



HAL
open science

MOMENT DE CASIMIR: EFFET DU VIDE QUANTIQUE SUR L'IMPULSION D'UN MILIEU BI-ANISOTROPE

Sebastien Kawka

► **To cite this version:**

Sebastien Kawka. MOMENT DE CASIMIR: EFFET DU VIDE QUANTIQUE SUR L'IMPULSION D'UN MILIEU BI-ANISOTROPE. Physique [physics]. Université de Grenoble, 2010. Français. NNT : . tel-00576211

HAL Id: tel-00576211

<https://theses.hal.science/tel-00576211>

Submitted on 13 Mar 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse

présentée par

Sébastien KAWKA

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Grenoble

Spécialité : Physique

**Moment de Casimir :
Effet du Vide Quantique sur l'Impulsion d'un Milieu Bi-anisotrope**

Thèse préparée au

Laboratoire de Physique et de Modélisation des Milieux Condensés

sous la direction de

BART A. VAN TIGGELEN

Soutenue publiquement le

Judi 14 octobre 2010

Composition du jury :

M ^r JOEL CHEVRIER	Université de Grenoble	Président du jury
M ^r IVER BREVIK	Université de Trondheim, Norvège	Rapporteur
M ^r SERGE REYNAUD	LKB, Paris	Rapporteur
M ^r THIERRY DAUXOIS	Laboratoire de Physique ENS-Lyon	Examineur
M ^r GEERT RIKKEN	LNCMI, Toulouse	Examineur
M ^r CARLO RIZZO	LNCMI, Toulouse	Examineur
M ^r BART A. VAN TIGGELEN	LPMCM, Grenoble	Directeur de thèse

Introduction générale

UNE propriété remarquable des systèmes quantiques est leur énergie de point zéro. Cette dernière est l'énergie d'un système lorsque celui-ci se trouve dans son état fondamental, c'est-à-dire l'énergie la plus basse qu'il peut atteindre. Le vide quantique est l'état fondamental du champ électromagnétique en l'absence de source. Il possède une énergie attribuée aux fluctuations irréductibles du champ électromagnétique. Comme on ne peut envisager un espace sans ces fluctuations, nous appellerons alors simplement cet état fondamental "le vide".

Ces fluctuations ont des effets visibles au quotidien, par exemple l'émission spontanée qui représente l'émission de lumière pour toutes les sources que nous utilisons, exceptés les lasers, ou encore une partie des forces de van der Waals dont l'importance est fondamentale en chimie et en biologie [1]. D'un point de vue macroscopique, elles donnent lieu à l'effet Casimir [2]. Historiquement l'effet Casimir est la force attractive entre deux plaques conductrices. On sait maintenant la déterminer pour tout type de matériau ou de géométrie. Cette force est dominante à courte distance. Elle présente un intérêt technologique car elle doit être prise en compte dans les nanosystèmes électromécaniques (NEMS). Elle présente en outre un intérêt fondamental : il est important de bien déterminer cette force pour effectuer des tests de gravité non Newtonienne à l'échelle micrométrique [3]. Baptisée de façon imagée "a force from nothing" [4], l'effet Casimir désigne aujourd'hui tout phénomène lié à l'énergie du vide [5]. Cependant le cas des fluctuations du vide pose un problème à l'interface de la physique et de la gravitation : la densité d'énergie qui leur est associée est infinie. Quelle que soit la coupure physiquement acceptable du point de vue de l'électrodynamique quantique, cette énergie ne produit pas les effets gravitationnels escomptés. C'est "la catastrophe du vide", une des principales énigmes de la physique contemporaine [6].

L'énergie et l'impulsion étant reliées par la relativité, il est naturel de se demander s'il existe une contribution du vide à l'impulsion d'un milieu. L'impulsion étant une observable, à la différence de l'énergie, on peut se poser la question : qu'advient-il de la divergence ? Dans le vide, l'impulsion associée au champ est nulle pour des raisons évidentes de symétrie : il n'y a pas de direction privilégiée. En revanche il est entendu aujourd'hui qu'une impulsion non nulle est possible dans les milieux bi-anisotropes, dans lesquels un champ magnétique peut induire une polarisation [7, 8]. Une première estima-

tion attribue une contribution infinie à l'impulsion du milieu [9]. Cet effet, la présence d'une impulsion non nulle du champ, survit-il à la régularisation de cette divergence? D'autre part la question de la définition de l'impulsion du champ électromagnétique dans un milieu matériel fait débat [10, 11]. Il est donc nécessaire de considérer un modèle microscopique pour être tout à fait rigoureux [12].

Un milieu quelconque est bi-anisotrope simplement s'il est en mouvement. Dans ce cas on s'attend à ce qu'une contribution du vide à l'impulsion soit proportionnelle à la vitesse du milieu, c'est-à-dire à une contribution à la masse. Autrement dit, l'énergie de Casimir respecte-t-elle le principe d'équivalence masse-énergie d'Einstein? Cette question rejoint le débat fondamental concernant les éventuels effets gravitationnels de l'énergie du vide, et à travers elle de l'énergie de Casimir.

Pour répondre à ces questions, nous détaillerons dans une première partie la notion de vide quantique, les effets connus et les problèmes conceptuels inhérents à l'électrodynamique quantique. Nous détaillerons le formalisme associé à la description du vide quantique comme état fondamental du champ électromagnétique. Nous aborderons ensuite la question de l'impulsion du champ dans un milieu matériel, puis nous présenterons les milieux bi-anisotropes, où les propriétés de symétrie sont favorables à l'observation d'un nouvel effet macroscopique du vide que nous avons appelé "moment cinétique de Casimir". Nous évoquerons l'origine de ce moment cinétique ainsi que la nécessité d'une approche microscopique du problème.

Nous développerons au second chapitre un modèle microscopique mettant en évidence cette interaction entre vide quantique et milieu bi-anisotrope. Le modèle est constitué d'un dipôle et des champs électrique et magnétique croisés, en interaction avec le vide. Cette approche, qui se veut la plus rigoureuse possible, nous permettra de valider l'existence du moment cinétique de Casimir et d'en évaluer l'ordre de grandeur.

Dans le troisième chapitre nous appliquerons la même approche microscopique au cas où la bi-anisotropie est due au déplacement du milieu, qui sera ici un atome d'Hydrogène. On s'attend dans ce cas à une correction de masse. Nous retrouverons le principe d'équivalence masse-énergie d'Einstein. Nous considérerons ensuite l'interaction avec une radiation thermique isotrope. Les effets de température non nulle respecterons aussi le principe d'équivalence. Dans le cas de deux atomes, nous montrerons que l'énergie de liaison, associée aux forces de Van der Waals, peut être partie intégrante de la masse inertielle de l'ensemble.

Nous nous intéresserons enfin au chapitre 4 à l'énergie de Casimir d'une boule diélectrique. Le moment cinétique de Casimir d'une boule diélectrique a été considérée par Van Tiggelen [8]. L'auteur a proposé une contribution proportionnelle à l'énergie de Casimir contenue dans la boule, ce que nous retrouverons en étendant l'approche microscopique au cas de N atomes. L'énergie de Casimir associée à une sphère ou une boule diélectrique a été déterminée dans le cadre de la sonoluminescence. L'énergie de point zéro du champ électromagnétique avait été proposée comme origine de ce phénomène. Cette approche a depuis été abandonnée, mais l'énergie de Casimir associée à une sphère est toujours controversée. Nous revisiterons cette question à l'aide d'un modèle numérique s'appuyant sur une description discrète de la matière.

Table des matières

Introduction générale	3
1 Introduction : énergie du vide et impulsion du champ électromagnétique	7
1.1 Le vide	7
1.1.1 Le champ électromagnétique dans le vide	9
1.1.2 Le déplacement de Lamb	14
1.1.3 L'effet Casimir	18
1.2 Quelques aspects de la propagation (classique) dans les milieux	21
1.2.1 Controverse Abraham-Minkowski	21
1.2.2 L'effet magnetoélectrique	24
1.2.3 L'effet ME dans le vide	25
1.3 Une impulsion venant du vide ?	27
1.3.1 Vers une résolution de la controverse Abraham-Minkowski ?	27
1.3.2 Impulsion et fluctuations de champ	29
1.3.3 Critiques	31
1.3.4 Comment régulariser la divergence ?	35
1.4 Énergie de Casimir et masse	38
1.4.1 Lien avec la masse gravitationnelle	38
1.4.2 Liens avec la masse inertielle	40
1.5 Sonoluminescence	40
1.5.1 Effet observé	40
1.5.2 Lien avec l'énergie de Casimir	41
2 Une Approche QED du Moment Cinétique de Casimir	43
2.1 Modèle microscopique	43
2.1.1 Définition du système	43
2.1.2 Description Hamiltonienne	44
2.1.3 Constante du mouvement	45
2.1.4 Impulsion transverse et longitudinale	47
2.2 Effet classique des champs appliqués	48

2.2.1	Un système simple	48
2.2.2	Équations du mouvement	49
2.2.3	Vitesse de dérive : approche intuitive	49
2.2.4	Dynamique totale	49
2.3	Théorie des perturbations	50
2.3.1	Sous-système oscillateur magnéto-électrique	51
2.3.2	Ordres de grandeurs des approximations effectuées	53
2.3.3	Développement perturbatif	54
2.3.4	Moyenne quantique de l'impulsion totale	58
2.3.5	Renormalisation de masse	64
2.4	Annexe : Tableau récapitulatif des impulsions	66
2.5	Conclusion	66
3	Relation entre le Moment de Casimir et la Masse Inertielle	67
3.1	Atome en mouvement dans le vide	68
3.1.1	Définition du système	68
3.1.2	Théorie des perturbations	69
3.1.3	Renormalisation de la masse inertielle	73
3.2	Correction de masse à température finie	74
3.2.1	Moyenne thermique d'une observable	74
3.2.2	Moyenne thermique perturbée	74
3.2.3	Moyenne thermique dans le référentiel en translation uniforme	77
3.2.4	Développement à basse température, basse vitesse, basse énergie	78
3.2.5	Correction de masse à température finie	81
3.3	Annexe : Relation entre énergie des forces de dispersion et masse inertielle	82
3.3.1	Hamiltonien	82
3.3.2	Développement perturbatif	83
3.3.3	Perspectives	86
3.4	Conclusion	86
4	Énergie de Casimir d'une boule diélectrique	87
4.1	Introduction	87
4.2	Modèle discret	88
4.3	Approche numérique	90
4.4	Discussions	91
4.4.1	Lien avec la sonoluminescence	91
4.4.2	Remarque sur une contribution $1/L$ à l'énergie de Casimir	92
4.4.3	Chaleur latente et tension de surface de l'hélium liquide	94
4.5	Conclusion	95
	Conclusion	97
	Publications	103
	Bibliographie	109

CHAPITRE	1
----------	----------

Introduction : énergie du vide et impulsion du champ électromagnétique

Sommaire

1.1	Le vide	7
1.2	Quelques aspects de la propagation (classique) dans les milieux	21
1.3	Une impulsion venant du vide ?	27
1.4	Énergie de Casimir et masse	38
1.5	Sonoluminescence	40

Introduction

Il est important de bien expliquer la notion de vide et les effets qui lui sont associés. Nous verrons la quantification des champs et le formalisme que nous utiliserons, ainsi que les principaux effets que sont le déplacement de Lamb et la force de Casimir. Nous aborderons ensuite la propagation des photons dans la matière et en particulier dans les milieux bianisotropes. Associés aux fluctuations du vide, ces milieux pourraient acquérir de la quantité de mouvement ce qui est le point de départ de notre étude. Nous aborderons enfin le lien entre cette énergie de point zéro et la masse.

1.1 Le vide

Dans le sens commun “le vide” fait référence à un “espace qui n’est pas occupé par quelque chose” [Larousse], un “espace qui ne contient rien” [Robert]. Cet espace vide sert de base à la physique classique. Il est ce qui reste lorsque l’on a enlevé toute la matière. Cette notion de vide est remise en cause à la fin du XIXème siècle par l’avènement de la physique statistique. L’espace à l’intérieur d’une cavité ne contient plus “rien” mais au contraire est rempli de champs électromagnétiques appelés “rayonnement du corps noir” exerçant une pression sur les parois. Le spectre de ce rayonnement est mal compris et

conduit à une densité d'énergie infinie à l'intérieur de la cavité. Planck, en 1900, réussit à trouver une loi de rayonnement en accord avec les mesures expérimentales. Considérant que le modèle utilisé pour calculer l'énergie totale à partir d'un spectre continu était erroné, Planck a supposé que l'énergie électromagnétique, au lieu d'être continue comme dans la théorie classique, ne peut prendre que des valeurs discrètes $h\nu$ dépendant de la fréquence ν et de la constante de Planck h . Ces valeurs discrètes sont appelées quanta. Les quanta du champ électromagnétique sont désormais appelés photons. Bien que Planck n'ait pas introduit directement la quantification, cette approche est l'acte de naissance de la mécanique quantique. À l'équilibre thermique, l'énergie moyenne $\langle E \rangle$ par mode de fréquence ν est l'énergie d'un photon multiplié par le nombre de photons moyen $\langle n \rangle$ dans le mode :

$$\langle E \rangle = \langle n \rangle h\nu \quad \text{avec} \quad \langle n \rangle = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

où k_B est la constante de Boltzmann et T la température. Ce qui n'était alors qu'un "artifice de calcul" permet de trouver une densité d'énergie qui correspond à l'expérience, la loi de Planck :

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad (1.1)$$

Cette densité, comme on peut s'y attendre, redonne la densité d'énergie obtenue classiquement si on fait tendre h vers zéro, c'est-à-dire si l'on considère l'énergie électromagnétique comme continue. En revanche si l'on fait tendre la température vers zéro, le nombre de photons par mode tend lui aussi vers zéro et l'on retrouve dans cette limite un espace vide qui ne contient rien, ni matière ni rayonnement.

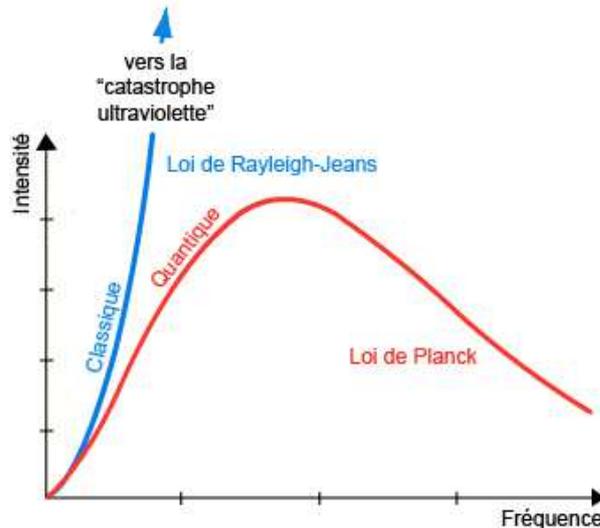


FIGURE 1.1 – Densité d'énergie par mode en fonction de la fréquence. En bleu la loi de Rayleigh-Jeans $\rho(\nu) \propto \nu^3$, en rouge la loi de Planck (1.1)

Einstein reprend l'idée des quantas en 1905 afin d'expliquer l'effet photoélectrique [13], puis en 1909 pour évaluer la force de friction subie par un miroir qui se déplace dans

un champ thermique [14], en appliquant sa théorie du mouvement brownien [15]. Ces effets liés au concept de photon s'appuient sur le caractère corpusculaire de la lumière.

En 1912, insatisfait de sa première dérivation, la quantification ayant été à ce moment là une simple astuce mathématique, “un acte désespéré” comme il l’a avoué lui-même [16], Planck corrige sa première loi et introduit la notion d’énergie de point zéro :

$$\langle E \rangle = \left(\langle n \rangle + \frac{1}{2} \right) h\nu$$

correspondant à l’énergie d’un demi-photon par mode. Bien que cette approche soit controversée, Einstein et Stern remarquent en 1913 que cette deuxième loi possède un meilleur comportement dans la limite classique $k_B T \gg h\nu$,

$$\begin{aligned} E &= \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} + \frac{1}{2}h\nu \simeq \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{k_B T} + \frac{1}{2}\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)^2 - 1} + \frac{1}{2}h\nu \\ &\simeq \frac{k_B T}{1 + \frac{1}{2}\frac{h\nu}{k_B T}} + \frac{1}{2}h\nu \simeq \left(k_B T - \frac{1}{2}h\nu\right) + \frac{1}{2}h\nu \simeq k_B T + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right) \end{aligned}$$

c’est-à-dire n’a pas de correction au premier ordre à $k_B T$. La même année suite à leurs travaux sur la chaleur spécifique des gaz dont les anomalies peuvent être expliquées par l’énergie de point zéro, ils concluent que “l’existence d’une énergie de point zéro d’amplitude $\frac{1}{2}h\nu$ est probable” [17]. Debye en 1914 suggère que les fluctuations de point zéro du mouvement atomique doivent être observables [18]. En 1916 Nernst remarque que ces fluctuations doivent aussi exister pour le champ électromagnétique remplissant l’espace libre [19]. La preuve expérimentale de l’existence de cette énergie de point zéro est apportée en 1924 par Mulliken en mesurant les spectres de vibration de molécules diatomiques [20]. Comme nous allons le voir au cours de ce chapitre, les fluctuations de point zéro pour les champs électromagnétiques conduisent à des effets observables, tel le déplacement de Lamb ou les forces de Van der Waals.

Le vide correspond donc désormais à un état bien défini dans lequel le champ électromagnétique se trouve dans son état fondamental. Il faut alors prendre en compte l’effet de ces fluctuations de point zéro du champ et l’énergie qui y est associée.

1.1.1 Le champ électromagnétique dans le vide

Nous allons ici décrire de façon élémentaire la quantification du champ électromagnétique dans le vide. Les notions et le formalisme introduits ici seront utilisés dans les chapitres suivants.

1.1.1.a Variables normales

Le champ dit libre, c'est-à-dire dans une région de l'espace vide de sources, est décrit par les équations de Maxwell pour les champs électrique \mathbf{E} et magnétique \mathbf{B} :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.2a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.2c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.2d)$$

On introduit le potentiel vecteur \mathbf{A} tel que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. D'après l'équation (1.2c) le champ électrique s'écrit alors $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi$ avec ϕ un potentiel scalaire. Nous utiliserons dans toute la suite la jauge de Coulomb. Ce choix sera justifié ultérieurement §1.1.1.d. Dans cette jauge $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ et en l'absence de charge $\phi = 0$. Sachant que $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ les équations (1.2b) et (1.2a) sont de fait vérifiées.

Pour résoudre le système ((1.2c),(1.2d)) on se place dans l'espace réciproque. On note $\mathbf{E}(\mathbf{k})$ la transformée de Fourier spatiale de \mathbf{E} . Les champs $\mathbf{E}(\mathbf{k})$ et $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ sont reliés par :

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (1.3a)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3r \mathbf{E}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (1.3b)$$

En prenant le rotationnel de (1.2c), on réécrit les équations (1.2c) et (1.2d) dans l'espace de Fourier :

$$ik^2 \mathbf{E}(\mathbf{k}) = \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{k})}{\partial t} \quad (1.4a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{k})}{\partial t} = ic^2 \mathbf{k} \times \mathbf{B}(\mathbf{k}) \quad (1.4b)$$

On déduit de ce système (1.4) les équations suivantes :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k})}{\partial t} = -i\omega \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}) \quad (1.5a)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\beta}(\mathbf{k})}{\partial t} = i\omega \boldsymbol{\beta}(\mathbf{k}) \quad (1.5b)$$

pour lesquelles on a défini $\omega = ck$, $\hat{\mathbf{k}}$ le vecteur unitaire pointant dans la direction de \mathbf{k} et les variables $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k})$ et $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{k})$ telles que

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}) = -\frac{i}{2\mathcal{N}(\mathbf{k})} \left(\mathbf{E}(\mathbf{k}) - c\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B}(\mathbf{k}) \right) \quad (1.6a)$$

$$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{k}) = -\frac{i}{2\mathcal{N}(\mathbf{k})} \left(\mathbf{E}(\mathbf{k}) + c\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B}(\mathbf{k}) \right) \quad (1.6b)$$

où $\mathcal{N}(\mathbf{k})$ est un coefficient de normalisation qui sera choisi ultérieurement. Les champs électrique et magnétique \mathbf{E} et \mathbf{B} étant réels, cela impose $\mathbf{E}^*(\mathbf{k}) = \mathbf{E}(-\mathbf{k})$ et donc $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{k}) =$

$-\alpha^*(-\mathbf{k})$. en inversant le système (1.6) les champs dans l'espace réciproque se réécrivent :

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}) = -i\mathcal{N}(\mathbf{k}) (\alpha(\mathbf{k}) - \alpha^*(-\mathbf{k})) \quad (1.7a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{c}i\mathcal{N}(\mathbf{k}) \left(\hat{\mathbf{k}} \times \alpha(\mathbf{k}) + \hat{\mathbf{k}} \times \alpha^*(-\mathbf{k}) \right) \quad (1.7b)$$

On a donc maintenant un système de deux équations indépendantes pour les variables $\alpha(\mathbf{k})$ et $\alpha^*(-\mathbf{k})$. Ces dernières représentent les variables normales du système.

1.1.1.b Vecteurs polarisation

D'après les équations (1.2a) et (1.2b), les champs dans le vide sont transverses, c'est-à-dire qu'ils satisfont pour tout \mathbf{k} : $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}) = 0$ et $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{k}) = 0$. Par conséquent $\alpha(\mathbf{k})$ est lui aussi transverse et l'on peut pour chaque valeur de \mathbf{k} le décomposer sur une base de deux vecteurs unitaires ε et ε' perpendiculaires à $\hat{\mathbf{k}}$. On peut alors décomposer α sur cette base :

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{k}) &= \varepsilon \alpha_\varepsilon(\mathbf{k}) + \varepsilon' \alpha_{\varepsilon'}(\mathbf{k}) \\ &= \sum_{\varepsilon} \varepsilon \alpha_\varepsilon(\mathbf{k}) \end{aligned}$$

où $\alpha_\varepsilon(\mathbf{k})$ est la composante de α sur le vecteur ε . L'ensemble $\{\alpha_\varepsilon(\mathbf{k})\}$ forme un ensemble complet de variables indépendantes pour décrire le champ électromagnétique. Les vecteurs ε et ε' représentent les deux polarisations possibles pour une onde de vecteur d'onde \mathbf{k} .

1.1.1.c Un mode du champ comme un oscillateur harmonique

Ecrivons l'énergie totale H_F du champ électromagnétique. D'après l'identité de Parseval-Plancherel :

$$\begin{aligned} H_F &= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r (\mathbf{E}^2(\mathbf{r}) + c^2 \mathbf{B}^2(\mathbf{r})) \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3k (\mathbf{E}^*(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}) + c^2 \mathbf{B}^*(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{k})) \end{aligned} \quad (1.8)$$

En insérant les relations (1.7) et en effectuant le changement de variable \mathbf{k} en $-\mathbf{k}$ pour une partie de l'intégrale il vient :

$$H_F = \epsilon_0 \int d^3k \mathcal{N}^2(\mathbf{k}) [\alpha^*(\mathbf{k}) \cdot \alpha(\mathbf{k}) + \alpha(\mathbf{k}) \cdot \alpha^*(\mathbf{k})]$$

Pour un mode \mathbf{k} du champ, l'énergie associée est

$$h_F(\mathbf{k}) = \epsilon_0 \mathcal{N}^2(\mathbf{k}) [\alpha^*(\mathbf{k}) \cdot \alpha(\mathbf{k}) + \alpha(\mathbf{k}) \cdot \alpha^*(\mathbf{k})] \quad (1.9)$$

On définit les quantités réelles \mathbf{q} et \mathbf{p} telles que

$$\mathbf{q} = \frac{i}{\omega} \mathcal{N} \sqrt{\epsilon_0} [\alpha(\mathbf{k}) - \alpha^*(\mathbf{k})] \quad (1.10a)$$

$$\mathbf{p} = \mathcal{N} \sqrt{\epsilon_0} [\alpha(\mathbf{k}) + \alpha^*(\mathbf{k})] \quad (1.10b)$$

alors l'équation (1.9) devient

$$h_F(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} [\mathbf{p}^2 + \omega^2 \mathbf{q}^2] \quad (1.11)$$

la forme de cette équation suggère que le mode du champ électromagnétique de fréquence ω est mathématiquement équivalent à un oscillateur harmonique de fréquence ω . Il reste à prouver que \mathbf{q} et \mathbf{p} sont bien deux variables position et impulsion conjuguées canoniquement. D'après (1.10) et (1.5a) il vient $\partial \mathbf{q} / \partial t = \mathbf{p}$ et $\partial \mathbf{p} / \partial t = -\omega^2 \mathbf{q}$ ce qui correspond justement aux équations d'Hamilton obtenues à partir de l'Hamiltonien h_F . Le champ électromagnétique pourra donc être considéré formellement comme un ensemble d'oscillateurs harmoniques de fréquence ω . L'énergie totale du champ H_F s'écrit alors :

$$H_F = \epsilon_0 \int d^3k \sum_{\epsilon} \mathcal{N}(\mathbf{k})^2 [\alpha_{\epsilon}^*(\mathbf{k}) \alpha_{\epsilon}(\mathbf{k}) + \alpha_{\epsilon}(\mathbf{k}) \alpha_{\epsilon}^*(\mathbf{k})] \quad (1.12)$$

1.1.1.d Quantification du champ

L'approche simpliste pour quantifier le champ consiste à remplacer simplement les variables normales $\alpha_{\epsilon}(\mathbf{k})$ et $\alpha_{\epsilon}^*(\mathbf{k})$ par des opérateurs d'annihilation $a_{\epsilon}(\mathbf{k})$ et de création $a_{\epsilon}^+(\mathbf{k})$. On peut ensuite postuler l'Hamiltonien et les relations de commutation :

$$H_F = \int d^3k \sum_{\epsilon} \frac{\hbar\omega}{2} [a_{\mathbf{k},\epsilon}^+ a_{\mathbf{k},\epsilon} + a_{\mathbf{k},\epsilon} a_{\mathbf{k},\epsilon}^+] \quad (1.13)$$

$$\begin{cases} [a_{\mathbf{k}\epsilon}, a_{\mathbf{k}'\epsilon'}] = [a_{\mathbf{k}\epsilon}^+, a_{\mathbf{k}'\epsilon'}^+] = 0 \\ [a_{\mathbf{k}\epsilon}, a_{\mathbf{k}'\epsilon'}^+] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\epsilon\epsilon'} \end{cases} \quad (1.14)$$

où la constante $\mathcal{N}(\mathbf{k})$ a été choisie de façon à se ramener à un Hamiltonien d'oscillateurs harmoniques, forme suggérée par (1.11), et à obtenir des relations de commutation (1.14) simples :

$$\mathcal{N}(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}}$$

Il faut ensuite montrer que les équations de Heisenberg déduites de cet Hamiltonien et de ces relations de commutations redonnent bien les équations de Maxwell.

Une approche plus rigoureuse consisterait à partir d'une description Lagrangienne des équations de Maxwell et d'associer à chaque couple "coordonnée généralisée"- "moment canoniquement conjugué" deux opérateurs dont le commutateur vaut $i\hbar$. Une telle approche permettrait d'obtenir directement l'Hamiltonien et de mieux comprendre l'influence du choix de jauge. La jauge de Coulomb permet d'éliminer les variables redondantes et de simplifier le formalisme. On peut montrer que ce choix de jauge est satisfaisant dans une limite non relativiste. On remarque aussi que deux Lagrangiens différant par une dérivée totale sont physiquement équivalents, ce qui ouvre la voie à d'autres descriptions équivalentes de l'électrodynamique quantique [21].

Le champ électromagnétique sera décrit dans la suite par le potentiel vecteur \mathbf{A} , que l'on peut écrire :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int d^3k \sum_{\epsilon} \mathcal{A}_{\mathbf{k}\epsilon} [a_{\mathbf{k}\epsilon} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + a_{\mathbf{k}\epsilon}^+ e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}] \quad (1.15)$$

avec $\mathcal{A}_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0(2\pi)^3 c k}}$. ce qui donne pour les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \int d^3k \sum_{\epsilon} i\mathcal{A}_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}}\epsilon \left[a_{\mathbf{k}\epsilon} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - a_{\mathbf{k}\epsilon}^+ e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right] \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \int d^3k \sum_{\epsilon} i\mathcal{A}_{\mathbf{k}}k(\hat{\mathbf{k}} \times \epsilon) \left[a_{\mathbf{k}\epsilon} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + a_{\mathbf{k}\epsilon}^+ e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right]\end{aligned}$$

1.1.1.e Photons

À l'aide des relations de commutations on peut réécrire l'Hamiltonien :

$$H_F = \int d^3k \sum_{\epsilon} \hbar\omega \left[a_{\mathbf{k},\epsilon}^+ a_{\mathbf{k},\epsilon} + \frac{1}{2} \right] \quad (1.16)$$

Pour un mode (\mathbf{k}, ϵ) les valeurs propres de $a_{\mathbf{k},\epsilon}^+ a_{\mathbf{k},\epsilon}$ sont les entiers positifs ou nuls $n_{\mathbf{k},\epsilon}$:

$$a_{\mathbf{k},\epsilon}^+ a_{\mathbf{k},\epsilon} |n_{\mathbf{k},\epsilon}\rangle = n_{\mathbf{k},\epsilon} |n_{\mathbf{k},\epsilon}\rangle \quad (1.17)$$

où $|n_{\mathbf{k},\epsilon}\rangle$ est le vecteur propre associé à la valeur propre $n_{\mathbf{k},\epsilon}$ et vérifie :

$$\begin{cases} a_{\mathbf{k}\epsilon}^+ |n_{\mathbf{k},\epsilon}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k},\epsilon} + 1} |n_{\mathbf{k},\epsilon} + 1\rangle \\ a_{\mathbf{k}\epsilon} |n_{\mathbf{k},\epsilon}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k},\epsilon}} |n_{\mathbf{k},\epsilon} - 1\rangle \\ a_{\mathbf{k}\epsilon} |0_{\mathbf{k},\epsilon}\rangle = 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

À partir des relations précédentes, l'état $|n_{\mathbf{k},\epsilon}\rangle$ peut être construit à partir de l'état vide d'excitation pour le mode (\mathbf{k}, ϵ) :

$$|n_{\mathbf{k},\epsilon}\rangle = \frac{(a_{\mathbf{k},\epsilon}^+)^{n_{\mathbf{k},\epsilon}}}{\sqrt{n_{\mathbf{k},\epsilon}!}} |0_{\mathbf{k},\epsilon}\rangle \quad (1.19)$$

Comme les modes du champ électromagnétique sont indépendants cf Eq.(1.14), les opérateurs création-annihilation de chaque mode commutent entre eux. Par conséquent les états propres de l'Hamiltonien H_F , notés $|\mathbf{n}_{\mathbf{k}}\rangle$ sont les produits tensoriels des états propres de chaque mode : $|\mathbf{n}_{\mathbf{k}}\rangle = |n_{\mathbf{k},\epsilon}\rangle \otimes |n_{\mathbf{k}',\epsilon'}\rangle \otimes \dots$ d'où

$$H_F |\mathbf{n}_{\mathbf{k}}\rangle = \int d^3k \sum_{\epsilon} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(n_{\mathbf{k},\epsilon} + \frac{1}{2} \right) |\mathbf{n}_{\mathbf{k}}\rangle \quad (1.20)$$

L'état fondamental $|\mathbf{0}\rangle$ du champ correspond à l'état où chacun des modes est dans son état vide $|0_{\mathbf{k},\epsilon}\rangle$. Par rapport à cet état vide, l'état $|\mathbf{n}_{\mathbf{k}}\rangle$ a une énergie $\int d^3k \sum_{\epsilon} n_{\mathbf{k},\epsilon} \hbar\omega_{\mathbf{k}}$. Cela revient à sommer l'énergie $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$ de $n_{\mathbf{k},\epsilon}$ photons dans le mode (\mathbf{k}, ϵ) .

Remarque : on parle de photons "réels" lorsque ces derniers figurent dans un état $|\mathbf{n}_{\mathbf{k}}\rangle$ décrivant un état physique. On parle de photons "virtuels" lorsqu'ils interviennent dans des états intermédiaires, dans lesquels le système ne se trouve pas.

1.1.1.f Propriétés du vide et catastrophe UV

L'état vide ne contenant aucun photon, le champ électrique dans cet état est nul en moyenne mais sa variance est non nulle. En effet d'après (1.18) on a

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{0} | \mathbf{E}(\mathbf{r}) | \mathbf{0} \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{0} | \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) | \mathbf{0} \rangle &= \int d^3k \frac{\hbar \omega_k}{\epsilon_0 (2\pi)^3}\end{aligned}$$

Cette dernière expression est divergente. L'énergie étant proportionnelle au carré des champs (1.8), on retrouve cette divergence pour la densité d'énergie :

$$\rho = \frac{1}{\mathcal{V}} \langle \mathbf{0} | H_F | \mathbf{0} \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \hbar \omega_k = \frac{\hbar c}{2\pi^2} \int_0^{k_M} k^3 dk \quad (1.21)$$

où \mathcal{V} est le volume d'espace considéré, H_F en (1.16). Cette divergence, qui apparaît en k_M^4 si la borne supérieure k_M tend vers l'infini, est appelée divergence "ultraviolette" ou "catastrophe du vide" [6], par analogie avec la catastrophe ultraviolette résolue par Planck en 1900 pour le rayonnement du corps noir. Cette divergence n'est pas seulement un problème formel. Quelle que soit la valeur choisie pour k_M en accord avec les résultats de la mécanique quantique, la valeur obtenue est des ordres de grandeurs plus grande que l'énergie moyenne du vide observée dans les phénomènes gravitationnels [6]. Ce problème est aussi connu sous le nom de "problème de la constante cosmologique" du fait de ses connections avec le problème de la constante cosmologique dans les équations d'Einstein (voir §1.4). Malgré ce problème, un certain nombre de phénomènes dus aux fluctuations du vide sont observables et calculables en circonvenant la divergence par des méthodes de renormalisation ou en comparant simplement entre eux deux états physiques divergeants.

L'impulsion associée aux champ est définie comme [21] :

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \epsilon_0 \int d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \\ &= \int d^3k \sum_{\epsilon} \hbar \mathbf{k} \left[a_{\mathbf{k},\epsilon}^+ a_{\mathbf{k},\epsilon} + \frac{1}{2} \right]\end{aligned} \quad (1.22)$$

Par conséquent, dans le vide,

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{P} \rangle &= \langle \mathbf{0} | \mathbf{P} | \mathbf{0} \rangle \\ &= \int d^3k \sum_{\epsilon} \frac{1}{2} \hbar \mathbf{k} = 0\end{aligned} \quad (1.23)$$

l'impulsion totale est nulle car le vide est isotrope.

1.1.2 Le déplacement de Lamb

Cet effet et sa résolution ont marqué le début de l'électrodynamique quantique moderne. Dirac a dit à cet égard "Il n'y a pas eu de progrès pendant vingt ans, puis il y eu un bond en avant suite à la découverte de Lamb et l'explication qui en a suivi changea

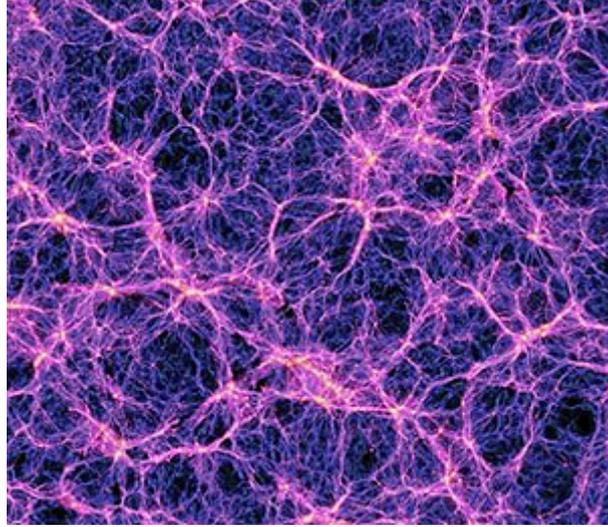


FIGURE 1.2 – Une vision d’artiste du vide quantique [22].

fondamentalement le caractère de la physique théorique. Il s’agit de règles pour s’acomoder...des infinis...”[23]. La mesure du déplacement de Lamb est désormais le test principal de l’électrodynamique quantique, avec une précision obtenue de l’ordre de 10^{-6} [24]. Lamb a obtenu le prix Nobel en 1955 pour ses travaux sur les niveaux de l’atome d’hydrogène.

Les niveaux d’énergie de l’atome d’hydrogène donnés par l’équation de Schrödinger ne dépendent que d’un seul nombre quantique n . Cette dégénérescence est partiellement levée si l’on prend en compte le couplage spin-orbite. Les états avec le même nombre quantique n et le même nombre quantique j caractérisant le moment cinétique total restent cependant dégénérés, par exemple les niveaux $2_{s1/2}$ et $2_{p1/2}$. Dès 1930 des expériences montrent que ce pourrait ne pas être le cas, et c’est en 1947 que Lamb et Retherford parviennent à montrer que le niveau $2_{s1/2}$ a une énergie plus élevée d’environ $1000MHz$ par rapport au niveau $2_{p1/2}$ (voir figure 1.1.2).

Pour expliquer cette levée de dégénérescence, il est nécessaire de prendre en compte le couplage avec le champ électromagnétique du vide. Nous allons esquisser ici la résolution proposée par Bethe en utilisant la théorie des perturbations. Une démarche similaire sera suivie plus en détail pour expliquer le moment cinétique de Casimir . L’Hamiltonien d’un électron lié couplé au champ électromagnétique est :

$$H = H_{at} + H_F - \frac{e}{mc} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2 \quad (1.24)$$

où $H_{at} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r})$ est l’Hamiltonien atomique tel que $H_{at}|n\rangle = E_n|n\rangle$, H_F l’Hamiltonien décrivant le champ électromagnétique (1.13) et \mathbf{A} le potentiel vecteur (1.15) évalué au centre de masse c’est-à-dire pour lequel on néglige les variations spatiales à l’échelle de l’atome : c’est l’approximation dipolaire. On considère le déplacement d’un niveau atomique n dû au couplage avec le vide. Ce dernier sera supposé faible et l’ordre de la perturbation est donné par la multiplicité du potentiel vecteur \mathbf{A} . On se limitera à

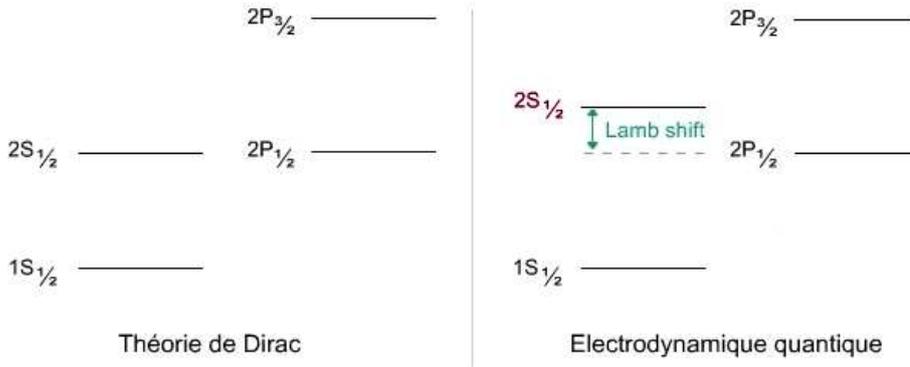


FIGURE 1.3 – Dans la théorie relativiste de Dirac les niveaux de même nombres quantiques n et j sont dégénérés. Il faut prendre en compte le couplage avec le vide électromagnétique pour lever cette dégénérescence. Lamb et Retherford sont parvenus à montrer que le niveau $2s_{1/2}$ a une énergie plus élevée d'environ $1000MHz$ par rapport au niveau $2p_{1/2}$.

l'ordre deux qui est l'ordre le plus bas donnant une contribution non nulle. On remarque que le terme proportionnel à \mathbf{A}^2 dans l'Hamiltonien (1.24) ne contient aucun opérateur atomique, donc la correction à l'énergie associée à ce terme est la même pour tous les niveaux atomiques et ne contribue pas à la levée de dégénérescence. La correction à l'énergie du niveau n s'écrit alors :

$$\Delta E_n = \sum_m \int d^3k \sum_{\epsilon} \frac{\langle n, 0_{\mathbf{k}, \epsilon} | \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} | m, 1_{\mathbf{k}, \epsilon} \rangle \langle m, 1_{\mathbf{k}, \epsilon} | \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} | n, 0_{\mathbf{k}, \epsilon} \rangle}{E_n - E_m - \hbar\omega_k} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \quad (1.25)$$

où l'on voit apparaître un niveau intermédiaire $|m, 1_{\mathbf{k}}\rangle$ d'énergie $E_m + \hbar\omega_k$ pour lequel l'atome est dans un état m et il y a un photon dans le mode (\mathbf{k}, ϵ) . En effet nous avons vu (§1.1.1.e) que l'action du potentiel vecteur revient à créer ou annihiler un (seul) photon. On peut alors interpréter ce terme comme un processus de création puis d'annihilation d'un photon virtuel. Comme l'état du champ reste le vide, il faut annihiler tous les photons créés dans les états intermédiaires. Par conséquent l'ordre deux est bien l'ordre le plus bas. D'après l'expression (1.15) et en sommant sur l'ensemble des modes du champ on peut réécrire :

$$\Delta E_n = \frac{2\alpha}{3\pi m^2 c^2} \sum_m |p_{mn}|^2 \int_0^\infty \frac{\hbar\omega d\omega}{\omega_{mn} - \omega} \quad (1.26)$$

où $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ est la constante de structure fine, $p_{mn} = \langle m | \mathbf{p} | n \rangle$, $\hbar\omega_{mn} = E_n - E_m$ et $\omega = ck$. Cette correction à l'énergie est manifestement divergente, or elle est censée correspondre au déplacement de Lamb mesuré expérimentalement et dont la valeur n'est pas infinie mais faible devant l'écart entre deux niveaux. Comment obtenir un résultat fini ? C'est la résolution de ce dilemme qui a "fondamentalement changé le caractère de la physique théorique" (Dirac, [23]).

Renormalisation de masse de Bethe

La première idée pour résoudre ce dilemme fut proposée par Bethe [25]. Il est nécessaire de considérer le couplage de l'électron avec le vide avant que celui-ci ne soit lié

à l'atome. C'est une contribution inamovible puisqu'on ne peut pas se défaire des fluctuations du champ électromagnétique qu'il faut alors soustraire à la correction (1.26). L'énergie d'un électron libre couplé au vide peut être obtenue à partir de (1.25) en prenant la limite $\omega_{mn} \rightarrow 0$ pour les fréquences de transition.

$$\Delta E_n^{libre} = -\frac{2\alpha}{3\pi m^2 c^2} \sum_m |p_{mn}|^2 \hbar \int_0^\infty d\omega \quad (1.27)$$

En effet la quantité de mouvement de l'électron libre est conservée et il se trouve donc dans un état propre de \mathbf{p} , qui couple deux états de même énergie. On peut réécrire ce terme en utilisant la relation de fermeture $\sum_m |m\rangle\langle m| = \mathbb{1}$, la moyenne quantique portant sur l'état n :

$$\Delta E_n^{libre} = -\left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle \frac{4\alpha}{3\pi m c^2} \hbar \int_0^\infty d\omega \quad (1.28)$$

L'énergie mesurée correspond alors à la différence entre la correction de l'énergie du niveau atomique moins la correction à l'énergie de l'électron seul :

$$\begin{aligned} \Delta E_n^{mes} &= \Delta E_n - \Delta E_n^{libre} \\ &= \frac{2\alpha}{3\pi m^2 c^2} \sum_m |p_{mn}|^2 \hbar \omega_{mn} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega_{mn} - \omega} \end{aligned} \quad (1.29)$$

La divergence est maintenant "seulement logarithmique". Bethe en 1947 lors de la résolution a suggéré que, dans un cadre relativiste, les divergences de ΔE_n et ΔE_n^{libre} devraient être elles-mêmes logarithmiques et, dans ce cas, la correction mesurée ΔE_n^{mes} est de valeur finie. Ce qui est le cas si on prend en compte l'énergie de recul comme nous le verrons par la suite. Bethe fit l'hypothèse que le déplacement de Lamb était principalement dû aux modes non-relativistes du champ, ce qui justifie le développement non-relativiste et légitime une coupure sur les fréquences ω_{max} telle que $\hbar\omega_{max} = mc^2$, ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} \Delta E_n^{mes} &= \frac{2\alpha}{3\pi m^2 c^2} \sum_m |p_{mn}|^2 \hbar \omega_{mn} \log \frac{mc^2}{|\hbar\omega_{mn}|} \\ &\simeq 1040 \text{ MHz} \end{aligned}$$

Ce résultat non-relativiste donne une très bonne estimation du déplacement mesuré expérimentalement : 1057,8MHz [26].

Il est possible de réécrire l'énergie totale E_n^{tot} du niveau n , à partir de (1.28) et (1.29), sous la forme :

$$\begin{aligned} E_n^{tot} &= \left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \right\rangle + \Delta E_n^{mes} - \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle \frac{\delta m}{m} \\ &= \left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{2m^*} + V(\mathbf{r}) \right\rangle + \Delta E_n^{mes} \end{aligned} \quad (1.30)$$

où

$$\delta m = \frac{4\alpha}{3\pi m c^2} \hbar \int_0^\infty d\omega \quad (1.31)$$

peut être interprété comme une correction de masse de l'électron due à la présence du vide quantique. C'est la renormalisation de masse de Bethe. m^* est alors la masse observée, celle qui est mesurée dans toutes les expériences puisque l'on ne peut pas "couper" l'interaction avec le vide.

1.1.3 L'effet Casimir

L'effet Casimir, du nom du physicien néerlandais qui l'a mis en évidence en 1948 [2], est la première manifestation macroscopique des fluctuations quantiques du champ électromagnétique. Il traduit historiquement la force attractive que subissent deux miroirs plans parallèles parfaitement réfléchissants FIG. 1.1.3. L'appellation effet Casimir a aujourd'hui un sens large et correspond à la force due aux fluctuations du vide entre tout type de matériaux [27] et de géométries [28], et peut être répulsive [29, 30].

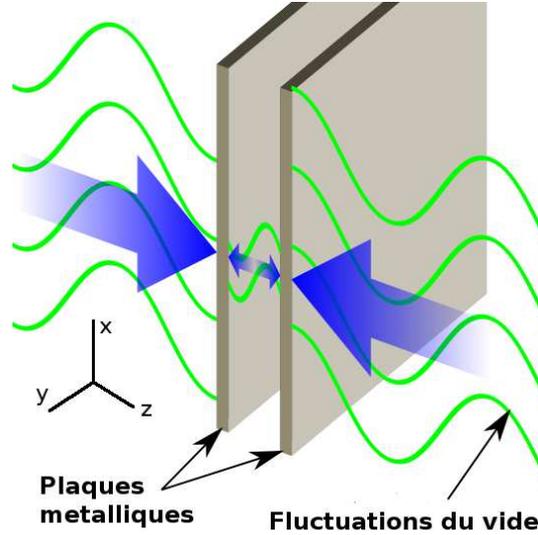


FIGURE 1.4 – Representation schématique de l'effet Casimir. Deux miroirs plans parallèles subissent une force attractive, la densité de mode étant plus faible lorsque les miroirs sont plus proches.

