



HAL
open science

Approximation du problème diffusion en tomographie optique et problème inverse

Mohamed Addam

► **To cite this version:**

Mohamed Addam. Approximation du problème diffusion en tomographie optique et problème inverse. Mathématiques [math]. Université du Littoral Côte d'Opale, 2009. Français. NNT: . tel-00579257

HAL Id: tel-00579257

<https://theses.hal.science/tel-00579257>

Submitted on 23 Mar 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DU LITTORAL CÔTE D'OPALE (U.L.C.O)



ACADÉMIE DE LILLE

ÉCOLE DOCTORALE RÉGIONALE SCIENCE POUR L'INGÉNIEUR N° 072

ORDRE N°

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline: Mathématiques Appliquées

Approximation du problème de diffusion en tomographie optique et problème inverse

présentée par Mohamed ADDAM

Soutenue publiquement le 9 décembre 2010 devant la commission d'examen

Jury

- Président :**
- HASSANE SADOK, Professeur, Université du Littoral Côte d'Opale (U.L.C.O), Calais, France.
- Rapporteurs :**
- DOMINGO BARRERA, Professeur, Universidad de Granada, España.
 - MOHAMMED SEAÏD, Professeur, School of Engineering and Computing Sciences, Durham, United Kingdom.
- Examineurs :**
- CHRISTIAN GOUT, Professeur, INSA, Rouen, France.
 - MARIE-LAURENCE MAZURE, Professeur, Université Joseph Fourier, Grenoble, France.
- Directeurs de thèse :**
- ABDERRAHMAN BOUHAMIDI, Maître de Conférence-HDR, Université du Littoral Côte d'Opale (U.L.C.O), Calais, France.
 - KHALIDE JBILOU, Professeur, Université du Littoral Côte d'Opale (U.L.C.O), Calais, France.

*Je dédie ce travail
à mes parents*

« Le temps fait oublier les douleurs,
éteint les vengeances,
apaise la colère et étouffe la haine,
alors le passé est comme s'il n'eût
jamais existé »

Avicenne: IBN SÎNÂ (980-1037)

Cette thèse a été préparée au sein du

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées (L.M.P.A.) Joseph Liouville,



Université du Littoral Côte d'Opale (U.L.C.O.),
Centre Universitaire de la Mi-Voix
17 rue Ferdinand Buisson
B.P 699
62228 Calais - Cédex

☎ : 03 21 99 45 60
FAX : 03 21 99 45 61
✉ : addam@lmpa.univ-littoral.fr\addam.mohamed@gmail.com
Site : <http://www.lmpa.univ-littoral.fr>

Remerciements

Cette thèse a été réalisée au sein du Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA) de l'Université du Littoral Côte d'Opale (U.L.C.O).

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Messieurs Abderrahman Bouhamidi et Khalide Jbilou qui ont dirigé ma thèse avec une grande implication. Je les remercie pour leurs encouragements et leur soutien tout au long de mes années de thèse.

Je voudrais aussi remercier Monsieur Hassane Sadok de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse. Je le remercie aussi en tant que directeur du Laboratoire LMPA. Il m'a accueilli au sein du laboratoire LMPA et m'a soutenu pendant toute cette période.

Je remercie vivement les deux rapporteurs de cette thèse, Monsieur Domingo Barera et Monsieur Mohammed Seaïd qui ont accepté de prendre de leur temps pour rapporter sur ce travail. Mes remerciements s'adressent également aux deux examinateurs, Madame Marie-Laurence Mazure et Monsieur Christian Gout.

J'exprime ma sympathie à tous les membres du Laboratoire LMPA.

Plus qu'à quiconque, je dédie cette thèse à mes parents et aux membres de ma famille chacun par son nom. C'est grâce à leur soutien continu que j'ai pu avancer dans mes parcours scolaire et universitaire.

Mohamed ADDAM

Résumé

Cette thèse porte sur l'approximation des équations aux dérivées partielles, en particulier l'équation de diffusion en tomographie optique. Elle peut se présenter en deux parties essentielles. Dans la première partie on discute le problème direct alors que le problème inverse est abordé dans la seconde partie.

Pour le problème direct, on suppose que les paramètres optiques et les fonctions sources sont donnés. On résout alors le problème de diffusion dans un domaine où la densité du flux lumineux est considérée comme une fonction inconnue à approcher numériquement. Le plus souvent, pour reconstruire le signal numérique dans ce genre de problème, une discrétisation dans le temps est nécessaire. Nous avons proposé d'utiliser la transformée de Fourier et son inverse afin d'éviter une telle discrétisation. Les techniques que nous avons utilisées sont la quadrature de Gauss-Hermite ainsi que la méthode de Galerkin basée sur les B-splines ou les B-splines tensorielles ainsi que sur les fonctions radiales. Les B-splines sont utilisées en dimension un alors que les B-splines tensorielles sont utilisées lorsque le domaine est rectangulaire avec un maillage uniforme. Lorsque le domaine n'est plus rectangulaire, nous avons proposé de remplacer la base des B-splines tensorielles par les fonctions à base radiale construites à partir d'un nuage de points dispersés dans le domaine. Du point de vue théorique, nous avons étudié l'existence, l'unicité et la régularité de la solution puis nous avons proposé quelques résultats sur l'estimation de l'erreur dans les espaces de type Sobolev ainsi que sur la convergence de la méthode.

Dans la seconde partie de notre travail, nous nous sommes intéressés au problème inverse. Il s'agit d'un problème inverse non-linéaire dont la non-linéarité est liée aux paramètres optiques. On suppose qu'on dispose des mesures du flux lumineux aux bords du domaine étudié et des fonctions sources. On veut alors résoudre le problème inverse de façon à simuler numériquement l'indice de réfraction ainsi que les coefficients de diffusion et d'absorption. Du point de vue théorique, nous avons discuté certains résultats tels que la continuité et la dérivabilité, au sens de Fréchet, de l'opérateur mesurant le flux lumineux reçu aux bords. Nous avons établi les propriétés lipschitzienne de la dérivée de Fréchet en fonction des paramètres optiques. Du point de vue numérique nous nous sommes intéressés au problème discret dans la base des B-splines et la base des fonctions radiales. En suite, nous avons abordé la résolution du problème inverse non-linéaire par la méthode de Newton-Gauss.

Mots clés : Équations de transport, approximation de diffusion, transformée de Fourier, B-splines, fonctions à base radiale, reconstruction d'un signal, quadrature de Gauss-Hermite, estimation de l'erreur et problème inverse.

Abstract

The purpose of this thesis is to develop and to study numerical methods for the solution of some Partial Differential Equations (PDE) such as the diffusion transport problem in optical tomography. The presented work can be partitioned into two parts: In the first part, we consider the direct problem and in the second part, we treat the inverse problem.

For the direct problem, we assume that the optical parameters and the source functions are given. Here, the density of the luminous flow is considered as an unknown function to be approached numerically. Generally, to reconstruct the numerical signal, a mesh-technique (in the time variable) is necessary. To avoid such a discretisation, we will use a technique based on the Fourier transform and its inverse. These methods use the Gauss-Hermite quadrature as well as Galerkin method based on B-splines, B-splines tensorial and radial basis functions (RBF). The B-splines are used in the one-dimension case while the tensorial B-splines are used when the domain is rectangular with a uniform mesh. When the domain is not rectangular any more, we use the radial basis functions. From the theoretical point of view, we will study the existence, the uniqueness and the regularity of the solution and then we propose some results on the estimation of the error in Sobolev-type spaces.

In the second part of this work, we are interested in the diffusion inverse problem: a non-linear inverse problem. We suppose that the measures of the luminous flow in the edges of the domain and the source functions are given. We will give some theoretical results such as the continuity and the differentiability, in the Fréchet sense of the operator defined to measure the luminous flow detected on the edges of the domain.

From the numerical point of view adds, we will be interested in the discreet case using B-splines and radial basis functions. We will use the Newton method to solve the non-linear inverse diffusion problem.

Keywords: PDE transport equations, Diffusion approximation, Fourier transform, B-splines, Radial basis functions, Signal reconstruction, Gauss-Hermite quadrature, Error estimate, Inverse diffusion problem.

Notations

Nous présentons d'abord la terminologie et les notations employées. Les notations et les abréviations utilisées sont, en général, expliquées au moment où elle apparaissent dans le corps du texte. Néanmoins, nous donnons ci-dessous une liste de notations, symboles ou abréviations requis.

- a) Soit $d \in \mathbb{N}^*$ la dimension du domaine
- i) En dimension $d = 1$: le domaine est un intervalle $]a, b[$ ouvert de \mathbb{R} . Un élément générique de $]a, b[$ est noté x .
 - ii) En dimension $d = 2$: le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert borné. Un élément générique de $\overline{\Omega}$ est noté $x = (x, y)$.
 - iii) En dimension $d \geq 2$: le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert borné, de frontière $\partial\Omega$ et d'adhérence $\overline{\Omega}$. Un élément générique de $\overline{\Omega}$ est noté $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$.
 - iv) Pour x et y dans \mathbb{R}^d on a $(x|y)_2 = x^T y$ est le produit scalaire dans \mathbb{R}^d .
 - v) $\mathbb{S}^{d-1} = \{s \in \mathbb{R}^d : \|s\|_2 = 1\}$ est la sphère unité de \mathbb{R}^d .
 - vi) $\text{Supp}(f)$ est le support de f .
 - vii) $i = \sqrt{-1}$ est l'unité imaginaire.
 - viii) L'intervalle du temps est $[t_0, t_0 + T] \subset \mathbb{R}^+$ et $t \in [t_0, t_0 + T]$ est la variable du temps.
 - xiv) La variable de fréquence est $\omega \in \mathbb{R}$ et \mathbb{R} est l'ensemble des fréquences.
- b) Soit $1 \leq p < \infty$, les espaces usuels classiques sont illustrés ainsi
- i) $L^\infty(\Omega)$ est l'espace vectoriel des fonctions mesurables bornées à valeurs réelles, muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$.
 - ii) $\widehat{L}^\infty(\Omega)$ est l'espace vectoriel des fonctions mesurables bornées à valeurs complexes, muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$.
 - iii) $L^p(\Omega)$ est l'espace vectoriel des fonctions f à valeurs réelles telles que $|f|^p$ soit intégrable sur Ω . Cet espace est muni de la norme $\| \cdot \|_{L^p}$.
 - iv) $\widehat{L}^p(\Omega)$ est l'espace vectoriel des fonctions f à valeurs complexes telles que $|f|^p$ soit intégrable sur Ω . Cet espace est muni de la norme $\| \cdot \|_{\widehat{L}^p}$.
 - v) $L^p(\Omega \times V)$ est l'espace vectoriel des fonctions f telles que $|f|^p$ soit intégrable sur $\Omega \times V$, muni de la topologie associée à la norme $\| \cdot \|_{L^p(\Omega \times V)}$ donnée par

$$\|f\|_{L^p(\Omega \times V)} = \left(\int_{\Omega \times V} |f(x, v)|^p dx d\mu(v) \right)^{1/p}, \quad \forall f \in L^p(\Omega \times V). \quad (0.0.1)$$

- vi) Soit $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact inclus dans Ω .
 - vii) L'espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$ est le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$, c'est l'espace vectoriel topologique des formes linéaires continues de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans \mathbb{R} .
 - viii) Pour \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 deux espace de Banach, on note $\mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ l'espace de Banach des applications linéaires et continues de \mathcal{E}_1 dans \mathcal{E}_2 .
- c) Dans le cas où $p = 2$

- i) $L^2(\Omega) := L^2(\Omega, \mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles d'énergie finie, muni de la topologie associée au produit scalaire et à la norme $\|\cdot\|_{L^2}$ suivants.

$$(u|v)_2 = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \quad \|u\|_2 = \sqrt{(u|u)_2}, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega). \quad (0.0.2)$$

- ii) $\widehat{L}^2(\Omega) := L^2(\Omega, \mathbb{C})$ est l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes d'énergie finie, muni de la topologie associée au produit scalaire et à la norme $\|\cdot\|_{\widehat{L}^2}$ suivants.

$$(u|v)_2 = \int_{\Omega} u(x)\overline{v(x)}dx, \quad \|u\|_2 = \sqrt{(u|u)_2}, \quad \forall u, v \in \widehat{L}^2(\Omega). \quad (0.0.3)$$

- d) Les espaces usuels de Sobolev, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

- i) $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega, \mathbb{R})$ est l'espace de Sobolev des fonctions à valeurs réelles, muni de la norme classique $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$ donnée par

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\ell| \leq k} \|\partial^\ell u\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in H^k(\Omega). \quad (0.0.4)$$

où $\partial^\ell u := \partial^{\ell_1} \dots \partial^{\ell_d} u$ est la dérivée au sens des distributions de u d'ordre $|\ell| = \sum_{i=1}^d \ell_i$ et $\partial^{\ell_i} = \frac{\partial^{\ell_i}}{\partial x_i^{\ell_i}}$.

- ii) $H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R})$ est l'espace de Sobolev des fonctions à valeurs réelles et nulle sur $\partial\Omega$, muni de la semi-norme classique $|\cdot|_{1,\Omega}$ donnée par

$$|u|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \quad (0.0.5)$$

- iii) Le dual topologique $H^{-1}(\Omega)$ de l'espace $H_0^1(\Omega)$, est l'espace vectoriel des formes linéaires et continues sur $H_0^1(\Omega)$.

- iv) $\widehat{H}^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega, \mathbb{C})$ est l'espace de Sobolev des fonctions à valeurs complexes, muni de la norme classique $\|\cdot\|_{\widehat{H}^k(\Omega)}$ donnée par

$$\|u\|_{\widehat{H}^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\ell| \leq k} \|\partial^\ell u\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in \widehat{H}^k(\Omega). \quad (0.0.6)$$

e) Pour $1 \leq p < \infty$, les espaces $L^p(\mathbb{R}; \widehat{H}^k(\Omega))$ et $L^p(\mathbb{R}; H^k(\Omega))$ munis respectivement des normes

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}; \widehat{H}_k)} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|u(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_k}^p d\omega \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|\phi\|_{L^p(\mathbb{R}; H_k)} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|\phi(\cdot, t)\|_{H_k}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (0.0.7)$$

sont des espaces de Banach.

f) On considère l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ des fonctions $\phi : t \in \mathbb{R} \rightarrow \phi(\cdot, t) \in L^2(\Omega)$ satisfaisant les conditions :

i) $\phi(\cdot, t) \in C^\infty(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$, $\forall t \in \mathbb{R}$,

ii) $\mathcal{N}_{\ell, m}(\phi) := \sup_{k \leq \ell} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left((1+t^2)^m \left\| \frac{\partial^k \phi(\cdot, t)}{\partial t^k} \right\|_{L^2(\Omega)} \right) < \infty$, $\ell, m \in \mathbb{N}$.

L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ est muni de la topologie définie par la famille de semi-normes $(\mathcal{N}_{\ell, m})_{\ell, m}$. Le dual topologique $\mathcal{S}'(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ est l'espace vectoriel des distributions tempérées. Autrement dit, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ est l'espace des formes linéaires et continues de $\mathcal{S}(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ dans \mathbb{R} .

g) Les espaces de Sobolev non homogènes

i) Pour tout $s \in \mathbb{R}$, l'espace $H^s(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ défini par

$$H^s(\mathbb{R}; \mathbb{R}) := \left\{ \phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}; \mathbb{R}) : \widehat{\phi} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} (1+\omega^2)^s |\widehat{\phi}(\cdot, \omega)|^2 d\omega < \infty \right\}, \quad (0.0.8)$$

muni de la norme

$$\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}; \mathbb{R})} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (1+\omega^2)^s |\widehat{\phi}(\cdot, \omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (0.0.9)$$

est un espace de Hilbert.

ii) Pour tout $s \in \mathbb{R}$, l'espace de Sobolev non homogène $H^s(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ défini par

$$H^s(\mathbb{R}; L^2(\Omega)) := \left\{ \phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}; L^2(\Omega)) : \widehat{\phi} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; \widehat{L}^2(\Omega)) \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} (1+\omega^2)^s \|\widehat{\phi}(\cdot, \omega)\|_{\widehat{L}^2(\Omega)}^2 d\omega < \infty \right\}, \quad (0.0.10)$$

muni de la norme

$$\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}; L^2(\Omega))} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (1+\omega^2)^s \|\widehat{\phi}(\cdot, \omega)\|_{\widehat{L}^2(\Omega)}^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (0.0.11)$$

est un espace de Hilbert.

iii) Pour tout $s, r \in \mathbb{R}$, l'espace de Sobolev non homogène $H^s(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ défini par

$$H^s(\mathbb{R}; H^r(\Omega)) := \left\{ \phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}; H^r(\Omega)) : \widehat{\phi} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; \widehat{H}^r(\Omega)) \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} (1+\omega^2)^s \|\widehat{\phi}(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}^r(\Omega)}^2 d\omega < \infty \right\}, \quad (0.0.12)$$

muni de la norme

$$\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}; H^r(\Omega))} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \omega^2)^s \|\widehat{\phi}(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}^r(\Omega)}^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (0.0.13)$$

est un espace de Hilbert.

iv) L'espace $H^s(\mathbb{R}; L^2(\partial\Omega))$ est défini comme l'espace $H^s(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ en remplaçant l'espace $L^2(\Omega)$ par $L^2(\partial\Omega)$ dans la définition (0.0.10). Sa norme est donnée comme dans (0.0.11).

h) Les espaces de trace (voir l'annexe B) :

i) L'espace de trace $H^{1/2}(\partial\Omega) := \{v = \gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega} : u \in H^1(\Omega)\}$, où γ_0 est l'opérateur de trace au bord défini de $H^1(\Omega)$ à valeurs dans $H^{1/2}(\partial\Omega)$ vérifiant $\gamma_0(H^1(\Omega)) = H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$.

ii) L'opérateur de trace normale est défini par $\gamma_1 : H^2(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$, avec $\gamma_1(u) = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = n(\xi)^T \cdot \nabla u$ où $n := n(\xi)$ est la normale au bord au point $\xi \in \partial\Omega$. On a $\gamma_1(H^2(\Omega)) = H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$ et $\gamma_0(H^2(\Omega)) = H^{3/2}(\partial\Omega) \subset H^{1/2}(\partial\Omega)$.

i) On désigne par vec l'opération qui transforme une matrice $W = [w_1, \dots, w_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de taille $m \times n$ et de colonnes $w_i \in \mathbb{R}^m$ en un vecteur $w = [w_1^T, w_2^T, \dots, w_n^T]^T \in \mathbb{R}^{mn}$. On écrit $\text{vec}(W) = w$. La matrice identité de taille $N \times N$ est notée I_N et le produit de Kronecker \otimes est défini par $C \otimes B = [C_{i,j} B]$ où B et C sont deux matrices quelconques.

j) L'espace produit $L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ muni de la norme donnée par

$$\|(u, v, w)\|_\infty = \|u\|_\infty + \|v\|_\infty + \|w\|_\infty \quad (0.0.14)$$

est un espace de Banach.

Table des matières

Résumé	xi
Abstract	xiii
Notations	xv
Table des matières	xix
1 Problème de Cauchy et équations de transport	7
1.1 Introduction	7
1.2 Historique	8
1.2.1 Équation cinétique de Boltzmann	8
1.2.2 Problème de Cauchy pour l'équation de transport	9
1.3 Équation de transfert radiative ETR	12
1.3.1 Équation de transport non-stationnaire	12
1.3.2 Équation de transport stationnaire	16
1.4 Théorie de l'approximation de diffusion	19
1.5 Les conditions globales de Robin aux bords	22
1.6 Équation de diffusion dans le domaine fréquentiel	24
1.7 Les sources Gaussiennes	24
2 Reconstruction d'un signal par les B-splines	27
2.1 Introduction	27
2.2 Problème de diffusion en une dimension	28
2.2.1 Équation de diffusion en 1D	28
2.2.2 Reconstruction d'un signal en fonction de la fréquence	29
2.2.3 Les B-splines normalisées uniformes	32
2.2.4 Approximation de Galerkin par la B-spline cubique	35
2.2.5 Reconstruction d'un signal dans le temps	37
2.2.6 Estimation de l'erreur	39
2.2.7 Les tests numériques	43
2.3 Problème de diffusion multidimensionnel	50
2.3.1 Équation de diffusion multidimensionnelle	50
2.3.2 Reconstruction d'un signal en fonction de la fréquence	51
2.3.3 Approximation de Galerkin par la spline tensorielle	54
2.3.4 Reconstruction d'un signal dans le temps	59
2.3.5 Estimation de l'erreur	61

2.3.6	Les tests numériques	66
3	Méthode de Galerkin sans maillage	75
3.1	Introduction	75
3.2	Fonctions radiales	75
3.3	Noyau reproduisant	77
3.4	Fonctions radiales conditionnellement définies Positives (CDP)	78
3.4.1	Fonctions radiales définies positives DP à support compact	81
3.4.2	Fonctions radiales CDP à support non compact	87
3.4.3	Interpolation par les fonctions à base radiale	93
3.5	Reconstruction sans maillage d'un signal en fréquence	95
3.5.1	Approximation de Galerkin sans maillage	95
3.5.2	Formules de cubature et calculs numériques	97
3.6	Reconstruction d'un signal dans le temps	99
3.7	Choix de points pour l'approximation sans maillage	100
4	Problème inverse pour l'équation de diffusion	105
4.1	Introduction	105
4.2	Problèmes inverses de transport	106
4.3	L'opérateur de mesures au bord	107
4.4	Problème de diffusion direct	108
4.5	Problème inverse en dimension un	109
4.5.1	Continuité de l'application Dirichlet-to-Neumann (DtN)	110
4.5.2	Dérivée de Fréchet et problème adjoint en 1D	117
4.6	Méthode d'approximation pour le problème inverse	120
4.6.1	Discrétisation dans la base B-spline	120
4.6.2	Le calcul de la jacobienne et de la hessienne	123
4.7	Le problème inverse multidimensionnel	127
4.7.1	Le problème de diffusion direct	127
4.7.2	Le problème inverse pour l'équation de diffusion	127
4.7.3	Continuité de l'application Dirichlet-to-Neumann (DtN)	128
4.7.4	Dérivées de Fréchet et problème adjoint	134
4.8	Méthode d'approximation pour le problème inverse	138
4.8.1	Discrétisation dans la base spline tensorielle	139
4.8.2	La jacobienne et la hessienne dans la base spline tensorielle	141
4.8.3	Discrétisation dans une base de fonctions radiales	145
4.8.4	La jacobienne et la hessienne dans une base radiale	147
4.9	Méthode de résolution par les lignes de niveau	148
5	Conclusion et perspectives	151
5.1	Conclusion	151
5.2	Perspectives	152
5.2.1	Équation des ondes et équation d'advection-diffusion	152
5.2.2	Problème des ondes acoustiques	153
5.2.3	Problème d'advection-diffusion	156
A	Intégration numérique	161
A.1	La formule de quadrature de Gauss-Hermite	161
A.2	La formule de la quadrature de Simpson	163

B La trace et la trace normale : théorèmes de trace	165
B.1 L'opérateur de trace γ_0	165
B.2 L'opérateur de trace normale γ_1	166
C Paramètres et coefficients physiques et biologiques	169
C.1 Coefficient d'atténuation	169
C.2 La transformée de Radon \mathcal{R}	171
C.3 Coefficient d'absorption	172
C.4 Coefficient de dispersion	172
C.5 Fonction de phase	173
C.6 Coefficient d'anisotropie	175
C.7 Coefficient de diffusion	175
C.8 L'indice de réfraction et vitesse de la lumière	176
C.9 Sources de lumières monochromatiques	176
Bibliographie	179
Index	189

Introduction

Selon le dictionnaire le Petit Robert, la tomographie est un procédé d'exploration radiographique permettant d'obtenir la radiographie d'une mince couche d'organe à une profondeur voulue. la tomographie selon le dictionnaire Larousse, est un procédé de radiographie qui permet de faire des clichés sur un seul plan du volume observé, avec effacement des autres plans.

Les limitations de la radiographie planaire commencent réellement à apparaître vers les années vingt. Le dermatologue français André Bocage, père de la tomographie [25], imagine alors les mouvements d'une source de faisceaux lumineux monochromatique (*rayon X*) et d'un film radiographique dans les directions opposées. En gardant un plan focal fixe sur l'objet imagé, il apparaît claire alors que les structures avoisinantes deviennent floues. Ce principe de visualisation en coupe par projection constitue la première expérience de l'imagerie tomographique. Bocage protège, par un brevet, son invention qui permet *d'isoler dans les tissus la région intéressante*. D'autres chercheurs contribuent également à la tomographie tel Vallebona [156] qui présente vers 1930 une découverte similaire à celle de Bocage. Vallebona proposa alors la *stratigraphie* en ajoutant un mouvement de rotation par rapport au système de Bocage [25]. Grossman [73] et Ziedses Des Plantes [165] mènent par la suite des recherches similaires et ajoutent de nouvelles techniques. Ceci donne naissance à la tomographie.

Simultanément aux développements de Bocage, vers 1917, le mathématicien autrichien, Johan Karl August Radon [126, 127], pose les premiers fondements de base de ce qui deviendra un peu plus tard la *transformée de Radon*. Sa théorie permet la reconstitution tomographique à partir de réponses partielles de faisceaux reçus à la sortie et provenant de plusieurs projections de faisceaux émis à l'entrée. La première utilisation de la transformée de Radon apparaîtra vers la fin des années cinquante. Afin d'identifier les régions solaires émettant des radiations micro-ondes, l'ingénieur australien, Ronald N. Bracewell, exploite la théorie de Radon pour la reconstruction des images à partir de signaux à travers l'espace [17, 18]. Par la suite, de nombreux travaux de recherches porteront sur les méthodes de reconstruction en tomographie [53, 96].

En 1961, le neurologue américain, W. H. Oldendorf [120, 121] fait un premier pas vers un scanner moderne. Il réalise les premières applications médicales en utilisant une source γ . Oldendorf proposa une solution pour acquérir, par rétroprojection et reconstruction, des images à partir de lumières traversant des objets composés de tissus mous. Mais ses travaux sont restés très confidentiels à cause des contrats industriels. Cependant, A. M. Cormack [51] mène ses recherches indépendamment de

Oldendorf et publie les premiers résultats portant sur des méthodes mathématiques de la tomographie. Dans son article [120], Oldendorf décrit le concept de base utilisé plus tard par Cormack [51, 52] pour développer les méthodes mathématiques de la tomographie.

La tomographie par rayons X assistée par ordinateur (encore appelée tomodesintométrie ou scanographie) fut développée par G.M. Hounsfield [83, 84]. La première machine (*scanner*) utilisable sur site clinique fut installée à Londres en 1971. Elle ne permettait d'examiner que la tête. L'exploration du corps entier fut possible à partir de 1974. La mise au point de la scanographie a été saluée comme la découverte la plus importante en radiologie depuis celle des rayons X par W. C. Roentgen en 1895. Le développement technique des scanners s'est effectué autour de deux composantes principales :

- i) Un dispositif d'émission et de détection de rayons lumineux (rayon X, rayon γ , ...), capable de tourner autour du patient pour effectuer l'acquisition des données de base encore appelées projections,
- ii) Un ensemble pour la reconstruction des images de coupes axiales à partir des projections.

À ces deux ensembles, il convient d'associer les fonctions de visualisation, de traitement, de transfert et d'archivage de signaux et d'images. Bien que complémentaire de la finalité première d'un scanner, ces fonctions ont connu ces dernières années un développement considérable. L'aspect technique du scanner a connu des progrès considérables, son principe de base est resté le même depuis 1971.

Les équations de transport jouent un rôle essentiel en tomographie. Elles permettent d'étudier le comportement de la lumière au contact d'un matériau. Dans ce manuscrit, nous nous sommes intéressés à un cadre particulier concernant la propagation de l'énergie lumineuse, qui peut être traitée dans le cadre de la théorie des équations de transports. Les conditions physiques et mathématiques d'approximation nous permettent de procéder par une approche qui débouche sur des équations aux dérivées partielles EDP dites aussi équations d'advection-diffusion. Des travaux dans ce sens ont été réalisés par plusieurs auteurs, nous citons entre autres [47, 86, 15, 115, 153, 152, 19, 79].

La reconstruction d'un signal se fait par différentes méthodes, méthodes stochastiques et méthodes déterministes. Chacune de ces deux méthodes est basée sur des outils mathématiques convenables et des théories adaptées.

La première partie de notre travail s'inscrit dans un cadre déterministe dans lequel nous nous intéresserons à la construction de signaux par résolution numérique des équations aux dérivées partielles (EDP), en particulier les équations de diffusion en milieux optiques moyennement épais. Il s'agit d'un problème direct concernant la résolution numérique de l'EDP de diffusion pour reconstruire la densité de l'hétérogénéité. Dans ce cas, nous supposons que les paramètres optiques et les fonctions sources sont connus. Nous résolvons ensuite l'EDP de diffusion où la densité lumineuse est considérée comme une fonction (ou un signal) inconnue à approcher numériquement. La méthode d'approximation que nous avons utilisée est basée sur l'approche de Galerkin par des fonctions qui figurent parmi les plus populaires :

- a) **Approximation avec maillage** : Il s'agit ici de la méthode d'approximation de Galerkin basée sur les B-splines cubiques en dimension un et sur les B-splines

tensorielles en dimension deux. La régularité et la compacité des B-splines leurs donnent des avantages algorithmiques non négligeables. Depuis leur introduction par C. de Boor [57], les fonctions B-splines ont été étudiées et utilisées par plusieurs auteurs, citons entre autres [117, 143, 20, 21, 1, 122, 105, 107, 11, 10, 71, 12, 144, 56, 82, 145, 9, 97, 146, 64].... Dans son article [58], C. de Boor introduit les fonctions B-splines tensorielles en dimension 2 ou supérieure à 2. Les B-splines figurent parmi les fonctions les plus populaires en mathématiques appliquées. Elles sont largement utilisées en modélisation et conception assistée par ordinateur (CAO). Ces fonctions ont été utilisées dans d'autres domaines comme l'analyse multirésolution et la théorie des ondelettes. Dans [101, 102], P. G. Lemarié a donné une construction des ondelettes par des B-splines. Les B-splines tensorielles possèdent des avantages algorithmiques fondamentales puisqu'elles sont à support compact et séparables. Leur caractère multiéchelle a été exploité par M. Unser dans [155].

- b) **Approximation sans maillage** : Il s'agit de la méthode d'approximation de Galerkin sans maillage construite à partir des fonctions à base radiale ou des splines bi-harmoniques de type plaque mince [7, 8]. Les fonctions à base radiale définies positives les plus utilisées sont celles à support compact qui sont les fonctions de Wendland [158], les fonctions de Wu [163] et les fonctions de Buhmann [38]. Les autres fonctions à base radiale sont les gaussiennes (Gs), les fonctions multiquadratiques (MQs) et multiquadriques inverses (IMQs) [76, 77, 78], les splines de type plaque mince (TPS) (dites en anglais Thin Plate Spline) [75, 61, 62] et les fonctions radiales sous tension (RFT) [31, 30, 28]. L'un des sujets de notre travail de thèse est l'approximation par la méthode de Galerkin sans maillage. Elle fait aussi l'objet de travaux remarquables en pleine expansion par plusieurs auteurs, citons [61, 59, 110, 65, 66, 63, 12, 139, 137, 138, 136, 135, 134, 133, 132, 70],....

L'approximation par les méthodes variationnelles de Galerkin reste un outil efficace pour les approches numériques. Nous avons utilisé de telles techniques en s'appuyant sur les fonctions B-splines et les fonctions à base radiale. Pour éviter une discrétisation en temps, nous avons proposé l'utilisation de la transformée de Fourier et son inverse.

Nous rappelons que la méthode variationnelle de Galerkin, pour la résolution numérique des EDP, consiste à trouver une solution u_h du problème variationnel $a(u_h, v) = \ell(v)$, pour toute fonction test choisie v . Cette formulation variationnelle est souvent traitée dans le cadre de l'analyse réelle où a et ℓ sont respectivement les formes bilinéaire et linéaire associées à l'EDP [35]. L'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel sont assurées par le cadre classique de la théorie de Lax-Milgram [35]. Dans notre travail, nous traitons le problème variationnel dans un cadre complexe où a et ℓ sont respectivement des formes sesquilinéaire et semi-linéaire. Une théorie de Lax-Milgram dans le cas complexe et similaire au cas réel, a été développée dans [34].

La méthode variationnelle nous conduit à résoudre un problème discret complexe de type $a(u_h, v) = \ell(v)$, pour toute fonction test choisie v . La solution approchée u_h est une fonction à valeurs complexes, dépendant de la variable fréquence ω . Pour trouver une solution dépendant de la variable du temps, nous avons utilisé la transformée de Fourier inverse. Les techniques d'intégration numérique basées sur la quadrature de Gauss-Hermite, nous ont permis d'obtenir la solution approchée en fonction du temps.

Nous avons démontré des résultats intéressants concernant l'estimation de l'erreur dans des espaces de type Sobolev non homogènes. En utilisant les conditions inf-sup liées à la coercivité de a et la continuité de ℓ ainsi que le lemme de Céa [125], nous avons majoré la différence entre la solution approchée u_h et les valeurs théoriques de la solution exacte u .

La deuxième partie de ce travail porte sur le problème de diffusion inverse. Il s'agit d'un problème inverse non-linéaire dont la non linéarité est liée aux paramètres optiques (l'indice de réfraction, les coefficients de diffusion et de l'absorption). On donne les fonctions sources et les mesures du flux lumineux reçues au bord du domaine pour reconstruire ces paramètres optiques à l'intérieur du domaine étudié. L'indice de réfraction et les coefficients de diffusion et de l'absorption sont considérés comme des fonctions inconnues à approcher numériquement en utilisant les fonctions B-splines, les splines tensorielles et les fonctions à base radiale. Du point de vue théorique, nous avons discuté certains résultats tels que la continuité et la dérivabilité, au sens de Fréchet, de l'opérateur mesurant le flux lumineux reçues aux bords. Nous avons établi la propriété lipschitzienne de la dérivée de Fréchet en fonction des paramètres optiques. Du point de vue numérique nous nous sommes intéressés au problème discret dans la base des B-splines et dans la base des fonctions radiales. Nous avons abordé la résolution du problème inverse non-linéaire par la méthode de Gauss-Newton.

Le manuscrit de cette thèse s'organise de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, nous présentons le cadre général du problème de transport. Particulièrement, nous donnerons un aperçu sur les équations de transports stationnaire et non-stationnaire dites aussi équations de transfert radiatifs ETR ou intégrro-différentielles ou encore équations de Boltzmann. Avant d'aborder le sujet fondamental de ce chapitre, nous allons donner un bref historique sur le problème de Cauchy pour les équations de transport. L'objectif de ce chapitre est d'expliquer comment les équations de transfert radiatif apparaissent en tomographie, pour décrire la loi de la dynamique à laquelle obéit la densité d'un photon lumineux [47, 86]. Les équations intégrro-différentielles sont difficiles à résoudre analytiquement et numériquement. Pour simplifier cette équation, nous avons ajouté des hypothèses de diffusion. La régularisation au bord du domaine, de telles équations, a été obtenue en imposant des conditions non homogènes de Robin modifié aux bords. Ce qui nous a permis, tout en gardant la continuité du flux entrant à travers l'interface, de rendre l'approximation numérique de ces équations de diffusion possible.

Dans le deuxième chapitre, nous allons donner en détail toutes les procédures d'approximation numériques que nous avons déjà citées auparavant. En particulier, la méthode variationnelle de Galerkin basée sur les fonctions B-splines dans le cas d'une seule variable de l'espace et sur les fonctions B-splines tensorielles dans le cas de deux variables de l'espace.

Nous aborderons dans le troisième chapitre, la méthode variationnelle de Galerkin sans maillage basée sur les fonctions à base radiale. Les fonctions radiales définies positives (DP) à support compact et les fonctions radiales conditionnellement définies positives (CDP) à support non compact seront utilisées comme noyaux d'interpolation pour construire les bases de fonctions radiales pour l'approximation. Nous avons utilisé les formules de cubature liée aux polynômes orthogonaux pour calculer numériquement les intégrales de nos formes matricielles dans la base de fonctions radiales.

Dans le quatrième chapitre de ce travail, nous nous sommes intéressés au problème inverse. Il s'agit d'un problème inverse non-linéaire dont la non-linéarité est liée aux paramètres optiques. On suppose qu'on dispose des mesures du flux lumineux aux bords du domaine étudié et des fonctions sources. On veut alors résoudre le problème inverse de façon à simuler numériquement l'indice de réfraction ainsi que les coefficients de diffusion et d'absorption. Du point de vue théorique, nous avons discuté certains résultats tels que la continuité et la dérivabilité, au sens de Fréchet, de l'opérateur mesurant le flux lumineux reçu aux bords. Nous avons établi la propriété lipschitzienne de la dérivée de Fréchet en fonction des paramètres optiques. Du point de vue numérique nous nous sommes intéressés au problème discret dans la base des B-splines et la base des fonctions radiales. En suite, nous avons abordé la résolution du problème inverse non-linéaire par la méthode de Newton-Gauss.

Une conclusion ainsi que quelques perspectives à notre travail sont données dans le dernier chapitre.

Chapitre 1

Problème de Cauchy et équations de transport

1.1 Introduction

Avant d'aborder le sujet fondamental de cette thèse, nous allons donner un bref historique concernant le problème de Cauchy de l'équation linéaire de transport et de l'équation de transfert radiatif ainsi que quelques résultats théoriques. Nous présentons le cadre général du problème de transport et celui de l'approximation de diffusion que nous traiterons dans les chapitres suivants. Les équations de transport stationnaire et non-stationnaire dites aussi équations de transfert radiatif ETR ou les équations intégral-différentielles ou encore équations de Boltzmann, décrivent la loi de la dynamique à laquelle obéit la densité d'un photon lumineux [47, 86]. Les équations intégral-différentielles sont difficiles à résoudre analytiquement à cause du membre intégral de ces équations. Pour cette raison nous utiliserons des hypothèses de diffusion pour simplifier l'équation intégral-différentielle en une équation de diffusion équivalente, obtenue comme une approximation de l'équation de transport ETR. Ce travail s'inscrit dans un cadre d'approche numérique et l'utilisation de différentes méthodes d'approximation reste l'objectif principal de notre thèse.

Pour simplifier les données, dans les chapitres suivants de ce manuscrit, on suppose que les coefficients d'absorption μ_a , de dispersion μ_{sc} et de diffusion D donnés en annexe respectivement par les relations (C.3.1), (C.4.1) et (C.7.1) ne dépendent que de la variable x de l'espace dans un domaine Ω et que ces coefficients sont des fonctions positives bornées dans l'espace $L^\infty(\Omega)$ (c.f. Annexe C). Le coefficient d'anisotropie $\vartheta \in [0, 1]$ donné par la relation (C.6.1) est supposé constant. Nous supposons aussi que le régime optique est moyennement épais à savoir que les équations de transport non-stationnaires que nous traitons sont de même type que les équations stationnaires traitées par Edward W. Larsen et *al* dans [100].

1.2 Historique

Dans cette section, nous donnons un bref historique du problème de Cauchy pour les équations de transport.

1.2.1 Équation cinétique de Boltzmann

L'équation cinétique introduite par Boltzmann est une équation de transport gouvernée par un opérateur de collision linéaire dit opérateur de Boltzmann [26]. Soit (x, v, t) un élément de $\Omega \times \mathbb{R}^d \times]t_0, t_0 + T[$, le problème consiste à trouver la densité $\Phi(x, v, t)$ solution de l'équation de transport suivante

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, v, t) + v \cdot \nabla_x \Phi(x, v, t) + \gamma_a(x) \cdot \nabla_v \Phi(x, v, t) = \mathcal{Q}(\Phi, \Phi)(x, v, t) \quad (1.2.1)$$

avec

$$\mathcal{Q}(\Phi, \Phi)(x, v, t) = \int_{\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}^d} (\Phi(x, v'_1, t) \Phi(x, v', t) - \Phi(x, v_1, t) \Phi(x, v, t)) B(v_1 - v, s) ds dv_1,$$

$v'_1 = v_1 + s^T(v_1 - v)s$ et $v' = v + s^T(v_1 - v)s$, pour tout $(s, v_1, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

La fonction $\gamma_a(x)$ représente l'accélération exercée par les forces extérieures à la position x et v présente la vitesse. L'opérateur quadratique de Boltzmann \mathcal{Q} s'étend par polarisation en un opérateur bilinéaire et symétrique [26, 42].

La condition initiale donnée à l'instant $t = t_0$ est

$$\Phi(x, v, t_0) = \Phi_{t_0}(x, v) \geq 0 \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^d. \quad (1.2.2)$$

Par exemple, pour $t_0 = 0$ la condition initiale est donnée par

$$\Phi_0(x, v) = E_0 e^{-\frac{1}{k_B T_e} (\frac{1}{2} m \|v\|^2 + U(x))} \leq M_0(v) = e^{-a_0 \|v\|^2 + b_0}, \quad \text{p.p. } (x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^d, \quad (1.2.3)$$

avec $a_0 > 0$, $b_0 \in \mathbb{R}$, E_0 est une constante, m est la masse, k_B est la constante de Boltzmann, T_e est la température absolue, $U(x)$ est le potentiel des forces extérieures et $\frac{1}{2} m \|v\|^2$ est l'énergie cinétique [42]. Le noyau de Boltzmann B est une fonction localement intégrable, positive et définie sur $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}^d$.

Le principe de la dynamique d'invariance des collisions physiques implique que le noyau de Boltzmann a l'expression donnée par

$$B(v_1 - v, s) = |v_1 - v|^\beta \sigma(|v_1 - v|, |\zeta_c|), \quad \zeta_c = \frac{s^T(v_1 - v)}{|v_1 - v|} \quad (1.2.4)$$

où $0 < \beta \leq 1$ est une constante et σ est une fonction bornée. Il est possible de voir qu'il existe une constante $0 \leq C < \infty$ indépendante de s telle que le noyau de Boltzmann B satisfait la condition [69]

$$0 < B(v_1 - v, s) \leq C(1 + |v_1 - v|^2) \quad \text{p.p.} \quad (1.2.5)$$

Ce problème a été largement étudié au cours de ces dernières années. Par exemple, Gamba et al [67], ont utilisé un noyau B satisfaisant les hypothèses suivantes :

$$B(v_1 - v, s) = |v_1 - v|^\beta H(\cos(\vartheta)), \quad \cos(\vartheta) = \frac{s^T(v_1 - v)}{|v_1 - v|}, \quad (1.2.6)$$

où H est une fonction positive sur $[-1, 1]$ telle que $z \mapsto H(z) + H(-z)$ est croissante sur $[0, 1]$ et

$$0 \leq H(\cos(\vartheta)) \sin^\alpha(\vartheta) \leq C, \quad \vartheta \in (0, \pi). \quad (1.2.7)$$

Gamba et al ont démontré que pour $\Omega = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ et $\Phi \in C([0, T]; L^1(\Omega \times \mathbb{R}^d))$ une solution positive de l'équation de Boltzmann (1.2.1) où $\gamma_a(x) = 0$, avec la condition initiale (1.2.3), et sous des hypothèses supplémentaires sur la solution $\Phi(x, v, t)$ données par

- i) $\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x, v, t) dv \geq \rho_0, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T],$
- ii) $\sup_{(x, t) \in \Omega \times [0, T]} \|\Phi(x, \cdot, t)\|_{L^\infty(dv)} \leq C_0,$
- iii) $\sup_{(x, t) \in \Omega \times [0, T]} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x, v, t) e^{a_1 \|v\|^2 - b_1} dv \leq C_1,$

où $0 < a_1 < a_0$, b_1 , ρ_0 , C_0 et C_1 sont constantes. Alors pour tout $0 < a < a_1$, pour tout $t \in [0, T]$ on a

$$\Phi(x, v, t) \leq e^{-a\|v\|^2 + b}, \quad \text{p. p sur } \Omega \times \mathbb{R}^d. \quad (1.2.8)$$

La constante b dépend seulement de a , a_0 , b_0 , a_1 , b_1 , ρ_0 , C_0 et C_1 .

L'équation de Boltzmann a été étudiée par plusieurs auteurs [41, 42, 55, 67, 69, 111, 124, 157].... De l'équation de Boltzmann dérive d'autres équations comme les équations cinétiques de la dynamique des fluides, les équations de Navier-Stokes, les équations de Stokes et les équations d'Euler [36, 37, 69, 72].

1.2.2 Problème de Cauchy pour l'équation de transport

Dans ce paragraphe, nous donnons une petite introduction historique du problème de Cauchy pour l'équation de transport, dite aussi équation linéaire de transport. Nous citons comme références générales, le livre de R. Dautray et J. L. Lions [55] ainsi que la note de J. Hejtmanek [80]. Pour l'existence, l'unicité ainsi que la régularité d'une éventuelle solution de ce type d'équations, nous référons à [55, 80, 93]. Il est à noter que le théorème du point fixe, donne lieu à la représentation intégrale de l'équation de transport et joue un rôle essentiel pour l'existence et l'unicité de la solution (c.f. [42]). On considère les ensembles Γ_+ , Γ_- et Γ_0 définis par

$$\begin{aligned} \Gamma_+ &= \left\{ (\xi, v, t) \in \partial\Omega \times V \times [t_0, t_0 + T] : n(\xi)^T v > 0 \right\}, \\ \Gamma_- &= \left\{ (\xi, v, t) \in \partial\Omega \times V \times [t_0, t_0 + T] : n(\xi)^T v < 0 \right\}, \\ \Gamma_0 &= \left\{ (\xi, v, t) \in \partial\Omega \times V \times [t_0, t_0 + T] : n(\xi)^T v = 0 \right\}. \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

Soient $d\sigma$ l'élément de mesure de surface sur $\partial\Omega$, $n(\xi)$ la normale extérieure à $\partial\Omega$ au point ξ et $(x, v', v) \mapsto \eta(x, v', v)$ le noyau de collision. On définit par \mathbb{T} l'opérateur suivant

$$\mathbb{T}\Phi = v \cdot \nabla \Phi(x, v, t) + \sigma_a(x, v) \Phi(x, v, t) - \int_V \Phi(x, v', t) \eta(x, v', v) dv',$$

où $(x, v, t) \mapsto \Phi(x, v, t)$ est la densité de particules.

Nous comprenons par le problème de Cauchy pour l'équation de transport linéaire, le problème suivant : *trouver la densité Φ solution de l'équation de l'évolution*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, v, t) + \mathbb{T}\Phi(x, v, t) = q(x, v, t), \quad \text{dans } \Omega \times V \times]t_0, t_0 + \mathbb{T}[, \quad (1.2.10)$$

avec la condition initiale donnée pour $t = t_0$ par

$$\Phi(x, v, t_0) = \Phi_{t_0}(x, v) \quad \text{dans } \Omega \times V, \quad (1.2.11)$$

et la condition au bord

$$\Phi(x, v, t) = \Phi_\delta(x, v, t) \quad \text{sur } \Gamma_-, \quad (1.2.12)$$

où $(x, v, t) \mapsto q(x, v, t)$ est une fonction source et Φ_δ est une fonction donnée sur Γ_- .

Dans la pratique, le choix le plus considéré est celui du noyau $\eta(x, v', v)$ pour lequel il existe une fonction $\tilde{\eta}$ représentative de la fonction η par

$$\eta(x, v', v) = \tilde{\eta}(x, v'^T v),$$

où $v'^T v = \|v\|^2 \cos(\theta)$ avec $\widehat{(v', v)} \equiv \theta [2\pi]$ est l'angle entre v et v' .

Il est évident que si la vitesse v de norme $\|v\|$ est une constante alors l'ensemble V est la sphère de centre l'origine O et de rayon $R = \|v\|$, notée encore

$$\mathbb{S}_R^{d-1} = \{v \in \mathbb{R}^d, \quad \|v\| = R\}.$$

Dans la pratique, les exemples les plus importants sont ceux où l'ensemble V est la boule fermée $V = B(0, R)$ où encore la couronne $V = C_{r,R} := \{v \in \mathbb{R}^d, r \leq \|v\| \leq R\}$. Dans la littérature, nous référons en particulier à deux cas spéciaux de problèmes de Cauchy d'équation linéaire de transport (c.f., par exemple, Hejtmanek [80] ou Hejtmanek [92]).

Remarque 1.2.1. *On suppose que le domaine Ω est un convexe dans \mathbb{R}^d , un exemple de problème de Cauchy important est celui de l'équation (1.2.10) avec un terme source $q(x, v, t) = 0$, une donnée $\Phi_\delta(x, v, t) = 0$ pour tout $(x, v, t) \in \Omega \times V \times]t_0, t_0 + \mathbb{T}[$ et une donnée initiale Φ_{t_0} supposée connue.*

Il est possible d'aller plus loin pour un traitement général du problème de Cauchy pour l'équation linéaire de transport (1.2.10)-(1.2.12). Par exemple, on peut remplacer l'espace (V, dv) où dv est la mesure de Lebesgue sur V par l'espace $(V, d\mu(v))$ où l'élément $d\mu(v)$ est une mesure de Radon sur \mathbb{R}^d ($d \geq 2$) à support compact, l'ensemble V est un compact de \mathbb{R}^d telle que $\text{Supp}(\mu) = V$ et $d\sigma d\mu dt(\Gamma_0) = 0$. On peut alors étudier le problème de transport (1.2.10) homogène si $\Phi_\delta = 0$ et non homogène si $\Phi_\delta \neq 0$. Nous renvoyons, par exemple, à Boulanoua [32, 33], Cessenat [43, 44] ou à Dautray et Lions [55] pour une description générale de ces thèmes de travaux.

Pour $p \in [1, \infty[$, l'espace $L^p(\Omega \times V)$ des fonctions Φ telles que :

$$\|\Phi\|_{L^p(\Omega \times V)} = \left(\int_{\Omega \times V} |\Phi(x, v)|^p dx d\mu(v) \right)^{1/p} < \infty,$$

est un espace de Banach. De la même façon, on note $L^p(\Omega \times V \times [t_0, t_0 + T])$ l'espace des fonctions Φ telles que

$$\|\Phi\|_{L^p(\Omega \times V \times [t_0, t_0 + T])} = \left(\int_{t_0}^{t_0+T} \int_{\Omega \times V} |\Phi(x, v, t)|^p dx d\mu(v) dt \right)^{1/p} < \infty.$$

Nous pouvons admettre l'existence d'une solution de (1.2.10)-(1.2.11)-(1.2.12) dans l'espace $L^p(\Omega \times V \times [t_0, t_0 + T])$.

Du point de vue physique, le choix naturel de l'espace $L^1(\Omega \times V \times [t_0, t_0 + T])$ comme espace de solution est dû à l'interprétation physique du nombre (c.f. [115])

$$\mathcal{N}(t) = \int_{\Omega \times V} |\Phi(x, v, t)| dx d\mu(v),$$

comme étant le nombre de particules à l'instant $t \in [t_0, t_0 + T]$.

On considère l'opérateur \mathcal{L} défini par :

$$\mathcal{L} := \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla,$$

dont le domaine $\mathbb{D}^{p,\delta}$ donné par

$$\mathbb{D}^{p,\delta} = \{ \Phi \in L^p(\Omega \times V \times [t_0, t_0 + T]), \mathcal{L}\Phi \in L^p(\Omega \times V \times [t_0, t_0 + T]), \Phi_{t_0} \in L^p(\Omega \times V), \Phi_\delta \in L^p(\Gamma_-, |v^T n| d\sigma d\mu dt) \}. \quad (1.2.13)$$

Pour l'étude de l'existence, l'unicité et la régularité L^p d'une solution Φ du problème (1.2.10)-(1.2.11)-(1.2.12), nous référons à M. Boulanouar [33], R. Dautray et J.L.Lions [55] et M. Cessenat [43, 44].

Pour une donnée Φ_δ telle que

$$\Phi_\delta \in L^p(\Gamma_-, |v^T n| d\sigma d\mu dt),$$

il a été prouvé qu'il existe une solution au problème (1.2.10)-(1.2.11)-(1.2.12) dans le cas homogène ($\Phi_\delta = 0$) mais aussi dans le cas non homogène ($\Phi_\delta \neq 0$) (c.f. R. Dautray et J.L.Lions [55]) :

On suppose que l'on dispose des hypothèses suivantes :

- i) Le coefficient $\sigma_a(x, v) \geq 0$ représente le profil des mesures d'absorption des particules au point (x, v) , lié au changement de la vitesse v et $\sigma_a \in L^\infty(\Omega \times V)$.
- ii) Le noyau de collision $\eta(x, v', v) \geq 0$ lié au nombre de particules qui change de vitesse (de v' vers v) à $d\mu(v)$ près, au point x vérifiant :

$$\eta(x, v', \cdot) \in L^1(V, d\mu) \quad \text{et} \quad \eta(x, \cdot, v) \in L^1(V, d\mu).$$

1. Pour des données q , Φ_{t_0} et Φ_δ vérifiant les conditions suivantes

- i) $q \in L^p(\Omega \times V \times [t_0, t_0 + T])$, $\Phi_{t_0} \in L^p(\Omega \times V)$, pour $p \in]1, +\infty[$,
- ii) $\Phi_\delta(x, v, t) = 0$, $\forall (x, v, t) \in \Gamma_-$.

Alors, le problème (1.2.10)-(1.2.11)-(1.2.12) possède une unique solution Φ au sens des distributions dans l'espace $\mathbb{D}^{p,\delta}$. Il s'agit, en fait, d'une solution Φ dans l'espace $C([t_0, t_0 + T], L^p(\Omega \times V))$.

2. Pour des données Φ_{t_0} et Φ_δ vérifiant

i) $v \cdot \nabla \Phi_{t_0} \in L^p(\Omega \times V)$, $\Phi_{t_0}(x, v) = 0$, $\forall (x, v) \in \Omega \times V$, pour $p \in]1, +\infty[$,

ii) $\Phi_\delta(x, v, t) = 0$, $\forall (x, v) \in \partial\Omega \times V$,

si le terme source $q(x, v, t) > 0$, pour tout $(x, v, t) \in \Omega \times V \times [t_0, t_0 + T]$ et que

$$q \in C^1([t_0, t_0 + T], L^p(\Omega \times V)),$$

alors, il existe une solution Φ du problème (1.2.10)-(1.2.11)-(1.2.12) vérifiant les propriétés suivantes :

a) $\Phi \in C^1([t_0, t_0 + T], L^p(\Omega \times V))$,

b) $v \cdot \nabla \Phi \in C([t_0, t_0 + T], L^p(\Omega \times V))$,

c) $\forall t \in [t_0, t_0 + T]$, $\Phi(\cdot, \cdot, t) \equiv 0$ sur $\partial\Omega \times V$.

De plus, si Φ_δ , Φ_{t_0} et q sont positives, alors la solution Φ du problème (1.2.10)-(1.2.11)-(1.2.12), est positive.

1.3 Équation de transfert radiative ETR

1.3.1 Équation de transport non-stationnaire

L'intensité spécifique ou la radiance, notée par $\Phi(x, s, t)$, est le nombre de photon par unité de volume au point $(x, s, t) \in \Omega \times \mathbb{S}^{d-1} \times [t_0, t_0 + T]$. La fonction source $(x, s, t) \mapsto q(x, s, t)$ est une fonction intégrable sur $\Omega \times \mathbb{S}^{d-1} \times [t_0, t_0 + T]$. Dans la pratique, la fonction q est supposée comme une distribution de Dirac, donnée par

$$q(x, s, t) = E \delta(t - t_s) \delta(s) \delta(x - x_s), \quad (1.3.1)$$

où E est l'amplitude de la source lumineuse et δ est la distribution de Dirac en 0.

La propagation de la lumière à travers le tissu suit une loi dynamique décrite par l'équation de transport intégro-différentielle de Boltzmann appelée aussi l'équation de transfert radiative ETR [15, 47, 55, 86, 115, 153], donnée pour tout $(x, s, t) \in \Omega \times \mathbb{S}^{d-1} \times [t_0, t_0 + T]$ par

$$\frac{1}{c(x)} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, s, t) + s \cdot \nabla \Phi(x, s, t) + \mu_{tr}(x) \Phi(x, s, t) = \frac{\mu_{sc}(x)}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi(x, s', t) \eta(s, s') ds' + q(x, s, t). \quad (1.3.2)$$

La donnée initiale est donnée par

$$\Phi(x, s, t_0) = \Phi_{t_0}(x, s) \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{S}^{d-1}. \quad (1.3.3)$$

La condition au bord est donnée par

$$\Phi(x, s, t) = \Phi_\delta(x, s, t) \quad \text{sur} \quad \Gamma_-, \quad (1.3.4)$$

où l'ensemble Γ_- est tel que $V = \mathbb{S}^{d-1}$ dans (1.2.9).

Le coefficient de transport μ_{tr} , qui regroupe les pertes d'énergie liées à l'absorption et à la diffusion, donné par la relation (voir l'annexe C.4)

$$\mu_{tr}(x) = \mu_a(x) + \mu_{sc}(x), \quad (1.3.5)$$

et le coefficient de dispersion μ_{sc} sont des fonctions réelles, positives et bornées.

La vitesse de la lumière dans le domaine est exprimée par $c(x) = c_0/\nu(x)$, où $\nu(x)$ est l'indice de réfraction du milieu [118] et c_0 est la vitesse de la lumière dans le vide. Pour traiter le problème de façon académique, on peut prendre $c_0 \in]0, +\infty[$ et $\nu(x)$ un potentiel d'évolution quelconque. On suppose que η satisfait la propriété de normalisation suivante :

$$\frac{1}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \eta(s, s') ds = 1. \quad (1.3.6)$$

La fonction de phase $(s, s') \mapsto \eta(s, s')$ liée à la dispersion de la lumière est une fonction réelle décrivant la densité de probabilité pour qu'un photon se disperse d'une direction s vers une autre direction s' à ds' près. La quantité $\eta(s, s') ds'$ représente la proportion d'énergie liée à la diffusion de la lumière se propageant dans la direction s' à ds' près [47, 86]. La fonction η satisfait la propriété de normalisation (1.3.6) qui exprime la conservation de particules dans des événements de dispersion purs. Si le domaine est isotrope, alors il existe une fonction $\tilde{\eta} : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que la fonction de phase satisfait la condition suivante

$$\eta(s, s') = \tilde{\eta}(s^T s'). \quad (1.3.7)$$

Par la suite, on suppose qu'on travaille dans un domaine isotrope. Dans ce cas, la fonction de phase η est bien définie et satisfait les conditions (1.3.6) et (1.3.7). La fonction $(s, s') \mapsto \frac{1}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \tilde{\eta}(s^T s')$ est donc une densité de probabilité à valeurs réelles.

Définition 1.3.1. Le couple (μ_{tr}, μ_{sc}) , formé par les paramètres μ_{tr} et μ_{sc} , est dit admissible s'il satisfait les conditions suivantes :

$$(\mu_{tr}, \mu_{sc}) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \quad \text{avec} \quad \mu_{tr}(x) > \mu_{sc}(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega. \quad (1.3.8)$$

La différence $\mu_a := \mu_{tr} - \mu_{sc}$ est le coefficient d'absorption qui représente le potentiel de l'énergie perdue au moment de l'interaction entre la lumière et le domaine étudié.

Si le couple (μ_{tr}, μ_{sc}) est admissible alors μ_a est une fonction à valeurs réelles, positive et bornée, on a alors $\mu_a \in L^\infty(\Omega)$.

Dans le cadre de la théorie des équations de transport, on cite le théorème d'existence suivant (c.f. [55, 98]).

Théorème 1.3.1. Pour $q \in L^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{S}^{d-1} \times [t_0, t_0 + T])$, $\Phi_\delta \in L^1(\Gamma_-)$ et $\Phi_{t_0} \in L^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{S}^{d-1})$, alors il existe une solution Φ du problème (1.3.2)-(1.3.3)-(1.3.4)-(1.3.6).

De plus, l'intensité spécifique Φ est dans l'espace $L^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{S}^{d-1} \times [t_0, t_0 + T])$.

Remarque 1.3.1. Dans le cas où $\mu_{tr}(x) = \mu_a(x) = 0$ et $q(x, s, t) = 0$ pour $(x, s, t) \in \Omega \times \mathbb{S}^{d-1} \times [t_0, t_0 + T]$, l'équation de transport (1.3.2) devient

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, s, t) + v \cdot \nabla \Phi(x, s, t) = 0, \quad v = c s. \quad (1.3.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Phi(x(t), s, t)) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, s, t) + \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \nabla \Phi(x, s, t) = 0, \quad (1.3.10)$$

où $\frac{\partial x}{\partial t} = v = c s$. Il est facile de vérifier que si l'on considère la condition initiale $\Phi(x, s, t_0) = \Phi_{t_0}(x, s)$, alors la solution de l'équation (1.3.9) est analytiquement exprimée sous la forme suivante

$$\Phi(x, s, t) = \Phi_{t_0}(x - (t - t_0)c s, s).$$

Le problème de transport (1.3.9) est similaire au problème rencontré dans le cas d'un flot optique qui est un problème mal posé sans condition initiale imposée, et la vitesse de la luminosité est donnée par $v = c s$.

Le théorème (1.3.1) prouve l'existence de la solution de l'équation ETR. La proposition suivante nous donne des informations supplémentaires concernant l'unicité et la positivité de la solution Φ .

Proposition 1.3.1. *On suppose que*

- i) *La fonction source $q \in L^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{S}^{d-1} \times [t_0, t_0 + T])$ est positive et bornée.*
- ii) *La fonction de phase η est positive et satisfait la condition (1.3.6).*
- iii) *Le couple (μ_{tr}, μ_{sc}) est admissible.*

Alors, il existe une unique solution positive du problème (1.3.2)-(1.3.3)-(1.3.4)-(1.3.6). De plus, pour $t \geq t_0$, la solution Φ satisfait l'inégalité suivante

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\Omega} \Phi(x, s, t) dx ds \leq \|q\|_{L^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{S}^{d-1} \times [t_0, t_0 + T])} e^{(t-t_0)\|\mu_{sc}\|_{\infty}}. \quad (1.3.11)$$

Démonstration. L'unicité de la solution est une conséquence immédiate de construction récursive basée sur la série de Neumann du problème de transport (1.3.2)-(1.3.3)-(1.3.4)-(1.3.6), voir [42] pour plus détails. On suppose que les fonctions q , μ_{tr} et μ_{sc} se prolongent par des fonctions nulles à l'extérieur de l'ensemble $\overline{\Omega} \times \mathbb{S}^{d-1} \times [t_0, t_0 + T]$. Pour toute fonction $g \in L^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{S}^{d-1} \times [t_0, t_0 + T])$, on définit l'opérateur K par

$$(Kg)(x, s, t) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \exp\left(-\int_{t'}^t \mu_{tr}(x + (\tau - t)s) d\tau\right) \mu_{sc}(x + (t' - t)s) \\ \times \eta(s, s') g(x + (t' - t)s, s', t') ds' dt'.$$

La série de Neumann est définie par le schéma suivant

$$\Phi_0(x, s, t) = \int_{t_0}^t q(x + (\zeta - t)s, s, \zeta) \exp\left(-\int_{\zeta}^t \mu_{tr}(x + (\tau - t)s) d\tau\right) d\zeta, \quad (1.3.12)$$

$$\Phi_j(x, s, t) = (K\Phi_{j-1})(x, s, t), \quad j \geq 1.$$

On a

$$0 \leq \Phi_0(x, s, t) \leq \int_{t_0}^{t_0+T} q(x + (\zeta - t)s, s, \zeta) d\zeta \leq M < \infty.$$

où M est une constante ne dépendant pas du temps.

Pour $j = 1$, on a

$$0 \leq \Phi_1(x, s, t) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \exp\left(-\int_{t'}^t \mu_{tr}(x + (\tau - t)s) d\tau\right) \mu_{sc}(x + (t' - t)s) \\ \times \eta(s, s') \Phi_0(x + (t' - t)s, s', t') ds' dt' \leq M \|\mu_{sc}\|_{\infty} (t - t_0).$$

On continue les itérations pour $j \geq 2$, alors on obtient

$$0 \leq \Phi_j(x, s, t) \leq M \|\mu_{sc}\|_\infty^j \frac{(t-t_0)^j}{j!}.$$

La série de terme générale $\beta_j = \|\mu_{sc}\|_\infty^j \frac{(t-t_0)^j}{j!}$ converge et on a

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|\mu_{sc}\|_\infty^j \frac{(t-t_0)^j}{j!} = e^{\|\mu_{sc}\|_\infty(t-t_0)}, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T].$$

Donc, la série de Neumann converge simplement. Par construction

$$\Phi(x, s, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_j(x, s, t). \quad (1.3.13)$$

est la solution du problème (1.3.2)-(1.3.3)-(1.3.4)-(1.3.6).

Comme $q(x, s, t) \geq 0$, pour tout $(x, s, t) \in \Omega \times \mathbb{S}^{d-1} \times [t_0, t_0 + T]$, alors $\Phi_0(x, s, t) \geq 0$. Par récurrence, pour tout $j \in \mathbb{N}$ on a $\Phi_j(x, s, t) \geq 0$, pour tout $(x, s, t) \in \Omega \times \mathbb{S}^{d-1} \times [t_0, t_0 + T]$. D'où $\Phi(x, s) \geq 0$ pour tout $(x, s, t) \in \Omega \times \mathbb{S}^{d-1} \times [t_0, t_0 + T]$.

En intégrant la condition initiale Φ_0 sur l'ensemble $\Omega \times \mathbb{S}^{d-1}$ et en utilisant le fait que la fonction $q \in L^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{S}^{d-1} \times [t_0, t_0 + T])$, on obtient l'estimation suivante :

$$0 \leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\Omega} \Phi_0(x, s, t) dx ds \leq \|q\|_{L^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{S}^{d-1} \times [t_0, t_0 + T])}.$$

Par une méthode d'intégration similaire du terme général Φ_j de la série de Neumann et d'après la condition (1.3.6) et le fait que $q \in L^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{S}^{d-1} \times [t_0, t_0 + T])$, on a

$$0 \leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\Omega} \Phi_j(x, s, t) dx ds \leq \|q\|_{L^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{S}^{d-1} \times [t_0, t_0 + T])} \frac{(t-t_0)^j \|\mu_{sc}\|_\infty^j}{j!},$$

pour chaque itération $j \geq 0$.

Comme la série de terme général $\alpha_j = \frac{(t-t_0)^j \|\mu_{sc}\|_\infty^j}{j!}$ converge alors on a la convergence de la série

$$\sum_{j=0}^{\infty} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\Omega} \Phi_j(x, s, t) dx ds. \quad (1.3.14)$$

D'après (1.3.13) et (1.3.14), alors on peut intervertir les signes \int et \sum , donc on a

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\Omega} \Phi(x, s, t) dx ds = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\Omega} \Phi_j(x, s, t) dx ds \leq \|q\|_{L^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{S}^{d-1} \times [t_0, t_0 + T])} e^{(t-t_0)\|\mu_{sc}\|_\infty},$$

puisque $e^{(t-t_0)\|\mu_{sc}\|_\infty} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^j \|\mu_{sc}\|_\infty^j}{j!}$. □

1.3.2 Équation de transport stationnaire

L'intensité spécifique où la radiance, notée par $\Phi(x, s)$, est le nombre de photon par unité de volume au point $(x, s) \in \Omega \times \mathbb{S}^{d-1}$. La fonction source $q(x, s)$ est supposée positive et intégrable sur $\Omega \times \mathbb{S}^{d-1}$. La propagation de la lumière à travers les tissus suit l'équation intégrô-différentielle de Boltzmann dite aussi l'équation de transport stationnaire (ETR) [15, 115, 153], pour tout $(x, s) \in \Omega \times \mathbb{S}^{d-1}$, on a

$$s \cdot \nabla \Phi(x, s) + \mu_{tr}(x) \Phi(x, s) = \frac{\mu_{sc}(x)}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi(x, s') \eta(s, s') ds' + q(x, s), \quad (1.3.15)$$

la condition aux bords

$$\Phi(x, s) = \Phi_\delta(x, s) \quad \text{sur} \quad \tilde{\Gamma}_-. \quad (1.3.16)$$

Remarque 1.3.2. *Il existe plusieurs modalités pour construire un signal à partir de l'équation de transport ETR stationnaire (1.3.15)-(1.3.16). Ceci est relative au choix du modèle utilisé. Par exemple, si le domaine est transparent, ce qui est équivalent au fait que $\mu_a \neq 0$, $\mu_{sc} = 0$ et $q = 0$, alors l'équation (1.3.15) devient une équation de Beer-Lambert*

$$s \cdot \nabla \Phi(x, s) + \mu_a(x) \Phi(x, s) = 0.$$

On a, dans ce cas, une solution de type

$$\Phi(x, s) = \Phi(x_0, s) \exp\left(-\int_0^1 \mu_a(x_0 + \tau(x - x_0)) d\tau\right),$$

où $\Phi(x_0, s)$ est l'intensité de saisie à x_0 . Ce système a été étudié dans [42, 160]. D'une façon similaire, si $\mu_a = \mu_{sc} = 0$ et la fonction source $q \neq 0$ est isotrope, ce qui signifie l'invariance de la source en fonction de la direction de propagation du rayon lumineux, alors l'équation stationnaire (1.3.15) s'écrit sous la forme

$$s \cdot \nabla \Phi(x, s) = q(x, s), \quad \|\nabla x\|_s := \nabla x.$$

La solution de cette équation s'écrit ainsi

$$\Phi(x, s) = \int_0^1 q(x_0 + \tau(x - x_0), s) d\tau.$$

Proposition 1.3.2. *On suppose que*

- i) *La fonction source $q \in L^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{S}^{d-1})$ est positive et bornée.*
- ii) *La fonction de phase η est positive et satisfait la condition (1.3.6).*
- ii) *Le couple (μ_{tr}, μ_{sc}) est admissible.*

Alors il existe une unique solution positive du problème (1.3.6)-(1.3.15)-(1.3.16) satisfaisant l'inégalité suivante

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\Omega} \Phi(x, s) dx ds < \|q\|_{L^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{S}^{d-1})} e^{\|\mu_{sc}\|_\infty}. \quad (1.3.17)$$

Démonstration. D'une façon similaire à la démonstration de la proposition 1.3.1, on construit une solution (1.3.6)-(1.3.15)-(1.3.16) en utilisant la suite récursive de Neumann comme dans [42]. On suppose que les fonctions q , μ_{tr} et μ_{sc} se prolongent par des fonctions nulles à l'extérieur du domaine $\Omega \times \mathbb{S}^{d-1}$.

Soit $\varepsilon \in [0, 1]$, pour toute fonction $g \in L^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{S}^{d-1})$, on définit l'opérateur K par

$$(Kg)(x, s) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mu_{sc}(x_0 + \tau(x - x_0)) \exp\left(-\int_0^\tau \mu_{tr}(x_0 + \zeta(x - x_0)) d\zeta\right) \\ \times g(x_0 + \tau(x - x_0), s') \eta(s, s') ds' d\tau.$$

On définit la série de Neumann donnée par le schéma suivant

$$\Phi_0(x, s) = \int_0^\varepsilon q(x_0 + \tau(x - x_0), s) \exp\left(-\int_0^\tau \mu_{tr}(x_0 + \zeta(x - x_0)) d\zeta\right) d\tau, \quad (1.3.18)$$

$$\Phi_j(x, s) = (K\Phi_{j-1})(x, s), \quad j \geq 1.$$

On a

$$0 \leq \Phi_0(x, s) \leq \int_0^1 q(x_0 + \tau(x - x_0), s) d\tau \leq M < \infty.$$

où M est une constante.

Pour $j = 1$, on a

$$0 \leq \Phi_1(x, s) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \exp\left(-\int_0^\tau \mu_{tr}(x_0 + \zeta(x - x_0)) d\zeta\right) \mu_{sc}(x_0 + \tau(x - x_0)) \\ \times \eta(s, s') \Phi_0(x_0 + \tau(x - x_0), s') ds' d\tau \leq M \|\mu_{sc}\|_\infty \varepsilon,$$

$$0 \leq \Phi_1(x, s) \leq M \|\mu_{sc}\|_\infty < \infty.$$

On continue les itérations pour $j \geq 2$, alors on obtient

$$0 \leq \Phi_j(x, s) \leq M \|\mu_{sc}\|_\infty^j \frac{\varepsilon^j}{j!} \leq M \frac{\|\mu_{sc}\|_\infty^j}{j!}, \quad \forall \varepsilon \in [0, 1].$$

La série de terme générale $\beta_j = \frac{\|\mu_{sc}\|_\infty^j}{j!}$ converge et on a

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\|\mu_{sc}\|_\infty^j}{j!} = e^{\|\mu_{sc}\|_\infty}.$$

D'où la série de Neumann converge simplement. Par construction

$$\Phi(x, s) = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_j(x, s), \quad (1.3.19)$$

est la solution unique du problème (1.3.6)-(1.3.15)-(1.3.16).

Comme $q(x, s) \geq 0$ alors $\Phi_0(x, s) \geq 0$, pour tout $(x, s) \in \Omega \times \mathbb{S}^{d-1}$. Par récurrence, pour tout $j \in \mathbb{N}$ on a $\Phi_j(x, s) \geq 0$, pour tout $(x, s) \in \Omega \times \mathbb{S}^{d-1}$.

D'où $\Phi(x, s) \geq 0$ pour tout $(x, s) \in \Omega \times \mathbb{S}^{d-1}$.

Par intégration sur $\Omega \times \mathbb{S}^{d-1}$, on trouve les estimations

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\Omega} \Phi_0(x, s) dx ds &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\Omega} \int_0^\varepsilon q(x_0 + \tau(x - x_0), s) \\ &\quad \times \exp\left(-\int_0^\tau \mu_{\text{tr}}(x_0 + \zeta(x - x_0)) d\zeta\right) d\tau dx ds \\ &\leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\Omega} q(x, s) dx ds = \|q\|_{L^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{S}^{d-1})}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\Omega} \Phi_1(x, s) dx ds &= \frac{1}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mu_{sc}(x_0 + \tau(x - x_0)) \exp\left(-\int_0^\tau \mu_{\text{tr}}(x_0 + \zeta(x - x_0)) d\zeta\right) \\ &\quad \times \eta(s, s') \Phi_0(x_0 + \tau(x - x_0), s') ds' d\tau dx ds \\ &\leq \|\mu_{sc}\|_\infty \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\Omega} \Phi_0(x_0 + \tau(x - x_0), s') \underbrace{\frac{1}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \eta(s, s') ds\right)}_{=1} dx ds' \\ &\leq \|q\|_{L^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{S}^{d-1})} \|\mu_{sc}\|_\infty. \end{aligned}$$

En utilisant la procédure d'intégration par récurrence et d'après (1.3.6) et (1.3.19), on obtient

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\Omega} \Phi_j(x, s) dx ds \leq \|q\|_{L^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{S}^{d-1})} \frac{\|\mu_{sc}\|_\infty^j}{j!}, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

La série de terme générale $\alpha_j = \frac{\|\mu_{sc}\|_\infty^j}{j!}$ converge et on a

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\|\mu_{sc}\|_\infty^j}{j!} = e^{\|\mu_{sc}\|_\infty}.$$

Alors on a la convergence de la série

$$\sum_{j=0}^{\infty} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\Omega} \Phi_j(x, s) dx ds. \quad (1.3.20)$$

D'après (1.3.19) et (1.3.20), alors on peut intervertir les signes \int et \sum , donc on a

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\Omega} \Phi(x, s) dx ds = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\Omega} \Phi_j(x, s) dx ds \leq \|q\|_{L^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{S}^{d-1})} e^{\|\mu_{sc}\|_\infty}.$$

□

En général, pour une dimension supérieure de l'espace, on ne connaît pas la solution exacte de l'équation ETR. C'est pour cette raison que l'équation de transport intégro-différentielle de Boltzmann est souvent réduite à une équation de diffusion en faisant appel à la théorie de l'approximation de diffusion. Cette théorie est basée sur des hypothèses supplémentaires concernant la fonction $(x, s, t) \mapsto \Phi(x, s, t)$.

