



**HAL**  
open science

# Dynamos numériques planétaires générées par cisaillement en surface ou chauffage interne

Céline Guervilly

► **To cite this version:**

Céline Guervilly. Dynamos numériques planétaires générées par cisaillement en surface ou chauffage interne. Géophysique [physics.geo-ph]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2010. Français. NNT : . tel-00576177

**HAL Id: tel-00576177**

**<https://theses.hal.science/tel-00576177>**

Submitted on 13 Mar 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE**

Spécialité **Sciences de la Terre, Univers et Environnement**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée et soutenue publiquement par

**Céline GUERVILLY**

le 27 octobre 2010

---

## **Dynamos numériques planétaires générées par cisaillement en surface ou chauffage interne**

---

Thèse dirigée par Philippe Cardin

### **Composition du jury**

Julien Aubert	Institut de Physique du Globe de Paris	Rapporteur
Yannick Ponty	Observatoire de la Côte d'Azur (Nice)	Rapporteur
Christopher Jones	University of Leeds (Royaume Uni)	Examineur
Johannes Wicht	Max Planck Institute (Allemagne)	Examineur
Jean Virieux	Université Joseph-Fourier (Grenoble)	Président du jury
Philippe Cardin	CNRS/Université Joseph-Fourier (Grenoble)	Examineur

Thèse préparée au sein du Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique/Institut des Sciences de la Terre dans l'Ecole Doctorale Terre, Univers, Environnement



# Résumé

## Dynamos numériques planétaires générées par cisaillement en surface ou chauffage interne

Dans la première partie de cette thèse, nous développons un code numérique hybride basé sur un modèle quasi-géostrophique des écoulements dans les noyaux planétaires forcés par un chauffage interne. Le champ de vitesse est calculé dans le plan équatorial ; la température et le champ magnétique sont implémentés en trois dimensions dans la sphère. Cette approche hybride nous permet de modéliser des écoulements convectifs turbulents (grands nombres de Reynolds,  $Re > 10^4$ ) sous une forte influence de la rotation (petits nombres d'Ekman,  $10^{-8} \leq E \leq 10^{-5}$ ) pour des petits nombres de Prandtl,  $P = 0.1 - 0.01$ . Une caractéristique robuste de ces écoulements est la présence d'une circulation géostrophique zonale de grande amplitude et stable dans le temps. La taille et l'amplitude du mouvement zonal sont contrôlées par le mélange de vorticité potentielle et la friction aux bords. On identifie la présence d'ondes de Rossby de grande taille se propageant dans la zone de convection vigoureuse.

Ces écoulements produisent des dynamos cinématiques au champ poloïdal de petite échelle et au champ toroïdal dominé par le mode axisymétrique. Les nombres de Reynolds magnétiques critiques sont de l'ordre de 1000. Nous montrons que l'impact du vent thermique agéostrophique sur le seuil dynamo n'est pas significatif.

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous étudions les dynamos générées par un cisaillement en surface. Un écoulement de Couette sphérique ( coulement entre deux sphères en rotation différentielle) produit des dynamos aux nombres de Reynolds magnétiques critiques élevés. La brisure de symétrie axiale de l'écoulement par l'instabilité en cisaillement (prenant la forme d'une onde) est cruciale. Le champ magnétique toroïdal est de grande amplitude par rapport au champ poloïdal impliquant le rôle de l'effet  $\omega$  dans le processus.

Nous étudions ensuite la dynamique et l'effet dynamo produits par des jets zonaux, *i.e.*, des mouvements de rotation différentielle alternativement est-ouest en latitude. Les jets zonaux imposés en surface sont modifiés par des ondes de Rossby qui provoquent un élargissement des jets et une diminution de leur amplitude. Le mécanisme dynamo est basé sur la propagation des ondes de Rossby. On a relié l'amplitude du champ magnétique poloïdal axisymétrique au nombre d'onde du mode de Rossby   travers sa vitesse de phase. Le nombre d'onde du mode de Rossby étant liée   l'épaisseur des jets, on établit un lien entre production de champ poloïdal axisymétrique et épaisseur des jets zonaux.

**Mots-clés : dynamos planétaires, convection, rotation, champ magnétique, modèle numérique, Couette sphérique, ondes de Rossby**

# Abstract

## Numerical study of planetary dynamos generated by surface shear or internal heating

In the first part of this thesis, we develop a hybrid numerical code based on a quasi-geostrophic model for the flows inside the planetary cores driven by internal heating. The code calculates the velocity field in the equatorial plane, and the temperature and magnetic fields in three dimensions in the sphere. This hybrid approach allows us to model turbulent convective flows (high Reynolds numbers,  $Re > 10^4$ ) under a strong influence of rotation (small Ekman numbers,  $10^{-8} \leq E \leq 10^{-5}$ ) for small Prandtl numbers,  $P = 0.1 - 0.01$ . Large amplitude geostrophic zonal circulations are a robust feature of these flows. The scale and the amplitude of the zonal motion is controlled by potential vorticity mixing and boundary friction. We identify the presence of large-scale Rossby waves propagating in the vigorously convecting region.

The flows produce kinematic dynamos, with a small-scale poloidal magnetic field and a mainly axisymmetric toroidal field. The critical magnetic Reynolds numbers are of order 1000. We find that the impact of the thermal wind on the dynamo threshold is not significant.

In the second part of this thesis, we study dynamos generated by surface shears. Spherical Couette flow (the flow between two spheres in differential rotation) produces dynamos with a high critical Reynolds number. By breaking the axial symmetry of the flow, the shear instability (in the form of a wave) plays a crucial role. The toroidal magnetic field is large compared with the poloidal field, suggesting the role of the  $\omega$  effect in the dynamo process.

We study the dynamics and the dynamo action produced by zonal jets, *i.e.*, produced by differential rotation that is alternately westward and eastward with latitude. The zonal jets imposed at the outer surface are modified by Rossby waves, which widen the jets and lower their amplitude. The dynamo mechanism relies on the propagation of the Rossby waves. The amplitude of the axisymmetric poloidal magnetic field depends on the lengthscale of the Rossby waves through their phase speed. As the width of the jets fixes the lengthscale of the Rossby waves, we can establish a link between production of the axisymmetric poloidal magnetic field and the width of the jets.

**Keywords:** planetary dynamos, convection, rotation, magnetic field, numerical model, spherical Couette, Rossby waves

## Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier l'équipe géodynamo pour son accueil et l'ambiance à la fois studieuse et décontractée dans laquelle j'ai été baignée, pour le temps consacré aux discussions scientifiques ou non et à la grande disponibilité de chacun. Je suis très reconnaissante envers Philippe pour m'avoir guidé tout au long de cette thèse et avec qui j'ai eu beaucoup de plaisir à travailler.

Je remercie Julien Aubert, Yannick Ponty, Chris Jones, Johannes Wicht et Jean Virieux d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse et de l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux.

Au cours de ces trois années, j'ai eu l'opportunité de participer à des congrès, GdR et écoles d'été, expériences riches sur le plan scientifique et humain. Je remercie notamment Pascale Garaud avec qui j'ai eu le plaisir de travailler à Woods Hole.

J'ai aussi eu la chance de pouvoir enseigner. J'ai apprécié la confiance de Alex Fournier, Eric Quirico, Helle Pedersen, Anne Simienski, Mai Linh Doan, Jean Virieux et Claire Bouligand. Merci particulièrement à Alex et Jean pour leur rôle de tuteur.

Le LGIT et son atmosphère invariablement conviviale ont constitué un cadre de travail idéal. Je remercie les étudiants que j'y ai côtoyés. Un grand merci aux étudiants de l'équipe géodynamo qui m'ont précédé Marine, Renaud, Nadège, Elisabeth et bonne chance à Ainhoa.

Merci aux GMUCards pour m'avoir bien fait rire et à mes amis de Bretagne et d'ailleurs qui m'ont beaucoup manqué. Ce travail doit beaucoup au soutien que ma famille m'a apporté. Thank you Toby for your unwavering support.



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Physique des noyaux planétaires</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Présentation</b>	<b>5</b>
1.1	Structure interne d'une planète . . . . .	5
1.2	Écorchés de la Terre . . . . .	6
1.3	Champs magnétiques planétaires . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Modélisation des noyaux planétaires</b>	<b>19</b>
2.1	Le moteur des dynamos planétaires . . . . .	19
2.2	Approche théorique . . . . .	21
2.3	Approche numérique . . . . .	23
2.4	Approche expérimentale . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Les équations du problème</b>	<b>29</b>
3.1	Aspect dynamique . . . . .	29
3.2	Aspect thermique . . . . .	35
3.3	Aspect magnétique . . . . .	36
3.4	En résumé . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Description de l'étude et objectifs</b>	<b>41</b>
<b>II</b>	<b>Étude de la convection thermique et de l'effet dynamo en régime développé dans une sphère en ro- tation rapide</b>	<b>43</b>
<b>5</b>	<b>Convection</b>	<b>45</b>
5.1	Introduction . . . . .	45
5.2	Formulation du modèle hybride . . . . .	50
5.3	Étude linéaire du seuil de convection . . . . .	64
5.4	Convection développée . . . . .	76
5.5	Bilan de la convection en rotation rapide . . . . .	118

<b>6</b>	<b>Dynamos QG convectives</b>	<b>121</b>
6.1	Introduction . . . . .	121
6.2	Formulation du problème . . . . .	123
6.3	Dynamos cinématiques convectives . . . . .	125
6.4	Conclusion . . . . .	131
 <b>III Dynamos générées par cisaillement en surface</b>		<b>135</b>
<b>7</b>	<b>Dynamos de Couette sphérique</b>	<b>137</b>
7.1	Plan de l'article . . . . .	139
7.2	Abstract . . . . .	139
7.3	Introduction . . . . .	140
7.4	Governing equations . . . . .	141
7.5	Outer sphere at rest . . . . .	143
7.6	Influence of the outer sphere rotation . . . . .	153
7.7	Ferromagnetic boundary conditions . . . . .	164
7.8	Conclusions . . . . .	170
7.9	Effet d'un champ magnétique rémanent . . . . .	172
7.10	Résumé . . . . .	174
<b>8</b>	<b>Dynamos générées par des jets zonaux</b>	<b>177</b>
8.1	Modélisation des planètes géantes . . . . .	177
8.2	Motivation . . . . .	184
8.3	Abstract . . . . .	185
8.4	Introduction . . . . .	186
8.5	Model . . . . .	190
8.6	Dynamics without the magnetic field . . . . .	195
8.7	Magnetic field generation . . . . .	206
8.8	Conclusion . . . . .	218
 <b>IV Conclusion</b>		<b>221</b>
<b>9</b>	<b>Discussion</b>	<b>223</b>
9.1	Écoulement zonal : déstabilisation, saturation et taille . . . . .	224
9.2	Importance des ondes de Rossby dans l'effet dynamo . . . . .	225
<b>10</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>227</b>
10.1	Résumé . . . . .	227
10.2	Perspectives . . . . .	228

<b>V</b>	<b>Annexes</b>	<b>231</b>
<b>A</b>	<b>Implémentation numérique</b>	<b>233</b>
A.1	Partie hydrodynamique . . . . .	233
A.2	Partie thermique . . . . .	238
A.3	Termes de couplage . . . . .	239
A.4	Partie magnétique . . . . .	243
A.5	Implémentation temporelle . . . . .	244
<b>B</b>	<b>Rotation de la zone radiative solaire</b>	<b>247</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>259</b>



Première partie

Physique des noyaux  
planétaires



# Avant-propos

Le cadre général de ce travail est l'étude de la dynamique des noyaux planétaires et du champ magnétique généré en leur sein.

Le champ magnétique terrestre étend son influence à plusieurs milliers de km dans l'espace qui nous entoure. Il est révélé par l'orientation que prend l'aiguille aimantée d'une boussole. Ses effets sur les objets aimantés sont observés depuis plus d'un millénaire mais son origine est restée mal connue jusqu'au début du 20<sup>e</sup> siècle. Aujourd'hui le consensus général adopté par la communauté scientifique est que le champ magnétique terrestre est auto-généré par les circulations de courants électriques dans le métal liquide constituant le noyau liquide. Le processus physique à l'oeuvre, nommé dynamo, consiste en un transfert d'énergie cinétique en énergie magnétique et *vice versa*.

Depuis une trentaine d'années, les données magnétiques récoltées par les missions spatiales nous ont appris que notre planète n'est pas la seule à posséder un champ magnétique. Presque toutes les autres planètes du système solaire génèrent leur propre champ magnétique aux caractéristiques variées.

Même si l'origine du champ magnétique n'est plus un mystère, la description des mécanismes qui le produisent dans les conditions planétaires reste floue. Cette méconnaissance est le siège de la motivation de ce travail.



# Chapitre 1

## Présentation de nos objets d'étude

L'objectif de ce chapitre introductif est de nous familiariser avec nos objets d'étude. On commence notre inventaire par la Terre, puis on s'attardera sur les autres planètes telluriques, les géantes gazeuses et enfin les géantes glacées. Mais tout d'abord, que connaît-on de la structure interne d'une planète ?

### 1.1 Structure interne d'une planète

Les caractéristiques les plus fondamentales d'une planète sont sa masse, son rayon et son taux de rotation. Comme son existence est liée à l'étoile autour de laquelle elle orbite, sa distance à son étoile est aussi déterminante. Cette liste n'est pas exhaustive mais ces caractéristiques, bien connues pour les planètes du système solaire (tableau 1.1) et partiellement pour de plus en plus d'exoplanètes<sup>1</sup>, permettent de classer les planètes dans des catégories. Le champ de gravité  $g$  d'une planète est directement relié à sa distribution de masse volumique  $\rho$ ,

$$g(r) = \frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r r'^2 \rho(r') dr',$$

où l'on fait l'hypothèse que la variation de densité se fait uniquement avec le rayon  $r$  et que la planète est sphérique.  $G$  est la constante universelle de gravitation. La mesure du champ de gravité permet donc de contraindre le profil radial de densité. La mesure du moment d'inertie  $C$  apporte une autre

---

<sup>1</sup>Les caractéristiques auxquelles on a accès pour les exoplanètes les plus chanceuses sont la masse, la distance à l'étoile et la période orbitale.

contrainte sur le profil de densité,

$$C(r) = \frac{8\pi}{3} \int_0^r r'^4 \rho(r') dr'.$$

En supposant une pression hydrostatique, on peut relier la pression  $p$  à la masse volumique

$$\frac{dp}{dr} = -\rho(r)g(r).$$

Le couplage avec une équation d'état  $f(\rho, p, T) = 0$  permet d'obtenir le profil de température  $T$ . Au final, on dispose de modèles globaux 1D plus ou moins bien contraints.

Planète	Masse (kg)	rayon équatorial(km)	période de rotation (j)	demi-grand axe (U.A.)
Mercuré	$3.3 \times 10^{23}$	2440	58.6	0.387
Vénus	$4.8 \times 10^{24}$	6052	-243.0	0.723
Terre	$5.9 \times 10^{24}$	6378	1.0	1.0
Mars	$6.4 \times 10^{23}$	3402	1.0	1.523
Jupiter	$1.9 \times 10^{27}$	71492	0.4	5.203
Saturne	$5.7 \times 10^{26}$	60268	0.4	9.537
Uranus	$8.7 \times 10^{25}$	25559	-0.7	19.229
Neptune	$1.0 \times 10^{26}$	24961	0.7	30.068

TAB. 1.1 – Quelques caractéristiques des planètes de notre système solaire.

## 1.2 Écorchés de la Terre

### 1.2.1 Modèle de Terre sismologique

La Terre est un milieu élastique dans lequel des ondes sismiques voyagent. Il existe deux types d'ondes sismiques se propageant dans les zones profondes : les ondes P de compression et les ondes S de cisaillement. Ces ondes se propagent avec une vitesse qui dépend des caractéristiques physiques du milieu : la densité  $\rho$ , le module de cisaillement  $\mu$  et le module d'incompressibilité  $K$ . Notons que les ondes de cisaillement ne se propagent pas dans les liquides. A la suite d'un séisme, les ondes traversent les différentes enveloppes de la Terre et subissent des variations de vitesse, des réflexions aux interfaces,... La mesure des temps d'arrivée des ondes permet aux sismologues de déduire les variations spatiales de vitesses sismiques et donc des informations

sur les épaisseurs et les propriétés élastiques des couches, les hétérogénéités latérales,...

Lorsque la Terre est soumise à une perturbation, elle se met à résonner sur ses modes propres de vibration. La fréquence de ces modes nous renseigne aussi sur la distribution de densité.

Ces études sismologiques de propagation et de modes propres ont permis d'établir un modèle global de Terre à une dimension, le modèle PREM (Dziewonski & Anderson, 1981) (figure 1.1).

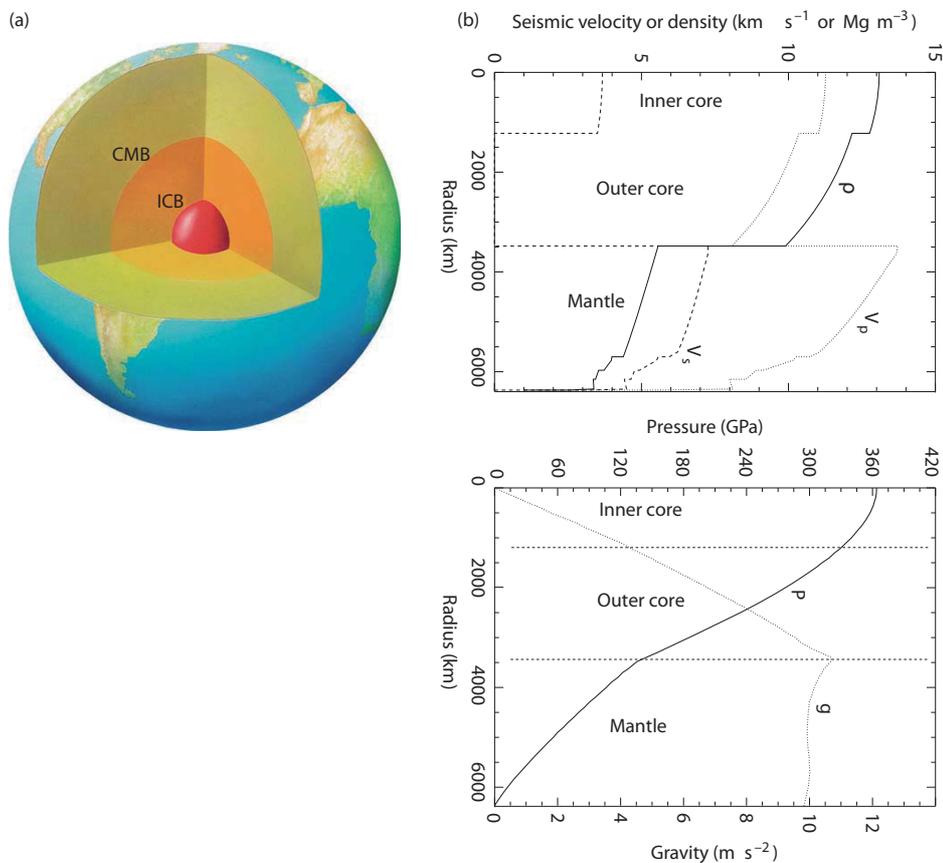


FIG. 1.1 – (a) Coupe de l'intérieur de la Terre montrant la limite manteau-noyau liquide (jaune et orange respectivement), appelée CMB (pour Core-Mantle Boundary en anglais) et la limite noyau liquide-graine solide (rouge) appelée ICB (pour Inner Core Boundary). (b) Modèle de Terre sismologique radial (Dziewonski & Anderson, 1981). Extrait de Olson (2007).

Le centre de la Terre est constitué d'un noyau dense de rayon 3480km. La partie supérieure de ce noyau est liquide (les ondes S ne s'y propagent pas). Lors de sa formation, le noyau était liquide. La pression importante au centre

(360GPa) provoque la cristallisation d'une graine. Les estimations de son âge vont de 0.37Ga à 1.90Ga, significativement moins que l'âge de la Terre (voir la revue récente de Nimmo, 2007). Le rayon actuel de la graine est de 1220 km soit environ 1/3 du noyau total. Le noyau dans son ensemble constitue 15% du volume total de la Terre et 1/3 de son rayon environ. Le reste est principalement occupé par le manteau silicaté. L'enveloppe la plus superficielle, la croûte, représente une fine couche d'environ 30 km d'épaisseur. La viscosité du liquide du noyau externe est à peu près égale à celle de l'eau ( $10^{-3}$ Pa s) alors que celle du manteau est estimée supérieure à  $10^{20}$ Pa s en fonction de la pression et de la température. Par conséquent, on s'attend à ce que la dynamique des écoulements dans ces deux enveloppes soit très différente. Dans le tableau 1.2, on donne les estimations de quelques propriétés du noyau terrestre.

	Noyau liquide	Graine solide
densité moyenne $\rho$ ( $\text{kg m}^{-3}$ )	11000	13000
conductivité électrique $\sigma$ ( $\text{S m}^{-1}$ )	$5 \times 10^5$	$5 \times 10^5$
viscosité dynamique $\mu$ (Pa s)	$10^{-3}$	$10^{14} - 10^{18}$
diffusivité thermique $\kappa$ ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )	$10^{-5}$	$10^{-5}$

TAB. 1.2 – Propriétés physiques du noyau terrestre.

### 1.2.2 Modèle de Terre géochimique

L'étude de la composition des météorites chondritiques permet de connaître la composition primordiale d'une planète tellurique dans un état indifférencié. En la comparant aux abondances des différents éléments constitutifs des matériaux terrestres auxquels on a accès (croûte et manteau), la composition de chaque couche peut être estimée et comparée au profil de densité du modèle 1D de Terre.

Le noyau est principalement composé de fer ( $\sim 86\%$ ), de nickel ( $\sim 4\%$ ) et d'éléments légers ( $\sim 10\%$  — oxygène, soufre, silicium, carbone,...) (*e.g.* Poirier, 1994). La graine est appauvrie en éléments légers qui restent préférentiellement dans le liquide. Lors de la cristallisation de l'alliage de fer et nickel, les éléments légers sont donc libérés dans le fluide.

Le manteau et la croûte sont constitués principalement de minéraux silicatés.

### 1.2.3 Modèle de Terre thermique

À la surface de la Terre, le flux de chaleur est actuellement évalué à 40TW. La principale source de cette chaleur est celle dégagée lors des désintégrations d'éléments radioactifs qui se produisent essentiellement dans le manteau ( $\sim 28\text{TW}$ ). Les autres contributions sont le dégagement de chaleur latente lors de la cristallisation de la graine  $\mathcal{Q}_L$ , l'énergie gravitationnelle libérée lors de la cristallisation de la graine (liquide remplacé par du solide plus dense)  $\mathcal{Q}_G$  et le refroidissement séculaire  $\mathcal{Q}_S$ . En supposant un âge de la graine de 1.2Ga, Roberts *et al.* (2003) obtiennent  $\mathcal{Q}_L \sim 4.0\text{TW}$  et  $\mathcal{Q}_G \sim 0.5\text{TW}$ . Pour compléter le bilan, le refroidissement séculaire doit donc être de l'ordre de 7.5TW.

A la surface du noyau, le flux de chaleur est mal contraint. La chaleur évacuée vers le manteau est estimée à  $10 \pm 4\text{TW}$  (*e.g.* Nimmo, 2007). La présence de  $^{40}\text{K}$  (radioactif) dans le noyau est envisagée bien que non requise par la géochimie.

Les matériaux constitutifs de la Terre étant opaques, un transfert de chaleur par radiation n'est pas envisageable. Le transfert se fait donc soit par conduction soit par convection.

La conduction consiste en un transfert de chaleur de proche en proche. La loi de Fourier relie le flux de chaleur conductif  $\mathbf{q}_{cond}$  au gradient de température,

$$\mathbf{q}_{cond} = -k\nabla T, \quad (1.1)$$

où  $k$  est la conductivité thermique du matériau.

Lorsque la conduction n'est pas un processus suffisamment efficace, la matière va se mettre en mouvement pour transporter sa propre chaleur. Le moteur du mouvement est la poussée d'Archimède, un fluide qui s'échauffe ayant sa densité qui diminue. Un fluide va se mettre à convecter si la poussée d'Archimède surmonte le frein au mouvement — la viscosité du fluide — et le frein au moteur du mouvement — la diffusion thermique. Plus un fluide est visqueux, plus les mouvements sont difficiles. Plus un fluide diffuse la chaleur, moins il aura besoin de se mettre en mouvement pour la transporter.

L'entropie  $S$  est une fonction de la température, de la pression et la composition chimique. Par souci de simplicité, considérons un milieu où la composition est homogène. On a alors

$$dS = \frac{C_p}{T}dT - \frac{\alpha}{\rho}dp,$$

avec  $C_p$  la chaleur spécifique à pression constante et  $\alpha$  le coefficient d'expansion thermique. On considère un fluide qui se trouve dans un état "bien

mélangé” isentropique. En supposant une pression hydrostatique, l’évolution de la température avec le rayon est

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_s = \left(\frac{dT}{dp}\right)_s \frac{dp}{dr} = -\frac{g\alpha T}{C_p}.$$

Le gradient de température adiabatique traduit l’évolution de température subie par une particule fluide suite à un déplacement radial, c’est-à-dire une variation de pression hydrostatique. Le gradient adiabatique est tel que la variation de température de la particule fluide la laisse à l’équilibre avec le milieu qui l’entoure. On ne pourra donc avoir convection que si le gradient de température est sur-adiabatique ( $d_r T > (d_r T)_s$ ). Le gradient adiabatique est une notion liée au fait que le fluide est compressible. Dans la plupart des modèles numériques et théoriques, on considère, par simplicité, que le fluide est incompressible. La compressibilité dans le noyau terrestre étant de 20% d’après le modèle PREM, cette hypothèse pourrait être contestée pour les métaux liquides (Glatzmaier & Roberts, 1996). Un fluide strictement incompressible ne peut pas convecter puisque les variations de densité y sont proscrites. Il faut alors faire l’hypothèse que seules les variations de densité induites par les variations de la température sont permises. C’est ce que prévoit l’approximation de Boussinesq. Pour comparer les simulations d’un fluide de Boussinesq avec le noyau terrestre, il faut considérer le profil de température dans le noyau une fois le gradient adiabatique soustrait. Alors que le gradient adiabatique est relativement bien contraint dans la Terre, le gradient sur-adiabatique est quant à lui mal connu. Le gradient adiabatique est estimé à 1000K entre les deux frontières limites du noyau liquide (Jacobs, 1987). La différence de température sur-adiabatique entre l’ICB et la CMB serait très faible, de l’ordre de  $10^{-3} - 10^{-4}$  (*e.g.* Jones, 2000).

#### 1.2.4 Le champ magnétique terrestre

Avant l’ère moderne, le magnétisme était connu par les anciens Grecs. La boussole est une invention chinoise ; les premières références de son utilisation comme un instrument d’orientation remonte à l’an 1040. La boussole a été introduite en Europe dès le 12ème siècle. La première mesure connue en Europe date du 16ème siècle. La mesure systématique de l’orientation de l’aiguille de la boussole débuta à Paris et à Londres au 16ème siècle. L’observation du champ magnétique terrestre est la première observation naturelle instrumentale faite de manière systématique.

L’étude du champ magnétique terrestre a débuté au 17ème avec les travaux de William Gilbert qui fut le premier à faire l’analogie entre les formes du champ magnétique terrestre et celui produit par un barreau aimanté qui

serait virtuellement placé au centre de la Terre. Au 19<sup>ème</sup>, Gauss décrit mathématiquement le champ magnétique terrestre et proposa une origine interne pour le champ principal. Le 19<sup>ème</sup> siècle est aussi la période de mise en place des observatoires magnétiques permanents. On en compte environ 200 actuellement dans le monde, répartis de manière déséquilibrée entre hémisphères nord et sud. En France, l'unique observatoire se trouve à Chambon La Forêt dans le Loiret.

Les mesures géomagnétiques sur satellites artificiels ont débuté dès les premiers lancements avec *Sputnik 3* en 1958. Les premières missions entre 1958 et 1978 (12 au total) embarquaient des magnétomètres scalaires dont les données ne permettent pas de modéliser de façon unique le champ magnétique terrestre. En 1979, la NASA lance *Magstat* qui donne des mesures vectorielles permettant d'obtenir une couverture globale homogène. Plusieurs missions (parmi lesquelles *Sac-C*, *Champ*, *Oersted*) ont ensuite suivies. En 2012, la mission *Swarm* doit être lancée par l'Agence Spatiale Européenne. Même si le champ magnétique terrestre est la grandeur géophysique dont la mesure est la plus ancienne, les observations directes globales sont assez récentes.

Pour remonter au delà de cette période historique, on a recours à des méthodes indirectes. On utilise l'aimantation rémanente de certains minéraux pour reconstituer l'évolution du champ au cours des temps géologiques. Les roches les plus anciennes pour lesquelles on observe une aimantation rémanente sont âgées d'environ 3 Ga. Un champ magnétique existait donc à cette époque à la surface de la Terre.

Les observations collectées à l'aide de ces différentes méthodes permettent de connaître les variations temporelles et spatiales du champ magnétique terrestre et ainsi d'identifier ces trois différentes sources.

La source principale du champ magnétique (98% du champ mesuré, intensité d'environ 50000nT à la surface de la Terre) est interne. Le temps de décroissance libre d'un dipôle est d'environ 20000 ans (avec les paramètres du noyau, conductivité et taille). Or d'après les données paléomagnétiques, le champ magnétique terrestre existait déjà il y a 3 Ga. Un phénomène d'entretien du champ magnétique est donc nécessaire : il s'agit de la géodynamo. Les mouvements de fluide conducteur dans le noyau liquide provoquent des circulations de courants électriques qui induisent un champ magnétique. Le champ interne est de grande échelle : principalement dipolaire (80-85%) à la surface terrestre (figure 1.2). L'axe du dipôle est actuellement orienté d'environ 9° avec l'axe de rotation de la Terre. Il présente une variation séculaire de son intensité (environ 1000nT en 100 ans) et de son orientation (figure 1.3).

Sous certaines hypothèses concernant la conductivité électrique du manteau, le champ magnétique peut être reconstitué à l'interface noyau-manteau (figure 1.2). A cette profondeur, le champ présente toujours une composante

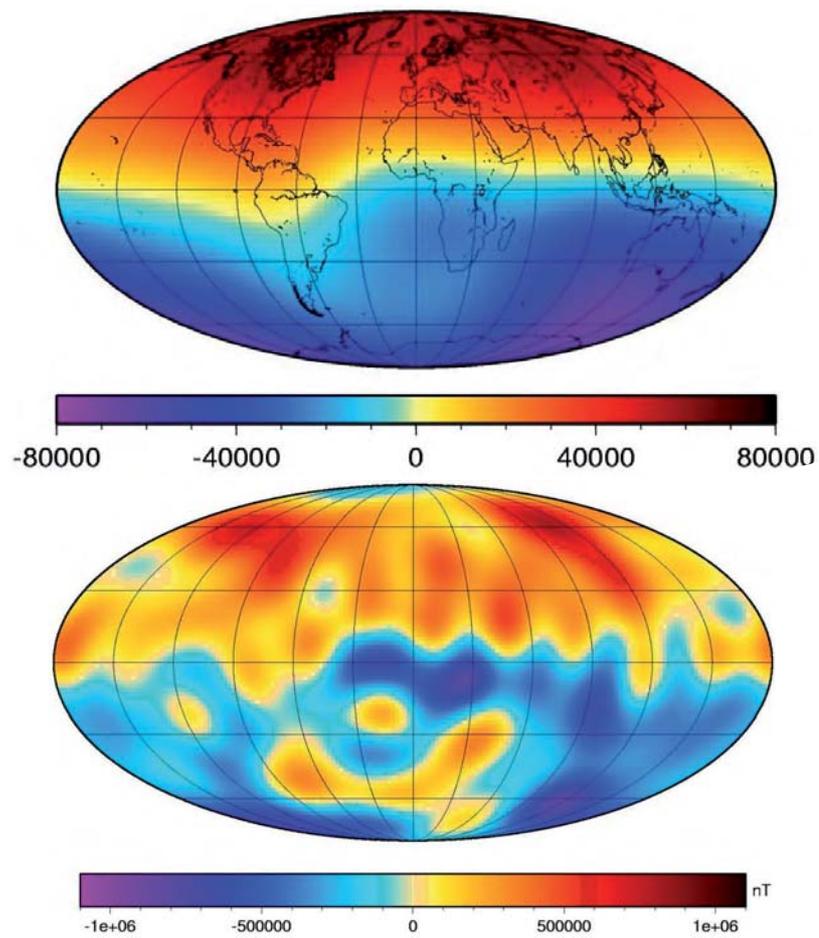


FIG. 1.2 – Carte de la composante verticale du champ magnétique à la surface de la Terre (a) et à la surface du noyau (b). Données du satellite *Oersted*.

dipolaire marquée mais des tâches de plus petites échelles émergent. On peut remarquer le caractère symétrique de ses structures magnétiques. Des cartes reconstituées à différentes époques montrent leur dérive vers l'Ouest.

Lors de l'expansion océanique, les roches magmatiques, riche en oxydes de fer, se forment au fond des océans au niveau des dorsales et acquièrent une aimantation thermo-rémanente, enregistrant ainsi l'orientation et l'intensité du champ magnétique environnant. Les données paléomagnétiques récoltées dans les fonds océaniques montrent que le champ s'est inversé plusieurs centaines de fois en 200 Millions d'années (figure 1.4).

La deuxième contribution au champ magnétique terrestre est le champ d'origine crustale dû à l'aimantation de certaines roches de la croûte. Ce champ peut atteindre localement des amplitudes de 1000nT mais son extension radiale est assez faible ( $< 1000\text{km}$  en général) (figure 1.5).

La dernière source du champ magnétique terrestre est d'origine externe. Le flux solaire ultraviolet ionise une partie de l'atmosphère terrestre que l'on nomme ionosphère (entre 60 et 800km d'altitude). La différence d'ionisation entre face éclairée et face obscure de la Terre provoque la circulation de courants ionosphériques qui induisent un champ magnétique d'amplitude moyenne d'environ 50nT. Les variations d'ionisations journalières et saisonnières provoquent des variations périodiques de ce champ externe.

Suite à de fortes expulsions de vent solaire, la magnétosphère, interaction

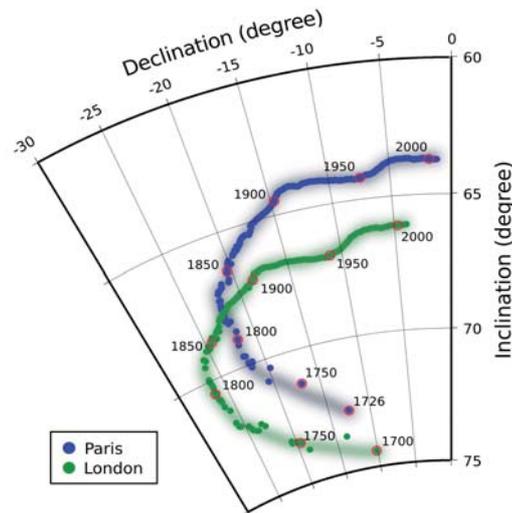


FIG. 1.3 – Séries temporelles de la déclinaison et de l'inclinaison du champ magnétique terrestre mesurées à Paris et à Londres sur une période de 300 ans.

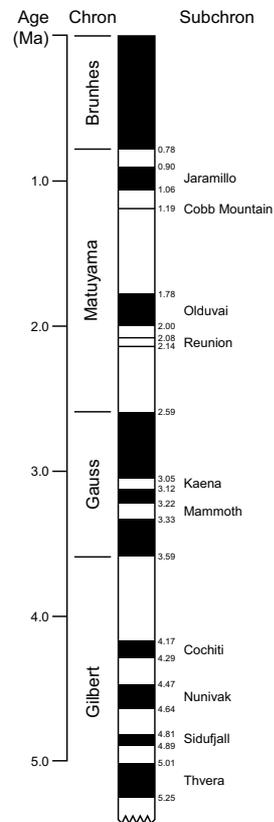


FIG. 1.4 – Échelles des inversions de polarité du dipôle terrestre au cours des derniers 5 millions d'années. Noir : polarité normale ; blanc : polarité inverse.

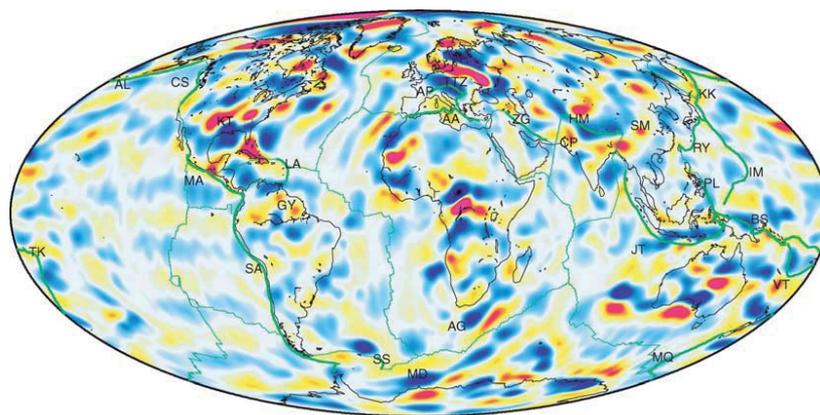


FIG. 1.5 – Carte des anomalies du champ magnétique à l'altitude des satellites (Maus *et al.*, 2006).

entre le champ magnétique de la planète et le plasma ionisé qu'est le vent solaire, peut subir des bouleversements rapides. Ainsi des épisodes rapides observables sur quelques heures et de fortes amplitudes (1000nT) que l'on nomme orages magnétiques, peuvent fortement affectés le champ externe.

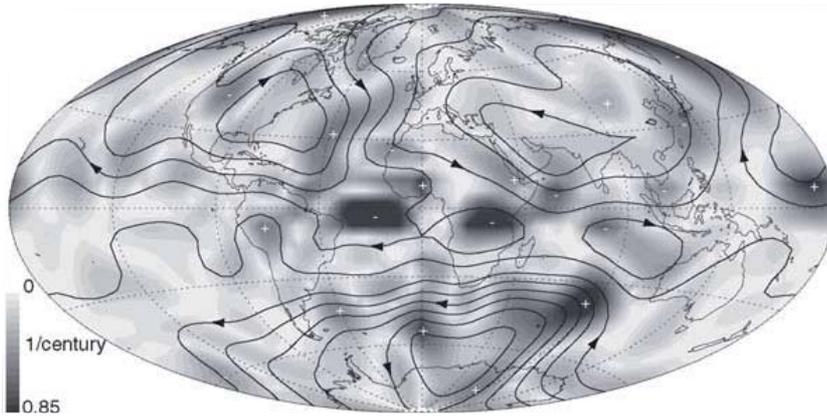


FIG. 1.6 – Carte de l'écoulement à la surface du noyau moyenné en temps sur la période 1840-1990. Les contours représentent les lignes de courant de l'écoulement toroïdal et l'échelle de gris, l'amplitude des mouvements ascendants (+) et descendants (-) (Amit & Olson, 2006).

A partir de la variation séculaire déduite des mesures magnétiques et sous certaines hypothèses plus ou moins bien contraintes telle que l'hypothèse du flux gelé ( $\sigma \rightarrow \infty$  dans le noyau), il est possible de reconstituer l'écoulement tangentiel à la surface du noyau (figure 1.6). Notons qu'il n'existe pas de solutions uniques à ce problème.

### 1.3 Champs magnétiques des planètes du système solaire

On divise couramment les planètes de notre système solaire suivant leur masse : les planètes géantes (dont la masse est supérieure à  $10m_{\oplus}$ ,  $m_{\oplus}$  étant la masse de la Terre) et les planètes telluriques. La composition des planètes (en lien avec leur distance au soleil) des deux groupes est aussi très différente : principalement hydrogène, hélium et eau pour les planètes géantes et silicates pour les planètes telluriques.

Si l'on considère la région (potentiellement) génératrice du champ magnétique, on est amené à les séparer en 3 catégories :

- Les planètes telluriques ont (ou ont eu) des noyaux liquides composés principalement de fer. Le fer est un bon conducteur d'électricité avec une conductivité électrique  $\sigma \approx 5 \times 10^5 \text{S m}^{-1}$ .
- Les géantes gazeuses, Jupiter et Saturne, sont suffisamment massives pour que les pressions atteintes en profondeur soient supérieures à la pression d'ionisation de l'hydrogène dont la conductivité est élevée  $\sigma \approx 2 \times 10^7 \text{S m}^{-1}$ .
- Les géantes glacées, Uranus et Neptune, ont une couche profonde constituée d'un mélange électrolytique d'eau, de méthane et d'ammoniac de conductivité assez faible, de l'ordre de  $10^2 - 10^3 \text{S m}^{-1}$ .

A l'heure actuelle, on sait que la plupart de ces planètes possède un champ magnétique. Avant l'avènement des mesures magnétiques par les missions spatiales, Jupiter était la seule planète pour laquelle on pouvait détecter un champ magnétique (par mesure des émissions radio) (Burke & Franklin, 1955). Au milieu des années 70, le survol de Mercure par *Mariner 10* a révélé que même une planète de petite taille pouvait avoir son champ magnétique propre. Les missions qui ont suivies ont permis de contraindre plus ou moins bien l'intensité et la topologie des champs magnétiques des différentes planètes.

La valeur maximale du champ magnétique extrapolée à la surface du noyau ainsi que le degré d'inclinaison du dipôle par rapport à l'axe de rotation sont reportés dans le tableau 1.3. Pour comparaison, on donne aussi ces valeurs pour le champ magnétique terrestre. La valeur obtenue à la surface du noyau nécessite l'hypothèse que le manteau, ou la couche d'hydrogène moléculaire dans le cas des planètes géantes, est non conducteur. La partie dipolaire du champ est celle dont la décroissance avec le rayon hors du noyau est la plus lente. Il s'agit donc de la composante la plus aisément mesurable. Dans le cas de la Terre, le dipôle est dominant à la surface du noyau. Même si c'est le cas de la majorité des planètes, il existe cependant des exceptions.

### 1.3.1 Les planètes telluriques

Dans la classe des planètes telluriques, on trouve les satellites naturels des planètes comme par exemple Ganymède et Io, deux satellites de Jupiter, dont la taille est comparable à celle de Mercure.

Mercure possède un champ magnétique d'assez faible amplitude que l'on pense être produit par une dynamo ce qui est, au premier abord, assez surprenant compte tenu de sa petite taille et de son faible taux de rotation. Vénus, en revanche, ne possède pas de champ magnétique dynamo, ce dont on s'étonne également car sa taille est assez similaire à celle de la Terre. Notons qu'un champ très faible d'origine ionosphérique a cependant été détecté. Les champs magnétiques de Mars et de la Lune sont d'origine crustale

et sont possiblement le produit d'une ancienne dynamo qui s'est éteinte et dont l'intensité aurait été comparable à notre champ terrestre actuel. Gany-mède possède un champ magnétique dont l'intensité à la surface du noyau est environ 3 fois plus faible que le champ terrestre. Son champ, principalement dipolaire, est généré par une dynamo.

### 1.3.2 Les géantes gazeuses

Les géantes gazeuses, et en particulier Jupiter, ont reçu beaucoup d'attention depuis une trentaine d'années. Après le programme *Voyager* (lancé en 1977), la mission *Cassini-Hygens* a survolé Jupiter en 2000 pour ensuite poursuivre sa route vers Saturne (2004). La sonde spatiale *Galileo* a orbité autour de Jupiter de 1995 à 2003.

Les géantes gazeuses possèdent des champs magnétiques intenses. Jupiter possède, après les tâches solaires, le champ magnétique le plus important du système solaire. Son moment dipolaire vaut  $M = 18000M_{\oplus}$  avec  $M_{\oplus}$  le moment dipolaire terrestre. Sa magnétosphère est énorme : elle s'étend sur 75 rayons en avant de la planète et jusqu'à l'orbite de Saturne. Le champ magnétique de Jupiter est principalement dipolaire axial et est animé d'une variation séculaire (Russell *et al.*, 2001). La vitesse dans la couche conductrice de Jupiter est estimé de l'ordre de  $10^{-3}\text{m.s}^{-1}$  (Starchenko & Jones, 2002).

Saturne a la particularité d'avoir un champ magnétique dipolaire très axisymétrique, c'est-à-dire que l'axe de son dipôle est très peu incliné par rapport à son axe de rotation. Même si l'intensité de son champ à la surface de la couche conductrice est plus faible que le champ magnétique terrestre à la

	Intensité maximale à la surface du noyau ( $\mu\text{T}$ )	Inclinaison du dipôle
Mercure	1.4	$< 10^{\circ}$
Terre	760	$9^{\circ}$
Gany-mède	250	$\sim 10^{\circ}$
Jupiter	1700	9.6
Saturne	250	0.8
Uranus	130	58.6
Neptune	52	47

TAB. 1.3 – Caractéristiques du champ magnétique pour quelques planètes. D'après une compilation de Jones (2003).

CMB, son moment dipolaire vaut  $M = 500M_{\oplus}$ .

### 1.3.3 Les géantes glacées

En dehors des missions *Voyager*, aucun satellite n'a survolé Uranus et Neptune, les planètes les plus éloignées du Soleil. On dispose donc d'assez peu de données les concernant mais ce qu'elles révèlent est assez surprenant. Il s'agit de planètes assez exotiques dans le bestiaire des planètes du système solaire. Tout d'abord, Uranus possède un axe de rotation qui est presque dans le plan de l'écliptique. Ensuite l'inclinaison de l'axe de son dipôle est de  $58.6^\circ$  par rapport à l'axe de rotation. Il en résulte une magnétosphère très asymétrique avec un champ à la surface de la planète pouvant atteindre  $10\mu\text{T}$  dans l'hémisphère sud et  $110\mu\text{T}$  dans l'hémisphère nord. Neptune, dont le dipôle est également très penché, possède un moment quadrupolaire dont l'intensité est plus forte que le moment dipolaire.

Grâce à ce petit inventaire, il apparaît que la présence ou non d'un champ magnétique généré par une dynamo est loin d'être une fonction linéaire de la taille de la planète, de son taux de rotation, ... On est bien incapable de dégager une tendance générale. Vénus et la Terre, par exemple, sont des planètes assez similaires mais leur histoire magnétique est complètement différente. La dynamo n'est, semble-t-il, pas une machine si facile que ça à mettre en route et elle est sensible à son environnement. Par ailleurs, on voit, dans le cas de Mars par exemple, qu'une dynamo peut s'éteindre. Là encore un indice de la sensibilité de la dynamo. Les champs dipolaires sont majoritaires mais les paramètres clés qui déterminent le choix de la morphologie du champ n'ont pas encore été formellement identifiés.

Le problème auquel on s'attaque est donc très complexe et même si de nombreuses études permettent d'en éclairer quelques aspects, l'image d'ensemble est encore sombre.

# Chapitre 2

## Modélisation des noyaux planétaires

### 2.1 Le moteur des dynamos planétaires

Pour créer un champ magnétique auto-entretenu, il faut disposer d'une quantité d'énergie cinétique suffisamment importante et disponible pour être transformée en énergie magnétique. Les différents mécanismes évoqués pour la génération d'une dynamo planétaire sont :

- La convection thermique : le fluide est mis en mouvement sous l'effet d'une stratification de température instable.
- La convection compositionnelle : les éléments légers relâchés au niveau de l'ICB lors de la cristallisation de la graine provoquent la mise en place d'une stratification compositionnelle instable.
- La précession ou la nutation : l'axe de rotation de la Terre précesse autour d'un axe normal au plan de l'écliptique en une période de 25800 ans. La nutation est une précession de l'axe de rotation autour de sa position moyenne ( $23.5^\circ$  par rapport à la normale au plan de l'écliptique) de période 431 jours (figure 2.1).

D'un point de vue énergétique, les mouvements précessionnels permettraient d'alimenter la dynamo terrestre (Bullard, 1949). L'existence de dynamos précessionnelles a été récemment démontrée numériquement (Tilgner, 2005). Cependant, ce scénario n'est pas privilégié car la gravité est une source d'énergie bien plus grande que la rotation. Pour la Terre, le rapport  $\Omega^2 R/g$  vaut  $\sim 10^{-3}$  où  $\Omega$  est le taux de rotation,  $R$  le rayon du noyau et  $g$  le champ de gravité moyen dans le noyau. Actuellement, on pense donc que le transfert d'énergie potentielle de gravité en énergie cinétique par les mouvements convectifs est la source la plus importante pour la dynamo. Il a

été suggéré que la convection compositionnelle est plus importante que la convection thermique (Braginsky, 1991) et que la structure des deux types de convection pouvaient être différente pour les systèmes en rotation rapide à cause de la grande différence entre diffusivités thermique ( $\kappa \sim 10^{-5} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ) et chimique ( $\kappa_\xi \sim 10^{-8} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ). Ceci impliquerait qu'étudier la convection thermique pour comprendre la dynamique des noyaux planétaires telluriques n'est pas un choix pertinent. Cependant des expériences indiquent que la convection thermo-compositionnelle produit des écoulements très similaires à la convection purement thermique, au moins pour la gamme de paramètres considérés (Cardin & Olson, 1992).

Une fois que l'on a trouvé la source d'énergie nécessaire pour générer la dynamo, tout est encore loin d'être gagné... En effet, n'importe quel champ de vitesse qui anime le fluide conducteur n'est pas forcément propice à la génération d'un champ magnétique. Le problème à résoudre est alors le suivant : quel écoulement est propre à l'induction d'un champ magnétique qui se maintient dans le temps ? Existents-ils des conditions que cet écoulement doit remplir pour être dynamogène ? D'autre part, on souhaite que le régime dynamique que l'on étudie soit approprié pour l'objet d'étude. Pour les noyaux planétaires, les effets rotationnels sont grands et le fluide est peu visqueux. Il est également important de déterminer si l'écoulement est laminaire ou turbulent. L'état de turbulence peut être quantifié par le nombre de

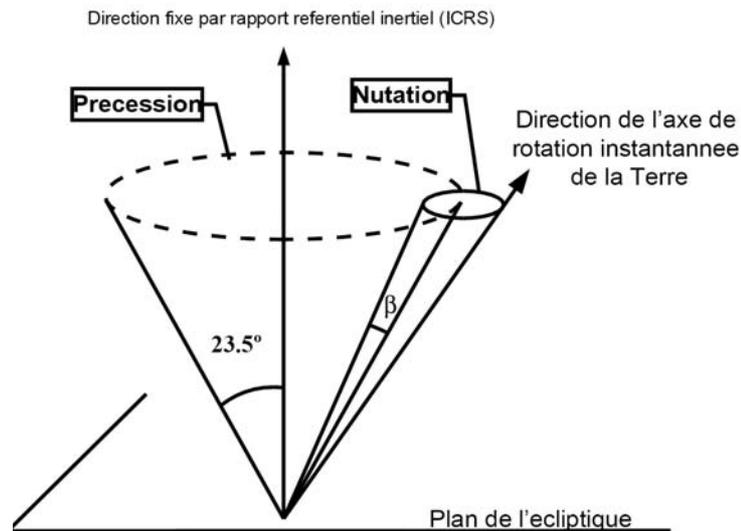


FIG. 2.1 – Schéma des mouvements de précession et de nutation de l'axe de rotation terrestre. Extrait de Noir (2000).

Reynolds qui mesure l'advection de la quantité de mouvement par rapport à sa viscosité,

$$Re = \frac{UR}{\nu},$$

où  $U$  est une vitesse caractéristique de l'écoulement,  $R$ , une longueur caractéristique du système et  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide. Dans le noyau terrestre, les vitesses sont estimées à environ  $10^{-4}\text{m.s}^{-1}$  (proche de la CMB) d'après l'inversion des données magnétiques de la variation séculaire. La viscosité cinématique est quant à elle de l'ordre de  $10^{-6}\text{m.s}^{-2}$ . Si l'on prend  $R = 2000\text{km}$ , la distance ICB-CMB, on trouve que le nombre de Reynolds est de l'ordre de  $10^8$ . On considère souvent qu'un écoulement  $Re > 1000$  est turbulent, le noyau terrestre est donc certainement dans un état de turbulence hydrodynamique développée.

La science qui étudie la physique des écoulements de fluide conducteur et leurs interactions avec un champ magnétique est la magnétohydrodynamique (MHD). Sa formulation mathématique est assez complexe comme nous le verrons. Pour tenter de résoudre ce problème, l'utilisation de différents outils ayant chacun leur inconvénients et leurs avantages est indispensable. Les études théoriques permettent d'obtenir des solutions dans des cas simplifiés et idéaux. Pour obtenir des solutions dans des cas plus complexes, la résolution numérique des équations est nécessaire. Cependant, les problèmes liés à la limitation du temps de calcul entraînent une limitation de l'exploration de la gamme des paramètres. Les expériences permettent d'étudier des régimes plus proches de ceux des noyaux planétaires mais ne permettent pas d'obtenir une connaissance parfaite de l'état du système à cause de soucis d'instrumentation. La mise en place d'infrastructures assez lourdes lors de l'utilisation de métaux liquides (du sodium liquide en particulier) constitue aussi une contrainte.

Dans les sections suivantes, on résume les avancées obtenues par les différentes approches.

## 2.2 Approche théorique

Les travaux théoriques remontent au début du 20<sup>e</sup> siècle avec les travaux de Larmor (1919) dans le contexte solaire où il évoque le principe de la dynamo où écoulement et champ magnétique sont couplés par les équations de la quantité de mouvement et de l'induction magnétique.

En 1934, Cowling démontre le premier théorème "anti-dynamo" : il n'existe

pas d'écoulement capable d'entretenir un champ magnétique purement axisymétrique. Dans la nature, on observe cependant beaucoup de champ magnétique auto-entretenu ayant une composante axisymétrique largement dominante. Le champ de Saturne est, par exemple, très axisymétrique à sa surface ce qui est déroutant d'après le théorème de Cowling. Il ne faut cependant pas oublier que le champ magnétique en surface d'une planète ne contient pas toute l'information sur le champ dans la région où il est généré. Ce théorème anti-dynamo sera plus tard étendu au cas d'un champ magnétique à deux dimensions, "deux dimensions" signifiant que les trois composantes du champ sont indépendantes d'une coordonnée cartésienne. Une présentation de plusieurs théorèmes anti-dynamo peut être trouvée dans la revue récente de Roberts (2007).

L'étude des dynamos cinématiques où le champ de vitesse est prescrit (*e.g.* Gubbins & Roberts, 1987) montre que l'induction du champ magnétique par le champ de vitesse (d'amplitude  $UB/R$  où  $B$  est une valeur caractéristique du champ magnétique) doit être plus grande que la diffusion du champ magnétique ( $\eta B/R^2$  où  $\eta$  est la diffusivité magnétique) pour que le champ magnétique soit maintenu par effet dynamo. Le nombre de Reynolds magnétique quantifie ce rapport,

$$Rm = \frac{UR}{\eta} > \mathcal{O}(10).$$

Dans le noyau terrestre,  $\eta$  est de l'ordre de  $2\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$  (Poirier, 1994) et la vitesse est estimée de l'ordre de  $10^{-4}\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  pour une structure de grande taille  $R \sim 2000\text{km}$  ce qui donne  $Rm \sim 100$ . Cette condition est donc compatible avec l'existence d'une dynamo dans le noyau terrestre. Le nombre de Reynolds magnétique nous montre, entre autres, l'importance de la taille de la structure de l'écoulement. Les systèmes de petite taille vont donc avoir des difficultés à être l'hôte d'un champ magnétique auto-entretenu. Le temps de diffusion magnétique estimé pour le noyau terrestre est de l'ordre de 20000 ans. Il s'agit du temps que met une structure magnétique (de grande échelle) pour être complètement diffusé sans mécanisme d'entretien. Les petites échelles du champ se diffusent plus rapidement.

L'étude des champs moyens où l'on divise les champs en une composante de grande échelle et de grande amplitude et une composante fluctuante de petite échelle et de faible amplitude a permis d'introduire l'effet  $\alpha$  et l'effet  $\omega$  dans le mécanisme de génération du champ magnétique (*e.g.* Roberts, 2007). L'effet  $\alpha$  permet de produire un champ magnétique de grande échelle à l'aide d'un champ de vitesse de petite échelle telle que l'écoulement hélicitaire de

tourbillons. L'effet  $\omega$  est, quant à lui, le cisaillement par un champ de vitesse de lignes de champ globalement nord-sud, l'étirement et la torsion des lignes provoquant l'apparition d'un champ magnétique est-ouest. Les effets  $\alpha$  et  $\omega$  sont des mécanismes simplifiés décrivant l'action d'un champ de vitesse sur un champ magnétique. Il faut combiner leur effet pour obtenir une dynamo que l'on peut qualifier de  $\alpha^2$ ,  $\alpha\omega$  ou  $\alpha^2\omega$  en fonction de la contribution de ces effets. En réalité, l'introduction des forces magnétiques dans l'équation du mouvement et la complexité des écoulements étudiés ne permettent pas toujours de catégoriser aussi facilement le type de dynamo obtenue.

## 2.3 Approche numérique

La première dynamo numérique complète a dû attendre l'apparition de supercalculateurs pour voir le jour. En 1995, Glatzmaier & Roberts puis Kagayama *et al.* parviennent à reproduire un champ magnétique auto-entretenu dans une géométrie sphérique en 3D, présentant les caractéristiques du champ magnétique terrestre : un dipôle axial présentant des inversions de polarité et une variation séculaire. Six ans plus tard, la comparaison de solutions numériques des équations de la MHD obtenues par plusieurs codes indépendants a validé les études numériques (Christensen *et al.*, 2001) (figure 2.2(a)). L'exploration de la gamme des paramètres par les nombreuses modélisations qui ont suivies a permis de reproduire différents types de dynamos (dipôle principalement axial ou équatorial, quadropôle,...) et de décrire le contexte de leur production (*e.g.* Christensen & Wicht, 2007). L'un des avantages des simulations numériques est qu'elles permettent de décrire précisément les mécanismes de l'effet dynamo et la rétroaction du champ magnétique sur la vitesse. La figure 2.2(b) est extraite de Aubert & Wicht (2004) : on visualise l'interaction dynamique entre tourbillons et lignes de champ.

Le problème auquel sont confrontées les modélisations numériques des équations de la MHD est que la gamme de paramètres, soit propre au fluide (comme sa viscosité et sa diffusivité magnétique), soit au système (entre autres, son taux de rotation), est souvent très éloignée des conditions planétaires. Comme évoqué précédemment, le nombre de Reynolds est grand dans le noyau liquide ( $Re \sim 10^8$ ). Cela se traduit par une gamme d'échelle spatiale de l'écoulement très vaste. Dans les simulations numériques, il n'est pas possible d'atteindre ce niveau de turbulence à moins d'utiliser des paramétrisations parfois discutables.

D'autre part, dans un fluide en rotation, des couches limites visqueuses très fines se mettent en place aux bords. Ces couches sont d'autant plus fines que le taux de rotation est élevé. Dans le noyau terrestre, l'épaisseur de ces

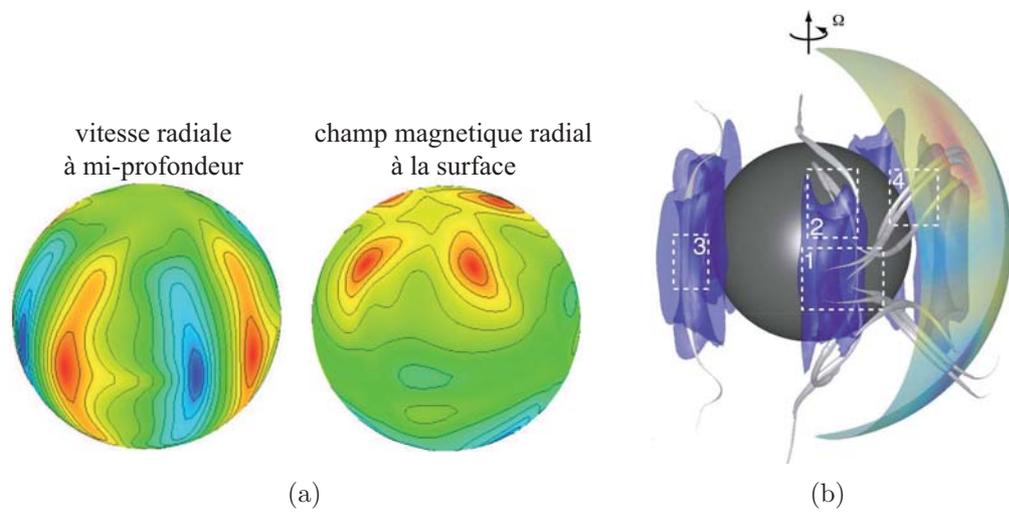


FIG. 2.2 – (a) Solution numérique d'une dynamo où les effets rotationnels sont environ 1000 fois plus importants que les effets visqueux dans l'équation de la quantité de mouvement pour les grandes échelles (Christensen *et al.*, 2001). (b) Visualisation tridimensionnelle des lignes de champ magnétique (gris) et des structures de l'écoulement (bleu) dans un modèle numérique de noyau terrestre. La composante radiale du champ magnétique est représentée sur la sphère externe (Aubert & Wicht, 2004).

couches serait de l'ordre du mètre! L'effet de la rotation est aussi de générer des structures de plus en plus fines. Une simulation avec le taux de rotation de la Terre est clairement inenvisageable. Pour donner un ordre de grandeur de cet écart, la dynamo de Glatzmaier & Roberts (1995) a une période de rotation de 1 Ma...

Dans les simulations numériques, on utilise donc des viscosités beaucoup plus élevées que les valeurs estimées dans les noyaux liquides. Certains codes utilisent des hyper-viscosités qui permettent de diffuser les structures de petites tailles davantage que dans un système réel. L'utilisation de valeurs élevées de viscosité est discutable si l'on cherche à décrire la dynamique des noyaux planétaires. Dans l'espoir de réduire la distance entre modélisations et conditions réelles, la viscosité dite turbulente est souvent mise en avant. Dans un écoulement laminaire, la diffusion de la quantité de mouvement se fait à l'échelle moléculaire. Cependant, pour un fluide dans un état de turbulence élevé, la turbulence à l'échelle des plus petits tourbillons peut être paramétrée comme de la diffusion. On peut ainsi définir une viscosité turbulente qui dépasse de plusieurs ordres de grandeur la viscosité moléculaire. Dans le noyau terrestre, on n'a cependant qu'une vague idée de cette grandeur (Brito *et al.*, 2004).

Un autre problème auquel font face les modélisations numériques sont les différences entre les coefficients de diffusion des différents champs :  $\nu$ , la viscosité,  $\eta$ , la diffusivité magnétique et  $\kappa$  la diffusivité thermique. Aujourd'hui, beaucoup de modèles utilisent  $\nu \approx \eta \approx \kappa$  alors qu'en réalité pour les métaux liquides  $\eta \gg \kappa > \nu$ . Le problème posé par cette approximation est que la vitesse, le champ magnétique et la température sont dissipés à la même échelle.

Faut-il donc s'inquiéter que, bien que les modèles numériques 3D de la géodynamo soient dans des régimes dynamiques bien plus visqueux que celui du noyau terrestre, ils produisent des champs magnétiques aux caractéristiques terrestres? Parviennent-ils à capturer la physique essentielle de la géodynamo qui prévaut sur une large gamme de paramètres? Ou bien s'agit-il juste d'une coïncidence?

L'effort est donc maintenant dirigé vers l'utilisation de valeurs plus pertinentes grâce à des parallélisations massives des codes 3D et l'utilisation d'énormes ressources de calcul. Il semble cependant qu'en utilisant des paramètres plus réalistes, les dynamos convectives produisent des champs magnétiques qui soient de petite échelle et non plus principalement dipolaires (Kageyama *et al.*, 2008). Il va falloir aller encore plus loin en direction des valeurs planétaires pour savoir si cette tendance se confirme mais cela nécessite le développement de ressources toujours plus importantes ou l'utilisation d'approximation permettant un allègement des calculs.

## 2.4 Approche expérimentale

La première génération de dynamos expérimentales a été couronnée de succès il y a une dizaine d'années. Ces expériences (une à Riga en Lettonie (Gailitis *et al.*, 2001) et l'autre à Karlsruhe en Allemagne (Stieglitz & Müller, 2001)) ont été construites pour reproduire des écoulements que l'on sait propices à la génération de dynamos cinématiques. Dans ces expériences, le mouvement du fluide est forcé par des pales et des pompes et confiné dans des tuyaux. Il est donc très contraint et peu affecté par les forces magnétiques. La dynamo de Riga reproduit un écoulement de Ponomarenko où le fluide subit un mouvement hélicitaire superposé d'une translation. La dynamo de Karlsruhe est basée sur le même principe mais avec plusieurs rangées de colonnes de fluide alignées. Pour les deux expériences, l'effet dynamo est apparu proche du seuil prédit théoriquement et numériquement.

Ces expériences utilisent du sodium liquide, le métal disposant de la meilleure conductivité électrique à des températures accessibles. Ces propriétés physiques sont proches de celle du fer liquide. Le majeur problème du sodium est sa dangerosité et donc son utilisation nécessite d'importantes infrastructures.

L'effet dynamo ayant maintenant été prouvé en laboratoire, le but des dynamos expérimentales de deuxième génération est de laisser plus de liberté à l'écoulement et donc d'étudier des écoulements plus turbulents, soumis à une rotation rapide, à une action forte du champ magnétique,... Le mode de forçage choisi est le forçage mécanique, la convection étant difficile à reproduire expérimentalement et nécessitant des puissances gigantesques). Les écoulements modélisés présentent un écoulement moyen de grande échelle auquel un écoulement turbulent vient se superposer. A l'heure actuelle, aucune dynamo expérimentale n'a été obtenue là où les prédictions des études numériques basées sur le champ moyen (difficulté de modéliser numériquement la turbulence) plaçait le seuil dynamo (Peffley *et al.*, 2000; Bourgoin *et al.*, 2002; Forest *et al.*, 2002). Il semble donc que la turbulence de l'écoulement inhibe l'effet dynamo. En 2007, à Cadarache, une équipe française a mesuré un champ magnétique auto-entretenu dans une expérience reproduisant un écoulement de Von Kármán<sup>1</sup>, où un fort taux de cisaillement est obtenu entre deux pales constituées de fer doux (ferromagnétique) pouvant être mise en rotation synchrone ou asynchrone (Monchaux *et al.*, 2007). Une grande variété de comportement du champ magnétique a depuis été observée dans l'expérience VKS (inversions, oscillations,...). L'effet dynamo n'a cependant pas été observé avec des pales constituées d'un matériau amagnétique, ce qui

<sup>1</sup>expérience VKS pour Von Kármán Sodium.

rend la présence de la dynamo fluide controversée (Verhille *et al.*, 2010). A travers le monde, d'autres expériences sont en cours, parmi lesquelles, l'expérience de Couette sphérique (entre deux sphères coaxiales en rotation différentielle) de College Park, Maryland, (3m de diamètre!); l'expérience de Madison, Wisconsin, semblable à VKS mais en géométrie sphérique; l'expérience de Perm, Russie, où un tore en rotation rapide est brusquement freiné.

D'autres expériences font le pari d'étudier des régimes dynamiques pertinents pour la Terre sans chercher à produire de dynamo. En particulier, un régime où le champ magnétique est fort et la rotation rapide est d'un grand intérêt. C'est le cas de l'expérience DTS à Grenoble où l'induction d'un champ magnétique par un fluide en équilibre magnétostrophique (équilibre entre forces de Lorentz, de Coriolis et gradient de pression) est étudié en présence d'un écoulement de Couette sphérique où le cisaillement est fort.



# Chapitre 3

## Les équations du problème

Nous allons maintenant développer les équations générales de notre problème qui couvre les domaines de la mécanique des fluides, de la thermodynamique et de l'électromagnétisme.

### 3.1 Aspect dynamique

#### 3.1.1 Équation de la quantité de mouvement

Dans toute cette étude, on considère un fluide incompressible, c'est-à-dire que sa masse volumique,  $\rho_0$ , est constante dans l'espace et dans le temps. Le choix d'une telle approximation est contestable pour l'étude des noyaux planétaires, en particulier pour les gaz où les effets de la compressibilité peuvent être importants (Evonuk & Glatzmaier, 2004). Cette hypothèse est cependant largement utilisée car elle permet une grande simplification des équations.

Sous l'hypothèse d'incompressibilité du fluide, l'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

où  $\mathbf{u}$  est le vecteur vitesse.

On considère un référentiel  $\mathcal{T}$  en rotation autour d'un axe  $\mathbf{e}_z$  à une vitesse angulaire  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$ , l'axe  $\mathbf{e}_z$  étant fixe dans un référentiel galiléen  $\mathcal{G}$ . La vitesse et l'accélération du fluide dans les deux référentiels sont reliées par

$$\mathbf{u}_{\mathcal{G}} = \mathbf{u}_{\mathcal{T}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r},$$

$$\left( \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right)_{\mathcal{G}} = \left( \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right)_{\mathcal{T}} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_{\mathcal{T}} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_{\mathcal{T}} + \left( \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right)_{\mathcal{G}} \times \mathbf{r},$$

où  $\mathbf{r}$  est le vecteur position. Dans le référentiel en rotation, trois nouvelles accélérations apparaissent donc : la force de Coriolis  $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_{\mathcal{T}}$ , la force centri-

fuge  $\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_T$  et la force de Poincaré  $(d_t \boldsymbol{\Omega})_{\mathcal{G}} \times \mathbf{r}$ . Si l'on considère que  $\boldsymbol{\Omega}$  est constante comme on va le supposer ici, alors on exclut les phénomènes de précession et de nutation liés à la force de Poincaré. L'équation de la quantité de mouvement dans le référentiel galiléen  $\mathcal{G}$  est

$$\left( \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right)_{\mathcal{G}} = -\frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\nabla} P + \nu \nabla^2 \mathbf{u}_{\mathcal{G}} + \frac{1}{\rho_0} \mathbf{F}_{\mathbf{v}}$$

avec  $P$  le champ de pression,  $\mathbf{F}_{\mathbf{v}}$  les forces volumiques (autres que visqueuses) et  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide. Dans le référentiel en rotation, l'équation de la quantité de mouvement<sup>1</sup> est

$$\left( \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right)_{\mathcal{T}} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_T + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_T = -\frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\nabla} P + \nu \nabla^2 \mathbf{u}_T + \frac{1}{\rho_0} \mathbf{F}_{\mathbf{v}}. \quad (3.1)$$

La force centrifuge peut être exprimée sous forme d'un gradient et incorporée à la pression pour former un champ de pression modifiée  $p = P + 1/2\rho_0\Omega^2 s^2$  avec  $s = |\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}|$  le rayon cylindrique. Dans la mesure où l'on se situe dans le repère géocentrique en rotation, il est plus facile de se placer dans le référentiel en rotation pour comparer les résultats aux observations. On notera  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_T$ . Les forces volumiques dans le cadre d'un fluide incompressible dans l'approximation de Boussinesq (que l'on va détailler dans le paragraphe suivant) sont la poussée d'Archimède, mise en mouvement d'un fluide sous l'effet d'une variation de densité et la force de Lorentz qui exprime la force exercée sur le fluide par interaction entre un champ magnétique et les courants électriques.

### Expression des forces volumiques

**Approximation de Boussinesq et force d'Archimède** L'approximation de Boussinesq contourne le fait qu'un fluide incompressible ne peut pas convecter puisque sa densité est constante. Comme ce sont les modifications de densité liées aux changements de température<sup>2</sup> qui permettent de créer des mouvements convectifs, on va considérer le fluide incompressible sauf pour les effets liés à la gravité *i.e.* la force d'Archimède. Cette approximation est valable si les changements de densité et de viscosité liés aux variations de température sont faibles et si l'échauffement du fluide par frottement visqueux est négligeable (Tritton, 1988).

<sup>1</sup>La dérivée particulière (en description lagrangienne) est  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}$  où  $\frac{\partial}{\partial t}$  est la dérivée en description eulérienne.

<sup>2</sup>Les changements compositionnels créent aussi des modifications de densité mais on considère ici uniquement la convection thermique.

Cette variation de densité induit une poussée d'Archimède :

$$\mathbf{F}_a = \delta\rho\mathbf{g} = (\rho - \rho_0)\mathbf{g} = \rho_0\alpha(T - T_0)g_0r\mathbf{e}_r, \quad (3.2)$$

avec  $\mathbf{g} = -g_0r\mathbf{e}_r$  le champ de gravité à symétrie sphérique. La variation de masse volumique due aux variations de température est  $\Delta\rho(T) = -\rho_0\alpha(T - T_0)$  avec  $\alpha$  le coefficient de dilatation thermique et  $T_0$  la température de référence (constante) à laquelle on a  $\rho(T_0) = \rho_0$ , la masse volumique de référence (constante).

La température est décomposée en un champ de température statique  $T_s$  (le profil de température dans le cas stationnaire et conducteur) et une perturbation de température  $\Theta$  :

$$T(r, \theta, \phi, t) = T_s(r) + \Theta(r, \theta, \phi, t). \quad (3.3)$$

Le champ de température statique est à symétrie sphérique comme on le verra par la suite. Par conséquent, la force d'Archimède issue de  $T_s$  est irrotationnelle, ce qui nous permet de dire qu'elle dérive d'un gradient que l'on peut incorporer à la définition de la pression modifiée  $p$ . On considère donc seulement la force d'Archimède issue de la perturbation de température :

$$\mathbf{F}_A = \rho_0\alpha g_0\Theta\mathbf{r}. \quad (3.4)$$

**Force de Lorentz** En présence d'un champ magnétique et d'un fluide conducteur d'électricité, la force de Lorentz agit sur le mouvement du fluide. Elle est associée à la présence d'un champ magnétique  $\mathbf{B}$  et électrique  $\mathbf{E}$  dans le référentiel en rotation :

$$\mathbf{F}_L = \rho_e\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B},$$

où  $\rho_e$  est la densité de charge électrique et  $\mathbf{j}$  la densité de courants électriques. Dans l'approximation de la magnétohydrodynamique, la vitesse du fluide est très inférieure à la vitesse de la lumière. Par conséquent, on peut négliger la force électrique devant la force magnétique. On a alors :

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{j} \times \mathbf{B}.$$

### Nombres sans dimension

Les nombres sans dimension nous renseignent sur les équilibres en présence dans un système. En comparant les nombres sans dimension utilisés dans les modélisations numériques ou expérimentales à ceux de l'objet étudié, on peut juger si l'état que l'on modélise est pertinent par rapport à ce que l'on

cherche à décrire.

En mécanique des fluides en rotation, il y a un nombre sans dimension ubiquiste : le nombre d'Ekman noté  $E$ . Il mesure le rapport entre période de rotation  $\Omega^{-1}$  et temps caractéristique de dissipation visqueuse  $R^2/\nu$  où  $R$  est une taille caractéristique de notre système :

$$E = \frac{\nu}{\Omega R^2}.$$

Le domaine des petits nombres d'Ekman est le lieu d'une physique où la viscosité est très faible si l'on s'intéresse à des échelles de temps de l'ordre du jour et à des structures de grande échelles. Dans les noyaux planétaires, la période de rotation est bien plus courte que le temps de dissipation visqueuse. Par exemple, dans le noyau terrestre, on estime  $E \sim 10^{-15}$ .

Le nombre de Rossby mesure le rapport entre période de rotation et temps caractéristique de l'advection  $R/U$  où  $U$  est une vitesse typique de l'écoulement :

$$Ro = \frac{U}{\Omega R}.$$

Dans le noyau terrestre, le nombre de Rossby est estimé de l'ordre de  $10^{-7}$ . Le nombre de Reynolds  $Re$  est le rapport entre temps visqueux et temps advectif :

$$Re = Ro/E = \frac{UR}{\nu}.$$

Le nombre de Reynolds est souvent utilisé pour juger de la turbulence hydrodynamique d'un système. On estime généralement pour  $Re < 1000$  que l'écoulement est laminaire, la viscosité agissant pour lisser toutes les échelles spatiales. Pour  $Re > 1000$ , l'écoulement est considéré comme turbulent. Dans le noyau terrestre,  $Re \approx 10^8$ , on s'attend donc à un écoulement turbulent.

### 3.1.2 Quelques éléments de la physique des fluides en rotation

#### Contrainte de Proudman-Taylor

Pour des fluides de faible viscosité en rotation rapide ( $E \ll 1$ ), la force de Coriolis a une action prédominante sur les mouvements. En régime stationnaire, dans un système où les forces volumiques sont absentes ou faibles et le terme de transport advectif est négligeable par rapport à la force de Coriolis ( $Ro \ll 1$ ), l'équation 3.1 se réduit à un équilibre entre force de Coriolis et gradient de pression :

$$2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p. \quad (3.5)$$

Si l'on prend le rotationnel de cette équation, on obtient

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = 0. \quad (3.6)$$

Dans un récipient fermé à bords plats où l'on impose une vitesse nulle aux bords (cas d'une surface rigide), la vitesse parallèle à l'axe de rotation est nulle aux bords et donc, d'après l'équation précédente, elle sera nulle dans tout le volume. La vitesse dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation est invariante par translation le long de l'axe. Le mouvement du fluide est donc bidimensionnel et qualifié de géostrophique. La plupart des fluides géophysiques rencontrés dans l'océan, l'atmosphère et le noyau respectent, à l'ordre zéro, cette contrainte de rigidité axiale, appelée contrainte de Proudman-Taylor.

En pratique, les expériences réalisées par Schaeffer (2004) montrent que les structures de l'écoulement conservent un caractère bidimensionnel pour  $Ro < 0.1$  et  $E < 10^{-4}$ .

### Couche d'Ekman

Pour des écoulements à faible nombres d'Ekman, le comportement du fluide dans le cœur du volume peut être proche d'un état géostrophique. Cependant, près des bords du conteneur, les solutions doivent satisfaire les conditions aux limites imposées, notamment celle de non-glissement appropriées pour une interface fluide-solide. Le raccordement se fait dans une couche limite visqueuse appelée couche d'Ekman.

Les conditions limites que l'on utilise pour la vitesse sont la condition de non-pénétration,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

et la condition de non-glissement,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0,$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale à la paroi. Dans la couche d'Ekman, les forces visqueuses s'ajoutent à la force de Coriolis pour contrebalancer le gradient de pression

$$2\Omega \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}.$$

Pour un récipient à bords plats ( $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ ), l'épaisseur de la couche d'Ekman est (*e.g.* Pedlosky, 1979)

$$\delta_E \sim \left( \frac{\nu}{\Omega} \right)^{1/2} \sim E^{1/2} R.$$

Cette couche devient infiniment fine lorsque  $E \rightarrow 0$ . La conservation de la masse dans cette couche nécessite l'apparition d'un flux alimentant la couche. La condition aux limites à la sortie de la couche d'Ekman (de la paroi supérieure) est alors (voir Pedlosky, 1979, pour plus de détails) :

$$u_z = -\frac{1}{2}E^{1/2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_z, \quad (3.7)$$

où  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  est la vorticité. Cette vitesse normale à la sortie de la couche d'Ekman provoque une brisure de la géostrophie à l'intérieur du fluide de l'ordre  $E^{1/2}$ . Cet écoulement secondaire, appelé pompage d'Ekman, est important pour la dynamique car il est lié à la vorticité à l'intérieur du volume. Un vortex cyclonique (de vorticité  $\omega_z = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_z$  positive) situé dans le volume (il est donc géostrophique) est liée à l'apparition d'une vitesse  $u_z$  négative *i.e.* dirigée vers l'intérieur du fluide (figure 3.1). Un vortex anticyclonique ( $\omega_z < 0$ ) provoque quant à lui, l'apparition d'une vitesse  $u_z$  dirigée vers la paroi. La couche d'Ekman agit comme un frein sur les colonnes de vorticité non nulle, agissant ainsi comme un frottement visqueux à la paroi : elle injecte du fluide, initialement en contact avec la paroi, dans le cyclone pour le ralentir et elle aspire du fluide à l'anticyclone pour le faire accélérer. Le pompage d'Ekman traduit donc l'effet de la viscosité aux bords. On qualifiera de frottement d'Ekman son action dissipative sur les tourbillons.

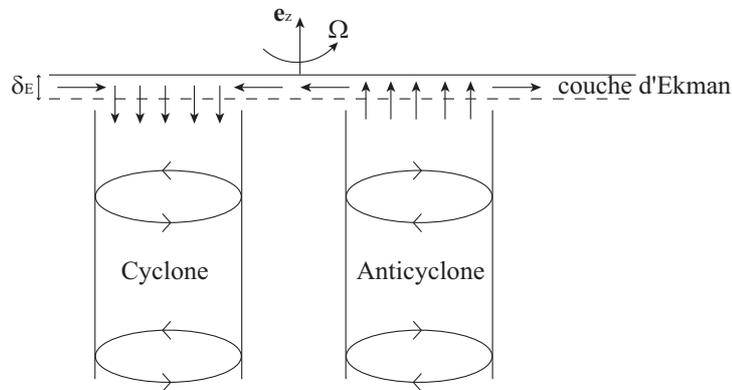


FIG. 3.1 – Schéma du pompage d'Ekman.

Dans le cas d'une sphère où la paroi est inclinée par rapport à l'axe de rotation, l'épaisseur de la couche d'Ekman est

$$\delta_E = \sqrt{\frac{2E}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z}} R.$$

La couche en  $E^{1/2}$  est singulière à l'équateur où  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{e}_z$  sont orthogonaux. Un développement des équations de la couche limite à un ordre supérieur par

rapport à celui des bords plats, montre que la couche limite est plus épaisse à l'équateur ( $\delta_E \sim E^{2/5}$ ) sur une hauteur  $E^{1/5}$  (e.g. Noir, 2000).

### Ondes inertielles

Les fluides incompressibles en rotation sont le siège d'ondes. En négligeant la viscosité et les termes non-linéaires, les ondes inertielles sont solutions de l'équation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\nabla p. \quad (3.8)$$

Pour une onde plane, la pression et la vitesse sont de la forme  $A \exp(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$ , où  $\mathbf{k}$  est le vecteur d'onde et  $\omega$  la fréquence de l'onde. En remplaçant cette expression dans l'équation (3.8), on obtient la relation de dispersion des ondes inertielles :

$$\omega = 2\Omega \frac{|k_z|}{|k|}.$$

La fréquence des ondes inertielles est comprise entre 0 et  $2\Omega$  et est d'autant plus grande que l'angle entre  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{e}_z$  est faible. Pour les écoulements géostrophiques  $k_z \rightarrow 0$  et donc  $\omega \rightarrow 0$ .

## 3.2 Aspect thermique

### 3.2.1 Équation de la chaleur

On s'intéresse à l'équation qui régit l'énergie interne massique du fluide  $\mathcal{E}$  en fonction de la pression et la température. Pour un fluide de Boussinesq, l'énergie interne ne dépend pas de la pression et on peut écrire :

$$\mathcal{E} = C_p T,$$

avec  $C_p$  la capacité calorifique à pression constante et  $T$  le champ de température. L'équation de l'énergie est (Tritton, 1988)

$$\rho_0 \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{q} + S,$$

où  $\mathbf{q}$  est le flux de chaleur et  $S$  le taux de production d'énergie lié aux sources internes de chaleur telle que la radioactivité. Dans l'approximation de Boussinesq,  $S$  ne contient pas de terme lié à une production de chaleur par dissipation visqueuse. La loi de Fourier relie le flux de chaleur au gradient de température :

$$\mathbf{q} = -k \nabla T,$$

où  $k$  est la conductivité thermique. L'équation de la chaleur exprimée en terme de température est

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T + \frac{S}{\rho_0 C_p}, \quad (3.9)$$

avec  $\kappa = k/\rho_0 C_p$  la diffusivité thermique du fluide.

### 3.2.2 Couche limite thermique

En présence de convection développée, la température du milieu interne est relativement homogène. Une couche limite thermique apparaît alors proche de la paroi pour raccorder la température de l'intérieur du volume aux conditions aux limites. Dans la couche limite thermique, le transfert de chaleur diffusif domine et le gradient de température est très fort.

Le nombre de Prandtl mesure la diffusion de la chaleur par rapport à la viscosité cinématique (diffusion de la quantité de mouvement) :

$$P = \frac{\nu}{\kappa}.$$

Les métaux liquides ont des nombres de Prandtl  $P < 1$ . Dans ces milieux, la diffusion thermique est très efficace et les couches limites thermiques sont épaisses par rapport aux couches limites visqueuses ou mal délimitées. Pour des milieux à grand nombre de Prandtl (telle que l'eau  $P = 7$ ), les couches limites thermiques sont en revanche fines.

Le flux total de chaleur transféré dans un fluide,  $q_{total}$ , peut être évalué en le comparant avec celui obtenu par la conduction seule dans un solide qui aurait les mêmes propriétés thermiques,  $q_{cond}$ . Le nombre de Nusselt quantifie ce rapport,

$$Nu = \frac{q_{total}}{q_{cond}}.$$

Pour des fluides à grand nombre de Prandtl, l'épaisseur des couches limites thermiques peut être évaluée comme  $\delta_T \sim Nu^{-1}R$  (Sumita & Olson, 2003).

## 3.3 Aspect magnétique

### 3.3.1 Électromagnétisme

Le champ électromagnétique est classiquement séparé en deux composantes vectorielles : le champ électrique  $\mathbf{E}$  et le champ magnétique  $\mathbf{B}$ . Les équations

de Maxwell permettent de relier le champ magnétique et électrique à leur source, la densité de courant électrique  $\mathbf{j}$  et la densité de charge électrique  $\rho_e$ ,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right), \quad (3.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}, \quad (3.12)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.13)$$

avec  $\mu_0$  la perméabilité magnétique du vide,  $\epsilon_0$  la permittivité électrique du vide et  $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$  où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide. Les densités de courant électrique et de charge électrique sont liées par la conservation de la charge,

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0.$$

La loi d'Ohm décrit le comportement des courants électriques,

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (3.14)$$

avec  $\sigma$  la conductivité électrique du fluide et où l'on a négligé le courant associé à l'advection de la charge  $\rho_e \mathbf{u}$  par rapport au courant de conduction associé au mouvement d'ions et d'électrons.

### 3.3.2 Approximation de la MHD et équation de l'induction magnétique

En prenant le rotationnel de la loi d'Ampère (3.11) et en utilisant l'absence de charge magnétique (3.10) et la loi d'Ohm (3.14), on obtient

$$-\nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \sigma \nabla \times (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E}.$$

Puis en utilisant la loi de Faraday (3.13),

$$\frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{\mu_0 \epsilon_0}{\mu_0 \sigma} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}.$$

Le terme de dérivée seconde en temps de  $\mathbf{B}$  correspond à la propagation d'ondes électromagnétiques. On pourra le négliger si

$$\frac{\mu_0 \epsilon_0}{\mu_0 \sigma} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \ll \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Si  $f$  est une fréquence caractéristique du champ magnétique alors la condition précédente s'exprime

$$f \ll \frac{\mu_0 \sigma}{\mu_0 \epsilon_0}.$$

Avec la diffusivité magnétique  $\eta = (\mu_0 \sigma)^{-1}$ , la condition devient

$$f \ll \frac{c^2}{\eta}.$$

Dans un métal liquide, la diffusivité magnétique est typiquement de l'ordre de  $1 \text{ m}^2/\text{s}$ . Les fréquences du champ magnétique devront donc être plus petites que  $10^{17} \text{ s}^{-1}$ , ce qui est aisément réalisé. Cette approximation constitue l'approximation de la magnétohydrodynamique et, dans ce cadre, l'équation de l'induction magnétique est :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (3.15)$$

### 3.3.3 Nombres sans dimensions

On a déjà introduit le nombre de Reynolds magnétique. Il s'agit du rapport entre temps diffusif magnétique  $R^2/\eta$  et temps advectif  $R/U$ ,

$$Rm = \frac{UR}{\eta}.$$

Pour avoir une dynamo, il est nécessaire que le temps caractéristique de diffusion du champ magnétique soit beaucoup plus long que le temps sur lequel il est produit par advection des lignes de champ par la vitesse. Il faut donc que le nombre de Reynolds magnétique soit plus grand que 1.

Le nombre de Prandtl magnétique quantifie le rapport entre temps de diffusion visqueuse  $R^2/\nu$  et temps de diffusion magnétique,

$$Pm = \frac{\nu}{\eta}.$$

Pour les métaux liquides dont la viscosité est faible, la dissipation du champ magnétique est beaucoup plus efficace que celle du champ de vitesse et donc  $Pm \ll 1$ .

## 3.4 En résumé

L'état d'un fluide conducteur d'électricité situé dans un repère en rotation et mis en mouvement par un forçage thermique ou un forçage mécanique aux frontières (auquel cas  $T$  est constante) est décrit par les équations suivantes :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \alpha g_0 \Theta \mathbf{r} + \frac{1}{\rho_0} \mathbf{j} \times \mathbf{B},$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T + \frac{S}{\rho_0 C_p},$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Voici donc le système d'équations qu'il va nous falloir résoudre (avec le choix de conditions limites adéquates) si l'on veut décrire la dynamique des noyaux planétaires. Pour que notre étude soit pertinente, on va essayer d'approcher autant que possible la gamme de paramètres appropriés. L'ordre de grandeur de ces paramètres estimés pour la Terre est donné dans le tableau 3.1.

	Symbole	Définition	Estimation
Nombre d'Ekman	$E$	$\nu/(\Omega R^2)$	$10^{-15}$
Nombre de Rossby	$Ro$	$U/(\Omega R)$	$10^{-7}$
Nombre de Reynolds	$Re$	$UR/\nu$	$10^8$
Nombre de Prandtl thermique	$P$	$\nu/\kappa$	0.1
Nombre de Reynolds magnétique	$Rm$	$UR/\eta$	$10^2 - 10^3$
Nombre de Prandtl magnétique	$Pm$	$\nu/\eta$	$10^{-5}$

TAB. 3.1 – Ordres de grandeur des nombres sans dimensions estimés pour le noyau terrestre.



# Chapitre 4

## Description de l'étude et objectifs

Les simulations dynamos tridimensionnelles utilisent à l'heure actuelle des paramètres très éloignés de ceux que l'on pense pertinents pour les noyaux planétaires. En particulier, les processus diffusifs sont surestimés ce qui implique que la dynamique des phénomènes de grande échelle spatiale n'est pas bien représentée. Afin de décrire une physique plus réaliste, notre démarche consiste à utiliser des modèles plus simples, soit basés sur des approximations appropriées, soit en modélisant des écoulements moins complexes que les écoulements convectifs où des phénomènes clés peuvent être étudiés spécifiquement.

