



**HAL**  
open science

# Analyse haute fréquence de l'équation de Helmholtz dissipative

Julien Royer

► **To cite this version:**

Julien Royer. Analyse haute fréquence de l'équation de Helmholtz dissipative. Mathématiques [math].  
Université de Nantes, 2010. Français. NNT : . tel-00578423

**HAL Id: tel-00578423**

**<https://theses.hal.science/tel-00578423>**

Submitted on 20 Mar 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NANTES  
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES ET TECHNOLOGIES  
DE L'INFORMATION ET DES MATHÉMATIQUES

Année : 2010

N° B.U. : 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

# Analyse haute fréquence de l'équation de Helmholtz dissipative

**Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes**

Spécialité : MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

*Présentée et soutenue publiquement par*

**Julien ROYER**

*le 03 décembre 2010, devant le jury ci-dessous*

<i>Président du jury</i>	: Didier ROBERT	(Université de Nantes)
<i>Rapporteurs</i>	: Nicolas BURQ	(Université Paris-Sud 11)
	Erik SKIBSTED	(Aarhus Universitet)
<i>Examineurs</i>	: Frédéric HÉRAU	(Université de Nantes)
	Rafe MAZZEO	(Stanford University)
	Ping ZHANG	(Chinese Academy of Sciences)
<i>Directeur de thèse</i>	: Xue Ping WANG	(Université de Nantes)
<i>Laboratoire</i>	: Laboratoire Jean Leray (UMR 6629 UN-CNRS-ECN)	

N° E.D. : 503-112



## Résumé

Le but de cette thèse est d'étudier sur  $\mathbb{R}^n$  la limite haute fréquence ( $h \rightarrow 0$ ) de l'équation de Helmholtz  $(H_h - E)u_h = S_h$ , où  $H_h = -h^2\Delta + V_1(x) - ihV_2(x)$ . La particularité de ce travail est que l'indice d'absorption  $V_2$  n'est pas supposé constant, ce qui nous oblige à travailler avec un opérateur de Schrödinger qui n'est pas autoadjoint.

On cherche dans une première partie des estimations en  $O(h^{-1})$  pour la résolvante  $(H_h - z)^{-1}$ , uniformes pour  $\operatorname{Re} z \approx E > 0$  et  $\operatorname{Im} z > 0$ . Pour traiter le cas où  $V_2$  est positif, on adapte la méthode de Mourre au cas d'opérateurs dissipatifs abstraits. On l'applique ensuite à l'opérateur de Schrödinger sous une hypothèse d'amortissement sur les trajectoires classiques captées, plus faible que l'hypothèse usuelle de non-capture. Enfin, par une méthode utilisant des mesures semi-classiques, on généralise encore ce résultat au cas où  $V_2$  admet une partie négative à support compact, sous la condition que l'amortissement reste suffisamment fort sur les trajectoires captées.

On s'intéresse ensuite aux mesures semi-classiques de la solution sortante  $u_h$  dans le cas où le terme source  $S_h$  se concentre sur une sous-variété bornée  $\Gamma$  de l'espace  $\mathbb{R}^n$ . Outre le caractère non-autoadjoint de l'opérateur  $H_h$ , les principales difficultés par rapport aux travaux existants sont dues à la géométrie de  $\Gamma$  et aux trajectoires captées. On introduit pour ce dernier point des mesures semi-classiques tronquées (en remplaçant la résolvante par l'intégrale sur des temps finis du propagateur) que l'on fait ensuite converger.

## Mots-clés

Équation de Helmholtz, opérateurs non-autoadjoints, opérateurs dissipatifs, analyse semi-classique, méthode des commutateurs de Mourre, mesures semi-classiques.

## Abstract

The purpose of this thesis is to study the high frequency limit ( $h \rightarrow 0$ ) of the Helmholtz equation  $(H_h - E)u_h = S_h$  on  $\mathbb{R}^n$ , where  $H_h = -h^2\Delta + V_1(x) - ihV_2(x)$ . The main interest of this work is that the absorption index  $V_2$  is not assumed to be constant, and hence the Schrödinger operator we consider is not self-adjoint.

In the first part, we give some estimates of size  $O(h^{-1})$  for the resolvent  $(H_h - z)^{-1}$ , uniform in  $\operatorname{Re} z \approx E > 0$  and  $\operatorname{Im} z > 0$ . To deal with the case  $V_2 \geq 0$ , we adapt Mourre's method for a family of abstract dissipative operators. Then we apply this result to the Schrödinger operator under an assumption about the damping factor on bounded classical trajectories, weaker than the usual non-trapping condition. Finally, by a method using semi-classical measures, we further generalize this result for an absorption index which has a compactly supported negative part. This is possible if the damping factor remains strong enough on trapped trajectories.

In the second part we study the semiclassical measures for the solution  $u_h$  when the source term  $S_h$  concentrates on a bounded submanifold  $\Gamma$  of  $\mathbb{R}^n$ . In addition to the non-selfadjointness of the operator  $H_h$ , the main new difficulties come from the geometry of  $\Gamma$  and trapped trajectories. For the latter we introduce some partial semi-classical measures, considering the integral of the propagator over finite times instead of the resolvent. Then we take the limit for large times.

## Keywords

Helmholtz equation, non-selfadjoint operators, dissipative operators, semiclassical analysis, Mourre's commutators method, semiclassical measure.



# Remerciements

Avant de commencer à parler mathématiques, il convient de corriger dès maintenant la première erreur de ce manuscrit. La page de titre laisse penser que j'étais seul pour écrire cette thèse, mais je n'ose imaginer la piètre allure qu'elle aurait eue sans l'apport des nombreuses personnes qui m'ont entouré pendant ces trois années. Si l'objet de ce manuscrit est de faire un bilan de ce qui est sorti mathématiquement de cette période, l'usage m'autorise à faire un petit détour par l'aspect plus personnel de ce travail pour les en remercier. Les quelques lignes qui suivent ne sont pas très originales dans la forme (cela a de toutes façons déjà été fait), j'espère que le message n'en sera pas dénaturé pour autant.

Je voudrais bien sûr commencer par remercier mon directeur de thèse, Xue Ping Wang, pour m'avoir ouvert la porte du monde semi-classico-dissipatif et pour y avoir guidé mes premiers pas. Il a su, par de nombreuses questions et discussions, guider ma réflexion tout en me laissant la liberté de m'attarder sur mes propres problématiques.

Je remercie Nicolas Burq et Erik Skibsted d'avoir accepté la lourde tâche de rapporter cette thèse. J'en suis très honoré. Je suis également très fier de compter dans mon jury Rafe Mazzeo, Ping Zhang, Frédéric Hérau et Didier Robert. Je les remercie tous de s'être intéressés à mon travail, d'être venus assister à ma soutenance, et surtout de m'avoir suggéré des pistes pour poursuivre ce travail.

Je n'oublie pas tous ceux qui ont eu un rôle moins officiel mais tout aussi important dans mon apprentissage. Toutes ces discussions, qu'elles aient eu lieu devant un tableau noir, au détour d'un couloir ou entre deux exposés d'une conférence n'ont d'égal dans aucune bibliothèque. Je remercie en particulier Jean-François Bony et Thierry Jecko pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et pour les nombreuses remarques qu'ils ont pu me faire. Au sein du laboratoire, je dois beaucoup aux réponses toujours très éclairantes de Luc Hillairet. J'ai également beaucoup apprécié la disponibilité de Gilles Carron, Didier Robert et François Nicoleau, ainsi que les conseils toujours rassurants de Laurent Thomann.

Plus généralement je remercie tous ceux qui participent d'une façon ou d'une autre à la vie du laboratoire Jean Leray, pour le cadre de travail à la fois convivial et studieux dont j'ai bénéficié pendant ces années. Qu'on aille au secrétariat, à la bibliothèque, qu'on retrouve l'équipe d'analyse en séminaire, qu'on frappe à une porte pour discuter enseignement ou pour poser une question (de préférence idiote), on est toujours reçu avec un mot sympathique. S'il est toujours agréable de faire des maths, c'est une véritable chance d'en faire dans de telles conditions.

Je ne peux pas parler du plaisir de venir chaque matin au laboratoire sans m'attarder sur les doctorants. J'ai partagé avec eux bien plus que des bureaux. Les championnats du monde de taroinche, les 30 jours de la galette, le camping sous la pluie, les hypermétropes, l'arbre à Nutella, les courses de Mario Kart, les barbecues devant le labo lorsque le Crous était en vacances, les soirées jeux, le twister en armure, les séances de piscine et d'ultimate, la raclette finale ou tout simplement le RU-café quotidien ne sont que les manifestations

les plus marquantes de l'ambiance qui règne dans ce groupe. Je n'oublierai pas non plus les discussions mathématiques plus sérieuses, et leur soutien pendant les moments plus difficiles. Un grand merci également à Bob pour m'avoir conté de si belles histoires pendant nos longs week-ends de rédaction-corrrection.

Je remercie en fait tous les amis qui m'entourent. Ceux avec qui je peux parler de maths. Ceux avec qui je peux ne pas parler de maths. Ceux que je peux voir régulièrement, mais aussi les (ex-)sénéonais, les (ex-)dijonnais et les (ex-)lyonnais, qui sont plus éloignés mais qui comptent toujours autant. Ceux qui auraient préféré que je les mentionne nominativement, et ceux qui pensent que c'est aussi bien comme cela.

Merci aussi à ma famille d'avoir toujours été là, et d'avoir stressé encore plus que moi pour la soutenance.

Mes derniers mots seront finalement pour celle sans qui tout cela n'aurait pas la même saveur. Elle m'a apporté l'équilibre nécessaire à l'aboutissement de ce travail et, d'un point de vue plus terre à terre, a eu la patience de me supporter et de me soutenir pendant l'écriture de ce manuscrit. Merci Sarah!

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	L'Équation de Helmholtz dissipative . . . . .	1
1.2	Étude de la résolvante de l'opérateur de Schrödinger dissipatif . . . . .	2
1.2.1	Le Principe d'absorption limite . . . . .	2
1.2.2	La Méthode de Mourre . . . . .	4
1.2.3	Application à l'opérateur de Schrödinger dissipatif semi-classique . . . . .	6
1.2.4	Estimations de la résolvante par les mesures semi-classiques . . . . .	9
1.3	Mesure semi-classique pour l'équation de Helmholtz . . . . .	11
1.3.1	Cas d'un coefficient d'absorption constant . . . . .	11
1.3.2	Énoncé du résultat pour un indice d'absorption variable . . . . .	13
1.3.3	Le problème des temps grands, idée de preuve . . . . .	15
1.4	Organisation du manuscrit . . . . .	17
<b>2</b>	<b>L'Opérateur de Schrödinger dissipatif</b>	<b>19</b>
2.1	Généralités sur les opérateurs dissipatifs . . . . .	19
2.1.1	Opérateurs dissipatifs maximaux . . . . .	19
2.1.2	Semi-groupes de contractions . . . . .	21
2.1.3	Perturbation dissipative relativement bornée d'un opérateur autoadjoint . . . . .	22
2.1.4	Perturbation bornée d'un opérateur autoadjoint . . . . .	23
2.1.5	Premières propriétés concernant le spectre de l'opérateur de Schrödinger . . . . .	24
2.2	Dilatations autoadjointes . . . . .	24
2.2.1	Dilatation unitaire d'une contraction . . . . .	25
2.2.2	Dilatation autoadjointe d'un opérateur de Schrödinger dissipatif . . . . .	26
2.2.3	Opérateurs relativement lisses par rapport à un opérateur dissipatif . . . . .	28
2.3	Condition de radiation de Sommerfeld . . . . .	30
2.3.1	Solutions sortantes . . . . .	31
2.3.2	Unicité . . . . .	33
2.3.3	Estimations uniformes . . . . .	33
2.3.4	Principe d'absorption limite - Existence d'une solution sortante . . . . .	39
2.4	Étude asymptotique des solutions de l'équation de Schrödinger . . . . .	40
2.4.1	Comportement asymptotique des solutions entrantes et sortantes . . . . .	40
2.4.2	Solutions de l'équation de Schrödinger homogène . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Approche semi-classique du problème</b>	<b>49</b>
3.1	Quelques techniques semi-classiques - Calcul pseudo-différentiel . . . . .	51
3.1.1	Obtenir un développement asymptotique pour la limite $h \rightarrow 0$ . . . . .	51
3.1.2	Quantifications usuelles . . . . .	52
3.1.3	Classes de symboles . . . . .	53
3.1.4	Propriétés importantes . . . . .	54
3.1.5	Micro-localisation et mesures semi-classiques . . . . .	58
3.2	Dynamique classique associée au problème . . . . .	59
3.2.1	Flot hamiltonien . . . . .	59
3.2.2	Rayon de fuite . . . . .	62



3.2.3	Amortissement classique . . . . .	67
3.3	Quantification du flot et de l'amortissement . . . . .	71
3.3.1	Le Théorème d'Egorov, version non-autoadjointe . . . . .	71
3.3.2	États lagrangiens . . . . .	76
3.3.3	Le propagateur de Schrödinger vu comme opérateur de Fourier intégral . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Estimations uniformes de la résolvante par la méthode de Mourre dissipative</b>	<b>83</b>
4.1	Méthode des opérateurs conjugués de Mourre . . . . .	83
4.1.1	Opérateurs conjugués . . . . .	83
4.1.2	Opérateur conjugué pour un unique opérateur dissipatif . . . . .	84
4.1.3	Lemmes préliminaires . . . . .	86
4.1.4	Estimations uniformes de la résolvante dans les espaces à poids . . . . .	89
4.1.5	Principe d'absorption limite . . . . .	95
4.2	Quelques extensions de la méthode de Mourre . . . . .	96
4.2.1	Une autre estimation de la résolvante . . . . .	97
4.2.2	Estimation dans les espaces de Besov . . . . .	101
4.2.3	Conjugaison d'ordre supérieur . . . . .	103
4.2.4	Estimations des puissances de la résolvante et régularité de la limite . . . . .	108
4.3	Application à l'opérateur de Schrödinger dissipatif . . . . .	111
4.3.1	Cas d'un fort amortissement . . . . .	112
4.3.2	Estimation de la résolvante de l'opérateur de Schrödinger dissipatif . . . . .	112
4.3.3	Estimation dans les espaces de Besov . . . . .	117
4.3.4	Régularité de la limite de la résolvante . . . . .	118
4.3.5	Nécessité de la condition sur les trajectoires captées . . . . .	119
<b>5</b>	<b>Localisation <i>a priori</i> et application au cas d'un indice d'absorption de signe variable</b>	<b>123</b>
5.1	Localisation <i>a priori</i> de la solution pour l'équation de Helmholtz . . . . .	123
5.1.1	Localisation près de la surface d'énergie $E$ . . . . .	123
5.1.2	Estimation dans la zone entrante . . . . .	125
5.2	Équation de Helmholtz avec indice d'absorption de signe variable . . . . .	137
5.2.1	Présentation de la méthode . . . . .	137
5.2.2	Absence de valeurs propres à distance d'ordre $h$ de l'axe réel . . . . .	139
5.2.3	Construction d'une fonction de fuite bornée . . . . .	142
5.2.4	Estimations de la résolvante près de l'axe réel dans le cas non-dissipatif . . . . .	146
5.2.5	Principe d'absorption limite . . . . .	150
<b>6</b>	<b>Mesure semi-classique pour la solution de l'équation de Helmholtz avec indice d'absorption variable</b>	<b>153</b>
6.1	Énoncé du résultat . . . . .	153
6.2	Calculs près de $\Gamma$ . . . . .	159
6.2.1	Étude du terme source . . . . .	159
6.2.2	Trajectoires classiques autour de $\Gamma$ . . . . .	163
6.2.3	Méthode B.K.W. . . . .	170
6.2.4	Étude des points critiques de la fonction de phase . . . . .	172
6.2.5	Contrôle des temps petits . . . . .	175
6.3	Mesure semi-classique partielle pour les temps finis . . . . .	182
6.3.1	Calculs pour des temps intermédiaires . . . . .	183
6.3.2	Convergence vers une mesure semi-classique tronquée . . . . .	185
6.4	Convergence vers une mesure semi-classique . . . . .	189
6.4.1	Contrôle des temps grands et convergence des mesures tronquées . . . . .	189
6.4.2	Caractérisation de la mesure semi-classique . . . . .	194

<b>A Quelques rappels</b>	<b>201</b>
A.1 Divers	201
A.2 Retour sur l'équation de Hamilton-Jacobi	202
A.3 Retour sur les états lagrangiens et les opérateurs intégraux de Fourier	204
<b>Index</b>	<b>211</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>213</b>



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 L'Équation de Helmholtz dissipative

On s'intéresse dans cette thèse à l'équation de Helmholtz

$$(-h^2\Delta + V_1(x) - ihV_2(x) - E)u_h = S_h \quad (1.1)$$

sur  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).  $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$  est le laplacien usuel sur  $\mathbb{R}^n$  tandis que  $V_1$  et  $V_2$  sont des fonctions bornées de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  qui tendent vers 0 à l'infini (on précisera ultérieurement les hypothèses de régularité et de décroissance sur le potentiel). Cette équation modélise par exemple la propagation du champ électromagnétique d'un laser haute fréquence dans un milieu inhomogène. Dans ce contexte  $V_1(x) - E$  correspond à l'indice de réfraction du milieu et  $V_2$  est l'indice d'absorption de l'énergie du laser.  $V_2$  sera donc dans un premier temps une fonction à valeurs positives. On autorisera ensuite l'indice d'absorption à avoir une « petite » partie négative, en un sens que l'on précisera. Enfin,  $S$  est le terme source, connu, et  $h$  est proportionnel à la longueur d'onde du laser dans le vide.

Puisqu'on s'intéresse au cas d'un laser haute fréquence,  $h$  est « petit ». On s'attend alors à ce que la solution  $u$  soit très oscillante, ce qui rend difficile une approche numérique. Par contre, dans la mesure où la longueur d'onde est bien plus petite que l'échelle de variations des autres grandeurs, il est raisonnable de considérer la limite très haute fréquence, c'est-à-dire de considérer la limite  $h \rightarrow 0$  du problème. Ainsi, puisque  $h$  n'est plus considéré comme une constante du problème mais comme un paramètre, on est amené à s'intéresser à une famille de solutions  $(u_h)_{h \in ]0, h_0]}$  pour un certain  $h_0 > 0$ . Le but est alors d'étudier l'asymptotique pour  $h \rightarrow 0$  de la solution  $u_h$ , en vue d'obtenir des informations qualitatives pour décrire la solution du problème de départ (c'est-à-dire  $u_h$  pour  $h$  petit mais fixé).

Pour étudier cette équation, on introduit sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  l'opérateur de Schrödinger

$$H_h = -h^2\Delta + V_1(x) - ihV_2(x). \quad (1.2)$$

La constante  $E$  qui apparaît dans (1.1) sera quant à elle considérée comme paramètre spectral. Pour tout  $h > 0$ , l'opérateur  $H_h$  est bien défini sur  $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ , et se prolonge en un opérateur de domaine  $H^2(\mathbb{R}^n)$ , l'espace de Sobolev des fonctions dont les dérivées jusqu'à l'ordre 2 sont dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Puisque le potentiel  $V(x) = V_1(x) - ihV_2(x)$  n'est pas réel, cet opérateur n'est pas symétrique et, *a fortiori*, pas autoadjoint.

Lorsque l'indice d'absorption  $V_2$  est constant,  $V_2(x) = \alpha \geq 0$ , il peut comme  $E$  être considéré comme paramètre spectral. Notant

$$H_1^h = -h^2\Delta + V_1(x),$$

l'équation se réduit alors à :

$$(H_1^h - (E + ih\alpha))u_h = S_h.$$

On est alors ramené à l'étude d'un opérateur autoadjoint, et on dispose pour cela de nombreux outils (en particulier le calcul fonctionnel) et d'une théorie très évoluée.

Le but de cette thèse est de considérer le cas d'un indice d'absorption variable. La partie imaginaire du potentiel ne peut plus être considérée comme faisant partie du paramètre spectral et doit donc être intégrée à l'opérateur, ce qui nous oblige à travailler avec un opérateur non-autoadjoint. Ceci dit, la partie non-autoadjointe qu'on ajoute est tout de même particulière. D'une part elle est « petite » par rapport à la partie autoadjointe, à la fois en terme d'opérateur à  $h$  fixé (l'opérateur de multiplication par  $V_2$  est borné sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  et donc en particulier relativement borné de borne 0 par rapport à  $H_1$ ) et à la limite  $h \rightarrow 0$  (la partie imaginaire, de taille  $O(h)$ , n'intervient pas dans le symbole principal de  $H_h$ ). On utilisera d'autre part de façon cruciale l'hypothèse sur le signe de  $V_2$ .

## 1.2 Étude de la résolvante de l'opérateur de Schrödinger dissipatif

### 1.2.1 Le Principe d'absorption limite

Avant de se lancer dans l'étude de la solution  $u_h$  à l'équation (1.1), il faut bien entendu s'assurer que le problème est bien posé. On peut déjà remarquer que dans le contexte qui nous intéresse,  $E > 0$  est dans le spectre de  $H_h$ , donc  $(H_h - E)$  n'est pas inversible en tant qu'opérateur de  $H^2(\mathbb{R}^n)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Étant donné un opérateur de Schrödinger  $H_1 = -\Delta + V_1$  autoadjoint, l'idée pour définir la solution  $u$  à partir du terme source  $S$  est alors d'ajouter un petit coefficient d'absorption  $\pm i\varepsilon$ . La résolvante  $(H_1 - (E \pm i\varepsilon))^{-1}$  est bien définie comme opérateur borné sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , et on peut se demander si la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  existe en un certain sens. Lorsque c'est le cas, on parle de principe d'absorption limite. Par le calcul fonctionnel on sait que

$$\|(H_1 - (E \pm i\varepsilon))^{-1}\| = \frac{1}{\varepsilon}$$

et donc la limite pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  ne peut pas exister dans l'espace  $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$  des opérateurs bornés sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . On cherche alors un sous-espace  $X$  de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  aussi gros que possible tel que pour tous  $f, g$  dans  $X$  l'application  $z \mapsto \langle (H_1^h - z)^{-1} f, g \rangle$ , bien définie et holomorphe pour  $z$  non réel, admet une limite lorsque  $z$  tend vers  $E$ .

Dans [Agm75], S. Agmon montre que pour  $\delta > \frac{1}{2}$  et si  $E > 0$  n'est pas valeur propre de  $H_1$ , la résolvante  $(H_1 - (E \pm i\varepsilon))^{-1}$  admet une limite  $(H_1 - (E \pm i0))^{-1}$  dans l'espace des opérateurs bornés de l'espace à poids  $L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n) = L^2((1 + |x|)^{2\delta} dx)$ , où  $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}$ , dans l'espace de Sobolev à poids  $H^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)$ , et que pour  $f \in L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$ , les fonctions  $u_{\pm} = (H_1 - (E \pm i0))^{-1} f$  sont solutions de l'équation :  $(H_1 - E)u_{\pm} = f$ . Ce résultat est d'abord montré pour le cas du laplacien libre  $H_0 = -\Delta$  puis, par un argument perturbatif, pour des potentiels  $V_1$  de courte portée (c'est-à-dire décroissant au moins comme  $\langle x \rangle^{-1-\rho}$  avec  $\rho > 0$ ). Le résultat est également démontré dans le cas d'un potentiel  $V_1$  à longue portée (décroissant comme  $\langle x \rangle^{-\rho}$ ) dans [IS72] (voir aussi [Sai79]), tandis que le cas où le potentiel admet une partie imaginaire de courte portée est abordé dans [Sai74]. C'est ensuite au travail d'E. Mourre ([Mou81]) que sont dus de spectaculaires progrès concernant l'étude de la résolvante près de l'axe réel. On y reviendra dans le paragraphe suivant.

Les motivations sont nombreuses pour étudier le principe d'absorption limite. Une application importante est l'étude de la nature du spectre contenu dans  $\mathbb{R}_+$  (voir paragraphe suivant). D'autre part, d'après la formule de Stone ([RS79a], voir également [Mel95] pour les expressions explicites dans le cas du laplacien libre) toute l'information concernant l'opérateur  $H_1$  est contenue dans les limites de la résolvante près de l'axe réel. Le principe d'ab-

sorption limite est également utilisé pour obtenir une représentation spectrale de l'opérateur de Schrödinger, qui généralise la transformation de Fourier utilisée pour le laplacien libre ([Ike75, Agm75, Sai79]). Ces résultats sont à leur tour utilisés pour étudier les solutions de l'équation

$$(H_1 - E)u = 0. \quad (1.3)$$

On renvoie pour cela à [GY99], qui fait également le lien avec la théorie de la diffusion. Pour étudier (1.3), on peut déjà remarquer que si le principe d'absorption limite est vérifié au point  $E$ , alors pour une fonction  $f$  (disons dans l'espace à poids  $L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$  pour  $\delta > \frac{1}{2}$ ), les deux fonctions  $u_{\pm} = (H_1 - (E \pm i0))^{-1}f$  sont deux solutions distinctes de l'équation  $(H_1 - E)u = f$ , donc la différence fournit une solution de l'équation homogène (1.3).

Cette remarque soulève un point important pour l'étude d'une équation telle que (1.1). Lorsqu'il est valable, le principe d'absorption limite fournit déjà, du moins dans le cas auto-adjoint, deux solutions, selon le signe du coefficient d'absorption qu'on ajoute. Cela signifie que même si on se place dans les bons espaces, le problème est mal posé. Il faut donc trouver un critère pour distinguer parmi toutes les solutions celle qui est physiquement raisonnable.

Sommerfeld a montré que l'équation de Helmholtz admet une unique solution si on ajoute une condition de rayonnement à l'infini du type

$$\partial_r u - i\sqrt{E}u = o_{|x| \rightarrow +\infty} \left( |x|^{-\frac{n-1}{2}} \right),$$

où  $\partial_r u$  désigne la dérivée radiale de  $u$  (d'autres formulations sont possibles). On dira que la solution de ce problème est la solution sortante à l'équation de Helmholtz (le flux d'énergie de l'onde à travers une sphère va bien de l'intérieur de la boule vers l'infini, voir [DL87], cette solution est en particulier la seule à être physiquement valable<sup>1</sup>). Cette solution est celle que l'on obtient par le principe d'absorption limite par le demi-plan supérieur, c'est à dire celle obtenue en ajoutant un coefficient d'absorption positif. On peut également donner une condition analogue pour définir une solution entrante, qui est la solution obtenue par le principe d'absorption limite par le demi-plan inférieur.

L'existence et l'unicité d'une solution sortante/entrante sont démontrées dans le cas de l'équation de Helmholtz avec un potentiel réel et de longue portée dans [IS72] ou [Sai79]. Dans le cas d'un opérateur de Schrödinger dissipatif  $H = -\Delta + V_1(x) - iV_2(x)$  avec  $V_2 \geq 0$ , la symétrie entre les solutions entrantes et les solutions sortantes est rompue. En effet, s'il est facile de voir que tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $\text{Im } z > 0$  est dans l'ensemble résolvant de  $H$ , cet opérateur peut avoir des valeurs propres dans le demi-plan  $\{\text{Im } z \leq 0\}$ . On se propose de montrer que pour un potentiel longue portée, le principe d'absorption limite est valable pour le demi-plan supérieur et définit l'unique solution sortante à l'équation de Helmholtz. Plus précisément on va démontrer le résultat suivant :

**Théorème 1.1.** *On suppose que  $V_1$  et  $V_2$  sont différentiables et que  $V_2 \geq 0$ . On suppose en outre qu'il existe  $\rho > 0$  et  $c \geq 0$  tels que pour  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $j \in \{1, 2\}$  on a*

$$|V_j(x)| \leq c \langle x \rangle^{-\rho} \quad \text{et} \quad |\nabla V_j(x)| \leq c \langle x \rangle^{-1-\rho}.$$

*Soient  $E > 0$ ,  $\delta \in ]\frac{1}{2}, \min(1, \frac{1}{2} + \frac{\rho}{4})]$  et  $f \in L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$ . Alors on a*

$$(H - (E + i\varepsilon))^{-1}f \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u$$

*dans  $L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)$ , où  $u \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n) \cap L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)$  est l'unique solution de l'équation  $(H - E)u = f$  telle que*

$$\partial_r u + \frac{n-1}{2|x|}u - i\sqrt{E}u \in L^{2,\delta-1}(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{V}_0),$$

---

1.

« The sources must be sources, not sinks of energy. The energy which is radiated from the sources must scatter to infinity; no energy may be radiated from infinity into the prescribed singularities of the field. » A. Sommerfeld, [Som72].

$\mathcal{V}_0$  étant un voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^n$ .

On rappelle que d'après les résultats de [Sai74], ce résultat ne peut être valable dans toute sa généralité sans l'hypothèse de positivité sur  $V_2$ , même dans le cas d'une partie imaginaire de courte portée. A la suite de cette étude, on adaptera également au cas dissipatif (avec une partie imaginaire de courte portée) une partie des résultats de [GY99] pour étudier les solutions de l'équation

$$(H - E)u = 0.$$

## 1.2.2 La Méthode de Mourre

Si  $H_1$  et  $A$  sont deux opérateurs autoadjoints bornés sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  tels que  $[H_1, iA] \geq c_0 > 0$ , alors  $H_1$  ne peut pas avoir de valeur propre réelle, puisque pour  $\varphi \in \mathcal{H}$  tel que  $H_1\varphi = \lambda\varphi$  avec  $\lambda$  réel on a

$$0 = \langle [H_1, iA]\varphi, \varphi \rangle \geq c_0 \|\varphi\|^2,$$

et donc  $\varphi = 0$ . Plus intéressant, on peut montrer que sous une telle hypothèse de commutateur positif, le spectre de  $H_1$  est en fait absolument continu ([Put67], voir aussi [CFKS87]). Ainsi, l'idée d'utiliser des commutateurs positifs pour montrer des propriétés spectrales avait déjà germé dans plusieurs travaux (voir par exemple [Lav69, Lav71, Lav73], [Mou77]), mais c'est la contribution d'E. Mourre dans [Mou81] qui est reconnue comme étant le point de départ pour ce qu'on appelle désormais méthode des commutateurs, ou méthode de Mourre. La nouveauté est d'autoriser des opérateurs non-bornés et de localiser la condition en énergie (pour  $H_1$ ). Notant  $\mathbb{1}_J$  la fonction caractéristique de l'intervalle  $J$ , et donc  $\mathbb{1}_J(H_1)$  la projection spectrale de  $H_1$  sur  $J$ , Mourre montre que si on peut trouver un opérateur autoadjoint  $A$  tel que

$$\mathbb{1}_J(H_1)[H_1, iA]\mathbb{1}_J(H_1) \geq c_0\mathbb{1}_J(H_1) \quad (1.4)$$

(et d'autres conditions qui justifient les manipulations effectuées avec  $[H_1, iA]$  mais qu'on n'explique pas pour le moment), alors l'opérateur

$$\langle A \rangle^{-1} (H_1 - z)^{-1} \langle A \rangle^{-1} \quad (1.5)$$

est uniformément borné pour  $\operatorname{Re} z$  dans un compact de  $J$  et  $\operatorname{Im} z \neq 0$ , et admet des limites pour  $\operatorname{Im} z \rightarrow 0^\pm$  dans l'espace  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  des opérateurs bornés sur  $\mathcal{H}$ . Pour cela, il étudie l'opérateur

$$F_z(\varepsilon) = \langle A \rangle^{-1} (H_1 - z - i\varepsilon\phi(H_1)[H_1, iA]\phi(H_1))^{-1} \langle A \rangle^{-1}, \quad (1.6)$$

où  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$  est à support dans  $J$ . L'idée est d'estimer d'une part  $F_z(\varepsilon)$  (par rapport à  $\varepsilon$  et uniformément en  $z$ ) et d'autre part  $F'_z(\varepsilon)$  par rapport à  $\varepsilon$  et  $\|F_z(\varepsilon)\|$ . Une estimation de type Gronwall permet alors de montrer que la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  existe et qu'elle est bornée uniformément par rapport à  $z$ . En s'intéressant ensuite à la dérivée de  $F_z(\varepsilon)$  par rapport à  $z$ , on obtient le principe d'absorption limite sur  $J$  ainsi que la continuité de l'opérateur limite. On pourra consulter l'introduction du chapitre 7 de [ABG91] pour une présentation des idées de cette méthode.

La raison du succès de cette idée est qu'elle s'applique à de nombreux cas difficiles. Le but de Mourre dans [Mou81] est en particulier l'étude des propriétés spectrales pour le problème à 3 corps. La méthode a ensuite été étendue pour être applicable au problème à  $N$  corps dans [PSS81]. On voit en particulier dans cet article que le poids  $\langle A \rangle^{-1}$  peut être remplacé par  $\langle A \rangle^{-\delta}$  pour  $\delta > \frac{1}{2}$ . La théorie a connu de nombreux développements. Citons par exemple [Mou83] (qui met en évidence les conséquences de l'existence d'opérateurs conjugués sur les propriétés de propagation), [JMP84] (qui montre que si on a des propriétés supplémentaires sur les commutateurs multiples de  $H_1$  avec  $A$ , alors la limite de la résolvante sur l'axe réel est régulière, ce qui permet par exemple de montrer la décroissance de l'énergie locale  $\langle A \rangle^{-\delta} e^{-itH_1}\phi(H_1)\langle A \rangle^{-\delta}$ ), ou encore [Jen85] (qui poursuit le travail précédent), [JP85] (qui

démontre les estimations de la résolvante dans les espaces de Besov abstraits, introduits par S. Agmon et L. Hörmander dans [AH76] pour l'opérateur de Schrödinger du problème à deux corps, et qui fournissent un cadre optimal pour l'étude de la résolvante dans ce cas).

Notre but dans ce travail est d'adapter la méthode de Mourre pour un opérateur  $H$  qui n'est plus autoadjoint mais seulement dissipatif (c'est-à-dire tel que  $\text{Im} \langle H\varphi, \varphi \rangle \leq 0$  pour tout  $\varphi$  dans le domaine de  $H$ ). On ne cherchera à généraliser et à utiliser que les premiers résultats de la théorie, mais il convient tout de même de préciser qu'elle a été utilisée et améliorée dans de très nombreux travaux, dont il serait vain de vouloir en faire la liste. Mentionnons tout de même [GGM04] où une théorie pour un opérateur conjugué qui n'est pas nécessairement autoadjoint est développée, des travaux sur le problème à  $N$  corps [Ski92, Wan91, GIS96], l'étude de la résolvante de l'opérateur de Schrödinger près de 0 [FS04] ou encore les opérateurs de Pauli-Fierz [DJ01, Gol09]. Notons également qu'une théorie de Mourre pour des opérateurs non-autoadjoints a également été récemment développée dans [BG] pour étudier des perturbations du système de Dirac.

Une partie importante de ce travail consiste donc à généraliser la méthode que l'on vient de présenter à un cadre dissipatif. Cela pose évidemment problème dès l'écriture de la condition (1.4), puisqu'on n'a pas de projecteurs spectraux pour  $H$ . Plus généralement, l'absence de calcul fonctionnel pour  $H$  rend impossible une adaptation directe de la méthode à un cadre dissipatif général. On se restreint donc à des opérateurs dissipatifs dont la partie non-autoadjointe  $V$  est petite, au sens où elle est relativement bornée (de borne strictement inférieure à 1) par rapport à la partie autoadjointe  $H_1$ . Ainsi, on peut espérer que la localisation en énergie pour  $H_1$  soit pertinente pour l'étude de  $H$ . Dans ces conditions, le but est alors de montrer les estimations (1.5) sur l'opérateur  $H$  (pour  $\text{Im} z > 0$ ) à partir de la condition (1.4) sur la partie autoadjointe  $H_1$ .

La démonstration de Mourre repose sur l'argument suivant : si  $T = T_R - iT_I$  avec  $T_R$  autoadjoint,  $T_I$  autoadjoint positif et  $T_R$ -bornée (de borne inférieure à 1),  $\text{Im} z > 0$ ,  $B$  tel que  $B^*B \leq T_I$  et  $Q$  borné, alors on a :

$$\|B(T - z)^{-1}Q\| \leq \|Q^*(T - z)^{-1}Q\|^{\frac{1}{2}}$$

(c'est, en termes plus généraux, la proposition II.5 de [Mou81]). Mourre l'applique avec  $T_R = H_1$ ,  $B = \sqrt{\varepsilon}\phi(H_1)$  et  $T_I = \varepsilon\phi(H_1)[H_1, iA]\phi(H_1)$ , ce qui est possible d'après l'hypothèse (1.4). Il est facile de voir que si on ajoute une partie non-autoadjointe  $-iV$  avec  $V \geq 0$ , il suffit de prendre  $T_I = V + \varepsilon\phi(H_1)[H_1, iA]\phi(H_1)$ , et l'argument fonctionne de la même façon (par contre, le problème n'est plus symétrique et on ne peut plus traiter le cas  $\text{Im} z < 0$ ). En outre, on peut également appliquer ce même argument avec  $B = \sqrt{V}$ . C'est important, car puisqu'on travaille à la fois avec  $H$  (qui nous intéresse) et  $H_1$  (pour lequel on peut utiliser le calcul fonctionnel), on aura un certain nombre de termes résiduels faisant intervenir  $V$ , et cette remarque nous permettra de montrer qu'ils ne sont pas trop dérangeants.

Une fois les choses écrites sous cet angle, et vue la nouvelle expression de  $T_I$ , on se rend compte que l'argument tient encore sous l'hypothèse

$$\mathbf{1}_J(H_1)[H_1, iA]\mathbf{1}_J(H_1) + \beta V \geq c_0\mathbf{1}_J(H_1), \quad (1.7)$$

pour une certaine constante  $\beta \geq 0$ . Cette hypothèse est plus faible que (1.4) du fait que  $V$  est un opérateur positif. Pour les besoins de notre application à l'opérateur de Schrödinger, on voudrait en fait montrer les estimations de la résolvante et le principe d'absorption limite sous la condition

$$\mathbf{1}_J(H_1)([H_1, iA] + \beta V)\mathbf{1}_J(H_1) \geq c_0\mathbf{1}_J(H_1). \quad (1.8)$$

Cette hypothèse reste plus faible que (1.4). Elle est également plus faible que l'hypothèse (1.7), puisqu'il suffit de composer cette dernière à gauche et à droite par  $\mathbf{1}_J(H_1)$  (ce qui préserve l'inégalité) pour obtenir la nouvelle version. L'opérateur  $\mathbf{1}_J(H_1)V\mathbf{1}_J(H_1)$  qui apparaît dans cette nouvelle hypothèse n'est toutefois pas comparable à  $V$ , donc il n'est plus aussi clair



que l'argument qu'on vient de présenter est applicable avec cette dernière hypothèse. On s'en sortira en ajoutant cet opérateur au terme en  $\varepsilon$ , c'est-à-dire en étudiant la résolvante de

$$H - i\varepsilon\phi(H_1)([H, iA] + \beta V)\phi(H_1).$$

Outre le fait qu'elle est valable dans de nombreuses situations, la méthode de Mourre a cet avantage qu'elle s'applique facilement dans un cadre semi-classique. En effet, les estimations de la résolvante reposent essentiellement sur l'inégalité (1.4), donc pour peu que l'on puisse vérifier cette inégalité uniformément par rapport au paramètre  $h$ , on obtiendra les estimations de la résolvante uniformément par rapport à ce même  $h$  (il faut tout de même également vérifier les autres estimations intervenant dans les autres hypothèses). Cela peut s'énoncer de la façon suivante (on renvoie aux théorèmes 4.14 et 4.18 pour des énoncés plus précis) :

**Théorème 1.2.** *Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert. On considère une famille  $(H_h)_{h \in ]0,1]}$  d'opérateurs dissipatifs de la forme  $H_h = H_1^h - iV_h$  où, pour tout  $h \in ]0,1]$ ,  $H_1^h$  est un opérateur autoadjoint sur  $\mathcal{H}$  et  $V_h$  est un opérateur autoadjoint positif et uniformément  $H_1^h$ -borné de borne relative strictement inférieure à 1. Soient  $(A_h)_{h \in ]0,1]}$  une famille d'opérateurs autoadjoints sur  $\mathcal{H}$ ,  $(\alpha_h)_{h \in ]0,1]}$  une famille d'éléments de  $]0,1]$  et un ouvert  $J \subset \mathbb{R}_+^*$  tels que*

$$\forall h \in ]0,1], \quad \mathbf{1}_J(H_1^h)([H_1^h, iA_h] + \beta V_h)\mathbf{1}_J(H_1^h) \geq \alpha_h \mathbf{1}_J(H_1^h), \quad (1.9)$$

pour un certain  $\beta \geq 0$  (et d'autres conditions sur les commutateurs de  $H_1^h$  et  $V_h$  avec  $A_h$ ). Alors pour  $\delta > \frac{1}{2}$  et un compact  $I \subset J$  il existe une constante  $c \geq 0$  telle que pour tout  $h \in ]0,1]$  on a :

$$\sup_{\substack{\operatorname{Re} z \in I \\ \operatorname{Im} z > 0}} \left\| \langle A_h \rangle^{-\delta} (H_h - z)^{-1} \langle A_h \rangle^{-\delta} \right\| \leq \frac{c}{\alpha_h}.$$

De plus, pour tout  $\lambda \in J$  la limite

$$\langle A_h \rangle^{-\delta} (H_h - (\lambda + i0))^{-1} \langle A_h \rangle^{-\delta} = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \langle A_h \rangle^{-\delta} (H_h - (\lambda + i\mu))^{-1} \langle A_h \rangle^{-\delta}$$

existe dans l'espace des opérateurs bornés sur  $\mathcal{H}$  et définit une fonction continue sur  $J$ .

On obtient ensuite d'autres estimations pour la résolvante, en particulier l'estimation uniforme dans les espaces de Besov, ainsi que l'estimation pour les puissances de la résolvante et la régularité de la limite. Ces derniers résultats s'obtiennent à partir du précédent comme dans le cas autoadjoint. L'estimation uniforme dans les espaces de Besov est donnée dans [Wan07] pour le cas autoadjoint. Par contre, il semble que les démonstrations pour les autres estimations, en particulier celle des puissances de la résolvante n'aient pas été réécrites *in extenso* pour une famille d'opérateurs, on en propose donc une version dissipative s'appuyant sur [JMP84] et [Jen85].

### 1.2.3 Application à l'opérateur de Schrödinger dissipatif semi-classique

Le but est ensuite d'appliquer ce résultat abstrait au cas de l'opérateur de Schrödinger dissipatif  $H_h$  (comme introduit en (1.2), avec  $V_2 \geq 0$ ) pour obtenir des estimations de la résolvante uniformes par rapport au paramètre  $h$ .

Pour l'opérateur  $H_1^h = -h^2\Delta + V_1(x)$  avec  $V_1$  de longue portée, D. Robert et H. Tamura montrent dans [RT87] que pour  $\delta > \frac{1}{2}$  et sous une condition de non-capture sur les trajectoires classiques d'énergie  $E > 0$ , il existe  $h_0 > 0$ , un voisinage  $J$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  et  $c \geq 0$  tels que pour  $h \in ]0, h_0]$  on a :

$$\sup_{\substack{\operatorname{Re} z \in J \\ \operatorname{Im} z \neq 0}} \left\| \langle x \rangle^{-\delta} (H_1^h - z)^{-1} \langle x \rangle^{-\delta} \right\| \leq \frac{c}{h}. \quad (1.10)$$

Les trajectoires classiques associées à l'opérateur  $H_1^h$  sont les solutions

$$\phi^t(w) = (\bar{x}(t, w), \bar{\xi}(t, w)) \in \mathbb{R}^{2n},$$

pour  $w \in \mathbb{R}^{2n}$  et  $t \in \mathbb{R}$ , du système

$$\begin{cases} \partial_t \bar{x}(t, w) = 2\bar{\xi}(t, w), \\ \partial_t \bar{\xi}(t, w) = -\nabla V_1(\bar{x}(t, w)), \\ \phi^0(w) = w. \end{cases} \quad (1.11)$$

C'est le système hamiltonien associé au symbole  $p : (x, \xi) \mapsto \xi^2 + V_1(x)$ . On reconnaît les équations usuelles de la mécanique classique pour une particule soumise à la force associée au potentiel  $V_1$ . On dit alors que l'énergie  $E > 0$  est non captive si pour tout  $w \in p^{-1}(\{E\})$  on a :

$$|\bar{x}(t, w)| \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} +\infty.$$

Pour faire le lien entre les propriétés quantiques (l'étude de  $H_h$ ) et les propriétés classiques (correspondant au flot  $\phi^t$ ) on utilisera abondamment le calcul pseudo-différentiel. On présentera au chapitre 3 les techniques de l'analyse semi-classique mais en quelques mots, un opérateur pseudo-différentiel est un opérateur  $\text{Op}_h^w(a)$  sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  associé à un symbole  $a : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$  via la définition :

$$\text{Op}_h^w(a)u(x) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\langle x-y, \xi \rangle} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi.$$

Ces opérateurs généralisent la notion d'opérateur différentiel et pourront être utilisés, dans une certaine mesure, comme un « calcul fonctionnel simultané à  $O(h)$  près pour les opérateurs de multiplication par  $x_j$  et les opérateurs de dérivation  $-ih\partial_{x_j}$  pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  ». Cela permet par exemple de localiser à la fois en espace et en fréquence (toujours à  $O(h)$  près, ce qui est conforme au principe de Heisenberg). On renvoie au chapitre 3 pour un exposé plus précis.

La démonstration de [RT87] utilise la méthode de Mourre à l'infini. En effet, lorsque le potentiel est nul, ou lorsqu'il est suffisamment petit (ce qui sera le cas loin de l'origine), on peut prendre pour opérateur conjugué à  $H_1^h$  le générateur des dilatations

$$A_h = -\frac{ih}{2}(x \cdot \nabla + \nabla \cdot x).$$

C. Gérard et A. Martinez proposent dans [GM88] une autre démonstration, le but étant de trouver  $A_h$  qui soit véritablement un opérateur conjugué à  $H_1^h$ , de sorte que l'estimation (1.10) soit directement donnée par le résultat de Mourre.  $A_h$  est obtenu comme opérateur pseudo-différentiel, et est en fait une perturbation du générateur des dilatations. Plus précisément,  $A_h$  est de la forme

$$F_h = A_h + \text{Op}_h^w(r) = \text{Op}_h^w(x \cdot \xi + r) = \text{Op}_h^w(b),$$

avec  $r \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ . Pour obtenir l'inégalité (1.9) (avec  $V_h = 0$ ) après quantification et multiplication par  $h$  pour  $\alpha_h = c_0 h$  (avec  $c_0 > 0$ ), il faut trouver un symbole  $b$  tel que

$$\{p, b\} \geq c_0 \quad \text{sur } p^{-1}(J),$$

où  $\{p, b\}$  désigne le crochet de Poisson

$$\{p, b\} = \nabla_\xi p \cdot \nabla_x b - \nabla_x p \cdot \nabla_\xi b = 2\xi \cdot \nabla_x b - \nabla V_1(x) \cdot \nabla_\xi b.$$

Puisque le crochet de Poisson de  $b$  avec  $p$  correspond à la dérivée de  $b$  le long du flot  $\phi^t$  engendré par  $p$ , cela signifie que  $b$  doit croître le long des trajectoires classiques (voir le paragraphe 3.2.1 pour les propriétés du flot  $\phi^t$ ).

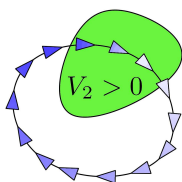
Dans le cas dissipatif, on a vu que le commutateur qui intervient dans la condition de Mourre ne fait intervenir que la partie autoadjointe. Ainsi, dans le cas d'une énergie non

captive, le même opérateur conjugué que celui utilisé dans le cadre autoadjoint va permettre d'appliquer la méthode abstraite et d'obtenir les estimations de la résolvante sur le demi-plan supérieur. Mais on a également vu qu'on pouvait exploiter la partie dissipative de l'opérateur  $H$  pour affaiblir la condition de Mourre. Il est donc naturel de se demander si on ne peut pas par suite affaiblir la condition de non-capture dans le contexte de l'opérateur de Schrödinger. En terme de symboles, la condition (1.9) peut s'écrire :

$$\{p, b\} + \beta V_2 \geq c_0 \quad \text{sur } p^{-1}(J).$$

Cela signifie que  $b$  n'a plus besoin d'être croissante le long des trajectoires classiques partout mais, grossièrement, uniquement là où  $V_2$  est nul. Pour illustrer ce que cela change, imaginons une trajectoire classique périodique. Il est impossible de construire une fonction  $b$  strictement croissante le long de cette trajectoire. Mais si cette trajectoire rencontre la zone d'amortissement où  $V_2 > 0$ , alors rien n'empêche de construire une fonction  $b$  qui est croissante là où  $V_2$  est petit et décroissante où  $V_2 \geq \gamma$  pour un certain  $\gamma > 0$ . Et comme  $\beta$  peut-être choisi aussi grand que l'on veut, on pourra toujours compenser le fait que  $\{p, b\}$  est négatif par le terme  $\beta V_2$  dans cette zone.

Cela suggère qu'on va effectivement pouvoir appliquer la méthode de Mourre dissipative avec une hypothèse plus faible que la condition de non-capture. Plus précisément, on aura simplement besoin de supposer que toute trajectoire captée d'énergie  $E$  pour le système (1.11) rencontre l'ouvert  $\mathcal{O}$  où  $V_2$  est non nul. On remarque que cette hypothèse est bien une généralisation de l'hypothèse habituelle, puisque dans le cas où  $V_2 = 0$ , elle interdit les trajectoires bornées d'énergie  $E$ , ce qui implique que  $E$  est une énergie non-captive. Une hypothèse de ce type apparaît déjà dans [Leb96] (pour l'équation des ondes amorties) et [AK07] (qui montre une estimation dispersive pour l'opérateur de Schrödinger sur un domaine extérieur).



*En présence de trajectoires captées, on construit une fonction qui croît le long du flot hors de la zone d'amortissement (ici la flèche représente la valeur de  $f$  au point et dans la direction considérés : plus elle est foncée plus la valeur de  $f$  est importante).*

FIGURE 1.1 – Fonction de fuite généralisée sur une trajectoire périodique.

Dans le cas autoadjoint, X.P. Wang montre dans [Wan87] ou [Wan91] que la condition de non-capture utilisée pour démontrer l'estimation (1.10) est en fait une condition nécessaire (notons les travaux récents de S. Nonnenmacher et M. Zworski [NZ09a, NZ09b] qui obtiennent une estimation de la résolvante –un peu plus faible– dans le cas où l'ensemble des trajectoires captées est « petit » et que la dynamique sur cet ensemble est chaotique). Dans le cas dissipatif, on va montrer que notre hypothèse généralisée sur les trajectoires captées est également une condition nécessaire, la difficulté étant à nouveau l'absence de calcul fonctionnel pour  $H_h$ . Comme précédemment, on va utiliser une localisation en énergie pour la partie autoadjointe  $H_1^h$ . On va également utiliser une version dissipative du théorème d'Egorov. Le théorème d'Egorov est un résultat qui fait le lien entre propagation quantique (conjugaison par le propagateur  $e^{-\frac{it}{h}H_1^h}$ ) et propagation quantique (translation le long du flot  $\phi^t$ ). Plus précisément, pour un symbole  $a$  et

$$U_1^h(t) = e^{-\frac{it}{h}H_1^h},$$

on a :

$$U_1^h(t)^* \text{Op}_h^w(a) U_1^h(t) = \text{Op}_h^w(a \circ \phi^t) + O_{h \rightarrow 0}(h).$$

D'après le théorème de Hille-Yosida l'opérateur dissipatif  $H_h$  engendre un semi-groupe de contractions qu'on notera

$$U_h(t) = e^{-\frac{it}{h}H_h}, \quad t \geq 0.$$

Un résultat analogue au théorème d'Egorov peut être montré pour  $U_h(t)$ , faisant apparaître le facteur d'amortissement dû à la partie imaginaire du potentiel :

$$U_h(t)^* \text{Op}_h^w(a) U_h(t) = \text{Op}_h^w \left( (a \circ \phi^t) e^{-2 \int_0^t V_2 \circ \phi^s ds} \right) + O_{h \rightarrow 0}(h).$$

Pour exploiter les propriétés des opérateurs autoadjoints afin d'étudier l'opérateur dissipatif  $H_h$ , on ne se contente pas de rapprocher  $H_h$  de sa partie autoadjointe  $H_1^h$ . On s'appuiera également sur une dilatation autoadjointe  $K_h$  de  $H_h$ .  $K_h$  est un opérateur autoadjoint sur un espace de Hilbert  $\mathcal{K}$  contenant l'espace de départ  $\mathcal{H}$  (ici  $L^2(\mathbb{R}^n)$ ) et tel que si on note  $P_{\mathcal{H}}$  la projection orthogonale de  $\mathcal{K}$  sur  $\mathcal{H}$  on a

$$(H_h - z)^{-1} = P_{\mathcal{H}}(K_h - z)^{-1} \Big|_{\mathcal{H}} \quad \text{pour } \text{Im } z > 0$$

et

$$e^{-\frac{it}{h} H_h} = P_{\mathcal{H}} e^{-\frac{it}{h} K_h} \Big|_{\mathcal{H}} \quad \text{pour } t \geq 0.$$

La théorie des dilatations autoadjointes dans un cadre abstrait est décrite dans [NF67]. On pourra trouver la construction d'une dilatation autoadjointe explicite pour l'opérateur de Schrödinger dissipatif dans [Pav77]. Ces résultats seront également rappelés dans ce manuscrit (chapitre 2).

Au final, le résultat qu'on obtient sur la résolvante de l'opérateur de Schrödinger dissipatif est le suivant :

**Théorème 1.3.** *On suppose que  $V_1$  une fonction lisse telle qu'il existe  $\rho > 0$  et des constantes  $c_\alpha$  pour  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  tels que*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad |\partial^\alpha V_1(x)| \leq c_\alpha \langle x \rangle^{-\rho - |\alpha|}.$$

*On suppose également que  $V_2$  est une fonction continue et positive sur  $\mathbb{R}^n$  telle que  $(x \cdot \nabla)^j V_2$  est borné pour  $j \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$ .*

*Soient  $E > 0$  et  $\delta > \frac{1}{2}$ . On suppose que pour tout  $w \in p^{-1}(\{E\})$  tel que la trajectoire classique  $t \mapsto |\bar{x}(t, w)|$  est bornée on peut trouver  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $V_2(\bar{x}(t, w)) > 0$ . Alors il existe un voisinage  $I$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  et  $c, h_0 > 0$  tels que*

$$\sup_{\substack{\text{Re } z \in I \\ \text{Im } z > 0}} \left\| \langle x \rangle^{-\delta} (H_h - z)^{-1} \langle x \rangle^{-\delta} \right\| \leq \frac{c}{h} \quad (1.12)$$

*pour tout  $h \in ]0, h_0]$ . Si de plus  $V_2$  est une fonction lisse dont toutes les dérivées sont bornées, la condition sur les trajectoires captées est en fait nécessaire.*

On verra que les estimations de la résolvante peuvent en fait plus généralement être montrées pour un opérateur de Schrödinger de la forme  $-h^2 \Delta + V_1(x) - i\nu(h)V_2(x)$  où  $\nu(h) : ]0, 1[ \rightarrow ]0, 1[$  est quelconque. Dans ce cas l'estimation en  $h^{-1}$  doit être remplacée par une estimation en  $\min(h, \nu(h))^{-1}$ . Outre le cas  $\nu(h) = h$  auquel on s'intéresse ici, le cas  $\nu(h) = h^2$  peut par exemple être utile pour l'étude des valeurs propres de grandes parties réelles pour l'opérateur de Schrödinger  $-\Delta - iV_2(x)$ , voir par exemple [AK07] à ce sujet.

#### 1.2.4 Estimations de la résolvante par les mesures semi-classiques

Si la méthode de Mourre a donné de nombreux résultats concernant les estimations de résolvante, d'autres techniques ont également été développées. On peut mentionner par exemple les travaux de A. Vasy et M. Zworski [VZ00] et de N. Burq [Bur02]. L'idée de Burq (voir auparavant [Leb96]) est de montrer des estimations de la résolvante par l'absurde, en considérant une famille de solutions niant le résultat voulu et une mesure semi-classique associée, puis en obtenant une contradiction sur cette mesure. La méthode est d'abord utilisée dans

[Bur02] pour un potentiel (réel) à support compact pour montrer l'absence de résonances dans une certaine zone du demi-plan inférieur. La méthode est ensuite reprise dans [Jec04] pour montrer les estimations de la résolvante pour le cas d'un potentiel longue portée. Le nouvel ingrédient est l'utilisation d'une « fonction de fuite à l'infini ». On pourra également voir [CJK08] pour le cas d'un potentiel coulombien, [CJ06] pour le cas d'un potentiel peu régulier et [Jec05, FR08, DFJ09] pour le cas matriciel.

On va utiliser ici cette méthode pour montrer une estimation uniforme de la résolvante dans le cas où l'indice d'absorption  $V_2$  n'est plus nécessairement partout positif. Le premier problème dans cette situation est que la résolvante n'est plus forcément bien définie, même sur le demi-plan supérieur, puisque l'opérateur peut avoir des valeurs propres de parties imaginaires positives (on se restreint à des situations où le spectre essentiel reste  $\mathbb{R}_+$ ). Mais comme on vient de le voir, même en supposant que la résolvante est bien définie, il est essentiel pour pouvoir appliquer la méthode de Mourre que le potentiel  $V_h$  définisse un opérateur positif. Pourtant, en raison de la localisation en énergie qui apparaît dans la condition de Mourre, on ne s'intéresse pour appliquer la méthode au cas de l'opérateur de Schrödinger qu'aux trajectoires classiques d'énergies proches de l'énergie  $E$  considérée. On peut donc par exemple être surpris d'avoir à faire, même à la limite  $h \rightarrow 0$ , cette hypothèse de positivité sur  $V_2$  y compris dans les zones classiquement interdites, c'est-à-dire où  $V_1(x) > E$ .

Il faut remarquer que la méthode de Mourre n'est pas à proprement parler une méthode semi-classique. En effet, c'est une méthode adaptée à l'étude d'un unique opérateur, qu'on applique à une famille d'opérateurs  $(H_h)_{h \in ]0, h_0]}$  en contrôlant toutes les estimations uniformément par rapport au paramètre  $h$ . La méthode des mesures semi-classiques est au contraire une technique purement semi-classique. En effet, étant donnée une famille de fonctions  $(u_h)_{h \in ]0, 1]}$ , on travaille avec une mesure  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^{2n}$  telle que pour une sous-suite  $h_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$  on a :

$$\forall q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}), \quad \langle \text{Op}_{h_k}^w u_{h_k}, u_{h_k} \rangle \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \int_{\mathbb{R}^{2n}} q d\mu. \quad (1.13)$$

C'est ensuite sur cet objet que l'on travaille. Il est donc raisonnable d'espérer utiliser de façon plus fine les propriétés de la dynamique classique associée à l'opérateur de Schrödinger semi-classique. On ne l'évoquera pas dans ce travail, mais cette méthode est également bien adaptée à l'étude de l'opérateur de Schrödinger sur des domaines à bord. C'est d'ailleurs le cas dans [Bur02] (voir aussi [GL93, Bur97, Mil00]). C'est utilisé pour un cadre dissipatif dans les travaux de L. Aloui et M. Khenissi ([AK07], voir également le travail récent [AK10] pour le cas d'une dissipation par le bord).

On se propose d'étudier par cette méthode les estimations de la résolvante et le principe d'absorption limite quand l'indice d'absorption  $V_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  est de courte portée avec une partie négative à support compact et vérifiant une condition d'amortissement sur les trajectoires captées d'énergie  $E$  : si  $w \in p^{-1}(\{E\})$  est tel que  $\{|\bar{x}(t, w)|, t \in \mathbb{R}\}$  est borné alors il existe  $T \geq 0$  tel que

$$\int_0^T V_2(\bar{x}(t, w)) dt > 0. \quad (1.14)$$

Ainsi, on ne demande rien au potentiel sur la zone classiquement interdite, mais surtout on autorise  $V_2$  à être négatif même sur les trajectoires captées, à condition que sur chacune de ces trajectoires l'amortissement soit « plus positif que négatif ». Cela suffit à assurer que l'énergie portée par les trajectoires captées sera bien dissipée par l'amortissement dû à  $V_2$ . On obtient finalement le résultat suivant :

**Théorème 1.4.** *On suppose que  $V_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  est positif en dehors d'un compact et qu'il existe  $\rho > 0$  et des constantes  $c_\alpha$  pour  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  tels que*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad |\partial^\alpha V_2(x)| \leq c_\alpha \langle x \rangle^{-\rho - |\alpha|}.$$

Soient  $\delta > \frac{1}{2}$  et  $E > 0$  vérifiant l'hypothèse (1.14). Alors il existe un voisinage  $I$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  et  $h_0 > 0$  tels que pour  $h \in ]0, h_0]$  l'opérateur  $H_h$  n'a pas de valeur propre dans

$$\mathbb{C}_{I,+} = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z \in I, \operatorname{Im} z > 0\}$$

et il existe une constante  $c \geq 0$  telle que pour tout  $h \in ]0, h_0]$  :

$$\sup_{z \in \mathbb{C}_{I,+}} \left\| \langle x \rangle^{-\delta} (H_h - z)^{-1} \langle x \rangle^{-\delta} \right\| \leq \frac{c}{h}.$$

Avec ces estimations de la résolvante on pourra alors vérifier pour tout  $h \in ]0, h_0]$  le principe d'absorption limite par le demi-plan supérieur et donc l'existence d'une solution sortante à l'équation de Helmholtz.

Si le théorème 1.4 améliore le théorème 1.3, il convient tout de même de remarquer que dans le cas où  $V_2 \geq 0$ , les hypothèses sont plus fortes ici. On va en outre utiliser le théorème 1.3 pour montrer le théorème 1.4.

Comme on l'a dit en début de paragraphe, l'idée pour montrer un tel résultat est de considérer une suite de solutions niant le résultat, une mesure semi-classique associée et de montrer que cette mesure est à la fois nulle et non nulle. Pour montrer qu'elle est nulle, on commence par vérifier que la suite de solutions sortantes à l'équation de Helmholtz se concentre dans l'espace des phases et à la limite  $h \rightarrow 0$  sur  $p^{-1}(\{E\})$  et hors de la zone entrante  $\mathcal{Z}_- = \{(x, \xi) \mid |x| \gg 1, x \cdot \xi \leq -\frac{1}{2}|x||\xi|\}$ . Ce dernier résultat est démontré dans [RT89] dans le cas autoadjoint, on le prouve ici dans le cas dissipatif. On utilise ensuite les propriétés de propagation de la mesure le long du flot hamiltonien classique pour en déduire que la mesure  $\mu$  est nulle sur tout l'espace des phases  $\mathbb{R}^{2n}$ . L'étude de la localisation *a priori* de la solution sur  $p^{-1}(\{E\})$  et hors de  $\mathcal{Z}_-$  sera par ailleurs une première étape importante pour l'étude plus fine de l'asymptotique de la famille de solution  $(u_h)_{h \in ]0, h_0]}$  à l'équation de Helmholtz (1.1).

## 1.3 Mesure semi-classique pour l'équation de Helmholtz

Une fois que l'on dispose du principe d'absorption limite pour l'opérateur de Schrödinger dissipatif comme au paragraphe 1.2.3 ou faiblement dissipatif comme au paragraphe 1.2.4, on peut considérer la solution  $u_h$  de l'équation (1.1) et s'intéresser à l'asymptotique  $h \rightarrow 0$ . Plus précisément on voudrait savoir où la quantité  $|u_h(x)|^2$  se concentre lorsque  $h$  tend vers 0. On s'intéressera également à la localisation en fréquences.

### 1.3.1 Cas d'un coefficient d'absorption constant

Le premier travail dans cette direction semble être l'article de J.-D. Benamou, F. Castella, T. Katsaounis et B. Perthame [BCKP02]. Le terme source qu'ils considèrent est de la forme  $S_h(x) = hS(x/h)$ , où  $S$  appartient à l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  (le cadre de travail est  $\mathbb{R}^3$ ). Cela signifie que la source se concentre sur l'origine quand  $h \rightarrow 0$ , modélisant ainsi une source ponctuelle pour  $h$  petit.

L'asymptotique de  $u_h$  (dans l'espace des phases) est étudiée *via* la transformation de Wigner, définie de la façon suivante :

$$W_h(x, \xi) = \frac{1}{h^n} W \left( x, \frac{\xi}{h} \right) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{i}{h} \langle y, \xi \rangle} u_h \left( x + \frac{y}{2} \right) \overline{u_h \left( x - \frac{y}{2} \right)} dy.$$

On peut vérifier que pour un symbole  $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  on a

$$\langle W_h, a \rangle_{\mathbb{R}^{2n}} = \langle \operatorname{Op}_h^w(a) u_h, u_h \rangle_{\mathbb{R}^n}, \quad (1.15)$$

de sorte que la mesure de Wigner permet, comme les opérateurs pseudo-différentiels, d'étudier la localisation de  $u_h$  en espace et en fréquences. Une propriété remarquable de la transformée de Wigner et que si  $u_h(t)$  est solution de l'équation de Schrödinger

$$\begin{cases} ih \frac{\partial}{\partial t} u_h(t) = \left( -\frac{h^2}{2} \Delta + V_1(x) \right) u_h(t) \\ u_h(0) = u_0, \end{cases}$$

alors la famille de transformées de Wigner associée est solution de

$$\frac{\partial W_h(t)}{\partial t} + \xi \cdot \nabla_x W_h(t) - \nabla V_1(x) \cdot \nabla_\xi W_h(t) = 0, \quad (1.16)$$

qui n'est autre que l'équation de Liouville classique correspondant au système hamiltonien (1.11). Ainsi, si  $W_h(t)$  converge vers une fonction  $f$  (en un sens convenable) quand  $h$  tend vers 0, on s'attend à ce que  $f$  soit encore solution de (1.16). C'est l'une des façons de voir que la mécanique quantique « tend » vers la mécanique classique lorsque (la constante de Planck)  $h$  tend vers 0 (voir [LP93, Wan07]).

Le but de [BCKP02] est d'étudier la limite de la transformée de Wigner pour la solution de l'équation (1.1) dans le cas où  $V_2 = \alpha_h > 0$  est une constante, avec  $\alpha_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \alpha \geq 0$ . On obtient effectivement une mesure  $f$  solution de l'équation de Liouville (stationnaire) :

$$\alpha f + \xi \cdot \nabla_x f(x, \xi) - \frac{1}{2} \nabla V_1 \cdot \nabla_\xi f(x, \xi) = \frac{1}{(4\pi)} \delta(x) |\hat{S}(\xi)|^2 \delta(|x| = 1),$$

où  $\hat{S}$  désigne la transformée de Fourier de  $S$ . Les deux difficultés principales sont dues au terme source et au suivi de la condition de radiation lorsque  $h \rightarrow 0$  si  $\alpha = 0$ . Ce dernier point est d'ailleurs complété dans [Cas05]. Cette étude utilise en particulier une estimation uniforme pour la résolvante, et nécessite donc une hypothèse de non-capture sur l'indice de réfraction. L'estimation utilisée n'est pas tout à fait celle que l'on vient de décrire, mais une estimation de la norme de Morrey-Campanato (voir [PV99])

$$\|u\|_{MC}^2 = \sup_{R>0} \int_{B(R)} |u(x)|^2 dx,$$

analogue à la norme des espaces de Besov, mais homogène en espace.

Ce résultat a ensuite connu un certain nombre de généralisations. Le but de l'article [CPR02] est de montrer un résultat analogue dans le cas où le terme source se concentre non plus sur l'origine mais sur une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$ . Étant donnée une sous-variété  $\Gamma$  de  $\mathbb{R}^n$ , le terme source prend alors la forme

$$S_h = h^{-q} \int_{\Gamma} A(z) e^{\frac{i}{h} \phi(z)} S \left( \frac{x-y}{h} \right) d\sigma(z).$$

On observe un phénomène d'oscillation qui s'ajoute au phénomène de concentration. Les auteurs proposent une étude formelle dans un cadre assez général et une démonstration rigoureuse dans le cas où  $\Gamma$  est un sous-espace affine et l'indice de réfraction est constant. L'une des difficultés est que dans cette situation la source n'est pas assez décroissante dans les directions de  $\Gamma$  et l'estimation de Morrey-Campanato n'est plus utilisable. La contrainte concernant l'indice de réfraction est surmontée dans [WZ06], où on utilise la méthode de Mourre pour obtenir les estimations *a priori* nécessaires sur la solution (voir aussi [Wan07] à ce propos). Mentionnons également les résultats d'E. Fouassier, qui étudie dans [Fou06] le cas de deux sources ponctuelles et dans [Fou07] le cas où l'indice de réfraction présente une discontinuité le long d'un hyperplan en combinant la méthode de [BCKP02], une adaptation des estimations de Morrey-Campanato ([Fou05]), et les travaux de L. Miller concernant

la propagation des mesures semi-classiques au bord d'un domaine ([Mil00], voir aussi [GL93]).

A propos de l'article [Cas05] concernant la condition de radiation, il faut noter qu'une méthode différente est utilisée. En effet, l'auteur ne regarde pas la transformée de Wigner de la solution, mais écrit plutôt cette solution comme l'intégrale sur les temps positifs du propagateur :

$$u_h = \frac{i}{h} \int_0^\infty e^{-\frac{it}{h} H_1^h} e^{-\alpha_h t} S_h dt.$$

Le but est alors de prendre la limite  $h \rightarrow 0$  dans cette intégrale, en « coupant » l'intégrale afin de traiter séparément les temps proche de 0 ( $t \leq T_0 h$ ), les temps très grands ( $t \geq h^{-\kappa}$ ), les temps grands ( $T_1 \leq t \leq h^{-\kappa}$ ) et les temps intermédiaires ( $T_0 h \leq t \leq T_1$ ). En outre, le résultat est démontré sous une hypothèse géométrique plus faible que l'hypothèse du Viriel

$$2(E - V_1(x)) - x \cdot \nabla V_1(x) \geq c_0 > 0 \quad (1.17)$$

utilisée dans les autres travaux. Grossièrement, on a besoin que l'ensemble des trajectoires issues de l'origine et qui repassent par l'origine soit « petit ». Il est facile de voir que l'hypothèse (1.17) implique qu'aucune des trajectoires classiques d'énergie  $E$  issue de l'origine ne peut repasser par l'origine, ce qui est donc bien plus fort.

Le point de vue que nous allons utiliser dans notre étude est celui de J.-F. Bony, présenté dans [Bon09]. Tout d'abord, la mesure semi-classique est étudiée *via* le calcul pseudo-différentiel (cette approche est présentée dans [Gér91a] ou encore [Gér91b]). Dans ce cas on ne définit plus la mesure semi-classique comme la limite des transformées de Wigner mais comme en (1.13). Le fait que ces deux approches soient équivalentes est raisonnable étant donnée l'égalité (1.15) (on pourra tout de même consulter [GL93] pour plus de détail). Le défaut du point de vue semi-classique est que l'on va demander beaucoup de régularité sur le potentiel (en fait on ne considérera que des potentiels de classe  $C^\infty$ ). Par contre on peut travailler localement autour de chaque point de l'espace des phases et, hors de la source, on obtient une description locale de la mesure en termes d'états lagrangiens.

Comme dans [Cas05], la résolvante est écrite comme l'intégrale sur les temps positifs du propagateur, et on peut se contenter d'une hypothèse géométrique plus faible que l'hypothèse du Viriel. L'étude se fait localement autour de chaque point de l'espace des phases, et la condition de radiation sur la mesure limite est obtenue par l'estimation de la solution sortante dans la zone entrante démontrée dans [RT89].

Comme la mesure semi-classique est construite de façon directe, et n'est plus seulement obtenue comme limite d'une suite bornée dans un certain espace, les estimations abstraites de la résolvante ne sont plus utilisées de façon aussi fine que dans les travaux précédents. Néanmoins, l'hypothèse de non-capture reste nécessaire.

Ce petit tour d'horizon montre que la mesure semi-classique pour l'équation de Helmholtz haute fréquence est bien connue sous les hypothèses suivantes :

- régularité et décroissance du potentiel plus ou moins importante.
- indice d'absorption constant (pour avoir un opérateur autoadjoint) et hypothèse de non-capture sur les trajectoires classiques.
- hypothèse géométrique de type Viriel, ou condition de non-retour de presque toutes les trajectoires issues de l'origine.
- terme source qui se concentre sur un (plusieurs) point(s) ou un sous-espace affine de l'espace.

### 1.3.2 Énoncé du résultat pour un indice d'absorption variable

Comme on l'a annoncé, on se propose dans cette thèse de démontrer un résultat analogue à ceux qui précèdent dans le cas où l'indice d'absorption est variable. Les problèmes dus au fait que l'opérateur que l'on doit étudier n'est plus autoadjoint interviennent principalement



pour montrer le principe d'absorption limite et les estimations *a priori* de la solution. On a vu que ces résultats étaient valables pour l'opérateur de Schrödinger dissipatif avec une hypothèse plus faible que l'hypothèse usuelle de non-capture, à savoir que l'amortissement est suffisamment fort sur les trajectoires captées, au sens de (1.14). Dès lors, on se demande si le résultat sur la mesure semi-classique est lui aussi encore valable avec cette nouvelle hypothèse. Puisque l'hypothèse de non-capture sert à empêcher que trop d'énergie ne s'accumule sur un compact, il semble raisonnable de vouloir s'autoriser à la remplacer par une hypothèse concernant l'absorption sur les trajectoires captées. D'autre part, on considèrera un terme source qui se concentre sur une sous-variété bornée  $\Gamma$  de dimension  $d \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Cela englobe en particulier le cas d'un terme source qui se concentre sur plusieurs points. Ce n'est pas aussi général que ce qui était visé dans [CPR02], dans la mesure où on se restreint au cas borné, mais on n'a pas besoin que la sous-variété soit plate. Étant donnée une sous-variété  $\Gamma$  de  $\mathbb{R}^n$ , une amplitude  $A \in C_0^\infty(\Gamma)$  et  $S \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on définit le terme source par

$$S_h(x) = h^{\frac{1-n-d}{2}} \int_{\Gamma} A(z) S\left(\frac{x-z}{h}\right) d\sigma(z), \quad (1.18)$$

où  $\sigma$  est la mesure de Lebesgue sur  $\Gamma$  (où une somme de masse de Dirac en chaque point si  $\dim \Gamma = 0$ ). On observera que ce terme source est localisé sur le fibré normal  $N\Gamma$  de  $\Gamma$ . Comme par ailleurs  $u_h$  se concentre sur les points d'énergie  $E$ , la mesure semi-classique que l'on cherche sera portée par les trajectoires classiques issues de

$$N_E\Gamma = \left\{ (z, \xi) \in N\Gamma \mid |\xi|^2 = E - V_1(z) \right\}.$$

Plus explicitement, on va montrer le résultat suivant (les hypothèses et l'énoncé seront donnés de façon plus précise dans le texte) :

**Théorème 1.5.** *On suppose que  $V_1$  est un potentiel à longue portée et  $V_2$  un potentiel à courte portée et positif hors d'un compact. Soit  $E > 0$  vérifiant l'hypothèse d'amortissement (1.14). On suppose que  $V_1(z) < E$  pour tout  $z \in \Gamma$  et que l'ensemble des  $w \in N_E\Gamma$  tels que la trajectoire issue de  $w$  repasse par  $N_E\Gamma$  est de mesure nulle dans  $N_E\Gamma$ . Soit  $S_h$  définie en (1.18) et  $u_h$  la solution sortante pour l'équation (1.1).*

(i) *Il existe une mesure de Radon positive  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^{2n}$  telle que :*

$$\forall q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}), \quad \langle \text{Op}_h^w(q) u_h, u_h \rangle \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^{2n}} q d\mu.$$

(ii) *La mesure  $\mu$  est caractérisée par les trois propriétés suivantes :*

a. *Le support de  $\mu$  est inclus dans  $p^{-1}(\{E\})$ .*

b. *Pour tout  $\sigma \in ]0, 1[$  il existe  $R \geq 0$  tel que  $\mu$  est nulle dans la zone entrante*

$$\{|x| \geq R \text{ et } x \cdot \xi \leq -\sigma |x| |\xi|\}.$$

c. *La mesure  $\mu$  vérifie l'équation de Liouville*

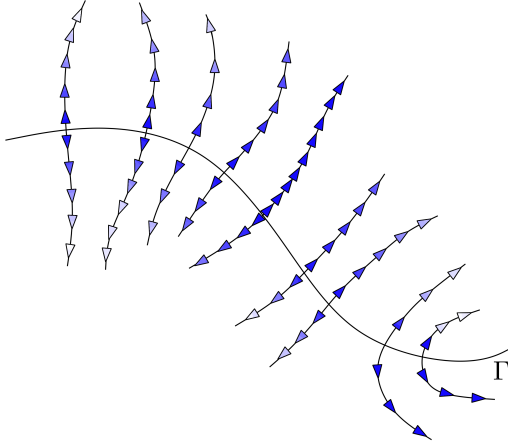
$$2\xi \cdot \nabla_x \mu - \nabla V_1(x) \cdot \nabla_\xi \mu + 2V_2 \mu = C |A(z)|^2 |\xi|^{-1} |\hat{S}(\xi)|^2 \sigma_{N_E\Gamma},$$

où  $C > 0$  et  $\sigma_{N_E\Gamma}$  est une certaine mesure sur  $N_E\Gamma$ .

(iii) *Ces trois propriétés impliquent que  $\mu$  est donnée par :*

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} q d\mu = C \int_0^{+\infty} \int_{N_E\Gamma} |A(z)|^2 |\xi|^{-1} |\hat{S}(\xi)|^2 q(\phi^t(z, \xi)) e^{-2 \int_0^t V_2(\bar{x}(s, z, \xi)) ds} d\sigma_{N_E\Gamma}(z, \xi) dt.$$

On retrouve bien l'équation de Liouville usuelle avec le coefficient d'absorption constant  $\alpha$  remplacé par notre indice variable  $V_2$ , et on observe effectivement que la mesure est portée par les trajectoires classiques issues de  $N_E\Gamma$ . En outre, pour toute fonction  $q$  à support compact,



La mesure  $\mu$  est portée par les (demi-) trajectoires classiques issues de la source  $N_E\Gamma$ . L'amortissement le long du flot engendré par l'indice de réfraction  $V_1$  est bien décrit par l'intégrale de l'indice d'absorption  $V_2$  entre la source et le point considéré. Ainsi la limite classique obtenue est cohérente avec l'interprétation physique de l'équation. Sur le dessin, on a représenté les demi-trajectoires issues de  $N_E\Gamma$ , les flèches représentant un point de l'espace des phases. Plus on s'éloigne de la source, plus la « densité » de  $\mu$  diminue (dans le cas où  $V_2 \geq 0$ ).

FIGURE 1.2 –  $\mu$  le long des trajectoires issues de  $N_E\Gamma$

l'intégrale en temps dans la dernière égalité est bien convergente car les trajectoires issues de  $N_E\Gamma$  partent à l'infini (et quittent donc le support de  $q$  en temps fini) ou bien sont captées et on verra que dans ce cas le facteur d'amortissement  $e^{-2 \int_0^t V_2(\bar{x}(s, z, \xi)) ds}$  devient suffisamment petit pour les temps grands.

Il faut également dire un mot sur  $\sigma_{N_E\Gamma}$ , sans quoi ces affirmations n'ont pas grand sens. Contrairement à ce que suggère la définition qu'on a donnée, on ne munit pas  $N_E\Gamma$  de la structure riemannienne héritée du produit scalaire de  $\mathbb{R}^{2n}$ . Cette question ne se pose pas lorsque  $\Gamma$  est un point, mais il est plus naturel de voir la composante  $\xi$  comme une direction de  $N\Gamma$  que réellement comme un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ . Autrement dit, on ne veut pas tenir compte pour la composante  $\xi$  de la courbure de  $\Gamma$  et des variations de  $V_1$  sur  $\Gamma$ , informations que l'on peut retrouver à partir de  $z$ . Ce point sera expliqué plus en détail au paragraphe 6.2.2. En attendant d'être plus précis, on peut tout de même déjà dire que la mesure  $\sigma_{N_E\Gamma}$  que l'on définit sur  $N_E\Gamma$  est issue d'une structure riemannienne et donc absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $N_E\Gamma$ .

### 1.3.3 Le problème des temps grands, idée de preuve

Outre le caractère non-autoadjoint de l'opérateur de Schrödinger considéré, qu'on a déjà discuté et sur lequel on reviendra, il a plusieurs problèmes nouveaux à surmonter. On vient d'avoir un bref aperçu des problèmes que peut poser la géométrie de la source, on évoque maintenant le problème dû aux trajectoires captées. Ces deux problèmes sont relativement indépendants, puisque pour notre vision temporelle du problème, la géométrie de  $\Gamma$  interviendra surtout pour les temps proches de 0, tandis que les trajectoires captées posent problème, comme on peut s'y attendre, pour l'étude des temps grands. On esquisse dans ce paragraphe l'argument permettant de gérer ces temps grands malgré l'existence de trajectoires captées.

Dans le cas non-captif, la stratégie est grossièrement la suivante. On commence par vérifier que  $u_h$  se concentre sur  $p^{-1}(\{E\})$  et hors de la zone entrante. On considère ensuite un point  $w \in p^{-1}(\{E\})$  et un symbole  $q$  à support « proche » de  $w$ . On écrit alors (formellement) :

$$\text{Op}_h^w(q)u_h = \frac{i}{h} \int_0^\infty \text{Op}_h^w(q)U_h^E(t)\text{Op}_h^w(f)S_h dt + \text{reste}, \quad (1.19)$$

où  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  est à support près de  $N_E\Gamma$  et vaut 1 au voisinage de  $N_E\Gamma$ , et  $U_h^E(t) = U_h(t)e^{\frac{it}{h}E}$ . Par le théorème d'Egorov, si  $\text{supp}(q \circ \phi^t) \cap \text{supp} f = \emptyset$ , alors

$$\text{Op}_h^w(q)U_h^E(t)\text{Op}_h^w(f) = O(h^\infty). \quad (1.20)$$

Ainsi, si on note  $t_k$  pour  $1 \leq k \leq K$  les temps pour lesquels  $\phi^{-t_k}(w) \in N_E\Gamma$ , seuls les temps proches des  $t_k$  donnent une contribution significative pour  $\text{Op}_h^w(q)u_h$  et donc pour la mesure semi-classique. La contribution du voisinage de chaque  $t_k$ , c'est-à-dire

$$\frac{i}{h} \int_{t_k-\tau}^{t_k+\tau} \text{Op}_h^w(q)U_h^E(t)\text{Op}_h^w(f)S_h dt$$

(on aura en fait besoin d'une troncature lisse en temps), est un état lagrangien qui, lorsqu'on prend le produit scalaire  $\langle \text{Op}_h^w(q)u_h, u_h \rangle$  puis la limite  $h \rightarrow 0$ , donne l'intégrale de  $q$  contre une certaine mesure  $\mu_k$  définie au voisinage de  $w$ . La somme de ces mesures sera au voisinage de  $w$  la mesure semi-classique cherchée. Puisque l'énergie  $E$  est supposée non-captive (et que l'ensemble des énergies non-captives est ouvert), pour  $T$  assez grand le support de  $\text{supp}(q \circ \phi^T)$  est dans la zone entrante, donc l'estimation de  $u_h$  dans la zone entrante montre que la contribution des temps plus grands que  $T$  dans l'intégrale (1.19) est nulle (à la limite  $h \rightarrow 0$ ).

Si on autorise les trajectoires captées, ce raisonnement pose au moins trois problèmes :

- Le problème le plus immédiat est qu'une trajectoire captée peut passer une infinité de fois par la source  $N_E\Gamma$ . Ainsi, il peut exister  $w \in \mathbb{R}^{2n}$  tel que  $\phi^{-t_k}(w) \in N_E\Gamma$  pour une infinité de  $t_k > 0$ . Ce qui donne une infinité de mesures partielles à sommer. Ce sera par exemple le cas si une trajectoire périodique rencontre  $N_E\Gamma$ .
- Les temps vérifiant (1.20) et que l'on souhaite donc négliger posent également problème. En effet, dans le cas non captif, on a juste à intégrer cette estimation sur  $[0, T]$  (privé d'un voisinage des temps  $t_k$ ) pour un certain  $T \geq 0$ , la contribution des temps plus grands que  $T$  étant par ailleurs contrôlés par l'estimation dans la zone entrante. Avec des trajectoires captées ce n'est plus possible, et on devrait donc intégrer l'estimation (1.20) sur  $\mathbb{R}_+$  (toujours privé d'un voisinage des  $t_k$ ), ce qui pose des problèmes de convergence pour  $h > 0$  fixé. C'est d'autant plus problématique que l'estimation (1.20) donnée par le théorème d'Egorov n'est pas uniforme par rapport à  $t$ . Elle l'est pour des temps finis, on sait ([BR02]) qu'on peut aller jusqu'à des temps d'ordre  $\ln|h|$ , mais cela ne donne rien pour des temps arbitrairement grands.
- Enfin se pose le problème plus subtil de la taille du voisinage de  $w$  pour lequel l'argument décrit est valable. En effet, on a considéré les temps  $t_k$  qu'il faut aux points de la source  $N_E\Gamma$  pour atteindre  $w$ . Il faut en fait considérer les temps qu'il faut aux points de la source pour atteindre  $\text{supp} q$ . En temps fini, ces temps sont en fait proches des  $t_k$  si on a choisi  $q$  à support assez proche de  $w$ . Cela n'est plus valable en temps quelconque. L'exemple le plus évident est celui d'un point fixe  $w$  pour le flot hamiltonien classique mais tel qu'il existe  $w_0 \in N_E\Gamma$  vérifiant  $\phi^t(w_0) \rightarrow w$  pour  $t \rightarrow +\infty$ . Dans ce cas l'ensemble des temps  $t_k$  associés à  $w$  est vide, et pourtant on s'attend à ce que la mesure semi-classique  $\mu$  ne soit nulle dans aucun voisinage de  $w$ .

On a vu lorsqu'on a parlé du théorème d'Egorov dissipatif qu'un facteur d'amortissement  $e^{-2 \int_0^t V_2 \circ \phi^s ds}$  apparaissait. Or, par compacité de l'ensemble des trajectoires captées d'énergie  $E$ , on va montrer qu'à partir de l'hypothèse (1.14) on obtient en fait que sur les trajectoires captées la quantité  $\int_0^t V_2 \circ \phi^s ds$  croît comme  $t$ . Ainsi on peut espérer que les contributions pour les temps  $t_k$  grands deviennent de plus en plus petites et forment au final une série sommable. Le problème est qu'en faisant ce raisonnement on utilise encore le théorème d'Egorov en temps grands.

L'idée pour gérer les temps grands va finalement être de commencer par ne pas s'en préoccuper. Autrement dit, on fixe  $T \geq 0$  et on considère :

$$u_h^T = \frac{i}{h} \int_0^T U_h^E(t)S_h dt$$

(là encore on aura besoin d'une troncature lisse en temps). On peut s'intéresser à la mesure

semi-classique  $\mu_T$  pour la famille  $(u_h^T)_{h \in ]0,1]}$ . Cela peut se faire exactement comme dans le cas non captif, puisqu'en temps fini on ne fait pas de différence entre trajectoires captées et non-captées. Bien sûr, l'idée est ensuite de faire tendre  $T$  vers  $+\infty$ . Localement,  $\mu_T$  va être la somme des contributions correspondant aux  $t_k$  plus petits que  $T$ . Ces contributions étant petites pour  $t_k$  grand, on s'attend à ce que cette somme admette une limite. Cette limite s'avère être, comme on l'espérait, une mesure de Radon positive. A ce stade on a donc

$$\langle \text{Op}_h^w(q)u_h^T, u_h^T \rangle \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^{2n}} q d\mu_T \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^{2n}} q d\mu,$$

où  $\mu$  est une mesure sur  $\mathbb{R}^{2n}$ . L'intérêt de ce procédé est qu'on évite les problèmes d'uniformité en  $h$  et  $T$  en prenant la limite  $h \rightarrow 0$  à  $T$  fixé puis la limite  $T \rightarrow +\infty$  d'une quantité qui ne dépend plus de  $h$ . Pour vérifier que la mesure  $\mu_T$  admet effectivement une limite, et pour savoir quel sens on peut donner à la mesure  $\mu$  obtenue, on va montrer que pour  $T$  grand la quantité  $\langle \text{Op}_h^w(q)u_h^T, u_h^T \rangle$  est une bonne approximation de  $\langle \text{Op}_h^w(q)u_h, u_h \rangle$  en un sens suffisamment fort. On pourra alors conclure que

$$\langle \text{Op}_h^w(q)u_h, u_h \rangle \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^{2n}} q d\mu,$$

ce qui donnera bien le résultat attendu.

## 1.4 Organisation du manuscrit

Outre ce chapitre d'introduction, ce manuscrit contient cinq chapitres :

**Chapitre 2.** Avant d'attaquer l'analyse haute fréquence promise dans le titre, on commence par une rapide étude d'un unique opérateur de Schrödinger dissipatif  $H = -\Delta + V_1(x) - V_2(x)$ . On commence par des propriétés très basiques pour les opérateurs dissipatifs maximaux, puis plus précisément pour les opérateurs dissipatifs obtenus comme perturbation d'un opérateur autoadjoint. On rappellera ensuite ce qu'est une dilatation autoadjointe dans le cas général, ainsi qu'un exemple pour le cas de l'opérateur de Schrödinger dissipatif, puis on expliquera comme se servir de cette théorie pour généraliser un résultat concernant les opérateurs relativement lisses au sens de Kato. On s'intéressera enfin à l'existence et à l'unicité d'une solution sortante pour l'équation (1.1) (pour  $h > 0$  fixé) dans le cas où  $V_2$  est de longue portée, en montrant des estimations uniformes de la résolvante et le principe d'absorption limite, puis aux solutions de l'équation  $(H - E)u = 0$  dans le cas où  $V_2$  est de courte portée.

**Chapitre 3.** On consacre ensuite un chapitre à l'approche semi-classique (ou hautes fréquences) de l'équation de Helmholtz. On rappellera dans une première partie les outils usuels d'analyse semi-classique qui seront utilisés tout au long de ce travail. On s'intéressera ensuite à la dynamique classique associée à l'équation. Cela concernera à la fois le flot lié à l'indice de réfraction  $V_1$  et l'amortissement dû à l'indice d'absorption  $V_2$ . On donnera en particulier plus de précisions sur l'hypothèse (1.14). Enfin on s'intéressera de plus près au lien entre l'opérateur de Schrödinger et ces propriétés classiques, et en particulier au théorème d'Egorov. Les résultats présentés dans cette dernière partie sont bien connus dans le cas autoadjoint, le but ici est de voir comment intervient  $V_2$ .

**Chapitre 4.** Dans ce chapitre on présente les résultats concernant la méthode de Mourre et les estimations de la résolvante pour l'opérateur de Schrödinger dissipatif. On commence par développer la théorie abstraite, avec en particulier l'estimation uniforme de la résolvante dans les espaces à poids et le principe d'absorption limite. On montre ensuite comment ces résultats peuvent être appliqués au cas de l'opérateur de Schrödinger pour une énergie qui n'est pas forcément non-captive. On termine en montrant que la condition obtenue sur les

trajectoires classiques captées est en fait une condition nécessaire. Les principaux résultats de ce chapitre sont publiés dans [Roy10a].

**Chapitre 5.** Ce chapitre est d'une certaine manière un chapitre de transition entre le précédent et le suivant, puisqu'on commence à étudier la localisation de la solution à l'équation de Helmholtz dans un cadre encore assez général, et qu'on en déduit ensuite les estimations de la résolvante et le principe d'absorption limite dans le cas d'un indice d'absorption non positif, c'est-à-dire d'un opérateur de Schrödinger non-dissipatif.

**Chapitre 6.** Ce dernier chapitre est consacré à l'étude de la mesure semi-classique pour la solution sortante de l'équation de Helmholtz avec indice d'absorption variable. On y retrouve la démonstration présentée dans [Roy10b], avec en particulier une étude détaillée des problèmes dus à la géométrie de la source et aux trajectoires captées. Certains points de démonstrations classiques ayant été omis dans l'article seront donnés avec plus de détails ici. Par rapport au résultat présenté dans [Roy10b], l'opérateur de Schrödinger étudié n'est plus nécessairement purement dissipatif.

Enfin on rappelle en annexe divers résultats et démonstrations utilisés le texte, avec en particulier la résolution de l'équation de Hamilton-Jacobi, et un aperçu de la théorie des états lagrangiens. On trouvera finalement un index des notations introduites tout au long de ce manuscrit. On précise dès maintenant que la notation  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  déjà utilisée désigne l'ensemble des fonctions lisses à support compact,  $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$  est l'ensemble des fonctions lisses dont toutes les dérivées sont bornées, tandis que  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  désigne la classe de Schwartz, constituée des fonctions lisses dont toutes les dérivées sont à décroissance rapide.

## Chapitre 2

# L'Opérateur de Schrödinger dissipatif

On commence par un chapitre d'introduction sur l'opérateur de Schrödinger dissipatif. La première partie de ce chapitre est consacrée à un rapide panorama des propriétés générales concernant les opérateurs dissipatifs. La plupart de ces propriétés sont élémentaires. Le but est essentiellement de faire le tri entre ce qui reste valable quand on passe d'un opérateur symétrique à un opérateur dissipatif et ce qui ne l'est plus. Dans une deuxième partie on présente les dilatations autoadjointes, en rappelant les quelques résultats dont on se servira ainsi que l'étude du cas de l'opérateur de Schrödinger. On verra également comment utiliser ces dilatations autoadjointes pour adapter au cas d'opérateurs dissipatifs une partie de la théorie des opérateurs lisses au sens de Kato. Dans la troisième section de ce chapitre on commencera à proprement parler l'étude de l'opérateur de Schrödinger dissipatif, dans un premier temps pour le cadre quantique (c'est-à-dire sans petit paramètre  $h$ ). On y abordera principalement le principe d'absorption limite par le demi-plan supérieur, la conditions de radiation de Sommerfeld ainsi que l'étude des solutions de l'équation homogène.

## 2.1 Généralités sur les opérateurs dissipatifs

### 2.1.1 Opérateurs dissipatifs maximaux

On considère un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$  (linéaire à gauche, antilinéaire à droite) et de la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$  associée (en général, on omettra l'indice  $\mathcal{H}$  s'il n'y a pas d'ambiguïté).

Si  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}'$  sont deux espaces vectoriels normés, on notera  $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$  l'espace des opérateurs bornés de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H}'$  muni de la norme d'opérateur  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}' )}$ . On notera également  $\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ .

**Définition 2.1.** Soit  $H$  un opérateur de domaine dense  $\mathcal{D}(H)$  sur  $\mathcal{H}$ . On dit que  $H$  est un opérateur dissipatif si :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(H), \quad \text{Im} \langle H\varphi, \varphi \rangle \leq 0.$$

On note :

$$\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im} z > 0\}.$$

**Proposition 2.2.** Soit  $H$  est un opérateur dissipatif de domaine  $\mathcal{D}(H)$  sur  $\mathcal{H}$ . Alors l'opérateur  $(H - z)$  est injectif pour tout  $z \in \mathbb{C}_+$  et si  $\varphi \in \mathcal{D}(H)$  on a :

$$\|(H - z)\varphi\| \geq \text{Im} z \|\varphi\|.$$

En particulier si  $z$  n'est pas dans le spectre  $\text{Sp}(H)$  de  $H$  on a :

$$\|(H - z)^{-1}\| \leq \frac{1}{\text{Im} z}. \tag{2.1}$$

*Démonstration.* Comme les parties imaginaires de  $\langle H\varphi, \varphi \rangle$  et  $-z$  ont même signe on a :

$$\|(H - z)\varphi\| \|\varphi\| \geq -\operatorname{Im} \langle (H - z)\varphi, \varphi \rangle \geq \operatorname{Im} z \|\varphi\|^2.$$

□

**Définition.** Soit  $H$  un opérateur dissipatif de domaine  $\mathcal{D}(H)$  sur  $\mathcal{H}$ . On dit que  $H$  est dissipatif maximal s'il n'admet pas d'extension dissipative non triviale. Autrement dit, si  $K$  est un opérateur dissipatif de domaine  $\mathcal{D}(K)$  sur  $\mathcal{H}$  tel que  $\mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(K)$  et  $K\varphi = H\varphi$  pour  $\varphi \in \mathcal{D}(H)$ , alors on a  $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(K)$ .

**Proposition 2.3.** *Soit  $H$  un opérateur dissipatif fermé sur  $\mathcal{H}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $\exists z \in \mathbb{C}_+, z \notin \operatorname{Sp}(H)$ .
- (ii)  $\forall z \in \mathbb{C}_+, z \notin \operatorname{Sp}(H)$ .
- (iii)  $H$  est un opérateur dissipatif maximal.

*Démonstration.* L'équivalence entre les deux premières assertions se montre exactement de la même façon que pour les opérateurs symétriques (voir le théorème X.1 de [RS79b]). On vérifie alors (ii)  $\implies$  (iii)  $\implies$  (i).

Si (ii) est vérifiée, alors en particulier  $i$  n'est pas dans le spectre de  $H$ . Soient alors  $K$  une extension dissipative de  $H$  et  $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ . Si  $\psi = (H - i)^{-1}(K - i)\varphi \in \mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(K)$ , alors on a :

$$(K - i)\psi = (H - i)\psi = (K - i)\varphi.$$

Comme  $K - i$  est injectif, cela implique que  $\varphi = \psi \in \mathcal{D}(H)$ , et donc  $\mathcal{D}(K) = \mathcal{D}(H)$ .

On suppose au contraire que  $i$  est dans le spectre de  $H$ . Cela implique que l'image de  $H - i$  n'est pas dense dans  $\mathcal{H}$  et donc qu'il existe  $\varphi \in \mathcal{D}(H^*) \setminus \{0\}$  tel que  $H^*\varphi = -i\varphi$ . Si  $\varphi$  était dans  $\mathcal{D}(H)$  on aurait

$$\operatorname{Im} \langle H\varphi, \varphi \rangle = \operatorname{Im} \langle \varphi, H^*\varphi \rangle = \|\varphi\|^2 > 0,$$

ce qui est absurde. On obtient alors une extension non triviale  $K$  de  $H$  sur  $\mathcal{D}(K) = \mathcal{D}(H) \oplus \mathbb{C}\varphi$  en posant  $K\varphi = -i\varphi$  (et  $K = H$  sur  $\mathcal{D}(H)$ ). Il reste à vérifier que  $K$  est bien un opérateur dissipatif. Mais pour  $\psi = \zeta + \lambda\varphi$  où  $\zeta \in \mathcal{D}(H)$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$  on a

$$\begin{aligned} \langle K\psi, \psi \rangle &= \langle H\zeta, \zeta \rangle + \langle \zeta, \lambda K^*\varphi \rangle + \langle \lambda K\varphi, \zeta \rangle + |\lambda|^2 \langle K\varphi, \varphi \rangle \\ &= \langle H\zeta, \zeta \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle \zeta, -i\lambda\varphi \rangle - i|\lambda|^2 \|\varphi\|^2, \end{aligned}$$

et donc :

$$\operatorname{Im} \langle K\psi, \psi \rangle = \operatorname{Im} \langle H\zeta, \zeta \rangle - |\lambda|^2 \|\varphi\|^2 \leq 0.$$

□

*Remarque 2.4.* Pour un opérateur dissipatif maximal  $H$ , la résolvante  $(H - z)^{-1}$  est donc bien définie pour tout  $z \in \mathbb{C}_+$  avec  $\|(H - z)^{-1}\| = (\operatorname{Im} z)^{-1}$ . Le fait que cette estimation de la résolvante soit encore valable dans ce cas mérite d'être signalé car pour un opérateur non-autoadjoint  $H$  la norme de  $(H - z)^{-1}$  n'est pas contrôlée par l'inverse de la distance de  $z$  au spectre de  $H$ .

**Définition 2.5.** Si  $H$  est un opérateur dissipatif, alors on considère

$$T = (H + i)(H - i)^{-1} = 1 + 2i(H - i)^{-1}$$

sa transformation de Cayley, bien définie sur  $\mathcal{D}(T) = \operatorname{Im}(H - i)$ .

**Proposition 2.6.**  *$T$  est une contraction de  $\operatorname{Im}(H - i)$  dans  $\operatorname{Im}(H + i)$  dont 1 n'est pas valeur propre.*

*Démonstration.* Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(H)$ . On a :

$$\begin{aligned} \|(H - i)\varphi\|^2 &= \|H\varphi\|^2 - 2\operatorname{Im}\langle H\varphi, \varphi \rangle + \|\varphi\|^2 \geq \|H\varphi\|^2 + 2\operatorname{Im}\langle H\varphi, \varphi \rangle + \|\varphi\|^2 \\ &\geq \|(H + i)\varphi\|^2. \end{aligned}$$

Pour  $\psi = (H - i)\varphi \in \operatorname{Im}(H - i)$  cela donne

$$\|\psi\|^2 \geq \|T\psi\|^2,$$

ce qui prouve que  $T$  est une contraction sur  $\operatorname{Im}(H - i)$ . Le fait que 1 n'est pas valeur propre résulte directement du fait que  $T - 1 = 2i(H - i)^{-1}$ .  $\square$

On remarque qu'on a alors sur  $\operatorname{Im}(T - 1) = \mathcal{D}(H)$  :

$$H = i(T + 1)(T - 1)^{-1}.$$

**Corollaire 2.7** ([NF67]). *Tout opérateur dissipatif admet une extension maximale.*

*Démonstration.* Soit  $H$  un opérateur dissipatif et  $T$  sa transformation de Cayley.  $T$  est une contraction de  $\mathcal{H}$ , donc on peut trouver une contraction  $\tilde{T}$  qui prolonge  $T$  à  $\mathcal{H}$  tout entier. Montrons que 1 n'est pas valeur propre pour  $\tilde{T}$ . Supposons pour cela que  $\varphi \in \mathcal{H}$  vérifie  $\tilde{T}\varphi = \varphi$ . Alors on a

$$\|\tilde{T}^*\varphi - \varphi\|^2 = \|\tilde{T}^*\varphi\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle \tilde{T}^*\varphi, \varphi \rangle + \|\varphi\|^2 = \|\tilde{T}^*\varphi\|^2 - \|\varphi\|^2 \leq 0,$$

ce qui prouve que  $\tilde{T}^*\varphi = \varphi$ , et donc pour tout  $\psi \in \mathcal{D}(H)$  :

$$\langle \varphi, (H - i)\psi \rangle = \langle \tilde{T}^*\varphi, (H - i)\psi \rangle = \langle \varphi, T(H - i)\psi \rangle = \langle \varphi, (H + i)\psi \rangle$$

On a donc  $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$ , puis  $\varphi = 0$  car  $\mathcal{D}(H)$  est dense dans  $\mathcal{H}$ . On a donc montré que  $\tilde{T}$  n'admet pas de vecteur invariant. L'opérateur  $(\tilde{T} - 1)$  est donc injectif, ce qui permet de considérer  $K = i(\tilde{T} + 1)(\tilde{T} - 1)^{-1}$  sur  $\mathcal{D}(K) = \operatorname{Im}(\tilde{T} - 1)$ .  $K$  est alors une extension de  $H$ . On peut vérifier que  $K$  est un opérateur dissipatif. En effet pour  $\varphi \in \mathcal{D}(K)$  et  $\psi \in \mathcal{H}$  tel que  $\varphi = (\tilde{T} - 1)\psi$  on a :

$$\operatorname{Im}\langle K\varphi, \varphi \rangle = \operatorname{Re}\langle (\tilde{T} + 1)\psi, (\tilde{T} - 1)\psi \rangle = \|\tilde{T}\psi\|^2 - \|\psi\|^2 \leq 0.$$

En outre  $K$  est maximal. En effet, si  $B$  est une extension dissipative de  $K$ , alors considérant la transformation de Cayley  $T_B$  de  $B$ , et sachant que la transformation de Cayley de  $K$  n'est autre que  $\tilde{T}$ , on voit que  $T_B$  est une extension de  $\tilde{T}$ . Mais  $\tilde{T}$  est défini sur tout  $\mathcal{H}$ , donc  $T_B = \tilde{T}$ , puis  $B = K$ .  $\square$

### 2.1.2 Semi-groupes de contractions

Les résultats présentés dans ce paragraphe sont issus de [EN00]. On pourra également consulter [EN06] ou [Paz83] pour des exposés plus complets.

**Définition 2.8.** On appelle semi-groupe de contractions (fortement continu) une famille de contractions  $(T(t))_{t \geq 0}$  sur  $\mathcal{H}$  telle que

$$\begin{cases} T(0) = \operatorname{Id}_{\mathcal{H}} \\ \forall s, t \geq 0, T(s + t) = T(s) \circ T(t) \\ \forall \varphi \in \mathcal{H}, t \mapsto T(t)\varphi \text{ est continue de } \mathbb{R}_+ \text{ dans } \mathcal{H}. \end{cases}$$



On définit alors un opérateur  $A$  de domaine  $\mathcal{D}(A)$  par

$$A\varphi = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)\varphi - \varphi}{t},$$

le domaine  $\mathcal{D}(A)$  étant l'ensemble des  $\varphi \in \mathcal{H}$  pour lesquels la limite existe. L'opérateur  $A$  est appelé générateur du semi-groupe  $(T(t))_{t \geq 0}$  et on notera  $T(t) = e^{tA}$ .

**Proposition 2.9.** *Soit  $(T(t))_{t \geq 0}$  un semi-groupe de contractions sur  $\mathcal{H}$ ,  $A$  son générateur et  $H = iA$ .*

- (i)  $A$  est fermé et  $\mathcal{D}(A)$  est dense dans  $\mathcal{H}$ .
- (ii) Pour tout  $t \geq 0$ , le sous-espace  $\mathcal{D}(A)$  est stable par  $T(t)$ .
- (iii) Pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ , l'application  $t \mapsto T(t)\varphi$  est dérivable et on a :

$$\frac{d}{dt} T(t)\varphi = T(t)A\varphi = AT(t)\varphi.$$

En particulier  $A$  commute avec  $T(t)$  pour tout  $t \geq 0$ .

- (iv) Tout  $z \in \mathbb{C}_+$  est dans l'ensemble résolvant de  $H$  et on a :

$$(H - z)^{-1} = i \int_0^{+\infty} e^{itz} T(t) dt = i \int_0^{+\infty} e^{-it(H-z)} dt.$$

- (v) L'opérateur  $H$  est dissipatif maximal.

Mise à part la dernière assertion, tous ces résultats peuvent être énoncés dans un espace de Banach. Le fait que  $H$  est dissipatif résulte de la décroissance de l'application  $t \mapsto \|T(t)\varphi\|^2$  et du fait que pour  $\varphi \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(H)$  on a :

$$\frac{d}{dt} \|T(t)\varphi\|^2 \Big|_{t=0} = 2 \operatorname{Re} \langle -iHT(t)\varphi, T(t)\varphi \rangle \Big|_{t=0} = 2 \operatorname{Im} \langle H\varphi, \varphi \rangle.$$

Pour  $\varphi_0 \in \mathcal{D}(A)$ , l'application  $t \mapsto e^{tA}\varphi_0$  est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t \varphi(t) = A\varphi(t), & \forall t > 0, \\ \varphi(0) = \varphi_0. \end{cases}$$

Ainsi, étant donné un opérateur  $A$ , il est important de savoir s'il existe un semi-groupe dont  $A$  serait le générateur. Dans le cas d'un opérateur autoadjoint, il suffit de considérer la famille  $e^{tA}$  donnée par le calcul fonctionnel. Cela donne même un groupe unitaire à un paramètre. Dans le cas dissipatif maximal, on a le résultat suivant :

**Théorème 2.10.** *Soit  $H$  un opérateur fermé dissipatif maximal. Alors l'opérateur  $A = -iH$  engendre un semi-groupe de contractions, qu'on note  $(e^{-itH})_{t \geq 0}$ .*

Citons deux façons de montrer ce résultat. On peut utiliser l'estimation (2.1) pour appliquer le théorème de Hille-Yosida (voir par exemple le théorème II.3.5 de [EN06]) à l'opérateur  $-iH$ . On peut également utiliser le calcul fonctionnel pour une contraction développé dans [NF67] pour définir  $e^{-itH}$  via la transformée de Cayley (voir le théorème 8.1 de [NF67]).

### 2.1.3 Perturbation dissipative relativement bornée d'un opérateur autoadjoint

Dans cette partie, on suppose que l'opérateur dissipatif  $H$  est de la forme  $H_1 - iV$  où  $H_1$  est un opérateur autoadjoint et  $V$  est un opérateur autoadjoint positif et  $H_1$ -borné de borne relative strictement inférieure à 1. Cela signifie qu'il existe  $a \in [0, 1[$  et  $b \geq 0$  tels que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(H_1), \quad \|V\varphi\| \leq a \|H_1\varphi\| + b \|\varphi\|. \quad (2.2)$$

Dans ce cas on a :  $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(H_1)$ .

**Proposition 2.11.** *L'opérateur dissipatif  $H$  vérifie les propriétés suivantes :*

- (i)  $H$  est un opérateur fermé.
- (ii)  $H$  est un opérateur dissipatif maximal.
- (iii)  $\mathcal{D}(H^*) = \mathcal{D}(H_1) = \mathcal{D}(H)$  et  $H^* = H_1 + iV$ .

*Démonstration.* (i) La première assertion résulte facilement du fait que  $H_1$  est fermé et de l'hypothèse (2.2) (voir le théorème IV.1.1 de [Kat80]).

(ii) On note :

$$c = \frac{2b + 1}{1 - a}.$$

On a alors, pour tout  $\varphi \in \mathcal{H}$  :

$$\begin{aligned} \|V(H_1 + ic)^{-1}\varphi\| &\leq a \|H_1(H_1 + ic)^{-1}\varphi\| + b \|(H_1 + ic)^{-1}\varphi\| \\ &\leq a \|\varphi\| + \frac{b}{c} \|\varphi\| \leq \frac{1 + a}{2} \|\varphi\|. \end{aligned}$$

Ainsi l'opérateur  $(H_1 - ic)^{-1}V$  de domaine  $\mathcal{D}(V)$  se prolonge en un opérateur borné de norme inférieure à  $(1 + a)/2$ , si bien que l'opérateur

$$A = \text{Id} - (H_1 - ic)^{-1}V$$

est inversible d'inverse bornée. Or on a  $(H - ic) = (H_1 - ic)A$ , donc  $(H - ic)$  est inversible d'inverse bornée. D'après la proposition 2.3, cela prouve que  $H$  est un opérateur dissipatif maximal.

(iii) Pour montrer la troisième assertion, on commence par observer que pour tous  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(H_1)$  on a bien

$$\langle (H_1 - iV)\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, (H_1 + iV)\psi \rangle,$$

ce qui prouve déjà que  $\mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(H^*)$  et  $H^* = H_1 + iV$  sur  $\mathcal{D}(H_1)$ . Il reste à montrer que  $\mathcal{D}(H^*) \subset \mathcal{D}(H)$ . Soit donc  $\psi \in \mathcal{D}(H^*)$ . Pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(H_1)$  on a :

$$\langle (H_1 - ic)\varphi, \psi \rangle = \langle (H - ic)A^{-1}\varphi, \psi \rangle = \langle A^{-1}\varphi, (H^* + ic)\psi \rangle = \langle \varphi, (A^{-1})^*(H^* + ic)\psi \rangle$$

et donc  $\psi \in \mathcal{D}(H_1^*) = \mathcal{D}(H_1) = \mathcal{D}(H)$ . □

*Remarque 2.12.* Soient  $T_1$  et  $T_2$  deux opérateurs sur  $\mathcal{H}$  tels que  $(T_1 + T_2)$  est inversible et pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(T_1)$  on a  $\varphi \in \mathcal{D}(T_2)$  et  $\|T_2\varphi\| \leq a \|T_1\varphi\| + b \|\varphi\|$  avec  $a \in [0, 1[$  et  $\beta \geq 0$ . Alors pour tout opérateur borné  $Q$  sur  $\mathcal{H}$  on a :

$$\|T_1(T_1 + T_2)^{-1}Q\| \leq \frac{\|Q\| + b \|(T_1 + T_2)^{-1}Q\|}{1 - a}.$$

### 2.1.4 Perturbation bornée d'un opérateur autoadjoint

On va dans ce travail considérer des opérateurs qui non seulement ne sont pas autoadjoints mais qui ne seront pas non plus dissipatifs, la faute à une partie antisymétrique qui n'est pas nécessairement positive. Si  $H_1$  est un opérateur autoadjoint et  $V$  est borné (minoré suffirait), alors l'opérateur  $H = H_1 - iV$  de domaine  $\mathcal{D}(H_1)$  n'est (éventuellement) ni autoadjoint ni dissipatif. Par contre l'opérateur  $H - i\|V\|$  est dissipatif. On peut donc lui appliquer les résultats précédents. On obtient que pour  $\text{Im } z > \|V\|$  l'opérateur  $(H - z) = ((H - i\|V\|) - (z - i\|V\|))$  est inversible et

$$\|(H - z)^{-1}\| \leq \frac{1}{\text{Im } z - \|V\|}. \quad (2.3)$$

D'autre part on a encore  $\mathcal{D}(H^*) = \mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(H_1)$  et  $H^* = H + iV$  sur  $\mathcal{D}(H)$ . En outre l'opérateur  $-iH = -i(H - i\|V\|) + \|V\|$  engendre un semi-groupe fortement continu qu'on note  $t \mapsto e^{-itH}$ , mais les opérateurs  $e^{-itH}$  ne sont plus des contractions. On a tout de même

$$\|e^{-itH}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq e^{t\|V\|},$$

et les propriétés de la proposition 2.9 sont toujours valables.

### 2.1.5 Premières propriétés concernant le spectre de l'opérateur de Schrödinger

On se place maintenant sur  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ . Considérons un potentiel  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  borné, ainsi que l'opérateur de Schrödinger

$$H = H_0 + V$$

où on a noté  $H_0 = -\Delta$  le laplacien libre.  $V$  définit sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  un opérateur borné, donc  $H$  est comme  $H_0$  un opérateur de domaine  $H^2(\mathbb{R}^n)$ .

Supposons que

$$V(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0.$$

$V$  définit alors sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  un opérateur relativement compact par rapport à  $H_0$ , et on obtient par le théorème de Weyl [RS79c, cor. 2 p. 113] que le spectre essentiel de  $H$  est le même que celui de  $H_0$ , c'est-à-dire  $\mathbb{R}_+$ . Cela signifie qu'en dehors de  $\mathbb{R}_+$  le spectre de  $H$  est constitué de valeurs propres isolées et de multiplicités finies. Ces valeurs propres peuvent éventuellement s'accumuler à l'infini ou sur un point du spectre essentiel  $\mathbb{R}_+$ . En outre, si on note

$$V = V_1 - iV_2$$

on voit que toute valeur propre  $z \in \mathbb{C}$  de  $H$  est telle que

$$-\sup V_2 \leq \operatorname{Im} z \leq -\inf V_2.$$

Supposons maintenant que la partie imaginaire de  $V$  est négative.  $H$  est alors un opérateur dissipatif. Comme l'opérateur  $V$  est relativement borné par rapport à  $H_0$  de borne relative 0,  $H$  est un opérateur dissipatif maximal, et on peut appliquer tous les résultats généraux que l'on vient de rappeler. On retrouve en particulier le fait que le demi-plan supérieur  $\mathbb{C}_+$  est inclus dans l'ensemble résolvant de  $H$ . Si de plus il existe un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^n$  sur lequel  $V_2$  est non nul (cela vaut par exemple si  $V_2$  est une fonction continue non nulle, ce qui sera toujours le cas par la suite), alors  $H$  ne peut pas avoir de valeurs propres dans  $\mathbb{R}_+^*$ . Supposons en effet que  $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$  et  $\lambda > 0$  sont tels que  $Hu = \lambda u$ . On a alors :

$$0 = -\operatorname{Im} \langle \lambda u, u \rangle = -\operatorname{Im} \langle Hu, u \rangle = \langle V_2 u, u \rangle.$$

Cela prouve que  $u$  s'annule sur le support de  $V_2$ , et en particulier sur l'ouvert  $\mathcal{U}$ . Cela implique en outre que  $H_1 u = \lambda u$ . Mais d'après le théorème de prolongement unique (voir le théorème XIII.57 de [RS79c]), on en déduit que  $u = 0$ .

## 2.2 Dilatations autoadjointes

On évoque dans cette partie la théorie des dilatations autoadjointes. On rappelle les résultats de [NF67] et [Pav77] ainsi que les idées de démonstrations. On verra ensuite comment utiliser ces dilatations autoadjointes pour obtenir des estimations sur le propagateur de l'opérateur de Schrödinger dissipatif à partir d'estimations sur la résolvante.

### 2.2.1 Dilatation unitaire d'une contraction

**Définition 2.13.** Soient  $A$  un opérateur borné sur  $\mathcal{H}$  et  $B$  un opérateur borné sur un espace de Hilbert  $\mathcal{K}$  tel que  $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$  ( $\mathcal{H}$  s'identifie à un sous-espace de  $\mathcal{K}$ ). On note  $P_{\mathcal{H}}$  la projection orthogonale de  $\mathcal{K}$  sur  $\mathcal{H}$ . On dit alors que l'opérateur  $B$  est une dilatation de  $A$  si pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a

$$A^n = P_{\mathcal{H}} B^n|_{\mathcal{H}},$$

soit :

$$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}, \quad \langle A^n \varphi, \psi \rangle = \langle B^n \varphi, \psi \rangle.$$

**Théorème 2.14.** (i) Toute contraction de  $\mathcal{H}$  admet une dilatation isométrique.

(ii) Toute isométrie de  $\mathcal{H}$  admet une dilatation unitaire.

(iii) Toute contraction de  $\mathcal{H}$  admet une dilatation unitaire.

La démonstration de ce théorème est donnée dans [NF67]. On n'en reproduit ici que les idées. Tout d'abord, étant donné une contraction  $T$  de  $\mathcal{H}$ , si on peut construire une dilatation isométrique  $V$  de  $T$  sur un espace de Hilbert  $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ , puis une dilatation unitaire  $U$  de  $V$  sur un espace  $\mathcal{K}' \supset \mathcal{K}$ , alors  $U$  sera une dilatation unitaire de la contraction  $T$ . Donc (iii) résulte de (i) et (ii).

Pour montrer (i), on considère l'opérateur  $D_T = (\text{Id}_{\mathcal{H}} - T^*T)^{\frac{1}{2}}$ , bien défini puisque  $T^*T \leq \text{Id}_{\mathcal{H}}$ . Il vérifie :

$$\forall \varphi \in \mathcal{H}, \quad \|D_T \varphi\|^2 = \|\varphi\|^2 - \|T\varphi\|^2$$

L'opérateur  $V$  défini sur  $\mathcal{K} = l^2(\mathcal{H})$  (on identifie  $\mathcal{H}$  avec l'ensemble des suites à valeurs dans  $\mathcal{H}$  dont tous les termes sauf éventuellement le premier sont nuls) par

$$\forall (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{K}, \quad V((\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots)) = (T\varphi_0, D_T\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots)$$

est une isométrie sur  $\mathcal{K}$  et une dilatation de  $T$ . Cela prouve l'existence d'une dilatation isométrique pour  $T$ , mais on peut en fait être plus précis (voir le théorème I.4.1 de [NF67]).

Pour montrer (ii), on commence par le cas où  $V$  est une translation unilatérale de  $\mathcal{H}$ , c'est-à-dire qu'il existe un sous-espace  $\mathcal{L}$  de  $\mathcal{H}$  tel que  $\mathcal{H} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^n \mathcal{L}$ . Dans ce cas on peut identifier  $\mathcal{H}$  à  $l^2(\mathbb{N}, \mathcal{L})$  et  $V$  à l'opérateur de décalage à droite. On note alors  $\mathcal{K} = l^2(\mathbb{Z}, \mathcal{L})$ . L'opérateur  $U$  de décalage à droite sur  $\mathcal{K}$  est alors une dilatation unitaire de  $V$  (voir la proposition I.2.2 de [NF67]). On remarque ensuite qu'on peut toujours se ramener à ce cas, *via* le théorème suivant :

**Théorème 2.15** (Théorème de Wold). Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert et  $V$  une isométrie sur  $\mathcal{H}$ . Alors il existe une unique décomposition  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$  où  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}_1$  sont stables par  $V$  et  $V^*$ ,  $V|_{\mathcal{H}_0}$  est un opérateur unitaire sur  $\mathcal{H}_0$  et  $V|_{\mathcal{H}_1}$  est une translation unilatérale sur  $\mathcal{H}_1$ .

Le sous-espace  $\mathcal{H}_0$  est donné par  $\mathcal{H}_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V^n \mathcal{H}$ , et  $\mathcal{H}_1 = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^n \mathcal{L}$  où  $\mathcal{L} = \mathcal{H} \ominus V\mathcal{H}$  (voir le théorème I.1.1 de [NF67]).

On souhaite utiliser la théorie des dilations unitaires pour étudier un opérateur dissipatif, où plutôt le semi-groupe de contractions qu'il engendre. Cela est possible d'après le résultat suivant :

**Proposition 2.16** (Théorème I.8.1 de [NF67]). Soit  $(T(t))_{t \geq 0}$  un semi-groupe de contractions dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Alors il existe un espace  $\mathcal{K}$  contenant  $\mathcal{H}$  et un groupe unitaire à un paramètre  $(U(t))_{t \in \mathbb{R}}$  sur  $\mathcal{K}$  telle que  $U(t)$  est une dilatation unitaire de  $T(t)$  pour tout  $t \geq 0$ .

On peut par exemple montrer ce résultat en utilisant une dilatation unitaire pour la transformation de Cayley  $T$  du générateur  $H$  du semi-groupe de contractions (voir le paragraphe III.9 de [NF67]). On remarque que si le groupe unitaire  $(U(t))_{t \in \mathbb{R}}$  est constitué de dilatation unitaires pour les contractions  $(T(t))_{t \geq 0}$ , alors pour tout  $t \geq 0$ ,  $U(-t)$  est une dilatation unitaire pour la contraction  $T(t)^*$ .

**Définition 2.17.** Soit  $H$  un opérateur dissipatif maximal sur  $\mathcal{H}$ . On appelle dilatation autoadjointe de  $H$  un opérateur  $K$  sur un espace de Hilbert  $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$  tel que pour tout  $t \geq 0$  l'opérateur unitaire  $e^{-itK}$  est une dilatation de la contraction  $e^{-itH}$ .

La terminologie étant trompeuse, il est important de noter que cette définition ne dit pas que  $K$  est une dilatation de  $H$  au sens de la définition 2.13 (d'ailleurs  $H$  et  $K$  ne sont pas nécessairement bornés, on verra même au théorème 2.18 que le domaine de  $K$  ne contient pas forcément de vecteurs de  $\mathcal{H}$ ).

## 2.2.2 Dilatation autoadjointe d'un opérateur de Schrödinger dissipatif

Dans le cas de l'opérateur de Schrödinger dissipatif, B.S. Pavlov ([Pav77]) propose une construction explicite d'une dilatation autoadjointe. Plus précisément, on considère un opérateur autoadjoint  $H_1$  sur  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $V_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$  puis l'opérateur dissipatif maximal  $H = H_1 - iV_2(x)$ . On note également  $W = \sqrt{2V_2}$ . On considère l'espace de Hilbert

$$\mathcal{K} = L^2(\mathbb{R}_-, \mathcal{H}) \oplus \mathcal{H} \oplus L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$$

contenant  $\mathcal{H}$  via une injection triviale, ainsi que  $P_-$ ,  $P_{\mathcal{H}}$  et  $P_+$  les projections orthogonales de  $\mathcal{K}$  sur  $L^2(\mathbb{R}_-, \mathcal{H})$ ,  $\mathcal{H}$  et  $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$ . On a le résultat suivant :

**Théorème 2.18.** On considère sur  $\mathcal{K}$  l'opérateur  $K$  défini par

$$K : \begin{pmatrix} u_- \\ u_0 \\ u_+ \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -iu'_- \\ H_1 u_0 - \frac{W}{2}(u_-(0) + u_+(0)) \\ -iu'_+ \end{pmatrix}$$

sur

$$\mathcal{D}(K) = \{(u_-, u_0, u_+) \in \mathcal{K} \mid u_\pm \in H^1(\mathbb{R}_\pm, \mathcal{H}), u_0 \in \mathcal{D}(H_1) \text{ et } u_+(0) - u_-(0) = iW u_0 \in \mathcal{H}\}.$$

Alors  $K$  est une dilatation autoadjointe de  $H$ .

On commence par étudier l'opérateur  $K$ . Les démonstrations des propositions 2.19 et 2.20 sont essentiellement calculatoires. On se contente d'en rappeler les étapes.

