



**HAL**  
open science

# Modélisation et simulation de l'interaction multi-échelles entre îlots magnétiques et la microturbulence dans les plasmas de fusion magnétisés

Magali Muraglia

► **To cite this version:**

Magali Muraglia. Modélisation et simulation de l'interaction multi-échelles entre îlots magnétiques et la microturbulence dans les plasmas de fusion magnétisés. Physique [physics]. Université de Provence - Aix-Marseille I, 2009. Français. NNT: . tel-00577937

**HAL Id: tel-00577937**

**<https://theses.hal.science/tel-00577937v1>**

Submitted on 17 Mar 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# UNIVERSITÉ DE PROVENCE

Physique des Interactions Ioniques et Moléculaire, UMR 6633  
Magnetic Fusion Laboratory, LIA 336



THÈSE POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR  
DISCIPLINE : ASTROPHYSIQUE, RAYONNEMENT ET PLASMAS  
ECOLE DOCTORALE : PHYSIQUE ET SCIENCES DE LA MATIÈRE

## Modélisation et simulation de l'interaction multi-échelle entre îlots magnétiques et la microturbulence dans les plasmas de fusion magnétisés

MAGALI MURAGLIA

Thèse présentée et soutenue publiquement le 19/10/2009  
devant le jury composé de Messieurs :

O. AGULLO	Maître de Conférence, Université de Provence, France	(Co-Directeur de thèse)
S. BENKADDA	Directeur de Recherche CNRS, Université de Provence, France	(Directeur de thèse)
X. GARBET	Ingénieur, CEA Cadarache, France	
J. M. RAX	Professeur, Ecole Polytechnique, France	(Rapporteur)
A. SEN	Professeur, Institute for Plasma Research, Inde	(Président du jury)
R. STAMM	Professeur, Université de Provence, France	
F. WAELBROECK	Professeur, University of Texas, USA	(Rapporteur)
M. YAGI	Professeur, Kyushu University, Japon	

## Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier mes directeurs de thèse, M. Olivier Agullo et M. Sadruddin Benkadda. Ils m'ont fait confiance et m'ont soutenue pendant ces trois années.

Je remercie Sadri pour m'avoir donné les armes nécessaires à une bonne intégration dans le monde de la recherche. Il m'a appris qu'un scientifique se devait d'être dynamique, passionné, ouvert aux autres et sur le monde extérieur. Grâce à son soutien, j'ai pu présenter mon travail à des spécialistes de renommée internationale, ce qui m'a permis d'élargir mon horizon et de participer à des discussions plus que fructueuses. En particulier, il est à l'origine de mon départ au Japon qui m'a enrichi tant sur le plan professionnel que sur le plan personnel. De plus, je le remercie pour avoir su aiguiller et mettre en valeur mon travail tout au long de ces trois années grâce à son expérience et sa profonde connaissance de la physique des plasmas.

J'ai pris beaucoup de plaisir à partir à la conquête des îlots magnétiques avec Olivier... Je me souviens du premier jour où j'ai poussé la porte du laboratoire... Jeune ignorante (je suis toujours ignorante mais suis-je encore jeune? en tout cas je suis périmée selon les dires d'une guide touristique japonaise...), je me suis laissée séduire par des mots fascinants et mystérieux : MHD, dynamo, chaos, turbulence, tokamak... Je ne savais alors pas dans quoi je m'embarquais mais avec l'enthousiasme communicatif d'Olivier je n'ai pas été déçue... Je le remercie donc pour toutes ces heures passées à discuter, à m'expliquer et à me donner envie de faire de la physique... Je le remercie également pour sa patience, et croyez-moi, tous ceux qui me connaissent le savent bien, il en a eu besoin !

J'ai été très honorée que Jean-Marcel Rax et François Waelbroeck acceptent d'être rapporteur de cette thèse. En particulier, je remercie vivement François d'avoir fait un long voyage depuis les Etats-Unis pour assister à ma soutenance. Let's swich in english... I want to thank Abhijit Sen to accept to be the president of my phd defense but also to the time he gave to me and to my work. During the bad moments, he kept confidence in our work and thanks to his long experience, we managed to get over the difficulties.

Dans le rôle de la bonne étoile, je remercie Xavier Garbet qui a largement apporté sa pierre à l'édifice. Une légende urbaine raconte que Xavier serait un dieu... Je n'ai toujours pas réussi à apporter une preuve scientifique à cela... Quoiqu'il en soit, au cours des nombreuses discussions que nous avons eues pendant ces trois années, il a toujours su apporter un éclairage nouveau sur mon travail. Chaque rencontre était l'occasion, pour moi, de mesurer à quel point j'avais de choses à apprendre...

Arigato gozaimasu Yagi Sensei ! I want to thank very much Masa to so many things... I can not forget the so warm welcome he gave to me when I arrived in Japan ! I know that Yagi Sensei is a so very important person but he managed to find some time to help me in my work and to give me some invaluable advices. I want to thank Masa for more personnal reasons also. Six months so far from my familly is so long ! But thanks to Masa and to the japanese students I could discover Japan and I got so much good time in Japan ! I can not forget the

japanese restaurants with a so nice atmosphere, I can not forget japanese beer, japanese sashimi, japanese “korean” barbecues, japanese fondu called “shabu-shabu”, the wonderfull “onsen”... I can not forget also the good time we passed in Nakasu, in Kumamoto, in Kyoto, in Aso-San, in Geneva, ... ! Anyway, I have to go back in Japan because the only sentence I know in japanese is “Sumimasen, sumimasen, o birou kudasaï !”, so I have to learn more and Masa promised me to teach me how to play Majong !

Je n’oublie pas non plus Peter Beyer à qui je dois mon modèle. Tant d’étudiants ont transpiré à la lecture de ce livre rouge... Tant d’étudiants transpireront encore... Je n’ai pas été en reste et je suis moi aussi partie à l’assault de cette HDR qui fut pour moi une véritable source de connaissances. Je remercie également Peter pour son infinie gentillesse et pour tout le temps qu’il a consacré à répondre à mes questions.

Je remercie bien évidemment mon ami Guillaume Fuhr qui a toujours cru en moi et qui m’a toujours soutenue dans les moments difficiles... Que ferions-nous sans lui? Pas grand chose... A la fois roi du numérique et psy à ses heures perdues, il m’a appris beaucoup de choses très utiles comme parler au Saint Père, calculer un taux de croissance, ou encore que malheureusement la mémoire de mon ordinateur n’est pas infinie... Lecteurs, vous pourriez vous méprendre à la lecture de ces quelques lignes et croire que Guillaume approche la perfection, mais ne vous y trompez pas, il code en C ! Quelle horreur !

Quand je pense au Japon, je pense à Michel Giraud. Lors de mon premier voyage au Japon, pour l’inauguration du LIA, Michel faisait parti de l’expédition. Je garde de délicieux souvenirs des discussions avec Michel. Il m’a beaucoup appris et, d’une certaine façon, a contribué à mon apprentissage ! J’attends d’ailleurs toujours le livre racontant la genèse et l’histoire de notre cher laboratoire PIIM ! Je ne peux pas oublier non plus que c’est Michel qui a défendu brillamment mon dossier auprès de l’Egide pour obtenir la bourse du collège doctoral franco-japonais. Merci beaucoup Michel !

Je remercie chaleureusement tous les membres du laboratoire et en particulier les membres des équipes Turbulence Plasma et Dynamique des Systèmes Complexes. Bien évidemment, j’ai une pensée pour tous mes compagnons de la, mondialement connue, pause café ! Merci donc à Cyril Rebont, Cédric Zumsteg, Aurélien Lejeune, Thibaut Voslion, Nicolas alias Tod, Florence De Solminihac, Michael Leconte, Tony Lefèvre, ... j’en oublie sûrement, ..., ne serait ce que les nouveaux arrivants, ..., Alexandre Poyé, Nicolas Dubuit, ... Je tiens à remercier particulièrement mon cher ami Shimpei qui a commencé en même temps que moi, en master premier année, et mon cher ami Satoru qui fut pour moi un véritable “bodyguard” lorsque j’étais au Japon.

Il est important pour moi de remercier mon professeur de physique de seconde et de terminale Mme Gallay. En plus d’être un excellent professeur de physique, elle m’a toujours encouragée à m’intéresser à la physique. Au lycée, je voulais être astrophysicienne (j’y suis presque arrivée !), je me souviens que je passais beaucoup de temps à discuter avec elle des étoiles, des planètes... Elle m’a même offert un livre de vulgarisation scientifique : “La mélodie secrète”. Même si je

suis une scientifique bien carrée, je suis certaine que de là haut elle a pu assister à ma soutenance de thèse !

Enfin, et bien sûr, je remercie du fond de mon coeur ma famille qui a du me supporter pendant ces trois longues années et même pendant 27 ans ! Merci à mon cher Octavien qui a “web-supporté” mes innombrables sautes d’humeur lorsque mon code ne voulait pas converger ou encore lorsque les choses n’avançaient pas comme je le souhaitais ! Merci à ma soeur Fanny, Benoît, mes adorables neveux Paul et Axel et ma chère Laure. Je garde une place privilégiée pour mes parents Sylvie et Didier à qui je dédie cette thèse. Il est inutile de trouver des mots pour leur exprimer ma reconnaissance, ils savent bien que je leur dois tout.

Voilà, j’arrive à la fin de mes remerciements... Trois années de thèse... Trois années qui sont passées tellement vite avec ses bas mais aussi ses hauts... Si c’était à refaire, je recommencerais...



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>II</b>	<b>Modèle</b>	<b>19</b>
<b>1</b>	<b>Equations des moments</b>	<b>23</b>
1.1	Équation de continuité . . . . .	24
1.2	Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	25
1.3	Équation de l'énergie . . . . .	25
1.4	Loi d'Ohm généralisée . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Approximation de dérive</b>	<b>29</b>
2.1	Principe . . . . .	29
2.2	Vitesses de dérive . . . . .	30
2.3	Ordres de grandeur et loi d'Ohm . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Approximation de la MHDR</b>	<b>33</b>
3.1	Principe . . . . .	33
3.2	Equations de la MHDR . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Ilot magnétique en présence d'interchange</b>	<b>37</b>
4.1	Modélisation d'un îlot magnétique en présence de turbulence d'interchange . . . . .	37
4.2	Modèle . . . . .	37
4.3	Normalisation des équations . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Bilan énergétique</b>	<b>43</b>
5.1	Energie cinétique $E_c$ . . . . .	43
5.2	Energie de la pression $E_p$ . . . . .	43

5.3	Energie magnétique $E_m$ . . . . .	44
5.4	Energie : sources et puits . . . . .	44
<b>III</b>	<b>Etude Linéaire</b>	<b>49</b>
<b>6</b>	<b>Interchange et mode de déchirement</b>	<b>53</b>
6.1	Interchange électrostatique . . . . .	53
6.2	Mode de déchirement . . . . .	55
<b>7</b>	<b>Modèle à trois champs</b>	<b>63</b>
7.1	Effet de $\rho^*$ sur le mode de déchirement classique . . . . .	63
7.2	Effet d'un champ magnétique sur l'interchange . . . . .	68
<b>8</b>	<b>Etude linéaire numérique</b>	<b>75</b>
8.1	Mode de déchirement et modes interchanges . . . . .	75
8.2	Effet de la résistivité $\eta$ . . . . .	81
<b>IV</b>	<b>Etude Non-linéaire</b>	<b>87</b>
<b>9</b>	<b>Impact de <math>\rho^*</math> sur la dynamique d'un îlot</b>	<b>91</b>
<b>10</b>	<b>Îlot magnétique et interchange stable</b>	<b>101</b>
10.1	Description de l'évolution non-linéaire . . . . .	102
10.2	Origine de la transition . . . . .	105
10.3	Origine du flux zonal . . . . .	108
10.4	Effet de $\beta$ et de $L_p$ . . . . .	110
<b>11</b>	<b>Îlot magnétique et interchange instable</b>	<b>113</b>
11.1	Effet des modes interchanges . . . . .	113
11.2	Evolution des petites échelles . . . . .	117
<b>V</b>	<b>Origine de la rotation poloïdale d'un îlot magnétique</b>	<b>127</b>
<b>12</b>	<b>Modèle pour la rotation d'un îlot</b>	<b>131</b>
12.1	Modèle pour la fréquence de la rotation poloïdale . . . . .	131



12.2	Origine de l'écoulement poloïdal $E \times B$ . . . . .	133
12.3	Origine de l'écoulement diamagnétique non-linéaire . . . . .	134
<b>13</b>	<b>Rotation et interchange stable</b>	<b>135</b>
13.1	Compétition entre l'écoulement poloïdal $E \times B$ et la vitesse diamagnétique non-linéaire . . . . .	135
13.2	Dynamique des contributions à la rotation . . . . .	137
13.3	Effet du paramètre $\beta$ sur la rotation . . . . .	140
<b>14</b>	<b>Rotation et interchange instable</b>	<b>143</b>
14.1	Evolution de la rotation poloïdale d'un îlot magnétique en présence de modes interchanges instables . . . . .	143
14.2	Origine des écoulements non-linéaires . . . . .	145
<b>VI</b>	<b>Conclusion et Perspectives</b>	<b>149</b>
<b>VII</b>	<b>Annexes</b>	<b>155</b>
<b>15</b>	<b>Normalisation des équations</b>	<b>157</b>
<b>16</b>	<b>Description du code MTT2D</b>	<b>163</b>



# Première partie

## Introduction



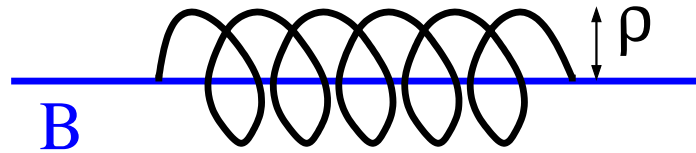


FIGURE 1 – Giration d’une particule chargée autour d’une ligne de champ magnétique.

L’augmentation des besoins énergétiques mondiaux paraît inéluctable. Cependant, la poursuite de la production énergétique dans les conditions actuelles (essentiellement basée sur les énergies fossiles) conduirait à épuiser les ressources actuellement connues de pétrole et de gaz en quelques générations et à doubler les émissions annuelles de gaz à effet de serre responsable du réchauffement climatique. Il est donc urgent de trouver de nouvelles sources d’énergie permettant de préserver ressources et environnement tout en répondant à la demande. Il existe plusieurs voies : les énergies renouvelables, l’énergie nucléaire de fission, la fusion thermonucléaire contrôlée. Cette dernière solution, qui permettrait d’avoir des ressources en énergie quasiment illimitées, consiste à brûler du deutérium et du tritium. Cependant, les sections efficaces en jeu dans cette réaction imposent une température très élevée aux alentours de 20keV. A cette température, la matière est à l’état de plasma. De plus, pour que la réaction soit efficace, c’est à dire pour qu’elle produise plus d’énergie qu’elle n’en consomme, il faut satisfaire une condition d’ignition appelée critère de Lawson [1] :  $n\tau_E > 10^{20}m^{-3}$  ( $n$  est la densité du plasma et  $\tau_E$  un temps caractéristique de confinement du plasma). Pour satisfaire ce critère, il y a deux solutions possibles. La première consiste à conserver un temps de confinement raisonnablement court et à confiner un plasma de très grande densité : c’est la fusion contrôlée par confinement inertiel. La deuxième solution possible consiste à conserver des densités relativement faibles et à garder le plasma suffisamment longtemps pour satisfaire la condition d’ignition : c’est la fusion contrôlée par confinement magnétique. En effet, pour confiner le plasma suffisamment longtemps, il faut faire appel à un champ magnétique intense. Plusieurs géométries du champ magnétique ont été étudiées dans ce but. L’une des plus explorées, ces dernières décennies, est la configuration tokamak [2, 3] dans laquelle les particules chargées sont confinées sur des surfaces magnétiques en forme de tores emboîtés.

En effet, immergée dans un champ magnétique  $\mathbf{B}$ , une particule de masse  $m$  et de charge  $e$  est libre de se mouvoir parallèlement au champ magnétique, mais son mouvement transverse est contraint. Sa trajectoire dessine une hélice autour des lignes de champ magnétique dont le rayon correspond au rayon de Larmor  $\rho$  (Figure(1)). Dans l’optique de confiner un plasma dans une région limitée de l’espace, cette propriété incite à développer une configuration où les lignes de champ se referment sur elles-mêmes. Considérons par exemple une topologie magnétique telle que les lignes de champ soient circulaires. On se retrouve alors dans une configuration où la direction magnétique est purement toroïdale  $B_\varphi$  et où la géométrie est torique. Malheureusement, sur une simple trajectoire circulaire de ce type, la particule subit une lente dérive transverse, liée au gradient de champ magnétique et à la courbure du champ magnétique, et dont la direction dépend du signe de sa charge. Par exemple, les ions vont dériver vers le haut

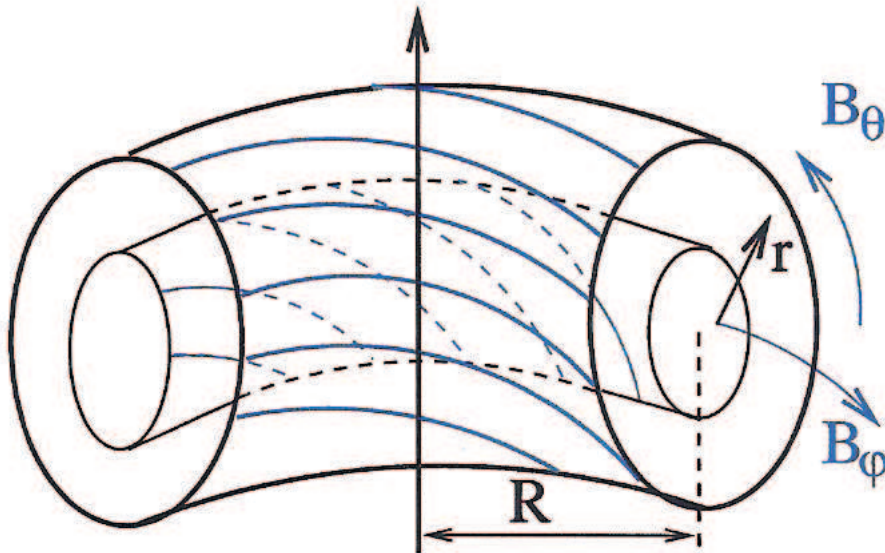


FIGURE 2 – Géométrie du champ magnétique dans une section de tokamak.

et les électrons vers le bas. L'idée imaginée par les Russes dans les années soixante, pour compenser cette dérive, fut de rajouter un champ magnétique supplémentaire dans la direction de la petite circonférence du tore appelé champ poloïdal  $B_\theta$ . Dans un tokamak, la composante  $B_\phi$  du champ est générée par des bobines extérieures et la composante  $B_\theta$  est induite par un courant que l'on fait circuler dans le plasma. Ce courant ne joue pas seulement un rôle clé pour la stabilité, il permet en plus de chauffer le plasma. Les lignes de champ magnétique résultantes sont des hélices. Chacune s'enroule sur une surface fermée (appelée surface magnétique). Les différentes surfaces magnétiques sont des tores emboîtés, chacun étant caractérisé par un grand rayon  $R$  et un petit rayon  $r$  (voir Figure (2)). On peut alors définir le rapport d'aspect d'un tokamak par  $R_0/a$  où  $R_0$  est la position de l'axe magnétique (limite des tores pour  $r \rightarrow 0$ ) et  $a$  est le petit rayon de la dernière surface magnétique fermée. Pour un tokamak typique, la description des surfaces magnétiques comme tores circulaires est correcte dans la mesure où l'inverse du rapport d'aspect est un petit paramètre  $\epsilon \equiv a/R_0 \ll 1$ .

Depuis les trente dernières années, plusieurs tokamaks ont vu le jour (par exemple, JET en Angleterre, Tore Supra en France, JT-60 au Japon, ...) et ont permis d'améliorer le fonctionnement des machines à confiner un plasma. Aujourd'hui le projet ITER (Figure(3)) va permettre d'étudier la faisabilité scientifique et technique de la fusion nucléaire comme nouvelle source d'énergie [4]. Plus précisément, ITER devra atteindre deux objectifs scientifiques essentiels pour franchir de nouvelles étapes vers la production d'énergie de fusion. Le premier objectif est de générer une puissance de base de cinq cent Mégawatts durant plus de six minutes tout en n'en injectant que cinquante. Le deuxième objectif est de démontrer que les réactions de fusion dans le plasma peuvent être maintenues en continu pendant plus de seize minutes. Une fois ces objectifs atteints, l'étape suivante sera le projet DEMO qui a pour but de réaliser un réacteur nucléaire à fusion dont la production d'énergie atteint des valeurs correspondant à une centrale électrique moderne.

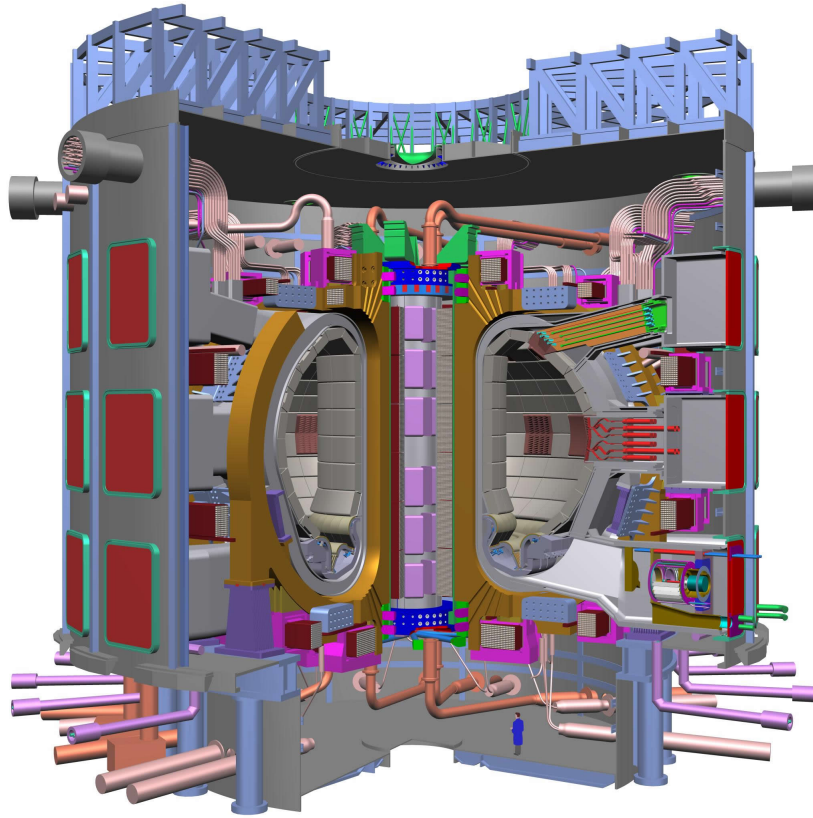


FIGURE 3 – Prototype du tokamak ITER.

Le confinement magnétique d'un plasma dans un tokamak présente des difficultés majeures dont les origines sont encore largement inexpliquées. L'excitation d'instabilités Magnétohydrodynamiques (MHD) peut conduire à un dégradation du confinement et même à une perte totale de ce dernier [5, 6]. En effet, la puissance de production de la fusion est proportionnelle à  $\beta_N^2 B^4$ <sup>1</sup> où  $B$  est le champ magnétique. Il paraît alors logique d'augmenter fortement les effets de pression pour obtenir le meilleur confinement possible. Cependant, pour une valeur de  $\beta_N \sim 3.5$ , une limite MHD idéale est atteinte. Au delà de cette limite, il y a une forte modification de la topologie des lignes de champ magnétique : celles-ci sont détruites puis reconnectées pour former un îlot magnétique qui va grossir jusqu'à occuper tout l'espace. Lorsque l'îlot atteint les parois de la machine, en quelques secondes, il y a une diminution brutale du courant et du champ magnétique (voir Figure (4)). Le confinement et le plasma sont alors perdus, c'est la disruption [8]. Il est donc essentiel de ne pas dépasser la limite MHD idéale pour préserver le confinement tout en restant à des valeurs relativement hautes pour le paramètre  $\beta_N$  afin d'obtenir la meilleure puissance possible. Ainsi, pour ITER, la valeur retenue du paramètre  $\beta_N$  est de 2.2. Cependant, même pour une telle valeur, plusieurs instabilités MHD résistives peuvent se produire conduisant à la génération d'îlots magnétiques au niveau des surfaces résonantes. Même si ces instabilités sont localisées, elles peuvent conduire à une détérioration du confinement et même à une disruption. Le mécanisme d'apparition de ces îlots magnétiques reste encore mal compris et représente un challenge pour réussir à contrôler et même à supprimer ces

1.  $\beta_N$  représente le rapport normalisé de l'énergie thermique de pression et l'énergie magnétique. C'est un paramètre clé pour la stabilité du tokamak.

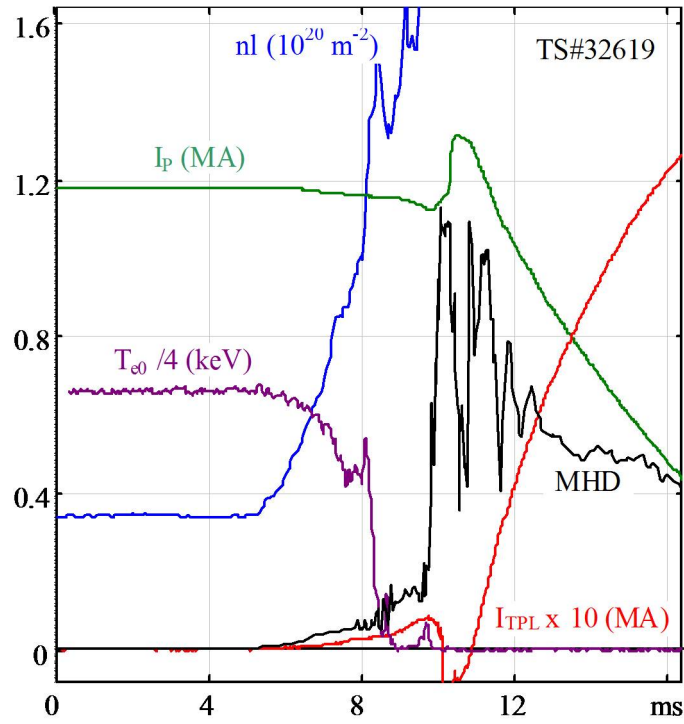


FIGURE 4 – Disruption sur Tore Supra [7] : on remarque une forte activité MHD qui amène, en quelques millisecondes, une chute brutale du courant. Le plasma est perdu.

îlots magnétiques [9, 10]. Expérimentalement, il apparaît que les oscillations en dents de scie (“sawtooth oscillations” en anglais) sont des précurseurs à la formation d’îlots magnétiques en permettant l’apparition de “germes d’îlot” (ou “seed island” en anglais) [11, 12]. Pour des plasmas avec  $\beta_N$  suffisamment grand, lorsque la taille du “germe d’îlot” dépasse une valeur seuil, des modes de déchirement néoclassiques (mieux connu sous le nom de “Neoclassical Tearing Modes” en anglais) peuvent se développer non-linéairement [13]. On obtient ainsi, au niveau des surfaces résonantes, des îlots magnétiques de taille macroscopique ( $\sim a/4$ ) qui dégradent la qualité du confinement. Des configurations magnétiques peuvent se révéler instables linéairement et amener aussi au développement d’un îlot magnétique même si  $\beta_N$  est faible. Il est donc très important de comprendre et de contrôler la dynamique des îlots magnétiques.

De plus, dans un plasma de tokamak, un îlot magnétique peut être mis en rotation grâce à la dérive diamagnétique (liée à l’existence d’un gradient de pression) et/ou grâce à la dérive  $E \times B$ . D’un point de vue expérimental, il est difficile de déterminer laquelle de ces deux dérives apporte la contribution principale à la fréquence de rotation de l’îlot [14]. D’un point de vue théorique, un modèle permettant de déterminer l’origine de la rotation d’un îlot magnétique est étudié dans [15] et montre que la fréquence de rotation dépend fortement des paramètres de diffusion du plasma. L’origine de la rotation d’un îlot magnétique reste donc encore une question largement ouverte qui mérite une réponse claire. En effet, il a été mis en évidence qu’une disruption était précédée d’un verrouillage de la rotation de l’îlot.

Les difficultés pour obtenir un bon confinement ne sont pas uniquement liées à la forte activité MHD présente dans la machine. En effet, un plasma de tokamak n’est jamais au repos, il est naturellement hors de l’équilibre thermodynamique. Plus précisément, le plasma est le siège



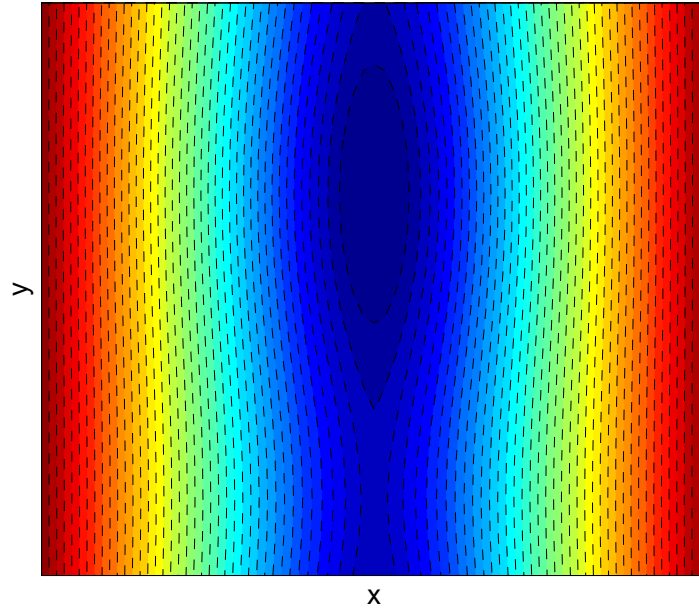


FIGURE 5 – Coupe poloïdale des surfaces magnétiques après une instabilité de déchirement : les lignes de champ magnétique ont été déchirées puis reconnectées pour former, au centre de la Figure, un îlot magnétique.

d’instabilités microscopiques ( $\sim \rho$ ) qui donnent naissance à des fluctuations importantes. Il existe de nombreuses instabilités, dans un plasma de tokamak, associées à l’existence de gradients de température, de densité ou de pression, générant ainsi de la turbulence petite échelle [16, 17]. Dans un tokamak, les îlots magnétiques baignent donc dans une turbulence. En effet, la coexistence de l’activité MHD avec la microturbulence a été observée dans plusieurs expériences. Par exemple, la microturbulence est observée dans des plasmas de la machine Large Helical Device (LHD) qui est habituellement le siège d’instabilités MHD [18]. Inversement, on peut observer une forte activité MHD dans des plasmas au cisaillement renversé (“reversed shear” en anglais) dans lesquels une barrière de transport s’est formée grâce aux flux zonaux et à la microturbulence [19, 20]. Expérimentalement, il apparaît clairement des effets de corrélation entre l’activité MHD et la microturbulence issus de leur coexistence dans le plasma.

Alors que les îlots magnétiques peuvent atteindre une taille macroscopique de l’ordre du quart de la taille du petit rayon  $a$  du tokamak, les structures formées par la microturbulence sont de l’ordre du rayon de Larmor  $\rho$ . Une question importante est alors la nature de l’interaction mutuelle entre la microturbulence et les instabilités MHD grandes échelles. L’objectif de cette thèse est donc d’étudier la dynamique d’un îlot magnétique en présence de turbulence. Pour cela, la déduction d’un modèle prenant en compte les deux phénomènes est nécessaire. Tout d’abord, il existe plusieurs phénomènes qui peuvent amener à la formation d’îlots magnétiques. Dans cette thèse, nous nous focaliserons sur une instabilité MHD résistive qui permet, par destabilisation d’un mode, la formation d’un îlot magnétique (voir Figure (5)) grâce au déchirement puis à la reconnexion des lignes de champ magnétique [21, 22, 23]. Ce mode est appelé mode de déchire-

ment (ou “tearing mode “ en anglais). Ensuite, nous allons inclure dans le modèle l’instabilité d’interchange issue de l’opposition du gradient de pression avec la courbure du champ magnétique. Dans des conditions favorables, cette instabilité génère de la turbulence petite échelle. Ainsi, le modèle obtenu, issu de la magnétohydrodynamique réduite, permet d’étudier analytiquement et numériquement la dynamique linéaire et non-linéaire d’un îlot magnétique formé par un mode de déchirement instable en présence de microturbulence générée par l’instabilité d’interchange.

Il existe dans les travaux passés plusieurs tentatives de modéliser l’interaction entre turbulence et îlots magnétiques. Les premiers travaux sur le sujet incorporent, dans les équations d’évolution du mode de déchirement, les effets de la turbulence à travers les coefficients de transport anormal [24, 25, 26]. Ces travaux sont un premier pas vers la compréhension de l’effet de la turbulence sur un îlot magnétique. Néanmoins les modèles utilisés ne sont pas “auto-consistants” dans le sens où les mécanismes à l’origine de la turbulence ne sont pas explicites. En fait, ces mécanismes sont indirectement présents à travers des effets de moyenne qui amènent à une renormalisation des coefficients de transport [27]. Plus tard, un modèle minimal mais auto-consistant basé sur les ondes cinétiques et sur la théorie adiabatique est utilisé dans [29] pour étudier l’interaction d’un mode de déchirement avec la turbulence d’onde de dérive. Plus récemment, des études numériques sur l’interaction entre le double mode de déchirement et la microturbulence ont été reportées dans [30] pour comprendre l’interaction entre les flux zonaux et la croissance du double mode de déchirement. Enfin, dans [31], une étude numérique de l’interaction entre une turbulence électrostatique 2D et un îlot magnétique est présentée. Cependant, dans cette étude, la dynamique de l’îlot magnétique n’est toujours pas modélisée de manière ‘auto-consistante’ mais intégrée à partir d’une équation généralisée de Rutherford [23].

Dans cette thèse nous allons donc étudier, grâce à un modèle auto-consistant, l’interaction multi-échelle entre la turbulence, générée par un gradient de pression et la courbure du champ magnétique, et un îlot magnétique formé par un mode de déchirement classique. La partie II introduit le modèle utilisé pour traiter le mode de déchirement et l’instabilité d’interchange. Il est issu de la magnétohydrodynamique réduite à deux fluides et donne les équations d’évolution pour le potentiel électrostatique  $\phi$ , la pression électronique  $p$  et le flux magnétique  $\psi$ . Dans la partie III, une étude linéaire numérique et analytique est présentée. Elle permet de comprendre l’effet de la pression sur la phase de croissance linéaire d’un îlot magnétique. De plus cette étude montre qu’en présence d’un fort champ magnétique, les modes interchanges sont stabilisés. Cette partie est déterminante pour comprendre comment obtenir un large îlot magnétique en présence de plusieurs modes interchanges instables au niveau des petites échelles. Dans la partie IV, des simulations non-linéaires du modèle sont présentées pour différentes situations. En effet, le modèle fait apparaître de nombreux paramètres physiques (comme la résistivité, les paramètres de l’instabilité d’interchange ou encore les paramètres du mode de déchirement). Cependant, la dynamique non-linéaire de l’îlot magnétique dépend de la situation linéaire initiale. Trois situations importantes sont donc présentées dans cette partie. Tout d’abord, la dynamique

non-linéaire d'un îlot magnétique formé par le couplage entre la pression et le flux magnétique est présentée. Ensuite, la dynamique non-linéaire d'un large îlot magnétique 'classique' formé par le couplage entre le potentiel électrostatique et le flux magnétique en présence de modes interchanges stables est étudiée dans le détail. Enfin, la dynamique non-linéaire d'un large îlot magnétique formé par le couplage entre la pression et le flux magnétique, en présence de modes interchanges instables au niveau des petites échelles, est présentée. De façon générale, le gradient de pression et la courbure du champ magnétique affectent fortement l'évolution non-linéaire de l'îlot magnétique permettant l'apparition de bifurcations dynamiques dont la nature doit être caractérisée suivant les situations dans lesquelles on se place. La partie V est dédiée à l'étude de la rotation poloïdale de l'îlot magnétique. La déduction d'un modèle permettant de mettre en évidence les différentes origines de la rotation est présentée. Il apparaît clairement que la rotation non-linéaire de l'îlot magnétique peut être gouvernée par l'écoulement poloïdal  $E \times B$  et/ou par l'écoulement non-linéaire diamagnétique. De plus, les études de l'évolution de la rotation poloïdale de l'îlot, dans le cas d'un mode de déchirement instable avec des modes interchanges stables et dans le cas d'un mode de déchirement instable ainsi que les modes interchanges, sont présentées dans cette partie. Enfin, dans la partie VI, la conclusion de cette thèse est présentée.



## Deuxième partie

### Modèle



# Introduction

Un plasma de tokamak est un système composé d'un très grand nombre de particules chargées. C'est donc un système très complexe qui est difficile à modéliser dans son ensemble. Il existe, en fait, plusieurs niveaux de description du plasma.

Tout d'abord, il y a la description cinétique qui est la plus complète mais aussi la plus compliquée à résoudre. Comme son nom l'indique, elle est issue de la théorie cinétique et de la hiérarchie BBGKY [32, 33]. Dans ce modèle, l'inconnue principale est la fonction de distribution des positions et des vitesses  $f_s$  de l'espèce considérée  $s$ .  $f_s$  est régie par l'équation de Vlasov en l'absence de collisions. Il s'agit alors de déterminer la forme du terme collisionnel qu'il faut ajouter à cette équation en faisant diverses hypothèses *ad hoc*.

Le niveau de description suivant est de faire une description fluide de chaque espèce  $s$  de particules qui compose le plasma. Pour cela, il faut prendre les moments successifs, dans l'espace des vitesses, de l'équation cinétique de Boltzmann, puis choisir une fermeture adéquate pour le système d'équations qui en résulte, la plus répandue étant celle explicitée dans [34]. Cette description permet de passer à une modélisation du plasma plus simple à résoudre que la théorie cinétique. Cependant, en décrivant les équations pour les grandeurs macroscopiques fluides, on perd de l'information (par exemple, l'effet Landau [35] ne peut être étudié que par une approche cinétique).

Les plasmas de tokamak sont principalement composés de deutérium et de tritium, donc d'ions portant une seule charge élémentaire. La description d'un tel plasma nécessite donc un ensemble d'équations pour les ions et pour les électrons. En déterminant les équations fluides pour les électrons et les ions (on suppose, ici, que l'on a à faire à une seule espèce d'ion) et en couplant ces équations aux équations de Maxwell, on obtient alors le modèle de la Magnétohydrodynamique (MHD) à deux fluides. C'est ce modèle que nous avons utilisé pour décrire la dynamique d'un îlot magnétique en présence de turbulence d'interchange.

Dans cette partie, après avoir rappelé comment obtenir les équations MHD pour deux fluides, nous allons utiliser l'approximation de dérive puis l'approximation de la MHD réduite pour simplifier les équations de la MHD à deux fluides qui restent difficiles à traiter tant d'un point de vue analytique que d'un point de vue numérique. Ensuite, en négligeant les termes adéquats, nous allons décrire le modèle utilisé dans cette thèse pour étudier la dynamique d'un îlot magnétique en présence de la turbulence d'interchange. Enfin, à partir du modèle obtenu, nous allons chercher les principaux invariants du système.





# Chapitre 1

## Equations des moments - MHD à deux fluides

La dynamique des particules chargées dans l'espace des phases est décrite par une fonction de distribution  $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ , où  $\mathbf{x}$  désigne l'espace réel et  $\mathbf{v}$  désigne l'espace des vitesses. L'indice  $s$  indique l'espèce des particules,  $s = i$  pour les ions et  $s = e$  pour les électrons.  $dn = f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v}$  représente alors le nombre de particules dans l'élément  $d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v}$  de l'espace des phases à l'endroit  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  et au temps  $t$ .

En appliquant le principe de conservation du nombre de particules dans un volume de l'espace des phases, on obtient l'équation de Boltzmann suivante :

$$\partial_t f_s + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_s + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_s = (\partial_t f_s)_{coll}, \quad (1.1)$$

où le membre de droite représente l'effet des forces inter-particulaires dues aux collisions binaires.

Pour obtenir les variables macroscopiques nécessaires à une description fluide, on procède à la moyenne de toutes les quantités  $g(\mathbf{v}_s)$  qui dépendent des vitesses des particules en les pondérant par la fonction de distribution (la moyenne de  $g(\mathbf{v}_s)$  est définie comme  $\langle g(\mathbf{v}_s) \rangle = \frac{\int g(\mathbf{v}) f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v}}{\int f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v}}$ ). En multipliant l'équation de Boltzmann Eq.(1.1) et en intégrant sur les vitesses, on obtient l'équation suivante :

$$\partial_t (n_s \langle g(\mathbf{v}_s) \rangle) + \nabla \cdot (n_s \langle \mathbf{v}_s g(\mathbf{v}_s) \rangle) - \frac{n_s e_s}{m_s} \left\langle (\mathbf{E} + \mathbf{v}_s \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial g}{\partial \mathbf{v}_s} \right\rangle = [\partial_t (n_s \langle g(\mathbf{v}_s) \rangle)]_{coll}. \quad (1.2)$$

Lorsque l'on remplace  $g(\mathbf{v}_s)$  par les puissances successives de  $\mathbf{v}_s$ , on obtient les équations des moments qui donnent la description fluide du plasma. On peut trouver dans [34] le détail des calculs.

Comme nous le verrons plus tard, en général, seuls les premiers moments dont l'évolution est gouvernée par les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie, sont calculés. La description fluide n'est valide que si les fonctions de distributions  $f_e$  et

$f_i$  sont proches de maxwelliennes. Les phénomènes étudiés doivent donc être lents par rapport aux temps caractéristiques des collisions entre particules de la même espèce. Une analyse comparative et détaillée des approches cinétique et fluide est présentée dans [36].

Associées aux équations de Maxwell, les équations des moments donnent le modèle MHD.

## 1.1 Équation de continuité

Suivant que l'on considère que le plasma est composé d'une ou plusieurs espèces, on obtient un modèle pour un ou plusieurs fluides. Tout d'abord, séparons les électrons des ions pour obtenir un modèle à deux fluides. Le premier moment est alors obtenu en faisant  $g(\mathbf{v}_s) = 1$  pour l'équation (1.2) pour les électrons et pour les ions. Il vient l'équation de continuité pour l'espèce  $s$  :

$$\partial_t n_s + \nabla \cdot (n_s \langle \mathbf{v}_s \rangle) = 0. \quad (1.3)$$

Comme cela est montré dans [37], la contribution du terme collisionnelle est nulle.

Si maintenant, on considère que le plasma est composé d'un seul fluide (mélange d'ions et d'électrons), on peut alors écrire des équations pour la densité de masse et la densité de charge :

$$\rho = \sum_{\text{espèce } s} n_s m_s, \quad (1.4)$$

$$\sigma = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha}. \quad (1.5)$$

On obtient alors

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.6)$$

où

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \sum_s n_s m_s \langle \mathbf{v}_s \rangle \quad (1.7)$$

est la vitesse de masse du fluide. Par ailleurs, l'équation de la conservation de la charge élémentaire donne :

$$\partial_t \sigma + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (1.8)$$

où

$$\mathbf{j} = \sum_s n_s q_s \langle \mathbf{v}_s \rangle \quad (1.9)$$

est la densité de courant.

On appelle respectivement ces deux modèles, le modèle à deux fluides (ions, électrons, Eq.(1.3)) et le modèle à un fluide (densité de masse, densité de charges, Eqs.(1.6,1.8)). Même si ces deux modèles sont tous les deux très utiles et complémentaires, nous allons nous concentrer sur le modèle à deux fluides permettant d'obtenir deux équations : une pour l'énergie de la pression ionique et une pour l'énergie de la pression électronique.

## 1.2 Équations de conservation de la quantité de mouvement

En remplaçant  $g(\mathbf{v}_s)$  par  $\mathbf{v}_s$  dans l'équation (1.2), on obtient une équation pour le deuxième moment de la fonction de distribution qui est directement lié à la quantité de mouvement du fluide. L'équation (1.2) s'écrit alors :

$$\partial_t (n_s \langle \mathbf{v}_s \rangle) + \nabla \cdot (n_s \langle \mathbf{v}_s \mathbf{v}_s \rangle) - \frac{n_s e_s}{m_s} (\mathbf{E} + \langle \mathbf{v}_s \rangle \times \mathbf{B}) = [\partial_t (n_s \langle \mathbf{v}_s \rangle)]_{coll} \quad (1.10)$$

où la notation  $\langle \mathbf{v}_s \mathbf{v}_s \rangle$  signifie le tenseur  $3 \times 3$  dont les éléments sont  $\langle v_{s_i} v_{s_j} \rangle$ .

Dans le modèle à deux fluides, on fait apparaître le concept de pression en écrivant la vitesse de chaque particule d'espèce  $s$  comme la somme d'une vitesse moyenne  $\mathbf{u}_s$  et d'une vitesse relative par rapport à cette vitesse moyenne  $\mathbf{w}_s$  :

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{u}_e + \mathbf{w}_e, \quad (1.11)$$

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i + \mathbf{w}_i. \quad (1.12)$$

On peut définir le tenseur de pression de chaque espèce  $s$  par :

$$\vec{\pi}_s = n_s m_s \langle \mathbf{w}_s \mathbf{w}_s \rangle \quad (1.13)$$

Ainsi, en remarquant que  $\langle \mathbf{w}_s \rangle = 0$  et en utilisant l'équation de continuité Eq.(1.3), l'équation (1.10) se ré-écrit :

$$n_s m_s [\partial_t \mathbf{u}_s + (\mathbf{u}_s \cdot \nabla) \mathbf{u}_s] = -\nabla \cdot \vec{\pi}_s + n_s e_s (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}) + [\partial_t (n_s m_s \mathbf{u}_s)]_{coll}. \quad (1.14)$$

L'équation (1.14) est l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour l'espèce  $s$ .

## 1.3 Équation de l'énergie

L'équation des moments suivante est obtenue en faisant  $g(\mathbf{v}_s) = \frac{v_s^2}{2}$  dans l'équation (1.2) :

$$\partial_t \left( n_s \frac{\langle v_s^2 \rangle}{2} \right) + \nabla \cdot \left( n_s \left\langle \mathbf{v}_s \frac{v_s^2}{2} \right\rangle \right) - \frac{n_s e_s}{m_s} \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_s \rangle = \left[ \partial_t \left( n_s \frac{\langle v_s^2 \rangle}{2} \right) \right]_{coll}. \quad (1.15)$$

Chaque équation des moments fait intervenir un moment d'ordre plus élevé encore. Il faut donc fermer le système en faisant une hypothèse *ad hoc* sur le moment d'ordre le plus élevé. Pour

cela, on suppose que les collisions sont très fréquentes et que le tenseur de pression est isotrope :

$$\vec{\pi}_s = n_s m_s \langle \mathbf{w}_s \mathbf{w}_s \rangle = \begin{bmatrix} p_s & 0 & 0 \\ 0 & p_s & 0 \\ 0 & 0 & p_s \end{bmatrix}. \quad (1.16)$$

Les termes non diagonaux du tenseur  $\vec{\pi}_s$  correspondent à des effets de viscosité qui sont ici ignorés. On peut alors définir la pression scalaire  $p_s$  de la manière suivante :

$$m_s n_s \frac{\langle \mathbf{w}_s^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} p_s. \quad (1.17)$$

Si l'on définit le flux de chaleur dû à la conduction comme  $\mathbf{q}_s = m_s n_s \langle \mathbf{w}_s \frac{u_s^2}{2} \rangle$ , on peut simplifier l'équation (1.15) en se rappelant que  $\mathbf{v}_s = \mathbf{u}_s + \mathbf{w}_s$ . Ainsi, il vient :

$$\partial_t \left[ \frac{3}{2} p_s + m_s n_s \frac{u_s^2}{2} \right] + \nabla \cdot \left[ m_s n_s \frac{u_s^2}{2} \mathbf{u}_s + \frac{5}{2} p_s \mathbf{u}_s + \mathbf{q}_s \right] = n_s e_s \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{E} + R_{s_1 s_2}, \quad (1.18)$$

où  $R_s$  représente le terme collisionnel qui représente le transfert d'énergie de l'espèce  $s_2$  vers l'espèce  $s_1$ .

En utilisant les équations de continuité Eq.(1.3) et de conservation de la quantité de mouvement Eq.(1.14), on peut éliminer les termes en  $\frac{u_s^2}{2}$  dans l'équation (1.18), on obtient alors l'équation de l'énergie pour l'espèce  $s$  :

$$\frac{3}{2} (\partial_t p_s + \mathbf{u}_s \cdot \nabla p_s) + \frac{5}{2} p_s \nabla \cdot \mathbf{u}_s = -\nabla \cdot \mathbf{q}_s + n_s e_s \mathbf{u}_s \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}) + R_s. \quad (1.19)$$

Cette équation peut être utilisée également pour décrire l'évolution de la température en remplaçant la pression par :

$$p_s = n_s k_B T_s, \quad (1.20)$$

où  $k_B$  est la constante de Boltzmann.

On peut dans une première approximation considérer que la conduction de la chaleur est proportionnelle au gradient de température. Autrement dit, la loi de Fourier

$$\mathbf{q}_s = -\chi \nabla T_s, \quad (1.21)$$

où  $\chi$  est un coefficient de conductivité thermique, est valide. Le gradient de densité induit une diffusion des particules qui contribue aussi au transport de la chaleur par le biais des termes convectifs.

## 1.4 Loi d'Ohm généralisée

Pour fermer les équations d'évolution des moments Eqs.(1.3, 1.14, 1.19), il faut inclure les équations de Maxwell qui nécessitent une équation qui décrit celle du courant  $j$ . Cette équation est la loi d'Ohm généralisée prenant en compte l'effet des collisions. Pour l'obtenir, il suffit de multiplier l'équation de transfert de la quantité de mouvement de chaque espèce Eq.(1.14) par la charge  $q_s$  associée puis on somme sur les différentes espèces pour faire apparaître la densité de courant  $j$  définie par l'équation (1.9). Ainsi, on obtient :

$$\partial_t \mathbf{j} + \nabla \cdot \left( \sum_s n_s e_s \langle \mathbf{v}_s \mathbf{v}_s \rangle \right) - \sum_s \frac{n_s e_s^2}{m_s} (\mathbf{E} + \langle \mathbf{v}_s \times \mathbf{B} \rangle) = (\partial_t \mathbf{j})_{coll}. \quad (1.22)$$

La neutralité globale impose que  $n_e = n_i = n$ . Après avoir introduit la vitesse de masse  $\mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \sum_s n_s m_s \langle \mathbf{v}_s \rangle$ , utilisé la définition de la densité de courant  $j$  Eq.(1.9) et supposé que  $m_e \ll m_i$ , on a :

$$\langle \mathbf{v}_i \rangle = \mathbf{u} + \frac{m_e}{m_i} \frac{\mathbf{j}}{ne}, \quad (1.23)$$

$$\langle \mathbf{v}_e \rangle = \langle \mathbf{v}_i \rangle - \frac{\mathbf{j}}{ne} \sim \mathbf{u} - \frac{\mathbf{j}}{ne}. \quad (1.24)$$

Le terme collisionnel de l'équation (1.22) peut être approché par un terme de friction. L'approximation physique la plus simple consiste à supposer que, dans le repère des ions, la force de friction appliquée aux électrons est proportionnelle à leur vitesse par rapport au fluide ionique :

$$(\partial_t \mathbf{j})_{coll} = ne [\partial_t (\langle \mathbf{v}_i \rangle - \langle \mathbf{v}_e \rangle)]_{coll} \sim -\nu_{ei} \mathbf{j}. \quad (1.25)$$

On peut alors définir la résistivité du plasma comme :

$$\eta = m_e \frac{\nu_{ei}}{ne^2}.$$

C'est la résistivité de Spitzer.

Ainsi, en utilisant les équations (1.23), (1.24), (1.25), et toujours en supposant que les électrons sont bien plus légers que les ions ( $m_e \ll m_i$ ), on obtient la loi d'Ohm généralisée dans laquelle on a négligé le terme d'inertie des électrons :

$$\mathbf{E} + (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{ne} + \frac{\nabla \cdot \vec{\pi}_e}{ne} = \eta \mathbf{j}. \quad (1.26)$$



# Chapitre 2

## Approximation de dérive

### 2.1 Principe

Les équations fluides des trois premiers moments (1.3, 1.14, 1.19) ajoutées à celles de Maxwell, à l'équation pour la charge Eq.(1.8) et à la loi d'Ohm généralisée Eq.(1.26) constituent le modèle MHD à deux fluides qui permet de décrire un plasma. La résolution analytique et même numérique de ces équations est compliquée. C'est pour cela que l'on fait appel à l'approximation de dérive pour simplifier le système.

Dans un plasma magnétisé, il existe des échelles spatio-temporelles distinctes. Les premières sont liées au mouvement de rotation rapide des particules chargées autour des lignes de champ magnétique (gyration de Larmor). Les fréquences caractéristiques sont donc la fréquence cyclotronique électronique  $\Omega_e = \frac{eB}{m_e}$  et ionique  $\Omega_i = \frac{eB}{m_i}$ . Tandis que les échelles spatiales caractéristiques sont le rayon de Larmor électronique  $\rho_e = \frac{v_{th_e}}{\Omega_e}$  et le rayon de Larmor ionique  $\rho_i = \frac{v_{th_i}}{\Omega_i}$ . D'un point de vue temporel, nous nous intéressons aux phénomènes physiques qui ont un mouvement de dérive lent dont la fréquence caractéristique est définie par  $\omega \sim \frac{c_s}{L_c}$  (où  $c_s = \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_i}}$  désigne la vitesse du son dans le plasma et  $L_c$  désigne une longueur caractéristique). L'échelle spatiale associée est donnée par  $\rho_s = \frac{c_s}{\Omega_i} = \frac{\sqrt{m_i k_B T_e}}{eB}$  qui a la structure du rayon de giration des ions à la température des électrons.  $\rho_s$  est appelé rayon de Larmor hybride. Le mouvement de dérive est donc caractérisé par le domaine de validité suivant :

$$\omega \ll \Omega_i, \quad \rho_s \ll L_c. \quad (2.1)$$

L'approximation de dérive donne donc une procédure pour éliminer les échelles de temps plus rapides que  $\omega$  du système d'équations (1.3, 1.14, 1.19) afin de ne garder que la dynamique pertinente.