1.1.3.a Densité de modes modifiée par les miroirs

Dans la configuration avec deux miroirs plans, seuls certains modes définis par les conditions aux limites peuvent exister. Le champ électrique tangent à la surface des miroirs est nul, cela conduit aux modes $(k_x, k_y, k_z = \pi n/d)$ où d est la distance entre les miroirs. Leur surface S est telle que $S \gg d^2$ de sorte que l'on peut négliger les effets de bord. On peut alors calculer la différence d'énergie $E_{Cas}(d)$ lorsque les miroirs sont à la distance d et lorsqu'ils sont à l'infini l'un de l'autre à partir de la densité d'énergie (1.21) :

$$E_{Cas}(d) = S \frac{\hbar c}{\pi^2} \left[\sum_n \iint dk_x dk_y \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \frac{n^2 \pi^2}{d^2}} - \frac{d}{\pi} \iiint dk_x dk_y dk_z \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \right] \quad (1.32)$$

À partir de cette expression, en appliquant la formule d'Euler-Maclaurin [31] on obtient une énergie et une force égales à :

$$E_{Cas}(d) = \frac{\hbar c \pi^2 S}{720 d^3} \quad , \quad F_{Cas}(d) = -\frac{\partial E_{Cas}}{\partial d} = \frac{\hbar c \pi^2 S}{240 d^4} \quad (1.33)$$

La force de Casimir est attractive et l'énergie correspond à une énergie de liaison. Il est remarquable que dans ce cas cette force dépend uniquement des paramètres géométriques du système et de deux constantes fondamentales, la constante de Planck, mettant en évidence le caractère quantique de l'effet et la vitesse de la lumière c . Cette universalité vient du modèle de miroirs parfaits qui réfléchissent entièrement toutes les longueurs d'ondes. Cette force décroît très rapidement avec la distance et vaut environ $0,016/d^4 \text{ dyn}(\mu\text{m}^4)/\text{cm}^2$ [32], qui correspond à environ 10Pa lorsque l'écart est de 100nm et à 10^{-3}Pa lorsque l'écart est de $1\mu\text{m}$.

1.1.3.b Pression de radiation

Une autre façon de décrire cet effet est de considérer la pression de radiation sur les parois interne et externe des deux miroirs parallèles [33]. Cette formulation a l'avantage de mettre en avant un transfert de quantité de mouvement entre le vide et un miroir, et de faire apparaître la possibilité d'une composante répulsive de la force de Casimir [29, 30]. La contribution moyenne d'un mode \mathbf{k} orienté selon un angle θ par rapport à la surface, de normale \hat{z} est donnée par :

$$P = \hbar c k \cos^2 \theta \quad (1.34)$$

Dans le cas d'un miroir unique la force exercée de chaque côté du miroir est la même, il n'y a donc pas de mise en mouvement. En revanche, lorsque deux miroirs sont en regard, la densité de mode à l'intérieur de la cavité est modifiée. Dans ce cas, la pression exercée par le mode \mathbf{k} sur la face interne du miroir est :

$$P = \hbar c k \cos^2 \theta g \quad (1.35)$$

où $g = g(k_z)$ est la fonction d'Airy de la cavité. La force par unité de surface totale exercée par le mode \mathbf{k} sur le miroir est donc

$$P = \hbar c k \cos^2 \theta (1 - g) \quad (1.36)$$

Intégré sur tous les modes on obtient la force nette que subit le miroir :

$$F = S \int \frac{d^3 k}{2\pi^3} \hbar c k \cos^2 \theta (1 - g) \quad (1.37)$$

Les pics de la fonction d'Airy fournissent une contribution répulsive à la force. Cependant dans le cas de deux miroirs plans parallèles, lorsque l'on somme sur tous les modes la force est au final attractive.

1.1.3.c L'effet Casimir au sens large

Cet effet se généralise à l'ensemble des matériaux quelles que soient leur conductivité et leur géométrie. Le comportement de la force de Casimir varie en fonction de ces paramètres. Il est même possible d'observer une force de Casimir répulsive [29, 30]. Des modèles permettent de calculer cette force entre deux diélectriques, où l'on tient compte de la réponse optique à travers la constante diélectrique $\epsilon(\omega)$ [34]. Une autre approche, plus récente, basée sur la théorie quantique des réseaux optiques permet de déterminer la fonction d'Airy g de la cavité, qui donne la force entre les plaques et permet la prise en compte de la dissipation [35]. De plus il est possible de donner la contribution des effets de la température ou encore de l'état de surface des deux objets considérés [36]. Cette minuscule force est aujourd'hui mesurée avec une précision inférieure à 1% [32, 37, 38]. Il devient possible de comparer les résultats expérimentaux et théoriques [39], ce qui est important par exemple car les modèles d'unification des forces fondamentales prévoient de nouvelles forces à des distances de l'ordre du nanomètre au micromètre là où la force de Casimir est dominante [40]. Il est important aussi de connaître cette force avec la plus grande précision pour tester la gravité Newtonienne à courtes distances [41, 42].

“L'effet de Casimir” s'entend aujourd'hui au sens large. C'est un sujet pluridisciplinaire. Une définition de l'effet Casimir pourrait être la modification de l'énergie du vide, ou énergie de point zéro, par des contraintes extérieures et ses conséquences. En matière condensée cela fait référence à la force induite par les fluctuations du vide exercées sur les atomes, molécules ou objets macroscopiques, avec un rôle important dans le développement des nanotechnologies électromécaniques [43]. De façon générale on peut évoquer :

- L'effet Casimir électromagnétique : au niveau macroscopique, traduit la force entre conducteurs ou diélectriques ; au niveau microscopique, est lié aux forces de dispersion, d'attraction moléculaires, ou entre un atome et une paroi.
- L'effet Casimir en théorie quantique des champs en général : modification de l'énergie du vide en présence de source ou de contraintes géométriques.
- L'effet Casimir en physique des particules : le “bag model of hadron” en chromodynamique quantique où l'énergie Casimir des quarks et des gluons donne une contribution significative à l'énergie totale des nucléons.
- L'effet Casimir en gravitation et cosmologie : test des gravités Newtoniennes, modification de l'énergie Casimir dans des espaces de topologie non triviale comparés à l'espace de Minkowski.
- L'effet Casimir critique : correspond aux forces entre objets macroscopiques dues à l'ordre à grande échelle dans un milieu au point critique.
- L'effet Casimir dynamique : la force est générée par la variation temporelle des conditions aux limites.
- L'effet Casimir en physique mathématique : a permis la mise au point de techniques de régularisation des divergences comme les fonctions zeta, ou le “heat kernel expansion”.

L'effet macroscopique du vide sur le moment cinétique de la matière comprenant

certaines conditions de symétries est étudié dans ce mémoire. Cet effet rentre dans ce cadre large d'effet Casimir, d'où l'appellation simple de moment cinétique de Casimir. Le couplage étudié fait intervenir des propriétés de bi-anisotropie, que nous allons développer dans la section suivante.

1.2 Quelques aspects de la propagation (classique) dans les milieux

Nous allons aborder ici quelques notions particulières de la propagation du champ électromagnétique dans un milieu matériel. Nous discutons de l'impulsion du champ dans le milieu, qui est l'objet de la "controverse Abraham-Minkowski", et des milieux bi-anisotropes dans lesquels il n'y a ni symétrie spatiale ni symétrie temporelle. Les effets décrits dans cette section sont à l'origine de l'étude présentée dans ce mémoire.

1.2.1 Controverse Abraham-Minkowski

Lorsqu'une onde électromagnétique se propage dans un milieu matériel, il est nécessaire de prendre en compte la polarisation et la magnétisation de ce milieu. Les équations de Maxwell du champ électromagnétique (1.2) se réécrivent alors, ici en présence de sources [44] :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho_q \quad (1.38a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.38b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.38c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_q + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.38d)$$

avec ρ et \mathbf{J} les densités de charges et de courants. L'induction électrique \mathbf{D} et l'excitation magnétique \mathbf{H} sont définies par les relations constitutives :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} \quad (1.39a)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} = \mu_0 \mu \mathbf{H} \quad (1.39b)$$

où \mathbf{P} est le vecteur polarisation et \mathbf{M} est le vecteur aimantation. Ces expressions définissent la permittivité diélectrique réduite ϵ et μ la perméabilité réduite. \mathbf{P} et \mathbf{M} sont les moyennes macroscopiques, sur un volume grand devant celui occupé par un atome ou une molécule, du dipôle électrique et du diôle magnétique. De même ρ_q et \mathbf{J}_q sont les moyennes macroscopiques des densités de charges et de courants libres microscopiques du milieu [45]. L'énergie du champ dans un milieu est alors

$$\begin{aligned} H_F &= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r (\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) + c^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})) \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \left(\epsilon \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) + \frac{c^2}{\mu} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}) \right) \end{aligned} \quad (1.40)$$

La forme correcte pour le tenseur énergie-impulsion associé à une onde électromagnétique, et en particulier la partie impulsion de l'onde, a été débattue depuis un siècle. Pour une approche complète voir [10, 11, 46]. Le premier auteur qui a présenté une expression pour le tenseur énergie-impulsion pour une onde dans un milieu diélectrique est Minkowski [47, 48], en 1908. Cette expression correspond à une densité d'impulsion \mathbf{g}_M :

$$\mathbf{g}_M = \mathbf{D}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (1.41)$$

où \mathbf{D} est l'induction électrique et \mathbf{B} l'induction magnétique. En effet, partant des équations de Maxwell (1.38) si l'on prend le produit vectoriel des équations (1.38c) et (1.38c) respectivement avec les vecteurs \mathbf{D} et \mathbf{B} , puis que l'on ajoute les deux expressions on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{B} + (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{D} - \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

En appliquant les relations constitutives (1.39) on peut réécrire cette équation sous la forme d'une loi de conservation :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{g}_M = \nabla \cdot \tau^M - \mathbf{f}_M \quad (1.42)$$

où \mathbf{g}_M est la densité d'impulsion de Minkowski. τ^M est le tenseur des efforts de Minkowski :

$$\tau_{ij}^M = \frac{1}{4\pi} \left[D_i E_j + B_i H_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \right] \quad (1.43)$$

$\mathbf{f}_M = \mathbf{f}_l + \mathbf{f}_r$ est la densité de force appliquée par le champ sur le milieu. $\mathbf{f}_l = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ est la densité de force de Lorentz exercée par les champs sur les charges moyennées. \mathbf{f}_r est la densité de force de radiation créée par les inhomogénéités spatiales du milieu, dont la i -ième composante est

$$(\mathbf{f}_r)_i = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \nabla_i \epsilon \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \nabla_i \mu^{-1} \cdot \mathbf{B}) \quad (1.44)$$

D'après la loi de conservation (1.42) \mathbf{g}_M est associé à la densité d'impulsion du champ électromagnétique dans le milieu. En conséquence de cette définition, l'impulsion totale \mathbf{G}_0 d'une onde électromagnétique dans le vide augmente lorsque cette dernière pénètre dans un milieu diélectrique, devenant $n\mathbf{G}_0$ où n est l'indice de réfraction du milieu. On peut interpréter ce résultat d'une façon simple. On considère une onde de fréquence ν et de longueur d'onde λ_0 dans le vide. La longueur d'onde est plus courte dans un milieu car la vitesse de propagation est réduite : $\lambda = \frac{c}{n\nu} = \frac{\lambda_0}{n}$. D'après la relation de Broglie $\mathbf{G} = h/\lambda = n\mathbf{G}_0$.

Le tenseur énergie-impulsion obtenu par Minkowski n'est pas symétrique et fut l'objet de critiques notamment concernant son incompatibilité avec la conservation du moment angulaire [11]. Une alternative symétrique fut développée un an plus tard par Abraham

[49, 50] par une approche statistique du système champ plus matière. Le tenseur des efforts s'écrit :

$$\tau_{ij}^A = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{2} (D_i E_j + D_j E_i) + \frac{1}{2} (B_i H_j + B_j H_i) - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \right] \quad (1.45)$$

et la densité d'impulsion associée à l'onde dans un milieu prend alors la forme :

$$\mathbf{g}_A = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (1.46)$$

où \mathbf{E} est le champ électrique et \mathbf{H} l'excitation magnétique. Dans ce cas l'impulsion totale \mathbf{G}_0 d'une onde électromagnétique dans le vide diminue lorsque cette dernière pénètre dans un milieu diélectrique, devenant \mathbf{G}_0/n . Dans ce modèle, un photon possède donc une impulsion dans le milieu plus faible que celle proposée dans l'approche de Minkowski. On peut retrouver ce résultat par un raisonnement simple [51] : on considère un photon d'énergie $E = h\nu$, où ν est la fréquence, puis partant du principe d'équivalence masse-énergie d'Einstein $E = mc^2$, ou $m = E/c^2$, on multiplie cette "masse" par la vitesse de propagation du photon dans le milieu c/n . On obtient alors une impulsion \mathbf{G}_0/n pour l'onde électromagnétique, ce qui correspond à l'expression d'Abraham.

Dans l'approche d'Abraham, la densité de force appliquée par le champ sur le milieu s'écrit :

$$\mathbf{f}_A = \mathbf{f}_M + \frac{\epsilon\mu - 1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (1.47)$$

où l'on a considéré un milieu isotrope et non-conducteur pour simplifier. \mathbf{f}_M est la densité de force dans le cas Minkowski. Le second terme du membre de droite est appelé "force d'Abraham". La loi de conservation est ici :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{g}_A = \nabla \cdot \tau^A - \mathbf{f}_M - \frac{\epsilon\mu - 1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (1.48)$$

Si l'on peut mesurer la force d'Abraham exercée sur le milieu ce sera une preuve en faveur de cette approche. En revanche, si l'on considère ce terme comme une partie du champ, en le passant dans le membre de gauche, on retrouve Minkowski.

La controverse est due au fait que l'impulsion totale de l'onde électromagnétique et du milieu diélectrique dans lequel elle se propage comprend une partie associée à la matière et une partie associée au champ. L'attribution sans équivoque de leur part respective semble arbitraire.

D'autres tenseurs énergie-impulsion ont été proposés depuis [10, 52, 53] et un certain nombre d'expériences peuvent s'interpréter avec l'une ou l'autre de ces expressions [54–57]. Certaines approches semblent plus complètes ou plus générales : le tenseur d'Helmoltz, pour n'en citer qu'un, permet de prendre en compte les expériences de magnétostriction ou d'électrostriction, non décrites par les autres approches [10]. Malgré ces propositions la question resta ouverte pendant près de cent ans [11].

Une résolution de ce dilemme a été proposée très récemment par Barnett [46]. En prenant en compte le couplage avec la matière, l'auteur arrive à l'égalité suivante :

$$\mathbf{P} + \mathbf{G}_M = \mathbf{P}_{cin} + \mathbf{G}_A \quad (1.49)$$

où \mathbf{P} et \mathbf{P}_{cin} sont respectivement les moments canonique et cinétique de la matière, définis par :

$$[R_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_{cin} = M\dot{\mathbf{R}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}} \quad (1.50)$$

où \mathbf{R} est la coordonnée spatiale. Dans ce cas \mathbf{G}_M le moment de Minkowski et \mathbf{G}_A le moment d'Abraham sont interprétés respectivement comme les moments canonique et cinétique du champ électromagnétique. Cette approche, bien qu'elle se doit d'être confrontée aux expériences, est intéressante car elle fait le lien avec une possible description microscopique [58]. Ce qui est précisément ce dont nous allons discuter dans les chapitres suivants.

1.2.2 L'effet magnetoélectrique

Une définition générale de l'effet magnetoélectrique est le couplage des champs électrique et magnétique dans la matière. Il est possible de développer l'énergie libre d'un matériau en puissance des champs [59] :

$$\begin{aligned} F(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = & F_0 - P_i^p E_i - M_i^p H_i - \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon E_i E_i - \frac{1}{2}\mu_0\mu H_i H_i \\ & - \chi_{ij} E_i H_j - \frac{1}{2}\beta_{ijk} E_i H_j H_k - \frac{1}{2}\gamma_{ijk} E_i E_j H_k + \dots \end{aligned} \quad (1.51)$$

où \mathbf{P}^p et \mathbf{M}^p désignent la polarisation et la magnétisation permanentes du matériau. Dans le cas où ces dernières quantités sont nulles et en ne gardant que les termes linéaires, les relations constitutives (1.39) du milieu se généralisent :

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon\mathbf{E} + \chi\mathbf{B} \\ \mathbf{H} &= -\chi^T\mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0\mu}\mathbf{B} \end{aligned} \quad (1.52)$$

Le tenseur χ décrit l'apparition d'une polarisation du milieu suite à l'application d'un champ magnétique ou d'une magnétisation suite à l'application d'un champ électrique. Il caractérise l'effet magnétoélectrique linéaire. Un tel milieu est appelé milieu bi-anisotrope [60, 61].

Cette réponse magnétoélectrique du milieu aux champs est possible seulement dans des milieux non-invariants par symétrie temporelle [44]. Cette non-invariance par renversement du temps peut-être créée artificiellement par application d'un champ magnétique externe [62], ou bien dans tout milieu soumis simultanément à un champ magnétique et un champ électrique externes [63], ce que nous appellerons dans la suite, par abus de langage, l'effet magnétoélectrique ME. Dans ce cas le tenseur χ s'écrit : $\chi_{ij} = E_{0i}B_{0j} - E_{0j}B_{0i}$ où \mathbf{E}_0 et \mathbf{B}_0 sont les champs électrique et magnétique externes. On trouve encore ces conditions pour tout milieu en mouvement [64], ceci est dû à l'effet Fizeau, voir FIG. 1.6, pour lequel $\chi_{ij} = (\epsilon - 1)\epsilon_{ijk}v_k/c$. Il est aussi possible de trouver cette propriété de façon intrinsèque dans des matériaux présentant un ordre magnétique à longue portée [65, 66] ou une structure particulière [8]. L'exemple le plus connu de bi-anisotropie optique est le pouvoir rotatoire, qui peut-être décrit par le tenseur symétrique $\chi_{ij}(\omega) = i\omega g\delta_{ij}$ où g est un pseudo-scalaire induit par la chiralité du milieu, voir FIG. 1.5.

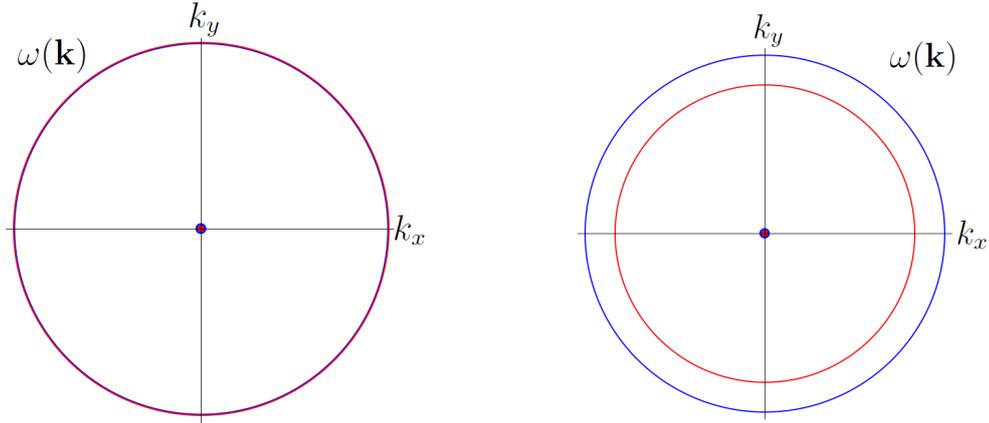


FIGURE 1.5 – *à gauche* : Relation de dispersion pour un milieu isotrope, par exemple : le vide. Les deux modes du champ électromagnétique correspondant aux deux polarisations, en rouge et en bleu, ont la même relation de dispersion. *à droite* : Relation de dispersion pour un milieu chiral. Les deux modes du champ, ici les polarisations circulaires gauche et droite, ont une relation de dispersion différente. Le milieu est isotrope. L'indice optique perçu par chacun des modes est différent, c'est un milieu biréfringent.

1.2.3 L'effet ME dans le vide

L'effet magnétoélectrique obtenu par l'application de champs magnétique et électrique externes dans un milieu quelconque transforme ce milieu en un milieu biréfringent. Dans le cas où les champs sont perpendiculaires l'un à l'autre, une biréfringence linéaire par rapport aux champs, avec des axes optiques parallèles et perpendiculaires aux champs externes a été prédite [67–69] et observée [70] pour les liquides moléculaires. Comme cet effet est valable pour tout milieu, il devrait aussi exister dans le cas du vide. Une biréfringence magnétoélectrique a été prédite [71]. Les champs électromagnétiques dans le vide peuvent être décrits par le Lagrangien d'Euler-Heisenberg [72] :

$$L_{EH} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + \frac{1}{2} \left[\nu (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + \eta (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2 \right] \quad (1.53)$$

où ν et η sont deux scalaires. Ce Lagrangien prend en compte les corrections au premier ordre par rapport à la constante de structure fine. Le premier terme correspond à une description du vide identique à celle vue en section 1.1.1 et conduit à l'Hamiltonien (1.8). Les deux termes suivants correspondent aux deux invariants relativistes que l'on peut prendre en compte à l'ordre un et représentent la première correction possible. Les vecteurs induction électrique et excitation magnétique sont donnés par les relations :

$$\mathbf{D} = \frac{\partial L_{EH}}{\partial \mathbf{E}} \quad , \quad \mathbf{H} = -\frac{\partial L_{EH}}{\partial \mathbf{B}} \quad (1.54)$$

On applique à présent les champs électrique et magnétique externes \mathbf{E}_0 et \mathbf{B}_0 croisés. Pour décrire la dynamique des champs libres \mathbf{E}_ω et \mathbf{B}_ω , on linéarise (1.54) autour de ces valeurs : $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_\omega$ et $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_\omega$, en supposant $\mathbf{E}_\omega \ll \mathbf{E}_0$ et $\mathbf{B}_\omega \ll \mathbf{B}_0$. Les relations de Maxwell (1.38) appliquées à ces champs conduisent à une équation d'onde tensorielle

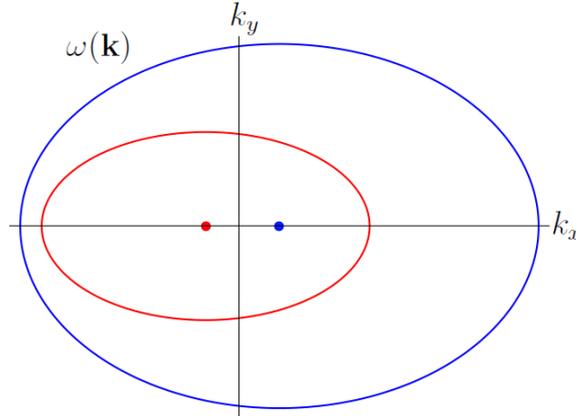


FIGURE 1.6 – Relation de dispersion pour un milieu bi-anisotrope obtenu par effet Fizeau ou par application de champs statiques externes (même effet). On distingue en rouge et bleu les deux modes liés à la polarisation du champ électromagnétique. La relation de dispersion est excentrée selon l'axe correspondant à la vitesse \mathbf{v} du milieu dans le cas de l'effet Fizeau, ou au vecteur $\mathbf{S}_0 = \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0$ dans le cas de l'effet ME, où \mathbf{E}_0 et \mathbf{B}_0 correspondent aux champs électrique et magnétique externes

pour les champs électrique et magnétique libres [71]. Avec le choix $\nu = e^4 \hbar / 45 \pi m^4 c^7$, $\eta = 7\nu$ Rizzo et Rikken trouvent une biréfringence

$$\Delta n_{ME} = 3\nu E_0 B_0 \quad (1.55)$$

Les axes optiques sont parallèles et perpendiculaires aux champs externes. Avec des valeurs de champs accessibles en laboratoire (10^8V/m , 30T) cela représente $\Delta n \sim 7 \cdot 10^{-23}$. Cette valeur est très faible. Dans les cristaux la biréfringence est de l'ordre du pourcent (Calcite $\Delta n_{\text{calcite}} = 0,17$, Ruby $\Delta n_{\text{ruby}} = 0.008$). La mesure de la biréfringence du vide représente un défi expérimental sur lequel travaillent plusieurs équipes [73]. La mise en évidence de cette biréfringence serait la preuve d'une violation du principe de superposition dans le vide [74].

Un point important de cette étude est que l'effet magnétoélectrique pour une onde se propageant dans un sens ou dans le sens opposé est de signe opposé, B_0 étant un pseudo-scalaire. Par conséquent il n'y aura pas de compensation de l'impulsion pour deux ondes se propageant en sens inverse. La relation de dispersion est décentrée FIG. 1.6. Les deux centres de masse associés aux deux modes possibles ne se déplacent pas a priori de la même façon et la somme sur l'ensemble des vecteurs d'ondes et des modes peut conduire à une valeur non nulle de l'impulsion totale du champ électromagnétique libre.

Dans le but de déterminer l'impulsion totale du champ électromagnétique, nous avons résolu l'équation d'onde obtenue après application des champs externes. Nous obtenons la relation de dispersion $\omega(\mathbf{k})$ visible sur la figure 1.7. On distingue deux modes dont les ellipses, caractéristiques d'une propagation anisotrope, sont non-centrées. Cela met en évidence le caractère bi-anisotrope du milieu et la possible valeur non-nulle de l'impulsion. L'obtention de la relation de dispersion est un premier pas vers une quantification du champ électromagnétique dans un milieu bi-anisotrope.

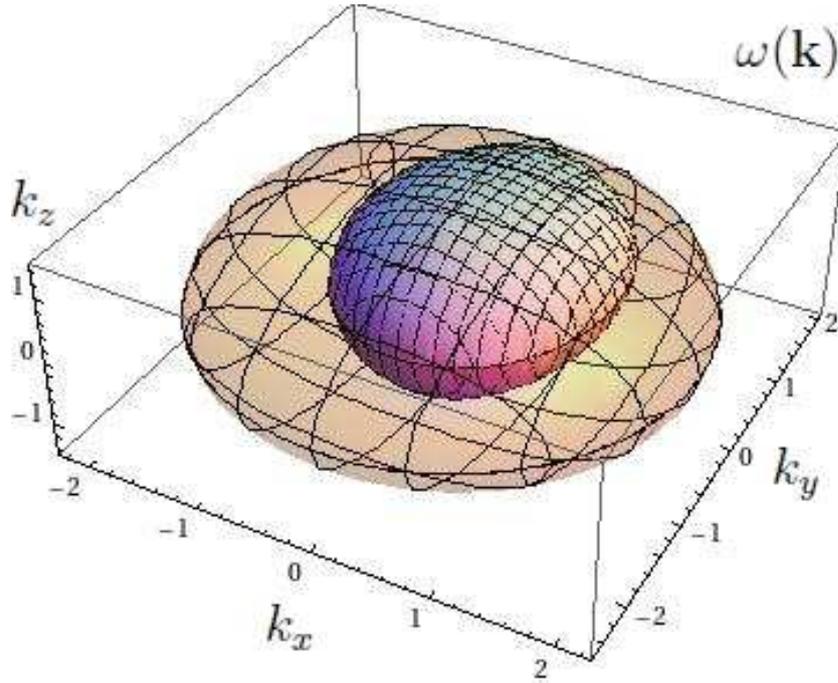


FIGURE 1.7 – Relation de dispersion pour un vide bi-anisotrope pour les deux modes des champs électromagnétiques. Ces derniers sont décrits par le Lagrangien d'Euler-Heisenberg. L'effet magnétoélectrique est obtenu par application de champs statiques externes $\mathbf{E}_0\hat{y}$ et $\mathbf{B}_0\hat{x}$. Ces champs sont exagérément grands pour rendre l'effet visible à l'oeil. Les unités sont arbitraires.

1.3 Une impulsion venant du vide ?

Une nouvelle manifestation macroscopique des fluctuations de point zéro du champ électromagnétique a été mise en avant par Feigel en 2004 [9] qui a proposé que ces fluctuations du vide participent à l'impulsion de la matière, de la même façon qu'elles participent à l'énergie entre deux plaques donnant lieu à la force de Casimir. Cet effet est controversé et son existence même est discutée [7, 8, 12, 75–80]. Nous allons détailler ici l'approche développée par Feigel ainsi que les principales critiques dont elle fait l'objet.

1.3.1 Vers une résolution de la controverse Abraham-Minkowski ?

Le point de départ de Feigel est la controverse Abraham-Minkowski sur l'impulsion d'un photon dans un milieu diélectrique (avant la récente résolution [46], voir §1.2.1). En effet Minkowski a proposé l'impulsion $\mathbf{G}_M = 1/4\pi c \int d^3r \mathbf{D} \times \mathbf{B}$ alors que Abraham est arrivé à $\mathbf{G}_A = 1/4\pi c \int d^3r \mathbf{E} \times \mathbf{H}$. Nombre d'expériences concluent en faveur de l'une ou l'autre de ces expressions. Feigel en conclut alors que le moment mesuré n'est pas seulement électromagnétique et doit prendre en compte une contribution due à la matière. Pour cela il est nécessaire de considérer le couplage entre la matière et le champ. En conséquence, une modification des propriétés de la matière doit influencer sur l'impulsion du champ électromagnétique, et en particulier sur l'impulsion du vide. Cette dernière est en général nulle pour des raisons de symétrie. Dans des milieux bi-anisotropes pour

lesquels il y a ni symétrie spatiale ni temporelle, on devrait donc retrouver une impulsion non-nulle.

Le lagrangien équivalent aux relations de Maxwell (1.2) s'écrit :

$$L_F = \int d^3r \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\epsilon}{2} \mathbf{E}^2 - \frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2 \right) \quad (1.56)$$

En écrivant les champs à partir du potentiel vecteur \mathbf{A} et scalaire ϕ :

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad , \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.57)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \quad (1.58)$$

On retrouve les équations de Maxwell avec les équations du mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial A_i}{\partial t}} = \frac{\partial L}{\partial A_i} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial t}} = \frac{\partial L}{\partial \phi} \quad (1.59)$$

Pour résoudre le problème de la quantité de mouvement d'un photon dans la matière, il est nécessaire de prendre en compte l'interaction lumière-matière. Le milieu peut être en mouvement et ainsi influencer sur la propagation des champs. En prenant en compte le déplacement du milieu à la vitesse \mathbf{v} les champs dans ce milieu sont, au premier ordre en v/c :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}' + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}' \quad , \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}' + \frac{1}{c} \mathbf{E}' \times \mathbf{v} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{D}' + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}' \quad , \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}' + \frac{1}{c} \mathbf{D}' \times \mathbf{v}' \end{aligned} \quad (1.60)$$

où la notation ' désigne le champ dans le référentiel au repos. Cela conduit à un Lagrangien d'interaction :

$$L_{MF} = \int d^3r \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\epsilon}{2} \mathbf{E}^2 - \frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2 \right) + \frac{\epsilon\mu - 1}{4\pi\mu c} \mathbf{B}(\mathbf{E} \times \mathbf{v}) \right) \quad (1.61)$$

où le terme $\rho \mathbf{v}^2/2$ a été ajouté pour prendre en compte l'énergie cinétique du milieu, supposé ici un fluide incompressible. Ce Lagrangien étant invariant par translation, d'après le théorème de Noether, l'impulsion suivante est conservée :

$$\begin{aligned} K_i &= \int d^3r \left(\frac{\partial L_{MF}}{\partial v_i} - \frac{\partial L_{MF}}{\partial \frac{\partial A_j}{\partial t}} \frac{\partial A_j}{\partial r_i} \right) \\ \text{soit } \mathbf{K} &= \int d^3r \left(\rho \mathbf{v} + \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \right) \end{aligned} \quad (1.62)$$

où \mathbf{A} est le potentiel vecteur. Le terme $\rho \mathbf{v}$ peut être obtenu à partir des équations du mouvement pour le fluide

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L_{MF}}{\partial v_i} = \frac{\partial L_{MF}}{\partial r_i}$$

d'après lesquelles on obtient :

$$\rho \mathbf{v} = \frac{\epsilon\mu - 1}{4\pi\mu c} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (1.63)$$

Si l'on remplace cette équation dans (1.62) on obtient $\mathbf{K} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}/4\pi c = \mathbf{G}_M$ en accord avec les mesures. Ce qui apporte, d'après Feigel, une réponse à la controverse Abraham-Minkowski : l'impulsion électromagnétique est donnée par l'expression d'Abraham, alors que l'impulsion mesurée prend en compte le moment cinétique de la matière sans lequel il n'y a pas d'interaction. Cette impulsion mesurée correspond alors au moment de Minkowski.

Le première remarque que nous pouvons faire à cette étape est que le terme $\rho \mathbf{v}^2/2$ a été ajouté ici de façon heuristique. Un Lagrangien d'interaction entre le champ électromagnétique et la matière doit prendre en compte un terme de couplage [21, 81]. Nous allons revoir la dérivation du moment conservé au § 1.3.3 ainsi que les critiques concernant ce Lagrangien. En conséquence le moment conservé \mathbf{K} proposé ici Eq.(1.62) est faux, et la conclusion ne tient plus.

1.3.2 Impulsion et fluctuations de champ

Les champs intervenant de façon quadratique dans l'expression (1.63) il est donc possible d'avoir une contribution non nulle due aux fluctuations quantiques des champs électromagnétiques. Cependant pour un même mode se propageant dans des directions opposées la contribution sera nulle. Pour avoir une contribution non nulle il faut briser la symétrie temporelle ainsi que la symétrie spatiale qui définira une direction privilégiée, cf FIG. 1.3.2.

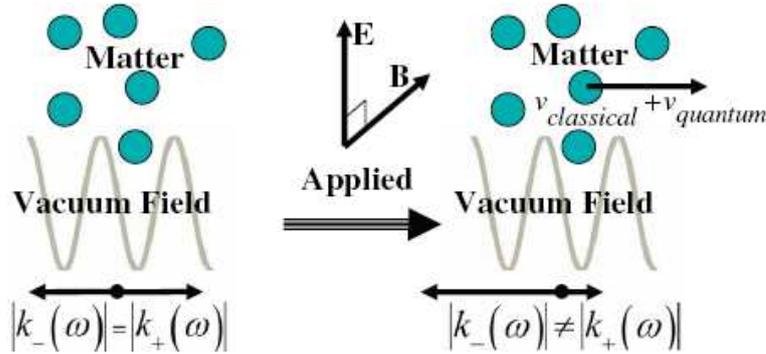


FIGURE 1.8 – Lorsque l'on applique des champs externes \mathbf{E} , \mathbf{B} on brise à la fois la symétrie spatiale et la symétrie par renversement du temps (voir § 1.2.2). On se trouve alors dans un milieu bi-anisotrope dans lequel les modes du champs électromagnétique se propageant dans des directions opposées \mathbf{k}_+ et \mathbf{k}_- , ne se compensent plus. Par conséquent l'état vide du champs possède une impulsion non nulle lorsque les champs externes sont appliqués. D'après la conservation de la quantité de mouvement cette impulsion est compensée par le déplacement de la matière. Figure issue de [9].

Ces conditions sont réunies dans les milieux bi-anisotropes, pour lesquels la relation de

dispersion est :

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \epsilon\mathbf{E} + \chi\mathbf{H} \\ \mathbf{B} &= \mu\mathbf{H} + \chi^T\mathbf{E}\end{aligned}\quad (1.64)$$

Feigel utilise ensuite l'effet magnéto-électrique : tout matériau devient bi-anisotrope sous l'effet de champs extérieurs électrique \mathbf{E}_0 et magnétique \mathbf{B}_0 statiques. Dans ce cas $\chi_{ij} = g(\mathbf{E}_{0i}\mathbf{B}_{0j} - \mathbf{E}_{0j}\mathbf{B}_{0i})$ où g est un paramètre de couplage magnéto-électrique dépendant des propriétés du matériau. Ce milieu se déplaçant à la vitesse \mathbf{v} , on applique la transformation de type (1.60) aux champs et (1.63) devient :

$$\rho\mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\epsilon\mu - 1}{\mu c} \mathbf{E} \times \mathbf{B} + \frac{1}{\mu c} \mathbf{E} \times (\chi^T\mathbf{E}) + \frac{1}{\mu c} \mathbf{B} \times (\chi\mathbf{B}) \right) \quad (1.65)$$

On remarque dans un premier temps, suite à l'application de champs externes, une contribution non nulle à l'impulsion :

$$\rho\mathbf{v}_{classique} = \frac{\epsilon\mu - 1}{4\pi\mu c} \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 \quad (1.66)$$

Ce qui signifie que tout fluide soumis à des champs électrique et magnétique croisés acquiert une impulsion non nulle dans la direction définie par le produit vectoriel des deux champs.

En prenant la moyenne quantique de l'expression (1.65) dans l'état fondamental des champs, ie le vide électromagnétique, et en intégrant sur tous les modes on obtient la contribution du vide, pour la composante i :

$$\rho(\mathbf{v}_{vide})_i = \frac{1}{8\pi^3} \frac{\epsilon\mu + 1}{\mu c} \int d\omega \frac{\hbar\omega^3}{c^4} \epsilon_{hji} \chi_{jh} \quad (1.67)$$

où ϵ_{hji} est le tenseur complètement antisymétrique d'ordre trois de Levi-Civita.

À ce point nous pouvons remarquer que Feigel intègre sur le spectre associé au vide seul en prenant $\langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} \hbar\omega$ alors que la description est macroscopique et fait intervenir les champs dans ce milieu. L'énergie, donnée par (1.40), dépend des propriétés ϵ et μ du milieu. Il semble nécessaire d'obtenir la moyenne quantique du champ électrique dans le milieu en appliquant par exemple le théorème de fluctuation-dissipation.

En poursuivant l'approche de Feigel, on peut réécrire (1.67) d'après la définition de χ :

$$\rho\mathbf{v}_{vide} = \frac{1}{8\pi^3} \frac{\epsilon\mu + 1}{\mu c} \int d\omega \frac{\hbar\omega^3}{c^4} \Delta n \mathbf{e}_z \quad (1.68)$$

où Δn est relié au tenseur magnéto-électrique χ et sera évalué de manière phénoménologique, et \mathbf{e}_z est le vecteur unitaire pointant dans la direction $\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0$. Cette intégrale diverge comme la puissance quatrième de la fréquence. La divergence n'est pas étonnante pour un phénomène associé aux fluctuations du vide, elle apparaît de la même façon que la divergence de la densité d'énergie du vide entre les deux plaques métalliques dans le calcul de la force de Casimir. Si dans ce dernier cas la divergence

disparaît dans le calcul de la force, il faut ici la régulariser. Feigel opte pour un cut-off argumentant qu'au delà d'une certaine valeur ω_c , phénoménologique, le milieu ne répond plus. En supposant Δn indépendant de la fréquence, cela donne une vitesse non nulle dirigée par les modes hautes fréquences :

$$v_{vide} = \frac{1}{\rho 32\pi^3} \frac{\epsilon\mu + 1}{\mu c} \frac{\hbar\omega_c^4}{c^4} \Delta n \quad (1.69)$$

La valeur ω_c est choisie telle que la longueur d'onde associée λ_c soit typiquement de l'ordre de la distance interatomique dans un cristal $\sim 0.1nm$. D'après des mesures expérimentales de la biréfringence dans le vide [70], Feigel estime $\Delta n \simeq 10^{-11}$. En prenant $\rho = 10^3 kgm^{-3}$ et $\epsilon = 1.5$ ainsi que des valeurs expérimentalement viables pour les champs externes : $\mathbf{E}_0 = 10^5 Vm^{-1}$ et $\mathbf{B}_0 = 17 T$ l'auteur estime :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{classique} &= 20 nms^{-1} \\ \mathbf{v}_{vide} &= 50 nms^{-1} \end{aligned} \quad (1.70)$$

La contribution des fluctuations du vide à la vitesse du fluide est prépondérante et ces vitesses semblent être mesurables expérimentalement. La presse s'enthousiasme sur ce résultat. Nous pouvons citer ici les titres "Momentum from nothing" pour la section "Focus" de Physical Review [82], ou "Movement from nothing" dans la section "news" de Nature [83], qui évoquent une brillante idée, voire un pas en direction des machines à mouvement perpétuel !

1.3.3 Critiques

La contribution des fluctuations du vide à l'impulsion est une considération nouvelle et certains points de l'approche de Feigel semblent discutables. Plusieurs critiques ont été émises, jusqu'à remettre en cause les résultats [12, 75, 78]. Nous développons ici certaines de ces critiques, les réponses qui ont été proposées et les questions qui restent ouvertes.

1.3.3.a Invariance de Lorentz

La première remarque que l'on peut faire porte sur la non-invariance de Lorentz de la quantité de mouvement $\rho\mathbf{v}_{vide}$:

$$\rho\mathbf{v}_{vide} = \frac{1}{32\pi^3} \frac{\epsilon\mu + 1}{\mu c} \frac{\hbar\omega_c^4}{c^4} g\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 \quad (1.71)$$

où g est le paramètre de couplage magnéto-électrique. On voit sur cette expression que les vecteurs $\rho\mathbf{v}_{vide}$ et $\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0$ ainsi que le cut-off ω_c sont modifiés lors d'une transformation de Lorentz. Or une loi physique se doit d'être invariante par cette transformation, ce qui n'est pas le cas pour (1.71). Par souci de simplicité nous considérerons ici le premier ordre en v/c , on s'intéresse donc à l'invariance Galiléenne. Nous pouvons commencer par nous occuper du terme ω_c^4 . L'application d'une coupure enlève toute chance d'invariance, la fréquence choisie dépendant du référentiel dans lequel on se trouve. Cependant le terme ω_c^4 remplace simplement l'intégrale $\int d^3k \omega_{\mathbf{k}}$ qui elle est rigoureusement invariante

(scalaire de Lorentz) bien que infinie s'il n'y a pas de coupure. Pour le reste, si l'on suppose les champs \mathbf{E}_0 et \mathbf{B}_0 orthogonaux, ce qui est invariant par la transformée, la vitesse est dans la troisième direction.

Raisonnons par l'absurde : supposons l'invariance Galiléenne. Dans ce cas, dans un référentiel \mathcal{R}' en mouvement de vitesse \mathbf{v} dans cette direction, en transformant les champs selon (1.60) on a :

$$\mathbf{E}'_0 \times \mathbf{B}'_0 = \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 - 2(\mathbf{E}_0^2 + \mathbf{B}_0^2) \mathbf{v}$$

d'où

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{v}' &= \frac{1}{8\pi^3} \frac{\epsilon\mu + 1}{\mu c} \int d^3 k' \frac{\hbar\omega_{k'}}{c} g \mathbf{E}'_0 \times \mathbf{B}'_0 \\ \rho \mathbf{v}_{vide} - \rho \mathbf{v} &= \frac{1}{8\pi^3} \frac{\epsilon\mu + 1}{\mu c} \int d^3 k \frac{\hbar\omega_k}{c} g (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 - 2(\mathbf{E}_0^2 + \mathbf{B}_0^2) \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (1.72)$$

en soustrayant (1.71) à (1.72) on obtient, pour $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$:

$$8\pi^3 \rho \frac{\mu c}{\epsilon\mu + 1} \left(\int d^3 k \frac{\hbar\omega_k}{c} g 2 \right)^{-1} = (\mathbf{E}_0^2 + \mathbf{B}_0^2) \quad (1.73)$$

où le membre de gauche ne contient que des constantes dépendant du matériau et est donc indépendant des champs externes. Il n'y a donc pas invariance Galiléenne. Mais l'impulsion seule n'est jamais invariante car elle fait partie d'un tenseur qui obéit en sa totalité à l'invariance de Lorentz. On peut donc se poser la question si le moment de Casimir est interdit ou non par la relativité restreinte.

Un moyen pour retrouver l'invariance de Lorentz proposé par van Tiggelen, Rikken et Krstić [80, 84], est de construire une formulation invariante dès le départ. Pour cela on part des invariants de Lorentz scalaires $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$ et $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$. Cette seconde expression étant impaire lors d'une transformation de parité, seulement des puissances paires de ce terme pourront être considérées. Une densité de Lagrangien possible correspondant de façon invariante à L_{MF} peut alors s'écrire :

$$\mathcal{L} = -\rho \sqrt{1 - \mathbf{v}^2} + \frac{1}{2} (\epsilon \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) - (\epsilon - 1) \mathbf{E} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{\lambda}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + \frac{\nu}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \quad (1.74)$$

ce qui amène à l'expression suivante pour la vitesse :

$$\rho \mathbf{v} - \rho \mathbf{v}(0) + \varrho(\lambda + 4\nu) (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 - 2(\mathbf{E}_0^2 + \mathbf{B}_0^2) \mathbf{v}) + \varrho(\epsilon - 1)[\mathbf{v} - \mathbf{v}(0)] = 0 \quad (1.75)$$

où $\varrho = \hbar \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}}$. Cette expression (1.75) est invariante par transformation de Lorentz. Ensuite les auteurs [84] montrent que la régularisation dimensionnelle de ϱ conduit à $\varrho = 0$. Ils en concluent que, si l'on admet la régularisation dimensionnelle, l'effet Feigel/le moment cinétique de Casimir n'existe pas pour un milieu infini. Si cette dernière conclusion est discutable, cette approche montre au moins que l'on peut retrouver l'invariance de Lorentz.

On peut noter aussi que les transformations des champs lors du changement de référentiel (1.60) ne sont pas en toute rigueur valables dans la limite Galiléenne [78]. À faible vitesse il faudrait choisir entre une limite “électrique” ou “magnétique” :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}' \quad , \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}' + \frac{1}{c} \mathbf{E}' \times \mathbf{v} \\ \text{ou} \quad \mathbf{E} &= \mathbf{E}' + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}' \quad , \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}' \end{aligned}$$

Cependant cela ne change pas le raisonnement : d’une part on retrouve toujours le terme $\mathbf{B}(\mathbf{E} \times \mathbf{v})$ de (1.61), même si le facteur peut être différent, d’autre part seule l’invariance de Lorentz du résultat final est importante [79].

1.3.3.b Interaction champs-matière

Le lien entre les champs et la matière est donné par le Lagrangien d’interaction L_{MF} (1.61). Le milieu, un fluide ici, intervient par son énergie cinétique $\rho \mathbf{v}^2$, terme qui pourrait aussi bien décrire le mouvement d’un corps rigide. Schützhold et Plunien [12] ont proposé une densité de Lagrangienne décrivant la dynamique d’un fluide irrotationnel, sans viscosité :

$$\mathcal{L}_{fluide} = -[\rho \dot{\phi} + \rho(\nabla\phi)^2 + \mu(\rho)] \quad (1.76)$$

avec ϕ le potentiel de vitesse tel que $\mathbf{v} = \nabla\phi$ et $\mu(\rho)$ l’enthalpie spécifique. La prise en compte de cette description permettrait par exemple d’obtenir une accélération du fluide, plutôt qu’une vitesse “générée instantanément”. D’autre part cela soulève des questions sur la validité de la description macroscopique du système : quel sont les degrés de liberté du fluide, l’écoulement peut-il être irrotationnel ? Peut-on négliger la dépendance de la permittivité ϵ et de la perméabilité μ avec la masse volumique ρ ? Il semble donc nécessaire d’adopter une description microscopique décrivant plus rigoureusement l’interaction.

Lors de l’interaction avec la matière, il faut aussi prendre en compte la vitesse du milieu, ce qui a été effectué par la transformation des champs (1.60) et représente une étape clef du raisonnement [76]. Cependant une autre contribution possible est à prendre en compte. Considérons un milieu bi-anisotrope de vitesse nulle décrit par le tenseur χ tel que $\chi_{ij} = \kappa(\hat{x}_i\hat{y}_j - \hat{x}_j\hat{y}_i)$ où \hat{u} est le vecteur unitaire dans la direction \mathbf{u} , κ est un scalaire. Dans ce cas la densité Lagrangienne pour les champs s’écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{champs} &= \frac{\epsilon}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2 + \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \chi^T \mathbf{E} \\ &= \frac{\epsilon}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2 + \frac{1}{\mu} \kappa (B_y E_x - B_x E_y) \end{aligned} \quad (1.77)$$

Ce qui correspond formellement à la densité Lagrangienne d’un milieu ordinaire se déplaçant à une vitesse \mathbf{v} proportionnelle à $-\chi \hat{z}$. Pour ce milieu le dernier terme de (1.77) serait $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{v}) = -\mathbf{v} \cdot (B_y E_x - B_x E_y)$. Or dans un milieu ordinaire et en mouvement la moyenne quantique du terme $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ dans l’état vide de champs ne s’annule pas, mais donne une contribution divergente proportionnelle à $\mathbf{v} \langle \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 \rangle$, contribution qui n’a pas été décrite dans l’approche de Feigl. Ce terme est dû à l’effet Fizeau, que nous détaillerons au chapitre 3.

