennent trop importantes. Aucun vortex ne peut s'ancrer et un effet d'avalanche détruit le réseau. La dissipation d'énergie associée est si importante que le matériau passe brutalement de l'état dissipatif intermédiaire à l'état normal.

## 8.2 Limitations de la loi de puissance $E = f(J)$ utilisée habituellement

La modélisation de type loi de puissance (8.1) utilisée habituellement pour l'étude de rubans ou de systèmes à base de matériaux supraconducteurs ne permet pas d'approcher convenablement le comportement électrique du matériau, car d'une part, les mesures suivent une loi en  $J/J_c - 1$ , et d'autre part, elle n'est pas adaptée comme illustré à la figure 8.2. En effet, une valeur de  $n$  faible conduit à une résistivité trop élevée pour des valeurs de densité de courant inférieures à la densité de courant critique. De plus, lorsque  $J > 3J_c$ , la résistivité du matériau serait inférieure à la résistivité mesurée. Inversement, lorsqu'une valeur de  $n$  plus élevée est choisie, l'équation (8.1) n'est plus adaptée à la modélisation du comportement du matériau en régime sur-critique. En particulier, le passage de l'état supraconducteur à l'état normal lorsque  $I = 3I_c$  ne peut pas être pris en compte car le comportement  $(J/J_c)^n$  n'est pas limité lorsque  $J$  augmente. Cette situation conduit à une résistivité  $\rho$  supérieure à la résistivité du matériau à l'état normal (figure 8.2).

$$E = E_c \left(\frac{J}{J_c}\right)^n + \rho_0 J \quad (8.1)$$

ou  $\rho = \frac{E_c}{J_c} \left(\frac{J}{J_c}\right)^{n-1} + \rho_0$

## 8.3 Proposition d'un nouveau modèle $E = f(J)$

Dans le but d'obtenir une modélisation correcte en régime sur-critique des matériaux supraconducteurs, et en particulier des couches minces d'YBCO, sous un logiciel de simulation par éléments finis, nous devons proposer une loi  $E = f(J)$  qui permettra une meilleure description du comportement électrique mesuré. Nous avons vu au chapitre 6 que certaines conditions doivent être respectées afin de ne pas entraîner des instabilités numériques sur les algorithmes de résolution. En particulier :

- cette loi ne devra pas comporter de discontinuité lorsque  $J = 3J_c$ ,
- par ailleurs, afin de faciliter la convergence, sa dérivée première devra être, autant que possible, continue.

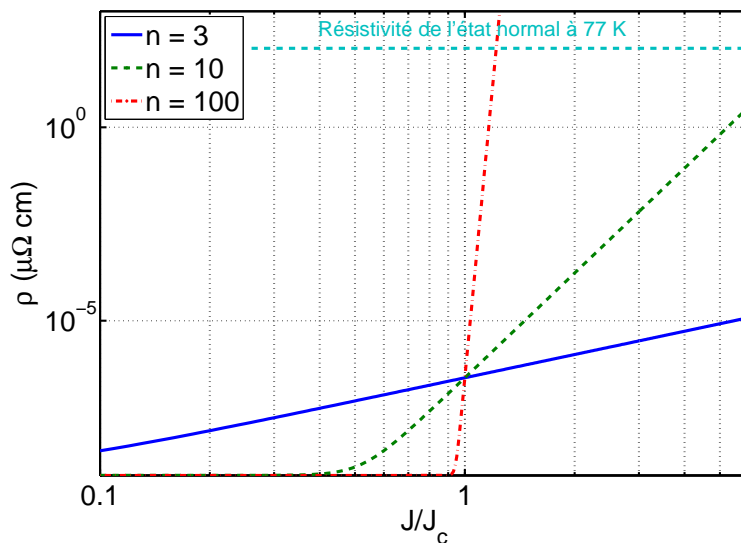


FIG. 8.2: Résistivité donnée par l'équation (8.1) en fonction du rapport  $J/J_c$ .

Lors de mesures effectuées sur des rubans Bi-2223/Ag, nous avons proposé une méthode permettant la modélisation des éventuelles excursions sur-critiques que pouvait subir le dispositif supraconducteur [31]. Bien que ne s'appuyant sur aucune base physique, l'introduction en parallèle dans l'équation (8.1) d'une résistivité  $\rho_{sat}$  représentant la résistivité à l'état normal du matériau nous avait permis de mieux approcher le comportement électrique du matériau supraconducteur jusqu'à  $3 I_c$ . Bien que le comportement des couches minces d'YBCO ne suive pas la loi (8.1), il est possible de s'appuyer sur cette proposition pour proposer le schéma électrique équivalent représenté à la figure 8.3, schéma qui nous permettra de modéliser le comportement électrique  $E = f(J)$  de l'YBCO en régime sur-critique. Chaque élément composant ce schéma est décrit ci-après.

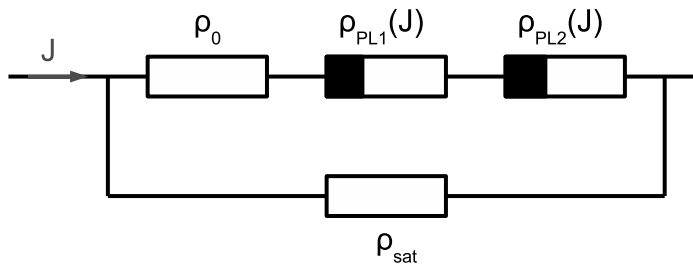


FIG. 8.3: Circuit électrique équivalent de la loi  $E = f(J)$  pour des couches minces d'YBCO.

### 8.3.1 $\rho_0$

Dans ce circuit,  $\rho_0$  représente la résistivité lorsque la densité de courant  $I$  est inférieure à la densité de courant critique  $J_c$ . Celle-ci n'étant pas mesurée, nous considérerons alors le matériau dans un état parfaitement supraconducteur. Cependant, pour des raisons de stabilité numérique,  $\rho_0$  ne peut être nulle. Nous pouvons alors considérer que  $\rho_0$  correspond à la résistivité d'activité thermique ("Thermal Activated Flux-Flow"), et sa valeur devra respecter le critère donné par [32], à savoir  $\rho_0 \leq 10^{-2} E_c/J_c$ .

### 8.3.2 $\rho_{PL1}$

$\rho_{PL1}$  est la résistivité lorsque la densité de courant se situe dans la plage  $J_c - 3J_c$ . Les mesures (figure 8.1) démontrent que sa formulation est une loi de puissance de formulation  $E = E_0(J/J_c - 1)^{n_1}$ . Dans cette relation,  $J_c$  correspond à la densité de courant critique du matériau. On détermine sa valeur à l'aide du critère donné en introduction : c'est le courant qui traverse l'échantillon lorsque le champ électrique résultant est de  $1 \mu\text{Vcm}^{-1}$ . Les paramètres  $E_0$  et  $n_1$  sont évalués à l'aide des mesures. Leurs valeurs sont respectivement de  $10 \text{ Vm}^{-1} = 0.1 \text{ Vcm}^{-1}$  et 2.8. Il est à noter que  $E_0$  ne correspond pas à un champ électrique critique, mais à un paramètre dont la valeur est déterminée sur la base de mesures.

### 8.3.3 $\rho_{PL2}$

Afin de ne pas introduire de discontinuité dans la loi, nous insérons en série une seconde résistivité  $\rho_{PL2}$ , d'expression semblable à celle de  $\rho_{PL1}$ , mais qui possédera un exposant  $n_2$  plus élevé. De cette manière, la résistivité de la branche augmentera rapidement lorsque la densité de courant dépassera  $3J_c$ . La valeur de  $n_2$  détermine la dérivée de la transition de l'état supraconducteur à l'état normal. Plus sa valeur sera grande, plus nous nous rapprocherons des mesures. Mais en prenant une valeur trop importante, nous risquons d'introduire des instabilités numériques qui nous empêcheront de résoudre le problème. De la valeur de  $n_1$  citée précédemment, nous prendrons une différence d'un ordre de grandeur, soit  $n_2 = 30$ .

### 8.3.4 $\rho_{sat}$

$\rho_{sat}$  est une résistivité placée en parallèle afin de limiter la valeur de  $\rho$  lorsque  $J$  augmente. En effet, lorsque deux résistivités sont en parallèle, la résistivité équivalente totale est inférieure à la plus petite des deux. Nous choisissons sa valeur égale à la résistivité du matériau supraconducteur à l'état normal. Cette valeur dépend de la composition chimique du matériau supraconducteur, et des traitements utilisés lors de sa fabrication [33]. Pour une température de référence égale à 77 K, nous prendrons les valeurs suivantes :  $\rho_{sat} = 350 \mu\Omega\text{cm}$  pour le Bi-2223 [31] et de  $\rho_{sat} = 90 \mu\Omega\text{cm}$  pour l'YBCO [30] [34].

### 8.3.5 Expression de la résistivité totale $\rho$

Du schéma électrique équivalent 8.3, nous pouvons exprimer la résistivité totale  $\rho$  par :

$$\rho = \frac{(\rho_{PL1} + \rho_{PL2} + \rho_0)\rho_{sat}}{\rho_{PL1} + \rho_{PL2} + \rho_0 + \rho_{sat}} \quad (8.2)$$

$$\text{Avec } \rho_{PL1} = \begin{cases} 0 & \text{si } |J| < J_c \\ \frac{E_0}{|J|} \left( \frac{|J|}{J_c} - 1 \right)^{n_1} & \text{si } |J| \geq J_c \end{cases}$$

$$\rho_{PL2} = \begin{cases} 0 & \text{si } |J| < 2J_c \\ \frac{E_0}{|J|} \left( \frac{|J|}{J_c} - 2 \right)^{n_2} & \text{si } |J| \geq 2J_c \end{cases}$$

Exprimée sous la forme  $E = f(J)$ , nous obtenons :

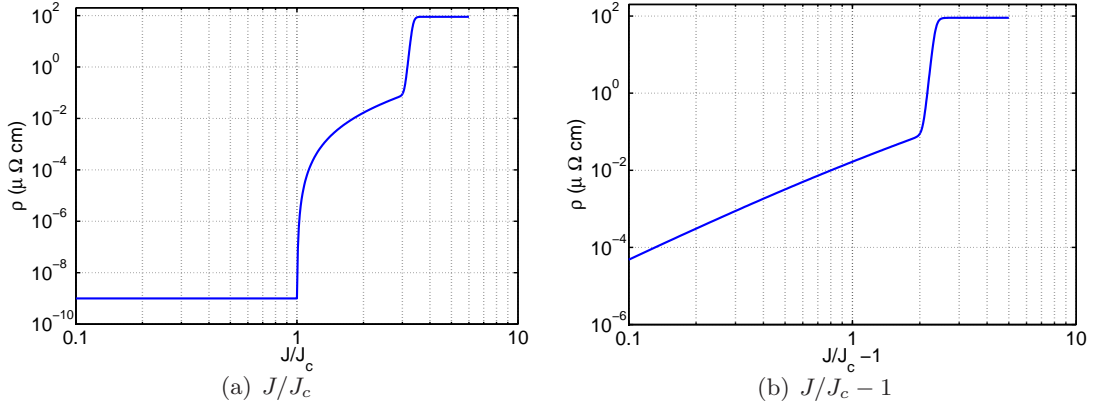


FIG. 8.4: Représentation de l'équation (8.2).

$$|E|(|J|) = \begin{cases} \frac{\rho_0 \rho_{sat}}{\rho_0 + \rho_{sat}} |J| \approx \rho_0 |J| & \text{si } |J| < J_c \\ \frac{[E_0(|J| - J_c)^{n_1} + |J| J_c^{n_1} \rho_0] \rho_{sat}}{E_0(|J| - J_c)^{n_1} + |J| J_c^{n_1} \rho_0 + |J| J_c^{n_1} \rho_{sat}} |J| & \text{si } J_c \leq |J| < 2J_c \\ \frac{[J_c^{n_1} E_0(|J| - 2J_c)^{n_2} + J_c^{n_2} E_0(|J| - J_c)^{n_1} + |J| J_c^{n_2} J_c^{n_1} \rho_0] \rho_{sat}}{J_c^{n_1} E_0(|J| - 2J_c)^{n_2} + J_c^{n_2} E_0(|J| - J_c)^{n_1} + |J| J_c^{n_2} J_c^{n_1} \rho_0 + |J| J_c^{n_2} J_c^{n_1} \rho_{sat}} |J| & \text{si } |J| \geq 2J_c \end{cases} \quad (8.3)$$

### 8.3.6 Continuité de la fonction

Bien que la fonction (8.2) soit définie par morceaux, nous pouvons montrer qu'elle est continue (figure 8.4), et que sa dérivée première est aussi continue (figure 8.5). En effet, lorsque  $|J| = J_c$ , nous avons :

$$\begin{aligned} - \rho &= \frac{\rho_0 \rho_{sat}}{\rho_0 + \rho_{sat}} \text{ car } (|J|/J_c - 1) = 0 \\ - \frac{\partial \rho}{\partial |J|} \Big|_{J=J_c} &= \frac{\partial}{\partial |J|} \frac{\rho_0 \rho_{sat}}{\rho_0 + \rho_{sat}} \Big|_{J=J_c} = 0 \end{aligned}$$

De même, lorsque  $J = 2J_c$ , nous avons  $\rho = \frac{(E_0/(2J_c) + \rho_0) \rho_{sat}}{E_0/(2J_c) + \rho_0 + \rho_{sat}}$

$$\text{et } \partial \rho / \partial |J| = \frac{\rho_{sat} \left( \frac{n_1 E_0}{2 J_c^2} - \frac{E_0}{4 J_c^2} \right)}{\frac{E_0}{2 J_c} + \rho_{sat} + \rho_0} \left[ 1 - \frac{\left( \frac{E_0}{2 J_c} + \rho_0 \right)}{\left( \frac{E_0}{2 J_c} + \rho_{sat} + \rho_0 \right)} \right].$$

## 8.4 Implémentation sous le logiciel « Flux »

L'introduction de l'équation décrivant le comportement d'un matériau non standard n'est pas directement possible au sein du logiciel. En effet, bien qu'on puisse décrire des propriétés physiques particulières pour des matériaux, comme des matériaux non-linéaires, cette description se fait par l'intermédiaire d'une fonction externe, dite "fonction utilisateur", que l'utilisateur doit programmer en langage Fortran.

Le tableau 8.1 résume le nom de la fonction à donner, ainsi que les conditions d'utilisation à remplir dans chaque cas.

Le choix de la formulation  $T - T_0 - \Phi$  faite au chapitre 7 impose que l'expression (8.2) soit présentée sous la forme d'une loi de type  $E(J)$ , au sein d'une fonction nommée "USR\_DEDJ". Cette fonction, qui admet comme paramètres d'entrée la valeur de la densité de courant  $J$ ,

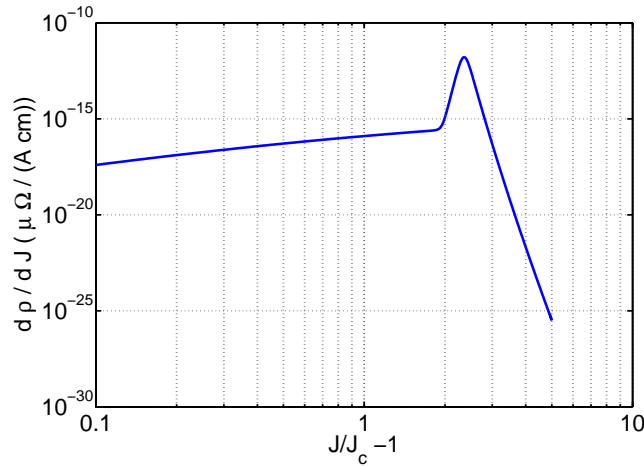


FIG. 8.5: Calcul de  $\frac{\partial \rho}{\partial J}$  en fonction de  $J/J_c - 1$ .

| Nom de la fonction | établit la loi ... | impose l'utilisation de la formulation en ... |
|--------------------|--------------------|---|
| USR_DBDH           | $B(H)$             | potentiel scalaire magnétique                 |
| USR_DHDB           | $H(B)$             | potentiel vecteur magnétique                  |
| USR_DJDE           | $J(E)$             | potentiel vecteur magnétique                  |
| USR_DEDJ           | $E(J)$             | potentiel vecteur électrique                  |
| USR_DDDE           | $D(E)$             |   |
| USR_CT             | $\lambda_{Th}(T)$  |   |
| USR_RC             | $C_{pTh}(T)$       |   |

TAB. 8.1: Sous-programmes utilisateur disponibles sous le logiciel "Flux".

calcule la résistivité  $\rho$  et la conductivité  $\sigma$  du matériau. Ainsi, en utilisant un algorithme itératif de Newton, elle recherche un zéro de la fonction définie par  $\sigma|E| - |J|$ , et retourne le calcul du champ électrique et le tenseur de résistivité incrémentale  $\partial E / \partial J$  en chaque point du maillage.

### 8.4.1 La méthode de Newton

**Méthode de Newton (ou de la tangente).** Soit une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continûment dérivable, et  $x_0$  un zéro de  $f$  tel que  $f'(x_0) \neq 0$ . La tangente en  $B$  coupe  $Ox$  en  $a_1$ , la tangente en  $C$ , d'abscisses  $a_1$  coupe  $Ox$  en  $a_2$  comme indiqué à la figure 8.6. Ainsi, on définit la suite  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

On peut montrer que, si la fonction  $f$  est monotone, ou que le point  $A$  est suffisamment proche de la solution, cette suite  $a_1, a_2, \dots, a_n$  converge quadratiquement vers  $x_0$  [22], et que :

$$a_n = a_{n-1} - \frac{f(a_{n-1})}{f'(a_{n-1})} \quad (8.4)$$

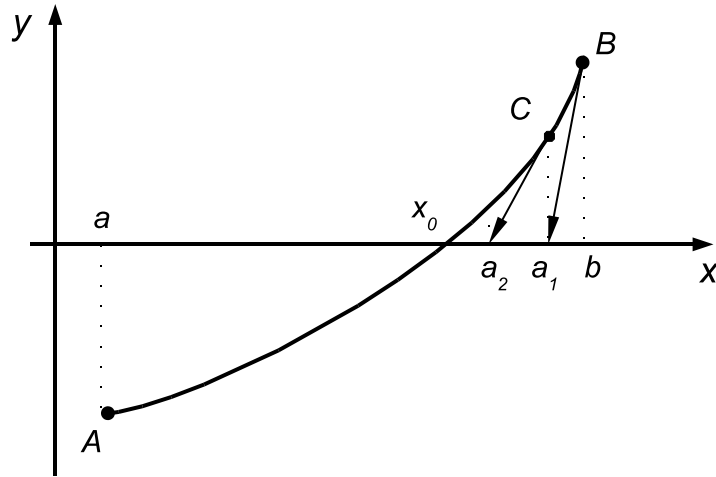


FIG. 8.6: Illustration graphique de la méthode de Newton [35].