En suivant cette logique, on a mené deux études numériques complémentaires :

1. Étude des mouvements convectifs turbulents dans les systèmes en rotation rapide, en présence ou en l'absence de champ magnétique auto-entretenu, en utilisant un modèle quasi-géostrophique. Le modèle quasi-géostrophique est basé sur l'importance des effets rotationnels sur la structure de l'écoulement et permet de réduire le problème de 3 à 2 dimensions spatiales pour le champ de vitesse. On va chercher à décrire les structures de grande échelle qui émergent pour un niveau élevé de turbulence et de fortes rotations. Ces mouvements de grande taille ont-ils une signature détectable sur les quantités observables à la surface des noyaux ou des planètes ? Comment interagissent les différentes structures de l'écoulement ? La topologie du champ magnétique est-elle différente de celle obtenue avec des modélisations tridimensionnelles ?
2. Étude des écoulements générés par une rotation différentielle et de l'ef-

fet dynamo qu'ils produisent. Grâce à leur relative simplicité, ces mouvements permettent de décrire en détail certains aspects de la mécanique des fluides en rotation telles que des instabilités hydrodynamiques et des ondes. Une bonne compréhension de la dynamique permet ensuite d'analyser précisément les mécanismes dynamos.

On s'est intéressé à deux cas : (i) écoulement de Couette sphérique produit entre deux sphères en rotation différentielle ; (ii) mouvement zonal (*i.e.* de direction azimutale et axisymétrique) à jets multiples.

On souhaite décrire la déstabilisation de ces écoulements en cisaillement. Sont-ils efficaces pour entretenir un champ magnétique ? Quels sont les ingrédients nécessaires à l'effet dynamo ?

## Deuxième partie

Étude de la convection  
thermique et de l'effet dynamo  
en régime développé dans une  
sphère en rotation rapide



# Chapitre 5

## Convection thermique développée quasi-géostrophique

### 5.1 Introduction

Les écoulements de fluide incompressible dans les systèmes en rotation rapide sont soumis à la contrainte de Proudman-Taylor qui impose que la vitesse de l'écoulement soit invariante par translation suivant l'axe de rotation du système. Les fluides mis en mouvement par un forçage thermique ne font pas exception à cette règle. Les études théoriques, les simulations numériques tridimensionnelles ainsi que les expériences de convection en rotation rapide montrent qu'au démarrage de la convection, l'écoulement s'organise en colonnes alignées avec l'axe de rotation et distribuées périodiquement dans la direction azimutale (figure 5.1(a)). Les expériences et études numériques montrent que la bidimensionnalité reste une caractéristique robuste même dans les régimes fortement surcritiques (figures 5.1(b)-5.1(c)).

Tirant partie de cette caractéristique, Or & Busse (1987) ont construit un modèle où la vitesse est calculée en deux dimensions dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation d'un anneau cylindrique partiel. Ce modèle, souvent qualifié de "Busse annulus" dans la littérature, a servi de base à de nombreuses études numériques et théoriques (*e.g.* Brummell & Hart, 1993; Jones *et al.*, 2003). Cardin & Olson (1994) ont adapté ce modèle à une géométrie sphérique. Le champ de température est également décrit en 2D. Cette approche 2D étant numériquement beaucoup plus légère que les simulations numériques 3D, les calculs 2D permettent d'atteindre des régimes surcritiques inaccessibles pour les codes 3D et d'explorer la convection développée. D'autres modèles purement 2D (vitesse et température) ont poursuivi cette démarche et amélioré le modèle de Cardin & Olson (Aubert *et al.*, 2003;

Gillet *et al.*, 2007). Ces modèles ont été validés par comparaison avec des résultats expérimentaux et numériques 3D, dans la gamme des paramètres où des recouvrements étaient possibles (faiblement surcritiques pour les simulations 3D et fortement surcritiques pour les expériences).

Le problème majeur de cette approche purement 2D est que la température n'est, en réalité, pas bidimensionnelle. Alors que les modèles 2D interdisent toute advection et flux de chaleur vertical<sup>1</sup>, des données de tomographie sismique à la CMB indiquent des hétérogénéités longitudinales et latitudinales de flux de chaleur (van der Hilst *et al.*, 2007). Ces dernières ne pourront pas être reproduites par un modèle purement 2D. Ces hétérogénéités de flux de chaleur peuvent cependant avoir un impact sur le mécanisme dynamo (Olson *et al.*, 2010). D'autre part, si l'on souhaite étendre le modèle à l'étude du mécanisme dynamo, on ne peut pas traiter le champ magnétique auto-entretenu en 2D, celui-ci étant nécessairement 3D (*e.g.* Roberts, 2007).

Afin de surmonter ce problème, Schaeffer & Cardin (2005*a*) ont construit un modèle où le champ de vitesse est calculé en 2D et le champ magnétique est modélisé en 3D. Le fluide est mis en mouvement par un forçage mécanique aux frontières (rotation différentielle). Grâce à cette approche, ils ont obtenu

<sup>1</sup>On utilisera vertical de manière impropre pour signifier la direction perpendiculaire au plan équatorial. Les directions dans le plan équatorial seront, quant à elles, qualifiées de horizontales.

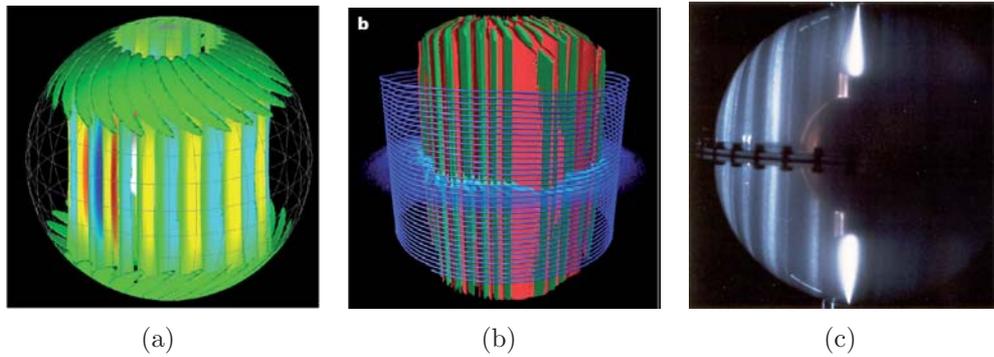


FIG. 5.1 – (a) Surfaces d'isovaleurs de la vorticité axiale au seuil de la convection pour  $E = 10^{-5}$  et  $P = 1$  (étude numérique, Dormy, 1997). (b) Surfaces d'isovaleurs de la vorticité axiale (rouge : positif, vert : négatif) et écoulement zonal (bleu) en convection surcritique (30 fois critique) pour  $E = 3 \times 10^{-7}$  et  $P = 1$  (étude numérique, Miyagoshi *et al.*, 2010). (c) Vue de côté des vortex en convection surcritique (50 fois critique) pour  $E = 2.5 \times 10^{-6}$  et  $P = 7$  (étude expérimentale, Cardin & Olson, 1994).

des dynamos pour des petits nombres Ekman ( $E \sim 10^{-6} - 10^{-8}$ ) et petits nombres de Prandtl magnétiques ( $Pm \sim 10^{-2} - 10^{-3}$ ). En comparaison, les simulations numériques 3D de dynamos convectives les plus performantes utilisent  $E \geq 10^{-7}$  et  $Pm$  de l'ordre de l'unité.

Nous poursuivons l'effort entrepris par ces modèles en construisant un modèle hybride où la vitesse est calculé en 2D et les champs de température et magnétique sont calculés en 3D (figure 5.2). Pour la vitesse, nous utilisons un modèle quasi-géostrophique (QG) semblable à celui utilisé par Schaeffer & Cardin (2005a) où la vitesse est calculée dans le plan équatorial et les effets 3D tel que la pente de la sphère et le pompage d'Ekman sont paramétrés. Les termes de couplage entre vitesse, température et champ magnétique nécessitent des interpolations entre grilles 2D et 3D. Cette approche hybride est efficace à petits nombres de Prandtl thermique et magnétique, lorsque la diffusion thermique ou magnétique est efficace sur des échelles spatiales plus grandes que la dissipation visqueuse et lisse les champs 3D. Cela nous permet d'utiliser une grille 3D grossière combinée à une grille 2D fine pour la vitesse. En utilisant ce type d'approche, Ponty *et al.* (2004) ont étudié l'induction magnétique à petits  $Pm$  ( $Pm \approx 10^{-3}$ ) dans un écoulement forcé de type tourbillons de Taylor-Green. On peut aussi utiliser un pas de temps plus grand pour l'intégration temporelle des champs 3D que pour le champ de vitesse (Schaeffer, 2004). Cela nous permet de gagner un temps de calcul précieux. L'approche hybride perd son intérêt à grand nombre de Prandtl par rapport aux simulations 3D car les passages 3D-2D et 2D-3D sont coûteux en temps de calcul lorsque la grille 3D est fine. Les métaux liquides que l'on rencontre dans les noyaux planétaires ayant des petits nombres de Prandtl thermique ( $P \sim 0.1 - 0.01$ ) et magnétique ( $Pm \sim 10^{-5}$ ), cette limitation ne constitue pas un problème. D'autre part, Zhang (1992) a montré le rôle crucial que joue le nombre de Prandtl sur la convection au seuil et faiblement non-linéaire. Il est donc important d'étudier le domaine  $P < 1$  pour envisager une description réaliste des métaux liquides.

Notre modèle ne possède pas de graine. On pourrait envisager de modéliser les vitesses à l'intérieur du cylindre tangent, le cylindre axial tangent à l'équateur de la graine, dans deux zones quasi-géostrophiques au dessus et au dessous de la graine. La difficulté serait alors de paramétrer les conditions aux limites au niveau du cylindre tangent (en particulier la singularité proche de l'équateur). D'autre part, la présence d'un cylindre aux parois rigides tout le long de l'axe est envisageable mais celui-ci est difficile à modéliser pour la partie tridimensionnelle du modèle. Notre modèle sans graine pourrait donc s'apparenter au noyau d'une planète jeune où la graine n'aurait pas encore commencé à cristalliser. En absence de graine, on ne peut donc pas imposer de flux de chaleur à la frontière interne comme mode de chauffage tel que dans

un bon nombre d'études numériques récentes. On impose alors un chauffage interne homogène qui s'apparente à un mode de chauffage par désintégration radioactive ou à un refroidissement séculaire (*e.g.* Jones, 2007).

Le domaine de validité de notre modèle est celui où la géostrophie est présente, c'est-à-dire les petits nombres d'Ekman (en pratique  $E \leq 10^{-5}$  (Dormy, 1997)), de Rossby ( $Ro < 0.1$ ) et d'Elssasser ( $\Lambda < 1$ ).

La transition entre régime de convection fortement dominée par la rotation et régime fortement non-linéaire (où les vitesses sont tridimensionnelles) se situe dans le domaine où poussée d'Archimède et force de Coriolis sont approximativement égales. Le rapport de ces deux forces est mesuré par le nombre de Rayleigh modifié (*e.g.* Gilman, 1977),

$$Ra^* = \frac{RaE^2}{P} = \frac{\alpha g_0 \Delta T}{\Omega^2},$$

avec  $g_0$  le gradient du champ de gravité et  $Ra$  le nombre de Rayleigh dont on donnera la définition dans la section suivante. Pour nos calculs quasi-géostrophiques, il est important de rester dans le domaine où la rotation domine la convection. Par conséquent, on veillera à bien rester dans le domaine  $Ra^* \ll 1$ . Dans le noyau, on ignore la valeur de  $Ra^*$  due à la grande

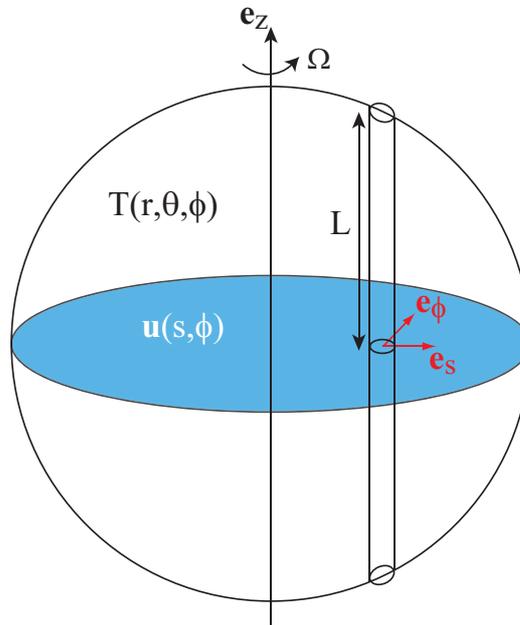


FIG. 5.2 – Schéma du modèle quasi-géostrophique dans une sphère pleine en rotation autour de l'axe  $z$ .

incertitude sur le gradient sur-adiabatique et donc  $\Delta T$ . En prenant une valeur de  $\Delta T = 1\text{K}$  entre haut et bas du noyau liquide terrestre (très largement supérieure aux estimations,  $\Delta T \sim 10^{-3} - 10^{-4}$  (Jones, 2000)) et  $\alpha = 10^{-5}\text{K}^{-1}$ ,  $g_0 R \approx 10\text{m s}^{-2}$ ,  $\Omega = 7.3 \times 10^{-5}\text{rad s}^{-1}$  et  $R = 3480\text{km}$ , on obtient comme borne supérieure  $Ra^* \approx 0.005$ . En ce qui concerne la convection thermique, les mouvements de grandes échelles dans le noyau liquide doivent donc conserver leur bidimensionnalité en première approximation.

Une étude récente de King *et al.* (2009) basée sur des résultats numériques et expérimentaux appuie l'idée que c'est le rapport entre épaisseurs de la couche limite thermique ( $\delta_T \propto R/Nu$ ) et de la couche d'Ekman ( $\delta_E \propto E^{1/2}R$ ) qui détermine la transition entre les deux régimes, la convection étant dominée par la rotation lorsque  $\delta_E < \delta_T$ . Rappelons que le nombre de Nusselt,  $Nu$ , est le rapport du flux de chaleur total (convection+conduction) sur le flux de chaleur conductif dans le cas statique. Lorsque l'on impose un chauffage interne, l'un et l'autre doivent être égaux si le système est dans un état stationnaire et donc  $Nu = 1$ . Il n'est donc pas aisé de déterminer l'épaisseur des couches limites thermiques dans nos simulations à partir du nombre de Nusselt. Cependant, à faible  $P$ , la conduction est efficace et les couches limites thermiques restent toujours bien plus épaisses que la couche d'Ekman (*cf.* figure 5.13).

Pour estimer l'importance de la force de Lorentz dans le noyau, on peut utiliser le nombre d'Elsasser qui mesure le rapport entre force de Lorentz et force de Coriolis,

$$\Lambda = \frac{\sigma B^2}{2\Omega\rho_0}.$$

L'intensité du champ poloïdal à la CMB est de  $0.3\text{mT}$  en moyenne mais l'intensité du champ à l'intérieur du noyau est mal contrainte, d'autant plus que le champ toroïdal est confiné dans la zone conductrice. De récentes estimations (Gillet *et al.*, 2010) donne une valeur de l'intensité du champ 10 fois plus importante dans le noyau qu'à la CMB. En prenant pour les valeurs estimées dans le noyau de la conductivité  $\sigma = 5 \times 10^5\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$  et de la masse volumique  $\rho_0 = 11 \times 10^3\text{kg m}^{-3}$ , on obtient  $\Lambda \approx 5$  pour  $B = 4\text{mT}$  (Gillet *et al.*, 2010) et  $\Lambda \approx 0.03$  pour  $B = 0.3\text{mT}$ . Il est donc très incertain que  $\Lambda < 1$  dans les conditions du noyau terrestre. De plus, on ne connaît pas la topologie du champ magnétique dans le noyau. Il est donc impossible d'estimer comment la force de Lorentz perturbe l'écoulement. Dans ce contexte, on va considérer que le champ magnétique est suffisamment faible ou encore que la topologie du champ est telle qu'elle n'affecte pas trop la bidimensionnalité de l'écoulement. Cette hypothèse pourra être vérifiée *a posteriori* en calculant le nombre d'Elssaser local basé sur l'amplitude du champ obtenu

dans la simulation.

Dans la suite de ce chapitre, on va tout d'abord décrire le système d'équations que l'on va résoudre numériquement. On présentera ensuite les résultats de convection linéaire au seuil puis les résultats de convection non-linéaire d'amplitude finie. Tous les résultats présentés dans ce chapitre sont sans champ magnétique. Le chapitre suivant sera consacré à l'intégration du champ magnétique dans notre modèle et à la présentation des résultats de dynamos cinématiques (définies ici par l'absence de la force de Lorentz, c'est-à-dire les forces magnétiques rétroagissant sur l'écoulement).

## 5.2 Formulation du modèle hybride

### 5.2.1 Mouvements convectifs quasi-géostrophiques

Dans un fluide en rotation rapide, la contrainte de Proudman-Taylor nous dit que les mouvements se font selon des contours géostrophiques qui correspondent à des surfaces de même hauteur  $L$  dans un récipient fermé<sup>2</sup>. Dans une sphère, les seuls mouvements géostrophiques sont donc des mouvements azimutaux axisymétriques. Les mouvements convectifs ne peuvent donc pas être purement géostrophiques puisque l'évacuation de la chaleur nécessite des mouvements du centre vers les bords. Lorsque le forçage thermique induit par la poussée d'Archimède est suffisant, la convection se développe sous forme d'une instabilité de l'état axisymétrique. La viscosité et/ou l'accélération entre donc dans l'équilibre dont dérive la solution convective. Comme nous l'avons vu sur la figure 5.1, les mouvements convectifs présentent, dans une bonne approximation, une invariance suivant l'axe de rotation. L'écoulement se met donc en place de façon à respecter au mieux la contrainte de Proudman-Taylor mais de faibles mouvements verticaux ont quand même lieu ; l'écoulement n'est pas entièrement bidimensionnel. Ces mouvements verticaux sont d'autant plus faibles que la pente des bords du conteneur est petite. Dans une description quasi-géostrophique, on va paramétrer les mouvements verticaux par une équation diagnostique alors que les mouvements horizontaux sont calculés par une équation différentielle en temps. Dans une sphère, le modèle QG n'est plus valide aux basses latitudes où la pente devient très grande. Conscients de cette difficulté, nous allons suivre la démarche de Schaeffer & Cardin (2005a) qui ont réussi à contourner partiellement le problème en imposant la conservation de la masse en trois dimensions. La

<sup>2</sup>Notons qu'il s'agit ici d'une couche de fluide profonde où la force de Coriolis ne varie pas avec la latitude.

confrontation entre les résultats des modèles numériques QG et expérimentaux (Aubert *et al.*, 2001; Gillet *et al.*, 2007) montrent que le modèle QG produit une solution satisfaisante même proche de l'équateur. Schaeffer & Cardin (2005a) montrent, par ailleurs, que la solution obtenue avec un modèle QG tronqué à un rayon  $s = 0.9$  présente les mêmes caractéristiques que dans le cas de la sphère pleine.

Nous commençons tout d'abord par adimensionner nos variables. Comme échelle de longueur, on prend le rayon de la sphère  $R$ . Bien que l'on souhaite développer un modèle où la viscosité ne joue pas un rôle prépondérant, on choisit néanmoins le temps de diffusion visqueux  $\tau_\nu = R^2/\nu$  comme échelle temporelle afin de pouvoir comparer aisément nos résultats avec les études précédentes (linéaires et nécessairement visqueuses au seuil). Par conséquent, la vitesse a pour échelle  $\nu/R$ . L'échelle de température est  $P\Delta T_s$ ,  $\Delta T_s$  étant la différence de température statique entre le centre et le bord de la sphère, avec  $P = \nu/\kappa$  le nombre de Prandtl (thermique). Finalement, l'échelle de pression est déduite d'un équilibre entre gradient de pression et terme visqueux  $\Pi = \rho R^2/\nu$ .

L'équation de Navier-Stokes (3.1) sous forme adimensionnée est alors

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2E^{-1} \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} + Ra \Theta \mathbf{r}, \quad (5.1)$$

avec le nombre d'Ekman

$$E = \frac{\nu}{\Omega R^2},$$

et le nombre de Rayleigh

$$Ra = \frac{\alpha \Delta T_s g_0 R^4}{\nu \kappa}.$$

Ici, on a pris en compte la poussée d'Archimède  $\mathbf{F}_A = Ra \Theta \mathbf{r}$  avec un champ de gravité qui est une fonction linéaire du rayon (sphérique). Comme l'étude présentée dans ce chapitre est sans champ magnétique, la force de Lorentz n'intervient pas.

Afin d'éliminer le gradient de pression de l'équation (5.1), on en prend le rotationnel. Ainsi, on obtient l'équation d'évolution de la vorticité  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] + 2E^{-1} \nabla \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}) = \\ -\nabla \times \nabla p + \nabla \times (\nabla^2 \mathbf{u}) + Ra \nabla \times (\Theta \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (5.2)$$

qui se simplifie comme

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - 2E^{-1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + Ra \nabla \times (\Theta \mathbf{r}). \quad (5.3)$$

Notons que l'on utilisera les coordonnées cylindriques  $(\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z)$  pour le champ de vitesse et les coordonnées sphériques  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$  pour le champ de température. En coordonnées cylindriques, le champ de gravité se projette en  $s$  et en  $z$ . Le rotationnel de la force d'Archimède est :

$$\begin{aligned}\nabla \times (\Theta \mathbf{r}) &= \nabla \times [\Theta (z\mathbf{e}_z + s\mathbf{e}_s)], \\ &= \frac{1}{s} \frac{\partial z \Theta}{\partial \phi} \mathbf{e}_s + \left( \frac{\partial s \Theta}{\partial z} - \frac{\partial z \Theta}{\partial s} \right) \mathbf{e}_\phi - \frac{1}{s} \frac{\partial s \Theta}{\partial \phi} \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

En coordonnées cylindriques, la vorticité  $(\omega_s, \omega_\phi, \omega_z)$  est :

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{cases} \frac{1}{s} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} - \frac{\partial u_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial u_s}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial s} \\ \frac{1}{s} \frac{\partial s u_\phi}{\partial s} - \frac{1}{s} \frac{\partial u_s}{\partial \phi} \end{cases}.$$

Les 3 composantes de l'équation (5.3) sont :

$$\frac{\partial \omega_s}{\partial t} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) u_s + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega_s - 2E^{-1} \frac{\partial u_s}{\partial z} = [\nabla^2 \boldsymbol{\omega}]_s + Ra \frac{1}{s} \frac{\partial z \Theta}{\partial \phi}, \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial \omega_\phi}{\partial t} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) u_\phi + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega_\phi - 2E^{-1} \frac{\partial u_\phi}{\partial z} = [\nabla^2 \boldsymbol{\omega}]_\phi + Ra \left( \frac{\partial s \Theta}{\partial z} - \frac{\partial z \Theta}{\partial s} \right), \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) u_z + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega_z - 2E^{-1} \frac{\partial u_z}{\partial z} = [\nabla^2 \boldsymbol{\omega}]_z - Ra \frac{\partial \Theta}{\partial \phi}. \quad (5.6)$$

On décompose le champ de vitesse et la vorticité tels que :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}^1 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (5.7)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^0 + \boldsymbol{\omega}^1 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (5.8)$$

avec  $u^1/u^0 \sim \epsilon$ .  $\mathbf{u}^0$  est le champ de vitesse d'ordre 0, qui est celui que l'on veut décrire.  $\mathbf{u}^1$  est une perturbation de ce champ qui est d'ordre de grandeur  $\epsilon$  où  $\epsilon \ll 1$  est un paramètre de notre système (typiquement  $\epsilon = E$  ou  $\epsilon = \beta$  avec  $\beta$  la pente du conteneur). On substitue (5.7) et (5.8) dans les équations (5.4)-(5.6). A l'ordre 0 en  $\epsilon$ , on a

$$\frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial z} = 0. \quad (5.9)$$

$\mathbf{u}^0$  est donc le champ de vitesse quasi-géostrophique qui satisfait la contrainte de Proudman-Taylor. Par conséquent,  $u_s^0$ ,  $u_\phi^0$  et  $u_z^0$  sont indépendants de  $z$ .

De plus, on considère que le transport au travers du plan équatorial est négligeable (Dormy, 1997) ce qui implique  $u_z^0 = 0$ . On en déduit que  $\omega_s^0 = \omega_\phi^0 = 0$  et que  $\omega_z^0$  est indépendant de  $z$ . On obtient donc

$$\mathbf{u}^0 = u_s^0(s, \phi)\mathbf{e}_s + u_\phi^0(s, \phi)\mathbf{e}_\phi, \quad (5.10)$$

$$\boldsymbol{\omega}^0 = \omega_z^0(s, \phi)\mathbf{e}_z. \quad (5.11)$$

L'équation (5.9) est une équation diagnostique. Il s'agit de la même équation que l'équation (3.5) à une constante près. Elle nous permet de déterminer le champ de vitesse si l'on a connaissance du champ de pression en tout point. Comme on ne dispose pas d'une telle connaissance, il nous faut développer l'ordre suivant en  $\epsilon$  pour obtenir une équation pronostique :

$$\frac{\partial u_s^1}{\partial z} = -\frac{ERa}{2} \frac{1}{s} \frac{\partial z \Theta}{\partial \phi}, \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial u_\phi^1}{\partial z} = -\frac{ERa}{2} \left( s \frac{\partial \Theta}{\partial z} - z \frac{\partial \Theta}{\partial s} \right), \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial \omega_z^0}{\partial t} + (\mathbf{u}^0 \cdot \nabla) \omega_z^0 - (\boldsymbol{\omega}^0 \cdot \nabla) u_z^1 - 2E^{-1} \frac{\partial u_z^1}{\partial z} = \nabla^2 \omega_z^0 - Ra \frac{\partial \Theta}{\partial \phi}. \quad (5.14)$$

L'équation (5.14) constitue l'équation de base du modèle quasi-géostrophique. Comme on peut le remarquer dans l'équation (5.14), on garde le terme  $(\boldsymbol{\omega}^0 \cdot \nabla) u_z^1$  qui est pourtant un terme d'ordre supérieur en  $\epsilon$ . Ce choix se justifie par le fait que le terme  $\partial_z u_z^1$  contient un terme dû aux mouvements verticaux créés par la pente et un terme dû au pompage d'Ekman comme on le détaillera dans la section suivante. Dans un modèle quasi-géostrophique, la pente  $\beta$  est considérée comme petite (d'ordre  $\epsilon$ ). Cependant dans une sphère la pente devient d'ordre 1 aux basses latitudes ( $\beta = 1$  pour  $s = 0.62$ ) et même infinie à l'équateur. La vitesse  $u_z^1$  contient donc un terme qui est de l'ordre de  $u_s^0$  lorsque la pente est d'ordre 1. Par conséquent, on conserve le terme de pente qui génère  $\partial_z u_z^1$  dans le terme non-linéaire  $(\boldsymbol{\omega}^0 \cdot \nabla) u_z^1$  mais on négligera le terme lié au pompage d'Ekman qui est d'ordre  $E^{1/2}$ . En revanche, pour le terme issu de la force de Coriolis  $2E^{-1} \partial_z u_z^1$ , on doit prendre en compte le pompage d'Ekman car il s'agit de la source de dissipation essentielle à petits  $P$  (Gillet *et al.*, 2007).

D'autre part, il est intéressant de noter que seule la composante cylindrique de la force d'Archimède (en fait de la gravité) intervient dans les mouvements convectifs quasi-géostrophiques. On voit que seuls les mouvements non-axisymétriques (dérivée en  $\phi$  non nulle) sont forcés par la force d'Archimède. Les mouvements convectifs sont donc des mouvements non-axisymétriques.

La philosophie de notre approche QG, qui se veut plus simple qu'une approche 3D, nous amène à négliger les vitesses  $u_s^1$  et  $u_\phi^1$ . L'équation (5.13) est souvent appelée équation du vent thermique. Elle correspond aux mouvements azimutaux géostrophiques engendrés par le fait que les lignes isothermes ne se juxtaposent pas avec les lignes isogravités. En effet, la création d'une anomalie de température froide près de la bordure externe par exemple, provoque l'apparition d'un mouvement radial dirigé vers le centre. Ce mouvement va être dévié par la force de Coriolis et une vitesse azimutale prograde va apparaître. Ce mouvement, le "vent thermique", est dépendant de  $z$  et va provoquer un cisaillement des panaches thermiques mais aussi des lignes de champ magnétique lorsque celui-ci est présent. Pour cette raison, on pense qu'il peut être important pour le mécanisme dynamo. Afin de ne pas trop compliquer notre problème mais d'étudier son rôle dans notre travail sur la dynamo générée par des mouvements convectifs QG, on souhaite l'implémenter dans notre code. Afin de garder un champ de vitesse qui soit à divergence nulle, on prend la composante axisymétrique de l'équation (5.13) :

$$\frac{\partial \overline{u_\phi^1}}{\partial z} = -\frac{ERa}{2} \left( s \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial z} - z \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial s} \right) = \frac{ERa}{2} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial \theta}, \quad (5.15)$$

où  $\overline{(\cdot)}$  signifie moyenne suivant  $\phi$ . Cette perturbation 3D de notre champ de vitesse intervient seulement dans les non-linéarités de l'équation de la température (et du champ magnétique) où notre champ de vitesse doit être interpolé en 3D.

Comme on dispose de la valeur de  $u_z$  aux bords et que, d'autre part, la force d'Archimède est 3D comme le champ de température, il est commode de prendre la moyenne de l'équation (5.14) suivant  $z$  :

$$\left\langle \frac{\partial \omega_z^0}{\partial t} \right\rangle - \langle (\boldsymbol{\omega}^0 \cdot \nabla) u_z^1 \rangle + \langle (\mathbf{u}^0 \cdot \nabla) \omega_z^0 \rangle - 2E^{-1} \left\langle \frac{\partial u_z^1}{\partial z} \right\rangle = \langle \nabla^2 \omega_z^0 \rangle - Ra \left\langle \frac{\partial \Theta}{\partial \phi} \right\rangle,$$

où

$$\langle A(s, \phi, z) \rangle = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} A(s, \phi, z) dz,$$

avec  $L(s) = \sqrt{1-s^2}$ , la demi-hauteur de la sphère au rayon  $s$ . Notons que l'on exclut les couches d'Ekman dans l'intégration. Les termes  $\omega_z^0$  et  $\mathbf{u}^0$  étant indépendants de  $z$ , leur dérivées en  $s$  et  $\phi$  le sont également et leur valeur moyenne est égale à leur valeur dans le plan équatorial. Finalement, l'équation des mouvements quasi-géostrophiques que l'on se propose de résoudre est

$$\frac{\partial \omega_z^0}{\partial t} + u_s^0 \frac{\partial \omega_z^0}{\partial s} + \frac{u_\phi^0}{s} \frac{\partial \omega_z^0}{\partial \phi} - \omega_z^0 \left\langle \frac{\partial u_z^1}{\partial z} \right\rangle - 2E^{-1} \left\langle \frac{\partial u_z^1}{\partial z} \right\rangle = \nabla^2 \omega_z^0 - Ra \left\langle \frac{\partial \Theta}{\partial \phi} \right\rangle. \quad (5.16)$$

Dans la section suivante, on décrit le calcul du terme  $\langle \partial_z u_z^1 \rangle$ . Comme on l'a vu, les mouvements convectifs sont des mouvements non-axisymétriques. En résolvant l'équation de la vorticité plutôt que l'équation pour la vitesse, on obtient une solution à une constante près qui est la rotation solide. L'équation de la vorticité est résolue pour les termes  $m \neq 0$  dans l'espace spectral (sauf pour les termes non-linéaires). Notons que, pour l'implémentation numérique de la vitesse, on effectue une décomposition des scalaires sur des modes de Fourier (voir Annexe A).  $m = 0$  correspond au mode axisymétrique. Le mouvement axisymétrique azimutal (souvent appelé vent zonal) est indirectement forcé par la convection. Ce mouvement zonal peut être de très grande amplitude et ne peut être ignoré. Nous devons donc résoudre une équation pour le mouvement zonal (section 5.2.2) que nous traitons à part car elle peut être résolue dans l'espace physique. La circulation zonale comprend le terme de rotation solide, ainsi aucun terme de vitesse n'est oublié.

### Evaluation de $\partial_z u_z^1$ : effet de pente et pompage d'Ekman

Notre système étant incompressible, l'équation de la continuité s'écrit

$$\frac{1}{s} \frac{\partial s u_s^0}{\partial s} + \frac{1}{s} \frac{\partial u_\phi^0}{\partial \phi} + \frac{\partial u_z^1}{\partial z} = 0, \quad (5.17)$$

puisque l'on néglige les vitesses  $u_s^1$  et  $u_\phi^1$  (sauf éventuellement le vent thermique  $\overline{u_\phi^1}$  pour lequel  $\partial_\phi \overline{u_\phi^1} = 0$ ).  $u_s^0$  et  $u_\phi^0$  étant indépendantes de  $z$ , cela implique que  $\partial_z u_z^1$  est également indépendant de  $z$  et donc  $u_z^1$  est une fonction linéaire de  $z$ . Comme on estime que peu de flux de matière croise le plan équatorial,  $u_z^1$  est considéré nul à l'équateur et maximal près des bords (Gillet & Jones, 2006; Dormy, 1997). On peut écrire :

$$\left\langle \frac{\partial u_z^1}{\partial z} \right\rangle = \frac{u_z^1(+L) - u_z^1(-L)}{2L} \quad \text{et} \quad u_z^1 = \frac{u_z^1(+L) - u_z^1(-L)}{2L} z + \text{constante.}$$

Comme  $u_z^1(z=0) = 0$ , la constante est nulle.  $u_z^1(\pm L)$  peut être déterminé grâce aux conditions limites,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\pm L} = u_r = \cos \theta u_z + \sin \theta u_s &= z u_z + s u_s \\ &= \pm \sqrt{1-s^2} u_z(s, \phi, \pm L) + s u_s(s, \phi), \end{aligned}$$

avec le vecteur normal dirigé vers l'extérieur à la frontière  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$  et  $r = 1$  à la frontière. Finalement,

$$\pm u_z^1(\pm L) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\pm L} - \frac{s}{\sqrt{1-s^2}} u_s^0 \quad (5.18)$$

Le terme de droite est appelé terme de pente. En effet, par conservation de la masse tout mouvement cylindrique  $u_s^0$  qui touche le bord induit un mouvement vertical. Ce mouvement vertical sera faible si la pente de la sphère est faible.

Les bords de notre récipient étant impénétrables, on devrait normalement considérer que  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\pm L} = 0$ . Cependant comme décrit dans le chapitre introductif (section 3.1.2), une couche limite visqueuse, la couche d'Ekman, se met en place au bord. Cette couche a pour propriété d'avoir une épaisseur proportionnelle à  $E^{1/2}$  et d'induire un mouvement normal à la paroi, le pompage d'Ekman, d'ordre  $E^{1/2}$ , dont la direction dépendant du signe de la vorticité du mouvement dans le volume (équation (3.7) dans le cas où l'on néglige la courbure du bord). En utilisant une approche asymptotique, Greenspan (1968) donne une formulation du pompage d'Ekman qui prend en compte la courbure des bords :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\pm L} = -\frac{E^{1/2}}{2} \mathbf{n} \cdot \nabla \times \left( \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{u} \pm \mathbf{u}}{\sqrt{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z|}} \right). \quad (5.19)$$

La dérivation de cette condition limite nécessite que les variations temporelles du champ de vitesse soit plus lente que  $\Omega^{-1}$  ce qui est intrinsèquement vrai pour le modèle quasi-géostrophique où l'on néglige les ondes inertielles. On obtient la formule dans le cas sphérique lorsque  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$ , qui permet de paramétrer le pompage dans notre modèle QG (*cf.* annexe A). Bien que l'on s'attende à ce que celui-ci soit faible pour la gamme des petits nombres d'Ekman explorés, il est plus important que la dissipation visqueuse en volume pour  $P \ll 1$ . Le pompage d'Ekman permet aussi une recirculation secondaire de la vitesse méridienne qui peut s'avérer intéressante lorsque l'on souhaite produire un champ dynamo (Busse, 1975).

Finalement, on obtient :

$$\left\langle \frac{\partial u_z^1}{\partial z} \right\rangle = \frac{1}{2L} (u_z^1(+L) - u_z^1(-L)), \quad (5.20)$$

$$\left\langle \frac{\partial u_z^1}{\partial z} \right\rangle = \frac{1}{2(1-s^2)} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{+L} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{-L}) - \frac{1}{2(1-s^2)} 2s u_s^0, \quad (5.21)$$

$$\left\langle \frac{\partial u_z^1}{\partial z} \right\rangle = E^{1/2} f(u_s^0, u_\phi^0, s) + \beta u_s^0, \quad (5.22)$$

avec  $\beta$ , un facteur lié à la pente de l'hémisphère nord de la sphère externe,

$$\beta = \frac{1}{L} \frac{dL}{ds} = -\frac{s}{1-s^2}. \quad (5.23)$$

### Fonction courant

Lorsque l'on traite un champ de vitesse à divergence nulle en 2D, il est souvent commode d'utiliser une fonction scalaire appelée fonction courant qui est définie à partir des 2 composantes de la vitesse.

Dans notre cas, on peut définir une telle fonction par

$$u_s^0 = \frac{1}{s} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}, \quad (5.24)$$

et

$$u_\phi^0 = -\frac{\partial \psi}{\partial s} - \beta \psi. \quad (5.25)$$

On prend donc en compte le fait que notre vitesse n'est pas tout à fait bidimensionnelle à cause des bords pentés; la conservation de la masse est assurée grâce à une vitesse verticale proportionnelle à  $\beta \psi z$ . On néglige ici la contribution du pompage d'Ekman.

Notons qu'à cause du terme de pente,  $\psi$  ne correspond pas exactement aux trajectoires à un instant donné puisque  $\mathbf{u} \cdot \nabla \psi \neq 0$ .

La vorticité axiale  $\omega_z^0$  est liée à la fonction courant  $\psi$  par

$$\omega_z^0 = -\nabla^2 \psi - \beta \left( \frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{\psi}{s} \right) - \psi \frac{d\beta}{ds}, \quad (5.26)$$

avec  $\nabla^2$ , le laplacien (horizontal) en coordonnées cylindriques

$$\nabla^2(\cdot) = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left( s \frac{\partial(\cdot)}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \phi^2}.$$

On résout l'équation (5.16) pour la fonction courant plutôt que  $\omega_z^0$  car  $\psi$  nous permet un calcul aisé des vitesses (dont on a besoin pour les termes non-linéaires) (*cf.* Annexe A).

### Conditions limites pour les mouvements convectifs

Au bord externe, les conditions limites de non-glissement sont

$$\mathbf{u}(s=1) = 0 \iff u_s(s=1) = 0 \quad \text{et} \quad u_\phi(s=1) = 0, \quad (5.27)$$

ce qui implique

$$\psi(s=1) = 0, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial s} \right|_{s=1} = 0 \quad \text{et} \quad \omega_z(s=1) = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2}. \quad (5.28)$$

Au centre, pour  $m > 1$ , les vitesses ne croisent pas l'axe donc

$$u_s(s=0) = 0 \quad \text{et} \quad u_\phi(s=0) = 0, \quad (5.29)$$

ce qui implique

$$\psi(s=0) = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial s} \right|_{s=0} = 0. \quad (5.30)$$

Pour  $m = 1$ , on doit permettre à la vitesse de croiser l'axe (voir l'annexe A pour quelques précisions). Alors que  $\psi^{m=1}(s=0) = 0$  en revanche  $(\psi^{m=1}/s)(s=0) \neq 0$ . La définition des vitesses radiale et azimutale n'a pas vraiment de sens au centre mais on peut considérer qu'il s'agit de la vitesse pour  $s \rightarrow 0$ . On choisit alors

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\psi^{m=1}(s)}{s} = \text{constante} \approx \frac{\psi^{m=1}(s=ds)}{s(s=ds)}, \quad (5.31)$$

où  $ds$  est le pas de grille radiale entre le point  $s = 0$  et son voisin. Ce qui implique

$$u_s(s=0) = u_s(s=ds). \quad (5.32)$$

Par ailleurs, en utilisant une dérivée à droite, on a

$$u_\phi(s=0) = -\frac{\psi(s=ds)}{ds}. \quad (5.33)$$

De plus, pour tous les modes  $m \geq 1$ , on a par symétrie

$$\omega_z(s=0) = 0. \quad (5.34)$$

### 5.2.2 Écoulement zonal

L'écoulement zonal (azimutal et axisymétrique) ne subit pas de forçage thermique. Cependant, un écoulement zonal est indirectement généré. Ce mouvement satisfait la contrainte de Proudman-Taylor (5.9). Dans le cas axisymétrique ( $m = 0$ ) à l'ordre 0, l'équation de la conservation de la masse est

$$\frac{1}{s} \frac{\partial s \overline{u_s^0}}{\partial s} + \frac{\partial \overline{u_z^0}}{\partial z} = 0, \quad (5.35)$$

où  $\overline{(\cdot)}$  signifie une moyenne azimutale ( $\phi$ ). On a donc  $\overline{u_s^0} = 0$  : il n'y a pas d'effet de pente associé au mouvement axisymétrique.

La composante azimutale de l'équation de quantité de mouvement à l'ordre 1 en  $\epsilon$  est

$$\frac{\partial u_\phi^0}{\partial t} + [(\mathbf{u}^0 \cdot \nabla) \mathbf{u}^0]_\phi + 2E^{-1} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}^1) \cdot \mathbf{e}_\phi = -\frac{\partial p^1}{\partial \phi} + [\nabla^2 \mathbf{u}^0]_\phi, \quad (5.36)$$

avec les termes non-linéaires,

$$[(\mathbf{u}^0 \cdot \nabla) \mathbf{u}^0]_\phi = u_s^0 \frac{\partial u_\phi^0}{\partial s} + \frac{u_\phi^0}{s} \frac{\partial u_\phi^0}{\partial \phi} + \frac{u_\phi^0 u_s^0}{s},$$

et la force de Coriolis,

$$(\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}^1) \cdot \mathbf{e}_\phi = u_s^1.$$

En moyennant en  $\phi$ , l'équation (5.36) se réduit à

$$\frac{\partial \overline{u_\phi^0}}{\partial t} = \nabla^2 \overline{u_\phi^0} - \frac{\overline{u_\phi^0}}{s^2} - 2E^{-1} \overline{u_s^1} - \overline{u_s^0 \frac{\partial u_\phi^0}{\partial s}} - \frac{\overline{u_\phi^0 u_s^0}}{s}. \quad (5.37)$$

On voit qu'il va falloir estimer la composante axisymétrique  $\overline{u_s^1}$  de la vitesse radiale. Celle-ci ne peut pas être négligée car elle nous permet de modéliser l'action de la friction d'Ekman sur  $u_\phi^0$ . En utilisant la formule du pompage d'Ekman pour des bords pentus (équation (5.19)) et la conservation de la masse dans une coquille cylindrique à bords sphériques, on peut montrer que (*cf.* Aubert, 2001, pour le détail du calcul)

$$\overline{u_s^1} = \frac{E^{1/2}}{2L\sqrt{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z|}} \overline{u_\phi^0} = \frac{E^{1/2}}{2(1-s^2)^{3/4}} \overline{u_\phi^0}, \quad (5.38)$$

avec  $\mathbf{n}$  le vecteur normal à la frontière externe.

Finalement, l'équation pour l'écoulement zonal est

$$\frac{\partial \overline{u_\phi^0}}{\partial t} = \left( \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{1}{s^2} - \frac{E^{-1/2}}{(1-s^2)^{3/4}} \right) \overline{u_\phi^0} - \overline{u_s^0 \frac{\partial u_\phi^0}{\partial s}} - \frac{\overline{u_\phi^0 u_s^0}}{s}. \quad (5.39)$$

Les seuls termes moteurs du mouvement zonal sont les 2 derniers termes de droite, interaction non-linéaire entre les vitesses convectives.

### Vorticité

La vorticité créée par l'écoulement zonal  $m = 0$  doit être prise en compte dans l'équation (5.16) pour le calcul des termes non-linéaires de l'écoulement  $m \neq 0$

$$\overline{\omega_z^0} = \frac{1}{s} \frac{\partial s \overline{u_\phi^0}}{\partial s}.$$

### Conditions limites

On utilise des conditions de non-glissement sur la sphère externe :

$$\overline{u_\phi^0}(s=1) = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\omega_z^0}(s=1) = \left. \frac{\partial \overline{u_\phi^0}}{\partial s} \right|_{s=1}.$$

Par symétrie au centre,

$$\overline{u_\phi^0}(s=0) = 0.$$

On peut avoir une rotation solide au centre,

$$\left. \frac{\partial \overline{u_\phi^0}/s}{\partial s} \right|_{s=0} = 0 \longrightarrow \overline{\omega_z^0}(s=0) = 2 \left. \frac{\overline{u_\phi^0}}{s} \right|_{s \rightarrow 0} = 2 \left. \frac{\overline{u_\phi^0}}{s} \right|_{s=ds}.$$

### 5.2.3 Équation de la chaleur

On décompose le champ de température  $T$  en un champ de température statique  $T_s$  et un champ d'anomalie de température  $\Theta$

$$T(r, \theta, \phi, t) = T_s(r) + \Theta(r, \theta, \phi, t). \quad (5.40)$$

Le champ de température statique est la solution de l'équation de la chaleur (3.9) dans le cas conductif et stationnaire pour lequel  $\mathbf{u} = 0$  et  $\Theta = 0$  :

$$\kappa \nabla^2 T_s = -\frac{S}{\rho_0 C_p}.$$

Comme  $S$  possède une distribution homogène et que  $T_s$  ne dépend que de  $r$  :

$$T_s(r) = -\frac{S}{6\rho_0 C_p \kappa} r^2 + T_0.$$

Pour l'adimensionnement de la température, on choisit  $P\Delta T_s$  avec

$$\Delta T_s = T_s(0) - T_s(R) = \frac{S}{6\rho_0 C_p \kappa} R^2.$$

On met l'accent sur le fait que choisir une différence de température statique  $\Delta T_s$  revient à imposer à un chauffage interne  $S$ .  $\Delta T_s$  a en fait moins de sens physique que  $S$  une fois que la convection est développée car il n'est défini que dans le cas statique. Le profil de température statique sous forme adimensionnée est donc

$$\tilde{T}_s(r) = -P^{-1} \tilde{r}^2 + \tilde{T}_0. \quad (5.41)$$

Le flux de chaleur conduit le long du profil de température statique est

$$\mathbf{q}_s = -k \frac{dT_s}{dr} \mathbf{e}_r. \quad (5.42)$$

Il s'agit du flux imposé dans le volume. En prenant comme échelle caractéristique du flux de chaleur  $kP\Delta T_s/R$ ,  $\mathbf{q}_s$  vaut, sous forme adimensionnée,

$$\tilde{\mathbf{q}}_s = 2P^{-1} \tilde{r} \mathbf{e}_r. \quad (5.43)$$

En substituant la décomposition (5.40) dans l'équation de la chaleur (3.9), on obtient

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T_s + \mathbf{u} \cdot \nabla \Theta = \kappa \nabla^2 T_s + \kappa \nabla^2 \Theta + \frac{S}{\rho_0 C_p}.$$

Par substitution du profil de  $T_s$ , l'équation de l'anomalie de température sous forme adimensionnée est

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \Theta = P^{-1} (2ru_r + \nabla^2 \Theta), \quad (5.44)$$

où l'on a abandonné la notation  $(\tilde{\cdot})$  sur les variables adimensionnées par souci de clarté.

### Conditions limites

On choisit des conditions limites de température fixe sur la sphère externe.

$$\Theta(r = 1) = 0.$$

Au centre, la température n'est pas fixée. Par symétrie, la condition au centre pour le degré de l'harmonique sphérique  $l = 0$  est

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right|_{r=0} = 0,$$

et pour les degrés  $l \neq 0$  :

$$\Theta(r = 0) = 0.$$

### 5.2.4 Implémentation numérique

L'implémentation numérique du code est décrite en détail dans l'annexe A. On utilise des différences finies dans la direction radiale sur une grille irrégulière (plus dense aux bords pour résoudre les couches limites). Dans la direction azimutale, le champ de vitesse est développé en série de Fourier. Le champ de température est décomposé en harmoniques sphériques dans les directions angulaires. La grille 2D pour la vitesse contient généralement plus de points dans les directions radiale et azimutale que la grille 3D de la température.

### 5.2.5 Vorticité potentielle

On fait ici une digression vers la physique des fluides en rotation.

L'équation de la vorticité,

$$\frac{\partial \omega_z^0}{\partial t} + (\mathbf{u}^0 \cdot \nabla) \omega_z^0 - (2E^{-1} + \omega_z^0) \left\langle \frac{\partial u_z^1}{\partial z} \right\rangle = \nabla^2 \omega_z^0 - Ra \left\langle \frac{\partial \Theta}{\partial \phi} \right\rangle, \quad (5.45)$$

peut s'écrire

$$\frac{dq}{dt} = \nabla^2 \omega_z^0 + 2E^{-1} f(u_s, u_\phi, s) - Ra \left\langle \frac{\partial \Theta}{\partial \phi} \right\rangle, \quad (5.46)$$

où l'on a négligé la vorticité de l'écoulement face à la vorticité planétaire et avec  $q$  le champ de vorticité potentielle,

$$q = \omega_z^0 - 2E^{-1} \ln L. \quad (5.47)$$

Hors des sources (force d'Archimède) et des puits (dissipation visqueuse en volume et sur les bords), la vorticité potentielle est une quantité matériellement conservée le long d'un trajet d'une particule fluide. Une colonne fluide se déplaçant vers l'axe de rotation subit un étirement suite à l'augmentation de hauteur  $L$ . D'après la conservation de la vorticité potentielle, la colonne fluide acquiert une vorticité positive (cyclone). Un déplacement radial de la colonne vers l'extérieur induit une contraction de la colonne (diminution de  $L$ ) et ainsi la colonne acquiert une vorticité négative (anticyclone). Cet effet est souvent qualifié "d'effet  $\beta$ " et l'équation (5.46) est appelé équation du plan  $\beta$  (Pedlosky, 1979).

En sciences atmosphériques et océanographiques, la dynamique des écoulements est souvent modélisée par un modèle de couche mince où l'on fait l'hypothèse que la dimension verticale du problème est très petite par rapport aux dimensions horizontales<sup>3</sup> et où la sphéricité de la planète est négligée sauf pour le paramètre de Coriolis (Pedlosky, 1979). Le paramètre de Coriolis,  $f$ , exprime la variation latitudinale de l'angle entre direction de l'axe de rotation et direction normale au plan horizontal. Dans le modèle du plan  $\beta$ , le paramètre de Coriolis est linéarisé autour d'une valeur moyenne de latitude  $\lambda_0$ ,

$$f \sim f_0 + \beta_0 y, \quad (5.48)$$

avec  $y$  la direction latitudinale (vers le nord),  $f_0 = 2\Omega \sin \lambda_0$  et  $\beta_0 = (2\Omega \cos \lambda_0)/r_0$ . Il existe une équivalence dynamique exacte entre la variation du paramètre de Coriolis et la variation de  $L$ , souvent appelée variation "topographique".

<sup>3</sup>Dans le modèle de couche mince, horizontal désigne la direction parallèle à la surface de la Terre.

### 5.2.6 Ondes de Rossby

En négligeant les termes non-linéaires, la dissipation visqueuse et hors des sources, l'équation (5.45) devient

$$\frac{\partial \omega_z^0}{\partial t} - 2E^{-1}\beta u_s^0 = 0. \quad (5.49)$$

La vitesse et la vorticité peuvent être exprimé en fonction de  $\psi$ , la fonction courant :

$$\omega_z^0 = -\nabla^2 \psi \quad \text{et} \quad u_s^0 = -\frac{1}{s} \frac{\partial \psi}{\partial \phi},$$

où l'on considéré que  $\beta$  est faible. Dans le cas d'une onde plane,  $\psi = \hat{\psi} e^{\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t}$  avec  $\omega$  la fréquence et  $\mathbf{k}$  le vecteur d'onde, on obtient la relation de dispersion des ondes de Rossby,

$$\omega = -2\beta E^{-1} \frac{k_\phi}{k^2},$$

soit sous forme dimensionnée,

$$\omega = -2\Omega\beta \frac{k_\phi}{k^2},$$

avec  $k^2 = k_\phi^2 + k_s^2$ .

Les ondes de Rossby ont les propriétés suivantes :

- Leur force de rappel est l'effet  $\beta$ .
- Elles ne se propagent pas dans un récipient à bords plats ( $\beta = 0$ ).
- Leur fréquence est directement liée à la pente. La pente étant faible dans l'approximation du plan  $\beta$ , se sont des ondes lentes dont la fréquence est inférieure à  $2\Omega$ .
- Leur fréquence est inversement proportionnelle à leur nombre d'onde : les ondes de Rossby de grande taille (petit  $k$ ) se propagent plus vite que celles de petite taille.
- Elles se propagent dans la direction perpendiculaire à la pente (direction azimutale) et dans le sens prograde lorsque  $\beta$  est négatif (cas d'une sphère).

Ces ondes jouent un rôle très important dans les écoulements de fluide en rotation rapide : elles correspondent à la réponse du système suite à un faible écart à la géostrophie ( $i\omega \equiv \partial_t$  faible).

## 5.3 Étude linéaire du seuil de convection

La première étape de ce travail consiste à obtenir des résultats au seuil de convection, c'est-à-dire lorsque les premiers mouvements apparaissent. Ce problème étant linéaire et les termes non-linéaires étant négligeables au seuil, on ne les prendra pas en compte dans cette partie. L'objectif de cette première étude est principalement la validation du code numérique linéaire par comparaison des résultats avec les études antérieures. Le seuil de convection dans une sphère en rotation rapide a été largement étudiée théoriquement (Roberts, 1968; Busse, 1970; Jones *et al.*, 2000), expérimentalement (Carri-gan & Busse, 1983) et numériquement (Zhang, 1992; Dormy *et al.*, 2004). Les métaux étant bon conducteur de chaleur, leur nombre de Prandtl est inférieur à 1. Dans le noyau terrestre, on pense que  $P \sim 0.1$  (Poirier, 1994). De nombreuses études antérieures utilisent un nombre de Prandtl de l'ordre de l'unité afin d'éviter les séparations d'échelle entre champ de vitesse et champ de température. On va donc commencer par étudier le cas linéaire convectif avec  $P = 1$  que l'on pourra comparer à des études théoriques (Jones *et al.*, 2000) et numériques (Dormy, 1997; Aubert *et al.*, 2001). On étudiera ensuite l'effet de  $P$  sur le seuil en se basant sur les résultats de Busse (1970) et Zhang (1992).

### 5.3.1 Revue

Lorsque l'apport d'énergie thermique au système est suffisante pour que la solution conductive devienne instable alors une instabilité convective se développe. Pour quantifier cet apport, on utilise le nombre de Rayleigh qui mesure le gradient de température imposé au système. Ainsi l'apport énergétique minimal nécessaire au développement de la convection est mesuré par le nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$ . La rotation ayant un effet stabilisant sur la convection, en limitant les mouvements radiaux non géostrophiques, on s'attend à ce que  $Ra_c$  soit plus élevé qu'une convection classique type Rayleigh-Bénard.

Les premières études du seuil de convection dans un système en rotation rapide ont été menées au début des années 60 dans la limite  $E \ll 1$  et en utilisant un chauffage interne uniforme (*e.g.* Chandrasekhar, 1961). Alors que les premières études se concentraient sur les modes axisymétriques, Roberts (1968) puis Busse (1970) montrent que les modes les plus instables dans une sphère en rotation rapide sont non-axisymétriques. Busse montre que l'instabilité au seuil se développe sous la forme d'une onde présentant une structure colonnaire alignée avec l'axe de rotation et dérivant vers l'est (figure 5.3). Ces ondes sont souvent qualifiées d'ondes de Rossby thermiques

par analogie aux ondes de Rossby communément observées dans les fluides barotropes en rotation rapide (voir par exemple Jones (2007) où l’analogie est présenté dans le cas du “Busse annulus model”). La convection se développe sous la forme d’une onde du fait des bords pentés : la colonne de fluide doit changer sa dimension verticale lorsqu’elle s’écarte ou qu’elle s’approche de l’axe de rotation. Par conservation de la vorticité potentielle, le changement de la hauteur de la colonne  $2L$  induit une vorticité  $\omega_z$  donnant un caractère d’onde de Rossby à l’instabilité convective.

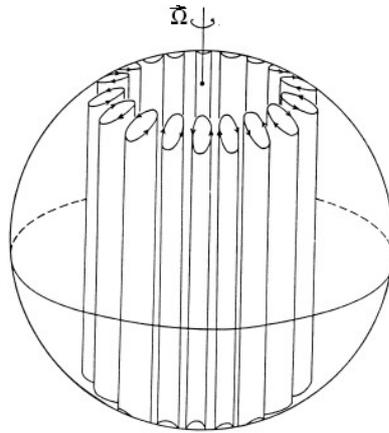


FIG. 5.3 – Schéma illustrant l’instabilité convective au seuil dans une sphère en rotation rapide composée d’une alternance de cyclones et d’anticyclones alignés parallèlement à l’axe de rotation  $\Omega$ . Extrait de Busse (1970).

Alors que Roberts proposait une solution antisymétrique par rapport au plan équatorial, Busse montra que la solution symétrique est plus instable. Les trois paramètres critiques de l’onde au seuil,  $Ra_c$ , le nombre de Rayleigh critique,  $m_c$  le mode marginalement stable et  $\omega_c$ , sa pulsation, suivent les lois de puissance suivantes lorsque  $E \ll 1$  :

$$Ra_c = C_R E^{-4/3}, \quad m_c = C_m E^{-1/3} \quad \text{et} \quad \omega_c = C_\omega E^{-2/3}. \quad (5.50)$$

Les préfacteurs  $C_R$ ,  $C_m$  et  $C_\omega$  dépendent de  $P$ . Dans le cadre de la théorie locale en perturbation dont le domaine d’application est restreint aux faibles pentes, Busse donne les formules analytiques pour  $C_R$ ,  $C_m$  et  $C_\omega$  et le rayon critique où l’instabilité se développe  $s_L = 1/\sqrt{5} = 0.4472$ . Il faut cependant noter que, dans le cas de la sphère, l’hypothèse des faibles pentes et de  $\beta$  constant est invalide. D’autre part, la théorie locale ne permet pas d’obtenir la structure radiale de la solution qui est supposée de grande échelle pour négliger les dérivées radiales par rapport aux dérivées azimutales. La solution

analytique exacte de la théorie globale asymptotique  $E \rightarrow 0$  a été dérivée par Jones *et al.* (2000) dans le cas d'un chauffage interne uniforme et nécessite une résolution numérique. Ils trouvent notamment que le rayon critique  $s_M$  où l'amplitude de la convection est maximale est plus éloignée de l'axe que la valeur  $s_L$  obtenue par la théorie locale. La théorie locale est donc moins précise que la théorie globale mais elle permet de décrire les variations des paramètres au seuil en fonction du nombre de Prandtl. La comparaison entre résultats théoriques et numériques pour différents nombres de Prandtl sera discutée dans la section 5.3.3.

Les lois de puissance (dépendance en  $E$ ) ont été confirmées expérimentalement (Carrigan & Busse, 1983) puis numériquement (Zhang & Busse, 1987; Dormy, 1997). Carrigan & Busse (1983) notent une courbure (spiralisation) prograde des colonnes que Zhang (1992) attribue plus tard à l'effet de la pente des bords sphériques.

### 5.3.2 Seuil de la convection pour $P = 1$

Les études sur lesquelles on basera notre comparaison sont les résultats donnés par la théorie globale (Jones *et al.*, 2000) et par les codes 3D (Dormy, 1997) et purement QG (température calculée en deux dimensions) (Aubert, 2001) dans le cas d'un chauffage uniforme.

Le mode marginalement stable est le premier mode pour lequel le taux de croissance  $\lambda$  est égal à zéro. Tous les autres modes  $m$  ont alors des taux de croissance  $\lambda(m) < 0$ . Pour la détermination du seuil, nous utilisons la même approche que celle décrite par Dormy (1997). Le problème linéarisé revenant à un problème aux vecteurs propres, le mode critique croît près du seuil comme  $e^{\sigma t}$ . La partie réelle de  $\sigma$  correspond au taux de croissance  $\lambda$  du mode alors que la partie imaginaire correspond à la pulsation du mode  $\omega$ . Notre code hybride étant peu optimal pour l'étude du cas  $P = 1$  nous avons effectué des calculs au seuil pour  $10^{-4} > E > 10^{-7}$ . Pour le calcul linéaire à  $E = 10^{-7}$ , la résolution nécessaire est 351 points sur la grille radiale et 180 degrés d'harmoniques sphériques. Les 3 paramètres ( $Ra_c$ ,  $m_c$ ,  $\omega_c$ ) obtenus au seuil avec notre modèle hybride sont donnés dans le tableau 5.1 pour différents nombres d'Ekman.

Le nombre de Rayleigh critique augmente lorsque l'on diminue  $E$  : la rotation ayant un effet stabilisant sur l'écoulement, le forçage thermique nécessaire à sa déstabilisation est plus important.

D'autre part, le mode critique augmente lorsque la rotation augmente : les mouvements convectifs n'étant pas géostrophiques, ils doivent adopter des tailles plus petites pour pouvoir surmonter la contrainte de Proudman-Taylor. Cette augmentation du mode critique avec  $E$  s'accompagne d'une augmen-

tation de la fréquence.

Les résultats obtenus avec notre étude hybride sont comparés aux études précédentes sur la figure 5.4 où l'on a converti les paramètres selon notre définition.

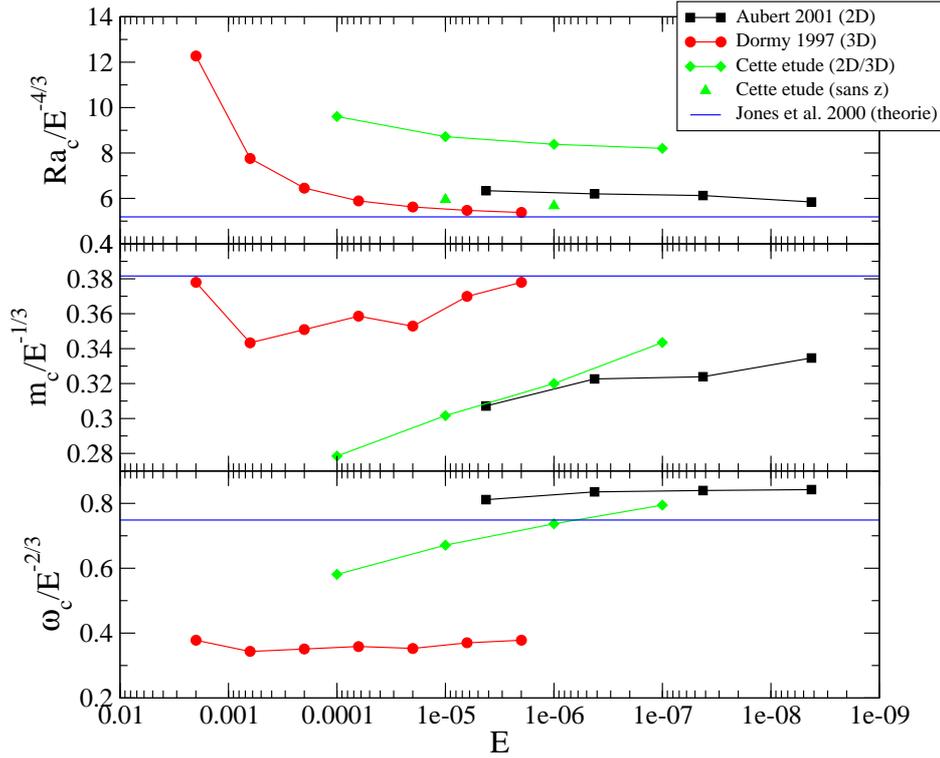


FIG. 5.4 – Comparaison des résultats au seuil de convection pour  $P = 1$  avec les études numériques en 3D (Dormy, 1997) et 2D (Aubert, 2001) et l'étude théorique asymptotique globale de Jones *et al.* (2000). Les résultats sans advection verticale ni diffusion verticale obtenus avec notre code sont représentés par des triangles.

$E$	$Ra_c$	$m_c$	$\omega_c$
$10^{-4}$	$2.07 \times 10^6$	6	269
$10^{-5}$	$4.047 \times 10^7$	14	1445
$10^{-6}$	$8.384 \times 10^8$	32	7369
$10^{-7}$	$1.7613 \times 10^{10}$	75	36894

TAB. 5.1 – Résultats au seuil de convection pour  $P = 1$

Les valeurs du nombre Rayleigh critique  $Ra_c$  tendent vers la valeur théorique lorsque le nombre d'Ekman diminue. Le seuil de convection de notre modèle hybride est plus grand par rapport aux modèles 3D et QG<sup>4</sup>.  $Ra_c$  est surestimé dans notre approche QG-3D par rapport à l'étude 3D car la rigidité imposée à l'écoulement suivant l'axe  $z$  par le modèle QG induit une sur-stabilité de l'écoulement par rapport aux simulations 3D qui ne sont pas complètement géostrophiques (Dormy, 1997) retardant ainsi le début de la convection.

Dans le code QG de Aubert (2001), il n'y a pas d'advection verticale ni de diffusion verticale de chaleur. Par conséquent, le plan équatorial est moins refroidi que dans notre modèle hybride. On comprend bien le rôle joué par la diffusion verticale dans le refroidissement du plan équatorial mais le rôle de l'advection verticale est moins évident au premier abord. On peut le comprendre de la façon suivante : un mouvement suivant le rayon cylindrique vers le bord externe dans le plan équatorial entraîne un déplacement de matière chaude vers les régions périphériques. Le déplacement en bloc de la colonne sur toute sa hauteur produit un mouvement vertical depuis les bords vers le plan équatorial et donc une advection verticale de matière froide vers les zones chaudes plus profondes (la température n'étant pas 2D). Un déplacement dirigé vers l'axe provoque quant à lui un mouvement vertical de matière chaude du plan équatorial vers les bordures extérieures plus froides. L'advection verticale permet donc un refroidissement du plan équatorial plus efficace. Il n'est donc pas surprenant que la convection dans notre modèle soit retardée par rapport au modèle purement QG. On a vérifié que la suppression de l'advection verticale de température et/ou de la diffusion verticale (*i.e.* on prend la force d'Archimède dans le plan équatorial et non une moyenne en  $z$ ) provoque le début de la convection à plus bas  $Ra_c$ . Les résultats dans le cas sans advection verticale et sans diffusion verticale sont reportés sur la figure 5.4 et dans le tableau 5.2. Ces résultats sont proches du cas purement QG, la différence entre les résultats provenant possiblement du fait que la conservation de la masse en 3D (en prenant en compte le terme de pente pour la fonction courant) n'est pas assurée dans le code QG de Aubert (2001).

Notons aussi que les calculs QG de Aubert (2001) ne prennent pas en compte l'effet du pompage d'Ekman sur les mouvements non-axisymétriques. Les colonnes sont alors moins freinées et la convection débute pour des nombres de Rayleigh plus petits que ceux que l'on devrait obtenir avec pompage d'Ekman (Gillet, 2004). J'ai vérifié dans le code hybride que  $Ra_c$  diminue

---

<sup>4</sup>Les valeurs de  $Ra_c$  dans l'étude QG de Aubert (2001) correspondent bien à un profil statique 3D.

légèrement (de l'ordre de 2%) lorsque l'on ne prend pas en compte le freinage des mouvements non zonaux dans les couches limites. On voit aussi une petite augmentation de  $m_c$  telle qu'observée par Gillet (2004) qui s'accompagne d'une augmentation de  $\omega_c$  puisque la pulsation augmente avec  $m$  au voisinage de  $m_c$ . Gillet montre que les simulations linéaires QG sont plus proches des simulations 3D lorsque le pompage est pris en compte, ce qui justifie que l'on garde le terme de pompage dans nos simulations. D'autre part, il montre que la prise en compte du pompage pour les termes non axisymétriques a de l'importance dans le régime non-linéaire.

Le mode marginalement stable  $m_c$  obtenu avec le code hybride est compris entre résultats des codes 3D et 2D et se rapproche de la valeur théorique lorsque le nombre d'Ekman diminue. On observe que  $m_c$  est plus petit dans notre cas que dans le cas théorique et dans les simulations 3D. Cela peut être interprété à l'aide de la figure 5.5 qui montre la forme de la solution radiale lorsque l'on diminue le nombre d'Ekman. On voit que la solution tend vers une valeur  $s_c$ , le rayon cylindrique auquel la solution se développe. On observe que la structure radiale de l'instabilité convective rétrécit à mesure que  $E$  diminue : la contrainte de Proudman-Taylor augmentant, le système cherche à minimiser l'extension radiale de la colonne. Le rayon critique  $s_c$  est plus petit que celui prévu par la théorie asymptotique (Jones *et al.*, 2000). Ainsi pour ce rayon  $s_c$ , moins de colonnes convectives peuvent être placées en longitude et donc  $m_c$  est plus petit. Dans le cas du chauffage interne uniforme, l'instabilité convective se développe à un rayon  $s$  proche de 0.5. En effet, il y a compétition de deux effets : d'une part, la contrainte de Proudman-Taylor impose que la variation de hauteur de la colonne soit minimale, *i.e.* que l'instabilité se développe là où la pente est la plus faible, près du centre de la sphère ; d'autre part, la composante de la gravité importante pour les

$E$		$Ra_c$	$m_c$	$\omega_c$
$10^{-5}$	Sans AV	$2.884 \times 10^7$	14	1568
	Sans DV	$2.768 \times 10^7$	14	1543
	Sans AV et DV	$2.762 \times 10^7$	14	1540
$10^{-6}$	Sans AV	$5.790 \times 10^8$	32	7755
	Sans DV	$5.678 \times 10^8$	32	7701
	Sans AV et DV	$5.676 \times 10^8$	32	7699
	Sans AV, DV et PE	$5.565 \times 10^8$	33	8419

TAB. 5.2 – Effet de l'advection verticale (notée AV), de la diffusion verticale (DV) et du pompage d'Ekman (PE) sur le seuil de convection pour  $P = 1$ .

mouvements convectifs quasi-géotrophiques est la composante cylindrique, celle-ci étant maximale au bord externe du plan équatorial. Par conséquent, l'instabilité convective se développe de manière à satisfaire au mieux ces deux effets, c'est-à-dire à un rayon médian.

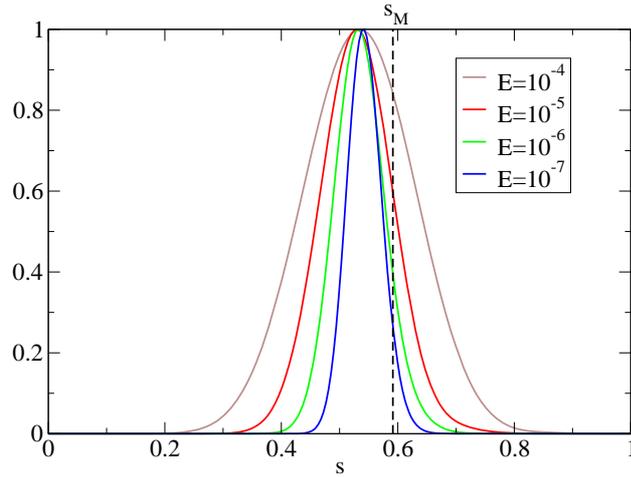


FIG. 5.5 – Solution radiale ( $|\psi|$ ) pour  $m_c$  à  $Ra = Ra_c$ .  $s_M$  est le rayon critique donné par la théorie asymptotique exacte de Jones *et al.* (2000).

Sur la figure 5.6, on reproduit une carte de la fonction courant dans le plan équatorial ainsi qu'une coupe de la température dans le plan méridien au seuil de convection pour  $E = 10^{-5}$  et  $E = 10^{-7}$ . On observe la spiralisation prograde des structures. La spiralisation est provoquée par le fait que la vitesse de phase de l'onde de Rossby thermique dépend de la pente du conteneur  $\beta$  (*e.g.* Jones, 2007). Une onde qui se développe proche de l'axe aura donc une vitesse de phase inférieure à celle d'une onde se développant à un plus grand rayon. L'onde Rossby thermique qui garde sa cohérence sur tout le volume de la sphère ne permet pas que ces deux extrémités aient différentes vitesses de phase. En pratique, on n'observe effectivement pas une spiralisation qui tend vers l'infini lorsque  $t \rightarrow \infty$ . L'onde adopte donc une vitesse de phase moyenne sur toute son extension avec une forme spiralée prograde.

La dépendance en  $z$  de la température est très nette, il existe donc un flux de chaleur vertical important ce qui justifie notre approche hybride.

Les résultats linéaires au seuil obtenus avec notre modèle hybride sont donc satisfaisants même si on surestime le seuil de convection. Les modèles purement 2D donnent à première vue des résultats plus proches des simulations 3D mais il s'agit en fait de la compensation de la sur-rigidité du modèle QG par l'absence de diffusion et advection verticale. La surestimation du seuil de convection ne constitue en soit pas un problème pour l'étude de la convection

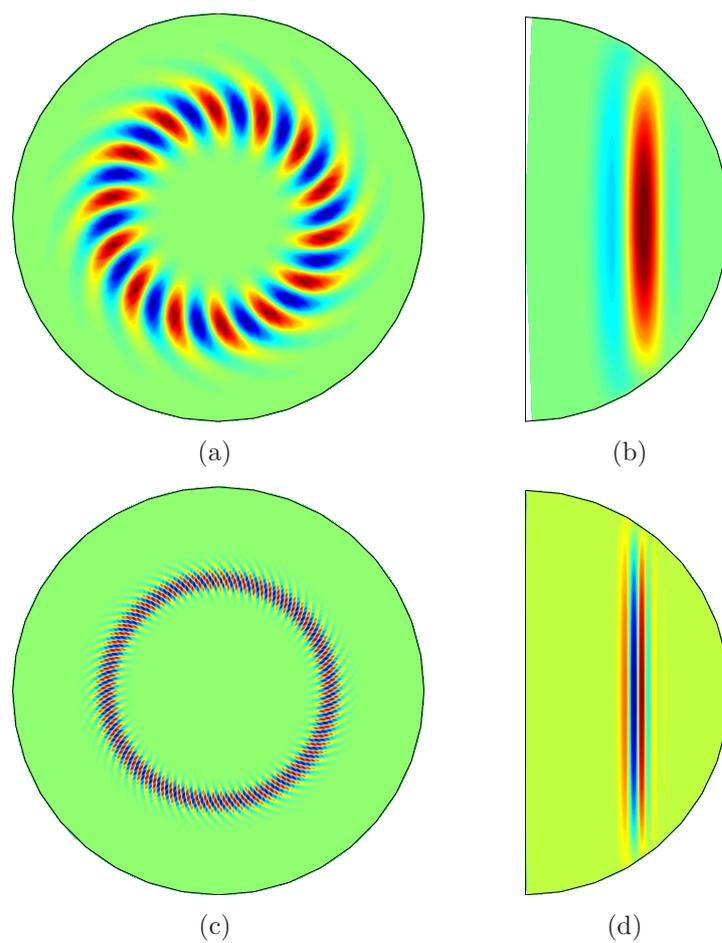


FIG. 5.6 – (a) et (c) : Fonction courant dans le plan équatorial; (b) et (d) : anomalie de température dans une coupe méridienne du mode marginalement stable au seuil de convection pour  $E = 10^{-5}$  (a)-(b) et  $E = 10^{-7}$  (c)-(d) pour  $P = 1$  au seuil de convection.

développée.

### 5.3.3 Effet d'une variation de $P$ sur le seuil

L'étude perturbative de Busse (1970) n'est valide que pour les très faibles pentes et ne s'applique donc pas strictement à notre modèle. Cette étude permet néanmoins d'évaluer l'impact d'une variation du nombre de Prandtl sur le seuil. L'étude de Busse prévoit que les paramètres critiques de l'onde de Rossby thermique suivent les lois de puissance suivantes (rapportées aux échelles caractéristiques choisies pour notre modèle) :

$$Ra_c = \frac{1}{2} \left( \frac{2P}{E(1+P)} \right)^{4/3} 3 \left( \frac{5}{4} \right)^{5/3}, \quad (5.51)$$

$$m_c = \left( \frac{P\sqrt{5/2}}{2E(1+P)} \right)^{1/3}, \quad (5.52)$$

$$\omega_c = \left( \frac{5}{\sqrt{8}P(1+P)^2} \right)^{1/3} E^{-2/3}. \quad (5.53)$$

Pour  $P \gg 1$ , le paramètre de contrôle est  $E$  alors que pour  $P \ll 1$ , il s'agit du nombre d'Ekman thermique  $E/P$ . D'après la dépendance de  $m_c$  à  $P$ , on note que les petits nombres de Prandtl correspondent à des structures au seuil de plus grandes tailles que pour  $P \sim 1$  auxquelles sont associées des fréquences d'autant plus élevées que  $P$  est petit.

Dans la deuxième partie de son étude de 1970, Busse dérive la solution de la théorie globale en supposant une fonction de Bessel cylindrique pour la structure radiale tout comme dans les travaux de Roberts (1968). Il trouve que le nombre de Rayleigh critique est sous-estimé d'un facteur 2 environ par la théorie locale, ce qu'il attribue à la violation de son domaine d'application des faibles pentes dans le cas sphérique.

Les résultats numériques de Zhang (1992) montrent que le préfacteur et sa dépendance en  $P$  n'est pas exact. Il attribue cette divergence entre résultats numériques et analytiques de la théorie en perturbation au fait que Busse fait l'approximation que les dérivées azimutales  $\partial/\partial\phi$  sont bien plus grandes que les dérivées radiales  $\partial/\partial s$ . Or, lorsque l'on varie le nombre de Prandtl, la spiralisation des colonnes varie grandement. La spiralisation est d'autant plus grande que  $P$  est petit. Dans ce cas, les dérivées radiales devraient être prise en considération dans l'analyse.

On étudie la forme des courbes  $C_R = Ra_c/E^{-4/3} = f(P)$ ,  $C_m = m_c/E^{-1/3} = g(P)$  et  $C_\omega = \omega_c/E^{-2/3} = h(P)$  obtenues numériquement pour les comparer aux

équations (5.51)-(5.53). On a effectué des calculs linéaires du seuil de convection pour  $10^{-7} \leq E \leq 10^{-4}$  et pour  $10^{-4} \leq P \leq 1$  (figure 5.7). L'analyse globale de Jones *et al.* (2000) ne permet pas d'obtenir de formules analytiques pour  $C_R$ ,  $C_m$  et  $C_\omega$  mais elle permet d'obtenir les valeurs des coefficients pour des valeurs discrètes de  $P$  dans le cas asymptotique  $E \rightarrow 0$ .

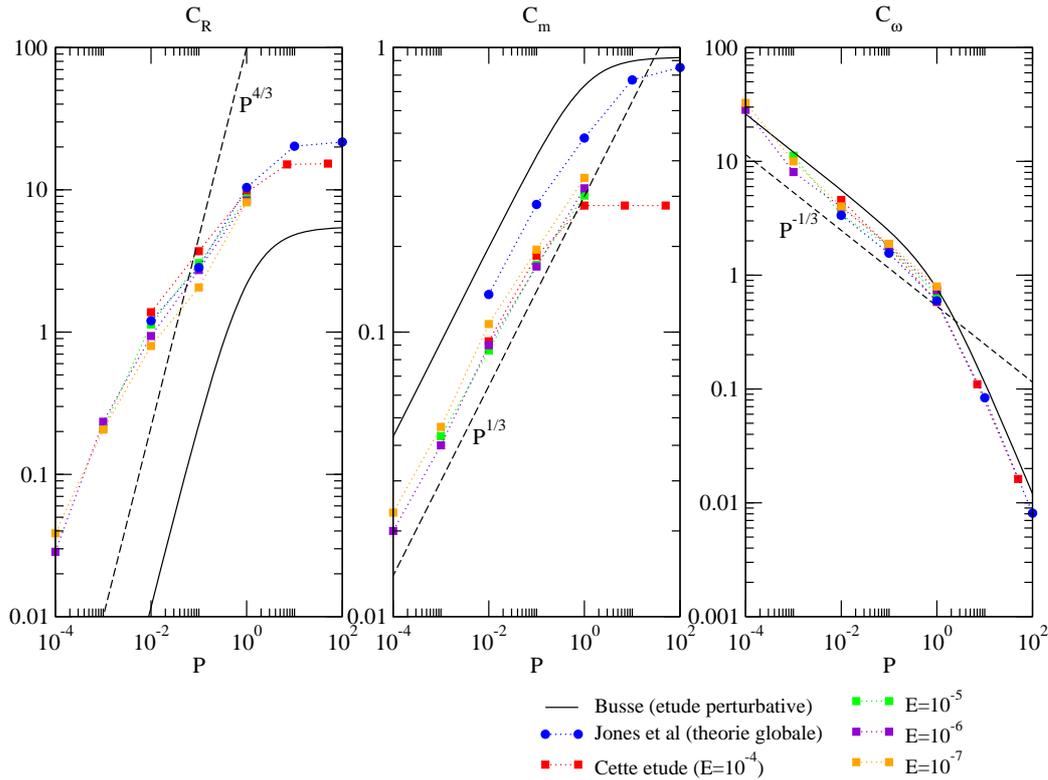


FIG. 5.7 –  $C_R$ ,  $C_m$  et  $C_\omega$  en fonction de  $P$ . Nos résultats numériques pour  $10^{-4} \geq E \geq 10^{-7}$  sont reportés par des carrés. Les résultats théoriques de Busse (1970) (formules (5.51)-(5.53)) et Jones *et al.* (2000) ont été convertis suivant notre adimensionnement. Notons, pour comparaison avec la figure 1 de Zhang (1992), que les axes sont ici log-log alors que Zhang utilise des axes log-linéaire (dans son étude  $0.1 \leq P \leq 100$ ).

Comme Zhang (1992), on observe une sous-estimation de  $Ra_c$  donnée par (5.51) par rapport aux calculs numériques linéaires. En particulier, le comportement à petit Prandtl ne suit pas la loi en  $P^{4/3}$ . Cette tendance est également reproduite par la solution exacte de Jones *et al.* (2000). Pour les points numériques  $10^{-4} < P < 10^{-2}$ , une régression en loi de puissance nous donne  $Ra_c \propto P^{0.7}$ .

Zhang avance l'explication que la spiralisation des colonnes est associée

à une échelle radiale plus courte que pour des colonnes sans spiralisation (considérées par Busse) qui augmente la diffusion thermique sans favoriser la convection. Cela expliquerait pourquoi  $Ra_c$  est plus grand dans le cas où la spiralisation est présente.

Les résultats numériques donnent des valeurs de  $m_c$  plus petite que la valeur donnée par la théorie asymptotique pour la raison évoquée au paragraphe 5.3.2 pour  $P = 1$  à propos du rayon critique de croissance de l'instabilité. La dépendance en  $P$  de  $m_c$  et de  $\omega_c$  sont en accord avec les prédictions théoriques.

Zhang note que la spiralisation est beaucoup plus prononcée à petits  $P$ . Pour  $P \geq \mathcal{O}(10)$ , il montre que la spiralisation devient même insignifiante. Il explique ces observations par la dépendance de la vitesse de phase à la pente des bords : à petits  $P$ , la dissipation visqueuse n'est pas assez importante pour contrer la spiralisation des colonnes qui s'allongent alors fortement dans la direction azimutale, leur partie externe (située à grand  $\beta$ ) cherchant à aller plus vite que la partie interne (petit  $\beta$ ).

Dans nos calculs numériques, on retrouve cette dépendance en Prandtl de la courbure des colonnes. On observe que cette variation de la spiralisation est visible sur la vitesse comme sur la température (figure 5.8). Pour bien mettre en évidence la courte échelle radiale associée à la spiralisation des colonnes à petits Prandtl, on reproduit sur la figure 5.9 une coupe de la fonction courant et de la température issu d'un calcul linéaire au seuil à  $E = 10^{-9}$  et  $P = 0.01$ . On remarque la finesse des structures comparée au calcul à  $E = 10^{-5}$  pour  $P$  du même ordre de grandeur. Ce calcul a nécessité l'utilisation de 600 points en rayons et 300 degrés d'harmoniques sphériques.

### 5.3.4 Ondes inertielles équatoriales

Lorsque le nombre d'Ekman est relativement grand et que le nombre de Prandtl est petit, des ondes inertielles de basse fréquence apparaissent (Zhang & Busse, 1987; Zhang, 1993). Ces mouvements sont proches de l'équateur et tridimensionnels. Par conséquent, ces ondes "équatoriales" sont filtrées dans une approche QG. Busse & Simatev (2004) montrent que le seuil d'apparition de ces instabilités varie comme  $E^{-2}$  à opposer avec la variation en  $E^{-4/3}$  des ondes de Rossby thermiques. Par conséquent le mode inertiel est exclu de l'approche  $E \rightarrow 0$ .

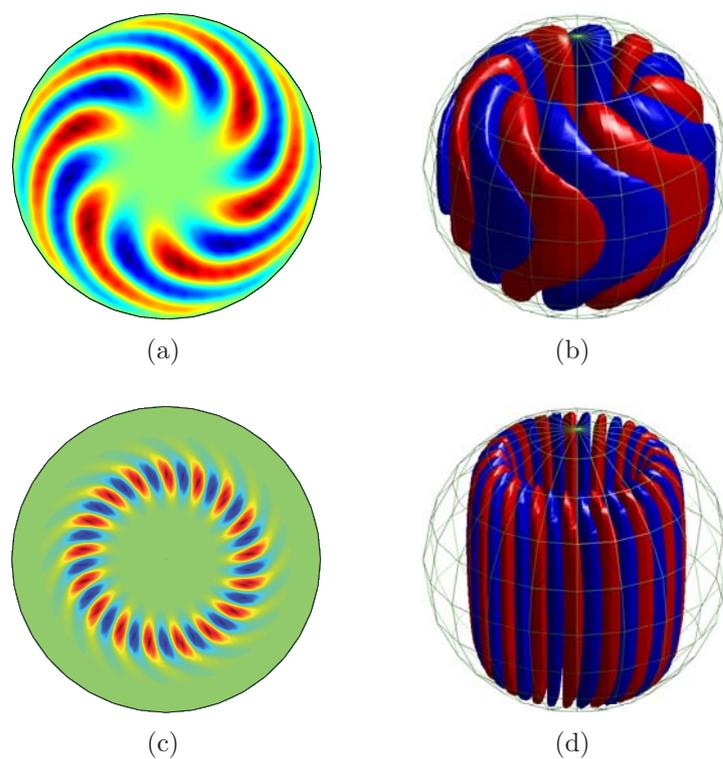


FIG. 5.8 – (a) et (c) Fonction courant dans le plan équatorial; (b) et (d) isosurfaces de la température (bleu : négatif, rouge : positif) pour  $P = 0.025$  (a)-(b) et  $P = 7$  (c)-(d) pour  $E = 10^{-5}$  au seuil de convection.  $P = 7$  est le nombre de Prandtl de l'eau et  $P = 0.025$  celui du gallium liquide.

## 5.4 Convection développée

### 5.4.1 Revue

Après les études linéaires sur la convection au seuil, les modélisations numériques de la convection développée ont débuté avec des modèles tridimensionnels (*e.g.* Sun *et al.*, 1993; Ardes *et al.*, 1997; Grote *et al.*, 2000). Étant donné la puissance de calcul requise pour modéliser les fines couches d'Ekman et les structures turbulentes de l'écoulement, ces premiers modèles sont relativement visqueux ( $E = \mathcal{O}(10^{-3} - 10^{-4})$ ) et modérément non-linéaires. Ces études montrent que les colonnes de Busse périodiques se retrouvent rapidement déstabilisées lorsque le forçage thermique augmente et que la convection occupe une grande partie du conteneur. Elles confirment la structure principalement bidimensionnelle de l'écoulement. D'autre part, un vent zonal apparaît même proche du seuil. Ce vent zonal peut être généré par le transfert non-linéaire d'énergie des tourbillons convectifs (géostrophique) ou par le mécanisme de vent thermique (agéostrophique).

Les expériences permettent d'obtenir des rotations plus rapides et des forçages plus importants. Cardin & Olson (1994) atteignent des valeurs de  $Ra \approx 50Ra_c$  et des petits nombres d'Ekman ( $E \approx 10^{-6}$ ) avec des expériences en eau ( $P = 7$ ). Dans le régime développé, ils montrent que la convection prend forme de vortex colonnaires dont la distribution est chaotique dans le temps

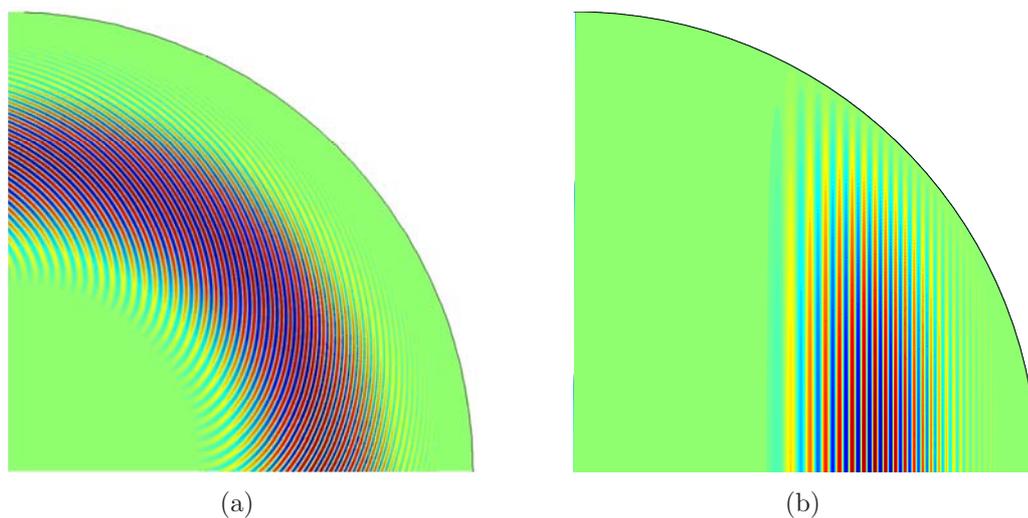


FIG. 5.9 – (a) Fonction courant dans un quart de plan équatorial et (b) anomalie de température dans un demi-plan méridien pour  $E = 10^{-9}$  et  $P = 0.01$  au seuil de convection.

et l'espace auxquels se superpose un mouvement zonal de forte amplitude.