## 2.2 Expression des vitesses de dérives à partir de l'équation de mouvement ionique

On se place donc dans l'approximation des basses fréquences, c'est à dire telles que  $\tilde{\epsilon} = \omega/\Omega_i \ll 1$ . A partir de l'équation du mouvement pour les ions Eq.(1.14), on cherche à déterminer les différentes composantes de la vitesse perpendiculaire  $\mathbf{u}_{\perp i} = \tilde{\epsilon}\mathbf{u}_{\perp i}^{(1)} + \tilde{\epsilon}^2\mathbf{u}_{\perp i}^{(2)}$  où  $\mathbf{u}_{\perp i}^{(1)} \sim \mathbf{u}_{\perp i}^{(2)} \sim O(1)$ . L'approximation de dérive consiste à négliger les termes d'ordre supérieur à  $\tilde{\epsilon}$ . Ainsi, en négligeant l'effet des collisions qui agissent sur les petites échelles et qui affectent peu le mouvement d'ensemble du fluide, l'équation de mouvement pour les ions Eq.(1.14) s'écrit à l'ordre 1 en  $\tilde{\epsilon}$  :

$$\mathbf{B} \times \mathbf{u}_{\perp i}^1 = \mathbf{E} - \frac{1}{n_i e_i} \nabla_{\perp} p_i.$$

En multipliant vectoriellement par  $\frac{\mathbf{B}}{B^2}$ , on en déduit alors :

$$\mathbf{u}_{\perp i}^1 = \mathbf{u}_E + \mathbf{u}_{*i} \quad (2.2)$$

où les vitesses de dérive électrique et diamagnétique sont définies respectivement par :

$$\mathbf{u}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{u}_{*i} = \frac{\mathbf{B} \times \nabla_{\perp} p_i}{n_i e_i B^2}. \quad (2.4)$$

La vitesse de dérive électrique  $\mathbf{u}_E$ , indépendante de l'espèce, ne transporte aucun courant. Au contraire, le courant diamagnétique, essentiellement poloïdal, génère une force de Lorentz centripète, c'est-à-dire dirigée vers l'axe magnétique du tokamak, qui s'oppose à la force d'éclatement du plasma résultant du gradient de pression  $\nabla_{\perp} p_i$ .

Comme on va le voir dans le paragraphe suivant, au premier ordre, on a en fait  $\mathbf{u}_{\perp i}^1 \sim \mathbf{u}_E$  et c'est ce que nous utiliserons dans les équations 1.14, 1.19, 1.26

## 2.3 Ordres de grandeur et loi d'Ohm

On peut retrouver l'expression des différentes vitesses de dérive à partir de la loi d'Ohm généralisée Eq.(1.26). Pour cela, on va comparer les différents termes de la loi d'Ohm au terme de Faraday en  $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ .

Tout d'abord, il a le terme diamagnétique  $\frac{\nabla \cdot \vec{\pi}_e}{ne}$ . Avec l'équation (1.16), on a supposé la pression électronique isotrope dans la direction perpendiculaire au champ magnétique et donc  $\nabla \cdot \vec{\pi}_e = \nabla_{\perp} p_e$ . Si l'on définit par  $L_p$  la longueur caractéristique du gradient de pression, on peut comparer le terme diamagnétique au terme de Faraday en utilisant l'approximation de dérive (2.1) :

$$\frac{\frac{\nabla_{\perp} p_e}{ne}}{(\mathbf{u} \times \mathbf{B})} \sim \frac{\rho_i}{L_p} \ll 1.$$



Cette dernière relation est reliée au fait que  $\mathbf{u}_{*i}/\mathbf{u}_E \ll 1$ .

Ensuite, il a le terme de Hall  $\frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{ne}$ . On sait que dans un plasma grossièrement en équilibre mécanique, les forces de pression sont compensées par les forces magnétiques si bien que  $\nabla_{\perp} p_e$ <sup>1</sup> est du même ordre de grandeur que  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ . Ainsi, on peut écrire :

$$\frac{\frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{ne}}{(\mathbf{u} \times \mathbf{B})} \sim \frac{\rho_i}{L_p} \ll 1.$$

Finalement, grâce à l'approximation de dérive (2.1), on peut négliger dans la loi d'Ohm généralisée Eq.(1.26) le terme diamagnétique et le terme de Hall. Ainsi, en supposant que la résistivité est nulle presque de partout et en faisant le produit vectorielle de l'équation (1.26) avec  $\frac{\mathbf{B}}{B^2}$ , on retrouve la vitesse de dérive électrique définie par (2.3).

Cette classification par ordre de grandeur des vitesses nous amène à considérer un plasma qui est presque partout idéal ( $\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} \sim 0 \iff \mathbf{u} \sim \mathbf{u}_E$ ) sauf là où il y a reconnexion magnétique, c'est-à-dire là où les effets de résistivité sont non négligeables. Dans cette zone de reconnexion, il apparaît que le terme de Hall<sup>2</sup> est négligeable par rapport aux effets résistifs dans la limite où  $\frac{\frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{ne}}{\eta \mathbf{j}} \sim \frac{\Omega_e}{\nu_{ei}} \ll 1$ .

---

1. En fait, dans l'équation d'évolution de la vitesse  $\mathbf{u}$ , c'est la pression totale  $p = p_e + p_i$  qui intervient et dont typiquement le gradient est de l'ordre de  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ . Nous nous intéresserons dans notre étude à la limite  $T_i = p_i = 0$ .

2. Il serait intéressant de prendre en compte l'effet Hall qui induit un mécanisme de reconnexion différent [38]. On parle alors de "MHD Hall".



# Chapitre 3

## Approximation de la MagnétoHydroDynamique Réduite

### 3.1 Principe

L'approximation de la MHD réduite est valable pour un plasma fortement magnétisé dans une direction donnée, c'est à dire soumis à un champ magnétique de forte intensité, pratiquement constant, porté par cette direction, ce qui est le cas pour un tokamak de grand rapport d'aspect  $\frac{1}{\epsilon} = \frac{R_0}{a}$ . On prend dorénavant  $B_z = O(1)$ ,  $\nabla_{\perp} = O(1)$ ,  $B_{\perp} = O(\epsilon)$  et  $\partial_z \sim \partial_t = O(\epsilon)$  où,  $\perp$  fait référence au plan  $(x, y)$  perpendiculaire à l'axe  $(Oz)$ . En fait, on fait aussi l'hypothèse que l'énergie contenue sous forme de pression et l'énergie cinétique sont petites comparées à l'énergie magnétique  $nu^2 \sim p \ll B_z^2$  [21]. L'approximation de la MHD réduite consiste alors à négliger dans les équations MHD à deux fluides les termes d'ordre le plus élevé en  $\epsilon$ .

On peut définir le champ magnétique à partir d'un potentiel vecteur  $\mathbf{B} = B_z \mathbf{e}_z + \nabla \times \mathbf{A}$ . En tenant compte des différents ordres de grandeur, on a  $\mathbf{A}_{\perp} = O(\epsilon^2)$  et  $A_z = \psi = O(\epsilon)$ . On aboutit alors à :

$$\mathbf{B} = B_z \mathbf{e}_z + \nabla \times (\psi \mathbf{e}_z) + O(\epsilon^2), \quad (3.1)$$

où  $\psi$  est appelé flux magnétique.

Le champ électrique  $\mathbf{E}$  peut s'exprimer en utilisant le potentiel électrique scalaire  $\phi$  et le flux magnétique  $\psi$  :  $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t\psi\mathbf{e}_z$ . En utilisant la loi d'Ohm (1.26) et en négligeant les termes d'ordre supérieur à  $\epsilon$ , on retrouve alors que :

$$\mathbf{u} \sim \mathbf{u}_E = \frac{\mathbf{B}}{B^2} \times \nabla_{\perp} \phi, \quad (3.2)$$

où  $\mathbf{u}_E$  est la vitesse de dérive électrique.

## 3.2 Equations de la MagnétoHydroDynamique Réduite

### Équation de la conservation de la quantité de mouvement

Dans le cadre de l'approximation de la MHD réduite, on peut donc ré-écrire l'équation de conservation de la quantité de mouvement Eq.(1.14) en faisant apparaître le terme de courbure :

$$\nabla \cdot \frac{nm_i}{B^2} [\partial_t + \mathbf{u}_E \cdot \nabla] \nabla_{\perp} \phi = \nabla_{\parallel} j - \mathbf{g} \cdot \left( \frac{2\mathbf{B}}{B^2} \times \nabla p \right) + \nabla \cdot \frac{\mu_{i\perp}}{B^2} \nabla (\nabla_{\perp}^2 \phi), \quad (3.3)$$

où  $\mu_{i\perp}$  représente le coefficient de viscosité perpendiculaire et  $n = n_i = n_e$  grâce à la quasi-neutralité du plasma. L'opérateur de courbure est défini par  $\mathbf{g} \cdot \left( \frac{2\mathbf{B}}{B^2} \times \nabla f \right) = g \partial_y f$  avec  $g = \frac{2}{R_0 B}$ . Enfin,  $\nabla_{\parallel} f = -\frac{1}{B} \{ \psi_{tot}, f \}$  ( $\psi_{tot}$  contient le flux magnétique d'équilibre et la perturbation  $\psi_{tot} = \psi_0 + \psi$ ). Le détail des calculs pour obtenir l'équation (3.3) est présenté dans [40].

L'équation (3.3) est aussi une équation d'évolution pour la vortacité  $w = \nabla_{\perp}^2 \phi$  qui représente une mesure de l'intensité des tourbillons dans l'écoulement.

### Équation de l'énergie

Grâce à l'approximation de la MHD réduite, on peut ré-écrire l'équation de l'énergie (1.19) pour les ions :

$$\frac{3}{2} (\partial_t + \mathbf{u}_E \cdot \nabla) p_i = \frac{5}{2} \mathbf{g} \cdot \left[ \frac{2\mathbf{B}}{B^2} \times \left( p_i \nabla \phi + \frac{k_B T_i}{e} \nabla p_i + \frac{p_i}{e} \nabla k_B T_i \right) \right] + \kappa_{i\perp} \nabla_{\perp}^2 k_B T_i, \quad (3.4)$$

et pour les électrons :

$$\frac{3}{2} (\partial_t + \mathbf{u}_E \cdot \nabla) p_e = \frac{5}{2} \mathbf{g} \cdot \left[ \frac{2\mathbf{B}}{B^2} \times \left( p_e \nabla \phi - \frac{k_B T_e}{e} \nabla p_e - \frac{p_e}{e} \nabla k_B T_e \right) \right] + \frac{5}{2} \frac{k_B T_e}{e} \nabla_{\parallel} j + \kappa_{e\perp} \nabla_{\perp}^2 k_B T_e, \quad (3.5)$$

où  $\kappa_{i\perp}$  et  $\kappa_{e\perp}$  correspondent respectivement aux coefficients perpendiculaires de conductivité thermique ionique et électronique. Le détail des calculs est donné dans [40].

### Loi d'Ohm

En négligeant le terme  $\frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{ne}$  dans la loi d'Ohm généralisée Eq.(1.26) et en utilisant l'approximation de la MHD réduite, la loi d'Ohm (1.26) s'écrit :

$$\eta j = -\nabla_{\parallel} \left( \phi - \frac{p_e}{ne} \right) - \partial_t \psi. \quad (3.6)$$

Il est important de noter que le courant  $j$  est relié au flux magnétique par l'équation d'Ampère qui donne  $j = -\nabla_{\perp}^2 \psi$ .



# Chapitre 4

## Equations d'évolution d'un îlot magnétique en présence d'interchange

### 4.1 Modélisation d'un îlot magnétique en présence de turbulence d'interchange

Les équations (3.3, 3.4, 3.5, 3.6) donnent donc les évolutions temporelles de  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $p_i$  et  $p_e$  dans le cadre de l'approximation de dérive. Dans cette thèse, l'objectif est d'étudier la dynamique d'un îlot magnétique en présence de turbulence d'interchange. Pour cela, on suppose que les ions sont froids, c'est à dire que  $p_i = nk_B T_i = 0$ , et que la température électronique  $T_e$  est constante. La pression totale  $p$  correspond alors à la pression électronique  $p_e$ . Pour modéliser l'instabilité d'interchange, on gardera dans les équations (3.3, 3.5, 3.6) les termes associés à cette instabilité, c'est à dire les termes liés à la courbure du champ magnétique et au gradient de pression. On suppose que la pression électronique et le flux magnétique se décomposent en une partie provenant de l'équilibre et une autre associée à leurs fluctuations respectives ( $p_{tot} = p_0(x) + p(x, y)$  et  $\psi_{tot} = \psi_0(x) + \psi(x, y)$ ). On suppose aussi que seules des fluctuations du potentiel électrique sont présentes ( $\phi_{tot} = \phi(x, y)$ ). L'instabilité du mode de déchirement dépendra de la forme du flux magnétique d'équilibre  $\psi_0$ .

### 4.2 Modèle

#### Équation de conservation de la quantité de mouvement - Équation pour le potentiel électrostatique $\phi$

Dans le cadre de l'approximation de dérive, l'équation (3.3) décrit l'évolution de la vorticité et/ou du potentiel électrostatique. En explicitant chaque terme de l'équation (3.3), et en considérant que l'échelle spatiale de variation du profil de densité est bien supérieure à celle de la

turbulence d'interchange (c'est à dire  $|m_i \nabla n \cdot \nabla \phi| \ll nm_i |\nabla^2 \phi|$ ), il vient l'équation d'évolution pour la vortacité :

$$\frac{nm_i}{B} \partial_t w + \frac{nm_i}{B^2} \{\phi, w\} = -\frac{1}{B} \{\psi_{tot}, j\} - g \partial_y p + \frac{\mu_{i\perp}}{B} \nabla_{\perp}^2 w. \quad (4.1)$$

Le terme en  $\{\phi, w\}$  représente le terme d'advection. Le terme  $\{\psi_{tot}, j\}$  contient le flux magnétique d'équilibre qui peut générer le mode de déchirement. Le terme  $g \partial_y p$  est lié à la courbure du champ magnétique, c'est donc un terme qui permet de modéliser l'instabilité d'interchange. Enfin, le terme  $\frac{\mu_{i\perp}}{B} \nabla_{\perp}^2 w$  est le terme de diffusion,  $\mu_{i\perp}$  étant la viscosité.

## Équation de l'énergie - Équation pour la pression électronique $p$

Pour modéliser le mode de déchirement en présence d'interchange, on a supposé que les ions étaient froids et donc que  $p_i = 0$  et  $p = p_e$ . Dans le cadre de l'approximation de dérive, l'équation pour la pression électronique est donnée par l'équation (3.5). Pour modéliser un îlot magnétique en présence de l'instabilité d'interchange, tous les termes de l'équation (3.5) ne sont pas nécessaires, il suffit de garder les termes liés à la courbure, au gradient de pression et au champ magnétique d'équilibre. Ainsi, on ré-écrit l'équation (3.5) de la manière suivante :

$$\frac{3}{2} (\partial_t + \mathbf{u}_E \cdot \nabla) p_{tot} = \frac{5}{2} \mathbf{g} \cdot \left[ \frac{2\mathbf{B}}{B^2} \times \left( p_0 \nabla \phi - \frac{k_B T_e}{e} \nabla p_{tot} \right) \right] + \frac{5}{2} \frac{k_B T_e}{e} \nabla_{\parallel} j + \kappa_{e\perp} \nabla_{\perp}^2 p. \quad (4.2)$$

On considère que, localement, là où le mode de déchirement se développe, la pression d'équilibre est telle que  $p_0(x) = -\kappa x + C$ , où  $\kappa$  représente le gradient de la pression d'équilibre et  $C$  est une constante. On rappelle que  $p = nk_B T_e$ , ainsi, en explicitant tous les termes de l'équation (4.2), on obtient l'équation d'évolution pour la pression électronique  $p$  :

$$\partial_t p + \frac{1}{B} \{\phi, p\} + \frac{\kappa}{B} \partial_y \phi = \frac{5}{3} g \left[ p_0 \partial_y \phi - \frac{k_B T_e}{e} \partial_y p \right] - \frac{5}{3} \frac{k_B T_e}{e} \frac{1}{B} \{\psi_{tot}, j\} + \chi_{\perp} \nabla_{\perp}^2 p. \quad (4.3)$$

Le terme  $\{\phi, p\}$  est le terme d'advection. Le terme  $\frac{\kappa}{B} \partial_y \phi$  représente le gradient de pression qui est à l'origine de l'instabilité d'interchange. Le terme  $\frac{5}{3} g \left[ p_0 \partial_y \phi - \frac{k_B T_e}{e} \partial_y p \right]$  modélise aussi l'interchange puisqu'il est lié à la courbure du champs magnétique. Le terme en  $\{\psi_{tot}, j\}$  couple la pression avec le flux magnétique et peut modifier la structure du mode de déchirement. Enfin, le terme  $\chi_{\perp} \nabla_{\perp}^2 p$  est lié à la diffusion thermique perpendiculaire  $\chi_{\perp} = \frac{2}{3} \frac{\kappa_{e\perp}}{n}$ .

## Loi d'Ohm - Équation pour le flux magnétique $\psi$

Dans le cadre de l'approximation de dérive, la loi d'Ohm est donnée par l'équation (3.6). En explicitant chaque terme de cette équation, on obtient l'équation d'évolution pour les fluctuations



du flux magnétique  $\psi$  :

$$\eta \nabla_{\perp}^2 \psi = \frac{1}{B} \{\psi_{tot}, \phi\} - \frac{1}{neB} [\{\psi_{tot}, p\} + \kappa \partial_y \psi] - \partial_t \psi. \quad (4.4)$$

Le terme  $\kappa \partial_y \psi$  est lié à la pression d'équilibre et à la vitesse diamagnétique linéaire  $v^* = \frac{\beta L_{\perp}}{2\Omega_i \tau_A L_p}$ . Le terme  $\eta \nabla_{\perp}^2 \psi$  est le terme résistif qui permet à l'îlot magnétique de se former au niveau de la couche résistive.

## 4.3 Normalisation des équations

### Choix de la normalisation

Avant d'étudier le système composé des équations (4.1, 4.3, 4.4), il convient d'introduire des champs et des variables normalisés afin de minimiser le nombre de paramètres libres et d'avoir à faire à des valeurs d'ordre un. Bien que nous aurions pu choisir une normalisation propre à la turbulence d'interchange, nous avons préféré choisir une normalisation propre au mode de déchirement. Ainsi, les longueurs seront comparées à une longueur perpendiculaire caractéristique de la taille de l'îlot magnétique  $L_{\perp}$ , les temps au temps d'Alfvén  $\tau_A = L_{\perp}/v_A$  avec  $v_A = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 n_0 m_i}}$  la vitesse d'Alfvén, les champs magnétiques au champ magnétique initial  $B$ . On introduit alors de nouvelles variables comme suit :

$$\begin{aligned} t_N &= t/\tau_A, & \psi_N &= \frac{\psi}{L_{\perp} B}, & j_N &= \frac{\mu_0 L_{\perp}}{B} j, \\ \phi_N &= \frac{\phi}{L_{\perp} v_A B}, & w_N &= \frac{L_{\perp}}{v_A} w, & p_N &= \frac{L_p}{L_{\perp} p_0} p, \end{aligned}$$

où  $p_0$  est la pression d'équilibre,  $L_p$  représente la longueur caractéristique du gradient de pression et  $\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide. L'indice  $_N$  signifie que la grandeur est normalisée. On utilise également des opérateurs normalisés :

$$\partial_{t_N} = \tau_A \partial_t, \quad \nabla_{\perp N}^2 = L_{\perp}^2 \nabla_{\perp}^2, \quad \{f, g\}_N = L_{\perp}^2 \{f, g\}.$$

Nous allons maintenant normaliser les équations (4.1, 4.3, 4.4), le détail de l'ensemble des calculs se trouvent dans l'annexe 7.1.

## Normalisation de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement

L'équation pour le potentiel électrostatique  $\phi$  (4.1) s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{nm_i}{B} \partial_t w + \frac{nm_i}{B^2} \{\phi, w\} = -\frac{1}{B} \{\psi_{tot}, j\} - g \partial_y p + \frac{\mu_{i\perp}}{B} \nabla_{\perp}^2 w.$$

La normalisation de cette équation s'effectue en plusieurs étapes. Après avoir normalisé le temps, la vorticité, le potentiel électrostatique, le courant, le flux magnétique, la pression et les opérateurs (voir annexe 7.1.1), l'équation (4.1) se ré-écrit de la manière suivante :

$$\partial_t w + \{\phi, w\} = -\{\psi_{tot}, j\} - A_1 \partial_y p + \nu \nabla_{\perp}^2 w, \quad (4.5)$$

avec  $A_1 = \beta \left(\frac{L_{\perp}}{L_p}\right)^2 \frac{L_p}{R_0}$  et  $\nu = \nu_N = \frac{\tau_A \mu_{i\perp}}{nm_i L_{\perp}^2}$ .  $\beta = \frac{p_0}{B^2/2\mu_0}$  représente le rapport de l'énergie de la pression d'équilibre et de l'énergie magnétique. Toutes les grandeurs de l'équation (4.5) ont été normalisées et l'on a omis l'indice  $N$ . On procède aux changements de variable suivant  $j \rightarrow -j$  (c'est à dire  $j = \nabla_{\perp}^2 \psi$ ) et  $p \rightarrow v^* p$  afin d'obtenir un système d'équation plus homogène. L'équation (4.5) s'écrit alors :

$$\partial_t w + \{\phi, w\} = \{\psi_{tot}, j\} - \kappa_1 \partial_y p + \nu \nabla_{\perp}^2 w, \quad (4.6)$$

avec  $\kappa_1 = 2\Omega_i \tau_A \frac{L_{\perp}}{R_0}$  qui est l'un des paramètres de contrôle de l'instabilité d'interchange.

## Normalisation de l'équation de l'énergie

L'équation pour la pression  $p$  (4.3) s'écrit de la manière suivante :

$$\partial_t p + \frac{1}{B} \{\phi, p\} + \frac{\kappa}{B} \partial_y \phi = \frac{5}{3} g \left[ p_0 \partial_y \phi - \frac{k_B T_e}{e} \partial_y p \right] - \frac{5}{3} \frac{k_B T_e}{e} \frac{1}{B} \{\psi_{tot}, j\} + \chi_{\perp} \nabla_{\perp}^2 p.$$

La normalisation de cette équation s'effectue en plusieurs étapes. Après avoir normalisé le temps, la pression, le potentiel électrostatique, le courant, le flux magnétique et les opérateurs (voir annexe 7.1.2), l'équation (4.3) se ré-écrit de la manière suivante :

$$\partial_t p + \{\phi, p\} = (A_2 - 1) \partial_y \phi - A_3 \partial_y p - A_4 \{\psi_{tot}, j\} + \chi_{\perp} \nabla_{\perp}^2 p, \quad (4.7)$$

avec  $A_2 = \frac{10L_p}{3R_0}$ ,  $A_3 = \frac{5\beta L_p L_{\perp}}{3\Omega_i \tau_A R_0 L_p}$  et  $A_4 = \frac{5L_p}{3L_{\perp} \Omega_i \tau_A}$ . Toutes les grandeurs de l'équation (4.7) ont été normalisées et l'on a omis l'indice  $N$ . On procède aux changements de variable suivant  $j \rightarrow -j$

et  $p \rightarrow v^*p$  afin d'obtenir un système d'équation plus homogène. L'équation (4.7) s'écrit alors :

$$\partial_t p + \{\phi, p\} = v^* [(\kappa_2 - 1) \partial_y \phi - \kappa_2 \partial_y p] + \rho^{*2} \{\psi_{tot}, j\} + \chi_{\perp} \nabla_{\perp}^2 p . \quad (4.8)$$

Le paramètre  $\kappa_2 = \frac{10L_p}{3R_0}$  est l'autre paramètre de contrôle de l'instabilité d'interchange lié au gradient de pression. Le paramètre  $\rho^* = \sqrt{\frac{5\beta}{6\Omega_i^2 \tau_A^2}}$  détermine le niveau de couplage entre les fluctuations de pression et du flux magnétique.

## Normalisation de la loi d'Ohm

L'équation pour le flux magnétique  $\psi$  (4.4) s'écrit de la manière suivante :

$$\eta \nabla_{\perp}^2 \psi = \frac{1}{B} \{\psi_{tot}, \phi\} - \frac{1}{neB} [\{\psi_{tot}, p\} + \kappa \partial_y \psi] - \partial_t \psi.$$

La normalisation de cette équation s'effectue en plusieurs étapes. Après avoir normalisé le temps, le flux magnétique, la pression, le potentiel électrostatique, le courant et les opérateurs (voir annexe 7.1.3), l'équation (4.4) se ré-écrit de la manière suivante :

$$\partial_t \psi = \{\psi_{tot}, \phi\} - v^* \{\psi, p\} - v^* \partial_y \psi - \eta \nabla_{\perp}^2 \psi. \quad (4.9)$$

Toutes les grandeurs de l'équation (4.9) ont été normalisées et l'on a omis l'indice  $N$ . On procède aux changements de variable suivant  $j \rightarrow -j$  et  $p \rightarrow v^*p$  afin d'obtenir un système d'équation plus homogène. L'équation (4.9) s'écrit alors :

$$\partial_t \psi + \{\phi - p, \psi_{tot}\} = -v^* \partial_y \psi + \eta \nabla_{\perp}^2 \psi. \quad (4.10)$$



# Chapitre 5

## Bilan énergétique

### 5.1 Energie cinétique $E_c$

En utilisant les propriétés des crochets de Poisson, on peut, à partir de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (4.6), définir l'énergie cinétique  $E_c$ . Pour cela, il suffit de multiplier l'équation (4.6) par  $\phi$  et d'intégrer sur la surface  $dS = dx dy$ .

Le premier terme de l'équation (4.6), s'écrit :

$$\begin{aligned}\phi \partial_t \nabla_{\perp}^2 \phi &= \phi \nabla_{\perp} \cdot (\nabla_{\perp} \partial_t \phi) \\ &= \nabla_{\perp} \cdot (\phi \partial_t \phi) - (\nabla_{\perp} \phi) \cdot (\nabla_{\perp} \partial_t \phi) \\ &= \nabla_{\perp} \cdot (\phi \partial_t \phi) - \frac{1}{2} \partial_t |\nabla_{\perp} \phi|^2.\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à intégrer sur toute la surface en utilisant les conditions de bord du système explicitées dans l'annexe 7.2.2. Il vient  $\int_S \phi \partial_t \nabla_{\perp}^2 \phi dS = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_S |\nabla_{\perp} \phi|^2 dS$ . En normalisant l'équation (3.2), le potentiel est lié à la vitesse de dérive normalisée par la relation  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_z \times \nabla_{\perp} \phi$ . En remarquant que  $u^2 = (\partial_x \phi)^2 + (\partial_y \phi)^2$ , on obtient

$$\frac{dE_c}{dt} = - \int_S \phi \partial_t \nabla_{\perp}^2 \phi dS = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_S |\nabla_{\perp} \phi|^2 dS = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_S u^2 dS, \quad (5.1)$$

où  $E_c = \int_S u^2 dS$ . On peut alors ré-écrire l'équation pour le potentiel électrostatique (4.6) en faisant apparaître l'énergie cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt} = - \int_S \phi \{ \psi_{tot}, j \} dS + \kappa_1 \int_S \phi \partial_y p dS - \nu \int_S \phi \nabla_{\perp}^4 \phi dS. \quad (5.2)$$

### 5.2 Energie de la pression $E_p$

De la même façon, on peut définir l'énergie associée à la pression  $E_p$  en utilisant les propriétés des crochets de Poisson dans l'équation (4.8). Ainsi, en multipliant le premier terme de l'équation

(4.8) par  $p$  et en intégrant sur tout l'espace  $S$ , l'énergie contenue sous forme de pression  $E_p^* = \int_S p^2 dS$  apparaît :

$$\frac{dE_p^*}{dt} = \int_S p \partial_t p dS = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_S p^2 dS. \quad (5.3)$$

On peut alors ré-écrire l'équation (4.8) en faisant apparaître  $E_p^*$  :

$$\frac{dE_p^*}{dt} = -v^* (1 - \kappa_2) \int_S p \partial_y \phi dS - v^* \kappa_2 \int_S p \partial_y p dS + \rho^{*2} \int_S p \{ \psi_{tot}, j \} dS + \chi_{\perp} \int_S p \nabla_{\perp}^2 p dS. \quad (5.4)$$

### 5.3 Energie magnétique $E_m$

Enfin, on peut définir l'énergie magnétique  $E_m$  associée au flux magnétique de la même façon que pour  $E_c$  et  $E_p^*$ . En multipliant le premier terme de l'équation (4.10) par le courant  $j$  et en intégrant sur tout l'espace  $S$ , il vient  $\int_S j \partial_t \psi dS = \int_S \partial_x^2 \psi \partial_t \psi dS + \int_S \partial_y^2 \psi \partial_t \psi dS$ . En utilisant les conditions de bord décrites dans l'annexe 7.2.2. et procédant par intégration par partie, il vient  $\int_S j \partial_t \psi dS = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_S |\nabla_{\perp} \psi|^2 dS$ . Enfin, en utilisant la définition du flux magnétique (3.1), on obtient :

$$\frac{dE_m}{dt} = \int_S j \partial_t \psi dS = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_S |\nabla_{\perp} \psi|^2 dS = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_S B^2 dS, \quad (5.5)$$

où  $E_m = \int_S B^2 dS$ . On peut alors faire apparaître l'équation d'évolution de l'énergie magnétique à partir de la loi d'Ohm (4.10) :

$$\frac{dE_m}{dt} = - \int_S j \{ \psi_{tot}, \phi - p \} + v^* \int_S j \partial_y \psi dS - \eta \int_S j^2 dS. \quad (5.6)$$

### 5.4 Energie : sources et puits

A partir des équations (5.2, 5.4, 5.6) qui donnent respectivement les expressions des énergies cinétique, magnétique et de l'énergie stockée sous forme de pression (dite "énergie de pression"), on peut effectuer le bilan énergétique du système (4.6, 4.8, 4.10). Pour cela, on additionne les équations (5.2) et (5.6), et on injecte l'équation (5.4) par l'intermédiaire du terme  $\rho^{*2} \{ \psi_{tot}, j \}$ , on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ E_c + E_m + \frac{1}{\rho^{*2}} E_p^* \right] &= \frac{v^*}{\rho^{*2}} (\kappa_2 - 1) \int_S p \partial_y \phi dS - \frac{v^* \kappa_2}{\rho^{*2}} \int_S p \partial_y p dS + v^* \int_S j \partial_y \psi dS \\ &+ \kappa_1 \int_S \phi \partial_y p dS + \frac{\chi_{\perp}}{\rho^{*2}} \int_S p \nabla_{\perp}^2 p dS - \eta \int_S j^2 dS - \nu \int_S \phi \nabla_{\perp}^4 \phi dS. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Dans l'équation (5.7), ce n'est pas  $E_p^*$  qui apparaît mais  $\frac{1}{\rho^{*2}} E_p^*$ . C'est donc cette expression qui est la plus pertinente pour l'énergie de pression et on choisit donc la définition suivante pour l'énergie de pression :

$$E_p = \frac{1}{\rho^{*2}} \int_S p^2 dS. \quad (5.8)$$

L'énergie totale du système est donc :

$$E = E_c + E_m + E_p. \quad (5.9)$$

En utilisant des intégrations par partie et les conditions de bord décrites dans l'annexe 7.2.2., on peut ré-écrire l'équation pour l'énergie totale (5.7) de la manière suivante :

$$\frac{dE}{dt} = -\eta \int_S j^2 dS - \nu \int_S (\nabla_{\perp} \phi)^2 dS - \frac{\chi_{\perp}}{\rho^{*2}} \int_S |\nabla_{\perp} p|^2 dS + S_{\text{input}}, \quad (5.10)$$

où :

$$S_{\text{input}} = -\alpha_S \int_S p \partial_y \phi dS \quad (5.11)$$

avec  $\alpha_S = \frac{v^*}{\rho^{*2}} (1 - \kappa_2) + \kappa_1$ .  $S_{\text{input}}$  est le terme lié à la courbure du champ magnétique et au gradient de pression, proportionnel au flux de pression radial. En général,  $\kappa_2 < 1$  et donc  $\alpha_S > 0$ .

Dans la limite idéale où les coefficients de transport collisionnels sont nuls ( $\nu = \chi_{\perp} = \eta = 0$ ), l'énergie totale, donnée par l'équation (5.9), peut devenir un invariant du système s'il n'y a pas de source d'interchange ( $S_{\text{input}} = 0$ ). En fait, le terme de source  $S_{\text{input}}$  peut être relié à un mécanisme d'interchange. On peut montrer qu'un échange radial de fluctuations de pression allant dans le sens d'un aplatissement de la pression moyenne correspond à une variation  $\delta S_{\text{input}}$  positive. Autrement dit, cela revient à mettre une source d'énergie pour les fluctuations du système. Nous verrons que ce mécanisme peut être à l'oeuvre sous certaines conditions dans l'évolution non-linéaire du système. Remarquons aussi que l'équation (5.11) montre que l'effet diamagnétique, caractérisé par la vitesse diamagnétique  $v^*$ , nourrit également les fluctuations d'énergie du système.

En réalité, les paramètres  $\nu$ ,  $\chi_{\perp}$  et  $\eta$  sont très petits devant 1 en unités adimensionnées. Il faut cependant noter que si l'on suppose l'existence d'une turbulence à des échelles beaucoup plus petites que celle du phénomène physique qui nous intéresse (ici, la reconnexion) alors les coefficients de transport doivent être renormalisés tels que  $\nu_{\text{renormalisé}}/\nu \gg 1$  et  $\nu_{\text{renormalisé}} \sim \eta_{\text{renormalisé}} \sim \chi_{\perp, \text{renormalisé}}$  [27, 28]. D'autre part, ces paramètres de transport peuvent avoir un rôle important dans la dynamique du système, en particulier au voisinage de la surface de résonance où la résistivité joue un rôle clé. En effet, cette dernière est à l'origine de la reconnexion des lignes du champ magnétique par forte génération de courant au niveau des séparatrices [41]. Comme on peut l'observer dans l'équation (5.10), il y a alors dissipation d'énergie par effet Joule. De plus, les énergies cinétique et de pression sont dissipées lorsque respectivement la viscosité  $\nu$  et la diffusion thermique perpendiculaire  $\chi_{\perp}$  sont non nulles.





# Conclusion

En prenant les premiers moments de l'équation de Boltzmann (1.1) qui décrit les évolutions de la fonction de distribution des électrons et de la fonction de distribution des ions, on obtient les équations nécessaires (1.3, 1.14, 1.19) à la description fluide du plasma. En couplant ces équations à celles de Maxwell Eq.(1.26), on obtient le modèle MHD à deux fluides. Les équations de la MHD sont difficiles à résoudre tant d'un point de vue analytique que d'un point de vue numérique. Ainsi, en considérant que le plasma est fortement magnétisé dans la direction  $\mathbf{e}_z$ , dans le cadre des approximations de dérive et des ions froids ( $p_i = 0$ ), il est possible de ne garder que la dynamique pertinente, pour le problème physique qui nous concerne, régie par les équations (3.3, 3.5, 3.6). Ce modèle à trois champs  $\phi$ ,  $p_e = p$  et  $\psi$  contient, en fait, un grand nombre de termes et de paramètres qui reflète la richesse des dynamiques et des phénomènes physiques qu'il inclut. En ne gardant que les termes permettant de modéliser le mode de déchirement et l'instabilité d'interchange et après normalisation de toutes les quantités physiques, on obtient le modèle final régi par les équations (4.6, 4.8, 4.10). Nous l'utiliserons pour modéliser l'évolution d'un îlot magnétique en présence de turbulence d'interchange. Autrement dit, les équations (4.6, 4.8, 4.10) contiennent, de manière auto-consistante, à la fois l'instabilité résistive du mode de déchirement et l'instabilité d'interchange liée à la courbure du champ magnétique et au gradient de pression. Le modèle utilisé ici est fait une version réduite du modèle à quatre champs utilisé dans [42].

Pour caractériser les différentes dynamiques qui peuvent apparaître suivant les différents régimes de paramètres, il est très utile d'étudier la répartition des énergies du système. A partir de ce modèle, on a pu définir l'énergie cinétique  $E_c$  (Eq.5.1) liée au potentiel électrostatique, l'énergie de pression  $E_p$  (Eq.5.8) liée à la pression et l'énergie magnétique  $E_m$  (Eq.5.5) liée au flux magnétique. Le bilan énergétique du système donné par l'équation (5.10) montre que ces trois énergies sont des invariants idéaux ( $\eta = \nu = \chi_\perp = 0$ ) lorsqu'il n'y a pas d'instabilité d'interchange. Cependant, lorsqu'il y a échange de tubes de flux, les termes d'interchange et l'effet diamagnétique nourrissent l'énergie totale du système.

L'objectif de cette thèse est donc d'étudier la dynamique non-linéaire d'un îlot magnétique en présence de turbulence d'interchange. Pour cela, il faut donc résoudre les équations (4.6, 4.8, 4.10). La résolution non-linéaire de ces équations n'est pas chose aisée et, pour cela, on utilisera l'outil numérique (voir l'annexe 7.2 qui décrit le code numérique utilisé pour cette thèse). Cependant, avant d'étudier numériquement l'évolution non-linéaire, il est très utile d'étudier en premier lieu les différentes solutions linéaires des équations (4.6, 4.8, 4.10). C'est l'objet de

la partie suivante, dans lequel une étude analytique complétée d'une étude numérique, permet de comprendre le mécanisme de déstabilisation d'un îlot magnétique en présence des effets de pression et de comprendre l'effet d'un champ magnétique sur les modes interchangeables.

Troisième partie

Etude Linéaire



# Introduction

Les équations (4.6,4.8,4.10) décrivent donc un modèle à trois champs incluant les phénomènes d'interchange et de mode de déchirement existant dans les plasmas. En fait, il existe de très nombreuses études qui se sont intéressées aux instabilités résistives incluant notamment des effets de pression. On pourra citer par exemple [43, 44] et plus récemment [45]. Ces équations sont non-linéaires et pour les résoudre complètement il faut faire appel à des méthodes numériques (cf. partie IV). Néanmoins, l'évolution non-linéaire du système est liée à la nature des modes linéairement instables qui vont se développer initialement. Dans un premier temps, nous allons donc linéariser le système afin de mettre en évidence les différents mécanismes de déstabilisation. Les équations (4.6,4.8,4.10) présentent, en fait, deux cas limites de modes instables qui peuvent agir à des échelles spatiales et temporelles différentes. Nous pourrions discriminer ces deux cas limites puisque les modes présentent des parités opposées. Lorsque  $p = v^* = 0$  (et donc  $p_{tot} = p + p_0 = 0$ ), la linéarisation du système conduit à des champs localisés au niveau de la couche résistive avec un flux magnétique pair et un potentiel électrostatique impair. C'est le mode de déchirement "classique" bien connu [21, 39]. Au contraire, lorsque  $\psi_{tot} = \psi + \psi_0 = 0$ , on obtient l'interchange électrostatique [40] dans lequel la pression et le potentiel électrostatique sont pairs et non localisés (dans le cas de l'interchange électromagnétique, le flux magnétique est impair). Dans notre modèle, les deux types d'instabilités sont présentes et peuvent être en compétition. La linéarisation du système permettra de discriminer la nature de l'instabilité dominante. Dans cette partie, après avoir brièvement rappelé à quoi correspondent les modes d'interchange électrostatique et de déchirement, nous nous focaliserons sur la linéarisation du système à trois champs Eqs. (4.6,4.8,4.10).



# Chapitre 6

## Régime linéaire de l'interchange et du mode de déchirement

### 6.1 Interchange électrostatique

L'instabilité d'interchange est analogue à celle de Rayleigh-Taylor pour les fluides neutres : un fluide lourd qui se trouve au dessus d'un fluide léger dans le champ gravitationnel terrestre est instable. Des petites perturbations, à l'interface des deux fluides, s'amplifient et se renforcent. Leur ré-arrangement aura alors tendance à se renverser et le fluide lourd se retrouvera ainsi en bas. C'est pour cette raison que l'on parle d'instabilité d'échange. Elle apparaît quand le gradient de densité dans le fluide s'oppose à la force gravitationnelle (Figure (6.1)).

Au bord d'un plasma de tokamak, un mécanisme équivalent existe dans lequel le gradient de pression  $\nabla p$  joue le rôle de celui de la densité et la courbure du champ magnétique  $\mathbf{g}$  engendre une force effective  $\mathbf{F}_g \approx -\mathbf{g}$ . A cause du confinement magnétique, le plasma est plus chaud et plus dense au centre qu'au bord et le gradient de pression est orienté vers le centre (axe  $r = 0$ ). La force effective due à la courbure toroïdale est dirigée de l'axe de symétrie ( $R = 0$ ) vers l'extérieur du tore. Il y a donc inévitablement des zones instables par rapport au mécanisme d'échange (Figure (6.2)). Les zones instables coïncident avec les endroits où le

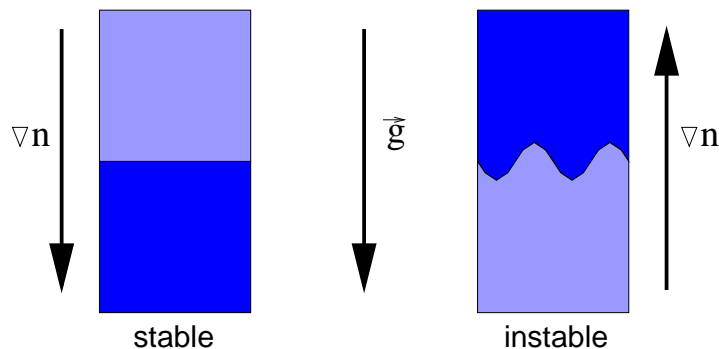


FIGURE 6.1 – Un fluide lourd se trouvant au dessus d'un fluide léger et soumis à la gravitation  $\mathbf{g}$  est instable (instabilité de Rayleigh-Taylor).

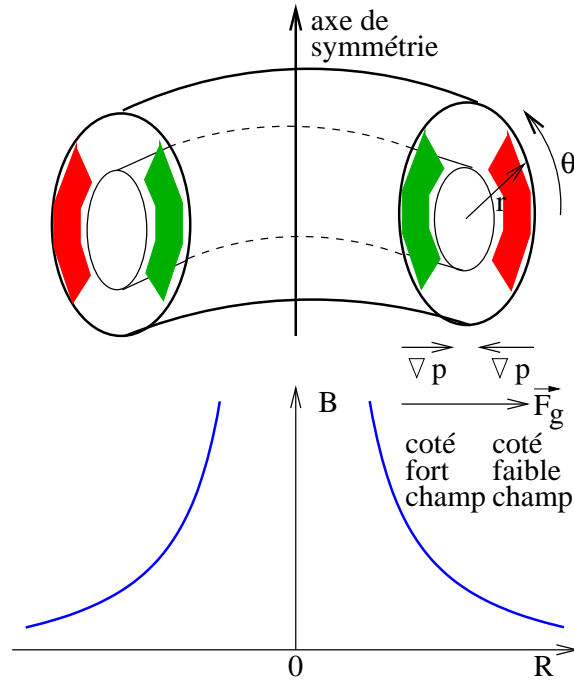


FIGURE 6.2 – Géométrie de l’instabilité d’interchange dans un tokamak. Les fluctuations sont instables côté faible champ (zone rouge) et stable côté fort champ (zone verte).

champ magnétique est relativement faible. (On rappelle que le champ toroïdal décroît comme  $1/R$ .) Ces instabilités reflètent la tendance du plasma d’atteindre un état énergétiquement plus favorable par une inversion de deux tubes de flux magnétique voisins. En fait, dans un tokamak, l’instabilité de type interchange dominante est l’instabilité de ballonnement résistif tri-dimensionnelle. Dans notre étude 2D, nous négligerons les effets liés au paramètre de courbure géodésique. Nous verrons que le déclenchement de l’instabilité d’interchange, en présence d’un fort champ magnétique toroïdal, nécessitera alors à sur évaluer la valeur du paramètre de courbure  $\kappa_1$  [22].

Dans notre modèle, l’interchange électrostatique se déduit des équations (4.6,4.8,4.10) en prenant  $\psi_{tot} = \psi + \psi_0 = 0$  :

$$\partial_t \nabla_{\perp}^2 \phi + \{\phi, \nabla_{\perp}^2 \phi\} = -\kappa_1 \partial_y p + \nu \nabla_{\perp}^4 \phi \quad (6.1)$$

$$\partial_t p + \{\phi, p\} = v^* (\kappa_2 - 1) \partial_y \phi + \chi_{\perp} \nabla_{\perp}^2 p \quad (6.2)$$

où le gradient de pression s’oppose aux termes de courbure représentés par  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$ . Pour linéariser un tel système, il suffit de considérer que les champs  $\phi$  et  $p$  sont en phase et non locaux :  $f(x, y, t) = f_0 e^{ik_x x + ik_y y} e^{\gamma_{int} t}$  où  $\gamma_{int}$  est le taux de croissance linéaire de l’instabilité. La linéarisation du système permet de déterminer l’expression du taux de croissance de l’interchange :

$$\gamma_{int} = \frac{k_y}{k_{\perp}} \sqrt{v^* (1 - \kappa_2) \kappa_1 - \nu k_{\perp}^2}. \quad (6.3)$$

Dans (6.3),  $k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2$  et l’on a supposé par simplicité que  $\nu = \chi_{\perp}$ . On remarquera que les coefficients de transport  $\nu$  et  $\chi_{\perp}$  stabilisent les petites échelles. La Figure (6.3) montre le



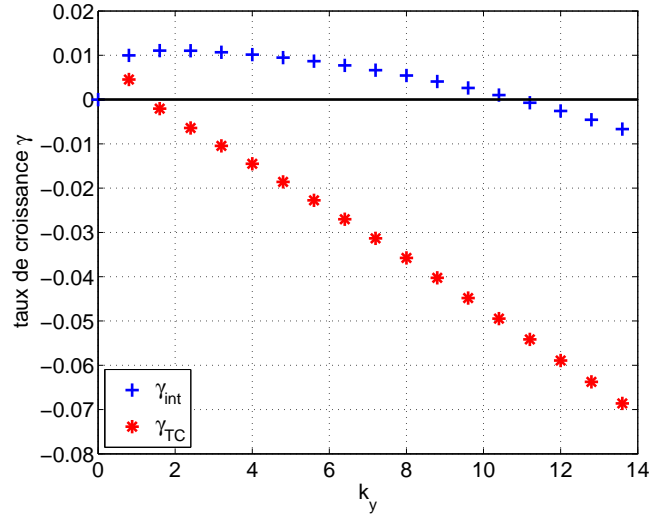


FIGURE 6.3 – Taux de croissance linéaire théorique de l’interchange électrostatique  $\gamma_{int}$  et du mode de déchirement classique  $\gamma_{TC}$  en fonction du nombre d’onde poloïdal  $k_y$  avec  $\nu = \chi_{\perp} = \eta = 10^{-4}$ ,  $v^* = 2.10^{-3}$ ,  $\kappa_1 = 0.11$ ,  $\kappa_2 = 0.36$ ,  $\Delta'_{0,4} = 8$  et  $L_y = 5\pi$ .

taux de croissance linéaire  $\gamma_{int}$  en fonction du nombre d’onde poloïdal  $k_y$  (Eq.(6.3)) pour des valeurs de paramètres typique du tokamak TORE SUPRA ( $\nu = \chi_{\perp} = \eta = 10^{-4}$ ,  $v^* = 2.10^{-3}$ ,  $\kappa_1 = 0.11$ ,  $\kappa_2 = 0.36$ ). Avec de tels paramètres, le taux de croissance maximal  $\gamma_{int_{MAX}} = 0.011$  correspond au nombre d’onde poloïdal  $k_{y_{MAX}} = 2$ . La Figure (6.4) montre les fonctions propres de l’interchange électrostatique du mode le plus instable  $k_y = 2$  pour une simulation linéaire avec  $\nu = \chi_{\perp} = \eta = 10^{-4}$ ,  $v^* = 2.10^{-3}$ ,  $\kappa_1 = 0.11$ ,  $\kappa_2 = 0.36$ . La partie (a) de la Figure (6.4) présente la fonction propre  $\phi_{k_y=2}(x) = \phi_2(x)$  et la partie (b) la fonction propre  $p_{k_y=2}(x) = p_2(x)$ . Les deux fonctions propres sont paires et étalées sur toute la boîte.

## 6.2 Mode de déchirement

En MHD idéale, on peut montrer que les lignes du champ magnétique sont advectées avec le fluide. Ce phénomène est plus couramment appelé “gel des lignes de champ”. La Figure (6.5) montre qu’en MHD idéale les perturbations du champ magnétique ne peuvent modifier la topologie des lignes de champ.

Cependant, lorsque l’on se place en MHD résistive, les lignes de champ ne sont plus gelées : il peut y avoir destruction, puis reconnexion des lignes de champ. Prenons l’exemple d’un plasma ayant une vitesse fluide  $\mathbf{u} = u_x \mathbf{x}$  orthogonale aux lignes de champ magnétique  $\mathbf{B} = B_y(x) \mathbf{y}$  [46]. En effet, la loi d’Ohm, en milieu résistif, implique l’existence d’une force  $\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$  telle que :

$$F_x = \frac{-u_x B_y^2}{\eta}.$$

Cette force s’oppose donc à la vitesse du fluide induite par le champ magnétique. Lorsque  $\eta = 0^+$ , la force est infinie et les lignes de champ ne peuvent pas changer de topologie. Mais, dès

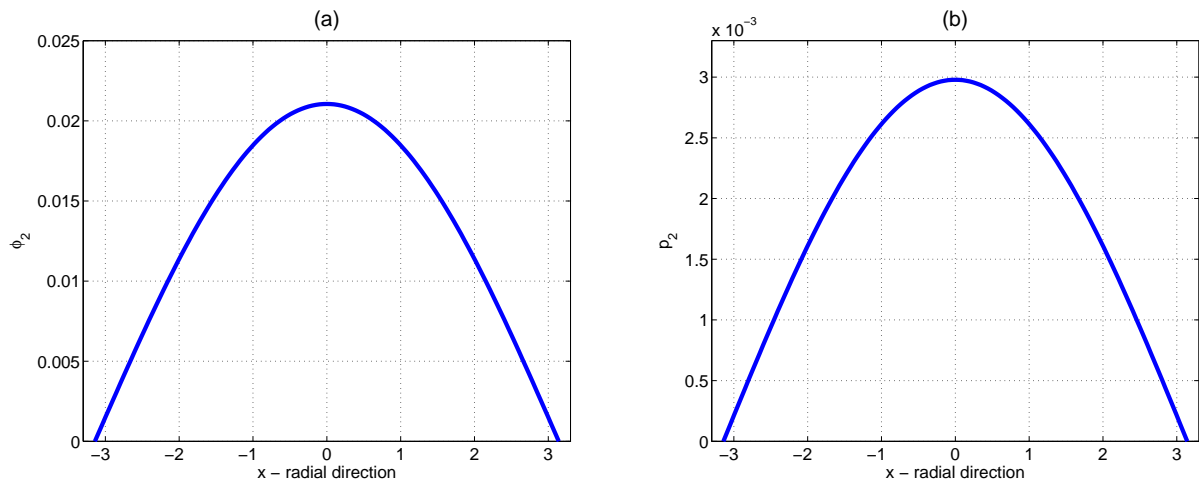


FIGURE 6.4 – Fonctions propres de l’interchange électrostatique pour le mode le plus instable  $k_y = 2$  : (a)  $\phi_2(x)$ , (b)  $p_2(x)$  à  $t = 1700\tau_A$  pour une simulation linéaire avec  $\nu = \chi_\perp = \eta = 10^{-4}$ ,  $v^* = 2.10^{-3}$ ,  $\kappa_1 = 0.11$ ,  $\kappa_2 = 0.36$ .

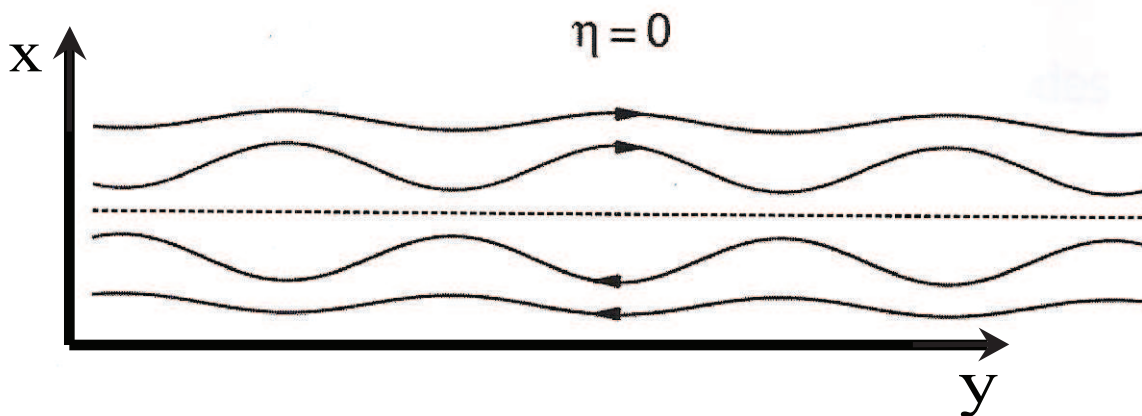


FIGURE 6.5 – Lignes de champ pour un plasma idéal avec  $\eta = 0$ .