### 8.4.2 Algorithme de la fonction décrivant le comportement électrique

L'algorithme de la fonction suppose  $J$  connu (paramètre d'entrée de la fonction), et calcule le module du champ électrique  $|E|$  en recherchant un zéro de la fonction  $\Delta = \sigma|E| - |J|$  par l'application du théorème de Newton. L'algorithme utilisé est le suivant :

Début

Calcul de  $|J| = \sqrt{J_x^2 + J_y^2 + J_z^2}$

$|E| = 0$

Répéter

Calcul de  $\rho$

Calcul de  $\sigma = \frac{1}{\rho}$

Calcul de  $R = \sigma|E| - |J|$

Calcul de  $\frac{\partial R}{\partial |E|}$

Calcul de  $\Delta|E| = -\frac{R}{\frac{\partial R}{\partial |E|}}$

Calcul de  $|E| = |E| + \Delta|E|$

Tant que  $|\Delta|E|| > \epsilon|E|$

Fin

### 8.4.3 Développement de l'algorithme pour une fonction $E(J)$ particulière

Le développement de la fonction permettant la programmation du comportement électrique modélisé par l'équation (8.2) nécessite des calculs trop importants que nous ne développerons pas dans ce chapitre. Son code complet est donné dans l'annexe A. Afin d'illustrer la complexité de cette programmation, nous allons expliquer la génération du fichier FORTRAN sur la première partie de l'équation (8.2), soit sur la fonction suivante :

$$|E| = \begin{cases} \rho_0 J & \text{si } J \leq J_c \\ E_0 \left( \frac{J}{J_c} - 1 \right)^n + \rho_0 J & \text{si } J > J_c \end{cases} \quad (8.5)$$



**Expression de la conductivité  $\sigma_1$  :** Il ne faut tout d'abord s'intéresser qu'à la partie  $J > J_c$  et ne travailler que sur l'expression  $E_0 (|J|/J_c - 1)^n$  en faisant abstraction de la partie  $\rho_0 J$  qui sera ajoutée par la suite.

Ainsi, en partant de  $|E| = E_0 \left( \frac{|J|}{J_c} - 1 \right)^n$ , nous pouvons en déduire l'expression de la fonction  $J(|E|)$  :

$$|J| = J_c \left[ \left( \frac{|E|}{E_0} \right)^{1/n} + 1 \right] = J_c \left( \frac{|E|}{E_0} \right)^{1/n} + J_c \quad (8.6)$$

La conductivité  $\sigma_1$  s'écrit alors :

$$\sigma_1(|E|) = \frac{|J|}{|E|} = \frac{J_c \left( \frac{|E|}{E_0} + 1 \right)^{1/n}}{E_0 \left( \frac{|J|}{J_c} - 1 \right)^n}$$

Or, d'après l'équation (8.6), nous avons  $\frac{|J|}{J_c} = \left( \frac{|E|}{E_0} \right)^{1/n} + 1$ , d'où :

$$\begin{aligned} \sigma_1(|E|) &= \frac{J_c \left[ \left( \frac{|E|}{E_0} \right)^{1/n} + 1 \right]}{E_0 \left[ \left( \frac{|E|}{E_0} \right)^{1/n} \right]^n} \\ &= \frac{J_c \left[ \left( \frac{|E|}{E_0} \right)^{1/n} + 1 \right]}{|E|} = \frac{J_c}{E_0^{1/n}} |E|^{\frac{1}{n}-1} + \frac{J_c}{|E|} = \frac{J_c(E^{1/n} + E_0^{1/n})}{|E|E_0} \end{aligned} \quad (8.7)$$

La résistivité  $\rho_1$  s'écrit alors :

$$\rho_1 = \frac{|E|E_0}{J_c(E^{1/n} + E_0^{1/n})} \quad (8.8)$$

Cependant, dans l'expression (8.7), nous remarquons que la conductivité  $\sigma_1$  tend vers l'infini lorsque  $|E|$  tend vers zéro. Donc, pour des faibles champs électriques, la convergence de l'algorithme n'est pas assurée.

**Ajout de la résistivité  $\rho_0$  :** Afin de remédier aux éventuelles instabilités numériques qui risquent de se produire, nous ajoutons une faible résistivité  $\rho_0$  à la résistivité que nous aurions obtenue à partir de l'expression (8.7). Ainsi, nous avons maintenant :

$$\rho = \frac{1}{\sigma(|E|)} + \rho_0 = \frac{1}{\frac{J_c}{E_0^{1/n}} |E|^{\left(\frac{1}{n}-1\right)} + \frac{J_c}{|E|}} + \rho_0 = \frac{|E|E_0^{1/n}}{J_c} \left[ \frac{1}{|E|^{1/n} + E_0^{1/n}} \right] + \rho_0 \quad (8.9)$$

Nous remarquons alors que la résistivité  $\rho$  tend vers  $\rho_0$  pour des valeurs de champ électrique  $|E|$  faible. Soit  $\lim_{|E| \rightarrow 0} \sigma = 1/\rho_0$ .

**Expression de la conductivité  $\sigma$  :** L'expression de la conductivité totale  $\sigma$  se déduit de l'expression de la résistivité  $\rho$  obtenue en (8.9).

$$\sigma = \frac{1}{\frac{|E|E_0^{1/n}}{J_c} \left[ \frac{1}{|E|^{1/n} + E_0^{1/n}} \right] + \rho_0} = \frac{J_c(|E|^{1/n} + E_0^{1/n})}{|E|E_0^{1/n} + J_c(|E|^{1/n} + E_0^{1/n})\rho_0}$$

**Calcul de  $\frac{\partial R}{\partial |E|}$  :** En partant de l'expression  $\sigma|E| - |J|$ , il est possible de calculer facilement la valeur de la dérivée par rapport au champ électrique  $E$ . En effet, comme :

$$R = \sigma|E| - |J| = \frac{|E|}{\frac{|E|E_0^{1/n}}{J_c} \left[ \frac{1}{|E|^{1/n} + E_0^{1/n}} \right] + \rho_0} - |J|$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial |E|} &= \frac{1}{\rho_0 + \frac{|E|E_0^{1/n}}{J_c(E_0^{1/n} + |E|^{1/n})}} - \frac{|E| \left( \frac{E_0^{1/n}}{(E_0^{1/n} + |E|^{1/n})J_c} - \frac{|E|^{1/n}E_0^{1/n}}{(E_0^{1/n} + |E|^{1/n})^2 n J_c} \right)}{\left( \rho_0 + \frac{|E|E_0^{1/n}}{(E_0^{1/n} + |E|^{1/n})J_c} \right)^2} \\ &= \frac{1}{\rho_0 + \frac{|E|E_0^{1/n}}{J_c(E_0^{1/n} + |E|^{1/n})}} - \frac{\frac{|E|E_0^{1/n}}{(E_0^{1/n} + |E|^{1/n})J_c}}{\left( \rho_0 + \frac{|E|E_0^{1/n}}{(E_0^{1/n} + |E|^{1/n})J_c} \right)^2} + \frac{\frac{|E||E|^{1/n}E_0^{1/n}}{(E_0^{1/n} + |E|^{1/n})^2 n J_c}}{\left( \rho_0 + \frac{|E|E_0^{1/n}}{(E_0^{1/n} + |E|^{1/n})J_c} \right)^2} \\ &= \sigma - \frac{\rho_1}{\rho^2} + \frac{\rho_1 \frac{|E|^{1/n}}{n(E_0^{1/n} + |E|^{1/n})}}{\rho^2} \\ &= \sigma - \rho_1 \sigma^2 + \frac{|E|^{1/n}}{n(E_0^{1/n} + |E|^{1/n})} \rho_1 \sigma^2 \\ &= \sigma + \left( \frac{|E|^{1/n}}{n(E_0^{1/n} + |E|^{1/n})} - 1 \right) \rho_1 \sigma^2 \end{aligned}$$

**Expression du tenseur de résistivité incrémentale :** Afin de faciliter la convergence du solveur numérique qui sera utilisé, on introduit la notion de tenseur de résistivité incrémentale. Son expression est donnée par l'expression (8.10) ci-après [36] :

$$\frac{\partial E}{\partial J^T} = \frac{\partial(\rho J)}{\partial J^T} = \rho I d_3 + J \frac{\partial \rho}{\partial J^T} \quad \text{avec : } J = [J_x, J_y, J_z] \quad (8.10)$$

Dans l'expression 8.10,  $E$  et  $J$  sont les tenseurs de champ électrique (respectivement de densité de courant) obtenus à partir de la valeur du vecteur champ électrique  $[E_x, E_y, E_z]$  (respectivement la valeur du vecteur densité de courant  $[J_x, J_y, J_z]$ ).

Il convient donc de trouver l'expression de  $\frac{\partial \rho}{\partial J^T}$ . Comme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial J^T} = \frac{\partial \rho}{\partial |J|^2} \frac{\partial |J|^2}{\partial J^T} \quad \text{avec : } |J| = \sqrt{J_x^2 + J_y^2 + J_z^2}$$

Et que :

$$\frac{\partial |J|^2}{\partial J^T} = 2J^T$$

Afin de calculer l'expression de  $\frac{\partial \rho}{\partial J^T}$ , il faut rechercher l'expression de  $\frac{\partial \rho}{\partial |J|^2}$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial |J|^2} &= \frac{\partial \left( \frac{|E|}{|J|} \right)}{\partial |J|} \frac{\partial |J|}{\partial (|J|^2)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{|J|^2} \left( \frac{\partial |E|}{\partial |J|} - \frac{|E|}{|J|} \right)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial J^T} &= \frac{1}{2} \frac{1}{|J|^2} \left( \frac{\partial |E|}{\partial |J|} - \frac{|E|}{|J|} \right) 2J^T \\ &= \frac{1}{|J|^2} \left( \frac{\partial |E|}{\partial |J|} - \frac{|E|}{|J|} \right) J^T\end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial E^T} &= \rho Id_3 + \frac{1}{|J|^2} \left( \frac{\partial |E|}{\partial |J|} - \frac{|E|}{|J|} \right) J J^T \\ &= \frac{|E|}{|J|} Id_3 + \frac{1}{|J|^2} \left( \frac{\partial |E|}{\partial |J|} - \frac{|E|}{|J|} \right) J J^T\end{aligned}\tag{8.11}$$

Il faut donc calculer  $\frac{\partial |E|}{\partial |J|}$  qui est l'inverse de  $\frac{\partial |J|}{\partial |E|}$ . Nous pouvons en déduire son expression d'après  $\frac{\partial R}{\partial |E|}$ . En effet :

$$\frac{\partial |J|}{\partial |E|} = \frac{\partial \sigma |E|}{\partial |E|} = \sigma + \left( \frac{|E|^{1/n}}{n(E_0^{1/n} + |E|^{1/n})} - 1 \right) \rho_1 \sigma^2\tag{8.12}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\frac{\partial |E|}{\partial |J|} &= \frac{1}{\sigma + \left( \frac{|E|^{1/n}}{n(E_0^{1/n} + |E|^{1/n})} - 1 \right) \rho_1 \sigma^2} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\rho} + \left( \frac{|E|^{1/n}}{n(E_0^{1/n} + |E|^{1/n})} - 1 \right) \rho_1 \left( \frac{1}{\rho} \right)^2} \\ &= \frac{\rho^2}{\rho + \left( \frac{|E|^{1/n}}{n(E_0^{1/n} + |E|^{1/n})} - 1 \right) \rho_1} \\ &= \frac{\rho^2}{\rho_0 + \frac{|E|^{1/n} \rho_1}{n(E_0^{1/n} + |E|^{1/n})}}\end{aligned}$$

Ainsi, le tenseur de résistivité incrémentale est donné par l'expression suivante :

$$\frac{\partial E}{\partial J^T} = \rho Id_3 + \frac{1}{|J|^2} \left( \frac{\rho^2}{\rho_0 + \frac{|E|^{1/n} \rho_1}{n(E_0^{1/n} + |E|^{1/n})}} - \rho \right) J J^T\tag{8.13}$$

**Cas de faibles densités de courant :** Comme l'équation (8.2) n'est définie que pour des densités de courant  $J$  supérieures à la densité de courant critique  $J_c$ , il convient de traiter séparément le cas des faibles densités de courant. Comme  $\lim_{|J| \rightarrow 0^+} \rho = \rho_0$ , et ce afin de conserver la continuité de la fonction, nous pouvons considérer que la résistivité  $\rho$  du matériau est égale à  $\rho_0$ .

Donc, pour des densités de courant inférieures à  $J_c$  ( $|J| \leq J_c$ ), le matériau a un comportement linéaire. Ainsi :

$$E = \rho_0 J \quad \text{et} \quad \frac{\partial |E|}{\partial J^T} = \rho_0 Id_3 \quad (8.14)$$

## 8.5 Implémentation de la fonction :

$|E|$  s'exprime en fonction de  $|J|$  par l'équation non linéaire (8.5). On utilise la méthode de Newton pour la recherche du zéro de la fonction  $R = \sigma|E| - |J|$ .

La programmation de la fonction se résume alors à l'algorithme suivant :

Début

$$|J| = \sqrt{J_x^2 + J_y^2 + J_z^2}$$

Si  $|J| < J_c$  alors,

$$E = \rho_0 J$$

$$\frac{\partial |E|}{\partial J^T} = \rho_0 Id_3$$

Sinon,

$$|E| = 0$$

Répéter

$$\rho_1 = \frac{|E|E_0^{1/n}}{J_c} \left[ \frac{1}{|E|^{\frac{1}{n}} + E_0^{\frac{1}{n}}} \right]$$

$$\rho = \rho_1 + \rho_0$$

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

$$R = \sigma|E| - |J|$$

$$\frac{\partial R}{\partial |E|} = \sigma + \left( \frac{|E|^{1/n}}{n(E_0^{1/n} + |E|^{1/n})} - 1 \right) \rho_1 \sigma^2$$

$$\Delta |E| = -\frac{R}{\frac{\partial R}{\partial |E|}}$$

$$|E| = |E| + \Delta |E|$$

Tant que  $|\Delta |E|| > \epsilon |E|$

$$\rho_1 = \frac{|E|E_0^{1/n}}{J_c} \left[ \frac{1}{|E|^{\frac{1}{n}} + E_0^{\frac{1}{n}}} \right]$$

$$\rho = \rho_1 + \rho_0$$

$$\frac{\partial E}{\partial J^T} = \rho Id_3 + \frac{1}{|J|^2} \left( \frac{\rho^2}{\rho_0 + \frac{|E|^{1/n} \rho_1}{n(E_0^{1/n} + |E|^{1/n})}} - \rho \right) J J^T$$

Fin

Note : la valeur de  $\epsilon$  est fixée par défaut par la société CEDRAT à  $10^{-4}$ .

## 8.6 Dépendance en champ magnétique des paramètres

Nous avons vu au chapitre 7 qu'il était possible, avec la formulation choisie, d'introduire une dépendance en champ magnétique des paramètres électriques. Cette possibilité pourrait être introduite lors du développement de la fonction utilisateur en langage FORTRAN. En particulier, les lois de variation  $J_c(B)$  et de  $n(B)$  ont été précédemment implémentées sous le logiciel [20].

Le limiteur de courant supraconducteur que nous désirons modéliser n'est pas utilisé actuellement dans un environnement où un champ magnétique externe est présent. Bien que l'utilisation de matériaux supraconducteurs entraîne la circulation de densités de courant beaucoup plus élevées que dans le cas de conducteurs conventionnels, nous pensons que l'influence du champ magnétique propre sur les paramètres électriques est négligeable comparée aux effets thermiques qui se produisent au sein du système.

Ainsi, nous ne prendrons pas en compte la dépendance  $J_c(B)$  ou  $n(B)$ . Cela pourra cependant se faire aisément par modification de la fonction "USR\_DEDJ" dans le cadre d'une amélioration future du modèle.

## Chapitre 9

# Simulation électro-thermique couplée

L'utilisation de matériaux supraconducteurs en régime sur-critique entraîne inévitablement l'apparition de pertes importantes par effet Joule. En effet, la résistivité du matériau augmente rapidement au-delà du courant critique. La valeur de la densité volumique de pertes peut être calculée de manière théorique à l'aide de la formule (8.3). Elle est tracée à la figure 9.1 pour les valeurs de  $J_c$ ,  $E_0$ ,  $n_1$  et  $n_2$  données au chapitre précédent.

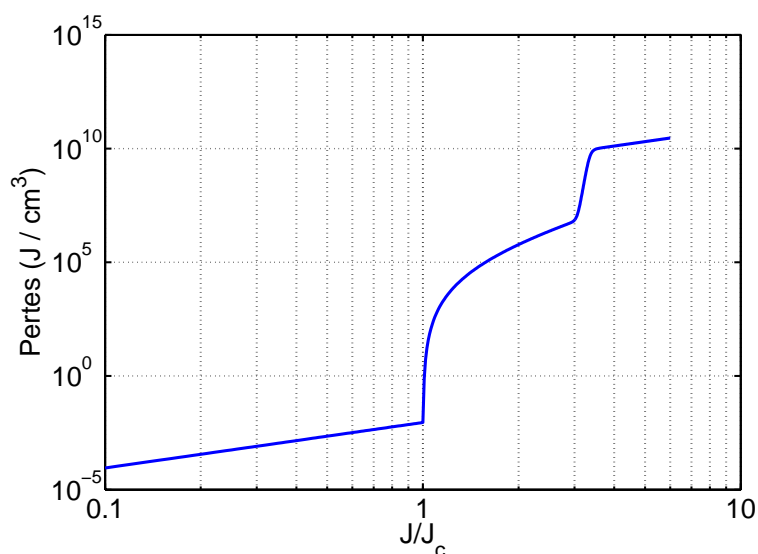


FIG. 9.1: Densité volumique de pertes calculée à partir de l'équation (8.3).

Ces pertes importantes vont provoquer une élévation de température des matériaux, et vont donc entraîner une modification des propriétés physiques, comme la baisse de la densité du courant critique ou l'augmentation de la résistivité. Ces modifications vont à leur tour augmenter la valeur des pertes. Il y a donc un risque d'emballement thermique, qui peut aller jusqu'à la destruction du système. Afin d'éviter cela, une simulation par éléments finis du système, qui inclura les paramètres électromagnétiques et thermiques, permettra une meilleure compréhension des phénomènes et nous permettra, au besoin, de proposer une optimisation du système en vue d'en améliorer les performances.

Afin de permettre une telle étude électromagnéto-thermique, il convient donc d'ajouter l'influence de la température sur les paramètres électriques présentés au chapitre 8 du chapitre 8. Nous donnerons ensuite la valeur des paramètres thermiques qui sera utilisée pour

la simulation des phénomènes thermiques. Enfin, nous mettrons en place une stratégie qui permettra la résolution des équations électromagnétiques et thermiques au sein du logiciel « Flux ».

## 9.1 Dépendance en température des paramètres électriques

Nous étudions dans cette partie l'influence de la température sur les paramètres électriques. Ainsi ces derniers seront dépendants de l'échauffement provoqué par les pertes du système.

### 9.1.1 Dépendance en température de $J_c$

La densité de courant critique d'un ruban supraconducteur est dépendante de la composition chimique du matériau et des traitements utilisés pour sa fabrication [37]. Sa dépendance en température est donc complexe, mais elle peut être décrite de manière correcte pour des matériaux Bi-2212 par la relation  $J_c = J_c(0)(1 - T/T_c)^\alpha$  [38]. Cette relation est aussi valable pour les rubans à base d'YBCO [39].

En partant de la relation  $J_c = J_c(0)(1 - T/T_c)^\alpha$ , nous pouvons exprimer la densité de courant critique  $J_c$  pour une température de référence :

$$J_c(T_{ref}) = J_c(0) \left(1 - \frac{T_{ref}}{T_c}\right)^\alpha$$

Ainsi, pour des valeurs de températures supérieures à la température de référence, nous pouvons déterminer la valeur du courant critique  $J_c(T)$  à partir de la mesure du courant critique à une température de référence  $T_{ref}$  donnée (figure 9.2) :

$$J_c(T) = \begin{cases} J_c(T_{ref}) \frac{(T_c - T)^\alpha}{(T_c - T_{ref})^\alpha} & \text{si } T_{ref} \leq T \leq T_c \\ 0 & \text{si } T_c < T \end{cases} \quad (9.1)$$

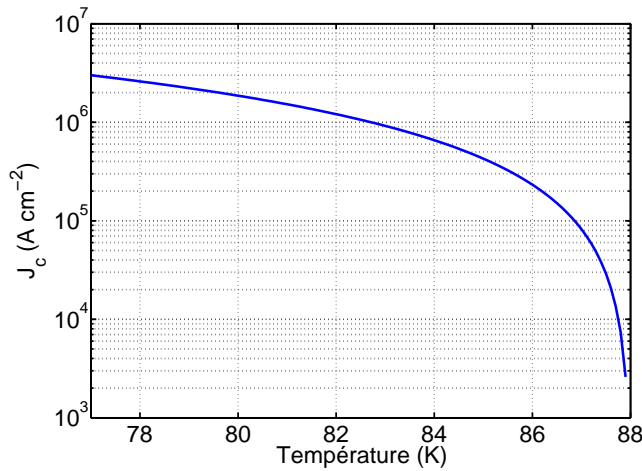


FIG. 9.2: Variation de la densité de courant critique  $J_c$  en fonction de la température ( $T_{ref} = 77$  K).