Zhang (1992) met l'accent sur l'importance du nombre de Prandtl sur l'amplitude du vent zonal : à petit  $P$ , pour  $Ra/Ra_c - 1 = \mathcal{O}(0.1)$ , l'écoulement zonal contient près de 90% de l'énergie cinétique totale et seulement 10% à grands  $P$ . Il interprète ces différences par la spiralisation des colonnes, plus grande pour  $P < 1$ , qui favorise son apparition. Il évoque une saturation du mouvement zonal par la viscosité en volume. Cette idée est contestée par Aubert *et al.* (2001) qui montrent que le mécanisme de saturation vient essentiellement de la friction d'Ekman. Dans leurs modélisations expérimentales et numériques QG, Gillet *et al.* (2007) obtiennent des vitesses de l'écoulement zonal supérieures aux vitesses convectives lorsque le nombre de Reynolds est grand ( $Re > 1000$ ).

Pour un nombre de Prandtl de l'ordre de l'unité, Heimpel *et al.* (2005) montrent l'émergence de courant de jets zonaux multiples alternativement vers l'Est ou vers l'Ouest dans une coquille sphérique d'épaisseur relativement fine ( $0.9R$ ). L'épaisseur de la couche est un paramètre d'importance dans leur modélisation car ils obtiennent une mise à l'échelle des jets suivant  $\beta$  comme prévue par l'échelle de Rhines (Rhines, 1975) (*cf.* section 5.4.4).

## 5.4.2 Notations

Dans la suite de ce chapitre, afin de simplifier les notations, on supprime l'exposant 0 ou 1 qui indiquait l'ordre du terme. L'exposant  $m$  indique les termes non-zonaux et la barre verticale  $\overline{(\cdot)}$  indique une moyenne azimutale. Pour décrire nos résultats numériques, nous allons utiliser les grandeurs suivantes :

- La densité d'énergie cinétique des modes non-axisymétriques :

$$\mathcal{E}_c^m = \frac{1}{V} \iiint ((u_s^m)^2 + (u_\phi^m)^2) dsd\phi dz. \quad (5.54)$$

- La densité d'énergie cinétique du mode axisymétrique (azimutal) :

$$\overline{\mathcal{E}_c} = \frac{1}{V} \iiint \overline{u_\phi^2} dsd\phi dz. \quad (5.55)$$

$V$  est le volume de la sphère. A partir de ces énergies, on peut évaluer les vitesses moyennes convectives et zonales :

$$\langle U_c \rangle_s = \left\langle (\mathcal{E}_c^m)^{1/2} \right\rangle_t \quad \text{et} \quad \langle U_0 \rangle_s = \left\langle (\overline{\mathcal{E}_c})^{1/2} \right\rangle_t, \quad (5.56)$$

où  $\langle \cdot \rangle_{s,t}$  représente une moyenne radiale ou temporelle respectivement. Ces grandeurs sont moyennées sur un temps beaucoup plus long que les fluctuations temporelles.

Par simplicité, dans la suite, on notera le profil radial correspondant à la moyenne azimutale de  $\sqrt{(u_s^m)^2}$  (pour que la moyenne en  $\phi$  soit non-nulle) moyennée en temps par  $U_s^m$ ,

$$U_s^m(s) = \left\langle \left[ (u_s^m(s, \phi))^2 \right]^{1/2} \right\rangle_t, \quad (5.57)$$

et le profil radial correspondant à la moyenne azimutale de  $\sqrt{(u_\phi^m)^2}$  moyennée en temps par  $U_\phi^m$ ,

$$U_\phi^m(s) = \left\langle \left[ (u_\phi^m(s, \phi))^2 \right]^{1/2} \right\rangle_t. \quad (5.58)$$

Pour représenter les résultats, au lieu d'utiliser les valeurs moyennées sur l'ensemble du volume, on choisit le maximum de  $U_s^m(s)$  et  $\overline{u_\phi}(s)$  moyenné en temps

$$U_c = \max(U_s^m(s)) \quad \text{et} \quad U_0 = \max(\langle \overline{u_\phi}(s) \rangle_t). \quad (5.59)$$

J'ai vérifié qu'utiliser les valeurs moyennes (5.56) ou maximales (5.59) ne changent pas les résultats. Comme l'échelle de temps est le temps de dissipation visqueuse, les vitesses correspondent à des nombres de Reynolds,  $Re$ .

J'ai effectué des simulations à faibles nombres d'Ekman ( $E = 10^{-5} - 10^{-8}$ ) et petits nombres de Prandtl ( $P = 0.1 - 0.01$ ). Les régimes atteints sont "turbulents" au sens où les nombres de Reynolds de nos écoulements sont généralement supérieurs à 1000, tout en restant toujours dans le domaine des petits nombres de Rossby ( $Ro < 0.1$ ). L'intérêt numérique des petits  $P$  est qu'il existe une séparation entre échelles de dissipation visqueuse et thermique. Par conséquent, j'utilise une grille radiale fine pour la vitesse et plus grossière pour la température. La convergence spectrale en  $m$  étant plus rapide pour la température que pour la vitesse, j'utilise une troncation à un ordre plus grand (Schaeffer, 2004). D'autre part, le pas de temps pour l'intégration temporelle du champ de température peut être choisi plus grand que celui de la vitesse (typiquement 2 à 10 fois).

### 5.4.3 Structures dynamiques et thermiques

#### Zonation de la convection développée

Augmenter le nombre de Rayleigh revient à augmenter la production de chaleur par la source interne. On fournit plus d'énergie thermique au système qui va devoir évacuer cette chaleur par convection. Les vitesses des mouvements convectifs deviennent alors plus importantes et la turbulence du système augmente. Pour juger de l'état de turbulence atteint dans nos simulations, on trace la vitesse convective  $U_c$  en fonction de  $Ra$  (figure 5.10).

On voit que le nombre de Reynolds est supérieur à 1000 dans la majorité de nos simulations et atteint au maximum de 40000. Pour un nombre d'Ekman et un nombre de Prandtl donnés, on observe un régime transitoire dans le domaine faiblement surcritique. Dans le régime fortement surcritique,  $U_c$  suit visiblement une loi de puissance en  $Ra$ .

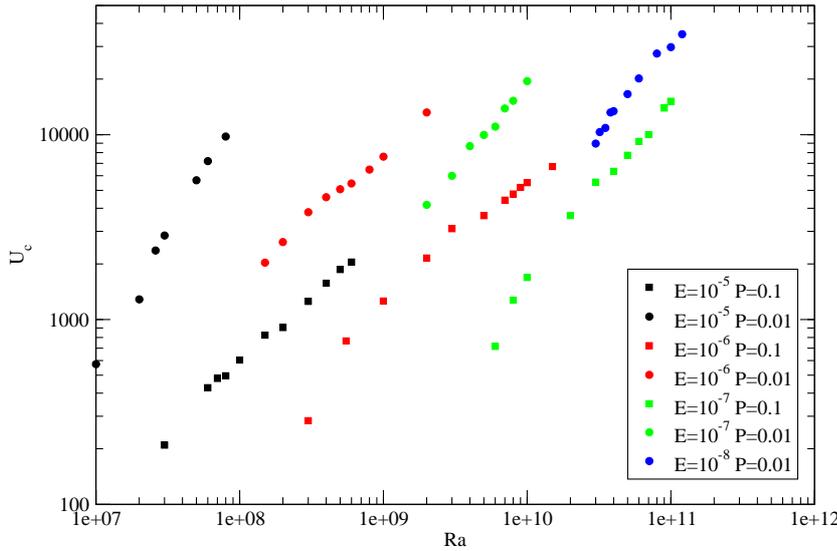


FIG. 5.10 – Vitesse convective  $U_c$  en fonction de  $Ra$  pour les simulations effectuées en convection non-linéaire.

Sur les cartes de la vorticité et de la vitesse radiale (figure 5.11), on observe une zone interne où la vitesse radiale  $u_s$  est importante correspondant   une convection vigoureuse et une zone externe où  $u_s$  est de plus faible amplitude. Ce type de zonation a déjà été observée (*e.g.* Aubert *et al.*, 2001; Miyagoshi *et al.*, 2010, (figure 5.1(b))). En se basant sur la forme des structures de l'écoulement, on distingue trois régions dans le plan équatorial :

- Proche du centre où la gravité est faible, on observe assez peu de mouvement convectif. Une rotation solide prograde de très grande amplitude anime cette région.
-   partir d'un rayon d'environ  $s = 0.1$ , des tourbillons de vorticité positive (cyclones) et de vorticité négative (anticyclones) sont présents. Les vortex situés proches de l'axe sont de plus grandes tailles que ceux situés plus loin de l'axe : la contrainte de Proudman-Taylor impose aux structures de diminuer leur taille lorsque la pente augmente.
- Dans la région externe, des ondes de Rossby de nombres d'onde élevés, avec leur courbure prograde caractéristique et leur dérive vers l'Est, sont excitées.

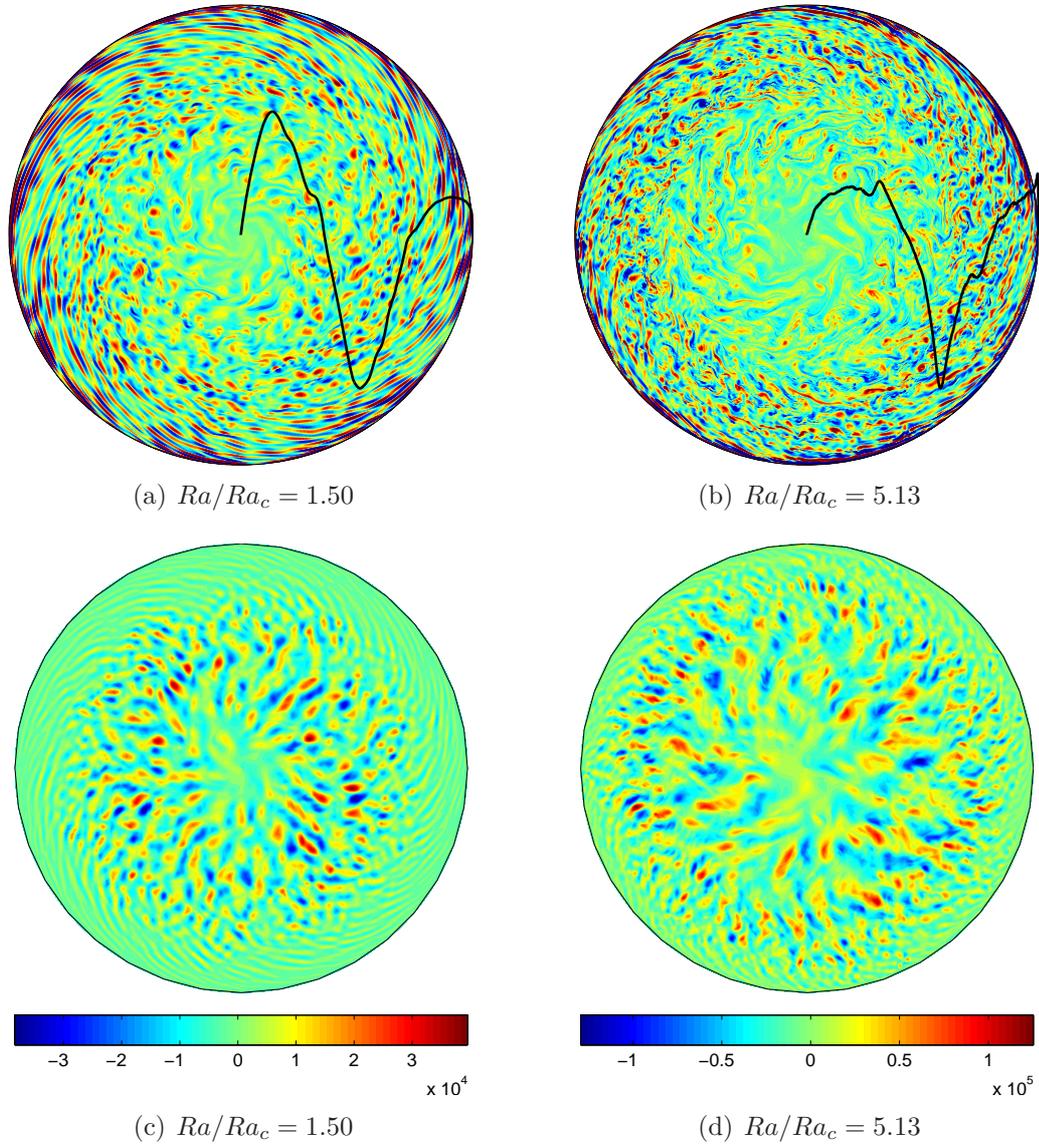


FIG. 5.11 – Carte de la vorticité axiale non-zonale (a)-(b) et de la vitesse radiale (c)-(d) dans un plan méridien (rouge : positif et bleu : négatif) pour  $E = 10^{-8}$ ,  $P = 0.01$ . La vitesse zonale ( $\overline{u_\phi}$ ) est représentée par un trait noir sur les figures du haut. Le pic de vitesse zonale (négatif) est de  $-2.32 \times 10^4$  pour  $Ra/Ra_c = 1.50$  et  $-1.98 \times 10^5$  pour  $Ra/Ra_c = 5.13$ . La simulation à  $Ra/Ra_c = 5.13$  a nécessité l'utilisation de NS=2000 points en rayon pour la vitesse, NR=400 points en rayon pour la température, Mmax=180 modes pour la vitesse en longitude, Lmax=120 degrés et Mmax3D=100 modes d'harmoniques sphériques.

Les tourbillons de la zone convective sont de taille plus importante lorsque  $Ra$  augmente.

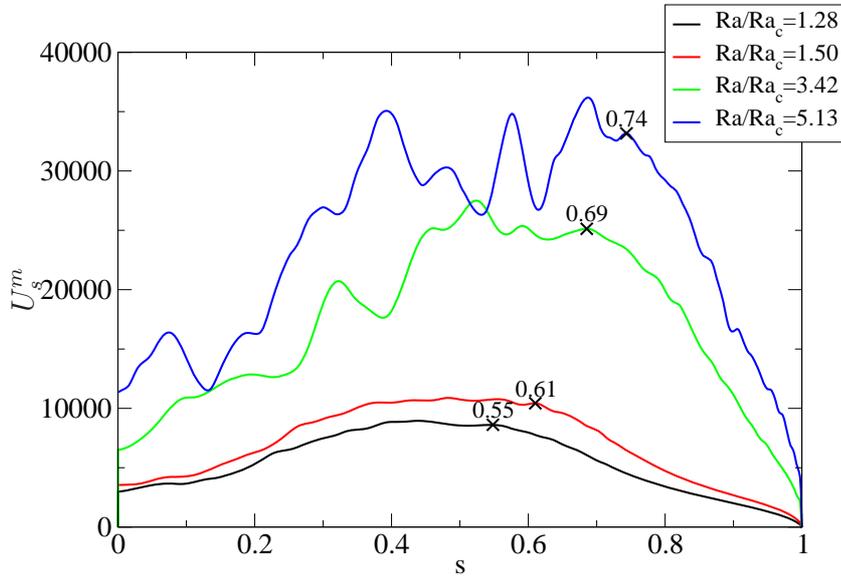


FIG. 5.12 – Profil  $U_s^m$  pour  $E = 10^{-8}$  et  $P = 0.01$  pour différents forçages. Les croix représentent la transition entre zone convective et zone externe des ondes de Rossby (voir texte). L'annotation au dessus de chaque croix donne le rayon correspondant.

Sur la figure 5.12, on représente le profil  $U_s^m(s)$  pour différents forçages thermiques. On définit arbitrairement la limite entre zone convectivement active et la zone externe des ondes de Rossby au dernier maximum de  $U_s^m$  avant sa forte décroissance vers le bord (noté par une croix sur la figure 5.12). Lorsque le nombre de Rayleigh augmente, la limite de la zone convective se déplace vers l'extérieur de façon non-linéaire en  $Ra$ .

### Influence de $P$ et couche limite thermique

Au seuil de convection, on a vu que le nombre de Prandtl influence grandement la taille des structures et leur forme. En convection non-linéaire, cela va avoir un impact important sur le vent zonal notamment, dont l'amplitude dépend du degré de corrélation entre vitesses radiale et azimuthale non-zonales et donc de la spiralisation des colonnes.

Pour un degré de surcriticalité identique ( $Ra/Ra_c$ ), l'écoulement d'un fluide de  $P = 0.01$  est plus vigoureux que celui d'un fluide de  $P = 0.1$  (figure 5.10). Pour un fluide à petit  $P$ , un forçage thermique faible suffit à obtenir des

grands nombres de Reynolds. Utiliser des métaux liquides dans les expériences en convection peut donc être intéressant de ce point de vue (Aubert *et al.*, 2001; Gillet *et al.*, 2007). Un écoulement turbulent n'est pas synonyme d'une convection qui homogénéise bien la température. A petit  $P$ , le transfert de chaleur par conduction thermique est efficace. Dans ces conditions, seuls les panaches thermiques de tailles suffisamment grandes vont être advectés sur des distances significatives, avant que l'anomalie de température qu'ils transportent ne soit diffusée dans le fluide environnant.

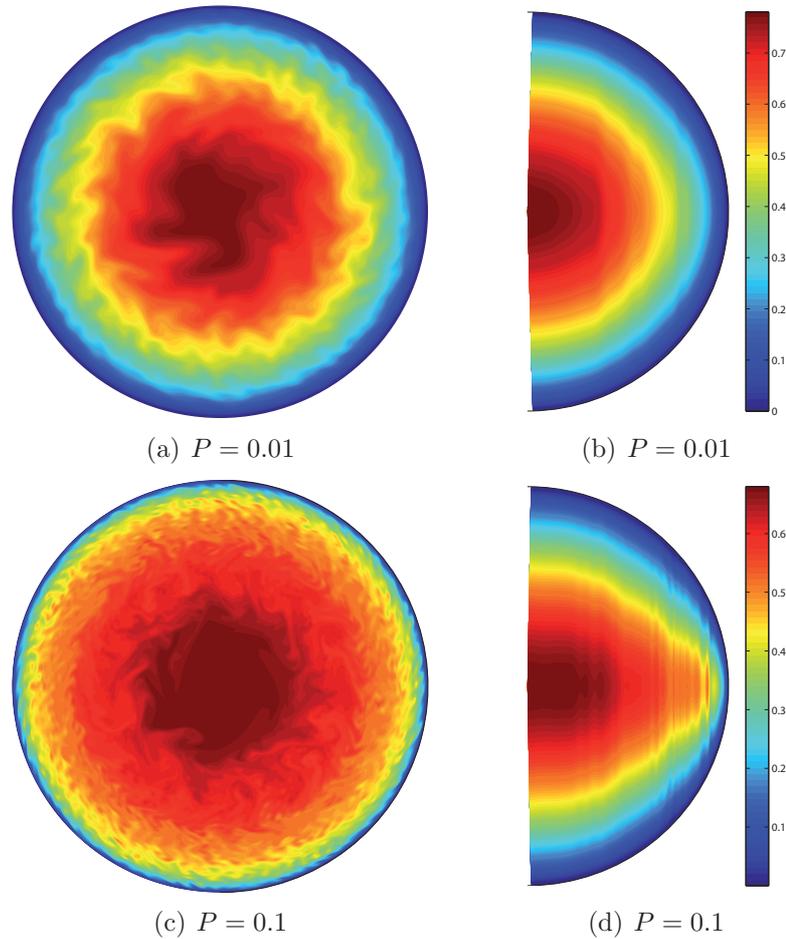


FIG. 5.13 – Température totale normalisée par la température statique au centre,  $T_s(r = 0)$ , dans le plan équatorial, (a) et (c), et dans une coupe méridienne, (b) et (d), pour  $E = 10^{-7}$ ,  $U_c \approx 14000$  et  $P = 0.01$  (a)-(b) et  $P = 0.1$  (c)-(d).

Sur les cartes de température de la figure 5.13, on observe qu'une couche limite thermique se forme visiblement au bord externe pour le fluide à  $P =$

0.1. La température au centre a subi une baisse d'environ 30% par rapport à la température statique. Pour le fluide à  $P = 0.01$ , le centre est relativement bien refroidi (anomalie de température de l'ordre de 20%) mais la couche limite est mal formée aux bords. Dans les coupes de la température dans un plan méridien, on observe que les isothermes de la température sont resserrées près de l'équateur par rapport aux pôles (surtout visible pour  $P = 0.1$ ). La vitesse radiale  $u_s$  étant beaucoup plus importante que la vitesse verticale  $u_z$  aux hautes latitudes, la chaleur n'est pas évacuée efficacement suivant l'axe de rotation et donc l'épaisseur de la couche limite thermique augmente avec la latitude. La même observation a servi de base à un modèle de croissance anisotrope de la graine dans le noyau terrestre (Yoshida *et al.*, 1996).

Gillet *et al.* (2007) comparent les profils de vitesse convective entre une expérience de convection par chauffage différentiel en gallium ( $P = 0.025$ ) avec des simulations numériques quasi-géostrophiques utilisant un champ de température 2D. Ils montrent que pour un même chauffage, la convection est plus vigoureuse dans la simulation QG. Ils attribuent cette observation au fait que leur modèle numérique ne prend pas en compte les couches limites thermiques tridimensionnelles. Nos observations confirment l'idée que les couches limites thermiques jouent un rôle important en trois dimensions.

Le gradient de l'anomalie de température dans la direction azimutale,  $\partial_\phi\Theta$ , est une source de vorticité axiale (*cf.*  quation 5.16) (Aubert *et al.*, 2001). Un panache chaud produit une structure cyclonique (anticyclonique) sur son flanc est ( $\partial_\phi\Theta < 0$ ) (resp. flanc ouest). Cette remarque montre le lien entre la taille des structures de la vorticité et la taille des structures thermiques. Par conséquent, plus  $P$  est petit, plus les mouvements convectifs et, indirectement, le vent zonal seront de grandes échelles.

#### 5.4.4 Les particularités du vent zonal

Le mouvement zonal est singulier : il n'est pas forcé directement par les forces d'Archimède et il est de plus grande amplitude que les vitesses qui lui donnent naissance. Ce qui le rend si particulier c'est qu'il est géostrophique. Par conséquent, il n'est pas dévié par la force de Coriolis comme le sont tous les autres mouvements convectifs. Dans la littérature, il reçoit beaucoup d'attention car des courants de jets zonaux de grande taille sont observés dans les atmosphères des planètes telluriques et dans les océans terrestres. Des bandes de vents zonaux sont aussi observées   la surface des planètes géantes depuis des décennies (Porco *et al.*, 2003) et leur origine anime de longues controverses depuis plus d'une trentaine d'années. J'y reviendrais en détail dans le chapitre 8 consacré   l'utilisation des vents zonaux pour produire une dynamo. En résumé, les planètes géantes émettent plus d'énergie

qu'elles en reçoivent par insolation ce qui implique que leur intérieur est sans doute animé de mouvements qui transportent cette chaleur. La génération de jets zonaux par des mouvements convectifs profonds reste donc un mécanisme plausible. Des études récentes modélisant la convection dans la couche d'hydrogène moléculaire de Jupiter (Heimpel *et al.*, 2005; Jones & Kuzanyan, 2009) ont reproduit des profils de mouvement zonal similaires à celui mesuré en surface. Ces études utilisent une coquille relativement fine ( $0.9R$ ) et des nombres de Prandtl de l'ordre de l'unité. Comme évoqué précédemment, plus  $P$  est grand, plus les panaches sont fins et donc plus la taille des tourbillons et l'épaisseur des jets zonaux sont petits. Il est beaucoup moins aisé d'obtenir des jets multiples pour  $P < 1$ . A ma connaissance, un système de vent zonal présentant des jets multiples n'a jamais été observé pour  $P < 1$  (Gillet *et al.*, 2007).

Comme on va le voir dans la suite, le vent zonal est de plus grande amplitude que  $U_c$  lorsque  $U_c > 1000$ . On s'attend donc à ce qu'il influence assez fortement les autres variables du système.

### Génération

On rappelle que l'équation du vent zonal est

$$\frac{\partial \overline{u_\phi}}{\partial t} = \left( \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{1}{s^2} \right) \overline{u_\phi} - \frac{E^{-1/2}}{(1-s^2)^{3/4}} \overline{u_\phi} - \overline{u_s \frac{\partial u_\phi}{\partial s}} - \frac{\overline{u_\phi u_s}}{s}. \quad (5.60)$$

Les freins au mouvement zonal sont la dissipation en volume (1er terme du second membre) et la friction d'Ekman aux bords (2nd terme du second membre). Comme le vent zonal est de grande échelle, on s'attend à ce que la dissipation en volume soit faible et que le frein principal soit la friction aux bords (Aubert *et al.*, 2001). Le moteur de cet écoulement est la divergence du tenseur de Reynolds (3ème et 4ème termes du second membre). Pour obtenir un mouvement zonal, il faut que les vitesses radiales et azimutales se corrélient de façon cohérente pour un même rayon. Ceci est assuré grâce à la rotation et à la sphéricité des bords. Dans un récipient à bords plats, l'instabilité convective ne prend pas une forme ondulatoire et en moyenne aucun vent zonal n'est généré. Un profil radial du vent zonal et sa variabilité temporelle sont représentés sur la figure 5.14. On observe des jets multiples (5 si on définit un jet entre deux passages par zéro de  $\overline{u_\phi}$ ). Le nombre de jets varie en fonction de  $P$  et  $E$ . Les jets sont très stables dans le temps. Leurs maxima subissent une variation inférieure à 20%. L'amplitude des jets rétrogrades est plus grande que celle des jets progrades (d'un facteur 2 environ).

Chaque terme de l'équation (5.60) moyenné en temps est représenté sur la figure 5.15. On a différencié d'une part, les interactions non-linéaires entre vi-

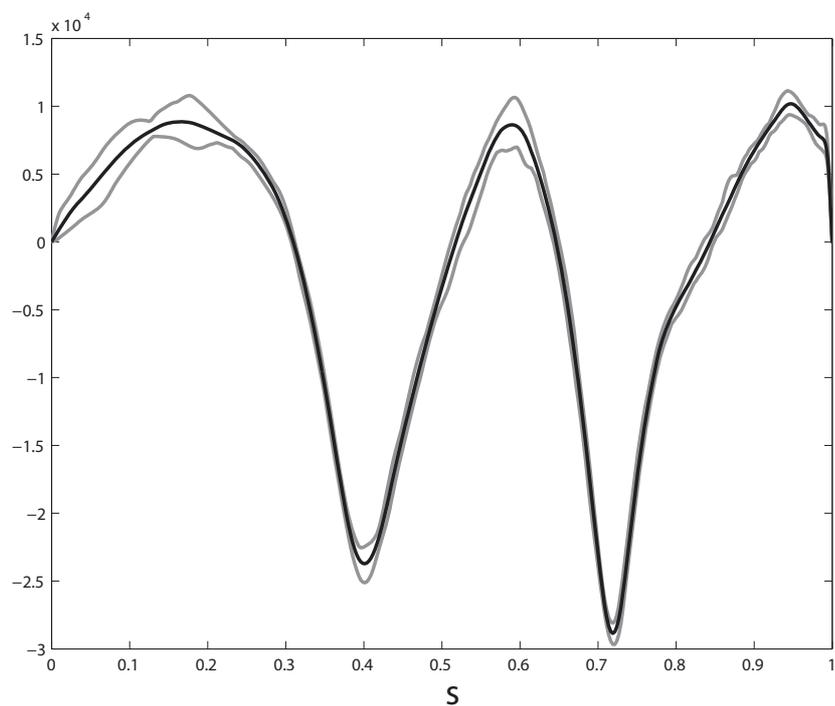


FIG. 5.14 – Profil radial de l'écoulement zonal  $\overline{u_\phi}$ . La ligne noire représente la valeur moyenne dans le temps et les lignes grises les valeurs minimales et maximales du vent. Les paramètres de cette simulation sont  $E = 10^{-7}$ ,  $P = 0.1$  et  $Ra/Ra_c = 11.3$ .

tesses convectives,  $-\overline{u_s^m \partial_s u_\phi^m} - \overline{u_\phi^m u_s^m}/s$ , et l'auto-interaction du vent zonal<sup>5</sup>,  $-\overline{u_s \partial_s \overline{u_\phi}} - \overline{\overline{u_\phi} \overline{u_s}}/s$ . On observe que le moteur est principalement  $\overline{u_s^m \partial_s u_\phi^m}$ . Son amplitude est particulièrement importante dans la zone externe pour  $0.8 < r < 1$ , là où les ondes de Rossby spiralées sont présentes. L'auto-interaction de  $\overline{u_\phi}$  apporte une petite contribution dans la couche limite visqueuse où la variation de  $\overline{u_\phi}$  est rapide car le mouvement doit respecter la condition de non-glissement au bord. La friction d'Ekman constitue le principal frein à l'écoulement. La dissipation visqueuse est importante dans la couche limite.

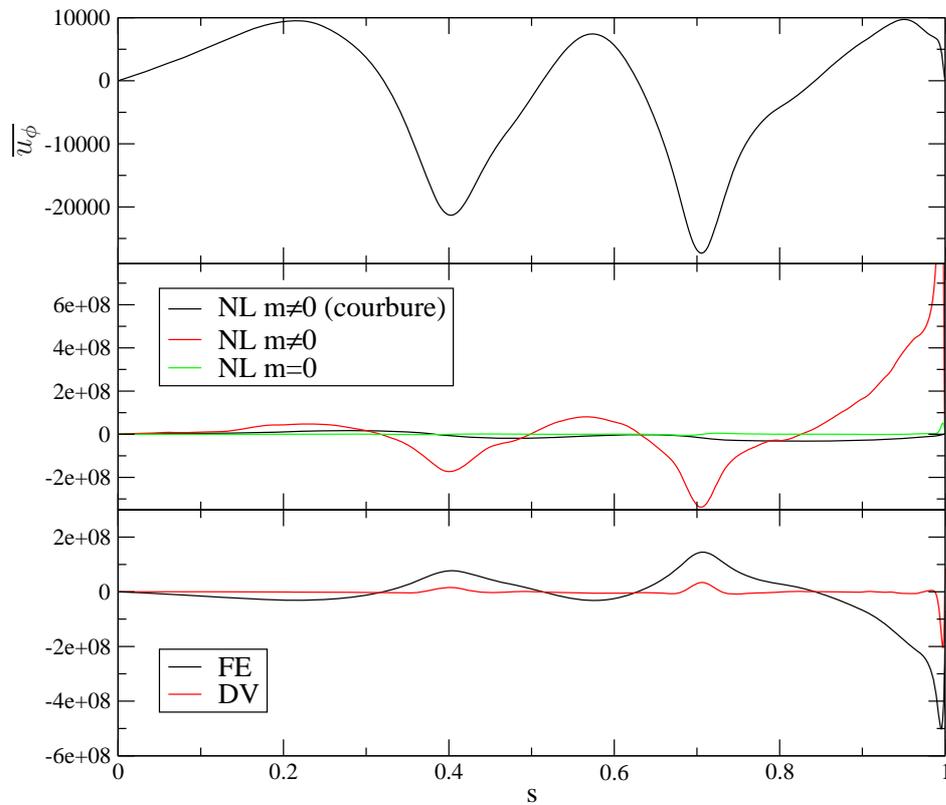


FIG. 5.15 – Équilibre dans l'équation du vent zonal. NL  $m \neq 0$  (courbure) :  $-\overline{u_\phi^m u_s^m}/s$ ; NL  $m \neq 0$  :  $-\overline{u_s^m \partial_s u_\phi^m}$ ; NL  $m = 0$  :  $-\overline{u_s \partial_s \overline{u_\phi}} - \overline{\overline{u_\phi} \overline{u_s}}/s$ ; FE : friction d'Ekman et DV : force visqueuse. Tous les termes ont été moyennés dans le temps. Mêmes paramètres que pour la figure 5.14.

<sup>5</sup> $\overline{u_s}$  est nul à l'ordre zéro. À l'ordre suivant, la formule du pompage d'Ekman donne  $\overline{u_s} \sim E^{1/2} \overline{u_\phi}$  que l'on garde dans le calcul du terme non-linéaire car  $\overline{u_\phi}$  peut varier rapidement dans la couche limite visqueuse et apporter une contribution non-négligeable dans cette couche limite.

**Régime faiblement non-linéaire.** Au seuil de convection, le mécanisme physique à l'origine du vent zonal est bien compris. La vitesse radiale transporte le moment angulaire en rayon le long d'un contour de la cellule de convection (figure 5.16). La moyenne azimuthale de ce transport est non-nulle à cause de la spiralisation des colonnes. Le mouvement zonal est composé d'un mouvement rétrograde proche du centre et d'un mouvement prograde sur le bord externe car la spiralisation des cellules est prograde. Le maximum de la vitesse radiale correspond grossièrement au cisaillement maximum par la vitesse zonale (figure 5.17(b)). L'amplitude du vent zonal étant assez faible dans ce cas, il agit peu sur les vitesses convectives.

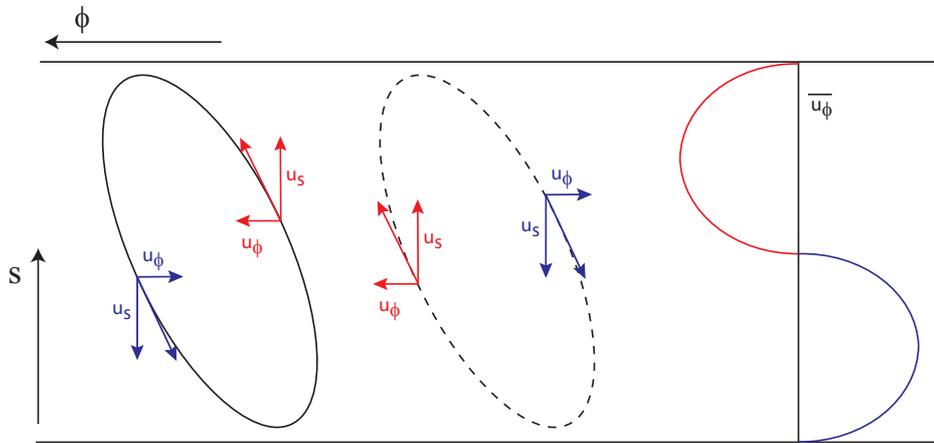


FIG. 5.16 – Schéma de l'advection du moment angulaire des colonnes de convection dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation (gauche) et écoulement zonal résultant (droite) proche du seuil de convection.

Lorsque que la surcriticalité de la convection augmente, le vent zonal devient suffisamment fort pour déchirer les cellules de convection. Ce phénomène donne naissance à des épisodes de convections intermittentes (“bursting convection”) (Grote *et al.*, 2000; Christensen, 2001) (figure 5.17(a)) :

1. L'énergie cinétique non-zonale  $\mathcal{E}_c^m$  augmente alors que la convection se met en place. La courbure des cellules de convection provoque l'apparition d'un vent zonal dont l'amplitude augmente.
2. Les cellules de convection sont déchirées par le vent zonal dont le cisaillement est maximal en leur centre. Cela provoque une baisse importante de  $\mathcal{E}_c^m$  suivie d'une diminution de l'amplitude  $\overline{u_\phi}$  : le vent zonal a tué partiellement sa source.
3. De nouvelles cellules convectives peuvent alors se former provoquant

une poussée importante de la convection et donc de la circulation zonale. Le cycle se répète alors.

Ce type de convection a été bien documenté dans la littérature et est restreint à la convection faiblement non-linéaire. La gamme de  $Ra/Ra_c$  dans laquelle on observe ce phénomène dépend de  $P$  et de  $E$  car tous les deux influent sur l'amplitude de  $\overline{u_\phi}$ .

**Régime non-linéaire** ( $Ro < 0.1$ ). Dans des régimes fortement surcritiques, on ne peut pas garder des cellules de convection à cheval sur le cisaillement du vent zonal. La figure 5.18 représente les profils de vitesse zonale et non-zonale moyennés en longitude pour un écoulement turbulent ( $Re \approx 7000$ ). Une corrélation est visible entre pics de la vitesse radiale et pics de  $\overline{u_\phi}$ . Les zones de cisaillement fort de  $\overline{u_\phi}$  correspondent à des minimas de  $u_s^m$  et des maximas de  $u_\phi^m$  : les mouvements convectifs radiaux sont cisailés par le vent zonal qui tourne  $u_s^m$  en  $u_\phi^m$ . Le cisaillement du vent zonal agit comme une barrière qui empêche une partie du transport radial de chaleur par le fluide.

Afin de visualiser dynamiquement l'effet de  $\overline{u_\phi}$  sur les vitesses convectives, j'ai placé un film de l'évolution temporelle de la vorticité sur mon site internet   l'adresse suivante :

<http://www-lgit.obs.ujf-grenoble.fr/users/cguervil/.these/wE7P.1.avi>

Des images de ce film sont reproduites sur la figure 5.19. Il s'agit d'une série temporelle de cartes de la vorticité non-zonale dans un quart de plan équatorial (voir la légende de la figure 5.19).

On peut faire les observations suivantes :

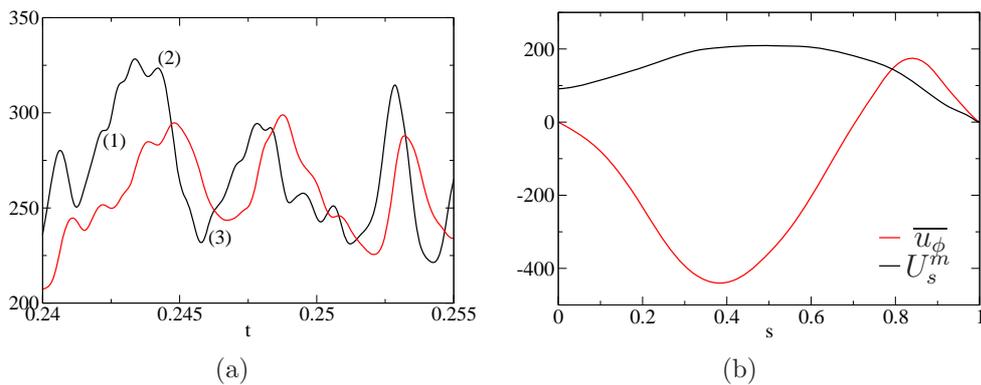


FIG. 5.17 – (a) Série temporelle de  $U_c$  (noir) et  $U_0$  (rouge) et (b) profils radiaux de  $U_s^m$  et de  $\overline{u_\phi}$  (moyennés en temps) pour  $E = 10^{-5}$ ,  $P = 0.1$  et  $Ra/Ra_c = 2.12$ .

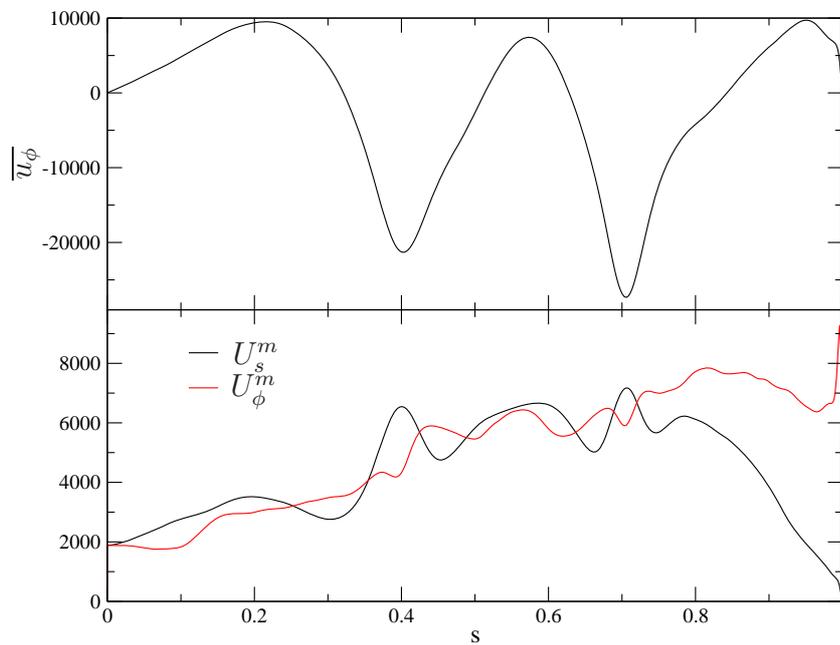


FIG. 5.18 – Profils radiaux de l'écoulement zonal  $\overline{u_\phi}$  (haut) et des vitesses radiale,  $U_s^m$ , et azimutale,  $U_\phi^m$ . Les vitesses ont été moyennées en temps. Les paramètres de cette simulation sont  $E = 10^{-7}$ ,  $P = 0.1$  et  $Ra/Ra_c = 11.3$ .

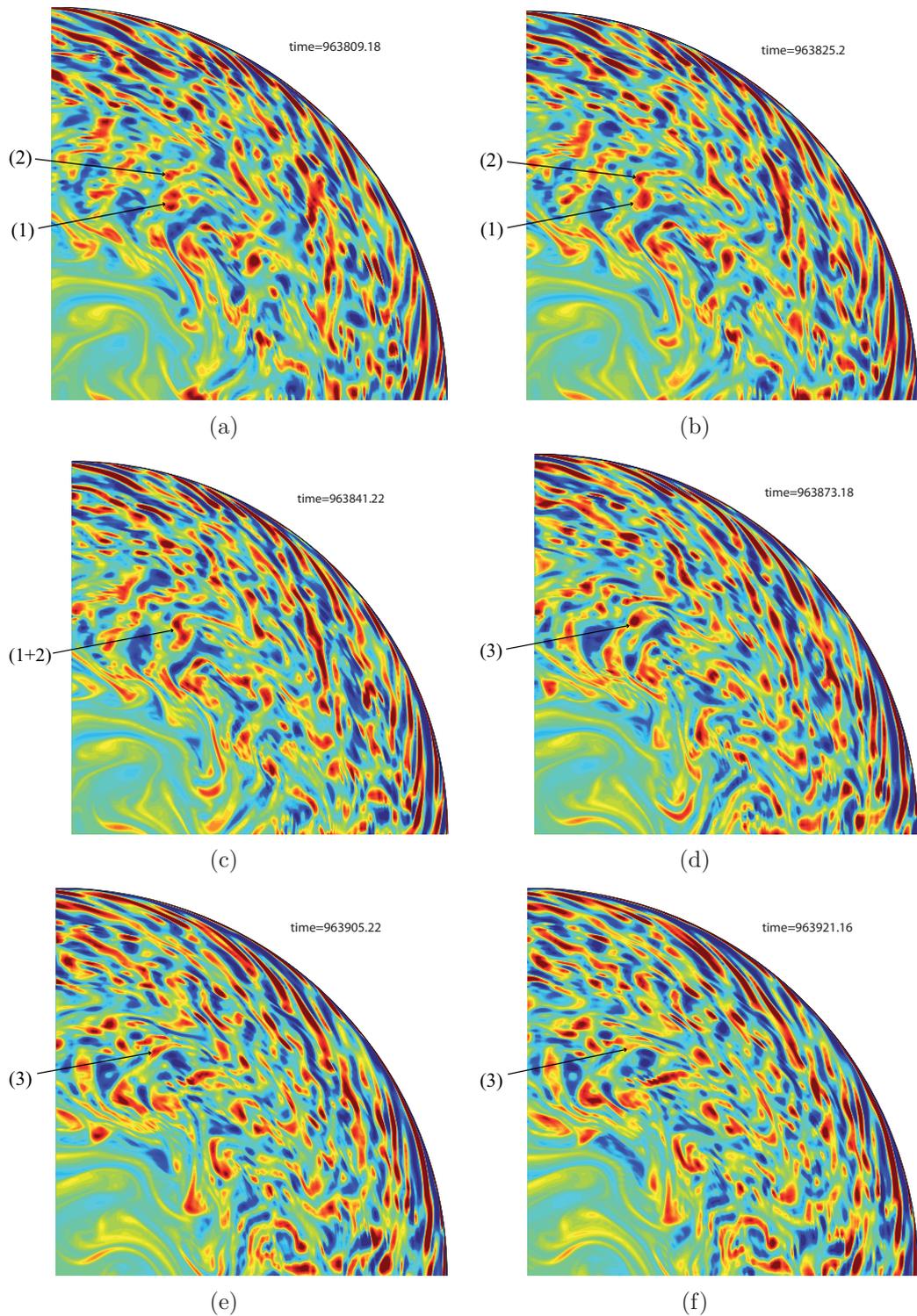


FIG. 5.19 – Cartes de la vorticité axiale non-zonale (bleu : négatif, rouge : positif) dans un quart de plan équatorial pour  $E = 10^{-7}$ ,  $P = 0.1$  et  $Ra/Ra_c = 11.3$  correspondant aux figures 5.14, 5.15 et 5.18. Le temps est compté en nombre de rotation de la sphère. Les cyclones 1 et 2 fusionnent (a, b et c) pour former le tourbillon 3 (d) qui est ensuite étiré (e) puis détruit (f) par l'écoulement zonal.

- Il se produit de nombreuses fusions de tourbillons (de même vorticité), caractéristiques de la turbulence bidimensionnelle en rotation. Ces phénomènes sont rapides : les cyclones notés 1 et 2 fusionnent en un temps d'environ 50 rotations. Au temps (a), on voit que le tourbillon 1 est formé de deux cœurs, étant lui même issu de la convergence de deux cyclones. On estime le temps typique de fusion des tourbillons à 50 – 100 rotations.
- Les tourbillons se font très fortement étirés dans la direction radiale puis azimutale par le cisaillement du vent zonal qui finit par les détruire. Ce mécanisme est plus rapide que le temps de retournement des tourbillons. Le cisaillement par  $\overline{u_\phi}$  du cyclone 3, entre le jet prograde où il vient de naître et le jet rétrograde adjacent, se fait en 50 – 60 rotations.
- Le temps de vie des tourbillons est plus court dans les jets rétrogrades qui sont de plus forte amplitude et relativement plus fins que les jets progrades (figure 5.14). Ils sont advectés plus rapidement et se retrouvent très fortement étirés sur les bords du jet.
- La zone centrale est advectée lentement par le mouvement zonal. Les tourbillons sont constitués d'un cœur circulaire et d'une longue queue fine qui est produite par l'étirement des bords du vortex par la circulation zonale. Le temps de vie des tourbillons dans cette zone est plus long que ceux situés dans les zones actives plus externes.
- Il n'y a pas visiblement de ségrégation des tourbillons en fonction du signe de leur vorticité à différents rayons. Ce phénomène a été observé dans des simulations numériques QG en présence d'une graine (Aubert *et al.*, 2003) : au niveau de la couche limite interne, des panaches montants se forment. Par conservation de la vorticité potentielle, les anticyclones sont amplifiés et les cyclones s'affaiblissent. Aubert *et al.* observent également le phénomène inverse au niveau de la couche thermique externe. Une zonation apparaît alors avec une région interne principalement peuplée d'anticyclones et une région externe principalement peuplée de cyclones. Aubert *et al.* décrivent le mécanisme de ségrégation radiale des structures de vorticité comme l'origine du vent zonal dans leurs simulations en régime non-linéaire. Comme on n'observe pas un tel phénomène dans nos simulations, on en déduit que la génération du vent zonal est due à un mécanisme différent.

Pour expliquer la génération de vents zonaux qui sont ubiquistes dans les systèmes turbulents en rotation, l'idée de mélange de la vorticité potentielle est souvent évoquée. La base de cette théorie repose sur l'existence d'un gradient de vorticité planétaire. Pour un récipient de hauteur  $L$ , la vorticité potentielle (PV pour Potential Vorticity en anglais) est

$$q = \omega_z - 2E^{-1} \ln L,$$

où  $\omega_z$  est la vorticité axiale de l'écoulement et  $-2E^{-1} \ln L$ , la vorticité planétaire. Dans un fluide inviscide, la vorticité potentielle est une quantité matériellement conservée. Un système turbulent mélange localement toute quantité transportée par l'écoulement. La vorticité potentielle va donc être mélangée par les vitesses si les effets visqueux sont négligeables. Des régions de vorticité potentielle homogène apparaissent. Le gradient de vorticité potentielle inhibe la turbulence : les régions où le gradient de PV est plus faible se retrouvent donc davantage mélangées et de forts gradients de PV se forment entre les régions homogènes (figure 5.20). De ce point de vue, l'homogénéisation de PV peut être considérée comme une instabilité (Phillips effect, voir par exemple Dritschel & McIntyre, 2008). Il existe deux mécanismes de barrière de mélange de PV aux travers des zones homogènes de PV : le fort gradient de PV qui inhibe la turbulence et le cisaillement du vent zonal qui ralentit les mouvements radiaux. Des profils caractéristiques de PV en marche d'escalier ("PV staircase" en anglais) sont observés dans les systèmes naturels telle que l'atmosphère et les océans (Rhines & Young, 1982). Une vitesse zonale apparaît comme une conséquence de la vorticité zonale produite par le mélange de PV qui extrait la vorticité potentielle du réservoir de vorticité planétaire (Aubert *et al.*, 2002) :

$$\overline{u_\phi}(s) = \frac{1}{s} \int_0^s s' \overline{\omega} ds' = \frac{1}{s} \int_0^s s' (\overline{q} + 2E^{-1} \ln L) ds'. \quad (5.61)$$

Pour le cas où  $L$  décroît avec  $s$ , les plateaux de vorticité potentielle constante correspondent à des jets zonaux progrades alors que les zones de gradient correspondent à des jets rétrogrades. De ce fait, il peut exister une dissymétrie entre jets progrades et rétrogrades suivant le degré de mélange.

Le réservoir de vorticité planétaire dispose d'une capacité limitée. Dans un système qui tend vers le mélange parfait de vorticité potentielle, le gradient de vorticité planétaire est épuisé : il existe une limite supérieure à l'amplitude des mouvements zonaux (Aubert *et al.*, 2002). A l'aide de résultats expérimentaux et numériques, Aubert *et al.* (2002) obtiennent comme critère pour la saturation du vent zonal

$$RoE^{-1/2} \gg 1,$$

où  $Ro$  est construit sur la vitesse non-zonale. De façon équivalente, le critère s'écrit

$$U_c E^{1/2} \gg 1.$$

Ce critère exprime le fait que l'homogénéisation de PV nécessite que le mécanisme de mélange (les interactions non-linéaires des vitesses non-zonales)

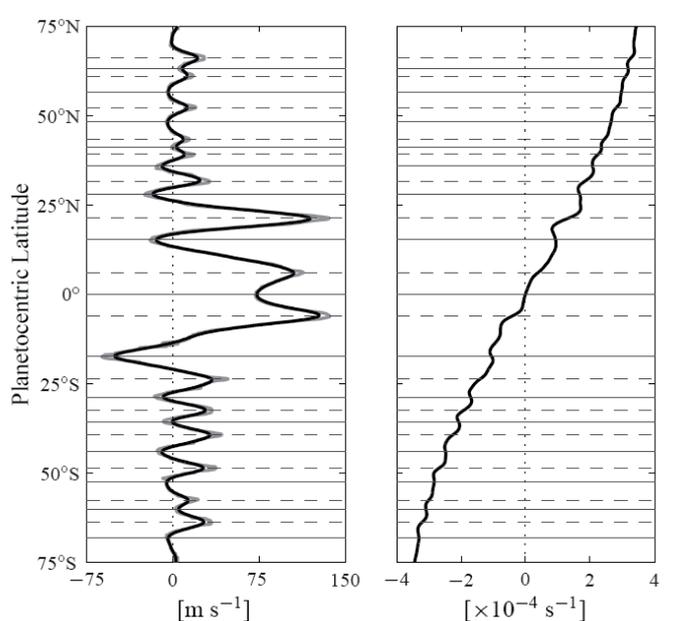


FIG. 5.20 – Exemple de “PV staircases” dans un milieu naturel. Profil de vorticité potentielle (droite) associée aux vitesses zonales mesurées à la surface de Jupiter (gauche), extrait de Beron-Vera *et al.* (2008). Dans leur étude, la vorticité planétaire est calculée en supposant un modèle de couche mince : la vorticité planétaire augmente avec la latitude, c’est-à-dire qu’elle diminue avec le rayon cylindrique. Dans ce cas, les jets rétrogrades correspondent à des zones de vorticité potentielle homogène et les jets progrades aux zones de forts gradients.

soit plus important que le mécanisme de dissipation (principalement le frottement aux bords des tourbillons).

Dans nos simulations numériques au plus grand forçage obtenu,  $U_c E^{1/2}$  atteint des valeurs d'environ 10. Sur la figure 5.21, on représente  $q$  pour le plus grand forçage à  $E = 10^{-7}$  et  $P = 0.1$  (paramètres pour lesquels on a obtenu le plus grand nombre de jets).

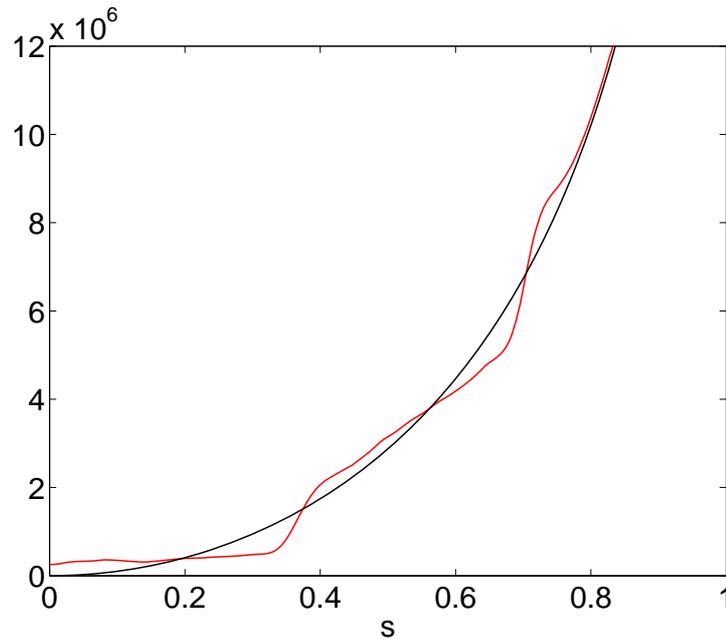


FIG. 5.21 – Profil de vorticité potentielle moyennée en longitude et en temps (rouge) et vorticité planétaire (noir) en fonction du rayon. Les paramètres de cette simulation sont  $E = 10^{-7}$ ,  $P = 0.1$  et  $Ra/Ra_c = 20.3$ .

Le profil comporte des zones de gradient fort et des zones où  $q$  est plus homogène. Dans la zone externe ( $s > 0.8$ ) où les vitesses radiales sont faibles, le mélange n'est pas bien réalisé. Pour ce forçage, le mélange est imparfait et le réservoir de vorticité planétaire n'a pas encore été complètement utilisé pour alimenter le vent zonal. L'amplitude du vent zonal devrait continuer d'augmenter alors que le mélange de PV se poursuit. On étudiera l'évolution de  $U_0$  avec  $U_c$  dans la suite mais un coup d'oeil à la figure 5.31 nous indique que l'on observe effectivement pas de saturation de  $\overline{u_\phi}$ . Dans la limite des très petits nombres d'Ekman, il n'est pas sûr que l'on ait complètement épuisé le réservoir de vorticité planétaire avant d'atteindre la perte de la bidimensionnalité. Pour le noyau terrestre, en prenant  $E = 10^{-15}$  et  $Ro = 10^{-7}$ , on obtient  $RoE^{-1/2} \sim 1 - 10$ , du même ordre de grandeur que dans mes

simulations numériques. Il est donc possible que, dans le noyau terrestre, l'amplitude du vent zonal n'ait pas atteint la valeur de saturation prédite par le mélange parfait de PV.

Le mélange de vorticité potentielle est un mécanisme physique qui peut expliquer la formation des jets. Cette théorie est séduisante car deux des conditions nécessaires sont la rotation du système et la pente des bords. Dans les systèmes naturels, les mouvements zonaux sont uniquement observés lorsque ces deux conditions sont réunies. D'autre part dans les fluides incompressibles, on ne connaît pas d'autre mécanisme physique qui explique le maintien du mouvement zonal géostrophique dans les systèmes turbulents (en l'absence de champ magnétique). Notons en revanche que dans les fluides compressibles stratifiés, la vorticité produite localement par l'expansion des panaches ascendants et la contraction des panaches descendants permet la génération d'un écoulement zonal (Glatzmaier *et al.*, 2009).

**Bilan : profil du vent zonal dans les deux régimes.** On a identifié deux régimes de génération du vent zonal :

- Un régime “peu mélangé” où le vent zonal est généré par la spiralisation des cellules convectives.
- Un régime “bien mélangé” où le mécanisme physique de génération du vent zonal est le mélange de vorticité potentielle.

Ici la notion de mélange est associée au mélange de la vorticité potentielle. Le régime peu mélangé prévoit l'apparition d'un vent rétrograde au centre et prograde à l'extérieur.

Dans le régime bien mélangé, le mélange de vorticité potentielle augmente forcément la vorticité potentielle du centre. Par conséquent, on obtient une vitesse zonale prograde au centre. Sur le bord externe, la vorticité doit se raccorder à celle de la paroi : la zone externe est donc une zone de gradient de vorticité potentielle qui correspond à un jet rétrograde. Notons que le raisonnement pour les deux régimes est basé sur le cas d'une sphère pleine où la hauteur diminue avec le rayon ( $\beta$  négatif). Dans le cas où  $\beta$  est positif, le vent zonal serait de sens opposé pour les deux cas.

Le signe du vent zonal au centre et aux bords nous donne un critère pour déterminer dans quel régime un écoulement se situe. Sur la figure 5.22, on dessine les profils de vitesses zonales pour différents nombres d'Ekman et de Prandtl. Au centre, les simulations pour  $E \geq 10^{-6}$  (hormis  $E = 10^{-6}$ ,  $P = 0.1$ ) possèdent toujours un mouvement zonal rétrograde au centre ce qui nous indique que ces écoulements sont toujours dans le régime peu mélangé (même au plus grand forçage réalisé). Les simulations pour  $E \leq 10^{-7}$  ont un mouvement zonal prograde au centre ; on en déduit qu'elles sont dans

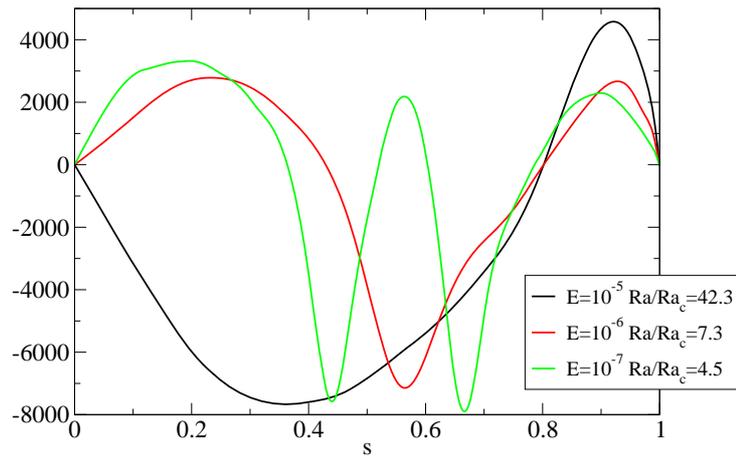
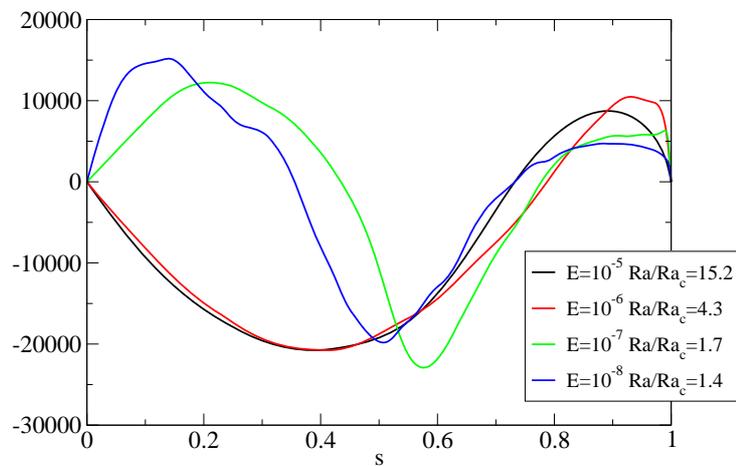
(a)  $P = 0.1$ (b)  $P = 0.01$ 

FIG. 5.22 – Profil de la vitesse zonale  $\overline{u}_\phi$  pour des simulations dont l'amplitude de la vitesse zonale est semblable pour différents  $E$  et  $P$ .

le régime bien mélangé pour la partie convectivement active tout du moins. Dans la partie externe en revanche, toutes les simulations ont un jet prograde : même au plus grand forçage réalisé pour  $E \leq 10^{-7}$ , la zone externe des ondes de Rossby spiralées est toujours présente.

Les prédictions faites avec la théorie du mélange de vorticité potentielle semblent s'accorder avec nos résultats numériques. Une question reste cependant en suspens : qu'est ce qui contrôle l'épaisseur des jets zonaux ?

### Taille des jets

La vorticité non-zonale  $U_c/l$  est générée à un taux  $\tau^{-1}$  où  $\tau$  est un temps caractéristique de la convection et  $l$  est la taille des tourbillons. La dissipation visqueuse en volume ou sur les bords constitue un puits de vorticité que l'on considère ici négligeable. Dans un régime convectif, la vorticité possède deux sources :

$$\frac{d\omega_z}{dt} = 2E^{-1}\beta u_s - Ra \left\langle \frac{\partial\Theta}{\partial\phi} \right\rangle + \text{puits}, \quad (5.62)$$

où l'on a négligé la vorticité de l'écoulement devant la vorticité planétaire. Le premier terme du second membre correspond à l'étirement des colonnes de fluide lorsqu'elles se déplacent en rayon du fait de la courbure des bords. Les instabilités se propagent alors comme des ondes de Rossby de fréquence  $2\beta E^{-1}l$ . Le taux de génération de la vorticité doit être au moins celui créé par ce terme

$$\frac{U_c}{l\tau} \geq 2E^{-1}\beta U_c,$$

c'est-à-dire que le temps  $\tau$  doit être plus court que la période des ondes de Rossby pour que l'instabilité soit de type convective,

$$\tau \leq \tau_{rw} = \frac{E}{2\beta l}, \quad (5.63)$$

où l'indice *rw* signifie "Rossby wave".

Il faut maintenant déterminer à quoi correspond  $\tau$ . La viscosité étant négligeable,  $\tau$  est beaucoup plus court que le temps visqueux soit, d'après les dimensions choisies pour notre problème,  $\tau \ll 1$ . Il existe deux autres temps caractéristiques sur lequel la vorticité est générée :  $\tau_{to} = l/u_c(l)$ , le temps de retournement<sup>6</sup> d'un tourbillon de taille  $l$  et  $\tau_{zs} = \delta/U_0$ , le temps de cisaillement par l'écoulement zonal<sup>7</sup> où  $\delta$  est l'épaisseur caractéristique des jets

<sup>6</sup>L'indice *to* signifie "turn-over".

<sup>7</sup>L'indice *zs* signifie "zonal shear".

zonaux. Pour les tourbillons de taille  $l \approx \delta$ ,  $\tau_{zs} < \tau_{to}$  puisque  $U_0 > u_c(\delta)$ . En regardant le film de la vorticit e dont sont issus les instantanées reproduits sur la figure 5.19, il est clair que l'évolution des gros tourbillons est domin ee par le cisaillement du mouvement zonal. En revanche pour des petits tourbillons  $l \ll \delta$ ,  $\tau_{to} < \tau_{zs}$ .

La courbe  $\tau_{to} = \tau_{rw}$  d elimit e le mode de d eplacement des structures : pour  $\tau_{to} > \tau_{rw}$  le d eplacement est principalement propagatif et pour  $\tau_{to} < \tau_{rw}$ , advectif. Le mode propagatif se meut dans la direction azimutale prograde (ondes de Rossby) alors que le transport advectif est radial (suivant la direction de la gravit e). Ce dernier semble donc plus direct et efficace pour transporter la chaleur mais requiert des vitesses importantes pour vaincre la force de Coriolis. Au seuil de convection, le mode marginalement stable est propagatif. Dans le r egime surcritique, quel est le mode de d eplacement privil egi e ? La force de Coriolis agit diff eremment sur les structures en fonction de leur vitesse. Il s'agit donc d'un  l ement primordial pour r epondre   cette question. Pour essayer de comprendre comment se fait la transition entre les modes de d eplacement, on va raisonner sur un spectre d'énergie. Un spectre d'énergie cin etique repr esente la densit e spectrale d'énergie  $\mathcal{E}_c(k)$  en fonction de  $k$ , le nombre d'onde, o u  $\mathcal{E}_c(k)$  est d efinie telle que

$$u_c^2 = \int \mathcal{E}_c(k) dk.$$

La courbe  $\tau_{rw} = \tau_{to}$  est

$$u_c^2 = \left( \frac{2\beta}{E} \right)^2 \frac{1}{k^4},$$

avec  $k = 1/l$  ou encore

$$\mathcal{E}_c(k) = \left( \frac{2\beta}{E} \right)^2 \frac{1}{k^5}.$$

On repr esente sch ematiquement le spectre de densit e d'énergie cin etique auquel on s'attend dans nos simulations sur la figure 5.23 d'apr es le raisonnement que l'on vient de suivre.

L'énergie est inject ee au syst eme   une échelle  $k_i$ . Au seuil de convection, cette échelle correspond au nombre d'onde critique. En r egime surcritique, une gamme spectrale est excit ee au voisinage du nombre d'onde critique. Au d emarrage de la convection, l'énergie inject ee est faible et, par cons equent, la courbe  $\mathcal{E}_c(k)$  est dans le domaine des ondes de Rossby. Lorsque le forage est suffisamment important, la courbe  $\mathcal{E}_c(k)$  va croiser la courbe  $\tau_{to} = \tau_{rw}$  au niveau de l'échelle d'injection. Dans un syst eme en rotation rapide, l'énergie cin etique est transf eree vers les grandes échelles par cascade inverse conduisant   un ensemble de tourbillons coh erents. Dans le monde physique, la

cascade inverse correspond à la fusion de deux petits tourbillons en un plus gros comme observé sur la figure 5.19. La théorie de la turbulence bidimensionnelle<sup>8</sup> prévoit que la cascade inverse suive une pente en  $k^{-5/3}$  (Kraichnan, 1967). Comme cette pente est plus faible que la pente en  $k^{-5}$ , l'énergie des petites échelles ( $k_i$ ) s'accumule dans les grandes échelles sous forme d'ondes de Rossby. A une certaine échelle  $k_0$ , qui reste à déterminer, les interactions non-linéaires entre ondes de Rossby et tourbillons produisent l'émergence des jets zonaux par un mécanisme tel que le mélange de vorticité potentielle. Une grande partie de l'énergie est alors transférée dans le mode zonal. Dans un spectre en  $k_s$ , le vent zonal correspond au nombre d'onde  $k_0$ . En revanche, pour un spectre en  $k_\phi$ , les tourbillons restent bloqués à l'échelle  $k_0$  mais le vent zonal est projeté sur le mode  $m = 0$ . L'anisotropie du mouvement zonal est la conséquence de l'anisotropie du plan  $\beta$  impliquant une propagation dans la direction azimutale des ondes de Rossby. En cisillant les tourbillons dont la taille est supérieure à l'épaisseur radiale des jets  $\delta$ , les mouvements zonaux contribuent au maintien du blocage de la cascade inverse à l'échelle  $k_0 = 1/\delta$ . L'énergie des ondes de Rossby de taille  $l > \delta$  est alors transférée à

<sup>8</sup>Notons que la théorie de la turbulence 2D ignore ce qui cause la bidimensionnalité du champ de vitesse. Dans notre étude, il s'agit de la rotation importante. Un champ magnétique imposé fort conduit aussi à une rigidité de l'écoulement suivant la direction du champ (Messadek & Moreau, 2002).

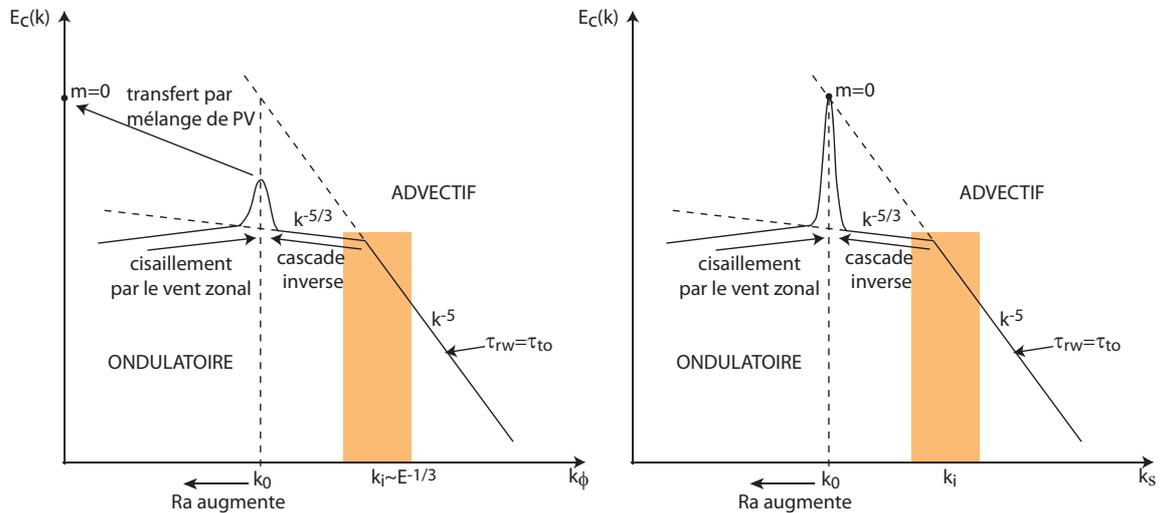


FIG. 5.23 – Schéma de la forme d'un spectre d'énergie cinétique théorique dans le cas d'un écoulement convectif en rotation rapide. Le spectre de gauche correspond au spectre attendu dans la direction azimutale ( $k_\phi = m/s$ ) et le spectre de droite dans la direction radiale ( $k_s$ ). PV = vorticité potentielle.

$k_0$  et  $k > k_0$ . On conjecture donc qu'il existe deux mécanismes de blocage de la cascade inverse : le transfert d'énergie vers le mode  $m = 0$  pour  $k > k_0$  et le cisaillement par ce dernier des structures  $k < k_0$ . Dans un spectre en  $k_s$ , l'énergie du mode  $k_0$  est principalement celle du vent zonal. Pour un tourbillon de cette taille, le temps caractéristique de la création de la vorticité est  $\tau_{zs} = 1/(U_0 k_0)$ . L'échelle de blocage de la cascade inverse d'énergie proposé par Rhines (1975) correspond    $\tau_{rw} = \tau_{zs}$ , soit,

$$L_0 = 1/k_0 = \left( \frac{U_0 E}{2\beta} \right)^{1/2}. \quad (5.64)$$

De facon plus précise, l'échelle de Rhines est originellement définie par  $L_R = (U_{rms} E / (2\beta))^{1/2}$  avec  $U_{rms}$  la vitesse r.m.s des particules. Comme la vitesse du vent zonal est plus grande que les vitesses convectives, il est relativement juste de considérer que  $U_{rms} \approx U_0$ . Notons que  $E^{1/2}$  apparait dans notre formule parce que la vitesse est mise   l'échelle par la vitesse visqueuse. La viscosité n'entre pas dans l'échelle de Rhines puisque la dérivation se fait en négligeant la viscosité. L'échelle de Rhines joue un rôle important dans un grand nombre de théories de la circulation grande échelle atmosphérique ou o canique. La signification de cette taille n'est cependant pas claire. Dans beaucoup d'études, la sensibilité de la taille des jets aux paramètres du système est en bon accord avec celle prédite par l'échelle de Rhines mais le préfacteur peut varier énormément (voir Sukoriansky *et al.*, 2007, pour une revue).

On va chercher   expliciter la taille des jets   l'aide d'un mécanisme physique : je vais argumenter l'idée que la friction d'Ekman limite l'amplitude de  $\overline{u_\phi}$  et, par mélange de la vorticité potentielle, fixe la taille des jets.

On utilise un système simplifié où l'énergie injectée   une certaine taille est intégralement transférée au vent zonal qui dissipe cette énergie par friction aux bords. L'injection de l'énergie se fait   un taux<sup>9</sup>  $\epsilon = \dot{\mathcal{E}}_c$ . On obtient la dissipation par friction d'Ekman pour le mouvement zonal,  $D_v$ , en multipliant l'équation du vent zonal (5.39) par  $\overline{u_\phi}$  puis en intégrant sur le volume de la sphère :

$$D_v = E^{-1/2} \overline{\mathcal{E}}_c.$$

Comme on ne peut pas dissiper plus d'énergie qu'on en injecte, on obtient une borne supérieure pour la dissipation,

$$D_v \leq \epsilon.$$

<sup>9</sup>Sur une remarque de Julien Aubert, je mentionne que le taux d'injection de l'énergie peut être exprimé en fonction du nombre de Rayleigh calculé   partir du flux de chaleur  $Ra_Q = RaNu$  où  $Nu$  est le nombre de Nusselt (Aubert *et al.*, 2001).

On a fait l'hypothèse que toute l'énergie injectée est transférée au mouvement zonal pour y être dissipé à grande échelle,

$$D_v = \epsilon,$$

soit

$$E^{-1/2}U_0^2 = \epsilon.$$

L'amplitude du mouvement zonal fixée par la dissipation, *i.e.* le taux d'injection d'après nos hypothèses, est

$$U_0 = \epsilon^{1/2}E^{1/4}. \quad (5.65)$$

D'autre part, l'amplitude du vent zonal est limitée par le mélange de la vorticité potentielle. La formule (5.61) nous dit que le profil de  $\overline{u_\phi}$  est donné par la surface délimitée par la marche de vorticité potentielle et la vorticité planétaire (figure 5.24). Cette surface dépend de  $\delta$ , la taille des jets : plus  $\delta$  est grand, plus  $U_0$  est grand. On veut déterminer l'amplitude d'un jet prograde en fonction de  $\delta$  qui correspond à la zone où la vorticité potentielle est homogène. On reprend ici le même raisonnement que Aubert *et al.* (2002).

La vorticité planétaire est  $\int -2E^{-1}\beta ds$ . Pour obtenir une formule analytique, on choisit  $\beta = \beta_0$  constant sur la largeur du plateau où  $q$  est constant,  $\delta = s_o - s_i$  (figure 5.24),

$$\beta_0 = -\frac{\tan \lambda}{L(s_m)},$$

avec  $s_m = (s_o + s_i)/2$ . La vorticité potentielle zonale moyennée sur la largeur du plateau est

$$\overline{q} = \frac{2\pi}{\pi(s_o^2 - s_i^2)} \int_{s_i}^{s_o} (-2E^{-1}\beta_0 s) s ds = -\frac{4}{3}E^{-1}\beta_0\delta.$$

En utilisant la formule (5.61) au maximum de  $\overline{u_\phi}$ , en  $s_m = (s_o + s_i)/2$ , on obtient

$$U_0 = -\frac{1}{6}E^{-1}\beta_0\delta^2 = \frac{1}{6}E^{-1}|\beta_0|\delta^2. \quad (5.66)$$

Si la taille de la zone de mélange de PV est limitée par l'énergie que les jets peuvent dissiper aux bords, alors

$$\epsilon^{1/2}E^{1/4} = \frac{1}{6}E^{-1}|\beta_0|\delta^2,$$

soit

$$\delta = \sqrt{6}E^{1/2}|\beta_0|^{-1/2}\epsilon^{1/4}E^{1/8}, \quad (5.67)$$

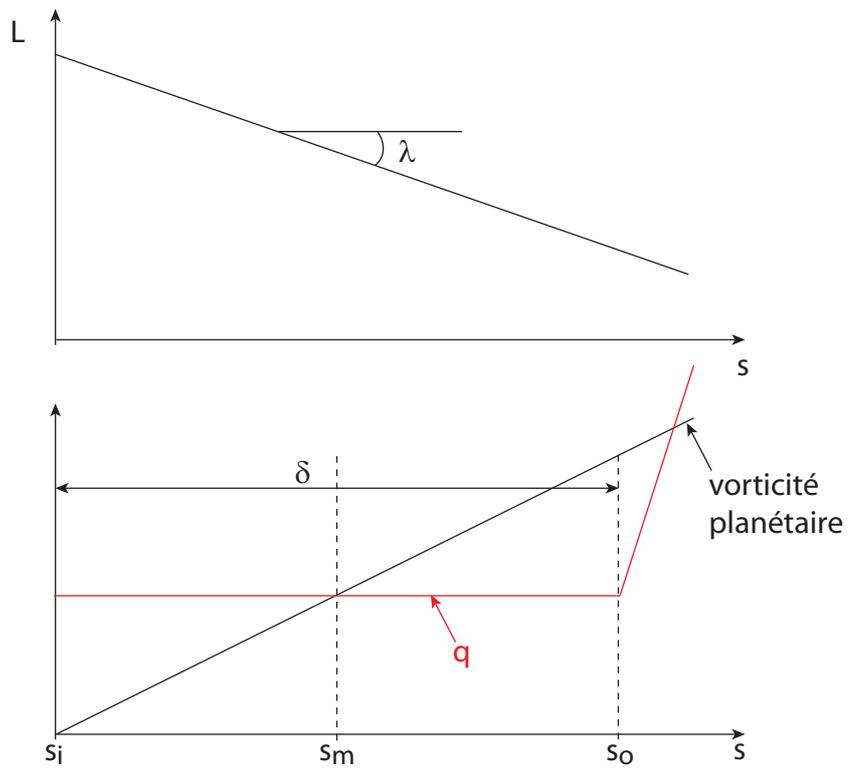


FIG. 5.24 – Modèle d'un plan  $\beta$  constant. En haut, on a représenté la variation de hauteur du récipient avec le rayon. En bas, on a représenté le profil de la vorticité potentielle  $q$  (rouge) comparé au profil de vorticité planétaire (noire). La vorticité potentielle est homogène sur des zones d'épaisseur  $\delta$ .

et sous forme dimensionnée,

$$\frac{\delta}{R} = \sqrt{6} (\Omega |\beta_0|)^{-1/2} \epsilon^{1/4} \left( \frac{\Omega}{\nu} \right)^{1/8}. \quad (5.68)$$

$\delta$  dépend de  $\nu^{-1/8}$  *i.e.* que pour atteindre le régime asymptotique des petits nombres d'Ekman, il faut que  $E \lesssim 10^{-8}$ ! Cette mise à l'échelle est cohérente : lorsque la viscosité du fluide augmente, l'amplitude du mouvement zonal  $U_0$  diminue et donc  $\delta$  diminue. D'autre part, lorsque le taux d'injection de l'énergie cinétique  $\epsilon$  augmente, le degré de mélange augmente et donc le jet zonal s'élargit. On voit que la dépendance de  $\delta$  en  $\epsilon$  est assez faible : il faudra augmenter très fortement le forçage pour voir un effet significatif sur la taille des jets. Excepté le facteur  $(\Omega/\nu)^{1/8}$  qui vient de la prise en compte de la dissipation aux bords, les variations en  $\Omega$  et en  $\beta$  sont identiques à l'échelle de Rhines. L'avantage de notre mise à l'échelle de l'épaisseur des jets est qu'elle relie directement le mouvement zonal à  $\epsilon$ , la source du mélange de PV.

Dans des conditions où la friction aux bords est faible (conditions de glissement libre), le mécanisme de dissipation est alors la viscosité en volume,  $D_v = \delta^{-2} U_0^2$ . Dans ce cas, il faut que l'écoulement zonal oscille rapidement en rayon pour que la dissipation volumique soit conséquente. Sans friction aux bords, l'amplitude du vent zonal devient grande (Christensen, 2001). Il est alors possible que les jets soient instables suivant un critère d'instabilité barotrope (Ingersoll & Pollard, 1982). Des instabilités, prenant la forme d'ondes de Rossby, vont alors saturer l'amplitude du vent zonal et épaissir la taille des jets, possiblement avant même que la dissipation volumique n'ait pris le contrôle de  $\delta$  (*cf.* chapitre 8 sur les dynamos générées par rotation différentielle).

Dans leurs calculs numériques QG, Jones *et al.* (2003) et Morin & Dormy (2006) montrent que la prise en compte du pompage d'Ekman pour le vent zonal augmente le nombre de jets, en apparence contradiction avec la description que l'on vient de détailler. Ces calculs sont effectués dans le régime faiblement non-linéaire dans l'étude de Morin & Dormy et modérément non-linéaires dans l'étude de Jones *et al.* (l'énergie zonale représente moins de 50% de l'énergie totale), caractérisé par des épisodes de convection intermittentes. Dans ce régime, Morin & Dormy interprètent la présence de solutions à jets multiples par le maintien de l'amplitude du cisaillement du vent zonal sur les colonnes de convection pour produire la saturation de l'énergie cinétique (par la relaxation provoquée par le déchirement des cellules de convection par  $\overline{u_\phi}$ ). Lorsque la friction aux bords est incluse, l'amplitude de  $\overline{u_\phi}$  diminue et sa complexité en rayon doit augmenter pour que sa dérivée radiale conserve son amplitude. En régime de convection développée, le contrôle de  $\delta$  par le frottement du mouvement zonal est différent car il n'a pas de déphasage entre  $\overline{u_\phi}$

et  $u_s$ , nécessaire à obtenir la convection intermittente. On ne raisonne donc pas à cisaillement constant mais à amplitude contrainte.

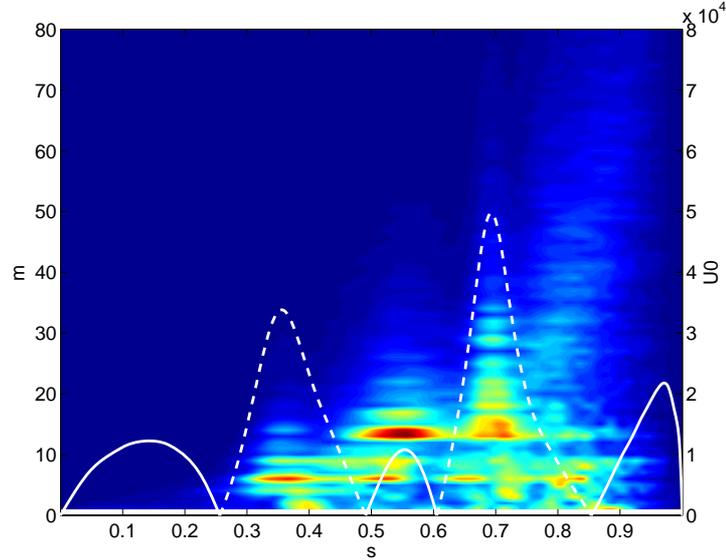
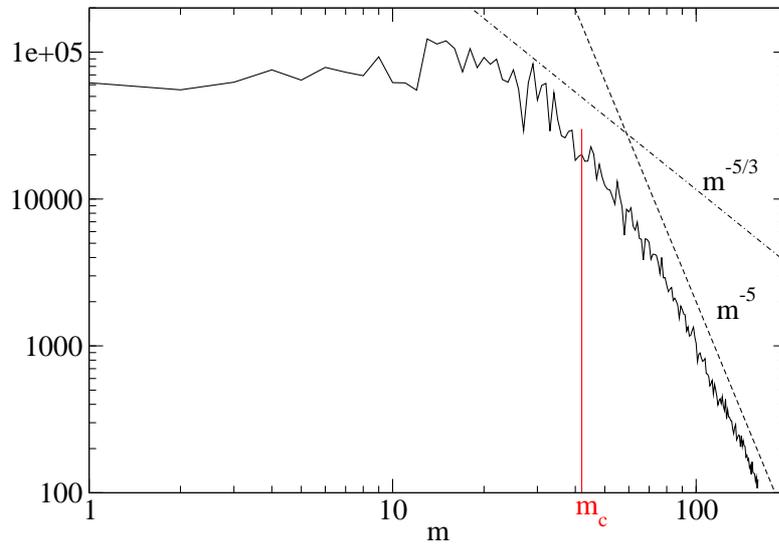
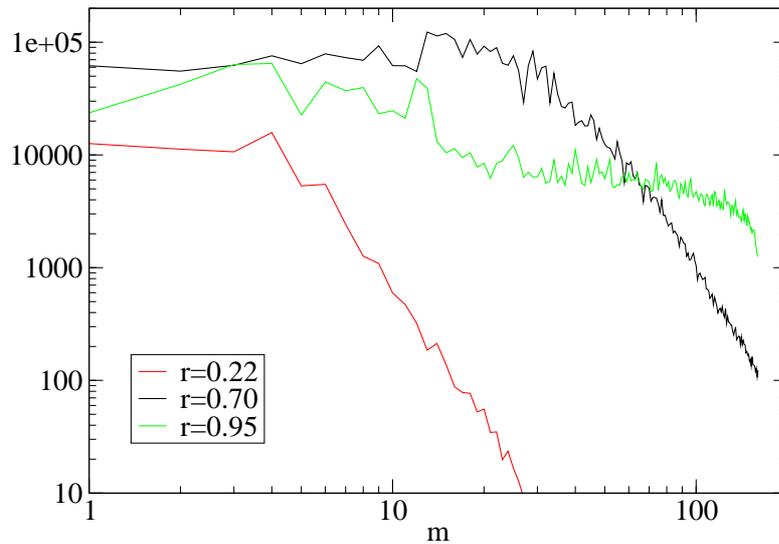


FIG. 5.25 – Moyenne temporelle de la densité spectrale d'énergie cinétique en fonction du rayon pour  $E = 10^{-7}$ ,  $P = 0.1$  et  $Ra/Ra_c = 20.3$ .  $\overline{u_\phi}$  est représenté en trait blanc plein (positif) et pointillé (négatif). On a enlevé  $m = 0$  dont l'énergie est bien supérieure aux autres  $m$ . L'énergie est représentée suivant une échelle linéaire dont la borne supérieure est le rouge. Le nombre de Reynolds de cette simulation est  $U_c \approx 14000$ . Le mode marginalement stable au seuil de convection est  $m_c = 42$ .

Il nous faut maintenant confronter les prévisions théoriques et les résultats numériques. Pour que la comparaison ait du sens, on se place dans la gamme de paramètres où le plus grand nombre de jets zonaux est présent. Il faut donc se placer à  $P$  modérément grand (dans notre cas  $P = 0.1$ ) et petits  $E$ . On a observé au maximum 5 jets pour  $E = 10^{-7}$  et  $P = 0.1$ . Sur la figure 5.25, on représente le spectrogramme issu d'une simulation numérique au plus grand forçage calculé. Notons que l'on présente des spectres en  $m$  et non en  $k_\phi = m/s$ . Je n'ai pas calculé de spectre en  $k_s$  car le manque de périodicité dans cette direction rend la représentation spectrale périlleuse. Sur le spectrogramme, on observe clairement un pic à  $m = 13$  dans la région convective la plus active  $0.3 < s < 0.85$ . La zone la plus externe ( $s > 0.85$ ) est la zone des ondes de Rossby spiralées qui ont une énergie cinétique faible. Le spectre pour le rayon  $s = 0.95$  est relativement plat jusqu'à l'ordre  $m = 80$  indiquant qu'une large gamme spectrale est excitée dans cette région



(a)



(b)

FIG. 5.26 – Densité d'énergie cinétique issue de la figure 5.25 au rayon  $s = 0.7$  (a) et à différents rayons (b). Sur la figure (a), la ligne rouge verticale représente le mode marginalement stable au seuil de convection ( $m_c = 42$ ).

(figure 5.26(b)). La région interne ( $s < 0.3$ ) est également peu énergétique. Sur le spectre en  $s = 0.22$ , on observe la décroissance de l'énergie après le mode  $m = 4$  (figure 5.26(b)), en accord avec l'observation que les structures sont plus grosses au centre où  $\beta$  est plus faible (contrainte de Proudman-Taylor). Sur la figure 5.26(a), on représente un spectre issu de la figure 5.25 pour l'un des rayons les plus actifs  $s = 0.7$ . Pour des nombres d'onde supérieur à  $m_c$ , le mode marginalement stable au seuil de convection, la pente du spectre est très raide. Pour les plus grands  $m$ , la pente est bien reproduite par une loi de puissance en  $m^{-5}$ . La pente s'aplatit graduellement vers les plus petits  $m$  jusqu'à  $m = 13$  où le spectre devient plat. Les spectres aux différents rayons de la région  $0.3 < s < 0.85$  ont les mêmes caractéristiques.

La pente en  $k^{-5}$  a déjà été observée dans des simulations numériques QG avec un forçage mécanique aux frontières (Schaeffer, 2004). Galperin *et al.* (2004) montrent un comportement en  $n^{-5}$  des mouvements zonaux observés dans l'atmosphère des planètes géantes ainsi que dans les modélisations numériques de jets océaniques.  $n$  est le degré de l'harmonique sphérique et correspond donc à une longueur *latitudinale*. Pour des échelles plus grandes que l'échelle supposée de Rhines, Galperin *et al.* (2004) trouvent que le spectre d'énergie de l'écoulement zonal est quasiment plat. L'observation de la pente en  $k^{-5}$  n'a jamais été rapportée dans des simulations 3D à ma connaissance. La question se pose de savoir si la pente en  $k^{-5}$  est une caractéristique des spectres azimutaux intrinsèque aux modélisations QG d'écoulements turbulents. Des modélisations tridimensionnelles d'écoulement fortement turbulent ( $Re \geq 10000$ ) sont nécessaires pour répondre à cette question.