**Proposition 2.19.** L'opérateur  $K$  est autoadjoint sur  $\mathcal{K}$ .

*Démonstration.* 1. On commence par montrer que  $K$  est symétrique. Pour cela on se donne  $u = (u_-, u_0, u_+)$  et  $v = (v_-, v_0, v_+)$  dans  $\mathcal{D}(K)$ . Tout d'abord on a

$$\langle H_1 u_0, v_0 \rangle_{\mathcal{H}} - \langle u_0, H_1 v_0 \rangle_{\mathcal{H}} = 0,$$

du simple fait que  $H_1$  est autoadjoint sur  $\mathcal{H}$ . Pour les termes

$$\langle -iu'_-, v_- \rangle - \langle u_-, -iv'_- \rangle_{L^2(\mathbb{R}_-, \mathcal{H})} \quad \text{et} \quad \langle -iu'_+, v_+ \rangle - \langle u_+, -iv'_+ \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})},$$

on effectue des intégrations par parties. Cela donne des termes de bord en 0, qui seront exactement compensés par le dernier terme

$$-\left\langle \frac{W}{2}(u_+(0) + u_-(0)), v_0 \right\rangle_{\mathcal{H}} + \left\langle u_0, \frac{W}{2}(v_+(0) + v_-(0)) \right\rangle_{\mathcal{H}},$$

et ce grâce à la condition imposée dans la définition du domaine de  $K$ .

2. Il faut ensuite vérifier que  $\mathcal{D}(K^*) \subset \mathcal{D}(K)$ . Cela se fait à nouveau par vérification directe. On considère  $v = (v_-, v_0, v_+) \in \mathcal{D}(K^*)$  et on note  $K^* v = v^* = (v_-^*, v_0^*, v_+^*)$ . Pour tout  $u = (u_-, u_0, u_+) \in \mathcal{D}(K)$  on a donc :

$$\langle u, v^* \rangle = \langle -iu'_-, v_- \rangle_{L^2(\mathbb{R}_-, \mathcal{H})} + \left\langle H_1 u_0 - \frac{W}{2}(u_+(0) + u_-(0)), v_0 \right\rangle_{\mathcal{H}} + \langle -iu'_+, v_+ \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})}.$$

En l'écrivant pour tout  $u \in \mathcal{D}(K)$  tel que  $u_0 = 0$ ,  $u_+ = 0$  et  $u_-(0) = 0$ , on montre que  $v_- \in H^1(\mathbb{R}_-, \mathcal{H})$  et  $v_-^* = -i\tilde{v}'_-$ . De même on a  $v_+ \in H^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$  et  $v_+^* = -iv'_+$ . On peut alors vérifier, toujours en faisant des intégrations par parties dans  $L^2(\mathbb{R}_-, \mathcal{H})$  et  $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$  et en utilisant la condition pour que  $u \in \mathcal{D}(K)$ , que l'égalité précédente devient :

$$\begin{aligned} \langle u_0, v_0^* \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle H_1 u_0, v_0 \rangle_{\mathcal{H}} + \left\langle u_0, -i \frac{W^2}{2} v_0 - W v_+(0) \right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \langle u_-(0), -W v_0 - i(v_+(0) - v_-(0)) \rangle_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

En appliquant cette égalité avec  $u_0 = 0$  et  $u_-(0)$  arbitraire, on obtient que

$$-W v_0 - i(v_+(0) - v_-(0)) = 0,$$

ce qui assure que  $v \in \mathcal{D}(K)$  et achève la démonstration.  $\square$

**Proposition 2.20.** *Pour  $\text{Im } z > 0$  et  $u = (u_-, u_0, u_+) \in \mathcal{K}$ , on a  $(K - z)^{-1}(u_-, u_0, u_+) = v = (v_-, v_0, v_+)$  avec :*

$$\begin{aligned} v_-(r) &= i \int_{-\infty}^r e^{iz(r-s)} u_-(s) ds, \\ v_0 &= (H - z)^{-1}(u_0 + W v_-(0)), \\ v_+(r) &= (v_-(0) + iW v_0) e^{izr} + i \int_0^r e^{iz(r-s)} u_+(s) ds. \end{aligned}$$

En particulier on a :

$$P_{\mathcal{H}} (K - z)^{-1}|_{\mathcal{H}} = (H - z)^{-1}.$$

*Démonstration.* Cette proposition se démontre également par calcul direct. Il s'agit de vérifier que  $v$  donné par la proposition est bien dans  $\mathcal{D}(K)$  et que  $(K - z)v = u$ .  $\square$

De façon analogue, on peut vérifier que pour  $\text{Im } z < 0$  on a :

$$P_{\mathcal{H}} (K - z)^{-1}|_{\mathcal{H}} = (H^* - z)^{-1}.$$

**Proposition 2.21.** *Le semi-groupe unitaire  $(e^{-itK})_{t \geq 0}$  sur  $\mathcal{K}$  est une dilatation unitaire du semi-groupe de contractions  $(e^{-itH})_{t \geq 0}$  sur  $\mathcal{H}$ .*

*Démonstration.* 1. On commence par montrer que l'application

$$T : t \mapsto P_{\mathcal{H}} e^{-itK}|_{\mathcal{H}}$$

définit un semi-groupe de contractions sur  $\mathcal{H}$ . On voit facilement que  $T(0) = \text{Id}_{\mathcal{H}}$  et que pour tout  $\varphi \in \mathcal{H}$  l'application  $t \mapsto T(t)\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ . Il reste à vérifier que  $T(t+s) = T(t) \circ T(s)$  pour  $s, t \geq 0$ . Soient  $\varphi \in \mathcal{H} \subset \mathcal{K}$  et  $\psi \in L^2(\mathbb{R}_-, \mathcal{H}) \subset \mathcal{K}$ . On considère sur  $\mathbb{R}$  l'application :

$$f : t \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \langle e^{-itK} e^{-t} \varphi, \psi \rangle.$$

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , sa transformation de Fourier inverse est donnée par :

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \langle e^{-it(K - (\lambda - i))} \varphi, \psi \rangle dt = -\frac{i}{2\pi} \langle (K - (\lambda - i))^{-1} \varphi, \psi \rangle = 0,$$

et donc  $f = 0$  ( $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ ). Cela signifie que pour tout  $t \geq 0$  l'application  $e^{-itK}$  envoie  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H} \oplus L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$ . On vérifie de même que  $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$  est stable par  $e^{-itK}$  pour tout  $t \geq 0$ . Pour tout  $s, t \geq 0$  on a alors :

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{H}} e^{-i(t+s)K} P_{\mathcal{H}} &= P_{\mathcal{H}} e^{-itK} (P_{\mathcal{H}} + P_+) e^{-isK} P_{\mathcal{H}} = P_{\mathcal{H}} e^{-itK} P_{\mathcal{H}} e^{-isK} P_{\mathcal{H}} \\ &= (P_{\mathcal{H}} e^{-itK} P_{\mathcal{H}}) \circ (P_{\mathcal{H}} e^{-isK} P_{\mathcal{H}}). \end{aligned}$$

Cela prouve que  $(T(t))_{t \geq 0}$  est bien un semi-groupe de contractions sur  $\mathcal{H}$ . On note  $B$  son générateur.

2. Le semi-groupe unitaire  $(e^{-itK})_{t \geq 0}$  est une dilatation unitaire pour le semi-groupe de contractions  $(e^{-itB})_{t \geq 0}$ . Il reste donc à montrer que  $H = B$ . Mais  $B$  est un opérateur dissipatif sur  $\mathcal{H}$  et pour  $z \in \mathbb{C}_+$  on a :

$$(B-z)^{-1} = i \int_0^{+\infty} e^{-it(B-z)} dt = i \int_0^{+\infty} P_{\mathcal{H}} e^{-it(K-z)} \Big|_{\mathcal{H}} dt = P_{\mathcal{H}}(K-z)^{-1} \Big|_{\mathcal{H}} = (H-z)^{-1}.$$

□

**Corollaire 2.22.** *Le semi-groupe unitaire  $(e^{itK})_{t \geq 0}$  sur  $\mathcal{K}$  est une dilatation unitaire du semi-groupe de contractions  $(e^{itH^*})_{t \geq 0}$  sur  $\mathcal{H}$ .*

*Remarque 2.23.*  $e^{itH^*} = e^{-it(-H^*)}$  et  $-H^*$  est bien un opérateur dissipatif.

*Démonstration.* Pour  $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$  (identifiés à des éléments de  $\mathcal{K}$ ) on a :

$$\langle e^{itH^*} \varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, e^{-itH} \psi \rangle = \langle \varphi, e^{-itK} \psi \rangle = \langle e^{itK} \varphi, \psi \rangle.$$

□

## 2.2.3 Opérateurs relativement lisses par rapport à un opérateur dissipatif

 tant donné un opérateur dissipatif maximal, on va se servir d'une dilatation autoadjointe pour utiliser la théorie des opérateurs lisses au sens de Kato (voir par exemple le paragraphe XIII.7 de [RS79c]). Plus précisément, en s'inspirant des résultats bien connus pour les opérateurs relativement lisses par rapport à un opérateur autoadjoint, on démontre le résultat suivant :

**Proposition 2.24.** *Soit  $H$  un opérateur dissipatif maximal de la forme  $H = H_1 - iV$  sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , avec  $H_1$  autoadjoint et  $V$  autoadjoint positif et relativement borné par rapport à  $H_1$  de borne relative strictement inférieure à 1. Soit  $A$  un opérateur fermé sur  $\mathcal{H}$ . On suppose qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tous  $\varphi \in \mathcal{D}(A^*)$  et  $z \in \mathbb{C}$  :*

$$|\langle A^* \varphi, ((H-z)^{-1} - (H^* - \bar{z})^{-1}) A^* \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|^2.$$

Alors pour tout  $\varphi \in \mathcal{H}$  on a  $e^{-itH} \varphi \in \mathcal{D}(A)$  pour presque tout  $t \geq 0$  et :

$$\int_0^{+\infty} \|Ae^{-itH} \varphi\|^2 dt \leq C \|\varphi\|^2.$$

*Démonstration.* Soit  $z \in \mathbb{C}_+$ . On a

$$(H-z)^{-1} - (H^* - \bar{z})^{-1} = 2i(H^* - \bar{z})^{-1}(V + \text{Im } z)(H-z)^{-1},$$

donc

$$\frac{1}{2i\pi} ((H-z)^{-1} - (H^* - \bar{z})^{-1}) = \frac{1}{\pi} (H^* - \bar{z})^{-1}(V + \text{Im } z)(H-z)^{-1} \geq 0$$

et on peut noter :

$$T(z) = \sqrt{\frac{1}{2i\pi} ((H-z)^{-1} - (H^* - \bar{z})^{-1})}.$$

Pour  $\varphi \in \mathcal{D}(A^*)$  on a :

$$\begin{aligned} \|T(z)A^* \varphi\|^2 &= \langle A^* \varphi, T(z)^2 A^* \varphi \rangle \\ &= \frac{1}{2i\pi} \langle A^* \varphi, ((H-z)^{-1} - (H^* - \bar{z})^{-1}) A^* \varphi \rangle \\ &\leq \frac{C}{2\pi} \|\varphi\|^2 \end{aligned}$$

Soit maintenant  $\psi = T(z)\zeta \in \text{Im}(T(z))$ . Pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(A^*)$  on a

$$|\langle A^*\varphi, \psi \rangle| = |\langle A^*\varphi, T(z)\zeta \rangle| = |\langle T(z)A^*\varphi, \zeta \rangle| \leq \sqrt{\frac{C}{2\pi}} \|\varphi\| \|\zeta\|,$$

donc  $\psi \in \mathcal{D}(A^{**}) = \mathcal{D}(A)$  (car  $A$  est fermé) et :

$$\|AT(z)\| = \|T(z)A^*\| \leq \frac{C}{2\pi}.$$

On peut alors calculer, pour  $\mu > 0$  :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \|A((H - (\lambda + i\mu))^{-1} - (H^* - (\lambda - i\mu))^{-1})\varphi\|^2 d\lambda \\ &= 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}} \|AT(\lambda + i\mu)^2\varphi\|^2 d\lambda \\ &\leq 2\pi C \int_{\mathbb{R}} \|T(\lambda + i\mu)\varphi\|^2 d\lambda \\ &\leq -iC \int_{\mathbb{R}} \langle \varphi, ((H - (\lambda + i\mu))^{-1} - (H^* - (\lambda - i\mu))^{-1})\varphi \rangle d\lambda. \end{aligned}$$

On considère maintenant une dilatation autoadjointe  $K$  de  $H$  sur un espace de Hilbert  $\mathcal{K}$  contenant  $\mathcal{H}$ . Comme  $K$  est autoadjoint on peut considérer sa mesure spectrale, notée  $E_K$ . On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \|A((H - (\lambda + i\mu))^{-1} - (H^* - (\lambda - i\mu))^{-1})\varphi\|^2 d\lambda \\ &\leq -iC \int_{\mathbb{R}} \langle \varphi, ((K - (\lambda + i\mu))^{-1} - (K - (\lambda - i\mu))^{-1})\varphi \rangle d\lambda \\ &\leq -iC \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{x - (\lambda + i\mu)} - \frac{1}{x - (\lambda - i\mu)} \right) d\langle E_K(x)\varphi, \varphi \rangle d\lambda \\ &\leq 2\mu C \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda^2 + \mu^2} d\langle E_K(x)\varphi, \varphi \rangle d\lambda \\ &\leq 2\pi C \int_{\mathbb{R}} d\langle E_K(x)\varphi, \varphi \rangle \\ &\leq 2\pi C \|\varphi\|^2. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} & (H - (\lambda + i\mu))^{-1}\varphi - (H^* - (\lambda - i\mu))^{-1}\varphi \\ &= i \int_0^{+\infty} e^{-it(H - (\lambda + i\mu))}\varphi dt - i \int_0^{+\infty} e^{it(H^* - (\lambda - i\mu))}\varphi dt. \end{aligned}$$

Ainsi pour  $\varphi \in \mathcal{H}$  la fonction

$$u : t \mapsto \begin{cases} e^{-t\mu} e^{-itH}\varphi & \text{si } t \geq 0 \\ e^{-|t|\mu} e^{-itH^*}\varphi & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

est la transformée de Fourier de  $\lambda \mapsto (H - (\lambda + i\mu))^{-1}\varphi - (H^* - (\lambda - i\mu))^{-1}\varphi$ . Par le théorème de Parseval on a donc :

$$\begin{aligned} 4\pi^2 \int_0^{+\infty} e^{-2\mu t} \|Ae^{-itH}\varphi\|^2 dt &\leq 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}} \|u(t)\|^2 dt \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} \|A(H - (\lambda + i\mu))^{-1}\varphi - A(H^* - (\lambda - i\mu))^{-1}\varphi\|^2 d\lambda \\ &\leq 4\pi^2 C \|\varphi\|^2. \end{aligned}$$



D'après le théorème de convergence monotone, on peut prendre la limite  $\mu \rightarrow 0$  sous l'intégrale de gauche, ce qui donne :

$$\int_0^{+\infty} \|Ae^{-itH}\varphi\|^2 dt \leq C \|\varphi\|^2.$$

□

**Corollaire 2.25.** Soit  $(H_h)_{h \in ]0,1]}$  une famille d'opérateurs dissipatifs maximaux de la forme  $H_h = H_1^h - iV_h$  sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , avec  $H_1^h$  autoadjoint et  $V_h$  autoadjoint positif relativement borné par rapport à  $H_1^h$  de borne relative strictement inférieure à 1. Soit  $(A_h)_{h \in ]0,1]}$  une familles d'opérateurs fermés sur  $\mathcal{H}$ . On suppose qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tous  $\varphi \in \mathcal{H}$ ,  $z \in \mathbb{C}$  et  $h \in ]0,1]}$  :

$$|\langle A_h^* \varphi, ((H_h - z)^{-1} - (H_h^* - z)^{-1}) A_h^* \varphi \rangle| \leq \frac{C}{h} \|\varphi\|^2.$$

Alors pour tous  $\varphi \in \mathcal{H}$  et  $h \in ]0,1]}$  on a :

$$\int_0^{+\infty} \|A_h e^{-\frac{it}{h} H_h} \varphi\|^2 dt \leq C \|\varphi\|^2.$$

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer pour tout  $h \in ]0,1]}$  la proposition précédente à l'opérateur  $H_h/h$ . □

## 2.3 Condition de radiation de Sommerfeld

On s'intéresse maintenant à l'équation

$$(H - E)u = S \tag{2.4}$$

d'inconnue  $u$ , où  $H$  est un opérateur de Schrödinger dissipatif comme décrit au paragraphe 2.1.5,  $E > 0$  et  $S \in L^2(\mathbb{R}^n)$  est un terme source connu.

On dira d'un potentiel  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  qu'il est de courte portée s'il existe  $C \geq 0$  et  $\rho > 0$  tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad |V(x)| \leq C \langle x \rangle^{-1-\rho}. \tag{2.5}$$

Et on dira qu'il est de longue portée s'il est différentiable et s'il existe  $C \geq 0$  et  $\rho > 0$  tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad |V(x)| \leq C \langle x \rangle^{-\rho} \quad \text{et} \quad |\nabla V(x)| \leq C \langle x \rangle^{-1-\rho}. \tag{2.6}$$

Pour  $r > 0$  on note  $B_r$  la boule ouverte de  $\mathbb{R}^n$  centrée en 0 et de rayon  $r$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{B_r}$  le produit scalaire de  $L^2(B_r)$  et  $\|\cdot\|_{B_r}$  la norme correspondante. On notera  $B_{\mathbb{R}^n}(x, r)$  la boule centrée en  $x \in \mathbb{R}^n$ . On note  $\mathbb{S}$  la sphère unité de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{S}_r$  la sphère de rayon  $r > 0$ ,  $\sigma_r$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{S}_r$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{S}_r}$  le produit scalaire  $L^2(\mathbb{S}_r, \sigma_r)$  (ainsi que  $|\cdot|_{\mathbb{S}_r}$  la norme correspondante). Enfin on note  $H^s(\mathbb{R}^n)$  pour  $s \in \mathbb{R}$  les espaces de Sobolev sur  $\mathbb{R}^n$  et, pour  $\delta \in \mathbb{R}$ ,  $H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n)$  l'ensemble des fonctions mesurables  $f$  telles que  $x \mapsto \langle x \rangle^\delta f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ .

Dans le cas autoadjoint et pour un potentiel  $V_1$  de longue ou courte portée, on sait que pour  $\delta > \frac{1}{2}$  et  $S \in L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$  le problème (2.4) est bien posé dans  $L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)$  à condition d'ajouter une condition de rayonnement à l'infini, et la solution est donnée par le principe d'absorption limite (voir [IS72, Sai79]). Y. Saito traite dans [Sai74] le cas d'un opérateur de Schrödinger dont le potentiel admet une partie imaginaire de courte portée. Dans ce cas le résultat est encore valable à condition d'éviter un certain ensemble de points. On pourra voir par ailleurs [Ike72]. Le but de cette partie est de montrer que le principe d'absorption limite est valable dans le cas d'un opérateur de Schrödinger dont le potentiel est de longue portée avec une partie imaginaire négative. Dans ce cas la symétrie du problème est rompue et le résultat n'est

valable que pour les solutions sortantes. Cela signifie que le principe d'absorption limite n'est valable que si on approche  $E$  par des points de  $\mathbb{C}_+$ . Pour certains résultats intermédiaires qui seront utilisés par la suite, on pourra également autoriser le potentiel à avoir une partie imaginaire positive de courte portée.

### 2.3.1 Solutions sortantes

Pour étudier la condition de radiation de Sommerfeld, on travaille en coordonnées polaires. Pour  $u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$  et  $x \neq 0$  on note  $\partial_r u(x) = \hat{x} \cdot \nabla u(x)$  la dérivée radiale de  $u$  au point  $x$  ( $\hat{x}$  désigne la direction  $x/|x|$ ), et  $\nabla_{\perp} u(x) = \nabla u(x) - (\partial_r u(x))\hat{x}$ , le gradient sur la sphère de rayon  $|x|$ . On note  $-\Delta_{\perp}$  l'extension de Friedrichs pour la forme quadratique positive  $\langle \nabla_{\perp} \cdot, \nabla_{\perp} \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}$  (voir par exemple [Lax02]).  $-\Delta_{\perp}$  est alors un opérateur autoadjoint positif sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  dont le domaine contient  $H^2(\mathbb{R}^n)$  et tel que :

$$\forall u, v \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n), \quad \langle -\Delta_{\perp} u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle \nabla_{\perp} u, \nabla_{\perp} v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Comme  $\nabla_{\perp}$ ,  $\Delta_{\perp}$  commute alors avec  $\partial_r$ . Enfin on note :

$$\mathcal{D}_r = \partial_r + \frac{n-1}{2|x|}.$$

On regroupe dans une proposition les propriétés dont on aura besoin pour les calculs :

**Proposition 2.26.** (i) Soient  $u, v \in H^2(\mathbb{R}^n)$ . Alors on a

$$\mathcal{D}_r(uv) = (\mathcal{D}_r u)v + u(\partial_r v)$$

et

$$\frac{d}{dr} \langle u, v \rangle_{\mathbb{S}_r} = \langle \mathcal{D}_r u, v \rangle_{\mathbb{S}_r} + \langle u, \mathcal{D}_r v \rangle_{\mathbb{S}_r}.$$

(ii) Pour  $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$  et  $\mathcal{V}_0$  voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^n$ , on a dans  $L^2(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{V}_0)$  :

$$-\Delta u = -\mathcal{D}_r^2 u - \Delta_{\perp} u + \frac{(n-1)(n-3)}{4|x|^2} u. \quad (2.7)$$

(iii) Pour  $u \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$  nulle au voisinage de 0 on a :

$$\partial_r \Delta_{\perp} u(x) = -\frac{2}{|x|} \Delta_{\perp} u(x) + \Delta_{\perp} \partial_r u(x). \quad (2.8)$$

*Démonstration.* (ii) Pour  $u, v \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$  nuls au voisinage de 0 on a :

$$\begin{aligned} \langle -\Delta u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u(x) \cdot \nabla \bar{v}(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{S}} \partial_r u(r\omega) \partial_r \bar{v}(r\omega) r^{n-1} d\omega dr + \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_{\perp} u(x) \cdot \nabla_{\perp} \bar{v}(x) dx. \end{aligned}$$

Le premier terme vaut

$$\int_0^{\infty} \int_{\mathbb{S}} \partial_r u(r\omega) \partial_r \bar{v}(r\omega) r^{n-1} d\omega dr = \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{S}} \left( -\partial_r^2 u(r\omega) - \frac{n-1}{r} \partial_r u(r\omega) \right) \bar{v}(r\omega) r^{n-1} d\omega dr,$$

et sur  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{V}_0$  on a bien :

$$\mathcal{D}_r^2 u(x) = \partial_r^2 u(x) + \frac{n-1}{|x|} \partial_r u(x) + \frac{(n-1)(n-3)}{4|x|^2} u(x).$$

(iii) Pour  $r > 0$  et  $\omega \in \mathbb{S}$  on note  $\tilde{u}(t, \omega) = u(r\omega)$ . On a alors

$$\Delta_{\perp} u(r\omega) = \frac{1}{r^2} \Delta_{\omega} \tilde{u}(r, \omega),$$

ce qui donne bien (2.8) en dérivant par rapport à  $r$ .  $\square$

On suppose que  $V$  est somme d'un potentiel longue portée et d'un potentiel courte portée et que sa partie imaginaire est négative. On note  $V = V_1 - iV_2$  avec  $V_1$  à valeurs réelles et  $V_2$  à valeurs réelles positives. On définit alors une solution sortante comme dans [Sai79]. Pour cela on se donne  $\delta$  tel que

$$\frac{1}{2} < \delta \leq \min\left(1, \frac{1}{2} + \frac{\rho}{4}\right) \quad (2.9)$$

(où  $\rho > 0$  est donné par (2.5) et (2.6) pour  $V_1$  et  $V_2$ ) et on note :

$$\mathbb{C}_{+,+} = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \zeta > 0, \operatorname{Im} \zeta \geq 0\}.$$

Tout  $z \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}_+^*$  admet une unique racine carrée  $\mathbb{C}_{+,+}$ . On la notera  $\zeta^z$ . On notera également  $\zeta_1^z = \operatorname{Re} \zeta^z$  et  $\zeta_2^z = \operatorname{Im} \zeta^z$ . Pour  $\zeta \in \mathbb{C}$ , on note :  $\mathcal{D}_r(\zeta) = \mathcal{D}_r - i\zeta$ .

**Définition 2.27.** Soient  $z \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}_+^*$  et  $f \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n)$ . On suppose que  $u \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n)$  est solution de l'équation

$$(H - z)u = f. \quad (2.10)$$

Alors on dira que  $u$  est solution sortante pour (2.10) si  $\mathcal{D}_r(\zeta^z)u \in L^{2,\delta-1}(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{V}_0)$ , où  $\mathcal{V}_0$  est un voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^n$ .

Le théorème que l'on souhaite démontrer dans ce paragraphe est le suivant :

**Théorème 2.28.** Soient  $z \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}_+^*$  et  $\delta$  vérifiant (2.9). Alors pour tout  $f \in L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$  l'équation  $(H - z)u = f$  admet une unique solution sortante. De plus, pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}_+^*$  il existe une constante  $C$  telle que pour tous  $z \in K$  et  $f \in L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$ , si  $u$  est la solution sortante pour l'équation  $(H - z)u = f$  alors on a

$$\|u\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)} + \|\mathcal{D}_r(\zeta^z)u\|_{L^{2,\delta-1}(\mathbb{R}^n \setminus B_2)} + \|\nabla \perp u\|_{L^{2,\delta-1}(\mathbb{R}^n \setminus B_2)} \leq C \|f\|_{L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)},$$

et pour tout  $r > 0$  :

$$\|u\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n \setminus B_r)} \leq Cr^{\frac{1}{2}-\delta} \|f\|_{L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)}.$$

En outre, pour  $E > 0$ , la solution sortante pour l'équation  $(H - E)u = f$  est obtenue comme limite dans  $L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)$  de  $(H - z)^{-1}f$  où  $z \in \mathbb{C}_+$  et  $z \rightarrow E$ .

Pour  $E > 0$ , la solution sortante à l'équation  $(H - E)u = f$  est notée :

$$u = (H - (E + i0))^{-1}f.$$

On a un résultat analogue sur le demi-plan inférieur pour  $H^*$  (c'est-à-dire pour un potentiel de partie imaginaire positive). Pour  $E > 0$  on note  $(H^* - (E - i0))^{-1}$  la solution entrante à l'équation  $(H^* - E)u = f$  (définie comme la solution sortante avec la condition  $(\mathcal{D}_r + i\zeta^z)u \in L^{2,\delta-1}(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{V}_0)$ ).

Pour démontrer le théorème 2.28, on utilisera plusieurs fois le lemme suivant. Comme il n'y a pas d'estimation dans ce lemme, les hypothèses concernant la décroissance et le signe des parties réelle et imaginaire du potentiel ne sont pas utiles ici.

**Lemme 2.29.** Soient  $f \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n)$  et  $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$  avec  $\zeta_1 > 0$  et  $\zeta_2 \geq 0$ . On suppose que  $u \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n)$  est solution sortante pour l'équation  $(H - \zeta^2)u = f$ . Alors pour tout  $r > 0$  on a :

$$|\mathcal{D}_r(\zeta)u|_{\mathbb{S}_r}^2 = |\mathcal{D}_r u + \zeta_2 u|_{\mathbb{S}_r}^2 + \zeta_1^2 |u|_{\mathbb{S}_r}^2 + 2\zeta_1 \langle V_2 u, u \rangle_{B_r} + 4\zeta_1^2 \zeta_2 \|u\|_{B_r}^2 + 2\zeta_1 \operatorname{Im} \langle f, u \rangle_{B_r}.$$

*Démonstration.* En prenant la partie imaginaire de l'égalité

$$\langle \nabla u, \nabla u \rangle_{B_r} - \langle \partial_r u, u \rangle_{\mathbb{S}_r} + \langle (V - \zeta^2)u, u \rangle_{B_r} = \langle f, u \rangle_{B_r}$$

on obtient :

$$- \operatorname{Im} \langle \partial_r u, u \rangle_{\mathbb{S}_r} - \langle (V_2 + 2\zeta_1 \zeta_2)u, u \rangle_{B_r} = \operatorname{Im} \langle f, u \rangle_{B_r}.$$

On a d'autre part :

$$|\mathcal{D}_r(\zeta)u|_{\mathbb{S}_r}^2 = |\mathcal{D}_r u + \zeta_2 u|_{\mathbb{S}_r}^2 + \zeta_1^2 |u|_{\mathbb{S}_r}^2 - 2\zeta_1 \operatorname{Im} \langle \mathcal{D}_r u, u \rangle_{\mathbb{S}_r}.$$

Ces deux égalités donnent bien le résultat puisque  $\operatorname{Im} \langle \mathcal{D}_r u, u \rangle_{\mathbb{S}_r} = \operatorname{Im} \langle \partial_r u, u \rangle_{\mathbb{S}_r}$ .  $\square$

### 2.3.2 Unicité

On commence par montrer l'unicité de la solution sortante. On note  $H_1 = -\Delta + V_1(x)$  la partie autoadjointe de l'opérateur  $H$ .

**Proposition 2.30.** *Soient  $\lambda > 0$  et  $u \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n)$  une solution de l'équation  $(H_1 - \lambda)u = 0$  telle que l'ensemble  $\{r > 0 \mid |u|_{\mathbb{S}_r^{n-1}} \neq 0\}$  est non-borné. Alors on a :*

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \left( |\mathcal{D}_r u|_{\mathbb{S}_r}^2 + \lambda |u|_{\mathbb{S}_r}^2 \right) > 0.$$

Comme cette proposition ne fait pas intervenir la partie imaginaire, on n'en détaille pas la démonstration et on renvoie à la proposition 3.1 de [Sai79]. On peut maintenant montrer l'unicité d'une solution sortante :

**Proposition 2.31.** *Soit  $z \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}_+^*$ . On suppose que  $u \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n)$  est solution sortante pour l'équation  $(H - z)u = 0$ . Alors  $u = 0$ .*

On rappelle (voir [Sai74]), que le résultat n'est pas vrai sans la condition de signe sur la partie imaginaire du potentiel.

*Démonstration.* Soit  $r > 0$ . D'après le lemme 2.29 on a :

$$|\mathcal{D}_r(\zeta^z)u|_{\mathbb{S}_r}^2 = |\mathcal{D}_r u + \zeta_2^z u|_{\mathbb{S}_r}^2 + (\zeta_1^z)^2 |u|_{\mathbb{S}_r}^2 + 2\zeta_1^z \langle V_2 u, u \rangle_{B_r} + 4(\zeta_1^z)^2 \zeta_2^z \|u\|_{B_r}^2.$$

Comme  $\mathcal{D}_r(\zeta^z)u \in L^{2,\delta-1}(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{V}_0)$ , on a

$$\liminf_{r \rightarrow +\infty} |\mathcal{D}_r(\zeta^z)u|_{\mathbb{S}_r}^2 = 0,$$

et donc

$$\liminf_{r \rightarrow +\infty} \left( |\mathcal{D}_r u + \zeta_2^z u|_{\mathbb{S}_r}^2 + (\zeta_1^z)^2 |u|_{\mathbb{S}_r}^2 + 2\zeta_1^z \langle V_2 u, u \rangle_{B_r} + 4(\zeta_1^z)^2 \zeta_2^z \|u\|_{B_r}^2 \right) = 0.$$

Comme tous les termes de cette somme sont positifs, ils admettent tous 0 comme valeur d'adhérence quand  $r$  tend vers  $+\infty$ . Si  $\zeta_2^z > 0$ , on obtient directement que  $u = 0$ . Si  $\zeta_2^z = 0$ , cela montre tout de même que  $u$  s'annule sur le support de  $V_2$  (et est donc solution sortante pour l'équation  $(H_1 - (\zeta_1^z)^2)u = 0$ ), et :

$$\liminf_{r \rightarrow +\infty} \left( |\mathcal{D}_r u|_{\mathbb{S}_r}^2 + (\zeta_1^z)^2 |u|_{\mathbb{S}_r}^2 \right) = 0.$$

D'après la proposition 2.30, cela signifie que  $u$  est à support borné, disons dans  $B_R$  pour un certain  $R \geq 0$ . Ainsi  $u$  est solution du problème :  $(H_1 - (\zeta_1^z)^2)u = 0$  sur  $B_R$  et  $u = 0$  sur  $\mathbb{S}_R$ . Par unicité de la solution pour un tel problème de Dirichlet, cela implique que  $u = 0$  sur  $B_R$ , et donc  $u = 0$ .  $\square$

### 2.3.3 Estimations uniformes

On montre maintenant des estimations uniformes par rapport à  $z$  pour la solution sortante à l'équation  $(H - z)u = f$ .

On va utiliser dans cette partie l'expression (2.7). On notera alors, pour  $x \neq 0$  :

$$V(x) + \frac{(n-1)(n-3)}{4|x|^2} = W_1(x) - iW_2(x) + W_3(x),$$

où  $W_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $W_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  sont des potentiels à longue portée et  $W_3 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  est un potentiel à courte portée, pour  $|x| \geq 1$ . La partie imaginaire de  $W_3$  peut ne pas être négative, ce qui signifie que les résultats de ce paragraphe sont encore valables pour un opérateur

de Schrödinger qui n'est pas nécessairement dissipatif. Le fait que  $W_3$  ne soit pas borné au voisinage de 0 n'aura pas d'incidence puisque pour le lemme 2.34 et la proposition 2.35 on utilisera une fonction de troncature qui évite un voisinage de 0. Pour les termes résiduels à supports compacts, on utilisera le résultat de régularité intérieure suivant (voir par exemple le paragraphe 6.3.1 de [Eva98]) :

**Proposition 2.32** (Régularité intérieure). *Soient  $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  et  $z \in \mathbb{C}$ . On suppose que  $u \in H^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  est solution de l'équation  $(H - z)u = f$ . Alors pour tout  $R \geq 0$  on a*

$$\|u\|_{H^1(B_R)} \leq C \left( \|f\|_{B_{R+1}} + \|u\|_{B_{R+1}} \right)$$

où  $C$  peut-être choisie uniformément pour  $(z, R)$  variant dans un compact de  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}_+$ .

Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}_+^*$ . On note  $K^* = K \cap \mathbb{C}_+$ . L'ensemble des  $\zeta^z$  pour  $z \in K$  est alors un compact de  $\mathbb{C}_{+,+}$ . Il existe donc  $\gamma_1, \gamma > 0$  tels que pour tout  $z \in K$  on a  $\zeta_1^z \geq \gamma_1$  et  $|\zeta| \leq \gamma$ . On suppose que  $K^*$  ne contient aucune valeur propre de  $H$  (ce n'est pas automatique dans la mesure où on autorise pour ce paragraphe des opérateurs non-dissipatifs).

**Lemme 2.33.** *Soient  $z \in K^*$ ,  $f \in L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$  et  $u = (H - z)^{-1}f$ . Alors  $u$  et  $\nabla u$  sont dans  $L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$ .*

Ce sont bien des estimations pour  $z$  fixé. Les estimations uniformes que l'on cherche à montrer sont plus faibles.

*Démonstration.* Soit  $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  égale à 1 sur  $[-1, 1]$  et à support dans  $[-2, 2]$ . Pour  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $R \geq 1$  on note  $\chi_R(x) = \tilde{\chi}\left(\frac{|x|}{R}\right)$ . Pour  $\delta \in [0, 1]$  on a alors

$$\begin{aligned} \langle x \rangle^\delta \chi_R (H - z)^{-1} &= (H - z)^{-1} [(H - z), \langle x \rangle^\delta \chi_R] (H - z)^{-1} \\ &= -(H - z)^{-1} \left( 2\partial_r (\langle x \rangle^\delta \chi_R) \partial_r + \Delta (\langle x \rangle^\delta \chi_R) \right) (H - z)^{-1}, \end{aligned}$$

ce qui prouve que pour  $f \in L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$  on a  $\langle x \rangle^\delta \chi_R (H - z)^{-1}f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  uniformément en  $R$ , et donc  $(H - z)^{-1}f \in L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$ . Pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $f \in L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$  on écrit

$$\begin{aligned} \langle x \rangle^\delta \chi_R \partial_j (H - z)^{-1}f &= -\partial_j (\langle x \rangle^\delta \chi_R) (H - z)^{-1}f \\ &\quad - \partial_j (H - z)^{-1} \left( 2\partial_r (\langle x \rangle^\delta \chi_R) \partial_r + \Delta (\langle x \rangle^\delta \chi_R) \right) (H - z)^{-1}f \\ &\quad + \partial_j (H - z)^{-1} \langle x \rangle^\delta \chi_R f, \end{aligned}$$

et on conclut de la même manière que  $\partial_j u \in L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$ .  $\square$

**Lemme 2.34.** *Il existe une constante  $C$  telle que si  $z \in K^*$ ,  $f \in L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$  et  $u = (H - z)^{-1}f$  alors on a*

$$\zeta_2^z \|u\|_{L^{2,1-\delta}(\mathbb{R}^n)} \leq C \left( \|u\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)} + \|\mathcal{D}_r(\zeta^z)u\|_{L^{2,\delta-1}(\mathbb{R}^n \setminus B_2)} + \|f\|_{L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)} \right)$$

et

$$\left\| \sqrt{W_2}u \right\|_{L^{2,\frac{1}{2}-\delta}(\mathbb{R}^n)}^2 \leq C \left( \|u\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)} + \|\mathcal{D}_r(\zeta^z)u\|_{L^{2,\delta-1}(\mathbb{R}^n \setminus B_2)} + \|f\|_{L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)} \right) \|u\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)}.$$

*Démonstration.* Soient  $z \in K^*$ ,  $f \in L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$  et  $u = (H - z)^{-1}f \in H^2(\mathbb{R}^n)$ . On considère une fonction  $\tilde{\chi} \in C^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$  croissante telle que  $\tilde{\chi}(r) = 0$  pour  $r \leq 2$  et  $\tilde{\chi}(r) = 1$  pour  $r \geq 3$ . Pour  $x \in \mathbb{R}^n$ , on note également  $\chi(x) = \tilde{\chi}(|x|)$ . Soient  $R > 0$  et  $\alpha \leq 1 - \delta \leq \delta$ . En prenant la partie imaginaire de l'égalité

$$\langle (H - z)u, \chi^2 u \rangle_{L^{2,\alpha}(B_R)} = \langle f, \chi^2 u \rangle_{L^{2,\alpha}(B_R)}$$

on obtient d'après (2.7) :

$$\begin{aligned} & 2\zeta_1^z \zeta_2^z \|\chi u\|_{L^{2,\alpha}(B_R)}^2 + \langle W_2 u, \chi^2 u \rangle_{L^{2,\alpha}(B_R)} \\ &= -\operatorname{Im} \langle f, \chi^2 u \rangle_{L^{2,\alpha}(B_R)} + \operatorname{Im} \langle -\mathcal{D}_r^2 u, \chi^2 u \rangle_{L^{2,\alpha}(B_R)} + \operatorname{Im} \langle W_3 u, \chi^2 u \rangle_{L^{2,\alpha}(B_R)}. \end{aligned}$$

Soit  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  qui converge vers  $u$  dans  $H^2(B_R \setminus B_2)$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on a :

$$\begin{aligned} & \operatorname{Im} \langle -\mathcal{D}_r^2 u_k, \chi^2 u_k \rangle_{L^{2,\alpha}(B_R)} \\ &= -\int_0^R (1+r)^{2\alpha} \operatorname{Im} \langle \mathcal{D}_r^2 u_k, \chi^2 u_k \rangle_{\mathbb{S}_r} dr \\ &= -\operatorname{Im} \int_0^R (1+r)^{2\alpha} \frac{d}{dr} \langle \mathcal{D}_r u_k, \chi^2 u_k \rangle_{\mathbb{S}_r} dr + \operatorname{Im} \int_0^R (1+r)^{2\alpha} \langle \mathcal{D}_r u_k, 2\chi \partial_r \chi u_k \rangle_{\mathbb{S}_r} dr \\ &= -(1+R)^{2\alpha} \operatorname{Im} \langle \mathcal{D}_r u_k, \chi^2 u_k \rangle_{\mathbb{S}_R} + 2\alpha \int_0^R (1+r)^{2\alpha-1} \operatorname{Im} \langle \mathcal{D}_r u_k, \chi^2 u_k \rangle_{\mathbb{S}_r} dr \\ &\quad + \operatorname{Im} \int_0^R (1+r)^{2\alpha} \langle \mathcal{D}_r u_k, 2\chi \partial_r \chi u_k \rangle_{\mathbb{S}_r} dr. \end{aligned}$$

En prenant la limite  $k \rightarrow \infty$  on obtient la même égalité pour  $u$ . D'après le lemme 2.33 on a  $u, \mathcal{D}_r u \in L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n \setminus B_1)$ . On peut donc trouver une suite  $(R_m)_{m \in \mathbb{N}}$  telle que :

$$(1+R_m)^{2\alpha} \langle \mathcal{D}_r u, u \rangle_{\mathbb{S}_{R_m}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

En passant à la limite  $R \rightarrow +\infty$  selon cette sous-suite on obtient donc :

$$\begin{aligned} & 2\gamma_1 \zeta_1^z \zeta_2^z \|\chi u\|_{L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)}^2 + \left\| \chi \sqrt{W_2} u \right\|_{L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)}^2 \\ &\leq 2\alpha \left| \operatorname{Im} \langle \mathcal{D}_r u, \chi^2 u \rangle_{L^{2,\alpha-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)} \right| + \left| \langle f, \chi^2 u \rangle_{L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \right| + \left| \langle W_3 u, \chi^2 u \rangle_{L^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \right| \\ &\quad + c \|u\|_{H^1(B_3 \setminus B_2)} \\ &\leq 2 \|\mathcal{D}_r u\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n \setminus B_2)} \|u\|_{L^{2,2\alpha-1+\delta}(\mathbb{R}^n)} + c \|f\|_{L^{2,1-\delta}(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^{2,2\alpha-1+\delta}(\mathbb{R}^n)} \\ &\quad + c \|u\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^{2,2\alpha-1-\rho+\delta}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq c \left( \|\mathcal{D}_r(\zeta^z) u\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n \setminus B_2)} + \|u\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^{2,1-\delta}(\mathbb{R}^n)} \right) \|u\|_{L^{2,2\alpha-1+\delta}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq c \left( \|\mathcal{D}_r(\zeta^z) u\|_{L^{2,\delta-1}(\mathbb{R}^n \setminus B_2)} + \|u\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)} \right) \|u\|_{L^{2,2\alpha-1+\delta}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Avec le résultat de régularité intérieure, on obtient alors la première estimation en prenant  $\alpha = 1 - \delta$  et la seconde en prenant  $\alpha = \frac{1}{2} - \delta$ .  $\square$

Pour  $z \in K^*$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ , le nombre complexe  $z + iW_2(x)$  est dans  $\mathbb{C}_+$  et admet donc une unique racine carrée  $\zeta(x, z) = \zeta_1(x, z) + i\zeta_2(x, z)$  dans  $\mathbb{C}_{+,+}$ . En outre il existe  $\gamma_2 > 0$  tel que pour  $z \in K^*$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a  $\gamma_1 \leq \zeta_1(x, z) \leq \gamma_2$  et  $0 < \zeta_2(x, z) \leq \gamma_2$ . Plus précisément, si  $\operatorname{Re} z = z_1$  et  $\operatorname{Im} z = z_2$  on a

$$\zeta_1(x, z) = \sqrt{\frac{\sqrt{z_1^2 + (z_2 + W_2(x))^2} + z_1}{2}} \quad \text{et} \quad \zeta_2(x, z) = \sqrt{\frac{\sqrt{z_1^2 + (z_2 + W_2(x))^2} - z_1}{2}}.$$

On peut également écrire

$$\zeta_2(x, z) = \frac{z_2 + W_2(x)}{2\sqrt{z_1}} \sqrt{1 + \varepsilon(x, z)},$$

où  $\varepsilon(x, z)$  reste dans un compact de  $] -1, +\infty[$  pour  $z \in K^*$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ . En particulier il existe une constante  $C > 0$  telle que pour  $z \in K^*$  et  $x \in \mathbb{R}^n$  :

$$C^{-1}(z_2 + W_2(x)) \leq \zeta_2(x, z) \leq C(z_2 + W_2(x)). \quad (2.11)$$

On a alors

$$|\nabla \zeta_2(x, z)| = \frac{1}{2\zeta_2(x, z)} \frac{1}{4\sqrt{z_1^2 + (z_2 + W_2(x))^2}} 2(z_2 + W_2(x)) |\nabla W_2(x)| \leq c \langle x \rangle^{-1-\rho},$$

où  $c$  ne dépend ni de  $z \in K^*$  ni de  $x \in \mathbb{R}^n$ . On peut estimer de même la dérivée de  $\zeta_1(z)$ . On obtient donc

$$|\nabla \zeta(x, z)| \leq c \langle x \rangle^{-1-\rho}, \quad (2.12)$$

où  $c$  ne dépend ni de  $x \in \mathbb{R}^n$  ni de  $z \in K^*$ . On note :

$$\mathcal{D}_r^z = \mathcal{D}_r - i\zeta(x, z).$$

**Proposition 2.35.** *Il existe une constante  $C \geq 0$  telle que si  $z \in K^*$ ,  $f \in L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$  et  $u = (H - z)^{-1}f$  alors on a*

$$\|\mathcal{D}_r^z u\|_{L^{2,\delta-1}(\mathbb{R}^n \setminus B_2)} + \|\nabla_{\perp} u\|_{L^{2,\delta-1}(\mathbb{R}^n \setminus B_2)} \leq C \left( \|u\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)} \right).$$

*Démonstration.* **1.** Soient  $z \in K^*$ ,  $f \in L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$  et  $u = (H - z)^{-1}f$ . D'après (2.7) on a :

$$\begin{aligned} (H - z)u &= f \\ \iff -\mathcal{D}_r^2 u - \Delta_{\perp} u + W_1 u + W_3 u - \zeta(x, z)^2 u &= f \\ \iff -\mathcal{D}_r(\mathcal{D}_r^z u) - i\zeta(x, z)(\mathcal{D}_r^z u) - i\partial_r \zeta(x, z)u - \Delta_{\perp} u + W_1 u + W_3 u &= f. \end{aligned}$$

Comme pour le lemme précédent, on considère une fonction  $\tilde{\chi} \in C^{\infty}(\mathbb{R}, [0, 1])$  croissante telle que  $\tilde{\chi}(r) = 0$  pour  $r \leq 1$  et  $\tilde{\chi}(r) = 1$  pour  $r \geq 2$ , puis on note  $\chi(x) = \tilde{\chi}(|x|)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . On multiplie l'égalité précédente par  $\chi(x)^2(1 + |x|)^{2\delta-1} \mathcal{D}_r^z u$ , on intègre sur  $B_R$  pour un certain  $R > 2$  puis on prend la partie réelle. Cela donne une égalité de la forme

$$A_1(R) + A_2(R) + A_3(R) + A_4(R) + A_5(R) + A_6(R) = A_7(R).$$

où l'on va chercher à minorer les termes de gauche et majorer le terme de droite pour obtenir l'inégalité attendue. On peut supposer que

$$\|u\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)} < \mathcal{N} := \max \left( \|\chi \mathcal{D}_r^z u\|_{L^{2,\delta-1}(\mathbb{R}^n)}, \|\chi \nabla_{\perp} u\|_{L^{2,\delta-1}(\mathbb{R}^n)} \right), \quad (2.13)$$

puisque dans le cas contraire il n'y a rien à démontrer.

**2.** Soit  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  qui converge vers  $u$  dans  $H^2(B_R \setminus B_1)$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on a :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} \langle \mathcal{D}_r^z u_k, \chi^2(1 + |x|)^{2\delta-1} \mathcal{D}_r^z u_k \rangle_{\mathbb{S}_r} \\ &= \langle \mathcal{D}_r \mathcal{D}_r^z u_k, \chi^2(1 + |x|)^{2\delta-1} \mathcal{D}_r^z u_k \rangle_{\mathbb{S}_r} + \langle \mathcal{D}_r^z u_k, \chi^2(1 + |x|)^{2\delta-1} \mathcal{D}_r \mathcal{D}_r^z u_k \rangle_{\mathbb{S}_r} \\ & \quad + \langle \mathcal{D}_r^z u_k, \partial_r (\chi^2(1 + |x|)^{2\delta-1}) \mathcal{D}_r^z u_k \rangle_{\mathbb{S}_r} \\ &= 2 \operatorname{Re} \langle \mathcal{D}_r \mathcal{D}_r^z u_k, \chi^2(1 + |x|)^{2\delta-1} \mathcal{D}_r^z u_k \rangle_{\mathbb{S}_r} + \langle \mathcal{D}_r^z u_k, \partial_r (\chi^2(1 + |x|)^{2\delta-1}) \mathcal{D}_r^z u_k \rangle_{\mathbb{S}_r}. \end{aligned}$$

En intégrant pour  $r \in [0, R]$  cela donne :

$$\begin{aligned}
& -\operatorname{Re} \langle \mathcal{D}_r \mathcal{D}_r^z u_k, \chi^2(1+|x|)^{2\delta-1} \mathcal{D}_r^z u_k \rangle_{B_R} \\
&= -\frac{1}{2}(1+R)^{2\delta-1} |\mathcal{D}_r^z u_k|_{\mathbb{S}_R}^2 + \frac{1}{2} \langle \mathcal{D}_r^z u_k, 2\chi \partial_r \chi (1+|x|)^{2\delta-1} \mathcal{D}_r^z u_k \rangle_{B_R} \\
&\quad + \left( \delta - \frac{1}{2} \right) \langle \mathcal{D}_r^z u_k, \chi^2(1+|x|)^{2(\delta-1)} \mathcal{D}_r^z u_k \rangle_{B_R} \\
&\geq -\frac{1}{2}(1+R)^{2\delta-1} |\mathcal{D}_r^z u_k|_{\mathbb{S}_R}^2 + \left( \delta - \frac{1}{2} \right) \|\chi \mathcal{D}_r^z u_k\|_{L^{2,\delta-1}(B_R)}^2.
\end{aligned}$$

En prenant la limite  $k \rightarrow \infty$ , on obtient une inégalité analogue pour  $u$ . Comme  $\mathcal{D}_r^z u \in L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n \setminus B_2)$  on a

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} (1+R)^{2\delta-1} |\mathcal{D}_r^z u|_{\mathbb{S}_R}^2 = 0,$$

et on obtient finalement :

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} A_1(R) \geq \left( \delta - \frac{1}{2} \right) \|\chi \mathcal{D}_r^z u\|_{L^{2,\delta-1}(\mathbb{R}^n)}^2.$$

**3.** Pour le deuxième terme on écrit simplement :

$$A_2(R) = \langle \zeta_2(x, z) \mathcal{D}_r^z u, \chi^2(1+|x|)^{2\delta-1} \mathcal{D}_r^z u \rangle_{B_R} \geq 0.$$

**4.** Pour le troisième terme on utilise (2.12) et le fait que  $1 + \rho \geq 2\delta$  :

$$\begin{aligned}
A_3(R) &\geq - \left| \langle (\partial_r \zeta(x, z)) u, \chi^2(1+|x|)^{2\delta-1} \mathcal{D}_r^z u \rangle \right| \\
&\geq -c \|u\|_{L^{2,-1-\rho+\delta}(B_R)} \|\chi \mathcal{D}_r^z u\|_{L^{2,\delta-1}(B_R)} \\
&\geq -c \mathcal{N} \|u\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

où  $c$ , comme dans la suite de la démonstration, désigne une constante qui ne dépend ni de  $z \in K^*$  ni de  $f \in L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$ .

**5.** Pour justifier les calculs concernant  $A_4(R)$ , on utilise comme précédemment la suite  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . En utilisant (2.8) on calcule :

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dr} \langle -\Delta_{\perp} u_k, \chi^2(1+|x|)^{2\delta-1} u_k \rangle_{\mathbb{S}_r} \\
&= \langle -\mathcal{D}_r \Delta_{\perp} u_k, \chi^2(1+|x|)^{2\delta-1} u_k \rangle_{\mathbb{S}_r} + \langle -\Delta_{\perp} u_k, \mathcal{D}_r \chi^2(1+|x|)^{2\delta-1} u_k \rangle_{\mathbb{S}_r} \\
&= \langle -\Delta_{\perp} \mathcal{D}_r u_k, \chi^2(1+|x|)^{2\delta-1} u_k \rangle_{\mathbb{S}_r} + \left\langle 2|x|^{-1} \Delta_{\perp} u_k, \chi^2(1+|x|)^{2\delta-1} u_k \right\rangle_{\mathbb{S}_r} \\
&\quad + \langle -\Delta_{\perp} u_k, \chi^2(1+|x|)^{2\delta-1} \mathcal{D}_r u_k \rangle_{\mathbb{S}_r} + \langle -\Delta_{\perp} u_k, \partial_r (\chi^2(1+|x|)^{2\delta-1}) u_k \rangle_{\mathbb{S}_r} \\
&\leq 2 \operatorname{Re} \langle -\Delta_{\perp} u_k, \chi^2(1+|x|)^{2\delta-1} \mathcal{D}_r u_k \rangle_{\mathbb{S}_r} - 2 |\chi(1+|x|)^{\delta-1} \nabla_{\perp} u_k|_{\mathbb{S}_r}^2 \\
&\quad + \langle -\Delta_{\perp} u_k, \partial_r (\chi^2(1+|x|)^{2\delta-1}) u_k \rangle_{\mathbb{S}_r}.
\end{aligned}$$

On intègre cette inégalité sur  $[0, R]$  et on prend la limite  $k \rightarrow \infty$ . Sachant que

$$\langle -\Delta_{\perp} u, \partial_r (\chi^2(1+|x|)^{2\delta-1}) u \rangle_{B_R} \leq c |\nabla_{\perp} u|_{B_2}^2 + (2\delta-1) |\chi(1+|x|)^{\delta-1} \nabla_{\perp} u|_{B_R}^2,$$

on obtient en utilisant la régularité intérieure (proposition 2.32) :

$$\begin{aligned}
0 &\leq (1+R)^{2\delta-1} |\nabla_{\perp} u|_{\mathbb{S}_R}^2 \\
&\leq 2 \operatorname{Re} \langle -\Delta_{\perp} u, \chi^2(1+|x|)^{2\delta-1} \mathcal{D}_r u \rangle_{B_R} + (2\delta-3) \|\chi \nabla_{\perp} u\|_{L^{2,\delta-1}(B_R)}^2 \\
&\quad + c \left( \|u\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)} \right)^2.
\end{aligned}$$



D'après (2.12), on a d'autre part :

$$\begin{aligned}
& 2 \operatorname{Re} \langle -\Delta_{\perp} u, \chi^2(1+|x|)^{2\delta-1}(-i\zeta(x,z)u) \rangle_{B_R} \\
&= -2 \operatorname{Im} \langle \nabla_{\perp} u, \chi^2(1+|x|)^{2\delta-1}(\nabla_{\perp} \zeta(x,z)u) \rangle_{B_R} - 2 \operatorname{Im} \langle \overline{\zeta(x,z)} \chi^2(1+|x|)^{2\delta-1} \nabla_{\perp} u, \nabla_{\perp} u \rangle_{B_R} \\
&\geq -c \|\chi \nabla_{\perp} u\|_{L^{2,\delta-1}(B_R)} \|u\|_{L^{2,\delta-1-\rho}(B_R)} + 2 \langle \zeta_2(x,z) \chi^2(1+|x|)^{2\delta-1} \nabla_{\perp} u, \nabla_{\perp} u \rangle_{B_R} \\
&\geq -c \|\chi \nabla_{\perp} u\|_{L^{2,\delta-1}(B_R)} \|u\|_{L^{2,-\delta}(B_R)}.
\end{aligned}$$

En sommant on obtient finalement :

$$A_4(R) \geq -c\mathcal{N} \left( \|u\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)} \right) + \left( \frac{3}{2} - \delta \right) \|\chi \nabla_{\perp} u\|_{L^{2,\delta-1}(B_R)}^2.$$

6. Le calcul pour  $A_5(R)$  commence comme les précédents :

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dr} \langle W_1 u, \chi^2(1+|x|)^{2\delta-1} u \rangle_{\mathbb{S}_r} \\
&= 2 \operatorname{Re} \langle W_1 u, \chi^2(1+|x|)^{2\delta-1} \mathcal{D}_r u \rangle_{\mathbb{S}_r} + \langle (\partial_r W_1) u, \chi^2(1+|x|)^{2\delta-1} u \rangle_{\mathbb{S}_r} \\
&\quad + \langle W_1 u, 2\chi \partial_r \chi(1+|x|)^{2\delta-1} u \rangle_{\mathbb{S}_r} + (2\delta-1) \langle W_1 u, \chi^2(1+|x|)^{2(\delta-1)} u \rangle_{\mathbb{S}_r}
\end{aligned}$$

et donc, puisque  $2\delta-2-\rho < 2\delta$  :

$$\operatorname{Re} \langle W_1 u, \chi^2(1+|x|)^{2\delta-1} \mathcal{D}_r u \rangle_{B_R} \geq \frac{1}{2} (1+R)^{2\delta-1} \langle W_1 u, u \rangle_{\mathbb{S}_R} - c \|u\|_{L^{2,-\delta}(B_R)}^2.$$

En outre  $u \in L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$ , donc

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} (1+R)^{2\delta-1} \langle W_1 u, u \rangle_{\mathbb{S}_R} = 0.$$

D'autre part, comme  $2\delta-1-\rho \leq 1-2\delta$ , on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \langle W_1 u, \chi^2(1+|x|)^{2\delta-1}(-i\zeta(x,z)u) \rangle_{B_R} &= \langle W_1 u, \chi^2(1+|x|)^{2\delta-1} \zeta_2(x,z)u \rangle_{B_R} \\
&\geq -c \langle \zeta_2(x,z)u, (1+|x|)^{1-2\delta} u \rangle_{B_R}.
\end{aligned}$$

D'après (2.11) puis le lemme 2.34 on obtient

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re} \langle W_1 u, \chi^2(1+|x|)^{2\delta-1}(-i\zeta(x,z)u) \rangle_{B_R} \\
&\geq -c \langle \zeta_2^z u, (1+|x|)^{1-2\delta} u \rangle_{B_R} - c \langle W_2 u, (1+|x|)^{1-2\delta} u \rangle_{B_R} \\
&\geq -c \zeta_2^z \|u\|_{L^{2,1-\delta}(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)} - c \left\| \sqrt{W_2} u \right\|_{L^{2,\frac{1}{2}-\delta}(\mathbb{R}^n)}^2 \\
&\geq -c\mathcal{N} \|u\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

et donc :

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} A_5(R) \geq -c\mathcal{N} \|u\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)}.$$

7. Enfin comme  $\chi$  s'annule au voisinage de 0 on peut écrire

$$A_6(R) \geq - \left| \langle W_3 u, \chi^2(1+|x|)^{2\delta-1} \mathcal{D}_r^z u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right| \geq -c \|u\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)} \|\chi \mathcal{D}_r^z u\|_{L^{2,\delta-1}(\mathbb{R}^n)},$$

et

$$A_7(R) \leq \|f\|_{L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)} \leq \mathcal{N} \|u\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)}.$$

8. Toutes les inégalités que l'on vient de montrer prouvent finalement que

$$\|\chi \mathcal{D}_r^z u\|_{L^{2,\delta-1}(\mathbb{R}^n)}^2 + \|\chi \nabla_{\perp} u\|_{L^{2,\delta-1}(\mathbb{R}^n)}^2 \leq c\mathcal{N} \|u\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)}.$$

Cela prouve la proposition.  $\square$

Pour démontrer cette proposition, on a utilisé la quantité  $\zeta_2(x, z)$ , qui intervient dans la définition de  $\mathcal{D}_r^z$ . Mais dans les estimations du théorème 2.28 (et de la proposition 2.38) on aura plutôt besoin d'une estimation sur  $\mathcal{D}_r(\zeta^z)u$  :

**Corollaire 2.36.** *Il existe une constante  $C \geq 0$  telle que si  $z \in K^*$ ,  $f \in L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$  et  $u = (H - z)^{-1}f$  alors on a :*

$$\|\mathcal{D}_r(\zeta^z)u\|_{L^{2,\delta-1}(\mathbb{R}^n \setminus B_2)} + \|\nabla_{\perp} u\|_{L^{2,\delta-1}(\mathbb{R}^n \setminus B_2)} \leq C \left( \|u\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)} \right).$$

*Démonstration.* Il existe une constante  $c$  telle que pour  $z \in K$  et  $x \in \mathbb{R}^n$  on a :

$$|\zeta(x, z) - \zeta^z| = \frac{W_2(x)}{|\zeta(x, z) + \zeta^z|} \leq cW_2(x).$$

Et comme  $\delta - 1 - \rho \leq -\delta$  on a :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}_r(\zeta^z)u\|_{L^{2,\delta-1}(\mathbb{R}^n \setminus B_2)} &\leq \|\mathcal{D}_r^z u\|_{L^{2,\delta-1}(\mathbb{R}^n \setminus B_2)} + c\|W_2 u\|_{L^{2,\delta-1}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|\mathcal{D}_r^z u\|_{L^{2,\delta-1}(\mathbb{R}^n \setminus B_2)} + c\|u\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

□

**Proposition 2.37.** *Il existe une constante  $C \geq 0$  telle que pour  $R > 0$ ,  $z \in K^*$ ,  $f \in L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$  et  $u = (H - z)^{-1}f$  on a :*

$$\|u\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n \setminus B_R)}^2 \leq CR^{1-2\delta} \left( \|u\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)}^2 + \|f\|_{L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)}^2 \right).$$

*Démonstration.* D'après le lemme 2.29 on a pour tout  $r > 0$  :

$$(\zeta_1^z)^2 |u|_{\mathbb{S}_r}^2 \leq |\mathcal{D}_r(\zeta^z)u|_{\mathbb{S}_r}^2 + 2\zeta_1^z \|f\|_{L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)} + c\|u\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)}^2$$

(le dernier terme vient du fait que  $V_2$  n'est pas supposé positif ici). En multipliant cette inégalité par  $(1+r)^{-2\delta}$  et en l'intégrant pour  $r \in [R, +\infty[$  on obtient

$$\begin{aligned} &\|u\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n \setminus B_R)}^2 \\ &\leq \frac{(1+R)^{2-4\delta}}{(\zeta_1^z)^2} \|\mathcal{D}_r(\zeta^z)u\|_{L^{2,\delta-1}(\mathbb{R}^n \setminus B_R)}^2 + \frac{2(1+R)^{1-2\delta}}{\zeta_1^z(2\delta-1)} \|f\|_{L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)} \\ &\quad + c(1+R)^{1-2\delta} \|u\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)}^2, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. □

### 2.3.4 Principe d'absorption limite - Existence d'une solution sortante

On s'intéresse maintenant à l'existence d'une solution sortante à l'équation  $(H - z)u = f$ . Elle est claire dans le cas où  $z \in \mathbb{C}_+$ , puisque  $u = (H - z)^{-1}f \in H^2(\mathbb{R}^n)$  convient, et on l'obtient dans le cas  $z = E > 0$  par le principe d'absorption limite. Plus précisément, on vérifie que si  $z \in \mathbb{C}_+$  tend vers  $E$ , alors la solution sortante à l'équation  $(H - z)u = f$  converge vers une solution sortante à l'équation  $(H - E)u = f$ . Cela résulte de la proposition suivante, qu'on appliquera avec les estimations uniformes que l'on vient de démontrer :

**Proposition 2.38.** *Soient  $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$  une suite qui converge vers  $f$  dans  $L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$  et  $(z_m)_{m \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $\mathbb{C}_+$  qui converge vers  $z \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}_+^*$ . On suppose que pour tout  $m \in \mathbb{N}$  la fonction  $u_m$  est solution sortante pour l'équation  $(H_h - z_m)u_m = f_m$  et qu'il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $m \in \mathbb{N}$  et  $r > 0$  :*

$$\begin{aligned} \|u_m\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)} + \|\mathcal{D}_r(\zeta^z)u_m\|_{L^{2,\delta-1}(\mathbb{R}^n \setminus B_2)} + \|\nabla_{\perp} u_m\|_{L^{2,\delta-1}(\mathbb{R}^n \setminus B_2)} &\leq C, \\ \|u_m\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n \setminus B_r)}^2 &\leq C^2 r^{1-2\delta}. \end{aligned}$$

Alors la suite  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  converge dans  $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)$  vers une fonction  $u$  qui est solution sortante pour l'équation  $(H_h - z)u = f$  et vérifie les mêmes estimations.

Cette proposition est le lemme 2.7 de [Sai79], dont on peut reprendre mot pour mot la démonstration. Pour utiliser cette proposition, il nous manque une estimation uniforme de  $\|u\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)}$ , sachant par ailleurs que toutes les estimations du paragraphe précédent dépendent de cette norme. On montre maintenant qu'elle est en fait contrôlée par la norme  $L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$  de  $f$ . Ce résultat utilise l'unicité démontrée à la proposition 2.31, on doit donc se restreindre au cas où  $\text{Im } W_3 \leq 0$ , c'est-à-dire au cas d'un opérateur dissipatif.

**Proposition 2.39.** *On suppose que  $V_2 \geq 0$ . Alors il existe une constante  $C$  telle que si  $z \in K^*$ ,  $f \in L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$  et  $u = (H - z)^{-1}f$  alors on a :*

$$\|u\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)}.$$

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas. Alors pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$  on peut trouver  $z_m \in K^*$ ,  $u_m \in H^2(\mathbb{R}^n)$  et  $f_m \in L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$  tels que  $u_m$  est solution sortante pour l'équation  $(H - z_m)u_m = f_m$  avec

$$\|u_m\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)} = 1 \quad \text{et} \quad \|f_m\|_{L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{m}.$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que  $z_m \rightarrow z \in K$ . Avec les estimations du corollaire 2.36 et de la proposition 2.37 et en utilisant la proposition 2.38, on voit que la suite  $u_m$  converge dans  $L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)$  vers une solution sortante  $u$  pour l'équation  $(H - z)u = 0$ . Par unicité, on a nécessairement  $u = 0$ , ce qui contredit le fait que  $u_m$  est de norme 1 dans  $L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ .  $\square$

On a maintenant toutes les estimations nécessaires pour montrer l'existence d'une solution sortante à l'équation  $(H - E)u = f$  et conclure ainsi la démonstration du théorème 2.28.

**Proposition 2.40.** *Pour tous  $f \in L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$  et  $E > 0$ , l'équation  $(H - E)u = f$  admet une solution sortante vérifiant les estimations du théorème 2.28.*

*Démonstration.* Soit  $f \in L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$ . Soit  $(z_m)_{m \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathbb{C}_+$  qui converge vers  $E$ . La suite  $(z_m)_{m \in \mathbb{N}}$  est alors à valeurs dans un compact  $K$  de  $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}_+^*$ . Pour tout  $m \in \mathbb{N}$  on note  $u_m = (H - z_m)^{-1}f$ . D'après les propositions 2.35, 2.37 et 2.39, on peut appliquer la proposition 2.38. Cela prouve que la suite  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  converge dans  $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)$  vers une solution sortante  $u$  pour l'équation  $(H - E)u = f$ . Les estimations du théorème 2.28 sont alors obtenues en passant à la limite dans les estimations analogues valables pour  $u_m$ .  $\square$

## 2.4 Étude asymptotique des solutions de l'équation de Schrödinger

Dans cette partie, on suppose que  $V_2$  est positif et de courte portée au sens de (2.5). On supposera en outre que la partie réelle  $V_1$  peut s'écrire  $V_1 = V_L + V_C$  où  $V_C$  est un potentiel courte portée, et  $V_L$  est un potentiel longue portée au sens suivant :  $V_L$  est de classe  $C^3$  et il existe  $\rho > 0$  et  $c \geq 0$  tels que pour  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  avec  $|\alpha| \leq 3$  on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad |\partial^\alpha V_L(x)| \leq c \langle x \rangle^{-|\alpha|-\rho}. \quad (2.14)$$

### 2.4.1 Comportement asymptotique des solutions entrantes et sortantes

Dans le cas simple où  $V = 0$  (et donc  $H = H_0 = -\Delta$ ),  $n = 3$ ,  $\lambda > 0$  et  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  on sait que

$$((H_0 - (\lambda + i0))^{-1}f)(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x-y|}}{|x-y|} f(y) dy,$$

et comme pour  $|x|$  grand et  $y \in \text{supp } f$  on a

$$|x - y| = |x| \sqrt{1 - 2 \frac{\langle \hat{x}, y \rangle}{|x|}} + \underset{|x| \rightarrow \infty}{O}(|x|^{-2}) = |x| - \langle \hat{x}, y \rangle + \underset{|x| \rightarrow \infty}{O}(|x|^{-1}),$$

on voit que :

$$((H_0 - (\lambda + i0))^{-1}f)(x) = \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x|}}{4\pi|x|} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\sqrt{\lambda}\langle \hat{x}, y \rangle} f(y) dy + \underset{|x| \rightarrow \infty}{O}(|x|^{-2}).$$

L'intégrale qui apparaît dans cette expression est la transformée de Fourier de  $f$  (au point  $\sqrt{\lambda}\hat{x}$ ), celle-là même qui permet la représentation spectrale pour l'opérateur  $H_0$ .

Dans le cas général (avec  $V = V_1$  réel et de courte puis longue portée), différents auteurs ont alors cherché à étudier la quantité

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r^{\frac{n-1}{2}} e^{-i\sqrt{\lambda}r} (H_1 - (\lambda + i0))^{-1}(r\omega)$$

pour  $\omega \in \mathbb{S}$ . Pour le cas longue portée, on doit en fait modifier la phase  $\sqrt{\lambda}r$  qui apparaît dans cette expression. C'est l'objet du lemme suivant.

**Lemme 2.41.** *Il existe une fonction  $\Phi \in C^3(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*)$  telle que pour un compact  $\Lambda$  de  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $\lambda \in \Lambda$  et  $|x| \geq R_\Lambda$  on a :*

$$2\sqrt{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial r}(x, \lambda) = |\nabla_x \Phi(x, \lambda)|^2 + V_L(x).$$

En outre, il existe une constante  $C_\Lambda$  telle que pour  $\lambda \in \Lambda$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  avec  $|\alpha| \leq 3$  on a

$$|\partial_x^\alpha \Phi(x, \lambda)| \leq c \langle x \rangle^{1-|\alpha|-\rho},$$

où  $\rho > 0$  est donné par (2.14).

Ce lemme est démontré dans [Iso80] (voir le lemme 2.1). On pose ensuite

$$\varphi(x, \lambda) = \sqrt{\lambda}|x| - \Phi(x, \lambda) - \frac{\pi(n-3)}{4}.$$

Ainsi définie,  $\varphi$  est solution de l'équation

$$|\nabla_x \varphi(x, \lambda)|^2 + V_L(x) = \lambda$$

pour  $|x| \geq R_\Lambda$ . On considère alors les fonctions :

$$w_\pm(x, \lambda) = |x|^{-\frac{n-1}{2}} e^{\pm i\varphi(x, \lambda)}.$$

On introduit enfin les espaces de Besov. Pour  $s > 0$ , on considère l'espace  $B_s$  des fonctions  $f$  mesurables sur  $\mathbb{R}^n$  telles que

$$\|f\|_{B_s} := \left( \int_{|x| \leq 1} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{j \in \mathbb{N}^*} 2^{js} \left( \int_{2^{j-1} \leq |x| \leq 2^j} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

$B_s^*$  est son espace dual qui, si on identifie  $L^2(\mathbb{R}^n)$  à son espace dual, est constitué des fonctions mesurables  $u$  sur  $\mathbb{R}^n$  telles que :

$$\|u\|_{B_s^*} := \sup_{R \geq 1} \frac{1}{R^s} \left( \int_{B_R} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Pour la suite on notera  $B = B_{1/2}$ ,  $B^* = B_{1/2}^*$  et  $B_0^* \subset B^*$  l'ensemble des fonctions  $r \in B^*$  telles que :

$$\frac{1}{R} \int_{B_R} |r(x)|^2 dx \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

On peut alors montrer le résultat suivant :

**Théorème 2.42.** Soient  $\lambda > 0$  et  $f \in B$ . Alors il existe  $\mathcal{F}_\lambda(f) \in L^2(\mathbb{S})$  et  $r_\lambda, \tilde{r}_\lambda \in B_0^*$  telles que

$$\begin{aligned} (H^* - (\lambda - i0))^{-1}f(x) &= \pi^{1/2}\lambda^{-1/4}\mathcal{F}_\lambda(f)(-\hat{x})w_-(x, \lambda) + r_\lambda(x), \\ \partial_r(H^* - (\lambda - i0))^{-1}f(x) &= -i\pi^{1/2}\lambda^{1/4}\mathcal{F}_\lambda(f)(-\hat{x})w_-(x, \lambda) + \tilde{r}_\lambda(x). \end{aligned}$$

Dans le cas où  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  et  $V_2 = 0$ , ce résultat est démontré dans [Sai79] et [Iso80]. Le théorème 3.4 de [GY99] permet de passer à  $f \in B^*$  et d'ajouter un potentiel de courte portée. C'est démontré pour un potentiel réel, mais la même preuve permet de traiter le cas d'un potentiel complexe, sachant qu'on a déjà montré le principe d'absorption limite.

*Remarque 2.43.* On a également

$$\begin{aligned} (H - (\lambda + i0))^{-1}f(x) &= \pi^{1/2}\lambda^{-1/4}\overline{\mathcal{F}_\lambda(\bar{f})}(-\hat{x})w_+(x, \lambda) + r_\lambda(x), \\ \partial_r(H - (\lambda + i0))^{-1}f(x) &= i\pi^{1/2}\lambda^{1/4}\overline{\mathcal{F}_\lambda(\bar{f})}(-\hat{x})w_+(x, \lambda) + \tilde{r}_\lambda(x), \end{aligned}$$

pour d'autres fonctions  $r_\lambda, \tilde{r}_\lambda \in B_0^*$ .

Pour tout  $\lambda > 0$  cela définit une application

$$\mathcal{F}_\lambda : B^* \rightarrow L^2(\mathbb{S}).$$

## 2.4.2 Solutions de l'équation de Schrödinger homogène

Soit  $\lambda > 0$ . On va maintenant utiliser l'application  $\mathcal{F}_\lambda$  que l'on vient de définir pour étudier les solutions de l'équation de Schrödinger homogène

$$(H - \lambda)u = 0, \tag{2.15}$$

d'inconnue  $u \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n) \cap B^*$ . Plus précisément, notre but dans ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant :

**Théorème 2.44.** (i) Soit  $a_- \in L^2(\mathbb{S})$ . Alors il existe  $a_+ \in L^2(\mathbb{S})$  et une solution  $u \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n) \cap B^*$  pour l'équation (2.15) tels que

$$u(x) = a_+(\hat{x})w_+(x, \lambda) - a_-(\hat{x})w_-(x, \lambda) + r_0(\lambda, x) \tag{2.16}$$

et

$$\partial_r u(x) = i\sqrt{\lambda}(a_+(\hat{x})w_+(x, \lambda) + a_-(\hat{x})w_-(x, \lambda)) + r_1(\lambda, x), \tag{2.17}$$

où  $r_0(\lambda)$  et  $r_1(\lambda)$  sont dans  $B_0^*$ . En outre  $a_+$  et  $u$  sont uniquement déterminés par  $a_-$ .

(ii) Soit  $u \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n) \cap B^*$  une solution de (2.15). Alors il existe  $a_+, a_- \in L^2(\mathbb{S})$  telles que (2.16) et (2.17) sont vérifiées.

(iii) Soient  $u \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n) \cap B^*$  une solution de (2.15) et  $a_+, a_- \in L^2(\mathbb{S})$  telles que (2.16) et (2.17) sont vérifiées. Alors on a :

$$\|a_-\|_{L^2(\mathbb{S})}^2 = \|a_+\|_{L^2(\mathbb{S})}^2 + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{\mathbb{R}^n} V_2(x) |u(x)|^2 dx. \tag{2.18}$$

*Remarque 2.45.* On peut étudier de façon analogue les solutions de l'équation

$$(H^* - E)u = 0.$$

Ce théorème est démontré dans [GY99] dans le cas autoadjoint. On commence par vérifier le dernier point :

Démonstration de (iii). D'après la formule de Green on a :

$$\operatorname{Im} \int_{\mathbb{S}_r} \partial_r u(x) \overline{u(x)} d\sigma_r(x) = \operatorname{Im} \int_{B_r} \Delta u(x) \overline{u(x)} dx = - \int_{B_r} V_2(x) |u(x)|^2 dx. \quad (2.19)$$

D'autre part, comme

$$\begin{aligned} & i \left( \overline{a_+(\hat{x}) a_-(\hat{x}) w_+(x, \lambda) w_-(x, \lambda)} - a_+(\hat{x}) \overline{a_-(\hat{x}) w_+(x, \lambda) w_-(x, \lambda)} \right) \\ &= -2 \operatorname{Im} \overline{a_+(\hat{x}) a_-(\hat{x}) w_+(x, \lambda) w_-(x, \lambda)} \end{aligned}$$

est à valeurs réelles, on a

$$\begin{aligned} & \operatorname{Im} \partial_r u(x) \overline{u(x)} \\ &= \operatorname{Im} i \sqrt{\lambda} (a_+(\hat{x}) w_+(x, \lambda) + a_-(\hat{x}) w_-(x, \lambda)) \left( \overline{a_+(\hat{x}) w_+(x, \lambda)} - \overline{a_-(\hat{x}) w_-(x, \lambda)} \right) + r(x) \\ &= \sqrt{\lambda} |x|^{1-n} \left( |a_+(\hat{x})|^2 - |a_-(\hat{x})|^2 \right) + r(x), \end{aligned}$$

où  $r \in B_0^*$ , et donc :

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \operatorname{Im} \int_{B_R} \partial_r u(x) \overline{u(x)} dx &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \operatorname{Im} \int_{B_R} \sqrt{\lambda} \left( |a_+(\hat{x})|^2 - |a_-(\hat{x})|^2 \right) |x|^{1-n} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^R \int_{\mathbb{S}} \sqrt{\lambda} \left( |a_+(\omega)|^2 - |a_-(\omega)|^2 \right) d\sigma(\omega) dr \\ &= \sqrt{\lambda} \left( \|a_+\|_{L^2(\mathbb{S})}^2 - \|a_-\|_{L^2(\mathbb{S})}^2 \right). \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à voir que d'après le lemme de Cesàro :

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^R \int_{B_r} V_2(x) |u(x)|^2 dx dr &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{B_r} V_2(x) |u(x)|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} V_2(x) |u(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

On remarque que cette intégrale est bien définie du fait que  $V_2$  est à courte portée ( $u \in B^* \subset L^{2, -\alpha}(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $\alpha > \frac{1}{2}$ ).  $\square$

On montre maintenant les points (i) et (ii). On commence par montrer l'unicité pour (i), en vérifiant que pour  $a_- = 0$  les seules fonctions  $a_+ \in L^2(\mathbb{S})$  et  $u \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n) \cap B^*$  vérifiant (2.16) et (2.17) sont les fonctions nulles (voir les propositions 2.46 et 2.47). Pour montrer l'existence, on utilisera l'application  $\mathcal{F}_\lambda^*$  pour associer à toute fonction  $a_- \in L^2(\mathbb{S})$  une solution  $u$  à l'équation (2.15) qui vérifie l'asymptotique attendue pour une certaine fonction  $a_+ \in L^2(\mathbb{S})$ . On explicitera également l'application qui à  $a_-$  associe  $a_+$ . Il s'agira ensuite de vérifier qu'on a bien obtenu par ce procédé toutes les solutions dans  $H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n) \cap B^*$  pour l'équation (2.15).

**Proposition 2.46.** *On suppose que  $u \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n) \cap B_0^*$  est solution de (2.15). Alors  $u = 0$ .*

*Démonstration.* Il existe  $C \geq 0$  telle que pour  $u \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n)$  et  $r > 0$  on a

$$\int_{B_r} |\nabla u|^2 dx \leq C \int_{B_{2r}} (|\Delta u|^2 + |u|^2) dx$$

(voir la preuve du lemme 2.1 de [GY99]). Ici cela prouve que  $\partial_r u \in B_0^*$  et donc :

$$\frac{1}{R} \int_0^R \int_{\mathbb{S}_r} \left( |u(x)|^2 + |\partial_r u(x)|^2 \right) d\sigma_r(x) dr = \frac{1}{R} \int_{B_R} \left( |u(x)|^2 + |\partial_r u(x)|^2 \right) dx \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

Comme l'intégrande est une fonction positive, on en déduit qu'il existe une suite  $(r_m)_{m \in \mathbb{N}}$  qui tend vers  $+\infty$  et telle que :

$$\int_{\mathbb{S}_{r_m}} \left( |u(x)|^2 + |\partial_r u(x)|^2 \right) dx \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0.$$

D'après (2.19) on a alors :

$$\int_{B_{r_m}} V_2(x) |u(x)|^2 dx = -\operatorname{Im} \int_{\mathbb{S}_{r_m}} \partial_r u(x) \bar{u}(x) d\sigma_r(x) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Cela prouve que  $u$  s'annule sur le support de  $V_2$  et est donc solution de l'équation :  $(H_1 - \lambda)u = 0$ . On peut alors, comme on l'a fait pour la démonstration de la proposition 2.31, utiliser la proposition 2.30 pour conclure que  $u = 0$ .  $\square$

**Proposition 2.47.** *On suppose que  $u \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n) \cap B^*$  est solution de (2.15) et qu'il existe  $a \in L^2(\mathbb{S})$  et  $r, \tilde{r} \in B_0^*$  telles que*

$$u(x) = a(\hat{x})w_+(x, \lambda) + r(x) \quad \text{et} \quad \partial_r u(x) = i\sqrt{\lambda}a(\hat{x})w_+(x, \lambda) + \tilde{r}(x).$$

Alors  $u = 0$ .

*Démonstration.* Les hypothèses du point (iv) du théorème 2.44 sont vérifiées avec  $a_+ = a$  et  $a_- = 0$ . Ainsi, le membre de gauche de (2.18) est nul. Comme les deux termes du membre de droite sont positifs, ils sont nuls. En particulier  $a = a_+ = 0$ . Du coup  $u = r \in B_0^*$  et donc, d'après la proposition 2.46,  $u = 0$ .  $\square$

On montre maintenant que l'application  $\mathcal{F}_\lambda$  donnée par le théorème 2.44 est continue de  $B$  dans  $L^2(\mathbb{S})$ .

**Proposition 2.48.** *Soit  $f \in B$ . On a :*

$$\begin{aligned} & \langle (H - (\lambda + i0))^{-1} f, f \rangle - \langle (H^* - (\lambda - i0))^{-1} f, f \rangle \\ &= 2i\pi \int_{\mathbb{S}} |\mathcal{F}_\lambda f(\omega)|^2 d\omega + 2i \int_{\mathbb{R}^n} V_2(x) |(H^* - (\lambda - i0))^{-1} f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

*Démonstration.* On note  $v = (H^* - (\lambda - i0))^{-1} f$ . On a alors

$$\begin{aligned} \int_{B_r} (f\bar{v} - v\bar{f}) dx &= \int_{B_r} (-\bar{v}\Delta v + v\Delta\bar{v}) dx + 2i \int_{B_r} V_2(x) |v(x)|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{S}_r} (-\bar{v}\partial_r v + v\partial_r\bar{v}) d\sigma_r(x) + 2i \int_{B_r} V_2(x) |v(x)|^2 dx \\ &= 2i\pi \int_{\mathbb{S}_r} |\mathcal{F}_\lambda(f)(-\hat{x})|^2 |x|^{1-n} d\sigma_r(x) + 2i \int_{B_r} V_2(x) |v(x)|^2 dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{S}_r} (-\bar{r}_\lambda \tilde{r}_\lambda + r_\lambda \bar{\tilde{r}}_\lambda) d\sigma_r(x), \end{aligned}$$

où  $r_\lambda$  et  $\tilde{r}_\lambda \in B_0^*$  sont données au théorème 2.42. En faisant tendre  $r$  vers  $+\infty$  selon une sous-suite  $(r_m)_{m \in \mathbb{N}}$  bien choisie (ie. telle que le dernier terme tend vers 0), on obtient bien l'égalité attendue.  $\square$

**Corollaire 2.49.** *L'application*

$$\mathcal{F}_\lambda : B \rightarrow L^2(\mathbb{S})$$

*est continue. Ainsi son adjoint  $\mathcal{F}_\lambda^*$  définit un opérateur borné de  $L^2(\mathbb{S})$  dans  $B^*$ .*

*Démonstration.* Cela résulte de ce que  $(H - (\lambda + i0))^{-1}$  et  $(H^* - (\lambda - i0))^{-1}$  sont continues de  $B$  dans  $B^*$  et  $\sqrt{V_2}$  est continue de  $B^*$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .  $\square$

On considère une fonction  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  nulle au voisinage de 0 et égale à 1 hors d'un compact de  $\mathbb{R}^n$ . Pour  $a \in C^\infty(\mathbb{S})$  on note

$$u_a(x, \lambda) = \chi(x)a(-\hat{x})w_-(x, \lambda) \quad \text{et} \quad G_\lambda a = (H - \lambda)u_a(\lambda). \quad (2.20)$$

On a alors :

$$\partial_r u_a(x, \lambda) = -i\sqrt{\lambda}u_a(x, \lambda) + \underset{|x| \rightarrow \infty}{o} \left( |x|^{-\frac{n-1}{2}-\rho} \right), \quad (2.21)$$

où  $\rho > 0$  est donné par (2.14). Le corollaire 2.49 assure qu'on peut considérer la fonction  $\mathcal{F}_\lambda^* a$ . On montre alors :

**Proposition 2.50.** *On a :*

$$-2i\pi^{1/2}\lambda^{1/4}\mathcal{F}_\lambda^* a = u_a - (H - (\lambda + i0))^{-1}G_\lambda a.$$

*Démonstration.* Il suffit de montrer que pour tout  $f \in B$  on a

$$\langle u, f \rangle - \langle G_\lambda a, (H^* - (\lambda - i0))^{-1}f \rangle = -2i\pi^{1/2}\lambda^{1/4} \langle a, \mathcal{F}_\lambda f \rangle. \quad (2.22)$$

Le calcul est le même que pour la proposition 3.6 de [GY99].  $\square$

De cette proposition on obtient immédiatement le fait que  $\mathcal{F}_\lambda^* a$  fournit bien une solution pour l'équation (2.15) :

**Corollaire 2.51.** *Pour tout  $a \in C^\infty(\mathbb{S})$  la fonction  $\mathcal{F}_\lambda^* a$  est dans  $H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n) \cap B^*$  et vérifie :*

$$(H - \lambda)\mathcal{F}_\lambda^* a = 0.$$

Comme  $\mathcal{F}_\lambda^*$  est un opérateur borné, on va pouvoir étendre ce résultat pour toute fonction  $a \in L^2(\mathbb{S})$  :

**Proposition 2.52.** *Les opérateurs  $\Delta\mathcal{F}_\lambda^*$  et  $\nabla\mathcal{F}_\lambda^*$ , bien définis sur  $C^\infty(\mathbb{S})$ , s'étendent en des opérateurs bornés de  $L^2(\mathbb{S})$  dans  $B^*$ . En outre, pour tout  $a \in L^2(\mathbb{S})$  la fonction  $\mathcal{F}_\lambda^* a$  (qui est donc dans  $H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n) \cap B^*$ ) est solution de l'équation (2.15).*

A ce stade on a donc une application qui à toute fonction  $a \in L^2(\mathbb{S})$  associe une solution  $u$  pour (2.15). Il nous faut encore vérifier que cette solution a bien une asymptotique comme attendu et que ce procédé permet bien d'obtenir toutes les solutions de (2.15) dans l'espace  $H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n) \cap B^*$ . Pour ce deuxième point, on va utiliser le résultat d'analyse fonctionnelle suivant (voir par exemple [Yos78, § VII.5]) :

**Proposition 2.53.** *Soit  $\mathcal{F} : B \rightarrow L^2(\mathbb{S})$  un opérateur borné. On suppose que l'image  $\text{Im } \mathcal{F}^*$  de son adjoint  $\mathcal{F}^* : L^2(\mathbb{S}) \rightarrow B^*$  est fermée. Alors pour tout  $u \in B^*$  on a*

$$u \in \text{Im } \mathcal{F}^* \iff \forall f \in \ker(\mathcal{F}), \langle u, f \rangle = 0.$$

On montrera que l'image de  $\mathcal{F}_\lambda^*$  est fermée lorsqu'on aura l'asymptotique de  $\mathcal{F}_\lambda^* a$ . Par contre on peut déjà prouver l'autre point :

**Lemme 2.54.** *Soit  $u \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n) \cap B^*$  solution de (2.15). Alors pour tout  $f \in B$  tel que  $\mathcal{F}_\lambda f = 0$  on a :  $\langle u, f \rangle = 0$ .*

*Démonstration.* D'après le corollaire 2.2 de [GY99], on a  $\partial_r u \in B^*$ . Soit  $f \in B$  tel que  $\mathcal{F}_\lambda f = 0$ . D'après le théorème 2.42, si  $v = (H^* - (\lambda - i0))^{-1}f$  on a  $v, \partial_r v \in B_0^*$ , et donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient :

$$\frac{1}{r} \int_{B_r} (\partial_r u \cdot \bar{v} - u \cdot \overline{\partial_r v(x)}) dx \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$



Il existe donc une suite  $(r_m)_{m \in \mathbb{N}}$  qui tend vers  $+\infty$  et telle que

$$\int_{\mathbb{S}_{r_m}} (\partial_r u \bar{v} - u \overline{\partial_r v(x)}) d\sigma_{r_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

et on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \langle u, f \rangle &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{B_{r_m}} u \bar{f} dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{B_{r_m}} u \overline{(H^* - \lambda)v} dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{B_{r_m}} u (H - \lambda) \bar{v} dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{B_{r_m}} (H - \lambda) u \bar{v} dx + \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{S}_{r_m}} (\partial_r u \bar{v} - u \overline{\partial_r v(x)}) d\sigma_{r_m} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

On s'intéresse maintenant à l'asymptotique de  $\mathcal{F}_\lambda^* a$ . On note  $J$  la conjugaison complexe et  $\mathcal{T} : a \mapsto (\omega \mapsto a(-\omega))$  l'opérateur de réflexion sur la sphère. On note :

$$\Sigma_+(\lambda) = \pi^{1/2} \lambda^{1/4} J \mathcal{T} \mathcal{F}_\lambda J G_\lambda \mathcal{T} : C^\infty(\mathbb{S}) \rightarrow L^2(\mathbb{S}).$$

**Proposition 2.55.** *L'opérateur  $\Sigma_+(\lambda)$  se prolonge par continuité en un opérateur borné sur  $L^2(\mathbb{S})$ . En outre :*

(i) *Pour  $a_- \in L^2(\mathbb{S})$  la fonction  $u = \mathcal{F}_\lambda^* \mathcal{T} a_-$  vérifie :*

$$\begin{aligned} u(x) &= \beta_\lambda ((\Sigma_+(\lambda) a_-)(\hat{x}) w_+(x, \lambda) - a_-(\hat{x}) w_-(x, \lambda)) + r(x), \\ \partial_r u(x) &= i \lambda^{1/2} \beta_\lambda ((\Sigma_+(\lambda) a_-)(\hat{x}) w_+(x, \lambda) + a_-(\hat{x}) w_-(x, \lambda)) + \tilde{r}(x), \end{aligned} \quad (2.23)$$

où  $\beta_\lambda = (2i\pi^{1/2} \lambda^{1/4})^{-1}$  et  $r, \tilde{r} \in B_0^*$ .

(ii) *Pour tout  $a_- \in L^2(\mathbb{S})$  on a :*

$$\|\Sigma_+(\lambda) a_-\|_{L^2(\mathbb{S})}^2 = \|a_-\|_{L^2(\mathbb{S})}^2 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left\| \sqrt{V_2} \mathcal{F}_\lambda^* a_- \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

*Démonstration.* (i) Pour  $a_- \in C^\infty(\mathbb{S})$  on a d'après la proposition 2.50 et la remarque 2.43 :

$$\begin{aligned} u(x) &= (\mathcal{F}_\lambda^* \mathcal{T} a_-)(x) \\ &= -\beta_\lambda (u \mathcal{T} a_-(x) - ((H - (\lambda + i0))^{-1} G_\lambda \mathcal{T} a_-)(x)) \\ &= -\beta_\lambda \left( a_-(\hat{x}) w_-(x, \lambda) \chi(x) - \pi^{1/2} \lambda^{-1/4} (J \mathcal{T} \mathcal{F}_\lambda J G_\lambda \mathcal{T} a_-)(x) w_+(x, \lambda) \right) + r(x) \\ &= -\beta_\lambda (a_-(\hat{x}) w_-(x, \lambda) - (\Sigma_+ a_-)(\hat{x}) w_+(x, \lambda)) + r(x), \end{aligned}$$

où  $r \in B_0^*$ . On obtient de façon analogue l'expression pour  $\partial_r u$ . Comme les opérateurs  $\mathcal{F}_\lambda$ ,  $\partial_r \mathcal{F}_\lambda^*$  et  $\Sigma_+(\lambda)$  sont bornés sur  $L^2(\mathbb{S})$  on peut prolonger ces égalités pour  $a_- \in L^2(\mathbb{S})$ .

(ii) Le second point résulte du fait que  $u$  est solution de (2.15) (d'après le corollaire 2.51) et de (2.18). □

Ce résultat assure donc l'existence pour le point (i) du théorème 2.44. Il nous permet en outre de montrer que l'image de  $\mathcal{F}_\lambda^*$  est fermée :

**Proposition 2.56.** *Pour  $a_- \in L^2(\mathbb{S})$  on a :*

$$\frac{1}{r} \int_{B_r} |(\mathcal{F}_\lambda^* a_-)(x)|^2 dx \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{4\pi\sqrt{\lambda}} \left( \|a_-\|_{L^2(\mathbb{S})}^2 + \|\Sigma_+(\lambda) \mathcal{T} a_-\|_{L^2(\mathbb{S})}^2 \right).$$

Cela implique que  $\mathcal{F}_\lambda^* : L^2(\mathbb{S}) \rightarrow B^*$  est une application continue, injective et d'image fermée.

*Démonstration.* D'après (2.23) on a :

$$\begin{aligned} \frac{4\pi\sqrt{\lambda}}{R} \int_{B_R} |(\mathcal{F}_\lambda^* a_-)(x)|^2 dx &= \|\mathcal{T}a_-\|_{L^2(\mathbb{S})}^2 + \|\Sigma_+(\lambda)\mathcal{T}a_-\|_{L^2(\mathbb{S})}^2 \\ &\quad - \frac{2}{R} \operatorname{Re} \left( \int_{\mathbb{S}} (\Sigma_+(\lambda)\mathcal{T}a_-)(\omega) \bar{a}_-(-\omega) \int_0^R e^{2i\varphi(r\omega, \lambda)} dr d\omega \right). \end{aligned}$$

On a

$$\partial_r(\varphi(r\omega, \lambda)) = \sqrt{\lambda} + \nabla_x \Phi(r\omega, \lambda) \cdot \omega = \sqrt{\lambda} + O(r^{-\rho}),$$

où le reste est uniforme en  $\omega$ , donc pour  $R_0$  assez grand :

$$\frac{1}{R} \int_0^R e^{\mp 2i\varphi(r\omega, \lambda)} dr = \frac{1}{R} \int_0^{R_0} e^{2i\varphi(r\omega, \lambda)} dr + \frac{1}{R} \left[ \frac{e^{2i\varphi(r\omega, \lambda)}}{2i\partial_r(\varphi(r\omega, \lambda))} \right]_{R_0}^R \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

uniformément en  $\omega$ . Cela prouve la première assertion. On en déduit que pour  $a_- \in L^2(\mathbb{S})$  on a

$$\|\mathcal{F}_\lambda^* a_-\|_{B^*}^2 \geq \frac{1}{4\pi\sqrt{\lambda}} \|a_-\|_{L^2(\mathbb{S})}^2,$$

ce qui permet de conclure.  $\square$

On a maintenant tout ce dont on a besoin pour utiliser la proposition 2.53, et on obtient que toute solution  $u \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n) \cap B^*$  pour l'équation (2.15) est dans l'image de  $\mathcal{F}_\lambda^*$ , ce qui prouve le deuxième point du théorème 2.44.

On remarque enfin qu'on peut améliorer le résultat d'unicité (proposition 2.47) en ne demandant pas la condition sur la dérivée radiale. En effet, si  $u$  est une solution de (2.15) de la forme  $u(x) = a_+(\hat{x})w_+(x, \lambda) + r$  avec  $r \in B_0^*$ , et sachant que  $u = \mathcal{F}_\lambda^*(a_-)$  pour un certain  $a_- \in L^2(\mathbb{S})$ , on a forcément  $a_- = 0$ , puis  $a_+ = \Sigma_+(\lambda)a_- = 0$ . La proposition 2.46 montre alors que  $u = 0$ .



## Chapitre 3

# Approche semi-classique du problème

Pour étudier la solution de l'équation de Helmholtz, et plus généralement les propriétés de l'opérateur de Schrödinger

$$H_h = -h^2\Delta + V_1(x) - ihV_2(x), \quad (3.1)$$

on a expliqué en introduction que plutôt que de regarder directement la solution du problème pour une certaine (haute) fréquence fixée, on considère cette fréquence comme un paramètre, on la fait tendre vers  $+\infty$  (autrement dit on fait tendre la longueur d'onde vers 0), et on s'intéresse à l'asymptotique pour la famille de solutions obtenue qui s'avère être plus simple à décrire.

Ce type de question est apparu avec la mécanique quantique. En effet, le mouvement d'une particule quantique de masse  $m$  dans un champ de force dérivant d'un potentiel  $V_1$  est décrit par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\partial_t\psi(t, x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_x\psi(t, x) + V_1(x)\psi(t, x), \quad (3.2)$$

où  $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R}^3)$  désigne la fonction d'onde de la particule. On remarque qu'en prenant un coefficient d'amortissement nul dans notre équation de Helmholtz, on retrouve exactement le même opérateur de Schrödinger. Pour décrire le mouvement d'une particule, on disposait alors d'un modèle *a priori* plus simple, à savoir les équations de Newton de la mécanique classique :

$$m\partial_t^2x(t) = -\nabla V_1(x(t)), \quad (3.3)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^3$  est la position de la particule. Ce modèle, contredit par les expériences à l'échelle atomique, était manifestement valable à l'échelle humaine. Étant donnée la valeur de la constante de Planck ( $\hbar \simeq 1,05 \cdot 10^{-34} J.s$ ), cela suggère que l'on doit retrouver le modèle classique lorsqu'on prend la limite  $\hbar \rightarrow 0$  dans le modèle quantique. C'est le principe de correspondance de Bohr.

Ce passage à la limite n'a rien de trivial. Les deux modèles sont d'ailleurs par nature très différents. L'équation de Newton est purement corpusculaire. L'état d'une particule est la donnée de sa position  $x \in \mathbb{R}^3$  et de sa quantité de mouvement  $\xi \in \mathbb{R}^3$ . On peut alors décrire l'évolution de cet état au cours du temps grâce à l'équation (3.2) (avec  $\xi(t) = m\partial_t x(t)$  et les conditions initiales données par l'état au temps  $t = 0$ ). Les observables (grandeurs physiques que l'on peut mesurer) sont alors des fonctions  $a(x, \xi)$  sur l'espace des phases  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  et à valeurs réelles. En mécanique quantique, l'état d'une particule est donné par une fonction

d'onde  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$  de norme 1. Le carré du module  $|\psi|^2$  s'interprète alors comme la densité de probabilité de présence pour la particule. Une observable est donnée par un opérateur autoadjoint  $A$  (non nécessairement borné) sur  $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ . Comme on n'a qu'une densité de probabilité pour la position de la particule, on n'a qu'une espérance pour la valeur de l'observable, donnée par  $\langle A\psi, \psi \rangle$ .

Pour établir une correspondance entre les deux modèles, il faut donc associer de façon raisonnable un opérateur  $A = \text{Op}(a)$  autoadjoint sur  $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$  à une observable  $a : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Il est naturel d'associer à l'observable  $(x, \xi) \mapsto x_i$  l'opérateur de multiplication par  $x_i$  sur  $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$  (qu'on note  $X_i$ ), car si la fonction d'onde  $\psi$  est concentrée près de l'hyperplan  $x_i = y$  avec  $y \in \mathbb{R}$ , la valeur moyenne  $\langle X_i \psi, \psi \rangle$  doit être proche de  $y$ . À l'observable  $(x, \xi) \mapsto \xi_i$  on associera de même<sup>1</sup> l'opérateur  $-i\hbar\partial_{x_i}$ .

Une fois qu'on a les opérateurs associés aux coordonnées, on souhaiterait que les liens entre les différentes observables se retrouvent au niveau des opérateurs associés. Il serait par exemple très agréable que le procédé de quantification  $\text{Op}$  vérifie toutes les bonnes propriétés du calcul fonctionnel que l'on sait définir pour un opérateur autoadjoint (voir par exemple le théorème VII.1 de [RS79a]). Il est facile de voir que c'est malheureusement impossible, puisque cela impliquerait en particulier que pour deux observables  $a$  et  $b$  les deux opérateurs  $\text{Op}(a)$  et  $\text{Op}(b)$  doivent commuter, ce qui n'est déjà pas le cas pour les opérateurs  $X_i$  et  $-i\hbar\partial_{x_j}$ . On remarque tout de même que le commutateur est la multiplication par  $-i\hbar\delta_{i,j}$ , et que cet opérateur devient petit quand  $\hbar$  tend vers 0. On peut donc espérer que le procédé de quantification vérifie « presque » toutes les bonnes propriétés que l'on attend. L'objet de la section 3.1 sera de définir les différents procédés de quantifications que l'on va utiliser et rappeler brièvement les propriétés effectivement vérifiées.

On trouvera des exposés plus complets et des démonstrations dans les références suivantes : [Rob87], [DS99], [Mar02], [Ler10] ainsi que le cours [Eva98]. Pour une introduction rapide aux idées de l'analyse semi-classique, on pourra consulter [Vor88] et [Col98]. Enfin, on trouvera une bonne présentation de la mécanique quantique dans [Mes95].

Outre ces rappels, on décrit en détail certains points de dynamique classique dont on aura besoin pour bien comprendre l'asymptotique de la solution  $u_h$ . En particulier, puisqu'on a l'intention de s'affranchir de l'hypothèse de non-capture, il y aura des précisions à donner sur les trajectoires du flot hamiltonien classique associé à notre problème. On verra également quelles sont les conséquences de l'hypothèse d'amortissement sur les trajectoires captées.

On redonnera ensuite une version du théorème d'Egorov adaptée à notre situation. Ce théorème fait le lien entre évolution classique et évolution quantique. On verra comment intervient l'indice d'absorption dans cette correspondance. On verra ensuite comment écrire le propagateur de Schrödinger comme un opérateur de Fourier intégral. On donnera à nouveau

1. Pour le voir il faut passer dans l'espace de Fourier. Une onde  $\psi(0)$  peut s'écrire comme superposition d'ondes planes :

$$\psi(0, x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{i}{\hbar}x \cdot \xi} (\mathcal{F}_h \psi(0))(\xi) d\xi,$$

où  $\mathcal{F}_h$  désigne la transformée de Fourier semi-classique, voir (3.5). La solution correspondante pour l'équation de Schrödinger dans le vide est alors donnée par :

$$\psi(t, x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{i}{\hbar} \left( x \cdot \xi - \frac{t\xi^2}{m} \right)} (\mathcal{F}_h \psi(0))(\xi) d\xi.$$

Pour chaque  $\xi \in \mathbb{R}^3$ ,  $x \mapsto e^{\frac{i}{\hbar} \left( x \cdot \xi - \frac{t\xi^2}{m} \right)}$  est une onde plane progressant à vitesse  $\xi/m$ . Donc  $\xi$  correspond à la quantité de mouvement. Ainsi, au facteur de normalisation près,  $\mathcal{F}_h \psi(0)$  correspond à la densité de probabilité pour la quantité de mouvement, et sa valeur moyenne est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int_{\mathbb{R}^3} \xi (\mathcal{F}_h \psi(0))(\xi) \overline{(\mathcal{F}_h \psi(0))(\xi)} d\xi &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{F}_h(-i\hbar\nabla_x \psi(0))(\xi) \overline{(\mathcal{F}_h \psi(0))(\xi)} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} (-i\hbar\nabla_x) \psi(0)(\xi) \overline{\psi(0)(\xi)} d\xi. \end{aligned}$$

une démonstration complète pour voir ce qu'il advient de  $V_2$ .

### 3.1 Quelques techniques semi-classiques - Calcul pseudo-différentiel

#### 3.1.1 Obtenir un développement asymptotique pour la limite $h \rightarrow 0$

Pour obtenir des développements asymptotiques de quantités dépendant du petit paramètre  $h$  on utilisera de façon régulière le théorème de la phase stationnaire. Ce résultat donne un développement asymptotique pour des intégrales oscillantes de la forme

$$I_h = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\psi(x)} a(x) dx,$$

avec  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  et  $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . Il convient d'abord de remarquer que si  $\nabla\psi(x_0) \neq 0$  alors le facteur de phase oscille très rapidement en espace, et la moyenne de l'intégrande devient nulle autour de  $x_0$  lorsque  $h$  devient petit.

**Proposition 3.1** (Phase non-stationnaire). *On suppose que  $\nabla\psi$  ne s'annule pas sur le support de  $a$ . Alors on a :*

$$I_h = O_{h \rightarrow 0}(h^\infty).$$

*Remarque 3.2.* Cela signifie que  $I_h = O(h^N)$  pour tout  $N \in \mathbb{N}$ . Ici on a plus précisément

$$|I_h| \leq Ch^N \sum_{|\alpha| \leq N} \|\partial^\alpha a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

où  $C$  ne dépend que de  $\text{supp } a$  et de la dimension  $n$ .

Si  $\nabla\psi(x_0) = 0$ , alors les oscillations spatiales sont plus lentes. Notant  $\text{Hess } \psi(x_0)$  la matrice hessienne de  $\psi$  au point  $x_0$ , on a dans ce cas :

**Théorème 3.3** (Phase stationnaire). *On suppose que  $x_0 \in \text{supp } a$  est tel que  $\nabla\psi(x_0) = 0$  et  $\det \text{Hess } \psi(x_0) \neq 0$  ( $x_0$  est un point critique non dégénéré), et qu'en outre  $\nabla\psi$  ne s'annule pas sur  $\text{supp } a \setminus \{x_0\}$ . Alors il existe une famille  $(A_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$  d'opérateurs différentiels tel que  $A_{2k}$  est d'ordre  $2k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , et pour tout  $N \in \mathbb{N}$  :*

$$\left| I_h - e^{\frac{i}{h}\psi(x_0)} \sum_{k=0}^{N-1} h^{k+\frac{n}{2}} (A_{2k}a)(x_0) \right| \leq C_N h^{N+\frac{n}{2}} \sum_{|\alpha| \leq 2N+n+1} \|\partial^\alpha a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

*En particulier on a :*

$$I_h = (2\pi h)^{\frac{n}{2}} \frac{e^{\frac{i\pi}{4} \text{sgn } \text{Hess } \psi(x_0)}}{|\det \text{Hess } \psi(x_0)|^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{i}{h}\psi(x_0)} a(x_0) + O_{h \rightarrow 0}(h^{\frac{n}{2}+1}),$$

où  $\text{sgn } \text{Hess } \psi(x_0)$  désigne la signature de la matrice  $\text{Hess } \psi(x_0)$ , soit le nombre de valeurs propres positives auquel on retranche le nombre de valeurs propres négatives.

On note que par partition de l'unité, on peut traiter le cas où la phase admet un nombre fini de points critiques non dégénérés (nécessairement isolés) sur le support de  $a$ . On renvoie par exemple à [EZ] pour une démonstration de ces résultats.

On utilisera également dans ce travail la méthode B.K.W. (pour Brillouin-Kramers-Wentzel, W.K.B. en anglais). Il s'agit de chercher la solution d'une équation sous la forme  $e^{\frac{i}{h}\varphi} \sum_{j=0}^{\infty} h^j a_j$ . En injectant ce développement dans l'équation, on obtiendra une équation de Hamilton-Jacobi sur  $\varphi$  et des équations de transport sur les amplitudes  $a_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Les calculs seront détaillés dans les paragraphes 3.3.3 et 6.2.3. On pourra également consulter [Mes95, Vor88] pour l'origine de cette méthode.

### 3.1.2 Quantifications usuelles

Les opérateurs pseudo-différentiels ont été introduits pour l'étude des équations aux dérivées partielles comme généralisation des opérateurs différentiels. Soit  $P$  un opérateur de la forme

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (-i\partial)^\alpha$$

où  $m \in \mathbb{N}$  et  $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $\alpha$ . Puisque la dérivation en  $x$  agit comme multiplication dans l'espace de Fourier, on peut écrire pour  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  :

$$(Pu)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} a(x, \xi) u(y) dy d\xi, \quad (3.4)$$

avec

$$a : (x, \xi) \mapsto \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

On dira alors que  $a$  est le symbole de  $P$ . L'intérêt de cette écriture est qu'elle est généralisable pour une classe de fonctions  $a$  qui ne sont pas des polynômes en  $\xi$ , par exemple pour  $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ . Cela définit alors de nouveaux opérateurs, dits pseudo-différentiels. Ces opérateurs ont été introduits pour l'étude des singularités des solutions d'équations aux dérivées partielles (voir par exemple la série [Hör84]), mais peuvent être utilisés dans de nombreux autres domaines. Il est en particulier rapidement apparu que ces opérateurs seraient utiles pour faire le lien entre mécanique classique et mécanique quantique, et plus généralement pour étudier les équations aux dérivées partielles avec petit paramètre. En effet, puisqu'on a déjà associé à la variable  $x$  l'opérateur de multiplication par  $x$  et à la variable  $\xi$  l'opérateur de dérivation  $-ih\nabla$ , on voudrait associer à toute observable  $a$  un opérateur comme défini par (3.4).

Remarquons tout de même que dans le cadre semi-classique on n'appliquera l'opérateur non pas à une fonction  $u$  mais à une famille de fonctions  $(u_h)$  pour  $h > 0$  petit, et que la transformée de Fourier de  $u_h$  est typiquement concentrée sur des fréquences d'ordre  $h^{-1}$ . Plutôt que d'avoir des transformées de Fourier dont la « masse » part à l'infini, il est préférable d'effectuer un changement d'échelle et de considérer une transformation de Fourier qui se focalise sur les fréquences d'ordre  $h^{-1}$  :

$$\mathcal{F}_h u : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{i}{h}\langle y, \xi \rangle} u(y) dy. \quad (3.5)$$

Son inverse est alors défini par :

$$\mathcal{F}_h^{-1} v : x \mapsto \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\langle x, \xi \rangle} \mathcal{F}_h v(\xi) d\xi.$$

On peut ensuite définir l'opérateur pseudo-différentiel associé à l'observable  $a : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$  par :

$$\text{Op}_h(a)u(x) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\langle x-y, \xi \rangle} a(x, \xi) u(y) dy d\xi. \quad (3.6)$$

L'application  $\text{Op}_h$  est donc bien une application qui à une observable associe un opérateur, sur un espace à déterminer. On l'appellera *quantification standard*. Pour ne pas prendre de risque, on peut dire pour le moment que  $a$  et  $u$  sont des fonctions à décroissance rapide, mais on voudrait bien sûr que la quantification soit définie pour une classe plus large d'observables (contenant au moins les polynômes en  $\xi$ , afin que les opérateurs pseudo-différentiels soient bien une généralisation des opérateurs différentiels) et que l'opérateur  $\text{Op}_h(a)$  obtenu soit défini sur un espace plus grand que  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  (typiquement  $L^2(\mathbb{R}^n)$ ).

L'un des premiers problèmes que l'on rencontre avec cette quantification est qu'elle définit des opérateurs qui ne sont pas autoadjoints, même si  $a$  est à valeurs réelles. C'est particulièrement ennuyeux en mécanique quantique, dont l'un des postulats de base est qu'à chaque observable classique on peut associer un opérateur autoadjoint sur  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , mais on appréciera également dans les autres contextes de pouvoir travailler avec des opérateurs autoadjoints. On définit alors un autre procédé de quantification, appelé *quantification de Weyl*, par la formule :

$$\text{Op}_h^w(a)u(x) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\langle x-y, \xi \rangle} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi. \quad (3.7)$$

Une fois qu'on aura interprété les opérateurs pseudo-différentiels comme des opérateurs sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , on pourra vérifier que l'opérateur  $\text{Op}_h^w(a)$  est autoadjoint si  $a$  est à valeurs réelles. On sera tout de même amené à utiliser la quantification standard, plus facile à manipuler. Il existe d'autres quantifications qui vérifient également les propriétés de base qu'on va expliciter maintenant. Chacune a un intérêt, aucune n'aura à la fois tous les avantages. En particulier les deux exemples précédents sont les cas particuliers pour  $t = 0$  et  $t = \frac{1}{2}$  de la quantification :

$$\text{Op}_h^t(a)u(x) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\langle x-y, \xi \rangle} a((1-t)x + ty, \xi) u(y) dy d\xi.$$

Pour pouvoir profiter des différents avantages de ces opérateurs, il sera intéressant de voir qu'on peut passer d'une quantification à une autre (voir la proposition 3.14).

### 3.1.3 Classes de symboles

On introduit maintenant des classes de symboles plus larges que  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  pour lesquelles on pourra donner un sens aux définitions (3.6) et (3.7).

**Définition.** On appellera fonction d'ordre sur  $\mathbb{R}^{2n}$  une application  $m : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  pour laquelle on peut trouver deux constantes  $C$  et  $N$  telles que :

$$\forall w_1, w_2 \in \mathbb{R}^{2n}, \quad m(w_1) \leq C \langle w_1 - w_2 \rangle^N m(w_2).$$

En fixant  $w_2$  on remarque déjà que les fonctions d'ordre sont à croissance au plus polynomiale. Étant donnée une fonction d'ordre  $m$  on note :

$$\mathcal{S}(m) = \left\{ a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \exists c_{\alpha, \beta} \geq 0, \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi) \right| \leq c_{\alpha, \beta} m(x, \xi) \right\}.$$

L'espace  $\mathcal{S}(m)$  est un espace de Fréchet pour les semi-normes

$$|a|_k = \inf \left\{ c \geq 0 \mid \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi) \right| \leq c m(x, \xi) \text{ pour } |\alpha| + |\beta| \leq k \text{ et } (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} \right\}.$$

On observe qu'en prenant pour  $m$  les fonctions  $(x, \xi) \mapsto \langle \xi \rangle^N$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , on inclut les symboles correspondant aux opérateurs différentiels.

Outre  $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  et  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ , les classes de symboles qu'on utilisera le plus souvent dans ce travail sont

$$C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n}) = \mathcal{S}(1)$$

et, pour  $\delta \in \mathbb{R}$  :

$$\mathcal{S}_\delta(\mathbb{R}^{2n}) = \left\{ a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \exists c_{\alpha, \beta}, \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi) \right| \leq c_{\alpha, \beta} \langle x \rangle^{\delta - |\alpha|} \right\}.$$

On note que  $\mathcal{S}_\delta(\mathbb{R}^{2n}) \subset \mathcal{S}(\langle x \rangle^\delta)$  pour tout  $\delta \in \mathbb{R}$  et  $\mathcal{S}_\delta(\mathbb{R}^{2n}) \subset C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  pour  $\delta \leq 0$ .



Il est bien sûr possible de définir de nombreuses autres classes de symboles, chacune étant plus ou moins adaptée aux différents contextes dans lesquels on pourra utiliser le calcul pseudo-différentiel. Une classe couramment utilisée est celle définie comme  $\mathcal{S}_\delta(\mathbb{R}^{2n})$  en inversant les rôles de  $x$  et  $\xi$  (on gagne des puissances de  $\langle \xi \rangle^{-1}$  en dérivant par rapport à  $\xi$ ). Cette classe de symboles à l'avantage d'être invariante par changement de variables, ce qui est par exemple indispensable pour travailler sur des variétés. On n'introduira pas ces symboles ici car on ne travaillera que sur  $\mathbb{R}^n$ . Il arrivera néanmoins qu'on ait à utiliser des symboles qui ont de la décroissance à l'infini par rapport à la variable  $\xi$ .

On peut également avoir à travailler avec des symboles dépendant de  $h$  et tels que chaque dérivation fait apparaître une puissance négative de  $h$ . Cela pose problème pour tous les développements asymptotiques dont les termes de restes font intervenir les dérivées du symbole (par exemple le théorème 3.9). Là encore on ne sera pas vraiment concerné par le problème puisqu'on a introduit des classes de symboles ne dépendant pas du paramètre  $h$ .

On utilisera tout de même des symboles dits « classiques ». Étant donnée une fonction d'ordre  $m$  ce sont des symboles  $a(h)$  appartenant à  $\mathcal{S}(m)$  pour tout  $h \in ]0, 1]$  et tels que

$$a(h) \sim \sum_{j \in \mathbb{N}} h^j a_j,$$

où  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$  est une suite de symboles de  $\mathcal{S}(m)$ . Cette écriture signifie que pour tout  $N \in \mathbb{N}$  on a

$$a(h) = \sum_{j=0}^N h^j a_j + O_{h \rightarrow 0}(h^{N+1}),$$

où le reste est estimé dans  $\mathcal{S}(m)$ . Inversement, on a le résultat suivant (théorème 4.16 dans [EZ]) :

**Théorème 3.4** (Borel). *Soit  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$  une suite de symboles de  $\mathcal{S}(m)$  où  $m$  est une fonction d'ordre. Alors il existe  $a(h)$  appartenant à  $\mathcal{S}(m)$  pour tout  $h \in ]0, 1]$  et tel que  $a(h) \sim \sum_{j=0}^{\infty} h^j a_j$ .*

Revenons maintenant aux formules de quantification. Les expressions (3.6) et (3.7) n'ont pas de sens pour  $a$  dans les classes de symboles  $C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  ou  $\mathcal{S}_\delta(\mathbb{R}^{2n})$  avec  $\delta \in \mathbb{R}$ , et ce même pour  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Pour définir  $\text{Op}_h(a)$  et  $\text{Op}_h^w(a)$  on utilise la méthode dite des « intégrales oscillantes ». Cela consiste à considérer dans un premier temps que  $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ , à faire des intégrations par parties jusqu'à obtenir une expression qui sera encore valable pour  $a$  dans une classe de symboles plus générale, puis de prendre cette expression comme définition pour  $\text{Op}_h(a)$  et  $\text{Op}_h^w(a)$  (voir [EZ, Mar02] pour plus de détails, ou [Rob87] pour une présentation très légèrement différente). Plus précisément, en utilisant les opérateurs

$$L_\xi = \frac{1 - ih(x-y) \cdot \nabla_\xi}{1 + |x-y|^2} \quad \text{et} \quad L_y = \frac{1 + ih\xi \cdot \nabla_y}{1 + |\xi|^2}$$

(qui laissent invariant le facteur  $e^{\frac{i}{h}\langle x-y, \xi \rangle}$ ), on obtient le premier résultat suivant :

**Proposition 3.5.** *Soit  $m$  une fonction d'ordre et  $a \in \mathcal{S}(m)$ . Alors  $\text{Op}_h(a)$  et  $\text{Op}_h^w(a)$  définissent des applications linéaires continues sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .*

Cette justification bien en tête, on continuera d'utiliser les expressions données en (3.6) et (3.7) pour des symboles généraux.

### 3.1.4 Propriétés importantes

Outre la linéarité, on voudrait que les procédés de quantification que l'on a définis se comportent bien vis-à-vis de la multiplication des symboles (on a déjà vu que ce n'était pas

possible de façon exacte). On apprécierait d'autre part qu'à un symbole petit (en un sens à préciser) soit associé un opérateur petit (dans  $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$ ).

Concernant la composition des opérateurs pseudo-différentiels, il n'est déjà pas évident de voir que pour  $a, b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  l'opérateur  $\text{Op}_h^w(a) \circ \text{Op}_h^w(b)$  est un opérateur pseudo-différentiel. Notant

$$A(\nabla) = \frac{1}{2}(\langle \nabla_x, \nabla_\eta \rangle - \langle \nabla_\xi, \nabla_y \rangle),$$

on a le résultat suivant :

**Théorème 3.6.** *Soient  $a, b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ . Alors on a*

$$\text{Op}_h^w(a) \circ \text{Op}_h^w(b) = \text{Op}_h^w(a\sharp b),$$

avec

$$a\sharp b(x, \xi) = e^{ihA(\nabla)}(a(x, \xi)b(y, \eta)) \Big|_{\substack{y=x \\ \eta=\xi}},$$

ou encore, pour tout  $N \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} a\sharp b(x, \xi) &= \sum_{j=0}^N \frac{(ihA(\nabla))^j}{j!} (a(x, \xi)b(y, \eta)) \Big|_{\substack{y=x \\ \eta=\xi}} \\ &+ \int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} e^{itA(\nabla)} (ihA(\nabla))^{N+1} (a(x, \xi)b(y, \eta)) dt \Big|_{\substack{y=x \\ \eta=\xi}}. \end{aligned}$$

La deuxième expression (voir les théorèmes 4.17 et 8.2 de [EZ]) est encore une formule exacte, mais son intérêt est de donner des développements asymptotiques à tout ordre en  $h$  du symbole  $a\sharp b$ . On obtient en particulier

$$a\sharp b = ab + O_{h \rightarrow 0}(h) = ab + \frac{h}{2i}\{a, b\} + O_{h \rightarrow 0}(h^2)$$

et

$$a\sharp b - b\sharp a = \frac{h}{i}\{a, b\} + O_{h \rightarrow 0}(h^3),$$

où les restes sont estimés dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  et où on a noté

$$\{a, b\} = \nabla_\xi a \cdot \nabla_x b - \nabla_x a \cdot \nabla_\xi b.$$

Pour la deuxième estimation il n'y a pas de terme d'ordre 2 car le terme d'ordre 2 pour  $a\sharp b$  est symétrique en  $a$  et  $b$ .

Pour pouvoir effectivement les utiliser, il est important de voir que ces résultats peuvent être étendus pour des symboles  $a \in \mathcal{S}(m_1)$  et  $b \in \mathcal{S}(m_2)$  où  $m_1$  et  $m_2$  sont deux fonctions d'ordre (voir le théorème 7.9 de [DS99]). En outre l'opérateur  $e^{ihA(\nabla)}$  préserve les classes de symboles  $\mathcal{S}(m)$  pour toute fonction d'ordre  $m$  (théorème 4.17 de [EZ]). On a donc en particulier :

**Proposition 3.7.** *Soient  $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathcal{S}_{\delta_1}(\mathbb{R}^{2n})$  et  $b \in \mathcal{S}_{\delta_2}(\mathbb{R}^{2n})$ . Alors on a*

$$\text{Op}_h^w(a) \circ \text{Op}_h^w(b) = \text{Op}_h^w(a\sharp b)$$

avec pour tout  $N \in \mathbb{N}$

$$a\sharp b(x, \xi) = \sum_{j=0}^N \frac{(ihA(\nabla))^j}{j!} (a(x, \xi)b(y, \eta)) \Big|_{\substack{y=x \\ \eta=\xi}} + r_N(x, \xi, h)$$

où  $r_N(h) \in \mathcal{S}(\langle x \rangle^{\delta_1 + \delta_2 - N})$  uniformément en  $h \in ]0, 1]$ .

*Exemples 3.8.* En guise d'exemples, il peut être intéressant de tester ces formules sur des cas simples pour lesquels on peut effectuer les calculs de manière explicite. Si on note  $H_0^h = -h^2\Delta = \text{Op}_h^w(\xi^2)$  le laplacien libre,

$$A_h = -\frac{ih}{2}(x \cdot \nabla + \nabla \cdot x) = \text{Op}_h^w(x \cdot \xi)$$

le générateur des dilatations et que l'on considère un potentiel  $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , alors on a :

$$\begin{aligned} \frac{i}{h}[H_0, A_h] &= 2H_0 = \text{Op}_h^w(\{\xi^2, x \cdot \xi\}), \\ \frac{i}{h}[H_0, V(x)] &= -2ih\nabla V \cdot \nabla - ih\Delta V = \text{Op}_h^w(2\nabla V \cdot \xi), \\ \frac{i}{h}[A_h, V(x)] &= x \cdot \nabla V(x) = \text{Op}_h^w(\{x \cdot \xi, V(x)\}). \end{aligned}$$

On peut également vérifier par calcul direct que pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $a \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  on a :

$$\frac{i}{h}[x_j, \text{Op}_h^w(a)] = -\text{Op}_h^w(\partial_{\xi_j} a). \quad (3.8)$$

Le deuxième résultat fondamental pour le calcul pseudo-différentiel est le théorème de continuité dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  :

**Théorème 3.9** (Calderón-Vaillancourt). *Soit  $a \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ . Alors  $\text{Op}_h^w(a)$  se prolonge en un opérateur borné sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Plus précisément il existe  $C \geq 0$  et  $M \in \mathbb{N}$  ne dépendant que de la dimension  $n$  tels que :*

$$\|\text{Op}_h^w(a)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq C \sum_{|\alpha| \leq M} \|\partial^\alpha a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2n})}.$$

Cette estimation est exacte et est uniforme en  $h \in ]0, 1]$ . Dans le contexte semi-classique, on obtient en faisant un changement d'échelle le résultat suivant (voir le théorème 5.1 de [EZ]) :

**Théorème 3.10.** *Il existe une constante  $C \geq 0$  telle que pour tout  $a \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  on a*

$$\|\text{Op}_h^w(a)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq C \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2n})} + O_{h \rightarrow 0}(\sqrt{h}),$$

où le reste dépend de la norme  $L^\infty$  des dérivées de  $a$  jusqu'à l'ordre  $M$ ,  $M$  étant donné par le théorème 3.9.