Nous utiliserons les paramètres suivants :  $T_{ref} = 77$  K,  $J_c(77$  K) =  $3 \times 10^6$   $\text{A m}^{-2}$  =  $3 \times 10^6$   $\text{A cm}^{-2}$ ,  $T_c = 88$  K, et  $\alpha = 1.5$  [38].

### 9.1.2 Dépendance en température de la valeur de $n_1$

Des mesures effectuées par l'Université de Genève montrent que ce paramètre n'est pas constant sur une plage de température comprise entre 76 K et 86 K. Il n'existe pas de modèle précis permettant de prédire la variation de l'exposant  $n_1$  de la loi de puissance (8.1) ou (8.2). Il semble que cette variation soit linéaire avec la température, comme le laissent supposer les mesures effectuées par l'Université de Genève (figure 9.3). L'introduction d'une dépendance en température de l'exposant  $n$  demanderait cependant une étude complémentaire.

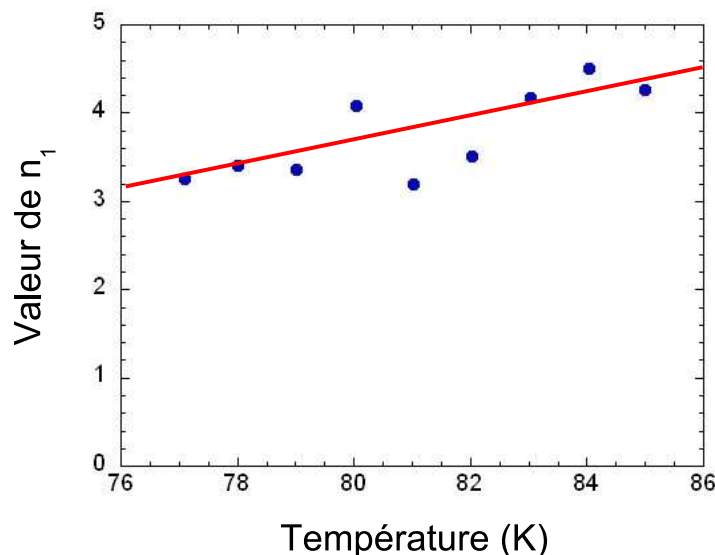


FIG. 9.3: Variation de l'exposant  $n$  en fonction de la température (Mesures : Université de Genève).

Comme le montre la figure 9.4, prendre une valeur de  $n_1$  faible induit une erreur qui conduit à une surestimation des pertes pour des valeurs de densités de courant inférieures à  $2 J_c$ . Cette erreur conduira à une évaluation pessimiste de la température, qui sera légèrement plus faible au sein du système réel que dans notre simulation. Pour des densités de courant comprises entre  $2 J_c$  et  $3 J_c$  l'erreur est négligeable en comparaison avec la variation thermique du paramètre  $J_c$  présentée ci-dessus.

Nous considérerons donc que le paramètre  $n_1$  reste constant avec la température, et nous maintiendrons sa valeur à 2.8, comme indiqué au chapitre 8.

### 9.1.3 Dépendance en température des résistivités

L'allure globale de la dépendance en température de la résistivité d'un matériau conducteur conventionnel est donnée à la figure 1 du préambule. En règle générale, la résistivité augmente lorsque la température augmente, mais dans des proportions différentes suivant les substances. On trouve même certains matériaux dont la dépendance est inversée, c'est-à-dire que la résistivité diminue lorsque la température augmente. C'est le cas du germanium, qui possède un coefficient de température  $\alpha$  égal à  $-5 \cdot 10^{-2} \text{ K}^{-1}$ , ou du silicium où  $\alpha = -75 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$  [40], tous deux utilisés dans la fabrication des semi-conducteurs.

À basse température, le comportement résistif d'un conducteur est non seulement dépendant de la température, mais aussi de la pureté du matériau [41], ainsi que, dans le cas de couches minces, de son épaisseur [42]. Cependant, sur une plage de température réduite, ce comportement peut être linéarisé à l'aide de la formulation suivante :  $\rho(T) = \rho(T_{ref}) (1 + \alpha(T - T_{ref}))$  [31].



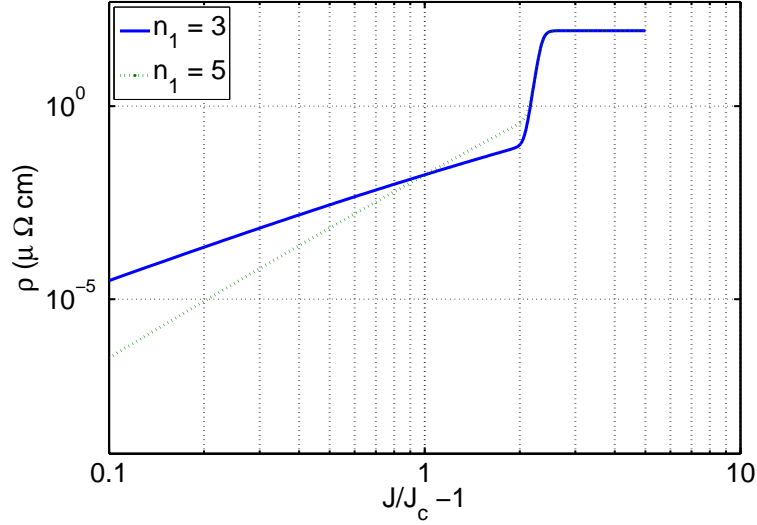


FIG. 9.4: Variation de la résistivité en fonction de la densité de courant pour les deux valeurs extrêmes de  $n_1$  ( $T_{ref} = 77$  K).

**Valeurs des paramètres pour l'YBCO :** Pour l'YBCO, nous utiliserons les paramètres suivants :  $T_{ref} = 77$  K,  $\rho(T_{ref}) = 9 \cdot 10^{-7} \Omega\text{m} = 9 \cdot 10^1 \mu\Omega\text{cm}$ . Cette valeur est issue des mesures faites par l'Université de Genève. L'article [43] donne un ordre de grandeur similaire. La valeur du paramètre  $\alpha = 0.007 \text{ K}^{-1}$  correspond à une valeur donnée par l'article [34].

**Valeurs utilisées pour la modélisation du stabilisateur composé d'or :** Pour de l'or, les valeurs des paramètres utilisées sont les suivantes :  $T_{ref} = 77$  K,  $\rho(T_{ref}) = 7.5 \cdot 10^{-9} \Omega\text{m} = 7.5 \cdot 10^{-1} \mu\Omega\text{cm}$  et  $\alpha = 0.01282 \text{ K}^{-1}$  [44].

## 9.2 Tracé de la courbe $\rho = f(J, T)$ pour le matériau supraconducteur

À partir des paramètres décrits ci-dessus, il est possible de tracer la courbe décrivant la résistivité de l'YBCO en fonction de la température réduite  $T/T_c$  et de la densité de courant réduite  $J/J_c$  (figure 9.5). Il est intéressant de constater que pour des températures élevées proche de  $T_c$ , la transition de l'état supraconducteur à l'état normal intervient pour des valeurs de densités de courant inférieur à  $J_c(77 \text{ K})$ . A l'inverse, lorsque la température est maintenue à une valeur inférieure à 77 K, la densité de courant pouvant circuler dans le matériau est plus élevée.

## 9.3 Paramètres thermiques

La modélisation de la partie thermique du problème nécessite la connaissance de la conductivité thermique  $\lambda_{Th}$  et de la chaleur spécifique  $C_{Th}$  des matériaux. Bien que ces paramètres soient variables avec la température, nous avons remarqué que leur ordre de grandeur restait le même sur une plage de température comprise entre 77 et 150 K [45]. Une étude réalisée traitant de l'importance des échanges thermiques dans le processus de retour à l'état supraconducteur après transition fait l'hypothèse que ces deux paramètres sont constants [46], laissant supposer que leurs variations respectives n'est pas suffisamment significative. Ainsi, nous n'introduisons donc pas ces variations dans le modèle thermique,

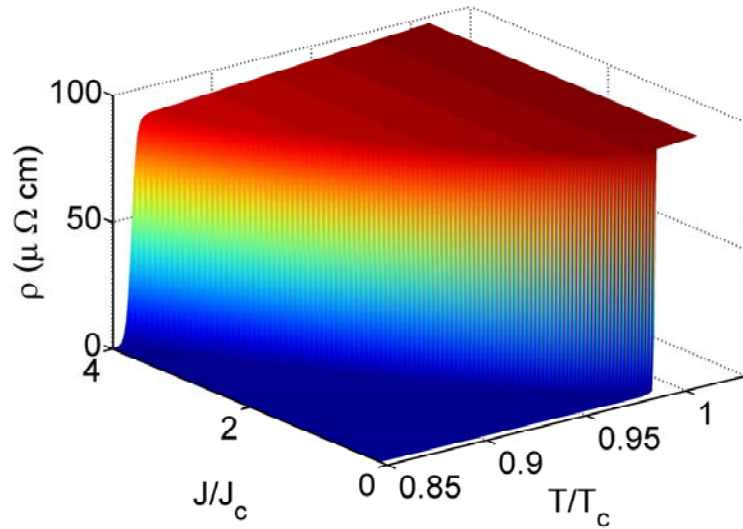


FIG. 9.5: Tracé de la résistivité  $\rho$  du matériau YBCO en fonction de  $J/J_c(77\text{ K})$  et de  $T/T_c$ .

et nous nous contenterons d'implémenter leurs valeurs respectives pour une température de référence de 77 K. Il sera cependant possible, lors d'une amélioration du modèle, de prendre en compte ces variations, soit par l'utilisation des fonctions standards disponibles dans le module thermique du logiciel, soit par la programmation d'une fonction spécifique en langage FORTRAN (tableau 8.1). On se reportera aux références données pour obtenir les variations spécifiques à chaque matériau (tableaux 9.1 et 9.2).

### 9.3.1 Conductivité thermique

La conductivité thermique  $\lambda_{Th}$  des matériaux est donnée au tableau 9.1.

| Matériau | Conductivité thermique<br>$\lambda$ ( $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ) | Références |
|----------|---|------------|
| YBCO     | 10  | [45] [47]  |
| Bi-2223  | 65  | [48]       |
| Bi-2212  | 5   | [49]       |
| Or       | 363   | [50]       |
| Argent   | 500   | [41]       |
| Saphir   | 1130  | [51]       |

TAB. 9.1: Conductivité thermique de quelques matériaux supraconducteurs ou conventionnels pour une température  $T = 77\text{ K}$ .

### 9.3.2 Capacité thermique

La capacité thermique  $C_{Th}$  des matériaux est donnée dans le tableau 9.2.

| Matériau | Capacité thermique<br>$C_p$ ( $\text{Jg}^{-1}\text{K}^{-1}$ ) | Références |
|----------|---|------------|
| YBCO     | $1.1 \cdot 10^6$  | [47]       |
| Bi-2223  | $7.5 \cdot 10^5$  | [52]       |
| Bi-2212  | $1.1 \cdot 10^5$  | [49]       |
| Or       | $2.0 \cdot 10^6$  | [53]       |
| Argent   | $1.5 \cdot 10^5$  | [41]       |
| Saphir   | $2.4 \cdot 10^5$  | [51]       |

TAB. 9.2: Capacité thermique de quelques matériaux supraconducteurs ou conventionnels pour une température  $T = 77$  K.

## 9.4 Coefficient d'échange avec le bain

La plupart des systèmes construits à partir de supraconducteurs dits "à haute température critique" utilisent l'azote liquide comme fluide cryogénique. Les pertes du système peuvent principalement être évacuées de trois manières :

- par convection naturelle lorsque le système est simplement plongé dans un bain,
- par convection forcée lorsque la circulation du fluide est assurée par un équipement externe,
- par changement de phase lorsque la valeur des pertes est grande et que l'élévation de température est importante.

Le limiteur de courant que l'on souhaite étudier est un dispositif qui est immergé dans un bain d'azote. Souhaitant le modéliser en régime sur-critique, l'azote en contact avec les surfaces du dispositif se vaporisera car la température augmentera au vu de la densité de pertes engendrée (figure 9.1). De ce fait, nous nous intéresserons au cas du refroidissement par convection naturelle avec changement de phase.

Ce type de transfert de chaleur est en général un processus complexe qui nécessite la connaissance précise des processus impliqués. L'ébullition des liquides, et celle de l'azote liquide en particulier, génère des flux thermiques très élevés et un transfert de chaleur important, dont l'une des causes est la forte valeur de la chaleur latente de vaporisation. La condition d'apparition de ce phénomène est que la température de la surface soit supérieure à la température de saturation du fluide cryogénique.

Le nombre et la variété des paramètres devant être pris en compte rendent difficile l'étude de ce phénomène qui dépend entre autres :

- des propriétés thermophysiques des deux phases (liquide et vapeur),
- des grandeurs qui caractérisent le changement de phase (tension superficielle, chaleur latente de vaporisation),
- de l'état de surface où se produit le transfert de chaleur.

Compte tenu du grand nombre de variables impliquées et de son absence d'uniformité, il n'y a pas de modèle analytique capable de décrire le phénomène d'ébullition dans toute sa complexité et de fournir des relations de calcul précises pour le coefficient de transfert thermique  $h$  [54].

L'article [55] donne cependant une courbe simplifiée, qui peut être implémentée sous un logiciel d'éléments finis, permettant d'obtenir une approximation de la valeur de ce coefficient  $h$  en fonction de la différence de température entre la surface d'échange et le bain cryogénique (figure 9.6).

En prenant quelques points de référence sur la courbe, nous nous proposons d'approcher cette courbe à l'aide de fonctions exponentielles, conduisant à la formulation suivante :

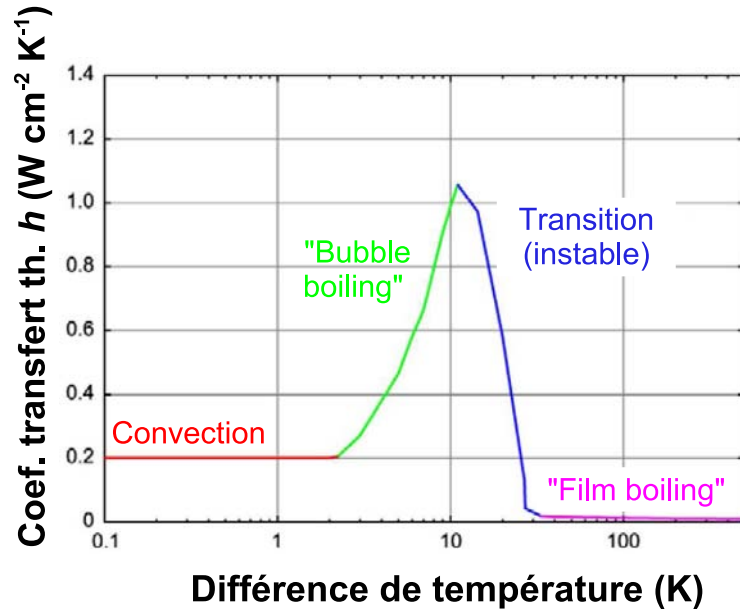


FIG. 9.6: Modélisation du coefficient d'échange thermique entre une surface plane et un bain d'azote liquide [55].

$$h = \begin{cases} 2364 & \text{si } \Delta T < 2 \\ 1629 \cdot \exp(0.1863\Delta T) & \text{si } 2 \leq \Delta T < 10 \\ \frac{(2 - 1629 \cdot \exp(0.1863 \cdot 10))}{15 \cdot (\Delta T - 10)} + 1629 \cdot \exp(0.1863 \cdot 10) & \text{si } 10 \leq \Delta T < 25 \\ 2 \cdot \exp(-(\Delta T - 25)) & \text{si } \Delta T \geq 25 \end{cases} \quad (9.2)$$

Cette formulation (9.2) nous donne la valeur du coefficient d'échange  $h$  en fonction de la différence de température  $\Delta T$ , comme illustré à la figure 9.7. La température de référence utilisée pour le calcul de  $\Delta T$  est  $T_{ref} = 77$  K.

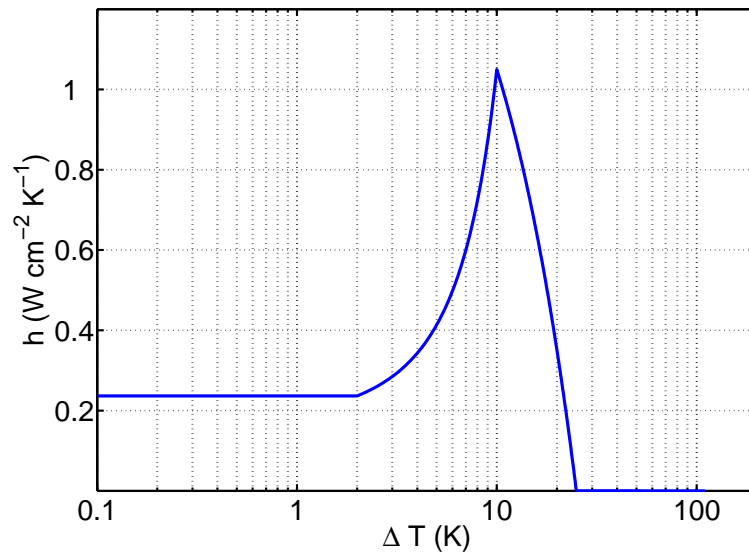


FIG. 9.7: Coefficient d'échange thermique  $h$  donné par l'équation (9.2).

## 9.5 Couplage des équations électriques et thermiques

La mise en place d'une simulation numérique permettant de résoudre un problème électro-magnéto-thermique peut se faire de deux manières distinctes :

- Par résolution simultanée des équations électromagnétiques et thermiques. C'est la méthode idéale, mais celle-ci nécessite un programme informatique qui autorise une dépendance circulaire des variables (la densité de courant  $J$  dépend de la température  $T$ , et la température  $T$  dépend de la densité de pertes, autrement dit du produit  $\rho J^2$ ).
- Par la séparation des problèmes thermiques et électromagnétiques, en résolvant alternativement un pas de temps de chaque problème et en échangeant les résultats entre les deux modèles implémentés (électromagnétique et thermique).

Bien que certains programmes de simulation par éléments finis proposent la résolution simultanée des équations électromagnétiques et thermiques, des tests effectués sous FEMLAB [56] ont montré les avantages du logiciel « Flux ». En particulier, il n'est pas directement possible sous FEMLAB d'imposer un courant de transport  $I$  circulant dans les parties conductrices du système modélisé. Pour décrire une telle condition aux limites, il convient d'ajouter, sur chaque face constituant une borne d'un conducteur, deux équations supplémentaires afin d'obtenir la contrainte  $\int J dS = I$ . En revanche, il est relativement aisé d'utiliser notre expérience sur le logiciel « Flux » [17] [20], et de séparer le problème électromagnétique et le problème thermique. La stratégie de résolution se fera selon le schéma proposé dans l'article [55]. De plus, les fonctions de couplage avec un circuit électrique externe nous permettront de reproduire facilement les conditions d'un court-circuit qui surviendrait sur le réseau électrique dans lequel est inséré le limiteur de courant.