Un mode  $m = 13$  correspond à une longueur  $\lambda = 2\pi s/m = 0.33$  pour  $s = 0.7$ . Cette valeur est en bon accord avec l'épaisseur des jets obtenue dans cette simulation (figure 5.25). D'après la discussion que l'on a menée sur les spectres d'énergie, il apparaît donc que les structures de petites échelles sont advectives alors que les structures de grande taille  $m < 13$  sont des ondes de Rossby. Par structures advectives, on entend les tourbillons qui se comportent tel que  $\tau_{rw} = \tau_{to}$ . En regardant des cartes de vorticité, ce sont surtout les plus petites structures qui ressortent puisque  $\omega \sim u_c(l)/l$ . On voit que ces structures de petites tailles se déplacent en rayon comme ce que l'on attend de structures advectives. Pour voir les ondes de Rossby de grande taille, il faut regarder des cartes de la fonction courant  $\psi \sim u_c(l)l$ . Je mets à disposition un film de l'évolution temporelle de la fonction courant sur mon site internet à l'adresse :

<http://www-lgit.obs.ujf-grenoble.fr/users/cguervil/.these/PsiE7P.1.avi>.

Il s'agit de la même simulation que le film de la vorticité (figure 5.19). Des instantanées sont reproduits sur la figure 5.27. La structure notée 1 est située dans une zone de mouvement zonal retrograde. Elle se déplace cependant

dans le sens prograde. A l'intérieur même de la structure, on observe distinctivement le déplacement rapide de maxima dans la direction longitudinale. On observe ici la propagation d'une onde de Rossby dont la vitesse de phase est plus rapide que l'advection par le mouvement zonal.

Pour vérifier la mise à l'échelle que l'on propose pour la taille des jets zonaux (5.67), il nous faut évaluer  $\epsilon$ , le taux d'injection de l'énergie. Comme on fait l'hypothèse que le taux d'injection d'énergie cinétique est égal à la dissipation du mouvement zonal, on peut estimer  $\epsilon$  en arrêtant le forçage du mouvement zonal dans notre simulation à un temps donné :

$$\epsilon = D_v = \frac{d\overline{\mathcal{E}}_c}{dt} \sim \lambda_E \overline{\mathcal{E}}_c,$$

où  $\lambda_E$  est le taux de décroissance de l'énergie cinétique. En supprimant le forçage, on change le taux de dissipation. Notre estimation de  $\lambda_E$  sera donc grossière mais l'ordre de grandeur est correct si l'on calcule  $\lambda_E$  au début de la décroissance de  $\overline{\mathcal{E}}_c$ .

On a mené une comparaison entre prédictions théoriques et résultats numériques pour  $E = 10^{-7}$  et  $P = 0.1$  pour différents forçages. Dans les calculs numériques, on a estimé  $\delta_{num}$  en mesurant l'épaisseur du "plateau" de vorticité potentielle entre deux zones de forts gradients correspondant au jet prograde médian (figure 5.28). On a calculé le taux d'injection de l'énergie correspondant   ces calculs et on en déduit la taille théorique  $\delta_{theo}$  obtenue avec la formule (5.67) en prenant  $\beta_0 = \beta(s = 0.57)$ , correspondant au milieu du "plateau" de vorticité potentielle. Ces résultats sont reportés dans le tableau 5.3. L'ordre de grandeur de la prédiction théorique de la taille des jets est en bon accord avec celle obtenue numériquement. On observe une diminution de  $\delta_{num}/\delta_{theo}$  lorsque l'on augmente le forçage : la taille prédite théoriquement augmente plus rapidement que la taille obtenue numériquement. Il s'agit certainement de l'effet des bords finis qui contraignent la taille des jets et empêchent la croissance de l'épaisseur   grand forçage dans la simulation numérique.

Il faudrait poursuivre les calculs vers des plus petits  $E$  ou modérément larges  $P$  pour observer plus de jets et pouvoir faire une comparaison plus précise entre la théorie défendue ici et les résultats numériques. Les calculs numériques    $E = 10^{-8}$ ,  $P = 0.1$  et  $E = 10^{-9}$ ,  $P = 0.01$  sont actuellement en cours.

### Signature thermique

Le vent zonal ayant pour effet de cisailer les cellules convectives, on s'attend   ce qu'il inhibe partiellement la convection localement. Si l'action du vent

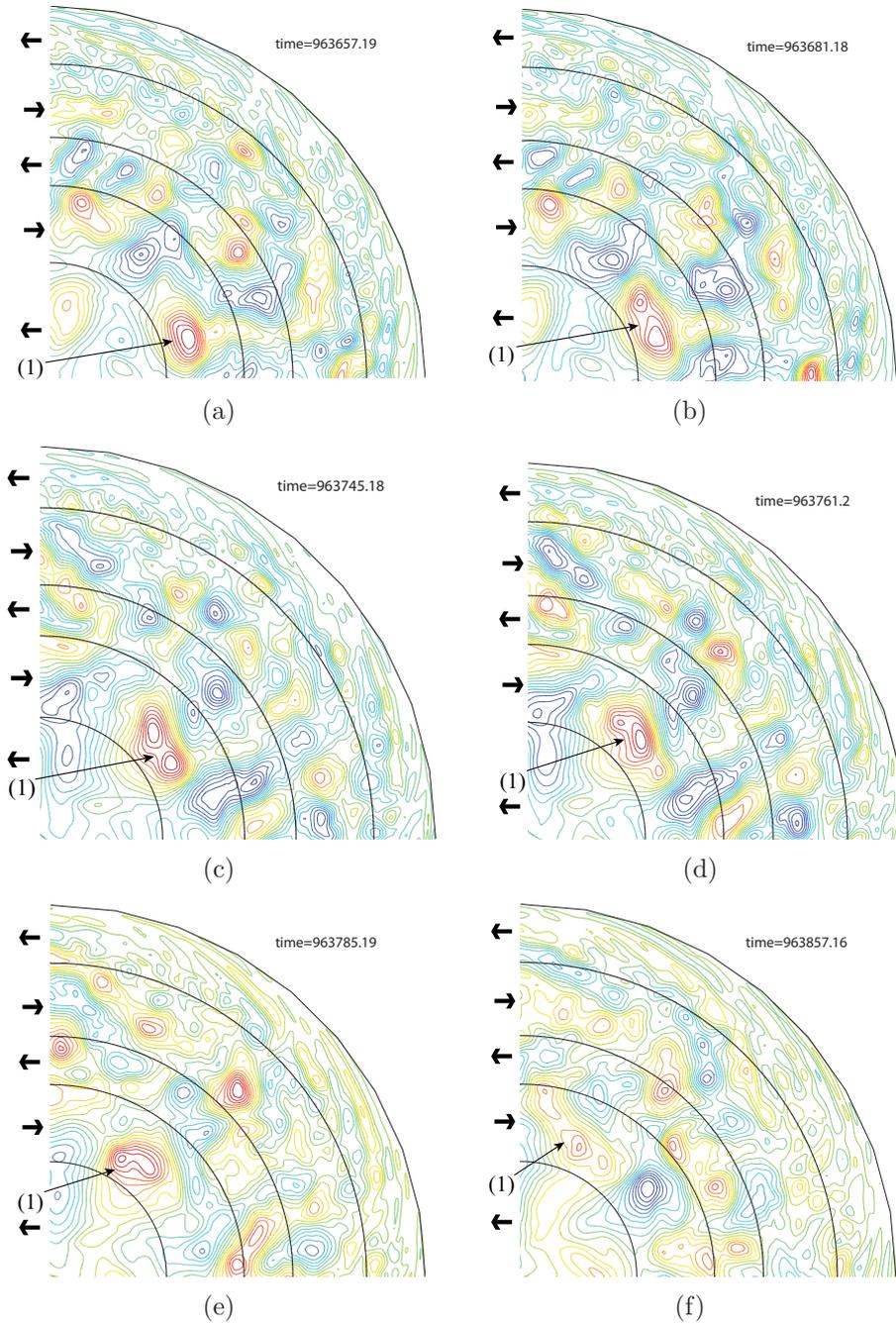


FIG. 5.27 – Cartes de la fonction courant (bleu : sens horaire, rouge : sens anti-horaire) dans un quart de plan équatorial pour les mêmes paramètres que la figure 5.19. Les traits noirs indiquent les rayons  $s$  pour lesquels  $\overline{u}_\phi(s) = 0$  et les flèches sur le côté gauche donnent le sens de  $\overline{u}_\phi$  (cf. figure 5.14).

$Ra/Ra_c$	6.76	11.3	20.3
$\epsilon$	$5.417 \times 10^{11}$	$1.712 \times 10^{12}$	$5.651 \times 10^{12}$
$\delta_{theo}$	0.089	0.118	0.169
$\delta_{num}$	0.203	0.227	0.246
$\delta_{num}/\delta_{theo}$	2.28	1.92	1.46

TAB. 5.3 – Taux d’injection de l’énergie,  $\epsilon$ , taille des jets donnée par la prédiction théorique (5.67),  $\delta_{theo}$ , en prenant  $\beta_0 = \beta(s = 0.57)$ , où  $s = 0.57$  est le milieu du “plateau” de vorticité potentielle et taille obtenue numériquement,  $\delta_{num}$ , (voir figure 5.28) pour différents forçages pour  $E = 10^{-7}$ ,  $P = 0.1$ .

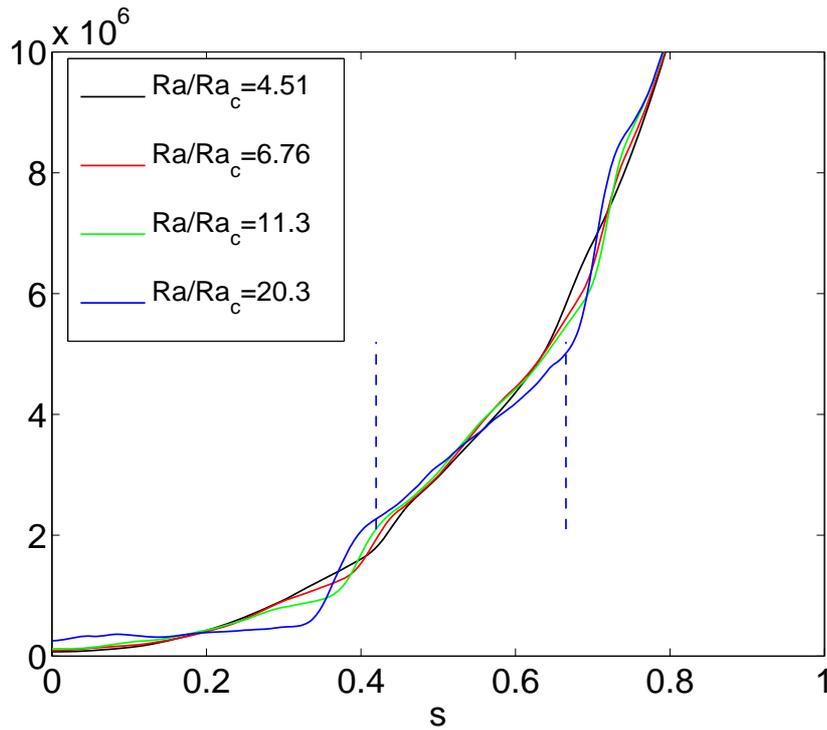


FIG. 5.28 – Profils de la vorticité potentielle pour  $E = 10^{-7}$ ,  $P = 0.1$  et différents forçages. Les traits pointillés bleus indiquent les limites du “plateau” de vorticité potentielle situé entre deux zones de forts gradients pour  $Ra/Ra_c = 20.3$ . La largeur du plateau correspondant,  $\delta_{num}$ , est reportée dans le tableau 5.3.

zonal sur la convection est suffisamment forte alors on peut espérer observer la signature du vent zonal dans le flux de chaleur transporté. Le flux de chaleur (conductif) qui sort d'une planète peut être mesuré; on s'intéresse donc aux possibles corrélations entre profil du vent zonal en surface et profil conductif. Le flux conductif radial axisymétrique qui sort de la sphère en  $R$  normalisé par  $q_s(R)$  est

$$q_{cond}(\theta, R) = \frac{\frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial T}{\partial r}(\phi, \theta, R) d\phi}{q_s(R)},$$

où  $T = T_s + \Theta$  est la température totale. Sur la figure 5.29, on représente  $q_{cond}$  et  $\overline{u_\phi}$  en fonction de la latitude. A première vue, on observe une augmentation plus ou moins monotone de  $q_{cond}$  avec la latitude, attendue puisque la couche limite thermique est plus épaisse à l'équateur qu'aux pôles. On obtient un facteur d'environ 7 entre flux de chaleur émis à l'équateur par rapport aux pôles. Dans les zones de cisaillement fort, qui correspondent au flanc gauche des jets progrades (délimité par des traits bleus et rouges), on observe une bosse positive de  $q_{cond}$  : la chaleur ne pouvant pas être transportée par  $u_s$ , une accumulation de chaleur se produit au niveau de la zone de cisaillement. Celle-ci est alors évacuée par conduction suivant la direction axiale.

Le flux de chaleur à la surface de la couche convectrice d'une planète porte donc la signature du profil de vent zonal. Cette observation est très intéressante car le flux de chaleur peut être mesuré à la surface du noyau terrestre par tomographie sismique (van der Hilst *et al.*, 2007) et à la surface des planètes géantes par mesure du rayonnement infrarouge (Pearl *et al.*, 1990). Dans le cas de la Terre, l'utilisation du flux de chaleur à la CMB pourrait peut-être permettre de déduire un profil de la circulation zonale géostrophique dans le noyau. Dans le cas des planètes géantes, la comparaison entre les profils latitudinaux du flux de chaleur et des vents zonaux pourrait possiblement permettre de statuer sur l'origine des jets. Ces idées sont hautement spéculatives car elles requièrent une résolution en latitude relativement fine de la mesure du flux de chaleur ainsi qu'une incertitude sur l'amplitude de la mesure inférieure à 20% qui est l'ordre de grandeur de l'anomalie positive du flux de chaleur conductif dans le flanc gauche du jet prograde.

### 5.4.5 Mise à l'échelle

Le but de la mise à l'échelle est d'exprimer l'évolution des vitesses convectives avec le forçage. On poursuit le raisonnement présenté précédemment où l'on a évoqué la production de la vorticité par l'étirement des colonnes. L'autre source de génération de la vorticité est la poussée d'Archimède : des

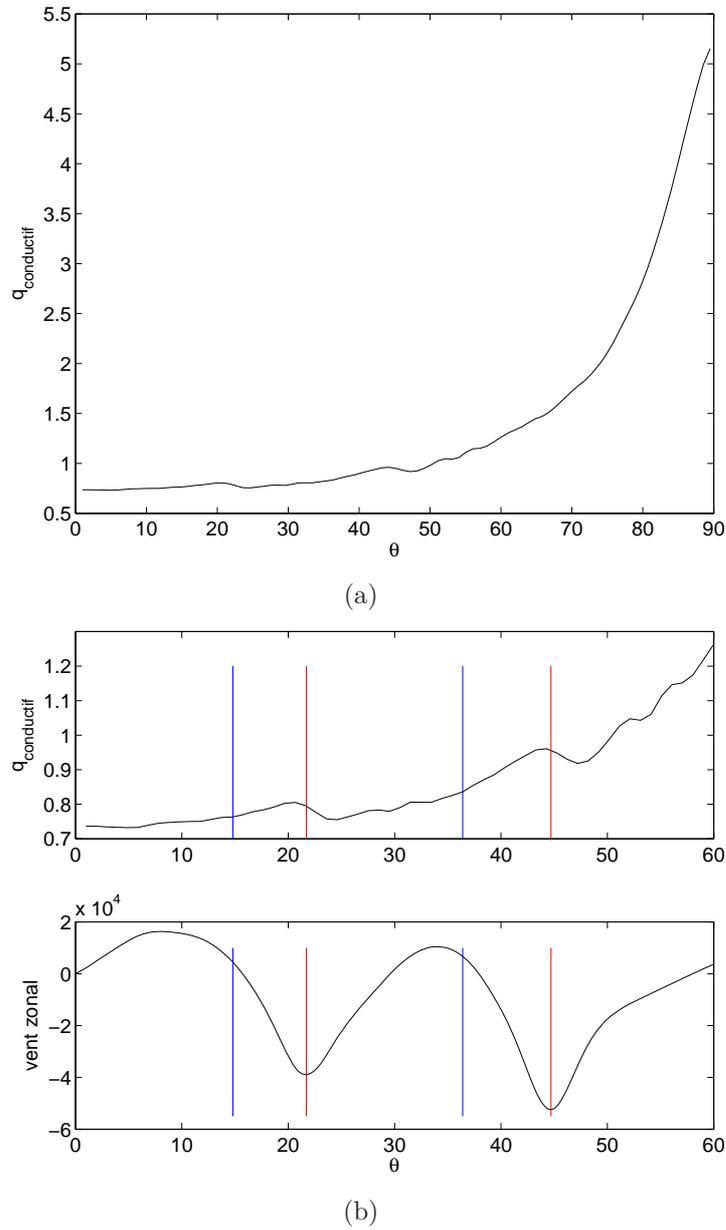


FIG. 5.29 – Profil de chaleur conductif à la surface en fonction de la latitude. La figure (b) est un détail de la figure (a) que l'on compare au profil de vent zonal projeté sur la sphère externe. Les traits bleus et rouges délimitent les zones où le cisaillement par le vent zonal est fort.

vortex se forment sur les flancs des panaches thermiques. A l'échelle  $L$ , on considère que la production de la vorticit e par la force d'Archim ede est du m eme ordre de grandeur que celui produit par  etirement des vortex :

$$\frac{U_c}{L\tau} \sim Ra \frac{\theta}{L}. \quad (5.69)$$

Dans leur exp erience de convection en rotation rapide utilisant du gallium appuy ee par des mod elisations num eriques QG, Gillet *et al.* (2007) estiment que le taux de g en eration des vortex se fait sur un temps  $\tau_{zs} = L/U_0$ . Aubert *et al.* (2001) utilisent le temps de retournement  $\tau_{to} = L/U_c$  comme temps caract eristique de la convection. Dans leur cas, cette hypoth ese se justifie par des vitesses zonales plus faibles que les vitesses convectives ( $Re = 2000$  au maximum pour leur exp erience en gallium). Pour des écoulements  $Re > 5000$ ,  $\tau_{zs}$  nous semble plus appropriée pour d ecrire la g en eration des tourbillons de grande taille  $L \approx \delta$ , du fait de la grande vitesse du vent zonal et de son impact  evident sur la convection (figure 5.19). La taille des plus gros tourbillons obtenus par Gillet *et al.* est alors identique  a l' echelle de Rhines  $L_0$  (5.64). En supposant une g en eration de la vorticit e sur un temps  $\tau_{to}$ , l' echelle de Rhines est alors ( $U_{rms} \approx U_c$ ) (Aubert *et al.*, 2003) :

$$L_c \sim \left( \frac{U_c E}{2\beta} \right)^{1/2}. \quad (5.70)$$

Ingersoll & Pollard (1982) montrent que la taille des jets zonaux pr edite par (5.70) est 60km, d'apr es les valeurs estim ees dans la couche d'hydrog ene mol eculaire de Jupiter. Cette valeur est tr es inf erieure  a la taille des jets zonaux observées qui est de l'ordre de 2000km. En utilisant l' echelle construite  a partir de l'amplitude du vent zonal (5.64), ils obtiennent une  echelle typique des mouvements zonaux de 3000km, du m eme ordre de grandeur que les observations.

Quant  a nous, on a d eriv e une estimation de la taille des jets li ee  a l'amplitude du vent zonal par m elange de la vorticit e potentielle ( equation (5.66)) :

$$\delta \sim \left( \frac{U_0 E}{|\beta_0|} \right)^{1/2}. \quad (5.71)$$

Cette  echelle n ecessite que la vorticit e potentielle soit homog ene sur la largeur du jet  $\delta$ . Au pr efacteur pr es, cette  echelle est identique  a  $L_0$  (5.64).

On reprend ici le raisonnement de Gillet *et al.* (2007) pour obtenir la mise  a l' echelle de la vitesse convective des plus gros tourbillons. En remplaçant  $\tau = \tau_{zs}$  et  $L = \delta \sim \sqrt{U_0 E}$  (on suppose  $\beta_0 \sim 1$ ) dans la formule (5.69), on obtient

$$U_c \sim U_0^{-1/2} E^{1/2} Ra \Theta.$$

$\Theta$  peut être évalué à partir du flux de chaleur convectif. Le flux de chaleur transporté par convection peut être estimé en supposant que vitesse radiale et anomalie de température sont bien corrélées, c'est-à-dire qu'un panache chaud monte et un panache froid descend (Jones, 2007) :

$$q_c = \rho C_p u_r \Theta, \quad (5.72)$$

ou sous forme adimensionnée,

$$q_c = P u_r \Theta. \quad (5.73)$$

On obtient alors la mise à l'échelle de la vitesse convective

$$U_c \sim (Ra q_c P^{-1} E^{1/2})^{1/2} U_0^{-1/4}. \quad (5.74)$$

L'équilibre qui contrôle l'écoulement zonal est celui entre la divergence de la contrainte de Reynolds et le frottement aux bords :

$$\overline{(u_e \cdot \nabla) u_e} \sim E^{-1/2} \overline{u_\phi}. \quad (5.75)$$

En utilisant (5.71), on obtient

$$U_0 \sim U_c^{4/3} \quad (5.76)$$

et

$$U_c \sim (Ra q_c P^{-1} E^{1/2})^{3/8}. \quad (5.77)$$

Gillet *et al.* (2007) obtiennent un excellent accord entre (5.76)-(5.77) et leurs résultats expérimentaux et numériques.

Sur la figure 5.30, on reporte les résultats issus de nos simulations numériques situés dans le régime "bien mélangé" défini précédemment, que l'on identifie par la présence d'un jet zonal prograde au centre. Nos calculs numériques montrent également un accord satisfaisant avec les lois d'échelle proposées pour  $U_c > 5000$  : on modélise bien la convection dans un régime où la viscosité n'affecte que peu les vitesses convectives.

Si la taille des structures n'était pas sensible au changement des vitesses, on obtiendrait une loi de puissance quadratique de  $U_0$  en fonction de  $U_c$  :

$$U_0 \sim U_c^2.$$

C'est ce qui est observé en régime modérément non-linéaire (Aubert *et al.*, 2003) et ici pour  $U_c < 1000$ , (principalement à  $E \geq 10^{-6}$  puisque l'on a peu de calculs à  $E \leq 10^{-7}$  pour lesquels  $U_c < 1000$ ). Lorsque  $U_0 > U_c$ , la saturation de  $U_0$  en  $U_c^{4/3}$  est bien reproduite (figure 5.31). Christensen (2002)

observe également une mise à l'échelle de  $U_0$  en  $U_c^x$  avec  $x < 2$  dans ses calculs tridimensionnels qu'il interprète comme une perte de la géostrophie. Les calculs avec des codes QG reproduisant cette tendance, il apparaît que cette saturation est due à une modification de la taille des tourbillons en régime développé (Gillet *et al.*, 2007). On n'observe pas de saturation de  $U_0$  vers une valeur constante comme dans le cas limite où l'on aurait épuisé le réservoir de vortacité potentielle (Aubert *et al.*, 2002).

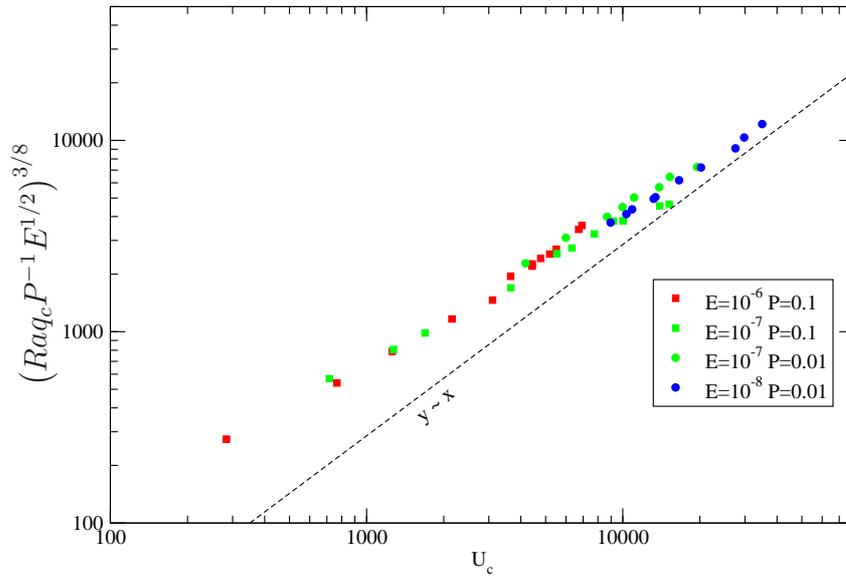


FIG. 5.30 – Test de la mise à l'échelle des résultats numériques pour  $U_c$ .

### 5.4.6 Vent thermique

Le vent thermique zonal est donné par

$$\frac{\partial \overline{u_\phi^1}}{\partial z} = \frac{ERa}{2} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial \theta}.$$

Je l'ai implémenté dans le code QG (voir Annexe A) car l'écoulement axial qu'il ajoute au champ de vitesse peut être d'importance pour l'effet dynamo. Étant agéostrophique, le vent thermique n'intervient que dans le calcul des non-linéarités de la température (et du champ magnétique) et non dans l'advection du champ de vitesse QG. On cherche ici à estimer son amplitude et son impact sur la convection.

L'amplitude du vent thermique pour le plus grand forçage réalisé à  $E = 10^{-7}$  et  $P = 0.01$  est représentée sur la figure 5.32. Elle est comprise entre

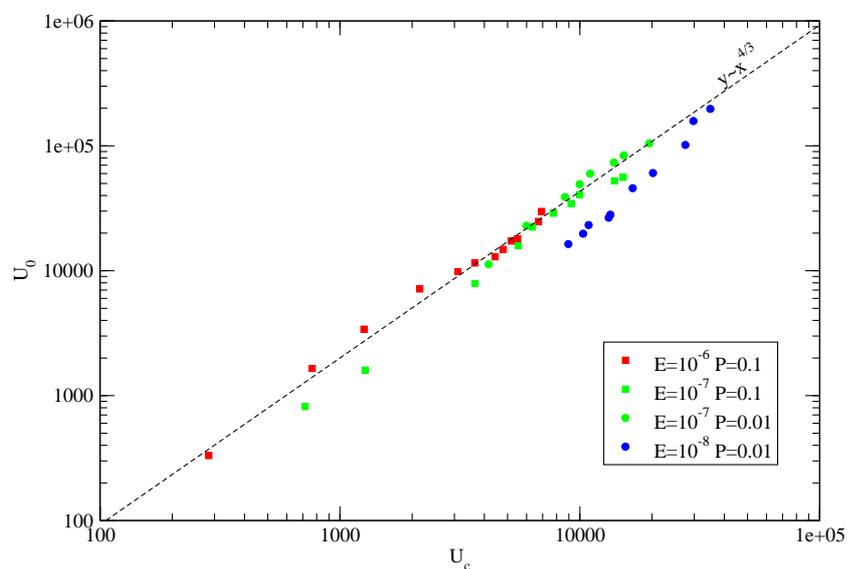


FIG. 5.31 – Évolution de  $U_0$  en fonction de  $U_c$  dans nos simulations numériques à différents  $E$  et  $P$ .

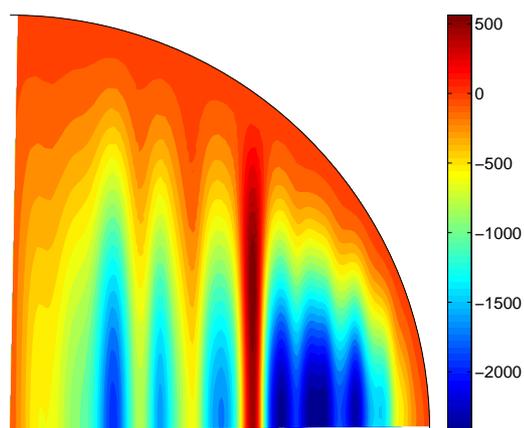
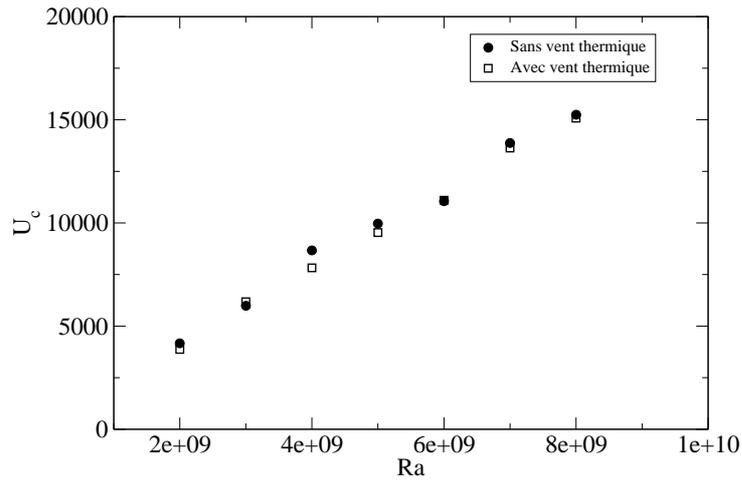


FIG. 5.32 – Amplitude du vent thermique (instantané) pour  $E = 10^{-7}$ ,  $P = 0.01$  et  $Ra/Ra_c = 4.65$ .

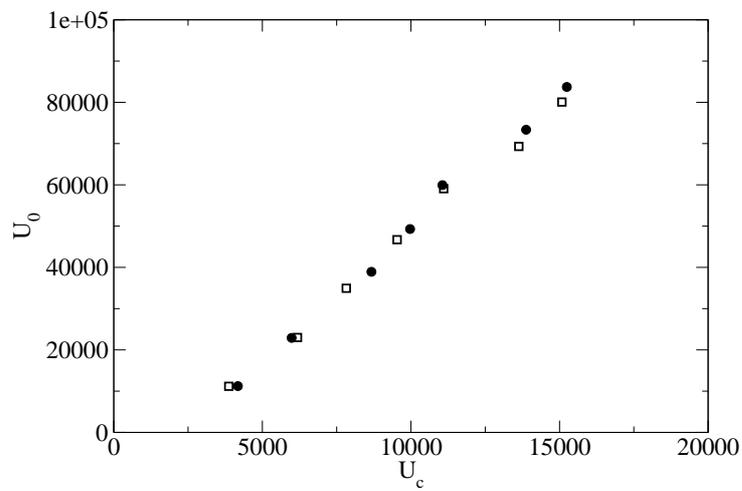
$[-2500, 500]$ . En comparaison, la vitesse du vent zonal géostrophique est comprise entre  $[-80000, 40000]$ . Le vent thermique apporte donc une contribution de moins de 5% au mouvement zonal. Le signe du vent zonal est principalement négatif. En effet, les isothermes étant relativement horizontales aux hautes latitudes où la couche limite est épaisse (figure 5.13),  $\partial_\theta \Theta$  est généralement positif. Comme  $\overline{u_\phi^1}$  est imposé nul aux bords,  $\overline{u_\phi^1}$  est nécessairement négatif pour assurer que  $\partial_z \overline{u_\phi^1} > 0$ . Pour  $P = 0.1$ , les isothermes sont moins sphériques que pour  $P = 0.01$ ; la vitesse du vent thermique est donc plus grande et atteint au maximum  $-4000$  soit environ 10% du vent zonal géostrophique.

Etant donné son amplitude faible, on s'attend à ce que le vent thermique ait un impact modéré sur la convection. D'un point de vue énergétique, il pompe de l'énergie thermique qui est alors perdue pour le champ de vitesse QG. Dans le monde physique, le cisaillement des panaches thermiques par  $\overline{u_\phi^1}$  entraîne un étalement de l'anomalie de température et donc un affaiblissement de la poussée d'Archimède. Pour un forçage donné, les vitesses convectives QG sont donc plus faibles lorsque le vent thermique est présent (figure 5.33(a)). Cet effet est relativement faible et n'affecte pas la mise à l'échelle proposée précédemment (figure 5.33(b)).

Zhang (1992) montre, pour des calculs de convection 3D faiblement non-linéaires, que le vent thermique est négligeable par rapport au vent zonal géostrophique pour  $P < 1$ . En revanche pour les grands  $P$ , le mouvement zonal dépend de  $z$  et est donc principalement généré par un mécanisme de vent thermique. Dans leur expérience (à gravité cylindrique), Aubert *et al.* (2001) obtiennent des mesures de vent zonal qui ne correspondent pas aux valeurs théoriques attendues pour le vent thermique en eau ( $P = 7$ ) comme en gallium ( $P = 0.025$ ). Ils en concluent que le vent thermique n'est pas le mécanisme principal qui donne naissance à l'écoulement zonal observé.



(a)



(b)

FIG. 5.33 – (a)  $U_c$  en fonction du forçage et (b)  $U_0$  en fonction de  $U_c$  pour des simulations avec ou sans vent thermique à  $E = 10^{-7}$  et  $P = 0.01$ .

## 5.5 Bilan de la convection en rotation rapide

- Par comparaison avec les études antérieures, l'étude linéaire au seuil de convection nous a permis d'évaluer la précision des résultats de notre code QG.
- En régime développé, on a pu explorer des régimes peu visqueux pour  $E = 10^{-5} - 10^{-8}$  et turbulents ( $Re > 10000$ ).
- Une zonation spatiale de la convection est présente comme observé précédemment dans d'autres modélisations numériques QG ou tridimensionnelles (Aubert *et al.*, 2003; Miyagoshi *et al.*, 2010) : une zone interne où les vitesses radiales sont suffisamment importantes pour avoir la propriété de mélange d'un écoulement turbulent et une région externe où des ondes de Rossby spiralées dérivant vers l'est sont excitées. On a observé le confinement de la zone externe lorsque le forçage augmente.
- Par effet de l'augmentation de  $\beta$  avec le rayon  $s$ , la taille des structures de la zone convective diminue avec  $s$ . Les tourbillons se retrouvent très étirés du fait de l'action du cisaillement de la circulation zonale. Leur temps de vie est écourté par la présence de ce mouvement zonal.
- Dans une sphère pleine, un critère basé sur le signe du vent zonal au centre et aux bords, nous a permis de distinguer les deux régimes de génération du vent zonal : (i) un régime "peu mélangé" reposant sur la spiralisation des cellules convectives et (ii) un régime "bien mélangé" où le mécanisme de mélange de la vorticité potentielle cr  e le mouvement zonal.
- Dans le régime bien mélangé, le vent zonal se met    l'échelle comme  $U_c^{4/3}$ . Les amplitudes maximales du vent zonal atteintes sont de l'ordre de  $2 \times 10^5$  pour  $U_c \approx 40000$ . Avec des parois rigides, le frottement du mouvement zonal aux bords est le mécanisme principal de dissipation de l'énergie cinétique. Cette considération nous a permis de déduire une mise    l'échelle de la taille des jets dépendant du taux d'injection d'énergie, paramètre clé qui contrôle le degré de mélange de la vorticité potentielle et donc l'amplitude des jets. Les prédictions de la taille théorique sont en bon accord avec nos résultats numériques, dans la limite où la taille des jets est encore influencée par la taille de la sphère dans les simulations numériques.
- En plus de la zonation spatiale, la lecture des spectres azimutaux et l'observation de séries temporelles de la fonction courant nous indique que, dans la zone de convection vigoureuse, les structures de grandes échelles, *i.e.* de tailles supérieures ou de l'ordre de grandeur de l'épaisseur des jets, sont des ondes de Rossby. Les petites structures sont advectives au sens où leur temps de retournement est de l'ordre du temps caractéristique

des ondes de Rossby. Dans une étude à venir, on va chercher à quantifier la vitesse des ondes de Rossby de grande taille.

- Les couches limites thermiques sont beaucoup plus épaisses aux pôles qu'à l'équateur ( $q_{cond}(\theta = \pi/2)/q_{cond}(\theta = 0) \approx 7$ ). Elles portent la marque du vent zonal qui affecte le transport de chaleur advectif.
- Le vent thermique atteint un maximum de 10% de l'écoulement zonal géostrophique. Son effet sur la convection est faible.



# Chapitre 6

## Effet dynamo produit par un écoulement convectif turbulent quasi-géostrophique

### 6.1 Introduction

Suite à la description de l'écoulement convectif turbulent QG, on cherche à savoir si celui-ci est à même de générer un champ magnétique auto-entretenu. On s'intéresse particulièrement à la topologie du champ magnétique généré.

Dans les 15 années qui ont suivies la publication des premières dynamos complètes (Glatzmaier & Roberts, 1995; Kageyama *et al.*, 1995), une gamme de paramètres de plus en plus étendue a été explorée par plusieurs groupes dans différentes configurations (conditions limites, type de chauffage,...) (voir la récente revue de Christensen & Wicht, 2007). Dans tous ces modèles numériques, la viscosité est surestimée afin de supprimer la turbulence des petites échelles qui ne peut pas être résolue avec les ressources de calcul actuelles. En revanche, les nombres de Reynolds magnétique de ces simulations sont du même ordre de grandeur que celui estimé pour le noyau terrestre ( $Rm \sim 10^2 - 10^3$ ).

Un bon nombre de ces modèles reproduisent un champ magnétique aux caractéristiques proches du champ magnétique terrestre : morphologie (principalement un dipôle axial), variation séculaire et inversions de polarité. On distingue souvent les dynamos convectives pour lesquelles le forçage est faible (typiquement  $Ra/Ra_c < 10$  pour  $P \sim 1$ ) des dynamos convectives à grand forçage ( $Ra/Ra_c \geq 10$  pour  $P \sim 1$ ). Les dynamos à faible forçage ont des champs principalement dipolaires et des seuils dynamo  $Rm_c$  de l'ordre de 100. Leur nombre d'Ekman est relativement grand ( $E \geq 10^{-4}$ ) ainsi que leur

nombre de Prandtl magnétique ( $Pm > 1$ ). Les dynamos à grand forçage produisent des champs dont les petites échelles sont plus énergétiques et ne génèrent pas systématiquement des champs à dominance dipolaire. Leur seuil dynamo se situe en général aux alentours de  $Rm_c \sim 1000$  pour des valeurs de Prandtl magnétique  $Pm \leq 1$ . Sreenivasan & Jones (2006) ont montré qu’une augmentation des forces inertielles, *i.e.* du forçage, conduit à des champs plus faibles et moins dipolaires dans le cas  $P = Pm < 1$ . Christensen & Aubert (2006) confirment cette tendance par une étude systématique de la morphologie du champ en fonction du nombre de Rossby local,  $Ro_l = u_{rms}/(\Omega l)$  avec  $l$  la taille caractéristique de l’écoulement. Ils établissent empiriquement la transition entre dynamos produisant un champ à dominance dipolaire et dynamos produisant un champ de plus petites échelles à  $Ro_l = 0.12$  en chauffage différentiel et avec conditions aux limites rigides.

En plus du rôle joué par les forces inertielles dans le choix de la topologie du champ, il semblerait que le mode de chauffage ait aussi une influence. Avec un chauffage interne, Kutzner & Christensen (2000) obtiennent des champs de petite échelle lorsque  $Pm \sim 1$ . Pour les mêmes valeurs de  $E$  et  $P$ , en chauffage différentiel ou en convection compositionnelle, les champs magnétiques générés sont principalement dipolaires. Notons cependant que la définition du nombre de Rayleigh et donc du forçage convectif dépend du mode de chauffage. La comparaison de simulations effectuées avec différents type de chauffage n’est donc pas aisée. En chauffage interne, pour  $Pm > 10$ , Sakuraba & Kono (1999) et Grote *et al.* (2000) trouvent des dynamos principalement dipolaires.

Les modélisations 3D aux plus petits  $E$  atteints récemment avec un modèle tridimensionnel ( $E = 4 \times 10^{-7}$ ), un mode de chauffage différentiel, des conditions de non-glissement et à  $P = 1$ , donnent des seuils dynamo relativement hauts,  $Rm_c = 700$  et des champs pour lesquels les degrés  $l = 1 - 10$  ont le même ordre de grandeur (Kageyama *et al.*, 2008).

Dans nos simulations QG de la convection en régime turbulent à petits nombres d’Ekman, quelle est la morphologie du champ magnétique entretenu? Quel est le seuil dynamo? Est ce que les processus impliqués dans l’effet dynamo sont les mêmes que dans les simulations convectives antérieures?

Étant donné les difficultés de la modélisation de la force de Lorentz aux petites échelles diffusives dans une modélisation QG (Schaeffer, 2004), on ne sera pas en mesure de décrire le mécanisme de saturation du champ magnétique dans cette thèse.

L’étude présentée ici a été entreprise tardivement et est aujourd’hui incomplète. Les résultats sont donc préliminaires mais vont cependant nous permettre d’alimenter la discussion (chapitre 9) sur l’importance des ondes

de Rossby dans les dynamos en rotation rapide.

## 6.2 Formulation du problème

L'équation de l'induction magnétique est

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (6.1)$$

avec  $\eta$  la diffusivité magnétique. Pour l'adimensionnement du champ magnétique, on prend le nombre de Hartmann  $Ha = 1$ , c'est-à-dire que l'on suppose un équilibre entre force de Lorentz et force visqueuse dans l'équation de Navier-Stokes. L'échelle du champ magnétique est alors  $(\rho\mu_0\nu\eta)^{1/2}/R$  et

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{Pm} \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (6.2)$$

avec  $Pm = \nu/\eta$ , le nombre de Prandtl magnétique.

Le champ magnétique étant à divergence nulle, on peut le décomposer sur une base de deux potentiels scalaires :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times (B_p \mathbf{r}) + \nabla \times (B_t \mathbf{r}), \quad (6.3)$$

où  $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$ . Le premier terme est la composante poloïdale et le second terme, la composante toroïdale. En développant cette expression en coordonnées sphériques, on obtient

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{1}{r} L_2(B_p), \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_p) \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial B_t}{\partial \phi}, \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_p) \right) - \frac{\partial B_t}{\partial \theta}, \end{cases} \quad (6.4)$$

où  $L_2$  est le laplacien angulaire :

$$L_2(\cdot) = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial (\cdot)}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 (\cdot)}{\partial \phi^2}.$$

En effectuant le produit scalaire de l'équation d'induction avec  $\mathbf{r}$ , on obtient l'équation d'évolution du scalaire poloïdal

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{Pm} \nabla^2 \right) L_2 B_p = \mathbf{r} \cdot [\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})]. \quad (6.5)$$

Le produit scalaire du rotationnel de l'équation d'induction avec  $\mathbf{r}$  nous donne l'équation d'évolution du scalaire toroïdal

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{Pm} \nabla \right) L_2 B_t = \mathbf{r} \cdot [\nabla \times \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})]. \quad (6.6)$$

Un champ magnétique auto-entretenu étant forcément tridimensionnel, celui-ci doit être modélisé sur une grille 3D.

Pour les conditions aux limites magnétiques, la sphère externe est supposée isolante.

L'implémentation numérique de ces équations est détaillée dans l'annexe A. La discrétisation des scalaires  $B_p$  et  $B_t$  est la même que celle utilisée pour la température : différences finies en rayon (grille irrégulière) et décomposition en harmoniques sphériques sur chaque coquille sphérique. L'utilisation des harmoniques sphériques rend l'implémentation des équations (6.5) et (6.6) relativement aisée. J'ai utilisé la partie magnétique du code PARODY, un code résolvant les équations de la magnétohydrodynamique dans une coquille sphérique développée par Julien Aubert et Emmanuel Dormy. Ce code est basé sur celui utilisé par le groupe Aubert, Cardin, Dormy lors de la validation des codes numériques dynamos (Christensen *et al.*, 2001).

Pour le champ magnétique, on utilise la même grille 3D et le même pas de temps que pour la température.

### 6.2.1 Difficulté de la modélisation de la force de Lorentz

Schaeffer (2004) a intégré la force de Lorentz,  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ , à l'équation de Navier-Stokes pour un écoulement QG en cisaillement. Étant donné le petit nombre de Prandtl magnétique impliqué dans ses dynamos ( $Pm < 0.1$ ), la taille à partir de laquelle les structures du champ magnétique deviennent diffusives est plus grande que la taille à laquelle le champ de vitesse est diffusif. La séparation des grilles 2D/3D est tout à fait appropriée à ce cas. Cela conduit cependant à un problème majeur : l'utilisation d'une grille 2D plus fine pour la vitesse que la grille 3D du champ magnétique rend périlleuse la modélisation de la force de Lorentz aux petites échelles diffusives magnétiques (inférieures au pas de la grille 3D).

La force de Lorentz est non-linéaire en  $\mathbf{B}$  : l'interaction des courants électriques et du champ magnétique des modes azimuthaux  $m < M_{\max 3D}$  ( $M_{\max 3D}$  est l'ordre de troncature des harmoniques sphériques sur la grille 3D) produit une contribution pour les termes  $M_{\max} \geq m > M_{\max 3D}$  ( $M_{\max}$  est l'ordre de troncature de la série de Fourier sur la grille 2D) dans l'équation de la quantité de mouvement. Pour ces petites échelles de taille  $l$ , la

diffusion magnétique domine et  $Rm_l = u_c(l)l/\eta \ll 1$ . Pour calculer la force de Lorentz sous-grille, c'est-à-dire pour les modes  $m > M_{\text{max3D}}$ , Schaeffer a supposé que la diffusivité magnétique équilibre l'induction dans l'équation du champ magnétique sous-grille  $\mathbf{b}'$ , c'est-à-dire que  $\partial_t \mathbf{b}' = 0$ . Cette hypothèse permet d'obtenir une expression analytique pour la force de Lorentz  $\mathbf{j}' \times \mathbf{B}$ , où  $\mathbf{j}'$  est le courant sous-grille, obtenu à partir de  $\mathbf{b}'$ , et  $\mathbf{B}$  est le champ de grande échelle ( $m < M_{\text{max3D}}$ ), sans avoir à résoudre l'équation de l'induction pour  $\mathbf{b}'$ . En comparant deux simulations aux paramètres identiques avec dans un cas,  $M_{\text{max}} = M_{\text{max3D}}$  (force de Lorentz exacte) et dans l'autre,  $M_{\text{max}} > M_{\text{max3D}}$  (force de Lorentz paramétrée), Schaeffer observe un saut en  $m = M_{\text{max3D}}$  dans le spectre de l'énergie cinétique de la dynamo à force de Lorentz paramétrée. Ceci indique que le freinage des petites échelles par la force de Lorentz paramétrée est trop important. Schaeffer conclut que l'hypothèse  $\partial_t \mathbf{b}' = 0$  est fautive. Une paramétrisation correcte de la force de Lorentz sous-grille pour les modélisations QG est encore un problème non-résolu.

Dans le cas de la force d'Archimède, on n'a pas rencontré ce problème : la force d'Archimède est linéaire en température. On a donc supposé un champ de température lisse sous-grille, c'est-à-dire que les échelles de la vitesse  $m > M_{\text{max3D}}$  ont une contribution nulle de la force d'Archimède. Les spectres de l'énergie cinétique ne présente pas de brisure de pente à  $m = M_{\text{max3D}}$ . Sur la figure 6.1, on compare les spectres d'énergie cinétique de deux simulations avec une troncation  $M_{\text{max3D}} = M_{\text{max}}$  ou  $M_{\text{max3D}} < M_{\text{max}}$ . Les petites échelles  $m > 100$  sont légèrement moins énergétiques dans le cas  $M_{\text{max3D}} < M_{\text{max}}$  mais l'impact sur la pente du spectre est peu significative. Il faut cependant rester prudent dans le cas de troncation trop sévère. Dans nos simulations, on a toujours gardé  $M_{\text{max3D}} > M_{\text{max}}/2$ .

Suite aux difficultés rencontrées par Schaeffer (2004) pour traiter la force de Lorentz sous-grille, j'ai décidé de ne pas la modéliser pour le moment. Les dynamos que je présente donc sont cinématiques au sens où le champ magnétique ne rétroagit pas sur l'écoulement. Dans ce cas, on n'observera pas de saturation du champ magnétique.

## 6.3 Dynamos cinématiques convectives

### 6.3.1 Seuil dynamo

J'ai effectué des simulations principalement à  $E = 10^{-7}$  pour  $P = 0.1$  et  $P = 0.01$ . Comme pour le nombre de Prandtl thermique  $P$ , l'efficacité de la modélisation QG est limitée aux faibles nombres de Prandtl magnétique afin de pouvoir utiliser la séparation de grilles. Sans l'utilisation de cette

optimisation, le modèle QG ne serait pas plus rapide qu'une modélisation tridimensionnelle. Le problème des petits  $Pm$  est que le champ magnétique est rapidement diffusé. Pour obtenir une dynamo, il faut que le taux d'induction par le champ de vitesse soit plus rapide que le taux de diffusion magnétique. Le rapport entre taux de diffusion et taux d'induction est mesuré par le nombre de Reynolds magnétique  $Rm = UR/\eta$ .

La première étape de ce travail consiste à déterminer le seuil d'apparition de la dynamo. Comme il n'y a pas de force de Lorentz, l'amplitude du champ magnétique va croître/décroître de façon exponentielle si le champ de vitesse est dynamogène ou non. L'écoulement étant chaotique spatialement et temporellement, le champ magnétique subit des fluctuations temporelles. Sa croissance ou sa décroissance n'est donc pas monotone (figure 6.2). On a choisi d'étudier en particulier deux écoulements à différents  $P$  ce qui va nous permettre d'évaluer l'impact du nombre de jets zonaux :

- $E = 10^{-7}$ ,  $P = 0.1$ ,  $Re \approx 10300$ , 5 jets.
- $E = 10^{-7}$ ,  $P = 0.01$ ,  $Re \approx 16000$ , 3 jets.

Pour  $P = 0.1$ , je n'ai pas trouvé de seuil dynamo pour  $Pm \leq 0.1$ . Cela implique soit que le seuil dynamo est situé à  $Pm_c > 0.1$ , c'est-à-dire  $Rm_c > 1030$ , soit que cet écoulement n'est pas capable de produire de dynamo.

Pour  $P = 0.01$ , j'ai obtenu un champ magnétique auto-entretenu (figure 6.2).

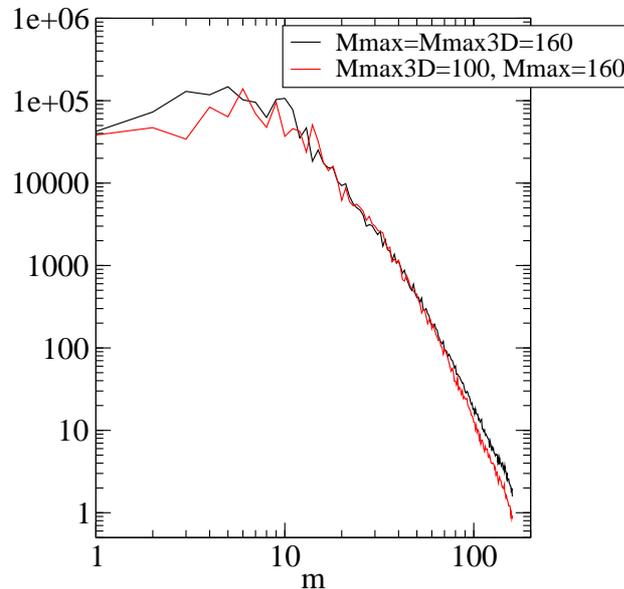


FIG. 6.1 – Spectre d'énergie cinétique pour deux simulations convectives où l'on a changé l'ordre de troncature du champ de température,  $M_{\max 3D}$ .  $M_{\max}$  indique l'ordre de troncature du champ de vitesse.

Le seuil dynamo est situé entre  $0.05 < Pm_c \leq 0.1$  soit  $800 < Rm_c \leq 1600$ . La résolution nécessaire au calcul de la dynamo à  $Pm = 0.1$  est NS=501 points de la grille radiale pour la vitesse, NR=301 points en rayon pour la température et le champ magnétique, Lmax=200 degrés d'harmoniques sphériques, Mmax3D=120 modes pour les champs 3D et Mmax=120 modes pour la vitesse. Ce calcul a duré environ 6000h cpu.

Des calculs à plus grand nombre de Reynolds magnétiques à  $E = 10^{-7}$  et  $P = 0.1$  sont requis pour déterminer précisément l'impact du nombre de jets sur le seuil dynamo. D'après cette étude préliminaire, il semble qu'une augmentation du nombre de jets n'aide pas drastiquement l'instabilité dynamo à se mettre en place puisque  $Rm_c > 1030$  en présence de 5 jets alors que  $Rm_c \approx 1600$  avec 3 jets.

### 6.3.2 Influence du vent thermique

J'ai effectué des calculs avec ou sans vent thermique ajouté au champ de vitesse 3D utilisé pour le calcul des non-linéarités des équations de la température et du champ magnétique. Rappelons que le vent thermique est une vitesse axiale agéostrophique produite par des contrastes latitudinaux de température.

Les vitesses verticales sont importantes dans le processus dynamo car elles permettent de générer de l'hélicité, corrélation entre la vitesse et la vortacité,  $H = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}$ . La présence d'hélicité dans l'écoulement est généralement considérée comme importante dans le mécanisme dynamo. En effet, l'hélicité est une mesure approximative du degré de symétrie miroir d'un écoulement. Les écoulements qui manquent de symétrie miroir sont connus comme étant efficaces pour la génération du champ magnétique (*e.g.* Moffatt, 1978). Dans un écoulement quasi-géostrophique, seule la composante axiale de la vortacité est non-nulle et donc  $H = u_z \omega_z$ . Pour générer de l'hélicité moyenne, il faut que la vitesse  $u_z$  soit en phase avec  $\omega_z$ . En l'absence de mécanisme "agéostrophique", la vitesse verticale est générée soit par effet de pente soit par pompage d'Ekman. L'effet de pente génère une vitesse  $u_z \sim z\beta u_s$  qui est en quadrature de phase avec  $\omega_z$  et ne produit donc pas d'hélicité. Le pompage d'Ekman  $u_z \sim E^{1/2} \omega_z$  est, quant à lui, en phase avec  $\omega_z$ . Pour des petits nombres d'Ekman, le pompage est cependant faible et relativement peu d'hélicité est produite. Dans un modèle quasi-bidimensionnel, la production d'hélicité repose donc sur d'autres mécanismes tel que l'action du vent thermique ou du vent magnétique (équilibre entre force de Coriolis, gradient de pression et force de Lorentz). Suivant cet argument, le vent thermique devrait *a priori* jouer un rôle important dans l'effet dynamo produit par un écoulement quasi-géostrophique.

En l'absence de vent thermique, j'ai obtenu des dynamos dont le seuil et la morphologie du champ est identique à celle produite en présence du vent thermique. L'impact du vent thermique est donc faible. On est alors amené à se questionner sur le(s) ingrédient(s) clé(s) qui génère(nt) ces dynamos convectives QG. Si la production d'hélicité repose sur le pompage d'Ekman alors une diminution du nombre d'Ekman devrait conduire à une augmentation du seuil. Les calculs du seuil à  $E = 10^{-6}$  et  $P = 0.01$ , pour  $Re \approx 5000$  et jusqu'à  $Pm = 0.5$  soit  $Rm \approx 2500$ , donnent un champ magnétique en décroissance. Cette observation ne va pas dans le sens d'un mécanisme dynamo dépendant du pompage d'Ekman.

Dans notre description rudimentaire de la génération d'hélicité par l'écoulement QG, on a omis une caractéristique importante : la dépendance temporelle. Schaeffer & Cardin (2006) ont calculé des dynamos en utilisant un champ de vitesse QG et un champ magnétique 3D dans un écoulement en cisaillement (couche de Stewartson). Dans leurs simulations QG, il n'y a pas de vitesse verticale autre que produite par l'effet de pente et le pompage d'Ekman. Ils mettent l'accent sur l'importance de la propagation des ondes de Rossby : sans la variation temporelle de l'écoulement, ils n'obtiennent pas de dynamo. Avec ou sans pompage d'Ekman, ils obtiennent un seuil dynamo qui reste significativement inchangé. On reviendra en détail sur l'importance de la propagation d'ondes dans le chapitre sur les dynamos générées par rotation différentielle (chapitre 8). Dans le chapitre sur la convection QG sans champ magnétique, on a interprété les structures de grandes échelles comme étant des ondes de Rossby. Les observations précédentes, à savoir l'impact non-significatif du vent thermique et du pompage d'Ekman, sont des arguments en faveur d'un mécanisme dynamo basé sur la propagation des ondes de Rossby tel que décrit par Schaeffer & Cardin (2006). Cependant, notre écoulement convectif turbulent, où des ondes de Rossby de grande taille se superposent à des structures advectives plus petites, est plus complexe que l'écoulement décrit par Schaeffer & Cardin et on s'attend donc à une plus grande complexité du mécanisme dynamo.

### 6.3.3 Topologie du champ magnétique

Le champ magnétique pour les paramètres  $E = 10^{-7}$  et  $P = 0.01$  est constitué d'un fort champ toroïdal (2 à 3 fois plus fort que le champ poloïdal) et d'un champ poloïdal principalement non-axisymétrique. Le champ toroïdal axisymétrique représente environ 10% du champ toroïdal total. Le champ poloïdal axisymétrique représente environ 0.1% du champ poloïdal total (figure 6.2). On présente un spectre du champ magnétique comparé à un spectrogramme de la vitesse sur la figure 6.3. Le champ poloïdal est de petite échelle, c'est-

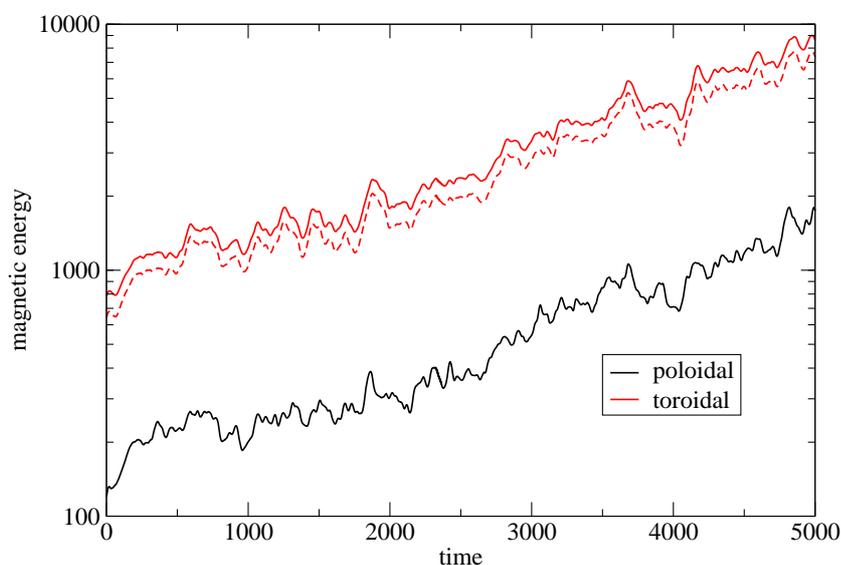
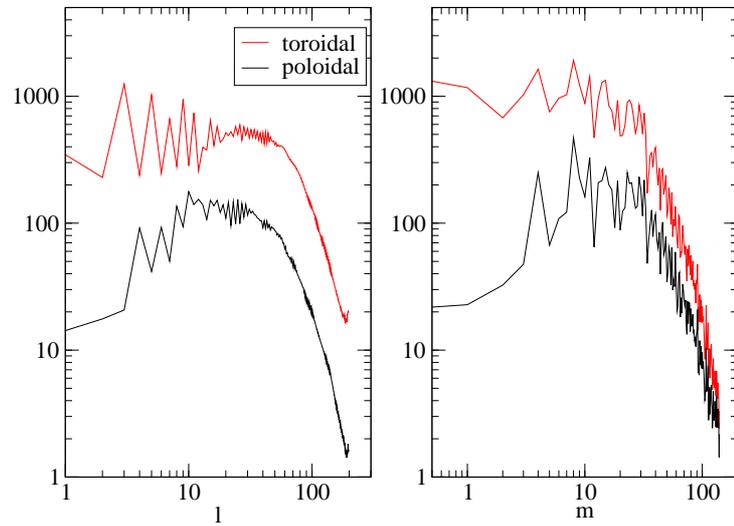


FIG. 6.2 – Série temporelle de l'énergie magnétique polôïdale et torôïdale. Les lignes en pointillés représentent l'énergie des composantes non-axisymétriques. L'énergie polôïdale totale et non-axisymétrique se superposent. Le temps est donné en nombre de rotation.  $t = 0$  ne correspond pas au temps initial de démarrage du calcul. Les paramètres de cette simulation sont  $E = 10^{-7}$ ,  $P = 0.01$ ,  $Ra = 4.65Ra_c$  ( $Re \approx 16000$ ) et  $Pm = 0.1$ .

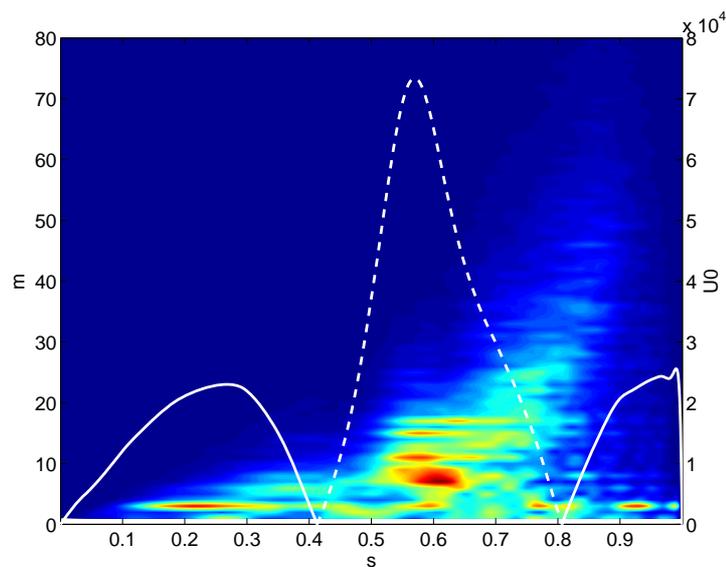
à-dire de taille similaire aux principales structures du mouvement convectif. Sur le spectre en  $m$ , le pic du champ polôïdal se situe à  $m = 8$ , identique au pic de la vitesse dans la région convectivement active ( $0.5 < s < 0.8$ ) correspondant à des structures que l'on a identifié comme étant des ondes de Rossby. En revanche le champ torôïdal est de grande échelle et maximum en  $m = 0$ .

Un écoulement géostrophique est symétrique par rapport à l'équateur :  $(u_s, u_z, u_\phi)(s, -z, \phi) = (u_s, -u_z, u_\phi)(s, z, \phi)$ . En partant d'un champ magnétique soit symétrique, soit anti-symétrique par rapport à l'équateur, le champ induit aura forcément cette symétrie par action de la diffusion et de l'induction par les vitesses QG (Roberts, 1972). Il existe donc deux familles de solutions à l'équation de l'induction : la famille du dipôle axial (anti-symétrique, correspondant aux coefficients polôïdaux  $l + m$  impairs) et la famille du quadrupôle axial (symétrique, coefficients polôïdaux  $l + m$  pairs). Le champ magnétique initial doit donc contenir les deux familles de symétrie pour que les deux parités puissent s'exprimer.

Le champ magnétique polôïdal axisymétrique est en décroissance et garde essentiellement la forme du champ initial. Pour vérifier l'indépendance aux



(a)



(b)

FIG. 6.3 – (a) Spectres de l'énergie magnétique en latitude ( $l$ ) et en longitude ( $m$ ). (b) Spectrogramme de l'énergie cinétique en longitude (axe vertical) et en rayon (axe horizontal). La courbe blanche correspond à l'écoulement zonal (continue : positif, pointillés : négatif). Les spectres (a) ont été extraits à un temps donné alors que le spectrogramme (b) a été moyenné en temps. Même simulation que la figure 6.2.

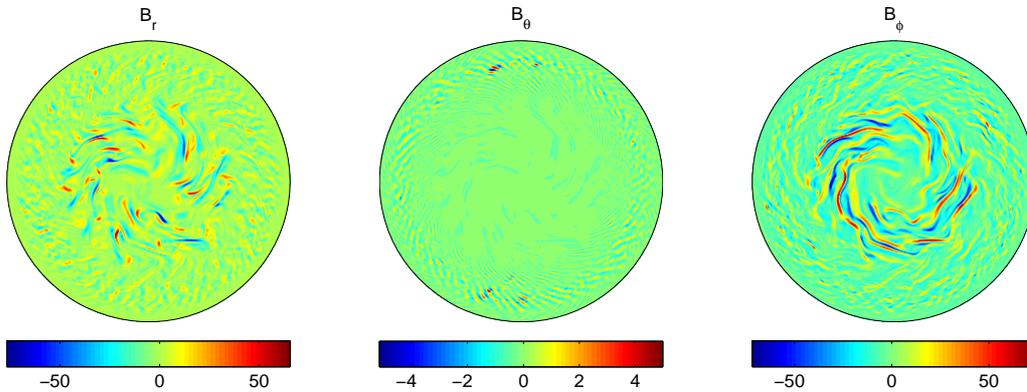


FIG. 6.4 – Composantes sphériques du champ magnétique non-axisymétrique dans le plan équatorial. Même simulation que la figure 6.2.

conditions initiales, j'ai utilisé deux types de champ initiaux : un champ non-nul sur tous les modes des degrés  $l = 1 - 2$  ou sur tous les modes des degrés  $l = 1 - 5$ . Les résultats sur le seuil et la décroissance du mode  $m = 0$  du champ poloïdal sont inchangés par le choix initial de l'un ou l'autre de ces champs.

La figure 6.4 représente les cartes des trois composantes du champ magnétique non-axisymétrique dans le plan équatorial. On observe des structures fines localisées principalement dans la zone de convection active.

## 6.4 Conclusion

On a montré l'existence de dynamos cinématiques convectives produites par un écoulement quasi-géostrophique dans un régime turbulent ( $Re > 10^4$ ). A ma connaissance, l'existence de dynamos convectives à si petits nombres d'Ekman ( $E = 10^{-7}$ ) n'avait jamais été prouvée auparavant. Le nombre de Prandtl magnétique critique est de l'ordre de 0.1. Des calculs à  $E = 10^{-8}$  et  $P = 0.01$  sont actuellement en cours.

Pour les paramètres  $E = 10^{-7}$  et  $P = 0.01$ , on obtient une dynamo où le champ toroïdal est de grande échelle (forte composante  $m = 0$ ) mais où le champ poloïdal est de petite échelle, *i.e.* de même échelle que les structures non-axisymétriques les plus énergétiques de l'écoulement, ici  $m \sim 8$ . Pas ou peu de champ magnétique poloïdal axisymétrique est généré. Le champ toroïdal est environ 3 fois plus fort que le champ poloïdal.

Alors que l'on s'attendait à une influence importante du vent thermique, celui-ci n'a pas d'impact significatif sur le seuil dynamo et la forme du champ magnétique. On a montré que le pompage d'Ekman a également peu d'in-

fluence. On est donc amené à considérer l'importance de l'aspect ondulatoire de l'écoulement (Schaeffer & Cardin, 2006).

Le vent zonal géostrophique est grand dans nos dynamos cinématiques. Cependant, il est généralement assez faible dans les dynamos convectives 3D et la circulation zonale est principalement agéostrophique (Aubert, 2005). En utilisant des conditions aux limites de glissement libre qui permettent l'apparition d'un mouvement zonal de grande amplitude, Simatev & Busse (2005) obtiennent des dynamos non-dipolaires pour  $P \sim 0.1$  où l'écoulement zonal est principalement géostrophique. L'observation de dynamos non-dipolaires en présence d'un écoulement zonal de grande amplitude a été rapportée dans d'autres études (Grote & Busse, 2001; Gómez-Pérez & Heimpel, 2007). En effet, l'existence d'un mouvement zonal géostrophique et d'un champ principalement dipolaire est généralement rendue incompatible par la loi d'isorotation de Ferraro (Ferraro, 1937) : à partir l'équation de l'induction magnétique, en négligeant la dissipation magnétique, on peut montrer que  $\mathbf{B} \cdot \nabla(\overline{u_\phi}/s) = 0$  pour un écoulement et un champ magnétique axisymétrique stationnaire, *i.e.* que les lignes de champ magnétique s'alignent avec les contours de la vitesse angulaire. On peut également interpréter cette contrainte en considérant que pour un fort champ magnétique, les forces magnétiques vont redistribuer le moment angulaire de façon à satisfaire la loi de Ferraro. Dans nos dynamos cinématiques QG, cet argument ne peut pas prévaloir puisque la force de Lorentz est absente. Dans la suite de cette étude, on souhaite donc intégrer la force de Lorentz pour le mode  $m = 0$  afin d'évaluer l'importance du mouvement zonal dans l'effet dynamo.

Les nombres de Reynolds magnétique nécessaires au démarrage de la dynamo sont supérieurs à 1000 dans nos simulations. Cette observation, ainsi que la morphologie du champ entretenu, sont similaires aux résultats des modélisations 3D à petits  $E$  de Kageyama *et al.* (2008).

Nos dynamos QG se situent-elles dans le régime où les forces inertielles sont importantes d'après le critère donné par Christensen & Aubert (2006)? On ne devrait pas être dans ce cas faute de violer les hypothèses du modèle QG. Pour vérifier cet argument, on calcule  $Ro_l = u_{rms}/(\Omega l) = RoR/l$  avec  $l = 2\pi s/m \approx 0.47$  correspondant à  $m = 8$  en  $s = 0.6$  et  $Ro = U_c E = 1.6 \times 10^{-3}$ . On obtient  $Ro_l \approx 3 \times 10^{-3}$ , très inférieur à 0.12, la valeur empirique obtenue par Christensen & Aubert (2006) pour la transition entre champs dipolaire et non-dipolaire dans le cas d'un chauffage différentiel.

L'obtention d'un champ magnétique de petite échelle avec un chauffage interne pour  $Pm < 1$  est en accord avec l'étude de Kutzner & Christensen (2000). Le rôle joué par le mode de chauffage sur la topologie du champ dans notre étude à petit  $E$  et grand  $Re$  est une question primordiale. En effet, il semble que les modélisations aux plus petits  $E$  accessibles qu'elles soient

tridimensionnelles (Kageyama *et al.*, 2008) ou QG produisent des dynamos aux caractéristiques éloignées de la géodynamo. Cependant l'utilisation d'un chauffage interne propice à l'émergence d'un champ de petite échelle peut biaiser cette conclusion. Une étude QG, utilisant un mode de chauffage différentiel par exemple, s'avère nécessaire pour trancher cette question. Dans ces conditions, l'écoulement sera cependant modifié car ce type de chauffage requiert la présence d'une graine au centre.

Finalement, il convient de mettre l'accent sur le fait que ces dynamos sont cinématiques et, par conséquent, les résultats sur la morphologie du champ magnétique restent préliminaires, la géométrie du champ magnétique étant bien souvent modifiée par les phénomènes de saturation non-linéaire.

Il y a donc beaucoup d'idées à explorer avec la dynamo QG convective. La question de la topologie du champ magnétique entretenu me semble cruciale. Pour que le modèle QG fournisse des réponses robustes à la question des dynamos à petits  $E$  et grands  $Re$ , on a souligné l'importance de l'intégration de la force de Lorentz et de l'utilisation d'un autre mode de chauffage.

Avec les résultats préliminaires présentés ici, on remarque que les simulations effectuées dans des régimes dynamiques plus proches de ceux des noyaux produisent des champs aux caractéristiques éloignées des champs planétaires. Cela souligne bien la subtilité et la complexité du mécanisme dynamo. Si ces résultats se confirment dans un cadre plus général, comment pourra-t-on alors réconcilier les modélisations à petits  $E$  avec les observations ?



## Troisième partie

# Dynamos générées par cisaillement en surface



# Chapitre 7

## Dynamos générées par un écoulement de Couette sphérique

Notre étude sur les dynamos générées par une rotation différentielle dans une géométrie sphérique commence par l'écoulement de Couette produit entre deux sphères dont le taux de rotation est différent. Le fort cisaillement du champ de vitesse donne lieu à des instabilités hydrodynamiques et à la propagation d'ondes qui ont été étudiées expérimentalement (Egbers & Rath, 1995; Kelley *et al.*, 2007; Gagnière, 2009) et numériquement (Hollerbach *et al.*, 2006, 2004). Les mouvements et l'induction magnétique en présence d'un champ magnétique imposé est également l'objet de modélisations expérimentales (Sisan *et al.*, 2004; Nataf *et al.*, 2006) et numériques (Dormy *et al.*, 1998; Hollerbach *et al.*, 2007; Nataf *et al.*, 2008; Schmitt, 2010). L'existence de dynamos générées dans l'écoulement de Couette sphérique a été démontrée numériquement par Wicht (non publié). Une expérience de grande taille (3m de diamètre pour la sphère externe) a été construite par le groupe de College Park au Maryland dans le but d'obtenir un champ magnétique auto-entretenu avec des nombres de Reynolds magnétique qui pourraient atteindre des valeurs de l'ordre de 700 en utilisant du sodium liquide.

On présente dans ce chapitre notre étude numérique sur les dynamos générées par un écoulement de Couette sphérique. Le but est de décrire les régimes favorables à l'obtention de dynamos à travers une large gamme de paramètres qui nous permettent d'évaluer l'impact de la rotation d'ensemble, du forçage et des conditions aux limites magnétiques.

Sur la figure 7.1, on schématise la géométrie de problème et on donne les différents paramètres du système.

Ces travaux ont été publiés dans la revue *Geophysical and Astrophysical*

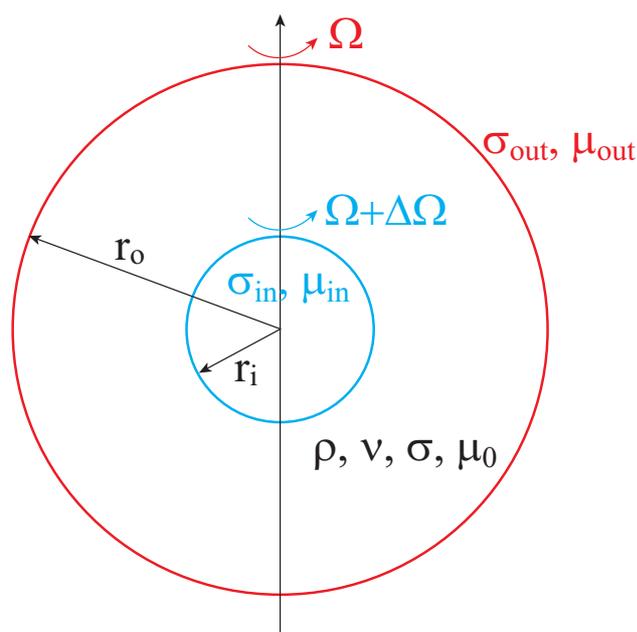


FIG. 7.1 – Schéma du modèle de l'écoulement de Couette sphérique. Le fluide situé dans la cavité entre la sphère interne de rayon  $r_i$  et la sphère externe de rayon  $r_o$  a pour propriétés physiques :  $\rho$ , sa densité,  $\nu$ , sa viscosité,  $\sigma$ , sa conductivité électrique et  $\mu_0$  sa perméabilité magnétique prise égale à celle du vide. La sphère interne tourne à un taux de rotation  $\Omega + \Delta\Omega$ . Ses propriétés magnétiques sont  $\sigma_{in} = \sigma$  tout au long de cette étude,  $\mu_{in} = \mu_0$  dans les sections 7.5 et 7.6 et  $\mu_{in} = [1, 10, 100, 1000] \times \mu_0$  dans la section 7.7. La sphère externe tourne à un taux de rotation  $\Omega$ . Ses propriétés magnétiques sont  $\sigma_{out} = 0$ ,  $\mu_{out} = \mu_0$  pour les sections 7.5 et 7.6 et  $\sigma_{out} = [0, \sigma]$ ,  $\mu_{out} = [1, 10, 100, 1000] \times \mu_0$  dans la section 7.7.

*Fluid Dynamics* : C. Guervilly & P. Cardin, Numerical simulations of dynamos generated in spherical Couette flows, 2010, **104**, 221-248. Cet article est présenté ici dans sa version publiée.

## 7.1 Plan de l'article

Après un court résumé des expériences dédiées à l'étude de l'induction magnétique avec des métaux liquides et de la pertinence de l'écoulement de Couette sphérique pour l'étude de certains aspects des dynamos planétaires, on présente les équations du problème et l'implémentation numérique utilisée (section 7.4). L'article est divisé en deux parties : dans la première partie (sections 7.5 et 7.6), on s'intéresse à l'influence de la rotation d'ensemble et du forçage sur les champs magnétiques entretenus ; dans la deuxième partie (section 7.7), on décrit l'impact de la modification des conditions aux limites magnétiques sur le seuil dynamo. Dans la première partie, pour chacune des études avec ou sans rotation d'ensemble, on commence par la description de l'écoulement de base et de ses instabilités sans champ magnétique. La génération du champ magnétique est ensuite présentée en se focalisant particulièrement sur la dépendance du seuil dynamo en fonction des paramètres. Ces résultats nous permettent de discuter les possibles implications pour les expériences (section 7.6.3).

## 7.2 Abstract

We numerically investigate the efficiency of a spherical Couette flow at generating a self-sustained magnetic field. No dynamo action occurs for axisymmetric flow while we always found a dynamo when non-axisymmetric hydrodynamical instabilities are excited. Without rotation of the outer sphere, typical critical magnetic Reynolds numbers  $Rm_c$  are of the order of a few thousands. They increase as the mechanical forcing imposed by the inner core on the flow increases (Reynolds number  $Re$ ). Namely, no dynamo is found if the magnetic Prandtl number  $Pm = Rm/Re$  is less than a critical value  $Pm_c \sim 1$ . Oscillating quadrupolar dynamos are present in the vicinity of the dynamo onset. Saturated magnetic fields obtained in supercritical regimes (either  $Re > 2Re_c$  or  $Pm > 2Pm_c$ ) correspond to the equipartition between magnetic and kinetic energies. A global rotation of the system (Ekman numbers  $E = 10^{-3}, 10^{-4}$ ) yields to a slight decrease (factor 2) of the critical magnetic Prandtl number, but we find a peculiar regime where dynamo action may be obtained for relatively low magnetic Reynolds numbers

( $Rm_c \sim 300$ ). In this dynamical regime (Rossby number  $Ro \sim -1$ , spheres in opposite direction) at a moderate Ekman number ( $E = 10^{-3}$ ), an enhanced shear layer around the inner core might explain the decrease of the dynamo threshold. For lower  $E$  ( $E = 10^{-4}$ ) this internal shear layer becomes unstable, leading to small scale fluctuations, and the favorable dynamo regime is lost. We also model the effect of ferromagnetic boundary conditions. Their presence has only a small impact on the dynamo onset but clearly enhances the saturated magnetic field in the ferromagnetic parts. Implications for experimental studies are discussed.

### 7.3 Introduction

Naturally occurring dynamos are driven by the motions of metallic fluids of very low magnetic Prandtl number  $Pm$ , the ratio of kinematic viscosity to magnetic diffusivity ( $Pm \leq 10^{-5}$ ). The liquid metals used in laboratory dynamo experiments have also this property. Accordingly, many groups in the world have devised experiments using liquid metals to model and study naturally occurring dynamos. The first generation of dynamo experiments, performed ten years ago, used constrained flows as close as possible to well known kinematic dynamos. In two experiments using liquid sodium, one in Riga, Latvia (Gailitis *et al.*, 2001) and one in Karlsruhe, Germany (Stieglitz & Müller, 2001), the dynamo effect has indeed been observed. More recently, second-generation experiments have been performed in order to study the amplification of the magnetic field by less constrained flows. The flow is highly turbulent but the mean flow is expected to yield dynamo action (Pefley *et al.*, 2000; Bourgoïn *et al.*, 2002; Forest *et al.*, 2002). No self-sustained magnetic fields were observed in the parameter regime where kinematic numerical computations predicted dynamos. It seems that hydrodynamic turbulence inhibits dynamo action in these experiments, at least close to the predicted dynamo onset. In 2007 however due to the use of ferromagnetic impellers, a self-sustained magnetic field has been observed in the Von Kármán Sodium (VKS) experiment in Cadarache (Monchaux *et al.*, 2007). Whereas in natural systems such as the Earth's core the magnetic field is strong and, as a result, modifies largely the velocity field by Lorentz forces, in all these experiments the induced magnetic field is weak and does not strongly act back on the flow. Consideration of key ingredients for the flow dynamics (strong magnetic field, overall rotation of the system) in natural systems has motivated the construction of the third generation of experiments. Spherical Couette flows (produced between two concentric spheres in differential ro-

tation) are geometrically relevant for the Earth's core and may incorporate global rotation (i.e. rotation of the outer sphere). Tests are currently underway on experimental spherical Couette setups (Sisan *et al.*, 2004; Nataf *et al.*, 2006). Fully three-dimensional numerical simulations can inform such experiments. Computing dynamos at low  $Pm$  is very challenging as the magnetic Reynolds number  $Rm$  required for dynamo action is at least  $10 - 100$ , and hence the Reynolds number  $Re = Rm/Pm$  should be  $10^6 - 10^7$  with  $Pm \sim 10^{-5}$  as for liquid sodium. High  $Re$  flows are turbulent and so computationally demanding. To overcome this difficulty  $Pm$  is taken to be order unity in dynamo simulations.

Spherical Couette flow may also be relevant to giant planets: bands of strong zonal winds are visible at their surfaces, and if deep rooted (Heimpel *et al.*, 2005) they can exert a forcing on the outer boundary of the core.

Non-conducting Couette flows have been numerically investigated (Hollerbach *et al.*, 2006, 2004) but surprisingly no study has been carried out for conducting flow generating an induced magnetic field without the presence of an imposed magnetic field (Hollerbach *et al.*, 2007). Magnetized Taylor-Couette flows (produced between two coaxial cylinders in differential rotation) have been widely investigated, mostly to model magneto-rotational instability in Keplerian disks (e.g. Hollerbach & Rüdiger, 2005). The existence of self-generation of magnetic field in Taylor-Couette flow has been numerically demonstrated (Laure *et al.*, 2000; Willis & Barenghi, 2002).

In this work we test the ability of a spherical Couette flow to generate self-sustained magnetic fields. We investigate a large range of parameter values in order to determine the most favourable regime for dynamo action. Before investigating the influence of global rotation on the flow dynamics and dynamo action we first consider the case with the outer sphere held at rest. In the second part of this paper, for experimental interests, we address the problem of the impact of high magnetic permeability boundary conditions on the dynamo threshold.

## 7.4 Governing equations

A solid inner sphere of radius  $r_i$  is contained in a sphere of radius  $r_o$ . The two spheres rotate with the same axis of rotation  $\mathbf{e}_z$ . The solid inner core rotates faster or slower than the outer sphere at the rotation rate  $\Omega + \Delta\Omega$  where  $\Omega$  is the rotation rate of the outer sphere. The aspect ratio  $\chi = r_i/r_o$  is 0.35, as in the Earth's core. The spherical shell is filled with an incompressible fluid of viscosity  $\nu$ . This fluid can be non-conducting to model a fluid as water or conducting as liquid metal with an electrical conductivity

$\sigma = (\mu_0\eta)^{-1}$ , with  $\mu_0$  the vacuum magnetic permeability and  $\eta$  the magnetic diffusivity. The density of the fluid  $\rho$  is uniform; the temperature is assumed to be uniform and constant throughout the simulation. The fluid is driven by differential rotation between the two spheres. Although in an experiment the inner sphere would be supported by one or two shafts, these are not modelled in our numerical simulations.

In the first part of this paper (sections 7.5 and 7.6) the inner core is assumed to have the same electric and magnetic properties as the fluid, i.e. the same electrical conductivity and magnetic permeability  $\mu_0$ . The outer sphere is an electric insulator with a magnetic permeability  $\mu_0$ . In the second part (section 7.7) the magnetic permeabilities of the inner core and the outer sphere are varied. A seed magnetic field is imposed at initial time, and freely evolved during the time integration. The velocity boundary conditions are no slip. We work in the frame rotating with the outer boundary.

The velocity  $\mathbf{u}$  is scaled by  $r_i\Delta\Omega$ , the inner core azimuthal velocity at the equator in the rotating frame. The length scale is the radius of the outer sphere  $r_o$ .  $\mathbf{B}$  is scaled by  $\sqrt{\rho\mu_0r_i r_o(\Omega + \Delta\Omega)\Delta\Omega}$ . The time evolution of the divergence-free velocity field  $\mathbf{u}$  and the divergence-free magnetic field  $\mathbf{B}$  are given by the Navier-Stokes and the magnetic induction equations respectively:

$$Re\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + Re(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + 2\frac{1}{E}\mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = -\nabla\Pi + \nabla^2\mathbf{u} + \left(\frac{1}{E} + \frac{Re}{\chi}\right)(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{RePm}\nabla^2\mathbf{B}, \quad (7.2)$$

where  $\Pi$  is the dimensionless pressure.

The Reynolds number  $Re = r_o r_i \Delta\Omega / \nu$  parametrizes the mechanical forcing exerted on the system by controlling the rotation rate of the inner core. The magnetic Prandtl number  $Pm = \nu / \eta$  influences the magnetic Reynolds number  $Rm = RePm$  and hence affects the rate of magnetic induction. The Ekman number  $E = \nu / (\Omega r_o^2)$  is an inverse measure of the overall rotation rate  $\Omega$ . We recall that the aspect ratio  $\chi = r_i / r_o$  is 0.35.

The numerical implementation of the above equations uses the **PARODY** code, derived from Dormy (1997), Aubert, Cardin, Dormy in the dynamo benchmark (Christensen *et al.*, 2001), and parallelized and optimized by J. Aubert and E. Dormy. The velocity and magnetic fields are decomposed into poloidal and toroidal scalars and expanded in spherical harmonic functions in the angular coordinates. A finite difference scheme is used on an irregular radial grid (thinner near the boundaries to resolve the boundary layers). A Crank-Nicolson scheme is implemented for the time integration of

the diffusion terms and an Adams-Bashforth procedure is used for the other terms. All results presented in this paper arise from fully three-dimensional and non-linear computations. Typical resolutions are 150 – 300 radial grid points and 64 – 200 spherical harmonics degrees and orders.

## 7.5 Outer sphere at rest

Without global rotation no Coriolis force acts on the system. We recall that the inner core has the same electric and magnetic properties as the fluid and the outer boundary is insulating. We first present the results obtained with a non-conducting fluid ( $Pm = 0$ ) (section 7.5.1) in order to determine the flow dynamics generating the dynamo mechanism when the fluid is conducting (section 7.5.2).

### 7.5.1 Hydrodynamics

Following earlier work by Dumas (1991), Hollerbach *et al.* (2006) investigated hydrodynamical spherical Couette flow for various aspect ratios. They found that the basic axisymmetric flow consists of a radial centrifugal jet concentrated in the equatorial plane, carrying fluid from the inner sphere to the outer one, and an azimuthal component of same order of magnitude for the aspect ratio we are interested in. When increasing the Reynolds number above a critical value ( $Re_c$ ) instabilities develop, which are interpreted as series of longitudinal waves deforming the jet alternatively above and below the equatorial plane. These results are in good quantitative agreement with experimental studies (Egbers & Rath, 1995). For an aspect ratio equal to  $r_i/r_o = 0.35$ , Hollerbach *et al.* (2006) found that the critical Reynolds number  $Re_c$  (according to our definition of  $Re$ ) is around 1100 and the most unstable azimuthal wavenumber is 3 at the instability onset. In the supercritical regime the most unstable mode decreases from 3 to 2.

Figure 7.2(a) shows the angular velocity contours, the meridional circulation and an isolevel of the kinetic energy for a subcritical regime ( $Re < Re_c$ ). For  $Re \leq 1100$  the fluid flows from the pole to the equator close to the inner sphere and is centrifuged toward the outer sphere in the equatorial plane, forming an axisymmetric zonal jet. The recirculation takes place near the outer sphere from the equator to the pole forming a cell in each hemisphere. Moreover due to angular momentum transport along the meridional circulation streamlines a sizeable angular velocity is present in the polar regions. When the boundary forcing is increased ( $Re \geq 1200$ ), as the basic axisymmetric flow evolves, a non-axisymmetric instability breaking the

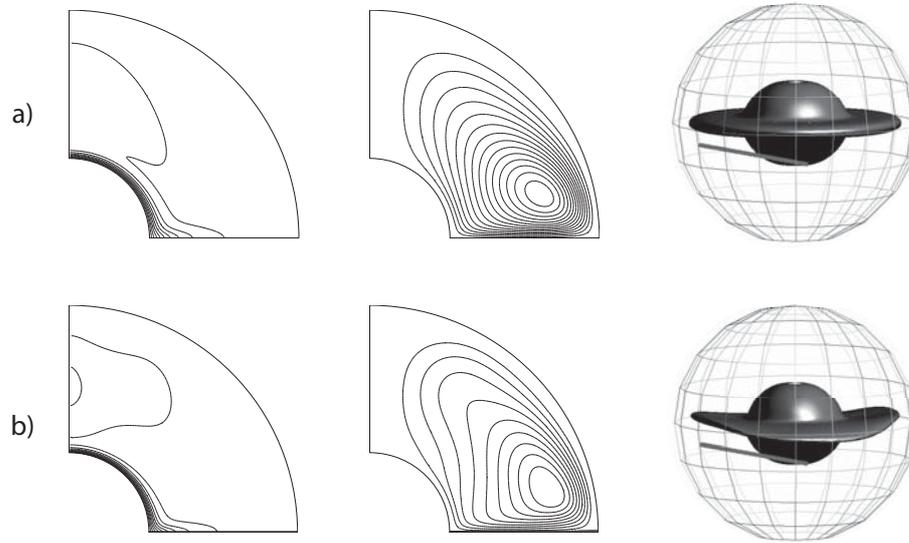


Figure 7.2: Snapshots of contours of the angular velocity (zonally averaged) with a contour interval of 0.1 (left), streamlines of the meridional circulation with a contour interval of 0.001 (middle) plotted in a quadrant of the meridional plane and isolevel of the kinetic energy corresponding to 20% of the maximal value (right) for (a) a subcritical regime  $Re = 1000$  and (b) a supercritical regime  $Re = 2000$ . For  $Re = 2000$  the most unstable mode is  $m = 2$ . The localization of the beam where the velocity is measured in the DTO experiment (Gagnière, 2009) is drawn in gray thick line on the 3D-plots.

equatorial symmetry occurs as an azimuthal oscillation of the equatorial jet (figure 7.2(b)). Note that the phase velocity of the oscillation does not undergo a phase shift with the radius as it can be seen in the three-dimensional plot of figure 7.2(b) and in Hollerbach *et al.* (2006) (no spiralling of the oscillating structure) whereas the angular velocity depends on the radius. Therefore the oscillations are interpreted as a wave propagating in the azimuthal direction, in opposition to a passive transport by the azimuthal flow. Nevertheless the issue of the mechanism triggering the instability remains unsolved. In the large gap study of Hollerbach *et al.* (2006), a new kind of instability was found, leaving the role played by outer boundary open.