Ces résultats assurent en particulier que des termes négligeables dans des développements de symboles comme au théorème 3.6 donnent des termes négligeables dans  $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$  après quantification. En particulier, pour  $a, b \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ , on a dans  $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$  :

$$\text{Op}_h^w(a) \circ \text{Op}_h^w(b) = \text{Op}_h^w(ab) + O_{h \rightarrow 0}(h)$$

et

$$\frac{i}{h}[\text{Op}_h^w(a), \text{Op}_h^w(b)] = \text{Op}_h^w(\{a, b\}) + O_{h \rightarrow 0}(h^2). \quad (3.9)$$

On peut maintenant expliquer pourquoi on s'intéressera particulièrement aux symboles de la classe  $\mathcal{S}(\langle x \rangle^\delta)$ .

**Proposition 3.11.** *Soient  $\delta, s \in \mathbb{R}$ . Si  $a \in \mathcal{S}(\langle x \rangle^\delta)$  alors l'opérateur  $\text{Op}_h^w(a)$  définit un opérateur continu de  $L^{2,s}(\mathbb{R}^n)$  dans  $L^{2,s+\delta}(\mathbb{R}^n)$ .*

*Démonstration.* Le cas  $\delta = 0$  et  $s = 1$  résulte de (3.8). Comme le commutateur  $[x_j, \text{Op}_h^w(a)]$  est encore un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole est dans  $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ , on obtient par récurrence le cas  $s \in \mathbb{N}$ . Le cas général  $s \in \mathbb{R}$  s'obtient alors par dualité et interpolation complexe (voir le lemme A.1). On suppose maintenant que  $a \in \mathcal{S}(\langle x \rangle^{-1})$ . Pour  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  et  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on a :

$$\begin{aligned} \text{Op}_h^w(a)(x_j u)(x) &= \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\langle x-y, \xi \rangle} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) \left(\frac{x_j+y_j}{2} - \frac{x_j-y_j}{2}\right) u(y) dy d\xi \\ &= \text{Op}_h^w(x_j a)u(x) - \frac{ih}{2} \text{Op}_h^w(\partial_{\xi_j} a)u(x). \end{aligned}$$

Comme on a une expression en termes d'opérateurs pseudo-différentiels, cela prouve le cas  $\delta = -1$  et  $s$  quelconque. On peut traiter de la même façon le cas  $\delta = 1$ . On conclut alors par récurrence puis par interpolation  $\square$

Le fait d'avoir des symboles dans  $\mathcal{S}(\langle x \rangle^\delta)$  avec  $\delta$  négatif permet donc de gagner de la décroissance à l'infini. L'intérêt des symboles dans les classes  $\mathcal{S}_\delta(\mathbb{R}^{2n})$  est désormais plus clair à la lumière de la proposition 3.7 : même si  $\delta = 0$ , c'est-à-dire même si les symboles ne sont pas eux même décroissants à l'infini, le reste dans le développement asymptotique est non seulement petit à la limite  $h \rightarrow 0$ , mais c'est également un opérateur qui améliore la décroissance à l'infini, et ce d'autant plus qu'on prend un reste d'ordre élevé.

*Remarque 3.12.* Dans le même ordre d'idée, si  $a$  ou  $b$  est dans  $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ , alors le reste  $r_N(h)$  est dans  $\mathcal{S}(\langle x \rangle^{-M} \langle \xi \rangle^{-M})$  pour n'importe quel  $M \in \mathbb{N}$ , et ce uniformément en  $h$ .

Maintenant que l'on a interprété les opérateurs pseudo-différentiels comme des opérateurs sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , on peut s'intéresser à la propriété d'adjonction, et en particulier au caractère autoadjoint de  $\text{Op}_h^w(a)$  :

**Proposition 3.13.** *Soient  $a \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  et  $t \in [0, 1]$ . Alors l'adjoint de l'opérateur (borné)  $\text{Op}_h^t(a)$  est  $\text{Op}_h^{1-t}(\bar{a})$ . En particulier  $\text{Op}_h^w(a)$  est autoadjoint si  $a$  est à valeurs réelles.*

Enfin, les propriétés que l'on vient de mettre en valeur se retrouvent dans la formule de changement de quantification. Cette proposition permet de montrer que les opérateurs  $\text{Op}_h(a)$  et  $\text{Op}_h^w(a)$  sont relativement proches, ce qui permet dans certaines situations de profiter des avantages des deux quantifications.

**Proposition 3.14.** *Soient  $s, t \in [0, 1]$  et  $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Alors on a  $\text{Op}_h^s(a) = \text{Op}_h^t(a_t)$  avec :*

$$a_t(x, \xi, h) = e^{i(t-s)h\langle \nabla_x, \nabla_\xi \rangle} a(x, \xi).$$

*En particulier  $a_t$  est un symbole classique de symbole principal  $a$ .*

Outre les deux résultats fondamentaux que sont les propriétés de composition et de continuité, on utilisera également l'inégalité de Gårding qui montre comment la quantification se comporte vis-à-vis de la positivité du symbole, ainsi que le calcul fonctionnel.

**Théorème 3.15** (Inégalité de Gårding). *Soit  $a \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  un symbole à valeurs réelles positives. Alors il existe  $h_0 > 0$  et  $C \geq 0$  tels que pour tout  $h \in ]0, h_0]$  :*

$$\text{Op}_h^w(a) \geq -Ch.$$

Si on a besoin d'une quantification qui respecte la positivité de façon exacte, c'est-à-dire qui associe à un symbole positif un opérateur positif sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , on peut utiliser la quantification anti-Wick, définie à partir des états cohérents (voir par exemple [HMR87]). Le lien entre quantification de Weyl et quantification anti-Wick donne d'ailleurs une démonstration pour l'inégalité de Gårding (voir [DG97, § D.4]).

On termine maintenant ce paragraphe par le calcul fonctionnel pour un opérateur pseudo-différentiel. Pour un symbole  $a \in \mathcal{S}(m)$  à valeurs réelles on sait que l'opérateur  $\text{Op}_h^w(a)$  est autoadjoint sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Ainsi, à toute fonction  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  le calcul fonctionnel associe un opérateur  $\chi(\text{Op}_h^w(a))$  sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Il est alors naturel de se demander si l'opérateur obtenu est encore un opérateur pseudo-différentiel et, dans l'affirmative, ce qu'on peut dire de son symbole. On remarque tout d'abord que pour les opérateurs  $X_j = \text{Op}_h^w(x_j)$  et  $-ih\partial_{x_j} = \text{Op}_h^w(\xi_j)$  on a bien, pour toute fonction  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  :

$$\chi(X_j) = \chi(\text{Op}_h^w(x_j)) = \text{Op}_h^w(\chi(x_j)) \quad \text{et} \quad \chi(-ih\partial_j) = \chi(\text{Op}_h^w(\xi_j)) = \text{Op}_h^w(\chi(\xi_j)).$$

**Théorème 3.16.** *Soient  $a \in \mathcal{S}(m)$  un symbole réel minoré, où  $m$  est une fonction d'ordre, et  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Alors  $\chi(\text{Op}_h^w(a))$  est un opérateur pseudo-différentiel, et on a dans  $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$  :*

$$\chi(\text{Op}_h^w(a)) = \text{Op}_h^w(\chi \circ a) + O_{h \rightarrow 0}(h).$$

Ce résultat a été démontré pour la première fois dans [HR83] en utilisant la transformation de Mellin. On trouvera dans [DS99] une autre démonstration faisant intervenir une extension quasi-analytique et le critère de Beal qui permet de s'assurer qu'un opérateur est un opérateur pseudo-différentiel.

### 3.1.5 Micro-localisation et mesures semi-classiques

On se donne  $\delta \in \mathbb{R}$  et  $(u_h)_{h \in ]0,1]}$  une famille uniformément bornée dans  $L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$ . La proposition 3.11 assure que pour tout  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ , la famille  $\text{Op}_h^w(q)u_h$  est uniformément bornée dans  $L^{2,\delta'}(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $\delta' \in \mathbb{R}$ .

On introduit dans ce paragraphe les outils permettant de voir où se concentre une famille de fonctions  $(u_h)_{h \in ]0,1]}$  quand  $h \rightarrow 0$  dans l'espace des phases.

**Définition.** Soit  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{2n}$ . On dit que la famille de fonctions  $(u_h)_{h \in ]0,1]}$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est microlocalement nulle sur  $\mathcal{U}$  si pour tout symbole  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à support dans  $\mathcal{U}$  on a :

$$\|\text{Op}_h^w(q)u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O_{h \rightarrow 0}(h^\infty).$$

On dira que  $u_h$  est microlocalisée sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$  si elle est microlocalement nulle hors de  $\Omega$ . Dans ce cas, on pourra également dire que  $u_h$  est à microsupport dans  $\Omega$ .

**Proposition 3.17.** *Soient  $\delta \in \mathbb{R}$  et  $(u_h)_{h \in ]0,1]}$  une famille bornée d'éléments de  $L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$ . Alors il existe une suite  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  qui tend vers 0 et une mesure de Radon positive  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^{2n}$  telle que pour tout symbole  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  on a :*

$$\langle \text{Op}_{h_k}^w(q)u_{h_k}, u_{h_k} \rangle \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{2n}} q d\mu. \quad (3.10)$$

Avec la remarque faite au début du paragraphe, et du fait que la condition ne fait intervenir que des opérateurs pseudo-différentiels de symboles à supports compacts, on peut suivre la démonstration du résultat analogue pour une famille de fonctions uniformément bornée dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  (voir par exemple [Bur97] ou [EZ]).

**Définition 3.18.** On appelle mesure semi-classique associée à la famille  $(u_h)_{h \in ]0,1]}$  une mesure de Radon positive  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^{2n}$  telle qu'il existe une suite  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  pour laquelle on a (3.10).

*Exemple.* Soit  $(x_0, \xi_0)$ . On considère l'état cohérent

$$u_h(x) = \frac{1}{(\pi h)^{\frac{n}{4}}} e^{\frac{i}{h} \langle x - x_0, \xi_0 \rangle - \frac{1}{2h} |x - x_0|^2}.$$

Alors la famille  $(u_h)_{h \in ]0,1]}$  admet une unique mesure semi-classique, qui est la masse de Dirac au point  $(x_0, \xi_0)$ .

## 3.2 Dynamique classique associée au problème

On a mis en place dans la section précédente un certain nombre d'outils qui vont nous permettre d'étudier l'asymptotique  $h \rightarrow 0$  pour la solution  $u_h$  de l'équation (1.1). On s'attend à ce que la limite obtenue soit bien décrite par les équations de la mécanique classique.

Le but de cette section est de donner les propriétés classiques dont on aura besoin dans ce travail. On établira dans la section suivante les résultats qui permettent de voir le lien entre le flot et l'amortissement classiques et la limite  $h \rightarrow 0$  de notre problème.

### 3.2.1 Flot hamiltonien

A partir de maintenant, on fera toujours l'hypothèse que le potentiel  $V_1$  est de longue portée : il existe  $\rho > 0$  et des constantes  $c_\alpha$  pour  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad |\partial^\alpha V_1(x)| \leq c_\alpha \langle x \rangle^{-\rho-|\alpha|}. \quad (3.11)$$

On commence par rappeler un certain nombre de propriétés du flot classique associé au problème. Ces résultats ne font intervenir que la partie réelle  $V_1$  du potentiel, aussi on omettra la plupart des démonstrations. On pourra par exemple consulter [Rob87] pour une présentation plus détaillée.

Pour  $w \in \mathbb{R}^{2n}$  on rappelle qu'on a noté  $\phi^t(w) = (\bar{x}(t, w), \bar{\xi}(t, w))$  la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \bar{x}(t, w) = 2\bar{\xi}(t, w), \\ \partial_t \bar{\xi}(t, w) = -\nabla V_1(\bar{x}(t, w)), \\ \phi^0(w) = w. \end{cases} \quad (3.12)$$

C'est le système hamiltonien associé à la fonction énergie  $p : (x, \xi) \mapsto \xi^2 + V_1(x)$ . Pour une application différentiable  $a : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$  on note :

$$H_p(a) = \{p, a\} = 2\xi \cdot \nabla_x a - \nabla V_1(x) \cdot \nabla_\xi a.$$

**Proposition 3.19.** *Pour tout  $w \in \mathbb{R}^{2n}$  la solution maximale du système (3.12) est définie sur  $\mathbb{R}$ . En outre  $\phi^t(w)$  est une fonction de classe  $C^\infty$  de  $t$  et  $w$ , et on a les propriétés suivantes :*

(i)  $p$  est invariante par  $\phi^t$ .

(ii) Étant donné une application différentiable  $a$  sur  $\mathbb{R}^{2n}$  et  $w \in \mathbb{R}^{2n}$ , on a :

$$\frac{d}{dt} a(\phi^t(w)) = \{p, a\}(\phi^t(w)) = \{p, a \circ \phi^t\}(w).$$

*Remarque 3.20.* Soit  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ . Comme

$$\bar{x}(t, x, \xi) = x + 2 \int_0^t \bar{\xi}(s, x, \xi) ds = x + 2t\xi - 2 \int_0^t \int_0^s \nabla V_1(\bar{x}(\tau, x, \xi)) d\tau ds,$$

il existe une constante  $M$  telle que pour tous  $t \in \mathbb{R}$  et  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$  on a

$$|\bar{x}(t, x, \xi)| \leq |x| + M|t| \langle \xi \rangle \quad \text{et} \quad |\bar{x}(t, x, \xi) - (x + 2t\xi)| \leq Mt^2.$$

Le lemme suivant est démontré dans [Rob87] (lemme IV-9) :

**Lemme 3.21.** *Soient  $T \geq 0$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  tels que  $|\alpha| + |\beta| \geq 1$ . Alors il existe une constante  $c_{\alpha, \beta}(T) \geq 0$  telle que pour tous  $t \in [-T, T]$  et  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$  on a*

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (\phi^t(x, \xi) - (x, \xi)) \right| \leq c_{\alpha, \beta}(T).$$

En outre  $c_{\alpha, \beta}(T) \rightarrow 0$  quand  $T \rightarrow 0$ .

Une propriété importante du flot et que pour des temps petits on peut retrouver la position initiale connaissant l'impulsion initiale et la position finale :

**Lemme 3.22.** *Il existe  $\tau_0 > 0$  tel que pour tous  $t \in ]-\tau_0, \tau_0[$  et  $\xi \in \mathbb{R}^n$  l'application  $y \mapsto \bar{x}(t, y, \xi)$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^n$ . On notera  $x \mapsto \bar{y}(t, x, \xi)$  son inverse. En outre pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$  tels que  $|\alpha| + |\beta| \geq 1$  et  $t \in ]-\tau_0, \tau_0[$  il existe une constante  $c_{\alpha, \beta}(t)$  telle que*

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (\bar{y}(t, x, \xi) - x) \right| \leq c_{\alpha, \beta}(t).$$

De plus on a  $c_{\alpha, \beta}(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ .

Pour  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$  et  $s, t \in ]-\tau_0, \tau_0[$  on notera également :

$$\tilde{x}(s, t, x, \xi) = \bar{x}(s, \bar{y}(t, x, \xi), \xi) \quad \text{et} \quad \tilde{\xi}(s, t, x, \xi) = \bar{\xi}(s, \bar{y}(t, x, \xi), \xi)$$

*Démonstration.* Soient  $t \in \mathbb{R}$  et  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . On considère l'application  $X : y \mapsto \bar{x}(t, y, \xi)$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ . D'après le lemme 3.21, on peut trouver  $\tau_0 > 0$  indépendant de  $\xi$  tel que si  $t \in ]-\tau_0, \tau_0[$  alors la différentielle de  $X - \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$  est de norme inférieure à  $\frac{1}{2}$  en tout point  $y \in \mathbb{R}^n$ . En particulier la différentielle de  $X$  est inversible et son inverse est borné uniformément en  $y$ . Par un théorème d'inversion global (rappelé à la proposition A.3),  $X$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^n$ . On obtient alors les estimations sur les dérivées en dérivant l'égalité

$$x = \bar{x}(t, \bar{y}(t, x, \xi), \xi),$$

sachant qu'on a choisit  $t$  assez petit pour que  $J_y \bar{x}(t, y, \xi)$  (où  $J_y \bar{x}$  désigne la matrice jacobienne partielle de  $\bar{x}$  par rapport à la variable  $y$ ) soit uniformément inversible, et qu'en outre

$$\sup_{(y, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}} \|J_y \bar{x}(t, y, \xi) - \text{I}_n\| \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0.$$

□

On rappelle maintenant quelques résultats concernant la solution l'équation de Hamilton-Jacobi.

**Proposition 3.23.** *Soit  $\tau_0 > 0$  donné par le lemme 3.22. Il existe une unique fonction  $\varphi \in C^\infty(]-\tau_0, \tau_0[ \times \mathbb{R}^{2n})$  solution de :*

$$\begin{cases} \partial_t \varphi(t, x, \xi) + p(x, \nabla_x \varphi(t, x, \xi)) = 0, \\ \varphi(0, x, \xi) = \langle x, \xi \rangle. \end{cases} \quad (3.13)$$

Cette solution est donnée par

$$\varphi(t, x, \xi) = Q(t, \bar{y}(t, x, \xi), \xi), \quad (3.14)$$

où

$$Q(t, y, \xi) = \langle y, \xi \rangle - tp(y, \xi) + 2 \int_0^t |\bar{\xi}(s, y, \xi)|^2 ds. \quad (3.15)$$

En outre, pour tous  $t \in ]-\tau_0, \tau_0[$  et  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$  on a :

$$(x, \nabla_x \varphi(t, x, \xi)) = \phi^t(\nabla_\xi \varphi(t, x, \xi), \xi). \quad (3.16)$$

Bien que ce résultat ne fasse pas intervenir la partie imaginaire du potentiel, on en rappelle une démonstration en annexe (paragraphe A.2).

*Exemple 3.24.* Si  $V_1 = 0$ , alors  $\varphi$  est simplement donnée par :

$$\varphi(t, x, \xi) = \langle x - t\xi, \xi \rangle = \langle x, \xi \rangle - t|\xi|^2.$$

D'après la proposition IV-14 de [Rob87], on a les estimations suivantes sur  $\varphi$  :

**Corollaire 3.25.** *Pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ , il existe une constante  $c_{\alpha, \beta} \geq 0$  telle que pour tous  $t \in ]-\tau_0, \tau_0[$  et  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$  on a*

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \varphi(t, x, \xi) \right| \leq c_{\alpha, \beta} (1 + |x| + |\xi|)^{(2 - |\alpha| - |\beta|)_+},$$

où on a noté  $(\cdot)_+ = \max(0, \cdot)$ . En outre pour  $t$  assez petit on a :

$$\sup_{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}} \|\text{Hess}_{x, \xi} \varphi(t, x, \xi) - \mathbf{I}_{2n}\| \leq \frac{1}{2}.$$

Les estimations sont obtenues à partir de l'expression (3.14) et des égalités

$$\nabla_x \varphi(t, x, \xi) = \bar{\xi}(t, \bar{y}(t, x, \xi), \xi) \quad \text{et} \quad \nabla_\xi \varphi(t, x, \xi) = \bar{y}(t, x, \xi)$$

obtenues en (3.16).

On aura besoin par la suite d'une expression donnant  $\varphi(t, x, \xi)$  directement en fonction de  $x$  et  $\xi$  et pour  $t$  petit. On utilisera alors la proposition suivante :

**Proposition 3.26.** *Il existe une fonction  $r \in C^\infty(]-\tau_0, \tau_0[ \times \mathbb{R}^{2n})$  telle que pour  $(t, x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n+1}$  on a :*

$$\varphi(t, x, \xi) = \langle x, \xi \rangle - tp(x, \xi) + t^2 r(t, x, \xi).$$

En outre  $r$  et ses dérivées sont bornées sur  $]-\tau_0, \tau_0[ \times \mathbb{R}^n \times K_\xi$  pour tout compact  $K_\xi$  de  $\mathbb{R}^n$ .

*Démonstration.* D'après la proposition précédente on a

$$\varphi(t, x, \xi) = \bar{y}(t, x, \xi) \cdot \xi - tp(\bar{y}(t, x, \xi), \xi) + 2 \int_0^t \left| \tilde{\xi}(s, t, x, \xi) \right|^2 ds.$$

Or

$$\begin{aligned} \bar{y}(t, x, \xi) \cdot \xi &= x \cdot \xi - \int_0^t 2\tilde{\xi}(s, t, x, \xi) \cdot \xi ds \\ &= x \cdot \xi - 2 \int_0^t \left| \tilde{\xi}(s, t, x, \xi) \right|^2 ds - 2 \int_0^t \int_0^s \tilde{\xi}(s, t, x, \xi) \cdot \nabla V_1(\tilde{x}(\tau, t, x, \xi)) d\tau ds \end{aligned}$$

et

$$-tV_1(\bar{y}(t, x, \xi)) = -tV_1(x) + 2t \int_0^t \nabla V_1(\tilde{x}(s, t, x, \xi)) \cdot \tilde{\xi}(s, t, x, \xi) ds.$$

Cela donne l'expression attendue si on pose :

$$\begin{aligned} r(t, x, \xi) &= -\frac{2}{t^2} \int_0^t \int_0^s \tilde{\xi}(s, t, x, \xi) \cdot \nabla V_1(\tilde{x}(\tau, t, x, \xi)) d\tau ds \\ &\quad + \frac{2}{t} \int_0^t \nabla V_1(\tilde{x}(s, t, x, \xi)) \cdot \tilde{\xi}(s, t, x, \xi) ds. \end{aligned}$$

On peut alors vérifier que  $r$  se prolonge par continuité en 0 en une fonction de classe  $C^\infty$  et que toutes ses dérivées sont bornées si on se restreint à un compact en la variable  $\xi$ .  $\square$

*Remarque 3.27.* Tous ces résultats sont encore valables si on remplace  $p(x, \xi) = \xi^2 + V_1(x)$  par  $p_E(x, \xi) = \xi^2 + V_1(x) - E$  pour  $E \in \mathbb{R}$ .



### 3.2.2 Rayon de fuite

Comme on l'a annoncé en introduction, on a l'intention de travailler avec des hypothèses qui autorisent la dynamique classique à avoir des trajectoires bornées (pour la variable  $x$ , on sait que toutes les trajectoires sont bornées en  $\xi$ ). Comme elles vont poser problème, il sera important d'avoir un minimum d'informations sur l'ensemble de ces trajectoires. D'après l'hypothèse (3.11), on s'attend à ce que pour un niveau d'énergie (strictement positif) fixé, l'indice de réfraction  $V_1$  n'ait plus qu'une faible influence sur la dynamique si on s'est suffisamment éloigné de l'origine, de sorte que les trajectoires ressemblent à des trajectoires pour la dynamique libre (en particulier elles ne sont pas captées). Le but principal de ce paragraphe est de préciser en quel sens cette affirmation est valable.

Pour un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  on commence par introduire les notations suivantes :

$$\begin{aligned}\Omega_b^\pm(I) &= \{w \in \mathbb{R}^{2n} \mid p(w) \in I \text{ et } \{\bar{x}(t, w)\}_{\pm t \geq 0} \text{ est borné}\}, \\ \Omega_b(I) &= \Omega_b^-(I) \cap \Omega_b^+(I), \\ \Omega_\infty^\pm(I) &= \left\{ w \in \mathbb{R}^{2n} \mid p(w) \in I \text{ et } |\bar{x}(t, w)| \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} +\infty \right\}, \\ \Omega_\infty(I) &= \Omega_\infty^-(I) \cap \Omega_\infty^+(I).\end{aligned}$$

On appellera trajectoire classique captée (ou bornée) d'énergie  $E$  l'orbite  $\{\phi^t(w), t \in \mathbb{R}\}$  d'un point  $w \in \Omega_b(\{E\})$ .

On définit ensuite un rayon de fuite comme étant la distance à l'origine à partir de laquelle on pourra considérer qu'on a échappé à l'influence de  $V_1$  :

**Définition 3.28.** Soit  $\nu > 0$ . On appelle rayon de fuite pour un écart  $\nu$  tout  $\mathcal{R} \geq 0$  tel que pour  $|x| \geq \mathcal{R}$  on a

$$|V_1(x)| + |x| |\nabla V_1(x)| \leq \nu.$$

Étant donné  $E > 0$ , on appellera rayon de fuite pour l'énergie  $E$  un rayon de fuite pour un écart  $E/3$ . Si  $J \subset \mathbb{R}_+^*$  est tel que  $E_0 = \inf J > 0$ , on appellera rayon de fuite pour  $J$  un rayon de fuite pour l'énergie  $E_0$  (c'est en particulier un rayon de fuite pour tout  $E \in J$ ).

**Lemme 3.29.** On considère une énergie  $E > 0$  et un écart  $\nu > 0$ . Soit  $\mathcal{R}$  un rayon de fuite pour un écart  $\nu$ ,  $w \in p^{-1}(\{E\})$  et  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Si  $|\bar{x}(\pm t_0, w)| > \mathcal{R}$ , alors on a :

$$E - \nu \leq |\bar{\xi}(\pm t_0, w)|^2 \leq E + \nu$$

et

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial t^2} |\bar{x}(\pm t, w)|^2 \right|_{t=t_0} \geq 8E - 12\nu.$$

*Démonstration.* La première propriété est simplement due au fait que  $p(\phi^t(w)) = E$ . Pour la deuxième, on vérifie que pour  $t \in \mathbb{R}$  on a

$$\frac{\partial}{\partial t} |\bar{x}(\pm t, w)|^2 = \pm 4\bar{x}(\pm t, w) \cdot \bar{\xi}(\pm t, w), \quad (3.17)$$

puis

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} |\bar{x}(\pm t, w)|^2 = 8p(w) - 8V_1(\bar{x}(\pm t, w)) - 4\bar{x}(\pm t, w) \cdot \nabla V_1(\bar{x}(\pm t, w)), \quad (3.18)$$

ce qui donne bien la minoration annoncée.  $\square$

Pour  $R \geq 0$ ,  $d \geq 0$  et  $\sigma \in [-1, 1]$  on définit les zones sortantes et entrantes par :

$$\mathcal{Z}_{\pm}(R, d, \sigma) = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} \mid |x| \geq R, |\xi| \geq d \text{ et } \langle x, \xi \rangle \gtrless \sigma |x| |\xi|\}. \quad (3.19)$$

Une trajectoire issue d'une zone sortante aura tendance à s'éloigner de l'origine, tandis qu'une trajectoire issue de la zone entrante s'en approche.

**Lemme 3.30.** Soient  $E > 0$ ,  $\sigma \in ]0, 1[$  et  $\mathcal{R}$  un rayon de fuite pour un écart de  $\frac{E}{3}(1 - \sigma^2)$ . Soient  $w \in p^{-1}(\{E\})$  et  $t \geq 0$ . Si  $\phi^{\pm t}(w) \in \mathcal{Z}_{\pm}(\mathcal{R}, 0, \mp\sigma) \setminus \mathcal{Z}_{\pm}(\mathcal{R}, 0, \pm\sigma)$  alors on a :

$$\pm \frac{\partial}{\partial t} \frac{\bar{x}(\pm t, w) \cdot \bar{\xi}(\pm t, w)}{|\bar{x}(\pm t, w)| |\bar{\xi}(\pm t, w)|} \geq \frac{(1 - \sigma^2)\sqrt{E}}{\sqrt{3} |\bar{x}(\pm t, w)|}.$$

*Démonstration.* Omettant l'argument  $w$  pour les fonctions  $\bar{x}(t)$  et  $\bar{\xi}(t)$ , on peut vérifier par calcul direct que

$$\begin{aligned} & \pm \frac{\partial}{\partial t} \frac{\bar{x}(\pm t) \cdot \bar{\xi}(\pm t)}{|\bar{x}(\pm t)| |\bar{\xi}(\pm t)|} \\ & \geq \frac{1}{|\bar{x}(\pm t)| |\bar{\xi}(\pm t)|} \left( 2(1 - \sigma^2) |\bar{\xi}(\pm t)|^2 - |\bar{x}(\pm t) \cdot \nabla V_1(\bar{x}(\pm t))| - |\bar{x}(\pm t)| |\nabla V_1(\bar{x}(\pm t))| \right) \\ & \geq \frac{(1 - \sigma^2)\sqrt{E}}{\sqrt{3} |\bar{x}(\pm t)|}. \end{aligned}$$

□

On vérifie maintenant que loin de l'origine les trajectoires pour le flot  $\phi^t$  se comportent effectivement comme des trajectoires libres :

**Proposition 3.31.** Soient  $E > 0$ ,  $\sigma \in [0, 1[$  et  $\mathcal{R}$  un rayon de fuite pour un écart de  $\frac{E}{3}(1 - \sigma^2)$ . Alors  $\mathcal{Z}_{\pm}(\mathcal{R}, 0, \pm\sigma) \cap p^{-1}([E, +\infty[)$  est stable par  $\phi^{\pm t}$  pour tout  $t \geq 0$ . En outre pour  $w \in \mathcal{Z}_{\pm}(\mathcal{R}, 0, \pm\sigma) \cap p^{-1}([E, +\infty[)$  on a

$$|\bar{x}(\pm t, w)| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty,$$

et

$$\frac{\bar{x}(\pm t, w) \cdot \bar{\xi}(\pm t, w)}{|\bar{x}(\pm t, w)| |\bar{\xi}(\pm t, w)|} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \pm 1.$$

*Démonstration.* 1. On suppose que la première assertion n'est pas vérifiée. Alors on peut considérer  $w \in \mathcal{Z}_{\pm}(\mathcal{R}, 0, \pm\sigma) \cap p^{-1}([E, +\infty[)$  tel que

$$t_1 = \inf \{t > 0 \mid \phi^{\pm t}(w) \notin \mathcal{Z}_{\pm}(\mathcal{R}, 0, \pm\sigma)\}$$

est bien défini dans  $\mathbb{R}_+$ . Les zones entrantes et sortantes étant fermées, on a  $\phi^{\pm t_1}(w) \in \mathcal{Z}_{\pm}(\mathcal{R}, 0, \pm\sigma)$ . Mais d'après le lemme 3.29 on a pour  $s$  proche de  $t_1$  :

$$|\bar{x}(\pm s)|^2 \geq \mathcal{R}^2 + 2E(s - t_1)^2 + \underset{s \rightarrow t_1}{O}(|s - t_1|^3) > \mathcal{R}^2$$

(on omet de nouveau l'argument  $w$  pour  $\bar{x}$  et  $\bar{\xi}$ ). En outre la quantité (3.17) est strictement croissante en  $t_1$  et donc positive au voisinage de  $t_1$ . Cela donne déjà une contradiction si  $\sigma = 0$ . Pour le cas où  $\sigma \in ]0, 1[$ , la définition de  $t_1$  implique que  $\phi^{\pm s}(w)$  est dans  $\mathcal{Z}_{\pm}(0, 0, \mp\sigma) \setminus \mathcal{Z}_{\pm}(0, 0, \pm\sigma)$  pour  $s > t_1$  assez proche de  $t_1$ . Mais cela contredit le lemme 3.30 puisqu'on devrait avoir :

$$\pm \frac{\partial}{\partial t} \frac{\bar{x}(\pm s) \cdot \bar{\xi}(\pm s)}{|\bar{x}(\pm s)| |\bar{\xi}(\pm s)|} \geq \pm \frac{\partial}{\partial t} \frac{\bar{x}(\pm t_1) \cdot \bar{\xi}(\pm t_1)}{|\bar{x}(\pm t_1)| |\bar{\xi}(\pm t_1)|} + (s - t_1) \frac{(1 - \sigma^2)\sqrt{E}}{\sqrt{3} |\bar{x}(\pm t_1)|} + \underset{s \rightarrow t_1}{O}((s - t_1)^2).$$

2. On a donc démontré que  $\phi^{\pm t}(w) \in \mathcal{Z}_{\pm}(\mathcal{R}, 0, \pm\sigma)$  pour tout  $t \geq 0$ . On a alors :

$$|\bar{x}(\pm t)|^2 \geq \mathcal{R}^2 + 2Et^2 \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty.$$

On suppose maintenant par l'absurde qu'il existe  $\sigma_0 \in [\sigma, 1[$  tel que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \pm \frac{\bar{x}(\pm t) \cdot \bar{\xi}(\pm t)}{|\bar{x}(\pm t)| |\bar{\xi}(\pm t)|} \leq \sigma_0.$$

Soient  $\mathcal{R}_{\sigma_0}$  un rayon de fuite pour un écart de  $\frac{E}{3}(1 - \sigma_0^2)$  et  $T_{\sigma_0} \geq 0$  tel que  $|\bar{x}(\pm t)| \geq \mathcal{R}_{\sigma_0}$  pour tout  $t \geq T_{\sigma_0}$ . On obtient alors une contradiction en utilisant le lemme 3.30 et le fait que  $|\bar{x}(\pm t, w)| = O_{t \rightarrow +\infty}(t)$  (voir la remarque 3.20). Il existe donc  $\tilde{T}_{\sigma_0}$  tel que  $\phi^{\pm \tilde{T}_{\sigma_0}}(w)$  est dans  $\mathcal{Z}_{\pm}(\mathcal{R}_{\sigma_0}, 0, \pm\sigma_0)$ , et c'est donc encore le cas pour tout  $t \geq \tilde{T}_{\sigma_0}$ . Ceci étant valable pour n'importe quel  $\sigma_0 \in [\sigma, 1[$ , on a bien montré la dernière propriété.  $\square$

Pour  $r > 0$  on note :

$$B_x(r) = B_r \times \mathbb{R}^n = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} \mid |x| < r\} \subset \mathbb{R}^{2n}.$$

**Corollaire 3.32.** *Soit  $J$  un intervalle de  $\mathbb{R}_+^*$ .*

(i) *On a :*

$$p^{-1}(J) = \Omega_b^+(J) \sqcup \Omega_{\infty}^+(J) = \Omega_b^-(J) \sqcup \Omega_{\infty}^-(J) = \Omega_b(J) \cup \Omega_{\infty}^+(J) \cup \Omega_{\infty}^-(J).$$

(ii) *Si  $J$  est ouvert, alors  $\Omega_{\infty}^{\pm}(J)$  est ouvert.*

(iii) *Si  $J$  est fermé (dans  $\mathbb{R}$ ), alors  $\Omega_b^{\pm}(J)$  est fermé.*

(iv) *Si  $J$  est fermé (dans  $\mathbb{R}$ ), alors  $\Omega_b(J)$  est compact. Plus précisément, si  $\mathcal{R}$  est un rayon de fuite pour l'intervalle d'énergies  $J$ , alors  $\Omega_b(J) \subset B_x(\mathcal{R})$ .*

(v) *Si  $\inf J > 0$  et  $\mathcal{B}$  est un borné de  $\Omega_b^{\pm}(J)$ , alors l'ensemble*

$$\{\phi^{\pm t}(w), t \geq 0, w \in \mathcal{B}\}$$

*est borné dans  $\mathbb{R}^{2n}$ .*

L'idée sous-jacente est que si  $\mathcal{R}$  est un rayon de fuite pour l'énergie  $E$ , alors toute trajectoire classique d'énergie  $E$  qui sort de  $B_x(\mathcal{R})$  n'y rentre plus et part à l'infini.

*Démonstration.* (i). Soient  $w = (x, \xi) \in p^{-1}(J) \setminus \Omega_b^{\pm}(J)$  et  $\mathcal{R}$  un rayon de fuite pour l'énergie  $p(w)$  tel que  $\mathcal{R} \geq |x| + 1$ . Il existe nécessairement  $t_0 > 0$  tel que  $\bar{x}(\pm t_0, w) \geq \mathcal{R}$  et

$$\pm \bar{x}(\pm t_0, w) \cdot \bar{\xi}(\pm t_0, w) = \frac{1}{4} \frac{d}{dt} |\bar{x}(\pm t, w)|^2 \Big|_{t=t_0} \geq 0.$$

D'après la proposition 3.31 appliquée avec  $\sigma = 0$ , on obtient alors que  $w \in \Omega_{\infty}^{\pm}(J)$ . La troisième égalité résulte ensuite des deux premières.

(ii). Soit  $w = (x, \xi) \in \Omega_{\infty}^{\pm}(J)$  et  $\mathcal{R} \geq |x| + 2$  un rayon de fuite pour  $J$ . Il existe  $t > 0$  tel que  $|\bar{x}(\pm t, w)| > \mathcal{R}$ . Par continuité du flot et puisque  $p^{-1}(J)$  est ouvert, il existe un voisinage  $\mathcal{V} \subset B_x(|x| + 1) \cap p^{-1}(J)$  de  $w$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$  tel que pour tout  $v \in \mathcal{V}$  on a  $|\bar{x}(\pm t, v)| > \mathcal{R}$ . Ainsi toutes les trajectoires issues de  $\mathcal{V}$  sortent à un moment donné de  $B_x(\mathcal{R})$  et partent donc à l'infini, ce qui signifie que  $\mathcal{V} \subset \Omega_{\infty}^{\pm}(J)$ .

(iii).  $\Omega_b^{\pm}(J)$  est fermé comme intersection des deux fermés  $p^{-1}(J)$  et  $\mathbb{R}^{2n} \setminus \Omega_{\infty}^{\pm}(\mathbb{R}_+^*)$ .

(iv) et (v). Les deux derniers points se montrent de façon analogue. Soient  $\mathcal{R}$  un rayon de fuite pour  $J$  et  $w \in p^{-1}(J)$ . Si  $|\bar{x}(t, w)| \geq \mathcal{R}$  pour un certain  $t \in \mathbb{R}$ , alors  $\phi^t(w) \in (\mathcal{Z}_+(\mathcal{R}, 0, 0) \cup \mathcal{Z}_-(\mathcal{R}, 0, 0)) \cap p^{-1}(J)$ , et ne peut donc être dans  $\Omega_b(J)$ . Pour le dernier point, on choisit à nouveau un rayon de fuite  $\mathcal{R}$  pour  $J$  tel que  $\mathcal{B} \subset B_x(\mathcal{R})$ . Une trajectoire issue de  $\mathcal{B}$  ne peut pas sortir de  $B_x(\mathcal{R})$  pour des temps positifs (respectivement négatifs) puisque dans ce cas elle serait dans  $\Omega_{\infty}^{\pm}(J)$ , ce qui contredirait l'hypothèse.  $\square$

On donne maintenant une autre propriété inspirée du cas libre : une trajectoire qui part loin de l'origine et hors d'une zone entrante n'approche pas de la zone d'influence de  $V_1$  et finit par s'éloigner à l'infini.

**Proposition 3.33.** *Soient  $E_2 \geq E_1 > 0$  et  $J \subset [E_1, E_2]$ . Soient  $\sigma \in [0, 1[$  tel que  $\sigma^2 E_2 < E_1$  et  $\mathcal{R}$  un rayon de fuite pour un écart  $\nu \in ]0, \frac{2E_1}{3}[$  assez petit pour que*

$$\tilde{\nu} := 1 - \sigma^2 \frac{E_2 + \nu}{E_1 - \frac{3}{2}\nu} > 0.$$

On considère  $\tilde{\mathcal{R}} > \mathcal{R}/\sqrt{\tilde{\nu}}$ . Alors il existe  $c_0 > 0$  tel que pour tous  $t \geq 0$  et  $(x, \xi) \in \mathcal{Z}_{\pm}(\tilde{\mathcal{R}}, 0, \mp\sigma) \cap p^{-1}(J)$  on a

$$|\bar{x}(\pm t, x, \xi)| \geq \mathcal{R} \quad \text{et} \quad |\bar{x}(\pm t, x, \xi)| \geq c_0(t + |x|).$$

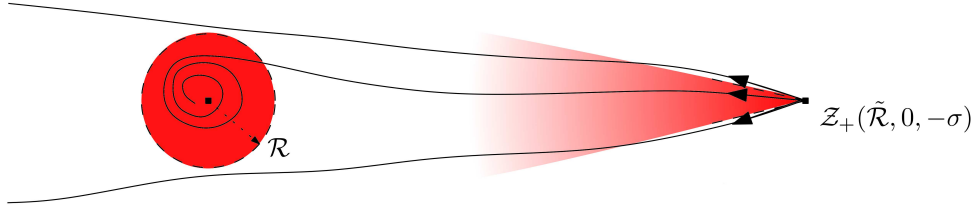


FIGURE 3.1 – Si une trajectoire part d'assez loin et hors d'un secteur entrant, elle évite la zone d'influence de  $V_1$  et part à l'infini.

*Démonstration.* Soit  $(x, \xi) \in \mathcal{Z}_{\pm}(\tilde{\mathcal{R}}, 0, \mp\sigma) \cap p^{-1}(J)$ . On suppose par l'absurde qu'il existe  $t \geq 0$  tel que  $|\bar{x}(\pm t, x, \xi)| < \mathcal{R}$  et on note

$$t_0 = \inf \{t \geq 0, |\bar{x}(\pm t, x, \xi)| < \mathcal{R}\}.$$

Notant  $E_3 = E_1 - \frac{3}{2}\nu > 0$ , on a d'après le lemme 3.29 :

$$\forall t \in [0, t_0], \quad |x(\pm t, x, \xi)|^2 \geq |x|^2 - 4t\sigma|x||\xi| + 4E_3t^2. \quad (3.20)$$

Or le membre de droite atteint son minimum (sur  $\mathbb{R}$ ) en  $t = \frac{\sigma|x||\xi|}{2E_3}$ , donc pour tout  $t \in [0, t_0]$  on a

$$\begin{aligned} |\bar{x}(t, x, \xi)|^2 &\geq |x|^2 - \frac{2\sigma^2|x|^2|\xi|^2}{E_3} + \frac{\sigma^2|x|^2|\xi|^2}{E_3} \\ &\geq |x|^2 \left(1 - \frac{\sigma^2|\xi|^2}{E_3}\right) \\ &\geq |x|^2 \left(1 - \frac{\sigma^2(E_2 + \nu)}{E_1 - \frac{3}{2}\nu}\right) \\ &\geq |x|^2 \tilde{\nu}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Comme  $|x|^2 \tilde{\nu} \geq \tilde{\mathcal{R}}^2 \tilde{\nu} > \mathcal{R}^2$ , cela donne une contradiction, et prouve donc la première assertion. La deuxième est alors conséquence de (3.21) et du fait que d'après (3.20) on a pour  $t \geq 2\sigma|x||\xi|E_3$  :

$$|\bar{x}(\pm t, x, \xi)|^2 - |x|^2 - 2E_3t^2 \geq 2t(E_3t - 2\sigma|x||\xi|) \geq 0.$$

□

Soit  $J$  un compact de  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $\mathcal{R}$  un rayon de fuite pour  $J$  et  $\sigma \in [0, 1[$ . Étant donné  $w \in p^{-1}(J)$ , on sait que pour un certain  $T \geq 0$ ,  $\phi^t(w)$  est dans  $B_x(\mathcal{R})$  ou dans  $\mathcal{Z}_+(\mathcal{R}, 0, \sigma)$  pour tout  $t \geq T$ , selon que  $w \in \Omega_b^+(J)$  ou  $w \in \Omega_\infty^+(J)$ . Mais le temps  $T$  qu'il faut attendre pour que cela soit vrai dépend de  $w$  (ce temps peut devenir grand si  $w \in \Omega_\infty^+(J)$  s'approche d'un point de  $\Omega_b^+(J)$ ). Comme une trajectoire qui sort de  $B_x(\mathcal{R})$  n'est pas forcément dans  $\mathcal{Z}_+(\mathcal{R}, 0, \sigma)$  si  $\sigma > 0$ , on peut en général trouver pour  $t$  arbitrairement grand un  $w \in p^{-1}(J)$  tel que  $\phi^t(w)$  n'est ni dans  $B_x(\mathcal{R})$  ni dans  $\mathcal{Z}_+(\mathcal{R}, 0, \sigma)$ . Et ce même si on se restreint à  $w$  dans un compact.

On termine ce paragraphe par une proposition qui assure que le problème ne se pose pas si on a bien choisi  $\mathcal{R}$ . Il suffit de s'assurer que  $\mathcal{R}$  est assez grand pour qu'une trajectoire qui sort de  $B_x(\mathcal{R})$  ne subit plus trop l'influence du potentiel  $V_1$  depuis suffisamment longtemps pour ressembler à une trajectoire libre et bien arriver dans la zone entrante voulue :

**Proposition 3.34.** *Soient  $J \subset \mathbb{R}_+^*$  relativement compact et  $\sigma \in [0, 1[$ . Si  $\mathcal{R}$  est assez grand, alors pour tout compact  $K$  de  $p^{-1}(J)$  il existe  $T_0 \geq 0$  tel que :*

$$\forall w \in K, \forall t \geq T_0, \quad \phi^{\pm t}(w) \in B_x(\mathcal{R}) \cup \mathcal{Z}_\pm(\mathcal{R}, 0, \pm\sigma).$$

*Remarque 3.35.* Comme l'ensemble des  $\phi^{\pm t}(w)$  pour  $t \in [0, T_0]$  et  $w \in K$  est borné, on aurait pu choisir de laisser  $\mathcal{R}$  dépendre de  $K$  et avoir le résultat pour tout  $t \geq 0$ .

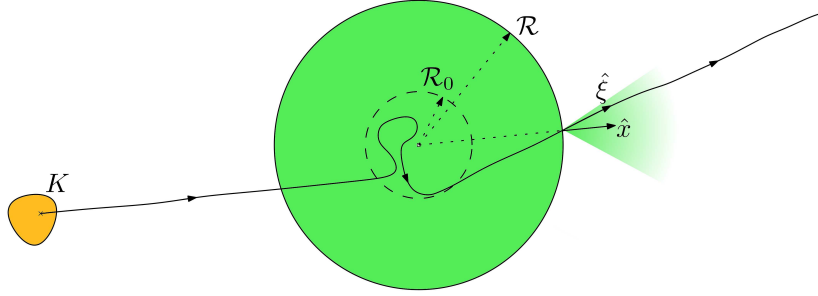


FIGURE 3.2 – Si une trajectoire part d'assez loin et hors d'un secteur entrant, elle évite la zone d'influence de  $V_1$  et part à l'infini.

*Démonstration.* 1. Soient  $E_1, E_2 > 0$  tels que  $J \subset [E_1, E_2]$  et  $\mathcal{R}_0$  un rayon de fuite pour un écart de  $\frac{E_1}{3}(1 - \sigma^2)$ . Soient  $\tau > 0$  tel que

$$\int_0^\tau \frac{(1 - \sigma^2)\sqrt{E_1}}{\sqrt{3}(\mathcal{R}_0 + 4t\sqrt{E_2})} dt > \sigma$$

et  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 + 4\tau\sqrt{E_2}$ . On note :

$$\mathcal{U} = B_x(\mathcal{R}_0) \cup \mathring{\mathcal{Z}}_\pm(\mathcal{R}, 0, \pm\sigma).$$

$\mathcal{U}$  est en particulier un ouvert de  $\mathbb{R}^{2n}$  ( $\mathring{A}$  désigne l'intérieur de l'ensemble  $A$ ).

2. Soit  $w \in K$ . On commence par montrer que s'il existe  $t_w \geq 0$  tel que  $\phi^{\pm t_w}(w) \in \mathcal{U}$ , alors pour tout  $t \geq t_w$  on a

$$\phi^{\pm t}(w) \in B_x(\mathcal{R}) \cup \mathcal{Z}_\pm(\mathcal{R}, 0, \pm\sigma). \quad (3.22)$$

Si  $\phi^{\pm t_w}(w) \in \mathcal{Z}_\pm(\mathcal{R}, 0, \pm\sigma)$ , cela résulte de la proposition 3.31. On peut donc supposer que  $|\bar{x}(\pm t_w, w)| < \mathcal{R}_0$ . Tant que  $|\bar{x}(\pm t, w)| < \mathcal{R}$ , on a bien (3.22), donc il suffit de considérer le cas où il existe  $t_0 < t_1$  tels que  $|\bar{x}(\pm t_0, w)| = \mathcal{R}_0$ ,  $|\bar{x}(\pm t_1, w)| = \mathcal{R}$  et  $|\bar{x}(\pm s, w)| \in ]\mathcal{R}_0, \mathcal{R}[$  pour tout  $s \in ]t_0, t_1[$ . Pour tout  $s \in [t_0, t_1]$  on a  $2|\bar{\xi}(\pm s, w)| \leq 4\sqrt{E_2}$ , ce qui prouve déjà que  $t_1 - t_0 \geq \tau$ . En outre on a nécessairement

$$\pm \bar{x}(\pm t_0, w) \cdot \bar{\xi}(\pm t_0, w) = \frac{1}{4} \frac{d}{dt} |\bar{x}(\pm t, w)|^2 \Big|_{t=t_0} \geq 0.$$

Si  $\sigma = 0$ , cela prouve que  $\phi^{\pm t}(w)$  est dans  $\mathcal{Z}_{\pm}(\mathcal{R}_0, 0, 0)$  pour  $t = t_0$  et donc pour tout  $t \geq t_0$ . Si  $\sigma > 0$ , on suppose par l'absurde que  $\phi^{\pm s}(w)$  n'est dans  $\mathcal{Z}_{\pm}(\mathcal{R}_0, 0, \pm\sigma)$  pour aucun  $s \in [t_0, t_1]$ . Alors d'après le lemme 3.30 et par définition de  $\tau$  on a :

$$\pm \frac{\bar{x}(\pm t_1, w) \cdot \bar{\xi}(\pm t_1, w)}{|\bar{x}(\pm t_1, w)| |\bar{\xi}(\pm t_1, w)|} \geq \int_{t_0}^{t_1} \frac{(1 - \sigma^2) \sqrt{E_1}}{\sqrt{3}(\mathcal{R}_0 + 4(t - t_0)\sqrt{E_2})} dt > \sigma.$$

Cela donne une contradiction. Il existe donc  $s \in [t_0, t_1]$  tel que  $\phi^{\pm s}(w) \in \mathcal{Z}_{\pm}(\mathcal{R}_0, 0, \pm\sigma)$  et d'après la proposition 3.31, c'est encore le cas pour tout  $t \geq s$ .

**3.** Tout  $w \in K$  est soit dans  $\Omega_b^{\pm}(J)$ , auquel cas la demi-trajectoire  $\{\phi^{\pm t}(w), t \geq 0\}$  admet un point d'accumulation dans  $\Omega_b(J) \subset \mathcal{U}$ , soit dans  $\Omega_{\infty}^{\pm}(J)$  et alors  $\phi^{\pm t}(w)$  est dans  $\tilde{\mathcal{Z}}_{\pm}(\mathcal{R}, 0, \pm\sigma_0) \subset \mathcal{U}$  pour  $t$  assez grand. Dans les deux cas, étant donné que  $\mathcal{U}$  est ouvert, on peut trouver  $\tau_w > 0$  et un voisinage  $\mathcal{V}_w$  de  $w$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$  tels que  $\phi^{\pm\tau_w}(v) \in \mathcal{U}$  pour tout  $v \in \mathcal{V}_w$ . Puisque  $K$  est recouvert par un nombre fini de tels  $\mathcal{V}_w$ , on peut choisir  $T_0 \geq 0$  de sorte que pour tout  $v \in K$  il existe un temps  $\tau_v \in [0, T_0]$  tel que  $\phi^{\pm\tau_v}(v) \in \mathcal{U}$ , ce qui conclut la démonstration.  $\square$

### 3.2.3 Amortissement classique

Soit  $E$  l'énergie qui apparaît dans l'équation de Helmholtz (1.1). Comme on l'a annoncé, on va remplacer l'hypothèse usuelle de non-capture sur les trajectoires d'énergie  $E$  par une hypothèse d'amortissement sur les trajectoires captées. Plus précisément on supposera dans un premier temps que l'indice d'absorption  $V_2$  est positif et que toutes les trajectoires captées d'énergie  $E$  passent par l'ouvert où il y a effectivement amortissement :

$$V_2 \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall w \in \Omega_b(\{E\}), \exists T \in \mathbb{R}, \quad V_2(\bar{x}(T, w)) > 0. \quad (3.23)$$

Il sera commode d'avoir une notation pour cette zone d'amortissement. On note donc :

$$\mathcal{O} = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} \mid V_2(x) > 0\}. \quad (3.24)$$

Dans tout ce travail, on supposera au moins que  $V_2$  est continu, de sorte que  $\mathcal{O}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^{2n}$ . On rappelle que  $V_2$  sera en outre toujours supposé borné. On commence par vérifier que cette hypothèse énoncée pour les points de  $\Omega_b(\{E\})$  est en fait valable pour les points de  $\Omega_b^+(\{E\})$  et de  $\Omega_b^-(\{E\})$ .

**Proposition 3.36.** *Soit  $E > 0$  tel que l'hypothèse (3.23) est vérifiée. Alors pour tout  $w \in \Omega_b^{\pm}(\{E\})$  il existe  $T > 0$  tel que  $V_2(\bar{x}(\pm T, w)) > 0$ .*

*Démonstration.* Soit  $w \in \Omega_b^{\pm}(\{E\})$ . On note  $K = \overline{\{\phi^{\pm t}(w), t \geq 0\}}$ .  $K$  est un compact de  $\mathbb{R}^{2n}$ , donc on peut trouver une suite  $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$  qui croît vers  $+\infty$  et  $w_{\infty} \in \mathbb{R}^{2n}$  tels que  $\phi^{\pm t_m}(w) \rightarrow w_{\infty}$  quand  $m \rightarrow +\infty$ . Comme  $\Omega_b^{\pm}(\{E\})$  est fermé, on sait que  $w_{\infty} \in \Omega_b^{\pm}(\{E\})$ . En outre pour tout  $M \in \mathbb{N}$  et  $m \geq M$  on a  $\phi^{\pm(t_m - t_M)}(w) \in K$  et par continuité de  $\phi^{\mp t_M}$  :

$$\phi^{\pm(t_m - t_M)}(w) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \phi^{\mp t_M}(w_{\infty}).$$

Cela prouve que  $\phi^{\mp t_M}(w_{\infty}) \in K$  pour tout  $M \in \mathbb{N}$ , et donc que  $w_{\infty}$  n'est pas dans  $\Omega_{\infty}^{\mp}(\{E\})$ . On a donc  $w_{\infty} \in \Omega_b(\{E\})$ . Par hypothèse, il existe  $T \in \mathbb{R}$  tel que  $\phi^T(w_{\infty}) \in \mathcal{O}$ . Comme  $\mathcal{O}$  est ouvert et  $\phi^{T \pm t_m}(w) = \phi^T(\phi^{\pm t_m}(w)) \rightarrow \phi^T(w_{\infty})$  quand  $m$  tend vers  $+\infty$ , on obtient que  $\phi^{T \pm t_m}(w) \in \mathcal{O}$  pour  $m$  assez grand. Et si  $m$  est bien choisi on a en outre  $\pm T + t_m > 0$ .  $\square$

Le fait que toute trajectoire de  $\Omega_b^+(\{E\})$  ou de  $\Omega_b^-(\{E\})$  admette un point d'accumulation dans  $\Omega_b(\{E\})$  est utilisé dans le cadre non-captif pour dire que l'hypothèse de non-capture  $\Omega(\{E\}) = \Omega_{\infty}(\{E\})$  est en fait équivalente à dire que  $\Omega_b(\{E\}) = \emptyset$  (voir par exemple [DG97]).

Dans un deuxième temps, on cherchera à s'affranchir de l'hypothèse de positivité sur  $V_2$ . Il sera alors nécessaire de reformuler l'hypothèse d'amortissement :

$$\forall w \in \Omega_b(\{E\}), \exists T \geq 0, \int_0^T V_2(\bar{x}(t, w)) dt > 0. \quad (3.25)$$

*Remarque 3.37.* • D'après la proposition 3.36 appliquée avec  $w \in \Omega_b(\{E\}) \subset \Omega_b^+(\{E\})$ , on voit que les hypothèses (3.23) et (3.25) sont équivalentes dans le cas où  $V_2 \geq 0$ .

- Si la trajectoire issue de  $w \in \Omega_b(\{E\})$  est périodique il existe  $T > 0$  tel que  $\phi^T(w) = w$  et on a alors :

$$\int_0^T V_2(\bar{x}(t, w)) dt > 0.$$

En effet si ce n'est pas le cas, on considère le temps  $t_0 \in [0, T]$  pour lequel l'application  $t \mapsto \int_0^t V_2(\bar{x}(s, w)) ds$  atteint son maximum, et on obtient une contradiction en considérant le point  $\phi^{t_0}(w) \in \Omega_b(\{E\})$ .

- Soit  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ . L'application  $t \mapsto (\bar{x}(-t, x, \xi), -\bar{\xi}(-t, x, \xi))$  est solution du système (3.12) pour la condition initiale  $(x, -\xi)$ , soit :

$$(\bar{x}(t, x, -\xi), \bar{\xi}(t, x, -\xi)) = (\bar{x}(-t, x, \xi), -\bar{\xi}(-t, x, \xi)). \quad (3.26)$$

Soit  $(x, \xi) \in \Omega_b(\{E\})$ . On suppose vérifiée l'hypothèse (3.25). D'après (3.26) on a  $(x, -\xi) \in \Omega_b(\{E\})$  et donc il existe  $T \geq 0$  tel que :

$$\int_0^T V_2(\bar{x}(-t, x, \xi)) dt = \int_0^T V_2(\bar{x}(t, x, -\xi)) dt > 0.$$

Ainsi, l'hypothèse (3.25) que l'on a énoncée pour des demi-trajectoires allant vers les temps futurs est symétrique par rapport au temps. On aurait tout à fait pu l'énoncer pour les demi-trajectoires allant vers le passé :

$$(3.25) \iff \forall w \in \Omega_b(\{E\}), \exists T \geq 0, \int_0^T V_2(\bar{x}(-t, w)) dt > 0.$$

On vérifie maintenant que l'hypothèse (3.25) est ouverte :

**Proposition 3.38.** *Soit  $E > 0$ . Si l'hypothèse (3.25) est vérifiée pour  $E$ , alors elle est vérifiée pour tout  $\lambda$  dans un voisinage  $J$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ .*

*Démonstration.* On suppose par l'absurde que la proposition n'est pas vraie. Alors pour tout  $m \in \mathbb{N}$  on peut trouver  $w_m$  dans le compact  $\Omega_b([E/2, 2E])$  tel que  $p(w_m) \rightarrow E$  et

$$\forall T \geq 0, \int_0^T V_2(\bar{x}(t, w_m)) dt \leq 0.$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'il existe  $w_\infty \in \Omega_b([E/2, 2E])$  tel que  $w_m \rightarrow w_\infty$  quand  $m \rightarrow \infty$ . Comme  $p$  est une fonction continue, on a  $p(w_\infty) = E$ , et donc  $w_\infty \in \Omega_b(\{E\})$ . Par hypothèse, il existe  $T \geq 0$  tel que

$$\int_0^T V_2(\bar{x}(t, w_\infty)) dt > 0.$$

Par continuité, c'est encore valable pour tout  $w$  dans un voisinage de  $w_\infty$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$ , ce qui donne une contradiction.  $\square$

**Corollaire 3.39.** *Soit  $E > 0$ . On suppose que  $V_2 \geq 0$ . Si l'hypothèse (3.23) est vérifiée pour  $E$ , alors elle est vérifiée pour tout  $\lambda$  dans un voisinage  $J$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ .*

On verra dès le paragraphe suivant que le facteur d'amortissement qui apparaît à la limite  $h \rightarrow 0$  pour l'étude de l'opérateur de Schrödinger dissipatif (3.1) est donné par

$$\exp\left(-\int_0^t V_2 \circ \phi^s ds\right),$$

où comme dans tout ce texte on s'autorisera à écrire  $V_2(\phi^s(w))$  pour  $V_2(\bar{x}(s, w))$ . En supposant simplement que les trajectoires passent une fois par la zone d'amortissement dans le cas  $V_2 \geq 0$ , ou bien en utilisant l'hypothèse (3.25) plus générale, il n'est pas clair que ce facteur d'amortissement sera petit pour  $t$  grand. On montre dans la proposition suivante que par compacité de  $\Omega_b(\{E\})$ , les trajectoires bornées repassent en fait suffisamment régulièrement par la zone où il y a amortissement.

**Proposition 3.40.** *Soit  $J \subset \mathbb{R}_+^*$  tel que toute énergie  $\lambda \in J$  vérifie l'hypothèse (3.25). Alors pour tout compact  $K$  de  $\Omega_b^\pm(J)$  il existe des constantes  $c_0, C > 0$  telles que :*

$$\forall t \geq 0, \forall w \in K, \quad \int_0^t (V_2 \circ \phi^{\pm s})(w) ds \geq c_0 t - C.$$

*Démonstration.* Sachant que  $K$  est compact on peut, quitte à réduire  $J$ , supposer que c'est un compact de  $\mathbb{R}_+^*$ .

1. Soit  $w \in \Omega_b(J)$ . Par hypothèse il existe  $T_w, \gamma_w > 0$  tels que

$$\int_0^{T_w} (V_2 \circ \phi^{\pm s})(w) ds \geq 2\gamma_w.$$

Par continuité du membre de gauche, il existe un voisinage  $\mathcal{V}_w$  de  $w$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$  tel que pour tout  $v \in \mathcal{V}_w$  on a :

$$\int_0^{T_w} (V_2 \circ \phi^{\pm s})(v) ds \geq \gamma_w.$$

Comme  $\Omega_b(J)$  est un compact de  $\mathbb{R}^{2n}$  il est recouvert par un nombre fini de tels  $\mathcal{V}_w$ . Ainsi il existe  $T_1, \gamma_1 > 0$  tels que :

$$\forall w \in \Omega_b(J), \exists t \in [0, T_1], \quad \int_0^t (V_2 \circ \phi^{\pm s})(w) ds \geq \gamma_1.$$

2. Soit  $w \in \Omega_b(J)$ . On construit une suite croissante  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  comme suit. On pose  $t_0 = 0$ , et par récurrence on considère pour tout  $k \in \mathbb{N}$  un temps  $t_{k+1} \in ]t_k, t_k + T_1]$  tel que :

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} (V_2 \circ \phi^{\pm s})(w) ds \geq \gamma_1.$$

Cela est bien licite puisque  $\phi^{\pm t_k}(w) \in \Omega_b(J)$ . En outre, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on a nécessairement  $t_{k+1} \geq t_k + \gamma_1 / \|V_2\|_\infty$ , de sorte que la suite  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$  et tout  $t > 0$  est dans l'union des  $]t_k, t_k + T_1]$  pour  $k \in \mathbb{N}$ . On note  $\nu = \frac{2+T_1\|V_2\|_\infty}{\gamma_1}$ . Soient alors  $t \geq T_2 := T_1(1 + \nu)$  et  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $t \in ]t_N, t_N + T_1]$ . On a nécessairement  $N \geq \nu$  et donc :

$$\begin{aligned} \int_0^t (V_2 \circ \phi^{\pm s})(w) ds &\geq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (V_2 \circ \phi^{\pm s})(w) ds + \int_{t_N}^t (V_2 \circ \phi^{\pm s})(w) ds \\ &\geq N\gamma_1 - T_1 \|V_2\|_\infty \\ &\geq 2. \end{aligned}$$

Ainsi on a montré qu'il existe  $T_2 > 0$  tel que

$$\forall w \in \Omega_b(J), \forall t \geq T_2, \quad \int_0^t (V_2 \circ \phi^{\pm s})(w) ds \geq 2.$$



3. Par continuité, il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $\Omega_b(J)$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$  tel que :

$$\forall w \in \mathcal{U}, \quad \int_0^{T_2} (V_2 \circ \phi^{\pm s})(w) ds \geq 1.$$

4. Soit maintenant  $K$  un compact de  $\Omega_b^\pm(J)$ . Alors il existe  $T_K \geq 0$  tel que pour tout  $w \in K$  et  $t \geq T_K$  on a  $\phi^{\pm t}(w) \in \mathcal{U}$ . En effet, supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas. On peut alors trouver des suites  $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$  et  $(w_m)_{m \in \mathbb{N}}$  avec  $w_m \in K$  et  $t_m \rightarrow +\infty$  telles que  $\phi^{\pm t_m}(w_m) \notin \mathcal{U}$ . La suite  $(\phi^{\pm t_m}(w))_{m \in \mathbb{N}}$  est à valeurs dans le borné  $\bigcup_{t \geq 0} \phi^{\pm t}(K)$ . Elle admet donc un point d'accumulation

$$w_\infty \in \Omega_b^\pm(J) \setminus \mathcal{U} \subset \Omega_b^\pm(J) \setminus \Omega_b(J) \subset \Omega_\infty^\mp(J).$$

Soit  $\mathcal{R}$  un rayon de fuite pour  $J$  tel que  $K \cup \{w_\infty\} \subset B_x(\mathcal{R})$ . Il existe un temps  $T_\infty$  tel que  $|\bar{x}(\mp T_\infty, w)| > 2\mathcal{R}$ . Par continuité et propriété d'un rayon de fuite, il existe un voisinage  $\mathcal{V} \subset B_x(\mathcal{R})$  de  $w_\infty$  tel que  $|\bar{x}(\mp t, v)| > 2\mathcal{R}$  pour tous  $v \in \mathcal{V}$  et  $t \geq T_\infty$ . Ainsi, pour  $m$  tel que  $t_m \geq T_\infty$  on a  $\phi^{\mp t_m}(\mathcal{V}) \cap K = \emptyset$ , donc  $\phi^{\pm t_m}(w_m) \notin \mathcal{V}$ . Cela donne une contradiction.

5. Soient alors  $w \in K$ ,  $t \geq T_K$  et  $N$  la partie entière de  $\frac{t-T_K}{T_2}$ . On a alors :

$$\begin{aligned} & \int_0^t (V_2 \circ \phi^{\pm s})(w) ds \\ & \geq \int_0^{T_K} (V_2 \circ \phi^{\pm s})(w) ds + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{T_K+kT_2}^{T_K+(k+1)T_2} (V_2 \circ \phi^{\pm s})(w) ds + \int_{T_K+NT_2}^t (V_2 \circ \phi^{\pm s})(w) ds \\ & \geq -T_K \|V_2\|_\infty + N - T_2 \|V_2\|_\infty \\ & \geq -T_K \|V_2\|_\infty + \frac{t-T}{T_2} - 1 - T_2 \|V_2\|_\infty. \end{aligned}$$

Sachant que cette intégrale peut par ailleurs être minorée par  $-T_K \|V_2\|_\infty$  si  $t \in [0, T_K]$ , cela donne bien le résultat annoncé avec  $c_0 = 1/T_2$  et  $C = 1 + (T_K + T_2) \|V_2\|_\infty + T/T_2$ .  $\square$

*Remarque 3.41.* Cette proposition se vérifie beaucoup plus facilement dans le cas où  $V_2$  est positif (voir la démonstration du lemme 2.2 de [Roy10b]).

On aura également besoin pour notre étude d'un résultat légèrement plus précis :

**Proposition 3.42.** *Soient  $\mathcal{R} > 0$  et  $J \subset \mathbb{R}_+^*$  tel que toute énergie  $\lambda \in J$  vérifie l'hypothèse (3.25). Alors pour tout compact  $\tilde{K}$  de  $p^{-1}(J)$  il existe des constantes  $c_0, C > 0$  telles que :*

$$\forall t \geq 0, \forall w \in \tilde{K}, \quad \int_0^t (V_2 \circ \phi^{\pm s})(w) ds \geq c_0 t - C \quad \text{ou} \quad |\bar{x}(\pm t, w)| \geq \mathcal{R}.$$

Si  $K$  est inclus dans  $\Omega_b^\pm(J)$  cela résulte de la proposition précédente, et si  $K$  est inclus dans  $\Omega_\infty^\pm(J)$ , alors la deuxième conclusion est vérifiée à partir d'un certain temps uniforme pour  $w \in K$ , et la première conclusion est toujours vérifiée si on se restreint à des temps finis. Le problème vient donc de la frontière entre  $\Omega_b^\pm(J)$  et  $\Omega_\infty^\pm(J)$ .

*Démonstration. 1.* Comme pour la proposition précédente, on peut supposer que  $J$  est compact. D'autre part, comme la conclusion est plus forte si  $\mathcal{R}$  est pris plus grand, il suffit de montrer le résultat dans le cas où  $\mathcal{R}$  est un rayon de fuite pour l'intervalle d'énergies  $J$ . On note  $K = \tilde{K} \cap \Omega_b^\pm(J)$ .  $K$  est alors un compact de  $\Omega_b^\pm(J)$ . On reprend toutes les notations introduites dans la démonstration précédente. On a vu qu'il existait  $T_K \geq 0$  tel que  $\phi^{\pm t}(w) \in \mathcal{U}$  pour tous  $t \geq T_K$  et  $w \in K$ . Par continuité du flot, il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $K$  dans  $\tilde{K}$  tel que  $\phi^{\pm T_K}(w) \in \mathcal{U}$  pour tout  $w \in \mathcal{V}$ .

2. On montre alors qu'il existe  $T_f \geq 0$  tel que pour tout  $w \in \mathcal{V} \setminus K \subset \Omega_\infty^\pm(J)$  il existe  $\tau_w \geq T_K$  tel que

$$\forall t \in [T_K, \tau_w], \quad \phi^{\pm t}(w) \in \mathcal{U} \quad \text{et} \quad \forall t \geq \tau_w + T_f, \quad |\bar{x}(\pm t, w)| \geq \mathcal{R}. \quad (3.27)$$

Autrement dit, si on ne sait pas à quel moment une trajectoire issue de  $\mathcal{V} \setminus K$  sort de  $B_x(\mathcal{R})$ , on contrôle au moins le temps qu'elle passe dans  $B_x(\mathcal{R}) \setminus \mathcal{U}$ . Supposons par l'absurde que (3.27) n'est pas vraie. Alors on peut trouver une suite  $(w_m)_{m \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{V} \setminus K$  et des temps  $t_m \geq T_K$ ,  $\theta_m \geq m$  pour  $m \in \mathbb{N}$  tels que

$$\phi^{\pm t_m}(w_m) \notin \mathcal{U} \quad \text{et} \quad \forall t \in [t_m, t_m + \theta_m], \quad |\bar{x}(\pm t, w_m)| \leq \mathcal{R}.$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite  $(w_m)_{m \in \mathbb{N}}$  converge vers  $w_\infty \in \tilde{K}$ . Si  $w_\infty \in \Omega_\infty^\pm(J)$  alors il existe  $T_\infty \geq 0$  et un voisinage  $\mathcal{W}$  de  $w_\infty$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$  tels que  $|\bar{x}(\pm t, v)| \geq \mathcal{R}$  pour tous  $t \geq T_\infty$  et  $v \in \mathcal{W}$ , ce qui n'est pas possible. La limite  $w_\infty$  appartient donc à  $K$ . Si la suite  $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$  est bornée, alors quitte à extraire encore une sous-suite, on a  $t_m \rightarrow t_\infty \geq T_K$ , ce qui est absurde car on aurait  $\phi^{\pm t_m}(w_m) \rightarrow \phi^{\pm t}(w_\infty) \in \mathcal{U}$  donc  $\phi^{\pm t_m}(w_m) \in \mathcal{U}$  pour  $m$  assez grand. Quitte à extraire encore une sous-suite, on peut donc supposer que  $t_m \rightarrow +\infty$ . On note  $v_m = \phi^{\pm t_m}(w_m)$ . La suite  $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $\mathbb{R}^{2n}$  donc à une nouvelle extraction près, on peut supposer qu'elle converge vers  $v_\infty \in p^{-1}(J)$ . Par le même argument que précédemment, on obtient que  $v_\infty \in \Omega_b(J)$ , ce qui donne une contradiction et prouve donc (3.27).

3. L'ensemble  $\tilde{K} \setminus \mathcal{V}$  est un compact de  $\Omega_\infty^\pm(J)$ . Quitte à prendre  $T_f$  plus grand, on peut donc supposer que

$$\forall w \in \tilde{K} \setminus \mathcal{V}, \forall t \geq T_f, \quad |\bar{x}(\pm t, w)| \geq \mathcal{R}.$$

Ainsi, étant donné  $t \geq 0$  et  $w \in \tilde{K}$  tel que  $|\bar{x}(\pm t, w)| \leq \mathcal{R}$ , on a  $\phi^{\pm s}(w) \in \mathcal{U}$  pour tout  $s \in [T, t - T_f]$ . On peut donc conclure par un raisonnement analogue à ce qu'on a fait pour la proposition 3.40.  $\square$

### 3.3 Quantification du flot et de l'amortissement

A la section 3.1 on a rappelé comment faire le lien entre les observables classiques et les observables quantiques. On va maintenant évoquer le théorème d'Egorov qui fait le lien entre l'évolution classique décrite par le flot  $\phi^t$  introduit au paragraphe 3.2.1 et l'évolution quantique donnée par le semi-groupe

$$U_h(t) := e^{-\frac{it}{\hbar} H_h}, \quad t \geq 0.$$

Ce théorème est bien connu dans le cas autoadjoint. On en donne ici une version non-autoadjointe qui fera intervenir le facteur d'amortissement classique décrit au paragraphe précédent. Pour toute cette partie on suppose simplement que  $V_2$  est dans  $C_b^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ .

On introduira ensuite les états lagrangiens et on verra comment approcher le propagateur  $U_h(t)$  par un opérateur de Fourier intégral dont la phase est la solution  $\varphi(t)$  de l'équation de Hamilton-Jacobi (3.13).

#### 3.3.1 Le Théorème d'Egorov, version non-autoadjointe

On se donne trois potentiels  $V_1, W_2, W_3 \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  et pour  $t \geq 0$  on note :

$$W = W_2 + W_3, \quad U_2^h(t) = e^{-\frac{it}{\hbar} (H_1^h - ihW_2)} \quad \text{et} \quad U_3^h(t) = e^{-\frac{it}{\hbar} (H_1^h - ihW_3)},$$

où  $H_1^h = -\hbar^2 \Delta + V_1(x)$ . On a vu au paragraphe 2.1.4 que ces semi-groupes étaient bien définis. En outre on a

$$\forall h \in ]0, 1], \forall t \geq 0, \quad \|U_2^h(t)\| \leq e^{t\|W_2\|_\infty},$$

et une estimation analogue pour  $U_3^h(t)$ . Ainsi, ces semi-groupes ne sont pas contrôlés uniformément en  $t \geq 0$  (sauf si  $W_2$  et  $W_3$  sont à valeurs positives, auquel cas ce sont des semi-groupes de contractions), mais pour  $t$  dans un compact de  $\mathbb{R}_+$ , on a tout de même un contrôle uniforme en  $h \in ]0, 1]$ .

**Théorème 3.43.** *Soit  $a \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ . Alors il existe une famille de symboles  $\alpha_j(t)$  pour  $j \in \mathbb{N}$  et  $t \in \mathbb{R}$  vérifiant les assertions suivantes.*

(i) *Pour tous  $t \in \mathbb{R}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  et  $h \in ]0, 1]$  on a*

$$U_2^h(t)^* \text{Op}_h^w(a) U_3^h(t) = \sum_{j=0}^N h^j \text{Op}_h^w(\alpha_j(t)) + h^{N+1} R_N(t, h), \quad (3.28)$$

où  $R_N(t, h)$  est borné sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  uniformément en  $h \in ]0, 1]$  et  $t \in [0, T]$  pour tout  $T \geq 0$ .

(ii) *A l'ordre 0 on a :*

$$\alpha_0(t) = (a \circ \phi^t) e^{-\int_0^t W \circ \phi^s ds}.$$

(iii) *Pour  $t \geq 0$  et  $j \in \mathbb{N}$  on a :*

$$\text{supp } \alpha_j(t) \subset \phi^{-t}(\text{supp } a).$$

On note que les parties antisymétriques des deux opérateurs dont on prend les propagateurs peuvent être différentes mais que les parties autoadjointes sont égales. On utilisera ce théorème avec  $W_2 = W_3 = V_2$  (conjugaison par le propagateur  $U_h(t)$ ) ou bien avec  $W_2 = 0$  et  $W_3 = V_2$  (dans ce cas  $U_2^h(t)$  est le propagateur de la partie autoadjointe  $H_1^h$  et est en particulier unitaire). La démonstration est inspirée de la preuve du cas autoadjoint donnée dans [Rob87] :

*Démonstration.* 1. Soit  $t \geq 0$ . Pour  $\tau \in [0, t]$  on note

$$\tilde{a}(\tau) = (a \circ \phi^{t-\tau}) e^{-\int_\tau^t W \circ \phi^{s-\tau} ds}$$

et

$$B_h(\tau) = U_2^h(\tau)^* \text{Op}_h^w(\tilde{a}(\tau)) U_3^h(\tau).$$

On remarque que le symbole  $a(\tau)$  est dans  $C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  uniformément en  $\tau \in [0, t]$ . Et on a encore uniformité si  $t$  lui-même parcourt un compact de  $\mathbb{R}_+$ . Au sens faible (ou fort) sur  $S(\mathbb{R}^n)$  on a

$$\frac{d}{d\tau} B_h(\tau) = U_2^h(\tau)^* \tilde{B}_h(\tau) U_3^h(\tau),$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{B}_h(\tau) &= \frac{i}{h} [H_1^h, \text{Op}_h^w(\tilde{a}(\tau))] - W_2 \text{Op}_h^w(\tilde{a}(\tau)) - \text{Op}_h^w(a(\tau)) W_3 + \text{Op}_h^w(\partial_\tau \tilde{a}(\tau)) \\ &= \text{Op}_h^w(c(\tau, h)) \end{aligned} \quad (3.29)$$

où

$$c(\tau, h) = \sum_{j=0}^N h^j c_j(\tau) + h^{N+1} r_N(\tau, h).$$

Les  $c_j(\tau)$  et  $r_N(\tau, h)$  sont des fonctions de  $C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  qui, comme  $a(\tau)$ , peuvent être estimées uniformément en  $\tau \in [0, t]$  et  $t$  dans un compact de  $\mathbb{R}_+$  (et en  $h \in ]0, 1]$  pour  $r_N$ ). En particulier on a :

$$c_0(\tau) = \{p, \tilde{a}(\tau)\} - W \tilde{a}(\tau) + \partial_\tau \tilde{a}(\tau).$$

Or

$$\partial_\tau \tilde{a}(\tau) = -\{p, \tilde{a}(\tau)\} + W \tilde{a}(\tau),$$

et donc  $c_0 = 0$ . Ainsi, si on note

$$b(\tau, h) = \sum_{j=0}^{N-1} h^j c_{j+1}(\tau) + h^N r_N(\tau, h),$$

alors  $b(\tau, h) \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  uniformément en  $\tau \in [0, t]$  et  $h \in ]0, 1]$ , et on obtient au sens faible :

$$\begin{aligned} U_2^h(t)^* \text{Op}_h^w(a) U_3^h(t) &= U_2^h(t)^* \text{Op}_h^w(\tilde{a}(t)) U_3^h(t) \\ &= \text{Op}_h^w(\tilde{a}(0)) + \int_0^t \frac{d}{d\tau} U_2^h(\tau)^* \text{Op}_h^w(\tilde{a}(\tau)) U_3^h(\tau) d\tau \\ &= \text{Op}_h^w(\alpha_0(t)) + h \int_0^t U_2^h(\tau)^* \text{Op}_h^w(b(\tau, h)) U_3^h(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

où  $\alpha_0(t)$  est donné en (ii). On a eu besoin de travailler au sens faible pour les étapes intermédiaires (la dérivation), mais on finit par obtenir une égalité entre opérateurs bornés, c'est donc une véritable égalité dans  $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$ . En notant

$$R_0(t, h) = \int_0^t U_2^h(\tau)^* \text{Op}_h^w(b(\tau, h)) U_3^h(\tau) d\tau,$$

on obtient bien la première assertion pour  $N = 0$ .

**2.** On montre maintenant (i) par récurrence sur  $N \in \mathbb{N}$ . Plus précisément, étant donné  $N \in \mathbb{N}$ , on montre par récurrence sur  $m \in \llbracket 0, N \rrbracket$  qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} U_2^h(t)^* \text{Op}_h^w(a) U_3^h(t) &= \sum_{j=0}^m h^j \text{Op}_h^w(\alpha_j(t)) + \sum_{j=m+1}^N h^j \text{Op}_h^w(\beta_{m,j}(t)) \\ &+ \sum_{j=m+1}^N h^j \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_m} U_2^h(t_{m+1})^* \text{Op}_h^w(d_{m,j}(t_1, \dots, t_{m+1})) U_3^h(t_{m+1}) dt_{m+1} \dots dt_1 \\ &+ h^{N+1} R_m(t, h), \end{aligned} \quad (3.30)$$

où les  $\alpha_j(t)$  et  $\beta_{m,j}(t)$  sont dans  $C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  uniformément en  $t$  dans un compact de  $\mathbb{R}_+$ , de même que les  $d_{m,j}(t_1, \dots, t_{m+1})$  pour  $t_1 \in [0, t], \dots, t_{m+1} \in [0, t_m]$ , et  $R_m(t, h) \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$  uniformément en  $h \in ]0, 1]$  et  $t$  dans un compact de  $\mathbb{R}_+$ .

On a déjà montré le cas  $m = 0$ , avec  $\beta_{0,1} = \dots = \beta_{0,N} = 0$  pour tout  $t \geq 0$ ,  $d_{0,j}(t_1) = c_j(t_1)$  pour  $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$  et  $R_0(t, h) = \int_0^t U_2^h(t_1)^* \text{Op}_h^w(r_N(t, h)) U_3^h(t_1) dt_1$ . On obtiendra le résultat attendu en prenant  $m = N$ .

On suppose donc le résultat acquis jusqu'au rang  $m \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ . Soient  $j \in \llbracket m+1, N \rrbracket$  et  $t_1 \in [0, t], t_2 \in [0, t_1], \dots, t_{m+1} \in [0, t_m]$ . D'après ce qui précède, il existe des symboles  $c_{m,j}(t_1, \dots, t_{m+1})$  et  $\delta_{m,j,k}(t_1, \dots, t_{m+2})$  pour  $k \in \llbracket j+1, N \rrbracket$  et  $t_{m+2} \in [0, t_{m+1}]$  tels que :

$$\begin{aligned} U_2^h(t_{m+1})^* \text{Op}_h^w(d_{m,j}(t_1, \dots, t_{m+1})) U_3^h(t_{m+1}) &= \text{Op}_h^w(c_{m,j}(t_1, \dots, t_{m+1})) \\ &+ \sum_{k=j+1}^N h^{k-j} \int_0^{t_{m+1}} U_2^h(t_{m+2})^* \text{Op}_h^w(\delta_{m,j,k}(t_1, \dots, t_{m+2})) U_3^h(t_{m+2}) dt_{m+2} \\ &+ h^{N+1-j} \tilde{R}_{m,j}(t_1, \dots, t_{m+1}, h). \end{aligned}$$

Les symboles  $c_{m,j}(t_1, \dots, t_{m+1})$  et  $\delta_{m,j,k}(t_1, \dots, t_{m+2})$  sont dans  $C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  uniformément pour  $t_1, \dots, t_{m+2}$  dans un compact de  $\mathbb{R}_+$ , et  $\tilde{R}_{m,j}(t_1, \dots, t_{m+1}, h)$  borné dans  $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$  uniformément pour  $t_1, \dots, t_{m+1}$  dans un compact de  $\mathbb{R}_+$  et  $h \in ]0, 1]$ . On note alors :

$$\alpha_{m+1}(t) = \beta_{m,m+1}(t) + \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_m} c_{m,m+1}(t_1, \dots, t_{m+1}) dt_{m+1} \dots dt_1.$$

Pour  $j \in \llbracket m+2, N \rrbracket$  on note :

$$\beta_{m+1,j}(t) = \beta_{m,j}(t) + \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_m} c_{m,j}(t_1, \dots, t_{m+1}) dt_{m+1} \dots dt_1.$$

Pour  $k \in \llbracket m+2, N \rrbracket$  :

$$d_{m+1,k}(t_1, \dots, t_{m+2}) = \sum_{j=m+1}^N \delta_{m,j,k}(t_1, \dots, t_{m+2}),$$

et enfin :

$$R_{m+1}(t, h) = R_m(t, h) + \sum_{j=m+1}^N \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_m} \tilde{R}_{m,j}(t_1, \dots, t_{m+1}, h) dt_{m+1} \dots dt_1.$$

On obtient alors (3.30) à l'ordre  $m+1$ .

**3.** Ce qui précède assure l'existence des symboles  $\alpha_j(t)$  vérifiant (i), mais ne permet pas d'obtenir (iii). Pour obtenir le résultat sur la propagation du support, on procède à nouveau par récurrence. On se donne  $N \in \mathbb{N}$  et on montre le résultat pour tout  $j \in \llbracket 0, N \rrbracket$ . On note :

$$A(t) = U_2^h(t)^* \text{Op}_h^w(a) U_3^h(t) = \sum_{j=0}^N h^j \text{Op}_h^w(\alpha_j(t)) + h^{N+1} R_N(t, h).$$

On a alors d'une part

$$\frac{d}{dt} A(t) = \sum_{j=0}^N h^j \text{Op}_h^w(\partial_t \alpha_j(t)) + h^{N+1} \frac{d}{dt} R_N(t, h),$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A(t) &= \frac{i}{h} [H_1^h, A(t)] - W_2 A(t) - A(t) W_3 \\ &= \sum_{j=0}^N h^j \left( \frac{i}{h} [H_1^h, \text{Op}_h^w(\alpha_j(t))] - W_2 \text{Op}_h^w(\alpha_j(t)) - \text{Op}_h^w(\alpha_j(t)) W_3 \right) + O_{h \rightarrow 0}(h^{N+1}) \\ &= \sum_{j=0}^N \left( h^j \text{Op}_h^w(\{p, \alpha_j(t)\} - W \alpha_j(t)) + \sum_{k=j+1}^N h^k \text{Op}_h^w(\alpha_{j,k}(t)) \right) + O_{h \rightarrow 0}(h^{N+1}), \end{aligned}$$

où les restes sont estimés dans  $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$  et les  $\alpha_{j,k}(t)$  sont des symboles de  $C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  tels que  $\text{supp } \alpha_{j,k}(t) \subset \text{supp } \alpha_j(t)$  pour tout  $t \geq 0$ . Pour tout  $j \in \llbracket 0, N \rrbracket$  on a alors :

$$\partial_t \alpha_j(t) = \{p, \alpha_j(t)\} - W \alpha_j(t) + \sum_{l=0}^{j-1} \alpha_{l,j}(t).$$

Pour  $j \in \llbracket 0, N \rrbracket$ ,  $t \geq 0$  et  $w \in \mathbb{R}^{2n}$  on note :

$$\beta_j(t, w) = \alpha_j(t, \phi^{-t}(w)) \exp \left( \int_0^t (W \circ \phi^{-s})(w) ds \right).$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \partial_t \beta_j(t, w) &= (\partial_t \alpha_j(t) - \{p, \alpha_j(t)\} + W \alpha_j(t)) (\phi^{-t}(w)) \exp \left( \int_0^t (W \circ \phi^{-s})(w) ds \right) \\ &= \exp \left( \int_0^t W(\phi^{-s}(w)) ds \right) \sum_{l=0}^{j-1} \alpha_{l,j}(t, \phi^{-t}(w)). \end{aligned}$$

On suppose maintenant que  $a$  s'annule sur un ouvert  $\mathcal{W}$  de  $\mathbb{R}^{2n}$  et on montre par récurrence sur  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$  que  $\alpha_j(t)$  s'annule sur  $\phi^{-t}(\mathcal{W})$  pour tout  $t \geq 0$ , sachant que c'est vrai pour  $j = 0$  d'après (ii). On suppose donc le résultat acquis jusqu'au rang  $j - 1$  pour un certain  $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ . On en déduit déjà que  $\alpha_{l,j}(t)$  s'annule sur  $\phi^{-t}(\mathcal{W})$  pour tous  $l \in \llbracket 0, j - 1 \rrbracket$  et  $t \geq 0$ , et donc que  $\partial_t \beta_j(t)$  s'annule sur  $\mathcal{W}$  pour tout  $t \geq 0$ . Comme  $\beta_j(0) = 0$ , cela prouve que  $\beta_j(t)$  s'annule sur  $\mathcal{W}$  puis que  $\alpha_j(t)$  s'annule sur  $\phi^{-t}(\mathcal{W})$  pour tout  $t \geq 0$ .  $\square$

On rappelle qu'on a noté  $H_1^h = -h^2 \Delta + V_1(x)$ ,  $H_h = H_1^h - ihV_2$  ainsi que

$$U_h(t) = e^{-\frac{it}{h}H_h} \quad \text{et} \quad U_1^h(t) = e^{-\frac{it}{h}H_1^h}.$$

**Corollaire 3.44.** *Soient  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  et  $\omega \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$  nul au voisinage de  $\phi^{-T}(\text{supp } q)$ . Alors pour tout  $\beta \geq 0$  on a :*

$$\left\| \text{Op}_h^w(q)U_h(T)\text{Op}_h^w(\omega) \langle x \rangle^\beta \right\| = O(h^\infty).$$

Bien que ce corollaire ne dépende pas du caractère non-autoadjoint de l'opérateur, on en redonne une démonstration.

*Démonstration.* Soit  $N \in \mathbb{N}$ . D'après le théorème 3.43, on a

$$U_1^h(-T)\text{Op}_h^w(q)U_h(T)\text{Op}_h^w(\omega) \langle x \rangle^\beta = \sum_{j=0}^N h^j \text{Op}_h^w(\alpha_j(T))\text{Op}_h^w(\omega) \langle x \rangle^\beta + h^{N+1} R_N(T, h)\text{Op}_h^w(\omega) \langle x \rangle^\beta,$$

où les supports des  $\alpha_j(T)$  sont compacts et disjoints du support de  $\omega$ , ce qui prouve déjà que

$$\left\| \sum_{j=0}^N h^j \text{Op}_h^w(\alpha_j(T))\text{Op}_h^w(\omega) \langle x \rangle^\beta \right\| = O(h^{N+1}).$$

Il reste à montrer que l'opérateur  $R_N(T, h)\text{Op}_h^w(\omega) \langle x \rangle^\beta$  est borné uniformément en  $h \in ]0, 1]$ . Comme  $\omega \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ ,  $\text{Op}_h^w(\omega)$  stabilise  $L^{2,\beta}(\mathbb{R}^n)$ , donc il suffit de montrer que  $R_N(T, h) \langle x \rangle^\beta$  est borné uniformément en  $h \in ]0, 1]$ . Mais  $R_N(T, h)$  est une somme de termes de la forme

$$\int_0^T U_1^h(\tau)^* \text{Op}_h^w(r(h))U_h(\tau) d\tau$$

où, puisque  $q$  est à support compact,  $r(h) \in \mathcal{S}(\langle x \rangle^{-\delta} \langle \xi \rangle^{-\delta})$  uniformément en  $h \in ]0, 1]$  et pour tout  $\delta \geq 0$ . Il reste à vérifier que pour un tel  $r$  on a :

$$\sup_{h \in ]0, 1]} \sup_{t \in [0, T]} \left\| \text{Op}_h^w(r)U_h(t) \langle x \rangle^\beta \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} < +\infty.$$

Pour simplifier on ne le fait que pour  $\beta = 1$ , qui est le seul cas que l'on utilisera (voir la démonstration du lemme 6.39). On commence par observer que comme  $U_h(t)$  commute avec  $H_h$ , il préserve l'espace de Sobolev  $H^k(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . On considère ensuite  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  égale à 1 sur  $[-1, 1]$  et nulle hors de  $[-2, 2]$ , puis pour tout  $R \geq 1$  on note  $\chi_R \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  l'application  $x \mapsto \chi(\frac{|x|}{R})$ . Pour  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  et  $R \geq 1$  on a :

$$\begin{aligned} [\langle x \rangle \chi_R, U_h(t)] f &= \int_0^t \frac{d}{ds} U_h(t-s) \langle x \rangle \chi_R U_h(s) f ds \\ &= \frac{i}{h} \int_0^t U_h(t-s) [H_h, \langle x \rangle \chi_R] U_h(s) f ds \\ &= -2i \int_0^t U_h(t-s) \partial_r(\langle x \rangle \chi_R)(h \partial_r)(U_h(s) f) ds \\ &\quad - ih \int_0^t U_h(t-s) \Delta(\langle x \rangle \chi_R)(U_h(s) f) ds. \end{aligned}$$

Les applications  $\partial_r(\langle x \rangle \chi_R)$  et  $\Delta(\langle x \rangle \chi_R)$  sont bornées uniformément en  $R \geq 1$ . En outre pour  $s \in [0, t]$  on a :

$$\text{Op}_h^w(r)U_h(t-s)(h\partial_r) = \text{Op}_h^w(r)U_h(t-s)((1+H_h - V_1(x) + ihV_2(x))(1+H_0^h)^{-1}(h\partial_r)).$$

Comme  $H_h$  commute avec  $U_h(t-s)$  et  $\text{Op}_h^w(r)H_h$  se prolonge en un opérateur borné sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  uniformément en  $h \in ]0, 1]$ , on obtient finalement que  $\text{Op}_h^w(r)[\langle x \rangle \chi_R, U_h(t)]$  est borné sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  uniformément en  $R \geq 1$  et  $h \in ]0, 1]$ , et donc

$$\begin{aligned} \|\text{Op}_h^w(r)U_h(t)\langle x \rangle f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \|\text{Op}_h^w(r)U_h(t)\langle x \rangle \chi_R f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \limsup_{R \rightarrow +\infty} \left( \|\text{Op}_h^w(r)[\langle x \rangle \chi_R, U_h(t)]f\| + \|\text{Op}_h^w(r)\langle x \rangle \chi_R U_h(t)f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right) \leq c\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

où  $c$  ne dépend ni de  $h \in ]0, 1]$ , ni de  $t \in [0, T]$ , ni de  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .  $\square$

### 3.3.2 États lagrangiens

On rappelle dans cette partie les résultats dont on aura besoin concernant les états lagrangiens et les opérateurs intégraux de Fourier. Les démonstrations de ces résultats classiques seront discutées en annexe (paragraphe A.3).

On commence par définir une fonction de phase puis un état lagrangien :

**Définition 3.45.** On appelle fonction de phase (non-dégénérée) sur  $\mathbb{R}^n$  une application  $\psi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{n+N}, \mathbb{R})$  avec  $N \in \mathbb{N}$  telle que pour  $(x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$  vérifiant  $\nabla_\theta \psi(x, \theta) = 0$ , la matrice

$$\begin{pmatrix} \nabla_{x,\theta}^2 \psi(x, \theta) \\ \nabla_{\theta,\theta}^2 \psi(x, \theta) \end{pmatrix} \in M_{n+N, n+N}(\mathbb{R})$$

est de rang maximal  $N$ , la notation  $\nabla_{x,\theta}^2 \psi(x, \theta)$  désignant la matrice des dérivées croisées

$$\nabla_{x,\theta}^2 \psi(x, \theta) = (\partial_{x_i} \partial_{\theta_j} \psi(x, \theta))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq N}} \in M_{n, N}(\mathbb{R}).$$

**Définition 3.46.** On appelle état lagrangien (classique) sur  $\mathbb{R}^n$  une famille d'applications  $(u_h)_{h \in ]0, 1]}$  de la forme

$$u_h : x \mapsto \frac{1}{(2\pi h)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\frac{i}{h} \psi(x, \theta)} b(x, \theta, h) d\theta$$

où  $\psi$  est une fonction de phase non-dégénérée sur  $\mathbb{R}^n$  et, dans  $C_b^\infty(\mathbb{R}^{n+N})$ ,

$$b(h) \sim \sum_{j=0}^{\infty} h^j b_j,$$

où les  $b_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+N})$  pour  $j \in \mathbb{N}$  sont à support dans un compact commun de  $\mathbb{R}^{n+N}$ . On dira alors que  $b_0$  est le symbole principal de l'état lagrangien  $u_h$ .

Cette définition pourrait être plus générale, et le symbole principal qu'on a introduit ici ne correspond pas tout à fait à la notion usuelle, mais ce cadre sera suffisant pour notre étude (voir paragraphe A.3).

Soit  $\psi : \mathbb{R}^{n+N} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de phase sur  $\mathbb{R}^n$  on note

$$\Sigma_\psi = \{(x, \theta) \in \mathbb{R}^{n+N} \mid \nabla_\theta \psi(x, \theta) = 0\}$$

l'ensemble critique de  $\psi$ . La condition de non-dégénérescence sur  $\psi$  assure que  $\Sigma_\psi$  est une sous-variété de dimension  $n$  dans  $\mathbb{R}^{n+N}$ . On considère ensuite l'application

$$j_\psi : \begin{cases} \Sigma_\psi & \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ (x, \theta) & \mapsto (x, \nabla_x \psi(x, \theta)) \end{cases}$$

Toujours par la condition de non-dégénérescence de la définition 3.45, cette application est localement injective. Si on se restreint à un ouvert  $\mathcal{O}$  assez petit de  $\Sigma_\psi$ ,  $j_\psi : \mathcal{O} \rightarrow j_\psi(\mathcal{O})$  définit alors un difféomorphisme. On note enfin :

$$\Lambda_\psi = \text{Im } j_\psi = \{(x, \nabla_x \psi(x, \theta)), (x, \theta) \in \Sigma_\psi\}.$$

Si  $u_h$  est un état lagrangien de phase  $\psi$ , on dit que  $\Lambda_\psi$  est la variété lagrangienne associée à  $u_h$  (c'est une sous-variété lagrangienne de  $\mathbb{R}^{2n}$ ).

*Remarque 3.47.* Contrairement au cadre microlocal, on n'a pas de raison d'interdire à la sous-variété  $\Lambda_\psi$  de rencontrer la section nulle  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ . C'est pourquoi on a retiré l'hypothèse selon laquelle la différentielle de  $\psi$  ne doit pas s'annuler.

**Proposition 3.48.** *Un état lagrangien de symbole  $b$  et de phase  $\psi$  est microlocalisé sur  $j_\psi(\text{supp } b) \subset \Lambda_\psi$ .*

Le résultat que l'on va utiliser au chapitre 6 pour étudier la mesure semi-classique pour la solution de l'équation de Helmholtz est le suivant :

**Proposition 3.49.** *Soit  $u_h$  un état lagrangien de sous-variété lagrangienne  $\Lambda$ . Alors il existe une fonction lisse  $\nu$  sur  $\Lambda$  à valeurs positives et telle que pour tout  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  on a*

$$\langle \text{Op}_h^w(q)u_h, u_h \rangle \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_\Lambda q(w)\nu(w) d\sigma_\Lambda(w),$$

où  $\sigma_\Lambda$  est la mesure de Lebesgue sur  $\Lambda$ .

*Exemple 3.50.* Dans le cas particulier où  $N = 0$ , c'est-à-dire où  $u_h$  est de la forme  $x \mapsto b(x)e^{\frac{i}{h}\psi(x)}$ , on obtient :

$$\langle \text{Op}_h^w(q)u_h, u_h \rangle \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} q(x, \nabla \psi(x)) |b(x)|^2 dx.$$

On renvoie à l'exemple A.8 pour la discussion d'un cas un peu plus général.

*Remarque 3.51.* Les états lagrangiens  $(u_h)_{h \in ]0,1]}$  que l'on va utiliser seront des familles bornées dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  (les résultats précédents assurent que c'est en fait toujours le cas). Dans ce cas on sait d'après la proposition 3.17 que la famille  $(u_h)_{h \in ]0,1]}$  admet une mesure semi-classique, et d'après la proposition 3.48 cette mesure est nécessairement portée par la sous-variété lagrangienne  $\Lambda$ . L'intérêt de cette proposition est qu'on obtient une information plus précise sur la mesure et on n'a pas besoin d'extraire une sous-suite  $h_k \rightarrow 0$  pour avoir convergence. En particulier la famille  $(u_h)_{h \in ]0,1]}$  admet une unique mesure semi-classique.

On a vu en introduction qu'on allait étudier la solution  $u_h$  à l'équation (1.1) en remplaçant la résolvante de l'opérateur de Schrödinger par l'intégrale sur les temps positifs du propagateur. Ce résultat va nous permettre de calculer la mesure semi-classique correspondant à la contribution des temps petits non nuls, dont on va montrer qu'elle est en fait un état lagrangien (voir la proposition 6.25). On voudrait pouvoir en faire autant avec la contribution des temps intermédiaires, obtenue en appliquant le propagateur  $U_h(t)$  pour  $t$  fixé à l'état lagrangien obtenu pour les temps petits (voir la section 6.3). Pour cela on doit comprendre comment  $U_h(t)$  agit sur les états lagrangiens. C'est l'objet du paragraphe suivant, dans lequel on utilisera quelques résultats de la théorie des opérateurs de Fourier intégraux, qu'on rappelle maintenant.

**Définition 3.52.** On appelle opérateur intégral de Fourier sur  $\mathbb{R}^n$  un opérateur à noyau dont le noyau est un état lagrangien sur  $\mathbb{R}^{2n}$  à ceci près qu'on remplace le facteur  $(2\pi h)^{-\frac{N}{2}}$  de la définition 3.46 par un facteur  $(2\pi h)^{-\frac{n+N}{2}}$ . On appellera phase et symbole de l'opérateur la phase et le symbole de son noyau.



Si  $A$  est un opérateur intégral de Fourier sur  $\mathbb{R}^n$  de phase  $\phi : \mathbb{R}^{2n+m} \rightarrow \mathbb{R}$  on note comme précédemment

$$\Sigma_A = \Sigma_\phi = \{(x, y, \tau) \in \mathbb{R}^{2n+m} \mid \nabla_\tau \phi(x, y, \tau) = 0\}$$

et

$$\Lambda_A = \Lambda_\phi = \{(x, y, \nabla_x \phi(x, y, \tau), \nabla_y \phi(x, y, \tau)), (x, y, \tau) \in \Sigma_\phi\} \subset \mathbb{R}^{4n}.$$

On note également

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_A &= \{(x, \xi, y, -\eta) \in \mathbb{R}^{4n} \mid (x, y, \xi, \eta) \in \Lambda_\phi\} \\ &= \{(x, \nabla_x \phi(x, y, \tau), y, -\nabla_y \phi(x, y, \tau)), (x, y, \tau) \in \Sigma_\phi\} \end{aligned}$$

l'ensemble caractéristique de  $A$ . On n'utilisera ici que des opérateurs intégraux de Fourier dont l'ensemble caractéristique est le graphe d'un difféomorphisme  $\kappa$  de  $\mathbb{R}^{2n}$  :

$$\mathcal{C}_A = \{(\kappa(y, \eta), (y, \eta)), (y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}\}.$$

*Exemple 3.53.* L'opérateur pseudo-différentiel  $\text{Op}_h^w(q)$  (ou  $\text{Op}_h(q)$ ) est pour tout  $q \in \mathcal{S}(m)$  ( $m$  fonction d'ordre) un opérateur de Fourier intégral dont l'ensemble caractéristique est le graphe de l'application identité sur  $\mathbb{R}^{2n}$  (modulo le fait qu'on a demandé au symbole d'un état lagrangien d'être à support compact, mais cela se règle comme on le fera pour prouver la proposition 3.59).

**Proposition 3.54.** *Si  $u_h$  est un état lagrangien de sous-variété lagrangienne  $\Lambda$  et  $A$  est un opérateur de Fourier intégral dont l'ensemble caractéristique est le graphe du difféomorphisme  $\kappa$  de  $\mathbb{R}^{2n}$ , alors  $Au_h$  est un état lagrangien de sous-variété lagrangienne  $\kappa(\Lambda)$ .*

**Proposition 3.55.** *Soient  $A$  et  $B$  deux opérateurs intégraux de Fourier dont les relations canoniques  $\mathcal{C}_A$  et  $\mathcal{C}_B$  sont respectivement les graphes des deux difféomorphismes  $\kappa_A$  et  $\kappa_B$  de  $\mathbb{R}^n$ . Alors l'opérateur composé  $A \circ B$  est un opérateur intégral de Fourier dont la relation canonique est le graphe du difféomorphisme  $\kappa_A \circ \kappa_B$ .*

### 3.3.3 Le propagateur de Schrödinger vu comme opérateur de Fourier intégral

On adapte maintenant au cas d'un opérateur de Schrödinger non-autoadjoint l'étude réalisée au paragraphe IV-6 de [Rob87]. Il s'agit d'approcher à  $O(h^\infty)$  près le propagateur  $U_h(t)$  de l'opérateur  $H_h$  par un opérateur de la forme  $I_h(a(t, h), \varphi(t))$ , où pour un symbole  $a$  et une fonction de phase  $\phi$  on note

$$\begin{aligned} I_h(a, \phi)u(x) &= \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}(\phi(x, \xi) - \langle y, \xi \rangle)} a(x, \xi) u(y) d\xi dy \\ &= \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\phi(x, \xi)} a(x, \xi) (\mathcal{F}_h u)(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Comme pour les opérateurs pseudo-différentiels, cette définition doit être comprise au sens des intégrales oscillantes. C'est en particulier possible pour une phase  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$  telle que

$$|\partial_x^\alpha \partial_x^\beta \phi(x, \xi)| \leq c_{\alpha, \beta} (1 + |x| + |\xi|)^{(2 - |\alpha| - |\beta|)_+} \quad (3.31)$$

et

$$\sup_{\mathbb{R}^{2n}} \|\nabla_{x, \xi}^2 \phi - I_n\| < 1. \quad (3.32)$$

On a vu que c'était le cas pour la phase  $\varphi(t)$  solution de l'équation de Hamilton-Jacobi (que l'on va utiliser ici) si  $t$  est pris assez petit, et ce sera encore le cas pour les phases que l'on utilisera au paragraphe 5.1.2. L'amplitude  $a$  est dans  $\mathcal{S}((1 + |x|^2 + |\xi|^2)^k)$  pour un certain  $k \in \mathbb{N}$ . Les propriétés de ces opérateurs sont détaillées dans le paragraphe IV-6 de [Rob87]. On peut par exemple montrer que comme pour les opérateurs pseudo-différentiels, l'opérateur

$I_h(a, \phi)$  est continu de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dans lui-même [Rob87, Proposition II-2] et se prolonge en un opérateur borné sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  si  $a \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  [Rob87, Corollaire IV-22]. En outre la norme de cet opérateur ne dépend que de la quantité (3.32) et d'un nombre fini de dérivées de  $\phi$  et de  $a$ . L'adjoint de  $I_h(a, \phi)$  est alors donné par :

$$I_h(a, \phi)^* u(y) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}(\langle y, \xi \rangle - \phi(z, \xi))} \overline{a(z, \xi)} u(z) d\xi dz,$$

ou encore par :

$$(\mathcal{F}_h I_h(a, \phi)^* u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{i}{h}\phi(z, \xi)} \overline{a(z, \xi)} u(z) dz.$$

Comme pour les opérateurs pseudo-différentiels, on peut également montrer que si le symbole  $a$  est dans  $\mathcal{S}_\delta(\mathbb{R}^{2n})$  pour un certain  $\delta \in \mathbb{R}$ , alors  $I_h(a, \phi)$  envoie  $L^{2,s}(\mathbb{R}^n)$  dans  $L^{2,s+\delta}(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ . Pour ce type de résultats on pourra consulter l'appendice de [Wan88].

Si l'on oublie un instant le fait qu'on a demandé au paragraphe 3.3.2 des symboles à supports compacts, les opérateurs  $I_h(a, \phi)$  que l'on vient de définir sont des opérateurs intégraux de Fourier. En effet, il suffit de vérifier que la phase  $(x, y, \xi) \mapsto \phi(x, \xi) - \langle y, \xi \rangle$  est non-dégénérée, ce qui est effectivement vrai puisque la matrice

$$\begin{pmatrix} \nabla_{x, \xi}^2 \phi(x, \xi) \\ -I_n \\ \nabla_{\xi, \xi}^2 \phi(x, \xi) \end{pmatrix} \in M_{3n, n}(\mathbb{R})$$

est toujours de rang maximal  $n$ . On n'utilisera pas ce résultat ici, mais tout opérateur de Fourier intégral peut s'écrire localement comme un opérateur de la forme  $I_h(a, \phi)$  (voir par exemple le théorème 6.1.4 de [Sog02]).

**Proposition 3.56.** *Sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  on a :*

$$\frac{i}{h} H_h I_h(a, \phi) = \frac{i}{h} I_h(a |\nabla_x \phi|^2 + a V_1, \phi) + I_h(a \Delta_x \phi + 2 \nabla_x a \cdot \nabla_x \phi + a V_2, \phi) - i h I_h(\Delta_x a, \phi).$$

*Démonstration.* Pour une fonction  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  on a :

$$\begin{aligned} H_h I_h(a, \phi) u(x) &= H_h \left( \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}(\phi(\cdot, \xi) - \langle y, \xi \rangle)} a(\cdot, \xi) u(y) dy d\xi \right) (x) \\ &= \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} H_h \left( a(\cdot, \xi) e^{\frac{i}{h}\phi(\cdot, \xi)} \right) (x) e^{-\frac{i}{h}\langle y, \xi \rangle} u(y) dy d\xi \\ &= I_h \left( e^{-\frac{i}{h}\phi} H_h \left( a e^{\frac{i}{h}\phi} \right), \phi \right) u(x) \end{aligned}$$

(les calculs sont valables au sens des intégrales oscillantes). Il n'y a plus qu'à vérifier que

$$H_h \left( a e^{\frac{i}{h}\phi} \right) = \left( -h^2 \Delta_x a - i h a \Delta_x \phi - 2 i h \nabla_x a \cdot \nabla_x \phi + a |\nabla_x \phi|^2 + V_1 a - i h V_2 a \right) e^{\frac{i}{h}\phi}.$$

□

**Proposition 3.57.** *Soient  $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ ,  $\tau_0 > 0$  assez petit,  $b \in C_b^\infty(\cdot - \tau_0, \tau_0[\times \mathbb{R}^{2n})$  et  $d \in C_b^\infty(\cdot - \tau_0, \tau_0[\times \mathbb{R}^{2n})$ . Alors les applications*

$$a_0 : (t, x, \xi) \mapsto f(\bar{y}(t, x, \xi), \xi) \exp \left( - \int_0^t b(\tau, \tilde{x}(\tau, t, x, \xi), \xi) d\tau \right)$$

et

$$\tilde{a} : (t, x, \xi) \mapsto \int_0^t d(s, \tilde{x}(s, t, x, \xi), \xi) \exp \left( - \int_s^t b(\tau, \tilde{x}(\tau, t, x, \xi), \xi) d\tau \right) ds$$

sont dans  $C_b^\infty(]-\tau_0, \tau_0[ \times \mathbb{R}^{2n})$  et sont respectivement solutions des équations de transport

$$\partial_t a_0 + 2\nabla_x a_0 \cdot \nabla_x \varphi + a_0 b = 0$$

et

$$\partial_t \tilde{a} + 2\nabla_x \tilde{a} \cdot \nabla_x \varphi + \tilde{a} b = d,$$

avec les conditions initiales :

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad a_0(0, x, \xi) = f(x, \xi) \quad \text{et} \quad \tilde{a}(0, x, \xi) = 0.$$

Dans ces expressions,  $\varphi$  est la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi donnée par la proposition 3.23.

*Démonstration.* **1.** Les deux applications sont bien dans  $C_b^\infty(]-\tau_0, \tau_0[ \times \mathbb{R}^{2n})$  et les conditions initiales sont bien celles annoncées.

**2.** Soient  $t \in ]-\tau_0, \tau_0[$  et  $(y, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ . Pour  $\theta \in \mathbb{R}$  assez petit, on peut calculer :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\theta} a_0(t + \theta, \bar{x}(t + \theta, y, \xi), \xi) \right|_{\theta=0} &= \left. \frac{d}{d\theta} f(y, \xi) \exp \left( - \int_0^{t+\theta} b(\tau, \bar{x}(\tau, y, \xi), \xi) d\tau \right) \right|_{\theta=0} \\ &= -b(t, \bar{x}(t, y, \xi), \xi) a_0(t, \bar{x}(t, y, \xi), \xi), \end{aligned}$$

et d'autre part, d'après (3.16) :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\theta} a_0(t + \theta, \bar{x}(t + \theta, y, \xi), \xi) \right|_{\theta=0} & \tag{3.33} \\ &= \partial_t a_0(t, \bar{x}(t, y, \xi), \xi) + \nabla_x a_0(t, \bar{x}(t, y, \xi), \xi) \cdot \partial_t \bar{x}(t, y, \xi) \\ &= \partial_t a_0(t, \bar{x}(t, y, \xi), \xi) + 2\nabla_x a_0(t, \bar{x}(t, y, \xi), \xi) \cdot \nabla_x \varphi(t, \bar{x}(t, y, \xi), \xi). \end{aligned}$$

Pour  $t \in ]-\tau_0, \tau_0[$  et  $(x, \xi)$ , on applique les deux calculs précédents avec  $y = \bar{y}(t, x, \xi)$ , ce qui donne bien l'équation de transport annoncée pour  $a_0$ .

**3.** Le calcul pour  $\tilde{a}$  est analogue. On a :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\theta} a_j(t + \theta, \bar{x}(t + \theta, y, \xi), \xi) \right|_{\theta=0} & \\ &= \left. \frac{d}{d\theta} \int_0^{t+\theta} d(s, \bar{x}(s, y, \xi), \xi) \exp \left( - \int_s^{t+\theta} b(\tau, \bar{x}(\tau, y, \xi), \xi) d\tau \right) ds \right|_{\theta=0} \\ &= d(t, \bar{x}(t, y, \xi), \xi) - b(t, \bar{x}(t, y, \xi), \xi) \tilde{a}(t, \bar{x}(t, y, \xi), \xi). \end{aligned}$$

Et un calcul identique à (3.33) permet de voir que l'équation de transport pour  $\tilde{a}$  est bien satisfaite.  $\square$

**Proposition 3.58.** *Il existe une fonction  $a(h) \in C_b^\infty(]-\tau_0, \tau_0[ \times \mathbb{R}^{2n})$  pour  $h \in ]0, 1]$  telle que pour tout  $t \in [0, \tau_0[$  on a*

$$\left\| e^{-\frac{it}{h} H_h} - I_h(a(t, h), \varphi(t)) \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} = O(h^\infty),$$

où la taille du reste est uniforme en  $t \in [0, \tau_0[$ .

*Démonstration.* **1.** On pose :

$$a_0(t, x, \xi) = \exp \left( - \int_0^t (V_2(\tilde{x}(\tau, t, x, \xi)) + \Delta_x \varphi(\tau, \tilde{x}(\tau, t, x, \xi), \xi)) d\tau \right)$$

D'après la proposition 3.57, la fonction  $a_0$  est solution de l'équation de transport

$$(\partial_t + 2\nabla_x \varphi \cdot \nabla_x + \Delta_x \varphi + V_2) a_0 = 0 \quad (3.34)$$

avec la condition initiale  $a_0(0, x, \xi) = 1$ . Définissant ensuite par récurrence sur  $j \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} & a_j(t, x, \xi) \\ &= i \int_0^t \Delta_x a_{j-1}(s, \tilde{x}(s, t, x, \xi), \xi) \exp \left( - \int_s^t (V_2(\tilde{x}(\tau, t, x, \xi)) - \Delta_x \varphi(\tau, \tilde{x}(\tau, t, x, \xi), \xi)) d\tau \right) ds, \end{aligned}$$

on obtient que  $a_j$  est solution de l'équation

$$(\partial_t + 2\nabla_x \varphi \cdot \nabla_x + \Delta_x \varphi + V_2) a_j = i \Delta_x a_{j-1} \quad (3.35)$$

avec la condition initiale  $a_j(0, x, \xi) = 0$ . En outre, comme  $V_2$  et  $\Delta_x \varphi$  sont des fonctions dont toutes les dérivées sont bornées (voir le corollaire 3.25), on peut vérifier par récurrence que :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad a_j \in C_b^\infty(\cdot - \tau_0, \tau_0[\times \mathbb{R}^{2n}).$$

3. D'après le théorème de Borel 3.4, il existe  $a(h)$  tel qu'on a dans  $C_b^\infty(\cdot - \tau_0, \tau_0[\times \mathbb{R}^{2n})$  :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad a(h) = \sum_{j=0}^N h^j a_j + O_{h \rightarrow 0}(h^{N+1})$$

4. Soit  $N \in \mathbb{N}$ . On note

$$b_N(h) = \sum_{j=0}^N h^j a_j.$$

On a

$$\left\| e^{-\frac{it}{h} H_h} - I_h(a(t, h), \varphi(t)) \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} = \left\| e^{-\frac{it}{h} H_h} - I_h(b_N(t, h), \varphi(t)) \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} + O_{h \rightarrow 0}(h^N),$$

où le reste est uniforme en  $t \in [0, \tau_0]$ , et pour  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  :

$$\left\| e^{-\frac{it}{h} H_h} u - I_h(b_N(t, h), \varphi(t)) u \right\| \leq \int_0^t \left\| \frac{d}{ds} \left( e^{-\frac{i(t-s)}{h} H_h} I_h(b_N(s, h), \varphi(s)) u \right) \right\| ds.$$

Or on a d'après la proposition 3.56 :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} \left( e^{-\frac{i(t-s)}{h} H_h} I_h(b_N(s, h), \varphi(s)) u \right) \\ &= e^{-\frac{i(t-s)}{h} H_h} \left( \frac{i}{h} H_h I_h(b_N(s, h), \varphi(s)) u + I_h \left( \partial_s b_N(s, h) + \frac{i}{h} b_N(s, h) \partial_s \varphi(s), \varphi(s) \right) u \right) \\ &= \frac{i}{h} e^{-\frac{i(t-s)}{h} H_h} I_h \left( b_N(s, h) |\nabla_x \varphi(s)|^2 + b_N(s, h) V_1 + b_N(s, h) \partial_s \varphi(s), \varphi(s) \right) u \\ &\quad + e^{-\frac{i(t-s)}{h} H_h} I_h \left( a_0(s) \Delta_x \varphi(s) + 2\nabla_x a_0(s) \cdot \nabla_x \varphi(s) + a_0(s) V_2 + \partial_s a_0(s), \varphi(s) \right) u \\ &\quad + \sum_{j=1}^N h^j e^{-\frac{i(t-s)}{h} H_h} I_h \left( a_j(s) \Delta_x \varphi(s) + 2\nabla_x a_j(s) \cdot \nabla_x \varphi(s), \varphi(s) \right) u \\ &\quad + \sum_{j=1}^N h^j e^{-\frac{i(t-s)}{h} H_h} I_h \left( a_j(s) V_2 + \partial_s a_j(s) - i \Delta_x a_{j-1}(s), \varphi(s) \right) u \\ &\quad - h^{N+1} e^{-\frac{i(t-s)}{h} H_h} I_h \left( i \Delta_x a_N(s), \varphi(s) \right) u. \end{aligned}$$

D'après (3.13), (3.34) et (3.35) on obtient bien le résultat annoncé.  $\square$

**Proposition 3.59.** Soient  $u_h$  un état lagrangien de sous-variété lagrangienne  $\Lambda$  et  $t \in [0, \tau_0[$  où  $\tau_0 > 0$  est donné par la proposition 3.23. Alors  $U_h(t)u_h$  est, à  $O(h^\infty)$  près dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , un état lagrangien de sous-variété lagrangienne  $\phi^t(\Lambda)$ .

*Démonstration.* On considère la phase  $\varphi$  donnée par la proposition 3.23 et l'amplitude  $a$  donnée par la proposition 3.58. Soient  $\psi$  et  $b$  sur  $\mathbb{R}^{n+N}$  (avec  $N \in \mathbb{N}$ ) la phase et le symbole de l'état lagrangien  $u_h$ . On sait déjà qu'on a dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  :

$$U_h(t)u_h(x) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n+N}} e^{\frac{i}{h}(\varphi(t,x,\xi) - \langle y, \xi \rangle + \psi(y, \theta))} a(t, x, \xi, h) b(y, \theta, h) d\theta dy d\xi + O_{h \rightarrow 0}(h^\infty). \quad (3.36)$$

On note

$$\Phi_t : (x, \xi, y, \theta) \mapsto \varphi(t, x, \xi) - \langle y, \xi \rangle + \psi(y, \theta).$$

On a alors

$$\nabla_y \Phi_t(x, \xi, y, \theta) = -\xi + \nabla_y \psi(y, \theta).$$

Cette quantité est grande pour  $\xi$  grand, et ce uniformément en  $x, y \in \mathbb{R}^n$  et  $\theta \in \mathbb{R}^N$ , donc en faisant des intégrations par parties par rapport à  $y$ , on voit qu'on ne commet qu'une erreur d'ordre  $O(h^\infty)$  si on ajoute à l'intégrande une fonction de troncature en  $\xi$  égale à 1 sur une boule assez grande de  $\mathbb{R}^n$ . De même, puisque

$$\nabla_\xi \Phi_t(x, \xi, y, \theta) = \nabla_\xi \varphi(t, x, \xi) - y = \bar{y}(t, x, \xi) - y,$$

sachant que le support de  $b$  est compact et qu'on s'est restreint à un support compact en  $\xi$ , on ne fait qu'une erreur d'ordre  $O(h^\infty)$  en négligeant les grandes valeurs de  $x$ . Ainsi, il existe un symbole classique  $\tilde{a}(t, h)$  à support compact en  $(x, \xi)$  (uniformément en  $h$ ) tel que (3.36) est encore valable avec  $a$  remplacé par  $\tilde{a}$ . Ainsi  $U_h(t)$  agit sur l'état lagrangien comme l'opérateur intégral de Fourier de noyau

$$\frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}(\varphi(t,x,\xi) - \langle y, \xi \rangle)} \tilde{a}(t, x, \xi, h) d\xi.$$

Il ne reste plus pour conclure qu'à vérifier que la relation canonique de cet opérateur est le graphe du difféomorphisme  $\phi^t$ . Mais cela résulte directement de (3.16) :

$$\mathcal{C} = \{(x, \nabla_x \varphi(t, x, \xi), y, \xi) \mid y = \nabla_\xi \varphi(t, x, \xi) = \bar{y}(t, x, \xi)\} = \{(\phi^t(y, \xi), (y, \xi)), (y, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}\}.$$

□

Puisque  $U_h(t)$  envoie à  $O(h^\infty)$  près un état lagrangien sur un autre état lagrangien on peut itérer la proposition 3.23, si bien qu'elle est en fait valable pour tout temps positif (fixé) :

**Corollaire 3.60.** Soient  $u_h$  un état lagrangien de sous-variété lagrangienne  $\Lambda$  et  $t \geq 0$ . Alors  $U_h(t)u_h$  est, à  $O(h^\infty)$  près dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , un état lagrangien de sous-variété lagrangienne  $\phi^t(\Lambda)$ .

*Démonstration.* On considère  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t$  où  $N \in \mathbb{N}$  tels que  $t_{j+1} - t_j < \tau_0$  pour tout  $j \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ . On montre alors sur récurrence sur  $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$  que  $U_h(t_j)u_h = U_h(t_j - t_{j-1})U_h(t_{j-1})u_h$  est un état lagrangien de sous-variété  $\phi^{t_j - t_{j-1}}(\phi^{t_{j-1}}(\Lambda)) = \phi^{t_j}(\Lambda)$ . □

## Chapitre 4

# Estimations uniformes de la résolvante par la méthode de Mourre dissipative

On présente dans ce chapitre une démonstration de la méthode des commutateurs de Mourre uniforme dans un cadre dissipatif. On l'appliquera alors à l'opérateur de Schrödinger dissipatif afin d'obtenir des estimations uniformes de la résolvante et le principe d'absorption limite. On montrera enfin que la condition d'amortissement sur les trajectoires captées qui permet d'obtenir ces estimations est également nécessaire.

### 4.1 Méthode des opérateurs conjugués de Mourre

Pour les parties 4.1 et 4.2 on considère un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , une famille  $(H_1^h)_{h \in ]0,1]}$  d'opérateurs autoadjoints de même domaine  $\mathcal{D}_H$ , et une famille  $(V_h)_{h \in ]0,1]}$  d'opérateurs autoadjoints positifs tels que  $V_h$  est relativement borné par rapport à  $H_1^h$  de borne relative strictement inférieure à 1, et ce uniformément en  $h \in ]0,1]}$ . Cela signifie qu'il existe  $a \in [0,1[$  et  $b \geq 0$  tels que :

$$\forall h \in ]0,1], \forall \varphi \in \mathcal{D}_H, \quad \|V_h \varphi\| \leq a \|H_1^h \varphi\| + b \|\varphi\|. \quad (4.1)$$

Pour  $h \in ]0,1]}$  on considère l'opérateur  $H_h = H_1^h - iV_h$ .  $H_h$  est un opérateur dissipatif de domaine  $\mathcal{D}_H$ . Plus précisément, d'après les résultats de la partie 2.1,  $H_h$  est un opérateur dissipatif maximal et on a  $H_h^* = H_1^h + iV_h$  sur  $\mathcal{D}(H_h^*) = \mathcal{D}(H_h) = \mathcal{D}_H$ .