1.4 Théorie de l'approximation de diffusion

Soit $\gamma : \partial\Omega \rightarrow [0, +\infty[$ une fonction positive bornée liée à l'indice de réfraction à proximité du bord $\partial\Omega$. La fonction $\gamma \in L^\infty(\partial\Omega)$ s'appelle la longueur d'extrapolation au bord [54]. Soit $\tilde{\gamma} : \bar{\Omega} \rightarrow [0, +\infty[$ l'extension de la fonction γ sur la fermeture $\bar{\Omega}$ de Ω telle que $\tilde{\gamma}(x) \neq 0$ pour tout $x \in \Omega$. Soit $\tilde{\beta} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie comme suit

$$\tilde{\beta}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tilde{\gamma}(x) = 0 \\ \frac{1}{\tilde{\gamma}(x)} & \text{si } \tilde{\gamma}(x) > 0. \end{cases} \quad (1.4.1)$$

La restriction β au bord $\partial\Omega$ de la fonction $\tilde{\beta}$ regroupe les conditions aux bords de Dirichlet ($\beta = 0$) et celles de Robin ($\beta \neq 0$) simultanément. Cette fonction sera traitée dans les sections suivantes de ce travail.

Le moment de l'intensité spécifique Φ d'ordre $m \in \mathbb{N}$ est une fonction, notée $\phi^{[m]}$, définie par la formule suivante

$$\phi^{[m]}(x, t) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi(x, s, t) s^{\otimes m} ds, \quad \text{avec } s^{\otimes m} = \underbrace{s \otimes \dots \otimes s}_{m \text{ fois}}. \quad (1.4.2)$$

où \otimes est le produit de Kronecker.

Les moments les plus intéressants pour l'approximation de diffusion de l'équation de transport ETR (c.f. [15, 115, 152]) sont le premier moment $\phi := \phi^{[0]}$, dit aussi la densité du photon, donné par

$$\phi(x, t) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi(x, s, t) ds, \quad (1.4.3)$$

et le second moment $\phi^{[1]}$, dit aussi le flux lumineux ou le courant, donné par

$$\phi^{[1]}(x, t) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi(x, s, t) s ds. \quad (1.4.4)$$

Pour l'approximation de diffusion, on suppose que l'on dispose des conditions supplémentaires

$$\frac{\partial \phi^{[1]}}{\partial t}(x, t) = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{S}^{d-1}} q(x, s, t) s ds = 0, \quad (1.4.5)$$

ainsi que de l'approximation de la radiance suivante

$$\Phi(x, s, t) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \phi(x, t) + \frac{3\tilde{\beta}(x)}{4|\mathbb{S}^{d-1}|} s^T (D(x) \nabla \phi(x, t)) + O(1), \quad (1.4.6)$$

pour tout $(x, s, t) \in \Omega \times \mathbb{S}^{d-1} \times [t_0, t_0 + T]$.

Proposition 1.4.1. *On suppose que*

- i) $\Phi_{t_0} \in L^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{S}^{d-1})$, $q \in L^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{S}^{d-1} \times [t_0, t_0 + T])$ et $\Phi_\delta \in L^1(\Gamma_-)$.
- ii) Φ satisfait les conditions (1.4.3)-(1.4.4)-(1.4.5)- (1.4.6).

Alors $\phi^{[1]}(x, t)$ satisfait la loi du flux

$$\phi^{[1]}(x, t) = -D(x)\nabla\phi(x, t), \quad \text{pour tout } (x, t) \in \Omega \times [t_0, t_0 + T]. \quad (1.4.7)$$

De plus, la densité du photon $(x, t) \mapsto \phi(x, t)$ satisfait l'équation de diffusion suivante,

$$\frac{1}{c(x)} \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} - \nabla \cdot (D(x)\nabla\phi(x, t)) + \mu_a(x)\phi(x, t) = f(x, t), \quad (1.4.8)$$

et la condition initiale est donnée par

$$\phi(x, t_0) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_{t_0}(x, s) ds. \quad (1.4.9)$$

Démonstration. Multipliant l'équation ETR (1.3.2) par le vecteur s et intégrant sur \mathbb{S}^{d-1} par rapport à la variable s , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{c(x)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi(x, s, t) s ds \right) + \nabla \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi(x, s, t) s \otimes s ds + \mu_{\text{tr}}(x) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi(x, s, t) s ds \\ = \mu_{\text{sc}}(x) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi(x, s', t) \underbrace{\left(\frac{1}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \eta(s, s') s^T s' ds \right)}_{=\vartheta} s' ds' + \int_{\mathbb{S}^{d-1}} q(x, s, t) s ds. \end{aligned}$$

D'après la relation (C.6.1), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{c(x)} \frac{\partial}{\partial t} \phi^{[1]}(x, t) + \nabla \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi(x, s, t) s \otimes s ds + \mu_{\text{tr}}(x) \phi^{[1]}(x, t) \\ = \vartheta \mu_{\text{sc}}(x) \phi^{[1]}(x, t) + \int_{\mathbb{S}^{d-1}} q(x, s, t) s ds. \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{c(x)} \frac{\partial \phi^{[1]}}{\partial t}(x, t) + \nabla \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi(x, s, t) s \otimes s ds + (\mu_{\text{tr}}(x) - \vartheta \mu_{\text{sc}}(x)) \phi^{[1]}(x, t) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} q(x, s, t) s ds.$$

L'approximation de diffusion résulte des hypothèses

$$\frac{\partial \phi^{[1]}}{\partial t}(x, t) = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{S}^{d-1}} q(x, s, t) s ds = 0,$$

alors

$$-\nabla \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi(x, s, t) s \otimes s ds = (\mu_a(x) + (1 - \vartheta)\mu_{\text{sc}}(x)) \phi^{[1]}(x, t). \quad (1.4.10)$$

Il est facile de voir qu'on peut obtenir

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} s \otimes s ds = \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{d} \text{vec}(I_d) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{S}^{d-1}} (s \otimes s) s^T ds = 0,$$

où l'opérateur vec est celui qui transforme une matrice en un vecteur obtenu en mettant les colonnes de la matrice l'une en dessous de l'autre et I_d est la matrice identité

de taille $d \times d$.

En multipliant la formule (1.4.6) par $s \otimes s$ et en intégrant sur \mathbb{S}^{d-1} par rapport à la variable s on obtient

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi(x, s, t) s \otimes s ds = \frac{1}{d} \phi(x, t) \text{vec}(I_d) + O(1). \quad (1.4.11)$$

Par injection de (1.4.11) dans (1.4.10), on obtient l'approximation suivante

$$-\frac{1}{d} \nabla \phi(x, t) = (\mu_a(x) + (1 - \vartheta) \mu_{sc}(x)) \phi^{[1]}(x, t),$$

ce qui montre la loi du flux (1.4.7).

Par intégration directe de (1.3.2) sur \mathbb{S}^{d-1} par rapport à la variable s , on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c(x)} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi(x, s, t) ds + \nabla \cdot \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi(x, s, t) s ds + \mu_{tr}(x) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi(x, s, t) ds \\ &= \mu_{sc}(x) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi(x, s', t) \underbrace{\left(\frac{1}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \eta(s, s') ds \right)}_{=1} ds' + \int_{\mathbb{S}^{d-1}} q(x, s, t) ds, \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

pour tout $(x, t) \in \Omega \times [t_0, t_0 + T]$. On injecte les identités (1.3.6), (1.4.3) et (1.4.4) dans l'expression (1.4.12) on obtient l'équation suivante

$$\frac{1}{c(x)} \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \phi^{[1]}(x, t) + (\mu_{tr}(x) - \mu_{sc}(x)) \phi(x, t) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} q(x, s, t) ds.$$

Comme la source q est isotrope alors la source isotropique interne f pour l'équation de diffusion est donnée par

$$f(x, t) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} q(x, s, t) ds, \quad \forall (x, t) \in \Omega \times [t_0, t_0 + T].$$

A partir de la loi (1.4.7), on trouve l'équation de diffusion (1.4.8).

En intégrant (1.3.3) sur \mathbb{S}^{d-1} par rapport à la variable s , on trouve la condition initiale suivante :

$$\phi(x, t_0) = \phi_{t_0}(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \phi_{t_0}(x, s) ds, \quad \text{pour tout } x \in \Omega.$$

□

Corollaire 1.4.1. *On suppose que*

i) $q \in L^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{S}^{d-1})$ et $\Phi_\delta \in L^1(\Gamma_-)$.

ii) Φ satisfait les conditions (1.4.3)-(1.4.4)-(1.4.5)-(1.4.6).

Alors $\phi^{[1]}(x)$ satisfait la loi suivante

$$\phi^{[1]}(x) = -D(x) \nabla \phi(x), \quad \forall x \in \Omega. \quad (1.4.13)$$

De plus, la densité lumineuse du photon $\phi(x)$ satisfait l'équation de diffusion stationnaire suivante

$$-\nabla \cdot (D(x) \nabla \phi(x)) + \mu_a(x) \phi(x) = f(x), \quad \forall x \in \Omega. \quad (1.4.14)$$

Démonstration. Pour la démonstration, on utilise des démarches similaires à celles de (1.4.1) sauf qu'ici la variable du temps est négligée. □

1.5 Les conditions globales de Robin aux bords

Soit (ξ, t) un élément de $\partial\Omega \times [t_0, t_0 + T]$. On note par \mathbb{S}_+^{d-1} et \mathbb{S}_-^{d-1} les deux sous ensembles de \mathbb{S}^{d-1} donnés par

$$\mathbb{S}_+^{d-1} = \left\{ s \in \mathbb{S}^{d-1} : n(\xi)^T s > 0 \right\} \quad \text{et} \quad \mathbb{S}_-^{d-1} = \left\{ s \in \mathbb{S}^{d-1} : n(\xi)^T s < 0 \right\},$$

où $n(\xi)$ est le vecteur normal à \mathbb{S}^{d-1} au point ξ orienté vers l'extérieur.

L'équation de diffusion n'est pas réalisable à proximité de l'interface $\partial\Omega$ du domaine Ω . Nous pouvons toujours régulariser cette situation en imposant des conditions aux bords qui nous permettent d'obtenir des résultats satisfaisants de l'approximation de diffusion, tout en gardant la continuité du flux entrant g_+ , à travers l'interface.

Soit \mathcal{R} une fonction réelle liée à la réflexion diffuse dépendant de $s \in \mathbb{S}^{d-1}$. Au voisinage de l'interface, le flux g_+ est donné par

$$g_+(\xi, t) = \int_{\mathbb{S}_+^{d-1}} \mathcal{R}(s) \Phi(\xi, s, t) (s^T n(\xi)) ds, \quad \forall (\xi, t) \in \partial\Omega \times [t_0; t_0 + T].$$

On note par g_- le flux sortant à travers l'interface du domaine Ω . La fonction g_- s'exprime par

$$g_-(\xi, t) = \int_{\mathbb{S}_-^{d-1}} \Phi(\xi, s, t) (s^T n(\xi)) ds, \quad \forall (\xi, t) \in \partial\Omega \times [t_0; t_0 + T].$$

Nous admettons que la radiance réalise la condition

$$g_+(\xi, t) = g_-(\xi, t), \quad \forall (\xi, t) \in \partial\Omega \times [t_0; t_0 + T], \quad (1.5.1)$$

à travers l'interface $\partial\Omega$ du domaine.

Pour trouver une condition aux bords englobant les conditions de Dirichlet et les conditions de Robin aux bords, on utilise la fonction β restriction de la fonction $\tilde{\beta}$ donnée en (1.4.1). La fonction β est définie, pour tout $\xi \in \partial\Omega$, par

$$\beta(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma(\xi) = 0 \\ \frac{1}{\gamma(\xi)} & \text{si } \gamma(\xi) > 0. \end{cases} \quad (1.5.2)$$

Proposition 1.5.1. *On suppose que Φ satisfait les conditions (1.4.3)-(1.4.4)-(1.4.5)-(1.4.6) et que les fonctions du flux g_+ et g_- sont bornées sur $\partial\Omega \times [t_0, t_0 + T]$ et vérifient la condition (1.5.1), alors la densité du photon ϕ satisfait la condition non homogène de Robin aux bords,*

$$\phi(\xi, t) + \frac{\beta(\xi)}{2} D(\xi) \frac{\partial \phi}{\partial n}(\xi, t) = g(\xi, t), \quad \forall (\xi, t) \in \partial\Omega \times [t_0, t_0 + T], \quad (1.5.3)$$

où $g(\xi, t) = -2g_+(\xi, t)$ et

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}(\xi, t) = n(\xi)^T \nabla \phi(\xi, t) = \sum_{i=1}^d n_i(\xi) \frac{\partial \phi}{\partial \xi_i}(\xi, t),$$

avec $n := n(\xi) = (n_1(\xi), \dots, n_d(\xi))^T$ est le vecteur normal à $\partial\Omega$ au point ξ orienté vers l'extérieur.

Démonstration. En utilisant l'approximation (1.4.6), donnée par

$$\Phi(\xi, s, t) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \phi(\xi, t) + \beta(\xi) \frac{3}{4|\mathbb{S}^{d-1}|} s^T (D(\xi) \nabla \phi(\xi, t)) + O(1), \quad (1.5.4)$$

pour tout (ξ, s, t) dans $\partial\Omega \times \mathbb{S}^{d-1} \times [t_0, t_0 + T]$. On a

$$\begin{aligned} g_-(\xi, t) &= \frac{1}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \phi(\xi, t) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} (s^T n(\xi)) ds + \beta(\xi) \frac{3}{4|\mathbb{S}^{d-1}|} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} s^T (D(\xi) \nabla \phi(\xi, t)) (s^T n(\xi)) ds \\ &= \frac{1}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \phi(\xi, t) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} (s^T n(\xi)) ds + \beta(\xi) \frac{3}{4|\mathbb{S}^{d-1}|} D(\xi) (n(\xi))^T \nabla \phi(\xi, t) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} (s^T n(\xi))^2 ds. \end{aligned}$$

Dans un espace de dimension $d \geq 2$, l'élément de surface ds est la mesure de Lebesgue donnée par

$$ds = (\sin \theta_1)^{d-2} \dots (\sin \theta_{d-3})^2 \sin \theta_{d-2} d\theta_1 \dots d\theta_{d-3} d\theta_{d-2} d\theta_{d-1},$$

avec $0 \leq \theta_i \leq \pi$ pour $1 \leq i \leq d-2$ et $0 \leq \theta_{d-1} \leq 2\pi$. On peut vérifier que

$$|\mathbb{S}^{d-1}| = 2\pi \left(\int_0^\pi (\sin \theta_1)^{d-2} d\theta_1 \right) \dots \left(\int_0^\pi (\sin \theta_{d-3})^2 d\theta_{d-3} \right) \left(\int_0^\pi \sin \theta_{d-2} d\theta_{d-2} \right),$$

où pour $d = 2$, on a $|\mathbb{S}^1| = 2\pi$ et pour $d = 3$, on a $|\mathbb{S}^2| = 4\pi$.

Comme $\cos \theta_{d-2} = s^T n(\xi)$, on trouve que

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} (s^T n(\xi)) ds = -\frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{2}, \quad \int_{\mathbb{S}^{d-1}} (s^T n(\xi))^2 ds = -\frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{3},$$

et

$$-2g_+(\xi, t) = \phi(\xi, t) + \frac{\beta(\xi)}{2} D(\xi) (n(\xi))^T \nabla \phi(\xi, t).$$

Pour simplifier, on note $g(\xi, t) = -2g_+(\xi, t)$ pour tout (ξ, t) dans $\partial\Omega \times [t_0; t_0 + T]$. Ce qui achève la démonstration. \square

Corollaire 1.5.1. *On suppose que Φ satisfait les conditions (1.4.3)-(1.4.4)-(1.4.5)- (1.4.6) et que les fonctions g_+ et g_- sont bornées sur $\partial\Omega$ et vérifient la condition (1.5.1). Alors la densité ϕ satisfait la condition non homogène de Robin aux bords,*

$$\phi(\xi) + \frac{\beta(\xi)}{2} D(\xi) \frac{\partial \phi}{\partial n}(\xi) = g(\xi), \quad \forall \xi \in \partial\Omega, \quad (1.5.5)$$

où $g(\xi) = -2g_+(\xi)$ et $\frac{\partial \phi(\xi)}{\partial n} = n(\xi)^T \nabla \phi(\xi) = \sum_{i=1}^d n_i(\xi) \frac{\partial \phi}{\partial \xi_i}(\xi)$.

Démonstration. La démonstration se fait d'une façon analogue à celle de la proposition 1.5.1. \square

Dans ce manuscrit, nous utiliserons les conditions aux bords données par

$$\phi(\xi, t) + \frac{\beta(\xi)}{2} D(\xi) \frac{\partial \phi}{\partial n}(\xi, t) = g(\xi, t), \quad \forall (\xi, t) \in \partial\Omega \times [t_0, t_0 + T]. \quad (1.5.6)$$

1.6 Équation de diffusion dans le domaine fréquentiel

On définit la transformée de Fourier \widehat{g} d'une fonction g dans l'espace $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par

$$\widehat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1.6.1)$$

On suppose que la fonction $t \mapsto \phi(x, t)$ et la fonction gradient $t \mapsto \nabla \phi(x, t)$ possèdent des extensions à \mathbb{R} appartenant respectivement aux espaces $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^d$ presque partout dans Ω . On suppose également que les fonctions sources f et g possèdent des extensions telles que $f \in L^\infty(\Omega; L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ et $g \in L^\infty(\partial\Omega; L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale de Lebesgue, on obtient

$$\widehat{\nabla \phi}(x, \omega) = \nabla \widehat{\phi}(x, \omega), \quad \forall (x, \omega) \in \Omega \times \mathbb{R}. \quad (1.6.2)$$

On applique la transformée de Fourier à l'équation (1.4.1) ainsi qu'aux conditions non homogènes de Robin aux bords (1.4.8). On utilise la relation classique

$$\frac{\partial \widehat{g}}{\partial t} = i\omega \widehat{g},$$

et (1.5.3) pour obtenir une équation de diffusion elliptique que satisfait la densité du photon dans un domaine fréquentiel

$$-\nabla \cdot (D(x) \nabla \widehat{\phi}(x, \omega)) + \left(\mu_a(x) + i \frac{\omega}{c_0} \nu(x) \right) \widehat{\phi}(x, \omega) = \widehat{f}(x, \omega), \quad \forall (x, \omega) \in \Omega \times \mathbb{R} \quad (1.6.3)$$

avec les conditions de Robin aux bords

$$\widehat{\phi}(\xi, \omega) + \frac{\beta(\xi)}{2} D(\xi) \frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial \mathbf{n}}(\xi, \omega) = \widehat{g}(\xi, \omega), \quad \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}. \quad (1.6.4)$$

On note respectivement par $u(\cdot, \omega) = \widehat{\phi}(\cdot, \omega)$, $F(\cdot, \omega) = \widehat{f}(\cdot, \omega)$, et $G(\cdot, \omega) = \widehat{g}(\cdot, \omega)$, la transformée de Fourier des fonctions $\phi(x, \cdot)$, $f(x, \cdot)$ et $g(\xi, \cdot)$.

La fonction u s'appelle la densité lumineuse en fonction de la fréquence ω et F et G sont les fonctions de sources intermédiaires en fonction de la fréquence ω . On note également par q_ω la fonction à valeurs complexes donnée par

$$q_\omega(x) = \mu_a(x) + i \frac{\omega}{c_0} \nu(x), \quad \forall x \in \Omega. \quad (1.6.5)$$

1.7 Les sources Gaussiennes

Du point de vue théorique, une lumière monochromatique est une source de Dirac. Une source de Dirac est une distribution f placée à la position x_s à l'instant t_s , donnée par l'expression

$$f(x, t) = E \delta(x - x_s) \delta(t - t_s),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \Omega$ où E est l'amplitude de la luminosité.

Soit $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_d)$ un élément de $]0, +\infty[^d$, et $x_s = (x_s^{(1)}, \dots, x_s^{(d)})$ un élément de Ω . Il existe une suite de fonctions gaussiennes

$$h_\sigma(x) = \frac{1}{\left(2\pi \prod_{i=1}^d \sigma_i^2\right)^{d/2}} \exp\left(-\sum_{i=1}^d \frac{(x_i - x_s^{(i)})^2}{2\sigma_i^2}\right)$$

dans $L^1(\Omega, dx)$ telle que

$$h_\sigma(x) \longrightarrow \delta(x - x_s), \quad \text{lorsque } \sigma \rightarrow 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}(\Omega).$$

En utilisant la transformée de Fourier, appliquée à f , on obtient

$$\widehat{f}(x, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t_s} \delta(x - x_s).$$

Soit $\widehat{f}_\sigma(\cdot, \omega)$ la suite de fonctions données par

$$\widehat{f}_\sigma(x, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t_s} h_\sigma(x).$$

On a $\widehat{f}_\sigma(\cdot, \omega) \longrightarrow \widehat{f}(\cdot, \omega)$, lorsque $\sigma \rightarrow 0$, au sens de distribution.

Dans la pratique, une source lumineuse est vue comme une fonction gaussienne puisque $(h_\sigma(x))_{\sigma > 0}$ est une unité approchée de fonctions positives de $L^1(\mathbb{R}^d, dx)$ vérifiant

i) $\int_{\mathbb{R}^d} h_\sigma(x) dx = 1, \quad \forall \sigma > 0.$

ii) Pour tout voisinage \mathcal{V} de 0 dans \mathbb{R}^d : $\int_{C^{\mathcal{V}}} h_\sigma(x) dx \rightarrow 0$, lorsque $\sigma \rightarrow 0$,
où $C^{\mathcal{V}}$ est le complémentaire de \mathcal{V} dans \mathbb{R}^d .

De plus, si \mathcal{R}_θ est la rotation d'angle θ , alors

$$\exp(-\|\mathcal{R}_\theta x\|_2^2) = \exp(-\|x\|_2^2), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

elle est invariante par rotation, on dit qu'elle est isotrope.

Chapitre 2

Reconstruction d'un signal par les B-splines

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous procédons à la résolution du problème de diffusion (1.4.8)-(1.5.3). Le problème de diffusion est déterminé de façon à regrouper un ensemble d'informations concernant le flux optique à partir de la densité de la lumière ϕ . Cette fonction caractérise l'hétérogénéité du milieu étudié. Ceci permet dans la pratique d'analyser le milieu à partir de la lumière qui le traverse. Du point de vue théorique, nous discutons l'existence, l'unicité et la régularité de la solution du problème de diffusion.

Pour reconstruire le signal numérique dans ce genre de problème, le plus souvent on utilise une discrétisation dans le temps. Dans ce travail, nous proposons d'utiliser la transformée de Fourier et son inverse afin d'éviter une telle discrétisation. On obtient ainsi une équation elliptique équivalente à coefficients complexes. Pour trouver la solution de l'équation parabolique (1.4.8)-(1.5.3), on calcule la transformée de Fourier inverse en utilisant la formule de quadrature de Gauss-Hermite.

Dans la première partie de ce chapitre, nous nous intéressons au problème de diffusion en une dimension de l'espace. La technique de la transformée de Fourier nous permet d'obtenir une équation elliptique de type Sturm-Liouville que nous résolvons en utilisant la méthode d'approximation de Galerkin basée sur les fonctions B-splines cubiques [57]. Nous donnons ensuite des tests numériques.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous procédons à la résolution de l'équation de diffusion en dimension supérieure de l'espace. Nous proposons des tests numériques sur un domaine rectangulaire en dimension deux. Pour cela, nous utiliserons la méthode d'approximation de Galerkin basée sur le produit tensoriel des B-splines cubiques.

Nous donnons une estimation de l'erreur en se basant sur le lemme de Céa et sur un opérateur d'interpolation de type B-spline cubique en dimension un de l'espace ou

sur de type spline tensorielle en dimension deux de l'espace.

2.2 Problème de diffusion en une dimension

2.2.1 Équation de diffusion en 1D

On considère la version du problème de diffusion (1.4.8)-(1.5.3) en une dimension de l'espace pour la reconstruction d'un signal dans un domaine optique moyennement épais. L'équation de diffusion en une dimension de l'espace ne présente aucune situation réelle en physique, mais permet de tester numériquement les techniques que nous proposons. Soit $(x, t) \mapsto \phi(x, t)$ la densité lumineuse à la position $x \in]a, b[\subset \mathbb{R}$ et à l'instant $t \in [t_0, t_0 + T]$, où t_0 est l'instant zéro et T est le temps maximum (la période). Les paramètres μ_a , μ_s et ν sont des fonctions réelles positives et bornées sur l'intervalle $[a, b]$.

Pour (x, t) dans $]a, b[\times [t_0, t_0 + T]$, la densité $\phi(x, t)$ satisfait l'équation aux dérivées partielles parabolique suivante,

$$\frac{1}{c(x)} \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D(x) \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} \right) + \mu_a(x) \phi(x, t) = f(x, t), \quad (2.2.1)$$

au sens des distributions, voir la proposition 1.4.1.

Soient $\zeta_a \geq 0$ et $\zeta_b \geq 0$ deux nombres liés à l'indice de réfraction en a et b respectivement. Pour donner une représentation des conditions aux bords qui regroupe simultanément les conditions de Dirichlet aux bords et les conditions de Robin aux bords, on utilise la fonction β donnée par l'expression (1.5.2) en introduisant les constantes $\beta_a = \beta(a)$ et $\beta_b = \beta(b)$ (c.f. [6]) par

$$\beta_a = \begin{cases} 0 & \text{si } \zeta_a = 0 \\ \frac{1}{\zeta_a} & \text{si } \zeta_a > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \beta_b = \begin{cases} 0 & \text{si } \zeta_b = 0 \\ \frac{1}{\zeta_b} & \text{si } \zeta_b > 0. \end{cases}$$

D'après les résultats de la proposition 1.5.1, les conditions non homogènes aux bords sont données par

$$\begin{aligned} \phi(a, t) - \frac{\beta_a}{2} D(a) \frac{\partial \phi}{\partial x}(a, t) &= g_a(t), \\ \phi(b, t) + \frac{\beta_b}{2} D(b) \frac{\partial \phi}{\partial x}(b, t) &= g_b(t). \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

On suppose que, La fonction $t \mapsto \phi(x, t)$ et la fonction dérivée $t \mapsto \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t)$ se prolongent sur \mathbb{R} en des fonctions dans l'espace $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, presque par tout x dans $[a, b]$. On suppose également que les fonctions sources f , g_a et g_b admettent des extensions, notées $f \in L^\infty(]a, b[; L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ et $g_a, g_b \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La transformée de Fourier \widehat{g} d'une fonction $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est donnée par

$$\widehat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt.$$

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale de Lebesgue, on obtient

$$\frac{\widehat{\partial\phi}}{\partial x}(x, \omega) = \frac{\partial\widehat{\phi}}{\partial x}(x, \omega), \quad \forall (x, \omega) \in]a, b[\times \mathbb{R}.$$

On applique la transformée de Fourier à l'équation (2.2.1) ainsi qu'aux conditions non homogènes de Robin aux bords (2.2.2) et on utilise la relation classique $\frac{\partial\widehat{g}}{\partial t} = i\omega\widehat{g}$, on obtient l'équation de Sturm-Liouville que satisfait la densité lumineuse dans un domaine fréquentiel

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(D(x) \frac{\partial u(x, \omega)}{\partial x} \right) + \left(\mu_a(x) + \frac{i\omega}{c_0} \nu(x) \right) u(x, \omega) = F(x, \omega), \quad (2.2.3)$$

avec les conditions non homogènes de Robin aux bords

$$\begin{aligned} u(a, \omega) - \frac{\beta_a}{2} D(a) \frac{\partial u}{\partial x}(a, \omega) &= G_a(\omega), \\ u(b, \omega) + \frac{\beta_b}{2} D(b) \frac{\partial u}{\partial x}(b, \omega) &= G_b(\omega), \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

où $u(\cdot, \omega) = \widehat{\phi}(\cdot, \omega)$, $F(\cdot, \omega) = \widehat{f}(\cdot, \omega)$, $G_a(\omega) = \widehat{g}_a(\omega)$ et $G_b(\omega) = \widehat{g}_b(\omega)$, sont respectivement les transformées de Fourier temps-fréquence de $\phi(x, \cdot)$, $f(x, \cdot)$, g_a and g_b . Dans la littérature, la fonction u s'appelle la densité lumineuse dans le domaine fréquentiel et F , G_a et G_b sont les fonctions sources dans le domaine fréquentiel. On note par q_ω le nouveau paramètre regroupant le potentiel d'absorption μ_a et le potentiel d'évolution ν selon l'expression suivante

$$q_\omega(x) = \mu_a(x) + \frac{i\omega}{c_0} \nu(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

2.2.2 Reconstruction d'un signal en fonction de la fréquence

Dans les sections suivantes de cette partie, on suppose que les paramètres optiques D , μ_a et ν sont des fonctions à valeurs réelles bornées. On écrit que les fonctions D , μ_a et ν sont dans l'espace $L^\infty(]a, b[, \mathbb{R})$ et que D et μ_a possèdent une borne inférieure α strictement positive,

$$D(x) \geq \alpha > 0, \quad \mu_a(x) \geq \alpha > 0, \quad \text{p.p. sur }]a, b[. \quad (2.2.5)$$

La formulation variationnelle faible

Soit $u_*(\cdot, \omega)$ une fonction suffisamment régulière satisfaisant le problème de (2.2.3)-(2.2.4), on suppose que $u_*(\cdot, \omega) \in \widehat{H}_1$. En multipliant l'équation (2.2.3) par une fonction test arbitraire $\bar{v} \in \widehat{H}_1$, en intégrant sur $[a, b]$ et en utilisant les conditions non homogènes de Robin aux bords (2.2.4), on trouve la formulation variationnelle faible :

$$\mathcal{A}_\omega(u_*(\cdot, \omega), v) = \mathcal{L}_\omega(v), \quad \forall v \in \widehat{H}_1, \quad (2.2.6)$$

où $\mathcal{A}_\omega : \widehat{H}_1 \times \widehat{H}_1 \rightarrow \mathbb{C}$ est la forme sesquilinéaire définie pour tout $u, v \in \widehat{H}_1$ par

$$\mathcal{A}_\omega(u, v) = \int_a^b D(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x) \overline{\frac{\partial v}{\partial x}(x)} dx + \int_a^b q_\omega(x) u(x) \overline{v(x)} dx + 2 \left(\zeta_a u(a) \overline{v(a)} + \zeta_b u(b) \overline{v(b)} \right),$$

et $\mathcal{L}_\omega : \widehat{H}_1 \rightarrow \mathbb{C}$ est la forme semi-linéaire définies pour tout $v \in \widehat{H}_1$ par

$$\mathcal{L}_\omega(v) = 2 \left(\zeta_a G_a(\omega) \overline{v(a)} + \zeta_b G_b(\omega) \overline{v(b)} \right) + \int_a^b F(x, \omega) \overline{v(x)} dx.$$

Inversement, soit $u_*(\cdot, \omega) \in \widehat{H}_1$ une fonction satisfaisant la formulation variationnelle faible (2.2.6). Il est évident de voir que par une intégration par partie, on a

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(D(x) \frac{\partial u_*}{\partial x}(x, \omega) \right) + q_\omega(x) u_*(x, \omega) - F(x, \omega) \right] \overline{v(x)} dx \\ &= \left(2\zeta_a G_a(\omega) - 2\zeta_a u_*(a, \omega) + D(a) \frac{\partial u_*}{\partial x}(a, \omega) \right) \overline{v(a)} \\ &+ \left(2\zeta_b G_b(\omega) - 2\zeta_b u_*(b, \omega) - D(b) \frac{\partial u_*}{\partial x}(b, \omega) \right) \overline{v(b)}, \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

pour tout $v \in \widehat{H}_1$.

En particulier, pour une fonction φ de classe C^∞ à support compact dans $]a, b[$, on a

$$\int_a^b \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(D(x) \frac{\partial u_*}{\partial x}(x, \omega) \right) + q_\omega(x) u_*(x, \omega) - F(x, \omega) \right] \overline{\varphi(x)} dx = 0.$$

Par conséquent,

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(D(\cdot) \frac{\partial u_*}{\partial x}(\cdot, \omega) \right) + q_\omega(\cdot) u_*(\cdot, \omega) = F(\cdot, \omega), \quad \text{dans }]a, b[,$$

au sens des distributions. Comme la fonction f est supposée dans $L^\infty(]a, b[; L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$, alors $F(\cdot, \omega)$ est une fonction dans l'espace $L^\infty(]a, b[, \mathbb{C})$. Donc l'égalité précédente est valide presque partout dans $]a, b[$.

Pour retrouver les conditions aux bords, on considère v_1 et v_2 deux fonctions dans \widehat{H}_1 telles que $v_1(a) = v_2(b) = 1$ et $v_1(b) = v_2(a) = 0$. En prenant $v = v_1$ dans (2.2.7) pour trouver la condition

$$u_*(a, \omega) - \frac{\beta_a}{2} D(a) \frac{\partial u_*}{\partial x}(a, \omega) = G_a(\omega),$$

d'une part et d'autre en prenant $v = v_2$ dans (2.2.7) pour trouver la condition

$$u_*(b, \omega) + \frac{\beta_b}{2} D(b) \frac{\partial u_*}{\partial x}(b, \omega) = G_b(\omega).$$

En conclusion, le problème de diffusion (2.2.3)-(2.2.4) est équivalent à la formulation variationnelle faible (2.2.6).

D'après le théorème d'injection de Sobolev (c.f. [3]), il existe une constante $C > 0$ (dépendant seulement de a et b) telle que

$$\sup_{x \in [a, b]} |u(x)| \leq C \|u\|_{\widehat{H}_1}, \quad \forall u \in \widehat{H}_1. \quad (2.2.8)$$

D'après l'inégalité de Schwarz et le théorème d'injection de Sobolev, on prouve qu'il existe une constante $C_0 > 0$ (dépendant seulement de a et b) telle que

$$|\mathcal{L}_\omega(v)| \leq M(\omega) \|v\|_{\widehat{H}_1}, \quad \forall v \in \widehat{H}_1, \quad (2.2.9)$$

où $M(\omega) = C_0 \left(\|F(\cdot, \omega)\|_{\widehat{L}_2} + |G_a(\omega)| + |G_b(\omega)| \right)$.

De plus, l'opérateur $\mathcal{L}_\omega : \widehat{H}_1 \rightarrow \mathbb{C}$ est continu et semi-linéaire sur \widehat{H}_1 . Comme les fonctions D , μ_a et ν satisfont les conditions (2.2.5) alors d'après le théorème d'injection de Sobolev, on vérifie facilement qu'il existe une constante $C_1 > 0$ indépendante de la fréquence ω telle que

$$|\mathcal{A}_\omega(u, v)| \leq C_1 \sqrt{1 + \omega^2} \|u\|_{\widehat{H}_1} \|v\|_{\widehat{H}_1}, \quad \forall u, v \in \widehat{H}_1. \quad (2.2.10)$$

D'une façon analogue, on montre que la forme sesquilinéaire \mathcal{A}_ω est coercive :

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}_\omega(u, u)) \geq \alpha \|u\|_{\widehat{H}_1}^2, \quad \forall u \in \widehat{H}_1, \quad (2.2.11)$$

où α est la constante positive donnée dans (2.2.5).

Finalement, d'après (2.2.10) et (2.2.11), la forme sesquilinéaire $\mathcal{A}_\omega : \widehat{H}_1 \times \widehat{H}_1 \rightarrow \mathbb{C}$ est continue et coercive.

Nous pouvons formuler le théorème suivant

Théorème 2.2.1. *Pour une fréquence fixée ω dans \mathbb{R} .*

1. *Le problème (2.2.3)-(2.2.4) admet une unique solution $u_*(\cdot, \omega)$ dans \widehat{H}_2 satisfaisant l'inégalité suivante*

$$\|u_*(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} \leq \frac{M(\omega)}{\alpha}, \quad (2.2.12)$$

où les constantes α et $M(\omega)$ sont respectivement données dans (2.2.5) et (2.2.9).

2. *De plus, si $D \in C^1([a, b])$, μ_a, ν et $F(\cdot, \omega)$ sont $C([a, b])$, alors $u_*(\cdot, \omega) \in C^2([a, b])$ est l'unique solution du problème (2.2.3)-(2.2.4) au sens usuel.*

Démonstration. Soit ω une fréquence fixée dans \mathbb{R} ,

1. Les fonctions D , μ_a et ν satisfont les hypothèses (2.2.5), ce qui garantit la continuité de la forme semi-linéaire $\mathcal{L}_\omega : \widehat{H}_1 \rightarrow \mathbb{C}$, la continuité et la coercivité de la forme sesquilinéaire $\mathcal{A}_\omega : \widehat{H}_1 \times \widehat{H}_1 \rightarrow \mathbb{C}$. En utilisant la version complexe du théorème de Lax-Milgram [34, 103], il existe une unique solution $u_*(\cdot, \omega)$ de la formulation variationnelle faible (2.2.6) dans l'espace \widehat{H}_1 . Comme le problème (2.2.3)-(2.2.4) est équivalent à la formulation variationnelle faible (2.2.6), alors $u_*(\cdot, \omega)$ est l'unique solution faible du problème (2.2.3)-(2.2.4).

D'après la continuité de l'opérateur \mathcal{L}_ω et la coercivité de l'opérateur \mathcal{A}_ω , on a

$$\alpha \|u_*(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1}^2 \leq \operatorname{Re}(\mathcal{A}_\omega(u_*(\cdot, \omega), u_*(\cdot, \omega))) \leq M(\omega) \|u_*(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1}.$$

Ce qui prouve (2.2.12).

On a $D \in L^\infty(]a, b[, \mathbb{R})$ et $u_*(\cdot, \omega) \in \widehat{H}_1$, alors $D \frac{\partial u_*(\cdot, \omega)}{\partial x} \in \widehat{L}_2$. Or $q_\omega \in L^\infty(]a, b[, \mathbb{C})$ et $F(\cdot, \omega) \in \widehat{L}_2$, donc

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D(\cdot) \frac{\partial u_*(\cdot, \omega)}{\partial x} \right) = F(\cdot, \omega) - q_\omega(\cdot) u_*(\cdot, \omega) \in \widehat{L}_2. \quad (2.2.13)$$

On montre aussi que $D(\cdot) \frac{\partial u_*(\cdot, \omega)}{\partial x}$ appartient à l'espace \widehat{H}_1 . La fonction $\frac{1}{D(\cdot)}$ est dans l'espace $L^\infty(]a, b[, \mathbb{R})$, alors $\frac{\partial u_*(\cdot, \omega)}{\partial x} = \frac{1}{D(\cdot)} \frac{\partial (D(\cdot) \frac{\partial u_*(\cdot, \omega)}{\partial x})}{\partial x}$ est dans \widehat{H}_1 . En conclusion, la fonction $u_*(\cdot, \omega)$ appartient à \widehat{H}_2 .

2. Si $D \in C^1([a, b])$ alors d'après le résultat (2.2.13) et la formule de Leibniz, on a l'équation

$$\frac{\partial^2 u_*(x, \omega)}{\partial x^2} = -\frac{1}{D(x)} \left(F(x, \omega) - q_\omega(x) u_*(x, \omega) - D'(x) \frac{\partial u_*(x, \omega)}{\partial x} \right), \quad (2.2.14)$$

au sens des distributions, pour tout $x \in [a, b]$. D'après le théorème d'injection de Sobolev, les fonctions $u_*(\cdot, \omega)$ et $\frac{\partial u_*(\cdot, \omega)}{\partial x}$ appartiennent à $C([a, b])$. Mais μ_a , ν et $F(\cdot, \omega)$ sont des fonctions dans $C([a, b])$, alors d'après la formule (2.2.14), la solution faible $u_*(\cdot, \omega)$ du problème (2.2.3)-(2.2.4) appartient à $C^2([a, b])$ et elle est l'unique solution du problème (2.2.3)-(2.2.4) au sens usuel (c.f. [35, 103]).

□

2.2.3 Les B-splines normalisées uniformes

Le mot "spline" désigne une tige flexible qui sert à tracer des courbes lisses passant par des points donnés. En 1946, dans son article [140], Schoenberg a posé les premiers fondements de la théorie des fonctions splines. Un peu plus tard, C. de Boor présenta les fonctions B-splines très utiles notamment pour faire de l'interpolation. La compacité de leur support et la régularité de ces fonctions jouent un rôle essentiel en approximation. Nous en donnons ci-dessous une brève description.

On fixe une fois pour toutes une suite strictement croissante x_j , $j \in \mathbb{Z}$, de points appelés *nœuds*. On note ces nœuds $x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1}$. Une *spline polynômiale* de degré m est alors une fonction $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- i) B est C^{m-1} sur \mathbb{R} ;
- ii) pour tout $i = 0, \dots, k$, il existe un polynôme B_i de degré inférieur ou égal à m qui coïncide avec B sur $[x_i, x_{i+1}]$ (sur $[x_i, x_{i+1}[$ quand $m = 0$).

Dans l'espace des splines de degré m , il existe une suite de splines particulièrement intéressantes, appelée *base de B-splines*, que nous noterons $(N_j^m)_{j \in \mathbb{Z}}$. Ces B-splines sont définies par récurrence à partir de la base de B-splines de degré zéro, $(N_j^0)_{j \in \mathbb{Z}}$: pour tout $j \in \mathbb{Z}$ on a

$$N_j^0(x) := 1 \quad \text{pour } x \in [x_j, x_{j+1}[, \quad N_j^0(x) := 0 \quad \text{sinon.}$$

Ensuite, pour tout entier $i \geq 1$, et pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on pose

$$N_j^i(x) := \lambda_{j,i}(x)N_j^{i-1}(x) + (1 - \lambda_{j+1,i}(x))N_{j+1}^{i-1}(x),$$

où

$$\lambda_{j,i}(x) := \frac{x - x_j}{x_{j+i} - x_j} \text{ pour tout } j \in \mathbb{Z} \text{ et pour tout } i \geq 1.$$

Ces fonctions vérifient alors les propriétés suivantes qui, d'une part justifient l'appellation "base de B-splines" introduite ci-dessus et qui, d'autre part, expliquent leur grand intérêt :

- a) pour tout $j \in \mathbb{Z}$, la B-spline N_j^m est une spline de degré m ;
- b) pour tout $j \in \mathbb{Z}$, le support de N_j^m est l'intervalle $[x_j, x_{j+m+1}]$;
- c) pour tout $j \in \mathbb{Z}$, la B-spline N_j^m est positive sur l'intérieur de son support, i.e $N_j^m(x) > 0$ pour tout $x \in]x_j, x_{j+m+1}[$;
- d) toute spline B de degré m se décompose dans la base de B-splines au sens où il existe une suite de réels $(a_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, tels que

$$B(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j N_j^m(x), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R};$$

- e) la base de B-spline de degré m est normalisée, au sens :

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} N_j^m(x) = 1, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R};$$

L'avantage de remplacer les polynômes par des splines, par exemple pour résoudre des problèmes d'interpolation, est manifeste. D'une part elles évitent les degrés élevés, d'autre part, grâce à leur support, l'utilisation des bases de B-splines conduit à des matrices bandes très intéressantes pour la résolution pratique des systèmes d'équations auxquels ces problèmes conduisent.

En pratique, les splines les plus courantes sont les *splines cubiques* correspondant à $m = 3$.

Lorsque les noeuds ne sont pas imposés, on a tout intérêt à aller vers la facilité et pour cela, à les choisir équidistants, i.e

$$x_{j+1} - x_j = h \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{Z},$$

ce que nous supposerons pour la suite de cette présentation. On parle alors de *B-splines uniformes de pas h* . Il est évident que dans ce cas, toutes les B-splines s'obtiennent par translation de n'importe laquelle d'entre elles, par exemple, de la B-spline N_0^m de support $[x_0, x_{m+1}]$, ce qui donne :

$$N_j^m(x) = N_0^m(x - x_j), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et pour tout } j \in \mathbb{Z}.$$

Dans le cas particulier où les noeuds sont les entiers ($x_j = j$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$), on parle de *splines cardinales*. Nous noterons $(B_j^m)_{j \in \mathbb{Z}}$, la base de B-splines cardinales.

De façon évidente, toute B-spline uniforme de pas h se construit simplement à partir des B-splines cardinales sous la forme :

$$N_j^m(x) = B_0^m \left(\frac{x - x_j}{h} \right), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et pour tout } j \in \mathbb{Z}. \quad (2.2.15)$$

Dans notre travail nous utiliserons exclusivement des B-splines cubiques uniformes. La B-spline cardinal B_0^3 , de support $[0, 4]$, y jouera donc un rôle important. C'est pourquoi nous utiliserons désormais la notation $\mathcal{B}_3 := B_0^3$ et nous présentons les valeurs de \mathcal{B}_3 dans le tableau ci-dessous. Toute B-spline uniforme s'en déduira aisément grâce à la formule (2.2.15).

La fonction B-spline cubique à support $[0, 4]$

La fonction B-spline de degré $m = 3$ est la B-spline cubique notée $\mathcal{B}_3 : x \mapsto \mathcal{B}_3(x)$ à support $[0, 4]$ et ses dérivées sont données dans le tableau 2.1 suivant

	$\mathcal{B}_3(x)$	$\mathcal{B}_3^{(1)}(x)$	$\mathcal{B}_3^{(2)}(x)$	$\mathcal{B}_3^{(3)}(x)$
$0 \leq x < 1$	$x^3/6$	$x^2/2$	x	1
$1 \leq x < 2$	$(-3x^3 + 12x^2 - 12x + 4)/6$	$(-3x^2 + 8x - 4)/2$	$-3x + 4$	-3
$2 \leq x < 3$	$(3x^3 - 24x^2 + 60x - 44)/6$	$(3x^2 - 16x + 20)/2$	$3x - 8$	3
$3 \leq x < 4$	$(4 - x)^3/6$	$-(4 - x)^2/2$	$4 - x$	-1
$x < 0, x \geq 4$	0	0	0	0

TABLE 2.1 – La fonction B-spline cubique \mathcal{B}_3 à support dans l'intervalle $[0, 4]$.

On vérifie qu'on a bien la normalisation de la B-spline $x \mapsto \mathcal{B}_3(x)$ au sens où

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{B}_3(x) dx = \int_0^4 \mathcal{B}_3(x) dx = 1.$$

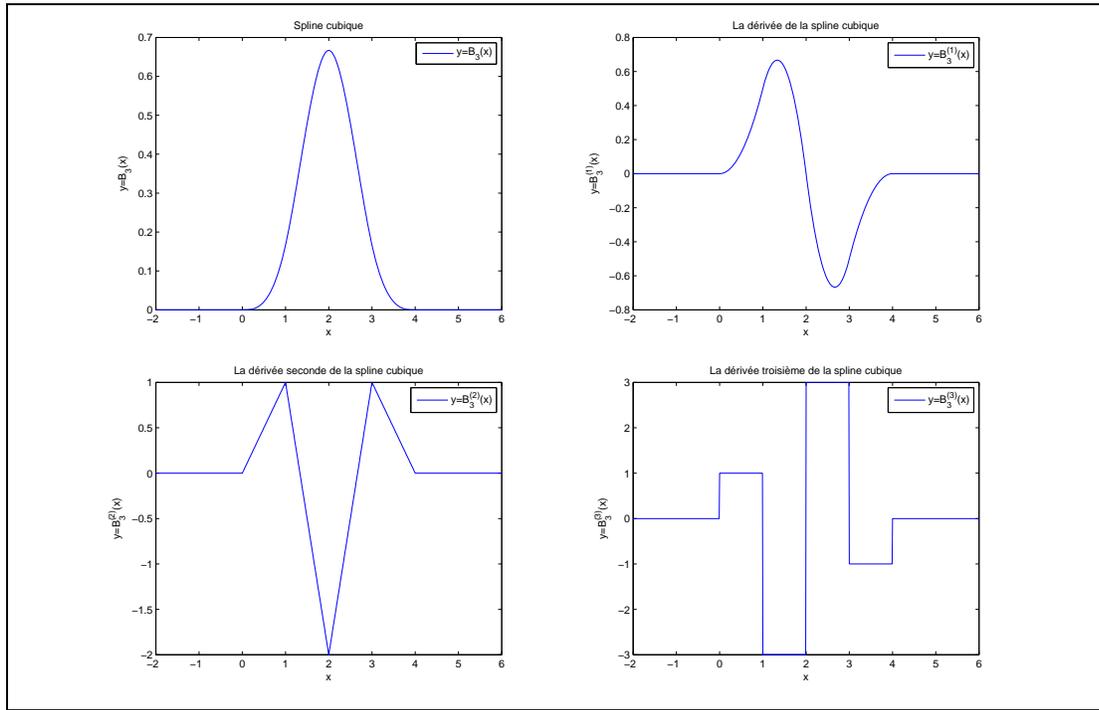


FIGURE 2.1 – La courbe de la B-spline $x \mapsto \mathcal{B}_3(x)$ et ses dérivées $x \mapsto \mathcal{B}_3^{(1)}(x)$, $x \mapsto \mathcal{B}_3^{(2)}(x)$ et $x \mapsto \mathcal{B}_3^{(3)}(x)$ où $\mathcal{B}_3^{(k)}$ est la dérivée de \mathcal{B}_3 d'ordre $k = 0, 1, 2, 3$.

2.2.4 Approximation de Galerkin par la B-spline cubique

On cherche une solution approchée régulière de l'équation de diffusion (2.2.3)-(2.2.4) dans un domaine fréquentiel. On utilise une base formée par les fonctions B-splines cubiques. Un intervalle $[a, b]$ étant fixé, $a < b$, nous en prenons une subdivision régulière de pas $h = (b - a)/n$, où $n \geq 1$ est un entier donné. Ceci donne les points

$$x_i := a + ih, \quad i = 0, \dots, n,$$

avec donc en particulier $x_0 = a, x_n = b$. En introduisant plus généralement les nœuds

$$x_i := a + ih, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (2.2.16)$$

on peut considérer l'espace des splines cubiques uniformes de pas h comme précédemment et sa base de B-splines explicitée en (2.2.15) :

$$N_i^3(x) = \mathcal{B}_3\left(\frac{x - x_i}{h}\right), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et pour tout } i \in \mathbb{Z}. \quad (2.2.17)$$

On désigne par $\widehat{\mathcal{V}}_h$ le sous espace vectoriel de $\widehat{\mathcal{H}}_2$, de dimension finie $N = n + 3$, donné par

$$\widehat{\mathcal{V}}_h = \{u_h \in \widehat{\mathcal{H}}_2 : u_h|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3 ; \text{ pour } 0 \leq i \leq n - 1\}, \quad (2.2.18)$$

où \mathbb{P}_3 est l'espace des fonctions polynômiales de degré ≤ 3 .

On en obtient une base du sous espace $\widehat{\mathbb{V}}_h$, au sens algébrique du terme, en prenant les restrictions à $[a, b]$ des B-splines uniformes qui ne sont pas identiquement nulles sur $[a, b]$, à savoir les $(n + 3)$ B-splines (2.2.17) correspondant aux entiers $i = -3, \dots, n - 1$. Nous noterons cette base B_1, \dots, B_N . La famille des fonctions B-splines $(B_i)_{1 \leq i \leq N}$ est générée par la partition (2.2.16) telle que

$$B_i(x) = \mathcal{B}_3 \left(\frac{x - x_{i-4}}{h} \right), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.2.19)$$

Pour $1 \leq i \leq N$, Le support des splines de la base ci-dessus, restreintes à l'intervalle $[a, b]$, est alors donné par l'intervalle

$$\text{Supp}(B_i) = [a, b] \cap [x_{i-4}, x_i], \quad 1 \leq i \leq N.$$

Pour plus de détails sur les fonctions B-splines, nous renvoyons le lecteur à [57].

Pour une fréquence fixée ω dans \mathbb{R} , la méthode d'approximation de Galerkin consiste à trouver une fonction $u_{*h}(\cdot, \omega)$, dans $\widehat{\mathbb{V}}_h$, qui approche la solution exacte $u_*(\cdot, \omega)$. La solution approchée $u_{*h}(\cdot, \omega)$ est un élément dans l'espace $\widehat{\mathbb{V}}_h$ satisfaisant la formulation variationnelle discrète suivante :

$$\mathcal{A}_\omega(u_h(\cdot, \omega), v_h) = \mathcal{L}_\omega(v_h), \quad \forall v_h \in \widehat{\mathbb{V}}_h. \quad (2.2.20)$$

La solution $u_{*h}(\cdot, \omega)$ du problème (2.2.20) s'écrit dans la base de fonctions B-splines sous la forme suivante

$$u_{*h}(x, \omega) = \sum_{\ell=1}^N z_{h,\ell}(\omega) B_\ell(x), \quad (2.2.21)$$

où $\omega \mapsto z_{h,\ell}(\omega)$ sont des fonctions à valeurs complexes dépendants de la fréquence ω . On remplace la fonction test $v_h = B_j$ dans la formulation variationnelle faible (2.2.20), on obtient

$$\sum_{i=1}^N z_{h,i}(\omega) \mathcal{A}_\omega(B_i, B_j) = \mathcal{L}_\omega(B_j), \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.2.22)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\omega(B_i, B_j) &= \frac{1}{h^2} \int_a^b D(x) B'_i(x) B'_j(x) dx + \int_a^b q_\omega(x) B_i(x) B_j(x) dx \\ &+ 2(\zeta_a B_i(a) B_j(a) + \zeta_b B_i(b) B_j(b)), \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{L}_\omega(B_j) = 2(\zeta_a G_a(\omega) B_j(a) + \zeta_b G_b(\omega) B_j(b)) + \int_a^b F(x, \omega) B_j(x) dx,$$

pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, N\}^2$. Soient $A(\omega) = [a_{ij}(\omega)]$ la matrice de taille $N \times N$ dont les coefficients sont donnés par $a_{ij}(\omega) = \mathcal{A}_\omega(B_i, B_j)$, $b_h(\omega) = (b_{h,1}(\omega), \dots, b_{h,N}(\omega))^T$ le vecteur source de taille $N \times 1$ dont les coefficients sont $b_{h,j}(\omega) = \mathcal{L}_\omega(B_j)$ et $z_h(\omega) = (z_{h,1}(\omega), \dots, z_{h,N}(\omega))^T$ est le vecteur de paramètres inconnus qui figurent dans la formule (2.2.22).

Pour $(i, j) \in \{1, \dots, N\}^2$, il est facile de voir que l'on a

$$\begin{aligned} a_{ij}(\omega) &= \frac{1}{h} \int_0^n D(a+sh) \mathcal{B}'_3(s-i+4) \mathcal{B}'_3(s-j+4) ds \\ &+ h \int_0^n q_\omega(a+sh) \mathcal{B}_3(s-i+4) \mathcal{B}_3(s-j+4) ds \\ &+ 2(\zeta_a \mathcal{B}_3(-i+4) \mathcal{B}_3(-j+4) + \zeta_b \mathcal{B}_3(n-i+4) \mathcal{B}_3(n-j+4)), \end{aligned}$$

et

$$b_{h,j}(\omega) = 2(\zeta_a G_a(\omega) \mathcal{B}_3(-j+4) + \zeta_b G_b(\omega) \mathcal{B}_3(n-j+4)) + h \int_0^n F(a+sh, \omega) \mathcal{B}_3(s-j+4) ds.$$

Les relations (2.2.22) nous permettent d'aboutir au système linéaire de taille $N \times N$:

$$A(\omega) z_h(\omega) = b_h(\omega). \quad (2.2.23)$$

Pour des valeurs de la fréquence ω dans \mathbb{R} , les coefficients $z_{h\ell}(\omega)$ de la solution approchée u_{*h} s'obtiennent par la résolution du système linéaire (2.2.23). Pour calculer numériquement les intégrales constituant la matrice $A(\omega)$ et le vecteur $b_h(\omega)$ donnés en (2.2.23), nous avons utilisé la formule composite de la quadrature de Simpson donnée dans l'annexe A.2.

2.2.5 Reconstruction d'un signal dans le temps

Dans ce sous-paragraphe, une solution approchée ϕ_{*h} de la solution exacte ϕ_* s'obtient par la transformée de Fourier inverse de la fonction u_{*h} . De plus, nous utiliserons la formule de quadrature de Gauss-Hermite pour calculer numériquement cette transformée de Fourier inverse de u_{*h} . On a bien le résultat suivant,

Théorème 2.2.2. *Pour tout t fixé dans $[t_0, t_0 + T]$, le problème (2.2.1)-(2.2.2) admet une unique solution $\phi_*(\cdot, t)$, obtenue par la transformée de Fourier inverse de l'unique solution $u_*(\cdot, \omega)$ du problème (2.2.3)-(2.2.4). Nous avons*

$$\phi_*(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_*(x, \omega) e^{it\omega} d\omega, \quad (2.2.24)$$

pour tout $x \in [a, b]$.

Démonstration. Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème 2.2.1. \square

Une solution approchée $\phi_{*h}(x, t)$ du problème (2.2.1)-(2.2.2) est obtenue par la transformée de Fourier inverse

$$\phi_{*h}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_{*h}(x, \omega) e^{it\omega} d\omega. \quad (2.2.25)$$

On considère le sous espace \mathbb{V}_h de dimension N donné par

$$\mathbb{V}_h = \{\phi_h \in \mathbb{H}_2 : \phi_h|_{[x_i, x_{i+1}[} \in \mathbb{P}_3; \text{ pour } 0 \leq i \leq n-1\}. \quad (2.2.26)$$

La solution approchée $\phi_{*h}(\cdot, t)$ est un élément de l'espace \mathbb{V}_h . Elle s'exprime dans la base de fonctions B-splines par la formule paramétrique suivante

$$\phi_{*h}(x, t) = \sum_{\ell=1}^N v_{h,\ell}(t) B_\ell(x), \quad (2.2.27)$$

pour tout $x \in [a, b]$, où les fonctions

$$v_{h,\ell}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z_{h,\ell}(\omega) e^{it\omega} d\omega,$$

sont les transformées de Fourier inverse des fonctions $z_{h\ell}$ données dans (2.2.21). Soit

$$\psi_\ell(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z_{h,\ell}(\omega) e^{(\omega^2 + it\omega)},$$

alors

$$v_{h,\ell}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\ell(\omega, t) e^{-\omega^2} d\omega. \quad (2.2.28)$$

Pour calculer numériquement l'intégrale (2.2.28), on utilise l'intégration numérique basée sur la formule de quadrature de Gauss-Hermite.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\ell(\omega, t) e^{-\omega^2} d\omega = \sum_{i=0}^m \alpha_i \psi_\ell(\omega_i, t) + E_m(\psi_\ell(\cdot, t)), \quad (2.2.29)$$

où les nœuds $(\omega_i)_{0 \leq i \leq m}$ sont les racines de la fonction polynômiale d'Hermite H_{m+1} de degré $m+1$ et les poids de la formule d'intégration numérique $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq m}$ sont calculés par la formule de Christoffel-Darboux (c.f. [2]),

$$\alpha_i = \frac{1}{H'_{m+1}(\omega_i)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_{m+1}(\omega)}{\omega - \omega_i} e^{-\omega^2} d\omega = \frac{2^m m! \sqrt{\pi}}{(m+1)[H_m(\omega_i)]^2}. \quad (2.2.30)$$

La famille de polynômes d'Hermite $(H_k)_k$ est orthogonale et est donnée par la relation de récurrence suivante (voir l'annexe A.1)

$$H_{k+1}(\omega) = 2\omega H_k(\omega) - 2k H_{k-1}(\omega), \quad k \geq 1, \quad (2.2.31)$$

où $H_0(\omega) = 1$ et $H_1(\omega) = 2\omega$, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$. Les fonctions dérivées des polynômes H_k sont données par $H'_k(\omega) = 2k H_{k-1}(\omega)$, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ et tout $k \geq 1$.

L'erreur E_m relative à l'approximation numérique par la quadrature de Gauss-Hermite (2.2.29) est exprimée par la formule

$$E_m(\varphi) = \frac{(m+1)! \sqrt{\pi}}{2^{m+1} (2m+2)!} \varphi^{(2m+2)}(\xi),$$

pour toute fonction φ de la classe $C^{2m+2}(-\infty, +\infty)$, où $\xi \in]-\infty, +\infty[$.

La forme analytique des nœuds est bien connue seulement pour des valeurs petites du degré m du polynôme d'Hermite. Pour avoir plus de précisions, on choisit m relativement grand. Par la formule (2.2.31), on calcule les coefficients du polynôme H_{m+1} de degré $m+1$ pour un m donné. Puis, on calcule les valeurs propres de la matrice

"compagnon" associée à ces coefficients. On rappelle que la matrice compagnon d'un polynôme

$$H_{m+1}(\omega) = \omega^{m+1} + a_m\omega^m + a_{m-1}\omega^{m-1} + \dots + a_1\omega + a_0,$$

de degré $m + 1$ est la matrice

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & 0 & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{m+1} \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de cette matrice sont les racines de H_{m+1} . Par la formule (2.2.30), on calcule les poids α_i correspondants.

D'où, les coefficients $v_{h,\ell}(t)$ donnés en (2.2.28) sont calculés de façon approximative selon la formule suivante

$$v_{h,\ell}(t) \simeq \sum_{i=0}^m \alpha_i \psi_\ell(\omega_i, t). \quad (2.2.32)$$

Finalement, d'après l'expression (2.2.27), on a

$$\phi_{*h}(x, t) \simeq \sum_{\ell=1}^N \left(\sum_{i=0}^m \alpha_i \psi_\ell(\omega_i, t) \right) B_\ell(x) = \sum_{i=0}^m \alpha_i \left(\sum_{\ell=1}^N \psi_\ell(\omega_i, t) B_\ell(x) \right). \quad (2.2.33)$$

2.2.6 Estimation de l'erreur

Dans cette partie, nous nous intéressons à quelques résultats concernant l'estimation de l'erreur liée à l'approximation numérique de notre méthodes. On considère les nœuds $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de la subdivision de l'intervalle $[a, b]$ donnée par (2.2.16), où $x_0 = a$, $x_n = b$ et $h = (b - a)/n$ est le pas uniforme de la subdivision.

Soit $\widehat{\mathcal{S}}_h([a, b])$ le sous espace vectoriel des cubique splines de $\widehat{\mathcal{V}}_h$, donné par

$$\widehat{\mathcal{S}}_h([a, b]) = \{u_h \in C^2([a, b]) : u_h|_{[x_i, x_{i+1}[} \in \mathbb{P}_3; \text{ pour } 0 \leq i \leq n-1\}. \quad (2.2.34)$$

Soit $\mathcal{I}_h : \widehat{\mathcal{H}}_2 \rightarrow \widehat{\mathcal{S}}_h([a, b])$ l'opérateur d'interpolation tel que pour tout $u \in \widehat{\mathcal{H}}_2$, la fonction $\mathcal{I}_h u$ est l'unique spline cubique dans $\widehat{\mathcal{S}}_h([a, b])$ satisfaisant

- i) les conditions d'interpolations : $\mathcal{I}_h u(x_i) = u(x_i), \quad i = 0, \dots, n,$
- ii) les conditions aux bords : $(\mathcal{I}_h u)'(a) = u'(a), \quad (\mathcal{I}_h u)'(b) = u'(b).$

Le problème d'interpolation par les fonctions splines est étudié par plusieurs auteurs (voir par exemple [20, 30, 104, 106, 122]). La spline cubique $\mathcal{I}_h u$ est de la forme

$$\mathcal{I}_h u(x) = \sum_{i=1}^N \rho_i B_i(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

où pour tout $1 \leq i \leq N$, ρ_i sont les poids relatifs à l'interpolateur \mathcal{I}_h , que nous pouvons obtenir en utilisant les conditions d'interpolations i) et ii). Ces conditions nous conduisent à la résolution du système linéaire suivant

$$\begin{pmatrix} B'_1(x_0) & \dots & \dots & B'_N(x_0) \\ B_1(x_0) & \dots & \dots & B_N(x_0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ B_1(x_n) & \dots & \dots & B_N(x_n) \\ B'_1(x_n) & \dots & \dots & B'_N(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_{N-1} \\ \rho_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'(x_0) \\ u(x_0) \\ \vdots \\ u(x_n) \\ u'(x_n) \end{pmatrix} \quad (2.2.35)$$

Les splines cubiques sont compactes alors la matrice du système linéaire (2.2.35) est une bande tridiagonale.

Proposition 2.2.1. *Soit u une fonction quelconque de \widehat{H}_2 . Alors*

- a) $\|u'' - (\mathcal{I}_h u)''\|_{\widehat{L}_2} \leq \|u''\|_{\widehat{L}_2}$,
- b) $\|u' - (\mathcal{I}_h u)'\|_{\widehat{L}_2} \leq \frac{2h}{\pi} \|u''\|_{\widehat{L}_2}$,
- c) $\|u - \mathcal{I}_h u\|_{\widehat{L}_2} \leq \frac{2h^2}{\pi^2} \|u''\|_{\widehat{L}_2}$.

Démonstration. Ces résultats sont prouvés dans [141, 142] pour les fonctions $u \in C^2([a, b])$, mais ces arguments sont encore valables pour des fonctions $u \in \widehat{H}_2$. \square

Lemme 2.2.1. *Pour une fréquence fixée ω dans \mathbb{R} . Si $u(\cdot, \omega)$ (resp. $u_h(\cdot, \omega)$) est une solution du problème variationnel (2.2.6) (resp. (2.2.20)), alors*

$$\|u(\cdot, \omega) - u_h(\cdot, \omega)\| \leq \frac{C_1}{\alpha} \sqrt{1 + \omega^2} \inf_{v_h \in \widehat{V}_h} \|u(\cdot, \omega) - v_h(\cdot, \omega)\|$$

où C_1 et α sont respectivement les constantes de continuité et de coercivité de la forme sesquilinéaire \mathcal{A}_ω .

Démonstration. Ce résultat découle directement du lemme de Céa (c.f. [125]). \square

Les résultats de la proposition 2.2.1, nous permettent de prouver le théorème suivant

Théorème 2.2.3. *Soit h le pas de la subdivision donnée par (2.2.16). On suppose que l'on a les hypothèses suivantes :*

- i) *La fonction $D \in C^1([a, b])$ et les fonctions $\mu_a, \nu \in C([a, b])$.*
- ii) *La fonction $f \in H^2(\mathbb{R}; L_2)$ et les fonctions $g_a, g_b \in H^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*

Alors on a les résultats suivants :

1. *La fonction $\frac{\partial^2 \phi_*}{\partial x^2} \in H^1(\mathbb{R}; L_2)$.*
2. *Il existe une constante $C_* > 0$ telle que*

$$\|u_* - u_{*h}\|_{L^2(\mathbb{R}; \widehat{H}_1)} \leq C_* h(1 + h^2)^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial^2 \phi_*}{\partial x^2} \right\|_{H^1(\mathbb{R}; L_2)}. \quad (2.2.36)$$

3. On a l'estimation d'erreur

$$\|\phi_* - \phi_{*h}\|_{L^2(\mathbb{R}; H_1)} = \mathcal{O}(h\sqrt{1+h^2}). \quad (2.2.37)$$

Démonstration. Pour une fréquence fixée ω dans \mathbb{R} .

1. On a $u_* = \widehat{\phi}_*$. Les fonctions $F(\cdot, \omega) \in \widehat{L}_2$, $u_*(\cdot, \omega) \in \widehat{H}_1$ et la fonction $D \in C^1([a, b])$, alors on en déduit de la relation (2.2.14) que $\frac{\partial^2 u_*(\cdot, \omega)}{\partial x^2}$ appartient à l'espace \widehat{L}_2 . En utilisant les hypothèses $D \geq \alpha > 0$, la continuité des fonctions μ_a, ν et D' sur $[a, b]$ et d'après l'inégalité $(|a| + |b| + |c|)^2 \leq 9(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2)$, on montre qu'il existe une constante $C_2 > 0$ telle que

$$\left| \frac{\partial^2 \widehat{\phi}_*}{\partial x^2}(x, \omega) \right|^2 \leq \frac{C_2(1+\omega^2)}{\alpha^2} \left(|F(x, \omega)|^2 + |u_*(x, \omega)|^2 + \left| \frac{\partial u_*}{\partial x}(x, \omega) \right|^2 \right),$$

pour tout $x \in [a, b]$.

Le théorème de dérivation sous le signe intégrale de Lebesgue nous permet d'écrire $\frac{\partial^2 \widehat{\phi}_*}{\partial x^2}(\cdot, \omega) = \frac{\partial^2 \phi_*}{\partial x^2}(\cdot, \omega)$. En intégrant l'inégalité précédente sur $]a, b[$, on obtient

$$\left\| \frac{\partial^2 \widehat{\phi}_*}{\partial x^2}(\cdot, \omega) \right\|_{\widehat{L}_2}^2 \leq \frac{C_2(1+\omega^2)}{\alpha^2} \left(\|F(\cdot, \omega)\|_{L_2}^2 + \|u_*(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1}^2 \right).$$

D'après le théorème 2.2.1, on a

$$\|u_*(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} \leq \frac{M(\omega)}{\alpha},$$

où $M(\omega)$ est donnée en (2.2.9). On vérifie facilement qu'il existe une constante $C_3 > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2 \widehat{\phi}_*}{\partial x^2}(\cdot, \omega) \right\|_{\widehat{L}_2}^2 &\leq \frac{C_3(1+\omega^2)}{\alpha^4} \left(\|F(\cdot, \omega)\|_{L_2}^2 + |G_a(\omega)|^2 + |G_b(\omega)|^2 \right) \\ &= \frac{C_3(1+\omega^2)}{\alpha^4} \left(\|\widehat{f}(\cdot, \omega)\|_{L_2}^2 + |\widehat{g}_a(\omega)|^2 + |\widehat{g}_b(\omega)|^2 \right). \end{aligned}$$

En multipliant cette inégalité par la fonction poids $\omega \mapsto (1+\omega^2)$ et en intégrant sur \mathbb{R} par rapport à la variable ω , alors d'après l'hypothèse ii), on obtient

$$\left\| \frac{\partial^2 \phi_*}{\partial x^2} \right\|_{H^1(\mathbb{R}; L_2)}^2 \leq \frac{C_3}{\alpha^4} \left(\|f\|_{H^2(\mathbb{R}; L_2)}^2 + \|g_a\|_{H^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})}^2 + \|g_b\|_{H^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})}^2 \right) < \infty.$$

2. L'estimation de l'erreur est obtenue par application du lemme 2.2.1. On a

$$\|u_*(\cdot, \omega) - u_{*h}(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} \leq \frac{C_1}{\alpha} \sqrt{1+\omega^2} \inf_{v_h \in \widehat{V}_h} \|u_*(\cdot, \omega) - v_h(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1}, \quad (2.2.38)$$

où C_1 et α sont les constantes qui sont liées respectivement à la continuité (2.2.10) et à la coercivité (2.2.11).

L'interpolant $\mathcal{I}_h u_*(\cdot, \omega)$ est dans le sous espace $\widehat{S}_h([a, b]) \subset \widehat{V}_h$, alors on a

$$\inf_{v_h \in \widehat{V}_h} \|u_*(\cdot, \omega) - v_h(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} \leq \|u_*(\cdot, \omega) - \mathcal{I}_h u_*(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1}. \quad (2.2.39)$$

La solution $u_*(\cdot, \omega)$ est dans \widehat{H}_2 , alors d'après la proposition 2.2.1, on obtient les majorations suivantes

$$\|u_*(\cdot, \omega) - \mathcal{I}_h u_*(\cdot, \omega)\|_{\widehat{L}_2} \leq \frac{2h^2}{\pi^2} \left\| \frac{\partial^2 u_*}{\partial x^2}(\cdot, \omega) \right\|_{\widehat{L}_2}, \quad (2.2.40)$$

et

$$\left\| \frac{\partial u_*}{\partial x}(\cdot, \omega) - \frac{\partial(\mathcal{I}_h u_*)}{\partial x}(\cdot, \omega) \right\|_{\widehat{L}_2} \leq \frac{2h}{\pi} \left\| \frac{\partial^2 u_*}{\partial x^2}(\cdot, \omega) \right\|_{\widehat{L}_2}. \quad (2.2.41)$$

Par addition des deux inégalités (2.2.40) et (2.2.41), on obtient

$$\|u_*(\cdot, \omega) - \mathcal{I}_h u_*(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} \leq \frac{2h}{\pi} \left(1 + \frac{h^2}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial^2 u_*}{\partial x^2}(\cdot, \omega) \right\|_{\widehat{L}_2}. \quad (2.2.42)$$

D'après les relations (2.2.38), (2.2.39), (2.2.41) et (2.2.42) ainsi que l'identité $\frac{\partial^2 u_*}{\partial x^2}(\cdot, \omega) = \frac{\widehat{\partial^2 \phi_*}}{\partial x^2}(\cdot, \omega)$, on obtient l'estimation de l'erreur

$$\|u_*(\cdot, \omega) - u_{*h}(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1}^2 \leq \left(\frac{C_1}{\alpha}\right)^2 h^2 (1+h^2) (1+\omega^2) \left\| \frac{\widehat{\partial^2 \phi_*}}{\partial x^2}(\cdot, \omega) \right\|_{\widehat{L}_2}^2.$$

En intégrant sur \mathbb{R} par rapport à la variable de la fréquence ω , on obtient

$$\|u_* - u_{*h}\|_{L^2(\mathbb{R}; \widehat{H}_1)} \leq C_* h \sqrt{1+h^2} \left\| \frac{\widehat{\partial^2 \phi_*}}{\partial x^2} \right\|_{H^1(\mathbb{R}; L_2)}, \text{ avec } C_* = \frac{C_1}{\alpha}.$$

3. Les inégalités suivantes sont obtenues en utilisant l'identité de Parseval,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_*(x, t) - \phi_{*h}(x, t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_*(x, \omega) - u_{*h}(x, \omega)|^2 d\omega \quad (2.2.43)$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial(\phi_* - \phi_{*h})}{\partial x}(x, t) \right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\widehat{\partial \phi_*}}{\partial x}(x, \omega) - \frac{\widehat{\partial \phi_{*h}}}{\partial x}(x, \omega) \right|^2 d\omega. \quad (2.2.44)$$

Le théorème de dérivation sous le signe intégrale de Lebesgue, nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial(\phi_* - \phi_{*h})}{\partial x}(x, t) \right|^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\widehat{\partial \phi_*}}{\partial x}(x, \omega) - \frac{\widehat{\partial \phi_{*h}}}{\partial x}(x, \omega) \right|^2 d\omega, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u_*}{\partial x}(x, \omega) - \frac{\partial u_{*h}}{\partial x}(x, \omega) \right|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (2.2.45)$$

En intégrant les relations (2.2.43) et (2.2.45) sur $[a, b]$ par rapport à la variable x et en utilisant le théorème de Fubini, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|\phi_*(\cdot, t) - \phi_{*h}(\cdot, t)\|_{H_1}^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \|u_*(\cdot, \omega) - u_{*h}(\cdot, \omega)\|_{H_1}^2 d\omega.$$

On vérifie que l'on a

$$\|\phi_* - \phi_{*h}\|_{L^2(\mathbb{R}; H_1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|u_* - u_{*h}\|_{L^2(\mathbb{R}; \hat{H}_1)}. \quad (2.2.46)$$

D'après le résultat 2), on obtient la majoration suivante

$$\|\phi_* - \phi_{*h}\|_{L^2(\mathbb{R}; H_1)} \leq \frac{C_*}{\sqrt{2\pi}} h \sqrt{1+h^2} \left\| \frac{\partial^2 \phi_*}{\partial x^2} \right\|_{H^1(\mathbb{R}; L_2)}.$$

□

2.2.7 Les tests numériques

Dans cette partie, nous proposons des exemples numériques qui illustrent la validité de notre méthode numérique établie précédemment. On subdivise l'intervalle du temps $[t_0, t_0 + T]$ en utilisant les nœuds $t_k = t_0 + k\Delta t$, pour $0 \leq k \leq p$, où $\Delta t = \frac{T}{p}$ est le pas de la subdivision en temps. Nos calculs numériques sont faits en utilisant Matlab.