1.3.3.c Une vitesse instantanée ?

Au premier abord on peut se demander si ce moment cinétique de Casimir ne représente pas une génération instantanée de vitesse pour le milieu soumis aux champs [12] ou bien s'il ne décrit pas seulement le fait que la vitesse est une constante du mouvement, auquel cas cette vitesse pourrait être la même avant ou après l'interaction avec le champ électromagnétique [75]. Le modèle utilisé ici s'appuie sur la conservation de la quantité de mouvement. Il faut faire la différence entre une situation initiale où les champs externes sont nuls, avec dans ce cas la vitesse constante et nulle, et un état final pour lequel la vitesse est constante et non nulle, le gain de vitesse représentant alors $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_{classique} + \mathbf{v}_{vide}$ (1.63),(1.69). Le régime transitoire n'est pas décrit, le tenseur des efforts sur le milieu est inconnu puisque nul dans les deux situations à l'équilibre considérées.

1.3.3.d Moment conservé

Le terme $\rho \mathbf{v}^2/2$ a été ajouté de façon ad hoc par Feigel et nous avons vu que le Lagrangien d'interaction entre le champ électromagnétique et la matière est discutable. Le résultat obtenu d'après le théorème de Noether est donc probablement faux. Nous pouvons retrouver un moment conservé en appliquant la seconde loi de Newton à la matière. Suivant [84] on décrit la matière comme une somme de ces constituants microscopiques, de masses m_α et de charges q_α :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{\alpha} m_{\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(t)) \mathbf{v}_{\alpha}(t) \right] \\ &= -\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v} + \sum_{\alpha} q_{\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(t)) (\mathbf{E}_{\alpha} + \mathbf{v}_{\alpha} \times \mathbf{B}_{\alpha}) \end{aligned} \quad (1.78)$$

D'après [45] dans une description continue de la matière les champs sont des champs macroscopiques $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. Ils varient lentement à l'échelle microscopique. Nous pouvons alors remplacer les champs microscopiques \mathbf{E}_{α} et \mathbf{B}_{α} de (1.78) par ces derniers :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v} = \rho_{tot} \mathbf{E} + \mathbf{J}_{tot} \times \mathbf{B} \quad (1.79)$$

où ρ_{tot} et \mathbf{J}_{tot} sont les densités de charge et de courant macroscopiques. Ces densités macroscopiques prennent en compte les charges libres ρ_q , \mathbf{J}_q (1.38) et les charges liées [45] :

$$\rho_{tot} = \rho_q - \nabla \cdot \mathbf{P} \quad (1.80a)$$

$$\mathbf{J}_{tot} = \mathbf{J}_q + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \quad (1.80b)$$

où \mathbf{P} et \mathbf{M} sont définis Eq.(1.39). En utilisant les relations constitutives (1.39) et les équations de Maxwell (1.38) il est possible de réécrire (1.79) sous la forme d'une loi de conservation :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v} - \mathbf{P} \times \mathbf{B}) = -\nabla \cdot \mathcal{W} + \mathbf{f}_l + \mathbf{f}_r \quad (1.81)$$

où \mathbf{f}_l et \mathbf{f}_r sont les forces de Lorentz et de radiation vu § 1.2.1, $\mathbf{f}_l + \mathbf{f}_r = \mathbf{f}_M$, et

$$\mathcal{W}_{ij} = \rho v_i v_j - \frac{1}{2} \rho v^2 \delta_{ij} + (P_i E_j - B_i M_j) - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{M})$$

Le pseudo-moment $\int d\mathbf{r}(\rho\mathbf{v} - \mathbf{P} \times \mathbf{B})$ est conservé seulement en l'absence de sources, $\mathbf{f}_l = 0$ et d'inhomogénéités $\mathbf{f}_r = 0$. En ajoutant cette loi de conservation (1.81) à celle obtenue à partir des équations de Maxwell (1.42) conduisant au moment de Minkowski on obtient un moment qui, lui, est rigoureusement conservé :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho\mathbf{v} + \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right) = \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\mathbf{v} + \mathcal{T}) \quad (1.82)$$

où

$$\mathcal{T} = \frac{1}{4\pi} (E_i E_j + B_i B_j) - \frac{1}{8\pi} \delta_{ij} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B})$$

Cette impulsion définie par (1.82) modifie sans doute les conclusions de Feigel quant à la controverse Abraham-Minkowski. En revanche elle est toujours quadratique en champ et cela laisse la possibilité d'une contribution non-nulle des fluctuations du champ électromagnétique. Nous pensons que cet effet, le moment cinétique de Casimir, est indépendant de la controverse. Nous n'avons pas cherché à résoudre cette dernière.

1.3.3.e Le problème de la divergence

Il reste le problème de la divergence. Bien qu'une coupure ait été utilisée avec succès dans la première estimation du déplacement de Lamb [85] à laquelle Feigel fait référence, la divergence était dans ce cas logarithmique. Pour le moment cinétique de Casimir la coupure intervient à la puissance quatrième. Il est donc nécessaire d'envisager une régularisation plus satisfaisante de la divergence [12, 77]. Nous allons développer différentes approches dans la section suivante.

1.3.4 Comment régulariser la divergence ?

Nous avons vu que la quantité de mouvement transférée par les fluctuations du vide à un matériau bi-anisotrope est divergente (1.67). Les problèmes de divergence sont courants en électrodynamique quantique et interviennent dès que l'on fait appel aux fluctuations de point zéro dont l'énergie est infinie. Il faut donc trouver un moyen acceptable de parer à cette divergence et d'en extraire les observables physiques significatives. Il y a plusieurs façons de traiter les divergences. Dans le calcul de la force de Casimir nous avons vu section 1.1.3.a que la divergence s'annule puisque l'on s'intéresse à une différence d'énergie. Dans le calcul du déplacement de Lamb [85] on renormalise la masse de l'atome. D'autres approches plus mathématiques donnent aussi des résultats acceptables dans la plupart des situations physiques considérées : régularisation dimensionnelle [86] ou régularisation par fonction zeta [87]. Nous allons voir ici différentes approches pour l'obtention d'un résultat fini.

1.3.4.a Régularisation dimensionnelle et géométrie de Casimir

Après avoir développé une équation invariante par transformation de Lorentz pour la quantité de mouvement (1.75), van Tiggelen, Rikken et Krstić [80, 84] obtiennent un effet des fluctuations du vide proportionnel à $\varrho = \hbar \int d^3k \omega_k$. Ils déterminent cette intégrale divergente en admettant la régularisation dimensionnelle. Cela consiste à considérer l'intégration dans un espace de dimension d tel que l'intégrale soit convergente, puis à prendre la limite $d \rightarrow 3$. Pour évaluer ϱ on considère l'intégrale :

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} (x^2 + k^2)^{-p/2} \equiv I_x(d, p) = \frac{x^{d-p}}{(4\pi)^d} \frac{\Gamma\left(\frac{p-d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \quad (1.83)$$

que l'on pousse au delà de son domaine de validité $p > d$, ce qui amène $\varrho \propto I_0(3, -1) = 0$. En conséquence cela signifie qu'il n'y a pas dans cette approche de transfert d'impulsion entre les fluctuations du vide et un milieu homogène infini.

Un moyen de s'affranchir de ce terme divergent ϱ est de considérer un cas particulier pour lequel on sait que la divergence n'intervient pas, en utilisant la même géométrie que pour l'effet Casimir. On considère alors une tranche entre deux plaques métalliques FIG. 1.3.4.a, puis on calcule ϱ en fonction de la distance L entre les plaques. Les conditions

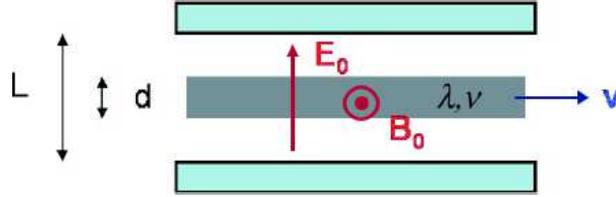


FIGURE 1.9 – La tranche est soumise à des champs externes \mathbf{E}_0 et \mathbf{B}_0 . Lorsque les plaques se rapprochent, la tranche se met en mouvement jusqu'à atteindre une vitesse \mathbf{v} qui dépend de L . figure issue de [80].

aux limites à l'interface métallique imposent un champ électrique tangentiel et un champ magnétique normal nuls. Cela change la distribution des modes et on peut montrer dans ce cas que l'on obtient une valeur finie pour le terme initialement divergent ϱ :

$$\varrho(L, d) \simeq -\frac{\pi}{24dL^3} \frac{\sin(\pi d/2L)}{\cos(\pi d/2L)^3} \quad (1.84)$$

Ce résultat est obtenu en appliquant de nouveau la régularisation dimensionnelle pour les modes continus, et en utilisant la régularisation zeta, qui est le prolongement analytique de la somme $\sum_{n=0}^{\infty} n^{-s} = \zeta(s)$ pour des valeurs $s \leq 1$, pour les modes discrétisés suite à l'application des conditions de bord. On peut décrire le moment cinétique de Casimir en considérant la situation suivante : les champs externes sont constants, les plaques sont initialement infiniment éloignées et la tranche magnéto-électrique est au repos. En ne gardant que les termes dominants et pour $0 \leq d < L$, l'impulsion par unité de surface atteinte par la tranche lorsque les plaques sont amenées à la distance L est

$$\rho dv = -\hbar \frac{\pi}{24dL^3} \frac{\sin(\pi d/2L)}{\cos(\pi d/2L)^3} \frac{1}{4\pi} \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 \quad (1.85)$$

Pour un liquide moléculaire dont la biréfringence est indépendante de la fréquence, avec $\rho = 2000 \text{kgm}^{-3}$, et $L = 2d = 1 \mu\text{m}$ les auteurs estiment une vitesse $v \sim 10^{-17} \text{nm.s}^{-1}$, largement plus faible que la proposition initiale et qui écarte toute chance de mesurer l'effet.

1.3.4.b Sphère diélectrique et énergie de Casimir

On considère ici une sphère magnéto-électrique [8]. D'une part le moment cinétique de Casimir semble nul pour un milieu infini, d'autre part l'impulsion d'un objet de taille finie est une quantité mesurable et pourra donc se prêter à l'expérience. Comme précédemment les lois de conservation conduisent à un moment cinétique pour la sphère de la forme :

$$m\mathbf{v} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r \langle 0 | \mathbf{E} \times \mathbf{B} | 0 \rangle = \text{constante}$$

qu'il faut évaluer. Le théorème de fluctuations-dissipation relie les fluctuations de champ à la partie imaginaire de la fonction de Green :

$$\langle 0 | E_i(\mathbf{r}) E_j(\mathbf{r}') | 0 \rangle = -\frac{\hbar}{\pi} \text{Im} \mathcal{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

Cette dernière peut être développée en série de Born du potentiel d'interaction entre la sphère matérielle et le champ [88]. La première approximation de Born donne un terme volumique proportionnel à l'énergie pour un milieu infini qui, comme au paragraphe précédent est nul d'après régularisation dimensionnelle. Le second terme du développement donne une contribution proportionnelle à l'énergie Casimir de la sphère. Différentes approches [89–91] ont évalué cette énergie comme étant inversement proportionnelle au rayon L de la sphère, ce qui conduit pour le moment cinétique de la sphère magnéto-électrique à :

$$mv_i = \eta \frac{\hbar}{L} (\epsilon - 1) \epsilon_{ijk} \chi_{kj} \quad (1.86)$$

où η est un coefficient numérique. Ceci donne, pour un milieu magnéto-électrique avec $\chi_{jk} = g(E_{0j}B_{0k} - E_{0k}B_{0j})$:

$$mv_i = 2\eta \frac{\hbar}{L} (\epsilon - 1) g \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 \quad (1.87)$$

Pour une sphère de diamètre $1 \mu\text{m}$ composée de FeGaO_3 pour lequel $gE_0B_0 \simeq 10^{-4}$ et d'une densité de $4,5 \text{gcm}^{-3}$ la vitesse attendue est $v \sim 10^{-20} \text{ms}^{-1}$.

Nous reviendrons au chapitre 4 sur la signification physique de cette contribution "1/L".

1.3.4.c Milieu ME dans une géométrie de Casimir

Il peut être intéressant de se ramener dans une situation identique à celle du calcul de l'énergie de Casimir. Bikeland et Brevik adaptent le formalisme des fonctions de Green au cas magnéto-électrique [7]. Le système considéré consiste en un matériau

magnéto-électrique dont l'anisotropie est intrinsèque [59] entre deux plaques métalliques. Il n'y a donc pas ici de champs externes. La situation physique initiale est la même que précédemment : milieu au repos et plaques infiniment éloignées. On considère la quantité de mouvement du milieu lorsque les plaques s'approchent à une distance L . Dans cette approche et comme pour le calcul de l'énergie de Casimir, les termes divergents se compensent et conduisant à un résultat fini pour la quantité de mouvement. En prenant un milieu de permittivité ε , perméabilité μ et tenseur magnéto-électrique χ_{ij} tel que

$$\chi_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{yz} \\ 0 & \chi_{zy} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.88)$$

on obtient pour la densité d'impulsion selon l'axe x :

$$\rho v_x = \frac{\hbar \zeta(3)}{16\pi L^3} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \chi_{zy} \quad (1.89)$$

où ζ est la fonction zeta de Riemann, $\zeta(3) \simeq 1,20$. En prenant $L = 1\mu m$, $\mu = \varepsilon = 1$ et un coefficient de couplage magnéto-électrique $\chi_{zy} = 10^{-4}$, ce qu'on peut trouver avec des cristaux comme $FeAlO_3$ ou $FeGaO_3$ [84], on trouve une vitesse de l'ordre de $10^{-16} nms^{-1}$. Ce résultat, du même ordre de grandeur que celui obtenu précédemment (1.85), montre que l'effet attendu n'est pas un artéfact dû à l'application de champs externes. En outre une densité d'impulsion de valeur finie est obtenue sans renormalisation de la divergence, à la manière de ce que l'on peut trouver dans la détermination de la force de Casimir.

Confirmé par différentes approches, l'effet Feigel ou moment cinétique de Casimir semble donc exister, mais il semble bien trop faible pour être mesuré. Cependant les techniques de régularisation de la divergence sont discutables et l'approche macroscopique montre ses limites. Une approche microscopique avec un traitement clair de la divergence est nécessaire pour évaluer cet effet.

1.4 Énergie de Casimir et masse

Nous avons vu que l'énergie du vide donne une contribution à la masse de l'électron (§1.1.2). Nous discuterons au chapitre 3 la contribution de masse de l'énergie de Casimir. Le caractère inertiel ou gravitationnel de l'énergie de Casimir est lié à une question fondamentale : "le problème de la constante cosmologique".

1.4.1 Lien avec la masse gravitationnelle

Le lien entre l'énergie de Casimir et la masse découle directement du problème de la constante cosmologique. Cette constante a été introduite "à tort" par Einstein dans les équations de la relativité générale comme une nouvelle constante fondamentale de la théorie de la gravitation pour pouvoir construire un modèle d'Univers statique. Or, avec la découverte de l'expansion de l'univers dans les années 20, le modèle statique est

abandonné et la constante cosmologique perd sa raison d'être originelle. Elle est rejetée dès 1931 par Einstein lui-même. L'intérêt pour ce terme est revenu que bien plus tard, pour rendre compte d'observations cosmologiques robustes et variées [6]. Cette constante cosmologique se comporte comme une densité d'énergie universelle et est équivalente à une contribution de l'énergie associée au vide [92, 93].

Comme nous avons pu le voir, dans les calculs d'électrodynamique quantique le terme divergent associé à l'énergie du vide est laissé de côté, soit par une redéfinition de l'Hamiltonien du problème, défini à une constante près (ex : déplacement de Lamb 1.1.2), soit la divergence s'annule entre deux états considérés (effet Casimir 1.1.3). Les effets mesurés sont sensibles à une différence d'énergie mais pas à la valeur absolue de cette dernière, excepté dans le cas de la gravité. La gravité couple la densité locale d'énergie. La densité d'énergie du vide ρ donne le terme source dans les équations d'Einstein [94], la constante cosmologique. Or nous avons vu que la densité d'énergie du vide est divergente (1.21) :

$$\rho = \frac{\hbar\omega_M^4}{8\pi^2c^3} \quad (1.90)$$

où ω_M tend vers l'infini. Il est possible de donner une borne inférieure à cette énergie ω_M : on obtient dans les accélérateurs de particules des énergies de l'ordre de $1TeV$ et des mesures indirectes de rayons cosmiques ont révélé la présence d'une énergie de l'ordre de $10^{14}GeV$ [6]. Dans ce cas $\rho > 10^{31}eV/m^3$. En théorie l'énergie maximum estimée pour les photons est l'énergie de Planck, qui vaut environ $10^{19}GeV$ [95], ce qui donne

$$\rho \sim 10^{51} eV/m^3 \quad (1.91)$$

Or les observations conduisent à une valeur bien plus faible de la constante cosmologique et de la densité d'énergie moyenne dans l'univers [96, 97] :

$$\rho < 10^9 eV/m^3 \quad (1.92)$$

Cela implique que l'énergie du vide ne peut pas être traitée comme les autres formes d'énergies concernant la relativité générale, sans entrer en conflit avec les observations cosmologiques et astrophysiques. Une première approche radicale pour répondre à ce problème a été de négliger l'énergie du vide en lui attribuant une valeur nulle par définition [98]. On a pu constater depuis les effets observables de cette énergie [99]. C'est à partir de ce paradoxe que vient l'idée de renormalisation de la masse vue pour le déplacement de Lamb, en supposant que, dans un futur modèle plus complet, la correction de masse δm (1.31) due aux champs électromagnétiques sera effectivement faible devant la masse au repos [85]. On peut alors se demander si cette énergie gravite.

Il est alors important de déterminer l'existence et le rôle des fluctuations quantiques des champs dans le domaine macroscopique où les forces de gravitation ne peuvent plus être négligées. En cela l'effet Casimir est le lien le plus explicite et expérimentalement accessible de l'effet de ces fluctuations dans le monde macroscopique. Une étude récente des forces de gravitation exercées sur les plaques de Casimir [100, 101] a montré que l'énergie d'interaction et l'énergie propre dues aux champs gravitent, en accord avec le principe d'équivalence d'Einstein.

1.4.2 Liens avec la masse inertielle

Les effets mécaniques d'un environnement fluctuant sont connus depuis longtemps [15]. Cet environnement est responsable d'une contribution aléatoire à la vitesse d'un corps immergé, c'est le mouvement Brownien, ainsi que d'une force moyenne qui tend à dissiper l'énergie de ce corps. Ces deux propriétés sont reliées par les relations générales de fluctuations-dissipation. Ces relations sont aussi valables en mécanique quantique [102] et par conséquent les mêmes effets se retrouvent pour un miroir soumis à la pression de radiation du vide [103, 104]. Lorsque ce dernier est en mouvement il subit une force de freinage, conséquence du déséquilibre de la pression de radiation créé par son mouvement. Cette force est proportionnelle à la dérivée cinquième de la position [105], de sorte qu'un miroir en translation uniforme ne subit pas de force et on ne peut distinguer le mouvement inertiel du repos. On peut appliquer le même raisonnement pour deux miroirs formant une cavité Fabry-Perrot et déterminer la force de réaction lorsque les deux sont en mouvement. On trouve alors une force induite par les fluctuations proportionnelle à l'accélération, donc une contribution à la masse de la cavité, directement liée à l'énergie de Casimir. Cette énergie de Casimir, elle-même issue des fluctuations du vide, contribue donc à la masse inertielle du Fabry-Perrot [106, 107].

L'énergie du vide apparaît comme une source d'inertie et de gravitation. Ainsi le vide quantique se comporte, à l'échelle macroscopique, comme une constante cosmologique. Ces résultats suggèrent que les lois de l'inertie et de la gravitation doivent être modifiées pour tenir compte des effets induits par le vide [105]. La constante cosmologique que l'on mesure a donc a priori deux contributions, la constante cosmologique que l'on peut librement introduire dans les équations d'Einstein, Λ_E , et celle associée à l'effet gravitationnel du vide quantique, $\Lambda_Q \propto \rho$. La valeur mesurée cosmologiquement est donc égale à

$$\Lambda_{mes} = \Lambda_E + \Lambda_Q \quad (1.93)$$

Cependant, comme les ordres de grandeur discutés précédemment nous l'ont montré, Λ_{mes} est très petit comparé à Λ_Q . Il faut donc que Λ_E compense Λ_Q , de telle sorte que $\Lambda_E + \Lambda_Q \simeq 10^{-60} \Lambda_Q$. Λ_E est associé à l'énergie noire, qui occuperait la majeure partie de l'Univers. Un réglage si fin entre les valeurs de deux quantités qui a priori n'ont pas une origine commune semble inexplicable. De plus, sans une telle quasi-annulation, l'Univers serait très différent de celui qu'on observe aujourd'hui. C'est ce que l'on nomme "le problème de la constante cosmologique" [93, 108, 109].

1.5 Sonoluminescence

1.5.1 Effet observé

La sonoluminescence est l'émission de lumière par des bulles de gaz dans un liquide, dont on fait varier le diamètre grâce à une onde ultrasonore. Cela peut être simplement des bulles d'air dans de l'eau. L'observation de ce phénomène date des années 30 [110]

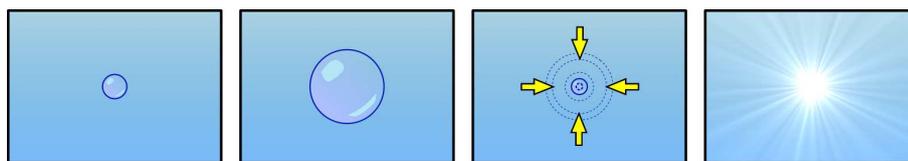


FIGURE 1.10 – Illustration du phénomène de sonoluminescence. Le diamètre de la bulle entre lentement en expansion, puis il y a une contraction rapide suivie de l'émission de lumière au début de la détente (voir figure 1.5.1).

à la suite de travaux sur la cavitation dans l'eau pour étudier l'usure des hélices de bateaux. L'étude de la sonoluminescence en elle-même est plus récente [111]. Sous de bonnes conditions il est possible d'obtenir une bulle unique qui émet des flashes lumineux de façon périodique [112]. Ces flashes, d'une durée très brève $\sim 40ps$, sont visibles à l'oeil nu. Les températures atteintes dans cette microscopique bulle de rayon $\sim 5\mu m$ sont faramineuses : de l'ordre de $15000K$, aussi élevées qu'à la surface d'une étoile [113].

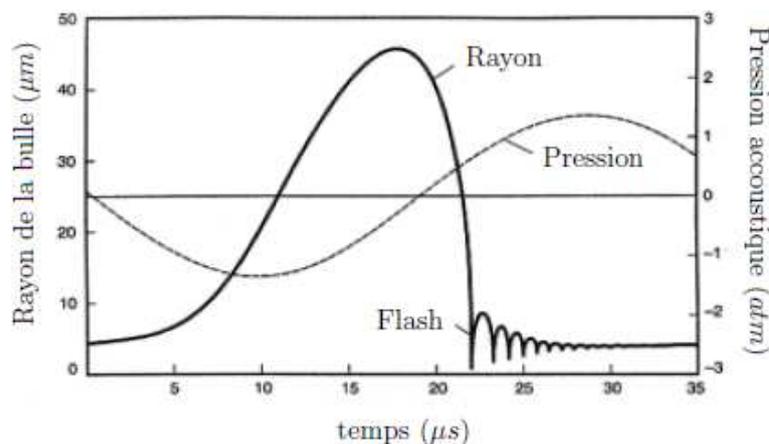


FIGURE 1.11 – Evolution du rayon de la bulle et pression dans le liquide sur une période. Le flash lumineux a lieu juste après la compression maximum. La dynamique de la bulle est décrite par les équations de Rayleigh-Plesset et bien vérifiée expérimentalement [114]

1.5.2 Lien avec l'énergie de Casimir

Un certain nombre de théories ont été proposées pour expliquer la sonoluminescence. Si la dynamique de la bulle est aujourd'hui bien connue, l'émission de lumière reste plus discutée (revue assez complète : [115]). Le spectre émis est proche de celui du corps noir, mais la durée du flash est nettement inférieure au temps caractéristique de variation du volume de la bulle, ce n'est donc pas une situation à l'équilibre [116]. Parmi ces tentatives, Schwinger a proposé que l'effet Casimir dynamique soit à l'origine de l'émission de photons [117]. Un certain nombre de critiques, portant sur les paramètres utilisés [118] ou sur l'énergie Casimir d'une sphère/boule [89–91], ont depuis invalidé le modèle.

Cette approche a été entérinée, parmi d'autres, au profit de théories dites des "hot

spot” où l’énergie à l’origine des flashes lumineux provient de l’énergie thermique issue de la compression adiabatique de la bulle [115], cependant l’explication de la concentration de l’énergie précédant les flashes reste discutée [119].

Nous discuterons au chapitre 4 le cas de l’énergie Casimir d’une boule diélectrique.

CHAPITRE 2

Une Approche QED du Moment Cinétique de Casimir

Sommaire

2.1	Modèle microscopique	43
2.2	Effet classique des champs appliqués	48
2.3	Théorie des perturbations	50
2.4	Annexe : Tableau récapitulatif des impulsions	66
2.5	Conclusion	66

Introduction

Dans cette partie nous nous efforçons de répondre à la controverse “Feigel”. Nous cherchons à savoir si le moment cinétique de Casimir existe et si sa valeur est suffisamment grande pour qu’il soit mesurable. Les principales critiques portent sur la description macroscopique du milieu bi-anisotrope et mettent en avant le besoin d’une description microscopique de la matière. Il s’agit donc d’utiliser un système bi-anisotrope le plus simple possible, sans perdre l’effet. Une description quantique est donc pertinente. Nous cherchons à exprimer le moment cinétique d’un système microscopique bi-anisotrope en interaction avec les fluctuations quantiques du vide lorsque l’ensemble se trouve dans son état fondamental.

2.1 Modèle microscopique

2.1.1 Définition du système

Nous avons vu que l’effet magnéto-électrique s’applique à tous les systèmes (cf 1.2.2). Nous allons l’utiliser sur deux charges de signes opposés, couplées aux fluctuations du vide quantique. Comme dans le premier chapitre, les champs électrique et magnétique extérieurs sont imposés, on ne considère pas les sources qui les créent. Le système

considéré est constitué d'un volume d'espace soumis à ces champs statiques $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0$ et aux fluctuations du vide quantique, dans lequel se trouvent deux particules de charges élémentaires opposées :

$$q_\alpha = +e \quad \text{et} \quad q_\beta = -e,$$

en interaction par un potentiel $V(r)$, où r est la distance entre les deux charges. Dans ce chapitre ce potentiel sera choisi comme étant harmonique à trois dimensions. Cette approximation, faite pour des raisons calculatoires, est justifiée par le fait que l'on reste à basse énergie avec des charges qui restent liées, et que le résultat obtenu semble indépendant du modèle de force entre les charges. Ces deux charges ont pour masse m_α et m_β , position \mathbf{r}_α et \mathbf{r}_β , et impulsion \mathbf{p}_α et \mathbf{p}_β .

2.1.2 Description Hamiltonienne

L'Hamiltonien du système dans le point de vue de Schrödinger, i.e. la dépendance temporelle contenue dans la fonction d'onde, s'écrit

$$H = \sum_{\alpha} \left[\frac{1}{2m_i} (\mathbf{p}_\alpha - q_\alpha \mathbf{A}_t(\mathbf{r}_\alpha))^2 - q_\alpha \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}_\alpha \right] + V(\mathbf{r}) + \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar\omega_k \left[a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger a_{\mathbf{k}\epsilon} + \frac{1}{2} \right] \quad (2.1)$$

pour lequel $\mathbf{A}_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}$ est le potentiel vecteur total comprenant la contribution du champ magnétique statique extérieur, décrit par le potentiel vecteur classique \mathbf{A}_0 :

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{B}_0 \times \mathbf{r}, \quad (2.2)$$

et celle de l'opérateur quantique \mathbf{A} du champ électromagnétique. Ce dernier sera traité dans la jauge de Coulomb pour laquelle $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Cette jauge est habituellement utilisée pour les calculs QED de basse énergie en raison de la facilité d'interprétation des équations obtenues. Dans cette jauge $\mathbf{A}(\mathbf{r}_\alpha) = \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \mathcal{A}_{\mathbf{k}\epsilon} \left[a_{\mathbf{k}\epsilon} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_\alpha} + a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_\alpha} \right]$ pour lequel ϵ représente la polarisation et la somme porte sur les deux vecteurs possibles perpendiculaires à \mathbf{k} , $a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger$ et $a_{\mathbf{k}\epsilon}$ sont les opérateurs création et annihilation d'une excitation élémentaire du champ électromagnétique, un photon, en seconde quantification.

Nous utiliserons par la suite les coordonnées réduites (ci-dessous) dans le référentiel du centre de masse. \mathbf{R} et \mathbf{r} sont respectivement les coordonnées du centre de masse et de la particule réduite, et leurs impulsions conjuguées sont \mathbf{P} et \mathbf{p} . M et μ représentent la masse totale et la masse réduite.

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\beta & \mathbf{p} &= \mu \left(\frac{\mathbf{p}_\alpha}{m_\alpha} - \frac{\mathbf{p}_\beta}{m_\beta} \right) \\ \mathbf{R} &= \frac{m_\alpha}{M} \mathbf{r}_\alpha + \frac{m_\beta}{M} \mathbf{r}_\beta & \mathbf{r} &= \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta \\ M &= m_\alpha + m_\beta & \mu &= (1/m_\alpha + 1/m_\beta)^{-1} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Pour un oscillateur harmonique à trois dimensions le potentiel s'écrit $V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mu \omega_0^2 \mathbf{r}^2$ avec $\hbar\omega_0$ la différence d'énergie entre deux niveaux de l'oscillateur.

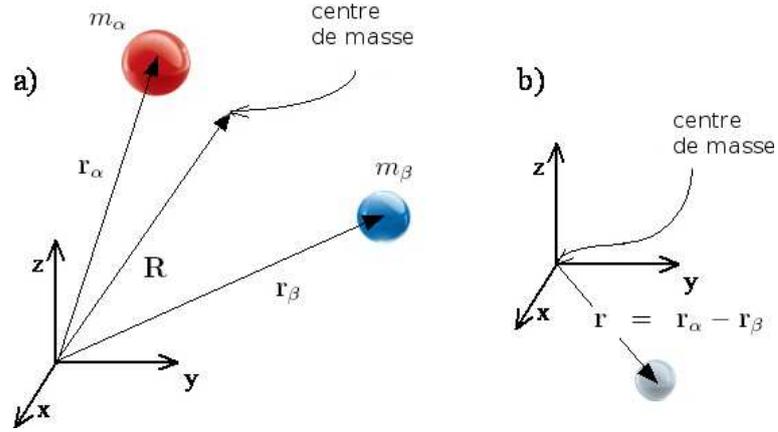


FIGURE 2.1 – a) Coordonnées des particules α et β , représentées de façon classique. b) particule réduite dans le référentiel du centre de masse

Relations de commutations

Les variables dynamiques fondamentales de chaque particule α , la position \mathbf{r}_α et l'impulsion \mathbf{p}_α satisfont les relations de commutations suivantes, $\forall i, j = x, y, z$:

$$\begin{aligned} [r_{\alpha i}, r_{\beta j}] &= [p_{\alpha i}, p_{\beta j}] = 0 \\ [r_{\alpha i}, p_{\beta j}] &= i\hbar\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} \end{aligned}$$

Les coordonnées réduites satisfont les mêmes relations :

$$\begin{aligned} [r_i, r_j] &= [p_i, p_j] = [R_i, R_j] = [P_i, P_j] = 0 \\ [r_i, R_j] &= [r_i, P_j] = [p_i, P_j] = [p_i, R_j] = 0 \\ [r_i, p_j] &= [R_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij} \end{aligned}$$

Les opérateurs de création et annihilation $a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger$ et $a_{\mathbf{k}\epsilon}$ des oscillateurs harmoniques fictifs associés aux modes du champ électromagnétique commutent avec les opérateurs atomiques. Ils satisfont

$$\begin{aligned} [a_{\mathbf{k}\epsilon}, a_{\mathbf{k}'\epsilon'}] &= [a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger, a_{\mathbf{k}'\epsilon'}^\dagger] = 0 \\ [a_{\mathbf{k}\epsilon}, a_{\mathbf{k}'\epsilon'}^\dagger] &= i\hbar\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\epsilon\epsilon'} \end{aligned}$$

2.1.3 Constante du mouvement

Nous montrons, comme dans l'approche de Feigel [9], la conservation d'un *pseudo*-moment \mathbf{K} donné par :

$$\mathbf{K} = \mathbf{P} + \frac{e}{2}\mathbf{B}_0 \times \mathbf{r} + \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar\mathbf{k} \left[a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger a_{\mathbf{k}\epsilon} + \frac{1}{2} \right] \quad (2.4)$$

C'est un *pseudo*-moment car il est une constante du mouvement seulement si le champ magnétique externe \mathbf{B}_0 est à la fois indépendant du temps et uniforme, ce que l'on supposera ici. Nous nous intéressons au moment cinétique total de l'oscillateur en présence

du vide quantique, qui n'est pas égal à \mathbf{K} , ni à \mathbf{P} . Cependant comme \mathbf{K} est constant même pour un champ électrique \mathbf{E}_0 dépendant du temps, il est donc intéressant de calculer le moment cinétique total à partir de ce dernier, pour différentes valeurs du champ électrique, par exemple nulle et non-nulle. Nous manipulons ici trois impulsions différentes \mathbf{K} , \mathbf{P} et \mathbf{P}_{cin} qu'il faudra veiller à ne pas confondre. En présence d'un champ magnétique, le moment *cinétique* (1.50) ne correspond plus au moment *conjugué*, ils sont reliés par la relation $\mathbf{P}_{\text{cin}} = \mathbf{P} - e\Delta\mathbf{A}_t$ avec $e\Delta\mathbf{A}_t = e\mathbf{A}_t(\mathbf{r}_\alpha) - e\mathbf{A}_t(\mathbf{r}_\beta)$. Avec (2.2) et (2.4) nous pouvons donc réécrire :

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}_{\text{cin}} + e\mathbf{B}_0 \times \mathbf{r} + e\Delta\mathbf{A} + \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar\mathbf{k} \left[a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger a_{\mathbf{k}\epsilon} + \frac{1}{2} \right] \quad (2.5)$$

L'opérateur $e\Delta\mathbf{A} = e\mathbf{A}(\mathbf{r}_\alpha) - e\mathbf{A}(\mathbf{r}_\beta)$ représente la contribution invariante de jauge de la partie "longitudinale" du champ du vide [21]. Nous devons donc aller au-delà de l'approximation dipolaire électrique usuelle -auquel cas $\Delta\mathbf{A}$ serait négligé- pour pouvoir traiter des grandes longueurs d'ondes des fluctuations du champ de point zéro. Le dernier terme de l'équation (2.5) est dû au champ électromagnétique "transverse" autour de l'atome.

L'évolution temporelle de la moyenne quantique de \mathbf{K} est donnée par l'équation [81] :

$$\frac{d\langle \mathbf{K} \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\mathbf{K}, H(t)] \rangle + \left\langle \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} \right\rangle$$

où l'Hamiltonien H peut dépendre du temps, ici à travers le champ électrique. Le pseudomoment ne dépendant pas explicitement du temps, le second terme de cette égalité est nul. Il reste à déterminer le commutateur. Nous avons besoin des relations de commutations suivantes entre \mathbf{p}_i , a^\dagger , a et un opérateur quelconque O :

$$\begin{aligned} [(\mathbf{p}_\alpha)_j, O] &= -i\hbar \frac{\partial O}{\partial (\mathbf{r}_\alpha)_j} \\ [a_{\mathbf{k}\epsilon}, O] &= \frac{\partial O}{\partial a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger}, \quad [a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger, O] = -\frac{\partial O}{\partial a_{\mathbf{k}\epsilon}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Nous donnons ici les principales clefs pour la compréhension on se restreint donc au cas sans champs extérieurs pour lequel

$$H_{SC} = \sum_\alpha \left[\frac{1}{2m_\alpha} (\mathbf{p}_\alpha - q_\alpha \mathbf{A}(\mathbf{r}_\alpha))^2 \right] + V(\mathbf{r}) + \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar\omega_k \left[a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger a_{\mathbf{k}\epsilon} + \frac{1}{2} \right] \quad (2.7)$$

$$\mathbf{K}_{SC} = \mathbf{P} + \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar\mathbf{k} \left[a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger a_{\mathbf{k}\epsilon} + \frac{1}{2} \right] \quad (2.8)$$

Montrons que $[\mathbf{K}_{SC}, \mathbf{A}_j(\mathbf{r}_i)] = 0$.

$$\left[\sum_\beta \mathbf{p}_\beta, \mathbf{A}_j(\mathbf{r}_\alpha) \right] = -i\hbar \nabla_{\mathbf{r}_\alpha} \mathbf{A}_j(\mathbf{r}_\alpha) = \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar\mathbf{k} \mathcal{A}_k(\epsilon)_j \left[a_{\mathbf{k}\epsilon} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_\alpha} - a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_\alpha} \right] \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \left[\sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar\mathbf{k} a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger a_{\mathbf{k}\epsilon}, \mathbf{A}_j(\mathbf{r}_\alpha) \right] &= \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \left(a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger} - \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial a_{\mathbf{k}\epsilon}} a_{\mathbf{k}\epsilon} \right) \\ &= \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar\mathbf{k} \mathcal{A}_k(\epsilon)_j \left[a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_\alpha} - a_{\mathbf{k}\epsilon} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_\alpha} \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

En sommant les deux expressions on retrouve $[\mathbf{K}_{SC}, \mathbf{A}_j(\mathbf{r}_\alpha)] = 0$. Les opérateurs de champs a^\dagger et a , les opérateurs atomiques du centre de masse et ceux de la particule réduite commutent entre eux. Par conséquent immédiatement $[(\mathbf{K}_{SC})_i, V(\mathbf{r})] = 0$. H_{SC} est construit à partir des opérateurs $(\mathbf{p}_\alpha)_i$ et \mathbf{A}_j qui commutent l'un et l'autre avec \mathbf{K}_{SC} , donc il commute lui même avec ce dernier.

Remarquons aussi que $\mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_\alpha) = \mathbf{A}(\mathbf{r}_\alpha) \cdot \mathbf{p}_\alpha$ car la commutation des deux vecteurs fait intervenir $\hbar \mathbf{k}$ qui est justement orthogonal à $\boldsymbol{\epsilon}$ car le potentiel vecteur est transverse dans la jauge de Coulomb. En conséquence et fort des propriétés précédentes, lorsque l'on développe l'Hamiltonien il n'est pas nécessaire de symétriser les produits car soit leurs termes commutent, soit ce sont des produits simples.

Nous montrons de la même manière que

$$[\mathbf{K}, H] = \mathbf{0} \quad (2.11)$$

avec la conclusion que $\langle \mathbf{K} \rangle$ est conservé dans le temps, même si le champ électrique \mathbf{E}_0 est variable.

2.1.4 Impulsion transverse et longitudinale

Un champ vectoriel dit “longitudinal” $\mathbf{V}_\parallel(\mathbf{r})$ est caractérisé, dans l'espace réel et réciproque par

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{V}_\parallel(\mathbf{r}) &= 0 \\ i\mathbf{k} \times \mathbf{V}_\parallel(\mathbf{k}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.12a)$$

Un champ vectoriel dit “transverse” $\mathbf{V}_\perp(\mathbf{r})$ est caractérisé par

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V}_\perp(\mathbf{r}) &= 0 \\ i\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_\perp(\mathbf{k}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.13a)$$

La dénomination transverse ou longitudinale a une signification géométrique claire dans l'espace réciproque : pour tout \mathbf{k} un champ longitudinal est parallèle à \mathbf{k} , un champ transverse lui est perpendiculaire. On peut donc décomposer de façon unique tout champ en ses composantes longitudinale et transverse : $\mathbf{V} = \mathbf{V}_\parallel + \mathbf{V}_\perp$

Les équations de Maxwell dans l'espace réciproque sont :

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{k}) \quad (2.14a)$$

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{k}) = 0 \quad (2.14b)$$

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{k})}{\partial t} \quad (2.14c)$$

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{B}(\mathbf{k}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{k})}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{j}(\mathbf{k}) \quad (2.14d)$$

où ρ est la densité de charge et \mathbf{j} la densité de courant sont reliées par l'équation de conservation de la charge :

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{k}) + \frac{\partial \rho(\mathbf{k})}{\partial t} = 0$$

La relation entre les champs et le potentiel vecteur, dans l'espace réciproque est :

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{k}) &= i\mathbf{k} \times \mathbf{A}(\mathbf{k}) \\ \mathbf{E}(\mathbf{k}) &= -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{k})}{\partial t} - i\mathbf{k}U(\mathbf{k})\end{aligned}\quad (2.15)$$

L'équation (2.14b) montre que le champ magnétique est purement transverse :

$$\mathbf{B}_{\parallel} = 0$$

L'équation (2.14a) relie le champ électrique longitudinal à la distribution de charges $\rho(\mathbf{k})$:

$$\mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{k}) = -\frac{i}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{k}) \frac{\mathbf{k}}{k^2} \quad (2.16)$$

Des relations reliant le potentiel vecteur il en découle que $\mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{k}) = -\frac{\partial \mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{k})}{\partial t}$

L'impulsion totale du champ $\mathbf{G} = \epsilon_0 \int d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \int d^3k \mathbf{E}^*(\mathbf{k}) \times \mathbf{B}(\mathbf{k})$, où * désigne le complexe conjugué, peut-être décomposée selon :

$$\mathbf{G}_{long} = \epsilon_0 \int d^3k \mathbf{E}_{\parallel}^*(\mathbf{k}) \times \mathbf{B}(\mathbf{k}) \quad (2.17a)$$

$$\mathbf{G}_{trans} = \epsilon_0 \int d^3k \mathbf{E}_{\perp}^*(\mathbf{k}) \times \mathbf{B}(\mathbf{k}) \quad (2.17b)$$

En utilisant la relation entre $\mathbf{B}(\mathbf{k})$ et $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ (2.15), l'expression de $\mathbf{E}(\mathbf{k})$ ci-dessus (2.16) et l'identité $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$, on peut réécrire la partie longitudinale de l'impulsion \mathbf{G} :

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_{long} &= \epsilon_0 \int d^3k \frac{i}{\epsilon_0} \rho^*(\mathbf{k}) \frac{\mathbf{k}}{k^2} \times (i\mathbf{k} \times \mathbf{A}(\mathbf{k})) \\ &= \int d^3k \rho^*(\mathbf{k}) [\mathbf{A}(\mathbf{k}) - \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k}))]\end{aligned}\quad (2.18)$$

où le terme entre crochet n'est autre que la partie transverse du potentiel vecteur \mathbf{A} .
Donc

$$\mathbf{G}_{long} = \int d^3k \rho^* \mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{k}) = \int d^3r \rho \mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}_{\alpha}) \quad (2.19)$$

\mathbf{G}_{trans} se ramène à $\sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar \mathbf{k} \left[a_{\mathbf{k}\epsilon}^{\dagger} a_{\mathbf{k}\epsilon} + \frac{1}{2} \right]$ et la constante du mouvement \mathbf{K} (2.5) se lit :

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}_{cin} + e\mathbf{B}_0 \times \mathbf{r} + \mathbf{G}_{long} + \mathbf{G}_{trans} \quad (2.20)$$

avec \mathbf{P}_{cin} , \mathbf{G}_{long} et \mathbf{G}_{trans} définies dans les équations (2.5), (2.19) et (2.17b).

2.2 Effet classique des champs appliqués

2.2.1 Un système simple

Une contribution quantique au moment cinétique de Casimir a été proposée par Feigel dans l'article [9]. Une contribution classique a aussi été abordée. À notre connaissance

seul Jackson [45] mentionne qu'une charge se déplace dans la même direction entre deux champs croisés quel que soit son signe, ce qui est appelé " $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift". Dans le cas précédent de deux charges liées par un potentiel harmonique, en l'absence de couplage avec le vide quantique nous devrions retrouver une quantité de mouvement classique due aux champs extérieurs appliqués.

2.2.2 Équations du mouvement

Nous considérons ici seulement l'oscillateur harmonique constitué de deux charges $q_\alpha = -q_\beta = e$ et les champs $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0$ pour lesquels nous appliquons la seconde loi de Newton. Les champs extérieurs $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0$ sont pris selon les axes y et z respectivement, le système est au repos à $t = 0$.

$$\begin{cases} m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha = e\mathbf{E}_0 + e\dot{\mathbf{r}}_\alpha \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{f}(\mathbf{r}) \\ m_\beta \ddot{\mathbf{r}}_\beta = e\mathbf{E}_0 - e\dot{\mathbf{r}}_\beta \times \mathbf{B}_0 - \mathbf{f}(\mathbf{r}) \end{cases} \quad (2.21)$$

où la force de rappel est définie par $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = -\mu\omega_0^2\mathbf{r}$. Dans le référentiel du centre de masse, avec les mêmes notations que précédemment on obtient

$$\begin{cases} M\ddot{\mathbf{R}} = e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}_0 \\ \mu\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}_0 + e\frac{\Delta m}{M}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}_0 + e\dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{B}_0 + 2\mathbf{f}(\mathbf{r}) \end{cases} \quad (2.22)$$

On voit donc ici que le mouvement du centre de masse et le mouvement interne de la particule sont couplés. Les champs externes modifient l'orbite de l'électron, et par conséquent le mouvement global.

2.2.3 Vitesse de dérive : approche intuitive

Nous pouvons négliger le mouvement interne et ne prendre en compte que le dipôle induit par le mouvement du centre de masse, pour rechercher une solution particulière avec une vitesse de dérive $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{v}_D$ constante. La première ligne de l'Eq.(2.22) donne alors la condition $\mathbf{r} = \frac{M}{eB_0^2}\mathbf{v}_D \times \mathbf{B}_0$, la composante parallèle au champ magnétique est conservée et est donc une constante dépendant des conditions initiales, que nous prendrons nulle. En reportant dans la seconde ligne :

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = 0 = e\mathbf{E}_0 + e\mathbf{v}_D \times \mathbf{B}_0 - \frac{M}{eB_0^2}\mathbf{v}_D \times \mathbf{B}_0$$

ce qui donne

$$\mathbf{v}_D = \frac{e^2 B_0^2}{(e^2 B_0^2 + M\mu\omega_0^2)} \mathbf{v}_{eb} \quad (2.23)$$

où $\mathbf{v}_{eb} = \frac{\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0}{B_0^2}$ est la vitesse de dérive d'une seule charge, indépendamment de son signe, dans les champs $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0$.

2.2.4 Dynamique totale

La résolution exacte du système classique peut s'effectuer en résolvant le système d'équations (2.22) par transformée de Laplace puis en effectuant une troncature sur les

temps longs. En effet pour retrouver la vitesse de dérive seule la composante linéaire en temps pour la coordonnée du centre de masse est nécessaire, les autres termes obtenus étant des termes oscillants. Il suffit pour cela d'effectuer un développement perturbatif dans l'espace de Laplace. Cela revient donc à prendre la moyenne temporelle sur l'échelle de temps atomique. On retrouve le même résultat qu'au paragraphe précédent que l'on peut réécrire :

$$\mathbf{v}_D = \frac{\omega_{c\alpha}\omega_{c\beta}}{\omega_{c\alpha}\omega_{c\beta} + \omega_0^2} \frac{\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0}{B_0^2} \quad (2.24)$$

avec $\omega_{c\alpha} = \frac{eB_0}{m_\alpha}$ la pulsation cyclotron de la particule α dans le champ magnétique \mathbf{B}_0 . Ce résultat est en accord avec l'approche intuitive précédente. Dans le cas d'un champ faible où la pulsation cyclotron est négligeable devant celle de l'oscillateur, c'est-à-dire pour $B_0 \lesssim 10^4 \text{ Tesla}$ ce que l'on prendra par la suite, le moment cinétique du centre de masse est

$$M\mathbf{v}_D = \alpha(0)\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 \quad (2.25)$$

avec $\alpha(0) = e^2/\mu\omega_0^2$ la polarisabilité statique de l'oscillateur.