## 9.6 Méthode de résolution d'un problème couplé sous « Flux »

La méthode de résolution que nous utiliserons pour la résolution du problème couplé, c'est-à-dire du modèle électromagnétique et thermique, se trouve schématisé à la figure 9.8.

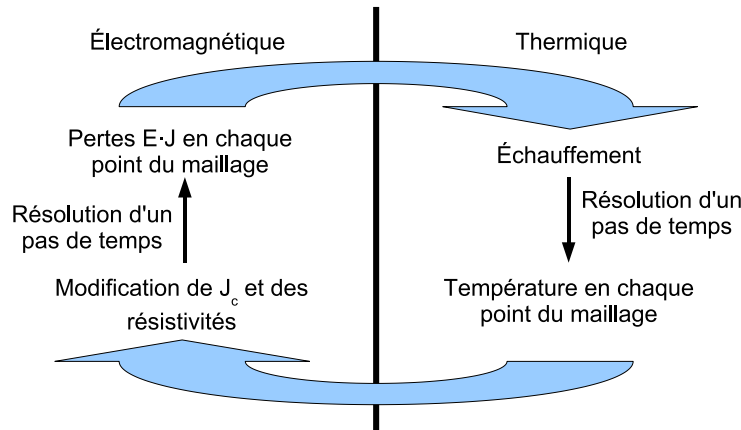


FIG. 9.8: Stratégie de résolution pour la simulation électro-thermique.

À partir de la simulation électromagnétique, nous connaissons les pertes  $E \cdot J$  sur chaque point du maillage. Ces pertes peuvent être injectées au sein du problème thermique. La résolution d'un pas de temps thermique permet de calculer un échauffement des matériaux et d'obtenir la variation de la température par rapport à la température de référence  $T_{ref} = 77K$ . Cette augmentation de température est transmise au problème électromagnétique et

vient modifier les paramètres électriques des matériaux avant la résolution du pas de temps correspondant.

Ce couplage se fait à l'aide d'un programme "python" qui se charge de générer un fichier nommé "F3D\_INI.SPI" à chaque étape de la résolution. Ce dernier contient les commandes particulières permettant l'importation des valeurs physiques désirées, la résolution d'un pas de temps, ainsi que l'exportation des résultats qui seront à transmettre. Il est automatiquement détecté et lu lors du démarrage du logiciel Flux.

La stabilité numérique de cette méthode est en général assurée par le fait que la constante de temps électrique est largement inférieure à la constante de temps thermique. Dans notre cas, la présence du substrat de saphir permet d'augmenter la capacité thermique, et ainsi d'augmenter la constante de temps du dispositif.



## Chapitre 10

# Application : modélisation d'un limiteur de courant supraconducteur

Un limiteur de courant est un dispositif qui, lorsqu'il est inséré dans un réseau électrique, permet la variation rapide de l'impédance d'une ligne électrique lorsqu'un défaut se produit. Ainsi, il est possible de diminuer le courant de défaut, qui peut atteindre jusqu'à dix fois le courant nominal  $I_n$  de la ligne sans sa présence. À cet égard, il n'a pas pour fonction de remplacer la fonction essentielle de coupure que fournit l'ouverture d'un disjoncteur ou la destruction d'un fusible, mais vient en complément de ces installations. Bien que cette fonction de limitation puisse être intégrée à des dispositifs électroniques, comme les FACTS (Flexible AC Transmission System) par exemple [57], il est possible de s'affranchir d'un système de détection et de commande en exploitant les propriétés électriques des supraconducteurs, et plus particulièrement leur capacité naturelle à devenir très résistif lorsque le courant dépasse le courant critique du dispositif.

Durant la phase de limitation, les pertes dans le limiteur sont très importantes parce qu'une tension apparaît aux bornes du dispositif. Ces pertes provoquent une augmentation de la température et entraînent ainsi une modification des propriétés électriques et thermiques du système, pouvant aller jusqu'à provoquer la destruction des matériaux, et donc du système complet. La figure 10.1 est le résultat d'un emballement thermique qui s'est produit lors de la phase de développement du limiteur que nous allons étudier dans ce chapitre.

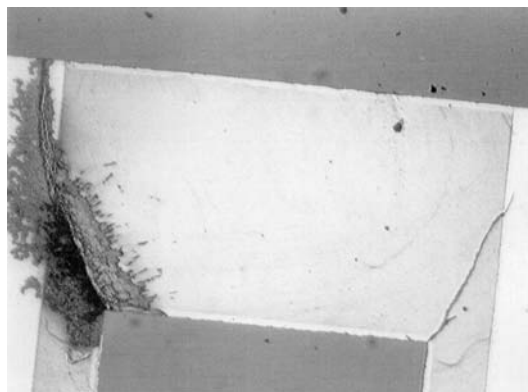


FIG. 10.1: Dégradation des matériaux due à un échauffement thermique lors d'un test (Image : Université de Genève).

Afin de mieux comprendre le comportement du système et éviter que de tels phénomènes



se produisent en phase d'exploitation, nous nous proposons de mettre en place une simulation par éléments finis qui permettra l'analyse des grandeurs physiques locales ou globales, telles que les pertes locales, la température, la densité de courant  $J$  ou encore le courant et la tension aux bornes du dispositif.

Cette mise en place se fera en deux étapes : dans un premier temps, nous ne simulerons que la partie électromagnétique, sans introduction de dépendances thermiques sur les variables. Cela nous permettra de localiser les zones où les pertes sont les plus élevées, et de proposer une amélioration de la géométrie du système. Ensuite, nous ajouterons un couplage avec les équations thermiques de façon à permettre la comparaison des résultats obtenus avec des mesures réalisées sur le système réel. En particulier, nous verrons que le modèle numérique réalisé donne des résultats comparables à ceux obtenus expérimentalement, et nous donne accès à des variables qui peuvent être difficilement mesurables sans un système de mesures pouvant rapidement devenir coûteux et complexe, comme la répartition de la température au sein du dispositif.

## 10.1 Présentation du système réel

Le limiteur de courant développé à l'Université de Genève est un méandre supraconducteur d'YBCO, surmonté d'une couche stabilisatrice d'or, le tout déposé sur un substrat de saphir (figure 10.2). L'originalité du système repose sur le fait que, le long du méandre, des étranglements ont été pratiqués. Ces étranglements, que nous nommerons constrictions (figure 10.3), permettent de réduire localement le courant critique de la ligne. Lorsque le dispositif est soumis à un court-circuit, la résistivité des constrictions va rapidement augmenter pour atteindre la valeur  $\rho_{sat}$  (voir chapitre 8). De cette façon, la puissance à dissiper se retrouve mieux répartie sur la surface du substrat que dans le cas d'un méandre sans étranglement [58]. Le petit cercle noir visible sur la figure 10.2 indique la localisation de la brûlure observée à la figure 10.1.

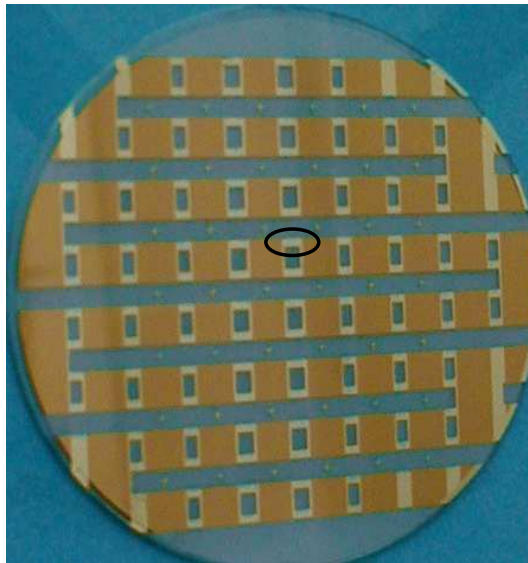


FIG. 10.2: Limiteur de courant supraconducteur (photo : Université de Genève).

Les dimensions du système sont données dans le tableau 10.1 ci-après :

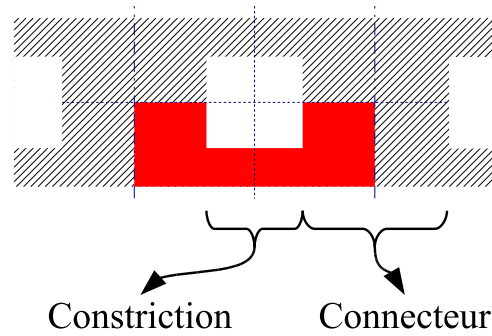


FIG. 10.3: Dessin schématique du limiteur réalisé par l'Université de Genève.

|                       |   |
|-----------------------|---|
| Largeur constriction  | 0.8 mm  |
| Largeur connecteur    | 3.5 mm  |
| Longueur constriction | 2 mm  |
| Longueur connecteur   | 1.5 mm  |
| Hauteur YBCO          | 300 nm  |
| Hauteur or            | 120 nm sur les constrictions<br>25 nm sur les connecteurs |
| Hauteur saphir        | 0.5 mm  |

TAB. 10.1: Dimensions du limiteur de courant.

Le courant critique  $I_c$  du limiteur à 77 K se calcule à partir de la densité de courant critique de l'YBCO  $J_c = 3 \cdot 10^6 \text{ A cm}^{-2}$ . Sa valeur est donc de  $2 \cdot 0.8 \cdot 10^{-3} \cdot 300 \cdot 10^{-9} \cdot 3 \cdot 10^{10} = 14.4 \text{ A}$ .

## 10.2 Modélisation de la géométrie

À partir des figures 10.2 et 10.3, nous pouvons remarquer qu'il est possible de simplifier la géométrie à modéliser sous le logiciel de simulation en utilisant la périodicité et la symétrie médiane du méandre. Ainsi, seule la partie non hachurée de la géométrie sur la figure 10.3 est, dans un premier temps, introduite sous « Flux ». Par la suite, lors de l'introduction du couplage thermique, nous simplifierons encore la géométrie en ne modélisant qu'un quart de constriction par l'ajout de la symétrie supplémentaire.

Nous constatons, d'après le tableau 10.1, qu'un ratio géométrique d'environ 12000 existe entre les longueurs et les épaisseurs des matériaux constituant le système : la longueur totale est de 5 mm alors que l'épaisseur des parties conductrices est de 420 nm. Ceci posera un problème lors du maillage de la géométrie. En effet, un maillage régulier conduira à la présence de nombreux éléments sur la longueur des éléments et entraînera une demande surréaliste de puissance informatique lors de la phase de résolution du problème. À l'inverse, un maillage contenant des éléments "aplatis" provoque une dégradation significative de la précision des résultats. Il convient donc de trouver une méthode permettant d'adapter les épaisseurs, tout en conservant les caractéristiques du système.

### 10.2.1 Adaptation des épaisseurs

Afin de permettre la résolution correcte du problème, il est nécessaire de faciliter le maillage de la géométrie. Pour cela, nous décidons de multiplier les épaisseurs d'YBCO et d'or par un facteur  $\alpha = 1000$ , autrement dit d'obtenir un ratio géométrique de 12, valeur plus raisonnable pour une simulation numérique par éléments finis.

### 10.2.2 Effets de l'adaptation des épaisseurs sur les équations

Originellement, on cherche une solution aux équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{H}) = \vec{J} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{E} = f(|\vec{J}|) \frac{\vec{J}}{|\vec{J}|} \end{cases} \quad (10.1)$$

Au lieu de chercher directement la solution, l'adaptation des épaisseurs revient à transformer les coordonnées du problème de la manière suivante :

$$(x, y, z, t) \longrightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t}) = (x, y, \alpha z, t) \quad (10.2)$$

Si l'on applique la transformation suivante :

$$\begin{cases} \vec{B} = \lambda(B_x, B_y, \alpha B_z) \\ \vec{E} = \lambda(\alpha E_x, \alpha E_y, E_z) \\ \vec{H} = \gamma(\alpha H_x, \alpha H_y, H_z) \\ \vec{J} = \gamma(J_x, J_y, \alpha J_z) \\ \text{avec } \lambda \text{ et } \gamma \text{ arbitraire} \end{cases} \quad (10.3)$$

Alors les relations suivantes, issues des équations de Maxwell, sont vérifiées :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{H}) = \vec{J} \end{cases} \quad (10.4)$$

Il convient cependant d'adapter les relations des matériaux en conséquence (résistivité  $\rho$  et perméabilité magnétique  $\mu_r$ ).

### 10.2.3 Adaptation des grandeurs physiques

La multiplication des épaisseurs entraîne la modification des grandeurs physiques : le courant critique  $I_c$  et la résistance  $R_{or}$  de la couche d'or ont alors des valeurs différentes comparées aux valeurs réelles. Il faut donc les adapter en conséquence.

**Pour la couche d'or :** La valeur de la résistance  $R_{or}$  est donnée par l'expression  $R_{or} = \rho_{or} l_{or} / S_{or}$  avec  $l_{or}$  et  $S_{or}$  respectivement la longueur en m et la section en m<sup>2</sup>. La multiplication par 1000 de la hauteur de la couche d'or multiplie donc la section  $S_{or}$  par 1000. Ainsi, afin de garder la résistance de la couche d'or inchangée, la résistivité de l'or sera multipliée par un facteur 1000.

**Pour la couche d'YBCO :** La valeur du courant critique  $I_c$  est donnée par  $I_c = J_c \cdot S_{\text{supraconducteur}}$ . Par le même raisonnement, et afin de conserver la valeur originale de  $I_c$ , la densité de courant critique  $J_c$  sera divisée par un facteur 1000. Enfin, la résistivité  $\rho_{\text{sat}}$  sera elle aussi multipliée par un facteur 1000.

### 10.3 Résultats obtenus pour la partie électromagnétique seule

Le limiteur est alimenté par une source de courant  $i(t) = \hat{I} \sin(2\pi ft)$  avec  $\hat{I} = 3 I_c = 43.2 \text{ A}$  à 50 Hz.

La figure 10.4 est obtenue pour  $\omega t = 3\pi/2$ , soit lorsque l'amplitude du courant est maximale. On s'attachera plus particulièrement à la forte valeur de la densité de courant  $J$  et du champ électrique  $E$  dans l'angle interne créé par la frontière entre le connecteur et la constriction. Cette observation confirme la localisation de l'emballement thermique observé à la figure 10.1. Celui-ci est probablement provoqué par une densité de pertes locales trop élevées.

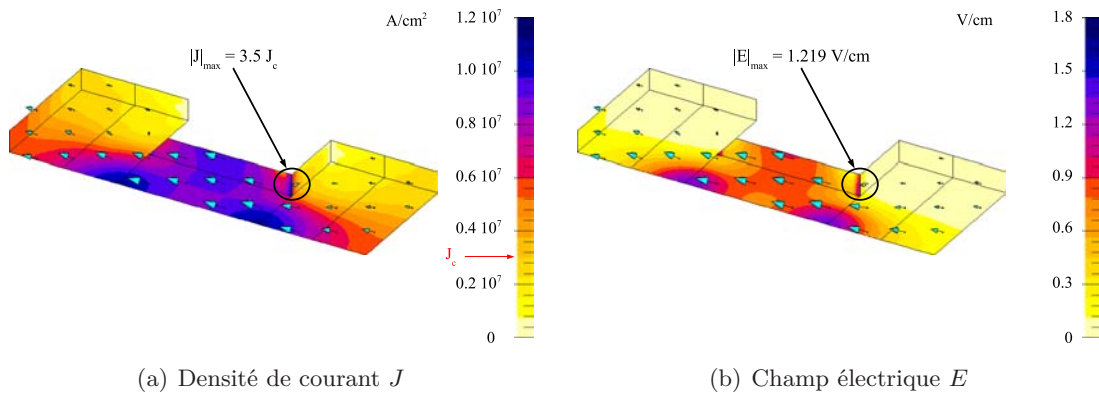


FIG. 10.4: Représentation des variables électriques locales dans le matériau YBCO pour  $\omega t = 3\pi/2$ .

Afin d'optimiser le comportement du système, nous proposons de comparer le champ électrique maximum présent dans l'angle concerné pour la géométrie originale et pour trois autres géométries représentées à la figure 10.5.

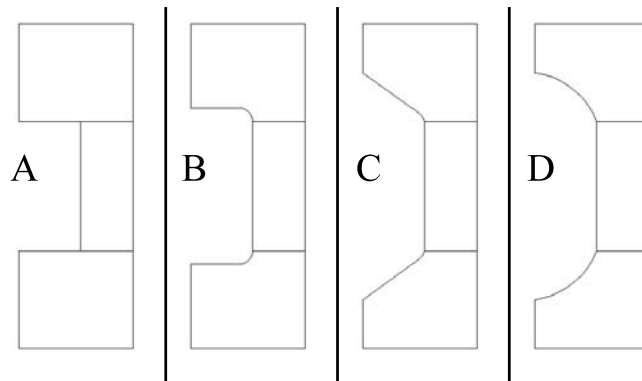


FIG. 10.5: Géométrie originale (A) et géométries proposées (B, C, D).

On constate à la figure 10.6 que la simple suppression de l'angle droit (géométrie B)

permet une diminution de la valeur du champ électrique maximum, mais que ce dernier reste néanmoins élevé.

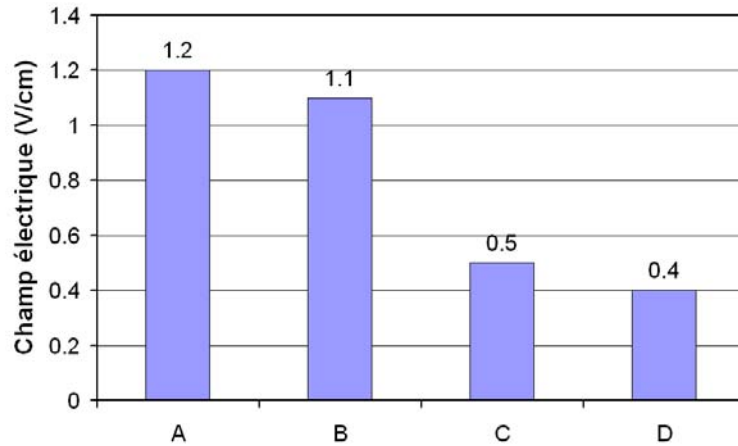


FIG. 10.6: Valeur maximale du champ électrique dans l'angle interne formé par la frontière entre le connecteur et la constriction.

En revanche, l'ouverture de l'angle proposée dans les géométries C et D permet une réduction significative de la valeur de  $E$  (figure 10.6), jusqu'à un facteur 3 comparé à la géométrie originale. Sachant que le champ électrique et la densité de courant sont liés par l'expression (8.3), nous pouvons en conclure que ces deux dernières géométries sont les plus avantageuses pour réduire les pertes locales et donc le risque d'emballement thermique dans la zone considérée. Ce résultat est illustré par le tracé de la densité de pertes locales, obtenue par le calcul du produit  $E \cdot J$ , à la figure 10.7.

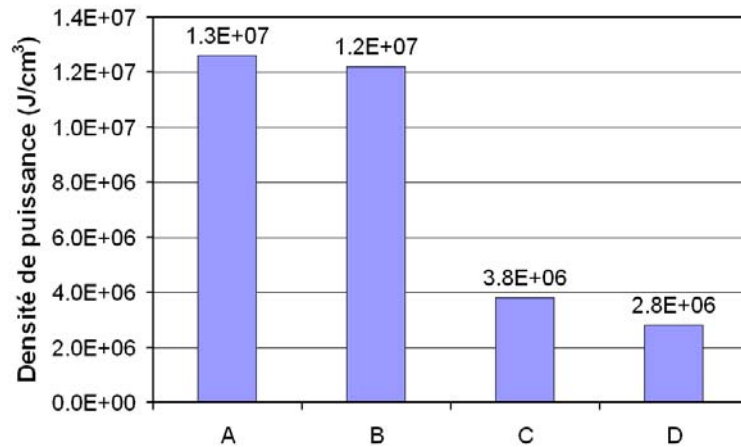


FIG. 10.7: Valeur de la densité de pertes locales ( $E \cdot J$ ) pour les quatre configurations analysées.