Premier exemple

Dans ce premier exemple, on considère le problème de diffusion parabolique (2.2.1)-(2.2.2), avec les paramètres optiques $\nu = \nu_0$, $D = D_0$ et $\mu_a = \mu_{a0}$ sont constants. Il est toujours possible d'étendre ce résultat pour des propriétés optiques continues par morceaux. On considère la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = \frac{3}{4} e^{-(9x-2)^2/4} + \frac{3}{4} e^{-(9x+1)^2/49} + \frac{1}{2} e^{-(9x-7)^2/4} - \frac{1}{5} e^{-(9x-4)^2}.$$

Pour cet exemple, les fonctions sources considérées sont données par

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \exp\left(-\frac{(t-t_s)^2}{2\rho^2}\right) \left(-\frac{2\nu_0(t-t_s)}{\rho^2 c_0} - D_0\Delta + \mu_{a0}\right) \varphi(x), \\ g_a(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \exp\left(-\frac{(t-t_s)^2}{2\rho^2}\right) \left(\varphi(a) - \frac{\beta_a}{2} D_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a)\right), \\ g_b(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \exp\left(-\frac{(t-t_s)^2}{2\rho^2}\right) \left(\varphi(b) + \frac{\beta_b}{2} D_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(b)\right). \end{aligned}$$

Les fonctions sources intermédiaires dans le domaine fréquentiel sont données par

$$\begin{aligned} F(x, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(it_s\omega - (\rho\omega)^2/2) \left(-i\frac{\nu_0\omega}{c_0} - D_0\Delta + \mu_{a0}\right) \varphi(x), \\ G_a(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-it_s\omega - (\rho\omega)^2/2) \left(\varphi(a) - \frac{\beta_a}{2} D_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a)\right), \\ G_b(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-it_s\omega - (\rho\omega)^2/2) \left(\varphi(b) + \frac{\beta_b}{2} D_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(b)\right). \end{aligned}$$

La solution exacte ϕ de l'équation de diffusion (2.2.1) avec les conditions de Robin aux bords (2.2.2) est

$$\phi_*(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \exp\left(-\frac{(t-t_s)^2}{2\rho^2}\right) \left(\frac{3}{4} e^{-(9x-2)^2/4} + \frac{3}{4} e^{-(9x+1)^2/49} + \frac{1}{2} e^{-(9x-7)^2/4} - \frac{1}{5} e^{-(9x-4)^2}\right).$$

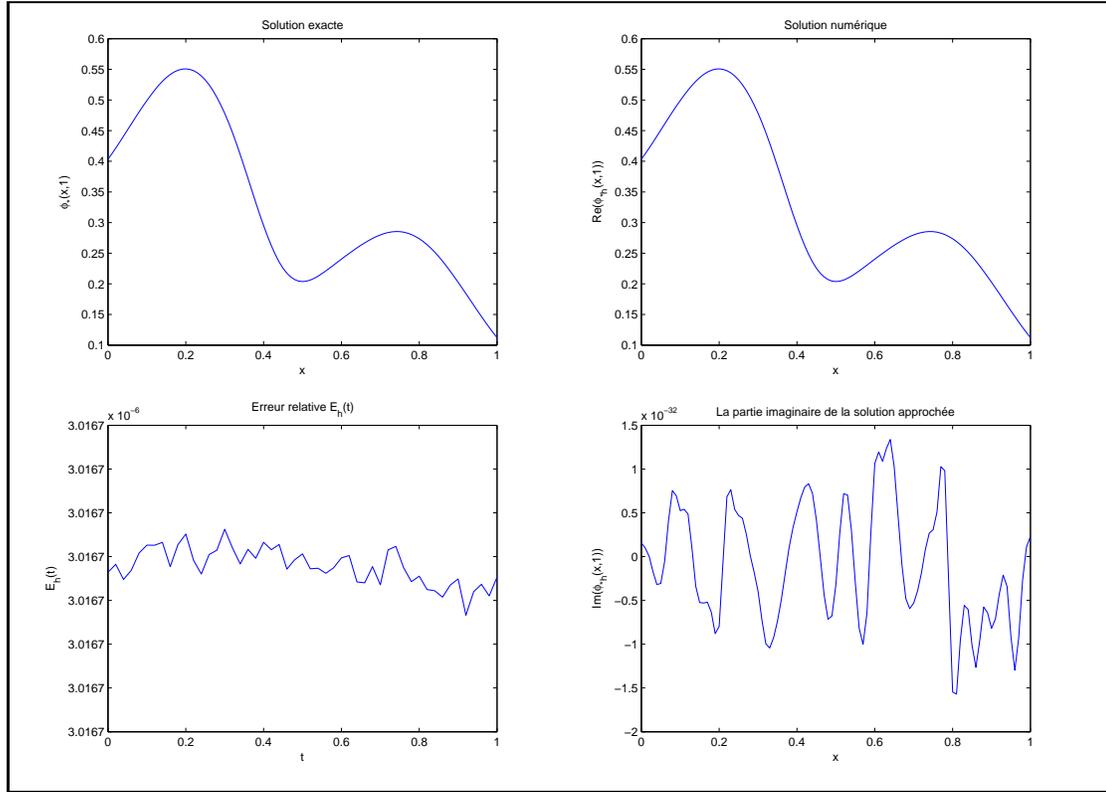


FIGURE 2.2 – Exemple avec les paramètres : $a = 0$, $b = 1$, $1/\beta_a = \zeta_a = \pi$, $1/\beta_b = \zeta_b = 1$, $t_0 = 0$, $T = 1$, $t_s = 0$, $c_0 = 3.10^8$, $\nu_0 = 1.45$, $\mu_{s_0} = 20$, $\mu_{a_0} = 0.025$, $\vartheta = 0.95$, $\rho = 1$, $m = 25$, $p = 50$ et $n = 50$.

La solution exacte $x \mapsto \phi_*(x, t)$ est tracée en haut à gauche de la figure 2.2. La partie réelle et la partie imaginaire de la solution numérique $x \mapsto \phi_{*h}(x, t)$ sont respectivement tracées en haut à droite et bas à droite de la figure 2.2, pour la variable $t = 1$ et $x \in [0, 1]$. On observe que la courbe correspondant à la partie réelle de la fonction $x \mapsto \phi_{*h}(x, t)$ est similaire (en haut à droite) à la courbe de la solution exacte (en haut à gauche). On observe que la partie imaginaire est très proche de zéro avec des valeurs d'ordre près de 10^{-32} . En bas à gauche de la figure 2.2, on trace la courbe représentative de l'erreur relative $E_h : t \in [t_0, t_0 + T] \mapsto E_h(t)$ en fonction de la variable du temps, où

$$E_h(t) = \left(\frac{\sum_{i=0}^n |\phi_*(x_i, t) - \phi_{*h}(x_i, t)|^2}{\sum_{i=0}^n |\phi_*(x_i, t)|^2} \right)^{1/2}. \quad (2.2.47)$$

Dans la figure 2.3, on présente la solution exacte (à gauche) et la solution approchée (à droite) dans le domaine $[a, b] \times [t_0, t_0 + T]$. L'erreur relative globale est exprimée par

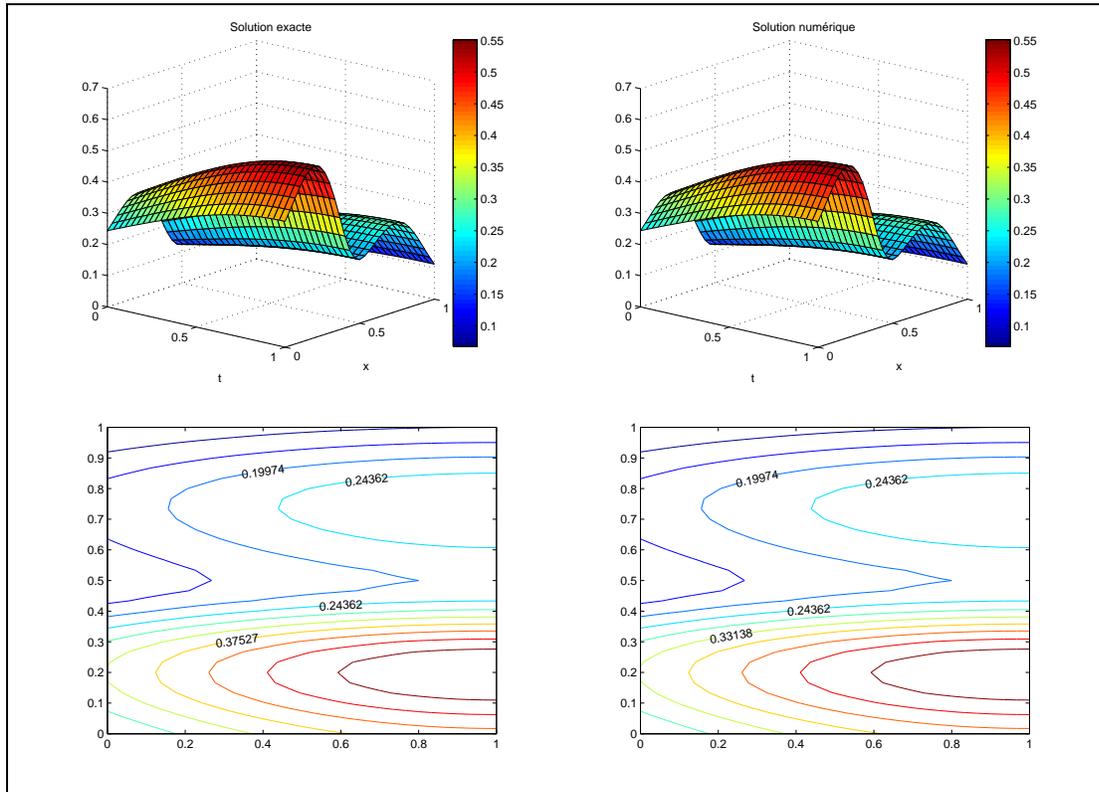


FIGURE 2.3 – Exemple avec les paramètres : $a = 0$, $b = 1$, $1/\beta_a = \zeta_a = \pi$, $1/\beta_b = \zeta_b = 1$, $t_0 = 0$, $T = 1$, $t_s = 0$, $c_0 = 3.10^8$, $\nu_0 = 1.45$, $\mu_{s_0} = 20$, $\mu_{a_0} = 0.025$, $\vartheta = 0.95$, $\rho = 1$, $m = 25$, $p = 50$ et $n = 50$.

la formule suivante

$$\mathcal{E}_h = \frac{\|\Theta_* - \Theta_{*h}\|_F}{\|\Theta_*\|_F} = \left(\frac{\sum_{j=0}^p \sum_{i=0}^n |\phi_*(x_i, t_j) - \phi_{*h}(x_i, t_j)|^2}{\sum_{j=0}^p \sum_{i=0}^n |\phi_*(x_i, t_j)|^2} \right)^{1/2}, \quad (2.2.48)$$

où Θ_* et Θ_{*h} sont des matrices de taille $(n+1) \times (p+1)$ données respectivement par $\Theta_* = (\phi_*(x_i, t_j))_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq p}}$ et $\Theta_{*h} = (\phi_{*h}(x_i, t_j))_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq p}}$. Ici, $\|A\|_F = \sqrt{\text{trace}(A^T A)}$ est la norme classique de Frobenius. Dans le tableau 2.2, on donne une liste de valeurs de l'erreur \mathcal{E}_h pour différentes valeurs du pas h .

h	1/5	1/10	1/15	1/20	1/25	1/30
Erreur \mathcal{E}_h	4.56e-6	7.12e-7	2.98e-7	1.81e-7	1.37e-7	1.19e-7

TABLE 2.2 – Avec $p = 35$, $m = 25$ et $h = (b - a)/n$.

Deuxième exemple

Dans cet exemple, on considère l'équation de diffusion (2.2.1) avec les conditions de Robin aux bords (2.2.2). Dans ce second exemple les paramètres optiques ν , D et μ_a sont donnés respectivement sous forme de fonctions dépendantes de la variable de l'espace $x \in [a, b]$ par $\nu(x) = \nu_0(1 + \frac{1}{2}e^{-x})$, $\mu_a(x) = \mu_{a0}e^{-x}$ et $D(x) = D_0x^2$. Dans cet exemple, on considère les fonctions sources suivantes

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \frac{1}{2\pi\rho\sigma} \left(-\frac{(t-t_s)}{c_0\rho^2} \nu(x) + \mu_a(x) + \frac{(x-x_s)}{\sigma^2} \frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\sigma^2 - (x-x_s)^2}{\sigma^4} D(x) \right) \\ &\times \exp\left(-\frac{(t-t_s)^2}{2\rho^2}\right) \exp\left(-\frac{(x-x_s)^2}{2\sigma^2}\right), \\ g_a(t) &= \frac{1}{2\pi\rho\sigma} \left(1 + \frac{\beta_a}{2} D_0 \frac{a^2(a-x_s)}{\sigma^2} \right) \exp\left(-\frac{(t-t_s)^2}{2\rho^2}\right) \exp\left(-\frac{(a-x_s)^2}{2\sigma^2}\right), \\ g_b(t) &= \frac{1}{2\pi\rho\sigma} \left(1 - \frac{\beta_b}{2} D_0 \frac{b^2(b-x_s)}{\sigma^2} \right) \exp\left(-\frac{(t-t_s)^2}{2\rho^2}\right) \exp\left(-\frac{(b-x_s)^2}{2\sigma^2}\right). \end{aligned}$$

Les fonctions sources intermédiaires dans le domaine fréquentiel sont données par

$$\begin{aligned} F(x, \omega) &= \frac{1}{2\pi\sigma} \left(i\frac{\omega}{c_0} \nu(x) + \mu_a(x) + \frac{(x-x_s)}{\sigma^2} \frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\sigma^2 - (x-x_s)^2}{\sigma^4} D(x) \right) \\ &\times \exp(-it_s\omega - (\rho\omega)^2/2) \exp\left(-\frac{(x-x_s)^2}{2\sigma^2}\right), \\ G_a(\omega) &= \frac{1}{2\pi\sigma} \left(1 + \frac{\beta_a}{2} D_0 \frac{a^2(a-x_s)}{\sigma^2} \right) \exp(-it_s\omega - (\rho\omega)^2/2) \exp\left(-\frac{(a-x_s)^2}{2\sigma^2}\right), \\ G_b(\omega) &= \frac{1}{2\pi\sigma} \left(1 - \frac{\beta_b}{2} D_0 \frac{b^2(b-x_s)}{\sigma^2} \right) \exp(-it_s\omega - (\rho\omega)^2/2) \exp\left(-\frac{(b-x_s)^2}{2\sigma^2}\right). \end{aligned}$$

La solution exacte ϕ_* de l'équation parabolique (2.2.1) avec les conditions de Robin aux bords (2.2.2) est

$$\phi_*(x, t) = \frac{1}{2\pi\rho\sigma} \exp\left(-\frac{(t-t_s)^2}{2\rho^2} - \frac{(x-x_s)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \forall (x, t) \in [a, b] \times [t_0, t_0 + T].$$

Pour $t = 2$ et $x \in [-5, 5]$, la courbe de la solution exacte $x \mapsto \phi_*(x, t)$ est en haut à gauche de la figure 2.4, la partie réelle et la partie imaginaire de la solution numérique $x \mapsto \phi_{*h}(x, t)$ sont tracées respectivement en haut à droite et en bas à droite de la figure 2.4. On observe que la courbe de la partie réelle de $x \mapsto \phi_{*h}(x, t)$ est similaire à la courbe de la solution exacte et ceci coïncide parfaitement puisque la solution exacte est à valeurs réelles. Tandis que la partie imaginaire est à valeurs presque nulles d'un ordre de 10^{-29} . En bas à gauche de la figure 2.4, on donne le graphique de la fonction $E_h : t \in [t_0, t_0 + T] \mapsto E_h(t)$ de l'erreur relative en fonction du temps, avec E_h est l'erreur donnée par l'expression analytique (2.2.47). Les valeurs de \mathcal{E}_h en fonction de valeurs différentes du pas h sont regroupées dans le tableau 2.3 suivant

Pour tout $(x, t) \in]a, b[\times]t_0, t_0 + T[$, la solution exacte $(x, t) \mapsto \phi_*(x, t)$ est représentée sur le côté gauche de la figure 2.5 et la partie réelle de la solution numérique $(x, t) \mapsto \phi_{*h}(x, t)$ est tracée sur le côté droit de la figure 2.5.

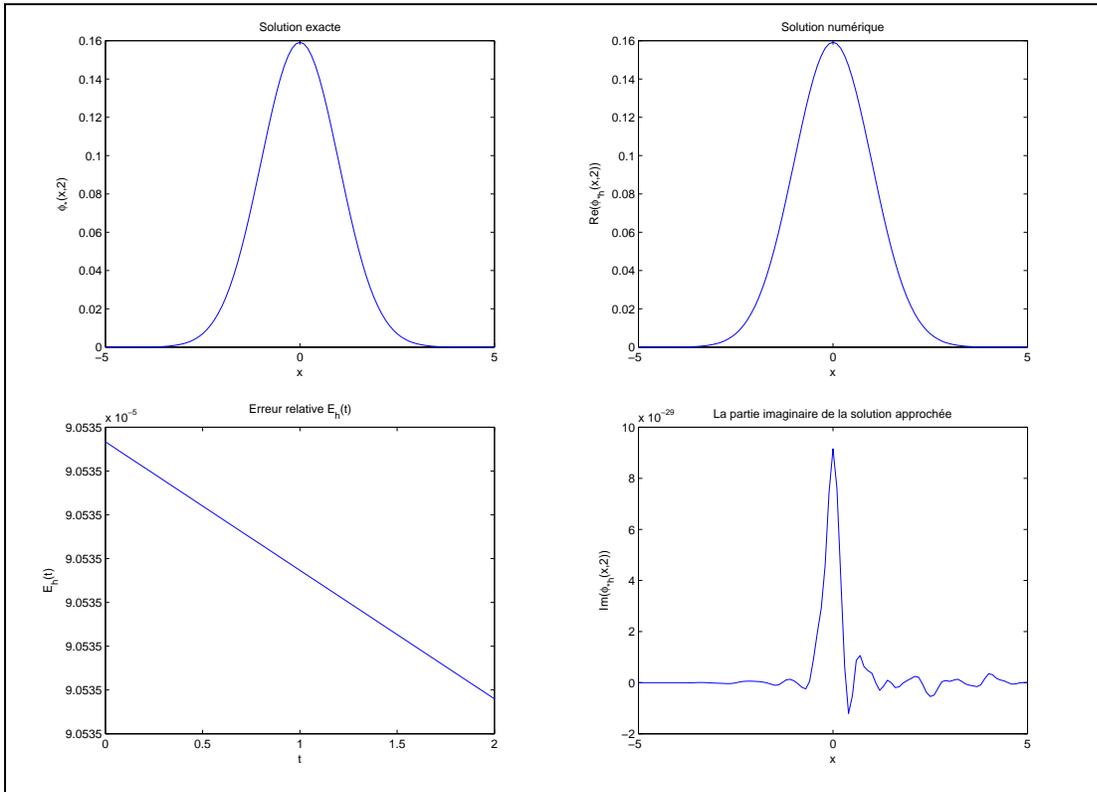


FIGURE 2.4 – Exemple avec les paramètres : $a = -5$, $b = 5$, $1/\beta_a = \zeta_a = \pi$, $1/\beta_b = \zeta_b = 1/2\pi$, $t_0 = 0$, $T = 2$, $t_s = 0$, $x_s = 0$, $c_0 = 3.10^8$, $\nu_0 = 1.45$, $D_0 = 0.3252$, $\mu_{a0} = 0.025$, $\rho = 1$, $\sigma = 1$, $m = 50$, $p = 35$ et $n = 50$.

h	1/5	1/10	1/15	1/20	1/25	1/30
Erreur \mathcal{E}_h	2.47e-4	6.14e-5	2.67e-5	1.58e-5	1.38e-5	1.15e-5

TABLE 2.3 – Avec $p = 35$, $m = 25$ et $h = (b - a)/n$.

Exemple avec la présence d'un saut dans la fonction D

Dans cet exemple, on considère le problème de diffusion parabolique (2.2.1)-(2.2.2), avec les paramètres optiques ν , D et μ_a sont des fonctions non constantes données respectivement par

$$\mu_a(x) = \begin{cases} \mu_{a0} e^{-x}, & \text{si } x \in [a, \frac{a+b}{2}], \\ 0, & \text{si } x \in]\frac{a+b}{2}, b]. \end{cases}, \quad \mu_{sc}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [a, \frac{a+b}{2}], \\ \mu_{s0}(1 + e^{-x}), & \text{si } x \in]\frac{a+b}{2}, b]. \end{cases}$$

$$D(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu_a(x)}, & \text{si } x \in [a, \frac{a+b}{2}], \\ \frac{1}{(1 - \vartheta)\mu_s(x)}, & \text{si } x \in]\frac{a+b}{2}, b]. \end{cases} \quad \text{et } \nu(x) = \nu_0 \left(1 + \frac{1}{2}e^{-x}\right).$$

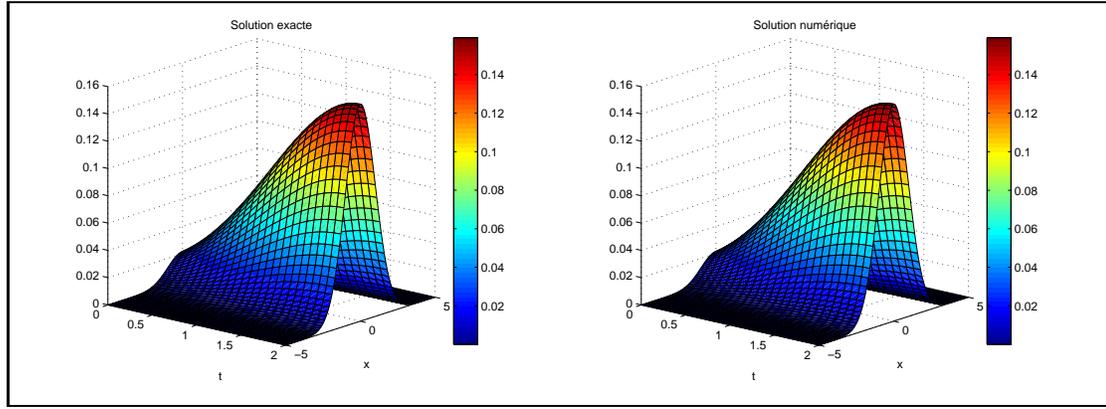


FIGURE 2.5 – Exemple avec les paramètres : $a = -5$, $b = 5$, $1/\beta_a = \zeta_a = \pi$, $1/\beta_b = \zeta_b = 1/2\pi$, $t_0 = 0$, $T = 2$, $t_s = 0$, $x_s = 0$, $c_0 = 3.10^8$, $\nu_0 = 1.45$, $D_0 = 0.3252$, $\mu_{a0} = 0.025$, $\rho = 1$, $\sigma = 1$, $m = 50$, $p = 35$ et $n = 50$.

On considère les fonctions sources suivantes

$$\begin{aligned}
 f(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \left((t^3 - 3t) \frac{\nu(x)}{c_0} + (1 - t^2) \left(\mu_a(x) + \frac{(x - x_s)}{\sigma^2} \frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\sigma^2 - (x - x_s)^2}{\sigma^4} D(x) \right) \right) \\
 &\quad \times \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{(x - x_s)^2}{2\sigma^2}\right), \\
 g_a(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} (1 - t^2) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \left(1 + \frac{\beta_a}{2} D_0 \frac{a^2(a - x_s)}{\sigma^2} \right) \exp\left(-\frac{(a - x_s)^2}{2\sigma^2}\right), \\
 g_b(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} (1 - t^2) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \left(1 - \frac{\beta_b}{2} D_0 \frac{b^2(b - x_s)}{\sigma^2} \right) \exp\left(-\frac{(b - x_s)^2}{2\sigma^2}\right).
 \end{aligned}$$

Les fonctions sources intermédiaires dans le domaine fréquentiel sont données par

$$\begin{aligned}
 F(x, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\omega^2}{\sigma} e^{-\omega^2/2} \left(i \frac{\omega}{c_0} \nu(x) + \mu_a(x) + \frac{(x - x_s)}{\sigma^2} \frac{\partial D}{\partial x}(x) + \frac{\sigma^2 - (x - x_s)^2}{\sigma^4} D(x) \right) \\
 &\quad \times \exp\left(-\frac{(x - x_s)^2}{2\sigma^2}\right), \\
 G_a(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\omega^2}{\sigma} e^{-\omega^2/2} \left(1 + \frac{\beta_a}{2} D_0 \frac{(a - x_s)}{\sigma^2} \right) \exp\left(-\frac{(a - x_s)^2}{2\sigma^2}\right), \\
 G_b(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\omega^2}{\sigma} e^{-\omega^2/2} \left(1 - \frac{\beta_b}{2} D_0 \frac{(b - x_s)}{\sigma^2} \right) \exp\left(-\frac{(b - x_s)^2}{2\sigma^2}\right).
 \end{aligned}$$

La solution exacte ϕ_* de l'équation parabolique (2.2.1) avec les conditions de Robin aux bords (2.2.2) est

$$\phi_*(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} (1 - t^2) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{(x - x_s)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Pour tout $(x, t) \in [-5, 5] \times [0, 3]$, la solution exacte $(x, t) \mapsto \phi_*(x, t)$ est représentée en haut à gauche de la figure 2.6, la partie réelle et la partie imaginaire de la solution approchée $(x, t) \mapsto \phi_{*h}(x, t)$ sont tracées respectivement en haut à droite et en bas à droite de la figure 2.6. On observe que la surface de la partie réelle de la solution approchée est similaire à la surface de la solution exacte et ceci coïncide parfaitement

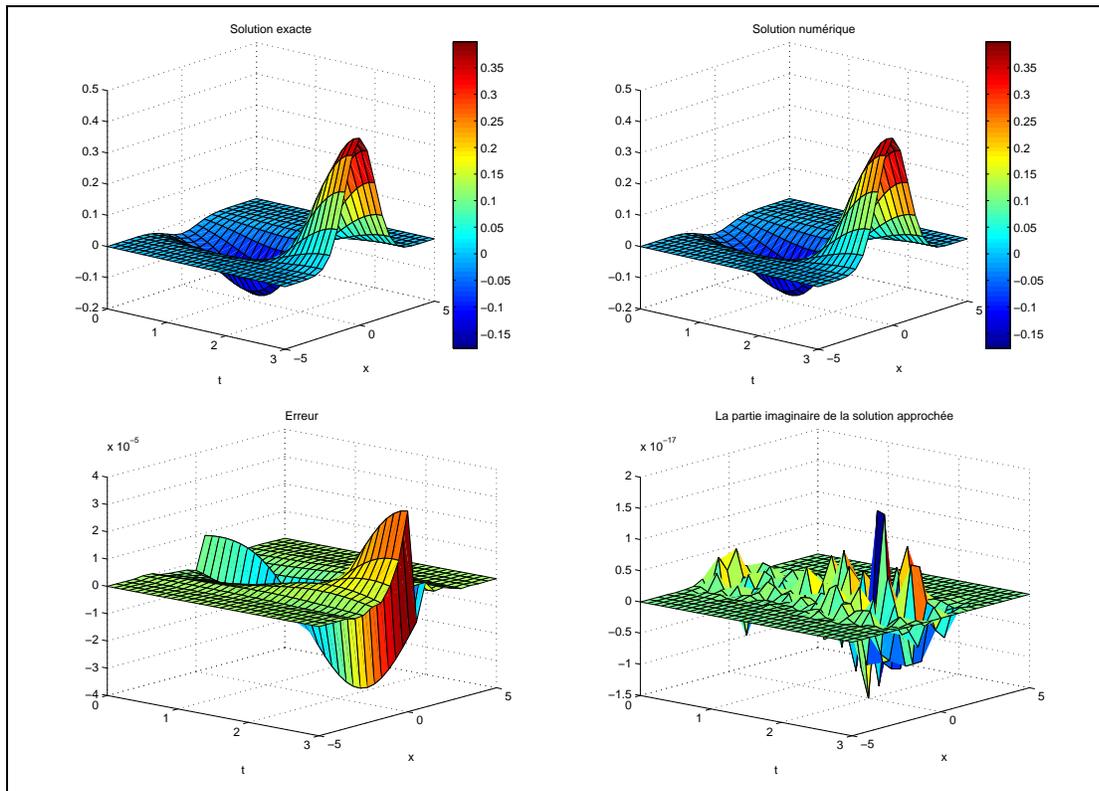


FIGURE 2.6 – Exemple avec les paramètres : $a = -5$, $b = 5$, $1/\beta_a = \zeta_a = \pi$, $1/\beta_b = \zeta_b = 1/4$, $t_0 = 0$, $T = 3$, $x_s = 0$, $c_0 = 1$, $\nu_0 = 1.45$, $\mu_{s0} = 20$, $\vartheta = 0.95$, $\mu_{a0} = 0.025$, $\sigma = 1$, $m = 50$, $p = 35$ et $n = 50$.

puisque la solution exacte est à valeurs réelles. Tandis que la partie imaginaire est à valeurs presque nulles avec un ordre de 10^{-17} et en bas à gauche de la figure 2.6, le graphique représente la surface de l'erreur relative en temps et en espace.

2.3 Problème de diffusion multidimensionnel

2.3.1 Équation de diffusion multidimensionnelle

On considère le problème de diffusion (1.4.8)-(1.5.3) pour la reconstruction d'un signal dans un domaine $\Omega \times [t_0, t_0 + T]$. La fonction $(x, t) \mapsto \phi(x, t)$ est la densité lumineuse à la position $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou 3) et à l'instant $t \in [t_0, t_0 + T]$, où t_0 est le temps initial et T est la période. La fonction μ_a est le potentiel d'absorption introduit en (C.3), la fonction μ_{sc} est le potentiel de dispersion lié à la diffusion introduit en (C.4) et ν est l'indice de réfraction du milieu introduit en (C.8). Le coefficient de dispersion réduit est exprimé selon la formule

$$\tilde{\mu}_{sc}(x) = (1 - \vartheta)\mu_{sc}(x),$$

où $\vartheta \in [0, 1]$ est le coefficient d'anisotropie qui figure en (C.6). Le coefficient de diffusion D est relativement lié à μ_a et à $\tilde{\mu}_{sc}$ par la relation (C.7.1). On suppose toujours que les coefficients μ_a , μ_{sc} et ν sont des fonctions dans l'espace $L^\infty(\Omega)$.

On considère le problème de diffusion donné par l'équation (1.4.8) et les conditions de Robin aux bords (1.5.3). Alors, la densité lumineuse $\phi(x, t)$ satisfait l'équation aux dérivées partielles suivante,

$$\frac{1}{c(x)} \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} - \operatorname{div}(D(x)\nabla \phi(x, t)) + \mu_a(x)\phi(x, t) = f(x, t), \quad \forall (x, t) \in \Omega \times [t_0, t_0 + T]. \quad (2.3.1)$$

On suppose que la fonction $\gamma : \partial\Omega \rightarrow [0, +\infty[$ définie en (1.5.2), est dans l'espace $L^\infty(\partial\Omega)$. On considère les conditions aux bords

$$\phi(\xi, t) + \frac{\beta(\xi)}{2} D(\xi) \frac{\partial \phi}{\partial n}(\xi, t) = g(\xi, t), \quad \forall (\xi, t) \in \partial\Omega \times [t_0, t_0 + T]. \quad (2.3.2)$$

On suppose que, la fonction $t \mapsto \phi(x, t)$ et la fonction gradient $t \mapsto \nabla \phi(x, t)$ possèdent des prolongements à \mathbb{R} , appartenant respectivement aux espaces $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^d$, presque partout sur Ω . On suppose également que les fonctions sources données f et g possèdent des prolongements appartenant respectivement aux espaces $L^\infty(\Omega; L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ et $L^\infty(\partial\Omega; L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale de Lebesgue, on a

$$\widehat{\nabla \phi}(x, \omega) = \nabla \widehat{\phi}(x, \omega), \quad \forall (x, \omega) \in \Omega \times \mathbb{R}. \quad (2.3.3)$$

On applique la transformée de Fourier à l'équation (2.3.1) ainsi qu'aux conditions non homogènes de Robin aux bords (2.3.2), et on utilise la relation classique $\frac{\partial \widehat{g}}{\partial t} = i\omega \widehat{g}$ et la relation (2.3.3) on obtient l'équation de diffusion elliptique dans un domaine fréquentiel

$$-\operatorname{div}(D(x)\nabla \widehat{\phi}(x, \omega)) + q_\omega(x)\widehat{\phi}(x, \omega) = \widehat{f}(x, \omega), \quad \forall (x, \omega) \in \Omega \times \mathbb{R}, \quad (2.3.4)$$

avec les conditions non homogènes de Robin aux bords

$$\widehat{\phi}(\xi, \omega) + \frac{\beta(\xi)}{2} D(\xi) \frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial n}(\xi, \omega) = \widehat{g}(\xi, \omega), \quad \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}, \quad (2.3.5)$$

où la fonction q_ω est donnée par l'expression (1.6.5).

Par la suite, on note respectivement par $u(\cdot, \omega) = \hat{\phi}(\cdot, \omega)$, $F(\cdot, \omega) = \hat{f}(\cdot, \omega)$, et $G(\cdot, \omega) = \hat{g}(\cdot, \omega)$, la transformée de Fourier des fonctions $\phi(x, \cdot)$, $f(x, \cdot)$ et $g(\xi, \cdot)$. La fonction u s'appelle la densité lumineuse dans le domaine fréquentiel et F et G sont les fonctions de sources intermédiaires dans le domaine fréquentiel.

2.3.2 Reconstruction d'un signal en fonction de la fréquence

On suppose toujours que les fonctions D , μ_a et ν sont dans l'espace $L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. On suppose également que D , μ_a sont strictement positives et possèdent une borne inférieure α , on écrit

$$\inf(D(x), \mu_a(x)) \geq \alpha > 0, \quad \text{p.p. sur } \Omega. \quad (2.3.6)$$

La formulation variationnelle faible

Soit $u_*(\cdot, \omega)$ une fonction suffisamment régulière satisfaisant le problème (2.3.4)-(2.3.5). On suppose que $u_*(\cdot, \omega) \in \hat{H}_1$. En multipliant l'équation de diffusion (2.3.4) par une fonction test arbitraire $\bar{v} \in \hat{H}_1$, et en intégrant sur Ω par rapport à la variable x et en utilisant la formule de Green-Gauss ainsi que les conditions non homogènes de Robin aux bords (2.3.5), on obtient la formulation variationnelle faible :

$$\mathcal{A}_\omega(u_*(\cdot, \omega), v) = \mathcal{L}_\omega(v), \quad \forall v \in \hat{H}_1, \quad (2.3.7)$$

où $\mathcal{A}_\omega : \hat{H}_1 \times \hat{H}_1 \rightarrow \mathbb{C}$ est la forme sesquilinéaire définie pour tout $u, v \in \hat{H}_1$ par

$$\mathcal{A}_\omega(u, v) = \int_\Omega D(x) \nabla u(x) \overline{\nabla v(x)} dx + \int_\Omega q_\omega(x) u(x) \overline{v(x)} dx + 2 \int_{\partial\Omega} \gamma(\xi) u(\xi) \overline{v(\xi)} d\sigma(\xi), \quad (2.3.8)$$

et $\mathcal{L}_\omega : \hat{H}_1 \rightarrow \mathbb{C}$ est la forme semi-linéaire définie pour tout $v \in \hat{H}_1$ par

$$\mathcal{L}_\omega(v) = 2 \int_{\partial\Omega} \gamma(\xi) G(\xi, \omega) \overline{v(\xi)} d\sigma(\xi) + \int_\Omega F(x, \omega) \overline{v(x)} dx, \quad (2.3.9)$$

avec $d\sigma$ est la mesure de Lebesgue sur $\partial\Omega$.

Inversement, si la fonction $u_*(\cdot, \omega) \in \hat{H}_1$ satisfait la formulation variationnelle faible (2.3.7), alors d'après la formule de Green-Gauss, on montre que

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \left[-\operatorname{div} \left(D(x) \nabla u_*(x, \omega) \right) + q_\omega(x) u_*(x, \omega) - F(x, \omega) \right] \overline{v(x)} dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(2\gamma(\xi) (G(\xi, \omega) - u_*(\xi, \omega)) - D(\xi) \frac{\partial u_*}{\partial \mathbf{n}}(\xi, \omega) \right) \overline{v(\xi)} d\sigma(\xi), \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

pour tout $v \in \hat{H}_1$.

En particulier, pour toute fonction φ de classe C^∞ à support compact dans Ω , on a

$$\int_\Omega \left[-\operatorname{div} \left(D(x) \nabla u_*(x, \omega) \right) + q_\omega(x) u_*(x, \omega) - F(x, \omega) \right] \overline{\varphi(x)} dx = 0.$$

Par suite, on a

$$-\operatorname{div}\left(D(x)\nabla u_*(x,\omega)\right) + q_\omega(x)u_*(x,\omega) = F(x,\omega), \quad \text{dans } \overline{\Omega},$$

au sens des distributions.

Par hypothèse la fonction f est dans l'espace $L^\infty(\Omega; L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$, alors $F(\cdot, \omega)$ appartient à l'espace $L^\infty(\Omega, \mathbb{C})$. Par conséquent, l'égalité précédente est valide presque partout dans Ω . Pour toute fonction φ de classe C^∞ à support compact dans $\partial\Omega$, on a

$$\int_{\partial\Omega} \left(2\gamma(\xi)(G(\xi, \omega) - u_*(\xi, \omega)) - D(\xi) \frac{\partial u_*}{\partial \mathbf{n}}(\xi, \omega) \right) \overline{\varphi(\xi)} d\sigma(\xi) = 0.$$

Soit $K \subset \partial\Omega$ un ensemble compact, d'après le lemme d'Urysohn [148], il existe \mathcal{O} un voisinage ouvert de K tel que $K \subset \mathcal{O} \cap \partial\Omega$ et il existe une fonction φ_c de classe C^∞ à support compact dans \mathbb{R}^d tels que $\varphi_c \equiv 1$ sur \mathcal{O} et $\varphi_c \equiv 0$ à l'extérieur de \mathcal{O} .

On remplace φ par φ_c dans l'équation précédente, alors on a

$$\int_K \left(2\gamma(\xi)(G(\xi, \omega) - u_*(\xi, \omega)) - D(\xi) \frac{\partial u_*}{\partial \mathbf{n}}(\xi, \omega) \right) d\sigma(\xi) = 0. \quad (2.3.11)$$

Ainsi, l'intégrale (2.3.11) est nulle pour tout compact $K \subset \partial\Omega$, donc

$$2\gamma(\cdot)(G(\cdot, \omega) - u_*(\cdot, \omega)) - D(\cdot) \frac{\partial u_*}{\partial \mathbf{n}}(\cdot, \omega) = 0, \quad \text{p.p. sur } \partial\Omega.$$

En utilisant les propriétés de la fonction β donnée en (1.5.2), on obtient

$$u_*(\cdot, \omega) + \frac{\beta(\cdot)}{2} D(\cdot) \frac{\partial u_*}{\partial \mathbf{n}}(\cdot, \omega) = G(\cdot, \omega), \quad \text{p.p. sur } \partial\Omega.$$

En conclusion, le problème (2.3.4)-(2.3.5) est équivalent à la formulation variationnelle faible (2.3.7).

D'après le théorème de trace (voir l'annexe B), il existe une constante $C > 0$ (dépendant seulement de Ω) telle que

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega, \mathbb{C})} \leq C \|u\|_{\widehat{H}_1}, \quad \forall u \in \widehat{H}_1. \quad (2.3.12)$$

En utilisant l'inégalité de Schwarz et le théorème d'injection par continuité de Sobolev, on montre qu'il existe une constante $C_0 > 0$ (dépendant seulement de $\partial\Omega$ et γ) telle que

$$|\mathcal{L}_\omega(v)| \leq M(\omega) \|v\|_{\widehat{H}_1}, \quad \forall v \in \widehat{H}_1, \quad (2.3.13)$$

où $M(\omega) = C_0 \left(\|F(\cdot, \omega)\|_{\widehat{L}_2} + \|G(\cdot, \omega)\|_{L^2(\partial\Omega, \mathbb{C})} \right)$.

Ceci prouve que l'opérateur $\mathcal{L}_\omega : \widehat{H}_1 \rightarrow \mathbb{C}$ est une forme semi-linéaire continue sur \widehat{H}_1 . Les fonctions D et μ_a possèdent la propriété (2.3.6) et alors d'après le théorème d'injection par continuité de Sobolev, on prouve qu'il existe une constante positive $C_1 > 0$ ne dépendant pas de la fréquence ω telle que

$$|\mathcal{A}_\omega(u, v)| \leq C_1 \sqrt{1 + \omega^2} \|u\|_{\widehat{H}_1} \|v\|_{\widehat{H}_1}, \quad \forall u, v \in \widehat{H}_1. \quad (2.3.14)$$

Il est facile de voir qu'on peut obtenir la coercivité de \mathcal{A}_ω ,

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}_\omega(u, u)) \geq \alpha \|u\|_{\widehat{H}_1}^2, \quad \forall u \in \widehat{H}_1, \quad (2.3.15)$$

où α est la constante positive donnée dans (2.3.6).

En conclusion, d'après (2.3.14) et (2.3.15), la forme sesquilinéaire $\mathcal{A}_\omega : \widehat{H}_1 \times \widehat{H}_1 \rightarrow \mathbb{C}$ est continue et coercive. D'où on a le résultat suivant

Théorème 2.3.1. *Pour une fréquence fixée ω dans \mathbb{R} .*

1. *Le problème (2.3.4)-(2.3.5) possède une unique solution $u_*(\cdot, \omega)$ dans \widehat{H}_2 satisfaisant la majoration suivante*

$$\|u_*(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} \leq \frac{M(\omega)}{\alpha}, \quad (2.3.16)$$

où α et $M(\omega)$ sont des constantes positives liées respectivement à la coercivité et à la continuité de \mathcal{A}_ω .

2. *De plus, si $D \in C^1(\overline{\Omega})$ et μ_a, ν et $F(\cdot, \omega)$ sont des fonctions $C(\overline{\Omega})$, alors $u_*(\cdot, \omega) \in C^2(\overline{\Omega})$ est l'unique solution du problème (2.3.4)-(2.3.5) au sens usuel.*

Démonstration. Pour une fréquence fixée ω dans \mathbb{R} .

1. Les fonctions D et μ_a satisfont l'hypothèse (2.3.6) d'une part et d'autre la forme semi-linéaire $\mathcal{L}_\omega : \widehat{H}_1 \rightarrow \mathbb{C}$ est continue et la forme sesquilinéaire $\mathcal{A}_\omega : \widehat{H}_1 \times \widehat{H}_1 \rightarrow \mathbb{C}$ est coercive et continue. Alors, d'après la version complexe du théorème de Lax-Milgram [34, 103], il existe une unique solution $u_*(\cdot, \omega)$ dans \widehat{H}_1 du problème variationnel (2.3.7). Comme le problème (2.3.4)-(2.3.5) est équivalent au problème variationnel (2.3.7), alors $u_*(\cdot, \omega)$ est l'unique solution faible du problème (2.3.4)-(2.3.5). En utilisant la continuité de l'opérateur \mathcal{L}_ω et la coercivité de l'opérateur \mathcal{A}_ω , on obtient

$$\alpha \|u_*(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1}^2 \leq |\mathcal{A}_\omega(u_*(\cdot, \omega), u_*(\cdot, \omega))| \leq M(\omega) \|u_*(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1}.$$

D'où, la majoration (2.3.16).

Comme $D \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ et $u_*(\cdot, \omega) \in \widehat{H}_1$, alors $D(\cdot)\nabla u_*(\cdot, \omega) \in (\widehat{L}_2)^d$. On a $q_\omega \in L^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ et $F(\cdot, \omega) \in \widehat{L}_2$, de plus

$$-\operatorname{div}(D(\cdot)\nabla u_*(\cdot, \omega)) = F(\cdot, \omega) - q_\omega(\cdot)u_*(\cdot, \omega) \in \widehat{L}_2. \quad (2.3.17)$$

Il est évident que $D(\cdot)\nabla u_*(\cdot, \omega)$ appartient à $(\widehat{H}_1)^d$. La fonction $\frac{1}{D(\cdot)}$ est dans $L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, donc $\nabla u_*(\cdot, \omega) = \frac{1}{D(\cdot)}D(\cdot)\nabla u_*(\cdot, \omega)$ appartient à $(\widehat{H}_1)^d$. En conclusion, la fonction $u_*(\cdot, \omega)$ appartient à l'espace \widehat{H}_2 .

2. Si $D \in C^1(\overline{\Omega})$, alors d'après (2.3.17) ainsi que la formule de Leibniz, on obtient

$$\Delta u_*(x, \omega) = -\frac{1}{D(x)} \left(F(x, \omega) - q_\omega(x)u_*(x, \omega) - \sum_{i=1}^d \frac{\partial D(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u_*(x, \omega)}{\partial x_i} \right), \quad (2.3.18)$$

au sens des distributions, pour tout $x = (x_1, \dots, x_d) \in \overline{\Omega}$.

Pour tout $1 \leq i \leq d$, d'après le théorème d'injection par continuité de Sobolev, les fonctions $u_*(\cdot, \omega)$ et $\frac{\partial u_*(\cdot, \omega)}{\partial x_i}$ sont dans l'espace $C(\overline{\Omega})$. En utilisant les hypothèses

sur μ_a , ν et $F(\cdot, \omega)$ qui sont des fonctions dans $C(\overline{\Omega})$ ainsi la formule (2.3.18), alors la solution faible $u_*(\cdot, \omega)$ du problème (2.3.4)-(2.3.5) appartient $C^2(\overline{\Omega})$. Elle est l'unique solution du problème (2.3.4)-(2.3.5) au sens usuel (c.f. [5, 103]).

□

2.3.3 Approximation de Galerkin par la spline tensorielle

Pour simplifier, on se limite à une dimension $d = 2$ et le domaine Ω est rectangulaire $\Omega =]a, b[\times]c, d[$. On subdivise l'intervalle $[a, b]$ en utilisant les points nœuds $x_i = a + ih_1$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, n_1$ avec un pas uniforme $h_1 = (b-a)/n_1$, $x_0 = a$ et $x_{n_1} = b$ et l'intervalle $[c, d]$ en utilisant les points nœuds $y_j = c + jh_2$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, n_2$ avec un pas uniforme $h_2 = (d-c)/n_2$, $y_0 = c$ et $y_{n_2} = d$. En introduisant généralement la grille de point $(x_i, y_j)_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$ tels que :

$$\begin{aligned} x_i &= a + ih_1, \quad i \in \mathbb{Z}, \\ y_j &= c + jh_2, \quad j \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

On définit \widehat{V}_h le sous espace vectoriel de dimension finie de \widehat{H}_2 par

$$\widehat{V}_h = \{u_h \in \widehat{H}_2 : u_h|_{K_{ij}} \in \mathbb{P}_3(\Omega); \text{ pour } 0 \leq i \leq n_1 - 1, \quad 0 \leq j \leq n_2 - 1\}, \quad (2.3.20)$$

où pour tout $0 \leq i \leq n_1 - 1$ et $0 \leq j \leq n_2 - 1$, $K_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ est une maille rectangulaire de $\overline{\Omega}$. Le couple $h = (h_1, h_2)$ désigne les dimensions de K_{ij} et \mathbb{P}_3 est l'espace des polynômes sur \mathbb{R}^2 de degré ≤ 3 . Il est clair que la dimension du sous espace \widehat{V}_h est $N = N_1 N_2$ où $N_1 = n_1 + 3$ et $N_2 = n_2 + 3$.

On utilise la fonction B-spline cubique lisse \mathcal{B}_3 (voir le tableau 2.1) pour construire une base (B_{ij}) du sous espace \widehat{V}_h . Les fonctions $(B_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq N_1 \\ 1 \leq j \leq N_2}}$ forment la base de splines tensorielles (c.f. figure 2.7) associée à la grille du domaine Ω .

Pour tout $i = 1, \dots, N_1$ et $j = 1, \dots, N_2$, on a

$$B_{ij}(x) = B_i(x)B_j(y), \quad \text{pour } x = (x, y). \quad (2.3.21)$$

où

$$B_i(x) = \mathcal{B}_3\left(\frac{x - x_{i-4}}{h_1}\right) \quad \text{et} \quad B_j(y) = \mathcal{B}_3\left(\frac{y - y_{j-4}}{h_2}\right), \quad (2.3.22)$$

et \mathcal{B}_3 est la B-spline cubique dont le support est inclus $[0, 4]$ (c.f. tableau 2.1).

La B-spline tensorielle ainsi que ses dérivées sont représentées graphiquement sur la figure 2.7 suivante :

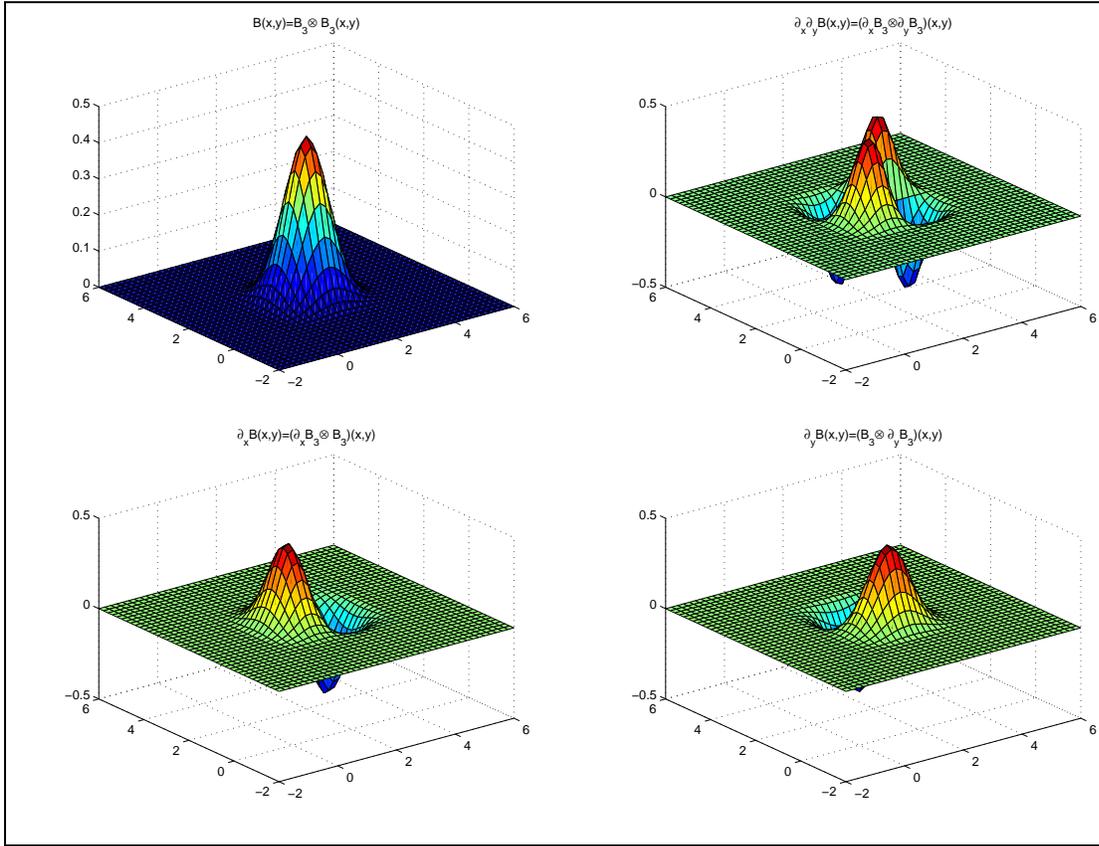


FIGURE 2.7 – Les surfaces de la spline tensorielle $(x, y) \mapsto \mathcal{B}_3(x) \otimes \mathcal{B}_3(y)$ et ses dérivées $(x, y) \mapsto \mathcal{B}'_3(x) \otimes \mathcal{B}'_3(y)$, $(x, y) \mapsto \mathcal{B}'_3(x) \otimes \mathcal{B}_3(y)$ et $(x, y) \mapsto \mathcal{B}_3(x) \otimes \mathcal{B}'_3(y)$.

Pour une fréquence fixée ω dans \mathbb{R} , la méthode d'approximation de Galerkin consiste à trouver une fonction $u_{*h}(\cdot, \omega)$, dans $\widehat{\mathcal{V}}_h$, qui approche la solution exacte $u_*(\cdot, \omega)$. Cette fonction est vue comme solution dans l'espace $\widehat{\mathcal{V}}_h$ du problème variationnel discret :

$$\mathcal{A}_\omega(u_h(\cdot, \omega), v_h) = \mathcal{L}_\omega(v_h), \quad \forall v_h \in \widehat{\mathcal{V}}_h. \quad (2.3.23)$$

La solution $u_{*h}(\cdot, \omega)$ du problème (2.3.23) est une combinaison linéaire dans la base de fonctions B-splines tensorielles donnée par

$$u_h(x, \omega) = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} Z_{h,ij}(\omega) B_{ij}(x), \quad \forall x := (x, y) \in \overline{\Omega}, \quad (2.3.24)$$

où pour tout $1 \leq i \leq N_1$ et $1 \leq j \leq N_2$, $Z_{h,ij}(\omega)$ sont des coefficients complexes.

On injecte la fonction test $v_h(x, y) = B_{k\ell}(x, y)$ dans la formulation variationnelle faible (2.3.7), on obtient une famille d'équations données par

$$\sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} Z_{h,ij}(\omega) A_{ijk\ell}(\omega) = \mathcal{L}_\omega(B_{k\ell}), \quad \text{pour } 1 \leq k \leq N_1 \text{ et } 1 \leq \ell \leq N_2, \quad (2.3.25)$$

où

$$\begin{aligned} A_{ijkl}(\omega) &= \int_c^d \int_a^b D(x, y) (\nabla B_{ij})(x, y) (\nabla B_{kl})(x, y) dx dy \\ &\quad + \int_c^d \int_a^b q_\omega(x, y) B_{ij}(x, y) B_{kl}(x, y) dx dy \\ &\quad + 2 \int_{\partial\Omega} \gamma(x, y) B_{ij}(x, y) B_{kl}(x, y) d\sigma(x, y), \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

et

$$\mathcal{L}_\omega(B_{kl}) = 2 \int_{\partial\Omega} \gamma(x, y) G(x, y; \omega) B_{kl}(x, y) d\sigma(x, y) + \int_\Omega F(x, y; \omega) B_{kl}(x, y) dx dy, \quad (2.3.27)$$

pour $(i, k) \in \{1, \dots, N_1\}^2$ et $(j, \ell) \in \{1, \dots, N_2\}^2$.

Soient $A(\omega) = [A_{ijkl}(\omega)]$ la matrice de taille $N_1 N_2 \times N_1 N_2$ à coefficients complexes donnés par $A_{ijkl}(\omega) = \mathcal{A}_\omega(B_{ij}, B_{kl})$, $\mathbf{B}_h(\omega) = [\mathbf{B}_{h,kl}(\omega)]$ la matrice de taille $(N_1 \times N_2)$ à coefficients complexes $\mathbf{B}_{h,kl}(\omega) = \mathcal{L}_\omega(B_{kl})$ et $Z_h(\omega) = [Z_{h,ij}(\omega)]$ la matrice de taille $(N_1 \times N_2)$ à coefficients complexes inconnus.

On introduit le vecteur $\mathbf{b}_h(\omega) = \text{vec}(\mathbf{B}_h(\omega)) \in \mathbb{R}^{N_1 N_2}$ et le vecteur $\mathbf{z}_h(\omega) = \text{vec}(Z_h(\omega)) \in \mathbb{R}^{N_1 N_2}$, comme vectorisation respectivement des deux matrices $[\mathbf{B}_{h,kl}(\omega)]$ et $[Z_{h,ij}(\omega)]$.

Les relations (2.3.25) nous permettent de formuler le système linéaire suivant

$$A(\omega) \mathbf{z}_h(\omega) = \mathbf{b}_h(\omega), \quad (2.3.28)$$

de taille $N_1 N_2 \times N_1 N_2$. Les coefficients $Z_{h,ij}(\omega)$ qui apparaissent dans l'expression (2.3.24) de la solution approchée u_{*h} , sont des fonctions dépendants de la variable ω . Ces coefficients s'obtiennent par la résolution du système linéaire (2.3.28).

Les coefficients de la matrice $A(\omega)$ s'expriment sous la forme suivante

$$A_{ijkl}(\omega) = \mathcal{D}_{ijkl} + \mathcal{U}_{ijkl} + 2\mathcal{Q}_{ijkl}, \quad (2.3.29)$$

où les coefficients \mathcal{D}_{ijkl} , \mathcal{U}_{ijkl} et \mathcal{Q}_{ijkl} sont donnés respectivement par,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{ijkl} &= \int_c^d \int_a^b D(x, y) (\nabla B_{ij})(x, y) (\nabla B_{kl})(x, y) dx dy, \\ &= \frac{1}{h_1^2} \int_c^d \int_a^b D(x, y) B'_i(x) B_j(y) B'_k(x) B_\ell(y) dx dy \\ &\quad + \frac{1}{h_2^2} \int_c^d \int_a^b D(x, y) B_i(x) B'_j(y) B_k(x) B'_\ell(y) dx dy, \end{aligned}$$

$$\mathcal{U}_{ijkl} = \int_c^d \int_a^b q_\omega(x, y) B_{ij}(x, y) B_{kl}(x, y) dx dy = \int_c^d \int_a^b q_\omega(x, y) B_i(x) B_j(y) B_k(x) B_\ell(y) dx dy,$$

et

$$\mathcal{Q}_{ijkl} = \int_{\partial\Omega} \gamma(x, y) B_{ij}(x, y) B_{kl}(x, y) d\sigma(x, y) = \int_{\partial\Omega} \gamma(x, y) B_i(x) B_j(y) B_k(x) B_\ell(y) d\sigma(x, y).$$

Les expressions de B_i et B_j données dans (2.3.22) avec le changement de variables $s \in [0, n_1]$ et $\tau \in [0, n_2]$ tels que $x = a + sh_1$ et $y = c + \tau h_2$, nous permettent de calculer explicitement les coefficients $A_{ijkl}(\omega)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{ijkl} &= \frac{h_2}{h_1} \int_0^{n_2} \int_0^{n_1} D(a + sh_1, c + \tau h_2) \mathcal{B}_3(\tau - j + 4) \mathcal{B}_3(\tau - \ell + 4) \mathcal{B}'_3(s - i + 4) \mathcal{B}'_3(s - k + 4) ds d\tau \\ &+ \frac{h_1}{h_2} \int_0^{n_2} \int_0^{n_1} D(a + sh_1, c + \tau h_2) \mathcal{B}'_3(\tau - j + 4) \mathcal{B}'_3(\tau - \ell + 4) \mathcal{B}_3(s - i + 4) \mathcal{B}_3(s - k + 4) ds d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{ijkl} &= h_1 h_2 \int_0^{n_2} \int_0^{n_1} q_\omega(a + sh_1, c + \tau h_2) \mathcal{B}_3(\tau - j + 4) \\ &\quad \mathcal{B}_3(\tau - \ell + 4) \mathcal{B}_3(s - i + 4) \mathcal{B}_3(s - k + 4) ds d\tau, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{ijkl} &= h_2 \mathcal{B}_3(-i + 4) \mathcal{B}_3(-k + 4) \int_0^{n_2} \gamma(a, c + \tau h_2) \mathcal{B}_3(\tau - j + 4) \mathcal{B}_3(\tau - \ell + 4) d\tau \\ &+ h_2 \mathcal{B}_3(n_1 - i + 4) \mathcal{B}_3(n_1 - k + 4) \int_0^{n_2} \gamma(b, c + \tau h_2) \mathcal{B}_3(\tau - j + 4) \mathcal{B}_3(\tau - \ell + 4) d\tau \\ &+ h_1 \mathcal{B}_3(-j + 4) \mathcal{B}_3(-\ell + 4) \int_0^{n_1} \gamma(a + sh_1, c) \mathcal{B}_3(s - i + 4) \mathcal{B}_3(s - k + 4) ds \\ &+ h_1 \mathcal{B}_3(n_2 - j + 4) \mathcal{B}_3(n_2 - \ell + 4) \int_0^{n_1} \gamma(a + sh_1, d) \mathcal{B}_3(s - i + 4) \mathcal{B}_3(s - k + 4) ds \\ &+ \gamma(a, c) \mathcal{B}_3(-i + 4) \mathcal{B}_3(-k + 4) \mathcal{B}_3(-j + 4) \mathcal{B}_3(-\ell + 4) \\ &+ \gamma(a, d) \mathcal{B}_3(-i + 4) \mathcal{B}_3(-k + 4) \mathcal{B}_3(n_2 - j + 4) \mathcal{B}_3(n_2 - \ell + 4) \\ &+ \gamma(b, c) \mathcal{B}_3(n_1 - i + 4) \mathcal{B}_3(n_1 - k + 4) \mathcal{B}_3(-j + 4) \mathcal{B}_3(-\ell + 4) \\ &+ \gamma(b, d) \mathcal{B}_3(n_1 - i + 4) \mathcal{B}_3(n_1 - k + 4) \mathcal{B}_3(n_2 - j + 4) \mathcal{B}_3(n_2 - \ell + 4). \end{aligned}$$

La matrice de rigidité $A(\omega)$ est donnée par

$$A(\omega) = \mathcal{M}_D + \mathcal{M}_{\mu_a} + i\omega \mathcal{M}_\nu + 2\mathcal{Q}_\gamma. \quad (2.3.30)$$

Pour simplifier les calculs, on se limite au cas où les paramètres optiques sont séparables $D(x, y) = D_1(x)D_2(y)$, $\mu_a(x, y) = \mu_{a1}(x)\mu_{a2}(y)$, $\nu(x, y) = \nu_1(x)\nu_2(y)$ et $\gamma(x, y) = \gamma_1(x)\gamma_2(y)$. Le produit de Kronecker \otimes est un moyen par lequel nous pouvons décomposer respectivement la matrice du terme de diffusion, la matrice du terme d'absorption, la matrice du terme d'évolution et la matrice du terme de bord selon le schéma suivant

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_D &= \frac{h_2}{h_1} D_2^{0T} \otimes D_1^{1T} + \frac{h_1}{h_2} D_2^{1T} \otimes D_1^{0T}, \\ \mathcal{M}_{\mu_a} &= h_1 h_2 U_2^T \otimes U_1^T, \\ \mathcal{M}_\nu &= \frac{h_1 h_2}{c_0} E_2^T \otimes E_1^T, \\ \mathcal{Q}_\gamma &= h_1 \left(\gamma_2(c) \Gamma^{(2,0)} + \gamma_2(d) \Gamma^{(2,1)} \right)^T \otimes \Lambda_1^T + h_2 \Lambda_2^T \otimes \left(\gamma_1(a) \Gamma^{(1,0)} + \gamma_1(b) \Gamma^{(1,1)} \right)^T \\ &+ \Gamma^{(2,1)T} \otimes \left(\gamma(a, d) \Gamma^{(1,0)} + \gamma(b, d) \Gamma^{(1,1)} \right)^T + \Gamma^{(2,0)T} \otimes \left(\gamma(a, c) \Gamma^{(1,0)} + \gamma(b, c) \Gamma^{(1,1)} \right)^T, \end{aligned}$$

où, pour $\ell \in \{0, 1\}$, les coefficients de la matrice \mathcal{M}_D sont

$$D_1^\ell(i, k) = \int_0^{n_1} D_1(a + sh_1) \mathcal{B}_3^{(\ell)}(s - i + 4) \mathcal{B}_3^{(\ell)}(s - k + 4) ds$$

et

$$D_2^\ell(j, l) = \int_0^{n_2} D_2(c + \tau h_2) \mathcal{B}_3^{(\ell)}(\tau - j + 4) \mathcal{B}_3^{(\ell)}(\tau - l + 4) d\tau,$$

avec $\mathcal{B}_3^{(\ell)}$ est la fonction dérivée de la fonction B-spline d'ordre $\ell \in \{0; 1\}$.
Les coefficients de la matrice \mathcal{M}_{μ_a} sont

$$U_1(i, k) = \int_0^{n_1} \mu_{a1}(a + sh_1) \mathcal{B}_3(s - i + 4) \mathcal{B}_3(s - k + 4) ds$$

et

$$U_2(j, l) = \int_0^{n_2} \mu_{a2}(c + \tau h_2) \mathcal{B}_3(\tau - j + 4) \mathcal{B}_3(\tau - l + 4) d\tau.$$

Les coefficients de la matrice \mathcal{M}_ν sont

$$E_1(i, k) = \int_0^{n_1} \nu_1(a + sh_1) \mathcal{B}_3(s - i + 4) \mathcal{B}_3(s - k + 4) ds,$$

et

$$E_2(j, l) = \int_0^{n_2} \nu_2(c + \tau h_2) \mathcal{B}_3(\tau - j + 4) \mathcal{B}_3(\tau - l + 4) d\tau,$$

et les coefficients de la matrice \mathcal{Q}_γ sont

$$\Lambda_1(i, k) = \int_0^{n_1} \gamma_1(a + sh_1) \mathcal{B}_3(s - i + 4) \mathcal{B}_3(s - k + 4) ds,$$

$$\Lambda_2(j, l) = \int_0^{n_2} \gamma_2(c + \tau h_2) \mathcal{B}_3(\tau - j + 4) \mathcal{B}_3(\tau - l + 4) d\tau,$$

$$\Gamma^{(1,0)}(i, k) = \mathcal{B}_3(-i + 4) \mathcal{B}_3(-k + 4), \quad \Gamma^{(1,1)}(i, k) = \mathcal{B}_3(n_1 - i + 4) \mathcal{B}_3(n_1 - k + 4),$$

$$\Gamma^{(2,0)}(j, l) = \mathcal{B}_3(-j + 4) \mathcal{B}_3(-l + 4), \quad \text{et} \quad \Gamma^{(2,1)}(j, l) = \mathcal{B}_3(n_2 - j + 4) \mathcal{B}_3(n_2 - l + 4),$$

Les coefficients de la matrice $\mathbf{B}_h(\omega)$ sont donnés par

$$\mathbf{B}_{h,k\ell}(\omega) = 2 \int_{\partial\Omega} \gamma(x, y) G(x, y) \mathbf{B}_{k\ell}(x, y) d\sigma(x, y) + \int_c^d \int_a^b F(x, y) \mathbf{B}_{k\ell}(x, y) dx dy,$$

Par une technique algorithmique similaire à celle qui précède, on obtient

$$\begin{aligned} F_{h,k\ell}(\omega) &= \int_c^d \int_a^b F(x, y) \mathbf{B}_{k\ell}(x, y) dx dy, \\ &= h_1 h_2 \int_0^{n_2} \int_0^{n_1} F(a + sh_1, c + \tau h_2) \mathcal{B}_3(s - k + 4) \mathcal{B}_3(\tau - l + 4) ds d\tau, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
G_{h,k\ell}(\omega) &= \int_{\partial\Omega} \gamma(x,y)G(x,y)B_{k\ell}(x,y)d\sigma(x,y), \\
&= h_2\mathcal{B}_3(-k+4) \int_0^{n_2} \gamma(a,c+h_2\tau)G(a,c+h_2\tau)\mathcal{B}_3(\tau-\ell+4)d\tau \\
&+ h_2\mathcal{B}_3(n_1-k+4) \int_0^{n_2} \gamma(b,c+h_2\tau)G(b,c+h_2\tau)\mathcal{B}_3(\tau-\ell+4)d\tau \\
&+ h_1\mathcal{B}_3(-\ell+4) \int_0^{n_1} \gamma(a+h_1s,c)G(a+h_1s,c)\mathcal{B}_3(s-k+4)ds \\
&+ h_1\mathcal{B}_3(n_2-\ell+4) \int_0^{n_1} \gamma(a+h_1s,d)G(a+h_1s,d)\mathcal{B}_3(s-k+4)ds \\
&+ \mathcal{B}_3(-\ell+4) (\gamma(a,c)G(a,c)\mathcal{B}_3(-k+4) + \gamma(b,c)G(b,c)\mathcal{B}_3(n_1-k+4)) \\
&+ \mathcal{B}_3(n_2-\ell+4) (\gamma(a,d)G(a,d)\mathcal{B}_3(-k+4) + \gamma(b,d)G(b,d)\mathcal{B}_3(n_1-k+4)).
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour $1 \leq k \leq N_1$ et $1 \leq \ell \leq N_2$, les coefficients $B_{h,k\ell}(\omega)$ s'écrivent sous la forme suivante

$$B_{h,k\ell}(\omega) = 2G_{h,k\ell}(\omega) + F_{h,k\ell}(\omega). \quad (2.3.31)$$

Pour calculer numériquement les intégrales constituant la matrice $A(\omega)$ donnée en (2.3.30) et le vecteur $b_h(\omega)$ donné en (2.3.31), nous avons utilisé la formule composite de la quadrature de Simpson donnée dans l'annexe A.2.

2.3.4 Reconstruction d'un signal dans le temps

Dans ce paragraphe, une solution approchée ϕ_{*h} de la solution exacte ϕ_* est obtenue par la transformée Fourier inverse de la solution approchée u_{*h} obtenue dans (2.3.24). Par une intégration numérique en utilisant la formule de quadrature de Gauss-Hermite, on calcule numériquement la transformée de Fourier inverse de u_{*h} . On peut dans un premier temps formuler le résultat du théorème suivant.

Théorème 2.3.2. *Pour tout t fixé dans $[t_0, t_0 + T]$, le problème (2.3.1)-(2.3.2) admet une unique solution $\phi_*(\cdot, t)$, obtenue par la transformée de Fourier inverse de l'unique solution $u_*(\cdot, \omega)$ du problème (2.3.4)-(2.3.5). On écrit*

$$\phi_*(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_*(x, y, \omega) e^{it\omega} d\omega, \quad (2.3.32)$$

pour tout $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$.

Démonstration. La preuve est une conséquence immédiate du théorème 2.3.1. \square

De manière analogue au théorème 2.3.32, l'unique solution approchée $\phi_{*h}(x, y, t)$ du problème (2.3.1)-(2.3.2), est obtenue par l'utilisation de la transformée de Fourier inverse

$$\phi_{*h}(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_{*h}(x, y, \omega) e^{it\omega} d\omega. \quad (2.3.33)$$

On définit le sous espace vectoriel \mathbb{V}_h de dimension $N = N_1 N_2$ par

$$\mathbb{V}_h = \{\phi_h \in \mathbb{H}_2 : \phi_h|_{K_{ij}} \in \mathbb{P}_3; \text{ pour } 0 \leq i \leq n_1 - 1, 0 \leq j \leq n_2 - 1\}. \quad (2.3.34)$$

La solution approchée $\phi_{*h}(\cdot, \cdot, t)$ est un élément de l'espace \mathbb{V}_h . Elle est la combinaison linéaire dans la base de fonctions B-splines tensorielles

$$\phi_{*h}(x, y, t) = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} V_{h,ij}(t) B_{ij}(x, y), \quad (2.3.35)$$

pour tout $(x, y) \in \Omega$. Les fonctions $t \mapsto V_{h,ij}(t)$ données par

$$V_{h,ij}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} Z_{h,ij}(\omega) e^{it\omega} d\omega,$$

sont les transformées de Fourier inverse des fonctions $\omega \mapsto Z_{h,ij}(\omega)$ données dans (2.3.24). On note $(\omega, t) \mapsto \psi_{ij}(\omega, t)$, la fonction définie par

$$\psi_{ij}(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} Z_{h,ij}(\omega) e^{(\omega^2 + it\omega)},$$

alors

$$V_{h,ij}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{ij}(\omega, t) e^{-\omega^2} d\omega. \quad (2.3.36)$$

On utilise une intégration numérique basée sur la formule de quadrature de Gauss-Hermite, pour calculer les intégrales (2.3.36), on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{ij}(\omega, t) e^{-\omega^2} d\omega \simeq \sum_{\ell=0}^m \alpha_\ell \psi_{ij}(\omega_\ell, t), \quad (2.3.37)$$

où les nœuds $(\omega_\ell)_{0 \leq \ell \leq m}$ sont les racines de la fonction polynômiale d'Hermite H_{m+1} de degré $m+1$, et les coefficients poids $(\alpha_\ell)_{0 \leq \ell \leq m}$ sont donnés par la formule de Christoffel-Darboux [2]. Pour trouver les racines $(\omega_\ell)_{0 \leq \ell \leq m}$ et les coefficients poids $(\alpha_\ell)_{0 \leq \ell \leq m}$, on utilise les mêmes techniques que le paragraphe 2.2.5, en utilisant les formules (2.2.30) et (2.2.31).

Les coefficients $V_{h,ij}(t)$ donnés en (2.3.36) sont calculés selon la formule suivante

$$V_{h,ij}(t) \simeq \sum_{\ell=0}^m \alpha_\ell \psi_{ij}(\omega_\ell, t). \quad (2.3.38)$$

Pour conclure, en combinant les deux formules (2.3.35) et (2.3.38), on obtient

$$\begin{aligned} \phi_{*h}(x, y, t) &\simeq \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \left(\sum_{\ell=0}^m \alpha_\ell \psi_{ij}(\omega_\ell, t) \right) B_{ij}(x, y) \\ &= \sum_{\ell=0}^m \alpha_\ell \left(\sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \psi_{ij}(\omega_\ell, t) B_{ij}(x, y) \right). \end{aligned} \quad (2.3.39)$$

2.3.5 Estimation de l'erreur

Dans ce paragraphe, on donne des résultats concernant l'estimation de l'erreur. Soient $(x_i)_{0 \leq i \leq n_1}$ et $(y_j)_{0 \leq j \leq n_2}$ les nœuds des subdivisions de $[a, b]$ et de $[c, d]$ données en (2.3.19). Soient $h_1 = (b - a)/n_1$ et $h_2 = (d - c)/n_2$ les pas des subdivisions relatives à chacun des deux intervalles. $h = (h_1, h_2)$ est le couple qui désigne les deux dimensions de la maille rectangulaire K_{ij} . On considère le sous espace vectoriel des splines tensorielles $\widehat{\mathbb{S}}_h(\Omega)$ de $\widehat{\mathbb{V}}_h$, donné par

$$\widehat{\mathbb{S}}_h(\Omega) = \{u_h \in C^2(\overline{\Omega}) : u_h|_{K_{ij}} \in \mathbb{P}_3(\Omega) ; 0 \leq i \leq n_1 - 1, 0 \leq j \leq n_2 - 1\}, \quad (2.3.40)$$

où $K_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ pour tout $0 \leq i \leq n_1 - 1, 0 \leq j \leq n_2 - 1$.