#### 4.1.1 Opérateurs conjugués

On commence par adapter la définition d'une famille d'opérateurs conjugués pour notre famille d'opérateurs dissipatifs  $(H_h)_{h \in ]0,1]}$ . Si les opérateurs que l'on étudie sont dissipatifs, les opérateurs conjugués que l'on va utiliser restent quant à eux autoadjoints :

**Définition 4.1.** On dit que la famille  $(A_h)_{h \in ]0,1]}$  d'opérateurs autoadjoints sur  $\mathcal{H}$  est uniformément conjuguée à la famille  $(H_h)_{h \in ]0,1]}$  sur l'intervalle  $I$  et pour les bornes inférieures  $(\alpha_h)_{h \in ]0,1]}$  (où  $\alpha_h \in ]0,1]}$ ) s'il existe  $\beta, \beta' \geq 0$ ,  $(\beta_h)_{h \in ]0,1]}$  avec  $\beta_h \in [0, \beta]$  pour tout  $h \in ]0,1]}$ , et une fonction  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$  égale à 1 au voisinage de  $\bar{I}$  tels que :

- (a) le domaine de  $A_h$  ne dépend pas de  $h \in ]0,1]}$  (on notera  $\mathcal{D}_A$  le domaine commun des opérateurs  $A_h$ ,  $h \in ]0,1]}$ ) et pour tout  $h \in ]0,1]}$ ,  $\mathcal{D}_H \cap \mathcal{D}_A$  est dense dans  $\mathcal{D}_H$  pour la norme du graphe  $\varphi \mapsto \|(H_1^h - i)\varphi\|$ .
- (b)  $\mathcal{D}_H$  est stable par  $e^{itA_h}$  pour tous  $t \in \mathbb{R}$ ,  $h \in ]0,1]}$ , et

$$\forall h \in ]0,1], \forall \varphi \in \mathcal{D}_H, \quad \sup_{|t| \leq 1} \|(H_1^h - i)e^{itA_h} \varphi\| < \infty.$$

(c) Pour tout  $h \in ]0, 1]$ , les formes quadratiques  $[H_1^h, iA_h]$  et  $[V_h, iA_h]$  définies sur  $\mathcal{D}_H \cap \mathcal{D}_A$  sont minorées et admettent une fermeture. En outre, les opérateurs autoadjoints  $[H_1^h, iA_h]^0$  et  $[V_h, iA_h]^0$  associés à ces fermetures (voir le paragraphe VI.2.1 de [Kat80]) sont au moins définis sur  $\mathcal{D}_H$ , et il existe une constante  $c \geq 0$  telle que pour tous  $h \in ]0, 1]$  et  $\varphi \in \mathcal{D}_H$  on a

$$\|[H_1^h, iA_h]^0 \varphi\| + \|[V_h, iA_h]^0 \varphi\| \leq c\sqrt{\alpha_h} \|(H_1^h - i)\varphi\|,$$

et d'autre part, pour  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}_H$  :

$$\beta_h \|V_h \varphi\| \|[H_1^h, iA_h]^0 \psi\| \leq c\alpha_h \|(H_1^h - i)\varphi\| \|(H_1^h - i)\psi\|.$$

(d) Il existe  $c \geq 0$  telle que pour tous  $h \in ]0, 1]$  et  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}_H \cap \mathcal{D}_A$  on a :

$$|\langle [H_1^h, iA_h]^0 \varphi, A_h \psi \rangle - \langle A_h \varphi, [H_1^h, iA_h]^0 \psi \rangle| \leq c\alpha_h \|(H_1^h - i)\varphi\| \|(H_1^h - i)\psi\|.$$

En outre on a des estimations analogues en remplaçant  $[H_1^h, iA_h]^0$  par  $\beta_h V_h$  ou par  $[V_h, iA_h]^0$ .

(e) Pour tout  $h \in ]0, 1]$  on a :

$$\phi(H_1^h)([H_1^h, iA_h]^0 + \beta_h V_h)\phi(H_1^h) + \beta' V_h \geq \alpha_h \phi^2(H_1^h).$$

*Remarque 4.2.* On remarque tout d'abord que les deux termes  $\phi(H_1^h)\beta_h V_h \phi(H_1^h)$  et  $\beta' V_h$  qui apparaissent dans cette minoration affaiblissent l'hypothèse puisque ce sont des opérateurs positifs. Ces deux termes ne sont pas comparables, au sens où aucun des deux n'est plus grand que l'autre. Par contre on peut toujours supposer que  $\beta' = 0$ , pour cela il suffit de multiplier les deux côtés de l'inégalité par  $\tilde{\phi}(H_1^h)$  où  $\tilde{\phi} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  est égale à 1 au voisinage de  $\bar{I}$  et telle que  $\phi = 1$  sur le support de  $\tilde{\phi}$ . L'intérêt de ce deuxième terme est que si on peut avoir (e) avec  $\beta_h = 0$  alors on gagne de la souplesse sur  $V_h$  dans les hypothèses (c) et (d) (et la démonstration est grandement simplifiée). Ce gain semble *a priori* assez faible (on n'en aura pas besoin ici), mais on l'obtient quasiment gratuitement.

*Remarque 4.3.* On remarque également que si la famille  $(A_h)_{h \in ]0, 1]}$  est uniformément conjuguée à la famille  $(H_h)_{h \in ]0, 1]}$  sur un intervalle  $I$ , alors pour toute constante  $\lambda \in \mathbb{R}$  la famille  $(A_h - \lambda)_{h \in ]0, 1]}$  est uniformément conjuguée à la famille  $(H_h)_{h \in ]0, 1]}$  sur  $I$  avec les mêmes bornes inférieures. Cela résulte de ce que  $A_h$  intervient essentiellement dans des commutateurs. Ainsi dans toutes les estimations que l'on va démontrer, on pourra remplacer  $A_h$  par  $A_h - \lambda$  sans modifier les constantes (autrement dit, les estimations avec  $A_h - \lambda$  seront uniformes en  $\lambda$ ).

### 4.1.2 Opérateur conjugué pour un unique opérateur dissipatif

On a donné dans le paragraphe précédent la définition d'une famille d'opérateurs conjugués à une famille d'opérateurs dissipatifs en vue d'utiliser le résultat dans un cadre semi-classique, où l'on étudie non pas un opérateur mais une famille d'opérateurs indexée par le paramètre  $h \in ]0, 1]$ . Cependant, la méthode de Mourre est en général utilisée pour l'étude d'un unique opérateur  $H$  (c'est par exemple le cas dans l'article original [Mou81]). Les résultats que l'on va présenter peuvent évidemment être appliqués à ce contexte.

Si on cherche une estimation de la résolvante uniforme en  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  (pour un voisinage  $I$  d'un certain  $E > 0$ ) pour un opérateur dissipatif  $H = H_1 - iV$ , où  $H_1$  est un opérateur autoadjoint et  $V$  est autoadjoint positif et  $H_1$ -borné de borne relative strictement inférieure à 1, alors on va chercher un unique opérateur conjugué  $A$  qui vérifie toutes les hypothèses de la définition 4.1 sur un intervalle  $I$  contenant  $E$ , pour la borne inférieure  $\alpha > 0$  et pour  $\beta, \beta' \geq 0$  en considérant les familles  $(H_h)_{h \in ]0, 1]}$ ,  $(A_h)_{h \in ]0, 1]}$ ,  $(\alpha_h)_{h \in ]0, 1]}$  et  $(\beta_h)_{h \in ]0, 1]}$  comme étant constantes par rapport à  $h$  et égales à  $H$ ,  $A$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  respectivement. En particulier la condition de Mourre devient :

$$\phi(H_1)([H_1, iA]^0 + \beta V)\phi(H_1) \geq \alpha \phi^2(H_1) \quad (4.2)$$

(on peut oublier le terme  $\beta'V$  dans ce cas). Dans la suite, lorsqu'on dira que deux opérateurs  $H$  et  $A$  vérifient certaines des conditions (a) à (e) pour être conjugués, ce sera toujours en ce sens. On remarque par exemple que si la famille  $(A_h)_{h \in ]0,1]}$  est uniformément conjuguée à la famille  $(H_h)_{h \in ]0,1]}$  sur  $I$ , alors pour tout  $h \in ]0,1]}$  l'opérateur  $A_h$  est conjugué à l'opérateur  $H_h$  sur  $I$ .

Comme dans le cas autoadjoint, l'existence d'un opérateur conjugué sur  $I$  permet de montrer que  $H$  n'a pas de valeur propre sur  $I$  :

**Proposition 4.4.** *On suppose que l'opérateur dissipatif  $H$  admet un opérateur conjugué  $A$  sur  $I$  pour une certaine borne inférieure  $\alpha > 0$ . Alors  $H$  n'a pas de valeur propre dans  $I$ .*

*Démonstration.* Soit  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  égale à 1 sur  $I$  comme donnée par la définition 4.1. Soient  $\lambda \in I$  et  $\varphi \in \mathcal{D}(H)$  tels que  $H\varphi = \lambda\varphi$ . On a déjà

$$\left\| \sqrt{V}\varphi \right\|^2 = \langle V\varphi, \varphi \rangle = -\operatorname{Im} \langle H\varphi, \varphi \rangle = -\operatorname{Im} \langle \lambda\varphi, \varphi \rangle = 0,$$

donc  $V\varphi = 0$  puis  $H_1\varphi = \lambda\varphi$ . D'après le lemme 4.9, énoncé dans le paragraphe suivant, on a alors

$$0 = \langle [H_1, iA]^0 \varphi, \varphi \rangle = \langle \phi(H_1)([H_1, iA]^0 + \beta V)\phi(H_1)\varphi, \varphi \rangle \geq \alpha \|\varphi\|^2,$$

où on a utilisé le fait que  $\phi(H_1)\varphi = \varphi$  et  $V\varphi = 0$ , ainsi que l'hypothèse (4.2). Cela prouve que  $\varphi = 0$ .  $\square$

Dans le cas d'un unique opérateur on peut en fait remplacer la condition de Mourre (4.2) par

$$\phi(H_1) ([H_1, iA]^0 + \beta V) \phi(H_1) + \beta'V \geq \alpha\phi^2(H_1) + \phi(H_1)K\phi(H_1), \quad (4.3)$$

où  $K$  est un opérateur compact sur  $\mathcal{H}$  :

**Proposition 4.5.** *On suppose que l'opérateur autoadjoint  $A$  vérifie les hypothèses (a) à (d) pour être conjugué à  $H$  sur  $I$ , ainsi que (4.3). Alors l'opérateur  $H$  n'a qu'un nombre fini de valeurs propres sur  $I$ , qui sont toutes de multiplicité finie. En outre si  $E \in I$  n'est pas valeur propre pour  $H$ , il existe  $\gamma > 0$  tel que la condition (4.2) est vérifiée sur  $[E - \gamma, E + \gamma]$  pour une certaine borne  $\alpha' > 0$ .*

*Démonstration.* On suppose par l'absurde qu'on peut trouver une famille  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  orthonormée telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $H\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$  pour un certain  $\lambda_n \in I$ . Comme précédemment on a alors

$$0 = \langle [H_1, iA]^0 \varphi_n, \varphi_n \rangle \geq \alpha \|\varphi_n\|^2 + \langle K\varphi_n, \varphi_n \rangle.$$

Mais  $K\varphi_n \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{H}$ , ce qui donne une contradiction. Pour montrer la deuxième assertion, il suffit de vérifier que si  $E \in I$  n'est pas valeur propre pour  $H$ , alors il existe  $\gamma > 0$  tel que pour  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  à support dans  $]E - 2\gamma, E + 2\gamma[$  et égale à 1 au voisinage de  $[E - \gamma, E + \gamma]$ , on a :

$$\phi(H_1)K\phi(H_1) \geq -\frac{\alpha}{2}\phi^2(H_1). \quad (4.4)$$

Supposons dans un premier temps que  $K$  est de rang 1, donc de la forme  $K = \langle \cdot, \psi \rangle \zeta$  avec  $\zeta, \psi \in \mathcal{H}$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned} \langle K\phi(H_1)\varphi, \phi(H_1)\varphi \rangle &= \langle \phi(H_1)\varphi, \psi \rangle \langle \zeta, \phi(H_1)\varphi \rangle \\ &\geq -\|\phi(H_1)\varphi\|^2 \|\mathbf{1}_{[E-2\gamma, E+2\gamma]}(H_1)\psi\| \|\mathbf{1}_{[E-2\gamma, E+2\gamma]}(H_1)\zeta\|. \end{aligned}$$

Comme  $E$  n'est pas dans l'adhérence des valeurs propres de  $H_1$  ( $E$  est donc dans le spectre continu),  $\mathbf{1}_{[E-2\gamma, E+2\gamma]}(H_1)\psi$  tend vers 0 dans  $\mathcal{H}$  quand  $\gamma$  tend vers 0, donc si  $\gamma$  assez petit, on a bien (4.4). Par linéarité, le résultat s'étend à un opérateur  $K$  de rang fini, puis par densité à tout opérateur compact.  $\square$



En guise d'exemple, on applique ceci au cas d'un unique opérateur de Schrödinger dissipatif dans un cas simple :

**Proposition 4.6.** *Soient  $V_1$  et  $V_2$  deux potentiels sur  $\mathbb{R}^n$  tels que  $V_1$  est à valeurs réelles et  $V_2$  est continu, non nul et à valeurs réelles positives. On suppose que pour  $j \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$  et  $m \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$  la fonction  $(x \cdot \nabla)^j V_m$  est bornée et tend vers 0 à l'infini. Alors le générateur des dilatations*

$$A = -\frac{i}{2}(x \cdot \nabla + \nabla \cdot x).$$

est un opérateur conjugué pour l'opérateur de Schrödinger dissipatif  $H = -\Delta + V_1(x) - iV_2(x)$  au voisinage de tout  $E > 0$ .

*Démonstration.* L'hypothèse (a) est bien vérifiée car l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est dans  $\mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(A)$  et est un cœur pour  $H$ . (b) résulte simplement de ce que pour  $t \in \mathbb{R}$  et  $\varphi \in H^2(\mathbb{R}^n)$  on a

$$e^{itA}\varphi(x) = \varphi(e^t x) e^{\frac{nt}{2}},$$

donc  $e^{itA}\varphi \in H^2(\mathbb{R}^n)$  et

$$(\Delta e^{itA}\varphi)(x) = e^{2t}\varphi(e^t x) e^{\frac{nt}{2}} = e^{2t} e^{itA}\varphi(x). \quad (4.5)$$

D'autre part on a

$$[-\Delta, iA] = -2\Delta \quad \text{et} \quad [V, iA] = -ix \cdot \nabla V(x).$$

Les hypothèses formulées assurent alors que les conditions (c) et (d) sont vérifiées. Pour l'hypothèse (e), il suffit de constater que pour un intervalle compact  $J \subset \mathbb{R}_+^*$  on a

$$\mathbb{1}_J(H_1)[H_1, iA]^0 \mathbb{1}_J(H_1) = \mathbb{1}_J(H_1) (2H_1 - 2V_1 - x \cdot \nabla V_1) \mathbb{1}_J(H_1),$$

ce qui donne bien (4.3) puisque  $(2V_1 + x \cdot \nabla V_1)$  est relativement compact par rapport à  $H_1$ , et donc  $K = (2V_1 + x \cdot \nabla V_1) \mathbb{1}_J(H_1)$  est un opérateur compact. Comme  $H$  n'admet pas de valeurs propres dans  $\mathbb{R}_+^*$ , il n'y a plus qu'à appliquer la proposition précédente.  $\square$

On observe qu'on n'a pas eu besoin pour cet exemple de la condition généralisée utilisant la partie imaginaire du potentiel. Le but de la partie 4.3 est d'appliquer la méthode de Mourre uniforme à l'opérateur de Schrödinger dans un cadre semi-classique. Comme dans le cas autoadjoint, l'opérateur conjugué qu'on utilisera sera une perturbation du générateur des dilatations utilisé ici, mais on aura cette fois à exploiter la partie imaginaire du potentiel qui apparaît dans l'hypothèse (e).

### 4.1.3 Lemmes préliminaires

On redonne dans cette partie certains résultats démontrés dans la partie II de [Mou81]. Comme les lemmes 4.7 à 4.9 ne font intervenir ni la partie imaginaire de  $H_h$  (ils n'utilisent que les quatre premières hypothèses de la définition 4.1 pour  $H_1^h$ ) ni le paramètre  $h$ , il n'y a pas besoin de modifier ou de préciser les démonstrations. On remarque d'ailleurs que l'hypothèse (b) ne sera utilisée que dans ces résultats. C'est pourquoi on ne demande d'uniformité par rapport au paramètre  $h$  pour cette hypothèse.

**Lemme 4.7.** *Soient  $H_1$  et  $A$  deux opérateurs autoadjoints satisfaisant les hypothèses (a) à (c) pour être conjugués. Alors pour tout  $z$  dans l'ensemble résolvant de  $H_1$ ,  $\mathcal{D}(A)$  est invariant par  $(H_1 - z)^{-1}$ .*

**Lemme 4.8.** *Soient  $H_1$  et  $A$  deux opérateurs autoadjoints satisfaisant les hypothèses (a) à (c) pour être conjugués. Alors pour  $|\mu|$  assez grand,  $(A + i\mu)^{-1}$  laisse  $\mathcal{D}(H_1)$  invariant. En outre  $(A + i\mu)^{-1}$  pour  $|\mu|$  assez grand est une famille uniformément bornée dans l'espace des opérateurs bornés sur  $\mathcal{D}(H_1)$  (pour la norme du graphe), et pour tout  $\psi \in \mathcal{D}(H_1)$  on a :*

$$i\mu(A + i\mu)^{-1}\psi \xrightarrow{|\mu| \rightarrow \infty} \psi.$$

Pour  $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  on note :

$$A(\mu) = Ai\mu(A + i\mu)^{-1} = i\mu \text{Id}_{\mathcal{H}} + \mu^2(A + i\mu)^{-1}.$$

**Lemme 4.9.** Soient  $H_1$  et  $A$  deux opérateurs autoadjoints satisfaisant les conditions (a) à (c) pour être conjugués. Alors pour  $\psi \in \mathcal{D}(H_1)$  on a :

$$[H_1, iA]^0 \psi = \lim_{|\mu| \rightarrow \infty} [H, iA(\mu)] \psi.$$

Si en outre  $\psi$  est un vecteur propre pour  $H_1$  alors on a :

$$\langle [H_1, iA]^0 \psi, \psi \rangle = 0.$$

Les lemmes 4.10 et 4.11 sont également tirés de [Mou81]. On en redonne néanmoins les démonstrations car on aura besoin de vérifier la dépendance par rapport au paramètre  $h$  des estimations.

**Lemme 4.10.** Soient  $H_1$  et  $A$  deux opérateurs autoadjoints satisfaisant les hypothèses (a) à (c) pour être conjugués. Soit  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Alors  $\mathcal{D}(H_1) \cap \mathcal{D}(A)$  est stable par  $\phi(H_1)$ . En outre l'opérateur  $(A\phi(H_1) - \phi(H_1)A)$ , bien défini sur  $\mathcal{D}(H_1) \cap \mathcal{D}(A)$ , se prolonge en un opérateur borné sur  $\mathcal{D}(H_1)$ , et pour  $\psi \in \mathcal{D}(H_1)$  on a

$$\|(A\phi(H_1) - \phi(H_1)A)\psi\| \leq C_\phi \|[H_1, iA]^0(H_1 - i)^{-1}\| \|(H_1 - i)\psi\|,$$

où  $C_\phi$  ne dépend que de  $\phi$ .

*Démonstration.* Soit  $\psi \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(H_1)$ . D'après le lemme 4.8,  $\mathcal{D}(H_1)$  est stable par  $A(\mu)$  dès que  $|\mu|$  est assez grand. Pour  $t \in \mathbb{R}$  on a alors

$$\begin{aligned} \|(A(\mu)e^{-itH_1} - e^{-itH_1}A(\mu))\psi\| &= \left\| \int_0^t \frac{d}{ds} e^{i(s-t)H_1} A(\mu) e^{-isH_1} \psi ds \right\| \\ &= \left\| \int_0^t i e^{i(s-t)H_1} (H_1 A(\mu) - A(\mu) H_1) e^{-isH_1} \psi ds \right\| \\ &\leq |t| \sup_{0 \leq |s| \leq |t|} \|[H_1, iA(\mu)] e^{-isH_1} \psi\|, \end{aligned}$$

et donc, d'après le lemme 4.9 :

$$\begin{aligned} \limsup_{|\mu| \rightarrow \infty} \|A(\mu)e^{-itH_1} \psi\| &\leq |t| \sup_{0 \leq |s| \leq |t|} \|[H_1, iA]^0 e^{-isH_1} \psi\| + \|A\psi\| \\ &\leq \mathcal{N} |t| \sup_{0 \leq |s| \leq |t|} \|(H_1 + i)e^{-isH_1} \psi\| + \|A\psi\| \\ &\leq \mathcal{N} |t| \|(H_1 + i)\psi\| + \|A\psi\|, \end{aligned}$$

où on a noté  $\mathcal{N} = \|[H_1, iA]^0(H_1 - i)^{-1}\|$ . Cela prouve déjà que  $e^{-itH_1} \psi \in \mathcal{D}(A)$  et :

$$\|Ae^{-itH_1} \psi\| \leq \mathcal{N} |t| \|(H_1 + i)\psi\| + \|A\psi\|.$$

Comme  $\phi(H_1) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(t) e^{itH_1} dt$ , on a :

$$\begin{aligned} \limsup_{|\mu| \rightarrow \infty} \|A(\mu)\phi(H_1)\psi\| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\phi}(t)| \limsup_{|\mu| \rightarrow \infty} \|A(\mu)e^{itH_1} \psi\| dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\phi}(t)| (\mathcal{N} |t| \|(H_1 + i)\psi\| + \|A\psi\|) dt \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Cela prouve que  $\mathcal{D}(H_1) \cap \mathcal{D}(A)$  est stable par  $\phi(H_1)$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \|(A\phi(H_1) - \phi(H_1)A)\varphi\| &= \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \|(A(\mu)\phi(H_1) - \phi(H_1)A(\mu))\varphi\| \\ &\leq \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\phi}(t)| \|(A(\mu)e^{itH_1} - e^{itH_1}A(\mu))\varphi\| dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{N}|t| |\hat{\phi}(t)| \|(H_1 + i)\varphi\| dt \end{aligned}$$

Ainsi l'opérateur  $A\phi(H_1) - \phi(H_1)A$  se prolonge en un opérateur défini sur  $\mathcal{D}(H_1)$  et on a bien l'estimation annoncée avec

$$C_\phi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |t| |\hat{\phi}(t)| dt.$$

□

**Lemme 4.11.** *On suppose que la famille  $(A_h)_{h \in ]0,1]}$  d'opérateurs autoadjoints sur  $\mathcal{H}$  vérifie les hypothèses (a) à (d) pour être uniformément conjuguée sur  $I$  à la famille d'opérateurs dissipatifs  $(H_h)_{h \in ]0,1]}$  avec les bornes  $(\alpha_h)_{h \in ]0,1]}$ . Soient  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $P_h = \phi(H_1^h)$ . Alors il existe une constante  $c \geq 0$  telle que pour tous  $h \in ]0,1]}$  et  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}_H \cap \mathcal{D}_A$  on a :*

$$|\langle [H_1^h, iA_h]^0 P_h \varphi, P_h A_h \psi \rangle - \langle P_h A_h \varphi, [H_1^h, iA_h]^0 P_h \psi \rangle| \leq c \alpha_h \|(H_1^h - i)\varphi\| \|(H_1^h - i)\psi\|.$$

En outre on a des estimations analogues en remplaçant  $[H_1^h, iA_h]^0$  par  $\beta V_h$  ou  $[V_h, iA_h]^0$ .

Cela signifie que l'hypothèse (d) énoncée pour les formes  $[[H_1^h, iA_h]^0, iA_h]$ ,  $[[V_h, iA_h]^0, iA_h]$  et  $\beta_h [V_h, A_h]$  est en fait également valable pour  $P_h [[H_1^h, iA_h]^0, iA_h] P_h$ ,  $P_h [[V_h, iA_h]^0, iA_h] P_h$  et  $\beta_h P_h [V_h, A_h] P_h$ . On note que c'est pour ce lemme que l'on se sert de la deuxième partie de l'hypothèse (c).

*Démonstration.* On note  $T_h = [H_1^h, iA_h]^0$ . Soient  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}_H \cap \mathcal{D}_A$ . D'après le lemme 4.10, on a  $P_h \varphi, P_h \psi \in \mathcal{D}_H \cap \mathcal{D}_A$  pour tout  $h \in ]0,1]}$ , donc on peut écrire :

$$\begin{aligned} &\langle [P_h T_h P_h, A_h] \varphi, \psi \rangle \\ &= \langle A_h \varphi, P_h T_h P_h \psi \rangle - \langle P_h T_h P_h \varphi, A_h \psi \rangle \\ &= (\langle A_h \varphi, P_h T_h P_h \psi \rangle - \langle A_h P_h \varphi, T_h P_h \psi \rangle) + (\langle A_h P_h \varphi, T_h P_h \psi \rangle - \langle T_h P_h \varphi, A_h P_h \psi \rangle) \\ &\quad + (\langle T_h P_h \varphi, A_h P_h \psi \rangle - \langle P_h T_h P_h \varphi, A_h \psi \rangle). \end{aligned}$$

D'après le lemme 4.10 et l'hypothèse (c) on a

$$\begin{aligned} |\langle A_h \varphi, P_h T_h P_h \psi \rangle - \langle A_h P_h \varphi, T_h P_h \psi \rangle| &= |\langle (P_h A_h - A_h P_h) \varphi, T_h P_h \psi \rangle| \\ &\leq \|(P_h A_h - A_h P_h) \varphi\| \|T_h P_h \psi\| \|\psi\| \\ &\leq c \alpha_h \|(H_1^h - i)\varphi\| \|\psi\|, \end{aligned}$$

où  $c$  désigne une constante qui ne dépend ni de  $h \in ]0,1]}$  ni de  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}_H \cap \mathcal{D}_A$ . D'après l'hypothèse (d) on a également :

$$|\langle A_h P_h \varphi, T_h P_h \psi \rangle - \langle T_h P_h \varphi, A_h P_h \psi \rangle| \leq c \alpha_h \|(H_1^h - i)\varphi\| \|(H_1^h - i)\psi\| \leq c \alpha_h \|\varphi\| \|\psi\|.$$

Enfin, de même que pour le premier terme on a

$$|\langle T_h P_h \varphi, A_h P_h \psi \rangle - \langle P_h T_h P_h \varphi, A_h \psi \rangle| \leq c \alpha_h \|\varphi\| \|(H_1^h - i)\psi\|,$$

et donc, finalement :

$$|\langle [P_h T_h P_h, A_h] \varphi, \psi \rangle| \leq c \alpha_h \|(H_1^h - i)\varphi\| \|(H_1^h - i)\psi\|. \quad (4.6)$$

La démonstration est la même pour  $T_h = [V_h, iA_h]^0$ . Pour  $T_h = \beta_h V_h$ , on utilise la deuxième partie de l'hypothèse (c) pour estimer le premier et le troisième terme :

$$\begin{aligned} \|(P_h A_h - A_h P_h)\varphi\| \|\beta_h V_h P_h \psi\| &\leq c \beta_h \|[H_1^h, iA_h]^0 (H_1^h - i)^{-1}\| \|V_h (H_1^h - i)^{-1}\| \|\varphi\| \|\psi\| \\ &\leq c \alpha_h \|\varphi\| \|\psi\|. \end{aligned}$$

□

**Lemme 4.12.** *Soient  $H_1$  et  $A$  deux opérateurs autoadjoints satisfaisant les hypothèses (a) à (c) pour être conjugués. Soit  $T : \mathcal{D}(H_1) \rightarrow \mathcal{H}$  un opérateur inversible d'inverse borné tel que la forme  $[T, A]$  se prolonge en un opérateur borné de  $\mathcal{D}(H_1)$  dans  $\mathcal{D}(H_1)^*$ . Alors l'opérateur  $T^{-1}$  envoie  $\mathcal{D}(A)$  dans  $\mathcal{D}(H_1) \cap \mathcal{D}(A)$ .*

*Démonstration.* On a au sens des formes quadratiques sur  $\mathcal{D}(H_1) \cap \mathcal{D}(A)$  :

$$\begin{aligned} [T, A(\mu)] &= T A i \mu (A + i \mu)^{-1} - A i \mu (A + i \mu)^{-1} T \\ &= [T, A] i \mu (A + i \mu)^{-1} + A T i \mu (A + i \mu)^{-1} - A (A + i \mu)^{-1} T i \mu \\ &= [T, A] i \mu (A + i \mu)^{-1} + A (A + i \mu)^{-1} (A + i \mu) T i \mu (A + i \mu)^{-1} \\ &\quad - A (A + i \mu)^{-1} T (A + i \mu) i \mu (A + i \mu)^{-1} \\ &= [T, A] i \mu (A + i \mu)^{-1} + A (A + i \mu)^{-1} [A + i \mu, T] i \mu (A + i \mu)^{-1} \\ &= i \mu (A + i \mu)^{-1} [T, A] i \mu (A + i \mu)^{-1}. \end{aligned}$$

Soit  $\zeta \in \mathcal{D}(H_1)$ . Pour tout  $\psi \in \mathcal{D}(H_1) \cap \mathcal{D}(A)$ , ce calcul donne :

$$\begin{aligned} |\langle [T, A(\mu)] \zeta, \psi \rangle| &= |\langle [T, A] i \mu (A + i \mu)^{-1} \zeta, -i \mu (A - i \mu)^{-1} \psi \rangle| \\ &\leq c \|(H_1 - i) i \mu (A + i \mu)^{-1} \zeta\| \|(H_1 - i) i \mu (A - i \mu)^{-1} \psi\|. \end{aligned}$$

D'après le lemme 4.8, pour  $|\mu|$  assez grand,  $\mu(A \pm i \mu)^{-1}$  est borné sur  $\mathcal{D}(H_1)$  uniformément en  $\mu$ . On a donc

$$|\langle [T, A(\mu)] \zeta, \psi \rangle| \leq c \|(H_1 - i) \zeta\| \|(H_1 - i) \psi\|,$$

où  $c$  ne dépend pas de  $\mu$ . Mais pour  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\varphi \in \mathcal{D}(A)$  on a

$$A(\mu) T^{-1} \varphi = T^{-1} A(\mu) \varphi + T^{-1} [T, A(\mu)] T^{-1} \varphi,$$

donc

$$\limsup_{|\mu| \rightarrow \infty} \|A(\mu) T^{-1} \varphi\| \leq c \|A \varphi\| + c \|\varphi\|.$$

Cela prouve que  $T^{-1} \varphi \in \mathcal{D}(A)$ . □

#### 4.1.4 Estimations uniformes de la résolvante dans les espaces à poids

On peut maintenant effectivement démontrer les estimations uniformes de la résolvante dans le cas dissipatif.

La proposition qui suit est importante pour obtenir une estimation de la résolvante à partir d'inégalités comme celle de l'hypothèse (e). On remarque que dans le cas autoadjoint on utilise déjà cette proposition dont l'argument repose sur la partie antisymétrique d'un opérateur dissipatif.

**Proposition 4.13.** *Soit  $T$  un opérateur dissipatif sur  $\mathcal{H}$  de la forme  $T = T_R - i T_I$  avec  $T_R$  autoadjoint et  $T_I$  autoadjoint, positif et  $T_R$ -borné de borne strictement inférieure à 1. Alors si  $B$  est un opérateur sur  $\mathcal{H}$  tel que  $B^* B \leq T_I$  et  $Q$  un opérateur borné sur  $\mathcal{H}$ , on a*

$$\|B(T - z)^{-1} Q\| \leq \|Q^*(T - z)^{-1} Q\|^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\|B(T^* - \bar{z})^{-1} Q\| \leq \|Q^*(T - z)^{-1} Q\|^{\frac{1}{2}}$$

pour tout  $z \in \mathbb{C}_+$ .

L'hypothèse  $B^*B \leq T_I$  signifie que  $\mathcal{D}(\sqrt{T_I}) \subset \mathcal{D}(B)$  et pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\sqrt{T_I})$  on a  $\|B\varphi\| \leq \|\sqrt{T_I}\varphi\|$ . On note qu'on a en particulier :  $\mathcal{D}(T_R) \subset \mathcal{D}(T_I) \subset \mathcal{D}(B)$ .

*Démonstration.* On commence par remarquer que d'après la proposition 2.11, on a  $T^* = T_R + iT_I$ . Pour  $z \in \mathbb{C}_+$  et  $\varphi \in \mathcal{H}$  on a alors :

$$\begin{aligned} \|B(T-z)^{-1}Q\varphi\|^2 &= \langle B^*B(T-z)^{-1}Q\varphi, (T-z)^{-1}Q\varphi \rangle \\ &\leq \langle T_I(T-z)^{-1}Q\varphi, (T-z)^{-1}Q\varphi \rangle \\ &\leq \langle (T_I + \text{Im } z)(T-z)^{-1}Q\varphi, (T-z)^{-1}Q\varphi \rangle \\ &\leq \frac{1}{2i} \langle (2iT_I + z - \bar{z})(T-z)^{-1}Q\varphi, (T-z)^{-1}Q\varphi \rangle \\ &\leq \frac{1}{2i} \langle Q^*(T^* - \bar{z})^{-1}((T^* - \bar{z}) - (T-z))(T-z)^{-1}Q\varphi, \varphi \rangle \\ &\leq \frac{1}{2i} \langle Q^*((T-z)^{-1} - (T^* - \bar{z})^{-1})Q\varphi, \varphi \rangle \\ &\leq \|Q^*(T-z)^{-1}Q\| \|\varphi\|^2. \end{aligned}$$

Cela donne bien la première estimation. On peut effectuer le même calcul en partant de  $\|B(T^* - \bar{z})^{-1}Q\varphi\|^2$ . Cela donne :

$$\begin{aligned} \|B(T^* - \bar{z})^{-1}Q\varphi\|^2 &\leq \frac{1}{2i} \langle Q^*(T-z)^{-1}[(T^* - \bar{z}) - (T-z)](T^* - \bar{z})^{-1}Q\varphi, \varphi \rangle \\ &\leq \|Q^*(T-z)^{-1}Q\| \|\varphi\|^2. \end{aligned}$$

□

Le théorème principal de ce chapitre est le suivant :

**Théorème 4.14.** *On suppose que la famille  $(A_h)_{h \in ]0,1]}$  d'opérateurs autoadjoints sur  $\mathcal{H}$  est uniformément conjuguée à la famille d'opérateurs dissipatifs  $(H_h)_{h \in ]0,1]}$  sur l'intervalle  $I$  et pour les bornes inférieures  $(\alpha_h)_{h \in ]0,1]}$ . Alors pour  $\delta > \frac{1}{2}$  il existe une constante  $c \geq 0$  telle que :*

$$\forall h \in ]0, 1], \forall z \in \mathbb{C}_{I,+}, \quad \left\| \langle A_h \rangle^{-\delta} (H_h - z)^{-1} \langle A_h \rangle^{-\delta} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{c}{\alpha_h}.$$

On considère  $\beta, \beta' \geq 0$ ,  $(\beta_h)_{h \in ]0,1]}$  et  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$  (égale à 1 au voisinage de  $\bar{I}$ ) donnés par la définition 4.1. On note alors :

$$\varepsilon_0 = \min \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2\beta'} \right).$$

Pour  $h \in ]0, 1]$  on pose  $P_h = \phi(H_1^h)$ ,  $P'_h = (1 - \phi)(H_1^h)$  et :

$$\Theta_h^R = [H_1^h, iA_h]^0, \quad \Theta_h^I = [V_h, iA_h]^0, \quad \Theta_h = \Theta_h^R - i\Theta_h^I, \quad \Theta_h^V = \beta_h V_h + \Theta_h.$$

Dans tout ce paragraphe, on désignera par  $c$  des constantes indépendantes de  $h \in ]0, 1]$ ,  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  et  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ .

D'après l'hypothèse (c) et (4.1) les opérateurs  $P_h\Theta_h$  et  $P_h\Theta_h^V$  sont bornés sur  $\mathcal{D}_H$  et se prolongent donc en des opérateurs bornés sur  $\mathcal{H}$ . En outre on a :

$$\|\Theta_h P_h\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} + \|P_h \Theta_h\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq c\sqrt{\alpha_h}. \quad (4.7)$$

**Lemme 4.15.** (i) *Pour  $h \in ]0, 1]$ ,  $z \in \mathbb{C}_+$  et  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$  l'opérateur  $(H_h - i\varepsilon P_h \Theta_h^V P_h - z)$  est inversible d'inverse borné (qu'on notera  $G_{z,h}(\varepsilon)$ ).*

(ii) Soit  $Q$  un opérateur borné sur  $\mathcal{H}$ . Quitte à réduire  $\varepsilon_0$ , il existe une constante  $c \geq 0$  telle que pour  $h \in ]0, 1]$ ,  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  et  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$  on a :

$$\|P_h G_{z,h}(\varepsilon)Q\| \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha_h} \sqrt{\varepsilon}} \|Q^* G_{z,h}(\varepsilon)Q\|^{\frac{1}{2}}, \quad (4.8)$$

$$\|P'_h G_{z,h}(\varepsilon)Q\| \leq c \left(1 + \|Q^* G_{z,h}(\varepsilon)Q\|^{\frac{1}{2}}\right), \quad (4.9)$$

$$\|G_{z,h}(\varepsilon)Q\| \leq c \left(1 + \frac{\|Q^* G_{z,h}(\varepsilon)Q\|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\alpha_h} \sqrt{\varepsilon}}\right), \quad (4.10)$$

$$\|\sqrt{V_h} G_{z,h}(\varepsilon)Q\| \leq \sqrt{2} \|Q^* G_{z,h}(\varepsilon)Q\|^{\frac{1}{2}}, \quad (4.11)$$

$$\|\sqrt{V_h} P_h G_{z,h}(\varepsilon)Q\| + \|\sqrt{V_h} P'_h G_{z,h}(\varepsilon)Q\| \leq c \left(1 + \|Q^* G_{z,h}(\varepsilon)Q\|^{\frac{1}{2}}\right). \quad (4.12)$$

La constante  $c$  et le choix de  $\varepsilon_0$  ne dépendent que de  $I, \phi, \beta, \beta'$  (donnés par la définition 4.1)  $a, b$  (donnés par (4.1)) et  $\|Q\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$ .

(iii) Pour tous  $h \in ]0, 1]$ ,  $z \in \mathbb{C}_+$  et  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ , l'opérateur  $G_{z,h}(\varepsilon)$  envoie  $\mathcal{D}_A$  dans  $\mathcal{D}_H \cap \mathcal{D}_A$ .

*Démonstration.* **1.** Soient  $h \in ]0, 1]$ ,  $z \in \mathbb{C}_+$  et  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ . On note

$$T_R = H_1^h - \varepsilon P_h \Theta_h^I P_h \quad \text{et} \quad T_I = V_h + \varepsilon P_h (\beta_h V_h + \Theta_h^R) P_h.$$

Comme  $H_1^h$  est autoadjoint et  $P_h \Theta_h^I P_h$  est autoadjoint borné, l'opérateur  $T_R$  est autoadjoint.  $T_I$  est autoadjoint pour les mêmes raisons et est en outre  $T_R$ -borné de borne relative strictement inférieure à 1. De plus, on a d'après l'hypothèse (e) :

$$T_I = V_h + \varepsilon P_h (\beta_h V_h + \Theta_h^R) P_h \geq \frac{V_h}{2} + \varepsilon (\beta' V_h + P_h (\beta_h V_h + \Theta_h^R) P_h) \geq \frac{V_h}{2} + \varepsilon \alpha_h P_h^2 \geq 0. \quad (4.13)$$

D'après les propositions 2.3 et 2.11, l'opérateur  $(H_h - i\varepsilon P_h \Theta_h^V P_h - z)$  est donc inversible et on peut noter :

$$G_{z,h}(\varepsilon) = (H_h - i\varepsilon P_h \Theta_h^V P_h - z)^{-1}.$$

**2.** Soient  $h \in ]0, 1]$ ,  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  et  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ . Les deux opérateurs  $V_h/2$  et  $\varepsilon \alpha_h P_h^2$  qui apparaissent dans (4.13) sont positifs, donc  $T_I$  est minoré par chacun des deux termes. En appliquant d'abord la proposition 4.13 avec  $B = \sqrt{V_h}/\sqrt{2}$  on obtient (4.11), tandis qu'avec  $B = \sqrt{\alpha_h} \sqrt{\varepsilon} P_h$  on obtient (4.8). On a d'autre part

$$(H_1^h - z)G_{z,h}(\varepsilon) = 1 + i(V_h + \varepsilon P_h \Theta_h^V P_h)G_{z,h}(\varepsilon),$$

donc

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{V_h})P'_h G_{z,h}(\varepsilon)Q &= (1 + \sqrt{V_h})P'_h (H_1^h - z)^{-1}Q \\ &\quad + i(1 + \sqrt{V_h})P'_h (H_1^h - z)^{-1}V_h G_{z,h}(\varepsilon)Q \\ &\quad + i\varepsilon(1 + \sqrt{V_h})P'_h (H_1^h - z)^{-1}P_h \Theta_h P_h G_{z,h}(\varepsilon)Q \\ &\quad + i\varepsilon\beta_h(1 + \sqrt{V_h})P'_h (H_1^h - z)^{-1}P_h V_h P_h G_{z,h}(\varepsilon)Q. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Par le calcul fonctionnel on a :

$$\left\| (1 + \sqrt{|H_1^h|})P'_h (H_1^h - z)^{-1} (1 + \sqrt{|H_1^h|}) \right\| \leq c,$$

et donc d'après (4.1) (d'après le paragraphe VI.1.7 de [Kat80], si  $V_h$  est  $H_1^h$ -borné alors  $\sqrt{V_h}$  est  $\sqrt{|H_1^h|}$ -borné) on a aussi :

$$\left\| (1 + \sqrt{V_h})P'_h (H_1^h - z)^{-1} (1 + \sqrt{V_h}) \right\| \leq c.$$

Avec (4.11), (4.7) et (4.8), les trois premiers termes du membre de droite de (4.14) sont bornés par  $c \left(1 + \|Q^* G_{z,h}(\varepsilon) Q\|^{\frac{1}{2}}\right)$ . Comme  $P_h \sqrt{V_h}$  se prolonge en un opérateur uniformément borné sur  $\mathcal{H}$  cela donne :

$$\begin{aligned} & \left\| (1 + \sqrt{V_h}) P_h' G_{z,h}(\varepsilon) Q \right\| \\ & \leq c \left(1 + \|Q^* G_{z,h}(\varepsilon) Q\|^{\frac{1}{2}}\right) + c\varepsilon \left\| \sqrt{V_h} P_h G_{z,h}(\varepsilon) Q \right\| \\ & \leq c \left(1 + \|Q^* G_{z,h}(\varepsilon) Q\|^{\frac{1}{2}}\right) + c\varepsilon \left\| \sqrt{V_h} G_{z,h}(\varepsilon) Q \right\| + c\varepsilon \left\| \sqrt{V_h} P_h' G_{z,h}(\varepsilon) Q \right\| \\ & \leq c \left(1 + \|Q^* G_{z,h}(\varepsilon) Q\|^{\frac{1}{2}}\right) + c\varepsilon \left\| (1 + \sqrt{V_h}) P_h' G_{z,h}(\varepsilon) Q \right\|. \end{aligned}$$

Quitte à réduire  $\varepsilon_0$ , (4.14) donne alors

$$\frac{1}{2} \left\| (1 + \sqrt{V_h}) P_h' G_{z,h}(\varepsilon) Q \right\| \leq c \left(1 + \|Q^* G_{z,h}(\varepsilon) Q\|^{\frac{1}{2}}\right),$$

ce qui donne (4.9) et (4.12). Enfin (4.8) et (4.9) donnent (4.10).

**3.** Quant à la dernière assertion, elle est conséquence pour tous  $h \in ]0, 1]$ ,  $z \in \mathbb{C}_+$  et  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$  du lemme 4.12, dont les hypothèses sont vérifiées d'après les hypothèses (c) et (d) et le lemme 4.11.  $\square$

*Remarque 4.16.* D'après la proposition 2.11 on a

$$G_{z,h}(\varepsilon)^* = (H_h^* + i\varepsilon P_h (\Theta_h^V)^* P_h - \bar{z})^{-1}.$$

On peut appliquer les résultats précédents avec  $G_{z,h}(\varepsilon)^*$ , au lieu de  $G_{z,h}(\varepsilon)$ , ce qui donne par exemple

$$\|P_h G_{z,h}(\varepsilon)^* Q\| \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha_h} \sqrt{\varepsilon}} \|Q^* G_{z,h}(\varepsilon)^* Q\|^{\frac{1}{2}},$$

puis en passant à l'adjoint :

$$\|Q^* G_{z,h}(\varepsilon) P_h\| \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha_h} \sqrt{\varepsilon}} \|Q^* G_{z,h}(\varepsilon) Q\|^{\frac{1}{2}}.$$

Par la suite on s'autorisera à « retourner » de la sorte toutes les estimations du lemme 4.15 sans redonner cette justification.

Pour  $h \in ]0, 1]$  et  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$ , la résolvante  $(H_h - z)^{-1}$  n'est autre que  $G_{z,h}(0)$ . Pour obtenir l'estimation attendue sur  $(H_h - z)^{-1}$  à partir d'estimations sur  $G_{z,h}(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ , on utilisera le lemme suivant :

**Lemme 4.17** ([JMP84]). *Soient  $X$  un espace de Banach,  $\varepsilon_0 \in ]0, 1]$  et  $f : ]0, \varepsilon_0] \rightarrow X$  une fonction de classe  $C^1$ . On suppose qu'il existe des constantes  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $\beta \in [0, 1[$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ , et  $c_1, c_2 > 0$  telles que :*

$$\forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[, \quad \|f'(\varepsilon)\| \leq c_1 \varepsilon^{-\beta} (1 + \|f(\varepsilon)\|^\alpha) \quad \text{et} \quad \|f(\varepsilon)\| \leq c_2 \varepsilon^{-\gamma}. \quad (4.15)$$

*Alors  $f$  admet une limite en 0, et il existe une constante  $c$  qui ne dépend que de  $\varepsilon_0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $c_1$  et  $c_2$  telle que :*

$$\forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[, \quad \|f(\varepsilon)\| \leq c. \quad (4.16)$$

*Démonstration.* Il suffit de montrer (4.16) qui, avec (4.15), implique l'existence d'une limite en 0. On montre par récurrence sur  $m \in \mathbb{N}$  que le résultat est vrai si  $\gamma \leq \frac{m(1-\beta)}{2}$ , sachant que si  $m = 0$ , c'est-à-dire si  $\gamma \leq 0$ , alors (4.16) est conséquence directe de (4.15). On suppose donc le résultat acquis jusqu'au rang  $m - 1$  ( $m \geq 1$ ). Pour  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$  on a

$$f(\varepsilon_0) - f(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} f'(t) dt,$$

et donc

$$\begin{aligned}
\|f(\varepsilon)\| &\leq \|f(\varepsilon_0)\| + \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \|f'(t)\| dt \\
&\leq \|f(\varepsilon_0)\| + c_1 \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} (t^{-\beta} + t^{-\beta} \|f(t)\|^\alpha) dt \\
&\leq \|f(\varepsilon_0)\| + c_1 \frac{\varepsilon_0^{1-\beta} - \varepsilon^{1-\beta}}{1-\beta} + c_1 c_2^\alpha \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} t^{-\alpha\gamma-\beta} dt.
\end{aligned}$$

La dernière intégrale vaut  $\ln\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)$  ou  $\frac{\varepsilon_0^{-\alpha\gamma-\beta+1} - \varepsilon^{-\alpha\gamma-\beta+1}}{-\alpha\gamma-\beta+1}$  selon si  $\alpha\gamma + \beta$  vaut 1 ou non, mais dans tous les cas on obtient

$$\|f(\varepsilon)\| \leq c_3 + c_4 \varepsilon^{-\alpha\gamma + \frac{1-\beta}{2}} \leq c_3 + c_4 \varepsilon^{-\gamma + \frac{1-\beta}{2}} \leq c_3 + c_4 \varepsilon^{-\frac{(m-1)(1-\beta)}{2}} \leq (c_3 + c_4) \varepsilon^{-\frac{(m-1)(1-\beta)}{2}},$$

et il n'y a plus qu'à appliquer l'hypothèse de récurrence.  $\square$

On peut maintenant démontrer l'estimation uniforme de la résolvante :

*Démonstration du théorème 4.14. 1.* On se contente de montrer le résultat pour  $\delta \in ]\frac{1}{2}, 1]$ , le cas général s'en déduisant directement. Pour  $h \in ]0, 1]$  et  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ , on note

$$Q_h(\varepsilon) = \langle A_h \rangle^{-\delta} \langle \varepsilon A_h \rangle^{\delta-1},$$

puis

$$F_{z,h}(\varepsilon) = Q_h(\varepsilon) G_{z,h}(\varepsilon) Q_h(\varepsilon).$$

On remarque que  $Q_h(\varepsilon)$  est de norme inférieure ou égale à 1 quels que soient  $h \in ]0, 1]$  et  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ . En outre,  $Q_h(\varepsilon) A_h$  se prolonge en un opérateur borné sur  $\mathcal{H}$  et par le calcul fonctionnel on a :

$$\|A_h Q_h(\varepsilon)\| = \|Q_h(\varepsilon) A_h\| \leq c \varepsilon^{\delta-1}. \quad (4.17)$$

**2.** Soient  $h \in ]0, 1]$ ,  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  et  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ . Le lemme 4.15 appliqué avec  $Q = Q_h(\varepsilon)$  donne

$$\|F_{z,h}(\varepsilon)\| \leq \|G_{z,h}(\varepsilon) Q_h(\varepsilon)\| \leq c \left( 1 + \frac{\|F_{z,h}(\varepsilon)\|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\alpha_h} \sqrt{\varepsilon}} \right) \quad (4.18)$$

(dans cette démonstration, à chaque fois qu'on utilisera une estimation du lemme 4.15, ce sera avec  $Q = Q_h(\varepsilon)$ ). On en déduit que

$$\|F_{z,h}(\varepsilon)\| \leq \frac{c}{\alpha_h \varepsilon}. \quad (4.19)$$

On remarque qu'avec (4.1) et la remarque 2.12 on a aussi :

$$\|H_1^h G_{z,h}(\varepsilon) Q_h(\varepsilon)\| \leq c \left( 1 + \frac{\|F_{z,h}(\varepsilon)\|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\alpha_h} \sqrt{\varepsilon}} \right). \quad (4.20)$$

**3.** Pour  $h \in ]0, 1]$  et  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  l'application  $F_{z,h} : ]0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est de classe  $C^1$  et on a :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon} F_{z,h}(\varepsilon) &= i\beta_h Q_h(\varepsilon) G_{z,h}(\varepsilon) P_h V_h P_h G_{z,h}(\varepsilon) Q_h(\varepsilon) \\
&\quad + iQ_h(\varepsilon) G_{z,h}(\varepsilon) P_h \Theta_h P_h G_{z,h}(\varepsilon) Q_h(\varepsilon) \\
&\quad + \frac{dQ_h(\varepsilon)}{d\varepsilon} G_{z,h}(\varepsilon) Q_h(\varepsilon) + Q_h(\varepsilon) G_{z,h}(\varepsilon) \frac{dQ_h(\varepsilon)}{d\varepsilon}.
\end{aligned} \quad (4.21)$$

Par le calcul fonctionnel on vérifie que

$$\left\| \frac{d}{d\varepsilon} Q_h(\varepsilon) \right\| \leq c \varepsilon^{\delta-1}.$$



D'après (4.18), les deux derniers termes de (4.21) sont donc contrôlés par

$$\left\| \frac{dQ_h(\varepsilon)}{d\varepsilon} G_{z,h}(\varepsilon) Q_h(\varepsilon) + Q_h(\varepsilon) G_{z,h}(\varepsilon) \frac{dQ_h(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right\| \leq c\varepsilon^{\delta-1} \left( 1 + \frac{\|F_{z,h}(\varepsilon)\|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\alpha_h}\sqrt{\varepsilon}} \right).$$

D'autre part, avec (4.12) on peut estimer le premier terme :

$$\beta_h \|Q_h(\varepsilon) G_{z,h}(\varepsilon) P_h V_h P_h G_{z,h}(\varepsilon) Q_h(\varepsilon)\| \leq c(1 + \|F_{z,h}(\varepsilon)\|).$$

Pour le deuxième terme on commence par voir que

$$P_h \Theta_h P_h = \Theta_h - P_h \Theta_h P_h' - P_h' \Theta_h P_h' - P_h' \Theta_h P_h,$$

et donc

$$Q_h(\varepsilon) G_{z,h}(\varepsilon) P_h \Theta_h P_h G_{z,h}(\varepsilon) Q_h(\varepsilon) = D_1 + D_2 + D_3 + D_4$$

avec

$$\begin{aligned} \|D_2\| &= \|Q_h(\varepsilon) G_{z,h}(\varepsilon) P_h \Theta_h P_h' G_{z,h}(\varepsilon) Q_h(\varepsilon)\| \\ &\leq \|Q_h(\varepsilon) G_{z,h}(\varepsilon)\| \|P_h \Theta_h\| \|P_h' G_{z,h}(\varepsilon) Q_h(\varepsilon)\| \\ &\leq c \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha_h}\sqrt{\varepsilon}} \|F_{z,h}(\varepsilon)\|^{\frac{1}{2}} \right) \times c\sqrt{\alpha_h} \times \left( 1 + \|F_{z,h}(\varepsilon)\|^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\leq c \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|F_{z,h}(\varepsilon)\| \right), \end{aligned}$$

où on a utilisé (4.18), (4.7) et enfin (4.9). Pour les mêmes raisons, on a

$$\|D_4\| = \|Q_h(\varepsilon) G_{z,h}(\varepsilon) P_h' \Theta_h P_h G_{z,h}(\varepsilon) Q_h(\varepsilon)\| \leq c \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|F_{z,h}(\varepsilon)\| \right).$$

Pour estimer  $D_3$  on utilise (4.9), (4.7) et (4.20) :

$$\begin{aligned} &\|Q_h(\varepsilon) G_{z,h}(\varepsilon) P_h' \Theta_h P_h' G_{z,h}(\varepsilon) Q_h(\varepsilon)\| \\ &\leq \|Q_h(\varepsilon) G_{z,h}(\varepsilon) P_h'\| \|\Theta_h (H_1^h - i)^{-1}\| \|P_h'\| \|(H_1^h - i) G_{z,h}(\varepsilon) Q_h(\varepsilon)\| \\ &\leq c \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|F_{z,h}(\varepsilon)\| \right). \end{aligned}$$

Il reste à estimer le premier terme. Pour  $h \in ]0, 1]$ ,  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  et  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$  l'opérateur  $Q_h(\varepsilon)$  envoie  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{D}_A$  tandis que  $G_{z,h}(\varepsilon)$  et  $G_{z,h}(\varepsilon)^*$  envoient  $\mathcal{D}_A$  dans  $\mathcal{D}_H \cap \mathcal{D}_A$ . On peut donc calculer au sens des formes :

$$\begin{aligned} Q_h(\varepsilon) G_{z,h}(\varepsilon) \Theta_h G_{z,h}(\varepsilon) Q_h(\varepsilon) &= Q_h(\varepsilon) G_{z,h}(\varepsilon) (\Theta_h^R - i\Theta_h^I) G_{z,h}(\varepsilon) Q_h(\varepsilon) \\ &= Q_h(\varepsilon) G_{z,h}(\varepsilon) [H_h, iA_h] G_{z,h}(\varepsilon) Q_h(\varepsilon) \\ &= Q_h(\varepsilon) G_{z,h}(\varepsilon) [H_h - i\varepsilon P_h \Theta_h^V P_h - z, A_h] G_{z,h}(\varepsilon) Q_h(\varepsilon) \\ &\quad + i\varepsilon Q_h(\varepsilon) G_{z,h}(\varepsilon) [P_h \Theta_h^V P_h, A_h] G_{z,h}(\varepsilon) Q_h(\varepsilon) \\ &= Q_h(\varepsilon) A_h G_{z,h}(\varepsilon) Q_h(\varepsilon) + Q_h(\varepsilon) G_{z,h}(\varepsilon) A_h Q_h(\varepsilon) \\ &\quad + i\varepsilon Q_h(\varepsilon) G_{z,h}(\varepsilon) [P_h \Theta_h^V P_h, A_h] G_{z,h}(\varepsilon) Q_h(\varepsilon). \end{aligned}$$

D'après (4.17) et (4.18) on a :

$$\|Q_h(\varepsilon) A_h G_{z,h}(\varepsilon) Q_h(\varepsilon) + Q_h(\varepsilon) G_{z,h}(\varepsilon) A_h Q_h(\varepsilon)\| \leq \frac{c}{\sqrt{\alpha_h}} \varepsilon^{s-\frac{3}{2}} \|F_{z,h}(\varepsilon)\|^{\frac{1}{2}}.$$

D'après le lemme 4.11 et l'estimation (4.20) on a pour  $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$  :

$$\begin{aligned} \varepsilon \left| \langle [P_h \Theta_h^V P_h, A_h] G_{z,h}(\varepsilon) Q_h(\varepsilon) \varphi, G_{z,h}(\varepsilon)^* Q_h(\varepsilon) \psi \rangle \right| \\ \leq c\alpha_h \varepsilon \|(H_1^h - i) G_{z,h}(\varepsilon) Q_h(\varepsilon) \varphi\| \|(H_1^h - i) G_{z,h}(\varepsilon)^* Q_h(\varepsilon) \psi\| \\ \leq c(1 + \|F_{z,h}(\varepsilon)\|) \|\varphi\| \|\psi\|. \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\|D_1\| = \|Q_h(\varepsilon)G_{z,h}(\varepsilon)\Theta_h G_{z,h}(\varepsilon)Q_h(\varepsilon)\| \leq c \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha_h}} \varepsilon^{\delta-\frac{3}{2}} \|F_{z,h}(\varepsilon)\|^{\frac{1}{2}} + \|F_{z,h}(\varepsilon)\| \right). \quad (4.22)$$

4. On a donc

$$\left\| \frac{d}{d\varepsilon} F_{z,h}(\varepsilon) \right\| \leq c\varepsilon^{\delta-1} + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \|F_{z,h}(\varepsilon)\| + c \frac{\varepsilon^{\delta-\frac{3}{2}}}{\sqrt{\alpha_h}} \|F_{z,h}(\varepsilon)\|^{\frac{1}{2}}$$

puis, en multipliant par  $\alpha_h$  :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{d\varepsilon} \alpha_h F_{z,h}(\varepsilon) \right\| &\leq c\varepsilon^{\delta-1} + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \|\alpha_h F_{z,h}(\varepsilon)\| + c\varepsilon^{\delta-\frac{3}{2}} \|\alpha_h F_{z,h}(\varepsilon)\|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c\varepsilon^{\delta-\frac{3}{2}} (1 + \|\alpha_h F_{z,h}(\varepsilon)\|). \end{aligned} \quad (4.23)$$

D'après (4.19) et le lemme 4.17, les fonctions  $F_{z,h}(\varepsilon)$  se prolongent en  $\varepsilon = 0$  par continuité et surtout on a :

$$\|F_{z,h}(\varepsilon)\| \leq \frac{c}{\alpha_h}. \quad (4.24)$$

La norme de  $\alpha_h F_{z,h}(\varepsilon)$  est uniforme en  $h$  car dans le lemme 4.17, la constante obtenue dans (4.16) ne dépend que des estimations (4.15) et pas de la fonction  $f$  elle-même. Il n'y a plus qu'à prendre  $\varepsilon = 0$  dans (4.24) pour conclure la démonstration.  $\square$

#### 4.1.5 Principe d'absorption limite

Comme on l'a fait au paragraphe 2.3 pour un opérateur de Schrödinger, on montre maintenant à partir des estimations uniformes pour la résolvante qu'on a le principe d'absorption limite sur le demi-plan supérieur.

**Théorème 4.18.** *On suppose que la famille  $(A_h)_{h \in ]0,1]}$  d'opérateurs autoadjoints sur  $\mathcal{H}$  est uniformément conjuguée à la famille d'opérateurs dissipatifs  $(H_h)_{h \in ]0,1]}$  sur l'intervalle  $I$  et pour les bornes inférieures  $(\alpha_h)_{h \in ]0,1]}$ . Soit  $\delta \in ]\frac{1}{2}, 1]$ .*

(i) *Il existe une constante  $c \geq 0$  telle que pour  $z$  et  $z'$  dans  $\mathbb{C}_{I,+}$  et  $h \in ]0, 1]$  on a*

$$\left\| \langle A_h \rangle^{-\delta} ((H_h - z)^{-1} - (H_h - z')^{-1}) \langle A_h \rangle^{-\delta} \right\| \leq c \alpha_h^{-\frac{4\delta}{2\delta+1}} |z - z'|^{\frac{2\delta-1}{2\delta+1}}. \quad (4.25)$$

(ii) *Pour  $h \in ]0, 1]$  et  $\lambda \in I$  la limite*

$$\langle A_h \rangle^{-\delta} (H_h - (\lambda + i0))^{-1} \langle A_h \rangle^{-\delta} = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \langle A_h \rangle^{-\delta} (H_h - (\lambda + i\mu))^{-1} \langle A_h \rangle^{-\delta} \quad (4.26)$$

*existe dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  et définit une fonction Hölder-continue d'indice  $\frac{2\delta-1}{2\delta+1}$  par rapport à  $\lambda$ .*

On se restreint au cas  $\delta \in ]\frac{1}{2}, 1]$  pour les estimations de (4.25), mais le principe d'absorption limite est bien sûr encore valable lorsque  $\delta > 1$ .

*Démonstration.* On reprend les notations introduites dans la démonstration du théorème 4.14. Tout d'abord, pour tout  $c_0 > 0$  il existe  $c \geq 0$  telle que pour  $h \in ]0, 1]$  et  $z, z' \in \mathbb{C}_{I,+}$  vérifiant

$$|z - z'| \geq c_0 \alpha_h$$

on a directement d'après le théorème 4.14 :

$$\left\| \langle A_h \rangle^{-\delta} ((H_h - z)^{-1} - (H_h - z')^{-1}) \langle A_h \rangle^{-\delta} \right\| \leq \frac{c}{\alpha_h} \leq c \alpha_h^{-\frac{4\delta}{2\delta+1}} |z - z'|^{\frac{2\delta-1}{2\delta+1}}.$$

Il suffit donc de montrer (i) pour  $|z - z'| \leq c_0 \alpha_h$  avec  $c_0 > 0$  arbitrairement petit. D'après (4.23) et (4.24), on a pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$  (où  $\varepsilon_0 > 0$  est donné par le lemme 4.15) :

$$\left\| \frac{d}{d\varepsilon} F_{z,h}(\varepsilon) \right\| \leq c \alpha_h^{-1} \varepsilon^{\delta - \frac{3}{2}}.$$

Cela donne

$$\|F_{z,h}(\varepsilon) - F_{z,h}(0)\| \leq c \alpha_h^{-1} \varepsilon^{\delta - \frac{1}{2}}, \quad (4.27)$$

et on a les mêmes estimations avec  $z$  remplacé par  $z'$ . D'autre part, avec (4.18) on a

$$\left\| \frac{d}{dz} F_{z,h}(\varepsilon) \right\| = \left\| Q_h(\varepsilon) G_{z,h}(\varepsilon)^2 Q_h(\varepsilon) \right\| \leq \|Q_h(\varepsilon) G_{z,h}(\varepsilon)\|^2 \leq \frac{c}{\alpha_h^2 \varepsilon}$$

et donc :

$$\|F_{z,h}(\varepsilon) - F_{z',h}(\varepsilon)\| \leq |z - z'| \frac{c}{\alpha_h^2 \varepsilon}.$$

On choisit maintenant :

$$\varepsilon = \alpha_h^{-\frac{2}{2\delta+1}} |z - z'|^{\frac{2}{2\delta+1}}.$$

Si  $c_0$  a été choisi assez petit, on a bien  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ , et on obtient :

$$\|F_{z,h}(0) - F_{z',h}(0)\| \leq c \alpha_h^{-\frac{4\delta}{2\delta+1}} |z - z'|^{\frac{2\delta-1}{2\delta+1}}.$$

En particulier, pour tout  $\lambda \in I$ , l'application :

$$\begin{cases} ]0, 1] & \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}) \\ \mu & \mapsto \langle A_h \rangle^{-\delta} (H_h - (\lambda + i\mu))^{-1} \langle A_h \rangle^{-\delta} \end{cases}$$

est de Cauchy en 0, donc admet une limite qu'on note

$$\langle A_h \rangle^{-\delta} (H_h - (\lambda + i0))^{-1} \langle A_h \rangle^{-\delta}.$$

Par passage à la limite  $\mu \rightarrow 0$  dans (4.25) avec  $z = \lambda + i\mu$  et  $z' = \lambda' + i\mu$  où  $\lambda$  et  $\lambda'$  sont dans  $I$ , on obtient que l'application

$$\lambda \mapsto \langle A_h \rangle^{-\delta} (H_h - (\lambda + i0))^{-1} \langle A_h \rangle^{-\delta}$$

est Hölder-continue d'indice  $\frac{2\delta-1}{2\delta+1}$ . □

## 4.2 Quelques extensions de la méthode de Mourre

Le but de cette partie est de montrer d'autres estimations uniformes pour la résolvante. On va en particulier montrer une estimation dans les espaces de Besov qui améliore celle que l'on vient de démontrer. On obtiendra également, sous certaines conditions, des estimations sur les puissances de la résolvante dont on déduira de meilleures propriétés de régularité pour la limite (4.26). Les résultats de cette partie sont démontrés dans [JMP84], [Jen85] et [Wan07] dans le cas autoadjoind (et, mis à part pour le dernier, pour  $h$  fixé).

On garde les notations du paragraphe 4.1.4, en particulier celles introduites dans la démonstration du théorème 4.14.

### 4.2.1 Une autre estimation de la résolvante

On commence par démontrer que les propriétés obtenues dans la partie précédente pour la résolvante

$$G_{z,h}(\varepsilon) = (H_h - i\varepsilon P_h \Theta_h^V P_h - z)^{-1}$$

sont encore valables pour

$$G_{z,h}^1(\varepsilon) = (H_h - i\varepsilon \Theta_h - z)^{-1}.$$

**Lemme 4.19.** *On suppose que la famille  $(A_h)_{h \in ]0,1]}$  d'opérateurs autoadjoints sur  $\mathcal{H}$  est uniformément conjuguée à la famille d'opérateurs dissipatifs  $(H_h)_{h \in ]0,1]}$  sur l'intervalle  $I$  et pour les bornes inférieures  $(\alpha_h)_{h \in ]0,1]}$ .*

(i) *Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour  $h \in ]0,1]$ ,  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  et  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$  l'opérateur  $(H_h - i\varepsilon \Theta_h - z)$  admet un inverse borné (qu'on notera  $G_{z,h}^1(\varepsilon)$ ).*

(ii) *Il existe une constante  $c \geq 0$  telle que pour  $h \in ]0,1]$ ,  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  et  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$  on a*

$$\left\| G_{z,h}^1(\varepsilon) \right\| + \left\| H_1^h G_{z,h}^1(\varepsilon) \right\| \leq \frac{c}{\alpha_h \varepsilon}, \quad (4.28)$$

$$\left\| G_{z,h}^1(\varepsilon) \langle A_h \rangle^{-1} \right\| + \left\| H_1^h G_{z,h}^1(\varepsilon) \langle A_h \rangle^{-1} \right\| \leq \frac{c}{\alpha_h \sqrt{\varepsilon}}. \quad (4.29)$$

(iii) *Pour tous  $h \in ]0,1]$ ,  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  et  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$  l'opérateur  $G_{z,h}^1(\varepsilon)$  envoie  $\mathcal{D}_A$  dans  $\mathcal{D}_H \cap \mathcal{D}_A$ .*

(iv) *Pour  $h \in ]0,1]$  et  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  l'application  $G_{z,h}^1 : ]0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est de classe  $C^1$  et pour  $\varphi \in \mathcal{D}_A$  on a :*

$$\frac{d}{d\varepsilon} G_{z,h}^1(\varepsilon) \varphi = [G_{z,h}^1(\varepsilon), A_h] \varphi - i\varepsilon G_{z,h}^1(\varepsilon) [\Theta_h, A_h] G_{z,h}^1(\varepsilon) \varphi. \quad (4.30)$$

*Remarque 4.20.* On a des résultats analogues en remplaçant  $H_h$  et  $z$  par  $H_h^*$  et  $\bar{z}$ . En particulier, pour  $\varphi \in \mathcal{D}_A$  :

$$\frac{d}{d\varepsilon} G_{z,h}^1(\varepsilon)^* \varphi = -[G_{z,h}^1(\varepsilon)^*, A_h] \varphi - i\varepsilon G_{z,h}^1(\varepsilon)^* [\Theta_h^*, A_h] G_{z,h}^1(\varepsilon)^* \varphi.$$

*Démonstration.* **1.** D'après le lemme 4.15 appliqué avec  $Q = P_h$  et  $Q = P'_h$ , on a

$$\|P_h G_{z,h}(\varepsilon) P_h\| \leq \frac{c}{\alpha_h \varepsilon}, \quad \|P_h G_{z,h}(\varepsilon) P'_h\| + \|P'_h G_{z,h}(\varepsilon) P_h\| \leq \frac{c}{\sqrt{\alpha_h} \sqrt{\varepsilon}}, \quad \|P'_h G_{z,h}(\varepsilon) P'_h\| \leq c,$$

et donc en particulier :

$$\|P'_h G_{z,h}(\varepsilon)\| \leq \frac{c}{\sqrt{\alpha_h} \sqrt{\varepsilon}}, \quad \|G_{z,h}(\varepsilon)\| \leq \frac{c}{\alpha_h \varepsilon}. \quad (4.31)$$

On a également :

$$\left\| \sqrt{V_h} P_h G_{z,h}(\varepsilon) P'_h \right\| \leq c.$$

**2.** Le lemme 4.15 appliqué avec  $Q = P_h \sqrt{V_h}$  donne

$$\left\| \sqrt{V_h} P_h G_{z,h}(\varepsilon) P_h \sqrt{V_h} \right\| \leq c.$$

Il existe donc  $\varepsilon_1 > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_1]$  l'opérateur

$$\Gamma_{z,h}^\Theta(\varepsilon) = 1 + i\varepsilon \beta_h \sqrt{V_h} P_h G_{z,h}(\varepsilon) P_h \sqrt{V_h}$$

est bien défini et inversible d'inverse borné uniformément en  $h \in ]0,1]$ ,  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  et  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_1]$ . Pour  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_1]$  on peut alors poser :

$$G_{z,h}^\Theta(\varepsilon) = G_{z,h}(\varepsilon) - i\varepsilon \beta_h G_{z,h}(\varepsilon) P_h \sqrt{V_h} \Gamma_{z,h}^\Theta(\varepsilon)^{-1} \sqrt{V_h} P_h G_{z,h}(\varepsilon).$$

On vérifie que  $G_{z,h}^\Theta(\varepsilon) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{D}_H$  est l'inverse de l'opérateur  $(H_h - i\varepsilon P_h \Theta_h P_h - z)$ . Pour cela on suit l'idée de [Kat66, §2] pour les perturbations de la forme  $\varepsilon A^* B$ . On a

$$(H_h - i\varepsilon P_h \Theta_h P_h - z)G_{z,h}(\varepsilon) = 1 + i\varepsilon \beta_h P_h V_h P_h G_{z,h}(\varepsilon),$$

donc

$$\begin{aligned} & (H_h - i\varepsilon P_h \Theta_h P_h - z)G_{z,h}^\Theta(\varepsilon) \\ &= 1 + i\varepsilon \beta_h P_h V_h P_h G_{z,h}(\varepsilon) - i\varepsilon \beta_h P_h \sqrt{V_h} \Gamma_{z,h}^\Theta(\varepsilon)^{-1} \sqrt{V_h} P_h G_{z,h}(\varepsilon) \\ &\quad - (i\varepsilon \beta_h)^2 P_h V_h P_h G_{z,h}(\varepsilon) P_h \sqrt{V_h} \Gamma_{z,h}^\Theta(\varepsilon)^{-1} \sqrt{V_h} P_h G_{z,h}(\varepsilon) \\ &= 1 + i\varepsilon \beta_h P_h \sqrt{V_h} \left( 1 - \Gamma_{z,h}^\Theta(\varepsilon)^{-1} - i\varepsilon \beta_h \sqrt{V_h} P_h G_{z,h}(\varepsilon) P_h \sqrt{V_h} \Gamma_{z,h}^\Theta(\varepsilon)^{-1} \right) \sqrt{V_h} P_h G_{z,h}(\varepsilon) \\ &= 1. \end{aligned}$$

De même on vérifie que sur  $\mathcal{D}_H$  :

$$\begin{aligned} & G_{z,h}^\Theta(\varepsilon)(H_h - i\varepsilon P_h \Theta_h P_h - z) \\ &= 1 + i\varepsilon \beta_h G_{z,h}(\varepsilon) P_h V_h P_h - i\varepsilon \beta_h G_{z,h}(\varepsilon) P_h \sqrt{V_h} \Gamma_{z,h}^\Theta(\varepsilon)^{-1} \sqrt{V_h} P_h \\ &\quad - (i\varepsilon \beta_h)^2 G_{z,h}(\varepsilon) P_h \sqrt{V_h} \Gamma_{z,h}^\Theta(\varepsilon)^{-1} \sqrt{V_h} P_h G_{z,h}(\varepsilon) P_h V_h P_h \\ &= 1 + i\varepsilon \beta_h G_{z,h}(\varepsilon) P_h \sqrt{V_h} \left( 1 - \Gamma_{z,h}^\Theta(\varepsilon)^{-1} - i\varepsilon \beta_h \Gamma_{z,h}^\Theta(\varepsilon)^{-1} \sqrt{V_h} P_h G_{z,h}(\varepsilon) P_h \sqrt{V_h} \right) \sqrt{V_h} P_h \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi  $G_{z,h}^\Theta(\varepsilon)$  est bien un inverse pour l'opérateur  $(H_h - i\varepsilon P_h \Theta_h P_h - z)$ . On cherche maintenant à estimer  $G_{z,h}^\Theta(\varepsilon)$ . Vue son expression, on a encore besoin d'une estimation sur  $G_{z,h}(\varepsilon)$ . En appliquant le lemme 4.15 avec  $Q = \text{Id}_H$  on obtient :

$$\left\| \sqrt{V_h} P_h G_{z,h}(\varepsilon) \right\| \leq c \left( 1 + \|G_{z,h}(\varepsilon)\|^{1/2} \right) \leq \frac{c}{\sqrt{\alpha_h} \sqrt{\varepsilon}}.$$

Avec l'estimation (4.31) sur  $G_{z,h}(\varepsilon)$  on obtient :

$$\begin{aligned} \left\| G_{z,h}^\Theta(\varepsilon) \right\| &\leq \|G_{z,h}(\varepsilon)\| + \varepsilon \beta_h \left\| G_{z,h}(\varepsilon) P_h \sqrt{V_h} \right\| \left\| \Gamma_{z,h}^\Theta(\varepsilon)^{-1} \right\| \left\| \sqrt{V_h} P_h G_{z,h}(\varepsilon) \right\| \\ &\leq \frac{c}{\alpha_h \varepsilon} + c \varepsilon \times \frac{c}{\sqrt{\alpha_h} \sqrt{\varepsilon}} \times c \times \frac{c}{\sqrt{\alpha_h} \sqrt{\varepsilon}} \\ &\leq \frac{c}{\alpha_h \varepsilon}. \end{aligned}$$

On peut de la même façon vérifier que

$$\left\| G_{z,h}^\Theta(\varepsilon) P_h' \right\| + \left\| H_1^h G_{z,h}^\Theta(\varepsilon) P_h' \right\| \leq \frac{c}{\sqrt{\alpha_h} \sqrt{\varepsilon}} \quad (4.32)$$

et

$$\left\| G_{z,h}^\Theta(\varepsilon) \langle A_h \rangle^{-1} \right\| + \left\| H_1^h G_{z,h}^\Theta(\varepsilon) \langle A_h \rangle^{-1} \right\| \leq \frac{c}{\alpha_h \sqrt{\varepsilon}}.$$

**3.** Maintenant que l'on s'est « débarrassé » du terme  $\beta_h P_h V_h P_h$ , on peut suivre la démonstration analogue donnée dans [JMP84]. D'après (4.7) et (4.32), il existe  $\varepsilon_2 \in ]0, \varepsilon_1]$  tel que pour tous  $h \in ]0, 1]$ ,  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  et  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_2]$  on a

$$\left\| \varepsilon \Theta_h P_h G_{z,h}^\Theta(\varepsilon) P_h' \right\| \leq \frac{1}{2}.$$

On peut alors poser  $\Gamma'_{z,h}(\varepsilon) = 1 - i\varepsilon \Theta_h P_h G_{z,h}^\Theta(\varepsilon) P_h'$  puis définir :

$$G'_{z,h}(\varepsilon) = G_{z,h}^\Theta(\varepsilon) + i\varepsilon G_{z,h}^\Theta(\varepsilon) P_h' \Gamma'_{z,h}(\varepsilon)^{-1} \Theta_h P_h G_{z,h}^\Theta(\varepsilon).$$

On vérifie comme précédemment que  $G'_{z,h}(\varepsilon)$  est un inverse pour  $(H_h - i\varepsilon\Theta_h P_h - z)$ . On a

$$(H_h - i\varepsilon\Theta_h P_h - z)G'_{z,h}(\varepsilon) = 1 - i\varepsilon P'_h \Theta_h P_h G'_{z,h}(\varepsilon),$$

et donc

$$\begin{aligned} & (H_h - i\varepsilon\Theta_h P_h - z)G'_{z,h}(\varepsilon) \\ &= 1 - i\varepsilon P'_h \Theta_h P_h G'_{z,h}(\varepsilon) + i\varepsilon P'_h \Gamma'_{z,h}(\varepsilon)^{-1} \Theta_h P_h G'_{z,h}(\varepsilon) \\ & \quad - (i\varepsilon)^2 P'_h \Theta_h P_h G'_{z,h}(\varepsilon) P'_h \Gamma'_{z,h}(\varepsilon)^{-1} \Theta_h P_h G'_{z,h}(\varepsilon) \\ &= 1 - i\varepsilon P'_h (1 - \Gamma'_{z,h}(\varepsilon)^{-1} + i\varepsilon \Theta_h P_h G'_{z,h}(\varepsilon) P'_h \Gamma'_{z,h}(\varepsilon)^{-1}) \Theta_h P_h G'_{z,h}(\varepsilon) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Et comme précédemment, on peut vérifier les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} & \left\| G'_{z,h}(\varepsilon) \right\| + \left\| H_1^h G'_{z,h}(\varepsilon) \right\| \leq \frac{c}{\alpha_h \varepsilon}, \\ & \left\| G'_{z,h}(\varepsilon) P'_h \right\| + \left\| H_1^h G'_{z,h}(\varepsilon) P'_h \right\| \leq \frac{c}{\sqrt{\alpha_h} \sqrt{\varepsilon}}, \\ & \left\| G'_{z,h}(\varepsilon) \langle A_h \rangle^{-1} \right\| + \left\| H_1^h G'_{z,h}(\varepsilon) \langle A_h \rangle^{-1} \right\| \leq \frac{c}{\alpha_h \sqrt{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

**4.** Une troisième étape permet maintenant d'obtenir effectivement un inverse pour l'opérateur  $(H_h - i\varepsilon\Theta_h - z)$ . Il existe  $\varepsilon_0 \in ]0, \varepsilon_2]$  tel que pour tous  $h \in ]0, 1]$ ,  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  et  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$  l'opérateur

$$\varepsilon P'_h G'_{z,h}(\varepsilon) \Theta_h = \varepsilon P'_h G'_{z,h}(\varepsilon) (H_1^h - i) (H_1^h - i)^{-1} \Theta_h$$

se prolonge en un opérateur borné sur  $\mathcal{H}$  de norme inférieure à  $\frac{1}{2}$ . On pose alors  $\Gamma^1_{z,h}(\varepsilon) = 1 - i\varepsilon P'_h G'_{z,h}(\varepsilon) \Theta_h$  puis :

$$G^1_{z,h}(\varepsilon) = G'_{z,h}(\varepsilon) + i\varepsilon G'_{z,h}(\varepsilon) \Theta_h \Gamma^1_{z,h}(\varepsilon)^{-1} P'_h G'_{z,h}(\varepsilon).$$

Il ne reste plus qu'à vérifier par un calcul analogue à ce qui précède que  $G^1_{z,h}(\varepsilon)$  est bien un inverse pour  $(H_h - i\varepsilon\Theta_h - z)$  vérifiant les estimations annoncées. Ainsi (i) et (ii) sont démontrés.

**5.** Le point (iii) est, comme pour  $G_{z,h}(\varepsilon)$ , conséquence du lemme 4.12. Soient  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ ,  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  et  $h \in ]0, 1]$ . Pour  $\eta \in ]0, \varepsilon_0[$  on a :

$$G^1_{z,h}(\eta) - G^1_{z,h}(\varepsilon) = i(\eta - \varepsilon) G^1_{z,h}(\eta) \Theta_h G^1_{z,h}(\varepsilon).$$

Comme  $\Theta_h G^1_{z,h}(\varepsilon)$  est borné et  $G^1_{z,h}(\eta)$  est borné uniformément en  $\eta$  proche de  $\varepsilon$  fixé, on obtient

$$G^1_{z,h}(\eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow \varepsilon} G^1_{z,h}(\varepsilon)$$

dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ , puis

$$\frac{d}{d\varepsilon} G^1_{z,h}(\varepsilon) = i G^1_{z,h}(\varepsilon) \Theta_h G^1_{z,h}(\varepsilon).$$

D'après le point (iii), on peut calculer au sens des formes sur  $\mathcal{D}_A$  :

$$\begin{aligned} i G^1_{z,h}(\varepsilon) \Theta_h G^1_{z,h}(\varepsilon) &= -G^1_{z,h}(\varepsilon) [H_h, A_h] G^1_{z,h}(\varepsilon) \\ &= -G^1_{z,h}(\varepsilon) [H_h - z - i\varepsilon\Theta_h, A_h] G^1_{z,h}(\varepsilon) - i\varepsilon G^1_{z,h}(\varepsilon) [\Theta_h, A_h] G^1_{z,h}(\varepsilon) \\ &= [G^1_{z,h}(\varepsilon), A_h] - i\varepsilon G^1_{z,h}(\varepsilon) [\Theta_h, A_h] G^1_{z,h}(\varepsilon) \end{aligned}$$

Le deuxième terme se prolonge en un opérateur borné d'après l'hypothèse (d) et le premier est bien défini sur  $\mathcal{D}_A$  d'après (iii). Il s'agit donc d'une égalité sur  $\mathcal{D}_A$ , ce qui prouve (iv).  $\square$

L'estimation qu'on montre maintenant est démontrée dans [JMP84] dans le cas autoadjoint et pour  $h$  fixé. Le résultat n'est pas valable dans le cas dissipatif si on remplace  $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(A_h)$  par  $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h)$ . On pourra par contre remplacer  $(H_h - z)^{-1}$  et  $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(A_h)$  par  $(H_h^* - \bar{z})^{-1}$  et  $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h)$  (voir la remarque 4.22). Contrairement à ce qui est fait dans [JMP84], on ne démontre pas le résultat pour les puissances de la résolvante. La raison est qu'on l'obtiendra de façon plus précise au théorème 4.33 en suivant l'argument de [Jen85].

**Théorème 4.21.** *On suppose que la famille  $(A_h)_{h \in ]0,1]}$  d'opérateurs autoadjoints sur  $\mathcal{H}$  est uniformément conjuguée à la famille d'opérateurs dissipatifs  $(H_h)_{h \in ]0,1]}$  sur l'intervalle  $I$  et pour les bornes inférieures  $(\alpha_h)_{h \in ]0,1]}$ . Alors pour  $\delta > 1$ , il existe une constante  $c \geq 0$  telle que :*

$$\forall h \in ]0, 1], \forall z \in \mathbb{C}_{I,+}, \quad \left\| \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(A_h)(H_h - z)^{-1} \langle A_h \rangle^{-\delta} \right\| \leq \frac{c}{\alpha_h}.$$

*Démonstration.* Pour  $h \in ]0, 1]$ ,  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  et  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$  (où  $\varepsilon_0 > 0$  est donné par le lemme 4.19) on note :

$$\tilde{F}_{z,h}(\varepsilon) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(A_h) e^{\varepsilon A_h} G_{z,h}^1(\varepsilon) \langle A_h \rangle^{-\delta}.$$

On a déjà, d'après le lemme 4.19 et le calcul fonctionnel pour  $A_h$  :

$$\left\| \tilde{F}_{z,h}(\varepsilon) \right\| \leq \left\| \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(A_h) e^{\varepsilon A_h} \right\| \left\| G_{z,h}^1(\varepsilon) \langle A_h \rangle^{-\delta} \right\| \leq \frac{c}{\alpha_h \sqrt{\varepsilon}}. \quad (4.33)$$

Toujours d'après le lemme 4.19, l'application  $\varepsilon \mapsto \tilde{F}_{z,h}(\varepsilon)$  est dérivable et comme  $\langle A_h \rangle^{-\delta}$  envoie  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{D}_A$  on a pour tout  $\varphi \in \mathcal{H}$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \tilde{F}_{z,h}(\varepsilon) \varphi &= \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(A_h) e^{\varepsilon A_h} G_{z,h}^1(\varepsilon) A_h \langle A_h \rangle^{-\delta} \varphi \\ &\quad - i \varepsilon \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(A_h) e^{\varepsilon A_h} G_{z,h}^1(\varepsilon) [\Theta_h, A] G_{z,h}^1(\varepsilon) \langle A_h \rangle^{-\delta} \varphi. \end{aligned}$$

Pour le premier terme, on a par interpolation complexe (lemme A.1) :

$$\begin{aligned} &\left\| \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(A_h) e^{\varepsilon A_h} G_{z,h}^1(\varepsilon) A_h \langle A_h \rangle^{-\delta} \right\| \\ &\leq \left\| \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(A_h) e^{\varepsilon A_h} G_{z,h}^1(\varepsilon) \langle A_h \rangle^{1-\delta} \right\| \\ &\leq \left\| \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(A_h) e^{\varepsilon A_h} G_{z,h}^1(\varepsilon) \langle A_h \rangle^{-\delta} \right\|^{1-\frac{1}{\delta}} \left\| \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(A_h) e^{\varepsilon A_h} G_{z,h}^1(\varepsilon) \right\|^{\frac{1}{\delta}} \\ &\leq \left\| \tilde{F}_{z,h}(\varepsilon) \right\|^{1-\frac{1}{\delta}} \times c \alpha_h^{-\frac{1}{\delta}} \varepsilon^{-\frac{1}{\delta}}. \end{aligned}$$

Pour le deuxième terme on utilise l'hypothèse (d) ainsi que les estimations du lemme 4.19 :

$$\begin{aligned} &\varepsilon \left\| \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(A_h) e^{\varepsilon A_h} G_{z,h}^1(\varepsilon) [\Theta_h, A_h] G_{z,h}^1(\varepsilon) \langle A_h \rangle^{-\delta} \right\| \\ &\leq c \varepsilon \alpha_h \left\| (H_1^h - i) G_{z,h}^1(\varepsilon) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(A_h) e^{\varepsilon A_h} \right\| \left\| (H_1^h - i) G_{z,h}^1(\varepsilon) \langle A_h \rangle^{-\delta} \right\| \\ &\leq c \varepsilon \alpha_h \times \frac{c}{\alpha_h \varepsilon} \times \frac{c}{\alpha_h \sqrt{\varepsilon}} \\ &\leq \frac{c}{\alpha_h \sqrt{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\left\| \frac{d}{d\varepsilon} \tilde{F}_{z,h}(\varepsilon) \right\| \leq c \left( \alpha_h^{-\frac{1}{\delta}} \varepsilon^{-\frac{1}{\delta}} \left\| \tilde{F}_{z,h}(\varepsilon) \right\|^{1-\frac{1}{\delta}} + \alpha_h^{-1} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \right),$$

et donc

$$\left\| \frac{d}{d\varepsilon} \alpha_h \tilde{F}_{z,h}(\varepsilon) \right\| \leq c \varepsilon^{-\frac{1}{\min(\delta, 2)}} \left( 1 + \left\| \alpha_h \tilde{F}_{z,h}(\varepsilon) \right\|^{1-\frac{1}{\delta}} \right).$$

Avec (4.33), cela permet de conclure grâce au lemme 4.17.  $\square$

Remarque 4.22. On vérifie de même

$$\forall h \in ]0, 1], \forall z \in \mathbb{C}_{I,+}, \quad \left\| \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h)(H_h^* - \bar{z})^{-1} \langle A_h \rangle^{-\delta} \right\| \leq \frac{c}{\alpha_h}$$

ce qui, par passage à l'adjoint, donne :

$$\forall h \in ]0, 1], \forall z \in \mathbb{C}_{I,+}, \quad \left\| \langle A_h \rangle^{-\delta} (H_h - z)^{-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h) \right\| \leq \frac{c}{\alpha_h}.$$

Pour cela on étudie l'application

$$\varepsilon \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h) e^{-\varepsilon A_h} G_{z,h}^1(\varepsilon)^* \langle A_h \rangle^{-\delta}.$$

## 4.2.2 Estimation dans les espaces de Besov

Soit  $F$  un opérateur autoadjoint sur  $\mathcal{H}$ . On note  $\Omega_0 = ]-1, 1[$  et, pour  $j \in \mathbb{N}^*$  :  $\Omega_j = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid 2^{j-1} \leq |\lambda| < 2^j\}$ . Pour  $\delta \geq 0$  on définit l'espace de Besov

$$B_\delta(F) = \left\{ u \in \mathcal{H} \mid \|u\|_{B_\delta(F)} := \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\delta} \|\mathbf{1}_{\Omega_j}(F)u\|_{\mathcal{H}} < \infty \right\}.$$

La norme sur l'espace dual  $B_\delta(F)^*$  est :

$$\|v\|_{B_\delta(F)^*} = \sup_{j \in \mathbb{N}} 2^{-j\delta} \|\mathbf{1}_{\Omega_j}(F)v\|.$$

**Proposition 4.23.** *Pour  $\delta \geq 0$  et  $\varepsilon > 0$  on a*

$$\langle F \rangle^{-(\delta+\varepsilon)} \mathcal{H} \subset B_\delta(F) \subset \langle F \rangle^{-\delta} \mathcal{H},$$

où les injections sont continues.

Ainsi, si  $(A_h)_{h \in ]0,1]}$  est une famille d'opérateurs uniformément conjuguée à  $(H_h)_{h \in ]0,1]}$  et  $\delta > \frac{1}{2}$ , les espaces  $B_{1/2}(A_h)$  et  $B_{1/2}^*(A_h)$  s'intercalent entre les espaces  $\langle A_h \rangle^{-\delta} \mathcal{H}$  et  $\langle A_h \rangle^{\delta} \mathcal{H}$  dans lesquels on a les estimations uniformes et les espaces  $\langle A_h \rangle^{-\frac{1}{2}} \mathcal{H}$  et  $\langle A_h \rangle^{\frac{1}{2}} \mathcal{H}$  dans lesquels elles ne sont pas vraies. Le résultat suivant est donc une amélioration du théorème 4.14 :

**Théorème 4.24.** *On suppose que la famille  $(A_h)_{h \in ]0,1]}$  d'opérateurs autoadjoints sur  $\mathcal{H}$  est uniformément conjuguée à la famille d'opérateurs dissipatifs  $(H_h)_{h \in ]0,1]}$  sur l'intervalle  $I$  et pour les bornes inférieures  $(\alpha_h)_{h \in ]0,1]}$ . Alors pour  $\delta \geq \frac{1}{2}$  il existe une constante  $c \geq 0$  telle que :*

$$\forall h \in ]0, 1], \forall z \in \mathbb{C}_{I,+}, \quad \|(H_h - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(B_\delta(A_h), B_\delta(A_h)^*)} \leq \frac{c}{\alpha_h}.$$

La démonstration est directement inspirée de [Mou83, JP85] (et de la partie 2.2 de [Wan07] pour le cadre semi-classique).

**Proposition 4.25.** *Avec les hypothèses du théorème 4.24, il existe une constante  $c \geq 0$  telle que :*

$$\forall h \in ]0, 1], \forall z \in \mathbb{C}_{I,+}, \forall n, m \in \mathbb{Z}, \quad \|\mathbf{1}_{[n, n+1[}(A_h)(H_h - z)^{-1} \mathbf{1}_{[m, m+1[}(A_h)\| \leq \frac{c}{\alpha_h}.$$

*Démonstration.* Soient  $h \in ]0, 1]$ ,  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ . D'après la remarque 4.3 on a

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{1}_{[n, n+1[}(A_h)(H_h - z)^{-1} \mathbf{1}_{[n, n+1[}(A_h)\| \\ & \leq \|\mathbf{1}_{[n, n+1[}(A_h - n) \langle A_h - n \rangle\| \left\| \langle A_h - n \rangle^{-1} (H_h - z)^{-1} \langle A_h - n \rangle^{-1} \right\| \\ & \quad \|\langle A_h - n \rangle \mathbf{1}_{[n, n+1[}(A_h - n)\| \\ & \leq \frac{c}{\alpha_h}, \end{aligned}$$



où  $c$  ne dépend ni de  $h$ , ni de  $z$ , ni de  $n$ . Pour  $n, m \in \mathbb{Z}$  on a :

$$\begin{aligned} & \mathbb{1}_{[n, n+1[}(A_h)(H_h - z)^{-1} \mathbb{1}_{[m, m+1[}(A_h) \\ &= \mathbb{1}_{[n, n+1[}(A_h) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(A_h - m)(H_h - z)^{-1} \mathbb{1}_{[m, m+1[}(A_h) \\ & \quad + \mathbb{1}_{[n, n+1[}(A_h) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h - m)(H_h^* - \bar{z})^{-1} \mathbb{1}_{[m, m+1[}(A_h) \\ & \quad + \mathbb{1}_{[n, n+1[}(A_h) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h - m)((H_h - z)^{-1} - (H_h^* - \bar{z})^{-1}) \mathbb{1}_{[m, m+1[}(A_h). \end{aligned}$$

D'après le théorème 4.21 et la remarque 4.22 on a déjà

$$\|\mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(A_h - m)(H_h - z)^{-1} \mathbb{1}_{[m, m+1[}(A_h)\| \leq \frac{c}{\alpha_h}$$

et

$$\|\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h - m)(H_h^* - \bar{z})^{-1} \mathbb{1}_{[m, m+1[}(A_h)\| \leq \frac{c}{\alpha_h}.$$

Pour le troisième terme on remarque que

$$(H_h - z)^{-1} - (H_h^* - \bar{z})^{-1} = 2i(H_h^* - \bar{z})^{-1}(V_h + \text{Im } z)(H_h - z)^{-1}$$

et que la forme quadratique

$$\varphi \mapsto \langle (H_h^* - \bar{z})^{-1}(V_h + \text{Im } z)(H_h - z)^{-1} \varphi, \varphi \rangle = \langle (V_h + \text{Im } z)(H_h - z)^{-1} \varphi, (H_h - z)^{-1} \varphi \rangle$$

est positive. Pour  $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$  on a donc

$$\begin{aligned} & \langle (H_h^* - \bar{z})^{-1}(V_h + \mu)(H_h - z)^{-1} \varphi, \psi \rangle \\ & \leq \langle (H_h^* - \bar{z})^{-1}(V_h + \mu)(H_h - z)^{-1} \varphi, \varphi \rangle^{\frac{1}{2}} \langle (H_h^* - \bar{z})^{-1}(V_h + \mu)(H_h - z)^{-1} \psi, \psi \rangle^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Appliqué avec  $\mathbb{1}_{[m, m+1[}(A_h)\varphi$  et  $\mathbb{1}_{[n, n+1[}(A_h)\psi$ , cela donne

$$\begin{aligned} & \left| \langle \mathbb{1}_{[n, n+1[}(A_h)(H_h^* - \bar{z})^{-1}(V_h + \mu)(H_h - z)^{-1} \mathbb{1}_{[m, m+1[}(A_h)\varphi, \psi \rangle \right| \\ & \leq \left| \langle (H_h^* - \bar{z})^{-1}(V_h + \mu)(H_h - z)^{-1} \mathbb{1}_{[m, m+1[}(A_h)\varphi, \mathbb{1}_{[m, m+1[}(A_h)\varphi \rangle \right|^{\frac{1}{2}} \\ & \quad \times \left| \langle (H_h^* - \bar{z})^{-1}(V_h + \mu)(H_h - z)^{-1} \mathbb{1}_{[n, n+1[}(A_h)\psi, \mathbb{1}_{[n, n+1[}(A_h)\psi \rangle \right|^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left| \langle \mathbb{1}_{[m, m+1[}(A_h)(H_h - z)^{-1} - (H_h^* - \bar{z})^{-1} \mathbb{1}_{[m, m+1[}(A_h)\varphi, \varphi \rangle \right|^{\frac{1}{2}} \\ & \quad \times \left| \langle \mathbb{1}_{[n, n+1[}(A_h)[(H_h - z)^{-1} - (H_h^* - \bar{z})^{-1}] \mathbb{1}_{[n, n+1[}(A_h)\psi, \psi \rangle \right|^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \frac{c}{\alpha_h} \|\varphi\| \|\psi\|, \end{aligned}$$

ce qui prouve la proposition. □

On note :

$$l^{2, \infty}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^\infty(\mathbb{R}) \mid \|f\|_{2, \infty} = \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|\mathbb{1}_{[k, k+1[} f\|_\infty^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}.$$

**Proposition 4.26.** *Avec les hypothèses du théorème 4.24, il existe une constante  $c \geq 0$  telle que pour  $f, g \in l^{2, \infty}(\mathbb{R})$ ,  $h \in ]0, 1]$  et  $z \in \mathbb{C}_{I, +}$  on a :*

$$\|f(A_h)(H_h - z)^{-1}g(A_h)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{c}{\alpha_h} \|f\|_{2, \infty} \|g\|_{2, \infty}.$$

*Démonstration.* Pour  $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$  on a

$$\begin{aligned}
& |\langle f(A_h)(H_h - z)^{-1}g(A_h)\varphi, \psi \rangle| \\
& \leq \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} |\langle \mathbf{1}_{[n,n+1[}(A_h)(H_h - z)^{-1}\mathbf{1}_{[m,m+1[}(A_h)g(A_h)\varphi, \mathbf{1}_{[n,n+1[}(A_h)f(A_h)\psi \rangle| \\
& \leq \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{1}_{[n,n+1[}(A_h)(H_h - z)^{-1}\mathbf{1}_{[m,m+1[}(A_h)\| \\
& \quad \times \|\mathbf{1}_{[m,m+1[}(A_h)g(A_h)\varphi\| \|\mathbf{1}_{[n,n+1[}(A_h)f(A_h)\psi\| \\
& \leq \frac{c}{\alpha_h} \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{1}_{[m,m+1[}(A_h)g(A_h)\varphi\| \|\mathbf{1}_{[n,n+1[}(A_h)f(A_h)\psi\|,
\end{aligned}$$

d'après la proposition 4.25. Or, pour  $m \in \mathbb{Z}$ ,

$$\|\mathbf{1}_{[m,m+1[}(A_h)g(A_h)\psi\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} \|\mathbf{1}_{[m,m+1[}g\|_{\infty}^2 dE_{A_h}(x)\psi \leq \|\mathbf{1}_{[m,m+1[}g\|_{\infty}^2 \|\psi\|^2,$$

et on a une estimation analogue avec  $m, g$  et  $\psi$  remplacés par  $n, f$  et  $\varphi$ . Cela donne finalement :

$$\begin{aligned}
& \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{1}_{[m,m+1[}(A_h)g(A_h)\psi\| \|\mathbf{1}_{[n,n+1[}(A_h)f(A_h)\varphi\| \\
& \leq \left( \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{1}_{[m,m+1[}g\|_{\infty} \|\mathbf{1}_{[n,n+1[}f\|_{\infty} \right) \|\varphi\| \|\psi\| \\
& \leq \|f\|_{2,\infty} \|g\|_{2,\infty} \|\varphi\| \|\psi\|.
\end{aligned}$$

□

On peut maintenant démontrer l'estimation du théorème 4.24 :

*Démonstration.* Soient  $\varphi \in B_{\delta}(A_h)$  et  $j \in \mathbb{N}$ . On a :

$$\begin{aligned}
2^{-j\delta} \|\mathbf{1}_{\Omega_j}(A_h)(H_h - z)^{-1}\varphi\| & \leq 2^{-j\delta} \sum_{k \in \mathbb{N}} \|\mathbf{1}_{\Omega_j}(A_h)(H_h - z)^{-1}\mathbf{1}_{\Omega_k}(A_h)\| \|\mathbf{1}_{\Omega_k}(A_h)\varphi\| \\
& \leq \frac{c}{\alpha_h} 2^{-j\delta} \|\mathbf{1}_{\Omega_j}\|_{2,\infty} \sum_{k \in \mathbb{N}} \|\mathbf{1}_{\Omega_k}\|_{2,\infty} \|\mathbf{1}_{\Omega_k}(A_h)\varphi\| \\
& \leq \frac{c}{\alpha_h} 2^{-j\delta} 2^{\frac{j}{2}} \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{\frac{k}{2}} \|\mathbf{1}_{\Omega_k}(A_h)\varphi\| \\
& \leq \frac{c}{\alpha_h} \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{k\delta} \|\mathbf{1}_{\Omega_k}(A_h)\varphi\| \\
& \leq \frac{c}{\alpha_h} \|\varphi\|_{B_{\delta}(A_h)}.
\end{aligned}$$

□

### 4.2.3 Conjugaison d'ordre supérieur

Pour  $h \in ]0, 1]$  on note  $\Theta_{R,h}^1 = \Theta_h^R = [H_1^h, iA_h]^0$  et  $\Theta_{I,h}^1 = \Theta_h^I = [V_h, iA_h]^0$ . Puis, par récurrence sur  $n \geq 2$  et tant que cela a un sens, on pose :

$$\Theta_{R,h}^n = [\Theta_{R,h}^{n-1}, iA_h]^0, \quad \Theta_{I,h}^n = [\Theta_{I,h}^{n-1}, iA_h]^0, \quad \Theta_h^n = \Theta_{R,h}^n - i\Theta_{I,h}^n.$$

Les résultats de cette partie sont directement inspirés de [JMP84] et [Jen85]. On en redonne toutefois les démonstrations pour s'assurer que le caractère non-autoadjoint de  $H_h$  ne pose pas de problème et pour contrôler les estimations par rapport au paramètre  $h \in ]0, 1]$ .

**Définition 4.27.** Soit  $(A_h)_{h \in ]0,1]}$  une famille d'opérateurs autoadjoints. On dit que la famille  $(A_h)_{h \in ]0,1]}$  est uniformément conjuguée à l'ordre  $n \geq 2$  à la famille d'opérateurs dissipatifs  $(H_h)_{h \in ]0,1]}$  sur l'intervalle  $I$  et pour les bornes inférieures  $(\alpha_h)_{h \in ]0,1]}$  si elle vérifie les hypothèses de la définition 4.1 et, de plus :

( $c_n$ ) Pour tout  $h \in ]0,1]$  et  $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , les formes quadratiques  $[\Theta_{R,h}^{j-1}, iA_h]$  et  $[\Theta_{I,h}^{j-1}, iA_h]$  définies sur  $\mathcal{D}_H \cap \mathcal{D}_A$  sont minorées, admettent une fermeture et les domaines des opérateurs autoadjoints  $\Theta_{R,h}^j$  et  $\Theta_{I,h}^j$  associés à ces fermetures contiennent  $\mathcal{D}_H$ . En outre il existe  $c \geq 0$  telle que :

$$\forall j \in \llbracket 2, n \rrbracket, \forall h \in ]0,1], \forall \varphi \in \mathcal{D}_H, \quad \left\| \Theta_h^j \varphi \right\| \leq c \alpha_h \left\| (H_1^h - i) \varphi \right\|.$$

( $d_n$ ) La forme définie sur  $\mathcal{D}_H \cap \mathcal{D}_A$  par  $[\Theta_h^n, A_h]$  vérifie, pour tout  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}_H \cap \mathcal{D}_A$  :

$$|\langle \Theta_h^n \varphi, A_h \psi \rangle - \langle A_h \varphi, \Theta_h^n \psi \rangle| \leq c \alpha_h \left\| (H_1^h - i) \varphi \right\| \left\| (H_1^h - i) \psi \right\|.$$

En outre, on dira que la famille  $(A_h)_{h \in ]0,1]}$  est uniformément conjuguée à l'ordre infini à la famille d'opérateurs dissipatifs  $(H_h)_{h \in ]0,1]}$  si elle est uniformément conjuguée à l'ordre  $n$  pour tout  $n \geq 2$ .

Comme on l'avait fait pour  $G_{z,h}^1(\varepsilon)$  au lemme 4.19, on commence par prolonger à la résolvante qu'on va maintenant utiliser les propriétés de  $G_{z,h}(\varepsilon)$  :

**Lemme 4.28.** *On suppose que la famille  $(A_h)_{h \in ]0,1]}$  d'opérateurs autoadjoints sur  $\mathcal{H}$  est uniformément conjuguée à l'ordre  $n \geq 2$  à la famille d'opérateurs dissipatifs  $(H_h)_{h \in ]0,1]}$  sur l'intervalle  $I$  et pour les bornes inférieures  $(\alpha_h)_{h \in ]0,1]}$ . On note :*

$$B_h^n(\varepsilon) = \sum_{j=1}^n \frac{(-i\varepsilon)^j}{j!} \Theta_h^j.$$

(i) *Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour  $h \in ]0,1]$ ,  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  et  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$  l'opérateur  $(H_h + B_h^n(\varepsilon) - z)$  admet un inverse borné (qu'on notera).*

(ii) *Il existe une constante  $c \geq 0$  telle que pour  $h \in ]0,1]$ ,  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  et  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$  on a*

$$\left\| G_{z,h}^n(\varepsilon) \right\| \leq \frac{c}{\alpha_h \varepsilon}$$

et

$$\left\| G_{z,h}^n(\varepsilon) \langle A_h \rangle^{-1} \right\| \leq \frac{c}{\alpha_h \sqrt{\varepsilon}}.$$

(iii) *Pour tous  $h \in ]0,1]$ ,  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  et  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$  l'opérateur  $G_{z,h}^n(\varepsilon)$  envoie  $\mathcal{D}_A$  dans  $\mathcal{D}_H \cap \mathcal{D}_A$ .*

(iv) *Pour  $h \in ]0,1]$  et  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  l'application  $G_{z,h}^n : ]0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est de classe  $C^1$  et pour  $\varphi \in \mathcal{D}_A$  on a :*

$$\frac{d}{d\varepsilon} G_{z,h}^n(\varepsilon) \varphi = [G_{z,h}^n(\varepsilon), A_h] \varphi + \frac{(-i\varepsilon)^n}{n!} G_{z,h}^n(\varepsilon) [\Theta_h^n, A_h] G_{z,h}^n(\varepsilon) \varphi. \quad (4.34)$$

*Démonstration.* On observe que d'après l'hypothèse ( $c_n$ ) et les estimations du lemme 4.19 on a

$$\left\| (B_h^n(\varepsilon) - B_h^1(\varepsilon)) G_{z,h}^1(\varepsilon) \right\| \leq \left\| (B_h^n(\varepsilon) - B_h^1(\varepsilon)) (H_h - i)^{-1} \right\| \left\| (H_h + i) G_{z,h}^1(\varepsilon) \right\| \leq c \varepsilon.$$

Quitte à réduire  $\varepsilon_0 > 0$  donné par le lemme 4.19, on obtient que pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$  l'opérateur

$$\Gamma_{z,h}^n(\varepsilon) = 1 + (B_h^n(\varepsilon) - B_h^1(\varepsilon)) G_{z,h}^1(\varepsilon)$$

est inversible d'inverse uniformément borné. On peut alors définir :

$$G_{z,h}^n(\varepsilon) = G_{z,h}^1(\varepsilon) - G_{z,h}^1(\varepsilon) \Gamma_{z,h}^n(\varepsilon)^{-1} (B_h^n(\varepsilon) - B_h^1(\varepsilon)) G_{z,h}^1(\varepsilon).$$

Comme dans la démonstration du lemme 4.19, on vérifie que  $G_{z,h}^n(\varepsilon)$  est bien un inverse pour l'opérateur  $(H_h + B_h^n(\varepsilon) - z)$ . En effet on a

$$(H_h + B_h^n(\varepsilon) - z)G_{z,h}^1(\varepsilon) = 1 + (B_h^n(\varepsilon) - B_h^1(\varepsilon))G_{z,h}^1(\varepsilon),$$

et donc :

$$\begin{aligned} & (H_h + B_h^n(\varepsilon) - z)G_{z,h}^n(\varepsilon) \\ &= 1 + (B_h^n(\varepsilon) - B_h^1(\varepsilon))G_{z,h}^1(\varepsilon) - \Gamma_{z,h}^n(\varepsilon)^{-1}(B_h^n(\varepsilon) - B_h^1(\varepsilon))G_{z,h}^1(\varepsilon) \\ & \quad - (B_h^n(\varepsilon) - B_h^1(\varepsilon))G_{z,h}^1(\varepsilon)\Gamma_{z,h}^n(\varepsilon)^{-1}(B_h^n(\varepsilon) - B_h^1(\varepsilon))G_{z,h}^1(\varepsilon) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Et de même on a  $G_{z,h}^n(\varepsilon)(H_h + B_h^n(\varepsilon) - z) = 1$  sur  $\mathcal{D}_H$ . Cela prouve (i). On peut alors vérifier les estimations données en (ii) en utilisant les estimations analogues pour  $G_{z,h}^1(\varepsilon)$ , comme on l'avait fait au lemme 4.19. (iii) résulte encore du lemme 4.12, et (iv) se montre comme pour  $G_{z,h}^1(\varepsilon)$ , en vérifiant qu'on a au sens des formes sur  $\mathcal{D}_A$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon}G_{z,h}^n(\varepsilon) &= iG_{z,h}^n(\varepsilon) \left( \sum_{j=1}^n \frac{(-i\varepsilon)^{j-1}}{(j-1)!} \Theta_h^j \right) G_{z,h}^n(\varepsilon) \\ &= -G_{z,h}^n(\varepsilon)[H_h, A_h]G_{z,h}^n(\varepsilon) - \sum_{j=2}^n \frac{(-i\varepsilon)^{j-1}}{(j-1)!} G_{z,h}^n(\varepsilon) [\Theta_h^{j-1}, A_h]G_{z,h}^n(\varepsilon) \\ &= -G_{z,h}^n(\varepsilon)[H_h + B_h^n(\varepsilon) - z, A_h]G_{z,h}^n(\varepsilon) + \frac{(-i\varepsilon)^n}{n!} G_{z,h}^n(\varepsilon) [\Theta_h^n, A_h]G_{z,h}^n(\varepsilon) \\ &= [G_{z,h}^n(\varepsilon), A_h] + \frac{(-i\varepsilon)^n}{n!} G_{z,h}^n(\varepsilon) [\Theta_h^n, A_h]G_{z,h}^n(\varepsilon). \end{aligned}$$

□

**Théorème 4.29.** *On suppose que la famille  $(A_h)_{h \in ]0,1]}$  d'opérateurs autoadjoints sur  $\mathcal{H}$  est uniformément conjuguée à l'ordre  $n \geq 2$  à la famille d'opérateurs dissipatifs  $(H_h)_{h \in ]0,1]}$  sur l'intervalle  $I$  et pour les bornes inférieures  $(\alpha_h)_{h \in ]0,1]}$ . Soient  $\delta_1, \delta_2 \geq 0$  tels que  $\delta_1 + \delta_2 < n - 1$ .*

(i) *Il existe  $c \geq 0$  telle que :*

$$\forall h \in ]0, 1], \forall z \in \mathbb{C}_{I,+}, \quad \left\| \langle A_h \rangle^{\delta_1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(A_h)(H_h - z)^{-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h) \langle A_h \rangle^{\delta_2} \right\| \leq \frac{c}{\alpha_h}.$$

(ii) *Il existe  $c \geq 0$  telle que pour  $h \in ]0, 1]$  et  $z, z' \in \mathbb{C}_{I,+}$  on a*

$$\left\| \langle A_h \rangle^{\delta_1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(A_h) \left( (H_h - z)^{-1} - (H_h - z')^{-1} \right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h) \langle A_h \rangle^{\delta_2} \right\| \leq c \alpha_h^{\gamma_\alpha} |z - z'|^{\gamma_z},$$

$$\text{avec } \gamma_\alpha = \frac{\delta_1 + \delta_2 - 2n}{n+1} \text{ et } \gamma_z = \frac{n-1-\delta_1-\delta_2}{n+1} > 0.$$

(iii) *Pour  $\lambda \in I$ , la limite*

$$\begin{aligned} & \langle A_h \rangle^{\delta_1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(A_h)(H_h - (\lambda + i0))^{-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h) \langle A_h \rangle^{\delta_2} \\ &= \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \langle A_h \rangle^{\delta_1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(A_h)(H_h - (\lambda + i\mu))^{-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h) \langle A_h \rangle^{\delta_2} \end{aligned}$$

*existe dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  et définit une fonction Hölder-continue d'indice  $\frac{n-1-\delta_1-\delta_2}{n+1}$  par rapport à  $\lambda$ .*

Contrairement au cas autoadjoint, on ne peut pas inverser les rôles de  $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h)$  et  $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(A_h)$  dans cet énoncé

*Démonstration.* 1. Pour  $h \in ]0, 1]$ ,  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  et  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$  (où  $\varepsilon_0 > 0$  est donné par le lemme 4.28) on note :

$$F_{z,h}^n(\varepsilon) = \langle A_h \rangle^{\delta_1} e^{\varepsilon A_h} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(A_h) G_{z,h}^n(\varepsilon) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h) e^{-\varepsilon A_h} \langle A_h \rangle^{\delta_2}.$$

D'après le lemme 4.28 (iv), on a

$$\frac{d}{d\varepsilon} F_{z,h}^n(\varepsilon) = \langle A_h \rangle^{\delta_1} e^{\varepsilon A_h} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(A_h) D_{z,h}^n(\varepsilon) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h) e^{-\varepsilon A_h} \langle A_h \rangle^{\delta_2}$$

avec

$$\begin{aligned} D_{z,h}^n(\varepsilon) &= [A_h, G_{z,h}^n(\varepsilon)] + [G_{z,h}^n(\varepsilon), A_h] + \frac{(-i\varepsilon)^n}{n!} G_{z,h}^n(\varepsilon) [\Theta_h^n, A_h] G_{z,h}^n(\varepsilon) \\ &= \frac{(-i\varepsilon)^n}{n!} G_{z,h}^n(\varepsilon) [\Theta_h^n, A_h] G_{z,h}^n(\varepsilon). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{d\varepsilon} F_{z,h}^n(\varepsilon) \right\| &\leq \left\| \langle A_h \rangle^{\delta_1} e^{\varepsilon A_h} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(A_h) \right\| \left\| D_{z,h}^n(\varepsilon) \right\| \left\| \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h) e^{-\varepsilon A_h} \langle A_h \rangle^{\delta_2} \right\| \\ &\leq \times c\varepsilon^{-\delta_1} \times c\alpha_h^{-1} \varepsilon^{n-2} \times c\varepsilon^{-\delta_2} \\ &\leq \frac{c}{\alpha_h} \varepsilon^{n-\delta_1-\delta_2-2}. \end{aligned}$$

Or  $\delta_1 + \delta_2 < n - 1$ , donc  $n - \delta_1 - \delta_2 - 2 > -1$ . On a cette fois une estimation de la dérivée directement intégrable en 0, donc on obtient (i) sans passer par le lemme 4.17.

2. Soient  $h \in ]0, 1]$ ,  $z, z' \in \mathbb{C}_{I,+}$  et  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ . Les estimations précédentes donnent :

$$\left\| F_{z,h}^n(\varepsilon) - F_{z,h}^n(0) \right\| \leq \frac{c}{\alpha_h} \varepsilon^{n-1-\delta_1-\delta_2} \quad \text{et} \quad \left\| F_{z,h}^n(\varepsilon) - F_{z',h}^n(\varepsilon) \right\| \leq \frac{c}{\alpha_h^2} \varepsilon^{-(\delta_1+\delta_2+2)} |z - z'|.$$

On obtient alors (ii) et (iii) comme au théorème 4.18 en prenant  $\varepsilon = \alpha_h^{-\frac{1}{n+1}} |z - z'|^{\frac{1}{n+1}}$ .  $\square$

Dans le cas où la famille la conjugaison est d'ordre supérieur ou égal à 2 le résultat suivant généralise le théorème 4.21 :

**Théorème 4.30.** *On suppose que la famille  $(A_h)_{h \in ]0, 1]}$  d'opérateurs autoadjoints sur  $\mathcal{H}$  est uniformément conjuguée à l'ordre  $n \geq 2$  à la famille d'opérateurs dissipatifs  $(H_h)_{h \in ]0, 1]}$  sur l'intervalle  $I$  et pour les bornes inférieures  $(\alpha_h)_{h \in ]0, 1]}$ . Soit  $\delta \in ]\frac{1}{2}, n[$ .*

(i) *Il existe  $c \geq 0$  tel que*

$$\forall h \in ]0, 1], \forall z \in \mathbb{C}_{I,+}, \left\| \langle A_h \rangle^{-\delta} (H_h - z)^{-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h) \langle A_h \rangle^{\delta-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{c}{\alpha_h}. \quad (4.35)$$

(ii) *Pour  $\delta' \in ]-\infty, \delta[$  il existe  $\gamma_{\delta,\delta'}, \tilde{\gamma}_{\delta,\delta'} > 0$  et  $c \geq 0$  tels que pour  $h \in ]0, 1]$  et  $z, z' \in \mathbb{C}_{I,+}$  on a :*

$$\left\| \langle A_h \rangle^{-\delta} ((H_h - z)^{-1} - (H_h - z')^{-1}) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h) \langle A_h \rangle^{\delta'-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq c\alpha_h^{-\tilde{\gamma}_{\delta,\delta'}} |z - z'|^{\gamma_{\delta,\delta'}}. \quad (4.36)$$

(iii) *Pour  $\lambda \in I$ , la limite*

$$\begin{aligned} &\langle A_h \rangle^{-\delta} (H_h - (\lambda + i0))^{-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h) \langle A_h \rangle^{\delta'-1} \\ &= \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \langle A_h \rangle^{-\delta} (H_h - (\lambda + i\mu))^{-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h) \langle A_h \rangle^{\delta'-1} \end{aligned}$$

*existe dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  et définit une fonction Hölder-continue.*

*Remarque 4.31.* On montre de même des estimations uniformes (et le principe d'absorption limite en remplaçant  $\delta - 1$  par  $\delta' - 1$ ) pour la famille d'opérateurs

$$\langle A_h \rangle^{-\delta} (H_h^* - \bar{z})^{-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(A_h) \langle A_h \rangle^{\delta-1}$$

et donc, par passage à l'adjoint, pour

$$\langle A_h \rangle^{\delta-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(A_h) (H_h - z)^{-1} \langle A_h \rangle^{-\delta}.$$

*Démonstration. 1.* Soit  $\psi \in \mathcal{D}(\langle A_h \rangle^{\delta-1})$ . On a :

$$\begin{aligned} \langle A_h \rangle^{-\delta} (H_h - z)^{-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h) \langle A_h \rangle^{\delta-1} \psi &= \langle A_h \rangle^{-\delta} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h) (H_h - z)^{-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h) \langle A_h \rangle^{\delta-1} \psi \\ &\quad + \langle A_h \rangle^{-\delta} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(A_h) (H_h - z)^{-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h) \langle A_h \rangle^{\delta-1} \psi. \end{aligned}$$

Comme  $\delta - 1 < n - 1$ , on a d'après le théorème 4.29 :

$$\left\| \langle A_h \rangle^{-\delta} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(A_h) (H_h - z)^{-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h) \langle A_h \rangle^{\delta-1} \psi \right\| \leq \frac{c}{\alpha_h} \|\psi\|.$$

Pour le premier terme, on considère  $\varphi \in \mathcal{H}$  et on écrit :

$$\begin{aligned} &\left\langle \varphi, \langle A_h \rangle^{-\delta} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h) (H_h - z)^{-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h) \langle A_h \rangle^{\delta-1} \psi \right\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \langle A_h \rangle^{-\delta} \mathbb{1}_{[n, n+1[}(A_h) \varphi, \mathbb{1}_{[n, n+1[}(A_h) (H_h - z)^{-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h) \langle A_h \rangle^{\delta-1} \psi \right\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \langle A_h \rangle^{-\delta} \mathbb{1}_{[n, n+1[}(A_h) \varphi, \mathbb{1}_{[n, n+1[}(A_h) (H_h - z)^{-1} \mathbb{1}_{[0, n+1[}(A_h) \langle A_h \rangle^{\delta-1} \psi \right\rangle \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \langle A_h \rangle^{-\delta} \mathbb{1}_{[n, n+1[}(A_h) \varphi, \mathbb{1}_{[n, n+1[}(A_h) (H_h - z)^{-1} \mathbb{1}_{[n+1, +\infty[}(A_h) \langle A_h \rangle^{\delta-1} \psi \right\rangle \\ &=: B_1 + B_2. \end{aligned}$$

On peut estimer le premier terme grâce à la proposition 4.25 :

$$\begin{aligned} &\left\| \mathbb{1}_{[n, n+1[}(A_h) (H_h - z)^{-1} \mathbb{1}_{[0, n+1[}(A_h) \langle A_h \rangle^{\delta-1} \psi \right\| \\ &\leq \sum_{m=0}^n \left\| \mathbb{1}_{[n, n+1[}(A_h) (H_h - z)^{-1} \mathbb{1}_{[m, m+1[}(A_h) \langle A_h \rangle^{\delta-1} \psi \right\| \\ &\leq \sum_{m=0}^n \left\| \mathbb{1}_{[n, n+1[}(A_h) (H_h - z)^{-1} \mathbb{1}_{[m, m+1[}(A_h) \right\| \left\| \mathbb{1}_{[m, m+1[}(A_h) \langle A_h \rangle^{\delta-1} \right\| \left\| \mathbb{1}_{[m, m+1[}(A_h) \psi \right\| \\ &\leq \frac{c}{\alpha_h} \sum_{m=0}^n (m+1)^{\delta-1} \left\| \mathbb{1}_{[m, m+1[}(A_h) \psi \right\|, \end{aligned}$$

ce qui donne, avec le lemme 3.5 de [Jen85] :

$$\begin{aligned} |B_1| &\leq \frac{c}{\alpha_h} \sum_{n=0}^{\infty} n^{-\delta} \left\| \mathbb{1}_{[n, n+1[}(A_h) \varphi \right\| \left( \sum_{m=0}^n m^{\delta-1} \left\| \mathbb{1}_{[m, m+1[}(A_h) \psi \right\| \right) \\ &\leq \frac{c}{\alpha_h} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \mathbb{1}_{[n, n+1[}(A_h) \varphi \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \left( n^{-\delta} \sum_{m=0}^n (m+1)^{\delta-1} \left\| \mathbb{1}_{[m, m+1[}(A_h) \psi \right\| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{c}{\alpha_h} \|\varphi\| \left( \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \mathbb{1}_{[n, n+1[}(A_h) \psi \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{c}{\alpha_h} \|\varphi\| \|\psi\|. \end{aligned}$$

On a utilisé dans ce calcul le fait que les vecteurs  $\mathbf{1}_{[n,n+1[}(A_h)\varphi$  sont deux à deux orthogonaux.

2. Ainsi pour montrer (4.35) il reste à prouver une estimation analogue pour  $B_2$ . Pour cela on distingue deux cas.

► Cas  $\frac{1}{2} < \delta \leq 1$  : Dans ce cas  $\langle A_h \rangle^{\delta-1}$  est un opérateur borné. En utilisant la remarque 4.3 et le théorème 4.29 on a alors :

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{1}_{[n,n+1[}(A_h)(H_h - z)^{-1} \mathbf{1}_{[n+1,\infty[}(A_h) \right\| &\leq \left\| \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(A_h - n - 1)(H_h - z)^{-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h - n - 1) \right\| \\ &\leq \frac{c}{\alpha_h}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

On obtient

$$|B_2| \leq \frac{c}{\alpha_h} \|\psi\| \sum_{n=0}^{\infty} n^{-\delta} \left\| \mathbf{1}_{[n,n+1[}(A_h)\varphi \right\| \leq \frac{c}{\alpha_h} \|\varphi\| \|\psi\|,$$

ce qui permet de conclure.