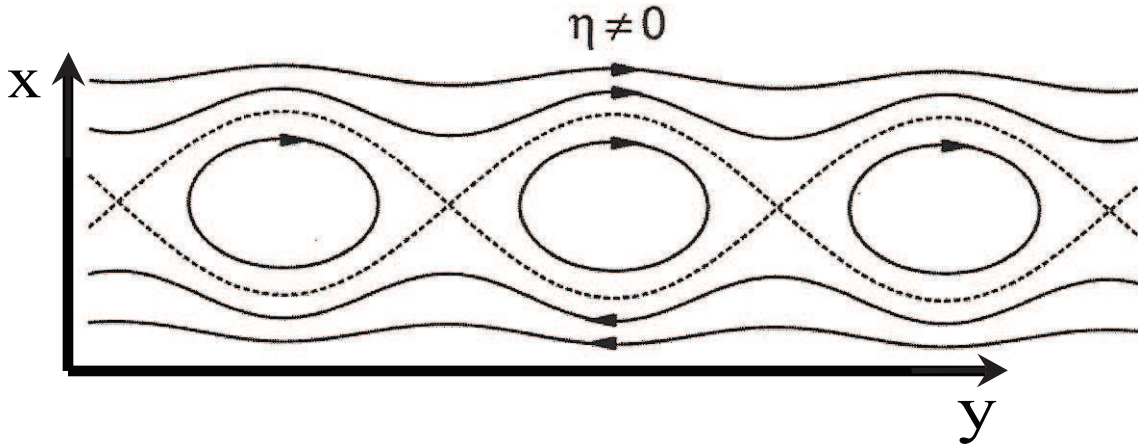


FIGURE 6.6 – Lignes de champ pour un plasma résistif avec  $\eta \neq 0$  après reconnexion. On observe la présence de trois îlots magnétiques.

que  $\eta > 0$ , il peut arriver que sur certaines surfaces (appelées surfaces résonantes)  $B_y$  s'annule localement et donc  $F_x$  aussi ; permettant, ainsi, un changement topologique des lignes de champ. Ainsi, dans un plasma résistif, il y a une diffusion du plasma à travers les lignes de champ, caractérisée par le temps résistif. Sur les fines surfaces résonantes, les lignes de champ peuvent se déchirer puis se reconnecter pour former des îlots magnétiques (Figure (6.6)). Le mode de déchirement est donc une instabilité résistive localisée au niveau des surfaces résonantes.

Le modèle minimal associé à cette instabilité s'obtient en imposant  $p_{tot} = 0$  (c'est à dire  $p = v^* = 0$ ) dans les équations (4.6,4.8,4.10) :

$$\partial_t \nabla_{\perp}^2 \phi + \{\phi, \nabla_{\perp}^2 \phi\} = \{\psi_{tot}, j\} + \nu \nabla_{\perp}^4 \phi \quad (6.4)$$

$$\partial_t \psi_{tot} + \{\phi, \psi_{tot}\} = \eta \nabla_{\perp}^2 \psi . \quad (6.5)$$

La linéarisation du système permet de déterminer à quelle condition et à quelle vitesse le mode de déchirement magnétique se développe. Introduisons un flux magnétique et un potentiel électrostatique déphasés de  $\pi/2$  :

$$\begin{aligned} \psi_{tot}(x, y, t) &= \psi_0(x) + i\tilde{\psi}_{k_y}(x) e^{ik_y y} e^{\gamma_{TC} t} \\ \phi(x, y, t) &= \frac{\gamma_{TC}}{k_y} \tilde{\phi}_{k_y}(x) e^{ik_y y} e^{\gamma_{TC} t}. \end{aligned}$$

Comme nous ne nous intéressons pas à des instabilités de type "alfvéniq" qui apparaissent en traitant le cas idéal, on fait l'hypothèse que le taux de croissance linéaire  $\gamma_{TC}$  de l'îlot est faible à l'échelle du temps d'Alfvén  $\tau_A$ , mais grand par rapport à l'échelle résistive, la diffusion résistive se faisant localement, sur une échelle de longueur bien inférieure au petit rayon  $r_0 \sim L_{\perp}$ . Ainsi on fait l'hypothèse suivante :

$$1 \ll \gamma_{TC} \ll \frac{\tau_R}{\tau_A} = S \quad (6.6)$$

où  $\tau_R = \frac{L_\perp^2}{\eta}$  est le temps résistif. On suppose aussi que les effets résistifs deviennent non négligeables seulement dans une fine région située près de la couche  $x = 0$  (surface résonante). Ainsi, la linéarisation du système s'effectue en séparant le plasma en deux régions (une région où l'on considère le plasma idéal sans résistivité et une région où le plasma est résistif). On résout alors les équations séparément dans chacune des deux régions puis on raccorde les deux solutions.

## Solution dans la zone idéale

Dans la zone idéale où  $\eta = 0$ , la loi d'Ohm Eq.(6.5) se met sous la forme :

$$\tilde{\phi}_{k_y}(x) = \frac{\tilde{\psi}_{k_y}(x)}{\psi'_0(x)},$$

où le profil du champ magnétique d'équilibre choisi est donné par  $\psi'_0(x) = \tanh(x)$ . Une solution simple du système est alors :

$$\tilde{\psi}_{k_y}(x) = e^{-k_y|x|} \left[ 1 + \frac{\tanh(|x|)}{k_y} \right]. \quad (6.7)$$

## Solution dans la zone résistive

Dans cette couche fine radialement ( $\nabla_\perp^2 \sim \partial_x^2$ ), en négligeant les effets visqueux (par souci de simplicité) et où l'équilibre est tel que  $\psi'_0(x) \sim x$ , les équations (4.6,4.8,4.10) se mettent sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{TC}^2}{k_y^2} \tilde{\phi}_{k_y}''(x) &= -x \tilde{\psi}_{k_y}''(x) \\ \tilde{\psi}_{k_y}(x) &= x \tilde{\phi}_{k_y}(x) + \frac{\eta}{\gamma_{TC}} \tilde{\psi}_{k_y}''(x). \end{aligned} \quad (6.8)$$

A ce stade, pour résoudre le système (6.8), on suppose que la perturbation  $\tilde{\psi}_{k_y}(x)$  varie peu au voisinage de la couche résistive,  $\tilde{\psi}_{k_y}(x) \sim \tilde{\psi}_{k_y}(0)$ , mais que ses dérivées successives varient fortement. Cette hypothèse est connue sous le nom de l'approximation “ $\psi$ -uniforme” (“constant- $\psi$ ” en anglais) et est valide tant que la diffusion résistive est locale et lente par rapport au temps d'Alfvén (hyp.(6.6)). Le système (6.8) se met alors sous la forme d'une équation différentielle indépendante des différents paramètres du système :

$$z + z^2 \chi(z) = \chi''(z),$$

avec  $x = \alpha z$ ,  $\tilde{\phi}_{k_y}(x) = -\alpha^{-1} \tilde{\psi}_{k_y}(0) \chi(z)$  et  $\alpha = \left( \frac{\eta \gamma_{TC}}{k_y^2} \right)^{1/4}$ . La fonction  $\chi(z)$  est toujours une fonction localisée autour de la couche résistive ( $\chi(\pm\infty) = 0$ ).

## Raccordement asymptotique

Les équations (4.6,4.8,4.10) ont été résolues linéairement dans les zones idéale et résistive. Il faut maintenant raccorder asymptotiquement les deux solutions pour trouver une expression du taux de croissance linéaire du mode de déchirement  $\gamma_{TC}$ . Pour cela, on définit le paramètre d'instabilité bien connu  $\Delta'_{k_y}$  qui représente le saut du champ magnétique au niveau de la couche résistive :

$$\Delta'_{k_y} = \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \frac{\tilde{\psi}_{k_y}''(x)}{\tilde{\psi}_{k_y}(0)} dx, \quad (6.9)$$

où  $\delta$  est la largeur de la fine couche résistive. En effet, dans la limite idéale, le flux magnétique présente une discontinuité au niveau de la fine couche résistive.  $\Delta'_{k_y}$  mesure donc cette discontinuité.

Il faut alors que les dérivées de la solution résistive se raccordent avec celles de la solution idéale dans la zone de recouvrement qui se situe, "vue" du domaine résistif très fin radialement, à l'infini. Autrement dit, il faut que la solution résistive décroisse très vite. Ce qui conduit à la condition de raccordement suivante :

$$\Delta'_{k_y} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\psi}_{k_y}''(x)}{\tilde{\psi}_{k_y}(0)} dx, \quad (6.10)$$

où  $\tilde{\psi}_{k_y}$  est la solution obtenue dans la zone résistive.  $\Delta'_{k_y}$  devient alors le paramètre d'instabilité du mode de déchirement  $k_y$ . Lorsqu'il est positif, le système est instable et un îlot magnétique croît avec  $\gamma_{TC}$ . Lorsqu'il est négatif,  $\gamma_{TC}$  est négatif également, le système est stable et aucun îlot ne croît. En fait, ce paramètre peut être associé à la quantité d'énergie magnétique libérée au niveau de la couche résistive lorsque la reconnexion se produit [47, 48, 49]. En utilisant la loi d'Ohm dans (6.10), on obtient finalement l'expression du taux de croissance du mode de déchirement  $k_y$  :

$$\gamma_{TC} = A^{-4/5} \Delta_{k_y}^{4/5} \eta^{3/5} k_y^{2/5}, \quad (6.11)$$

où  $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi''(z)}{z} dz \sim 2.17$  est indépendant des différents paramètres.

Sur la Figure (6.3), les points rouges représentent le taux de croissance théorique  $\gamma_{TC}$  (Eq.(6.11)) en fonction du nombre d'onde poloïdal  $k_y$ . Pour les paramètres choisis, alors qu'il y a un certain nombre de modes interchange instables, seul le mode de déchirement instable correspond à  $k_{y_{min}} = 0.4$  avec  $\Delta'_{0.4} = 8$ . Pour les autres modes de déchirement, le  $\Delta'$  associé est négatif, il en résulte un taux de croissance négatif. Sur la Figure (6.7), les contours du flux magnétique  $\psi$  et du potentiel électrostatique  $\phi$ , obtenus par une simulation linéaire avec  $\eta = \nu = 10^{-4}$ ,  $\Delta'_{0.4} = 8$  et  $L_y = 5\pi$ , sont présentés. La croissance et la formation linéaire de l'îlot magnétique (observé sur le contour de  $\psi$ ) s'accompagne d'une croissance linéaire des énergies magnétique  $E_m$  et cinétique  $E_c$  et de l'apparition d'une structure en quadripôle pour le potentiel électrostatique  $\phi$  permettant le maintien de l'îlot magnétique. Sur la Figure (6.8), les fonctions propres du mode

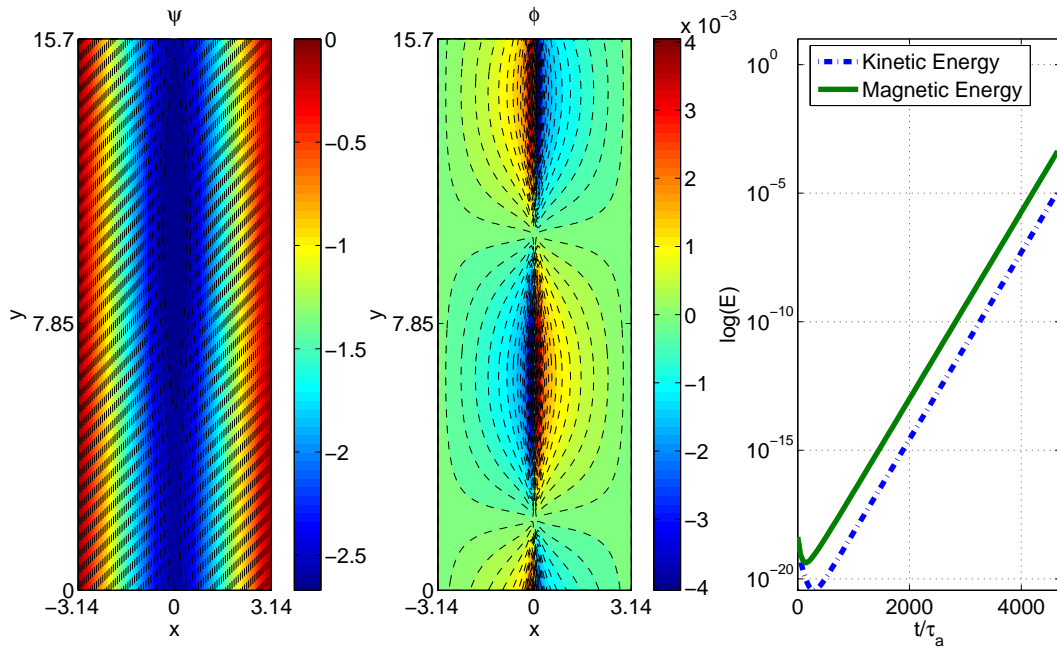


FIGURE 6.7 – Contours du flux magnétique  $\psi$  et du potentiel électrostatique  $\phi$  et évolution temporelle des énergies magnétique et cinétique obtenus par une simulation linéaire du mode de déchirement classique avec  $\eta = \nu = 10^{-4}$ ,  $\Delta'_{0.4} = 8$  et  $L_y = 5\pi$ .

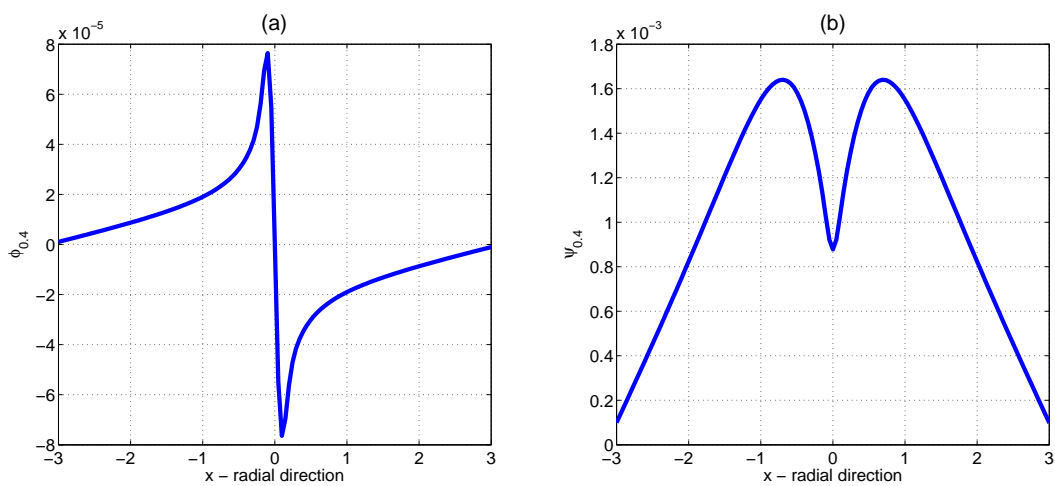


FIGURE 6.8 – Fonctions propres du mode de déchirement classique  $k_y = 0.4$  : (a)  $\phi_{0.4}(x)$ , (b)  $\psi_{0.4}(x)$  à  $t = 4000\tau_A$  pour la simulation avec  $\eta = \nu = 10^{-4}$ ,  $\Delta'_{0.4} = 8$  et  $L_y = 5\pi$ .

de déchirement classique  $k_y = 0.4$  obtenues par la même simulation que précédemment sont présentées. La partie (a) de la Figure (6.8) présente la fonction propre  $\phi_{0.4}(x)$  et la partie (b) présente la fonction propre  $\psi_{0.4}(x)$ . Les deux champs, localisés autour de la couche résistive, sont de parité différente : le flux magnétique  $\psi_{0.4}(x)$  est pair alors que le potentiel électrostatique  $\phi_{0.4}(x)$  est impair.





# Chapitre 7

## Régime linéaire du modèle à trois champs

Nous venons de présenter la résolution des équations linéaires des deux cas limites, interchange électrostatique et mode de déchirement classique. Ces deux instabilités sont de parités opposées et leur résolution linéaire demande des hypothèse fortes (“ $\psi$ -uniforme”). Il apparaît alors évident que la résolution linéaire du système complet à trois champs prenant en compte les deux instabilités Eqs.(4.6,4.8,4.10) peut poser quelque problème et reste compliquée. Nous avons donc effectué deux calculs. Le premier, avec une parité “mode de déchirement”, permet d’étudier l’effet de la pression et plus précisément de  $\rho^*$  sur le mode de déchirement classique. Ce calcul montre que la dynamique linéaire d’un îlot magnétique peut être fortement affectée par la pression. Le second, avec une parité “interchange”, montre qu’en présence d’un champ magnétique constant, les modes interchanges électrostatiques peuvent se stabiliser.

### 7.1 Effet de $\rho^*$ sur le mode de déchirement classique

Les équations (4.6,4.8,4.10) montrent que la pression électronique est couplée directement au flux magnétique par l’intermédiaire du crochet de Poisson  $\rho^{*2} \{\psi, j\}$ . Ce terme correspond à la partie adiabatique de l’équation de l’énergie Eq.(4.8) et est relié à la vitesse parallèle électronique. Ce terme contient une partie linéaire ( $\psi_{tot} = \psi + \psi_0$ ) qui doit certainement affecter la croissance linéaire de l’îlot magnétique. L’objectif de ce paragraphe est de comprendre l’effet de ce terme sur la croissance de l’îlot. Pour cela, on résout les équations (4.6,4.8,4.10) linéairement en négligeant les effets de courbure, les effets diamagnétiques et les effets visqueux et diffusif. On cherche donc à résoudre les équations linéaires suivantes :

$$\partial_t \nabla_{\perp}^2 \phi = \{\psi_0, j\} \quad (7.1)$$

$$\partial_t p = \rho^{*2} \{\psi_0, j\} \quad (7.2)$$

$$\partial_t \psi + \{\phi - p_e, \psi_0\} = \eta j . \quad (7.3)$$

Ces trois équations sont très proches de celles du mode de déchirement classique Eqs.(6.4, 6.5) et il est intéressant de noter que l'équation de la conservation du mouvement Eq.(7.1) est similaire à l'équation de l'énergie Eq.(7.2).

## Formation linéaire d'un îlot magnétique conduite par la pression électronique

Pour bien comprendre les différents mécanismes qui contrôlent la formation de l'îlot magnétique et du fait de la symétrie qu'il existe entre les équations (7.1) et (7.2), il est intéressant de résoudre les équations (7.1-7.3) dans la limite où  $\phi = 0$ . Comme pour le mode déchirement classique, on pose :

$$\begin{aligned}\psi_{tot}(x, y, t) &= \psi_0(x) + i\tilde{\psi}_{k_y}(x) e^{ik_y y} e^{\gamma_{TP} t} \\ p(x, y, t) &= \frac{\gamma_{TP}}{k_y} \tilde{p}_{k_y}(x) e^{ik_y y} e^{\gamma_{TP} t}.\end{aligned}$$

On résout alors les équations dans la zone idéale. La solution donnée par l'équation (6.7) est toujours valable pour le flux magnétique alors que la pression électronique est donnée par la loi d'Ohm Eq.(7.3) :

$$\tilde{p}_{k_y}(x) = -\frac{\tilde{\psi}_{k_y}(x)}{\psi'_0(x)}.$$

Pour la région résistive, on procède de la même façon en faisant l'hypothèse que  $\nabla_{\perp}^2 \sim \partial_x^2$  et en appliquant l'approximation " $\psi$ -uniforme". On arrive alors, après renormalisation, à une équation différentielle très simple :

$$\chi''(z) = \frac{z}{z^2 + 1},$$

avec  $\alpha = \left(\frac{\eta\gamma_{TP}}{k_y^2 \rho^{\star 2}}\right)$  et  $\tilde{p}_{k_y}(x) = -\alpha^{-1} \tilde{\psi}_{k_y}(0) \chi''(z)$ . Il est intéressant de noter que la pression électronique joue un rôle équivalent à celui de la vorticité dans le mode de déchirement classique. La définition de  $\Delta'_{k_y}$  Eq.(6.9) reste valable ainsi que la condition de raccordement Eq.(6.10). La résolution linéaire conduit alors à l'expression suivante pour le taux de croissance du mode de déchirement conduit par la pression électronique

$$\gamma_{TP} = \pi^{-2/3} \Delta_{k_y}^{2/3} \eta^{1/3} k_y^{2/3} \rho^{\star -2/3}. \quad (7.4)$$

Sur la Figure (7.1), les contours du flux magnétique  $\psi$  et de la pression électronique  $p$  sont présentés pour une simulation linéaire des équations (7.1-7.3) avec  $\phi = 0$ ,  $\eta = \chi_{\perp} = 10^{-4}$ ,  $\Delta'_{0.4} = 8$  et  $L_y = 5\pi$ . Les énergies magnétique  $E_m$  et de pression  $E_p$  croissent en même temps que l'îlot se forme. Le quadripôle observé sur le potentiel électrostatique  $\phi$  dans le mode de déchirement classique apparaît sur la pression électronique et assure son rôle de maintien de l'îlot. C'est le couplage entre la pression électronique et le flux magnétique qui assure la formation de l'îlot. Sur la Figure (7.2), les fonctions propres du mode de déchirement  $k_y = 0.4$  obtenues par la

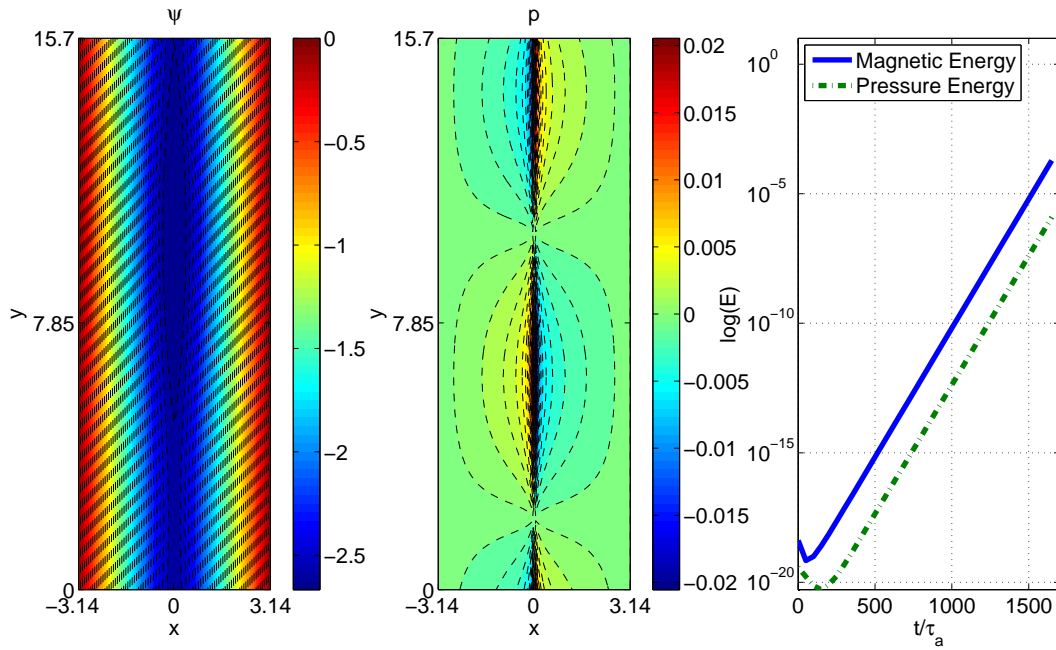


FIGURE 7.1 – Contours du flux magnétique  $\psi$  et de la pression électronique  $p$  et de l'évolution temporelle des énergies magnétique et de pression obtenus par une simulation linéaire des équations (7.1-7.3) avec  $\phi = 0$ ,  $\eta = \chi_{\perp} = 10^{-4}$ ,  $\Delta'_{0,4} = 8$  et  $L_y = 5\pi$ .

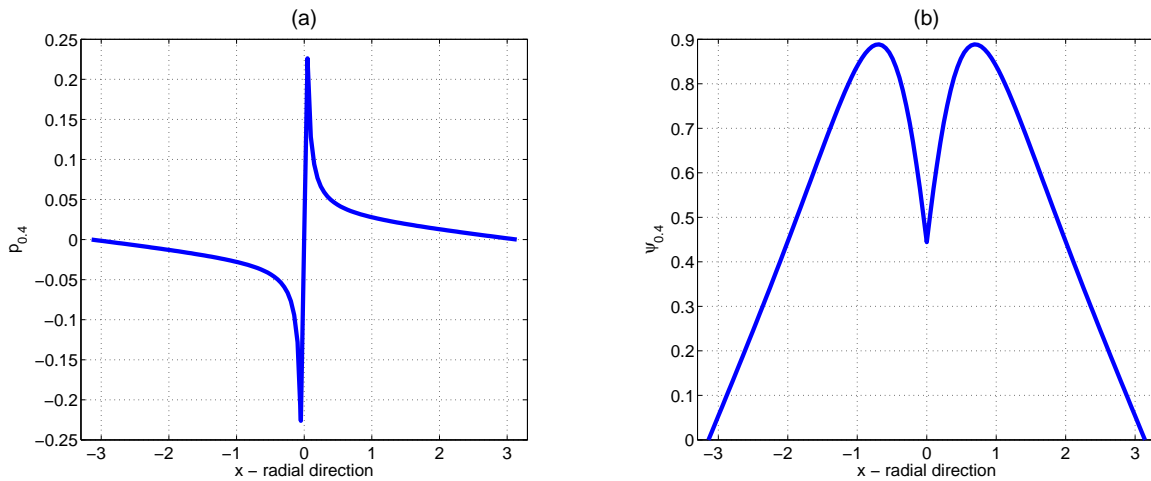


FIGURE 7.2 – Fonctions propres du mode de déchirement  $k_y = 0.4$  conduit par la pression électronique : (a)  $p_{0,4}(x)$ , (b)  $\psi_{0,4}(x)$  à  $t = 2000\tau_A$  pour la simulation avec  $\eta = \chi_{\perp} = 10^{-4}$ ,  $\Delta'_{0,4} = 8$  et  $L_y = 5\pi$ .

même simulation que précédemment (où  $\phi = 0$ ) sont présentées. La partie (a) de la Figure (6.8) présente la fonction propre  $p_{0.4}(x)$  et la partie (b) présente la fonction propre  $\psi_{0.4}(x)$ . Les deux champs, localisés autour de la couche résistive, sont de parité différente (comme dans un mode de déchirement classique conduit par le couplage  $\phi - \psi$ ) : le flux magnétique  $\psi_{0.4}(x)$  est pair alors que la pression électronique  $p_{0.4}(x)$  est impair.

## Effet de $\rho^*$ sur la formation linéaire d'un îlot magnétique

Nous avons résolu les équations (7.1-7.3) dans le cadre de deux limites. La première limite correspond à  $p = 0$ , c'est à dire à un mode de déchirement classique où le quadripôle de l'écoulement permet la croissance linéaire de l'îlot magnétique avec le taux de croissance  $\gamma_{TC}$  donné par l'Eq.(6.11). La deuxième limite correspond au cas où  $\phi = 0$ . Dans cette limite, c'est le couplage entre le flux magnétique et la pression électronique qui conduit à la formation de l'îlot avec un taux de croissance  $\gamma_{TP}$  donné par Eq.(7.4). Pour bien comprendre l'effet de la pression électronique et plus précisément du terme en  $\rho^*$  sur la formation de l'îlot dans sa globalité, nous allons maintenant nous intéresser à la résolution linéaire du système à trois champs Eqs.(7.1-7.3). Pour cela, on pose comme précédemment :

$$\begin{aligned}\psi_{tot}(x, y, t) &= \psi_0(x) + i\tilde{\psi}_{k_y}(x) e^{ik_y y} e^{\gamma_{TCP} t} \\ \phi(x, y, t) &= \frac{\gamma_{TP}}{k_y} \tilde{\phi}_{k_y}(x) e^{ik_y y} e^{\gamma_{TCP} t} \\ p(x, y, t) &= \frac{\gamma_{TP}}{k_y} \tilde{p}_{k_y}(x) e^{ik_y y} e^{\gamma_{TCP} t}.\end{aligned}$$

Dans la zone idéale, l'expression (6.7) pour le flux magnétique  $\psi$  est toujours valide ( $\{\psi, j\} = 0$ ) alors que la résolution de la loi d'Ohm donne :

$$\tilde{\phi}_{k_y}(x) - \tilde{p}_{k_y}(x) = \frac{\tilde{\psi}_{k_y}(x)}{\psi_0'(x)}.$$

Pour la zone résistive, on linéarise les équations (7.1-7.3) en considérant  $\nabla_{\perp}^2 \sim \partial_x^2$  et l'approximation " $\psi$ -uniforme". On aboutit alors à l'équation différentielle suivante :

$$z = -z^2 \chi(z) + \left( z^2 \rho^{*2} \alpha^{-2} + 1 \right) \chi''(z), \quad (7.5)$$

avec  $\alpha = \left( \frac{\eta \gamma_{TCP}}{k_y^2} \right)^{1/4}$ ,  $\tilde{\phi}_{k_y}(x) = -\alpha^{-1} \tilde{\psi}_{k_y}(0) \chi(z)$  et  $\tilde{p}_{k_y}(x) = \rho^{*2} \tilde{\phi}_{k_y}''(x)$ . Cette fois-ci, l'équation différentielle (7.5) obtenue n'est plus indépendante des paramètres du système. Sa résolution devient plus compliquée. En utilisant la condition de raccordement (6.10), on obtient alors l'expression du taux de croissance

$$\gamma_{TCP} = A^{-4/5} \Delta_{k_y}^{4/5} \eta^{3/5} k_y^{2/5}, \quad (7.6)$$

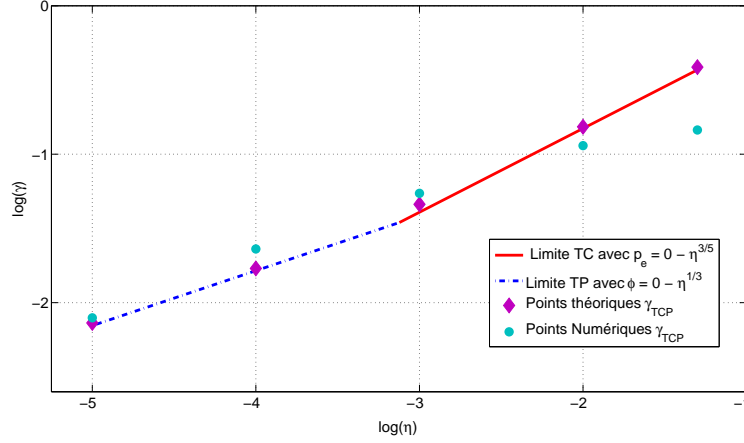


FIGURE 7.3 – Taux de croissance théorique et numérique  $\gamma_{TCP}$  en fonction de la résistivité  $\eta$  avec  $\nu = \chi_{\perp} = 0$ ,  $\Delta'_1 = 6$ ,  $L_y = 2\pi$  et  $\rho^* = 10^{-1}$ .

où  $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi''(z)}{z} dz$  avec  $\chi(z)$  vérifiant (7.5). Lorsque  $p = 0$  ou  $\rho^{*2} = 0$ , la limite du mode de déchirement classique Eq.(6.11) est bien retrouvée. De même, lorsque  $\phi = \chi = 0$ , on retombe (de manière moins évidente) sur l'expression (7.4).

La Figure (7.3) donne le taux de croissance théorique  $\gamma_{TCP}$  (diamant violet) obtenu avec (7.6) en fonction de la résistivité  $\eta$  pour  $\nu = \chi_{\perp} = 0$ ,  $\Delta'_1 = 6$ ,  $L_y = 2\pi$  et  $\rho^* = 10^{-1}$ . Cette courbe montre qu'il y a un changement de pente après une certaine valeur de la résistivité. Les deux régimes correspondent en fait au deux cas limites  $p = 0$  (courbe rouge solide) et  $\phi = 0$  (courbe trouée bleue). L'intersection des deux droites donne la valeur critique de la résistivité  $\eta_C$  obtenue en égalant (6.11) avec (7.4). Ici avec  $\Delta'_1 = 1$  et  $\rho^* = 10^{-1}$ , on obtient  $\eta_C = 0.58\Delta_1'^{-1/2}\rho^{*5/2} \sim 8 \cdot 10^{-4}$ . Lorsque  $\eta > \eta_C$ , le taux de croissance donné par le mode de déchirement classique  $\gamma_{TC}$  (Eq.(6.11)) est plus élevé que celui obtenu dans la limite  $\phi = 0$ . Naturellement, le système choisit le cas le plus instable et le mode de déchirement classique est retrouvé avec les lois d'échelle  $\gamma_{TCP} \sim \eta^{3/5}$  et  $\delta_{TCP} \sim \eta^{2/5}$ . Lorsqu'au contraire  $\eta < \eta_C$ , le couplage entre la pression électronique  $p$  et le flux magnétique  $\psi$  est fort. La formation de l'îlot magnétique est alors conduite par la perturbation de la pression. La couche résistive devient plus fine ou plus singulière que dans le cas classique  $p = 0$  où seul un couplage  $\psi - \phi$  existe.

Sur la Figure (7.3), les points turquoises représentent les points obtenus par la résolution linéaire numérique des Eqs.(7.1-7.3) avec  $\Delta'_1 = 6$ ,  $\nu = \chi_{\perp} = 0$  et  $\rho^* = 10^{-1}$ . Il y a un bon accord entre les points théoriques et les points numériques. Il existe un désaccord pour  $\eta > 5 \cdot 10^{-2}$ . En effet, pour des valeurs si élevées de la résistivité, la diffusion résistive est trop rapide, l'hypothèse (6.6) n'est plus vérifiée et par conséquent l'approximation "ψ-uniforme" est violée. D'autre part, comme il a été montré dans [50], des effets locaux concernant le courant d'équilibre peuvent amener à changer de façon importante le comportement linéaire des modes de déchirement.

La Figure (7.4) présente les contours du flux magnétique  $\psi$ , du potentiel électrostatique  $\phi$  et de la pression électronique  $p$  pour une simulation linéaire des équations (7.1-7.3) avec  $\eta = \nu = \chi_{\perp} = 10^{-4}$ ,  $\Delta'_{0.4} = 8$ ,  $L_y = 5\pi$  et  $\rho^* = 1$ . Pour de tels paramètres (en négligeant les

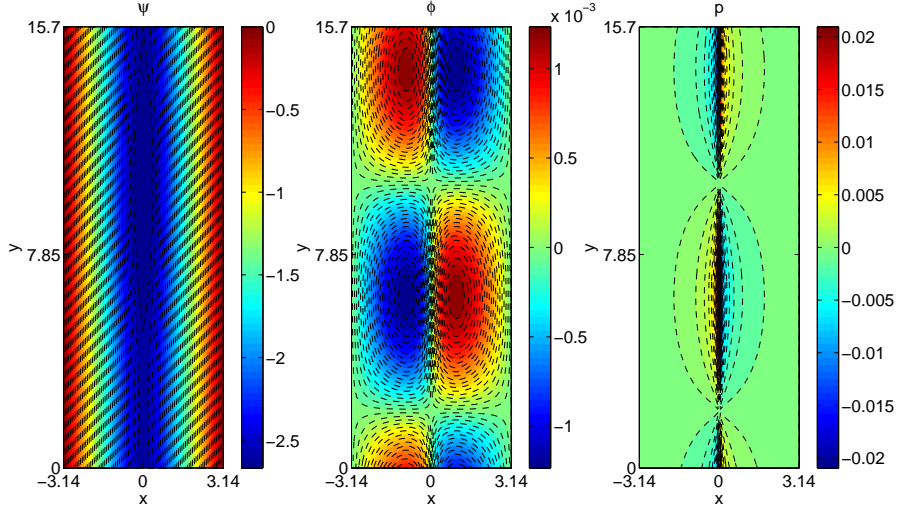


FIGURE 7.4 – Contour du flux magnétique  $\psi$ , du potentiel électrostatique  $\phi$  et de la pression électronique  $p$  obtenus par une simulation linéaire des équations (7.1-7.3) avec  $\eta = \nu = \chi_{\perp} = 10^{-4}$ ,  $\Delta'_{0,4} = 8$ ,  $L_y = 5\pi$  et  $\rho^* = 1$ .

effets visqueux et diffusif), le taux de croissance  $\gamma_{TP}$  obtenu par Eq.(7.4) est supérieur à  $\gamma_{TC}$  obtenu par Eq.(6.11). Le mode de déchirement doit donc être conduit par un couplage entre le flux magnétique  $\psi$  et la pression  $p$ . En effet, sur la Figure (7.4), la structure en quadripôle est observée sur les contours de  $\phi$  et de  $p$ , mais, en terme d'amplitude, il est clair que ce sont les structures quadripolaires de la pression qui permettent le maintien de l'îlot magnétique. La Figure (7.5) présente les fonctions propres du mode de déchirement  $k_y$  obtenues par une simulation linéaire des équations (7.1-7.3) avec  $\eta = \nu = \chi_{\perp} = 10^{-4}$ ,  $\Delta'_{0,4} = 8$ ,  $L_y = 5\pi$  et  $\rho^* = 1$ . Sur la partie (a) de la Figure (7.5), la fonction propre du flux magnétique  $\psi_{0,4}(x)$  correspond à celle obtenue dans le cas du mode de déchirement classique (Figure (6.8)). C'est une fonction paire qui est localisée au niveau de la couche résistive. La partie (b) de la Figure (7.5) montre la fonction propre de la pression  $p_{0,4}(x)$  alors que la partie (c) montre la fonction propre du potentiel électrostatique  $\phi_{0,4}(x)$ . Ces deux Figures prouvent bien que le mode de déchirement est conduit par un couplage  $\psi - p$  dans cette simulation. En effet, tout d'abord, l'amplitude de la pression est encore supérieure à celle du potentiel électrostatique. Puis, alors que la fonction propre  $\phi_{0,4}(x)$  s'étend sur toute la boîte, la fonction propre de la pression électronique obtenue a la même forme que celle obtenue pour un mode de déchirement conduit par la pression (cf. Figure(7.2)) : c'est une fonction impaire localisée au niveau de la couche résistive.

## 7.2 Effet d'un champ magnétique sur l'interchange

Nous venons de voir comment la pression électronique modifie un mode de déchirement en linéarisant le système Eqs.(4.6,4.8,4.10) et en suivant l'approximation “ $\psi$ -uniforme”. Il est aussi très important d'étudier les solutions linéaires des équations (4.6,4.8,4.10) d'un point de vue “interchange” et de voir comment le champ magnétique affecte les modes interchanges. Plus

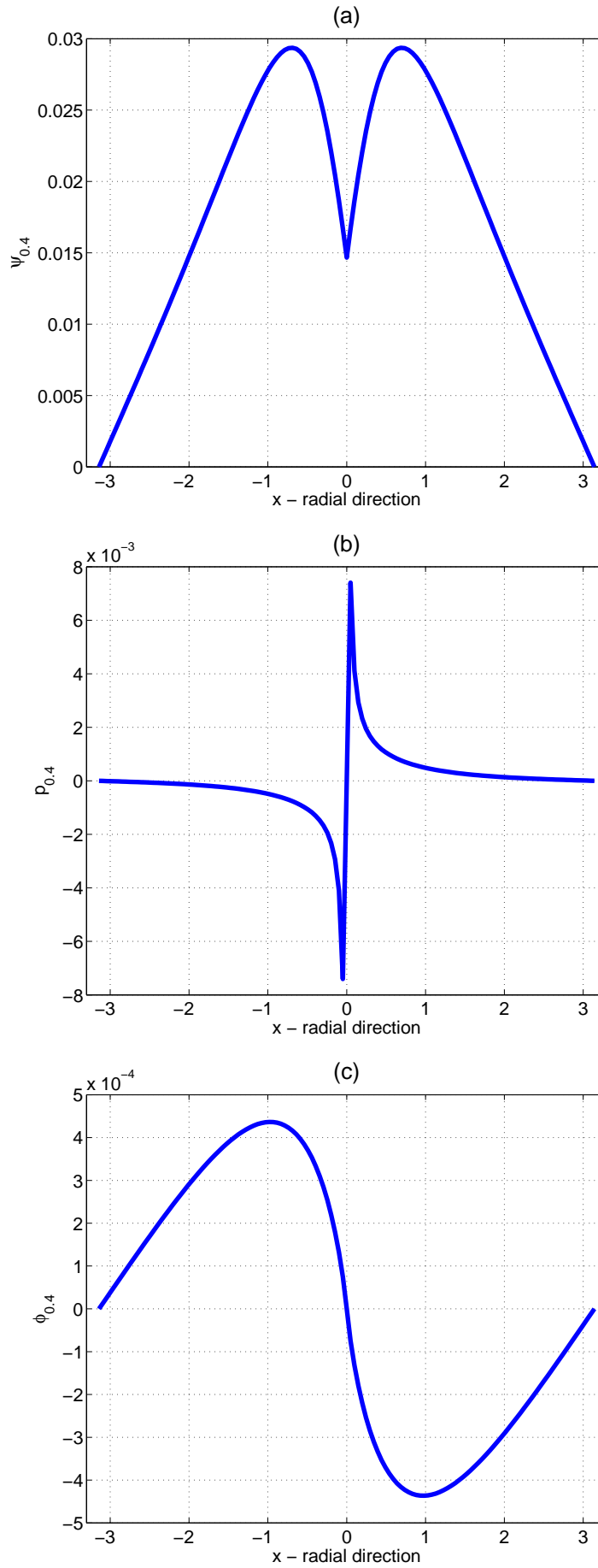


FIGURE 7.5 – Fonctions propres du mode de déchirement  $k_y = 0.4$  obtenues par une simulation linéaire des équations (7.1-7.3) : (a)  $\psi_{0.4}(x)$ , (b)  $p_{0.4}(x)$  et (c)  $\phi_{0.4}(x)$  à  $t = 1700\tau_A$  avec  $\eta = \nu = \chi_{\perp} = 10^{-4}$ ,  $\Delta'_{0.4} = 8$ ,  $L_y = 5\pi$  et  $\rho^* = 1$ .

précisément, il s'agit d'étudier comment, loin de la couche résistive, les modes interchanges sont affectés par la présence d'un champ magnétique constant. On cherche donc à résoudre le système linéaire suivant :

$$\partial_t \nabla_{\perp}^2 \phi = \psi'_0 \partial_y j - \kappa_1 \partial_y p + \nu \nabla_{\perp}^4 \phi \quad (7.7)$$

$$\partial_t p = v^* [(\kappa_2 - 1) \partial_y \phi - \kappa_2 \partial_y p_e] + \rho^{*2} \psi'_0 \partial_y j + \chi_{\perp} \nabla_{\perp}^2 p_e \quad (7.8)$$

$$\partial_t \psi = \psi'_0 \partial_y (\phi - p) - v^* \partial_y \psi + \eta \nabla_{\perp}^2 j. \quad (7.9)$$

On résout le système loin de la couche résistive en adoptant la parité interchange (c'est à dire que l'on suppose que les trois champs  $\phi$ ,  $p$  et  $\psi$  sont pairs et tels que  $f(x, y, t) = f_0 e^{ik_x x + ik_y y} e^{\lambda t}$ ). On suppose également que loin de la couche résistive  $\psi'_0 = \text{cste}$ . On peut aussi se placer au voisinage de la couche résistive dans la mesure où l'on considère des nombres d'onde beaucoup plus petits que le nombre d'onde associé à la longueur caractéristique du gradient du champ magnétique d'équilibre. L'objectif de cette étude est alors de comprendre l'effet de  $\psi'_0$  sur les modes interchanges. La linéarisation des équations (7.7-7.9) conduit à la résolution d'une équation du troisième degré dépendant des paramètres du système :

$$a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0 \quad (7.10)$$

avec

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -(\eta + \nu + \chi_{\perp}) k_{\perp}^2 - ik_y v^* (1 + \kappa_2) \\ c &= -(\eta \chi_{\perp} + \eta \nu + \chi_{\perp} \nu) k_{\perp}^4 - ik_y k_{\perp}^2 v^* (\chi_{\perp} + \nu) \\ &\quad - ik_y k_{\perp}^2 v^* \kappa_2 (\eta + \nu) - k_y^2 k_{\perp}^2 \rho^* \psi'_0 - k_y^2 \psi_0'^2 \\ &\quad + k_y^2 v^{*2} \kappa_2 + \frac{k_y^2}{k_{\perp}^2} v^* \kappa_1 (1 - \kappa_2) \\ d &= -\eta \nu \chi_{\perp} k_{\perp}^6 - ik_y k_{\perp}^4 (\nu \eta v^* \kappa_2 + \nu \chi_{\perp} v^*) - k_y^2 k_{\perp}^4 \nu \rho^* \psi_0'^2 \\ &\quad + k_y^2 k_{\perp}^2 \nu v^{*2} \kappa_2 - k_y^2 k_{\perp}^2 \chi_{\perp} \psi_0'^2 + k_y^2 \eta v^* \kappa_1 (1 - \kappa_2) \\ &\quad + ik_y^3 \kappa_1 \rho^{*2} \psi_0'^2 - ik_y^3 v^* \psi_0'^2 + i \frac{k_y^3}{k_{\perp}^2} v^{*2} \kappa_1 (1 - \kappa_2). \end{aligned}$$

L'équation (7.10) a trois racines imaginaires. Les parties réelles  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  et  $\gamma_3$  correspondent aux taux de croissance de l'instabilité alors que les parties imaginaires correspondent à des fréquences. Sur la Figure (7.6), les solutions particulières  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  et  $\gamma_3$  de l'équation (7.10) sont présentées en fonction du nombre d'onde poloïdal  $k_y$  pour un cas particulier tel que  $\eta = \nu = \chi_{\perp} = 10^{-4}$ ,  $\kappa_1 = 3$ ,  $\kappa_2 = 0.35$ ,  $v^* = 10^{-2}$ ,  $\rho^{*2} = \frac{5}{3} * 0.002$  et  $\psi_0'^2 = 5.10^{-2}$ . Comme le montre la Figure (7.6), une seule racine est instable ( $\gamma_1$ ) et permet la déstabilisation des modes interchanges électromagnétiques. Comme le montre la Figure (7.7), ces modes interchanges électromagnétiques dépendent fortement de  $\psi'_0$ . La partie (a) de la Figure (7.7) montre l'évolution du maximum de  $\gamma_1$  en fonction de  $\psi'_0$  pour des paramètres tels que  $\eta = \nu = \chi_{\perp} = 10^{-4}$ ,  $\kappa_1 = 3$ ,  $\kappa_2 = 0.35$ ,  $v^* = 10^{-2}$ ,  $\rho^{*2} = \frac{5}{3} * 0.002$ . Dès que  $\psi'_0$  devient trop important, tous les modes interchanges sont stabilisés. C'est un résultat important qui montre "l'alfvénisation"<sup>1</sup> des modes

1. Dans le cadre MHD, une perturbation d'un système magnétisé tend à se propager le long des lignes de champ magnétique sous la forme d'ondes à la vitesse d'Alfvén [22]. On parle "d'alfvénisation". Dans notre cas, nous pouvons illustrer ce phénomène par un cas particulier. La linéarisation des équations sur des échelles



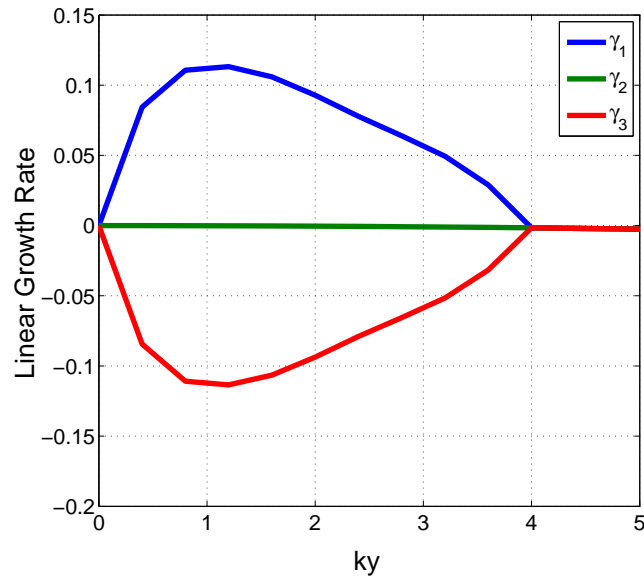


FIGURE 7.6 – Partie réelle des racines de l'équation (7.10) en fonction du nombre d'onde poloidal  $k_y$  pour un cas où  $\eta = \nu = \chi_{\perp} = 10^{-4}$ ,  $\kappa_1 = 3$ ,  $\kappa_2 = 0.35$ ,  $v^* = 10^{-2}$ ,  $\rho^{*2} = \frac{5}{3} * 0.002$  et  $\psi_0'^2 = 5.10^{-2}$ .

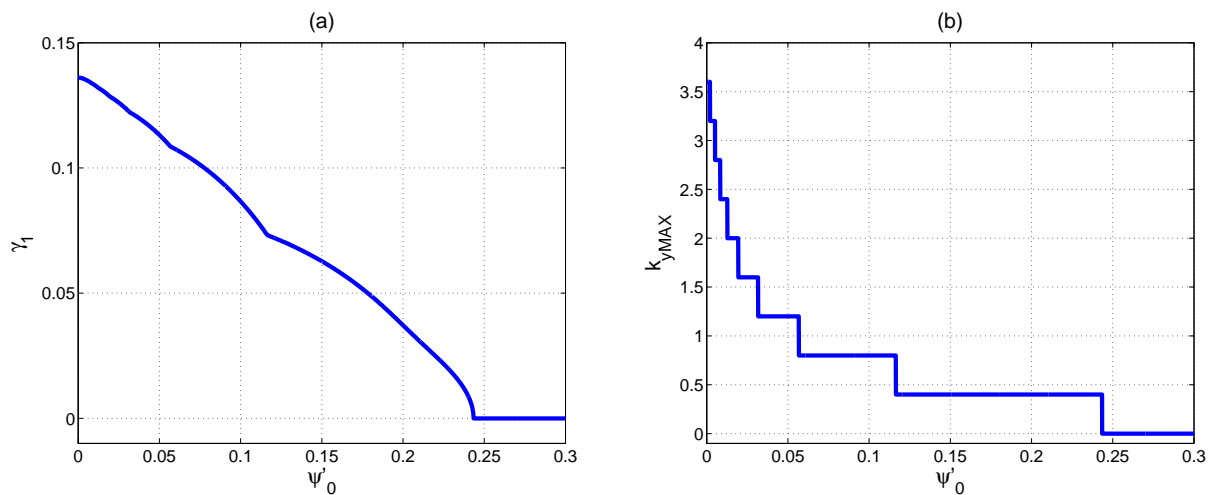


FIGURE 7.7 – Effet de  $\psi_0'$  sur la déstabilisation des modes interchanges électromagnétiques : (a) Taux de croissance maximal en fonction de  $\psi_0'$ , (b) mode  $k_y$  le plus instable en fonction de  $\psi_0'$  avec  $\eta = \nu = \chi_{\perp} = 10^{-4}$ ,  $\kappa_1 = 3$ ,  $\kappa_2 = 0.35$ ,  $v^* = 10^{-2}$ ,  $\rho^{*2} = \frac{5}{3} * 0.002$ .

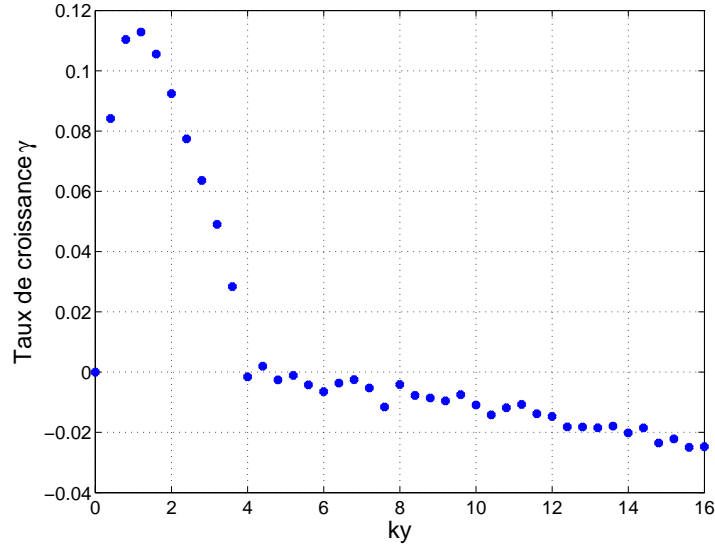


FIGURE 7.8 – Taux de croissance linéaire  $\gamma$  obtenue par une simulation linéaire des équations (7.7-7.9) avec  $\eta = \nu = \chi_{\perp} = 10^{-4}$ ,  $\kappa_1 = 3$ ,  $\kappa_2 = 0.35$ ,  $v^* = 10^{-2}$ ,  $\rho^{*2} = \frac{5}{3} * 0.002$  et  $\psi'_0 = 5.10^{-2}$ .

interchanges par le champ magnétique. La partie (b) de la Figure (7.7) montre l'évolution du mode  $k_y$  le plus instable en fonction de  $\psi'_0$ . Plus le champ magnétique est faible, plus les modes interchanges sont localisés au niveau des grandes échelles. La Figure (7.8) montre le taux de croissance  $\gamma$  en fonction du nombre d'onde poloïdal  $k_y$  obtenu par une simulation linéaire des équations (7.7-7.9) avec les mêmes paramètres que précédemment et  $\psi'_0 = 5.10^{-2}$ . Cette Figure montre bien que, dans un cas favorable, on obtient bien plusieurs modes instables pour l'interchange électromagnétique. D'après la Figure (7.8), le mode le plus instable correspond à un nombre d'onde poloïdal  $k_y = 1.2$  avec un taux de croissance  $\gamma = 0.11$ . La Figure (7.9) montre les fonctions propres (a)  $\phi_{1.2}(x)$ , (b)  $p_{1.2}(x)$  et (c)  $\psi_{1.2}(x)$  obtenues pour ce mode. Ce sont bien des fonctions propres de type "interchange" : elles sont paires et étalées sur toute la boîte (comme celles obtenues sur la Figure (6.4) pour l'interchange électrostatique).