2.3 Théorie des perturbations

Nous recherchons la valeur du moment cinétique lorsque l'ensemble du système est dans son état fondamental. Pour cela nous allons développer la moyenne quantique $\langle \mathbf{K} \rangle = \langle \Psi_0 | \mathbf{K} | \Psi_0 \rangle$ du pseudo-moment, où $|\Psi_0\rangle$ est l'état fondamental de H Eq.(2.1), en fonction des deux vecteurs pertinents du modèle, à savoir le moment cinétique $M\mathbf{v}$ de l'oscillateur et le vecteur magnéto-électrique $\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0$. Pour trouver l'état fondamental du système total nous allons considérer que le couplage entre le vide quantique et la particule représente une énergie faible devant celle des deux systèmes distincts. Nous appliquerons alors la théorie des perturbations entre l'oscillateur magnéto-électrique, c'est-à-dire la particule et les champs externes, et le vide électromagnétique. Cela revient à un développement en puissance de α , la constante de structure fine. À l'ordre le plus bas cela correspond à une correction à une boucle comprenant seulement l'émission-réabsorption d'un photon virtuel. Étant donné que le couplage permet l'échange d'un ou deux photons, nous devons donc a priori pousser le développement perturbatif à l'ordre deux. Pour faciliter la discussion sur le développement perturbatif, nous réécrivons l'Hamiltonien (2.1) de façon lisible :

$$H = H_0 + H_F + W$$

$$H_0 = \sum_{\alpha} \left[\frac{1}{2m_i} (\mathbf{p}_{\alpha} - q_{\alpha}\mathbf{A}_0(\mathbf{r}_{\alpha}))^2 - q_{\alpha}\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}_{\alpha} \right] + \frac{1}{2}\mu\omega_0^2\mathbf{r}^2 \quad (2.26a)$$

$$H_F = \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar\omega_k \left[a_{\mathbf{k}\epsilon}^{\dagger} a_{\mathbf{k}\epsilon} + \frac{1}{2} \right] \quad (2.26b)$$

$$W = \sum_{i=1}^2 -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} (\mathbf{p}_{\alpha} - q_{\alpha}\mathbf{A}_0(\mathbf{r}_{\alpha})) \mathbf{A}(\mathbf{r}_{\alpha}) + \frac{q_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} \mathbf{A}(\mathbf{r}_{\alpha})^2 \quad (2.26c)$$

où H_0 est l'Hamiltonien de la particule dans les champs classiques $(\mathbf{A}_0, \mathbf{E}_0)$, H_F est l'Hamiltonien du champ électromagnétique du vide et W est le terme perturbatif.

2.3.1 Sous-système oscillateur magnéto-électrique

Notre oscillateur magnéto-électrique est constitué des deux charges soumises aux champs extérieurs, dont l'Hamiltonien est H_0 (Eq. 2.26). Nous allons dans un premier temps nous intéresser aux valeurs et fonctions propres de ce sous-système, suivant la démarche de Dippel [120]. Comme nous voulons le mouvement du centre de masse de l'oscillateur 3D, le point clef est la séparation des coordonnées internes et celles du centre de masse, que l'on va réaliser via le pseudo-moment. En l'absence du vide quantique le pseudo-moment \mathbf{K} se réduit à \mathbf{Q} , tel que $[\mathbf{Q}, H_0] = \mathbf{0}$, avec

$$\begin{aligned}\mathbf{Q} &= \mathbf{P} + \frac{e}{2}\mathbf{B}_0 \times \mathbf{r} \\ &= \mathbf{P}_{\text{cin}} + e\mathbf{B}_0 \times \mathbf{r}\end{aligned}\quad (2.27)$$

2.3.1.a Hamiltonien effectif à une particule

On utilise ici la représentation “r” des fonctions d'ondes : $\psi(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \psi \rangle$. Le ket $|\psi\rangle$ est fonction propre de H_0 tel que

$$H_0|\psi\rangle = E_{\text{part}}|\psi\rangle \quad (2.28)$$

E_{part} est l'énergie de la particule sans couplage avec le vide. Pour un système neutre les coordonnées du pseudo-moment \mathbf{Q} commutent entre elles, ce dernier commutant avec l'Hamiltonien H_0 on peut donc choisir une base commune de fonctions propres. Il est donc possible de décomposer la fonction d'onde totale de ce système de la façon suivante :

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = U(\mathbf{r}, \mathbf{R})\xi(\mathbf{r})$$

où la dépendance en \mathbf{R} la coordonnée du centre de masse est entièrement contenue dans la transformation unitaire U . Cette transformation est déterminée par la condition que ψ soit un vecteur propre de \mathbf{Q} , i.e. $\mathbf{Q}|\psi\rangle = \mathbf{Q}_0|\psi\rangle$ où \mathbf{Q}_0 est une valeur propre associée à \mathbf{Q} . En utilisant l'Ansatz

$$U = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{R} - \frac{i}{\hbar}\frac{e}{2}(\mathbf{B}_0 \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{R}\right) \quad (2.29)$$

on transforme l'Hamiltonien H_0 en un Hamiltonien effectif $H_{\text{eff}} = U^\dagger H_0 U$:

$$H_{\text{eff}} = \frac{1}{2\mu} \left(p - \frac{e}{2} \frac{\Delta m}{M} \mathbf{B}_0 \times \mathbf{r} \right)^2 + \frac{1}{2M} (\mathbf{Q}_0 - e\mathbf{B}_0 \times \mathbf{r})^2 + V(\mathbf{r}) - e\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} \quad (2.30)$$

avec $\Delta m = m_\alpha - m_\beta > 0$. L'opérateur \mathbf{R} étant absent, on obtient alors l'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde à une particule $\xi(\mathbf{r})$:

$$H_{\text{eff}}|\xi\rangle = E_{\text{part}}|\xi\rangle$$

qui dépend de la valeur propre \mathbf{Q}_0 . Schmelcher et Cederbaum [121] ont montré, en utilisant les équations de Newton, que le premier terme du membre de droite de l'équation

(2.30) représente l'énergie cinétique du mouvement interne. En utilisant la charge $q = e\Delta m/M$ et le potentiel $\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\mathbf{B}_0 \times \mathbf{r}$, identique au choix de jauge (2.2), l'opérateur d'énergie cinétique interne peut donc être écrit :

$$T = \frac{1}{2\mu} (\mathbf{p} - q\mathbf{A}_0(\mathbf{r}))^2 \quad (2.31)$$

Le terme $1/2M(\mathbf{Q}_0 - e\mathbf{B}_0 \times \mathbf{r})^2$ dans (2.30) représente l'énergie cinétique du centre de masse. Elle ne dépend que de la valeur propre \mathbf{Q}_0 du pseudo-moment. On peut montrer que cette énergie et les termes restants sont indépendants du choix de jauge. Ils représentent un potentiel effectif pour la particule réduite :

$$V_{eff} = \frac{1}{2M}(\mathbf{Q}_0 - e\mathbf{B}_0 \times \mathbf{r})^2 + V(\mathbf{r}) - e\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} \quad (2.32)$$

L'Hamiltonien peut s'écrire donc comme $H_{eff} = T + V_{eff}$, c'est-à-dire un Hamiltonien effectif à une particule qui s'applique au mouvement interne d'un système de deux particules. Cet Hamiltonien dépend seulement des opérateurs de coordonnées réduites \mathbf{p} et \mathbf{r} . Il est relié au mouvement du centre de masse via la valeur propre \mathbf{Q}_0 du pseudo-moment total. Par la suite nous prendrons les champs externes perpendiculaires l'un à l'autre. Dans ce cas on peut éliminer le terme $\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}$ du potentiel V_{eff} en l'incluant dans le terme au carré :

$$V_{eff} = \frac{1}{2M}(\mathbf{Q}_0 - M\mathbf{v}_{eb} - e\mathbf{B}_0 \times \mathbf{r})^2 + V(\mathbf{r}) - \frac{1}{2}M\mathbf{v}_{eb}^2 + \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{v}_{eb} \quad (2.33)$$

où $\mathbf{v}_{eb} = \frac{\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0}{B_0^2}$.

2.3.1.b Élimination du pseudo-moment

On applique une seconde transformation unitaire dans le but d'éliminer les termes dépendants de la valeur propre du pseudo-moment dans l'Hamiltonien effectif, en opérant une translation des coordonnées. Pour pouvoir effectuer cette transformation de façon analytique, le potentiel $V(\mathbf{r})$ est pris harmonique, et pour simplifier l'écriture on choisit un potentiel isotrope : $V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\mu\omega_0 r^2$. Suivant une idée de Herold, Ruder et Wunner [122] on introduit :

$$S(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r}\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_0\right) \quad (2.34)$$

de sorte que $\xi(\mathbf{r}) \equiv S(\mathbf{p}, \mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})$, avec $\mathbf{p}_0 \equiv \frac{\Delta m}{2M} \left(1 + \frac{\mu M \omega_0^2}{e^2 B_0^2}\right)^{-1} \mathbf{Q}_{0\perp}$, où $\mathbf{Q}_{0\perp}$ est perpendiculaire au champ magnétique : $\mathbf{Q}_{0\perp} = \mathbf{Q}_0 - \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{B}_0 / B_0$ et $\mathbf{r}_0 \equiv \left(1 + \frac{\mu M \omega_0^2}{e^2 B_0^2}\right)^{-1} (\mathbf{Q}_0 - M\mathbf{v}_{eb}) \times \mathbf{B}_0 / (eB_0^2)$. La fonction d'onde $\varphi(\mathbf{r})$ est tel que

$$H_{eff2}|\varphi\rangle = E_{part}|\varphi\rangle$$

avec

$$H_{eff2} = \frac{1}{2\mu} (p - q\mathbf{A}_0)^2 + \frac{\mu}{2} \left(\omega_B^2 + \frac{\omega_c^2}{4}\right) x^2 + \frac{\mu}{2} \left(\omega_B^2 + \frac{\omega_c^2}{4}\right) y^2 + \frac{\mu}{2} \omega_B^2 z^2 + C \quad (2.35)$$

On a utilisé les notations $q = e\Delta m/M$, $\omega_c = -qB_0/\mu$ et $\omega_B = (e^2B_0^2/M\mu + \omega_0^2)^{1/2}$. La dépendance vis-à-vis du mouvement du centre de masse est désormais contenue dans la constante C :

$$C = \frac{\mathbf{Q}_0^2}{2M} - \frac{\mathbf{Q}_{0\perp}^2}{2M} \left(1 + \frac{\mu M \omega_0^2}{e^2 B_0^2}\right)^{-2} \quad (2.36)$$

On retrouve ici l'Hamiltonien à une particule de charge q dans un champ magnétique et un potentiel harmonique anisotrope, de fréquences $\omega_x = \omega_y = \left(\omega_B^2 + \frac{\omega_c^2}{4}\right)^{1/2}$, $\omega_z = \omega_B$, dont les valeurs propres sont connues. L'énergie est détaillée ci-dessous, les vecteurs propres sont donnés ici : [120] mais nous n'aurons pas à les considérer.

2.3.1.c Énergie de l'oscillateur magnéto-électrique

L'énergie E_{part} (2.28) de l'oscillateur magnéto-électrique, constitué des deux charges soumises aux champs externes, est la somme de deux contributions : d'une part l'énergie d'une charge q soumise à un champ magnétique dans un potentiel harmonique anisotrope à trois dimensions et définie par trois nombres quantiques (n_1, n_2, n_z) , d'autre part l'énergie liée au mouvement du centre de masse \mathbf{Q}_0 , reléguée dans la constante C de l'Hamiltonien H_{eff2} en Eq.(2.35) que l'on peut réécrire en fonction de ω_B :

$$E_{part} = E_{\mathbf{n}\mathbf{Q}_0} = \hbar\omega_1 \left(n_1 + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_2 \left(n_2 + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_z \left(n_z + \frac{1}{2}\right) + \frac{\mathbf{Q}_0^2}{2M} - \frac{\mathbf{Q}_{0\perp}^2}{2M} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_B^2}\right)^2 \quad (2.37)$$

où

$$\begin{aligned} \omega_{1,2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\omega_x^2 + \omega_x^2 + \omega_c^2 \pm \sqrt{(\omega_x^2 + \omega_x^2 + \omega_c^2)^2 - 4\omega_x^2\omega_y^2} \right)^{1/2} \\ \omega_z &= \omega_B \\ \mathbf{n} &= \{n_1, n_2, n_z\} \end{aligned}$$

on remarque que l'énergie E_{part} est minimale pour $\mathbf{Q}_0 = 0$, c'est-à-dire pour une valeur finie du moment cinétique.

2.3.2 Ordres de grandeurs des approximations effectuées

Hormis la perturbation à une boucle correspondant à un échange de photons, et à un facteur $\alpha = 1/137$ à chaque échange, nous allons aussi effectuer plusieurs simplifications. Les deux particules sont considérées comme non relativistes. Nous négligerons donc les termes d'ordres supérieurs en v/c et en $\hbar\omega_0/\mu c \sim 10^{-8}$. D'autre part nous nous intéressons à la contribution linéaire des champs externes \mathbf{E}_0 et \mathbf{B}_0 . En particulier le champ magnétique \mathbf{B}_0 est faible devant celui perçu par la particule réduite dans son mouvement interne, donc $\omega_c \ll \omega_0$. \mathbf{B}_0 intervient aussi de façon non triviale dans la fonction d'onde anisotrope du système de deux charges soumis aux champs vu précédemment. L'anisotropie est caractérisée par le rapport entre l'impulsion de la particule réduite due

au champs magnétique et celle du mouvement interne : $eB_0r_a/(\hbar/r_a) \sim 10^{-5}B_0$, où r_a est le rayon atomique. Pour des champs accessibles de l'ordre de la dizaine de Tesla, ce rapport est négligeable. L'anisotropie des fonctions d'ondes $|\varphi\rangle$ étant paire par rapport au champ magnétique, elle représente une correction non linéaire au résultat final et pourra donc être négligée. On se ramène à la fonction d'onde $|\phi_{\mathbf{n}}\rangle$ d'un oscillateur harmonique isotrope de fréquence ω_0 . Nous prendrons par la suite des champs \mathbf{E}_0 et \mathbf{B}_0 perpendiculaires.

Les différents paramètres que nous allons utiliser pour l'expansion sont donc :

- $v/c \ll 1$
- $\alpha = 1/137 \ll 1$
- $\hbar\omega_0/\mu c \sim 10^{-8}$
- $eB_0/\mu\omega_0 \sim 10^{-4}$
- $eB_0r_a/(\hbar/r_a) \sim 10^{-4}$

2.3.3 Développement perturbatif

2.3.3.a Base des états

La base de fonctions utilisée pour le développement est la base des fonctions propres de l'Hamiltonien $H_0 + H_F$. Ces deux Hamiltoniens agissant dans des espaces de Hilbert différents, les fonctions propres de leur somme est le produit direct de leurs fonctions propres respectives. Dans le cas de l'oscillateur harmonique sous champs vu précédemment avec les transformations (2.29) et (2.34), et en négligeant les termes proportionnels à B_0^2 , nous adoptons la notation :

$$|\mathbf{n}, \mathbf{Q}_0\rangle = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{R}\right) \exp\left[-\frac{ie}{2\hbar}(\mathbf{B}_0 \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{R}\right] \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r}\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_0\right) |\phi_{\mathbf{n}}\rangle \quad (2.38)$$

où $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$, $n_i = 0, 1, \dots$ sont les indices des niveaux quantiques de l'oscillateur harmonique. En négligeant l'anisotropie, les translations de l'opérateur S (2.34) peuvent se réécrire, pour la position de la particule réduite et l'impulsion réduite respectivement :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= e^{-1}\alpha(0)\mathbf{E}_0 \\ \mathbf{p}_0 &= (2M)^{-1}(m_\beta - m_\alpha)\alpha(0)(\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0) \end{aligned}$$

avec $\alpha(0) = e^2/\mu\omega_0^2$.

Pour le champ électromagnétique nous utilisons la base des états de Fock $|\dots n_{\mathbf{k}\epsilon}, n_{\mathbf{k}'\epsilon'}, \dots\rangle$ où $n_{\mathbf{k}\epsilon}$ est le nombre de photons d'impulsion $\hbar\mathbf{k}$ et de polarisation ϵ . Cet état sera noté de façon synthétique $|\mathbf{n}_{\mathbf{k}}\rangle$. En l'absence d'interaction entre l'oscillateur et le vide quantique, les fonctions propres sont donc simplement générées par le produit direct :

$$|\mathbf{n}, \mathbf{Q}_0, \mathbf{n}_{\mathbf{k}}\rangle = |\mathbf{n}, \mathbf{Q}_0\rangle \otimes |\mathbf{n}_{\mathbf{k}}\rangle \quad (2.39)$$

dont l'énergie associée est $E_{\mathbf{n}\mathbf{Q}_0\mathbf{n}_{\mathbf{k}}} = E_{\mathbf{n}\mathbf{Q}_0} + \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar\omega_{\mathbf{k}}(n_{\mathbf{k}\epsilon} + \frac{1}{2})$. En négligeant l'anisotropie due aux termes en B_0^2 on a $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$, $\omega_B = \omega_0$, d'où

$$E_{\mathbf{n}\mathbf{Q}_0\mathbf{n}_{\mathbf{k}}} = \frac{\mathbf{Q}_0^2}{2M} + \sum_{i=1}^3 \hbar\omega_0 \left(n_i + \frac{1}{2}\right) + \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(n_{\mathbf{k}\epsilon} + \frac{1}{2}\right) \quad (2.40)$$

Ces fonctions d'ondes représentent une base orthonormale de l'espace des états :

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{Q}_0, \mathbf{n}_k | \mathbf{s}, \mathbf{Q}'_0, \mathbf{m}_{k'} \rangle = \delta_{\mathbf{n}\mathbf{s}} \delta_{Q_0 Q'_0} \delta_{\mathbf{n}_k \mathbf{m}_k} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (2.41)$$

où $\delta_{\mathbf{n}\mathbf{s}}$ est le symbole de Kroneker et $\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ la distribution de Dirac. Il est avantageux de garder en tête l'expression :

$$|\mathbf{n}, \mathbf{Q}_0, \mathbf{n}_k \rangle = U(\mathbf{r}, \mathbf{R}) S(\mathbf{r}, \mathbf{p}) |\phi_{\mathbf{n}} \rangle \otimes |\mathbf{n}_k \rangle \quad (2.42)$$

Notons que nous disposons maintenant de quatre opérateurs impulsion différents, à savoir \mathbf{Q} , \mathbf{K} , \mathbf{P} et \mathbf{P}_{cin} .

2.3.3.b Sans interaction : Contribution classique

En l'absence d'interaction entre vide quantique et atome, l'état fondamental est $|\mathbf{0}, \mathbf{Q}_0, \mathbf{0}_k \rangle$. La moyenne quantique de $\mathbf{K} = \mathbf{Q} + e\Delta\mathbf{A} + \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar\mathbf{k} \left[a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger a_{\mathbf{k}\epsilon} + \frac{1}{2} \right]$ dans cet état est donnée par

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{K} \rangle &= \langle \mathbf{0}, \mathbf{Q}_0, \mathbf{0}_k | \mathbf{K} | \mathbf{0}, \mathbf{Q}_0, \mathbf{0}_k \rangle \\ &= \langle \mathbf{0}, \mathbf{Q}_0 | \mathbf{Q} | \mathbf{0}, \mathbf{Q}_0 \rangle \langle \mathbf{0}_k | \mathbf{0}_k \rangle + \langle \mathbf{0}, \mathbf{Q}_0 | \langle \mathbf{0}_k | e\Delta\mathbf{A} + \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar\mathbf{k} \left[a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger a_{\mathbf{k}\epsilon} + \frac{1}{2} \right] | \mathbf{0}_k \rangle | \mathbf{0}, \mathbf{Q}_0 \rangle \\ &= \mathbf{Q}_0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

Ceci correspond à l'ordre zéro du développement perturbatif. Les fonctions d'ondes de la base sont normées donc $\langle \mathbf{0}, \mathbf{Q}_0 | \mathbf{0}, \mathbf{Q}_0 \rangle = 1$ et $\langle \mathbf{0}_k | \mathbf{0}_k \rangle = 1$. Nous omettrons systématiquement ces produits par la suite. Le terme $e\Delta\mathbf{A}$ implique un échange de photons entre deux états vides, il est donc nul en raison des règles de sélection. Le second terme de champ donne la contribution $\sum_{\mathbf{k}\epsilon} \frac{1}{2} \hbar\mathbf{k}$ qui est nulle car le vide sans interaction est isotrope. L'impulsion du champ électromagnétique \mathbf{G} est donc nulle en l'absence d'interaction. En prenant la moyenne quantique de la seconde égalité de l'équation (2.27) on a :

$$\mathbf{Q}_0 = \langle \mathbf{P}_{\text{cin}} \rangle + e\mathbf{B}_0 \times \langle \mathbf{0}, \mathbf{Q}_0 | \mathbf{r} | \mathbf{0}, \mathbf{Q}_0 \rangle \quad (2.44)$$

Développons la dernière moyenne quantique : $\langle \mathbf{0}, \mathbf{Q}_0 | \mathbf{r} | \mathbf{0}, \mathbf{Q}_0 \rangle = \langle \phi_0 | S^\dagger U^\dagger \mathbf{r} U S | \phi_0 \rangle$. L'opérateur \mathbf{r} commute avec l'opérateur U (2.29) car ce dernier ne comporte que les opérateurs associés au centre de masse. L'opérateur S (2.29) est quant à lui une translation de vecteur \mathbf{r}_0 . Il reste donc

$$\langle \phi_0 | \mathbf{r} + \mathbf{r}_0 | \phi_0 \rangle = \mathbf{r}_0$$

car l'état fondamental de l'oscillateur harmonique est pair et l'intégration de \mathbf{r} donne 0. D'où le moment cinétique

$$\langle \mathbf{P}_{\text{cin}} \rangle = \mathbf{Q}_0 - \mathbf{B}_0 \times \alpha(0)(\mathbf{E}_0 + \mathbf{Q}_0 \times \mathbf{B}_0/M) \quad (2.45)$$

qui dépend de la valeur \mathbf{Q}_0 du moment conservé.

L'énergie totale de l'état fondamental $|0, \mathbf{Q}_0\rangle$ est $E_{0\mathbf{Q}_0\mathbf{0}_k} = \frac{3}{2}\hbar\omega_0^2 + Q_0^2/2M + \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \frac{1}{2}\hbar\omega_{\mathbf{k}}$. Elle est minimale pour $Q_0 = 0$, c'est-à-dire pour une valeur *finie* du moment cinétique : $\langle \mathbf{P}_{\text{cin}} \rangle = \alpha(0)\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0$ qui correspond à la valeur trouvée avec les équations de Newton au paragraphe 2.2.4. En effet lorsqu'il n'y a pas de champ électrique externe, à $t=0$, l'état fondamental correspond à la particule avec son centre de masse au repos : $\langle \mathbf{P}_{\text{cin}} \rangle = 0$. Sachant que \mathbf{Q}_0 est conservée même si le champ électrique est dépendant du temps (§2.1.3), lorsque l'on branche le champ électrique, l'oscillateur dans son état fondamental possède alors un moment cinétique non nul.

2.3.3.c État fondamental au second ordre de la perturbation W

Nous voulons évaluer la moyenne quantique $\langle \mathbf{K} \rangle = \langle \Psi_0 | \mathbf{K} | \Psi_0 \rangle$. L'état fondamental de l'Hamiltonien total H (2.26) est calculé au second ordre de la perturbation W [123] :

$$\begin{aligned} |\Psi_0\rangle &= |\mathbf{0}, \mathbf{Q}_0, \mathbf{0}\rangle + \sum'_{\mathbf{l}\mathbf{Q}\mathbf{n}} \frac{W_{\mathbf{l}\mathbf{Q}\mathbf{n}, \mathbf{0}\mathbf{Q}_0\mathbf{0}}}{E_{\mathbf{0}\mathbf{Q}_0\mathbf{0}} - E_{\mathbf{l}\mathbf{Q}\mathbf{n}}} |\mathbf{l}, \mathbf{Q}, \mathbf{n}\rangle \\ &+ \sum'_{\mathbf{l}\mathbf{Q}\mathbf{n}} \sum'_{s\mathbf{Q}'\mathbf{m}} \frac{W_{\mathbf{l}\mathbf{Q}\mathbf{n}, s\mathbf{Q}'\mathbf{m}} W_{s\mathbf{Q}'\mathbf{m}, \mathbf{0}\mathbf{Q}_0\mathbf{0}}}{(E_{\mathbf{0}\mathbf{Q}_0\mathbf{0}} - E_{\mathbf{l}\mathbf{Q}\mathbf{n}})(E_{\mathbf{0}\mathbf{Q}_0\mathbf{0}} - E_{s\mathbf{Q}'\mathbf{m}})} |\mathbf{l}, \mathbf{Q}, \mathbf{n}\rangle \\ &+ \sum'_{\mathbf{l}\mathbf{Q}\mathbf{n}} \frac{|W_{\mathbf{l}\mathbf{Q}\mathbf{n}, \mathbf{0}\mathbf{Q}_0\mathbf{0}}|^2}{(E_{\mathbf{0}\mathbf{Q}_0\mathbf{0}} - E_{\mathbf{l}\mathbf{Q}\mathbf{n}})^2} |\mathbf{l}, \mathbf{Q}, \mathbf{n}\rangle \end{aligned} \quad (2.46)$$

L'élément de matrice $W_{\mathbf{l}\mathbf{Q}\mathbf{n}, \mathbf{0}\mathbf{Q}_0\mathbf{0}}$ est la moyenne quantique : $\langle \mathbf{l}, \mathbf{Q}, \mathbf{n} | W | \mathbf{0}, \mathbf{Q}_0, \mathbf{0} \rangle$. Le symbole $\sum'_{\mathbf{l}\mathbf{Q}\mathbf{n}}$ représente la somme sur tous les états $|\mathbf{l}, \mathbf{Q}, \mathbf{n}\rangle$ excepté l'état fondamental $|\mathbf{0}, \mathbf{Q}_0, \mathbf{0}\rangle$. Les dénominateurs sont donc non nuls. Il est facile de montrer que dans le cadre des approximations effectuées ici (§ 2.3.2) cette fonction d'onde est normée, c'est-à-dire $\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle = 1$. Dans la suite nous appellerons abusivement "second ordre" tout développement au second ordre d'un des paramètres présentés au paragraphe 2.3.2.

2.3.3.d Perturbation effective

Nous allons nous ramener au cas à une particule pour le mouvement interne pour le terme de perturbation W , en traçant sur les degrés de liberté du centre de masse. Nous commençons par effectuer les transformations U et S du paragraphe 2.3.1 sur le terme perturbatif. En se ramenant aux coordonnées réduites nous pouvons réécrire la perturbation :

$$W = \sum_{\alpha} \mathbf{A}(\mathbf{r}_{\alpha}) \cdot \left(-\frac{e_{\alpha}}{M} \mathbf{Q} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} e(\mathbf{B} \times \mathbf{r}) - \frac{e}{m_{\alpha}} (\mathbf{p} - \frac{e}{2} \mathbf{B}_0 \times \mathbf{R}) \right) + \frac{q_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} \mathbf{A}(\mathbf{r}_{\alpha})^2 \quad (2.47)$$

Pour simplifier la lecture nous avons laissé \mathbf{r}_{α} dans l'argument du potentiel vecteur. On rappelle :

$$\mathbf{r}_{\alpha} = \mathbf{R} + \frac{m_{\beta}}{M} \mathbf{r} \quad , \quad \mathbf{r}_{\beta} = \mathbf{R} - \frac{m_{\alpha}}{M} \mathbf{r}$$

À l'aide des règles de commutation (2.6) et du paragraphe 2.1.2, nous pouvons montrer que $[\mathbf{r}, U] = [\mathbf{R}, U] = [\mathbf{r}_{\alpha}, U] = 0$, $[\mathbf{p}, U] = \frac{e}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{R}$. Il vient :

$$W_{eff} \equiv U^{\dagger} W U = \sum_{\alpha} \mathbf{A}(\mathbf{r}_{\alpha}) \cdot \left(-\frac{e_{\alpha}}{M} \mathbf{Q}_0 + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} e(\mathbf{B}_0 \times \mathbf{r}) - \frac{e}{m_{\alpha}} \mathbf{p} \right) + \frac{q_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} \mathbf{A}(\mathbf{r}_{\alpha})^2 \quad (2.48)$$

On remarque que cette expression ne dépend plus des opérateurs du centre de masse, excepté (implicitement) dans l'argument du potentiel vecteur. Ensuite la transformation avec l'opérateur S revient à une translation des coordonnées internes :

$$\begin{aligned} W_{eff2} &\equiv S^\dagger W_{eff} S \\ &= \sum_{\alpha} \mathbf{A}(\mathbf{r}'_{\alpha}) \cdot \left(-\frac{e_{\alpha}}{M} \mathbf{Q}_0 + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} e(\mathbf{B}_0 \times (\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)) - \frac{e}{m_{\alpha}} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \right) + \frac{q_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} \mathbf{A}(\mathbf{r}'_{\alpha})^2 \end{aligned} \quad (2.49)$$

où $\mathbf{r}'_{\alpha,\beta} = \mathbf{R} \pm \frac{m_{\beta,\alpha}}{M} (\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)$. Cette perturbation effective est la perturbation perçue par la particule "réduite" dans un potentiel harmonique de fréquence ω_0 en présence d'un bain de photons virtuels.

2.3.3.e Règles de sélection

Dans cette section on intègre sur la coordonnée \mathbf{R} du centre de masse, ce qui nous mène aux règles de sélection en \mathbf{Q}_0 , décrivant les effets de recul.

Des relations précédentes nous réécrivons l'élément de matrice $W_{sQ'_0 m, lQ_0 n}$ intervenant dans (2.46) en effectuant la moyenne quantique des coordonnées du centre de masse. Pour cela nous utilisons la représentation position dans laquelle l'opérateur \mathbf{R} est remplacé par le vecteur \mathbf{R} et l'opérateur \mathbf{P} , qui n'apparaît pas ici, par $-i\hbar\nabla_{\mathbf{R}}$.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{s}, \mathbf{Q}'_0, \mathbf{m}_k | W | \mathbf{l}, \mathbf{Q}_0, \mathbf{n}_k \rangle &= \langle \phi_{\mathbf{s}}, \mathbf{m}_k | S^\dagger U_{\mathbf{Q}'_0}^\dagger U_{\mathbf{Q}_0} S W_{eff2} | \phi_{\mathbf{l}}, \mathbf{n}_k \rangle \\ &= \int d^3 R \exp\left(\frac{i}{\hbar} (\mathbf{Q}_0 - \mathbf{Q}'_0) \mathbf{R}\right) \langle \phi_{\mathbf{s}}, \mathbf{m}_k | W_{eff2} | \phi_{\mathbf{l}}, \mathbf{n}_k \rangle \end{aligned}$$

où la première égalité vient du fait que le produit $U_{\mathbf{Q}_0} S$ commute avec W_{eff2} . La seconde égalité vient du fait que le produit $U_{\mathbf{Q}'_0}^\dagger U_{\mathbf{Q}_0} = \exp(i/\hbar (\mathbf{Q}_0 - \mathbf{Q}'_0) \mathbf{R})$ ne dépend que de \mathbf{R} , donc commute avec S , suivi du développement de la moyenne quantique. Nous ne nous intéressons ici qu'à la partie de W_{eff2} dépendante de \mathbf{R} , c'est-à-dire le produit $U_{\mathbf{Q}'_0}^\dagger U_{\mathbf{Q}_0}$ et l'opérateur \mathbf{A} . On distingue dans W_{eff2} les termes proportionnels à \mathbf{A} de ceux proportionnels à \mathbf{A}^2 . Dans les termes proportionnels à \mathbf{A} , ceux contenant l'opérateur annihilation $a_{\mathbf{k}\epsilon}$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} &\int d^3 R \langle \phi_{\mathbf{s}}, m | \sum_{\mathbf{k}\epsilon} e^{i/\hbar (\mathbf{Q}_0 - \mathbf{Q}'_0 + \hbar \mathbf{k}) \mathbf{R}} a_{\mathbf{k}\epsilon} (\dots) | \phi_{\mathbf{l}}, n \rangle \\ &= \langle \phi_{\mathbf{s}}, m | \sum_{\mathbf{k}\epsilon} a_{\mathbf{k}\epsilon} (\dots) | \phi_{\mathbf{l}}, n \rangle \int d^3 R e^{i/\hbar (\mathbf{Q}_0 - \mathbf{Q}'_0 + \hbar \mathbf{k}) \mathbf{R}} \\ &= \langle \phi_{\mathbf{s}}, m | \sum_{\mathbf{k}\epsilon} a_{\mathbf{k}\epsilon} (\dots) | \phi_{\mathbf{l}}, n \rangle \delta(\mathbf{Q}_0 - \mathbf{Q}'_0 + \hbar \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (2.50)$$

où le terme (\dots) désigne le reste des opérateurs indépendants de \mathbf{R} et $a_{\mathbf{k}\epsilon}$ et commutant avec ces derniers. De même pour la partie proportionnelle à $a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger$ on a :

$$\langle \phi_{\mathbf{s}}, m | \sum_{\mathbf{k}\epsilon} a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger (\dots) | \phi_{\mathbf{l}}, n \rangle \delta(\mathbf{Q}_0 - \mathbf{Q}'_0 - \hbar \mathbf{k})$$

Les fonctions de Dirac signifient que lors de l'échange d'un photon, le pseudo-moment accuse un recul $\hbar\mathbf{k}$ correspondant à la quantité de mouvement du photon émis ou absorbé. C'est la conservation de la quantité de mouvement. Partant d'un état d'impulsion \mathbf{Q}_0 cela impose des règles sur l'impulsion totale \mathbf{Q}'_0 que l'on va atteindre. Ces termes correspondent aux diagrammes de la figure FIG.2.2.



FIGURE 2.2 – À gauche : Diagramme de Feynman pour l'émission d'un photon par la particule d'impulsion totale \mathbf{Q}_0 . À droite : Diagramme de Feynman pour l'absorption d'un photon par la particule d'impulsion totale \mathbf{Q}_0 .

Développons maintenant le terme \mathbf{A}^2 dans W_{eff2} . Ce terme est responsable de divergences dans le calcul de l'énergie associée à la perturbation. Il est donc important de connaître sa contribution à l'impulsion totale.

$$\mathbf{A}^2(\mathbf{r}_\alpha) = \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \sum_{\mathbf{k}'\epsilon'} a_{\mathbf{k}\epsilon} a_{\mathbf{k}'\epsilon'}^\dagger e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}_\alpha} + a_{\mathbf{k}\epsilon} a_{\mathbf{k}'\epsilon'} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{r}_\alpha} + h.c. \quad (2.51)$$

où $h.c.$ est l'opérateur conjugué. Le premier terme de $W_{sQ'_0m,lQ_0n}$ contenant $a_{\mathbf{k}\epsilon} a_{\mathbf{k}'\epsilon'}^\dagger$ s'écrit de la même façon :

$$\langle \phi_s, m | \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \sum_{\mathbf{k}'\epsilon'} a_{\mathbf{k}\epsilon} a_{\mathbf{k}'\epsilon'}^\dagger (\dots) | \phi_1, n \rangle \delta(\mathbf{Q}_0 - \mathbf{Q}'_0 + \hbar\mathbf{k} - \hbar\mathbf{k}')$$

On retrouve bien entendu le terme de recul associé à chaque photon. Dans le cadre de nos approximations nous recherchons une correction à une boucle. Cela correspond pour le vide à une émission-absorption d'un même photon, les deux processus devant alors correspondre à un photon de même fréquence et même polarisation. Dans ce cas $\langle \phi_s, m_{k_f} | \sum_{\mathbf{k}\epsilon} a_{\mathbf{k}\epsilon} a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger | \phi_1, n_{k_i} \rangle = \delta_{sl} \delta_{nm} \delta(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f)$ ce qui signifie que le photon couple deux états identiques, ce qui est exclu dans le développement (2.46). Ce terme, qui entre deux états identiques donne une contribution divergente à l'énergie, est donc exclu ici par construction. Le terme proportionnel à $a_{\mathbf{k}\epsilon} a_{\mathbf{k}'\epsilon'}$ quant à lui conduit à un échange de deux photons, soit une correction en α^2 exclue ici. Les règles de sélection pour l'état de Fock $|n_k\rangle$ donnent donc une contribution nulle pour le terme en A^2 à l'impulsion totale.

2.3.4 Moyenne quantique de l'impulsion totale

Nous voulons la moyenne de l'impulsion totale $\langle \mathbf{K} \rangle$ car on a démontré en section 2.1.3 que c'est une constante du mouvement qui nous donne directement le moment cinétique de la particule. D'après l'expression (2.5) de \mathbf{K} , nous devons évaluer les termes $e\mathbf{B}_0 \times \mathbf{r}$, $e\Delta\mathbf{A}$ et $\sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar\mathbf{k}_{\mathbf{k}\epsilon} [a_{\mathbf{k}\epsilon}^+ a_{\mathbf{k}\epsilon} + \frac{1}{2}]$. En utilisant (2.46) pour l'état fondamental, $\langle \mathbf{K} \rangle$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{K} \rangle &= \langle \mathbf{P}_{cin} \rangle + e\mathbf{B}_0 \times \langle \mathbf{0}, \mathbf{Q}_0, 0 | \mathbf{r} | \mathbf{0}, \mathbf{Q}_0, 0 \rangle \\
&+ \sum'_{lQ_n} \langle \mathbf{0}, \mathbf{Q}_0, 0 | e\Delta\mathbf{A} | \mathbf{l}, \mathbf{Q}, n \rangle \frac{W_{lQ_n, 0Q_0}}{(E_{0Q_0} - E_{lQ_n})} + c.c. \\
&+ e\mathbf{B} \times \sum'_{lQ_n} \langle \mathbf{0}, \mathbf{Q}_0, 0 | \mathbf{r} | \mathbf{l}, \mathbf{Q}, n \rangle \sum'_{sQ'm} \frac{W_{lQ_n, sQ'm} W_{sQ'm, 0Q_0}}{(E_{0Q_0} - E_{lQ_n})(E_{0Q_0} - E_{sQ'm})} + c.c. \\
&+ e\mathbf{B} \times \sum'_{lQ_n} \sum'_{sQ'm} \langle \mathbf{s}, \mathbf{Q}', m | \mathbf{r} | \mathbf{l}, \mathbf{Q}, n \rangle \frac{W_{lQ_n, 0Q_0} W_{0Q_0, sQ'm}}{(E_{0Q_0} - E_{lQ_n})(E_{0Q_0} - E_{sQ'm})} \\
&+ \sum'_{lQ_n} \sum'_{sQ'm} \langle \mathbf{s}, \mathbf{Q}', m | \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar \mathbf{k}_{\mathbf{k}\epsilon} a_{\mathbf{k}\epsilon}^+ a_{\mathbf{k}\epsilon} | \mathbf{l}, \mathbf{Q}, n \rangle \frac{W_{lQ_n, 0Q_0} W_{0Q_0, sQ'm}}{(E_{0Q_0} - E_{lQ_n})(E_{0Q_0} - E_{sQ'm})}
\end{aligned} \tag{2.52}$$

où *c.c.* désigne le complexe conjugué, car dans la moyenne $\langle \Psi_0 | \mathbf{K} | \Psi_0 \rangle$ il y a la perturbation, “à droite” et “à gauche” de façon symétrique. Une correction à une boucle correspond à partir du vide au processus de création-annihilation d’un seul photon (FIG. 2.3). Nous avons vu que le terme \mathbf{A}^2 de la perturbation W (2.26c) donne une contribution nulle due aux règles de sélection. La perturbation W correspond donc à un processus d’émission ou d’absorption. L’opérateur atomique $e\mathbf{B}_0 \times \mathbf{r}$ se trouve donc forcément à l’ordre zéro de la perturbation W c’est-à-dire qu’il n’y a pas d’échange de photon, ou à l’ordre deux par rapport à la perturbation W où le processus de création-annihilation est assuré par cette dernière. L’opérateur $e\Delta\mathbf{A}$ quant à lui est non nul à l’ordre un de la perturbation W uniquement.

2.3.4.a Trace sur les coordonnées du centre de masse \mathbf{Q}, \mathbf{Q}'

Nous nous limitons à la correction à une boucle, l’état du champ contient soit zéro soit un photon. Le photon annihilé devant avoir la même impulsion et la même polarisation que le photon créé, il n’y a plus qu’une seule somme sur \mathbf{k} et sur ϵ . Après avoir effectué les sommes sur la variable \mathbf{Q} , c’est-à-dire après intégration des fonctions de Dirac (2.50) lorsque l’on revient dans la description continue $\sum_{\mathbf{Q}} \rightarrow V \int d^3Q$, la conservation de l’impulsion pour le centre de masse revient à

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 - \hbar \mathbf{k} \tag{2.53}$$

L’impulsion du champ électromagnétique $\mathbf{G}_{trans} = \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar \mathbf{k}_{\mathbf{k}\epsilon} [a_{\mathbf{k}\epsilon}^+ a_{\mathbf{k}\epsilon} + \frac{1}{2}]$ est nulle à l’ordre zéro. Ce terme correspond à l’échange d’un photon mais n’est pas proportionnel à α , il peut donc a priori avoir une contribution non nulle à l’ordre deux de la perturbation W . En revanche comme nous utilisons une base d’ondes planes isotropes pour les fonctions d’onde du champ, nous avons toujours $\sum_{\mathbf{k}\epsilon} \frac{1}{2} \hbar \mathbf{k}_{\mathbf{k}\epsilon} = \mathbf{0}$.

Nous pouvons alors réécrire la valeur moyenne de l’impulsion totale en fonction des états internes et de champs :

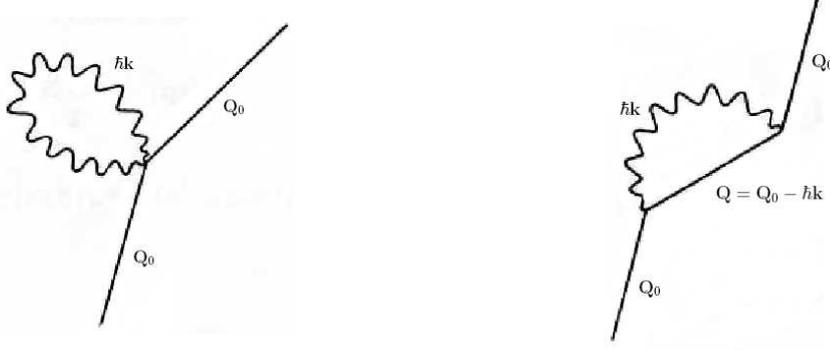


FIGURE 2.3 – À gauche : Diagramme de Feynman correspondant au terme A^2 qui ne se couple pas aux états atomiques. À droite : Diagramme de Feynman à une boucle correspondant dans le vide à l'émission-absorption d'un photon par la particule d'impulsion totale \mathbf{Q}_0 .