► Cas  $1 < \delta < n$  : D'après le théorème 4.29, on a

$$\begin{aligned} &\left\| \mathbf{1}_{[n,n+1[}(A_h)(H_h - z)^{-1} \mathbf{1}_{[n+1,\infty[}(A_h) \langle A_h \rangle^{\delta-1} \psi \right\| \\ &\leq \left\| \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(A_h - (n+1))(H_h - z)^{-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h - (n+1)) \langle A_h - (n+1) \rangle^{\delta-1} \right\| \\ &\quad \times \left\| \langle A_h - (n+1) \rangle^{1-\delta} \langle A_h \rangle^{\delta-1} \right\| \|\psi\| \\ &\leq \frac{c}{\alpha_h} n^{\delta-1} \|\psi\|, \end{aligned}$$

et donc :

$$|B_2| \leq \frac{c}{\alpha_h} \sum_{n=0}^{\infty} n^{-\delta} \left\| \mathbf{1}_{[n,n+1[}(A_h)\varphi \right\| n^{\delta-1} \|\psi\| \leq \frac{c}{\alpha_h} \|\varphi\| \|\psi\|.$$

3. Ce que vient de montrer donne en particulier, pour  $z, z' \in \mathbb{C}_{I,+}$  :

$$\left\| \langle A_h \rangle^{-\delta} ((H_h - z)^{-1} - (H_h - z')^{-1}) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h) \langle A_h \rangle^{\delta-1} \right\| \leq \frac{c}{\alpha_h}.$$

D'après le théorème 4.18, on a par ailleurs :

$$\left\| \langle A_h \rangle^{-\delta} ((H_h - z)^{-1} - (H_h - z')^{-1}) \langle A_h \rangle^{-\delta} \right\| \leq \frac{c}{\alpha_h^{\tilde{\gamma}'}} |z - z'|^{\gamma'},$$

pour certains  $\gamma', \tilde{\gamma}' > 0$ . Par interpolation on en déduit que pour  $-\delta < \delta' - 1 < \delta - 1$  on a :

$$\left\| \langle A_h \rangle^{-\delta} ((H_h - z)^{-1} - (H_h - z')^{-1}) \langle A_h \rangle^{1-\delta'} \right\| \leq \frac{c}{\alpha_h^{\tilde{\gamma}'}} |z - z'|^{\gamma'},$$

pour certains  $\gamma, \gamma' > 0$ . Si  $\delta' - 1 \leq -\delta$  alors (4.36) résulte directement du théorème 4.18. L'existence et la régularité de la limite de la résolvante s'obtiennent alors comme au théorème 4.18.  $\square$

#### 4.2.4 Estimations des puissances de la résolvante et régularité de la limite

On poursuit dans ce paragraphe l'adaptation au cas dissipatif des résultats de [Jen85]. On obtient ici des estimations uniformes pour les puissances de la résolvante et on en déduit de meilleurs résultats de régularité pour les limites obtenues au paragraphe précédent.

On commence par un énoncé qui regroupe les lemmes 2.1 et 2.2 de [Jen85] :

**Lemme 4.32.** Soient  $Q$ ,  $P_+$  et  $P_-$  des opérateurs bornés sur  $\mathcal{H}$  tels que  $P_+ + P_- = 1$  et  $Q$  est autoadjoint inversible avec  $\|Q\| \leq 1$ . Soient  $R_1, \dots, R_l$  des opérateurs bornés sur  $\mathcal{H}$ ,  $l \in \mathbb{N}$ . On suppose qu'il existe des constantes  $\sigma \in ]0, 1]$ ,  $n > \sigma$  et  $c_1, \dots, c_l > 0$  telles que pour tout  $j \in \llbracket 1, l \rrbracket$  on a :

- (a)  $\|Q^\sigma R_j Q^\sigma\| \leq c_j$ ,
- (b)  $\|Q^{1-\delta} P_- R_j Q^\delta\| \leq c_j$  pour tout  $\delta \in [\sigma, n[$ ,
- (c)  $\|Q^\delta R_j P_+ Q^{1-\delta}\| \leq c_j$  pour tout  $\delta \in [\sigma, n[$ ,
- (d)  $\|Q^{-\delta_1} P_- R_j P_+ Q^{-\delta_2}\| \leq c_j$  pour tous  $\delta_1, \delta_2 \geq 0$  tels que  $\delta_1 + \delta_2 < n - 1$ .

Alors pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $k < n + 1 - \sigma$  et  $j_1, \dots, j_k \in \llbracket 1, l \rrbracket$ , on a :

- (a<sub>k</sub>)  $\|Q^{k-1+\sigma} R_{j_1} \dots R_{j_k} Q^{k-1+\sigma}\| \leq 2^{k-1} c_{j_1} \dots c_{j_k}$ ,
- (b<sub>k</sub>)  $\|Q^{k-\delta} P_- R_{j_1} \dots R_{j_k} Q^\delta\| \leq 2^{k-1} c_{j_1} \dots c_{j_k}$  pour tout  $\delta \in [k-1+\sigma, n[$ ,
- (c<sub>k</sub>)  $\|Q^\delta R_{j_1} \dots R_{j_k} P_+ Q^{k-\delta}\| \leq 2^{k-1} c_{j_1} \dots c_{j_k}$  pour tout  $\delta \in [k-1+\sigma, n[$ ,
- (d<sub>k</sub>)  $\|Q^{-\delta_1} P_- R_{j_1} \dots R_{j_k} P_+ Q^{-\delta_2}\| \leq 2^{k-1} c_{j_1} \dots c_{j_k}$  pour tous  $\delta_1, \delta_2 \geq 0$  tels que :  $\delta_1 + \delta_2 < n - k$ .

*Démonstration.* On montre par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $k < n + 1 - \sigma$ , que les propriétés (a<sub>k</sub>), (b<sub>k</sub>), (c<sub>k</sub>) et (d<sub>k</sub>) sont vérifiées, sachant que (a<sub>1</sub>), (b<sub>1</sub>), (c<sub>1</sub>) et (d<sub>1</sub>) sont vraies par hypothèse. On suppose donc que ces quatre propriétés sont vraies jusqu'au rang  $k-1$  pour un certain  $k \geq 2$  tel que  $k < n + 1 - \sigma$ . Pour montrer (a<sub>k</sub>) on écrit :

$$\begin{aligned} & Q^{k-1+\sigma} R_{j_1} \dots R_{j_k} Q^{k-1+\sigma} \\ &= Q^{k-1+\sigma} R_{j_1} \dots R_{j_{k-1}} (P_+ + P_-) R_{j_k} Q^{k-1+\sigma} \\ &= (Q^{k-1+\sigma} R_{j_1} \dots R_{j_{k-1}} P_+ Q^{-\sigma}) (Q^\sigma R_{j_k} Q^{k-1+\sigma}) \\ &\quad + (Q^{k-1+\sigma} R_{j_1} \dots R_{j_{k-1}} Q^{k-2+\sigma}) (Q^{1-(k-1+\sigma)} P_- R_{j_k} Q^{k-1+\sigma}) \end{aligned}$$

On peut appliquer (c<sub>k-1</sub>) avec  $\delta = k-1+\sigma \in [k-2+\sigma, n[$ , ce qui donne :

$$\|Q^{k-1+\sigma} R_{j_1} \dots R_{j_{k-1}} P_+ Q^{-\sigma}\| \leq 2^{k-2} c_{j_1} \dots c_{j_{k-1}}.$$

Comme  $\|Q^{k-1}\| \leq 1$  on obtient par (a<sub>1</sub>) :

$$\|Q^\sigma R_{j_k} Q^{k-1+\sigma}\| \leq c_{j_k}.$$

De même (a<sub>k-1</sub>) implique

$$\|Q^{k-1+\sigma} R_{j_1} \dots R_{j_{k-1}} Q^{k-2+\sigma}\| \leq 2^{k-2} c_{j_1} \dots c_{j_{k-1}},$$

tandis que (b<sub>1</sub>) donne

$$\|Q^{1-(k-1+\sigma)} P_- R_{j_k} Q^{k-1+\sigma}\| \leq c_k,$$

et finalement on obtient bien (a<sub>k</sub>). On procède de même pour les trois autres estimations. Pour  $\delta \in [k-1+\sigma, n[$ , on écrit :

$$\begin{aligned} Q^{k-\delta} P_- R_{j_1} \dots R_{j_k} Q^\delta &= (Q^{k-1-(\delta-1)} P_- R_{j_1} \dots R_{j_{k-1}} Q^{\delta-1}) (Q^{1-\delta} P_- R_{j_k} Q^\delta) \\ &\quad + (Q^{k-\delta} P_- R_{j_1} \dots R_{j_{k-1}} P_+ Q^{-\sigma}) (Q^\sigma R_{j_k} Q^\delta) \end{aligned}$$

et on montre (b<sub>k</sub>) en utilisant (b<sub>k-1</sub>), (b<sub>1</sub>), (d<sub>k-1</sub>) et (a<sub>1</sub>). (c<sub>k</sub>) se montre de la même façon. Pour (d<sub>k</sub>) on écrit

$$\begin{aligned} & Q^{-\delta_1} P_- R_{j_1} \dots R_{j_k} P_+ Q^{-\delta_2} \\ &= (Q^{k-1-(\delta_1+k-1)} P_- R_{j_1} \dots R_{j_{k-1}} Q^{\delta_1+k-1}) (Q^{-(\delta_1+k-1)} P_- R_{j_k} P_+ Q^{-\delta_2}) \\ &\quad + (Q^{-\delta_1} P_- R_{j_1} \dots R_{j_{k-1}} P_+ Q^{-(\delta_2+1)}) (Q^{\delta_2+1} R_{j_k} P_+ Q^{1-(\delta_2+1)}). \end{aligned}$$

Il ne reste donc plus qu'à appliquer (b<sub>k-1</sub>), (d<sub>1</sub>), (d<sub>k-1</sub>) et (c<sub>1</sub>) pour achever la démonstration.  $\square$



En partant des théorèmes 4.14, 4.30 et 4.29 (et de la remarque 4.31), le lemme 4.32 permet de montrer :

**Théorème 4.33.** *On suppose que la famille  $(A_h)_{h \in ]0,1]}$  d'opérateurs autoadjoints sur  $\mathcal{H}$  est uniformément conjuguée à l'ordre  $n \geq 2$  à la famille d'opérateurs dissipatifs  $(H_h)_{h \in ]0,1]}$  sur l'intervalle  $I$  et pour les bornes inférieures  $(\alpha_h)_{h \in ]0,1]}$ . Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .*

(i) *Si  $\delta > k - \frac{1}{2}$  alors il existe une constante  $c$  telle que*

$$\forall h \in ]0, 1], \forall z \in \mathbb{C}_{I,+}, \quad \left\| \langle A_h \rangle^{-\delta} (H_h - z)^{-k} \langle A_h \rangle^{-\delta} \right\| \leq \frac{c}{\alpha_h^k}.$$

(ii) *Si  $\delta \in ]k - \frac{1}{2}, n[$ , alors il existe une constante  $c$  telle que*

$$\forall h \in ]0, 1], \forall z \in \mathbb{C}_{I,+}, \quad \left\| \langle A_h \rangle^{\delta-k} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(A_h) (H_h - z)^{-k} \langle A_h \rangle^{-\delta} \right\| \leq \frac{c}{\alpha_h^k}.$$

(iii) *Si  $\delta \in ]k - \frac{1}{2}, n[$ , alors il existe une constante  $c$  telle que*

$$\forall h \in ]0, 1], \forall z \in \mathbb{C}_{I,+}, \quad \left\| \langle A_h \rangle^{-\delta} (H_h - z)^{-k} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h) \langle A_h \rangle^{\delta-k} \right\| \leq \frac{c}{\alpha_h^k}.$$

(iv) *Si  $\delta_1, \delta_2 \geq 0$  sont tels que  $\delta_1 + \delta_2 < n - k$  alors il existe une constante  $c$  telle que*

$$\forall h \in ]0, 1], \forall z \in \mathbb{C}_{I,+}, \quad \left\| \langle A_h \rangle^{\delta_1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(A_h) (H_h - z)^{-k} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h) \langle A_h \rangle^{\delta_2} \right\| \leq \frac{c}{\alpha_h^k}.$$

(v) *En outre ces opérateurs admettent une limite dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  pour  $\text{Im } z \rightarrow 0^+$  si on remplace  $\langle A_h \rangle^{\delta-k}$  par  $\langle A_h \rangle^{\delta'-k}$  pour un certain  $\delta' \in ]-\infty, \delta[$  dans (ii) et (iii). Ces limites définissent des fonctions Hölder-continues de  $I$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ .*

*Démonstration.* 1. On peut se restreindre à  $\delta \in ]k - \frac{1}{2}, n[$  pour (i). Soient  $h \in ]0, 1]$  et  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$ . On applique le lemme 4.32 avec  $P_- = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(A_h)$ ,  $P_+ = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h)$ ,  $Q = \langle A_h \rangle^{-1}$ ,  $l = 1$ ,  $R_1 = (H_h - z)^{-1}$  et

$$\sigma \in \left] \frac{1}{2}, \min(1, \delta - k + 1) \right[.$$

On a alors  $k < n + 1 - \sigma$  et  $\delta \in [k - 1 + \sigma, n[$ . D'après les théorèmes 4.14, 4.30 et 4.29 (voir aussi la remarque 4.31), on peut prendre  $c_1 = \frac{c}{\alpha_h}$  où  $c$  ne dépend ni de  $h$  ni de  $z$ , les inégalités  $(a_k) - (d_k)$  donnent alors les estimations (i)-(iv) annoncées avec  $c$  ne dépendant ni de  $h$  ni de  $z$ .

2. Pour démontrer (v) on a besoin d'estimations de la forme

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}_{I,+}, \quad \left\| \langle A_h \rangle^{-\delta} \left( (H_h - z)^{-k} - (H_h - z')^{-k} \right) \langle A_h \rangle^{-\delta} \right\| \leq c_h |z - z'|^\gamma \quad (4.38)$$

avec  $\gamma > 0$ , et des estimations correspondantes pour les opérateurs de (ii), (iii) et (iv) (on aura  $\gamma = 0$  pour (ii) et (iii), mais on aura juste à faire une interpolation comme pour le théorème 4.30, c'est pour cela qu'on doit remplacer  $\langle A_h \rangle^{\delta-k}$  par  $\langle A_h \rangle^{\delta'-k}$ ). On a déjà ces estimations pour  $k = 1$ , on les obtient dans le cas général en utilisant à nouveau le lemme 4.32 avec  $l = 3$ ,  $R_1 = (H_h - z)^{-1} - (H_h - z')^{-1}$ ,  $R_2 = (H_h - z)^{-1}$ ,  $R_3 = (H_h - z')^{-1}$  et en observant que

$$(H_h - z)^{-k} - (H_h - z')^{-k} = R_1 \sum_{j=0}^{k-1} R_2^j R_3^{k-1-j}.$$

□

**Théorème 4.34.** *On suppose que la famille  $(A_h)_{h \in ]0,1]}$  d'opérateurs autoadjoints sur  $\mathcal{H}$  est uniformément conjuguée à l'ordre  $n \geq 2$  à la famille d'opérateurs dissipatifs  $(H_h)_{h \in ]0,1]}$  sur l'intervalle  $I$  et pour les bornes inférieures  $(\alpha_h)_{h \in ]0,1]}$ . Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .*

(i) Si  $\delta > k - \frac{1}{2}$  alors pour tout  $\lambda \in I$  la limite

$$\langle A_h \rangle^{-\delta} (H_h - (\lambda + i0))^{-1} \langle A_h \rangle^{-\delta}$$

existe et définit une fonction de classe  $C^{k-1}$  de  $I$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

(ii) Si  $\delta \in ]k - \frac{1}{2}, n[$  et  $\delta' < \delta$  alors pour tout  $\lambda \in I$  les limites

$$\langle A_h \rangle^{-\delta} (H_h - (\lambda + i0))^{-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h) \langle A_h \rangle^{\delta' - k}$$

et

$$\langle A_h \rangle^{\delta' - k} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(A_h) (H_h - (\lambda + i0))^{-1} \langle A_h \rangle^{-\delta}$$

existent et définissent des fonctions de classe  $C^{k-1}$  de  $I$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

(iii) Si  $\delta_1, \delta_2 \geq 0$  sont tels que  $\delta_1 + \delta_2 < n - k$  alors pour tout  $\lambda \in I$  la limite

$$\langle A_h \rangle^{\delta_1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(A_h) (H_h - (\lambda + i0))^{-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(A_h) \langle A_h \rangle^{\delta_2}$$

existe et définit une fonction de classe  $C^{k-1}$  de  $I$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

*Démonstration.* Les autres assertions étant analogues, on se contente de montrer (i). Pour  $\lambda \in I$  et  $\mu > 0$  on note

$$f_\mu(\lambda) = \langle A_h \rangle^{-\delta} (H_h - (\lambda + i\mu))^{-1} \langle A_h \rangle^{-\delta}.$$

Pour tout  $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$  on a :

$$f_\mu^{(j)}(\lambda) = j! \langle A_h \rangle^{-\delta} (H_h - (\lambda + i\mu))^{-(j+1)} \langle A_h \rangle^{-\delta}.$$

Le théorème précédent affirme que les fonctions  $f_\mu^{(k)}$  convergent lorsque  $\mu \rightarrow 0^+$ . Vu (4.38), il y a en fait convergence uniforme. Cela prouve donc que la fonction  $f_0 = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} f_\mu$  est de classe  $C^j$ , avec  $f_0^{(j)} = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} f_\mu^{(j)}$ .  $\square$

### 4.3 Application à l'opérateur de Schrödinger dissipatif

On applique dans cette partie la méthode de Mourre pour  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$  et pour l'opérateur de Schrödinger dissipatif

$$H_h = -h^2 \Delta + V_1(x) - i\nu(h)V_2(x), \quad (4.39)$$

où  $h \in ]0, 1]$ . La partie réelle du potentiel  $V_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  est toujours de longue portée (voir (3.11)). On n'a dans un premier temps pas besoin de tant de régularité sur la partie imaginaire car on ne fera pas de calcul pseudo-différentiel avec  $V_2$  (ce sera par contre le cas pour le paragraphe 4.3.5). On suppose simplement que  $V_2$  est positif, continu (plus précisément la propriété que l'on va utiliser est la suivante : si  $V_2(x) > 0$ , alors il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $x$  et  $\gamma > 0$  tels que  $V_2(v) \geq \gamma$  pour tout  $v \in \mathcal{V}$ ) et pour  $j \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$  la dérivée radiale  $(x \cdot \nabla)^j V_2$  est bien définie et est bornée. Enfin  $\nu$  est une application quelconque de  $]0, 1]$  dans  $]0, 1]$ . On notera

$$\tilde{\nu}(h) = \min \left( 1, \frac{\nu(h)}{h} \right).$$

L'opérateur  $H_1^h = -h^2 \Delta + V_1(x)$  est autoadjoint sur l'espace de Sobolev  $\mathcal{D}_H = H^2(\mathbb{R}^n)$ . L'opérateur de multiplication par  $\nu(h)V_2(x)$  est borné sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  uniformément en  $h$ , et est donc en particulier uniformément  $H_1^h$ -borné de borne relative 0.

### 4.3.1 Cas d'un fort amortissement

Avant d'appliquer toute la théorie de Mourre, il convient de remarquer qu'en appliquant pour tout  $h \in ]0, 1]$  la proposition 4.13 avec  $T = H_h$  et  $B = Q = \sqrt{\nu(h)}V_2$  on a directement le résultat suivant :

**Proposition 4.35.** *Pour tous  $h \in ]0, 1]$  et  $z \in \mathbb{C}_+$  on a :*

$$\left\| \sqrt{V_2}(H_h - z)^{-1} \sqrt{V_2} \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \frac{1}{\nu(h)}.$$

Ce résultat est particulièrement intéressant dans le cas où  $V_2$  est un amortissement fort, typiquement  $V_2(x) \geq c_0 \langle x \rangle^{-\rho}$  avec  $0 \leq \rho \leq 1$  et/ou  $\nu(h) > h$ . Dans les cas où on n'a pas ces minorations, on va utiliser la théorie que l'on vient de développer pour obtenir une estimation en  $O(h\tilde{\nu}(h))^{-1}$  avec des poids  $\langle x \rangle^{-\delta}$  où  $\delta > \frac{1}{2}$ .

### 4.3.2 Estimation de la résolvante de l'opérateur de Schrödinger dissipatif

On rappelle qu'on a noté

$$\mathcal{O} = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} \mid V_2(x) > 0\},$$

et que la propriété classique pour l'énergie  $E > 0$  qu'on va utiliser dans le cas dissipatif est la suivante :

$$\forall w \in \Omega_b(\{E\}), \exists T \in \mathbb{R}, \quad V_2(\bar{x}(T, w)) > 0. \quad (4.40)$$

Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant :

**Théorème 4.36.** *Soient  $\delta > \frac{1}{2}$  et  $E > 0$  vérifiant l'hypothèse d'amortissement (4.40). Alors il existe un voisinage  $I$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $h_0 > 0$  et  $c \geq 0$  tels que pour tous  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  et  $h \in ]0, h_0]$  on a*

$$\left\| \langle x \rangle^{-\delta} (H_h - z)^{-1} \langle x \rangle^{-\delta} \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \frac{c}{h\tilde{\nu}(h)}.$$

En outre pour  $h \in ]0, h_0]$  et  $\lambda \in I$  la limite

$$\langle x \rangle^{-\delta} (H_h - (\lambda + i0))^{-1} \langle x \rangle^{-\delta} = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \langle x \rangle^{-\delta} (H_h - (\lambda + i\mu))^{-1} \langle x \rangle^{-\delta}$$

existe dans  $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$  et définit une fonction Hölder-continue par rapport à  $\lambda$ .

On reprend la notation

$$A_h = -\frac{i\hbar}{2}(x \cdot \nabla + \nabla \cdot x) = \text{Op}_h^w(x \cdot \xi) \quad (4.41)$$

pour le générateur des dilatations semi-classique.

Pour montrer ce théorème, on utilise la théorie développée dans la première partie et le théorème suivant :

**Théorème 4.37.** *Soit  $E > 0$  vérifiant (4.40). Alors il existe un voisinage  $I$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $h_0 \in ]0, 1]$  et  $r \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$  tels que la famille d'opérateurs*

$$\tilde{\nu}(h)F_h = \tilde{\nu}(h)(A_h + \text{Op}_h^w(r)), \quad h \in ]0, h_0],$$

est conjuguée à  $(H_h)_{h \in ]0, h_0]}$  sur  $I$  pour les bornes inférieures  $c_0 h \tilde{\nu}(h)$  où  $c_0 > 0$ .

Le fait que  $h$  parcourt  $]0, 1]$  plutôt que  $]0, h_0]$  dans la définition d'une famille d'opérateurs conjugués n'a pas d'importance. Par ailleurs, la condition importante dans la définition 4.1 est la dernière. Pour les autres, on a la proposition suivante :

**Proposition 4.38.** *Pour tout  $r \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$  et  $c_0 > 0$ , l'opérateur*

$$\tilde{\nu}(h)F_h = \tilde{\nu}(h)(A_h + \text{Op}_h^w(r))$$

*est autoadjoint et vérifie les hypothèses (a) à (d) d'un opérateur conjugué à  $H_h$  pour les bornes inférieures  $\alpha_h = c_0 h \tilde{\nu}(h)$  et pour n'importe quel choix de  $\beta_h, h \in ]0, 1]$ .*

*Démonstration.* Soit  $h \in ]0, 1]$ . L'opérateur  $\text{Op}_h^w(r)$  est borné (théorème 3.9) et autoadjoint (proposition 3.13). L'opérateur  $A_h$  étant autoadjoint,  $F_h$  est bien autoadjoint. L'hypothèse (a) est vérifiée en utilisant l'espace de Schwartz comme pour la proposition 4.6. On avait également vu que l'hypothèse (b) était vérifiée pour le générateur des dilatations. Mais on a :

$$\forall \varphi \in H^2(\mathbb{R}^n), \quad e^{-itA_h}\varphi - e^{-itF_h}\varphi = \int_0^t e^{-isA_h} \text{Op}_h^w(r) e^{-i(t-s)F_h} \varphi ds.$$

Comme  $e^{-i(s-t)F_h}$  est un opérateur unitaire,  $\text{Op}_h^w(r)$  est borné de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  dans  $H^2(\mathbb{R}^n)$  et  $e^{-isA_h}$  préserve  $H^2(\mathbb{R}^n)$  (plus précisément, l'expression (4.5) montre que  $e^{-isA_h}$  est borné sur  $H^2(\mathbb{R}^n)$  uniformément en  $s \in [-t, t]$  pour n'importe quel  $t \geq 0$ ), l'opérateur  $e^{-itA_h} - e^{-itF_h}$  préserve  $H^2(\mathbb{R}^n)$  et :

$$\forall h \in ]0, 1], \forall \varphi \in H^2(\mathbb{R}^n), \quad \sup_{|t| \leq 1} \|H_1^h(e^{-itA_h} - e^{-itF_h})\varphi\| < \infty,$$

ce qui prouve donc l'hypothèse (b) pour  $F_h$ , et par suite pour  $\tilde{\nu}(h)F_h$ . Pour (c), on a d'après la formule (3.9) pour le commutateur de deux opérateurs pseudo-différentiels, et en particulier les exemples 3.8 :

$$[H_1^h, i\tilde{\nu}(h)F_h] = 2h\tilde{\nu}(h)H_0^h - h\tilde{\nu}(h)x \cdot \nabla V_1(x) + h\tilde{\nu}(h)\text{Op}_h^w(\{\xi^2 + V_1(x), r\}) + \underset{h \rightarrow 0}{O}(h^2)$$

et

$$[\nu(h)V_2(x), i\tilde{\nu}(h)F_h] = -h\nu(h)\tilde{\nu}(h)x \cdot \nabla V_2(x) + h\nu(h)\tilde{\nu}(h)\text{Op}_h^w(\{V_2(x), r\}) + \underset{h \rightarrow 0}{O}(h^2),$$

ce qui permet d'affirmer que (c) est vérifiée. Quant à (d), elle se vérifie de la même façon, sachant que  $(x \cdot \nabla)^2 V_1$  et  $(x \cdot \nabla)^2 V_2$  sont encore des fonctions bornées.  $\square$

Pour vérifier l'hypothèse (e), il faut choisir  $r$  avec un peu plus de soin :

**Proposition 4.39.** *On suppose que toute trajectoire classique d'énergie  $E$  rencontre  $\mathcal{O}$ , alors il existe un voisinage ouvert  $J$  de  $E$ ,  $h_0 > 0$ ,  $c_0 > 0$ ,  $\beta \geq 0$  et  $r \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$  tels que pour tout  $h \in ]0, h_0]$  on a :*

$$\mathbf{1}_J(H_1^h)([H_1^h, i\tilde{\nu}(h)F_h] + \beta\nu(h)V_2(x))\mathbf{1}_J(H_1^h) \geq c_0 h \tilde{\nu}(h)\mathbf{1}_J(H_1^h),$$

où  $F_h = A_h + \text{Op}_h^w(r)$ .

*Démonstration.* 1. D'après le corollaire 3.39, il existe  $\varepsilon \in ]0, \frac{E}{6}[$  tel que toute énergie dans  $[E - 3\varepsilon, E + 3\varepsilon]$  vérifie l'hypothèse (4.40). On pose alors  $J = ]E - \varepsilon, E + \varepsilon[, J_2 = ]E - 2\varepsilon, E + 2\varepsilon[$  et  $J_3 = ]E - 3\varepsilon, E + 3\varepsilon[$ . Soit  $\mathcal{R} \geq 0$  un rayon de fuite pour  $J_3$ . Pour  $(x, \xi) \in p^{-1}(J_3)$  tel que  $|x| \geq \mathcal{R}$  on a alors :

$$\{p, x \cdot \xi\}(x, \xi) = 2p(x, \xi) - 2V_1(x) - x \cdot \nabla V_1(x) \geq \frac{E}{2}. \quad (4.42)$$

2. On note :

$$K_b = p^{-1}(\overline{J_3}) \cap \overline{B_x(\mathcal{R} + 1)} \setminus \Omega_\infty(\mathbb{R}_+^*).$$

$K_b$  est alors un compact inclus  $\Omega_b^+(\overline{J_3}) \cup \Omega_b^-(\overline{J_3})$ . Soit  $w \in K_b$ . D'après la proposition 3.36, on peut trouver un temps  $T \in \mathbb{R}$  tel que  $V_2(\bar{x}(T, w)) > 0$ , et donc  $V_{2,w} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  tel que

$0 \leq V_{2,w} \leq V_2$  et  $V_{2,w}(\bar{x}(T, w)) > 0$ . Puisque  $\bar{x}(T, \cdot)$  est continue, il existe un voisinage  $\mathcal{W}_w$  de  $w$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$  tel que  $V_{2,w}(\bar{x}(T, v)) > 0$  pour tout  $v \in \mathcal{W}_w$ . Et comme  $K_b$  est compact, on peut trouver  $w_1, \dots, w_N \in K_b$  tels que  $K_b \subset \bigcup_{j=1}^N \mathcal{W}_{w_j}$ . Notant  $V_{22} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N V_{2,w_j}$ , on obtient une fonction  $V_{22} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  telle que  $0 \leq V_{22} \leq V_2$  et toute trajectoire issue de  $K_b$  rencontre  $\tilde{\mathcal{O}} = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} \mid V_{22}(x) > 0\}$ .

**3.** Soient  $w \in K_b$  et  $T_w \in \mathbb{R}$  tels que  $\phi^{T_w}(w) \in \tilde{\mathcal{O}}$ . Comme  $\phi^{T_w}$  est continu, on peut trouver  $\gamma_w > 0$  et un voisinage ouvert  $\mathcal{V}_w$  de  $w$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$  tels que pour tout  $v \in \mathcal{V}_w$  on a  $\phi^{T_w}(v) \in \tilde{\mathcal{O}}_{\gamma_w}$ , où on a noté  $\tilde{\mathcal{O}}_\gamma = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} \mid V_{22}(x) > \gamma\}$ . Soit  $\mathcal{U}_w$  un voisinage ouvert et borné de  $w$  avec  $\overline{\mathcal{U}_w} \subset \mathcal{V}_w$ . On considère une fonction  $g_w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, [0, 1])$  à support dans  $\mathcal{V}_w$  et égale à 1 sur  $\mathcal{U}_w$ , puis  $f_w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$  définie par

$$f_w = \int_0^{T_w} g_w \circ \phi^{-t} dt.$$

On a construit  $f_w$  pour avoir :

$$\{p, f_w\} = \int_0^{T_w} \{p, g_w \circ \phi^{-t}\} dt = - \int_0^{T_w} \frac{d}{dt} (g_w \circ \phi^{-t}) dt = g_w - g_w \circ \phi^{-T_w}.$$

Le premier terme est positif et égal à 1 sur  $\mathcal{U}_w$  tandis que le second est à support dans  $\phi^{T_w}(\mathcal{V}_w) \subset \tilde{\mathcal{O}}_{\gamma_w}$ . En particulier la fonction  $\{p, f_w\}$  est positive hors de  $\tilde{\mathcal{O}}_{\gamma_w}$  et égale à 1 sur  $\mathcal{U}_w \setminus \tilde{\mathcal{O}}_{\gamma_w}$ . Comme  $K_b$  est compact, on peut trouver  $w_1, \dots, w_N \in K_b$  pour  $N \in \mathbb{N}$  tels que  $K_b \subset \mathcal{U} := \bigcup_{j=1}^N \mathcal{U}_{w_j}$ . Soient  $\gamma = \min_{1 \leq j \leq N} \gamma_{w_j}$  et  $f = \sum_{j=1}^N f_{w_j}$ . Alors  $f$  est à support compact et  $\{p, f\}$  est positive hors de  $\tilde{\mathcal{O}}_\gamma$  et au moins égale à 1 sur  $\mathcal{U} \setminus \tilde{\mathcal{O}}_\gamma$ . L'application  $\{p, x \cdot \xi\}$  étant bornée sur  $\mathcal{U}$ , il existe une constante  $C_b \geq 0$  telle que

$$\{p, x \cdot \xi + C_b f\} \geq \frac{E}{2} \text{ sur } \mathcal{U} \setminus \tilde{\mathcal{O}}_\gamma.$$

On a par ailleurs

$$\{p, x \cdot \xi + C_b f\} \geq \{p, x \cdot \xi\} \text{ sur } \mathbb{R}^{2n} \setminus \tilde{\mathcal{O}}_\gamma.$$

Et comme l'application  $\{p, x \cdot \xi + C_b f\}$  est bornée sur  $\tilde{\mathcal{O}}_\gamma$ , on peut trouver  $\beta \geq 0$  telle que

$$\{p, x \cdot \xi + C_b f\} + \beta V_{22} \geq \{p, x \cdot \xi\} \text{ sur } \mathbb{R}^{2n} \quad \text{et} \quad \{p, x \cdot \xi + C_b f\} + \beta V_{22} \geq \frac{E}{2} \text{ sur } \mathcal{U}. \quad (4.43)$$

**4.** On note

$$\mathcal{U}_\infty = \Omega_\infty(J_3) \cap B_x(\mathcal{R} + 1).$$

On a alors :

$$\mathcal{U}_\infty \cup \mathcal{U} \cup p^{-1}(\mathbb{R} \setminus \overline{J_2}) \cup (\mathbb{R}^{2n} \setminus \overline{B_x(\mathcal{R})}) = \mathbb{R}^{2n}.$$

Une partition de l'unité associée à ce recouvrement ouvert de  $\mathbb{R}^{2n}$  fournit une fonction  $g_\infty \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, [0, 1])$  à support dans  $\mathcal{U}_\infty$  et égale à 1 au voisinage du compact

$$K_\infty = p^{-1}(\overline{J_2}) \cap \overline{B_x(\mathcal{R})} \setminus \mathcal{U}.$$

Soit  $w \in \text{supp } g_\infty$ . Il existe  $T_w \geq 0$  tel que  $|\bar{x}(T_w, w)| > \mathcal{R} + 2$ . Par continuité du flot, il existe un voisinage  $\mathcal{V}_w$  de  $w$  dans  $\mathcal{U}_\infty$  tel que  $|\bar{x}(T_w, v)| > \mathcal{R} + 2$  pour tout  $v \in \mathcal{V}_w$ . Comme  $\mathcal{R} + 2$  est un rayon de fuite pour  $J_3$ , on a donc :

$$\forall v \in \mathcal{V}_w, \forall t \geq T_w, \quad g_\infty(\phi^t(v)) = 0.$$

Comme le support de  $g_\infty$  est compact, il existe  $w_1, \dots, w_N \in \text{supp } g_\infty$  tels que  $\text{supp } g_\infty \subset \mathcal{V} := \bigcup_{i=1}^N \mathcal{V}_{w_i}$ . Notant alors  $T = \max\{T_{w_i}, i \in \llbracket 1, N \rrbracket\}$ , on obtient :

$$\forall v \in \mathcal{V}, \forall t \geq T, \quad g_\infty(\phi^t(v)) = 0. \quad (4.44)$$

Soit maintenant  $w \in \mathbb{R}^{2n}$ . On veut montrer qu'il existe un voisinage  $\mathcal{W}_w$  de  $w$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$  et  $\tau_w \geq 0$  tels que

$$\forall v \in \mathcal{W}_w, \forall t \in \mathbb{R}_+ \setminus [\tau_w, \tau_w + T], \quad g_\infty(\phi^t(v)) = 0. \quad (4.45)$$

Cela signifie que même si on peut trouver des points  $w \in \mathbb{R}^{2n}$  tels que  $\phi^t(w) \in \text{supp } g_\infty$  pour  $t$  arbitrairement grand, le problème ne se pose pas localement et on contrôle globalement le temps qu'une trajectoire peut passer dans le support de  $g_\infty$ .

Si  $\{\phi^t(w), t \in \mathbb{R}\}$  ne rencontre pas  $\text{supp } g_\infty$ , alors on peut trouver un voisinage  $\mathcal{W}_w$  de  $w$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$  tel qu'aucune trajectoire issue d'un point de  $\mathcal{W}_w$  ne rencontre  $\text{supp } g_\infty$ , et donc (4.45) est vérifiée pour n'importe quel  $\tau_w$ . En effet supposons par l'absurde qu'il existe une suite  $(w_m)_{m \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\text{supp } g_\infty$  et une suite  $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$  réelle telles que  $\phi^{t_m}(w_m)$  tend vers  $w$  quand  $m$  tend vers  $+\infty$ . Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que  $w_m$  converge vers  $w_\infty \in \text{supp } g_\infty$ . Comme  $w_\infty \in \Omega_\infty(J_3)$ , il existe un voisinage  $\mathcal{V}_\infty$  de  $w_\infty$ , un voisinage  $\mathcal{V}_0$  de  $w$  et  $T \geq 0$  tels que pour  $|t| \geq T$  on a  $\phi^t(\mathcal{V}_\infty) \cap \mathcal{V}_0 = \emptyset$ . Cela implique que la suite  $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$  est bornée et donc qu'à extraction d'une sous-suite près elle converge vers un certain  $t_\infty \in \mathbb{R}$ . Mais dans ce cas on doit avoir  $\phi^{t_\infty}(w_\infty) = w$  par continuité du flot, ce qui est absurde.

Si  $w \in \mathcal{V}$ , alors d'après (4.44), (4.45) est vérifiée avec  $\mathcal{W}_w = \mathcal{V}$  et  $\tau_w = 0$ . On suppose maintenant que  $w \notin \mathcal{V}$  et qu'il existe  $t \geq 0$  tel que  $\phi^t(w) \in \text{supp } g_\infty$ . Alors il existe  $\tau_w \geq 0$  tel que  $\phi^{\tau_w}(w) \in \mathcal{V} \setminus \text{supp } g_\infty$  et  $\phi^t(w) \notin \text{supp } g_\infty$  pour  $t \in [0, \tau_w]$ . Par continuité, il existe un voisinage  $\mathcal{W}_w$  de  $w$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$  tel que pour tout  $v \in \mathcal{W}_w$  on a  $\phi^{\tau_w}(v) \in \mathcal{V}$  et  $\phi^t(v) \notin \text{supp } g_\infty$  pour  $t \in [0, \tau_w]$ . On obtient alors à nouveau (4.45) à partir de (4.44).

Ainsi, en utilisant les théorèmes de régularité sous l'intégrale, on voit que la fonction

$$f_\infty = - \int_0^{+\infty} (g_\infty \circ \phi^t) dt$$

est bien définie, bornée (par  $T$ ) et de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^{2n}$ . Sachant que  $f_\infty$  est à support dans  $\Omega_\infty(J_3)$ , le même calcul que celui effectué pour  $f$  montre que  $\{p, f_\infty\} = g_\infty \geq 0$ . On peut donc trouver une constante  $C_\infty \geq 0$  telle que

$$\{p, x \cdot \xi + C_\infty f_\infty\} \geq \frac{E}{2} \quad \text{sur } K_\infty.$$

Avec (4.42) et (4.43) on a alors :

$$\{p, x \cdot \xi + C_b f + C_\infty f_\infty\} + \beta V_{22} \geq \frac{E}{2} \quad \text{sur } p^{-1}(\overline{J_2}). \quad (4.46)$$

Le problème est que la fonction  $f_\infty$  n'est pas à support compact.

**5.** Soit  $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, [0, 1])$  égale à 1 sur  $B(\mathcal{R} + 2)$ . Comme on peut toujours remplacer  $\zeta$  par  $x \mapsto \zeta(\gamma x)$  avec  $\gamma$  assez petit, on peut supposer que

$$\|C_\infty f\{p, \zeta\}\|_{L^\infty(p^{-1}(J_2))} \leq 2C_\infty T \sup_{(x, \xi) \in p^{-1}(J_2)} |\xi \cdot \nabla \zeta(x)| \leq \frac{E}{4}.$$

Notant  $c_0 = E/8 > 0$  et  $r : (x, \xi) \mapsto C_b f(x, \xi) + C_\infty \zeta(x) f_\infty(x, \xi)$  on obtient avec (4.46) :

$$\{p, x \cdot \xi + r\} + \beta V_{22} \geq 2c_0 \quad \text{sur } p^{-1}(J_2).$$

En outre  $r$  est bien dans  $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ .

**6.** On pose  $F_h = A_h + \text{Op}_h^w(r) = \text{Op}_h^w(x \cdot \xi + r)$ . Soit  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$  à support dans  $J_2$  et égale à 1 sur  $J$ . L'opérateur

$$\frac{i}{h} \chi(H_1^h) [H_1^h, F_h] \chi(H_1^h) + \beta V_{22} - 2c_0 \chi(H_1^h)^2$$

est autoadjoint et borné. D'après les résultats du paragraphe 3.1.4 (en particulier le théorème de composition 3.6 et le théorème 3.16 sur le calcul fonctionnel), c'est un opérateur pseudo-différentiel de symbole principal

$$\{p, x \cdot \xi + r\}(\chi \circ p)^2 + \beta V_{22} - 2c_0(\chi \circ p)^2 \geq 0.$$

Par l'inégalité de Gårding (théorème 3.15) il existe donc une constante  $C \geq 0$  telle que, après multiplication par  $h\tilde{\nu}(h)$  :

$$\chi(H_1^h) [H_1^h, i\tilde{\nu}(h)F_h] \chi(H_1^h) + h\tilde{\nu}(h)\beta V_{22} \geq 2h\tilde{\nu}(h)c_0\chi(H_1^h)^2 - Ch^2\tilde{\nu}(h).$$

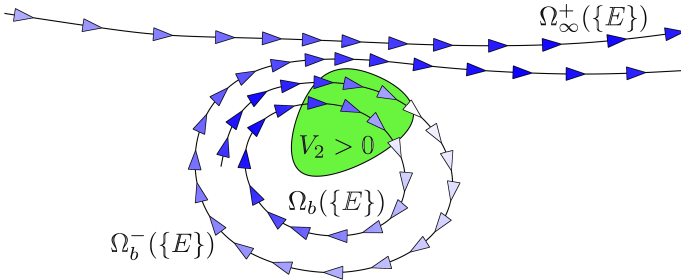
On compose maintenant par  $\mathbf{1}_J(H_1^h)$  à gauche et à droite. Cela donne, pour  $h > 0$  assez petit :

$$\mathbf{1}_J(H_1^h) ([H_1^h, i\tilde{\nu}(h)F_h] + \beta h\tilde{\nu}(h)V_{22}) \mathbf{1}_J(H_1^h) \geq h\tilde{\nu}(h)c_0\mathbf{1}_J(H_1^h).$$

Enfin, puisque  $\mathbf{1}_J(H_1^h)\beta(\nu(h)V_2 - h\tilde{\nu}(h)V_{22})\mathbf{1}_J(H_1^h) \geq 0$ , on obtient

$$\mathbf{1}_J(H_1^h) ([H_1^h, i\tilde{\nu}(h)F_h] + \beta\nu(h)V_2) \mathbf{1}_J(H_1^h) \geq h\tilde{\nu}(h)c_0\mathbf{1}_J(H_1^h),$$

qui est l'estimation de Mourre attendue.  $\square$



Sur les trajectoires qui partent à l'infini, on construit la fonction de fuite  $x \cdot \xi + r$  comme dans le cas non-captif. Pour les trajectoires captées, on utilise le fait que  $x \cdot \xi + r$  n'a pas besoin d'être croissante le long des trajectoires classiques dans la zone où il y a amortissement (sur le dessin, plus la flèche est foncée, plus la valeur de  $x \cdot \xi + r$  est importante au point et dans la direction indiqués).

FIGURE 4.1 – Exemples d'évolution de  $x \cdot \xi + r$  le long de trajectoires classiques.

La famille d'opérateurs  $(\tilde{\nu}(h)F_h)_{h \in ]0, h_0]}$  est alors conjuguée à  $(H_h)_{h \in ]0, h_0]}$  au sens de la définition 4.1. Le théorème 4.14 donne donc une estimation de la résolvante faisant intervenir les poids  $\langle \tilde{\nu}(h)F_h \rangle^{-\delta}$ . Par rapport à ce qui est annoncé, il y a un amortissement dans l'espace des fréquences. Pour passer du poids  $\langle F_h \rangle^{-\delta}$  à  $\langle x \rangle^{-\delta}$  on utilisera le lemme suivant :

**Lemme 4.40** ([PSS81]). *Pour tout  $\delta \in [0, 1]$ , l'opérateur*

$$\langle F_h \rangle^\delta (H_h - i)^{-1} \langle x \rangle^{-\delta}$$

*est borné uniformément en  $h \in ]0, 1]$ .*

*Démonstration.* Le cas  $\delta = 1$  se traite comme au lemme 2.33, le cas  $\delta = 0$  est évident, et on peut conclure dans le cas général par interpolation complexe.  $\square$

On peut maintenant montrer le théorème 4.36 (pour  $\delta \in ]\frac{1}{2}, 1]$  ce qui est suffisant) :

*Démonstration.* Soient  $r \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ ,  $h_0 > 0$  et  $J$  voisinage ouvert de  $E$  donnés par la proposition 4.39. Soit  $I$  un voisinage de  $E$  tel que  $\bar{I} \subset J$  et  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$  égale à 1 au voisinage de  $\bar{I}$  et à support dans  $J$ . En composant l'inégalité de Mourre obtenue par  $\phi(H_1^h)$  à gauche et à droite, on obtient que l'opérateur  $\tilde{\nu}(h)F_h = \tilde{\nu}(h)(A_h + \text{Op}_h^w(r))$  est conjugué à  $H_h$  sur  $I$  et pour les bornes inférieures  $c_0 h\tilde{\nu}(h)$ ,  $h \in ]0, h_0]$ , pour un certain  $c_0 > 0$ . D'après le théorème 4.14 on a donc

$$\left\| \langle F_h \rangle^{-\delta} (H_h - z)^{-1} \langle F_h \rangle^{-\delta} \right\| \leq \left\| \langle \tilde{\nu}(h)F_h \rangle^{-\delta} (H_h - z)^{-1} \langle \tilde{\nu}(h)F_h \rangle^{-\delta} \right\| \leq \frac{c}{h\tilde{\nu}(h)},$$

où  $c$ , comme dans la suite de la démonstration, désigne une constante indépendante de  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  et  $h \in ]0, h_0]$ . En utilisant deux fois l'équation de la résolvante, on écrit

$$\begin{aligned} (H_h - z)^{-1} &= (H_h - i)^{-1} - (z - i)(H_h - z)^{-1}(H_h - i)^{-1} \\ &= (H_h - i)^{-1} - (z - i)(H_h - i)^{-2} + (z - i)^2(H_h - i)^{-1}(H_h - z)^{-1}(H_h - i)^{-1}, \end{aligned} \quad (4.47)$$

de sorte que d'après le lemme 4.40 :

$$\begin{aligned} &\left\| \langle x \rangle^{-\delta} (H_h - z)^{-1} \langle x \rangle^{-\delta} \right\| \quad (4.48) \\ &\leq c + \left\| \langle x \rangle^{-\delta} (H_h - i)^{-1} (H_h - z)^{-1} (H_h - i)^{-1} \langle x \rangle^{-\delta} \right\| \\ &\leq c + \left\| \langle x \rangle^{-\delta} (H_h - i)^{-1} \langle F_h \rangle^\delta \right\| \left\| \langle F_h \rangle^{-\delta} (H_h - z)^{-1} \langle F_h \rangle^{-\delta} \right\| \left\| \langle F_h \rangle^\delta (H_h - i)^{-1} \langle x \rangle^{-\delta} \right\| \\ &\leq \frac{c}{h\tilde{\nu}(h)}. \end{aligned}$$

Ceci prouve (i). Pour obtenir le principe d'absorption limite on vérifie de même pour  $h \in ]0, h_0]$  et  $z, z' \in \mathbb{C}_{I,+}$  :

$$\begin{aligned} &(H_h - z)^{-1} - (H_h - z')^{-1} \\ &= (z' - z)(H_h - i)^{-2} + (z - i)^2(H_h - i)^{-1} \left( (H_h - z)^{-1} - (H_h - z')^{-1} \right) (H_h - i)^{-1} \\ &\quad + (H_h - i)^{-1} \left( (z - i)^2 - (z' - i)^2 \right) (H_h - z')^{-1} (H_h - i)^{-1}. \end{aligned}$$

D'après le théorème 4.18, on en déduit comme précédemment que

$$\left\| \langle x \rangle^{-\delta} \left( (H_h - z)^{-1} - (H_h - z')^{-1} \right) \langle x \rangle^{-\delta} \right\| \leq c (h\tilde{\nu}(h))^{-\frac{4\delta}{2\delta+1}} |z - z'|^{\frac{2\delta-1}{2\delta+1}},$$

où  $c$  ne dépend ni de  $h \in ]0, h_0]$  ni de  $z, z' \in \mathbb{C}_{I,+}$ , et donc le principe d'absorption limite puis la continuité de la limite.  $\square$

Dans le cas où l'énergie est non-captive on peut construire une fonction de fuite exactement comme dans le cas autoadjoint. On obtient alors l'estimation de Mourre avec  $\beta = 0$  et  $\alpha_h = c_0 h$  où  $c_0 > 0$ . Et ce même si  $\nu(h) < h$ .

**Corollaire 4.41.** *Soient  $\delta > \frac{1}{2}$  et  $E > 0$  une énergie non captive. Alors il existe un voisinage  $I$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $h_0 > 0$  et  $c \geq 0$  tels que pour tous  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  et  $h \in ]0, h_0]$  on a :*

$$\left\| \langle x \rangle^{-\delta} (H_h - z)^{-1} \langle x \rangle^{-\delta} \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \frac{c}{h}.$$

En outre la limite

$$\langle x \rangle^{-\delta} (H_h - (\lambda + i0))^{-1} \langle x \rangle^{-\delta} = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \langle x \rangle^{-\delta} (H_h - (\lambda + i\mu))^{-1} \langle x \rangle^{-\delta}$$

existe dans  $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$  pour tout  $\lambda \in I$  et définit une fonction Hölder-continue par rapport à  $\lambda$ .

### 4.3.3 Estimation dans les espaces de Besov

Pour  $\delta \geq 0$ , on définit les espaces de Besov  $B_s$  comme à la section 4.2.2 avec l'opérateur de multiplication par  $x$  sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . On retrouve alors les espaces de Besov usuels comme introduits au paragraphe 2.4.

Le théorème 4.24 nous permet d'obtenir une estimation uniforme de la résolvante pour l'opérateur de Schrödinger dissipatif dans ces espaces :



**Théorème 4.42.** Soient  $E > 0$  vérifiant l'hypothèse (4.40) et  $\delta \geq \frac{1}{2}$ . Alors il existe un voisinage  $I$  de  $E$ ,  $h_0 > 0$  et  $c \geq 0$  tels que tous  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  et  $h \in ]0, h_0]$  on a :

$$\|(H_h - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(B_\delta, B_\delta^*)} \leq \frac{c}{h\tilde{\nu}(h)}.$$

*Démonstration.* Il suffit de montrer le résultat pour  $\delta = \frac{1}{2}$ . On reprend les notations du paragraphe précédent et on omet comme au paragraphe 2.3 les indices  $1/2$  pour  $B$  et  $B^*$ . On a une famille  $(\tilde{\nu}(h)F_h)_{h \in ]0,1]}$  d'opérateurs conjugués à la famille d'opérateurs dissipatifs  $(H_h)_{h \in ]0,1]}$  sur un voisinage  $I$  de  $E$  et pour les bornes inférieures  $c_0 h \tilde{\nu}(h)$  donc, d'après le théorème 4.24, on a déjà

$$\|(H_h - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(B(\tilde{\nu}(h)F_h), B(\tilde{\nu}(h)F_h)^*)} \leq \frac{c}{h\tilde{\nu}(h)},$$

où  $c$  ne dépend pas de  $h \in ]0, h_0]$ . Reprenant le calcul (4.47), on voit qu'il nous suffit de montrer que  $(H_h - i)^{-1}$  est bornée uniformément en  $h \in ]0, h_0]$  dans  $\mathcal{L}(B, B(\tilde{\nu}(h)F_h))$  et dans  $\mathcal{L}(B^*(\tilde{\nu}(h)F_h), B^*)$ . On montre la première propriété, la deuxième viendra alors par dualité. Pour cela, on s'inspire de ce qui est fait dans la partie 14.1 de [Hör84]. Soit donc  $u \in B(\tilde{\nu}(h)F_h)$ . On rappelle que les  $\Omega_j$  pour  $j \in \mathbb{N}$  ont été définis au début du paragraphe 4.2.2. Sachant que les  $\mathbf{1}_{\Omega_j}(\tilde{\nu}(h)F_h)u$  sont deux à deux orthogonaux, on a pour  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} \|u\|_{B(\tilde{\nu}(h)F_h)} &= \sum_{j=0}^k 2^{\frac{j}{2}} \|\mathbf{1}_{\Omega_j}(\tilde{\nu}(h)F_h)u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{-\frac{j}{2}} \|2^j \mathbf{1}_{\Omega_j}(\tilde{\nu}(h)F_h)u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq 2^{\frac{k+1}{2}} \left( \sum_{j=0}^k \|\mathbf{1}_{\Omega_j}(\tilde{\nu}(h)F_h)u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{k}{2}} \left( \sum_{j=k+1}^{\infty} \|2^j \mathbf{1}_{\Omega_j}(\tilde{\nu}(h)F_h)u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2^{\frac{k+1}{2}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2^{-\frac{k}{2}} \|2 \langle \tilde{\nu}(h)F_h \rangle u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq 2^{\frac{k+1}{2}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2^{1-\frac{k}{2}} \|\langle F_h \rangle u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Pour  $\varphi \in B$  on obtient alors

$$\begin{aligned} \|(H_h - i)^{-1}\varphi\|_{B(\tilde{\nu}(h)F_h)} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \|(H_h - i)^{-1} \mathbf{1}_{\Omega_k} \varphi\|_{B(\tilde{\nu}(h)F_h)} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{\frac{k+1}{2}} \|(H_h - i)^{-1} \mathbf{1}_{\Omega_k} \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{1-\frac{k}{2}} \|\langle F_h \rangle (H_h - i)^{-1} \langle x \rangle^{-1}\| \|\langle x \rangle \mathbf{1}_{\Omega_k} \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq c \left( \sum_{k=0}^{\infty} 2^{\frac{k}{2}} \|\mathbf{1}_{\Omega_k} \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\frac{k}{2}} \|\langle x \rangle \mathbf{1}_{\Omega_k} \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right) \\ &\leq c \left( \|\varphi\|_B + \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{\frac{k}{2}} \|\mathbf{1}_{\Omega_k} \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right) \\ &\leq c \|\varphi\|_B, \end{aligned}$$

où on a de nouveau utilisé le lemme 4.40. □

### 4.3.4 Régularité de la limite de la résolvante

On peut vérifier que la famille  $(\tilde{\nu}(h)F_h)_{h \in ]0, h_0]}$  d'opérateurs uniformément conjuguée à la famille  $(H_h)_{h \in ]0, h_0]}$  est en fait lisse à l'ordre infini, ce qui permet d'appliquer tous les résultats de la section 4.2.4. Soit  $m \in \mathbb{N}$ . Comme on a montré le lemme 2.33, on peut vérifier que pour  $\delta \in [0, m]$  l'opérateur

$$\langle F_h \rangle^{2\delta} (H_h - i)^{-m} \langle x \rangle^{-2\delta}$$

est borné uniformément en  $h \in ]0, h_0]$ . On montre alors comme précédemment qu'en appliquant  $2m$  fois l'équation de la résolvante, on peut remplacer les poids  $\langle \tilde{\nu}(h)F_h \rangle^{-\delta}$  par  $\langle x \rangle^{-\delta}$  dans l'estimation donnée par le théorème 4.33. Cela donne le résultat suivant :

**Théorème 4.43.** *Soit  $E > 0$  vérifiant l'hypothèse d'amortissement (4.40). Soient  $I$  voisinage de  $E$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  et  $h_0 > 0$  donnés par le théorème 4.37. Alors pour  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $\delta > k - \frac{1}{2}$  il existe  $c \geq 0$  telle que pour  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  et  $h \in ]0, h_0]$  on a*

$$\left\| \langle x \rangle^{-\delta} (H_h - z)^{-k} \langle x \rangle^{-\delta} \right\| \leq \frac{c}{(h\tilde{\nu}(h))^k}.$$

et la limite

$$\langle x \rangle^{-\delta} (H_h - (\lambda + i0))^{-1} \langle x \rangle^{-\delta}$$

définit une fonction de classe  $C^{k-1}$  par rapport à  $\lambda$ .

### 4.3.5 Nécessité de la condition sur les trajectoires captées

Dans cette partie on ne considère plus que l'opérateur  $H_h = -h^2\Delta + V_1(x) - ihV_2(x)$  introduit pour étudier l'équation de Helmholtz, c'est-à-dire :  $\nu(h) = h$ . On suppose également que  $V_2$  est de classe  $C^\infty$  et que toutes ses dérivées sont bornées. On montre dans ce cas que la condition (4.40) sur les trajectoires classiques captées est en fait nécessaire pour obtenir des estimations uniformes en  $O(h^{-1})$  comme aux théorèmes 4.36 et 4.42. Dans le cas autoadjoint, ce résultat est démontré dans [Wan87] et [Wan91].

**Théorème 4.44.** *Soit  $E > 0$ . On suppose qu'il existe  $\delta > \frac{1}{2}$ ,  $h_0 > 0$ ,  $c \geq 0$  et un voisinage  $I$  de  $E$  tels que*

$$\forall h \in ]0, h_0], \forall z \in \mathbb{C}_{I,+}, \quad \left\| \langle x \rangle^{-\delta} (H_h - z)^{-1} \langle x \rangle^{-\delta} \right\| \leq \frac{c}{h}.$$

Alors pour tout  $w \in \Omega_b(\{E\})$  il existe  $T \in \mathbb{R}$  tel que  $V_2(\bar{x}(T, w)) > 0$ .

Comme elles sont plus fortes, les estimations dans les espaces de Besov données au théorème 4.42 permettent de conclure de la même manière.

**Proposition 4.45.** *On suppose que les hypothèses du théorème 4.44 sont vérifiées. Soit  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  à support dans  $I$ . Alors il existe une constante  $c \geq 0$  telle que pour  $h \in ]0, h_0]$  et  $z \in \mathbb{C}_+$  on a :*

$$\left\| \langle x \rangle^{-\delta} \chi(H_1^h) (H_h - z)^{-1} \chi(H_1^h) \langle x \rangle^{-\delta} \right\| \leq \frac{c}{h}. \quad (4.49)$$

*Démonstration.* Par hypothèse et en utilisant le fait que  $\chi(H_1^h)$  est borné sur  $L^{2,\pm\delta}(\mathbb{R}^n)$  uniformément en  $h \in ]0, h_0]$  (car  $\chi(H_1^h)$  est un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole est dans  $C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ , voir le théorème 3.16 et la proposition 3.11), on peut trouver  $c \geq 0$  tel que l'estimation (4.49) est vraie pour tout  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$ . On remarque ensuite qu'il existe  $\gamma > 0$  tel que  $d(z, \text{supp } \chi) \geq \gamma$  pour tout  $z \in \mathbb{C}_{\mathbb{R} \setminus I,+}$ . Par conséquent, l'opérateur  $\chi(H_1^h)(H_1^h - z)^{-1}$  est borné uniformément en  $z \in \mathbb{C}_{\mathbb{R} \setminus I,+}$  et  $h \in ]0, h_0]$ . En utilisant deux fois l'équation de la résolvante et le fait que  $\sqrt{V_2}$  définit un opérateur borné sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , on peut donc écrire

$$\begin{aligned} & \left\| \chi(H_1^h) (H_h - z)^{-1} \chi(H_1^h) \right\| \\ & \leq \left\| \chi(H_1^h) (H_1^h - z)^{-1} \chi(H_1^h) \right\| + h \left\| \chi(H_1^h) (H_1^h - z)^{-1} V_2 (H_1^h - z)^{-1} \chi(H_1^h) \right\| \\ & \quad + h^2 \left\| \chi(H_1^h) (H_1^h - z)^{-1} V_2 (H_h - z)^{-1} V_2 (H_1^h - z)^{-1} \chi(H_1^h) \right\| \\ & \leq c \left( 1 + h^2 \left\| \sqrt{V_2} (H_h - z)^{-1} \sqrt{V_2} \right\| \right) \\ & \leq c, \end{aligned}$$

la dernière étape étant donnée par la proposition 4.35. □

*Remarque 4.46.* Comme  $\chi(H_1^h)$  ne commute pas avec  $(H_h - z)^{-1}$ , on doit mettre une troncature en énergie des deux côtés de la résolvante. Ici cela n'aura pas d'incidence sur la suite de la démonstration.

**Proposition 4.47.** *On suppose que les hypothèses du théorème 4.44 sont vérifiées. Soit  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  à support dans  $I$ . Alors il existe une constante  $C_\chi \geq 0$  telle que pour tous  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  et  $h \in ]0, h_0]$  on a :*

$$\int_0^{+\infty} \left\| \langle x \rangle^{-\delta} \chi(H_1^h) U_h(t) \psi \right\|^2 dt \leq C_\chi \|\psi\|^2. \quad (4.50)$$

*Démonstration.* C'est ici que l'on utilise la théorie des dilatations autoadjointes. En effet, cette proposition est conséquence directe de la proposition 4.45 et des résultats du paragraphe 2.2.3, en particulier du corollaire 2.25.  $\square$

Pour  $h \in ]0, 1]$ ,  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  et  $x \in \mathbb{R}^n$  on note :

$$(\Theta_h \varphi)(x) = h^{\frac{n}{4}} \varphi\left(h^{\frac{1}{2}} x\right).$$

Ainsi défini,  $\Theta_h$  se prolonge en un opérateur unitaire sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . En outre pour  $a \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  on peut vérifier que

$$\Theta_h \text{Op}_h^w(a) \Theta_h^* = a^w\left(h^{\frac{1}{2}} x, h^{\frac{1}{2}} \nabla\right) \quad (4.51)$$

où pour  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  on a noté :

$$a^w\left(h^{\frac{1}{2}} x, h^{\frac{1}{2}} \nabla\right) u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} a\left(\frac{h^{\frac{1}{2}}(x+y)}{2}, h^{\frac{1}{2}} \xi\right) u(y) dy d\xi.$$

Pour  $h \in ]0, 1]$  et  $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$  on considère également l'opérateur

$$W_h(x_0, \xi_0) = \exp\left(ih^{-\frac{1}{2}}(\xi_0 \cdot x - x_0 \cdot (-ih\nabla_x))\right).$$

$W_h(x_0, \xi_0)$  est également un opérateur unitaire sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . C'est un outre (pour la quantification de Weyl) l'opérateur de symbole  $(x, \xi) \mapsto e^{i\sqrt{h}(x \cdot \xi_0 - x_0 \cdot \xi)}$ . Pour  $a \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  et  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  on a (voir [Wan85, Lemme 3.1] et [Wan86, Lemme 4.1]) :

$$\left\| \left( W_h(x_0, \xi_0) a^w\left(h^{\frac{1}{2}} x, h^{\frac{1}{2}} \nabla\right) W_h(x_0, \xi_0)^* - a(x_0, \xi_0) \right) u \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(\sqrt{h}), \quad (4.52)$$

où le reste dépend de  $u$ . On peut maintenant montrer le théorème 4.44 comme dans [Wan91] :

*Démonstration.* Soient  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  (non nulle),  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  égale à 1 au voisinage de  $E$  et à support dans  $I$ , ainsi que  $(x_0, \xi_0) \in \Omega_b(\{E\})$  (si  $\Omega_b(\{E\})$  est vide alors il n'y a rien à montrer). Pour  $h \in ]0, h_0]$  on note

$$u_h = \Theta_h W_h(x_0, \xi_0)^* u.$$

On a alors pour tout  $t \geq 0$  :

$$\begin{aligned} \left\| \langle x \rangle^{-\delta} \chi(H_1^h) U_h(t) u_h \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \left\langle U_h(t)^* \chi(H_1^h) \langle x \rangle^{-2\delta} \chi(H_1^h) U_h(t) u_h, u_h \right\rangle \\ &= \left\langle U_h(t)^* \text{Op}_h^w((\chi \circ p)^2 \langle x \rangle^{-2\delta}) U_h(t) u_h, u_h \right\rangle + O_{h \rightarrow 0}(h) \\ &= \left\langle \text{Op}_h^w\left((\chi \circ p)^2 \langle \bar{x}(t, \cdot) \rangle^{-2\delta} e^{-2 \int_0^t (V_2 \circ \phi^s) ds}\right) u_h, u_h \right\rangle + O_{h \rightarrow 0}(h). \end{aligned}$$

D'après (4.51) et (4.52) on a alors :

$$\begin{aligned}
& \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \langle x \rangle^{-\delta} \chi(H_1^h) U_h(t) u_h \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left\langle \left( (\chi \circ p)^2 \langle \bar{x}(t, \cdot) \rangle^{-2\delta} e^{-2 \int_0^t (V_2 \circ \phi^s) ds} \right)^w (h^{\frac{1}{2}} x, h^{\frac{1}{2}} \nabla) W_h(x_0, \xi_0)^* u, W_h(x_0, \xi_0)^* u \right\rangle \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left\langle \langle \bar{x}(t, x_0, \xi_0) \rangle^{-2\delta} e^{-2 \int_0^t V_2(\bar{x}(s, x_0, \xi_0)) ds} u, u \right\rangle \\
&= \langle \bar{x}(t, x_0, \xi_0) \rangle^{-2\delta} e^{-2 \int_0^t V_2(\bar{x}(s, x_0, \xi_0)) ds} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.
\end{aligned}$$

Pour tout  $T \geq 0$  cela donne :

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \left\| \langle x \rangle^{-\delta} \chi(H_1^h) U_h(t) u_h \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 dt \\
& \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_0^T \langle \bar{x}(t, x_0, \xi_0) \rangle^{-2\delta} e^{-2 \int_0^t V_2(\bar{x}(s, x_0, \xi_0)) ds} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 dt.
\end{aligned}$$

Mais d'après la proposition 4.47 on a par ailleurs

$$\int_0^T \left\| \langle x \rangle^{-\delta} \chi(H_1^h) U_h(t) u_h \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 dt \leq C \|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = C \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2,$$

où  $C$  ne dépend ni de  $T \geq 0$  ni de  $h \in ]0, h_0]$ . Cela implique que pour tout  $T \geq 0$  on a

$$\int_0^T \langle \bar{x}(t, x_0, \xi_0) \rangle^{-2\delta} e^{-2 \int_0^t V_2(\bar{x}(s, x_0, \xi_0)) ds} ds \leq C,$$

ce qui n'est possible que si la trajectoire issue de  $(x_0, \xi_0)$  rencontre l'ouvert où  $V_2$  est strictement positif.  $\square$

*Remarque 4.48.* Ce qu'on a montré est un peu plus fort que la simple hypothèse que toute trajectoire captée doit passer au moins une fois par la zone où il y a amortissement. On retrouve ici le fait que les trajectoires bornées repassent en fait régulièrement par cette zone, comme cela avait été mis en valeur à la proposition 3.40.

*Remarque 4.49.* On a besoin du fait que  $\tilde{\nu}(h) = 1$  car la norme (4.49) est de taille  $O((h\tilde{\nu}(h))^{-1})$  et donc l'intégrale de (4.50) est de taille  $O(\tilde{\nu}(h)^{-1})$ . Pour que cette intégrale puisse être estimée uniformément en  $h \in ]0, h_0]$ , il faut donc que  $\tilde{\nu}(h)$  soit minoré par une constante strictement positive. On a en outre besoin d'avoir  $\nu(h) = h$  pour appliquer le théorème d'Egorov 3.43.



## Chapitre 5

# Localisation *a priori* et application au cas d'un indice d'absorption de signe variable

Le premier but de ce chapitre est de commencer à étudier la localisation dans l'espace des phases de la solution de l'équation de Helmholtz dans le cas d'un terme source encore très général. Plus précisément on montre que la solution se concentre sur l'hypersurface  $p^{-1}(\{E\})$  et hors de la zone entrante. Avant de s'en servir au chapitre suivant pour faire une étude plus fine dans le cas d'un terme source précis, on utilisera ces résultats pour compléter notre étude des estimations de la résolvante, en étudiant le cas d'un indice d'absorption qui n'est pas nécessairement partout positif.

### 5.1 Localisation *a priori* de la solution pour l'équation de Helmholtz

On commence par vérifier que pour des termes sources  $S_h$  généraux, la solution  $u_h$  de l'équation de Helmholtz (1.1) se concentre quand  $h \rightarrow 0$  sur  $p^{-1}(\{E\})$  (où  $p : (x, \xi) \mapsto \xi^2 + V_1(x)$  est le symbole principal de  $H_h$ ) et hors de la zone entrante  $\mathcal{Z}_-(R, 0, -\sigma)$  (pour  $\sigma > 0$  donné et  $R$  assez grand). Pour montrer ces résultats on profitera comme à la section 3.3 du fait que la partie imaginaire est un  $O(h)$  et n'intervient donc pas au premier ordre dans les développements. On pourra donc s'inspirer des démonstrations des résultats analogues connus pour dans le cas autoadjoint. On remarquera tout de même que la méthode des paramétrices pour l'estimation dans la zone entrante n'est valable que si la partie imaginaire est de courte portée.

#### 5.1.1 Localisation près de la surface d'énergie $E$

Dans le cas autoadjoint, si  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$  est nulle au voisinage de  $\bar{I}$ , alors par le calcul fonctionnel, l'opérateur  $\chi(H_1^h)(H_1^h - z)^{-1}$  est borné uniformément en  $h \in ]0, 1]$  et  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$ .

Il est donc petit à la limite  $h \rightarrow 0$  devant la résolvante  $(H_1^h - z)^{-1}$  pour laquelle on a une estimation en  $O(h^{-1})$  (si  $I$  est un intervalle d'énergie non-captive). Cela signifie que la solution  $u_h = (H_1^h - E)^{-1}S_h$  se concentre en énergie autour de  $E$ .

On montre dans ce paragraphe des résultats analogues pour notre cas non-autoadjoint. Ne pouvant plus utiliser le calcul fonctionnel, on passe donc par le calcul pseudo-différentiel.

**Proposition 5.1.** Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}_+^*$  tels que  $\bar{I} \subset \overset{\circ}{J}$  et  $q \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  un symbole qui s'annule sur  $p^{-1}(J)$ . Soit  $\delta \geq 0$ . Soit  $(u_h)_{h \in ]0,1]}$  une famille d'éléments de  $L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n) \cap H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n)$  tels que  $(H_h - z)u_h \in L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)$  pour tous  $h \in ]0,1]$  et  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$ . Alors on a

$$\|\text{Op}_h^w(q)u_h\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|(H_h - z)u_h\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)} + ch \|u_h\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)},$$

où  $c$  ne dépend ni de  $h \in ]0,1]$  ni de  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$ .

*Démonstration.* Pour  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  on note  $a(z) = \frac{q}{p-z}$ . Puisque  $q$  s'annule sur  $p^{-1}(J)$ , on a  $a(z) \in \mathcal{S}(\langle \xi \rangle^{-2})$  uniformément en  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$ . Comme  $(H_1^h - z) = \text{Op}_h^w(p - z)$ , on a alors

$$\begin{aligned} \text{Op}_h^w(q) &= \text{Op}_h^w(a(z))(H_1^h - z) + h\text{Op}_h^w(r(z, h)) \\ &= \text{Op}_h^w(a(z))(H_h - z) + h\text{Op}_h^w(r(z, h)) + ih\text{Op}_h^w(a(z))V_2, \end{aligned}$$

où  $r(z, h)$  est dans  $C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  uniformément en  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  et  $h \in ]0,1]$ . Puisque les opérateurs  $\text{Op}_h^w(a(z))$  et  $\text{Op}_h^w(r(z, h))$  sont bornés sur  $L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)$  uniformément en  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  et  $h \in ]0,1]$  d'après la proposition 3.11, on obtient le résultat en appliquant l'égalité précédente à  $u_h$  et en prenant la norme  $L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)$ .  $\square$

*Remarque 5.2.* Si on suppose de plus que la résolvante  $(H_h - z)^{-1}$  est bien définie pour tout  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  et qu'elle est de taille  $O(h^{-1})$  dans  $\mathcal{L}(L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n), L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n))$  uniformément en  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  et pour  $h \in ]0, h_0]$ ,  $h_0 > 0$  (comme c'est par exemple le cas sous les hypothèses du théorème 4.36), alors on obtient l'existence d'une constante  $c$  telle que pour  $h \in ]0, h_0]$  et  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  on a :

$$\|\text{Op}_h^w(q)(H_h - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n), L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n))} \leq c.$$

On peut vérifier de façon analogue qu'on a également

$$\|(H_h - z)^{-1}\text{Op}_h^w(q)\|_{\mathcal{L}(L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n), L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n))} \leq c.$$

**Corollaire 5.3.** Soient  $\delta \geq 0$ ,  $I, J, q$  et  $(u_h)_{h \in ]0,1]}$  comme à la proposition 5.1 et  $(z_h)_{h \in ]0,1]}$  une famille d'éléments de  $\overline{\mathbb{C}_{I,+}}$ . On suppose en outre que

$$(i) \quad q \in \mathcal{S}(\langle x \rangle^{-2\delta}), \quad \|u_h\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)} = O(1) \quad \text{et} \quad \|(H_h - z_h)u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \underset{h \rightarrow 0}{o}(1),$$

$$(ii) \quad \text{ou bien } q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}), \quad \|u_h\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)} = \underset{h \rightarrow 0}{o}(h^{-1}) \quad \text{et} \quad \|(H_h - z_h)u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \underset{h \rightarrow 0}{o}(1).$$

Alors on a :

$$\langle \text{Op}_h^w(q)u_h, u_h \rangle \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

*Démonstration.* (i) On note  $\tilde{q}(x, \xi) = \langle x \rangle^{2\delta} q(x, \xi)$ .  $\tilde{q}$  vérifie les hypothèses de la proposition 5.1 et on a :

$$\begin{aligned} |\langle \text{Op}_h^w(q)u_h, u_h \rangle| &= \left\langle \langle x \rangle^{-\delta} \text{Op}_h^w(\tilde{q})u_h, \langle x \rangle^{-\delta} u_h \right\rangle + \underset{h \rightarrow 0}{O}(h) \\ &\leq \|\text{Op}_h^w(\tilde{q})u_h\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)} \|u_h\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)} + \underset{h \rightarrow 0}{O}(h) \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

(ii) Soient  $q_1, q_2, q_3 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  vérifiant les mêmes hypothèses que  $q$  et égales à 1 au voisinage de  $\text{supp } q$ . Comme  $q_1$  et  $q_2$  sont en particulier dans  $\mathcal{S}_{-\delta}(\mathbb{R}^{2n})$  on a :

$$\begin{aligned} |\langle \text{Op}_h^w(q)u_h, u_h \rangle| &= |\langle \text{Op}_h^w(q_1)\text{Op}_h^w(q)u_h, \text{Op}_h^w(q_2)\text{Op}_h^w(q_3)u_h \rangle| + \underset{h \rightarrow 0}{O}(h^\infty) \\ &\leq \|\text{Op}_h^w(q_1)\text{Op}_h^w(q)u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\text{Op}_h^w(q_2)\text{Op}_h^w(q_3)u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \underset{h \rightarrow 0}{O}(h^\infty) \\ &\leq c \|\text{Op}_h^w(q)u_h\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)} \|\text{Op}_h^w(q_3)u_h\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)} + \underset{h \rightarrow 0}{O}(h^\infty) \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

$\square$

En vue d'étudier la solution  $u_h = (H_h - E)^{-1}S_h$  pour l'équation de Helmholtz, on commencera au chapitre suivant par s'intéresser à une quantité de la forme

$$\frac{i}{h} \int_0^\infty \chi(t) e^{-\frac{it}{h}(H_h - E)} S_h dt$$

avec  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . On a un résultat analogue à la proposition 5.1 dans ce cas :

**Proposition 5.4.** *Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}_+^*$  tels que  $\bar{I} \subset \overset{\circ}{J}$ . Soit  $q \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  un symbole qui s'annule sur  $p^{-1}(J)$ . Alors*

$$\frac{i}{h} \int_0^\infty \chi(t) \text{Op}_h^w(q) e^{-\frac{it}{h}(H_h - z)} dt$$

est borné dans  $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$  uniformément en  $h \in ]0, 1]$  et  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$ .

*Démonstration.* En reprenant le symbole  $a(z)$  défini dans la preuve de la proposition 5.1, on peut écrire :

$$\begin{aligned} & \text{Op}_h^w(q) \frac{i}{h} \int_0^\infty \chi(t) e^{-\frac{it}{h}(H_h - z)} dt \\ &= \text{Op}_h^w(a(z)) \frac{i}{h} \int_0^\infty \chi(t) (H_h - z) e^{-\frac{it}{h}(H_h - z)} dt + \underset{h \rightarrow 0}{O}(1) \\ &= \text{Op}_h^w(a(z)) \int_0^\infty \chi(t) \left( -\partial_t e^{-\frac{it}{h}(H_h - z)} \right) dt + \underset{h \rightarrow 0}{O}(1) \\ &= \chi(0) \text{Op}_h^w(a(z)) + \text{Op}_h^w(a(z)) \int_0^\infty \chi'(t) e^{-\frac{it}{h}(H_h - z)} dt + \underset{h \rightarrow 0}{O}(1) \\ &= \underset{h \rightarrow 0}{O}(1). \end{aligned}$$

□

On en déduit alors un résultat analogue au corollaire 5.3 :

**Corollaire 5.5.** *Soient  $I, J, q$  et  $\chi$  comme dans la proposition précédente,  $(z_h)_{h \in ]0, 1]}$  une famille d'éléments de  $\overline{\mathbb{C}_{I,+}}$ ,  $(S_h)_{h \in ]0, 1]}$  une famille de fonctions qui tend vers 0 dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  et, pour tout  $h \in ]0, 1]$  :*

$$u_h^\chi = \frac{i}{h} \int_0^\infty \chi(t) \text{Op}_h^w(q) e^{-\frac{it}{h}(H_h - z_h)} S_h dt.$$

Alors on a :

$$\langle \text{Op}_h^w(q) u_h^\chi, u_h^\chi \rangle \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

### 5.1.2 Estimation dans la zone entrante

On suppose dans ce paragraphe que le potentiel  $V_2$  est positif et de courte portée. Cela signifie qu'il existe  $\rho > 0$  et des constantes  $c_\alpha$  pour  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad |\partial^\alpha V_2(x)| \leq c_\alpha \langle x \rangle^{-1-\rho-|\alpha|}. \quad (5.1)$$

On montre sous cette hypothèse que si le terme source se concentre hors d'une zone entrante, alors la solution à l'équation de Helmholtz se concentre hors d'une autre zone entrante (plus petite).

**Théorème 5.6.** *Soient  $\delta > \frac{1}{2}$  et  $I \subset \mathbb{R}_+^*$  tel qu'on a une estimation uniforme de la résolvante et le principe d'absorption limite sur  $\mathbb{C}_{\bar{I},+}$  comme au théorème 4.36. Soient  $R_1 \geq 0, d > d_1 \geq$*



0 et  $1 > \sigma > \sigma_1 \geq 0$ . Alors il existe  $R > R_1$  tel que pour  $z \in \overline{\mathbb{C}_{I,+}}$ ,  $\omega_+ \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2n})$  à support dans  $\mathcal{Z}_+(R, d, \sigma)$  et  $\omega \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2n})$  à support hors de  $\mathcal{Z}_+(R_1, d_1, \sigma_1)$  on a

$$\left\| \langle x \rangle^{-\delta} \text{Op}_h(\omega)(H_h - (z + i0))^{-1} \text{Op}_h(\omega_+) \langle x \rangle^{-\delta} \right\| = O(h^\infty),$$

où la taille du reste est uniforme en  $z \in \overline{\mathbb{C}_{I,+}}$ . De même, si  $\text{supp } \omega_- \subset \mathcal{Z}_-(R, d, -\sigma)$  et  $\text{supp } \omega \cap \mathcal{Z}_-(R_1, d_1, -\sigma_1) = \emptyset$  alors

$$\left\| \langle x \rangle^{-\delta} \text{Op}_h(\omega)(H_h^* - (\bar{z} - i0))^{-1} \text{Op}_h(\omega_-) \langle x \rangle^{-\delta} \right\| = O(h^\infty).$$

Si de plus  $\omega$  est à support compact en  $x$ , alors les poids  $\langle x \rangle^{-\delta}$  peuvent être remplacés par  $\langle x \rangle^\beta$  pour tout  $\beta \in \mathbb{R}$ .

*Remarque 5.7.* Les hypothèses sont plus faibles si on prend  $d_1$  et  $\sigma_1$  plus grands. Sans perte de généralité on peut donc supposer que  $d_1 > 0$  et  $\sigma_1 > 0$ .

*Remarque 5.8.* Par passage à l'adjoint pour la deuxième estimation et en utilisant la formule de changement de quantification, on peut montrer

$$\left\| \langle x \rangle^{-\delta} \text{Op}_h(\omega_-)(H_h - (z + i0))^{-1} \text{Op}_h(\omega) \langle x \rangle^{-\delta} \right\| = O(h^\infty).$$

C'est cette estimation (avec  $\omega$  à support compact en  $x$  et les poids  $\langle x \rangle^\beta$  qu'on utilisera pour voir que la solution  $u_h$  est microlocalement nulle dans la zone entrante.

La preuve de ce théorème est inspirée de [RT89, lemme 2.3] et de résultats donnés dans [Wan88]. On utilise en particulier le résultat suivant, démontré par Isozaki et Kitada dans [IK85] :

**Proposition 5.9.** Soient  $d_0 \in ]0, d_1[$  et  $\sigma_0 \in ]0, \sigma_1[$ . Alors il existe  $R_0 > 0$  et  $\phi_\pm \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  tels que

$$\forall (x, \xi) \in \mathcal{Z}_\pm(R_0, d_0, \pm\sigma_0), \quad |\nabla_x \phi_\pm(x, \xi)|^2 + V_1(x) = |\xi|^2 \quad (5.2)$$

et, pour un certain  $\rho > 0$  :

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \quad \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (\phi_\pm(x, \xi) - \langle x, \xi \rangle) \right| \leq C_{\alpha, \beta} \langle x \rangle^{1-\rho-|\alpha|}. \quad (5.3)$$

On peut toujours supposer que  $\rho$  est le même que celui qui mesure la décroissance du potentiel en (6.1).

*Remarque 5.10.* Comme mentionné dans [Wan88] (voir (2.4)), on peut sans perte de généralité supposer que les constantes  $C_{\alpha, \beta}$  données en (5.3) sont aussi petites qu'on le souhaite, à partir du moment où l'on choisit  $R$  assez grand (en particulier (3.32) est bien vérifiée si  $R$  est assez grand). En effet, considérons une fonction  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  telle que  $\chi(x) = 0$  si  $|x| \leq \frac{1}{4}$  et  $\chi(x) = 1$  si  $|x| \geq \frac{1}{2}$ . Pour  $R > \max(2R_0, R_1)$ , on note :

$$\phi_{R, \pm} : (x, \xi) \mapsto (\phi_\pm(x, \xi) - \langle x, \xi \rangle) \chi\left(\frac{x}{R}\right) + \langle x, \xi \rangle.$$

Alors  $\phi_{R, \pm}$  vérifie

$$\forall (x, \xi) \in \mathcal{Z}_\pm\left(\frac{R}{2}, d_0, \sigma_0\right), \quad |\nabla_x \phi_{R, \pm}(x, \xi)|^2 + V_1(x) = |\xi|^2,$$

car la définition de  $\phi_\pm$  n'est pas changée sur  $\mathcal{Z}_\pm\left(\frac{R}{2}, d_0, \sigma_0\right) \subset \mathcal{Z}_\pm(R_0, d_0, \sigma_0)$ , et pour  $\rho_1, \rho_2 >$

0 tels que  $\rho = \rho_1 + \rho_2$  on a

$$\begin{aligned}
& \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (\phi_{R,\pm}(x, \xi) - \langle x, \xi \rangle) \right| = \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \left( (\phi_\pm(x, \xi) - \langle x, \xi \rangle) \chi \left( \frac{x}{R} \right) \right) \right| \\
& \leq \sum_{0 \leq \gamma \leq \alpha} \frac{c_{\alpha,\beta,\gamma}}{R^{|\alpha|-|\gamma|}} \left| \partial_x^\gamma \partial_\xi^\beta (\phi_\pm(x, \xi) - \langle x, \xi \rangle) \right| \left| (\partial_x^{\alpha-\gamma} \chi) \left( \frac{x}{R} \right) \right| \\
& \leq \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (\phi_\pm(x, \xi) - \langle x, \xi \rangle) \right| \mathbf{1}_{\{|x| \geq R/4\}}(x) + \sum_{0 \leq \gamma < \alpha} \frac{c_{\alpha,\beta,\gamma}}{R^{|\alpha|-|\gamma|}} \langle x \rangle^{1-\rho-|\gamma|} \mathbf{1}_{\{|x| \leq R/2\}}(x) \\
& \leq C_{\alpha,\beta} \langle x \rangle^{1-\rho-|\alpha|} \mathbf{1}_{\{|x| \geq R/4\}}(x) + \sum_{0 \leq \gamma < \alpha} c_{\alpha,\beta,\gamma} \langle x \rangle^{1-\rho_2-|\alpha|} R^{-\rho_1},
\end{aligned}$$

et finalement :

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (\phi_{R,\pm}(x, \xi) - \langle x, \xi \rangle) \right| \leq C_{\alpha,\beta} R^{-\rho_1} \langle x \rangle^{1-\rho_2-|\alpha|}, \quad (5.4)$$

où  $C_{\alpha,\beta}$  ne dépend pas de  $R$ . Pour la suite on choisit  $R$  assez grand (à déterminer au cours de la démonstration) et on note  $\phi_\pm = \phi_{R,\pm}$ . Quitte à prendre  $\rho$  plus petit, on s'autorisera à continuer de noter  $\rho$  plutôt que  $\rho_2$  lorsqu'on utilisera (5.4) plutôt que (5.3).

**Proposition 5.11.** Soient  $a \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ ,  $\phi = \phi_+$  ou  $\phi_-$  donnée par la proposition 5.9 et  $h \in ]0, 1]$ . Alors sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  on a

$$\frac{i}{h} (H_h I_h(a, \phi) - I_h(a, \phi) H_0^h) = I_h(p(h), \phi),$$

où

$$p(h) = \frac{i}{h} (|\nabla_x \phi|^2 + V_1 - \xi^2) a + (2\nabla_x a \cdot \nabla_x \phi + a \Delta_x \phi + a V_2) - ih \Delta_x a. \quad (5.5)$$

*Remarque 5.12.* Si de plus  $a = a(h)$  est de la forme  $a(h) = \sum_{j=0}^N h^j a_j$  avec  $a_j \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  pour tout  $j \in \llbracket 0, N \rrbracket$ , alors  $p(h)$  s'écrit :

$$\begin{aligned}
p(h) &= \frac{i}{h} (|\nabla_x \phi|^2 + V_1 - \xi^2) a(h) + (2\nabla_x a_0 \cdot \nabla_x \phi + a_0 \Delta_x \phi + a_0 V_2) \\
&\quad + \sum_{j=1}^N h^j (2\nabla_x a_j \cdot \nabla_x \phi + a_j \Delta_x \phi + a_j V_2 - i \Delta_x a_{j-1}) - ih^{N+1} \Delta_x a_N.
\end{aligned} \quad (5.6)$$

*Remarque 5.13.* De même on a

$$\frac{i}{h} (H_h^* I_h(a, \phi) - I_h(a(h), \phi) H_0^h) = I_h(p_*(h), \phi),$$

où

$$p_*(h) = \frac{i}{h} (|\nabla_x \phi|^2 + V_1 - \xi^2) a + (2\nabla_x a \cdot \nabla_x \phi + a \Delta_x \phi - a V_2) - ih \Delta_x a$$

(on a juste changé le signe du terme  $a V_2$ ), ainsi qu'une écriture analogue à (5.6) dans le cas où  $a(h)$  est un symbole de la forme  $a(h) = \sum_{j=0}^N h^j a_j$ .

*Démonstration.* Pour  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  on a

$$I_h(a, \phi) H_0^h u(x) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h} \phi(x, \xi)} a(x, \xi) \xi^2 \mathcal{F}_h u(\xi) d\xi.$$

Avec la proposition 3.56, on obtient bien le résultat annoncé. Si  $a(h) = \sum_{j=0}^N h^j a_j$  on obtient bien (5.6) en regroupant les termes selon les puissances de  $h$ .  $\square$

**Proposition 5.14.** Soit  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  une fonction vérifiant les estimations (5.4). Pour tout  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ , la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial t}(t, x, \xi) = \nabla_x \phi(r(t, x, \xi), \xi) \\ r(0, x, \xi) = x \end{cases}$$

est définie sur  $\mathbb{R}$ . Pour  $\gamma \in ]0, \sigma_1[$ , si  $R$  est assez grand, cette solution vérifie en outre les propriétés suivantes :

(i) Pour  $(x, \xi) \in \mathcal{Z}_\pm(0, d_1, \pm\sigma_1)$  et  $t \geq 0$  on a

$$|r(\pm t, x, \xi)| \geq |x| + (\sigma_1 - \gamma)d_1 t. \quad (5.7)$$

(ii) Si  $|\alpha| + |\beta| \geq 1$ , il existe une constante  $c_{\alpha, \beta}$  telle que pour tous  $t \geq 0$  et  $(x, \xi) \in \mathcal{Z}_\pm(0, d_1, \pm\sigma_1)$  on a

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta r(\pm t, x, \xi) \right| \leq c_{\alpha, \beta} (t + \langle x \rangle) \langle x \rangle^{-|\alpha|}. \quad (5.8)$$

*Démonstration.* Soit  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ . On a :

$$r(t, x, \xi) = x + t\xi + \int_0^t (\nabla_x \phi(r(s, x, \xi), \xi) - \xi) ds \quad (5.9)$$

là où  $r(\cdot, x, \xi)$  est définie. Mais, d'après (5.3), l'application  $(x, \xi) \mapsto \nabla_x \phi(r(t, x, \xi), \xi) - \xi$  est bornée uniformément en  $t \in \mathbb{R}$ , donc la solution n'explose pas en temps fini. Elle est donc définie sur tout  $\mathbb{R}$ .

(i) D'après (5.4), quitte à prendre  $R$  plus grand, on peut supposer que

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad |\nabla_x \phi(x, \xi) - \xi| \leq \gamma d_1,$$

En particulier on a pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$|r(t, x, \xi) - x - t\xi| \leq |t| \gamma d_1.$$

Si de plus  $(x, \xi) \in \mathcal{Z}_\pm(0, d_1, \pm\sigma_1)$  et  $t \geq 0$ , on a alors

$$|x \pm t\xi| \geq \langle \hat{x}, x \pm t\xi \rangle = |x| \pm t \langle \hat{x}, \xi \rangle \geq |x| + t\sigma_1 |\xi| \geq |x| + \sigma_1 d_1 t,$$

d'où

$$|r(\pm t, x, \xi)| \geq |x \pm t\xi| - \gamma d_1 t \geq |x| + (\sigma_1 - \gamma)d_1 t,$$

ce qui prouve (5.7).

(ii) Pour montrer (5.8) on commence par le cas où  $|\alpha| = 1$  et  $\beta = 0$ . Soient  $t \geq 0$  et  $(x, \xi) \in \mathcal{Z}_\pm(0, d_1, \sigma_1)$ . Si on note  $r = (r_1, \dots, r_n)$ , alors pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on a :

$$\begin{aligned} \partial_t \partial_{x_j} r(\pm t, x, \xi) &= \pm \partial_{x_j} (\nabla_x \phi(r(\pm t, x, \xi), \xi)) \\ &= \pm \sum_{k=0}^n (\partial_{x_k} \nabla_x \phi)(r(\pm t, x, \xi), \xi) \partial_{x_j} r_k(\pm t, x, \xi) \\ &= \pm (\text{Hess}_x \phi)(r(\pm t, x, \xi), \xi) \cdot \partial_{x_j} r(\pm t, x, \xi). \end{aligned}$$

En utilisant le lemme A.4, (5.3) et (5.7) on obtient donc

$$\begin{aligned} \|\partial_{x_j} r(\pm t, x, \xi)\| &\leq \exp \left( \int_0^t \|\text{Hess}_x \phi(r(\pm s, x, \xi), \xi)\| ds \right) \leq \exp \left( \int_0^t c \langle r(\pm s, x, \xi) \rangle^{-1-\rho} ds \right) \\ &\leq \exp \left( \int_0^t c \langle s \rangle^{-1-\rho} ds \right) \leq c \leq c(t + \langle x \rangle) \langle x \rangle^{-1}, \end{aligned}$$

où  $c$  est désigné une constante qui ne dépend ni de  $(x, \xi) \in \mathcal{Z}_\pm(0, d_1, \sigma_1)$  ni de  $t \geq 0$ . On s'intéresse maintenant au cas où  $\alpha = 0$  et  $|\beta| = 1$ . Pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on a

$$\begin{aligned} \partial_t \partial_{\xi_j} r(\pm t, x, \xi) &= \pm \partial_{\xi_j} (\nabla_x \phi(r(\pm t, x, \xi), \xi)) \\ &= \pm (\text{Hess}_x \phi)(r(\pm t, x, \xi), \xi) \cdot \partial_{\xi_j} r(\pm t, x, \xi) \pm \nabla_x \partial_{\xi_j} \phi(r(\pm t, x, \xi), \xi), \end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned} \|\partial_{\xi_j} r(\pm t, x, \xi)\| &\leq \int_0^t \|\nabla_x \partial_{\xi_j} \phi(r(\pm s, x, \xi), \xi)\| \exp\left(\int_s^t \|(\text{Hess}_x \phi)(r(\pm \tau, x, \xi), \xi)\| d\tau\right) ds \\ &\leq ct, \end{aligned}$$

ce qui permet encore de conclure dans ce cas. On procède maintenant par récurrence. On suppose le résultat acquis pour  $1 \leq |\alpha| + |\beta| \leq k \in \mathbb{N}^*$  et on considère  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $|\alpha| + |\beta| = k + 1$ . On a

$$\begin{aligned} \partial_t \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta r(\pm t, x, \xi) &= \pm \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (\nabla_x \phi(r(\pm t, x, \xi), \xi)) \\ &= \pm \sum_{k=1}^n (\partial_{x_k} \nabla_x \phi)(r(\pm t, x, \xi), \xi) \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta r_k(\pm t, x, \xi) + B_\pm(t, x, \xi) \\ &= \pm (\text{Hess}_x \phi)(r(\pm t, x, \xi), \xi) \cdot \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta r(\pm t, x, \xi) + B_\pm(t, x, \xi), \end{aligned}$$

où  $B_\pm$  est une somme de termes de la forme

$$(\partial_x^\gamma \partial_\xi^\delta \nabla_x \phi)(r(\pm t, x, \xi), \xi) \prod_{l=1}^{|\gamma|} (\partial_x^{\alpha_l} \partial_\xi^{\beta_l} r_{k_l})(\pm t, x, \xi),$$

avec  $|\gamma| + |\delta| \geq 2$ ,  $\sum \alpha_l = \alpha$  et  $\delta + \sum \beta_l = \beta$  et pour tout  $l : k_l \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $|\alpha_l| + |\beta_l| \leq k$ . Ainsi, par hypothèse de récurrence,  $|B_\pm|$  est estimé par

$$c \langle r(\pm t, x, \xi) \rangle^{-|\gamma| - \rho} \prod_{l=1}^{|\gamma|} (t + \langle x \rangle) \langle x \rangle^{-|\alpha_l|} \leq c \langle x \rangle^{-\alpha},$$

et donc on a bien (5.8) puisque

$$\begin{aligned} \|\partial_t \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta r(\pm t, x, \xi)\| &\leq \int_0^t \|B_\pm(t, x, \xi)\| \exp\left(\int_s^t \|\text{Hess}_x \phi(r(\pm \tau, x, \xi), \xi)\| d\tau\right) ds \\ &\leq ct \langle x \rangle^{-\alpha}. \end{aligned}$$

□

On note  $r_\pm$  les fonctions définies par la proposition précédente avec  $\phi = \phi_\pm$ , ainsi que

$$F_\pm(t, x, \xi) = (\Delta_x \phi_\pm)(r_\pm(t, x, \xi), \xi) \pm V_2(r_\pm(t, x, \xi))$$

pour  $t \in \mathbb{R}$  et  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ . On remarque qu'on a en particulier

$$F_\pm(0, x, \xi) = \Delta_x \phi_\pm(x, \xi) \pm V_2(x) \quad \text{et} \quad F_\pm(t, r_\pm(s, x, \xi), \xi) = F_\pm(t + s, x, \xi).$$

**Proposition 5.15.** *On considère les fonctions  $a_{j,\pm}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , définies sur  $\mathring{\mathcal{Z}}_\pm(0, d_1, \pm\sigma_1)$  par*

$$a_{0,\pm}(x, \xi) = \exp\left(\pm \int_0^\infty F_\pm(\pm 2s, x, \xi) ds\right)$$

et, pour  $j \geq 1$  :

$$a_{j,\pm}(x, \xi) = \mp i \int_0^{+\infty} \Delta_x a_{j-1,\pm}(r_\pm(\pm 2\tau, x, \xi), \xi) \exp\left(\pm \int_0^\tau F_\pm(\pm 2s, x, \xi) ds\right) d\tau.$$

Alors ces fonctions vérifient sur  $\mathring{Z}_\pm(0, d_1, \pm\sigma_1)$  les équations de transport

$$2\nabla_x a_{0,\pm} \cdot \nabla_x \phi_\pm + a_{0,\pm} \Delta_x \phi_\pm \pm a_{0,\pm} V_2 = 0 \quad (5.10)$$

et

$$2\nabla_x a_{j,\pm} \cdot \nabla_x \phi_\pm + a_{j,\pm} \Delta_x \phi_\pm \pm a_{j,\pm} V_2 - i \Delta_x a_{j-1,\pm} = 0, \quad (5.11)$$

ainsi que les estimations :

$$\forall (x, \xi) \in \mathring{Z}_\pm(0, d_1, \pm\sigma_1), \quad \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_{j,\pm}(x, \xi) \right| \leq c_{\alpha,\beta} \langle x \rangle^{-j-|\alpha|}. \quad (5.12)$$

De plus il existe une constante  $c_0 > 0$  telle que

$$\forall (x, \xi) \in \mathring{Z}_\pm(0, d_1, \pm\sigma_1), \quad |a_{0,\pm}(x, \xi)| \geq c_0. \quad (5.13)$$

*Remarque 5.16.* C'est pour cette étape que l'on a besoin de se restreindre à une partie imaginaire  $V_2$  de courte portée.

*Démonstration. 1.* On commence par remarquer que d'après (5.7), (5.1) et (5.3), il existe une constante  $c$  telle que pour  $(x, \xi) \in \mathring{Z}_\pm(0, d_1, \pm\sigma_1)$  et  $s \geq 0$  on a

$$|F_\pm(\pm 2s, x, \xi)| \leq c \langle r_\pm(\pm 2s, x, \xi) \rangle^{-1-\rho} \leq c \langle s \rangle^{-1-\rho}.$$

Ainsi l'intégrale intervenant dans la définition de  $a_{0,\pm}$  est bien convergente et est bornée uniformément en  $(x, \xi) \in \mathring{Z}_\pm(0, d_1, \pm\sigma_1)$ . Cela prouve déjà (5.13). Comme c'est encore valable en remplaçant  $F_\pm$  par ses dérivées, cela permet également de vérifier que  $a_{0,\pm}$  est bien dans  $C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ . Pour  $(x, \xi) \in \mathring{Z}_\pm(0, d_1, \pm\sigma_1)$  et  $\theta \in \mathbb{R}$  on a

$$\begin{aligned} a_{0,\pm}(r_\pm(\pm 2\theta, x, \xi), \xi) &= \exp\left(\pm \int_0^{+\infty} F_\pm(\pm 2s, r_\pm(\pm 2\theta, x, \xi), \xi) ds\right) \\ &= \exp\left(\pm \int_0^{+\infty} F_\pm(\pm 2(s+\theta), x, \xi) ds\right) \\ &= \exp\left(\pm \int_\theta^{+\infty} F_\pm(\pm 2s, x, \xi) ds\right), \end{aligned}$$

et donc

$$\left. \frac{d}{d\theta} a_{0,\pm}(r_\pm(\pm 2\theta, x, \xi), \xi) \right|_{\theta=0} = \mp F_\pm(0, x, \xi) a_{0,\pm}(x, \xi).$$

Mais on a aussi

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\theta} a_{0,\pm}(r_\pm(\pm 2\theta, x, \xi), \xi) \right|_{\theta=0} &= \pm 2 \nabla_x a_{0,\pm}(x, \xi) \cdot \partial_t r_\pm(0, x, \xi) \\ &= \pm 2 \nabla_x a_{0,\pm}(x, \xi) \cdot \nabla_x \phi_\pm(x, \xi), \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $a_{0,\pm}$  est solution de (5.10).

**2.** On montre maintenant l'estimation (5.12) pour  $j = 0$ . Pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ , la dérivée  $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_{0,\pm}(x, \xi)$  est une somme de termes de la forme

$$\prod_{k=1}^K \partial_x^{\alpha_k} \partial_\xi^{\beta_k} \left( \pm \int_0^{+\infty} F_\pm(\pm 2s, x, \xi) ds \right) a_{0,\pm}(x, \xi)$$

avec  $\sum \alpha_k = \alpha$ ,  $\sum \beta_k = \beta$  et pour tout  $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$  :  $|\alpha_k| + |\beta_k| \geq 1$ . Il suffit donc de montrer, pour  $(x, \xi) \in \mathring{Z}_\pm(0, d_1, \sigma_1)$  et  $\mu, \nu \in \mathbb{N}^n$  :

$$\left| \int_0^{+\infty} \partial_x^\mu \partial_\xi^\nu F_\pm(\pm 2s, x, \xi) ds \right| \leq c_{\mu,\nu} \langle x \rangle^{-|\mu|}.$$

Or cette dérivée est à son tour une somme de termes de la forme

$$\int_0^{+\infty} \partial_x^{\mu_k} \partial_\xi^{\nu_k} (\Delta_x \phi_\pm \pm V_2)(r_\pm(\pm 2s, x, \xi), \xi) \prod_{j=1}^{|\mu_k|} \partial_x^{\lambda_{k,j}} \partial_\xi^{\delta_{k,j}} r_\pm(\pm 2s, x, \xi) ds,$$

où  $\sum_{j=1}^{|\mu_k|} \lambda_{k,j} = \mu$  et  $\nu_k + \sum_{j=1}^{|\mu_k|} \delta_{k,j} = \nu$ . Chacun de ces termes peut donc, d'après (5.3), (5.1) et (5.7), être estimé par

$$\begin{aligned} c \int_0^{+\infty} \langle r_\pm(\pm 2s, x, \xi) \rangle^{-1-\rho-|\mu_k|} \prod_{j=1}^{|\mu_k|} (s + \langle x \rangle) \langle x \rangle^{-|\lambda_{k,j}|} &\leq c \int_0^{+\infty} \langle s \rangle^{-1-\frac{\rho}{2}} \langle x \rangle^{-|\mu|-\frac{\rho}{2}} ds \\ &\leq c \langle x \rangle^{-|\mu|-\frac{\rho}{2}}. \end{aligned}$$

**3.** On montre maintenant par récurrence sur  $j \geq 1$  que les fonctions  $a_{j,\pm}$  sont bien définies et vérifient les équations de transport (5.11) ainsi que les estimations (5.12). Le fait que  $a_{j,\pm}$  soit bien défini sur  $\tilde{\mathcal{Z}}_\pm(0, d_1, \pm\sigma_1)$  résulte de l'estimation de  $\Delta_x a_{j-1,\pm}$  donnée par (5.12). Pour l'équation de transport, on calcule comme pour  $a_{0,\pm}$  :

$$\begin{aligned} a_{j,\pm}(r_\pm(\pm 2\theta, x, \xi), \xi) &= \mp i \int_0^{+\infty} \Delta_x a_{j-1,\pm}(r_\pm(\pm 2(\tau + \theta), x, \xi), \xi) \exp\left(\pm \int_\theta^{\tau+\theta} F_\pm(\pm 2s, x, \xi) ds\right) d\tau \\ &= \mp i \int_\theta^{+\infty} \Delta_x a_{j-1,\pm}(r_\pm(\pm 2\tau, x, \xi), \xi) \exp\left(\pm \int_\theta^\tau F_\pm(\pm 2s, x, \xi) ds\right) d\tau, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\left. \frac{d}{d\theta} a_{j,\pm}(r_\pm(\pm 2\theta, x, \xi), \xi) \right|_{\theta=0} = \pm i \Delta_x a_{j-1,\pm}(x, \xi) \mp F_\pm(0, x, \xi) a_{j,\pm}(x, \xi).$$

Et comme on a également

$$\left. \frac{d}{d\theta} a_{j,\pm}(r_\pm(\pm 2\theta, x, \xi), \xi) \right|_{\theta=0} = \pm 2 \nabla_x a_{j,\pm}(x, \xi) \cdot \nabla_x \phi_\pm(x, \xi),$$

(5.11) est bien vérifiée.

**4.** Comme on l'a fait pour  $a_{0,\pm}$ , on montre maintenant l'estimation (5.12) avec un facteur  $\langle x \rangle^{-\tilde{\rho}_j}$  de mieux que ce qui est demandé, où on a noté  $\tilde{\rho}_j = \frac{\rho}{2j+1}$  (pour  $|\alpha| + |\beta| \geq 1$  en ce qui concerne  $a_0$ ). Pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  la dérivée  $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_{j,\pm}(x, \xi)$  est une somme de termes de la forme :

$$\mp i \int_0^{+\infty} \partial_x^\mu \partial_\xi^\nu (\Delta_x a_{j-1,\pm}(r_\pm(\pm 2\tau, x, \xi), \xi)) \times \partial_x^{\alpha-\mu} \partial_\xi^{\beta-\nu} \exp\left(\pm \int_0^\tau F_\pm(\pm 2s, x, \xi) ds\right) d\tau.$$

Le second facteur s'estime comme  $a_{0,\pm}$  :

$$\left| \partial_x^{\alpha-\mu} \partial_\xi^{\beta-\nu} \exp\left(\pm \int_0^\tau F_\pm(\pm 2s, x, \xi) ds\right) \right| \leq c \langle x \rangle^{-|\alpha-\mu|},$$

uniformément en  $\tau \geq 0$ . Il reste donc à montrer :

$$\int_0^{+\infty} \left| \partial_x^\mu \partial_\xi^\nu (\Delta_x a_{j-1,\pm}(r_\pm(\pm 2\tau, x, \xi), \xi)) \right| d\tau \leq c \langle x \rangle^{-j-\tilde{\rho}_j-|\mu|}. \quad (5.14)$$

La dérivée  $\partial_x^\mu \partial_\xi^\nu (\Delta_x a_{j-1,\pm}(r_\pm(2\tau, x, \xi), \xi))$  est une somme de termes de la forme

$$(\partial_x^\lambda \partial_\xi^\delta \Delta_x a_{j-1,\pm})(r_\pm(\pm 2\tau, x, \xi), \xi) \prod_{k=1}^{|\lambda|} (\partial_x^{\mu_k} \partial_\xi^{\nu_k} r_\pm)(\pm 2\tau, x, \xi),$$

avec  $\mu = \sum_{k=1}^{|\lambda|} \mu_k$  et  $\nu = \delta + \sum_{k=1}^{|\lambda|} \nu_k$ . Un tel terme peut être estimé par

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} |(\partial_x^\lambda \partial_\xi^\delta \Delta_x a_{j-1, \pm})(r_\pm(\pm 2\tau, x, \xi), \xi)| \prod_{l=1}^{|\lambda|} |(\partial_x^{\mu_l} \partial_\xi^{\nu_l} r_\pm)(\pm 2\tau, x, \xi)| \\ & \leq c \int_0^{+\infty} \langle r_\pm(\pm 2\tau, x, \xi) \rangle^{-(j-1) - \bar{\rho}_{j-1} - |\lambda| - 2} (t + \langle x \rangle)^{|\lambda|} \langle x \rangle^{-\sum_{l=1}^{|\lambda|} |\mu_l|} d\tau \\ & \leq c \langle x \rangle^{-j - \bar{\rho}_j - |\mu|}. \end{aligned}$$

Cela prouve (5.14) et conclut donc la démonstration de la proposition.  $\square$

Soit  $N \in \mathbb{N}$ . Soient  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  tels que  $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \sigma$ ,  $R_2$  et  $R_3$  tels que  $\max(R_1, \frac{R}{2}) < R_2 < R_3 < R$  et  $d_2, d_3$  tels que  $d_1 < d_2 < d_3 < d$ . On considère une fonction  $\chi_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$  telle que  $\chi_1(s) = 0$  si  $s \leq \sigma_2$  et  $\chi_1(s) = 1$  si  $s \geq \sigma_3$ ,  $\chi_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$  telle que  $\chi_2(s) = 0$  si  $s \leq d_2$  et  $\chi_2(s) = 1$  si  $s \geq d_3$  et  $\chi_3 \in C^\infty(\mathbb{R})$  telle que  $\chi_3(s) = 0$  si  $s \leq R_2$  et  $\chi_3(s) = 1$  si  $s \geq R_3$ . On note alors

$$a_\pm(h) = \sum_{j=0}^N h^j a_{j, \pm} \quad \text{et} \quad b_\pm(h) = \chi_\pm a_\pm(h),$$

où

$$\chi_\pm(x, \xi) = \chi_1\left(\frac{\pm \langle x, \xi \rangle}{|x| |\xi|}\right) \chi_2(|\xi|) \chi_3(|x|) \quad (5.15)$$

( $b(h)$  peut être vu comme une application sur  $\mathbb{R}^{2n}$ ). On considère également

$$\begin{aligned} p_\pm(h) &= \frac{i}{h} (|\nabla_x \phi_\pm|^2 + V_1 - \xi^2) b_\pm(h) \\ &+ (2\nabla_x b_\pm(h) \cdot \nabla_x \phi_\pm + b_\pm(h) \Delta_x \phi_\pm \pm b_\pm(h) V_2) - ih \Delta_x b_\pm(h), \end{aligned} \quad (5.16)$$

comme donné par la proposition 5.11.

**Proposition 5.17.** *On a les propriétés suivantes sur  $b_\pm(h)$  et  $p_\pm(h)$  :*

(i)  $\text{supp } b_\pm(h) \subset \mathcal{Z}_\pm(R_2, d_2, \pm\sigma_2)$  et pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  il existe une constante  $c_{\alpha, \beta}$  telle que pour tous  $h \in ]0, 1]$  et  $(x, \xi) \in \mathcal{Z}_\pm(R_2, d_2, \pm\sigma_2)$  on a

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b_\pm(x, \xi, h) \right| \leq c_{\alpha, \beta} \langle x \rangle^{-|\alpha|}. \quad (5.17)$$

(ii)  $\text{supp } p_\pm(h) \subset \mathcal{Z}_\pm(R_2, d_2, \pm\sigma_2)$  et pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  il existe une constante  $c_{\alpha, \beta}$  telle que pour tous  $h \in ]0, 1]$  et  $(x, \xi) \in \mathcal{Z}_\pm(R_2, d_2, \pm\sigma_2)$  on a

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p_\pm(x, \xi, h) \right| \leq c_{\alpha, \beta} \langle x \rangle^{-|\alpha|}. \quad (5.18)$$

Si de plus on se restreint à  $(x, \xi) \in \mathcal{Z}_\pm(R_3, d_3, \pm\sigma_3)$  alors on a :

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p_\pm(x, \xi, h) \right| \leq c_{\alpha, \beta} h^{N+1} \langle x \rangle^{-2-N-|\alpha|}. \quad (5.19)$$

*Démonstration.* Par construction, on a  $\text{supp } \chi_\pm \subset \mathcal{Z}_\pm(R_2, d_2, \pm\sigma_2)$  et donc  $\text{supp } b_\pm(h) \subset \mathcal{Z}_\pm(R_2, d_2, \pm\sigma_2)$ . D'après (5.16) on a également  $\text{supp } p_\pm(h) \subset \mathcal{Z}_\pm(R_2, d_2, \pm\sigma_2)$ . Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ . Pour  $j \in \llbracket 0, N \rrbracket$  et  $(x, \xi) \in \mathcal{Z}_\pm(R_2, d_2, \pm\sigma_2)$ , on a :

$$\begin{aligned} \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \chi_\pm(x, \xi) a_{j, \pm}(x, \xi) \right| &\leq c_{\alpha, \beta} \sum_{\substack{\mu + \mu' = \alpha \\ \nu + \nu' = \beta}} \left| \partial_x^\mu \partial_\xi^\nu \chi_1\left(\pm \frac{\langle x, \xi \rangle}{|x| |\xi|}\right) \right| \left| \partial_x^{\mu'} \partial_\xi^{\nu'} a_{j, \pm}(x, \xi) \right| \\ &\leq c_{\alpha, \beta} \sum_{\substack{\mu + \mu' = \alpha \\ \nu + \nu' = \beta}} \langle x \rangle^{-|\mu|} \langle x \rangle^{-j - |\mu'|}. \end{aligned}$$

Cela prouve (5.17). On a choisi la phase  $\phi_{\pm}$  pour que le premier terme de (5.16) s'annule sur  $\mathcal{Z}_{\pm}(R_2, d_2, \pm\sigma_2)$ . Étant données les équations de transport satisfaites par les fonctions  $a_{j,\pm}, j \in \mathbb{N}$ , l'expression du symbole  $p_{\pm}(h)$  se réduit à

$$p_{\pm}(h) = 2a_{\pm}(h)\nabla_x\chi_{\pm} \cdot \nabla_x\phi_{\pm} - iha_{\pm}(h)\Delta_x\chi_{\pm} - 2ih\nabla_x a_{\pm}(h) \cdot \nabla_x\chi_{\pm} - ih^{N+1}\Delta_x(a_{N,\pm}\chi_{\pm})$$

On obtient alors (5.18) à partir de (5.12) et (5.3). En outre, sur  $\mathcal{Z}_{\pm}(R_3, d_3, \pm\sigma_3)$ , la fonction  $\chi_{\pm}$  vaut 1 donc l'expression de  $p_{\pm}(h)$  se réduit à

$$p_{\pm}(h) = -ih^{N+1}\Delta_x a_{N,\pm},$$

ce qui donne bien l'estimation (5.19).  $\square$

**Proposition 5.18.** *Soient  $R_5 > R_3$ ,  $d_5 \in ]d_3, d[$  et  $\sigma_5 \in ]\sigma_3, \sigma[$ . Si  $R > R_5$  est assez grand, alors il existe un symbole  $e_{\pm}(h)$  de la forme  $e_{\pm}(h) = \sum_{j=0}^N h^j f_{j,\pm}$  avec  $f_{j,\pm} \in \mathcal{S}_{-j}(\mathbb{R}^{2n})$  et  $\text{supp } f_{j,\pm} \subset \mathcal{Z}_{\pm}(R_5, d_5, \pm\sigma_5)$  tel que :*

$$I_h(b_{\pm}(h), \phi_{\pm})I_h(e_{\pm}(h), \phi_{\pm})^* = \text{Op}_h(\omega_{\pm}) + h^{N+1}\text{Op}_h(r_{\pm}(h)) \quad (5.20)$$

où  $r_{\pm}(h) \in \mathcal{S}_{-N}(\mathbb{R}^{2n})$  uniformément en  $h \in ]0, 1[$ .

Cette proposition est le lemme 4.5 de [Wan88]. On en omet la démonstration.

**Proposition 5.19.** *Soient  $\theta, l, M \in \mathbb{N}$ . Si  $R$  a été choisi assez grand alors il existe une constante  $c$  telle que pour tous  $t \geq 0$  et  $h \in ]0, 1[$  on a*

$$\left\| \langle x \rangle^{M-(\theta+l)} \text{Op}_h(\omega) I_h(b_{\pm}(h), \phi_{\pm}) U_0^h(\pm t) I_h(e_{\pm}(h), \phi_{\pm})^* \langle x \rangle^l \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq c h^M \langle t \rangle^{-\theta} \quad (5.21)$$

et

$$\left\| \langle x \rangle^{2+N-(\theta+l)} I_h(p_{\pm}(h), \phi_{\pm}) U_0^h(\pm t) I_h(e_{\pm}(h), \phi_{\pm})^* \langle x \rangle^l \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq c h^{N+1} \langle t \rangle^{-\theta} \quad (5.22)$$

*Démonstration. 1.* D'après le lemme 4.4 de [Wan88], si  $R$  est assez grand les supports des applications  $b_{\pm}(h)$  et  $(x, \xi) \mapsto \omega(x, \nabla_x \phi_{\pm}(x, \xi))$  sont disjoints, donc d'après la proposition A.3 de [Wan88] on a

$$\text{Op}_h^w(\omega) I_h(b_{\pm}(h), \phi_{\pm}) = h^M I_h(\tilde{b}_{\pm}(h), \phi_{\pm}),$$

où  $\tilde{b}_{\pm}(h) \in \mathcal{S}_{-M}(\mathbb{R}^{2n})$  uniformément en  $h$ .

**2.** Pour  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  et  $t \geq 0$  on a :

$$\begin{aligned} & I_h(\tilde{b}_{\pm}(h), \phi_{\pm}) U_0^h(\pm t) I_h(e_{\pm}(h), \phi_{\pm})^* u(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h} \zeta_{\pm}(t, x, y, \xi)} \tilde{b}_{\pm}(x, \xi, h) \overline{e_{\pm}(y, \xi, h)} u(y) dy d\xi, \end{aligned}$$

avec

$$\zeta_{\pm}(t, x, y, \xi) = \phi_{\pm}(x, \xi) - \phi_{\pm}(y, \xi) \mp t\xi^2.$$

Quitte à prendre  $R$  plus grand, on peut supposer que pour  $(y, \xi) \in \text{supp } e_{\pm}(h)$  on a

$$|\nabla_{\xi} \phi_{\pm}(y, \xi) - y| \leq c \langle y \rangle^{1-\rho} \leq \frac{|y|}{2},$$

et donc, pour tout  $t \geq 0$  et pour un certain  $c_0 > 0$  :

$$|\nabla_{\xi} \phi_{\pm}(y, \xi) \pm 2t\xi| \geq \langle \nabla_{\xi} \phi_{\pm}(y, \xi) \pm 2t\xi, \hat{y} \rangle \geq c_0(|y| + t). \quad (5.23)$$



On considère alors l'opérateur  $L$  tel que pour  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  :

$$Lu = ih \frac{(\nabla_\xi \phi_\pm(y, \xi) \pm 2t\xi) \cdot \nabla_\xi u}{|\nabla_\xi \phi_\pm(y, \xi) \pm 2t\xi|^2}.$$

On a alors

$$L^*v = ih \operatorname{div}_\xi \left( \frac{\nabla_\xi \phi_\pm(y, \xi) \pm 2t\xi}{|\nabla_\xi \phi_\pm(y, \xi) \pm 2t\xi|^2} v \right),$$

où  $\operatorname{div}_\xi(u_1, \dots, u_n) \mapsto \sum_{j=1}^n \partial_{\xi_j} u_j$  est l'opérateur divergence par rapport à la variable  $\xi$ .  $L$  vérifie en particulier

$$L \left( e^{-\frac{i}{\hbar}(\phi_\pm(y, \xi) \pm t\xi^2)} \right) = e^{-\frac{i}{\hbar}(\phi_\pm(y, \xi) \pm t\xi^2)},$$

et donc, pour tout  $\nu \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} & I_h(\tilde{b}_\pm(h), \phi_\pm) U_0^h(\pm t) I_h(e_\pm(h), \phi_\pm)^* u(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{i}{\hbar}(\phi_\pm(y, \xi) \pm t\xi^2)} (L^*)^\nu \left( e^{\frac{i}{\hbar}\phi_\pm(x, \xi)} \tilde{b}_\pm(x, \xi, h) \overline{e_\pm(y, \xi, h)} \right) u(y) dy d\xi. \end{aligned}$$

On montre alors par récurrence sur  $\nu \in \mathbb{N}$  que

$$(L^*)^\nu \left( e^{\frac{i}{\hbar}\phi_\pm(x, \xi)} \tilde{b}_\pm(x, \xi, h) \overline{e_\pm(y, \xi, h)} \right) = \sum_{j=1}^{J_\nu} e^{\frac{i}{\hbar}\phi_\pm(x, \xi)} \tilde{b}_{\nu, \pm}^j(x, \xi, h) \overline{e_{\nu, \pm}^j(t, y, \xi, h)}$$

pour un certain  $J_\nu \in \mathbb{N}$ , où pour tout  $j \in \llbracket 1, J_\nu \rrbracket$  on a  $\tilde{b}_{\nu, \pm}^j(h) \in \mathcal{S}_{\nu-M}(\mathbb{R}^{2n})$  uniformément en  $h$ , et pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  il existe une constante  $c_{\alpha, \beta}$  telle que pour  $t \geq 0$ ,  $y, \xi \in \mathbb{R}^n$  et  $h \in ]0, 1]$  on a :

$$\left| \partial_y^\alpha \partial_\xi^\beta e_{\nu, \pm}^j(t, y, \xi, h) \right| \leq c_{\alpha, \beta} (t + \langle y \rangle)^{-\nu} \langle y \rangle^{-|\alpha|}. \quad (5.24)$$

En effet, c'est vrai pour  $\nu = 0$ , et si c'est vrai pour un certain  $\nu \in \mathbb{N}$  alors pour  $j \in \llbracket 1, J_\nu \rrbracket$  on calcule :

$$\begin{aligned} & ih \operatorname{div}_\xi \left( \frac{\nabla_\xi \phi_\pm(y, \xi) \pm 2t\xi}{|\nabla_\xi \phi_\pm(y, \xi) \pm 2t\xi|^2} e^{\frac{i}{\hbar}\phi_\pm(x, \xi)} \tilde{b}_{\nu, \pm}^j(x, \xi, h) \overline{e_{\nu, \pm}^j(t, y, \xi, h)} \right) \\ &= ih |\nabla_\xi \phi_\pm(y, \xi) \pm 2t\xi|^{-2} \times e^{\frac{i}{\hbar}\phi_\pm(x, \xi)} \\ &\quad \times \left[ (\Delta_\xi \phi_\pm(y, \xi) \pm 2tn) \tilde{b}_{\nu, \pm}^j(x, \xi, h) \overline{e_{\nu, \pm}^j(t, y, \xi, h)} \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{(\operatorname{Hess}_\xi \phi_\pm(y, \xi) \pm 2t \mathbf{I}_n) \cdot (\nabla_\xi \phi_\pm(y, \xi) \pm 2t\xi)^2}{|\nabla_\xi \phi_\pm(y, \xi) \pm 2t\xi|^2} \tilde{b}_{\nu, \pm}^j(x, \xi, h) \overline{e_{\nu, \pm}^j(t, y, \xi, h)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{\hbar} (\nabla_\xi \phi_\pm(y, \xi) \pm 2t\xi) \nabla_\xi \phi_\pm(x, \xi) \tilde{b}_{\nu, \pm}^j(x, \xi, h) \overline{e_{\nu, \pm}^j(t, y, \xi, h)} \right. \\ &\quad \left. + (\nabla_\xi \phi_\pm(y, \xi) \pm 2t\xi) \cdot \nabla_\xi \tilde{b}_{\nu, \pm}^j(x, \xi, h) \overline{e_{\nu, \pm}^j(t, y, \xi, h)} \right. \\ &\quad \left. + \tilde{b}_{\nu, \pm}^j(x, \xi, h) (\nabla_\xi \phi_\pm(y, \xi) \pm 2t\xi) \cdot \nabla_\xi \overline{e_{\nu, \pm}^j(t, y, \xi, h)} \right], \end{aligned}$$

et on vérifie chacun des termes en utilisant (5.23). On remarque que c'est le troisième terme qui fait d'une part qu'à chaque itération on doit ajouter une puissance de  $\langle x \rangle$  et d'autre part qu'on n'a pas de gain en terme de puissances de  $h$ . Pour  $\nu = l + \theta$  on obtient alors :

$$I_h(\tilde{b}_\pm(h), \phi_\pm) U_0^h(\pm t) I_h(e_\pm(h), \phi_\pm)^* = \sum_{j=1}^{J_\nu} I_h(\tilde{b}_{\nu, \pm}^j(h), \phi_\pm) U_0^h(\pm t) I_h(e_{\nu, \pm}^j(t, h), \phi_\pm)^*.$$

D'après (5.24) et la proposition A.2 de [Wan88], l'opérateur  $\langle t \rangle^\theta I_h(e_{\nu,\pm}(t, h), \phi_\pm)^*$  est borné uniformément en  $t$  et  $h$  de  $L^{2,-l}(\mathbb{R}^n)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , l'opérateur  $U_0^h(\pm t)$  est borné uniformément en  $t$  et  $h$  sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , et comme  $\tilde{b}_{\nu,\pm}(h) \in \mathcal{S}_{\nu-M}(\mathbb{R}^{2n})$  uniformément en  $h$ , l'opérateur  $I_h(\tilde{b}_{\nu,\pm}(h), \phi_\pm)$  est borné uniformément de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  dans  $L^{2,-M+\theta+l}(\mathbb{R}^n)$ . Cela prouve (5.21).

**3.** Soient  $R_4 \in ]R_3, R_5[$ ,  $d_4 \in ]d_3, d_5[$  et  $\sigma_4 \in ]\sigma_3, \sigma_5[$ . On construit la fonction  $\tilde{\chi}_\pm$  comme on a construit  $\chi_\pm$  en (5.15) en remplaçant  $(R_2, d_2, \sigma_2)$  et  $(R_3, d_3, \sigma_3)$  par  $(R_3, d_3, \sigma_3)$  et  $(R_4, d_4, \sigma_4)$ . On note alors  $p_{2,\pm}(x, \xi, h) = p_\pm(x, \xi, h)\tilde{\chi}_\pm(x, \xi)$  et  $p_{1,\pm}(x, \xi, h) = p_\pm(x, \xi, h) - p_{2,\pm}(x, \xi, h)$ . D'après (5.19), on a :

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p_{2,\pm}(x, \xi, h) \right| \leq c_{\alpha,\beta} h^{N+1} \langle x \rangle^{-2-N-|\alpha|}.$$

On peut alors appliquer à  $p_{2,\pm}(h)$  le même raisonnement qu'à  $\tilde{b}_\pm(h)$  pour obtenir (5.22) avec  $p_\pm(h)$  remplacé par  $p_{2,\pm}(h)$ .