Le problème d'interpolation par les fonctions splines dans le cas de plusieurs variables, est étudié par plusieurs auteurs (voir par exemple [20, 30, 12, 104, 105, 122]).

On considère les espaces des B-splines cubiques $\widehat{\mathbb{S}}_{h_1}([a, b])$ et $\widehat{\mathbb{S}}_{h_2}([c, d])$ définis de la même façon que dans le paragraphe 2.2.6. Pour $h = (h_1, h_2)$, on définit par $\mathcal{I}_h : \widehat{\mathbb{H}}_2 \rightarrow \widehat{\mathbb{S}}_h(\Omega)$ l'opérateur d'interpolation tel que pour tout $u \in \widehat{\mathbb{H}}_2$, la fonction $\mathcal{I}_h u$ est l'unique spline tensorielle dans $\widehat{\mathbb{S}}_h(\Omega)$ donné de la façon suivante :

1) Pour $x \in [a, b]$, $\mathcal{I}_h u(x, \cdot)$ est l'unique élément de $\widehat{\mathbb{S}}_{h_2}([c, d])$ défini par

$$\mathcal{I}_h u(x, y) = \sum_{j=1}^{N_2} \alpha_j(x) B_j(y), \quad \forall y \in [c, d],$$

vérifiant les conditions d'interpolations :

1.i) $\mathcal{I}_h u(x, y_j) = u(x, y_j)$ pour $j = 0, \dots, n_2$,

1.ii) $\frac{\partial(\mathcal{I}_h u)}{\partial y}(x, c) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, c)$ et $\frac{\partial(\mathcal{I}_h u)}{\partial y}(x, d) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, d)$.

1.iii) Pour tout $j = 1, \dots, N_2$, les fonctions $\alpha_j \in \widehat{\mathbb{S}}_{h_1}([a, b])$ sont telles que

$$\alpha_j(x) = \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_{ij} B_i(x).$$

2) Pour $y \in [c, d]$, $\mathcal{I}_h u(\cdot, y)$ est l'unique élément de $\widehat{\mathbb{S}}_{h_1}([a, b])$ défini par

$$\mathcal{I}_h u(x, y) = \sum_{i=1}^{N_1} \beta_i(y) B_i(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

vérifiant les conditions d'interpolations :

2.i) $\mathcal{I}_h u(x_i, y) = u(x_i, y)$ pour $i = 0, \dots, n_1$,

2.ii) $\frac{\partial(\mathcal{I}_h u)}{\partial x}(a, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(a, y)$ et $\frac{\partial(\mathcal{I}_h u)}{\partial x}(b, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(b, y)$.

2.iii) Pour tout $i = 1, \dots, N_1$, les fonctions $\beta_i \in \widehat{\mathbb{S}}_{h_2}([c, d])$ sont telles que

$$\beta_i(y) = \sum_{j=1}^{N_2} \beta_{ij} B_j(y).$$

3) De plus pour $x \in [a, b]$ et pour $y \in [c, d]$, $\mathcal{I}_h u(x, \cdot)$ et $\mathcal{I}_h u(\cdot, y)$ vérifient les conditions aux bords des intervalles $[a, b]$ et $[c, d]$, ce qui donne

$$\begin{aligned} 3.i) \quad & \frac{\partial(\mathcal{I}_h u)}{\partial x}(\xi, y_j) = \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y_j) \text{ et } \frac{\partial(\mathcal{I}_h u)}{\partial y}(x_i, \zeta) = \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, \zeta) \\ & \text{pour } i = 0, \dots, n_1, j = 0, \dots, n_2 \text{ et pour } \xi \in \{a, b\} \text{ et } \zeta \in \{c, d\}, \\ 3.ii) \quad & \frac{\partial^2(\mathcal{I}_h u)}{\partial x \partial y}(\xi, \zeta) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\xi, \zeta) \text{ pour } (\xi, \zeta) \in \{a, b\} \times \{c, d\}. \end{aligned}$$

Une condition de type $\mathcal{I}_h u(x_i, y_j) = u(x_i, y_j)$ est valide pour tout $i = 0, \dots, n_1$ et tout $j = 0, \dots, n_2$ si et seulement si $\alpha_{ij} = \beta_{ij}$, pour tout $i = 0, \dots, n_1$ et tout $j = 0, \dots, n_2$. On pose alors $\rho_{ij} = \alpha_{ij} = \beta_{ij}$ pour tout $i = 0, \dots, n_1$ et $j = 0, \dots, n_2$. En définitive, La spline tensorielle $\mathcal{I}_h u$ est l'unique élément de $\widehat{\mathcal{S}}_h(\Omega) = \widehat{\mathcal{S}}_{h_1}([a, b]) \otimes \widehat{\mathcal{S}}_{h_2}([c, d])$ donné par

$$\mathcal{I}_h u(x, y) = \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{i=1}^{N_1} \rho_{ij} B_{ij}(x, y), \quad \forall (x, y) \in \overline{\Omega}, \quad (2.3.41)$$

et vérifiant les conditions d'interpolations suivantes :

$$\begin{aligned} a) \quad & \mathcal{I}_h u(x_i, y_j) = u(x_i, y_j), \quad \text{pour } i = 0, \dots, n_1, \quad \text{et } j = 0, \dots, n_2, \\ b) \quad & \frac{\partial(\mathcal{I}_h u)}{\partial x}(\xi, y_j) = \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y_j) \quad \text{et} \quad \frac{\partial(\mathcal{I}_h u)}{\partial y}(x_i, \zeta) = \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, \zeta) \\ & \text{pour } i = 0, \dots, n_1, \quad j = 0, \dots, n_2 \quad \xi \in \{a, b\} \quad \text{et} \quad \zeta \in \{c, d\}, \\ c) \quad & \frac{\partial^2(\mathcal{I}_h u)}{\partial x \partial y}(\xi, \zeta) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\xi, \zeta), \quad \text{pour } (\xi, \zeta) \in \{a, b\} \times \{c, d\}. \end{aligned} \quad (2.3.42)$$

Les conditions (2.3.42)-a) donnent $(n_1 + 1)(n_2 + 1)$ équations, les conditions (2.3.42)-b) donnent $2(n_1 + 1) + 2(n_2 + 1)$ équations et les conditions (2.3.42)-c) donnent 4 équations. Au total nous avons

$$(n_1 + 1)(n_2 + 1) + 2(n_1 + 1) + 2(n_2 + 1) + 4 = (n_1 + 3)(n_2 + 3) = N_1 N_2,$$

équations qui est égal au nombre de coefficients ρ_{ij} donnés dans (2.3.41). Les coefficients ρ_{ij} sont obtenus en respectant les conditions d'interpolation a), b) et c) de (2.3.42). On pose $M_\rho = (\rho_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq N_1 \\ 1 \leq j \leq N_2}}$ et on note $\tilde{\rho} = \text{vec}(M_\rho)$, alors les conditions a), b) et c) de (2.3.42) nous conduisent à la résolution du système linéaire suivant

$$(P_2 \otimes P_1) \tilde{\rho} = \sigma, \quad (2.3.43)$$

où

$$P_1 = \begin{pmatrix} B'_1(x_0) & B_1(x_0) & \dots & B_1(x_{n_1}) & B'_1(x_{n_1}) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ B'_{N_1}(x_0) & B_{N_1}(x_0) & \dots & B_{N_1}(x_{n_1}) & B'_{N_1}(x_{n_1}) \end{pmatrix}$$

et

$$P_2 = \begin{pmatrix} B'_1(y_0) & B_1(y_0) & \dots & B_1(y_{n_2}) & B'_1(y_{n_2}) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ B'_{N_2}(y_0) & B_{N_2}(y_0) & \dots & B_{N_2}(y_{n_2}) & B'_{N_2}(y_{n_2}) \end{pmatrix},$$

et si la fonction u est séparable, c'est à dire $u(x, y) = u_1(x)u_2(y)$, alors $\sigma = \text{vec}(\eta_1 \otimes \eta_2^T)$ avec

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} u'_1(x_0) \\ u_1(x_0) \\ \vdots \\ u_1(x_{n_1}) \\ u'_1(x_{n_1}) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} u'_2(y_0) \\ u_2(y_0) \\ \vdots \\ u_2(y_{n_2}) \\ u'_2(y_{n_2}) \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.3.1. *Soit u une fonction quelconque de \hat{H}_2 . Alors*

- a) $\|\Delta u - \Delta(\mathcal{I}_h u)\|_{\hat{L}_2} \leq \|u\|_{\hat{H}_2},$
- b) $\|\nabla u - \nabla(\mathcal{I}_h u)\|_{\hat{L}_2} \leq \frac{2\|h\|_\infty}{\pi} \|u\|_{\hat{H}_2},$
- c) $\|u - \mathcal{I}_h u\|_{\hat{L}_2} \leq \frac{2\|h\|_\infty^2}{\pi^2} \|u\|_{\hat{H}_2},$

où $\|h\|_\infty = \max(h_1, h_2)$.

Démonstration. D'après les résultats donnés dans la proposition 2.2.1 pour le cas d'une dimension de l'espace, il est évident de voir que pour tout $u \in C^2(\bar{\Omega})$, on a

- i) $\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\cdot, y) - \frac{\partial^2(\mathcal{I}_h u)}{\partial x^2}(\cdot, y) \right\|_{\hat{L}_2} \leq \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\cdot, y) \right\|_{\hat{L}_2},$
- ii) $\left\| \frac{\partial u}{\partial x}(\cdot, y) - \frac{\partial(\mathcal{I}_h u)}{\partial x}(\cdot, y) \right\|_{\hat{L}_2} \leq \frac{2h_1}{\pi} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\cdot, y) \right\|_{\hat{L}_2},$
- iii) $\|u(\cdot, y) - \mathcal{I}_h u(\cdot, y)\|_{\hat{L}_2} \leq \frac{2h_1^2}{\pi^2} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\cdot, y) \right\|_{\hat{L}_2},$

et d'une façon similaire, on a

- i') $\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, \cdot) - \frac{\partial^2(\mathcal{I}_h u)}{\partial y^2}(x, \cdot) \right\|_{\hat{L}_2} \leq \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, \cdot) \right\|_{\hat{L}_2},$
- ii') $\left\| \frac{\partial u}{\partial y}(x, \cdot) - \frac{\partial(\mathcal{I}_h u)}{\partial y}(x, \cdot) \right\|_{\hat{L}_2} \leq \frac{2h_2}{\pi} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, \cdot) \right\|_{\hat{L}_2},$
- iii') $\|u(x, \cdot) - \mathcal{I}_h u(x, \cdot)\|_{\hat{L}_2} \leq \frac{2h_2^2}{\pi^2} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, \cdot) \right\|_{\hat{L}_2}.$

Les résultats a), b) et c) de la proposition 2.3.1, sont une conséquence de l'inégalité triangulaire. \square

Lemme 2.3.1. *Pour une fréquence fixée ω dans \mathbb{R} . Si $u(\cdot, \omega)$ (resp. $u_h(\cdot, \omega)$) est une solution du problème variationnel 2.3.7 (resp. 2.3.23), alors*

$$\|u(\cdot, \omega) - u_h(\cdot, \omega)\| \leq \frac{C_1}{\alpha} \sqrt{1 + \omega^2} \inf_{v_h \in \widehat{V}_h} \|u(\cdot, \omega) - v_h(\cdot, \omega)\|$$

où C_1 et α sont respectivement les constantes liées à la continuité et à la coercivité de la forme sesquilinéaire \mathcal{A}_ω .

Démonstration. Ce résultat découle directement du lemme de Céa (c. f. [125]). \square

On peut maintenant formuler les résultats du théorème suivant :

Théorème 2.3.3. *Soient h_1 et h_2 les pas des subdivisions données dans (2.3.19). On suppose que D , μ_a , ν , f et g réalisent les hypothèses suivantes :*

- i) *La fonction $D \in C^1(\overline{\Omega})$ et les fonctions $\mu_a, \nu \in C(\overline{\Omega})$*
- ii) *La fonction $f \in H^2(\mathbb{R}; L_2)$ et la fonction $g \in H^2(\mathbb{R}, L^2(\partial\Omega))$.*

Alors on a les résultats suivants :

1. *La fonction $\Delta\phi_* \in H^1(\mathbb{R}; L_2)$.*
2. *Il existe une constante $C_* > 0$ telle que*

$$\|u_* - u_{*h}\|_{L^2(\mathbb{R}; \widehat{H}_1)} \leq C_* \|h\|_\infty (1 + \|h\|_\infty^2)^{\frac{1}{2}} \|\phi_*\|_{H^1(\mathbb{R}; H_2)}. \quad (2.3.44)$$

3. *On a l'estimation de l'erreur suivante*

$$\|\phi_* - \phi_{*h}\|_{L^2(\mathbb{R}; H_1)} = \mathcal{O}\left(\|h\|_\infty \sqrt{1 + \|h\|_\infty^2}\right). \quad (2.3.45)$$

Démonstration. Pour une fréquence fixée ω dans \mathbb{R} , on a

1. Par définition $u_* = \widehat{\phi}_*$. On a $F(\cdot, \omega) \in \widehat{L}_2$, $u_*(\cdot, \omega) \in \widehat{H}_1$ et $D \in C^1(\overline{\Omega})$, alors en utilisant la relation (2.3.18) on déduit que $\Delta u_*(\cdot, \omega)$ est dans l'espace \widehat{L}_2 . Par hypothèses, on a $D \geq \alpha > 0$, et les fonctions μ_a , ν , $\frac{\partial D}{\partial x}$ et $\frac{\partial D}{\partial y}$ sont continues sur $\overline{\Omega}$, alors en utilisant l'inégalité $(|a| + |b| + |c|)^2 \leq 9(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2)$, il existe une constante $C_2 > 0$ telle que

$$\left| \Delta \widehat{\phi}_*(x, \omega) \right|^2 \leq \frac{C_2(1 + \omega^2)}{\alpha^2} \left(|F(x, \omega)|^2 + |u_*(x, \omega)|^2 + |\nabla u_*(x, \omega)|^2 \right), \quad (2.3.46)$$

pour tout $x = (x, y) \in \overline{\Omega}$. En utilisant le théorème de dérivation sous le signe intégrale de Lebesgue, alors on écrit $\Delta \widehat{\phi}_*(\cdot, \omega) = \widehat{\Delta \phi}_*(\cdot, \omega)$.

En intégrant l'inégalité (2.3.46) sur Ω par rapport à la variable x , on obtient

$$\left\| \widehat{\Delta \phi}_*(\cdot, \omega) \right\|_{\widehat{L}_2}^2 \leq \frac{C_2(1 + \omega^2)}{\alpha^2} \left(\|F(\cdot, \omega)\|_{\widehat{L}_2}^2 + \|u_*(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1}^2 \right).$$

D'après le théorème 2.3.1, on a

$$\|u_*(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} \leq \frac{M(\omega)}{\alpha}$$

où $\omega \mapsto M(\omega)$ est donnée par l'expression (2.3.13). Il est évident de voir qu'il existe une constante $C_3 > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \left\| \Delta \widehat{\phi}_*(\cdot, \omega) \right\|_{\widehat{L}_2}^2 &\leq \frac{C_3(1 + \omega^2)}{\alpha^4} \left(\|F(\cdot, \omega)\|_{\widehat{L}_2}^2 + \|G(\cdot, \omega)\|_{\widehat{L}_2(\partial\Omega)}^2 \right) \\ &= \frac{C_3(1 + \omega^2)}{\alpha^4} \left(\|\widehat{f}(\cdot, \omega)\|_{\widehat{L}_2}^2 + \|\widehat{g}(\cdot, \omega)\|_{\widehat{L}_2(\partial\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (2.3.47)$$

En multipliant l'inégalité (2.3.47) par la fonction poids $\omega \mapsto (1 + \omega^2)$ et en intégrant sur \mathbb{R} par rapport à la variable ω , on obtient

$$\|\Delta \phi_*\|_{H^1(\mathbb{R}; L_2)}^2 \leq \frac{C_3}{\alpha^4} (\|f\|_{H^2(\mathbb{R}; L_2)}^2 + \|g\|_{H^2(\mathbb{R}; L^2(\partial\Omega))}^2) < \infty.$$

2. L'estimation de l'erreur est basée fondamentalement sur le lemme 2.3.1. on a

$$\|u_*(\cdot, \omega) - u_{*h}(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} \leq \frac{C_1}{\alpha} \sqrt{1 + \omega^2} \inf_{v_h \in \widehat{V}_h} \|u_*(\cdot, \omega) - v_h(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1}, \quad (2.3.48)$$

où C_1 et α sont des constantes relatives à la continuité et la coercivité données respectivement par (2.3.14) et (2.3.15). Par sa construction, $\mathcal{I}_h u_*(\cdot, \omega)$ est une spline tensorielle dans $\widehat{S}_h(\Omega) \subset \widehat{V}_h$, alors

$$\inf_{v_h \in \widehat{V}_h} \|u_*(\cdot, \omega) - v_h(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} \leq \|u_*(\cdot, \omega) - \mathcal{I}_h u_*(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1}. \quad (2.3.49)$$

La solution $u_*(\cdot, \omega)$ est dans l'espace \widehat{H}_2 alors d'après la proposition 2.3.1, on a

$$\|u_*(\cdot, \omega) - \mathcal{I}_h u_*(\cdot, \omega)\|_{\widehat{L}_2} \leq \frac{2}{\pi^2} \|h\|_\infty \|u_*(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_2}, \quad (2.3.50)$$

et

$$\|\nabla u_*(\cdot, \omega) - \nabla(\mathcal{I}_h u_*)(\cdot, \omega)\|_{\widehat{L}_2} \leq \frac{2}{\pi} \|h\|_\infty^2 \|u_*(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_2}. \quad (2.3.51)$$

Par addition des inégalités (2.3.50) et (2.3.51) on obtient l'inégalité suivante

$$\|u_*(\cdot, \omega) - \mathcal{I}_h u_*(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} \leq \frac{2}{\pi} \|h\|_\infty \left(1 + \frac{\|h\|_\infty^2}{\pi^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|u_*(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_2}. \quad (2.3.52)$$

En utilisant (2.3.48), (2.3.49), (2.3.51) et (2.3.52) avec les relations de dérivation

$$\frac{\partial^2 u_*}{\partial x^2}(\cdot, \omega) = \frac{\partial^2 \widehat{\phi}_*}{\partial x^2}(\cdot, \omega) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u_*}{\partial y^2}(\cdot, \omega) = \frac{\partial^2 \widehat{\phi}_*}{\partial y^2}(\cdot, \omega), \quad \text{on obtient la majoration}$$

$$\|u_*(\cdot, \omega) - u_{*h}(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1}^2 \leq \left(\frac{C_1}{\alpha} \right)^2 \|h\|_\infty^2 (1 + \|h\|_\infty^2) (1 + \omega^2) \left\| \widehat{\phi}_*(\cdot, \omega) \right\|_{\widehat{H}_2}^2.$$

En intégrant sur \mathbb{R} par rapport à la variable ω , on obtient

$$\|u_* - u_{*h}\|_{L^2(\mathbb{R}; \widehat{H}_1)} \leq C_* \|h\|_\infty \sqrt{1 + \|h\|_\infty^2} \left\| \phi_* \right\|_{H^1(\mathbb{R}; H_2)}, \quad \text{avec} \quad C_* = \frac{C_1}{\alpha}$$

3. Maintenant, en utilisant l'identité de Parseval, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_*(x, t) - \phi_{*h}(x, t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_*(x, \omega) - u_{*h}(x, \omega)|^2 d\omega, \quad (2.3.53)$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla(\phi_* - \phi_{*h})(x, t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \widehat{\nabla\phi_*}(x, \omega) - \widehat{\nabla\phi_{*h}}(x, \omega) \right|^2 d\omega. \quad (2.3.54)$$

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale de Lebesgue, on a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla(\phi_* - \phi_{*h})(x, t)|^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \nabla\widehat{\phi_*}(x, \omega) - \nabla\widehat{\phi_{*h}}(x, \omega) \right|^2 d\omega, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u_*(x, \omega) - \nabla u_{*h}(x, \omega)|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (2.3.55)$$

En intégrant les relations (2.3.53) et (2.3.55) sur Ω par rapport à la variable $x = (x, y)$ et d'après le théorème de Fubini, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|\phi_*(\cdot, t) - \phi_{*h}(\cdot, t)\|_{\mathbb{H}_1}^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \|u_*(\cdot, \omega) - u_{*h}(\cdot, \omega)\|_{\widehat{\mathbb{H}}_1}^2 d\omega.$$

Par conséquent, on vérifie facilement que l'on a

$$\|\phi_* - \phi_{*h}\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{H}_1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|u_* - u_{*h}\|_{L^2(\mathbb{R}; \widehat{\mathbb{H}}_1)}. \quad (2.3.56)$$

Or, d'après le résultat 2) du théorème, on a l'estimation de l'erreur suivante

$$\|\phi_* - \phi_{*h}\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{H}_1)} \leq \frac{C_*}{\sqrt{2\pi}} \|h\|_{\infty} \sqrt{1 + \|h\|_{\infty}^2} \|\phi_*\|_{\mathbb{H}^1(\mathbb{R}; \mathbb{H}_2)}.$$

□

2.3.6 Les tests numériques

Dans cette partie, nous proposons des exemples numériques qui illustrent la validité de notre méthode numérique établie précédemment. Les paramètres optiques ν , D et μ_a seront déclarés pour chaque exemple. On discrétise l'intervalle du temps $[t_0, t_0 + T]$ en utilisant les nœuds $t_k = t_0 + k\Delta t$, pour $0 \leq k \leq p$, où $\Delta t = \frac{T}{p}$ est le pas du temps. On choisit le temps initial t_0 et le temps final $t_0 + T$. Tous nos calculs sont faits en utilisant Matlab.

Premier exemple

Dans ce premier exemple, on considère le problème de diffusion (2.3.1). On utilise les conditions (2.3.2) avec $\beta \equiv 0$, on a alors les conditions non homogènes de Dirichlet aux bords $\partial\Omega$,

$$\phi(\xi, t) = g(\xi, t), \quad \text{pour } (\xi, t) \in \partial\Omega \times [t_0, t_0 + T]. \quad (2.3.57)$$

On suppose que les paramètres ν , D et μ_a sont des fonctions réelles données respectivement par $\nu(x, y) = \nu_0 \cosh(x) \sinh(y)$, $\mu_a(x, y) = \mu_{a_0} y^2 e^{-x}$ et $D(x, y) = D_0(1 + \pi x^2) \cos(\pi y)$ où ν_0 , μ_{a_0} et D_0 sont des constantes de saisies.

Pour cet exemple, on considère les fonctions sources suivantes

$$\begin{aligned} f(x, y, t) &= \left(\frac{(t^3 - 3t)}{c_0} \nu(x, y) + (1 - t^2) \mu_a(x, y) \right) e^{-t^2/2} \varphi(x, y) \\ &\quad - (1 - t^2) e^{-t^2/2} \left(D(x, y) \Delta \varphi(x, y) + \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \quad \text{dans } \Omega, \\ g(x, y, t) &= (1 - t^2) e^{-t^2/2} \varphi(x, y), \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$. La fonction φ est donnée par l'expression

$$\varphi(x, y) = \exp \left(- \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - (y - 1)^2 \right),$$

et $\frac{\partial D}{\partial x}$ et $\frac{\partial D}{\partial y}$ sont des dérivées de la fonction D au sens des distributions.

Il est facile de voir que la solution exacte ϕ_* de l'équation de diffusion (2.3.1) avec les conditions de Dirichlet aux bords (2.3.57) est

$$\phi_*(x, y, t) = (1 - t^2) e^{-t^2/2} \exp \left(- \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - (y - 1)^2 \right), \quad \forall (x, y, t) \in [a, b] \times [c, d] \times [t_0, t_0 + T].$$

Les fonctions sources intermédiaires $F(., \omega)$ et $G(., \omega)$ sont données par

$$\begin{aligned} F(x, y, \omega) &= \left(i \frac{\omega}{c_0} \nu(x, y) + \mu_a(x, y) \right) \omega^2 e^{-\omega^2/2} \varphi(x, y) \\ &\quad - \omega^2 e^{-\omega^2/2} \left(D(x, y) \Delta \varphi(x, y) + \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \quad \text{dans } \Omega, \\ G(x, y, \omega) &= \omega^2 e^{-\omega^2/2} \varphi(x, y), \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{aligned}$$

pour toute fréquence réelle ω dans \mathbb{R} .

Le graphe de la solution exacte $(x, y) \mapsto \phi_*(x, y, t_0 + T)$ est sur le côté gauche de la figure 2.8. Le graphe de la partie réelle de la solution numérique $(x, y) \mapsto \phi_{*h}(x, y, t_0 + T)$ est sur le côté droit de la figure 2.8, à l'instant $t = t_0 + T$ et pour $(x, y) \in]a, b[\times]c, d[$. On observe que le graphe de la partie réelle de la solution numérique $(x, y) \mapsto \phi_{*h}(x, y, t)$ colle parfaitement à celui de la solution exacte qui est une fonction à valeurs réelles pour l'exemple considéré. Tandis que la partie imaginaire, tracée sur le côté gauche de la figure 2.9, est très proche de zéro avec un ordre de 10^{-24} . Ceci coïncide parfaitement puisque la solution exacte est purement réelle. Sur le côté droit de la figure 2.9, on donne le graphique de l'erreur relative considérée comme fonction $E_h : t \in [t_0, t_0 + T] \mapsto E_h(t)$, donnée par l'expression suivante

$$E_h(t) = \left(\frac{\sum_{j=0}^{n_2} \sum_{i=0}^{n_1} |\phi_*(x_i, y_j, t) - \phi_{*h}(x_i, y_j, t)|^2}{\sum_{j=0}^{n_2} \sum_{i=0}^{n_1} |\phi_*(x_i, y_j, t)|^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.3.58)$$

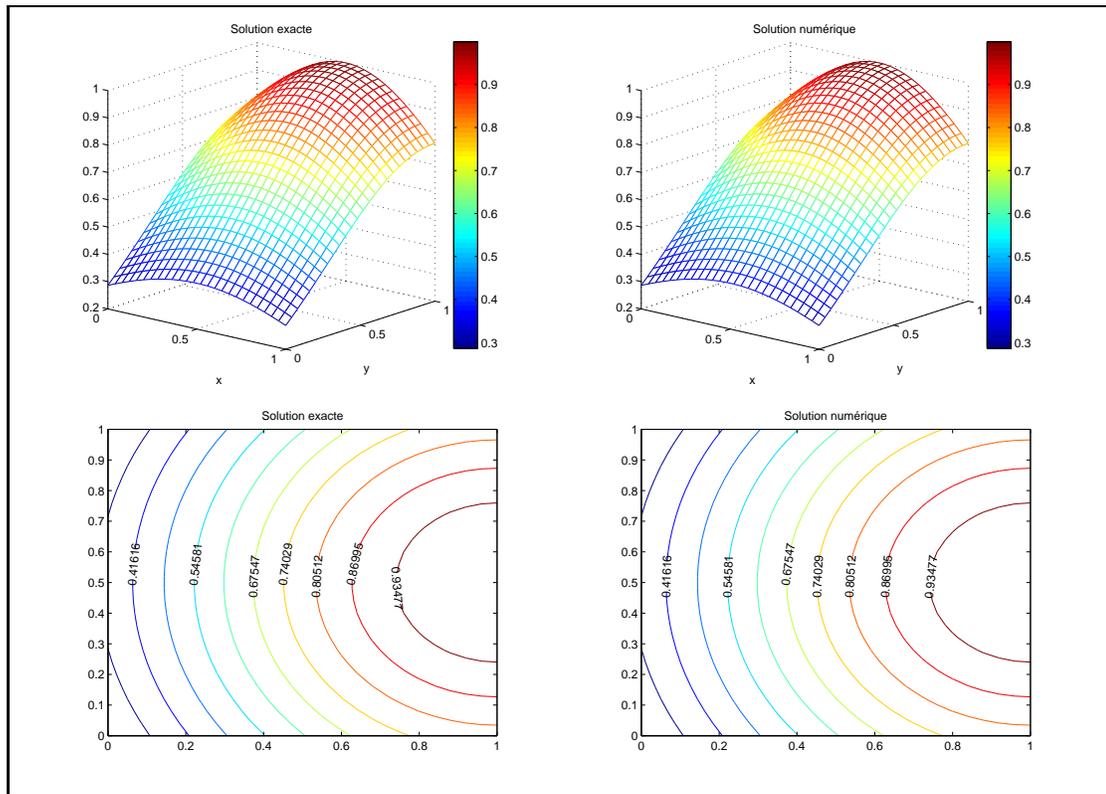


FIGURE 2.8 – Exemple avec les paramètres : $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$, $t_0 = 0$, $T = 1$, $c_0 = 6$, $\nu_0 = 1.45$, $\mu_{s_0} = 20$, $\mu_{a_0} = 0.025$, $\vartheta = 0.95$, $m = 25$, $p = 10$, $n_1 = 20$ et $n_2 = 15$ pour $t = t_0 + T$.

Deuxième exemple

Dans le second exemple, on considère le problème parabolique de diffusion (2.3.1) où les conditions (2.3.2) sont les conditions non homogènes de Robin sur chacun des côtés du domaine combiné par les conditions de Dirichlet à chacun des sommets du rectangle Ω et sont données comme suit

$$\begin{cases} \phi(\xi, t) + \frac{\beta(\xi)}{2} D(\xi) \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}(\xi, t) = g(\xi, t), & \text{pour } (\xi, t) \in \partial\Omega \setminus \Gamma, \\ \phi(\xi, t) = g(\xi, t), & \text{pour } (\xi, t) \in \Gamma. \end{cases} \quad (2.3.59)$$

Le sous ensemble Γ est formé par les quatre sommets du domaine rectangulaire $\Omega =]a, b[\times]c, d[$. Ici, la fonction β est donnée par

$$\begin{aligned} \beta(a, y) &= 1/\zeta_1, & \text{pour } y \in [c, d[, \\ \beta(x, d) &= 1/\zeta_2, & \text{pour } x \in [a, b[, \\ \beta(b, y) &= 1/\zeta_3, & \text{pour } y \in]c, d], \\ \beta(x, c) &= 1/\zeta_4, & \text{pour } x \in]a, b]. \end{aligned}$$

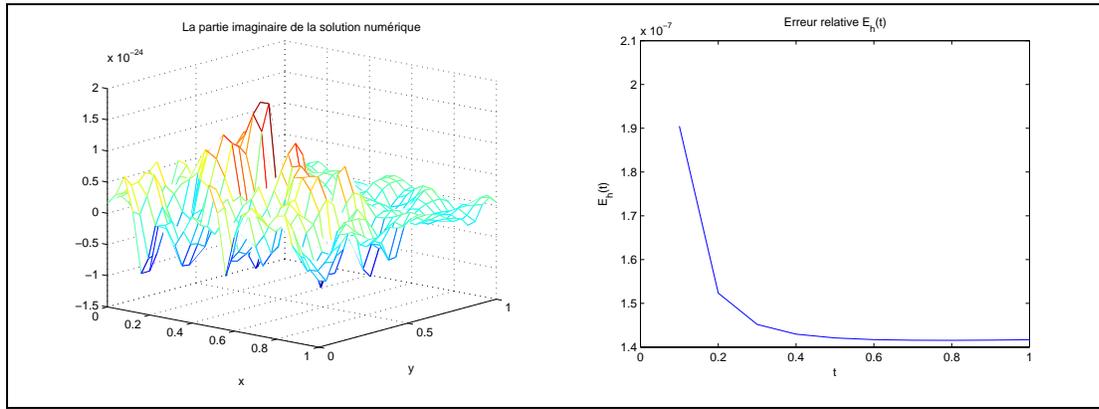


FIGURE 2.9 – Exemple avec les paramètres : $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$, $t_0 = 0$, $T = 1$, $c_0 = 6$, $\nu_0 = 1.45$, $\mu_{s_0} = 20$, $\mu_{a_0} = 0.025$, $\vartheta = 0.95$, $m = 25$, $p = 10$, $n_1 = 20$ et $n_2 = 15$ à l'instant $t = t_0 + T$.

Pour ce test numérique les fonctions sources sont données par

$$\begin{aligned}
 f(x, y, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \exp\left(-\frac{(t-t_s)^2}{2\rho^2}\right) \left(-\frac{\nu_0(t-t_s)}{\rho^2 c_0} + \mu_{a_0} - D_0 \Delta\right) \varphi(x, y), \\
 g(a, c, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \exp\left(-\frac{(t-t_s)^2}{2\rho^2}\right) \varphi(a, c), \\
 g(b, d, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \exp\left(-\frac{(t-t_s)^2}{2\rho^2}\right) \varphi(b, d), \\
 g(a, d, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \exp\left(-\frac{(t-t_s)^2}{2\rho^2}\right) \varphi(a, d), \\
 g(b, c, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \exp\left(-\frac{(t-t_s)^2}{2\rho^2}\right) \varphi(b, c), \\
 g(a, y, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \exp\left(-\frac{(t-t_s)^2}{2\rho^2}\right) \left(\varphi(a, y) - \beta(a, y) \frac{D_0}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a, y)\right), \\
 g(b, y, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \exp\left(-\frac{(t-t_s)^2}{2\rho^2}\right) \left(\varphi(b, y) + \beta(b, y) \frac{D_0}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(b, y)\right), \\
 g(x, c, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \exp\left(-\frac{(t-t_s)^2}{2\rho^2}\right) \left(\varphi(x, c) - \beta(x, c) \frac{D_0}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, c)\right), \\
 g(x, d, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \exp\left(-\frac{(t-t_s)^2}{2\rho^2}\right) \left(\varphi(x, d) + \beta(x, d) \frac{D_0}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, d)\right),
 \end{aligned}$$

pour tout $x \in]a, b[$ et tout $y \in]c, d[$ où la fonction φ est donnée par l'expression suivante

$$\begin{aligned}
 \varphi(x, y) &= \frac{3}{4} e^{-1/4((9x-2)^2+(9y-2)^2)} + \frac{3}{4} e^{-1/49(9x-2)^2-1/10(9y-2)^2} \\
 &+ \frac{1}{2} e^{-1/4((9x-7)^2+(9y-3)^2)} - \frac{1}{5} e^{-(9x-4)^2-(9y-7)^2}.
 \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que la solution exacte ϕ_* de l'équation de diffusion (2.3.1) munie des conditions non homogènes de Robin aux bords (2.3.59) est

$$\phi_*(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \exp\left(-\frac{(t-t_s)^2}{2\rho^2}\right) \varphi(x, y).$$

Le graphe de la solution exacte $(x, y) \mapsto \phi_*(x, y, t_0 + T)$ est sur le côté gauche de la

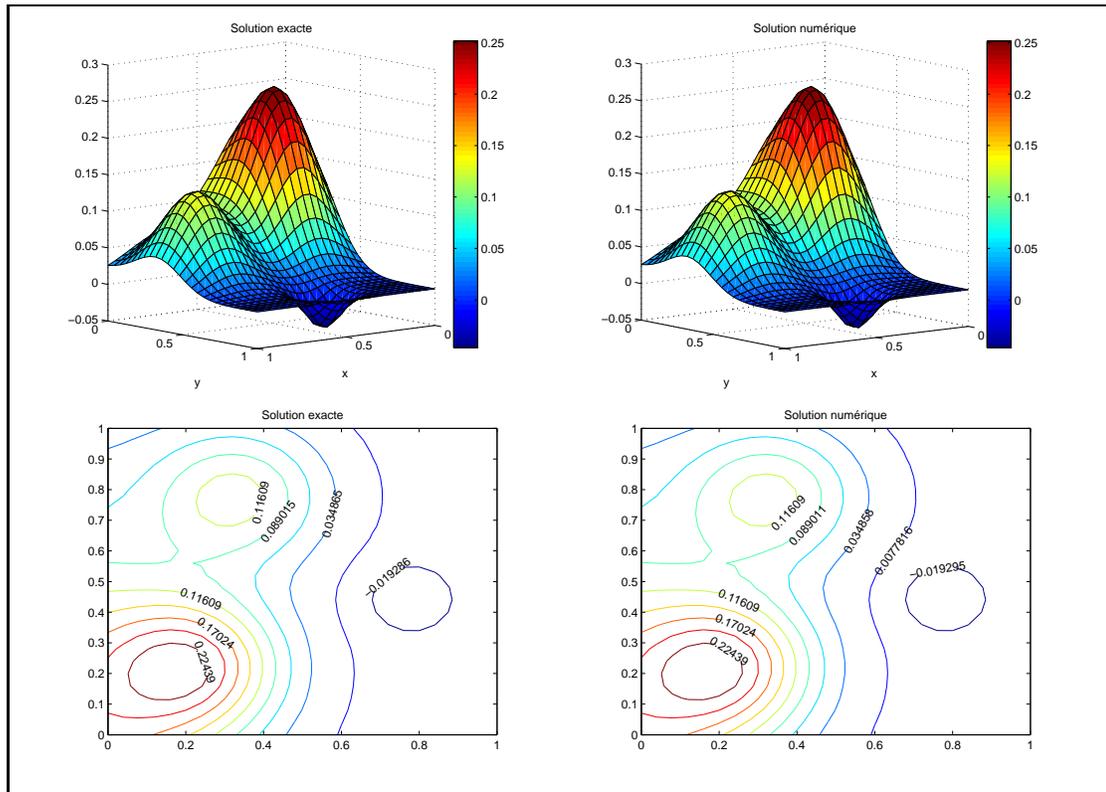


FIGURE 2.10 – Exemple avec les paramètres : $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$, $t_0 = 0$, $T = 2$, $t_s = T/2$, $\rho = 1$, $c_0 = 1$, $\nu_0 = 1.45$, $\zeta_1 = 0.5$, $\zeta_2 = \pi/2$, $\zeta_3 = 1.3$, $\zeta_4 = 1/3$, $\mu_{s_0} = 20$, $\mu_{a_0} = 0.025$, $m = 50$, $p = 5$, $n_1 = 20$ et $n_2 = 20$.

figure 2.10. La partie réelle de la solution numérique $(x, y) \mapsto \phi_{*h}(x, y, t_0 + T)$ est sur le côté droit de la figure 2.10, pour l'instant $t = t_0 + T$ et pour tout $(x, y) \in]a, b[\times]c, d[$. On observe que le graphique de la partie réelle de la fonction $(x, y) \mapsto \phi_{*h}(x, y, t)$ coïncide parfaitement avec la solution exacte de notre exemple. Puisque la solution exacte est à valeurs réelles alors la partie imaginaire, tracée sur le côté gauche de la figure 2.11, est numériquement nulle avec des valeurs d'ordre 10^{-14} . L'erreur relative $t \mapsto E_h(t)$ donnée par l'expression (2.3.58), est tracée sur le côté droit de la figure 2.11. Les valeurs de l'erreur relative d'ordre 10^{-5} confirme la validité de nos programmes numériques.

Le tableau 2.4 illustre plusieurs résultats de $E_h(t_0 + T)$ pour différentes valeurs de n_1 et de n_2 ,

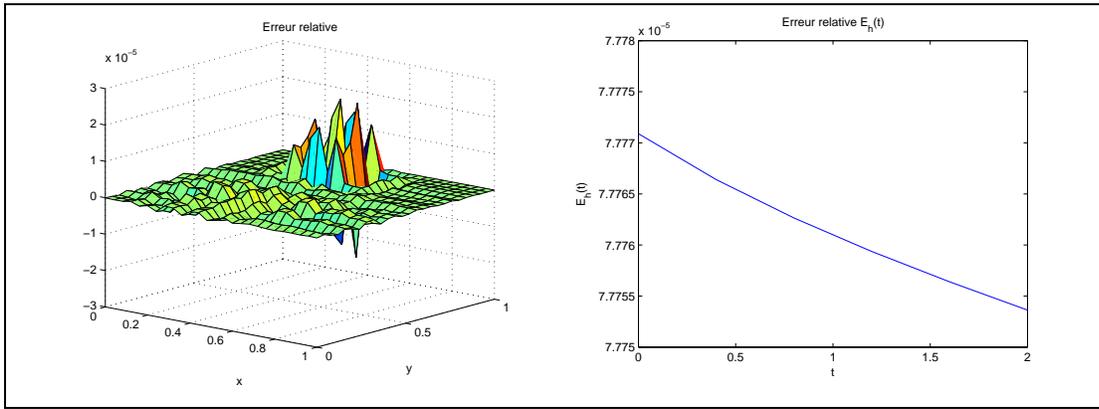


FIGURE 2.11 – Exemple avec les paramètres : $a = 0, b = 1, c = 0, d = 1, t_0 = 0, T = 2, t_s = T/2, \rho = 1, c_0 = 1, \nu_0 = 1.45, \zeta_1 = 0.5, \zeta_2 = \pi/2, \zeta_3 = 1.3, \zeta_4 = 1/3, \mu_{s_0} = 20, \mu_{a_0} = 0.025, m = 50, p = 5, n_1 = 20$ et $n_2 = 20$.

(n_1, n_2)	(10, 15)	(15, 15)	(20, 15)	(20, 20)	(25, 25)
$\ h\ _2$	0.1202	0.0943	0.0833	0.0707	0.0566
Error $E_h(t_0 + T)$	3.46602e-3	4.1069e-4	9.5684e-5	7.7755e-5	3.17875e-5

TABLE 2.4 – Avec $a = 0, b = 1, c = 0, d = 1, p = 5, m = 50, h_1 = (b - a)/n_1$ et $h_2 = (d - c)/n_2$.

Exemple avec la présence d’un saut dans la fonction D

Dans cet exemple, on considère le problème parabolique (2.3.1)-(2.3.2), avec les paramètres optiques $\nu = \nu_0, \mu_a$ et μ_s sont des fonctions constantes par morceaux.

$$\mu_a(x, y) = \begin{cases} \mu_{a_0}, & \text{si } (x, y) \in [a, \frac{a+b}{2}] \times [c, d], \\ 0, & \text{si } x \in]\frac{a+b}{2}, b] \times [c, d]. \end{cases}$$

$$\mu_{sc}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } (x, y) \in [a, \frac{a+b}{2}] \times [c, d], \\ \mu_{s_0}, & \text{si } (x, y) \in]\frac{a+b}{2}, b] \times [c, d]. \end{cases}$$

le coefficient de diffusion s’écrit sous la forme explicite suivante

$$D(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\mu_{a_0}}, & \text{si } x \in [a, \frac{a+b}{2}] \times [c, d], \\ \frac{1}{2(1 - \vartheta)\mu_{s_0}}, & \text{si } x \in]\frac{a+b}{2}, b] \times [c, d]. \end{cases}$$

avec la condition $\mu_{a_0} \neq (1 - \vartheta)\mu_{s_0}$ et $\vartheta \in [0, 1]$. On considère la fonction φ donnée par l’expression

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{(x - x_s)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(y - y_s)^2}{2\sigma_2^2}\right),$$

avec σ_1 et σ_2 sont des nombres réels positifs. On désigne par $\frac{\partial D}{\partial x}$ et $\frac{\partial D}{\partial y}$ les dérivées de la fonction de diffusion D au sens des distributions. Dans cet exemple les fonctions

sources sont données par

$$\begin{aligned}
f(x, y, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \exp\left(-\frac{(t-t_s)^2}{2\rho^2}\right) \left(-\frac{2(t-t_s)}{c_0}\nu(x, y) + \mu_a(x, y)\right) \varphi(x, y) \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \exp\left(-\frac{(t-t_s)^2}{2\rho^2}\right) \left(D(x, y)\Delta\varphi(x, y) + \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right), \quad \text{dans } \Omega, \\
g(a, c, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \exp\left(-\frac{(t-t_s)^2}{2\rho^2}\right) \varphi(a, c), \\
g(b, d, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \exp\left(-\frac{(t-t_s)^2}{2\rho^2}\right) \varphi(b, d), \\
g(a, d, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \exp\left(-\frac{(t-t_s)^2}{2\rho^2}\right) \varphi(a, d), \\
g(b, c, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \exp\left(-\frac{(t-t_s)^2}{2\rho^2}\right) \varphi(b, c), \\
g(a, y, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \exp\left(-\frac{(t-t_s)^2}{2\rho^2}\right) \left(\varphi(a, y) - D(a, y) \frac{\beta(a, y)}{2} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(a, y)\right), \\
g(b, y, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \exp\left(-\frac{(t-t_s)^2}{2\rho^2}\right) \left(\varphi(b, y) + D(b, y) \frac{\beta(b, y)}{2} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(b, y)\right), \\
g(x, c, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \exp\left(-\frac{(t-t_s)^2}{2\rho^2}\right) \left(\varphi(x, c) - D(x, c) \frac{\beta(x, c)}{2} \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, c)\right), \\
g(x, d, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \exp\left(-\frac{(t-t_s)^2}{2\rho^2}\right) \left(\varphi(x, d) + D(x, d) \frac{\beta(x, d)}{2} \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, d)\right),
\end{aligned}$$

pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$. Les fonctions sources intermédiaires $F(\cdot, \omega)$ et $G(\cdot, \omega)$ sont données par

$$\begin{aligned}
F(x, y, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-it_s\omega - (\rho\omega)^2/2) \left(\frac{i\omega}{c_0}\nu(x, y) + \mu_a(x, y)\right) \varphi(x, y) \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-it_s\omega - (\rho\omega)^2/2) \left(D(x, y)\Delta\varphi(x, y) + \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right), \quad \text{dans } \Omega, \\
G(a, c, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-it_s\omega - (\rho\omega)^2/2) \varphi(a, c), \\
G(b, d, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-it_s\omega - (\rho\omega)^2/2) \varphi(b, d), \\
G(a, d, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-it_s\omega - (\rho\omega)^2/2) \varphi(a, d), \\
G(b, c, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-it_s\omega - (\rho\omega)^2/2) \varphi(b, c), \\
G(a, y, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-it_s\omega - (\rho\omega)^2/2) \left(\varphi(a, y) - D(a, y) \frac{\beta(a, y)}{2} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(a, y)\right), \\
G(b, y, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-it_s\omega - (\rho\omega)^2/2) \left(\varphi(b, y) + D(b, y) \frac{\beta(b, y)}{2} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(b, y)\right), \\
G(x, c, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-it_s\omega - (\rho\omega)^2/2) \left(\varphi(x, c) - D(x, c) \frac{\beta(x, c)}{2} \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, c)\right), \\
G(x, d, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-it_s\omega - (\rho\omega)^2/2) \left(\varphi(x, d) + D(x, d) \frac{\beta(x, d)}{2} \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, d)\right),
\end{aligned}$$

pour toute fréquence réelle ω .

Il est facile de vérifier que la solution exacte ϕ_* de l'équation de diffusion (2.3.1)

avec les conditions non homogènes de Robin aux bords (2.3.57) est

$$\phi_*(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \rho \sigma_1 \sigma_2} \exp\left(-\frac{(t-t_s)^2}{2\rho^2}\right) \exp\left(-\frac{(x-x_s)^2}{2\sigma_1^2}\right) \exp\left(-\frac{(y-y_s)^2}{2\sigma_2^2}\right).$$

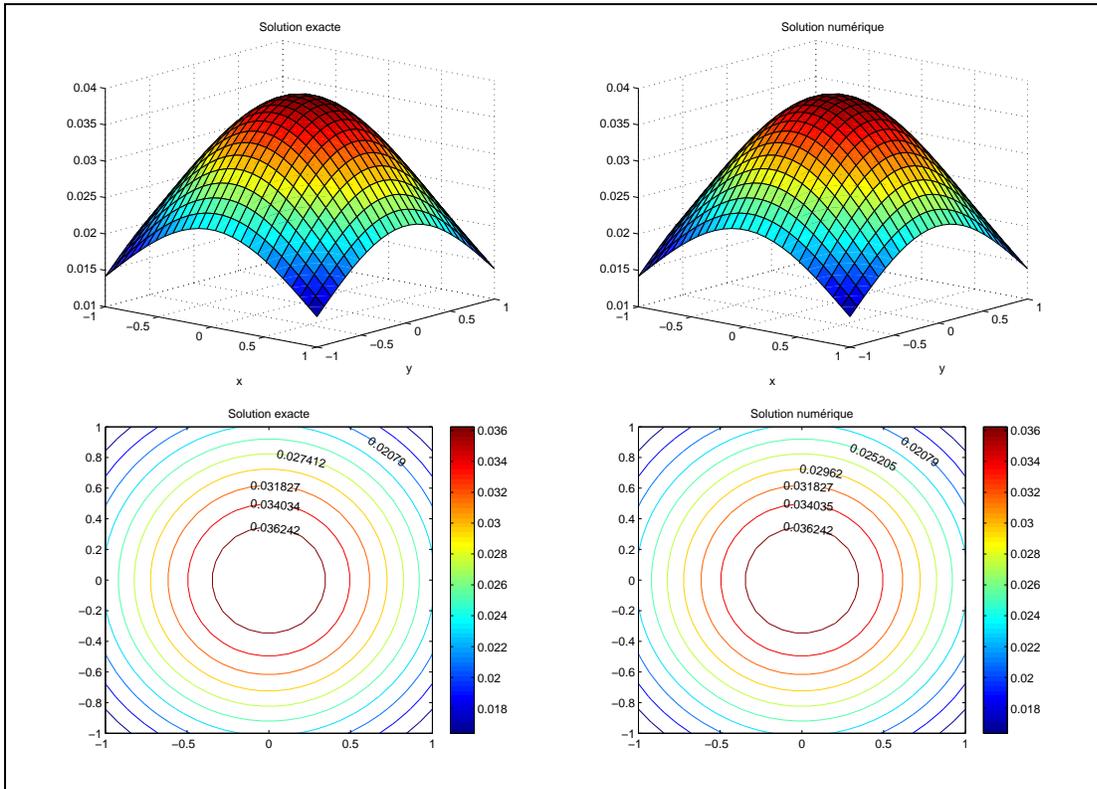


FIGURE 2.12 – Exemple avec les paramètres : $a = -1$, $b = 1$, $c = -1$, $d = 1$, $t_0 = 0$, $T = 2$, $c_0 = 1$, $\nu_0 = 1.45$, $\zeta_1 = 0.5$, $\zeta_2 = \pi/2$, $\zeta_3 = 1.3$, $\zeta_4 = 1/3$, $\mu_{s0} = 20$, $\mu_{a0} = 0.25$, $\vartheta = 0.95$, $m = 25$, $p = 30$, $n_1 = 10$ et $n_2 = 10$.

Le graphe de la solution exacte $(x, y) \mapsto \phi_*(x, y, t_0 + T)$ est tracé sur le côté gauche de la figure 2.12. La partie réelle de la solution numérique $(x, y) \mapsto \phi_{*h}(x, y, t_0 + T)$ est tracé sur le côté droit de la figure 2.12, pour l'instant $t = t_0 + T$ et pour $(x, y) \in]a, b[\times]c, d[$. On observe que le graphique de la partie réelle de la fonction $(x, y) \mapsto \phi_{*h}(x, y, t)$ coïncide parfaitement avec la solution exacte de notre exemple. L'erreur relative $t \mapsto E_h(t)$ donnée par l'expression (2.3.58), est tracée sur le côté droit de la figure 2.13. On remarque aussi que l'erreur relative représentée par la surface sur le côté gauche de la figure 2.13 prend des valeurs d'ordre 10^{-6} .

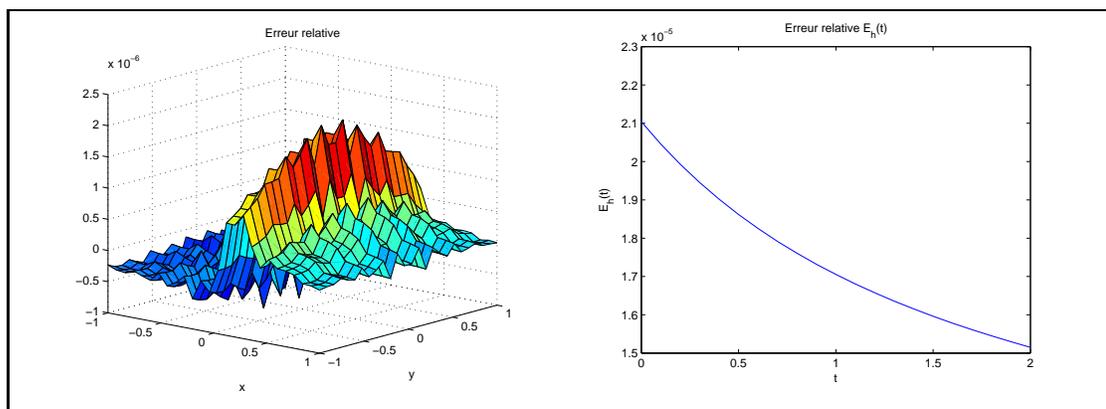


FIGURE 2.13 – Exemple avec les paramètres : $a = -1$, $b = 1$, $c = -1$, $d = 1$, $t_0 = 0$, $T = 2$, $c_0 = 1$, $\nu_0 = 1.45$, $\zeta_1 = 0.5$, $\zeta_2 = \pi/2$, $\zeta_3 = 1.3$, $\zeta_4 = 1/3$, $\mu_{s_0} = 20$, $\mu_{a_0} = 0.25$, $\vartheta = 0.95$, $m = 25$, $p = 30$, $n_1 = 10$ et $n_2 = 10$.

Chapitre 3

Méthode de Galerkin sans maillage

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous décrivons les grandes lignes pour la résolution du problème de diffusion non stationnaire (1.4.8)-(1.5.3) par la méthode d'approximation de Galerkin sans maillage. Les fonctions à base radiale à support compact où non seront rappelées avec détails dans ce manuscrit. Ces fonctions radiales permettent d'écrire les noyaux reproduisant des espaces de Hilbert d'interpolation. Alors que les méthodes classiques d'éléments finis sont basées sur un maillage du domaine, les méthodes sans maillages, comme leur nom l'indique, ne nécessitent aucun maillage du domaine. Dans ce chapitre, nous proposons de construire une approximation de la solution de l'EDP de diffusion à partir d'un nuage de points dispersés dans le domaine étudié. Le choix des points est basé sur des algorithmes qui donnent une dispersion régulière (points de Halton et points concentriques) où bien une dispersion aléatoire irrégulière. Pour la variable du temps, nous utiliserons les mêmes techniques que dans le chapitre précédent, à savoir la transformée de Fourier et son inverse. Quant aux conditions au bord, on considérera encore les conditions non homogènes de Robin (1.5.3).

3.2 Fonctions radiales

Dans plusieurs applications, il est désirable d'avoir une invariance sous certaines transformations géométriques. Les fonctions radiales sont invariantes par rotation et réflexion. Une fonction $\Psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, avec $d \geq 2$, est dite *fonction radiale* si pour toute rotation \mathcal{R}_θ , d'angle θ , sur \mathbb{R}^d , on a

$$\Psi(\mathcal{R}_\theta x) = \Psi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Nous avons aussi la définition suivante,

Définition 3.2.1. Une fonction $\Psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est dite radiale s'il existe une fonction d'une seule variable $\varphi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\Psi(x) = \varphi(\|x\|_2), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

et $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne usuelle sur \mathbb{R}^d .

Lorsque φ est deux fois dérivable, on a la formule du Laplacien suivante

$$\Delta\Psi(x) = \varphi''(r) + \frac{d-1}{r}\varphi'(r) = \frac{1}{r^{d-1}} \frac{d}{dr} \left(r^{d-1} \frac{d\varphi}{dr} \right). \quad (3.2.1)$$

Pour tout sous ensemble de points distincts $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$, appelés centres, on note

$$\Psi_i(x) = \varphi(\|x - a_i\|_2), \quad i = 1, \dots, N,$$

la fonction radiale associée au centre a_i

La famille de fonctions radiales $(\varphi(\|\cdot - a_i\|_2))_{1 \leq i \leq N}$ joue un rôle important et efficace en théorie d'interpolation sans maillage. Dans ce travail, on étudie plusieurs choix concernant la fonction φ à une seule variable. L'aire de la sphère unité S^{d-1} de \mathbb{R}^d est

$$\varpi_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \quad \text{avec} \quad \Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt.$$

alors si $\Psi \in L^p(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\|\Psi\|_{L^p}^p = \varpi_d \int_0^\infty |\varphi(r)|^p r^{d-1} dr.$$

Le sous ensemble de fonctions radiales appartenant à l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^d)$ est noté

$$H_{rad}^1(\mathbb{R}^d) = \{\Psi \in H^1(\mathbb{R}^d) : \Psi(\mathcal{R}_\theta x) = \Psi(x) \text{ sur } \mathbb{R}^d\}.$$

Le sous ensemble $H_{rad}^1(\mathbb{R}^d)$ est un sous espace vectoriel fermé de $H^1(\mathbb{R}^d)$ pour la norme naturelle $\|\cdot\|_{H^1}$ de l'espace H^1 . Pour une fonction $\Psi \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^d)$ avec $\Psi(x) = \varphi(\|x\|_2)$, on peut vérifier facilement que l'on a

$$\|\Psi\|_{H^1}^2 = \varpi_d \int_0^\infty (|\varphi(r)|^2 + |\varphi'(r)|^2) r^{d-1} dr.$$

L'espace des fonctions radiales à support compact dans \mathbb{R}^d , noté $C_{c,rad}^\infty(\mathbb{R}^d)$, est dense dans $H_{rad}^1(\mathbb{R}^d)$ pour la norme $\|\cdot\|_{H^1}$. Soient $d \geq 2$ et Ψ une fonction de $H_{rad}^1(\mathbb{R}^d)$, on a

- i) $|\Psi(x)| \leq \varpi_d^{-1/2} \|x\|^{-\frac{d-1}{2}} \|\Psi\|_{H^1}$, p. p. sur \mathbb{R}^d
- ii) $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} |\Psi(x)| = 0$.
- iii) Il existe une fonction Φ , dans la classe d'équivalence p.p de Ψ , Hölderienne sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

La démonstration des propriétés i), ii) et iii) est donnée dans [94]. Le théorème suivant est une conséquence immédiate des propriétés i), ii) et iii).

Théorème 3.2.1. (W. Strauss) Soient $d \geq 2$, $p > 1$ et $(d-2)p < d+2$. Alors l'injection de $H_{rad}^1(\mathbb{R}^d)$ dans $L^{p+1}(\mathbb{R}^d)$ est compacte.

Une autre conséquence des propriétés i), ii) et iii) est que pour un domaine borné ne contenant pas l'origine

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d; R_1 < \|x\| < R_2\},$$

avec $0 < R_1 < R_2$, on a $H_{rad}^1(\Omega) \subset C^{0,1/2}(\overline{\Omega})$.

De plus pour $1 \leq p < +\infty$, les injections de l'espace $H_{rad}^1(\Omega)$ dans l'espace $L^p(\Omega)$ et dans l'espace $C(\overline{\Omega})$ sont compactes [94].

3.3 Noyau reproduisant

Nous donnons ici un aperçu sur la notion du noyau reproduisant. Cette notion est fortement liée aux problèmes d'interpolations. Le noyau attaché à un espace hilbertien a été introduit pour la première fois par Bergman [23, 24], pour le cas de l'espace des fonctions holomorphes sur un ouvert de \mathbb{C}^d . De son côté, Aronszajn [14] a établi qu'il s'agit d'une situation particulière d'un cas général : à tout sous-espace hilbertien de l'espace des fonctions sur un domaine Ω on peut associer un noyau reproduisant. L. Schwartz [148] a étendu encore ce formalisme. Pour plus de détails, on peut consulter les articles de Bergman, Aronszajn, Schwartz, ainsi que le livre de Attéa [16] et la thèse de A. Bouhamidi [27].

Dans l'objectif de parvenir aux fonctions définies conditionnellement positives, nous devons spécialiser nos résultats sur le rétablissement optimal au cas de rétablissement optimal de fonctions. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert de fonctions définies sur $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. On suppose que \mathcal{H} s'injecte continument dans l'espace $C(\Omega, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur Ω à valeurs dans \mathbb{R} . L'idée de reproduire l'espace de Hilbert \mathcal{H} par un noyau parvient de l'action classique de la forme linéaire spécifique

$$\delta_x : f \longmapsto \delta_x(f) := f(x), \quad f \in \mathcal{H}, \quad x \in \Omega,$$

qui est appelée la mesure de Dirac au point x . La fonctionnelle δ_x est supposée dans \mathcal{H}^* , alors il existe une constante positive $M = M_x$ telle que

$$|\delta_x f|_{\mathcal{H}^*} = |f(x)| \leq M \|f\|_{\mathcal{H}}.$$

On peut invoquer le théorème de représentation Riesz pour affirmer l'existence d'une fonction $K(x, \cdot) \in \mathcal{H}$ pour tout $x \in \Omega$ telle que

$$f(x) = \delta_x(f) = \langle f | K(x, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}}$$

est valide pour tout $f \in \mathcal{H}$ et $x \in \Omega$. Nous définissons maintenant une fonction

$$K : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad K(x, y) := \langle K(x, \cdot) | K(y, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}}, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

La définition suivante donne la présentation de reproduire d'un noyau sur un espace de Hilbert

Définition 3.3.1. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert réel des fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Une fonction $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dite un noyau de reproduction pour l'espace \mathcal{H} si

- i) $K(x, \cdot) \in \mathcal{H}$, pour tout $x \in \Omega$,
- ii) $f(x) = \langle f | K(\cdot, x) \rangle_{\mathcal{H}}$, pour tout $f \in \mathcal{H}$ et tout $x \in \Omega$.

Dans un espace de Hilbert, on peut affirmer, d'après le théorème de représentation de Riesz, qu'il existe un unique noyau de reproduction qui reproduit tout l'espace. Les deux propriétés de la définition 3.3.1 permettent de prouver le théorème suivant

Théorème 3.3.1. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert réel de fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ avec un noyau de reproduction K et $\mathcal{H}^* = \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{R})$ son dual topologique. Alors on a

1. $K(x, y) = \langle K(x, \cdot) | K(\cdot, y) \rangle_{\mathcal{H}}$, pour tout $x, y \in \Omega$,
2. $K(x, y) = K(y, x)$, pour tout $x, y \in \Omega$.
3. La convergence forte (en norme de l'espace de Hilbert \mathcal{H}) implique la convergence simple, c'est à dire, si on a $\|f - f_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow +\infty$ alors $|f(x) - f_n(x)| \rightarrow 0$ pour tout $x \in \Omega$.

Démonstration. Il est évident de voir que le 1) et 2) se font directement à partir la symétrie du produit scalaire. Pour le 3), on utilise la propriété de reproduction et l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|f(x) - f_n(x)| = |\langle f - f_n, K(\cdot, x) \rangle_{\mathcal{H}}| \leq \|f - f_n\|_{\mathcal{H}} \|K(\cdot, x)\|_{\mathcal{H}}$$

ce qui démontre le 3). □

D'après la définition 3.3.1, l'espace de Hilbert \mathcal{H} contient toutes les fonctions qui sont de la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^N c_i K(a_i, x), \quad \forall x \in \Omega$$

où $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_N\} \subset \Omega$. En utilisant le théorème 3.3.1, on a

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{H}}^2 &= \langle f | f \rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \sum_{i=1}^N c_i K(a_i, \cdot) \middle| \sum_{j=1}^N c_j K(\cdot, a_j) \right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i c_j \langle K(a_i, \cdot) | K(\cdot, a_j) \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i c_j K(a_i, a_j). \end{aligned}$$

Donc, on définit l'espace généré par le noyau K par $\mathcal{H} = \text{span}\{K(\cdot, y) : y \in \Omega\}$.

3.4 Fonctions radiales conditionnellement définies Positives (CDP)

En 1930, Bochner et Schoenberg établissent des caractérisations intégrales qui vont être des ingrédients essentiels pour l'analyse théorique des fonctions radiales. Soit J_n

la fonction classique de Bessel d'ordre n définie par la formulation récurrente suivante

$$\frac{d}{dr} (rJ_{n+1}(r)) = rJ_n(r) - nJ_{n+1}(r), \quad n \geq 0.$$

La fonction de Bessel satisfait la propriété $J_{-n} = (-1)^n J_n$.

On rappelle que la transformée de Fourier d'une fonction Ψ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ est donnée par

$$\widehat{\Psi}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(x) e^{-i\xi \cdot x} dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d,$$

et que la transformée de Fourier inverse est donnée par

$$\Psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\Psi}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Pour $\Psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction radiale de $L^1(\mathbb{R}^d)$ avec $\Psi(x) = \varphi(\|x\|_2)$, la transformée de Fourier $\widehat{\Psi}$ de la fonction Ψ est une fonction radiale.

De plus, on a

$$\widehat{\Psi}(\xi) = \frac{1}{\|\xi\|_2^{(d-2)/2}} \int_0^{+\infty} t^{d/2} \varphi(t) J_{(d-2)/2}(t\|\xi\|_2) dt.$$

Pour μ une mesure à support compact sur \mathbb{R}^d , on rappelle que

$$\langle \mu, \Phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\xi) d\mu(\xi), \quad \forall \Phi \in C(\mathbb{R}^d).$$

De même le produit de convolution $\mu * \Phi$ est donné par

$$\mu * \Phi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x - \xi) d\mu(\xi), \quad \forall \Phi \in C(\mathbb{R}^d).$$

On note par \mathbb{P}_{m-1}^d l'espace des polynômes sur \mathbb{R}^d de degré inférieure ou égale à $m - 1$.

Définition 3.4.1. Une fonction continue $\Psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ est dite conditionnellement définie positive d'ordre m ($CDP_{m,d}$) si et seulement si pour toute mesure μ à support compact sur \mathbb{R}^d et orthogonale à \mathbb{P}_{m-1}^d , c'est à dire

$$\langle \mu, P \rangle = 0, \quad \forall P \in \mathbb{P}_{m-1}^d,$$

on a

$$\langle \mu, \bar{\mu} * \Psi \rangle \geq 0.$$

La fonction Ψ est dite strictement définie positive (SPD_d) si en plus l'inégalité précédente est stricte, c'est à dire

$$\langle \mu, \bar{\mu} * \Psi \rangle > 0.$$

où $\bar{\mu}$ est le mesure conjuguée de la mesure μ .

Un cas particulier est obtenu pour $\mu = \sum_{i=1}^N c_i \delta_{a_i}$ une mesure (combinaison linéaire finie de mesures de Dirac) supportée par les points distincts $a_i \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\langle \mu, \Phi \rangle = \sum_{i=1}^N c_i \Phi(a_i), \quad \forall \Phi \in C^1(\mathbb{R}^d).$$

On a la définition classique suivante

Définition 3.4.2. Une fonction à valeurs complexes $\Psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ est dite conditionnellement définie positive (CDP $_{m,d}$) d'ordre m si et seulement si pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, pour tout ensemble de centres distincts $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_N\} \subset \mathbb{R}^d$, et tout vecteur $c \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$, $c = (c_1, \dots, c_N)^T$ satisfaisant

$$\sum_{i=1}^N c_i P(a_i) = 0, \quad \forall P \in \mathbb{P}_{m-1}^d,$$

on a

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i \bar{c}_j \Psi(a_i - a_j) \geq 0.$$

La fonction Ψ est dite strictement définie positive (SPD $_d$) si en plus l'inégalité précédente est stricte, c'est à dire.

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i \bar{c}_j \Psi(a_i - a_j) > 0.$$

Une fonction $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est dite conditionnellement définie positive sur \mathbb{R}^d d'ordre m , si la fonction Ψ donnée par $\Psi(x) = \varphi(\|x\|_2)$, appartient à (CDP $_{m,d}$). On écrit alors $\varphi \in \text{CDP}_{m,d}(\mathbb{R}^+)$.

La notion de la définition (3.4.1) est encore valide pour les distributions, nous pouvons consulter pour cela l'ouvrage de L. Schwartz [147].

Schoenberg dans [140], Micchelli dans [110] et Guo et *al.* dans [74], ont donné la caractérisation de fonctions radiales conditionnellement définies positives à partir de la notion de la monotonie. Si on considère la fonction d'une seule variable $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et la fonction radiale $\Psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\Psi(x) = \varphi(\|x\|_2), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

alors, cette caractérisation est fortement liée à la monotonie de la fonction φ . On a la définition suivante

Définition 3.4.3. Une fonction $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est dite complètement monotone sur $]0, +\infty[$ si $\varphi \in C^\infty(0, \infty)$ et

$$(-1)^\ell \varphi^{(\ell)}(r) \geq 0, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}^*, \quad \forall r > 0.$$

Une fonction $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est dite complètement monotone sur $]0, +\infty[$ si elle est complètement monotone sur $]0, +\infty[$ et continue en 0.

En 1938, la question de caractérisation a été posée par Schoenberg [140] concernant les fonctions définies positives en termes de fonctions complètement monotones. Schoenberg a donné la caractérisation suivante,

Théorème 3.4.1. (Schoenberg [140]) Soit $\varphi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction non constante et $\Psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $\Psi(\cdot) = \varphi(\|\cdot\|)$. La fonction Ψ est définie positive sur \mathbb{R}^d si et seulement si la fonction $\tau \rightarrow \varphi(\sqrt{\tau})$ est complètement monotone sur $[0, +\infty[$.

Micchelli [110] a généralisé le résultat donné par Schoenberg au cas des fonctions conditionnellement définies positives. Une caractérisation des fonctions radiales conditionnellement définies positives sur \mathbb{R}^d est donnée par Micchelli dans son article [110]. La réciproque de la caractérisation de Micchelli a été prouvée par Guo et al. dans [74]. Le théorème suivant précise cette caractérisation

Théorème 3.4.2. (Micchelli [110], Guo et al. [74]) Soit φ une fonction de $C([0, +\infty[) \cap C^\infty(]0, +\infty[)$. La fonction $\Phi = \varphi(\|\cdot\|_2)$ est conditionnellement définie positive d'ordre m sur \mathbb{R}^d pour tout entier $d \geq 1$ si et seulement si

$$(-1)^{m+k} \varphi^{(m+k)}(r) > 0, \quad \text{pour tout } r > 0, k = 0, 1, 2, \dots$$

Une autre caractérisation des fonctions conditionnellement semi-définies positives est prouvée par Micchelli [110] dans le théorème suivant,

Théorème 3.4.3. (Micchelli [110]) On considère la fonction $\varphi \in C([0, +\infty[) \cap C^\infty(]0, +\infty[)$, définie par $\psi = \varphi(\sqrt{\cdot})$. S'il existe un entier $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $(-1)^m \psi^{(m)}$ est bien définie et complètement monotone sur $]0, +\infty[$, alors φ est conditionnellement semi-définie positive d'ordre m sur \mathbb{R}^d pour tout $d \geq 1$. De plus, si ψ est une fonction non polynomiale de degré m , alors φ est conditionnellement définie positive.

3.4.1 Fonctions radiales définies positives DP à support compact

Schaback et Wu [163] ont défini un opérateur intégrale et son opérateur différentiel inverse qui permettent de construire des fonctions à base radiale à support compact. Soit H l'opérateur défini pour toute fonction ψ et tout $r \in [0; +\infty[$ par,

$$(H\psi)(r) = r\psi(r).$$

Définition 3.4.4. (Schaback et Wu [163])

- i) Soit ψ une fonction telle que $H\psi \in L^1([0, +\infty[)$. L'opérateur intégrale I est défini par

$$(I\psi)(r) = \int_r^{+\infty} (H\psi)(t) dt, \quad \forall r \in [0; +\infty[. \quad (3.4.1)$$

- ii) Pour tout $\psi \in C^2(\mathbb{R})$, l'opérateur différentiel inverse \mathcal{D} de I est défini par

$$(\mathcal{D}\psi)(r) = -\frac{1}{r} \psi'(r), \quad \forall r \in]0; +\infty[. \quad (3.4.2)$$

Dans le paragraphe suivant on donne une liste de fonctions radiales usuelles à support compact.

Les fonctions radiales de Wendland

Théorème 3.4.4. (Wendland [159]) Soit $g \in L^1([0, +\infty[)$ une fonction positive et strictement positive sur un ensemble U . On suppose que la mesure Lebesgue de U est strictement positive. Étant donné $K : [0, +\infty[\times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ un noyau satisfaisant les conditions suivantes

- i) $K(r, \cdot)$ est une fonction mesurable pour tout $r \geq 0$,
- ii) $\|K\|_\infty < \infty$,
- iii) $K(\cdot, t)$ est semi-définie positive sur \mathbb{R}^d pour tout $t > 0$ et définie positive sur \mathbb{R}^d pour $t \in U$.

Alors

$$\varphi(r) = \int_0^\infty K(r, t)g(t)dt$$

est définie positive sur \mathbb{R}^d .

Démonstration. Comme la fonction noyau $K(\cdot, t)$ est semi-définie positive pour tout $t > 0$, il est en particulier continu. Alors, la fonction φ est continue. Finalement, pour les points centres $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}^d$ et $c \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ donnés, on a

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i c_j \varphi(\|a_i - a_j\|_2) = \int_0^\infty \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i c_j K(\|a_i - a_j\|_2, t) g(t) dt \geq 0.$$

On a aussi

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i c_j K(\|a_i - a_j\|_2, t) > 0,$$

car sinon

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i c_j K(\|a_i - a_j\|_2, t) = 0,$$

ce qui implique

$$\int_U \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i c_j K(\|a_i - a_j\|_2, t) g(t) dt = 0.$$

D'où la mesure de Lebesgue de U est nulle. Ceci est impossible. \square

La famille des fonctions de Wendland est donnée par

$$\varphi_{d,\ell,k}(r) = I^k (1-r)_+^\ell, \quad (3.4.3)$$

où $(1-r)_+^\ell$ est la fonction de troncation radiale sur \mathbb{R}^d strictement définie positive

$$(1-r)_+^\ell(r) = \begin{cases} (1-r)^\ell, & \text{si } 0 \leq r < 1, \\ 0, & \text{si } r \geq 1, \end{cases} \quad (3.4.4)$$

avec $I^0 = I$ et $I^k = I \circ I^{k-1}$ pour $k \geq 1$. Les fonctions radiales à support compacts de Wendland sont strictement définies positives sur \mathbb{R}^d ,

$$\varphi_{d,\ell,k}(r) = \begin{cases} P_{\ell,k}(r), & \text{pour } 0 \leq r \leq 1, \\ 0, & \text{si } r > 1, \end{cases} \quad (3.4.5)$$

où $P_{\ell,k}$ est une fonction polynômiale à une seule variable.

Pour tout k dans \mathbb{N} , il est bien prouvé par Wendland dans [158] que pour un espace donné de dimension d possédant la propriété de régularité de classe $C^{2k}(\mathbb{R})$, il existe une unique fonction φ de la forme (3.4.5) qui est définie positive sur \mathbb{R}^d et a une partie polynômiale de degré minimum $\ell = \lfloor d/2 \rfloor + k + 1$, où $\lfloor z \rfloor$ est la fonction partie entière du nombre z . Notons que, pour une dimension paire d , la propriété $\varphi_{\ell,k} := \varphi_{d,\ell,k} = \varphi_{d+1,\ell,k}$ est valable grâce la fonction partie entière.