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{K} \rangle &= \langle \mathbf{P}_{cin} \rangle + e\mathbf{B} \times \langle \phi_0, 0_k | \mathbf{r} + \mathbf{r}_0 | \phi_0, 0_k \rangle \\
&+ \sum'_{l, \mathbf{k}\epsilon} \langle \phi_0, 0_k | e\Delta \mathbf{A}'(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) | \phi_1, 1_k \rangle \frac{\langle \phi_1, 1_k | W_{eff2} | \phi_0, 0 \rangle}{(E_{0Q_00} - E_{lQ_1k})} + c.c. \\
&+ e\mathbf{B} \times \sum'_{l, s, \mathbf{k}\epsilon} \langle \phi_0, 0_k | \mathbf{r} + \mathbf{r}_0 | \phi_1, 0_k \rangle \frac{\langle \phi_1, 0_k | W_{eff2} | \phi_s, 1_k \rangle \langle \phi_s, 1_k | W_{eff2} | \phi_0, 0 \rangle}{(E_{0Q_00} - E_{lQ_n})(E_{0Q_00} - E_{sQ'1_k})} + c.c. \\
&+ e\mathbf{B} \times \sum'_{l, s, \mathbf{k}\epsilon} \langle \phi_s, 1_k | \mathbf{r} + \mathbf{r}_0 | \phi_1, 1_k \rangle \frac{\langle \phi_1, 1_k | W_{eff2} | \phi_0, 0_k \rangle \langle \phi_0, 0_k | W_{eff2} | \phi_s, 1_k \rangle}{(E_{0Q_00} - E_{lQ_1k})(E_{0Q_00} - E_{sQ'1_k})} \\
&+ \sum'_{l, s} \sum_{n_k, m_k} \langle s, \mathbf{Q}, m_k | \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar \mathbf{k}_{\mathbf{k}\epsilon} a_{\mathbf{k}\epsilon}^+ a_{\mathbf{k}\epsilon} | 1, \mathbf{Q}, n_k \rangle \frac{\langle \phi_1, n_k | W_{eff2} | \phi_0, 0_k \rangle \langle \phi_0, 0_k | W_{eff2} | \phi_s, m_k \rangle}{(E_{0Q_00} - E_{lQ_{n_k}})(E_{0Q_00} - E_{sQ_{m_k}})} \\
\end{aligned} \tag{2.54}$$

où seul subsistent les vecteurs \mathbf{Q}_0 et $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 - \hbar \mathbf{k}$ dans les expressions de l'énergie au dénominateur ; $e\Delta \mathbf{A}'(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)$ désigne le terme $e \left(\mathbf{A}(\frac{m\beta}{M}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)) - \mathbf{A}(-\frac{m\alpha}{M}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)) \right)$

2.3.4.b Trace sur les degrés de liberté du champ électromagnétique n_k, m_k

Nous pouvons maintenant effectuer les sommes sur les degrés de liberté du champ électromagnétique. On remarque aussi dans la dernière ligne de l'équation (2.54) que les règles de sélection imposent $n_k = m_k = 1_k$, la perturbation W_{eff2} ne couplant que le vide à des états à un photon, puisque l'on a déjà éliminé le terme A^2 . Il ne reste donc plus maintenant que la somme sur les états atomiques et la somme sur les états du photon

échangé : \mathbf{k} et $\boldsymbol{\epsilon}$. En développant les expressions on obtient :

$$\langle \mathbf{K} \rangle = \mathbf{Q}_0 \quad (2.55a)$$

$$+ e^2 2\text{Re} \sum_{\mathbf{l}\mathbf{k}\boldsymbol{\epsilon}} \mathcal{A}_{\mathbf{k}}^2 \boldsymbol{\epsilon} \langle \phi_0 | (e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)\frac{m_\beta}{M}} - e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)\frac{m_\alpha}{M}}) | \phi_1 \rangle \frac{\Omega_{1,0}^*}{E_{0\mathbf{Q}_0\mathbf{0}} - E_{1(\mathbf{Q}_0-\hbar\mathbf{k})1_k}} \quad (2.55b)$$

$$+ \mathbf{B}_0 \times 2\text{Re} \sum_{\mathbf{l}\mathbf{s}\boldsymbol{\epsilon}} e^3 \mathcal{A}_{\mathbf{k}}^2 \langle \phi_0 | \mathbf{r} + \mathbf{r}_0 | \phi_1 \rangle \frac{\Omega_{1,s}\Omega_{s,0}^*}{(E_{0\mathbf{Q}_0\mathbf{0}} - E_{1\mathbf{Q}_0\mathbf{0}})(E_{0\mathbf{Q}_0\mathbf{0}} - E_{s(\mathbf{Q}_0-\hbar\mathbf{k})1_k})} \quad (2.55c)$$

$$+ \mathbf{B}_0 \times \sum_{\mathbf{l}\mathbf{s}\boldsymbol{\epsilon}} e^3 \mathcal{A}_{\mathbf{k}}^2 \langle \phi_s | \mathbf{r} + \mathbf{r}_0 | \phi_1 \rangle \frac{\Omega_{1,0}^*\Omega_{0,s}}{(E_{0\mathbf{Q}_0\mathbf{0}} - E_{1(\mathbf{Q}_0-\hbar\mathbf{k})1_k})(E_{0\mathbf{Q}_0\mathbf{0}} - E_{s(\mathbf{Q}_0-\hbar\mathbf{k})1_k})} \quad (2.55d)$$

$$+ \sum_{\mathbf{l}\mathbf{s}\boldsymbol{\epsilon}} \hbar\mathbf{k} \frac{\Omega_{1,0}^*\Omega_{0,s}}{(E_{0\mathbf{Q}_0\mathbf{0}} - E_{1(\mathbf{Q}_0-\hbar\mathbf{k})1_k})(E_{0\mathbf{Q}_0\mathbf{0}} - E_{s(\mathbf{Q}_0-\hbar\mathbf{k})1_k})} \quad (2.55e)$$

avec $\Omega_{1,s} = \langle \phi_1 | \Omega | \phi_s \rangle$ le produit scalaire de l'opérateur atomique :

$$\begin{aligned} \Omega &= e\boldsymbol{\epsilon} \cdot [\mathbf{B}_0 \times (\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)] \left(\frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)\frac{m_\beta}{M}}}{m_\alpha} - \frac{e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)\frac{m_\alpha}{M}}}{m_\beta} \right) \\ &- \frac{\mathbf{Q}_0}{M} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \left(e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)\frac{m_\beta}{M}} - e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)\frac{m_\alpha}{M}} \right) \\ &- (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \cdot \boldsymbol{\epsilon} \left(\frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)\frac{m_\beta}{M}}}{m_\alpha} + \frac{e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)\frac{m_\alpha}{M}}}{m_\beta} \right) \end{aligned} \quad (2.56)$$

2.3.4.c Simplification de la somme sur les états atomiques

Nous ne détaillerons pas directement le calcul des éléments de matrice Ω , nous utiliserons l'identité :

$$\sum_l |\phi_l\rangle \frac{1}{(E + E_l)} \langle \phi_l| = \frac{1}{(E + H_{oh})} \quad (2.57)$$

La somme sur les fonctions d'ondes et énergies de l'oscillateur harmonique est remplacée par un opérateur dépendant de H_{oh} , Hamiltonien d'un oscillateur harmonique de fréquence ω_0 . Nous allons regarder de près le calcul des deux premiers termes de l'Eq. (2.55b) :

$$\begin{aligned} (2.55b) &= e^2 2\text{Re} \sum_{\mathbf{l}\mathbf{k}\boldsymbol{\epsilon}} \mathcal{A}_{\mathbf{k}}^2 \boldsymbol{\epsilon} \langle \phi_0 | (e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)\frac{m_\beta}{M}} - e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)\frac{m_\alpha}{M}}) | \phi_1 \rangle \frac{\Omega_{1,0}^*}{E_{0\mathbf{Q}_0\mathbf{0}} - E_{1(\mathbf{Q}_0-\hbar\mathbf{k})1_k}} \\ &= e^2 2\text{Re} \sum_{\mathbf{l}\mathbf{k}\boldsymbol{\epsilon}} \mathcal{A}_{\mathbf{k}}^2 \boldsymbol{\epsilon} \langle \phi_0 | e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)\frac{m_\beta}{M}} | \phi_1 \rangle \frac{1}{E_{0\mathbf{Q}_0\mathbf{0}} - E_{1(\mathbf{Q}_0-\hbar\mathbf{k})1_k}} \\ &\quad \times \langle \phi_1 | e\boldsymbol{\epsilon} \cdot [\mathbf{B}_0 \times (\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)] \frac{e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)\frac{m_\beta}{M}}}{m_\alpha} | \phi_0 \rangle \end{aligned} \quad (2.58a)$$

$$\begin{aligned} &- e^2 2\text{Re} \sum_{\mathbf{l}\mathbf{k}\boldsymbol{\epsilon}} \mathcal{A}_{\mathbf{k}}^2 \boldsymbol{\epsilon} \langle \phi_0 | e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)\frac{m_\beta}{M}} | \phi_1 \rangle \frac{1}{E_{0\mathbf{Q}_0\mathbf{0}} - E_{1(\mathbf{Q}_0-\hbar\mathbf{k})1_k}} \\ &\quad \times \langle \phi_1 | e\boldsymbol{\epsilon} \cdot [\mathbf{B}_0 \times (\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)] \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)\frac{m_\alpha}{M}}}{m_\beta} | \phi_0 \rangle \end{aligned} \quad (2.58b)$$

+ ...

Le terme (2.58a) conduit à une divergence, (2.58b) à une valeur finie. L'ensemble du calcul se déroulant ensuite de la même façon. À l'aide de l'identité (2.57) développons le premier terme (2.58a) :

$$\begin{aligned}
(2.58a) &= e^2 2\text{Re} \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \mathcal{A}_{\mathbf{k}}^2 \epsilon \langle \phi_0 | e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)} \frac{m_\beta}{M} | \phi_1 \rangle \frac{1}{E_{0\mathbf{Q}_0\mathbf{0}} - E_{1(\mathbf{Q}_0-\hbar\mathbf{k})1_k}} \\
&\quad \times \langle \phi_1 | e\epsilon \cdot [\mathbf{B}_0 \times (\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)] \frac{e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)} \frac{m_\beta}{M}}{m_\alpha} | \phi_0 \rangle \\
&= -\text{Re} \sum_{\mathbf{k}} \langle \phi_0 | e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)} \frac{m_\beta}{M} \frac{1}{E(k) + H_{oh}} e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)} \frac{m_\beta}{M} \underline{\underline{\Delta_k}} [\mathbf{B}_0 \times (\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)] | \phi_0 \rangle \frac{e^3 2\mathcal{A}_{\mathbf{k}}^2}{m_\alpha}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
E(k) &= \frac{\hbar^2 k^2}{2M} - \frac{\mathbf{Q}_0 \cdot \hbar\mathbf{k}}{M} + \hbar\omega_k - \frac{3}{2}\hbar\omega_0 \\
H_{oh} &= \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega_0^2 r^2 \\
\underline{\underline{\Delta_k}} &= 1 - \tilde{k}\tilde{k}
\end{aligned}$$

où \tilde{k} est le vecteur unitaire dans la direction de \mathbf{k} . $\underline{\underline{\Delta_k}}$ est le projecteur sur le plan perpendiculaire à \mathbf{k} . Ce tenseur vient de l'identité vectorielle $\sum_{\epsilon} \epsilon(\epsilon \cdot \mathbf{A}) = \underline{\underline{\Delta_k}} \cdot \mathbf{A}$. Le terme $\mathbf{Q}_0 \cdot \hbar\mathbf{k}$ dans l'énergie représente le freinage dû à l'effet Doppler et représente donc une correction d'ordre supérieur en v/c . Il sera donc négligé. Pour permuter l'exponentielle et l'opérateur $1/(E + H)$ on utilise l'identité :

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} f(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} = f(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k})$$

Le terme (2.58a) devient alors :

$$(2.58a) = -\text{Re} \sum_{\mathbf{k}} \left\langle \phi_0 \left| \frac{1}{E'(k) + H_{oh} - \frac{\mathbf{p} \cdot \hbar\mathbf{k}}{\mu} \frac{m_\beta}{M} \underline{\underline{\Delta_k}} [\mathbf{B}_0 \times (\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)] \right| \phi_0 \right\rangle \frac{e^3 2\mathcal{A}_{\mathbf{k}}^2}{m_\alpha}$$

avec $E'(k) = E(k) + \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \left(\frac{m_\beta}{M}\right)^2$. Le terme $\mathbf{p} \cdot \hbar\mathbf{k}$ représente l'effet Doppler pour le mouvement de la particule réduite. Pour connaître son action sur les états $|\phi_0\rangle$, on développe selon :

$$\frac{1}{E + H + V} = \frac{1}{E + H} - \frac{1}{E + H} V \frac{1}{E + H} + \frac{1}{E + H} V \frac{1}{E + H} V \frac{1}{E + H} - \dots$$

où V représente ici le terme introduit par l'effet Doppler. Il est facile de montrer que la perturbation correspond à un développement en $\frac{\hbar\omega_0}{\mu c^2}$ que nous négligeons (voir paragraphe

2.3.2). Par conséquent :

$$\begin{aligned}
(2.58a) &= -\text{Re} \sum_{\mathbf{k}} \left\langle \phi_0 \left| \frac{1}{E'(k) + H_{oh}} \underline{\Delta}_k [\mathbf{B}_0 \times (\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)] \right| \phi_0 \right\rangle \frac{e^3 2 \mathcal{A}_{\mathbf{k}}^2}{m_\alpha} \\
&= - \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{E'(k) + \frac{3}{2} \omega_0} \underline{\Delta}_k \mathbf{B}_0 \times \langle \phi_0 | (\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) | \phi_0 \rangle \frac{e^3 2 \mathcal{A}_{\mathbf{k}}^2}{m_\alpha} \\
&= - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m_\alpha} + \hbar c k} \underline{\Delta}_k \mathbf{B}_0 \times \mathbf{r}_0 \frac{e^3 2 \mathcal{A}_{\mathbf{k}}^2}{m_\alpha} \\
&= \alpha(0) \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 \frac{4\alpha}{3\pi} \frac{\hbar^2}{m_\alpha} \int \frac{k dk}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m_\alpha} + \hbar c k} \tag{2.59}
\end{aligned}$$

où on a utilisé les définitions de \mathbf{r}_0 , $\mathcal{A}_{\mathbf{k}}$ et $\int d\hat{k} (1 - \tilde{k}\tilde{k}) = \frac{2}{3} \cdot 4\pi$. L'intégrale sur les nombres d'onde du champ électromagnétique diverge ici logarithmiquement.

Appliquons le même traitement au terme suivant (2.58b) :

$$\begin{aligned}
(2.58b) &= -e^2 2 \text{Re} \sum_{\mathbf{l}\mathbf{k}\boldsymbol{\epsilon}} \mathcal{A}_{\mathbf{k}}^2 \epsilon \langle \phi_0 | e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)} \frac{m_\beta}{M} | \phi_1 \rangle \frac{1}{E_{\mathbf{0}\mathbf{Q}_0\mathbf{0}} - E_{\mathbf{1}(\mathbf{Q}_0-\hbar\mathbf{k})\mathbf{1}_k}} \\
&\quad \times \langle \phi_1 | e \boldsymbol{\epsilon} \cdot [\mathbf{B}_0 \times (\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)] \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)} \frac{m_\alpha}{M}}{m_\beta} | \phi_0 \rangle \\
&= \text{Re} \sum_{\mathbf{k}} \langle \phi_0 | e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)} \frac{1}{E'(k) + H_{oh} - \frac{\mathbf{p} \cdot \hbar \mathbf{k}}{\mu} \frac{m_\alpha}{M}} \underline{\Delta}_k [\mathbf{B}_0 \times (\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)] | \phi_0 \rangle \frac{e^3 2 \mathcal{A}_{\mathbf{k}}^2}{m_\beta} \\
&= \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m_\beta} + \hbar c k} \underline{\Delta}_k \mathbf{B}_0 \times \langle \phi_0 | e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)} (\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) | \phi_0 \rangle \frac{e^3 2 \mathcal{A}_{\mathbf{k}}^2}{m_\alpha} \tag{2.60}
\end{aligned}$$

Nous effectuons la moyenne quantique en représentation position :

$$\langle \phi_0 | e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)} (\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) | \phi_0 \rangle = \int d^3 r \phi_0^*(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)} (\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) \phi_0^*(\mathbf{r})$$

avec les fonctions d'onde de l'oscillateur harmonique :

$$\phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) = \left(\frac{1}{\pi r_a^2} \right)^{3/4} \frac{\mathcal{H}_{n_x}(x/r_a) \mathcal{H}_{n_y}(y/r_a) \mathcal{H}_{n_z}(z/r_a)}{\sqrt{2^{n_1+n_2+n_3} n_1! n_2! n_3!}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{r}/r_a)^2} \tag{2.61}$$

où $r_a = \sqrt{\hbar/\mu\omega_0}$ est le rayon associé à l'oscillateur harmonique et \mathcal{H}_n est le polynôme de Hermite de degré n [81]. On obtient alors :

$$(2.58b) = -\alpha(0) \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 \frac{14\alpha}{15\sqrt{\pi}} \frac{\hbar/r_a}{m_\alpha c} + \mathcal{O} \left(\left(\frac{\hbar/r_a}{m_\alpha c} \right)^2 \right) \tag{2.62}$$

Le calcul des autres termes de $\langle \mathbf{K} \rangle$ est identique à celui des termes (2.58a) et (2.58b) ci-dessus. On obtient, en se rappelant que $1/m_\alpha + 1/m_\beta = 1/\mu$ et $m_\alpha + m_\beta = M$:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{K} \rangle &= \langle \mathbf{P}_{\text{cin}} \rangle + \alpha(0) \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 \\
&+ \alpha(0) \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 \frac{4\alpha}{3\pi} \hbar^2 \\
&\times \left(\frac{1}{m_\alpha} \int \frac{kdk}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m_\alpha} + \hbar ck} + \frac{1}{m_\beta} \int \frac{kdk}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m_\beta} + \hbar ck} - \frac{1}{M} \int \frac{kdk}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m_\alpha} + \hbar ck} - \frac{1}{M} \int \frac{kdk}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m_\beta} + \hbar ck} \right) \\
&+ \langle \mathbf{P}_{\text{cin}} \rangle \frac{4\alpha}{3\pi} \hbar^2 \left(\frac{1}{M} \int \frac{kdk}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m_\alpha} + \hbar ck} + \frac{1}{M} \int \frac{kdk}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m_\beta} + \hbar ck} \right) \\
&+ \alpha(0) \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 \frac{m_\beta - m_\alpha}{2M} \frac{4\alpha}{3\pi} \hbar^2 \left(\int \frac{kdk}{\frac{\hbar^2 k^2}{2} + \hbar ck m_\alpha} - \int \frac{kdk}{\frac{\hbar^2 k^2}{2} + \hbar ck m_\beta} \right) \\
&+ \alpha(0) \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 \alpha \sqrt{\frac{\hbar \omega_0}{\mu c^2}} \times \left(-\frac{14}{15\sqrt{\pi}} + \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{\Delta m}{M} \right)^2 + \mathcal{O} \left(\frac{\mu}{M} \right) \right) \quad (2.63)
\end{aligned}$$

où la seconde occurrence de $\langle \mathbf{P}_{\text{cin}} \rangle$ vient du terme \mathbf{Q}_0 de Ω (2.56).

2.3.5 Renormalisation de masse

La moyenne précédente (2.63) comporte un certain nombre de divergences du type $\int kdk / (\frac{\hbar^2 k^2}{2m_\alpha} + \hbar ck)^{-1}$ dans lequel nous reconnaissons la renormalisation de masse δm utilisée par Bethe dans le calcul non-relativiste du Lamb-shift [25] :

$$\delta m_\alpha = \frac{4\alpha}{3\pi} \hbar^2 \int \frac{kdk}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m_\alpha} + \hbar ck} \quad (2.64)$$

où l'on a intégré les effets de recul, $\frac{\hbar^2 k^2}{2m_\alpha}$ est l'énergie cinétique de la particule α après émission ou absorption d'un photon d'énergie $\hbar ck$. Nous pouvons donc réécrire la seconde ligne de l'équation (2.63) :

$$\alpha(0) \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 \left(\frac{\delta m_\alpha}{m_\alpha} + \frac{\delta m_\beta}{m_\beta} - \frac{\delta m_\alpha}{M} - \frac{\delta m_\beta}{M} \right) \quad (2.65)$$

On utilise :

$$\begin{aligned}
\frac{\delta m_\alpha}{M} + \frac{\delta m_\beta}{M} &= \frac{\delta M}{M} \\
\frac{1}{\mu} \left(\frac{\delta m_\alpha}{m_\alpha} + \frac{\delta m_\beta}{m_\beta} - \frac{\delta m_\alpha}{M} - \frac{\delta m_\beta}{M} \right) &= \frac{\delta \mu}{\mu^2} = \delta \left(\frac{1}{\mu} \right) \\
\alpha(0) &= \frac{e^2}{\mu \omega_0^2}
\end{aligned}$$

Comme la polarisabilité statique est proportionnelle à $1/\mu$, ces divergences ultra-violettes peuvent donc servir à renormaliser la masse réduite présente dans le facteur $\alpha(0)$ de l'équation classique (2.25), qui se définit donc maintenant en fonction de la masse réduite observée μ^* :

$$\alpha(0) \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 + \delta \left(\frac{1}{\mu} \right) \frac{e^2}{\omega_0^2} \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 = \frac{e^2}{\mu^* \omega_0^2} \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0$$

De même pour le terme proportionnel au moment cinétique :

$$\langle \mathbf{P}_{\text{cin}} \rangle + \frac{\delta M}{M} \langle \mathbf{P}_{\text{cin}} \rangle = M^* \mathbf{v}$$

Ce point sera discuté plus en détail dans le chapitre suivant.

Il reste encore deux intégrales divergentes, dont les divergences se compensent :

$$\begin{aligned} & \alpha(0) \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 \frac{m_\beta - m_\alpha}{2M} \frac{4\alpha}{3\pi} \hbar^2 \left(\int_0^\infty \frac{k dk}{\frac{\hbar^2 k^2}{2} + \hbar c k m_\alpha} - \int_0^\infty \frac{k dk}{\frac{\hbar^2 k^2}{2} + \hbar c k m_\beta} \right) \\ &= \alpha(0) \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 \frac{m_\beta - m_\alpha}{2M} \frac{4\alpha}{3\pi} \times \lim_{\delta \downarrow 0} \int_\delta^\infty dk \left(\frac{k}{k^2/2 + c k m_\beta / \hbar} - \frac{k}{k^2/2 + \hbar c k m_\alpha / \hbar} \right) \\ &= -\alpha(0) \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 \frac{4\alpha}{3\pi} \frac{m_\alpha - m_\beta}{M} \log \frac{m_\alpha}{m_\beta} \end{aligned} \quad (2.66)$$

L'impulsion totale se réécrit alors, avec les premiers termes classiques contenant les masses observables renormalisées :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{K} \rangle &= \langle \mathbf{P}_{\text{cin}} \rangle + \alpha(0) \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 \\ &\quad - \alpha(0) \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 \frac{4\alpha}{3\pi} \frac{m_\alpha - m_\beta}{M} \log \frac{m_\alpha}{m_\beta} \\ &\quad + \alpha(0) \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 \alpha \sqrt{\frac{\hbar \omega_0}{\mu c^2}} \times \left(-\frac{14}{15\sqrt{\pi}} + \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{\Delta m}{M} \right)^2 + \mathcal{O} \left(\frac{\mu}{M} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.67)$$

On considère la variation de moment cinétique de l'atome entre le moment $t = 0$ où le champ électrique est nul et l'atome au repos, dans son état fondamental, et un instant $t > 0$ où le champ a la valeur $\mathbf{E}_0(t)$. Le moment total $\langle \mathbf{K} \rangle$ étant une constante du mouvement (voir paragraphe 2.1.3) on peut écrire

$$\langle \mathbf{P}_{\text{cin}} \rangle (t) = -\alpha(0) \mathbf{E}_0(t) \times \mathbf{B}_0 \quad (2.68a)$$

$$+ \alpha(0) \mathbf{E}_0(t) \times \mathbf{B}_0 \frac{4\alpha}{3\pi} \frac{m_\alpha - m_\beta}{M} \log \frac{m_\alpha}{m_\beta} \quad (2.68b)$$

$$- \alpha(0) \mathbf{E}_0(t) \times \mathbf{B}_0 \alpha \sqrt{\frac{\hbar \omega_0}{\mu c^2}} \times \left(-\frac{14}{15\sqrt{\pi}} + \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{\Delta m}{M} \right)^2 + \mathcal{O} \left(\frac{\mu}{M} \right) \right) \quad (2.68c)$$

Comme l'impulsion obtenue est indépendante du détail de la force entre les deux particules, il est tentant d'appliquer ce résultat à l'atome d'hydrogène. On prend $m_\alpha \gg m_\beta$. Dans ce cas le terme (2.68c) est négligeable devant (2.68b) car $\sqrt{\frac{\hbar \omega_0}{\mu c^2}} \ll 1 < \log \frac{m_\alpha}{m_\beta}$. Avec $\hbar \omega_0 = 10$ eV, $m_\alpha = m_p$ et $m_\beta = m_e$, $E_0 = 10^5$ V/m et $B_0 = 17$ T, nous trouvons pour la vitesse associée à la contribution classique (2.25) $v_{cl} \approx 0.1$ $\mu\text{m/s}$ et une correction d'environ 2 % dans la même direction pour la partie QED, dans ce cas le terme suivant amène une correction négligeable de l'ordre de 0.01 %.

2.4 Annexe : Tableau récapitulatif des impulsions

P	Moment canonique, $[R_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}$
P_{cin}	Moment cinétique, $\mathbf{P}_{cin} = M\dot{\mathbf{R}} = M\frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}}$
K	Moment total conservé, $[\mathbf{K}, H] = \mathbf{0}$
Q	Moment conservé en l'absence du vide, $[\mathbf{Q}, H_0] = \mathbf{0}$
G	Impulsion totale du champ $\mathbf{G} = \epsilon_0 \int d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$
G_{long}	Impulsion longitudinale du champ $\mathbf{G}_{long} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}_{\alpha})$
G_{trans}	Impulsion transverse du champ $\mathbf{G}_{trans} = \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar\mathbf{k} \left[a_{\mathbf{k}\epsilon}^{\dagger} a_{\mathbf{k}\epsilon} + \frac{1}{2} \right]$

2.5 Conclusion

Nous avons présenté un modèle d'électrodynamique quantique non relativiste pour un oscillateur harmonique soumis à des champs statiques externes et couplé aux fluctuations quantiques du vide. La conclusion la plus importante de ce travail est l'existence du moment cinétique de Casimir dont les divergences ultra-violettes ont été renormalisées, de la même manière dont Bethe a procédé avec succès pour le calcul du déplacement de Lamb. La théorie nous montre que cette impulsion peut-être calculée de façon non-relativiste, cependant des corrections relativistes pourraient participer de façon significative à sa valeur, à l'image du modèle relativiste du déplacement de Lamb.

En prenant pour modèle un atome d'hydrogène et des valeurs de champs électrique et magnétique facilement accessibles en laboratoire, on estime la vitesse de l'oscillateur due aux champs classiques v_{cl} et la vitesse due aux fluctuations de point zéro du champ électromagnétique v_Q à :

$$v_{cl} \approx 0.1 \mu\text{ms}^{-1}$$

$$v_Q \approx 2 \text{ nms}^{-1}$$

Un moyen de distinguer les deux contributions pourrait être de se placer en cavité de façon à modifier le spectre des fluctuations du champ électromagnétique. La contribution quantique serait donc modifiée en fonction de la longueur de la cavité. A notre connaissance, ni la contribution classique à l'impulsion magnéto-électrique, ni la correction QED n'ont été observées jusqu'à présent.

CHAPITRE 3

Relation entre le Moment de Casimir et la Masse Inertielle

Sommaire

3.1	Atome en mouvement dans le vide	68
3.2	Correction de masse à température finie	74
3.3	Annexe : Relation entre énergie des forces de dispersion et masse inertielle	82
3.4	Conclusion	86

Introduction

Nous avons vu que les fluctuations quantiques du vide contribuent à l'impulsion d'un milieu bi-anisotrope, obtenu en utilisant l'effet magnéto-électrique sur un atome. Les mêmes conditions macroscopiques sont également obtenues pour un milieu diélectrique en mouvement, c'est l'effet Fizeau, connu depuis 1848 [124]. Les fluctuations quantiques doivent donc avoir une contribution à l'impulsion d'un objet dès que ce dernier se déplace. Pour connaître cette contribution nous procédons comme au chapitre précédent. Nous utilisons le modèle le plus simple sans perdre l'effet. Nous prendrons ici un atome d'hydrogène, et non pas un oscillateur harmonique, animé d'une vitesse v dans le vide électromagnétique. Un atome avec interaction de Coulomb nous permettra de démontrer que le "moment de Casimir" obéit à un principe fondamental de la relativité restreinte : l'équivalence entre la masse inertielle et l'énergie.

Après avoir calculé la contribution du vide au moment cinétique de l'atome, nous considérons le cas où la température est non nulle. En effet le système bi-anisotrope plongé dans une radiation isotrope devrait voir son impulsion affectée par la radiation. Nous nous intéresserons à une radiation thermique.

3.1 Atome en mouvement dans le vide

3.1.1 Définition du système

Nous avons vu que l'effet Fizeau s'applique à tous les systèmes, une analogie formelle pouvant être faite avec l'effet magnéto-électrique, la vitesse remplaçant le vecteur $\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0$. D'après les résultats obtenus pour l'effet magnéto-électrique, le vide devrait contribuer à l'impulsion d'un milieu en mouvement. En conservant un formalisme microscopique simple, nous allons nous intéresser à un atome d'hydrogène en mouvement couplé aux fluctuations du champ électromagnétique. Nous nous attendons à une correction proportionnelle au paramètre caractérisant la bi-anisotropie. Dans le chapitre précédent c'est le terme $\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0$ qui jouait ce rôle. Ici nous attendons donc une correction proportionnelle à la vitesse de l'atome, c'est-à-dire une correction de masse inertielle. Les deux charges de l'atome ont pour masses m_α et m_β , positions \mathbf{r}_α et \mathbf{r}_β , et impulsions \mathbf{p}_α et \mathbf{p}_β .

3.1.1.a Hamiltonien faiblement relativiste

La bi-anisotropie due à l'effet Fizeau à été négligée dans le chapitre précédent, l'effet des champs externes étant dominant. Comme seule la vitesse entre en jeu ici, il faudra un développement à un ordre supérieur en v/c . Nous considérons donc l'Hamiltonien suivant, dans le point de vue de Schrödinger :

$$H = \sum_{\alpha} \sqrt{m_{\alpha}^2 c^4 + c^2 (\mathbf{p}_{\alpha} - q_{\alpha} \mathbf{A}(\mathbf{r}_{\alpha}))^2} + V(\mathbf{r}) + \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar \omega_k \left[a_{\mathbf{k}\epsilon}^{\dagger} a_{\mathbf{k}\epsilon} + \frac{1}{2} \right] \quad (3.1)$$

où \mathbf{A} est le potentiel vecteur du champ électromagnétique traité dans la jauge de Coulomb : $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k},\epsilon} \mathcal{A}_{\mathbf{k}\epsilon} \left[a_{\mathbf{k}\epsilon} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + a_{\mathbf{k}\epsilon}^{\dagger} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right]$. Le vecteur ϵ représente les deux polarisations de l'onde ϵ_1 et ϵ_2 telles que $\epsilon_{1,2} \perp \mathbf{k}$, $\epsilon_1 \perp \epsilon_2$ et $\epsilon_1^2 = \epsilon_2^2 = 1$. Le potentiel $V(\mathbf{r})$ vient du champ longitudinal, l'Hamiltonien du champ libre vient des champs transverses :

$$V(\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}) = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3 r \mathbf{E}_{\parallel}^2(\mathbf{r})$$

$$\sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar \omega_k \left[a_{\mathbf{k}\epsilon}^{\dagger} a_{\mathbf{k}\epsilon} + \frac{1}{2} \right] = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3 r \left[\mathbf{E}_{\perp\parallel}^2(\mathbf{r}) + c^2 \mathbf{B}^2(\mathbf{r}) \right]$$

En conservant l'approximation $v/c \ll 1$ mais contrairement à l'Hamiltonien non relativiste usuel, on développe ici jusqu'à l'ordre v^2/c^2 [125] on obtient :

$$H = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2m_{\alpha}} (\mathbf{p}_{\alpha} - q_{\alpha} \mathbf{A}(\mathbf{r}_{\alpha}))^2 - \sum_{i=1}^2 \frac{1}{8m_{\alpha}^3 c^2} (\mathbf{p}_{\alpha})^4 + V(\mathbf{r}) + \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar \omega_k \left[a_{\mathbf{k}\epsilon}^{\dagger} a_{\mathbf{k}\epsilon} + \frac{1}{2} \right] \quad (3.2)$$

Le terme \mathbf{p}_{α}^4 est celui que l'on retrouve dans l'Hamiltonien de structure fine [81]. Nous nous placerons par la suite dans le référentiel du centre de masse, les coordonnées étant rappelées au paragraphe 2.1.2. Pour que la description soit complète il faudrait prendre en compte ici le couplage spin-orbite :

$$W_{so} = \frac{1}{2\mu^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \quad (3.3)$$

où \mathbf{L} est l'opérateur moment cinétique et \mathbf{S} est l'opérateur de spin de l'électron. Nous négligeons le moment magnétique du noyau qui induit un facteur μ/M en plus. Nous verrons que la contribution de ce terme est nulle à l'ordre considéré ici (voir 3.1.2.b). Nous omettons donc le spin pour ne pas surcharger la lecture.

3.1.1.b Equations du mouvement

Nous souhaitons connaître le moment cinétique $\langle \mathbf{P}_{cin} \rangle = \langle \Psi | \mathbf{P}_{cin} | \Psi \rangle$ du système lorsque l'atome se trouve dans un état d'excitation quelconque et le champ électromagnétique dans son état fondamental, c'est-à-dire vide de photons réels. Contrairement au cas magnéto-électrique nous ne disposons pas ici de champ externe que l'on peut faire varier. Nous ne calculerons donc pas le moment total \mathbf{K} mais directement le moment cinétique. Ce dernier vient des équations de Hamilton pour l'atome :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{cin} &= M\dot{\mathbf{R}} = M \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}} \\ &= \mathbf{P} - e\Delta\mathbf{A} \\ &\quad - \frac{1}{8c^2} \left[\frac{4\mathbf{P}^2\mathbf{P}}{M^2} + \frac{8}{M\mu}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{p})\mathbf{p} + \frac{4}{M\mu}\mathbf{P}\mathbf{p}^2 + \frac{16}{M^2}\mathbf{P}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{p}) + \frac{8}{M^2}\mathbf{P}^2\mathbf{p} + \frac{4}{M\mu}\mathbf{p}\mathbf{p}^2 \right] \\ &= \mathbf{P} - e\Delta\mathbf{A} - f(\mathbf{P}, \mathbf{p}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

où $f(\mathbf{P}, \mathbf{p})$ représente la première correction relativiste.

3.1.2 Théorie des perturbations

Pour faciliter la discussion sur le développement perturbatif, nous réécrivons l'Hamiltonien sous la forme :

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_F + W_1 + W_2 \quad (3.5) \\ H_0 &= \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + V(r) \quad , \quad H_F = \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar\omega_k \left[a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger a_{\mathbf{k}\epsilon} + \frac{1}{2} \right] \\ W_1 &= -\frac{e}{M}\mathbf{P} \cdot \Delta\mathbf{A} - \frac{e}{\mu}\mathbf{p} \cdot (\mathbf{A}(\mathbf{r}_\alpha) + \mathbf{A}(\mathbf{r}_\beta)) + \frac{e^2}{2m_\alpha}\mathbf{A}(\mathbf{r}_\alpha)^2 + \frac{e^2}{2m_\beta}\mathbf{A}(\mathbf{r}_\beta)^2 \\ W_2 &= -\frac{1}{8c^2} \left(\frac{\mathbf{P}^4}{M^3} + \frac{4}{M^2\mu}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{p})^2 + \frac{2}{M^2\mu}\mathbf{P}^2\mathbf{p}^2 + \frac{8}{M^3}\mathbf{P}^2(\mathbf{P} \cdot \mathbf{p}) + \frac{4}{M^2\mu}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{p})\mathbf{p}^2 + \frac{\mathbf{p}^4}{\mu^3} \right) \end{aligned}$$

où H_0 est l'Hamiltonien de la particule dans les champs classiques, H_F est l'Hamiltonien du champ électromagnétique du vide et W_1 et W_2 sont les termes perturbatifs. On note $W = W_1 + W_2$.

Nous considérons une perturbation à une boucle correspondant à l'échange d'un seul photon et à un facteur $\alpha = 1/137$. Les deux particules sont considérées comme non relativistes nous négligerons donc les termes d'ordres supérieurs en v/c et en $\hbar\omega_0/\mu c \sim 10^{-8}$. Les différents paramètres que nous allons utiliser pour justifier l'expansion sont donc :

- $v/c \ll 1$
- $\alpha = 1/137 \ll 1$
- $\hbar\omega_0/\mu c \sim 10^{-8}$

3.1.2.a Base des états

La base de fonctions utilisée pour le développement est la base des fonctions propres de l'Hamiltonien $H_0 \oplus H_F$. Ces deux Hamiltoniens agissant dans des espaces de Hilbert différents, les fonctions propres de leur somme est le produit direct de leurs fonctions propres respectives. De même pour l'Hamiltonien de l'atome dont on peut séparer ici le mouvement du centre de masse $\mathbf{P}^2/2M$ et le mouvement interne. Nous avons donc la base :

$$|\mathbf{n}, \mathbf{P}_0, \mathbf{n}_k\rangle = |\phi_{\mathbf{n}}\rangle \otimes |\mathbf{P}_0\rangle \otimes |\mathbf{n}_k\rangle \quad (3.6)$$

où $\langle \mathbf{R} | \mathbf{P}_0 \rangle = \exp(\frac{i}{\hbar} \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{R})$ est l'onde plane décrivant le mouvement du centre de masse, $\phi_{\mathbf{n}}$ est la fonction d'onde de l'atome d'hydrogène avec $\mathbf{n} = (n, l)$ les deux nombres quantiques caractérisant les niveaux de l'atome d'hydrogène, en l'absence de spin. Pour le champ électromagnétique nous utilisons la base des états de Fock $|\dots n_{\mathbf{k}\epsilon}, n_{\mathbf{k}'\epsilon'}, \dots\rangle$ où $n_{\mathbf{k}\epsilon}$ est le nombre de photons d'impulsion $\hbar\mathbf{k}$ et de polarisation ϵ . Cet état est noté de façon synthétique $|\mathbf{n}_k\rangle$.

Sans compter l'interaction W , l'énergie associée à cet état est

$$E_{\mathbf{n}\mathbf{P}_0\mathbf{n}_k} = E_{\mathbf{n}} + \frac{\mathbf{P}_0^2}{2M} + \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}}(n_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}) \quad (3.7)$$

Nous avons vu dans le chapitre précédent que pour une correction de l'ordre de α^2 , le premier ordre en W est suffisant. Nous nous limiterons donc ici au premier ordre. Dans ce cas la fonction d'onde de l'ensemble du système s'écrit, pour l'atome dans un état quelconque dans le vide électromagnétique :

$$|\Psi\rangle = |\mathbf{s}, \mathbf{P}_0, \mathbf{0}\rangle + \sum'_{\mathbf{l}\mathbf{Q}\mathbf{n}} \frac{W_{\mathbf{l}\mathbf{Q}\mathbf{n}, \mathbf{s}\mathbf{P}_0\mathbf{0}}}{E_{\mathbf{s}\mathbf{P}_0\mathbf{0}} - E_{\mathbf{l}\mathbf{Q}\mathbf{n}}} |\mathbf{l}, \mathbf{Q}, \mathbf{n}\rangle \quad (3.8)$$

L'élément de matrice $W_{\mathbf{l}\mathbf{Q}\mathbf{n}, \mathbf{s}\mathbf{P}_0\mathbf{0}}$ est la moyenne quantique : $\langle \mathbf{l}, \mathbf{Q}, \mathbf{n} | W_1 + W_2 | \mathbf{s}, \mathbf{P}_0, \mathbf{0} \rangle$. Le symbole $\sum'_{\mathbf{l}\mathbf{Q}\mathbf{n}}$ représente la somme sur tous les états $|\mathbf{l}, \mathbf{Q}, \mathbf{n}\rangle$ excepté l'état fondamental $|\mathbf{0}, \mathbf{Q}_0, \mathbf{0}\rangle$.

3.1.2.b Moyenne quantique de l'impulsion

On prend la valeur moyenne de l'opérateur \mathbf{P}_{cin} dans l'état $|\Psi\rangle$. La partie champ de l'impulsion $e\Delta\mathbf{A}$ implique un échange de photon, elle est donc nulle à l'ordre zéro. On a alors :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P}_{cin} \rangle &= \langle \mathbf{P} \rangle + \mathbf{P}_{relat} + \mathbf{P}_{Casi} \\ \langle \mathbf{P} \rangle &= \langle \mathbf{s}, \mathbf{P}_0, \mathbf{0}_k | \mathbf{P} | \mathbf{s}, \mathbf{P}_0, \mathbf{0}_k \rangle + \sum'_{\mathbf{l}\mathbf{P}\mathbf{n}} \langle \mathbf{s}, \mathbf{P}_0, \mathbf{0} | \mathbf{P} | \mathbf{l}, \mathbf{P}, \mathbf{n} \rangle \frac{W_{2\mathbf{l}\mathbf{P}\mathbf{n}, \mathbf{s}\mathbf{P}_0\mathbf{0}}}{(E_{\mathbf{s}\mathbf{P}_0\mathbf{0}} - E_{\mathbf{l}\mathbf{P}\mathbf{n}})} + c.c. \\ \mathbf{P}_{relat} &= -\langle \mathbf{s}, \mathbf{P}_0, \mathbf{0}_k | f(\mathbf{P}, \mathbf{p}) | \mathbf{s}, \mathbf{P}_0, \mathbf{0}_k \rangle - \sum'_{\mathbf{l}\mathbf{P}\mathbf{n}} \langle \mathbf{s}, \mathbf{P}_0, \mathbf{0} | f(\mathbf{P}, \mathbf{p}) | \mathbf{l}, \mathbf{P}, \mathbf{n} \rangle \frac{W_{2\mathbf{l}\mathbf{P}\mathbf{n}, \mathbf{s}\mathbf{P}_0\mathbf{0}}}{(E_{\mathbf{s}\mathbf{P}_0\mathbf{0}} - E_{\mathbf{l}\mathbf{P}\mathbf{n}})} + c.c. \\ \mathbf{P}_{Casi} &= -\sum'_{\mathbf{l}\mathbf{P}\mathbf{n}} \langle \mathbf{s}, \mathbf{P}_0, \mathbf{0} | e\Delta\mathbf{A} | \mathbf{l}, \mathbf{P}, \mathbf{n} \rangle \frac{W_{1\mathbf{l}\mathbf{P}\mathbf{n}, \mathbf{s}\mathbf{P}_0\mathbf{0}}}{(E_{\mathbf{s}\mathbf{P}_0\mathbf{0}} - E_{\mathbf{l}\mathbf{P}\mathbf{n}})} + c.c. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Revenons ici sur la contribution du spin de l'électron. Le couplage spin-orbite W_{so} (3.3) est partie prenante de la perturbation W qui intervient ici à l'ordre un. Comme W_{so} est le seul opérateur dépendant du spin, sa contribution est donc nulle en raison des règles de sélection. Lorsque l'on trace sur les coordonnées du centre de masse, tous les opérateurs impulsion du centre de masse \mathbf{P} prennent la valeur \mathbf{P}_0 :

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{P} \rangle &= \mathbf{P}_0 + \sum'_{ln} \langle \mathbf{s}, 0_k | \mathbf{P}_0 | \mathbf{l}, n \rangle \frac{W_{2lP_0n, sP_0}}{(E_{sP_0} - E_{lP_n})} + c.c. \\ \mathbf{P}_{relat} &= -\langle \mathbf{s}, \mathbf{0}_k | f(\mathbf{P}_0, \mathbf{p}) | \mathbf{s}, \mathbf{0}_k \rangle \\ &\quad - \sum'_{ln} \langle \mathbf{s}, 0_k | f(\mathbf{P}_0, \mathbf{p}) | \mathbf{l}, n \rangle \frac{W_{2lP_0n, sP_0}}{(E_{sP_0} - E_{lP_n})} + c.c. \\ \mathbf{P}_{Casi} &= - \sum'_{ln} \langle \mathbf{s}, 0_k | e\Delta\mathbf{A} | \mathbf{l}, n_k \rangle \frac{W_{1lP_0n, sP_0}}{(E_{sP_0} - E_{lP_0n})} + c.c.\end{aligned}\quad (3.10)$$

Comme nous recherchons une correction proportionnelle à la vitesse de déplacement de l'atome, nous pouvons donc négliger tous les termes \mathbf{P}_0 d'ordre de multiplicité supérieur à un. Nous pouvons maintenant effectuer la trace sur les degrés de liberté du champ électromagnétique. En se restreignant aux termes proportionnels à α il reste :

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{P} \rangle &= \mathbf{P}_0 + \sum_{\mathbf{l}\mathbf{k}\epsilon} \langle \phi_s | \mathbf{P}_0 | \phi_l \rangle \frac{1}{E_{s\mathbf{P}_0} - E_{l\mathbf{P}_0, 0_k}} \langle \phi_l | \frac{\mathbf{p}^4}{\mu^3} | \phi_s \rangle + c.c. \\ \mathbf{P}_{relat} &= -\langle \phi_s | \frac{1}{8c^2} \left(\frac{8}{M\mu} (\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{p}) \mathbf{p} + \frac{4}{M\mu} \mathbf{P}_0 \mathbf{p}^2 + \frac{4}{M\mu} \mathbf{p} \mathbf{p}^2 \right) | \phi_s \rangle \\ &\quad - \sum_{\mathbf{l}\mathbf{k}\epsilon} \langle \phi_s | \mathbf{p}^2 (1 + 2\hat{p}\hat{p}) \frac{\mathbf{P}_0}{2M\mu c^2} | \phi_l \rangle \frac{1}{E_{s\mathbf{P}_0} - E_{l\mathbf{P}_0, 0_k}} \langle \phi_l | \frac{\mathbf{p}^4}{\mu^3} | \phi_s \rangle + c.c. \\ \mathbf{P}_{Casi} &= \sum_{\mathbf{l}\mathbf{k}\epsilon} \frac{\epsilon \langle \phi_s | (e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{m_\beta}{M} - e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{m_\alpha}{M}) | \phi_l \rangle \Omega_{1,s} e^2 \mathcal{A}_{\mathbf{k}}^2}{E_{s\mathbf{P}_0} - E_{l(\mathbf{P}_0 - \hbar\mathbf{k})1_k}} + c.c.\end{aligned}\quad (3.11)$$

où $\Omega_{1,s}$ représente l'élément de matrice de W_1 pour lequel on a effectué la trace sur les états du champ électromagnétique et sur la quantité de mouvement du centre de masse :

$$\Omega_{1,s} = \langle \phi_l | -\frac{\mathbf{P}_0}{M} \cdot \epsilon \left(e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{m_\beta}{M} - e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{m_\alpha}{M} \right) - \mathbf{p} \cdot \epsilon \left(\frac{e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{m_\beta}{M}}{m_\alpha} + \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{m_\alpha}{M}}{m_\beta} \right) | \phi_s \rangle$$

Le terme $\mathbf{P}_0 - \hbar\mathbf{k}$ au dénominateur décrit le recul qui vient de la conservation de l'impulsion lors du processus d'émission-absorption d'un photon par l'atome. $\mathbf{p}^2 \hat{p}\hat{p}$ représente le tenseur $p_i p_j$. Nous pouvons remarquer aussi que le développement au premier ordre de $\langle \mathbf{P} \rangle$ et \mathbf{P}_{relat} , Eq.(3.11) est nulle car $\langle \phi_s | \mathbf{P}_0 | \phi_l \rangle = 0$ puisque par construction $s \neq l$.

En utilisant la relation de fermeture :

$$\sum_l \langle \phi_l | \langle \phi_l | \frac{1}{E(k) + E_l} = \frac{1}{E(k) + H_{at}}$$

où H_{at} est l'Hamiltonien atomique, le premier produit de l'équation \mathbf{P}_{Casi} (3.11), pro-

portionnel à \mathbf{P}_0 devient

$$\begin{aligned} & - \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \langle \phi_s | \epsilon e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{m_\beta}{M} \frac{1}{\frac{\hbar^2 k^2}{2M} - \frac{\mathbf{P}_0 \cdot \hbar \mathbf{k}}{M} + \hbar\omega_{\mathbf{k}} - E_s + H_{at}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{m_\beta}{M} \mathbf{P}_0 \cdot \epsilon | \phi_s \rangle e^2 \mathcal{A}_{\mathbf{k}}^2 \\ & = - \sum_{\mathbf{k}} \langle \phi_s | \frac{1}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m_\alpha} - \frac{\mathbf{P}_0 \cdot \hbar \mathbf{k}}{M} - \frac{\mathbf{p} \cdot \hbar \mathbf{k}}{m_\alpha} + \hbar\omega_{\mathbf{k}} - E_s + H_{at}} \Delta_k | \phi_s \rangle \frac{\mathbf{P}_0}{M} \frac{\alpha \hbar^2}{4\pi^2 k} \frac{2}{3} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Le terme $\mathbf{p} \cdot \hbar \mathbf{k}$ vient des relations de commutation : $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} H_{at}(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} = H_{at}(\mathbf{p} - \hbar \mathbf{k})$ et correspond à l'effet Doppler ressenti par la particule réduite dans son mouvement. Nous avons montré que cette correction était négligeable (§ 2.3.4.c), le dénominateur se réduit alors à $\frac{\hbar^2 k^2}{2m_\alpha} + \hbar\omega_{\mathbf{k}}$ car $|\phi_s\rangle H_{at} - E_s |\phi_s\rangle = 0$. Ce qui donne, en remplaçant la somme sur les vecteurs d'onde par une intégrale dans l'équation (3.12) :

$$(3.12) = - \frac{\alpha}{6\pi^2} \hbar^2 \times \int \frac{k d^3 k}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m_\alpha} + \hbar c k} \Delta_k \frac{\mathbf{P}_0}{M} \quad (3.13)$$

Le terme \mathbf{P}_{Casi} , Eq.(3.11), proportionnel à \mathbf{P}_0 , donne des contributions contenant des exponentielles oscillantes que nous pouvons simplifier. Prenons pour exemple le terme avec la masse m_β dans l'argument de l'exponentielle "à gauche" et la masse m_α dans l'argument de l'exponentielle "à droite" :

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \langle \phi_s | \epsilon e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{m_\beta}{M} \frac{1}{\frac{\hbar^2 k^2}{2M} - \frac{\mathbf{P}_0 \cdot \hbar \mathbf{k}}{M} + \hbar\omega_{\mathbf{k}} - E_s + H_{at}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{m_\alpha}{M} \mathbf{P}_0 \cdot \epsilon | \phi_s \rangle e^2 \mathcal{A}_{\mathbf{k}}^2 \\ & = \sum_{\mathbf{k}} \langle \phi_s | e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{1}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m_\alpha} + \hbar\omega_{\mathbf{k}}} \Delta_k | \phi_s \rangle \frac{\mathbf{P}_0}{M} \frac{\alpha \hbar^2}{4\pi^2 k} \\ & = \int k^2 dk \int d\hat{k} \frac{1}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m_\beta} + \hbar c k} \langle \phi_s | e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} (1 - \hat{k}\hat{k}) | \phi_s \rangle \frac{\mathbf{P}_0}{M} \frac{\alpha \hbar^2}{2\pi^2 k} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Le terme oscillant $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ dans l'intégrale revient à une coupure effective de vecteur d'onde $k \sim 1/r_a$ où r_a est le rayon atomique. Sur cet intervalle d'intégration nous pouvons négliger l'impulsion de recul et les termes Doppler par rapport à l'énergie $\hbar\omega_k = \hbar c k$ du photon et ainsi intégrer sur les vecteurs d'onde, ce terme (3.14) devient alors :

$$(3.14) = \langle \phi_s | \frac{1}{r} (1 + \hat{r}\hat{r}) | \phi_s \rangle \frac{\mathbf{P}_0}{M} \frac{\alpha \hbar}{4c} \quad (3.15)$$

Compte-tenu de ces hypothèses, nous obtenons le même résultat lorsque l'on inverse les indices α et β et pour leur conjugué respectif.