**4.** Il reste à montrer (5.22) avec  $p_\pm(h)$  remplacé par  $p_{1,\pm}(h)$ . Pour cela, on remarque qu'il existe  $c_0 > 0$  telle que pour  $(x, \xi) \in \text{supp } p_{1,\pm} \subset \mathcal{Z}_\pm(R_2, d_2, \pm\sigma_2) \setminus \mathcal{Z}_\pm(R_4, d_4, \pm\sigma_4)$ ,  $(y, \xi) \in \mathcal{Z}_\pm(R_5, d_5, \pm\sigma_5)$  et  $t \geq 0$  on a

$$|\nabla_\xi \zeta_\pm(t, x, y, \xi)| \geq c_0(t + |x| + |y|). \quad (5.25)$$

En effet on a  $(y \pm 2t\xi, \xi) \in \mathcal{Z}_\pm(R_5, d_5, \pm\sigma_5)$  et :

$$|\nabla_\xi \zeta_\pm(t, x, y, \xi)| = |\nabla_\xi \phi_\pm(x, \xi) - \nabla_\xi \phi_\pm(y, \xi) \mp 2t\xi| \geq |x - (y \pm 2t\xi)| - c|x|^{1-\rho} - c|y|^{1-\rho},$$

où la constante  $c \geq 0$  peut être rendue arbitrairement petite si on a choisi  $R$  assez grand. Si  $|x| \leq R_4 \leq \frac{R_4}{R_5} |y \pm 2t\xi|$  alors

$$|x - (y \pm 2t\xi)| \geq \left(1 - \frac{R_4}{R_5}\right) |y \pm 2t\xi| \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R_4}{R_5}\right) (|x| + |y \pm 2t\xi|) \geq c_0(t + |x| + |y|).$$

On peut procéder de la même façon si  $|x| \geq \gamma |y \pm 2t\xi|$  pour un certain  $\gamma \in ]1, \frac{\sigma_5}{\sigma_4}[$ , tandis que si  $R_4 \leq |x| \leq \gamma |y \pm 2t\xi|$  et  $\pm \langle x, \xi \rangle \leq \sigma_4 |x| |\xi|$ , alors

$$\begin{aligned} |x - (y \pm 2t\xi)| &\geq \left\langle y \pm 2t\xi - x, \pm \hat{\xi} \right\rangle \geq (\sigma_5 |y \pm 2t\xi| - \sigma_4 |x|) \geq (\sigma_5 - \gamma \sigma_4) |y \pm 2t\xi| \\ &\geq c_0(t + |x| + |y|), \end{aligned}$$

et on obtient bien (5.25). Avec (5.25) on peut donc faire des intégrations par parties comme précédemment mais avec l'opérateur  $L = -ih \frac{\nabla_\xi \zeta_\pm \cdot \nabla_\xi}{|\nabla_\xi \zeta_\pm|^2}$ . Quand on applique l'opérateur  $L^*$  à  $p_{1,\pm}(x, \xi, h) \overline{e_\pm(y, \xi, h)}$  il n'y a pas de terme en  $h^{-1}$ , donc chaque itération fait gagner, en plus d'une puissance de  $(t + \langle x \rangle + \langle y \rangle)$ , une puissance de  $h$ . Cela permet de conclure la démonstration.  $\square$

On peut maintenant démontrer le théorème 5.6 :

*Démonstration.* On commence par montrer la première estimation. D'après la proposition 5.11, pour tous  $t \geq 0$  et  $s \in [0, t]$  on a sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} U_h(t-s) I_h(b_+(h), \phi_+) U_0^h(s) &= \frac{i}{h} U_h(t-s) (H_h I_h(b_+(h), \phi_+) - I_h(b_+(h), \phi_+) H_0^h) U_0^h(s) \\ &= U_h(t-s) I_h(p_+(h), \phi_+) U_0^h(s). \end{aligned}$$

En intégrant pour  $s$  entre 0 et  $t$ , on obtient :

$$U_h(t) I_h(b_+(h), \phi_+) = I_h(b_+(h), \phi_+) U_0^h(t) - \int_0^t U_h(t-s) I_h(p_+(h), \phi_+) U_0^h(s) ds.$$

En composant à droite par  $I_h(e_+(h), \phi_+)^*$ , cela donne, d'après la proposition 5.18 :

$$\begin{aligned} U_h(t)\text{Op}_h(\omega_+) &= -h^{N+1}U_h(t)\text{Op}_h(r_+(h)) + I_h(b_+(h), \phi_+)U_0^h(t)I_h(e_+(h), \phi_+)^* \\ &\quad - \int_0^t U_h(t-s)I_h(p_+(h), \phi_+)U_0^h(s)I_h(e_+(h), \phi_+)^* ds. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Soit  $z \in \mathbb{C}_+$ . D'après la proposition 2.9 on a :

$$(H_h - z)^{-1} = \frac{i}{h} \int_0^\infty e^{-\frac{it}{h}(H_h - z)} dt = \frac{i}{h} \int_0^\infty e^{\frac{it}{h}z} U_h(t) dt.$$

En multipliant (5.26) par  $\frac{i}{h}e^{\frac{it}{h}z}$  puis en intégrant pour  $t \geq \mathbb{R}_+$ , on obtient :

$$\begin{aligned} (H_h - z)^{-1}\text{Op}_h(\omega_+) &= -h^{N+1}(H_h - z)^{-1}\text{Op}_h(r_+(h)) + \frac{i}{h} \int_0^\infty e^{\frac{it}{h}z} I_h(b_+(h), \phi_+)U_0^h(t)I_h(e_+(h), \phi_+)^* dt \\ &\quad - \frac{i}{h} \int_0^\infty \int_0^t e^{\frac{it}{h}z} U_h(t-s)I_h(p_+(h), \phi_+)U_0^h(s)I_h(e_+(h), \phi_+)^* ds dt \\ &= -h^{N+1}(H_h - z)^{-1}\text{Op}_h(r_+(h)) + \frac{i}{h} \int_0^\infty e^{\frac{it}{h}z} I_h(b_+(h), \phi_+)U_0^h(t)I_h(e_+(h), \phi_+)^* dt \\ &\quad - \int_0^\infty e^{\frac{is}{h}z} (H_h - z)^{-1}I_h(p_+(h), \phi_+)U_0^h(s)I_h(e_+(h), \phi_+)^* ds, \end{aligned}$$

et donc, pour  $\delta > \frac{1}{2}$  :

$$\begin{aligned} \langle x \rangle^{-\delta} \text{Op}_h(\omega)(H_h - z)^{-1}\text{Op}_h(\omega_+) \langle x \rangle^{-\delta} &= -h^{N+1} \langle x \rangle^{-\delta} \text{Op}_h(\omega)(H_h - z)^{-1}\text{Op}_h(r_+(h)) \langle x \rangle^{-\delta} \\ &\quad + \frac{i}{h} \langle x \rangle^{-\delta} \int_0^\infty e^{\frac{it}{h}z} \text{Op}_h(\omega)I_h(b_+(h), \phi_+)U_0^h(t)I_h(e_+(h), \phi_+)^* \langle x \rangle^{-\delta} dt \\ &\quad - \langle x \rangle^{-\delta} \text{Op}_h(\omega) \int_0^\infty e^{\frac{is}{h}z} (H_h - z)^{-1}I_h(p_+(h), \phi_+)U_0^h(s)I_h(e_+(h), \phi_+)^* \langle x \rangle^{-\delta} ds. \end{aligned}$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} &\left\| \langle x \rangle^{-\delta} \text{Op}_h(\omega)(H_h - z)^{-1}\text{Op}_h(\omega_+) \langle x \rangle^{-\delta} \right\| \\ &\leq ch^{N+1} \left\| \langle x \rangle^{-\delta} \text{Op}_h(\omega) \langle x \rangle^\delta \right\| \left\| \langle x \rangle^{-\delta} (H_h - z)^{-1} \langle x \rangle^{-\delta} \right\| \left\| \langle x \rangle^\delta \text{Op}_h(r_+(h)) \langle x \rangle^{-\delta} \right\| \\ &\quad + \frac{c}{h} \int_0^\infty \left\| \text{Op}_h(\omega)I_h(b_+(h), \phi_+)U_0^h(t)I_h(e_+(h), \phi_+)^* \right\| dt \\ &\quad + c \int_0^\infty \left\| \langle x \rangle^{-\delta} (H_h - z)^{-1} \langle x \rangle^{-1} \right\| \left\| \langle x \rangle I_h(p_+(h), \phi_+)U_0^h(s)I_h(e_+(h), \phi_+)^* \right\| ds. \end{aligned}$$

D'après l'estimation uniforme pour la résolvante et la proposition 3.11, le premier terme est un  $O(h^N)$  dans  $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$  uniformément en  $z \in \mathbb{C}_{\bar{I},+}$ . Pour les deux derniers termes on utilise la proposition 5.19 avec  $\theta = 2$ ,  $l = 0$  et  $M = N + 1$ . On suppose en outre avoir choisi  $N \geq 1$ . On obtient alors :

$$\left\| \langle x \rangle^{-\delta} \text{Op}_h(\omega)(H_h - (z + i0))^{-1}\text{Op}_h(\omega_+) \langle x \rangle^{-\delta} \right\| = O_{h \rightarrow 0}(h^N),$$

où le reste est uniforme en  $z \in \mathbb{C}_{\bar{I},+}$ . On sait en outre qu'on peut passer à la limite  $\text{Im } z \rightarrow 0$  dans chacun des termes, donc le résultat est valable pour tout  $z \in \overline{\mathbb{C}_{I,+}}$ .

2. La deuxième partie du théorème se démontre de la même manière en utilisant  $\phi_-, b_-, p_-, r_-$  et le fait que pour  $\text{Im } z < 0$  :

$$(H_h^* - z)^{-1} = -\frac{i}{h} \int_0^{+\infty} e^{\frac{it}{h}(H_h^* - z)} dt.$$

On a comme précédemment

$$U(t)^* I_h(b_-(h), \phi_-) - I_h(b_-(h), \phi_-) U_0^h(t)^* = \int_0^t U(t-s)^* I_h(p_-(h), \phi_-) U_0(s)^* ds,$$

puis

$$\begin{aligned} & \langle x \rangle^{-\delta} \text{Op}_h(\omega)(H_h^* - z)^{-1} \text{Op}_h(\omega_-) \langle x \rangle^{-\delta} \\ &= -h^{N+1} \langle x \rangle^{-\delta} \text{Op}_h(\omega)(H_h^* - z)^{-1} \text{Op}_h(r_-(h)) \langle x \rangle^{-\delta} \\ &\quad - \frac{i}{h} \langle x \rangle^{-\delta} \int_0^\infty e^{-\frac{it}{h}z} \text{Op}_h(\omega) I_h(b_-(h), \phi_-) U_0^h(-t) I_h(e_-(h), \phi_-)^* \langle x \rangle^{-\delta} dt \\ &\quad + \langle x \rangle^{-\delta} \text{Op}_h(\omega) \int_0^\infty e^{-\frac{is}{h}z} (H_h^* - z)^{-1} I_h(p_-(h), \phi_-) U_0^h(-s) I_h(e_-(h), \phi_-)^* \langle x \rangle^{-\delta} ds. \end{aligned}$$

On peut conclure de la même manière.

3. Si  $\omega$  est à support compact en  $x$  et  $\beta \geq 0$ , alors on peut utiliser les estimations de la proposition 5.19 avec  $l$  aussi grand que l'on veut. En effet, il suffit de choisir  $\theta = 2$ ,  $l \geq \beta$ ,  $N \geq 2l + 1$  et  $M \geq N + 1$ . On utilise également le fait que  $r_\pm(h)$  est dans  $\mathcal{S}_{-N}(\mathbb{R}^{2n})$  uniformément en  $h$ .  $\square$

On remarque qu'on a également démontré le résultat suivant :

**Corollaire 5.20.** *On a*

$$\|\text{Op}_h(\omega) U_h(t) \text{Op}_h(\omega_+)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} = O(h^\infty)$$

uniformément en  $t \geq 0$ . Si  $\omega$  est à support borné en  $x$ , alors on peut ajouter des poids  $\langle x \rangle^\beta$  comme au théorème 5.6.

## 5.2 Équation de Helmholtz avec indice d'absorption de signe variable

On s'intéresse maintenant à l'étude de l'opérateur de Schrödinger non dissipatif. On suppose toujours que  $V_2$  tend vers 0 à l'infini. Ainsi, le spectre essentiel de  $H_h$  reste la demi-droite  $\mathbb{R}_+$ , et le reste du spectre est constitué de valeurs propres isolées qui ne peuvent s'accumuler que sur  $\mathbb{R}_+$  ou à l'infini. La différence est qu'on peut maintenant trouver des valeurs propres sur le demi-plan supérieur.

### 5.2.1 Présentation de la méthode

L'idée de la méthode pour obtenir une estimation comme celle du théorème 4.36 est la suivante. On considère une suite de fonctions qui contredit le résultat que l'on souhaite démontrer, on choisit une mesure semi-classique associée à cette famille, et on montre que cette mesure est la fois nulle et non-nulle. La contradiction prouve alors que la véracité de l'estimation ne peut être niée.

Avant d'introduire une situation précise pour laquelle on voudrait appliquer la méthode, on fixe un cadre commun à ce qu'on va faire par la suite. Comme dans les chapitres précédents, on se donne deux potentiels  $V_1, V_2 \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  qui convergent vers 0 à l'infini et

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad |\partial^\alpha V_1(x)| \leq c_\alpha \langle x \rangle^{-|\alpha|-\rho},$$

avec  $\rho > 0$ . On considère alors l'opérateur de Schrödinger

$$H_h = -h^2 \Delta + V_1(x) - ihV_2(x)$$

sur  $H^2(\mathbb{R}^n)$ . La différence est qu'on ne suppose plus que  $V_2$  est partout positif. On précisera par la suite les hypothèses sur  $V_2$ .

**Proposition 5.21.** *Soient  $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $(z_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ , et  $(h_m)_{m \in \mathbb{N}} \in ]0, 1]^{\mathbb{N}}$  une suite qui tend vers 0. Soit  $\delta \geq 0$ . On note  $\lambda_m = \text{Re } z_m$  et  $\beta_m = h_m^{-1} \text{Im } z_m$ . On suppose que*

$$\lambda_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} E > 0 \quad \text{et} \quad \beta_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \beta \in \mathbb{R}$$

d'une part, et d'autre part :

$$\|v_m\|_{L^{2, -\delta}(\mathbb{R}^n)} = 1 \quad \text{et} \quad \|(H_{h_m} - z_m)v_m\|_{L^{2, \delta}(\mathbb{R}^n)} = o_{m \rightarrow \infty}(h_m).$$

Alors la famille  $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$  admet une mesure semi-classique  $\mu$  et, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que pour tout  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  on a en fait

$$\langle \text{Op}_{h_m}^w(q)v_m, v_m \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{2n}} q \, d\mu.$$

La mesure  $\mu$  vérifie alors les trois propriétés suivantes :

- (i) La mesure  $\mu$  est à support dans  $p^{-1}(\{E\})$ .
- (ii) Pour  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  on a :

$$\langle \chi v_m, v_m \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \chi(x) \, d\mu(x, \xi).$$

- (iii) Pour tout symbole  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  et tout  $t \geq 0$  on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2n}} q \, d\mu &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} (q \circ \phi^t) \exp\left(-2 \int_0^t (V_2 + \beta) \circ \phi^s \, ds\right) \, d\mu \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} (q \circ \phi^t) \exp\left(-2 \int_0^t (V_2 + \beta) \circ \phi^{t-s} \, ds\right) \, d\mu. \end{aligned} \tag{5.27}$$

*Démonstration.* **1.** L'existence d'une mesure semi-classique  $\mu$  pour la famille  $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$  résulte de la proposition 3.17 et du fait que  $\|v_m\|_{L^{2, -\delta}(\mathbb{R}^n)} = 1$ .

**2.** Les deux premières propriétés sont conséquences du corollaire 5.3. En l'appliquant avec  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à support hors de  $p^{-1}(\{E\})$  on obtient

$$|\langle \text{Op}_{h_m}^w(q)v_m, v_m \rangle| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

ce qui prouve que  $\mu$  est nulle hors de  $p^{-1}(\{E\})$ . Avec  $q(x, \xi) = \chi(x)(1 - \tilde{\chi}(\xi))$ , où  $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  est égale à 1 au voisinage de l'ensemble (borné) des  $\xi \in \mathbb{R}^n$  tels qu'il existe  $x \in \mathbb{R}^n$  vérifiant  $p(x, \xi) = E$ , on obtient

$$\langle \text{Op}_{h_m}^w(\chi(x)(1 - \tilde{\chi}(\xi)))v_m, v_m \rangle \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

et donc :

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \chi(x) v_m, v_m \rangle &= \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \text{Op}_{h_m}^w (\chi(x) \tilde{\chi}(\xi)) v_m, v_m \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \chi(x) \tilde{\chi}(\xi) d\mu(x, \xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \chi(x) d\mu(x, \xi). \end{aligned}$$

3. Soient  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  et  $t \geq 0$ . Pour  $\tau \in [0, t]$  on note :

$$q(\tau, w) = q(\phi^{t-\tau}(w)) \exp\left(-2 \int_\tau^t (V_2 + \beta)(\phi^{s-\tau}(w)) ds\right).$$

Comme l'ensemble des  $\text{supp } q(\tau) = \text{supp}(q \circ \phi^{t-\tau})$  pour  $\tau \in [0, t]$  est borné dans  $\mathbb{R}^{2n}$  on peut dériver  $q(\tau)$  sous l'intégrale :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_{\mathbb{R}^{2n}} q(\tau) d\mu &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{d}{d\tau} q(\tau) d\mu \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} (2(V_2 + \beta)q(\tau) - \{p, q(\tau)\}) d\mu \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \text{Op}_{h_m}^w (2(V_2 + \beta)q(\tau) - \{p, q(\tau)\}) v_m, v_m \rangle \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\langle \left( 2(V_2 + \beta_m) \text{Op}_{h_m}^w (q(\tau)) - \frac{i}{h_m} [H_{h_m}^1, \text{Op}_{h_m}^w (q(\tau))] \right) v_m, v_m \right\rangle \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{i}{h_m} \langle (\text{Op}_{h_m}^w (q(\tau))(H_{h_m} - z_m) - (H_{h_m}^* - \bar{z}_m) \text{Op}_{h_m}^w (q(\tau))) v_m, v_m \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Cela donne bien l'égalité attendue. On note qu'on n'a pas eu besoin de s'inquiéter du manque de décroissance de  $v_m$  pour ce calcul car on n'a travaillé qu'avec des symboles à supports compacts.  $\square$

Pour obtenir une contradiction, il faudra montrer que pour une famille  $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$  bien choisie, la mesure  $\mu$  donnée par la proposition 5.21 est à la fois nulle et non nulle. Même si la norme de  $v_m$  est fixée dans un certain espace à poids, il n'est pas clair que la mesure  $\mu$  est non nulle. En effet, il peut très bien arriver que  $v_m$  « parte à l'infini » quand  $m$  devient grand. Dans ce cas, puisqu'on n'applique à  $v_m$  que des opérateurs pseudo-différentiels de symboles compacts dans la définition de  $\mu$ , on aura une mesure  $\mu$  qui est nulle sur tout compact, et donc partout. Il se peut également que ce soient les transformées de Fourier  $\mathcal{F}_{h_m} v_m$  qui voient leur masse partir à l'infini pour  $m$  grand, ce qui signifierait que  $v_m$  oscille à des fréquences d'ordre plus grand que  $h_m^{-1}$ . On vient de vérifier au point (ii) que ce cas de figure ne se présentait pas. Il restera tout de même à le vérifier pour la variable  $x$ . Cela signifie que pour une certaine fonction  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  on doit avoir :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\chi v_m\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \neq 0.$$

### 5.2.2 Absence de valeurs propres à distance d'ordre $h$ de l'axe réel

Avant d'étudier la résolvante près de l'axe réel, on commence par s'intéresser aux valeurs propres de  $H_h$  loin de l'axe réel (c'est-à-dire de partie imaginaire plus grande que  $\beta h$  avec  $\beta > 0$ ). Cette question ne se posait pas lorsque  $V_2$  était positif, puisque le théorème qui suit était alors conséquence directe des propositions 2.2 et 2.3. On rappelle que la condition d'amortissement qu'on utilise maintenant pour une énergie  $E > 0$  est :

$$\forall w \in \Omega_b(\{E\}), \exists T \geq 0, \int_0^T V_2(\bar{x}(t, w)) dt > 0. \quad (5.28)$$

**Théorème 5.22.** Soit  $E > 0$  une énergie vérifiant la condition (5.28). Alors pour tout  $\beta > 0$  il existe un voisinage  $I$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  et  $h_0 > 0$  tels que pour  $h \in ]0, h_0]$  l'opérateur  $H_h$  n'a pas de valeur propre dans l'ensemble

$$\mathbb{C}_{I, h\beta} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \in I, \operatorname{Im} z \geq h\beta\}.$$

En outre il existe une constante  $c \geq 0$  telle que pour  $h \in ]0, h_0]$  et  $z \in \mathbb{C}_{I, h\beta}$  on a :

$$\|(H_h - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \frac{c}{h}.$$

*Remarque 5.23.* On rappelle que pour un opérateur non-autoadjoint, l'absence de spectre ne donne pas automatiquement d'estimation pour la résolvante comme c'est le cas pour un opérateur autoadjoint. Aussi la deuxième partie du théorème est plus qu'une simple conséquence de l'absence de valeurs propres.

Comme annoncé, on suppose par l'absurde que le résultat est faux. Dans ce cas on peut construire une suite  $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $H^2(\mathbb{R}^n)$ , une suite  $(z_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  et une suite  $(h_m)_{m \in \mathbb{N}}$  de réels strictement positifs tels que si on note  $\lambda_m = \operatorname{Re} z_m$  et  $\beta_m = h_m^{-1} \operatorname{Im} z_m$  on a :

$$h_m \rightarrow 0, \quad \lambda_m \rightarrow E, \quad \beta_m \geq \beta, \quad \|v_m\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1 \quad \text{et} \quad \|(H_{h_m} - z_m)v_m\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = o_{m \rightarrow \infty}(h_m).$$

Tout d'abord, d'après (2.3), on remarque que quitte à retirer un nombre fini de termes on peut supposer que  $\beta_m \leq \|V_2\|_{\infty} + 1$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$ . Quitte à extraire encore une sous-suite, on peut donc supposer que  $\beta_m \rightarrow \tilde{\beta} \geq \beta$ . On considère alors une mesure semi-classique  $\mu$  pour la famille  $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$  comme donnée par la proposition 5.21 avec  $\delta = 0$ .

**Proposition 5.24.** La mesure totale de  $\mu$  est inférieure ou égale à 1.

*Démonstration.* Soit  $q \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{2n}, [0, 1])$ . D'après le théorème 3.10 on a :

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} q d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \operatorname{Op}_{h_m}^w(q)v_m, v_m \rangle \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \|q\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})} \|v_m\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq 1.$$

En prenant  $q$  égal à 1 sur  $B_{\mathbb{R}^{2n}}(k)$  pour  $k \in \mathbb{N}$  on obtient que  $\mu(B_{\mathbb{R}^{2n}}(k)) \leq 1$ . Et comme  $\mathbb{R}^{2n}$  est union dénombrable et croissante de telles boules, on a finalement :  $\mu(\mathbb{R}^{2n}) \leq 1$ .  $\square$

**Proposition 5.25.** La mesure  $\mu$  est non-nulle.

*Démonstration.* Comme  $V_2$  tend vers 0 à l'infini, il existe  $R \geq 0$  tel que  $V_2(x) \geq -\frac{\beta}{2}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $|x| \geq R$ . Soit alors  $\chi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n, [0, 1])$  une fonction égale à 1 sur  $B_R$ . On a :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} (V_2(x) + \beta_m)\chi(x) |v_m(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} (V_2(x) + \beta_m)(1 - \chi(x)) |v_m(x)|^2 dx \quad (5.29) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (V_2(x) + \beta_m) |v_m(x)|^2 dx = -h_m^{-1} \operatorname{Im} \langle (H_{h_m} - z_m)v_m, v_m \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ & \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

et d'autre part, par hypothèse sur  $v_m$  :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \chi(x) |v_m(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} (1 - \chi(x)) |v_m(x)|^2 dx = 1. \quad (5.30)$$

L'idée est que si le premier terme de (5.30) tend vers 0, alors c'est aussi le cas pour le premier terme de (5.29), et donc pour le deuxième terme de (5.29). Mais pour  $|x|$  et  $m$  grands, on

a  $V_2(x) + \beta_m \simeq \tilde{\beta} > 0$ , donc le deuxième terme de (5.30) tend aussi vers 0, ce qui n'est pas possible. Plus précisément, on écrit pour tout  $m \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (1 - \chi(x)) |v_m(x)|^2 dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (V_2(x) + \beta_m)(1 - \chi(x)) |v_m(x)|^2 dx \\ &\leq - \int_{\mathbb{R}^n} (V_2(x) + \beta_m)\chi(x) |v_m(x)|^2 dx + o_{m \rightarrow \infty}(1) \\ &\leq \|V_2\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} \chi(x) |v_m(x)|^2 dx + o_{m \rightarrow \infty}(1). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \|V_2\|_\infty + \frac{\beta}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^n} \chi(x) |v_m(x)|^2 dx \geq \frac{\beta}{2},$$

et donc que

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} \chi(x) d\mu(x, \xi) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \chi(x) |v_m(x)|^2 dx \neq 0.$$

□

On montre maintenant que la mesure  $\mu$  est en fait nulle sur  $\mathbb{R}^{2n}$ .

**Proposition 5.26.** *La mesure  $\mu$  est nulle sur  $\Omega_\infty^-(\{E\})$ .*

*Démonstration.* Soit  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, [0, 1])$  à support dans l'ouvert  $\Omega_\infty^-(\mathbb{R}_+^*)$ . Il existe  $T \geq 0$  tel que pour  $w \in \text{supp } q$  et  $s \geq T$  on a :  $V_2(\bar{x}(-s, w)) + \beta \geq \frac{\beta}{2}$ . On note

$$C = \sup_{\text{supp } q} \exp \left( -2 \int_0^T (V_2 + \beta) \circ \phi^{-s} ds \right).$$

D'après (5.27) et le fait que  $\mu(\mathbb{R}^{2n}) \leq 1$ , on a pour tout  $t \geq T$  :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbb{R}^{2n}} q d\mu = \int_{\mathbb{R}^{2n}} (q \circ \phi^t) \exp \left( -2 \int_0^t (V_2 + \beta) \circ \phi^{t-s} ds \right) d\mu \\ &\leq \sup_{\phi^{-t}(\text{supp } q)} \exp \left( -2 \int_0^t (V_2 + \beta) \circ \phi^{t-s} ds \right) \\ &\leq \sup_{\text{supp } q} \exp \left( -2 \int_0^t (V_2 + \beta) \circ \phi^{-s} ds \right) \\ &\leq C \sup_{\text{supp } q} \exp \left( -2 \int_T^t (V_2 + \beta) \circ \phi^{-s} ds \right) \\ &\leq C \sup_{\text{supp } q} \exp(-(t-T)\beta) \\ &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Cela signifie que l'intégrale de toute fonction à support compact dans l'ouvert  $\Omega_\infty^-(\mathbb{R}_+^*)$  est nulle, et donc que  $\mu$  est nulle sur  $\Omega_\infty^-(\mathbb{R}_+^*)$ . □

**Proposition 5.27.** *La mesure  $\mu$  est nulle sur  $\Omega_b^-(\{E\})$  et donc sur  $\mathbb{R}^{2n}$ .*

*Démonstration.* La démonstration suit celle de la proposition précédente. On considère  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, [0, 1])$ . Comme on sait déjà que la mesure  $\mu$  est nulle hors de  $\Omega_b^-(\{E\})$  on a pour tout  $t \geq 0$  :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbb{R}^{2n}} q d\mu = \int_{\mathbb{R}^{2n}} (q \circ \phi^t) \exp \left( -2 \int_0^t (V_2 + \beta) \circ \phi^{t-s} ds \right) d\mu \\ &\leq \sup_{\Omega_b^-(\{E\}) \cap \text{supp } q} \exp \left( -2 \int_0^t (V_2 + \beta) \circ \phi^{t-s} ds \right). \end{aligned}$$

On en déduit que l'intégrale de  $q$  est nulle grâce à la proposition 3.40. □



On a ainsi obtenu la contradiction voulue et donc démontré le théorème 5.22. On se rend compte que pour la démonstration précédente, l'hypothèse (5.28) est plus forte que nécessaire puisqu'on ne s'est pas servi de l'amortissement dû au fait que  $\text{Im } z_m \geq h_m \beta$ . Ainsi on vérifie qu'on a en fait le résultat suivant :

**Corollaire 5.28.** *Soient  $E > 0$  et  $\beta > 0$  tels que*

$$\forall w \in \Omega_b(\{E\}), \exists T \geq 0, \int_0^T (V_2(\bar{x}(-s, w)) + \beta) ds > 0.$$

*Alors il existe un voisinage  $I$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  et  $h_0 > 0$  tels que pour  $h \in ]0, h_0]$  l'opérateur  $H_h$  n'a pas de valeur propre dans  $\mathbb{C}_{I, h\beta}$ . En outre il existe une constante  $c \geq 0$  telle que pour  $h \in ]0, h_0]$  et  $z \in \mathbb{C}_{I, h\beta}$  on a :*

$$\|(H_h - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \frac{c}{h}.$$

On a jusqu'à présent étudié la résolvante d'opérateurs dissipatifs sur le demi-plan supérieur. La raison est très simple : sur le demi-plan supérieur les choses se passent à peu près bien, voire pour certains aspects mieux que dans le cas autoadjoint, mais rien de ce qu'on a fait n'était valable sur le demi-plan inférieur. En autorisant la partie imaginaire à avoir un signe variable, on a en partie rétabli la symétrie du problème par rapport à l'axe réel. Ce n'est pas tout à fait le cas, l'hypothèse (5.28) n'est bien sûr pas symétrique, mais pour une énergie non-captive le problème ne se pose plus et on obtient le résultat suivant :

**Corollaire 5.29.** *Soient  $E > 0$  une énergie non captive et  $\beta > 0$ . Alors il existe un voisinage  $I$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  et  $h_0 > 0$  tels que pour  $h \in ]0, h_0]$  l'opérateur  $H_h$  n'a pas de valeur propre  $z$  telle que  $\text{Re } z \in I$  et  $|\text{Im } z| \geq h\beta$ . En outre il existe une constante  $c \geq 0$  telle que pour  $h \in ]0, h_0]$  on a :*

$$\sup_{\substack{\text{Re } z \in I \\ |\text{Im } z| \geq h\beta}} \|(H_h - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \frac{c}{h}.$$

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer le théorème 5.22 à la fois à l'opérateur  $H_h$  et à son adjoint  $H_h^*$ .  $\square$

### 5.2.3 Construction d'une fonction de fuite bornée

On suppose dans ce paragraphe que  $\delta > \frac{1}{2}$ . On appelle habituellement fonction de fuite une application qui croît le long du flot hamiltonien  $\phi^t$ . Plus précisément, une fonction de fuite est une fonction  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$  telle que pour tout  $w \in p^{-1}(J)$  (où  $J$  est un certain intervalle de  $\mathbb{R}_+^*$ ) :

$$\left. \frac{d}{dt} (f \circ \phi^t)(w) \right|_{t=0} = \{p, f\}(w) \geq c_0 > 0.$$

Une telle fonction a été construite dans [GM88] pour montrer l'estimation de la résolvante par la méthode de Mourre, et on a repris cette construction pour la démonstration du théorème 4.36. En effet, une telle minoration donne, *via* le calcul pseudo-différentiel et l'inégalité de Gårding, une minoration sur le commutateur de  $H_1^h$  avec  $\text{Op}_h^w(f)$ . Le problème est qu'une telle fonction croît nécessairement comme  $x$  dans la zone sortante. Or pour le raisonnement que l'on va faire ici, on aura besoin que l'opérateur  $\text{Op}_h^w(f)$  soit borné. Th. Jecko a l'idée dans [Jec04] d'introduire une fonction de fuite en un sens plus faible, à savoir

$$\{p, f\}(x, \xi) \geq c_0 \langle x \rangle^{-2\delta},$$

ce qui s'avère suffisant pour son propos. En outre, puisque  $2\delta > 1$  il est raisonnable qu'une fonction  $f$  vérifiant une telle condition puisse être bornée. Plutôt que d'avoir à utiliser une

inégalité de Gårding dans les espaces à poids, on propose la construction d'une autre fonction de fuite, pour laquelle on aura

$$\{p, f\}(x, \xi) = (1 - \chi(x))\tilde{\chi}(p(x, \xi)) \langle x \rangle^{-2\delta},$$

où  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  est à déterminer et  $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  est égale à 1 au voisinage de  $E > 0$  (l'intérêt de la construction proposée dans [Jec04] est de s'adapter au cas matriciel).

**Proposition 5.30.** *Soit  $E > 0$ . Alors il existe  $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ ,  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, [0, 1])$  et  $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$  égale à 1 au voisinage de  $E$  telles que :*

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \{p, f\}(x, \xi) = (1 - \chi(x))\tilde{\chi}(p(x, \xi)) \langle x \rangle^{-2\delta}.$$

On note  $J = ]\frac{E}{2}, 2E[$  et on considère  $\sigma \in ]0, \frac{1}{2}[$ , de sorte que la condition de la proposition 3.33 est vérifiée. Soient  $\mathcal{R}$  et  $\tilde{\mathcal{R}}$  donnés par la proposition 3.33. On note :

$$\mathcal{Z}_{J, \pm} = \mathcal{Z}_\pm \left( \tilde{\mathcal{R}}, 0, \mp \sigma \right) \cap p^{-1}(J).$$

**Proposition 5.31.** *Si  $\tilde{\mathcal{R}}$  a été choisi assez grand, alors pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  tels que  $|\alpha| + |\beta| \geq 1$  il existe une constante  $c_{\alpha, \beta}$  telle que pour tous  $t \geq 0$  et  $(x, \xi) \in \mathcal{Z}_{J, \pm}$  on a*

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \phi^{\pm t}(x, \xi) \right| \leq c_{\alpha, \beta} \langle t \rangle. \quad (5.31)$$

On sait d'après le lemme 3.21 que les dérivées du flot  $\phi^t$  peuvent être exponentiellement croissantes par rapport au temps. Le but de cette proposition est de voir que si on ne regarde que le flot loin de l'origine, c'est-à-dire où l'influence de l'indice de réfraction  $V_1$  est faible, alors on doit retrouver une croissance en  $O(t)$  valable pour les trajectoires du flot libre  $(x, \xi) \mapsto (x + 2t\xi, \xi)$ .

*Démonstration.* **1.** On montre le cas où  $(x, \xi) \in \mathcal{Z}_{J, +}$ , sachant que le cas  $(x, \xi) \in \mathcal{Z}_{J, -}$  est analogue. On note

$$A(t, x, \xi) = \begin{pmatrix} J_x \bar{x}(t, x, \xi) & J_\xi \bar{x}(t, x, \xi) \\ J_x \bar{\xi}(t, x, \xi) & J_\xi \bar{\xi}(t, x, \xi) \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R}),$$

et on suppose par l'absurde que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\|A(t)\|_{L^\infty(\mathcal{Z}_{J, +}, M_{2n}(\mathbb{R}))}}{t} = +\infty.$$

Si on note

$$B(t, x, \xi) = \begin{pmatrix} 0 & 2I_n \\ -\text{Hess } V_1(\bar{x}(t, x, \xi)) & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R}),$$

alors en dérivant par rapport à  $x$  puis par rapport à  $\xi$  le système (3.12), on obtient

$$\partial_t A(t, x, \xi) = B(t, x, \xi) \cdot A(t, x, \xi)$$

(c'est ce qui est utilisé pour la démonstration du lemme 3.21), et par suite :

$$\partial_t^2 A(t, x, \xi) = \partial_t B(t, x, \xi) \cdot A(t, x, \xi) + B(t, x, \xi)^2 \cdot A(t, x, \xi) =: C(t, x, \xi) \cdot A(t, x, \xi)$$

D'après la proposition 3.33, il existe  $c_0 > 0$  tel que pour  $(x, \xi) \in \mathcal{Z}_{J, +}$  et  $t \geq 0$  on a  $|\bar{x}(t, x, \xi)| \geq c_0(|x| + t)$ , donc

$$\|C(t, x, \xi)\| \leq \|\partial_t B(t, x, \xi)\| + \|B(t, x, \xi)^2\| \leq c(|x| + t)^{-2-\rho},$$

où  $c$  ne dépend ni de  $(x, \xi) \in \mathcal{Z}_{J,+}$ , ni de  $t \geq 0$ . Pour  $m \in \mathbb{N}$  on note :

$$t_m = \inf \left\{ t \geq 1 \mid \|A(t, x, \xi)\|_{L^\infty(\mathcal{Z}_{J,+}, M_{2n}(\mathbb{R}))} \geq mt \right\}.$$

D'après le lemme 3.21 les dérivées de  $\phi^t$  sont dans  $L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  uniformément pour  $t$  restant dans un compact de  $\mathbb{R}$ , ce qui implique que  $t_m \rightarrow +\infty$ . Par la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2, on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\|A(t_m)\|_{L^\infty(\mathcal{Z}_{J,+}, M_{2n}(\mathbb{R}))}}{t_m} &\leq \frac{\|A(0)\|_{L^\infty(\mathcal{Z}_{J,+}, M_{2n}(\mathbb{R}))}}{t_m} + \|\partial_t A(0)\|_{L^\infty(\mathcal{Z}_{J,+}, M_{2n}(\mathbb{R}))} \\ &\quad + \frac{1}{t_m} \int_0^{t_m} (t_m - s) c (\tilde{\mathcal{R}} + s)^{-2-\rho} \|A(s)\|_{L^\infty(\mathcal{Z}_{J,+}, M_{2n}(\mathbb{R}))} ds \\ &\leq c + c \int_0^{t_m} \frac{t_m - s}{t_m} (\tilde{\mathcal{R}} + s)^{-2-\rho} s m ds \\ &\leq c + cm \int_0^{t_m} (\tilde{\mathcal{R}} + s)^{-1-\rho} ds \\ &\leq c + cm \tilde{\mathcal{R}}^{-\rho}, \end{aligned}$$

où  $c$  ne dépend ni de  $m \in \mathbb{N}$  ni du choix de  $\tilde{\mathcal{R}}$ . On peut supposer avoir choisi  $\tilde{\mathcal{R}}$  assez grand pour que  $c\tilde{\mathcal{R}}^{-\rho} \leq \frac{1}{4}$ . Pour  $m$  assez grand, cette quantité est alors inférieure à  $\frac{m}{2}$ , ce qui est absurde. On a donc démontré le cas  $|\alpha| + |\beta| = 1$ .

**2.** On montre maintenant le résultat par récurrence sur  $|\alpha| + |\beta|$ . On suppose donc le résultat acquis pour tous  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $1 \leq |\alpha| + |\beta| \leq K - 1$ , où  $K \geq 2$ , et on considère  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  tels que  $|\alpha| + |\beta| = K$ . Pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , en appliquant l'opérateur  $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta$  au système (3.12) on obtient

$$\begin{cases} \partial_t \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \bar{x}_j(t, x, \xi) = 2 \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \bar{\xi}_j(t, x, \xi) \\ \partial_t \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \bar{\xi}_j(t, x, \xi) = - \sum_{l=1}^n \partial_{x_j} \partial_{x_l} V_1(\bar{x}(t, x, \xi)) \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \bar{x}_l(t, x, \xi) + b_{\alpha, \beta, j}(t, x, \xi), \end{cases}$$

où  $b_{\alpha, \beta, j}$  est une somme de termes de la forme

$$- \partial_{x_j} \partial^\nu V_1(\bar{x}(t, x, \xi)) \prod_{k=1}^{|\nu|} \partial_x^{\alpha_k} \partial_\xi^{\beta_k} \bar{x}_{j_k}(t, x, \xi)$$

avec  $|\nu| \geq 2$ ,  $\sum \alpha_k = \alpha$ ,  $\sum \beta_k = \beta$  et pour tout  $k \in \llbracket 1, |\nu| \rrbracket$  :  $j_k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $|\alpha_k| + |\beta_k| \geq 1$ . En particulier pour tout  $k$  on a  $|\alpha_k| + |\beta_k| < |\alpha| + |\beta|$ , donc par hypothèse de récurrence chaque terme est estimé par

$$\left| \partial_{x_j} \partial^\nu V_1(\bar{x}(t, x, \xi)) \prod_{k=1}^{|\nu|} \partial_x^{\alpha_k} \partial_\xi^{\beta_k} \bar{x}_{j_k}(t, x, \xi) \right| \leq c(|x| + t)^{-1-\rho-|\nu|} \langle t \rangle^\nu \leq c(|x| + t)^{-1-\rho}$$

où  $c$  ne dépend ni de  $t \geq 0$  ni de  $(x, \xi) \in \mathcal{Z}_{J,+}$ , et donc :

$$|b_{\alpha, \beta, j}(t, x, \xi)| \leq c(|x| + t)^{-1-\rho}.$$

On a aussi

$$|\partial_t b_{\alpha, \beta, j}(t, x, \xi)| \leq c(|x| + t)^{-1-\rho},$$

donc si on note

$$A_{\alpha, \beta}(t, x, \xi) = \begin{pmatrix} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \bar{x}_1(t, x, \xi) \\ \vdots \\ \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \bar{x}_n(t, x, \xi) \\ \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \bar{\xi}_1(t, x, \xi) \\ \vdots \\ \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \bar{\xi}_n(t, x, \xi) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} \quad \text{et} \quad D_{\alpha, \beta}(t, x, \xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{\alpha, \beta, 1}(t, x, \xi) \\ \vdots \\ b_{\alpha, \beta, n}(t, x, \xi) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n},$$

on a

$$\partial_t A_{\alpha,\beta}(t, x, \xi) = B(t, x, \xi) \cdot A_{\alpha,\beta}(t, x, \xi) + D_{\alpha,\beta}(t, x, \xi)$$

et

$$\partial_t^2 A_{\alpha,\beta}(t, x, \xi) = C(t, x, \xi) \cdot A_{\alpha,\beta}(t, x, \xi) + B(t, x, \xi) \cdot D_{\alpha,\beta}(t, x, \xi) + \partial_t D_{\alpha,\beta}(t, x, \xi).$$

On peut alors conclure de façon analogue à ce qu'on a fait pour le cas  $|\alpha| + |\beta| = 1$ .  $\square$

L'estimation en  $O(t)$  est satisfaisante pour les dérivées de  $\bar{x}$  puisque cela correspond à ce qu'on a dans le cas libre. Mais pour  $\bar{\xi}$  on peut améliorer ce résultat :

**Corollaire 5.32.** *Pour tous  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  il existe une constante  $c_{\alpha,\beta} \geq 0$  telle que pour  $t \geq 0$  et  $(x, \xi) \in \mathcal{Z}_{J,\pm}$  on a :*

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \bar{\xi}(\pm t, x, \xi) \right| \leq c_{\alpha,\beta}.$$

*Démonstration.* Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ . On a vu dans la démonstration précédente que

$$\partial_t \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \bar{\xi}_j(\pm t, x, \xi) = \mp \sum_{l=1}^n \partial_{x_j} \partial_{x_l} V_1(\bar{x}(\pm t, x, \xi)) \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \bar{x}_l(\pm t, x, \xi) + O_{t \rightarrow +\infty}(t^{-1-\rho}),$$

où le reste est uniforme en  $(x, \xi) \in \mathcal{Z}_{J,\pm}$ . Avec les estimations obtenues sur les dérivées de  $\bar{x}$  on obtient alors qu'il existe une constante  $c_{\alpha,\beta}$  telle que pour tous  $(x, \xi) \in \mathcal{Z}_{J,\pm}$  et  $t \geq 0$  on a :

$$\left| \partial_t \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \bar{\xi}_j(\pm t, x, \xi) \right| \leq c_{\alpha,\beta} \langle t \rangle^{-1-\rho}.$$

Il ne reste plus qu'à intégrer par rapport au temps pour conclure.  $\square$

**Corollaire 5.33.** *Pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  il existe une constante  $c_{\alpha,\beta} \geq 0$  telle que pour tous  $t \geq 0$  et  $(x, \xi) \in \mathcal{Z}_{J,\pm}$  on a :*

$$\left| \frac{\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \bar{x}(\pm t, x, \xi) \cdot \bar{\xi}(\pm t, x, \xi)}{|\bar{x}(\pm t, x, \xi)| |\bar{\xi}(\pm t, x, \xi)|} \right| \leq c_{\alpha,\beta}.$$

**Corollaire 5.34.** *Soit  $\delta > \frac{1}{2}$ . Alors pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  il existe une constante  $c_{\alpha,\beta} \geq 0$  telle que pour tous  $t \geq 0$  et  $(x, \xi) \in \mathcal{Z}_{J,\pm}$  on a :*

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \langle \bar{x}(\pm t, x, \xi) \rangle^{-2\delta} \right| \leq c_{\alpha,\beta} (|x| + t)^{-2\delta}.$$

*Démonstration.* Soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ . La dérivée  $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \langle \bar{x}(\pm t, x, \xi) \rangle^{-2\delta}$  est une somme de termes de la forme

$$c_K(\bar{x}(\pm t, x, \xi)) \langle \bar{x}(\pm t, x, \xi) \rangle^{-2\delta-K} \prod_{k=1}^K \partial_x^{\alpha_k} \partial_\xi^{\beta_k} \bar{x}(\pm t, x, \xi)$$

où  $c_K(x) = \langle x \rangle^{2\delta+K} \frac{d^K}{dx^K} \langle x \rangle^{-2\delta}$  est une fonction bornée,  $\alpha = \sum_{k=1}^K \alpha_k$  et  $\beta = \sum_{k=1}^K \beta_k$ .  $\square$

On peut maintenant démontrer la proposition 5.30 :

*Démonstration.* Soit  $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  à support dans  $J$  et égale à 1 au voisinage de  $E$ . Soient  $\chi_+$  et  $\chi_-$  dans  $C^\infty(\mathbb{R})$  telle que  $\text{supp } \chi_+ \subset ]-\sigma, +\infty[$ ,  $\text{supp } \chi_- \subset ]-\infty, \sigma[$  et  $\chi_+ + \chi_- = 1$  sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, [0, 1])$  égale à 1 au voisinage de  $\overline{B_{\mathcal{R}}}$ . On note alors

$$g_\pm : (x, \xi) \mapsto \chi_\pm \left( \hat{x} \cdot \hat{\xi} \right) (1 - \chi(x)) \tilde{\chi}(p(x, \xi)) \langle x \rangle^{-2\delta},$$

puis, pour  $w \in \mathbb{R}^{2n}$  :

$$f_\pm(w) = \pm \int_0^{+\infty} g_\pm(\phi^{\mp t}(w)) dt.$$

Soient  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$  et  $\mathcal{V} \subset B_x(2|x|)$  un voisinage de  $(x, \xi)$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$ . Il existe  $T_w \geq 0$  tel que pour tous  $w \in \mathcal{Z}_{J, \pm}$  et  $t \geq T$  on a  $|\bar{x}(\pm t, w)| \geq 2|x|$ . Cela assure que

$$\forall v \in \mathcal{V}, \forall t \geq T, \quad g_{\pm}(\phi^{\mp t}(v)) = 0.$$

Les théorèmes de régularité sous l'intégrale assurent donc que les fonctions  $f_+$  et  $f_-$  sont de classe  $C^\infty$  au voisinage de  $w$ . Et donc sur  $\mathbb{R}^{2n}$ . En outre leurs dérivées selon le flot  $\phi^t$  sont données par

$$\{p, f_{\pm}\} = \pm \int_0^{+\infty} \{p, g_{\pm} \circ \phi^{\mp t}\} dt = g_{\pm}.$$

On vérifie maintenant que toutes les dérivées de  $f_{\pm}$  sont bornées. Pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  il existe d'après les résultats précédents une constante  $c_{\alpha, \beta}$  telle que pour  $(x, \xi) \in \mathcal{Z}_{J, \pm}$  et  $t \geq 0$  on a

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (g_{\pm} \circ \phi^{\pm t})(x, \xi) \right| \leq c_{\alpha, \beta} (|x| + t)^{-2\delta}.$$

Soit alors  $w \in \mathbb{R}^{2n}$  tel qu'il existe un temps  $t \geq 0$  pour lequel  $\phi^{\mp t}(w) \in \mathcal{Z}_{J, \pm}$  (si ce n'est pas le cas, les dérivées de  $f_{\pm}$  sont nulles en  $w$ ). On note  $t_0$  le suprémum des tels temps  $t$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta f_{\pm}(w) \right| &\leq \int_0^{t_0} \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta g_{\pm}(\phi^{\mp t} w) \right| dt = \int_0^{t_0} \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta g_{\pm}(\phi^{\pm t}(\phi^{\mp t_0}(w))) \right| dt \\ &\leq c_{\alpha, \beta} \int_0^{+\infty} (\tilde{\mathcal{R}} + t)^{-2\delta} dt. \end{aligned}$$

Les fonctions  $f_+$  et  $f_-$  sont donc dans  $C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ . Il ne reste alors plus qu'à noter  $f = f_+ + f_-$  pour achever la démonstration.  $\square$

## 5.2.4 Estimations de la résolvante près de l'axe réel dans le cas non-dissipatif

On montre maintenant une estimation uniforme de la résolvante près de l'axe réel, analogue à celle du théorème 4.36, dans le cas où le coefficient d'absorption n'est pas nécessairement partout positif. Pour ce paragraphe on aura besoin d'une hypothèse un peu plus forte sur la partie imaginaire  $V_2$  :

**Théorème 5.35.** *On suppose que  $V_2$  est dans  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ , est positif en dehors d'un compact et de courte portée. Soient  $E > 0$  vérifiant la condition d'amortissement faible (5.28) et  $\delta > \frac{1}{2}$ . Alors il existe un voisinage  $I$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $h_0 > 0$  et  $c \geq 0$  tels que pour  $h \in ]0, h_0]$  l'opérateur  $H_h$  n'a pas de valeurs propres dans  $\mathbb{C}_{I, +}$  et pour  $z \in \mathbb{C}_{I, +}$  on a :*

$$\left\| \langle x \rangle^{-\delta} (H_h - z)^{-1} \langle x \rangle^{-\delta} \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \frac{c}{h}.$$

On peut considérer des potentiels  $W_2$  et  $W_3$  tels que  $V_2 = W_2 + W_3$ ,  $W_2$  est positif et vaut 1 au voisinage de (la projection selon la première variable de)  $\Omega_b(\{E\})$ , et  $W_3 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . On notera alors :

$$H_h^2 = -h^2 \Delta + V_1(x) - ihW_2(x).$$

L'opérateur  $H_h^2$  a donc un potentiel dont la partie imaginaire est négative et vérifie l'hypothèse (4.40). En particulier la résolvante  $(H_h^2 - z)^{-1}$  est bien définie pour tout  $z \in \mathbb{C}_+$ .

*Remarque 5.36.* D'après le théorème 4.14, il existe  $h_0 > 0$ , un voisinage  $I$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  et une constante  $C > 0$  telle que pour  $h \in ]0, h_0]$  et  $z \in \mathbb{C}_{I, +}$  on a

$$\left\| \langle x \rangle^{-\delta} (H_h^2 - z)^{-1} \langle x \rangle^{-\delta} \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \frac{C}{h}.$$

Supposons alors que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  on a

$$|W_3(x)| \leq \frac{1}{2C} \langle x \rangle^{-2\delta}. \quad (5.32)$$

Pour  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  on écrit

$$(H_h - z) = (H_h^2 - z)(1 - ih(H_h^2 - z)^{-1}W_3).$$

Soient  $h \in ]0, h_0]$  et  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$ . Si  $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$  est tel que  $H_h u = zu$  alors par injectivité de  $(H_h^2 - z)$  on a  $u = ih(H_h^2 - z)^{-1}W_3 u$  et donc

$$\begin{aligned} \left\| \langle x \rangle^{-\delta} u \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= h \left\| \langle x \rangle^{-\delta} (H_h^2 - z)^{-1} \langle x \rangle^{-\delta} \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \left\| \langle x \rangle^{2\delta} W_3 \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \left\| \langle x \rangle^{-\delta} u \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \frac{1}{2} \left\| \langle x \rangle^{-\delta} u \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

ce qui implique que  $u = 0$ . Ainsi  $(H_h - z)$  est inversible et

$$\begin{aligned} &\left\| \langle x \rangle^{-\delta} (H_h - z)^{-1} \langle x \rangle^{-\delta} \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \\ &\leq \left\| \left( 1 - ih \langle x \rangle^{-\delta} (H_h^2 - z)^{-1} W_3 \langle x \rangle^{\delta} \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \left\| \langle x \rangle^{-\delta} (H_h^2 - z)^{-1} \langle x \rangle^{-\delta} \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \\ &\leq \frac{2C}{h}. \end{aligned}$$

L'intérêt des théorèmes 5.22 et 5.35 est qu'on n'a pas fait d'hypothèse sur la taille de la partie négative  $W_3$ . En particulier on n'a pas besoin d'une hypothèse aussi restrictive que (5.32).

Il suffit de montrer le théorème 5.35 pour  $\delta \in ]\frac{1}{2}, \frac{1+\rho}{2}[$ . On suppose qu'on peut trouver une suite  $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $H^2(\mathbb{R}^n)$ , une suite  $(z_m)_{m \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathbb{C}$  et une suite  $(h_m)_{m \in \mathbb{N}}$  de réels strictement positifs tels que si on note  $\lambda_m = \operatorname{Re} z_m$  et  $\beta_m = h_m^{-1} \operatorname{Im} z_m$  on a :

$$h_m \rightarrow 0, \quad \lambda_m \rightarrow E, \quad 0 < \beta_m \rightarrow 0, \quad \|v_m\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)} = 1$$

et

$$\|(H_{h_m} - z_m)v_m\|_{L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)} = \underset{m \rightarrow \infty}{o}(h_m).$$

On remarque en particulier qu'on demande à chaque fonction  $v_m$  d'être dans  $H^2(\mathbb{R}^n)$  mais qu'on ne demande pas de contrôle sur la norme  $H^2(\mathbb{R}^n)$  uniforme en  $m$ . D'autre part, on peut supposer que  $\beta_m \rightarrow 0$  grâce au théorème 5.22. En effet, pour nier le résultat annoncé, on doit autoriser n'importe quel réel strictement positif pour  $\beta_m$ , mais si on peut extraire une sous-suite  $(\beta_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$  telle que  $\beta_{m_k} \geq \beta > 0$ , on obtient directement une contradiction en appliquant le raisonnement du paragraphe 5.2.2.

On va montrer qu'une telle suite ne peut exister. En considérant une éventuelle famille de vecteurs propres (donc dans  $H^2(\mathbb{R}^n)$ ), cela prouvera déjà que l'opérateur  $H_h$  n'admet pas de valeur propre de partie réelle dans  $I$  et de partie imaginaire positive et proche de 0. Avec le théorème 5.22, on en déduit que  $H_h$  n'a en fait pas de valeur propre dans  $\mathbb{C}_{I,+}$ . Une fois ceci acquis, l'opérateur  $\langle x \rangle^{-\delta} (H_{h_m} - z_m)^{-1} \langle x \rangle^{-\delta}$  sera bien défini comme opérateur de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  dans  $H^2(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$ . Une deuxième application du raisonnement montrera alors l'estimation du théorème 5.35.

On commence par appliquer la proposition 5.21 avec  $\delta$  comme donné par l'énoncé du théorème. On obtient une mesure semi-classique  $\mu$  pour la famille  $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$ , à support sur  $p^{-1}(\{E\})$ . Il faut alors montrer que cette mesure est à la fois nulle et non-nulle.

**Proposition 5.37.** *La mesure  $\mu$  est nulle sur  $\Omega_\infty^-(\{E\})$ .*

*Démonstration.* Soit  $J \subset ]E/2, 2E[$  un voisinage de  $E$  tel que l'hypothèse (4.40) est vérifiée pour tout  $\lambda \in J$ . On commence par vérifier que la mesure  $\mu$  est nulle sur une zone entrante  $\mathcal{Z}_-(R, 0, -1/2) \cap p^{-1}(J)$  pour  $R$  assez grand. Soient  $R_1$  tel que  $\text{supp } W_3 \subset B_{R_1}$ ,  $d = \sqrt{E/3}$  et  $\sigma = \frac{1}{2}$ . Soient  $R$  donné par le théorème 5.6 appliqué pour l'opérateur de Schrödinger dissipatif  $H_h^2$ , puis  $\omega_- \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à support dans  $\mathcal{Z}_-(R, d, -1/2)$ . Quitte à augmenter  $R$ , on peut supposer que c'est un rayon de fuite pour  $J$ , de sorte que pour  $(x, \xi) \in p^{-1}(J)$  avec  $|x| \geq R$  on a  $|\xi| > d$ . Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , l'opérateur  $(H_{h_m}^2 - z_m)$  est inversible, donc on peut écrire :

$$\begin{aligned} & \text{Op}_{h_m}^w(\omega_-)v_m \\ &= \text{Op}_{h_m}^w(\omega_-)(H_{h_m}^2 - z_m)^{-1}(H_{h_m}^2 - z_m)v_m \\ &= \text{Op}_{h_m}^w(\omega_-)(H_{h_m}^2 - z_m)^{-1}(H_{h_m} - z_m)v_m + ih_m \text{Op}_{h_m}^w(\omega_-)(H_{h_m}^2 - z_m)^{-1}W_3v_m. \end{aligned}$$

Pour  $m$  assez grand (c'est-à-dire tel que  $z_m \in \mathbb{C}_{J,+}$ ), en utilisant les estimations uniformes et dans la zone entrante pour la résolvante de l'opérateur  $H_{h_m}^2$  on obtient :

$$\begin{aligned} & \left\| \text{Op}_{h_m}^w(\omega_-)v_m \right\|_{L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)} \tag{5.33} \\ &= \left\| \langle x \rangle^\delta \text{Op}_h^w(\omega_-) \langle x \rangle^\delta \right\| \left\| \langle x \rangle^{-\delta} (H_{h_m}^2 - z_m)^{-1} \langle x \rangle^{-\delta} \right\| \left\| (H_{h_m} - z_m)v_m \right\|_{L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)} \\ &\quad + h_m \left\| \langle x \rangle^\delta \text{Op}_h^w(\omega_-)(H_{h_m}^2 - z_m)^{-1}W_3 \langle x \rangle^\delta \right\| \left\| v_m \right\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)} \\ &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\langle \text{Op}_{h_m}^w(\omega_-)v_m, v_m \rangle \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

et donc que  $\mu$  est nulle sur  $\mathcal{Z}_-(R, d, -1/2)$ . Soit alors  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  à support dans  $\Omega_\infty^-(J)$ . Pour  $T$  assez grand, on a  $\phi^{-T}(\text{supp } q) \subset \mathcal{Z}_-(R, d, -1/2)$ . D'après la proposition 5.21, l'intégrale de  $q$  contre la mesure  $\mu$  est nulle, ce qui prouve que  $\mu$  est nulle sur  $\Omega_\infty^-(J)$ .  $\square$

**Proposition 5.38.** *La mesure  $\mu$  est nulle sur  $\Omega_b^-(\{E\})$ .*

*Démonstration.* Cette proposition se montre de la même façon que la proposition 5.27 en utilisant l'hypothèse (5.28). Il faut tout de même faire attention au fait que la mesure totale de  $\mu$  n'est plus nécessairement finie. Soit  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, [0, 1])$ . On sait que la mesure  $\mu$  est à support sur  $\Omega_b^-(\{E\})$ , donc par la proposition 5.21 on peut écrire :

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} q d\mu = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \mathbf{1}_{\Omega_b^-(\{E\})}(q \circ \phi^t) \exp\left(-2 \int_0^t V_2 \circ \phi^{t-s} ds\right) d\mu.$$

Comme l'ensemble

$$\bigcup_{t \geq 0} \phi^{-t}(\text{supp } q \cap \Omega_b^-(\{E\}))$$

est borné, on peut trouver une constante  $C \geq 0$  telle que pour tout  $t \geq 0$  :

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} q d\mu \leq C \sup_{\text{supp } q \cap \Omega_b^-(\{E\})} \exp\left(-2 \int_0^t V_2 \circ \phi^{-s} ds\right).$$

On conclut alors comme pour les propositions 5.26 et 5.27.  $\square$

A ce stade on a donc démontré que la mesure  $\mu$  est nulle, ce qui signifie que pour toute fonction  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  on a

$$\langle \text{Op}_{h_m}^w(q)v_m, v_m \rangle \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \tag{5.34}$$

Pour obtenir la contradiction attendue, il faut encore montrer qu'elle n'est pas nulle. Pour cela, on aura besoin du fait que (5.34) est encore valable pour une classe de symboles plus large que  $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  :

**Proposition 5.39.** Soit  $a \in \mathcal{S}(\langle x \rangle^{-1-\rho})$ . Alors on a :

$$\langle \text{Op}_{h_m}^w(a)v_m, v_m \rangle \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

*Démonstration.* On note  $b(x, \xi) = \langle x \rangle^{2\delta} a(x, \xi) \in \mathcal{S}(\langle x \rangle^{2\delta-1-\rho})$  (on rappelle que  $2\delta < 1 + \rho$ ). Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, [0, 1])$  telle que  $|b(x, \xi)| \leq \varepsilon$  pour  $x, \xi \in \mathbb{R}^n$  tels que  $\chi(x) \neq 1$ . On a

$$\text{Op}_{h_m}^w(a) = \langle x \rangle^{-\delta} \text{Op}_{h_m}^w(b) \langle x \rangle^{-\delta} + h_m \text{Op}_{h_m}^w(r_m)$$

avec  $r_m \in \mathcal{S}(\langle x \rangle^{-2\delta})$  uniformément en  $m$ , donc :

$$\begin{aligned} & \langle \text{Op}_{h_m}^w(a)v_m, v_m \rangle \\ &= \langle \text{Op}_{h_m}^w(b) \langle x \rangle^{-\delta} v_m, \langle x \rangle^{-\delta} v_m \rangle + \underset{m \rightarrow \infty}{O}(h_m) \\ &= \langle \chi \text{Op}_{h_m}^w(b) \langle x \rangle^{-\delta} v_m, \langle x \rangle^{-\delta} v_m \rangle + \langle (1 - \chi) \text{Op}_{h_m}^w(b) \langle x \rangle^{-\delta} v_m, \langle x \rangle^{-\delta} v_m \rangle + \underset{m \rightarrow \infty}{O}(h_m). \end{aligned}$$

Le premier terme tend vers 0 du fait que  $\mu$  est nulle et pour le deuxième terme, on a d'après le théorème 3.10 :

$$\begin{aligned} \left| \langle (1 - \chi) \text{Op}_{h_m}^w(b) \langle x \rangle^{-\delta} v_m, \langle x \rangle^{-\delta} v_m \rangle \right| &\leq \| (1 - \chi) \text{Op}_{h_m}^w(b) \|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \\ &\leq \| (1 - \chi)b \|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2n})} + \underset{m \rightarrow \infty}{O}(\sqrt{h_m}) \\ &\leq \varepsilon + \underset{m \rightarrow \infty}{O}(\sqrt{h_m}). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $\varepsilon > 0$  on obtient

$$\left| \langle \text{Op}_{h_m}^w(a)v_m, v_m \rangle \right| \leq \varepsilon + \underset{m \rightarrow \infty}{o}(1),$$

ce qui permet de conclure.  $\square$

On montre maintenant que la mesure  $\mu$  est non nulle. La démonstration repose sur l'existence d'une fonction de fuite comme construite au paragraphe 5.2.3.

**Proposition 5.40.** La mesure  $\mu$  est non nulle.

*Démonstration.* 1. Soient  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ ,  $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$  et  $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$  donnés par la proposition 5.30. Pour  $m \in \mathbb{N}$  on a :

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \langle x \rangle^{-2\delta} v_m, v_m \rangle \\ &= \langle \langle x \rangle^{-2\delta} \chi(x)v_m, v_m \rangle + \langle \text{Op}_{h_m}^w(\langle x \rangle^{-2\delta} (1 - \chi(x))((1 - \tilde{\chi}) \circ p))v_m, v_m \rangle \\ &\quad + \langle \text{Op}_{h_m}^w(\langle x \rangle^{-2\delta} (1 - \chi(x))(\tilde{\chi} \circ p))v_m, v_m \rangle. \end{aligned}$$

D'après la proposition 5.21, si le premier terme du membre de droite tend vers 1, alors cela prouvera que la mesure  $\mu$  est non nulle. D'après le corollaire 5.3, le deuxième terme tend vers 0, il suffit donc de montrer que le dernier terme tend lui aussi vers 0.

2. D'après (3.9) on a

$$\frac{i}{h_m} [H_{h_m}^1, \text{Op}_{h_m}^w(f)] = \text{Op}_{h_m}^w(\{p, f\}) + h_m^2 \text{Op}_{h_m}^w(r_3(h_m)),$$

avec  $r_3(h) \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  uniformément en  $h \in ]0, 1]$ . Plus précisément, comme les dérivées d'ordre 3 de  $f$  sont bornées et les dérivées d'ordre 3 de  $p$  sont dans  $\mathcal{S}_{-1-\rho}(\mathbb{R}^{2n})$  (en fait dans



$\mathcal{S}_{-3-\rho}(\mathbb{R}^{2n})$ ), on a  $r_3(h) \in \mathcal{S}(\langle x \rangle^{-1-\rho})$  uniformément en  $h \in ]0, 1]$  et donc :

$$\begin{aligned} \left\langle \text{Op}_h^w((\tilde{\chi} \circ p)(1 - \chi(x)) \langle x \rangle^{-2\delta}) v_m, v_m \right\rangle &= \left\langle \text{Op}_{h_m}^w(\{p, f\}) v_m, v_m \right\rangle \\ &= \frac{i}{h_m} \left\langle [H_1^h, \text{Op}_{h_m}^w(f)] v_m, v_m \right\rangle + \underset{m \rightarrow \infty}{O}(h_m^2). \end{aligned}$$

Comme la fonction  $v_m$  est dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$  fixé on peut encore écrire :

$$\frac{i}{h_m} \left\langle [H_1^h, \text{Op}_{h_m}^w(f)] v_m, v_m \right\rangle = \frac{i}{h_m} \left\langle [H_1^h - \lambda_m, \text{Op}_{h_m}^w(f)] v_m, v_m \right\rangle.$$

D'après la proposition 5.39, comme  $f$  est dans  $C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  et que  $V_2$  est de courte portée on a :

$$\left\langle V_2 v_m, v_m \right\rangle \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \quad \text{et} \quad \left\langle V_2 \text{Op}_{h_m}^w(f) v_m, v_m \right\rangle \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Enfin, comme  $v_m \in H^2(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$  on a

$$\begin{aligned} \beta_m \|v_m\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \left\langle (V_2(x) + \beta_m) v_m, v_m \right\rangle + \underset{m \rightarrow \infty}{o}(1) \\ &= -h_m^{-1} \text{Im} \left\langle (H_{h_m} - z_m) v_m, v_m \right\rangle + \underset{m \rightarrow \infty}{o}(1), \end{aligned}$$

et on sait par hypothèse que cette dernière quantité tend vers 0 quand  $m$  tend vers  $+\infty$ , donc :

$$\beta_m \|v_m\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} &\left\langle \text{Op}_h^w((\tilde{\chi} \circ p)(1 - \chi(x)) \langle x \rangle^{-2\delta}) v_m, v_m \right\rangle \\ &= \frac{i}{h_m} \left\langle ((H_{h_m} - z_m)^* \text{Op}_{h_m}^w(f) - \text{Op}_{h_m}^w(f)(H_{h_m} - z_m)) v_m, v_m \right\rangle + \underset{m \rightarrow \infty}{o}(1) \\ &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration.  $\square$

Dans [Jec04], la fonction de fuite  $f$  est également utilisée pour montrer que la mesure  $\mu$  est nulle à l'infini et par suite, *via* l'équation de transport satisfaite par  $\mu$ , nulle partout (l'énergie est non-captive). Ici, on a eu besoin dans la preuve de la proposition 5.40 de savoir à l'avance que la mesure  $\mu$  était nulle. C'est pourquoi on a dû passer par les estimations d'Isozaki-Kitada pour montrer que la mesure  $\mu$  est nulle dans la zone entrante.

Comme dans le paragraphe précédent, on déduit de ce résultat un résultat analogue sur le demi-plan inférieur dans le cas d'une énergie non-captive.

**Corollaire 5.41.** *On suppose que  $V_2$  est à support compact. Soient  $E > 0$  une énergie non-captive et  $\delta > \frac{1}{2}$ . Alors il existe un voisinage  $I$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $h_0 > 0$  et  $c \geq 0$  tels que pour  $h \in ]0, h_0]$  l'opérateur  $H_h$  n'admet pas de valeur propre  $z$  telle que  $\text{Re } z \in I$  et  $\text{Im } z \neq 0$  et on a :*

$$\sup_{\substack{\text{Re } z \in I \\ \text{Im } z \neq 0}} \left\| \langle x \rangle^{-\delta} (H_h - z)^{-1} \langle x \rangle^{-\delta} \right\| \leq \frac{c}{h}.$$

## 5.2.5 Principe d'absorption limite

La méthode des mesures semi-classiques qu'on vient de présenter permet d'obtenir les estimations uniformes de la résolvante dans un cadre non-dissipatif. Par contre elle ne donne pas le principe d'absorption limite. Pour l'obtenir, on va utiliser les résultats de la section 2.3

pour chaque  $h \in ]0, h_0]$  fixé. Cela ne donnera un résultat aussi précis que celui du théorème 4.18 mais permettra tout de même de justifier l'existence de la limite

$$u_h = (H_h - (E + i0))^{-1} f_h \in L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)$$

pour  $f_h \in L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$ .

**Théorème 5.42.** *On suppose que  $V_2$  est dans  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ , est positif en dehors d'un compact et de courte portée. Soient  $E > 0$  vérifiant la condition d'amortissement faible (5.28) et  $\delta > \frac{1}{2}$ . Alors pour tous  $h \in ]0, h_0]$ ,  $f \in L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$  et  $\lambda \in I$  la limite*

$$(H_h - (\lambda + i0))^{-1} f = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} (H_h - (\lambda + i\mu))^{-1} f$$

existe dans  $L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)$  et est solution sortante pour l'équation  $(H_h - \lambda)u = f$  au sens de la définition 2.27. En outre il existe  $c \geq 0$  ne dépendant ni de  $h \in ]0, h_0]$ , ni de  $f \in L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$ , ni de  $\lambda \in I$  telle que

$$\|(H_h - (\lambda + i0))^{-1} f\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{c}{h} \|f\|_{L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)}.$$

*Démonstration.* On procède comme pour la proposition 2.40, mis à part que l'estimation dans  $L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)$  de la solution en fonction de la norme  $L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$  du terme source est donnée par le théorème 5.35 plutôt que la proposition 2.39, sachant que le corollaire 2.36 et la proposition 2.37 peuvent être appliqués avec un potentiel de partie imaginaire éventuellement non négative. L'estimation de taille  $O(h^{-1})$  pour la solution limite est obtenue par passage à la limite dans l'estimation du théorème 5.35.  $\square$

Enfin on vérifie que les résultats du théorème 5.6 sont encore valables dans ce cadre non dissipatif. Pour démontrer ce théorème on avait écrit la résolvante comme l'intégrale sur les temps positifs du propagateur, ce qui n'est plus possible ici. On obtient plutôt le résultat par un argument perturbatif analogue à ce qu'on a fait pour le calcul (5.33).

**Proposition 5.43.** *Les résultats du théorème 5.6 sont encore valables sous les hypothèses du théorème 5.42.*

*Démonstration.* On garde les notations  $W_2$ ,  $W_2$  et  $H_h^2$  introduites au paragraphe précédent.  $I$ ,  $R_1$ ,  $d$ ,  $d_1$ ,  $\sigma$  et  $\sigma_1$  sont comme donnés par le théorème 5.6. Quitte à augmenter  $R_1$ , on peut supposer que  $\text{supp } W_3 \subset B_{R_1}$ . Soit alors  $R$  donné par le théorème 5.6. Pour  $\delta > \frac{1}{2}$ ,  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$ ,  $\omega_+ \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2n})$  à support dans  $\mathcal{Z}_+(R, d, \sigma)$  et  $\omega \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2n})$  à support hors de  $\mathcal{Z}_+(R_1, d_1, \sigma_1)$  on a dans  $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$  :

$$\begin{aligned} & \langle x \rangle^{-\delta} \text{Op}_h(\omega)(H_h - z)^{-1} \text{Op}_h(\omega_+) \langle x \rangle^{-\delta} \\ &= \langle x \rangle^{-\delta} \text{Op}_h(\omega)(H_h^2 - z)^{-1} \text{Op}_h(\omega_+) \langle x \rangle^{-\delta} \\ & \quad + ih \langle x \rangle^{-\delta} \text{Op}_h(\omega)(H_h - z)^{-1} W_3 (H_h^2 - z)^{-1} \text{Op}_h(\omega_+) \langle x \rangle^{-\delta}. \end{aligned}$$

En utilisant l'estimation uniforme de la résolvante (pour  $H_h$ ) et par deux fois le théorème 5.6 (pour  $H_h^2$ ) on obtient que cette quantité est de taille  $O(h^\infty)$  dans  $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$  uniformément en  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$ . En outre on peut prendre la limite  $\text{Im } z \rightarrow 0$  et obtenir l'estimation pour  $z \in \overline{\mathbb{C}_{I,+}}$ . Enfin, si  $\omega$  est à support compact en  $x$ , sachant que c'est aussi le cas pour  $W_3$ , on obtient encore le résultat en remplaçant les poids  $\langle x \rangle^{-\delta}$  pour  $\delta > \frac{1}{2}$  par  $\langle x \rangle^\beta$  pour tout  $\beta \in \mathbb{R}$ .  $\square$



## Chapitre 6

# Mesure semi-classique pour la solution de l'équation de Helmholtz avec indice d'absorption variable

Après avoir effectué un travail préliminaire abstrait, on s'intéresse à la solution de l'équation de Helmholtz haute fréquence pour un terme source plus explicite. On a présenté le problème et donné les grandes lignes d'un point de la démonstration en introduction. On donne maintenant les hypothèses de façon plus précise, ainsi qu'une démonstration détaillée.

### 6.1 Énoncé du résultat

On note comme précédemment  $H_h$  l'opérateur de Schrödinger

$$H_h = -h^2\Delta + V_1(x) - ihV_2(x).$$

Le contexte pour ce chapitre est celui de la section 5.2, à savoir que non seulement l'indice d'absorption  $V_2$  est variable mais il peut de plus avoir une partie négative. D'autre part  $H_1^t$  désigne la partie autoadjointe  $-h^2\Delta + V_1(x)$ ,  $p : (x, \xi) \mapsto \xi^2 + V_1(x)$  est son symbole et  $\phi^t = (\bar{x}(t), \bar{\xi}(t))$  est le flot hamiltonien associé au système (3.12).

Pour cette partie on considérera un potentiel régulier dont la partie réelle est de longue portée et dont la partie imaginaire est de courte portée. Cela signifie qu'il existe  $\rho > 0$  et des constantes  $c_\alpha$  pour  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad |\partial^\alpha V_1(x)| \leq c_\alpha \langle x \rangle^{-\rho-|\alpha|} \quad \text{et} \quad |\partial^\alpha V_2(x)| \leq c_\alpha \langle x \rangle^{-1-\rho-|\alpha|}. \quad (6.1)$$

On utilisera le fait que  $V_2$  est de courte portée pour l'estimation uniforme de la résolvante (théorème 5.35) et pour l'estimation dans la zone entrante (théorème 5.6). Pour avoir l'estimation de la résolvante, on suppose en outre que  $V_2$  est positif en dehors d'un compact de  $\mathbb{R}^n$ .

Comme annoncé, on considère un terme source qui se concentre sur une sous-variété bornée de  $\mathbb{R}^n$  lorsque  $h$  tend vers 0. Pour cela on se donne une sous-variété bornée  $\Gamma_1$  de dimension  $d \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  dans  $\mathbb{R}^n$ . On considère également  $R_1 > 0$  tel que  $\Gamma_1 \subset B_{R_1}$ . Si  $d \geq 1$ , on munit  $\Gamma_1$  de la structure riemannienne obtenue par restriction du produit scalaire de  $\mathbb{R}^n$  à chaque plan tangent à  $\Gamma_1$  (vu comme sous-espace de  $\mathbb{R}^n$ ). On munit également  $\Gamma_1$  de la mesure  $\sigma_\Gamma$  canoniquement associée à cette structure riemannienne. Cela signifie que si

$\psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  est une carte pour  $\Gamma_1$ , où  $\mathcal{U}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathcal{V}$  un ouvert de  $\Gamma_1$ , alors pour une fonction  $f$  sur  $\mathcal{V}$  telle que  $f \circ \psi$  est intégrable sur  $\mathcal{U}$  on pose :

$$\int_{\mathcal{V}} f(v) d\sigma_{\Gamma}(v) = \int_{\mathcal{U}} f(\psi(u)) (\det(\langle \partial_i \psi(u), \partial_j \psi(u) \rangle_{\mathbb{R}^n})_{1 \leq i, j \leq d})^{\frac{1}{2}} du.$$

(voir [GHL90, §3.H]). Si  $d = 0$ , alors  $\Gamma_1$  est un ensemble discret de points. La mesure  $\sigma_{\Gamma}$  considérée est alors la somme des masses de Dirac en chacun des points de  $\Gamma_1$ .

On se donne ensuite une fonction  $A \in C_0^{\infty}(\Gamma_1)$  (cela signifie que le support de  $A$  est compact pour la topologie induite sur  $\Gamma_1$ ). Puisque l'amplitude  $A$  est à support compact dans  $\Gamma_1$ , on peut choisir un ouvert  $\Gamma$  de  $\Gamma_1$  tel que si on note  $\Gamma_0 \subset \Gamma_1$  le support de  $A$  on a  $\Gamma_0 \subset \Gamma$  et  $\bar{\Gamma} \subset \Gamma_1$  ( $\bar{\Gamma}$  désigne l'adhérence de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{R}^n$ ). Si  $\Gamma_1$  est une sous-variété compacte de  $\mathbb{R}^n$ , rien n'empêche d'avoir  $\Gamma_0 = \Gamma = \Gamma_1$ . Comme la sous-variété  $\Gamma$  est relativement compacte pour la topologie de  $\Gamma_1$ , sa mesure  $\sigma_{\Gamma}(\Gamma)$  est finie. On remarque que si  $d = 0$  alors  $\Gamma$  est réduit à un nombre fini de points.

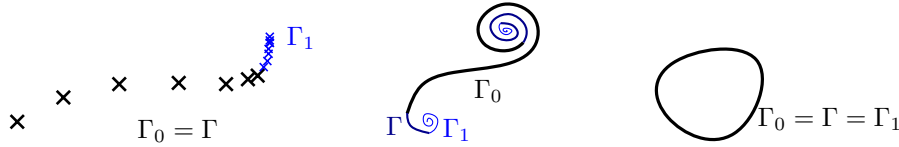


FIGURE 6.1 – La sous-variété  $\Gamma_1$ , le support  $\Gamma_0$  et  $\Gamma$  telle que  $\Gamma_0 \subset \Gamma$  et  $\bar{\Gamma} \subset \Gamma_1$ .

Soit  $S \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Pour tous  $h \in ]0, 1]$  et  $x \in \mathbb{R}^n$  on pose :

$$S_h(x) = h^{\frac{1-n-d}{2}} \int_{\Gamma} A(z) S\left(\frac{x-z}{h}\right) d\sigma_{\Gamma}(z). \quad (6.2)$$

On voit directement sur cette définition que si  $x$  n'appartient pas à  $\Gamma$ , alors le facteur  $S\left(\frac{x-z}{h}\right)$  devient très petit quand  $h$  tend vers 0 (plus précisément : décroît plus vite que toute puissance de  $h$ ). Par contre on a devant l'intégrale une puissance négative de  $h$ . Ainsi on obtient une fonction qui se concentre sur  $\Gamma$ , une sorte « d'approximation de la masse de Dirac sur la sous-variété  $\Gamma$  ». Ceci dit, le facteur  $h^{\frac{1-n-d}{2}}$  n'est pas tout à fait un facteur de normalisation. Comme on le verra à la proposition 6.2, le facteur  $h^{-\frac{n+d}{2}}$  est effectivement un facteur de normalisation, mais un facteur  $\sqrt{h}$  est ajouté pour que la quantité que l'on va étudier (voir (6.11)) n'explose pas à la limite  $h \rightarrow 0$  et puisse fournir une information pertinente (voir la remarque 6.27).

On rappelle que l'application exponentielle sur le fibré tangent  $T\Gamma_1$  (ou plutôt sur un voisinage de la section nulle de  $T\Gamma_1$ ) est définie de la façon suivante : étant donné  $z \in \Gamma_1$  et  $\zeta \in T_z\Gamma_1$  (plan tangent à  $\Gamma_1$  au point  $z$ ) assez petit, si  $t \in [-1, 1] \mapsto c_{\zeta}(t)$  désigne l'unique géodésique de  $\Gamma_1$  telle que  $c_{\zeta}(0) = z$  et  $c'_{\zeta}(0) = \zeta$ , alors on note  $\exp_z(\zeta) = c_{\zeta}(1) \in \Gamma_1$ . Voir [GHL90, §2.86] pour plus de détails. Pour  $z_1, z_2 \in \Gamma_1$ , la distance  $d_{\Gamma}(z_1, z_2)$  est définie comme étant l'infimum des longueurs de toutes les courbes  $C^1$  par morceaux sur  $\Gamma_1$  joignant  $z_1$  à  $z_2$ . Pour tout  $z \in \Gamma_1$ , il existe un voisinage  $\mathcal{U}_z$  dans  $\Gamma_1$  et  $\varepsilon_0 > 0$  tels que pour  $z_1$  et  $z_2$  dans  $\mathcal{U}$  il existe une unique géodésique de longueur inférieure à  $\varepsilon_0$  allant de  $z_1$  à  $z_2$ . Et la longueur de cette géodésique n'est autre que  $d_{\Gamma}(z_1, z_2)$  (voir [GHL90, §2.C.3]).

On se donne maintenant une famille d'énergies  $E_h \in \mathbb{C}$  pour  $h \in ]0, h_0]$  avec  $h_0 > 0$ . On suppose que la partie imaginaire de  $E_h$  est positive pour tout  $h \in ]0, h_0]$  et qu'il existe  $\nu_E \in \llbracket 1, +\infty \rrbracket$  ainsi que  $E_0, \dots, E_{\nu_E} \in \mathbb{C}$  tels que  $E_0 \in \mathbb{R}_+^*$  et

$$E_h = \sum_{j=0}^{\nu_E} h^j E_j + o_{h \rightarrow 0}(h^{\nu_E}) \quad (6.3)$$

(si  $\nu_E = +\infty$ , cela signifie que c'est valable pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ). On suppose en outre que l'énergie  $E_0$  vérifie l'hypothèse d'amortissement faible

$$\forall w \in \Omega_b(\{E_0\}), \exists T \geq 0, \int_0^T V_2(\bar{x}(t, w)) dt > 0. \quad (6.4)$$

On peut alors considérer deux voisinages ouverts  $I$  et  $J$  de  $E_0$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  tels que l'estimation uniforme du théorème 5.35 est valable sur  $\mathbb{C}_{J,+}$  et  $\bar{I} \subset J$ . Soit  $\delta > \frac{1}{2}$ . Quitte à réduire  $h_0 > 0$ , il existe donc une constante  $c \geq 0$  telle que pour  $h \in ]0, h_0]$  et  $z \in \mathbb{C}_{J,+}$  l'opérateur  $(H_h - z)$  est inversible et on a

$$\|(H_h - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n), L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n))} \leq \frac{c}{h}. \quad (6.5)$$

Sans perte de généralité on peut supposer que  $J \subset [E_0/2, 2E_0]$  et, quitte à réduire encore  $h_0 > 0$ , on peut également supposer que  $E_h \in \overline{\mathbb{C}_{I,+}}$  pour tout  $h \in ]0, h_0]$ .

On vérifiera à la proposition 6.2 que  $S_h \in L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $h \in ]0, 1]$ . Par le principe d'absorption limite (théorème 5.42), on peut donc considérer pour tout  $h \in ]0, h_0]$  la solution sortante  $u_h$  à l'équation (1.1). On a alors

$$u_h = (H_h - (E_h + i0))^{-1} S_h \in L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n), \quad (6.6)$$

où l'opérateur  $(H_h - (E_h + i0))^{-1}$  est effectivement obtenu par le principe d'absorption limite si  $\text{Im } E_h = 0$  et désigne simplement la résolvante  $(H_h - E_h)^{-1}$  si  $\text{Im } E_h > 0$ . D'après (6.5) on a d'autre part :

$$\|u_h\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{c}{h} \|S_h\|_{L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)}. \quad (6.7)$$

On rappelle que  $N\Gamma$  désigne le fibré normal  $\{(z, \xi) \in \Gamma \times \mathbb{R}^n \mid \xi \perp T_z\Gamma\}$  de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{R}^n$ , et  $N_z\Gamma := \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi \perp T_z\Gamma\}$  est le plan normal à  $\Gamma$  au point  $z$ . On montrera au paragraphe 6.2.1 que le terme source  $S_h$  est microlocalisé sur  $N\Gamma$ . Du fait qu'on lui applique l'opérateur  $(H_h - (E_h + i0))^{-1}$ , on verra également que seuls les points de l'espace des phases d'énergie  $E_0$  auront un rôle à jouer au premier ordre. On note alors

$$N_E\Gamma = \{(z, \xi) \in N\Gamma \mid |\xi|^2 = E_0 - V_1(z)\} \subset \mathbb{R}^{2n},$$

et

$$N_E\Gamma_0 = \{(z, \xi) \in N_E\Gamma \mid z \in \Gamma_0\}.$$

On suppose que

$$\forall z \in \Gamma_1, \quad V_1(z) < E_0. \quad (6.8)$$

Cela implique en particulier que pour tout  $z \in \Gamma$  la fibre

$$N_{z,E}\Gamma := \{\xi \in N_z\Gamma \mid |\xi|^2 = E_0 - V_1(z)\} \subset \mathbb{R}^n$$

est une sphère de dimension  $n - d - 1$  dans  $N_z\Gamma$ .  $N_E\Gamma$  est alors une sous-variété de dimension  $n - 1$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$ . On ne munit pas  $N_E\Gamma$  de la métrique héritée du produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^{2n}$  mais d'une métrique  $g$  que l'on définit maintenant. Soient  $(z, \xi) \in N_E\Gamma$  et  $(Z, \Xi) \in T_{(z,\xi)}N_E\Gamma$  (puisque  $N_E\Gamma$  peut être vue comme une sous-variété de  $\mathbb{R}^{2n}$ , le plan tangent  $T_{(z,\xi)}N_E\Gamma$  peut être vu comme un sous-espace de  $T_{(z,\xi)}\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{R}^{2n}$ ). On a alors  $Z \in T_z\Gamma$ , et  $\Xi$  peut être décomposé en  $\Xi = \Xi_T + \Xi_{\parallel} + \Xi_{\perp}$  avec  $\Xi \in T_z\Gamma$ ,  $\Xi_{\parallel} \in \mathbb{R}\xi$  et  $\Xi_{\perp} \in (T_z\Gamma \oplus \mathbb{R}\xi)^{\perp}$ , ces trois vecteurs étant deux à deux orthogonaux. On remarque que  $(T_z\Gamma \oplus \mathbb{R}\xi)^{\perp}$  est l'espace tangent à  $N_{z,E}\Gamma$  au point  $(z, \xi)$  (voir le lemme 6.9). On munit alors  $N_E\Gamma$  de la métrique  $g$  définie par

$$g_{(z,\xi)}((Z^1, \Xi^1), (Z^2, \Xi^2)) = \langle Z^1, Z^2 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \Xi_{\perp}^1, \Xi_{\perp}^2 \rangle_{\mathbb{R}^n}, \quad (6.9)$$

pour tous  $(Z^1, \Xi^1), (Z^2, \Xi^2) \in T_{(z,\xi)}N_E\Gamma$ . Cela signifie qu'on ne tient pas compte des composantes de  $\Xi$  parallèles à  $\xi$  et à  $T_z\Gamma$ . On montrera à la proposition 6.10 que  $g$  ainsi définie est bien une métrique sur  $N_E\Gamma$  et on discutera ce choix à la remarque 6.14.

On munit ensuite  $N_E\Gamma$  de la mesure  $\sigma_{N_E\Gamma}$  canoniquement associée à la métrique  $g$ . Comme précédemment, si  $\psi$  est une carte d'un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^{n-1}$  dans un ouvert  $\mathcal{V}$  de  $N_E\Gamma$  et  $f$  une fonction sur  $\mathcal{V}$  alors

$$\int_{\mathcal{V}} f(v) d\sigma_{N_E\Gamma}(v) = \int_{\mathcal{U}} f(\psi(u)) (\det(g_{\psi(u)}(\partial_i\psi(u), \partial_j\psi(u)))_{1 \leq i, j \leq n-1})^{\frac{1}{2}} du.$$

On pourra également voir  $\sigma_{N_E\Gamma}$  comme une mesure sur  $\mathbb{R}^{2n}$  en la prolongeant par 0 en dehors de  $N_E\Gamma$ , de sorte que pour un symbole  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  on a :

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} q d\sigma_{N_E\Gamma} := \int_{N_E\Gamma} q(z, \xi) d\sigma_{N_E\Gamma}(z, \xi).$$

On considère maintenant :

$$\Phi_0 = \{(z, \xi) \in N_E\Gamma \mid \exists t > 0, \phi^t(z, \xi) \in N_E\Gamma\}.$$

La dernière hypothèse dont on a besoin est la suivante :

$$\sigma_{N_E\Gamma}(\Phi_0) = 0. \quad (6.10)$$

Cela signifie qu'il n'y a « pas trop » de trajectoires issues de  $N_E\Gamma$  qui repassent par  $N_E\Gamma$ . Dans [Bon09] (section 4), on voit que sans une hypothèse de ce type le théorème que l'on va démontrer ne peut être vrai. On remarque que dans le cas où  $\Gamma = \{0\}$ , cette hypothèse est plus faible que l'hypothèse

$$2(E_0 - V_1(x)) - x \cdot \nabla V_1(x) \geq c_0 > 0$$

évoquée en introduction. En effet, sous cette hypothèse, la fonction  $t \mapsto |\bar{x}(t, w)|^2$  est strictement croissante pour tout  $w \in p^{-1}(\{E_0\})$ , donc une trajectoire qui part de l'origine n'y revient jamais. Autrement dit :  $\Phi_0 = \emptyset$ . Ce n'est plus le cas si  $\Gamma$  peut être une sous-variété plus générale. Par exemple, si  $\Gamma$  est le cercle unité de  $\mathbb{R}^2$  et  $V_1 = 0$ , alors tout rayon qui part orthogonalement à  $\Gamma$  vers le centre, repasse par le point diamétralement opposé, avec un vecteur vitesse orthogonal à  $\Gamma$  (voir figure 6.2). Ainsi, la moitié des conditions initiales de  $N_E\Gamma$  sont en fait dans  $\Phi_0$ , si bien que l'hypothèse (6.10) n'est pas vérifiée. Cette précision étant faite, l'hypothèse (6.10) semble tout de même raisonnable car assez généralement satisfaite.

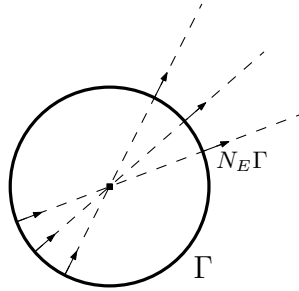


FIGURE 6.2 – Exemple de situation où l'hypothèse (6.10) n'est pas vérifiée

On peut maintenant énoncer le résultat principal de ce chapitre :

**Théorème 6.1.** *Pour tout  $h \in ]0, h_0]$  on considère le terme source  $S_h$  et l'énergie  $E_h$  définis par (6.2) et (6.3), ainsi que la solution à l'équation de Helmholtz  $u_h$  donnée par (6.6). On suppose satisfaites les hypothèses (6.1), (6.4), (6.8) et (6.10).*

(i) *Alors il existe une mesure de Radon positive  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^{2n}$  telle que pour tout  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  :*

$$\langle \text{OP}_h^w(q)u_h, u_h \rangle \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^{2n}} q d\mu. \quad (6.11)$$

(ii) La mesure  $\mu$  est caractérisée par les trois propriétés suivantes :

- Le support de  $\mu$  est inclus dans  $p^{-1}(\{E_0\})$ .
- Pour  $\sigma \in ]0, 1[$  il existe  $R \geq 0$  tel que  $\mu$  est nulle dans la zone entrante  $\mathcal{Z}_-(R, 0, -\sigma)$ .
- La mesure  $\mu$  vérifie l'équation de Liouville :

$$(H_p + 2 \operatorname{Im} E_1 + 2V_2)\mu = \pi(2\pi)^{d-n} |A(z)|^2 |\xi|^{-1} |\hat{S}(\xi)|^2 \sigma_{N_E \Gamma}. \quad (6.12)$$

Cela signifie que pour toute fonction  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  on a

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} (-H_p + 2 \operatorname{Im} E_1 + 2V_2)q \, d\mu = \int_{N_E \Gamma} q(z, \xi) \kappa(z, \xi) \, d\sigma_{N_E \Gamma}(z, \xi),$$

où on a noté

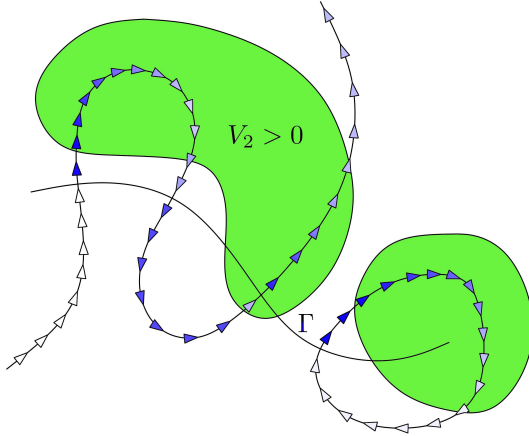
$$\kappa(z, \xi) = \pi(2\pi)^{d-n} |A(z)|^2 |\xi|^{-1} |\hat{S}(\xi)|^2. \quad (6.13)$$

(iii) Ces trois propriétés impliquent que  $\mu$  est donnée par :

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} q \, d\mu = \int_0^{+\infty} \int_{N_E \Gamma} \kappa(z, \xi) q(\phi^t(z, \xi)) e^{-2t \operatorname{Im} E_1 - 2 \int_0^t V_2(\bar{x}(s, z, \xi)) \, ds} \, d\sigma_{N_E \Gamma}(z, \xi) \, dt. \quad (6.14)$$

On rappelle que  $H_p$  désigne le crochet de Poisson avec  $p$  et  $\hat{S}$  la transformée de Fourier usuelle de  $S$ .

Le premier point est énoncé comme un résultat d'existence, mais c'est aussi un résultat d'unicité. En effet, il est important de noter qu'on n'a pas besoin d'extraire une sous-suite  $h_k \rightarrow 0$  pour avoir convergence. En particulier on ne fera pas usage dans ce chapitre de la proposition 3.17. On obtiendra la limite de façon plus explicite, en s'appuyant plutôt sur la proposition 3.49.



On représente sur ce dessin la variation de la masse de  $\mu$  le long d'une trajectoire du flot  $\phi^t$ . Pour une trajectoire d'énergie  $E_0$  venant de l'infini,  $\mu$  est nulle tant que la trajectoire n'est pas passée dans l'espace des phases par un point de  $N_E \Gamma$ . La masse augmente (de façon discontinue) à chaque passage par un point de la source et varie par ailleurs selon la valeur de l'indice d'absorption  $V_2$ . On retrouve le même comportement pour une trajectoire captée, pour laquelle il y a nécessairement amortissement.

FIGURE 6.3 – Évolution de  $\mu$  le long de trajectoires classiques

Comme expliqué en introduction, l'idée est d'étudier  $u_h$  en écrivant la résolvante de  $H_h$  comme l'intégrale sur les temps positifs du propagateur, puis de localiser afin d'étudier séparément les temps petits, les temps intermédiaires et les temps grands. Pour  $t \geq 0$  on note :

$$U_h^E(t) = e^{-\frac{it}{h}(H_h - E_h)}.$$

Puisqu'à cause des trajectoires captées, on ne sait pas estimer la contribution des temps grands, on localise en fait en temps fini. Étant donné  $\tau_0 > 0$  (à déterminer au cours de



la démonstration) et  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$  égale à 1 au voisinage de  $] - \infty, 0]$  et égale à 0 sur  $[\tau_0, +\infty[$ , on pose pour tout  $T \geq 0$  :  $\chi_T : t \mapsto \chi(t - T)$ . Pour  $T \geq 0$  on définit alors :

$$u_h^T = \frac{i}{h} \int_0^\infty \chi_T(t) U_h^E(t) S_h dt. \quad (6.15)$$

On se propose de commencer par étudier les mesures semi-classiques pour la famille  $(u_h^T)_{h \in ]0, 1]}$  à  $T$  fixé. Cela repousse momentanément le problème des temps grands (et donc des trajectoires captées), mais il reste à étudier les temps petits et intermédiaires.

Pour les temps intermédiaires l'idée est, au voisinage de  $w \in \mathbb{R}^{2n}$ , de se débarrasser des temps loin des  $t_k$  pour lesquels  $\phi^{-t_k}(w) \in N_E \Gamma$  par le théorème d'Egorov, et d'étudier la contribution du voisinage de chaque  $t_k$  en se ramenant à la contribution des temps petits (mais non nuls) en utilisant les résultats de la section 3.3.3. En utilisant le travail effectué pour les temps petits, on va montrer que cette contribution est un état lagrangien. On pourra alors en déduire la contribution correspondante pour la mesure semi-classique (voir la proposition 3.49).

L'étude des temps petits (c'est-à-dire de  $u_h^0$ ) est plus délicate. Par le théorème d'Egorov, les temps petits ne donnent une contribution qu'au voisinage de  $\Gamma$ . C'est là que vont intervenir non seulement la géométrie de  $\Gamma$  mais aussi le fait que, contrairement à ce qu'il se passe si  $\Gamma$  est un point, la norme de la composante de vitesse des vecteurs de  $N_E \Gamma$  n'est pas constante mais dépend de la valeur de  $V_1$  au point considéré (qui n'est autre que la première composante). L'idée est d'écrire une approximation B.K.W. de l'intégrande, ce qui donne une expression de la forme

$$u_h^0(x) \approx h^{-\frac{1+n+d}{2}} \int_0^\infty \int_\Gamma \int_{\mathbb{R}^n} \chi(t) e^{\frac{i}{h} \psi(t, x, z, \xi)} \chi(t) b(t, x, \xi, h) d\xi d\sigma_\Gamma(z) dt, \quad (6.16)$$

puis d'appliquer le théorème de la phase stationnaire 3.3 pour tout  $x$  dans un voisinage de  $\Gamma$ . Le problème est de l'appliquer uniformément en  $x$ . Ce n'est pas possible, car on verra que  $u_h^T$  explose quand  $x$  approche  $\Gamma$ . Mais on cherche tout de même à montrer que la norme  $L^2$  de  $u_h^T$  sur un voisinage de  $\Gamma$  peut être rendue aussi petite que l'on veut (uniformément en  $h$ ) pour peu que l'on choisisse le voisinage assez petit. Dans le cas  $\Gamma = \{0\}$  (voir [Bon09]), J.-F. Bony effectue une décomposition dyadique. Il estime  $u_h^0$  uniformément en  $h$  sur  $\{2^{-(m+1)} < |x| \leq 2^{-m}\}$  et somme les contributions. On procédera de façon analogue, mais dans notre cas on aura plutôt intérêt à prendre en compte le temps qu'il faut pour aller de  $\Gamma$  à  $x$  via une trajectoire du flot classique issue de  $N_E \Gamma$  plutôt que la distance entre  $x$  et  $\Gamma$ . Ce point de vue sera également très pratique pour l'étude des points critiques de la phase  $\psi$ , étape préalable à l'utilisation du théorème de la phase stationnaire. Pour tout cela, on étudiera donc l'application

$$\begin{cases} ]0, \tau_0[ \times N_E \Gamma & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ (t, w) & \mapsto & \bar{x}(t, w) \end{cases} \quad (6.17)$$

qui s'avère être un difféomorphisme sur un voisinage épointé de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{R}^n$  pour  $\tau_0$  assez petit, ce qui nous autorise à paramétrer les points au voisinage de  $\Gamma$  par une condition initiale dans  $N_E \Gamma$  et un temps de parcours (voir la proposition 6.11 pour un énoncé plus précis).

La gestion des temps grands a déjà été évoquée en introduction. Les problèmes viennent en grande partie des questions d'uniformité des estimations pour  $T$  grand et  $h$  petit. Ce point a été contourné en étudiant  $u_h^T$ , mais il faut ensuite montrer que pour  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  la quantité  $\langle \text{Op}_h^w(q) u_h^T, u_h^T \rangle$  est une bonne approximation de  $\langle \text{Op}_h^w(q) u_h, u_h \rangle$  pour  $T$  grand et  $h$  petit. Plus précisément on va montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists T_0 \geq 0, \forall T \geq T_0, \limsup_{h \rightarrow 0} |\langle \text{Op}_h^w(q) u_h^T, u_h^T \rangle - \langle \text{Op}_h^w(q) u_h, u_h \rangle| \leq \varepsilon.$$

On voit qu'on n'a toujours pas d'uniformité pour  $T$  grand et  $h$  petit (plus  $T$  est grand, plus on doit choisir  $h$  petit pour avoir une bonne estimation), mais ce sera tout de même suffisant

pour atteindre notre but. Pour cela on a tout de même besoin d'informations *a priori* sur  $u_h$ . On utilisera alors les résultats de localisation obtenus à la section 5.1.

## 6.2 Calculs près de $\Gamma$

### 6.2.1 Étude du terme source

On donne dans ce paragraphe quelques précisions concernant le terme source  $S_h$  avec lequel on va travailler dans tout ce chapitre. Afin de pouvoir appliquer les résultats des chapitres précédents, on commence par vérifier que  $S_h$  est bien une fonction de  $L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$  pour  $\delta > \frac{1}{2}$ . On montre en outre que le facteur  $h^{\frac{1-n-d}{2}}$  que l'on a ajouté en fait une fonction de taille  $O(\sqrt{h})$  dans  $L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$ . On s'intéressera ensuite à la microlocalisation de  $S_h$  dans l'espace des phases  $\mathbb{R}^{2n}$ . Cela précisera le fait que le terme source se concentre sur  $\Gamma$  et nous permettra de compléter le résultat de localisation sur  $p^{-1}(\{E_0\})$  obtenu au paragraphe 5.1.1.

**Proposition 6.2.** *Pour tout  $\delta \in \mathbb{R}$  on a :*

$$\|S_h\|_{L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)} = O_{h \rightarrow 0}(\sqrt{h}). \quad (6.18)$$

*Démonstration. 1.* Il existe une constante  $C \geq 0$  telle que pour tous  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $r > 0$ , la mesure dans  $\Gamma$  de  $B_{\mathbb{R}^n}(x, r) \cap \Gamma$  est inférieure ou égale à  $Cr^d$ . En effet, si ce n'est pas le cas, on peut construire des suites  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$  et  $(r_m)_{m \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$  telles que  $\sigma_{\Gamma}(B_{\mathbb{R}^n}(x_m, r_m) \cap \Gamma) > mr_m^d$ . Comme la mesure totale de  $\Gamma$  est finie,  $r_m$  tend nécessairement vers 0 quand  $m$  tend vers  $+\infty$ . Par conséquent,  $x_m$  doit être proche de  $\Gamma$ , et reste donc dans un compact de  $\mathbb{R}^n$ . Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que  $x_m$  converge vers  $x_{\infty} \in \bar{\Gamma} \subset \Gamma_1$ . Soit  $\psi$  un difféomorphisme d'un voisinage  $\mathcal{U}$  de 0 dans  $\mathbb{R}^n$  sur un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $x_{\infty}$  dans  $\mathbb{R}^n$  qui envoie  $\mathcal{U} \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$  sur  $\mathcal{V} \cap \Gamma_1$ . Quitte à retirer un nombre fini de termes, on peut supposer que  $B_{\mathbb{R}^n}(x_m, r_m)$  est dans un compact  $K$  de  $\mathcal{V}$  pour tout  $m$ . On a :

$$\sigma_{\Gamma}(B_{\mathbb{R}^n}(x_m, r_m) \cap \Gamma) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\psi^{-1}(B_{\mathbb{R}^n}(x_m, r_m) \cap \Gamma)}(u) \left( \det \left( \langle \partial_i \psi(u), \partial_j \psi(u) \rangle \right)_{1 \leq i, j \leq d} \right)^{\frac{1}{2}} du.$$

Il existe une constante  $c \geq 0$  telle que  $\|D_z(\psi^{-1})\| \leq c$  pour tout  $z \in K$  et

$$\left( \det \left( \langle \partial_i \psi(u), \partial_j \psi(u) \rangle \right)_{1 \leq i, j \leq d} \right)^{\frac{1}{2}} \leq c$$

sur  $\psi^{-1}(K \cap \Gamma_1)$ . Par l'inégalité des accroissements finis (on peut choisir  $\mathcal{V}$  et  $K$  convexes), on a

$$\psi^{-1}(B_{\mathbb{R}^n}(x_m, r_m) \cap \Gamma) \subset B_{\mathbb{R}^d}(\psi^{-1}(x_m), cr_m),$$

et donc

$$\sigma_{\Gamma}(B_{\mathbb{R}^n}(x_m, r_m) \cap \Gamma) \leq \int_{B_{\mathbb{R}^d}(\psi^{-1}(x_m), cr_m)} c du \leq c^{1+d} r_m^d,$$

ce qui donne une contradiction.

2. Soient  $h \in ]0, 1]$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ . Deux applications de l'inégalité de Cauchy-Schwarz donnent :

$$\begin{aligned}
|S_h(x)|^2 &= h^{1-n-d} \left| \int_{\Gamma} A(z) S\left(\frac{x-z}{h}\right) d\sigma_{\Gamma}(z) \right|^2 \\
&= h^{1-n-d} \left| \sum_{m \in \mathbb{N}} \int_{mh \leq |x-z| < (m+1)h} A(z) S\left(\frac{x-z}{h}\right) d\sigma_{\Gamma}(z) \right|^2 \\
&\leq h^{1-n-d} \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle m \rangle^{-2} \cdot \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle m \rangle^2 \left| \int_{mh \leq |x-z| < (m+1)h} A(z) S\left(\frac{x-z}{h}\right) d\sigma_{\Gamma}(z) \right|^2 \\
&\leq c h^{1-n-d} \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle m \rangle^2 \sigma_{\Gamma}(B_{\mathbb{R}^n}(x, (m+1)h)) \int_{mh \leq |x-z| < (m+1)h} \left| S\left(\frac{x-z}{h}\right) \right|^2 d\sigma_{\Gamma}(z) \\
&\leq c h^{1-n} \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle m \rangle^{2+d} \int_{mh \leq |x-z| < (m+1)h} \left| S\left(\frac{x-z}{h}\right) \right|^2 d\sigma_{\Gamma}(z),
\end{aligned}$$

où  $c$  ne dépend ni de  $h \in ]0, 1]$  ni de  $x \in \mathbb{R}^n$ . Soit maintenant  $\delta \geq 0$ . On a alors

$$\begin{aligned}
\|S_h\|_{L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)}^2 &\leq c h^{1-n} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle m \rangle^{2+d} \int_{mh \leq |x-z| < (m+1)h} \langle x \rangle^{2\delta} \left| S\left(\frac{x-z}{h}\right) \right|^2 d\sigma_{\Gamma}(z) dx \\
&\leq c h^{1-n} \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle m \rangle^{2+d} \int_{\Gamma} \int_{mh \leq |x-z| < (m+1)h} \langle x \rangle^{2\delta} \left| S\left(\frac{x-z}{h}\right) \right|^2 dx d\sigma_{\Gamma}(z) \\
&\leq c h \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle m \rangle^{2+d} \int_{\Gamma} \int_{m \leq |y| < (m+1)} \langle z + hy \rangle^{2\delta} |S(y)|^2 dy d\sigma_{\Gamma}(z) \\
&\leq c h \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle m \rangle^{2+d} \int_{m \leq |y| < (m+1)} \langle y \rangle^{2\delta} |S(y)|^2 dy.
\end{aligned}$$

La dernière étape vient du fait que  $\Gamma$  est bornée et de mesure finie. Comme  $S$  est à décroissance rapide, il existe  $c \geq 0$  telle que pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$  on a

$$|S(y)|^2 \leq c \langle y \rangle^{-(n-1)-2\delta-4-d},$$

et donc

$$\|S_h\|_{L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)}^2 \leq c h \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle m \rangle^{2+d} \langle m \rangle^{-4-d} \leq c h.$$

□

Avec (6.7) on obtient alors l'estimation *a priori* suivante :

**Corollaire 6.3.** *Pour tout  $\delta > \frac{1}{2}$  on a :*

$$\|u_h\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)} = O_{h \rightarrow 0} \left( h^{-\frac{1}{2}} \right).$$

On a déjà observé que le terme source  $S_h$  se concentre sur la sous-variété  $\Gamma$ . On précise maintenant cette remarque en travaillant dans l'espace des phases  $\mathbb{R}^{2n}$  :

**Proposition 6.4.** *Soit  $q \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à support hors de  $\overline{B_x(R_1)}$  ou bien à support compact et disjoint de  $N\Gamma_0$ . Alors pour tout  $\delta \in \mathbb{R}$  on a*

$$\|\text{Op}_h(q)S_h\|_{L^{2,\delta}(\mathbb{R}^n)} = O_{h \rightarrow 0} (h^\infty).$$

En particulier  $S_h$  est microlocalisé sur  $N\Gamma_0$ .

*Démonstration.* **1.** Soit  $N \in \mathbb{N}$ . Pour  $x \in \mathbb{R}^n$  on a :

$$\begin{aligned} \text{Op}_h(q)S_h(x) &= \frac{h^{\frac{1-n-d}{2}}}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Gamma} e^{\frac{i}{h}\langle x-y, \xi \rangle} q(x, \xi) A(z) S\left(\frac{y-z}{h}\right) d\sigma_{\Gamma}(z) dy d\xi \\ &= \frac{h^{\frac{1-n-d}{2}}}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\langle x-z, \xi \rangle} e^{-i\langle v, \xi \rangle} q(x, \xi) A(z) S(v) dv d\sigma_{\Gamma}(z) d\xi. \end{aligned}$$

Quitte à faire des intégrations par parties avec l'opérateur  $\frac{1+i\xi \cdot \nabla_v}{1+|\xi|^2}$  on peut supposer que  $q \in \mathcal{S}(\langle \xi \rangle^{-(n+1)})$ , de sorte qu'on n'a pas de problème de convergence pour l'intégration en  $\xi$ . Comme  $A$  est à support compact sur  $\Gamma$  et  $S \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on n'a pas à s'inquiéter des intégrations par rapport à  $z$  et  $v$ . Dans le cas où  $q$  est à support hors de  $\overline{B_x(R_1)}$ , il suffit de faire des intégrations par parties avec l'opérateur  $-ih \frac{(x-z) \cdot \nabla_{\xi}}{|x-z|^2}$  pour prouver la proposition. On suppose donc que  $q$  est à support compact. Si  $\chi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$  est égale à 1 au voisinage de  $\text{supp}_x q$ , alors on a  $\text{Op}_h^w(q) = \chi(x) \text{Op}_h^w(q) + O(h^{\infty})$  dans  $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$ . Il suffit donc de montrer que

$$\text{Op}_h(q)S_h = O(h^{\infty})$$

dans  $L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ .

**2.** Pour  $z \in \Gamma_1$  et  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , on note  $\xi_z^{\parallel}$  la projection orthogonale de  $\xi$  sur  $T_z\Gamma_1$ . Comme  $\Gamma_0$  compact, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\forall (x, \xi) \in \text{supp } q, \forall z \in \Gamma_0, \quad |x-z|^2 + |\xi_z^{\parallel}|^2 \geq \varepsilon.$$

Comme il existe  $c_N$  telle que  $S(v) \leq c_N \langle v \rangle^{-N+n+1-\frac{n+d-1}{2}}$ , on a déjà

$$\begin{aligned} \text{Op}_h(q)S_h(x) &= \frac{h^{\frac{1-n-d}{2}}}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Gamma} \int_{|v| \leq \frac{\varepsilon}{h}} e^{\frac{i}{h}\langle x-z, \xi \rangle} e^{-i\langle v, \xi \rangle} q(x, \xi) A(z) S(v) dv d\sigma_{\Gamma}(z) d\xi + O(h^N), \end{aligned}$$

où la taille du reste est uniforme en  $x$ . En faisant des intégrations par parties avec l'opérateur

$$L = -ih \frac{(x-z) \cdot \nabla_{\xi} - \xi_z^{\parallel} \cdot \nabla_z}{|x-z|^2 + |\xi_z^{\parallel}|^2},$$

on obtient que l'intégrale qui reste est également de taille  $O(h^N)$  uniformément en  $x$ , ce qui permet de conclure. La formule de changement de quantification assure alors que  $S_h$  est microlocalisé sur  $N\Gamma_0$ .  $\square$

On peut maintenant cumuler les deux propriétés mises en évidence au paragraphe 5.1.1 et à la proposition 6.4. Puisque la source est microlocalisée sur  $N\Gamma_0$  et comme seuls les points d'énergie  $E_0$  dans l'espace des phases jouent un rôle au premier ordre, on peut considérer que la source se concentre sur  $N_E\Gamma_0$  dans l'espace des phases. C'est l'objet de la proposition suivante, où pour  $\gamma > 0$  on note  $I_{\gamma} = ]E_0 - \gamma, E_0 + \gamma[$  :

**Proposition 6.5.** Soit  $f \in C_b^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$  égale à 1 au voisinage de  $N_E\Gamma_0$ . Alors il existe  $\gamma > 0$  tel que pour  $\chi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$  et  $q \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$  à support dans  $p^{-1}(I_{\gamma})$  on a :

$$\frac{i}{h} \int_0^{\infty} \chi(t) \text{Op}_h^w(q) U_h^E(t) \text{Op}_h(1-f) S_h dt = O(h^{\infty}).$$

*Démonstration.* Comme  $N_E\Gamma_0$  est compact, il existe  $\gamma > 0$  tel que  $f = 1$  au voisinage de  $N\Gamma_0 \cap p^{-1}(I_{2\gamma})$ . Soient alors  $q, \tilde{q} \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$  à support dans  $p^{-1}(I_{\gamma})$  et tels que  $\tilde{q}$  vaut 1 au voisinage de

$$\bigcup_{t \in \text{supp } \chi} \phi^{-t}(\text{supp } q).$$

Par le théorème d'Egorov (et la formule de changement de quantification) on a dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  :

$$\begin{aligned} & \frac{i}{h} \int_0^\infty \chi(t) \text{Op}_h^w(q) U_h^E(t) \text{Op}_h(1-f) S_h dt \\ &= \frac{i}{h} \int_0^\infty \chi(t) \text{Op}_h^w(q) U_h^E(t) \text{Op}_h(\tilde{q}) \text{Op}_h(1-f) S_h dt + O_{h \rightarrow 0}(h^\infty). \end{aligned}$$

Le symbole  $\tilde{q}^\#(1-f)$  s'annule (à  $O(h^\infty)$  près) au voisinage de  $N\Gamma_0$ , donc d'après la proposition 6.4 on a aussi

$$\|\text{Op}_h(\tilde{q}) \text{Op}_h(1-f) S_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O_{h \rightarrow 0}(h^\infty),$$

ce qui prouve la proposition.  $\square$

**Corollaire 6.6.** Soit  $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  égal à 1 au voisinage de  $N_E\Gamma_0$ . Alors pour  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  et  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  on a :

$$\frac{i}{h} \int_0^\infty \chi(t) \text{Op}_h^w(q) U_h^E(t) \text{Op}_h(1-f) S_h dt = O_{h \rightarrow 0}(\sqrt{h}).$$

*Démonstration.* Soit  $\gamma > 0$  donné par la proposition 6.5. On peut écrire  $q = q_1 + q_2$  avec  $q_1$  à support dans  $p^{-1}(I_\gamma)$  et  $q_2$  à support hors de  $p^{-1}(\{E_0\})$ . On applique alors la proposition 6.5 à  $q_1$  et la proposition 5.4 à  $q_2$ .  $\square$

On termine ce paragraphe en remarquant que comme le terme source est microlocalisé sur  $B_x(R_1)$ , le théorème 5.6 assure que la famille  $(u_h)_{h \in ]0,1]}$  se concentre hors de la zone entrante :

**Corollaire 6.7.** Soit  $\sigma \in ]0,1[$ . Alors il existe  $\mathcal{R} \geq 0$  tel que pour tout  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à support dans  $\mathcal{Z}_-(\mathcal{R}, 0, -\sigma)$  on a :

$$\langle \text{Op}_h^w(q) u_h, u_h \rangle \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

*Démonstration.* Soit  $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  égal à 1 au voisinage de  $\overline{B_{R_1}}$  et à support dans  $B_{2R_1}$ . Soit  $\mathcal{R}$  un rayon de fuite pour l'intervalle  $I$ . Tout symbole  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à support dans  $\mathcal{Z}_-(\mathcal{R}, 0, -\sigma)$  peut être décomposé en  $q = q_1 + q_2$  avec  $q_1, q_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à support respectivement hors de  $p^{-1}(\{E_0\})$  et dans  $\mathcal{Z}_-(\mathcal{R}, 0, -\sigma) \cap p^{-1}(I) \subset \mathcal{Z}_-(\mathcal{R}, \sqrt{E_0/3}, -\sigma)$ . Soit  $\delta > \frac{1}{2}$ . D'après la proposition 5.1 et sachant que  $q_1$  est à support compact, on a déjà

$$\|\text{Op}_h^w(q_1) u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c \|\text{Op}_h^w(q_1) u_h\|_{L^{2, -\delta}(\mathbb{R}^n)} = O_{h \rightarrow 0}(\sqrt{h}).$$

D'après la proposition 6.4 on a :

$$\begin{aligned} & \|\text{Op}_h^w(q_2)(H_h - (E_h + i0))^{-1}(1 - \theta(x)) S_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ & \leq \|\text{Op}_h^w(q_2)(H_h - (E_h + i0))^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^{2, \delta}(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))} \|(1 - \theta(x)) S_h\|_{L^{2, \delta}(\mathbb{R}^n)} \\ & = O_{h \rightarrow 0}(h^\infty). \end{aligned}$$

Enfin, quitte à prendre  $\mathcal{R}$  plus grand, on a par le théorème 5.6 (ou plutôt la proposition 5.43) :

$$\begin{aligned} & \|\text{Op}_h^w(q_2)(H_h - (E_h + i0))^{-1} \theta(x) S_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ & \leq \|\text{Op}_h^w(q_2)(H_h - (E_h + i0))^{-1} \theta(x)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \|S_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ & = O_{h \rightarrow 0}(h^\infty). \end{aligned}$$

Cela donne finalement :

$$\|\text{Op}_h^w(q) u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O_{h \rightarrow 0}(\sqrt{h}).$$

On se donne maintenant  $\tilde{q} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à support dans  $\mathcal{Z}_-(\mathcal{R}, 0, -\sigma)$  égal à 1 au voisinage de  $\text{supp } q$ . En appliquant le raisonnement précédent à  $q$  et  $\tilde{q}$  on obtient :

$$|\langle \text{Op}_h^w(q)u_h, u_h \rangle| \leq \| \text{Op}_h^w(q)u_h \| \| \text{Op}_h^w(\tilde{q})u_h \| + O(h^\infty) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

□

## 6.2.2 Trajectoires classiques autour de $\Gamma$

Le but de ce paragraphe est de regarder d'un peu plus près la géométrie d'un voisinage de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{R}^n$ . En particulier, on cherche à paramétrer un tel voisinage par les trajectoires du flot classique issues de  $N_E\Gamma$ . Comme on l'a expliqué, cela jouera un rôle important pour l'étude des temps petits et par suite des temps intermédiaires. En outre cela permettra d'effectuer le changement de variables menant à l'expression (6.14).

Dans le cas où  $\Gamma$  est un point, le changement de variable est au premier ordre un passage en coordonnées polaires, dont le jacobien est facile à calculer. Dans notre cas cela sera plus compliqué, d'une part à cause de la courbure de  $\Gamma$  et d'autre part à cause des variations de  $V_1$  sur  $\Gamma$ . Pour obtenir le changement de variables, on adapte le théorème du voisinage tubulaire (qui donne un difféomorphisme entre le fibré normal unitaire et un voisinage de la sous-variété dans l'espace ambiant) au cas où les vecteurs sont de normes variables et où les demi-droites sont remplacées par les demi-trajectoires pour le flot  $\phi^t$ . Avec le choix de la métrique  $g$ , cela nous permettra alors de calculer le jacobien de façon explicite (au premier ordre près de  $\Gamma$ ).