---

spatiales petites devant la variation caractéristique du champ magnétique  $B_0 = \psi'_0$  permet d'écrire  $B_0 \sim cste$ . En prenant  $\kappa_2 = \rho^* = 0$ ,  $\chi_{\perp} = \nu$  et  $\gamma \ll \omega_{k_y}^*$  ( $\omega_{k_y}^* = k_y v^*$ ), l'instabilité d'interchange demeure car  $\kappa_1 v^* \neq 0$ . Néanmoins, le champ magnétique peut la stabiliser car, avec ces hypothèses, la résolution de l'Eq.(7.10) donne :  $\gamma \sim \pm k_y \sqrt{\frac{\kappa_1 v^*}{k_{\perp}^2} - B_0^2 - \nu k_{\perp}^2}$  dans la limite  $k_{\perp} \ll \sqrt{\omega_{k_y}^*/\eta}$ . On voit bien que si  $B_0$  est suffisamment grand, on obtient des ondes d'Alfvén ( $\nu = 0$ ).

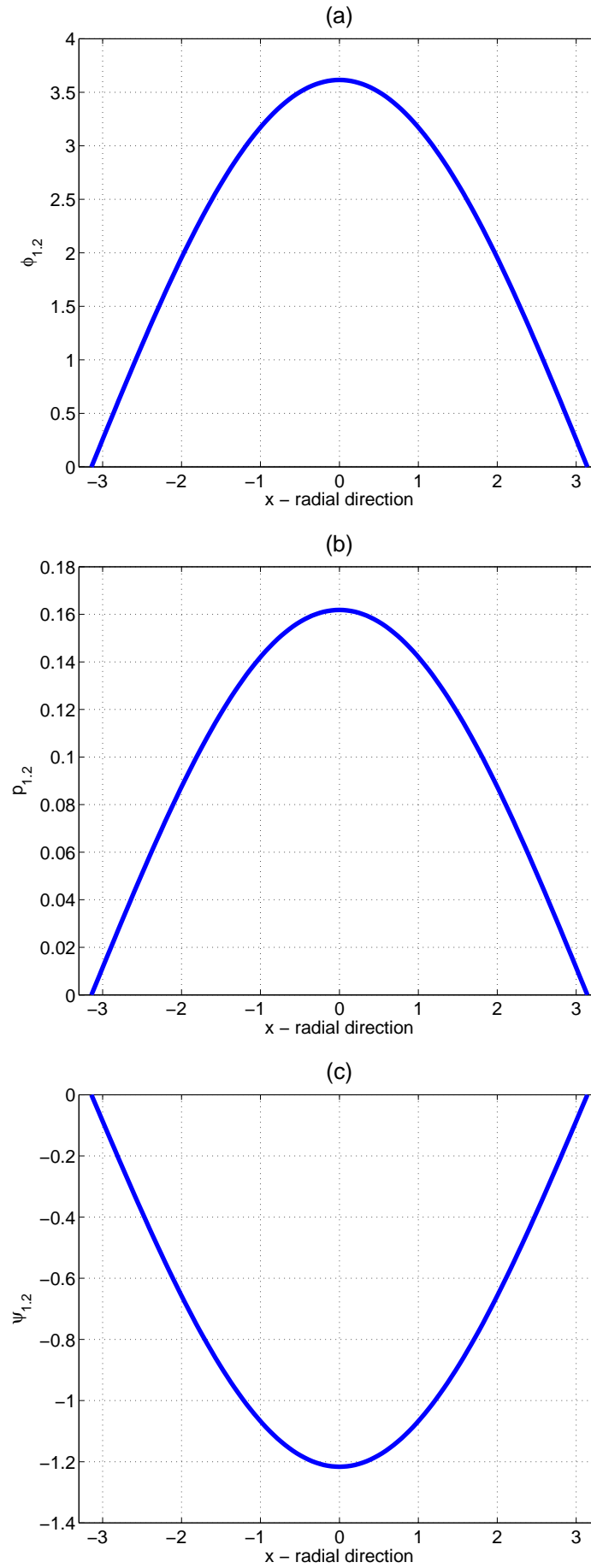


FIGURE 7.9 – Fonctions propres du mode le plus instable  $k_y = 1.2$  obtenues par une simulation linéaire des équations (7.7-7.9) : (a)  $\phi_{1,2}(x)$ , (b)  $p_{1,2}(x)$ , (c)  $\psi_{1,2}(x)$  à  $t = 200\tau_A$  avec  $\eta = \nu = \chi_{\perp} = 10^{-4}$ ,  $\kappa_1 = 3$ ,  $\kappa_2 = 0.35$ ,  $v^* = 10^{-2}$ ,  $\rho^{*2} = \frac{5}{3} * 0.002$  et  $\psi_0'^2 = 5.10^{-2}$ .



# Chapitre 8

## Résolution numérique du système linéaire complet

Nous venons de linéariser les équations (4.6,4.8,4.10) de différentes façon en négligeant plusieurs termes afin de caractériser les instabilités qui se développent sur des échelles spatiales et temporelles différentes. L'objectif de cette thèse est d'étudier la dynamique non-linéaire d'un îlot magnétique en présence de turbulence interchange. Nous allons maintenant regarder le système globalement et voir dans quelle mesure et/ou comment ces instabilités coexistent.

### 8.1 Mode de déchirement et modes interchanges

Pour étudier non-linéairement un îlot magnétique en présence d'une turbulence interchange, il faut que, linéairement, au moins un mode de déchirement soit instable au niveau des grandes échelles (pour permettre la formation de l'îlot) et qu'aux petites échelles plusieurs modes interchanges soient instables. Il s'agira alors de trouver les bons paramètres pour favoriser cette situation.

#### Formation d'un îlot magnétique en présence d'un interchange stable

Une première approche consiste à étudier l'évolution linéaire des équations (4.6,4.8,4.10) dans le cas de paramètres "proches" de paramètres expérimentaux même si notre modèle 2D slab est loin d'une quelconque réalité expérimentale. Nous avons donc choisi des paramètres typiques de TORE SUPRA avec un îlot relativement gros ( $L_{\perp} = 0.24m$  et  $\Delta'_{0.4} = 8$ ),  $\beta = 10^{-3}$ ,  $L_p = L_{\perp}$ ,  $R_0 = 2.24m$  et  $\Omega_i\tau_A = 0.5$ . Avec de telles valeurs, on a  $\kappa_1 = 0.11$ ,  $\kappa_2 = 0.36$ ,  $v^* = 2.10^{-3}$  et  $\rho^* = 3.33.10^{-3}$ . La Figure (8.1) présente le taux de croissance linéaire  $\gamma$  d'une simulation linéaire des équations (4.6,4.8,4.10) avec de telles valeurs de paramètres. Sur les petites échelles, aucun mode est instable; sur les grandes échelles, il y a deux modes instables. Comme le montre

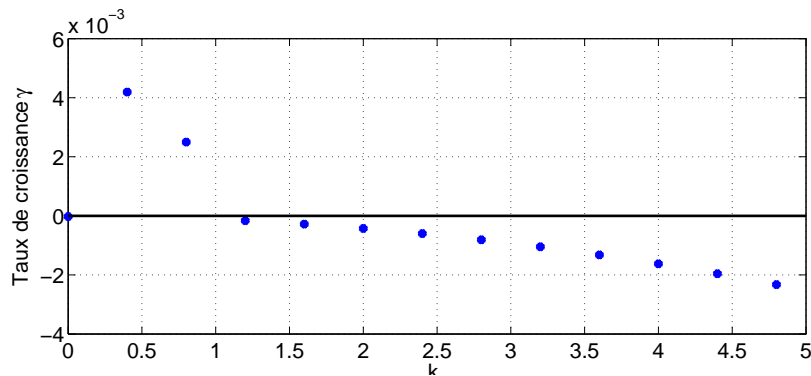


FIGURE 8.1 – Taux de croissance linéaire  $\gamma$  en fonction du nombre d’onde poloïdal  $k_y$  d’une simulation linéaire des équations (4.6-4.10) avec  $\eta = \nu = \chi_{\perp} = 10^{-4}$ ,  $\Delta' = 8$ ,  $L_y = 5\pi$ ,  $\kappa_1 = 0.11$ ,  $\kappa_2 = 0.36$ ,  $v^* = 2.10^{-3}$  et  $\rho^* = 3.33.10^{-3}$ .

la Figure (8.2) qui présente des fonctions propres (a)  $\psi_{0.4}(x)$ , (b)  $\phi_{0.4}(x)$  et (c)  $p_{0.4}(x)$  du mode le plus instable  $k_y$  de type “mode de déchirement”. En effet, pour une telle simulation, l’interchange est trop faible par rapport au champ magnétique et les modes interchanges sont stabilisés. Le mode le plus instable amène à la formation d’un îlot magnétique observé sur la Figure (8.3) par un couplage ‘ $\psi - \phi$ ’. En effet, le mécanisme d’échange n’est pas assez fort pour lutter contre “l’alvéenisation” des modes interchanges par le champ magnétique.

Nous verrons dans la partie suivante que l’étude non-linéaire d’une telle situation est très intéressante dans la mesure où le mécanisme d’échange (stable linéairement) joue un rôle important dans la dynamique non-linéaire de l’îlot magnétique.

## Formation d’un îlot magnétique en présence d’un interchange instable

Pour obtenir une déstabilisation des modes interchanges sur les petites échelles, il faut donc augmenter fortement les paramètres interchanges ( $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  et/ou  $v^*$ ) et étudier des situations où le mode de déchirement est moins instable (nous prendrons désormais  $\Delta'_{0.4} = 2$  avec  $L_y = 5\pi$ ). La Figure (8.4) montre le taux de croissance  $\gamma$  en fonction du nombre d’onde poloïdal  $k_y$  pour une simulation où  $\Delta'_{0.4} = 2$  et où l’on a augmenté fortement les paramètres d’interchanges :  $\kappa_1 = 5$  et  $v^* = 10^{-2}$ . Comme pour la situation précédente (Figure (8.1)), aux grandes échelles, le mode de déchirement  $k_y = 0.4$  est instable et permet la formation de l’îlot magnétique. Comme le montre la Figure (8.5) qui présente les fonctions propres (a)  $\psi_{0.4}(x)$ , (b)  $\phi_{0.4}(x)$  et (c)  $p_{0.4}(x)$ , la parité de ce mode correspond à un mode de déchirement avec des fonctions propres localisées sur la couche résistive, paire pour le flux magnétique et impaire pour le potentiel électrostatique et la pression. La Figure (8.4) montre également qu’il y a plusieurs modes instables au niveau des petites échelles. Ces modes sont déstabilisés par un mécanisme d’échange fort ( $\kappa_1$ ). Les fonctions propres (a)  $\psi_{2.4}(x)$ , (b)  $\phi_{2.4}(x)$  et (c)  $p_{2.4}(x)$  du mode interchange le plus instable ( $k_y = 2.4$ ) sont présentées sur la Figure (8.6). La parité de ces fonctions propres correspond bien à une parité de type interchange :  $\phi_{2.4}(x)$  et  $p_{2.4}(x)$  sont paires et  $\psi_{2.4}(x)$  est impaire. Par

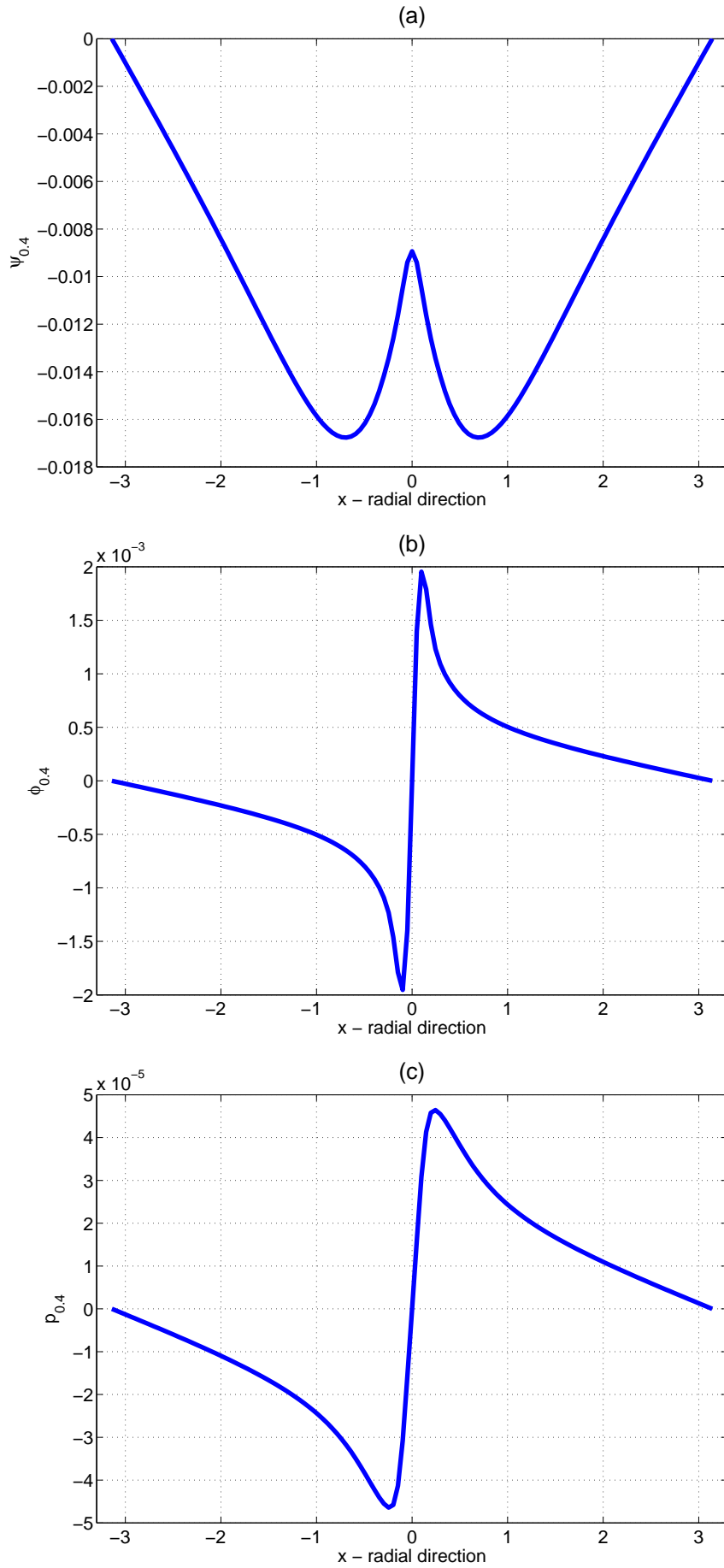


FIGURE 8.2 – Fonctions propres du mode le plus instables  $k_y = 0.4$  obtenues par une simulation linéaire des équations (4.6-4.10) : (a)  $\psi_{0.4}(x)$ , (b)  $\phi_{0.4}(x)$  et (c)  $p_{0.4}(x)$  à  $t = 4700\tau_A$  avec  $\eta = \nu = \chi_{\perp} = 10^{-4}$ ,  $\Delta'_{0.4} = 8$ ,  $L_y = 5\pi$ ,  $\kappa_1 = 0.11$ ,  $\kappa_2 = 0.36$ ,  $v^* = 2.10^{-3}$  et  $\rho^* = 3.33.10^{-3}$ .

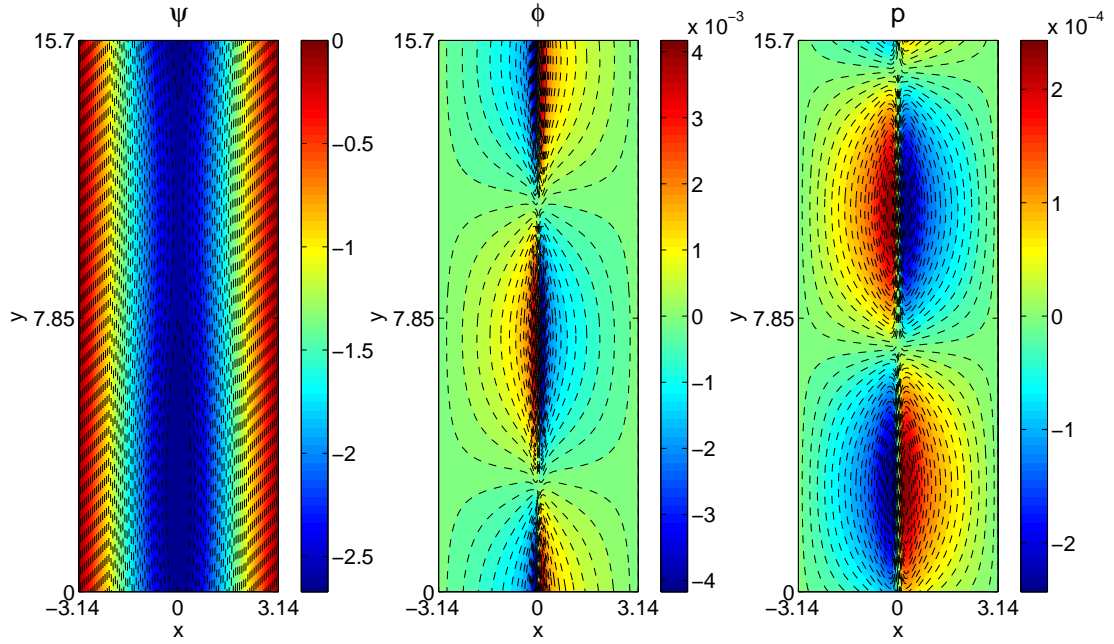


FIGURE 8.3 – Contours du flux magnétique  $\psi$ , du potentiel électrique  $\phi$  et de la pression électronique  $p_e$  obtenus par une simulation linéaire des équations (7.1-4.10) à  $t = 4700\tau_A$  avec  $\eta = \nu = \chi_{\perp} = 10^{-4}$ ,  $\Delta'_{0.4} = 8$ ,  $L_y = 5\pi$ ,  $\kappa_1 = 0.11$ ,  $\kappa_2 = 0.36$ ,  $v^* = 2.10^{-3}$  et  $\rho^* = 3.33.10^{-3}$ .

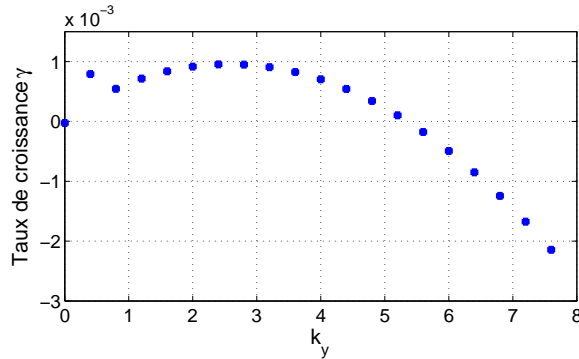


FIGURE 8.4 – Taux de croissance  $\gamma$  en fonction du nombre d'onde poloidal  $k_y$  obtenu par une simulation linéaire des équations (4.6-4.10) avec  $\eta = \nu = \chi_{\perp} = 10^{-4}$ ,  $\kappa_1 = 5$ ,  $\kappa_2 = 0.36$ ,  $v^* = 10^{-2}$ ,  $\rho^{*2} = \frac{5}{3}2.10^{-3}$ ,  $\Delta'_{0.4} = 2$  et  $L_y = 5\pi$ .



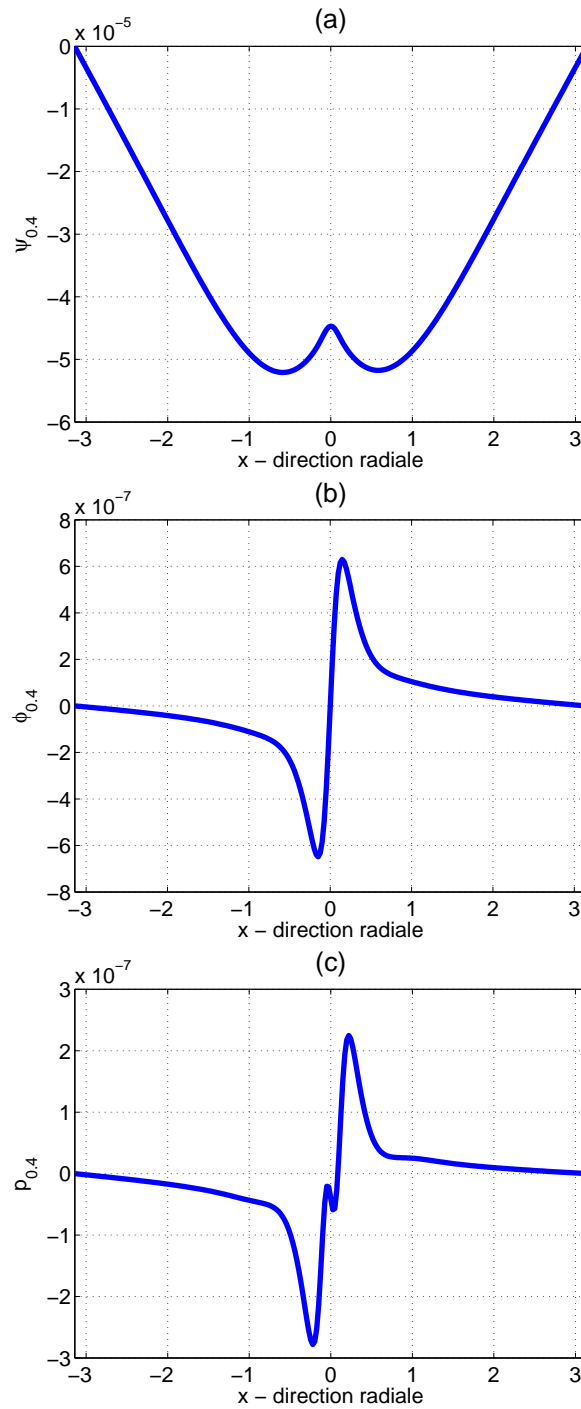


FIGURE 8.5 – Fonctions propres du mode  $k_y = 0.4$  obtenues par la simulation linéaire des équations (4.6-4.10) : (a)  $\psi_{0.4}(x)$ , (b)  $\phi_{0.4}(x)$  et (c)  $p_{0.4}(x)$  à  $t = 9900\tau_A$  avec  $\eta = \nu = \chi_{\perp} = 10^{-4}$ ,  $\Delta'_{0.4} = 2$ ,  $L_y = 5\pi$ ,  $\kappa_1 = 5$ ,  $\kappa_2 = 0.36$ ,  $v^* = 10^{-2}$  et  $\rho^{*2} = \frac{5}{3}2 \cdot 10^{-3}$ .

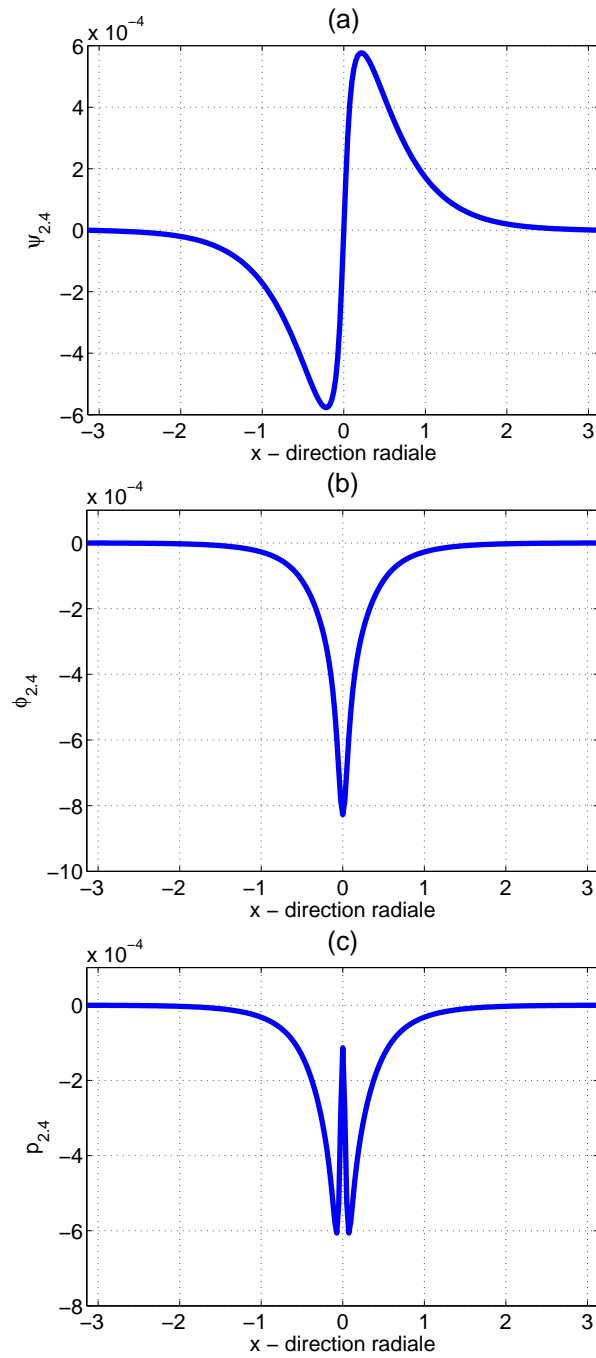


FIGURE 8.6 – Fonctions propres du mode  $k_y = 2.4$  obtenues par la simulation linéaire des équations (4.6-4.10) : (a)  $\psi_{2,4}(x)$ , (b)  $\phi_{2,4}(x)$  et (c)  $p_{2,4}(x)$  à  $t = 9900\tau_A$  avec  $\eta = \nu = \chi_{\perp} = 10^{-4}$ ,  $\Delta'_{0,4} = 2$ ,  $L_y = 5\pi$ ,  $\kappa_1 = 5$ ,  $\kappa_2 = 0.36$ ,  $v^* = 10^{-2}$  et  $\rho^{*2} = \frac{5}{3}2 \cdot 10^{-3}$ .

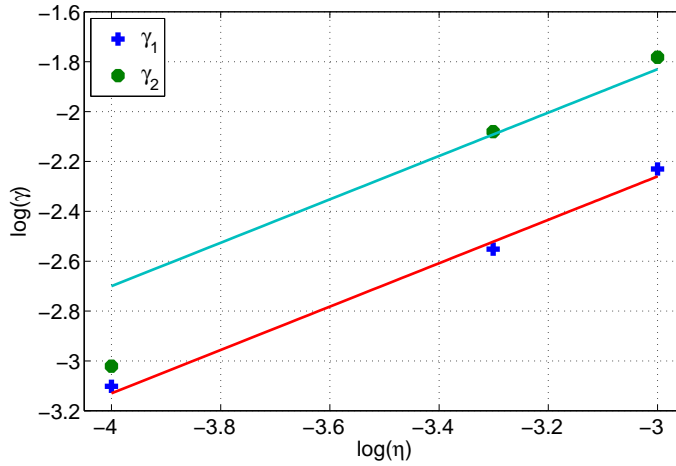


FIGURE 8.7 – Effet de la résistivité sur la double instabilité :  $\gamma_1$  est le taux de croissance maximal du mode de déchirement,  $\gamma_2$  est le taux de croissance du mode interchange le plus instable. Les simulations linéaires ont été faites avec des paramètres tels que  $\nu = \chi_\perp = 10^{-4}$ ,  $\kappa_1 = 5$ ,  $\kappa_2 = 0.36$ ,  $v^* = 10^{-2}$ ,  $\rho^{*2} = \frac{5}{3}2.10^{-3}$ ,  $\Delta'_{0.4} = 2$  et  $L_y = 5\pi$ .

contre, la présence d'un champ magnétique affecte les modes interchanges qui n'occupent plus toute la boîte mais restent localisés au voisinage de l'îlot magnétique.

## 8.2 Effet de la résistivité $\eta$

Comme nous l'avons vu au paragraphe (3.1.2), la résistivité  $\eta$  est un paramètre très important pour la stabilité du mode de déchirement. Néanmoins, son effet sur les modes interchanges électromagnétiques n'est pas très clair. Il est donc intéressant de voir comment la résistivité affecte la résolution linéaire des équations (4.6,4.8,4.10). Plus précisément, il s'agit d'étudier son impact sur une situation linéaire où la double instabilité est présente. Lorsque le mode de déchirement est instable aux grandes échelles pendant que les modes interchanges sont instables aux petites échelles, il y a deux taux de croissance significatifs :  $\gamma_1$  pour le mode de déchirement et  $\gamma_2$  pour le mode d'interchange le plus instable. La Figure (8.7) présente l'évolution de  $\gamma_1$  et de  $\gamma_2$  en fonction de la résistivité lorsque tous les autres paramètres ont été fixés ( $\nu = \chi_\perp = 10^{-4}$ ,  $\kappa_1 = 5$ ,  $\kappa_2 = 0.36$ ,  $v^* = 10^{-2}$ ,  $\rho^{*2} = \frac{5}{3}2.10^{-3}$ ,  $\Delta'_{0.4} = 2$  et  $L_y = 5\pi$ ). La Figure (8.7) nécessiterait, en fait, d'être tracée sur un domaine plus grand pour la résistivité. La loi d'échelle pour le mode de déchirement est alors déterminée  $\gamma_1 = \eta^{0.87} \sim \eta^{4/5}$ . Elle est différente de celle trouvée pour le mode de déchirement classique (Eq.6.11) et de celle trouvée pour un mode de déchirement conduit par la pression (Eq.7.4)). La résistivité a également un impact sur les modes interchanges ce qui montre bien que ce sont des modes électromagnétiques et non électrostatiques. Pour les résistivités élevées, la loi d'échelle suit celle du mode de déchirement  $\gamma_1 \sim \eta^{4/5}$ . Pour les résistivités plus faibles, il n'y a pas assez de points pour déterminer la loi d'échelle. Pour aller plus loin, la Figure (8.8) présente la variation du taux de croissance  $\gamma$  en fonction du nombre d'onde poloïdal  $k_y$  obtenu par des simulations linéaires des équations (4.6,4.8,4.10) pour trois valeurs différentes de la résistivité : (a)  $\eta = 10^{-4}$ , (b)  $\eta = 5.10^{-4}$  et

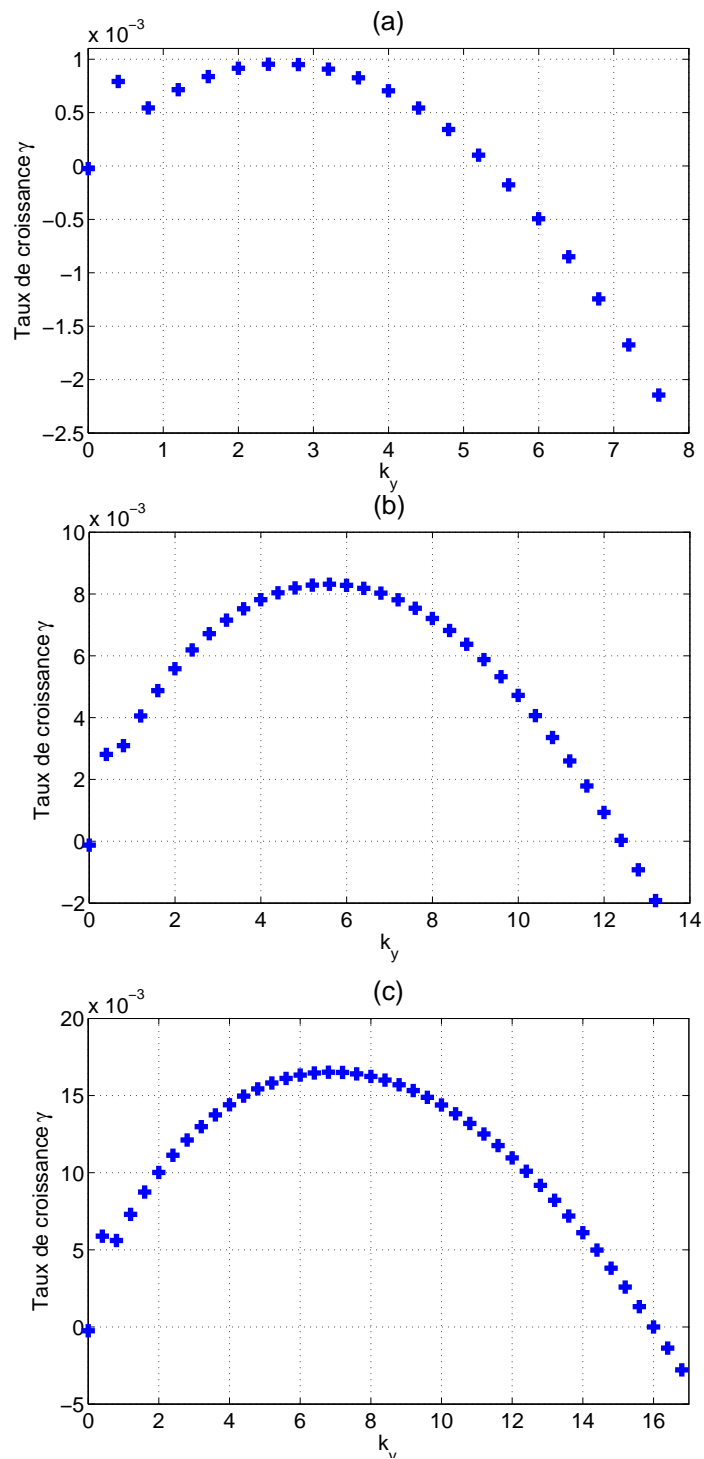


FIGURE 8.8 – Taux de croissance  $\gamma$  obtenu par simulation linéaire des équations (4.6-4.10) pour des valeurs différentes de la résistivité : (a)  $\eta = 10^{-4}$ , (b)  $\eta = 5 \cdot 10^{-4}$  et (c)  $\eta = 10^{-3}$ .

(c)  $\eta = 10^{-3}$ . Il apparaît clairement que lorsque la résistivité augmente, le nombre de modes interchanges instables augmentent ainsi que leur taux de croissance. Ce qui revient à augmenter l'énergie des petites échelles. Il est intéressant de noter également un déplacement des modes instables vers les grandes échelles.



# Conclusion

Les modes instables de l'interchange électrostatique sont pairs et occupent toute la boîte alors que le mode de déchirement donne des fonctions impaires pour la pression et le potentiel électrostatique et une fonction propre du flux magnétique paire et localisée au niveau de la couche résistive. La différence de parité entre les deux instabilités pose un problème important pour la résolution linéaire analytique des équations (4.6, 4.8, 4.10).

Nous avons effectué différentes études linéaires avec différentes hypothèses simplificatrices. Tout d'abord, la pression électronique par l'intermédiaire de  $\rho^*$  affecte fortement la stabilité du mode de déchirement classique. En effet, les études analytique et numérique montrent que pour de faibles valeurs de  $\rho^*$ , c'est à dire pour un faible couplage entre la pression électronique et le flux magnétique, la pression affecte peu le mode de déchirement classique. L'îlot magnétique se forme, à une vitesse inchangée par la pression, grâce aux cellules quadripolaire qui elles-mêmes se forment sur le potentiel électrostatique. Par contre, pour un fort couplage entre la pression électronique et le flux magnétique, (c'est à dire pour une grande valeur de  $\rho^*$  ou pour de faible valeur de la résistivité  $\eta$  (voir Figure (7.3)), la formation linéaire du mode de déchirement est profondément affectée par la pression électronique. L'îlot magnétique croît plus vite et c'est la structure en quadripôle de la pression qui maintient l'îlot, le potentiel électrostatique jouant un rôle secondaire.

Ensuite, nous avons résolu linéairement le système (4.6, 4.8, 4.10) en supposant les trois champs  $\phi$ ,  $p$  et  $\psi$  pairs et en faisant l'hypothèse d'un champ magnétique d'équilibre constant radialement  $\psi'_0(x) = \text{cst}$ . L'effet de la présence du champ magnétique est "d'alfvéniser" les modes interchanges électrostatiques. Ainsi, pour obtenir des modes d'interchange magnétique instables, il faut soit de forts effets de courbure et de gradient de pression (valeurs élevées de  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$ ), soit un champ magnétique faible à l'extérieur de la couche de courant.

Enfin, la résolution linéaire complète des équations (4.6, 4.8, 4.10) a été faite de manière numérique. Tout d'abord, nous avons choisi des paramètres typiques de TORE SUPRA. Dans ce cas là, le champ magnétique est trop fort en comparaison des effets de courbure et de gradient de pression. Il en résulte que seul le mode de déchirement contrôlé par un couplage entre le flux magnétique et le potentiel électrostatique est instable au niveau des grandes échelles. Tous les modes instables de l'interchange électrostatique sont stabilisés par "alvénisation" au niveau des petites échelles. Pour déstabiliser ces modes, il faut amplifier la force des termes d'interchange (augmentation de  $\kappa_1$  et de  $v^*$ ). On obtient un mode de déchirement instable aux grandes

échelles qui permet la formation d'un îlot magnétique et plusieurs modes interchanges instables au niveau des petites échelles. La parité de ces modes est conforme à ce que l'on attend : les fonctions propres de la pression et du potentiel électrostatique sont impaires pendant que la fonction propre du flux magnétique est paire pour le mode de déchirement instable. Alors que pour les modes d'interchange, les fonctions propres de la pression et du potentiel électrostatique sont paires pendant que la fonction propre du flux magnétique est impaire.

Cette étude linéaire est une première approche pour comprendre la dynamique d'un îlot magnétique en présence d'interchange. Elle sera très utile pour la partie suivante dans lequel nous allons étudier l'évolution non-linéaire du système.



Quatrième partie

Etude Non-linéaire



# Introduction

Dans la partie précédente, nous avons étudié analytiquement et numériquement la dynamique linéaire d'un îlot magnétique en présence de l'instabilité d'interchange. Nous avons vu que suivant les différents paramètres choisis initialement (paramètres du mode de déchirement, paramètres de l'interchange, paramètres de diffusion) la situation linéaire pouvait être différente. Il apparaît évident alors que la dynamique non-linéaire dépendra également de ces différents paramètres. Dans cette nouvelle partie, nous allons donc étudier la dynamique non-linéaire d'un îlot magnétique dans des cas bien précis en résolvant numériquement les équations (4.6,4.8,4.10). Principalement, nous allons étudier trois cas non-linéaires avec des paramètres d'interchange et de mode de déchirement différents mais avec des paramètres de diffusion identiques ( $\nu = \chi_{\perp} = \eta = 10^{-4}$ ). Le tableau (8.1) donne les différentes valeurs des paramètres pour les trois cas. Il est intéressant de noter qu'il y a deux jeux de paramètres possibles pour le système (4.6,4.8,4.10). Le premier jeu,  $(\beta, L_{\perp}, L_p, R_0, \Omega_i, \tau_A)$ , est pratique pour comparer les résultats avec ceux obtenus par l'expérience puisqu'il est composé de paramètres liés aux caractéristiques d'une machine. Le second,  $(\kappa_1, \kappa_2, v^*, \rho^*)$ , est utilisé dans un but plus théorique et sert à mettre l'accent sur les différents mécanismes qui existent dans le système (4.6,4.8,4.10). Par exemple, les paramètres  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  vont contrôler le mécanisme d'interchange pendant que  $\rho^*$  contrôlera le couplage ' $\psi - p$ ' et  $v^*$  l'effet diamagnétique.

La première simulation correspond à une situation linéaire telle que seul le mode de déchirement  $k_y = 1$  est instable et permet la formation d'un petit îlot magnétique par un couplage entre la pression et le flux magnétique. Dans un plasma de tokamak, la résistivité est très faible (de l'ordre de  $10^{-7}$ ). Comme le montre la Figure (7.3), pour des valeurs si faibles de la résistivité, la formation de l'îlot est contrôlée par un couplage ' $\psi - p$ '. Il est donc intéressant d'étudier la dynamique non-linéaire d'un îlot magnétique issu d'un couplage avec la pression. La difficulté pour une telle simulation est la valeur très faible de la résistivité qui n'est pas numériquement stable. La première simulation a donc des paramètres loin d'une réalité physique

	$\beta$	$L_{\perp}$	$L_p$	$R_0$	$\Omega_i \tau_A$	$\Delta'$	$\kappa_1$	$\kappa_2$	$v^*$	$\rho^*$	$L_y$	$L_x$
Simu 1	$10^{-2}$				0.5	6	$10^{-2}$	0	1	1	$2\pi$	$2\pi$
Simu 2	$10^{-3}$	$0.24m$	$0.24m$	$2.24m$	0.5	8	0.11	0.36	$10^{-3}$	$\sqrt{\frac{5}{3}} 2 \cdot 10^{-3}$	$2\pi$	$5\pi$
Simu 3	$10^{-3}$	$0.24m$	$0.24m$	$2.24m$	0.5	2	5	0.36	$10^{-2}$	$\sqrt{\frac{5}{3}} 2 \cdot 10^{-3}$	$2\pi$	$5\pi$

TABLE 8.1 – Étude de trois cas non-linéaire différents.

mais tels que l'on se trouve dans un régime ' $\psi - p$ ' ( $\rho^* = 1$ ). De plus, les modes interchanges instables dans le cas électrostatique sont stabilisés par "alvéenisation" dans le cas électromagnétique. Une autre particularité importante est la négligence de l'effet diamagnétique dans la loi d'Ohm Eq.(4.10) par souci de simplification. Nous verrons que dans ce cas, la dynamique du système présente quatre régimes importants. Tout d'abord, il y a une croissance linéaire de l'îlot magnétique puis le système atteint un premier plateau de saturation. Ensuite, les petites échelles fortement générées permettent une transition vers un nouvel état stationnaire. Cette première étude permet donc de montrer que dans le cas d'un petit îlot, les petites échelles sont générées non-linéairement et affectent fortement la dynamique [51].

La deuxième simulation correspond à une situation expérimentale "réaliste" pour le tokamak TORE SUPRA. La situation linéaire est telle que seul le mode de déchirement  $k_y = 0.4$  est instable alors que le mécanisme d'échange présent dans les équations est stable comme le montre la Figure (8.1). Dans cette simulation, l'îlot magnétique est formé par le couplage classique ' $\psi - \phi$ '. En effet, avec des paramètres réalistes et une résistivité trop importante ( $\eta = 10^{-4}$ ), on se trouve dans le régime du mode de déchirement classique. Cette fois ci, l'effet diamagnétique dans la loi d'Ohm Eq.(4.10) n'est plus négligé. Il s'agit donc maintenant d'étudier l'effet d'un mécanisme d'interchange stable sur la dynamique non-linéaire d'un îlot magnétique en présence de l'effet diamagnétique. Une fois encore, la dynamique du système présente quatre régimes importants : Les deux premiers régimes sont contrôlés par le mode de déchirement qui permet la formation d'un îlot magnétique par un couplage ' $\psi - \phi$ '. Ensuite, le mécanisme d'interchange stable linéairement va affecter la dynamique non-linéaire en permettant une forte génération d'un flux zonal qui conduit à une bifurcation. Finalement, le système atteint un nouveau régime stationnaire quasi-linéaire. Nous verrons que dans cette situation, même si le mécanisme d'interchange est stable, il affecte profondément l'évolution non-linéaire de l'îlot magnétique. Dans ce cas, les petites échelles ne sont pas générées et la dynamique est quasi-linéaire [52].

La troisième simulation est telle que les paramètres d'interchange ( $\kappa_1$  et  $v^*$ ) ont été fortement augmentés et le mode de déchirement a été affaibli ( $\Delta' = 2$ ) par rapport à la simulation précédente afin de lutter contre "l'alvéenisation" des modes interchanges. Ainsi, la situation linéaire est telle que l'on a un mode de déchirement instable aux grandes échelles ( $k_y = 0.4$ ) qui permet la formation d'un îlot magnétique par couplage ' $\psi - p$ '. Aux petites échelles, les paramètres d'interchange sont suffisamment forts pour permettre la déstabilisation des modes interchanges comme le montre la Figure (8.4). La dynamique non-linéaire présente encore quatre phases importantes. Tout d'abord, il y a croissance des modes interchanges aux petites échelles au voisinage de la surface de résonance. Puis il y a une première phase non-linéaire où les structures quadripolaires apparaissent au niveau de la pression : l'îlot magnétique est en train de se former. Ensuite, une cascade non-linéaire directe nourrit l'îlot magnétique (qui grossit) et autorise la génération d'un flux zonal. Finalement, l'îlot sature et les structures liées à l'interchange ont tendance à disparaître.

# Chapitre 9

## Impact des effets de rayon de Larmor finis sur la dynamique non-linéaire d'un îlot magnétique

Dans un tokamak, la résistivité est très faible (de l'ordre de  $10^{-7}$ ). La Figure (7.3) montre que pour une telle valeur de la résistivité on se trouve dans un régime où l'îlot magnétique est conduit par le couplage entre le flux magnétique et la pression électronique. Il est donc intéressant d'étudier la dynamique non-linéaire d'un îlot conduit par un couplage ' $\psi - p$ '. Cependant, il est difficile d'atteindre numériquement des valeurs aussi faibles pour la résistivité. Il est plus facile d'augmenter les paramètres de couplage entre la pression et le flux magnétique. Ainsi, la simulation 1 se place dans un régime ' $\psi - p$ ' avec une valeur relativement haute pour la résistivité ( $\eta = 10^{-4}$ ) et où l'on a augmenté fortement la valeur de  $\rho^*$  ( $\rho^* = 1$ ). Les paramètres de cette simulation ne sont donc pas cohérents avec ceux d'une expérience sur un tokamak, mais ils permettent d'atteindre numériquement un régime contrôlé par le couplage ' $\psi - p$ '. La situation linéaire de cette simulation est donc telle qu'il y a un seul mode de déchirement instable aux grandes échelles ( $k_y = 1$ ). La croissance de ce mode est conduit par un couplage entre le flux magnétique et la pression. La Figure (9.1) présente l'évolution temporelle de l'énergie magnétique  $E_m$ , de l'énergie de la pression  $E_p$  et de l'énergie cinétique  $E_c$ . La dynamique présente quatre régimes importants. Tout d'abord, il y a croissance linéaire de l'îlot magnétique (jusqu'à  $t \sim 1500\tau_A$ ). Pendant le deuxième, le système atteint un premier plateau où les énergies continuent de croître faiblement (jusqu'à  $t \sim 4500\tau_A$ ). Le troisième régime est caractérisé par une augmentation rapide des énergies de pression et cinétique. Dans le dernier régime, le système atteint un nouveau plateau (à partir de  $t \sim 5100\tau_A$ ). C'est une dynamique complexe qui mérite d'être décrite étape par étape.

Pendant la première phase (jusqu'à  $t \sim 1500\tau_A$ ), il y a croissance linéaire de l'îlot magnétique. La Figure (9.1) montre que pendant cette phase l'énergie de la pression électronique  $E_p$  est supérieure à l'énergie cinétique  $E_c$ . Ceci implique que la dynamique est bien contrôlée par le couplage entre le flux magnétique  $\psi$  et la pression électronique  $p$ . La Figure (9.2) présente les contours

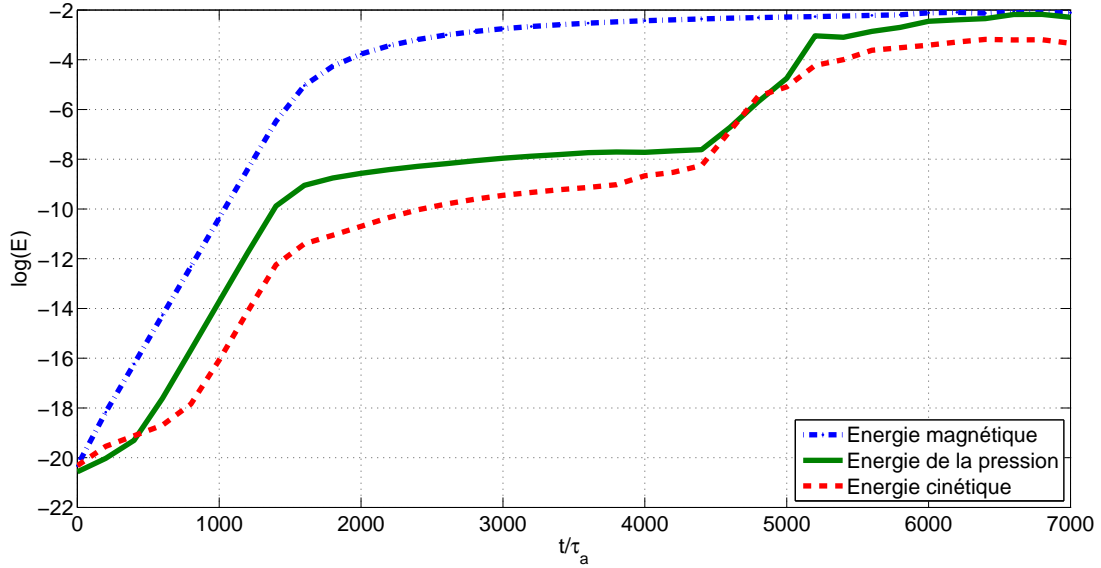


FIGURE 9.1 – Évolution temporelle des l'énergie magnétique  $E_m$ , de l'énergie de la pression  $E_p$  et de l'énergie cinétique  $E_c$  obtenue par la simulation 1.

du flux magnétique  $\psi$ , du potentiel électrostatique  $\phi$  et de la pression  $p$  pendant cette phase, plus précisément à  $t = 1450\tau_A$ . Sur cette Figure, l'amplitude du potentiel électrostatique est de deux ordres de grandeur en dessous de celle de la pression en forme de quadripôle nécessaire à la formation de l'îlot magnétique. Après cette phase linéaire, le système atteint un premier plateau (jusqu'à  $t \sim 4500\tau_A$ ). Ce second régime est toujours contrôlé par le couplage ' $\psi - p$ '. En effet, la Figure (9.3), qui présente les contours de  $\psi$ ,  $\phi$  et  $p$  à  $t = 3000\tau_A$ , c'est à dire pendant ce second régime, montre que l'îlot magnétique est toujours maintenu par les cellules de pression en forme de quadripôle. Pendant ce second régime, toute l'énergie cinétique est contenue dans les cellules de l'écoulement  $\phi$ , lui-même localisé au voisinage de l'îlot magnétique. Pendant tout ce régime, l'énergie cinétique  $E_c$  continue d'augmenter petit à petit et, après  $t \sim 3600\tau_A$ , les cellules de l'écoulement commencent à s'éloigner de l'îlot en s'élargissant radialement, jusqu'à occuper toute la boîte. Comme le montre la Figure (9.1), à  $t \gtrsim 4500\tau_A$ , il y a une brutale croissance des énergies cinétique et de pression. La Figure (9.4) montre, d'ailleurs, les contours des champs  $\psi$ ,  $\phi$  et  $p$  à  $t = 4800\tau_A$ , c'est à dire pendant cette transition. Loin de l'îlot magnétique, le courant est très faible et pour  $t/\tau_A \in [4500, 5000]$ , un mode interchange dominant ( $\phi_{11}, p_{11}$ ) croît fortement en dehors de la couche de courant (ici,  $\phi_{11}$  signifie  $\phi(k_x = 1, k_y = 1)$ ) pendant que les énergies de pression et cinétique deviennent égales. En effet, comme le montre la Figure (9.4), il y a bien croissance des grosses structures de convection ( $k_x = 1,$ ) sur le potentiel électrostatique  $\phi$  et sur la pression  $p$  en dehors de la couche de courant. Cependant, sur la Figure (9.4), la structure de la pression est plus complexe : à l'intérieur de la couche de courant, les cellules du mode de déchirement persistent. La structure de la pression électronique est donc le siège d'une compétition entre les modes de déchirement et d'interchange conduisant à la génération de petites échelles (comme nous le verrons plus tard). Evidemment, le système n'est pas

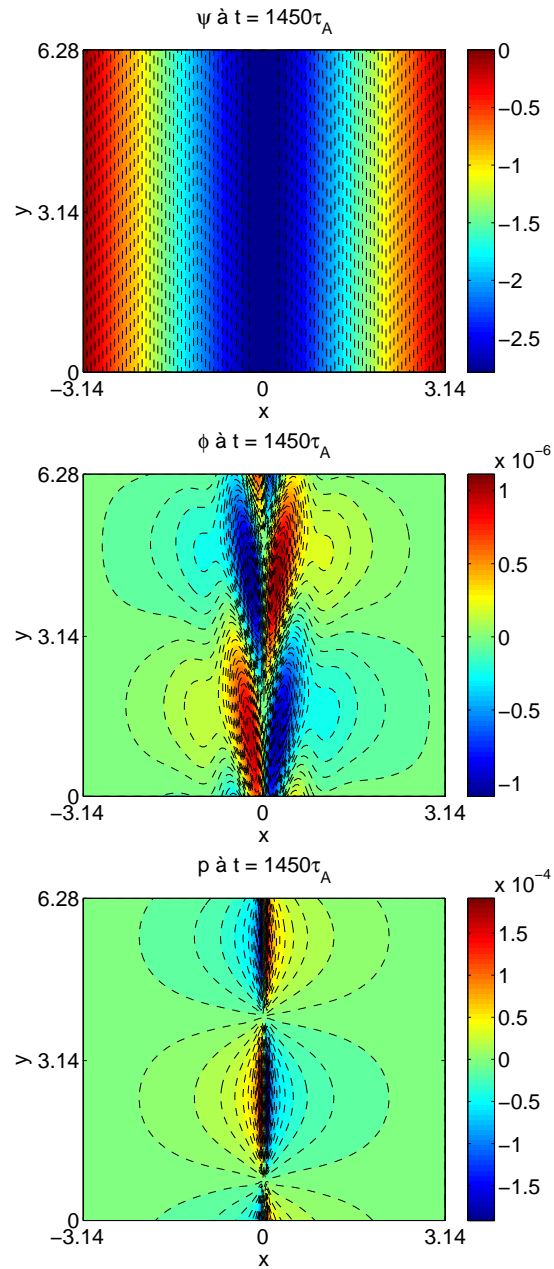


FIGURE 9.2 – Contours du flux magnétique  $\psi$ , du potentiel électrostatique  $\phi$  et de la pression électronique  $p$  à  $t = 1450\tau_A$  pendant la phase linéaire obtenus par la simulation 1.