Dans la seconde ligne de l'équation Eq.(3.11), le terme $\langle \phi_s | \frac{1}{8c^2} \frac{4}{M\mu} \mathbf{p}\mathbf{p}^2 | \phi_s \rangle$ est nul par parité. Il reste alors

$$\mathbf{P}_{relat} = - \langle \phi_s | \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} (1 + 2\hat{p}\hat{p}) | \phi_s \rangle \frac{\mathbf{P}_0}{Mc^2} \quad (3.16)$$

En regroupant tous les termes, avec les expressions conjuguées et $\frac{\alpha \hbar}{c} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^2}$, on

obtient :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P}_{cin} \rangle &= \mathbf{P}_0 \\ &- \frac{\mathbf{P}_0}{M} \times \frac{4\alpha}{3\pi} \hbar^2 \int \frac{k d^3 k}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m_\alpha} + \hbar c k} - \frac{\mathbf{P}_0}{M} \times \frac{4\alpha}{3\pi} \hbar^2 \int \frac{k d^3 k}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m_\beta} + \hbar c k} \\ &- \frac{\mathbf{P}_0}{M c^2} \langle \phi_s | \left(\frac{p^2}{2\mu} (1 + 2\hat{p}\hat{p}) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} (1 + \hat{r}\hat{r}) \right) | \phi_s \rangle \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.1.3 Renormalisation de la masse inertielle

Tous les termes contribuant à la valeur du moment cinétique dans un état atomique donné \mathbf{s} sont proportionnels à \mathbf{P}_0 , c'est-à-dire à la vitesse de déplacement de l'atome. Cela correspond donc comme attendu à une contribution à la masse inertielle de l'atome. Comme au chapitre 2 nous reconnaissons dans l'équation (3.13) la "masse électromagnétique" δm utilisée par Bethe dans le calcul non-relativiste du Lamb-shift :

$$\delta m_\alpha = \frac{4\alpha}{3\pi} \hbar^2 \int \frac{k dk}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m_\alpha} + \hbar c k} \quad (3.18)$$

On voit donc apparaître dans l'équation (3.17) la renormalisation de la masse totale, avec $\frac{\delta m_\alpha}{M} + \frac{\delta m_\beta}{M} = \frac{\delta M}{M}$.

Il reste alors dans cette équation (3.17) une partie convergente, dans laquelle nous reconnaissons l'Hamiltonien de l'atome d'hydrogène $H_{at} = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$. Cette partie se réécrit :

$$\begin{aligned} &- \langle \phi_s | \left(\frac{p^2}{2\mu} (1 + 2\hat{p}\hat{p}) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} (1 + \hat{r}\hat{r}) \right) | \phi_s \rangle \frac{\mathbf{P}_0}{M c^2} \\ &= - \left[\langle H_{at} \rangle + \left(\left\langle \frac{2p^2}{2\mu} (\hat{p}\hat{p}) \right\rangle - \left\langle \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} (\hat{r}\hat{r}) \right\rangle \right) \right] \frac{\mathbf{P}_0}{M c^2} \\ &= - \left[E_s + C_s \left(2 \left\langle \frac{p^2}{2\mu} \right\rangle - \left\langle \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right\rangle \right) \right] \frac{\mathbf{P}_0}{M c^2} \end{aligned} \quad (3.19)$$

où E_s est l'énergie interne de l'atome d'hydrogène lorsque ce dernier se trouve dans un état $\mathbf{s} = (n, l)$ donné, $E_s = \langle \phi_s | H_{at} | \phi_s \rangle$. C_s est une constante dépendant de l'état $\mathbf{s} = (n, l)$ [126].

D'après le théorème du Viriel reliant la valeur moyenne de l'énergie cinétique $\langle T \rangle$ à celle du potentiel $\langle V \rangle$, avec un potentiel de la forme $V(r) = \lambda \cdot r^n$ on a la relation $2\langle T \rangle = n\langle V \rangle$. Ici le potentiel est Coulombien : $n = -1$. Par conséquent, le terme entre parenthèse de l'équation (3.19) est nul.

Nous pouvons alors réécrire le moment cinétique total :

$$\langle \mathbf{P} \rangle_{cin} = \mathbf{P}_0 - \frac{\delta M}{M} \mathbf{P}_0 - \frac{E_s}{M c^2} \mathbf{P}_0 \quad (3.20)$$

avec δM la masse électromagnétique de Bethe et E_s l'énergie interne de l'atome dans l'état s . Soit encore

$$\langle \dot{\mathbf{R}} \rangle = \frac{\mathbf{P}_0}{M^* + \frac{E_s}{c^2}} \quad (3.21)$$

avec $M^* = M + \delta M$. La masse au dénominateur de l'Eq.(3.21) représente la masse inertielle de l'atome. D'une part on retrouve la masse électromagnétique δM vue au paragraphe 2.3.5 qui renormalise la masse totale M des deux charges. D'autre part on trouve l'énergie interne transportée par l'atome, en accord avec le principe d'équivalence masse-énergie d'Einstein. A partir de (3.17) nous pouvons voir que la contribution due au terme Casimir seul (3.15) donne une contribution $\frac{8}{3} \frac{E_s}{Mc^2}$ à la masse totale lorsque l'atome se trouve dans l'état fondamental. Le terme assurant la première correction relativiste contribue quant à lui pour $-\frac{5}{3} \frac{E_s}{Mc^2}$. Par conséquent ces deux corrections sont nécessaires pour retrouver le principe d'équivalence.

3.2 Correction de masse à température finie

En poursuivant l'idée qu'un milieu bi-anisotrope dans une radiation isotrope doit acquérir une impulsion, nous allons étudier un atome en mouvement dans une radiation thermique isotrope. Nous nous intéressons donc à la correction de masse d'un atome lorsque ce dernier est soumis à un champ thermique. Ici les photons réels avec une distribution donnée remplacent les photons virtuels du vide quantique. L'Hamiltonien du système considéré est donc le même que dans la section précédente, équation (3.2), seul l'état du système est modifié.

3.2.1 Moyenne thermique d'une observable

La valeur à l'équilibre thermique d'un opérateur \mathbf{K} à la température T est donnée par

$$\langle \mathbf{K} \rangle = \frac{1}{Z} \text{Tr} \left(\mathbf{K} e^{-\beta H} \right) \quad (3.22)$$

où $\beta = 1/k_B T$ avec k_B la constante de Boltzmann, et Z est la fonction de partition :

$$Z = \text{Tr} \left(e^{-\beta H} \right) \quad (3.23)$$

3.2.2 Moyenne thermique perturbée

Pour calculer la valeur du moment cinétique nous utiliserons comme précédemment la théorie des perturbations. $H_0 + H_F$ est l'Hamiltonien non perturbé, et W le terme perturbatif. $H = H_0 + H_F + W$ est l'Hamiltonien total. Nous cherchons donc à évaluer de façon approchée la moyenne thermique pour un opérateur quelconque (3.22) et la fonction de partition Z (3.23).

3.2.2.a Développement perturbatif au premier ordre

Sachant que $H_0 + H_F$ et W ne commutent pas, le développement de $e^{-\beta H}$ au voisinage de $e^{-\beta(H_0 + H_F)}$ n'est pas immédiat car

$$e^{-\beta H} \neq e^{-\beta(H_0 + H_F)} \cdot e^{-\beta W}$$

On note $u(\beta) \equiv e^{-\beta H}$. Nous pouvons faire une analogie entre cet opérateur fonction de β et l'opérateur d'évolution $U(t) \equiv e^{-\frac{it}{\hbar}H}$ qui vient de la résolution de l'équation de Schrödinger lorsque l'Hamiltonien H ne dépend pas du temps :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$$

L'évolution temporelle du ket $|\psi(t)\rangle$ est donnée par

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi(0)\rangle$$

Une méthode commode pour obtenir la valeur approchée de l'opérateur d'évolution est de l'écrire sous forme de solution d'une équation intégrale. Nous appliquons le même raisonnement ici, en remplaçant $\frac{it}{\hbar}$ par β et en notant que $u(\beta)$ satisfait l'équation différentielle :

$$\frac{d}{d\beta} u(\beta) = -H u(\beta) \quad (3.24)$$

avec la condition aux limites $u(0) = \mathbb{1}$

Nous savons que $u(\beta)$ va être "proche" de $e^{-\beta(H_0+H_F)}$. On résout alors cette équation (3.24) en multipliant par $e^{\beta(H_0+H_F)}u(\beta)$ à gauche. On obtient la solution sous forme d'équation intégrale :

$$u(\beta) = e^{-\beta(H_0+H_F)} - \int_0^\beta d\beta' e^{-(\beta-\beta')(H_0+H_F)} W u(\beta') \quad (3.25)$$

La solution par itération de cette équation (3.25) fournit le développement par itération de $u(\beta)$. En changeant de notation on obtient $u(\beta')$ à partir de (3.25) elle-même :

$$u(\beta') = e^{-\beta'(H_0+H_F)} - \int_0^{\beta'} d\beta'' e^{-(\beta'-\beta'')(H_0+H_F)} W u(\beta'') \quad (3.26)$$

si on reporte (3.26) dans (3.25) on obtient :

$$\begin{aligned} u(\beta) &= e^{-\beta(H_0+H_F)} - \int_0^\beta d\beta' e^{-(\beta-\beta')(H_0+H_F)} W e^{-\beta'(H_0+H_F)} \\ &\quad + \int_0^\beta d\beta' e^{-(\beta-\beta')(H_0+H_F)} W \int_0^{\beta'} d\beta'' e^{-(\beta'-\beta'')(H_0+H_F)} W u(\beta'') \end{aligned} \quad (3.27)$$

Les deux premiers termes du second membre de (3.27) ne font intervenir que $H_0 + H_F$ et W qui sont connus. Le premier donne l'approximation d'ordre zéro en W , le second est du premier ordre. L'inconnue $u(\beta'')$ est repoussée ici au second ordre. Pour obtenir les ordres supérieurs il suffirait de poursuivre l'itération.

3.2.2.b Développement de la fonction de partition

La fonction de partition Z se calcule en prenant la trace de l'opérateur $u(\beta)$. Il est alors commode d'utiliser la base $|l\rangle = |\mathbf{n}, \mathbf{P}_0, \mathbf{n}_k\rangle$ des états propres de $H_0 + H_F$ (3.6).

En utilisant (3.27) il vient :

$$\begin{aligned} Z &= \sum_l \langle l|u(\beta)|l \rangle \\ &= Z_0 - \sum_l \int_0^\beta d\beta' e^{-(\beta-\beta')E_l} \langle l|W|l \rangle e^{-\beta'E_l} + \mathcal{O}(W^2) \end{aligned} \quad (3.28)$$

où E_l est la valeur propre de $H_0 + H_F$ associée à l'état $|l\rangle$, et $Z_0 \equiv Tr(e^{-\beta(H_0+H_F)})$. La correction due à la perturbation étant faible, nous écrivons :

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_0} + \frac{1}{Z_0^2} \sum_l \int_0^\beta d\beta' e^{-(\beta-\beta')E_l} \langle l|W|l \rangle e^{-\beta'E_l} + \mathcal{O}(W^2)$$

3.2.2.c Moyenne thermique de l'opérateur \mathbf{K} au premier ordre en perturbation

Nous pouvons appliquer les développements précédents (3.27) et (3.28) pour l'opérateur moment cinétique. En ne gardant que le premier ordre en W cela conduit à :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{K} \rangle &= \frac{1}{Z} Tr(\mathbf{K} e^{-\beta H}) \\ &= \frac{1}{Z} Tr(\mathbf{K} e^{-\beta(H_0+H_F)}) - \frac{1}{Z} Tr\left(\mathbf{K} \int_0^\beta d\beta' e^{-(\beta-\beta')(H_0+H_F)} W e^{-\beta'(H_0+H_F)}\right) \\ &= \frac{1}{Z_0} Tr(\mathbf{K} e^{-\beta(H_0+H_F)}) - \frac{1}{Z_0} Tr\left(\mathbf{K} \int_0^\beta d\beta' e^{-(\beta-\beta')(H_0+H_F)} W e^{-\beta'(H_0+H_F)}\right) \\ &\quad + \frac{1}{Z_0^2} Tr(\mathbf{K} e^{-\beta(H_0+H_F)}) \sum_l \int_0^\beta d\beta' e^{-(\beta-\beta')E_l} \langle l|W|l \rangle e^{-\beta'E_l} + \mathcal{O}(W^2) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Nous pouvons alors utiliser la base des fonctions propres de $H_0 + H_F$ et la relation de fermeture $\sum_m |m\rangle\langle m| = \mathbb{1}$ pour effectuer les intégrations. Le second terme du membre de droite de l'équation (3.29) se développe :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{Z_0} Tr\left(\mathbf{K} \int_0^\beta d\beta' e^{-(\beta-\beta')(H_0+H_F)} W e^{-\beta'(H_0+H_F)}\right) \\ &= \frac{1}{Z_0} \sum_{l,m} \langle l|\mathbf{K}|m \rangle \int_0^\beta d\beta' e^{-(\beta-\beta')E_m} \langle m|W|l \rangle e^{-\beta'E_l} \\ &= \frac{1}{Z_0} \left[\beta \sum_l \langle l|\mathbf{K}|l \rangle \langle l|W|l \rangle e^{-\beta E_l} + 2 \sum_{l,m} \langle l|\mathbf{K}|m \rangle \frac{e^{-\beta E_m}}{E_m - E_l} \langle m|W|l \rangle \right] \end{aligned}$$

En faisant de même pour les autres termes, nous obtenons la moyenne thermique de l'opérateur \mathbf{K} au premier ordre en perturbation :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{K} \rangle &= \frac{1}{Z_0} \left[\sum_l \langle l|\mathbf{K}|l \rangle e^{-\beta E_l} + \sum_l \langle l|\mathbf{K}|l \rangle e^{-\beta E_l} \frac{\beta}{Z_0} \sum_m \langle m|W|m \rangle e^{-\beta E_m} \right. \\ &\quad \left. - \beta \sum_l \langle l|\mathbf{K}|l \rangle \langle l|W|l \rangle e^{-\beta E_l} + 2 \sum_{l,m} \langle l|\mathbf{K}|m \rangle \frac{e^{-\beta E_l}}{E_l - E_m} \langle m|W|l \rangle \right] + \mathcal{O}(W^2) \end{aligned} \quad (3.30)$$

où on utilise l'expression (3.4) pour le moment cinétique.

3.2.3 Moyenne thermique dans le référentiel en translation uniforme

Intuitivement on s'attend à ce qu'un objet qui se mettrait en marche dans une radiation thermique isotrope soit freiné à cause de la friction thermique [85] jusqu'à avoir une vitesse nulle : à l'équilibre $\langle \dot{\mathbf{R}} \rangle = 0$. L'effet Doppler conjugué à la non-invariance de Lorentz de la radiation thermique produit un transfert d'impulsion non nul entre le champ de photon et l'objet qui freine son mouvement. Par conséquent, pour trouver la variation de masse d'un atome d'hydrogène due au couplage avec la radiation, que l'on peut voir dans la variation de l'impulsion lorsque l'on "branche" l'interaction, nous nous placerons dans le référentiel \mathcal{R}' en translation à la vitesse $-\mathbf{v}$ constante. Étant donné que nous effectuons une simple translation, dans ce référentiel \mathcal{R}' la vitesse de l'atome sera $\langle \dot{\mathbf{R}}' \rangle = \mathbf{v}$. De façon à faire apparaître l'effet du couplage avec le champ électromagnétique, nous nous intéresserons à la moyenne thermique de l'impulsion totale \mathbf{K} , dans le référentiel \mathcal{R}' :

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}_{\text{cin}} + e\Delta\mathbf{A} + f(\mathbf{P}, \mathbf{p}) + \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar\mathbf{k} \left[a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger a_{\mathbf{k}\epsilon} + \frac{1}{2} \right] \quad (3.31)$$

\mathbf{P}_{cin} et $f(\mathbf{P}, \mathbf{p})$ sont donnés en (3.4).

3.2.3.a Fonctions de partition

L'énergie d'un état $|l\rangle = |\mathbf{n}, \mathbf{P}_0, \mathbf{n}_{\mathbf{k}}\rangle$ dans le référentiel \mathcal{R} où la radiation est isotrope est

$$E_l = E_{\mathbf{n}} + \frac{\mathbf{P}_0^2}{2M} + \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}}(n_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}) \quad (3.32)$$

Dans le référentiel \mathcal{R}' en mouvement à la vitesse $|\mathbf{v}| \ll c$ par rapport à \mathcal{R} , en effectuant le changement de variable pour la particule et en prenant en compte l'effet Doppler pour la radiation thermique :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}' &= \mathbf{P} - M\mathbf{v} & , & & \mathbf{p}' &= \mathbf{p} & , & & \omega' &= \omega - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} \\ \mathbf{R}' &= \mathbf{R} + \mathbf{v}t & , & & \mathbf{r}' &= \mathbf{r} & , & & \mathbf{k}' &= \mathbf{k} - \frac{\omega}{c}\mathbf{v} \end{aligned} \quad (3.33)$$

l'énergie est alors

$$E'_l = E_{\mathbf{n}} + \frac{(\mathbf{P}_0 - M\mathbf{v})^2}{2M} + \sum_{\mathbf{k}} \hbar(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k})(n_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}) \quad (3.34)$$

Par conséquent dans ce référentiel \mathcal{R}' la probabilité d'avoir un état $|l\rangle$ est $e^{-\beta E'_l}$

Nous avons vu qu'en l'absence de couplage entre l'atome et le champ électromagnétique, le mouvement du centre de masse, la dynamique interne de l'atome et le champ électromagnétique sont indépendants. Par conséquent la fonction de partition Z_0 est le produit des fonctions de partition de chacun de ces sous-systèmes : $Z_0 = Z_P \cdot Z_{at} \cdot Z_F$ La fonction de partition dans le référentiel \mathcal{R}' s'écrit :

$$Z_0 = \int \frac{d^3\mathbf{P}_0}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\beta \frac{(\mathbf{P}_0 - M\mathbf{v})^2}{2M}} \cdot \sum_n e^{-\beta E_n} \cdot \prod_k \sum_{n_k} e^{-\beta \hbar(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k})(n_k + 1/2)}$$

3.2.3.b Moyenne thermique du moment cinétique dans le référentiel en translation uniforme

On obtient alors la moyenne thermique de l'impulsion totale dans le référentiel en translation uniforme, au premier ordre par rapport à la perturbation W :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{K} \rangle = \frac{1}{Z_0} & \left[\sum_l \langle l | \mathbf{K} | l \rangle e^{-\beta E'_l} + \sum_l \langle l | \mathbf{K} | l \rangle e^{-\beta E'_l} \frac{\beta}{Z_0} \sum_m \langle m | W | m \rangle e^{-\beta E'_m} \right. \\ & \left. - \beta \sum_l \langle l | \mathbf{K} | l \rangle \langle l | W | l \rangle e^{-\beta E'_l} + 2 \sum_{l,m} \langle l | \mathbf{K} | m \rangle \frac{1}{E_l - E_m} \langle m | W | l \rangle e^{-\beta E'_l} \right] \quad (3.35) \end{aligned}$$

3.2.4 Développement à basse température, basse vitesse, basse énergie

Nous nous restreignons à un mouvement non relativiste du centre de masse, nous ne garderons donc ici que les termes proportionnels à \mathbf{v} . Nous considérons aussi que l'atome reste lié et que pour tout niveau \mathbf{s} on a $\frac{E_s}{\mu c^2} \ll 1$. En pratique cela revient à négliger tout terme d'ordre supérieur à deux pour l'impulsion de la particule réduite \mathbf{p} . Nous négligerons aussi les termes d'ordres supérieurs en $k_B T / M c^2$, ce qui est raisonnable si $T \ll 10^9 K$.

Nous réécrivons l'équation (3.35) sous la forme :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{K} \rangle &= \langle \mathbf{P}_{\text{cin}} \rangle + \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4 \\ \mathbf{K}_1 &= \frac{1}{Z_0} \sum_l \left\langle l \left| e \Delta \mathbf{A} + f(\mathbf{P}, \mathbf{p}) + \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar \mathbf{k} \left[a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger a_{\mathbf{k}\epsilon} + \frac{1}{2} \right] \right| l \right\rangle e^{-\beta E'_l} \\ \mathbf{K}_2 &= \frac{1}{Z_0} \sum_l \left\langle l \left| e \Delta \mathbf{A} + f(\mathbf{P}, \mathbf{p}) + \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar \mathbf{k} \left[a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger a_{\mathbf{k}\epsilon} + \frac{1}{2} \right] \right| l \right\rangle e^{-\beta E'_l} \frac{\beta}{Z_0} \sum_m \langle m | W | m \rangle e^{-\beta E'_m} \\ \mathbf{K}_3 &= -\frac{1}{Z_0} \beta \sum_l \left\langle l \left| e \Delta \mathbf{A} + f(\mathbf{P}, \mathbf{p}) + \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar \mathbf{k} \left[a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger a_{\mathbf{k}\epsilon} + \frac{1}{2} \right] \right| l \right\rangle \langle l | W | l \rangle e^{-\beta E'_l} \\ \mathbf{K}_4 &= \frac{2}{Z_0} \sum_{l,m} \left\langle l \left| e \Delta \mathbf{A} + f(\mathbf{P}, \mathbf{p}) + \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar \mathbf{k} \left[a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger a_{\mathbf{k}\epsilon} + \frac{1}{2} \right] \right| m \right\rangle \frac{e^{-\beta E'_l}}{E_l - E_m} \langle m | W | l \rangle \quad (3.36) \end{aligned}$$

L'échange d'un photon avec le champ électromagnétique peut être ici l'émission-absorption d'un photon virtuel du vide quantique, ou bien un échange d'un photon réel du champ thermique pour lequel on peut avoir émission-absorption ou absorption-émission. Nous utilisons ici la même démarche qu'au paragraphe 2.3.3, ainsi que les règles suivantes pour l'échange d'un photon :

$$\begin{aligned} \langle n_{\mathbf{k}'\epsilon'} | a_{\mathbf{k}\epsilon} a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger | n_{\mathbf{k}'\epsilon'} \rangle &= (n_{\mathbf{k}\epsilon} + 1) \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta_{\epsilon,\epsilon'} \\ \langle n_{\mathbf{k}'\epsilon'} | a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger a_{\mathbf{k}\epsilon} | n_{\mathbf{k}'\epsilon'} \rangle &= n_{\mathbf{k}\epsilon} \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta_{\epsilon,\epsilon'} \end{aligned}$$

Le nombre moyen de photons de fréquence ω et de vecteurs d'onde \mathbf{k} est donné par

$$\begin{aligned}\bar{n}_{k\epsilon} &= \frac{1}{Z_F} \prod_{k,\epsilon} \sum_{n_{k\epsilon}} n_{k\epsilon} e^{-\beta\hbar(\omega - \mathbf{v}\mathbf{k})(n_{k\epsilon} + 1/2)} \\ &= \frac{1}{e^{\beta\hbar(\omega - \mathbf{v}\mathbf{k})} - 1}\end{aligned}\quad (3.37)$$

Dans ce cas, le terme \mathbf{K}_1 de l'équation (3.36) donne :

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_1 &= \frac{1}{Z_0} \text{Tr} \left(\mathbf{K} e^{-\beta H_0} \right) = \frac{1}{Z_0} \sum_l e^{-\beta E_l'} \left\langle l \left| f(\mathbf{P}, \mathbf{p}) + \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar \mathbf{k} \left[a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger a_{\mathbf{k}\epsilon} + \frac{1}{2} \right] \right| l \right\rangle \\ &= \frac{1}{Z_0} \sum_l e^{-\beta E_l'} \left\langle l \left| \frac{1}{8c^2} \left(\frac{4\mathbf{P}^3}{M^2} + \frac{8}{M\mu} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{p} + \frac{4}{M\mu} \mathbf{P} \mathbf{p}^2 \right) \right| l \right\rangle \\ &\quad + \frac{1}{Z_F} \int d^3k \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} \sum_{\epsilon} \sum_{n_{k\epsilon}} \hbar \mathbf{k} (n_{k\epsilon} + \frac{1}{2}) e^{-\beta\hbar(\omega - \mathbf{v}\mathbf{k})(n_{k\epsilon} + \frac{1}{2})} \\ &= \frac{1}{Z_P} \int \frac{d^3\mathbf{P}_0}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{\mathbf{P}_0^3}{2M^2c^2} + \frac{\mathbf{P}_0}{2M\mu c^2} \frac{1}{Z_{at}} \text{Tr} (\mathbf{p}^2 (1 + 2\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}})) \right) e^{-\beta \frac{(\mathbf{P}_0 - M\mathbf{v})^2}{2M}} \\ &\quad + \sum_{\epsilon} \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} \int d^3k \hbar \mathbf{k} (\bar{n}_{k\epsilon} + \frac{1}{2}) \\ &= \frac{3}{2\beta M c^2} M \mathbf{v} + M \mathbf{v} \left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} (1 + 2\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}) \right\rangle_{Th} \frac{1}{M c^2} + \frac{4\pi^2 \mathbf{v}}{45} \frac{\hbar}{c} \frac{1}{(\beta \hbar c)^4} \mathcal{V}\end{aligned}\quad (3.38)$$

où \mathcal{V} est le volume d'espace considéré. On note $\langle O \rangle_{Th}$ la moyenne thermique d'un opérateur O en l'absence de perturbation dans le référentiel de repos de la particule : $\langle O \rangle_{Th} = \frac{1}{Z_0} \text{Tr} (O e^{-\beta(H_0 + H_F)})$. La vitesse $-\mathbf{v}$ est la vitesse du référentiel en translation.

Le terme \mathbf{K}_2 de (3.36) représente la correction au premier ordre en W pour $1/Z$, qui correspond simplement au résultat (3.38) multiplié par $\frac{\beta}{Z_0} \text{Tr} (W e^{-\beta H_0})$:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_2 &= \frac{1}{Z_0} \text{Tr} \left(\mathbf{K} e^{-\beta H_0} \right) \frac{\beta}{Z_0} \text{Tr} \left(W e^{-\beta H_0} \right) \\ &= \left(\frac{3}{2\beta M c^2} M \mathbf{v} + M \mathbf{v} \left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} (1 + 2\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}) \right\rangle \frac{1}{M c^2} + \frac{4\pi^2 \mathbf{v}}{45} \frac{\hbar}{c} \frac{1}{(\beta \hbar c)^4} \mathcal{V} \right) \\ &\quad \times \frac{\beta}{Z_0} \sum_l e^{-\beta E_l'} \left\langle l \left| -\frac{1}{8c^2} \left(\frac{\mathbf{P}^4}{M^3} + \frac{4}{M^2\mu} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{p})^2 + \frac{2}{M^2\mu} \mathbf{P}^2 \mathbf{p}^2 \right) \right| l \right\rangle \\ &= \left(\frac{4\pi^2 \mathbf{v}}{45} \frac{\hbar}{c} \frac{1}{(\beta \hbar c)^4} \mathcal{V} \right) \times \left(-\frac{3}{8\beta M c^2} - \frac{1}{2} \left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} (1 + 2\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}) \right\rangle \frac{1}{M c^2} \right)\end{aligned}\quad (3.39)$$

où l'on a gardé l'ordre le plus bas dans les paramètres de perturbation.

Ensuite, pour le terme \mathbf{K}_3 de (3.36), la correction au premier ordre à deux contributions. La première couple deux états identiques. Avec les règles de sélection vues au

§ 2.3.3.e, seule la partie W_2 de la perturbation donne une contribution non nulle :

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_3 &= -\frac{\beta}{Z_0} \sum_l \left\langle l \left| e\Delta\mathbf{A} + f(\mathbf{P}, \mathbf{p}) + \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar\mathbf{k} \left[a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger a_{\mathbf{k}\epsilon} + \frac{1}{2} \right] \right| l \right\rangle \langle l | W_2 | l \rangle e^{-\beta E_l'} \\
&= -\frac{\beta}{Z_0} \sum_l \left\langle l \left| f(\mathbf{P}, \mathbf{p}) + \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar\mathbf{k} \left[a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger a_{\mathbf{k}\epsilon} + \frac{1}{2} \right] \right| l \right\rangle \\
&\quad \times \left\langle l \left| -\frac{1}{8c^2} \left(\frac{\mathbf{P}^4}{M^3} + \frac{4}{M^2\mu} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{p})^2 + \frac{2}{M^2\mu} \mathbf{P}^2 \mathbf{p}^2 \right) \right| l \right\rangle e^{-\beta E_l'} \\
&= -\left(\frac{4\pi^2 \mathbf{v}}{45 c} \frac{\hbar}{(\beta\hbar c)^4} \mathcal{V} \right) \times \left(-\frac{3}{8\beta M c^2} - \frac{1}{2} \left\langle \frac{p^2}{2\mu} (1 + 2\hat{p}\hat{p}) \right\rangle \frac{1}{M c^2} \right) \quad (3.40)
\end{aligned}$$

où ne sont conservés, encore une fois, que les termes du premier ordre. Cette contribution s'annule avec celle de l'équation (3.39). La contribution \mathbf{K}_4 de (3.36) vient de l'échange d'un photon avec le champ électromagnétique.

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_4 &= \frac{2}{Z_0} \sum_{l,m} \left\langle l \left| e\Delta\mathbf{A} + f(\mathbf{P}, \mathbf{p}) + \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar\mathbf{k} \left[a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger a_{\mathbf{k}\epsilon} + \frac{1}{2} \right] \right| m \right\rangle \frac{e^{-\beta E_l'}}{E_l - E_m} \langle m | W_1 | l \rangle \\
&= \frac{2}{Z_0} \sum_l e^{-\beta E_l'} \left\langle l \left| (e\Delta\mathbf{A}) \frac{1}{E_l - H_0} \left(-\frac{\mathbf{P}}{M} \cdot e\Delta\mathbf{A} \right) \right| l \right\rangle \\
&= \frac{2}{Z_0} \sum_l e^{-\beta E_l'} \sum_k e^2 \mathcal{A}^2 \left\langle \phi_n \left| \left(\frac{(n_{k\epsilon} + 1)(1 - e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}})}{\hbar k c + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_\alpha}} + \frac{(n_{k\epsilon} + 1)(1 - e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}})}{\hbar k c + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_\beta}} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \frac{n_{k\epsilon}(1 - e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}})}{\hbar k c - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_\alpha}} - \frac{n_{k\epsilon}(1 - e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}})}{\hbar k c - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_\beta}} \right) \right| \phi_n \right\rangle \underline{\Delta}_k \frac{\mathbf{P}_0}{M}
\end{aligned}$$

À ce stade nous pouvons négliger le terme de recul au dénominateur pour les termes comprenant $e^{\pm i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ qui seront convergents, et effectuer les moyennes thermiques sur le mouvement du centre de masse et les photons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_4 &= \frac{2}{Z_{at}} \sum_n e^{-\beta E_n} \int d^3k \frac{\alpha \hbar^2}{2\pi^2 k} \langle \phi_n | \frac{1}{\hbar k c + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_\alpha}} + \frac{1}{\hbar k c + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_\beta}} | \phi_n \rangle \underline{\Delta}_k \mathbf{v} \\
&\quad - \frac{2}{Z_{at}} \sum_n e^{-\beta E_n} \int d^3k \frac{\alpha \hbar^2}{4\pi^2 k} \frac{4}{\hbar k c} \langle \phi_n | \cos(kr) | \phi_n \rangle \underline{\Delta}_k \mathbf{v} \\
&\quad - \frac{2}{Z_{at}} \sum_n e^{-\beta E_n} \int d^3k \frac{\alpha \hbar^2}{2\pi^2 k} \langle \phi_n | \frac{\bar{n}_{k\epsilon}}{2m_\alpha c - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_\alpha}} + \frac{\bar{n}_{k\epsilon}}{2m_\beta c - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_\beta}} | \phi_n \rangle \underline{\Delta}_k \mathbf{v} \\
&= \delta M \mathbf{v} - \left\langle \frac{\alpha \hbar}{M c r} \frac{1}{(1 + \hat{r}\hat{r})} \right\rangle_{Th} M \mathbf{v} + \mathcal{O} \left(\left(\frac{k_B T}{\mu c^2} \right)^2 \right) \quad (3.41)
\end{aligned}$$

Nous retrouvons ici, comme en section 2.3.5, en négligeant l'énergie de recul, $\delta M \mathbf{v}$ la masse électromagnétique de Bethe (3.18) :

$$\begin{aligned}
\delta M \mathbf{v} &= \frac{1}{Z_{at}} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle \phi_n | \phi_n \rangle \int d^3k \frac{\alpha \hbar^2}{2\pi^2 k} \left(\frac{1}{\hbar k c + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_\alpha}} + \frac{1}{\hbar k c + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_\beta}} \right) \underline{\Delta}_k \mathbf{v} \\
&= (\delta m_\alpha + \delta m_\beta) \mathbf{v}
\end{aligned}$$

On note qu'il est possible d'avoir une contribution significative des photons tels que $\hbar kc \rightarrow \infty$ même si la température est non nulle, car ce terme correspond à la présence du vide électromagnétique, donc aux photons virtuels qui eux ne suivent pas la statistique de Maxwell-Boltzmann. Dans ce cas, le facteur exponentiel $\exp(-\beta\hbar kc)$ se simplifie avec le facteur de normalisation Z_0 .

3.2.5 Correction de masse à température finie

En sommant toutes les contributions $\mathbf{K}_{1 \rightarrow 4}$ nous obtenons l'impulsion totale quand l'ensemble du système se trouve à la température T :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{K} \rangle &= \langle \mathbf{P}_{cin} \rangle + \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4 \\ &= \langle \mathbf{P}_{cin} \rangle + \delta M \mathbf{v} + \left\langle \frac{p^2}{2\mu} (1 + 2\hat{p}\hat{p}) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} (1 + \hat{r}\hat{r}) \right\rangle_{Th} \frac{\mathbf{v}}{c^2} \\ &\quad + \frac{3 k_B T}{2 M c^2} M \mathbf{v} + \frac{4\pi^2}{45} \frac{\mathbf{v}}{c} \frac{\hbar}{(\beta\hbar c)^4} \mathcal{V} \end{aligned} \quad (3.42)$$

On note E_{th} l'énergie interne à la température T :

$$E_{th} = \frac{1}{Z_{at}} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle \phi_n | \left(\frac{p^2}{2\mu} (1 + 2\hat{p}\hat{p}) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} (1 + \hat{r}\hat{r}) \right) | \phi_n \rangle \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{Z_{at}} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle \phi_n | \left(\frac{p^2}{2\mu} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) | \phi_n \rangle \\ &= \frac{1}{Z_{at}} \sum_n E_n e^{-\beta E_n} \end{aligned} \quad (3.44)$$

où les simplifications sont dues à l'application du théorème du Viriel.

Le dernier terme de (3.42) est la quantité de mouvement moyenne d'un volume \mathcal{V} d'un gaz de photon dans le référentiel en translation, présent même en l'absence de l'atome. $\sigma = \frac{\pi^2}{60} \frac{k_B^4}{\hbar^3 c^2}$ est la constante de Stefan-Boltzmann. $\frac{4\sigma T^4}{c}$ est la densité d'énergie. Un facteur $\frac{4}{3}$ est issue de l'intégration angulaire dont nous n'avons pas encore d'interprétation. Sachant que $\mathbf{P}_{cin} = M \dot{\mathbf{R}}$ par définition et que l'on se place dans le référentiel en translation à la vitesse \mathbf{v} , on peut montrer la relation $\langle \dot{\mathbf{R}} \rangle = \mathbf{v}$. On a alors $\langle \mathbf{P}_{cin} \rangle = M \mathbf{v}$.

Si l'on retranche la contribution du champ seul, il reste l'impulsion

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{K} \rangle_{at} &= M \mathbf{v} + \delta M \mathbf{v} + \frac{E_{th}}{M c^2} M \mathbf{v} + \frac{3 k_B T}{2 M c^2} M \mathbf{v} \\ &= \left(M^* + \frac{E_{th}}{c^2} + \frac{3 k_B T}{2 c^2} \right) \mathbf{v} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Nous retrouvons dans ce résultat le principe d'équivalence masse-énergie, E_{th} est l'énergie interne, les niveaux atomiques étant peuplés thermiquement. Le terme $\frac{3}{2} k_B T$ est l'énergie cinétique du centre de masse à l'équilibre thermique. La correction de masse δM est due à l'interaction avec le champ du vide et ne fait pas intervenir la température.

3.3 Annexe : Relation entre énergie des forces de dispersion et masse inertielle

Nous allons poursuivre la démarche précédente dans le cas de deux atomes. La question se pose si l'on retrouve une participation à la masse inertielle de l'énergie de liaison due aux forces de dispersion. D'un point de vue macroscopique il a été montré que l'énergie de Casimir est contenue dans la masse inertielle d'une cavité Fabry-Perrot, en calculant la force exercée par le vide sur la cavité lorsque cette dernière est en mouvement accéléré [106]. On considère ici deux atomes neutres identiques en mouvement dont on recherche la masse totale en considérant le moment cinétique de l'ensemble, de la même façon que dans la section 3.1. À l'ordre le plus bas des perturbations la vitesse du centre de masse \dot{R} est proportionnelle à l'impulsion P_0 qui est le moment cinétique à l'ordre zéro par rapport aux perturbations considérées (voir § 3.1.2). Pour simplifier nous prendrons les atomes séparés par une distance fixe, leur vitesse est donc identique.

Note : Cette section est encore en cours d'investigation. Nous présentons ici le modèle et les approximations effectuées, ainsi que les premières grandes lignes du développement.

3.3.1 Hamiltonien

On considère deux atomes A et B identiques. L'atome A est constitué de deux charges q_α, q_β de masses m_α, m_β , la masse de cet atome est M_A , la masse réduite associé au mouvement interne est μ_A telle que $1/\mu_A = 1/m_\alpha + 1/m_\beta$. Son impulsion est \mathbf{P}_A et l'impulsion lié au mouvement interne est \mathbf{p}_A . Idem pour B avec les indices γ et δ . Les atomes étant identiques nous prendrons $M_A = M_B = M$ et $\mu_A = \mu_B = \mu$.

En présence de deux atomes A et B couplés au champ électromagnétique l'Hamiltonien s'écrit :

$$\begin{aligned}
 H &= H_F + H_{0A} + W_{1A} + W_{2A} + H_{0B} + W_{1B} + W_{2B} + Q & (3.46) \\
 H_F &= \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar\omega_k \left[a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger a_{\mathbf{k}\epsilon} + \frac{1}{2} \right] \\
 H_{0A} &= \frac{\mathbf{P}_A^2}{2M} + \frac{\mathbf{p}_A^2}{2\mu} + V(r) \\
 W_{1A} &= -\frac{e}{M} \mathbf{P}_A \cdot \Delta \mathbf{A} - \frac{e}{\mu} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{A}(\mathbf{r}_\alpha) + \mathbf{A}(\mathbf{r}_\beta)) + \frac{e^2}{2m_\alpha} \mathbf{A}(\mathbf{r}_\alpha)^2 + \frac{e^2}{2m_\beta} \mathbf{A}(\mathbf{r}_\beta)^2 \\
 W_{2A} &= -\frac{1}{8c^2} \left(\frac{\mathbf{P}_A^4}{M^3} + \frac{4}{M^2\mu} (\mathbf{P}_A \cdot \mathbf{p}_A)^2 + \frac{2}{M^2\mu} \mathbf{P}_A^2 \mathbf{p}_A^2 + \frac{8}{M^3} \mathbf{P}_A^2 (\mathbf{P}_A \cdot \mathbf{p}_A) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4}{M^2\mu} (\mathbf{P}_A \cdot \mathbf{p}_A) \mathbf{p}_A^2 + \frac{\mathbf{p}_A^4}{\mu^3} \right) \\
 Q &= -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B}{R_{AB}^3} - \frac{3(\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{R}_{AB})(\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{R}_{AB})}{R_{AB}^5} \right)
 \end{aligned}$$

où H_0 est l'Hamiltonien d'une particule dans les champs classiques, H_F est l'Hamiltonien du champ électromagnétique du vide et W_1 et W_2 sont les termes perturbatifs. On note $W = W_1 + W_2$. Un indice B remplaçant A correspond au second atome. Q vient du développement perturbatif des interactions de Coulomb "croisées" entre A et B [127].

On définit l'impulsion totale \mathcal{P} et l'impulsion réduite entre les deux atomes \mathbf{P}_{AB} :

$$\mathcal{P} = \mathbf{P}_A + \mathbf{P}_B \quad (3.47a)$$

$$\mathbf{P}_{AB} = \frac{M_B}{\mathcal{M}} \mathbf{P}_A - \frac{M_A}{\mathcal{M}} \mathbf{P}_B \quad (3.47b)$$

Ces transformations sont équivalentes à celles effectuées en (2.3) au paragraphe 2.1.2. Il est donc facile de vérifier les relations de commutation pour ces nouveaux opérateurs avec la coordonnée du centre de masse total et la coordonnée réduite du mouvement des deux particules. Le moment cinétique de l'ensemble est alors :

$$\mathbf{P}_{cin} = \mathcal{M} \dot{\mathbf{R}} = \mathcal{M} \frac{\partial H}{\partial \mathcal{P}} \quad (3.48)$$

Nous nous plaçons dans un état propre \mathcal{P}_0 de \mathcal{P} . Nous ne garderons que l'ordre le plus bas en v/c , par conséquent seul les termes linéaires en \mathcal{P} donneront une contribution significative. Dans le cadre de cette approche préliminaire nous allons discuter rapidement des termes donnant une possible contribution. Nous nous plaçons dans le cas particulier où la distance R_{AB} est fixe, par conséquent les contributions \mathbf{P}_{AB} seront nulles.

$$\mathbf{P}_A = \frac{M_A}{\mathcal{M}} \mathcal{P} + \mathbf{P}_{AB} \quad (3.49a)$$

$$\mathbf{P}_B = \frac{M_B}{\mathcal{M}} \mathcal{P} - \mathbf{P}_{AB} \quad (3.49b)$$

Pour les deux atomes le moment cinétique total est alors :

$$\mathbf{P}_{cin} = \mathcal{P} - e\Delta \mathbf{A}_A - e\Delta \mathbf{A}_B - f(\mathcal{P}, \mathbf{p}_A, \mathbf{p}_B) \quad (3.50)$$

où f est une fonction qui vient des termes relativistes.

Nous considérons encore une fois une perturbation à une boucle correspondant à l'échange d'un photon et à un facteur $\alpha = 1/137$. Les deux particules sont considérées comme non relativistes. Nous négligerons donc les termes d'ordres supérieurs en v/c et en $\hbar\omega_0/\mu c \sim 10^{-8}$. Les différents paramètres que nous allons utiliser pour l'expansion sont donc :

- $v/c \ll 1$
- $\alpha = 1/137 \ll 1$
- $\hbar\omega_0/\mu c \sim 10^{-8}$

3.3.2 Développement perturbatif

3.3.2.a Base des états

La base de fonctions utilisée pour le développement est la base des fonctions propres de l'Hamiltonien $H_{0A} + H_{0B} + H_F$. On rappelle qu'il n'y a pas de couplage entre la matière et le champ à ce stade. La distance \mathbf{R}_{AB} entre les atomes est fixe et donc considérée comme un paramètre extérieur du problème. Le mouvement du centre de masse de chaque atome est par conséquent identique et nous prendrons la valeur propre

associée à \mathbf{P}_A et \mathbf{P}_B égale à $\frac{1}{2}\mathcal{P}_0$. Pour simplifier l'écriture nous omettrons alors ces deux valeurs dans la base de fonctions. Dans ce cas la base utilisée est :

$$|l, \mathbf{m}, \mathbf{n}_k\rangle = |\phi_l\rangle \otimes |\phi_{\mathbf{m}}\rangle \otimes |\mathbf{n}_k\rangle \quad (3.51)$$

avec $\phi_{\mathbf{n}}$ la fonction d'onde de l'atome d'hydrogène avec $\mathbf{n} = (n, j)$ les deux nombres quantiques caractérisant les niveaux de l'atome d'hydrogène sans considérer le spin.

3.3.2.b Correction à l'énergie

Puisque nous ne considérons que les termes linéaires par rapport à l'impulsion totale, nous pouvons identiquement considérer la contribution à l'énergie proportionnelle à \mathcal{P}_0^2 plutôt que le moment cinétique. Simplement cette approche est plus facile à discuter ici.

Nous recherchons par conséquent les termes proportionnels à \mathcal{P}_0^2 couplant les deux atomes A et B . On remarque que le seul opérateur couplant ces deux atomes est l'opérateur Q . Ne contenant pas d'opérateur \mathcal{P} on considère sa contribution à l'ordre un. À l'ordre deux il faut l'associer à $\mathcal{P}^2 \mathbf{p}_A^2$ ou $\mathcal{P}^2 \mathbf{p}_B^2$ venant de W_2 , cette contribution est impaire dans les coordonnées de chaque particule et sera donc nulle lorsque l'on moyenne sur l'état fondamental. Il reste donc à considérer l'énergie à l'ordre 3 donnée par :

$$E_n^{(3)} = \sum_{k \neq n} \sum_{m \neq n} \frac{\langle n|W|m\rangle \langle m|W|k\rangle \langle k|W|n\rangle}{(E_m - E_n)(E_k - E_n)} - \langle n|W|n\rangle \sum_{m \neq n} \frac{|\langle n|W|m\rangle|^2}{(E_m - E_n)^2} \quad (3.52)$$

où ici n, m, k sont des indices génériques. Par ailleurs, à cet ordre ou aux ordres inférieurs par rapport à l'ensemble des paramètres perturbatifs vus au paragraphe 3.3.1, les autres termes proportionnels à \mathcal{P}_0^2 ne concernent que chacun des atomes individuellement et ont donc déjà été exprimés dans la section 1. En effet les opérateurs \mathbf{r}_A et \mathbf{p}_A d'une part, et \mathbf{r}_B et \mathbf{p}_B d'autre part commutent.