Simulations at high Reynolds number have been performed and compared with experimental results obtained in a similar geometry by the Grenoble group (Gagnière, 2009). The experiment (called DTO) consists of a 4.4 cm-radius inner core surrounded by a 12 cm-radius sphere in Plexiglas. The

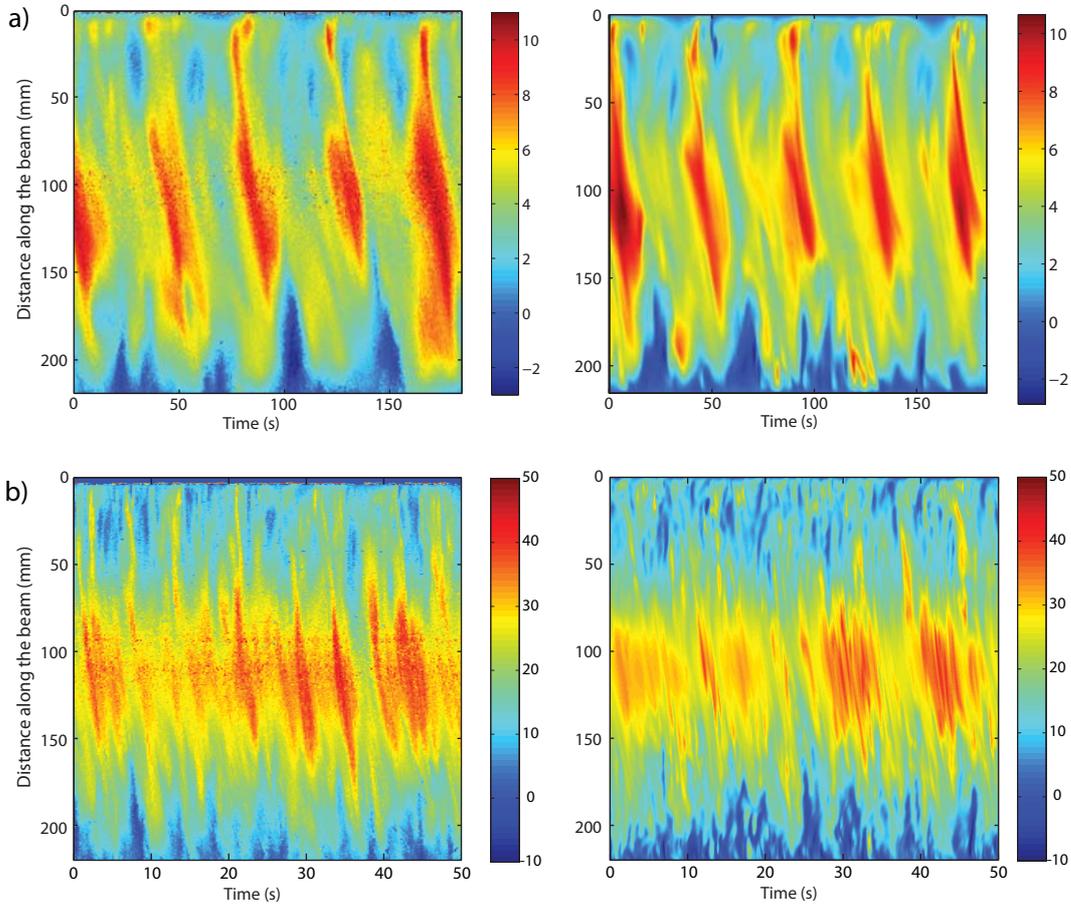


Figure 7.3: Spatio-temporal diagrams of the velocity measured along a beam located in a plane parallel to the equatorial plane at the colatitude  $103.9^\circ$  (see 3D-plots in figure 7.2) by ultrasonic Doppler velocimetry in the DTO experiment (Gagnière, 2009) (left) and computed in the numerical simulation (right) for (a)  $Re = 7200$  and (b)  $Re = 31678$ . The unity of the velocity is mm/s.

working fluid is water with pollen particles in suspension. Velocities are measured along an ultrasonic beam (shown in figure 7.2) analysing the Doppler shift effect of reflected ultrasonic waves (Brito *et al.*, 2001). Figure 7.3 show the spatio-temporal diagrams of the velocity measured along the beam. The middle of the beam is located near the inner core (at about 1.7cm) whereas both ends are near the outer sphere. The top of the vertical axis in figure 7.3 corresponds to the ultrasonic source. The measured velocity is the projection of the velocity field along the beam and thus corresponds to the azimuthal

velocity near the inner core. Note that for a centripetal radial velocity, the measured velocity is positive close to the ultrasonic source and negative close to the beam end (bottom of the vertical axis in figure 7.3). A periodic pattern and a temporal drift are visible in the spatio-temporal diagrams. Since the velocity measurement is located 2.5 cm below the equatorial plane, the periodic increase of the velocity and its temporal drift shows the travelling of the  $m = 2$  azimuthal wave instabilities. Smaller structures corresponds to higher azimuthal numbers. For flow approximatively 30 times critical (figure 7.3(b)), the linear mode is still clearly visible even if higher modes strongly imprint the flow. The spatial structure of the oscillation and the temporal period are found to be the same in the experiment and in the numerical simulation for the Reynolds numbers investigated (from 7200 to 31678) corresponding to the lowest range of Reynolds numbers experimentally reachable. By contrast, due to the turbulent behaviour of the flow at these Reynolds numbers, the numerical simulations require high resolution. For instance, the calculation for  $Re = 31678$  requires 300 radial grid points and truncated spherical harmonic degree  $l = 300$  and order  $m = 48$ . The agreement between numerical and experimental results is impressive and validates the numerical code.

### 7.5.2 Dynamo instability

For a given Reynolds number  $Re$  we find the dynamo threshold by varying the magnetic Prandtl number  $Pm$  in equation (7.2). The dynamo onset is determined by following the time evolution of the magnetic energy over several global magnetic diffusion times. The dynamo region of parameter space is presented in figure 7.4. A large range of Reynolds numbers have been investigated (up to  $Re = 7200$ ). We have found dynamos for magnetic Reynolds numbers  $Rm > 2500$  (and magnetic Prandtl numbers greater than 1). The dynamos appear for  $Re > Re_c$ : the dynamo onset occurs when the hydrodynamical undular instability of the equatorial jet described in the previous section is present. Therefore we conclude that the dynamo effect arises from the non-axisymmetric flow associated with this instability.

Our results can be compared with those of Dudley & James (1989), who performed numerical simulations of kinematic dynamos in spherical geometry. In particular, they studied the growth rate of a magnetic field generated by a  $\mathbf{t}_{10} + \epsilon \mathbf{s}_{20}$  flow where  $\mathbf{t}$  and  $\mathbf{s}$  are the toroidal and poloidal vectors respectively, the first subscript denotes the degree and the second subscript the mode of the spherical harmonics. The flow consists of two axisymmetric rolls, one in each hemisphere, mirror symmetric about the equatorial plane. Our axisymmetric flow geometry is thus similar to this flow. With an appropriate  $\epsilon$ , the poloidal to toroidal flow ratio, Dudley & James found that this flow

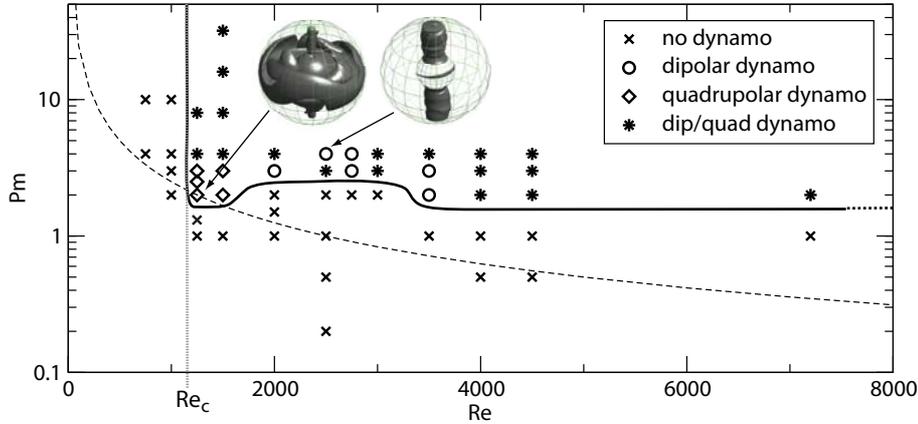


Figure 7.4: Dynamo simulations in the parameter space  $Pm$  versus  $Re$  without global rotation ( $1/E = 0$ ). The circles, diamonds and stars represent the simulations that lead to dynamos. The circles are dipolar dynamos, the diamonds are quadrupolar dynamos and the stars are mixed dipolar/quadrupolar dynamos. The crosses are failed dynamos. The solid thick line symbolizes the dynamo onset. The dashed black line represents the value  $Rm = 2500$ . The vertical dotted gray line represents the value  $Re_c$  at which the first non-axisymmetric hydrodynamical instability occurs. An isolevel of magnetic energy corresponding to 30% of its maximum value is drawn at the top of the plot. The arrows indicate the parameters used in the simulation:  $Re = 1250$ ,  $Pm = 2$  (snapshot at the peak of magnetic energy) (left) and  $Re = 2500$ ,  $Pm = 4$  (snapshot) (right).

can sustain a magnetic field provided that the meridional flow  $\mathbf{s}_{20}$  is directed inward in the equatorial plane and outward near the polar axis. Surprisingly with a meridional flow of opposite sign (i.e. a centrifugal flow as in our configuration) they did not find a dynamo threshold. As previously discussed, we did not find dynamos with a purely axisymmetric flow, in agreement with the work of Dudley & James.

In cylindrical Couette flow, dynamo magnetic fields can be excited by axisymmetric Taylor vortices (Laure *et al.*, 2000; Willis & Barenghi, 2002). In spherical geometry, the presence of Taylor vortices is restricted to the small gap problem (Khlebutin, 1968). Nonetheless, a pair of Taylor vortices in the cylindrical case is fairly similar to a pair of spherical axisymmetric Couette rolls (for a graphical representation see the meridional circulation streamlines plotted in the upper hemisphere in figure 7.2). Whereas the former flow can sustain a magnetic field, we found that the latter can not. Possibly

the  $z$ -periodicity of the Taylor-Couette rolls in the cylindrical case plays a major role in the dynamo mechanism. In particular it might be related to the boundary conditions for the velocity  $\mathbf{u}$  and the electric currents  $\mathbf{j}$ . For instance a shift of phase between  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{j}$  is hard to achieve in the spherical case as they have to match the boundary conditions at the “top” and “bottom” of the spherical container ( $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  and  $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ ) contrary to the cylindrical problem where no such boundary conditions are imposed at the top and bottom of the periodic box.

We observe from figure 7.4 that increasing the Reynolds number, and thus the flow fluctuations, does not affect the  $Pm$  dynamo threshold, which remains around a constant critical magnetic Prandtl number  $Pm_c \sim 2$ . Accordingly we infer that, whereas the first instability of the flow triggers the instability of the self-induced magnetic field, secondary fluctuations produced by increasing the boundary forcing do not assist the dynamo mechanism.

The structure of the self-sustained magnetic field varies considerably between different regions of parameter space. We first report our results in the regime close to the  $Re$  dynamo onset ( $Re \leq 1500$ ) and then in the supercritical regime ( $Re > 1500$ ).

### Magnetic field for $Re \leq 1500$

Close to the dynamo threshold we expect the magnetic field to exhibit a dipole-quadrupole decoupling because of selection rules (Dudley & James, 1989).

Near the critical Reynolds number ( $Re < 1.6Re_c$ ) and the critical magnetic Prandtl number ( $Pm \leq 1.5Pm_c$ ), we found quadrupolar dynamos with a dominant axial quadrupole that oscillates regularly (diamonds on figure 7.4). The magnetic and kinetic energies oscillate out of phase (figure 7.5(a) and (b)). We note that the phase shift is not exactly half a period: the kinetic extrema are slightly in advance with respect to the magnetic ones. The period of the oscillation is about  $0.07\tau_\eta$  where  $\tau_\eta = \frac{r^2}{\eta}$  is the global magnetic diffusion time. The axial quadrupole (denoted  $Bp_{20}$ ) and the axisymmetric toroidal scalars of degree  $l = 1$  and  $l = 3$  (denoted  $Bt_{10}$  and  $Bt_{30}$ , respectively) are the dominant magnetic components and oscillate around a zero-mean value (figure 7.5(c)). The axial dipole is much weaker and decays to zero over the course of the simulation. If we suppress the Lorentz force in the simulation after a given time, so that the time evolution of the velocity field is decoupled from that of the magnetic field, then the kinetic energy returns to the (stationary) value found in the purely hydrodynamical case. However, the magnetic energy continues to oscillate regularly while increasing expo-

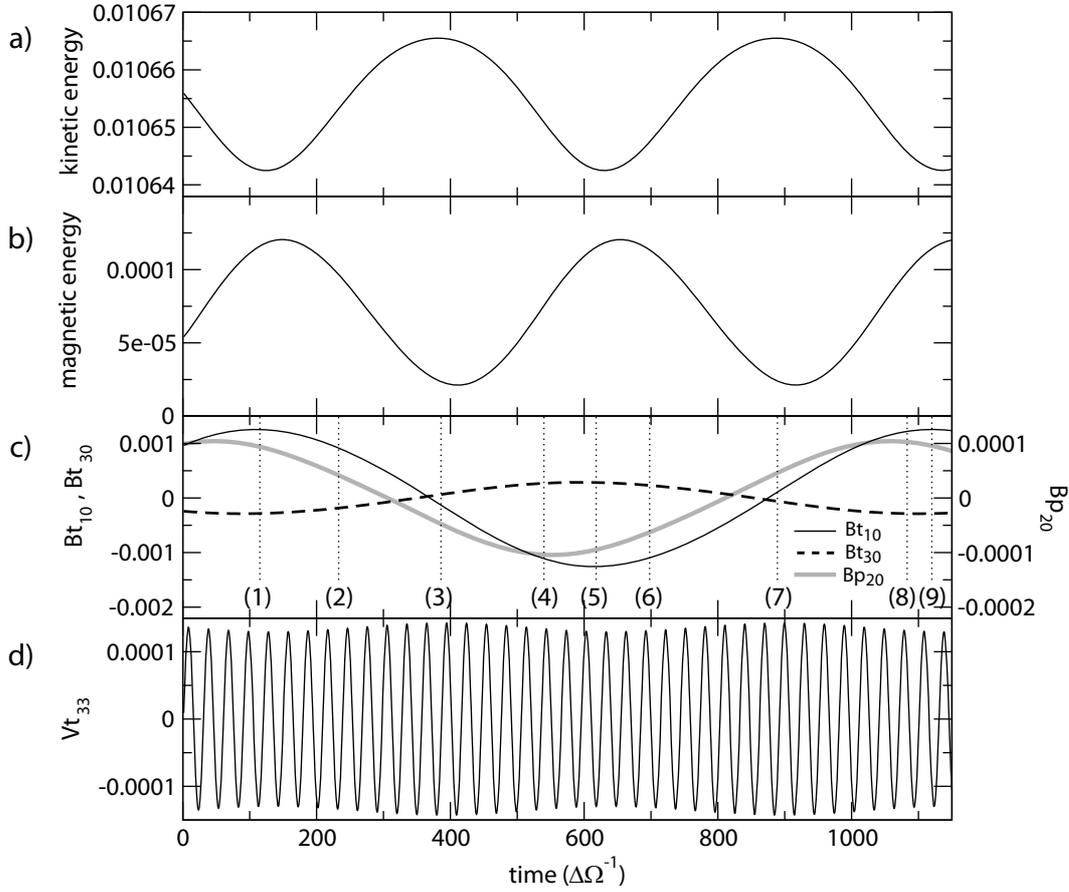


Figure 7.5: Time series for (a) the kinetic energy, (b) the magnetic energy, (c) the magnetic toroidal scalars  $Bt_{10}$  (black line) and  $Bt_{30}$  (dashed black line) (left vertical axis) and poloidal scalar  $Bp_{20}$  (thick gray line) (right vertical axis) and (d) the flow toroidal scalar  $Vt_{33}$ . The parameter of the simulation are  $1/E = 0$ ,  $Re = 1250$  and  $Pm = 2$ . The vertical dotted black lines on (c) indicated the time for each snapshots (from (1) to (9)) of figure 7.6. The energies are averaged over the whole shell. The poloidal and toroidal scalars are the values at a radius  $r = 0.995$ .

nentially (not shown). As the oscillation survives only in the magnetic field when it stops acting on the flow, the oscillation is ascribed to the magnetic field. The kinetic energy oscillation occurs only when the Lorentz force is present and thus is slaved to the magnetic oscillation. For a frozen flow i.e. a steady flow taken from an arbitrary moment during the simulation, the magnetic field decays to zero. The time-dependence of the velocity field is

necessary to sustain the oscillating quadrupolar magnetic field. As described in section 7.5.1, a non-axisymmetric wave propagates in the azimuthal direction when  $Re$  is greater than a critical value (around 1100). For the Reynolds numbers investigated in this section ( $Re = 1250$  and  $Re = 1500$ ), the most unstable mode is  $m = 3$ . The signature of the wave is visible in the time series of  $Vt_{33}$ , the  $m = 3$  toroidal scalar of degree  $l = 3$  (figure 7.5(d)). This wave is of higher frequency than the magnetic oscillation. This hydrodynamical wave is both non-axisymmetric and time dependent. We have found that both these ingredients are necessary to sustain oscillating quadrupolar dynamos, and we conjecture that the non-axisymmetric wave is central to the dynamo mechanism.

Figure 7.6 shows snapshots of the intensity of the axisymmetric toroidal magnetic field and the axisymmetric poloidal magnetic field lines. During a cycle the toroidal magnetic field is generated in the equatorial jet and around the inner core where the velocity shear is largest. The toroidal magnetic field is likely created by the shearing of poloidal magnetic field lines, i.e. by the  $\omega$ -effect. Cells of poloidal magnetic field form close to the outer sphere and propagate toward the axis. It is tempting to invoke the so-called  $\alpha$ -effect to explain the generation of the poloidal field via the interaction between the  $m = 3$  hydrodynamical wave and the magnetic field.

A slight increase of the forcing (from  $Re = 1250$  to  $Re = 1500$ ) produces a lengthening of the (dimensionless) oscillation period and amplitude for both kinetic and magnetic components. An increase of  $Pm$  (up to  $Pm = 3$ ) produces the same effect. However, for  $Pm > 3$  or  $Re > 1500$  the time oscillating behaviour disappears and we obtain a more complex magnetic field with both dipole and quadrupole components with time fluctuating intensities (stars on figure 7.4). The dynamo field in this case is stronger than the oscillating quadrupole described above. Figure 7.7 shows the ratio of magnetic energy to kinetic energy for moderate values of  $Re$  ( $Re < 1.6Re_c$ ) as  $Pm$  increases. Equipartition between magnetic and kinetic energy density is achieved when increasing  $Pm$  above twice its critical value where the dynamo is a mixed dipole/quadrupole field. The magnetic oscillation is confined to the weak magnetic field regime ( $Pm < 2Pm_c$ ).

### **Magnetic field for $Re > 1500$**

Further from the dynamo threshold (above  $Pm = 3$  or  $Re = 1500$ ) the magnetic field is either mainly an axial dipole (circles on figure 7.4) or a complex field with time-dependent dipolar and quadrupolar components (stars on figure 7.4). The former field is either stationary or fluctuating with reversals

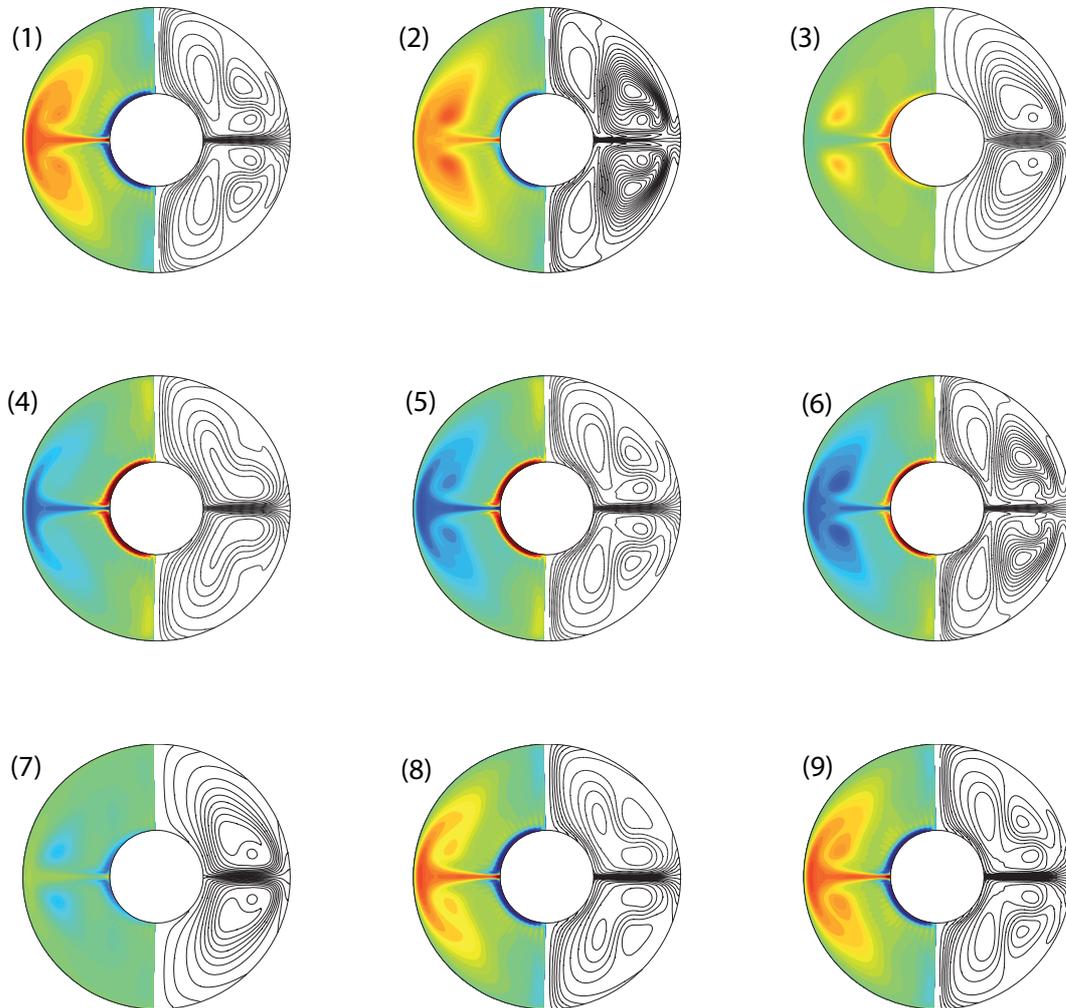


Figure 7.6: Snapshots of the intensity of the axisymmetric azimuthal magnetic field (left) and axisymmetric poloidal magnetic field lines (right) in a meridional plane. The color scale of the toroidal field intensity is the same for all the plots. The time of each snapshot ((1) to (9)) is indicated in figure 7.5(c) by the vertical dotted black lines.

with no regular period. In the latter case, the system undergoes large fluctuations (figure 7.8(a)). Chaotic reversals occur and the predominance of the dipole or the quadrupole families varies over time. An important feature of these dynamos is that equipartition between magnetic and kinetic energies is achieved even close to the  $Pm_c$  dynamo threshold, as one can notice in figure 7.8(a).

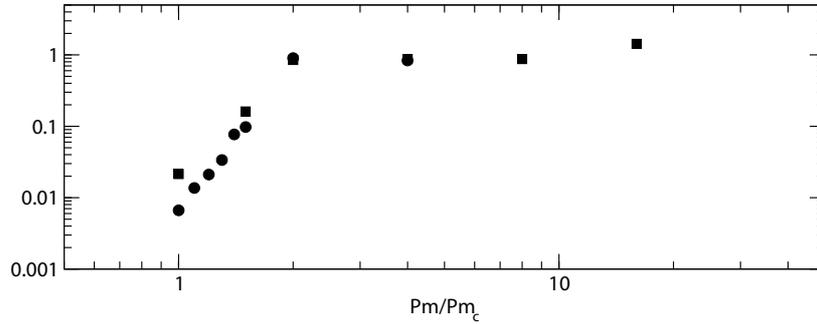


Figure 7.7: Ratio of the temporally averaged values of the magnetic energy of the fluid to the kinetic energy in function of  $Pm/Pm_c$  for the parameters  $1/E = 0$ ,  $Re = 1250$  (circles) and  $Re = 1500$  (squares). The black circles and squares for  $Pm < 2Pm_c$  represents the oscillating quadrupolar dynamos. For  $Pm > 2Pm_c$  the magnetic field is a time fluctuating mixed dipolar/quadrupolar field.

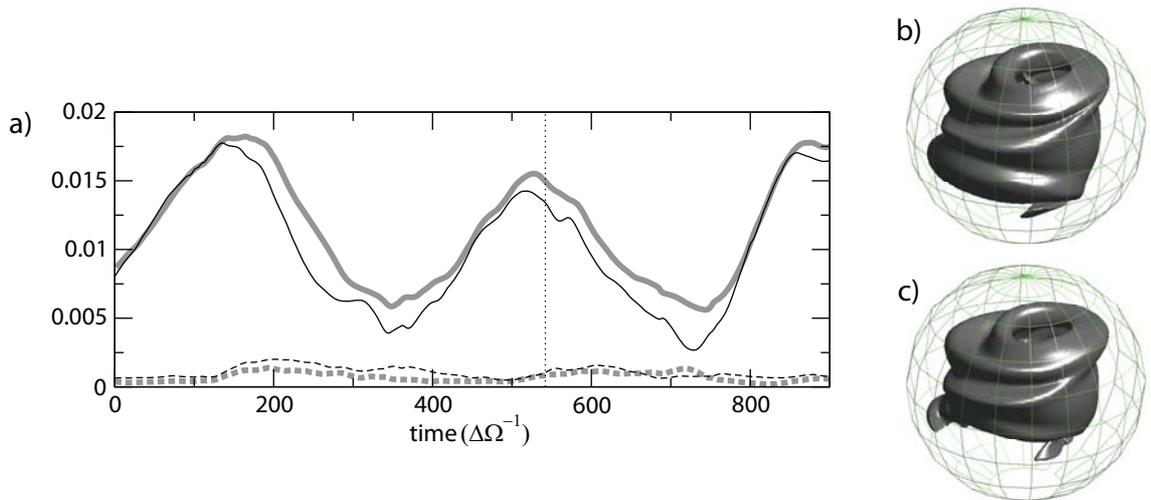


Figure 7.8: (a) Time evolution of the magnetic energy (thin black line) and the kinetic energy (thick gray line) for the simulation  $1/E = 0$ ,  $Re = 2500$  and  $Pm = 3$ . The solid line represents the toroidal part and the dashed line the poloidal part. The energies are dimensionless; the scaling factor is  $\rho(r_i \Delta\Omega)^2$ . (b) An isolevel of the magnetic energy and (c) of the kinetic energy corresponding to 20% of the maximum value at the time represented by the dotted line in figure (a).

As expected for Couette flows which create a strong azimuthal velocity component compared to the meridional circulation, the toroidal magnetic field is stronger than the poloidal field (about 2 to 10 times stronger). The magnetic field is strongest around the inner core where the azimuthal shear flow is largest (figure 7.8(b)). The interaction parameter which measures the relative importance of Lorentz forces to inertia is of the order of unity as the equipartition of energy is achieved. As a result the saturated magnetic field has a strong feedback on the flow due to Lorentz forces and we expect the magnetic fluctuations to be recorded by the flow. Indeed the flow is no longer jet-like, and is located where the magnetic field is present (figure 7.8(c)). Imposing a frozen flow does not kill the dynamo contrary to the oscillating quadrupolar dynamos found close to the dynamo onset ( $Re \leq 1500$ ,  $Pm \leq 3$ ). Consequently the time fluctuations of the flow are not vital for the dynamo mechanism in the case of supercriticality ( $Re > 1500$ ). This is consistent with the fact that increasing  $Re$ , and thus the flow fluctuations does not modify the  $Pm$  threshold (figure 7.4). To summarize, close to the hydrodynamical threshold ( $1250 \leq Re \leq 1500$ ), the (undular) non-axisymmetric hydrodynamical oscillation is crucial to trigger the dynamo instability. However in the supercritical case ( $Re > 1500$ ) the small scale fluctuations due the increase of the mechanical forcing are powerless for the dynamo process but are not fatal either.

During a simulation, when decreasing the Reynolds number from  $Re > Re_c$  to  $Re < Re_c$  for a fixed magnetic Prandtl number  $Pm$ , one can expect to maintain the dynamo and obtain a so-called subcritical dynamo. The case with  $Pm$  large enough in order to reach the equipartition of energy may be a good candidate. In this case we did not find any subcritical dynamo. When decreasing the Prandtl number from  $Pm > Pm_c$  to  $Pm < Pm_c$  at a fixed Reynolds number  $Re > Re_c$ , no subcritical dynamo has been found either.

## 7.6 Influence of the outer sphere rotation

The Coriolis force acting on the system is large when the Ekman number  $E$  is small. According to the Proudman-Taylor theorem, we expect a strong change in the flow compared to the previous case if the Ekman number is small enough. Decreasing  $E$  requires high resolution since the viscous boundary layers scale as  $E^{1/2}$ . We compute simulations with  $E$  of the order of  $10^{-3} - 10^{-4}$  which is already very demanding whereas in most natural systems the Ekman number is much smaller (for instance  $E \leq 10^{-14}$  in the Earth's core (based on metal liquid viscosity)).

### 7.6.1 Hydrodynamics

In the basic state with a rapid overall rotation, a small differential rotation generates a Stewartson layer in the bulk of the fluid. This layer is well understood and has been studied theoretically (Stewartson, 1966), numerically (Dormy *et al.*, 1998; Hollerbach, 2003) and experimentally (Hide & Titman, 1967; Schaeffer & Cardin, 2005*a*). It consists mainly on an axisymmetric layer of size  $E^{1/4}$  accommodating the jump of angular velocity between the fluid inside and outside the tangent cylinder i.e. the cylinder parallel to the axis of rotation and touching the inner core at the equator. The Stewartson layer becomes unstable for a critical shear imposed by a differential rotation of the inner core measured by the Rossby number  $Ro = ReE$ , as studied numerically by Hollerbach (2003) with fully three-dimensional simulations ( $E = 10^{-4}$  to  $E = 10^{-5}$ ) and by Schaeffer & Cardin (2005*a*) with a quasi-geostrophic (QG) model ( $E = 10^{-5}$  to  $E = 10^{-10}$ ). In a spherical shell they found that non-axisymmetric instabilities develop for a critical Rossby number  $Ro_c \propto E^{1/2}$ . According to Schaeffer & Cardin, the critical instability responsible for the destabilization of the Stewartson layer is a Rossby wave. Experiments have been carried out in spherical shell geometries (Hollerbach *et al.*, 2004; Schaeffer & Cardin, 2005*a*). The agreement between experimental and numerical results concerning the critical Rossby number, the most unstable mode and the wave frequency is striking in both cases. The non-linear regime has been studied numerically by Schaeffer & Cardin (2005*b*) using their quasi-geostrophic approach leading to a peculiar Rossby wave turbulence (for  $E = 10^{-6}$  to  $E = 10^{-8}$  and  $|Ro| = 0.1$  corresponding to  $Ro \sim 30Ro_c$ ). Recently experiments in a 60-cm diameter spherical shell with differential rotation have been carried out by Kelley *et al.* (2007) using liquid sodium as the working fluid and magnetic induction as a probe for the flow field in the non-linear regime (down to  $E \sim 10^{-8}$  and up to  $|Ro| \sim 0.1$ ). Instead of Rossby waves instabilities, they show the presence of inertial modes. To explain the apparent discrepancy between the results of Schaeffer & Cardin (2005*b*) and Kelley *et al.* (2007), we may conjecture that as Kelley *et al.* measured the radial component of the magnetic field  $B_r$  and as their imposed magnetic field is an axial dipole, they can not probe the presence of Rossby waves in their experiment. Indeed according to the frozen-flux radial induction equation at the outer boundary, a geostrophic motion does not induce a radial magnetic field if  $B_r \propto \cos \theta$  (see Le Mouél, 1984; Pais & Jault, 2008).

Our purely hydrodynamical simulations are far from being in the asymptotic limit  $E \rightarrow 0$  ( $E \geq 10^{-4}$  in our simulations). A direct comparison between our results with the theory is worthless as Dormy *et al.* (1998) shows

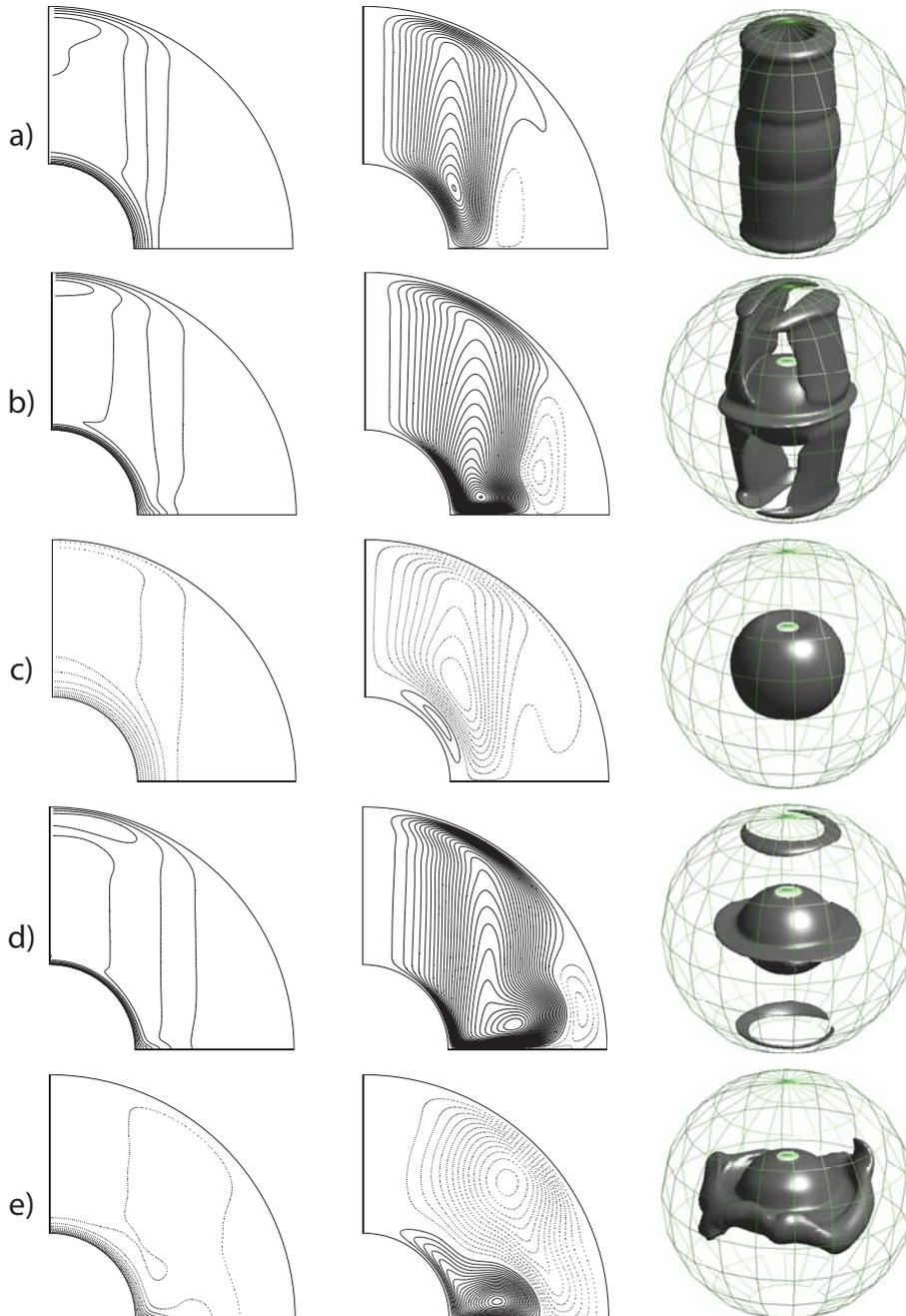


Figure 7.9: Contours of the angular velocity (zonally averaged) with a contour interval of 0.1 (left), streamlines of the meridional circulation with a contour interval of  $1.6 \times 10^{-4}$  (middle) and isolevel of the kinetic energy corresponding to 25% of the maximum value (right) for (a)  $Ro = 0.01$ , (b)  $Ro = 1$ , (c)  $Ro = -1$ , (d)  $Ro = 2.5$  and (e)  $Ro = -2.5$ . All these simulations are purely hydrodynamic and for  $E = 10^{-3}$ . The black lines represents the positive values and the dashed lines the negative values of the angular velocity (left) and of the streamfunction associated to the meridional flow (middle).

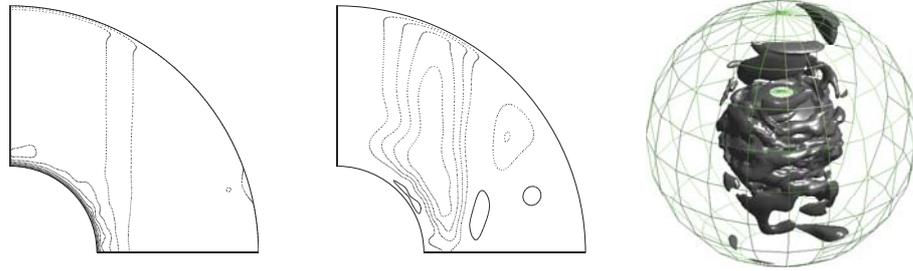


Figure 7.10: Same representation than figure 7.9 for  $Ro = -1$ ,  $E = 10^{-4}$  and  $Pm = 0$ .

that the asymptotic regime can not be illustrated numerically for  $E > 10^{-5}$  as the Stewartson layer scales as  $E^{1/4}$ . Our goal is to understand the instabilities arising from an increase in  $Ro = ReE$  largely above the hydrodynamical instability onset in order to relate them to the dynamo instability when the fluid is conducting. The Rossby number  $Ro$  is a measure of the ratio of the inertial forces to the Coriolis force and is then the relevant dimensionless number in our study, since the balance between inertial forces and Coriolis force is the key ingredient for the flow dynamics. A positive value for  $Ro$  means that the inner sphere rotates faster than the outer sphere whereas a negative  $Ro$  means that the inner core rotates slower than the outer sphere or in counter-rotation. We determine different regimes depending on the value of  $Ro$ :

- When  $|Ro|$  is less than 1 (figure 7.9(a)), the Coriolis force is predominant and the flow is roughly invariant in the rotation direction. As expected a cylindrical Stewartson layer develops. For a positive  $Ro$  the meridional circulation linked to the Ekman pumping on the outer boundary is counter-clockwise in the upper right half of the domain. It is a clockwise meridional flow for a negative  $Ro$ .
- When  $|Ro|$  is about 1, the inertial terms balance the Coriolis force and the Proudman-Taylor constraint vanishes. The equatorial jet becomes stronger and destabilizes the Stewartson layer. For a positive  $Ro$  (figure 7.9(b)), the flow remains nevertheless roughly  $z$ -invariant. The instability is a Rossby wave with an azimuthal wavenumber  $m = 2$  propagating in the prograde direction as expected with the sign of the slope. For a negative  $Ro$  (figure 7.9(c)) the meridional circulation linked to the Ekman pumping and the centrifugal flow are in opposite direction leading to a strong shear layer at the inner core boundary. This flow is not  $z$ -invariant.  $|Ro| \sim 1$  corresponds to a transition between

quasi-geostrophic (nearly 2D) turbulence to 3D turbulence. As a consequence, the decrease in the Ekman number  $E$  (see figure 7.10 for  $E = 10^{-4}$ ) leads to the computation of simulations at high Reynolds number displaying small scale 3D fluctuations. The shear layer present when  $Ro \sim -1$  and  $E = 10^{-3}$  becomes unstable and partially disappears to the benefit of small scale structures when  $E = 10^{-4}$ .

- When  $|Ro|$  is greater than 1 the inertial forces are predominant and the equatorial jet is strengthened. 3D small scale fluctuations appear. For a positive  $Ro$  (figure 7.9(d)), the Rossby waves vanishes and the flow is mainly concentrated in the equatorial jet. For a negative  $Ro$  (figure 7.9(e)) the shear layer loses its intensity and a jet-like flow is now present. The flow for large absolute Rossby numbers becomes more and more similar to the non-rotating case.

## 7.6.2 Dynamo instability

As already mentioned, few studies have been carried out on the dynamo generation by a shear layer in a spherical geometry with an overall rotation. Schaeffer & Cardin (2006) computed dynamos generated in a split-sphere geometry by a quasi-geostrophic flow. They found dynamos at low magnetic Prandtl number  $Pm$  when decreasing the Ekman number  $E$  (down to  $Pm = 0.003$  for  $E = 10^{-8}$ ). The QG assumption allows them to compute rapid rotation (from  $E = 10^{-6}$  to  $E = 10^{-8}$ ). They also found that increasing the mechanical forcing ( $Ro$ ) for a given  $E$  reduces the critical magnetic Prandtl number  $Pm_c$ . The critical magnetic Reynolds number  $Rm_c$  is roughly constant (of the order of a few thousand) and independent of  $E$  and  $Pm$ .

Figure 7.11 presents the dynamo diagram of our simulations worked out at  $E = 10^{-3}$  and  $E = 10^{-4}$ . A strong dissymmetry occurs with the sign of the Rossby number  $Ro$ : the negative differential rotation case lowers the dynamo onset to  $Pm_c = 0.2$  and  $Rm_c = 300$  when  $E = 10^{-3}$ . When  $E = 10^{-4}$ , the critical magnetic Prandtl number is also  $Pm_c = 0.2$  but  $Rm_c$  equals 1500 for negative differential rotation. Unlike the results of Christensen & Aubert (2006) with convective dynamos and of Schaeffer & Cardin (2006) discussed previously,  $Rm_c$  does not remain constant when decreasing  $E$ . An explanation of this result is given by the study of the flow dynamics in the previous section: the shear layer present around the inner core when  $Ro \sim -1$  and  $E = 10^{-3}$  (figure 7.9(c)) is likely to be very efficient for dynamo action as it shears the poloidal magnetic field lines and creates a strong toroidal magnetic field. Thanks to this mechanism, a “dynamo window” is present at

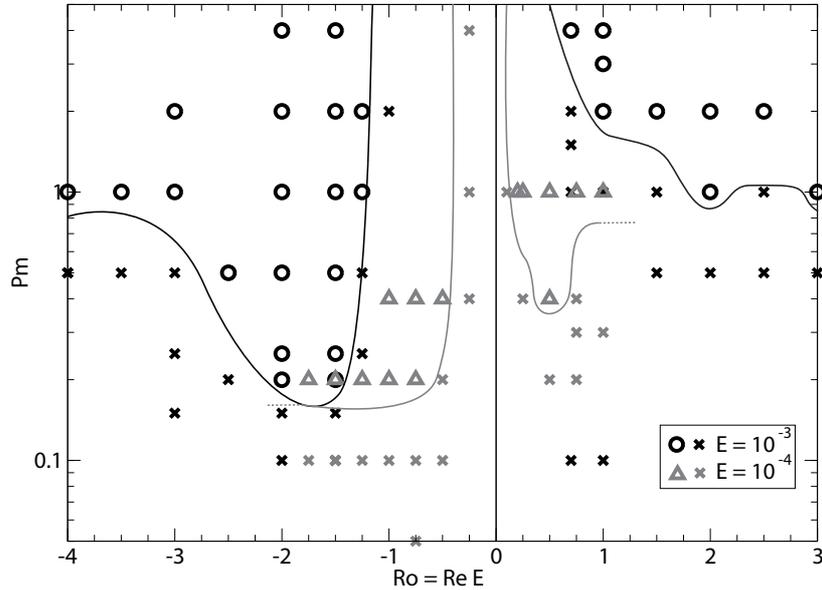


Figure 7.11: Dynamo diagram in the parameter space  $Pm$  versus  $Ro$  for  $E = 10^{-3}$  (black circles) and  $E = 10^{-4}$  (gray triangles). The cross are failed dynamos. The black and gray lines represent the dynamo onset for  $E = 10^{-3}$  and  $E = 10^{-4}$  respectively. The hydrodynamical onset at which the nearly 2D flow (Stewartson layer) is unstable is for  $E = 10^{-3}$ :  $Ro_c^- \in [-1.5, -1]$ ,  $Ro_c^+ \in [0.316, 0.666]$  and for  $E = 10^{-4}$ :  $Ro_c^- \in [-0.25, -0.1]$ ,  $Ro_c^+ \in [0.1, 0.2]$ .

relatively low  $Rm$  for  $E = 10^{-3}$  and  $-1.5 \geq Ro \geq -2$ . The destabilization of this shear layer by the small scale 3D fluctuations when decreasing  $E$  (figure 7.10) leads to the disappearance of the dynamo window and therefore the requirement of higher  $Rm$  for dynamo action.

In the DTS experiment, Nataf *et al.* (2008) reported an interesting observation with regards to the results previously discussed. The DTS setup in Grenoble is a spherical Couette experiment of 42-cm diameter using liquid sodium as working fluid and with an imposed dipolar magnetic field. Nataf *et al.* (2008) showed that a peak of the induced magnetic field occurs in the counter-rotation case corresponding to the regime where the fluid rotation rate is almost equal and opposite to the outer sphere rotation rate ( $E \sim 10^{-7}$ ). According to Nataf *et al.* (2008) the appearance of this strong induced field is due to the fact that the fluid is almost at rest in the laboratory frame and so the meridional flow is free from the Proudman-Taylor constraint and becomes stronger. As they suggested, dynamo action may be favored in this situation. It is thus possible than other “dynamo windows”

related to peculiar hydrodynamical regimes exist at low Ekman numbers.

Schaeffer & Cardin (2006) found that  $Pm_c$  depends on the sign of  $Ro$  with negative differential rotation yielding a slightly lower dynamo threshold. In their work the Ekman numbers are at least 2 orders of magnitude smaller than in this study and their QG assumption restricts the exploration of the non-linear regime to Rossby numbers smaller than 1 (up to 0.1 in Schaeffer & Cardin, 2006). Our strong dependence on the sign of  $Ro$  when  $E = 10^{-3}$  is due to the presence of the strong ageostrophic shear layer around the inner core for negative  $Ro$ . The weakening of this shear layer when  $E = 10^{-4}$  yields a less marked dependence on the sign of  $Ro$ .

When  $|Ro|$  increases ( $Ro < -2$ ) for  $E = 10^{-3}$ , the shear layer disappears and therefore the generation of toroidal magnetic field is less important. This could explain why we find dynamos only at higher  $Pm$ .

We emphasize that similarly to the case without global rotation, the first non-axisymmetric hydrodynamic instability (occurring at  $Ro_c$ ) is necessary to generate a dynamo when a global rotation is imposed. Moreover the dynamo onset occurs for lower  $Ro$  when decreasing  $E$ . These results are consistent with the results of Hollerbach (2003) and Schaeffer & Cardin (2005a) in the hydrodynamical case who find that the critical Rossby number  $Ro_c$  decreases with  $E$  (and in our case triggers the dynamo instability). Here again if we except the dynamo window for  $E = 10^{-3}$  ( $-1.5 \geq Ro \geq -2$ ) we notice that the  $Pm_c$  dynamo threshold remains roughly flat when increasing the Reynolds number. Consequently the flow fluctuations are powerless to lower the threshold for either positive or negative differential rotation but are not fatal to the dynamo action. The same result has been shown without global rotation (section 7.5.2).

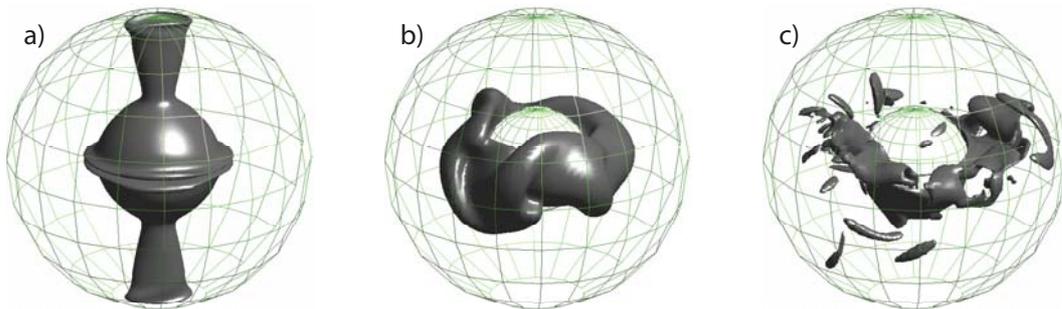


Figure 7.12: An isovolume of the magnetic energy corresponding to 25% of the maximal value for  $E = 10^{-3}$  for dynamo fields close to the threshold: (a)  $Re = 1000$ ,  $Pm = 2$ , (b)  $Re = -1500$ ,  $Pm = 0.2$  (middle) and (c)  $Re = -3500$ ,  $Pm = 1$ .

An isolevel of the magnetic energy is shown in figure 7.12 for different  $Re$  at the dynamo onset ( $Pm_c$ ). When  $Re > 0$  (figure 7.12(a)) the magnetic field is mainly an axial dipole. The magnetic energy is located around the inner core and close to the rotation axis inside the tangent cylinder. In the dynamo window at  $Ro \sim -1.5$  (figure 7.12(b)) a strong toroidal magnetic field is created in the shear layer and twisted around the inner core. When the flow becomes more turbulent (figure 7.12(c)) the magnetic field is scattered close to the equatorial jet. The time evolution of the magnetic and kinetic energy become rapidly chaotic above the dynamo threshold. No oscillating solution has been observed.

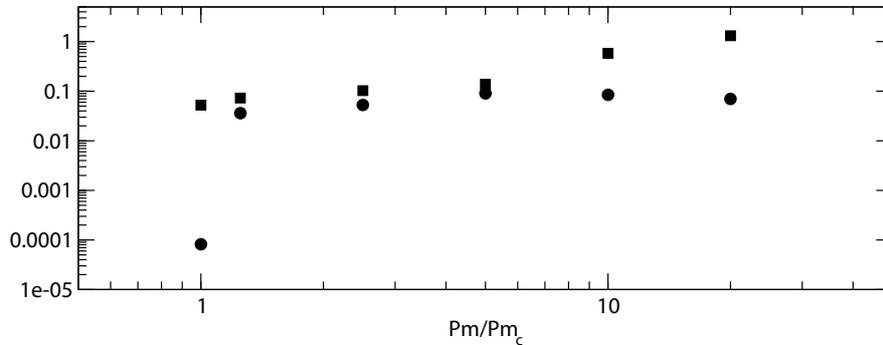


Figure 7.13: Ratio of the temporally averaged values of the magnetic energy of the fluid to the kinetic energy in function of  $Pm/Pm_c$  for  $Re = -1500$  (circles) and  $Re = -2000$  (squares) for  $E = 10^{-3}$ .

The ratio of magnetic energy to kinetic energy for several values of  $Pm$  are shown in figure 7.13. Unlike the magnetic field, the kinetic energy depends on the chosen frame. Consequently, the kinetic energies calculated in the rotating frame and in the laboratory frame are different. All the kinetic energies presented in this paper are calculated in the rotating frame. Moreover as the kinetic and magnetic energy have different scalings, a multiplicative factor  $(1/\chi + 1/(ReE))$  is applied on the magnetic energy to be comparable with kinetic energy. A dependence on the Rossby number can be noticed from the different behaviour of the magnetic energy for  $Ro = -1.5$  and  $Ro = -2$ : the equipartition is never reached for  $Ro = -1.5$  even for  $Pm = 20Pm_c$  while the magnetic energy has the same magnitude than the kinetic energy for  $Ro = -2$  as soon as  $Pm = 10Pm_c$ . The saturation of the magnetic field is complex to understand in case of global rotation as the Coriolis force does not appear in the balance of energies but is important in the balance of forces. Therefore the magnetic field may saturate before the equipartition

of energy is reached for large enough magnetic Prandtl numbers. This might be especially relevant for moderate value of  $|Ro|$  where the Coriolis force is predominant.

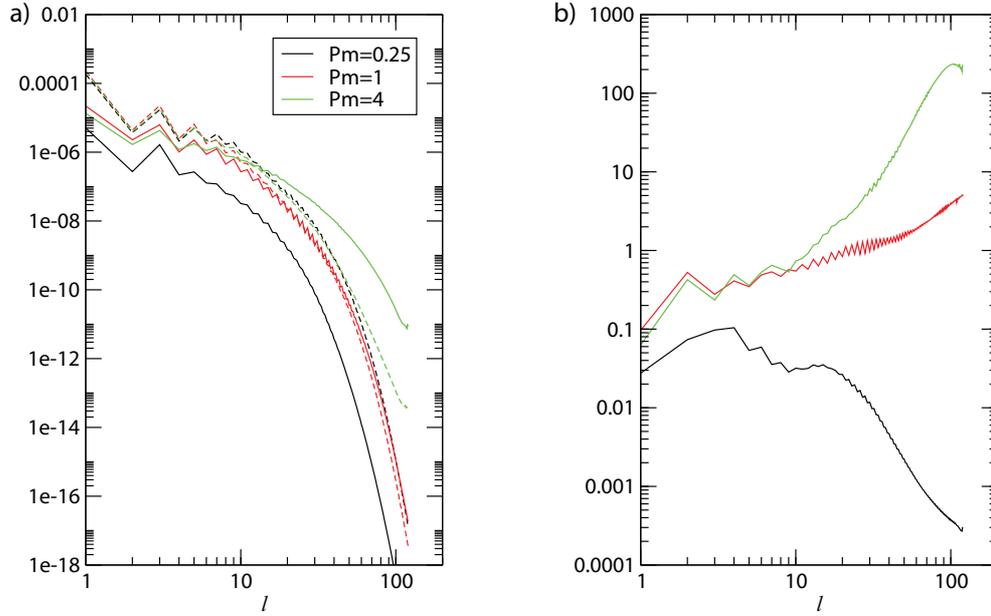


Figure 7.14: (a) Magnetic (solid line) and kinetic (dashed line) energy spectra as a function of the spherical harmonic degree  $l$  for the simulations at  $E = 10^{-3}$ ,  $Re = -1500$  and  $Pm = 0.25$  (black line),  $Pm = 1$  (red line),  $Pm = 4$  (green line). The energies are computed over the whole shell and are time averaged. (b) Ratio of the magnetic spectrum to the kinetic one.

Spectra of the magnetic and kinetic energy are shown in figure 7.14. One can notice that the solutions are fully converged. The case with global rotation with a negative differential rotation ( $E = 10^{-3}$ ,  $Re \sim -1500$ ) is the only case that allows us to study the repartition of energy at the different spatial scale in dynamos with relatively small magnetic Prandtl number ( $Pm < 1$ ) and large magnetic Prandtl number ( $Pm > 1$ ). Indeed the magnetic Prandtl number is also a measure of the kinetic dissipation over the magnetic one. Then we expect different dissipation scales depending on the magnitude of  $Pm$ . First we notice that the magnetic field is a large scale field as most of the magnetic energy is present in the large structures (spherical harmonic degree  $l < 10$ ). For the values of  $Pm$  studied (from  $Pm = 0.25$  to  $Pm = 4$ ) the kinetic energy is always at least 2 times greater than the magnetic field at large scale ( $l < 5$ ) (figure 7.14(b)). Both previous observations are consistent

with the non equipartition of energy when increasing  $Pm$  beyond the dynamo onset for these parameters ( $E = 10^{-3}$ ,  $Re = -1500$ , see figure 7.13). At small  $Pm$  ( $Pm = 0.25$ ), the ratio of magnetic energy to kinetic one is roughly flat from  $l = 1$  to  $l = 20$ . It decreases sharply for small scale structures ( $l > 20$ ). Consequently the magnetic energy is dissipated at larger scales than the kinetic energy as expected for  $Pm < 1$ . For  $Pm = 1$  the magnetic and kinetic spectra are similar for small structures ( $l > 20$ ) and their ratio is close to 1. Finally as  $Pm$  grows beyond 1, the magnetic dissipation diminishes and small scale magnetic structures are more present. The spectra as a function of the spherical harmonic order  $m$  exhibit the same behaviour.

As for the case without global rotation, we did not find subcritical dynamos.

### 7.6.3 Perspectives for future experimental dynamos

In experiments using liquid sodium the magnetic Prandtl number  $Pm$  is of the order of  $10^{-5}$  whereas in our numerical dynamo simulations  $Pm$  is always larger than 0.2. Decreasing the critical magnetic Prandtl number  $Pm_c$  may be achieved by increasing the Reynolds number  $Re$  if the critical magnetic Reynolds number  $Rm_c$  remains constant. Indeed Ponty *et al.* (2007) with dynamos driven by a Taylor-Green forcing demonstrated that a dynamo threshold exists for all  $Pm$  they investigated (from 1 to  $10^{-2}$ ) and for high enough  $Re$ ,  $Rm_c(Re)$  remains constant (figure 7.15). Using an nonhelical randomly forced turbulence, Iskakov *et al.* (2007) retrieved the same result (figure 7.15). In our dynamo calculations we have not found a plateau where  $Rm_c(Re)$  remains constant even at  $Re \sim 10^4$ , which is already computationally demanding for a fully three-dimensional code.

Another possibility to lower  $Pm_c$  is to decrease the Ekman number  $E$  as shown by Schaeffer & Cardin (2006): they found dynamos at low magnetic Prandtl number (down  $Pm = 0.003$ ) by decreasing  $E$  (from  $10^{-6}$  to  $10^{-8}$ ) using quasi-geostrophic flows. We can not reach such a low Ekman numbers so we worked out dynamos from  $E = 10^{-3}$  to  $E = 10^{-4}$ . We were particularly interested in the evolution of the “dynamo window” created by the ageostrophic shear layer ( $-1.5 \geq Ro \geq -2$  for  $E = 10^{-3}$ ) (figure 7.11) that could not be computed by Schaeffer & Cardin with a QG model. As previously discussed, dynamos beneath  $Pm = 0.2$  have not been found and the magnetic Reynolds number needed for  $E = 10^{-4}$  is higher than for  $E = 10^{-3}$ . We interpret the disappearance (for  $E = 10^{-4}$ ) of the dynamo window (present at  $E = 10^{-3}$ ) by the destabilization of the shear layer because of the emergence of small scale fluctuations due the higher  $Re$  in a regime where the Proudman-Taylor constraint fails ( $|Ro| \geq 1$ ). Nevertheless decreasing  $E$  lowers  $Pm_c$  in the positive differential rotation case (from  $Pm_c \sim 1$  for  $E = 10^{-3}$

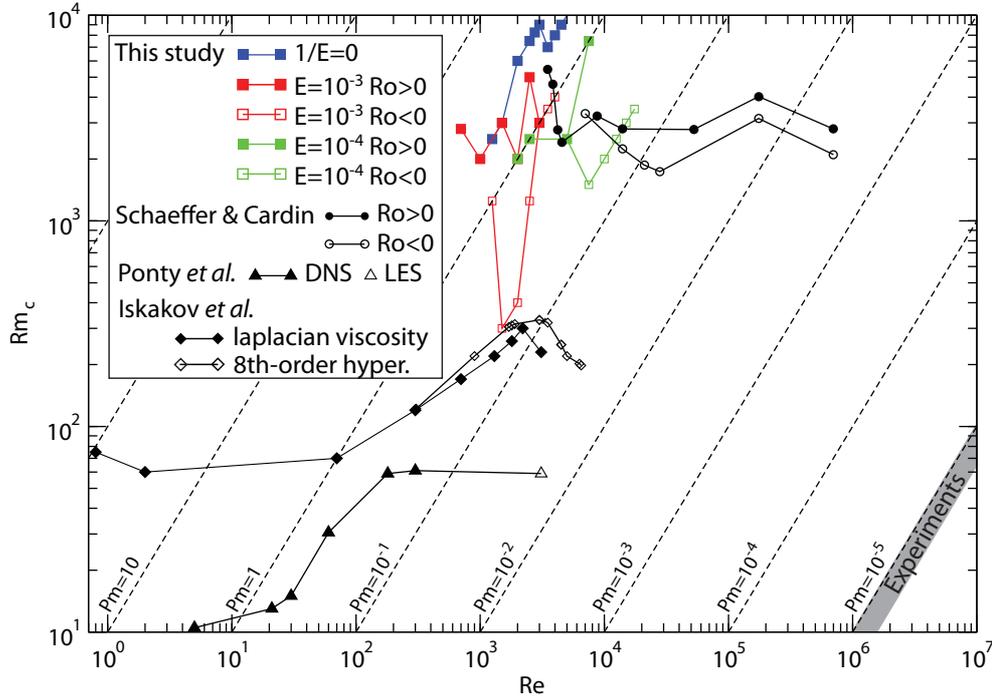


Figure 7.15: Dynamos in the parameter space  $Rm_c$  versus  $Re$ . Results from previous studies have been carried forward: Schaeffer & Cardin (2006) (circles), Ponty *et al.* (2007) (triangles) and Iskakov *et al.* (2007) (diamonds). The highest- $Re$  point of Ponty *et al.* (2007) was obtained by large-eddy simulation. Results of Iskakov *et al.* (2007) based on laplacian viscosity and 8th-order hyperviscosity are shown separately. Note that the value of  $Rm$  and  $Re$  for Ponty *et al.* (2007) and Iskakov *et al.* (2007) are based on the rms velocity and the forcing wave number (Iskakov *et al.*, 2007). The parameter range for experiments is roughly symbolized by the gray area.

to  $Pm_c \sim 0.4$  for  $E = 10^{-4}$ ). The simulations presented in this paper require high resolution and the current numerical limits do not allow us to carry on this study towards more rapidly rotating system or more boundary forcing. New phenomena may arise for  $E \ll 1$  or  $Re \gg Re_c$ . Without evidence, we may speculate that the results obtained with a QG approach (Schaeffer & Cardin, 2006) are the extension of our work towards small  $E$ . In that hypothesis a dynamo branch of constant  $Rm_c$  can be reached for small Ekman numbers ( $E < 10^{-6}$ ) and for moderate Rossby numbers ( $|Ro| < 0.1$ ). Moreover the presence of the peak of induced magnetic field when the fluid rotation rate cancels the rotation rate of the outer sphere in the DTS experi-

ment (Nataf *et al.*, 2008) suggests that new “dynamo windows” may exist for small  $E$  ( $E \sim 10^{-7}$ ). To conclude, our results tend to show that dynamos at low magnetic Prandtl number may be achieved when decreasing the Ekman number but it likely requires high magnetic Reynolds number (a few thousand) which is far from what could be obtained in liquid sodium experiments (upper limit of  $Rm$  of the order of 700 for the new 3-m diameter experiment of the College Park group in Maryland).

## 7.7 Ferromagnetic boundary conditions

Our interest in studying the influence of ferromagnetic boundary conditions on the dynamo onset stems from the recent success of the Von Kármán Sodium (VKS) experiment (Monchaux *et al.*, 2007) in producing a self-sustained magnetic field. The use of soft iron (ferromagnetic) propellers instead of stainless steel (amagnetic) ones of the same geometry facilitates the generation of a magnetic field. A ferromagnetic medium has a magnetic permeability larger than the vacuum permeability. When increasing the magnetic permeability of a boundary the magnetic field lines in the fluid tend to become perpendicular to this boundary. Numerical simulations (Gissinger *et al.*, 2008; Laguerre *et al.*, 2008) with impellers of infinite magnetic permeability i.e. imposing a purely normal magnetic field at the boundary have shown that the critical magnetic Reynolds number for dynamo action is lowered due to channeling of the magnetic field lines in the region of the strongest shear. Moreover Gissinger *et al.* (2008) predicted that adding ferromagnetic walls would also lower the threshold significantly. Similarly, Avalos-Zuniga *et al.* (2003) found that the addition of a ferromagnetic wall in a Ponomarenko dynamo leads to a reduction of the dynamo onset. However, in Morin’s simulations of convective dynamos in a spherical shell (Morin, 2005), the effect of ferromagnetic boundaries is more complicated and there are several possibilities: a purely radial magnetic field at the outer boundary seems to favour dynamo action whereas imposing a radial field on both inner and outer boundaries inhibits dynamo action. Therefore no general conclusions can be drawn about the impact of high magnetic permeability boundary conditions. We may conjecture that if ferromagnetic pieces concentrate magnetic field lines away from the region where dynamo processes take place, their presence is useless. Their local action of concentration of magnetic field lines has to be roughly coincident with induction process in the liquid.

We study different cases for their relevance to experimental setup. The ferromagnetic core with an insulating outer sphere case is investigated for its simplicity to put into practice in experiments. Moreover we expect that the

impact of a change of the magnetic boundary conditions will be greater if the boundary is close to the place where the magnetic field is generated i.e. near the inner core where the angular shear is maximum. The ferromagnetic outer sphere with a non-ferromagnetic conducting core is also studied since the contact surface is larger. To complete the study, the case with both inner and outer ferromagnetic boundaries is also investigated. Note that in these simulations, the conductivity of any ferromagnetic media is set equal to that of the fluid, so we can study the effect of the ferromagnetic boundaries in isolation.

Suppose there is a jump in the magnetic permeability at a radius  $r$ , representing the interface between two media denoted 1 and 2 of magnetic permeability  $\mu_1$  and  $\mu_2$  respectively. We then have the following boundary equations for the poloidal  $B_p$  and toroidal  $B_t$  scalars

$$B_p^1(r) = B_p^2(r), \quad (7.3)$$

$$B_t^1(r) = \frac{\mu_1}{\mu_2} B_t^2(r), \quad (7.4)$$

$$\left. \frac{1}{r} \frac{\partial (r B_p^1)}{\partial r} \right|_r = \frac{\mu_1}{\mu_2} \left. \frac{1}{r} \frac{\partial (r B_p^2)}{\partial r} \right|_r, \quad (7.5)$$

where the superscripts 1 and 2 stand for the regions. The discontinuity of the toroidal and spheroidal scalars is carefully implemented in the time evolution scheme and in the non-linear terms.

The reader may note that we do not include a remanent magnetic field in our model, although such a field can exist within ferromagnetic material. In order to assess the impact of a remanent magnetic field, we carried out simulations with an imposed axial dipolar magnetic field in the inner core separately from the problem of the ferromagnetic boundary conditions. We found that the presence of the imposed magnetic field have no effect on the dynamo onset in this geometry.

We focus our study on the dynamo threshold; thus the results presented are only for simulations near the dynamo onset.

### 7.7.1 Ferromagnetic inner core

The core is assumed to have the magnetic permeability  $\mu_{in}$ , so that the relative magnetic permeability is  $\mu_r^{in} = \mu_{in}/\mu_0$ . The core has still the same conductivity as the fluid, and the outer sphere is insulating and non-ferromagnetic. Note that the magnetic permeability of soft iron is about  $1000\mu_0$ .

The main result is shown in figure 7.16: whatever are the relative magnetic permeability ( $\mu_r^{in} = 1$  to  $\mu_r^{in} = 1000$ ), the dynamo onsets are very similar

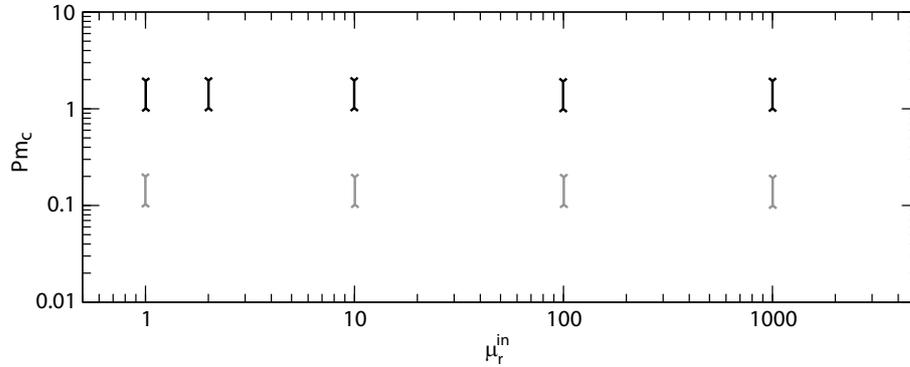


Figure 7.16: Critical Prandtl number  $Pm_c$  in function of the relative magnetic permeability of the inner core  $\mu_r^{in}$  for a case without global rotation ( $Re = 1500$ ) (black) and with global rotation ( $E = 10^{-3}$ ,  $Re = -1500$ ) (gray). The bottom of the bar corresponds to a non dynamo calculation whereas the top corresponds to a dynamo calculation.

to the ones computed without ferromagnetic parts. Note that the results presented in these section have been verified with or without global rotation (simulations at  $E = 10^{-3}$  with positive or negative differential rotation of the inner core). Nevertheless for simulations just below the dynamo onset the decay rate is decreased when the relative magnetic permeability  $\mu_r^{in}$  is increased (not shown). The critical magnetic Reynolds numbers involved in these dynamos are quite high so we only determine them in a coarse range. A marginal effect of ferromagnetic boundaries may be more important than what we report but, in this paper, we are only interested in significant changes.

The kinetic energy remains roughly constant when  $\mu_r^{in}$  is increased (figures 7.17). Without overall rotation (figure 7.17(a)) the magnetic energy of the fluid increases by a factor 10 when  $\mu_r^{in}$  rises from 1 to 10, and then remains constant (about 10 times smaller than the kinetic energy) as  $\mu_r^{in}$  is increased further. For  $\mu_r^{in} \leq 2$  the dynamo field is an oscillating quadrupole as described in section 7.5.2. For  $\mu_r^{in} \geq 10$  the oscillating behaviour of the magnetic field is lost, and the dynamo field is a stationary axial quadrupole. Consequently, the oscillating quadrupolar dynamo is restricted to the weak magnetic field regime as we report in section 7.5.2 when observing the effect of  $Pm$  on energy partition. With global rotation (figure 7.17(b)) the effect of a ferromagnetic inner core is similar in positive (not shown) and negative differential rotation: after an increase of the magnetic energy when  $\mu_r^{in}$  increases from 1 to 10, the magnetic energy of the fluid decreases slightly when

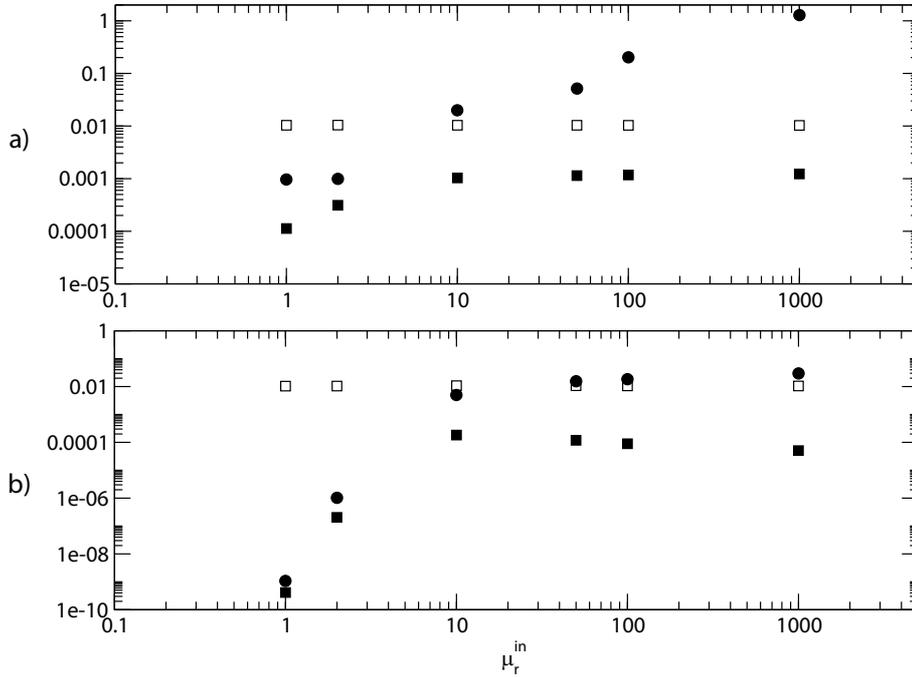


Figure 7.17: Kinetic energy (open squares) and magnetic energy in the fluid (filled squares) and in the inner core (filled circles) in function of the magnetic permeability of the core  $\mu_r^{in}$  for the parameters: (a)  $1/E = 0$ ,  $Re = 1500$ ,  $Pm = 2$  and (b)  $E = 10^{-3}$ ,  $Re = -1500$  and  $Pm = 0.2$ . The energies are dimensionless; the scaling factor is  $\rho(r_i \Delta \Omega)^2$ .

$\mu_r^{in} > 10$ . The poloidal and toroidal magnetic energies in the fluid follow the same evolution but the toroidal energy is always around 3 times greater than the poloidal one (not shown).

The magnetic energy in the inner core raises as  $\mu_r^{in}$  increases and is 500 to 1000 times greater in the core than in the fluid for  $\mu_r^{in} = 1000$ . Note that the values presented here take into account the variation of magnetic permeability of the inner core  $\mu_{in}$ .

The little influence of the change of the magnetic boundary conditions on the dynamo generation can be understood by the interpretation of figure 7.18. Indeed we observe that increasing the magnetic permeability of the inner core does not change significantly the morphology of the axisymmetric magnetic field in the fluid. However as the toroidal field in the fluid is barely changed, the toroidal field inside the inner core is increased by a factor  $\mu_r^{in}$  (equation (7.4)). We notice that the mechanical work exerted by the inner core is increased when raising the magnetic permeability. As it is equal to the total

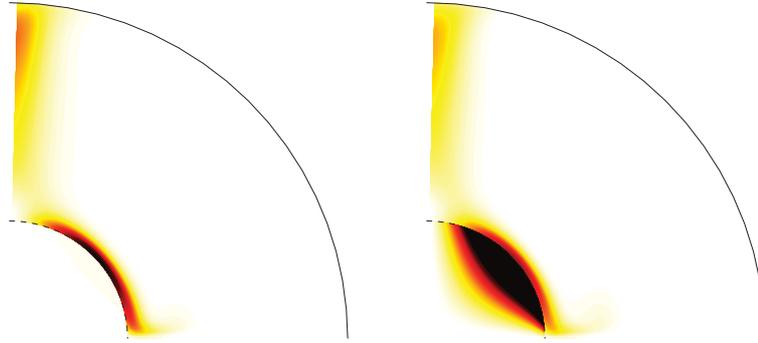


Figure 7.18: Magnetic field zonally averaged in a quadrant of the meridional plane for  $E = 10^{-3}$ ,  $Re = 1000$ ,  $Pm = 2$ ,  $\mu_r^{in} = 1$  (left) and  $\mu_r^{in} = 10$  (right). The color scale is the same for both figures. Dark colors indicate a strong magnetic field.

dissipation in the statistically saturated regime, we conclude that the ohmic dissipation inside the inner core is enhanced. This is consistent with the presence of a large magnetic energy in the inner core.

The magnetic energy spectra (figure 7.19) show that the magnetic field which is initially ( $\mu_r^{in} = 1$ ) partly dominated by the most unstable kinetic mode ( $m = 3$  for  $Re = 1500$  and  $1/E = 0$ ) becomes strongly axisymmetric when increasing the magnetic permeability  $\mu_r^{in}$ . This behaviour is due to the fact that magnetic field lines are maintained by the ferromagnetic core. They are expelled in the polar area and then concentrated close to the rotation axis.

### 7.7.2 Ferromagnetic outer sphere

The outer sphere is assumed to have the same conductivity as the fluid and a relative magnetic permeability  $\mu_r^{out} = \mu_{out}/\mu_0$  where  $\mu_{out}$  is the magnetic permeability of the outer sphere. The thickness of the shell is arbitrarily fixed at  $0.08r_o$ . Simulations with an outer sphere thickness of  $0.02r_o$  produce similar results. The magnetic outer boundary conditions match a potential field outside in the vacuum. The inner core has the same electric conductivity and magnetic permeability  $\mu_0$  as the fluid. In order to assess the impact of a conducting outer sphere alone we have carried out simulations with  $\mu_r^{out} = 1$ .

With or without global rotation the threshold remains unchanged when imposing a relative magnetic permeability  $\mu_r^{out}$  up to 1000 with both positive and negative differential rotation.

When a global rotation is imposed the magnetic energy in the fluid is constant (figure 7.20(b)) whereas the magnetic energy in the outer sphere in-

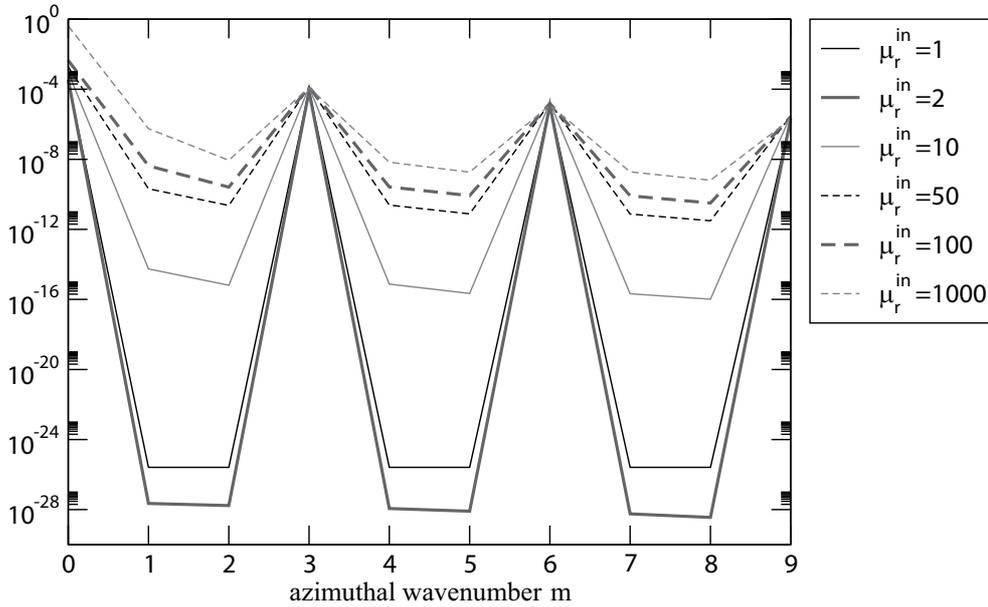


Figure 7.19: Magnetic energy spectra in function of the azimuthal wavenumber  $m$  for simulations at  $1/E = 0$ ,  $Re = 1500$ ,  $Pm = 2$  and for different relative magnetic permeability  $\mu_r^{in}$ . The power spectra are radially averaged on the fluid shell.

creases by a factor 1000 when  $\mu_r^{out} = 1000$ . Adding a conductive outer sphere has no noticeable impact on the threshold: both magnetic and kinetic energies are the same as in the case with a non-conducting and non-ferromagnetic outer sphere. The morphology of the magnetic field is very similar to the case with the ferromagnetic inner core with the dominance of the axisymmetric component of the field when the relative magnetic permeability is increased and magnetic field lines concentrated around the rotation axis.

Without overall rotation, the magnetic energy lies at a high value, 5 to 15 times greater than the kinetic energy with smaller values when  $\mu_r^{out} \geq 100$  (figure 7.20(a)). The presence of a conducting outer sphere yields an induced magnetic field 1000 times greater than without a conducting outer sphere.

### 7.7.3 Inner and outer ferromagnetic boundary conditions

In this last case, both outer and inner boundaries are ferromagnetic (with same magnetic permeability) and conducting (with the same conductivity as the fluid).

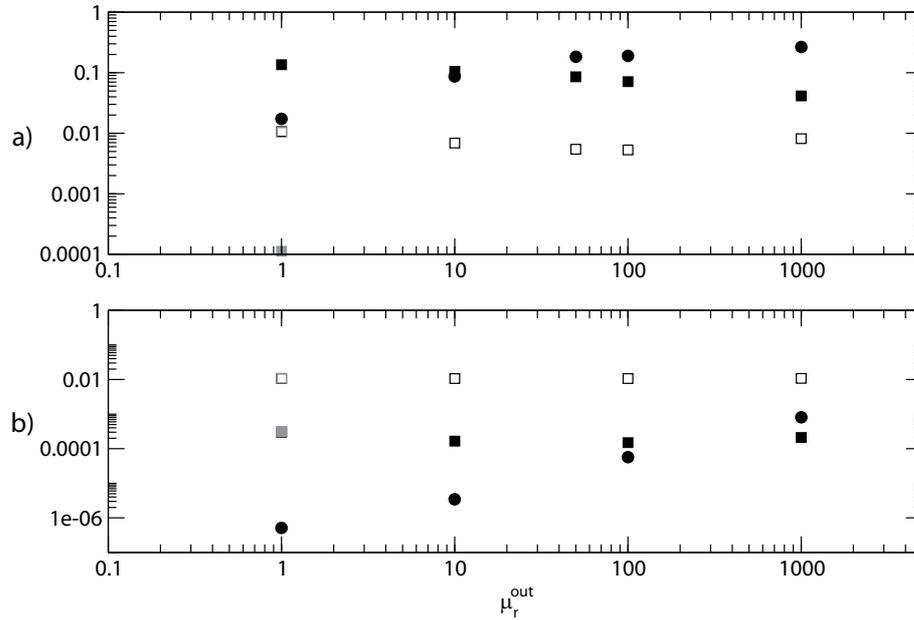


Figure 7.20: Kinetic energy (open black squares) and magnetic energy in the fluid (filled black squares) and in the outer shell (filled black circles) as a function of the relative magnetic permeability of the outer shell  $\mu_r^{\text{out}}$  for the parameters: (a)  $1/E = 0$ ,  $Re = 1500$ ,  $Pm = 2$  and (b)  $E = 10^{-3}$ ,  $Re = -1500$ ,  $Pm = 0.25$ . The gray symbols stand for the kinetic energy (open square) and the magnetic energy (filled square) when the outer shell is non-ferromagnetic and non-conducting. They cover the black symbols for  $\mu_r^{\text{out}} = 1$  in plot b. The energies are dimensionless; the scaling factor is  $\rho(r_i \Delta \Omega)^2$ .

As previously the dynamo onset is unchanged when the relative magnetic permeability is increased with or without global rotation. The kinetic and magnetic energy in the fluid remains constant (figure 7.21). The magnetic energy in the inner core and in the outer sphere increases by a factor 100 when the relative magnetic permeability  $\mu_r$  is raised from 1 to 10 and then remains roughly constant when  $\mu_r$  is further increased.

## 7.8 Conclusions

Using laboratory experiments to model planetary cores is difficult; modelling the natural forcing of the planetary cores such as thermal and chemical convection, requires high power in laboratory as the efficiency to convert

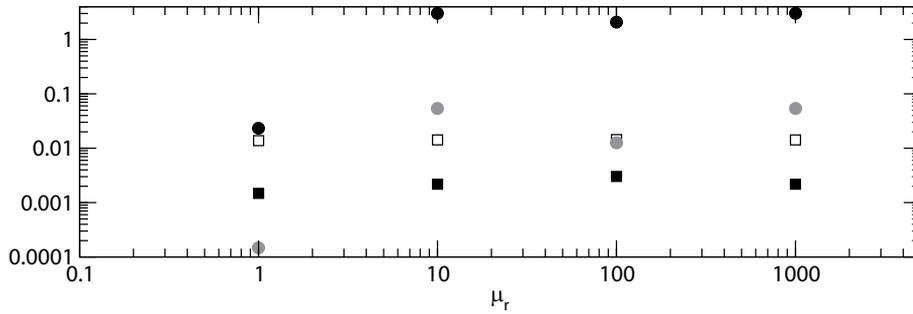


Figure 7.21: Kinetic energy (open black squares) and magnetic energy in the fluid (filled black squares), in the inner core (filled black circles) and in the outer shell (filled gray circles) as a function of the relative magnetic permeability of both inner and outer boundaries  $\mu_r$  for the parameters  $E = 10^{-3}$ ,  $Re = 1000$  and  $Pm = 2$ . The energies are dimensionless; the scaling factor is  $\rho(r_i \Delta \Omega)^2$ .

the power into kinetic energy is low in convective systems (see for instance Aubert *et al.*, 2001; Gillet & Jones, 2006). Consequently, mechanical forcings are necessary and spherical Couette flows are suitable to answer key questions about spherical natural dynamos. Without global rotation, our numerical study shows that the dynamo action is always found for high magnetic Reynolds number ( $Rm_c$  greater than a few thousand) for Reynolds numbers  $Re > Re_c$  at which the first non-axisymmetric hydrodynamical instability develops. The increase of the boundary forcing (measured by the Reynolds number) barely changes the critical magnetic Prandtl number of the Couette dynamo. In other words, the critical magnetic Reynolds number increases with the Reynolds number of the Couette flow according to our calculations. The overall rotation of the spherical Couette system yields a slight decrease of the dynamo threshold except for a regime where relatively low magnetic Reynolds numbers ( $Rm \sim 300$ ) have been found. For moderate Ekman number ( $E = 10^{-3}$ ) this dynamical regime corresponds to a state where the geostrophic constraint fails, i.e. the inertial terms associated to a negative differential rotation balance the Coriolis force associated to the positive overall rotation ( $Ro \sim -1$ ). In this regime, large shear in the vicinity of the inner core is present and may explain the large decrease of the dynamo onset. For smaller Ekman number ( $E = 10^{-4}$ ), a strong boundary forcing is necessary to reach the state  $Ro \sim -1$ . As the geostrophic constraint is lost, the enhanced shear at the inner core is unstable and generates small scale 3D fluctuations which do not improve the self generation of the magnetic field.

Without global rotation, the equipartition between magnetic and kinetic energy is achieved either for  $Re \gtrsim 2Re_c$  or for  $Pm \gtrsim 2Pm_c$ . The interaction parameter (ratio of the Lorentz forces to inertia) is of the order of unity and the Lorentz forces modify the velocity field. Spherical Couette flows are thus able to generate a strong magnetic field when no global rotation is imposed. This observation is of first order interest for experiments, as in planetary dynamos the Lorentz forces are one of the leading forces in the system. In the previous and current dynamo experiments, the interaction parameter is much smaller than unity (around  $10^{-4}$  for instance in the Von Kármán Sodium dynamo experiment (Monchaux *et al.*, 2007)). With global rotation, the presence of the Coriolis force might lead to the saturation of the magnetic field before the equipartition of energy. Accordingly the interaction parameter is smaller than unity unless the hydrodynamical regime is far from the regime where the Coriolis force is predominant.

Despite previous studies mostly highlighting the positive impact of ferromagnetic media in the setup for the generation of the magnetic field, our numerical results demonstrate that adding high magnetic permeability boundary conditions have no impact on the threshold in all the configurations studied. Nevertheless the amplitude of the generated magnetic field is enhanced, a feature that can be useful for experiments in order to obtain a stronger dynamo magnetic field. But producing a stronger induced magnetic field thanks to the use of ferromagnetic pieces in an experiment has also a cost: the increase of the ohmic dissipation in the experiment implies an increase of the power needed to run the experiment which could be problematic.

## Acknowledgements

We thank the geodynamo group in Grenoble for useful discussions. We are grateful for the comments of the reviewers, which have greatly improved the quality of this paper. All the computations presented in this paper were performed at the Service Commun de Calcul Intensif de l'Observatoire de Grenoble (SCCI). Financial support was provided by CNRS/INSU. CG was supported by a research studentship from Université Joseph-Fourier.

## 7.9 Effet d'un champ magnétique rémanent

Un milieu aimanté porte une aimantation  $\mathbf{M}$ . Cette aimantation modifie la structure du champ magnétique d'induction  $\mathbf{B}$ . On doit alors prendre en compte le vecteur excitation magnétique  $\mathbf{H}$  qui caractérise à la fois la présence d'un champ magnétique d'induction et l'aimantation du milieu dans lequel

baigne ce champ :

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}. \quad (7.6)$$

Dans le cas d'un matériau ferromagnétique, l'aimantation  $\mathbf{M}$  n'est pas proportionnelle au champ d'excitation à cause du phénomène d'hystérésis (la perméabilité magnétique  $\mu$  dépend de  $\mathbf{H}$ ).

On modélise l'aimantation de la graine ferromagnétique en imposant un dipôle aligné avec l'axe de rotation et centré en  $r = 0$ . L'amplitude du champ imposé est contrôlé par le nombre de Hartmann,

$$Ha = \frac{r_o B}{\sqrt{\mu_0 \rho \nu \eta}}.$$

L'amplitude du champ imposé est égale à celle du champ magnétique induit lorsque  $Ha = 1$ .

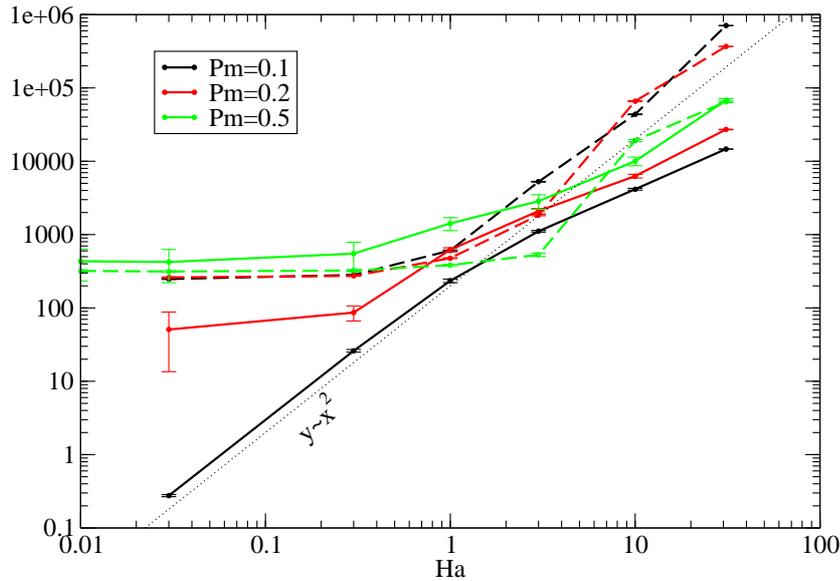


FIG. 7.22 – Énergie cinétique (tirets) et énergie magnétique du fluide (traits pleins) en fonction du nombre de Hartmann  $Ha$ . Les paramètres de ces simulations sont  $E = 10^{-3}$ ,  $Re = -1500$  et  $Pm = 0.1$  (noir),  $Pm = 0.2$  (rouge),  $Pm = 0.5$  (vert). La barre d'erreur indique l'amplitude des fluctuations temporelles. Les énergies sont sans dimension, le facteur de mise à l'échelle est  $\rho(r_i \Delta\Omega)^2$ .