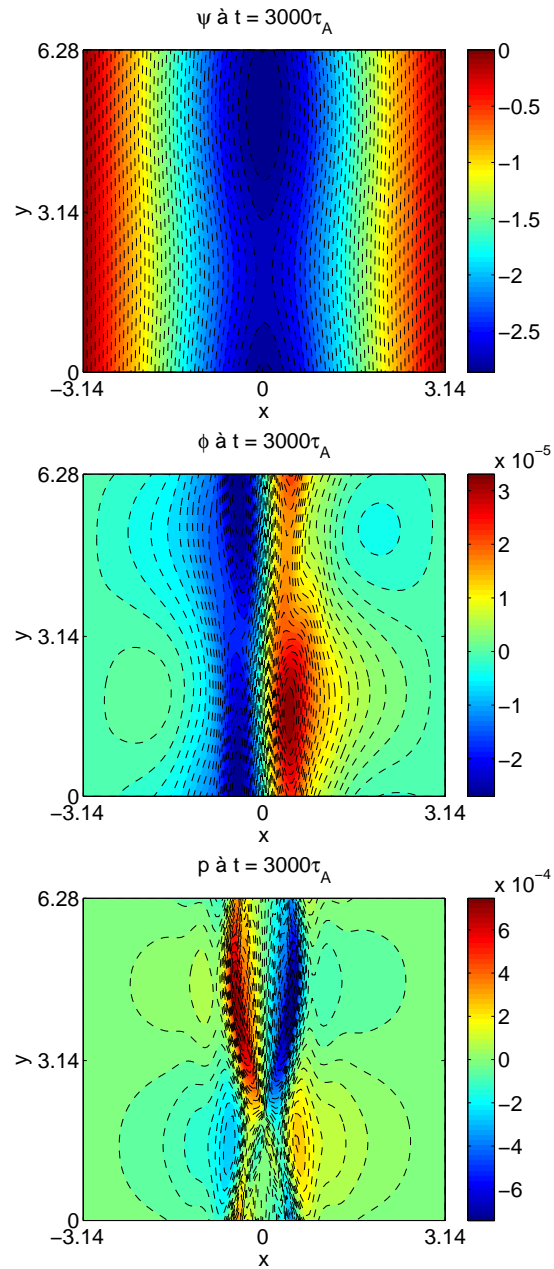


FIGURE 9.3 – Contours du flux magnétique  $\psi$ , du potentiel électrostatique  $\phi$  et de la pression électronique  $p$  à  $t = 3000\tau_A$  pendant le deuxième régime obtenu par la simulation 1.



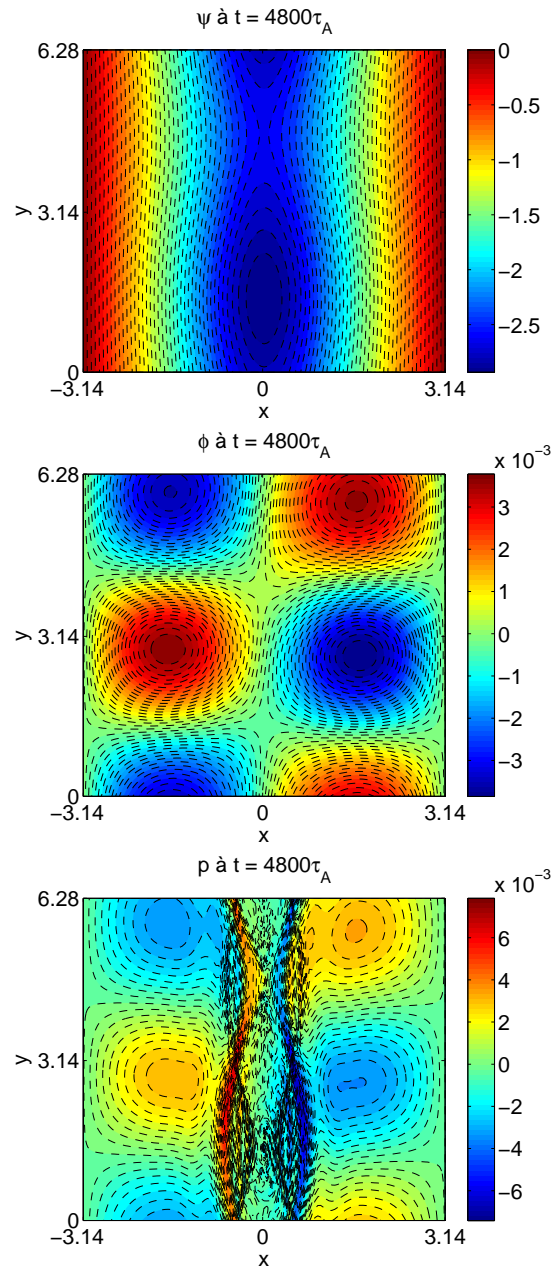


FIGURE 9.4 – Contours du flux magnétique  $\psi$ , du potentiel électrostatique  $\phi$  et de la pression électronique  $p$  obtenus par la simulation 1 à  $t = 4800\tau_A$ , juste avant la transition.

stable et cette compétition conduit à une modification drastique de la dynamique. En moins de 200 temps d'Alfvén, autour de  $t \sim 5000\tau_A$ , une croissance abrupte de l'énergie contenue dans les fluctuations de pression est observée et la dynamique est complètement modifiée, c'est à dire, une bifurcation a lieu. Après  $t \geq 5100\tau_A$ , le système atteint un nouvel état caractérisé par l'apparition d'un îlot de pression comme le montre la Figure (9.5) qui présente les contours des champs  $\psi$ ,  $\phi$  et  $p$ . Pendant ce quatrième régime, la pression domine sur l'écoulement,  $E_p \gg E_c$ , et l'îlot magnétique fini par saturer.

Juste avant la bifurcation, la Figure (9.4) montre qu'il y a compétition entre les modes d'interchange et de déchirement. La Figure (9.6) présente les spectres avant la bifurcation à  $t = 3000\tau_A$  (a) et après la bifurcation à  $t = 6000\tau_A$  (b). Cette Figure montre que la compétition entre les deux modes conduit à la génération de petites échelles. Avant la bifurcation, le mode interchange est observé sur les modes  $k_y = 1$  et  $k_y = 2$ , l'énergie de la pression étant bien plus grande que l'énergie cinétique. Les spectres de la Figure (9.6) montrent également un comportement oscillatoire du système lié à des interactions non-linéaires et à la génération des petites échelles. Après, la bifurcation dynamique, la persistance des petites échelles est observée, ainsi qu'une augmentation de leur énergie. Les spectres de la Figure (9.6) montrent aussi qu'après la bifurcation, un écoulement poloïdal moyen ainsi qu'une pression poloïdale moyenne ont été générés. Nous verrons dans la partie suivante que ces flux poloïdaux sont liés aux propriétés de rotation de l'îlot magnétique. Il est également intéressant de noter que pour  $8 \leq k_y \leq 50$ , il y a équipartition entre les spectres magnétique et de pression. De plus, sur le spectre magnétique, il apparaît clairement que le mode  $k_y = 1$  est dominant. Il est lié à l'îlot magnétique qui est une structure quasi-linéaire. Cependant, le spectre (b) de la Figure (9.6) montre que l'énergie de pression des modes  $1 \leq k_y \leq 7$  augmente fortement après la bifurcation. Ainsi la structure de la pression en îlot observée après la transition sur la Figure (9.6) est clairement une structure non-linéaire.

Dans le dernier régime où les énergies atteignent un nouveau plateau, la dynamique a changé drastiquement, plus précisément la dynamique de la pression. Non seulement, la structure de la pression devient complètement non-linéaire mais la vitesse générée par les fluctuations non-linéaires de pression  $v_{dia} = \frac{\partial}{\partial x} \langle p \rangle_y$  (les crochets  $\langle \rangle$  signifient une moyenne suivant la direction poloïdale  $y$ ) gagne en amplitude et change de parité. En effet, la Figure (9.7) présente  $v_{dia}$  en fonction de la direction radiale  $x$  avant la bifurcation à  $t = 3000\tau_A$  (a) et après la bifurcation à  $t = 6000\tau_A$  (b). Avant la bifurcation la vitesse poloïdale diamagnétique est paire et faible en amplitude (de l'ordre de  $10^{-3}$ ). Après la transition,  $v_{dia}$  est fortement générée (son amplitude devient de l'ordre de 1), perd sa parité et devient impaire à l'intérieure de la couche de courant.

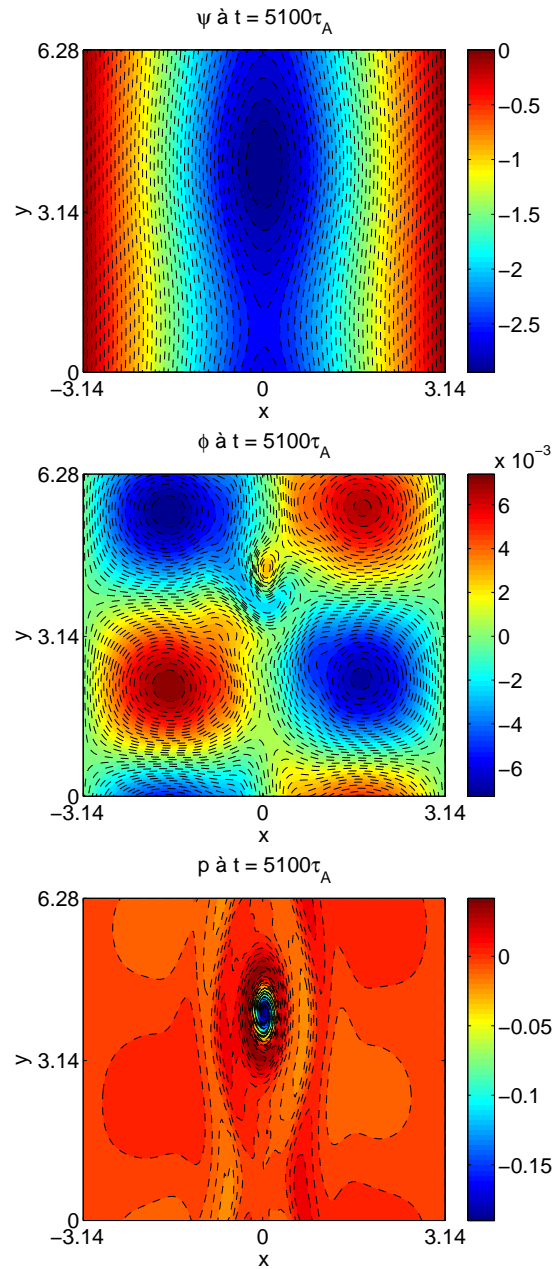


FIGURE 9.5 – Contours du flux magnétique  $\psi$ , du potentiel électrostatique  $\phi$  et de la pression électronique  $p$  obtenu par la simulation 1 à  $t = 5100\tau_A$ , juste après la transition.

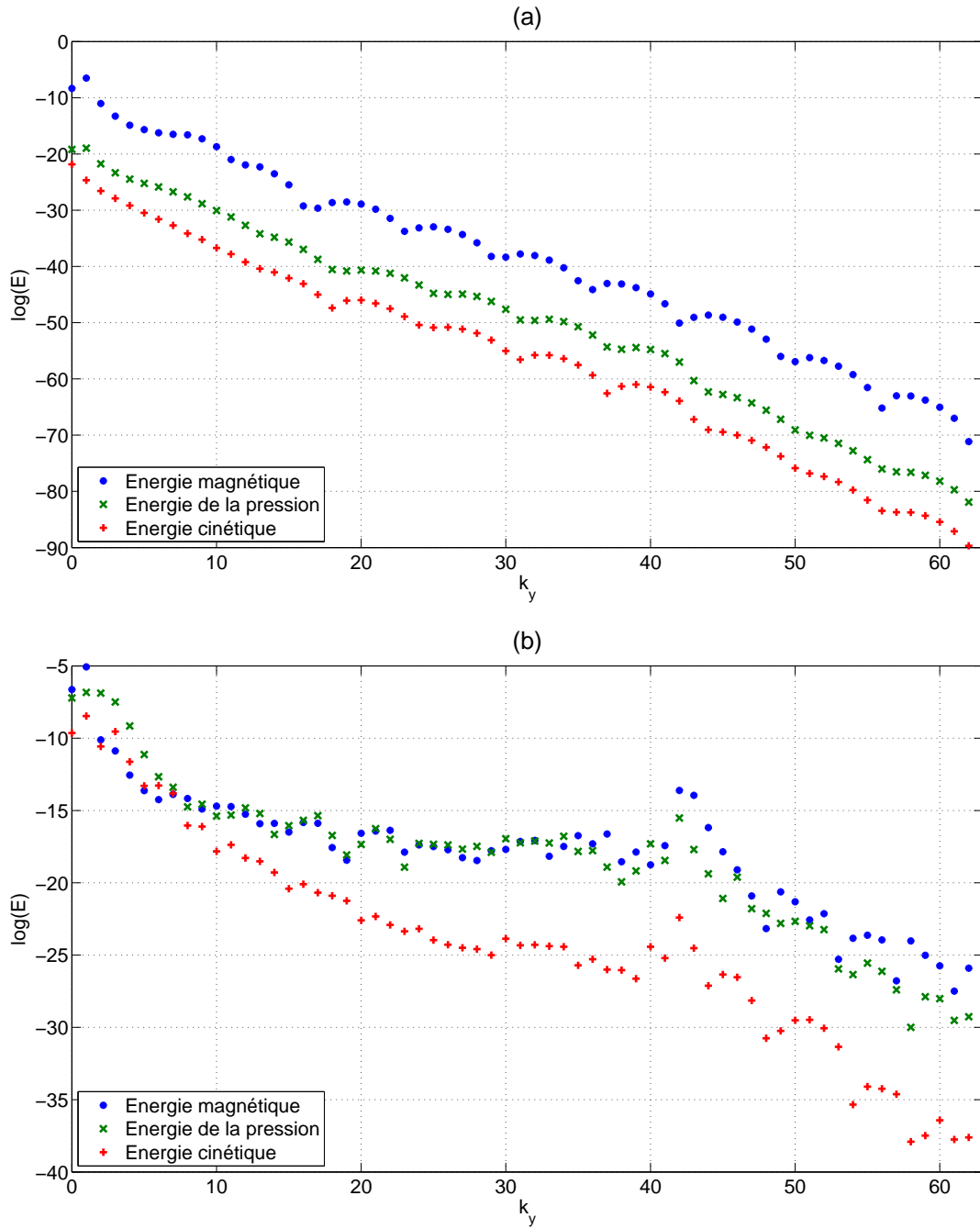


FIGURE 9.6 – Spectres de la simulation 1 avant (a) et après (b) la bifurcation.

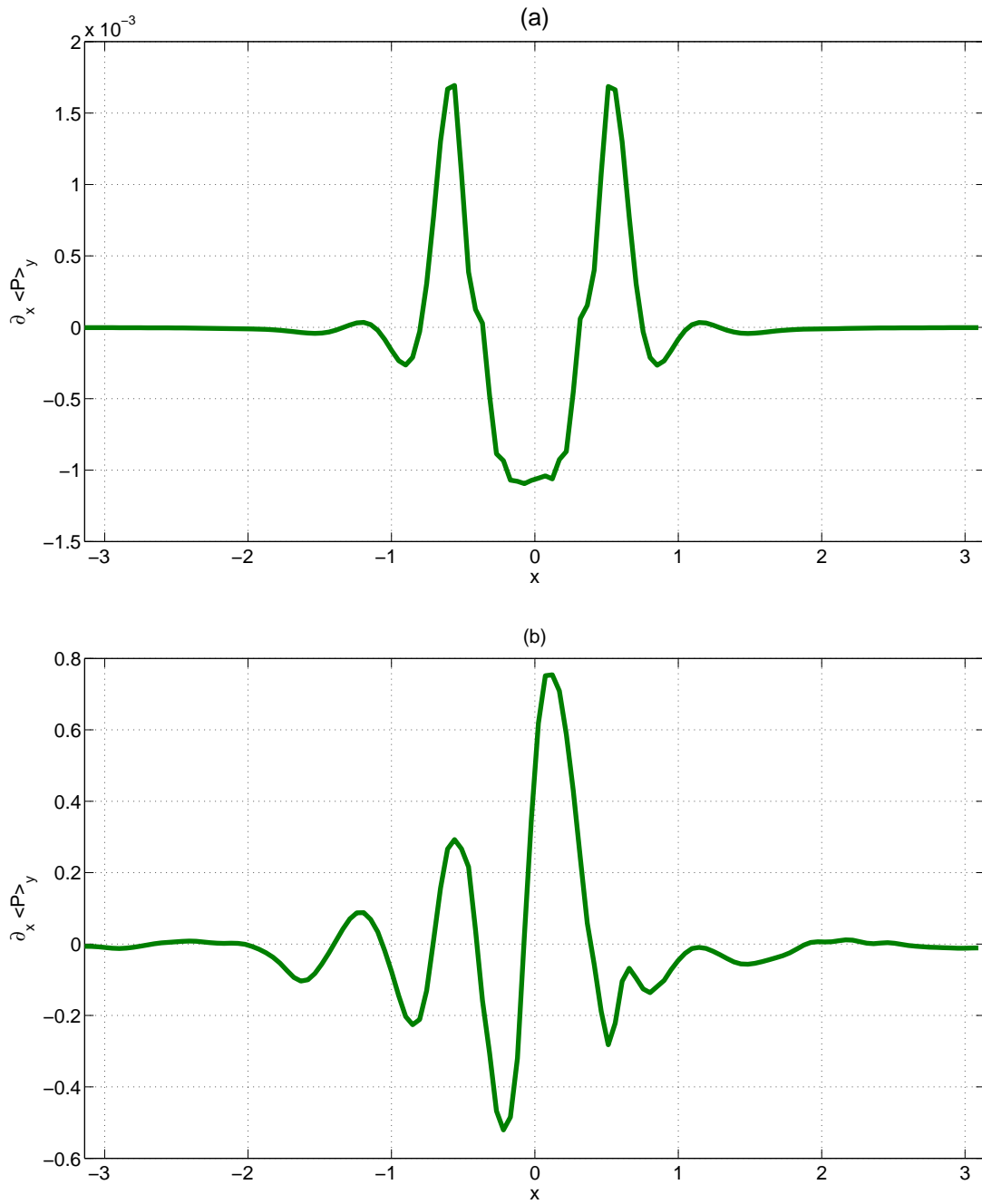


FIGURE 9.7 – Vitesse poloidal diamagnétique  $v_{dia}$  à  $t = 3000\tau_A$  (a) et à  $t = 6000\tau_A$  (b) de la simulation 1.



# Chapitre 10

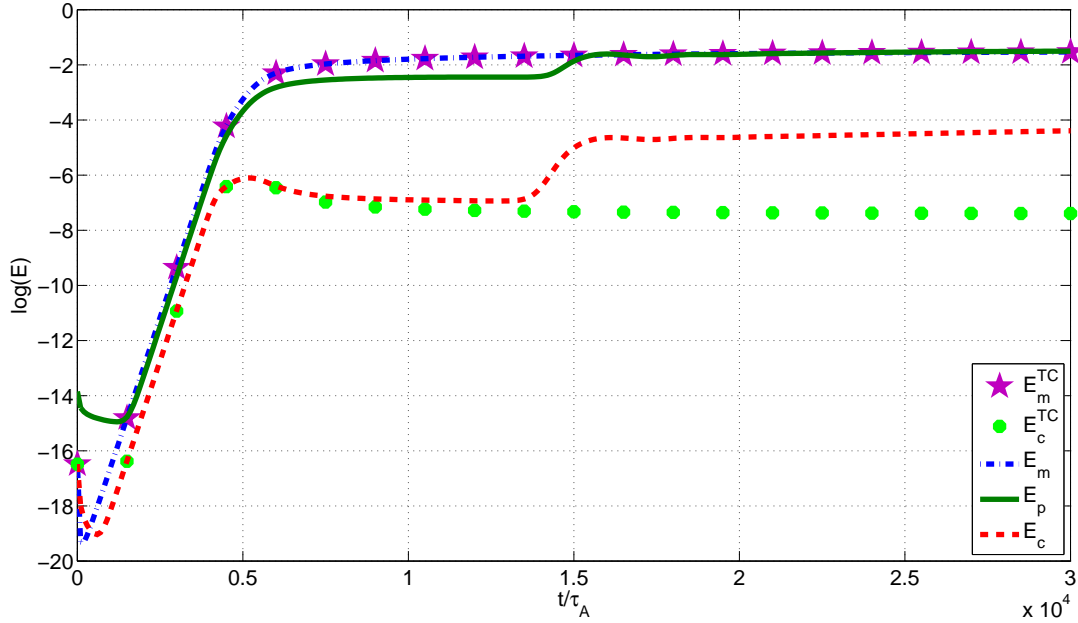
## Dynamique non-linéaire d'un îlot magnétique lorsque l'interchange est stable linéairement

La simulation 2 est une simulation non-linéaire des équations (4.6,4.8,4.10) pour des valeurs de paramètres typiques du tokamak TORE SUPRA (voir tableau des paramètres (8.1)). Avec de tels paramètres, la situation linéaire est celle observée sur la Figure (8.1). C'est à dire qu'il y a un seul mode de déchirement instable aux grandes échelles ( $k_y = 0.4$ ) alors que les modes interchanges, instables aux petites échelles dans le cas électrostatique, sont stabilisés par "alvéenisation". Bien que l'interchange soit linéairement stable, la simulation 2 montre que non-linéairement le mécanisme d'interchange affecte fortement la dynamique de l'îlot magnétique. En présence du mécanisme d'échange, la dynamique du système présente quatre régimes. Les deux premières phases (une phase linéaire et un premier plateau non-linéaire) sont principalement contrôlées par le mode de déchirement conduit dans cette simulation par le couplage entre le flux magnétique  $\psi$  et le potentiel électrostatique  $\phi$ . Pendant le troisième régime, le mécanisme d'interchange va favoriser la forte génération d'un flux zonal conduisant à une bifurcation vers un nouveau plateau de saturation. Contrairement à ce qui a été étudié dans le cas d'un îlot conduit par un couplage ' $\psi - p$ ', les petites échelles ne sont pas générées et la dynamique est quasi-linéaire. Afin de compléter cette étude et d'essayer de mieux comprendre l'origine de la transition, la simulation 2 a été effectuée pour différentes valeurs de  $\beta$  et différentes valeurs de  $L_p$  (voir tableaux (10.1) et (10.2)). Lorsque l'on augmente le paramètre  $\beta$ , on augmente l'effet de la pression électronique. La transition a donc lieu plus tôt pour de fortes valeurs de

$\beta$	$v^*$	$\rho^{*2}$
0.001	$2 \times 10^{-3}$	$3.3 \times 10^{-3}$
0.005	$10^{-2}$	$1.67 \times 10^{-2}$
0.015	$3 \times 10^{-2}$	$5 \times 10^{-2}$
0.025	$5 \times 10^{-2}$	$8.33 \times 10^{-2}$

TABLE 10.1 – Effet du paramètre  $\beta$  sur  $v^*$  et  $\rho^*$ .

$L_p$	$v^*$	$\kappa_2$	$C_{INT} = v^*(1 - \kappa_2)$
0.034	0.007	0.051	$6.7 \times 10^{-3}$
0.24	$10^{-3}$	0.36	$0.4 \times 10^{-4}$
0.6	$4 \times 10^{-4}$	0.89	$0.4 \times 10^{-5}$
0.67	$3.6 \times 10^{-4}$	0.99	$10^{-6}$
0.74	$3.24 \times 10^{-4}$	1.1	$-3 \times 10^{-5}$

TABLE 10.2 – Effet de la longueur de gradient de pression  $L_p$  sur  $v^*$  et  $\kappa_2$ .FIGURE 10.1 – Évolution temporelle de l'énergie magnétique  $E_m$ , de l'énergie de la pression  $E_p$  et de l'énergie cinétique  $E_c$  obtenues par la simulation 2 avec  $\beta = 10^{-3}$  et des énergies magnétique  $E_m^{TC}$  et cinétique  $E_c^{TC}$  obtenues par la même simulation non-linéaire du mode de déchirement classique avec  $p = \kappa_1 = \kappa_2 = v^* = \rho^* = \chi_\perp = 0$ .

$\beta$ . La longueur du gradient de pression  $L_p$  affecte directement les paramètres de l'interchange ( $v^*$  et  $\kappa_2$ ). Plus les modes interchanges sont instables du point de vue électrostatique, plus tôt se passe la transition.

## 10.1 Description de l'évolution non-linéaire du système

Afin de comprendre comment le mécanisme d'interchange (stable linéairement) affecte l'évolution non-linéaire d'un îlot magnétique, nous avons effectué la simulation non-linéaire 2 en choisissant comme discrétisation  $n_x = 128$  points suivant la direction radiale et  $n_y = 48$  modes pour la direction poloïdale. La Figure (10.1) montre l'évolution temporelle des énergies magnétique  $E_m$ , cinétique  $E_c$  et de pression  $E_p$  pour la simulation 2 ainsi que les énergies magnétique  $E_m^{TC}$  et cinétique  $E_c^{TC}$  obtenues par la même simulation non-linéaire du mode de déchirement classique (c'est à dire avec  $p = \kappa_1 = \kappa_2 = v^* = \rho^* = \chi_\perp = 0$ ). Par comparaison avec ce que l'on obtient pour le mode de déchirement classique, quatre régimes sont observés dans



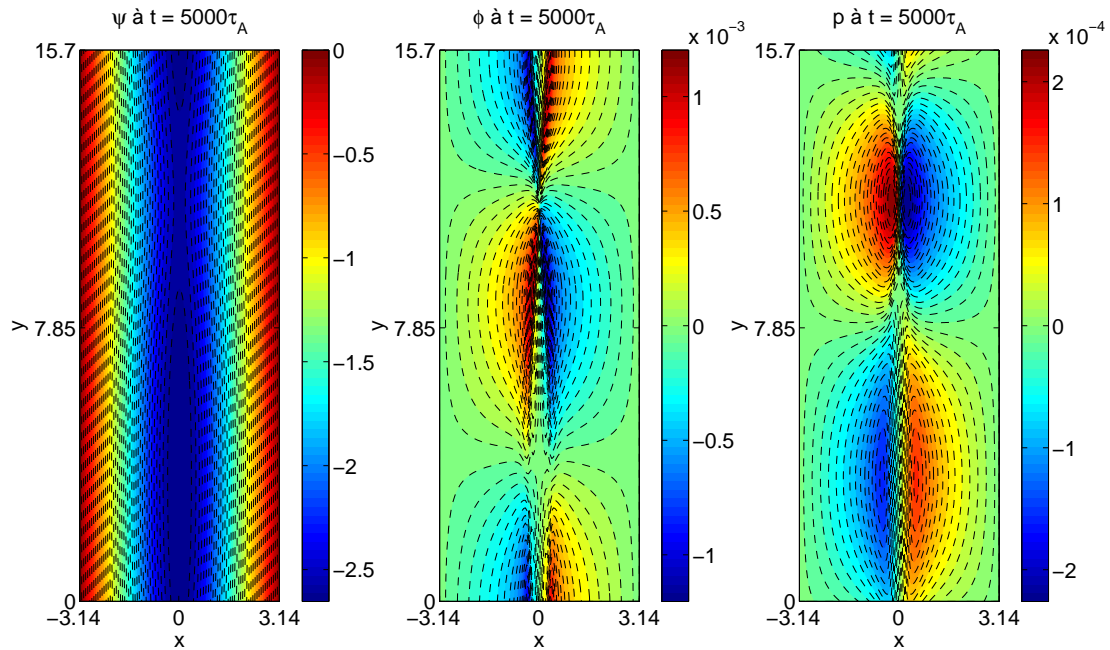


FIGURE 10.2 – Contours du flux magnétique  $\psi$ , du potentiel électrostatique  $\phi$  et de la pression électronique  $p$  obtenus par la simulation 2 à  $t = 5000\tau_A$ , avant la transition.

les simulations non-linéaires d'un îlot magnétique en présence des termes d'interchange (stable linéairement). Tout d'abord, il y a la phase linéaire de formation de l'îlot. Ensuite, le système atteint un premier plateau. Ces deux premières phases sont contrôlées par le mode de déchirement. Comme le montre la Figure (10.1), ces deux phases ne sont pas du tout affectées par les termes d'interchange. Le mode de déchirement est alors conduit par un couplage entre le potentiel électrostatique  $\phi$  et le flux magnétique  $\psi$ . Les cellules quadripolaires de l'écoulement maintiennent l'îlot magnétique. Après ces deux premières phases, une transition apparaît, comme nous le verrons plus tard, à cause de la présence des termes d'interchange dans les équations (4.6,4.8,4.10). Finalement, le système atteint un nouvel état de saturation. L'évolution de l'îlot magnétique est donc très proche de celle obtenue par un mode de déchirement classique pendant les deux premières phases, mais à  $t_* = 13200\tau_A$ , une transition a lieu. Les Figures (10.2) et (10.3) montrent les contours des champs  $\psi$ ,  $\phi$  et  $p$ , respectivement, avant et après la transition. Il apparaît clairement que les profils bidimensionnels de la pression et du potentiel électrostatique (représentés par les iso-contours) sont fortement affectés par la transition. Après cette phase, la structure des modes change et un aplatissement de la pression est observé. Par contre, sur les Figures (10.2) et (10.3), la structure de l'îlot magnétique ne semble pas être affectée par la transition. En effet, la Figure (10.4) montre que l'évolution temporelle de la variation de la taille de l'îlot est la même pour la simulation 2 et pour la simulation en mode de déchirement classique. Les modes interchanges, stables linéairement, affectent fortement la dynamique non-linéaire du système. A la transition, les structures de l'écoulement et de la pression sont complètement modifiées. Par contre, la structure magnétique reste inchangée (nous verrons dans la partie suivante, que c'est en fait la rotation poloïdale de l'îlot magnétique qui est fortement affectée par le mécanisme d'interchange).

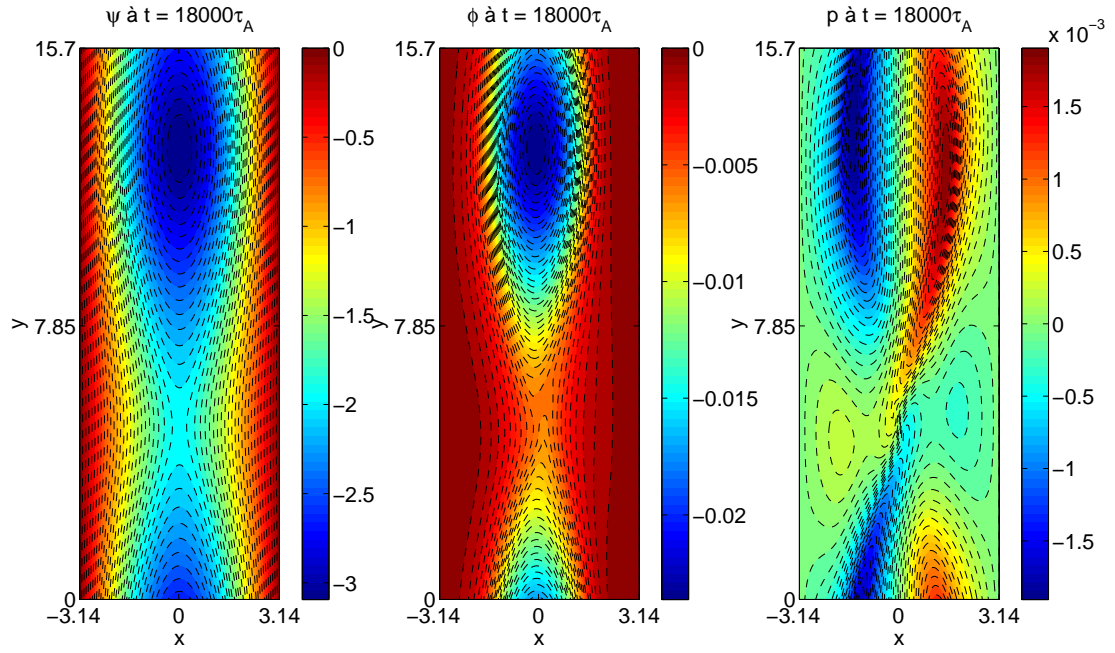


FIGURE 10.3 – Contours du flux magnétique  $\psi$ , du potentiel électrostatique  $\phi$  et de la pression  $p$  obtenus par la simulation 2 à  $t = 18000\tau_A$ , après la transition.

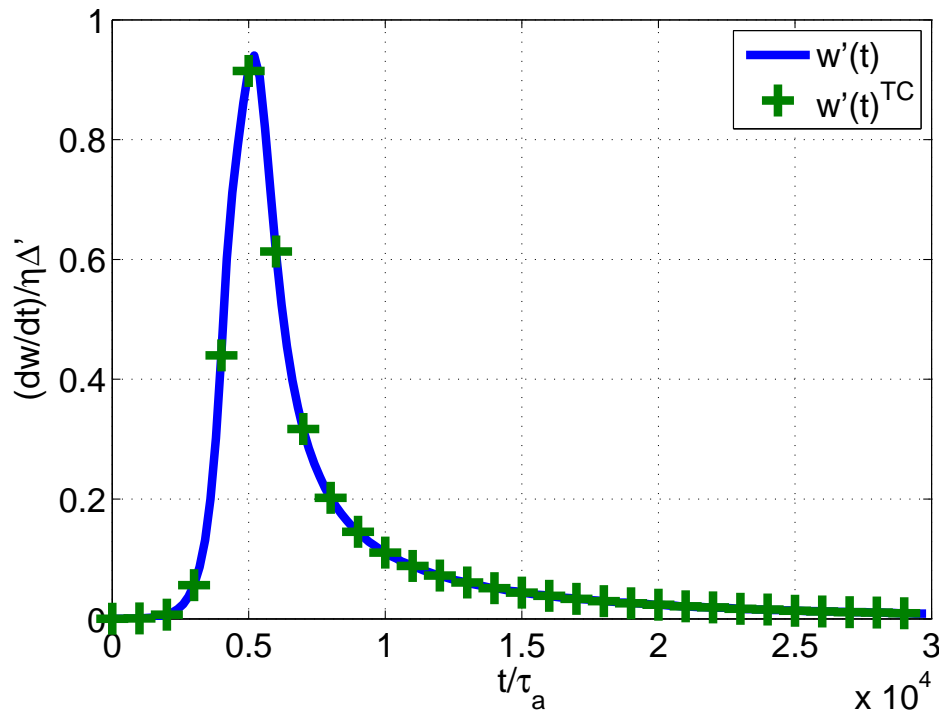


FIGURE 10.4 – Évolution temporelle de la variation de la taille de l'îlot  $w$  pour la simulation 2 et pour la même simulation en mode de déchirement classique.

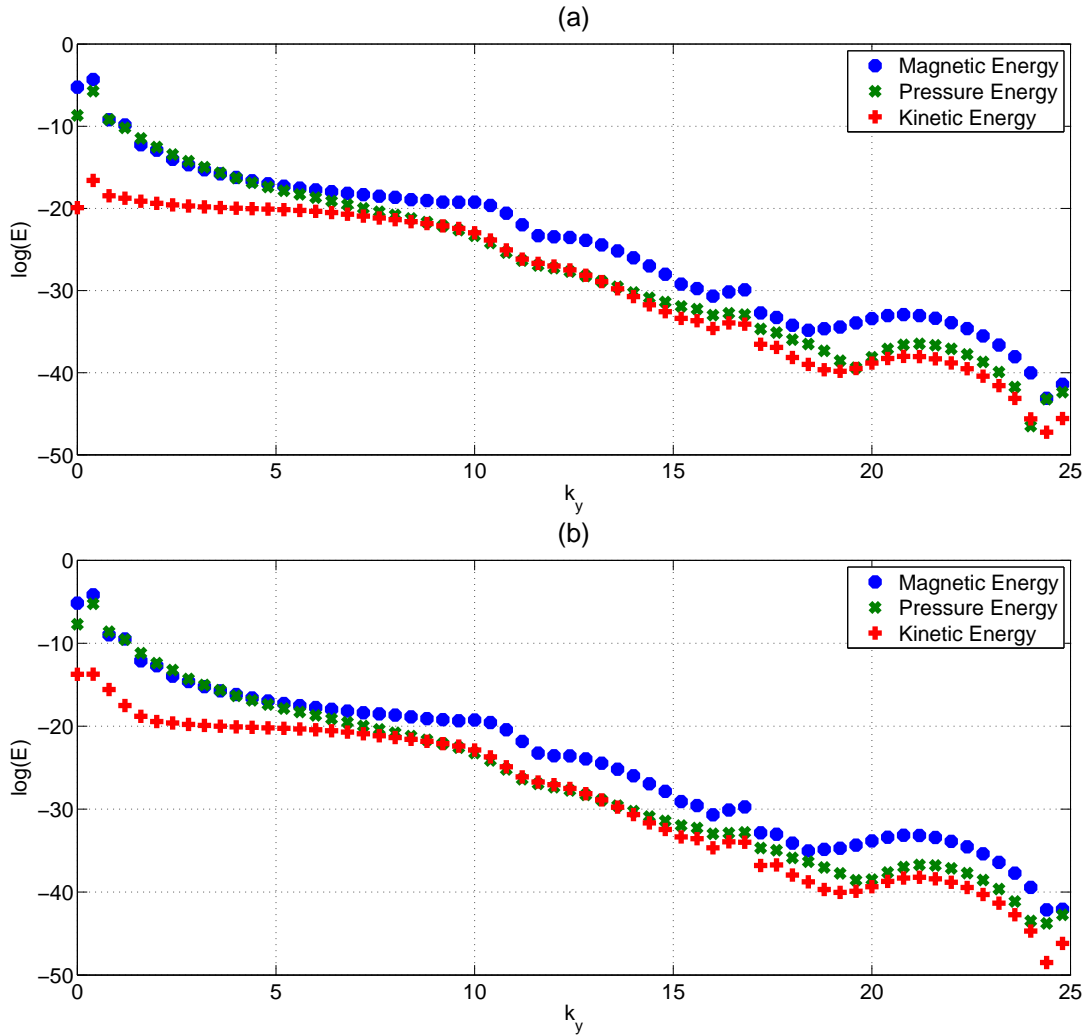


FIGURE 10.5 – Spectres obtenus par la simulation 2 avant la transition à  $t = 12000\tau_A$  (a) et pendant la transition à  $t = 14500\tau_A$  (b).

## 10.2 Origine de la transition

Pour comprendre l'origine de la transition et caractériser la structure du potentiel électrostatique après la transition observée sur la Figure (10.3), une étude des spectres est nécessaire. Les spectres avant la transition (a) et pendant la transition (b) sont montrés sur la Figure (10.5). Une équipartition entre l'énergie du flux magnétique et l'énergie de la pression est observée aux grandes échelles  $0.8 < k_y < 5$ , alors que l'on observe une équipartition entre l'énergie de la pression et l'énergie cinétique aux petites échelles  $8 < k_y < 14$ . La Figure (10.5) montre que ces propriétés persistent même après la transition et que le niveau d'énergie des modes  $k_y > 1.2$  reste inchangé. Ce qui signifie que, contrairement à la simulation 1, les petites échelles ne sont pas générées à la transition. Cette dernière a donc une nature différente. La Figure (10.5) montre clairement que seules les grandes échelles sont affectées par la transition. Une analyse détaillée des spectres de la Figure (10.5) montre que la transition a lieu lorsque l'énergie cinétique du mode  $k_y = 0$  devient égale à celle du mode  $k_y = 0.4$  (mode 1). Toutes ces propriétés du spectre suggèrent que la dynamique de la structure de l'écoulement est quasi-linéaire et que la transition a lieu lorsque le mode  $k_y = 0$  devient dominant énergétiquement. Pour s'assurer de la quasi-

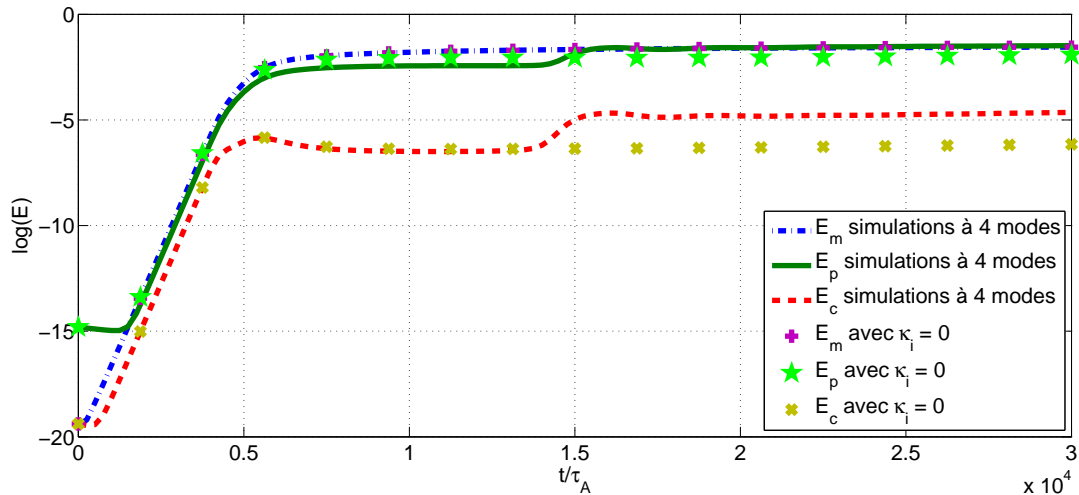


FIGURE 10.6 – Évolution temporelle des énergies  $E_m$ ,  $E_p$  et  $E_c$  pour une simulation similaire à la simulation 2 mais avec seulement 4 modes au lieu de 48 et pour une simulation similaire à la simulation 2 mais sans les termes interchanges (c'est à dire avec  $\kappa_i = 0$ ).

linéarité, la même simulation que la simulation 2 mais avec seulement quatre modes poloidaux a été faite. La Figure (10.6) montre l'évolution temporelle des énergies  $E_m$ ,  $E_p$  et  $E_c$  pour cette simulation. La comparaison avec la Figure (10.1) démontre que seulement quatre modes suffisent pour décrire entièrement l'évolution temporelle des énergies. On peut donc conclure que la dynamique du système est le résultat d'effets quasi-linéaires. De plus, sur la Figure (10.7), les évolutions temporelles de l'énergie cinétique des modes  $k_y = 0$  ( $E_c(k_y = 0)$ ),  $k_y = 0.4$  ( $E_c(k_y = 0.4)$ ) et  $k_y = 0.8$  ( $E_c(k_y = 0.8)$ ) sont comparées à l'évolution des modes obtenue par une simulation similaire en mode de déchirement classique ( $p = \kappa_1 = \kappa_2 = v^* = \rho^* = \chi_{\perp} = 0$ ). Pour le mode de déchirement classique, la croissance est contrôlée par le mode  $k_y = 0.4$ , la transition n'a pas lieu et le mode  $k_y = 0$  n'est pas généré. Par contre, dans la simulation 2 où les effets de la pression et le mécanisme d'interchange ont été inclus, la transition a lieu et le mode  $k_y = 0$ , c'est à dire le flux zonal, est fortement généré. C'est, d'ailleurs, ce mode qui est le premier amplifié exponentiellement au début de la transition. Cela suggère que la transition est liée à une forte amplification du flux zonal. Néanmoins, si on effectue la même simulation où le mode  $k_y = 0$ , c'est à dire le flux zonal, est supprimé artificiellement, la transition apparaît toujours à peu près au même moment ( $t_{\star} = 13200\tau_A$ ) mais avec une amplitude plus faible. Cela suggère que même si le flux zonal joue un rôle important, ce n'est pas le seul facteur responsable du mécanisme de déstabilisation. De plus, l'analyse des contours des champs  $\psi$ ,  $\phi$  et  $p$  à  $t = 15000\tau_A$  donnés par la Figure (10.8) montre que le mode  $k_y = 0$  joue un rôle important dans le mécanisme de déclenchement de la transition. On peut observer que pendant la transition, les cellules de pression croisent la surface résonante au niveau de la feuille de courant dans les deux directions. A la fin, cela produit une modification de la structure du mode et un aplatissement de la pression. Clairement, la structure du potentiel observée sur la Figure (10.8) suggère que le croisement des cellules de pression résulte d'un processus d'advection par l'écoulement. Il est important de préciser que pendant cette phase, l'image du mode de déchirement classique de

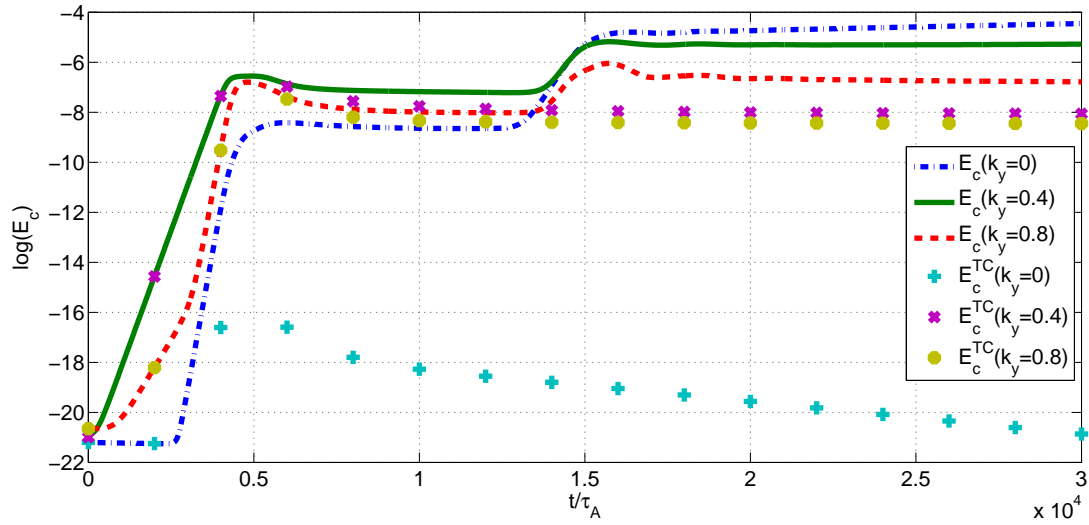


FIGURE 10.7 – Évolution temporelle de l'énergie cinétique des modes  $k_y = 0$  ( $E_c(k_y = 0)$ ),  $k_y = 0.4$  ( $E_c(k_y = 0.4)$ ) et  $k_y = 0.8$  ( $E_c(k_y = 0.8)$ ) pour la simulation 2 et de ces mêmes modes pour la même simulation mais en mode de déchirement classique ( $E_c^{TC}(k_y = 0)$ ,  $E_c^{TC}(k_y = 0.4)$  et  $E_c^{TC}(k_y = 0.8)$ ).

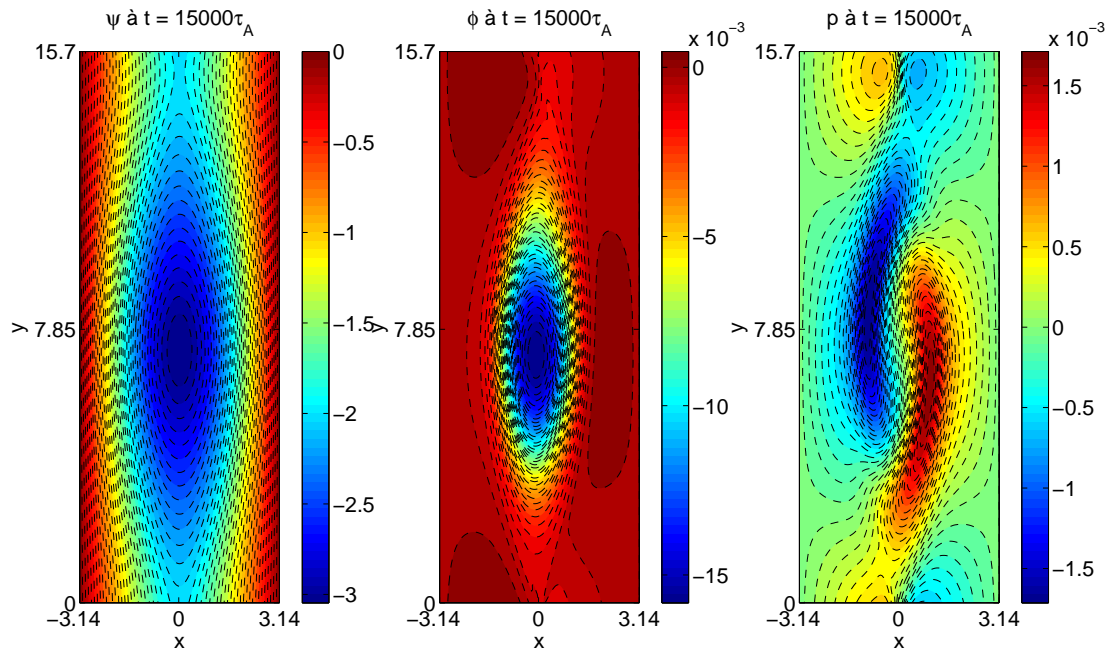


FIGURE 10.8 – Contours du flux magnétique  $\psi$ , du potentiel électrostatique  $\phi$  et de la pression  $p$  obtenus par la simulation 2 à  $t = 15000\tau_A$ .

l'écoulement entrant de la feuille de courant dans l'îlot n'est plus valide.

Sur la Figure (10.6), les résultats d'une simulation avec quatre modes et sans les termes d'interchange ( $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ ) sont présentés. La transition n'a pas lieu, du moins pas avant  $2.5 \times t_*$ . Cela montre qu'un mécanisme encore plus complexe, du aux termes de courbures, doit jouer un rôle important dans le déclenchement de la transition.

### 10.3 Origine de la forte génération du flux zonal

Nous allons étudier maintenant l'origine du flux zonal qui est généré lorsque  $\beta \neq 0$  en considérant séparément le transfert d'énergie allant du mode de déchirement au flux zonal mais aussi venant des autres modes, en particulier , les petites échelles.

En suivant [30], et partant de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement (4.6), on peut écrire l'équation de l'énergie de l'écoulement nourrissant le mode  $k_m = m2\pi/L_y$  :

$$\frac{d}{dt}E_m = T_m^R + T_m^M + T_m^C + T_m^{LB} + T_m^{KI}, \quad (10.1)$$

où

$$\begin{aligned} T_m^R &= - \int_{-L_x/2}^{L_x/2} dx \phi_m ([\phi, \omega])_m \text{ (Contribution du tenseur de Reynolds),} \\ T_m^M &= \int_{-L_x/2}^{L_x/2} dx \phi_m ([\psi, j])_m \text{ (Contribution du tenseur de Maxwell),} \\ T_m^C &= -\kappa_1 k_m \int_{-L_x/2}^{L_x/2} dx \phi_m p_m \text{ (Contribution du terme de courbure),} \\ T_m^{LB} &= \int_{-L_x/2}^{L_x/2} dx \phi_m ([\psi_0, j])_m \text{ (Contribution de la ligne de recourbement),} \\ T_m^{KI} &= \int_{-L_x/2}^{L_x/2} \phi_m ([\psi, j_0])_m \text{ (Contribution du terme kink).} \end{aligned}$$

Ici,  $\phi_m = \hat{\phi}_m e^{ik_y} + \hat{\phi}_{-m} e^{-ik_y}$ , où  $\hat{\phi}_m$  est la composante de Fourier  $m$  de  $\phi$ .

Dans le but de comprendre l'origine de la génération du flux zonal (qui correspond au mode 0), il est utile de projeter l'équation (10.1) sur le mode  $m = 0$  :

$$\frac{d}{dt}E_0 = T_0^R + T_0^M + T_0^{LB} + T_0^{KI}. \quad (10.2)$$

Le terme de courbure ne nourrit pas directement le flux zonal puisque  $T_0^C = 0$ . Sur la Figure (10.9), les évolutions temporelles de  $T_0^R$ ,  $T_0^M$ ,  $T_0^{LB}$  et  $T_0^{KI}$  sont présentées pour la simulation 2. Les contributions de la ligne de recourbement ( $T_0^{LB}$ ) et du terme kink ( $T_0^{KI}$ ) sont très faibles et l'on peut écrire :

$$\frac{d}{dt}E_0 \sim T_0^R + T_0^M. \quad (10.3)$$

Cependant, à la transition, il y a une forte amplification des contributions des tenseurs de Reynolds et de Maxwell ( $T_0^R$  et  $T_0^M$ ).

Pour aller plus loin, il est utile, dans l'équation (10.3) qui met en évidence les contributions importantes au flux zonal ( $m = 0$ ), de séparer le mode  $m = 1$  de tous les autres modes. On introduit alors  $\phi_{>1} = \sum_{m>1} \phi_m$ . On peut alors définir trois contributions pour chaque fonction

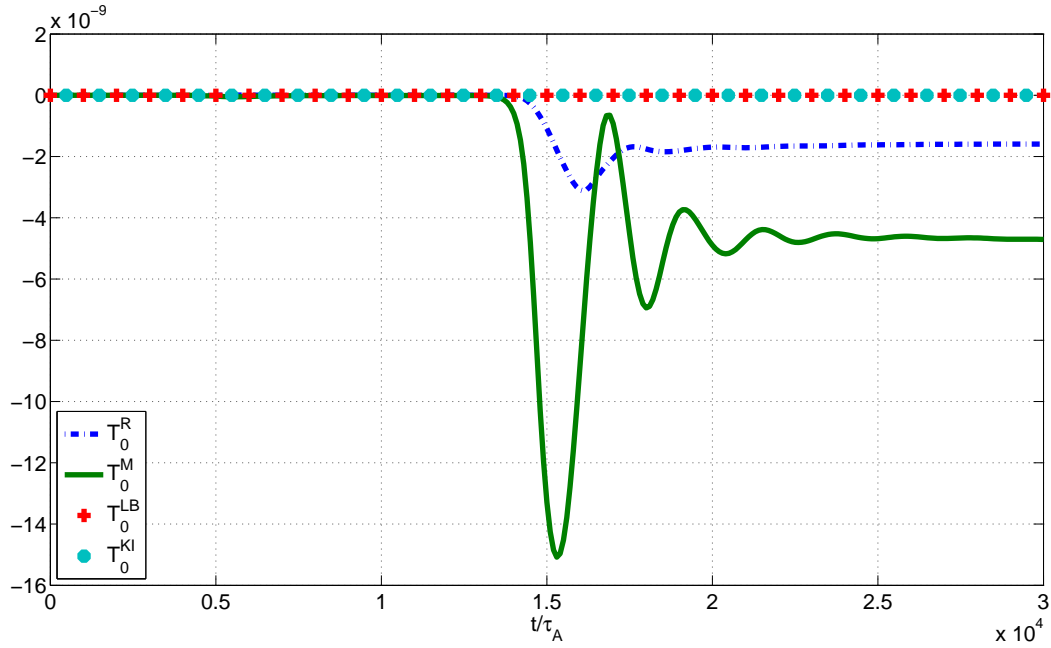


FIGURE 10.9 – Évolutions temporelles de  $T_0^R$ ,  $T_0^M$ ,  $T_0^{LB}$  et  $T_0^{KI}$  obtenues par la simulation 2.

de transfert. Par exemple, pour la fonction de transfert liée au tenseur de Reynolds, on a :

$$T_m^R = T_{0m}^R + T_{1m}^R + T_{>1m}^R,$$

où

$$T_{0m}^R = \int_{-L_x/2}^{L_x/2} dx \phi_m ([\phi_0, w_0])_m,$$

$$T_{1m}^R = \int_{-L_x/2}^{L_x/2} dx \phi_m ([\phi_1, w_1])_m$$

et

$$T_{>1m}^R = \int_{-L_x/2}^{L_x/2} dx \phi_m ([\phi_{>1}, w_{>1}])_m.$$

Clairement, par définition,  $T_{11}^R = T_{11}^M = 0$  et  $T_{0m}^R = T_{0m}^M = 0$ . Ainsi l'équation (10.3) peut s'écrire :

$$\frac{d}{dt} E_0 = T_{10}^R + T_{>10}^R + T_{10}^M + T_{>10}^M. \quad (10.4)$$

Sur la Figure (10.10), les évolutions temporelles de  $T_{10}^R$ ,  $T_{>10}^R$ ,  $T_{10}^M$  et  $T_{>10}^M$  sont présentées pour la simulation 2. Il apparaît clairement que la principale contribution aux tenseurs de Reynolds et de Maxwell provient du mode  $m = 1$  alors que la contributions des petites échelles est négligeable. Ceci est en accord avec le fait que la dynamique du système est quasi-linéaire.