On rappelle que la fonction $\varphi_{\ell,k}$ est strictement définie positive sur un espace de dimension finie de dimension d . Ces fonctions sont strictement définie positive sur \mathbb{R}^d ainsi elles sont définies positives sur \mathbb{R}^{d_0} avec $d_0 \leq d$. Il est possible de construire des fonctions désirées dont la régularité est C^{2k} .

Pour $\ell = \lfloor d/2 \rfloor + k + 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'après les relations (3.4.1) – (3.4.2) – (3.4.3) – (3.4.4), les fonctions radiales à supports compact de Wendland $\varphi_{\ell,k}$ sont obtenues par l'intégration par partie selon les formules explicites suivantes,

$$\begin{aligned} \varphi_{\ell,0}(r) &= (1-r)_+^\ell, \\ \varphi_{\ell,1}(r) &= c_{\ell,1}(1-r)_+^{\ell+1} [(\ell+1)r+1], \\ \varphi_{\ell,2}(r) &= c_{\ell,2}(1-r)_+^{\ell+2} [(\ell^2+4\ell+3)r^2+(3\ell+6)r+3], \\ \varphi_{\ell,3}(r) &= c_{\ell,3}(1-r)_+^{\ell+3} [(\ell^3+9\ell^2+23\ell+15)r^3+(6\ell^2+36\ell+45)r^2+(15\ell+45)r+15]. \end{aligned}$$

Ces fonctions ont une régularité respectivement dans $C^0 \cap \text{SPD}(\mathbb{R}^3)$, $C^2 \cap \text{SPD}(\mathbb{R}^3)$, $C^4 \cap \text{SPD}(\mathbb{R}^3)$ et $C^6 \cap \text{SPD}(\mathbb{R}^3)$. Les coefficients $c_{\ell,1}$, $c_{\ell,2}$ et $c_{\ell,3}$ sont donnés respectivement par

$$\begin{aligned} c_{\ell,1} &= \frac{1}{(\ell+1)(\ell+2)}, \\ c_{\ell,2} &= \frac{1}{(\ell+1)(\ell+2)(\ell+3)(\ell+4)}, \\ c_{\ell,3} &= \frac{1}{(\ell+1)(\ell+2)(\ell+3)(\ell+4)(\ell+5)(\ell+6)}. \end{aligned}$$

Les fonctions normalisées de Wendland $\varphi_{\ell,k}$ sont données dans le tableau 3.1 suivant

Dimension	Fonction radiale $r \mapsto \varphi_{\ell,k}(r)$	Classe
$d = 1$	$\varphi_{1,0}(r) = (1 - r)_+$	$C^0 \cap \text{SPD}$
$d = 1$	$\varphi_{3,1}(r) \doteq (1 - r)_+^3 (3r + 1)$	$C^2 \cap \text{SPD}$
$d = 1$	$\varphi_{3,2}(r) \doteq (1 - r)_+^5 (8r^2 + 5r + 1)$	$C^4 \cap \text{SPD}$
$d \leq 3$	$\varphi_{2,0}(r) = (1 - r)_+^2$	$C^0 \cap \text{SPD}$
$d \leq 3$	$\varphi_{3,1}(r) \doteq (1 - r)_+^4 (4r + 1)$	$C^2 \cap \text{SPD}$
$d \leq 3$	$\varphi_{4,2}(r) \doteq (1 - r)_+^6 \left(\frac{35}{3}r^2 + 6r + 1\right)$	$C^4 \cap \text{SPD}$
$d \leq 3$	$\varphi_{5,3}(r) \doteq (1 - r)_+^8 (32r^3 + 25r^2 + 8r + 1)$	$C^6 \cap \text{SPD}$
$d \leq 5$	$\varphi_{3,0}(r) = (1 - r)_+^3$	$C^0 \cap \text{SPD}$
$d \leq 5$	$\varphi_{4,1}(r) \doteq (1 - r)_+^5 (5r + 1)$	$C^2 \cap \text{SPD}$
$d \leq 5$	$\varphi_{5,2}(r) \doteq (1 - r)_+^7 (16r^2 + 7r + 1)$	$C^4 \cap \text{SPD}$

TABLE 3.1 – Exemple de fonctions radiales normalisées de Wendland calculées pour $\ell = \lfloor d/2 \rfloor + k + 1$ et pour $k \in \mathbb{N}$.

Les fonctions radiales de Wu

On présente ici une autre méthode utilisée par Wu pour construire une famille de fonctions radiales strictement positives à support compact. Les fonctions radiales de Wu [163] sont

$$\varphi(r) = (1 - r^2)_+^\ell, \quad \ell \in \mathbb{N}. \quad (3.4.6)$$

La fonction φ est strictement définie positive et radiale. A partir de cette fonction Wu construit une autre fonction radiale φ_ℓ sur \mathbb{R} par convolution avec la fonction φ donnée en (3.4.6),

$$\begin{aligned} \varphi_\ell(r) &= \varphi * \varphi(2r) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (1 - t^2)_+^\ell (1 - (2r - t)^2)_+^\ell dt \\ &= \int_{-1}^1 (1 - t^2)^\ell (1 - (2r - t)^2)^\ell dt, \end{aligned}$$

pour tout $\ell \in \mathbb{N}$. La fonction φ_ℓ est strictement définie positive puisque sa transformée de Fourier est essentiellement le carré de la transformée de Fourier de φ :

$$\widehat{\varphi}_\ell(\xi) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \widehat{\varphi} \left(\frac{\xi}{2} \right) \right]^2 \geq 0.$$

Les fonctions φ_ℓ sont polynômiales sur leurs supports. En fait, le degré de la fonction polynômiale est $4\ell + 1$, et $\varphi_\ell \in C^{2\ell}(\mathbb{R})$.

De nouveau, une famille de fonctions radiales strictement définies positives est construite en utilisant l'opérateur différentiel $\mathcal{D}^k := \frac{d^k}{dr^k}$ comme suit

$$\varphi_{\ell,k}(r) = \mathcal{D}^k \varphi_\ell(r).$$

Les fonctions $\varphi_{\ell,k}$ sont strictement définies positives et radiales dans \mathbb{R}^d pour $d \leq 2k + 1$, et sont polynômiales de degré $4\ell - 2k + 1$ sur leurs supports et elles sont dans $C^{2(\ell-k)}$ à l'intérieur du support. La régularité sur le bord est de classe $C^{2\ell-k}$.

Dans la pratique, on choisit ℓ petit de telle sorte à avoir des polynômes avec des expressions simples dans la formule suivante

$$\varphi_{\ell,k}(r) = \mathcal{D}^k \left(\int_{-1}^1 (1 - \tau^2)^\ell (1 - (2r - \tau)^2)^\ell d\tau \right), \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Le tableau 3.2 suivante illustre les polynômes normalisés de Wu

ℓ	Fonction radiale $r \mapsto \varphi_{\ell,k}(r)$	Classe
$\ell = 0$	$\varphi_{0,0}(r) = (1 - r)_+$	$C^0 \cap \text{SPD}(\mathbb{R})$
$\ell = 1$	$\varphi_{1,0}(r) \doteq (1 - r)_+^3 (r^2 + 3r + 1)$	$C^2 \cap \text{SPD}(\mathbb{R})$
$\ell = 1$	$\varphi_{1,1}(r) \doteq (1 - r)_+^2 \left(\frac{1}{2}r + 1\right)$	$C^0 \cap \text{SPD}(\mathbb{R}^3)$
$\ell = 2$	$\varphi_{2,0}(r) = (1 - r)_+^5 (r^4 + 5r^3 + 9r^2 + 5r + 1)$	$C^4 \cap \text{SPD}(\mathbb{R})$
$\ell = 2$	$\varphi_{2,1}(r) \doteq (1 - r)_+^4 \left(\frac{3}{4}r^3 + 3r^2 + 4r + 1\right)$	$C^2 \cap \text{SPD}(\mathbb{R}^3)$
$\ell = 2$	$\varphi_{2,2}(r) \doteq (1 - r)_+^3 \left(\frac{3}{8}r^2 + \frac{9}{8}r + 1\right)$	$C^0 \cap \text{SPD}(\mathbb{R}^5)$
$\ell = 3$	$\varphi_{3,0}(r) \doteq (1 - r)_+^7 \left(1 + 7r + \frac{101}{5}r^2 + \frac{147}{5}r^3 + \frac{101}{5}r^4 + 7r^5 + r^6\right)$	$C^6 \cap \text{SPD}(\mathbb{R})$
$\ell = 3$	$\varphi_{3,1}(r) = (1 - r)_+^6 (1 - r)_+^6 \left(1 + 6r + \frac{41}{3}r^2 + 12r^3 + 5r^4 + \frac{2}{3}r^5\right)$	$C^4 \cap \text{SPD}(\mathbb{R}^3)$
$\ell = 3$	$\varphi_{3,2}(r) \doteq (1 - r)_+^5 \left(1 + 5r + 6r^2 + \frac{25}{8}r^3 + \frac{5}{8}r^4\right)$	$C^2 \cap \text{SPD}(\mathbb{R}^5)$
$\ell = 3$	$\varphi_{3,3}(r) \doteq (1 - r)_+^4 \left(1 + \frac{29}{16}r + \frac{5}{4}r^2 + \frac{5}{16}r^3\right)$	$C^0 \cap \text{SPD}(\mathbb{R}^7)$

TABLE 3.2 – Exemple de fonctions radiales normalisées de Wu calculées pour une dimension $d \leq 2k + 1$ et pour $k \in \mathbb{N}$ (c.f. [163]).

Les fonctions radiales de Buhmann

Nous présentons ici une troisième famille de fonctions radiales strictement définies positives à support compact introduite par Buhmann [38]. L'idée de Buhmann est basée sur les fonctions de Wendland et Wu. Comme dans Wendland [158], on procède à l'intégration d'une fonction positive $g \in L^1([0, +\infty[)$ avec le poids d'un noyau K strictement défini positif. La fonction prend alors la forme générale suivante (voir le théorème 3.4.4)

$$\varphi(r) = \int_0^\infty K(r, t)g(t)dt.$$

Elle est strictement définie positive. La construction Buhmann correspond au choix d'une fonction $g(t) = t^\beta(1-t^\gamma)_+^\rho$ et d'un noyau $K(r, t) = \left(1 - \frac{r^2}{t}\right)_+^\alpha$. On obtient la fonction de Buhmann strictement définie positive à support compact

$$\varphi_{\alpha,\beta,\gamma,\rho}(r) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{r^2}{t}\right)_+^\alpha t^\beta(1-t^\gamma)_+^\rho dt,$$

avec $0 < \gamma \leq \frac{1}{2}$, $\rho \geq 0$. Pour obtenir des fonctions strictement définies positives et radiales sur \mathbb{R}^d pour $d \leq 3$. Les contraintes sur les paramètres sont $\alpha \geq 0$ et $-1 < \beta \leq \frac{\alpha-1}{2}$. Les fonctions de Buhmann contiennent un terme logarithmique additionnel à la partie polynômiale comme le montre les exemples suivants

i) Pour $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = \frac{1}{2}$ et $\rho = 1$, par une intégration par partie on obtient

$$\varphi_1(r) = \frac{1}{3} (6r^2 \log(r) - 4r^3 + 3r^2 + 1), \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Cette fonction est de classe $C^0 \cap \text{SPD}(\mathbb{R}^3)$. La fonction φ_1 est normalisée comme suit

$$\varphi_1(r) \doteq 6r^2 \log(r) - 4r^3 + 3r^2 + 1, \quad 0 \leq r \leq 1$$

avec une extension par continuité donnée pour $r = 0$ par $\varphi_1(0) = 1$.

ii) Pour $\alpha = 2, \gamma = \beta = \frac{1}{2}$ et $\rho = 1$, est donné dans [39] :

$$\varphi_2(r) = \frac{1}{6} (12r^4 \log(r) - 21r^4 + 32r^3 - 12r^2 + 1), \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Cette fonction est de classe $C^2 \cap \text{SPD}(\mathbb{R}^3)$. La fonction φ_2 est normalisée de la manière suivante

$$\varphi_2(r) \doteq 12r^4 \log(r) - 21r^4 + 32r^3 - 12r^2 + 1, \quad 0 \leq r \leq 1,$$

avec une extension par continuité donnée pour $r = 0$ par $\varphi_2(0) = 1$.

iii) Pour $\alpha = 3, \beta = 1, \gamma = \frac{1}{2}$ et $\rho = 2$, par une intégration par partie on obtient

$$\varphi_3(r) = \frac{1}{30} (60r^6 \log(r) - 180r^4 \log(r) - 145r^6 + 384r^5 - 225r^4 - 15r^2 + 1), \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Cette fonction est de classe $C^4 \cap \text{SPD}(\mathbb{R}^3)$. La fonction φ_3 est normalisée de la façon suivante

$$\varphi_3(r) \doteq 60r^6 \log(r) - 180r^4 \log(r) - 145r^6 + 384r^5 - 225r^4 - 15r^2 + 1, \quad 0 \leq r \leq 1,$$

avec une extension par continuité donnée pour $r = 0$ par $\varphi_3(0) = 1$.

La figure 3.1 montre les graphiques de différentes fonctions radiales à support compact :

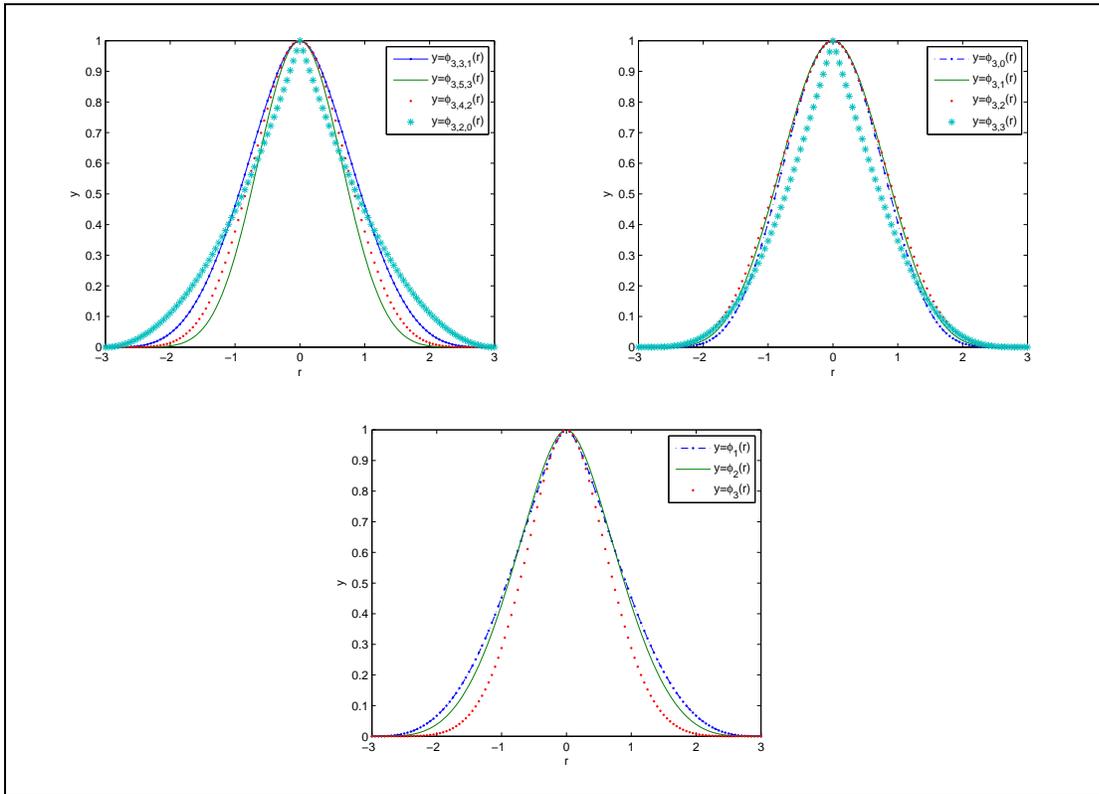


FIGURE 3.1 – Les fonctions de Wendland $y = \varphi_{\ell,k} \left(\frac{r}{\sigma} \right)$ (En haut à gauche), Les fonctions de Wu $y = \varphi_{k,\ell} \left(\frac{r}{\sigma} \right)$ (En haut à droite) et Les fonctions de Buhmann $y = \varphi \left(\frac{r}{\sigma} \right)$ (En bas) avec $-\sigma \leq r \leq \sigma$ avec $\sigma = 3$ où σ est un paramètre d'échelle.

3.4.2 Fonctions radiales CDP à support non compact

On considère parmi les plus populaires des fonctions radiales à support non compact :

- I) **Fonctions radiales Gaussiennes (G)** : Relativement au théorème 3.4.1 de caractérisation de Schoenberg-Micchelli ou le théorème 3.4.2 (Micchelli [110], Guo et al. [74]), les fonctions Gaussiennes (G)

$$\varphi_{\sigma}(r) = \exp \left(-\frac{r^2}{\sqrt{2}\sigma} \right)$$

sont strictement définies positives puisque la fonction $\psi(r) = \varphi_{\sigma}(\sqrt{r})$ est complètement monotone car

$$(-1)^{\ell} \psi^{(\ell)}(r) = (-1)^{2\ell} \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \right)^{\ell} \exp \left(-\frac{r}{\sqrt{2}\sigma} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \right)^{\ell} \exp \left(-\frac{r}{\sqrt{2}\sigma} \right) > 0,$$

pour $\ell = 0, 1, 2, \dots$

- II) **Fonctions radiales de Sobolev** : Soit $c > 0$ une constante réelle. D'après le théorème 3.4.1 de caractérisation ou le théorème 3.4.2 (Micchelli [110], Guo et al.

[74]), la fonction de Sobolev donnée par

$$\varphi(r) = e^{-r} (1 + r + r^2)$$

est strictement définie positive puisque la fonction $\psi(r) = \varphi(r)$ est complètement monotone car

$$(-1)^\ell \psi^{(\ell)}(r) = (-1)^{2\ell} \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \right)^\ell \exp\left(-\frac{r}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \right)^\ell \exp\left(-\frac{r}{\sqrt{2}\sigma}\right) > 0$$

pour $\ell = 0, 1, 2, \dots$

III) **Fonctions MultiQuadratiques (MQs) et MultiQuadratics inverse (IMQs) :** Dans les années 1970, R. Hardy [76, 77, 78] présente une autre approche d'utilisation de fonctions radiales. Ses travaux portent dans un premier temps sur des applications de manipulation en géologie. Pour la modélisation en géologie sismique, Hardy a introduit dans son article [76], les fonctions multiquadratiques (MQs) et les fonctions multiquadratiques inverses (IMQs) données par

i) MQ : $\varphi_c(r) = (c + r^2)^\beta$,

ii) IMQ : $\varphi_c(r) = (c + r^2)^{-\beta}$,

pour $c > 0$ et $\beta > 0$ des constantes données. D'après le théorème 3.4.1 de caractérisation de Schoenberg-Micchelli ou le théorème 3.4.2 (Micchelli [110], Guo et al. [74]), les fonctions multiquadratiques inverses (IMQ) sont strictement définies positives (SPD) puisque la fonction $\psi(r) = \varphi_c(\sqrt{r})$ est complètement monotone car

$$(-1)^\ell \psi^{(\ell)}(r) = (-1)^{2\ell} \beta(\beta - 1) \dots (\beta + \ell - 1) (r + c)^{-\beta - \ell} > 0, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

D'après le théorème 3.4.3 de caractérisation de Micchelli (Micchelli [110]), les fonctions multiquadratiques (MQ) sont conditionnellement définies positives (CPD) puisque la fonction $\psi(r) = (-1)^{\lfloor \beta \rfloor} \varphi_c(\sqrt{r})$ est complètement monotone car

$$(-1)^{\lfloor \beta \rfloor} \psi^{(\lfloor \beta \rfloor)}(r) = (-1)^{2\lfloor \beta \rfloor} \beta(\beta - 1) \dots (\beta - \lfloor \beta \rfloor + 1) (r + c)^{\beta - \lfloor \beta \rfloor} \geq 0,$$

où $\lfloor \beta \rfloor$ est la partie entière de β .

IV) **La spline de type plaque mince (TPS) et fonctions (m, s) -Splines :** Soit s un nombre réel tel que $s < d/2$, on définit par \tilde{H}^s est l'espace des distributions tempérées u dont les transformées de Fourier \hat{u} sont des fonctions mesurables localement intégrables à valeurs complexes sur \mathbb{R}^d telles que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|2\pi\xi\|^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

L'espace \tilde{H}^s muni de la topologie associée au produit scalaire défini par

$$\langle u|v \rangle_s = \int_{\mathbb{R}^d} \|2\pi\xi\|^{2s} \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi,$$

est un sous espace de Hilbert de distributions tempérées et la norme associée est donnée par $\|u\|_s = \langle u|u \rangle_s^{1/2}$ (voir l'article [30]).

Soient Δ^2 l'opérateur bilaplacien et δ la mesure de Dirac à l'origine. La spline de type plaque mince (en anglais Thin Plate Spline (TPS)) φ introduite par Duchon

est générée par la solution élémentaire de l'équation de Euler-Lagrange $\Delta^2\Psi = 8\pi\delta$ au sens des distributions. La spline de type plaque mince (TPS) est une fonction radiale donnée par

$$\Psi(x, y) = (x^2 + y^2) \log(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a bien la formule du Laplacien 3.2.1

$$\Delta^2[r^2 \log r] = 4\Delta[\log r + 1] = 8\pi\delta.$$

La fonction d'une seule variable $\varphi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ associée à la spline de type plaque mince (TPS) est une fonction $\varphi(\|\cdot\|) := \Psi$ qui minimise la fonction coût

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}^2} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy.$$

Soit m un nombre naturel strictement positif tel que $-m + \frac{d}{2} < s < \frac{d}{2}$. On considère l'espace de Beppo-Levi $\mathcal{D}^{-m}(\tilde{H}^s)$ des fonctions continues sur \mathbb{R}^d pour lesquelles toute dérivée d'ordre m au sens des distributions est dans \tilde{H}^s , c'est à dire

$$X^{m,s} := \mathcal{D}^{-m}(\tilde{H}^s) = \{v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) : \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| = m, \partial^\alpha v \in \tilde{H}^s\},$$

où $\partial^\alpha = \partial^{\alpha_1} \dots \partial^{\alpha_d}$ est l'opérateur de dérivation au sens des distributions avec $\partial^{\alpha_i} = \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}}$ pour tout $i = 1, \dots, d$ et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$. Pour $s = 0$, on a $\tilde{H}^0 = L^2(\mathbb{R}^d)$ et

$$X^{m,0} := \{v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) : \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| = m, \partial^\alpha v \in L^2(\mathbb{R}^d)\}.$$

L'espace $X^{m,s}$ muni de la topologie associée au semi produit scalaire suivant

$$\langle u|v \rangle_{m,s} = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^d} \|2\pi\xi\|^{2s} \widehat{\partial^\alpha u}(\xi) \overline{\widehat{\partial^\alpha v}(\xi)} d\xi$$

est un espace semi Hilbertien. La semi-norme associée est donnée par $|u|_{m,s} = \langle u|u \rangle_{m,s}^{1/2}$ (c.f. [61, 62]).

Les fonctions v de $X^{m,s}$ telles que $\Delta^{m+s}v = 0$, sont des polynômes dans $\mathbb{P}_{m-1}(\mathbb{R}^d)$ qui est l'espace nul de $(X^{m,s}, |\cdot|_{m,s})$, c'est à dire que $\text{Ker}(\Delta^{m+s}) = \mathbb{P}_{m-1}(\mathbb{R}^d)$.

La solution fondamentale de l'équation d'Euler-Lagrange $\Delta^{m+s}u = \delta$ est la fonction (m, s) -Spline donnée dans [62, 147] par

$$\Psi(\xi) = \begin{cases} \|\xi\|^{2m+2s-d} \log(\|\xi\|) & \text{si } 2m + 2s - d \in 2\mathbb{N}, \\ \|\xi\|^{2m+2s-d} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_N\}$ l'ensemble de points distincts dispersés dans \mathbb{R}^d . On a

$$\text{span}\{\Psi(\cdot - a_i) : i = 1, \dots, N\} \oplus \mathbb{P}_{m-1}(\mathbb{R}^d) \subset X^{m,s}.$$

En particulier, pour $d = 2$ et $m = 2$, alors $s = 0$ et on obtient la fonction de type plaque mince (TPS) de Duchon $\varphi(\|\xi\|) = \|\xi\|^2 \log(\|\xi\|)$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $\varphi(0) = 0$ (c.f. [62]).

Les fonctions (m, s) -splines sont radiales conditionnellement définies positives puisque pour toute famille de points distincts a_1, \dots, a_N dans \mathbb{R}^2 et tous nombres scalaires c_1, \dots, c_N tels que la mesure $\mu = \sum_{i=1}^N c_i \delta_{a_i}$ est orthogonale à l'espace nul

$\mathbb{P}_{m-1}(\mathbb{R}^2)$, c'est à dire $\sum_{i=1}^N c_i a_i^\alpha = 0, \quad \forall \alpha, \quad |\alpha| \leq 1$, on a la forme quadratique positive,

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i c_j \|a_i - a_j\|^2 \log(\|a_i - a_j\|) \geq 0,$$

ceci satisfait la définition 3.4.2.

- a) Si $2m + 2s - d \in 2\mathbb{N}$, d'après le théorème 3.4.3 de caractérisation de Micchelli (Micchelli [110]), la fonction de type plaque mince (TPS) est conditionnellement définie positive CPD puisque la fonction $\psi(r) = (-1)^{k+1} \varphi(\sqrt{r})$, $k = m + s - d/2$ est complètement monotone car

$$\psi^{(\ell)}(r) = \frac{(-1)^{k+1}}{2} k(k-1) \dots (k-\ell+1) \log(r) + P_\ell(r), \quad 1 \leq \ell \leq k,$$

où P_ℓ est une fonction polynômiale de degré $k - \ell$. En particulier, si $\ell = k$ alors on a

$$\psi^{(k)}(r) = \frac{(-1)^{k+1}}{2} k! \log(r) + c,$$

où c est une constante. Alors $(-1)^{k+1} \psi^{(k+1)}(r) = \frac{k!}{2} r^{-1} > 0$.

- b) Si $\beta = 2m + 2s - d \notin 2\mathbb{N}$, d'après le théorème 3.4.3 de caractérisation de Micchelli (Micchelli [110]), la fonction de type plaque mince (TPS) est conditionnellement définie positive CPD puisque la fonction $\psi(r) = (-1)^{\lfloor \frac{\beta}{2} \rfloor} \varphi(\sqrt{r})$, est complètement monotone car

$$\psi^{(\ell)}(r) = (-1)^{\lfloor \frac{\beta}{2} \rfloor} \frac{\beta}{2} \left(\frac{\beta}{2} - 1 \right) \dots \left(\frac{\beta}{2} - \ell + 1 \right) r^{\frac{\beta}{2} - \ell},$$

En particulier, pour $\ell = \lfloor \frac{\beta}{2} \rfloor$ on a

$$(-1)^{\lfloor \frac{\beta}{2} \rfloor} \psi^{(\lfloor \frac{\beta}{2} \rfloor)}(r) = \frac{\beta}{2} \left(\frac{\beta}{2} - 1 \right) \dots \left(\frac{\beta}{2} - \lfloor \frac{\beta}{2} \rfloor + 1 \right) r^{\frac{\beta}{2} - \lfloor \frac{\beta}{2} \rfloor} > 0,$$

V) La spline $K_{m,\ell,s}$ et fonctions radiales sous tension :

- i) Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $s \in \mathbb{R}$ tels que

$$-m + \frac{d}{2} < s < \frac{d}{2},$$

et pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, on définit l'espace $X^{m,\ell,s}$ par

$$X^{m,\ell,s} := \mathcal{D}_\ell^{-m}(\tilde{H}^s) = \{v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) / \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \quad m \leq |\alpha| \leq m + \ell, \quad \partial^\alpha v \in \tilde{H}^s\},$$

où l'espace \tilde{H}^s est défini comme dans le paragraphe 3.4.2.

Bouhamidi dans [27] a défini un semi-produit scalaire sur l'espace $X^{m,\ell,s}$ par

$$\forall u, v \in X^{m,\ell,s}, \quad \langle u|v \rangle_{m,\ell,s} = \sum_{r=0}^{\ell} \sum_{|\alpha|=m+r} \frac{(m+r)!}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^d} |2\pi\xi|^{2s} \widehat{\partial^\alpha u} \overline{\widehat{\partial^\alpha v}} d\xi.$$

L'espace $X^{m,\ell,s}$ muni de la semi-norme

$$|u|_{m,\ell,s} = \langle u|v \rangle_{m,\ell,s}^{1/2},$$

est un espace semi-Hilbertien [27]. Si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^d alors l'espace $X^{m,\ell,s} := \mathcal{D}_\ell^{-m}(\tilde{H}^s(\Omega))$ muni de la norme

$$\|u\|_{m,\ell,s} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx + |u|_{m,\ell,s}^2 \right)^{1/2},$$

est un espace de Hilbert dont la topologie est indépendante de Ω .

Pour $\ell = 0$, alors $X^{m,0,s} = X^{m,s}$ est exactement l'espace introduit par Duchon [61, 62]. Pour $-m + \frac{d}{2} < s < \frac{d}{2}$, on a les inclusions continues suivantes (c.f. [27])

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow X^{m,\ell,s} \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d).$$

L'opérateur différentiel $\Delta_{m,\ell,s}$ est défini par

$$\Delta_{m,\ell,s} u = e^{i\pi s} \Delta^s (\Delta_{m,\ell} u), \quad \forall u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),$$

avec

$$\Delta_{m,\ell} u = \sum_{m \leq |\alpha| \leq m+\ell} (-1)^{|\alpha|} \partial^{2\alpha} u.$$

L'espace $X^{m,\ell,s} := \mathcal{D}_\ell^{-m}(\tilde{H}^s)$ est le domaine de définition de l'opérateur différentiel $\Delta_{m,\ell,s}$. On a le résultat suivant,

Proposition 3.4.1. (c.f. Bouhamidi [27])

i) Pour tout élément u de $X^{m,\ell,s}$ et pour toute fonction φ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\langle u|\varphi \rangle_{m,\ell,s} = (\Delta_{m,\ell,s} u, \overline{\varphi}) = (u, \overline{\Delta_{m,\ell,s} \varphi}),$$

au sens des distributions.

ii) Si u est un élément de $X^{m,\ell,s}$ et si on a $\Delta_{m,\ell,s} u = 0$ au sens des distributions, alors u est un polynôme dans $\mathbb{P}_{m-1}(\mathbb{R}^d)$.

On dit que $\ker(\Delta_{m,\ell,s}) = \mathbb{P}_{m-1}(\mathbb{R}^d)$ est l'espace nul de $(X^{m,\ell,s}, |\cdot|_{m,\ell,s})$.

Démonstration. Pour la démonstration, on réfère à Bouhamidi [27]. \square

Une solution élémentaire de l'équation

$$\Delta_{m,\ell,s} u = \delta,$$

au sens des distributions est la (m, ℓ, s) -spline, notée $K_{m,\ell,s}$. Pour $\ell = 0$, la $(m, 0, s)$ -spline est exactement la (m, s) -spline de Duchan [61, 62].

Le noyau $K_{m,\ell,s}$ est une fonction conditionnellement définie positive [27]. On a

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i c_j K_{m,\ell,s}(a_i - a_j) \geq 0, \quad \forall c \in \mathbb{R}^N.$$

Cette fonction ouvre une fenêtre de grande importance dans le domaine d'interpolation.

- ii) Soient $\tau > 0$ un nombre réel positif et \mathbb{H} le sous espace vectoriel de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ défini par

$$\mathbb{H} = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : u' \text{ et } u'' \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

L'espace \mathbb{H} muni de la topologie associée au semi-produit scalaire

$$\langle u|v \rangle_{\mathbb{H}} = \int_{\mathbb{R}} u''(\xi)v''(\xi)d\xi + \tau^2 \int_{\mathbb{R}} u'(\xi) \cdot v'(\xi)d\xi,$$

est un espace semi-Hilbert dont la famille de semi-normes associées est donnée par $|u|_{\mathbb{H}} = \langle u|u \rangle_{\mathbb{H}}^{1/2}$. Le paramètre réel τ appelé *le coefficient de tension*. Soit \mathcal{D}_{τ} l'opérateur différentiel linéaire défini sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ par

$$\mathcal{D}_{\tau} = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \tau^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Les fonctions v de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathcal{D}_{\tau}v = \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \tau^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0,$$

sont polynômiales dans $\mathbb{P}_0(\mathbb{R})$ qui est l'espace nul de \mathcal{D}_{τ} , où $\mathbb{P}_0(\mathbb{R})$ est l'espace des polynômes constants c'est à dire que $\mathbb{P}_0(\mathbb{R})$ est isométriquement isomorphe à l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} .

Pour tout $u \in \mathbb{H}$, on a

$$\langle u|\psi \rangle_{\mathbb{H}} = \langle \mathcal{D}_{\tau}u|\psi \rangle = \langle u|\mathcal{D}_{\tau}\psi \rangle, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

La solution fondamentale Ψ_{τ} de l'équation

$$\mathcal{D}_{\tau}u = \delta, \tag{3.4.7}$$

au sens des distributions, est une distribution tempérée sur \mathbb{R} .

L'espace \mathbb{H} est le domaine de définition de l'opérateur \mathcal{D}_{τ} et $\text{Ker}(\mathcal{D}_{\tau}) = \mathbb{P}_0(\mathbb{R})$. Il est facile de vérifier que l'une des solutions élémentaires de l'équation (3.4.7) est

$$\Psi_{\tau}(x) = -\frac{1}{2\tau^3} \left(e^{-\tau|x|} + \tau|x| \right), \tag{3.4.8}$$

Cette fonction minimise la fonction coût

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|^2 dx + \tau^2 \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx.$$

Dans le cas multidimensionnelle, Bouhamidi et al. [22] introduisent la fonction radiale sous tension (RFT)

$$\Psi_{\tau}(\xi) = -\frac{1}{2\tau^3} (e^{-\tau\|\xi\|} + \tau\|\xi\|), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

La fonction d'une seule variable $\varphi_{\tau} : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$:

$$\varphi_{\tau}(\zeta) = -\frac{1}{2\tau^3} \left(e^{-\tau\sqrt{\zeta}} + \tau\sqrt{\zeta} \right), \quad \zeta \geq 0, \tag{3.4.9}$$

associée à Ψ_{τ} donnée par $\Psi_{\tau}(\xi) = \varphi_{\tau}(\|\xi\|^2)$ est complètement monotone. La fonction Ψ_{τ} est conditionnellement strictement définie positive d'ordre $m = 1$ sur \mathbb{R}^d pour tout entier $d \geq 1$ (c.f. [22]).

3.4.3 Interpolation par les fonctions à base radiale

Soient Ψ une fonction radiale, $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_N\} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble de points et

$$h = \sup_{x \in \overline{\Omega}} \inf_{a_i \in \mathcal{A}} \|x - a_i\|,$$

la distance de densité de \mathcal{A} dans le domaine Ω . La distance h dépend de \mathcal{A} et de Ω . La paramétrisation d'une fonction u par des noyaux revient à choisir un ensemble de points de contrôle \mathcal{A} et à définir une fonction approchée u_h à la fonction u . La fonction u_h est une combinaison linéaire dans une base formée par les noyaux $\Psi(\cdot - a_i)$ centrés en des points $a_i \in \mathcal{A}$,

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^N c_i \Psi(x - a_i). \quad (3.4.10)$$

Parfois cette approche est additionnée par une fonction polynomiale P , on écrit

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^N c_i \Psi(x - a_i) + P(x). \quad (3.4.11)$$

Nous pouvons faire une description pour cette interpolation selon les propriétés du noyaux choisi pour former la base de fonctions radiales

- a) Si la fonction radiale Ψ est strictement définie positive SDP, alors l'espace d'approximation est définie de la façon suivante

$$\mathbb{H}_{\mathcal{A}, \Psi} = \text{span}\{\Psi(\cdot - a_i) : i = 1, \dots, N\}. \quad (3.4.12)$$

Dans ce cas, la fonction radiale Ψ est d'ordre zéro donc la partie polynomiale dans l'expression (3.4.11) est nulle. La reconstruction par interpolation sur \mathcal{A} consiste à trouver une fonction de la forme (3.4.10) dans l'espace d'approximation donné par (3.4.12). La fonction u_h est dite une fonction à base radiale. Le problème est de déterminer les paramètres $c = (c_1, \dots, c_N)^T \in \mathbb{R}^N$ tels que

$$\sum_{i=1}^N c_i \Psi(a_j - a_i) = u(a_j), \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.4.13)$$

La reconstruction par interpolation sur \mathcal{A} conduit à la résolution du système linéaire

$$K_{\mathcal{A}, \Psi} c = b_{\mathcal{A}} \quad (3.4.14)$$

où $A_{\mathcal{A}, \Psi} = (\Psi(a_j - a_i))_{1 \leq i, j \leq N}$ est une matrice creuse et $b_{\mathcal{A}} = (u(a_1), \dots, u(a_N))^T$ est le vecteur du second membre. Comme la fonction Ψ est définie positive, alors la matrice $K_{\mathcal{A}, \Psi}$ est définie positive et inversible. Le système linéaire (3.4.14) admet donc une unique solution.

- b) Si la fonction radiale Ψ est conditionnellement définie positive CDP d'ordre m dans \mathbb{R}^d , alors l'espace d'approximation est défini de la façon suivante

$$\mathbb{H}_{\mathcal{A}, \Psi} = \text{span}\{\Psi(\cdot - a_i) : i = 1, \dots, N\} \oplus \mathbb{P}_{m-1}^d. \quad (3.4.15)$$

où \mathbb{P}_{m-1}^d est l'espace des polynômes dans \mathbb{R}^d de degré $\leq m-1$.

La fonction à base radiale d'interpolation ou d'approximation est donnée sous la forme

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^N c_i \Psi(x - a_i) + \sum_{i=1}^{d_m} \tilde{c}_i P_i(x), \quad (3.4.16)$$

où $d_m = \frac{(d+m-1)!}{(m-1)!d!}$ est la dimension de l'espace \mathbb{P}_{m-1}^d et $\{P_1, \dots, P_{d_m}\}$ est une base de \mathbb{P}_{m-1}^d .

Pour déterminer la fonction à base radiale u de (3.4.16), il faut calculer $N + d_m$ coefficients. Pour gérer cette situation, on impose la condition d'interpolation

$$u(a_j) = u_j, \quad j = 1, \dots, d_m,$$

de d_m données. Afin d'assurer l'existence et l'unicité de la solution u , on doit tenir compte des conditions d'orthogonalités suivantes

$$\sum_{i=1}^N c_i P_j(a_i) = 0, \quad j = 1, \dots, d_m.$$

On obtient un système linéaire de dimension $(N + d_m) \times (N + d_m)$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N c_i \Psi(a_j - a_i) + \sum_{i=1}^{d_m} \tilde{c}_i P_i(a_j) &= u_j, \quad j = 1, \dots, N \\ \sum_{i=1}^N c_i P_j(a_i) &= 0, \quad j = 1, \dots, d_m. \end{aligned}$$

L'ensemble \mathcal{A} doit contenir un sous ensemble ayant la propriété de \mathbb{P}_{m-1}^d -unisolvant suivante

Définition 3.4.5. Un ensemble E est dit \mathbb{P}_{m-1}^d -unisolvant si le polynôme nul est l'unique polynôme de \mathbb{P}_{m-1}^d qui s'annule sur E , c'est à dire que E vérifie la propriété suivante

$$[P \in \mathbb{P}_{m-1}^d \quad \text{et} \quad P(x) = 0, \quad \forall x \in E] \Rightarrow P \equiv 0.$$

On désigne $c = (c_1, \dots, c_N)^T$ et $\tilde{c} = (\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{d_m})^T$, $b_{\mathcal{A}} = (u(a_1), \dots, u(a_N))^T$, et

$$A_{\mathcal{A}, \Psi} = (\Psi(a_j - a_i))_{1 \leq i, j \leq N}, \quad Q = (P_i(a_j))_{\substack{1 \leq i \leq d_m \\ 1 \leq j \leq N}},$$

alors le système linéaire s'écrit

$$\begin{pmatrix} A_{\mathcal{A}, \Psi} & Q \\ Q^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ \tilde{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3.5 Reconstruction sans maillage d'un signal en fréquence

On considère la formulation variationnelle faible donnée dans la Section 2.3.2 du chapitre 2 par

$$\mathcal{A}_\omega(u_*(\cdot, \omega), v) = \mathcal{L}_\omega(v), \quad \forall v \in \widehat{H}_1, \quad (3.5.1)$$

où la forme sesquilinéaire $\mathcal{A}_\omega : \widehat{H}_1 \times \widehat{H}_1 \rightarrow \mathbb{C}$ et la forme semi-linéaire $\mathcal{L}_\omega : \widehat{H}_1 \rightarrow \mathbb{C}$, sont données respectivement par

$$\mathcal{A}_\omega(u, v) = \int_{\Omega} D(x) \nabla u(x) \overline{\nabla v(x)} dx + \int_{\Omega} q_\omega(x) u(x) \overline{v(x)} dx + 2 \int_{\partial\Omega} \gamma(\xi) u(\xi) \overline{v(\xi)} d\sigma(\xi) \quad (3.5.2)$$

et

$$\mathcal{L}_\omega(v) = 2 \int_{\partial\Omega} \gamma(\xi) G(\xi, \omega) \overline{v(\xi)} d\sigma(\xi) + \int_{\Omega} F(x, \omega) \overline{v(x)} dx, \quad (3.5.3)$$

pour tout $u, v \in \widehat{H}_1$, avec $d\sigma$ est la mesure d'aire sur l'ensemble $\partial\Omega$.

3.5.1 Approximation de Galerkin sans maillage

La méthode des éléments finis dépend d'un maillage du domaine Ω et prend l'espace de dimension finie \mathbb{V}_h comme un espace induit par la triangulation du domaine pour l'interpolation. Dans cette partie, nous voulons reconstruire un signal pour l'équation de diffusion non-stationnaire en utilisant une base de fonctions radiales à support compact [158, 39, 163] ou une base de fonctions radiales à support non-compact [22, 61, 76]. On sélectionne une fonction radiale $\Psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continument différentiable et un sous ensemble de points centres $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_N\} \subseteq \overline{\Omega}$ dispersés dans le domaine Ω . Soit δ un nombre réel strictement positif, on définit une fonction radiale Ψ_δ à échelle δ par

$$\Psi_\delta(x - a_i) = \varphi\left(\frac{\|x - a_i\|_2}{\delta}\right), \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.5.4)$$

On note par $\{P_1, \dots, P_{d_m}\}$ une base de l'espace \mathbb{P}_{m-1}^d et par la famille $(B_i(\cdot, \delta))_{1 \leq i \leq N + d_m}$ une base de paramètre δ donnée par

$$B_i(x, \delta) = \begin{cases} \Psi_\delta(x - a_i) & \text{pour } i = 1, \dots, N, \\ P_{i-N}(x) & \text{pour } i = N + 1, \dots, N + d_m. \end{cases}, \quad x \in \Omega.$$

Par défaut, si la fonction radiale $\Psi_\delta(\cdot - a_i)$ est strictement définie positive alors on prend tout simplement

$$B_i(x, \delta) = \Psi_\delta(x - a_i), \quad \text{pour tout } x \in \Omega \text{ et tout } i = 1, \dots, N.$$

On définit le sous espace d'interpolation \mathbb{V}_h de \widehat{H}_1 dont la dimension est $N + d_m$ par

$$\mathbb{V}_h = \text{span}\{B_i(\cdot, \delta) : 1 \leq i \leq N + d_m\}. \quad (3.5.5)$$

Pour tout x dans $\overline{\Omega}$, la solution approchée $u_h(., \omega) \in \mathbb{V}_h$ est une combinaison linéaire dans la base $(B_i(., \delta))$:

$$u_h(x, \omega) = \sum_{i=1}^{N+d_m} z_{h,i}(\omega) B_i(x, \delta) \quad (3.5.6)$$

satisfaisant les conditions d'orthogonalités

$$\sum_{i=1}^N z_{h,i}(\omega) P_j(a_i) = 0, \quad j = 1, \dots, d_m,$$

où pour tout $1 \leq i \leq N + d_m$, les fonctions $\omega \mapsto z_{h,i}(\omega)$, de variable est la fréquence $\omega \in \mathbb{R}$, sont à valeurs complexes.

En utilisant $v = B_j(., \delta)$ comme fonction test dans la formulation variationnelle faible (3.5.1), on obtient l'approximation de Galerkin donnée par

$$\sum_{i=1}^{N+d_m} z_{h,i}(\omega) A_{ij}(\omega) = b_{h,j}(\omega), \quad j = 1, \dots, N + d_m, \quad (3.5.7)$$

où $A_{ij}(\omega)$ sont les coefficients de la matrice $A(\omega)$ donnés par

$$A_{ij}(\omega) = D_{ij} + U_{ij} + 2Q_{ij}, \quad (3.5.8)$$

pour tout $1 \leq i, j \leq N$, on a

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \int_{\Omega} D(x) \nabla \Psi_{\delta}(x - a_i) \nabla \Psi_{\delta}(x - a_j) dx, \\ U_{ij} &= \int_{\Omega} q_{\omega}(x) \Psi_{\delta}(x - a_i) \Psi_{\delta}(x - a_j) dx, \\ Q_{ij} &= \int_{\partial\Omega} \gamma(\xi) \Psi_{\delta}(\xi - a_i) \Psi_{\delta}(\xi - a_j) d\sigma(\xi), \end{aligned}$$

pour tout $1 + N \leq i \leq N + d_m$ et $1 \leq j \leq N$, on a

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \int_{\Omega} D(x) \nabla P_{i-N}(x) \nabla \Psi_{\delta}(x - a_j) dx, \\ U_{ij} &= \int_{\Omega} q_{\omega}(x) P_{i-N}(x) \Psi_{\delta}(x - a_j) dx, \\ Q_{ij} &= \int_{\partial\Omega} \gamma(\xi) P_{i-N}(\xi) \Psi_{\delta}(\xi - a_j) d\sigma(\xi), \end{aligned}$$

pour tout $1 \leq i \leq N$ et $N + 1 \leq j \leq N + d_m$, on a

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \int_{\Omega} D(x) \nabla \Psi_{\delta}(x - a_i) \nabla P_{j-N}(x) dx, \\ U_{ij} &= \int_{\Omega} q_{\omega}(x) \Psi_{\delta}(x - a_i) P_{j-N}(x) dx, \\ Q_{ij} &= \int_{\partial\Omega} \gamma(\xi) \Psi_{\delta}(\xi - a_i) P_{j-N}(\xi) d\sigma(\xi), \end{aligned}$$

et pour tout $N + 1 \leq i \leq N + d_m$ et $N + 1 \leq j \leq N + d_m$, on a

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \int_{\Omega} D(x) \nabla P_{i-N}(x) \nabla P_{j-N}(x) dx, \\ U_{ij} &= \int_{\Omega} q_{\omega}(x) P_{i-N}(x) P_{j-N}(x) dx, \\ Q_{ij} &= \int_{\partial\Omega} \gamma(\xi) P_{i-N}(\xi) P_{j-N}(\xi) d\sigma(\xi), \end{aligned}$$

et $b_{h,j}(\omega)$ sont les coefficients du vecteur $b_h(\omega)$ donné par

$$b_{h,j}(\omega) = 2G_j(\omega) + F_j(\omega), \quad (3.5.9)$$

où $G_j(\omega)$, $F_j(\omega)$ sont donnés par

$$G_j(\omega) = \int_{\partial\Omega} \gamma(\xi) G(\xi, \omega) \Psi_{\delta}(\xi - a_j) d\sigma(\xi), \quad F_j(\omega) = \int_{\Omega} F(x, \omega) \Psi_{\delta}(x - a_j) dx, \quad j = 1, \dots, N,$$

$$G_j(\omega) = \int_{\partial\Omega} \gamma(\xi) G(\xi, \omega) P_{j-N}(\xi) d\sigma(\xi), \quad F_j(\omega) = \int_{\Omega} F(x, \omega) P_{j-N}(x) dx, \quad j = N + 1, \dots, N + d_m.$$

Le calcul des coefficients de la matrice (3.5.8) et le calcul des coefficients du vecteur (3.5.9) se font respectivement par les formules de cubature que nous expliquons brièvement ci-après.

3.5.2 Formules de cubature et calculs numériques

Nous nous sommes emmenés à calculer les intégrales qui figurent dans les expressions de (3.5.8) et (3.5.9). Pour cette raison, nous procédons par la formule de cubature dont nous allons parler brièvement de son procédé.

Formules de cubature

Il s'agit d'une formule d'intégration numérique, dite formule de cubature permettant de calculer l'intégrale d'une fonction sur un domaine de \mathbb{R}^d . Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^2 , alors il existe un rectangle $\mathbf{R} = [a, b] \times [c, d]$ tel que $\Omega \subseteq \mathbf{R}$. Soit ψ une fonction intégrable sur Ω . La primitive de la fonction ψ dans la direction x est

$$\mathcal{F}(x, y) = \int_{x_0}^x \psi(\xi, y) d\xi,$$

pour un abscisse $x_0 \in [a, b]$ fixé.

D'après la formule intégrale de Green-Gauss on a

$$\int_{\Omega} \psi(x, y) dx dy = \oint_{\partial\Omega} \mathcal{F}(x, y) dy.$$

Il s'agit d'une intégration numérique d'une intégrale de type (c.f.[149, 150])

$$\int_{\Omega} \psi(x, y) dx dy \approx \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \psi(x_i, y_i).$$

Si ψ est un polynôme de degré $2\ell - 1$ alors on a une formule de cubature exacte, c'est à dire

$$\int_{\Omega} \psi(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \psi(x_i, y_i).$$

Les calculs numériques

Soit Ψ une fonction radiale satisfaisant la définition 3.4.2 associée à la fonction φ comme dans (3.5.4), et soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné. Les coefficients $A_{ij}(\omega)$ de la matrice de rigidité $A(\omega)$ sont calculés comme suit :

pour tout $1 \leq i, j \leq N$, on a

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \frac{1}{\delta^2} \int_{\Omega} D(x) \varphi' \left(\frac{\|x - a_i\|_2}{\delta} \right) \varphi' \left(\frac{\|x - a_j\|_2}{\delta} \right) \frac{(x - a_i)^T (x - a_j)}{\|x - a_i\|_2 \|x - a_j\|_2} dx \\ U_{ij} &= \int_{\Omega} \left(\mu_a(x) + i \frac{\omega}{c_0} \nu(x) \right) \varphi \left(\frac{\|x - a_i\|_2}{\delta} \right) \varphi \left(\frac{\|x - a_j\|_2}{\delta} \right) dx, \\ Q_{ij} &= \int_{\partial\Omega} \gamma(\xi) \varphi \left(\frac{\|\xi - a_i\|_2}{\delta} \right) \varphi \left(\frac{\|\xi - a_j\|_2}{\delta} \right) d\sigma(\xi), \end{aligned}$$

pour tout $1 + N \leq i \leq d_m + N$ et $1 \leq j \leq d_m$, on a

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \frac{1}{\delta} \int_{\Omega} D(x) \varphi' \left(\frac{\|x - a_j\|_2}{\delta} \right) \frac{\nabla P_{i-N}(x)^T (x - a_j)}{\|x - a_j\|_2} dx \\ U_{ij} &= \int_{\Omega} q_{\omega}(x) P_{i-N}(x) \varphi \left(\frac{\|x - a_j\|_2}{\delta} \right) dx \\ Q_{ij} &= \int_{\partial\Omega} \gamma(\xi) P_{i-N}(\xi) \varphi \left(\frac{\|\xi - a_j\|_2}{\delta} \right) d\sigma(\xi), \end{aligned}$$

pour tout $1 \leq i \leq N$ et $1 + N \leq j \leq d_m + N$, on a

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \frac{1}{\delta} \int_{\Omega} D(x) \varphi' \left(\frac{\|x - a_i\|_2}{\delta} \right) \frac{\nabla P_{j-N}(x)^T (x - a_i)}{\|x - a_i\|_2} dx \\ U_{ij} &= \int_{\Omega} \left(\mu_a(x) + i \frac{\omega}{c_0} \nu(x) \right) \varphi \left(\frac{\|x - a_i\|_2}{\delta} \right) P_{j-N}(x) dx, \\ Q_{ij} &= \int_{\partial\Omega} \gamma(\xi) \varphi \left(\frac{\|\xi - a_i\|_2}{\delta} \right) P_{j-N}(\xi) d\sigma(\xi), \end{aligned}$$

et pour tout $1 + N \leq i \leq N + d_m$ et $1 + N \leq j \leq N + d_m$, on a

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \int_{\Omega} D(x) \nabla P_{i-N}(x) \nabla P_{j-N}(x) dx, \\ U_{ij} &= \int_{\Omega} q_{\omega}(x) P_{i-N}(x) P_{j-N}(x) dx, \\ Q_{ij} &= \int_{\partial\Omega} \gamma(\xi) P_{i-N}(\xi) P_{j-N}(\xi) d\sigma(\xi). \end{aligned}$$

Les termes de la source sont calculés pour $j = 1, \dots, N$ par

$$F_j(\omega) = \int_{\Omega} F(x, \omega) \varphi \left(\frac{\|x - a_j\|_2}{\delta} \right) dx, \quad G_j(\omega) = \int_{\partial\Omega} \gamma(\xi) G(\xi, \omega) \varphi \left(\frac{\|\xi - a_j\|_2}{\delta} \right) d\sigma(\xi),$$

et pour $j = 1 + N, \dots, N + d_m$,

$$F_j(\omega) = \int_{\Omega} F(x, \omega) P_{j-N}(x) dx, \quad G_j(\omega) = \int_{\partial\Omega} \gamma(\xi) G(\xi, \omega) P_{j-N}(\xi) d\sigma(\xi).$$

On note par $z_h(\omega) = (z_{h,1}(\omega), \dots, z_{h,(N+d_m)}(\omega))^T$ le vecteur de paramètres inconnus qui apparaissent dans l'expression (3.5.6) de la solution approchée $u_h(\cdot, \omega)$ et $b_h(\omega) = (b_{h,1}(\omega), \dots, b_{h,(N+d_m)}(\omega))^T$ le vecteur source. Alors on obtient le système linéaire suivant

$$A(\omega)z_h(\omega) = b_h(\omega). \quad (3.5.10)$$

Comme dans le chapitre précédent, pour une fréquence ω donnée, on résout le système (3.5.10). On obtient ainsi l'approximation $u_h(x, \omega)$ donnée par l'expression (3.5.6).

3.6 Reconstruction d'un signal dans le temps

Dans cette section, une solution approchée ϕ_h de la solution exacte ϕ_* est obtenue en utilisant la transformée de Fourier inverse de u_h . De plus, on veut utiliser la formulation de quadrature de Gauss-Hermite pour calculer numériquement la transformée de Fourier inverse de u_h . En utilisant le théorème 2.3.2, pour un temps fixé t de $[t_0, t_0 + T]$, le problème (2.3.1)-(2.3.2) admet une solution unique $\phi_*(\cdot, t)$ comme la transformée de Fourier inverse de l'unique solution $u_*(\cdot, \omega)$ du problème de diffusion (2.3.4)-(2.3.5). On a

$$\phi_*(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_*(x, \omega) e^{it\omega} d\omega, \quad (3.6.1)$$

pour tout $x \in \Omega$.

Une solution approchée $\phi_{*h}(x, t)$ du problème de diffusion (2.3.1)-(2.3.2), en utilisant la méthode sans maillage, est obtenue par la transformée de Fourier inverse selon l'expression suivante

$$\phi_h(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_{*h}(x, \omega) e^{it\omega} d\omega. \quad (3.6.2)$$

La solution approchée $\phi_h(\cdot, t)$ est un élément de l'espace \mathbb{V}_h , et est donnée par

$$\phi_h(x, t) = \sum_{i=1}^{N+d_m} V_{h,i}(t) B_i(x, \delta), \quad \forall x \in \Omega, \quad (3.6.3)$$

où pour tout $1 \leq i \leq N + d_m$, la fonction

$$V_{h,i}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z_{h,i}(\omega) e^{it\omega} d\omega,$$

est la transformée de Fourier inverse de la fonction $z_{h,i}$ donnée dans (3.5.6).

Soit

$$\psi_i(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z_{h,i}(\omega) e^{(\omega^2 + it\omega)},$$

alors

$$V_{h,i}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_i(\omega, t) e^{-\omega^2} d\omega. \quad (3.6.4)$$

Pour tout $1 \leq i \leq N + d_m$, la fonction $t \mapsto V_{h,i}(t)$ est définie sur $[t_0, t_0 + T]$ à valeurs dans \mathbb{R} . Pour calculer l'intégrale donnée par l'expression (3.6.4), on utilise la formule de quadrature de Gauss-Hermite

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_i(\omega, t) e^{-\omega^2} d\omega \simeq \sum_{\ell=0}^m \alpha_\ell \psi_i(\omega_\ell, t), \quad (3.6.5)$$

où les nœuds $(\omega_\ell)_{0 \leq \ell \leq m}$ sont les racines du polynôme d'Hermite H_{m+1} de degré $m+1$, et les coefficients poids $(\alpha_\ell)_{0 \leq \ell \leq m}$ sont obtenus comme dans le chapitre précédent. D'où, les coefficients $V_{h,i}(t)$ donnés par (3.6.4) sont approchés selon la formule suivante

$$V_{h,i}(t) \simeq \sum_{\ell=0}^m \alpha_\ell \psi_i(\omega_\ell, t). \quad (3.6.6)$$

Finalement, d'après (3.6.3), on obtient

$$\phi_{*h}(x, t) \simeq \sum_{i=1}^{N+d_m} \left(\sum_{\ell=0}^m \alpha_\ell \psi_i(\omega_\ell, t) \right) B_i(x, \delta). \quad (3.6.7)$$

3.7 Choix de points pour l'approximation sans maillage

Les points de Halton

La construction des points de Halton est obtenue à partir de la suite de Van der Corput. Soit p un nombre premier, tout entier naturel n s'écrit d'une façon unique dans la base de p sous la forme

$$n = \sum_{i=0}^{\ell} n_i p^i,$$

où les entiers naturels positifs n_i sont tels que $0 \leq n_i < p$, pour $0 \leq i \leq \ell$, et $\ell \in \mathbb{N}$. On considère la fonction $h_p : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1)$ définie par

$$h_p(n) = \sum_{i=0}^{\ell} \frac{n_i}{p^{i+1}}.$$

La suite de Van der Corput est $(h_p(n))_{n \in \mathbb{N}}$. Pour définir N points de Halton dans un espace de dimension d , on choisit d nombres entiers naturels premiers distincts $p_1 < \dots < p_d$ et on utilise la suite de Van der Corput correspondante à chacun des nombres premiers p_1, \dots, p_d , et $X_n = (h_{p_1}(n), \dots, h_{p_d}(n))$ pour $n = 1, \dots, N$. Si on note $p = (p_1, \dots, p_d)$ et l'ensemble $H_{d,p,N} \subset \mathbb{R}^d$ donné par

$$H_{d,p,N} = \{X_n = (h_{p_1}(n), \dots, h_{p_d}(n)) : n = 1, \dots, N\},$$

alors on a $H_{d,p,N} \subset H_{d,p,N+1}$, les ensembles de points de Halton sont emboîtés.

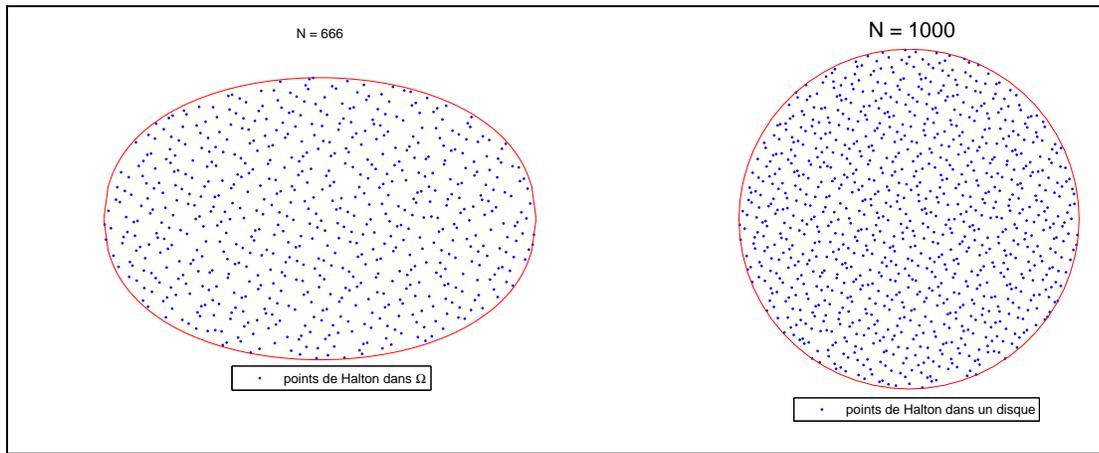


FIGURE 3.2 – La représentation de la distribution de points $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_N\}$ dans des domaines rectangulaires selon la sélection de Halton.

Les points concentriques dans un disque

On suppose que le domaine Ω est une boule de \mathbb{R}^d . Soient Ω et Q deux sous ensembles de \mathbb{R}^d , et soit

$$\chi : Q \longrightarrow \Omega$$

une application surjective et $(S_n)_n$ une suite de sous ensembles discrets de Q . Les points admissibles de Ω sont dans $A_n = \chi(S_n)$ où A_n est une suite de sous ensembles. Pour $d = 2$, on considère $Q = [0, R] \times [0, 2\pi[$ et $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \leq R\} = D(\mathcal{O}, R)$ où $D(\mathcal{O}, R)$ est le disque de centre \mathcal{O} et de rayon R . Une géométrie admissible de la dispersion de points dans le disque est immédiatement obtenue par un travail avec les coordonnées polaires, c'est à dire par considération de l'application

$$\begin{aligned} \chi : [0, R] \times [0, 2\pi[&\longrightarrow \Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \leq R\} \\ (r, \theta) &\longmapsto \chi(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)). \end{aligned}$$

L'ensemble de points de $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_N\}$ sont représentés dans un domaine étoilé par la suite de coordonnées polaires $(r_i, \theta_j)_{\substack{1 \leq i \leq n+1 \\ 1 \leq j \leq 2n+1}}$ définie par les deux propriétés suivantes

- i) $r_i = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} \cos\left(\frac{i\pi}{n}\right)$, $i = 1, \dots, n+1$,
- ii) $\theta_j = \frac{2j\pi}{2n+1}$, $j = 1, \dots, 2n+1$.

La figure suivante illustre un exemple de points \mathcal{A} distribués de façon concentrique dans un domaine Ω

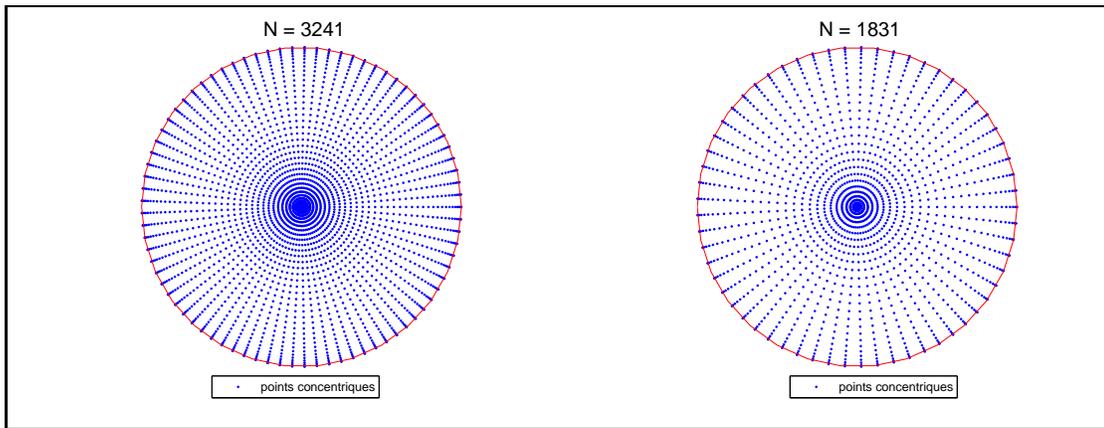


FIGURE 3.3 – Pour un rayon $R = 3$, la distribution concentrique de points dispersifs de $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_N\} \subset D(\mathcal{O}, 3)$ se fait respectivement en haut à gauche et en haut à droite avec des rotations d'angles $\theta_g = \frac{2\pi}{61}$ et $\theta_d = \frac{2\pi}{81}$. $N \in \mathbb{N}$ représente le nombre de points à l'intérieur du disque.

Nuage de points distribués de façon aléatoire

Dans ce sous paragraphe, nous traitons le problème de reconstruction d'un signal dans un domaine Ω à partir d'une distribution aléatoire d'un nuage de points $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_N\} \subset \Omega$. La figure suivante illustre un exemple d'un domaine Ω et le nuage de points \mathcal{A} distribués de façon aléatoire.

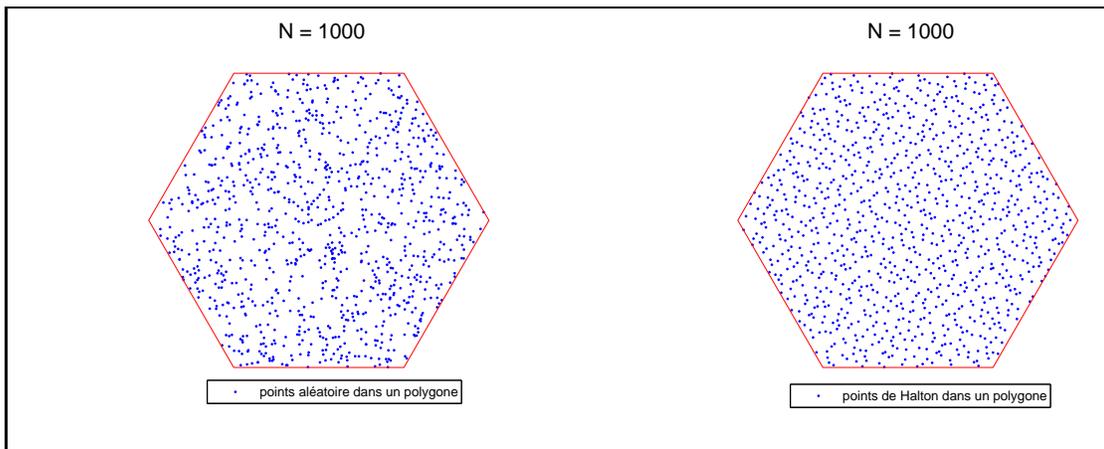


FIGURE 3.4 – Dans un polygone régulier de six côtés : à gauche on a une distribution de points de $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_N\}$ selon une sélection aléatoire et à droite, on a la distribution de points de \mathcal{A} selon la sélection de Halton. $N \in \mathbb{N}$ est le nombre de points à l'intérieur du polygone Ω .

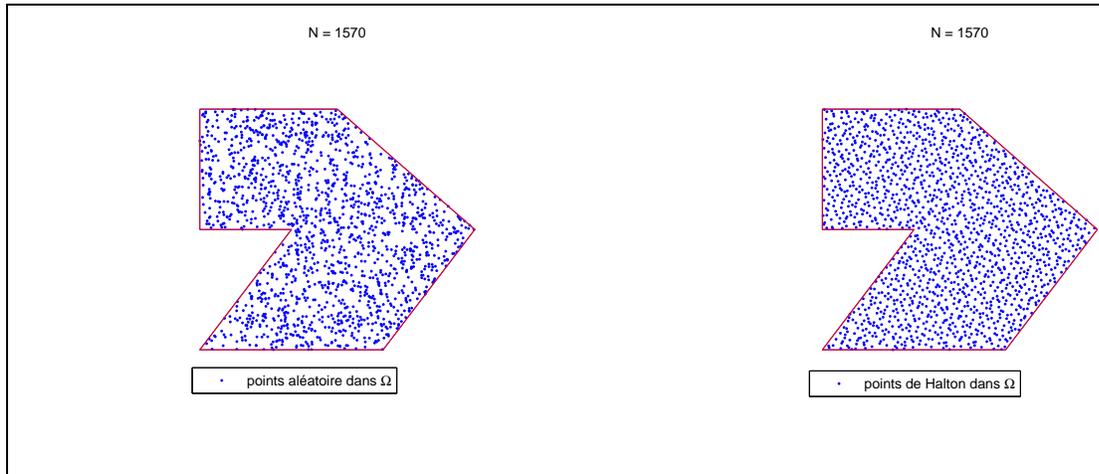


FIGURE 3.5 – A gauche on a une distribution aléatoire de points dispersifs de $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_N\}$ par contre à droite, on a une distribution des même points selon l'algorithme de Halton. $N \in \mathbb{N}$ est le nombre de points à l'intérieur d'un polygone Ω non régulier.

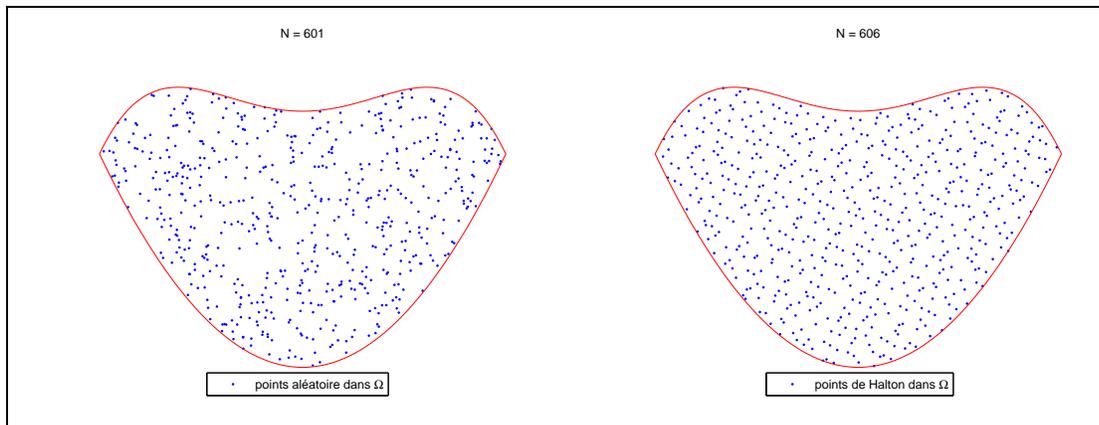


FIGURE 3.6 – A gauche, on a une distribution de points de $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_N\}$ selon une sélection aléatoire et à droite, on représente la distribution de points de \mathcal{A} selon la sélection de Halton. $N \in \mathbb{N}$ est le nombre de points à l'intérieur du domaine Ω .

Chapitre 4

Problème inverse pour l'équation de diffusion

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la description d'un problème inverse issu du problème de diffusion. L'objectif du problème est de reconstruire les paramètres optiques : le coefficient d'absorption μ_a , le coefficient de diffusion D et l'indice de réfraction ν , à partir des mesures du flux optique reçu aux bords du domaine. Les quantités du signal sont mesurées aux bords en utilisant la densité solution exacte (solution dans le milieu sain) et la densité solution approchée (solution dans le milieu contaminé) du problème de diffusion direct et les conditions non homogènes de Robin aux bords. La méthode variationnelle prouve que le problème de diffusion direct possède une unique solution pour des propriétés optiques et des fonctions sources données. Ici, on s'intéresse à la reconstruction numérique des propriétés optiques du domaine en utilisant des méthodes numériques basées sur la discrétisation dans la base des B-splines et dans la base de fonctions radiales. Le problème inverse est un problème de moindres carrés mal-posé ce qui nécessite une régularisation par l'addition d'un terme quadratique de Tikhonov. On suppose que les mesures de la densité du flux optique sortant aux bords sont disponibles. Nous commençons par une discussion générale du problème inverse, qui implique des cartographies entre "le modèle en espace" et "l'espace de données". La stratégie usuelle doit commencer par une solution évaluée et à résoudre le problème direct pour obtenir les données prévues.

Soient $(\mathcal{E}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{E}_1})$ et $(\mathcal{E}_2, \|\cdot\|_{\mathcal{E}_2})$ deux espaces de Banach abstraits et U et V sont respectivement des sous ensembles ouverts de \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 . On note par $(\mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)})$ l'espace de Banach des opérateurs linéaires de \mathcal{E}_1 dans \mathcal{E}_2 .

- a) **Différentielle de Fréchet** : Soient $\Lambda : U \rightarrow \mathcal{E}_2$ un opérateur et $x \in U$. On dit que Λ est différentiable au point x au sens de Fréchet s'il existe $A \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ telle que

$$\lim_{\|h\|_{\mathcal{E}_1} \rightarrow 0} \frac{\|\Lambda(x+h) - \Lambda(x) - Ah\|_{\mathcal{E}_2}}{\|h\|_{\mathcal{E}_1}} = 0.$$

L'application linéaire A est déterminée de façon unique et elle est dite la différentielle de Fréchet de Λ au point x , on la note par $d\Lambda(x)$. Si Λ est différentiable en tout point $x \in U$, on dit que Λ est différentiable sur U .

Exemple. Pour $\mathcal{E}_1 = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{E}_2 = \mathbb{C}$ et $\Lambda \in C^1(U, \mathcal{E}_2)$, $x = (x_1, \dots, x_d)$, $h = (h_1, \dots, h_d)$ avec $x_i, h_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, d$, et

$$\Lambda(x+h) - \Lambda(x) - \sum_{i=1}^d \frac{\partial \Lambda(x)}{\partial x_i} h_i = o(\|h\|^2),$$

alors Λ est différentiable sur U et

$$d\Lambda(x)h = \nabla \Lambda(x) \cdot h.$$

- b) **La dérivée de Fréchet :** Soit $\Lambda : U \rightarrow \mathcal{E}_2$ une application différentiable sur U au sens de Fréchet. L'application $\Lambda' : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$, définie par $\Lambda'(x) = d\Lambda(x)$, est la dérivée de Fréchet de Λ . La différentielle $\Lambda'(x) = d\Lambda(x)$ de Λ en x est la dérivée de Fréchet de Λ en x .