Sur la figure 7.22, on représente l'évolution des énergies cinétiques et magnétiques en fonction du nombre de Hartmann. Le cas testé est celui de la

“fenêtre dynamo” à  $E = 10^{-3}$  et  $Re = -1500$ . En l’absence de champ imposé, le nombre de Prandtl magnétique critique est  $Pm_c = 0.2$ .

En présence d’un champ magnétique imposé plus grand que le champ produit par la dynamo ( $Ha > 1$  et  $Pm \geq 0.2$ ), le champ magnétique est dominé par l’interaction entre le champ imposé et l’écoulement. Le champ produit par la dynamo devient secondaire. Lorsque le champ magnétique imposé est faible ( $Ha < 1$ ), les énergies magnétique et cinétique des dynamos ( $Pm \geq 0.2$ ) restent constante : un champ magnétique imposé ( $Ha < 1$ ) n’a pas d’impact significatif sur l’amplitude des énergies.

La simulation non-dynamo ( $Pm = 0.1$ ) subit une augmentation quadratique de l’énergie magnétique avec  $Ha$  lorsque  $Ha < 1$  : le champ est induit par l’interaction du champ imposé et de l’écoulement. Si une partie du champ magnétique induit était d’origine dynamo (*i.e.* qui se maintient sans champ imposé), elle modifierait la loi quadratique tel que les dynamos à  $Pm \geq 0.2$ . Pour  $Ha < 1$ , on observe pas de modification de l’énergie cinétique. Lorsque  $Ha > 1$ , l’écoulement est fortement modifié par le champ imposé et on ne peut pas conclure sur l’auto-entretien du champ magnétique.

En résumé, la présence du champ imposé n’a pas modifié la simulation sous critique (au sens  $Pm < Pm_c$ ) pour permettre l’apparition de la dynamo : le seuil dynamo reste inchangé en présence d’un champ imposé.

## 7.10 Résumé

La composante axisymétrique d’un écoulement de Couette ne produit pas de dynamo. En revanche, on obtient toujours un champ magnétique auto-entretenu lorsque les mouvements non-axisymétriques apparaissent, *i.e.* au dessus du seuil de l’instabilité hydrodynamique quantifié par le nombre de Reynolds critique,  $Re_c$ .

Les nombres de Reynolds magnétiques critiques,  $Rm_c$ , sont de l’ordre de  $10^3$ . La rotation d’ensemble permet de diminuer le seuil dynamo. En particulier, un régime favorable ( $Rm_c \approx 300$ ) est obtenu pour un nombre d’Ekman  $E = 10^{-3}$  lorsqu’une zone de cisaillement forte est présente autour de la graine pour un nombre de Rossby  $Ro \sim -1$ . Cette fenêtre dynamo correspond au relâchement de la contrainte de Proudman-Taylor par les forces inertielles. Lorsque le nombre d’Ekman diminue d’une décade, le nombre de Reynolds nécessaire à l’obtention du régime  $Ro \sim -1$  est multiplié par 10. Les petites échelles de la turbulence produisent alors une déstabilisation de la couche de cisaillement pour  $E = 10^{-4}$  et on observe la disparition de la fenêtre dynamo.

Les dynamos de Couette possèdent un fort champ toroïdal comparé au

champ poloidal. Le cisaillement de la vitesse permet de créer un important effet  $\omega$ . Cette caractéristique a également été observée par Wicht dans les premières dynamos de Couette numériques. Il remarque que le champ poloidal est principalement produit à l'intérieur du cylindre tangent. Il évoque un effet  $\alpha$  pour la production du champ poloidal où la présence de l'instabilité de cisaillement joue un rôle primordial.

L'instabilité hydrodynamique non-axisymétrique prend la forme d'une onde pour un taux de rotation  $\Omega = 0$  et  $\Omega \neq 0$  avec un taux de rotation différentiel  $\Delta\Omega > 0$ . La nature de l'instabilité pour  $\Omega \neq 0$  et  $\Delta\Omega < 0$  n'a pas été identifiée et nécessiterait une étude plus détaillée dans ce régime. On montre que la non-axisymétrie et l'instationnarité de l'écoulement sont deux ingrédients de base pour obtenir un champ magnétique auto-entretenu proche du seuil dynamo. En revanche, les fluctuations de plus petites échelles qui émergent avec l'augmentation du forçage, ne permettent pas de diminuer le seuil dynamo qui reste à un nombre de Prandtl critique,  $Pm_c$ , constant. Pour un forçage  $Re > 2Re_c$ , l'énergie magnétique est de même ordre de grandeur que l'énergie cinétique. Le champ magnétique rétroagit fortement sur l'écoulement. En particulier, le jet équatorial pour  $\Omega = 0$  est détruit ainsi que l'onde qui lui est associée. Dans ce cas, en utilisant un écoulement figé pour l'induction magnétique, on observe que le champ magnétique est toujours maintenu : les variations temporelles de la vitesse ne sont plus primordiales. Le processus dynamo est donc sans doute modifié par la présence des fluctuations de l'écoulement et/ou de l'importante force de Lorentz.

Finalement, on montre que l'ajout de matériau ferromagnétique dans le modèle ne permet pas de changer significativement le seuil dynamo.



# Chapitre 8

## Dynamos générées par des jets zonaux en surface : application aux planètes géantes

### 8.1 Modélisation des planètes géantes

La circulation atmosphérique des planètes géantes de notre système solaire est dominée par des vents zonaux (est-ouest et *vice versa*) visibles en surface car associés à des systèmes de nuages en bandes (Ingersoll, 1990) (figure 8.1). L'atmosphère de ces planètes est constituée principalement d'hydrogène et d'hélium. Les nuages constitués d'ammoniac, de sulfure d'hydrogène et d'eau se forment près de la surface définie par l'isobare  $p = 1\text{bar}$ .

L'objet de ce chapitre est de déterminer si cette circulation zonale peut servir de moteur à une dynamo. Avant de présenter une revue des travaux portant sur l'origine des vents zonaux, une description succincte de l'intérieur des planètes géantes s'impose.

#### 8.1.1 Modèle à trois couches

L'intérieur des planètes géantes est classiquement décrit par un modèle à trois couches (figure 8.7). Au premier abord, les géantes gazeuses (Jupiter et Saturne) se distinguent des géantes glacées (Uranus et Neptune) par leur composition.

##### Géantes gazeuses

Jupiter et Saturne sont composés de plus de 87% (massique) d'hydrogène et d'hélium et de 3 à 13% d'éléments lourds. Ces deux planètes émettent presque

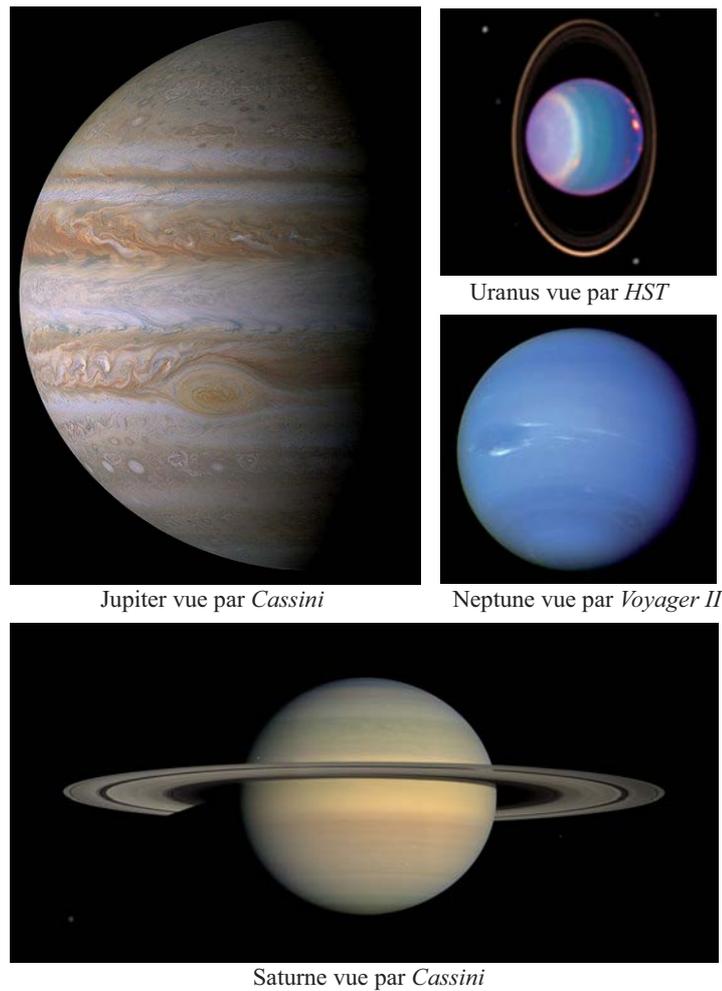


FIG. 8.1 – Photos de la surface des planètes géantes. HST : Hubble Space Telescope.

deux fois plus d'énergie dans l'infrarouge que ce qu'elles reçoivent par insolation (Pearl *et al.*, 1990). Cette observation indique que leur intérieur est chaud (environ 20000K (10000K) au centre de Jupiter (resp. Saturne)) et fluide. Il est donc raisonnable de penser que le transport de chaleur s'effectue en grande partie par convection. A basses pressions et températures, dans les régions externes, l'hydrogène se présente sous forme d'un fluide moléculaire ( $H_2$ ) électriquement isolant. En profondeur, lorsque les pressions sont de l'ordre du Mbar, la distance moyenne entre deux noyaux voisins est plus petite que le rayon de Bohr : les électrons ne sont plus liés à leurs noyaux et le fluide est ionisé. Cette phase de l'hydrogène est appelée "métallique" car ses propriétés physiques sont similaires aux métaux liquides. L'ionisation par pression, *i.e.* le régime transitoire entre hydrogène moléculaire et métallique, est mal connue et la profondeur de transition entre les deux phases est faiblement contrainte à l'intérieur des planètes (*e.g.* Guillot *et al.*, 2004). Jupiter étant plus massive que Saturne, son rayon d'ionisation est plus grand : entre  $0.75 - 0.9r_s$  pour Jupiter et environ  $0.5r_s$  pour Saturne (Guillot, 1999b).

Les mesures du champ de gravité lors du survol de satellites indiquent la présence possible d'un noyau dense de masse et de composition inconnue. Le rayon de ce noyau serait au maximum de  $0.2r_s$  pour les deux planètes (Guillot, 1999b).

Des mesures *in situ* ont été réalisées par la sonde lâchée par *Galileo* en 1995 (von Zahn *et al.*, 1998). La sonde a pénétrée l'atmosphère de Jupiter jusqu'à des pressions de 20 bar (soit environ 150 km) avant d'arrêter d'émettre. Les mesures du rapport He/H indiquent un appauvrissement d'He dans l'atmosphère comparé aux valeurs solaires. Il y a donc actuellement moins d'He dans l'atmosphère jovienne qu'au moment de sa formation. L'explication la plus simple de cette observation est une séparation de phase de l'hélium dans l'hydrogène et la formation de goutelettes riche en He et donc lourdes. Ces goutelettes tombent dans les niveaux plus profonds par gravité. Cette explication est favorisée par le fait que le néon, qui se dissout dans les goutelettes de He, est significativement appauvri dans l'atmosphère de Jupiter comparée à l'abondance solaire.

En résumé, l'intérieur des planètes gazeuses peut être simplifié dans un modèle rudimentaire à 3 couches (figure 8.7) :

1. Une enveloppe d'hydrogène moléculaire pauvre en hélium dont l'épaisseur serait d'environ 10000km pour Jupiter et 30000km pour Saturne.
2. Une couche profonde d'hydrogène métallique riche en hélium.
3. Un noyau central de composition incertaine (roches + glaces?) et de structure inconnue.

La majorité de la partie interne de la planète étant en convection, les régions pauvre et riche en hélium doivent être relativement homogène en terme de composition. Beaucoup d'incertitudes planent encore sur la structure interne des géantes gazeuses (Guillot *et al.*, 2004) dont certaines sont d'importance pour le choix des conditions limites d'un modèle dynamique de la couche métallique :

- La solubilité de l'hélium est plus faible dans l'hydrogène métallique. Par conséquent, il est envisageable qu'une zone de sédimentation de l'hélium se forme dans l'hydrogène métallique à basse pression. La présence d'un gradient stabilisateur d'He proche de la zone de transition entre enveloppes électriquement isolante et conductrice inhiberait la convection dans cette région. La localisation et l'extension de la région où la démixtion et sédimentation de l'hélium a lieu est incertaine mais elle est imaginée étroite (*e.g.* Stevenson, 1982).
- L'ionisation par pression étant un phénomène mal connu, on ignore si la transition entre fluide isolant et conducteur est continue ou discontinue (PPT pour Plasma Phase Transition). Si la PPT est présente son effet majeur serait de créer une discontinuité d'entropie infranchissable pour les panaches convectifs et donc une barrière impénétrable entre la partie moléculaire et métallique de l'hydrogène. L'équation d'état de l'hydrogène étant mal connue à ces fortes pressions, cette question est encore débattue (Saumon *et al.*, 1995). Les expériences utilisant des ondes de choc par pistolets à gaz (Nellis *et al.*, 1999) ou des lasers intenses (Collins *et al.*, 1998) permettent de compresser l'hydrogène à des pressions tout juste suffisantes pour le ioniser partiellement ou totalement (100 – 300GPa). Les résultats expérimentaux récents semblent en faveur d'une transition continue entre les deux phases.
- La présence d'un noyau dense est déduite des mesures du champ de gravité mais sa masse, sa composition et sa structure sont inconnues.

### Géantes glacées

Les modèles de la stratification interne des géantes glacées sont basés sur les mesures gravimétriques des missions *Voyager I* et *II* (Hubbard *et al.*, 1991). Ces modèles sont moins bien contraints que les modèles des géantes gazeuses car leurs moments gravitationnels sont connus avec une plus faible précision. La couche superficielle ( $r > 0.85r_s$ ) est constituée d'hydrogène moléculaire et d'hélium possiblement enrichie en éléments lourds tel que du méthane (Hersant *et al.*, 2004). Plus en profondeur, le profil de densité est proche de celui d'une glace, mélange d'eau, d'ammoniac et de méthane. Les fortes températures qui règnent à ces profondeurs permettent à ce mélange d'être,

au moins partiellement, sous forme liquide. Cette couche constitue la majorité de l'intérieur des deux planètes. Aux pressions et températures de cette enveloppe, le liquide devrait être un électrolyte de conductivité faible mais non-négligeable. Des expériences d'ondes de choc donnent des estimations de la conductivité d'environ  $100 - 1000 \Omega \cdot \text{m}^{-1}$  (Nellis *et al.*, 1997). En comparaison, la conductivité électrique du fer liquide est de l'ordre de  $5 \times 10^5 \Omega \cdot \text{m}^{-1}$  (Poirier, 1994). Les distributions de densité proposées par le modèle de Hubbard *et al.* (1991) sont relativement homogènes : la densité dans la partie profonde de la couche conductrice (au dessus de la frontière avec le noyau central) serait au maximum 3 fois celle obtenue dans la partie supérieure (sous la couche d'hydrogène moléculaire). Cependant, Podolak & Weizman (1995) prévoient que seule la moitié supérieure de l'enveloppe liquide soit en convection. L'existence d'un noyau rocheux (composé de silicates de magnésium et de fer) au centre est envisagée. Celui-ci occuperait au maximum 20% du rayon de la planète.

### 8.1.2 Génération des jets zonaux

Les courants zonaux observés en surface ont des vitesses typiquement plus grandes que les vents atmosphériques terrestres (figure 8.5). Des observations décennales montrent la stabilité de ces jets dans le temps (figure 8.2).

Le mécanisme physique qui maintient ces vents est une question débattue depuis une trentaine d'années. L'extension verticale de ces jets à l'intérieur des planètes est inconnue à cause d'un manque d'observations directes.

Deux classes de modèles tentent d'expliquer les observations (figure 8.3). La plupart des études se focalisent sur Jupiter, la plus proche et la plus grosse des planètes géantes, qui dispose du plus grand nombre d'observations récentes.

La première catégorie d'études utilise des modèles de couche mince tels que ceux utilisés en dynamique atmosphérique terrestre (*e.g.* Cho & Polvani, 1996; Williams, 2003). Dans ces modèles, l'atmosphère est d'une centaine de km d'épaisseur et stratifiée stablement. Les régimes étudiés se situent dans le domaine de la turbulence bidimensionnelle. Les vents sont mis en mouvement par un mécanisme de type vent thermique où un contraste latitudinal de température est obtenu typiquement par un forçage solaire ou un dégagement de chaleur latente par condensation d'eau. Ces modèles permettent de reproduire les vents multiples observés à hautes latitudes mais le vent équatorial produit est rétrograde contrairement au vent équatorial jovien. La direction du vent équatorial est intrinsèque au modèle car elle dépend du signe de  $\beta$ , la dérivée du paramètre de Coriolis (Yano *et al.*, 2005). Dans les modèles de couche mince, l'effet  $\beta$  est produit par une variation latitudinale

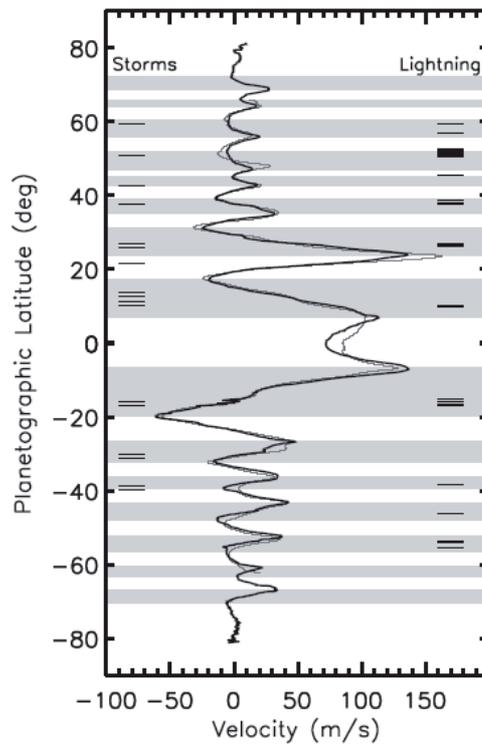


FIG. 8.2 – Vitesses des vents zonaux mesurées à la surface de Jupiter d’après les images prises par *Cassini* en 2000 (ligne noire) et *Voyager II* en 1979 (ligne grise). Extrait de Porco *et al.* (2003).

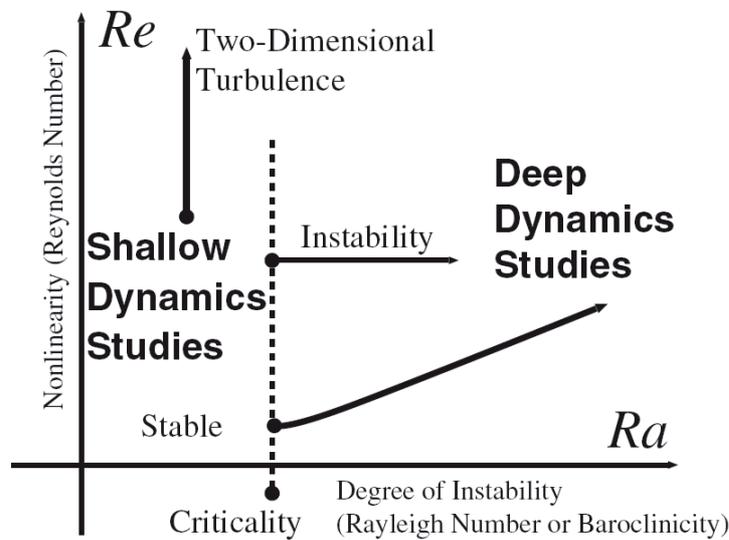


FIG. 8.3 – Schéma de l'espace des paramètres exploités par les modélisations de la dynamique jovienne : modèles de couche mince (grand nombre de Reynolds en stratification stable) et de couche profonde (instabilité convective en régime faiblement turbulent). Extrait de Yano *et al.* (2005).

de la force de Coriolis.

La deuxième catégorie d'études modélise la convection profonde dans toute l'enveloppe gazeuse (non-conductrice ou ensemble de la planète) avec pour moteur les sources de chaleur interne (Busse, 1976). Les modèles de couche profonde sont basés sur l'observation que le flux radiatif émis par les planètes géantes est presque deux fois supérieur à celui reçu (à l'exception de Uranus). Le mécanisme de génération des vents zonaux est principalement le transfert d'énergie cinétique non-zonale en énergie zonale par divergence du tenseur de Reynolds. Jusqu'à récemment les études de convection profonde se situaient dans des régimes assez peu turbulents et ne produisaient que peu de jets à hautes latitudes (Christensen, 2001; Aurnou & Olson, 2001). Dans ces modèles, l'effet  $\beta$  est produit par la géométrie du récipient.  $\beta$  est de signe opposé à celui des modèles de couche mince au niveau de la zone équatoriale. Le vent équatorial prograde est donc une caractéristique robuste de ces modèles. Les modèles expérimentaux et numériques récents d'écoulements turbulents produisent des jets multiples à hautes latitudes (Manneville & Olson, 1996; Jones *et al.*, 2003; Heimpel *et al.*, 2005). La plupart de ces modèles utilisent des fluides incompressibles, hypothèse assez discutable pour l'étude des planètes gazeuses. L'utilisation de modèles anélastiques montre que l'écoulement zonal conserve un caractère bidimensionnel au contraire des

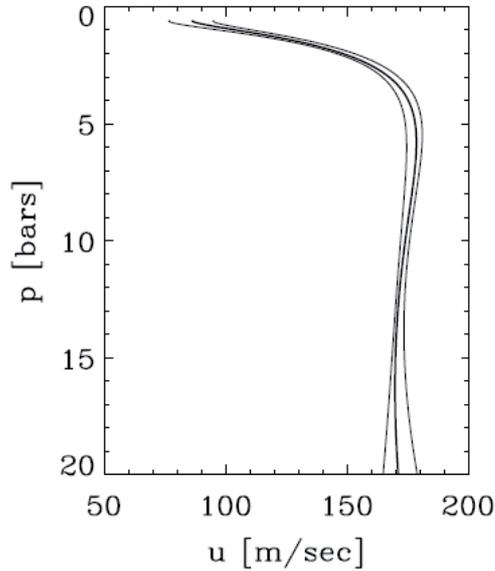


FIG. 8.4 – Vitesse du vent zonal en fonction de la profondeur mesurée par la sonde de *Galileo* dans l’atmosphère de Jupiter. Les deux lignes fines délimitent l’incertitude. Extrait de Atkinson *et al.* (1998).

vitesses convectives (Jones & Kuzanyan, 2009). Certaines études produisent cependant des résultats contradictoires (Kaspi *et al.*, 2009). Le point clé réside sans doute dans l’importance des effets rotationnels par rapport aux effets de la compression.

Une observation semble en faveur des modèles de couches profondes : des mesures de vitesse du vent zonal en dessous du niveau des nuages par la sonde lancée par *Galileo* dans l’atmosphère jovienne montrent une augmentation des vents jusqu’à 5 bars puis une vitesse constante sans signe de décroissance jusqu’à 20 bars (environ 150km) (figure 8.4).

## 8.2 Motivation

À la base, ce projet découle de l’observation du caractère bidimensionnel des vents zonaux produits par les modèles de couche profonde. Si de tels écoulements azimutaux géostrophiques sont générés dans la couche d’hydrogène moléculaire alors ils peuvent provoquer l’apparition de mouvements dans la couche conductrice sous-jacente par entraînement visqueux. A la suite du travail sur les dynamos de Couette, l’idée de générer des dynamos par rotation différentielle en imposant un forçage mécanique variable en latitude a germé.

J’ai construit un modèle simple en modifiant le code PARODY utilisé précédemment pour la modélisation d’un écoulement de Couette sphérique. Le forçage mécanique, censé reproduire un profil des vents zonaux, est imposé à la frontière externe de la coquille sphérique. Les couches profondes des planètes géantes sont certainement animées de mouvements convectifs mais par simplicité ils ne sont pas modélisés ici afin de focaliser l’étude sur l’efficacité du seul forçage aux frontières.

Initialement, le but de cette étude était de déterminer l’amplitude du vent zonal nécessaire à la production d’une dynamo. Sur une suggestion de Jonathan Aurnou, nous nous sommes intéressés à la topologie du champ magnétique produite en fonction du forçage imposé. L’idée sous-jacente est que les champs magnétiques de Neptune et Uranus (multipolaire et non-axisymétrique) sont drastiquement différents de ceux de Jupiter et Saturne (principalement dipolaire axial). La dichotomie entre leur système de vents zonaux est également frappante. La question est donc de déterminer si ces deux aspects peuvent être reliés.

Cette étude a fait l’objet d’un article en cours de soumission à *Icarus*. Ce papier est présenté ici dans sa version “longue” avec plus de détails sur les raisonnements et observations basées sur nos modélisations numériques.

### 8.3 Abstract

We present a new possible dynamo mechanism for generating the magnetic fields of the giant planets. The mechanism relies on the presence of barotropically unstable differential rotation. We assume that zonal jet currents within the outer molecular hydrogen layer exert a drag at the top of the deep electrically conducting region. Because of the planet’s rapid rotation, this boundary forcing drives nearly geostrophic axisymmetric motions in the conducting region. For a given forcing, measured by the critical Rossby number  $Ro_c$ , a shear instability of the zonal flow develops in the form of a global Rossby mode. The wavenumber of the mode depends on the width of the zonal jets. For  $Ro \geq Ro_c$ , we obtain self-sustained magnetic fields at magnetic Reynolds numbers greater than  $10^3$ . The propagation of the Rossby wave and its non-axisymmetric structure are both crucial for dynamo action. The amplitude of self-sustained axisymmetric poloidal magnetic field depends on the wavenumber of the shear instability, and hence on the width of the zonal jets. For narrow jets, the poloidal magnetic field is dominated by an axial dipole whereas in the case of wide jets, the axisymmetric poloidal field is weak.

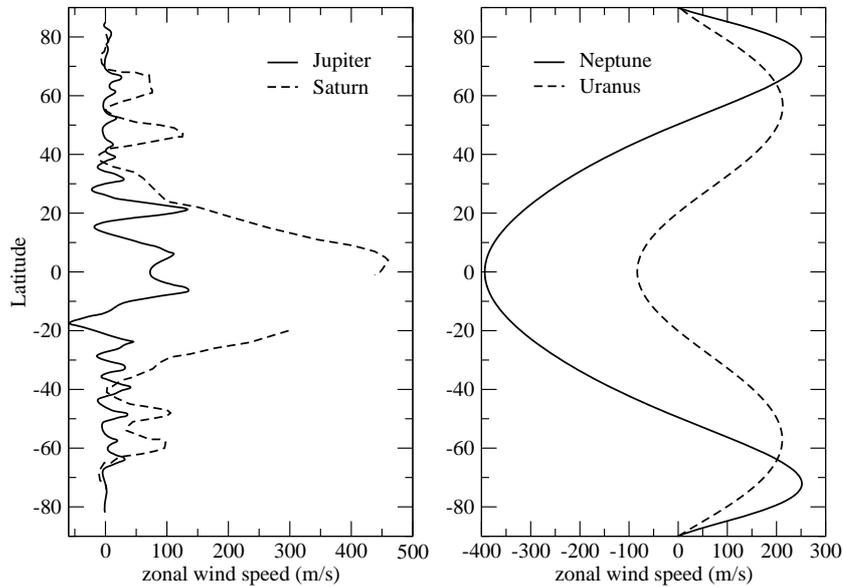


Figure 8.5: Zonal velocity measured at the surface in the planet's mean rotating frame for each of the four giants by tracking cloud features in the outer weather layer. Profiles adapted from Porco *et al.* (2003), Sanchez-Lavega *et al.* (2000), Sromovsky *et al.* (2001) and Hammel *et al.* (2005).

## 8.4 Introduction

The zonal (i.e. axisymmetric and azimuthally directed) jet streams visible at the surface of the giants planets are a persistent feature of the fluid dynamics of these planets (figure 8.5) and have been observed for centuries. The gas giants (Jupiter and Saturn) display a strong eastward equatorial jet, extending to latitudes  $\pm 20^\circ$  with a peak velocity exceeding 100m/s on Jupiter, and to latitudes  $\pm 30^\circ$  with a peak velocity exceeding 400m/s on Saturn. At higher latitudes, alternating prograde (eastward) and retrograde (westward) jets of smaller amplitude are observed extending all the way up to the poles. These profiles are fairly symmetric with respect to the equator. On the ice giants (Uranus and Neptune) the picture is rather different. A very intense retrograde equatorial current is present with maximum velocity of 100m/s on Uranus and 400m/s on Neptune. At higher latitudes, a single prograde jet of strong amplitude is present in each hemisphere, symmetrically about the equator. Several decades of observations show that these zonal flows remain roughly stable in time (Porco *et al.*, 2003).

The origin of these flows and the associated question of the depth to which they extend into the planets' interiors remain unresolved. Studies have been

carried out to reproduce the zonal wind pattern of Jupiter as measured by several fly-bys. These previous studies can be categorized into two main classes of models: weather layer models and deep layer models. The former assume that the zonal flows are confined to a shallow stably stratified region near the cloud level. These models are able to reproduce the high latitude structures with alternating eastward and westward jets and a strong equatorial current. However, in these studies, the equatorial jet is retrograde, unlike the prograde flow observed on gas giants. A parametrized forcing such as a strong equatorially-localised baroclinicity is required to force a shallow system to produce a prograde equatorial jet (Williams, 2003). The second class of model is deep convection models which simulate most or all of the whole  $10^4$ km-thick molecular hydrogen ( $H_2$ ) layer. The presence of convection is inferred from the observation that the atmospheres of the major planets emit more energy by long-wave radiation than they absorb from the Sun radiation. Consequently their atmospheres must receive an additional heat source supplied from the interior of the planet. Recent numerical models using either a Boussinesq approximation (Heimpel *et al.*, 2005) or an anelastic approximation (Jones & Kuzanyan, 2009) with sufficiently low Ekman numbers (i.e. strong rotational effect compared to viscous dissipation) display alternating zonal jets at high latitudes. The strong eastward equatorial jet is a robust feature of these models. Interestingly, deep layer models suggest that the zonal velocity generated by the non-linear interaction of the convective velocities (i.e. the motions directly forced by buoyancy) are roughly geostrophic, that is, invariant along the direction of the rotation axis. This characteristic is also present in strongly compressible models provided the Ekman number is small enough (Jones & Kuzanyan, 2009; Kaspi *et al.*, 2009). Note that convective motions themselves need not to be geostrophic.

Another feature of the giant planets is their strong magnetic fields (figure 8.6). The magnetic field observed for gas and ice giants are drastically different. Jupiter and Saturn have a main axial dipole component, a feature shared with the Earth for instance. Neptune and Uranus, however, have strong non-axial quadrupole and octupole components compared to the axial dipole. The magnetic field is generated in the deep conducting regions of the planet's interior (figure 8.7): a metallic hydrogen layer of thickness about  $0.7r_s$  for Jupiter and  $0.5r_s$  for Saturn and a electrolyte layer composed of water, methane and ammonia of thickness about  $0.7r_s$  for Uranus and Neptune, where  $r_s$  is the radius of the planet. Numerical models of convective dynamos typically produce axial dipolar dominated magnetic fields (Olson *et al.*, 1999; Aubert & Wicht, 2004). To explain the unusual magnetic fields on Uranus and Neptune, models using peculiar parameter regimes or different convective region geometries have been proposed. The latter mod-

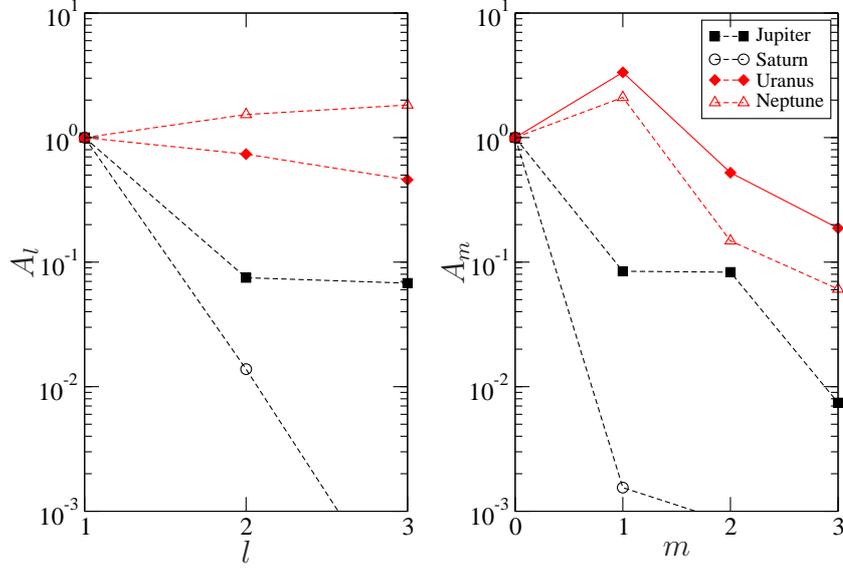


Figure 8.6: Spectra of the magnetic field squared amplitude at the top of the conducting layer of the four giant planets for degrees  $l$  and order  $m$  up to 3. The squared amplitude for a given degree  $l$  is  $A_l = \sum_{m=0}^l (l+1) [(g_l^m)^2 + (h_l^m)^2]$ . The squared amplitude for a given mode  $m$  is  $A_m = \sum_{l=m}^{l_{max}} (l+1) [(g_l^m)^2 + (h_l^m)^2]$ .  $g_l^m$  and  $h_l^m$  are the Gauss coefficients. After Connerney *et al.* (1982), Acuna *et al.* (1983) and Holme & Bloxham (1996)

els show that a numerical dynamo operating in a thin shell surrounding a stably-stratified fluid interior produces magnetic field morphologies similar to those of Uranus and Neptune (Hubbard *et al.*, 1995; Stanley & Bloxham, 2006). Gómez-Pérez & Heimpel (2007) obtain weakly dipolar and strongly tilted dynamo magnetic fields when high magnetic diffusivity are used (small  $Pm$ ). Their results show that these peculiar fields are stable in the presence of strong zonal circulation and when the flow has a dominant effect over the magnetic fields. The latter feature is also emphasized by Aubert & Wicht (2004) who find stable equatorial dipole solutions with a weak magnetic field strength and low Elsasser number (measure of the relative importance of the Lorentz and Coriolis forces). They suggest that the magnetic field geometry of the equatorial dipole solution is incompatible with the columnar convective motions and thus this morphology is stable only when the Lorentz force is weak.

The dichotomies observed in the magnetic fields and in the zonal wind profiles are striking. Up to now no study has tried to relate them, probably because the former one is a feature of the deep interior whereas the latter one

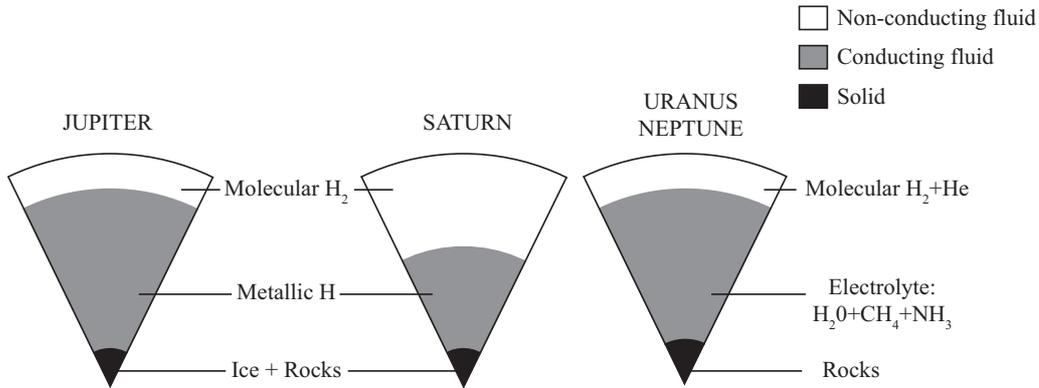


Figure 8.7: Schematic representation of the interior of the four giants showing rough estimates of the transition between the different layers. The location of the interface between molecular  $H_2$  and metallic  $H$  is about  $0.8 - 0.85r_s$  in radius for Jupiter and  $0.5r_s$  for Saturn, where  $r_s$  is the radius of the planet (Guillot, 1999a). Upper bound for the inner core is  $0.2r_s$  for both Jupiter and Saturn. The interface between molecular  $H_2$  and electrolyte layers is estimated at about  $0.85r_s$  with a core of radius  $0.2r_s$  for Uranus and Neptune (Hubbard *et al.*, 1991). In this work, we model the conducting region (gray) and the solid core (black). Adapted from Guillot (1999b).

a characteristic of the surface. However, zonal flows that shear the meridional magnetic field lines are important in the dynamo process even if they are not the only ingredient needed.

The idea of the work presented in this paper is the following: if the surface zonal flows extend within the whole molecular non-conducting envelope in the giant planets, they may exert an external forcing at the top of the deeper conducting envelope. From previous studies (Schaeffer & Cardin, 2006; Guervilly & Cardin, 2010) we know that such a boundary forcing can generate a self-sustained magnetic field. In this study, we use an incompressible numerical model to test whether the external forcing created by the zonal winds at the top of the conducting region can drive a dynamo. In order to assess the role of the zonal wind profile on the topology of the sustained magnetic field, we use a Jupiter-like and a Neptune-like zonal wind profiles. In the giant planets, as in rocky planets, it is usually believed that the dynamo mechanism is fed by convective motions taking place in the deep conducting regions. The giant planets display a strong surface heat flux (with the exception of Uranus) meaning that heat transfer is efficient in the interior of the planet and thus mostly due to convection (Pearl *et al.*, 1990). Here we want to assess the efficiency of zonal wind forcing alone, so we do not model

convective motions.

In the deep conducting region of the planet, the increase in electrical conductivity is believed to damp the zonal winds generated in the molecular envelope, since the Lorentz force opposes to these flows. Nonetheless, zonal flows of moderate amplitude (compared to meridional motions) are observed in dynamo simulations especially if the momentum diffusivity  $\nu$  of the fluid is much smaller than the magnetic diffusivity  $\eta$  (Gómez-Pérez & Heimpel, 2007). The ratio of these two quantities, the magnetic Prandtl number ( $Pm = \nu/\eta$ ), is believed to be small in the conducting fluids considered here ( $Pm \sim 10^{-5} - 10^{-6}$  for metallic hydrogen (Guillot *et al.*, 2004; Jones, 2003) and  $Pm \lesssim 10^{-8}$  in an electrolytic  $\text{H}_2\text{O}-\text{NH}_3-\text{CH}_4$  mixture (Nellis *et al.*, 1997)). We emphasise that we do not conjecture that the fast zonal winds that may extend all the way down in the non-conducting layer also extend with such amplitude in the deep conducting region. Only much slower zonal velocities are needed as we will propose in this paper. Weak zonal circulations in the dynamo region are probably not a problem because speeds of a few mm/s are probably sufficient to generate the self-sustained magnetic field (Starchenko & Jones, 2002). The first goal of this work is to quantify what amplitude of the zonal wind at top of the conducting layer is needed to trigger the dynamo instability.

Our second goal is to show whether or not the pattern of the zonal flow imposed at the top of the conducting layer changes the topology of the self-sustained magnetic field.

We first describe the model and the numerical method used (section 8.5). Then we present numerical results from simulations in the non-magnetic case (section 8.6) followed by results from dynamo simulations (section 8.7).

## 8.5 Model

We model the deep conducting layer of the giant planets as a thick spherical shell (figure 8.7). We do not model the molecular hydrogen layer. At the top of the conducting layer we impose an axisymmetric azimuthal velocity modeling the zonal flow supposedly generated in the overlying molecular hydrogen layer.

The shell rotates at the imposed rotation rate  $\Omega$ . The aspect ratio is  $\gamma = r_i/r_o$  where  $r_i$  is the inner sphere radius, corresponding to the rocky core, and  $r_o$ , the outer sphere radius, the interface between conducting and non-conducting layers. The flow is driven only by the external latitudinally-dependent forcing imposed at  $r = r_o$ .

The fluid is assumed incompressible with constant density  $\rho$  and temperature,

that is, no convective motions are computed. The assumption of incompressibility is made for simplicity, although the pressure scale height  $H_p$  at the depths of the conducting layer is roughly 8000km (Guillot *et al.*, 2004), that is, about 1/5 of the thickness of the layer. The effects of compressibility may well play a role in the dynamics of the conducting regions.

In order to model the drag by the external zonal velocity at the outer boundary, we use a rigid boundary condition for the velocity. Free slip boundary conditions may be more appropriate than rigid boundary conditions to model the interface between two fluid envelopes but they do not allow such an efficient drag. To assess the impact of the choice of the upper velocity boundary condition on the results, a modification to free slip condition will be considered in a forthcoming study.

The radial profile of electrical conductivity is not well known in the gas giants, and whether the transition between the molecular and conducting layers is sharp or continuous is still an open question. High-pressure experiments seem in favour of a continuous transition (Nellis *et al.*, 1999). In the absence of consensus and for the sake of simplicity, we choose to model a sharp transition in the conductivity, which means that conducting and non-conducting layers are well delimited. In the ice giants this choice is more appropriate as we expect a more well defined boundary to exist between the molecular hydrogen layer and the electrolyte layer. Consequently, for the magnetic boundary condition, the outer boundary is electrically insulating. The conductivity is assumed constant throughout the whole conducting layer.

The existence of a rocky core at the center of the giants planets is uncertain and depends on the poorly constrained composition of the planet. Estimates for the core mass are  $0 - 14m_{\oplus}$  for Jupiter (total mass  $317.9m_{\oplus}$ ),  $6 - 17m_{\oplus}$  for Saturn (total mass  $95.2m_{\oplus}$ ) and  $0 - 4m_{\oplus}$  for Uranus and Neptune (total mass  $14.5m_{\oplus}$  and  $17.1m_{\oplus}$  respectively) where  $m_{\oplus}$  signifies for the mass of the Earth. If present, the rocky cores are therefore believed to be small. Following the interior model of Jupiter proposed by Guillot (1999a) we use an aspect ratio  $r_i/r_o = 0.2$  for all the simulations performed. The inner core is electrically conducting (with the same conductivity as the fluid in the conducting layer). We did not carry out simulations with an insulating core as the effect of the conductivity of the inner core is believed to be small on the dynamo mechanism (Wicht, 2002). The velocity boundary condition is no-slip at the inner boundary.

We model two different azimuthal velocity profiles for the boundary forcing imposed at the top: a multiple jet profile for the gas giants with a profile based on Jupiter's surface zonal winds (hereafter profile J) and a 3-band profile reproducing Neptune's surface zonal winds (profile N).

For Jupiter, we use the profile given in Wicht *et al.* (2002)

$$\mathbf{U} = U(s)\mathbf{e}_\phi = U_0 \frac{s}{r_0 \cos(n_0\pi)} \cos\left(n_0\pi \frac{s-r_0}{r_s-r_0}\right) \mathbf{e}_\phi, \quad (8.1)$$

where  $s = r \sin \theta$ ,  $r_s$  is the surface radius of the planet and  $U_0 = U(r_0, \theta = \pi/2)$ .  $n_0$  controls the numbers of jets. The profile at the radius  $r_s$  fairly matches the observed profile for Jupiter at the surface for  $n_0 = 4$  (figure 8.8). The zonal velocity is assumed to be geostrophic within the molecular hydrogen layer ( $r_s > r > r_o$ ). The profile  $U(r_o, \theta)$  is used to drive the flow at the top of our simulated metallic hydrogen layer (figure 8.8). We emphasise that we only prescribe the zonal velocity at  $r_o$  and not within the whole conducting layer  $r_o > r > r_i$ . We do not consider the non-conducting layer  $r_s > r > r_o$ . The ratio  $\gamma_s = r_s/r_o$  is an important parameter that determines the aspect of  $U$  at  $r_o$ . We choose  $\gamma_s = r_s/r_o = 1/0.8 = 1.25$  following Guillot (1999a). We have not used directly the Jupiter's surface zonal velocity profile obtained from *Cassini* measurements as a perfectly symmetric profile is easier to project onto spherical harmonics and allows a faster spectral convergence.

For the Neptune-like profile, we project the zonal velocity profile measured at the surface of Neptune geostrophically down to  $r_o$  using  $\gamma_s = 1/0.85 = 1.18$  (Hubbard *et al.*, 1991) (figure 8.9).

The velocity  $\mathbf{u}$  is scaled by  $U_0$ , the azimuthal velocity imposed at the equator of the outer sphere  $r_o$ . The length scale is the radius of the outer sphere  $r_o$ . The magnetic field  $\mathbf{B}$  is scaled by  $\sqrt{\rho\mu_0 r_o \Omega U_0}$  where  $\rho$  is the fluid density and  $\mu_0$  is the vacuum magnetic permeability.

We numerically solve the momentum equation for an incompressible fluid,

$$Re \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + Re (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2 \frac{1}{E} \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{E} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (8.2)$$

the continuity equation,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (8.3)$$

and the magnetic induction equation,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{RePm} \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (8.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (8.5)$$

where  $p$  is the dimensionless pressure, which includes the centrifugal potential.

The Reynolds number  $Re = r_o U_0 / \nu$  parametrizes the mechanical forcing exerted on the system by controlling the amplitude of the zonal wind. The

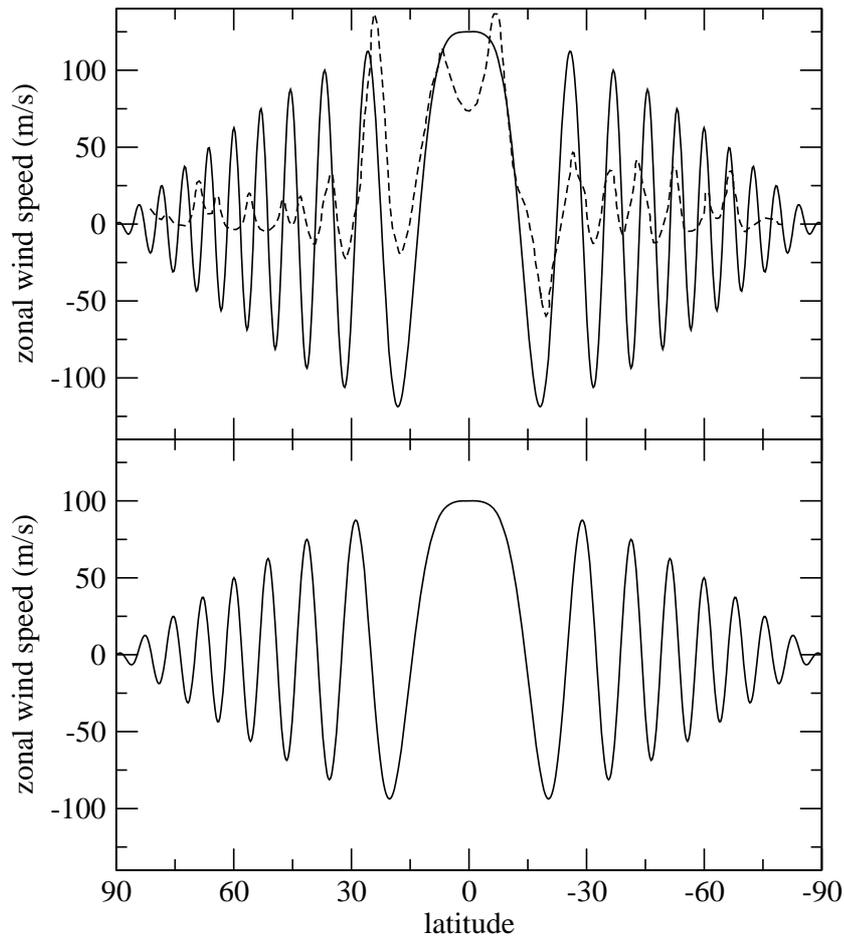


Figure 8.8: Top: comparison of the zonal velocity measured at the surface of Jupiter (dashed line) and the prescribed azimuthal velocity profile  $U(r_s, \theta)$  (8.1) at the surface of the modelled planet (solid line) (after Wicht *et al.*, 2002). Bottom: profile J: prescribed azimuthal velocity profile  $U(r_o, \theta)$  at the surface of the conducting layer assuming the zonal velocities are geostrophic for  $r_s > r > r_o$ . We used  $n_0 = 4$ ,  $\gamma_s = r_s/r_o = 1.25$  and  $U_0 = 100$ .

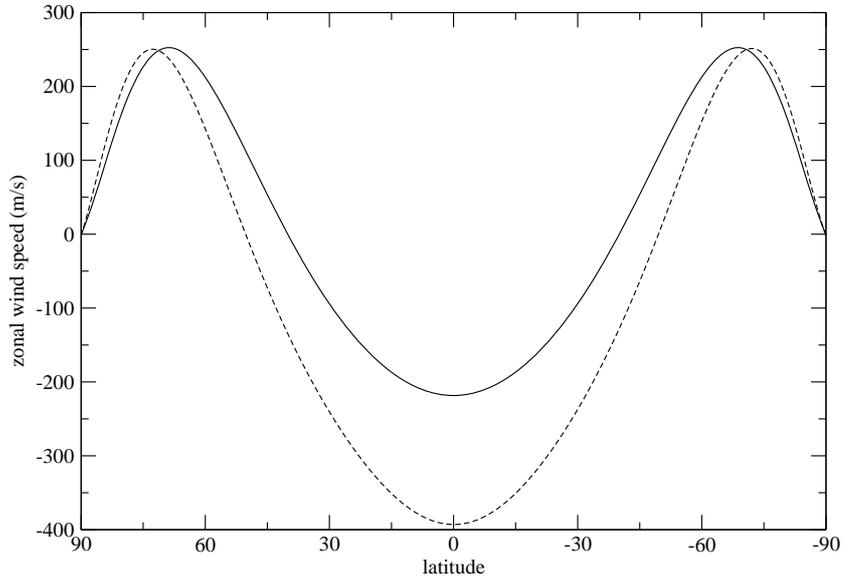


Figure 8.9: Zonal velocity profile at the surface of Neptune (dashed line) compared to the profile N, the prescribed azimuthal velocity profile at the surface of the conducting region assuming geostrophic zonal velocities for  $r_s > r > r_o$ . We used  $\gamma_s = r_s/r_o = 1.18$ .

magnetic Prandtl number  $Pm = \nu/\eta$  influences the magnetic Reynolds number  $Rm = RePm$  and hence affects the rate of magnetic induction. The Ekman number  $E = \nu/(\Omega r_o^2)$  measures the importance of the viscous term over the Coriolis force. The Rossby number  $Ro = ReE = U_0/(\Omega r_o)$  is the ratio of inertial force to Coriolis force. Note that hereafter each mention to the Rossby number corresponds to this “forcing” Rossby number and not a local Rossby number based on rms velocities unless specified.

The numerical implementation of the above equations uses the PARODY code, derived from Dormy (1997), Aubert, Cardin, Dormy in the dynamo benchmark (Christensen *et al.*, 2001), and parallelized and optimized by J. Aubert and E. Dormy. The velocity and magnetic fields are decomposed into poloidal and toroidal scalars and expanded in spherical harmonic functions in the angular coordinates. A finite difference scheme is used on an irregular radial grid (thinner near the boundaries to resolve the boundary layers). A Crank-Nicolson scheme is implemented for the time integration of the diffusion terms and an Adams-Bashforth procedure is used for the other terms. All results presented in this paper arise from fully three-dimensional and non-linear computations.

## 8.6 Dynamics without the magnetic field

Since the dynamo mechanism is dependent on the velocity field, we start our study by a description of the hydrodynamics in the absence of the magnetic field. This proves useful when understanding the dynamo mechanism.

For a rapidly rotating system, in which the Coriolis force exactly balances the pressure force, the Proudman-Taylor constraint states that the flow is  $z$ -invariant and follows geostrophic contours. For an incompressible fluid trapped into a bounded container, these geostrophic contours correspond to surfaces of equal height. Consequently in a sphere the only geostrophic motions are azimuthal. In the giant planets' conducting envelopes, the Ekman number is about  $10^{-16}$  and the Rossby number is smaller than 1 (Guillot *et al.*, 2004). In the absence of the magnetic field, we expect the Proudman-Taylor constraint to hold for large scale motions. As we want to reach the dynamical regime in which the flow is strongly geostrophic, the use of small Ekman and Rossby numbers is required. We carried out simulations for  $10^{-5} > E > 10^{-6}$  for the profile J and  $10^{-5} > E > 5 \times 10^{-6}$  for the profile N. The Rossby numbers are always smaller than 0.1. For the profile J, in cases with  $E \leq 2 \times 10^{-6}$ , we imposed longitudinal symmetry and only retained the multiple of the spherical harmonics of order  $m_s$ . The required resolution for  $E = 10^{-6}$  is 500 points on the radial grid and 580 spherical harmonics degrees.

### 8.6.1 Axisymmetric flow

When the imposed boundary forcing is small enough, *i.e.* when the Rossby number  $Ro$  is less than a critical value  $Ro_c$ , the flow is axisymmetric and predominantly azimuthal (figure 8.10). The zonal jets imposed at the outer boundary propagate into the volume along lines parallel to the axis of rotation. A necessary condition for a structure of width  $\delta$  to propagate geostrophically into the bulk of the fluid is that  $\delta \gg E^{1/3}$ . If  $\delta \lesssim E^{1/3}$  then the effect of viscosity is important compared to the rotational effects and the structure remains  $z$ -dependent. For the profile J, where the width of the jets is  $\delta \approx 0.1r_o$ , the necessary condition to obtain geostrophic jets is  $E \ll 10^{-3}$ . In our numerical simulations we found that  $E < 10^{-4}$  is sufficient.

The use of no-slip boundary conditions yields a differential rotation between the boundary and the bulk of the fluid. This differential rotation is resolved across viscous boundary layers known as Ekman layers. These boundary layers scale as  $(E/\cos\theta)^{1/2}$ , where  $\theta$  is the colatitude. Resolving thin Ekman numbers is computationally very demanding and the use of a radial grid thinner near the walls is necessary. Viscous forces within the Ekman layers

drive vertical motions of order  $E^{1/2}$  within the bulk of the fluid. This Ekman pumping leads to a weak circulation (compare the amplitude of the angular velocity to the meridional motions in figure 8.10). This meridional circulation advects angular momentum from the boundary layer into the bulk of the fluid and causes the jets to spread on a shorter timescale than by viscous spreading alone. The Ekman layer is thicker at low latitudes and the Ekman pumping is stronger as we observe on figure 8.10(a). Consequently the driving of the zonal motions in the bulk by the outer boundary is more efficient at low latitudes. For the profile J, the inner zonal jets in the equatorial plane are weaker than the outer ones relative to the imposed zonal jets at top (figure 8.11(a)). This effect becomes less important when  $E$  decreases, and in the  $E \rightarrow 0$  limit we expect the basic zonal velocity to be perfectly geostrophic. Note that the azimuthal velocity has to match the no-slip boundary condition at  $r = r_i$  in the equatorial plane (through an Ekman layer) that the profile (8.1) does not respect. So the closest zonal jet to the inner core cannot be exactly geostrophic. For the profile N, the zonal jets are wider, so the zonal flow displays a strong geostrophic structure at  $E = 10^{-5}$ , except close to the inner sphere where the Ekman layer is present.

### 8.6.2 Non-axisymmetric motions

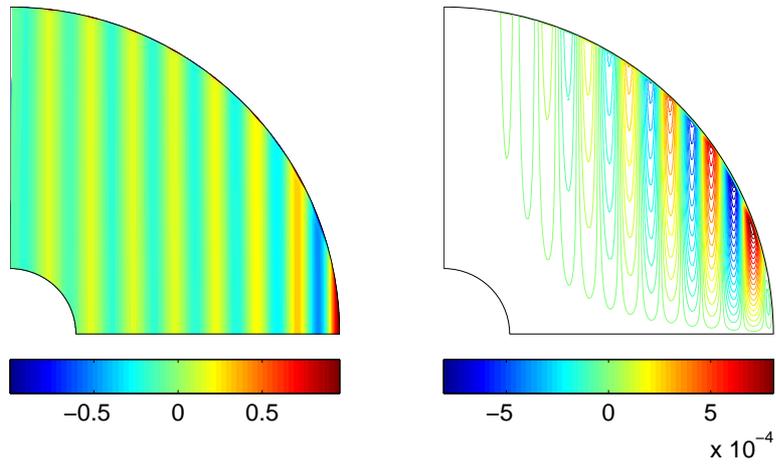
#### Profile J

When the boundary forcing ( $Ro$ ) becomes greater than a critical value  $Ro_c$ , the axisymmetric basic flow becomes unstable and a non-axisymmetric shear instability appears just above the onset. The instability takes the form of an oscillation in the  $\phi$ - and  $s$ -directions aligned with the axis of rotation and nearly  $z$ -independent. This oscillation persists even once the instability saturates (figure 8.12). The oscillation drifts progradely in the azimuthal direction. Close to the threshold, the radial extension of the instability is large and it occupies almost half of the gap. The instability drifts with the same speed over its whole radial extension despite the advection by the zonal flow velocity which varies with  $s$ . Therefore, we conclude that this instability is a single wave of complicated spatial form.

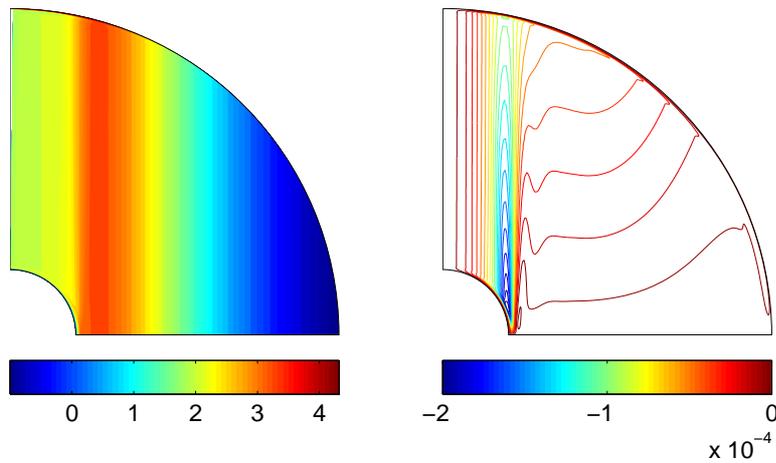
The nearly  $z$ -invariant structure and the prograde drift are two characteristics of Rossby waves propagating in a spherical container. The dispersion relation for the Rossby wave given by a linear analysis is

$$\omega_{rw} = -2\Omega\beta \frac{m/s}{k_s^2 + (m/s)^2}, \quad (8.6)$$

where  $\beta = 1/h(dh/ds) = -s/(r_o^2 - s^2)$  is the slope of the upper boundary of the spherical container of half-height  $h$ .  $k_s$  and  $m/s$  are the radial and



(a) Profile J



(b) Profile N

Figure 8.10: Angular velocity  $V_\phi / (r \sin \theta)$  (left) and streamlines of the meridional circulation (right) of the axisymmetric flow in a upper meridional plane. Positive (negative) values of the streamline mean anticlockise (clockwise) motions. The parameter for the simulations are  $E = 5 \times 10^{-6}$  and  $Ro = 0.0015$  for the profile J and  $E = 10^{-5}$  and  $Ro = 0.002$  for the profile N.

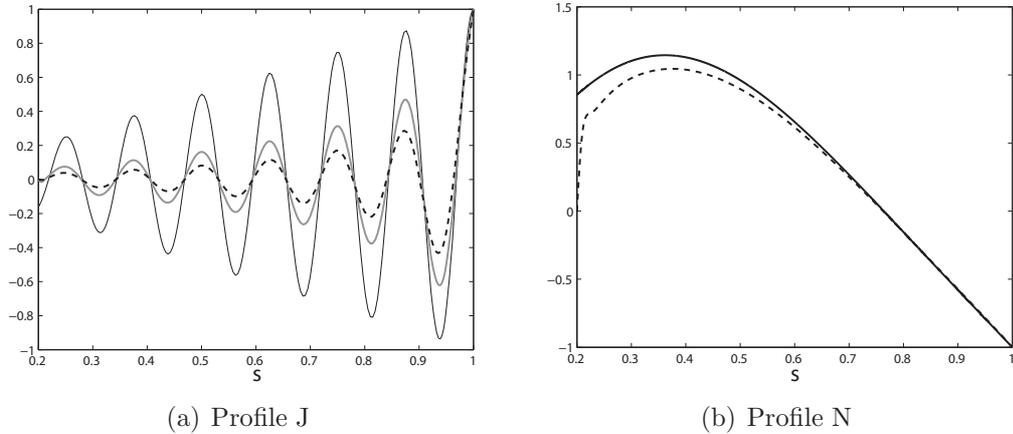


Figure 8.11: Zonal velocity in the equatorial plane for subcritical numerical simulations compared to the imposed velocity geostrophically projected in the equatorial plane (black line) for (a) the profile J ( $E = 5 \times 10^{-6}$  (dashed line) and  $E = 10^{-6}$  (gray bold line)) and (b) the profile N ( $E = 10^{-5}$  (dashed line)).

azimuthal wavenumbers respectively. The frequency of the Rossby wave depends on the radius  $s$ : a wave propagates more rapidly when located at large  $s$  (large slope  $\beta$ ). For different  $E$ , we calculated the frequency  $\omega$  of the propagating wave observed in our numerical simulations. The theoretical Rossby wave frequency  $\omega_{rw}$  can be calculated at a given radius assuming  $k_s \approx m/s$  and using the wavenumber  $m$  obtained from the numerical simulation. We always find that  $\omega_{rw}(s_1) < \omega < \omega_{rw}(s_2)$  where  $s_1 = 0.56$  ( $s_2 = 0.87$ ) is the smallest (resp. largest) radius where a significant vorticity associated with the presence of the wave can be seen in the numerical calculations. This observation confirms that the shear instability occurs as a Rossby wave. To conserve its coherency in the  $s$  direction, the wave keeps a constant phase speed throughout its whole radial extension even if its both ends are located at different  $\beta$ . If the wave conserves the phase speed of the critical radius  $s_c$  where the instability first appears, then we can infer  $s_c$  from the dispersion relation (8.6) and the frequency  $\omega$  obtained in our simulations. In figure 8.13(a), we represent the profile  $U$  in the equatorial plane and  $s_c$  obtained for different  $E$ .  $s_c$  is always close to the fifth positive peak of the zonal flow. The jets being quite narrow, we check this observation by working out simulations using an imposed profile displaying wider jets. To do so we used the formula (8.1) with  $n_0 = 2$  (see figure 8.13(b), hereafter profile J2). For the profile J2, we also measure the frequency of the wave for different Ekman numbers. The results are presented on figure 8.13(b) and back up the idea

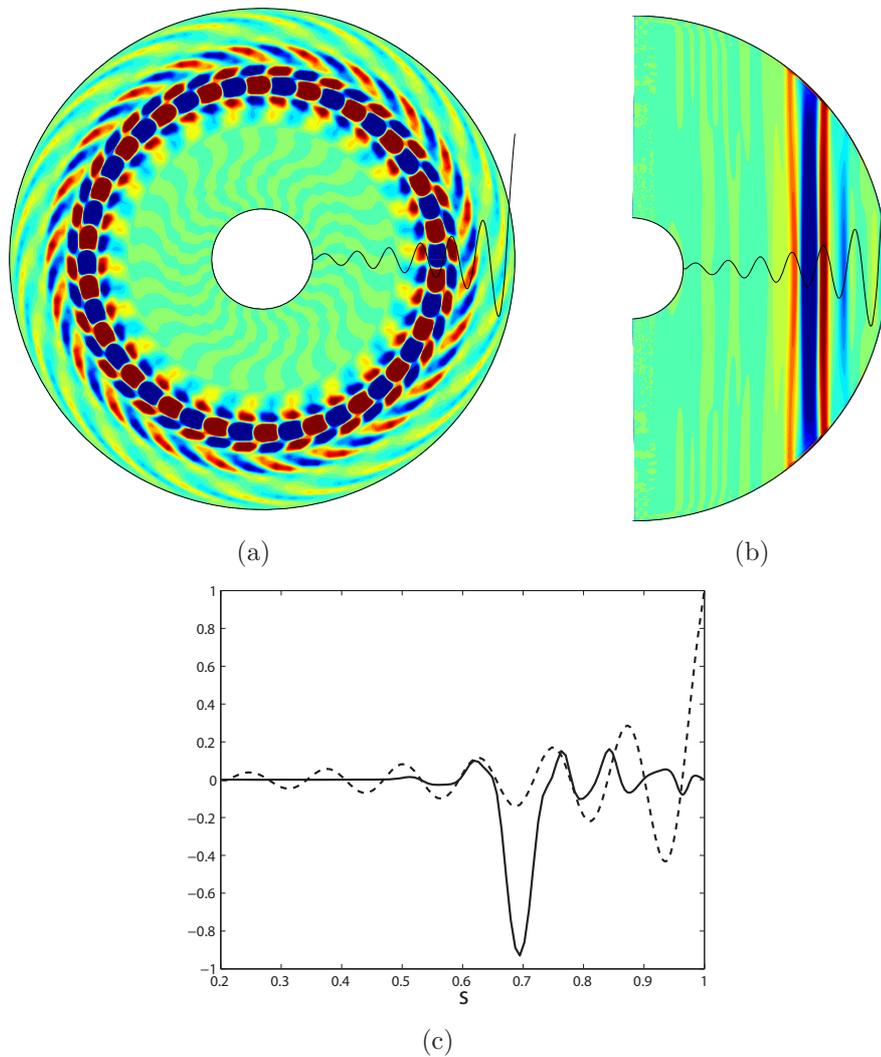


Figure 8.12: Non-zonal axial vorticity (a) in the equatorial plane, (b) in a meridional slice for the profile  $J$  at  $E = 4 \times 10^{-6}$  and  $Ro = 1.01Ro_c$  (blue: negative and red: positive) and (c) in the equatorial plane for a given longitude (bold black line). The black (dashed on (c)) line represents the zonal velocity in the equatorial plane.

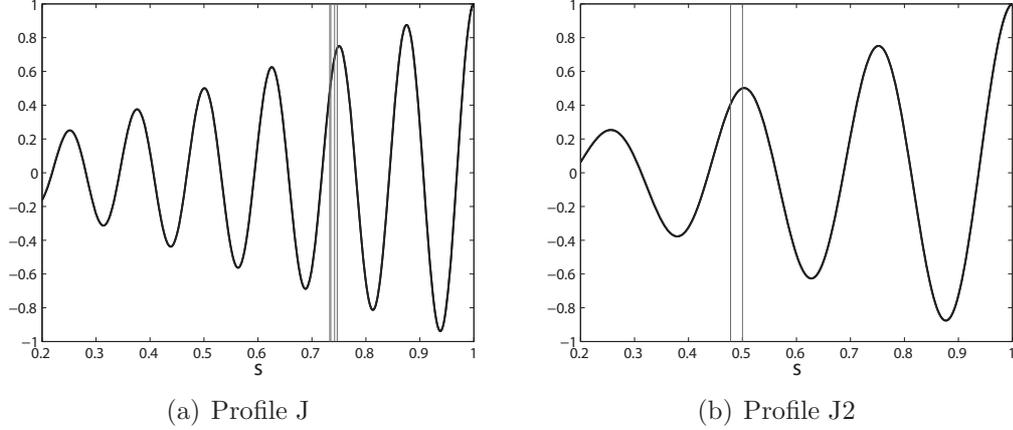


Figure 8.13: Profile  $U(s)$  in the equatorial plane (black bold line) and  $s_c$  (vertical lines) deduced from (8.6) using  $\omega$  obtained from the simulations with  $E = [5, 4, 3, 2] \times 10^{-6}$  for the profile J and  $E = [5, 4] \times 10^{-6}$  for the profile J2.

that  $s_c$  is located close to the maximum of zonal velocity. We infer that the instability first sets in locally at the maximum of the zonal velocity and then takes the form of a global Rossby mode that extends in the radial direction over several jets. Here we supposed that the wave does not adjust its speed once it is extending in the radial direction. Note that the instability has the same finite radial extent even at the threshold (determined with an accuracy  $(Ro - Ro_c)/Ro_c = \pm 10^{-3}$ ).

Ingersoll & Pollard (1982) used a model of barotropic instability in a sphere to investigate the stability of the zonal jets observed at the surface of Jupiter assuming that the zonal velocity is geostrophic. They showed that a sufficient and necessary condition for instability in an inviscid Boussinesq fluid is that the quantity

$$\Delta = 2\Omega\beta - \frac{d^2U}{ds^2} \quad (8.7)$$

changes sign at some radius. In fact they derived the instability criterion for an anelastic model but here we have taken the Boussinesq limit of their result. In dimensionless form, the quantity  $\Delta$  is

$$\Delta^* = 2\beta - Ro \frac{d^2U}{ds^2} \quad (8.8)$$

where the Rossby number is  $Ro = U_0/(\Omega r_o)$ . Note that the criterion (8.8) is derived in a local approximation that neglects the curvature terms. When the curvature terms are taken into account, Schaeffer & Cardin (2005a) showed

that the criterion becomes

$$\Delta^* = 2\beta - Ro \frac{d\zeta}{ds}, \quad (8.9)$$

where  $\zeta$  is the vorticity of the zonal flow,

$$\zeta = \frac{dU}{ds} + \frac{U}{s}. \quad (8.10)$$

Far from the rotation axis, the criteria (8.8) and (8.9) are identical. In a sphere  $\beta$  is negative. Consequently, the zonal jets first become unstable where the gradient of vorticity is maximum and negative. Then for a profile  $U$  of sinusoidal shape, the first shear instability occurs at the maximum of the prograde jets. In their numerical study of an axisymmetric shear layer (Stewartson layer) produced by differential rotation in a spherical container, Schaeffer & Cardin (2005*a*) found that the destabilisation of the shear layer into Rossby waves occurs where the vorticity gradient is indeed maximum. As their  $U$  profile presents a sharp discontinuity, the maximum of  $d\zeta/ds$  nearly coincides with the maximum of the velocity shear  $dU/ds$ . This is not the case when considering a sinusoidal profile and thus we find that the shear instability occurs, perhaps surprisingly, at the minimum of the zonal velocity shear.

The velocity of the zonal flow  $U$  enters the dispersion relation of the Rossby wave

$$\omega = \omega_{rw} + U(s) \frac{m}{s} \quad (8.11)$$

where  $\omega_{rw}$  is given by equation (8.6) for a Rossby wave that propagates in the context  $U = 0$ . As reported earlier,  $\omega(s)$  is constant in our numerical calculations. So  $\omega_{rw}$  must adapt in the  $s$ -direction. In a prograde jet  $U > 0$ ,  $\omega_{rw}$  must decrease, which requires a local decrease in the radial lengthscale (corresponding to a local increase in  $k_s$ ) as can be observed in figure 8.12.

We note that the maximum of the saturated solution of the non-zonal flow is always located within the retrograde jet close next inward from  $s_c$  (figure 8.12(c)). This may be a consequence of the larger radial extent of the wave in the retrograde jets.

For small enough Ekman number (in practice  $E < 5 \times 10^{-6}$ ), the critical wavenumber  $m_c$  is constant. The vortices are roughly circular in the equatorial plane. Then  $m_c$  is controlled by the width of the jets and the critical radius  $s_c$ . In the limit of small Ekman number,  $m_c$  is therefore independent of  $E$ .

Figure 8.14 shows the threshold of the first instability of the axisymmetric flow for the profile J. We observe the decrease of  $Ro_c$  with  $E$ ; according to

the criterion (8.9),  $Ro_c$  should be constant in the limit of negligible viscosity. We calculate the critical Rossby number given by the criterion (8.9) for the geostrophic profile  $U(s, \theta = \pi/2)$ ,  $Ro_c^g$ . The instability criterion predicts that the first (innermost) prograde jet ( $s = 0.25$ ) should be first unstable for  $Ro_c^g = 0.0011$ . However, the numerics gives the fifth prograde jet ( $s_c = 0.75$ ) as the most unstable (see figure 8.12). The reduction of the strength of the innermost jets for  $E \sim \mathcal{O}(10^{-6})$  compared to the geostrophic profile (recall figure 8.11(a)) may explain partly the discrepancy between numerical and analytical results. However when applying criterion (8.9) to the equatorial zonal velocity of the numerical solutions for different  $E$ , we obtain  $Ro_c^t$  that is also minimum for the first prograde jet. As the zonal velocity is not entirely geostrophic for  $E \sim \mathcal{O}(10^{-6})$ ,  $Ro_c^t > Ro_c^g$ . On figure 8.14, we plot  $Ro_c^t(s = 0.75)$  and  $Ro_c^g(s = 0.75)$ . The convergence of the numerical  $Ro_c$  and theoretical  $Ro_c^t$  shows that the numerical description of the non-axisymmetric instability is close to the asymptotic regime. We can also observe the slow convergence of  $Ro_c^t$  towards  $Ro_c^g$  which shows that the basic axisymmetric flow is slowly approaching the  $E \rightarrow 0$  limit. Due to computational limit, it is not possible for us to carry out simulations at smaller  $E$  with a fully non-linear approach. We used the linear version of the code XSHELL developed by Nathanaël Schaeffer to calculate linear perturbation solutions to the momentum equation using the geostrophic profile  $U$  as the basic flow in the bulk of the fluid. The code uses spherical harmonic expansions in the angular directions and finite difference in radius. No Ekman layer is produced by the basic flow and only the linear term of  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  are calculated. Thus the computational time is greatly reduced by the linear approach but is restricted to an analysis at the instability threshold. Note that we do not use the azimuthal symmetry as the choice of a given symmetry  $m_s$  may influence the position of the instability. In figure 8.14 we plot the threshold  $Ro_c^t$  obtained with the linear approach together with the position of the unstable jet and the marginally stable mode  $m_c$ . The first unstable jet gets closer to the inner core as the Ekman number is decreased. Accordingly to the diminution of  $s_c$ ,  $m_c$  becomes smaller. For the same Ekman number, the first unstable jet obtained with the linear code is inner than the one found with the fully non-linear code since a geostrophic zonal flow is used in the former approach and so inner jets have greater amplitude than in the latter approach. The discrepancy in the position of the instability between the theoretical prediction and the numerical solutions disappears when very small viscosity is used ( $E \leq 5 \times 10^{-7}$ ).

A characteristic time of the Rossby wave is  $\tau_{rw} = 1/\omega$ . At the instability threshold, the numerical simulations give  $\tau_{rw} \approx 18\Omega^{-1}$  for  $E < 5 \times 10^{-6}$ . The ratio  $\omega_{rw}/\Omega$  is constant according to the dispersion relation (8.6) for a given

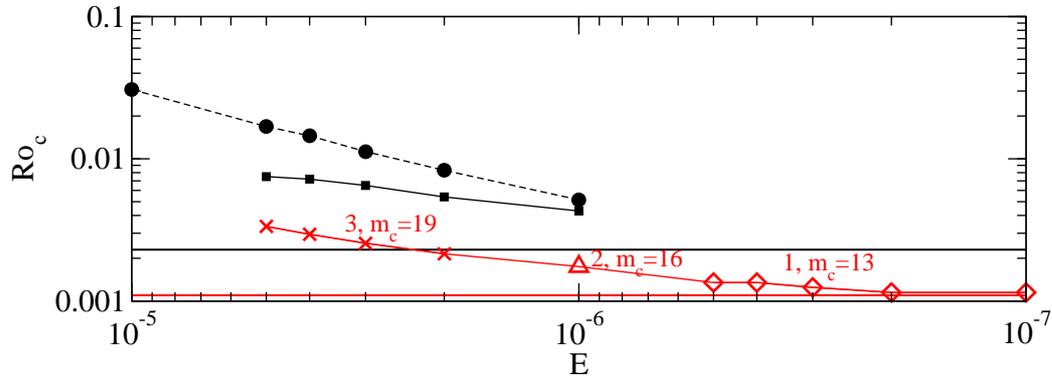


Figure 8.14: Critical Rossby number obtained from fully non-linear numerical simulations for the profile J ( $Ro_c$ , circles) compared to the theoretical Rossby number obtained with the instability criterion (8.9) using the equatorial velocity from the basic state ( $Ro_c^t(s = 0.75)$ , squares) and using the geostrophic profile (8.1)  $U(s, \theta = \pi/2)$  ( $Ro_c^g(s = 0.75)$ , black line). The critical Rossby number obtained from the linear numerical calculation is also shown ( $Ro_c^l$ , red symbol) and compared to the theoretical Rossby number ( $Ro_c^g(s = 0.25)$ , red line). The annotations close to the red symbol of  $Ro_c^l$  stand for the number of the unstable prograde jet in the equatorial plane and the azimuthal wavenumber of the marginally stable mode: crosses: 3<sup>rd</sup> jet unstable ( $s_c = 0.5$ ) and  $m_c = 19$ ; triangle: 2<sup>nd</sup> jet unstable ( $s_c = 0.38$ ) and  $m_c = 16$ ; diamonds: 1<sup>st</sup> jet unstable ( $s_c = 0.25$ ) and  $m_c = 13$ .

$m$  and  $s$ . The timescale of the zonal jets is  $\tau_{zw} = r_o/U_0 = \Omega^{-1}/Ro$ . For  $Ro = 0.01$ , we have  $\tau_{zw} > \tau_{rw}$ : the Rossby wave propagation is faster than the advection of the fluid by the zonal flow. The turnover time of a fluid particle is  $\tau_{to} = l/V_s$  where  $l$  is the typical radial displacement of the particle and  $V_s$  the typical cylindrical radial velocity of the particle. We define the local Rossby number  $Ro_l = V_s/(\Omega R)$ . At  $Ro = 1.01Ro_c$ ,  $Ro_l$  is typically  $10^{-4}$ . In a rough approximation we use  $l = \delta$  where  $\delta$  is the width of the jets,  $\delta \approx 0.1r_o$  for the profile J. Then we obtained  $\tau_{to} \approx \delta/(Ro_l\Omega r_o) \approx 10^3\Omega^{-1}$ : the turnover time of the particle is much longer than the timescale of the wave. Consequently the particle oscillates rapidly as the wave propagates and is slowly advected by the zonal flow. The radial displacement  $l$  is actually smaller than  $\delta$  and the turnover time is overestimated.

When the Rossby number is increased in the supercritical regime, the other prograde jets will eventually become unstable. A second Rossby wave appears in the weakly supercritical regime, at  $Ro = 1.06Ro_c$  for  $E = 5 \times 10^{-6}$ . The second wave occurs outward from the first wave (figure 8.15(a)). The maximum of the second wave velocity is located in the retrograde zonal jet adjacent to the one carrying the first wave maxima. The azimuthal wavenumber of the second wave is larger than the one of the first wave because its location is at a larger critical radius whereas the size of the jet remains unchanged. The second wave propagates faster owing to the stronger slope. The zonal flow is weakly affected by the presence of the two waves. When increasing further the forcing ( $Ro = 2.94Ro_c$ ), the superposition of several Rossby waves can be observed with different wavenumber and propagation rate with the outermost wave still propagating faster (figure 8.15(b)). Their structure is still nearly  $z$ -invariant. The zonal jets are visibly perturbed by the waves. The local Rossby number is  $Ro_l \approx 10^{-2}$  so the turnover time is about  $10\Omega^{-1}$ , assuming that the radial displacement  $l = \delta$ .

In figure 8.16(a) the time-averaged zonal flow in the equatorial plane is plotted for different  $Ro$  up to  $Ro = 5.88Ro_c$ . The extraction of kinetic energy from the zonal flow by the Rossby waves produces a gradual reduction of the jet strength as the forcing is increased. For  $Ro = 2.94Ro_c$ , the retrograde jet at  $s = 0.81$  has been mostly destroyed. The zonal flow located at  $s > 0.9$  does not visibly undergo a decrease of its amplitude as no Rossby wave of strong amplitude can propagate in this region of strong slope. Indeed at low latitudes, radial motions produce velocity along the  $z$ -direction due to the impenetrable outer boundary. Vertical flows are strongly prohibited by the Proudman-Taylor constraint in a closed container, and so is the radial motion.

For  $Ro < 2.35Ro_c$ , the amplitude of the non-axisymmetric velocity, relative to  $U_0$ , increases with the forcing (figure 8.16(b)). After reaching a maximum,

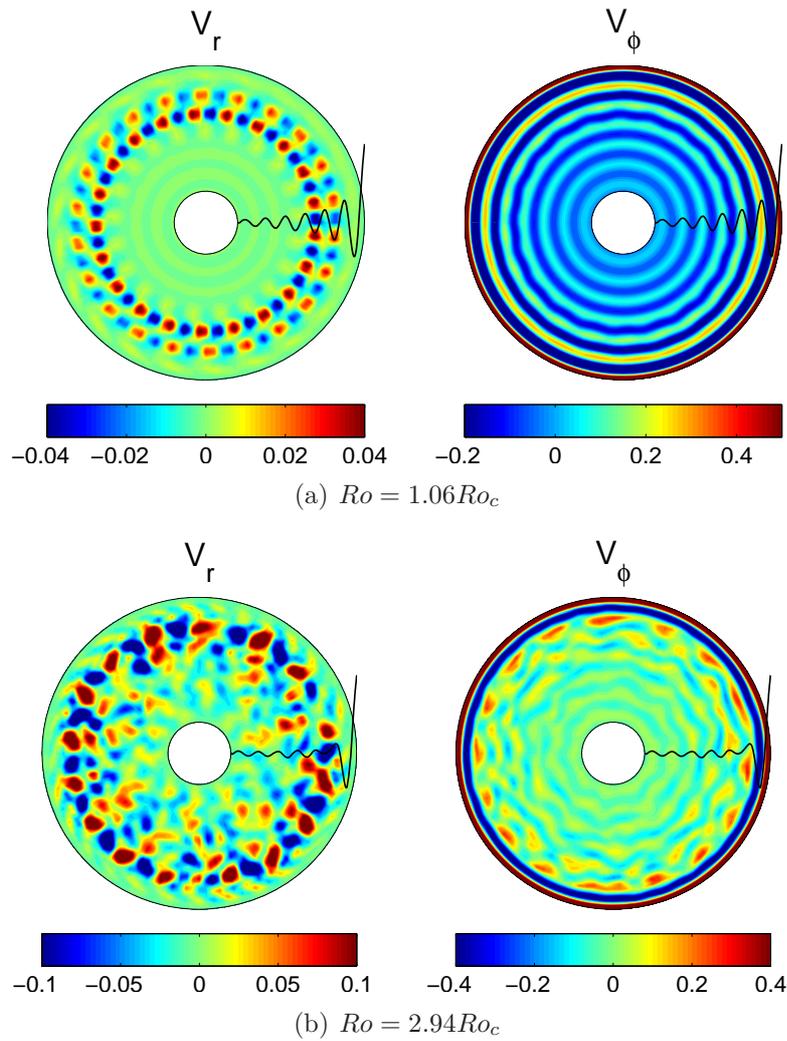


Figure 8.15: Snapshots of the radial (left) and azimuthal (right) velocity components in the equatorial plane for  $E = 5 \times 10^{-6}$  and  $Ro > Ro_c$  for the profile J. The velocities are scaled by  $U_0$ .

at  $Ro = 2.35Ro_c$ , the non-axisymmetric flow undergoes a decrease of its magnitude due to a decrease of the radial velocity  $V_s$ . In the meantime, the zonal flow strength in the equatorial plane decreases. Consequently we observe the saturation of the Rossby waves as they smooth the profile of the zonal velocity until the disappearance of the jets. The waves are not decaying in time for a fixed  $Ro$  as the imposed zonal flow at the top keeps feeding the zonal jets that provide the kinetic energy necessary to maintain the waves.

### Profile N

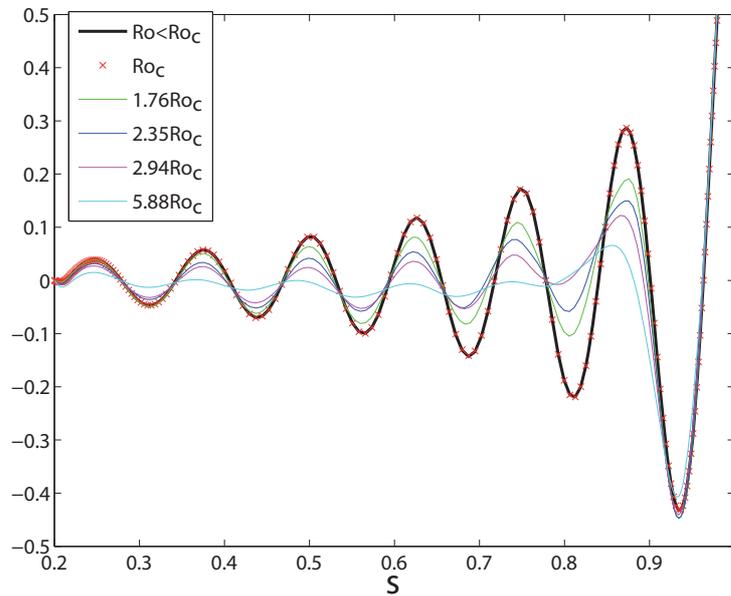
The shear instability takes the form of an  $m = 2$  oscillation in the azimuthal direction (figure 8.17). It is a single wave propagating progradely in the  $\phi$ -direction with the same frequency over the shell. It is nearly  $z$ -invariant. The maxima of the non-zonal vorticity are located on each side of the prograde jet. The characteristics of this wave are similar to the Rossby wave obtained with the profile J. We calculate its frequency to deduce  $s_c$  using the dispersion relation of the Rossby wave (8.6) and assuming that  $k_s \approx m/s$ . For  $E = 10^{-5}$  and  $E = 5 \times 10^{-6}$  we found  $s_c = 0.53$ , that is on the outward side of the positive peak of the zonal flow (located at  $s = 0.36$ ) (see figure 8.11(b)). For  $E = 10^{-5}$  ( $E = 5 \times 10^{-6}$ ), the numerical critical Rossby number is  $Ro_c = 0.0335$  ( $Ro_c = 0.0323$  resp.). Using the instability criterion (8.9) with the geostrophic profile in the equatorial plane we obtain  $Ro_c^g = 0.026$ . The maximum of the gradient of vorticity  $\partial_s \zeta$  is located at  $s = 0.308$ . The numerics gives a slightly larger critical radius compared to the theoretical prediction.

## 8.7 Magnetic field generation

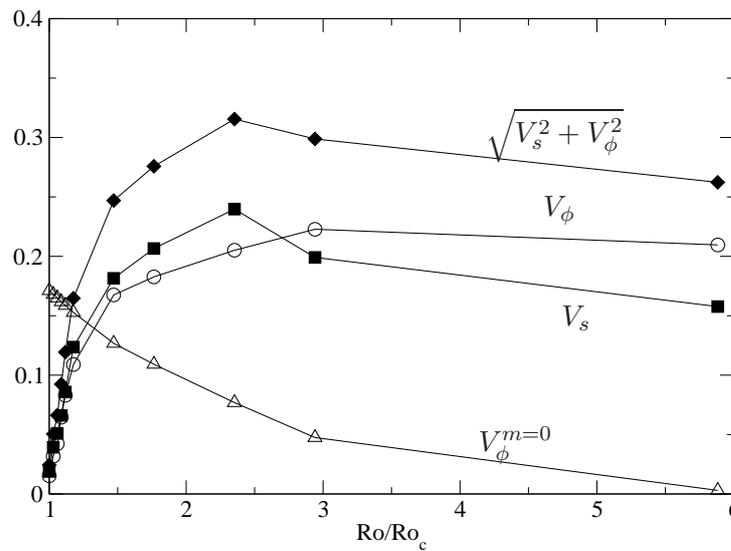
The non-axisymmetric motions are of prime importance for the dynamo mechanism as a purely toroidal flow cannot generate a self-sustained magnetic field. We note that some poloidal flow is present when  $Ro < Ro_c$  as a weak meridional circulation is created by the Ekman pumping. However this motions are weak at small Ekman numbers so we do not expect to find dynamos in the regime  $Ro < Ro_c$ . The Rossby waves however produce helical motions that are known to be efficient in the dynamo process.

### 8.7.1 Profile J

We have performed dynamo simulations for  $Ro = 1.17 - 1.76Ro_c$  and  $E = 5 \times 10^{-6}$ . We find that the dynamo threshold occurs at a high value of the



(a)



(b)

Figure 8.16: (a) Time-averaged zonal velocity in the equatorial plane for  $E = 5 \times 10^{-6}$  and different forcings. (b) Amplitude of the non-axisymmetric radial velocity  $V_s$  (squares), the non-axisymmetric azimuthal velocity  $V_\phi$  (circles), the amplitude of non-axisymmetric velocity  $(V_s^2 + V_\phi^2)^{1/2}$  (diamonds) and the zonal velocity at the critical radius of the first Rossby wave  $s = 0.75$  (triangles). All velocities were measured in the equatorial plane in the units of  $U_0$ . The amplitude of the non-axisymmetric velocity corresponds to the maximum in a snapshot, whereas the zonal velocity amplitude has been averaged in time.