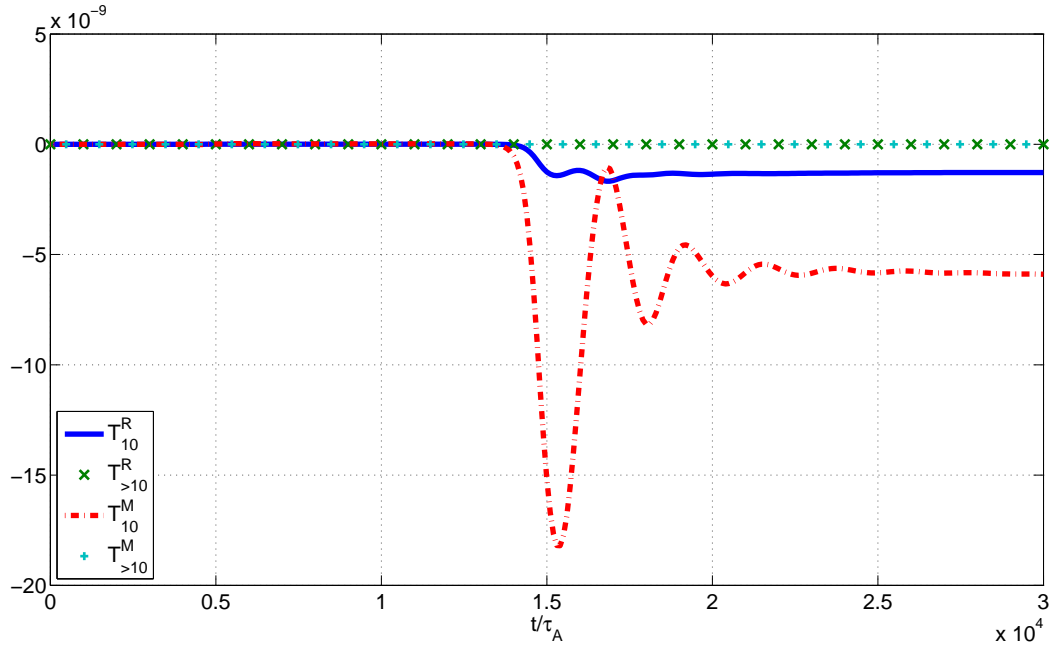


FIGURE 10.10 – Évolutions temporelles de  $T_{10}^R$ ,  $T_{>10}^R$ ,  $T_{10}^M$  et  $T_{>10}^M$  obtenues par la simulation 2.

## 10.4 Effet du paramètre $\beta$ et de la longueur de gradient de pression $L_p$ sur la dynamique non-linéaire

Le paramètre  $\beta$  représente le rapport entre l'énergie thermique de pression et l'énergie magnétique. Dans le cas d'un mode de déchirement classique,  $\beta = 0$ . D'après les équations (4.6,4.8,4.10), le paramètre  $\beta$  agit principalement dans l'équation de l'énergie Eq. (4.8) en affectant l'effet diamagnétique  $v^*$  et le couplage entre la pression et le flux magnétique  $\rho^*$ . C'est donc un paramètre très important pour notre étude et il est intéressant d'étudier son effet sur la transition. La simulation 2 est donc effectuée pour plusieurs valeurs de  $\beta$  (voir tableau (10.1)). La Figure (10.11) présente le temps au début du second régime (premier plateau non-linéaire) et le temps au début de la transition en fonction du paramètre  $\beta$ . Tout d'abord, le temps au début du second régime ne dépend pas du paramètre  $\beta$ . Ceci est en accord avec la Figure (10.1) qui montre que les deux premiers régimes de la dynamique (régime linéaire et premier plateau de saturation) ne sont pas affectés par les effets de pression et sont contrôlés par le mode de déchirement classique. Par contre, la Figure (10.11) montre que le temps auquel se produit la transition dépend fortement du paramètre  $\beta$ . Lorsque  $\beta$  est faible, les effets de pression sont faibles, le système est contrôlé par le mode de déchirement classique jusqu'à la transition qui se produit assez tard. Par contre, lorsque  $\beta$  est fort, les effets de pression sont forts et la transition a lieu plus tôt.

La Figure (10.6), qui présente les résultats d'une simulation où les termes d'interchange ont été coupés ( $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ ), montre que le mécanisme de déclenchement de la transition est lié aux termes d'interchange. Il est donc utile d'étudier l'effet de la longueur de gradient de pression  $L_p$  sur la transition. Pour cela, la simulation 2 a été effectuée avec différentes valeurs de  $L_p$  (voir



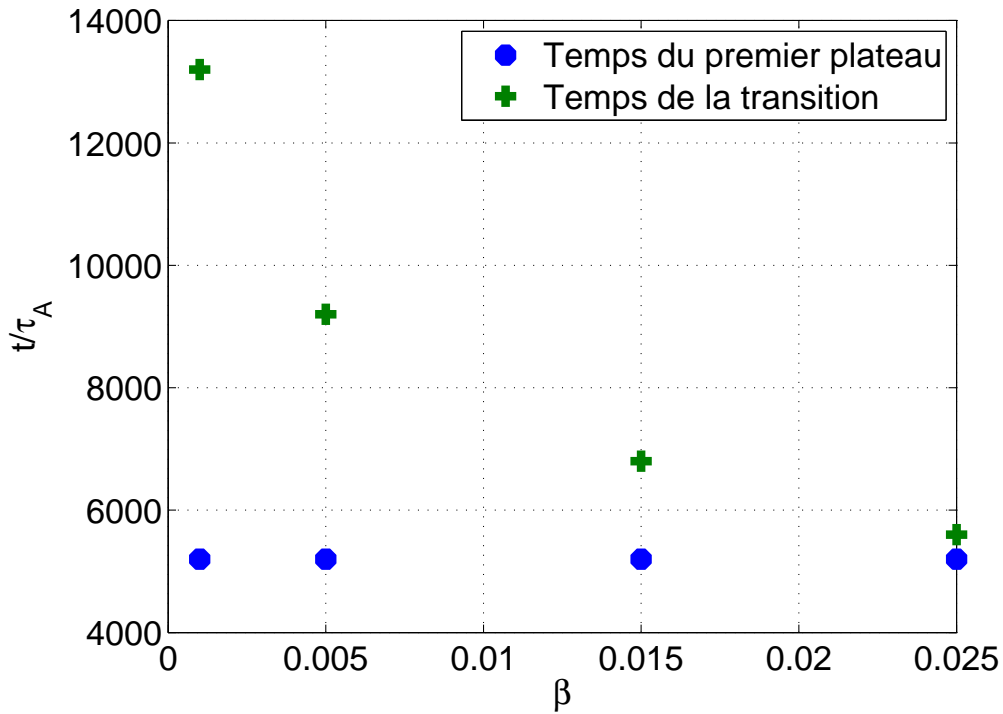


FIGURE 10.11 – Effet du paramètre  $\beta$  sur la transition : temps au début du second régime (premier plateau non-linéaire) et temps au début de la transition en fonction du paramètre  $\beta$ .

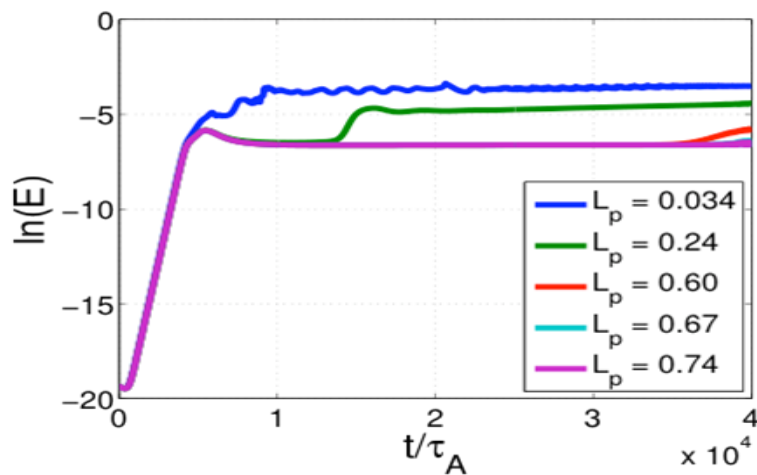


FIGURE 10.12 – Effet de la longueur du gradient de pression  $L_p$  sur la transition : Évolution temporelle de l'énergie cinétique  $E_m$  pour des simulations typiques de la simulation 2 mais avec différentes valeurs de  $L_p$ .

tableau (10.2)). Dans l'équation de l'énergie (4.8), le terme lié à  $L_p$  est  $C_{INT} = v^*(1 - \kappa_2)$ . Le tableau (10.2) montre que plus le gradient de pression est fort, plus  $C_{INT}$  est petit et donc plus le mécanisme d'interchange est affaibli. La Figure (10.12) présente les évolutions temporelles de l'énergie cinétique  $E_c$  obtenues pour les différentes valeurs de  $L_p$ . Seuls les deux derniers régimes (transition et plateau de saturation) sont affectés par la longueur de gradient de pression, les deux premières phases étant contrôlées par le mode de déchirement classique. Le mécanisme d'interchange, stable linéairement, agit non-linéairement. Plus  $L_p$  est grand, plus l'interchange est faible et plus tard arrive la transition. Plus  $L_p$  est petit, plus instable est l'interchange et la transition arrive plus tôt.

# Chapitre 11

## Dynamique non-linéaire d'un îlot magnétique lorsque l'interchange est instable linéairement

La simulation 3 est une simulation non-linéaire des équations (4.6,4.8,4.10) avec les mêmes valeurs de paramètres que la simulation 2 sauf les paramètres relatifs à l'interchange  $\kappa_1$  et  $v^*$  qui ont été largement augmentés (voir tableau (8.1)). De tels paramètres amènent une destabilisation linéaire des modes interchanges. Ainsi, la situation linéaire observée est celle présentée sur la Figure (8.1). Aux grandes échelles ( $k_y = 0.4$ ) le mode de déchirement est instable. Aux petites échelles, plusieurs modes interchanges sont instables. De plus, par rapport à la simulation 2, on a choisi un mode de déchirement plus faible ( $\Delta' = 2$  au lieu de  $\Delta' = 6$ ) pour faciliter l'apparition des modes interchanges instables. Il en résulte qu'avec ces paramètres, le taux de croissance  $\gamma_{TC}$  obtenu par un mode de déchirement classique Eq.(6.11) est inférieur à  $\gamma_{TP}$  obtenu par un mode de déchirement issu d'un couplage entre la pression et le flux magnétique Eq.(7.4). Ainsi, dans cette simulation, on s'attend à ce que l'îlot magnétique soit formé grâce à un couplage ' $\psi - p$ '.

### 11.1 Effet des modes interchanges sur la dynamique non-linéaire de l'îlot magnétique

Afin de comprendre comment le mécanisme d'interchange (instable linéairement) affecte l'évolution non-linéaire d'un îlot magnétique, nous avons donc effectué la simulation non-linéaire 3 en choisissant comme discrétisation  $n_x = 256$  points suivant la direction radiale et  $n_y = 48$  modes pour la direction poloïdale. La Figure (11.1) montre l'évolution temporelle des énergies magnétique  $E_m$ , cinétique  $E_c$  et de pression  $E_p$  pour la simulation 3. Cette fois-ci, encore, la dynamique présente quatre phases importantes de natures différentes des précédentes simulations. Le premier régime est une phase linéaire où les modes interchanges croissent. En effet, sur la Fi-

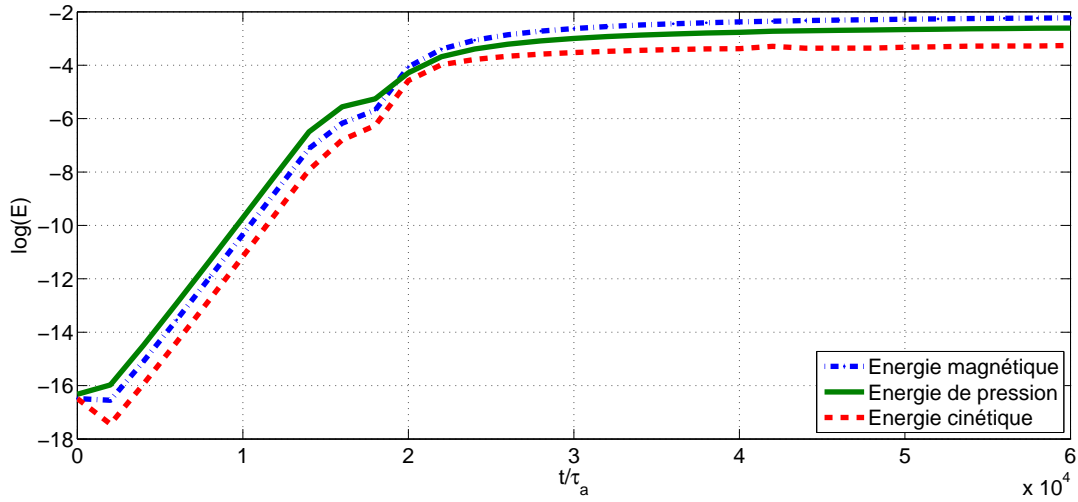


FIGURE 11.1 – Évolution temporelle de l'énergie magnétique  $E_m$ , de l'énergie de la pression  $E_p$  et de l'énergie cinétique  $E_c$  obtenues par la simulation 3 avec  $\kappa_1 = 5$  et  $v^* = 10^{-2}$ .

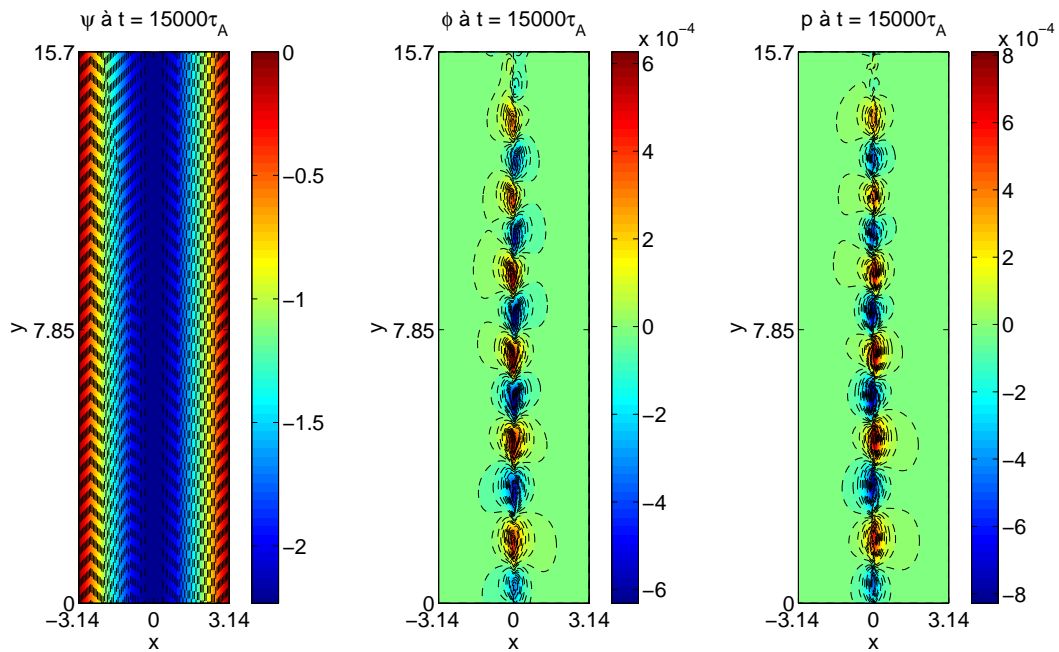


FIGURE 11.2 – Contours du flux magnétique  $\psi$ , du potentiel électrostatique  $\phi$  et de la pression  $p$  obtenus par la simulation 3 à  $t = 15000\tau_A$  pendant la phase linéaire.

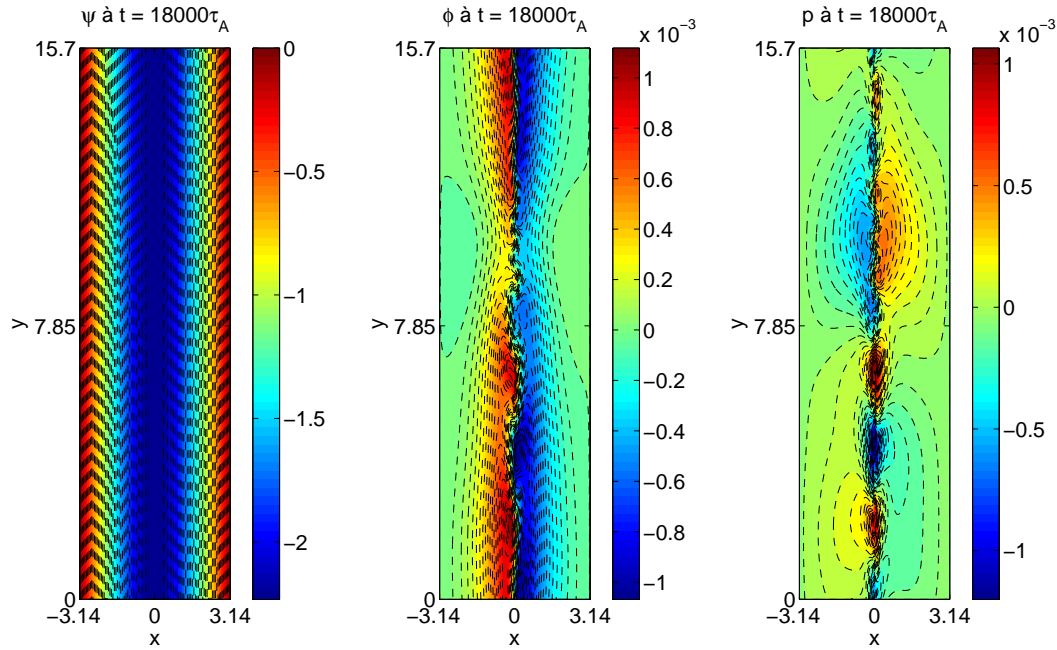


FIGURE 11.3 – Contours du flux magnétique  $\psi$ , du potentiel électrostatique  $\phi$  et de la pression  $p$  obtenus par la simulation 3 à  $t = 18000\tau_A$  pendant le deuxième régime.

gure (11.2), nous avons présenté les contours du flux magnétique  $\psi$ , du potentiel électrostatique  $\phi$  et de la pression  $p$  pendant la phase linéaire à  $t = 15000\tau_A$ . L'îlot magnétique ne s'est pas encore formé mais les structures des modes interchanges apparaissent au voisinage de la surface de résonance. Le deuxième régime correspond à une saturation du mécanisme d'interchange et au début de formation de l'îlot magnétique. La Figure (11.3) présente les contours des trois champs pendant ce régime à  $t = 18000\tau_A$ . L'îlot magnétique commence à se former tandis que les structures petites échelles de l'interchange ne sont plus visibles sur les contours du potentiel électrostatique de la Figure (11.3). La structure de la pression est la plus intéressante : une structure quadrupolaire coexiste avec les petites cellules des petites échelles de l'interchange. Le troisième régime montre une croissance du mode de déchirement. La Figure (11.4) montre les contours des trois champs à  $t = 20000\tau_A$ . L'îlot magnétique apparaît clairement et les structures liées à l'interchange ont complètement disparu du potentiel électrostatique et de la pression. On observe un dipôle sur le potentiel électrostatique et un quadrupole au niveau de la pression. Enfin, le quatrième régime correspond à un plateau non-linéaire où l'îlot continu de grossir et rentre en phase de saturation. Sur la Figure (11.5), les contours des trois champs sont présentés pendant ce dernier régime à  $t = 26000\tau_A$ . Les structures observées sont très proches de celles observées dans le dernier régime de la simulation 2 sur la Figure (10.3). En effet, au niveau du potentiel électrostatique, on observe un îlot correspondant à un fort flux zonal (légèrement décentré) et au niveau de la pression, il y a une structure similaire qui correspond à un fort aplatissement de la pression moyenne. Dans la simulation 2, ces structures observées étaient liées à l'apparition d'un fort flux zonal. Nous allons maintenant nous focaliser sur l'évolution des spectres de la simulation 3 pour vérifier si un mécanisme équivalent est en jeu et étudier l'impact des petites échelles sur la dynamique.

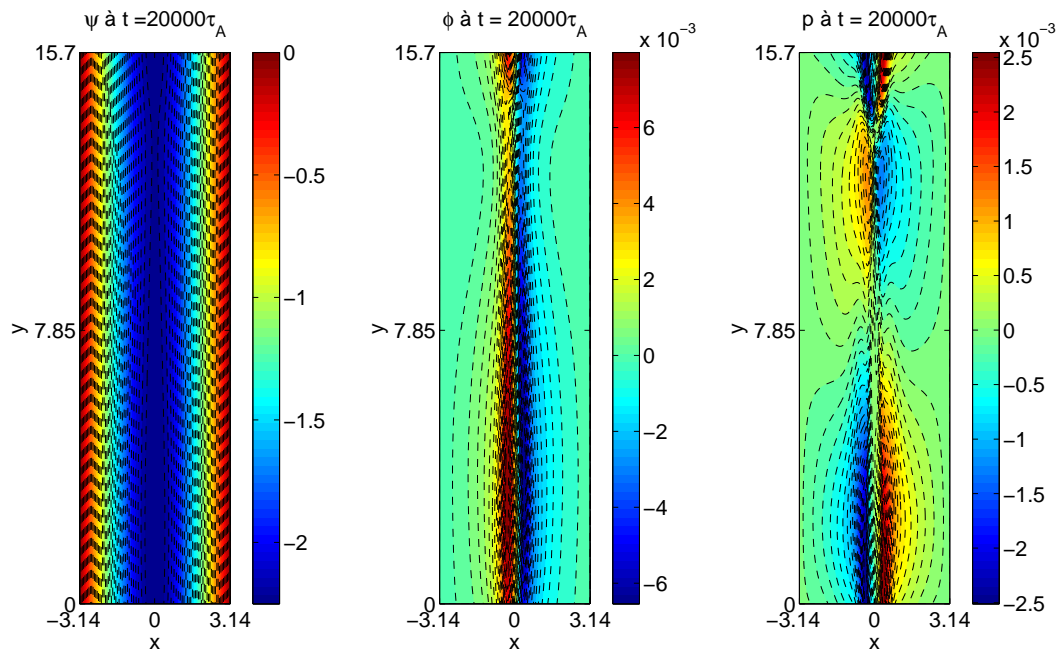


FIGURE 11.4 – Contours du flux magnétique  $\psi$ , du potentiel électrostatique  $\phi$  et de la pression  $p$  obtenus par la simulation 3 à  $t = 20000\tau_A$  pendant le troisième régime.

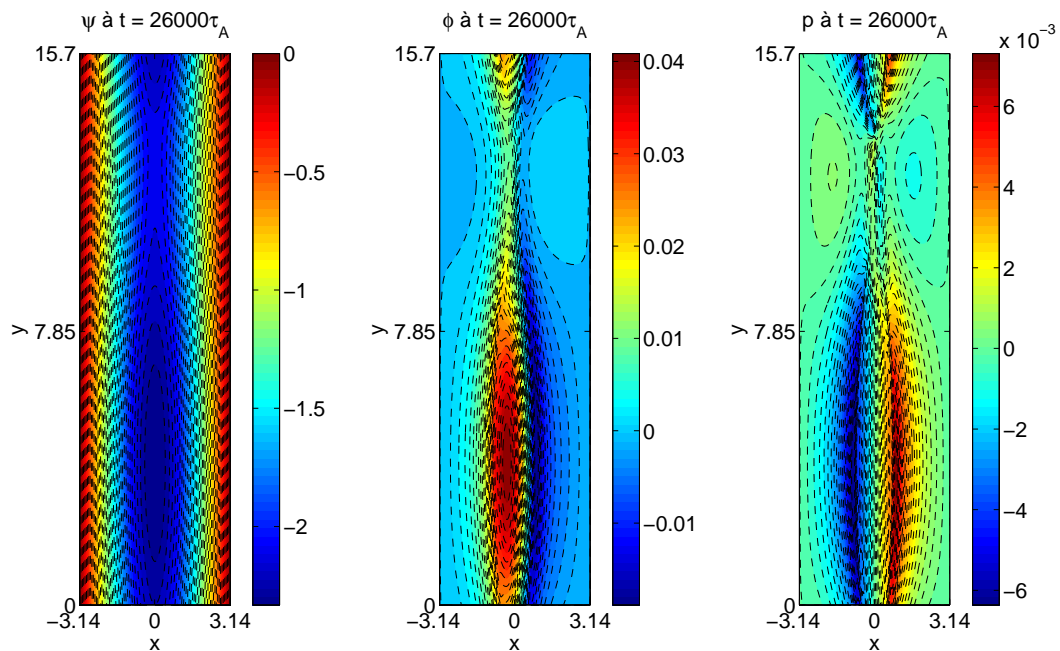


FIGURE 11.5 – Contours du flux magnétique  $\psi$ , du potentiel électrostatique  $\phi$  et de la pression  $p$  obtenus par la simulation 3 à  $t = 26000\tau_A$  pendant le quatrième régime.

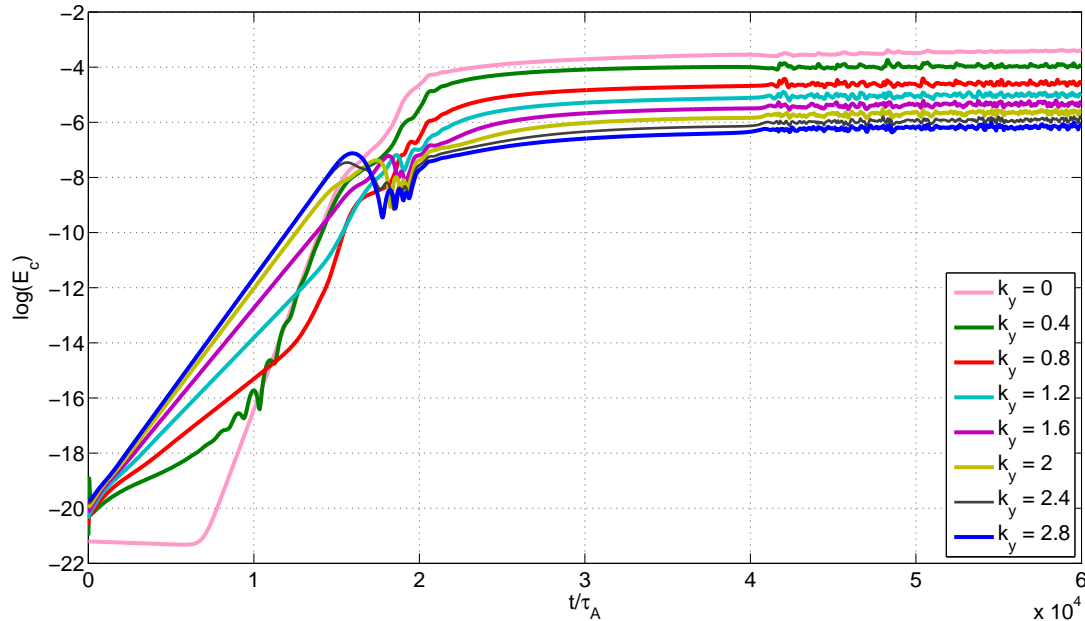


FIGURE 11.6 – Evolutions temporelles de l’énergie cinétique des huit premiers modes ( $k_y = 0$ ,  $k_y = 0.4$ ,  $k_y = 0.8$ ,  $k_y = 1.2$ ,  $k_y = 1.6$ ,  $k_y = 2$ ,  $k_y = 2.4$  et  $k_y = 2.8$ ) obtenus par la simulation 3.

## 11.2 Evolution des petites échelles

Pour comprendre plus en détails la dynamique non-linéaire d’un îlot magnétique en présence de modes interchanges instables, la Figure (11.6) présente les évolutions temporelles de l’énergie cinétique des huit premiers modes ( $k_y = 0$ ,  $k_y = 0.4$ ,  $k_y = 0.8$ ,  $k_y = 1.2$ ,  $k_y = 1.6$ ,  $k_y = 2$ ,  $k_y = 2.4$  et  $k_y = 2.8$ ) obtenus par la simulation 3. Tout d’abord, après une phase purement linéaire, à  $t = 6450\tau_A$ , le mode  $k_y = 0$  est couplé non-linéairement au mode de déchirement  $k_y = 0.4$ . Les deux modes croissent avec la même amplitude et le même taux de croissance. Sur la Figure (10.7), les évolutions temporelles de l’énergie cinétique des trois premiers modes sont présentées pour la simulation 2 et pour une simulation avec un mode de déchirement classique ( $p = 0$ ). Sur cette Figure, le même phénomène (couplage entre les modes  $k_y = 0$  et  $k_y = 0.4$ ) est observé pour la simulation 2. Cependant, le mode  $k_y = 0$ , dans le cas du mode de déchirement classique, n’est pas généré. C’est seulement le mode  $k_y = 0.4$  qui croît et qui permet la formation de l’îlot magnétique. Pour la simulation 3, la Figure (11.6) montre que les modes interchanges ( $k_y > 0.4$ ) croissent sans être affectés par le couplage des deux premiers modes. Cependant, lorsque l’énergie du mode de déchirement  $k_y = 0.4$  atteint l’énergie des modes interchanges à  $t \sim 16000\tau_A$ , l’énergie des modes interchanges chutent.

Pour aller plus loin, la Figure (11.7) présente un spectre pour chacun des quatre régimes dynamiques. Comme pour la simulation 1 où l’on a étudié un petit îlot magnétique formé par un couplage entre la pression et le flux magnétique, on observe une augmentation de l’énergie de toutes les petites échelles au fur et à mesure que l’îlot magnétique grossit.

Pendant le premier régime linéaire (spectre (a) à  $t = 15000\tau_A$ ), on observe bien la “double”

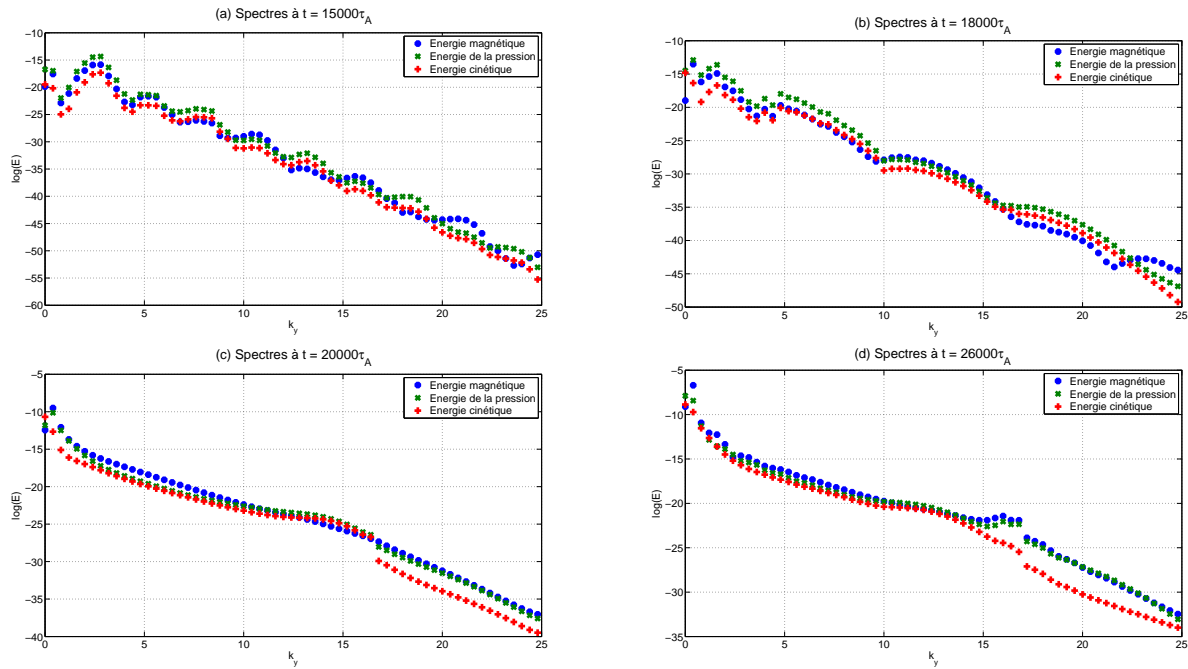


FIGURE 11.7 – Spectres obtenus par la simulation 3 pendant les quatre régimes : (a) à  $t = 15000\tau_A$ , (b) à  $t = 18000\tau_A$ , (c) à  $t = 20000\tau_A$  et (d) à  $t = 26000\tau_A$ .

instabilité. Le mode de déchirement  $k_y = 0.4$  et le mode  $k_y = 0$  ont bien des énergies équivalentes. La Figure (11.8) montre les fonctions propres du mode de déchirement  $k_y = 0.4$  à  $t = 15000\tau_A$  : (a)  $\psi_{0.4}(x)$ , (b)  $\phi_{0.4}(x)$  et (c)  $p_{0.4}(x)$ . Elles correspondent bien à ce que l'on s'attend pour le mode de déchirement : le flux magnétique est pair alors que le potentiel électrostatique et la pression sont impairs. De plus, il semble bien que l'îlot magnétique se forme, comme attendu, grâce à un couplage entre la pression et le flux magnétique. En effet, tout d'abord l'amplitude de la pression est supérieure à celle du potentiel électrostatique. Ensuite, la forme de  $p_{0.4}(x)$  est proche de celle obtenue sur la Figure (7.2) qui présente la croissance linéaire d'un îlot magnétique par un couplage  $\psi - p$  avec  $\phi = 0$ . La Figure (11.9), qui présente les fonctions propres du mode  $k_y = 0$  à  $t = 15000\tau_A$ , montre que ce mode a la parité du mode de déchirement  $k_y = 0.4$  ( $\psi_0(x)$  paire,  $\phi_0(x)$  et  $p_0(x)$  impaires). Cela résulte du fait que le mode  $k_y = 0$  est principalement induit non-linéairement par le mode de déchirement  $k_y = 0.4$ . Ensuite, le spectre (a) de la Figure (11.7) montre que l'énergie des modes interchanges instables dominant (de  $1.2 \leq k_y \leq 3.6$ ). Comme pour l'étude linéaire de cette simulation présentée par la Figure (8.4), le mode interchange le plus instable est obtenu à  $k_y = 2.4$ . Les fonctions propres associées à ce mode sont présentées pour  $t = 15000\tau_A$  sur la Figure (11.10) : (a)  $\psi_{2.4}(x)$ , (b)  $\phi_{2.4}(x)$  et (c)  $p_{2.4}(x)$ . Ce sont bien des fonctions propres de type interchange avec la pression et le potentiel électrostatique pairs et le flux magnétique impair. Les profils sont, en fait, similaires à ceux obtenus linéairement (cf. Figure (8.6)). Ces modes interchanges ne sont donc pas encore rentrés dans une phase non-linéaire.

Pendant le second régime (spectre (b) à  $t = 18000\tau_A$ ), on observe que l'énergie du mode de déchirement  $k_y = 0.4$  a fortement augmenté permettant la formation de l'îlot magnétique pendant que l'énergie des modes interchanges a diminué. Cela correspond bien à ce que l'on



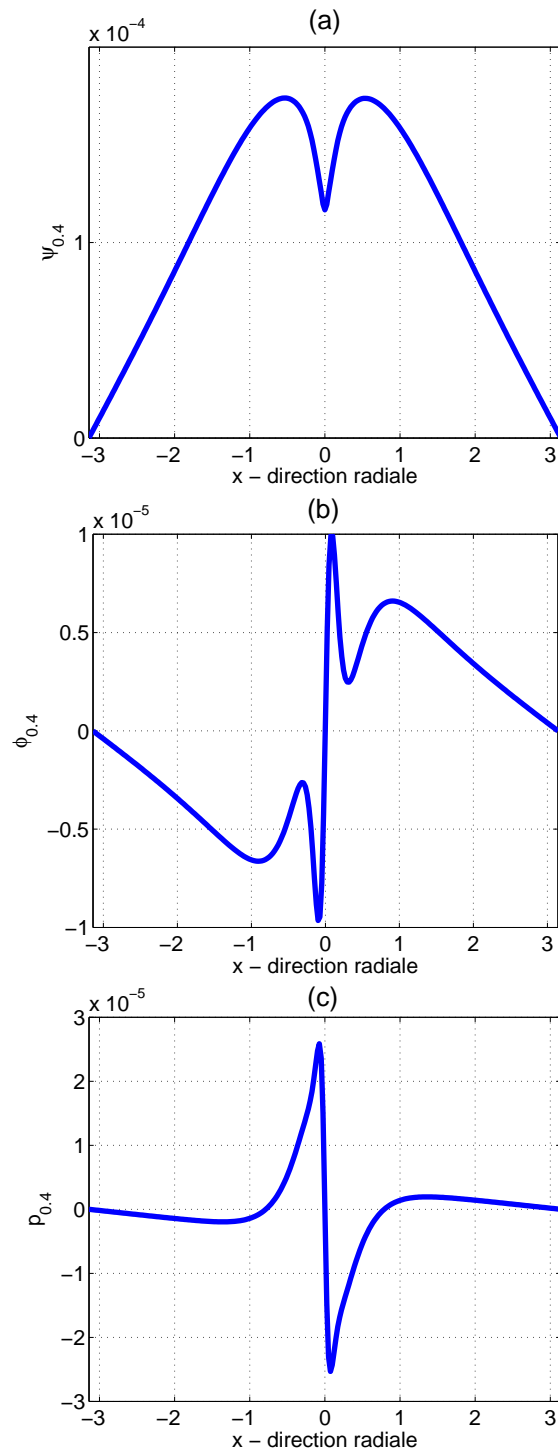


FIGURE 11.8 – Fonctions propres du mode de déchirement  $k_y = 0.4$  obtenues par la simulation 3 : (a)  $\psi_{0.4}(x)$ , (b)  $\phi_{0.4}(x)$  et (c)  $p_{0.4}(x)$  à  $t = 15000\tau_A$ .

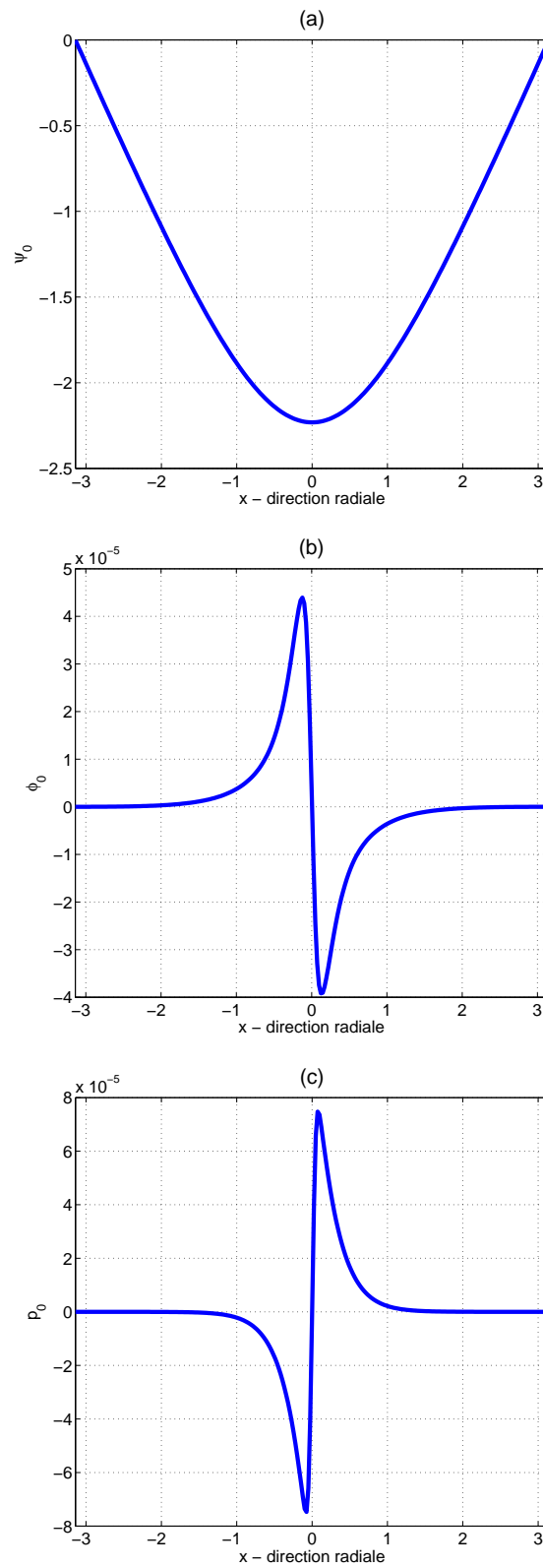


FIGURE 11.9 – Fonctions propres du mode  $k_y = 0$ , entraîné par le mode de déchirement, obtenues par la simulation 3 : (a)  $\psi_0(x)$ , (b)  $\phi_0(x)$  et (c)  $p_0(x)$  à  $t = 15000\tau_A$ .

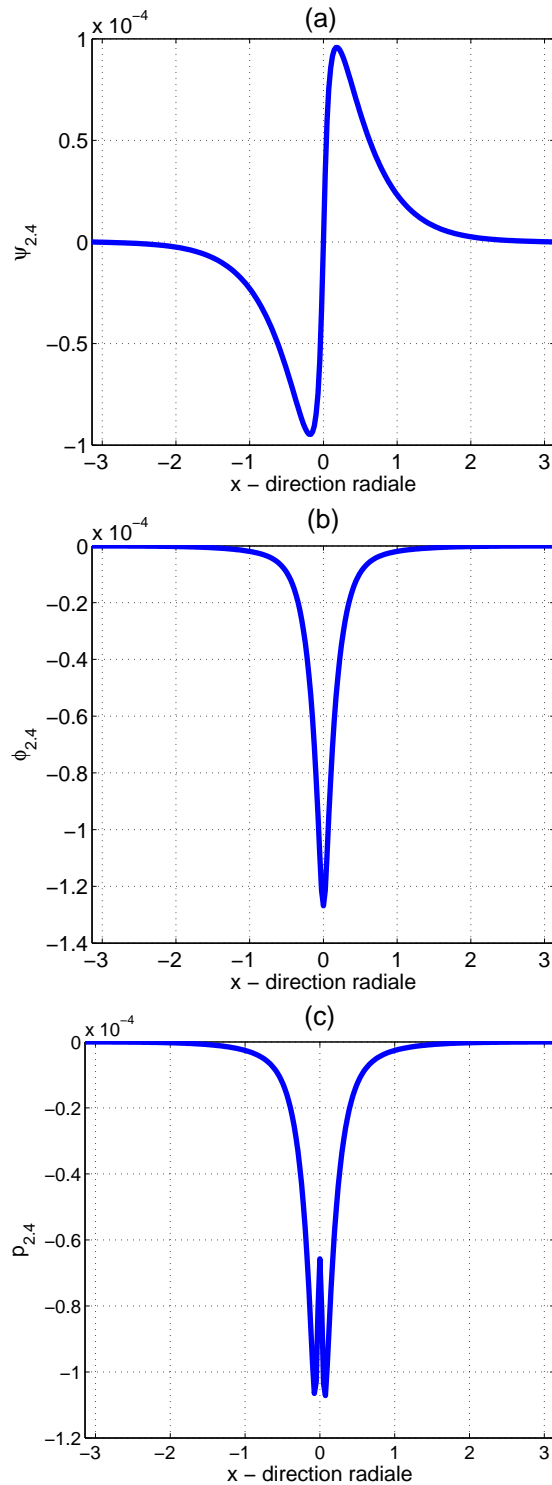


FIGURE 11.10 – Fonctions propres du mode interchange le plus instable  $k_y = 2.4$  obtenues par la simulation 3 : (a)  $\psi_{2,4}(x)$ , (b)  $\phi_{2,4}(x)$  et (c)  $p_{2,4}(x)$  à  $t = 15000\tau_A$ .

a observé sur la Figure (11.3) où les structures petites échelles de l'interchange commencent à disparaître et sur la Figure (11.6) où il y a une chute de l'énergie cinétique des modes interchanges à partir de  $t \sim 16000\tau_A$ .

Pendant le troisième régime (spectre (c) à  $t = 20000\tau_A$ ) et pendant le quatrième régime (spectre (d) à  $t = 26000\tau_A$ ), alors que l'énergie du mode de déchirement continue de croître en même temps que l'îlot magnétique grossit, les modes interchanges ont complètement disparu. Comme observé sur les contours des Figures (11.4) et (11.5), les cellules de convection de l'interchange ont complètement disparu, seul le mode de déchirement domine. En effet, la Figure (11.11), qui présente les fonctions propres du mode  $k_y = 2.4$  à  $t = 26000\tau_A$ , montre que ce mode a perdu la parité interchange et converge vers une parité du type mode de déchirement ( $\psi_{2.4}$  paire,  $\phi_{2.4}$  et  $p_{2.4}$  impaires). On peut noter, sur le spectre (d) de la Figure (11.7), que pendant le quatrième régime, l'énergie du mode  $k_y = 0$  a augmenté permettant, comme pour la simulation 2, une forte génération d'un flux zonal à l'origine de la structure observée sur la Figure (11.5).

En résumé, la dynamique du système est essentiellement non-linéaire. Dans un premier temps, le mode de déchirement  $k_y = 0.4$  génère le mode  $k_y = 0$ , leur interaction constructive amène à une forte amplification du taux de croissance du mode  $k_y = 0.4$ . Pendant cette phase, les modes interchanges continuent de croître linéairement. On notera, sur les spectres (a) et (b), des phénomènes de battements des modes interchanges. A partir de  $t = 16000\tau_A$ , c'est à dire dès que l'énergie des modes  $k_y = 0$  et  $k_y = 0.4$  domine celle des autres(cf. Figure (11.6)), l'énergie des modes interchanges chute et les phénomènes de battements semblent disparaître. Bien que cela nécessiterait des diagnostics plus approfondis, on peut avancer qu'à partir de  $t \sim 16000\tau_A$  une cascade directe se déclenche. En effet, les modes de déchirement  $k_y = 0$  et  $k_y = 0.4$  vont nourrir tous les autres modes par interaction non-linéaire. Plus précisément les crochets de Poisson préservent la parité, cela a pour conséquence de tuer les modes interchanges et d'imposer la parité du mode de déchirement à tous les modes (cf. Figure (11.11)). Il est intéressant de noter que bien que linéairement le taux de croissance du mode interchange  $k_y = 2.4$  soit plus grand que celui du mode de déchirement  $k_y = 0.4$ , on aboutit asymptotiquement à une dynamique dominée par le mécanisme de déchirement magnétique.

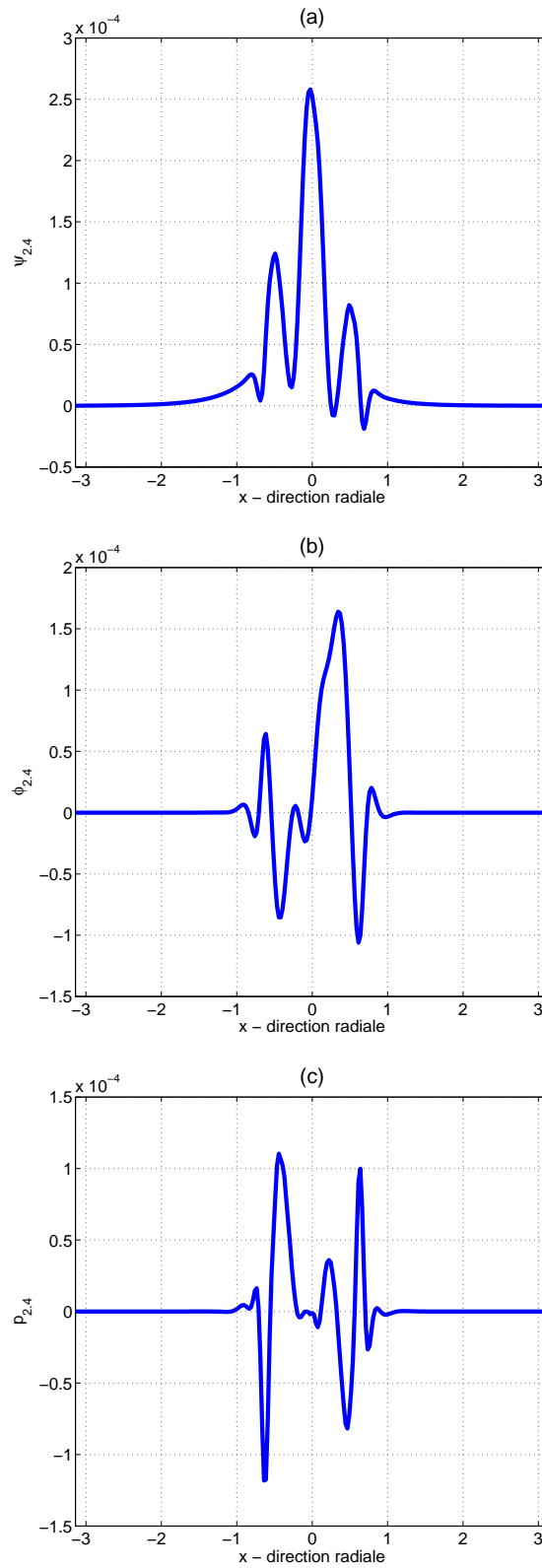


FIGURE 11.11 – Fonctions propres du mode interchange le plus instable  $k_y = 2.4$  obtenues par la simulation 3 : (a)  $\psi_{2,4}(x)$ , (b)  $\phi_{2,4}(x)$  et (c)  $p_{2,4}(x)$  à  $t = 26000\tau_A$ .



# Conclusion

Nous venons d'étudier la dynamique non-linéaire d'un îlot magnétique dans différentes situations linéaires initiales. De façon générale la présence de la pression, et plus particulièrement la présence de la courbure du champ magnétique et du gradient de pression, affectent profondément la dynamique non-linéaire de l'îlot.

Dans le cas d'un îlot magnétique contrôlé par le couplage entre la pression et le flux magnétique, la dynamique du système présente quatre phases. Après la formation de l'îlot et une première phase non-linéaire, la compétition entre le mode de déchirement et le mode interchange non-linéaire conduit à une bifurcation du système et une modification drastique de la dynamique non-linéaire de la pression électronique.

Lorsque l'on considère une situation linéaire où seul le mode de déchirement est instable et donne naissance à un îlot magnétique maintenu par un couplage ' $\psi - \phi$ ', la dynamique non-linéaire est une fois de plus affectée et présente également quatre phases importantes. Dans les deux premières phases, les effets de pression et d'interchange sont faibles et l'îlot se comporte comme dans le cas d'un mode de déchirement classique. Cependant, après, les termes d'interchange permettent la génération d'un fort flux zonal et permettent une nouvelle transition vers un nouvel état non-linéaire. L'interchange stable linéairement affecte donc la dynamique non-linéaire de l'îlot magnétique de façon quasi-linéaire.

Enfin, dans la dernière simulation étudiée, linéairement, les deux instabilités sont présentes : le mode de déchirement aux grandes échelles et les modes interchanges aux petites échelles. La dynamique non-linéaire présente quatre régimes importants. Tout d'abord, il y a croissance des modes interchanges aux petites échelles. Puis, il y a une première phase non-linéaire où l'îlot commence à se former grâce à un couplage non-linéaire entre les modes  $k_y = 0$  et  $k_y = 0.4$ . Ensuite, la parité des modes ( $k_y = 0$  et  $k_y = 0.4$ ) de déchirement se transmet par cascade non-linéaire à tous les autres modes. Ce phénomène a pour effet de nourrir des structures larges (îlot et flux zonal) et de détruire les petites structures liées à l'interchange. Finalement, l'îlot atteint sa taille maximale et sature. Il est intéressant de noter que, comme pour la simulation 1, l'énergie des petites échelles est en augmentation permanente et que la dynamique du système est donc pleinement non-linéaire.

Cette étude non-linéaire permet de mieux comprendre les effets de pression sur la dynamique générale du système mais elle ne répond pas à la question de la rotation poloïdale de l'îlot magnétique. A la lumière du comportement non-linéaire d'un îlot magnétique en présence d'in-

terchange, nous allons étudier dans la partie suivante les origines et la dynamique de la rotation poloïdale de l'îlot.