4.2 Problèmes inverses de transport

Le problème inverse pour les équations de transports de type (1.2.10)-(1.2.11)-(1.2.12) a été étudié ces dernières années par de nombreux auteurs, citons entre autre, M. Choulli et P. Stefanov [48], P. Stefanov [151], M. Mokhtar-Kharroubi et A. Zeghal [112], E.W. Larsen [98, 99], N.J. McCormick [108, 109], A.I. Prilepko et N.P. Volkov [123] et V. Isakov [85]. On rappelle que l'opérateur \mathbb{T} est défini dans le chapitre 1 par

$$\mathbb{T}\Phi = v \cdot \nabla \Phi(x, v, t) + \sigma_a(x, v)\Phi(x, v, t) - \int_V \Phi(x, v', t)\eta(x, v', v)dv',$$

On considère σ_p le taux de production définit sur $\mathbb{R}^d \times V$ par

$$\sigma_p(x, v) = \int_V \eta(x, v', v)dv', \quad \forall (x, v) \in \mathbb{R}^d \times V.$$

Dans [131], M. Reed et B. Simon ont donné la définition d'un couple admissible. Le couple de fonctions (σ_a, η) est dit admissible si on a les conditions suivantes (c.f. [131])

- i) $\sigma_a \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times V)$ et $\sigma_a(x, v) \geq 0$, $\forall (x, v) \in \mathbb{R}^d \times V$,
- ii) $0 \leq \eta(x, v', \cdot) \in L^1(V)$ pour p. p. $(x, v') \in \mathbb{R}^d \times V$ et $\sigma_p \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times V)$.
- iii) $0 \leq \eta(x, \cdot, v) \in L^1(V)$ pour p. p. $(x, v) \in \mathbb{R}^d \times V$ et $\sigma_p \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times V)$, et que les fonctions σ_a et η se prolongent par des fonctions nulles pour $x \in \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}$.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ un ouvert borné avec $\partial\Omega$ est de classe C^1 . On considère les ensembles $\tilde{\Gamma}_+$ et $\tilde{\Gamma}_-$ définis respectivement par

$$\tilde{\Gamma}_+ = \left\{ (\xi, v) \in \partial\Omega \times V : n(\xi)^T v > 0 \right\},$$

$$\tilde{\Gamma}_- = \left\{ (\xi, v) \in \partial\Omega \times V : n(\xi)^T v < 0 \right\}.$$

On munit les deux ensembles $\tilde{\Gamma}_-$ et $\tilde{\Gamma}_+$ par la mesure de Lebesgue $d\xi = |n(x)^T v| d\sigma(x) dv$, où $d\sigma$ est la mesure de surface sur $\partial\Omega$. Le problème de Cauchy pour les équations linéaires de transport est de trouver la densité des particules $(x, v, t) \mapsto \Phi(x, v, t)$ solution de l'équation de l'évolution

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, v, t) - \mathbb{T}\Phi(x, v, t) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times V \times \mathbb{R} \quad (4.2.1)$$

avec la condition initiale suivante

$$\Phi(x, v, t) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times V \times]-\infty, 0], \quad (4.2.2)$$

et la donnée aux bords

$$\Phi(x, v, t) = \Phi_\delta(x, v, t) \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}_- \times \mathbb{R}, \quad (4.2.3)$$

avec $\Phi_\delta \in L^1_c(\mathbb{R}; L^1(\tilde{\Gamma}_-, d\xi))$ où $L^1_c(\mathbb{R}; L^1(\tilde{\Gamma}_-, d\xi))$ est l'espace de fonctions à support compact dans \mathbb{R} et à valeurs dans $L^1(\tilde{\Gamma}_-, d\xi)$. Le problème direct (4.2.1)-(4.2.2)-(4.2.3) admet une unique solution $\Phi \in C(\mathbb{R}, L^1(\tilde{\Gamma}_-, d\xi))$. Dans ce cas, on peut définir un opérateur \mathcal{A} dit l'opérateur d'Albedo donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : L^1_c(\mathbb{R}; L^1(\tilde{\Gamma}_-, d\xi)) &\longrightarrow L^1_{loc}(\mathbb{R}; L^1(\tilde{\Gamma}_+, d\xi)) \\ \Phi_\delta &\longmapsto \mathcal{A}\Phi_\delta := \Phi|_{\tilde{\Gamma}_+ \times \mathbb{R}}. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

L'opérateur d'Albedo \mathcal{A} représente un observateur mesurant le flux lumineux aux bords du domaine. Le problème inverse est de déterminer le couple (σ_a, η) à partir des mesures recueillies par l'opérateur d'Albedo \mathcal{A} . Il est naturel que l'opérateur \mathcal{A} dépende de $\mathbf{q} = (\sigma_a, \eta)$ et on écrit $\mathcal{A} := \mathcal{A}_{\mathbf{q}}$.

Pour notre travail, on procède par l'approximation de diffusion faite dans le chapitre 1. Le problème inverse que nous allons résoudre dans ce chapitre est déterminé par un opérateur de mesures de flux aux bords dépendant d'une façon non linéaire des coefficients de la diffusion, de l'absorption et l'indice de réfraction.

4.3 L'opérateur de mesures au bord

On introduit l'espace \mathcal{U} des fonctions Φ de $L^1(\Omega \times \mathbb{S}^{d-1} \times [t_0, t_0 + T])$ satisfaisant les conditions (1.3.3)-(1.3.4) tels que

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + s \cdot \nabla \Phi \in L^1(\Omega \times \mathbb{S}^{d-1} \times [t_0, t_0 + T]).$$

On note par $\|\cdot\|_1$ la norme de l'espace $L^1(\Omega \times \mathbb{S}^{d-1} \times [t_0, t_0 + T])$. L'espace des fonctions \mathcal{U} muni de la norme

$$\|\Phi\|_{\mathcal{U}} = \|\Phi\|_1 + \left\| \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + s \cdot \nabla \Phi \right\|_1,$$

est un espace de Banach. On définit opérateur de mesures \mathcal{M} ,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : \mathcal{U} &\longrightarrow L^1(\partial\Omega \times [t_0, t_0 + T]) \\ \Phi &\longmapsto \Psi := \mathcal{M}\Phi, \end{aligned}$$

donné par

$$(\mathcal{M}\Phi)(\xi, t) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbf{n}(\xi)^T \mathbf{s} \Phi(\xi, \mathbf{s}, t) ds, \quad (4.3.1)$$

pour tout $(\xi, t) \in \Omega \times [t_0, t_0 + T]$. L'opérateur \mathcal{M} est l'application linéaire qui permet de regrouper les mesures de signaux lumineux reçus aux bords du domaine. L'application linéaire \mathcal{M} décrit des mesures typiquement utilisées en tomographie optique, nous référons à [90] pour plus de détails concernant cet opérateur de mesures.

Proposition 4.3.1. *Pour tout élément (ξ, t) de $\partial\Omega \times [t_0, t_0 + T]$, on a*

- a) \mathcal{M} est un opérateur linéaire continu.
- b) $(\mathcal{M}\Phi)(\xi, t) = \mathbf{n}(\xi)^T \phi^{[1]}(\xi, t)$.
- c) L'approximation $\mathcal{M}\Phi(\xi, t) = -D(\xi)\mathbf{n}(\xi)^T \nabla \phi(\xi, t) = -D(\xi) \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}(\xi, t)$.
- d) Si $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}(\xi, \cdot) \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{\mathcal{M}\Phi}(\xi, \omega) = \mathcal{M}\widehat{\Phi}(\xi, \omega)$, pour toute fréquence $\omega \in \mathbb{R}$.
- e) $u^{[1]}(x, \omega) = -D(x)\nabla u(x, \omega)$ pour toute fréquence $\omega \in \mathbb{R}$, où $u^{[1]} = \widehat{\phi}^{[1]}$ et $u = \widehat{\phi}$.

Démonstration. a) Pour une démonstration similaire nous référons à [115].

b) En utilisant la loi du flux courant (1.4.4), on a

$$\mathbf{n}(\xi)^T \phi^{[1]}(\xi, t) = \mathbf{n}(\xi)^T \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbf{s} \Phi(\xi, \mathbf{s}, t) ds = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbf{n}(\xi)^T \mathbf{s} \Phi(\xi, \mathbf{s}, t) ds = \mathcal{M}\Phi(\xi, t),$$

puisque le vecteur normal $\mathbf{n}(\xi)$ ne dépend pas de \mathbf{s} .

c) En utilisant le résultat de la proposition (1.4.1), on a $\phi^{[1]}(\xi, t) = -D(\xi)\nabla \phi(\xi, t)$ et d'après la question b) on obtient

$$\mathcal{M}\Phi(\xi, t) = -D(\xi)\mathbf{n}(\xi)^T \nabla \phi(\xi, t).$$

d) Immédiate, en utilisant la transformée de Fourier.

e) Immédiate, en utilisant la transformée de Fourier au moment d'ordre 1 obtenu en (1.4.7).

□

4.4 Problème de diffusion direct

Dans un premier temps, on présente le problème de diffusion direct. Ce problème de diffusion en une dimension de l'espace a été l'objet d'étude dans notre article [6, 5, 4] qui a fait les résultats du chapitre 2.

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(D(x) \frac{\partial u(x, \omega)}{\partial x} \right) + \left(\mu_a(x) + \frac{i\omega}{c_0} \nu(x) \right) u(x, \omega) = F(x, \omega), \quad (4.4.1)$$

avec les conditions non homogènes de Robin aux bords

$$\begin{aligned} u(a, \omega) - \frac{\beta_a}{2} D(a) \frac{\partial u}{\partial x}(a, \omega) &= G_a(\omega), \\ u(b, \omega) + \frac{\beta_b}{2} D(b) \frac{\partial u}{\partial x}(b, \omega) &= G_b(\omega). \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

On suppose que les fonctions D , μ_a et ν sont dans l'espace $L^\infty([a, b], \mathbb{R})$ et que les fonctions D et μ_a possèdent une borne inférieure α strictement positive :

$$D(x) \geq \alpha > 0, \quad \mu_a(x) \geq \alpha > 0, \quad \nu(x) > 0, \quad \text{p.p. sur } [a, b]. \quad (4.4.3)$$

4.5 Problème inverse en dimension un

On veut étudier un problème inverse issu de l'équation de diffusion. Celui-ci consiste à déterminer l'approximation des paramètres optiques à partir des mesures aux bords du domaine de la solution exacte (solution dans un milieu sain) et de la solution numérique (solution dans un milieu contaminé) du problème de diffusion direct (4.4.1)-(4.4.2). Pour des fonctions sources données $f(\cdot, t)$, $g_a(t)$ et $g_b(t)$, on note par $\phi[s]$ la solution du problème (2.2.1)-(2.2.2) correspondre aux paramètres optiques $s = (\nu, D, \mu_a)$, où ν est l'indice de réfraction, D est le coefficient de diffusion et μ_a est le coefficient d'absorption. On veut procéder par une méthode d'approximation numérique pour calculer les paramètres $s = (\nu, D, \mu_a)$ en utilisant les valeurs du signal reçu aux bords du domaine.

Soit \mathbb{B} le sous espace des fonctions $Y = (\varphi, r_a, r_b)$ de $H_1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions suivantes

$$\begin{aligned} \varphi(a) - \frac{\beta_a}{2} D(a) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a) &= r_a, \\ \varphi(b) + \frac{\beta_b}{2} D(b) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(b) &= r_b. \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

Le sous espace \mathbb{B} est équipé du produit scalaire et d'une norme associée, induite par l'espace de Hilbert $H_1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Pour $Y = (\varphi, r_a, r_b)$ dans \mathbb{B} , la norme de Y dans l'espace \mathbb{B} est donnée par

$$\|Y\|_{\mathbb{B}} = (\|\varphi\|_{H_1}^2 + |r_a|^2 + |r_b|^2)^{1/2}.$$

Soit $\hat{\mathbb{B}}$ le sous espace vectoriel des fonctions $\hat{Y} = (v, z_a, z_b)$ dans $\hat{\mathbb{B}}$ satisfaisant les conditions suivantes

$$\begin{aligned} v(a) - \frac{\beta_a}{2} D(a) \frac{\partial v}{\partial x}(a) &= z_a, \\ v(b) + \frac{\beta_b}{2} D(b) \frac{\partial v}{\partial x}(b) &= z_b. \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

Le sous espace $\hat{\mathbb{B}}$ est équipé du produit scalaire et d'une norme associée, induite par l'espace de Hilbert $\hat{H}_1 \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Pour $\hat{Y} = (v, z_a, z_b)$ dans $\hat{\mathbb{B}}$, la norme de \hat{Y} dans l'espace $\hat{\mathbb{B}}$ est donnée par

$$\|\hat{Y}\|_{\hat{\mathbb{B}}} = (\|v\|_{\hat{H}_1}^2 + |z_a|^2 + |z_b|^2)^{1/2}.$$

Il est clair que les sous espaces \mathbb{B} et $\widehat{\mathbb{B}}$ sont fermés respectivement dans $H_1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $\widehat{H}_1 \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Alors, les sous-espaces $(\mathbb{B}, \|\cdot\|_{\mathbb{B}})$ et $(\widehat{\mathbb{B}}, \|\cdot\|_{\widehat{\mathbb{B}}})$ sont des espaces de Hilbert. On définit l'opérateur non-linéaire Λ par

$$\begin{aligned} \Lambda : L^\infty([a, b])^3 &\longrightarrow \mathcal{L}(L_2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{B}), \\ \mathbf{s} &\longmapsto \Lambda_{\mathbf{s}}. \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

Pour un temps $t \in [t_0, t_0 + T]$ fixé, on définit l'application linéaire de Dirichlet-to-Neumann correspondante à $\mathbf{s} = (\nu, D, \mu_a)$ par

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mathbf{s}} : L_2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{B}, \\ (f(\cdot, t), g_a(t), g_b(t)) &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ D(a) \frac{\partial \phi[\mathbf{s}]}{\partial x}(a, t) \\ -D(b) \frac{\partial \phi[\mathbf{s}]}{\partial x}(b, t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

Alors, d'après les conditions aux bords (2.2.2), et la relation du flux (1.4.7) on trouve

$$\Lambda_{\mathbf{s}}(f(\cdot, t), g_a(t), g_b(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\zeta_a(\phi[\mathbf{s}](a, t) - g_a(t)) \\ 2\zeta_b(\phi[\mathbf{s}](b, t) - g_b(t)) \end{pmatrix}. \quad (4.5.5)$$

4.5.1 Continuité de l'application Dirichlet-to-Neumann (DtN)

On définit l'opérateur non-linéaire $\widehat{\Lambda}$ par

$$\begin{aligned} \widehat{\Lambda} : L^\infty([a, b])^3 &\longrightarrow \mathcal{L}(\widehat{L}_2 \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}; \widehat{\mathbb{B}}), \\ \mathbf{s} &\longmapsto \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}}. \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

Pour $\omega \in \mathbb{R}$ une fréquence fixée, on définit une application linéaire de Dirichlet-to-Neumann (DtN) $\widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}}$ correspondante à $\mathbf{s} = (\nu, D, \mu_a)$ par

$$\begin{aligned} \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}} : \widehat{L}_2 \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \widehat{\mathbb{B}}, \\ (F(\cdot, \omega), G_a(\omega), G_b(\omega)) &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ D(a) \frac{\partial u[\mathbf{s}]}{\partial x}(a, \omega) \\ -D(b) \frac{\partial u[\mathbf{s}]}{\partial x}(b, \omega) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

où $u[\mathbf{s}]$ est la solution du problème (4.4.1)-(4.4.2) liée à \mathbf{s} . Alors, d'après la proposition (4.3.1) et les conditions aux bords (4.4.2) on obtient

$$\widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}}(F(\cdot, \omega), G_a(\omega), G_b(\omega)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\zeta_a(u[\mathbf{s}](a, \omega) - G_a(\omega)) \\ 2\zeta_b(u[\mathbf{s}](b, \omega) - G_b(\omega)) \end{pmatrix}. \quad (4.5.8)$$

L'application linéaire $\widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}}$ est un opérateur défini de façon analogue à l'opérateur linéaire $\Lambda_{\mathbf{s}}$ donné par l'expression (4.5.4). Cet opérateur exprime la loi du flux courant dans le domaine fréquentiel (voir l'Item e) de la proposition 4.3.1).

Proposition 4.5.1. *Pour une fréquence donnée $\omega \in \mathbb{R}$, l'application linéaire $\widehat{\Lambda}_s$ est caractérisée par*

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\Lambda}_s(F(\cdot, \omega), G_a(\omega), G_b(\omega)), (v, z_a, z_b) \rangle &= \int_a^b F(x, \omega) \overline{v(x)} dx - \int_a^b D(x) \frac{\partial u[s]}{\partial x}(x, \omega) \overline{\frac{\partial v}{\partial x}(x)} dx \\ &- \int_a^b \left(\mu_a(x) + \frac{i\omega}{c_0} \nu(x) \right) u[s](x, \omega) \overline{v(x)} dx + D(a) (G_a(\omega) - u[s](a, \omega)) \overline{\frac{\partial v}{\partial x}(a)} \\ &+ D(b) (u[s](b, \omega) - G_b(\omega)) \overline{\frac{\partial v}{\partial x}(b)}, \quad (4.5.9) \end{aligned}$$

pour tout $(v, z_a, z_b) \in \widehat{\mathbb{B}}$ et toutes fonctions sources $F(\cdot, \omega)$, $G_a(\omega)$ et $G_b(\omega)$, où $u[s](\cdot, \omega) \in \widehat{H}_2$ est la solution du problème (4.4.1) – (4.4.2) relativement aux fonctions sources $F(\cdot, \omega)$, $G_a(\omega)$ et $G_b(\omega)$.

Démonstration. On note par Γ , le terme suivant

$$\Gamma := \langle \widehat{\Lambda}_s(F(\cdot, \omega), G_a(\omega), G_b(\omega)), (v, z_a, z_b) \rangle = D(a) \frac{\partial u[s]}{\partial x}(a, \omega) \overline{z_a} - D(b) \frac{\partial u[s]}{\partial x}(b, \omega) \overline{z_b}.$$

Les conditions aux bords (4.5.2) nous donnent l'égalité suivante

$$\begin{aligned} \Gamma &= D(a) \frac{\partial u[s]}{\partial x}(a, \omega) \left(\overline{v(a)} - \frac{\beta_a}{2} D(a) \overline{\frac{\partial v}{\partial x}(a)} \right) - D(b) \frac{\partial u[s]}{\partial x}(b, \omega) \left(\overline{v(b)} + \frac{\beta_b}{2} D(b) \overline{\frac{\partial v}{\partial x}(b)} \right) \\ &= D(a) \frac{\partial u[s]}{\partial x}(a, \omega) \overline{v(a)} - D(b) \frac{\partial u[s]}{\partial x}(b, \omega) \overline{v(b)} - D(a) \frac{\partial u[s]}{\partial x}(a, \omega) \frac{\beta_a}{2} D(a) \overline{\frac{\partial v}{\partial x}(a)} \\ &\quad - D(b) \frac{\partial u[s]}{\partial x}(b, \omega) \frac{\beta_b}{2} D(b) \overline{\frac{\partial v}{\partial x}(b)}. \quad (4.5.10) \end{aligned}$$

D'après la formulation variationnelle (2.2.6) on a

$$\begin{aligned} D(a) \frac{\partial u[s]}{\partial x}(a, \omega) \overline{v(a)} - D(b) \frac{\partial u[s]}{\partial x}(b, \omega) \overline{v(b)} &= \int_a^b F(x, \omega) \overline{v(x)} dx - \int_a^b D(x) \frac{\partial u[s]}{\partial x}(x, \omega) \overline{\frac{\partial v}{\partial x}(x)} dx \\ &\quad - \int_a^b \left(\mu_a(x) + \frac{i\omega}{c_0} \nu(x) \right) u[s](x, \omega) \overline{v(x)} dx. \quad (4.5.11) \end{aligned}$$

En utilisant les conditions aux bords correspondantes à la solution $u[s](\cdot, \omega)$, on trouve l'expression

$$\begin{aligned} D(a) \frac{\partial u[s]}{\partial x}(a, \omega) \frac{\beta_a}{2} D(a) \overline{\frac{\partial v}{\partial x}(a)} &= D(a) (u[s](a, \omega) - G_a(\omega)) \overline{\frac{\partial v}{\partial x}(a)}, \\ D(b) \frac{\partial u[s]}{\partial x}(b, \omega) \frac{\beta_b}{2} D(b) \overline{\frac{\partial v}{\partial x}(a)} &= D(a) (G_b(\omega) - u[s](b, \omega)) \overline{\frac{\partial v}{\partial x}(a)}. \end{aligned} \quad (4.5.12)$$

Par substitution des identités (4.5.11) et (4.5.12) dans (4.5.10) on obtient le résultat (4.5.9). \square

Dans le théorème suivant, on veut établir la continuité des opérateurs linéaires Λ_s et $\widehat{\Lambda}_s$. Nous utiliserons les espaces suivants :

i) L'espace des opérateurs linéaires et continus de

$$H^2(\mathbb{R}; L_2) \times H^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \times H^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \quad \text{dans} \quad H^2(\mathbb{R}; L_2) \times H^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \times H^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}),$$

défini par

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L} \left(H^2(\mathbb{R}; L_2) \times H^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \times H^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}), H^2(\mathbb{R}; L_2) \times H^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \times H^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \right).$$

L'espace \mathcal{L}_2 muni de la norme notée par $\| \cdot \|_{\mathcal{L}_2}$ est un espace de Banach.

ii) L'espace de opérateurs linéaires et continus de

$$H^2(\mathbb{R}; \widehat{L}_2) \times H^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \times H^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \quad \text{dans} \quad H^2(\mathbb{R}; \widehat{L}_2) \times H^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \times H^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}),$$

défini par

$$\widehat{\mathcal{L}}_2 = \mathcal{L} \left(H^2(\mathbb{R}; \widehat{L}_2) \times H^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \times H^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}), H^2(\mathbb{R}; \widehat{L}_2) \times H^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \times H^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \right).$$

L'espace $\widehat{\mathcal{L}}_2$ muni de la norme notée par $\| \cdot \|_{\widehat{\mathcal{L}}_2}$ est un espace de Banach.

On introduit les notations suivantes. Soit $X = (f, g_a, g_b)$ un élément de l'espace produit $H^2(\mathbb{R}, L_2) \times H^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times H^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$, on écrit $X(t) = (f(\cdot, t), g_a(t), g_b(t))$. la norme de X dans $H^2(\mathbb{R}, L_2) \times H^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times H^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est donnée par

$$\|X\| = \left(\|f\|_{H^2(\mathbb{R}, L_2)}^2 + \|g_a\|_{H^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})}^2 + \|g_b\|_{H^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})}^2 \right)^{1/2}.$$

Soit $\widehat{X} = (F, G_a, G_b)$ un élément de l'espace produit $L^2(\mathbb{R}, \widehat{L}_2) \times L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \times L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Pour toute fréquence ω dans \mathbb{R} , on écrit $\widehat{X}(\omega) = (F(\cdot, \omega), G_a(\omega), G_b(\omega))$. La norme de \widehat{X} dans l'espace $L^2(\mathbb{R}, \widehat{L}_2) \times L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \times L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est donnée par

$$\|\widehat{X}\| = \left(\|F\|_{L^2(\mathbb{R}, \widehat{L}_2)}^2 + \|G_a\|_{L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})}^2 + \|G_b\|_{L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})}^2 \right)^{1/2}.$$

Théorème 4.5.1. Soient $f \in H^2(\mathbb{R}, L_2)$ et $g_a, g_b \in H^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ les fonctions sources données. Soient $s_1 = (\nu_1, D_1, \mu_{a1})$ et $s_2 = (\nu_2, D_2, \mu_{a2})$ deux fonctions dans $(L^\infty([a, b], \mathbb{R}))^3$ dont les composantes satisfaisants la condition (4.4.3). Alors, il existe une constante $C > 0$, indépendante de s_1 et s_2 , telle que

$$a) \|u_2 - u_1\|_{L^2(\mathbb{R}, \widehat{H}_1)} \leq C \left(\|f\|_{H^1(\mathbb{R}, L_2)}^2 + \|g_a\|_{H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})}^2 + \|g_b\|_{H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})}^2 \right)^{1/2} \|s_2 - s_1\|_\infty.$$

$$b) \|\phi_2 - \phi_1\|_{H^1(\mathbb{R}, H_1)} \leq C \left(\|f\|_{H^2(\mathbb{R}, L_2)}^2 + \|g_a\|_{H^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})}^2 + \|g_b\|_{H^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})}^2 \right)^{1/2} \|s_2 - s_1\|_\infty.$$

$$c) \|\Lambda_{s_1} - \Lambda_{s_2}\|_{\mathcal{L}_2} \leq \|\widehat{\Lambda}_{s_1} - \widehat{\Lambda}_{s_2}\|_{\widehat{\mathcal{L}}_2} \leq C \|s_1 - s_2\|_\infty.$$

Démonstration. Soit ω une fréquence dans \mathbb{R} ,

a) On considère respectivement deux solutions $u_2(\cdot, \omega)$ et $u_1(\cdot, \omega)$ dans \widehat{H}_1 du problème de diffusion (4.4.1) – (4.4.2) relatives aux paramètres $s_1 = (\nu_1, D_1, \mu_{a1})$ et $s_2 = (\nu_2, D_2, \mu_{a2})$. La différence $w(\cdot, \omega) := u_2(\cdot, \omega) - u_1(\cdot, \omega)$ est la solution du problème suivant

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} \left(D_2(x) \frac{\partial w(x, \omega)}{\partial x} \right) + \left(\mu_{a2}(x) + \frac{i\omega}{c_0} \nu_2(x) \right) w(x, \omega) &= \frac{\partial}{\partial x} \left((D_2 - D_1)(x) \frac{\partial u_1(x, \omega)}{\partial x} \right) \\ &\quad - \left((\mu_{a2} - \mu_{a1})(x) + \frac{i\omega}{c_0} (\nu_2 - \nu_1)(x) \right) u_1(x, \omega), \end{aligned} \quad (4.5.13)$$

avec les conditions non homogènes aux bords données par

$$\begin{aligned} w(a, \omega) - \frac{\beta_a}{2} D_2(a) \frac{\partial w}{\partial x}(a, \omega) &= \frac{\beta_a}{2} (D_2(a) - D_1(a)) \frac{\partial u_1}{\partial x}(a, \omega), \\ w(b, \omega) + \frac{\beta_b}{2} D_2(b) \frac{\partial w}{\partial x}(b, \omega) &= -\frac{\beta_b}{2} (D_2(b) - D_1(b)) \frac{\partial u_1}{\partial x}(b, \omega). \end{aligned} \quad (4.5.14)$$

En multipliant l'équation (4.5.13) par $\overline{w(\cdot, \omega)}$, en intégrant sur $[a, b]$ par rapport à la variable x , et en utilisant les conditions (4.5.14), on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1(w, w) &:= \int_a^b D_2(x) \left| \frac{\partial w}{\partial x}(x, \omega) \right|^2 dx + \int_a^b \mu_{a2}(x) |w(x, \omega)|^2 dx \\ &+ \frac{i\omega}{c_0} \int_a^b \nu_2(x) |w(x, \omega)|^2 dx + 2 \left(\zeta_a |w(a, \omega)|^2 + \zeta_b |w(b, \omega)|^2 \right) \\ &= - \int_a^b (D_2 - D_1)(x) \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, \omega) \overline{\frac{\partial w}{\partial x}(x, \omega)} dx \\ &- \int_a^b \left((\mu_{a2} - \mu_{a1})(x) + \frac{i\omega}{c_0} (\nu_2 - \nu_1)(x) \right) u_1(x, \omega) \overline{w(x, \omega)} dx, \end{aligned}$$

d'où la majoration :

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_1(w, w)| &\leq \int_a^b |(D_2 - D_1)(x)| \left| \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, \omega) \right| \left| \frac{\partial w}{\partial x}(x, \omega) \right| dx \\ &+ \int_a^b \left| (\mu_{a2} - \mu_{a1})(x) - \frac{i\omega}{c_0} (\nu_2 - \nu_1)(x) \right| |u_1(x, \omega)| |w(x, \omega)| dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $t_1 t_2 + t_3 t_4 \leq (t_1 + t_3)(t_2 + t_4)$ pour les nombres réels positives $t_i (i = 1, \dots, 4)$, on prouve qu'il existe une constante $C_1 > 0$ indépendante de ω telle que

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_1(w, w)| &\leq C_1 (\|D_2 - D_1\|_\infty + \|\nu_2 - \nu_1\|_\infty + \|\mu_{a2} - \mu_{a1}\|_\infty) \sqrt{1 + \omega^2} \\ &\times \int_a^b \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, \omega) \right| + |u_1(x, \omega)| \right) \left(\left| \frac{\partial w}{\partial x}(x, \omega) \right| + |w(x, \omega)| \right) dx. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_1(w, w)| &\leq 2C_1 \sqrt{1 + \omega^2} (\|D_2 - D_1\|_\infty + \|\nu_2 - \nu_1\|_\infty + \|\mu_{a2} - \mu_{a1}\|_\infty) \\ &\times \|w(\cdot, \omega)\|_{\hat{H}_1} \|u_1(\cdot, \omega)\|_{\hat{H}_1}. \end{aligned} \quad (4.5.15)$$

On a la minoration :

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_1(w, w)| &\geq \int_a^b D_2(x) \left| \frac{\partial w}{\partial x}(x, \omega) \right|^2 dx + \int_a^b \mu_{a2}(x) |w(x, \omega)|^2 dx \\ &+ 2 \left(\zeta_a |w(a, \omega)|^2 + \zeta_b |w(b, \omega)|^2 \right) \geq \alpha \|w(x, \omega)\|_{\hat{H}_1}^2, \end{aligned} \quad (4.5.16)$$

où α est la constante liée à la coercivité de la formulation variationnelle donnée en (2.2.6) et en (2.2.11).

D'après les deux inégalités (4.5.15) et (4.5.16), on vérifie facilement que

$$\begin{aligned} \alpha \|w(\cdot, \omega)\|_{\hat{H}_1} &\leq 2C_1 \sqrt{1 + \omega^2} (\|D_2 - D_1\|_\infty + \|\nu_2 - \nu_1\|_\infty + \|\mu_{a2} - \mu_{a1}\|_\infty) \\ &\times \|u_1(\cdot, \omega)\|_{\hat{H}_1}. \end{aligned} \quad (4.5.17)$$

Par combinaison de l'inégalité (2.2.12) du théorème 2.2.1 et de l'inégalité (4.5.17), on obtient le résultat suivant :

$$\|w(\cdot, \omega)\|_{\hat{H}_1} \leq \frac{2C_0C_1}{\alpha^2} \sqrt{1 + \omega^2} \left(\|F(\cdot, \omega)\|_{\hat{L}_2} + |G_a(\omega)| + |G_b(\omega)| \right) \times \|s_2 - s_1\|_\infty, \quad (4.5.18)$$

où C_0 est la constante positive qui apparaît dans l'expression de $M(\omega)$ donnée par (2.2.9) et (2.2.12).

D'où, en utilisant l'inégalité $(t_1 + t_2 + t_3)^2 \leq 3(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2)$ pour des nombres réels t_i ($i = 1, 2, 3$), on obtient

$$\|u_2(\cdot, \omega) - u_1(\cdot, \omega)\|_{\hat{H}_1}^2 \leq 3 \left(\frac{2C_0C_1}{\alpha^2} \right)^2 (1 + \omega^2) \left(\|F(\cdot, \omega)\|_{\hat{L}_2}^2 + |G_a(\omega)|^2 + |G_b(\omega)|^2 \right) \times \|s_2 - s_1\|_\infty^2. \quad (4.5.19)$$

En intégrant l'inéquation (4.5.19) sur \mathbb{R} par rapport à la variable ω et en utilisant les définitions des normes (0.0.9), (0.0.11) et (0.0.13), on obtient le résultat de l'Item a).

b) En multipliant l'inégalité précédente (4.5.18) par la fonction poids $\omega \mapsto (1 + \omega^2)$ et en intégrant sur \mathbb{R} par rapport à la variable ω , on obtient

$$\|\phi_2 - \phi_1\|_{H^1(\mathbb{R}, H_1)} \leq \left(\frac{2\sqrt{3}C_0C_1}{\alpha^2} \right) \left(\|f\|_{H^2(\mathbb{R}, L_2)}^2 + \|g_a\|_{H^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})}^2 + \|g_b\|_{H^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})}^2 \right)^{1/2} \|s_2 - s_1\|_\infty,$$

ce qui prouve l'Item b).

c) Comme dans l'Item a), on considère respectivement les deux solutions $u_2(\cdot, \omega)$ et $u_1(\cdot, \omega)$, dans \hat{H}_1 , du problème de diffusion (4.4.1) – (4.4.2) relatives aux paramètres s_1 et s_2 . Soit $\hat{Y} = (v, z_a, z_b)$ où v est une fonction dans \hat{H}_1 satisfaisant les conditions de trace aux bords (4.5.2). D'après la proposition 4.5.1, on a

$$\begin{aligned} \langle (\hat{\Lambda}_{s_2} - \hat{\Lambda}_{s_1})\hat{X}(\omega), \hat{Y} \rangle &= - \int_a^b (D_2 - D_1)(x) \frac{\partial u_2}{\partial x}(x, \omega) \overline{\frac{\partial v}{\partial x}(x)} dx \\ &\quad - \int_a^b (\mu_{a2} - \mu_{a1})(x) u_2(x, \omega) \overline{v(x)} dx - \frac{i\omega}{c_0} \int_a^b (\nu_2 - \nu_1)(x) u_2(x, \omega) \overline{v(x)} dx \\ &\quad - \int_a^b D_1(x) \frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial x}(x, \omega) \overline{\frac{\partial v}{\partial x}(x)} dx - \int_a^b \mu_{a1}(x) (u_2 - u_1)(x, \omega) \overline{v(x)} dx \\ &\quad - \frac{i\omega}{c_0} \int_a^b \nu_1(x) (u_2 - u_1)(x, \omega) \overline{v(x)} dx + D_1(b) (u_1 - u_2)(b, \omega) \overline{\frac{\partial v}{\partial x}(b)} - D_1(a) (u_1 - u_2)(a, \omega) \overline{\frac{\partial v}{\partial x}(a)} \\ &\quad + (D_1(b) - D_2(b)) (u_2(b, \omega) - G_b(\omega)) \overline{\frac{\partial v}{\partial x}(b)} + (D_1(a) - D_2(a)) (G_a(\omega) - u_2(a, \omega)) \overline{\frac{\partial v}{\partial x}(a)}. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de trace (c. f. annexe B) et d'après l'inégalité (2.2.8), il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \left| D_1(b) (u_1 - u_2)(b, \omega) \overline{\frac{\partial v}{\partial x}(b)} \right| &\leq C_1 \|D_1\|_\infty \| (u_2 - u_1)(\cdot, \omega) \|_{\hat{H}_1} \|v\|_{\hat{H}_1}, \\ \left| D_1(a) (u_1 - u_2)(a, \omega) \overline{\frac{\partial v}{\partial x}(a)} \right| &\leq C_1 \|D_1\|_\infty \| (u_2 - u_1)(\cdot, \omega) \|_{\hat{H}_1} \|v\|_{\hat{H}_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| (D_1(b) - D_2(b)) (u_2(b, \omega) - G_b(\omega)) \frac{\partial v}{\partial x}(b) \right| &\leq C_1 \|D_2 - D_1\|_\infty \left(\|u_2(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} + |G_b(\omega)| \right) \|v\|_{\widehat{H}_1}, \\ \left| (D_1(a) - D_2(a)) (G_a(\omega) - u_2(a, \omega)) \frac{\partial v}{\partial x}(a) \right| &\leq C_1 \|D_2 - D_1\|_\infty \left(\|u_2(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} + |G_a(\omega)| \right) \|v\|_{\widehat{H}_1}. \end{aligned}$$

En utilisant les techniques de majoration, on obtient

$$\begin{aligned} |\langle \widehat{\Lambda}_{s_2} - \widehat{\Lambda}_{s_1} \rangle \widehat{X}(\omega), \widehat{Y} \rangle| &\leq \|D_2 - D_1\|_\infty \int_a^b \left| \frac{\partial u_2}{\partial x}(x, \omega) \right| \left| \frac{\partial v}{\partial x}(x) \right| dx + \|\mu_{a_2} - \mu_{a_1}\|_\infty \int_a^b |u_2(x, \omega)| |v(x)| dx \\ &+ \sqrt{1 + \omega^2} \|\nu_2 - \nu_1\|_\infty \int_a^b |u_2(x, \omega)| |v(x)| dx + \|D_1\|_\infty \int_a^b \left| \frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial x}(x, \omega) \right| \left| \frac{\partial v}{\partial x}(x) \right| dx \\ &+ \|\mu_{a_1}\|_\infty \int_a^b |(u_2 - u_1)(x, \omega)| |v(x)| dx + \sqrt{1 + \omega^2} \|\nu_1\|_\infty \int_a^b |(u_2 - u_1)(x, \omega)| |v(x)| dx \\ &+ 2C_1 \|D_1\|_\infty \|(u_2 - u_1)(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} \|v\|_{\widehat{H}_1} + C_1 \|D_2 - D_1\|_\infty \left(2\|u_2(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} + |G_a(\omega)| + |G_b(\omega)| \right) \|v\|_{\widehat{H}_1}. \end{aligned}$$

Comme ν , D et μ_a sont dans $L^\infty([a, b], \mathbb{R})$, alors il existe $\varrho > 0$ tel que $\varrho \geq \max(\|\nu\|_\infty, \|D\|_\infty, \|\mu_a\|_\infty)$ et d'après les propriétés de la norme (0.0.14) on a

$$\begin{aligned} |\langle \widehat{\Lambda}_{s_2} - \widehat{\Lambda}_{s_1} \rangle \widehat{X}(\omega), \widehat{Y} \rangle| &\leq \sqrt{1 + \omega^2} \|s_2 - s_1\|_\infty \times \int_a^b \left(\left| \frac{\partial u_2}{\partial x}(x, \omega) \right| \left| \frac{\partial v}{\partial x}(x) \right| + |u_2(x, \omega)| |v(x)| \right) dx \\ &+ \varrho \sqrt{1 + \omega^2} \int_a^b \left(\left| \frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial x}(x, \omega) \right| \left| \frac{\partial v}{\partial x}(x) \right| + |(u_2 - u_1)(x, \omega)| |v(x)| \right) dx \\ &+ 2C_1 \varrho \|(u_2 - u_1)(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} \|v\|_{\widehat{H}_1} + 2C_2 \|D_2 - D_1\|_\infty \|u_2(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} \|v\|_{\widehat{H}_1} \\ &+ C_1 \|s_2 - s_1\|_\infty \sqrt{1 + \omega^2} \left(\|F(\cdot, \omega)\|_{\widehat{L}_2} + |G_a(\omega)| + |G_b(\omega)| \right) \|v\|_{\widehat{H}_1}. \end{aligned}$$

En utilisant de nouveau l'inégalité $t_1 t_2 + t_3 t_4 \leq (t_1 + t_3)(t_2 + t_4)$ pour tous nombres réels positifs $t_i (i = 1, \dots, 4)$, on obtient

$$\begin{aligned} |\langle \widehat{\Lambda}_{s_2} - \widehat{\Lambda}_{s_1} \rangle \widehat{X}(\omega), \widehat{Y} \rangle| &\leq \sqrt{1 + \omega^2} \|s_2 - s_1\|_\infty \int_a^b \left(\left| \frac{\partial u_2}{\partial x}(x, \omega) \right| + |u_2(x, \omega)| \right) \left(\left| \frac{\partial v}{\partial x}(x) \right| + |v(x)| \right) dx \\ &+ \varrho \sqrt{1 + \omega^2} \int_a^b \left(\left| \frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial x}(x, \omega) \right| + |(u_2 - u_1)(x, \omega)| \right) \left(\left| \frac{\partial v}{\partial x}(x) \right| + |v(x)| \right) dx \\ &+ 2C_1 \varrho \sqrt{1 + \omega^2} \|(u_2 - u_1)(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} \|v\|_{\widehat{H}_1} + 2C_1 \sqrt{1 + \omega^2} \|s_2 - s_1\|_\infty \|u_2(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} \|v\|_{\widehat{H}_1} \\ &+ C_1 \|s_2 - s_1\|_\infty \sqrt{1 + \omega^2} \left(\|F(\cdot, \omega)\|_{\widehat{L}_2} + |G_a(\omega)| + |G_b(\omega)| \right) \|v\|_{\widehat{H}_1}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} |\langle \widehat{\Lambda}_{s_2} - \widehat{\Lambda}_{s_1} \rangle \widehat{X}(\omega), \widehat{Y} \rangle| &\leq 2(1 + C_1) \sqrt{1 + \omega^2} \|s_2 - s_1\|_\infty \|u_2(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} \|v\|_{\widehat{H}_1} \\ &+ \varrho(1 + 2C_1) \sqrt{1 + \omega^2} \|(u_2 - u_1)(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} \|v\|_{\widehat{H}_1} + \\ &C_1 \|s_2 - s_1\|_\infty \sqrt{1 + \omega^2} \left(\|F(\cdot, \omega)\|_{\widehat{L}_2} + |G_a(\omega)| + |G_b(\omega)| \right) \|v\|_{\widehat{H}_1}. \end{aligned}$$

Si on pose $C_2 = \max\{2(1 + C_1), \varrho(1 + 2C_1)\}$, on a

$$\begin{aligned} |\langle \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_2} - \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_1} \widehat{X}(\omega), \widehat{Y} \rangle| &\leq C_2 \sqrt{1 + \omega^2} \|v\|_{\widehat{H}_1} \left[\|\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1\|_\infty \|u_2(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} + \|(u_2 - u_1)(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} \right] \\ &\quad + C_2 \sqrt{1 + \omega^2} \|v\|_{\widehat{H}_1} \left[\|\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1\|_\infty \left(\|F(\cdot, \omega)\|_{\widehat{L}_2} + |G_a(\omega)| + |G_b(\omega)| \right) \right]. \end{aligned}$$

En utilisant (2.2.9), (2.2.12) et (4.5.18) de l'Item a), il existe une constante $C_3 > 0$ telle que

$$\begin{aligned} |\langle \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_2} - \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_1} \widehat{X}(\omega), \widehat{Y} \rangle| &\leq C_3(1 + \omega^2) \|v\|_{\widehat{H}_1} \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1\|_\infty \left(\|F(\cdot, \omega)\|_{\widehat{L}_2} + |G_a(\omega)| + |G_b(\omega)| \right) \\ &\leq C_3(1 + \omega^2) \left(\|F(\cdot, \omega)\|_{\widehat{L}_2} + |G_a(\omega)| + |G_b(\omega)| \right) \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1\|_\infty \|\widehat{Y}\|_{\widehat{B}}. \end{aligned}$$

Comme

$$\left\| (\widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_2} - \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_1}) \widehat{X}(\omega) \right\|_{\widehat{L}_2} = \sup_{\|\widehat{Y}\|_{\widehat{B}}=1} |\langle \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_2} - \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_1} \widehat{X}(\omega), \widehat{Y} \rangle|,$$

alors on obtient l'inégalité suivante :

$$\left\| (\widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_2} - \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_1}) \widehat{X}(\omega) \right\|_{\widehat{L}_2} \leq C_3 \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1\|_\infty (1 + \omega^2) \left(\|F(\cdot, \omega)\|_{\widehat{L}_2} + |G_a(\omega)| + |G_b(\omega)| \right).$$

En utilisant de nouveau l'inégalité $(t_1 + t_2 + t_3)^2 \leq 3(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2)$ pour tous nombres réels t_i ($i = 1, 2, 3$), on obtient

$$\left\| (\widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_2} - \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_1}) \widehat{X}(\omega) \right\|_{\widehat{L}_2}^2 \leq 3C_3(1 + \omega^2)^2 \left(\|F(\cdot, \omega)\|_{\widehat{L}_2}^2 + |G_a(\omega)|^2 + |G_b(\omega)|^2 \right) \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1\|_\infty^2. \quad (4.5.20)$$

En intégrant l'inégalité (4.7.22) sur \mathbb{R} par rapport à la variable ω , on a

$$\left\| (\widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_2} - \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_1}) \widehat{X} \right\|_{\widehat{L}_2 \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}} \leq C_3 \sqrt{3} \left(\|f\|_{H^2(\mathbb{R}, L_2)}^2 + \|g_a\|_{H^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})}^2 + \|g_b\|_{H^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})}^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1\|_\infty.$$

Enfin, l'identité Parseval donne

$$\|(\Lambda_{\mathbf{s}_2} - \Lambda_{\mathbf{s}_1})X\|_{L_2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\| (\widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_2} - \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_1}) \widehat{X} \right\|_{\widehat{L}_2 \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}} \leq C_3 \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \|X\| \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1\|_\infty. \quad (4.5.21)$$

Ce qui prouve qu'il existe une constante $C = C_3 \sqrt{\frac{3}{2\pi}}$ telle que

$$\|\Lambda_{\mathbf{s}_1} - \Lambda_{\mathbf{s}_2}\|_{\mathcal{L}_2} = \sup_{\|X\|=1} \|(\Lambda_{\mathbf{s}_2} - \Lambda_{\mathbf{s}_1})X\|_{L_2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} \leq C \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1\|_\infty. \quad (4.5.22)$$

Ceci achève la démonstration de l'Item c).

□

4.5.2 Dérivée de Fréchet et problème adjoint en 1D

On considère les paramètres $s = (\nu, D, \mu_a)$, $h = (h_1, h_2, h_3)$ et $\hat{s} = (\nu_0, D_0, \mu_{a0})$ tels que $s = \hat{s} + h$. Soient u et u_0 respectivement les solutions exactes de (4.4.1)-(4.4.2) relatives aux paramètres s et \hat{s} , pour des fonctions sources $\tilde{X}(\omega) = (F(\cdot, \omega), G_a(\omega), G_b(\omega))$. On pose $w = u - u_0$, alors $w \in \hat{H}_2 \subset \hat{H}_1$. Soient ϕ et ϕ_0 respectivement les solutions exactes de (2.2.1)-(2.2.2) relatives aux paramètres s et \hat{s} , pour les fonctions sources $X(t) = (f(\cdot, t), g_a(t), g_b(t))$. On pose $\psi = \phi - \phi_0$, alors $\psi \in H_2 \subset H_1$. Soient $Y = (\varphi, r_a, r_b)$ et $\hat{Y} = (v, z_a, z_b)$ deux éléments respectivement dans \mathbb{B} et $\hat{\mathbb{B}}$. On considère les applications linéaires $\Upsilon_s : L^\infty([a, b], \mathbb{R})^3 \rightarrow \mathcal{L}(L_2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{B})$ et $\hat{\Upsilon}_s : L^\infty([a, b], \mathbb{R})^3 \rightarrow \mathcal{L}(\hat{L}_2 \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \hat{\mathbb{B}})$ données respectivement par

$$\begin{aligned} \langle (\Upsilon_s h) X(t), Y \rangle &= \left(D(a) \frac{\partial \psi[s]}{\partial x}(a, t) + h_2(a) \frac{\partial \phi_0[\hat{s}]}{\partial x}(a, t) \right) r_a \\ &\quad - \left(D(b) \frac{\partial \psi[s]}{\partial x}(b, t) + h_2(b) \frac{\partial \phi_0[\hat{s}]}{\partial x}(b, t) \right) r_b, \end{aligned} \quad (4.5.23)$$

et

$$\begin{aligned} \langle (\hat{\Upsilon}_s h) \hat{X}(\omega), \hat{Y} \rangle &= \left(D(a) \frac{\partial w[s]}{\partial x}(a, \omega) + h_2(a) \frac{\partial u_0[\hat{s}]}{\partial x}(a, \omega) \right) \bar{z}_a \\ &\quad - \left(D(b) \frac{\partial w[s]}{\partial x}(b, \omega) + h_2(b) \frac{\partial u_0[\hat{s}]}{\partial x}(b, \omega) \right) \bar{z}_b. \end{aligned} \quad (4.5.24)$$

On a

$$\begin{aligned} \langle (\hat{\Upsilon}_s h) \hat{X}(\omega), \hat{Y} \rangle &= - \int_a^b D(x) \frac{\partial w(x, \omega)}{\partial x} \frac{\overline{\partial v(x)}}{\partial x} dx - \int_a^b \left(\mu_a(x) + \frac{i\omega}{c_0} \nu(x) \right) w(x, \omega) \overline{v(x)} dx \\ &\quad - \int_a^b h_3(x) u_0(x, \omega) \overline{v(x)} dx - \frac{i\omega}{c_0} \int_a^b h_1(x) u_0(x, \omega) \overline{v(x)} dx - \int_a^b h_2(x) \frac{\partial u_0(x, \omega)}{\partial x} \frac{\overline{\partial v(x)}}{\partial x} dx \\ &\quad + D(b) w(b, \omega) \frac{\overline{\partial v(b)}}{\partial x} - D(a) w(a, \omega) \frac{\overline{\partial v(a)}}{\partial x}. \end{aligned}$$

On note que la fonction $w = u - u_0 \in \hat{H}_2$ est la solution de l'équation non homogène

$$\begin{aligned} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D(x) \frac{\partial w(x, \omega)}{\partial x} \right) + \left(\mu_a(x) + \frac{i\omega}{c_0} \nu(x) \right) w(x, \omega) = \\ - \frac{i\omega}{c_0} h_1(x) u_0(x, \omega) + \frac{\partial}{\partial x} \left(h_2(x) \frac{\partial u_0(x, \omega)}{\partial x} \right) - h_3(x) u_0(x, \omega), \end{aligned} \quad (4.5.25)$$

avec les conditions non homogènes aux bords

$$\begin{aligned} w(a, \omega) - \frac{\beta_a}{2} D(a) \frac{\partial w}{\partial x}(a, \omega) &= \frac{\beta_a}{2} h_2(a) \frac{\partial u_0}{\partial x}(a, \omega), \\ w(b, \omega) + \frac{\beta_b}{2} D(b) \frac{\partial w}{\partial x}(b, \omega) &= - \frac{\beta_b}{2} h_2(b) \frac{\partial u_0}{\partial x}(b, \omega). \end{aligned} \quad (4.5.26)$$

Théorème 4.5.2. Soit ω une fréquence dans \mathbb{R} . On suppose que $X = (f, g_a, g_b)$ est un élément dans $H^2(\mathbb{R}, L_2) \times H^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times H^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, avec les notations et les hypothèses de la proposition 4.5.1 et du théorème 4.5.1. Alors, il existe une constante $C > 0$ indépendante de ω telle que

$$a) \left\| \left(\widehat{\Lambda}_s - \widehat{\Lambda}_{\hat{s}} - \widehat{\Upsilon}_{\hat{s}} h \right) \widehat{X}(\omega) \right\|_{\widehat{L}_2 \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}} \leq C \|h\|_\infty \sqrt{1 + \omega^2} \|(u - u_0)(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1}.$$

$$b) \|\Lambda_s - \Lambda_{\hat{s}} - \Upsilon_{\hat{s}} h\|_{\mathcal{L}_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\| \widehat{\Lambda}_s - \widehat{\Lambda}_{\hat{s}} - \widehat{\Upsilon}_{\hat{s}} h \right\|_{\widehat{\mathcal{L}}_2} \leq \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \|h\|_\infty^2.$$

De plus, $\widehat{\Upsilon}_{\hat{s}} := \widehat{\Lambda}'_{\hat{s}}$ est la dérivée de Fréchet, au point $\hat{s} = (\nu_0, D_0, \mu_{a0})$, de $\widehat{\Lambda}_s$ par rapport à la variable (ν, D, μ_a) .

c) Les dérivées $\widehat{\Lambda}'_{\hat{s}}$ et Λ'_s sont Lipschitziennes,

$$\|\Lambda'_s - \Lambda'_{\hat{s}}\|_{\mathcal{L}_2} \leq C \sqrt{\frac{2}{\pi}} \|s - \hat{s}\|_\infty \quad \text{et} \quad \left\| \widehat{\Lambda}'_s - \widehat{\Lambda}'_{\hat{s}} \right\|_{\widehat{\mathcal{L}}_2} \leq 2C \|s - \hat{s}\|_\infty.$$

Démonstration. Soit ω une fréquence dans \mathbb{R} ,

a) On a

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\widehat{\Lambda}_s - \widehat{\Lambda}_{\hat{s}} - \widehat{\Upsilon}_{\hat{s}} h \right) \widehat{X}(\omega), (v, z_a, z_b) \right\rangle &= - \int_a^b \left(h_3(x) + \frac{i\omega}{c_0} h_1(x) \right) (u - u_0)(x, \omega) \overline{v(x)} dx \\ &\quad - \int_a^b h_2(x) \frac{\partial(u - u_0)(x, \omega)}{\partial x} \overline{\frac{\partial v(x)}{\partial x}} dx + h_2(a) \left(u_0 - u - \frac{\beta_a}{2} D_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) (a, \omega) \overline{\frac{\partial v}{\partial x}(a)} \\ &\quad + h_2(b) \left(u - u_0 - \frac{\beta_b}{2} D_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) (b, \omega) \overline{\frac{\partial v}{\partial x}(b)}. \end{aligned}$$

Soit $\tilde{v}(\xi, \omega) = \frac{\beta_\xi}{2} D_0(\xi) \frac{\partial u_0}{\partial x}(\xi, \omega)$ pour $\xi = a$ ou b , on utilise des arguments similaires comme dans la démonstration du théorème 4.5.1. On trouve

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \left(\widehat{\Lambda}_s - \widehat{\Lambda}_{\hat{s}} - \widehat{\Upsilon}_{\hat{s}} h \right) \widehat{X}(\omega), \widehat{Y} \right\rangle \right| &\leq \|h\|_\infty \sqrt{1 + \omega^2} \int_a^b \left(\left| \frac{\partial(u - u_0)(x, \omega)}{\partial x} \right| + |(u - u_0)(x, \omega)| \right) \\ &\quad \times \left(\left| \frac{\partial v(x)}{\partial x} \right| + |v(x)| \right) dx + \|h_2\|_\infty |(u - u_0 - \tilde{v})(b, \omega)| \left| \frac{\partial v}{\partial x}(b) \right| \\ &\quad + \|h_2\|_\infty |(u_0 - u - \tilde{v})(a, \omega)| \left| \frac{\partial v}{\partial x}(a) \right|. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et d'après la condition (2.2.8), il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \left(\widehat{\Lambda}_s - \widehat{\Lambda}_{\hat{s}} - \widehat{\Upsilon}_{\hat{s}} h \right) \widehat{X}(\omega), \widehat{Y} \right\rangle \right| &\leq 2 \|h\|_\infty \sqrt{1 + \omega^2} \|(u - u_0)(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} \|\widehat{Y}\|_{\widehat{H}_1} \\ &\quad + 2C_1 \|h\|_\infty \|(u_0 - u - \tilde{v})(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} \|\widehat{Y}\|_{\widehat{H}_1}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité (4.5.17), il existe une constante $C_2 > 0$ telle que

$$\alpha \|(u_0 - u - \tilde{v})(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} \leq C_2 \varrho \sqrt{1 + \omega^2} \|(u - u_0)(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1}. \quad (4.5.27)$$

Il s'ensuit

$$\left| \left\langle \left(\widehat{\Lambda}_s - \widehat{\Lambda}_{\hat{s}} - \widehat{\Upsilon}_{\hat{s}} h \right) \widehat{X}(\omega), \widehat{Y} \right\rangle \right| \leq C_3 \|h\|_\infty \sqrt{1 + \omega^2} \|(u - u_0)(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} \|\widehat{Y}\|_{\widehat{H}_1},$$

où $C_3 = 2 \max\left(1, \frac{C_1 C_2 \varrho}{\alpha}\right)$ est indépendante de ω , s et \hat{s} .

Enfin, pour $\|\widehat{Y}\|_{\widehat{\mathbb{B}}} = 1$, on a

$$\left\| \left(\widehat{\Lambda}_s - \widehat{\Lambda}_{\hat{s}} - \widehat{\Upsilon}_{\hat{s}} h \right) \widehat{X}(\omega) \right\|_{\widehat{\mathcal{L}}_2 \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}} \leq C_3 \|h\|_{\infty} \sqrt{1 + \omega^2} \|(u - u_0)(\cdot, \omega)\|_{\widehat{\mathbb{H}}_1}.$$

b) En utilisant l'inégalité (4.5.19), on obtient la majoration suivante

$$\left\| \left(\widehat{\Lambda}_s - \widehat{\Lambda}_{\hat{s}} - \widehat{\Upsilon}_{\hat{s}} h \right) \widehat{X}(\omega) \right\|_{\widehat{\mathcal{L}}_2 \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}}^2 \leq C^2 \|h\|_{\infty}^4 (1 + \omega^2)^2 \left(\|F(\cdot, \omega)\|_{\mathcal{L}_2}^2 + |G_a(\omega)|^2 + |G_b(\omega)|^2 \right),$$

où $C^2 = 3C_3^2 \left(\frac{2C_0 C_1}{\alpha^2} \right)^2$ est indépendante de ω , s et \hat{s} .

En intégrant sur \mathbb{R} par rapport à la variable ω et en utilisant l'identité de Parseval, on obtient

$$\begin{aligned} \|\Lambda_s - \Lambda_{\hat{s}} - \Upsilon_{\hat{s}} h\|_{\mathbb{B}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\| \left(\widehat{\Lambda}_s - \widehat{\Lambda}_{\hat{s}} - \widehat{\Upsilon}_{\hat{s}} h \right) \widehat{X} \right\|_{\widehat{\mathbb{B}}} \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \|h\|_{\infty}^2 \left(\|f\|_{\mathbb{H}^2(\mathbb{R}, \mathcal{L}_2)}^2 + \|g_a\|_{\mathbb{H}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})}^2 + \|g_b\|_{\mathbb{H}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

$$\|\Lambda_s - \Lambda_{\hat{s}} - \Upsilon_{\hat{s}} h\|_{\mathcal{L}_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\| \widehat{\Lambda}_s - \widehat{\Lambda}_{\hat{s}} - \widehat{\Upsilon}_{\hat{s}} h \right\|_{\widehat{\mathcal{L}}_2} \leq \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \|h\|_{\infty}^2, \quad (4.5.28)$$

ce qui prouve l'Item b).

c) On écrit $s - \hat{s} = h$, en utilisant l'Item b), on a

$$\begin{aligned} \|\Lambda'_s h - \Lambda'_{\hat{s}} h\|_{\mathcal{L}_2} &= \|\Lambda_s - \Lambda_{\hat{s}} - \Upsilon_{\hat{s}} h\|_{\mathcal{L}_2} + \|\Lambda_{\hat{s}} - \Lambda_s - \Upsilon_s h\|_{\mathcal{L}_2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\| \widehat{\Lambda}_s - \widehat{\Lambda}_{\hat{s}} - \widehat{\Upsilon}_{\hat{s}} h \right\|_{\widehat{\mathcal{L}}_2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\| \widehat{\Lambda}_{\hat{s}} - \widehat{\Lambda}_s - \widehat{\Upsilon}_s h \right\|_{\widehat{\mathcal{L}}_2} \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \|h\|_{\infty}^2 + \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \|h\|_{\infty}^2 = C \sqrt{\frac{2}{\pi}} \|h\|_{\infty}^2. \end{aligned}$$

Enfin, on obtient

$$\|\Lambda'_s - \Lambda'_{\hat{s}}\|_{\mathcal{L}_2} \leq C \sqrt{\frac{2}{\pi}} \|s - \hat{s}\|_{\infty}. \quad (4.5.29)$$

En utilisant une démonstration similaire à celle (4.7.31), on prouve que

$$\left\| \widehat{\Lambda}'_s - \widehat{\Lambda}'_{\hat{s}} \right\|_{\mathcal{L}_2} \leq 2C \|s - \hat{s}\|_{\infty}. \quad (4.5.30)$$

Ce qui conclut la preuve. \square

Corollaire 4.5.1. *Pour une fréquence fixée ω dans \mathbb{R} . Soient $\hat{s} = (\nu_0, D_0, \mu_{a0})$ et $s = \hat{s} + h$ deux paramètres optiques, où $h = (h_1, h_2, h_3)$. On suppose qu'on a les conditions suivantes*

$$D(a) = D_0(a) \quad \text{et} \quad D(b) = D_0(b). \quad (4.5.31)$$

Soit $(\widehat{\Lambda}'_s h) : \widehat{L}_2 \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{B}}$ la dérivée de Fréchet de l'opérateur $\widehat{\Lambda}_s$, alors l'opérateur adjoint $(\widehat{\Lambda}'_s h)^*$ de $\widehat{\Lambda}'_s h$ est donné par

$$\begin{aligned} \langle \widehat{X}(\omega), (\widehat{\Lambda}'_s h)^* Y^*(\omega) \rangle &= \int_a^b \left(\frac{i\omega}{c_0} h_1(x) - h_3(x) \right) u^*(x, \omega) \overline{u_0(x, \omega)} dx \\ &\quad - \int_a^b h_2(x) \frac{\partial u^*(x, \omega)}{\partial x} \overline{\frac{\partial u_0(x, \omega)}{\partial x}} dx, \end{aligned} \quad (4.5.32)$$

pour tout $h = (h_1, h_2, h_3)$. La fonction u^* est la solution unique de l'équation adjointe :

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(D(x) \frac{\partial u^*}{\partial x}(x, \omega) \right) + \left(\mu_a(x) - \frac{i\omega}{c_0} \nu(x) \right) u^*(x, \omega) = 0 \quad \text{dans }]a, b[, \quad (4.5.33)$$

au sens des distributions, avec les conditions non homogènes de Robin aux bords

$$\begin{aligned} u^*(a, \omega) - \frac{\beta_a}{2} D(a) \frac{\partial u^*(a, \omega)}{\partial x} &= z_a^*(\omega), \\ u^*(b, \omega) + \frac{\beta_b}{2} D(b) \frac{\partial u^*(b, \omega)}{\partial x} &= z_b^*(\omega), \end{aligned} \quad (4.5.34)$$

où $Y^*(\omega) = (u^*(\cdot, \omega), z_a^*(\omega), z_b^*(\omega)) \in \widehat{\mathbb{B}}$.

Démonstration. En utilisant les hypothèses (4.5.31), on a $h_2(a) = h_2(b) = 0$. Alors l'équation (4.5.24) s'écrit sous la forme

$$\langle (\widehat{\Lambda}'_s h) \widehat{X}(\omega), \widehat{Y}(\omega) \rangle = D(a) \frac{\partial w[s]}{\partial x}(a, \omega) \overline{z_a^*(\omega)} - D(b) \frac{\partial w[s]}{\partial x}(b, \omega) \overline{z_b^*(\omega)}. \quad (4.5.35)$$

Une conséquence immédiate du théorème 4.5.2, nous donne la formule

$$\begin{aligned} \langle (\widehat{\Lambda}'_s h) \widehat{X}(\omega), Y^*(\omega) \rangle &= -\frac{i\omega}{c_0} \int_a^b h_1(x) u_0(x, \omega) \overline{u^*(x, \omega)} dx - \int_a^b h_2(x) \frac{\partial u_0(x, \omega)}{\partial x} \overline{\frac{\partial u^*(x, \omega)}{\partial x}} dx \\ &\quad - \int_a^b h_3(x) u_0(x, \omega) \overline{u^*(x, \omega)} dx = \overline{\langle \widehat{X}(\omega), (\Lambda'_s h)^* Y^*(\omega) \rangle}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \langle \widehat{X}(\omega), (\Lambda'_s h)^* Y^*(\omega) \rangle &= \int_a^b \left(\frac{i\omega}{c_0} h_1(x) - h_3(x) \right) u^*(x, \omega) \overline{u_0(x, \omega)} dx \\ &\quad - \int_a^b h_2(x) \frac{\partial u^*(x, \omega)}{\partial x} \overline{\frac{\partial u_0(x, \omega)}{\partial x}} dx, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de (4.5.32). \square

4.6 Méthode d'approximation pour le problème inverse

4.6.1 Discrétisation dans la base B-spline

Soit $\hat{s} = (\nu_0, D_0, \mu_{a0})$ un vecteur nominal formé par les valeurs observées des paramètres optiques ν_0 , D_0 et μ_{a0} . Pour tout $1 \leq j \leq N_s$, on désigne par $\widehat{X}_j(\cdot, \omega) =$

$(F_j(\cdot, \omega), G_{a_j}(\omega), G_{b_j}(\omega))$, la j^{eme} source. On considère la fonction coût $\mathbf{s} \mapsto \mathcal{J}(\mathbf{s})$ définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : L^\infty([a, b], \mathbb{R})^3 &\longrightarrow [0, +\infty[\\ \mathbf{s} = (\nu, D, \mu_a) &\longmapsto \mathcal{J}(\mathbf{s}) = \sum_{j=1}^{N_s} \left\| \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}}(\widehat{X}_j(\cdot, \omega)) - \widehat{\Lambda}_{\widehat{\mathbf{s}}}(\widehat{X}_j(\cdot, \omega)) \right\|_{\mathbb{B}}^2. \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

Pour tout $1 \leq j \leq N_s$, on a

$$\widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}}(\widehat{X}_j(\cdot, \omega)) - \widehat{\Lambda}_{\widehat{\mathbf{s}}}(\widehat{X}_j(\cdot, \omega)) = (0, \Gamma_{2j-1}(\mathbf{s}), \Gamma_{2j}(\mathbf{s}))^T,$$

où $\Gamma_{2j-1}(\mathbf{s})$ et $\Gamma_{2j}(\mathbf{s})$ sont données respectivement par

$$\begin{aligned} \Gamma_{2j-1}(\mathbf{s}) &= D(a) \frac{\partial u_j[\mathbf{s}]}{\partial x}(a, \omega) - D_0(a) \frac{\partial u_j[\widehat{\mathbf{s}}]}{\partial x}(a, \omega) = 2\zeta_a(u_j[\mathbf{s}](a, \omega) - u_j[\widehat{\mathbf{s}}](a, \omega)), \\ \Gamma_{2j}(\mathbf{s}) &= D(b) \frac{\partial u_j[\mathbf{s}]}{\partial x}(b, \omega) - D_0(b) \frac{\partial u_j[\widehat{\mathbf{s}}]}{\partial x}(b, \omega) = 2\zeta_b(u_j[\mathbf{s}](b, \omega) - u_j[\widehat{\mathbf{s}}](b, \omega)), \end{aligned}$$

avec $u_j[\mathbf{s}]$ et $u_j[\widehat{\mathbf{s}}]$ sont respectivement les solutions exactes du problème (4.4.1)-(4.4.2) relatives aux fonctions sources $\widehat{X}_j(\cdot, \omega)$ et aux paramètres \mathbf{s} et $\widehat{\mathbf{s}}$. Alors on a

$$\mathcal{J}(\mathbf{s}) = \sum_{j=1}^{N_s} \left(|\Gamma_{2j-1}(\mathbf{s})|^2 + |\Gamma_{2j}(\mathbf{s})|^2 \right).$$

Le problème inverse que nous traitons consiste à trouver le vecteur de paramètres $\mathbf{s}^* = (\nu^*, D^*, \mu_a^*)$ autour des paramètres optiques observés $\widehat{\mathbf{s}}$. On cherche $\mathbf{s}^* = (\nu^*, D^*, \mu_a^*)$ qui minimise la fonction coût \mathcal{J} . On considère le problème de minimisation suivant,

$$\mathbf{s}_* = \arg \left(\min_{\mathbf{s} \in L^\infty([a, b], \mathbb{R})^3} \mathcal{J}(\mathbf{s}) \right). \quad (4.6.2)$$

On discrétise l'intervalle $[a, b]$ par les points $x_i = a + ih_p$, pour $i = 0, 1, 2, \dots, n_p$ où $x_0 = a, x_{n_p} = b$ et $h_p = (b - a)/n_p$. On désigne les nœuds $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ tels que :

$$x_i = a + ih_p, \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (4.6.3)$$

On considère l'espace $\widehat{\mathbb{S}}_{h_p}([a, b])$ des splines cubiques donné par

$$\widehat{\mathbb{S}}_{h_p}([a, b]) = \{ \mathbf{s}_{h_p} \in C^2([a, b]) : \mathbf{s}_{h_p}|_{[x_i, x_{i+1}[} \in \mathbb{P}_3 ; \text{ pour } 0 \leq i \leq n_p - 1 \}. \quad (4.6.4)$$

On rappelle que \mathbb{P}_3 est l'espace des polynômes de degré ≤ 3 . Il est bien clair que la dimension du sous espace $\widehat{\mathbb{S}}_{h_p}([a, b])$ est $m = n_p + 3$.

On utilise la B-spline cubique comme une base $\{B_1, \dots, B_m\}$ du sous espace $\widehat{\mathbb{S}}_{h_p}([a, b])$. La famille $(B_i)_{1 \leq i \leq m}$ est formée par les fonctions B-splines associées à la nouvelle subdivision. On a

$$B_i(x) = \mathcal{B}_3 \left(\frac{x - x_{i-4}}{h_p} \right), \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.6.5)$$

où B_3 est la spline cubique à support dans $[0, 4]$ (voir la section 2.2.3 du chapitre 2). On utilise les approximations par morceaux de $s = (\nu, D, \mu_a)$ dans la base des B-splines cubiques B_ℓ comme suit

$$\nu(x) = \sum_{\ell=1}^m \nu_\ell B_\ell(x), \quad D(x) = \sum_{\ell=1}^m d_\ell B_\ell(x) \quad \text{et} \quad \mu_a(x) = \sum_{\ell=1}^m \mu_{a\ell} B_\ell(x). \quad (4.6.6)$$

Les fonctions ν , D et μ_a sont considérées dans l'espace $\widehat{\mathcal{S}}_{h_p}([a, b])$ [4]. On introduit la notation \mathbf{s}^m pour noter le vecteur $\mathbf{s}^m = (\nu_1, \dots, \nu_m, d_1, \dots, d_m, \mu_{a_1}, \dots, \mu_{a_m})^T \in \mathbb{R}^{3m}$ formé par les coefficients donnés dans (4.6.6). On obtient ceci par le schéma suivant qui fait la liaison entre le problème inverse continu et le problème inverse discret

$$\Theta : L^\infty([a, b], \mathbb{R})^3 \longrightarrow \widehat{\mathcal{S}}_{h_p}([a, b]) \times \widehat{\mathcal{S}}_{h_p}([a, b]) \times \widehat{\mathcal{S}}_{h_p}([a, b]) \longrightarrow \mathbb{R}^{3m} \\ \mathbf{s} \longmapsto \mathbf{s}_{h_p} \longmapsto \Theta(\mathbf{s}) := \mathbf{s}^m. \quad (4.6.7)$$

Pour tout $j = 1, \dots, N_s$ et $i = 1, 2$, on désigne par $Y_{\xi_i}^{[j]}$ la mesure du flux lumineux reçu au point ξ_i du bord pour la j^{eme} fonction source donnée $\widehat{X}_j(\cdot, \omega)$. La fonction $u_h^{[j]}[\mathbf{s}^m]$ est la solution approchée du problème de diffusion direct relativement aux fonctions sources $\widehat{X}_j(\cdot, \omega)$ et au paramètres \mathbf{s}^m . On considère la fonction coût discrète $\mathbf{s}^m \mapsto J(\mathbf{s}^m)$ donnée par l'expression suivante

$$J : \mathbb{R}^{3m} \longrightarrow [0, +\infty[\\ \mathbf{s}^m \longmapsto J(\mathbf{s}^m) := \|\mathbf{R}(\mathbf{s}^m)\|_2^2 = \sum_{i=1}^{2N_s} |\mathbf{R}_i(\mathbf{s}^m)|^2, \quad (4.6.8)$$

où $\mathbf{R}(\mathbf{s}^m) = (R_1(\mathbf{s}^m), R_2(\mathbf{s}^m), \dots, R_{2N_s}(\mathbf{s}^m))^T \in \mathbb{C}^{2N_s}$ avec

$$R_{i+2(j-1)}(\mathbf{s}^m) := R_{i+2(j-1)}(\Theta(\mathbf{s})) = 2\zeta_{\xi_i} \left(u_h^{[j]}[\mathbf{s}^m](\xi_i, \omega) - Y_{\xi_i}^{[j]} \right), \quad (4.6.9)$$

pour tout $j = 1, \dots, N_s$ et $i = 1, 2$ où $\xi_1 = a$ et $\xi_2 = b$, et Θ est défini dans (4.6.7).

La norme $\|\mathbf{R}(\mathbf{s}^m)\|_2$ est le résidu au point \mathbf{s}^m . Le problème de minimisation discret associé au problème (4.6.2) est le suivant

$$\mathbf{s}_*^m = \arg \min_{\mathbf{s}^m \in \mathbb{R}^{3m}} J(\mathbf{s}^m). \quad (4.6.10)$$

Les problèmes (4.6.2) et (4.6.10) sont des problèmes mal-posés. Dans l'objectif de diminuer les effets du bruit dans les données, on remplace le problème original (4.6.10) par une meilleure condition. Une des méthodes de régularisation les plus populaires est la méthode de régularisation de Tikhonov [154]. La méthode remplace le problème (4.6.10) par le problème d'optimisation sans contrainte donné par

$$\mathbf{s}_*^m = \arg \min_{\mathbf{s}^m \in \mathbb{R}^{3m}} J_\lambda(\mathbf{s}^m), \quad (4.6.11)$$

où la fonction coût J_λ est donnée par l'expression

$$\mathbf{s}^m \in \mathbb{R}^{3m} \longrightarrow J_\lambda(\mathbf{s}^m) := \|\mathbf{R}(\mathbf{s}^m)\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{s}^m - \widehat{\mathbf{s}}^m\|_2^2. \quad (4.6.12)$$

Le coefficient $\lambda > 0$ est le paramètre de régularisation à choisir et $\widehat{\mathbf{s}}^m$ sont les coefficients dans la base B-spline des paramètres nominaux observés $\hat{\cdot}$.