3.3.2.c Développement de l'énergie cinétique à l'ordre 3

Compte tenu des hypothèses non relativistes, et en se restreignant à la recherche des termes proportionnels à \mathcal{P}_0^2 il reste à considérer les termes :

$$W = -\frac{e}{M}\mathcal{P} \cdot \Delta \mathbf{A}_A - \frac{e}{M}\mathcal{P} \cdot \Delta \mathbf{A}_B + Q$$

Les termes proportionnels à \mathbf{A}^2 conduisent soit à une contribution ne dépendant pas de \mathcal{P}_0^2 soit à une contribution nulle en raison des règles de sélection. L'application de ces mêmes règles nous donne seulement deux types de produits possibles, ici en notations simplifiées :

$$E_n^{(3)} \propto \langle \mathcal{P} \cdot \Delta \mathbf{A}_A \rangle \langle \mathcal{P} \cdot \Delta \mathbf{A}_B \rangle \langle Q \rangle$$

Il faut maintenant considérer les six possibilités d'agencement de ces termes dans l'énergie (3.52), dans le premier membre de droite seulement, le second étant nul encore une fois d'après règles de sélection. En effectuant les changements de variables dans

les sommes nous pouvons factoriser ces six produits sous la forme :

$$\begin{aligned}
 E_{1,\mathbf{m},0\mathbf{k}}^{(3)} &= \sum_{\mathbf{s},\mathbf{t},\mathbf{q}_k} \sum_{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}_k} \frac{\langle \mathbf{l}, \mathbf{m}, 0\mathbf{k} | W | \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}_k \rangle \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}_k | W | \mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{q}_k \rangle \langle \mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{q}_k | W | \mathbf{l}, \mathbf{m}, 0\mathbf{k} \rangle}{(E_{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}_k} - E_{1,\mathbf{m},0\mathbf{k}})(E_{\mathbf{s},\mathbf{t},\mathbf{q}_k} - E_{1,\mathbf{m},0\mathbf{k}})} \\
 &= 4 \sum_{\mathbf{s},\mathbf{t}} \sum_{\mathbf{u},\mathbf{v}} \frac{\langle \mathbf{l}, \mathbf{m}, 0\mathbf{k} | -\frac{e}{M} \mathcal{P} \cdot \Delta \mathbf{A}_A | \mathbf{u}, \mathbf{v}, 1\mathbf{k} \rangle \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, 1\mathbf{k} | -\frac{e}{M} \mathcal{P} \cdot \Delta \mathbf{A}_B | \mathbf{s}, \mathbf{t}, 0\mathbf{k} \rangle}{(E_{\mathbf{u},\mathbf{v}} + \hbar\omega - E_{1,\mathbf{m}})(E_{\mathbf{s},\mathbf{t}} - E_{1,\mathbf{m}})} \\
 &\quad \times \langle \mathbf{s}, \mathbf{t}, 0\mathbf{k} | Q | \mathbf{l}, \mathbf{m}, 0\mathbf{k} \rangle \\
 &+ 2 \sum_{\mathbf{s},\mathbf{t}} \sum_{\mathbf{u},\mathbf{v}} \frac{\langle \mathbf{l}, \mathbf{m}, 0\mathbf{k} | -\frac{e}{M} \mathcal{P} \cdot \Delta \mathbf{A}_A | \mathbf{u}, \mathbf{v}, 1\mathbf{k} \rangle \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, 1\mathbf{k} | Q | \mathbf{s}, \mathbf{t}, 1\mathbf{k} \rangle}{(E_{\mathbf{u},\mathbf{v}} + \hbar\omega - E_{1,\mathbf{m}})(E_{\mathbf{s},\mathbf{t}} + \hbar\omega - E_{1,\mathbf{m}})} \\
 &\quad \times \langle \mathbf{s}, \mathbf{t}, 1\mathbf{k} | -\frac{e}{M} \mathcal{P} \cdot \Delta \mathbf{A}_B | \mathbf{l}, \mathbf{m}, 0\mathbf{k} \rangle
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

On peut constater immédiatement que la seconde ligne sera négligeable devant le premier terme : sachant que $(E_m - E_0) \ll \hbar\omega$, on a au dénominateur $(\hbar\omega)^2$ alors que le premier terme a au dénominateur $\hbar\omega(E_m - E_0)$, pour un même numérateur. Il reste alors

$$E_{1,\mathbf{m},0\mathbf{k}}^{(3)} = 4 \sum_{\mathbf{s},\mathbf{t}} \sum_{\mathbf{u},\mathbf{v}} \frac{\langle \mathbf{l}, \mathbf{m}, 0\mathbf{k} | -\frac{e}{M} \mathcal{P} \cdot \Delta \mathbf{A}_A | \mathbf{u}, \mathbf{v}, 1\mathbf{k} \rangle \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, 1\mathbf{k} | -\frac{e}{M} \mathcal{P} \cdot \Delta \mathbf{A}_B | \mathbf{s}, \mathbf{t}, 0\mathbf{k} \rangle}{(E_{\mathbf{u},\mathbf{v}} + \hbar\omega - E_{1,\mathbf{m}})(E_{\mathbf{s},\mathbf{t}} - E_{1,\mathbf{m}})} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned}
 &\times \langle \mathbf{s}, \mathbf{t}, 0\mathbf{k} | Q | \mathbf{l}, \mathbf{m}, 0\mathbf{k} \rangle \\
 &= 4 \sum_{\mathbf{s},\mathbf{t}} \sum_{\mathbf{u},\mathbf{v}} \langle \mathbf{l}, \mathbf{m}, 0\mathbf{k} | -\frac{e}{M} \mathcal{P} \cdot \Delta \mathbf{A}_A | \mathbf{u}, \mathbf{v}, 1\mathbf{k} \rangle \frac{1}{H_0 + \hbar\omega - E_{1,\mathbf{m}}} \\
 &\quad \times \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, 1\mathbf{k} | -\frac{e}{M} \mathcal{P} \cdot \Delta \mathbf{A}_B | \mathbf{s}, \mathbf{t}, 0\mathbf{k} \rangle \frac{\langle \mathbf{s}, \mathbf{t}, 0\mathbf{k} | Q | \mathbf{l}, \mathbf{m}, 0\mathbf{k} \rangle}{(E_{\mathbf{s},\mathbf{t}} - E_{1,\mathbf{m}})}
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Si on considère la correction lorsque chacun des atomes est dans son état fondamental et que l'énergie du photon échangé est très supérieure à l'écart des niveaux d'énergie de l'atome alors :

$$E_{\mathbf{0},\mathbf{0},0\mathbf{k}}^{(3)} = 4 \sum_{\alpha,\gamma} \sum_{st \neq 00} \frac{\mathcal{P}_0^2}{M^2 c^2} \langle \mathbf{0}, \mathbf{0} | \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{\alpha\gamma}} (1 + r_{\alpha\gamma} \hat{r}_{\alpha\gamma}) | \mathbf{s}, \mathbf{t} \rangle \frac{\langle \mathbf{s}, \mathbf{t} | Q | \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle}{(E_{st} - E_{00})} \tag{3.56}$$

où ici la somme sur α et γ représente la somme sur charges croisée entre A et B . Lorsque l'on effectue cette somme, le premier terme de (3.56) correspond justement à l'opérateur Q et on obtient

$$E = 4 \sum_{st \neq 00} \frac{\mathcal{P}_0^2}{M^2 c^2} \langle \mathbf{0}, \mathbf{0} | Q | \mathbf{s}, \mathbf{t} \rangle \frac{\langle \mathbf{s}, \mathbf{t} | Q | \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle}{(E_{st} - E_{00})} \tag{3.57}$$

ce qui correspond justement au terme $1/R^6$ du potentiel de London noté E_{R6} , partie non-retardée des forces de dispersion. En remplaçant $\mathcal{M} = 2M$ on a :

$$E = \frac{\mathcal{P}_0^2}{\mathcal{M}} \frac{E_{R6}}{\mathcal{M} c^2} \tag{3.58}$$

3.3.3 Perspectives

Nous avons mis en évidence un terme proportionnel à l'énergie de London, responsables des forces de dispersion. Ce terme a une contribution identique à celle de l'énergie interne dans le cas d'un atome seul (3.20). Il reste bien entendu à déterminer le terme tensoriel apparaissant dans (3.56), que l'on pourra linéariser autour de R_{AB} . Si l'on considère cette distance fixe, il sera nécessaire de moyenner sur toutes les orientations possibles. D'autre part il reste à regarder plus en détail une possible contribution venant des termes relativistes $f(\mathcal{P}, \mathbf{p}_A, \mathbf{p}_B)$ et vérifier l'ensemble des hypothèses que l'on a effectuées concernant les termes négligeables.

3.4 Conclusion

L'effet Fizeau confère des propriétés bi-anisotropes à toute matière en mouvement. Ces propriétés sont proportionnelles à la vitesse de l'objet. En appliquant le formalisme du moment cinétique de Casimir à un atome se déplaçant à vitesse constante dans le vide on s'attend à une modification de sa masse, ce que l'on retrouve en total accord avec principe d'équivalence masse-énergie d'Einstein. La contributions des deux corrections, Casimir et relativiste sont nécessaires pour retrouver le principe d'équivalence.

À l'équilibre thermique la quantité de mouvement moyenne du centre de masse de l'atome est nulle, en raison du freinage thermique. Pour pouvoir étudier la bi-anisotropie due à l'effet Fizeau, nous nous sommes placé dans un référentiel en translation à vitesse constante et faible devant la vitesse de la lumière. Nous trouvons dans ce cas une impulsion non nulle associée à une correction de masse en accord de même avec le principe d'équivalence d'Einstein. Le moment cinétique de Casimir intervient dans la renormalisation de la masse ainsi que dans une partie du second terme de (3.45) proportionnel à l'énergie interne.

Énergie de Casimir d'une boule diélectrique

Sommaire

4.1	Introduction	87
4.2	Modèle discret	88
4.3	Approche numérique	90
4.4	Discussions	91
4.5	Conclusion	95

4.1 Introduction

Des approches semi-classiques du moment cinétique de Casimir ont été faites en utilisant une boule magnéto-électrique ou une boule diélectrique en mouvement [8]. Le moment cinétique apparait alors proportionnel à l'énergie Casimir de la boule. Nous avons vu dans le cas d'un atome que l'énergie interne intervient dans le moment cinétique de Casimir et nous avons proposé une approche pour montrer que l'énergie de liaison des forces de dispersion entre deux atomes apporte également une contribution. Il est donc naturel d'envisager le cas de N atomes, l'identité entre l'énergie des forces de Van der Waals (dispersion) et l'énergie de Casimir ayant été faite par ailleurs [90].

Le cas de l'énergie de Casimir d'une sphère est intéressant car cela a été proposé par Schwinger [117] comme modèle pour expliquer le phénomène de sonoluminescence. Dans la littérature, plusieurs approches ont infirmé par la suite cette hypothèse : régularisation dimensionnelle [89], sommation du potentiel entre deux atomes [91]. Cependant aucune n'est exempte d'approximations, parfois fortes, de sorte que le résultat proposé se prête à interrogations.

Nous proposons ici de revenir sur l'énergie de Casimir d'une sphère constituée d'un milieu diélectrique dilué à l'aide d'un modèle microscopique. Nous considérerons des atomes sur un réseau de distance inter-atomique u formant une boule de rayon L .

La détermination de l'énergie de Casimir d'une sphère a fait polémique. Différentes valeurs ont été proposées et le signe même a fait débat. Cependant plusieurs approches pour le calcul de cette énergie E_C semblent s'accorder sur un point : elle dépend du rayon L de la sphère sous la forme :

$$E_C = (\epsilon - 1)^2 \frac{\mathcal{C}}{L} \hbar c$$

où ϵ est la permittivité diélectrique relative et \mathcal{C} une constante numérique. Il faut rappeler ici que l'on a supposé le rayon de la sphère grand devant la longueur d'onde caractéristique de la dispersion en deçà de laquelle il n'y a pas d'interaction radiation-matière, par conséquent la limite $L \rightarrow 0$ n'est pas à prendre en considération. \mathcal{C} est une constante numérique dont le signe et la valeur dépendent de la technique utilisée [128, 129]. Milton et Ng [89] ainsi que Barton [91] donnent $\mathcal{C} = 23/1536\pi \simeq 0.004766$, Brevik et al [90] d'après un calcul numérique trouvent $\mathcal{C} = 0.004767$ ce qui est proche de la valeur précédente.

En revanche le traitement des termes divergents attendus dans un calcul d'énergie de point zéro est disparate. S'il est reconnu qu'il y a des divergences au moins pour les termes de volume et de surface, elles sont soit mises hors de la discussion [89], soit considérées comme déjà intégrées dans les grandeurs phénoménologiques comme la chaleur latente ou la tension de surface [91], soit considérées comme étant non physiques dans le cas de la divergence volumique [90]. Nous sommes d'avis qu'il faut séparer ici deux types de divergences : la divergence "physique" que l'on retrouve dans toute évaluation de l'énergie de point zéro du champ électromagnétique, et les divergences introduites par l'utilisation d'un modèle macroscopique avec une description continue de la matière. Dans ce dernier cas les termes volumique et surfacique représentent alors une contribution aux grandeurs thermodynamiques : chaleur latente et tension de surface, et il faut identifier les termes restants. Le terme dominant est-il toujours le terme en $1/L$?

4.2 Modèle discret

Il est admis que l'interaction de Casimir-Polder est une manifestation de l'énergie de Casimir, qui remplace les forces de London lorsque la distance entre les atomes est élevée devant les longueurs d'ondes correspondant aux niveaux interatomiques [90, 91]. Nous allons étendre cette approche dans le cas de N atomes identiques et calculer l'énergie de Casimir d'une sphère de rayon L formée par ces atomes disposés selon un réseau cubique, en sommant l'énergie de chacune des paires. Une telle approche a déjà été effectuée dans [91], mais seulement dans la limite continue, ce qui soulève bien évidemment des problèmes de divergence lorsque la distance inter-atomique tend vers zéro, d'où la nécessité d'introduire un cut-off ad hoc dans cette méthode. Nous nous proposons ici de développer le même modèle : sommation par paire du potentiel dans le cas d'une sphère solide de rayon L et de constante diélectrique ϵ . Nous considérerons un milieu dilué, c'est à dire pour lequel $\epsilon - 1 \ll 1$. Le lien entre la description macroscopique et la polarisabilité des atomes intervenant dans la force de dispersion est donné par $\epsilon(0) - 1 = 4\pi N\alpha(0)$ [85].

Le potentiel entre deux atomes neutres distants de $r = r_1 - r_2$ est donné par [127] :

$$V(r) = -\frac{4}{\pi\hbar c} \sum_{l,m} \int_0^\infty \frac{k_l k_m s^4 ds}{(k_l^2 + s^2)(k_m^2 + s^2)} (q_l q_m)^2 \frac{e^{-2sr}}{r^2} \times \left(1 + \frac{2}{sr} + \frac{5}{(sr)^2} + \frac{6}{(sr)^3} + \frac{3}{(sr)^4}\right) \quad (4.1)$$

où l et m sont les indices des niveaux d'énergie de chacun des atomes, $k_{l,m} = \frac{2\pi}{\lambda_{l,m}}$, $q_{l,m}$ est le moment dipolaire.

Dans le cas où $r \gg 1/k_1$ on retrouve le potentiel de Casimir-Polder :

$$V_P(r) = -\frac{23\hbar c \alpha(0)^2}{4\pi r^7} \quad (4.2)$$

où $\alpha(0)$ est la polarisabilité statique. Dans le cas où $r < 1/k_1$, mais toujours $r \gg a_0$ où a_0 est le rayon d'un atome (notons que $k_1 a_0 \sim \alpha = 1/137$) on retrouve le potentiel de London :

$$V_L(r) = -\frac{1}{r^6} \frac{4}{\pi\hbar c} \sum_{l,m} \int_0^\infty \frac{(q_l q_m)^2 k_l k_m du}{(k_l^2 + u^2)(k_m^2 + u^2)} \quad (4.3)$$

où q_l est le moment dipolaire de la particule l . Cette interaction à courte portée vient du fait que les molécules non polaires peuvent présenter à chaque instant un moment dipolaire dû au mouvement relatif des électrons et des noyaux. Bien que nul en moyenne ce dernier induit à son tour un moment dipolaire chez une particule voisine dont il résulte une interaction attractive. Dans le cas où une fréquence de transition particulière ω_0 donne une contribution dominante à (4.3), ce que l'on supposera par la suite, on a alors :

$$V_L(r) \simeq -\frac{3\hbar\omega_0\alpha(0)^2}{4r^6} \quad (4.4)$$

où $\alpha(0)$ est la polarisabilité statique dans le niveau de plus basse énergie de la transition ω_0 .

Ces forces de dispersion ne sont en général pas additives d'atome à atome. Le champ porteur de l'interaction entre deux molécules se propage à travers le milieu formé par toutes les autres molécules. Ce milieu affecte l'interaction par le biais de sa constante diélectrique ce qui intervient donc de façon macroscopique dans la non-additivité des forces. Pour un milieu diélectrique dilué nous pouvons négliger l'influence du milieu sur l'interaction entre deux atomes. La permittivité réduite du milieu étant proche de l'unité, on peut effectuer un développement perturbatif de l'énergie Δ d'une boule solide de rayon L en fonction du paramètre $(\epsilon - 1)$ [91] :

$$\Delta = (\epsilon - 1)\Delta_1 + (\epsilon - 1)^2\Delta_2 + \dots$$

où $\epsilon - 1 \ll 1$. L'énergie $(\epsilon - 1)\Delta_1$ est divergente [91] et correspond à l'énergie du champ électromagnétique dans le milieu. C'est un terme volumique, cela revient donc à considérer une contribution électromagnétique à la masse de chaque atome, de la même

façon que la renormalisation de masse de Bethe que nous avons vu dans les chapitres 2 et 3 précédents. Le second ordre correspond à l'interaction de Van der Waals entre les atomes du milieu et fait intervenir la polarisabilité statique de chaque atome :

$$(\epsilon - 1)^2 \Delta_2 = E(L) = \frac{1}{2} \sum_{r_i < L} \sum_{r_j < L} V(r_{ij}) \quad (4.5)$$

avec $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$. Le calcul intégral de cette énergie donne un résultat divergent dû au fait qu'on ne tient pas compte de la distance finie entre atomes. Cependant, pour des distances grandes devant la distance inter-atomique u , cette intégrale doit être une bonne approximation. Nous allons donc effectuer numériquement cette somme (4.5) pour les distances proches de quelques unités inter-atomiques u où l'approximation continue n'est manifestement pas valable.

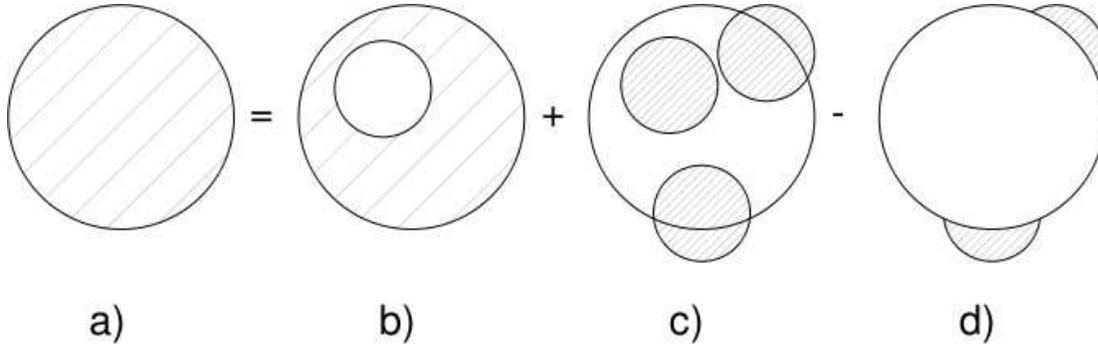


FIGURE 4.1 – Différentes contributions pour calculer l'énergie de la sphère (a). (b) : voisins lointains dont le potentiel d'interaction est le potentiel retardé de Casimir-Polder, (c) voisins proches qui correspondent donc à une contribution volumique dont la valeur dépend du potentiel à courte distance mais qui ne tient pas compte du rayon L de la sphère, (d) : contributions hors sphère à éliminer.

4.3 Approche numérique

Pour obtenir l'énergie Casimir $E(L)$ de la boule, nous pouvons décomposer différentes contributions selon

$$\begin{aligned} E(L) &= \frac{1}{2} \sum_{r_i < L} \sum_{r_j < L} V(r_{ij}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r_i < L} \sum_{r_j < L, \{R_c < r_{ij}\}} V(r_{ij}) + \frac{1}{2} \sum_{r_i < L} \sum_{r_j, \{r_{ij} < R_c\}} V(r_{ij}) - \frac{1}{2} \sum_{r_i < L} \sum_{r_j > L, \{r_{ij} < R_c\}} V(r_{ij}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Cette décomposition correspond à la figure FIG. 4.2. L'énergie (a) de la boule est la somme pour chaque atome de l'interaction des voisins "à grande distance" (b) dont la contribution peut être évaluée par une intégrale et de l'interaction des voisins proches (c) dont la contribution à l'énergie totale est volumique, somme à laquelle il faudra

soustraire les atomes n'appartenant pas à la sphère (d). Ces dernières contributions (c) et (d) étant calculées numériquement. Le rayon R_c définit la notion de voisin proches. Pour une distance supérieure à ce rayon on considère valable l'approximation continue. La valeur de R_c est choisie en fonction de la précision que l'on veut obtenir.

Nous nous restreindrons aux atomes à deux niveaux, pour lesquels $\lambda_l = \lambda_m$, et nous utilisons pour le calcul la valeur $\lambda_l = 591nm$ correspondant au premier niveau excité de l'hélium [130]. L'hélium liquide est un exemple de milieu dilué. La polarisabilité statique d'un atome s'écrit $\alpha(0) = \sum_l \frac{2q_l^2}{k_l \hbar c}$. On peut alors écrire l'énergie totale sous la forme :

$$E = \alpha(0)^2 \frac{\hbar c}{u^7} \left(-0.105781 \left(\frac{L}{u} \right)^3 + 0.40034230 \left(\frac{L}{u} \right)^2 - 0.006 \left(\frac{L}{u} \right) + \dots \right). \quad (4.7)$$

On estime une erreur relative respectivement de 10^{-5} et 10^{-7} pour les coefficients des termes de volume et de surface. L'erreur est de l'ordre de 50% pour le dernier terme. Avec le développement actuel de notre modèle numérique il ne nous est pas possible de distinguer les termes suivants, beaucoup plus petits en magnitude. Le point le plus important est que nous pouvons affirmer que le terme proportionnel au rayon L de la sphère existe et est non nul. Ce terme est issu des interactions entre proches voisins et dû aux effets de bords. Ces même interactions sont négligées lors de l'utilisation d'une coupure sur les longueurs d'ondes ou lors de renormalisation, ce qui peut expliquer que ce terme n'apparait pas.

4.4 Discussions

4.4.1 Lien avec la sonoluminescence

L'équation (4.7) modifie-t-elle les conclusions sur l'application à la sonoluminescence ? Il est tentant d'appliquer (4.7) dans le cas de l'eau et de comparer le résultat avec les autres estimations au sujet de la sonoluminescence. La lumière perçue lors de la sonoluminescence est bleutée, nous prendrons donc une longueur d'onde de l'ordre de $500nm$. Ce sont les interactions à courtes distances qui prédominent dans cette expression. Sachant que dans cette limite, pour un modèle à deux niveaux, le potentiel est proportionnel à l'écart énergétique cela correspond à un facteur $591/500$ entre l'eau et l'hélium. On considère alors une bulle de gaz dans l'eau qui passe d'un rayon $L = 45\mu m$ à $L = 3\mu m$, à $T = 280K$ de façon adiabatique [115]. C'est-à-dire que nous évaluons l'énergie de la sphère à L/u constant. Les estimations concernant l'énergie de Casimir ne considèrent pas les termes volumiques et surfaciques, donnés phénoménologiquement. On trouve alors pour le terme suivant, linéaire par rapport au rayon, une énergie de l'ordre de $0,1 eV$ qui est toujours bien plus petite que les $10 MeV$ mesurés par l'expérience. Cela ne remet donc pas en cause les études précédentes [89–91] qui ont exclu l'énergie de Casimir comme origine du phénomène. Nous pouvons remarquer que l'évaluation dans les mêmes conditions du terme volumique conduit à une énergie de l'ordre de $20 MeV$, du bon ordre de grandeur par rapport aux $10 MeV$ mesurés. Ce terme correspond à la chaleur latente ou une contribution à cette dernière. Cette estimation abonde dans le sens des théories

actuelles selon lesquelles l'énergie est issue de la compression du gaz à l'intérieur de la bulle. Certaines approches prennent en compte les pertes dues à des échanges thermiques, ce qui pourrait expliquer que l'évaluation proposée ici soit supérieure à la valeur expérimentale.

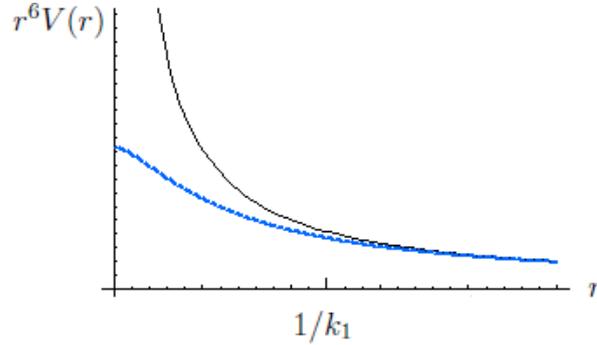


FIGURE 4.2 – Potentiel de Casimir-Polder total (en bleu) et retardé (en noir), en unités arbitraires, en fonction de la distance interatomique r , multiplié par r^6 . Dans le cas d'un atome à deux niveaux il y a un changement de régime pour $r \sim 1/k_1$ où k_1 est le nombre d'onde de la transition.

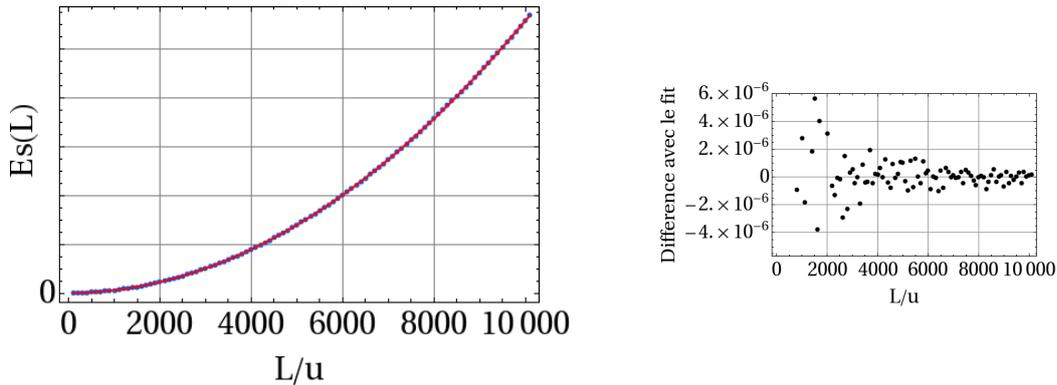


FIGURE 4.3 – Contribution à l'énergie des termes de surface (d) de la figure 4.2 (en bleu) et "fit" sous la forme $ax^2 + bx$ (en rouge)

4.4.2 Remarque sur une contribution $1/L$ à l'énergie de Casimir

Nous avons vu qu'il semblait exister un consensus sur une énergie de Casimir inversement proportionnelle au rayon de la sphère. Bien que nous ne puissions déterminer ce terme dans notre approche numérique à cause de la limitation dans la précision, il est possible de comprendre autrement l'origine de ce terme.

Une autre façon de sommer le potentiel est représenté sur par figure 4.4.2. Les interactions pour un atome appartenant à la sphère (a) sont les interactions de tout le milieu (b) auxquelles on soustrait la contribution des atomes indépendante des effets de bord de la sphère (c) ainsi que celle des interactions entre plus proches voisins (d). Cette dernière contribution dépend fortement de la physique à petite échelle. La contribution (b) est

aussi sensible mais cela reste un terme volumique et seul le coefficient numérique sera affecté. La contribution la plus élevée pour la partie (d) est la participation des voisins directs, ce qui conduira au terme de surface, les autres termes restant à déterminer.

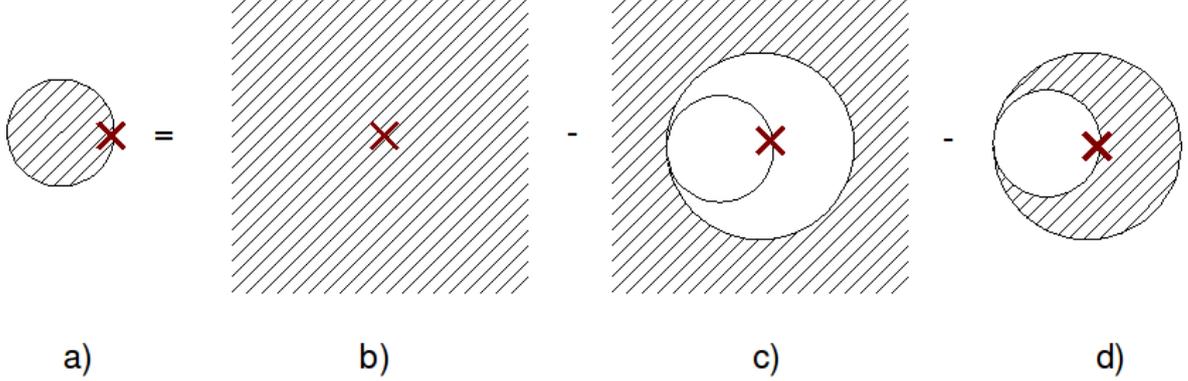


FIGURE 4.4 – Différentes contributions pour calculer l'énergie de la sphère (a). On a pris pour cette figure la contribution d'un atome symbolisé par la croix rouge. (b) : contribution de tous les atomes du milieu à laquelle il faut soustraire (c) les atomes "lointains" se trouvant à l'extérieur d'une sphère de rayon $2L$, cette contribution est de cette manière la même pour chacun des atomes appartenant à la sphère (a). Il reste à soustraire (d) : contribution "proche" qui donnera les effets de bord

Nous pouvons donc réécrire, d'après le découpage de la figure 4.4.2 :

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} \sum_{r_i < L} \sum_{r_j < L} V(r_{ij}) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{r_i < L} \sum_{r_j} V(r_{ij}) - \frac{1}{2} \sum_{r_i < L} \sum_{r_j, \{r_{ij} < L\}} V(r_{ij}) - \frac{1}{2} \sum_{r_i < L} \sum_{r_j, \{L < r_{ij} < 2L\}} V(r_{ij}) \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

Si l'on considère le rayon L de la sphère suffisamment grand devant la distance interatomique, ce qui justifie l'approximation continue, et devant la longueur d'onde intervenant dans le potentiel $V(r)$ alors le terme (c) peut se calculer en intégrant le potentiel retardé de Casimir-Polder (4.2) :

$$\begin{aligned}
 E_{(c)}(L) &= \frac{1}{2} \sum_{r_i < L} \sum_{r_j, \{L < r_{ij} < 2L\}} \frac{23\hbar c \alpha^2}{4\pi r_{ij}^7} \\
 &\simeq \frac{1}{2} \frac{4\pi L^3}{3} \int_{2L}^{\infty} d^3r \frac{23\hbar c \alpha^2}{4\pi r^7} = \frac{23}{1536\pi} \frac{\hbar c (\epsilon - 1)^2}{L} \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

où dans l'hypothèse d'un milieu dilué le lien entre la polarisabilité des atomes et la description macroscopique est $4\pi N\alpha = \epsilon - 1$ [85]. Nous retrouvons ici le terme inversement proportionnel au rayon associé à l'énergie de Casimir. Ce terme est indépendant de la physique à petite échelle et par conséquent des traitements associés, coupure [91], renormalisation. En revanche les termes de volume et de surface, ainsi que tous les autres venant de la contribution (d) (terme linéaire en L , terme constant...) dépendent de la coupure utilisée et apparaissent comme divergents ou bien se perdent dans une

méthode de renormalisation. Donc la régularisation dimensionnelle produit la soustraction des contributions "lointaines". Ceci en particulier explique pourquoi $E_{(c)} > 0$ alors que $V_{vdW}(r) < 0$.

4.4.3 Chaleur latente et tension de surface de l'hélium liquide

Un exemple concret de milieu dilué est l'hélium liquide, pour lequel la constante diélectrique vaut $\epsilon \simeq 1.057$ [85]. Cela correspond donc au cadre de notre approche dont on peut se proposer d'en vérifier la validité en comparant nos résultats avec des grandeurs physiques mesurables comme la chaleur latente et la tension de surface.

A $T = 0K$ la distance inter-atomique u correspondant au maximum de la distribution est de l'ordre de $3,16\text{Å}$ [131], la densité est de $\rho = 0,15\text{gcm}^{-3}$ [85] et la polarisabilité statique vaut $\alpha \simeq 2.0/4\pi \cdot 10^{-24}\text{cm}^3$ [132]. Nous nous sommes limités ici à un modèle à deux niveaux, la longueur d'onde associée à la transition entre l'état fondamental et le premier niveau excité est $\lambda = 591\text{Å}$ [130]. Nous pouvons donc faire l'application numérique à partir du terme volumique de (4.7) :

$$0,105 \frac{\alpha(0)^2 \hbar c}{u^7} \frac{3}{4\pi \rho u^3} = 13,5 \text{ Jg}^{-1} \quad (4.10)$$

Nous trouvons la chaleur latente de l'hélium liquide de l'ordre de $13,5 \text{ Jg}^{-1}$. La valeur expérimental est de 15 Jg^{-1} , l'accord est donc très bon. Pour comparaison, une estimation rapide effectuée par Milonni et basée sur la même approche d'interaction par paires donne 50 Jg^{-1} auxquels ont été enlevés 30 Jg^{-1} correspondant à l'énergie de vibration des atomes dans le réseau. London en 1930 a proposé que chaque atome d'hélium liquide se trouve dans une cage formée par ses plus proches voisins et possède une énergie de point zéro de la vibration associée de l'ordre de 30 Jg^{-1} . Ce qui conduit alors une chaleur latente de l'ordre de 20 Jg^{-1} [85].

Pour la tension de surface nous évaluons dans les même conditions le terme surfacique de (4.7) :

$$0,400 \frac{\alpha(0)^2 \hbar c}{u^9} \frac{1}{4\pi} = 0,808 \text{ Ergcm}^{-2} \quad (4.11)$$

à comparer à la valeur expérimentale $0,37 \text{ Ergcm}^{-2}$ [133]. On retrouve donc ici un ordre de grandeur correct de la tension de surface.

4.5 Conclusion

Dans les modèles précédents [89, 91] utilisés pour calculer l'énergie propre de la boule, des divergences étaient trouvées de façon artificielle à cause de la description continue utilisée. Cependant des questions pertinentes concernant la dépendance de l'énergie avec le rayon de la boule ont été soulevées. Dans le but de répondre correctement à ces questions, il était important de prendre en compte la forme correcte du potentiel dont la dépendance spatiale change à petite échelle, ce que nous avons réalisé numériquement. Nous trouvons un terme volumique et un terme de surface qui sont parties prenantes respectivement de la chaleur latente et de la tension de surface du milieu, et non une renormalisation de ses grandeurs. En revanche nous avons mis en évidence, grâce à une approche microscopique du milieu, un terme linéaire par rapport au rayon de la sphère qui n'est pas discuté dans la littérature. Ce dernier ne semble pas appartenir à une quelconque grandeur thermodynamique. Si l'on considère que l'énergie de Casimir de la boule correspond à l'énergie qui n'est pas déjà décrite de façon classique : chaleur latente, tension de surface, alors ce terme linéaire représente l'énergie Casimir de la boule. Dans tous les cas, il doit être pris en compte lors de discussion concernant l'énergie. À propos de la sonoluminescence, l'énergie que nous avons calculée comprenant la contribution de la chaleur latente nous permet de retrouver un ordre de grandeur correct de l'énergie libérée lors des flashes lumineux. L'unique divergence physique du problème, associée à l'énergie du vide, renormalise la masse de chaque atome en lui donnant une contribution électromagnétique comme nous avons pu le voir aux chapitres 2 et 3.

Conclusion

DANS ce manuscrit nous avons présenté une étude théorique de l'effet des fluctuations quantiques du champ électromagnétique sur un milieu bi-anisotrope. L'objectif principal était de développer une approche microscopique du moment cinétique de Casimir présenté par Feigel, pour proposer des réponses aux questions restées en suspens dans les modèles macroscopiques précédents, développés par Van Tiggelen, Rikken et Krstić, Birkeland et Brevik. En raison de problèmes liés à la définition de l'impulsion du champ électromagnétique dans un milieu matériel, ainsi qu'à la renormalisation des divergences, l'ordre de grandeur de cet effet et son existence même étaient débattus. Le moment cinétique de Casimir existe-t-il pour un milieu infini ? Est-il mesurable ?

Après une première partie où nous avons rappelé le formalisme et énoncé les principaux problèmes conceptuels liés au vide quantique, nous avons construit un modèle microscopique exhibant un moment cinétique de Casimir. Étant donné que tout milieu est bi-anisotrope lorsqu'il est soumis à des champs électriques et magnétiques externes, statiques et homogènes, nous avons considéré un oscillateur harmonique, constitué de deux charges de signes opposés, exposé à ces champs. Le choix d'un potentiel harmonique était purement calculatoire. Nous avons montré qu'il existe un effet classique de ces champs sur l'impulsion de la particule ainsi constituée : dans son état fondamental son moment cinétique est non nul. L'ensemble est en interaction avec les fluctuations du champ électromagnétique libre. Étant donné les ordres de grandeur mis en jeu, nous avons traité cette interaction de façon perturbative, de la même manière que le calcul du déplacement de Lamb développé par Bethe, qui avait donné une excellente approximation du résultat expérimental.

À l'image du développement historique de Bethe, ou du traitement de l'effet du spin de l'électron sur le spectre de l'atome d'Hydrogène, nous avons effectué un traitement faiblement relativiste du moment cinétique de Casimir, en considérant uniquement les premières corrections en v/c où v est la vitesse de l'oscillateur et c la célérité de la lumière. Nous avons justifié cette approximation a posteriori en montrant que les vitesses mises en jeu restent faibles et que les modes ayant une contribution significative sont non-relativistes. Un calcul relativiste amènerait sans doute une description plus complète.

Les termes faisant uniquement intervenir le potentiel vecteur \mathbf{A} conduisent à une contribution divergente à l'énergie du vide. Dans notre approche, ces contributions ont

un effet nul sur l'impulsion en raison des règles de sélection. Les termes divergents restants ont été renormalisés. Bethe dans le calcul du déplacement de Lamb a ajouté une masse électromagnétique à l'électron. Ici nous avons retrouvé cette même contribution pour la masse totale et la masse réduite de la particule. Nous avons pu alors dégager une contribution finie et non nulle des fluctuations du vide à l'impulsion de l'oscillateur. Pour l'exemple, considérons une particule ayant les propriétés d'un atome d'hydrogène : les masses respectives des deux charges α et β sont telles que $m_\alpha \gg m_\beta$. Le moment cinétique de l'oscillateur dans son état fondamental en présence des champs externes \mathbf{E}_0 et \mathbf{B}_0 est alors :

$$\langle \mathbf{P}_{\text{cin}} \rangle = -\alpha(0)\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 + \alpha(0)\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 \frac{4\alpha}{3\pi} \log \frac{m_\alpha}{m_\beta}$$

La conclusion principale est que le moment cinétique de Casimir existe et que les divergences ont été renormalisées. Pour des champs accessibles en laboratoire et une particule type Hydrogène, nous estimons :

$$v_{cl} \approx 0.1\mu m/s \quad , \quad v_q \approx 2nm/s$$

respectivement pour les contributions classique et quantique à la vitesse de la particule. À notre connaissance aucun de ces effets n'a été mesuré. Une expérience est en cours de préparation au Laboratoire National des Champs Magnétiques Intenses à Toulouse, dans le groupe de Geert Rikken.

Il était naturel ensuite de considérer le cas de deux charges en mouvement. L'effet magnétoélectrique et l'effet Fizeau conduisant au même formalisme ($\chi_{ij} \propto \epsilon_{ijk}(\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0)_k$ et $\chi_{ij} \propto \epsilon_{ijk}v_k$), nous avons revisité dans le cadre du moment cinétique de Casimir le cas d'un atome en mouvement dans le vide. Nous avons utilisé le même modèle microscopique avec un potentiel Coulombien entre les deux charges, pour décrire au plus près une situation réelle. Nous avons trouvé comme attendu une contribution au moment cinétique proportionnelle à la vitesse de l'atome, c'est-à-dire une correction de masse. Cette correction de masse comprend la masse électromagnétique de Bethe, qui renormalise la masse totale comme nous l'avons montré dans le cas magnétoélectrique, ainsi que l'énergie interne de l'atome. Ce résultat est en accord avec le principe d'équivalence masse-énergie d'Einstein, l'énergie interne participant à l'inertie de la particule. Nous nous sommes ensuite intéressés au cas d'une radiation thermique en interaction avec un atome d'Hydrogène. Dans une situation à l'équilibre, la vitesse de l'atome est nulle en raison de la friction thermique. Pour déterminer la correction de masse nous nous sommes donc placés dans un référentiel en translation uniforme. Dans ce cas nous avons trouvé que l'énergie interne correspondant à un atome thermalisé et l'énergie cinétique moyenne associée à son centre de masse participent à l'inertie de l'atome.

Après le cas à une particule, nous avons considéré le cas à deux particules. La participation de l'énergie de Casimir à la masse a été débattue et montrée dans le cas d'une cavité Fabry-Perrot, par Jaekel et Reynaud dans le cas de la masse inertielle, Fulling, Milton et *al* dans le cas de la masse gravitationnelle. Nous avons utilisé notre approche microscopique pour montrer que l'énergie associée aux forces de Van der Waals entre deux

atomes d'hydrogène respecte elle aussi le principe d'équivalence. Ce calcul est encore en cours de finalisation et les principales lignes ont été exposées.

En supposant que l'énergie de Van der Waals entre deux atomes participe à la masse inertielle de l'ensemble et en considérant la description semi-classique d'une sphère diélectrique en mouvement proposée par Van Tiggelen, nous avons ensuite généralisé ce résultat au cas de N particules formant une boule diélectrique diluée. Par conséquent nous nous sommes intéressés à l'énergie de Casimir de cette boule. L'hypothèse de milieu dilué nous permet de calculer l'énergie de Casimir en effectuant la somme des énergies de Van der Waals entre deux particules. L'équivalence énergie de Casimir - énergie de Van der Waals ayant été montrée par ailleurs. La permittivité réduite du milieu étant dans ce cas proche de l'unité, l'énergie Δ d'une boule de rayon L est donnée par le développement :

$$\Delta = (\epsilon - 1)\Delta_1 + (\epsilon - 1)^2\Delta_2 + \dots$$

Nous avons vu que l'énergie $(\epsilon - 1)\Delta_1$ est divergente et correspond à l'énergie du champ électromagnétique dans le milieu. C'est un terme volumique et cela revient à considérer une contribution électromagnétique à la masse de chaque atome. Nous avons déterminé le terme $E(L) = (\epsilon - 1)^2\Delta_2$ correspondant à l'énergie Casimir de la boule.

L'énergie d'une sphère ou d'une boule a été matière à débat, en particulier après la tentative de Schwinger pour expliquer la sonoluminescence à partir de l'énergie de Casimir. Dans la plupart des approches, les énergies volumique et surfacique de la boule ne sont pas considérées car elles sont parties prenantes respectivement de la chaleur latente et de la tension de surface. Le terme attribué à l'énergie de Casimir est alors proportionnel à $1/L$ où L est le rayon de la boule. Nous avons effectué un calcul numérique en prenant en compte le potentiel total de Casimir-Polder dans le cas correspondant à des atomes d'Hélium, représentant physiquement un milieu dilué, placés sur un réseau cubique. Nous avons obtenu pour l'énergie de la boule :

$$E(L) = \alpha(0)^2 \frac{\hbar c}{u^7} \left(-0.105781 \left(\frac{L}{u} \right)^3 + 0.40034230 \left(\frac{L}{u} \right)^2 - 0.0061 \left(\frac{L}{u} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{L} \right) \right),$$

où $\alpha(0)$ est la polarisabilité statique et u la distance inter-atomique. Nous pouvons identifier le terme volumique comme une contribution voire dans ce cas précis la contribution principale à la chaleur latente. Le terme surfacique est associé à la tension de surface. Le terme suivant est linéaire par rapport au rayon de la boule. Il est le premier terme qui va au delà de la description phénoménologique, il mérite éventuellement pour cela le nom "Casimir", avant le terme $1/L$. Il fait intervenir principalement les interactions à courtes distances. Une telle contribution doit être prise en compte lorsque l'on considère l'énergie totale de la boule et nous remarquons qu'elle n'est pas prise en considération dans les approches précédentes utilisant par exemple la renormalisation dimensionnelle ou une coupure exponentielle des longueurs d'onde. Ces résultats suggèrent que les techniques de régularisation, si elles sont cohérentes entre elles, négligent dans cette situation des termes qui sont physiquement présents. Une interprétation est proposée pour expliquer le terme $1/L$: on retrouve ce terme si l'on ne prend en compte que les interactions

lointaines pour chaque atome de la boule, c'est-à-dire des distances supérieures à la plus grande distance possible entre deux atomes de la boule : $2L$. Dans ce problème d'énergie de Casimir d'une boule matérielle, il y a la divergence due à celle de l'énergie du vide, et la divergence induite par la description continue du milieu où la distance entre deux atomes tend vers zéro. Il semblerait que l'utilisation des techniques de renormalisation ne permette pas de distinguer ces deux types de divergence, ce qui pourrait expliquer cette différence de résultat.

Résumé de la conclusion

- Le point principal de cette étude est l'existence du moment cinétique de Casimir d'un point de vue microscopique, montrée à l'aide d'un modèle comprenant un oscillateur harmonique soumis à des champs électrique et magnétique externes, croisés, homogènes de façon à obtenir les propriétés d'un milieu bi-anisotrope, en interaction avec les fluctuations quantiques du vide. Nous avons donné un ordre de grandeur de la vitesse de l'oscillateur attendue pour des conditions expérimentales raisonnables. Nous trouvons une contribution classique due aux champs externes $v_{cl} \approx 0.1\mu m/s$ et une contribution quantique attribuée aux fluctuations du vide $v_q \approx 2nm/s$.
- Dans le cas d'un atome d'hydrogène en mouvement, où la bi-anisotropie est due à l'effet Fizeau, nous trouvons que l'effet du couplage avec le vide donne une correction de masse en accord avec le principe d'équivalence masse-énergie d'Einstein, à température nulle ou non-nulle. Dans le cas de deux atomes en mouvement dans le vide, nous donnons la marche à suivre dans le but de montrer que l'énergie de Casimir entre les deux atomes, textitie liée aux forces de Van der Waals, participe de la même façon à la masse inertielle de l'ensemble. Cette approche confirme que le moment de Casimir n'est pas exclu voire même réclamé par les principes de la relativité restreinte.
- Nous nous sommes intéressés au cas de l'énergie Casimir d'une boule diélectrique diluée. Un calcul numérique de l'énergie associée aux forces de Van der Waals, dont l'équivalence avec l'énergie de Casimir a été montrée par ailleurs, nous a permis de déterminer l'énergie totale de la boule en fonction de son rayon. Nous déterminons les termes associés à la chaleur latente et à la tension de surface. Nous trouvons ensuite un terme variant de façon linéaire avec le rayon, en désaccord avec les méthodes de renormalisation utilisées avec une description continue. Ce désaccord est expliqué par la description continue de la matière où les interactions à courte distance sont surévaluées et conduisent à des termes divergents non considérés par la renormalisation.

Publications

Une partie de ce manuscrit correspondant au second chapitre a été publié dans la revue EPL du mois de Janvier 2010. Le texte est fourni dans les pages suivantes. (Attention, l'estimation de la vitesse est sur-estimée d'un facteur $4\pi^2$)

Un article est en cours de rédaction concernant les troisième et quatrième chapitres et devrait être soumis prochainement.

Quantum electrodynamics of Casimir momentum: Momentum of the quantum vacuum?

S. KAWKA^(a) and B. A. VAN TIGGELEN

*Laboratoire de Physique et Modélisation des Milieux Condensés, Université Joseph Fourier and CNRS,
Maison des Magistères - BP 166, 38042 Grenoble, France, EU*

received 28 August 2009; accepted in final form 7 December 2009
published online 14 January 2010

PACS 12.20.-m – Quantum electrodynamics
PACS 03.70.+k – Theory of quantized fields
PACS 11.10.Gh – Renormalization

Abstract – The electromagnetic vacuum is known to have energy. It has been recently argued that the quantum vacuum can possess momentum, that adds up to the momentum of matter. This “Casimir momentum” is closely related to the Casimir effect, in which case energy is exchanged. In previous theory it was treated semi-classically. We present a non-relativistic quantum theory for the linear momentum of electromagnetic zero-point fluctuations, considering a harmonic oscillator subject to crossed, quasi-static magnetic and electric and coupled to the quantum vacuum. We derive a contribution of the quantum vacuum to the linear pseudo-momentum and give a new estimate for the achievable speed. Our analysis show that the effect exists and that it is finite.