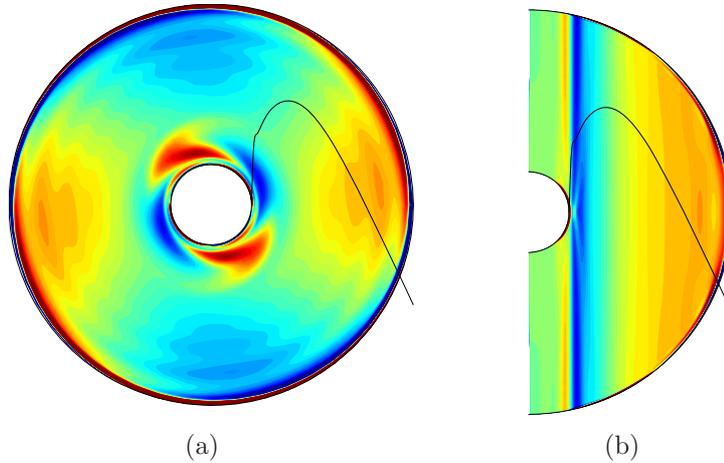


Figure 8.17: Non-zonal axial vorticity (a) in the equatorial plane and (b) in a meridional slice for the profile N at  $E = 5 \times 10^{-6}$  and  $Ro = 1.01Ro_c$  (blue: negative and red: positive). The black line represents the zonal velocity in the equatorial plane.

magnetic Prandtl number,  $Pm_c \approx 5$ . In our calculations, the critical magnetic Reynolds number (defined via the forcing velocity) required for dynamo action is  $Rm_c \approx 20000$ . However, the local magnetic Reynolds number is  $Rm^l = V_s Rm$  where  $V_s \approx 0.1U_0$ . Thus  $Rm_c^l$  is about 2000, roughly 40 times larger than the magnetic Reynolds number needed for dynamo action with a convective forcing (Christensen & Aubert, 2006). For a given forcing, we perform simulations just above the critical magnetic Prandtl number,  $Pm_c$ , and up to  $2Pm_c$ .

We find that the self-sustained magnetic field has dipolar symmetry (*i.e.* the poloidal coefficients for which  $l + m$  is odd are largest) and is mainly an axial dipole (figure 8.18(a)). The magnetic field is predominantly toroidal and axisymmetric (figure 8.19). The induction of the magnetic field is strongest in the region where the Rossby waves described in the previous section propagate.

No dynamo was found when the zonal flow is stable, that is, when  $Ro < Ro_c$ . The non-axisymmetry associated with the hydrodynamic shear instability is a crucial element for the dynamo process: the stable zonal flow cannot sustain a magnetic field by itself (Guervilly & Cardin, 2010).

These features of the magnetic field are quite similar to those observed in dynamos generated by a Stewartson layer (Schaeffer & Cardin, 2006). For a strong enough forcing, the Stewartson layer is unstable and non-axisymmetric instabilities appear in the form of Rossby waves. Schaeffer & Cardin (2006)

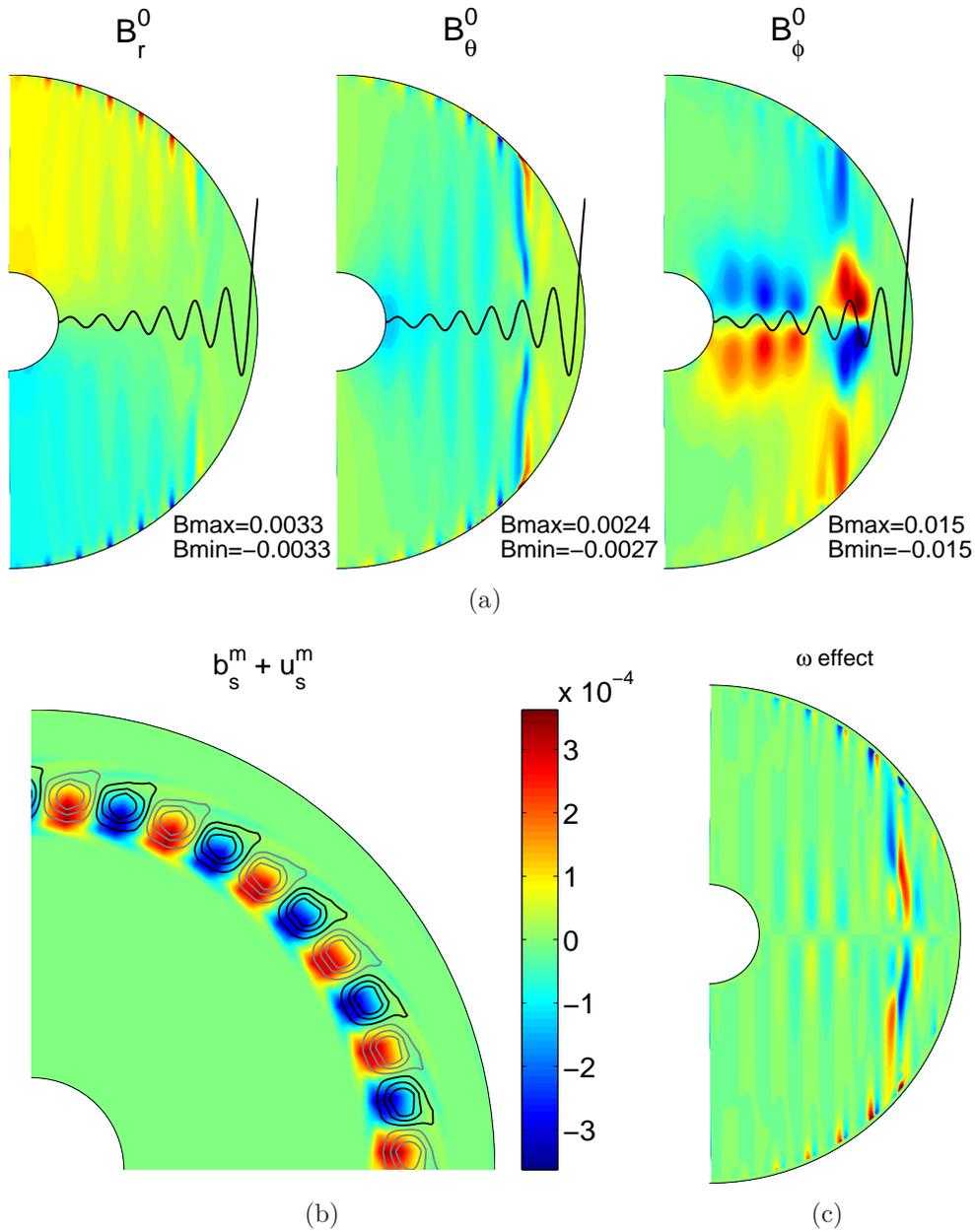


Figure 8.18: Magnetic field and dynamo generation for Profile J. (a) Snapshot of the spherical components of the axisymmetric magnetic field in a meridional plane. The black line represents the zonal flow in the equatorial plane. (b) Non-axisymmetric radial field  $b_s$  (color) and non-axisymmetric radial velocity  $u_s$  (black lines: positive, and gray lines: negative) in a quarter of a plane a few degree of latitude above the equatorial plane (northern hemisphere). (c)  $\omega$  effect in the meridional plane in the bulk (outside the Ekman layers). The parameters of this simulation are  $E = 5 \times 10^{-6}$ ,  $Ro = 1.17Ro_c$  and  $Pm = 5 \approx Pm_c$ .

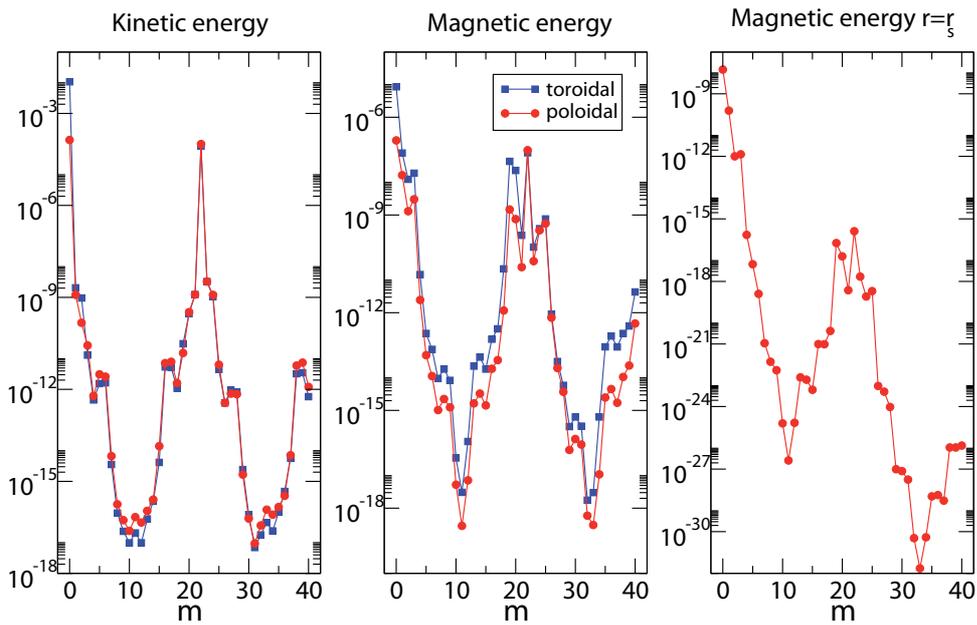


Figure 8.19: Kinetic and magnetic energy spectra for each azimuthal mode averaged over the volume of the spherical shell (left and middle) and magnetic energy spectrum at the surface of the planet  $r_s = 1.25r_o$  (right) for the profile J. The poloidal magnetic field at  $r = r_s$  is calculated assuming the region between  $r_o$  and  $r_s$  is electrically insulating. These spectra are taken at a particular instant and have not been time-averaged. Same parameters than figure 8.18.

show that the propagative feature of the waves is a key ingredient for the dynamo effect: time-stepping the magnetic induction equation using a steady flow taken either from a snapshot or a time-average leads to the decay of the magnetic field. The same experiment in our numerical simulations with the profile  $J$  yields the same result. In their numerical quasi-geostrophic simulations, Schaeffer & Cardin characterise the dynamo process as an  $\alpha\omega$  mechanism. In mean field theory, the  $\alpha$  effect (Parker effect) requires that the flow possess some helicity, the correlation between fluid velocity and vorticity,  $H = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}$  (*e.g.* Moffatt, 1978). In the case of flows displaying a columnar structure aligned with the axis of rotation, such as Rossby waves or convection columns (Olson *et al.*, 1999), the helicity is produced mainly by the term  $u_z\omega_z$ . In nearly  $z$ -invariant flow, the axial ( $z$ ) velocity is mostly due to two terms: the slope effect and the Ekman pumping. The slope effect comes from the combination of mass conservation and impenetrable boundaries: a (cylindrical) radial displacement creates an axial displacement  $u_z \sim z\beta u_s$  with  $\beta = 1/h(dh/ds)$ . In the limit of rapid rotation in a spherical container, this contribution is much larger (of order 1) than the Ekman pumping ( $u_z \sim E^{1/2}\omega_z$ ). However, the axial velocity produced by the slope effect is anti-correlated with  $\omega_z$ , and so does not allow the production of helicity. Schaeffer (2004) develops a simplified analytical model of the MHD equations using a shear flow as background velocity plus wave-like velocity perturbation to seek the magnetic growing modes. He shows that the small-scale marginally stable magnetic field  $b_s^m$  ( $b_z^m$ ) generated from the interaction of the axisymmetric toroidal field  $B_T^0$  and the non-zonal velocity ( $u_s^m$  and  $u_z^m$ ) is in phase with  $u_s^m$  (resp.  $u_z^m$ ) through the relation:

$$b_s^m \sim -\frac{u_s^m}{c} B_T^0, \quad (8.12)$$

where  $c$  is the phase speed of the wave. Here “small-scale” refers to the size of the wave ( $m$  stands for its wavenumber). This relation becomes exact in the limit of small magnetic diffusivity. A growing axisymmetric poloidal field  $B_P^0$  is generated by the interaction between  $b^m$  and  $u^m$  (through the term  $\overline{u_z^m b_s^m - u_s^m b_z^m}$ ). In the presence of non-zero magnetic diffusion this term is non zero. In a local approximation (neglecting the curvature term and the radial variation), Schaeffer found that

$$B_{P_s}^0 \sim -i\beta \left(\frac{u_s}{c}\right)^2 B_T^0. \quad (8.13)$$

Here the slope of the container explicitly enters through  $\beta$ . We refer to this mechanism as the “wave propagation dynamo process”. If the non-axisymmetric flow is not propagating,  $b_s^m$  ( $b_z^m$ ) displays a phase shift of  $\pi/2$

with respect to  $u_s^m$  ( $u_z^m$ ), and so  $B_p^0 = 0$ . A system in which no propagation occurs, and which is unable to produce  $u_z$  by another mechanism, such as buoyancy, will rely on Ekman pumping to create axial velocity with the proper phase shift (Busse, 1975). However, in the limit of small Ekman number, the Ekman pumping vanishes and the dynamo threshold should become infinitely high.

In our simulations, we observe the correlation of  $b_{s,z}^m$  and  $u_{s,z}^m$  (figure 8.18(b)).  $b_s^m$  and  $u_s^m$  have the same sign since  $B_\phi^0 > 0$  in the northern hemisphere (figure 8.18(a)) and so  $B_T^0 < 0$  ( $B_\phi^0 = -\partial_\theta B_T^0$ ) (relation (8.12)).

The last stage of the dynamo mechanism is the generation of the axisymmetric toroidal field. It can either be produced from a macroscopic  $\alpha$  effect or an  $\omega$  effect, that is the shearing of  $B_p^0$  by the steady zonal flow  $U$ . Schaeffer & Cardin (2006) find that the macroscopic  $\alpha$  effect is quite weak in their numerical model compared with the  $\omega$  effect from the Stewartson layer. The zonal shear produced in the Stewartson layer is stronger than the shear we obtained with the profile J, so it is not clear that the  $\omega$  effect is more important in our model *prima facie*. In  $\alpha^2$  dynamos, both toroidal and poloidal components are of same order of magnitude (Olson *et al.*, 1999). Here, the strong toroidal magnetic field (figure 8.19) suggests that the  $\omega$  effect is more important. To confirm this hypothesis, we plot on figure 8.18(c) the term  $r B_r^0 \partial_r (r^{-1} U) + r^{-1} \sin \theta B_\theta^0 \partial_\theta (\sin \theta^{-1} U)$  responsible for the  $\omega$  effect in the azimuthal component of the magnetic induction equation (Gubbins & Roberts, 1987). The correlation of sign and location of this term with the axisymmetric azimuthal field shows that it is mainly generated by the  $\omega$  effect.

In both this study and that of Schaeffer & Cardin (2006), it appears that the Rossby wave propagation is a key ingredient to produce a self-sustained magnetic field. The dynamo field produced with this mechanism requires high magnetic Reynolds numbers ( $Rm^l > 1000$ ). However, in the limit of small Ekman numbers, this type of dynamos will keep a finite (constant according to the results of Schaeffer & Cardin (2006)) value of the critical magnetic Reynolds number, whereas dynamos relying on Ekman pumping should occur at a threshold that becomes infinitely high.

In all the simulations performed, no inversions of polarity of the axial dipole have been observed. The tilt of the dipole is rather weak, at most  $2^\circ$  from the rotation axis (figure 8.20). We found a secular variation of the dipole axis (about  $1^\circ$  every 1000 rotation periods). Note that our simulations are performed for dynamos slightly critical and their variations may increase for higher  $Pm$ .

The magnetic spectra of the radial magnetic field at a radius  $r_s = 1.25r_o$  is plotted on figure 8.19. At the surface of our modelled planet, the magnetic field is strongly dominated by the axial dipole and the  $m = 0$  mode (about

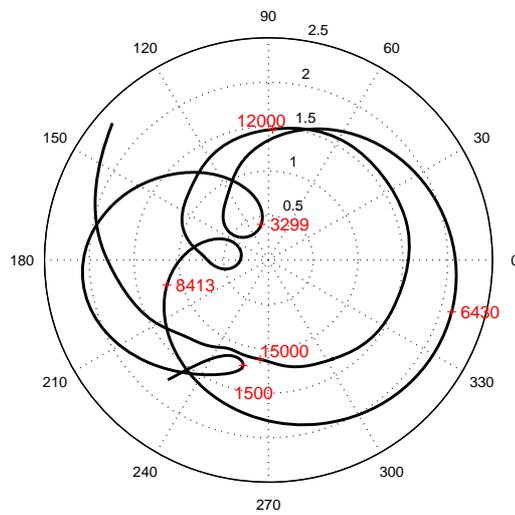


Figure 8.20: Drift of the dipole axis with time in a polar representation. The tilt of the dipole axis  $\lambda$  is calculated with the formula  $\lambda = \tan^{-1} [((g_1^1)^2 + (h_1^1)^2)^{1/2} / g_1^0]$  with  $g_m^l$  and  $h_m^l$  the Gauss coefficient of degree  $l$  and order  $m$ . The longitude of the dipole axis is  $\beta = \tan^{-1} (-h_1^1 / g_1^1)$ . On the polar representation, the tilt is the distance to the  $(0, 0)$  point (in  $^\circ$ ). The red annotations indicate the time in rotation periods. Same parameters than figure 8.18.

99% of the total energy). The wavenumber of the Rossby wave still has a visible signature on the magnetic field at  $r = r_s$ . However its amplitude is weak at this radius, about 8 orders of magnitude smaller than the magnetic energy of the axisymmetric mode. The toroidal magnetic field does not emerge from the conducting region. The structures of the poloidal magnetic field with wavelengths larger than the gap  $r_s - r_o$  are still visible at the surface of the planet. In the case of Jupiter,  $(r_s - r_o)/r_s \approx 0.2$ , so the magnetic field structures up to  $m = 30$  may appear at  $r = r_s$ .

Just above the dynamo threshold ( $Pm_c < Pm < 2Pm_c$ ), the magnetic field is weak: the magnetic energy is only about 0.1% of the kinetic energy. The magnetic field does not act strongly on the flow, except to produce its own saturation. A comparison between the zonal flow in the non-magnetic case and in the presence of the dynamo magnetic field does not reveal any significant differences. Further away from the dynamo threshold, either at higher magnetic Prandtl number ( $Pm = 2Pm_c = 10$ ) or stronger forcing ( $Ro = 1.76Ro_c$ ), the magnetic field is stronger and has a greater feedback on the flow. The magnetic field structure is more complex in this case, but remains mainly axisymmetric with a strong toroidal component. The axial dipole is still the dominant poloidal component.

### 8.7.2 Profile N

We performed simulations at  $Ro = 1.12 - 1.5Ro_c$  and  $E = 10^{-5}$ . We find the dynamo threshold at  $Pm_c \approx 1$ , that is, the critical magnetic Reynolds number is  $Rm_c \approx 4000$ .

The self-sustained magnetic field displays an equatorial symmetry (figure 8.21(a)), *i.e.*

$$(B_r, B_\theta, B_\phi)(r, \pi - \theta, \phi) = (B_r, -B_\theta, B_\phi)(r, \theta, \phi).$$

The axisymmetric toroidal field is the strongest component whereas the poloidal field is not dominated by  $m = 0$  but its  $m = 2$  component (figure 8.22).

On figure 8.21(b) we plot the non-axisymmetric (cylindrical) radial magnetic field ( $b_s^m$ ) together with the non-zonal radial velocity ( $u_s^m$ ).  $b_s^m$  is positive (negative) in the cyclonic (resp. anticyclonic) vortices. Despite the propagation of the wave,  $b_s^m$  and  $u_s^m$  are out-of-phase. This observation suggests that the size of the wave (here  $m = 2$ ) may be of importance in the wave propagation dynamo process. In particular, the speed of the Rossby wave increases when its size decreases:  $c = \omega_{rw}/(m/s) \approx \Omega\beta/(m/s)^2$ . For Rossby

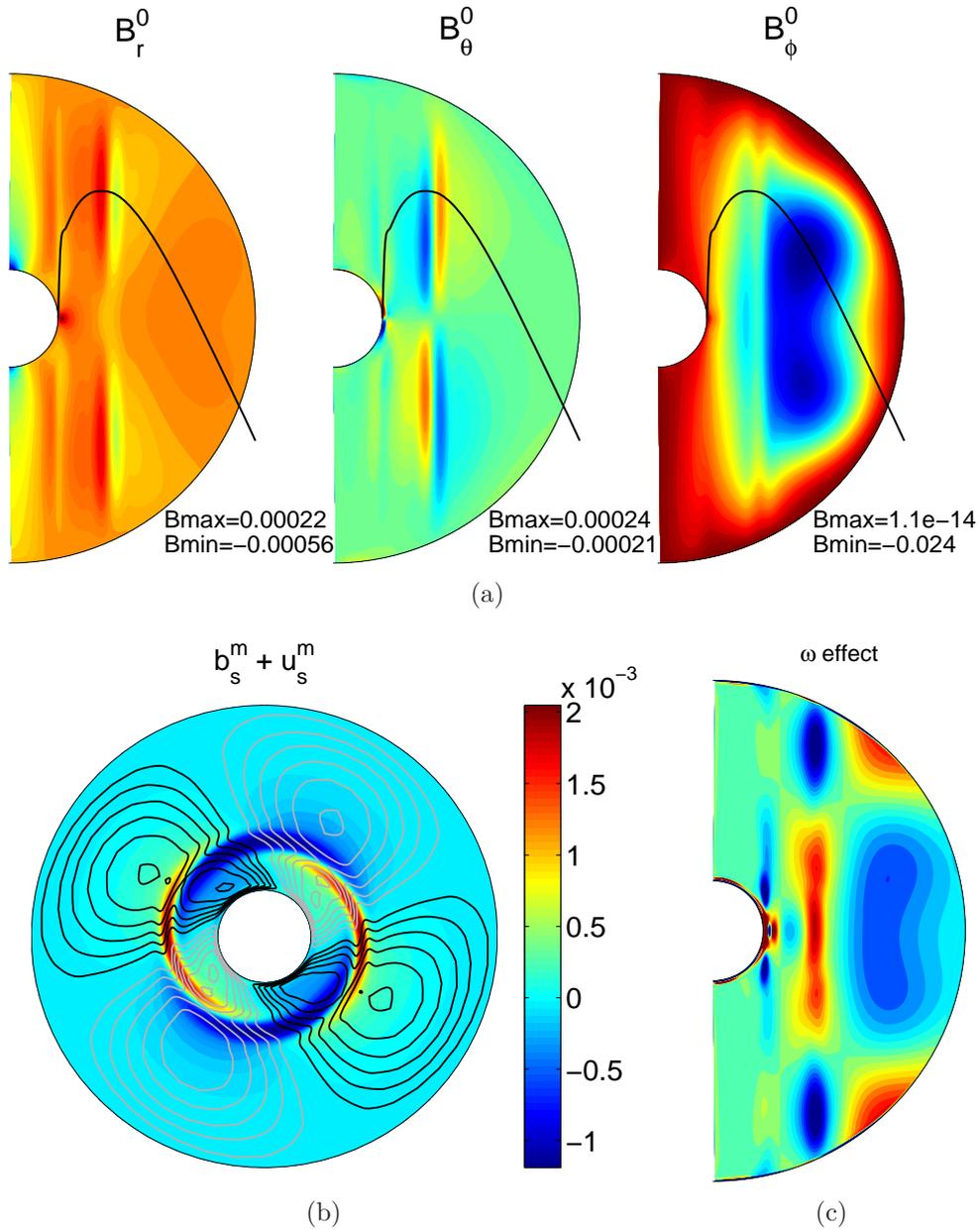


Figure 8.21: Same as figure 8.18 but for profile N. The parameters of this simulation are  $E = 10^{-5}$ ,  $Ro = 1.12Ro_c$  and  $Pm = 2 \approx 2Pm_c$ .

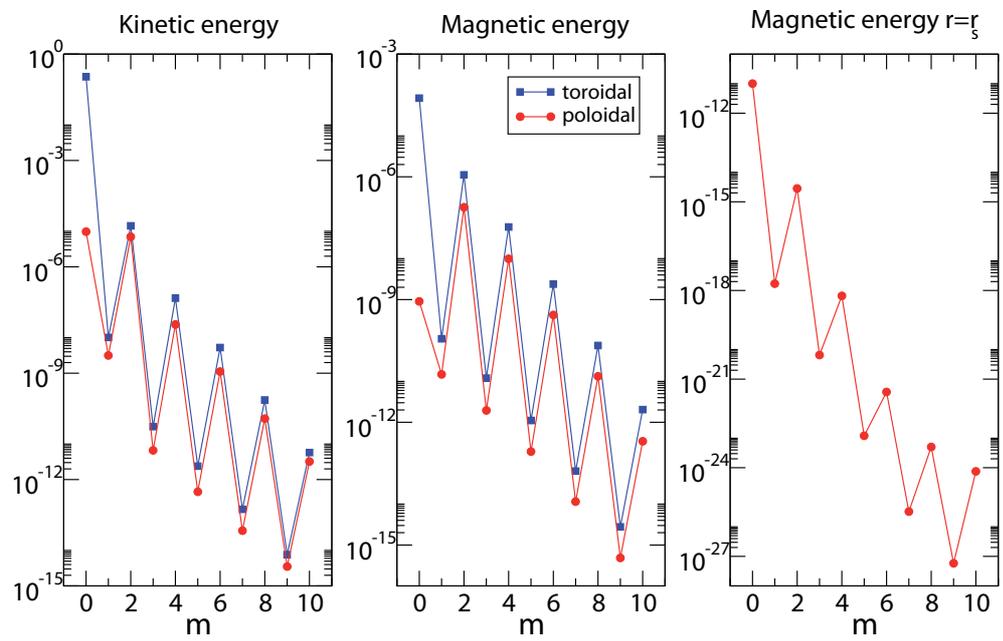


Figure 8.22: Same as figure 8.19, but for profile N. The magnetic energy spectrum on the right is calculated at  $r_s = 1.18r_o$ . Same parameters than figure 8.21.

waves, the relation (8.12) can be written as :

$$b_s^m \sim -\frac{u_s^m}{\Omega\beta} \left(\frac{m}{s}\right)^2 B_T^0. \quad (8.14)$$

$b_s^m$  varies as the square of  $m$ . Keeping  $\Omega$ ,  $s$ ,  $B_T^0$  and  $u_s^m$  constant, this relation shows that a fast propagating  $m = 2$  wave creates about 100 times less  $b_s^m$  than a slow propagating  $m = 22$  wave. Physically, the relation (8.12) corresponds to the induction process of  $b_s^m$  occurring approximately on the same timescale as the propagation of the wave  $\tau_{rw} = 1/\omega_{rw}$ . The typical timescale of induction of  $b_s^m$  is  $\tau_b \sim s|b_s^m|/(m|u_s^m||B_T^0|)$ . If  $\tau_b \sim \tau_{rw}$  we indeed recover  $|b_s^m| \sim |B_T^0||u_s^m|/|c|$ . If the wave is too fast, the induction time is too short to produce a significant amplitude of  $b_s^m$ . This simple argument may explain why we do not observe the superposition of  $b_s^m$  and  $u_s^m$ :  $b_s^m$  produced by the wave propagation dynamo process is too small and overshadowed by another source. This has important consequences for the topology of the self-sustained magnetic field. For Rossby waves, the relation (8.13) becomes

$$B_{P_s}^0 \sim -i\frac{u_s^{m2}}{\Omega^2\beta} \frac{m^4}{s^4} B_T^0, \quad (8.15)$$

and so the small  $m$  Rossby waves create only a weak axisymmetric poloidal field by the wave propagation dynamo process. In that case, the generation of  $B_p^0$  relies on Ekman pumping to create the appropriate  $u_z^m$  to obtain non zero helicity. The Ekman pumping is small for  $E = 10^{-5}$  with the profile N (compare the weak difference between geostrophic and actual zonal flow on figure 8.11(b)) and a weak  $B_p^0$  is generated.  $B_p^0$  displays the same equatorial symmetry as  $b_s^m$ , and is also dominated by its axial quadrupole component.

We have repeated the experiment of keeping the flow steady by using a snapshot of the velocity field taken at an arbitrary time. As for the profile J, we found that the dynamo ceases. We conclude that the propagation of the wave is also an important ingredient for the production of field components other than  $B_p^0$ .

To determine the role of the  $\omega$  effect in the generation of the axisymmetric toroidal magnetic field, we plot the term  $rB_r^0\partial_r(r^{-1}U) + r^{-1}\sin\theta B_\theta^0\partial_\theta(\sin\theta^{-1}U)$  on figure 8.21(c). The outer part of the jet ( $s > 0.5$ ) is retrograde and creates a negative  $\omega$  effect whose sign and location correlate with the axisymmetric azimuthal field, implying that the main dynamo process in the outer region is indeed the  $\omega$  effect. However,  $B_\phi^0$  and the  $\omega$  effect are anti-correlated in the inner region ( $s < 0.5$ ) so another dynamo process such as a macroscopic  $\alpha$  effect must be at work there.

Whereas the fluid shell is dominated by the  $m = 2$  poloidal field, the  $m = 0$

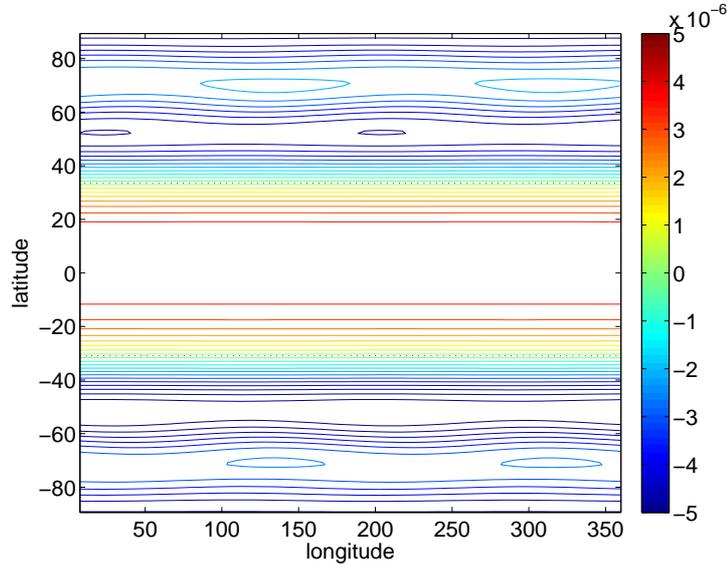


Figure 8.23: Map of the radial magnetic field at  $r = r_s$ . The dotted black lines represent the level  $B_r(r_s) = 0$ . Same parameters than figure 8.21.

component appears as the strongest at the planet surface (figure 8.22). On figure 8.23, we plot a map of the radial magnetic field at the surface, at  $r = r_s$ . The axisymmetry and the axial quadrupole is the most noticeable feature but the  $m = 2$  azimuthal modulation is visible at high latitudes.

## 8.8 Conclusion

In our hydrodynamical simulations, we found that the destabilisation of the zonal flow takes the form of a global (large radial extension) Rossby mode even if the shear instability is local. The wavenumber depends both on the width of the jets and the critical radius of the instability, and is independent of the viscosity and rotation rate provided the former is sufficiently small.

In the supercritical regime, several Rossby waves appear and saturate the amplitude of the zonal flow in the bulk of the fluid. The damping of the amplitude eventually yields the widening of the jets. We observe this phenomenon for relatively small supercritical forcing ( $Ro = 5.88Ro_c$ ).

In the limit of small Ekman number, we found that the Rossby wave appears for  $Ro_c \approx 0.001$  for a Jupiter-like zonal wind profile (profile J) and  $Ro_c \approx 0.02$  for a Neptune-like profile (profile N). The non-axisymmetric motions are necessary for dynamo action to occur, and as soon as they are present we have been able to calculate a dynamo threshold. We conclude

that a forcing equivalent to  $Ro_c$  is necessary to obtain a self-sustain magnetic field. For Jupiter, the amplitude of the zonal wind at  $r_o$ ,  $U_0$ , is about  $100\text{ms}^{-1}$  assuming geostrophic velocity for  $r_s > r > r_o$  (figure 8.8). Using  $r_o = 0.8r_s = 56,000\text{km}$  and  $\Omega = 1.8 \times 10^{-4}\text{s}^{-1}$ ,  $Ro = U_0/(r_o\Omega) \approx 0.01$ , about 10 times larger than the instability threshold  $Ro_c$ . For Neptune, using  $U_0 = 200\text{ms}^{-1}$  (figure 8.9),  $r_o = 0.85r_s = 21,000\text{km}$  and  $\Omega = 1.08 \times 10^{-4}\text{s}^{-1}$ ,  $Ro \approx 0.09$ , about 4 times greater than  $Ro_c$ .

Given the Reynolds number used, the magnetic Prandtl number is of order 1, much larger than the estimated value for the giant planet conducting regions. The critical magnetic Reynolds number  $Rm_c = Pm_c E^{-1} Ro_c$  is about 20000 for the profile J and 4000 for the profile N. If  $Rm_c$  remains constant as the Ekman number is decreased then for  $E \sim 10^{-16}$ , the estimated value of the Ekman number for Jupiter's conducting layer (Guillot *et al.*, 2004),  $Pm_c$  should be at least  $10^{-9}$  (using  $Rm_c = 20000$  and  $Ro_c = 0.001$ ) to consider the dynamo mechanism described in this paper as plausible for the gas giants.  $Pm$  is estimated to be  $10^{-6}$  in the metallic hydrogen, about 3 orders of magnitude larger than  $Pm_c$ . For Neptune, using  $E \sim 10^{-13}$  (Stevenson, 1983), we found that  $Pm_c$  should be at least  $10^{-8}$  (with  $Rm_c = 4000$  and  $Ro_c = 0.02$ ) which is about the value estimated for an electrolytic mixture of appropriate composition for the ice giants. We conclude that both the forcing required for hydrodynamical instabilities ( $Ro$ ) and the conductivity needed to produce enough magnetic induction ( $Pm$ ) are large enough in Jupiter and Neptune to consider the differential rotation imposed by the zonal winds at the surface of the conducting regions as a plausible candidate for the dynamo mechanism that generates their magnetic fields. However, given the assumptions used in our model, such as incompressibility, constant conductivity and geostrophic zonal velocity within the molecular layer and also the range of parameters used ( $E \sim \mathcal{O}(10^{-6})$  and  $Pm \sim \nu(1)$ ), we cannot state definitely that this dynamo mechanism will persist in the planetary physical conditions. Nevertheless, the robust nature of Rossby waves suggests that the dynamo may persist in the asymptotic limit of small Ekman numbers.

Close to the dynamo threshold, the magnetic field inherits the signature of the mode of the Rossby wave. For the profile J when using a linear approach in the non-magnetic computations, we find  $m_c = 13$  for the innermost prograde jet at the smallest Ekman numbers investigated. At the planet surface, the  $m = 13$  mode is weak compared with the amplitude of the  $m = 0$  magnetic component but, in principle could still be detected since its lengthscale is greater than the thickness  $r_s - r_o$ . With the profile N, the  $m = 2$  magnetic component is more easily visible. This mode is dominant for the poloidal field within the fluid but, at  $r = r_s$  the  $m = 0$  component is stronger.

For the profile J, we obtain small scale Rossby waves that propagate slowly

enough to allow the generation of a strong axisymmetric poloidal field by the wave propagation dynamo process. For the profile N, the large scale Rossby waves propagate too fast to allow this mechanism to be efficient, and thus the axisymmetric poloidal magnetic field is weak in the fluid shell. Therefore the width of the zonal jets has an important influence on the topology of the magnetic field by controlling the size of the Rossby waves. The propagation of the Rossby waves is necessary for dynamo action for both profiles.

The critical magnetic Reynolds number is large for both profiles. The profile N creates a flow with a significantly lower dynamo onset than the profile J. Possibly the stronger shear of the zonal flow of the profile N accounts for this difference.

For the profile J, we obtain a secular variation of the dipole tilt of about  $1^\circ$  in 3 years. On Jupiter, the dipole axis tilt measured with the *Pioneer* and *Voyager* data compared with the *Galileo* measurements show a secular variation of  $0.5^\circ$  in 20 years (Russell *et al.*, 2001). However because of observational uncertainties associated with the earlier measurements, this value may be inaccurate. Given the wandering of the pole position obtained in our simulations, more than two measurements would be necessary to reliably compare our results to observation data.

In this work we have not taken into account the convective motions. Wicht *et al.* (2002) studied the linear stability of an imposed zonal flow in a spherical shell modelling the molecular hydrogen layer of Jupiter. They found that the critical Rossby number of the shear instability onset is almost independent of the Rayleigh number, which measures the strength of the convection. They concluded that the shear instability is only weakly modified by the presence of convection. On the other hand, they showed that the convection onset is strongly influenced by the presence of the zonal circulation, with the convection either enhanced or damped depending on the direction of the shear. However, their study is linear, and so the results cannot be extrapolated beyond the weakly non linear regime of convection. Whether or not our results apply in the presence of convection is a subject for future studies.

# Quatrième partie

## Conclusion



# Chapitre 9

## Discussion

L'étude sur la convection quasi-géostrophique et celle sur les écoulements en cisaillement étaient au départ découplées. Cependant les phénomènes physiques décrits se sont avérés similaires ou complémentaires.

La relative simplicité de la dynamique de l'écoulement en cisaillement permet de bien visualiser les phénomènes ondulatoires et d'identifier leur importance dans l'effet dynamo. La convection en régime turbulent et en rotation rapide met en œuvre des écoulements plus complexes où il est difficile de distinguer les mouvements propagatifs ou advectifs. L'effet dynamo est tout aussi complexe et difficile à interpréter par des mécanismes simples. L'utilisation de petits nombres d'Ekman permet cependant de séparer les différentes échelles de l'écoulement et de différencier les modes de déplacement des structures en fonction de leur taille. Mon travail sur les dynamos convectives quasi-géostrophiques est à l'heure actuelle incomplet et le rôle joué par les différentes échelles reste à déterminer.

Dans cette discussion, je vais relier les résultats obtenus dans les deux études : (i) la convection quasi-géostrophique et l'effet dynamo qu'elle produit présentée dans la partie II (dans la suite, par brièveté, étude convective) et (ii) l'écoulement produit par rotation différentielle (principalement avec la variation en latitude) avec ou sans champ magnétique décrit dans la partie III (écoulement en cisaillement).

Je m'intéresse ici à des phénomènes qui me paraissent essentiels pour la modélisation de la dynamique des noyaux planétaires : le mouvement zonal et les ondes de Rossby. Le but de cette discussion est de déterminer comment les résultats de ces deux études peuvent se nourrir les uns des autres. Certaines des idées présentées ici restent spéculatives.

## 9.1 Écoulement zonal : déstabilisation, saturation et taille

On a étudié la déstabilisation de la circulation zonale d'un écoulement en rotation différentielle (chapitre 8). Une trop grande amplitude du gradient de la vorticité du mouvement zonal conduit à une instabilité barotropique de cet écoulement et l'apparition d'ondes de Rossby. Les jets zonaux obtenus dans l'écoulement convectif sont-ils stables d'après le critère de l'instabilité barotropique ?

D'après les dimensions choisies pour le problème convectif, le critère d'instabilité de l'écoulement  $\overline{u_\phi}$  statue que la quantité

$$\Delta^* = 2\beta - E \frac{d}{ds} \left( \frac{d\overline{u_\phi}}{ds} + \frac{\overline{u_\phi}}{s} \right)$$

doit changer de signe.

Pour les simulations convectives au plus grand forçage modélisé pour différents nombres d'Ekman,  $E = [10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}]$  et nombres de Prandtl,  $P = [0.1, 0.01]$ , j'ai calculé la quantité  $\Delta^*$ . La conclusion est que le profil de  $\overline{u_\phi}$  est toujours stable dans nos écoulements convectifs.

Au delà du seuil d'instabilité dans l'écoulement en cisaillement, les ondes de Rossby "érodent" l'amplitude des jets zonaux puisqu'elles extraient l'énergie zonale pour alimenter les mouvements radiaux et azimutaux non-axisymétriques. L'affaiblissement des jets est d'autant plus fort que le forçage mécanique est grand. Au final, on observe un épaississement de la taille radiale des jets.

En forçage convectif, la saturation de l'amplitude du mouvement zonal est assurée par la dissipation aux bords. Une augmentation du forçage conduit également à un élargissement de l'épaisseur des jets.

En convection développée, lorsque la friction d'Ekman est très faible, telle qu'en condition de glissement libre aux bords, l'amplitude de l'écoulement zonal doit devenir très grande pour que la viscosité en volume puisse effectuer un freinage efficace. Qu'est ce qui prévient alors le mouvement zonal de devenir infini lorsque  $E \rightarrow 0$ ? Deux mécanismes permettent de saturer l'amplitude du mouvement zonal : (i) l'épuisement du réservoir de vorticité planétaire dans le cas d'un mélange de vorticité potentielle parfait ou (ii) la déstabilisation des jets et l'apparition d'ondes de Rossby. Le réservoir de vorticité planétaire étant très important pour une sphère, il est possible que la déstabilisation de l'écoulement zonal se produise avant que la vorticité potentielle soit complètement homogénéisée.

## 9.2 Importance des ondes de Rossby dans l'effet dynamo

J'ai obtenu des dynamos alimentées par différents types de forçage en rotation rapide à grands nombres de Reynolds magnétique. La présence des ondes de Rossby et de l'écoulement zonal est une caractéristique de ces systèmes. L'idée que la propagation d'ondes est primordiale dans les dynamos générées dans une couche de fluide cisailée en rotation n'est pas nouvelle. En revanche, dans la littérature sur les dynamos convectives en régime turbulent, l'aspect ondulatoire n'est pas présenté comme essentiel, à ma connaissance tout du moins. Il est vrai que la discrimination entre modes propagatifs et advectifs est ardue dans la zone de convection vigoureuse. Par analogie avec les résultats de l'écoulement en cisaillement, on va chercher à déterminer quel pourrait être le rôle joué par les ondes de Rossby dans les dynamo convectives.

Les observations faites sur les modélisations de l'écoulement en cisaillement sont

1. Avec un profil type Jupiter, les ondes de Rossby sont de petites tailles ( $m = 22$ ). On obtient un champ poloïdal principalement dipolaire axial.
2. Les dynamos générées avec un profil type Neptune ont un faible champ poloïdal  $m = 0$  et le mode dominant poloïdal est le même que celui de l'écoulement non-axisymétrique ( $m = 2$ ).

Pour interpréter ces résultats numériques, on a proposé un raisonnement basé sur la taille des ondes de Rossby. L'induction magnétique par le mécanisme dynamo d'ondes propagatives proposé par Schaeffer (2004) produit un champ magnétique poloïdal axisymétrique  $B_p^0 \propto m^4$  dans le cas d'ondes de Rossby. Les ondes de Rossby de grand nombre d'onde produisent donc peu de  $B_p^0$  par ce mécanisme. En l'absence d'ondes propagatives, si aucune source, telle que des contrastes de température ou une force magnétique, ne produit d'hélicité alors la production d'hélicité repose sur le pompage d'Ekman. Celui-ci étant relativement faible à petits nombres d'Ekman, peu de champ poloïdal axisymétrique est généré par cette seule contribution.

Peut-on appliquer ces idées aux résultats de l'écoulement convectif?

Dans les dynamos convectives obtenues à  $E = 10^{-7}$  et  $P = 0.01$ , le champ poloïdal possède une partie axisymétrique décroissante et adopte l'échelle des tourbillons les plus énergétiques ( $m = 8$ , l'épaisseur radiale des jets). Dans l'étude sans champ magnétique, on a déterminé que ces tourbillons étaient des ondes de Rossby. On remarque une similarité avec le champ poloïdal produit par l'écoulement en cisaillement de type Neptune. Le point commun entre ces écoulements est la présence de mouvements zonaux de grande amplitude et de large extension radiale et d'ondes de Rossby de grande taille.

On remarque que dans les deux cas, l'épaisseur des jets zonaux détermine la taille des ondes de Rossby (les plus énergétiques dans le cas convectif).

Dans les calculs de dynamos convectives, on peut se demander si des simulations impliquant de plus petits nombres d'Ekman ou de plus grands nombres de Prandtl à forçage modéré, produisant des structures propagatives de plus petites échelles, permettent de générer des champs poloïdaux ayant les mêmes caractéristiques que le champ produit par le profil type Jupiter du chapitre 8. Des calculs de dynamos à plus petits  $E$  et plus grand  $P$  ( $P = \mathcal{O}(0.1)$ ) devrait être en mesure de répondre à cette question. Cela pourrait permettre de reconcilier les résultats des modèles dynamos à petit  $E$  et les observations des champs magnétiques planétaires.

Avec les différents types de forçage, on a obtenu des dynamos à nombres de Reynolds magnétiques critiques supérieurs à 1000. Les écoulements combinant vent zonal et ondes de Rossby ont des seuils d'instabilité magnétique assez élevés. Le grand intérêt de ce type de dynamo est que, dans la limite  $E \rightarrow 0$ , ces dynamos sont viables contrairement aux dynamos qui nécessitent la présence du pompage d'Ekman.

Au cours des deux études, on a souligné le lien étroit entre mouvement zonal et ondes de Rossby. D'une part, la déstabilisation du mouvement zonal génère des ondes de Rossby qui agissent sur son amplitude et sa forme. D'autre part, le mécanisme de génération du vent zonal implique les ondes de Rossby ; la présence de jets d'extension radiale finie limite alors la taille des ondes.

# Chapitre 10

## Conclusions et perspectives

### 10.1 Résumé

L'utilisation d'un modèle quasi-géostrophique nous a permis de modéliser des écoulements convectifs turbulents ( $Re > 10^4$ ) sous une forte influence de la rotation ( $10^{-8} \leq E \leq 10^{-5}$ ) et pour des petits nombres de Prandtl  $P = 0.1 - 0.01$ . Une caractéristique robuste de ces écoulements est la présence d'une circulation zonale de grande amplitude stable dans le temps. Ce mouvement zonal a un impact très fort sur les structures de l'écoulement convectif par l'action du cisaillement. Il impose une contrainte sur la taille des tourbillons les plus énergétiques. La taille et l'amplitude du mouvement zonal sont contrôlées par le mélange de vorticité potentielle et la friction aux bords. Sur la base de cet argument, on a proposé une mise à l'échelle de l'épaisseur des jets liée au taux d'injection de l'énergie. Dans nos simulations, le mélange de vorticité potentielle n'est pas parfait pour  $10^{-8} \leq E \leq 10^{-6}$  et l'amplitude du vent zonal ne sature pas à une valeur constante. On a identifié la présence d'ondes de Rossby de grande taille dans la zone de convection vigoureuse.

Ces écoulements produisent des dynamos cinématiques au champ poloïdal de petite échelle et au champ toroïdal dominé par le mode axisymétrique. Les nombres de Reynolds magnétiques critiques sont de l'ordre de 1000 et  $Pm_c \sim 0.1$ . L'impact du vent thermique sur le seuil dynamo n'est pas significatif. Par analogie avec les études en cisaillement, on envisage un rôle important de la propagation des ondes de Rossby dans l'effet dynamo.

Les dynamos de Couette sphérique ont des nombres de Reynolds magnétiques critiques élevés. La brisure de symétrie axiale de l'écoulement par l'instabilité en cisaillement (prenant la forme d'une onde) est cruciale. Le champ magnétique toroïdal est de grande amplitude par rapport au champ

poloïdal confirmant le rôle de l'effet  $\omega$  dans le processus.

Au cours de l'étude sur la rotation différentielle produite par un mouvement zonal alternativement est-ouest, nous avons observé la déstabilisation des jets en ondes de Rossby qui provoquent un élargissement des jets et une diminution de leur amplitude. La perte de la dynamo pour un écoulement figé indique que le mécanisme dynamo est basé sur la propagation d'ondes de Rossby. On a relié l'amplitude du champ magnétique poloïdal axisymétrique à l'échelle des ondes de Rossby à travers leur vitesse de propagation. La taille des ondes de Rossby étant liée à l'épaisseur des jets, on a établi un lien entre production de champ poloïdal axisymétrique et épaisseur des jets zonaux. Les applications aux planètes géantes nous indiquent qu'un profil de vent zonal tel que celui mesuré à la surface de Jupiter produirait un fort champ poloïdal axisymétrique alors qu'il serait faible pour un profil tel que celui observé à la surface de Neptune.

## 10.2 Perspectives

Suite aux travaux effectués au cours de cette thèse, beaucoup de questions et d'idées pour de futures études ont surgi. Je présente ici quelques perspectives à court ou plus long terme.

L'intérieur des planètes géantes est probablement animé de mouvements de convection. Dans notre étude sur la stabilité des jets zonaux multiples imposés en surface, l'interaction avec la convection n'a pas été considérée. Comment ces vents zonaux, imposés en surface et de très grande amplitude, sont-ils affectés par la présence de l'écoulement convectif dont l'intensité est moindre ? Comment perturbent-ils les mouvements convectifs ? Quelles sont les conséquences sur le champ magnétique entretenu ?

Dans notre modélisation de la convection quasi-géostrophique à petits nombres de Prandtl, l'écoulement zonal géostrophique, bien que très stable dans le temps, subit néanmoins des fluctuations temporelles de son amplitude d'environ 20%. L'intensité des vitesses azimutales mesurées en surface de Jupiter présente également des variations mineures sur la période d'observation (Porco *et al.*, 2003). Une fluctuation temporelle de l'amplitude des jets imposés en surface peut être aisément réalisée dans notre modèle en cisaillement. Cette modification du forçage au cours du temps a-t-elle un impact sur les caractéristiques de la dynamo ? Observe-t-on une variation séculaire du champ magnétique en lien avec ces fluctuations ?

Plusieurs questions importantes restent en suspens pour la modélisation des noyaux planétaires à l'aide d'un modèle quasi-géostrophique. En particulier

quel est l'influence du mode de chauffage sur la dynamique et sur le champ magnétique entretenu? Comment peut-on implémenter un modèle hybride avec graine? Afin d'étudier la saturation du champ magnétique, la mise au point d'une paramétrisation de la force de Lorentz aux petites échelles diffusives est nécessaire.

On a mis en évidence que des nombres d'Ekman inférieurs à  $10^{-7}$  sont requis pour décrire le régime où le mouvement zonal géostrophique est produit par mélange de la vorticité potentielle d'un écoulement convectif. Des nombres d'Ekman aussi petits que  $10^{-8}$  sont encore hors de portée des modélisations numériques tridimensionnelles actuelles. La voie    suivre est alors peut être celle des expériences où de telles valeurs du nombre d'Ekman sont atteignables.

Dans nos modélisations quasi-géostrophiques d'écoulements convectifs    grands nombres de Reynolds, nous avons observé des spectres de l'énergie cinétique très raides (loi de puissance en  $k^{-5}$ ). Il s'agit de la seconde observation de ce comportement pour un modèle QG (Schaeffer, 2004). S'agit-il d'une caractéristique intrinsèque aux modèles QG? Les systèmes naturels ont-ils le même comportement? Des modélisations numériques tridimensionnelles dans les mêmes régimes dynamiques aideraient    répondre    ces questions.

Lors de la présentation des résultats des différents travaux de cette thèse, l'importance de l'aspect ondulatoire de l'écoulement dans le processus dynamo a été mis en avant. Le modèle analytique simplifié développé par Schaeffer (2004) nous a permis de comprendre le rôle joué par la taille des ondes de Rossby dans la production du champ magnétique poloïdal axisymétrique. De façon plus générale, le rôle joué par les ondes (omniprésentes dans la physique des fluides en rotation) dans le mécanisme dynamo pourrait être approfondi par le développement de modèles analytiques. On pourrait, par exemple, envisager une formulation semblable aux modèles de champ moyen qui ont permis des avancées considérables dans la compréhension de l'effet dynamo (Roberts, 1972).

Les résultats de l'expérience de Couette sphérique de College Park au Maryland, sont attendus prochainement. Nul doute que les observations expérimentales (que l'effet dynamo soit observé ou non) vont susciter un besoin de nouvelles modélisations numériques dans cette configuration sur des points spécifiques ou une plus large gamme de paramètres.



# Cinquième partie

## Annexes



# Annexe A

## Implémentation numérique du code de dynamos convectives hybrides

J'ai développé le code numérique de dynamos convectives quasi-géostrophiques (QG) à partir du code de dynamo QG de Nathanaël Schaeffer (Schaeffer, 2004) et du code PARODY écrit par Julien Aubert et Emmanuel Dormy (voir ACD dans Christensen *et al.*, 2001). Le code est écrit en Fortran 90 et parallélisé avec MPI ce qui lui permet d'être exécuté sur un grand nombre de processeurs ne partageant pas tous la même mémoire. J'utilise les transformées de Fourier et de Legendre de PARODY.

### A.1 Partie hydrodynamique

#### A.1.1 Mouvements non-axisymétriques

L'évolution des mouvements non-axisymétriques est donnée par l'équation de la vorticité axiale :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_z^0}{\partial t} + u_s^0 \frac{\partial \omega_z^0}{\partial s} + \frac{u_\phi^0}{s} \frac{\partial \omega_z^0}{\partial \phi} - \omega_z^0 \beta u_s^0 &= 2E^{-1} (\beta u_s^0 + E^{1/2} f(u_s^0, u_\phi^0, s)) \\ &= \nabla^2 \omega_z^0 - Ra \left\langle \frac{\partial \Theta}{\partial \phi} \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$f$  est la fonction du pompage d'Ekman que l'on va décrire dans la suite. On préfère résoudre l'équation pour la fonction courant  $\psi$  plutôt que pour  $\omega_z^0$  car celle-ci permet d'obtenir facilement les vitesses :

$$u_s^0 = \frac{1}{s} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \quad \text{et} \quad u_\phi^0 = -\frac{\partial \psi}{\partial s} - \beta \psi. \quad (\text{A.2})$$

La relation entre vorticité axiale et fonction courant est :

$$\omega_z^0 = -\nabla^2\psi - \beta \left( \frac{\partial\psi}{\partial s} + \frac{\psi}{s} \right) - \psi \frac{d\beta}{ds}. \quad (\text{A.3})$$

A partir de cette formule, on construit la matrice  $W$ ,

$$W = \left( -\nabla^2 - \beta \left( \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{s} \right) - \frac{d\beta}{ds} \right). \quad (\text{A.4})$$

L'équation que l'on va implémenter est finalement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W\psi}{\partial t} = & \nabla^2 W\psi + 2E^{-1} \left( \frac{\beta}{s} \frac{\partial\psi}{\partial\phi} + E^{1/2} f(u_s^0, u_\phi^0, s) \right) \\ & + \text{NL} - Ra \left\langle \frac{\partial\Theta}{\partial\phi} \right\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

avec

$$\text{NL} = -u_s^0 \frac{\partial\omega_z^0}{\partial s} - \frac{u_\phi^0}{s} \frac{\partial\omega_z^0}{\partial\phi} + \omega_z^0 \beta u_s^0. \quad (\text{A.6})$$

### Formule du pompage d'Ekman

Le pompage d'Ekman dans un récipient à bord penté (Greenspan, 1968) est

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\pm L} = -\frac{E^{1/2}}{2} \mathbf{n} \cdot \nabla \times \left( \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{u} \pm \mathbf{u}}{\sqrt{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z|}} \right), \quad (\text{A.7})$$

avec  $\mathbf{n}$  le vecteur normal à la paroi dirigé vers l'extérieur, soit dans le cas d'une sphère  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$ .

Pour un écoulement géostrophique, on obtient (pour le détail du calcul voir Schaeffer, 2004)

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\pm L} = & \frac{E^{1/2}}{2(1-s^2)^{1/4}} \left[ -\frac{5}{2} \frac{s}{1-s^2} u_s^0 - \frac{s}{2\sqrt{1-s^2}} u_\phi^0 \right. \\ & \left. - (1-s^2)^{1/2} \left( \omega_z^0 - \frac{s}{1-s^2} \frac{\partial u_s^0}{\partial\phi} \right) \right]. \end{aligned}$$

La fonction  $E^{1/2} f(u_s^0, u_\phi^0, s)$  qui intervient dans l'équation (A.5) est

$$E^{1/2} f(u_s^0, u_\phi^0, s) = \frac{1}{2(1-s^2)} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{+L} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{-L}). \quad (\text{A.8})$$

### Décomposition radiale et spectrale

On utilise un schéma aux différences finies du 2<sup>e</sup> ordre en  $s$  et un développement en série de Fourier en  $\phi$  tronquée à l'ordre  $M_{\max}$ ,

$$\psi(s, \phi) = \sum_{m=1}^{M_{\max}} \psi^m(s) e^{im\phi}. \quad (\text{A.9})$$

La grille radiale comprend  $NS$  points qui peuvent être répartis de manière irrégulière. Cela nous permet d'utiliser une grille resserrée près des bords où l'on doit résoudre les couches limites.

Les termes non-linéaires sont calculés dans l'espace physique ce qui nécessite l'utilisation de transformées de Fourier rapides.

### Conditions limites pour les mouvements convectifs

Au bord externe, les conditions limites de non-glissement sont

$$\mathbf{u}(s=1) = 0 \iff u_s(s=1) = 0 \quad \text{et} \quad u_\phi(s=1) = 0, \quad (\text{A.10})$$

ce qui implique

$$\psi(s=1) = 0, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial s} \right|_{s=1} = 0 \quad \text{et} \quad \omega_z(s=1) = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2}. \quad (\text{A.11})$$

Au centre, pour  $m > 1$ , les vitesses ne croisent pas l'axe donc

$$u_s(s=0) = 0 \quad \text{et} \quad u_\phi(s=0) = 0, \quad (\text{A.12})$$

ce qui implique

$$\psi(s=0) = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial s} \right|_{s=0} = 0. \quad (\text{A.13})$$

Pour  $m = 1$ , on doit permettre à la vitesse de croiser l'axe. Pour se convaincre qu'un mouvement de translation se projette que le mode  $m = 1$ , on peut utiliser des coordonnées cartésiennes  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ . Un exemple de mouvement de translation est  $u_x = 1$  et  $u_y = 0$ , soit en coordonnées cylindriques,

$$u_x = u_s \cos \phi - u_\phi \sin \phi = 1, \quad (\text{A.14})$$

$$u_y = u_s \sin \phi + u_\phi \cos \phi = 0. \quad (\text{A.15})$$

En combinant ces deux équations, on obtient

$$u_r = \cos \phi, \quad (\text{A.16})$$

$$u_\phi = -\sin \phi. \quad (\text{A.17})$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\psi &= \hat{\psi}^m e^{im\phi} \\ &= \operatorname{Re}(\hat{\psi}^m) \cos m\phi - \operatorname{Im}(\hat{\psi}^m) \sin m\phi \\ &+ i \left[ \operatorname{Re}(\hat{\psi}^m) \sin m\phi + \operatorname{Im}(\hat{\psi}^m) \cos m\phi \right].\end{aligned}\quad (\text{A.18})$$

$$\begin{aligned}u_s &= \frac{1}{s} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = \operatorname{Re} \left( \frac{im}{s} \hat{\psi}^m e^{im\phi} \right) \\ &= -\frac{m}{s} \left[ \operatorname{Re}(\hat{\psi}^m) \sin m\phi + \operatorname{Im}(\hat{\psi}^m) \cos m\phi \right],\end{aligned}\quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned}u_\phi &= -\frac{\partial \psi}{\partial s} = -\operatorname{Re} \left( \frac{\partial \hat{\psi}^m}{\partial s} e^{im\phi} \right) \\ &= -\operatorname{Re} \left( \frac{\partial \hat{\psi}^m}{\partial s} \right) \cos m\phi + \operatorname{Im} \left( \frac{\partial \hat{\psi}^m}{\partial s} \right) \sin m\phi.\end{aligned}\quad (\text{A.20})$$

L'égalité entre les relations (A.16)-(A.19) et (A.17)-(A.20) nous donne

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\hat{\psi}^m) &= 0, \quad \operatorname{Im}(\hat{\psi}^{m \neq 1}) = 0, \quad \operatorname{Im}(\hat{\psi}^{m=1}) = -s, \\ \operatorname{Re} \left( \frac{\partial \hat{\psi}^m}{\partial s} \right) &= 0, \quad \operatorname{Im} \left( \frac{\partial \hat{\psi}^{m \neq 1}}{\partial s} \right) = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} \left( \frac{\partial \hat{\psi}^{m=1}}{\partial s} \right) = -1.\end{aligned}\quad (\text{A.21})$$

De la même manière, on peut montrer qu'un mouvement uniforme suivant  $y$  se projette uniquement sur le mode  $m = 1$ .

Au centre, on a donc  $\psi^{m=1}(s=0) = 0$  et

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\psi^{m=1}(s)}{s} = \text{constante} \approx \frac{\psi^{m=1}(s=ds)}{s(s=ds)},\quad (\text{A.22})$$

où  $ds$  est le pas de grille radiale entre le point  $s = 0$  et son voisin. Ce qui implique

$$u_s(s=0) = u_s(s=ds).\quad (\text{A.23})$$

Par ailleurs, en utilisant une dérivée à droite, on a

$$u_\phi(s=0) = -\frac{\psi(s=ds)}{ds}.\quad (\text{A.24})$$

De plus, pour tous les modes  $m \geq 1$ , on a par symétrie

$$\omega_z(s=0) = 0.\quad (\text{A.25})$$

### A.1.2 Mouvement zonal

L'équation de la vitesse azimutale axisymétrique est résolue dans l'espace physique,

$$\overline{\frac{\partial u_\phi^0}{\partial t}} = \left( \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{1}{s^2} - \frac{E^{-1/2}}{(1-s^2)^{3/4}} \right) \overline{u_\phi^0} - u_s^0 \frac{\partial u_\phi^0}{\partial s} - \frac{u_\phi^0 u_s^0}{s}. \quad (\text{A.26})$$

#### Termes non-linéaires

Pour produire une composante  $m = 0$ , les termes qui se couplent doivent avoir le même  $m$ ,

$$\begin{aligned} \overline{u_s^0 \frac{\partial u_\phi^0}{\partial s}} &= \sum_{m=1}^{Mmax} \text{Re} \left( \frac{im}{s} \psi^m \right) \text{Re} \left( \frac{\partial u_\phi^m}{\partial s} \right) \\ &= \sum_{m=1}^{Mmax} -\frac{m}{s} \text{Im} (\psi^m) \text{Re} \left( \frac{\partial u_\phi^m}{\partial s} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

et

$$\overline{\frac{u_s^0 u_\phi^0}{s}} = \sum_{m=1}^{Mmax} -\frac{m}{s} \text{Im} (\psi^m) \text{Re} (u_\phi^m). \quad (\text{A.28})$$

Pour produire du  $m = 0$ , on peut montrer que

$$\overline{\text{Re} (\Psi e^{im\phi}) \text{Im} (\Phi e^{im\phi})} = \frac{\text{Re} (\Psi) \text{Im} (\Phi) - \text{Re} (\Phi) \text{Im} (\Psi)}{2}, \quad (\text{A.29})$$

où  $\Psi$  et  $\Phi$  sont des fonctions radiales complexes. Par conséquent si l'on définit,

$$\alpha^m = \frac{\partial u_\phi^m}{\partial s} + \frac{u_\phi^m}{s}, \quad (\text{A.30})$$

avec

$$u_\phi^m = -\frac{\partial \psi^m}{\partial s} - \beta \psi^m, \quad (\text{A.31})$$

alors on a simplement

$$\overline{u_s^0 \frac{\partial u_\phi^0}{\partial s}} + \overline{\frac{u_s^0 u_\phi^0}{s}} = \sum_{m=1}^{Mmax} -\frac{m}{2s} \left[ \text{Im} (\hat{\psi}^m) \text{Re} (\hat{\alpha}^m) - \text{Re} (\hat{\psi}^m) \text{Im} (\hat{\alpha}^m) \right]. \quad (\text{A.32})$$

De plus, on doit tenir compte de l'interaction du mode  $m = 0$  avec lui-même. A l'ordre 0, ce terme est nul puisque  $\overline{u_s^0} = 0$ . Le terme d'ordre supérieur est :

$$\overline{\frac{u_s^1 \partial u_\phi^0}{\partial s}} + \overline{\frac{u_\phi^0 u_s^{-1}}{s}} = \frac{E^{1/2}}{2(1-s^2)^{3/4}} \left( \overline{u_\phi^0 \frac{\partial u_\phi^0}{\partial s}} + \overline{\frac{u_\phi^0{}^2}{s}} \right). \quad (\text{A.33})$$

On va conserver ce terme car le gradient du vent zonal dans la couche limite visqueuse  $\partial_s \overline{u_\phi^0}$  peut être important puisque la taille de la couche limite visqueuse est petite.

### Conditions aux limites pour le mouvement zonal

On utilise des conditions de non-glissement sur la sphère externe :

$$\overline{u_\phi^0}(s=1) = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\omega_z^0}(s=1) = \left. \frac{\partial \overline{u_\phi^0}}{\partial s} \right|_{s=1}.$$

Par symétrie au centre,

$$\overline{u_\phi^0}(s=0) = 0.$$

On peut avoir une rotation solide au centre,

$$\left. \frac{\partial \overline{u_\phi^0}/s}{\partial s} \right|_{s=0} = 0 \longrightarrow \overline{\omega_z^0}(s=0) = 2 \left. \frac{\overline{u_\phi^0}}{s} \right|_{s \rightarrow 0} = 2 \left. \frac{\overline{u_\phi^0}}{s} \right|_{s=ds}.$$

## A.2 Partie thermique

Pour le calcul du champ d'anomalie de température, on doit résoudre l'équation de la chaleur en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$ ,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - P^{-1} \nabla^2 \right) \Theta = -\mathbf{u} \cdot \nabla \Theta + P^{-1} 2r u_r. \quad (\text{A.34})$$

On utilise un schéma aux différences finies en  $r$  ( $2e$  ordre, grille irrégulière) et un développement en harmoniques sphériques (tronquées au degré  $L_{\max}$  et à l'ordre  $M_{\max 3D}$ ) sur chacune des coquilles sphériques :

$$\Theta(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{L_{\max}} \sum_{m=0}^{\min(l, M_{\max 3D})} \Theta_l^m(r) Y_l^m(r, \theta, \phi), \quad (\text{A.35})$$

où  $Y_l^m$  est l'harmonique sphérique de degré  $l$  et d'ordre  $m$ . Les harmoniques sphériques sont un ensemble de fonctions complexes orthogonales définies sur la sphère,

$$Y_l^m(\theta, \phi) = C_l^m P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (\text{A.36})$$

avec  $C_l^m$  la constante de normalisation et  $P_l^m$  le polynôme de Legendre associé. Les harmoniques sphériques sont les fonctions propres du laplacien angulaire  $L_2$

$$L_2 \Theta_m^l(r) Y_l^m(\theta, \phi) = l(l+1) \Theta_m^l(r) Y_l^m(\theta, \phi), \quad (\text{A.37})$$

avec

$$L_2(\cdot) = -\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial(\cdot)}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial\phi^2}. \quad (\text{A.38})$$

L'utilisation des harmoniques sphériques permet donc un calcul aisé du laplacien dans l'espace spectral.

La grille radiale comporte NR points avec des points resserrés aux bords pour résoudre les couches limites.

Pour les termes non-linéaires, on effectue le produit dans l'espace physique sur des points de collocations.

### A.2.1 Conditions limites pour la température

On choisit des conditions limites de température fixe sur la sphère externe.

$$\Theta(r = 1) = 0.$$

Au centre, la température n'est pas fixée. Par symétrie, la condition au centre pour le degré  $l = 0$  est

$$\left. \frac{\partial\Theta}{\partial r} \right|_{r=0} = 0,$$

et pour les degrés  $l \neq 0$  :

$$\Theta(r = 0) = 0.$$

## A.3 Termes de couplage

### A.3.1 Évaluation de la force d'Archimède

On doit évaluer le rotationnel de la force d'Archimède intégrée en  $z$  :

$$\left\langle \frac{\partial\Theta}{\partial\phi} \right\rangle = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} \frac{\partial\Theta}{\partial\phi} dz. \quad (\text{A.39})$$

Pour faire cette intégration en  $z$ , il va nous falloir interpoler les points de la grille sphérique 3D vers la grille équatoriale 2D sachant que le nombre de points disposés en rayon et en longitude peut être différent pour les deux grilles. La grille sphérique physique comporte  $\text{NR} \times \text{Nlat} \times \text{Nlong3D}$  points. La grille équatoriale physique comporte  $\text{NS} \times \text{Nlong}$  points. L'idée est de créer une grille cylindrique par prolongation de la grille équatoriale en  $z$  (figure A.1). Sur chaque axe vertical, on place NZ points dans chaque hémisphère réparti de manière régulière tel que  $dz = L(s)/\text{NZ}$ . Il nous faudra

alors évaluer en chaque point de la grille équatoriale d'indice  $(is, ip)$  :

$$\frac{1}{2NZ + 1} \left[ \sum_{iz=1}^{NZ} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \phi}(is, iz, ip) + \frac{\partial \Theta}{\partial \phi}(is, -iz, ip) \right) + \frac{\partial \Theta}{\partial \phi}(is, 0, ip) \right], \quad (\text{A.40})$$

où  $iz \geq 1$  (resp.  $-iz$ ) correspond au point  $z = L(s) \times iz/NZ$  ( $z = -L(s) \times iz/NZ$ ) situé dans l'hémisphère nord (resp. sud) et  $iz = 0$  est le point dans le plan équatorial.

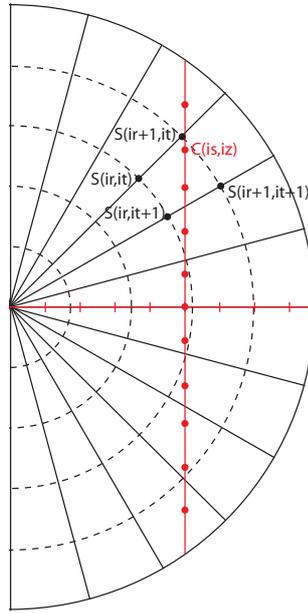


FIG. A.1 – Schéma explicatif de la procédure utilisée pour le calcul de la force d'Archimède représentant un plan méridien de la grille sphérique (noir). La grille cylindrique est représentée en rouge.

On voit qu'il faut estimer  $\partial_\phi \Theta$  sur la grille cylindrique. Pour que cette opération ne soit trop coûteuse en temps de calcul, on effectue la procédure suivante avant de commencer l'itération temporelle :

- Dans un plan méridien de la grille 3D  $(NR, Nlat)$ , on construit une grille cylindrique  $(NS, NZ)$  en plaçant  $NZ$  points sur des axes parallèles à l'axe de rotation.
- Pour chaque point de la grille cylindrique  $C(is, iz)$ , on trouve les 4 points voisins sur la grille sphérique  $S(ir, it)$  qui nous permettront d'interpoler la valeur cherchée au point  $C(is, iz)$ .
- Pour chaque point  $S(ir, it)$ , on attribue un poids par interpolation linéaire en  $\theta$  et en  $r$ .

- On compte le nombre de points de la grille sphérique,  $N$ , nécessaire au calcul de l'intégration en  $z$  pour un rayon cylindrique  $is$  donné. Pour un rayon  $is$  donné, on peut avoir un point  $S(ir, ilat)$  qui intervient dans l'interpolation de points  $C(is, iz)$  voisins (d'autant plus que la grille 3D est grossière). Dans ce cas, on somme les poids pour ce point  $S(ir, it)$  ce qui nous permettra de réduire le nombre de boucles nécessaires lors de la somme.

Au final, pour un rayon  $is$ , on a construit un tableau contenant la location  $(ir, it)$  et le poids  $w(ir, it)$  des  $N$  points de la grille sphérique dont a besoin pour faire l'interpolation.

Au cours d'une itération, la somme  $\langle \partial_\phi \Theta \rangle$  est calculé de la façon suivante :

1. Calcul de  $\partial_\phi \Theta$  en chaque point  $S(ir, it)$  de la grille sphérique de l'espace physique.
2. Pour chaque point  $(is, ip3D)$ , on calcule la somme

$$\frac{1}{2NZ + 1} \sum_{in=1}^N W(ir, it) \times \partial_\phi \Theta(ir, it, ip3D), \quad (\text{A.41})$$

avec  $in$  qui correspond à la location d'un point de la grille sphérique  $(ir, it)$ .

3. On passe la somme dans l'espace spectral où l'on conserve uniquement les termes  $m = 0, \min(M_{\max}, M_{\max 3D})$ .

En cas de parallélisation, chaque processeur effectue la somme locale sur les coquilles qu'il a en charge. Chaque processeur envoie ensuite la somme locale au processeur en charge du point  $is$ .

### A.3.2 Interpolation de la vitesse sur la grille sphérique

Pour les termes non-linéaires de l'équation de la chaleur et l'équation d'induction magnétique, on doit calculer la vitesse sur la grille sphérique :

$$u_r(r, \theta, \phi) = u_s(s, \phi) \sin \theta + u_z(s, \phi, z) \cos \theta \quad (\text{A.42})$$

$$u_\theta(r, \theta, \phi) = u_s(s, \phi) \cos \theta - u_z(s, \phi, z) \sin \theta \quad (\text{A.43})$$

$$u_\phi(r, \theta, \phi) = u_\phi(s, \phi) \quad (\text{A.44})$$

Le changement de grille 2D à 3D dans la direction azimutale est aisément réalisé dans l'espace spectral : troncation à  $M_{\max 3D}$  si  $M_{\max} > M_{\max 3D}$  ou ajout de zéros pour  $m = [M_{\max}, M_{\max 3D}]$  si  $M_{\max} < M_{\max 3D}$ .

On passe ensuite dans l'espace physique où l'on calcule  $u_s$  sur les points de la grille sphérique par interpolation linéaire dans la direction radiale  $s$ . Le calcul des coefficients d'interpolation avant le début de l'intégration temporelle permet de gagner du temps pour cette procédure.

Finalement  $u_z$  est donné par la formule de l'effet  $\beta$  et du pompage d'Ekman :

$$u_z = (\beta u_s z + E^{1/2} f(u_s, u_\phi, s)) z. \quad (\text{A.45})$$

### A.3.3 Calcul du vent thermique

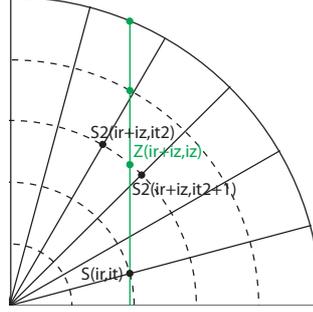


FIG. A.2 – Schéma explicatif de la procédure utilisée pour le calcul du vent thermique représentant un quart de plan méridien de la grille 3D.

Le vent thermique axisymétrique est

$$\frac{\partial \bar{u}_\phi^1}{\partial z} = \frac{ERa}{2} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \theta}, \quad (\text{A.46})$$

soit

$$u_\phi^1(iz) = \sum_{iz=1}^{NR-iz} \frac{ERa}{2} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \theta} dz. \quad (\text{A.47})$$

On a besoin de connaître  $u_\phi^1$  sur la grille sphérique pour l'ajouter aux vitesses 3D. On suppose que la température est symétrique par rapport à l'équateur et on fait le calcul dans l'hémisphère nord uniquement. On prend  $u_z^1(r=1) = 0$ .

La dérivée latitudinale de la température axisymétrique est calculée dans l'espace spectral puis transférée dans l'espace physique sur la grille 3D.

La procédure pour l'intégration de l'équation A.46 est semblable à celle utilisé pour la force d'Archimède. Pour chaque point  $S(ir, it)$  de la grille sphérique, on trace un axe vertical le traversant (figure A.2). Au dessus, du point  $S(ir, it)$ , on place un point  $Z(ir+iz, iz)$  à chaque intersection entre l'axe vertical et les surfaces sphériques de la grille 3D ( $ir+iz \in [ir, NR]$ ). Pour chacun des points  $Z(ir+iz, iz)$ , on pré-calculé les coefficients de l'interpolation pour les deux points  $S2(ir+iz, it2)$  de la grille sphérique situés au rayon  $r(ir+iz)$  encadrant le point  $Z(ir+iz, iz)$ . La position et le poids de chacun des points  $S2$  sont stockés dans un tableau avant le début de l'itération temporelle.

## A.4 Partie magnétique

L'équation à résoudre pour le scalaire poloïdal est

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{Pm} \nabla \right) B_{pl}^m(r) Y_l^m(\theta, \phi) = \frac{\mathbf{r}}{l(l+1)} \cdot [\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})], \quad (\text{A.48})$$

et pour le scalaire toroïdal,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{Pm} \nabla \right) B_{tl}^m(r) Y_l^m(\theta, \phi) = \frac{\mathbf{r}}{l(l+1)} \cdot [\nabla \times \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})]. \quad (\text{A.49})$$

La même discrétisation radiale et spectrale que pour la température est utilisée pour les scalaires magnétiques :

$$B_t(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{Lmax} \sum_{m=0}^{\min(l, Mmax3D)} B_{tl}^m(r) Y_l^m(r, \theta, \phi), \quad (\text{A.50})$$

$$B_p(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{Lmax} \sum_{m=0}^{\min(l, Mmax3D)} B_{pl}^m(r) Y_l^m(r, \theta, \phi). \quad (\text{A.51})$$

Les termes non-linéaires sont calculés dans l'espace physique.

### A.4.1 Conditions aux limites magnétiques

Au centre, on impose aux solutions d'être régulières,

$$B_{tl}^m(r=0) = 0, \quad (\text{A.52})$$

$$B_{pl}^m(r=0) = 0. \quad (\text{A.53})$$

Dans le cas d'un champ magnétique uniforme au centre, on peut montrer que celui se projette uniquement sur les modes  $l=1, m=0$  et  $l=1, m=1$  du scalaire poloïdal. Pour cela, on utilise un raisonnement semblable à celui utilisé pour les vitesses au centre : à partir d'un champ magnétique uniforme, facilement décrit en coordonnées cartésiennes, on en déduit ses composantes en coordonnées sphériques. Par exemple, un champ  $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z) = (1, 0, 0)$  est, en coordonnées sphériques,

$$B_r = \cos \phi \sin \theta, \quad (\text{A.54})$$

$$B_\theta = \cos \phi \cos \theta, \quad (\text{A.55})$$

$$B_\phi = -\sin \phi. \quad (\text{A.56})$$

D'autre part, ces trois composantes peuvent s'exprimer sur scalaires poloïdaux et toroïdaux,

$$B_r = \frac{1}{r} L_2(B_p), \quad (\text{A.57})$$

$$B_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_p) \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial B_t}{\partial \phi}, \quad (\text{A.58})$$

$$B_\phi = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_p) \right) - \frac{\partial B_t}{\partial \theta}. \quad (\text{A.59})$$

En identifiant les différentes expressions, on obtient que  $B_{p1}^1 \propto r$ ,  $B_{pl}^m = 0$  pour  $(l, m) \neq (1, 1)$  et  $B_{tl}^m = 0$  pour tout  $(l, m)$ . Un champ uniforme  $\mathbf{B} = B_y \mathbf{e}_y$  conduit au même résultat. Dans le cas d'un champ uniforme  $\mathbf{B} = B_z \mathbf{e}_z$ , on obtient que  $B_{p1}^0 \propto r$ ,  $B_{pl}^m = 0$  pour  $(l, m) \neq (1, 0)$  et  $B_{tl}^m = 0$  pour tout  $(l, m)$ . Tout champ uniforme, combinaison de  $B_x$ ,  $B_y$  et  $B_z$  se projettera donc sur les modes  $(l, m) = (1, 0)$  et  $(l, m) = (1, 1)$  du scalaire poloïdal. On a alors

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{B_{p1}^{0,1}}{r} = \text{constante} \approx \frac{B_{p1}^{0,1}(r = dr)}{dr}, \quad (\text{A.60})$$

avec  $dr$  le pas de grille radiale entre le point  $r = 0$  et son voisin.

Pour les conditions aux limites sur le bord externe, on suppose que l'extérieur est un isolant électrique, c'est-à-dire  $\mathbf{j} = 0$ . Cela implique pour  $r > 1$ ,

$$B_t = 0 \quad \text{et} \quad \nabla^2 B_p = 0. \quad (\text{A.61})$$

Dans l'isolant, les solutions du scalaire poloïdal sont de la forme  $r^{-(l+1)}$ . Par continuité entre le fluide et l'extérieur isolant, on impose, en  $r = 1$ ,

$$\frac{\partial B_{pl}^m}{\partial r} + \frac{l+1}{r} B_{pl}^m = 0. \quad (\text{A.62})$$

## A.5 Implémentation temporelle

Les équations à résoudre sont de la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} A \cdot f_l^m(t) = B \cdot f_l^m(t) + g_l^m(t), \quad (\text{A.63})$$

où  $f_l^m$  est la fonction scalaire dans le domaine spectral et  $g_l^m$  la partie non-linéaire (qui peut aussi contenir des termes linéaires telle que la force d'Archimède).

On utilise un schéma de Crank-Nicolson pour la partie linéaire et Adams-Bashford pour la partie non-linéaire ( $g_l^m$ ) :

$$\begin{aligned} \frac{A \cdot f_l^m(t + \delta t) - A \cdot f_l^m(t)}{\delta t} &= \frac{1}{2}B \cdot f_l^m(t) + \frac{1}{2}B \cdot f_l^m(t + \delta t) \\ &+ \frac{3}{2}g_l^m(t) - \frac{1}{2}g_l^m(t - \delta t) , \quad (\text{A.64}) \end{aligned}$$

$$\underbrace{\left[ \frac{A}{\delta t} - \frac{B}{2} \right]}_{A1} f_l^m(t + \delta t) = \underbrace{\left[ \frac{A}{\delta t} + \frac{B}{2} \right]}_{B1} f_l^m(t) + \frac{3}{2}g_l^m(t) - \frac{1}{2}g_l^m(t - \delta t) , \quad (\text{A.65})$$

La résolution des équations suivant ce schéma est effectuée à l'aide d'une décomposition LU (Press *et al.*, 1986). Les matrices  $A1$  et  $B1$  sont tridiagonales pour l'équation du mouvement zonal, de la température et des scalaires magnétiques poloïdal et toroïdal. Elles sont pentadiagonales pour l'équation de la fonction courant pour les mouvements non-axisymétriques.



## Annexe B

# Rotation uniforme de la zone radiative du Soleil

Au cours de l'été 2008, j'ai participé à une école d'été de 10 semaines sur le thème de la dynamique des fluides géophysiques à Woods Hole, Massachusetts. Au cours du programme, j'ai travaillé avec Pascale Garaud de l'University of California Santa Cruz, sur un projet portant sur la rotation uniforme de la zone radiative du Soleil. On a développé un modèle analytique simple basé sur des équations simplifiées de la MHD pour décrire le maintien de la rotation uniforme de cette zone par un champ magnétique imposé et la sensibilité du taux de rotation à différentes configurations. Ce modèle analytique, complémentaire des modélisations numériques de P. Garaud, nous a permis d'étudier l'influence de la géométrie du champ magnétique imposé et des conditions aux limites magnétiques.

Ce travail a fait l'objet d'un article publié : P. Garaud & C. Guervilly, The Rotation Rate of the Solar Radiative Interior, 2009, *The Astrophysical Journal*, **695**, 799-808.

Cet article est présenté ici dans sa version publiée.

## THE ROTATION RATE OF THE SOLAR RADIATIVE ZONE

P. GARAUD<sup>1</sup> AND C. GUERVILLY<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Department of Applied Mathematics and Statistics, Baskin School of Engineering, University of California Santa Cruz, Santa Cruz, USA

<sup>2</sup> Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique, CNRS, Université Joseph-Fourier, Grenoble, France

Received 2008 November 4; accepted 2009 January 12; published 2009 April 3

### ABSTRACT

The rotation rate of the solar radiative zone is an important diagnostic for angular momentum transport in the tachocline and below. In this paper, we study the contribution of viscous and magnetic stresses to the global angular momentum balance. By considering a simple linearized toy model, we discuss the effects of field geometry and applied boundary conditions on the predicted rotation profile and rotation rate of the radiative interior. We compare these analytical predictions with fully nonlinear simulations of the dynamics of the radiative interior, as well as with observations. We discuss the implications of these results as constraints on models of the solar interior.

*Key words:* Sun: helioseismology – Sun: magnetic fields – Sun: rotation

*Online-only material:* color figures

### 1. INTRODUCTION

Helioseismic inference of the rotation profile of the solar interior has revealed two spatially distinct regions: an outer differentially rotating shell surrounding an inner uniformly rotating core (Christensen-Dalsgaard & Schou 1988; Kosovichev 1988; Brown et al. 1989; Dziembowski et al. 1989). The transition between the two regions, the solar tachocline, is located precisely at the base of the solar convection zone. The tachocline is too thin to be spatially resolved by helioseismology, although the estimated upper limit on its average width is about 4% percent of the solar radius (Charbonneau et al. 1999, but see also Elliott & Gough 1999). Our understanding of this peculiar rotation profile has steadily marched on in the past three decades, benefiting greatly from the high-performance computing revolution. Today, the field is ripe for more quantitative comparisons between models and observations, and has begun focusing on specific reference points, such as the overall pole-to-equator difference in the rotation rate, the inclination of the isorotation contours, the thickness of the tachocline and finally, the subject of this paper, the rotation rate of the radiative interior.

If one assumes that the solar interior is in a dynamically quasi-steady state, then the rotation rate of the radiative zone  $\Omega_{rz}$  can be thought of as a weighted average of the rotation profile observed near the base of the convection zone:

$$\Omega_{cz}(\theta) \simeq \Omega_{eq}(1 - a_2 \cos^2 \theta - a_4 \cos^4 \theta), \quad (1)$$

where  $\theta$  is the colatitude,  $\Omega_{eq}/2\pi = 463$  nHz,  $a_2 = 0.17$ , and  $a_4 = 0.08$  (Schou et al. 1998; Gough 2007). Hence, we can formally write

$$\Omega_{rz} = \int_0^{\pi/2} W(\theta) \Omega_{cz}(\theta) \sin \theta d\theta, \quad (2)$$

where the weight function  $W(\theta)$  depends uniquely on the nature of angular momentum transport in the tachocline. Observations provide us with relatively precise measurements of  $\Omega_{rz}$  (Schou et al. 1998), with

$$\Omega_{rz}/2\pi = 430 \text{ nHz} \rightarrow \Omega_{rz} \simeq 0.93\Omega_{eq}. \quad (3)$$

Can this information be used to constrain theoretical models of the solar interior?

If angular momentum transport in the radiative zone and the tachocline were purely viscous, the rotation rate of the deeper regions ( $r \rightarrow 0$ ) would be the same as that of the mean specific angular momentum of the convection zone (Gilman et al. 1989), or in other words,  $W_{\text{visc}}(\theta) = \sin^2 \theta$  so that

$$\Omega_{\text{visc}} = \left(1 - \frac{a_2}{5} - \frac{3a_4}{35}\right) \Omega_{eq} \simeq 0.959\Omega_{eq}. \quad (4)$$

Of course, purely viscous transport cannot account for the observed uniform rotation. Spiegel & Zahn (1992) proposed the first tachocline model, in which angular momentum is primarily transported by anisotropic turbulence. Since the stratification of the radiative zone strongly inhibits radial fluid motions, they modeled the effects of this turbulence as a dominantly horizontal diffusion process, and found that the interior would indeed relax to uniform rotation beneath the tachocline with an angular velocity

$$\Omega_{SZ} = \left(1 - \frac{3a_2}{7} - \frac{5a_4}{21}\right) \Omega_{eq} \simeq 0.908\Omega_{eq}. \quad (5)$$

Gough & McIntyre (1998, GM98 hereafter) later argued against this model on the ground that two-dimensional turbulence does not act to diffuse angular momentum horizontally (e.g., Tobias et al. 2007). Moreover, the predicted value  $\Omega_{SZ}$  is sufficiently far from the observed value to be ruled out by the observations.

In the past decade, magnetized models have become more widely accepted as the simplest explanation for the observed uniform rotation of the radiative zone (Rüdiger & Kitchatinov 1997; GM98; see Garaud 2007 for a review). A large-scale primordial magnetic field, strictly *confined* beneath the convection zone can indeed robustly maintain a state of uniform rotation through Ferraro’s law of isorotation (Ferraro 1937). The confinement of the primordial field is thought to result from interactions with large-scale meridional flows originating from the convection zone, as originally proposed by GM98, and first shown numerically by Garaud & Garaud (2008; GG08 hereafter).

However, little attention has been given so far to the predicted rotation rate of the radiative zone in these models. The linear simulations of Rüdiger & Kitchatinov (1997), which assume a given confined poloidal field structure, suggest that  $\Omega_{rz} \simeq$

$0.97\Omega_{\text{eq}}$ , a value which is much larger than observations. The nonlinear simulations of GG08 on the other hand suggest that  $\Omega_{\text{rz}} \simeq 0.87\Omega_{\text{eq}}$ , a value which is far too low. Can we understand these numerically determined values in terms of simple force-balance arguments? We show in this paper that it is indeed possible. Moreover, much can be learned from this exercise in terms of relating models to the real Sun.

We begin in Section 2 by describing a linearized toy model of the radiative zone in which the poloidal component of the field is fixed (Rüdiger & Kitchatinov 1997; MacGregor & Charbonneau 1999). As in the work of MacGregor & Charbonneau (1999), we study two different field geometries: an open dipole (Section 3) and a confined dipole (Section 4). In both cases we study the effect of boundary conditions on the predicted rotation profile and rotation rate of the radiative interior. We discuss the implications of our findings by comparing these toy-model predictions with fully nonlinear simulations of the dynamics of the radiative interior in Section 5, and conclude in Section 6.

## 2. A TOY MODEL OF ANGULAR MOMENTUM TRANSPORT IN THE SOLAR RADIATIVE ZONE

Let us consider the simplest possible setup in which to study the interaction between large-scale fields and flows in a spherical shell, the homogeneous magnetized spherical Couette flow. We thus consider a spherical shell containing a homogeneous incompressible conducting fluid. The outer radius of the shell is  $r_o$  while the inner radius is  $r_i$ . The fluid is assumed to have a uniform density  $\rho$ , a constant viscosity  $\nu$ , and magnetic diffusivity  $\eta$ . We model the medium outside the spherical shell as a solid, and allow this solid to have various conducting properties. The inner core, for radii  $r < r_i$ , is assumed to be permeated by currents which maintain a poloidal dipolar magnetic field.

This setup has been extensively studied in the geophysical literature as a model of the Earth's interior and is also used as a basis for studying spherical Couette flow dynamo experiments (e.g., Dormy et al. 1998; Hollerbach 2000; Dormy et al. 2002; Hollerbach et al. 2007). It has also been used in the solar context by Rüdiger & Kitchatinov (1997) and MacGregor & Charbonneau (1999). As in these latter papers, we neglect the meridional flows entirely. The validity of this approximation is discussed in Section 5. The flow considered is therefore defined in the spherical coordinate system  $(r, \theta, \phi)$  as

$$\mathbf{u} = (0, 0, r \sin \theta \Omega(r, \theta)). \quad (6)$$

As a result of this assumption, the fluid within the spherical shell does not influence the imposed poloidal field.