En comparaison avec la figure 10.4, le tracé de la densité de courant  $J$  et du champ électrique  $E$  illustre clairement les améliorations apportées par l'utilisation de la géométrie C sur le problème rencontré (figure 10.8).

Toutefois, il convient de prendre aussi en compte la puissance totale dissipée sur un cycle. Celle-ci se calcule par la formulation  $P = 1/T \int_0^T \int E \cdot J dV dt$ , normalisée par unité de surface. Les résultats obtenus sont reportés à la figure 10.9.

La valeur de  $196 \text{ Wcm}^{-2}$  obtenue pour la géométrie originale correspond à la valeur

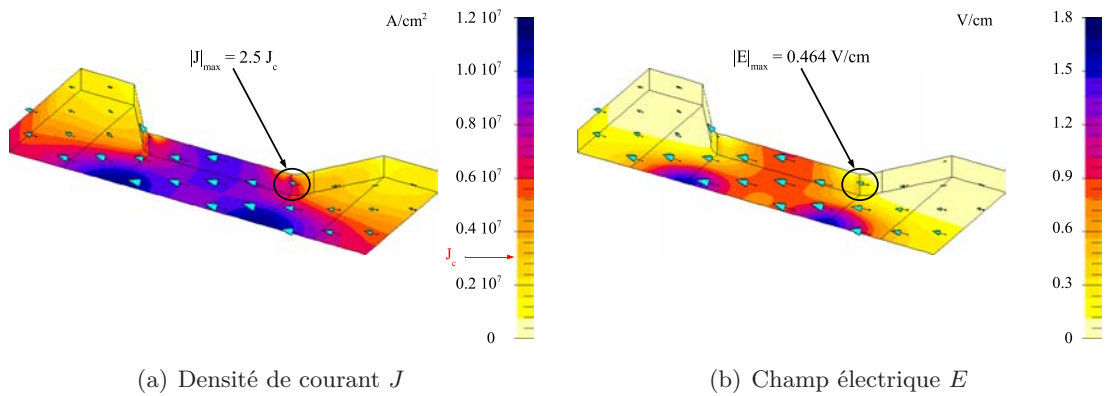


FIG. 10.8: Représentation des variables électriques locales dans le matériau YBCO pour la géométrie C et pour  $\omega t = 3\pi/2$ .

calculée par l'Université de Genève lorsque  $I = 3 I_c$  [30]. Pour les géométries C et D, nous remarquons que la valeur de la puissance dissipée augmente d'environ 20% par rapport à la géométrie originale. Cela s'explique par le fait que le courant dispose d'un espace plus réduit lorsqu'il rencontre la zone proche de la constriction. Ainsi, le courant est obligé de circuler dans une région dont la résistivité est élevée, entraînant l'apparition de pertes locales plus importantes. Bien que localisées sur une surface plus importante, ces pertes n'optimisent pas le fonctionnement du système, car la puissance totale à dissiper par le limiteur est plus importante, ce qui contrevient aux critères énoncés dans l'article [21].

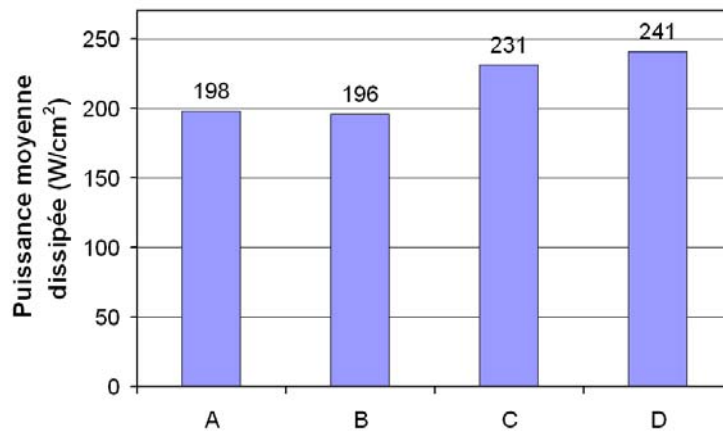


FIG. 10.9: Puissance moyenne dissipée sur un cycle pour la géométrie originale et les trois géométries proposées.

Il est à noter qu'à la suite de cette étude, la géométrie B proposée a été une base de travail pour l'élaboration d'un nouveau dessin pour le limiteur de courant. Ce nouveau design est actuellement testé par l'Université de Genève, et les premiers résultats ont été présentés lors de la conférence "EUCAS 2005" à Vienne. Ces derniers devraient être publiés dans le courant de l'année 2006.

## 10.4 Résultats lors de la prise en compte de la température

Après avoir mis en évidence la localisation des zones où un risque d’emballement thermique peut potentiellement survenir, nous allons simuler la géométrie originale en incluant les paramètres thermiques présentés au chapitre précédent. Ceci devrait nous permettre de calculer la température du limiteur lorsqu’un court-circuit, modélisé à l’aide d’un circuit électrique simple, intervient.

### 10.4.1 Améliorations apportées au modèle électrique

Afin d’améliorer le modèle électrique, nous avons légèrement modifié celui-ci afin d’y ajouter deux principales modifications :

- L’ajout d’une symétrie supplémentaire, soit au total deux symétries et une périodicité, suppose que seule la moitié de la géométrie non hachurée représentée à la figure 10.3 est maintenant introduite dans le logiciel. Cette simplification permettra de réduire le nombre de nœuds du problème et de faciliter la convergence.
- La permittivité relative  $\mu_r$  de l’or et de l’YBCO ont été adaptées au regard de la multiplication des résistivités et de la division de la densité de courant critique. En effet, l’épaisseur reliée à l’effet de peau dans la couche d’or est donnée par  $\epsilon = \sqrt{2\rho/(\omega\mu_0\mu_r)}$ . Pour la couche d’YBCO, bien que le matériau ne soit pas linéaire, un phénomène semblable à cet effet de peau se produit également. Afin de garder la même valeur de l’épaisseur  $\epsilon$ , nous avons donc multiplié  $\mu_r$  par un facteur 1000.

### 10.4.2 Adaptation des grandeurs physiques du modèle thermique

La conductivité thermique  $\lambda_{Th}$  a été multipliée par 1000 afin de tenir compte du fait que les épaisseurs de l’or et de l’YBCO sont mille fois supérieures dans le modèle que dans le système réel. En revanche, comme les volumes sont plus importants dans la géométrie implémentée sous « Flux », la capacité thermique  $C_{Th}$  est divisée par 1000.

### 10.4.3 Récapitulatif des paramètres physiques

Les tableaux 10.2 et 10.3 résument les valeurs réelles des paramètres physiques des matériaux pour  $T = 77$  K, ainsi que les valeurs implémentées dans le logiciel de modélisation par éléments finis après adaptation des épaisseurs.

|        |             | Épaisseur<br>$\mu\text{m}$ | $J_c$<br>$\text{A}/\text{cm}^2$ | $\rho$<br>$\mu\Omega\text{cm}$ | $\mu_r$ | $\lambda_{Th}$<br>$\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ | $C_{Th}$<br>$\text{J}/(\text{m}^3 \cdot \text{K})$ |
|--------|-------------|----------------------------|---------------------------------|--------------------------------|---------|--|--|
| YBCO   | Réelle      | 0.300                      | $3 \cdot 10^6$                  | 90                             | 1       | 10   | $1.1 \cdot 10^6$                                   |
|        | Implémentée | 300                        | $3 \cdot 10^3$                  | $9 \cdot 10^4$                 | 1000    | $1.0 \cdot 10^4$                                       | $1.1 \cdot 10^3$                                   |
| Or     | Réelle      | 0.120                      | –                               | $7.5 \cdot 10^{-1}$            | 1       | 363  | $2.0 \cdot 10^6$                                   |
|        | Implémentée | 120                        | –                               | $7.5 \cdot 10^2$               | 1000    | $3.6 \cdot 10^5$                                       | $2.0 \cdot 10^3$                                   |
| Saphir | Réelle      | 500                        | –                               | –                              | –       | 1130   | $2.4 \cdot 10^5$                                   |
|        | Implémentée | 500                        | –                               | –                              | –       | 1130   | $2.4 \cdot 10^5$                                   |

TAB. 10.2: Valeurs des paramètres physiques pour  $T = 77$  K pour l’axe  $z$  (épaisseur). La résistivité  $\rho$  pour l’YBCO correspond à sa résistivité à l’état normal.

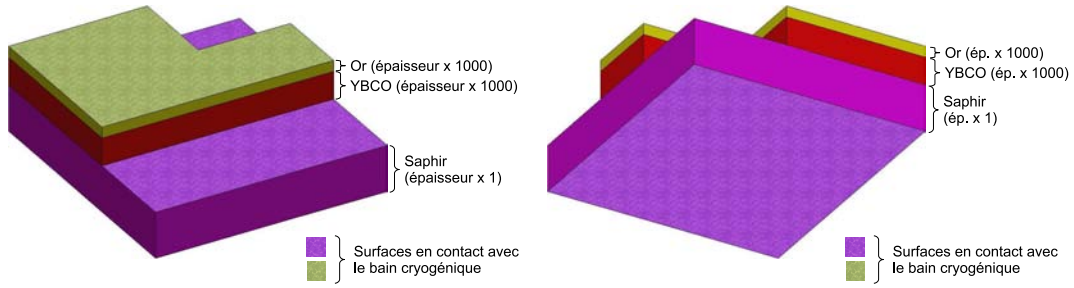


FIG. 10.10: Représentation de la configuration utilisée pour la partie thermique.

|        |             | $J_c$<br>A/cm <sup>2</sup> | $\rho$<br>$\mu\Omega\text{cm}$ | $\mu_r$ | $\lambda_{Th}$<br>W/(m · K) | $C_{Th}$<br>J/(m <sup>3</sup> · K) |
|--------|-------------|----------------------------|--------------------------------|---------|-----------------------------|------------------------------------|
| YBCO   | Réelle      | $3 \cdot 10^6$             | 90                             | 1       | 10                          | $1.1 \cdot 10^6$                   |
|        | Implémentée | $3 \cdot 10^3$             | $9 \cdot 10^4$                 | 1       | $1.0 \cdot 10^{-2}$         | $1.1 \cdot 10^3$                   |
| Or     | Réelle      | —                          | $7.5 \cdot 10^{-1}$            | 1       | 363                         | $2.0 \cdot 10^6$                   |
|        | Implémentée | —                          | $7.5 \cdot 10^2$               | 1       | $3.6 \cdot 10^{-1}$         | $2.0 \cdot 10^3$                   |
| Saphir | Réelle      | —                          | —                              | —       | 1130                        | $2.4 \cdot 10^5$                   |
|        | Implémentée | —                          | —                              | —       | 1130                        | $2.4 \cdot 10^5$                   |

TAB. 10.3: Valeurs des paramètres physiques pour  $T = 77$  K pour les axes  $x$  et  $y$  (plan). La résistivité  $\rho$  pour l'YBCO correspond à sa résistivité à l'état normal.

#### 10.4.4 Surfaces d'échange avec le bain

Les surfaces d'échange avec le bain d'azote sont représentées à la figure 10.10. Sur ces surfaces, nous avons imposé une condition aux limites décrivant la convection entre les matériaux et le liquide cryogénique à l'aide d'un coefficient d'échange thermique  $h$  variable. Ce coefficient dépend de la différence de température, comme expliqué au chapitre 9.

### 10.5 Modélisation des conditions d'un court-circuit

La modélisation des conditions d'un court-circuit intervenant sur le réseau électrique dans lequel est inséré le limiteur de courant se fait à l'aide du couplage circuit présenté au chapitre 7. Nous remplaçons la source de courant par une source de tension  $v(t) = \hat{V} \sin(2\pi\omega t)$  pour l'alimentation. La valeur de  $\hat{V}$  est de 6.25 V, de sorte que le champ électrique imposé aux bornes de la géométrie simulée est de  $25 \text{ Vcm}^{-1}$  [58]. Enfin, la figure 10.11 montre le circuit électrique décrit dans le logiciel. La valeur de la résistance  $R_{load}$  peut, à un temps  $t_{cc}$  choisi, changer brutalement de valeur, ceci dans le but de reproduire les conditions d'un défaut.

#### 10.5.1 Comportement général lors d'un défaut

Le comportement du limiteur étudié lorsqu'une surintensité brutale survient est représenté à la figure 10.12 [21]. Au début de la surintensité, un régime transitoire apparaît, et le courant  $I$  monte rapidement, en quelques centaines de microsecondes, à une valeur de  $3 I_c$ . Par la suite, le courant diminue pour se stabiliser à une valeur proche de  $1.5 I_c$ . Lorsqu'enfin la température s'est uniformisée, et que le matériau supraconducteur a entièrement transité dans l'état normal, le comportement du système, donné par la loi d'Ohm, devient linéaire avec la tension appliquée.



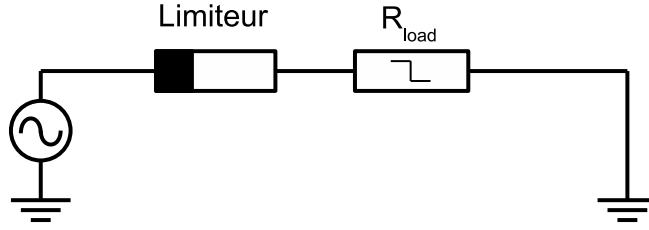


FIG. 10.11: Circuit électrique décrit pour reproduire les conditions d'un court-circuit.

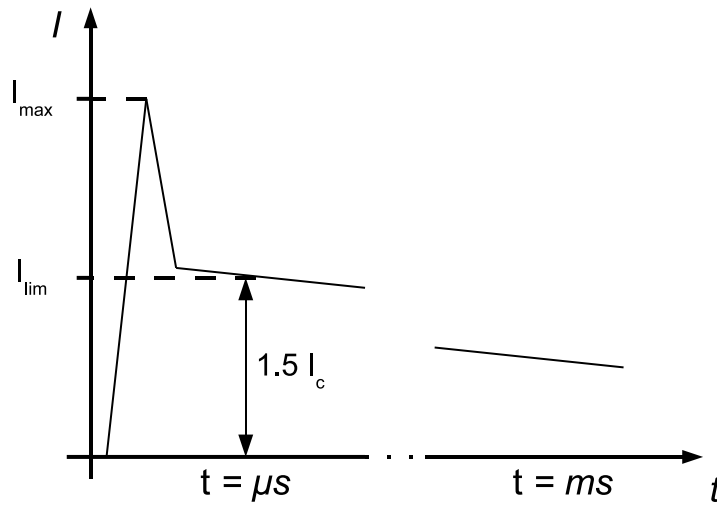


FIG. 10.12: Courant  $I$  dans le limiteur supraconducteur lors de l'apparition d'un défaut [21].

## 10.6 Simulation d'un défaut intervenant sur un maximum de tension

Lorsque  $t = 15$  ms (soit  $\omega t = 3\pi/2$ ), la valeur de la résistance  $R_{load}$  diminue brutalement de  $1.7$  à  $0.2 \Omega$ . Sans la présence d'un limiteur de courant, le courant de défaut serait donc égal à  $2V/R = 62.5$  A (le facteur 2 provient du fait que la modélisation ne prend en compte qu'une constriction dû à la symétrie médiane du méandre).

Le courant calculé à partir des résultats de simulations monte rapidement à une valeur légèrement supérieure à  $3I_c$  (figure 10.13). Selon le choix de simuler ou non les phénomènes thermiques, le comportement du limiteur varie. Lorsque la température est supposée constante et égale à  $77$  K, le courant se stabilise à sa valeur maximale [59]. À l'inverse, lorsque nous analysons les résultats donnés par la simulation électromagnétique-thermique couplée, nous remarquons que le courant diminue pour atteindre, en une centaine de microsecondes, la valeur de  $1.5J_c$ . Ce comportement correspond à celui auquel nous pouvons nous attendre au regard de la figure 10.12 [21].

L'analyse de la partie thermique nous permettra de vérifier le risque de brûlure des matériaux composant le système. Pour cela, nous nous proposons d'analyser la température en trois points du dispositif : à l'extrémité interne de la constriction, à l'angle interne formé par la frontière entre la constriction et le connecteur, ainsi qu'à l'extrémité du connecteur

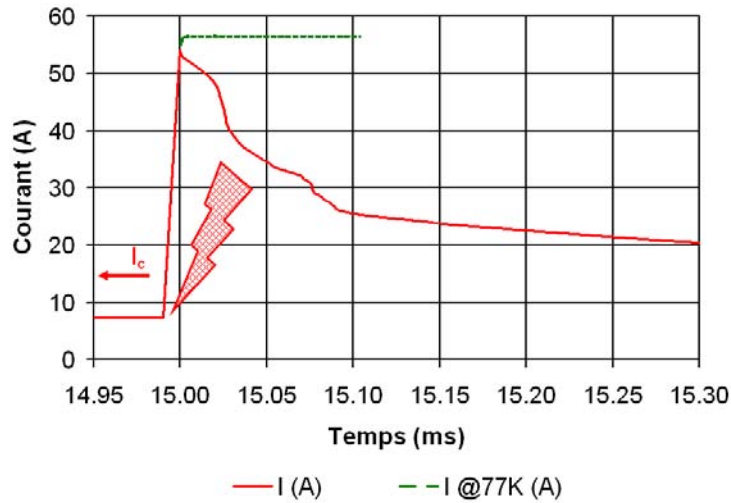


FIG. 10.13: Courant  $I$  circulant dans le limiteur avec et sans la prise en compte de la température lors de l'apparition d'un défaut pour  $\omega t = 3\pi/2$ .

(figure 10.14).

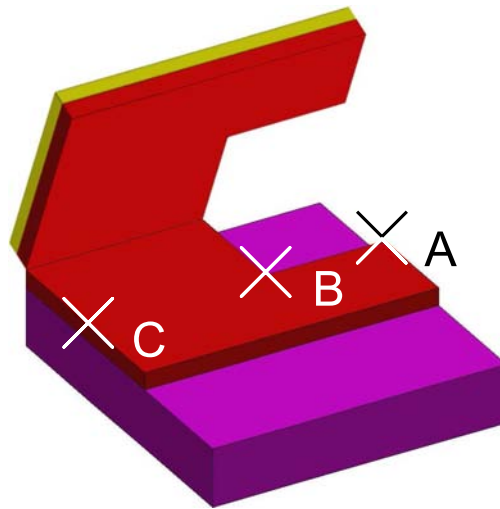


FIG. 10.14: Localisation des points A, B et C où sera calculée la température  $T$ .

Le tracé des températures est fait à la figure 10.15. Nous remarquons bien la montée rapide en température de la constriction. Cette zone, qui correspond à la région où les pertes sont importantes, atteint la température critique  $T_c$  en une cinquantaine de microsecondes environ. En revanche, le connecteur, dont le courant critique est plus important, voit sa température s'élever d'une manière plus lente dans le temps.

La distance entre le point A et le point C est de 2.5 mm. Le temps mis par le point C pour atteindre la température de 80 K est d'environ 155  $\mu$ s (figure 10.15) conduisant à une vitesse de propagation d'environ 16  $\text{ms}^{-1}$ . Cette valeur correspond à celle calculée théoriquement dans l'article [30].

Le point B, situé dans l'angle formé par la frontière entre la constriction et le connecteur, est bien le siège d'un emballement thermique : sa température augmente rapidement au-delà de  $t = 50 \mu$ s pour atteindre 100 K en 300  $\mu$ s. La suppression de cet angle, telle que

proposée pour la géométrie B, devrait, comme nous l'avons vu précédemment, supprimer ce problème. Dans les temps qui nous étaient impartis, il ne nous a malheureusement pas été possible d'intégrer à ce chapitre les résultats issus d'une simulation électromagnéto-thermique réalisée avec cette dernière géométrie.