Copyright © EPLA, 2010

Casimir energy refers to the electromagnetic (EM) energy that shows up when dielectric or metallic objects interact with the quantum vacuum. It is undoubtedly one of the most fascinating phenomena in physics, with a rich history in the 20th century. Casimir forces become important on sub-micron scales and are thus believed to play an important role in nano-optics [1]. Casimir energy has been the subject of many speculations, such as its role in sonoluminescence [2] or in the cosmological constant problem [3].

The standard Casimir effect refers to the reduction of the EM zero-point energy when two ideal metallic plates approach [4]. Other well-known phenomena related to Casimir energy are Van Der Waals and Casimir-Polder forces between neutral atoms [5], the Lifshitz forces between dielectric media, and arguably the most famous among all, the Lamb shift of atomic levels. Shortly after its observation by Lamb in 1947 [6], Bethe explained the Lamb shift by the change in EM vacuum energy caused by the interaction of the atom with the quantum vacuum [7,8]. The Lamb shifts in light atoms are now understood to be basically non-relativistic QED phenomena, although full relativistic theory, including the contribution of several percents due to vacuum polarization, is necessary to come to the extraordinary agreement with

experiment, unprecedented in physics. For the two-photon $1S-2S$ transition in atomic hydrogen, the shift is known up to several cycles [9].

Energy and momentum are naturally related by relativity. The search for “Casimir momentum” seems therefore obvious. In 2004 Feigel [10] proposed a quantum correction to the momentum of dielectric media exposed to static electric and magnetic fields. In this case, classical electrodynamics provides the following expression for the linear momentum of a neutral, polarizable object with mass M ,

$$\mathbf{Q}_{\text{class}} = M\mathbf{v} - \alpha(0)\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0, \quad (1)$$

which is conserved in time, even if the external electric field \mathbf{E}_0 is varied slowly in time. Here $\alpha(0)$ is the static polarizability, with the dimension of a volume. The semi-classical theory of ref. [10] predicts a strongly diverging contribution of the quantum vacuum to eq. (1), quite similar to the one encountered for Casimir energy. Fortunately, spatial gradients of Casimir energy —observable as forces— are often found not to diverge. Momentum however is an observable parameter and the divergence does pose a problem. It has been suggested that UV divergences are not physical and should disappear into the values attributed to physical observables, such as inertial mass, electric charge or cosmological constant [11]. If this is true it is not evident that the prediction of “Casimir momentum” found in ref. [10] will survive or

^(a)E-mail: sebastien.kawka@grenoble.cnrs.fr

be measurable. An obvious next question is what physical observable will then absorb the UV divergence of Casimir momentum. In this work we provide first answers to these questions. We use the method of mass renormalization first employed by Bethe and Kramers that results in a finite Casimir momentum of simple quantum objects.

It is now realized that Casimir momentum emerges quite generally in so-called bi-anisotropic media, in which also magnetic fields can induce an electric polarization [12,13]. Except in media exposed to external EM fields, bi-anisotropy also occurs in moving dielectric media. This follows from the relativistic transformations of EM fields, and shall be discussed elsewhere [14]. In general, like spin, bi-anisotropic behavior and Casimir momentum can be viewed as “remnants” of special relativity [15] in non-relativistic theory that often suffices to describe phenomena quantitatively.

We consider here the following system: a 3D harmonic oscillator —composed of two particles with opposite charge $q_1 = +e$ and $q_2 = -e$ and masses m_i — exposed to crossed, homogeneous static EM fields $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0$ which constitute our bi-anisotropic object, coupled to the EM vacuum. In the Schrödinger picture the Hamiltonian is given by

$$H = \sum_{i=1}^2 \left[\frac{1}{2m_i} (\mathbf{p}_i - q_i \mathbf{A}_t(\mathbf{r}_i))^2 - q_i \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}_i \right] + V(\mathbf{r}) + \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar\omega_k \left[a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger a_{\mathbf{k}\epsilon} + \frac{1}{2} \right], \quad (2)$$

where $\mathbf{A}_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}$ is the total vector potential containing a contribution from the external, static, classical magnetic field, described by the classical vector potential $\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{B}_0 \times \mathbf{r}$, and the quantum operator \mathbf{A} of the EM field. The EM bath will be treated in the Coulomb gauge. We will use $\mathbf{R} = (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2)/M$ and $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ for the center-of-mass position and the inter-particle distance, with *conjugate* momenta \mathbf{P} and \mathbf{p} , respectively; $M = m_1 + m_2$ and $\mu = (1/m_1 + 1/m_2)^{-1}$ are the total and reduced mass. For a harmonic oscillator we can then write $V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mu \omega_0^2 \mathbf{r}^2$.

As we are looking for momentum, we notice the existence of a conserved *pseudo*-momentum \mathbf{K} that commutes with H [16], even when the electric field is varied in time. The electric field is a parameter that can be varied experimentally. This momentum has contributions from both atom and radiation,

$$\mathbf{K} = \mathbf{P} + \frac{e}{2} \mathbf{B}_0 \times \mathbf{r} + \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar \mathbf{k} \left[a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger a_{\mathbf{k}\epsilon} + \frac{1}{2} \right]. \quad (3)$$

It is a *pseudo*-momentum as it is a constant of the motion only if the external magnetic field \mathbf{B}_0 is time independent and homogeneous, as we will assume here. Note that we are interested in the change of the total *kinetic* momentum \mathbf{P}_{kin} of the oscillator in the presence of vacuum, which is not equal to \mathbf{K} , neither to \mathbf{P} . Yet, because \mathbf{K} is conserved,

even for a slowly time-dependent electric field \mathbf{E}_0 , it is the appropriate momentum to look at. In the presence of magnetic fields the *kinetic* and *conjugate* momenta operators are related by $\mathbf{P}_{\text{kin}} = \mathbf{P} - e\Delta \mathbf{A}_t$ with $e\Delta \mathbf{A}_t = e\mathbf{A}_t(\mathbf{r}_1) - e\mathbf{A}_t(\mathbf{r}_2)$, so that we can obtain

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}_{\text{kin}} + e\mathbf{B}_0 \times \mathbf{r} + e\Delta \mathbf{A} + \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar \mathbf{k} \left[a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger a_{\mathbf{k}\epsilon} + \frac{1}{2} \right]. \quad (4)$$

The operator $e\Delta \mathbf{A} = e\mathbf{A}(\mathbf{r}_1) - e\mathbf{A}(\mathbf{r}_2)$ guarantees the gauge-invariant contribution of the “longitudinal” vacuum field to the pseudo-momentum, in terms of the vector potential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ quantized as usual inside a quantization volume V , $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \mathcal{A}_{\mathbf{k}\epsilon} [a_{\mathbf{k}\epsilon} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}]$. We will be obliged to go beyond the electric dipole approximation —in which $e\Delta \mathbf{A}$ would be neglected— to treat the high wave numbers of zero-point fluctuations accurately. The last term in eq. (4) stems from the “transverse” electromagnetic field in the vicinity of the atom [16].

We wish to express the expectation value $\bar{\mathbf{K}} = \langle \Psi_0 | \mathbf{K} | \Psi_0 \rangle$, of the pseudo-momentum in the total ground state $|\Psi_0\rangle$ in terms of the two relevant vectors: the kinetic momentum $M\mathbf{v}$ of the oscillator and the magneto-electric vector $\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0$. We will use perturbation theory in the coupling between the magnetoelectric oscillator and the EM field, where the small parameter of the expansion is the fine-structure constant α . To lowest order, only the emission and subsequent re-absorption of one virtual photon will contribute at this one-loop level of the theory, which will thus be second order perturbation theory. In order to facilitate perturbation theory, we split up the Hamiltonian (2) as follows:

$$H = H_0 + H_F + W, \quad (5)$$

$$H_0 = \sum_{i=1}^2 \left[\frac{1}{2m_i} (\mathbf{p}_i - q_i \mathbf{A}_0(\mathbf{r}_i))^2 - q_i \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}_i \right] + \frac{1}{2} \mu \omega_0^2 \mathbf{r}^2,$$

$$H_F = \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar\omega_k \left[a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger a_{\mathbf{k}\epsilon} + \frac{1}{2} \right],$$

$$W = \sum_{i=1}^2 -\frac{q_i}{m_i} (\mathbf{p}_i - q_i \mathbf{A}_0(\mathbf{r}_i)) \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) + \frac{q_i^2}{2m_i} \mathbf{A}(\mathbf{r}_i)^2.$$

The operator W represents the perturbation of the quantum vacuum on the atom. The term \mathbf{A}^2 can be disregarded because it does not couple field and matter, and at this order its contribution to $\bar{\mathbf{K}}$ will vanish due to basic selection rules. The photon field in free space described by H_F is well known. Finally, the quantum-mechanics of a 3D harmonic oscillator exposed to crossed, homogeneous static EM fields, described by H_0 , was discussed in detail and non-perturbationally by Dippel *et al.* [17]. H_0 and H_F act in different Hilbert-spaces and the basis will be the direct product of their eigenvectors. As we are interested in the center-of-mass motion of the 3D harmonic oscillator, one key point is the distinction between the center-of-mass and the internal coordinates.

Without the quantum vacuum, the pseudo-momentum \mathbf{K} reduces to,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}_{\text{kin}} + e\mathbf{B}_0 \times \mathbf{r}, \quad (6)$$

which commutes with the atomic Hamiltonian. \mathbf{Q} is the quantum-mechanical operator corresponding to the classical pseudo-momentum $\mathbf{Q}_{\text{class}}$ in eq. (1). For the purpose of this work it is convenient to choose eigenfunctions that simultaneously diagonalize the atomic Hamiltonian and the pseudo-momentum \mathbf{Q} , labeled by the eigenvalue \mathbf{Q}_0 , as \mathbf{Q} appears directly in \mathbf{K} as seen by inserting eq. (4) into eq. (6). It will be sufficient to ignore all contributions other than on those linear in either \mathbf{E}_0 and \mathbf{B}_0 , as indicated by the sign \asymp . In this approximation, the magneto-electric oscillator is unitary equivalent to an isotropic harmonic oscillator as expressed by

$$|\mathbf{n}, \mathbf{Q}_0\rangle \asymp \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{R}\right) \exp\left[-\frac{i}{2\hbar}(\mathbf{B}_0 \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{R}\right] \\ \times \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r}\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_0\right) |\phi_{\mathbf{n}}\rangle, \quad (7)$$

where $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$, $n_i = 0, 1, \dots$ denotes the quantum levels of the oscillator. The first two exponentials on the right denote translational momentum of the center of mass, and governed by the conjugate momentum \mathbf{P} . The last pair of exponentials eliminate the static electric field from the picture, with the eigenfunctions of the oscillator shifted out of the center of mass over a distance $\mathbf{r}_0 = e^{-1}\alpha(0)(\mathbf{E}_0 + \mathbf{Q}_0 \times \mathbf{B}_0/M)$, and the reduced momentum shifted by $\mathbf{p}_0 \asymp (2M)^{-1}(m_2 - m_1)\alpha(0)(\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0)$ with $\alpha(0) = e^2/\mu\omega_0^2$ the static polarizability of the oscillator. This last feature is reminiscent of bi-anisotropic activity, and will generate a dominant contribution to $\bar{\mathbf{K}}$. Note that it vanishes for $m_1 = m_2$. Due to the static magnetic field, the oscillator states $|\phi_{\mathbf{n}}\rangle$ are in principle still anisotropic and even in B_0 . The anisotropy is estimated by the small parameter $eB_0a/(\hbar/a) \approx 10^{-5}$, with a the atomic size. This anisotropy constitutes corrections non-linear in the applied fields to the final result for the total momentum. We can therefore neglect it.

Upon taking the quantum-expectation value of eq. (6) for the atomic ground state, which still ignores the quantum vacuum, reveals that the eigenvalue \mathbf{Q}_0 is just equal to the classical expression (1). The total energy of the oscillator in the ground state $E_0 \asymp \frac{3}{2}\hbar\omega_0 + Q_0^2/2M$ is minimal when $\mathbf{Q}_0 = 0$, *i.e.* for a *finite* kinetic momentum.

In the absence of the interaction with the quantum vacuum, the eigenstates are just the direct products $|\mathbf{n}, \mathbf{Q}_0, \mathbf{n}_{\mathbf{k}}\rangle = |\mathbf{n}, \mathbf{Q}_0\rangle \otimes |\mathbf{n}_{\mathbf{k}}\rangle$, with unperturbed energies $E_{\mathbf{n}\mathbf{Q}_0\mathbf{n}_{\mathbf{k}}} = E_{\mathbf{n}\mathbf{Q}_0} + \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}}(n_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2})$. Here $\mathbf{n}_{\mathbf{k}}$ is the occupation of the EM Fock states with photon momentum $\hbar\mathbf{k}$. The ground state $|\Psi_0\rangle$ follows from second-order perturbation in the coupling W to the quantum vacuum

(\sum' avoids zeros in the denominator),

$$|\Psi_0\rangle = |\mathbf{0}, \mathbf{Q}_0, \mathbf{0}\rangle + \sum'_{\mathbf{l}\mathbf{Q}_{\mathbf{n}}} \frac{W_{\mathbf{l}\mathbf{Q}_{\mathbf{n}}, \mathbf{0}\mathbf{Q}_0\mathbf{0}}}{E_{\mathbf{0}\mathbf{Q}_0\mathbf{0}} - E_{\mathbf{l}\mathbf{Q}_{\mathbf{n}}}} |\mathbf{l}, \mathbf{Q}, \mathbf{n}\rangle \\ + \sum'_{\mathbf{l}\mathbf{Q}_{\mathbf{n}}} \sum'_{\mathbf{s}\mathbf{Q}'\mathbf{m}} \frac{W_{\mathbf{l}\mathbf{Q}_{\mathbf{n}}, \mathbf{s}\mathbf{Q}'\mathbf{m}} W_{\mathbf{s}\mathbf{Q}'\mathbf{m}, \mathbf{0}\mathbf{Q}_0\mathbf{0}}}{(E_{\mathbf{0}\mathbf{Q}_0\mathbf{0}} - E_{\mathbf{l}\mathbf{Q}_{\mathbf{n}}})(E_{\mathbf{0}\mathbf{Q}_0\mathbf{0}} - E_{\mathbf{s}\mathbf{Q}'\mathbf{m}})} |\mathbf{l}, \mathbf{Q}, \mathbf{n}\rangle \\ + \sum'_{\mathbf{l}\mathbf{Q}_{\mathbf{n}}} \frac{|W_{\mathbf{l}\mathbf{Q}_{\mathbf{n}}, \mathbf{0}\mathbf{Q}_0\mathbf{0}}|^2}{(E_{\mathbf{0}\mathbf{Q}_0\mathbf{0}} - E_{\mathbf{l}\mathbf{Q}_{\mathbf{n}}})^2} |\mathbf{l}, \mathbf{Q}, \mathbf{n}\rangle. \quad (8)$$

Only the emission and subsequent re-absorption of one virtual photon is considered, which generates a temporary recoil momentum $\mathbf{Q}_0 - \hbar\mathbf{k}$ of the oscillator,

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{Q}_0 \\ + e^2 2\text{Re} \sum_{\mathbf{l}\mathbf{k}\epsilon} \mathcal{A}_{\mathbf{k}}^2 \epsilon \frac{\langle \phi_0 | (e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)\frac{m_2}{M}} - e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)\frac{m_1}{M}}) | \phi_{\mathbf{l}} \rangle \Omega_{\mathbf{l},\mathbf{s}}^* \Omega_{\mathbf{l},\mathbf{0}}}{E_{\mathbf{0}\mathbf{Q}_0\mathbf{0}} - E_{\mathbf{l}(\mathbf{Q}_0 - \hbar\mathbf{k})_{1\mathbf{k}}}} \\ + \mathbf{B}_0 \times 2\text{Re} \sum_{\mathbf{l}\mathbf{s}\epsilon} \frac{e^3 \mathcal{A}_{\mathbf{k}}^2 \langle \phi_0 | \mathbf{r} + \mathbf{r}_0 | \phi_{\mathbf{l}} \rangle \Omega_{\mathbf{l},\mathbf{s}} \Omega_{\mathbf{l},\mathbf{0}}^*}{(E_{\mathbf{0}\mathbf{Q}_0\mathbf{0}} - E_{\mathbf{l}\mathbf{Q}_0\mathbf{0}})(E_{\mathbf{0}\mathbf{Q}_0\mathbf{0}} - E_{\mathbf{s}(\mathbf{Q}_0 - \hbar\mathbf{k})_{1\mathbf{k}}})} \\ + \mathbf{B}_0 \times \sum_{\mathbf{l}\mathbf{s}\epsilon} \frac{e^3 \mathcal{A}_{\mathbf{k}}^2 \langle \phi_{\mathbf{s}} | \mathbf{r} + \mathbf{r}_0 | \phi_{\mathbf{l}} \rangle \Omega_{\mathbf{l},\mathbf{s}}^* \Omega_{\mathbf{l},\mathbf{0}}}{(E_{\mathbf{0}\mathbf{Q}_0\mathbf{0}} - E_{\mathbf{l}(\mathbf{Q}_0 - \hbar\mathbf{k})_{1\mathbf{k}}})(E_{\mathbf{0}\mathbf{Q}_0\mathbf{0}} - E_{\mathbf{s}(\mathbf{Q}_0 - \hbar\mathbf{k})_{1\mathbf{k}}})}. \quad (9)$$

The second term on the right-hand-side is due to $e\Delta\mathbf{A}$ in eq. (4), the two last stem from $e\mathbf{B}_0 \times \mathbf{r}$. We introduced the matrix element $\Omega_{\mathbf{l},\mathbf{s}} = \langle \phi_{\mathbf{l}} | \Omega | \phi_{\mathbf{s}} \rangle$ of the operator

$$\Omega = e\epsilon \cdot [\mathbf{B}_0 \times (\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)] \left(\frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)\frac{m_2}{M}}}{m_1} - \frac{e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)\frac{m_1}{M}}}{m_2} \right) \\ - \frac{\mathbf{Q}_0}{M} \cdot \epsilon \left(e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)\frac{m_2}{M}} - e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)\frac{m_1}{M}} \right) \\ - (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \cdot \epsilon \left(\frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)\frac{m_2}{M}}}{m_1} + \frac{e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)\frac{m_1}{M}}}{m_2} \right)$$

and $\mathcal{A}_{\mathbf{k}}^2 = \hbar/2\epsilon_0 Vkc$ familiar from quantum optics. Ω stems directly from the development of W applied to a one photon transition.

Three kinds of contributions to $\bar{\mathbf{K}}$ can be identified. The first class is proportional to \mathbf{Q}_0 (see the middle term in $\Omega_{\mathbf{l},\mathbf{s}}$) that survives even in the absence of external fields. This term can be seen to affect the inertial mass of the atom, by typically $\frac{3}{2}\frac{\hbar\omega_0}{c^2}$ in accordance with the equivalence principle of energy and inertia [14]. Its UV divergence can be absorbed into the total mass M in the same way as will be discussed below for the ME divergences.

The second class, represented by the two last contributions in eq. (9), are actually QED contributions to the induced electrical dipole moment $\langle \Psi_0 | e\mathbf{r} | \Psi_0 \rangle$ of the oscillator, that find their way to the total momentum via the

classical expression (1). It is straightforward to calculate these corrections—they actually do not diverge and they are relatively small—but we note that if an experimental value for $\alpha(0)$ is used to evaluate the “classical” contribution, these terms are automatically included. In this sense they do not constitute a genuine “Casimir momentum”.

The term $e\Delta\mathbf{A}$ in eq. (4) is a genuine contribution of the vacuum radiation to the pseudo-momentum. It will be seen to generate a momentum linear in $\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0$ by means of the second term in eq. (9) and the third term in Ω . The following calculation will focus on this contribution. It suffers from a UV divergence, that can be eliminated by exactly the same mass regularization as applied by Bethe in his calculation of the Lamb shift [7]. In particular, this procedure establishes that the reduced mass featuring in the static polarizability $\alpha(0) = e^2/\mu\omega_0^2$ will be replaced by the “observed” reduced mass. It is straightforward to show that the so-called transverse electromagnetic momentum, represented by the last term of eq. (4), does not contribute a net momentum. This follows from selection rules and spatial symmetry.

We apply the closure relation $\sum_1 |\phi_1\rangle\langle\phi_1| (E(k) + E_1)^{-1} = (E(k) + H_{ho})^{-1}$ in the second contribution to $\bar{\mathbf{K}}$. This generates two terms involving exponentials with opposite phases that cancel. The contribution from the first term in Ω to $\bar{\mathbf{K}}$ is

$$\alpha(0)\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 \frac{4\alpha}{3\pi} \left[\frac{\hbar^2}{m_i} \int \frac{kdk}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m_i} + \hbar ck} + \mathcal{O}\left(\frac{\hbar\omega_0}{Mc^2}\right) \right] \quad (10)$$

with $i=1,2$. Here we neglect in the denominator the Doppler terms $\mathbf{Q}_0 \cdot \hbar\mathbf{k}$ and $\mathbf{p} \cdot \hbar\mathbf{k}$, generated by the identity $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} H_{ho}(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} = H_{ho}(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k})$. They provide a finite correction of order $\frac{\hbar\omega_0}{Mc^2} \sim 10^{-8}$. The leading contribution diverges logarithmically. In the Bethe theory for the Lamb shift [7] exactly the same kind of divergency was encountered. The two diverging mass-like terms $\delta m_i = \frac{4\alpha}{3\pi} \hbar^2 \int kdk (\frac{\hbar^2 k^2}{2m_i} + \hbar ck)^{-1}$ —here with recoil effects included—stem from the QED coupling of the free particles 1 and 2 with the quantum vacuum and are therefore naturally interpreted to be part of their intrinsic, observable masses [8]. Two other diverging contributions are generated by the term $\alpha(0)\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0$ contained in \mathbf{Q}_0 , see (1), in the expression for Ω and add up to $-\delta m_1/M - \delta m_2/M = -\delta M/M$. Adding up all diverging terms we obtain

$$\mu^{-1}(\delta m_1/m_1 + \delta m_2/m_2 - \delta M/M) = \mu^{-2}\delta\mu = -\delta(1/\mu).$$

Since the static polarizability is proportional to $1/\mu$, these UV-divergent corrections all disappear into the factor $\alpha(0)$ of eq. (1), which thus becomes defined in terms of the observed reduced mass μ^* :

$$\mathbf{Q}_0 - \delta \left(\frac{1}{\mu} \right) \frac{e^2}{\omega_0^2} \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 = M\mathbf{v} - \frac{e^2}{\mu^*\omega_0^2} \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0.$$

All other terms generated by eq. (9) are finite. In particular, the term involving \mathbf{p}_0 in Ω generates the following contribution to \mathbf{K} :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \alpha(0)\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 \frac{m_2 - m_1}{2M} \frac{4\alpha}{3\pi} \\ &\times \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{\delta}^{\infty} dk \left(\frac{k}{k^2/2 + ck m_2/\hbar} - \frac{k}{k^2/2 + \hbar ck m_1/\hbar} \right) \\ &= -\alpha(0)\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 \frac{4\alpha}{3\pi} \frac{m_1 - m_2}{M} \log \frac{m_1}{m_2}. \end{aligned} \quad (11)$$

The UV divergency cancels out, and the integral is finite. Of course part of the k -integral enters the relativistic regime $\hbar k > m_i c$ in which the present theory is not valid. However, by subtracting and adding $2/k$ to both integrands in eq. (11) reveals two terms whose range of integration is typically $m_i c/\hbar$. This wave number was used by Bethe to cut off his non-relativistic theory for the Lamb shift [7]. We will thus adopt the final result in eq. (11) as a “reasonable” non-relativistic estimate for the Casimir momentum. It is nevertheless clear that a relativistic theory is required to get the complete picture for Casimir momentum.

All other cross-terms in eq. (9) contain oscillating exponential factors and converge rapidly for $k > 1/a$, *i.e.* stay in the non-relativistic regime. They generate a Casimir momentum that is typically a factor $\sqrt{\hbar\omega_0/\mu c^2} \sim \alpha$ smaller. We obtain,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2 &= \alpha(0)\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 \alpha \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{\mu c^2}} \\ &\times \left(-\frac{14}{15\sqrt{\pi}} + \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{\Delta m}{M} \right)^2 + \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \frac{\mu}{M} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

When both masses are equal, \mathbf{K}_2 becomes the sole contribution to Casimir momentum, with a relative correction of order α^2 . For $m_1 \gg m_2$, \mathbf{K}_1 dominates. Since it is independent on details of the force between the two particles, it is tempting to apply eq. (11) to the hydrogen atom. With $\hbar\omega_0 = 10$ eV, $m_1 = m_p$ and $m_2 = m_e$, $E_0 = 10^5$ V/m and $B_0 = 17$ T, we find for the velocity associated with the classical contribution (1) $v_{cl} \approx 5$ $\mu\text{m/s}$, and a QED correction of 2% in the same direction; \mathbf{K}_2 yields a negligible correction of 0.01%.

In conclusion, we have presented a non-relativistic quantum electrodynamic theory for the total of an harmonic oscillator, subject to external classical fields, and coupled to the electromagnetic quantum vacuum. The most important conclusions of this work are that Casimir momentum exists and that its UV divergences are renormalizable. The theory shows it to be basically a non-relativistic quantity, but that relativistic corrections are likely to be significant, much like in the Lamb shift problem. To our knowledge nor the classical contribution to magneto-electric momentum, neither the QED correction have ever been observed.

We are indebted to G. RIKKEN for many helpful discussions. This work was supported by the contract PHOTONIMPULS ANR-09-BLAN-0088-01.

REFERENCES

- [1] LAMBRECHT A., *Phys. World*, **15**, issue No. 9 (2002) 29.
- [2] SCHWINGER J., *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, **91** (1994) 6473; EBERLEIN C., *Phys. Rev. A*, **53** (1996) 2772; LAMBRECHT A., JAEKEL M. T. and REYNAUD S., *Phys. Rev. Lett.*, **78** (1997) 2267.
- [3] BIRELL N. D. and DAVIES P. C. W., *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press) 1984.
- [4] CASIMIR H. B. G., *Proc. K. Ned. Akad. Wet.*, **51** (1948) 793.
- [5] CASIMIR H. B. G. and POLDER D., *Phys. Rev.*, **73** (1948) 360.
- [6] LAMB W. E. jr. and RETHERFORD R. C., *Phys. Rev.*, **72** (1947) 241.
- [7] BETHE H. A., *Phys. Rev.*, **72** (1947) 339; MILONNI P. W., *Phys. Rep.*, **25** (1976) 1.
- [8] MILONNI P. W., *The Quantum Vacuum* (Academic Press, San Diego) 1994.
- [9] ZIMMERMANN C., KALLENBACK R. and HÄNSCH T. W., *Phys. Rev. Lett.*, **65** (1990) 571.
- [10] FEIGEL A., *Phys. Rev. Lett.*, **92** (2004) 020404.
- [11] MILTON K. A., *J. Phys. A.*, **37** (2004) R209.
- [12] BIRKELAND O. J. and BREVIK I., *Phys. Rev. E*, **76** (2007) 066605.
- [13] VAN TIGGELEN B. A., *Eur. Phys. J. D*, **47** (2008) 261.
- [14] KAWKA S. and VAN TIGGELEN B. A., in preparation.
- [15] VAN TIGGELEN B. A. and RIKKEN G. L. J. A., *Phys. Rev. Lett.*, **93** (2004) 268903.
- [16] COHEN-TANNOUJJI C., DUPONT-ROC J. and GRYNBERG G., *Photons and Atoms* (Wiley) 1989.
- [17] DIPPEL O., SCHMELCHER P. and CEDERBAUM L. S., *Phys. Rev. A.*, **49** (1994) 4415.

Bibliographie

- [1] B. Vian D. Robert. *Eléments de biologie cellulaire*. Doin éditeurs, 2004.
- [2] H.B.G. Casimir. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch.*, 51 :793, 1948.
- [3] D.M. Weld J. Chiaverini A. Kapitulnik A.A. Geraci, S.J. Smullin. *PRD*, 78 :022002, 2008.
- [4] A. Lambrecht. *Physics World*, 15 :29, 2002.
- [5] K.A. Milton. *The Casimir Effect*. World Scientific, 2001.
- [6] O.C. Jacob R.J. Adler, B. Casey. *Am. J. Phys.*, 63 (7) :620, 1995.
- [7] O.J. Birkeland and I. Brevik. *PRL*, 76 :066605, 2007.
- [8] B.A. van Tiggelen. *Eur. Phys. J. D*, 47 :261, 2008.
- [9] A. Feigel. *PRL*, 92 :020404, 2004.
- [10] I. Brevik. *Phys. Rep.*, 52 :133, 1979.
- [11] N.R. Heckenberg H. Rubinsztein-Dunlop R.N.C. Pfeifer, T.A. Nieminen. *Rev. Mod. Phys.*, 79 :1197, 2007.
- [12] G. Plunien R. Schützhold. *PRL*, 93 :268901, 2004.
- [13] A. Einstein. *Ann. Physik*, 17 :132, 1905.
- [14] A. Einstein. *Physikalische Zeit.*, 10 :185, 1909.
- [15] A. Einstein. *Ann. Physik*, 17 :549, 1905.
- [16] M. L. Shih P. W. Milonni. *Am. J. Phys.*, 59 :684, 1991.
- [17] O. Stern A. Einstein. *Ann. Physik*, 40 :551, 1913.
- [18] P. Debye. *Ann. Physik*, 43 :49, 1914.
- [19] W. Nernst. *Verhandl. deut. Phys. Gen.*, 18 :83, 1916.

- [20] R.S. Mulliken. *Nature*, 114 :349, 1924.
- [21] G. Grynberg C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc. *Photons et atomes*. Editions du CNRS, Paris, 1987.
- [22] Site web NASA. <http://search.nasa.gov/img.jsp?nasaInclude/435572a-f1-2.jpg>.
- [23] P.A.M Dirac. *From a Life of Physics*. Ed. Salam et al., World Scientific, Singapore, 1989.
- [24] R. Escribano and E. Masso. *Eur. Phys. J. C*, 4 :139, 1998.
- [25] H. A. Bethe. *Phys. Rev.*, 72 :339, 1947.
- [26] F.M. Pipkin S.R. Lundeen. *PRL*, 46 :232, 1981.
- [27] J. Schwinger. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 89 :4091, 1992.
- [28] R. L. Jaffe T. Emig, N. Graham and M. Kardar. *PRL*, 99 :170403, 2007.
- [29] S.K. Lamoreaux. *Nature*, 457 :156, 2009.
- [30] V.A. Parsegian J.N. Munday, F. Capasso. *Nature*, 457 :170, 2009.
- [31] H. J. Weber G. B. Arfken. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, 2001.
- [32] S.K. Lamoreaux. *PRL*, 78 :5, 1997.
- [33] S. Reynaud C. Genet, A. Lambrecht. *PRA*, 67 :043811, 2003.
- [34] E.M Lifshitz. *Sov. Phys. JETP*, 2 :73, 1956.
- [35] S. Reynaud A. Lambrecht, M. T. Jaekel. *PRA*, 225 :188, 1997.
- [36] S. Reynaud A. Lambrecht, P. A. Maia Neto. *New Journal of Physics*, 8 :243, 2006.
- [37] U. Mohideen B. W. Harris, F. Chen. *PRA*, 62 :052109, 2000.
- [38] E. Fischbach R.S. Decca, D. López and D.E. Krause. *PRL*, 91 :050402, 2003.
- [39] V. M. Mostepanenko G.L. Klimchitskaya, U. Mohideen. *Rev. Mod. Phys.*, 81 :1827, 2009.
- [40] R. Onofrio C. Rizzo G. Carugno, Z. Fontana. *PRD*, 65 :6591, 1997.
- [41] R. Onofrio. *New J. Phys.*, 8 :237, 2006.
- [42] V.M. Mostepanenko C. Romero V.B. Bezerra, G.L. Klimchitskaya. *PRD*, 81 :055003, 2010.
- [43] R.N. Kleiman D.J. Bishop-F. Capasso H.B. Chan, V.A. Aksyuk. *PRL*, 87 :211801, 2001.

-
- [44] E.M. Lifshitz L.D. Landau. *Electrodynamics of Continuous Media*. Pergamon Press Ltd, 1951.
- [45] J.D. Jackson. *Electrodynamique Classique*. Dunod, 2001.
- [46] S.M. Barnett. *PRL*, 104 :040701, 2010.
- [47] H. Minkowski. *Nachr. Ges. Wiss. Goettingen*, page 53, 1908.
- [48] H. Minkowski. *Math. Ann.*, 68 :472, 1910.
- [49] M. Abraham. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 28 :1, 1909.
- [50] M. Abraham. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 30 :33, 1910.
- [51] U. Leonhardt. *Nature*, 444 :823, 2006.
- [52] J. Laub A. Einstein. *Ann. Physik*, 26 :541, 1908.
- [53] R. Peierls. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 347 :475, 1976.
- [54] J.C.S. Richard R.V. Jones. *Proc. R. Soc. London*, A 221 :480, 1954.
- [55] J.M. Dziedzic A. Ashkin. *PRL*, 30 :139, 1973.
- [56] G. Walker G.B. Walker, D.G. Lahoz. *Can. J. Phys*, 53 :2577, 1975.
- [57] B. Leslie R.V. Jones. *Proc. R. Soc. London*, A 360 :347, 1954.
- [58] S.M. Barnett E.A. Hinds. *PRL*, 102 :050403, 2009.
- [59] M. Fiebig. *J. Phys. D*, 38 :R123, 2005.
- [60] A. Lakhtakia T.G. Mackay. *Electromagnetic Anisotropy and Bianisotropy : A Field Guide*. World Scientific, Singapore, 2010.
- [61] S.A. Tretyakov A.J. Viitanen I.V. Lindell, A.H. Shivola. *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-isotropic Media*. Artech House Publishers, Boston, 2002.
- [62] J.H. Van Vleck. *The Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities*. Oxford University Press, London, 1932.
- [63] T.H. O'Dell. *The Electrodynamics of Magneto-Electric Media*. North-Holland, Amsterdam, 1970.
- [64] W.C. Rontgen. *Ann. Phys.*, 35 :264, 1888.
- [65] I.E. Dzyaloshinskii. *Sov. Phys. JETP*, 10 :628, 1959.
- [66] D.N. Astrov. *Sov. Phys. JETP*, 11 :708, 1960.
- [67] B.Y. Zel'dovich N.B. Baranova, Y.V. Bogdanov. *Sov. Phys. Usp.*, 20 :870, 1997.
- [68] S. Kielich. *Molecular Electro-Optics*. Dekker, New York, 1976.

- [69] R.E. Raab E.B. Graham. *Mol. Phys.*, 52 :1241, 1984.
- [70] G.L.J.A. Rikken T. Roth. *PRL*, 88 :063001, 2002.
- [71] C. Rizzo G.L.J.A. Rikken. *PRA*, 63 :0121007, 2000.
- [72] B. Kockel H. Euler. *Naturwissenschaften*, 23 :246, 1935.
- [73] C. Rizzo. La magnéto-optique du vide quantique. 2007.
- [74] H. Gies. *J. Phys. A*, 41 :164039, 2008.
- [75] G.L.J.A. Rikken B.A. van Tiggelen. *PRL*, 93 :268903, 2004.
- [76] A. Feigel. *PRL*, 93 :268904, 2004.
- [77] A. Feigel. *PRL*, 93 :268902, 2004.
- [78] G. Rousseaux. *PRL*, 100 :248901, 2008.
- [79] G.L.J.A. Rikken B.A. van Tiggelen. *PRL*, 100 :248902, 2008.
- [80] V. Krstic B.A. van Tiggelen, G.L.J.A. Rikken. *PRL*, 96 :130402, 2006.
- [81] F. Laloe C. Cohen-Tannoudji, B. Diu. *Mecanique Quantique*. Hermann, 1986.
- [82] Momentum from nothing.
- [83] Movement from nothing.
- [84] V. Krstić B.A. van Tiggelen, G. L. J. A. Rikken. Ariadna report. 2006.
- [85] P.W. Milonni. *The Quantum Vacuum*. Academic Press, San Diego, 1994.
- [86] F. Ravndal X. Kong. *PRL*, 79 :545, 1997.
- [87] A. Romeo S. Zerbini E. Elizalde, S.D. Odintsov. *Zeta Regularization Techniques With Applications*. World Scientific, 1994.
- [88] C. Genet M.T. Jaekel S. Reynaud, A. Lambrecht. *A.C.R Acad. Sci. Paris*, 2-IV :1287, 2001.
- [89] Y.J. Ng K.A. Milton. *PRE*, 57 :5504, 1998.
- [90] K.A. Milton I. Brevik, V.N. Marachevsky. *PRL*, 82 :3948, 1999.
- [91] G. Barton. *J. Phys. A.*, 32 :525, 1999.
- [92] Y.B. Zel'dovich. *JETP Lett.*, 6 :316, 1967.
- [93] S. Weinberg. *Rev. Mod. Phys.*, 61 :1, 1989.
- [94] K.A. Milton. *arXiv :1005.0031*, 2010.

-
- [95] R.J. Adler. *General Relativity, in Encyclopedia of Physics*. S. Parker, New York, 1992.
- [96] S. Weinberg. The cosmological constant problems (talk given at dark matter 2000). 2000.
- [97] M. S. Turner. *Astrophys.J.*, 576 :L101, 2002.
- [98] W. Pauli. *Handbuch der Physik*, 24 :1, 1933.
- [99] G. Grynberg C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc. *Processus d'interaction entre Photons et atomes*. Editions du CNRS, Paris, 1988.
- [100] P. Parashar A. Romeo K.V. Shajesh J. Wagner S.A. Fulling, K.A. Milton. *PRD*, 76 :025004, 2007.
- [101] K.V. Shajesh J. Wagner K.A. Milton, P. Parashar. *J. Phys. A*, 40 :10935, 2007.
- [102] R. Kubo. *RPPh*, 29 :255, 1966.
- [103] S. Reynaud M.T. Jaekel. *Quantum Opt.*, 4 :39, 1992.
- [104] G. Barton. *Cavity Quantum Electrodynamics*. Berman, Academic Press, 1994.
- [105] S. Reynaud M.T. Jaekel, A. Lambrecht. *New Astro. Rev.*, 46 :727, 2002.
- [106] S. Reynaud M.T. Jaekel. *Journal de Phys. I*, 3 :1093, 1993.
- [107] P.A. Maia Neto L.A.S Machado. *PRD*, 65 :125005, 2002.
- [108] S.M. Carroll. *Living Rev. Relativity*, 4 :1, 2001.
- [109] J.P. Uzan F. Bernardeau. *Images de la physique*, page 8, 2008.
- [110] H. Shultes H. Frenzel. *Z. Phys. Chem. B*, 27 :421, 1934.
- [111] S.J. Putterman B.P. Barber. *Nature*, 352 :318, 1991.
- [112] C.C. Church R.A. Roy D.F. Gaitan, L.A. Crum. *J. Acoust. Soc. Am.*, 91 :3061, 1992.
- [113] D. Lohse. *Nature*, 434 :33, 2005.
- [114] T.J. Matula. *Philos Trans. R. Soc. London A*, 357 :225, 1999.
- [115] D. Lohse M.P. Brenner, S. Hilgenfeldt. *Reviews of Mod. Phys.*, 74 :425, 2002.
- [116] C. Eberlein. *Phys. Rev. A*, 53 :2772, 1996.
- [117] J. Schwinger. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 91 :6473, 1994.
- [118] M.T. Jaekel A. Lambrecht and S. Reynaud. *Phys. Rev. Lett.*, 78 :2267, 1997.
- [119] A. Beige A. Kurcz, A. Capolupo. *N. J. Phys.*, 11 :053001, 2009.

- [120] L.S. Cederbaum O. Dippel, P. Schmelcher. *PRA*, 49 :4415, 1994.
- [121] L.S. Cederbaum P. Schmelcher. *Chem. Phys. Lett.*, 208 :548, 1993.
- [122] G. Wunner H. Herold, H. Ruder. *J. Phys. B*, 14 :751, 1981.
- [123] A. Messiah. *Mecanique quantique*. Dunod, 1995.
- [124] H. Fizeau. *Proc. Verb. Soc. Philomathique*, page 81, 1848.
- [125] E.M. Lifshitz L.D. Landau. *The Classical Theory of Fields*. Pergamon Press Ltd, 1951.
- [126] E.M. Lifshitz L.D. Landau. *Quantum Mechanics*. Pergamon Press Ltd, 1951.
- [127] D. Polder H.B.G. Casimir. *Phys. Rev.*, 73 :360, 1948.
- [128] K.A. Milton. *Ann. Phys., NY*, 127 :49, 1980.
- [129] I.G. Pirozhenko I. Brevik, V.V. Nesterenko. *J. Phys. A*, 31 :8661, 1998.
- [130] J.F. Ward J.L. Tech. *PRL*, 27 :367, 1971.
- [131] W.E. Keller. *Helium-3 and Helium-4*. Plenum Press, New York, 1969.
- [132] C.W. Allen. *Astrophysical quantities*. Athlone Press, University of London, 1955.
- [133] P.B. Lerner P.W. Milonni. *PRA*, 46 :1185, 1992.
- [134] S. Kawka and B.A. van Tiggelen. *EPL*, 89 :11002, 2010.
- [135] N.D. Birell and P.C.W. Davies. *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge, 1984.
- [136] A. Gambassi S. Dietrich C. Hertlein, L. Helden and C. Bechinger. *Nature*, 451 :172, 2008.
- [137] P.A. Maia Neto A. Lambrecht and S. Reynaud. *New J. Phys.*, 8 :243, 2006.
- [138] W.E. Lamb Jr. and R.C. Retherford. *Phys. Rev.*, 72 :241, 1947.
- [139] P.W. Milonni. *Phys. Rep.*, 25 :1, 1976.
- [140] K.A. Milton. *J. Phys. A.*, 37 :R209, 2004.
- [141] Z.C. Wu. *EPL*, 88 :20005, 2009.
- [142] P.R. Buenzli P.A. Martin. *Act. Phys. Pol. B*, 37 :2503, 2006.
- [143] S. Reynaud M.T. Jaekel. *Phys. Lett. A*, 180 :9, 1993.
- [144] U. Mohideen V.M. Mostepanenko G.L. Klimchitskaya, M. Bordag. *Advances in the Casimir Effect*. Oxford Univ. Pr., 2009.

Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord mon directeur de thèse Bart van Tiggelen pour m'avoir accueilli comme stagiaire puis doctorant au LPMMC, et pour avoir accepté la coupure entre les deux. Je le remercie de m'avoir proposé ce sujet passionnant à la fin de mon stage de M2 et de la façon dont nous avons mené ce travail. Il reste nombre de questions prometteuses sur lesquelles j'espère pouvoir contribuer davantage.

Je remercie Joel Chevrier d'avoir présidé le jury de thèse. Je remercie Iver Brevik et Serge Reynaud, dont j'estime énormément les travaux scientifiques, d'avoir accepté le rôle de rapporteur. Je remercie également Geert Rikken et Carlo Rizzo d'avoir participé à mon jury de thèse, j'espère pouvoir collaborer si les expériences sur les sujets peuvent voir le jour. Je remercie particulièrement Thierry Dauxois qui m'a suivi depuis mes études à l'ENS-Lyon, jusqu'à sa participation au jury. Je remercie l'ensemble pour les mots encourageants qu'ils ont eu, confortant mon choix de poursuivre en recherche pour cette prochaine étape que représente le postdoc.

Je remercie chaleureusement l'équipe avec qui j'ai pu travailler à l'université pour les cours, Alain Drillat et Antoine Delon qui m'ont accueilli dans leur UE et m'ont bien aidé. Martial Balland et Olivier Ali avec qui j'ai beaucoup partagé.

Je remercie enfin l'ensemble du laboratoire LPMMC pour la bonne ambiance qui a contribué à un cadre de vie agréable durant ces trois années, ça a toujours été un plaisir d'aller au labo. Je remercie Nicolas Didier, Nicolas Pauget, Nicolas Cherroret pour leur aide sur une multitude de détails et les bons moments passés à partager le bureau. Je remercie particulièrement Arthur Goetshy pour la relecture scientifique du manuscrit et enfin Nadège Bavoux pour les relectures générales ainsi que d'avoir supporté la période de rédaction.

MOMENT DE CASIMIR : EFFET DU VIDE QUANTIQUE SUR L'IMPULSION D'UN MILIEU BI-ANISOTROPE

*L*E point principal de cette étude est l'existence du moment cinétique de Casimir d'un point de vue microscopique, montrée à l'aide d'un modèle comprenant un oscillateur harmonique soumis à des champs électrique et magnétique externes, croisés, homogènes de façon à obtenir les propriétés d'un milieu bi-anisotrope, en interaction avec les fluctuations quantiques du vide. Nous avons donné un ordre de grandeur de la vitesse de l'oscillateur attendue pour des conditions expérimentales raisonnables. Nous trouvons une contribution classique due aux champs externes de l'ordre de 0,1 micromètre par seconde et une contribution quantique attribuée aux fluctuations du vide de l'ordre de 2 nanomètre par seconde. Dans le cas d'un atome d'hydrogène en mouvement, où la bi-anisotropie est due à l'effet Fizeau, nous trouvons que l'effet du couplage avec le vide donne une correction de masse en accord avec le principe d'équivalence masse-énergie d'Einstein, à température nulle ou non-nulle. Dans le cas de deux atomes en mouvement dans le vide, nous donnons la marche à suivre dans le but de montrer que l'énergie de Casimir entre les deux atomes, c'est-à-dire liée aux forces de Van der Waals, participe de la même façon à la masse inertielle de l'ensemble. Cette approche confirme que le moment de Casimir n'est pas exclu voire même réclamé par les principes de la relativité restreinte. Nous nous sommes intéressés au cas de l'énergie Casimir d'une boule diélectrique diluée. Un calcul numérique de l'énergie associée aux forces de Van der Waals, dont l'équivalence avec l'énergie de Casimir a été montrée par ailleurs, nous a permis de déterminer l'énergie totale de la boule en fonction de son rayon. Nous déterminons les termes associés à la chaleur latente et à la tension de surface. Nous trouvons ensuite un terme variant de façon linéaire avec le rayon, en désaccord avec les méthodes de renormalisation utilisées avec une description continue. Ce désaccord est expliqué par la description continue de la matière où les interactions à courte distance sont surévaluées et conduisent à des termes divergents non considérés par la renormalisation.

CASIMIR MOMENTUM : QUANTUM VACUUM FLUCTUATION AND MOMENTUM OF BI-ANISOTROPE MEDIA

*W*E have presented a non-relativistic quantum electrodynamic theory for the total of an harmonic oscillator, subject to external classical fields, and coupled to the electromagnetic quantum vacuum. The most important conclusions of this work are that Casimir momentum exists and that its UV divergences are renormalized. The theory shows it to be basically a non-relativistic quantity, but that relativistic corrections are likely to be significant, much like in the Lamb shift problem. Using reasonable experimental values, we estimate a classical contribution to the momentum of approximately 5 micrometer per second and a quantum correction of 0.1 micrometer per second. To our knowledge nor the classical contribution to magneto-electric momentum, neither the QED correction have ever been observed. We studied the case of an hydrogen atom in movement. Here the bi-anisotropy is due to the Fizeau effect and is characterize by the velocity. Thus we expect a correction proportional to the velocity, ie a mass correction. We find indeed that this is in total agreement with the mass energy equivalence principle, for temperature zero or non zero. We show the way to find the same result in the case of the Casimir energy of two atoms. We calculate then the Casimir energy of a dilute dielectric ball associated with the Van der Waals forces. We made a numerical model to compute the total energy of the ball in function of his radius. We determined the latent heat and surface tension parts. We found then a linear term that do not show up in a continuous and renormalized description of the matter, due to the neglect of short distance interactions.