We introduce the flux function  $A(r, \theta)$  such that

$$\mathbf{B}_p = \nabla \times \left( \frac{A}{r \sin \theta} \hat{\mathbf{e}}_\phi \right), \quad (7)$$

where  $\mathbf{B}_p$  is the poloidal field. The toroidal component of the magnetic field  $B_\phi$  is generated by the  $\Omega$ -effect induced by the azimuthal flow. For simplicity of notation, we introduce the new variable  $S(r, \theta)$  such that

$$S = r \sin \theta B_\phi, \quad (8)$$

so that the total magnetic field can be written as

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta}, -\frac{\partial A}{\partial r}, S \right). \quad (9)$$

The dynamics of this reduced system are entirely described by the azimuthal component of the momentum equation as well as the azimuthal component of the induction equation. These are expressed in the spherical coordinate system as (see Rüdiger & Kitchatinov 1997):

$$\begin{aligned} \eta \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial S}{\partial \theta} \right) + \frac{r}{\sin \theta} \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} \right] \\ = r \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{\partial \Omega}{\partial r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \rho \nu \left[ \frac{1}{\sin^3 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin^3 \theta \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^4 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) \right] \\ = \frac{1}{4\pi r^2 \sin^3 \theta} \left( \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial S}{\partial \theta} - \frac{\partial A}{\partial \theta} \frac{\partial S}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Note that if both diffusion terms are neglected, then the equations reduce to

$$\nabla \Omega \times \nabla A \propto \mathbf{B}_p \cdot \nabla \Omega = 0, \quad (12)$$

$$\nabla S \times \nabla A \propto \mathbf{B}_p \cdot \nabla S = 0. \quad (13)$$

The respective solutions of these equations are simple:  $\Omega$  and  $S$  must be constant on poloidal magnetic field lines (which are lines of constant  $A$ ). Equation (12) is an expression of Ferraro's isorotation theorem, while Equation (13) expresses the fact that in this steady-state axisymmetric system the azimuthal component of the Lorentz force must be zero.

The boundary conditions are selected as follows. We consider that the inner boundary is rotating uniformly with

$$\Omega(r_i, \theta) = \Omega_{\text{in}}, \quad (14)$$

while the outer boundary is rotating differentially as

$$\Omega(r_o, \theta) = \Omega_{\text{cz}}(\theta). \quad (15)$$

The angular velocity  $\Omega_{\text{in}}$  is selected, as in Garaud (2002) and GG08, in such a way as to guarantee that the total torque applied to the system is zero. Hence, we require that

$$\int_0^{\pi/2} \left( \rho \nu r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial \Omega}{\partial r} + r \sin \theta \frac{B_r B_\phi}{4\pi} \right) \sin \theta d\theta = 0. \quad (16)$$

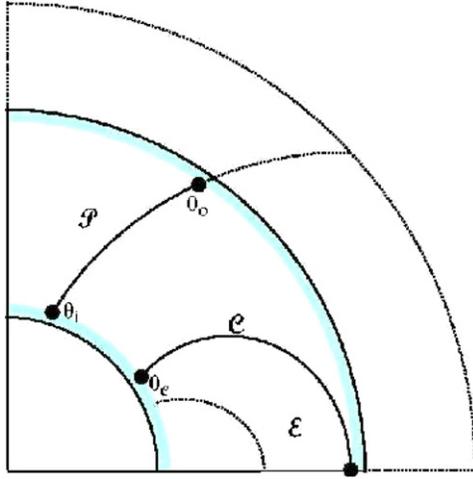
Note that in this steady-state calculation, Equation (16) only needs to be applied at one particular radius  $r$  to be valid everywhere. We now calculate  $\Omega_{\text{in}}$  for a variety of poloidal field configurations and boundary conditions on the azimuthal magnetic field.

## 3. SOLUTION FOR AN OPEN FIELD CONFIGURATION

In order to represent an open field configuration, we select

$$A(r, \theta) = \frac{B_0}{2} r_i^3 \frac{\sin^2 \theta}{r}. \quad (17)$$

The normalizing constant is chosen so that this flux function represents the poloidal magnetic field  $\mathbf{B}_p$  which is the exact axisymmetric solution of the equation  $\nabla^2 \mathbf{B}_p = 0$  in the whole



**Figure 1.** Unconfined field geometry, showing the polar region ( $\mathcal{P}$ ) and the equatorial region ( $\mathcal{E}$ ) separated by the last connected field line ( $\mathcal{C}$ ).

(A color version of this figure is available in the online journal.)

space, matches to a point dipole at  $r = 0$  and decays as  $r \rightarrow \infty$ , and finally, which has amplitude  $B_0$  on the polar axis at radius  $r = r_i$ .

Dormy et al. (1998) and Dormy et al. (2002) presented the first analytical studies of the linear dynamics of magnetized spherical Couette flows. The following analysis is analogous to their approach in the limit where meridional flows are neglected, but investigates the case of a differentially rotating outer boundary. Following their results we expect the presence of two boundary layers near the inner and outer boundaries respectively, as well as an internal shear layer along the “last connected field line,” as shown in Figure 1. This particular field line ( $\mathcal{C}$ ) separates the equatorial region ( $\mathcal{E}$ ) from the polar region ( $\mathcal{P}$ ).

In the equatorial region ( $\mathcal{E}$ ), every field line ( $\mathcal{F}$ ) originating from the inner core in the Northern hemisphere re-enters the core at a symmetric latitude in the Southern hemisphere. In the limit of negligible diffusion, the angular velocity must be constant along ( $\mathcal{F}$ ) implying that the entire equatorial region must rotate with angular velocity  $\Omega_{\text{in}}$ . The function  $S$  must also be constant along ( $\mathcal{F}$ ), but in addition is antisymmetric with respect to the equator. The only possibility is therefore  $S = 0$  everywhere in ( $\mathcal{E}$ ).

In the polar region ( $\mathcal{P}$ ), field lines originating from a colatitude  $\theta_i$  on the inner core extend out to colatitude  $\theta_o$  on the outer boundary (see Figure 1), where

$$\frac{\sin^2 \theta_i}{r_i} = \frac{\sin^2 \theta_o}{r_o}. \quad (18)$$

The field line  $\mathcal{C}$  emerges from the inner core at colatitude  $\theta_c$ , with

$$\sin \theta_c = \left( \frac{r_i}{r_o} \right)^{1/2}. \quad (19)$$

We now consider the solutions of the problem under various types of boundary conditions for the magnetic field.

### 3.1. Vanishing Toroidal Field on the Boundaries

We first consider the case where  $S = r \sin \theta B_\phi$  is required to be zero both at the inner and the outer boundaries:

$$S(r_i, \theta) = S(r_o, \theta) = 0. \quad (20)$$

These can be thought of as “insulating” boundary conditions.

### 3.1.1. Analytical Solutions

To study the boundary layer near  $r_o$ , we introduce the scaled variable

$$\xi = \frac{r_o - r}{\delta_o f(\theta)}, \quad (21)$$

where the typical boundary layer thickness  $\delta_o$  and its form function  $f(\theta)$  both remain to be determined. We assume (and later verify) that for low diffusivities  $\delta_o$  is very small compared with the global scales in the system ( $r_i, r_o$ ). Substituting this new variable in the governing Equations (10) and (11), using the chain rule

$$\frac{\partial}{\partial r} \rightarrow -\frac{1}{\delta_o f(\theta)} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} - \xi \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (22)$$

(where by convention  $f'(\theta) = df/d\theta$ ) and keeping only the lowest order terms in  $\delta_o$  yields

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} &= B_0 \frac{r_i^3 \delta_o f(\theta)}{\eta r_o} \sin^2 \theta \cos \theta \frac{\partial \Omega}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2} &= \frac{B_0}{4\pi \rho \nu} \frac{r_i^3 \delta_o f(\theta)}{r_o^5} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial S}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (23)$$

Combining the two equations yields

$$\frac{\partial^3 S}{\partial \xi^3} = \frac{\partial S}{\partial \xi} \quad \text{and} \quad \frac{\partial^3 \Omega}{\partial \xi^3} = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi}, \quad (24)$$

provided we define

$$\delta_o^2 = \frac{4\pi \rho \nu \eta}{B_0^2} \frac{r_o^6}{r_i^6} \quad \text{and} \quad f(\theta) = \frac{1}{\cos \theta}. \quad (25)$$

The solutions to this set of equations which remain bounded as  $\xi \rightarrow +\infty$  are

$$\begin{aligned} S_o(\xi, \theta) &= s_o^{(0)}(\theta) + s_o^{(1)}(\theta) e^{-\xi}, \\ \Omega_o(\xi, \theta) &= \omega_o^{(0)}(\theta) + \omega_o^{(1)}(\theta) e^{-\xi}, \end{aligned} \quad (26)$$

where the subscript “o” denotes that this solution is only valid in the outer boundary layer. The integrating functions  $s_o^{(1)}(\theta)$  and  $\omega_o^{(1)}(\theta)$  are related to one another by the equation

$$s_o^{(1)}(\theta) = - \left( \frac{4\pi \rho \nu}{\eta} \right)^{1/2} r_o^2 \sin^2 \theta \omega_o^{(1)}(\theta). \quad (27)$$

A very similar calculation can be done near  $r_i$  introducing the scaled variable

$$\zeta = \frac{r - r_i}{\delta_i f(\theta)}, \quad (28)$$

where the function  $f(\theta)$  is given again by Equation (25), and with

$$\delta_i^2 = \frac{4\pi \rho \nu \eta}{B_0^2}. \quad (29)$$

The governing equations are similar to Equation (24), and the solutions are therefore

$$\begin{aligned} S_i(\zeta, \theta) &= s_i^{(0)}(\theta) + s_i^{(1)}(\theta) e^{-\zeta}, \\ \Omega_i(\zeta, \theta) &= \omega_i^{(0)}(\theta) + \omega_i^{(1)}(\theta) e^{-\zeta}, \end{aligned} \quad (30)$$

where the subscript “i” denotes that this set of solutions is only valid in the inner boundary layer. The integrating functions are related to one another by

$$s_i^{(1)}(\theta) = \left( \frac{4\pi\rho\nu}{\eta} \right)^{1/2} r_i^2 \sin^2 \theta \omega_i^{(1)}(\theta). \quad (31)$$

In the case of the boundary conditions selected here, the solution in the bulk of the fluid is well approximated by neglecting any effect of dissipation. This result was formally shown by Dormy et al. (1998). There,  $S$  and  $\Omega$  are constant along magnetic field lines as discussed earlier, so we can write the bulk solution as

$$S_b(r, \theta) = s_b(A(r, \theta)) \text{ and } \Omega_b(r, \theta) = \omega_b(A(r, \theta)). \quad (32)$$

As  $\xi$  and  $\zeta$ , respectively, tend to  $+\infty$ , the boundary solutions must approach the bulk solution smoothly. Hence,

$$\begin{aligned} s_i^{(0)}(\theta) &= s_b(A(r_i, \theta)) \text{ and } s_o^{(0)}(\theta) = s_b(A(r_o, \theta)), \\ \omega_i^{(0)}(\theta) &= \omega_b(A(r_i, \theta)) \text{ and } \omega_o^{(0)}(\theta) = \omega_b(A(r_o, \theta)). \end{aligned} \quad (33)$$

Since the colatitudes  $\theta_i$  and  $\theta_o$  satisfy by definition  $A(r_i, \theta_i) = A(r_o, \theta_o)$ , the above relationships can be summarized as

$$s_i^{(0)}(\theta_i) = s_o^{(0)}(\theta_o) \text{ and } \omega_i^{(0)}(\theta_i) = \omega_o^{(0)}(\theta_o). \quad (34)$$

Finally, we apply the boundary conditions to determine the unknown integration functions uniquely. Requiring Equations (14) and (15) implies that

$$\begin{aligned} \omega_i^{(0)}(\theta) + \omega_i^{(1)}(\theta) &= \Omega_{\text{in}}, \\ \omega_o^{(0)}(\theta) + \omega_o^{(1)}(\theta) &= \Omega_{\text{cz}}(\theta). \end{aligned} \quad (35)$$

Requiring  $S = 0$  on both boundaries implies

$$\begin{aligned} s_i^{(0)}(\theta) + s_i^{(1)}(\theta) &= 0, \\ s_o^{(0)}(\theta) + s_o^{(1)}(\theta) &= 0. \end{aligned} \quad (36)$$

The set of eight equations contained in Equations (27), (31), (34), (35) and (36) can be solved uniquely for the eight integration functions. Of particular interest for the following calculation is the expression for  $\omega_i^{(1)}$ :

$$\omega_i^{(1)}(\theta_i) = -\frac{r_o^3}{r_o^3 - r_i^3} (\Omega_{\text{cz}}(\theta_o) - \Omega_{\text{in}}), \quad (37)$$

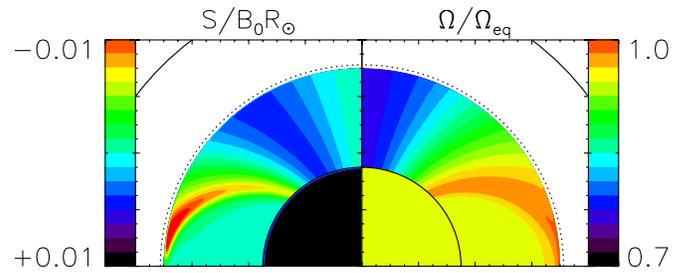
where  $\theta_i$  and  $\theta_o$  are related by Equation (18).

We now seek to express  $\Omega_{\text{in}}$  as a weighted integral over  $\Omega_{\text{cz}}(\theta)$ . Applying Equation (16) on the inner boundary, and using Equations (28) and (37) yields

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \frac{\partial \Omega_i}{\partial r} d\theta = -\int_0^{\theta_c} \frac{\sin^3 \theta_i}{\delta_i f(\theta_i)} \omega_i^{(1)}(\theta_i) d\theta_i = 0, \quad (38)$$

since in the equatorial region on the inner core ( $\theta_i > \theta_c$ ),  $\partial \Omega / \partial r = 0$ . Changing variables from  $\theta_i$  to  $\theta_o$ , and using the actual expression for  $f(\theta)$  transforms this equation to

$$\int_0^{\pi/2} \cos \theta_o \sin^3 \theta_o [\Omega_{\text{cz}}(\theta_o) - \Omega_{\text{in}}] d\theta_o = 0, \quad (39)$$



**Figure 2.** Unconfined field solution for  $H = 4700$  and for  $S = 0$  on both boundaries. In our attempt to relate these simulations to the solar radiative zone, the outer solid circle marks for reference the outer edge of the Sun ( $r = R_\odot$ ), and the dotted line marks the radiative–convective interface. Here,  $r_o = 0.7 R_\odot$  and  $r_i = 0.35 R_\odot$ .

(A color version of this figure is available in the online journal.)

which implies that

$$\Omega_{\text{in}} = \Omega_{\text{eq}} \left( 1 - \frac{a_2}{3} - \frac{a_4}{6} \right). \quad (40)$$

Using the helioseismically determined values for  $a_2$  and  $a_4$  yields

$$\Omega_{\text{in}} = 0.93 \Omega_{\text{eq}}. \quad (41)$$

In the asymptotic limit where this expression is valid (e.g.,  $\delta_i/r_i \ll 1$ ) note that  $\Omega_{\text{in}}$  is independent of the aspect ratio  $r_i/r_o$  of the setup, and can be shown to hold for nonhomogeneous fluids as well. In fact, it only depends on the imposed differential rotation.

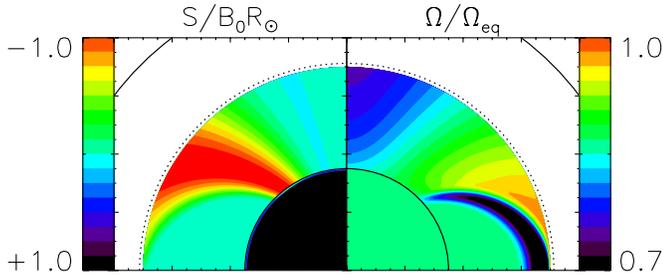
### 3.1.2. Numerical Solutions

We obtained numerical solutions for the set of linearized Equations (10) and (11) with boundary conditions (Equations (14), (15), and (20)) using a numerical algorithm adapted from the one developed by Garaud (2001). This algorithm involves the expansion of the governing equations upon a truncated set of Chebishev functions in  $\mu = \cos \theta$ , and seeks the solution of the remaining set of ODEs by Newton–Raphson relaxation. The linear nature of the equations (in the variables  $S$  and  $\Omega$  considered) guarantees the immediate convergence of the solutions.

The analytical results presented above are asymptotically independent of the individual values selected for  $B_0$ ,  $\eta$ , and  $\rho\nu$ , and depend instead only on their combination through the Hartman number  $H$ , which is the ratio of the geometric mean of the two diffusion times (viscous and magnetic) to the Alfvén time. From here on, we define the Hartman number of the simulation as

$$H = \frac{B_0 r_i}{\sqrt{4\pi\rho\nu\eta}}. \quad (42)$$

Figure 2 shows the numerical solution for a fairly large value of the Hartman number,  $H = 4700$ . As expected, the equatorial region is indeed rotating with the same angular velocity as the core, and  $S$  is zero there. In the polar regions, both  $\Omega$  and  $S$  are constant along poloidal magnetic field lines, except near the inner and outer boundaries, and in the vicinity of the field line ( $C$ ). The rotation rate of the inner core is found to be  $\Omega_{\text{in}} = 0.937 \Omega_{\text{eq}}$  in this simulation. This numerical solution confirms our analytical results. Moreover, as  $H \rightarrow +\infty$ , we find that  $\Omega_{\text{in}} \rightarrow 0.93 \Omega_{\text{eq}}$  (see Figure 7).



**Figure 3.** Same as Figure 2, but for conducting boundary conditions (using  $(\nabla^2 \mathbf{B})_\phi = 0$  for  $r > r_o$  and  $r < r_i$ ). Note how the angular velocity profile is not in a state of Ferraro rotation; also note the difference in the amplitude of  $S$ . (A color version of this figure is available in the online journal.)

### 3.2. Conducting Boundary Conditions

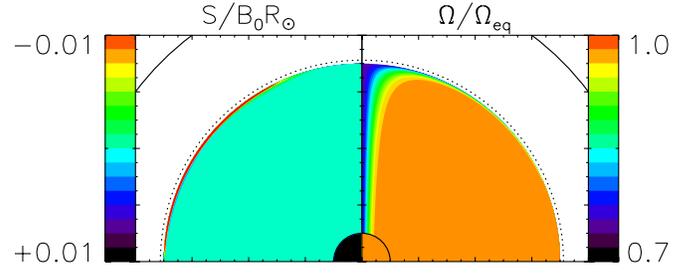
We now turn to the case of “conducting boundary conditions” for the toroidal field, which are the same conditions as those used in the numerical simulations of the radiative zone dynamics performed by GG08. The material outside of the fluid shell is assumed to be infinite in extent and to have the same diffusivity as the fluid inside the shell. The toroidal field satisfies the equation

$$\nabla^2 B_\phi - \frac{B_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} = 0, \quad (43)$$

for  $r > r_o$  and  $r < r_i$ , with  $B_\phi \rightarrow 0$  as  $r \rightarrow 0$  and  $r \rightarrow +\infty$ . The solution to this equation is smoothly matched onto the solution within the spherical shell at  $r = r_i$  and  $r = r_o$  (see GG08 for detail).

As first shown by Hollerbach (2000) the characteristics of the solution are now different from the case of insulating boundary conditions, an effect which is studied in detail by A. M. Soward & E. Dormy (2009, in preparation). Remarkably, the bulk of the fluid is not in Ferraro isorotation. To understand the difference on a qualitative basis, note that the magnetic field is merely diffusing out of the boundaries and that the continuous generation of toroidal field by the fluid motions within the shell is only compensated by this dissipation. In other words, nothing but dissipation limits the growth of the amplitude of the field. As a result, the amplitude of  $S$  is proportional to  $1/\eta$ , so that the approximation  $\mathbf{B}_p \cdot \nabla \Omega = 0$  in the bulk of the fluid is no longer valid (the diffusion term is  $O(1)$  compared with the advection term). Note that  $\mathbf{B}_p \cdot \nabla S = 0$  still holds.

Since the bulk equations are notably more difficult to solve analytically in this case (see A. M. Soward & E. Dormy 2009, in preparation, for detail), we only provide a sample numerical solution in Figure 3. The parameters for this simulation are exactly the same as for the case shown in the previous section—only the magnetic field boundary conditions differ. The two characteristic features mentioned above are clearly illustrated in Figure 3. (1) The amplitude of the  $S$  field is orders of magnitude larger than before, although  $S$  is still constant on poloidal magnetic field lines. (2) The angular velocity profile deviates from Ferraro isorotation. A strong subrotating layer appears just interior to the field line  $(C)$ , and the angular velocity of the inner core  $\Omega_{in} = 0.863\Omega_{eq}$  is much slower than in the previous calculation (Section 3.1). Finally, note that the core velocity found in this case does depend on the aspect ratio of the system. The variation of  $\Omega_{in}$  with  $H$  is shown in Figure 7.



**Figure 4.** Numerical solution in the confined field case for  $q = 1$  and  $H = 1340$ , using insulating boundary conditions. Here,  $r_i = 0.1$  and  $r_o = 0.7$ . The angular velocity is constant in the bulk of the “radiative zone,” with  $\Omega_{in} = 0.972\Omega_{eq}$ . (A color version of this figure is available in the online journal.)

### 4. SOLUTION FOR A CONFINED FIELD

In order to represent a confined magnetic field, we select the flux function  $A(r, \theta)$  as in the work of Rüdiger & Kitchatinov (1997) to be

$$A(r, \theta) = B_0 \frac{r^2}{2} \left(1 - \frac{r}{r_o}\right)^q \sin^2 \theta, \quad (44)$$

where  $q$  is the confinement parameter, which we assume is greater than or equal to one. Note that when  $q = 1$ ,  $B_r = 0$  at  $r_o$  while  $B_\theta$  is nonzero. On the other hand, for  $q > 1$ ,  $B_\theta$  also vanishes at  $r = r_o$ . Also note that the constant  $B_0$  now defines the amplitude of the magnetic field at  $r = 0$  (i.e., not on the polar axis at  $r = r_i$ ).

We begin by considering the case of insulating boundary conditions, where  $B_\phi = 0$  at  $r_i$  and  $r_o$ . Figure 4 presents a numerical solution for a large Hartman number, for  $q = 1$ . It clearly shows that the bulk of the fluid is rotating uniformly with the same angular velocity as the inner core, and that the azimuthal magnetic field is zero in the same region. This bulk solution is expected on the same symmetry grounds as the ones invoked in the equatorial region of the unconfined field case. It matches smoothly onto the applied boundary conditions at  $r = r_o$  through a boundary layer which is very thin everywhere except near the polar axis.

Following the method used in the case of the unconfined field configuration, we begin by rescaling the radial variable near  $r_o$  with

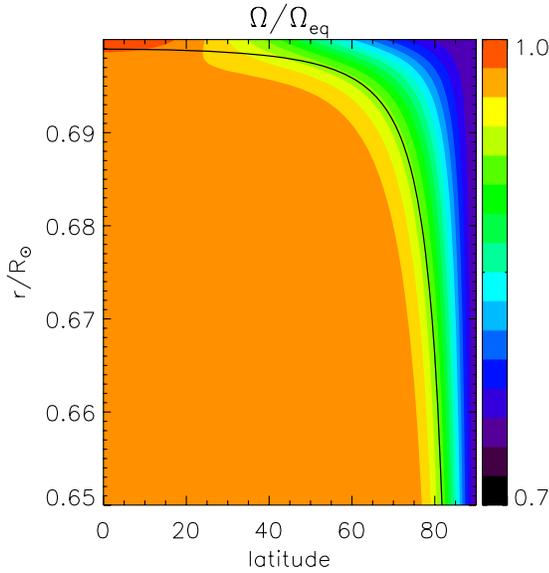
$$\xi = \frac{r_o - r}{\delta_o f(\theta)}, \quad (45)$$

where the typical layer width  $\delta_o$  and the form function  $f(\theta)$  remain to be determined. As before, we substitute this new variable for  $r$  in Equations (10) and (11), and keep the lowest order terms in  $\delta_o$  only, so that

$$\begin{aligned} \frac{\eta r_o^{q-2}}{B_0 \delta_o^{q+1}} \xi^{1-q} \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} &= f^{q+1}(\theta) \sin^2 \theta \left[ \frac{q \sin \theta}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{q \sin \theta}{2} \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} + \cos \theta \right) \xi \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \right], \\ \frac{4\pi \rho \nu r_o^{q+2}}{B_0 \delta_o^{q+1}} \xi^{1-q} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2} &= \frac{f^{q+1}(\theta)}{\sin^2 \theta} \left[ \frac{q \sin \theta}{2} \frac{\partial S}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{q \sin \theta}{2} \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} + \cos \theta \right) \xi \frac{\partial S}{\partial \xi} \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

If we select

$$\delta_o^{2q+2} = \frac{16\pi \rho \nu \eta r_o^{2q}}{q^2 B_0^2} \quad \text{and} \quad f(\theta) = \frac{1}{\sin^{2/q} \theta}, \quad (47)$$



**Figure 5.** Closeup of the angular velocity profile near the outer boundary layer for  $q = 1$  and  $H = 1340$  (see Figure 4). Superimposed on this numerical solution we show the predicted boundary layer thickness  $\delta_\theta f(\theta)$  divided by three for the same parameter values—the two are in excellent agreement.

(A color version of this figure is available in the online journal.)

then the variables fully separate, and the boundary layer equations become

$$\begin{aligned} \xi^{1-q} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( \xi^{1-q} \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} \right) &= (1 - \mu^2)^{1-1/q} \\ &\times \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1 - \mu^2)^{-1-1/q} \frac{\partial S}{\partial \mu} \right], \\ \xi^{1-q} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( \xi^{1-q} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2} \right) &= (1 - \mu^2)^{-1-1/q} \\ &\times \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1 - \mu^2)^{1-1/q} \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right], \end{aligned} \quad (48)$$

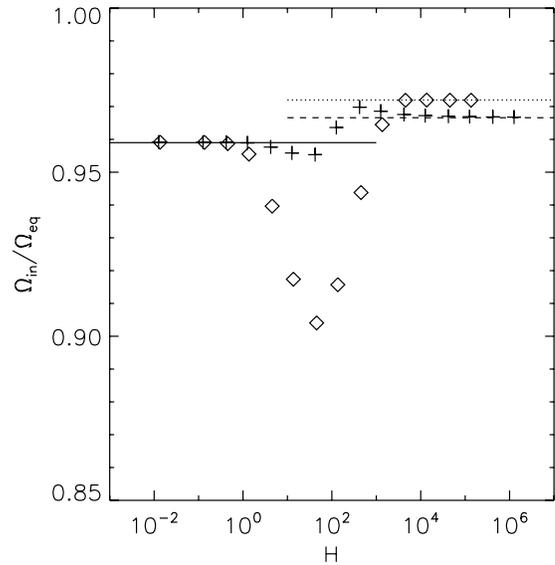
with the introduction of the variable  $\mu = \cos \theta$ .

We validate our boundary layer approximation by comparing, in Figure 5, the predicted latitudinal structure of the boundary layer for  $q = 1$  with numerical solutions. The agreement is excellent, and similar comparisons for other values of  $q$  are also in excellent agreement with Equation (47).

Even when  $q = 1$ , solving Equation (48) analytically is not entirely trivial.<sup>3</sup> Luckily, estimating the value of the interior angular velocity does not require knowledge of the full boundary layer solution. Indeed, as we apply the no-torque condition in Equation (16) at  $r_o$  to find  $\Omega_{in}$ , we first note that  $B_r = 0$  at the boundary since the field is confined, so that the magnetic contribution to the total torque is zero. Next, we note that for large Hartman number we can obtain a first-order accurate approximation of the derivative  $\partial \Omega / \partial r$  across the boundary layer with

$$\left. \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right|_{(r_o, \theta)} \simeq \frac{\Omega_{cz}(\theta) - \Omega_{in}}{\delta_\theta f(\theta)}. \quad (49)$$

This formula is used to estimate the viscous contribution to the total torque in Equation (16) and we finally find that the angular



**Figure 6.** Calculated core velocity as a function of the Hartman number in the toy model. This figure compares numerical simulations and analytical predictions for  $\Omega_{in}/\Omega_{eq}$  for two values of the confinement parameter  $q$ , for insulating boundary conditions. The diamonds show numerical results for  $q = 1$ , and the plus symbols for  $q = 2$ . The dotted line marks the analytical asymptotic limit for  $q = 1$  and the dashed line for  $q = 2$  (see Equation (52)). In the low Hartman number limit on the other hand, all curves converge to the value  $\Omega_{visc}/\Omega_{eq}$  (solid line).

velocity of the interior is determined by

$$\int_0^1 (1 - \mu^2)^{1+1/q} [\Omega_{cz}(\mu) - \Omega_{in}] d\mu = 0, \quad (50)$$

which implies

$$\Omega_{in} = \Omega_{eq} \left( 1 - \frac{a_2}{5 + 2/q} - \frac{3a_4}{(7 + 2/q)(5 + 2/q)} \right). \quad (51)$$

Note that as  $q \rightarrow \infty$  (when the field is more and more confined), the solution recovers the purely viscous case as expected. For the helioseismically determined values of  $a_2$  and  $a_4$ , we get

$$\begin{aligned} \Omega_{in} &\simeq 0.972 \Omega_{eq} \text{ for } q = 1, \\ \Omega_{in} &\simeq 0.966 \Omega_{eq} \text{ for } q = 2, \end{aligned} \quad (52)$$

and so forth. To verify our analysis, we compare the asymptotic values of  $\Omega_{in}$  calculated in Equation (51) with the numerical solutions for different values of  $q$  in Figure 6. The agreement, for high values of the Hartman number, is again excellent. Finally, it can be shown that by contrast with the unconfined field case, changing boundary conditions for the toroidal field does not yield a different asymptotic answer for  $\Omega_{in}$ . This can be attributed to the fact that the bulk solution, and the geometry of the boundary layer, are the same regardless of the boundary conditions.

## 5. DISCUSSION

In the two previous sections, we studied the axially symmetric, linearized dynamics of homogeneous magnetized spherical Couette flows for various geometries of the imposed poloidal field and for various types of magnetic boundary conditions. We now discuss how these simplified models may help us make sense of the dynamics of the solar radiative zone and the tachocline.

<sup>3</sup> An approximate solution can be found for  $q = 1$ .

### 5.1. Comparison with the Numerical Simulations of GG08

Recently, GG08 presented a set of numerical simulations of the solar radiative zone and the tachocline based on the Gough & McIntyre model (GM98). By contrast with the toy model studied above, GG08 attempt to model the dynamics of the radiative interior as accurately as possible, using the full set of nonlinear equations describing the interaction of the field and the flows:

$$\begin{aligned}
 \bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} + 2\bar{\rho} \Omega_0 \times \tilde{\mathbf{u}} &= -\nabla \tilde{p} - \bar{\rho} \nabla \tilde{\Phi} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + f_v \nabla \cdot \Pi, \\
 \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}}) &= 0, \\
 \bar{\rho} \tilde{T} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{s} &= \nabla \cdot (f_k \bar{k} \nabla \tilde{T}), \\
 \frac{\tilde{p}}{\bar{p}} &= \frac{\tilde{\rho}}{\bar{\rho}} + \frac{\tilde{T}}{\bar{T}}, \\
 \nabla \times (\tilde{\mathbf{u}} \times \mathbf{B}) &= \nabla \times (f_\eta \bar{\eta} \nabla \times \mathbf{B}), \\
 \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0,
 \end{aligned} \tag{53}$$

for the velocity field in the rotating frame  $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}_r, \tilde{u}_\theta, r \sin \theta \tilde{\Omega})$ , for the magnetic field  $\mathbf{B} = (B_r, B_\theta, B_\phi)$  and for the density ( $\bar{\rho}$ ), temperature ( $\tilde{T}$ ) and pressure ( $\tilde{p}$ ) perturbations. In these equations,  $\Omega_0$  is equal to  $\Omega_{\text{visc}}$  (see Equation (4)), the background stratification for  $\bar{\rho}$  (density),  $\tilde{T}$  (temperature),  $\tilde{s}$  (entropy),  $\tilde{\Phi}$  (gravitational potential), and  $\bar{p}$  (pressure) are given by Model S of Christensen-Dalsgaard et al. (1996), and the diffusion coefficients  $\bar{v}$  (for the viscosity),  $\bar{\eta}$  (for the magnetic diffusivity), and  $\bar{k}$  (for the thermal conductivity) are calculated according to Gough (2007; see also GG08). Large factors  $f_v$ ,  $f_\eta$  and  $f_k$  multiply these respective diffusivities to help numerical convergence. The boundary conditions used on the inner core are the following:

1. Impermeable and no-slip, with  $\tilde{\Omega} = \Omega_{\text{in}} - \Omega_0$  and where  $\Omega_{\text{in}}$  is deduced from (16),
2. Electrically conducting for the electric/magnetic field (e.g., the magnetic field satisfies  $\nabla^2 \mathbf{B} = 0$  in the inner core, matches on to a point dipole at  $r = 0$ , and matches continuously with the solution in the spherical shell at  $r = r_i$ ),
3. Thermally conducting for the temperature field (e.g.,  $\tilde{T}$  satisfies  $\nabla^2 \tilde{T} = 0$  in the inner core, and smoothly matches on to the solution in the shell at  $r = r_i$ ).

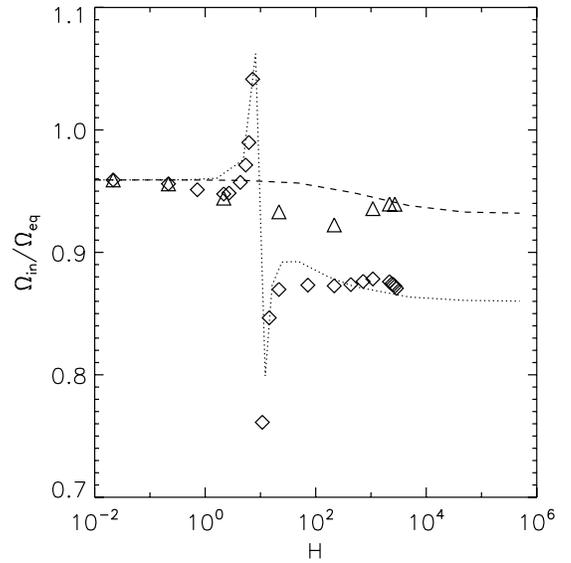
The boundary conditions used on the outer boundary are:

1. The velocity field matches smoothly onto an imposed velocity field

$$\mathbf{u}^{\text{cz}} = (u_r^{\text{cz}}, u_\theta^{\text{cz}}, r_o \sin \theta (\Omega_{\text{cz}} - \Omega_0)),$$

2. Electrically conducting for the electric/magnetic field (e.g., the magnetic field satisfies  $\nabla^2 \mathbf{B} = 0$  for  $r > r_o$ , vanishes as  $r \rightarrow \infty$ , and smoothly matches onto the shell solution at the boundary),
3. Thermally conducting for the temperature field (e.g.,  $\tilde{T}$  satisfies  $\nabla^2 \tilde{T} = 0$  for  $r > r_o$ , and smoothly matches on to the solution in the shell at  $r_o$ ).

The numerical solutions of these equations and boundary conditions, as computed by GG08, exhibit many of the dynamical properties of the tachocline first discussed by GM98. In order to prevent the propagation of the convection zone shear into the interior (as illustrated in Figures 2 and 3), confining the primordial field to the radiative zone appears to be necessary. GM98 argued



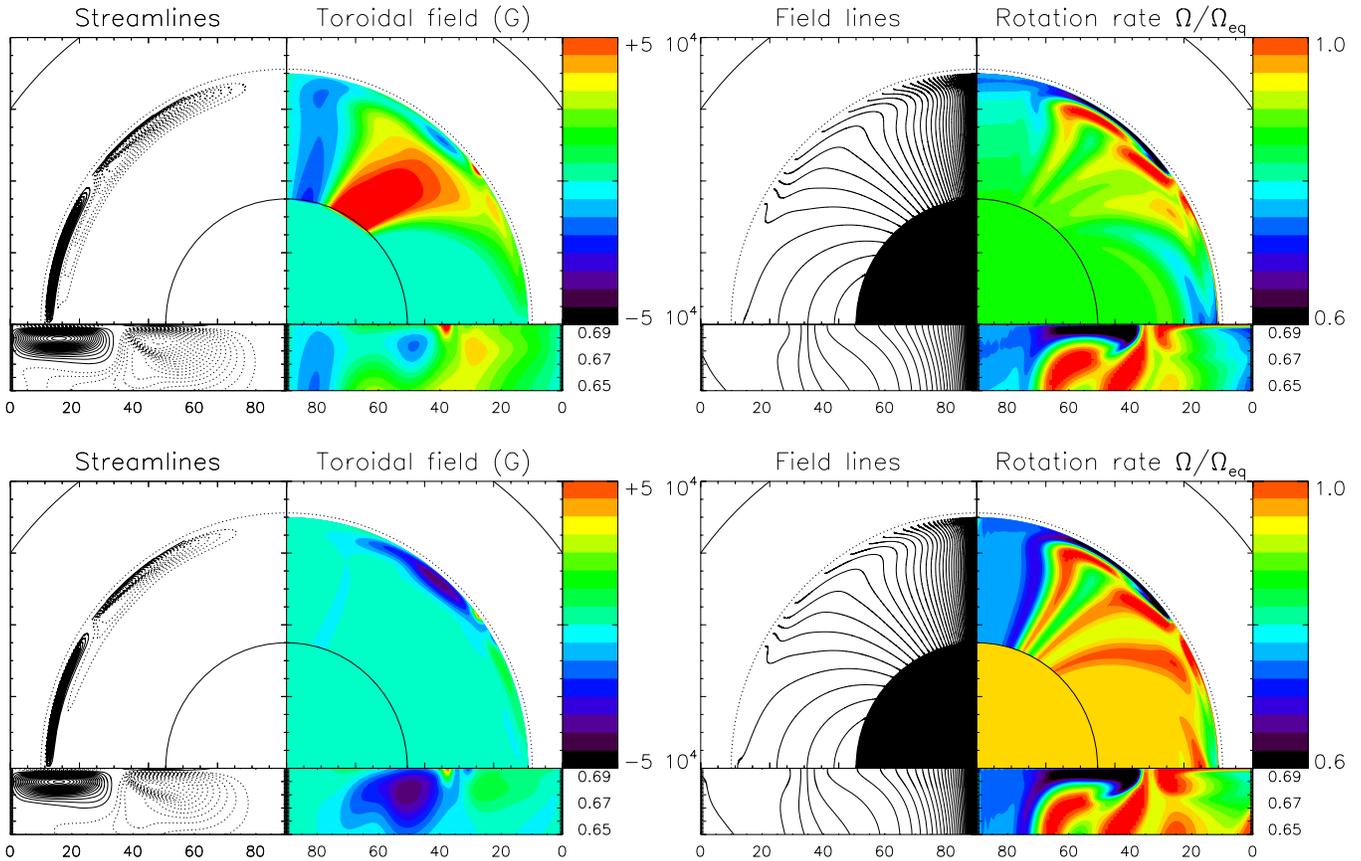
**Figure 7.** Calculated angular velocity of the core as a function of Hartman number. This figure compares the linear solutions in the toy-model (lines) and fully nonlinear numerical solutions (symbols) for two different types of boundary conditions. The conducting boundary conditions, shown in the dotted line and diamond symbols, were also used by GG08. In the limit of large Hartman number, the interior rotation rate  $\Omega_{\text{in}}$  tends to about  $0.87\Omega_{\text{eq}}$ . In the second case, shown with the dashed line and triangles, we changed the lower boundary to be insulating. The asymptotic limit in both toy model and in the full numerical simulations then appears to be closer to the observations, with  $\Omega_{\text{in}} \rightarrow 0.93\Omega_{\text{eq}}$ .

that large-scale meridional flows downwelling from the convection zone would naturally interact nonlinearly with the underlying field and confine it beneath the bulk of the tachocline. The convection zone flows are by the same mechanism prevented from penetrating more deeply into the radiative zone, thereby satisfying a variety of observational constraints on chemical mixing near the base of the convection zone (e.g., Elliott & Gough 1999). The tachocline would thus be a well ventilated region, spatially separated from the magnetically dominated interior by a very thin advection-diffusion layer. All of these features are qualitatively well accounted for in the simulations of GG08.

However, the angular velocity of the bulk of the radiative interior in the simulations of GG08 is much lower than the observed value:  $\Omega_{\text{in}} \simeq 0.87\Omega_{\text{eq}}$  in the limit of large Hartman number. Surprisingly, the same value is found for a fairly wide range of assumed convection zone flow amplitudes and profiles  $u_r^{\text{cz}}(\theta)$ . Given that simulations robustly insist on selecting this particular interior angular velocity, can we understand it in terms of the simple dynamics studied in the toy model? Surprisingly, it appears that we can.

To see this quantitatively, Figure 7 compares the core angular velocity predictions for the stratified, nonlinear calculations of GG08 with our toy-model calculations for an open dipole in a similar experimental setup (i.e., the same aspect ratio and with conducting boundary conditions). The agreement between the two sets of simulations as a function of Hartman number is quite remarkable, in spite of the over-simplified nature of the toy model.

We did in fact *expect* the agreement to be very good for high values of the diffusivities (low values of  $H$ ). Indeed, since the background is strongly stratified, only very slow meridional flows can penetrate into the radiative interior (see Garaud & Brummell 2008). The magnetic Reynolds number of these flows



**Figure 8.** Comparison between the numerical solutions of Equation (53) with two different sets of boundary conditions on the toroidal field. *Top*: conducting boundary conditions everywhere. *Bottom*: the top boundary is conducting while the bottom boundary is insulating. All other simulation parameters are exactly the same for the two runs:  $B_0 = 7T$ ,  $f_v = 8 \times 10^8$ ,  $f_\kappa = 8 \times 10^7$  and  $f_\eta = 8 \times 10^9$ . The strip beneath each quadrant zooms into the region near the outer boundary, for  $r \in [0.65, 0.7] R_\odot$ . The numbers represent latitude. In the streamlines panel, solid lines denote clockwise flows and dotted lines anticlockwise flows.

(A color version of this figure is available in the online journal.)

is therefore also low, and they fail to have any influence on the poloidal field. The magnetic field then naturally relaxes to its fundamental eigenmode, which is the open dipole. These combined factors together imply that the linearized problem studied in Section 3 should be (and is indeed found to be) a good approximation to the overall angular momentum balance of the system. It correctly predicts the asymptotic limit  $H \rightarrow 0$ , as well as the somewhat surprising bifurcation around  $H = 1$ . It is also interesting to note that radial variations in  $\rho$ ,  $v$  and  $\eta$  do not appear to affect the predictions for the interior angular velocity much. This can be formally shown in the case of insulating boundary conditions but not in the case of conducting boundary conditions. Nevertheless, it appears that the agreement approximately holds for conducting boundary conditions as well.

The good agreement between the predicted core angular velocities in the toy model and in GG08's simulations, for low values of the diffusivities (high values of  $H$ ), is much more surprising. The lowest diffusivities simulations presented by GG08, which correspond to the right-most symbols in Figure 7 (see also Figure 8), have a magnetic field geometry which deviates significantly from the purely dipolar open-field configuration studied in Section 3. Moreover, the same simulations clearly show the existence of a region where angular momentum transport is operated by the meridional flows rather than by the magnetic field, as predicted by GM98. Both phenomena are a natural consequence of the increasingly nonlinear nature of the interaction

between the primordial field and the assumed convection zone flows as the diffusivities are lowered (equivalently, as  $H$  is increased); both should by and large invalidate the applicability of the toy model. Nevertheless, even then we find that the open-dipole toy model adequately predicts the core angular velocity of the fully nonlinear numerical simulations, for the parameter values considered.

Whether this statement would continue to hold for even lower values of the diffusivities (even higher values of  $H$ ) is a priori unlikely<sup>4</sup>. As the importance of angular momentum transport by the meridional flows increases in relation to viscous transport, we expect significant deviations away from the toy model predictions to occur. Indeed, while GG08 failed to achieve low enough diffusion parameters in their simulations to test this hypothesis, they also presented another set of simulations for artificially high convection zone flow amplitudes (see their Figure 11), in which the calculated core velocities do deviate significantly away from the toy-model predictions. Moreover, one could also expect that as the magnetic field becomes even more confined to the interior, the open-dipole configuration will lose relevance in favor of the closed-dipole configuration. Since we have shown that the closed-dipole predictions are closer to  $\Omega_{\text{in}} \sim 0.97\Omega_{\text{eq}}$ , we may expect the predicted core velocity in the full simulations to increase towards this value as the diffusivities are decreased, unless angular momentum transport by the flows

<sup>4</sup> However, it cannot be ruled out.

acts just in the opposite way, see footnote 4. Unfortunately, lowering the diffusivities in the simulations enough to reach this regime is quite difficult, and given the nonlinear nature of the interaction between the field and the flow (which is intrinsically associated with the field confinement process), the problem cannot be studied analytically either.

### 5.2. Sensitivity to Boundary Conditions

The core velocity found in the linearized model is sensitively dependent on the assumed magnetic field boundary conditions. This was shown in Section 3, where changing the boundary conditions from insulating to conducting had a profound impact on the nature of the solution. In fact, it can also be shown that the same happens by changing from conducting conditions to having even just one boundary condition where  $B_\phi = 0$  (see below). But far more importantly, this sensitive dependence on boundary conditions is *also* found in the numerical solutions of the full set of Equation (53).

We ran a separate set of simulations for both the linearized toy model and for the full nonlinear model, where the outer boundary is again conducting but the inner core is now insulating (in the sense that  $B_\phi = 0$  at  $r = r_i$ ). The predictions for the core angular velocity as a function of the Hartman number are shown in Figure 7. We found that in the large Hartman number limit, the “asymptotic” value of  $\Omega_{\text{in}}$  in the full nonlinear model is much closer to the observed value,  $0.93\Omega_{\text{eq}}$ , as also predicted by the toy model. Figure 8 compares the numerical results of the full simulations with the different sets of boundary conditions with one another. While the streamlines and the poloidal field lines (as well as the temperature and density profiles, not shown) appear to be relatively unaffected by the new boundary condition at  $r_i$ , the angular velocity and toroidal field profiles are notably different. Following the trends of the toy model, the amplitude of the toroidal field is significantly lower and the rotation profile is much closer to Ferraro isorotation when at least one of the boundary conditions is not conducting.

The implications of these findings are quite important. Short of simulating the entire solar interior including the turbulent convection zone and its effect on magnetic fields, one needs to make assumptions on the nature of the radiative–convective interface. It appears that models in which the fluid shell is contained in a conducting solid of infinite extent are somewhat pathological in nature, as they allow an unphysically high magnetic field amplitude to build up thus breaking away from Ferraro isorotation (A. M. Soward & E. Dormy 2009, in preparation). Meanwhile, insulating boundary conditions seem to be an a priori equally poor physical representation of both the inner core and of the radiative–convective interface. In reality, one may either expect other physical phenomena to limit the toroidal field amplitude within the radiative zone (e.g., magnetic instabilities), or at the very least note that the Sun is not infinite in extent, so that  $B_\phi = 0$  in the vacuum outside of  $R_\odot$ . So, as strange as it may seem, having at least one insulating boundary may actually be more physically realistic than the boundary conditions originally used by GG08.

### 5.3. Implications for Models and Observations of the Solar Interior

Aside from the demonstrably odd case of the conducting boundary conditions described in the previous section, all simple analytical models of the radiative zone presented so far predict an angular velocity  $\Omega_{\text{in}}$  close to the observations: in all cases

**Table 1**  
Summary of Analytical Model Predictions

Model Type	$\Omega_{\text{rz}}/\Omega_{\text{eq}}$	$\Omega_{\text{rz}}/\Omega_{\text{eq}}^a$
Viscous Model <sup>b</sup>	$1 - \frac{a_2}{5} - \frac{3a_4}{35}$	0.959
Anisotropic Viscosity <sup>c</sup>	$1 - \frac{3a_2}{7} - \frac{5a_4}{21}$	0.908
Open Dipole Field <sup>d</sup>	$1 - \frac{a_2}{3} - \frac{a_4}{6}$	0.930
Confined Dipole Field <sup>e</sup>	$1 - \frac{a_2}{5+2/q} - \frac{3a_4}{(5+2/q)(7+2/q)}$	0.959–0.972

#### Notes.

<sup>a</sup> Using  $a_2 = 0.17$  and  $a_4 = 0.08$ , Schou et al. (1998).

<sup>b</sup> Gilman et al. (1989).

<sup>c</sup> Spiegel & Zahn (1992).

<sup>d</sup> See Section 3.1.

<sup>e</sup> See Section 4.

(see Table 1),  $0.908\Omega_{\text{eq}} \leq \Omega_{\text{in}} \leq 0.972\Omega_{\text{eq}}$ . Crucially, all of the estimates presented in Table 1 are independent of  $\rho$ ,  $\nu$ ,  $\eta$ ,  $B_0$  and of the aspect ratio  $r_o/r_i$ , in the asymptotic limit of large Hartman number. In addition, Garaud (2002) also studied the hydrodynamic case of spherical Couette flow between one differentially and one uniformly rotating sphere, and showed that when the gap width is of the order of the observed thickness of the tachocline, the predicted angular velocity of the interior is also, perhaps coincidentally, close to the observed value of  $\Omega_{\text{rz}} = 0.93\Omega_{\text{eq}}$ .

Table 1 has a somewhat ironic property: the models which are a priori the most unphysical, or the poorest representation of the solar interior are the ones which actually seem to fare the best in terms of predicting  $\Omega_{\text{in}}$  close to the observed value. Indeed, recall that the open-dipole case has a nonuniformly rotating radiative zone, while the hydrodynamic spherical Couette flow (Garaud 2002) assumes the fluid to be confined between two impermeable spherical shells.

There are several lessons to be learned from this work. As mentioned in Section 1, all predictions for  $\Omega_{\text{in}}$  necessarily involve a weighted integral over  $\Omega_{\text{cz}}(\theta)$ . Moreover, the spherical geometry of the problem implies that the weight function is typically biased towards the equatorial regions—in other words,  $\Omega_{\text{in}}$  is more sensitive to  $a_2$  than to  $a_4$ . As a result, we see that the spread in predictions for  $\Omega_{\text{in}}$  is relatively small, and one should neither be surprised to see many different models predicting similar values, nor that some should lie coincidentally close to the observed one.

Nevertheless, it is equally interesting to see that  $\Omega_{\text{in}}$  in the closed-dipole model, which is perhaps the “closest” (in relative terms) to what one may expect from the tachocline dynamics, is significantly different from the observations. This implies one of two things: either meridional flows (or perhaps anisotropic turbulent stresses) are a non-negligible contribution to angular momentum transport in the tachocline or (if they are negligible) the true angular velocity profile near the base of the convection zone deviates significantly away from the one used here (see Equation (1)). Helioseismology may be able to help distinguish between these two alternatives.

## 6. CONCLUSION

We have studied, analytically and numerically, the predicted angular velocity profile of the solar radiative zone under various model assumptions. Our overall conclusions have implications for future modeling, and implications for future observations.

In terms of modeling, we have illustrated how crucial the selection of magnetic boundary conditions can be to the calculated solution, an effect which has only recently been fully

appreciated (see the detailed study by A. M. Soward & E. Dormy 2009, in preparation). Assuming, as previous models have done (Garaud 2002; Brun & Zahn 2006; GG08), that the radiative zone is contained within a homogeneous conducting medium of infinite extent allows unphysically large toroidal field amplitude to build up. This case is a somewhat pathological limit, since if the toroidal field is somehow forced to be zero at a finite radius (e.g., the solar photosphere), or if other mechanisms act to limit its amplitude, then the problem does not arise. Nevertheless, how to *best* represent the presence of the solar convection zone remains to be determined.

In terms of observations, our various calculations have quantified the sensitivity of the angular velocity of the interior to the model assumptions: aside from a few exceptional cases which can be ruled out (see above) the predicted angular velocity lies roughly in the interval  $[0.91\Omega_{\text{eq}}, 0.97\Omega_{\text{eq}}]$ . Angular momentum balance between viscous stresses and magnetic stresses for a closed-dipole suggests that  $\Omega_{\text{in}} \simeq 0.97\Omega_{\text{eq}}$ . If helioseismic observations can rule out this value entirely, then we can conclude from this study that the tachocline is the seat of significant additional mixing, either in the form of large-scale meridional flows (Gough & McIntyre 1998), or in the form of small-scale turbulence. Although chemical evidence for additional mixing in the tachocline has already been put forward (Gough & McIntyre 1998; Elliott & Gough 1999; Rüdiger & Pipin 2001), our work provides the first dynamical evidence to this effect.

This work originated from C.G.'s summer project at the Woods Hole GFD Summer School in 2008. We thank the NSF and the ONR for supporting this excellent program. P.G. was supported by NSF-AST-0607495. The numerical simulations were performed on the Pleiades cluster at UCSC, purchased using an NSF-MRI grant. We thank L. Acevedo-Arreguin,

N. Brummell, G. Glatzmaier, D. Gough, T. Wood, and the Woods Hole GFD staff for many fruitful discussions.

## REFERENCES

- Brown, T. M., Christensen-Dalsgaard, J., Dziembowski, W. A., Goode, P., Gough, D. O., & Morrow, C. A. 1989, *ApJ*, **343**, 526
- Brun, A. S., & Zahn, J. P. 2006, *A&A*, **457**, 665
- Charbonneau, P., Christensen-Dalsgaard, J., Henning, R., Larsen, R. M., Schou, J., Thompson, M. J., & Tomczyk, S. 1999, *ApJ*, **527**, 445
- Christensen-Dalsgaard, J., & Schou, J. 1988, in *Seismology of the Sun and Sun-Like Stars*, (ESA-SP286), ed. V. Domingo & E.J. Rolfe (Noordwijk: ESA), 149
- Christensen-Dalsgaard, J., et al. 1996, *Science*, **272**, 1286
- Dormy, E., Cardin, P., & Jault, D. 1998, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **160**, 15
- Dormy, E., Jault, D., & Soward, A. M. 2002, *J. Fluid Mech.*, **452**, 263
- Dziembowski, W. A., Goode, P. R., & Libbrecht, K. G. 1989, *ApJ*, **337**, L53
- Elliott, J. R., & Gough, D. O. 1999, *ApJ*, **516**, 475
- Ferraro, V. C. A. 1937, *MNRAS*, **97**, 458
- Garaud, P. 2001, PhD thesis, Univ. of Cambridge (available from <http://www.ams.ucsc.edu/~pgaraud/Work.html>)
- Garaud, P. 2002, *MNRAS*, **329**, 1
- Garaud, P. 2007, in *The Solar Tachocline*, ed. D. W. Hughes, R. Rosner, & N. O. Weiss (Cambridge: Cambridge Univ. Press), 147
- Garaud, P., & Brummell, N. H. 2008, *ApJ*, **674**, 498
- Garaud, P., & Garaud, J.-D. 2008, *MNRAS*, **391**, 1239
- Gilman, P. A., Morrow, C. A., & Deluca, E. E. 1989, *ApJ*, **338**, 528
- Gough, D. O. 2007, in *The Solar Tachocline*, ed. D. W. Hughes, R. Rosner, & Weiss (Cambridge: Cambridge Univ. Press), 3
- Gough, D. O., & McIntyre, M. E. 1998, *Nature*, **394**, 755
- Hollerbach, R. 2000, in *Physics of rotating fluids*, ed. C. Egbers & G. Pfister (Berlin: Springer), 295
- Hollerbach, R., Canet, E., & Fournier, A. 2007, *Eur. J. Mech. B*, **26**, 729
- Kosovichev, A. G. 1988, *Sov. Astron. Lett.*, **14**, 145
- MacGregor, K. B., & Charbonneau, P. 1999, *ApJ*, **519**, 911
- Rüdiger, G., & Kitchatinov, L. L. 1997, *Astron. Nachr.*, **318**, 273
- Rüdiger, G., & Pipin, V. V. 2001, *A&A*, **375**, 149
- Schou, J., et al. 1998, *ApJ*, **505**, 390
- Spiegel, E. A., & Zahn, J.-P. 1992, *A&A*, **265**, 106
- Tobias, S. M., Diamond, P. H., & Hughes, D. W. 2007, *ApJ*, **667**, L113



# Bibliographie

- ACUNA, M. H., CONNERNEY, J. E. P. & NESS, N. F. 1983 The Z3 zonal harmonic model of Saturn's magnetic field : Analyses and implications. *J. Geophys. Res.* **88**, 8771–8778.
- AMIT, H. & OLSON, P. 2006 Time-average and time-dependent parts of core flow. *Phys. Earth Planet. Inter.* **155**, 120–139.
- ARDES, M., BUSSE, F. H. & WICHT, J. 1997 Thermal convection in rotating spherical shells. *Phys. Earth Planet. Inter.* **99**, 55–67.
- ATKINSON, D. H., POLLACK, J. B. & SEIFF, A. 1998 The Galileo probe Doppler wind experiment : Measurement of the deep zonal winds on Jupiter. *J. Geophys. Res.* **103**, 22911–22928.
- AUBERT, J. 2001 Modèles expérimentaux et numériques de la convection dans le noyau terrestre. PhD thesis, Université Joseph Fourier Grenoble.
- AUBERT, J. 2005 Steady zonal flows in spherical shell dynamos. *J. Fluid Mech.* **542**, 53–67.
- AUBERT, J., BRITO, D., NATAF, H.-C., CARDIN, P. & MASSON, J.-P. 2001 A systematic experimental study of rapidly rotating spherical convection in water and liquid gallium. *Phys. Earth and Planet. Int.* **128**, 51–74.
- AUBERT, J., GILLET, N. & CARDIN, P. 2003 Quasigeostrophic models of convection in rotating spherical shells. *Geochemistry Geophysics Geosystems* **4** (7), 1052.
- AUBERT, J., JUNG, S. & SWINNEY, H. L. 2002 Observations of zonal flow created by potential vorticity mixing in a rotating fluid. *Geophys. Res. Lett.* **29**, 1876.
- AUBERT, J. & WICHT, J. 2004 Axial vs. equatorial dipolar dynamo models with implications for planetary magnetic fields. *Earth Planet. Sci. Lett.* **221**, 409–419.

- AURNOU, J. M. & OLSON, P. L. 2001 Strong zonal winds from thermal convection in a rotating spherical shell. *Geophys. Res. Lett.* **28**, 2557–2560.
- AVALOS-ZUNIGA, R., PLUNIAN, F. & GAILITIS, A. 2003 Influence of electromagnetic boundary conditions onto the onset of dynamo action in laboratory experiments. *Phys. Rev. E* **68** (6), 066307.
- BERON-VERA, F. J., BROWN, M. G., OLASCOAGA, M. J., RYPINA, I. I., KOÇAK, H. & UDOVYDCHENKOV, I. A. 2008 Zonal Jets as Transport Barriers in Planetary Atmospheres. *J. Atmos. Sci.* **65**, 3316–3326.
- BOURGOIN, M., MARIÉ, L., PÉTRÉLIS, F., GASQUET, C., GUIGON, A., LUCIANI, J.-B., MOULIN, M., NAMER, F., BURGUETE, J., CHIFFAUDEL, A., DAVIAUD, F., FAUVE, S., ODIER, P. & PINTON, J.-F. 2002 Magnetohydrodynamics measurements in the von Kármán sodium experiment. *Phys. Fluids* **14**, 3046–3058.
- BRAGINSKY, S. I. 1991 Towards a realistic theory of the geodynamo. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **60**, 89–134.
- BRITO, D., AURNOU, J. & CARDIN, P. 2004 Turbulent viscosity measurements relevant to planetary core-mantle dynamics. *Phys. Earth Planet. Int.* **141**, 3–8.
- BRITO, D., NATAF, H.-C., CARDIN, P., AUBERT, J. & MASSON, J.-P. 2001 Ultrasonic Doppler velocimetry in liquid gallium. *Exp. Fluids* **31**, 653–663.
- BRUMMELL, N. H. & HART, J. E. 1993 High Rayleigh number -convection. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **68**, 85–114.
- BULLARD, E. C. 1949 The Magnetic Field within the Earth. *Proc. R. Soc. Lond. A* **197**.
- BURKE, B. F. & FRANKLIN, K. L. 1955 Observations of a Variable Radio Source Associated with the Planet Jupiter. *J. Geophys. Res.* **60**, 213–217.
- BUSSE, F. H. 1970 Thermal instabilities in rapidly rotating systems. *J. Fluid Mech.* **44**, 441–460.
- BUSSE, F. H. 1975 A model of the geodynamo. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **42**, 437–459.
- BUSSE, F. H. 1976 A simple model of convection in the Jovian atmosphere. *Icarus* **29**, 255–260.

- BUSSE, F. H. & SIMITEV, R. 2004 Inertial convection in rotating fluid spheres. *J. Fluid Mech.* **498**, 23–30.
- CARDIN, P. & OLSON, P. 1992 An experimental approach to thermochemical convection in the Earth's core. *Geophys. Res. Lett.* **19**, 1995–1998.
- CARDIN, P. & OLSON, P. 1994 Chaotic thermal convection in a rapidly rotating spherical shell : consequences for flow in the outer core. *Phys. Earth Planet. Inter.* **82**, 235–259.
- CARRIGAN, C. R. & BUSSE, F. H. 1983 An experimental and theoretical investigation of the onset of convection in rotating spherical shells. *J. Fluid Mech.* **126**, 287–305.
- CHANDRASEKHAR, S. 1961 *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Oxford : Clarendon.
- CHO, J. Y.-K. & POLVANI, L. M. 1996 The morphogenesis of bands and zonal winds in the atmospheres on the giant outer planets. *Science* **273**, 335–337.
- CHRISTENSEN, U. R. 2001 Zonal flow driven by deep convection in the major planets. *Geophys. Res. Lett.* **28**.
- CHRISTENSEN, U. R. 2002 Zonal flow driven by strongly supercritical convection in rotating spherical shells. *J. Fluid Mech.* **470**, 115–133.
- CHRISTENSEN, U. R. & AUBERT, J. 2006 Scaling properties of convection-driven dynamos in rotating spherical shells and application to planetary magnetic fields. *Geophys. J. Int.* **166**, 97–114.
- CHRISTENSEN, U. R., AUBERT, J., CARDIN, P., DORMY, E., GIBBONS, S., GLATZMAIER, G. A., GROTE, E., HONKURA, Y., JONES, C., KONO, M., MATSUSHIMA, M., SAKURABA, A., TAKAHASHI, F., TILGNER, A., WICHT, J. & ZHANG, K. 2001 A numerical dynamo benchmark. *Phys. Earth Planet. Inter.* **128**, 25–34.
- CHRISTENSEN, U. R. & WICHT, J. 2007 Numerical dynamo simulations. In *Treatise on Geophysics* (ed. Gerald Schubert), pp. 245 – 282. Amsterdam : Elsevier.
- COLLINS, G. W., DA SILVA, L. B., CELLIERS, P., GOLD, D. M., FOORD, M. E., WALLACE, R. J., NG, A., WEBER, S. V., BUDIL, K. S. & CAUBLE, R. 1998 Measurements of the equation of state of deuterium at the fluid insulator-metal transition. *Science* **281**, 1178–1181.

- CONNERNEY, J. E. P., ACUNA, M. H. & NESS, N. F. 1982 Voyager 1 assessment of Jupiter's planetary magnetic field. *J. Geophys. Res.* **87**, 3623–3627.
- COWLING, T. G. 1934 The magnetic field of sunspots. *MNRAS* **94**, 39–48.
- DORMY, E. 1997 Modélisation numérique de la dynamo terrestre. PhD thesis, Institut de Physique du Globe de Paris.
- DORMY, E., CARDIN, P. & JAULT, D. 1998 MHD flow in a slightly differentially rotating spherical shell, with conducting inner core, in a dipolar magnetic field. *Earth Planet. Sci. Lett.* **160**, 15–30.
- DORMY, E., SOWARD, A. M., JONES, C. A., JAULT, D. & CARDIN, P. 2004 The onset of thermal convection in rotating spherical shells. *J. Fluid Mech.* **501**, 43–70.
- DRITSCHEL, D. G. & MCINTYRE, M. E. 2008 Multiple jets as PV staircases : The Phillips effect and the resilience of eddy-transport barriers. *J. Atmos. Sci.* **65**, 855–874.
- DUDLEY, M. L. & JAMES, R. W. 1989 Time-dependent kinematic dynamos with stationary flows. *Proc. R. Soc. Lond. A* **425**, 407–429.
- DUMAS, G. 1991 Study of spherical Couette flow via three-dimensional spectral simulations : Large and narrow-Gap flows and their transitions. PhD thesis, California Institute of Technology.
- DZIEWONSKI, A. M. & ANDERSON, D. L. 1981 Preliminary reference Earth model. *Earth Planet. Sci. Lett.* **25**, 297–356.
- EGBERS, C. & RATH, H.-J. 1995 The existence of Taylor vortices and wide-gap instabilities in spherical Couette flow. *Acta Mech.* **111**, 125–140.
- EVONUK, M. & GLATZMAIER, G. A. 2004 2D studies of various approximations used for modeling convection in giant planets. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **98**, 241–255.
- FERRARO, V. C. A. 1937 The non-uniform rotation of the Sun and its magnetic field. *MNRAS* **97**, 458–472.
- FOREST, C. B., BAYLISS, R. A., KENDRICK, R. D., NORNBORG, M. D., O'CONNELL, R. & SPENCE, E. J. 2002 Hydrodynamic and numerical modeling of a spherical homogeneous dynamo experiment. *Magnetohydrodynamics* **38**, 107–120.

- GAGNIÈRE, N. 2009 Etude expérimentale du régime magnétostrophique avec DTS (Derviche Tourneur Sodium). PhD thesis, Université Joseph-Fourier - Grenoble.
- GAILITIS, A., LIELAUSIS, O., PLATACIS, E., DEMENT'EV, S., CIFERSONS, A., GERBETH, G., GUNDRUM, T., STEFANI, F., CHRISTEN, M. & WILL, G. 2001 Magnetic field saturation in the Riga dynamo experiment. *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3024–3027.
- GALPERIN, B., NAKANO, H., HUANG, H.-P. & SUKORIANSKY, S. 2004 The ubiquitous zonal jets in the atmospheres of giant planets and Earth's oceans. *Geophys. Res. Lett.* **31**, 13303.
- GARAUD, P. & GUERVILLY, C. 2009 The Rotation Rate of the Solar Radiative Zone. *Astrophys. J.* **695**, 799–808.
- GILLET, N. 2004 Magnéto-convection dans une sphère en rotation rapide : approche numérique et expérimentale de la convection dans les noyaux planétaires. PhD thesis, Université Joseph Fourier Grenoble.
- GILLET, N., BRITO, D., JAULT, D. & NATAF, H.-C. 2007 Experimental and numerical study of convection in a rapidly rotating spherical shell. *J. Fluid Mech.* **580**, 83–121.
- GILLET, N., JAULT, D., CANET, E. & FOURNIER, A. 2010 Fast torsional waves and strong magnetic field within the Earth's core. *Nature* **465**, 74–77.
- GILLET, N. & JONES, C. A. 2006 The quasi-geostrophic model for rapidly rotating spherical convection outside the tangent cylinder. *J. Fluid Mech.* **554**, 343–369.
- GILMAN, P. A. 1977 Nonlinear Dynamics of Boussinesq Convection in a Deep Rotating Spherical Shell. I. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **8**, 93–135.
- GISSINGER, C., ISKAKOV, A., FAUVE, S. & DORMY, E. 2008 Effect of magnetic boundary conditions on the dynamo threshold of von Kármán swirling flows. *Europhys. Lett.* **82**, 29001.
- GLATZMAIER, G., EVONUK, M. & ROGERS, T. 2009 Differential rotation in giant planets maintained by density-stratified turbulent convection. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **103**, 31–51.

- GLATZMAIER, G.A. & ROBERTS, P. H. 1995 A three-dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal. *Nature* **377**, 203–209.
- GLATZMAIER, G. A. & ROBERTS, P. H. 1996 An anelastic evolutionary geodynamo simulation driven by compositional and thermal convection. *Physica D* **97**, 81 – 94.
- GÓMEZ-PÉREZ, N. & HEIMPEL, M. 2007 Numerical models of zonal flow dynamos : an application to the ice giants. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **101**, 371–388.
- GREENSPAN, H. P. 1968 *The theory of rotating fluids*. Cambridge : University Press.
- GROTE, E. & BUSSE, F. H. 2001 Dynamics of convection and dynamos in rotating spherical fluid shells. *Fluid Dyn. Res.* **28**, 349–368.
- GROTE, E., BUSSE, F. H. & TILGNER, A. 2000 Regular and chaotic spherical dynamos. *Phys. Earth Planet. Inter.* **117**, 259–272.
- GUBBINS, D. & ROBERTS, P. H. 1987 *Geomagnetism*, , vol. 2. London : Academic Press.
- GUERVILLY, C. & CARDIN, P. 2010 Numerical simulations of dynamos generated in spherical Couette flows. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **104**, 221–248.
- GUILLOT, T. 1999a A comparison of the interiors of Jupiter and Saturn. *Plan. Space Sci.* **47**, 1183–1200.
- GUILLOT, T. 1999b Interior of Giant Planets Inside and Outside the Solar System. *Science* **286**, 72–77.
- GUILLOT, T., STEVENSON, D. J., HUBBARD, W. B. & SAUMON, D. 2004 The interior of Jupiter. In *Jupiter. The Planet, Satellites and Magnetosphere* (ed. Bagenal, F., Dowling, T. E., & McKinnon, W. B.), pp. 35–57.
- HAMMEL, H. B., DE PATER, I., GIBBARD, S., LOCKWOOD, G. W. & RAGES, K. 2005 Uranus in 2003 : Zonal winds, banded structure, and discrete features. *Icarus* **175**, 534–545.
- HEIMPEL, M., AURNOU, J. & WICHT, J. 2005 Simulation of equatorial and high-latitude jets on Jupiter in a deep convection model. *Nature* **438**, 193–196.

- HERSANT, F., GAUTIER, D. & LUNINE, J.I. 2004 Enrichment in volatiles in the giant planets of the solar system. *Planet. Space Sci.* **52**, 623.
- HIDE, R. & TITMAN, C. W. 1967 Detached shear layers in a rotating fluid. *J. Fluid Mech.* **29**, 39–60.
- HOLLERBACH, R. 2003 Instabilities of the Stewartson layer Part 1. The dependence on the sign of Ro. *J. Fluid Mech.* **492**, 289–302.
- HOLLERBACH, R., CANET, E. & FOURNIER, A. 2007 Spherical Couette flow in a dipolar magnetic field. *Europ. J. Mech. B* **26**, 729–737.
- HOLLERBACH, R., FUTTERER, B., MORE, T. & EGBERS, C. 2004 Instabilities of the Stewartson layer Part 2. Supercritical mode transitions. *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **18**, 197–204.
- HOLLERBACH, R., JUNK, M. & EGBERS, C. 2006 Non-axisymmetric instabilities in basic state spherical Couette flow. *Fluid Dyn. Res.* **38**, 257–273.
- HOLLERBACH, R. & RÜDIGER, G. 2005 New type of magnetorotational instability in cylindrical Taylor-Couette flow. *Phys. Rev. Lett.* **95**, 124501.
- HOLME, R. & BLOXHAM, J. 1996 The magnetic fields of Uranus and Neptune : Methods and models. *J. Geophys. Res.* **101**, 2177–2200.
- HUBBARD, W. B., NELLIS, W. J., MITCHELL, A. C., HOLMES, N. C., MCCANDLESS, P. C. & LIMAYE, S. S. 1991 Interior structure of Neptune - Comparison with Uranus. *Science* **253**, 648–651.
- HUBBARD, W. B., PODOLAK, M. & STEVENSON, D. J. 1995 The interior of Neptune. In *Neptune and Triton* (ed. D. P. Cruikshank, M. S. Matthews, & A. M. Schumann), pp. 109–138.
- INGERSOLL, A. P. 1990 Atmospheric dynamics of the outer planets. *Science* **248**, 308–315.
- INGERSOLL, A. P. & POLLARD, D. 1982 Motion in the interiors and atmospheres of Jupiter and Saturn - Scale analysis, anelastic equations, barotropic stability criterion. *Icarus* **52**, 62–80.
- ISKAKOV, A. B., SCHEKOCHIHIN, A. A., COWLEY, S. C., MCWILLIAMS, J. C. & PROCTOR, M. R. E. 2007 Numerical demonstration of fluctuation dynamo at low magnetic Prandtl numbers. *Phys. Rev. Lett.* **98** (20), 208501.

- JACOBS, J. A. 1987 *The Earth's core*. London : Academic Press.
- JONES, C. 2003 Dynamos in planets. In *Stellar Astrophysical Fluid Dynamics* (ed. Thompson, M. J. & Christensen-Dalsgaard, J.), pp. 159–176.
- JONES, C. A. 2000 Convection-driven geodynamo models. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **358**, 873–897.
- JONES, C. A. 2007 Thermal and compositional convection in the outer core. In *Treatise on Geophysics* (ed. Gerald Schubert), pp. 131 – 185. Amsterdam : Elsevier.
- JONES, C. A. & KUZANYAN, K. M. 2009 Compressible convection in the deep atmospheres of giant planets. *Icarus* **204**, 227 – 238.
- JONES, C. A., ROTVIG, J. & ABDULRAHMAN, A. 2003 Multiple jets and zonal flow on Jupiter. *Geophys. Res. Lett.* **30** (14), 140000.
- JONES, C. A., SOWARD, A. M. & MUSSA, A. I. 2000 The onset of thermal convection in a rapidly rotating sphere. *J. Fluid Mech.* **405**, 157–179.
- KAGEYAMA, A., MIYAGOSHI, T. & SATO, T. 2008 Formation of current coils in geodynamo simulations. *Nature* **454**, 1106–1109.
- KAGEYAMA, A., SATO, T. & COMPLEXITY SIMULATION GROUP 1995 Computer simulation of a magnetohydrodynamic dynamo. II. *Physics of Plasmas* **2**, 1421–1431.
- KASPI, Y., FLIERL, G. R. & SHOWMAN, A. P. 2009 The deep wind structure of the giant planets : Results from an anelastic general circulation model. *Icarus* **202**, 525–542.
- KELLEY, D., TRIANA, S. A., ZIMMERMAN, D., TILGNER, A. & LATHROP, D. 2007 Inertial waves driven by differential rotation in a planetary geometry. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **101**, 469–487.
- KHLEBUTIN, G. N. 1968 Stability of fluid motion between a rotating and a stationary concentric sphere. *Fluid Dyn.* **3**, 31–32.
- KING, E. M., STELLMACH, S., NOIR, J., HANSEN, U. & AURNOU, J. M. 2009 Boundary layer control of rotating convection systems. *Nature* **457**, 301–304.
- KRAICHNAN, R. H. 1967 Inertial Ranges in Two-Dimensional Turbulence. *Phys. Fluids* **10**, 1417–1423.

- KUTZNER, C. & CHRISTENSEN, U. 2000 Effects of driving mechanisms in geodynamo models. *Geophys. Res. Lett.* **27**, 29–32.
- LAGUERRE, R., NORE, C., RIBEIRO, A., LÉORAT, J., GUERMOND, J.-L. & PLUNIAN, F. 2008 Impact of impellers on the axisymmetric magnetic mode in the VKS2 dynamo experiment. *Phys. Rev. Lett.* **101** (10), 104501.
- LAURE, P., CHOSSAT, P. & DAVIAUD, F. 2000 Generation of magnetic field in the Couette Taylor system. In *Dynamo and dynamics, a mathematical challenge* (ed. P. Chossat, D. Armbruster & I. Oprea), *Nato Sci Ser. II*, vol. 26, pp. 17–24.
- LE MOUËL, J. L. 1984 Outer-core geostrophic flow and secular variation of Earth's geomagnetic field. *Nature* **311**, 734–735.
- MANNEVILLE, J.-B. & OLSON, P. 1996 Banded convection in rotating fluid spheres and the circulation of the jovian atmosphere. *Icarus* **122**, 242–250.
- MAUS, S., ROTHER, M., HEMANT, K., STOLLE, C., LÜHR, H., KUVSHINOV, A. & OLSEN, N. 2006 Earth's lithospheric magnetic field determined to spherical harmonic degree 90 from CHAMP satellite measurements. *Geophys. J. Int.* **164**, 319–330.
- MESSADEK, K. & MOREAU, R. 2002 An experimental investigation of MHD quasi-two-dimensional turbulent shear flows. *J. Fluid Mech.* **456**, 137–159.
- MIYAGOSHI, T., KAGEYAMA, A. & SATO, T. 2010 Zonal flow formation in the Earth's core. *Nature* **463**, 793–796.
- MOFFATT, H. K. 1978 *Magnetic field generation in electrically conducting fluids*. Cambridge : University Press.
- MONCHAUX, R., BERHANU, M., BOURGOIN, M., MOULIN, M., ODIER, P., PINTON, J.-F., VOLK, R., FAUVE, S., MORDANT, N., PÉTRÉLIS, F., CHIFFAUDEL, A., DAVIAUD, F., DUBRULLE, B., GASQUET, C., MARIÉ, L. & RAVELET, F. 2007 Generation of a magnetic field by dynamo action in a turbulent flow of liquid sodium. *Phys. Rev. Lett.* **98** (4), 044502.
- MORIN, V. 2005 Instabilités et bifurcations associés à la modélisation de la géodynamo. PhD thesis, Université Denis Diderot- Paris 7.
- MORIN, V. & DORMY, E. 2006 Dissipation mechanisms for convection in rapidly rotating spheres and the formation of banded structures. *Phys. Fluids* **18** (6), 068104.

- NATAF, H.-C., ALBOUSSIÈRE, T., BRITO, D., CARDIN, P., GAGNIÈRE, N., JAULT, D., MASSON, J.-P. & SCHMITT, D. 2006 Experimental study of super-rotation in a magnetostrophic spherical couette flow. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **100**, 281–298.
- NATAF, H.-C., ALBOUSSIÈRE, T., BRITO, D., CARDIN, P., GAGNIÈRE, N., JAULT, D. & SCHMITT, D. 2008 Rapidly rotating spherical Couette flow in a dipolar magnetic field : An experimental study of the mean axisymmetric flow. *Phys. Earth and Planet. Int.* **170**, 60–72.
- NELLIS, W. J., HOLMES, N. C., MITCHELL, A. C., HAMILTON, D. C. & NICOL, M. 1997 Equation of state and electrical conductivity of "synthetic Uranus," a mixture of water, ammonia, and isopropanol, at shock pressure up to 200 GPa (2 Mbar). *J. Chem. Phys.* **107**, 9096–9100.
- NELLIS, W. J., WEIR, S. T. & MITCHELL, A. C. 1999 Minimum metallic conductivity of fluid hydrogen at 140 GPa (1.4 Mbar). *Phys. Rev. B* **59** (5), 3434–3449.
- NIMMO, F. 2007 Energetics of the core. In *Treatise on Geophysics* (ed. Gerald Schubert), pp. 31 – 65. Amsterdam : Elsevier.
- NOIR, J. 2000 Écoulements d'un fluide dans un cavité en précession : approche numérique et expérimentale. PhD thesis, Université Joseph Fourier Grenoble.
- OLSON, P., CHRISTENSEN, U. & GLATZMAIER, G. A. 1999 Numerical modeling of the geodynamo : Mechanisms of field generation and equilibration. *J. Geophys. Res.* **104**, 10383–10404.
- OLSON, P. L. 2007 Overview. In *Treatise on Geophysics* (ed. Gerald Schubert), pp. 1 – 30. Amsterdam : Elsevier.
- OLSON, P. L., COE, R. S., DRISCOLL, P. E., GLATZMAIER, G. A. & ROBERTS, P. H. 2010 Geodynamo reversal frequency and heterogeneous core-mantle boundary heat flow. *Phys. Earth Planet. Inter.* **180**, 66–79.
- OR, A. C. & BUSSE, F. H. 1987 Convection in a rotating cylindrical annulus. II. Transitions to asymmetric and vacillating flow. *J. Fluid Mech.* **174**, 313–326.
- PAIS, M. A. & JAULT, D. 2008 Quasi-geostrophic flows responsible for the secular variation of the Earth's magnetic field. *Geophys. J. Int.* **173**, 421–443.

- PEARL, J. C., CONRATH, B. J., HANEL, R. A., PIRRAGLIA, J. A. & COUSTENIS, A. 1990 The albedo, effective temperature, and energy balance of Uranus, as determined from Voyager IRIS data. *Icarus* **84**, 12 – 28.
- PEDLOSKY, J. 1979 *Geophysical fluid dynamics*. New York : Springer-Verlag.
- PEFFLEY, N. L., CAWTHORNE, A. B. & LATHROP, D. P. 2000 Toward a self-generating magnetic dynamo : The role of turbulence. *Phys. Rev. E* **61**, 5287–5294.
- PODOLAK, M. & WEIZMAN, A. AND MARLEY, M.S. 1995 Comparative models of Uranus and Neptune. *Planet. Space Sci.* **43**, 1517.
- POIRIER, J. P. 1994 Physical properties of the Earth's core. *C.R. Acad. Sci. Paris* **318**, 341–350.
- PONTY, Y., MININNI, P. D., PINTON, J.-F., POLITANO, H. & POUQUET, A. 2007 Dynamo action at low magnetic Prandtl numbers : mean flow versus fully turbulent motions. *New J. Phys.* **9**, 296.
- PONTY, Y., POLITANO, H. & PINTON, J. F. 2004 Simulation of induction at low magnetic Prandtl number. *Phys. Rev. Lett.* **92** (14), 144503.
- PORCO, C. C., WEST, R. A., MCEWEN, A., DEL GENIO, A. D., INGERSOLL, A. P., THOMAS, P., SQUYRES, S., DONES, L., MURRAY, C. D., JOHNSON, T. V., BURNS, J. A., BRAHIC, A., NEUKUM, G., VEVERKA, J., BARBARA, J. M., DENK, T., EVANS, M., FERRIER, J. J., GEISLER, P., HELFENSTEIN, P., ROATSCH, T., THROOP, H., TISCARENO, M. & VASAVADA, A. R. 2003 Cassini Imaging of Jupiter's Atmosphere, Satellites, and Rings. *Science* **299**, 1541–1547.
- PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T. & FLANNERY, B. P. 1986 *Numerical recipes. The art of scientific computing*. Cambridge : University Press.
- RHINES, P.B. 1975 Waves and turbulence on a beta-plane. *J. Fluid Mech.* **69**, 417–443.
- RHINES, P. B. & YOUNG, W. R. 1982 Homogenization of potential vorticity in planetary gyres. *J. Fluid Mech.* **122**, 347–367.
- ROBERTS, P.H. 2007 Theory of the geodynamo. In *Treatise on Geophysics* (ed. Gerald Schubert), pp. 67 – 105. Amsterdam : Elsevier.

- ROBERTS, P. H. 1968 On the Thermal Instability of a Rotating-Fluid Sphere Containing Heat Sources. *R. Soc. Lond. Phil. Trans. A* **263**, 93–117.
- ROBERTS, P. H. 1972 Kinematic Dynamo Models. *R. Soc. Lond. Phil. Trans. A* **272**, 663–698.
- ROBERTS, P. H., JONES, C. A. & CALDERWOOD, A. 2003 Energy Fluxes and Ohmic Dissipation in the Earth's Core. In *Earth's Core and Lower Mantle* (ed. Jones, C. A. and Soward, A. M. and Zhang, K.), pp. 100–127.
- RUSSELL, C. T., YU, Z. J., KHURANA, K. K. & KIVELSON, M. G. 2001 Magnetic field changes in the inner magnetosphere of Jupiter. *Adv. Space Res.* **28**, 897–902.
- SAKURABA, A. & KONO, M. 1999 Effect of the inner core on the numerical solution of the magnetohydrodynamic dynamo. *Phys. Earth Planet. Inter.* **111**, 105–121.
- SANCHEZ-LAVEGA, A., ROJAS, J. F. & SADA, P. V. 2000 Saturn's zonal winds at cloud level. *Icarus* **147**, 405–420.
- SAUMON, D., CHABRIER, G. & VAN HORN, H.M. 1995 An equation of state for low-mass stars and giant planets. *Ap. J. Suppl.* **99**, 713.
- SCHAEFFER, N. 2004 Instabilités, turbulence et dynamo dans une couche de fluide cisailée en rotation rapide. PhD thesis, Université Joseph Fourier Grenoble.
- SCHAEFFER, N. & CARDIN, P. 2005a Quasigeostrophic model of the instabilities of the Stewartson layer in flat and depth-varying containers. *Phys. Fluids* **17** (10), 104111.
- SCHAEFFER, N. & CARDIN, P. 2005b Rossby-wave turbulence in a rapidly rotating sphere. *Nonlinear Process. Geophys.* **12**, 947–953.
- SCHAEFFER, N. & CARDIN, P. 2006 Quasi-geostrophic kinematic dynamos at low magnetic Prandtl number. *Earth Planet. Sci. Lett.* **245**, 595–604.
- SCHMITT, D. 2010 Magneto-inertial waves in a rotating sphere. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **104**, 135–151.
- SIMITEV, R. & BUSSE, F. H. 2005 Prandtl-number dependence of convection-driven dynamos in rotating spherical fluid shells. *J. Fluid Mech.* **532**, 365–388.

- SISAN, D. R., MUJICA, N., TILLOTSON, W. A., HUANG, Y.-M., DORLAND, W., HASSAM, A. B., ANTONSEN, T. M. & LATHROP, D. P. 2004 Experimental observation and characterization of the magnetorotational instability. *Phys. Rev. Lett.* **93** (11), 114502.
- SREENIVASAN, B. & JONES, C. A. 2006 The role of inertia in the evolution of spherical dynamos. *Geophys. J. Int.* **164**, 467–476.
- SROMOVSKY, L. A., FRY, P. M., DOWLING, T. E., BAINES, K. H. & LIMAYE, S. S. 2001 Coordinated 1996 HST and IRTF imaging of Neptune and Triton. III. Neptune's atmospheric circulation and cloud structure. *Icarus* **149**, 459–488.
- STANLEY, S. & BLOXHAM, J. 2006 Numerical dynamo models of Uranus' and Neptune's magnetic fields. *Icarus* **184**, 556–572.
- STARCHENKO, S. V. & JONES, C. A. 2002 Typical Velocities and Magnetic Field Strengths in Planetary Interiors. *Icarus* **157**, 426–435.
- STEVENSON, D.J. 1982 Interiors of the giant planets. *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.* **10**, 257.
- STEVENSON, D. J. 1983 Planetary magnetic fields. *Rep. Prog. Phys.* **46**, 555–557.
- STEWARTSON, K. 1966 On almost rigid rotations. part 2. *J. Fluid Mech.* **26**, 131–144.
- STIEGLITZ, R. & MÜLLER, U. 2001 Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo. *Phys. Fluids* **13** (3), 561–564.
- SUKORIANSKY, S., DIKOVSKAYA, N. & GALPERIN, B. 2007 On the arrest of inverse energy cascade and the Rhines scale. *J. Atmos. Sci.* **64**, 3312.
- SUMITA, I. & OLSON, P. 2003 Experiments on highly supercritical thermal convection in a rapidly rotating hemispherical shell. *J. Fluid Mech.* **492**, 271–287.
- SUN, Z.-P., SCHUBERT, G. & GLATZMAIER, G. A. 1993 Transitions to chaotic thermal convection in a rapidly rotating spherical fluid shell. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **69**, 95–131.
- TILGNER, A. 2005 Precession driven dynamos. *Phys. Fluids* **17** (3), 034104.
- TRITTON, D.J. 1988 *Physical fluids dynamics*. Oxford Science.

- VAN DER HILST, R. D., DE HOOP, M. V., WANG, P., SHIM, S.-H., MA, P. & TENORIO, L. 2007 Seismostratigraphy and thermal structure of Earth's core-mantle boundary region. *Science* **315**, 1813.
- VERHILLE, G., PLIHON, N., BOURGOIN, M., ODIER, P. & PINTON, J.-F. 2010 Induction in a von Kármán flow driven by ferromagnetic impellers. *New J. Phys.* **12** (3), 033006.
- VON ZAHN, U., HUNTEN, D.M. & LEHMACHER, G. 1998 Helium in Jupiter's atmosphere : results from the Galileo probe helium interferometer experiment. *J. Geophys. Res.* **103**, 22815.
- WICHT, J. 2002 Inner-core conductivity in numerical dynamo simulations. *Phys. Earth Planet. Inter.* **132**.
- WICHT, J. 2004 A spherical couette dynamo.
- WICHT, J., JONES, C. A. & ZHANG, K. 2002 Instability of Zonal Flows in Rotating Spherical Shells : An Application to Jupiter. *Icarus* **155**, 425–435.
- WILLIAMS, G. P. 2003 Jovian Dynamics. Part III : Multiple, Migrating, and Equatorial Jets. *J. Atmos. Sci.* **60**, 1270–1296.
- WILLIS, A. P. & BARENGHI, C. F. 2002 A Taylor-Couette dynamo. *Astron. Astrophys.* **393**, 339–343.
- YANO, J.-I., TALAGRAND, O. & DROSSART, P. 2005 Deep two-dimensional turbulence : An idealized model for atmospheric jets of the giant outer planets. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **99**, 137–150.
- YOSHIDA, S., SUMITA, I. & KUMAZAWA, M. 1996 Growth model of the inner core coupled with the outer core dynamics and the resulting elastic anisotropy. *J. Geophys. Res.* **101**, 28085–28104.
- ZHANG, K. 1992 Spiralling columnar convection in rapidly rotating spherical fluid shells. *J. Fluid Mech.* **236**, 535–556.
- ZHANG, K. 1993 On equatorially trapped boundary inertial waves. *J. Fluid Mech.* **248**, 203–217.
- ZHANG, K.-K. & BUSSE, F. H. 1987 On the onset of convection in rotating spherical shells. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **39**, 119–147.