## Cinquième partie

# Origine de la rotation poloïdale d'un îlot magnétique



# Introduction

Le contrôle des îlots magnétiques est un problème majeur pour les plasmas de fusion. Dans un plasma de tokamak, les îlots magnétiques ré-arrangent les profils idéaux d'équilibre. De plus, il est connu que le verrouillage de la rotation des îlots magnétiques peut produire occasionnellement des disruptions du plasma dans les tokamaks [54, 53]. Il est donc très important de comprendre les différents mécanismes qui gouvernent la rotation des îlots magnétiques.

Beaucoup de travaux ont été effectués pour tenter de comprendre la rotation des îlots magnétiques [55, 15, 52]. Dans le cas du mode de déchirement classique, la symétrie du système (Eqs.(6.4-6.5)) annule la compétition entre les tenseurs de Reynolds et de Maxwell. Aucun écoulement poloïdal n'est alors généré et l'îlot magnétique n'est pas en rotation. Dans le système (4.6,4.8,4.10), la pression est prise en compte et casse la symétrie du système. Il existe alors plusieurs termes permettant la mise en rotation de l'îlot magnétique.

Dans la partie suivante, la déduction d'un modèle à partir de la loi d'Ohm Eq.(4.10) est présentée afin de comprendre les différentes origines de la rotation poloïdale de l'îlot magnétique. Nous utiliserons ce modèle pour étudier la rotation d'un îlot en présence du mécanisme d'interchange stable linéairement (simulation 2). Dans ce cas, il y a une forte génération de vitesse diamagnétique non-linéaire qui contrôle la rotation de l'îlot. L'effet du paramètre  $\beta$  sera étudié également dans cette partie. Enfin, nous étudierons l'origine de la rotation de l'îlot magnétique en présence d'un interchange instable linéairement.



# Chapitre 12

## Modèle pour la rotation poloïdale d'un îlot magnétique

### 12.1 Modèle pour la fréquence de la rotation poloïdale

En suivant [15] où une étude de la fréquence de rotation d'un îlot magnétique a été faite pour le cas d'un mode de déchirement en présence de l'effet diamagnétique ( $v^* \neq 0$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ ), nous allons étudier l'origine de la rotation poloïdale de l'îlot magnétique en présence d'interchange [52]. Pour cela, sachant que l'îlot magnétique est conduit par le mode  $m = 1$ , on projette la loi d'Ohm (Eq.(4.10)) sur ce même mode en supposant que pour le mode  $k_m = m2\pi/L_y$ , on a  $\tilde{\psi}_{k_m}(x, y, t) = \psi_{k_m}(x) e^{ik_my} e^{-i\lambda_m t}$ . Ici, la partie réelle de  $\lambda_m$  est la fréquence de rotation  $\omega_m$  tandis que la partie imaginaire correspond au taux de croissance  $\gamma_m$  de l'îlot magnétique. En négligeant les contributions non-linéaires des autres modes  $k_m > k_1$ , on obtient l'expression pour la fréquence de rotation  $\omega_1 = \omega$  de l'îlot magnétique :

$$\omega = \omega^* + \tilde{\omega}^* + \tilde{\omega}_{E \times B} + L_{\psi_0} + L_\eta, \quad (12.1)$$

où

$$\begin{aligned} \omega^* &= k_1 v^*, \\ \tilde{\omega}^* &= -k_1 \partial_x \tilde{p}_0, \\ \tilde{\omega}_{E \times B} &= k_1 \partial_x \tilde{\phi}_0, \\ L_{\psi_0} &= -Re \left( k_1 \psi_0' \frac{\phi_{k_1}(x) - p_{k_1}(x)}{\psi_{k_1}(x)} \right), \\ L_\eta &= Re \left( i\eta \frac{(\partial_x^2 - k_1^2) \psi_{k_1}(x)}{\psi_{k_1}(x)} \right). \end{aligned}$$

Précisons les définitions de  $\tilde{p}_0$  et  $\tilde{\phi}_0$  :  $\tilde{p}_0(x) = \langle p \rangle_y = \frac{1}{L_y} \int_{L_y} p dy$  et  $\tilde{\phi}_0(x) = \langle \phi \rangle_y = \frac{1}{L_y} \int_{L_y} \phi dy$ .  $\omega^*$  correspond à l'effet diamagnétique linéaire (elle est directement liée à la pression d'équilibre  $p_0$ ),  $\tilde{\omega}^*$  correspond à l'effet diamagnétique non-linéaire (elle est liée à la génération non-linéaire de pression moyenne  $\tilde{p}_0$ ),  $\tilde{\omega}_{E \times B}$  correspond à l'écoulement poloïdal du à la dérive  $E \times B$  (elle est directement liée à la génération non-linéaire d'un flux zonal  $\tilde{\phi}_0$ ),  $L_{\psi_0}$  représente la contribution

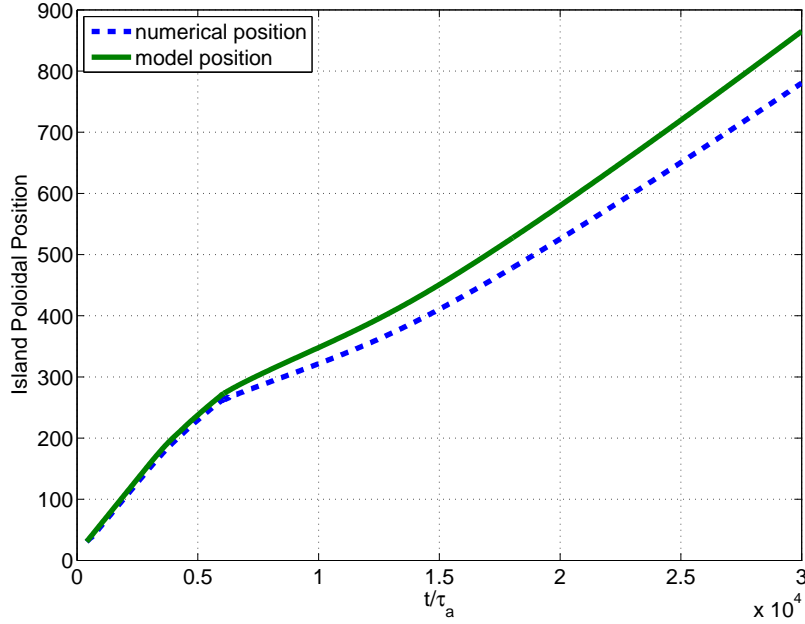


FIGURE 12.1 – Évolution temporelle de la position poloïdale de l'îlot magnétique obtenue par la simulation 2 avec  $\beta = 0.025$  comparée à celle obtenue par le modèle (12.2).

du champ magnétique d'équilibre et  $L_\eta$  représente la contribution de la résistivité. En général, chaque terme de l'équation (12.1) n'est pas constant à l'intérieur de la couche de courant  $\delta$ , il est donc nécessaire de considérer les moyennes radiales à l'intérieur de la couche de courant  $\delta$ . Ainsi, l'équation (12.1) devient :

$$\langle \omega \rangle_\delta = \langle \omega^* + \tilde{\omega}^* \rangle_\delta + \langle \tilde{\omega}_{E \times B} \rangle_\delta + \langle L_{\psi_0} \rangle_\delta + \langle L_\eta \rangle_\delta, \quad (12.2)$$

où  $\langle \cdot \rangle_\delta$  signifie une moyenne sur la couche de courant  $\delta$ .

Sur la Figure (12.1), l'évolution temporelle de la position poloïdale de l'îlot magnétique est présentée pour la simulation non-linéaire 2 avec  $\beta = 0.025$ . La dynamique des énergies pour la simulation 2 avec  $\beta = 0.025$  est présentée sur la Figure (12.2) et a le même comportement que ce qui a été observé sur la Figure (10.1) pour la simulation 2 avec  $\beta = 10^{-3}$ . Cependant, comme le montre la Figure (10.11), pour une valeur si haute de  $\beta$ , la transition a lieu plus tôt autour de  $t = 5600\tau_A$ . Sur la Figure (12.1), une comparaison avec la position poloïdale de l'îlot obtenue par le modèle (12.2) est également présentée. Le modèle (Eq.12.2) est en accord avec les données numériques et la dynamique de la rotation poloïdale de l'îlot est retrouvée. Il est important de noter que le temps d'intégration pour ces résultats est très long devant le temps d'Alfvén ( $30000\tau_A$ ) et la faible différence observée sur la Figure (12.1) entre les points numériques et ceux donnés par le modèle (12.2) peut être négligée.

En général, les contributions du champ magnétique d'équilibre et de la résistivité sont très faibles et peuvent être négligées. Les trois contributions majeures à la rotation proviennent donc des effets diamagnétiques linéaire et non-linéaire et de l'écoulement poloïdal  $E \times B$ . L'origine de  $v^*$  est directement liée au gradient de pression d'équilibre  $p_0$  et est un effet non-linéaire.

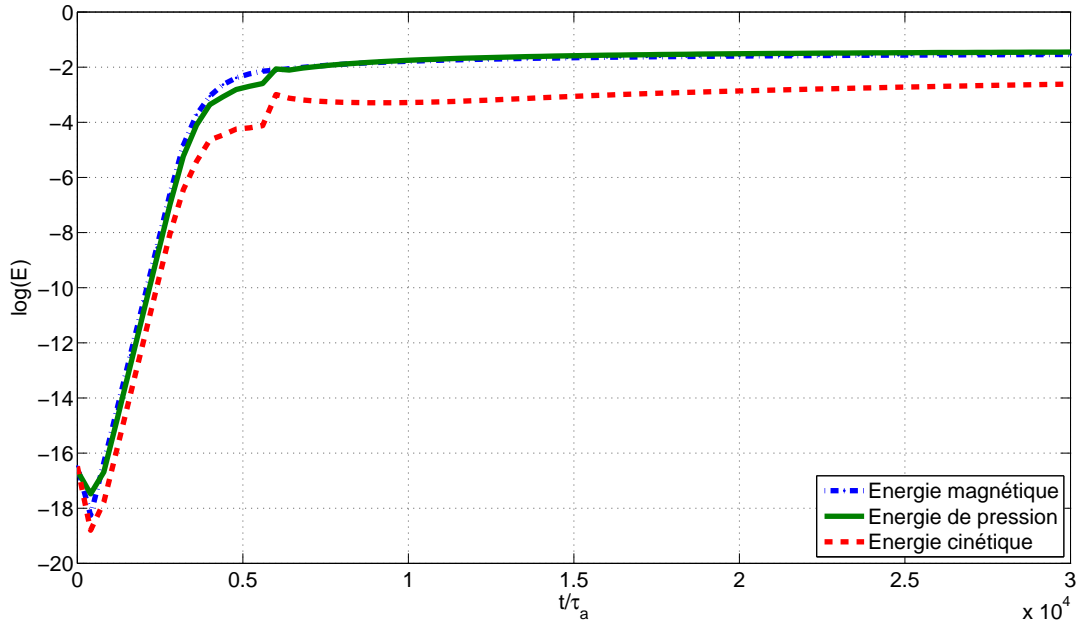


FIGURE 12.2 – Évolutions temporelles de l'énergie magnétique  $E_m$ , de l'énergie de pression  $E_p$  et de l'énergie cinétique  $E_c$  obtenues par la simulation 2 avec  $\beta = 0.025$ .

$\tilde{\omega}^*$  et  $\tilde{\omega}_{E \times B}$  sont produits par interactions non-linéaires. Nous allons étudier maintenant leur origine précise.

## 12.2 Origine de l'écoulement poloïdal $E \times B$

D'après l'équation (12.2), l'écoulement poloïdal  $E \times B$  non-linéaire  $\tilde{\omega}_{E \times B}$  affecte la fréquence de rotation de l'îlot magnétique. Dans le but de comprendre l'origine de cet écoulement, l'équation de conservation de la quantité de mouvement Eq.(4.6) est projetée sur le mode  $m = 1$  dans le cas limite où  $\nabla_{\perp}^2 \sim \partial_x^2$  (en effet, concernant la rotation de l'îlot, seule la grande échelle  $k_1$  nous intéresse). Ainsi, on obtient sans trop d'effort :

$$\partial_t \partial_x^2 \phi_0 = -\frac{1}{L_y} \int_{L_y} \{\phi, \nabla_{\perp}^2 \phi\} dy + \frac{1}{L_y} \int_{L_y} \{\psi, \nabla_{\perp}^2 \psi\} dy + \frac{\nu}{L_y} \int_{L_y} \partial_x^4 \phi dy. \quad (12.3)$$

On a défini dans le paragraphe précédent l'écoulement poloïdal  $E \times B$  comme  $\tilde{\omega}_{E \times B} = k_1 \partial_x \phi_0$ . Donc, en multipliant l'équation (12.3) par  $k_1$  et en moyennant sur la couche de courant  $\delta$ , on obtient :

$$\partial_t \langle \tilde{\omega}_{E \times B} \rangle_{\delta} = R(t) + M(t) + V(t), \quad (12.4)$$

où

$$\begin{aligned} R(t) &= -\frac{k_1}{\delta L_y} \int_{\delta} \int_{L_y} \{\phi, \nabla_{\perp}^2 \phi\} dy dx, \\ M(t) &= \frac{k_1}{\delta L_y} \int_{\delta} \int_{L_y} \{\psi, \nabla_{\perp}^2 \psi\} dy dx, \\ V(t) &= \frac{\nu k_1}{\delta L_y} \int_{\delta} \int_{L_y} \partial_x^4 \phi dy dx. \end{aligned}$$

$R(t)$  n'est autre que le tenseur de Reynolds et  $M(t)$  est le tenseur de Maxwell. Quant à  $V(t)$ , il représente la contribution de la viscosité à l'écoulement poloïdal  $E \times B$ . Généralement,  $V(t)$  est très faible et la génération de l'écoulement poloïdal  $E \times B$  (ou encore flux zonal) est le résultat d'une compétition entre les tenseurs de Reynolds et de Maxwell. Dans [15], l'étude de l'impact de ces tenseurs sur la rotation est faite dans le cas d'un îlot magnétique en présence de l'effet diamagnétique.

### 12.3 Origine de l'écoulement diamagnétique non-linéaire

La plupart du temps, l'étude se focalise sur l'origine du flux zonal et donc sur l'origine de l'écoulement poloïdal  $E \times B$ . Cependant, comme nous le verrons plus tard, l'écoulement diamagnétique généré non-linéairement  $\tilde{\omega}^*$  peut affecter fortement la fréquence de rotation d'un îlot en présence d'interchange. Il est donc important de comprendre son origine. Dans ce but, il faut faire apparaître l'écoulement diamagnétique non-linéaire  $\tilde{\omega}^* = k_1 \partial_x p_0$  dans l'équation de l'énergie (4.8). Pour cela, on explicite l'équation (4.8) suivant la direction radiale en supposant que  $\nabla_{\perp}^2 \sim \partial_x^2$  :

$$\partial_t \partial_x p = -\partial_x \{ \phi, p \} + \rho^{*2} \partial_x \{ \psi, \nabla_{\perp}^2 \psi \} + v^* [ (\kappa_2 - 1) \partial_x \partial_y \phi - \kappa_2 \partial_x \partial_y p ] + \chi_{\perp} \partial_x^3 p. \quad (12.5)$$

En projetant l'équation (12.5) sur le mode  $m = 1$ , il vient :

$$\partial_t \partial_x p_0 = -\frac{1}{L_y} \int_{L_y} dy \partial_x \{ \phi, p \} + \frac{\rho^{*2}}{L_y} \int_{L_y} dy \partial_x \{ \psi, \nabla_{\perp}^2 \psi \} + \frac{\chi_{\perp}}{L_y} \int_{L_y} dy \partial_x^3 p. \quad (12.6)$$

En multipliant l'équation (12.6) par  $k_1$  et en moyennant sur la couche de courant  $\delta$ , il vient l'équation d'évolution pour l'écoulement diamagnétique non-linéaire :

$$\partial_t \langle \tilde{\omega}^* \rangle_{\delta} = dC(t) + dM(t) + D(t), \quad (12.7)$$

où

$$\begin{aligned} dC(t) &= -\frac{k_1}{\delta L_y} \int_{\delta} \int_{L_y} \partial_x \{ \phi, p \} dy dx, \\ dM(t) &= \frac{\rho^{*2} k_1}{\delta L_y} \int_{\delta} \int_{L_y} \partial_x \{ \psi, \nabla_{\perp}^2 \psi \} dy dx, \\ D(t) &= \frac{\chi_{\perp} k_1}{\delta L_y} \int_{\delta} \int_{L_y} \partial_x^3 p dy dx. \end{aligned}$$

$dC$  est la contribution à la dérive diamagnétique non-linéaire de la divergence du terme de convection,  $dM$  est la contribution de la divergence du tenseur de Maxwell, enfin  $D$  est la contribution de la diffusivité. Comme nous le verrons plus tard, la dérive diamagnétique non-linéaire est le fruit d'une compétition entre ces trois termes  $dC$ ,  $dM$  et  $D$ .



# Chapitre 13

## Étude de la rotation de l'îlot magnétique en présence du mécanisme d'interchange stable linéairement

### 13.1 Compétition entre l'écoulement poloïdal $E \times B$ et la vitesse diamagnétique non-linéaire

La Figure (12.1) montre que pour la simulation 2 avec  $\beta = 0.025$  l'îlot magnétique est mis en rotation poloïdale. Pendant les deux premières phases (phase linéaire et premier plateau non-linéaire), la vitesse de l'îlot est constante. Puis, à la transition, ce n'est plus le cas. L'évolution de la rotation est affectée par des effets non-linéaires. Pour comprendre, la dynamique de la rotation de l'îlot magnétique, on utilise le modèle présenté plus haut. En effet, l'équation (12.2) montre que la fréquence effective de l'îlot magnétique est le résultat de différentes contributions ( $\omega^*$ ,  $\tilde{\omega}^*$ ,  $\tilde{\omega}_{E \times B}$ ,  $L_{\psi_0}$  et  $L_\eta$ ). Dans le but de comprendre l'effet des termes d'interchange sur la rotation de l'îlot, la Figure (13.1) présente l'évolution temporelle de chaque fréquence pour la simulation 2 avec  $\beta = 0.025$  et  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$  alors que la Figure (13.2) présente les mêmes résultats pour une simulation similaire incluant les termes d'interchange ( $\kappa_i \neq 0$ ). Tout d'abord, pour les deux simulations, les contributions à la rotation du champ magnétique d'équilibre  $L_{\psi_0}$  et de la résistivité  $L_\eta$  sont négligeables et n'affectent pas la fréquence effective  $\omega$  de l'îlot magnétique. De plus, les Figures (13.1) et (13.2) montrent que la dynamique de la rotation n'est pas affectée par les termes de courbure(/d'interchange) pendant la phase linéaire et pendant le premier plateau non-linéaire. En fait, pendant la formation linéaire de l'îlot magnétique, la rotation poloïdale est principalement gouvernée par l'effet diamagnétique linéaire  $\omega^*$ .  $\tilde{\omega}^*$  et  $\tilde{\omega}_{E \times B}$ , résultant d'effets non-linéaires, restent faibles. Pendant le premier plateau non-linéaire, la dérive diamagnétique non-linéaire  $\tilde{\omega}^*$  et l'écoulement poloïdal  $E \times B$   $\tilde{\omega}_{E \times B}$  sont fortement générés et affectent la rotation de l'îlot magnétique. L'écoulement poloïdal  $E \times B$  est la principale contribution à la fréquence effective de l'îlot pendant ce régime. Cependant, après le premier plateau

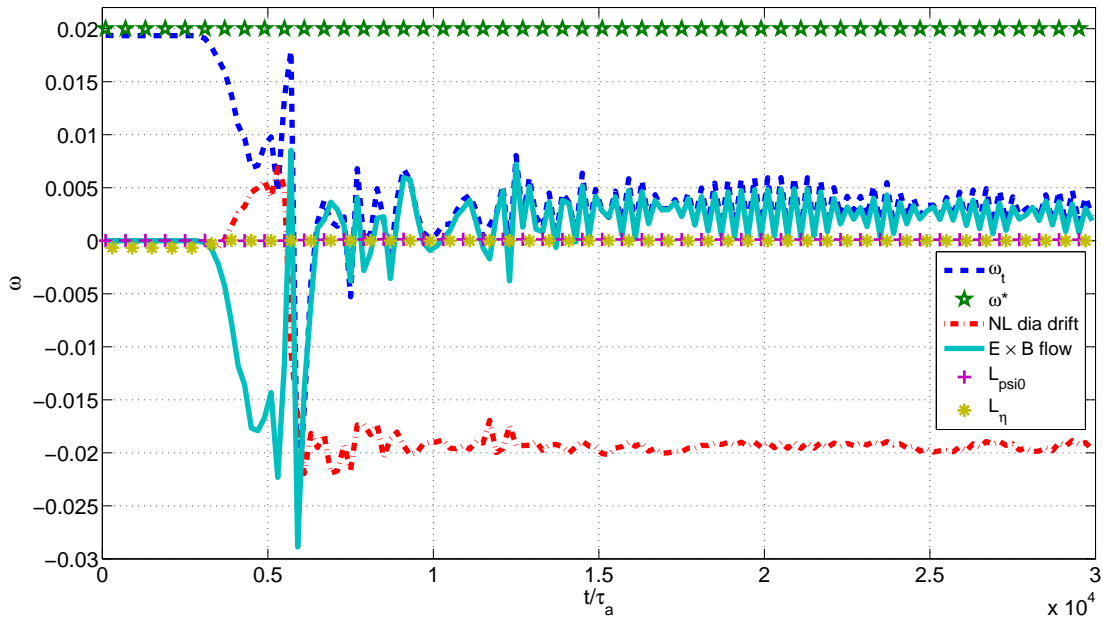


FIGURE 13.1 – Évolutions temporelles de chaque contribution à la fréquence effective de l’îlot pour la simulation avec  $\beta = 0.025$  et avec  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ .

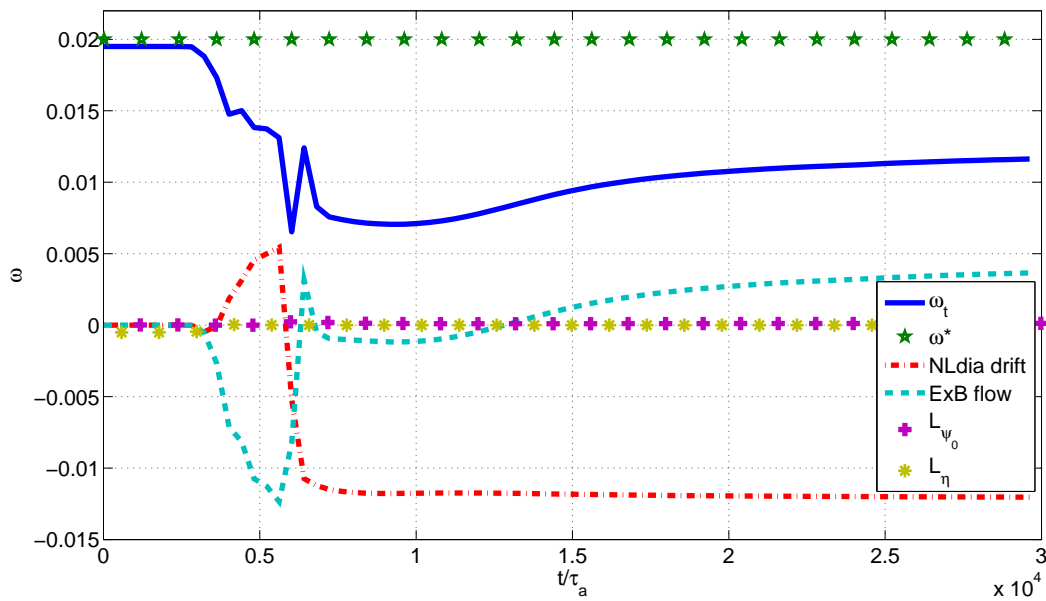


FIGURE 13.2 – Évolutions temporelles de chaque contribution à la fréquence effective de l’îlot pour la simulation avec  $\beta = 0.025$  incluant les termes d’interchange.

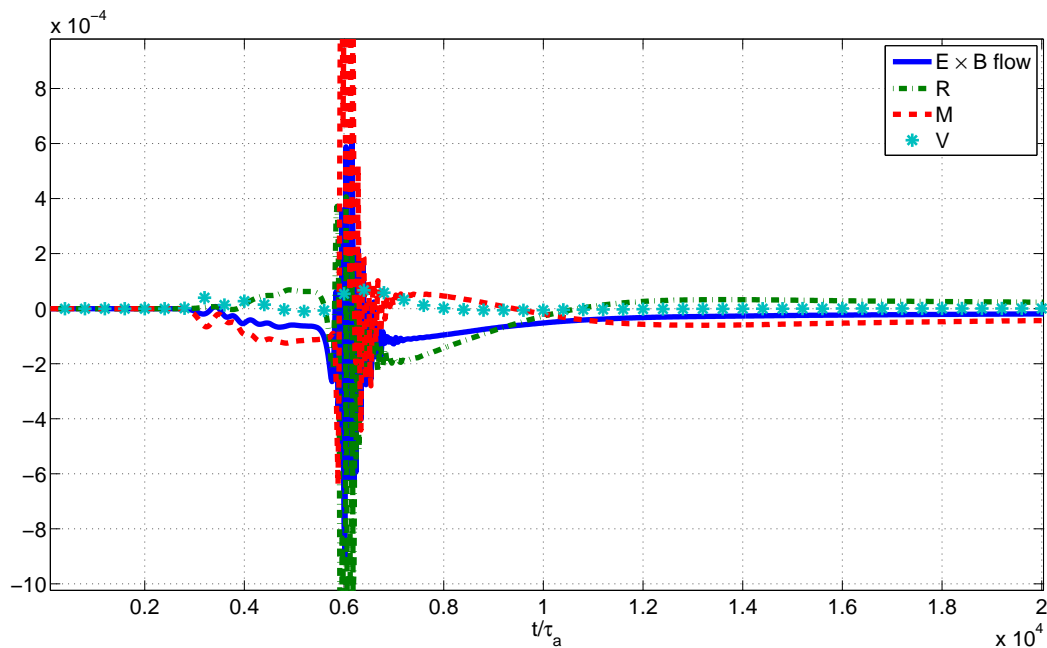


FIGURE 13.3 – Évolutions temporelles de  $R(t)$ ,  $M(t)$  et  $V(t)$  obtenues par la simulation 2 avec  $\beta = 0.025$ .

non-linéaire, les termes d'interchange affectent la dynamique de la fréquence de rotation de l'îlot. Lorsque les termes d'interchange ne sont pas inclus (Figure(13.1)), l'évolution temporelle des différentes fréquences est en accord avec les résultats trouvés pour un îlot magnétique en présence de la dérive diamagnétique linéaire dans [15]. Après la génération non-linéaire des différents écoulements, les effets diamagnétiques linéaire et non-linéaire ( $\omega^*$  et  $\tilde{\omega}^*$ ) s'annulent l'un l'autre. Ainsi, l'écoulement poloïdal  $E \times B$  contrôle la fréquence effective de l'îlot,  $\omega \sim \tilde{\omega}_{E \times B}$ . La Figure (13.2) montre que lorsque les termes d'interchange sont inclus, une telle annulation des fréquences diamagnétiques n'a plus lieu après la transition. Ainsi, l'effet diamagnétique total ( $\omega^* + \tilde{\omega}^*$ ) devient la contribution principale à la rotation poloïdale de l'îlot magnétique. Cependant, après la transition, la Figure (13.2) montre clairement que  $\partial\omega/\partial t \sim \partial\tilde{\omega}_{E \times B}/\partial t$ . La vitesse asymptotique de l'îlot est augmentée par les termes de courbure  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$ .

## 13.2 Dynamique des contributions à la rotation

### Origine de l'écoulement poloïdal $E \times B$ - Compétition entre les tenseurs de Reynolds et de Maxwell

Sur la Figure (13.3), les évolutions temporelles de  $R(t)$ ,  $M(t)$  et  $V(t)$  sont présentées pour la simulation 2 avec  $\beta = 0.025$ . Comme attendu, les différents tenseurs sont générés non-linéairement au début du premier plateau non-linéaire permettant la croissance de l'écoulement poloïdal  $E \times B$ . Mise à part à la fin du régime linéaire où le tenseur de Reynolds n'a pas

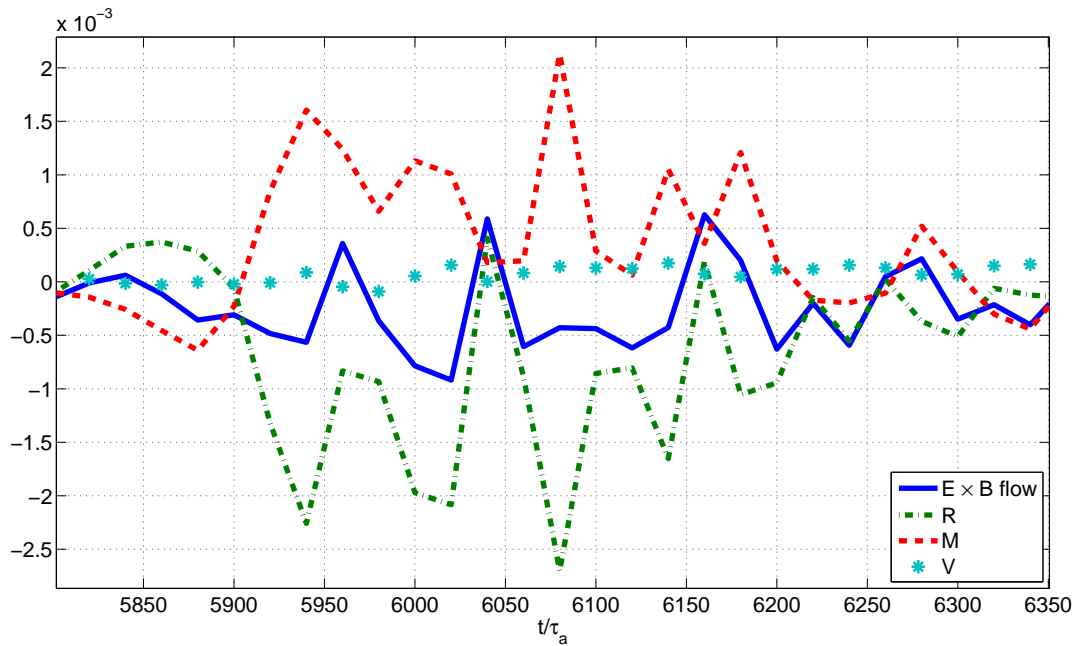


FIGURE 13.4 – Zoom pendant la transition des évolutions temporelles de  $R(t)$ ,  $M(t)$  et  $V(t)$  obtenues par la simulation 2 avec  $\beta = 0.025$ .

encore été généré, le terme de viscosité est très faible et ne joue pas un rôle important dans l'origine de l'écoulement. Les contributions les plus importantes proviennent des tenseurs de Reynolds et de Maxwell qui sont en compétition l'un avec l'autre. Il y a une forte amplification de l'amplitude des tenseurs pendant la transition. Sur la Figure (13.4), un zoom pendant la transition des évolutions de  $R(t)$ ,  $M(t)$  et  $V(t)$  est présenté. Il est important de noter que pendant la transition, alors que le terme de viscosité est toujours faible, les évolutions des tenseurs de Maxwell et de Reynolds sont complémentaires. Les deux tenseurs, en compétition, ont tendance à se contre balancer l'un l'autre pendant cette phase où l'écoulement traverse la séparatrice, limitant ainsi le niveau de génération du flux zonal, même si l'amplitude des deux tenseurs a grossi. Une fois la transition passée, l'amplitude des crochets non-linéaires moyens ( $R$  et  $M$ ), au voisinage de la séparatrice, chute. Cependant, dans ce nouvel équilibre dynamique, l'écoulement poloïdal  $E \times B$  est toujours généré asymptotiquement grâce au tenseur de Maxwell, en réponse de la structure magnétique à la nouvelle distribution des champs.

### Origine de la vitesse diamagnétique non-linéaire - Compétition entre la divergence du terme de convection et la divergence du tenseur de Maxwell

Sur la Figure (13.5), les évolutions temporelles de  $dC(t)$ ,  $dM(t)$  et  $D(t)$  sont présentées pour la simulation 2 avec  $\beta = 0.025$ . Les trois contributions de la dérive diamagnétique non-linéaire sont générées au début du régime non-linéaire. Durant le premier plateau non-linéaire,  $dC$ ,  $dM$

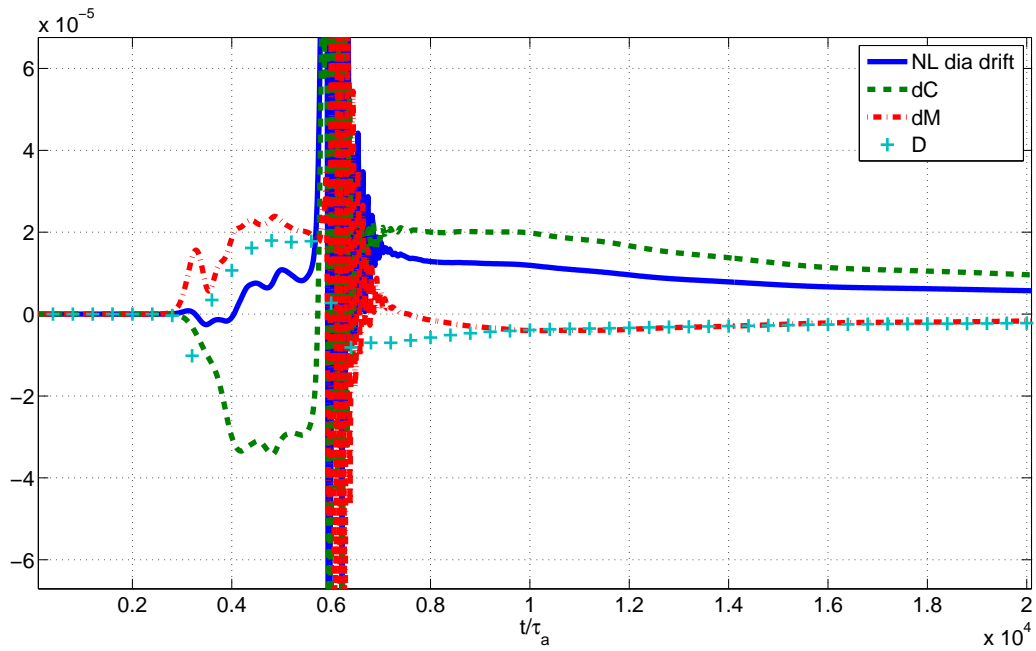


FIGURE 13.5 – Évolutions temporelles de  $dC(t)$ ,  $dM(t)$  et  $D(t)$  obtenues par la simulation 2 avec  $\beta = 0.025$ .

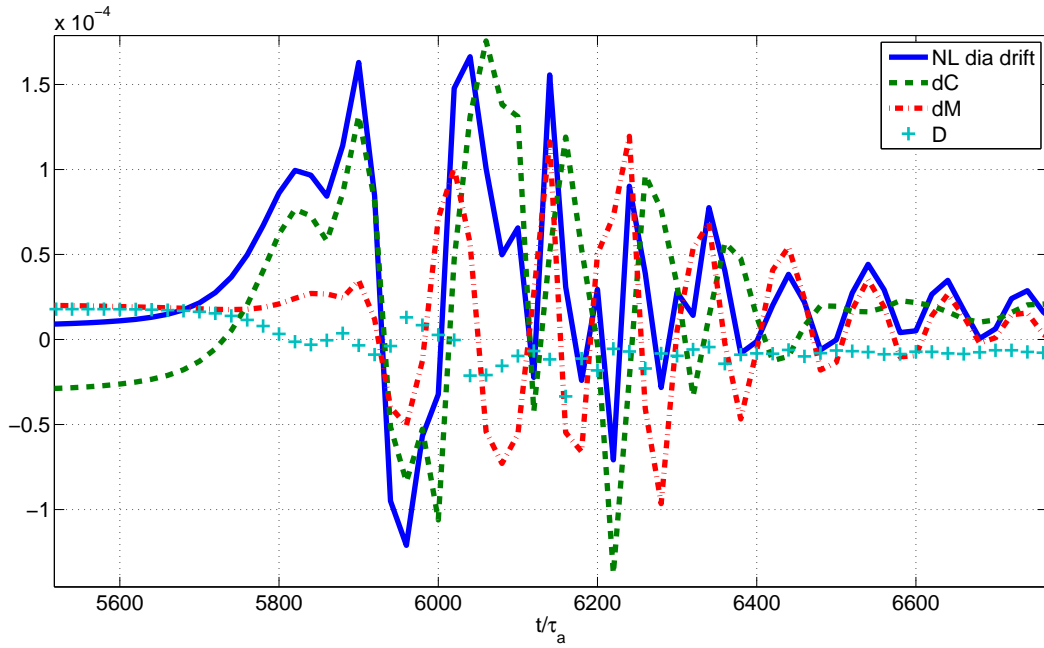


FIGURE 13.6 – Zoom pendant la transition des évolutions temporelles de  $dC(t)$ ,  $dM(t)$  et  $D(t)$  obtenues par la simulation 2 avec  $\beta = 0.025$ .

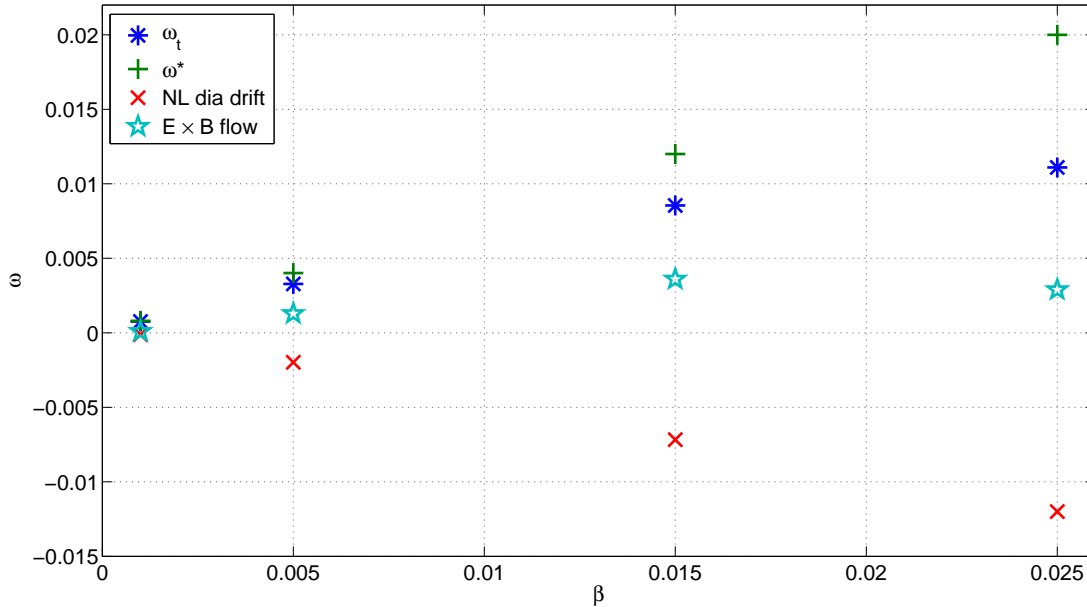


FIGURE 13.7 – Effet du paramètre  $\beta$  sur la fréquence de rotation de l’îlot magnétique après la transition.

et  $D$  participent activement à la génération et à la croissance de l’écoulement diamagnétique non-linéaire  $\tilde{\omega}^*$ . A la transition, il y a amplification de l’amplitude des trois contributions. La Figure (13.6) présente un zoom pendant la transition des évolutions temporelles de  $dC$ ,  $dM$  et  $D$ . Pendant cette transition, la contribution de la diffusivité ne croît pas et est relativement faible en amplitude comparée à  $dC$  et  $dM$ . Ainsi, à la fois, la divergence du terme de convection et la divergence du tenseur de Maxwell nourrissent l’écoulement diamagnétique non-linéaire. La Figure (13.6) montre qu’au début de la transition, la dérive diamagnétique non-linéaire est conduite par  $dC$ , le terme lié à l’advection des cellules de pression. Ensuite, ce terme est contre balancé par la divergence du tenseur de Maxwell. Cela conduit à la stabilisation de la dynamique de l’îlot magnétique. Le paramètre de couplage entre la pression et le flux magnétique  $\rho^*$  est donc un paramètre important pour la transition. Dans le dernier régime de saturation, l’origine de l’écoulement non-linéaire diamagnétique  $\tilde{\omega}^*$  provient principalement de la divergence du terme de convection  $dC$ ,  $dM$  et  $D$  étant faibles.

### 13.3 Effet du paramètre $\beta$ sur la rotation

Sur la Figure (13.7), l’effet du paramètre  $\beta$  sur la fréquence de rotation de l’îlot magnétique est présenté. Pour obtenir cette Figure, les fréquences ont été moyennées de  $t = 15000\tau_A$  à  $t = 30000\tau_A$  (après la transition). Pour  $\beta$  faible, les effets de pression sont faibles et la situation est proche d’un mode de déchirement classique. La compétition entre les tenseurs de Reynolds et de Maxwell ne produit non-linéairement aucun flux zonal et aucun écoulement diamagnétique. La fréquence de rotation asymptotique  $\omega$  croît avec le paramètre  $\beta$ . La fréquence de la dérive

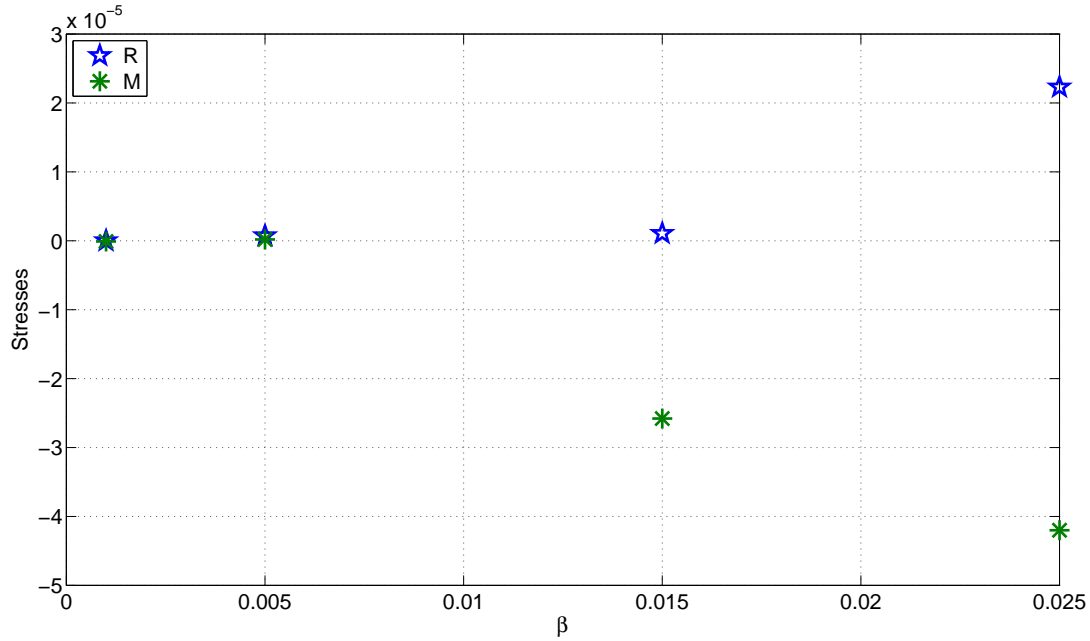


FIGURE 13.8 – Effet du paramètre  $\beta$  sur les tenseurs de Reynolds  $R$  et de Maxwell  $M$  après la transition.

diamagnétique non-linéaire  $\tilde{\omega}^*$  croît presque linéairement avec  $\beta$ , mais avec une forme plus faible que la forme linéaire, permettant ainsi une dérive asymptotique globale de l'îlot magnétique dans la direction des électrons diamagnétiques. Cependant, il est important de noter que la direction de la rotation de l'îlot dépend entre autre de la valeur de la viscosité [15]. Pour toutes les valeurs de  $\beta$ , la Figure (13.7) montre que la contribution du flux zonal à la rotation de l'îlot magnétique est plus faible que la contribution de l'effet diamagnétique total. A partir de  $\beta \sim 0.015$ ,  $\tilde{\omega}_{E \times B}$  décroît. Cette propriété est liée à la transition observée sur les Figures (13.8) et (13.9) où l'effet de  $\beta$  sur  $R$  et  $M$ , d'une part, et sur  $dC$  et  $dM$ , d'autre part, est présenté (les différents tenseurs ont été moyennés entre  $t = 15000\tau_A$  et  $t = 30000\tau_A$  pour obtenir ces Figures). L'amplification des tenseurs conduit à la génération non-linéaire des écoulements moyens et affecte considérablement la rotation de l'îlot magnétique. Plus précisément, pour de faibles valeurs de  $\beta$ , les amplitudes des tenseurs sont très faibles comme dans le cas d'un mode de déchirement classique. Ceci explique pourquoi la dérive diamagnétique non-linéaire et l'écoulement poloïdal  $E \times B$  affectent peu la rotation de l'îlot magnétique lorsque les effets de pression sont faibles. Cependant, pour des régimes à fort  $\beta$ , l'amplitude des tenseurs, en particulier du tenseur de Maxwell et la contribution de la convection, devient plus importante. A  $\beta = 0.015$ , une transition est observée sur les Figures (13.8) et (13.9). Tout d'abord,  $dM$  n'est plus négligeable comparé à  $dC$ . Ensuite, la contribution du tenseur de Reynolds  $R$  commence à croître, affaiblissant l'écoulement global  $E \times B$ , comme observé sur la Figure (13.7).

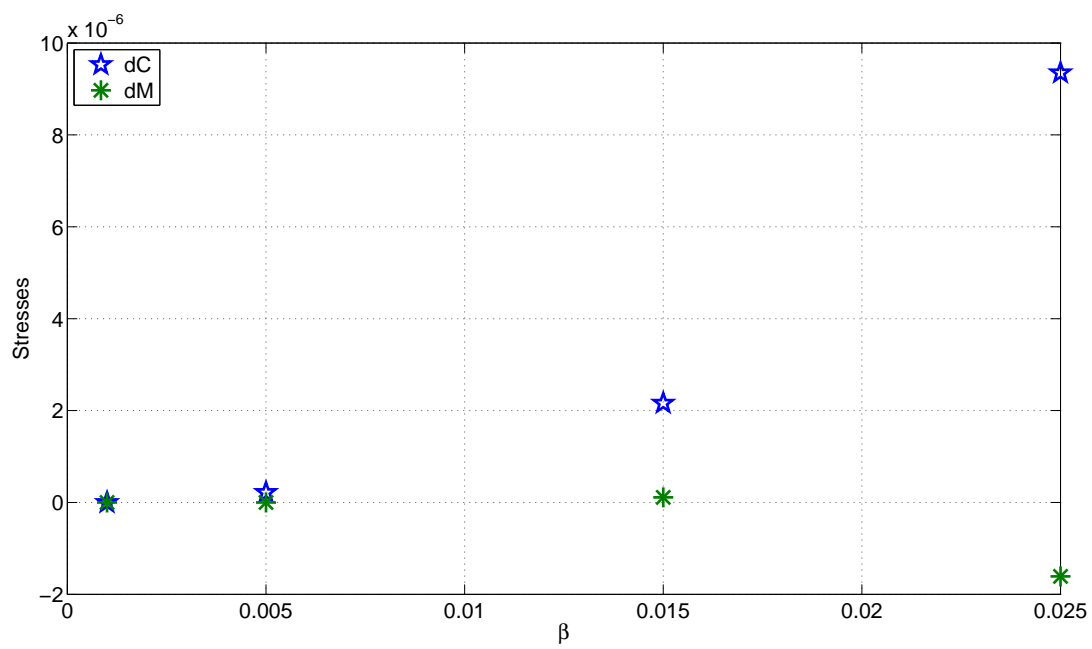


FIGURE 13.9 – Effet du paramètre  $\beta$  sur la divergence du terme de convection  $dC$  et la divergence du tenseur de Maxwell  $dM$  après la transition.



# Chapitre 14

## Étude de la rotation de l'îlot magnétique en présence du mécanisme d'interchange instable linéairement

### 14.1 Evolution de la rotation poloïdale d'un îlot magnétique en présence de modes interchanges instables

La Figure (14.1) montre que l'îlot magnétique de la simulation 3 est mis en rotation et change de direction lorsque le système rentre dans la phase pleinement non-linéaire. Il est donc intéressant d'étudier son origine pour voir si les modes interchanges ont un impact sur la rotation de l'îlot. Dans la simulation 2, où les modes interchanges sont stables, la rotation poloïdale de l'îlot magnétique est peu affectée par les effets de la résistivité  $L_\eta$  et du champ magnétique d'équilibre  $L_{\psi_0}$ . Ainsi, sur la Figure (12.1), on retrouve la position poloïdale de l'îlot magnétique en ne tenant compte que des effets diamagnétiques (linéaire et non-linéaire) et de l'écoulement poloïdal  $E \times B$ . Pour la simulation 3, la situation est différente. En effet, comme le montre la Figure (14.1), pour retrouver l'évolution temporelle de la position poloïdale de l'îlot, il faut inclure, dans le modèle, l'effet de la résistivité  $L_\eta$ .

La Figure (14.2) présente l'évolution temporelle de toutes les fréquences qui contribuent à la rotation poloïdale de l'îlot magnétique. Pendant la phase linéaire, c'est bien entendu la fréquence diamagnétique linéaire  $\omega^*$  qui a la contribution la plus importante. Ensuite, lorsque l'îlot magnétique commence à se former, la fréquence issue de la résistivité  $L_\eta$  apporte la participation la plus importante. Puis, avec la génération du flux zonal, la contribution de la résistivité redevient négligeable alors que les écoulements non-linéaires poloïdaux  $E \times B$  et diamagnétique sont générés. Contrairement à ce que l'on a observé avec la simulation 2 où les modes interchanges étaient stables (Figure (13.2)), la fréquence non-linéaire diamagnétique  $\tilde{\omega}^*$  est très faible. La rotation poloïdale non-linéaire de l'îlot magnétique en présence de modes interchanges instables est donc gouvernée principalement par l'écoulement poloïdal  $E \times B$  dans

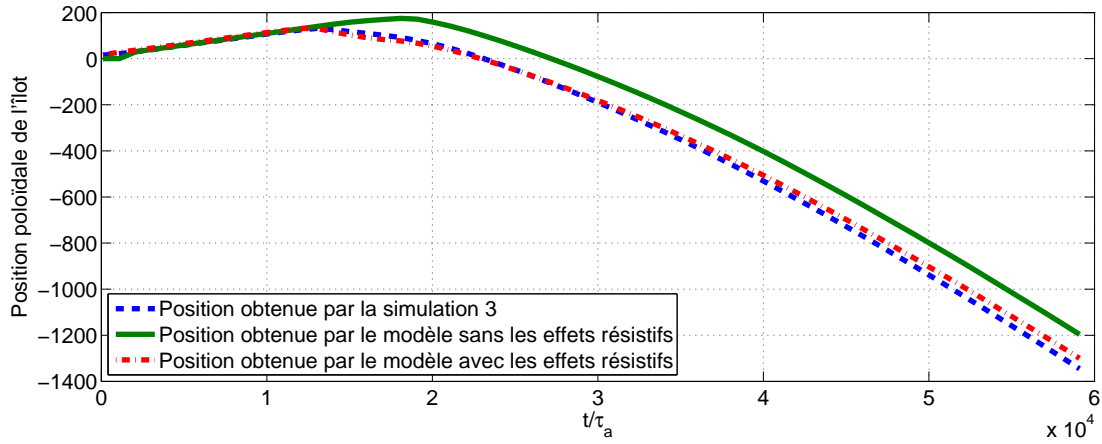


FIGURE 14.1 – Évolution temporelle de la position poloidale de l'îlot magnétique obtenue par la simulation 3 comparée à celles obtenues par le modèle (12.2) où l'on a négligé les effets de la résistivité ( $L_\eta$ ) et du champ magnétique d'équilibre ( $L_{\psi_0}$ ) d'une part et où l'on a négligé que la contribution de  $L_{\psi_0}$  d'autre part.

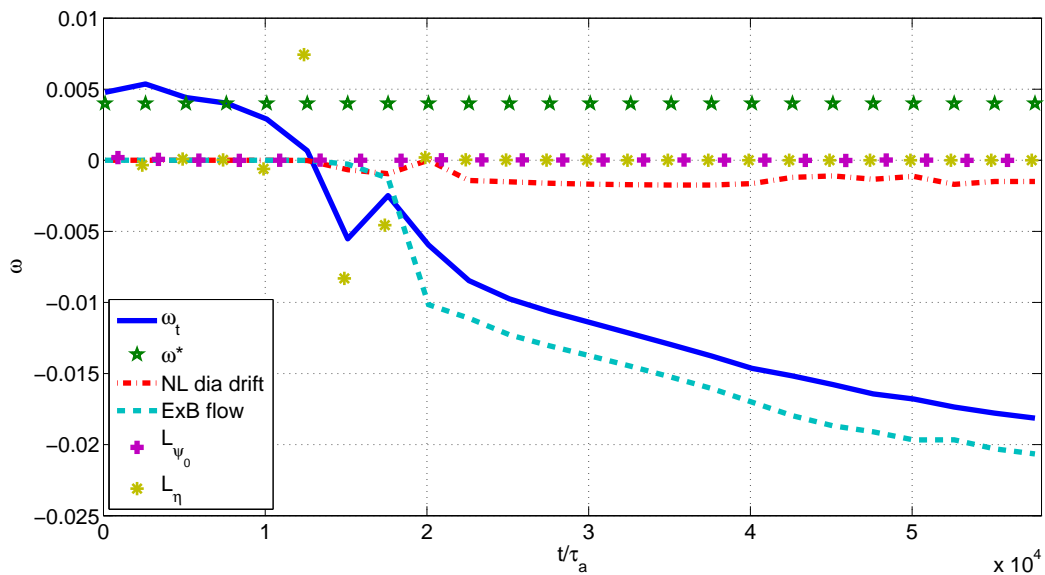


FIGURE 14.2 – Évolutions temporelles de chaque contribution à la fréquence effective de l'îlot pour la simulation 3 où les modes interchanges sont instables linéairement.