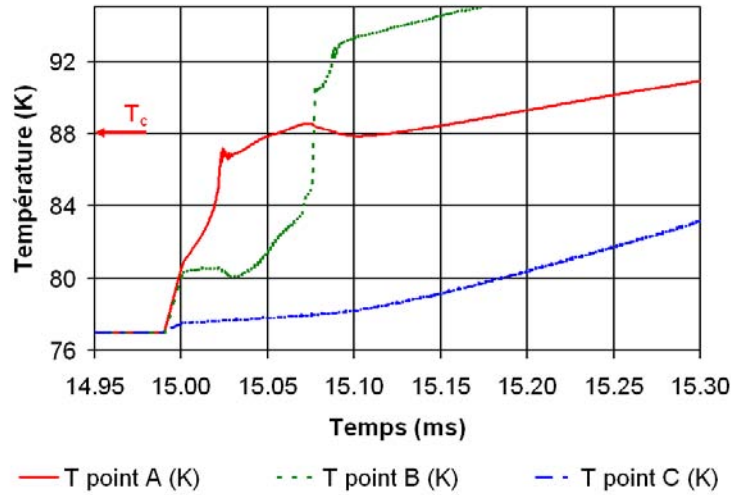


FIG. 10.15: Température des points A, B et C (figure 10.14).

## 10.7 Simulation d'un défaut intervenant sur un zéro de tension

Ce cas est le plus délicat à mesurer expérimentalement, car il correspond à la situation la plus défavorable pour le limiteur et il y a un risque de destruction du dispositif si celui-ci n'est pas dimensionné correctement. En effet, comme il existe une relation entre  $E$  et  $J$  (8.2) et que la tension est nulle, la transition est plus lente que dans le cas d'un défaut intervenant dans le cas de tension présente aux bornes du dispositif. De par cette transition plus lente, l'énergie totale à dissiper dans le limiteur est plus importante. Ainsi, la possibilité de réaliser des simulations numériques est un avantage certain, car cela permettra de réaliser une optimisation du système sans l'obligation de fabriquer des prototypes.

A  $t = 10$  ms, soit  $\omega t = \pi$ , la valeur de la résistance  $R_{load}$  chute de 3 à  $0.02 \Omega$ . Sans la présence d'un limiteur, la valeur maximale atteinte par le courant pour  $\omega t = 3\pi/2$  serait égale à plus de 600 A (figure 10.16).

La présence d'un limiteur permet de réduire en environ  $500 \mu s$  le courant de défaut, comme le montre la figure 10.16.

Tout comme pour le cas d'un défaut intervenant au maximum de la tension, si la température est maintenue constante à 77 K, le comportement du système est différent. En effet, dans cette situation, la phase de limitation n'est pas présente, et le système adopte un comportement linéaire lorsque la densité de courant  $I$  devient supérieure à  $3 J_c$ . Cette situation est induite par le fait que la résistivité de l'YBCO pour des densités de courant élevées est bien plus importante que celle de l'or, ce qui signifie que le courant circule de préférence dans ce dernier matériau.

En revanche, lorsque les phénomènes thermiques sont simulés, les résultats respectent le comportement global décrit à la figure 10.12. Toutefois, les ordres de grandeurs obtenus sont légèrement différents. En effet, après avoir atteint un maximum, le courant décroît pour se

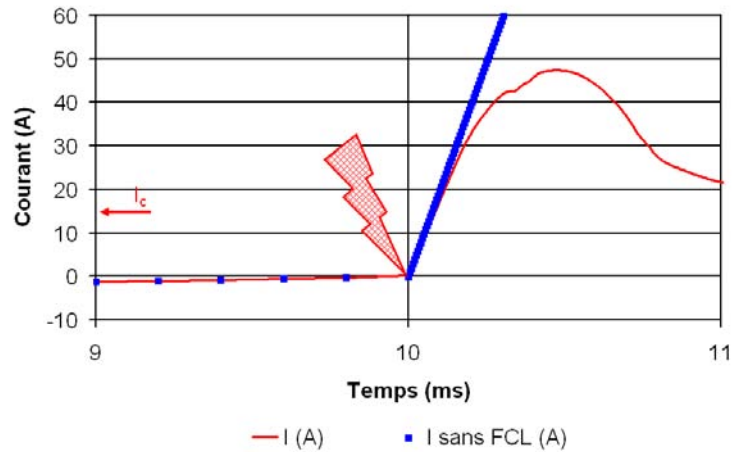


FIG. 10.16: Courant  $I$  dans le limiteur lorsqu'un défaut intervient sur un zéro de tension.

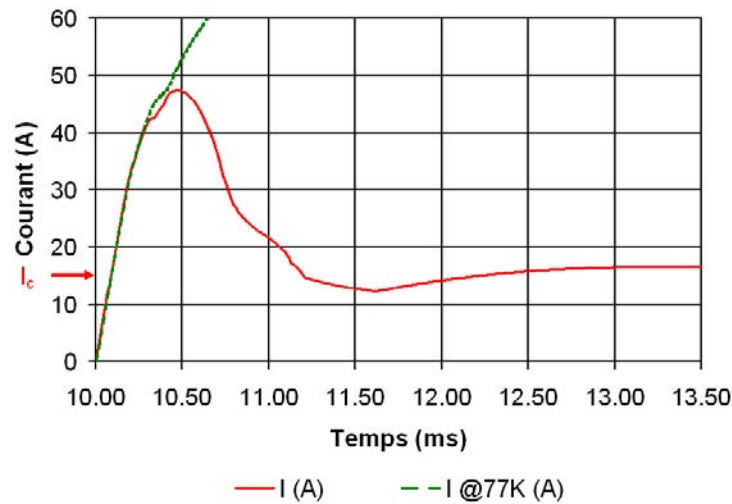


FIG. 10.17: Courant total  $I$  dans le limiteur dans le cadre de la simulation électromagnéto-thermique et lorsque la température est fixée à 77 K.

stabiliser à une valeur proche de la valeur du courant critique  $I_c$ . Nous nous attendions, d'après la figure 10.12, à une valeur plus proche de  $1.5 I_c$ . Par ailleurs, cette stabilisation intervient plus de 1 ms après l'apparition du défaut. L'article [59] montre que le rapport entre le courant maximal  $I_{max}$  et le courant de limitation  $I_{lim}$  (figure 10.12 est déterminé par la résistivité de l'état normal  $\rho_{sat}$ , la différence de température  $\Delta T$  et la conductivité thermique  $\lambda$ . Comme nous avons utilisé la résistivité  $\rho_{sat} = 90 \mu\Omega\text{cm}$  mesurée sur le limiteur lui-même [30], nous pouvons conclure que l'erreur commise provient des paramètres thermiques utilisés, et plus particulièrement de la modélisation du coefficient de transfert  $h$  avec le bain cryogénique. En effet, la valeur maximale de transition entre la partie "bubble boiling" et la partie instable ne correspond pas à celle utilisée dans les articles [60] [61], où cette valeur maximale est plus élevée. L'ouvrage de P. Tixador [62] donne la valeur de  $14 \text{ Wcm}^{-2}\text{K}^{-1}$ . Enfin, dans notre modélisation, le coefficient d'échange est pratiquement nul dans la partie "film boiling", ce qui n'est pas le cas dans les deux articles cités.

Enfin la figure 10.18 est une comparaison entre les résultats obtenus par simulation et les mesures effectuées sur le système. La valeur  $I_{max}$  obtenue sur les mesures (environ  $2 I_c$ )

n'est pas exacte. Elle devrait être de  $3 I_c$  approximativement. Ceci provient du fait que l'oscilloscope utilisé n'a pas échantillonné cette partie de la courbe. Nous constatons, outre l'erreur commise sur le courant  $I_{lim}$ , l'influence de l'inductance  $L$  du circuit. Cette inductance tend à ralentir la montée du courant durant la phase transitoire. Sa valeur est évaluée à  $3 \mu\text{H}$  [59].

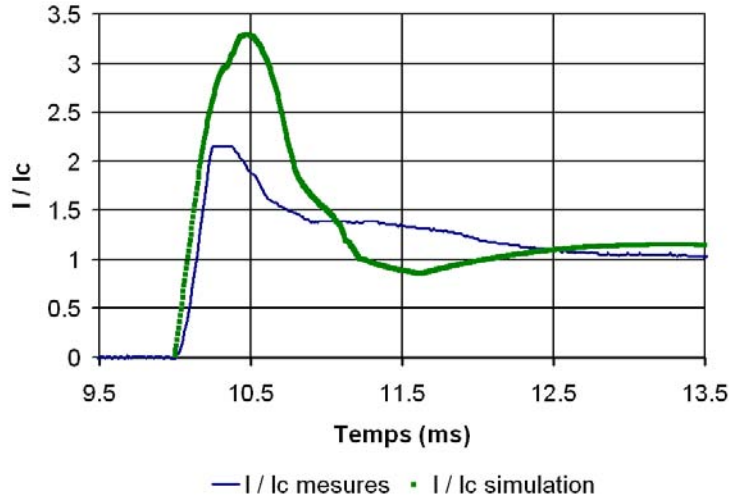


FIG. 10.18: Comparaison des résultats obtenus par simulation et par expérimentation (Mesures : Université de Genève).

Si on introduit une inductance  $L$  de valeur  $3 \cdot 10^{-9}$  H dans le circuit électrique, et que l'on modifie la modélisation du coefficient d'échange (équation (10.5) et figure 10.19), alors le comportement du système se rapproche de celui mesuré pour des valeurs de temps comprises entre 10 et 11.5 ms, comme illustré à la figure 10.20. Au delà, les valeurs des paramètres thermiques utilisées devront être validées et modifiées afin d'obtenir des résultats plus proche des mesures.

$$h = \begin{cases} 156 & \text{si } \Delta T < 1 \\ 20 \Delta T^{1.6} & \text{si } 1 \leq \Delta T < 2 \\ 6 \Delta T^{3.4} & \text{si } 2 \leq \Delta T < 10 \\ 1400 \Delta T & \text{si } 10 \leq \Delta T < 20 \\ 1.8e13 \frac{1}{\Delta T^{-6.8}} & \text{si } 20 \leq \Delta T < 30 \\ 5 \Delta T^{1.8} & \text{si } \Delta T > 30 \end{cases} \quad (10.5)$$

Les figures 10.21 et 10.22 représentent la densité de courant  $J$  lorsque le courant dans le limiteur est maximal ( $t = 10.475$  ms). Nous retrouvons le même effet que celui observé au paragraphe 10.3, à savoir une densité de courant élevée dans l'angle interne de la constriction.

Après 1 ms, nous constatons que la température de la constriction est proche de la température critique (figure 10.24). Comme le matériau supraconducteur dans cette zone se retrouve à l'état normal, et que sa résistivité est alors largement supérieure à celle de l'or (tableau 10.2), le courant circule dans la couche d'or. La température du connecteur étant plus faible, cette partie est encore supraconductrice. Ainsi, il y a passage du courant de la couche d'or à la couche d'YBCO (figure 10.23).

Comme l'YBCO est un matériau dont la densité de courant critique  $J_c$  est anisotrope (sur l'épaisseur de la couche déposée, elle est plus faible que dans le plan parallèle au substrat de saphir), il serait intéressant, à l'occasion d'un travail futur, d'étudier l'importance de cette

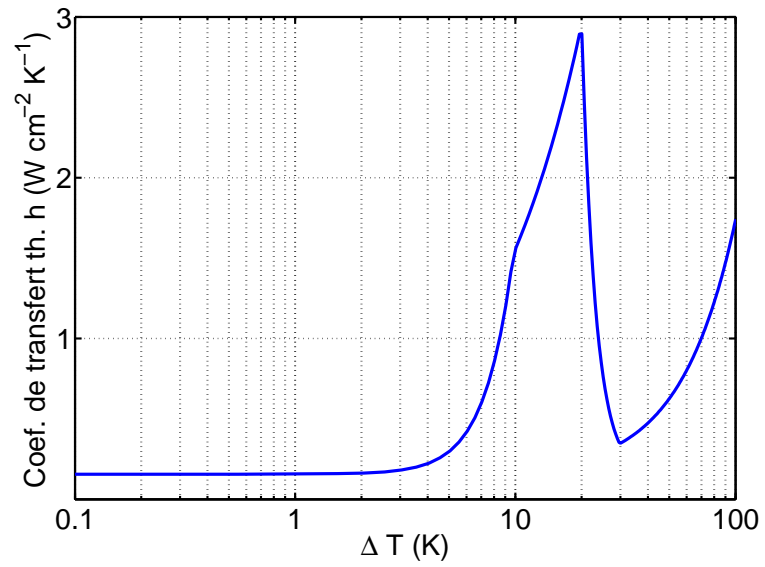


FIG. 10.19: Coefficient d'échange thermique  $h$  donné par l'équation (10.5).

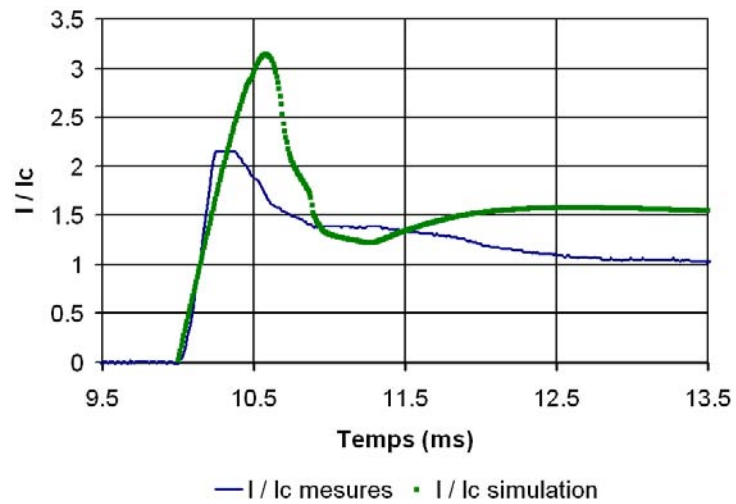


FIG. 10.20: Comparaison des résultats obtenus par simulation et par expérimentation lorsque la modélisation du coefficient d'échange est corrigée (Mesures : Université de Genève).

anisotropie dans la phase de limitation, et de comparer les résultats obtenus par simulation avec des mesures expérimentales.

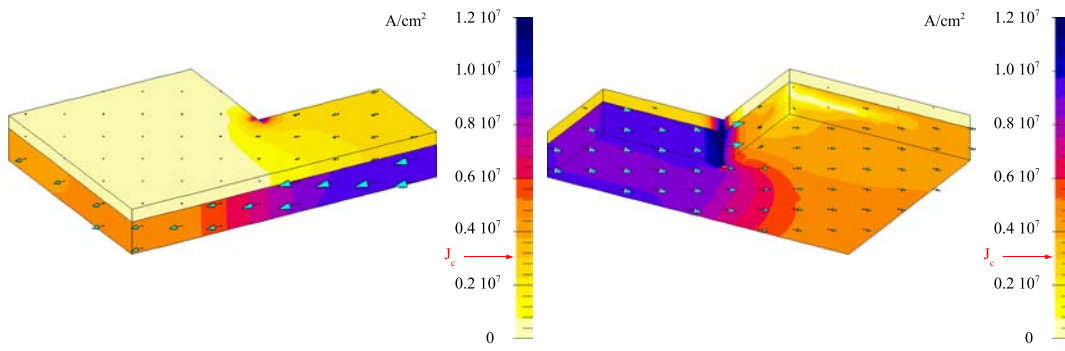


FIG. 10.21: Densité de courant  $J$  dans les matériaux YBCO et or pour  $I = I_{max}$  ( $t = 10.475$  ms).

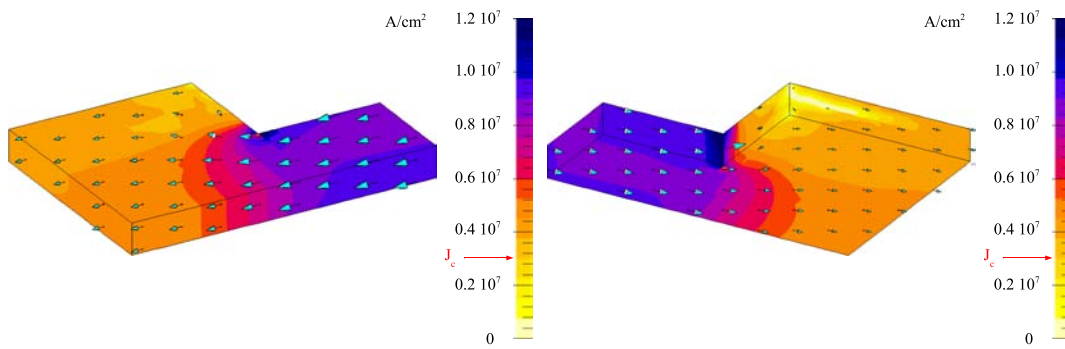


FIG. 10.22: Densité de courant  $J$  dans le matériau YBCO pour  $I = I_{max}$  ( $t = 10.475$  ms).

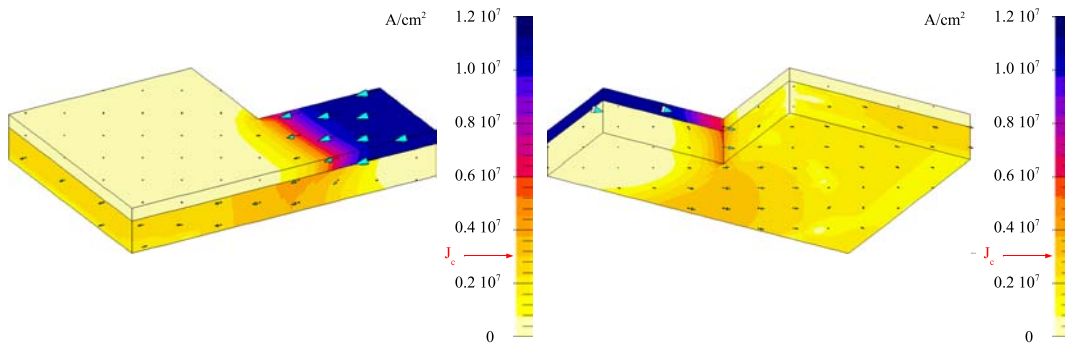


FIG. 10.23: Densité de courant  $J$  dans les matériaux YBCO et or pour  $t = 11$  ms.

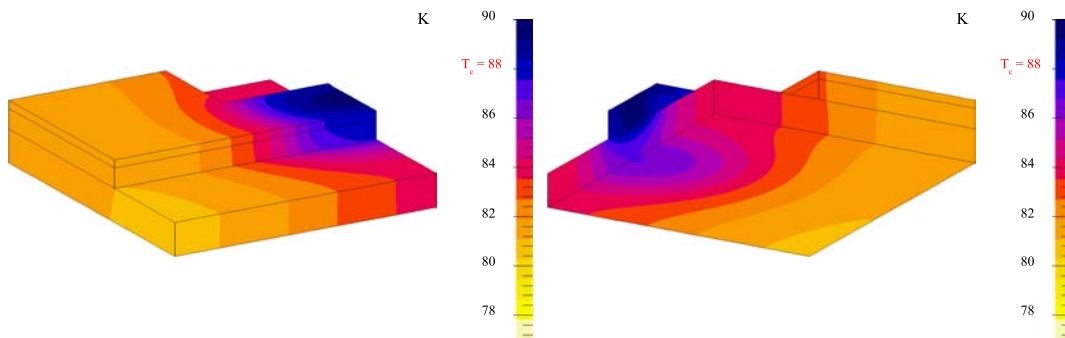


FIG. 10.24: Température  $T$  dans les matériaux YBCO et or pour  $t = 11$  ms.