Comme la fonction J_λ est différentiable au sens de Gâteaux et convexe alors on peut affirmer que s_*^m est la solution du problème d'optimisation sans contrainte (4.6.11) si et seulement si

$$\nabla J_\lambda(s_*^m) = 0. \quad (4.6.13)$$

La matrice Hessienne $\nabla^2 J_\lambda(s^m)$ est semi-définie positive pour tout $s^m \in \mathbb{R}^{3m}$. La méthode classique de Newton reste une méthode efficace pour la résolution de ce type de problème (4.6.13). Les itérations classique de Newton consistent à générer une suite de vecteurs $(s_k^m)_k$ à partir des paramètres observés s_0^m au voisinage de s_*^m et ces itérations sont calculées par le schéma itératif suivant

$$s_{k+1}^m = s_k^m - [\nabla^2 J_\lambda(s_k^m)]^{-1} \nabla J_\lambda(s_k^m), \quad k = 0, 1, 2 \dots$$

Soit \tilde{d}_k la direction décente convenable, solution du système suivant

$$[\nabla^2 J_\lambda(s_k^m)] \tilde{d}_k = \nabla J_\lambda(s_k^m), \quad (4.6.14)$$

alors on obtient le schéma itératif équivalent

$$s_{k+1}^m = s_k^m - \tilde{d}_k, \quad k = 0, 1, 2 \dots$$

4.6.2 Le calcul de la jacobienne et de la hessienne

Nous discrétisons de nouveau l'intervalle $[a, b]$ en utilisant une nouvelle génération de nœuds espacés. Pour simplifier, on utilise une discrétisation similaire à celle donnée dans la section 4.6.1. Alors, pour ω une fréquence fixée dans \mathbb{R} , on note par $\hat{\mathbb{V}}_h$ le sous espace de dimension finie de $\hat{\mathbb{H}}_2$, donné par

$$\hat{\mathbb{V}}_h = \{u_h \in \hat{\mathbb{H}}_2 : u_h|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3 ; \text{ pour } 0 \leq i \leq n-1\}. \quad (4.6.15)$$

La méthode d'approximation classique de Galerkin consiste à trouver une fonction approchée $u_{*h}(\cdot, \omega)$ de la solution exacte $u_*(\cdot, \omega)$ comme étant une solution dans $\hat{\mathbb{V}}_h$ du problème variationnel discret suivant :

$$\mathcal{A}_\omega(u_h(\cdot, \omega), v_h) = \mathcal{L}_\omega(v_h), \quad \forall v_h \in \hat{\mathbb{V}}_h. \quad (4.6.16)$$

La solution $u_{*h}(\cdot, \omega)$ du problème (4.6.16) est sous la forme suivante (voir le chapitre 2 [6, 4],

$$u_{*h}(x, \omega) = \sum_{\ell=1}^N z_{h,\ell}(\omega) B_\ell(x), \quad (4.6.17)$$

où $z_{h,\ell}(\omega)$ sont les coefficients complexes inconnus dépendant de la fréquence ω . En utilisant la fonction test $v_h = B_j$ dans la formule variationnelle discrète (4.6.16), on obtient

$$\sum_{i=1}^N z_{h,i}(\omega) \mathcal{A}_\omega(B_i, B_j) = \mathcal{L}_\omega(B_j), \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.6.18)$$

où $N = n + 3$ et \mathcal{A}_ω et \mathcal{L}_ω sont respectivement les formes sesquilinéaire et semi-linéaire données par

$$\mathcal{A}_\omega(B_i, B_j) = \frac{1}{h^2} \int_a^b D(x) B'_i(x) B'_j(x) dx + \int_a^b \left(\mu_a(x) + \frac{i\omega}{c_0} \nu(x) \right) B_i(x) B_j(x) dx + 2(\zeta_a B_i(a) B_j(a) + \zeta_b B_i(b) B_j(b)),$$

et

$$\mathcal{L}_\omega(B_j) = 2(\zeta_a G_a(\omega) B_j(a) + \zeta_b G_b(\omega) B_j(b)) + \int_a^b F(x, \omega) B_j(x) dx,$$

pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, N\}^2$. Soit $A(\omega) = [a_{ij}(\omega)]$ la matrice de taille $N \times N$ dont les coefficients $a_{ij}(\omega) = \mathcal{A}_\omega(B_i, B_j)$ sont complexes. Soit $b_h(\omega) = (b_{h,1}(\omega), \dots, b_{h,N}(\omega))^T$ le vecteur dont les coordonnées sont les nombres complexes $b_{h,j}(\omega) = \mathcal{L}_\omega(B_j)$. Soit $z_h(\omega) = (z_{h,1}(\omega), \dots, z_{h,N}(\omega))^T$ le vecteur formé par les coefficients complexes inconnus qui apparaissent dans l'expression (4.6.17) de la solution approchée u_{*h} . Les relations (4.6.18) conduisent au système linéaire de taille $N \times N$ suivant

$$A(\omega) z_h(\omega) = b_h(\omega). \quad (4.6.19)$$

Soient $(i, j) \in \{1, \dots, N\}^2$, en utilisant les expressions (4.6.6), alors les coefficients $a_{ij}(\omega)$ de la matrice $A(\omega)$ s'écrivent sous la forme suivante

$$a_{ij}(\omega) = \frac{1}{h} \sum_{\ell=1}^m d_\ell D_{ij}^{(\ell)} + h \sum_{\ell=1}^m \mu_{a_\ell} U_{ij}^{(\ell)} + i \frac{\omega h}{c_0} \sum_{\ell=1}^m \nu_\ell U_{ij}^{(\ell)} + 2\zeta_a \mathcal{B}_3(-i+4) \mathcal{B}_3(-j+4) + 2\zeta_b \mathcal{B}_3(n-i+4) \mathcal{B}_3(n-j+4), \quad (4.6.20)$$

où $D_{ij}^{(\ell)}$ et $U_{ij}^{(\ell)}$ sont données respectivement par

$$\begin{aligned} D_{ij}^{(\ell)} &= \int_0^n \mathcal{B}_3\left(\frac{h}{h_p}(\tau - \ell + 4)\right) \mathcal{B}'_3(\tau - i + 4) \mathcal{B}'_3(\tau - j + 4) d\tau, \\ U_{ij}^{(\ell)} &= \int_0^n \mathcal{B}_3\left(\frac{h}{h_p}(\tau - \ell + 4)\right) \mathcal{B}_3(\tau - i + 4) \mathcal{B}_3(\tau - j + 4) d\tau. \end{aligned} \quad (4.6.21)$$

On note par D_ℓ et U_ℓ les matrices de tailles $N \times N$ dont les coefficients sont $D_{ij}^{(\ell)}$ et $U_{ij}^{(\ell)}$ respectivement. Alors, on a

$$A(\omega) = \frac{1}{h} \sum_{\ell=1}^m d_\ell D_\ell + h \sum_{\ell=1}^m \mu_{a_\ell} U_\ell + i \frac{\omega h}{c_0} \sum_{\ell=1}^m \nu_\ell U_\ell + 2Q, \quad (4.6.22)$$

où Q est la matrice dont les coefficients sont données par

$$Q_{ij} = \zeta_a \mathcal{B}_3(-i+4) \mathcal{B}_3(-j+4) + \zeta_b \mathcal{B}_3(n-i+4) \mathcal{B}_3(n-j+4).$$

Soit $\mathbf{s}^m = (s_1, \dots, s_{3m})^T$ un vecteur générique dans \mathbb{R}^{3m} . Pour tout $1 \leq \ell \leq 3m$, les dérivées premières de (4.6.19) par rapport s_ℓ sont données par

$$A(\omega) \frac{\partial z_h(\omega)}{\partial s_\ell} + \frac{\partial A(\omega)}{\partial s_\ell} z_h(\omega) = \frac{\partial b_h(\omega)}{\partial s_\ell}.$$

Les dérivées secondes sont données par

$$\frac{\partial A(\omega)}{\partial s_{\ell'}} \frac{\partial z_h(\omega)}{\partial s_{\ell}} + A(\omega) \frac{\partial^2 z_h(\omega)}{\partial s_{\ell'} \partial s_{\ell}} + \frac{\partial A(\omega)}{\partial s_{\ell}} \frac{\partial z_h(\omega)}{\partial s_{\ell'}} + \frac{\partial^2 A(\omega)}{\partial s_{\ell'} \partial s_{\ell}} z_h(\omega) = \frac{\partial^2 b_h(\omega)}{\partial s_{\ell'} \partial s_{\ell}}.$$

Comme $b_h(\omega)$ est indépendant de s^m , alors on a $\frac{\partial b_h(\omega)}{\partial s_{\ell}} = 0$ et $\frac{\partial^2 b_h(\omega)}{\partial s_{\ell'} \partial s_{\ell}} = 0$. Ce qui implique que

$$\frac{\partial z_h(\omega)}{\partial s_{\ell}} = -A^{-1}(\omega) \frac{\partial A(\omega)}{\partial s_{\ell}} z_h(\omega), \quad (4.6.23)$$

et

$$\frac{\partial^2 z_h(\omega)}{\partial s_{\ell'} \partial s_{\ell}} = -A^{-1}(\omega) \left[\frac{\partial A(\omega)}{\partial s_{\ell'}} A^{-1}(\omega) \frac{\partial A(\omega)}{\partial s_{\ell}} + \frac{\partial A(\omega)}{\partial s_{\ell}} A^{-1}(\omega) \frac{\partial A(\omega)}{\partial s_{\ell'}} \right] z_h(\omega). \quad (4.6.24)$$

En utilisant le formule matricielle (4.6.22) pour calculer les dérivées $\frac{\partial A(\omega)}{\partial s_{\ell}}$, on obtient les expressions suivantes,

$$\frac{\partial A(\omega)}{\partial s_{\ell}} = \begin{cases} i \frac{\omega h}{c_0} U_{\ell}, & 1 \leq \ell \leq m, \\ \frac{1}{h} D_{\ell-m}, & m+1 \leq \ell \leq 2m, \\ h U_{\ell-2m}, & 2m+1 \leq \ell \leq 3m, \end{cases} \quad (4.6.25)$$

pour tout $1 \leq \ell \leq 3m$. Par injection de la relation (4.6.25) dans (4.6.23) on obtient,

$$\frac{\partial z_h(\omega)}{\partial s_{\ell}} = \begin{cases} -i \frac{h\omega}{c_0} A^{-1}(\omega) U_{\ell} z_h(\omega), & 1 \leq \ell \leq m, \\ -\frac{1}{h} A^{-1}(\omega) D_{\ell-m} z_h(\omega), & m+1 \leq \ell \leq 2m, \\ -h A^{-1}(\omega) U_{\ell-2m} z_h(\omega), & 2m+1 \leq \ell \leq 3m. \end{cases} \quad (4.6.26)$$

En utilisant la dérivée de Fréchet, on calcule la matrice Jacobienne $K(s^m)$ du vecteur $R(s^m)$ de la façon suivante

$$K_{(i+2(j-1))\ell}(s^m) = \frac{\partial R_{i+2(j-1)}(s^m)}{\partial s_{\ell}}, \quad j = 1, \dots, N_s, \quad i = 1, 2 \quad \text{et} \quad \ell = 1, \dots, 3m. \quad (4.6.27)$$

On introduit le vecteur $\sigma(x)$ donné par

$$\sigma(x) = (B_1(x), B_2(x), \dots, B_N(x))^T, \quad \forall x \in [a, b].$$

En utilisant les relations (4.5.7) et (4.5.8) on obtient

$$R_{i+2(j-1)}(s^m) = 2\zeta_{\xi_i} \left(u_h^{[j]}[s^m](\xi_i, \omega) - Y_{\xi_i}^{[j]} \right), \quad j = 1, \dots, N_s, \quad i = 1, 2. \quad (4.6.28)$$

Comme $u_h^{[j]}[s^m](\xi_i, \omega) = \sum_{k=1}^N z_{h,k}^{[j]}(\omega) B_k(\xi_i)$ est la solution du problème de diffusion pour la j^{eme} source, alors on a

$$\frac{\partial R_{i+2(j-1)}(s^m)}{\partial s_{\ell}} = 2\zeta_{\xi_i} \frac{\partial u_h^{[j]}[s^m]}{\partial s_{\ell}}(\xi_i, \omega) = 2\zeta_{\xi_i} \sum_{k=1}^N \frac{\partial z_{h,k}^{[j]}(\omega)}{\partial s_{\ell}} B_k(\xi_i), \quad j = 1, \dots, N_s, \quad i = 1; 2, \quad (4.6.29)$$

où $\xi_1 = a$, $\xi_2 = b$. En tenant compte de l'expression explicite (4.8.16) de $u_h^{[j]}[s^m](\xi_i, \omega)$ dans l'équation (4.6.29) on obtient

$$\frac{\partial R_{i+2(j-1)}(s^m)}{\partial s_\ell} = 2\zeta_{\xi_i} \sigma(\xi_i) \frac{\partial z_h^{[j]}(\omega)}{\partial s_\ell}, \quad j = 1, \dots, N_s, \quad i = 1, 2. \quad (4.6.30)$$

En remplaçant l'expression (4.6.26) de $\frac{\partial z_h^{[j]}(\omega)}{\partial s_\ell}$ dans l'équation (4.8.30), on obtient les coefficients de la matrice jacobienne $K(s^m)$ sous la forme

$$\frac{\partial R_{i+2(j-1)}(s^m)}{\partial s_\ell} = \begin{cases} -2\zeta_{\xi_i} i \frac{h\omega}{c_0} \sigma(\xi_i) A^{-1}(\omega) U_{\ell} z_h^{[j]}(\omega), & 1 \leq \ell \leq m, \\ -2\zeta_{\xi_i} \frac{1}{h} \sigma(\xi_i) A^{-1}(\omega) D_{\ell-m} z_h^{[j]}(\omega), & m+1 \leq \ell \leq 2m, \\ -2\zeta_{\xi_i} h \sigma(\xi_i) A^{-1}(\omega) U_{\ell-2m} z_h^{[j]}(\omega), & 2m+1 \leq \ell \leq 3m, \end{cases} \quad (4.6.31)$$

pour $j = 1, \dots, N_s$, $i = 1, 2$, où $\xi_1 = a$ et $\xi_2 = b$ (voir [4]).

Pour tout s^m , les gradients $\nabla J(s^m) = \left(\frac{\partial J(s^m)}{\partial s_\ell} \right)_{1 \leq \ell \leq 3m}^T$ et $\nabla J_\lambda(s^m) = \left(\frac{\partial J_\lambda(s^m)}{\partial s_\ell} \right)_{1 \leq \ell \leq 3m}^T$ des fonctions coûts J et J_λ , sont donnés respectivement par

$$\nabla J(s^m) = 2K^*(s^m)R(s^m) \quad \text{et} \quad \nabla J_\lambda(s^m) = 2K^*(s^m)R(s^m) + 2\lambda(s^m - \hat{s}^m). \quad (4.6.32)$$

Soit $H(s^m) = K^*(s^m)K(s^m) + E(s^m)$ où $E(s^m) = \sum_{i=1}^{2N_s} R_i(s^m) \frac{\partial^2 R_i(s^m)}{\partial s_\ell \partial s_{\ell'}}$, $1 \leq \ell, \ell' \leq 3m$.

Il est évident qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $s^m \in \mathbb{R}^{3m}$ et pour tout $\tilde{h} \in \mathbb{R}^{3m}$ tel que

$$\left\| \nabla J_\lambda(s^m + \tilde{h}) - \nabla J_\lambda(s^m) - 2(H(s^m) + \lambda I_{3m})\tilde{h} \right\| \leq C \left\| \tilde{h} \right\|_{\mathbb{R}^{3m}}^2.$$

Alors, la matrice hessienne $\nabla^2 J_\lambda(s^m) = \left(\frac{\partial^2 J_\lambda(s^m)}{\partial s_\ell \partial s_{\ell'}} \right)_{1 \leq \ell, \ell' \leq 3m}$ est donnée par

$$\begin{aligned} \nabla^2 J_\lambda(s^m) &= 2(H(s^m) + \lambda I_{3m}) \\ &= 2K^*(s^m)K(s^m) + 2E(s^m) + 2\lambda I_{3m}, \end{aligned} \quad (4.6.33)$$

pour tout $s^m \in \mathbb{R}^{3m}$.

Pour k assez grand on a l'approximation $E(s_k^m) \simeq 0$. Ce qui montre qu'à chaque itération de Newton k (assez grand) dans le système linéaire (4.6.14), la matrice Hessienne $\nabla^2 J_\lambda(s_k^m)$ est approchée selon l'expression

$$\nabla^2 J_\lambda(s_k^m) \simeq 2K^*(s_k^m)K(s_k^m) + 2\lambda I_{3m}.$$

Ainsi, à chaque itération de Newton k , le système linéaire (4.6.14), s'écrit sous la forme suivante

$$(H(s_k^m) + \lambda I_{3m}) \tilde{d}_k = K^*(s_k^m)R(s_k^m) + \lambda(s_k^m - \hat{s}^m).$$

4.7 Le problème inverse multidimensionnel

4.7.1 Le problème de diffusion direct

Nous avons étudié le problème de diffusion direct dans les chapitres 2 et 3. Le problème direct occupe une place intéressante dans la suite de cette section, nous le rappelons brièvement. On s'intéresse au problème de diffusion en dimension supérieure.

Soit $\phi(x, t)$ la densité lumineuse à la position $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ et à l'instant $t \in [t_0, t_0 + T]$, où t_0 est le temps initial et T est la période du temps. La densité lumineuse $u(x, \omega) = \widehat{\phi}(x, \omega)$ dans le domaine fréquentiel est la solution de l'équation de diffusion suivante

$$-\operatorname{div}(D(x)\nabla u(x, \omega)) + \left(\mu_a(x) + i\frac{\omega}{c_0}\nu(x) \right) u(x, \omega) = F(x, \omega), \quad \forall (x, \omega) \in \Omega \times \mathbb{R}, \quad (4.7.1)$$

avec les conditions non homogènes de Robin aux bords

$$u(\xi, \omega) + \frac{\beta(\xi)}{2}D(\xi)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\xi, \omega) = G(\xi, \omega), \quad \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}. \quad (4.7.2)$$

On suppose que les fonctions D , μ_a et ν sont dans l'espace $L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ et que les fonctions D et μ_a possèdent une borne inférieure α strictement positive et une borne supérieure ϱ . C'est à dire

$$\inf(D(x), \mu_a(x), \nu(x)) \geq \alpha > 0, \quad \sup(D(x), \mu_a(x), \nu(x)) \leq \varrho, \quad \text{p.p sur } \Omega. \quad (4.7.3)$$

4.7.2 Le problème inverse pour l'équation de diffusion

On veut étudier un problème inverse lié à l'équation de diffusion en dimension supérieure. La résolution de ce problème consiste à déterminer les valeurs approchées des paramètres optiques D , μ_a et ν , à partir des mesures du flux lumineux reçu par un détecteur aux bords du domaine. La solution exacte et la solution numérique du problème de diffusion direct en dimension supérieure (4.7.1)-(4.7.2) sont des densités de l'hétérogénéité du milieu caractérisant le flux. Pour des fonctions sources données $f(\cdot, t)$ et $g(\cdot, t)$, on note par $\phi[s]$ la solution du problème (1.4.8)-(1.5.3) relativement aux paramètres optiques $s = (\nu, D, \mu_a)$. On veut décrire une méthode d'approximation numérique pour obtenir les paramètres $s = (\nu, D, \mu_a)$ en utilisant les valeurs du flux reçu aux bords du domaine.

Soit \mathbb{B} le sous espace des fonctions $Y = (\phi, r)$ dans $H_1 \times H^{-1/2}(\partial\Omega)$ ayant la propriété suivante

$$\phi(\xi) + \frac{\beta(\xi)}{2}D(\xi)\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}(\xi) = r(\xi), \quad \forall \xi \in \partial\Omega. \quad (4.7.4)$$

Le sous espace \mathbb{B} est muni du produit scalaire et d'une norme associée, induite par l'espace de Hilbert $H_1 \times H^{-1/2}(\partial\Omega)$. La norme de $Y = (\phi, r) \in \mathbb{B}$ dans l'espace \mathbb{B} est donnée par

$$\|Y\|_{\mathbb{B}} = \left(\|\phi\|_{H_1}^2 + \|r\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Soit $\widehat{\mathbb{B}}$ le sous espace des fonctions $\widehat{Y} = (v, z)$ dans $\widehat{H}_1 \times H^{-1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C})$ ayant la propriété suivante

$$v(\xi) + \frac{\beta(\xi)}{2} D(\xi) \frac{\partial v}{\partial n}(\xi) = z(\xi), \quad \forall \xi \in \partial\Omega. \quad (4.7.5)$$

Le sous espace $\widehat{\mathbb{B}}$ est muni du produit scalaire et d'une norme associée, induite par l'espace de Hilbert $\widehat{H}_1 \times H^{-1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C})$. La norme de $\widehat{Y} = (v, z) \in \widehat{\mathbb{B}}$ dans l'espace $\widehat{\mathbb{B}}$ est donnée par

$$\|\widehat{Y}\|_{\widehat{\mathbb{B}}} = \left(\|v\|_{\widehat{H}_1}^2 + \|z\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C})}^2 \right)^{1/2}.$$

Il est clair que les sous espaces \mathbb{B} et $\widehat{\mathbb{B}}$ sont respectivement fermés dans $H_1 \times H^{-1/2}(\partial\Omega)$ et $\widehat{H}_1 \times H^{-1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C})$. Les sous espaces $(\mathbb{B}, \|\cdot\|_{\mathbb{B}})$ et $(\widehat{\mathbb{B}}, \|\cdot\|_{\widehat{\mathbb{B}}})$ sont des espaces de Hilbert. On définit l'opérateur non-linéaire Λ par

$$\begin{aligned} \Lambda : L^\infty(\Omega)^3 &\longrightarrow \mathcal{L}(L_2 \times H^{1/2}(\partial\Omega); \mathbb{B}), \\ \mathbf{s} &\longmapsto \Lambda_{\mathbf{s}}. \end{aligned} \quad (4.7.6)$$

Pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$, on définit l'application linéaire Dirichlet-to-Neumann (DtN) relative à $\mathbf{s} = (\nu, D, \mu_a)$ par

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mathbf{s}} : L_2 \times H^{1/2}(\partial\Omega) &\longrightarrow H_1 \times H^{-1/2}(\partial\Omega), \\ (f(\cdot, t), g(\cdot, t)) &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ D(\cdot) \frac{\partial \phi[\mathbf{s}]}{\partial n}(\cdot, t)|_{\partial\Omega} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.7.7)$$

En utilisant les conditions non homogènes de Robin aux bords (1.5.6), la relation du flux (1.4.7) et (4.7.7), on obtient

$$\Lambda_{\mathbf{s}}(f(\cdot, t), g(\cdot, t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\gamma(\cdot)(g(\cdot, t) - \phi[\mathbf{s}](\cdot, t))|_{\partial\Omega} \end{pmatrix}. \quad (4.7.8)$$

4.7.3 Continuité de l'application Dirichlet-to-Neumann (DtN)

On définit l'opérateur non-linéaire $\widehat{\Lambda}$ par

$$\begin{aligned} \widehat{\Lambda} : L^\infty(\Omega)^3 &\longrightarrow \mathcal{L}(\widehat{L}_2 \times H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C}); \widehat{\mathbb{B}}), \\ \mathbf{s} &\longmapsto \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}}. \end{aligned} \quad (4.7.9)$$

Pour $\omega \in \mathbb{R}$ une fréquence fixée, on définit l'application linéaire de Dirichlet-to-Neumann (DtN) dans le domaine fréquentiel $\widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}}$ relative à $\mathbf{s} = (\nu, D, \mu_a)$ par

$$\begin{aligned} \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}} : \widehat{L}_2 \times H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C}) &\longrightarrow \widehat{\mathbb{B}}, \\ (F(\cdot, \omega), G(\cdot, \omega)) &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ D(\cdot) \frac{\partial u[\mathbf{s}]}{\partial n}(\cdot, \omega)|_{\partial\Omega} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.7.10)$$

où $u[\mathbf{s}]$ est la solution du problème (4.7.1)-(4.7.2).

Alors, en utilisant les conditions aux bords (4.7.2), (4.7.10) et l'Item e) de la proposition 4.3.1, on obtient

$$\widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}}(F(\cdot, \omega), G(\cdot, \omega)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\gamma(\cdot)(G(\cdot, \omega) - u[\mathbf{s}])(\cdot, \omega)|_{\partial\Omega} \end{pmatrix}. \quad (4.7.11)$$

L'application linéaire $\widehat{\Lambda}_s$ est un opérateur DtN analogue à l'opérateur linéaire Λ_s donné dans (4.7.7). Il décrit la loi du flux courant de la propriété e) de la proposition 4.3.1 dans le domaine fréquentiel.

Proposition 4.7.1. *Pour une fréquence fixée $\omega \in \mathbb{R}$, l'application linéaire $\widehat{\Lambda}_s$ est caractérisée par*

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\Lambda}_s(F(\cdot, \omega), G(\cdot, \omega)), (v, z) \rangle &= \int_{\Omega} D(x) \nabla u(x, \omega) \overline{\nabla v(x)} dx + \int_{\Omega} \left(\mu_a(x) + i \frac{\omega}{c_0} \nu(x) \right) u(x, \omega) \overline{v(x)} dx \\ &\quad - \int_{\Omega} F(x, \omega) \overline{v(x)} dx + \int_{\partial\Omega} D(\xi) (G(\xi, \omega) - u(\xi, \omega)) \frac{\partial v}{\partial n}(\xi) d\sigma(\xi), \end{aligned} \quad (4.7.12)$$

pour tout $(v, z) \in \widehat{\mathbb{B}}$ et pour des fonctions sources $F(\cdot, \omega)$ et $G(\cdot, \omega)$ et pour tout $z \in H^{-1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C})$, où $u(\cdot, \omega) \in \widehat{H}_2$ est la solution du problème direct (4.7.1) – (4.7.2) relativement aux fonctions sources $F(\cdot, \omega)$ et $G(\cdot, \omega)$.

Démonstration. Pour une fréquence fixée ω , on a

$$\langle \widehat{\Lambda}_s(F(\cdot, \omega), G(\cdot, \omega)), (v, z) \rangle = \int_{\partial\Omega} D(\xi) \frac{\partial u}{\partial n}(\xi, \omega) \overline{z(\xi)} d\sigma(\xi).$$

Les conditions aux bords (4.7.5) implique l'égalité suivante

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\Lambda}_s(F(\cdot, \omega), G(\cdot, \omega)), (v, z) \rangle &= \int_{\partial\Omega} D(\xi) \frac{\partial u}{\partial n}(\xi, \omega) \left(\overline{v(\xi)} + \frac{\beta(\xi)}{2} D(\xi) \frac{\partial v}{\partial n}(\xi) \right) d\sigma(\xi) \\ &= \int_{\partial\Omega} D(\xi) \frac{\partial u}{\partial n}(\xi, \omega) \overline{v(\xi)} d\sigma(\xi) + \int_{\partial\Omega} D(\xi) \frac{\partial u}{\partial n}(\xi, \omega) \frac{\beta(\xi)}{2} D(\xi) \frac{\partial v}{\partial n}(\xi) d\sigma(\xi). \end{aligned} \quad (4.7.13)$$

D'après la formulation variationnelle (3.5.1) on a

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} D(\xi) \frac{\partial u}{\partial n}(\xi, \omega) \overline{v(\xi)} d\sigma(\xi) &= \int_{\Omega} D(x) \nabla u(x, \omega) \overline{\nabla v(x)} dx - \int_{\Omega} F(x, \omega) \overline{v(x)} dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \left(\mu_a(x) + i \frac{\omega}{c_0} \nu(x) \right) u(x, \omega) \overline{v(x)} dx. \end{aligned} \quad (4.7.14)$$

En utilisant les conditions aux bords correspondantes à la solution $u(\cdot, \omega)$, on trouve

$$\int_{\partial\Omega} D(\xi) \frac{\partial u}{\partial n}(\xi, \omega) \frac{\beta(\xi)}{2} D(\xi) \frac{\partial v}{\partial n}(\xi) d\sigma(\xi) = \int_{\partial\Omega} D(\xi) (G(\xi, \omega) - u(\xi, \omega)) \frac{\partial v}{\partial n}(\xi) d\sigma(\xi). \quad (4.7.15)$$

Par substitution des identités (4.7.14) et (4.7.15) dans (4.7.13), on obtient les résultats du (4.7.12). \square

Le problème inverse non-linéaire est donné en utilisant la loi du flux courant et la caractérisation de l'application non-linéaire (DtN) correspondante aux ν , μ_a et D par l'opérateur de mesures Λ_s . L'application Λ_s est l'opérateur de mesures du flux sortant qui est donné par la dérivation dans la direction de la normale sortante aux points $\xi \in \Omega$. Nous utiliserons les notations suivantes :

- i) L'espace des opérateurs linéaires et continus de $H^2(\mathbb{R}, L_2) \times H^2(\mathbb{R}, H^{1/2}(\partial\Omega))$ dans $H^2(\mathbb{R}, L_2) \times H^2(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\partial\Omega))$, défini par

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}\left(H^2(\mathbb{R}, L_2) \times H^2(\mathbb{R}, H^{1/2}(\partial\Omega)), H^2(\mathbb{R}, L_2) \times H^2(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\partial\Omega))\right).$$

L'espace \mathcal{L}_2 muni de la norme notée par $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_2}$ est un espace de Banach.

- ii) L'espace des opérateurs linéaires et continus de $H^2(\mathbb{R}, \widehat{L}_2) \times H^2(\mathbb{R}, H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C}))$ dans $H^2(\mathbb{R}, \widehat{L}_2) \times H^2(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C}))$ défini par

$$\widehat{\mathcal{L}}_2 = \mathcal{L}\left(H^2(\mathbb{R}, \widehat{L}_2) \times H^2(\mathbb{R}, H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C})), H^2(\mathbb{R}, \widehat{L}_2) \times H^2(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C}))\right).$$

L'espace $\widehat{\mathcal{L}}_2$ muni de la norme notée par $\|\cdot\|_{\widehat{\mathcal{L}}_2}$ est un espace de Banach.

Soit $X = (f, g)$ un élément de $H^2(\mathbb{R}, L_2) \times H^2(\mathbb{R}, H^{1/2}(\partial\Omega))$. Pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$ on a $X(t) = (f(\cdot, t), g(\cdot, t))$. La norme de X dans $H^2(\mathbb{R}, L_2) \times H^2(\mathbb{R}, H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{R}))$ est

$$\|X\| = \left(\|f\|_{H^2(\mathbb{R}, L_2)}^2 + \|g\|_{H^2(\mathbb{R}, H^{1/2}(\partial\Omega))}^2\right)^{1/2}.$$

De même, soit $\widehat{X} = (F, G)$ un élément dans l'espace produit $L^2(\mathbb{R}, \widehat{L}_2) \times L^2(\mathbb{R}, H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C}))$. Pour ω dans \mathbb{R} , on a $\widehat{X}(\omega) = (F(\cdot, \omega), G(\cdot, \omega))$. La norme de \widehat{X} dans l'espace $\widehat{L}_2 \times H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C})$ est donnée par

$$\|\widehat{X}\| = \left(\|F\|_{L^2(\mathbb{R}, \widehat{L}_2)}^2 + \|G\|_{L^2(\mathbb{R}, H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C}))}^2\right)^{1/2}.$$

Soit $\widehat{Y} = (v, z)$ un élément de $\widehat{L}_2 \times H^{-1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C})$, la norme de \widehat{Y} dans l'espace $\widehat{L}_2 \times H^{-1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C})$ est donnée par

$$\|\widehat{Y}\| = \left(\|v\|_{\widehat{L}_2}^2 + \|z\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C})}^2\right)^{1/2}.$$

Théorème 4.7.1. Soient $f \in H^2(\mathbb{R}, L_2)$ et $g \in H^2(\mathbb{R}, H^{1/2}(\partial\Omega))$ deux fonctions données. On suppose que $s_1 = (\nu_1, D_1, \mu_{a1})$ et $s_2 = (\nu_2, D_2, \mu_{a2})$ sont deux fonctions dans $(L^\infty(\Omega, \mathbb{R}))^3$ et que les composantes de s_1 et de s_2 satisfassent les conditions (4.7.3). Alors, il existe une constante $C > 0$, indépendante de s_1 et s_2 telle que

- $\|u_2 - u_1\|_{L^2(\mathbb{R}, \widehat{H}_1)} \leq C \left(\|f\|_{H^2(\mathbb{R}, L_2)}^2 + \|g\|_{H^2(\mathbb{R}, H^{1/2}(\partial\Omega))}^2\right)^{1/2} \|s_2 - s_1\|_\infty.$
- $\|\phi_2 - \phi_1\|_{H^1(\mathbb{R}, H_1)} \leq C \left(\|f\|_{H^2(\mathbb{R}, L_2)}^2 + \|g\|_{H^2(\mathbb{R}, H^{1/2}(\partial\Omega))}^2\right)^{1/2} \|s_2 - s_1\|_\infty.$
- $\|\Lambda_{s_2} - \Lambda_{s_1}\|_{\widehat{\mathcal{L}}_2} \leq \left\|\widehat{\Lambda}_{s_2} - \widehat{\Lambda}_{s_1}\right\|_{\widehat{\mathcal{L}}_2} \leq C \|s_2 - s_1\|_\infty.$

Démonstration. Soit ω une fréquence dans \mathbb{R} ,

- On considère $u_2(\cdot, \omega)$ et $u_1(\cdot, \omega)$ deux solutions dans \widehat{H}_1 du problème de diffusion (4.7.1) – (4.7.2) respectivement relatives aux paramètres $s_1 = (\nu_1, D_1, \mu_{a1})$ et $s_2 =$

(ν_2, D_2, μ_{a2}) . La différence $w(\cdot, \omega) = u_2(\cdot, \omega) - u_1(\cdot, \omega)$ est la solution du problème suivant

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(D_2(x)\nabla w(x, \omega)) + \left(\mu_{a2}(x) + i\frac{\omega}{c_0}\nu_2(x)\right)w(x, \omega) &= \operatorname{div}((D_2 - D_1)(x)\nabla u_1(x, \omega)) \\ &- \left((\mu_{a2} - \mu_{a1})(x) + i\frac{\omega}{c_0}(\nu_2 - \nu_1)(x)\right)u_1(x, \omega), \end{aligned} \quad (4.7.16)$$

avec les conditions non homogènes aux bords

$$w(\xi, \omega) + \frac{\beta(\xi)}{2}D_2(\xi)\frac{\partial w}{\partial n}(\xi, \omega) = -\frac{\beta(\xi)}{2}(D_2 - D_1)(\xi)\frac{\partial u_1}{\partial n}(\xi, \omega), \quad \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}. \quad (4.7.17)$$

En multipliant l'équation (4.7.16) par $\overline{w(\cdot, \omega)}$, en intégrant sur Ω par rapport à la variable x et en utilisant les conditions (4.7.17), on obtient la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1(w, w) &= \int_{\Omega} D_2(x)|\nabla w(x, \omega)|^2 dx + \int_{\Omega} \left(\mu_{a2}(x) + i\frac{\omega}{c_0}\nu_2(x)\right)|w(x, \omega)|^2 dx \\ &+ 2 \int_{\partial\Omega} \gamma(\xi)|w(\xi, \omega)|^2 d\sigma(\xi) = - \int_{\Omega} (D_2 - D_1)(x)\nabla u_1(x, \omega)\overline{\nabla w(x, \omega)} dx \\ &- \int_{\Omega} \left((\mu_{a2} - \mu_{a1}) + i\frac{\omega}{c_0}(\nu_2 - \nu_1)\right)(x)u_1(x, \omega)\overline{w(x, \omega)} dx. \end{aligned}$$

On a la majoration

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_1(w, w)| &\leq \|D_2 - D_1\|_{\infty} \int_{\Omega} |\nabla u_1(x, \omega)| |\nabla w(x, \omega)| dx \\ &+ (\|\mu_{a2} - \mu_{a1}\|_{\infty} + \|\nu_2 - \nu_1\|_{\infty}) \sqrt{1 + \omega^2} \int_{\Omega} |u_1(x, \omega)| |w(x, \omega)| dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $t_1 t_2 + t_3 t_4 \leq (t_1 + t_3)(t_2 + t_4)$ pour des nombres réels positives $t_i (i = 1, \dots, 4)$, on prouve qu'il existe une constante $C_1 > 0$ indépendante de ω telle que

$$|\mathcal{B}_1(w, w)| \leq C_1 \|s_2 - s_1\|_{\infty} \sqrt{1 + \omega^2} \int_{\Omega} (|\nabla u_1(\xi, \omega)| + |u_1(x, \omega)|) (|\nabla w(x, \omega)| + |w(x, \omega)|) dx.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|\mathcal{B}_1(w, w)| \leq 2C_1 \|s_2 - s_1\|_{\infty} \sqrt{1 + \omega^2} \|u_1(\cdot, \omega)\|_{\mathbb{H}_1} \|w(\cdot, \omega)\|_{\mathbb{H}_1}. \quad (4.7.18)$$

On a aussi

$$|\mathcal{B}_1(w, w)| \geq \operatorname{Re}(\mathcal{B}_1(w, w)),$$

avec

$$\operatorname{Re}(\mathcal{B}_1(w, w)) = \int_{\Omega} D_2(x)|\nabla w(x, \omega)|^2 dx + \int_{\Omega} \mu_{a2}(x)|w(x, \omega)|^2 dx + 2 \int_{\partial\Omega} \gamma(\xi)|w(\xi, \omega)|^2 d\sigma(\xi).$$

On a la minoration

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_1(w, w)| &\geq \int_{\Omega} D_2(x)|\nabla w(x, \omega)|^2 dx + \int_{\Omega} \mu_{a2}(x)|w(x, \omega)|^2 dx + 2 \int_{\partial\Omega} \gamma(\xi)|w(\xi, \omega)|^2 d\sigma(\xi) \\ &\geq \alpha \|w(\cdot, \omega)\|_{\mathbb{H}_1}^2, \end{aligned} \quad (4.7.19)$$

où α est la constante liée à la condition (4.7.3).

D'après (4.7.18) et (4.7.19), on montre que

$$\alpha \|w(\cdot, \omega)\|_{\hat{H}_1}^2 \leq 2C_1 \|s_2 - s_1\|_\infty \sqrt{1 + \omega^2} \|u_1(\cdot, \omega)\|_{\hat{H}_1} \|w(\cdot, \omega)\|_{\hat{H}_1}. \quad (4.7.20)$$

En combinant les inégalités (2.3.16) du théorème 2.3.1 et (4.7.20) pour prouver l'inégalité suivante

$$\|w(\cdot, \omega)\|_{\hat{H}_1} \leq \frac{2C_0 C_1}{\alpha^2} \|s_2 - s_1\|_\infty \sqrt{1 + \omega^2} M(\omega),$$

où C_0 est la constante positive qui apparaît dans l'expression de $M(\omega)$ donnée en (2.3.13) et (2.3.16). D'où, en utilisant l'inégalité $(t_1 + t_2)^2 \leq 2(t_1^2 + t_2^2)$ pour des nombres réels $t_i (i = 1, 2)$, on obtient

$$\begin{aligned} \|u_2(\cdot, \omega) - u_1(\cdot, \omega)\|_{\hat{H}_1}^2 &\leq 2 \left(\frac{2C_0 C_1}{\alpha^2} \right)^2 \|s_2 - s_1\|_\infty^2 (1 + \omega^2) \\ &\quad \times \left(\|F(\cdot, \omega)\|_{L_2}^2 + \|G(\cdot, \omega)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C})}^2 \right). \end{aligned} \quad (4.7.21)$$

Pour achever la démonstration de l'Item a), on intègre l'inégalité (4.7.21) sur \mathbb{R} par rapport à la variable ω en tenant compte des normes (0.0.9), (0.0.11) et (0.0.13).

b) En multipliant l'inégalité (4.7.21) par la fonction poids $\omega \rightarrow 1 + \omega^2$ et en intégrant sur \mathbb{R} par rapport à la variable ω , on obtient

$$\|\phi_2 - \phi_1\|_{H^1(\mathbb{R}, H_1)} \leq C_2 \left(\|f\|_{H^2(\mathbb{R}, L_2)}^2 + \|g\|_{H^2(\mathbb{R}, H^{1/2}(\partial\Omega))}^2 \right)^{1/2} \|s_2 - s_1\|_\infty.$$

Ce qui prouve l'Item b).

c) Comme dans l'Item a), on considère $u_2(\cdot, \omega)$ et $u_1(\cdot, \omega)$ deux solutions dans \hat{H}_1 du problème de diffusion (4.7.1) – (4.7.2) relatives respectivement aux paramètres s_1 et s_2 . On a

$$\begin{aligned} \langle (\Lambda_{s_2} - \Lambda_{s_1}) \hat{X}(\omega), \hat{Y} \rangle &= \int_{\Omega} (D_2 - D_1)(x) \nabla u_2(x, \omega) \overline{\nabla v(x, \omega)} dx + \int_{\Omega} (\mu_{a2} - \mu_{a1})(x) u_2(x, \omega) \\ &\quad \overline{v(x, \omega)} dx + i \frac{\omega}{c_0} \int_{\Omega} (\nu_2 - \nu_1)(x) u_2(x, \omega) \overline{v(x, \omega)} dx + \int_{\Omega} D_1(x) \nabla (u_2 - u_1)(x, \omega) \overline{\nabla v(x, \omega)} dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \mu_{a1}(x) (u_2 - u_1)(x, \omega) \overline{v(x, \omega)} dx + i \frac{\omega}{c_0} \int_{\Omega} \nu_1(x) (u_2 - u_1)(x, \omega) \overline{v(x, \omega)} dx \\ &+ \int_{\partial\Omega} D_1(\xi) (u_2 - u_1)(\xi, \omega) \overline{v(\xi, \omega)} d\sigma(\xi) + \int_{\partial\Omega} (D_2(\xi) - D_1(\xi)) (G - u_2)(\xi, \omega) \overline{v(\xi, \omega)} d\sigma(\xi). \end{aligned}$$

D'après le théorème de trace et l'inégalité (2.3.13), il existe une constante $C_1 > 0$ ne dépendant pas de ω telle que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Omega} D_1(\xi) (u_2 - u_1)(\xi, \omega) \overline{v(\xi, \omega)} d\sigma(\xi) \right| &\leq C_1 \|D_1\|_\infty \| (u_2 - u_1)(\cdot, \omega) \|_{\hat{H}_1} \|v\|_{\hat{H}_1}, \\ \left| \int_{\partial\Omega} (D_2(\xi) - D_1(\xi)) (G - u_2)(\xi, \omega) \overline{v(\xi, \omega)} d\sigma(\xi) \right| &\leq C_1 \|D_2 - D_1\|_\infty \\ &\quad \times \left(\|u_2(\cdot, \omega)\|_{\hat{H}_1} + \|G(\cdot, \omega)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C})} \right) \|v\|_{\hat{H}_1}. \end{aligned}$$

On obtient la majoration suivante

$$\begin{aligned} |\langle \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_2} - \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_1} \widehat{X}(\omega), \widehat{Y} \rangle| &\leq \|D_2 - D_1\|_\infty \int_\Omega |\nabla u_2(x, \omega)| |\nabla v(x)| dx + \|\mu_{a2} - \mu_{a1}\|_\infty \int_\Omega |u_2(x, \omega)| |v(x)| dx \\ &+ \sqrt{1 + \omega^2} \|\nu_2 - \nu_1\|_\infty \int_\Omega |u_2(x, \omega)| |v(x)| dx + \|D_1\|_\infty \int_\Omega |\nabla(u_2 - u_1)(x, \omega)| |\nabla v(x)| dx \\ &+ \|\mu_{a1}\|_\infty \int_\Omega |(u_2 - u_1)(x, \omega)| |v(x)| dx + \sqrt{1 + \omega^2} \|\nu_1\|_\infty \int_\Omega |(u_2 - u_1)(x, \omega)| |v(x)| dx \\ &+ C_1 \|D_1\|_\infty \|(u_2 - u_1)(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} \|v\|_{\widehat{H}_1} + C_1 \|D_2 - D_1\|_\infty \left(\|u_2(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} + \|G(\cdot, \omega)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C})} \right) \|v\|_{\widehat{H}_1}. \end{aligned}$$

Comme ν , D et μ_a sont dans $L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, alors il existe une constante $\varrho > 0$ telle que $\varrho \geq \max\{\|\nu\|_\infty, \|D\|_\infty, \|\mu_a\|_\infty\}$. Alors, en utilisant la norme (0.0.14) on obtient

$$\begin{aligned} |\langle \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_2} - \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_1} \widehat{X}(\omega), \widehat{Y} \rangle| &\leq \sqrt{1 + \omega^2} \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1\|_\infty \int_\Omega (|\nabla u_2(x, \omega)| |\nabla v(x)| + |u_2(x, \omega)| |v(x)|) dx \\ &+ \varrho \sqrt{1 + \omega^2} \int_\Omega (|\nabla(u_2 - u_1)(x, \omega)| |\nabla v(x)| + |(u_2 - u_1)(x, \omega)| |v(x)|) dx \\ &+ C_1 \varrho \|(u_2 - u_1)(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} \|v\|_{\widehat{H}_1} + C_1 \|D_2 - D_1\|_\infty \|u_2(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} \|v\|_{\widehat{H}_1} \\ &+ C_1 \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1\|_\infty \sqrt{1 + \omega^2} \left(\|F(\cdot, \omega)\|_{\widehat{L}_2} + \|G(\cdot, \omega)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C})} \right) \|v\|_{\widehat{H}_1}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $t_1 t_2 + t_3 t_4 \leq (t_1 + t_3)(t_2 + t_4)$ pour des nombres réels positifs $t_i (i = 1, \dots, 4)$, on a

$$\begin{aligned} |\langle \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_2} - \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_1} \widehat{X}(\omega), \widehat{Y} \rangle| &\leq \sqrt{1 + \omega^2} \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1\|_\infty \int_\Omega (|\nabla u_2(x, \omega)| + |u_2(x, \omega)|) (|\nabla v(x)| + |v(x)|) dx \\ &+ \varrho \sqrt{1 + \omega^2} \int_\Omega (|\nabla(u_2 - u_1)(x, \omega)| + |(u_2 - u_1)(x, \omega)|) (|\nabla v(x)| + |v(x)|) dx \\ &+ C_1 \varrho \sqrt{1 + \omega^2} \|(u_2 - u_1)(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} \|v\|_{\widehat{H}_1} + C_1 \sqrt{1 + \omega^2} \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1\|_\infty \|u_2(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} \|v\|_{\widehat{H}_1} \\ &+ C_1 \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1\|_\infty \sqrt{1 + \omega^2} \left(\|F(\cdot, \omega)\|_{\widehat{L}_2} + \|G(\cdot, \omega)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C})} \right) \|v\|_{\widehat{H}_1}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} |\langle \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_2} - \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_1} \widehat{X}(\omega), \widehat{Y} \rangle| &\leq (2 + C_1) \sqrt{1 + \omega^2} \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1\|_\infty \|u_2(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} \|v\|_{\widehat{H}_1} \\ &+ \varrho (2 + C_1) \sqrt{1 + \omega^2} \|(u_2 - u_1)(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} \|v\|_{\widehat{H}_1} + \\ &C_1 \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1\|_\infty \sqrt{1 + \omega^2} \left(\|F(\cdot, \omega)\|_{\widehat{L}_2} + \|G(\cdot, \omega)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C})} \right) \|v\|_{\widehat{H}_1}. \end{aligned}$$

On pose $C_2 = 2 + C_1$, on obtient

$$\begin{aligned} |\langle \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_2} - \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_1} \widehat{X}(\omega), \widehat{Y} \rangle| &\leq C_2 \sqrt{1 + \omega^2} \|v\|_{\widehat{H}_1} \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1\|_\infty \|u_2(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} + \|(u_2 - u_1)(\cdot, \omega)\|_{\widehat{H}_1} \\ &+ C_2 \sqrt{1 + \omega^2} \|v\|_{\widehat{H}_1} \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1\|_\infty \left(\|F(\cdot, \omega)\|_{\widehat{L}_2} + \|G(\cdot, \omega)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C})} \right). \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités (2.3.13) et (2.3.16) et l'inégalité (4.7.21) de l'Item a), alors il existe une constante $C_3 > 0$ indépendante de ω telle que

$$\begin{aligned} |\langle \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_2} - \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_1} \widehat{X}(\omega), \widehat{Y} \rangle| &\leq C_3 (1 + \omega^2) \|v\|_{\widehat{H}_1} \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1\|_\infty \left(\|F(\cdot, \omega)\|_{\widehat{L}_2} + \|G(\cdot, \omega)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C})} \right) \\ &\leq C_3 (1 + \omega^2) \left(\|F(\cdot, \omega)\|_{\widehat{L}_2} + \|G(\cdot, \omega)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C})} \right) \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1\|_\infty \|\widehat{Y}\|_{\widehat{\mathbb{H}}}. \end{aligned}$$

Comme

$$\left\| (\widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_2} - \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_1}) \widehat{X}(\omega) \right\|_{\widehat{\mathcal{L}}_2} = \sup_{\|\widehat{Y}\|_{\widehat{\mathbb{B}}}=1} |\langle (\widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_2} - \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_1}) \widehat{X}(\omega), \widehat{Y} \rangle|,$$

alors,

$$\left\| (\widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_2} - \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_1}) \widehat{X}(\omega) \right\|_{\widehat{\mathcal{L}}_2} \leq C_3 \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1\|_{\infty} (1 + \omega^2) \left(\|F(\cdot, \omega)\|_{\widehat{\mathcal{L}}_2} + \|G(\cdot, \omega)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C})} \right).$$

En utilisant l'inégalité $(t_1 + t_2)^2 \leq 2(t_1^2 + t_2^2)$ pour des nombres réels $t_i (i = 1, 2)$, on obtient

$$\left\| (\widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_2} - \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_1}) \widehat{X}(\omega) \right\|_{\widehat{\mathcal{L}}_2}^2 \leq 2C_3^2 (1 + \omega^2)^2 \left(\|F(\cdot, \omega)\|_{\widehat{\mathcal{L}}_2}^2 + \|G(\cdot, \omega)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C})}^2 \right) \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1\|_{\infty}^2. \quad (4.7.22)$$

En intégrant l'inégalité (4.7.22) sur \mathbb{R} par rapport à la variable ω , alors on a

$$\left\| (\widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_2} - \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_1}) \widehat{X} \right\|_{\widehat{\mathcal{L}}_2 \times H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C})} \leq C_3 \sqrt{2} \left(\|f\|_{H^2(\mathbb{R}, L_2)}^2 + \|g\|_{H^2(\mathbb{R}, H^{1/2}(\partial\Omega))}^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1\|_{\infty}.$$

D'après l'identité de Parseval, on obtient

$$\begin{aligned} \|(\Lambda_{\mathbf{s}_2} - \Lambda_{\mathbf{s}_1})X\|_{L_2 \times H^{1/2}(\partial\Omega)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\| (\widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_2} - \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}_1}) \widehat{X} \right\|_{\widehat{\mathcal{L}}_2 \times H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C})} \\ &\leq C_3 \sqrt{\frac{2}{2\pi}} \|X\| \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1\|_{\infty}. \end{aligned} \quad (4.7.23)$$

Enfin, il existe une constante $C = \frac{C_3}{\sqrt{\pi}}$ telle que

$$\|\Lambda_{\mathbf{s}_1} - \Lambda_{\mathbf{s}_2}\|_{\mathcal{L}_2} = \sup_{\|X\|=1} \|(\Lambda_{\mathbf{s}_2} - \Lambda_{\mathbf{s}_1})X\|_{L_2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} \leq C \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1\|_{\infty}. \quad (4.7.24)$$

Ce qui achève la démonstration de l'Item c). □

4.7.4 Dérivées de Fréchet et problème adjoint

On considère les paramètres $\hat{\mathbf{s}} = (\nu_0, D_0, \mu_{a0})$, $h = (h_1, h_2, h_3)$ et $\mathbf{s} = (\nu, D, \mu_a)$ tels que $\mathbf{s} = \hat{\mathbf{s}} + h$. Soient u et u_0 respectivement les solutions exactes du problème de diffusion direct (4.7.1)-(4.7.2) relatives aux paramètres \mathbf{s} et $\hat{\mathbf{s}}$, pour des fonctions sources $\widehat{X}(\omega) = (F(\cdot, \omega), G(\cdot, \omega))$. On pose $w = u - u_0$ alors $w \in \widehat{H}_2 \subset \widehat{H}_1$. Soient ϕ et ϕ_0 respectivement les solutions exactes de (2.3.1)-(2.3.2) relatives aux paramètres \mathbf{s} et $\hat{\mathbf{s}}$, pour des fonctions sources $X(t) = (f(\cdot, t), g(\cdot, t))$. On pose $\psi = \phi - \phi_0$, alors $\psi \in H_2 \subset H_1$.

Soient $Y = (\varphi, r)$ et $\widehat{Y} = (v, z)$ respectivement deux éléments dans \mathbb{B} et $\widehat{\mathbb{B}}$. On considère les applications linéaires $\Upsilon_{\mathbf{s}} : L^\infty(\Omega, \mathbb{R})^3 \rightarrow \mathcal{L}(L_2 \times H^{1/2}(\partial\Omega), \mathbb{B})$ et $\widehat{\Upsilon}_{\hat{\mathbf{s}}} : L^\infty(\Omega, \mathbb{R})^3 \rightarrow \mathcal{L}(\widehat{L}_2 \times H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C}), \widehat{\mathbb{B}})$ données respectivement par

$$\langle (\Upsilon_{\mathbf{s}} h) X(t), Y \rangle = \int_{\partial\Omega} \left(D(\xi) \frac{\partial \psi[\mathbf{s}]}{\partial \mathbf{n}}(\xi, t) + h_2(\xi) \frac{\partial \phi_0[\hat{\mathbf{s}}]}{\partial \mathbf{n}}(\xi, t) \right) r(\xi) d\sigma(\xi). \quad (4.7.25)$$

et

$$\langle (\widehat{\Upsilon}_s h) \widehat{X}(\omega), \widehat{Y} \rangle = \int_{\partial\Omega} \left(D(\xi) \frac{\partial w[s]}{\partial n}(\xi, \omega) + h_2(\xi) \frac{\partial u_0[s]}{\partial n}(\xi, \omega) \right) \overline{z(\xi)} d\sigma(\xi). \quad (4.7.26)$$

On a l'expression équivalente

$$\begin{aligned} \langle (\widehat{\Upsilon}_s h) \widehat{X}(\omega), \widehat{Y} \rangle &= \int_{\Omega} D(x) \nabla w(x, \omega) \overline{\nabla v(x)} dx + \int_{\Omega} \left(\mu_a(x) + i \frac{\omega}{c_0} \nu(x) \right) w(x, \omega) \overline{v(x)} dx \\ &+ \frac{i\omega}{c_0} \int_{\Omega} h_1(x) u_0(x, \omega) \overline{v(x)} dx + \int_{\Omega} h_2(x) \nabla u_0(x, \omega) \overline{\nabla v(x)} dx \\ &+ \int_{\Omega} h_3(x) u_0(x, \omega) \overline{v(x)} dx - \int_{\partial\Omega} D(\xi) w(\xi, \omega) \frac{\overline{v(\xi)}}{\partial n} d\sigma(\xi). \end{aligned}$$

On note que $w = u - u_0 \in \widehat{H}_2$ est la solution de l'équation de diffusion non homogène

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(D(x) \nabla w(x, \omega)) + \left(\mu_a(x) + \frac{i\omega}{c_0} \nu(x) \right) w(x, \omega) = \\ -\frac{i\omega}{c_0} h_1(x) u_0(x, \omega) + \operatorname{div}(h_2(x) \nabla u_0(x, \omega)) - h_3(x) u_0(x, \omega), \quad (4.7.27) \end{aligned}$$

avec les conditions non homogènes aux bords

$$w(\xi, \omega) + \frac{\beta(\xi)}{2} D(\xi) \frac{\partial w}{\partial n}(\xi, \omega) = -\frac{\beta(\xi)}{2} h_2(\xi) \frac{\partial u_0}{\partial n}(\xi, \omega), \quad \forall \xi \in \partial\Omega. \quad (4.7.28)$$

Théorème 4.7.2. Soit ω une fréquence dans \mathbb{R} . On suppose que $X = (f, g)$ est un élément de $H^2(\mathbb{R}, L_2) \times H^2(\mathbb{R}, L^2(\partial\Omega))$, avec les notations et les hypothèses de la proposition 4.7.1 et du théorème 4.7.1. Alors, il existe une constante $C > 0$ indépendante de ω telle que

$$a) \left\| \left(\widehat{\Lambda}_s - \widehat{\Lambda}_{\hat{s}} - \widehat{\Upsilon}_{\hat{s}} h \right) \widehat{X}(\omega) \right\|_{\widehat{L}_2 \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}} \leq C \|h\|_{\infty} \sqrt{1 + \omega^2} \| (u - u_0)(\cdot, \omega) \|_{\widehat{H}_1}.$$

$$b) \|\Lambda_s - \Lambda_{\hat{s}} - \Upsilon_{\hat{s}} h\|_{\mathcal{L}_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\| \widehat{\Lambda}_s - \widehat{\Lambda}_{\hat{s}} - \widehat{\Upsilon}_{\hat{s}} h \right\|_{\widehat{\mathcal{L}}_2} \leq \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \|h\|_{\infty}^2.$$

De plus, $\widehat{\Upsilon}_{\hat{s}} := \widehat{\Lambda}'_{\hat{s}}$ est la dérivée de Fréchet, au point $\hat{s} = (\nu_0, D_0, \mu_{a0})$, de $\widehat{\Lambda}_s$ par rapport à la variable $s = (\nu, D, \mu_a)$.

c) Les dérivées $\widehat{\Lambda}'_{\hat{s}}$ et $\Lambda'_{\hat{s}}$ sont Lipschitziennes,

$$\|\Lambda'_{\hat{s}} - \Lambda'_{\hat{s}}\|_{\mathcal{L}_2} \leq C \sqrt{\frac{2}{\pi}} \|s - \hat{s}\|_{\infty} \quad \text{et} \quad \|\widehat{\Lambda}'_{\hat{s}} - \widehat{\Lambda}'_{\hat{s}}\|_{\widehat{\mathcal{L}}_2} \leq 2C \|s - \hat{s}\|_{\infty}.$$

Démonstration. Soit ω une fréquence dans \mathbb{R} .

a) On a

$$\begin{aligned} \langle \left(\widehat{\Lambda}_s - \widehat{\Lambda}_{\hat{s}} - \widehat{\Upsilon}_{\hat{s}} h \right) \widehat{X}(\omega), (v, z) \rangle &= - \int_{\Omega} \left(h_3(x) + \frac{i\omega}{c_0} h_1(x) \right) (u - u_0)(x, \omega) \overline{v(x)} dx \\ &- \int_{\Omega} h_2(x) \nabla (u - u_0)(x, \omega) \overline{\nabla v(x)} dx - \int_{\partial\Omega} h_2(\xi) \left(u - u_0 - \frac{\beta}{2} D \frac{\partial u_0}{\partial n} \right) (\xi, \omega) \frac{\overline{\partial v(\xi, \omega)}}{\partial n} d\sigma(\xi). \end{aligned}$$

Soit $\tilde{v}(\xi, \omega) = \frac{\beta(\xi)}{2} D(\xi) \frac{\partial u_0}{\partial n}(\xi, \omega)$ pour tout $\xi \in \partial\Omega$. En utilisant des arguments similaires à ceux de la démonstration du théorème 4.7.1, on trouve l'inégalité

$$\begin{aligned} \left| \langle (\hat{\Lambda}_s - \hat{\Lambda}_{\hat{s}} - \hat{\Upsilon}_{\hat{s}} h) \hat{X}(\omega), \hat{Y} \rangle \right| &\leq \|h\|_\infty \sqrt{1 + \omega^2} \int_{\Omega} (|\nabla(u - u_0)(x, \omega)| + |(u - u_0)(x, \omega)|) \\ &\quad \times (|\nabla v(x)| + |v(x)|) dx + \|h_2\|_\infty \int_{\partial\Omega} |(u - u_0 - \tilde{v})(\xi, \omega)| \left| \frac{\partial v(\xi, \omega)}{\partial n} \right| d\sigma(\xi). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en tenant compte de l'inégalité de trace (2.3.12) (c.f. annexe B, le théorème de trace), il existe une constante $C_1 > 0$ indépendante de ω telle que

$$\begin{aligned} \left| \langle (\hat{\Lambda}_s - \hat{\Lambda}_{\hat{s}} - \hat{\Upsilon}_{\hat{s}} h) \hat{X}(\omega), \hat{Y} \rangle \right| &\leq 2\|h\|_\infty \sqrt{1 + \omega^2} \|(u - u_0)(\cdot, \omega)\|_{\hat{H}_1} \|\hat{v}\|_{\hat{H}_1} \\ &\quad + C_1 \|h\|_\infty \|(u_0 - u - \tilde{v})(\cdot, \omega)\|_{\hat{H}_1} \|\hat{v}\|_{\hat{H}_1}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Sobolev, alors il existe une constante $C_2 > 0$ indépendante de ω , s et \hat{s} telle que

$$\alpha \|u_0 - u - \tilde{v}(\cdot, \omega)\|_{\hat{H}_1} \leq 2C_2 \varrho \sqrt{1 + \omega^2} \|(u - u_0)(\cdot, \omega)\|_{\hat{H}_1}, \quad (4.7.29)$$

où $\|h\|_\infty \leq \varrho$. On a alors

$$\left| \langle (\hat{\Lambda}_s - \hat{\Lambda}_{\hat{s}} - \hat{\Upsilon}_{\hat{s}} h) \hat{X}(\omega), \hat{Y} \rangle \right| \leq C_3 \|h\|_\infty \sqrt{1 + \omega^2} \|(u - u_0)(\cdot, \omega)\|_{\hat{H}_1} \|\hat{Y}\|_{\mathbb{B}},$$

où $C_3 = 2 \max\left(1, \frac{C_1 C_2 \varrho}{\alpha}\right)$ est indépendante de ω , s et \hat{s} .

Comme

$$\left\| (\hat{\Lambda}_s - \hat{\Lambda}_{\hat{s}} - \hat{\Upsilon}_{\hat{s}} h) \hat{X}(\omega) \right\|_{\hat{L}_2 \times H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C})} = \sup_{\|\hat{Y}\|_{\mathbb{B}}=1} \left| \langle (\hat{\Lambda}_s - \hat{\Lambda}_{\hat{s}} - \hat{\Upsilon}_{\hat{s}} h) \hat{X}(\omega), \hat{Y} \rangle \right|,$$

alors on obtient

$$\left\| (\hat{\Lambda}_s - \hat{\Lambda}_{\hat{s}} - \hat{\Upsilon}_{\hat{s}} h) \hat{X}(\omega) \right\|_{\hat{L}_2 \times H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C})} \leq C_3 \|h\|_\infty \sqrt{1 + \omega^2} \|(u - u_0)(\cdot, \omega)\|_{\hat{H}_1},$$

Ce qui conclut la démonstration de l'Item a).

b) En utilisant l'inégalité (4.7.21), on obtient

$$\left\| (\hat{\Lambda}_s - \hat{\Lambda}_{\hat{s}} - \hat{\Upsilon}_{\hat{s}} h) \hat{X}(\omega) \right\|_{\hat{L}_2 \times H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C})}^2 \leq C^2 \|h\|_\infty^4 (1 + \omega^2)^2 \left(\|F(\cdot, \omega)\|_{\hat{L}_2}^2 + \|G(\cdot, \omega)\|_{\hat{L}_2(\partial\Omega, \mathbb{C})}^2 \right),$$

où $C^2 = 3C_3^2 \left(\frac{2C_0 C_1}{\alpha^2}\right)^2$.

En intégrant sur \mathbb{R} par rapport à la variable ω et en utilisant l'identité de Parseval on obtient

$$\begin{aligned} \|(\Lambda_s - \Lambda_{\hat{s}} - \Upsilon_{\hat{s}} h) X\|_{\mathbb{B}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\| (\hat{\Lambda}_s - \hat{\Lambda}_{\hat{s}} - \hat{\Upsilon}_{\hat{s}} h) \hat{X} \right\|_{\mathbb{B}} \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \|h\|_\infty^2 \left(\|f\|_{\hat{H}^2(\mathbb{R}, L_2)}^2 + \|g\|_{\hat{H}^2(\mathbb{R}, L^2(\partial\Omega))}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Comme

$$\|\Lambda_s - \Lambda_{\hat{s}} - \Upsilon_{\hat{s}}h\|_{\mathcal{L}_2} = \sup_{\|X\|=1} \|(\Lambda_s - \Lambda_{\hat{s}} - \Upsilon_{\hat{s}}h)X\|_{\mathbb{B}}.$$

alors

$$\|\Lambda_s - \Lambda_{\hat{s}} - \Upsilon_{\hat{s}}h\|_{\mathcal{L}_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\| \widehat{\Lambda}_s - \widehat{\Lambda}_{\hat{s}} - \widehat{\Upsilon}_{\hat{s}}h \right\|_{\widehat{\mathcal{L}}_2} \leq \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \|h\|_{\infty}^2. \quad (4.7.30)$$

c) Soit $s - \hat{s} = h$, en utilisant le résultat b), on a

$$\begin{aligned} \|\Lambda'_s h - \Lambda'_{\hat{s}} h\|_{\mathcal{L}_2} &= \|\Lambda_s - \Lambda_{\hat{s}} - \Upsilon_{\hat{s}}h\|_{\mathcal{L}_2} + \|\Lambda_{\hat{s}} - \Lambda_s - \Upsilon_s h\|_{\mathcal{L}_2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\| \widehat{\Lambda}_s - \widehat{\Lambda}_{\hat{s}} - \widehat{\Upsilon}_{\hat{s}}h \right\|_{\widehat{\mathcal{L}}_2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\| \widehat{\Lambda}_{\hat{s}} - \widehat{\Lambda}_s - \widehat{\Upsilon}_s h \right\|_{\widehat{\mathcal{L}}_2} \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \|h\|_{\infty}^2 + \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \|h\|_{\infty}^2 = C\sqrt{\frac{2}{\pi}} \|h\|_{\infty}^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\|\Lambda'_s - \Lambda'_{\hat{s}}\|_{\mathcal{L}_2} \leq C\sqrt{\frac{2}{\pi}} \|s - \hat{s}\|_{\infty}. \quad (4.7.31)$$

D'une façon similaire, on prouve que

$$\left\| \widehat{\Lambda}'_s - \widehat{\Lambda}'_{\hat{s}} \right\|_{\mathcal{L}_2} \leq 2C \|s - \hat{s}\|_{\infty}. \quad (4.7.32)$$

Ce qui achève la démonstration. \square

Corollaire 4.7.1. Pour ω une fréquence fixée dans \mathbb{R} . Soient $\hat{s} = (\nu_0, D_0, \mu_{a0})$ et $s = \hat{s} + h$ deux paramètres optiques, où $h = (h_1, h_2, h_3)$. On suppose qu'on a la condition suivante

$$D(\xi) = D_0(\xi), \quad \forall \xi \in \partial\Omega, \quad (4.7.33)$$

est satisfaite. Soit $(\Lambda'_s h) : \widehat{\mathcal{L}}_2 \times H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C}) \rightarrow \widehat{\mathcal{L}}_2 \times H^{-1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C})$ la dérivée de Fréchet de l'opérateur $\widehat{\Lambda}_s$, alors l'opérateur adjoint $(\Lambda'_s h)^*$ est exprimé par

$$\begin{aligned} \left\langle \widehat{X}(\omega), (\Lambda'_s h)^* Y^* \right\rangle &= -\frac{i\omega}{c_0} \int_{\Omega} h_1(x) u_0(x, \omega) u^*(x, \omega) dx - \int_{\Omega} h_2(x) \nabla u_0(x, \omega) \nabla u^*(x, \omega) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} h_3(x) u_0(x, \omega) u^*(x, \omega) dx, \end{aligned} \quad (4.7.34)$$

pour tout $h = (h_1, h_2, h_3)$. La fonction u^* est la solution unique du problème de diffusion adjoint,

$$-\operatorname{div}(D(x)\nabla u^*(x, \omega)) + \left(\mu_a(x) - \frac{i\omega}{c_0} \nu(x) \right) u^*(x, \omega) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.7.35)$$

avec les conditions non homogènes de Robin aux bords

$$u^*(\xi, \omega) + \frac{\beta(\xi)}{2} D(\xi) \frac{\partial u^*(\xi, \omega)}{\partial \mathbf{n}} = z^*(\xi, \omega), \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (4.7.36)$$

où $Y^*(\xi, \omega) = (u^*(\xi, \omega), z^*(\xi, \omega))$.

Démonstration. En utilisant l'hypothèse (4.7.33), on a $D(\xi) = D_0(\xi)$ pour tout $\xi \in \partial\Omega$ alors $h_2|_{\partial\Omega} \equiv 0$. L'expression (4.7.26) devient

$$\langle (\widehat{\Lambda}'_s h) \widehat{X}(\omega), \widehat{Y}^*(\omega) \rangle = \int_{\partial\Omega} D(\xi) \frac{\partial w[\mathbf{s}]}{\partial \mathbf{n}}(\xi, \omega) \overline{z(\xi)} d\sigma(\xi). \quad (4.7.37)$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} \langle (\widehat{\Lambda}'_s h) \widehat{X}(\omega), \widehat{Y}^*(\omega) \rangle &= -\frac{i\omega}{c_0} \int_{\Omega} h_1(x) u_0(x, \omega) \overline{u^*(x, \omega)} dx - \int_{\Omega} h_2(x) \nabla u_0(x, \omega) \overline{\nabla u^*(x, \omega)} dx \\ &\quad - \int_{\Omega} h_3(x) u_0(x, \omega) \overline{u^*(x, \omega)} dx \\ &= \int_{\Omega} \left(-\frac{i\omega}{c_0} h_1(x) u_0(x, \omega) + \operatorname{div} (h_2(x) \nabla u_0(x, \omega)) - h_3(x) u_0(x, \omega) \right) \overline{u^*(x, \omega)} dx \\ &= \overline{\langle \widehat{X}(\omega), (\widehat{\Lambda}'_s h)^* Y^*(\omega) \rangle}. \end{aligned}$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned} \langle \widehat{X}(\omega), (\widehat{\Lambda}'_s h)^* Y^*(\omega) \rangle &= \frac{i\omega}{c_0} \int_{\Omega} h_1(x) \overline{u_0(x, \omega)} u^*(x, \omega) dx - \int_{\Omega} h_2(x) \overline{\nabla u_0(x, \omega)} \nabla u^*(x, \omega) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} h_3(x) \overline{u_0(x, \omega)} u^*(x, \omega) dx. \end{aligned}$$

□

4.8 Méthode d'approximation pour le problème inverse

Soient $\hat{\mathbf{s}} = (\nu_0, D_0, \mu_{a0})$ un vecteur nominal formé par les valeurs observées des paramètres optiques ν_0 , D_0 et μ_{a0} . Soit $h = (h_1, h_2, h_3)$ le vecteur désignant la perturbation et $\mathbf{s} = \hat{\mathbf{s}} + h$ le vecteur de paramètres perturbés. Pour tout $1 \leq j \leq N_s$, on note par $\widehat{X}_j(\cdot, \omega) = (F_j(\cdot, \omega), G_j(\cdot, \omega))$ la j^{eme} source où N_s est le nombre de sources placées sur le domaine. On considère la fonction coût $\mathbf{s} \mapsto \mathcal{J}(\mathbf{s})$ donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : L^\infty(\Omega, \mathbb{R})^3 &\longrightarrow [0, +\infty[\\ \mathbf{s} = (\nu, D, \mu_a) &\longmapsto \mathcal{J}(\mathbf{s}) = \sum_{j=1}^{N_s} \left\| \widehat{\Lambda}_s(\widehat{X}_j(\cdot, \omega)) - \widehat{\Lambda}_{\hat{\mathbf{s}}}(\widehat{X}_j(\cdot, \omega)) \right\|_{\mathbb{B}}^2, \end{aligned} \quad (4.8.1)$$

où

$$\widehat{\Lambda}_s(\widehat{X}_j(\cdot, \omega)) - \widehat{\Lambda}_{\hat{\mathbf{s}}}(\widehat{X}_j(\cdot, \omega)) = (0, \Gamma_j(\mathbf{s}))^T,$$

$$\Gamma_j(\mathbf{s}) = D(\cdot) \frac{\partial u_j[\mathbf{s}]}{\partial \mathbf{n}}(\cdot, \omega)|_{\partial\Omega} - D_0(\cdot) \frac{\partial u_j[\hat{\mathbf{s}}]}{\partial \mathbf{n}}(\cdot, \omega)|_{\partial\Omega} = 2\gamma(\cdot) (u_j[\mathbf{s}](\cdot, \omega) - u_j[\hat{\mathbf{s}}](\cdot, \omega))|_{\partial\Omega}$$

et $u_j[\mathbf{s}]$ et $u_j[\hat{\mathbf{s}}]$ sont respectivement les solutions exactes du problème (2.3.4)-(2.3.5) liées aux paramètres \mathbf{s} et $\hat{\mathbf{s}}$ et aux fonctions sources $\widehat{X}_j(\cdot, \omega)$. Alors on a

$$\mathcal{J}(\mathbf{s}) = \sum_{j=1}^{N_s} \|\Gamma_j(\mathbf{s})\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega, \mathbb{C})}^2.$$

Le problème inverse traité ici consiste à trouver le vecteur de paramètres $\mathbf{s}^* = (\nu^*, D^*, \mu_a^*)$ autour des paramètres optiques observés $\hat{\mathbf{s}}$ qui minimise la fonction coût \mathcal{J} . On considère le problème de minimisation suivant

$$\mathbf{s}_* = \arg \left(\min_{\mathbf{s} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})^3} \mathcal{J}(\mathbf{s}) \right). \quad (4.8.2)$$

4.8.1 Discrétisation dans la base spline tensorielle

Soient $h'_1 = (b - a)/n_p$ et $h'_2 = (d - c)/n'_p$ respectivement les nouveaux pas des subdivisions de $[a, b]$ et de $[c, d]$. On pose $h' = (h'_1, h'_2)$ et on considère le sous espace $\widehat{\mathbb{S}}_{h'}(\Omega)$ donné par

$$\widehat{\mathbb{S}}_{h'}(\Omega) = \{ \mathbf{s}_{h'} \in C^2(\overline{\Omega}) : \mathbf{s}_{h'}|_{K_{ij}} \in \mathbb{P}_3(\Omega)^3 ; 0 \leq i \leq n_p - 1, 0 \leq j \leq n'_p - 1 \}, \quad (4.8.3)$$

où $K_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, pour $0 \leq i \leq n_p - 1$ et $0 \leq j \leq n'_p - 1$.

On note $m = n_p + 3$ et $m' = n'_p + 3$. Soit $\tilde{B}_{\ell\ell'}(x) = \mathcal{B}_3\left(\frac{x - x_{\ell-4}}{h'_1}\right) \mathcal{B}_3\left(\frac{y - y_{\ell'-4}}{h'_2}\right)$, pour $\ell = 1, \dots, m$ et $\ell' = 1, \dots, m'$ la base des splines tensorielles associée à la nouvelle subdivision. On utilise une décomposition par morceaux de $\mathbf{s} = (\nu, D, \mu_a)$, dans la base des splines tensorielles, donnée comme suit

$$\begin{aligned} \nu_{h'}(x) &= \sum_{\ell=1}^m \sum_{\ell'=1}^{m'} \nu_{\ell\ell'} \tilde{B}_{\ell\ell'}(x), & D_{h'}(x) &= \sum_{\ell=1}^m \sum_{\ell'=1}^{m'} d_{\ell\ell'} \tilde{B}_{\ell\ell'}(x) \\ \text{et } \mu_{ah'}(x) &= \sum_{\ell=1}^m \sum_{\ell'=1}^{m'} \mu_{a\ell\ell'} \tilde{B}_{\ell\ell'}(x). \end{aligned} \quad (4.8.4)$$

Les fonctions $\nu_{h'}$, $D_{h'}$ et $\mu_{a_{h'}}$ sont dans l'espace des splines tensorielles $\widehat{\mathbb{S}}_{h'}(\Omega)$. On note par \mathbf{s}^M :

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^M &= (\nu_{11}, \dots, \nu_{m1}; \nu_{12}, \dots, \nu_{m2}; \dots; \nu_{1m'}, \dots, \nu_{mm'}; d_{11}, \dots, d_{m1}; d_{12}, \dots, d_{m2}; \\ &\dots; d_{1m'}, \dots, d_{mm'}; \mu_{a11}, \dots, \mu_{am1}; \mu_{a12}, \dots, \mu_{am2}; \dots; \mu_{a1m'}, \dots, \mu_{amm'})^T \in \mathbb{R}^M, \end{aligned}$$

le vecteur des paramètres optiques dans (4.8.4) où $M = 3mm'$ et $\mathbf{s}_{h'} = (\nu_{h'}, D_{h'}, \mu_{a_{h'}})$ le vecteur de paramètres dans la base B-spline tensorielle.