On rappelle (voir proposition A.5) que pour  $(z, \xi) \in N\Gamma$  avec  $\xi$  assez petit, la distance de  $z + \xi$  à  $\Gamma_1$  n'est autre que  $|\xi|$ . On commence par généraliser ce fait à notre situation :

**Proposition 6.8.** *Il existe  $\tau_0 > 0$  et  $\gamma_M \geq \gamma_m > 0$  tels que pour tous  $t \in [0, 3\tau_0]$  et  $w \in N_E\Gamma$  on a :*

$$\gamma_m t \leq d(\bar{x}(t, w), \Gamma_1) \leq \gamma_M t.$$

*Démonstration.* On note :

$$\xi_{\min} = \min_{z \in \Gamma} \sqrt{E_0 - V_1(z)} > 0 \quad \text{et} \quad \xi_{\max} = \sup \{ |\xi|, (x, \xi) \in p^{-1}(\{E_0\}) \}.$$

Pour  $\tau_0 > 0$  assez petit et  $t \in [0, 3\tau_0]$ , on a  $tM \leq \xi_{\min}$ , où  $M$  est donné par la remarque 3.20. Quitte à réduire encore  $\tau_0$ , pour tout  $(z, \xi) \in N_E\Gamma$  on a d'après la proposition A.5 :

$$d(\bar{x}(t, z, \xi), \Gamma_1) \geq d(z + 2t\xi, \Gamma_1) - |\bar{x}(t, z, \xi) - z - 2t\xi| \geq 2t|\xi| - t\xi_{\min} \geq t\xi_{\min}.$$

D'autre part, toujours d'après la remarque 3.20, on a également :

$$d(\bar{x}(t, z, \xi), \Gamma_1) \leq |\bar{x}(t, z, \xi) - z| \leq 2t\xi_{\max}.$$

□

**Lemme 6.9.** *Soit  $(z, \xi) \in N_E\Gamma$ . Alors on a*

$$\mathbb{R}^n = T_z\Gamma \oplus \mathbb{R}\xi \oplus T_\xi(N_{z,E}\Gamma), \quad (6.19)$$

*où les trois sous-espaces sont deux à deux orthogonaux.*

*Démonstration.* Soit  $\Xi \in T_\xi(N_{z,E}\Gamma)$ . On considère une application  $\eta : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow N_{z,E}\Gamma$  telle que  $\eta(0) = \xi$  et  $\dot{\eta}(0) = \Xi$ . Pour tout  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ , le vecteur  $\eta(t)$  est dans le sous-espace  $N_z\Gamma$  de  $\mathbb{R}^n$ , donc c'est encore le cas pour la dérivée en 0, soit  $\Xi \perp T_z\Gamma$ . D'autre part, en dérivant en 0 l'égalité

$$|\eta(t)|^2 = E_0 - V_1(z)$$

on obtient

$$2\xi \cdot \Xi = 0.$$

Comme  $\mathbb{R}\xi \perp T_z\Gamma$  par hypothèse, les trois sous-espaces  $T_z\Gamma$ ,  $\mathbb{R}\xi$  et  $T_\xi N_{z,E}\Gamma$  sont bien deux à deux orthogonaux. Or ils sont respectivement de dimensions  $d$ , 1 et  $n - d - 1$ , donc leur somme est bien égale à  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

On rappelle que pour  $(z, \xi) \in N_E\Gamma$  et  $(Z^1, \Xi^1), (Z^2, \Xi^2) \in T_{(z, \xi)}N_E\Gamma$  (avec  $\Xi^j = \Xi_T^j + \Xi_\perp^j + \Xi_\perp^j$  la décomposition de  $\Xi^j$  associée à (6.19) pour  $j \in \{1, 2\}$ ) on a posé :

$$g_{(z, \xi)}((Z^1, \Xi^1), (Z^2, \Xi^2)) = \langle Z^1, Z^2 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \Xi_\perp^1, \Xi_\perp^2 \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

**Proposition 6.10.** *L'application  $g$  définit bien une structure riemannienne sur  $N_E\Gamma$ .*

*Démonstration.* Soient  $(z, \xi) \in N_E\Gamma$  et  $(Z, \Xi) \in T_{(z, \xi)}N_E\Gamma$ . Il existe une fonction

$$\begin{cases} ]-\varepsilon, \varepsilon[ & \rightarrow N_E\Gamma \subset \mathbb{R}^{2n} \\ t & \mapsto (z(t), \xi(t)) \end{cases}$$

telle que  $(z(0), \xi(0)) = (z, \xi)$  et  $(\dot{z}(0), \dot{\xi}(0)) = (Z, \Xi)$ . On a d'une part

$$\left. \frac{d}{dt} |\xi(t)|^2 \right|_{t=0} = 2\xi(0) \cdot \dot{\xi}(0) = 2\xi \cdot \Xi,$$

et d'autre part :

$$\left. \frac{d}{dt} |\xi(t)|^2 \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} (E_0 - V_1(z(t))) \right|_{t=0} = -\nabla V_1(z) \cdot Z.$$

On a donc

$$\Xi_\parallel = (\xi \cdot \Xi) \frac{\xi}{|\xi|^2} = -\frac{\nabla V_1(z) \cdot Z}{2|\xi|^2} \xi,$$

ce qui prouve que l'application  $(Z, \Xi) \mapsto \Xi_\parallel$  est lisse et que  $\Xi_\parallel = 0$  si  $Z = 0$ . On considère ensuite des applications lisses  $e_j$ ,  $1 \leq j \leq d$ , d'un voisinage  $\mathcal{V} \subset \Gamma$  de  $z$  dans  $T\Gamma$  telles que pour tout  $\zeta \in \mathcal{V}$  on a  $e_j(\zeta) \in T_\zeta\Gamma$  pour tout  $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$  et  $(e_1(\zeta), \dots, e_d(\zeta))$  est une base orthonormée de  $T_\zeta\Gamma$ . De telles applications peuvent être obtenues en considérant une carte  $\psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  où  $\mathcal{U}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathcal{V}$  un voisinage de  $z$  dans  $\Gamma$ , et en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt aux vecteurs  $\partial_j \psi(\psi^{-1}(z))$  pour  $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$ . On s'intéresse à  $\Xi_T$ , qui est la projection de  $\Xi$  sur  $T_z\Gamma$  et donc donné par :

$$\Xi_T = \sum_{j=1}^d \langle \Xi, e_j(z) \rangle e_j(z).$$

Pour tout  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ , la projection de  $\xi(t)$  sur  $T_{z(t)}\Gamma$  est nulle, soit :

$$\forall j \in \llbracket 1, d \rrbracket, \quad \langle \xi(t), e_j(z(t)) \rangle = 0.$$

Cela donne

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^d \langle \xi(t), e_j(z(t)) \rangle e_j(z(t)) \right|_{t=0} \\ &= \sum_{j=1}^d \left\langle \left. \frac{d}{dt} \xi(t) \right|_{t=0}, e_j(z(t)) \right\rangle e_j(z(t)) + \sum_{j=1}^d \left\langle \xi(t), \left. \frac{d}{dt} e_j(z(t)) \right|_{t=0} \right\rangle e_j(z(t)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^d \langle \xi(t), e_j(z(t)) \rangle \left. \frac{d}{dt} e_j(z(t)) \right|_{t=0} \\ &= \Xi_T + \sum_{j=1}^d \langle \xi(t), D_z e_j \cdot Z \rangle e_j(z). \end{aligned}$$

Ainsi l'application  $(Z, \Xi) \mapsto \Xi_T$  est lisse et  $\Xi_T = 0$  si  $Z = 0$ . On a finalement démontré que l'application  $g$  est lisse et que pour tout  $(z, \xi) \in N_E \Gamma$  la forme bilinéaire  $g_{(z, \xi)}$  est bien définie positive puisque  $(Z, \Xi_\perp)$  ne peut être nul que si  $(Z, \Xi) = (0, 0)$  (la positivité est claire par positivité du produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$ ).  $\square$

On vérifie maintenant qu'on peut effectivement paramétrer un voisinage de  $\Gamma_0$  dans  $\mathbb{R}^n$  par une condition initiale dans  $N_E \Gamma$  est un temps de parcours positif :

**Proposition 6.11.** *Il existe  $\tau_0 > 0$  tel que l'application*

$$\mathcal{T} : \begin{cases} ]0, 3\tau_0[ \times N_E \Gamma & \rightarrow \text{Im } \mathcal{T} \subset \mathbb{R}^n \\ (t, w) & \mapsto \bar{x}(t, w) \end{cases}$$

est un difféomorphisme de classe  $C^\infty$  tel que  $\Gamma \cup \text{Im } \mathcal{T}$  est un voisinage de  $\Gamma_0$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

Pour  $I \subset ]0, 3\tau_0[$ , on note  $\tilde{\Gamma}(I) = \mathcal{T}(I \times N_E \Gamma)$ , et  $\tilde{\Gamma}(\{0\} \cup I) = \Gamma \cup \tilde{\Gamma}(I)$ . D'autre part, pour  $x \in \tilde{\Gamma}(]0, 3\tau_0[) = \text{Im } \mathcal{T}$  on note :

$$(t_x, z_x, \xi_x) = \mathcal{T}^{-1}(x). \quad (6.20)$$

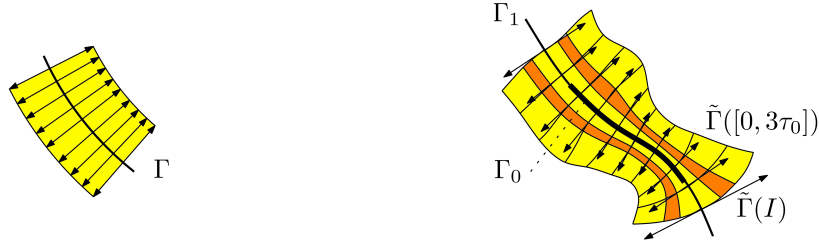


FIGURE 6.4 – Voisinage tubulaire usuel et voisinage tubulaire suivant le flot  $\phi^t$ .

*Démonstration.* Pour  $\tau > 0$  on note

$$N_1(\tau) = \left\{ (z, \eta) \in N\Gamma_1 \mid |\eta| < \tau \sqrt{E_0 - V_1(z)} \right\} \text{ et } N(\tau) = N_1(\tau) \cap N\Gamma.$$

On considère l'application  $\tilde{\mathcal{T}}$  de  $N_1(1)$  dans  $\mathbb{R}^n$  définie par :

$$\tilde{\mathcal{T}}(z, \eta) = \begin{cases} \bar{x} \left( \frac{|\eta|}{\sqrt{E_0 - V_1(z)}}, z, \frac{\eta \sqrt{E_0 - V_1(z)}}{|\eta|} \right) & \text{si } \eta \neq 0, \\ z & \text{si } \eta = 0. \end{cases}$$

D'après la remarque 3.20, on a

$$\tilde{\mathcal{T}}(z, \eta) = z + 2\eta + O_{|\eta| \rightarrow 0}(|\eta|^2)$$

pour tout  $z \in \Gamma_1$ . On commence par vérifier que pour  $\tau_0 > 0$  assez petit,  $\tilde{\mathcal{T}}$  est un difféomorphisme de  $N(3\tau_0)$  dans un voisinage « tubulaire » de  $\Gamma$ . Pour cela on suit la démonstration du cas plus classique  $(z, \eta) \mapsto z + \eta$  pour une sous-variété compacte (voir par exemple le théorème 2.7.12 de [BG87]).

Autour de tout point  $(z, 0) \in N\Gamma_1$  l'application  $\tilde{\mathcal{T}}$  définit un difféomorphisme local. En effet il suffit de voir que sa différentielle est un isomorphisme de  $T_{(z,0)}N\Gamma_1 = T_{(z,0)}N_1(\tau)$  dans  $T_z\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$  et d'appliquer le théorème d'inversion locale. Comme ces deux espaces ont même dimension, il suffit de montrer que cette différentielle est surjective. Or  $\mathbb{R}^n$  est somme directe de  $T_z\Gamma_1$  et  $N_z\Gamma_1$  et pour  $X = X_\parallel + X_\perp \in T_z\Gamma \oplus N_z\Gamma$  la différentielle de  $\tilde{\mathcal{T}}$  au point



$(z, 0)$  et dans la direction  $(X_{//}, X_{\perp}/2) \in T_{(z,0)}N\Gamma_1$  vaut  $X$ . Ainsi pour tout  $z \in \Gamma_1$ , il existe un voisinage de  $(z, 0)$  dans  $N_1(1)$  de la forme  $\mathcal{W}_z = \{(z, \eta) \in N_1(3\varepsilon_z) \mid z \in \mathcal{U}_z\}$ , où  $\mathcal{U}_z$  est un voisinage de  $z$  dans  $\Gamma_1$  et  $\varepsilon_z > 0$ , tel que  $\tilde{\mathcal{T}} : \mathcal{W}_z \rightarrow \tilde{\mathcal{T}}(\mathcal{W}_z) \subset \mathbb{R}^n$  est un difféomorphisme. Comme  $\bar{\Gamma}$  est compact, on peut trouver  $z_1, \dots, z_N \in \Gamma_1$  tels que  $\bar{\Gamma} \subset \bigcup_{j=1}^N \mathcal{U}_{z_j}$ . Notant  $\tau_0 = \min \{\varepsilon_{z_j}, 1 \leq j \leq N\}$ , on obtient que  $\mathcal{T}$  restreint à  $N(3\tau_0)$  réalise un difféomorphisme local autour de chacun des points de  $N(3\tau_0)$ .

Quitte à réduire  $\tau_0$ ,  $\mathcal{T}$  est également injectif sur  $N(3\tau_0)$ . Si ce n'est pas le cas on peut trouver deux suites  $(w_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  et  $(\tilde{w}_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  telles que pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$  les points  $w_m, \tilde{w}_m \in N(1/m)$  sont distincts mais  $\tilde{\mathcal{T}}(w_m) = \tilde{\mathcal{T}}(\tilde{w}_m)$ . Quitte à extraire une sous-suite, il existe  $z, \tilde{z} \in \bar{\Gamma} \subset \Gamma_1$  tels que  $w_m \rightarrow (z, 0)$ ,  $\tilde{w}_m \rightarrow (\tilde{z}, 0)$  et donc  $z = \tilde{\mathcal{T}}(z, 0) = \tilde{\mathcal{T}}(\tilde{z}, 0) = \tilde{z}$ . Ainsi, pour  $m$  assez grand on a  $w_m, \tilde{w}_m \in \mathcal{W}_z$ , ce qui contredit le fait que  $\tilde{\mathcal{T}}$  est injective sur  $\mathcal{W}_z$ .

On obtient finalement que l'application  $\mathcal{T} : (t, z, \xi) \mapsto \tilde{\mathcal{T}}(z, t\xi)$  est un difféomorphisme de  $]0, 3\tau_0[ \times N_E\Gamma$  sur son image et  $\Gamma \cup \tilde{\Gamma}(]0, 3\tau_0[)$  est un voisinage de  $\Gamma_0$ .  $\square$

*Remarque 6.12.* Pour passer d'une application  $\mathcal{T}$  sur  $]0, 3\tau_0[ \times N_E\Gamma$  à une application  $\tilde{\mathcal{T}}$  sur  $N(3\tau_0)$ , on aurait pu être tenté de poser

$$\tilde{\mathcal{T}}(z, \eta) = \bar{x}(1, z, \eta).$$

Mais contrairement à ce qu'il se passe pour les géodésiques d'une variété ou pour les trajectoires classiques pour le flot libre  $(t, z, \xi) \mapsto z + 2t\xi$ , prendre un petit temps de parcours ou un petit vecteur vitesse ne revient pas au même. Avec cette définition on n'aurait donc pas l'égalité

$$\mathcal{T}(t, z, \xi) = \tilde{\mathcal{T}}(z, t\xi)$$

qui nous a permis de conclure.

**Proposition 6.13.** *Soit  $f$  une fonction intégrable sur  $\tilde{\Gamma}(]0, 3\tau_0[)$ . Alors on a*

$$\int_{\tilde{\Gamma}(]0, 3\tau_0[)} f(x) dx = 2^{n-d} \int_0^{3\tau_0} \int_{N_E\Gamma} f(\bar{x}(t, z, \xi)) |\xi| t^{n-d-1} (1 + \varepsilon(t, z, \xi)) d\sigma_{N_E\Gamma}(z, \xi) dt,$$

où

$$\sup_{(z, \xi) \in N_E\Gamma} |\varepsilon(t, z, \xi)| = O(t).$$

*Démonstration. 1.* Comme l'application  $\mathcal{T}$  définie à la proposition précédente réalise un difféomorphisme de classe  $C^\infty$  de  $]0, 3\tau_0[ \times N_E\Gamma$  sur un ouvert  $\tilde{\Gamma}(]0, 3\tau_0[)$  de  $\mathbb{R}^n$ , l'application  $\mathcal{T}^{-1} : \tilde{\Gamma}(]0, 3\tau_0[) \rightarrow ]0, 3\tau_0[ \times N_E\Gamma$  peut être considérée comme une carte pour la sous-variété  $]0, 3\tau_0[ \times N_E\Gamma$ . Vue la définition<sup>1</sup> de  $\sigma_{N_E\Gamma}$ , on a alors :

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Gamma}(]0, 3\tau_0[)} f(x) dx &= \int_{\tilde{\Gamma}(]0, 3\tau_0[)} f(x) dx \\ &= \int_{\tilde{\Gamma}(]0, 3\tau_0[)} (f \circ \mathcal{T})(\mathcal{T}^{-1}x) |\det D_x \mathcal{T}^{-1}| |\det D_{\mathcal{T}^{-1}(x)} \mathcal{T}| dx \\ &= \int_0^{3\tau_0} \int_{N_E\Gamma} (f \circ \mathcal{T})(t, z, \xi) |\det D_{(t, z, \xi)} \mathcal{T}| d\sigma_{N_E\Gamma}(z, \xi) dt. \end{aligned}$$

Pour obtenir une expression plus explicite de cette intégrale, on doit donc calculer le jacobien de  $\mathcal{T}$ . Soit  $(t, z, \xi) \in ]0, 3\tau_0[ \times N_E\Gamma$ . Pour  $(T_1, Z_1, \Xi_1), (T_2, Z_2, \Xi_2) \in T_{(t, z, \xi)}(]0, 3\tau_0[ \times N_E\Gamma)$  on pose

$$\tilde{g}_{(t, z, \xi)}((T_1, Z_1, \Xi_1), (T_2, Z_2, \Xi_2)) = T_1 T_2 + g_{(z, \xi)}((Z_1, \Xi_1), (Z_2, \Xi_2)),$$

où  $g$  est la métrique définie en (6.9), de sorte que  $\sigma_{N_E\Gamma} dt$  est la mesure canoniquement associée à la métrique  $\tilde{g}$ . Pour calculer  $|\det D_{(t, z, \xi)} \mathcal{T}|$ , on cherche des bases orthonormées de

1. On a donné la définition de la mesure  $\sigma_{N_E\Gamma}$  en utilisant une matrice de Gram, et on utilise ici le jacobien. C'est équivalent, dans les deux cas il s'agit du volume du paralléloétope engendré par les vecteurs  $\partial_j \mathcal{T}^{-1}(x)$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

$T_{(t,z,\xi)}(]0, 3\tau_0[ \times N_E\Gamma)$  (pour la métrique  $\tilde{g}$ ) et  $\mathbb{R}^n$  (pour la métrique usuelle) dans lesquelles la différentielle a une expression simple.

2. Comme  $\{z\} \times N_{z,E}\Gamma$  est une sous-variété de dimension  $n - d - 1$  dans  $N_E\Gamma$ , on peut considérer une base orthonormée de la forme  $((0, \Xi_j))_{d+2 \leq j \leq n}$  pour son plan tangent au point  $(z, \xi)$ . On choisit ensuite une base orthonormée  $(Z_j)_{2 \leq j \leq d+1}$  pour  $T_z\Gamma$ . On peut alors trouver  $\Xi_2, \dots, \Xi_{d+1} \in \mathbb{R}^n$  tels que  $(Z_j, \Xi_j) \in T_{(z,\xi)}N_E\Gamma$  pour tout  $j \in \llbracket 2, d+1 \rrbracket$ . Quitte à ajouter à  $(Z_2, \Xi_2), \dots, (Z_{d+1}, \Xi_{d+1})$  des combinaisons linéaires des vecteurs  $(0, \Xi_{d+2}), \dots, (0, \Xi_n)$ , on peut supposer avoir choisi les vecteurs  $\Xi_2, \dots, \Xi_{d+1}$  dans  $T_z\Gamma \oplus \mathbb{R}\xi$ . Ces  $n - 1$  vecteurs forment donc une base orthonormée de  $T_{(z,\xi)}N_E\Gamma$  (pour la métrique  $g$ ). Avec le vecteur unitaire canonique pour la composante de temps, on obtient une base orthonormée

$$\mathcal{B}_{(t,z,\xi)} = ((1, 0, 0), (0, Z_2, \Xi_2), \dots, (0, Z_{d+1}, \Xi_{d+1}), (0, 0, \Xi_{d+2}), \dots, (0, 0, \Xi_n))$$

de  $T_{(t,z,\xi)}(]0, 3\tau_0[ \times N_E\Gamma)$  pour la métrique  $\tilde{g}$ . Dans  $\mathbb{R}^n$  on considère la base orthonormée

$$\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}(t,z,\xi)} = (\hat{\xi}, Z_2, \dots, Z_{d+1}, \Xi_{d+2}, \dots, \Xi_n).$$

Comme  $\mathcal{T}(t, z, \xi) = z + 2t\xi + O(t^2)$ , la matrice jacobienne de  $\mathcal{T}$  dans ces deux bases est de la forme

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{(t,z,\xi)} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}(t,z,\xi)}} D_{(t,z,\xi)}\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 2|\xi| & O(t) & 0 \\ 0 & \text{Id} + O(t) & 0 \\ 0 & 0 & 2t \text{I}_{n-d-1} \end{pmatrix} + \underset{t \rightarrow 0}{O}(t^2),$$

ce qui donne bien

$$|\det D_{(t,z,\xi)}\mathcal{T}| = 2^{n-d} |\xi| t^{n-d-1} \left(1 + \underset{t \rightarrow 0}{O}(t)\right),$$

et conclut la démonstration.  $\square$

*Remarque 6.14.* C'est pour cette proposition que le choix de la métrique  $g$  sur  $N_E\Gamma$  s'avère judicieux. Tout d'abord il convient de remarquer que n'importe quel choix de structure riemannienne donne une mesure associée absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et permet de calculer une intégrale sur  $\tilde{\Gamma}([0, 3\tau_0])$ . Simplement, on change la mesure  $\sigma_{N_E\Gamma}$  et l'expression du jacobien en conséquence.

Puisqu'on a défini  $N_E\Gamma$  comme une sous-variété de  $\Gamma \times \mathbb{R}^n$  (ou encore comme une sous-variété de  $\mathbb{R}^{2n}$ ) on aurait pu munir  $N_E\Gamma$  de la structure riemannienne héritée du produit scalaire de  $\mathbb{R}^{2n}$ . Mais dans ce cas les normes des vecteurs  $(Z_j, \Xi_j)$  pour  $j \in \llbracket 2, d+1 \rrbracket$  dépendent de  $\Xi_j$ . Comme les  $\Xi_j$  n'interviennent que de façon négligeable dans  $D_{(t,z,\xi)}\mathcal{T}(Z, \Xi)$ , ils interviendraient donc dans le terme principal pour le calcul du jacobien. Le choix de  $g$  permet donc d'éviter de tenir compte des  $\Xi_j$  dès le départ, ce qui simplifie les calculs et l'expression du jacobien (sachant que  $\Xi_j$  est fonction de  $Z_j$ , on ne perd d'ailleurs pas d'information en faisant cela).

On peut alors penser avoir dissimulé la difficulté dans la métrique  $\sigma_{N_E\Gamma}$ , mais c'est plutôt la définition de  $N_E\Gamma$  comme sous-variété de  $\mathbb{R}^{2n}$  qui n'est pas tout à fait naturelle. On y voit  $\xi$  comme un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  alors que la seule information dont on a besoin est une direction dans  $N_z\Gamma$ , ce qui nous oblige ensuite à « faire le tri ». On gardera tout de même cette définition, car elle sera plus pratique pour les calculs qui vont suivre.

L'injectivité pour la première composante de  $(t, z, \xi) \mapsto \phi^t(z, \xi)$  sur  $]0, 3\tau_0[ \times N_E\Gamma$  implique l'injectivité du flot total. Le fait qu'une trajectoire classique ne puisse passer par  $N_E\Gamma$  pour des temps trop proches sera important pour notre étude.

**Corollaire 6.15.** *Soient  $(t_1, w_1) \neq (t_2, w_2) \in \mathbb{R} \times N_E\Gamma$  tels que  $\phi^{t_1}(w_1) = \phi^{t_2}(w_2)$ . Alors on a  $|t_2 - t_1| \geq 3\tau_0$  où  $\tau_0 > 0$  est donné par la proposition 6.11.*

*Démonstration.* Par symétrie on peut supposer que  $t_2 \geq t_1$ . On a alors  $\phi^{t_2-t_1}(w_2) = w_1 \in N_E\Gamma$ , et en particulier  $\bar{x}(t_2 - t_1, w_2) \in \Gamma$ . D'après le théorème précédent on a  $t_2 - t_1 = 0$  ou bien  $t_2 - t_1 \geq 3\tau_0$ . Mais si  $t_2 = t_1 = t$ , alors  $w_1 = \phi^{-t}(\phi^{t_1}(w_1)) = \phi^{-t}(\phi^{t_2}(w_2)) = w_2$ , ce qui contredit l'hypothèse.  $\square$

On considère

$$\Lambda_\infty = \{\phi^t(z, \xi), t > 0, (z, \xi) \in N_E\Gamma_0\} \subset \mathbb{R}^{2n}.$$

Pour  $w \in \Lambda_\infty$  on note

$$\left( (t_{w,k}, z_{w,k}, \xi_{w,k}) \right)_{1 \leq k \leq K_w} = \{(t, z, \xi) \in \mathbb{R}_+^* \times N_E\Gamma_0 \mid \phi^t(z, \xi) = w\},$$

où la suite  $(t_{w,k})_{1 \leq k \leq K_w}$  est strictement croissante et  $K_w \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . D'après le corollaire 6.15, l'ensemble des temps de passage en  $w$  est dénombrable, donc la définition a bien un sens à condition d'autoriser  $K_w = \infty$ . Dans ce cas la convention est :  $\llbracket 1, \infty \rrbracket = \mathbb{N}^*$ . Si  $w \notin \Lambda_\infty$ , alors on note  $K_w = 0$ . D'autre part, si  $w \in N_E\Gamma_0$ , on pose également  $t_{w,0} = 0$ . Pour distinguer les cas où  $w$  appartient ou non à  $N_E\Gamma_0$  on utilisera la notation suivante :

$$\delta_w = \begin{cases} 1 & \text{si } w \notin N_E\Gamma_0, \\ 0 & \text{si } w \in N_E\Gamma_0. \end{cases} \quad (6.21)$$

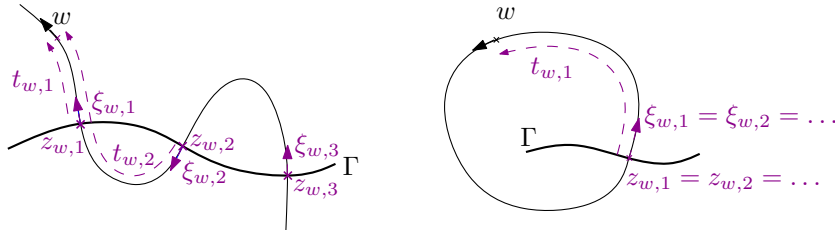


FIGURE 6.5 – Les conditions initiales  $(z_{w,k}, \xi_{w,k}) \in N_E\Gamma_0$  qui atteignent  $w$  en temps  $t_{w,k}$  positif.

Enfin, pour  $k \in \llbracket 1, K_w \rrbracket$  on pose

$$\Lambda_{w,k} = \{\phi^t(z, \xi), |t - t_{w,k}| < \tau_0, (z, \xi) \in N_E\Gamma \cap B_{\mathbb{R}^{2n}}((z_k, \xi_k), \tau_0)\}, \quad (6.22)$$

et si  $w \in N_E\Gamma_0$  :

$$\Lambda_{w,0} = \{\phi^t(z, \xi), |t| < \tau_0, (z, \xi) \in N_E\Gamma \cap B_{\mathbb{R}^{2n}}(w, \tau_0)\}$$

Tous ces ensembles sont des sous-variétés de dimension  $n$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$ . On les munit de la structure obtenue par restriction du produit scalaire de  $\mathbb{R}^{2n}$  et de la mesure  $\sigma_{\Lambda_{w,k}}$  associée.

**Proposition 6.16.** (i) Soient  $w \in \Lambda_\infty \cup N_E\Gamma_0$  et  $j, k \in \llbracket \delta_w, K_w \rrbracket$ . La sous-variété  $\Lambda_{w,j} \cap \Lambda_{w,k}$  est de mesure nulle dans  $\Lambda_{w,j}$  si et seulement si elle l'est dans  $\Lambda_{w,k}$ .

(ii) L'hypothèse (6.10) est équivalente à :

$$\forall w \in \mathbb{R}^{2n}, \forall j \neq k \in \llbracket \delta_w, K_w \rrbracket, \Lambda_{j,w} \cap \Lambda_{k,w} \text{ est de mesure nulle dans } \Lambda_{w,j}. \quad (6.23)$$

*Démonstration.* (i) On note  $T_j = T_w\Lambda_{w,j}$  et  $T_k = T_w\Lambda_{w,k}$ . Ce sont deux sous-espaces de dimension  $n$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$ . Soit  $S$  un supplémentaire commun à ces deux sous-espaces dans  $\mathbb{R}^{2n}$ . On note  $\Pi$  la projection de  $\mathbb{R}^{2n}$  sur  $T_j$  parallèlement à  $S$ ,  $\Pi_j$  la restriction de  $\Pi$  à  $\Lambda_{w,j}$  et  $\Pi_k$  la restriction de  $\Pi$  à  $\Lambda_{w,k}$  (voir figure 6.7). La différentielle de  $\Pi_j$  en  $w$  n'est autre que l'application identité sur  $T_j$  identifié à son espace tangent en  $(w, 0)$ . Ainsi  $\Pi_j$  est un

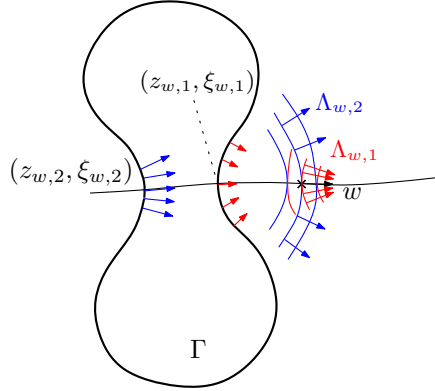


FIGURE 6.6 – Les ensembles  $\Lambda_{w,k}$ .

difféomorphisme local d'un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $w$  dans  $\Lambda_{w,j}$  dans un voisinage de  $w$  dans  $T_j$ . Pour toute fonction  $f$  intégrable sur  $\mathcal{V}$  on peut alors écrire :

$$\int_{\mathcal{V}} f(x) d\sigma_{\Lambda_{w,j}}(x) = \int_{T_j} f(\Pi_j^{-1}y) |\det D_y \Pi_j^{-1}| d\sigma_{T_j}(y),$$

où  $\sigma_{T_j}$  est la mesure de Lebesgue sur  $T_j$ . En particulier avec  $f = \mathbb{1}_{\Lambda_{w,j} \cap \Lambda_{w,k}}$  (si  $\mathcal{V}$  ne couvre pas  $\mathbb{1}_{\Lambda_{w,j} \cap \Lambda_{w,k}}$ , alors il suffit de faire le même raisonnement sur un nombre fini d'ouverts) on obtient que  $\Lambda_{w,j} \cap \Lambda_{w,k}$  est de mesure nulle dans  $\Lambda_{w,j}$  si et seulement si sa projection  $\Pi_j(\Lambda_{w,j} \cap \Lambda_{w,k})$  est de mesure nulle dans  $T_j$ . On fait le même raisonnement sur  $\Lambda_{w,k}$  (toujours en projetant sur  $T_j$ ). En effet la différentielle de  $\Pi_k$  est la projection de  $T_k$  sur  $T_j$  parallèlement à  $S$ , qui est un isomorphisme du fait que  $S$  est supplémentaire à  $T_k$ . Ainsi on obtient que la sous-variété  $\Lambda_{w,j} \cap \Lambda_{w,k}$  est de mesure nulle dans  $\Lambda_{w,k}$  si et seulement si sa projection  $\Pi(\Lambda_{w,j} \cap \Lambda_{w,k})$  est de mesure nulle dans  $T_j$ , et donc si et seulement si elle est de mesure nulle dans  $\Lambda_{w,j}$ .

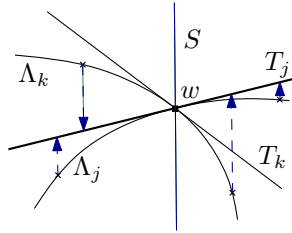


FIGURE 6.7 – Un supplémentaire  $S$  et les projections  $\Pi_j$  et  $\Pi_k$  associées.

(ii) On suppose que l'hypothèse (6.10) est vérifiée. Soient  $w \in \mathbb{R}^{2n}$  et  $j \neq k \in \llbracket \delta_w, K_w \rrbracket$ . D'après (i) on peut, par symétrie, supposer que  $t_{w,j} < t_{w,k}$ . On a alors  $t_{w,k} - t_{w,j} \geq 3\tau_0$ . Quitte à réduire  $\tau_0$  on peut supposer qu'il existe une carte  $\psi$  de  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n-1}$  dans un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $(z_k, \xi_k)$  dans  $N_E \Gamma$  tel que  $B_{\mathbb{R}^{2n}}((z_k, \xi_k), \tau_0) \cap N_E \Gamma \subset \mathcal{V}$ . On note  $\phi$  l'application qui à  $(t, w) \in ]t_{w,k} - \tau_0, t_{w,k} + \tau_0[ \times \mathcal{V}$  associe  $\phi^t(w)$  et  $\zeta$  l'application qui à  $(t, u) \in ]t_{w,k} - \tau_0, t_{w,k} + \tau_0[ \times \mathcal{U}$  associe  $\phi^t(\psi(u))$ . L'application  $\zeta$  est alors une carte pour la sous-variété  $\Lambda_{w,k}$  et on a par le

théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Lambda_{w,k}} \mathbb{1}_{\Lambda_{w,j} \cap \Lambda_{w,k}}(w) d\sigma_{\Lambda_{w,k}}(w) \\
&= \int_{t_{w,k}-\tau_0}^{t_{w,k}+\tau_0} \int_{\mathcal{U}} \mathbb{1}_{\Lambda_{w,j} \cap \Lambda_{w,k}}(\zeta(s,u)) |\det D_{(s,u)}\zeta| du ds \\
&= \int_{t_{w,k}-\tau_0}^{t_{w,k}+\tau_0} \int_{\mathcal{U}} \mathbb{1}_{\Lambda_{w,j} \cap \Lambda_{w,k}}(\phi^s(\psi(u))) |\det D_{(s,\psi(u))}\phi| |\det D_u\psi| du ds \\
&= \int_{t_{w,k}-\tau_0}^{t_{w,k}+\tau_0} \int_{\mathcal{V}} \mathbb{1}_{\Lambda_{w,j} \cap \Lambda_{w,k}}(\phi^s(v)) |\det D_{(s,v)}\phi| d\sigma_{N_E\Gamma}(v) ds \\
&\leq c \int_{t_{w,k}-\tau_0}^{t_{w,k}+\tau_0} \sigma_{N_E\Gamma}(\{v \in \mathcal{V} \mid \exists \tau \in [t_{w,j}-\tau_0, t_{w,j}+\tau_0], \phi^{s-\tau} \in N_E\Gamma\}) ds
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (6.10) on a donc :

$$0 \leq \int_{\Lambda_{w,k}} \mathbb{1}_{\Lambda_{w,j} \cap \Lambda_{w,k}}(w) d\sigma_{\Lambda_{w,k}}(w) \leq c \int_{t_{w,k}-\tau_0}^{t_{w,k}+\tau_0} 0 ds \leq 0$$

Inversement, on suppose que l'hypothèse (6.10) n'est pas vérifiée. L'ensemble  $\Phi_0$  est union dénombrable d'ensembles de la forme

$$A_{w_0, w_1, m} = \{w \in B_{\mathbb{R}^{2n}}(w_1, \tau_0) \cap N_E\Gamma \mid \exists t \in I_m, \phi^t(w) \in B_{\mathbb{R}^{2n}}(w_0, \tau_0) \cap N_E\Gamma\},$$

avec  $w_0, w_1 \in N_E\Gamma$ ,  $m \in \mathbb{N}$  et  $I_m := ]m\tau_0/2, (m+1)\tau_0/2]$ . Il existe donc  $w_0, w_1 \in N_E\Gamma$  et  $m \in \mathbb{N}$  tels que

$$\sigma_{N_E\Gamma}(A_{w_0, w_1, m}) > 0.$$

Sans perte de généralité, on peut même supposer que  $\phi^{t_1}(w_1) = w_0$  pour un certain  $t_1 \in I_m$ . Soit  $w \in A_{w_0, w_1, m}$ . Comme en particulier  $w$  est dans  $B_{\mathbb{R}^{2n}}(w_1, \tau_0) \cap N_E\Gamma$ , pour tout  $s \in [t_1 - \tau_0, t_1 + \tau_0]$  on a  $\phi^s(w) \in \Lambda_1$  (définie comme en (6.22) avec  $w = w_0$ ,  $(z_k, \xi_k) = w_1$  et  $t_{w,k} = t_1$ ). En outre, il existe  $t \in I_m$  tel que  $\phi^t(w) \in B_{\mathbb{R}^{2n}}(w_0, \tau_0) \cap N_E\Gamma$ . Pour tout  $s \in [t - \tau_0, t + \tau_0]$  on a  $\phi^s(w) = \phi^{s-t}(\phi^t(w)) \in \Lambda_0 := \Lambda_{w_0, 0}$ . En particulier pour tout  $s \in [t_1 - \frac{\tau_0}{2}, t_1 + \frac{\tau_0}{2}]$  on a  $\phi^s(w) \in \Lambda_0 \cap \Lambda_1$ , et donc :

$$\begin{aligned}
\int_{\Lambda_1} \mathbb{1}_{\Lambda_0 \cap \Lambda_1}(w) d\sigma_{\Lambda_1}(w) &\geq \int_{A_{w_0, w_1, m}} \int_{t_1 - \frac{\tau_0}{2}}^{t_1 + \frac{\tau_0}{2}} |\det D_{(s,w)}\phi| ds d\sigma_{N_E\Gamma}(w) \\
&\geq c_0 \tau_0 \sigma_{N_E\Gamma}(A_{w_0, w_1, m}) > 0,
\end{aligned}$$

ce qui contredit (6.23). □

### 6.2.3 Méthode B.K.W.

Étant donné un symbole  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ , le but de ce paragraphe est d'approcher, pour  $h \in ]0, 1]$  et  $t \geq 0$  petit, la fonction  $(x, \xi) \mapsto \left(e^{-\frac{it}{\hbar}(H_h - E_h)} f(\cdot, \xi)\right)(x)$  par une fonction de la forme  $(x, \xi) \mapsto a(t, x, \xi, h) e^{\frac{i}{\hbar} \varphi(t, x, \xi)}$ , où  $a$  et  $\varphi$  sont à déterminer. On utilise pour cela la méthode B.K.W. évoquée au paragraphe 3.1.1. On considère la solution  $\varphi$  à l'équation de Hamilton-Jacobi donnée par la proposition 3.23 pour le symbole  $p_E : (x, \xi) \mapsto \xi^2 + V_1(x) - E_0$ . On choisit ensuite  $\tau_0 > 0$  assez petit pour que  $\varphi$  soit définie sur  $] -3\tau_0, 3\tau_0[$  et pour que les résultats de la proposition 6.11 soient bien vérifiés.

La démonstration que l'on présente ici est standard. On la donne néanmoins en détail pour voir comment interviennent la partie imaginaire du potentiel et l'hypothèse (6.3). Dans le cas où  $\nu_E$  est petit, on aura également besoin de garder une expression assez précise pour le reste.

**Proposition 6.17.** Soit  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ . On suppose que  $\nu_E$  est fini. Alors il existe des fonctions  $a_j \in C_0^\infty([-2\tau_0, 2\tau_0] \times \mathbb{R}^{2n})$  pour  $j \in \llbracket 0, \nu_E - 1 \rrbracket$  telles que si on note  $a(h) = \sum_{j=0}^{\nu_E-1} h^j a_j$  alors pour tous  $t \in [-2\tau_0, 2\tau_0]$  et  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$  on a

$$e^{-\frac{it}{h}(H_h - E_h)} \left( f(\cdot, \xi) e^{\frac{i}{h}\langle \cdot, \xi \rangle} \right) (x) = a(t, x, \xi, h) e^{\frac{i}{h}\varphi(t, x, \xi)} + h^{\nu_E-1} \varepsilon(h) R_{\nu_E}(t, x, \xi, h),$$

avec  $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$  et

$$R_{\nu_E}(t, x, \xi, h) = \int_0^t e^{-\frac{is}{h}(H_h - E_h)} \left( r_{\nu_E}(t-s, \cdot, \xi, h) e^{\frac{i}{h}\varphi(t-s, \cdot, \xi)} \right) (x) ds$$

où  $r_{\nu_E}(h) \in C_0^\infty([-2\tau_0, 2\tau_0] \times \mathbb{R}^{2n})$  uniformément en  $h \in ]0, 1]$  (les supports sont contenus dans un même compact et les dérivées sont estimées uniformément en  $h$ ). Si  $\nu_E = \infty$ , alors le résultat est valable en remplaçant  $\nu_E$  par n'importe quel  $N \in \mathbb{N}$ .

*Démonstration.* **1.** Soient  $N \in \llbracket 1, \nu_E \rrbracket$  fini et  $a(h) \in C_0^\infty([-2\tau_0, 2\tau_0] \times \mathbb{R}^{2n})$  de la forme

$$a(t, x, \xi, h) = \sum_{j=0}^{N-1} h^j a_j(t, x, \xi)$$

avec  $a_j \in C_0^\infty([-2\tau_0, 2\tau_0] \times \mathbb{R}^{2n})$  pour tout  $j \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ ,  $a_0(0, x, \xi) = f(x, \xi)$  et  $a_j(0, x, \xi) = 0$  pour  $j \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$ . Pour  $h \in ]0, 1]$ ,  $t \in [-2\tau_0, 2\tau_0]$  et  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$  on a :

$$\begin{aligned} a(t, x, \xi, h) e^{\frac{i}{h}\varphi(t, x, \xi)} - e^{-\frac{it}{h}(H_h - E_h)} \left( f(\cdot, \xi) e^{\frac{i}{h}\langle \cdot, \xi \rangle} \right) (x) \\ = \int_0^t \frac{d}{ds} e^{-\frac{i(t-s)}{h}(H_h - E_h)} \left( a(s, \cdot, \xi, h) e^{\frac{i}{h}\varphi(s, \cdot, \xi)} \right) (x) ds. \end{aligned}$$

On a calculé (voir proposition 3.56) :

$$\begin{aligned} \frac{i}{h} (H_h - E_h) \left( a e^{\frac{i}{h}\varphi} \right) \\ = \left( -ih\Delta_x a + 2\nabla_x a \cdot \nabla_x \varphi + a\Delta_x \varphi + \frac{i}{h} a |\nabla_x \varphi|^2 + \frac{i}{h} a V_1 + a V_2 - \frac{i}{h} a E_h \right) e^{\frac{i}{h}\varphi}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} e^{-\frac{i(t-s)}{h}(H_h - E_h)} \left( a(s, h) e^{\frac{i}{h}\varphi(s)} \right) \\ = e^{-\frac{i(t-s)}{h}(H_h - E_h)} \left( \frac{i}{h} (H_h - E_h) (a(s, h) e^{\frac{i}{h}\varphi(s)}) + \partial_s a(s, h) e^{\frac{i}{h}\varphi(s)} + \frac{i}{h} \partial_s \varphi(s) a(s, h) e^{\frac{i}{h}\varphi(s)} \right) \\ = e^{-\frac{i(t-s)}{h}(H_h - E_h)} \left( \sum_{j=-1}^N h^j A_j(s, h) - ih^{N-1} \tilde{\varepsilon}(h) a(s, h) \right) e^{\frac{i}{h}\varphi(s)}, \end{aligned}$$

avec  $\tilde{\varepsilon}(h) = h^{-N} \left( E_h - \sum_{j=0}^N h^j E_j \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$  et :

$$\begin{aligned} A_{-1}(s, h) &= i \left( \partial_s \varphi(s) + |\nabla_x \varphi(s)|^2 + V_1 - E_0 \right) a(s, h), \\ A_0(s) &= \partial_s a_0(s) + 2\nabla_x a_0(s) \cdot \nabla_x \varphi(s) + a_0(s) \Delta_x \varphi(s) + a_0(s) V_2 - ia_0(s) E_1, \\ A_j(s) &= \partial_s a_j(s) + 2\nabla_x a_j(s) \cdot \nabla_x \varphi(s) + a_j(s) \Delta_x \varphi(s) + a_j(s) V_2 \\ &\quad - i \sum_{k=0}^j a_k(s) E_{j+1-k} - i \Delta_x a_{j-1}(s), \quad j \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, \\ A_N &= -i \Delta_x a_{N-1}(s). \end{aligned}$$

La fonction de phase  $\varphi$  a été construite pour que  $A_{-1}$  soit nul (voir (3.13)). Il reste à construire l'amplitude  $a(h)$  pour que les  $A_j$ ,  $j \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ , le soient également.

2. Pour  $s, t \in [2\tau_0, 2\tau_0]$  et  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$  on pose

$$b(t, x, \xi) = -iE_1 + V_2(x) + \Delta_x \varphi(t, x, \xi)$$

puis :

$$a_0(t, x, \xi) = f(\bar{y}(t, x, \xi), \xi) \exp\left(-\int_0^t b(\tau, \tilde{x}(\tau, t, x, \xi), \xi) d\tau\right). \quad (6.24)$$

On définit ensuite par récurrence, pour  $j \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$ ,

$$d_j(t, x, \xi) = i\Delta_x a_{j-1}(t, x, \xi) + \sum_{k=0}^{j-1} E_{j+1-k} a_k(t, x, \xi)$$

puis :

$$a_j(t, x, \xi) = i \int_0^t d_j(s, \tilde{x}(s, t, x, \xi), \xi) \exp\left(-\int_s^t b(\tau, \tilde{x}(\tau, t, x, \xi), \xi) d\tau\right) ds.$$

D'après la proposition 3.57, on obtient que  $a_0$  est solution de l'équation de transport

$$(\partial_t + 2\nabla_x \varphi \cdot \nabla_x + \Delta_x \varphi + V_2 - iE_1) a_0(t, x, \xi) = 0$$

avec la condition initiale  $a_0(0, x, \xi) = f(x, \xi)$ . Pour  $j \geq 1$  on applique ensuite la proposition 3.57 avec  $\tilde{a} = a_j$ . Cela prouve que  $a_j$  est solution de l'équation de transport

$$(\partial_t + 2\nabla_x \varphi \cdot \nabla_x + \Delta_x \varphi + V_2 - iE_1) a_j(t, x, \xi) = i\Delta_x a_{j-1}(t, x, \xi) + i \sum_{k=0}^{j-1} E_{j+1-k} a_k(t, x, \xi),$$

avec la condition initiale  $a_j(0, x, \xi) = 0$ . Il ne reste plus qu'à considérer

$$\varepsilon(h) r_{\nu_E}(s, h) = i\tilde{\varepsilon}(h) a(s, h) + ih\Delta_x a_{N-1}(s)$$

pour conclure. Dans le cas où  $\nu_E = +\infty$  on pourrait utiliser le théorème de Borel 3.4 pour construire un symbole  $a(h)$  tel que reste est en fait de taille  $O(h^\infty)$ .  $\square$

*Remarque 6.18.* On observe que  $\text{supp}_\xi a(h) \subset \text{supp}_\xi f$  (et  $\text{supp}_\xi r_{\nu_E}(h) \subset \text{supp}_\xi f$ ) pour tout  $h \in ]0, 1]$ .

*Remarque 6.19.* On a vu au corollaire 3.60 que le propagateur  $U_h(t)$  est à  $O(h^\infty)$  près un opérateur intégral de Fourier. Un calcul analogue à celui de la proposition 3.59 où  $E_h$  intervient comme ici montre que le résultat est encore valable pour  $U_h^E(t)$  à  $o(h^{\nu_E-1})$  près.

## 6.2.4 Étude des points critiques de la fonction de phase

Pour  $t \in [0, 3\tau_0[$ ,  $x, \xi \in \mathbb{R}^n$  et  $z \in \Gamma$  on pose

$$\psi(t, x, z, \xi) = \varphi(t, x, \xi) - \langle z, \xi \rangle. \quad (6.25)$$

En vue d'utiliser la méthode de la phase stationnaire pour une intégrale de phase  $\psi$  (et pour des temps petits), on s'intéresse dans ce paragraphe aux points critiques de  $\psi$  en  $t, z$  et  $\xi$  tels que  $t \in ]0, 3\tau_0[$ , c'est-à-dire les solutions à  $x$  fixé de :

$$\begin{cases} \partial_t \psi(t, x, z, \xi) = 0 \\ \nabla_\xi \psi(t, x, z, \xi) = 0 \\ \nabla_z \psi(t, x, z, \xi) = 0 \\ t \in ]0, 3\tau_0[ \end{cases} \iff \begin{cases} \partial_t \varphi(t, x, \xi) = 0 \\ \nabla_\xi \varphi(t, x, \xi) = z \\ \xi \in N_z \Gamma \\ t \in ]0, 3\tau_0[. \end{cases} \quad (6.26)$$

**Proposition 6.20.** *Soit  $x \in \tilde{\Gamma}(]0, 3\tau_0])$ . Alors le système (6.26) admet une unique solution, qui n'est autre que le triplet  $(t_x, z_x, \xi_x)$  introduit en (6.20).*

*Démonstration.* On suppose que  $(t, x, z, \xi)$  est un point critique de  $\psi$  par rapport aux variables  $t, z$  et  $\xi$  tel que  $t \in ]0, 3\tau_0[$ . On sait déjà que  $\xi \in N_z\Gamma$ . D'après (3.16) on a

$$(x, \nabla_x \varphi(t, x, \xi)) = \phi^t(\nabla_\xi \varphi(t, x, \xi), \xi) = \phi^t(z, \xi),$$

et en particulier  $x = \bar{x}(t, z, \xi)$ . Comme  $\varphi$  est solution de (3.13) pour le symbole  $p - E_0$ , on a également

$$p(z, \xi) = p(x, \nabla_x \varphi(t, x, \xi)) = E_0 - \partial_t \varphi(t, x, \xi) = E_0,$$

ce qui prouve que  $|\xi|^2 = E_0 - V_1(z)$  et donc  $(z, \xi) \in N_E\Gamma$ . La solution éventuelle est donc nécessairement donnée par  $(t_x, z_x, \xi_x)$ . Pour montrer que ce triplet est effectivement solution, il suffit de remonter le raisonnement. En effet, on sait déjà que  $\nabla_z \psi(t_x, x, z_x, \xi_x) = 0$ . Et comme

$$(x, \nabla_x \varphi(t_x, x, \xi_x)) = \phi^{t_x}(\nabla_\xi \varphi(t_x, x, \xi_x), \xi_x)$$

on a

$$\nabla_\xi \varphi(t_x, x, \xi_x) = \bar{y}(t_x, x, \xi_x) = z_x,$$

ce qui prouve que  $\nabla_\xi \psi(t_x, x, z_x, \xi_x) = 0$ . Enfin pour la dérivée par rapport à  $t$  il suffit d'écrire :

$$E_0 = p(z_x, \xi_x) = p(x, \nabla_x \varphi(t_x, x, \xi_x)) = E_0 - \partial_t \varphi(t_x, x, \xi_x).$$

□

Le fait de connaître les points critiques de  $\psi$  va nous permettre d'appliquer au paragraphe suivant le théorème de la phase stationnaire pour une intégrale de phase  $\psi$ . Il faut tout de même vérifier que les points critiques que l'on vient de mettre en évidence ne sont pas dégénérés.

On considère  $\gamma_\Gamma \in ]0, 1]$  assez petit pour que l'application  $\zeta \mapsto \exp_z(\gamma_\Gamma \zeta)$  soit pour tout  $z \in \Gamma$  un difféomorphisme bien défini de  $B_{T_z\Gamma} := \{\zeta \in T_z\Gamma \mid |\zeta| < 1\}$  sur un voisinage de  $z$  dans  $\Gamma_1$ , avec  $d_\Gamma(z, \exp_z(\gamma_\Gamma \zeta)) = \gamma_\Gamma |\zeta|$  pour tout  $\zeta \in B_{T_z\Gamma}$ . Pour  $z \in \Gamma$  et  $x \in \mathbb{R}^n$  on pose :

$$\tilde{\psi}_{x,z} : (t, \zeta, \xi) \mapsto \psi(t, x, \exp_z(\zeta), \xi). \quad (6.27)$$

Cette quantité est bien définie pour  $t \in ]0, 3\tau_0[$ ,  $\zeta \in \gamma_\Gamma B_{T_z\Gamma}$  et  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Pour  $x \in \tilde{\Gamma}(]0, 3\tau_0])$  on note également :

$$\psi(x) = \psi(t_x, x, z_x, \xi_x) = \varphi(t_x, x, \xi_x) - \langle z_x, \xi_x \rangle. \quad (6.28)$$

**Proposition 6.21.** *Soit  $x \in \tilde{\Gamma}(]0, 3\tau_0])$ . On a :*

$$\left| \det \text{Hess } \tilde{\psi}_{x,z_x}(t_x, 0, \xi_x) \right| = 2^{n-d+1} t_x^{n-d-1} |\xi_x|^2 + O_{t_x \rightarrow 0}(t_x^{n-d}).$$

*Démonstration.* Pour effectuer le calcul, on décompose  $\mathbb{R}_\xi^n$  en  $T_{z_x}\Gamma \oplus N_{z_x}\Gamma$ . Soit  $r$  donnée par la proposition 3.26. On a

$$\tilde{\psi}_{x,z_x}(t, \zeta, \xi) = \langle x - \exp_{z_x}(\zeta), \xi \rangle - tp(x, \xi) + t^2 r(t, x, \xi)$$



et donc :

$$\begin{aligned}
& \left| \det \text{Hess } \tilde{\psi}_{x,z_x}(t_x, 0, \xi_x) \right| \\
&= \left| \det \begin{pmatrix} 2r(t_x, x, \xi_x) + O(t_x) & 0 & O(t_x^2) & -2^t \xi_x + O(t_x^2) \\ 0 & A & -I_d & 0 \\ O(t_x^2) & -I_d & -2t_x I_d + O(t_x^2) & O(t_x^2) \\ -2\xi_x + O(t_x^2) & 0 & O(t_x^2) & -2t_x I_{n-d} + O(t_x^2) \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| \det \begin{pmatrix} 2r(t_x, x, \xi_x) + \frac{2|\xi_x|^2}{t_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_d - 2t_x A & 0 \\ 0 & -I_d & -2t_x I_d & 0 \\ -2\xi_x & 0 & 0 & -2t_x I_{n-d} \end{pmatrix} \right| \left( 1 + \underset{t \rightarrow 0}{O}(t_x) \right) \\
&= 2^{n-d+1} t_x^{n-d-1} |\xi_x|^2 + \underset{t_x \rightarrow 0}{O}(t_x^{n-d})
\end{aligned}$$

où, pour  $1 \leq i, j \leq d$ ,

$$A_{ij} = -\partial_{\zeta_i \zeta_j}^2 \langle \exp_{z_x}(\zeta), \xi_x \rangle \Big|_{\zeta=0}$$

n'intervient que dans le reste.  $\square$

Ce calcul prouve que les points critiques de la proposition 6.20 ne sont pas dégénérés, du moins pour  $x$  assez proche de  $\Gamma$ . Quitte à prendre  $\tau_0 > 0$  plus petit, on pourra supposer que c'est le cas pour tout  $x \in \tilde{\Gamma}(]0, 3\tau_0[)$ . On s'aperçoit par contre que le déterminant de la hessienne devient petit quand  $x$  s'approche de  $\Gamma$ . Vue la formule rappelée au théorème 3.3, on s'attend à ce que le résultat obtenu en appliquant le théorème de la phase stationnaire pour une intégrale de phase  $\psi$  ne soit pas uniforme par rapport à  $x$  pour  $x$  proche de  $\Gamma$ . Pour étudier ce phénomène, on effectuera un changement de variable pour remplacer  $\psi$  par la fonction  $\Phi$  que l'on introduit maintenant.

Pour  $y \in \tilde{\Gamma}(]0, 3\tau_0[)$  et  $\delta \in ]0, 1]$ , on introduit la fonction  $\Phi_{y,\delta}$  définie pour  $\theta \in ]0, 3\delta^{-1}\tau_0[$ ,  $\zeta \in \delta^{-1}\gamma_\Gamma B_{T_{z_y}\Gamma}$  et  $\xi \in \mathbb{R}^n$  par :

$$\Phi_{y,\delta}(\theta, \zeta, \xi) = \frac{1}{\delta} \psi_{\bar{x}(\delta t_y, z_y, \xi_y), z_y}(\delta\theta, \delta\zeta, \xi) = \frac{1}{\delta} \left( \varphi(\delta\theta, \bar{x}(\delta t_y, z_y, \xi_y), \xi) - \langle \exp_{z_y}(\delta\zeta), \xi \rangle \right). \quad (6.29)$$

**Proposition 6.22.** *Pour  $y \in \tilde{\Gamma}(]0, 2\tau_0[)$  et  $\delta \in ]0, 1]$  l'application  $\Phi_{y,\delta}$  admet un unique point critique, donné par  $(t_y, 0, \xi_y)$ . En outre, si  $\tau_0 > 0$  est assez petit, alors la hessienne  $\text{Hess}_{\theta,\zeta,\xi} \Phi_{y,\delta}(t_y, 0, \xi_y)$  est inversible et son déterminant reste dans un compact de  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  lorsque  $y$  et  $\delta$  varient dans  $\tilde{\Gamma}(]0, 2\tau_0[)$  et  $]0, 1]$  respectivement.*

*Démonstration.* Soient  $y \in \tilde{\Gamma}(]0, 2\tau_0[)$  et  $\delta \in ]0, 1]$ . Pour  $\theta \in ]0, 3\delta^{-1}\tau_0[$ ,  $\zeta \in \delta^{-1}\gamma_\Gamma B_{T_{z_y}\Gamma}$  et  $\xi \in \mathbb{R}^n$  on a

$$\nabla_{\theta,\zeta,\xi} \Phi_{y,\delta}(\theta, \zeta, \xi) = 0 \iff \nabla_{t,z,\xi} \psi(\delta\theta, \bar{x}(\delta t_y, z_y, \xi_y), \exp_{z_y}(\delta\zeta), \xi) = 0.$$

Ainsi, l'application  $\Phi_{y,\delta}$  admet un unique point critique, donné par

$$\left( \delta^{-1} t_{\bar{x}(\delta t_y, z_y, \xi_y)}, \delta^{-1} (\exp_{z_y})^{-1}(z_{\bar{x}(\delta t_y, z_y, \xi_y)}), \xi_{\bar{x}(\delta t_y, z_y, \xi_y)} \right) = (t_y, 0, \xi_y).$$

Cela prouve déjà le premier point. Pour le deuxième on constate qu'on a

$$\begin{aligned}
|\det \text{Hess}_{\theta,\zeta,\xi} \Phi_{y,\delta}(t_y, 0, \xi_y)| &= \delta^{1+d-n} \left| \det \text{Hess } \tilde{\psi}_{\bar{x}(\delta t_y, z_y, \xi_y), z_y}(\delta t_y, 0, \xi_x) \right| \\
&= 2^{n-d-1} t_y^{n-d-1} |\xi_y|^2 + \underset{t_y \rightarrow 0}{O}(t_y^{n-d}),
\end{aligned}$$

où me reste est uniforme en  $\delta \in ]0, 1]$ . Cela permet de conclure, pour peu qu'on ait choisi  $\tau_0 > 0$  assez petit.  $\square$

### 6.2.5 Contrôle des temps petits

On dispose maintenant de tout ce dont on a besoin pour commencer l'étude de la contribution des temps petits proprement dite.

Pour  $d_2 > d_1 > 0$  on note  $\mathcal{C}(d_1, d_2) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid d_1 \leq |\xi| \leq d_2\}$ . On peut considérer un voisinage  $\mathcal{G}$  de  $N_E \Gamma_0$  tel que  $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n \times \mathcal{C}(d_1, d_2)$  avec  $d_2 > d_1 > 0$ , et tel que  $\bar{x}(t, w) \in \tilde{\Gamma}([0, 2\tau_0[)$  pour tous  $t \in [0, \tau_0]$  et  $w \in \mathcal{G}$ . On choisit une fonction  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$  à support dans  $] - \infty, \tau_0[$  et égale à 1 au voisinage de  $] - \infty, 0]$ . Pour  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à support dans  $\mathcal{G}$ , on pose :

$$B_0(h) = \frac{i}{h} \int_0^\infty \chi(t) e^{-\frac{it}{h}(H_h - E_h)} \text{Op}_h(f) S_h dt. \quad (6.30)$$

D'après le théorème d'Egorov 3.43 on a déjà :

$$\left\| \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n \setminus \tilde{\Gamma}([0, 2\tau_0])} B_0(h) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^\infty). \quad (6.31)$$

**Proposition 6.23.** *Si  $\tau_0 > 0$  a été choisi assez petit, alors pour  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à support dans  $\mathcal{G}$ ,  $B_0(h)$  définie par (6.30) et  $\varepsilon > 0$  on peut trouver  $\tau_1 \in ]0, \tau_0]$  et  $h_0 > 0$  tels que :*

$$\forall h \in ]0, h_0], \quad \left\| \mathbf{1}_{\tilde{\Gamma}([0, \tau_1])} B_0(h) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon.$$

Comme on l'a dit en introduction on va construire explicitement la mesure semi-classique du théorème 6.1, sauf au voisinage de  $\Gamma$ . Le but de cette proposition est de pouvoir au moins contrôler cette partie. En utilisant le développement décrit au paragraphe 6.2.3, on va écrire  $B_0(x, h)$  sous la forme

$$B_0(x, h) \simeq h^{-\frac{1+n+d}{2}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\psi(t, x, z, \xi)} \kappa(t, x, \xi, z, h) d\xi d\sigma_\Gamma(z) dt.$$

On voit qu'à  $x$  fixé, si on applique le théorème de la phase stationnaire autour du point critique de  $\psi$ , on obtient une majoration du type  $B_0(x, h) = O(1)$ . Le problème est que cette estimation n'est pas uniforme en  $x$  lorsque  $x$  approche  $\Gamma$ . En effet, le théorème de la phase non-stationnaire fait intervenir le déterminant de la hessienne de  $\varphi$  à la puissance  $-\frac{1}{2}$ , soit un facteur d'ordre  $t_x^{\frac{1+d-n}{2}}$  (voir la proposition 6.21, on note qu'il n'y a pas de problème si  $d = n - 1$ ). L'idée est de montrer que la norme  $L^2$  sur  $\tilde{\Gamma}([2^{-m}, 2^{-(m+1)}])$  est de l'ordre de  $2^{-\frac{m}{2}}$ , de sorte que la somme de ces contributions est sommable. Loin des points critiques, on effectue des intégrations par parties. Mais « loin » signifie à une distance d'ordre  $2^{-m}$ . Le petit paramètre sera donc  $h2^m$ , ce qui implique qu'à  $h$  fixé, on doit s'arrêter à  $2^{-m}$  d'ordre  $h$ . Mais sur  $\tilde{\Gamma}([0, h])$  (en fait  $\tilde{\Gamma}([0, h^{1-\mu}])$  pour un certain  $\mu > 0$ ), on va pouvoir se contenter d'une estimation plus naïve.

*Démonstration.* On suppose que  $\nu_E$  est fini (si  $\nu_E = \infty$ , on peut remplacer  $\nu_E$  par n'importe quel entier). On s'autorisera à ne pas indiquer de façon systématique la dépendance en  $h$  des fonctions considérées.

1. On rappelle que  $\mathcal{F}_h$  désigne la transformée de Fourier semi-classique. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_h S_h(\xi) &= h^{\frac{1-n-d}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Gamma} e^{-\frac{i}{h}\langle x, \xi \rangle} A(z) S\left(\frac{x-z}{h}\right) d\sigma_\Gamma(z) dx \\ &= h^{\frac{1-n-d}{2}} \int_{\Gamma} A(z) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{i}{h}\langle x, \xi \rangle} S\left(\frac{x-z}{h}\right) dx d\sigma_\Gamma(z) \\ &= h^{\frac{1+n-d}{2}} \int_{\Gamma} A(z) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{i}{h}\langle z, \xi \rangle} e^{-i\langle y, \xi \rangle} S(y) dy d\sigma_\Gamma(z) \\ &= h^{\frac{1+n-d}{2}} \hat{S}(\xi) \int_{\Gamma} A(z) e^{-\frac{i}{h}\langle z, \xi \rangle} d\sigma_\Gamma(z), \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \text{Op}_h(f)S_h(x) &= \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\langle x, \xi \rangle} f(x, \xi) \mathcal{F}_h S_h(\xi) d\xi \\ &= \frac{h^{\frac{1+n-d}{2}}}{(2\pi h)^n} \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\langle x-z, \xi \rangle} A(z) f(x, \xi) \hat{S}(\xi) d\xi d\sigma_{\Gamma}(z), \end{aligned}$$

puis

$$B_0(h) = \frac{ih^{-\frac{1+n+d}{2}}}{(2\pi)^n} \int_0^{\infty} \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \chi(t) A(z) e^{-\frac{i}{h}\langle z, \xi \rangle} e^{-\frac{it}{h}(H_h - E_h)} \left( e^{\frac{i}{h}\langle \cdot, \xi \rangle} f(\cdot, \xi) \right) \hat{S}(\xi) d\xi d\sigma_{\Gamma}(z) dt.$$

Soient  $\varphi$  la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi (3.13) et  $a$  l'amplitude donnée par la méthode B.K.W. (voir paragraphe 6.2.3). On note

$$J(x, h) = \int_0^{\infty} \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \chi(t) e^{\frac{i}{h}(\varphi(t, x, \xi) - \langle z, \xi \rangle)} a(t, x, \xi, h) A(z) \hat{S}(\xi) d\xi d\sigma_{\Gamma}(z) dt.$$

Pour alléger l'écriture on pose

$$\kappa(t, x, z, \xi, h) = \chi(t) a(t, x, \xi, h) A(z) \hat{S}(\xi),$$

et on rappelle qu'on a noté  $\psi(t, x, z, \xi) = \varphi(t, x, \xi) - \langle z, \xi \rangle$ . D'après la remarque 6.18, le support par rapport à la variable  $\xi$  de  $\kappa$  est inclus dans  $\mathcal{C}(d_1, d_2)$ .

2. On se donne  $N \in \mathbb{N}$ . Pour estimer  $J$ , on note pour tout  $\delta \in ]0, 1]$  :

$$J_{\delta}(x) = \mathbf{1}_{\tilde{\Gamma}([\delta\tau_0, 2\delta\tau_0])}(x) \int_0^{\infty} \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\psi(t, x, z, \xi)} \kappa(t, x, z, \xi, h) d\xi d\sigma_{\Gamma}(z) dt.$$

On considère :

$$J_{\delta}^{\parallel}(x) = \mathbf{1}_{\tilde{\Gamma}([\delta\tau_0, 2\delta\tau_0])}(x) \int_0^{\infty} \int_{\Gamma} \int_{\{|\xi_z^{\parallel}| > d_1 \delta\}} e^{\frac{i}{h}\psi(t, x, z, \xi)} \kappa(t, x, z, \xi, h) d\xi d\sigma_{\Gamma}(z) dt$$

(on rappelle que  $\xi_z^{\parallel}$  est la projection orthogonale de  $\xi$  sur  $T_z\Gamma$ ). Comme  $\nabla_z \psi(t, x, z, \xi) = \xi_z^{\parallel}$ ,  $N$  intégrations par parties par rapport à  $z$  (localement, *via* des cartes) montrent que

$$\left| J_{\delta}^{\parallel}(x) \right| \leq c \mathbf{1}_{\tilde{\Gamma}([\delta\tau_0, 2\delta\tau_0])}(x) \left( \frac{h}{\delta} \right)^N,$$

et donc, puisque  $\tilde{\Gamma}([\delta\tau_0, 2\delta\tau_0])$  est de taille  $O(\delta^{n-d})$  (voir la proposition 6.13) :

$$\left\| J_{\delta}^{\parallel}(h) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c h^N \delta^{\frac{n-d}{2} - N}. \quad (6.32)$$

3. On commence par s'intéresser aux temps où la quantité  $\nabla_{\xi} \psi(t, x, z, \xi)$  ( $\approx x - (z + 2t\xi)$ ) est grande quels que soient  $x \in \tilde{\Gamma}([\delta\tau_0, 2\delta\tau_0])$ ,  $z \in \Gamma$  et  $\xi \in \mathcal{C}(d_1, d_2)$  « presque orthogonal » à  $T_z\Gamma$ , le but étant de pouvoir faire des intégrations par parties par rapport à  $\xi$ . On rappelle que d'après la proposition 3.26 on a

$$\nabla_{\xi} \psi(t, x, z, \xi) = x - (z + 2t\xi) + t^2 \nabla_{\xi} r(t, x, \xi),$$

et donc<sup>2</sup> :

$$[x - (z + 2t\xi)]^{\wedge} \cdot \nabla_{\xi} \psi(t, x, z, \xi) = |x - (z + 2t\xi)| + t^2 [x - (z + 2t\xi)]^{\wedge} \cdot \nabla_{\xi} r(t, x, \xi).$$

2. On rappelle qu'on a noté  $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$ . On pourra également écrire  $[x]^{\wedge}$ . Pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $x = (x_1, \dots, x_n)$  on notera également  $[x]_j^{\wedge} = \frac{x_j}{|x|}$ .

On note  $M = \|\nabla_{\xi} r\|_{L^{\infty}([0, \tau_0] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{C}(d_1, d_2))}$ . Pour  $\delta \in ]0, 1]$ ,  $0 \leq t \leq \delta \min\left(\frac{\tau_0 \gamma_m}{4d_2}, \sqrt{\frac{\tau_0 \gamma_m}{4M}}\right)$  (où  $\gamma_m > 0$  est donné par la proposition 6.8),  $x \in \tilde{\Gamma}([\delta\tau_0, 2\delta\tau_0])$ ,  $z \in \Gamma$  et  $\xi \in \mathcal{C}(d_1, d_2)$  on a

$$|x - (z + 2t\xi)| \geq |x - z| - 2t|\xi| \geq \delta\tau_0\gamma_m - 2td_2 \geq \frac{\delta\tau_0\gamma_m}{2},$$

et donc :

$$|x - (z + 2t\xi)| + t^2[x - (z + 2t\xi)]^{\wedge} \cdot \nabla_{\xi} r \geq \frac{\delta\tau_0\gamma_m}{4}. \quad (6.33)$$

D'autre part, si  $\delta \in ]0, 1]$ ,  $t \in \left[\delta \frac{d_1\tau_0 + \gamma_M + 1}{d_1}, \tau_0\right]$ ,  $x \in \tilde{\Gamma}([\delta\tau_0, 2\delta\tau_0])$ ,  $z \in \Gamma$ ,  $z_{xx}$  est un point de  $\Gamma_1$  tel que  $|x - z_{xx}| = d(x, \Gamma_1)$  (un tel  $z_{xx}$  existe pour  $x$  assez proche de  $\Gamma$ ), et  $\xi \in \mathcal{C}(d_1, d_2)$  est tel que  $|\xi_z^{\parallel}| \leq \delta d_1$  alors, quitte à réduire  $\tau_0$ , on a

$$\begin{aligned} |x - (z + 2t\xi)| &\geq |z + 2t\xi - z_{xx}| - |x - z_{xx}| \\ &\geq |z + 2t\xi_z^{\perp} - z_{xx}| - 2\delta\tau_0 d_1 - 2\delta\tau_0 \gamma_M \\ &\geq 2td_1 - 2\delta\tau_0(2d_1 + \gamma_M), \end{aligned}$$

car pour  $t$  assez petit on a

$$d(z + 2t\xi_z^{\perp}, \Gamma_1) = |2t\xi_z^{\perp}| \geq 2t|\xi| - 2t|\xi_z^{\parallel}| \geq 2td_1 - 2\delta\tau_0 d_1.$$

Ainsi

$$|x - (z + 2t\xi)| + t^2[x - (z + 2t\xi)]^{\wedge} \cdot \nabla_{\xi} r \geq t(d_1 - \tau_0 M) + td_1 - 2\delta\tau_0(2d_1 + \gamma_M) \geq \delta + t \frac{d_1}{2},$$

sous réserve que  $d_1 \geq 2\tau_0 M$ , ce qui est vrai si on a choisi  $\tau_0$  assez petit. Ainsi on a montré qu'il existe des constantes  $C > 0$  et  $c_0 > 0$  telles que pour  $\delta \in ]0, 1]$ ,  $t \in [0, \frac{\delta}{C}] \cup [C\delta, \tau_0]$ ,  $x \in \tilde{\Gamma}([\delta\tau_0, 2\delta\tau_0])$ ,  $z \in \Gamma$  et  $\xi \in \mathcal{C}(d_1, d_2)$  tel que  $|\xi_z^{\parallel}| \leq \delta d_1$ , on a

$$|x - (z + 2t\xi)| \geq c_0(\delta + t)$$

et

$$\begin{aligned} [x - (z + 2t\xi)]^{\wedge} \cdot \nabla_{\xi} \psi(t, x, z, \xi) &= |x - (z + 2t\xi)| + t^2[x - (z + 2t\xi)]^{\wedge} \cdot \nabla_{\xi} r(t, x, z, \xi) \\ &\geq c_0(\delta + t). \end{aligned} \quad (6.34)$$

On se donne alors une fonction  $\tilde{\chi}_1 \in C^{\infty}(\mathbb{R})$  égale à 1 au voisinage de  $]-\infty, \frac{1}{2C}] \cup [2C, +\infty[$  et nulle sur  $[\frac{1}{C}, C]$ , ainsi que  $\tilde{\chi}_0 = 1 - \tilde{\chi}_1$ . On a alors  $J_{\delta} = J_{\delta}^1 + J_{\delta}^0 + J_{\delta}^{\parallel}$  où, pour  $j \in \{0, 1\}$  :

$$J_{\delta}^j(x) = \mathbf{1}_{\tilde{\Gamma}([\delta\tau_0, 2\delta\tau_0])}(x) \int_0^{\infty} \int_{\Gamma} \int_{\{|\xi_z^{\parallel}| \leq \delta d_1\}} \tilde{\chi}_j\left(\frac{t}{\delta}\right) e^{\frac{i}{\hbar} \psi(t, x, z, \xi)} \kappa(t, x, z, \xi, h) d\xi d\sigma_{\Gamma}(z) dt.$$

On considère l'opérateur

$$L : u \mapsto \left( (t, x, z, \xi, h) \mapsto -ih \frac{[x - (z + 2t\xi)]^{\wedge} \cdot \nabla_{\xi} u}{[x - (z + 2t\xi)]^{\wedge} \cdot \nabla_{\xi} \psi(t, x, z, \xi)} \right). \quad (6.35)$$

Cet opérateur laisse inchangée la fonction  $(t, x, z, \xi, h) \mapsto \exp\left(\frac{i}{\hbar} \psi(t, x, z, \xi)\right)$  et son adjoint est

$$L^* : v \mapsto \left( (t, x, z, \xi, h) \mapsto -ih \operatorname{div}_{\xi} \left( \frac{[x - (z + 2t\xi)]^{\wedge} v}{[x - (z + 2t\xi)]^{\wedge} \cdot \nabla_{\xi} \psi(t, x, z, \xi)} \right) \right).$$

On vérifie que

$$\partial_{\xi_j} |x - (z + 2t\xi)| = 2t[x - (z + 2t\xi)]_j^{\wedge}$$

et, pour  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  (par récurrence sur  $|\alpha|$ ) :

$$\partial_\xi^\alpha [x - (z + 2t\xi)]_j^\wedge = \frac{(2t)^{|\alpha|} P_\alpha(x_1 - (z_1 + 2t\xi_1), \dots, x_n - (z_n + 2t\xi_n))}{|x - (z + 2t\xi)|^{-1-2|\alpha|}},$$

où  $P_\alpha$  est un polynôme à  $n$  variables homogène de degré  $|\alpha| + 1$ . Pour  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  il existe donc une constante  $c_\alpha$  telle que

$$|\partial_\xi^\alpha [x - (z + 2t\xi)]_j^\wedge| \leq c_\alpha$$

pour tous  $\delta \in ]0, 1]$ ,  $t \in [0, \frac{\delta}{C}] \cup [C\delta, \tau_0]$ ,  $x \in \tilde{\Gamma}(] \delta\tau_0, 2\delta\tau_0])$ ,  $z \in \Gamma$  et  $\xi \in \mathcal{C}(d_1, d_2)$  tel que  $|\xi_z^\wedge| \leq \delta d_1$ , et si  $|\alpha| \geq 1$  :

$$|\partial_\xi^\alpha ([x - (z + 2t\xi)]^\wedge \cdot \nabla_\xi \psi(t, x, z, \xi))| \leq c_\alpha t.$$

On peut vérifier par récurrence que pour tout  $N \in \mathbb{N}$  la fonction  $(L^*)^N \kappa$  est une somme de termes de la forme

$$c(ih)^N \frac{\partial_\xi^\gamma \kappa \cdot \prod_{k=1}^N \partial_\xi^{\alpha_k} [x - (z + 2t\xi)]_{m_k}^\wedge \cdot \prod_{j=1}^J \partial_\xi^{\beta_j} ([x - (z + 2t\xi)]^\wedge \cdot \nabla_\xi \psi(t, x, z, \xi))}{([x - (z + 2t\xi)]^\wedge \cdot \nabla_\xi \psi(t, x, z, \xi))^{J+N}},$$

où  $c \in \mathbb{R}$ ,  $m_k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  pour tout  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,  $|\beta_j| \geq 1$  pour tout  $j \in \llbracket 1, J \rrbracket$  (en particulier  $J \leq N$ ) et

$$|\gamma| + \sum_{k=1}^N |\alpha_k| + \sum_{j=1}^J |\beta_j| = N.$$

On obtient que

$$|(L^*)^N \kappa(t, x, z, \xi, h)| \leq c_N \left( \frac{h}{\delta} \right)^N,$$

et donc :

$$\|J_\delta^1(h)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_N h^N \delta^{\frac{n-d}{2}-N}. \quad (6.36)$$

**4.** On s'intéresse maintenant à  $J_\delta^0$ . L'estimation de  $J_\delta^0$  est plus délicate puisque la phase admet des points critiques. On va donc utiliser les résultats du paragraphe 6.2.4, et plus particulièrement la proposition 6.22. Pour l'appliquer, on doit se restreindre à un voisinage de  $z_x$  de taille  $\gamma_\Gamma$  dans  $\Gamma$ . On rappelle que pour tous  $z \in \Gamma$  et  $\zeta \in T_z \Gamma$  de norme inférieure ou égale à  $\gamma_\Gamma$ , on peut considérer le point  $\exp_z(\zeta) \in \Gamma$  et  $d_\Gamma(z, \exp_z(\zeta)) = |\zeta|$ . En outre il existe  $\gamma_2 > 0$  indépendant de  $z \in \Gamma$  tel que si  $z' \in B_{\mathbb{R}^n}(z, \gamma_2) \cap \Gamma$ , alors  $d_\Gamma(z, z') \leq \gamma_\Gamma$ . Soient  $\delta \in ]0, 1]$ ,  $x \in \tilde{\Gamma}(] \delta\tau_0, 2\delta\tau_0])$ ,  $z \in \Gamma$ ,  $\xi \in \mathcal{C}(d_1, d_2)$  tel que  $|\xi_z^\wedge| \leq d_1 \delta$  et enfin  $t \in [0, \min(\tau_0, 2C\delta)]$  où  $C$  est tel que  $\text{supp } \tilde{\chi}_0 \subset [\frac{1}{2C}, 2C]$ . Quitte à réduire  $\tau_0$ , on peut supposer que

$$|x - z_x| + 2t|\xi| + t^2 M \leq \frac{\gamma_2}{2}$$

pour les  $\delta$ ,  $x$ ,  $z$ ,  $\xi$  et  $t$  considérés, et donc si  $d_\Gamma(z, z_x) > \gamma_\Gamma$  on a

$$|x - (z + 2t\xi)| \geq |z_x - z| - |x - z_x| - 2t|\xi| \geq \frac{\gamma_2}{2}$$

et

$$[x - (z + 2t\xi)]^\wedge \cdot \nabla_\xi \psi(t, x, z, \xi) \geq \frac{\gamma_2}{2}.$$

En faisant des intégrations par parties avec l'opérateur  $L$  comme précédemment, on voit qu'on ne fait qu'une erreur d'ordre  $O(h^N)$  si on néglige les points  $z \in \Gamma$  tels que  $d_\Gamma(z, z_x) > \gamma_\Gamma$  dans l'intégrale définissant  $J_\delta^0(x)$  :

$$J_\delta^0(x) = \mathbf{1}_{\tilde{\Gamma}([\delta\tau_0, 2\delta\tau_0])}(x) \int_0^\infty \int_{B_\Gamma(z_x, \gamma\Gamma)} \int_{\{|\xi_z^\parallel| \leq \delta d_1\}} \tilde{\chi}_0\left(\frac{t}{\delta}\right) e^{\frac{i}{h}\psi(t,x,z,\xi)} \kappa(t,x,z,\xi,h) d\xi d\sigma_\Gamma(z) dt \\ + O_{h \rightarrow 0}(h^N),$$

où le reste est uniforme par rapport à  $x$ . On note  $y = \bar{x}\left(\frac{t_x}{\delta}, z_x, \xi_x\right) \in \tilde{\Gamma}([\tau_0, 2\tau_0])$  et on fait le changement de variables  $t = \theta\delta$  et  $z = \exp_{z_x}(\delta\zeta)$  où  $\zeta \in \delta^{-1}\gamma_\Gamma B_{T_{z_x}\Gamma}$ . Cela donne :

$$J_\delta^0(x) \\ = \delta^{1+d} \mathbf{1}_{\tilde{\Gamma}([\tau_0, 2\tau_0])}(y) \int_{\delta^{-1}\gamma_\Gamma B_{T_{z_y}\Gamma}} \int_{\{|\xi_z^\parallel| \leq \delta d_1\}} \int_0^\infty \tilde{\chi}_0(\theta) \tilde{\kappa}(\theta, y, \zeta, \xi, h) e^{\frac{i}{h}\delta\Phi_{y,\delta}(\theta,\zeta,\xi)} d\theta d\xi d\zeta \\ + O_{h \rightarrow 0}(h^N),$$

avec

$$\tilde{\kappa}(\theta, y, \zeta, \xi, h, \delta) = \kappa(\delta\theta, \bar{x}(\delta t_y, z_y, \xi_y), \exp_{z_y}(\delta\zeta), \xi, h) |\det(D_\zeta \exp_{z_x})(\delta\zeta)|$$

et  $\Phi_{y,\delta}$  comme définie en (6.29). D'après la proposition 6.22 on peut appliquer le théorème de la phase stationnaire pour tout  $y \in \tilde{\Gamma}([\tau_0, 2\tau_0])$ , sachant que le petit paramètre est ici  $h/\delta$ . En outre on sait qu'on peut appliquer ce résultat uniformément en  $y \in \tilde{\Gamma}([\tau_0, 2\tau_0])$  et  $\delta \in ]0, 1]$ . On obtient alors une constante  $c$  ne dépendant ni de  $h \in ]0, h_0]$ , ni de  $\delta \in ]0, 1]$  ni de  $x \in \tilde{\Gamma}([\delta\tau_0, 2\delta\tau_0])$ , et telle que

$$|J_\delta^0(x)| \leq c\delta^{1+d} \left(\frac{h}{\delta}\right)^{\frac{n+d+1}{2}} \mathbf{1}_{\tilde{\Gamma}([\delta\tau_0, 2\delta\tau_0])}(x) + ch^N \mathbf{1}_{\tilde{\Gamma}([\delta\tau_0, 2\delta\tau_0])}(x).$$

On obtient donc :

$$\|J_\delta^0(h)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c\delta^{\frac{1}{2}} h^{\frac{n+d+1}{2}} + ch^N \delta^{\frac{n-d}{2}}. \quad (6.37)$$

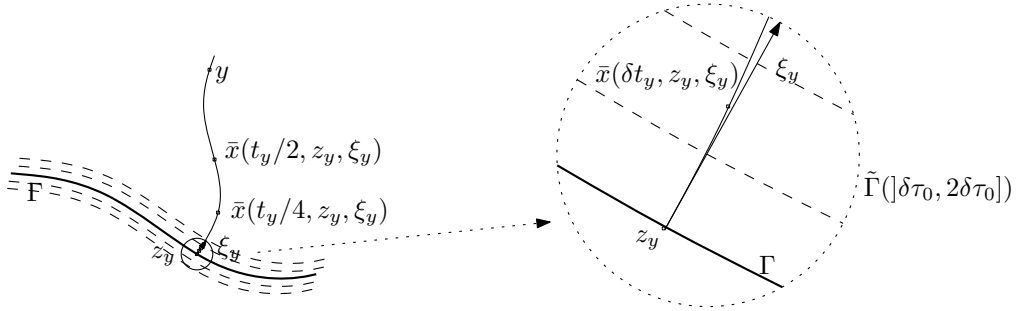


FIGURE 6.8 – Changement de variables le long des trajectoires du flot.

5. Pour  $\gamma \in ]0, 1]$  on pose :

$$\tilde{J}_\gamma(x) = \mathbf{1}_{\tilde{\Gamma}([0, 2\gamma\tau_0])}(x) \int_0^\infty \int_\Gamma \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\psi(t,x,z,\xi)} \kappa(t,x,z,\xi,h) d\xi d\sigma_\Gamma(z) dt.$$

$\tilde{J}_\gamma^\parallel$  est défini comme  $J_\delta^\parallel$  avec  $\mathbf{1}_{\tilde{\Gamma}([0, 2\gamma\tau_0])}$  au lieu de  $\mathbf{1}_{\tilde{\Gamma}([\delta\tau_0, 2\delta\tau_0])}$ . Une estimation analogue à (6.32) peut donc être obtenue pour  $\tilde{J}_\gamma^\parallel$ . On note maintenant  $\tilde{\chi}_+ = \mathbf{1}_{[C, +\infty[}\tilde{\chi}_1$  (où  $C$  est la constante définie en (6.34)),  $\tilde{\chi}_- = 1 - \tilde{\chi}_+$ , et :

$$\tilde{J}_\gamma^\pm(x, h) = \mathbf{1}_{\tilde{\Gamma}([0, 2\gamma\tau_0])}(x) \int_0^\infty \int_\Gamma \int_{\{|\xi_z^\parallel| \leq \gamma d_1\}} \tilde{\chi}_\pm\left(\frac{t}{\gamma}\right) e^{\frac{i}{h}\psi(t,x,z,\xi)} \kappa(t,x,z,\xi,h) d\sigma_\Gamma(z) d\xi dt.$$

Comme on l'a fait pour  $J_\delta^1(h)$  on voit que

$$\left\| \tilde{J}_\gamma^+(h) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_N h^N \gamma^{\frac{n-d}{2}-N}. \quad (6.38)$$

La différence se fait au niveau des temps petits. En effet, puisqu'on ne minore pas la distance entre  $x$  et  $\Gamma$ , le raisonnement menant à (6.33) n'est plus valable. Mais puisque  $\gamma$  sera pris très petit, on peut en fait se contenter d'une estimation grossière pour  $\tilde{J}_\gamma^-$ . Comme on intègre une fonction bornée sur un ensemble de taille  $O(\gamma)$  en  $t$ , et sur  $\{(z, \xi) \in \Gamma \times \mathcal{C}(d_1, d_2), |\xi_z^\#| \leq \gamma d_1\}$  qui est de taille  $O(\gamma^d)$ , on a

$$\left| \tilde{J}_\gamma^-(x) \right| \leq c \gamma^{1+d} \mathbf{1}_{\tilde{\Gamma}([0, 2\gamma\tau_0])}(x),$$

où  $c$  ne dépend pas de  $x \in \mathbb{R}^n$ . En prenant la norme  $L^2(\mathbb{R}^n)$  on obtient donc :

$$\left\| \tilde{J}_\gamma^-(h) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c \gamma^{1+\frac{n+d}{2}}. \quad (6.39)$$

**6.** Les estimations (6.32), (6.36), (6.37), (6.38) et (6.39) nous permettent maintenant d'estimer  $J(h)$ .  $\tau_0 > 0$  étant désormais fixé, on se donne  $\varepsilon > 0$ . Soient  $\tau_1 \in ]0, \tau_0]$  et  $\mu \in ]0, 1[$ . On fait une décomposition dyadique  $\delta = 2^{-m}$  avec  $h^{1-\mu} < \delta < \tau_1/\tau_0$ , c'est-à-dire  $m_- < m < m_+$  où on a noté  $m_- = \ln_2(\tau_0) - \ln_2(\tau_1)$  et  $m_+ = -(1-\mu) \ln_2 h$ . On a alors

$$\left\| \mathbf{1}_{\tilde{\Gamma}([0, \tau_1])} J(h) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \left\| \tilde{J}_{h^{1-\mu}}(h) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \sum_{m_- < m < m_+} \|J_{2^{-m}}(h)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

avec

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{J}_{h^{1-\mu}}(h) \right\| &\leq \left\| \tilde{J}_{h^{1-\mu}}^\#(h) \right\| + \left\| \tilde{J}_{h^{1-\mu}}^-(h) \right\| + \left\| \tilde{J}_{h^{1-\mu}}^+(h) \right\| \\ &\leq c_N \left( h^{(1-\mu)(\frac{n+d}{2}+1)} + h^{(1-\mu)\frac{n-d}{2}+\mu N} \right) \\ &\leq c_N h^{\frac{n+d+1}{2}} \left( h^{\frac{1}{2}-\mu(\frac{n+d}{2}+1)} + h^{\mu N - \frac{1}{2}-d-\mu\frac{n-d}{2}} \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{m_- < m < m_+} \|J_{2^{-m}}(h)\| &\leq \sum_{m_- < m < m_+} \left( \|J_{2^{-m}}^1(h)\| + \|J_{2^{-m}}^0(h)\| + \|J_{2^{-m}}^\#(h)\| \right) \\ &\leq c_N \left( h^N \sum_{m \leq m_+} \left( 2^{N-\frac{n-d}{2}} \right)^m + h^{\frac{n+d+1}{2}} \sum_{m_- \leq m} 2^{-\frac{m}{2}} \right) \\ &\leq c_N \left( h^{N-(1-\mu)(N-\frac{n-d}{2})} + h^{\frac{n+d+1}{2}} \sqrt{\tau_1} \right) \\ &\leq c_N h^{\frac{n+d+1}{2}} \left( h^{\mu N - \frac{1}{2}-d-\mu\frac{n-d}{2}} + \sqrt{\tau_1} \right). \end{aligned}$$

On choisit maintenant  $\mu > 0$  suffisamment petit pour que  $\nu := \frac{1}{2} - \mu \left( \frac{n+d}{2} + 1 \right)$  soit strictement positif, puis  $N$  assez grand pour avoir  $\mu N - \frac{1}{2} - d - \mu \frac{n-d}{2} \geq \nu$ . Cela donne

$$\left\| \mathbf{1}_{\tilde{\Gamma}([0, \tau_1])} J(h) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c h^{\frac{n+d+1}{2}} (\sqrt{\tau_1} + h^\nu), \quad (6.40)$$

et si  $\tau_1$  et  $h_0$  sont assez petits on a  $c(2\pi)^{-n}(\sqrt{\tau_1} + h^\nu) \leq \frac{\varepsilon}{2}$  pour tout  $h \in ]0, h_0]$ .

**7.** En étudiant  $\frac{ih^{-\frac{1+n+d}{2}}}{(2\pi)^n} J(h)$  plutôt que  $B_0(h)$  on n'a pas tenu compte du reste qui apparaît à la proposition 6.17. Il reste donc à montrer que la contribution de ce reste est effectivement négligeable. Notant

$$\kappa_{\nu E}(\tau, x, z, \xi, h) = e^{\frac{i}{h}\varphi(\tau, x, \xi) - \langle z, \xi \rangle} r_{\nu E}(\tau, x, \xi, h) A(z) \hat{S}(\xi)$$

pour  $\tau \in [0, \tau_0]$ ,  $x \in \tilde{\Gamma}([0, 2\tau_0])$ ,  $z \in \Gamma$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n$  et  $h \in ]0, 1]$ , on a :

$$\begin{aligned}
& -i(2\pi)^n h^{\frac{1+n+d}{2}} B_0(x, h) - J(x, h) \\
&= h^{\nu_E-1} \varepsilon(h) \int_0^{\tau_0} \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^t \chi(t) e^{-\frac{is}{h}(H_h - E_h)} \kappa_{\nu_E}(t-s, x, z, \xi, h) ds d\xi d\sigma_{\Gamma}(z) dt \\
&= h^{\nu_E-1} \varepsilon(h) \int_0^{\tau_0} \int_0^{\tau_0} \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \chi(t+s) e^{-\frac{is}{h}(H_h - E_h)} \kappa_{\nu_E}(t, x, z, \xi, h) d\xi d\sigma_{\Gamma}(z) dt ds \\
&= h^{\nu_E-1} \varepsilon(h) \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{is}{h}(H_h - E_h)} J_{\nu_E}(s, x, h) ds
\end{aligned}$$

avec

$$J_{\nu_E}(s, x, h) = \int_0^{\tau_0} \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \chi(t+s) e^{\frac{i}{h}(\varphi(t, x, \xi) - \langle z, \xi \rangle)} r_{\nu_E}(t, x, \xi, h) A(z) \hat{S}(\xi) d\xi d\sigma_{\Gamma}(z) dt.$$

On peut estimer  $J_{\nu_E}(s)$  uniformément en  $s \in [0, \tau_0]$  comme on a estimé  $J$ . Sachant que l'opérateur  $e^{-\frac{is}{h}(H_h - E_h)}$  est borné uniformément en  $s \in [0, \tau_0]$ , cela prouve qu'on a dans  $L^2(\tilde{\Gamma}([0, 2\tau_0]))$  :

$$B_0(h) = \frac{ih^{-\frac{1+n+d}{2}}}{(2\pi)^n} J(h) + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h^{\nu_E-1}). \quad (6.41)$$

Il suffit donc de prendre  $h_0 > 0$  assez petit pour voir que (6.40) permet de conclure.  $\square$

*Remarque 6.24.* Plus  $\nu_E$  est grand et meilleure est l'estimation du reste (6.41), mais cela ne change rien au résultat de la proposition 6.23. Une grande valeur de  $\nu_E$  permettra d'avoir une meilleure description de la solution  $u_h$  en terme d'états lagrangiens (voir les propositions 6.25 et 6.30), mais cela n'aura pas d'influence sur la mesure semi-classique qui fait l'objet du théorème 6.1, car celle-ci ne dépend que du premier ordre en  $h$  pour le développement de  $u_h$ .

On s'intéresse maintenant à une description plus précise de  $u_h$  dans une zone qui est proche de la source  $\Gamma_0$  tout en l'évitant. Pour  $x \in \tilde{\Gamma}([0, 2\tau_0])$  on note :

$$b_0(x) = i(2\pi)^{\frac{d+1-n}{2}} \frac{e^{\frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} \operatorname{Hess} \tilde{\psi}_{x, z_x}(t_x, 0, \xi_x)}}{\left| \det \operatorname{Hess} \tilde{\psi}_{x, z_x}(t_x, 0, \xi_x) \right|^{\frac{1}{2}}} A(z_x) a_0(t_x, x, \xi_x) \hat{S}(\xi_x) \chi(t_x). \quad (6.42)$$

On peut prolonger le symbole  $b_0$  par continuité sur  $\Gamma$  et par 0 en dehors de  $\tilde{\Gamma}([0, 2\tau_0])$ , de sorte qu'il peut être vu comme une fonction de  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . On rappelle en outre que la phase  $\psi$  a été définie en (6.28).

**Proposition 6.25.** *Soit  $\mathcal{U}$  un voisinage de  $\Gamma_0$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Alors sur  $\tilde{\Gamma}([0, 2\tau_0]) \setminus \mathcal{U}$  la fonction  $B_0(h)$  est à  $o(h^{\nu_E-1})$  près un état lagrangien de phase  $\psi$  et de symbole principal  $b_0$ , c'est-à-dire :*

$$B_0(x, h) = b(x, h) e^{\frac{i}{h} \psi(x)} + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h^{\nu_E-1}), \quad \text{où } b(x, h) \sim \sum_{j=0}^{\nu_E-1} h^j b_j(x)$$

(le reste étant estimé dans  $L^2(\tilde{\Gamma}([0, 2\tau_0]) \setminus \mathcal{U})$ ).

*Remarque 6.26.* Le résultat se prolonge sur  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{U}$  d'après (6.31).

*Démonstration.* Il existe  $\tau_2 > 0$  et  $\tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  tels que  $\tilde{f} = f$  au voisinage de  $N\Gamma_0$  d'une part, et d'autre part pour  $w \in \operatorname{supp} \tilde{f}$  et  $t \in [0, 2\tau_0]$  on a  $\bar{x}(t, w) \in \mathcal{U} \cup \tilde{\Gamma}([\tau_2, 2\tau_0])$ . Du fait que  $S_h$  est microlocalisé sur  $N\Gamma_0$ , on ne fait qu'une erreur d'ordre  $O(h^\infty)$  si on remplace  $f$  par  $\tilde{f}$  dans la définition de  $B_0(h)$ . On suppose donc qu'on a en fait  $\tilde{f} = f$ . Par le théorème d'Egorov, on obtient alors dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  :

$$\mathbf{1}_{\tilde{\Gamma}([0, 2\tau_0]) \setminus \mathcal{U}} B_0(h) = \mathbf{1}_{\tilde{\Gamma}([\tau_2, 2\tau_0]) \setminus \mathcal{U}} B_0(h) + \underset{h \rightarrow 0}{O}(h^\infty).$$



A partir de là, tout ce dont on a besoin se trouve déjà dans la démonstration de la proposition 6.23. Par la méthode B.K.W. on se ramène, à  $o(h^{\nu_E-1})$  près, à l'étude de

$$\mathbb{1}_{\tilde{\Gamma}([ \tau_2, \tau_0 ])}(x) \int_0^\infty \int_\Gamma \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h} \psi(t, x, z, \xi)} \kappa(t, x, z, \xi, h) d\xi d\sigma_\Gamma(z) dt \quad (6.43)$$

Contrairement à  $\delta$  auquel on devait faire attention dans les restes pour la démonstration précédente,  $\tau_2$  est une constante fixée pour le reste de la démonstration, en particulier grande devant  $h$  quand  $h$  tend vers 0. En reprenant la preuve de (6.33) avec  $\delta = \tau_2$ , on voit que pour  $t \in \left[0, \min\left(\frac{\tau_2 \gamma_m}{4d_2}, \sqrt{\frac{\tau_2 \gamma_m}{4M}}\right)\right]$ ,  $x \in \tilde{\Gamma}([ \tau_2, 2\tau_0 ])$ ,  $z \in \Gamma$  et  $\xi \in \mathcal{C}(d_1, d_2)$  on a :

$$\nabla_\xi \psi(t, x, z, \xi) \geq \frac{\tau_2 \gamma_m}{4} > 0.$$

Ainsi, des intégrations par parties par rapport à  $\xi$  (c'est-à-dire en utilisant l'opérateur  $L$  introduit en (6.35)) montrent qu'on ne fait qu'une erreur d'ordre  $O(h^\infty)$  si on remplace  $\chi$  par  $\bar{\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*)$  telle que  $\bar{\chi}(t) = \chi(t)$  pour  $t \geq \min\left(\frac{\tau_2 \gamma_m}{4d_2}, \sqrt{\frac{\tau_2 \gamma_m}{4M}}\right)$  dans (6.43) ( $\chi$  intervient dans la définition de  $\kappa$ ). Une fois qu'on s'est ramené à un problème ne faisant plus intervenir les temps proches de 0, on peut utiliser le théorème de la phase stationnaire comme on l'a fait pour étudier  $J_\delta^0$ , sauf qu'à nouveau on n'a pas de problème avec l'uniformité par rapport à  $\delta$ . Comme on l'a expliqué pour  $J_\delta^0$ , dans l'intégration en  $z \in \Gamma$  seule compte la partie autour de  $z_x$  si on a pris soin de prendre  $\tau_0$  assez petit au départ, donc :

$$B_0(x, h) = \frac{ih^{-\frac{1+n+d}{2}}}{(2\pi)^n} \int_0^\infty \int_{\mathcal{U}_{z_x}} \int_{\mathbb{R}^n} \bar{\chi}(t) e^{\frac{i}{h} \tilde{\psi}_{x, z_x}(t, \zeta, \xi)} a(t, x, \xi, h) A(z) \hat{S}(\xi) |\det D_\zeta \exp_{z_x}| d\xi d\zeta dt + o_{h \rightarrow 0}(h^{\nu_E-1})$$

dans  $L^2(\tilde{\Gamma}([ \tau_2, 2\tau_0 ]))$ , où  $\text{Jac}_x$  est le jacobien du difféomorphisme  $\exp_{z_x}$ . Enfin, comme on l'a fait pour  $J_\delta^0$ , mis à part qu'il n'est pas utile de faire un changement de variables (puisqu'on évite  $\Gamma_0$ , on n'a pas de problème d'uniformité), on utilise les résultats de la partie 6.2.4 et la méthode de la phase stationnaire pour obtenir le résultat (en particulier le seul point critique pour  $\tilde{\psi}_{x, z_x}$  n'est autre que  $(t_x, 0, \xi_x)$ ). Le fait que le reste soit effectivement de taille  $o(h^{\nu_E-1})$  se vérifie également comme dans la démonstration précédente.  $\square$

*Remarque 6.27.* Le facteur  $h^{-1}$  qui apparaît dans la définition (6.30) est compensé pour un facteur  $\sqrt{h}$  par la phase stationnaire sur l'intégrale en temps, l'autre facteur  $\sqrt{h}$  est celui qui a été ajouté à la définition de  $S_h$  (voir la proposition 6.2). Ainsi on obtient bien un état lagrangien de taille  $O(1)$ .

### 6.3 Mesure semi-classique partielle pour les temps finis

Pour  $T \geq 0$  on pose  $\chi_T(t) = \chi(t - T)$ , où  $\chi$  est la fonction utilisée dans le paragraphe 6.2.5, et on définit :

$$u_h^T = \frac{i}{h} \int_0^\infty \chi_T(t) U_h^E(t) S_h dt.$$

Pour tout  $T \geq 0$  on a alors :

$$\|u_h^T\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O_{h \rightarrow 0}\left(h^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Le but de cette partie est de montrer l'existence d'une unique mesure semi-classique associée à la famille  $(u_h^T)_{h \in ]0, 1]}$ . Pour  $T \geq 0$  on note

$$\Lambda_T = \{\phi^t(z, \xi), t \in ]0, T + \tau_0], (z, \xi) \in N_E \Gamma_0\} \subset \mathbb{R}^{2n},$$

et pour  $w \in \mathbb{R}^n$  :

$$K_w^T = \sup \{k \in \llbracket 1, K_w \rrbracket \mid t_{w,k} \leq T + \tau_0\}.$$

D'après le corollaire 6.15,  $K_w^T$  est nécessairement fini. On remarque d'autre part que pour tout  $T \geq 0$ ,

$$\Lambda_T \cup N_E \Gamma_0 = \{\phi^t(z, \xi), t \in [0, T + \tau_0], z \in N_E \Gamma_0\}$$

est un compact de  $\mathbb{R}^{2n}$ .

### 6.3.1 Calculs pour des temps intermédiaires

Dans la section précédente, on s'est intéressé à la contribution des temps proches de 0. On en déduit dans ce paragraphe la contribution des temps  $t \in ]0, T]$ , avec  $T \geq 0$ . On commence par une proposition qui montre que pour  $w \in \mathbb{R}^{2n}$  et  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à support proche de  $w$ , alors dans l'intégrale définissant  $u_h^T$  seuls les temps proches de  $t_{w,k}$  pour  $\delta_w \leq k \leq K_w^T$  donnent une contribution significative.

**Proposition 6.28.** *Soient  $w \in \mathbb{R}^{2n}$  et  $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  une fonction qui s'annule au voisinage des  $t_{w,k}$  pour  $k \in \llbracket \delta_w, K_w \rrbracket$ . Alors il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $w$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$  et un voisinage  $\tilde{\mathcal{G}} \subset \mathcal{G}$  de  $N_E \Gamma_0$  ( $\mathcal{G}$  est défini au paragraphe 6.2.5) tels que pour tous  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à support dans  $\mathcal{V}$  et  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à support dans  $\tilde{\mathcal{G}}$ , on a dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  :*

$$\frac{i}{h} \int_0^\infty \tilde{\chi}(t) \text{Op}_h^w(q) U_h^E(t) \text{Op}_h(f) S_h dt = O_{h \rightarrow 0}(h^\infty).$$

*Démonstration.* On montre qu'il existe un voisinage  $\tilde{\mathcal{G}} \subset \mathcal{G}$  de  $N_E \Gamma_0$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$  et un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $w$  tels que pour tous  $\tilde{w} \in \tilde{\mathcal{G}}$  et  $t \in \text{supp } \tilde{\chi}$  on a :  $\phi^t(\tilde{w}) \notin \mathcal{V}$ . Si ce n'est pas le cas, on peut trouver une suite  $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\text{supp } \tilde{\chi}$  et une suite  $(w_m)_{m \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^{2n})^{\mathbb{N}}$  tels que  $d(w_m, N_E \Gamma_0) \rightarrow 0$  et  $\phi^{t_m}(w_m) \rightarrow w$ . Comme  $\text{supp } \tilde{\chi}$  et  $N_E \Gamma_0$  sont compacts, on peut extraire des sous-suites telles que  $t_{m_k} \rightarrow t \in \text{supp } \tilde{\chi}$  et  $w_{m_k} \rightarrow w_\infty \in N_E \Gamma_0$ . Par continuité du flot  $\phi$ , on a alors  $\phi^t(w_\infty) = w$ , ce qui est impossible puisque  $t \notin \{t_{w,\delta_w}, \dots, t_{w,K_w}\}$ . Soient alors  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à support dans  $\mathcal{V}$  et  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à support dans  $\tilde{\mathcal{G}}$ . D'après le théorème d'Egorov et la formule de changement de quantification, on a pour tout  $t \in \text{supp } \tilde{\chi}$  :

$$\|\text{Op}_h^w(q) U_h^E(t) \text{Op}_h(f)\| = O_{h \rightarrow 0}(h^\infty),$$

où le reste est uniforme en  $t \in \text{supp } \tilde{\chi}$ . Une intégration par rapport à  $t$  donne alors le résultat.  $\square$

*Remarque 6.29.* La démonstration de cette proposition concentre une bonne partie des difficultés dues aux trajectoires captées. En effet, elle n'est valable que parce qu'on a supposé que  $\tilde{\chi}$  est à support compact, mais elle est fautive sans cette hypothèse, pour les raisons qu'on a déjà évoquées : en temps grands, rien n'empêche les trajectoires issues de  $N_E \Gamma_0$  d'approcher le point  $w$  pour des temps loin des  $t_{w,k}$ , et de plus on ne peut pas appliquer le théorème d'Egorov uniformément en temps. C'est donc en partie pour appliquer cette proposition qu'on doit dans un premier temps se contenter d'étudier la mesure semi-classique pour  $u_h^T$  plutôt que directement pour  $u_h$ .

Soient  $w \in \Lambda_\infty$  et  $\tau_w = \min(t_{w,1}, \tau_0)$ . On considère une fonction  $\chi_w \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  à support dans  $]0, 2\tau_w[$  et égale à 1 au voisinage de  $\tau_w$ , puis on note

$$B_w^T(h) = \frac{i}{h} \int_0^\infty \chi_{T+\tau_w}(t) \chi_w(t) U_h^E(t) \text{Op}_h(f) S_h dt,$$

où  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  est à support dans  $\mathcal{G}$ . En outre, pour  $k \in \llbracket 1, K_w \rrbracket$  on note :

$$B_{w,k}^T(h) = \frac{i}{h} \int_0^\infty \chi_T(t) \chi_w(t - t_{w,k} + \tau_w) U_h^E(t) \text{Op}_h(f) S_h dt. \quad (6.44)$$

Comme pour la proposition 6.25 (et on n'a même pas à se préoccuper des temps petits puisque  $\chi_w$  est nulle au voisinage de 0) on voit que  $B_w^T(h)$  est à  $o(h^{\nu_E-1})$  près un état lagrangien de phase  $\psi$  (définie en (6.28)), de sous-variété

$$\tilde{\Lambda} := \left\{ (x, \nabla\psi), x \in \tilde{\Gamma}([0, 2\tau_0]) \right\}$$

et de symbole principal

$$b_w^T(x) = i(2\pi)^{\frac{d+1-n}{2}} \frac{e^{\frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} \operatorname{Hess} \tilde{\psi}_{x,z_x}(t_x, 0, \xi_x)}}{\left| \det \operatorname{Hess} \tilde{\psi}_{x,z_x}(t_x, 0, \xi_x) \right|^{\frac{1}{2}}} A(z_x) a_0(t_x, x, \xi_x) \hat{S}(\xi_x) \chi_w(t_x) \chi_{T+\tau_w}(t_x). \quad (6.45)$$

En particulier la fonction  $B_w^T(h)$  est bornée uniformément en  $h \in ]0, h_0]$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Comme le point  $(t_x, x, z_x, \xi_x)$  est un point critique pour la phase  $\psi$  par rapport aux variables  $t, z$  et  $\xi$  on a :

$$\begin{aligned} \nabla\psi(x) &= \nabla_x(\psi(t_x, x, z_x, \xi_x)) \\ &= \partial_t \psi(t_x, x, z_x, \xi_x) \frac{\partial t_x}{\partial x} + \nabla_x \psi(t_x, x, z_x, \xi_x) \\ &\quad + \nabla_z \psi(t_x, x, z_x, \xi_x) \frac{\partial z_x}{\partial x} + \nabla_\xi \psi(t_x, x, z_x, \xi_x) \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \\ &= \nabla_x \varphi(t_x, x, \xi_x). \end{aligned}$$

Or, d'après (3.16), on sait qu'on a

$$(x, \nabla_x \varphi(t_x, x, \xi_x)) = \phi^{t_x}(\nabla_\xi \varphi(t_x, x, \xi_x), \xi_x) = \phi^{t_x}(z_x, \xi_x),$$

et donc :

$$\tilde{\Lambda} = \left\{ \phi^{t_x}(z_x, \xi_x), x \in \tilde{\Gamma}([0, 2\tau_0]) \right\} = \left\{ \phi^t(z, \xi), t \in ]0, 2\tau_0], (z, \xi) \in N_E \Gamma \right\}.$$

Ainsi on est capable de bien décrire la fonction  $B_w^T(h)$  en terme d'états lagrangiens. On utilise maintenant les propriétés du propagateur de Schrödinger en termes d'opérateurs de Fourier intégraux pour en déduire une description de  $B_{w,k}^T(h)$  :

**Proposition 6.30.** *Pour tous  $w \in \Lambda_\infty$  et  $k \in \llbracket 1, K_w \rrbracket$ , la fonction  $B_{w,k}^T(h)$  est à  $o(h^{\nu_E-1})$  près un état lagrangien de sous-variété  $\phi^{t_w, k-\tau_w} \tilde{\Lambda}$ . En particulier  $B_{w,k}^T(h)$  est bornée uniformément en  $h \in ]0, 1]$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .*

On notera  $\nu_{w,k}^T$  la fonction à valeurs strictement positives sur  $\phi^{t_w, k-\tau_w} \tilde{\Lambda}$  donnée par la proposition 3.49.

*Remarque 6.31.* Au voisinage de  $w$  la sous-variété  $\phi^{t_w, k-\tau_w} \tilde{\Lambda}$  coïncide avec  $\Lambda_{w,k}$ .

*Démonstration.* On a :

$$\begin{aligned} B_{w,k}^T(h) &= \frac{i}{h} \int_{t_w, k-\tau_w}^{\infty} \chi_T(t) \chi_w(t - t_w, k + \tau_w) U_h^E(t) \operatorname{Op}_h(f) S_h dt \\ &= \frac{i}{h} \int_0^{\infty} \chi_T(t + t_w, k - \tau_w) \chi_w(t) U_h^E(t + t_w, k - \tau_w) \operatorname{Op}_h(f) S_h dt \\ &= U_h^E(t_w, k - \tau_w) B_w^{T-t_w, k}(h). \end{aligned}$$

On conclut alors grâce au corollaire 3.60 (voir aussi la remarque 6.19).  $\square$

### 6.3.2 Convergence vers une mesure semi-classique tronquée

On peut maintenant expliciter la mesure semi-classique de la famille  $(u_h^T)_{h \in ]0,1]}$  pour tout  $T \geq 0$ .

**Théorème 6.32.** *Soit  $T \geq 0$ . Il existe une mesure de Radon positive  $\mu_T$  sur  $\mathbb{R}^{2n}$  à support dans  $N_E\Gamma_0 \cup \Lambda_T$  et telle que, pour tout  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  :*

$$\langle \text{Op}_h^w(q)u_h^T, u_h^T \rangle \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^{2n}} q d\mu_T. \quad (6.46)$$

*Démonstration. 1. Localisation autour d'un point  $w \in \mathbb{R}^{2n}$ .* On va montrer que pour  $w \in \mathbb{R}^{2n}$  et  $T \geq 0$ , il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{V}_{w,T}$  de  $w$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$  tel que pour toute fonction  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à support dans  $\mathcal{V}_{w,T}$  on a

$$\langle \text{Op}_h^w(q)u_h^T, u_h^T \rangle \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{\mathcal{V}_{w,T}} q d\mu_{w,T}, \quad (6.47)$$

où  $\mu_{w,T}$  est une mesure de Radon positive sur  $\mathcal{V}_{w,T}$ . Si  $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^{2n}$  sont deux points tels que  $\mathcal{V}_{w_1,T} \cap \mathcal{V}_{w_2,T} \neq \emptyset$ , alors les deux mesures  $\mu_{w_1,T}$  et  $\mu_{w_2,T}$  coïncident sur  $\mathcal{V}_{w_1,T} \cap \mathcal{V}_{w_2,T}$  (il suffit de considérer les deux versions de (6.47) pour  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à support  $\mathcal{V}_{w_1,T} \cap \mathcal{V}_{w_2,T}$ ). Ainsi on peut définir la mesure  $\mu_T$  sur  $\mathbb{R}^{2n}$  comme étant l'unique mesure qui coïncide avec  $\mu_{w,T}$  sur  $\mathcal{V}_{w,T}$  pour tout  $w \in \mathbb{R}^{2n}$ . Dès lors, pour  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ , une partition de l'unité et un nombre fini d'applications de (6.47) donnent (6.46). On considère donc  $w \in \mathbb{R}^{2n}$ .

**2. Localisation autour des temps de passage en  $w$ .** On rappelle que les fonctions de troncature  $\chi, \chi_T$  pour  $T \geq 0$  et  $\chi_w$  ont été définies aux paragraphes 6.2.5 et 6.3. D'après le corollaire 6.15, si  $w \in N_E\Gamma_0$  alors  $t_{w,1} \geq 3\tau_0$ , si bien que les supports des fonctions  $\delta_w\chi$  et  $\chi_T\chi_w(\cdot - t_{w,k} + \tau_w)$  pour  $1 \leq k \leq K_w^T$  sont deux à deux disjoints. Ainsi la fonction  $\tilde{\chi}$  définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \tilde{\chi}(t) = \chi_T(t) - \delta_w\chi(t) - \sum_{k=1}^{K_w^T} \chi_T(t)\chi_w(t - t_{w,k} + \tau_w)$$

est dans  $C_0^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$ . On a en particulier  $\tilde{\chi} = \chi_T$  si  $w \notin N_E\Gamma_0 \cup \Lambda_T$ , et dans tous les cas  $\tilde{\chi}$  s'annule autour des temps  $t_{w,k}$  pour tout  $k \in \llbracket \delta_w, K_w \rrbracket$ . D'après la proposition 6.28 il existe une fonction  $f_{w,T} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  égale à 1 au voisinage de  $N_E\Gamma_0$  et à support dans  $\mathcal{G}$  ainsi qu'un voisinage  $\mathcal{V}_{w,T}$  de  $w$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$  tels que pour  $q$  à support dans  $\mathcal{V}_{w,T}$  on a, dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  :

$$\text{Op}_h^w(q)v_h^T = \text{Op}_h^w(q)\tilde{u}_h^T + O(h^\infty),$$

où

$$v_h^T = \frac{i}{h} \int_0^\infty \chi_T(t)U_h^E(t)\text{Op}_h(f_{w,T})S_h dt \quad \text{et} \quad \tilde{u}_h^T = \delta_w B_{w,0}^T(h) + \sum_{k=1}^{K_w^T} B_{w,k}^T(h),$$

avec  $B_{w,0}^T(h)$  défini par (6.30) et les  $B_{w,k}^T(h)$  donnés en (6.44) avec  $f_{w,T}$  à la place de  $f$ . Considérant  $\tilde{q} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à support dans  $\mathcal{V}_{w,T}$  et égal à 1 au voisinage de  $\text{supp } q$  on a alors d'après le corollaire 6.6 :

$$\begin{aligned} \langle \text{Op}_h^w(q)u_h^T, u_h^T \rangle &= \langle \text{Op}_h^w(q)u_h^T, \text{Op}_h^w(\tilde{q})u_h^T \rangle + O(h^\infty) \\ &= \langle \text{Op}_h^w(q)v_h^T, \text{Op}_h^w(\tilde{q})v_h^T \rangle + O(h) \\ &= \langle \text{Op}_h^w(q)\tilde{u}_h^T, \tilde{u}_h^T \rangle + O(h). \end{aligned} \quad (6.48)$$

En particulier, si  $w \notin N_E\Gamma_0 \cup \Lambda_T$  on a

$$\langle \text{Op}_h^w(q)u_h^T, u_h^T \rangle \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Ainsi si la mesure  $\mu_T$  existe elle sera nécessairement nulle hors de  $\Lambda_T \cup N_E \Gamma_0$ . On peut maintenant supposer que  $w \in N_E \Gamma_0 \cup \Lambda_T$ .

**3. Définition de la mesure  $\mu_{w,T}$ .** Quitte à réduire  $\mathcal{V}_{w,T}$ , on peut supposer que

$$\Lambda_T \cap \mathcal{V}_{w,T} \subset \bigcup_{k=\delta_w}^{K_w^T} \Lambda_{w,k} \cap \mathcal{V}_{w,T}.$$

Pour  $k \in \llbracket 1, K_w^T \rrbracket$  et un borélien  $\Omega$  de  $\mathcal{V}_{w,T}$  on pose

$$\mu_{w,T,k}(\Omega) = \int_{\Lambda_{w,k}} \mathbb{1}_\Omega(\tilde{w}) \nu_{w,k}^T(\tilde{w}) d\sigma_{\Lambda_{w,k}}(\tilde{w}), \quad \mu_{w,T,0}(\Omega) = \delta_w \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_\Omega(x, \nabla\psi(x)) |b_0(x)|^2 dx$$

( $b_0$  ne dépend pas du choix de  $f_{w,T}$  et donc pas de  $T$  –voir la remarque 6.33– mais on note tout de même  $\mu_{w,T,0}$  pour avoir des notations cohérentes), puis

$$\mu_{w,T} = \sum_{k=0}^{K_w^T} \mu_{w,T,k},$$

ce qui définit bien une mesure de Radon sur  $\mathcal{V}_{w,T}$ . En outre toutes ces mesures sont des mesures positives.  $\mathcal{V}_{w,T}$  et  $\mu_{w,T}$  étant maintenant fixés, il nous faut montrer que pour tous  $\varepsilon > 0$  et  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à support dans  $\mathcal{V}_{w,T}$ , on peut trouver  $h_0 > 0$  tel que pour  $h \in ]0, h_0]$  on a :

$$\left| \langle \text{Op}_h^w(q) u_h^T, u_h^T \rangle - \int_{\mathcal{V}_{w,T}} q d\mu_{w,T} \right| \leq \varepsilon. \quad (6.49)$$

Soient donc  $\varepsilon > 0$  et  $q$  à support dans  $\mathcal{V}_{w,T}$ . (6.48) donne déjà

$$\left| \langle \text{Op}_h^w(q) u_h^T, u_h^T \rangle - \langle \text{Op}_h^w(q) \tilde{u}_h^T, \tilde{u}_h^T \rangle \right| \leq \frac{\varepsilon}{6} \quad (6.50)$$

pour  $h \in ]0, h_0]$ , où  $h_0 > 0$  est choisi assez petit.

**4. Recouvrements de  $\Lambda_T$ .** Soient  $j \neq k \in \llbracket \delta_w, K_w^T \rrbracket$ . On pose :

$$\Lambda_{w,j,k} = \Lambda_{w,j} \cap \Lambda_{w,k}.$$

Soit  $l \in \llbracket \delta_w, K_w^T \rrbracket$ . D'après l'hypothèse (6.10) et la proposition 6.16,  $\Lambda_{w,j,k} \cap \Lambda_{w,l}$  est de mesure nulle dans  $\Lambda_{w,l}$ . Comme la mesure  $\sigma_{\Lambda_{w,l}}$  est régulière, on peut trouver pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$  un ouvert  $U_{j,k,l}^m$  de  $\Lambda_{w,l}$  tel que

$$\Lambda_{w,j,k} \cap \Lambda_{w,l} \subset U_{j,k,l}^m \quad \text{et} \quad \sigma_{\Lambda_{w,l}}(U_{j,k,l}^m) \leq \frac{1}{m}.$$

On peut ensuite considérer un ouvert  $V_{j,k,l}^m$  de  $\mathbb{R}^{2n}$  contenant l'adhérence de  $\Lambda_{w,j,k}$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$  et tel que  $V_{j,k,l}^m \cap \Lambda_{w,l} \subset U_{j,k,l}^m$ . On note alors :

$$V_m = \bigcup_{\delta_w \leq j < k \leq K_w^T} \bigcap_{\delta_w \leq l \leq K_w^T} V_{j,k,l}^m.$$

Pour tous  $\delta_w \leq j < k \leq K_w^T$ , l'ouvert  $\bigcap_{\delta_w \leq l \leq K_w^T} V_{j,k,l}^m$  est de mesure  $O(\frac{1}{m})$  dans chacun des  $\Lambda_{w,l}$  pour  $l \in \llbracket \delta_w, K_w^T \rrbracket$ . C'est donc encore le cas de  $V_m$  qui est union d'un nombre fini et fixé de tels ouverts. Malgré cela,  $V_m$  contient pour tout  $m$  l'ensemble des points de  $\mathcal{V}_{w,T}$  où  $\Lambda_T$  se recoupe, c'est-à-dire l'union des  $\Lambda_{w,j,k} \cap \mathcal{V}_{w,T}$  pour  $j \neq k \in \llbracket \delta_w, K_w^T \rrbracket$ .

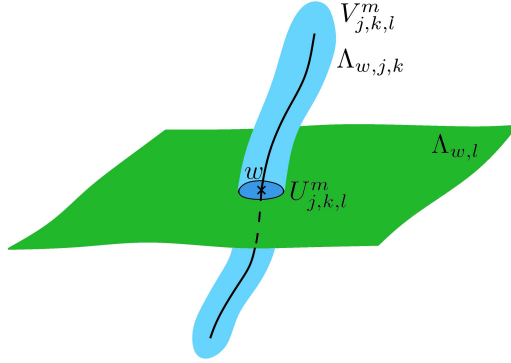


FIGURE 6.9 –  $V_{j,k,l}^m$  contient  $\Lambda_{w,j,k}$  et son intersection avec  $\Lambda_{w,l}$  est petite.

Pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$  on considère une fonction  $\gamma_m \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, [0, 1])$  égale à 1 hors de  $V_m$  et nulle au voisinage de  $\bigcup_{\delta_w \leq j < k \leq K_w^T} \Lambda_{w,j,k}$ , de sorte que les  $\Lambda_{w,j}$  pour  $j \in \llbracket \delta_w, K_w^T \rrbracket$  ne se recoupent pas sur le support de  $q\gamma_m$  et :

$$\forall l \in \llbracket \delta_w, K_w^T \rrbracket, \quad \sigma_{\Lambda_{w,l}}(\text{supp}(1 - \gamma_m)) = \underset{m \rightarrow \infty}{O} \left( \frac{1}{m} \right).$$

Pour  $m \in \mathbb{N}^*$  on considère une fonction  $v_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  à support dans  $\tilde{\Gamma}([0, 1/m])$  et égale à 1 au voisinage de  $\Gamma_0$ , puis pour  $k \in \mathbb{N}$  on note  $v_m^k = v_m$  si  $k = 0$  et  $v_m^k = 0$  si  $k \neq 0$ . D'après la proposition 3.49 on a pour  $k \neq 0$  :

$$\begin{aligned} \|\text{Op}_h^w(q)B_{w,k}^T(h) - \text{Op}_h^w(q\gamma_m)B_{w,k}^T(h)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \int_{\Lambda_{w,k}} |q|^2 (1 - \gamma_m)^2 \nu_{w,k}^T d\sigma_{\Lambda_{w,k}} + \underset{h \rightarrow 0}{o}(1) \\ &= \underset{m \rightarrow \infty}{O} \left( \frac{1}{m} \right) + \underset{h \rightarrow 0}{o}(1). \end{aligned}$$

Si  $w \in N_E \Gamma_0$ , on peut écrire  $(1 - v_m)B_{w,0}^T(h)$  comme un état lagrangien de symbole principal  $(1 - v_m)b_0$  pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$  (voir la proposition 6.25). D'après la proposition 6.23 et l'exemple 3.50 on a alors :

$$\|\text{Op}_h^w(q)B_{w,k}^T(h) - \text{Op}_h^w(q\gamma_m)(1 - v_m(x))B_{w,k}^T(h)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \underset{m \rightarrow \infty}{o}(1) + \underset{h \rightarrow 0}{o}(1).$$

Soient  $\tilde{\gamma}_m$  vérifiant les mêmes propriétés que  $\gamma_m$  et tel que  $\tilde{\gamma}_m = 1$  au voisinage de  $\text{supp } \gamma_m$ . On rappelle que  $\tilde{q} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  est à support dans  $\mathcal{V}_{w,T}$  et vaut 1 au voisinage de  $\text{supp } q$ . Pour  $j, k \in \llbracket \delta_w, K_w^T \rrbracket$  distincts les états lagrangiens  $\text{Op}_h^w(q\gamma_m)(1 - v_m^j(x))B_{w,j}^T(h)$  et  $\text{Op}_h^w(\tilde{q}\tilde{\gamma}_m)(1 - v_m^k(x))B_{w,k}^T(h)$  ont des microsoutports disjoints. On a donc :

$$\begin{aligned} &\langle \text{Op}_h^w(q\gamma_m)(1 - v_m^j(x))B_{w,j}^T(h), (1 - v_m^k(x))B_{w,k}^T(h) \rangle \\ &= \langle \text{Op}_h^w(q\gamma_m)(1 - v_m^j(x))B_{w,j}^T(h), \text{Op}_h^w(\tilde{q}\tilde{\gamma}_m)(1 - v_m^k(x))B_{w,k}^T(h) \rangle + \underset{h \rightarrow 0}{O}(h^\infty) \\ &= \underset{h \rightarrow 0}{o}(h^{\nu_E - 1}). \end{aligned}$$

En choisissant  $m \in \mathbb{N}^*$  assez grand,  $h_0 > 0$  assez petit et en utilisant (6.50), on obtient finalement que pour tout  $h \in ]0, h_0]$  :

$$\left| \langle \text{Op}_h^w(q)u_h^T, u_h^T \rangle - \sum_{k=\delta_w}^{K_w^T} \langle \text{Op}_h^w(q)B_{w,k}^T(h), B_{w,k}^T(h) \rangle \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (6.51)$$

**5. Convergence pour les temps intermédiaires.** On suppose que  $w \in \Lambda_T$  et on considère  $k \in \llbracket 1, K_w^T \rrbracket$ . On a d'après la proposition 3.49 :

$$\langle \text{Op}_h^w(q) B_{w,k}^T(h), B_{w,k}^T(h) \rangle = \int_{\Lambda_{w,k}} q \nu_{w,k}^T d\sigma_{\Lambda_{w,k}} + \underset{h \rightarrow 0}{o}(1).$$

Si  $h_0$  assez petit, alors on a pour  $h \in ]0, h_0]$  :

$$\left| \langle \text{Op}_h^w(q) B_{w,k}^T(h), B_{w,k}^T(h) \rangle - \int_{\mathbb{R}^{2n}} q d\mu_{w,k} \right| \leq \frac{\varepsilon}{3K_w^T}. \quad (6.52)$$

**6. Convergence pour les temps petits.** Il ne nous reste plus qu'à montrer que le terme  $\delta_w \langle \text{Op}_h^w(q) B_{w,0}^T(h), B_{w,0}^T(h) \rangle$  correspondant à la contributions des temps petits tend vers l'intégrale de  $q$  contre la mesure  $\mu_{w,T,0}$ . On suppose donc que  $w \in N_E \Gamma_0$  et on cherche comme précédemment à éviter un voisinage de  $\Gamma_0$ . Soient  $\tau_1 \in ]0, \tau_0]$  et  $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, [0, 1])$  à support dans  $\tilde{\Gamma}([0, \tau_1])$  et égale à 1 au voisinage de  $\Gamma_0$ . Si  $\tau_1 > 0$  est assez petit on a

$$\|v B_{w,0}^T(h)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\varepsilon}{6}, \quad (6.53)$$

et d'autre part, puisque  $(1 - v)$  est nulle au voisinage de  $\Gamma_0$ , on peut se référer à l'exemple 3.50 pour écrire :

$$\begin{aligned} & \langle \text{Op}_h^w(q)(1 - v) B_{w,0}^T(h), B_{w,0}^T(h) \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} q(x, \nabla \psi(x))(1 - v(x)) |b_0(x)|^2 dx + \underset{h \rightarrow 0}{o}(1). \end{aligned}$$

Ainsi, si  $\tau_1 > 0$  et  $h_0 > 0$  sont assez petits, on a pour tout  $h \in ]0, h_0]$  :

$$\left| \langle \text{Op}_h^w(q) B_{w,0}^T(h), B_{w,0}^T(h) \rangle - \int q d\mu_{w,0} \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (6.54)$$

**7.** D'après (6.51), (6.52) et (6.54), on a bien (6.49) comme annoncé.  $\square$

*Remarque 6.33.* Les états lagrangiens  $B_{w,k}^T(h)$  utilisés dans cette démonstration dépendent du choix de la fonction  $f_{w,T}$ , mais pas la mesure  $\mu_T$  obtenue. Prenons le cas  $k = 0$ . Le symbole  $b_0$  ne dépend pas de  $f$  car pour tout  $x \in \tilde{\Gamma}([0, 2\tau_0])$  tel que  $z_x \in \text{supp } A$  on a (voir (6.24)) :

$$f_{w,T}(\bar{y}(t_x, x, \xi_x)) = f(z_x, \xi_x) = 1,$$

car on impose que  $f_{w,T}$  soit égale à 1 au voisinage de  $N_E \Gamma_0$ . Ainsi  $b_0$  ne dépend pas du choix de  $f_{w,T}$ , et c'est encore valable pour les autres termes du développement. Cela vaut aussi pour  $b_w^T$  et donc  $\nu_{w,k}^T$  pour tous  $w \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $k \in \llbracket 1, K_w \rrbracket$  et  $T \geq 0$ . Ces deux dernières quantités dépendent tout de même de  $T$  à cause du facteur  $\chi_{T+\tau_w}$  intervenant dans l'expression (6.45) de  $b_w^T$ .