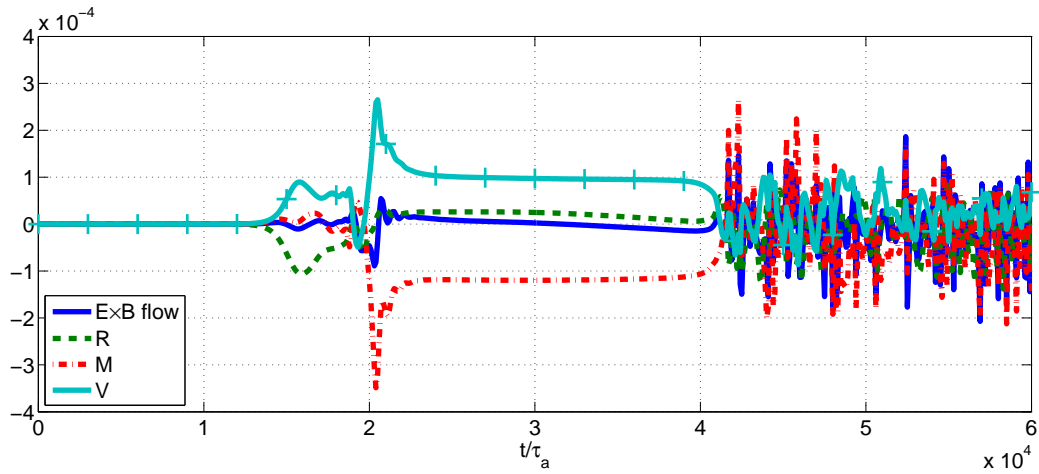


FIGURE 14.3 – Évolutions temporelles de  $R(t)$ ,  $M(t)$  et  $V(t)$  obtenues par la simulation 3.

la phase asymptotique

## 14.2 Origine des écoulements poloïdaux non-linéaires $E \times B$ et diamagnétique

### Origine de l'écoulement poloïdal $E \times B$ , $\tilde{\omega}_{E \times B}$

Nous venons de voir que pour la simulation 3, la rotation poloïdale de l'îlot magnétique est gouvernée non-linéairement par l'écoulement poloïdal  $E \times B$ . L'équation (12.4) donne un modèle pour expliquer l'origine de cet écoulement. La Figure (14.3), qui présente les évolutions temporelles de  $R$ ,  $M$  et  $V$ , montre que la fréquence  $\tilde{\omega}_{E \times B}$  est le résultat d'une compétition entre la viscosité et les tenseurs de Maxwell et de Reynolds. Tout d'abord, pendant la phase linéaire, il n'y a pas d'écoulement poloïdal  $E \times B$  puisque  $R$ ,  $M$  et  $V$ , issus d'effets non-linéaires, sont nuls. A partir du deuxième régime où les non-linéarités commencent à apparaître, la fréquence  $\tilde{\omega}_{E \times B}$  est générée. Avant la génération du flux zonal, la contribution du tenseur de Maxwell est négligeable et l'écoulement  $E \times B$  résultant est issu d'une compétition entre la viscosité  $V$  et le tenseur de Reynolds  $R$  qui ont tendance à se compenser. Après la génération du flux zonal, le tenseur de Reynolds devient négligeable pendant que le tenseur de Maxwell est fortement généré. L'écoulement poloïdal  $E \times B$  est alors issu de la compétition entre des effets visceux  $V$  et le tenseur de Maxwell qui se compensent fortement.

### Origine de l'écoulement nonlinéaire diamagnétique, $\tilde{\omega}^*$

Nous avons vu que, pour la simulation 3, l'écoulement non-linéaire diamagnétique  $\tilde{\omega}^*$  est faiblement généré et contribue peu à la rotation poloïdale de l'îlot magnétique. Cependant, il est

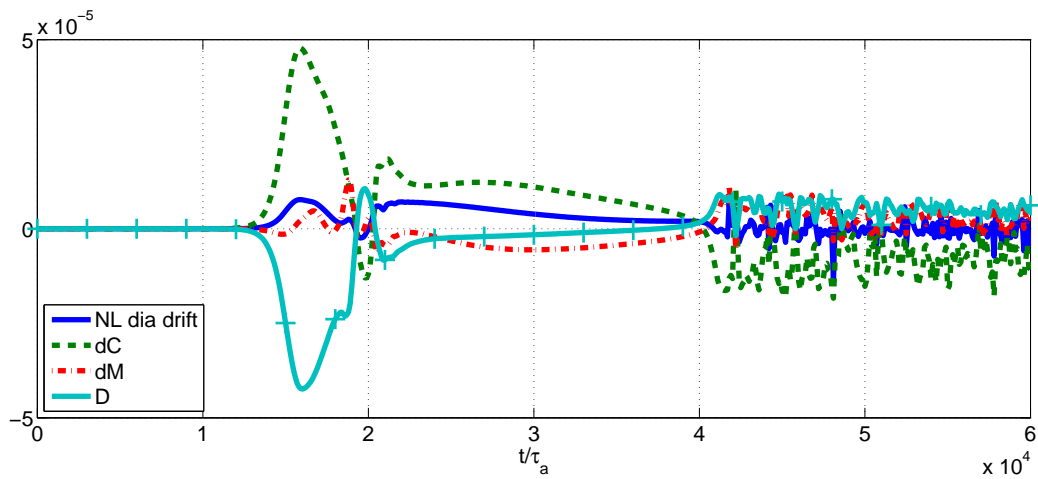


FIGURE 14.4 – Évolutions temporelles de  $dC(t)$ ,  $dM(t)$  et  $D(t)$  obtenues par la simulation 3.

intéressant d'étudier son origine. L'équation (12.7) permet de modéliser l'origine de la fréquence  $\tilde{\omega}^*$ . La Figure (14.4) montre que l'écoulement non-linéaire diamagnétique résulte d'une compétition entre les effets de la diffusion perpendiculaire  $D$  et la divergence du terme de convection  $dC$ . La contribution de la divergence du tenseur de Maxwell reste négligeable tout au long de la simulation.

# Conclusion

Dans cette partie, nous venons d'étudier les origines et la dynamique de la rotation poloïdale d'un îlot magnétique en présence d'interchange. La déduction d'un modèle pour la fréquence de la rotation à partir des équations (4.6, 4.8, 4.10) montre que la rotation non-linéaire est le résultat de la génération d'un écoulement poloïdale  $E \times B$  et de la génération d'un écoulement diamagnétique non-linéaire.

Le modèle et les résultats numériques montrent que l'écoulement non-linéaire poloïdal  $E \times B$  est le résultat de la compétition entre les tenseurs de Reynolds et de Maxwell fortement générés lors des transitions. De même, l'écoulement non-linéaire diamagnétique est généré par les contributions de la divergence du terme de convection et la divergence du tenseur de Maxwell.

Lorsque seul le mode de déchirement est stable linéairement, la rotation non-linéaire de l'îlot est principalement contrôlé par l'écoulement diamagnétique, laissant à l'écoulement poloïdal  $E \times B$  un rôle peu important. L'effet diamagnétique non-linéaire, nourri principalement par la divergence du terme convectif et par la divergence du tenseur de Maxwell, s'ajoute à l'effet diamagnétique linéaire pour contrôler la rotation poloïdale de l'îlot magnétique.

Par contre, lorsque les modes interchanges sont instables aux petites échelles, la rotation non-linéaire de l'îlot est gouvernée, dans le dernier régime, principalement par l'écoulement poloïdal  $E \times B$  issu de la compétition entre le tenseur de Maxwell et la viscosité qui se compensent. La contribution de la viscosité à la rotation de l'îlot est directement liée à la présence de turbulence aux petites échelles de l'interchange. L'impact des petites échelles sur la rotation macroscopique de l'îlot se mesure également dans la phase formation de l'îlot magnétique. En effet, la Figure (14.1) montre que, lorsque l'îlot se forme, le terme résistif, lié directement à l'instabilité d'interchange aux petites échelles, apporte une contribution importante à la rotation.



## Sixième partie

### Conclusion et Perspectives





Dans cette thèse, nous avons étudié la dynamique multi-échelle d'un îlot magnétique en présence d'interchange. Pour cela, nous avons explicité un modèle issu de la Magnétohydrodynamique à deux fluides dans le cadre de l'approximation de dérive. Ce modèle 2D à trois champs donne l'évolution temporelle du potentiel électrostatique  $\phi$ , de la pression électronique  $p$  et du flux magnétique  $\psi$  en prenant en compte à la fois le mode de déchirement et l'instabilité d'interchange. Le mode de déchirement instable donne naissance à un îlot magnétique. L'instabilité d'interchange permet la génération de modes instables au niveau des petites échelles. Le modèle utilisé dans cette thèse, bien que simplifié, reste très difficile à résoudre analytiquement. Nous nous sommes donc appuyés sur l'outil numérique, un code 2D semi-spectral, pour effectuer notre étude. Ainsi, après nous être intéressés à l'étude linéaire, nous avons étudié numériquement les effets de courbure du champ magnétique et de gradient de pression sur la dynamique non-linéaire d'un îlot magnétique et sur la dynamique de la rotation poloïdale de l'îlot.

L'étude linéaire a été faite de manière analytique et numérique. Elle a d'abord permis de montrer comment la présence de la pression électronique affecte la formation d'un îlot magnétique. En effet, lorsque les conditions sont favorables, c'est à dire lorsque la résistivité est suffisamment faible ou lorsque les effets de rayon de Larmor sont importants (petits îlots magnétiques), la formation linéaire de l'îlot magnétique n'est pas issue d'un couplage entre le potentiel électrostatique et le flux magnétique, mais d'un couplage entre ce dernier et la pression électronique. Plus précisément, en présence de la pression électronique, la couche résistive devient plus fine et plus singulière, la structure quadripolaire observée sur la pression amène à une formation plus rapide de l'îlot magnétique. L'étude linéaire a ensuite permis de voir que la présence d'un fort champ magnétique stabilise les modes interchanges électrostatiques par "alvénisation" rendant l'objectif de cette thèse plus compliqué à atteindre. Ainsi, pour obtenir un spectre linéaire où le mode de déchirement est présent aux grandes échelles pendant que les modes interchanges sont instables aux petites échelles, il faut augmenter fortement la force des termes de courbure et de gradient de pression.

L'étude non-linéaire a été faite de manière numérique pour différentes situations linéaires initiales. De façon générale, l'instabilité d'interchange ou plus précisément les termes liés à la courbure du champ magnétique et au gradient de pression affectent profondément la dynamique non-linéaire d'un îlot magnétique. En général, lorsque les modes interchanges sont stabilisés par "alvénisation" et que seul le mode de déchirement est instable, la dynamique du système se décompose en quatre phases importantes. Tout d'abord, l'îlot se forme linéairement, soit grâce à un couplage ' $\psi - \phi$ ', soit grâce à un couplage ' $\psi - p$ ' suivant le régime dans lequel on se trouve. Puis le système atteint un premier plateau de saturation. Le mécanisme d'interchange affecte peu ces deux premières phases qui permettent l'établissement de l'îlot magnétique. Cependant, même si les modes interchanges sont stables linéairement, ils affectent non-linéairement le système en permettant une transition vers un nouvel état non-linéaire. La nature de cette transition dépend du régime dans lequel on se trouve. Pour des régimes où l'effet de rayon de Larmor est important, c'est à dire pour des régimes où l'îlot magnétique est contrôlé et maintenu par un couplage ' $\psi - p$ ', la transition est issue d'une compétition, au niveau de la structure de la pres-

sion, entre le mode de déchirement et le mode interchange qui s'est développé non-linéairement. Cette compétition permet la forte génération des petites échelles. La dynamique du système, plus précisément de la pression, est complètement modifiée et surtout non-linéaire. Par contre, lorsque l'îlot magnétique est formé grâce à un mode de déchirement classique, c'est à dire grâce à un couplage ' $\psi - \phi$ ', la transition est de nature différente. Bien évidemment, plus les effets de pression sont importants (c'est à dire plus le paramètre  $\beta$  est élevé), plus la transition se produit tôt. De même, plus le mécanisme d'interchange est "fort" (c'est à dire plus la longueur caractéristique du gradient de pression  $L_p$  est faible), plus tôt a lieu la transition. Cette dernière est donc bien liée aux effets de pression, plus précisément à la présence des termes de courbure du champ magnétique et de gradient de pression dans les équations. Cependant, dans ce cas, les petites échelles ne sont pas générées, la dynamique du système est quasi-linéaire et un fort flux zonal est généré. Par contre, lorsque l'on amplifie suffisamment le mécanisme d'interchange pour que ces modes soient instables linéairement au niveaux des petites échelles, la dynamique du système est encore plus complexe. Dans cette thèse, nous avons juste donné l'exemple d'un cas précis en régime ' $\psi - p$ ' où les modes interchanges les plus instables ont un taux de croissance supérieur à celui du mode de déchirement pour les grandes échelles. Bien évidemment, une étude plus approfondie est nécessaire mais quelques résultats peuvent déjà être mis en avant. En effet, dans ce cas, la dynamique présente toujours quatre régimes importants qui sont le reflet de la compétition entre les deux instabilités de parités opposées. Tout d'abord, ce sont les modes interchanges qui croissent et qui saturent. Jusque-là la dynamique est contrôlée par les petites échelles. Puis l'îlot magnétique se forme grâce à un couplage non-linéaire des modes  $k_y = 0$  et  $k_y = 0.4$ . Une cascade non-linéaire directe permet le transfert de la parité de type "mode de déchirement" à tous les modes. Les larges structures (îlot et flux zonal) grossissent, pendant que les petites structures interchanges disparaissent. Finalement, l'îlot sature. Dans ce cas, il y a augmentation permanente de l'énergie des petites échelles et la dynamique est pleinement non-linéaire.

Enfin dans cette thèse, nous avons étudié les différents mécanismes à l'origine de la rotation poloïdale d'un îlot magnétique en présence d'interchange. Pour cela, à partir du système d'équations (4.6, 4.8, 4.10), nous avons présenté un modèle permettant de mettre en lumière les différents phénomènes physiques à l'origine de la rotation de l'îlot magnétique. Linéairement, la fréquence principale de rotation de l'îlot est la fréquence diamagnétique linéaire. Non-linéairement, deux phénomènes peuvent être à l'origine de la rotation : la génération d'un écoulement poloïdal  $E \times B$ , lié à la production d'un flux zonal et à la compétition entre les tenseurs de Reynolds et de Maxwell, et la génération d'un écoulement diamagnétique non-linéaire lié aux effets de pression. Dans le cas d'un îlot magnétique formé par le couplage ' $\psi - \phi$ ', lorsque les modes d'interchange sont stables linéairement, la rotation poloïdale non-linéaire de l'îlot magnétique est principalement gouvernée par l'effet diamagnétique, l'écoulement  $E \times B$  restant faiblement généré. En effet, à partir de la transition, une forte amplification de la divergence du terme de convection et de la divergence du tenseur de Maxwell permet une forte génération de l'écoulement diamagnétique non-linéaire qui va contrôler, avec l'effet diamagné-

tique linéaire, la rotation poloïdale de l'îlot. Lorsque, au contraire, les modes interchanges sont instables linéairement, même si les effets diamagnétiques non-linéaires ne sont pas négligeables, c'est l'écoulement poloïdal  $E \times B$  qui gouverne la rotation de l'îlot magnétique. Cet écoulement est lui-même généré par la compétition entre le tenseur de Maxwell et les effets de viscosité qui se compensent. Les petites échelles contribuent fortement à la rotation de l'îlot magnétique grâce aux termes visqueux et résistif.

Bien que cette thèse ait permis de mieux comprendre le rôle de la pression et du mécanisme d'interchange sur la dynamique non-linéaire d'un îlot magnétique, il reste encore plusieurs questions en suspens. Notamment, une étude plus approfondie du cas où les deux instabilités sont présentes linéairement est nécessaire. Par exemple, il est important de regarder l'effet de la résistivité puisqu'elle modifie le taux de croissance du mode déchirement et son niveau de saturation. Une première étude préliminaire a, en effet, montré que le système se comporte différemment suivant que le niveau de saturation du mode de déchirement est plus haut ou plus bas du niveau de saturation de l'état final du système. Ensuite, il sera important d'étudier, plus précisément, le rôle du paramètre  $\Delta'$ . Nous avons vu, grâce aux simulations 2 et 3, que ce paramètre peut jouer un rôle important puisque suivant sa valeur on peut se placer dans le cas d'un petit îlot formé par le couplage ' $\psi - p$ ' ou dans le cas d'un îlot magnétique plus gros formé, cette fois-ci, par le couplage ' $\psi - \phi$ '.

Dans [23], une étude théorique de la phase de Rutherford est faite pour le mode de déchirement classique formé par le couplage entre le flux magnétique et le potentiel électrostatique. La même étude pourra être faite en prenant en compte les effets de pression pour étudier l'impact de la turbulence sur la phase de saturation du mode de déchirement.

Enfin, le modèle utilisé dans cette thèse a été explicité pour une géométrie 2D "slab" extrêmement simplificatrice. Même, si notre modèle permet de comprendre les différents mécanismes qui sont en jeu, il est difficile de comparer de manière quantitative nos résultats à des résultats expérimentaux. Il est donc important d'effectuer la même étude dans une géométrie 3D.



# Septième partie

## Annexes



# Chapitre 15

## Normalisation des équations

Pour étudier le système composé des équations (4.1, 4.3, 4.4), il convient d'introduire des champs et des variables normalisés afin de minimiser le nombre de paramètres libres et d'avoir à faire à des valeurs d'ordre un. Nous avons choisi une normalisation propre au mode de déchirement où les longueurs seront comparées à une longueur perpendiculaire caractéristique de la taille de l'îlot magnétique  $L_{\perp}$ , les temps au temps d'Alfvén  $\tau_A = L_{\perp}/v_A$  avec  $v_A = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 n_0 m_i}}$  la vitesse d'Alfvén, les champs magnétiques au champ magnétique initial  $B$ . On introduit alors de nouvelles variables comme suit :

$$\begin{aligned} t_N &= t/\tau_A, & \psi_N &= \frac{\psi}{L_{\perp} B}, & j_N &= \frac{\mu_0 L_{\perp}}{B} j, \\ \phi_N &= \frac{\phi}{L_{\perp} v_A B}, & w_N &= \frac{L_{\perp}}{v_A} w, & p_N &= \frac{L_p}{L_{\perp} p_0} p, \end{aligned}$$

où  $p_0$  est la pression d'équilibre,  $L_p$  représente la longueur caractéristique du gradient de pression et  $\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide. L'indice  $_N$  signifie que la grandeur est normalisée. On utilise également des opérateurs normalisés :

$$\partial_{t_N} = \tau_A \partial_t, \quad \nabla_{\perp N}^2 = L_{\perp}^2 \nabla_{\perp}^2, \quad \{f, g\}_N = L_{\perp}^2 \{f, g\} .$$

## Normalisation de la conservation de la quantité de mouvement

L'équation pour le potentiel électrostatique  $\phi$  (4.1) s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{nm_i}{B} \partial_t w + \frac{nm_i}{B^2} \{\phi, w\} = -\frac{1}{B} \{\psi_{tot}, j\} - g \partial_y p + \frac{\mu_{i\perp}}{B} \nabla_{\perp}^2 w.$$

On normalise cette équation en plusieurs étapes.

**Normalisation du temps :**

$$\frac{\partial_{t_N} w}{B} + \frac{\tau_A}{B^2} \{\phi, w\} = -\frac{\tau_A}{Bnm_i} \{\psi_{tot}, j\} - \frac{g\tau_A}{nm_i} \partial_y p + \frac{\mu_{i\perp}\tau_A}{Bnm_i} \nabla_{\perp}^2 w$$

**Normalisation de la vorticit e  $w$  :**

$$\partial_{t_N} w_N + \frac{\tau_A}{B} \{\phi, w_N\} = -\frac{\tau_A L_{\perp}}{nm_i v_A} \{\psi_{tot}, j\} - \frac{g\tau_A L_{\perp} B}{nm_i v_A} \partial_y p + \frac{\mu_{i\perp}\tau_A}{nm_i} \nabla_{\perp}^2 w_N$$

**Normalisation du potentiel électrostatique  $\phi$  :**

$$\frac{\tau_A}{B} \{\phi, w_N\} = \frac{\tau_A L_{\perp} v_A B}{B} \{\phi_N, w_N\} = \{\phi_N, w_N\}_N$$

**Normalisation des opérateurs :**

$$-\frac{\tau_A L_{\perp}}{nm_i v_A} \{\psi_{tot}, j\} = -\frac{1}{nm_i v_A^2} \{\psi_{tot}, j\}_N,$$

$$-\frac{g\tau_A L_{\perp} B}{nm_i v_A} \partial_y p = -\frac{g\tau_A B}{nm_i v_A} \partial_{y_N} p,$$

$$\frac{\mu_{i\perp}\tau_A}{nm_i} \nabla_{\perp}^2 w_N = \frac{\mu_{i\perp}\tau_A}{nm_i L_{\perp}^2} \nabla_{\perp N}^2 w_N = \nu_N \nabla_{\perp N}^2 w_N,$$

où  $\nu_N = \frac{\mu_{i\perp}\tau_A}{nm_i L_{\perp}^2}$  est sans dimension et correspond à la viscosité normalisée.

**Normalisation du flux magnétique  $\psi$  et du courant  $j$  :**

$$\begin{aligned} -\frac{1}{nm_i v_A^2} \{\psi_{tot}, j\}_N &= -\frac{L_{\perp} B}{nm_i v_A^2} \{\psi_{tot_N}, j\}_N \\ &= -\frac{L_{\perp} B^2}{nm_i v_A^2 \mu_0 L_{\perp}} \{\psi_{tot_N}, j_N\}_N \\ &= -\{\psi_{tot_N}, j_N\}_N \end{aligned}$$

**Normalisation de la pression  $p$  :**

$$-\frac{g\tau_A B}{nm_i v_A} \partial_{y_N} p = -\frac{g\tau_A B L_{\perp} p_0}{nm_i v_A L_p} \partial_{y_N} p_N.$$

Dans [40], on montre que  $g = \frac{2}{R_0 B}$ . De plus, la pression d'équilibre est liée au paramètre  $\beta$  de la façon suivante  $p_0 = L_p \kappa = \frac{\beta B^2}{2\mu_0}$ . Il est important de noter qu'ici que le paramètre  $\beta$  est liée à



la pression électronique puisque l'on a supposé les ions froids. Ainsi :

$$-\frac{g\tau_A B L_\perp p_0}{nm_i v_A L_p} \partial_{y_N} p_N = -A_1 \partial_{y_N} p_N,$$

avec  $A_1 = \beta \left( \frac{L_\perp}{L_p} \right)^2 \frac{L_p}{R_0}$ .

Ainsi, après normalisation de toutes les grandeurs physiques, on retrouve bien l'équation (4.5) (on a omis l'indice  $N$  puisque toutes les grandeurs ont été normalisées) :

$$\partial_t w + \{\phi, w\} = -\{\psi_{tot}, j\} - A_1 \partial_y p + \nu \nabla_\perp^2 w.$$

## Normalisation de l'équation de l'énergie

L'équation pour la pression  $p$  (4.3) s'écrit de la manière suivante :

$$\partial_t p + \frac{1}{B} \{\phi, p\} + \frac{\kappa}{B} \partial_y \phi = \frac{5}{3} g \left[ p_0 \partial_y \phi - \frac{k_B T_e}{e} \partial_y p \right] - \frac{5}{3} \frac{k_B T_e}{e} \frac{1}{B} \{\psi_{tot}, j\} + \chi_\perp \nabla_\perp^2 p.$$

On normalise cette équation en plusieurs étapes.

### Normalisation du temps :

$$\partial_{t_N} p + \frac{\tau_A}{B} \{\phi, p\} + \frac{\tau_A \kappa}{B} \partial_y \phi = \frac{5}{3} \tau_A g \left[ p_0 \partial_y \phi - \frac{k_B T_e}{e} \partial_y p \right] - \frac{5}{3} \frac{k_B T_e}{e} \frac{\tau_A}{B} \{\psi_{tot}, j\} + \tau_A \chi_\perp \nabla_\perp^2 p$$

### Normalisation de la pression $p$ :

$$\partial_{t_N} p_N + \frac{\tau_A}{B} \{\phi, p_N\} + \frac{\tau_A \kappa L_p}{B L_\perp p_0} \partial_y \phi = \frac{5}{3} \tau_A g \left[ \frac{L_p}{L_\perp} \partial_y \phi - \frac{k_B T_e}{e} \partial_y p_N \right] - \frac{5}{3} \frac{k_B T_e}{e} \frac{\tau_A L_p}{B L_\perp p_0} \{\psi_{tot}, j\} + \tau_A \chi_\perp \nabla_\perp^2 p_N$$

### Normalisation du potentiel électrostatique $\phi$ :

$$\partial_{t_N} p_N + L_\perp^2 \{\phi_N, p_N\} + \frac{L_p L_\perp \kappa}{p_0} \partial_y \phi_N = \frac{5}{3} g \left[ B L_p L_\perp \partial_y \phi_N - \tau_A \frac{k_B T_e}{e} \partial_y p_N \right] - \frac{5}{3} \frac{k_B T_e}{e} \frac{\tau_A L_p}{B L_\perp p_0} \{\psi_{tot}, j\} + \tau_A \chi_\perp \nabla_\perp^2 p_N$$

**Normalisation des opérateurs :**

$$\begin{aligned}
L_{\perp}^2 \{ \phi_N, p_N \} &= \{ \phi_N, p_N \}_N, \\
\frac{L_p L_{\perp} \kappa}{p_0} \partial_y \phi_N &= \frac{L_p \kappa}{p_0} \partial_{y_N} \phi_N = \partial_{y_N} \phi_N, \\
\frac{5}{3} g B L_p L_{\perp} \partial_y \phi_N &= \frac{5}{3} g B L_p \partial_{y_N} \phi_N = \frac{10 L_p}{3 R_0} \partial_{y_N} \phi_N, \\
-\frac{5}{3} g \tau_A \frac{k_B T_e}{e} \partial_y p_N &= -\frac{5}{3} g \tau_A \frac{k_B T_e}{e L_{\perp}} \partial_{y_N} p_N = \frac{5 \beta L_p L_{\perp}}{3 \Omega_i \tau_A R_0 L_p} \partial_{y_N} p_N, \\
-\frac{5}{3} \frac{k_B T_e}{e} \frac{\tau_A L_p}{B L_{\perp} p_0} \{ \psi_{tot}, j \} &= -\frac{5}{3} \frac{k_B T_e}{e} \frac{\tau_A L_p}{B L_{\perp}^3 p_0} \{ \psi_{tot}, j \}_N, \\
\tau_A \chi_{\perp} \nabla_{\perp}^2 p_N &= \frac{\tau_A}{L_{\perp}^2} \chi_{\perp} \nabla_{\perp N}^2 p_N = \chi_{\perp N} \nabla_{\perp N}^2.
\end{aligned}$$

**Normalisation de flux magnétique  $\psi$  et du courant  $j$  :**

$$\begin{aligned}
-\frac{5}{3} \frac{k_B T_e}{e} \frac{\tau_A L_p}{B L_{\perp}^3 p_0} \{ \psi_{tot}, j \}_N &= -\frac{5}{3} \frac{k_B T_e}{e} \frac{\tau_A B L_p}{\mu_0 L_{\perp}^3 p_0} \{ \psi_{tot N}, j_N \}_N \\
&= -\frac{5 L_p}{3 L_{\perp} \Omega_i \tau_A} \{ \psi_{tot N}, j_N \}_N
\end{aligned}$$

Ainsi, après normalisation de toutes les grandeurs physiques, on retrouve bien l'équation (4.7) (on a omis l'indice  $N$  puisque toutes les grandeurs ont été normalisées) :

$$\partial_t p + \{ \phi, p \} = (A_2 - 1) \partial_y \phi - A_3 \partial_y p - A_4 \{ \psi_{tot}, j \} + \chi_{\perp} \nabla_{\perp}^2 p,$$

avec  $A_2 = \frac{10 L_p}{3 R_0}$ ,  $A_3 = \frac{5 \beta L_p L_{\perp}}{3 \Omega_i \tau_A R_0 L_p}$  et  $A_4 = \frac{5 L_p}{3 L_{\perp} \Omega_i \tau_A}$ .

## Normalisation de la loi d'Ohm

L'équation pour le flux magnétique  $\psi$  (4.4) s'écrit de la manière suivante :

$$\partial_t \psi = \frac{1}{B} \{ \psi_{tot}, \phi \} - \frac{1}{n e B} [ \{ \psi_{tot}, p \} + \kappa \partial_y \psi ] - \eta j.$$

On normalise cette équation en plusieurs étapes.

**Normalisation du temps :**

$$\partial_{t_N} \psi = \frac{\tau_A}{B} \{ \psi_{tot}, \phi \} - \frac{\tau_A}{n e B} \{ \psi_{tot}, p \} - \frac{\tau_A \kappa}{n e B} \partial_y \psi - \tau_A \eta j$$

**Normalisation du flux magnétique  $\psi$  :**

$$\partial_{t_N} \psi_N = \frac{\tau_A}{B} \{\psi_{tot_N}, \phi\} - \frac{\tau_A}{neB} \{\psi_{tot_N}, p\} - \frac{\tau_A \kappa}{neB} \partial_y \psi_N - \frac{\tau_A \eta}{L_{\perp} B} j$$

**Normalisation du potentiel électrostatique  $\phi$  :**

$$\frac{\tau_A}{B} \{\psi_{tot_N}, \phi\} = \frac{\tau_A}{B} L_{\perp} v_A B \{\psi_{tot_N}, \phi_N\} = \{\psi_{tot_N}, \phi_N\}_N$$

**Normalisation de la pression :**

$$\begin{aligned} -\frac{\tau_A}{neB} \{\psi_{tot_N}, p\} &= -\frac{\tau_A L_{\perp} p_0}{neB L_p} \{\psi_{tot_N}, p_N\} \\ &= -\frac{\tau_A p_0}{neB L_p L_{\perp}} \{\psi_{tot_N}, p_N\}_N \\ &= -\frac{\beta L_{\perp}}{2L_p \tau_A \Omega_i} \{\psi_{tot_N}, p_N\}_N \end{aligned}$$

**Normalisation du courant  $j$  :**

$$-\frac{\tau_A \eta}{L_{\perp} B} j = -\frac{\tau_A \eta}{L_{\perp}^2 \mu_0} j_N = -\eta_N j_N$$

**Normalisation des opérateurs :**

$$-\frac{\tau_A \kappa}{neB} \partial_y \psi_N = -\frac{\tau_A p_0}{neB L_{\perp} L_p} \partial_{y_N} \psi_N = -\frac{\beta L_{\perp}}{2L_p \tau_A \Omega_i} \partial_{y_N} \psi_N$$

Ainsi, après normalisation de toutes les grandeurs physiques, on retrouve bien l'équation (4.9) (on a omis l'indice  $N$  puisque toutes les grandeurs ont été normalisées) :

$$\partial_t \psi = \{\psi_{tot}, \phi\} - v^* \{\psi, p\} - v^* \partial_y \psi - \eta j.$$



# Chapitre 16

## Description du code MTT2D

Afin de simuler les équations (4.6, 4.8, 4.10), nous avons utilisé un code numérique 2D semi-spectral à différence finie. Pour simuler un mode de déchirement en présence de plusieurs modes interchanges instables, il a fallu, pendant cette thèse, améliorer ce code afin d'atteindre des résolutions plus importantes. En effet, ce code était initialement prévu pour simuler un mode de déchirement classique et ne nécessitait pas un grand nombre de modes poloïdaux. Cependant, pour obtenir de la turbulence grâce à l'interchange, on a besoin d'augmenter le nombre de modes poloïdaux. Cette nouvelle contrainte joue sur la stabilité du code numérique. Il a donc fallu modifier différents schémas numériques pour améliorer la stabilité et la résolution du code.

### Schéma temporel

Pour le schéma temporel, nous avons utilisé la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre (RK4) [56] qui repose sur le principe de l'itération. Cette méthode d'ordre quatre nous a permis d'atteindre une meilleure stabilité numérique. Pour comprendre la méthode RK4, considérons que l'on doit résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

Connaissant la valeur  $y_n$  de  $y$  au temps  $t_n$ , on cherche la valeur  $y_{n+1}$  de  $y$  au temps suivant  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ , où  $\Delta t$  est le pas de l'itération. Pour cela, la méthode RK4 repose sur l'idée que la valeur suivante  $y_{n+1}$  est approchée par la somme de la valeur actuelle  $y_n$  et du produit de la taille de l'intervalle  $\Delta t$  par la pente estimée. La pente est obtenue par une moyenne pondérée de pentes :

- $k_1 = f(t_n, y_n)$  est la pente au début de l'intervalle,
- $k_2 = f(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t}{2}k_1)$  est la pente au milieu de l'intervalle, en utilisant la pente  $k_1$  pour calculer la valeur de  $y$  au point  $t_n + \Delta t/2$  par le biais de la méthode d'Euler,

-  $k_3 = f(t_n + \frac{\Delta t}{2}, \frac{\Delta t}{2}k_2)$  est de nouveau la pente au milieu de l'intervalle, mais obtenue cette fois en utilisant la pente  $k_2$  pour calculer  $y$ ,

-  $k_4 = f(t_n + \Delta t, y_n + \Delta tk_3)$  est la pente à la fin de l'intervalle, avec la valeur de  $y$  calculée en utilisant  $k_3$ .

Dans la moyenne des quatre pentes, un poids plus grand est donné aux pentes au point du milieu :

$$\text{pente} = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}.$$

Ainsi, la valeur de  $y$  au temps  $t_{n+1}$  est donnée par :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

La méthode RK4 est une méthode d'ordre quatre, ce qui signifie que l'erreur commise à chaque étape est de l'ordre  $\Delta t^5$ , alors que l'erreur totale accumulée est de l'ordre de  $\Delta t^4$  ce qui apporte une meilleure stabilité au schéma numérique.

## Traitement des conditions de bord

Dans le code, nous utilisons les conditions de bord suivantes :

- Direction radiale :  $f(0, y, t) = f(n_x, y, t) = 0$ ,
- Direction poloïdale :  $f(x, 0, t) = f(x, n_y, t)$ .

Le code étant spectral dans la direction ploïdale, la périodicité dans cette direction est assurée. Par contre, pour la direction radiale, les choses sont plus compliquées. En effet, il ne suffit pas d'imposer simplement  $f(0, y, t) = f(n_x, y, t) = 0$  car cela ne permettrait pas de conserver l'ordre du schéma numérique. Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser des "points fantômes" qui nous permettront, en calculant les dérivées, d'obtenir les bonnes conditions de bord dans la direction radiale.

Comme le montre la Figure (16.1), on définit un nouveau point à l'extérieur de la boîte tel que  $f(-1) = -f(1)$ . Avec un simple développement limité de  $f(1)$ , on peut alors montrer que l'on a bien  $f(0) = 0$ . De la même façon, pour le point  $n_x$  au bord de la boîte, on définit un nouveau point tel que  $f(n_x + 1) = -f(n_x - 1)$  permettant d'assurer  $f(n_x) = 0$ . Dans la pratique, on assure l'existence de ces deux points fantômes grâce aux dérivées aux bords de la boîte puisque l'on impose pour la dérivée première :

$$f'(0) = \frac{f(1) - f(-1)}{2\Delta x} = \frac{f(1)}{\Delta x} \text{ et } f'(n_x) = \frac{f(n_x + 1) - f(n_x - 1)}{2\Delta x} = -\frac{f(n_x - 1)}{\Delta x},$$

et pour la dérivée seconde :

$$f''(0) = \frac{f(1) - 2f(0) - f(-1)}{\Delta x^2} = -\frac{2f(0)}{\Delta x^2} = 0$$

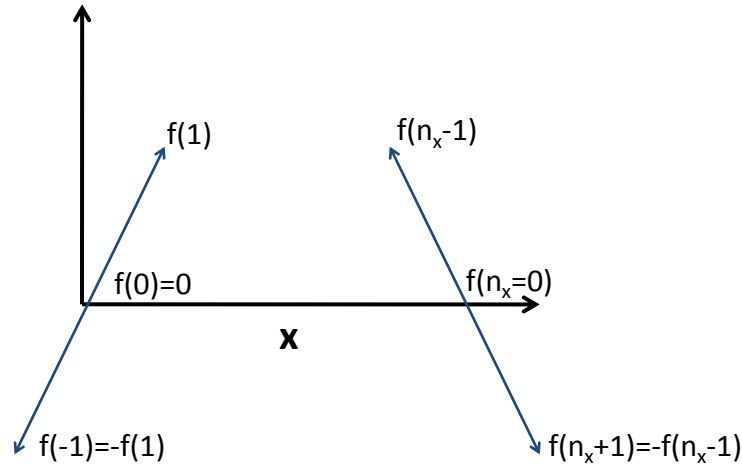


FIGURE 16.1 – Conditions de bord pour la direction radiale.

et

$$f''(n_x) = \frac{f(n_x + 1) - 2f(n_x) - f(n_x - 1)}{\Delta x^2} = -\frac{2f(n_x)}{\Delta x^2} = 0$$

## Traitement des crochets de Poisson (non-linéarité)

Les instabilités numériques liées à l'évaluation des termes non-linéaires des équations fluides ont longtemps été une difficulté majeure. On considère une équation d'advection dans la limite idéale :

$$\partial_t f + \{g, f\} = 0.$$

En multipliant cette équation par  $f$  et en l'intégrant sur tout l'espace  $S$ , on fait apparaître l'énergie :

$$\partial_t \int_S \frac{f^2}{2} dS = \int_S f \{f, g\} dS,$$

où  $f^2/2 = E$ . Ainsi, en utilisant  $\int_S f \{f, g\} dS = 0$  (propriété des crochets de Poisson), on trouve bien qu'il y a conservation de l'énergie dans la limite idéale ( $\frac{d}{dt} E = 0$ ). Cela impose une forte contrainte sur le schéma numérique.

Dans notre cas, les équations (4.6, 4.8, 4.10) ne sont pas idéales mais il faut assurer la préservation des termes quadratiques pour ne pas altérer l'évolution temporelle du système et pour ne pas générer d'instabilités numériques. En d'autres termes, il faut s'assurer qu'à chaque intégration numérique, on a bien :

$$\int_S \phi \{\phi, w\} dS = 0, \quad (16.1)$$

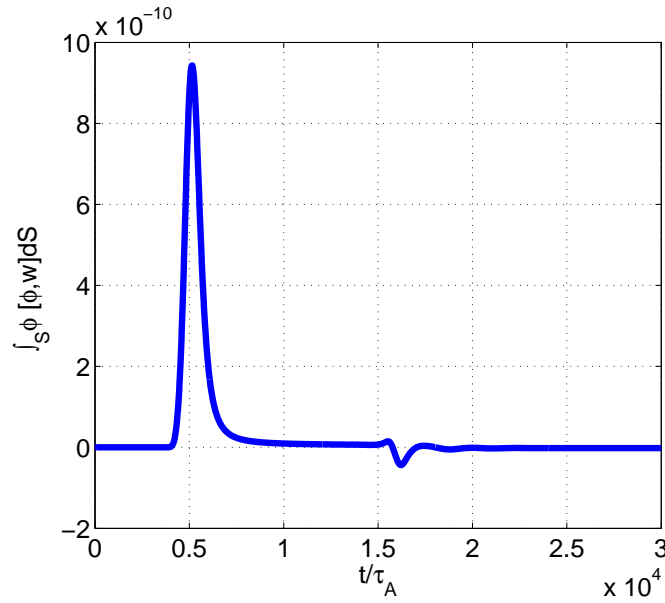


FIGURE 16.2 – Traitement numérique des non-linéarités : évolution temporelle de  $\int_S \phi \{ \phi, w \} dS$  obtenue par la simulation 2 avec  $\beta = 0.001$ .

$$\int_S \phi \{ \phi, p \} dS = 0, \quad (16.2)$$

$$\int_S \psi \{ \psi, \phi - p \} dS = 0. \quad (16.3)$$

Pour cela, nous avons implémenté dans le code la méthode dite “d’Arakawa” [57] qui donne une solution pour assurer la préservation des termes quadratiques. En effet, [57] montre que lorsque les quantités quadratiques sont conservées dans un schéma à différence finie, les instabilités numériques non-linéaires ne peuvent pas apparaître. La méthode d’Arakawa est basée sur le fait que si le carré d’une quantité se conserve à chaque pas de temps lorsqu’on l’intègre sur tout le domaine numérique alors la quantité elle-même est bornée pour chaque point de la grille numérique.

Ainsi, pour toutes nos simulations, nous avons vérifié que les équations (16.1, 16.2, 16.3) étaient bien vérifiées et qu’il y avait bien préservation des termes quadratiques. Pour exemple, la Figure (16.2) présente l’évolution temporelle de  $\int_S \phi \{ \phi, w \} dS$  obtenu par la simulation 2 avec  $\beta = 0.001$ . Au début du premier plateau non-linéaire, on observe une amplification de cet invariant. Malgré cela, au vu de la très faible amplitude de l’invariant ( $10^{-10}$ ), on considère qu’on a bien  $\int_S \phi \{ \phi, w \} dS = 0$  à chaque pas de temps et que chaque régime de la dynamique (la transition notamment) est bien suivi numériquement.



# Bibliographie

- [1] J. M. Rax, "Physique des plasmas", Dunod (2005)
- [2] "La Fusion Thermonucléaire Contrôlée par Confinement Magnétique", collection CEA, Masson (1987)
- [3] J. Wesson, "Tokamaks", troisième édition, Clarendon Press-Oxford (2004)
- [4] ITER Physics Basis Editors, ITER Physics Expert Group Chairs and Co-Chairs and ITER Joint Central Team and Physics Integration Unit, *Nucl. Fusion* **39** 2137 (1999)
- [5] Y. Ishii, T. Ozeki, S. Tokuda, T. Fujita, Y. Kamada, S. Ishida and S. Takeji, *Plasma Phys. Control. Fusion* **40** 1607 (1998)
- [6] H. Zohm, G. Gantenbein, A. Isayama, A. Keller, R. J. La Haye, M. Maraschek, A. Mück, K. Nagasaki, S. D. Pinches and E. J. Starit, *Plasma Phys. Control. Fusion* **45** 163 (2003)
- [7] G. Martin, F. Sourd, F. Saint-laurent, J. Bucalossi, L. G. Eriksson, *Proc. 20th Int. Conf. on Fusion Energy*, EX/10-6Rc, Vialamoura, Portugal (2004)
- [8] A. Vannucci, K. A. Oliveira, T. Tajima, *Nucl. Fusion* **39** 2 (1999)
- [9] C. C. Hegna, A. Bhattacharjee, Y. Nakamura and M. Wakatani, IAEA (1990)
- [10] O. Sauter, E. Westerhof, M. L. Mayoral, B. Alper, P. A. Belo, R. J. Buttery, A. Gondhalekar, T. Hellsten, T. C. Hender, D. F. Howell, T. Johnson, P. Lamalle, M. J. Mantsinen, F. Milani, M. F. F. Nave, F. Nguyen, A. L. Pecquet, S. D. Pinches, S. Podda and J. Rapp, *Phys. Rev. Lett.* **88** 105001 (2002)
- [11] A. J. H. Donné, J. C. van Gorkom, V. S. Udintsev, C. W. Domier, A. Krämer-Flecken, N. C. Luhmann Jr., F. C. Schüller and TEXTOR team, *Phys. Rev. Lett.* **94** 085001 (2005)
- [12] I. T. Chapman, S. D. Pinches, J. P. Graves, R. J. Akers, L. C. Appel, R. V. Budny, S. Coda, N. J. Conway, M. de Bock, L-G. Eriksson, R. J. Hastie, T. C. Hender, G. T. A. Huysmans, T. Johnson, H. R. Koslowski, A. Krämer-Flecken, M. Lennholm, Y. Liang, S. Saarelma, S. E. Sharapov, I. Voitsekhovitch, the MAST and TEXTOR Teams and JET EFDA, Contributors, *Plasma Phys. Control. Fusion* **49** B385 (2007)
- [13] A. Gude, S. Günter, S. Sesnic and ASDEX Upgrade Team, *Nucl. Fusion* **39** 1 (1999)
- [14] L. G. Askinazi, V. E. Golant, V. A. Kornev, S. V. Lebedev, A. S. Tukachinsky, M. I. Vildjunas and N. A. Zhubr, *Plasma Phys. Control. Fusion* **48** A85 (2006)
- [15] S. Nishimura, S. Benkadda, M. Yagi, S. I. Itoh and K. Itoh, *Phys. Plasmas* **15** 092506 (2008)

- [16] P. Beyer, X. Garbet and P. Ghendrih, *Phys. Plasmas* **5** 4271 (1998)
- [17] P. Beyer, X. Garbet, S. Benkadda, P. Ghendrih and Y. Sarazin, *Plasma Phys. Control. Fusion* **44** 2167 (2002)
- [18] K. Tanaka, C. Michael, A. L. Sanin, L. N. Vyacheslavov, K. Kawahata, S. Murakami, A. Wakasa, S. Okajima, H. Yamada, M. Shoji, J. Miyazawa, S. Morita, T. Tokuzawa, T. Akiyama, M. Goto; K. Ida, M. Yoshinuma, I. Yamada, M. Yokoyama, S. Masuzaki, T. Morisaki, R. Sakamoto, H. Funaba, S. Inagaki, M. Kobayashi, A. Komori and MHD experimental group, *Nucl. Fusion* **46** 110 (2006)
- [19] S. Takeji, S. Tokuda, T. Fujita, T. Suzuki, A. Isayama, S. Ide, Y. Ishii, Y. Kamada, Y. Koide, T. Matsumoto, T. Oikawa, T. Ozeki, Y. Sakamoto and JT-60 Team, *Nucl. Fusion* **42** 634 (2002)
- [20] E. Joffrin, C. D. Challis, G. D. Conway, X. Garbet, A. Gude, S. Günter, N. C. Hawkes, T. C. Hender, D. F. Howell, G. T. A. Huysmans, E. Lazzaro, P. Maget, M. Marachek, A. G. Peeters, S. D. Pinches, S. E. Sharapov and JET-EFDA Contributors, *Nucl. Fusion* **43** 1167 (2003)
- [21] D. Biskamp, “Nonlinear Magnetohydrodynamics”, Cambridge University Press (1993)
- [22] D. Biskamp, “Magnetic Reconnection in Plasmas”, Cambridge University Press (2000)
- [23] P. H. Rutherford, *Phys. Fluids* **16** 11 (1973)
- [24] P. K. Kaw, E. J. Valeo and P. H. Rutherford, *Phys. Rev. Lett.* **43** 1398 (1979)
- [25] A. K. Sundaram and A. Sen, *Phys. Rev. Lett.* **44** 322 (1980)
- [26] A. Furuya, S. Itoh and M. Yagi, *J. Phys. Soc. Japan* **71** 1261 (2002)
- [27] K. Itoh, S. I. Itoh, A. Fukuyama, M. Yagi and M. Azumi, Research Report NIFS Series 234 (1993)
- [28] A. Furuya, S. I. Itoh and M. Yagi, *Contrib. Plasma Phys.* **40** 375 (2000)
- [29] C. J. McDevitt and P. H. Diamond, *Phys. Plasmas* **13** 032302 (2006)
- [30] A. Ishizawa and N. Nakajima, *Nucl. Fusion* **47** 1540 (2007)
- [31] F. Militello, F. L. Waelbroeck, R. Fitzpatrick and W. Horton, *Phys. Plasmas* **15** 050701-1 (2008)
- [32] N.N. Bogolyubov, “Studies in Statistical Mechanics”, édité par J. de Boer et G.E. Uhlenbeck, Vol. I pp. 11-118, Amsterdam (1962)
- [33] M. Born et H.S. Green, “A General Kinetic Theory of Liquids”, Cambridge University Press, London (1949)
- [34] S. I. Braginskii, “Reviews of Plasma Physics”, édité par M. A. Leontovich, Vol. I pp. 205-311, Consultat’s Bureau, New York (1965)
- [35] L. D. Landau, *Jour. Phys. USSR* **10**, 25 (1946); reproduit dans Collected Papers of L. D. Landau, D. ter Haar Ed., Gordon and breach, New York (1967)

- [36] Y. Sarazin, “Interactions multi-échelles en turbulence des plasmas de fusion”, thèse d’habilitation à diriger des recherches, Université de Provence (2008)
- [37] J. L. Delcroix et A. Bers, “Physique des plasmas”, EDP Sciences (1994)
- [38] N. H. Bian and G. Vekstein, *Phys. Plasmas* **14** 120702 (2007)
- [39] N. Arcis, “Dynamique des îlots magnétiques”, thèse de doctorat (2006)
- [40] P. Beyer, “Turbulence et Transport dans les plasmas chauds magnétisés”, thèse d’habilitation à diriger des recherches, Université de Provence (2004)
- [41] K. Takeda, O. Agullo, S. Benkadda, A. Sen, N. Bian and X. Garbet, *Phys. Plasmas* **15** 022502 (2008)
- [42] R. D. Hazeltine, M. Kotschenreuther and P. J. Morrison, *Phys. Fluids* **28** 2466 (1985)
- [43] H. P. Furth, J. Killeen and M. N. Rosenbluth, *Phys. Fluids* **6** 459 (1963)
- [44] A. H. Glasser, J. M. Greene and J. L. Johnson, *Phys. Fluids* **18** 875 (1975)
- [45] D. Grasso, M. Ottaviani and F. Porcelli, *Phys. Plasmas* **8** 4306 (2001)
- [46] R. B. White, “The theory of toroidally confined plasmas”, Imperial College Press (2001)
- [47] H. P. Furth, P. H. Rutherford and H. Selberg, *Phys. Fluids* **16** 1054 (1973)
- [48] E. A. Adler, R. M. Kulsrud and R. B. White, *Phys. Fluids* **23** 1375 (1980)
- [49] A. Bondeson and J. R. Sobel, *Phys. Fluids* **27** 2028 (1984)
- [50] F. Militello, G. Huysmans, M. Ottaviani and F. Porcelli, *Phys. Plasmas* **11** 125 (2003)
- [51] M. Muraglia, O. Agullo, S. Benkadda, X. Garbet, P. Beyer and A. Sen, *Phys. Rev. Lett.* **103** 145001 (2009)
- [52] M. Muraglia, O. Agullo, M. Yagi, S. Benkadda, P. Beyer, X. garbet, S. I. Itoh, K. Itoh and A. Sen, *Nucl. Fusion* **49** 055016 (2009)
- [53] R. J. La Haye, *Phys. Plasmas* **13** 055501 (2006)
- [54] R. J. La Haye, R. Prater, R. J. Buttery, N. Hayashi, A. Isayama, M. E. Maraschek, L. Urso and H. Zohm, *Nucl. Fusion* **46** 451 (2006)
- [55] M. Ottaviani, F. Porcelli and D. Grasso, *Phys. Rev. Lett.* **93** 075001 (2004)
- [56] Dale R. Durran, “Numerical methods for wave equations in geophysical fluid dynamics”, Springer (1999)
- [57] A. Arakawa, *J. Comp. Phys.* **135** 103 (1997)

# Résumé

Un tokamak est le siège de diverses instabilités qui peuvent être à l'origine d'une dégradation du confinement magnétique. Cette thèse porte sur l'étude de la dynamique d'un îlot magnétique en présence de turbulence dans les plasmas magnétisés. Plus précisément, il s'agit de comprendre la nature de l'interaction multi-échelle entre la turbulence, générée par un gradient de pression et la courbure du champ magnétique, et un îlot magnétique formé par un mode de déchirement classique. Grâce à la déduction d'un modèle 2D prenant en compte ces deux sources d'instabilité, des études linéaires analytiques et numériques permettent de comprendre l'effet de la pression sur la phase de croissance linéaire d'un îlot magnétique et mettent en évidence la stabilisation des modes interchanges en présence d'un champ magnétique. Ensuite, des simulations non-linéaires du modèle sont présentées pour comprendre comment le mécanisme d'interchange affecte la dynamique non-linéaire d'un îlot magnétique. De façon générale, le gradient de pression et la courbure du champ magnétique affectent fortement l'évolution non-linéaire de l'îlot magnétique permettant l'apparition de bifurcations dynamiques dont la nature doit être caractérisée suivant les situations dans lesquelles on se place. Enfin, la dernière partie de cette thèse est dédiée à l'étude de la rotation poloïdale de l'îlot magnétique. La déduction d'un modèle permettant de mettre en évidence les différentes origines possibles de la rotation est présentée. Il apparaît clairement que la rotation non-linéaire de l'îlot magnétique peut être gouvernée par l'écoulement poloïdal  $E \times B$  et/ou par l'écoulement non-linéaire diamagnétique.

## Summary

In a tokamak, it exists many kind of instability at the origin of a damage of the confinement and worst of a loss of a confinement. This phd presents a study of the dynamics of a magnetic island in presence of turbulence in magnetized plasmas. More precisely, the goal is to understand the multi-scales interaction between turbulence, generated by a pressure gradient and the magnetic field curvature, and a magnetic island formed thanks to a tearing mode. Thanks to the derivation of a 2D slab model taking account both tearing and interchange instabilities, theoretical and numerical linear studies show the pressure effect on the magnetic island linear formation and show interchange modes are stabilized in presence of a strong magnetic field. Then, a numerical nonlinear study is presented in order to understand how the interchange mechanism affects the nonlinear dynamics of a magnetic island. It is showned that the pressure gradient and the magnetic field curvature affect strongly the nonlinear evolution of a magnetic island through dynamics bifurcations. The nature of these bifurcations should be characterized in fonction of the linear situation. Finally, the last part of this phd is devoted to the study of the origin of the nonlinear poloidal rotation of the magnetic island. A model giving the different contributions to the rotation is derived. It is showned, thanks to the model and to the numerical studies, that the nonlinear rotation of the island is mainly governed by the  $E \times B$  poloidal flow and/or by the nonlinear diamagnetic drift.