# Conclusion et perspectives

Le thème principal de cette thèse est la modélisation de la réponse électrique des matériaux supraconducteurs, et plus particulièrement ceux dits à haute température critique. La possibilité de simuler le comportement de ces matériaux est une clé essentielle pour le développement d'applications dans le domaine industriel, ceci afin d'optimiser les performances du dispositif et permettre d'améliorer la qualité du produit en vue de son exploitation commerciale.

Dans la première partie de ce travail, nous nous sommes attachés à la résolution d'un problème dit problème inverse : la recherche de la distribution dynamique de courant dans un ruban supraconducteur à partir de la mesure du profil magnétique à sa surface. Bien que la résolution de ce type de problèmes soit extrêmement complexe, nous avons pu reconstruire avec précision la distribution dynamique de la densité de courant dans la section d'un ruban monofilamentaire en nous appuyant sur un modèle décrivant très succinctement le comportement électromagnétique d'un supraconducteur. L'algorithme de résolution utilise la minimisation de la somme des erreurs commises entre le champ magnétique calculé et le champ magnétique mesuré pour chaque capteur (méthode des moindres carrés). Il permet l'obtention rapide de résultats en comparaison avec des méthodes certes plus précises, comme l'imagerie magnéto-optique ou la modélisation par éléments finis, mais qui demandent des moyens expérimentaux ou informatiques plus importants. Un travail futur sera l'extension de cette méthode à des rubans multifilamentaires, pouvant comporter jusqu'à une cinquantaine de brins supraconducteurs. Il sera donc nécessaire de prendre en compte une géométrie plus complexe, et de disposer d'une quantité de mesures plus importante. Pour cela, il serait intéressant d'exploiter pleinement les possibilités offertes par le système de mesures en réalisant une cartographie en deux dimensions du profil magnétique à la surface de l'échantillon, et d'améliorer le modèle géométrique utilisé par l'algorithme de recherche.

La seconde partie présente l'étude de dispositifs supraconducteurs pouvant être soumis à un régime sur-critique sévère. En particulier, nous avons proposé une formulation originale permettant d'approcher la transition du matériau de l'état supraconducteur à l'état normal. Cette formulation, implémentée dans un logiciel de simulation par éléments finis autorise une modélisation dans une plage de courant beaucoup plus vaste celle obtenue par l'utilisation de la loi habituelle de type  $E_c(J/J_c)^n$ .

La puissance dissipée lors d'une excursion sur-critique conduit à une élévation de température importante. Cette élévation de température a pour effet de faire varier considérablement les propriétés électriques locales des matériaux. Le modèle proposé autorise la prise en compte de ces variations par un couplage entre les équations électromagnétiques et thermiques. Il est ainsi possible d'analyser le dispositif d'un point de vue global (tension aux bornes des conducteurs, courant total), ou d'un point de vue local (répartition du courant ou profils de température dans les volumes modélisés). Ainsi, par l'analyse des variables locales qui, expérimentalement, ne sont pas ou sont difficilement mesurables, il est possible de pro-



poser des améliorations, par exemple sur la géométrie du système, dans le but d'optimiser le comportement du système selon certains critères spécifiques.

Ensuite, nous avons vu que la modélisation par éléments finis de systèmes possédant un ratio géométrique élevé posait des problèmes lors de la phase de maillage. Nous avons contourné ce problème en multipliant la dimension la plus faible par un facteur choisi de façon à ramener la valeur de ce ratio à une valeur plus acceptable. Cependant, les grandeurs globales dépendantes de la géométrie du système, comme par exemple la résistance qui est inversement proportionnelle à la section, vont se retrouver modifiées. Il convient donc d'adapter les grandeurs locales en conséquence afin de maintenir les grandeurs globales à leur valeur réelle. L'application principale de technique est la simulation du comportement de matériaux supraconducteurs fabriqués sous forme de couches minces, comme l'YBCO par exemple.

Enfin, nous avons modélisé, par l'application de ces nouvelles méthodes, le comportement électromagnétique et thermique d'un limiteur de courant composé d'une couche mince d'YBCO supraconductrice surmontée d'un film stabilisateur d'or. Les résultats obtenus permettent d'obtenir une bonne approximation du comportement du système comparés à des mesures réalisées sur le système réel. De cette manière, les résultats numériques obtenus offrent la possibilité d'analyser l'influence de paramètres géométriques ou physiques sans avoir recours à la réalisation de prototypes ou à une phase expérimentale.

Une prochaine étape consistera à raffiner encore la précision des résultats obtenus par l'amélioration du modèle thermique utilisé, et plus particulièrement la manière de prendre en compte l'échange de chaleur entre le dispositif et le bain cryogénique. Cet échange, de type convectif avec changement de phase, est dépendant de nombreux paramètres, et il conviendrait donc de suggérer une formulation plus adaptée que celle proposée dans cette thèse.

Enfin, nous n'avons pas jugé nécessaire dans le cadre de ce travail d'implémenter l'anisotropie sur le courant critique  $J_c$  présente dans les matériaux supraconducteurs de type YBCO ou BSCCO. Cependant, durant la phase de limitation, le courant  $I$  dans le limiteur va être transféré de la couche d'YBCO à la couche d'or et vice-versa au niveau de la constriction. Pour une modélisation encore plus précise du comportement du dispositif supraconducteur durant cette phase, il conviendra d'introduire cette anisotropie dans le modèle électromagnétique. Ceci peut se faire en intégrant au sein de la routine FORTRAN une densité de courant critique non isotrope. En revanche, il sera nécessaire de prêter une attention particulière au calcul du tenseur de résistivité, ceci afin de faciliter la convergence des algorithmes utilisés par le logiciel d'éléments finis.

## Annexe A

# Programmation de la fonction $E = f(J, T)$ en langage FORTRAN

```
C ----- SUBROUTINE USR_DEDJ -----  
  SUBROUTINE USR_DEDJ (MATERIAL_NAME,STRING_LENGTH,  
    &                   NBRCN,COOPT,  
    &                   TIMESTEP,  
    &                   NBRCOEF,USER_COEFF,  
    &                   NB_SPAT_PAR,VAL_SPAT_PAR,VAL_SPAT_PAR_P,  
    &                   NB_VAR_PAR,VAL_VAR_PAR,VAL_VAR_PAR_P,  
    &                   NREAL,NCOMP,JPG ,  
    &                   EPG,DEDJPG,  
    &                   IOSTAT)  
C  
C User SUBROUTINE for E(J) property  
C  
  CHARACTER*(*)   MATERIAL_NAME  
  INTEGER          STRING_LENGTH  
C  
  INTEGER          NBRCN  
  DOUBLE PRECISION COOPT(NBRCN)  
C  
  DOUBLE PRECISION TIMESTEP(2)  
C  
  INTEGER          NBRCOEF  
  DOUBLE PRECISION USER_COEFF(*)  
C  
  INTEGER          NB_SPAT_PAR  
  DOUBLE PRECISION VAL_SPAT_PAR(2,3,*),VAL_SPAT_PAR_P(2,3,*)  
C  
  INTEGER          NB_VAR_PAR  
  DOUBLE PRECISION VAL_VAR_PAR(2,3,*),VAL_VAR_PAR_P(2,3,*)  
C  
  INTEGER          NREAL,NCOMP  
  DOUBLE PRECISION JPG(NREAL,NCOMP)  
C  
  DOUBLE PRECISION EPG(NREAL,NCOMP)  
  DOUBLE PRECISION DEDJPG (NREAL,NCOMP,NCOMP)  
C  
  INTEGER          IOSTAT  
C  
C Déclaration des constantes  
C -----  
C
```

```

DOUBLE PRECISION ZERO
PARAMETER (ZERO=0.0D0)
DOUBLE PRECISION UN
PARAMETER (UN=1.0D0)
DOUBLE PRECISION EPS
PARAMETER (EPS=1.0D-8)
DOUBLE PRECISION EPSRE
PARAMETER (EPSRE=1.0D-15)

C
C Déclaration du nom de la fonction :
C -----
C
CHARACTER*(*) NOMSP
PARAMETER (NOMSP='USR_DEDJ')

C
C Déclaration des variables utilisées
C -----
C
DOUBLE PRECISION N2
PARAMETER (N2=30)
DOUBLE PRECISION A1
PARAMETER (A1=1.0D0)
DOUBLE PRECISION A2
PARAMETER (A2=2.0D0)

C
DOUBLE PRECISION JC_TREF, E0, N1, RHO0, RHOSAT_TREF, TC
DOUBLE PRECISION ALPHA, BETA, TREF, T
DOUBLE PRECISION MODUJ2, MODJPG
DOUBLE PRECISION JC
DOUBLE PRECISION RHOSAT
DOUBLE PRECISION E1, RHO1, RHO1_TEMP, RHO_TEMP, SIGMA_TEMP
DOUBLE PRECISION R, DELTAE
DOUBLE PRECISION dRHO1dE, dRHO2dE, dRdE
DOUBLE PRECISION RHO, SIGMA
DOUBLE PRECISION E2, RHO2, RHO2_TEMP
DOUBLE PRECISION RHO_OR_TREF, RHO_OR
DOUBLE PRECISION dEdJ1_TEMP, dEdJ, dEdJ2_TEMP, dEdJ2

C
INTEGER I, J

C
IOSTAT Initialization
IOSTAT = -1

C
C Supraconducteur couche mince YBCO (avec loi de puissance modifiée) :
C -----
C Loi en puissance plus conductivite SIGMA0
C  $|E| = E0 (J/Jc - 1)^N$  ou  $|J| = ((|E|/E0)^{(1/N)} + 1) Jc$ 
C
IF (( MATERIAL_NAME (1:STRING_LENGTH) .EQ. 'SUPRA' ) .Or.
& ( MATERIAL_NAME (1:STRING_LENGTH) .EQ. 'SUPRA_1' ) .Or.
& ( MATERIAL_NAME (1:STRING_LENGTH) .EQ. 'SUPRA_2' ) .Or.
& ( MATERIAL_NAME (1:STRING_LENGTH) .EQ. 'SUPRA_3' ) .Or.
& ( MATERIAL_NAME (1:STRING_LENGTH) .EQ. 'SUPRA_4' ) .Or.
& ( MATERIAL_NAME (1:STRING_LENGTH) .EQ. 'SUPRA_5' )) THEN
IOSTAT = 1

C
C Récupération des données matériau
C -----
C
JC_TREF = USER_COEFF(1)
E0 = USER_COEFF(2)
N1 = USER_COEFF(3)

```

```

RHO0          = USER_COEFF(4)
RHOSAT_TREF   = USER_COEFF(5)
TC            = USER_COEFF(6)
C
C Récupération des données variables
C -----
C
      ALPHA = VAL_VAR_PAR (1,1,1)
      BETA  = VAL_VAR_PAR (1,1,2)
      TREF  = VAL_VAR_PAR (1,1,3)
C
C Récupération des données spatiales
C -----
C
      T      = VAL_SPAT_PAR (1,1,1)
C
C Tests sur les données passées en entrée
C -----
      IF ( JC_TREF .LE. 0.0D0 .OR.
&      E0 .LE. 0.0D0 .OR.
&      N1 .LT. 2.0D0 .OR.
&      RHO0 .LE. 0.0D0 .OR.
&      RHOSAT_TREF .LE. 0.0D0 .OR.
&      TC .LE. 0.0D0) THEN
      IOSTAT = -1
      GOTO 900
    ENDIF
C
      IF ( ALPHA .LE. 0.0D0 .OR.
&      BETA .LE. 0.0D0 .OR.
&      TREF .LE. 0.0D0 .OR.
&      TC .LE. 0.0D0) THEN
      IOSTAT = -1
      GOTO 900
    ENDIF
C
C Calcul du module de J
C -----
C
      MODUJ2 = ZERO
      DO 100 J = 1 , 2
        MODUJ2 = MODUJ2 + JPG(1,J)**2
      100 CONTINUE
      MODUJ2 = MODUJ2 + (JPG(1,3)/1000)**2
      MODJPG = SQRT(ABS(MODUJ2))
C
C Calcul de Jc et Rho_sat
C -----
C
      JC = JC_TREF*(((TC-T)**ALPHA)/((TC-TREF)**ALPHA))
      RHOSAT = RHOSAT_TREF*(1+BETA*(T-TREF))
C
C Si T inférieure à Tc
C -----
C
      IF (T .LT. TC) THEN
C
C Cas d'un point voisin de E = 0 (dans notre cas, point J < Jc) :
C -----
      IF ( MODJPG .LE. A1*JC*(1+EPSRE) ) THEN
        DO 110 I = 1 , 3

```

```

          EPG(1,I) = RHO0*JPG(1,I)
C
C          dEj/dJj = rho0
C
C          DEDJPG(1,I,I)= RHO0
110      CONTINUE
C
C Cas numéro 1 : première power-law
C _____
C
C      ELSEIF ( MODJPG .LE. A2*JC*(1+EPSRE) ) THEN
C
C Calcul du module de E a partir du module de J
C _____
C (par la methode de Newton-Raphson)
C
C      E1 = 0
C
C Premier calcul : (pour être sûr d'avoir fait la boucle au moins une fois)
C _____
C
C      RHO1_TEMP = (E1*E0**(1/N1))/(JC*(E1**(1/N1)+A1*E0**(1/N1)))
C      RHO_TEMP=RHO1_TEMP+RHO0
C      SIGMA_TEMP = 1/RHO_TEMP
C
C      R = (SIGMA_TEMP * E1) - MODJPG
C
C      dRHO1dE = E0**(1/N1)/(JC*(E1**(1/N1)+A1*E0**(1/N1))) -
&      (E0**(1/N1)*E1**(1/N1))/
&      (JC*N1*(E1**(1/N1)+A1*E0**(1/N1))**2)
C
C      dRdE = 1/(RHO1_TEMP+RHO0)-(E1*dRHO1dE)/((RHO1_TEMP+RHO0)**2)
C
C      DELTAE = -R/dRdE
C
C      E1 = E1+DELTAE
C
C Itérations
C _____
C
C      DO 200 WHILE (EPS*E1 .LT. ABS(DELTAE))
C      RHO1_TEMP = (E1*E0**(1/N1))/(JC*(E1**(1/N1)+A1*E0**(1/N1)))
C      RHO_TEMP=RHO1_TEMP+RHO0
C      SIGMA_TEMP = 1/RHO_TEMP
C
C      R = (SIGMA_TEMP * E1) - MODJPG
C
C      dRHO1dE = E0**(1/N1)/(JC*(E1**(1/N1)+A1*E0**(1/N1))) -
&      (E0**(1/N1)*E1**(1/N1))/
&      (JC*N1*(E1**(1/N1)+A1*E0**(1/N1))**2)
C
C      dRdE = 1/(RHO1_TEMP+RHO0)-(E1*dRHO1dE)/((RHO1_TEMP+RHO0)**2)
C
C      DELTAE = -R/dRdE
C
C      E1 = E1+DELTAE
200      END DO
C
C On calcule les nouvelles valeurs
C _____
C

```

```

RHO1 = (E1*E0**(1/N1))/(JC*(E1**(1/N1)+A1*E0**(1/N1))) - RHO0
RHO = ((RHO1+RHO0)*RHOSAT)/(RHO1+RHO0+RHOSAT)
SIGMA = UN/RHO
C
C Calcul de la résistivité incrémentale
C -----
C
&      dEdJ1_TEMP = RHO1**2/(RHO0+((E1**(1/N1)*RHO1)/
&      (N1*(E0**(1/N1)+E1**(1/N1))))
&      dEdJ = (dEdJ1_TEMP*RHOSAT)/(dEdJ1_TEMP+RHOSAT)
C
      DO 230 I = 1 , 3
        EPG(1,I) = RHO*JPG(1,I)
        DO 220 J = 1 , 3
          DEDJPG(1,J,I) = (dEdJ-RHO)/MODUJ2
          &          *JPG(1,I)*JPG(1,J)
        220      CONTINUE
        DEDJPG(1,I,I) = RHO + DEDJPG(1,I,I)
      230      CONTINUE
C
C Cas numéro 2 : Deuxième power-law
C -----
C
      ELSE
C
C Calcul du module de E1 a partir du module de J
C -----
C (par la methode de Newton-Raphson)
C
      E1 = 0
C
C Premier calcul : (pour être sûr d'avoir fait la boucle au moins une fois)
C -----
C
      RHO1_TEMP = (E1*E0**(1/N1))/(JC*(E1**(1/N1)+A1*E0**(1/N1)))
      RHO_TEMP=RHO1_TEMP+RHO0
      SIGMA_TEMP = 1/RHO_TEMP
C
      R = (SIGMA_TEMP * E1) - MODJPG
C
      dRHO1dE = E0**(1/N1)/(JC*(E1**(1/N1)+A1*E0**(1/N1))) -
&      (E0**(1/N1)*E1**(1/N1))/
&      (JC*N1*(E1**(1/N1)+A1*E0**(1/N1))**2)
C
      dRdE = 1/(RHO1_TEMP+RHO0)-(E1*dRHO1dE)/((RHO1_TEMP+RHO0)**2)
C
      DELTAE = -R/dRdE
C
      E1 = E1+DELTAE
C
C Itérations
C -----
C
      DO 300 WHILE (EPS*E1 .LT. ABS(DELTAE))
        RHO1_TEMP = (E1*E0**(1/N1))/(JC*(E1**(1/N1)+A1*E0**(1/N1)))
        RHO_TEMP=RHO1_TEMP+RHO0
        SIGMA_TEMP = 1/RHO_TEMP
C
        R = (SIGMA_TEMP * E1) - MODJPG
C
        dRHO1dE = E0**(1/N1)/(JC*(E1**(1/N1)+A1*E0**(1/N1))) -
&      (E0**(1/N1)*E1**(1/N1))/

```

```

C      &          (JC*N1*(E1**(1/N1)+A1*E0**(1/N1))**2)
C
C          dRdE = 1/(RHO1_TEMP+RHO0)-(E1*dRHO1dE)/((RHO1_TEMP+RHO0)**2)
C
C          DELTAE = -R/dRdE
C
C          E1 = E1+DELTAE
300      END DO
C
C On calcule les nouvelles valeurs
C _____
C
C          RHO1 = (E1*E0**(1/N1))/(JC*(E1**(1/N1)+A1*E0**(1/N1))) - RHO0
C
C Calcul du module de E2 a partir du module de J
C _____
C (par la methode de Newton-Raphson)
C
C          E2 = 0
C
C Premier calcul : (pour être sûr d'avoir fait la boucle au moins une fois)
C _____
C
C          RHO2_TEMP = (E2*E0**(1/N2))/(JC*(E2**(1/N2)+A2*E0**(1/N2)))
C          RHO_TEMP=RHO2_TEMP+RHO0
C          SIGMA_TEMP = 1/RHO_TEMP
C
C          R = (SIGMA_TEMP * E2) - MODJPG
C
C          dRHO2dE = E0**(1/N2)/(JC*(E2**(1/N2)+A2*E0**(1/N2))) -
C          &          (E0**(1/N2)*E2**(1/N2))/
C          &          (JC*N1*(E2**(1/N2)+A2*E0**(1/N2))**2)
C
C          dRdE = 1/(RHO2_TEMP+RHO0)-(E2*dRHO2dE)/((RHO2_TEMP+RHO0)**2)
C
C          DELTAE = -R/dRdE
C
C          E2 = E2+DELTAE
C
C Itérations
C _____
C
C      DO 310 WHILE (EPS*E1 .LT. ABS(DELTAE))
C          RHO2_TEMP = (E2*E0**(1/N2))/(JC*(E2**(1/N2)+A2*E0**(1/N2)))
C          RHO_TEMP=RHO2_TEMP+RHO0
C          SIGMA_TEMP = 1/RHO_TEMP
C
C          R = (SIGMA_TEMP * E2) - MODJPG
C
C          dRHO2dE = E0**(1/N2)/(JC*(E2**(1/N2)+A2*E0**(1/N2))) -
C          &          (E0**(1/N2)*E2**(1/N2))/
C          &          (JC*N1*(E2**(1/N2)+A2*E0**(1/N2))**2)
C
C          dRdE = 1/(RHO2_TEMP+RHO0)-(E2*dRHO2dE)/((RHO2_TEMP+RHO0)**2)
C
C          DELTAE = -R/dRdE
C
C          E2 = E2+DELTAE
310      END DO
C
C On calcule les nouvelles valeurs
C _____