**Corollaire 6.34.** Soient  $T \geq 0$  et  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ . Alors on a :

$$\sup_{h \in ]0, 1]} \|\text{Op}_h^w(q) u_h^T\|^2 < \infty.$$

*Démonstration.* Il existe  $q_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  tel que :

$$\begin{aligned} \|\text{Op}_h^w(q) u_h^T\|^2 &= \langle \text{Op}_h^w(q) * \text{Op}_h^w(q) u_h^T, u_h^T \rangle \\ &= \langle \text{Op}_h^w(|q|^2) u_h^T, u_h^T \rangle + h \langle \text{Op}_h^w(q_1) u_h^T, u_h^T \rangle + \underset{h \rightarrow 0}{O}(h) \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \int |q|^2 d\mu_T. \end{aligned}$$

$\square$

## 6.4 Convergence vers une mesure semi-classique

### 6.4.1 Contrôle des temps grands et convergence des mesures tronquées

Le travail des deux sections précédentes nous a permis de décrire la limite quand  $h$  tend vers 0 de la quantité  $\langle \text{Op}_h^w(q)u_h^T, u_h^T \rangle$  pour tous  $T \geq 0$  et  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ . Pour en déduire des résultats sur  $u_h$ , il faut montrer que plus  $T$  est grand, plus  $\langle \text{Op}_h^w(q)u_h^T, u_h^T \rangle$  est une approximation pertinente de  $\langle \text{Op}_h^w(q)u_h, u_h \rangle$  (pour  $h$  petit). C'est l'objet de la proposition suivante :

**Proposition 6.35.** *Soient  $K$  un compact de  $p^{-1}(J)$  et  $\varepsilon > 0$ . Alors il existe  $T_0 \geq 0$  tel que pour tout  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à support dans  $K$  on a :*

$$\forall T \geq T_0, \quad \limsup_{h \rightarrow 0} |\langle \text{Op}_h^w(q)u_h, u_h \rangle - \langle \text{Op}_h^w(q)u_h^T, u_h^T \rangle| \leq \varepsilon \|q\|_\infty.$$

On remarque qu'on se restreint à des fonctions dont le support est inclus dans  $p^{-1}(J)$ , ce qui est raisonnable puisque si  $q$  est à support hors de  $p^{-1}(\{E_0\})$  on sait que les deux quantités que l'on compare convergent vers 0 quand  $h$  tend vers 0. Pour montrer ce résultat, on va avoir besoin de la proposition suivante, qui précise un peu dans quelle mesure on peut dire que la présence de l'amortissement  $V_2$  fait que  $U_h^E(t)$  décroît avec  $t$ .

**Proposition 6.36.** *Soient  $K_1$  et  $K_2$  des compacts de  $p^{-1}(J)$  et  $\varepsilon > 0$ . Alors il existe  $T_0 \geq 0$  tel que pour  $q_1, q_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à supports respectivement dans  $K_1$  et  $K_2$  on a :*

$$\forall T \geq T_0, \quad \limsup_{h \rightarrow 0} \|\text{Op}_h^w(q_1)U_h(T)\text{Op}_h^w(q_2)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \varepsilon \|q_1\|_\infty \|q_2\|_\infty.$$

*Remarque 6.37.* Il suffit en fait que  $K_2$  soit contenu dans  $p^{-1}(J)$ . Si c'est  $K_1$  qui est à support dans  $p^{-1}(J)$  on peut toujours, par le théorème d'Egorov, remplacer  $q_2$  par  $q_2(\chi \circ p)$  où  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  est à support dans  $J$  et telle que  $\chi \circ p$  est égale à 1 au voisinage de  $K_1$ .

*Démonstration.* Soient  $q_1, q_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à supports respectivement dans  $K_1$  et  $K_2$ . D'après le théorème d'Egorov, on a pour  $T \geq 0$  :

$$\begin{aligned} & \|\text{Op}_h^w(q_1)U_h(T)\text{Op}_h^w(q_2)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \\ &= \|U_1^h(T)^* \text{Op}_h^w(q_1)U_h(T)\text{Op}_h^w(q_2)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \\ &= \left\| \text{Op}_h^w \left( (q_1 \circ \phi^T) e^{-\int_0^T V_2 \circ \phi^s ds} \right) \text{Op}_h^w(q_2) \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} + O(h) \\ &= \left\| \text{Op}_h^w \left( q_2(q_1 \circ \phi^T) e^{-\int_0^T V_2 \circ \phi^s ds} \right) \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} + O(h), \end{aligned}$$

où la taille du reste dépend de  $T$ ,  $q_1$  et  $q_2$ . D'après le théorème 3.10, on obtient alors que

$$\|\text{Op}_h^w(q_1)U_h(T)\text{Op}_h^w(q_2)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \sup_{w \in \mathbb{R}^{2n}} \left| q_2(w)q_1(\phi^T(w)) e^{-\int_0^T V_2(\bar{x}(s,w)) ds} \right| + C_{T,q_1,q_2} \sqrt{h},$$

où  $C_{T,q_1,q_2}$  est une constante qui dépend de  $T$ ,  $q_1$  et  $q_2$  mais pas de  $h$ . D'après la proposition 3.42 il existe  $T_0$  tel que pour  $T \geq T_0$  et  $w \in \text{supp } K_2$  on a

$$e^{-\int_0^T V_2(\bar{x}(s,w)) ds} \leq \varepsilon \quad \text{ou} \quad \phi^T(w) \notin K_1.$$

Pour  $T \geq T_0$  on obtient donc

$$\|\text{Op}_h^w(q_1)U_h(T)\text{Op}_h^w(q_2)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \varepsilon \|q_1\|_\infty \|q_2\|_\infty + C_{T,q_1,q_2} \sqrt{h}.$$

Il ne reste plus qu'à prendre la limite  $h \rightarrow 0$  à  $T$ ,  $q_1$  et  $q_2$  fixés pour conclure.  $\square$



*Remarque 6.38.* On voit dans cette démonstration qu'on utilise plainement la variante du théorème de Calderón-Vaillancourt donnée par le théorème 3.10. En effet, le facteur d'amortissement  $e^{-\int_0^T V_2 \circ \phi^s ds}$  qui apparaît dans le symbole de l'opérateur étudié devient petit pour  $T$  grand en norme  $L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ , mais ce n'est pas le cas de ses dérivées, qui font intervenir les dérivées du flot  $\phi^s$  (dont on sait qu'elle peuvent avoir une croissance exponentielle pour les temps grands). C'est parce qu'on considère la limite  $h \rightarrow 0$  à  $T$  fixé que ces dérivées ne nous posent pas problème. Et c'est pour la même raison que les dérivées de  $q_1$  et  $q_2$  n'interviennent pas dans le résultat.

On rappelle que  $R_1 \geq 0$  est tel que  $\Gamma_1 \subset B_{R_1}$ . On se donne  $\sigma \in ]0, 1[$  et on note  $d = \sqrt{E_0}/2\sqrt{3}$ . Soit alors  $\mathcal{R}$  donné par le théorème 5.6 appliqué avec  $R_1$  remplacé par  $2R_1$ . Quitte à prendre  $\mathcal{R}$  plus grand on peut supposer que c'est un rayon de fuite pour  $J$ , de sorte que si  $(x, \xi) \in p^{-1}(J)$  et  $|x| \geq \mathcal{R}$  alors  $|\xi| \geq 2d$ . On peut également supposer que  $2\mathcal{R}$  vérifie la conclusion de la proposition 3.34.

**Lemme 6.39.** *Soient  $K$  un compact de  $p^{-1}(J)$ ,  $\gamma > 0$  et  $Q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, [0, 1])$  à support dans  $p^{-1}(J)$  et égal à 1 au voisinage de  $p^{-1}(\bar{I}) \cap B_x(3\mathcal{R})$ . Alors il existe  $T_0 \geq 0$  tel que pour  $T \geq T_0$  et  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à support dans  $K$  on a*

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \left\| \text{Op}_h^w(q) (u_h - u_h^T - A_T^\gamma(h) \text{Op}_h^w(Q) u_h) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \gamma \|q\|_\infty,$$

pour un certain opérateur borné  $A_T^\gamma(h)$  tel que

$$\forall T \geq T_0, \quad \limsup_{h \rightarrow 0} \|A_T^\gamma(h)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \gamma.$$

*Démonstration.* 1. Soit  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à support dans  $K$ . Soient  $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  à support dans  $B_{3\mathcal{R}}$  et égal à 1 sur  $B_{2\mathcal{R}}$ , ainsi que  $\omega_- \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2n})$  égal à 1 au voisinage de  $\mathcal{Z}_-$  ( $2\mathcal{R}, 2d, -\frac{1+\sigma}{2}$ ) et à support dans  $\mathcal{Z}_-(\mathcal{R}, d, -\sigma)$ . Pour  $h \in ]0, h_0]$ ,  $t \geq 0$  et  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  on note  $U_h(t, z) = e^{-\frac{it}{h}(H_h - z)}$ . Soient  $h \in ]0, h_0]$ ,  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  et  $T \geq 0$ . Comme  $z$  n'est pas valeur propre pour  $H_h$  on peut considérer  $(H_h - z)^{-1} S_h \in H^2(\mathbb{R}^n)$  et écrire :

$$\begin{aligned} & \text{Op}_h^w(q)(H_h - z)^{-1} S_h - \text{Op}_h^w(q) U_h(T, z)(H_h - z)^{-1} S_h \\ &= - \int_0^T \text{Op}_h^w(q) \frac{d}{dt} U_h(t, z)(H_h - z)^{-1} S_h dt \\ &= \frac{i}{h} \int_0^T \text{Op}_h^w(q) U_h(t, z) S_h dt \\ &= \frac{i}{h} \int_0^\infty \chi_T(t) \text{Op}_h^w(q) U_h(t, z) S_h dt - \frac{i}{h} \int_T^\infty \chi_T(t) \text{Op}_h^w(q) U_h(t, z) S_h dt \\ &= \frac{i}{h} \int_0^\infty \chi_T(t) \text{Op}_h^w(q) U_h(t, z) S_h dt - \frac{i}{h} \int_0^\infty \chi(t) \text{Op}_h^w(q) U_h(T, z) U_h(t, z) S_h dt. \end{aligned} \tag{6.55}$$

2. On s'intéresse d'abord au second terme du membre de gauche :

$$\begin{aligned} & \text{Op}_h^w(q) U_h(T, z)(H_h - z)^{-1} S_h \\ &= \text{Op}_h^w(q) U_h(T, z) \text{Op}_h^w(Q)(H_h - z)^{-1} S_h \\ &\quad + \text{Op}_h^w(q) U_h(T, z) \text{Op}_h^w(1 - Q) \theta(x) (H_h - z)^{-1} S_h \\ &\quad + \text{Op}_h^w(q) U_h(T, z) \text{Op}_h^w(1 - Q) (1 - \theta(x)) \text{Op}_h(\omega_-)(H_h - z)^{-1} S_h \\ &\quad + \text{Op}_h^w(q) U_h(T, z) \text{Op}_h^w(1 - Q) (1 - \theta(x)) \text{Op}_h(1 - \omega_-)(H_h - z)^{-1} S_h. \end{aligned}$$

Comme la fonction  $(x, \xi) \mapsto (1 - Q)(x, \xi) \theta(x)$  est nulle au voisinage de  $p^{-1}(\bar{I})$ , on a d'après

la proposition 5.1 :

$$\begin{aligned}
& \left\| \text{Op}_h^w(q)U_h(T, z)\text{Op}_h^w(1 - Q)\theta(x)(H_h - z)^{-1}S_h \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
& \leq c_{q,T} \left\| \text{Op}_h^w(1 - Q)\theta(x)(H_h - z)^{-1}S_h \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
& \leq c_{q,T} \left( \|S_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + h \left\| (H_h - z)^{-1}S_h \right\|_{L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)} \right) \\
& \leq c_{q,T}\sqrt{h},
\end{aligned}$$

où  $c_{q,T}$  ne dépend ni de  $h \in ]0, h_0]$  ni de  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  mais dépend de  $T \geq 0$  (du fait que  $U_h(T)$  n'est pas borné uniformément en temps) et de  $q$ . Soit  $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  à support dans  $B_{2R_1}$  et égal à 1 au voisinage de  $\overline{B_{R_1}}$ . D'après la proposition 6.4 puis le théorème 5.6 (ou plutôt la proposition 5.43) on a

$$\begin{aligned}
& \left\| \text{Op}_h^w(q)U_h(T, z)\text{Op}_h^w(1 - Q)(1 - \theta(x))\text{Op}_h(\omega_-)(H_h - z)^{-1}S_h \right\| \\
& \leq c_{q,T} \left\| \text{Op}_h(\omega_-)(H_h - z)^{-1}S_h \right\| \\
& \leq c_{q,T} \left\| \text{Op}_h(\omega_-)(H_h - z)^{-1}\text{Op}_h(\omega)S_h \right\| + O(h^\infty) \\
& = O(h^\infty),
\end{aligned}$$

uniformément  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$  (mais pas en  $T \geq 0$  ni en  $q$ ). On suppose maintenant que  $T \geq T_0$  où  $T_0$  est donné par la proposition 3.34 (avec  $\sigma$  remplacé par  $(1 + \sigma)/2$ ). Comme  $q$  est à support dans  $K$ , la fonction  $q \circ \phi^T$  est nulle au voisinage du support de  $(x, \xi) \mapsto (1 - \theta(x))(1 - \omega_-(x, \xi))$ , donc d'après le théorème d'Egorov, ou plus précisément le corollaire 3.44, on a

$$\begin{aligned}
& \left\| \text{Op}_h^w(q)U_h(T, z)\text{Op}_h^w(1 - Q)(1 - \theta(x))\text{Op}_h(1 - \omega_-)(H_h - z)^{-1}S_h \right\| \\
& \leq \left\| \text{Op}_h^w(q)U_h(T)(1 - \theta(x))\text{Op}_h(1 - \omega_-)\langle x \rangle \right\| \left\| \langle x \rangle^{-1}(H_h - z)^{-1}S_h \right\| \\
& = O(h^\infty),
\end{aligned}$$

où la taille du reste dépend de  $T$  et de  $q$  mais est uniforme en  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$ . Soient maintenant  $\tilde{q}, \tilde{Q} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à supports respectivement dans  $K$  et  $p^{-1}(J)$  et égaux à 1 respectivement aux voisinages de  $\text{supp } q$  et  $\text{supp } Q$ . On note :

$$A_T^\gamma(z, h) = \text{Op}_h^w(\tilde{q})U_h(T, z)\text{Op}_h^w(\tilde{Q}).$$

D'après la proposition 6.36, si  $T_0$  est assez grand on a

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \sup_{z \in \mathbb{C}_{I,+}} \|A_T^\gamma(z, h)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \gamma$$

pour tout  $T \geq T_0$ . On obtient finalement dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  :

$$\text{Op}_h^w(q)U_h(T, z)(H_h - z)^{-1}S_h = \text{Op}_h^w(q)A_T^\gamma(z, h)\text{Op}_h^w(Q)(H_h - z)^{-1}S_h + O(\sqrt{h}),$$

où la taille du reste est uniforme en  $z \in \mathbb{C}_{I,+}$ .

**3.** Pour  $h \in ]0, h_0]$  et  $T \geq T_0$ , on peut alors prendre la limite  $z \rightarrow E_h$  dans (6.55). Cela donne dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  :

$$\text{Op}_h^w(q)u_h = \text{Op}_h^w(q)u_h^T - \text{Op}_h^w(q)U_h^E(T)u_h^0 + \text{Op}_h^w(q)A_T^\gamma(E_h, h)\text{Op}_h^w(Q)u_h + O(\sqrt{h}).$$

Soient  $q_0, q_1, q_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, [0, 1])$  à supports dans  $p^{-1}(J)$  tels que  $q_0$  est égal à 1 au voisinage de  $K$ ,  $q_1$  est égal à 1 au voisinage de  $\Lambda_0 \cup N_E\Gamma_0$  et  $q_2$  est égal à 1 au voisinage de  $\text{supp } q_1$ .

D'après le corollaire 6.34 on a :

$$\begin{aligned} \|\mathrm{Op}_h^w(q)U_h^E(T)u_h^0\| &\leq \|\mathrm{Op}_h^w(q)U_h(T)\mathrm{Op}_h^w(q_1)u_h^0\| + \underset{h \rightarrow 0}{o}(1) \\ &\leq \|\mathrm{Op}_h^w(q)\| \|\mathrm{Op}_h^w(q_0)U_h(T)\mathrm{Op}_h^w(q_1)\| \|\mathrm{Op}_h^w(q_2)u_h^0\| + \underset{h \rightarrow 0}{o}(1) \\ &\leq C \|q\|_\infty \|\mathrm{Op}_h^w(q_0)U_h(T)\mathrm{Op}_h^w(q_1)\| + \underset{h \rightarrow 0}{o}(1) \end{aligned}$$

où, de nouveau, la taille du reste dépend de  $T$  et de  $q$ . D'après la proposition 6.36, on a alors

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \|\mathrm{Op}_h^w(q)U_h^E(T)u_h^0\| \leq \gamma \|q\|_\infty$$

pour tout  $T \geq T_0$  si  $T_0$  a été choisi assez grand.  $\square$

On peut maintenant démontrer la proposition 6.35 :

*Démonstration.* **1.** Soit  $Q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, [0, 1])$  comme dans le lemme précédent avec  $Q = 1$  au voisinage de  $K$ . On commence par appliquer le lemme avec  $q$  remplacé par  $Q$  et  $\gamma = \frac{1}{4}$ . On obtient que quitte à réduire  $h_0 > 0$  il existe  $T_0 \geq 0$  tel que pour  $h \in ]0, h_0]$  on a

$$\left(1 - \mathrm{Op}_h^w(Q)A_{T_0}^{1/4}(h)\right) \mathrm{Op}_h^w(Q)u_h = \mathrm{Op}_h^w(Q)u_h^{T_0} + r(h),$$

avec  $\left\|\mathrm{Op}_h^w(Q)A_{T_0}^{1/4}(h)\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \frac{1}{2}$  et  $\|r(h)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{2}$  pour tout  $h \in ]0, h_0]$ . D'après le corollaire 6.34, le membre de droite est uniformément borné en  $h \in ]0, h_0]$ . Mais l'opérateur  $\left(1 - \mathrm{Op}_h^w(Q)A_{T_0}^{1/4}(h)\right)$  est inversible d'inverse uniformément bornée, donc  $\mathrm{Op}_h^w(Q)u_h$  est borné uniformément en  $h \in ]0, h_0]$ .

**2.** Comme  $\mathrm{Op}_h^w(q)u_h = \mathrm{Op}_h^w(q)\mathrm{Op}_h^w(Q)u_h + O(h^\infty)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , il existe une constante  $C \geq 0$  ne dépendant pas de  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à support dans  $K$  telle que

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \|\mathrm{Op}_h^w(Q)u_h\| \leq C \quad \text{et} \quad \limsup_{h \rightarrow 0} \|\mathrm{Op}_h^w(q)u_h\| \leq C \|q\|_\infty.$$

On applique alors à nouveau le lemme 6.39 avec  $\gamma = \frac{\varepsilon}{4C(1+C)}$  et les symboles  $q$  et  $Q$ . On obtient qu'il existe  $T_1 \geq 0$  tel que

$$\forall T \geq T_1, \quad \limsup_{h \rightarrow 0} \|\mathrm{Op}_h^w(q)(u_h - u_h^T)\| \leq \frac{\varepsilon}{4C} \|q\|_\infty,$$

ainsi que la même estimation avec  $q$  remplacé par  $Q$ . Cela implique en particulier que

$$\forall T \geq T_1, \quad \limsup_{h \rightarrow 0} \|\mathrm{Op}_h^w(q)u_h^T\| \leq 2C \|q\|_\infty \quad (6.56)$$

(si  $\varepsilon \leq 4C^2$ , ce qu'on peut toujours supposer), et la même estimation pour  $Q$ . Soit alors  $T \geq T_1$ . On peut calculer :

$$\begin{aligned} &\limsup_{h \rightarrow 0} |\langle \mathrm{Op}_h^w(q)u_h, u_h \rangle - \langle \mathrm{Op}_h^w(q)u_h^T, u_h^T \rangle| \\ &= \limsup_{h \rightarrow 0} |\langle \mathrm{Op}_h^w(q)u_h, \mathrm{Op}_h^w(Q)u_h \rangle - \langle \mathrm{Op}_h^w(q)u_h^T, \mathrm{Op}_h^w(Q)u_h^T \rangle| \\ &\leq \limsup_{h \rightarrow 0} |\langle \mathrm{Op}_h^w(q)(u_h - u_h^T), \mathrm{Op}_h^w(Q)u_h^T \rangle| + \limsup_{h \rightarrow 0} |\langle \mathrm{Op}_h^w(q)u_h, \mathrm{Op}_h^w(Q)(u_h - u_h^T) \rangle| \\ &\leq \varepsilon \|q\|_\infty. \end{aligned}$$

$\square$

On dispose maintenant de tout ce dont on a besoin pour montrer que  $\mu_T$  converge bien quand  $T$  tend vers  $+\infty$  vers une mesure semi-classique pour la famille de solutions  $(u_h)_{h \in ]0, 1]}$ .

**Proposition 6.40.** *Il existe une mesure de Radon positive  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^{2n}$  telle que pour tout  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  on a*

$$\int q d\mu = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int q d\mu_T \quad (6.57)$$

et

$$\langle \text{Op}_h^w(q)u_h, u_h \rangle \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int q d\mu.$$

*Démonstration.* **1.** On commence par remarquer que pour  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à support hors de  $p^{-1}(\{E_0\})$  on a

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} q d\mu_T = 0 \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0.$$

Il suffit donc de montrer la première assertion pour des symboles  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à support dans  $p^{-1}(I)$ . Soient alors  $K$  un compact de  $p^{-1}(I)$  et  $\varepsilon > 0$ . Soit  $T_0 \geq 0$  donné par la proposition 6.35. Pour  $T_1, T_2 \geq T_0$  et  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à support dans  $K$  on a alors :

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{2n}} q d\mu_{T_1} - \int_{\mathbb{R}^{2n}} q d\mu_{T_2} \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \langle \text{Op}_h^w(q)u_h^{T_1}, u_h^{T_1} \rangle - \langle \text{Op}_h^w(q)u_h^{T_2}, u_h^{T_2} \rangle \right| \leq 2\varepsilon \|q\|_\infty.$$

Cela prouve que l'application  $T \mapsto \int q d\mu_T$  est de Cauchy en  $+\infty$  et admet donc une limite, qu'on note  $L(q)$ . Comme  $q \mapsto \int q d\mu_T$  est une forme linéaire positive sur  $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  pour tout  $T \geq 0$ , c'est encore vrai pour l'application  $q \mapsto L(q)$  par passage à la limite. On considère  $T_0$  comme précédemment pour  $\varepsilon = 1$ , et  $C_K$  une constante telle que pour  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à support dans  $K$  on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{2n}} q d\mu_{T_0} \right| \leq C_K \|q\|_\infty.$$

On a alors

$$\begin{aligned} |L(q)| &\leq \left| L(q) - \int_{\mathbb{R}^{2n}} q d\mu_{T_0} \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^{2n}} q d\mu_{T_0} \right| \\ &\leq \lim_{T \rightarrow +\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^{2n}} q d\mu_T - \int_{\mathbb{R}^{2n}} q d\mu_{T_0} \right| + C_K \|q\|_\infty \\ &\leq (2 + C_K) \|q\|_\infty, \end{aligned}$$

ce qui prouve que la forme linéaire positive  $L$  sur  $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  se prolonge en une forme linéaire positive et continue sur l'espace des fonctions continues à supports compacts sur  $\mathbb{R}^{2n}$ . Par le théorème de Riesz, il existe alors une mesure de Radon positive  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^{2n}$  telle que pour tout  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  on a

$$L(q) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} q d\mu,$$

ce qui prouve la première partie de la proposition.

**2.** Soient  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  et  $\varepsilon > 0$ . D'après ce qui précède il existe  $T_0 \geq 0$  tel que pour tout  $T \geq T_0$  on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{2n}} q d\mu - \int_{\mathbb{R}^{2n}} q d\mu_T \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'après la proposition 6.35, si  $T$  est choisi assez grand, il existe  $h_T > 0$  tel que

$$\forall h \in ]0, h_T], \quad \left| \langle \text{Op}_h^w(q)u_h, u_h \rangle - \langle \text{Op}_h^w(q)u_h^T, u_h^T \rangle \right| \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

et par le théorème 6.32, quitte à réduire  $h_T$  on a pour tout  $h \in ]0, h_T]$  :

$$\left| \langle \text{Op}_h^w(q)u_h^T, u_h^T \rangle - \int_{\mathbb{R}^{2n}} q d\mu_T \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ainsi on obtient

$$\forall h \in ]0, h_T], \quad \left| \langle \text{Op}_h^w(q)u_h, u_h \rangle - \int_{\mathbb{R}^{2n}} q d\mu \right| \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve la proposition.  $\square$

### 6.4.2 Caractérisation de la mesure semi-classique

On montre maintenant les trois propriétés du point (ii) données dans le théorème 6.1 :

*Démonstration.* **1.** L'assertion (a) est conséquence du corollaire 5.3 tandis que (b) résulte du corollaire 6.7.

**2.** Il reste à montrer (c). On considère  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$  et on note

$$Q = (-H_p + 2 \text{Im } E_1 + 2V_2)q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}).$$

Si le support de  $q$  ne rencontre pas  $p^{-1}(\{E_0\})$ , alors ce n'est pas non plus le cas pour  $Q$ , et donc  $\int Q d\mu = 0$  d'après (a). D'autre part on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2n}} Q d\mu &= \lim_{h \rightarrow 0} \langle \text{Op}_h^w(Q)u_h, u_h \rangle \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{i}{h} \langle ([H_1^h, \text{Op}_h^w(q)] + 2ih \text{Im } E_1 \text{Op}_h^w(q) + 2ihV_2 \text{Op}_h^w(q))u_h, u_h \rangle \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{i}{h} \langle ((H_h - E_h)^* \text{Op}_h^w(q) - \text{Op}_h^w(q)(H_h - E_h))u_h, u_h \rangle \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h} \text{Im} \langle \text{Op}_h^w(q)u_h, (H_h - E_h)u_h \rangle \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h} \text{Im} \langle \text{Op}_h^w(q)u_h, S_h \rangle. \end{aligned}$$

Puisque  $S_h$  est microlocalisé sur  $N\Gamma_0$ , cette limite est nulle si  $q$  est à support hors de  $N\Gamma_0$ . Ainsi le support de la mesure  $(H_p + 2 \text{Im } E_1 + 2V_2)\mu$  est inclus dans  $N_E\Gamma_0$ .

**3.** Soient  $\tau_1 \in ]0, \tau_0[$  tel que  $\chi = 1$  au voisinage de  $] - \infty, \tau_1]$  et  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, [0, 1])$  à support dans  $p^{-1}(J)$ , égale à 1 au voisinage de  $N_E\Gamma_0$  et telle que

$$\Lambda_f := \{ \phi^t(w), t \in [\tau_1, \tau_0], w \in \text{supp } f \}$$

ne rencontre pas  $N_E\Gamma_0$ . Une telle fonction  $f$  existe puisque d'après le corollaire 6.15 il n'y a pas de trajectoire qui revient sur  $N_E\Gamma_0$  en un temps compris entre  $\tau_1$  et  $\tau_0$ . Comme on l'a fait pour  $B_w^T(h)$ , on peut vérifier que la fonction

$$\frac{i}{h} \int_0^\infty \chi'(t) U_h^E(t) \text{Op}_h(f) S_h dt$$

est à  $o(h^{\nu_E-1})$  près un état lagrangien (voir la proposition 6.25), et qu'il existe une constante  $C > 0$  (qui ne dépend pas du choix de  $f$ , voir la remarque 6.33) telle que pour  $h \in ]0, h_0]$  :

$$\left\| \frac{i}{h} \int_0^\infty \chi'(t) U_h^E(t) \text{Op}_h(f) S_h dt \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C + o_{h \rightarrow 0}(h^{\nu_E-1}). \quad (6.58)$$

Soient  $q_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, [0, 1])$  à support dans  $p^{-1}(J)$  et égal à 1 au voisinage de  $N_E\Gamma_0$ , et  $f_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, [0, 1])$  à support dans  $p^{-1}(J)$  et égal à 1 au voisinage de  $\Lambda_f$ . Quitte à prendre la constante  $C$  plus grande, on peut toujours supposer (voir (6.56)) que pour un certain  $T_0 \geq 0$  on a :

$$\forall T \geq T_0, \quad \limsup_{h \rightarrow 0} \left\| \text{Op}_h^w(q_0)u_h^T \right\| \leq C.$$

Soit  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, [0, 1])$  à support hors de  $\Lambda_f$  et tel que  $q_0 = 1$  au voisinage de  $\text{supp } q$ . Comme on sait que la mesure  $(H_p + 2 \text{Im } E_1 + 2V_2)\mu$  est à support sur  $N_E\Gamma_0$ , il est suffisant de la tester contre de tels symboles  $q$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Quitte à prendre  $T_0$  plus grand, on a d'après la proposition 6.36 :

$$\forall T \geq T_0, \quad \limsup_{h \rightarrow 0} \left\| \text{Op}_h^w(q_0)U_h^E(T)\text{Op}_h^w(f_0) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{10C^2}. \quad (6.59)$$

On note  $Q = (-H_p + 2 \text{Im } E_1 + 2V_2)q$  et on considère  $T \geq T_0$  tel que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{2n}} Q d\mu - \int_{\mathbb{R}^{2n}} Q \mu_T \right| \leq \frac{\varepsilon}{5}. \quad (6.60)$$

Soit  $w \in N_E\Gamma_0 \cup \Lambda_\infty$  tel que  $t_{w, \delta_w} \leq \tau_1$  (on rappelle que  $t_{w, \delta_w}$  est le plus petit temps positif –éventuellement nul si  $w \in N_E\Gamma_0^-$  après lequel une trajectoire issue de  $N_E\Gamma_0$  passe par  $w$ ). D'après la proposition 6.28, on sait que quitte à réduire le voisinage  $\mathcal{V}_{w, T}$  donné dans la démonstration du théorème 6.32 et le support de  $f$ , on a pour  $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à support dans  $\mathcal{V}_{w, T}$  :

$$\text{Op}_h^w(a) \int_0^\infty (\chi_T(t) - \chi(t))U_h^E(t)\text{Op}_h(f)S_h dt = \sum_{k=\delta_w+1}^{K_w^T} \text{Op}_h^w(a)B_{w, k}^T(h) + O_{h \rightarrow 0}(h^\infty) \quad (6.61)$$

et

$$\text{Op}_h^w(a) \int_0^\infty \chi(t)U_h^E(t)\text{Op}_h(f)S_h dt = \text{Op}_h^w(a)B_{w, \delta_w}^T(h) + O_{h \rightarrow 0}(h^\infty). \quad (6.62)$$

Cela résulte simplement du fait que  $\chi_T - \chi$  est nulle au voisinage de  $t_{w, \delta_w}$  et vaut  $\chi_T$  au voisinage de  $t_{w, k}$  pour  $k \in \llbracket \delta_w + 1, K_w^T \rrbracket$ , tandis que  $\chi$  est égale à  $\chi_T$  au voisinage de  $t_{w, \delta_w}$  et s'annule au voisinage de  $t_{w, k}$  pour  $k \in \llbracket \delta_w + 1, K_w^T \rrbracket$ . Par compacité, on peut trouver  $w_1, \dots, w_N \in \{\phi^t(w), t \in [0, \tau_1], w \in N_E\Gamma_0\}$  tels que

$$\{\phi^t(w), t \in [0, \tau_1], w \in N_E\Gamma_0\} \subset \bigcup_{i=1}^N \mathcal{V}_{w_i, T}, \quad (6.63)$$

et quitte à réduire le support de  $f$  on peut supposer que (6.61) et (6.62) sont valables pour tout  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ . Soit  $\tilde{q} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, [0, 1])$  dont le support vérifie les mêmes hypothèses que celui de  $q$  et qui vaut 1 au voisinage de  $\text{supp } q$ . Comme précédemment on voit que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2n}} Q d\mu_T &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h} \text{Im} \langle \text{Op}_h^w(q)u_h^T, (H_h - E_h)u_h^T \rangle \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h} \text{Im} \langle \text{Op}_h^w(q)u_h^T, \text{Op}_h^w(\tilde{q})(H_h - E_h)u_h^T \rangle. \end{aligned}$$

Le but est maintenant de montrer qu'on peut remplacer  $u_h^T$  par  $u_h^0$  dans cette expression.

4. On a :

$$\begin{aligned} &\frac{i}{h} \text{Op}_h^w(\tilde{q})(H_h - E_h)(u_h^T - u_h^0) \\ &= \text{Op}_h^w(\tilde{q}) \left( \frac{i}{h} \right)^2 \int_0^\infty (\chi_T(t) - \chi(t))(H_h - E_h)U_h^E(t)S_h dt \\ &= -\text{Op}_h^w(\tilde{q}) \frac{i}{h} \int_0^\infty (\chi_T(t) - \chi(t)) \frac{d}{dt} U_h^E(t)S_h dt \\ &= \text{Op}_h^w(\tilde{q}) \frac{i}{h} \int_0^\infty (\chi'_T(t) - \chi'(t))U_h^E(t)S_h dt \\ &= \text{Op}_h^w(\tilde{q}) \frac{i}{h} \int_0^\infty (\chi'_T(t) - \chi'(t))U_h^E(t)\text{Op}_h(f)S_h dt + O_{h \rightarrow 0}(\sqrt{h}). \end{aligned} \quad (6.64)$$

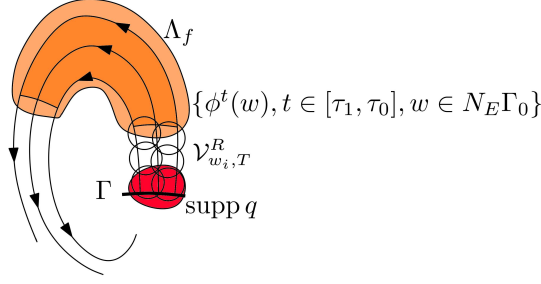


FIGURE 6.10 – Le support de  $q$ , proche de  $N_E \Gamma_0$ , est disjoint de  $\Lambda_f$

La dernière égalité résulte du corollaire 6.6. D'après le théorème d'Egorov, comme  $\text{supp } \chi' \subset [\tau_1, \tau_0]$  et  $\text{supp } \tilde{q}$  est disjoint de  $\Lambda_f$ , le second terme est de taille  $O(h^\infty)$ . Le premier terme peut être écrit :

$$\begin{aligned} & \text{Op}_h^w(\tilde{q}) \frac{i}{h} \int_0^\infty \chi'_T(t) U_h^E(t) \text{Op}_h(f) S_h dt \\ &= \text{Op}_h^w(\tilde{q}) U_h^E(T) \frac{i}{h} \int_0^\infty \chi'(t) U_h^E(t) \text{Op}_h(f) S_h dt \\ &= \text{Op}_h^w(\tilde{q}) \text{Op}_h^w(q_0) U_h^E(T) \text{Op}_h^w(f_0) \frac{i}{h} \int_0^\infty \chi'(t) U_h^E(t) \text{Op}_h(f) S_h dt + O_{h \rightarrow 0}(h^\infty). \end{aligned}$$

D'après (6.58), (6.59) et le fait que  $\|\text{Op}_h^w(\tilde{q})\| \leq 1 + O(\sqrt{h})$  on obtient :

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \left\| \text{Op}_h^w(\tilde{q}) \frac{i}{h} \int_0^\infty \chi'_T(t) U_h^E(t) \text{Op}_h(f) S_h dt \right\| \leq \frac{\varepsilon}{10C}.$$

Cela donne finalement

$$\begin{aligned} & \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h} \left| \langle \text{Op}_h^w(q) u_h^T, (H_h - E_h)(u_h^T - u_h^0) \rangle \right| \\ & \leq 2 \limsup_{h \rightarrow 0} \|\text{Op}_h^w(q)\| \|\text{Op}_h^w(q_0) u_h^T\| \left\| \frac{i}{h} \text{Op}_h^w(\tilde{q})(H_h - E_h)(u_h^T - u_h^0) \right\| \\ & \leq 2C \times \frac{\varepsilon}{10C} \leq \frac{\varepsilon}{5}. \end{aligned}$$

5. On a également :

$$\begin{aligned} & \frac{i}{h} \langle \text{Op}_h^w(q)(u_h^T - u_h^0), (H_h - E_h)u_h^0 \rangle \\ &= \frac{i}{h} \langle (H_h - E_h)^* \text{Op}_h^w(q)(u_h^T - u_h^0), u_h^0 \rangle \\ &= \frac{i}{h} \langle \text{Op}_h^w(q)(H_h - E_h)(u_h^T - u_h^0), u_h^0 \rangle - \langle \text{Op}_h^w(Q)(u_h^T - u_h^0), u_h^0 \rangle. \end{aligned}$$

On applique au premier terme le même argument que précédemment. Pour le deuxième, on décompose  $q = \sum_{i=1}^{N+1} q_i$  avec  $\text{supp } q_i \subset \mathcal{V}_{w_i, T}$  pour  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$  et  $\text{supp } q_{N+1}$  disjoint de  $\Lambda_0 \cup N_E \Gamma_0$ , puis on note  $Q_i = (-H_p + 2 \text{Im } E_1 + 2V_2)q_i$ . C'est possible du fait que le support de  $q$  ne rencontre pas  $\Lambda_f$  et d'après (6.63). Pour  $\tilde{Q}_{N+1}$  égal à 1 au voisinage de  $\text{supp } Q_{N+1}$  et dont le support ne rencontre pas  $\Lambda_0 \cup N_E \Gamma_0$  on a

$$\begin{aligned} & \left| \langle \text{Op}_h^w(Q_{N+1})(u_h^T - u_h^0), u_h^0 \rangle \right| \\ & \leq \|\text{Op}_h^w(Q_{N+1})(u_h^T - u_h^0)\| \left\| \text{Op}_h^w(\tilde{Q}_{N+1})u_h^0 \right\| + O_{h \rightarrow 0}(h^\infty) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

car le premier facteur est borné d'après le corollaire 6.34. Pour  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$  on peut appliquer (6.61) et (6.62) avec  $a = Q_i$ . Comme on l'a fait pour le théorème 6.32 (étape 4), on peut ensuite montrer que pour  $h$  assez petit on a :

$$\left| \left\langle \text{Op}_h^w(Q_i) \sum_{k=\delta_{w_i}+1}^{K_{w_i}^T} B_{w_i,k}^T(h), B_{w_i,\delta_{w_i}}^T(h) \right\rangle \right| \leq \frac{\varepsilon}{10N}.$$

On obtient finalement :

$$\limsup_{h \rightarrow 0} |\langle \text{Op}_h^w(Q)(u_h^T - u_h^0), u_h^0 \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{10}.$$

Avec l'estimation pour le premier terme on obtient alors :

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h} |\langle \text{Op}_h^w(q)(u_h^T - u_h^0), (H_h - E_h)u_h^0 \rangle| \leq \frac{2\varepsilon}{5}.$$

Et puisque

$$\frac{2}{h} \text{Im} \langle \text{Op}_h^w(q)u_h^0, (H_h - E_h)u_h^0 \rangle \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^{2n}} Q d\mu_0,$$

cela donne :

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{2n}} Q d\mu - \int_{\mathbb{R}^{2n}} Q d\mu_0 \right| \leq \frac{4\varepsilon}{5}.$$

**6.** Maintenant que l'on a réduit le problème à l'étude des temps petits, on peut procéder comme dans le cas non captif. Soit  $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  à support dans  $] - \infty, 1[$  et égal à 1 au voisinage de 0. Pour  $(x, \xi) \in \tilde{\Gamma}([0, \tau_0]) \times \mathbb{R}^n$  et  $m \in \mathbb{N}^*$  on note  $\theta_m(x, \xi) = \theta(mt_x)$  (on prolonge continuellement cette définition par 1 pour  $x \in \Gamma$ ). On peut supposer que  $q$  est à support dans  $\tilde{\Gamma}([0, \tau_0]) \times \mathbb{R}^n$ , de sorte que  $q\theta_m$  se prolonge en une fonction de  $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $m \in \mathbb{N}^*$  on a

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} (-H_p + 2V_2 + 2 \text{Im} E_1)((1 - \theta_m)q) d\mu_0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h} \text{Im} \langle \text{Op}_h^w((1 - \theta_m)q)u_h^0, (H_h - E_h)u_h^T \rangle.$$

Par un calcul analogue à (6.64), et sachant que le support de  $(1 - \theta_m)q$  ne rencontre ni  $N_E\Gamma_0$  ni  $\Lambda_f$ , on obtient en fait :

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} (-H_p + 2V_2 + 2 \text{Im} E_1)((1 - \theta_m)q) d\mu_0 = 0.$$

On note  $Q_m = (-H_p + 2V_2 + 2 \text{Im} E_1)(q\theta_m)$ . Puisque  $\theta_m$  est à support dans  $\tilde{\Gamma}([0, \tau_0]) \times \mathbb{R}^n$  on peut effectuer le changement de variables introduit à la proposition 6.13. Cela donne :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2n}} Q d\mu_0 &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} Q_m d\mu_0 \\ &= \int_{\tilde{\Gamma}([0, \tau_0])} Q_m(x, \nabla\psi(x)) |b_0(x)|^2 dx \\ &= \int_0^{\tau_0} \int_{N_E\Gamma} 2^{n-d} t^{n-d-1} |\xi| \left(1 + \frac{Q}{t \rightarrow 0}(t)\right) |b_0(\bar{x}(t, z, \xi))|^2 Q_m(\phi^t(z, \xi)) d\sigma_{N_E\Gamma}(z, \xi) dt. \end{aligned}$$

D'après (6.42) et la proposition 6.21 on a

$$2^{n-d} t^{n-d-1} |\xi| |b_0(\bar{x}(t, z, \xi))|^2 \xrightarrow{t \rightarrow 0} \kappa(z, \xi) = \pi(2\pi)^{d-n} |A(z)|^2 |\xi|^{-1} |\hat{S}(\xi)|^2$$



(comme défini en (6.13)), donc

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^{2n}} Q d\mu_0 \\
&= - \int_0^{\tau_0} \int_{N_{E\Gamma}} (\partial_t - 2 \operatorname{Im} E_1 - 2V_2)(q(\phi^t(z, \xi))\theta(tm))\kappa(z, \xi) \left(1 + \underset{t \rightarrow 0}{O}(t)\right) d\sigma_{N_{E\Gamma}}(z, \xi) dt \\
&= - \int_0^{\tau_0} \int_{N_{E\Gamma}} \theta(tm)(\partial_t - 2 \operatorname{Im} E_1 - 2V_2)(q(\phi^t(z, \xi)))\kappa(z, \xi) \left(1 + \underset{t \rightarrow 0}{O}(t)\right) d\sigma_{N_{E\Gamma}}(z, \xi) dt \\
&\quad - \int_0^{\tau_0} \int_{N_{E\Gamma}} m\theta'(tm)q(\phi^t(z, \xi))\kappa(z, \xi) \left(1 + \underset{t \rightarrow 0}{O}(t)\right) d\sigma_{N_{E\Gamma}}(z, \xi) dt.
\end{aligned}$$

Le premier terme est de taille  $O(\frac{1}{m})$  du fait que  $t \mapsto \theta(mt)$  est à support dans  $[0, \frac{1}{m}]$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbb{R}^{2n}} Q d\mu_0 - \int_{N_{E\Gamma}} q(z, \xi)\kappa(z, \xi) d\sigma_{N_{E\Gamma}}(z, \xi) \right| \\
&\leq \underset{m \rightarrow \infty}{O}\left(\frac{1}{m}\right) + \left| \int_0^{\tau_0} \int_{N_{E\Gamma}} m\theta'(tm)(q(z, \xi) - q(\phi^t(z, \xi)))\kappa(z, \xi) d\sigma_{N_{E\Gamma}}(z, \xi) dt \right| \\
&\leq \underset{m \rightarrow \infty}{O}\left(\frac{1}{m}\right) + \int_0^{\tau_0} \int_{N_{E\Gamma}} m |\theta'(tm)| \sup_{0 \leq t \leq \frac{1}{m}} |q(z, \xi) - q(\phi^t(z, \xi))| \kappa(z, \xi) d\sigma_{N_{E\Gamma}}(z, \xi) dt \\
&= \underset{m \rightarrow \infty}{O}\left(\frac{1}{m}\right).
\end{aligned}$$

Il n'y a donc plus qu'à prendre  $m$  assez grand pour que le reste soit plus petit que  $\frac{\varepsilon}{5}$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

*Remarque 6.41.* Dans le cas non-captif (voir [Bon09]), l'idée pour se ramener à l'étude des temps petits est plus simple. Pour  $w \in \Lambda_\infty$  et  $k \in \llbracket 1, K_w \rrbracket$ , on commence par vérifier que  $(H_h - E_h)B_{w,k}(h)$  (pas besoin de troncature  $\chi_T$  dans le cas non-captif) est microlocalement nulle au voisinage de  $w$  : on a

$$(H_h - E_h) \frac{i}{h} \int_0^\infty \chi_w(t - t_{w,k} + \tau_w) U_h^E(t) \operatorname{Op}_h(f) S_h dt = \int_0^\infty \chi'_w(t - t_w + \tau_w) U_h^E(t) \operatorname{Op}_h(f) S_h dt,$$

et on peut conclure par le théorème d'Egorov sachant que  $t \mapsto \chi'_w(t - t_w + \tau_w)$  s'annule au voisinage des  $t_{w,j}$  pour tout  $j \in \llbracket \delta_w, K_w \rrbracket$ . Tout symbole  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  pouvant être écrit comme somme finie de symboles à supports assez proches d'un certain  $w \in \mathbb{R}^{2n}$ , on peut alors vérifier pour chacun que seuls les temps petits vont intervenir.

Ce raisonnement n'est plus valable dans notre cas puisqu'on a dû ajouter un facteur  $\chi_T$  dans la définition de  $B_{w,k}^T(h)$ , et la fonction  $t \mapsto \frac{d}{dt}(\chi_T(t)\chi_w(t - t_{w,k} + \tau_w))$  peut ne pas être nulle au voisinage de  $t_{w,k}$  (il y a problème si  $T \in [t_{w,k} - \tau_0, t_{w,k}]$ ).

On a tout de même envie de procéder de la même manière, écrire  $q = \sum_{i=1}^N q_i$  avec  $q_i$  à support dans  $\mathcal{V}_{w_i, T}$  pour un certain  $w_i \in \mathbb{R}^{2n}$ . On applique le même raisonnement pour les  $B_{w_i, k}^T(h)$  tels que  $t_{w_i, k}$  est loin de  $T$  et si  $t_{w_i, k} \approx T$  avec  $T$  assez grand, par la proposition 6.36 on sait que  $\operatorname{Op}_h^w(q_i)B_{w_i, k}^T(h)$  est petit. Pour avoir une bonne estimation de chaque terme, il faut donc prendre  $T$  grand. Mais plus  $T$  est grand, plus les voisinages  $\mathcal{V}_{w_i, T}$  sont petits, et plus le découpage  $q = \sum q_i$  contient de termes. Cela pose problème.

Une autre façon de faire, pour ne pas avoir à utiliser la proposition 6.36, aurait pu être de découper  $q$  en somme des  $q_i$  à supports proche d'un certain  $w_i$  et de laisser  $T$  dépendre de  $i$  pour que le problème ne se pose pas, sachant que (6.60) sera encore valable pour  $T$  pris plus grand. Le problème dans ce cas est que plus  $\varepsilon$  est petit, plus les voisinages  $\mathcal{V}_{w_i, T}$  sur lesquels on travaille sont petits, donc les  $q_i$  sont à supports petits. Les  $Q_i = (-H_p + 2 \operatorname{Im} E_1 + 2V_2)q_i$  sont alors grands dans  $L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ , et par conséquent on ne peut pas contrôler la quantité

$$\sum_i \int_{\mathbb{R}^{2n}} Q_i d(\mu - \mu_{T_i}).$$

C'est pourquoi dans la démonstration proposée on évite de faire des découpages du symbole  $q$  et qu'on s'attache à appliquer la proposition 6.36 globalement, même si on doit s'y prendre en deux temps. On partitionne tout de même le symbole  $q$  pour estimer le terme  $\langle \text{Op}_h^w(Q)(u_h^T - u_h^0), u_h^0 \rangle$ , mais le problème ne se pose pas puisqu'on ne l'estime pas en prenant  $T$  grand.

Ce passage appelle d'ailleurs un dernier commentaire. On observe que le problème vient des temps pour lesquels les supports des fonctions  $\chi$  et  $\chi_T - \chi$  se rencontrent. Mais on sait que cette intersection est contenu dans un compact de  $]0, \tau_0]$ , et ce sont justement des temps pour lesquels on n'a pas de risque de retour sur  $N_E \Gamma_0$  (d'après le corollaire 6.15). C'est pourquoi on a pris  $q$  à support disjoint de  $\Lambda_f$  dans la démonstration.

On termine maintenant ce chapitre en vérifiant que, comme annoncé au point (iii) du théorème 6.1,  $\mu$  est en fait complètement caractérisée par les trois propriétés du point (ii) :

**Proposition 6.42.** *Soit  $\nu$  une mesure de Radon sur  $\mathbb{R}^{2n}$  qui vérifie les trois propriétés (a)-(c) du théorème 6.1. Alors pour tout  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  on a*

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} q d\nu = \int_0^{+\infty} \int_{N_E \Gamma} \kappa(z, \xi) q(\phi^t(z, \xi)) e^{-2t \text{Im } E_1 - 2 \int_0^t V_2(\bar{x}(s, z, \xi)) ds} d\sigma_{N_E \Gamma}(z, \xi) dt, \quad (6.65)$$

où la fonction  $\kappa$  est comme définie en (6.13).

*Démonstration.* Soit  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ . D'après la propriété (a), si  $\text{supp } q \cap p^{-1}(\{E_0\}) = \emptyset$  alors  $\int q d\nu = 0$ . C'est cohérent avec (6.65), puisque dans ce cas les deux membres de l'égalité sont nuls. On peut donc maintenant supposer que  $\text{supp } q \subset p^{-1}(I)$ . En utilisant la propriété (c) on voit que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^{2n}} (q \circ \phi^t) e^{-2t \text{Im } E_1 - 2 \int_0^t V_2 \circ \phi^{t-s}} ds d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} (H_p - 2 \text{Im } E_1 - 2V_2) \left( (q \circ \phi^t) e^{-2t \text{Im } E_1 - 2 \int_0^t V_2 \circ \phi^{t-s}} ds \right) d\nu \\ &= - \int_{N_E \Gamma} \kappa (q \circ \phi^t) e^{-2t \text{Im } E_1 - 2 \int_0^t V_2 \circ \phi^{t-s}} ds d\sigma_{N_E \Gamma}, \end{aligned}$$

et donc, pour tout  $\tau \geq 0$  :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2n}} q d\mu &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} (q \circ \phi^\tau) e^{-2\tau \text{Im } E_1 - 2 \int_0^\tau V_2 \circ \phi^{\tau-s}} ds d\nu \\ &+ \int_0^\tau \int_{N_E \Gamma} \kappa (q \circ \phi^t) e^{-2t \text{Im } E_1 - 2 \int_0^t V_2 \circ \phi^{t-s}} ds d\sigma_{N_E \Gamma} dt. \end{aligned}$$

On a donc juste à prouver que

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} (q \circ \phi^\tau) e^{-2\tau \text{Im } E_1 - 2 \int_0^\tau V_2 \circ \phi^{\tau-s}} ds d\nu \xrightarrow{\tau \rightarrow +\infty} 0.$$

Pour  $R \geq 0$  on note  $K_R = p^{-1}(I) \cap B_x(R)$ . D'après la propriété (b) et la remarque 3.35, on peut trouver  $\sigma_0 > 0$  et  $R \geq 0$  tels que  $\nu$  s'annule sur  $\mathcal{Z}_-(R, 0, -\sigma_0)$  et

$$\bigcup_{t \geq 0} \text{supp}(q \circ \phi^t) \subset \mathcal{Z}_-(R, 0, -\sigma_0) \cup K_R.$$

Soit  $q_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à support dans  $p^{-1}(J)$  et égale à 1 sur  $K_R$ . Pour  $\tau \geq 0$ , puisque  $\nu$  est nulle sur  $\mathcal{Z}_-(R, 0, -\sigma_0)$  on a

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} (q \circ \phi^\tau) e^{-2t \text{Im } E_1 - 2 \int_0^\tau V_2 \circ \phi^{\tau-s}} ds d\nu = \int_{\mathbb{R}^{2n}} q_0 (q \circ \phi^\tau) e^{-2t \text{Im } E_1 - 2 \int_0^\tau V_2 \circ \phi^{\tau-s}} ds d\nu.$$

Comme  $\nu$  est une mesure de Radon, il existe une constante  $C \geq 0$  telle que pour tout  $\tilde{q} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  avec  $\text{supp } q \subset \text{supp } q_0$  on a :

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{2n}} \tilde{q} d\nu \right| \leq C \|\tilde{q}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2n})}$$

donc il reste à montrer que

$$\sup_{\mathbb{R}^{2n}} \left| q_0(q \circ \phi^\tau) e^{-2\tau \text{Im } E_1 - 2 \int_0^\tau V_2 \circ \phi^{\tau-s} ds} \right| \xrightarrow{\tau \rightarrow +\infty} 0.$$

C'est clair si  $\text{Im } E_1 > 0$ , et dans tous les cas cela résulte de la proposition 3.42.  $\square$

# Annexe A

## Quelques rappels

### A.1 Divers

**Lemme A.1** (Interpolation complexe). Soient  $x < y \in \mathbb{R}$ . On note :

$$\mathbb{C}_{x,y} = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid x < \operatorname{Re} \zeta < y\}.$$

On suppose que  $\zeta \mapsto A_\zeta$  est une application continue et bornée de  $\overline{\mathbb{C}_{x,y}}$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ , holomorphe sur  $\mathbb{C}_{x,y}$ . Alors pour  $\theta \in [x, y]$  on a :

$$\|A_\theta\| \leq \|A_x\|^{\frac{y-\theta}{y-x}} \|A_y\|^{\frac{\theta-x}{y-x}}.$$

On trouvera une démonstration de ce résultat pour le cas scalaire dans [Rud98] (théorème 12.8). Dans le cas d'une application à valeurs dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ , il suffit d'appliquer pour tous  $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$  le cas scalaire à l'application  $\zeta \mapsto \langle A_\zeta \varphi, \psi \rangle$ .

*Exemple A.2.* Soient  $A$  un opérateur borné et  $B$  un opérateur autoadjoint, positif et borné sur  $\mathcal{H}$ . Alors pour  $x < \theta < y \in \mathbb{R}$  on a :

$$\|AB^\theta\| \leq \|AB^x\|^{\frac{y-\theta}{y-x}} \|AB^y\|^{\frac{\theta-x}{y-x}}.$$

Cela résulte du fait que  $B^{i\mu}$  est un opérateur unitaire pour tout  $\mu \in \mathbb{R}$ .

**Proposition A.3.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application de classe  $C^\infty$ . On suppose que la différentielle  $D_x f$  de  $f$  au point  $x$  est inversible d'inverse borné uniformément en  $x \in \mathbb{R}^n$ . Alors  $f$  est un difféomorphisme de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^n$ .

On renvoie pour ce résultat au théorème 1.22 de [Sch69]. Cela prouve simplement que  $f$  est un homéomorphisme, mais pour  $f$  de classe  $C^\infty$ , on utilise le théorème d'inversion locale usuel pour conclure que  $f$  est bien un difféomorphisme de classe  $C^\infty$ .

**Lemme A.4.** On suppose que  $Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}^n$  est solution de

$$\begin{cases} Y'(t) = M(t) \cdot Y(t) + B(t) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

avec  $Y_0 \in \mathbb{C}^n$  et, pour tout  $t \geq 0$ ,  $M(t) \in M_n(\mathbb{C})$  et  $B(t) \in \mathbb{C}^n$ . Alors pour tout  $t \geq 0$  on a :

$$\|Y(t)\| \leq \|Y_0\| e^{\int_0^t \|M(\tau)\| d\tau} + \int_0^t \|B(s)\| e^{\int_s^t \|M(\tau)\| d\tau} ds.$$

*Démonstration.* Soit  $t > 0$ . Si  $Y(t) = 0$ , alors le résultat est clair. Sinon on note  $t_0 = \max(0, \max\{s \leq t_0, Y(s) = 0\})$  puis, pour  $s \in [t_0, t]$  :  $N(s) = \|Y(s)\|$ .  $N$  ne s'annule pas et est dérivable sur  $]t_0, t[$ . Or pour  $s \in ]t_0, t[$  on a

$$\begin{aligned} N(s)N'(s) &= \frac{1}{2} \frac{d}{ds} N(s)^2 = \langle Y(s), Y'(s) \rangle = \langle Y(s), M(s)Y(s) \rangle + \langle Y(s), B(s) \rangle \\ &\leq \|M(s)\| N(s)^2 + \|B(s)\| N(s), \end{aligned}$$

et donc

$$N'(s) \leq \|M(s)\| N(s) + \|B(s)\|.$$

On a alors

$$\frac{d}{ds} \left( N(s) e^{-\int_0^s \|M(\tau)\| d\tau} \right) = (N'(s) - N(s) \|M(s)\|) e^{-\int_0^s \|M(\tau)\| d\tau} \leq \|B(s)\| e^{-\int_0^s \|M(\tau)\| d\tau},$$

puis en intégrant :

$$N(t) e^{-\int_0^t \|M(\tau)\| d\tau} \leq \|Y(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|B(s)\| e^{-\int_0^s \|M(\tau)\| d\tau} ds.$$

Sachant que  $Y(t_0) = 0$  si  $t_0 \neq 0$ , cela donne bien l'estimation annoncée.  $\square$

**Proposition A.5.** Soient  $\Gamma_1$  et  $\Gamma$  comme au paragraphe 6.2.2. Alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour  $z \in \Gamma$  et  $\xi \in N_z \Gamma$  tel que  $|\xi| \leq \varepsilon$  on a :  $d_{\mathbb{R}^n}(z + \xi, \Gamma_1) = |\xi|$ .

*Démonstration.* Il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $d_{\mathbb{R}^n}(\overline{\Gamma_1} \setminus \Gamma_1, \Gamma) \geq 3\varepsilon$ , et si on note

$$\Gamma_{2\varepsilon} = \{z \in \Gamma_1 \mid d_{\mathbb{R}^n}(z, \Gamma) \leq 2\varepsilon\},$$

alors  $\Gamma_{2\varepsilon}$  est un compact de  $\Gamma_1$ . D'après le théorème du voisinage tubulaire (voir par exemple le théorème 2.7.12 de [BG87] dont l'idée de démonstration est rappelée dans la démonstration de la proposition 6.11), quitte à réduire  $\varepsilon$ , si  $(z_1, \xi_1)$  et  $(z_2, \xi_2)$  sont dans  $N\Gamma_1$  avec  $z_1, z_2 \in \Gamma_{2\varepsilon}$   $|\xi_1|, |\xi_2| \leq \varepsilon$  et  $z_1 + \xi_1 = z_2 + \xi_2$ , alors on a  $(z_1, \xi_1) = (z_2, \xi_2)$ .

Soit alors  $x = z + \xi$  avec  $(z, \xi) \in N\Gamma$  et  $|\xi| \leq \varepsilon$ . Comme  $d(x, \Gamma) \leq \varepsilon$ , il existe  $z_0 \in \Gamma_{2\varepsilon}$  tel que  $d(x, \Gamma_1) = |x - z_0| \leq \varepsilon$ . On note  $\xi_0 = x - z_0$ . Soient  $\zeta \in T_{z_0} \Gamma_1$  et  $\gamma : ]-\tau, \tau[ \rightarrow \Gamma$  telle que  $\gamma(0) = z_0$  et  $\gamma'(0) = \zeta$ . On a

$$0 = \frac{d}{dt} |x - \gamma(t)|^2 \Big|_{t=0} = 2\xi_0 \cdot \zeta,$$

ce qui prouve que  $\xi_0 \in N_{z_0} \Gamma_1$ , donc  $(z_0, \xi_0) = (z, \xi)$  puis  $d(x, \Gamma_1) = |\xi_0| = |\xi|$ .  $\square$

## A.2 Retour sur l'équation de Hamilton-Jacobi

La démonstration de la proposition 3.23 est inspirée de [Rob87] (théorème IV.14) et [DG97] (appendice A.3). On l'écrit pour le cas  $p(x, \xi) = \xi^2 + V_1(x)$ , mais elle est valable pour des hamiltoniens plus généraux (voir [Rob87] et [DG97], une autre démonstration est proposée dans [EZ], voir le lemme 10.10).

*Démonstration de la proposition 3.23. 1.* On suppose dans un premier temps que  $\varphi$  est solution. Soit  $(y, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ . Il existe  $\tau \in ]0, \tau_0]$  tel que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = 2\nabla_x \varphi(t, u(t), \xi) \\ u(0) = y \end{cases}$$

admet une solution sur  $] -\tau, \tau[$ . On note alors

$$v(t) = \nabla_x \varphi(t, u(t), \xi),$$

et on calcule :

$$\begin{aligned} v'(t) &= (\partial_t \nabla_x \varphi)(t, u(t), \xi) + 2 \text{Hess}_x \varphi(t, u(t), \xi) \cdot \nabla_x \varphi(t, u(t), \xi) \\ &= \nabla_x \left( \partial_t \varphi(t, x, \xi) + |\nabla_x \varphi(t, x, \xi)|^2 \right) \Big|_{x=u(t)} \\ &= -\nabla V_1(u(t)). \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{cases} u'(t) = 2v(t) \\ v'(t) = -\nabla V_1(u(t)) \\ u(0) = y, v(0) = \xi, \end{cases}$$

ce qui signifie que  $u(t) = \bar{x}(t, y, \xi)$  et

$$\nabla_x \varphi(t, \bar{x}(t, y, \xi), \xi) = v(t) = \bar{\xi}(t, y, \xi). \quad (\text{A.1})$$

En particulier  $u$  est en fait définie sur  $] -\tau_0, \tau_0[$ . Pour  $s \in ] -\tau_0, \tau_0[$ , on calcule maintenant

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \varphi(s, \bar{x}(s, y, \xi), \xi) &= \partial_t \varphi(s, \bar{x}(s, y, \xi), \xi) + 2\nabla_x \varphi(s, \bar{x}(s, y, \xi), \xi) \cdot \bar{\xi}(s, y, \xi) \\ &= -p(\bar{x}(t, y, \xi), \nabla_x \varphi(t, \bar{x}(t, y, \xi), \xi)) + 2\nabla_x \varphi(s, \bar{x}(s, y, \xi), \xi) \cdot \bar{\xi}(s, y, \xi) \\ &= -p(\bar{x}(s, y, \xi), \bar{\xi}(s, y, \xi)) + 2|\bar{\xi}(s, y, \xi)|^2, \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\varphi(t, \bar{x}(t, y, \xi), \xi) = \langle y, \xi \rangle - tp(y, \xi) + 2 \int_0^t |\bar{\xi}(s, y, \xi)|^2 ds.$$

Soient  $t \in ] -\tau_0, \tau_0[$  et  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ . En appliquant ce résultat avec  $(\bar{y}(t, x, \xi), \xi)$  on obtient que  $\varphi$  est bien donnée par (3.14).

**2.** Comme on a déjà (A.1), il ne reste plus qu'à montrer que

$$y = \nabla_\xi \varphi(t, \bar{x}(t, x, \xi), \xi)$$

pour  $t \in ] -\tau_0, \tau_0[$  et  $(y, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$  afin de vérifier que l'éventuelle solution de (3.13) vérifie (3.16). C'est déjà vrai si  $t = 0$ , donc il suffit de vérifier que la dérivée par rapport à  $t$  du membre de droite est nulle. Mais en dérivant la première équation de (3.13) par rapport à  $\xi$  on obtient l'égalité

$$\partial_t \nabla_\xi \varphi(t, x, \xi) + 2\nabla_{\xi, x}^2 \varphi(t, x, \xi) \cdot \nabla_x \varphi(t, x, \xi) = 0.$$

Appliquée en  $x = \bar{x}(t, y, \xi)$ , cette égalité permet de calculer :

$$\begin{aligned} \partial_t (\nabla_\xi \varphi(t, \bar{x}(t, y, \xi), \xi)) &= \partial_t \nabla_\xi \varphi(t, \bar{x}(t, y, \xi), \xi) + 2\nabla_{\xi, x}^2 \varphi(t, \bar{x}(t, y, \xi), \xi) \cdot \bar{\xi}(t, y, \xi) \\ &= \partial_t \nabla_\xi \varphi(t, \bar{x}(t, y, \xi), \xi) + 2\nabla_{\xi, x}^2 \varphi(t, \bar{x}(t, y, \xi), \xi) \cdot \nabla_x \varphi(t, \bar{x}(t, y, \xi), \xi) \\ &= 0. \end{aligned}$$

**3.** Montrons maintenant que  $\varphi$  définie par (3.14) est bien solution de (3.13). On réécrit  $Q$  (donné par (3.15)) de la façon suivante :

$$Q(t, y, \xi) = \langle y, \xi \rangle - \int_0^t V_1(\bar{x}(s, y, \xi)) ds + \int_0^t |\bar{\xi}(s, y, \xi)|^2 ds.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \partial_t \nabla_y Q(t, y, \xi) &= -{}^t J_y \bar{x}(t, y, \xi) \cdot \nabla V_1(\bar{x}(t, y, \xi)) + 2{}^t J_y \xi(t, y, \xi) \cdot \bar{\xi}(t, y, \xi) \\ &= \partial_t ({}^t J_y \bar{x}(t, y, \xi) \cdot \bar{\xi}(t, y, \xi)). \end{aligned}$$

Comme  $\nabla_y Q(0, y, \xi) = \xi$  on en déduit que pour tout  $t \in ] -\tau_0, \tau_0[$  on a :

$$\nabla_y Q(t, y, \xi) = {}^t J_y \bar{x}(t, y, \xi) \cdot \bar{\xi}(t, y, \xi).$$

Et comme

$$\varphi(t, x, \xi) = Q(t, \bar{y}(t, x, \xi), \xi),$$

on a aussi :

$$\nabla_x \varphi(t, x, \xi) = {}^t J_x \bar{y}(t, x, \xi) \cdot \nabla_y Q(t, \bar{y}(t, x, \xi), \xi) = \bar{\xi}(t, \bar{y}(t, x, \xi), \xi). \quad (\text{A.2})$$

On en déduit que

$$\partial_t Q(t, y, \xi) = -V_1(\bar{x}(t, y, \xi) + |\bar{\xi}(t, y, \xi)|^2) = -V_1(\bar{x}(t, y, \xi)) + |\nabla_x \varphi(t, \bar{x}(t, y, \xi), \xi)|^2.$$

On peut également écrire :

$$\begin{aligned} \partial_t Q(t, y, \xi) &= \partial_t (\varphi(t, \bar{x}(t, y, \xi), \xi)) \\ &= \partial_t \varphi(t, \bar{x}(t, y, \xi), \xi) + 2 \nabla_x \varphi(t, \bar{x}(t, y, \xi), \xi) \cdot \bar{\xi}(t, x, \xi) \\ &= \partial_t \varphi(t, \bar{x}(t, y, \xi), \xi) + 2 |\nabla_x \varphi(t, \bar{x}(t, y, \xi), \xi)|^2 \end{aligned}$$

Pour  $t \in \mathbb{R}$  et  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ , ces deux égalités appliquées avec  $y = \bar{y}(t, x, \xi)$  montrent que  $\varphi$  est bien solution de (3.13).  $\square$

### A.3 Retour sur les états lagrangiens et les opérateurs intégraux de Fourier

On revient dans ce paragraphe sur les résultats énoncés au paragraphe 3.3.2 et utilisés au chapitre 6. Les références sont nombreuses à ce sujet. Dans un contexte microlocal, on pourra voir par exemple [Hör84, GS94, Sog02]). On pourra également consulter [Ale08] pour une approche semi-classique (plus générale que ce dont on a besoin ici) et [Ivr98] pour des énoncés très généraux. On redonne ici des démonstrations plus ou moins complètes des quelques résultats que l'on a utilisés dans ce travail. On s'est en particulier placé dans un cadre assez simple.

En effet, on a caractérisé un état lagrangien par une phase et un symbole sur l'ensemble critique de la phase. Une telle définition n'est en général utilisée que pour une description locale. Pour une étude globale, on voit plutôt un état lagrangien comme une sous-variété lagrangienne  $\Lambda$  et un symbole principal, ce symbole principal étant une section du fibré  $\Omega_{\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{L}$  au-dessus de  $\Lambda$ , où  $\Omega_{\frac{1}{2}}$  est le fibré des demi-densités sur  $\Lambda$  et  $\mathcal{L}$  est le fibré de Maslov (voir [GS94]).

On considère sur  $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n$  la forme

$$\sigma = \sum_{j=1}^n d\xi_j \wedge dx_j : ((X_1, \Xi_1), (X_2, \Xi_2)) \mapsto \langle X_2, \Xi_1 \rangle - \langle X_1, \Xi_2 \rangle = (X_1 \quad \Xi_1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_2 \\ \Xi_2 \end{pmatrix}$$

On note  $E^{\perp\sigma}$  l'orthogonal du sous-espace  $E$  de  $\mathbb{R}^{2n}$  pour la forme  $\sigma$ .

**Définition A.6.** On dit d'un sous-espace de  $\mathbb{R}^{2n}$  qu'il est lagrangien s'il est son propre orthogonal pour la forme  $\sigma$ . Un tel sous-espace est nécessairement de dimension  $n$ . On dit d'une sous-variété de  $\mathbb{R}^{2n}$  qu'elle est lagrangienne si tous ses plans tangents sont des sous-espaces lagrangiens de  $\mathbb{R}^{2n}$ .

On commence par vérifier qu'un état lagrangien est micro-localisé sur sa sous-variété lagrangienne :

*Démonstration de la proposition 3.48.* Pour  $x \in \mathbb{R}^n$  on a

$$\text{Op}_h^w(q)u_h(x) = \frac{1}{(2\pi h)^{n+\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\frac{1}{h}\langle x-y, \xi \rangle} q\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) e^{i\frac{1}{h}\psi(y, \theta)} b(y, \theta) d\theta dy d\xi.$$

Les points critiques  $(y, \theta, \xi)$  pour la phase sont tels que  $y = x$ ,  $(y, \theta) \in \Sigma_\psi$  et  $(y, \xi) = j_\psi(y, \theta)$ . Par hypothèse un tel point critique ne peut pas être sur le support de  $(y, \theta, \xi) \mapsto$

$q\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) e^{\frac{i}{h}\psi(y,\theta)} b(y, \theta)$ . On peut donc appliquer le théorème de la phase non-stationnaire. En outre  $\text{Op}_h^w(q)u_h$  est à support compact et on peut appliquer la proposition 3.1 uniformément en  $x$ , donc on obtient bien que  $\text{Op}_h^w(q)u_h = O(h^\infty)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .  $\square$

On donne maintenant une démonstration de la proposition 3.49 qui est la brique élémentaire pour la construction de la mesure semi-classique de  $u_h^T$  au paragraphe 6.3.2. Pour cela on utilisera le lemme de géométrie lagrangienne suivant :

**Lemme A.7.** *Soient  $\Lambda$  une sous-variété lagrangienne de  $\mathbb{R}^{2n}$  et  $w \in \Lambda$ . Alors il existe deux sous-espaces  $E$  et  $F$  de  $\mathbb{R}^n$  en somme directe orthogonale tels que si on décompose*

$$\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n = (E_x \oplus F_x) \times (E_\xi \oplus F_\xi)$$

alors la restriction  $\Pi$  à  $\Lambda$  de la projection orthogonale sur

$$(E_x \times \{0_F\}) \times (\{0_E\} \times F_\xi) \simeq E_x \oplus F_\xi$$

réalise un difféomorphisme d'un voisinage de  $w$  dans  $\Lambda$  sur son image.

*Démonstration.* On note  $P$  la projection orthogonale de  $\mathbb{R}^{2n}$  sur  $(T_w\Lambda)^\perp$ , ainsi que  $P_x$  et  $P_\xi$  les restrictions de  $P$  à  $\mathbb{R}_x^n$  et  $\mathbb{R}_\xi^n$ . Comme  $T_w\Lambda$  est un sous-espace lagrangien de  $\mathbb{R}^{2n}$  on a

$$\ker(P_x \times P_\xi) = T_w\Lambda = (\ker(P_x \times P_\xi))^{\perp\sigma} = \text{Im}((-P_\xi \times P_x)^*),$$

ce qui implique que

$$P_x P_\xi^* = P_\xi P_x^*. \quad (\text{A.3})$$

On note maintenant  $F = \ker P_\xi \subset \mathbb{R}^n$  et  $E = F^\perp$ , ainsi que  $\tilde{F} = \ker P_\xi^* \subset (T_w\Lambda)^\perp$  et  $\tilde{E} = \text{Im} P_\xi$  l'orthogonal (pour le produit scalaire usuel) de  $\tilde{F}$  dans  $(T_w\Lambda)^\perp$ . Les sous-espaces  $E$  et  $\tilde{E}$  ont même dimension  $d_E$ , tandis que  $F$  et  $\tilde{F}$  ont même dimension  $d_F = n - d_E$ . On décompose alors les endomorphismes  $P_x, P_\xi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, (T_w\Lambda)^\perp)$  en écrivant  $\mathbb{R}^n = E \oplus F$  et  $(T_w\Lambda)^\perp = \tilde{E} \oplus \tilde{F}$ . Matriciellement cela s'écrit :

$$(P_x \quad P_\xi) = \begin{pmatrix} \Pi_{\tilde{E}} P_x|_E & \Pi_{\tilde{E}} P_x|_F & \Pi_{\tilde{E}} P_\xi|_E & \Pi_{\tilde{E}} P_\xi|_F \\ \Pi_{\tilde{F}} P_x|_E & \Pi_{\tilde{F}} P_x|_F & \Pi_{\tilde{F}} P_\xi|_E & \Pi_{\tilde{F}} P_\xi|_F \end{pmatrix}.$$

Par définition on a  $P_\xi|_F = 0$ , donc la dernière colonne est nulle, et puisque  $\text{Im} P_\xi = \tilde{E}$  on a  $\Pi_{\tilde{F}} P_\xi|_E = 0$ . D'autre part, d'après (A.3),  $P_x$  envoie  $\text{Im} P_\xi^* = (\ker P_\xi)^\perp = E$  dans  $\text{Im} P_\xi = (\ker P_\xi^*)^\perp = \tilde{E}$ , donc  $\Pi_{\tilde{F}} P_x|_E = 0$ . Cela donne finalement :

$$(P_x \quad P_\xi) = \begin{pmatrix} \Pi_{\tilde{E}} P_x|_E & \Pi_{\tilde{E}} P_x|_F & \Pi_{\tilde{E}} P_\xi|_E & 0 \\ 0 & \Pi_{\tilde{F}} P_x|_F & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme  $P$  est surjective, l'opérateur  $\Pi_{\tilde{F}} P_x|_F$  doit être surjectif, et donc inversible. Enfin l'opérateur  $\Pi_{\tilde{E}} P_\xi|_E$  est injectif, et par suite bijectif, par définition de  $E$  et  $\tilde{E}$ . On obtient finalement que la matrice

$$\begin{pmatrix} \Pi_{\tilde{E}} P_x|_F & \Pi_{\tilde{E}} P_\xi|_E \\ \Pi_{\tilde{F}} P_x|_F & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_{\tilde{E}} P_x|_F & \Pi_{\tilde{E}} P_\xi|_E \\ \Pi_{\tilde{F}} P_x|_F & \Pi_{\tilde{F}} P_\xi|_E \end{pmatrix}$$

est inversible. Cela signifie que la projection de  $F_x \oplus E_\xi$  sur  $(T_w\Lambda)^\perp$  est bijective, ce qui implique que la projection de  $T_w\Lambda$  sur  $(E_x \oplus F_\xi)$  est bijective. Cette dernière étant la différentielle en  $w$  de la restriction à  $\Lambda$  de la projection orthogonale sur  $E_x \oplus F_x$ , on en déduit qu'au voisinage de  $w$ , la sous-variété  $\Lambda$  se projette bien sur  $E_x \oplus F_\xi$ .  $\square$



*Démonstration de la proposition 3.49. 1.* On note  $b$  et  $\psi$  (sur  $\mathbb{R}^{n+N}$ ) le symbole et la phase de l'état lagrangien  $u_h$ . Il suffit de montrer que pour tout  $w \in \mathbb{R}^{2n}$  il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{W}_w$  de  $w$  tel que le résultat est vrai si  $q$  est à support dans  $\mathcal{W}_w$ . En effet, le résultat est linéaire par rapport à  $q$ , donc en utilisant une partition de l'unité on peut toujours se ramener au cas où  $q$  est à support dans  $\mathcal{W}_w$  pour un certain  $w \in \mathbb{R}^{2n}$ . En outre si  $\mathcal{W}_{w_1} \cap \mathcal{W}_{w_2} \neq \emptyset$ , on vérifie que les densités  $\nu_{w_1}$  et  $\nu_{w_2}$  obtenues coïncident sur  $\mathcal{W}_{w_1} \cap \mathcal{W}_{w_2}$  en appliquant le résultat pour  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à support dans  $\mathcal{W}_{w_1} \cap \mathcal{W}_{w_2}$ . Le résultat étant conséquence de la proposition 3.48 pour  $q$  à support hors de  $\Lambda$ , il suffit de considérer  $w \in \Lambda$ . On considère alors les sous-espaces  $E$  et  $F$  de  $\mathbb{R}^n$  donnés par le lemme A.7 et on se donne un voisinage  $\mathcal{W}$  de  $w$  dans  $\Lambda$  tel que la restriction  $\Pi$  à  $\mathcal{W}$  de la projection orthogonale sur  $E_x \oplus F_\xi$  soit un difféomorphisme, puis un voisinage  $\tilde{\mathcal{W}}$  de  $w$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$  tel que  $\tilde{\mathcal{W}} \cap \Lambda = \mathcal{W}$ . Comme  $\Sigma_\psi \cap \text{supp } b$  est compact et  $j_\psi$  est localement injective, le point  $w \in \Lambda_\psi$  admet un nombre fini d'antécédents dans  $\Sigma_\psi \cap \text{supp } b$ . Quitte à réduire  $\mathcal{W}$ , on peut supposer que  $j_\psi$  réalise un difféomorphisme de chaque composante connexe de  $\mathcal{V} = j_\psi^{-1}(\mathcal{W})$  sur  $\mathcal{W}$ . On note alors  $\mathcal{V}_k$  pour  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$  les composantes connexes de  $\mathcal{V}$ . Pour  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$  on note  $j_\psi^k : \mathcal{V}_k \rightarrow \mathcal{W}$  le difféomorphisme obtenu par restriction de  $j_\psi$  à  $\mathcal{V}_k$ . Pour  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$  on considère également un ouvert  $\tilde{\mathcal{V}}_k$  de  $\mathbb{R}^{n+N}$  tel que  $\tilde{\mathcal{V}}_k \cap \Sigma_\psi = \mathcal{V}_k$ , puis  $\tilde{\mathcal{V}} = \bigcup_{k=1}^p \tilde{\mathcal{V}}_k$ .

**2.** Soit  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à support dans  $\tilde{\mathcal{W}}$ . On considère  $\tilde{q} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à support dans  $\tilde{\mathcal{W}}$  et égal à 1 sur un voisinage de  $\text{supp } q$ . Comme

$$\langle \text{Op}_h^w(q)u_h, u_h \rangle = \langle \text{Op}_h^w(q)u_h, \text{Op}_h^w(\tilde{q})u_h \rangle + O(h^\infty),$$

on ne fait d'après la proposition 3.48 qu'une erreur de taille  $O(h^\infty)$  si on suppose que  $\text{supp } b \subset \tilde{\mathcal{V}}$ . Pour  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$  on note  $b_k = b\mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{V}}_k}$  et  $u_h^k$  l'état lagrangien de symbole  $b_k$  et de phase  $\psi$ , de sorte que  $u_h = \sum_{k=1}^p u_h^k$ . On a alors :

$$\langle \text{Op}_h^w(q)u_h, u_h \rangle = \sum_{1 \leq j, k \leq p} \langle \text{Op}_h^w(q)u_h^j, u_h^k \rangle.$$

Soient  $x_E \in E$  et  $\xi_F \in F$ . On note  $w(x_E, \xi_F) = \Pi^{-1}(x_E, \xi_F) \in \mathcal{W}$  puis, pour  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $v_k(x_E, \xi_F) = (j_\psi^k)^{-1}(w(x_E, \xi_F)) \in \mathcal{V}_k$ .

**3.** Soient  $j, k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . On écrit :

$$\begin{aligned} & \langle \text{Op}_h^w(q)u_h^j, u_h^k \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi h)^{n+N}} \int_{\mathbb{R}^{3n+2N}} e^{\frac{i}{h}(\langle x-y, \xi \rangle + \psi(y, \theta) - \psi(x, \tau))} q\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) b_j(y, \theta) \overline{b_k(x, \tau)} d\theta d\tau dy d\xi dx. \end{aligned}$$

On fixe  $x_E \in E$  et  $\xi_F \in F$ , et on cherche à appliquer la méthode de la phase stationnaire par rapport à  $x_F \in F$ ,  $\xi_E \in E$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$  et  $\theta, \tau \in \mathbb{R}^N$ . On commence par chercher les points critiques pour la phase

$$\Phi_{x_E, \xi_F} : (x_F, \tau, \xi_E, y, \theta) \mapsto \langle x_E - y_E, \xi_E \rangle + \langle x_F - y_F, \xi_F \rangle + \psi(y_E, y_F, \theta) - \psi(x_E, x_F, \tau),$$

où pour  $y \in \mathbb{R}^n$  on a noté  $y = y_E + y_F$  avec  $y_E \in E$  et  $y_F \in F$ . Un point critique pour  $\Phi_{x_E, \xi_F}$  avec  $(x, \tau) \in \text{supp}(b_k)$ ,  $(y, \theta) \in \text{supp } b_j$  et  $(\frac{x+y}{2}, \xi) \in \text{supp } q$  est tel que :

$$\begin{cases} \xi_F - \nabla_{x_F} \psi(x, \tau) = 0 \\ \nabla_\tau \psi(x, \tau) = 0 \\ x_E - y_E = 0 \\ -\xi + \nabla_y \psi(y, \theta) = 0 \\ \nabla_\theta \psi(y, \theta) = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} (x, \tau) \in \mathcal{V}_k \\ (y, \theta) \in \mathcal{V}_j \\ (y, \xi) \in \Lambda \\ x_E = y_E \\ \nabla_{x_F} \psi(x, \tau) = \xi_F = \nabla_{y_F} \psi(y, \theta). \end{cases}$$

Les deux points  $j_\psi(x, \tau)$  et  $j_\psi(y, \theta)$  sont sur  $\mathcal{W}$  et ont la même projection  $(x_E, \xi_F)$  sur  $E_x \oplus F_\xi$ . Ils sont donc égaux. On a en outre  $(x, \tau) = v_k(x_E, \xi_F)$  et  $(y, \theta) = v_j(x_E, \xi_F)$ , ce qui implique que  $x = y$ . On a par ailleurs  $j_\psi(x, \tau) = j_\psi(y, \theta) = (x, \xi)$ . Tout ceci prouve en particulier qu'il n'y a qu'un seul point critique possible. On vérifie maintenant qu'il est non dégénéré. Pour cela on calcule :

$$M_{j,k}(x_E, \xi_F) := \text{Hess}_{x_F, \tau, \xi_E, y_E, y_F, \theta} \Phi_{x_E, \xi_F}(x_F, \tau, \xi_E, x_E, y_F, \theta) \quad (\text{A.4})$$

$$= \begin{pmatrix} -\nabla_{x_F, x_F}^2 \psi(v_k) & -\nabla_{x_F, \tau}^2 \psi(v_k) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\nabla_{\tau, x_F}^2 \psi(v_k) & -\nabla_{\tau, \tau}^2 \psi(v_k) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{I}_{d_E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{I}_{d_E} & \nabla_{x_E, x_E}^2 \psi(v_j) & \nabla_{x_E, x_F}^2 \psi(v_j) & \nabla_{x_E, \tau}^2 \psi(v_j) \\ 0 & 0 & 0 & \nabla_{x_F, x_E}^2 \psi(v_j) & \nabla_{x_F, x_F}^2 \psi(v_j) & \nabla_{x_F, \tau}^2 \psi(v_j) \\ 0 & 0 & 0 & \nabla_{\tau, x_E}^2 \psi(v_j) & \nabla_{\tau, x_F}^2 \psi(v_j) & \nabla_{\tau, \tau}^2 \psi(v_j) \end{pmatrix},$$

où on a omis l'argument  $(x_E, \xi_F)$  pour les fonctions  $v_j$  et  $v_k$ . On a alors :

$$|\det M_{j,k}(x_E, \xi_F)| = |\det M_j(x_E, \xi_F)| |\det M_k(x_E, \xi_F)|$$

où pour  $l \in \llbracket 1, p \rrbracket$  on a noté

$$M_l(x_E, \xi_F) = \begin{pmatrix} \nabla_{x_F, x_F}^2 \psi(v_l(x_E, \xi_F)) & \nabla_{x_F, \tau}^2 \psi(v_l(x_E, \xi_F)) \\ \nabla_{\tau, x_F}^2 \psi(v_l(x_E, \xi_F)) & \nabla_{\tau, \tau}^2 \psi(v_l(x_E, \xi_F)) \end{pmatrix} = \text{Hess}_{x_F, \tau} \psi(v_l(x_E, \xi_F)).$$

Or cette matrice est la matrice jacobienne de l'application

$$\begin{cases} \mathbb{R}^{d_F+N} & \rightarrow & \mathbb{R}^{d_F+N} \\ (z_F, \zeta) & \mapsto & (\nabla_{x_F} \psi(x_E, z_F, \zeta), \nabla_\zeta \psi(x_E, z_F, \zeta)) \end{cases}$$

au point  $(x_F, \tau)$ . On sait que  $j_\psi^l$  réalise un difféomorphisme de  $\mathcal{V} \subset \Sigma_\psi$  dans  $\mathcal{W} \subset \Lambda$ . Comme  $j_\psi^l$  est l'application identité pour la première variable, c'est par restriction un difféomorphisme de  $\mathcal{V}_l^F = \{(z_E, z_F, \zeta) \in \mathcal{V}_l \mid z_E = x_E\}$  dans  $\mathcal{W}_F = \{(z_E, z_F, \eta) \in \mathcal{W} \mid z_E = x_E\}$ . Étant donné le bon comportement de la projection par rapport à  $x_E$ , ces deux ensembles sont des variétés de dimension  $d_F$ . Comme  $\mathcal{W}_F$  se projette bien selon la variable  $\xi_F$ , l'application  $(z_F, \zeta) \mapsto \nabla_{x_F} \psi(z_F, \zeta)$  est un difféomorphisme de  $\mathcal{V}_F$  dans  $\mathcal{W}_F$ . Soit maintenant  $S$  un supplémentaire de  $T_{(x_F, \tau)} \mathcal{V}_F$  dans  $\mathbb{R}^{d_F+N}$ . Alors la différentielle de l'application  $(z_F, \zeta) \in S \mapsto \nabla_\zeta \psi(z_F, \zeta) \in \mathbb{R}^N$  est inversible au point  $(x_F, \tau)$ . On obtient finalement que  $M_l(x_E, \xi_F)$  est inversible, et c'est donc également le cas de la hessienne  $M_{j,k}(x_E, \xi_F)$ . On peut alors appliquer le théorème de la phase stationnaire (uniformément en  $x_E$  et  $\xi_F$ ), ce qui prouve que

$$\langle \text{Op}_h^w(q) u_h^j, u_h^k \rangle = \int_{E_x} \int_{F_\xi} q(\Pi^{-1}(x_E, \xi_F)) \nu_{j,k}(x_E, \xi_F) d\xi_F dx_E + O(h),$$

avec

$$\nu_{j,k} = \frac{e^{\frac{i\pi}{4} \text{sgn } M_{j,k}}}{|\det M_j|^{\frac{1}{2}} |\det M_k|^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{i}{h}(\psi(v_j) - \psi(v_k))} b_j(v_j) \overline{b_k(v_k)}.$$

On s'intéresse maintenant à la signature de  $M_{j,k}(x_E, \xi_F)$ . On considère l'application

$$t \mapsto \begin{pmatrix} -\nabla_{x_F, x_F}^2 \psi(v_k) & -\nabla_{x_F, \tau}^2 \psi(v_k) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\nabla_{\tau, x_F}^2 \psi(v_k) & -\nabla_{\tau, \tau}^2 \psi(v_k) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{I}_{d_E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{I}_{d_E} & t \nabla_{x_E, x_E}^2 \psi(v_j) & t \nabla_{x_E, x_F}^2 \psi(v_j) & t \nabla_{x_E, \tau}^2 \psi(v_j) \\ 0 & 0 & 0 & t \nabla_{x_F, x_E}^2 \psi(v_j) & \nabla_{x_F, x_F}^2 \psi(v_j) & \nabla_{x_F, \tau}^2 \psi(v_j) \\ 0 & 0 & 0 & t \nabla_{\tau, x_E}^2 \psi(v_j) & \nabla_{\tau, x_F}^2 \psi(v_j) & \nabla_{\tau, \tau}^2 \psi(v_j) \end{pmatrix}$$

Cette matrice est toujours de déterminant non nul, sa signature est donc une fonction continue de  $t$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ , donc ne dépend pas de  $t$ . En regardant la valeur en  $t = 0$  on obtient que

$$\operatorname{sgn} M_{j,k}(x_E, \xi_F) = \operatorname{sgn} M_j(x_E, \xi_F) - \operatorname{sgn} M_k(x_E, \xi_F).$$

Pour  $l \in \llbracket 1, p \rrbracket$  on note

$$d_l(x_E, \xi_F) = \frac{e^{\frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} M_l(x_E, \xi_F)}}{|\det M_l(x_E, \xi_F)|^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{i}{h} \psi(v_l(x_E, \xi_F))} b_j(v_l(x_E, \xi_F))$$

de sorte que  $\nu_{j,k} = d_j \bar{d}_k$  et donc

$$\langle \operatorname{Op}_h^w(q) u_h, u_h \rangle = \int_{E_x} \int_{F_\xi} q(\Pi^{-1}(x_E, \xi_F)) \nu(x_E, \xi_F) d\xi_F dx_E + O(h)$$

avec

$$\nu = \sum_{1 \leq j, k \leq p} \nu_{j,k} = \left| \sum_{l=1}^p d_l \right|^2 \geq 0.$$

Il ne reste plus qu'à faire un changement de variable avec le difféomorphisme  $\Pi$  pour voir cette intégrale comme une intégrale sur  $\mathcal{W}$ .  $\square$

*Exemple A.8.* On suppose que la sous-variété  $\Lambda$  se projette bien sur  $E_x \oplus F_\xi$  et on suppose que la phase  $\psi$  est de la forme  $\psi(x, \xi_F) = \langle x_F, \xi_F \rangle - \phi(x_E, \xi_F)$ , où  $\phi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$  (en fait, on peut toujours se ramener localement à cette situation). Dans ce cas  $\xi_F$  joue le rôle du paramètre  $\theta$ , et  $N = d_F$ . On a alors

$$\Sigma_\psi = \{(x_E, x_F, \xi_F) \in \mathbb{R}^{n+d_F} \mid \nabla_{\xi_F} \phi(x_E, \xi_F) = x_F\}.$$

et

$$\Lambda_\psi = \{(x_E, \nabla_{\xi_F} \phi(x_E, \xi_F), -\nabla_{x_E} \phi(x_E, \xi_F), \xi_F), x_E \in E, \xi_F \in F\}.$$

L'application  $j_\psi$  est alors un difféomorphisme global de  $\Sigma_\psi$  dans  $\Lambda_\psi$ , et pour  $x_E \in E, \xi_F \in F$  on a

$$M(x_E, \xi_F) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_{d_F} \\ \mathbf{I}_{d_F} & -\operatorname{Hess}_{\xi_F} \phi(x_E, \xi_F) \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de déterminant  $(-1)^{d_F}$  et de signature nulle, donc on obtient :

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \langle \operatorname{Op}_h^w(q) u_h, u_h \rangle \\ &= \int_{E_x} \int_{F_\xi} q(x_E, \nabla_{\xi_F} \phi(x_E, \xi_F), -\nabla_{x_E} \phi(x_E, \xi_F), \xi_F) |b(x_E, \nabla_{\xi_F} \phi(x_E, \xi_F), \xi_F)|^2 d\xi_F dx_E. \end{aligned}$$

On s'intéresse finalement aux propositions 3.54 et 3.55 concernant les opérateurs de Fourier intégraux.

**Lemme A.9.** *On suppose que la relation canonique  $\mathcal{C}_A$  de  $A$  est le graphe d'un difféomorphisme. Alors on a :*

$$\forall (x, y, \tau) \in \Sigma_A, \quad \det \begin{pmatrix} \nabla_{x,y}^2 \phi(x, y, \tau) & \nabla_{x,\tau}^2 \phi(x, y, \tau) \\ \nabla_{\tau,y}^2 \phi(x, y, \tau) & \nabla_{\tau,\tau}^2 \phi(x, y, \tau) \end{pmatrix} \neq 0. \quad (\text{A.5})$$

Ce lemme se démontre de façon analogue à ce qu'on a fait pour la matrice  $M_j(x_E, \xi_F)$  dans la démonstration de la proposition 3.49, sachant que la matrice considérée ici est la matrice jacobienne pour l'application  $(x, \tau) \mapsto (\nabla_x \phi(x, y, \tau), \nabla_\tau \phi(x, y, \tau))$  (voir le paragraphe 6.2 de [Sog02])

*Démonstration de la proposition 3.54.* On note  $\phi : \mathbb{R}^{2n+m} \rightarrow \mathbb{R}$  la phase de l'opérateur  $A$  et  $\psi : \mathbb{R}^{n+N} \rightarrow \mathbb{R}$  la phase de l'état lagrangien  $u_h$  sur  $\mathbb{R}^{n+m}$ .  $Au_h$  est alors un état lagrangien de phase

$$\Phi : (x, \tau, y, \theta) \mapsto \phi(x, y, \tau) + \psi(y, \theta).$$

Les points critiques pour cette phase (à  $x$  fixé) sont tels que :

$$\nabla_{\tau} \phi(x, y, \tau) = 0, \quad \nabla_y \phi(x, y, \tau) + \nabla_y \psi(y, \theta) = 0, \quad \nabla_{\theta} \psi(y, \theta) = 0.$$

En particulier on a  $(x, y, \tau) \in \Sigma_A$  et  $(y, \theta) \in \Sigma_{\psi}$ . Soit  $(\tau, y, \theta)$  un tel point critique. Il faut vérifier que la matrice

$$\begin{pmatrix} \nabla_{x,\tau}^2 \phi(x, y, \tau) & \nabla_{x,y}^2 \phi(x, y, \tau) & 0 \\ \nabla_{\tau,\tau}^2 \phi(x, y, \tau) & \nabla_{\tau,y}^2 \phi(x, y, \tau) & 0 \\ \nabla_{y,\tau}^2 \phi(x, y, \tau) & \nabla_{y,y}^2 \phi(x, y, \tau) + \nabla_{y,y}^2 \psi(y, \theta) & \nabla_{y,\theta}^2 \psi(y, \theta) \\ 0 & \nabla_{\theta,y}^2 \psi(y, \theta) & \nabla_{y,\theta}^2 \psi(y, \theta) \end{pmatrix} \in M_{n+m+n+N, m+n+N}(\mathbb{R})$$

est de rang  $n + m + N$ . D'après le lemme A.9, le premier bloc de taille  $(n + m) \times (n + m)$  est inversible, et par la condition de non-dégénérescence pour  $\psi$ , le bloc de taille  $(n + N) \times N$  en bas à droite est de rang  $N$ , ce qui assure la non-dégénérescence pour la phase  $\Phi$ . Les conditions sur les points critiques de  $\Phi$  assurent alors qu'on a bien  $\Lambda_{\Phi} = \kappa(\Lambda_{\psi})$ .  $\square$

*Démonstration de la proposition 3.55.* Cette démonstration est analogue à la précédente. Notant  $\phi_A : \mathbb{R}^{2n+m} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\phi_B : \mathbb{R}^{2n+p} \rightarrow \mathbb{R}$  les phases des opérateurs  $A$  et  $B$ , ainsi que  $a$  et  $b$  leurs symbole, le noyau de l'opérateur  $A \circ B$  est donné par

$$K_{AB}(x, z) = \frac{1}{(2\pi h)^{\frac{2n+m+p}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{m+n+p}} e^{\frac{i}{h}(\phi_A(x, y, \tau_A) + \phi_B(y, z, \tau_B))} a(x, y, \tau, h) b(y, z, \theta, h) d\tau_B dy d\tau_A.$$

Les points critiques de la phase  $\Phi : (x, \tau_A, y, \tau_B, z) \mapsto \phi_A(x, y, \tau_A) + \phi_B(y, z, \tau_B)$  par rapport aux variables  $\tau_A, y$  et  $\tau_B$  sont tels que :

$$\begin{cases} 0 = \nabla_{\tau_A} \Phi(x, \tau_A, y, \tau_B, z) = \nabla_{\tau_A} \phi_A(x, y, \tau_A) \\ 0 = \nabla_y \Phi(x, \tau_A, y, \tau_B, z) = \nabla_y \phi_A(x, y, \tau_A) + \nabla_y \phi_B(y, z, \tau_B) \\ 0 = \nabla_{\tau_B} \Phi(x, \tau_A, y, \tau_B, z) = \nabla_{\tau_B} \phi_B(y, z, \tau_B) \end{cases}$$

Cela implique en particulier que  $(x, y, \tau_A) \in \Sigma_A$  et  $(y, z, \tau_B) \in \Sigma_B$ . Pour vérifier la condition de non-dégénérescence, il faut montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} \nabla_{x,\tau_A}^2 \phi_A(x, y, \tau_A) & \nabla_{x,y}^2 \phi_A(x, y, \tau_A) & 0 \\ \nabla_{\tau_A,\tau_A}^2 \phi_A(x, y, \tau_A) & \nabla_{\tau_A,y}^2 \phi_A(x, y, \tau_A) & 0 \\ \nabla_{y,\tau_A}^2 \phi_A(x, y, \tau_A) & \nabla_{y,y}^2 \phi_A(x, y, \tau_A) + \nabla_{y,y}^2 \phi_B(y, z, \tau_B) & \nabla_{y,\tau_B}^2 \phi_B(y, z, \tau_B) \\ 0 & \nabla_{\tau_B,y}^2 \phi_B(y, z, \tau_B) & \nabla_{\tau_B,\tau_B}^2 \phi_B(y, z, \tau_B) \\ 0 & \nabla_{z,y}^2 \phi_B(y, z, \tau_B) & \nabla_{z,\tau_B}^2 \phi_B(y, z, \tau_B) \end{pmatrix}$$

est de rang maximal  $m + n + p$ . D'après le lemme A.9, le bloc de taille  $(n + m) \times (n + m)$  en haut à gauche est inversible, tandis que par non-dégénérescence de  $\phi_B$ , le bloc de taille  $(2n + p) \times p$  en bas à droite est de rang  $p$ , ce qui prouve la non-dégénérescence de  $\Phi$ . On remarque que l'argument est symétrique en  $A$  et  $B$ , et qu'il suffit donc que l'un des deux opérateurs ait pour relation canonique le graphe d'un difféomorphisme pour que la composée soit un opérateur intégral de Fourier. Sous les hypothèses de la proposition, on peut en outre vérifier que la relation canonique de  $A \circ B$  est bien le graphe de  $\kappa_A \circ \kappa_B$ . Il suffit pour cela d'utiliser les trois conditions caractérisant les points critiques.  $\square$



# Index

- $(\cdot)_+$ , 61
- $[\cdot, i\cdot]^0$ , 84
- $\hat{\cdot}$ , 12
- $\hat{x}$ , 31
- $\circ$ , 66
- $\langle \cdot \rangle$ , 2
- $\#$ , 55
- $\sim$ , 54
- $\{\cdot, \cdot\}$ , 55
- $\mathbb{1}_J$ , 4
  
- $B, B^*, B_0^*$ , 41
- $B_s, B_s^*$ , 41
- $B_r$ , 30
- $B_{\mathbb{R}^n}(x, r)$ , 30
- $B_x(r)$ , 64
- $B_{T_z\Gamma}$ , 173
  
- $\mathbb{C}_+$ , 19
- $\mathbb{C}_{I,+}$ , 11
- $\mathbb{C}_{+,+}$ , 32
- $\mathcal{C}(d_1, d_2)$ , 175
- $C_0^\infty$ , 18
- $C_b^\infty$ , 18
  
- $\mathcal{D}(\cdot)$ , 19
- $\Delta_\perp$ , 31
- $\partial_r$ , 31
- $\mathcal{D}_r$ , 31
- $\mathcal{D}_r(\zeta)$ , 32
- $\mathcal{D}_r^z$ , 36
- $d_\Gamma$ , 154
- $\operatorname{div}_\xi$ , 134
- $\delta_w$ , 168
- Dissipatif, opérateur, 19
  - maximal, 20
  
- $E_K$ , 29
- $e^{tA}$ , 22
- État lagrangien, 76
- $\exp_z$ , 154
- Énergie non captive, 7
  
- $\mathcal{F}_h$ , 52
  
- $g$ , 155
- $\gamma_\Gamma$ , 173
- $\tilde{G}(\cdot)$ , 165
- Générateur des dilatations, 56, 86
  
- Hess, 51
- $H_0$ , 24
- $H_0^h$ , 56
- $H_1$ , 33
- $H_1^h$ , 153
- $H_h$ , 153
- $H_p$ , 59
- $(H - (E + i0))^{-1}$ , 32
- $H^s(\mathbb{R}^n)$ , 30
- $H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n)$ , 30
  
- $I_\gamma$ , 161
  
- $J_x$ , 60
  
- $K_w$ , 168
- $K_w^T$ , 183
  
- $L^{2,\delta}$ , 2
- $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ ,  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ , 19
- $\Lambda_T$ , 182
- $\Lambda_{w,k}$ , 168
- $\Lambda_\infty$ , 168
  
- Mesure semi-classique, 58
- Microlocalisation, 58
  
- $\nabla_\perp$ , 31
- $\nabla_{x,\theta}^2$ , 76
- $\nu_E$ , 154
- $N_E\Gamma$ , 155
- $N_E\Gamma_0$ , 155
- $N_{z,E}\Gamma$ , 155
  
- $\mathcal{O}$ , 67
- $\tilde{\mathcal{O}}, \tilde{\mathcal{O}}_\gamma$ , 114
- $O(h^\infty)$ , 51
- Opérateurs conjugués, 83
  - à l'ordre  $n$ , 104
  
- $p$ , 153

$P_h, P'_h, 90$

$\Phi_0, 156$

$\phi^t, 59$

$\psi(t, x, z, \xi), 172$

Rayon de fuite, 62

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), 18$

$\mathbb{S}, 30$

$\mathcal{S}(\cdot), 53$

$\mathcal{S}_\delta, 53$

sgn, 51

Sp, 19

$\mathbb{S}_r, 30$

$\sigma_r, 30$

Solution sortante, 32

$\Theta_h^R, \Theta_h^I, \Theta_h, \Theta_h^V, 90$

$t_{w,k}, 168$

$t_x, 165$

$u_h^T, 182$

$U_h(t), 71$

$U_1^h(t), 75$

$U_h^E(t), 157$

$V_2 \circ \phi^s, 69$

$\tilde{x}(s, t, \cdot), 60$

$\bar{x}(t, \cdot), 59$

$\tilde{\xi}(s, t, \cdot), 60$

$\bar{\xi}(t, \cdot), 59$

$\xi_{w,k}, 168$

$\xi_x, 165$

$\xi_z^{\parallel}, 161$

$\bar{y}(t, \cdot), 60$

$\mathcal{Z}_\pm(R, d, \sigma), 63$

$z_x, 165$

$z_{w,k}, 168$

$\zeta^z, 32$

$\zeta_1^z, 32$

$\zeta_2^z, 32$

# Bibliographie

- [ABG91] W. AMREIN, A. BOUTET DE MONVEL et V. GEORGESCU –  *$C_0$ -groups, commutator methods and spectral theory of  $N$ -body hamiltonians*, Progress in mathematics, vol. 135, Birkhäuser Verlag, 1991.
- [Agm75] S. AGMON – « Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory », *Ann. Scuola Norm. di Pisa* **2** (1975), p. 151–218.
- [AH76] S. AGMON et L. HÖRMANDER – « Asymptotic properties of solutions to differential equations with simple characteristics », *Jour. Analyse Math.* **30** (1976), p. 1–38.
- [AK07] L. ALOUI et M. KHENISSI – « Stabilization of Schrödinger equation in exterior domains », *ESAIM, Control Optim. Calc. Var.* **13** (2007), no. 3, p. 570–579.
- [AK10] —, « Boundary stabilization of the wave and Schrödinger equations in exterior domains », *Discrete and continuous dynamical systems* **27** (2010), no. 3, p. 919–934.
- [Ale08] I. ALEXANDROVA – « Semi-classical wavefront set and Fourier integral operators », *Canad. J. Math.* **60** (2008), p. 241–263.
- [BCKP02] J.-D. BENAMOU, F. CASTELLA, T. KATSAOUNIS et B. PERTHAME – « High frequency limit of the Helmholtz equations », *Rev. Mat. Iberoam.* **18** (2002), no. 1, p. 187–209.
- [BG] N. BOUSSAID et S. GOLÉNIA – « Limiting absorption principle for some long range perturbations of Dirac systems at threshold energies. », arXiv : 0906.1495.
- [BG87] M. BERGER et B. GOSTIAUX – *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, Presse Universitaire de France, 1987.
- [Bon09] J.-F. BONY – « Mesures limites pour l'équation de Helmholtz dans le cas non captif », *Annales Fac. Sc. Toulouse* **18** (2009), no. 3, p. 459–493.
- [BR02] A. BOUZOUINA et D. ROBERT – « Uniform semiclassical estimates for the propagation of quantum observables », *Duke Math. J.* **111** (2002), no. 2, p. 223–252.
- [Bur97] N. BURQ – « Semi-classical measures and defect measures. », Séminaire Bourbaki. Société Mathématique de France, Astérisque. 245, 167-195, 1997.
- [Bur02] —, « Semi-classical estimates for the resolvent in nontrapping geometries », *Int. Math. Res. Not.* **5** (2002), p. 221–241.
- [Cas05] F. CASTELLA – « The radiation condition at infinity for the high-frequency Helmholtz equation with source term : a wave-packet approach », *J. Funct. Anal.* **223** (2005), no. 1, p. 204–257.
- [CFKS87] H. CYCON, R. FROESE, W. KIRSCH et B. SIMON – *Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry*, Texts and monographs in physics, Springer-Verlag, 1987.
- [CJ06] F. CASTELLA et TH. JECKO – « Besov estimates in the high-frequency Helmholtz equation, for a non-trapping and  $C^2$  potential », *J. Differ. Equations* **228** (2006), no. 2, p. 440–485.



- [CJK08] F. CASTELLA, TH. JECKO et A. KNAUF – « Semiclassical resolvent estimates for Schrödinger operators with Coulomb singularities », *Annales de l'I.H.P.* **9** (2008), no. 4, p. 775–815.
- [Col98] Y. COLIN DE VERDIÈRE – « Une introduction à l'analyse semi-classique », *L'Enseignement mathématique* **44** (1998), p. 23–51.
- [CPR02] F. CASTELLA, B. PERTHAME et O. RUNBORG – « High frequency limit of the Helmholtz equation. II : Source on a general smooth manifold », *Commun. Partial Differ. Equations* **27** (2002), no. 3-4, p. 607–651.
- [DFJ09] T. DUYNCKAERTS, C. FERMANIAN et TH. JECKO – « Degenerated codimension 1 crossings and resolvent estimates. », *Asymptotic Anal.* **65** (2009), no. 3-4, p. 147–174.
- [DG97] J. DEREZIŃSKI et CH. GÉRARD – *Scattering theory of classical and quantum N-particle systems*, Text and monographs in Physics, Springer, 1997.
- [DJ01] J. DEREZIŃSKI et V. JAKŠIĆ – « Spectral theory of Pauli-Fierz operators », *J. Funct. Anal.* **180** (2001), no. 2, p. 243–327.
- [DL87] R. DAUTRAY et J.-L. LIONS – *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, vol. 2, Masson, 1987.
- [DS99] M. DIMASSI et J. SJÖSTRAND – *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*, London Mathematical Society, Lecture Note Series, vol. 268, Cambridge University Press, 1999.
- [EN00] K. ENGEL et R. NAGEL – *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, Springer, 2000.
- [EN06] —, *A short course on operator semigroups*, Springer, 2006.
- [Eva98] L. EVANS – *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, 1998.
- [EZ] L. EVANS et M. ZWORSKI – « Lectures on semiclassical analysis », version 0.3, disponible à l'adresse <http://math.berkeley.edu/~zworski/semiclassical.pdf>.
- [Fou05] E. FOUASSIER – « Morrey-campanato estimates for helmholtz equations with two unbounded media », *Proc. Roy. Soc. Edinburg, Sec. A* **135** (2005), no. 4, p. 767–776.
- [Fou06] —, « High frequency analysis of Helmholtz equations : case of two point sources », *SIAM J. Math. Anal.* **38** (2006), no. 2, p. 617–636.
- [Fou07] —, « High frequency limit of helmholtz equations : refraction by sharp interfaces », *Jour. Math. Pures Appl.* **87** (2007), no. 2, p. 144–192.
- [FR08] C. FERMANIAN et V. ROUSSE – « Resolvent estimates and matrix-valued Schrödinger operator with eigenvalue crossings; application to Strichartz estimates. », *Commun. Partial Differ. Equations* **33** (2008), no. 1, p. 19–44.
- [FS04] S. FOURNAIS et E. SKIBSTED – « Zero energy asymptotics of the resolvent for a class of slowly decaying potentials. », *Math. Z.* **248** (2004), no. 3, p. 593–633.
- [GGM04] V. GEORGESCU, CH. GÉRARD et J. MOLLER – « Commutators,  $C_0$ -semigroups and resolvent estimates », *Jour. Func. Ana.* **216** (2004), p. 303–361.
- [GHL90] S. GALLOT, D. HULLIN et J. LAFONTAINE – *Riemannian geometry*, 2ème éd., Universitext, Springer-Verlag, 1990.
- [GIS96] CH. GÉRARD, H. ISOZAKI et E. SKIBSTED – « N-body resolvent estimates. », *J. Math. Soc. Japan* **48** (1996), no. 1, p. 135–160.
- [GL93] P. GÉRARD et E. LEICHTNAM – « Ergodic properties of eigenfunctions for the Dirichlet problem », *Duke Math. J.* **71** (1993), no. 2, p. 559–607.

- [GM88] CH. GÉRARD et A. MARTINEZ – « Principe d'absorption limite pour des opérateurs de Schrödinger à longue portée », *C.R. Acad. Sciences* **306** (1988), p. 121–123.
- [Gol09] S. GOLÉNIA – « Positive commutators, Fermi golden rule and the spectrum of zero temperature Pauli-Fierz Hamiltonians. », *J. Funct. Anal.* **256** (2009), no. 8, p. 2587–2620.
- [GS94] A. GRIGIS et J. SJÖSTRAND – *Microlocal analysis for differential operators, an introduction*, London Mathematical Society, Lecture Note Series, vol. 196, Cambridge University Press, 1994.
- [GY99] Y. GÂTEL et D. YAFAEV – « On solutions of the Schrödinger equation with radiation conditions at infinity : the long-range case », *Ann. Inst. Fourier* **49** (1999), no. 5, p. 1581–1602.
- [Gér91a] P. GÉRARD – « Mesures semi-classiques et ondes de Bloch », *Séminaire E.D.P. de l'école Polytechnique XVI* (1991).
- [Gér91b] P. GÉRARD – « Microlocal defect measures », *Comm. Part. Diff. Eq.* **16** (1991), no. 11, p. 1761–1794.
- [HMR87] B. HELFFER, A. MARTINEZ et D. ROBERT – « Ergodicité et limite semi-classique », *Comm. in Math. Phys.* **109** (1987), p. 313–326.
- [HR83] B. HELFFER et D. ROBERT – « Calcul fonctionnel par la transformation de Melin et opérateurs admissibles », *Jour. Func. Ana.* **53** (1983), p. 246–268.
- [Hör84] L. HÖRMANDER – *The analysis of linear partial differential operators, I-IV*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 256, Springer, 1984.
- [IK85] H. ISOZAKI et H. KITADA – « Modified wave operators with time-independant modifiers », *J. Fac. Sci. Tokio* **32** (1985), p. 77–104.
- [Ike72] T. IKEBE – « A spectral theory for the reduced wave equation with a complex refractive index », *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **8** (1972), p. 579,606.
- [Ike75] — , « Spectral representation for Schrödinger operators with long-range potentials », *Jour. Functionnal Analysis* **20** (1975), p. 158–177.
- [IS72] T. IKEBE et Y. SAITO – « Limiting absorption method and absolute continuity for the Schrödinger operator », *J. Math. Kyoto Univ.* **12** (1972), no. 3, p. 513–542.
- [Iso80] H. ISOZAKI – « Eikonal equations and spectral representations for long-range Schrödinger hamiltonians », *Jour. Math. Kyoto Univ.* **20** (1980), no. 2, p. 243–261.
- [Ivr98] V. IVRII – *Microlocal analysis and precise spectral asymptotics*, Monographs in Mathematics, Springer, 1998.
- [Jec04] TH. JECKO – « From classical to semiclassical non-trapping behaviour. », *C. R., Math., Acad. Sci. Paris* **338** (2004), no. 7, p. 545–548.
- [Jec05] — , « Non-trapping condition for semiclassical Schrödinger operators with matrix-valued potentials. », (2005) (English).
- [Jen85] A. JENSEN – « Propagation estimates for Schrödinger-type operators », *Trans. A.M.S.* **291** (1985), no. 1, p. 129–144.
- [JMP84] A. JENSEN, E. MOURRE et P. PERRY – « Multiple commutator estimates and resolvent smoothness in quantum scattering theory », *Ann. Inst. H. Poincaré* **41** (1984), no. 2, p. 207–225.
- [JP85] A. JENSEN et P. PERRY – « Commutator methods and Besov space estimates for Schrödinger operators. », *J. Oper. Theory* **14** (1985), p. 181–188.
- [Kat66] T. KATO – « Wave operators and similarity for some non-selfadjoint operators », *Math. Annalen* **162** (1966), p. 258–279.

- [Kat80] —, *Perturbation theory for linear operators*, second éd., Classics in Mathematics, Springer, 1980.
- [Lav69] R. LAVINE – « Absolute continuity of Hamiltonian operators with repulsive potential. », *Proc. of the American Math. Soc.* **22** (1969), no. 1, p. 55–60.
- [Lav71] —, « Commutators and scattering theory. I. Repulsive interactions. », *Comm. Math. Phys.* **20** (1971), p. 301–323.
- [Lav73] —, « Absolute continuity of positive spectrum for Schrödinger operators with long-range potentials », *Jour. Functionnal Analysis* **12** (1973), p. 30–54.
- [Lax02] P. LAX – *Functionnal analysis*, Wiley-Interscience, 2002.
- [Leb96] G. LEBEAU – « Equation des ondes amorties. », dans : A. Boutet de Monvel and V. Marchenko (éditeurs), *Algebraic and geometric methods in mathematical physics*, 73-109. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [Ler10] N. LERNER – *Metrics on the phase space and non-selfadjoint pseudo-differential operators*, Pseudo-differential operators, vol. 3, Springer, 2010.
- [LP93] P. LIONS et TH. PAUL – « Sur les mesures de Wigner », *Revista Matemática Iberoamericana* **9** (1993), no. 3.
- [Mar02] A. MARTINEZ – *An introduction to semiclassical and microlocal analysis*, Universitext, Springer, 2002.
- [Mel95] R. MELROSE – *Geometric scattering theory*, Stanford lectures, Cambridge University press, 1995.
- [Mes95] A. MESSIAH – *Mécanique quantique*, vol. 1, Dunod, 1995.
- [Mil00] L. MILLER – « Refraction of high-frequency waves density by sharp interfaces and semiclassical measures at the boundary », *J. Math. Pures Appl.* **79** (2000), no. 3, p. 227–269.
- [Mou77] E. MOURRE – « Application de la méthode de lavine au problème à trois corps. », *Annales de l'I.H.P.* **26** (1977), no. 3, p. 219–262.
- [Mou81] —, « Absence of singular continuous spectrum for certain self-adjoint operators », *Comm. Math. Phys.* **78** (1981), p. 391–408.
- [Mou83] —, « Opérateurs conjugués et propriétés de propagation », *Comm. Math. Phys.* **91** (1983), p. 279–300.
- [NF67] B. NAGY et C. FOIAS – *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert*, Masson, 1967.
- [NZ09a] S. NONNENMACHER et M. ZWORSKI – « Quantum decay rates in chaotic scattering. », *Acta. Math.* **203** (2009).
- [NZ09b] —, « Semiclassical resolvent estimates in chaotic scattering. », *Appl. Math. Res. Express* **2009** (2009).
- [Pav77] B. PAVLOV – « Selfadjoint dilation of the dissipative Schrödinger operator and its resolution in terms of eigenfunctions », *Math. USSR Sbornik* **31** (1977), no. 4, p. 457–478.
- [Paz83] A. PAZY – *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Applied Mathematical Sciences, vol. 44, Springer, 1983.
- [PSS81] P. PERRY, I. SIGAL et B. SIMON – « Spectral analysis of  $N$ -body Schrödinger operators », *Annals of Math.* **114** (1981), p. 519–567.
- [Put67] C. PUTNAM – *Commutation properties of Hilbert space operators and related topics*, Springer-Verlag, 1967.
- [PV99] B. PERTHAME et L. VEGA – « Morrey-Campanato estimates for Helmholtz equations », *J. Funct. Anal.* **164** (1999), no. 2, p. 340–355.
- [Rob87] D. ROBERT – *Autour de l'approximation semi-classique*, Progress in Mathematics, vol. 68, Birkhäuser, 1987.

- [Roy10a] J. ROYER – « Limiting absorption principle for the dissipative Helmholtz equation », *Comm. Part. Diff. Equations* **35** (2010), no. 8, p. 1458–1489.
- [Roy10b] — , « Semiclassical measure for the solution of the dissipative Helmholtz equation. », *Jour. Diff. Equations* **249** (2010), p. 2703–2756.
- [RS79a] M. REED et B. SIMON – *Method of modern mathematical physics*, vol. I, *Functional Analysis*, Academic Press, 1979.
- [RS79b] — , *Method of modern mathematical physics*, vol. II, *Fourier Transform and self-adjointness*, Academic Press, 1979.
- [RS79c] — , *Method of modern mathematical physics*, vol. IV, *Analysis of Operator*, Academic Press, 1979.
- [RT87] D. ROBERT et H. TAMURA – « Semi-classical estimates for resolvents and asymptotics for total scattering cross-sections », *Annales de l'I.H.P., section A* **46** (1987), no. 4, p. 415–442.
- [RT89] — , « Asymptotic behavior of scattering amplitudes in semi-classical and low energy limits », *Annales de l'I.H.P., section A* **39** (1989), no. 1, p. 155–192.
- [Rud98] W. RUDIN – *Analyse réelle et complexe*, Dunod, 1998.
- [Sai74] Y. SAITO – « The principle of limiting absorption for the non-selfadjoint Schrödinger operator in  $\mathbb{R}^N$  ( $n \neq 2$ ) », *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **9** (1974), p. 397–428.
- [Sai79] — , *Spectral representation for Schrödinger operators with long-range potentials*, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 727, Springer-Verlag, 1979.
- [Sch69] J. SCHWARTZ – *Non-linear functional analysis*, *Notes on Mathematics and its Applications*, Gordon and Breach science publishers, 1969.
- [Ski92] E. SKIBSTED – « Smoothness of  $N$ -body scattering amplitudes. », *Rev. Math. Phys.* **4** (1992), no. 4, p. 619–658.
- [Sog02] C. SOGGE – *Fourier integrals in classical analysis*, *Cambridge tracts in mathematics*, vol. 105, Cambridge university press, 2002.
- [Som72] A. SOMMERFELD – *Partial differential equations in physics*, 5th éd., *Lectures on theoretical Physics*, vol. VI, Academic Press, New York and London, 1972.
- [Vor88] A. VOROS – « Aspects de la limite semi-classique », *Journées X-U.P.S.* **5** (1988), p. 37–48.
- [VZ00] A. VASY et M. ZWORSKI – « Semiclassical estimates in asymptotically Euclidean scattering », *Comm. Math. Phys.* **212** (2000), no. 1, p. 205–217.
- [Wan85] X. P. WANG – « Étude semi-classique d'observables quantiques », *Annales de la faculté des sciences de Toulouse* **7** (1985), no. 2, p. 101–135.
- [Wan86] — , « Approximation semi-classique de l'équation de Heisenberg », *Comm. Math. Phys.* **104** (1986), p. 77–86.
- [Wan87] — , « Time-decay of scattering solutions and classical trajectories », *Annales de l'I.H.P., section A* **47** (1987), no. 1, p. 25–37.
- [Wan88] — , « Time-decay of scattering solutions and resolvent estimates for semiclassical Schrödinger operators », *Jour. of Differential Equations* **71** (1988), p. 348–395.
- [Wan91] — , « Semiclassical resolvent estimates for  $N$ -body Schrödinger operators », *Jour. Func. Ana.* **97** (1991), no. 2, p. 466–483.
- [Wan07] — , « Microlocal estimates of the stationary Schrödinger equation in semi-classical limit », *Séminaires et Congrès, SMF* **15** (2007), p. 265–308.
- [WZ06] X. P. WANG et P. ZHANG – « High-frequency limit of the Helmholtz equation with variable refraction index », *Jour. of Func. Ana.* **230** (2006), p. 116–168.
- [Yos78] K. YOSIDA – *Functional analysis*, 5 éd., *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, vol. 123, 1978.