```

```

C
      RHO2 = (E2*E0**(1/N2))/(JC*(E2**(1/N2)+A2*E0**(1/N2))) - RHO0
      RHO = ((RHO2+RHO1+RHO0)*RHOSAT)/(RHO2+RHO1+RHO0+RHOSAT)
      SIGMA = UN/RHO
C
C Calcul de la résistivité incrémentale
C _____
C
      dEdJ1_TEMP = RHO1**2/(RHO0+((E1**(1/N1)*RHO1)/
&      (N1*(E0**(1/N1)+E1**(1/N1)))))
      dEdJ1 = (dEdJ1_TEMP*RHOSAT)/(dEdJ1_TEMP+RHOSAT)
      dEdJ2_TEMP = RHO2**2/(RHO0+((E2**(1/N2)*RHO2)/
&      (N2*(E0**(1/N2)+E2**(1/N2)))))
      dEdJ2 = (dEdJ2_TEMP*RHOSAT)/(dEdJ2_TEMP+RHOSAT)
      dEdJ = ((dEdJ1_TEMP+dEdJ2_TEMP)*RHOSAT)/
&      (dEdJ1_TEMP+dEdJ2_TEMP+RHOSAT)
C
      DO 330 I = 1 , 3
          EPG(1,I) = RHO*JPG(1,I)
          DO 320 J = 1 , 3
              DEDJPG(1,J,I) = (dEdJ-RHO)/MODUJ2
&              *JPG(1,I)*JPG(1,J)
320          CONTINUE
          DEDJPG(1,I,I) = RHO + DEDJPG(1,I,I)
330      CONTINUE
C
C Fin de la boucle IF J < Jc
C _____
C
      ENDIF
C
C IF T >= Tc
C _____
C
      ELSE
C
C Le matériaux est alors normal
C _____
C
      DO 410 I = 1 , 3
          EPG(1,I) = RHOSAT*JPG(1,I)
C
          dJj/dEj = Sigma
          DEDJPG(1,I,I) = RHOSAT
410      CONTINUE
C
C Fin du test IF T < Tc
C _____
C
      ENDIF
C
C Matériaux Linéaire de type OR/ARGENT, ...
C _____
C
      ELSEIF (( MATERIAL_NAME (1:STRING_LENGTH) .EQ. 'OR' ) .Or.
&      ( MATERIAL_NAME (1:STRING_LENGTH) .EQ. 'OR_1' ) .Or.
&      ( MATERIAL_NAME (1:STRING_LENGTH) .EQ. 'OR_2' ) .Or.
&      ( MATERIAL_NAME (1:STRING_LENGTH) .EQ. 'OR_3' ) .Or.
&      ( MATERIAL_NAME (1:STRING_LENGTH) .EQ. 'OR_4' ) .Or.
&      ( MATERIAL_NAME (1:STRING_LENGTH) .EQ. 'OR_5' )) THEN
          IOSTAT = 1
C
C Récupération des données matériau

```



```

C -----
C
C      RHO_OR_TREF   = USER_COEFF(1)
C
C Récupération des données variables
C -----
C
C      BETA  = VAL_VAR_PAR (1,1,1)
C      TREF  = VAL_VAR_PAR (1,1,2)
C
C Récupération des données spatiales
C -----
C
C      T      = VAL_SPAT_PAR (1,1,1)
C
C Tests sur les données passées en entrée
C -----
C      IF ( RHO_OR_TREF .LE. 0.0D0) THEN
C          IOSTAT = -1
C          GOTO 900
C      ENDIF
C
C      IF ( BETA      .LE. 0.0D0 .OR.
C &      TREF      .LE. 0.0D0) THEN
C          IOSTAT = -1
C          GOTO 900
C      ENDIF
C
C Calcul du module de J
C -----
C
C      MODUJ2 = ZERO
C      DO 700 J = 1 , 2
C          MODUJ2 = MODUJ2 + JPG(1,J)**2
700 CONTINUE
C          MODUJ2 = MODUJ2 + (JPG(1,3)/1000)**2
C      MODJPG = SQRT(ABS(MODUJ2))
C
C Calcul Rho_OR
C -----
C
C      RHO_OR = RHO_OR_TREF*(1+BETA*(T-TREF))
C
C Le matériaux est linéaire
C -----
C
C      DO 810 I = 1 , 3
C          EPG(1,I) = RHO_OR*JPG(1,I)
C          dJj/dEj = Sigma
C          DEDJPG(1,I,I)= RHO_OR
810 CONTINUE
C
C Fin de la boucle IF SUPRA ELSIF OR
C -----
C
C      ENDIF
C
C Sortie
C -----
C
900 CONTINUE
END

```

# Bibliographie

- [1] H. Kamerlingh-Onnes. *The Superconductivity of Mercury*. Comm. Phys. Lab - Univ. Leiden, 1911. 122 and 124 : p. 1226.
- [2] J. Baixeras. *Les supraconducteurs - Applications à l'électronique et à l'électrotechnique*. CNRS Editions, 1998.
- [3] E.A. Ryan, J.J. Jackson, and Y.N. Lwin. Resistivity of solid mercury. *Cryogenics*, 20 :158–160, 1980.
- [4] P. Tixador. *Matériaux supraconducteurs*. Lavoisier - Hermes, 2003.
- [5] L.-P. Lévy. *Magnétisme et Supraconductivité*. CNRS Editions / EDP Sciences, 1997.
- [6] P. Tixador. ASC 2004 short course : Superconductivity for power devices. Applied Superconductivity Conference, September 2004.
- [7] [http://lanoswww.epfl.ch/studinfo/courses/cours\\_supra/TypeI-II/default.htm](http://lanoswww.epfl.ch/studinfo/courses/cours_supra/TypeI-II/default.htm).
- [8] P.E. Goa, H. Hauglin, M. Baziljevich, E. Il'yashenko, P.L. Gammel, and T.H. Johansen. Real-time magneto-optical imaging of vortices in superconducting NbSe<sub>2</sub>. *Superconductor Science and Technology*, 14 :729–731, 2001.
- [9] B. Ten Haken, H. J. N. van Eck, and H. H. J. Ten Kate. A new experimental method to determine the local critical current density in high-temperature superconducting tapes. *Physica C : Superconductivity and its Applications*, 334 :163–167, 2000.
- [10] G. Strano, A.S. Siri, and G. Grasso. Current distribution and microstructure studies of isolated filaments extracted from ag-sheathed Bi(2223) tapes. *Superconductor Science and Technology*, 13 :1470–1475, 2000.
- [11] R.J. Wijngaarden, H.J.W. Spoelder, R. Surdeanu, and R. Griessen. Determination of two-dimensional current patterns in flat superconductors from magneto-optical measurements : An efficient inversion scheme. *Physical Review B - Condensed Matter and Materials Physics*, 54(9) :6742–6749, 1996.
- [12] V. S. Vysotsky, K. Funaki, and M. Takeo. Current distribution in multistrand superconducting cables – experimental methods and results. *Physica C : Superconductivity and its Applications*, 310 :351–357, 1998.
- [13] C. P. Bean. Magnetization of hard superconductors. *Physical Review Letters*, 8 :250, 1962.
- [14] C. P. Bean. Magnetization of high-field superconductors. *Reviews of Modern Physics*, 36 :31–39, January 1964.
- [15] P. Brissoneau. *Magnétisme et matériaux magnétiques*. Hermes, 1997.
- [16] G. W. Swan. Current distribution in a thin superconducting strip. *Journal of Mathematical Physics*, 9 :1308–1312, 1968.
- [17] S. Stavrev. *Modelling of High Temperature Superconductors for AC Power Applications*. PhD thesis, Ecole polytechnique Fédérale de Lausanne, 2002.
- [18] B. Dutoit, J. Duron, S. Stavrev, and F. Grilli. Dynamic field mapping for obtaining the current distribution in high-temperature superconducting tapes. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 15 :3644–3647, 2005.
- [19] R.J. Wijngaarden, K. Heeck, H.J.W. Spoelder, R. Surdeanu, and R. Griessen. Fast determination of 2d current patterns in flat conductors from measurement of their magnetic field. *Physica C : Superconductivity and its Applications*, 295(3-4) :177–185, 1998.
- [20] F. Grilli. *Numerical Modelling of High Temperature Superconducting Tapes and Cables*. PhD thesis, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2003.
- [21] L. Antognazza, M. Decroux, M. Therasse, Ø. Fischer, and M. Abplanalp. Test of YBCO thin films based fault current limiters with a newly designed meander. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 15 :1990–1993, 2005.
- [22] J. Rappaz and M. Picasso. *Introduction à l'analyse numérique*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2005.

- [23] E.-G. Thompson. *Introduction to the Finite Element Method*. Wiley International Edition, 2005.
- [24] N. Nibbio. *Nonlinear Electromagnetic Modelling of High Temperature Superconducting Tapes*. PhD thesis, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1999.
- [25] <http://www.cedrat.fr>.
- [26] F. Gardiol. *Traité d'électricité Volume III - Electromagnétisme*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1996.
- [27] E. Vinot, G. Meunier, and P. Tixador. Different formulations to model superconductors. *IEEE Transactions on Magnetics*, 36 :1226, 2000.
- [28] D. Ruiz-Alonso, T. Coombs, and A.M. Campbell. Computer modelling of high-temperature superconductors using an a-v formulation. *Superconductor Science and Technology*, 17 :305–310, 2004.
- [29] G. Meunier, Y. Le Floch, and C. Guérin. A nonlinear circuit coupled  $T - T_0 - \Phi$  formulation for solid conductors. *IEEE Transactions on Magnetics*, 39 :1729–1732, 2003.
- [30] M. Decroux, L. Antognazza, N. Musolino, E. De Chambrier, S. Reymond, J.-M. Triscone, Ø. Fischer, W. Paul, and M. Chen. Properties of YBCO films at high current densities : fault current limiter implications. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 11 :2046–2049, 2001.
- [31] J. Duron, F. Grilli, B. Dutoit, and S. Stavrev. Modelling the E-J relation of high-Tc superconductors in an arbitrary current range. *Physica C : Superconductivity and its Applications*, 401 :231–235, 2004.
- [32] S. Stavrev, F. Grilli, B. Dutoit, N. Nibbio, E. Vinot, I. Klutsch, G. Meunier, P. Tixador, Y. Yang, and E. Martinez. Comparison of numerical methods for modeling of superconductors. *IEEE Transactions on Magnetics*, 38 :849–852, 2002.
- [33] J. H. Su, P. P. Joshi, V. Chintamaneni, and S. M. Mukhopadhyay. The influence of the heating rate on YBCO films prepared by the trifluoroacetate metal-organic deposition process. *Superconductor Science and Technology*, pages 1496–1501, 2005.
- [34] N. Y. Chen, R. Jonker, V. C. Matijasevic, H. M. Jaeger, and J. E. Mooij. Low 1/f normal-state resistance noise in high-resistivity  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_y$  films. *Applied Physics Letters*, 67 :133–135, 1995.
- [35] E. Azoulay and J. Avignant. *Mathématiques : Rappels de cours et exercices résolus*, volume Volume 1 : Analyse. Ediscience International, 1993.
- [36] C. Guérin. Implémentation de l'expression  $E(J)$  d'un supraconducteur pour une modélisation en 3 dimensions. Société Cedrat.
- [37] G. Grasso, F. Marti, Y. Huang, A. Perin, and R. Flukiger. Correlation between the normal state resistivity and the critical current density of Ag sheathed Bi(2223) tapes. *Physica C : Superconductivity and its Applications*, 281 :271–277, 1997.
- [38] R. Wesche. Temperature dependence of critical currents in superconducting Bi-2212/Ag wires. *Physica C : Superconductivity and its Applications*, 246 :186–194, 1995.
- [39] S.R. Currás, J. Viña, M. Ruibal, M.T. González, M.R. Osorio, J. Maza, J.A. Veira, and F. Vidal. Normal-state resistivity versus critical current in  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$  thin films at high current densities. *Physica C : Superconductivity and its Applications*, 372-376 :1095–1098, 2002.
- [40] *Formulaires et tables*. Commissions romandes de mathématique, de physique et de chimie, 2000.
- [41] D. R. Smith and F. R. Fickett. Low-temperature properties of silver. *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.*, 100 :119–171, 1995.
- [42] K.L. Chopra and L.C. Bobb. Electrical resistivity studies on polycrystalline and epitaxially grown gold films. *Acta Metallurgica*, 12 :807, 1964.
- [43] M. Lindmayer and H. Mosebach. Current limiting properties of YBCO-films on sapphire substrates. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 9 :1369–1372, 1999.
- [44] J.R. Sambles, K.C. Elsom, and Jarvis D. J. Resistivity of thin gold films. *Solid State Communications*, 32 :997–1000, 1979.
- [45] S.Y. Seol and J.R. Hull. Transient analysis and burnout of high temperature superconducting current leads. *Cryogenics*, 33(10) :966–975, 1993.
- [46] D. Buzon, L. Porcar, P. Tixador, D. Isfort, R. Tournier, and X. Chaud. Effects of thermal exchanges on the ybco transition and the superconductivity recovery. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 13(2 II) :2076–2079, 2003.
- [47] M. Aravind and P.C.W. Fung. Thermal parameter measurements of bulk YBCO superconductor using pvpf transducer. *Measurement Science and Technology*, 10 :979–985, 1999.
- [48] A.K. Dhama, M.K. Chattopadhyay, and T.K. Dey. Thermal conductivity of 2223 BSCCO superconductor-polyethylene glycol composites between 20 and 300 k. *Journal of Superconductivity*, 13 :417–422, 2000.

- [49] W. Schnelle, N. Knauf, J. Bock, E. Preisler, and J. Huedepohl. Specific heat anomaly of  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$  at  $t_c$  in dependence on the oxygen content. *Physica C : Superconductivity and its Applications*, 209(4) :456–462, 1993.
- [50] S.I. Abu-Eishah. Correlations for the thermal conductivity of metals as a function of temperature. *International Journal of Thermophysics*, 22 :1855–1868, 2001.
- [51] H.-R. Kim, J. Sim, and O.-B. Hyun. Quench properties of Au/YBCO meander lines under AC fault current. *Physica C : Superconductivity and its Applications*, 423 :29–36, 2005.
- [52] M. Anis-Ur-Rehman and A. Maqsood. Study of the thermal behaviour of Bi(Pb)Sr(Ba)-2223 high- $t_c$  granular superconductors. *Physica C : Superconductivity and its Applications*, 418 :121–130, 2005.
- [53] Yoichi Takahashi and Hidetoshi Akiyama. Heat capacity of gold from 80 to 1000 K. *Thermochimica Acta*, 109 :105–109, 1986.
- [54] A.-M. Bianchi, Y. Fautrelle, and J. Etay. *Transferts thermiques*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2004.
- [55] T. Rettelbach and G. J. Schmitz. 3D simulation of temperature, electric field and current density evolution in superconducting components. *Superconductor Science and Technology*, 16 :645–653, 2003.
- [56] <http://www.comsol.fr>.
- [57] A. Berizzi, M. Delfanti, P. Marannino, M.S. Pasquadibisceglie, and A. Silvestri. Enhanced security-constrained OPF with FACTS devices. *IEEE Transactions on Power Systems*, 20 :1597–1605, 2005.
- [58] M. Decroux, L. Antognazza, S. Reymond, W. Paul, M. Chen, and O. Fischer. Studies of YBCO strip lines under voltage pulses : optimization of the design of fault current limiters. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 13 :1988–1991, 2003.
- [59] S. Reymond, L. Antognazza, M. Decroux, and O. Fischer. Simulation of the initial response of a high  $t_c$  superconducting film submitted to a voltage source. *Superconductor Science and Technology*, 17 :522–526, 2004.
- [60] B. Zeimetz, J.E. Evetts, K. Tadinada, D.E. Eves, T.A. Coombs, and A.M. Campbell. Thermal instability and current-voltage scaling in superconducting fault current limiters. *Superconductor Science and Technology*, 17 :657–662, 2004.
- [61] Y. Iwasa, S.-Y. Hahn, H. Lee, J. Bascuñán, J. Jankowski, J. Reeves, A. Knoll, Y.-Y. Xie, and V. Selvanickam. Stability and quench protection of coated YBCO "composite" tape. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 15 :1683–1686, 2005.
- [62] P. Tixador. *Les supraconducteurs*. Hermes, 1995.



## CURRICULUM VITAE

Joseph DURON  
EPFL - IC - LANOS  
BC 228 / Station 14  
CH - 1015 LAUSANNE

Né le 02 juin 1978 à Nantua (France).  
Nationalité française.

### Études

- 2006 Docteur ès Sciences de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne (E.P.F.L.)  
"Modélisation numérique de matériaux supraconducteurs - Application à un limiteur de courant"
- 2001 Diplôme d'Ingénieur Électricien de l'Institut National Polytechnique de Grenoble (I.N.P.G.)  
École Nationale Supérieure des Ingénieurs Électriciens de Grenoble (E.N.S.I.E.G.).  
3<sup>e</sup> année de cycle ingénieur effectuée à l'E.P.F.L., département Électricité.
- 1998 Diplôme Universitaire de Technologie (D.U.T.) en Génie Électrique et Informatique Industrielle, option Électrotechnique et Électronique de Puissance
- 1996 Baccalauréat Scientifique (S.) (mathématiques et sciences physiques)  
option sciences et techniques industrielles.

### Expériences Professionnelles

- 2003–2005 Assistant-Doctorant à l'E.P.F.L. au sein du laboratoire des systèmes non linéaires :  
Encadrement d'étudiants durant leurs projets de semestre et pour les travaux dirigés liés au cours « Circuits et Systèmes », aide à l'administration de serveurs informatiques sous environnement Windows.
- 2001 Stage de fin d'études niveau ingénieur effectué à l'E.P.F.L. au laboratoire des réseaux d'énergie : Travaux de recherches sur la détermination des paramètres du canal de foudre (intensité du courant, vitesse de l'arc en retour, ...)
- 1998–2000 Travail d'été en bureau d'études dans l'entreprise S.I.S.E. (industrie de transformation des matières plastiques) à Oyonnax (France) :  
Mise à jour d'une gamme de régulateurs de température (2000).  
Conception d'un nouveau système d'injection séquentielle (1999).  
Mise au point des premiers prototypes et lancement de la fabrication d'un nouveau système de régulation de température (1998).
- 1998 Stage de fin d'études niveau I.U.T. effectué dans l'entreprise S.I.S.E.  
Aide à la conception d'un nouveau système de régulation de température.

### Divers

Passionné par le transport ferroviaire.  
Connaissance des systèmes informatiques Windows et Linux.  
Connaissance de base des langages de programmation FORTRAN, C, et PYTHON.

## LISTE DE PUBLICATIONS

- Duron, J. *et al.*, **Finite-element modelling of superconductors in over-critical regime with temperature dependent resistivity**, *Proceedings of the European Conference on Applied Superconductivity*, 2005.
- Duron, J. *et al.*, **3-D finite element simulations of strip lines in a YBCO/Au fault current limiter**, *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, **15**, p. 1998, 2005.
- Dutoit, B. *et al.*, **Dynamic field mapping for obtaining the current distribution in high-temperature superconducting tapes**, *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, **15**, p. 3644, 2005.
- Duron, J. *et al.*, **Modelling the E-J relation of high-Tc superconductors in an arbitrary current range**, *Physica C : Superconductivity and its Applications*, **401**, p. 231, 2004.
- Sjöström, M. *et al.*, **Equivalent circuit model for superconductors**, *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, **13**, p. 1890, 2003.