On obtient le schéma suivant faisant le passage d'un problème inverse continu vers un problème inverse discret

$$\begin{aligned} \Theta : L^\infty(\Omega, \mathbb{R})^3 &\longrightarrow \widehat{\mathbb{S}}_{h'}(\Omega) \times \widehat{\mathbb{S}}_{h'}(\Omega) \times \widehat{\mathbb{S}}_{h'}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^M \\ \mathbf{s} &\longmapsto \mathbf{s}_{h'} \longmapsto \Theta(\mathbf{s}) := \mathbf{s}^M. \end{aligned} \quad (4.8.5)$$

On considère la fonction coût discrète $\mathbf{s}^M \mapsto J(\mathbf{s}^M)$ donnée par la formule suivante

$$\begin{aligned} J : \mathbb{R}^M &\longrightarrow [0, +\infty[\\ \mathbf{s}^M &\longmapsto J(\mathbf{s}^M) := \|\mathbf{R}(\mathbf{s}^M)\|_2^2 = \sum_{i=1}^{N_T} |\mathbf{R}_i(\mathbf{s}^M)|^2, \end{aligned} \quad (4.8.6)$$

où $R(\mathbf{s}^M) = (R_1(\mathbf{s}^M), R_2(\mathbf{s}^M), \dots, R_{N_T}(\mathbf{s}^M))^T \in \mathbb{C}^M$ avec $N_T = N_d N_s$. On a

$$R_{i+(j-1)N_d}(\mathbf{s}^M) := R_{i+N_d(j-1)}(\Theta(\mathbf{s})) = 2\gamma(\xi_i) \left(u_h^{[j]}[\mathbf{s}^M](\xi_i, \omega) - Y_{\xi_i}^{[j]} \right),$$

pour $j = 1, \dots, N_s$ et $i = 1, \dots, N_d$, (4.8.7)

où Θ est la fonction définie dans (4.8.5) et $u_h^{[j]}[\mathbf{s}^M]$ est la solution approchée du problème de diffusion direct et $Y_{\xi_i}^{[j]}$ est la donnée mesurée au bord au point ξ_i , pour des fonctions sources données $\widehat{X}_j(\cdot, \omega)$. La norme $\|R(\mathbf{s}^M)\|_2$ est le résidu au point \mathbf{s}^M . Le problème de minimisation discret associé au problème (4.8.2) est

$$\mathbf{s}_*^M = \arg \min_{\mathbf{s}^M \in \mathbb{R}^M} J(\mathbf{s}^M). \quad (4.8.8)$$

Les problèmes (4.8.2) et (4.8.8) sont des problèmes mal-posés. Dans l'objectif de diminuer les effets du bruit dans les données, on remplace le problème original (4.8.8) par une meilleure condition. Une des méthodes de régularisation les plus populaires, est la méthode de régularisation de Tikhonov [154]. La méthode remplace le problème (4.8.8) par le problème d'optimisation sans contrainte donné par

$$\mathbf{s}_*^M = \arg \min_{\mathbf{s}^M \in \mathbb{R}^M} J_\lambda(\mathbf{s}^M), \quad (4.8.9)$$

où la fonction coût J_λ est donnée par

$$\mathbf{s}^M \in \mathbb{R}^M \longrightarrow J_\lambda(\mathbf{s}^M) := \|R(\mathbf{s}^M)\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{s}^M - \hat{\mathbf{s}}^M\|_2^2. \quad (4.8.10)$$

Le coefficient $\lambda > 0$ est le paramètre de régularisation à choisir afin d'assurer une meilleure convergence et $\hat{\mathbf{s}}^M$ est le vecteur des coefficients dans la base spline tensorielle des paramètres nominaux observés $\hat{\mathbf{s}}$.

Comme la fonction J_λ est différentiable au sens de Gâteaux et convexe alors, \mathbf{s}_*^M est la solution du problème d'optimisation sans contrainte (4.8.9) si et seulement si

$$\nabla J_\lambda(\mathbf{s}_*^M) = 0. \quad (4.8.11)$$

La matrice hessienne $\nabla^2 J_\lambda(\mathbf{s}^M)$ est semi-définie positive pour tout $\mathbf{s}^M \in \mathbb{R}^M$. La méthode classique de Newton reste une méthode efficace pour la résolution de ce type de problème (4.8.11). Les itérations classiques de Newton consistent à générer une suite de vecteur $(\mathbf{s}_k^M)_k$ à partir de paramètres observés \mathbf{s}_0^M au voisinage de \mathbf{s}_*^M et les itérations sont calculées selon le schéma suivant

$$\mathbf{s}_{k+1}^M = \mathbf{s}_k^M - [\nabla^2 J_\lambda(\mathbf{s}_k^M)]^{-1} \nabla J_\lambda(\mathbf{s}_k^M), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Soit \tilde{d}_k la direction décente convenable, solution du système itératif suivant

$$[\nabla^2 J_\lambda(\mathbf{s}_k^M)] \tilde{d}_k = \nabla J_\lambda(\mathbf{s}_k^M), \quad (4.8.12)$$

alors on obtient le schéma itératif suivant

$$\mathbf{s}_{k+1}^M = \mathbf{s}_k^M - \tilde{d}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

4.8.2 La jacobienne et la hessienne dans la base spline tensorielle

Le domaine considéré est $\bar{\Omega} = [a, b] \times [c, d]$. On subdivise l'intervalle $[a, b]$ en utilisant les nœuds de points espacés $x_i = a + ih_1$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, n_1$ avec $h_1 = (b - a)/n_1$, et l'intervalle $[c, d]$ en utilisant les nœuds de points espacés $y_j = c + jh_2$ avec $h_2 = (d - c)/n_2$. On considère la grille formée par les points $(x_i, y_j)_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$ tels que :

$$\begin{aligned} x_i &= a + ih_1, \quad i \in \mathbb{Z}, \\ y_j &= c + jh_2, \quad j \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (4.8.13)$$

Pour une fréquence fixée ω dans \mathbb{R} , soit $u_h(\cdot, \omega)$ la solution approchée du problème de diffusion (4.7.1)-(4.7.2) calculée dans la base spline tensorielle. On note \widehat{V}_h le sous espace de dimension finie de \widehat{H}_2 , donné par

$$\widehat{V}_h = \{u_h \in \widehat{H}_2 : u_h|_{K_{ij}} \in \mathbb{P}_3(\Omega); \text{ pour } 0 \leq i \leq n_1 - 1, \quad 0 \leq j \leq n_2 - 1\}, \quad (4.8.14)$$

avec pour $0 \leq i \leq n_1 - 1$ et $0 \leq j \leq n_2 - 1$, $K_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ est une maille rectangulaire dans $\bar{\Omega}$, et $h = (h_1, h_2)$ est le vecteur de taille de la grille uniforme et $\mathbb{P}_3(\Omega)$ est l'espace des polynômes sur Ω de degré ≤ 3 . Il est bien connu que la dimension du sous espace \widehat{V}_h est $N = N_1 N_2$ où $N_1 = n_1 + 3$ et $N_2 = n_2 + 3$.

On utilise la base des splines tensorielles (B_{ij}) du sous espace \widehat{V}_h . La méthode d'approximation Galerkin consiste à trouver une solution approchée $u_{*h}(\cdot, \omega)$ de la solution exacte $u_*(\cdot, \omega)$ comme solution dans \widehat{V}_h du problème variationnel suivant [5] :

$$\mathcal{A}_\omega(u_h(\cdot, \omega), v_h) = \mathcal{L}_\omega(v_h), \quad \forall v_h \in \widehat{V}_h. \quad (4.8.15)$$

La solution $u_{*h}(\cdot, \omega)$ du problème (4.8.15) s'écrit sous la forme suivante

$$u_h(x, w) = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} Z_{h,ij}(\omega) B_{ij}(x), \quad \forall x := (x, y) \in \bar{\Omega} \quad (4.8.16)$$

où pour $1 \leq i \leq N_1$ et $1 \leq j \leq N_2$, les coefficients $Z_{h,ij}(\omega)$ sont complexes.

On prend la fonction test $v_h(x, y) = B_{kl}(x, y)$ dans la formulation variationnelle (4.8.15), alors on obtient

$$\sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} Z_{h,ij}(\omega) A_{ijkl}(\omega) = \mathcal{L}_\omega(B_{kl}), \quad \text{pour } 1 \leq k \leq N_1 \quad \text{et } 1 \leq \ell \leq N_2, \quad (4.8.17)$$

où

$$\begin{aligned} A_{ijkl}(\omega) &= \int_c^d \int_a^b D(x, y) (\nabla B_{ij})(x, y) (\nabla B_{kl})(x, y) dx dy \\ &\quad + \int_c^d \int_a^b \left(\mu_a + i \frac{\omega}{c_0} \nu \right) (x, y) B_{ij}(x, y) B_{kl}(x, y) dx dy \\ &\quad + 2 \int_{\partial\Omega} \gamma(x, y) B_{ij}(x, y) B_{kl}(x, y) d\sigma(x, y), \end{aligned} \quad (4.8.18)$$

et

$$\mathbf{B}_{h,kl}(\omega) = 2 \int_{\partial\Omega} \gamma(x, y) G(x, y; \omega) B_{kl}(x, y) d\sigma(x, y) + \int_{\Omega} F(x, y; \omega) B_{kl}(x, y) dx dy, \quad (4.8.19)$$

pour $(i, k) \in \{1, \dots, N_1\}^2$ et $(j, l) \in \{1, \dots, N_2\}^2$.

Soient $A(\omega) = [A_{ijkl}(\omega)]$ la matrice de taille $N_1 N_2 \times N_1 N_2$ dont les coefficients complexes $A_{ijkl}(\omega) = \mathcal{A}_\omega(\mathbf{B}_{ij}, \mathbf{B}_{kl})$, $\mathbf{B}_h(\omega) = [\mathbf{B}_{h,kl}(\omega)]$ la matrice de taille $(N_1 \times N_2)$ dont les coefficients complexes $\mathbf{B}_{h,kl}(\omega) = \mathcal{L}_\omega(\mathbf{B}_{kl})$ et $Z_h(\omega) = [Z_{h,ij}(\omega)]$ la matrice de taille $(N_1 \times N_2)$ des coefficients complexes inconnus.

On introduit les vecteurs $\mathbf{b}_h(\omega) = \text{vec}(\mathbf{B}_h(\omega)) \in \mathbb{R}^{N_1 N_2}$ et $\mathbf{z}_h(\omega) = \text{vec}(Z_h(\omega)) \in \mathbb{R}^{N_1 N_2}$. Les relations (4.8.17) donnent le système linéaire de taille $N_1 N_2 \times N_1 N_2$ suivant

$$A(\omega)\mathbf{z}_h(\omega) = \mathbf{b}_h(\omega). \quad (4.8.20)$$

où les coefficients $Z_{h,ij}(\omega)$ sont ceux apparaissent dans l'expression (4.8.16) de la solution approchée u_{*h} . La résolution du système linéaire (4.8.20) nous permet d'obtenir ces coefficients. Les coefficients de la matrice $A(\omega)$ sont donnés par

$$A_{ijkl}(\omega) = D_{ijkl} + U_{ijkl} + 2Q_{ijkl} \quad (4.8.21)$$

avec les coefficients D_{ijkl} , U_{ijkl} et Q_{ijkl} sont donnés respectivement par

$$\begin{aligned} D_{ijkl} &= \int_c^d \int_a^b D(x, y) (\nabla \mathbf{B}_{ij})(x, y) (\nabla \mathbf{B}_{kl})(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{h_1^2} \int_c^d \int_a^b D(x, y) \mathbf{B}'_i(x) \mathbf{B}_j(y) \mathbf{B}'_k(x) \mathbf{B}_l(y) dx dy \\ &\quad + \frac{1}{h_2^2} \int_c^d \int_a^b D(x, y) \mathbf{B}_i(x) \mathbf{B}'_j(y) \mathbf{B}_k(x) \mathbf{B}'_l(y) dx dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{ijkl} &= \int_c^d \int_a^b \left(\mu_a + i \frac{\omega}{c_0} \nu \right) (x, y) \mathbf{B}_{ij}(x, y) \mathbf{B}_{kl}(x, y) dx dy \\ &= \int_c^d \int_a^b \left(\mu_a + i \frac{\omega}{c_0} \nu \right) (x, y) \mathbf{B}_i(x) \mathbf{B}_j(y) \mathbf{B}_k(x) \mathbf{B}_l(y) dx dy, \end{aligned}$$

et

$$Q_{ijkl} = \int_{\partial\Omega} \gamma(x, y) \mathbf{B}_{ij}(x, y) \mathbf{B}_{kl}(x, y) d\sigma(x, y) = \int_{\partial\Omega} \gamma(x, y) \mathbf{B}_i(x) \mathbf{B}_j(y) \mathbf{B}_k(x) \mathbf{B}_l(y) d\sigma(x, y),$$

pour tout $(i, k) \in \{1, \dots, N_1\}^2$ et $(j, l) \in \{1, \dots, N_2\}^2$.

Les coefficients $A_{ijkl}(\omega)$ de la matrice $A(\omega)$

$$\begin{aligned} A_{ijkl}(\omega) &= \sum_{\ell=1}^m \sum_{\ell'=1}^{m'} d_{\ell\ell'} \left(\frac{h_2}{h_1} D_{ik}^{(\ell)} U_{jl}^{(\ell')} + \frac{h_1}{h_2} U_{ik}^{(\ell)} D_{jl}^{(\ell')} \right) \\ &\quad + h_1 h_2 \sum_{\ell=1}^m \sum_{\ell'=1}^{m'} \left(\mu_{a\ell\ell'} + i \frac{\omega}{c_0} \nu_{\ell\ell'} \right) U_{ik}^{(\ell)} U_{jl}^{(\ell')} + 2Q_{ijkl}, \quad (4.8.22) \end{aligned}$$

où $D_{ik}^{(\ell)}$, $U_{ik}^{(\ell)}$, $D_{jl}^{(\ell')}$ et $U_{jl}^{(\ell')}$ sont les coefficients donnés respectivement par

$$\begin{aligned} D_{ik}^{(\ell)} &= \int_0^{n_1} \mathcal{B}_3 \left(\frac{h_1(s - \ell + 4)}{h'_1} \right) \mathcal{B}'_3(s - i + 4) \mathcal{B}'_3(s - k + 4) ds, \\ U_{ik}^{(\ell)} &= \int_0^{n_1} \mathcal{B}_3 \left(\frac{h_1(s - \ell + 4)}{h'_1} \right) \mathcal{B}_3(s - i + 4) \mathcal{B}_3(s - k + 4) ds, \\ D_{jl}^{(\ell')} &= \int_0^{n_2} \mathcal{B}_3 \left(\frac{h_2(\tau - \ell' + 4)}{h'_2} \right) \mathcal{B}'_3(\tau - j + 4) \mathcal{B}'_3(\tau - l + 4) d\tau, \\ U_{jl}^{(\ell')} &= \int_0^{n_2} \mathcal{B}_3 \left(\frac{h_2(\tau - \ell' + 4)}{h'_2} \right) \mathcal{B}_3(\tau - j + 4) \mathcal{B}_3(\tau - l + 4) d\tau. \end{aligned} \quad (4.8.23)$$

Les matrices $D_1^{(\ell)}$ et $U_1^{(\ell)}$ ont pour coefficients $D_{ik}^{(\ell)}$ et $U_{ik}^{(\ell)}$ respectivement. Elles sont de tailles $(N_1 \times N_1)$. Les matrices $D_2^{(\ell')}$ et $U_2^{(\ell')}$ ont pour coefficients $D_{jl}^{(\ell')}$, $U_{jl}^{(\ell')}$. Elles sont de tailles $(N_2 \times N_2)$. On considère le système linéaire suivant

$$A(\omega)z_h(\omega) = b_h(\omega) \quad (4.8.24)$$

avec $A(\omega)$ est donné par

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sum_{\ell=1}^m \sum_{\ell'=1}^{m'} d_{\ell\ell'} \left(\frac{h_2}{h_1} U_2^{(\ell')} \otimes D_1^{(\ell)} + \frac{h_1}{h_2} D_2^{(\ell')} \otimes U_1^{(\ell)} \right) \\ &\quad + h_1 h_2 \sum_{\ell=1}^m \sum_{\ell'=1}^{m'} \left(\mu_{a\ell\ell'} + i \frac{\omega}{c_0} \nu_{\ell\ell'} \right) U_2^{(\ell')} \otimes U_1^{(\ell)} + 2Q_\gamma \end{aligned} \quad (4.8.25)$$

où Q_γ est une matrice de taille $N_1 N_2 \times N_1 N_2$.

Les coefficients du vecteur $b_h(\omega)$ sont donnés par

$$\begin{aligned} B_{h,kl}(\omega) &= 2 \int_{\partial\Omega} \gamma(x, y) G(x, y; \omega) B_{kl}(x, y) d\sigma(x, y) + \int_{\Omega} F(x, y; \omega) B_{kl}(x, y) dx dy, \\ &\quad k = 1, \dots, N_1; l = 1, \dots, N_2. \end{aligned} \quad (4.8.26)$$

Alors, le vecteur source $b_h(\omega)$ dont les coefficients $B_{h,kl}(\omega)$ donnés en (4.8.26) se calcule en fonction de $F(\cdot, \omega)$ et $G(\cdot, \omega)$.

Les dérivées premières de (4.8.24) par rapport aux coefficients $s_{\ell\ell'}$ sont données

$$A(\omega) \frac{\partial z_h(\omega)}{\partial s_{\ell\ell'}} + \frac{\partial A(\omega)}{\partial s_{\ell\ell'}} z_h(\omega) = \frac{\partial b_h(\omega)}{\partial s_{\ell\ell'}}.$$

Les dérivées secondes sont données par

$$\frac{\partial A(\omega)}{\partial s_{\ell_1 \ell_2}} \frac{\partial z_h(\omega)}{\partial s_{\ell\ell'}} + A(\omega) \frac{\partial^2 z_h(\omega)}{\partial s_{\ell_1 \ell_2} \partial s_{\ell\ell'}} + \frac{\partial A(\omega)}{\partial s_{\ell\ell'}} \frac{\partial z_h(\omega)}{\partial s_{\ell_1 \ell_2}} + \frac{\partial^2 A(\omega)}{\partial s_{\ell_1 \ell_2} \partial s_{\ell\ell'}} z_h(\omega) = \frac{\partial^2 b_h(\omega)}{\partial s_{\ell_1 \ell_2} \partial s_{\ell\ell'}}.$$

Comme $b_h(\omega)$ est indépendant de s , alors on a $\frac{\partial b_h(\omega)}{\partial s_{\ell\ell'}} = 0$ et $\frac{\partial^2 b_h(\omega)}{\partial s_{\ell_1 \ell_2} \partial s_{\ell\ell'}} = 0$. Ce qui implique que

$$\frac{\partial z_h(\omega)}{\partial s_{\ell\ell'}} = -A^{-1}(\omega) \frac{\partial A(\omega)}{\partial s_{\ell\ell'}} z_h(\omega), \quad (4.8.27)$$

et

$$\frac{\partial^2 z_h(\omega)}{\partial s_{\ell_1 \ell_2} \partial s_{\ell \ell'}} = -A^{-1}(\omega) \left[\frac{\partial A(\omega)}{\partial s_{\ell_1 \ell_2}} A^{-1}(\omega) \frac{\partial A(\omega)}{\partial s_{\ell \ell'}} + \frac{\partial A(\omega)}{\partial s_{\ell \ell'}} A^{-1}(\omega) \frac{\partial A(\omega)}{\partial s_{\ell_1 \ell_2}} \right] z_h(\omega). \quad (4.8.28)$$

En utilisant les relations (4.8.25), on calcule $\frac{\partial A(\omega)}{\partial s_{\ell \ell'}}$ par les identités suivantes

$$\frac{\partial A(\omega)}{\partial s_{\ell \ell'}} = \begin{cases} i \frac{\omega h_1 h_2}{c_0} U_{\ell'}^T \otimes U_{\ell}^T, & 1 \leq \ell \leq m, 1 \leq \ell' \leq m', \\ \frac{h_2}{h_1} U_{\ell'}^T \otimes D_{\ell-m}^T + \frac{h_1}{h_2} D_{\ell'}^T \otimes U_{\ell-m}^T, & m+1 \leq \ell \leq 2m, 1 \leq \ell' \leq m', \\ h_1 h_2 U_{\ell'}^T \otimes U_{\ell-2m}^T, & 2m+1 \leq \ell \leq 3m, 1 \leq \ell' \leq m', \end{cases} \quad (4.8.29)$$

avec $A(\omega)$ est donnée dans (4.8.25) et, U_{ℓ} , $D_{\ell'}$ et $U_{\ell'}$, D_{ℓ} sont les matrices élémentaires de $A(\omega)$.

Par injection de la relation (4.8.29) dans (4.8.27), on obtient

$$\frac{\partial z_h(\omega)}{\partial s_{\ell \ell'}} = \begin{cases} -i \frac{\omega h_1 h_2}{c_0} A^{-1}(\omega) U_{\ell'}^T \otimes U_{\ell}^T z_h(\omega), & 1 \leq \ell \leq m, \\ -A^{-1}(\omega) \left(\frac{h_2}{h_1} U_{\ell'}^T \otimes D_{\ell-m}^T + \frac{h_1}{h_2} D_{\ell'}^T \otimes U_{\ell-m}^T \right) z_h(\omega), & m+1 \leq \ell \leq 2m, \\ -h_1 h_2 A^{-1}(\omega) U_{\ell'}^T \otimes U_{\ell-2m}^T z_h(\omega), & 2m+1 \leq \ell \leq 3m. \end{cases} \quad (4.8.30)$$

pour tout $1 \leq \ell' \leq m'$. En utilisant la dérivée de Fréchet, on calcule la matrice jacobienne $K(\mathbf{s}^M)$ du vecteur $R(\mathbf{s}^M)$ par

$$K_{(i+N_d(j-1))\ell}^{(\ell')}(\mathbf{s}^M) = \frac{\partial R_{i+N_d(j-1)}(\mathbf{s}^M)}{\partial s_{\ell \ell'}}, \quad j = 1, \dots, N_s, \quad i = 1, \dots, N_d \\ \ell = 1, \dots, 3m \quad \text{et} \quad 1 \leq \ell' \leq m'. \quad (4.8.31)$$

On introduit le vecteur $\sigma(x)$ donné par

$$\sigma(x) = (B_{11}(x), \dots, B_{N_1 1}(x); B_{12}(x), \dots, B_{N_1 2}(x); \dots; B_{1N_2}(x), \dots, B_{N_1 N_2}(x))^T, \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

En utilisant les relations (4.7.10) et (4.7.11), on obtient

$$R_{i+N_d(j-1)}(\mathbf{s}^M) = 2\gamma(\xi_i) \left(u_h^{[j]}[\mathbf{s}^M](\xi_i, \omega) - Y_{\xi_i}^{[j]} \right), \quad j = 1, \dots, N_s, \quad i = 1, \dots, N_d. \quad (4.8.32)$$

Comme $u_h^{[j]}[\mathbf{s}^M](\xi_i, \omega) = \sum_{l=1}^{N_2} \sum_{k=1}^{N_1} Z_{h,kl}^{[j]}(\omega) B_{kl}(\xi_i)$, $\forall \xi_i \in \bar{\Omega}$, $1 \leq i \leq N_d$, alors on a

$$\frac{\partial R_{i+N_d(j-1)}(\mathbf{s}^M)}{\partial s_{\ell \ell'}} = 2\gamma(\xi_i) \frac{\partial u_h^{[j]}[\mathbf{s}^M]}{\partial s_{\ell \ell'}}(\xi_i, \omega) = 2\gamma(\xi_i) \sum_{l=1}^{N_2} \sum_{k=1}^{N_1} \frac{\partial Z_{h,kl}^{[j]}(\omega)}{\partial s_{\ell \ell'}} B_{kl}(\xi_i), \\ \forall \xi_i \in \bar{\Omega}, \quad j = 1, \dots, N_s, \quad i = 1, \dots, N_d. \quad (4.8.33)$$

En utilisant l'expression explicite (4.8.16) de $u_h^{[j]}[\mathbf{s}^M](\xi_i, \omega)$ dans l'équation (4.8.33) on obtient

$$\frac{\partial R_{i+N_d(j-1)}(\mathbf{s}^M)}{\partial s_{\ell \ell'}} = 2\gamma(\xi_i) \sigma(\xi_i) \frac{\partial Z_h^{[j]}(\omega)}{\partial s_{\ell \ell'}}, \quad j = 1, \dots, N_s, \quad i = 1, \dots, N_d. \quad (4.8.34)$$

De plus, en injectant l'expression (4.8.30) de $\frac{\partial z_h^{[j]}(\omega)}{\partial s_{\ell\ell'}}$ dans (4.8.34), on obtient la matrice jacobienne $K(\mathbf{s}^M)$. Pour $j = 1, \dots, N_s$ et $i = 1, \dots, N_d$, on a

$$\frac{\partial R_{i+N_d(j-1)}(\mathbf{s}^M)}{\partial s_{\ell\ell'}} = \begin{cases} -2i \frac{\omega h_1 h_2}{c_0} \gamma(\xi_i) \sigma^T(\xi_i) A^{-1}(\omega) U_{\ell'}^T \otimes U_{\ell}^T z_h^{[j]}(\omega), & 1 \leq \ell \leq m, \\ -2\gamma(\xi_i) \sigma^T(\xi_i) A^{-1}(\omega) \left(\frac{h_2}{h_1} U_{\ell'}^T \otimes D_{\ell-m}^T + \frac{h_1}{h_2} D_{\ell'}^T \otimes U_{\ell-m}^T \right) z_h^{[j]}(\omega), & m+1 \leq \ell \leq 2m, \\ -2h_1 h_2 \gamma(\xi_i) \sigma^T(\xi_i) A^{-1}(\omega) U_{\ell'}^T \otimes U_{\ell-2m}^T z_h^{[j]}(\omega), & 2m+1 \leq \ell \leq 3m. \end{cases}$$

Les gradients $\nabla J(\mathbf{s}^M) = \left(\frac{\partial J(\mathbf{s}^M)}{\partial s_{\ell\ell'}} \right)^T$ et $\nabla J_\lambda(\mathbf{s}^M) = \left(\frac{\partial J_\lambda(\mathbf{s}^M)}{\partial s_{\ell\ell'}} \right)^T$ des fonctions coûts J et J_λ , sont donnés respectivement par

$$\nabla J(\mathbf{s}^M) = 2K^*(\mathbf{s}^M)R(\mathbf{s}^M) \quad \text{et} \quad \nabla J_\lambda(\mathbf{s}^M) = 2K^*(\mathbf{s}^M)R(\mathbf{s}^M) + 2\lambda(\mathbf{s}^M - \hat{\mathbf{s}}^M), \quad \forall \mathbf{s}^M \in \mathbb{R}^M.$$

Soit $H(\mathbf{s}^M) = K^*(\mathbf{s}^M)K(\mathbf{s}^M) + E(\mathbf{s}^M)$ où $E(\mathbf{s}^M) = \sum_{i=1}^{N_s N_d} R_i(\mathbf{s}^M) \frac{\partial^2 R_i(\mathbf{s}^M)}{\partial s_{\ell\ell'} \partial s_{\ell_1 \ell_2}}$, $1 \leq \ell, \ell_1 \leq 3m$ et $1 \leq \ell', \ell_2 \leq m'$. On peut montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\mathbf{s}^M \in \mathbb{R}^M$ et pour tout $\tilde{h} \in \mathbb{R}^M$, on a

$$\left\| \nabla J_\lambda(\mathbf{s}^M + \tilde{h}) - \nabla J_\lambda(\mathbf{s}^M) - 2(H(\mathbf{s}^M) + \lambda I_M) \tilde{h} \right\| \leq C \|\tilde{h}\|_{\mathbb{R}^M}^2.$$

La matrice hessienne $\nabla^2 J_\lambda(\mathbf{s}^M) = \left(\frac{\partial^2 J_\lambda(\mathbf{s}^M)}{\partial s_{\ell\ell'} \partial s_{\ell_1 \ell_2}} \right)$ est donnée pour tout \mathbf{s}^M par

$$\begin{aligned} \nabla^2 J_\lambda(\mathbf{s}^M) &= 2(H(\mathbf{s}^M) + \lambda I_M) \\ &= 2K^*(\mathbf{s}^M)K(\mathbf{s}^M) + 2E(\mathbf{s}^M) + 2\lambda I_M, \end{aligned} \quad (4.8.35)$$

Pour tout $\mathbf{s}^M \in \mathbb{R}^M$.

Pour k assez grand on a l'approximation $E(\mathbf{s}_k^M) \simeq 0$. Ce qui montre qu'à chaque itération de Newton k (k assez grand), dans le système linéaire (4.6.14), la matrice Hessienne $\nabla^2 J_\lambda(\mathbf{s}_k^M)$ est approchée par l'expression

$$\nabla^2 J_\lambda(\mathbf{s}_k^M) \simeq 2K^*(\mathbf{s}_k^M)K(\mathbf{s}_k^M) + 2\lambda I_M.$$

Ainsi, à chaque itération de Newton k , le système linéaire (4.6.14), s'écrit sous la forme suivante

$$(H(\mathbf{s}_k^M) + \lambda I_M) \tilde{d}_k = K^*(\mathbf{s}_k^M)R(\mathbf{s}_k^M) + \lambda(\mathbf{s}_k^M - \hat{\mathbf{s}}^M).$$

On résout le problème donné par le schéma itératif suivant

$$\mathbf{s}_{k+1}^M = \mathbf{s}_k^M - \tilde{d}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

4.8.3 Discrétisation dans une base de fonctions radiales

Les démarches utilisées dans ce paragraphe sont similaires à celles utilisées dans la section 4.6.1. On considère \mathcal{A}' le sous ensemble de points $\mathcal{A}' = \{a'_1, \dots, a'_{N_p}\} \subseteq \overline{\Omega}$

dispersés dans le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Soit $h' = \sup_{x \in \Omega} \inf_{a'_i \in \mathcal{A}'} \|x - a'_i\|$ la distance de densité de \mathcal{A}' dans Ω . La famille $(\tilde{B}_i(\cdot, \delta'))_{1 \leq i \leq N_p + d_m}$ est une base de paramètre d'échelle δ' , donnée par

$$\tilde{B}_i(x, \delta') = \begin{cases} \Psi_{\delta'}(x - a'_i) & \text{pour } i = 1, \dots, N_p, \\ P_{i - N_p}(x) & \text{pour } i = N_p + 1, \dots, N_p + d_m, \end{cases}, \quad \forall x \in \Omega.$$

Soit $\widehat{V}_{h'}$ le sous espace d'interpolation de \widehat{H}_1 , dont la dimension est $N_p + d_m$, donné par

$$\widehat{V}_{h'} = \text{span}\{\tilde{B}_i(\cdot, \delta') : 1 \leq i \leq N_p + d_m\}, \quad (4.8.36)$$

où $d_m = \frac{m(m+1)}{2}$ et m est l'ordre de la fonction radiale utilisée comme noyau reproduisant de l'espace $\widehat{V}_{h'}$.

La solution approchée $u_h(\cdot, \omega) \in \widehat{V}_{h'}$ est une combinaison linéaire dans la base $(B_i(\cdot, \delta))$,

$$u_h(x, \omega) = \sum_{i=1}^{N_p + d_m} z_{hi}(\omega) B_i(x, \delta). \quad (4.8.37)$$

On note $m' = N_p + d_m$. On utilise une décomposition par morceaux de $s = (\nu, D, \mu_a)$ dans la base de fonctions radiales, donnée par

$$\nu_{h'}(x) = \sum_{\ell=1}^{m'} \nu_{\ell} \tilde{B}_{\ell}(x, \delta'), \quad D_{h'}(x) = \sum_{\ell=1}^{m'} d_{\ell} \tilde{B}_{\ell}(x, \delta') \quad \text{et} \quad \mu_{ah'}(x) = \sum_{\ell=1}^{m'} \mu_{a\ell} \tilde{B}_{\ell}(x, \delta'), \quad (4.8.38)$$

alors les fonctions $\nu_{h'}$, $D_{h'}$ et $\mu_{ah'}$ sont dans l'espace $\widehat{V}_{h'}$. On pose $M = 3m'$ et on note \mathbf{s}^M le vecteur de paramètres optiques dans (4.8.38) donné par

$$\mathbf{s}^M = (\nu_1, \dots, \nu_{m'}; d_1, \dots, d_{m'}; \mu_{a1}, \dots, \mu_{am'})^T \in \mathbb{R}^{3m'}$$

et $\mathbf{s}_{h'} = (\nu_{h'}, D_{h'}, \mu_{ah'})$. On obtient le schéma suivant faisant le passage d'un problème inverse continue et un problème inverse discret dans la base de fonctions radiales

$$\begin{aligned} \Theta : L^\infty(\Omega, \mathbb{R})^3 &\longrightarrow \widehat{V}_{h'} \times \widehat{V}_{h'} \times \widehat{V}_{h'} \longrightarrow \mathbb{R}^M \\ \mathbf{s} &\longmapsto \mathbf{s}_{h'} \longmapsto \Theta(\mathbf{s}) := \mathbf{s}^M. \end{aligned} \quad (4.8.39)$$

De la même façon que précédemment, on considère la fonction coût discrète $\mathbf{s}^M \longmapsto J(\mathbf{s}^M)$ donnée par

$$\begin{aligned} J : \mathbb{R}^M &\longrightarrow [0, +\infty[\\ \mathbf{s}^M &\longmapsto J(\mathbf{s}^M) := \|\mathbf{R}(\mathbf{s}^M)\|_2^2 = \sum_{i=1}^{N_d N_s} |\mathbf{R}_i(\mathbf{s}^M)|^2, \end{aligned} \quad (4.8.40)$$

où $\mathbf{R}(\mathbf{s}^M) = (\mathbf{R}_1(\mathbf{s}^M), \mathbf{R}_2(\mathbf{s}^M), \dots, \mathbf{R}_{N_d N_s}(\mathbf{s}^M))^T \in \mathbb{C}^M$ avec

$$\mathbf{R}_{i+(j-1)N_d}(\mathbf{s}^M) := \mathbf{R}_{i+N_d(j-1)}(\Theta(\mathbf{s})) = 2\gamma(\xi_i) \left(u_h^{[j]}[\mathbf{s}^M](\xi_i, \omega) - Y_{\xi_i}^{[j]} \right), \quad (4.8.41)$$

pour tout $j = 1, \dots, N_s$ et $i = 1, \dots, N_d$, et Θ est la fonction définie dans (4.8.39) et $u_h^{[j]}[\mathbf{s}^M]$ est la solution approchée du problème de diffusion direct relativement aux fonctions

sources $\widehat{X}_j(\cdot, \omega)$ et $Y_{\xi_i}^{[j]}$ est la donnée du flux mesuré aux bords du domaine au le point ξ_i pour la j^{eme} fonctions sources $\widehat{X}_j(\cdot, \omega)$. La norme $\|\mathbf{R}(\mathbf{s}^M)\|_2$ est le résidu au point \mathbf{s}^M . Le problème de minimisation discret associé au problème (4.8.2) est

$$\mathbf{s}_*^M = \arg \min_{\mathbf{s}^M \in \mathbb{R}^M} J(\mathbf{s}^M). \quad (4.8.42)$$

4.8.4 La jacobienne et la hessienne dans une base radiale

On considère le système linéaire suivant

$$A(\omega)z_h(\omega) = b_h(\omega), \quad (4.8.43)$$

avec $A(\omega)$ est la matrice dont les coefficients

$$A_{ij}(\omega) = D_{ij} + U_{ij} + 2Q_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq N_p + d_m. \quad (4.8.44)$$

Pour tout $1 \leq i, j \leq N_p$, on a

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \frac{1}{\delta^2} \sum_{\ell=1}^{m'} d_\ell \int_{\Omega} \widetilde{B}_\ell(\mathbf{x}, \delta') \varphi' \left(\frac{\|\mathbf{x} - a_i\|_2}{\delta} \right) \varphi' \left(\frac{\|\mathbf{x} - a_j\|_2}{\delta} \right) \frac{(\mathbf{x} - a_i)^T (\mathbf{x} - a_j)}{\|\mathbf{x} - a_i\|_2 \|\mathbf{x} - a_j\|_2} d\mathbf{x} \\ U_{ij} &= \sum_{\ell=1}^{m'} \left(\mu_{a\ell} + i \frac{\omega}{c_0} \nu_\ell \right) \int_{\Omega} \widetilde{B}_\ell(\mathbf{x}, \delta') \varphi \left(\frac{\|\mathbf{x} - a_i\|_2}{\delta} \right) \varphi \left(\frac{\|\mathbf{x} - a_j\|_2}{\delta} \right) d\mathbf{x}, \\ Q_{ij} &= \int_{\partial\Omega} \gamma(\xi) \varphi \left(\frac{\|\xi - a_i\|_2}{\delta} \right) \varphi \left(\frac{\|\xi - a_j\|_2}{\delta} \right) d\sigma(\xi), \end{aligned}$$

pour tout $N_p + 1 \leq i \leq N_p + d_m$ et $1 \leq j \leq d_m$, on a

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \frac{1}{\delta} \sum_{\ell=1}^{m'} d_\ell \int_{\Omega} \widetilde{B}_\ell(\mathbf{x}, \delta') \varphi' \left(\frac{\|\mathbf{x} - a_j\|_2}{\delta} \right) \frac{\nabla P_{i-N_p}(\mathbf{x})^T (\mathbf{x} - a_j)}{\|\mathbf{x} - a_j\|_2} d\mathbf{x} \\ U_{ij} &= \sum_{\ell=1}^{m'} \left(\mu_{a\ell} + i \frac{\omega}{c_0} \nu_\ell \right) \int_{\Omega} \widetilde{B}_\ell(\mathbf{x}, \delta') P_{i-N_p}(\mathbf{x}) \varphi \left(\frac{\|\mathbf{x} - a_j\|_2}{\delta} \right) d\mathbf{x} \\ Q_{ij} &= \int_{\partial\Omega} \gamma(\xi) P_{i-N_p}(\xi) \varphi \left(\frac{\|\xi - a_j\|_2}{\delta} \right) d\sigma(\xi), \end{aligned}$$

pour tout $1 \leq i \leq N_p$ et $N_p + 1 \leq j \leq N_p + d_m$, on a

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \frac{1}{\delta} \sum_{\ell=1}^{m'} d_\ell \int_{\Omega} \widetilde{B}_\ell(\mathbf{x}, \delta') \varphi' \left(\frac{\|\mathbf{x} - a_i\|_2}{\delta} \right) \frac{\nabla P_{j-N_p}(\mathbf{x})^T (\mathbf{x} - a_i)}{\|\mathbf{x} - a_i\|_2} d\mathbf{x} \\ U_{ij} &= \sum_{\ell=1}^{m'} \left(\mu_{a\ell} + i \frac{\omega}{c_0} \nu_\ell \right) \int_{\Omega} \widetilde{B}_\ell(\mathbf{x}, \delta') \varphi \left(\frac{\|\mathbf{x} - a_i\|_2}{\delta} \right) P_{j-N_p}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \\ Q_{ij} &= \int_{\partial\Omega} \gamma(\xi) \varphi \left(\frac{\|\xi - a_i\|_2}{\delta} \right) P_{j-N_p}(\xi) d\sigma(\xi), \end{aligned}$$

pour tout $N_p + 1 \leq i \leq N_p + d_m$ et $N_p + 1 \leq j \leq N_p + d_m$, on a

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \sum_{\ell=1}^{m'} d_\ell \int_{\Omega} \tilde{B}_\ell(x, \delta') \nabla P_{i-N_p}(x) \nabla P_{j-N_p}(x) dx, \\ U_{ij} &= \sum_{\ell=1}^{m'} \left(\mu_{a\ell} + i \frac{\omega}{c_0} \nu_\ell \right) \int_{\Omega} \tilde{B}_\ell(x, \delta') P_{i-N_p}(x) P_{j-N_p}(x) dx, \\ Q_{ij} &= \int_{\partial\Omega} \gamma(\xi) P_{i-N_p}(\xi) P_{j-N_p}(\xi) d\sigma(\xi). \end{aligned}$$

Les termes de la source sont calculés de la manière suivante,

$$F_j(\omega) = \int_{\Omega} F(x, \omega) \varphi \left(\frac{\|x - a_j\|_2}{\delta} \right) dx, \quad G_j(\omega) = \int_{\partial\Omega} \gamma(\xi) G(\xi, \omega) \varphi \left(\frac{\|x - a_j\|_2}{\delta} \right) d\sigma(\xi), \quad j = 1, \dots, N_p,$$

et

$$F_j(\omega) = \int_{\Omega} F(x, \omega) P_{j-N_p}(x) dx, \quad G_j(\omega) = \int_{\partial\Omega} \gamma(\xi) G(\xi, \omega) P_{j-N_p}(\xi) d\sigma(\xi), \quad j = N_p + 1, \dots, N_p + d_m,$$

Le vecteur source $b_h(\omega)$ dont les coefficients

$$b_{h,j} = \int_{\Omega} F(x, \omega) \varphi \left(\frac{\|x - a_j\|_2}{\delta} \right) dx + 2 \int_{\partial\Omega} \gamma(\xi) G(\xi, \omega) \varphi \left(\frac{\|x - a_j\|_2}{\delta} \right) d\sigma(\xi), \quad j = 1, \dots, N_p,$$

et

$$b_{h,j} = \int_{\Omega} F(x, \omega) P_{j-N_p}(x) dx + 2 \int_{\partial\Omega} \gamma(\xi) G(\xi, \omega) P_{j-N_p}(\xi) d\sigma(\xi), \quad j = N_p + 1, \dots, N_p + d_m.$$

Pour le calcul de la jacobienne et de la hessienne, nous utiliserons les mêmes techniques que le problème inverse discret dans le cas d'une dimension de l'espace.

4.9 Méthode de résolution par les lignes de niveau

On peut vérifier qu'à chaque itération de Newton k , on a

$$\nabla J_{\lambda_k}(\mathbf{s}_k^M)^T \tilde{d}_k = -2 \langle (H(\mathbf{s}_k^M) + \lambda_k I_M) \tilde{d}_k, \tilde{d}_k \rangle = -2 \left(\left\| K(\mathbf{s}_k^M) \tilde{d}_k \right\|_2^2 + \lambda_k \left\| \tilde{d}_k \right\|_2^2 \right) < 0$$

On note par θ_k l'angle entre $-\nabla J_{\lambda_k}(\mathbf{s}_k^M)$ et \tilde{d}_k , alors on a

$$\cos(\theta_k) = \frac{-\nabla J_{\lambda_k}(\mathbf{s}_k^M)^T \tilde{d}_k}{\left\| \nabla J_{\lambda_k}(\mathbf{s}_k^M) \right\|_2 \left\| \tilde{d}_k \right\|_2} \geq \frac{1}{\kappa(\nabla^2 J_{\lambda_k}(\mathbf{s}_k^M))} > 0, \quad \theta_k \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$$

où $\kappa(\nabla^2 J_{\lambda_k}(\mathbf{s}_k^M))$ est le conditionnement de la matrice hessienne $\nabla^2 J_{\lambda_k}(\mathbf{s}_k^M)$. D'après le développement de Taylor, on a

$$J_{\lambda_k}(\mathbf{s}_k^M + \eta_k \tilde{d}_k) = J_{\lambda_k}(\mathbf{s}_k^M) + \eta_k \nabla J_{\lambda_k}(\mathbf{s}_k^M)^T \tilde{d}_k + \mathcal{O}(\eta_k^2).$$

La stratégie d'Armijo-Goldstein-Wolfe [13, 68, 161, 162] donne des conditions de convergence suivantes

$$J_{\lambda_k}(\mathbf{s}_k^M + \eta_k \tilde{d}_k) \leq J_{\lambda_k}(\mathbf{s}_k^M) + \varepsilon \eta_k \nabla J_{\lambda_k}(\mathbf{s}_k^M)^T \tilde{d}_k, \quad \varepsilon \in]0, 1[, \quad (4.9.1)$$

et la condition de courbure de Wolfe

$$\nabla J_{\lambda_k}(\mathbf{s}_{k+1}^M)^T \tilde{d}_k \geq \tau \nabla J_{\lambda_k}(\mathbf{s}_k^M)^T \tilde{d}_k, \quad \tau \in]\varepsilon, 1[. \quad (4.9.2)$$

Comme $\nabla J_{\lambda_k}(\mathbf{s}_k^M)^T \tilde{d}_k < 0$, alors il existe un nombre réel très petit $\hat{\eta}$ tel que la condition (4.9.1) implique (c.f.[40])

$$J_{\lambda_k}(\mathbf{s}_k^M + \hat{\eta} \tilde{d}_k) \leq J_{\lambda_k}(\mathbf{s}_k^M) + \varepsilon \hat{\eta} \nabla J_{\lambda_k}(\mathbf{s}_k^M)^T \tilde{d}_k,$$

et la seconde condition (4.9.2) est souvent appelée la condition de Wolfe unilatérale pour la distinguer de la condition forte suivante

$$\left\| \nabla J_{\lambda_k}(\mathbf{s}_k^M + \hat{\eta} \tilde{d}_k) \right\|_2 \leq \bar{\tau} \left\| \nabla J_{\lambda_k}(\mathbf{s}_k^M) \right\|_2, \quad \bar{\tau} \in [0, 1[.$$

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

5.1 Conclusion

Dans cette thèse nous avons étudié les problèmes de transport, en particulier l'équation de transfert radiatif ETR dans des milieux optiques moyennement épais. Il s'agit des équations stationnaire et non stationnaire. Dans le premier chapitre de ce travail, nous avons traité le problème ETR du point de vue théorique, à savoir l'existence, l'unicité et la régularité de la solution. En suite, nous sommes intéressés au problème de diffusion qui est un problème équivalent à ETR sous des hypothèse de diffusion ajoutées.

Dans le deuxième chapitre, nous avons proposé la résolution du problème de diffusion avec les conditions non homogènes de Robin aux bords du domaine. La transformée de Fourier était un moyen technique pour gérer la variable du temps. Son utilité a été efficace puisqu'elle nous a permis de réduire l'équation en une équation elliptique et de gérer ensuite le problème de résolution avec la variable de l'espace seulement. Une étude théorique du problème constitue une part essentielle de ce chapitre dans lequel nous avons établi l'existence, l'unicité et la régularité de la solution. Nous avons démontré l'équivalence entre l'équation de diffusion dans le domaine fréquentiel avec les conditions de Robin aux bords et une formulation variationnelle. En suite, Nous avons proposé la résolution du problème par la méthode d'approximation variationnelle de Galerkin basée sur les fonctions B-splines en dimension un, les splines tensorielles en dimension deux.

Dans le troisième chapitre, nous nous sommes intéressés à la résolution du problème de diffusion en utilisant les fonctions à base radiale. La méthode d'approximation de Galerkin sans maillage est basée sur le choix d'une fonction radiale et un ensemble de point (nuage de point) du domaine qui génèrent une base d'approximation. La sélection des points du domaine est basée sur des algorithmes (les points de Halton et les points concentriques) qui sont des points réguliers où sur un choix aléatoire irrégulier. Nous avons utilisé la même technique de la transformée de Fourier et son inverse pour trouver un signal en fonction du temps. Dans ce troisième chapitre de ce manuscrit, nous avons donné les grandes lignes de notre travail. Ces idées seront affinées lors de nos prochains travaux.

Dans le quatrième chapitre, nous nous sommes intéressés au problème inverse de diffusion. Il s'agit de trouver les propriétés optiques en utilisant le flux optique ou le courant reçu aux bords du domaine avec les fonctions sources utilisées. Nous avons étudié la stabilité de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann (DtN) mesurant le flux optique, en fonction des paramètres optiques. Puis, nous avons étudié la dérivée de Fréchet de cet opérateur et nous avons établi la propriété lipschitzienne de cette dérivée. Dans le cadre d'approximation du problème inverse, nous avons utilisé les fonctions B-splines cubiques en dimension un de l'espace, les fonctions splines tensorielles et les fonctions à base radiale en dimension supérieure de l'espace. Enfin, nous avons proposé l'algorithme de Gauss-Newton pour résoudre le problème inverse par un schéma itératif discret. Une autre méthode de grande importance est celle de la résolution du problème inverse par les lignes de niveaux (line search method). Cette dernière idée reste une perspective pour un travail ultérieur.

5.2 Perspectives

Nous nous intéresserons dans la suite de nos travaux aux thèmes que nous avons introduits dans ce manuscrit. Les grandes lignes de sujets que nous traiterons sont les suivants :

- i) Le problème inverse qui a comme finalité la résolution numériques et ses applications à la restauration d'images (Image restoration) et à la vision.
- ii) L'approximation de Galerkin sans maillage en utilisant les fonctions à base radiale.
- iii) L'application de nos méthodes numériques à d'autres équations linéaires (équations des ondes et équations d'advection-diffusion) comme le montre les exemples suivants.
- iv) Application des méthodes d'extrapolations pour la résolution des EDP de type Stokes, Navier-Stokes, problème de Darcy et au problème inverse de diffusion [29, 88, 89, 91]...

Les techniques utilisées dans les chapitres précédents de ce manuscrit peuvent être appliquées à d'autres équations. Nous donnons ci-après quelques équations pour lesquelles il est possible d'appliquer les méthodes proposées.

5.2.1 Équation des ondes et équation d'advection-diffusion

Nous étudions l'équation hyperbolique des ondes en une dimension de l'espace

$$\frac{1}{c(x)^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \mu(x) \cdot \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \nabla \cdot (\kappa(x) \nabla \phi) = f(x, t) \quad \text{dans } \Omega \times [t_0, t_0 + T], \quad (5.2.1)$$

avec $c(x) = c_0/n(x)$ est la vitesse d'ondes, $\mu(x)$ est la vitesse d'advection et κ est le coefficient de diffusion. Les fonctions $c(x)$, $\mu(x)$ et $\kappa(x)$ sont bornées dans l'espace $L^\infty(\Omega)$. Les hypothèses de validité de l'équation (5.2.1) sont

- i) $\operatorname{div} \mu = 0$,

ii) $\|\mu\|_\infty \ll 1$,

iii) La densité du milieu est constante

L'équation est bien posée à proximité de la frontière de notre domaine en ajoutant les conditions de Robin aux bords données pour tout $(\xi, t) \in \partial\Omega \times [t_0, t_0 + T]$ par

$$\phi(\xi, t) + \beta(\xi)\kappa(\xi)\frac{\partial\phi(\xi, t)}{\partial n} = g(\xi, t), \quad (5.2.2)$$

avec $\beta : \partial\Omega \rightarrow [0, +\infty[$ est une fonction de régulation aux bords.

Le problème de l'acoustique consiste à déterminer la densité ϕ d'une onde en mouvement. La méthode basée sur la transformée de Fourier temps-fréquence nous évite une discrétisation de la variable du temps et elle facilite le passage d'une équation hyperbolique en une équation elliptique équivalente. Ceci nous permet par la suite de résoudre facilement une équation elliptique en utilisant la méthode d'approximation de Galerkin à base les B-splines cubiques (c.f. le chapitre 2).

Nous étudions l'équation d'advection-diffusion multidimensionnelle de la variable de l'espace avec une dépendance d'un terme dynamique dans le temps

$$\alpha(x)\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{v}(x) \cdot \nabla\phi - \nabla \cdot (\kappa(x)\nabla\phi) = f(x, t) \quad \text{dans } \Omega \times [t_0, t_0 + T], \quad (5.2.3)$$

avec $\mathbf{v}(x)$ est la vitesse d'advection, κ est le coefficient de diffusion et $\alpha(x)$ est le potentiel de l'évolution. Les fonctions α , \mathbf{v} et κ sont dans l'espace $L^\infty(\Omega)$. L'hypothèse de validité de l'équation (5.2.3) est que $\|\mathbf{v}\|$ soit de valeurs très petites ou $\|\mathbf{v}\| \ll \|\kappa\|_\infty$. Pour que l'équation soit bien posée à proximité du bord de notre domaine, on impose les conditions de Robin données pour tout $(\xi, t) \in \partial\Omega \times [t_0, t_0 + T]$ par

$$\phi(\xi, t) + \beta(\xi)\kappa(\xi)\frac{\partial\phi(\xi, t)}{\partial n} = g(\xi, t). \quad (5.2.4)$$

Le problème d'advection-diffusion consiste à déterminer la densité de la chaleur ϕ d'un objet en mouvement de vitesse \mathbf{v} . La méthode basée sur la transformée de Fourier temps-fréquence nous évite une discrétisation de la variable du temps ainsi nous facilite le passage d'une équation parabolique à une équation elliptique équivalente. Elle nous permet ensuite de résoudre facilement une équation elliptique en utilisant la méthode d'approximation de Galerkin à base la spline cubique (voir le chapitre 2). Une fois la solution en espace-fréquence trouvée, nous utiliserons la transformée de Fourier inverse avec comme technique d'intégration numérique, la quadrature de Gauss-Hermite (c.f. Annexe A), pour trouver la solution ϕ en espace-temps.

5.2.2 Problème des ondes acoustiques

Dans cette section, on considère l'équation déterministe des ondes acoustiques en une dimension de l'espace (1D). Cette équation surgit dans plusieurs domaines d'applications scientifiques comme la propagation des ondes. Ce type de problème a été traité aussi comme un modèle mathématique par plusieurs auteurs lors de ces dernières années [115, 49].

L'équation hyperbolique de l'acoustique ou l'équation hyperbolique des ondes reste un modèle standard pour décrire le transport ou la propagation des ondes dans des

domaines dispersifs (c.f. [115, 113, 114]). On propose des méthodes d'approximations numériques pour la reconstruction d'un signal, nommé la densité des ondes, vue comme solution de l'équation dynamiques des ondes en une dimension de l'espace. Plusieurs techniques numériques sont employées pour résoudre ce problème. On utilise la transformée de Fourier pour trouver une équation aux dérivées partielles elliptique intermédiaire dans un domaine fréquentiel.

Dans un domaine dont le mouvement moyen se fait avec une vitesse $\mu(x)$, conformément aux hypothèses dont certains seront mentionnés ci-dessous, l'équation déterministe des ondes acoustiques est donnée par

$$\frac{1}{c(x)^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \mu(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa(x) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = f(x, t) \quad \text{dans } [a, b] \times [t_0, t_0 + T] \quad (5.2.5)$$

où $c(x) = c_0/n(x)$ est la vitesse de l'onde dans un domaine d'indice de réfraction $n(x)$, la fonction $\phi(x, t)$ est la densité de la pression acoustique et $f(x, t)$ la fonction source.

Dans le cas où $\mu(x) = 0$ alors on a l'équation des ondes usuelle. Les hypothèses de validité de l'équation (5.2.5) sont

- i) $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$,
- ii) $\|\mu\|_\infty \ll 1$.

Les suppositions précédentes sont presque satisfaites dans un domaine pyrométrique acoustique. C'est une technique de mesure de température pour la combustion de gaz [115]. On considère l'équation (5.2.5) en une dimension de l'espace avec les conditions non homogènes de Robin aux bords

$$\begin{aligned} \phi(a, t) - \beta_a \kappa(a) \frac{\partial \phi(a, t)}{\partial x} &= g_a(t), \\ \phi(b, t) + \beta_b \kappa(b) \frac{\partial \phi(b, t)}{\partial x} &= g_b(t), \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

et les conditions initiales $\phi(x, t_0) = \phi_{t_0}(x)$, $\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t_0) = h(x, t_0)$, $\forall (x, t) \in [a, b] \times [t_0, t_0 + T]$. En utilisant la transformée Fourier comme dans les chapitres précédents, on obtient le problème des ondes dans le domaine fréquentiel

$$\begin{aligned} -\frac{\omega^2}{c(x)^2} u + i\omega \mu(x) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= F(x, \omega), \\ u(a, \omega) - \beta_a \kappa(a) \frac{\partial u(a, \omega)}{\partial x} &= G_a(\omega), \\ u(b, \omega) + \beta_b \kappa(b) \frac{\partial u(b, \omega)}{\partial x} &= G_b(\omega), \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

où $u := u(x, \omega) = \widehat{\phi}(x, t)$, pour tout $(x, \omega) \in [a, b] \times \mathbb{R}$.

Si $\mu = 0$ et $\kappa = 0$, alors l'équation (5.2.7) est l'équation non homogène particulière de Helmholtz [50]. Comme dans la section 2.2.2, la formulation variationnelle équivalente à l'équation des ondes (5.2.7) dans un domaine en mouvement, est donnée pour toute fonction test $v \in \widehat{H}_1$ par

$$\mathcal{A}(u(\cdot, \omega), v) = \mathcal{L}(v),$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u(\cdot, \omega), v) &= -\omega^2 \int_a^b \frac{1}{c(x)^2} u(x, \omega) \overline{v(x)} dx + i\omega \int_a^b \mu(x) \frac{\partial u(x, \omega)}{\partial x} \overline{v(x)} dx \\ &+ \int_a^b \kappa(x) \frac{\partial u(x, \omega)}{\partial x} \frac{\partial \overline{v(x)}}{\partial x} dx + \gamma_a u(a, \omega) \overline{v(a)} + \gamma_b u(b, \omega) \overline{v(b)}, \end{aligned}$$

$$\text{et } \mathcal{L}(v) = \gamma_a G_a(\omega) \overline{v(a)} + \gamma_b G_b(\omega) \overline{v(b)} + \int_a^b F(x, \omega) \overline{v(x)} dx.$$

Exemple. Dans cet exemple, on suppose que c , μ et κ sont constants, et les fonctions sources $F(\cdot, \omega)$, $G_a(\omega)$ et $G_b(\omega)$ sont données comme suit

$$\begin{aligned} F(x, \omega) &= \sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4} \left(-\frac{\omega^2}{c_0^2} x^2 + \left(\frac{\omega^2}{c_0^2} \pi + 2i\mu_0 \omega \right) x - \frac{\omega^2}{c_0^2} - i\mu_0 \pi \omega - 2\kappa_0 \right), \\ G_a(\omega) &= \sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4} \left(a^2 - (2\beta_a \kappa_0 + \pi)a + \beta_a \kappa_0 \pi + 1 \right), \\ G_b(\omega) &= \sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4} \left(b^2 + (2\beta_b \kappa_0 - \pi)b - \beta_b \kappa_0 \pi + 1 \right), \end{aligned}$$

alors la solution exacte du problème (5.2.7) est $u(x, \omega) = \sqrt{\pi}(x^2 - \pi x + 1)e^{-\omega^2/4}$ et par la transformée de Fourier inverse on obtient la solution exacte dans le domaine espace-temps $\phi_*(x, t) = (x^2 - \pi x + 1)e^{-t^2}$.

Pour un temps $t = 1$ et $x \in [-5, 5]$, le graphe de la solution exacte $x \mapsto \phi_*(x, t)$ est donné sur le côté haut à gauche de la figure 5.1. La partie réelle et la partie imaginaire de la solution numérique $x \mapsto \phi_{*h}(x, t)$ sont données respectivement en haut à droite et en bas à droite de la figure 5.1. On observe que le graphe de la partie réelle de $x \mapsto \phi_{*h}(x, t)$ est parfaitement similaire à celui de la solution exacte puisqu'elle est une fonction à valeurs réelles. Tandis que la partie imaginaire est presque nulle avec des valeurs numériques d'ordre 10^{-19} . En bas à gauche de la figure 5.1, on donne le graphe de la fonction de l'erreur relative $E_h : t \in [t_0, t_0 + T] \mapsto E_h(t)$, avec E_h est donnée explicitement par l'expression (2.2.47).

Pour $(x, t) \in]a, b[\times]t_0, t_0 + T[$, on donne respectivement, le graphe de la solution exacte $(x, t) \mapsto \phi_*(x, t)$ sur le côté gauche de la figure 5.2 et le graphe de la part réelle de la solution numérique $(x, t) \mapsto \phi_{*h}(x, t)$ sur le côté droit de la figure 5.2.

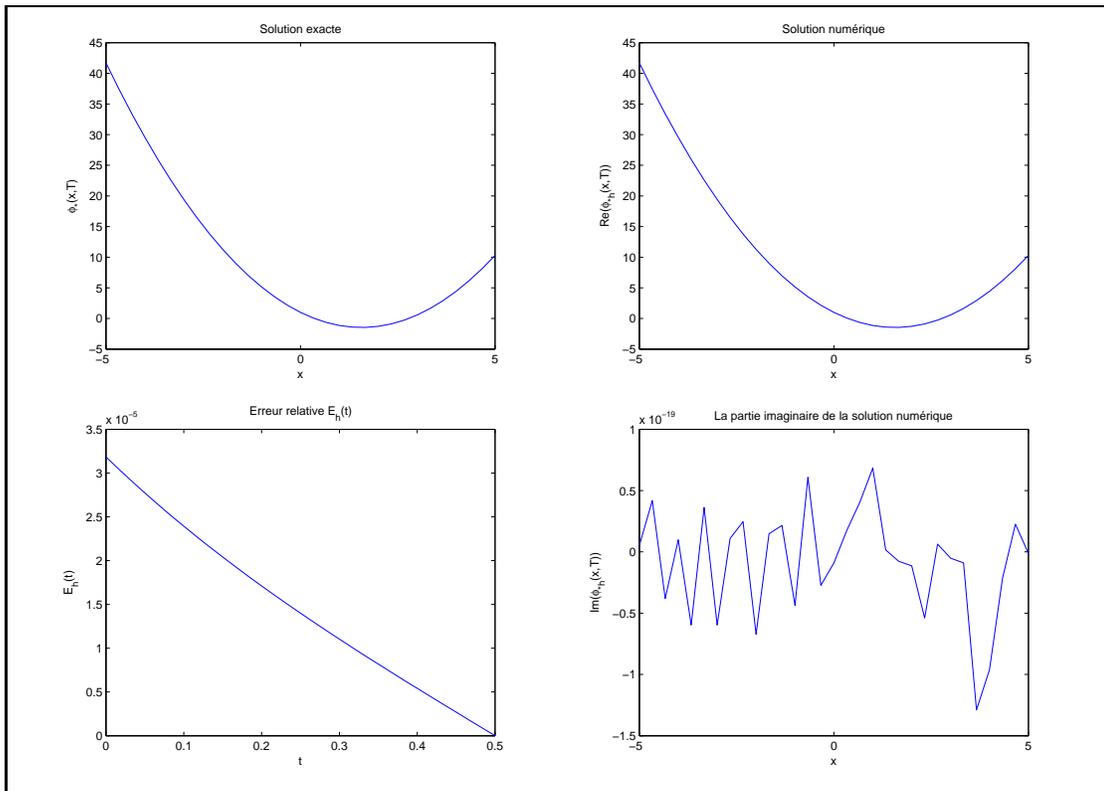


FIGURE 5.1 – Exemple avec les paramètres : $a = -5$, $b = 5$, $1/\beta_a = \zeta_a = 1$, $1/\beta_b = \zeta_b = 1$, $t_0 = 0$, $T = 0.5$, $c_0 = 0.5$, $\kappa_0 = 1/5$, $\mu_0 = 10^{-4}$, $m = 50$, $p = 50$ et $n = 100$.

5.2.3 Problème d'advection-diffusion

Dans cette section, on considère l'équation d'advection-diffusion en une dimension de l'espace. Cette équation surgit dans plusieurs domaines d'applications scientifiques comme la dynamique des fluides. Le problème de la dynamique incompressible a été étudié aussi comme un modèle mathématique par plusieurs auteurs le long de ces dernières années [72, 36, 37].

L'équation d'advection-diffusion parabolique reste un modèle standard pour la description du transport de l'énergie (c.f. [72, 36, 37]). On propose une méthode d'approximation numérique pour la reconstruction de la densité ϕ dans une situation dynamique incompressible, dite densité d'énergie. Elle est la solution du problème advection-diffusion en une dimension de l'espace. Plusieurs techniques sont employées pour résoudre numériquement l'équation d'advection-diffusion. Ici, on utilise la transformée de Fourier, pour trouver une équation aux dérivées partielles intermédiaire dans le domaine fréquentiel.

L'équation déterministe d'advection-diffusion est donnée par la principe de la dynamique suivant

$$\alpha(x) \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v}(x) \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa(x) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = f(x, t) \quad \text{dans } [a, b] \times [t_0, t_0 + T], \quad (5.2.8)$$

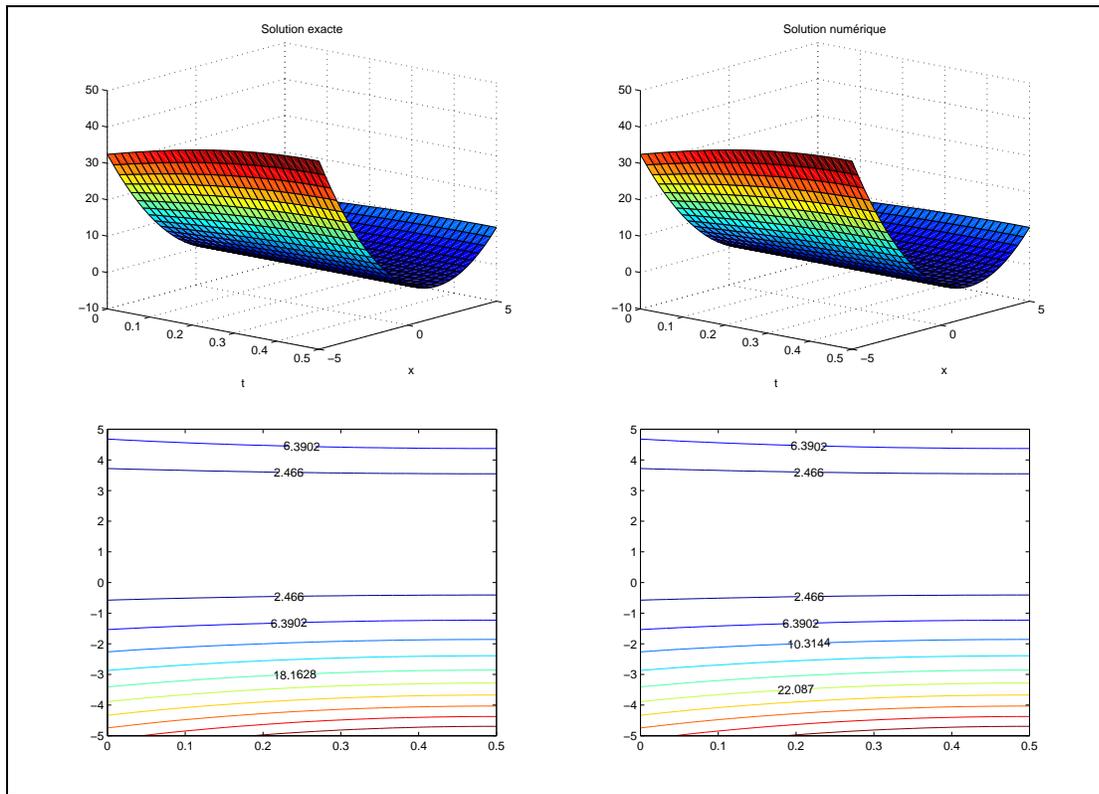


FIGURE 5.2 – Exemple avec les paramètres : $a = -5$, $b = 5$, $1/\beta_a = \zeta_a = 1$, $1/\beta_b = \zeta_b = 1$, $t_0 = 0$, $T = 0.5$, $c_0 = 0.5$, $\kappa_0 = 1/5$, $\mu_0 = 10^{-4}$, $m = 50$, $p = 50$ et $n = 100$.

où $\mathbf{v}(x)$ est le coefficient d'advection, $\kappa(x)$ est le coefficient de diffusion, $\alpha(x)$ est le potentiel d'évolution et $\phi(x, t)$ est la fonction satisfaisant l'équation de Navier-Stokes 5.2.8 avec une fonction source $f(x, t)$. Les fonctions α , \mathbf{v} et κ sont bornées à valeurs réelles dans l'espace $L^\infty([a, b])$. L'équation (5.2.8) est dite une équation d'advection-diffusion parabolique. L'hypothèse de validité de (5.2.8) est telle que $\|\mathbf{v}\|_\infty$ soit très petit. On considère l'équation (5.2.8) avec les conditions non homogènes de Robin aux bords

$$\begin{aligned} \phi(a, t) - \beta_a \kappa(a) \frac{\partial \phi}{\partial x}(a, t) &= g_a(t), \\ \phi(b, t) + \beta_b \kappa(b) \frac{\partial \phi}{\partial x}(b, t) &= g_b(t). \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

En utilisant la transformée de Fourier comme dans les chapitres précédents, on obtient un système d'équation advection-diffusion dans le domaine fréquentiel

$$\begin{aligned} i\omega \alpha(x)u + \mathbf{v}(x) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= F(x, \omega), \\ u(a, \omega) - \beta_a \kappa(a) \frac{\partial u}{\partial x}(a, \omega) &= G_a(\omega), \\ u(b, \omega) + \beta_b \kappa(b) \frac{\partial u}{\partial x}(b, \omega) &= G_b(\omega), \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

où $u := u(x, \omega) = \widehat{\phi}(x, \omega)$, $F(x, \omega) = \widehat{f}(x, \omega)$, $G_a(\omega) = \widehat{g}_a(\omega)$ et $G_b(\omega) = \widehat{g}_b(\omega)$, pour tout $(x, \omega) \in [a, b] \times \mathbb{R}$.

Comme dans la section 2.2.2, la formulation variationnelle équivalente dans un domaine à mouvement (5.2.10) est donnée pour toute fonction test $v \in \widehat{H}_1$ par

$$\mathcal{A}(u(\cdot, \omega), v) = \mathcal{L}(v),$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u(\cdot, \omega), v) &= i\omega \int_a^b \alpha(x) u(x, \omega) \overline{v(x)} dx + \int_a^b \mathbf{v}(x) \frac{\partial u(x, \omega)}{\partial x} \overline{v(x)} dx \\ &+ \int_a^b \kappa(x) \frac{\partial u(x, \omega)}{\partial x} \frac{\partial \overline{v(x)}}{\partial x} dx + \gamma_a u(a, \omega) \overline{v(a)} + \gamma_b u(b, \omega) \overline{v(b)}, \\ \text{et } \mathcal{L}(v) &= \gamma_a G_a(\omega) \overline{v(a)} + \gamma_b G_b(\omega) \overline{v(b)} + \int_a^b F(x, \omega) \overline{v(x)} dx. \end{aligned}$$

Exemple. Dans cet exemple, on suppose que les fonctions α , \mathbf{v} et κ sont constantes, et que les fonctions sources $F(\cdot, \omega)$, $G_a(\omega)$ et $G_b(\omega)$ sont données par

$$\begin{aligned} F(x, \omega) &= \sqrt{2\pi}\omega^2 e^{-\omega^2/2} (i\omega\alpha_0 x^2 + 2\mathbf{v}_0 x - i\omega\alpha_0 - 2\kappa_0), \\ G_a(\omega) &= \sqrt{2\pi}\omega^2 e^{-\omega^2/2} (a^2 - 2\beta_a \kappa_0 a - 1), \\ G_b(\omega) &= \sqrt{2\pi}\omega^2 e^{-\omega^2/2} (b^2 + 2\beta_a \kappa_0 a - 1). \end{aligned}$$

Alors la solution exacte dans domaine fréquentiel est $u(x, \omega) = \sqrt{2\pi}(x^2 - 1)\omega^2 e^{-\omega^2/2}$ et en utilisant la transformée de Fourier inverse on obtient la solution exacte dans un domaine temps-espace $\phi(x, t) = (x^2 - 1)(1 - t^2)e^{-t^2/2}$.

Pour un temps fixé $t = 0.5$ et une variable $x \in [-5, 5]$, on a le graphe de la solution exacte $x \mapsto \phi_*(x, t)$ est donné en haut à gauche de la figure 5.3, la partie réelle et la partie imaginaire de la solution numérique $x \mapsto \phi_{*h}(x, t)$ sont données respectivement en haut à droite et en bas à droite de la figure 5.3. On observe que le graphe de la partie réelle de la solution numérique $\phi_{*h}(x, t)$ est parfaitement similaire à celui de la solution exacte qui est une fonction à valeurs réelles. Tandis que la partie imaginaire de la solution numérique est quasiment nulle avec des valeurs d'ordre 10^{-16} . En bas à gauche de la figure 5.3, on donne le graphe de la fonction de l'erreur relative $E_h : t \in [t_0, t_0 + \mathbb{T}] \mapsto E_h(t)$, avec E_h est la fonction donnée explicitement par l'expression (2.2.47).

Pour $(x, t) \in]a, b[\times]t_0, t_0 + \mathbb{T}[$, le graphe de la solution exacte $(x, t) \mapsto \phi_*(x, t)$ est donné à droite de la figure 5.4 et la partie réelle de la solution approchée $(x, t) \mapsto \phi_{*h}(x, t)$ est donnée à droite de la figure 5.4.

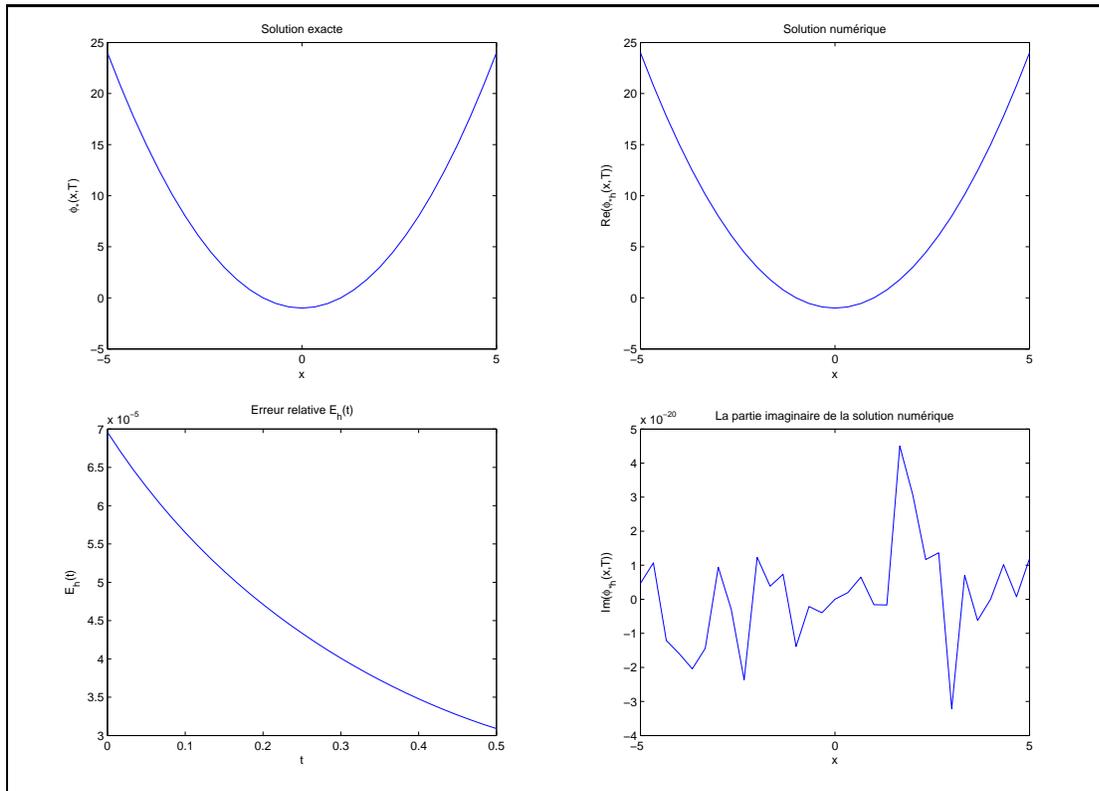


FIGURE 5.3 – Exemple avec les paramètres : $a = -5$, $b = 5$, $1/\beta_a = \zeta_a = 1$, $1/\beta_b = \zeta_b = 1/2$, $t_0 = 0$, $T = 0.5$, $\alpha_0 = 1$, $\kappa_0 = 0.5$, $\nu_0 = 10^{-4}$, $m = 50$, $p = 50$, $n = 100$.

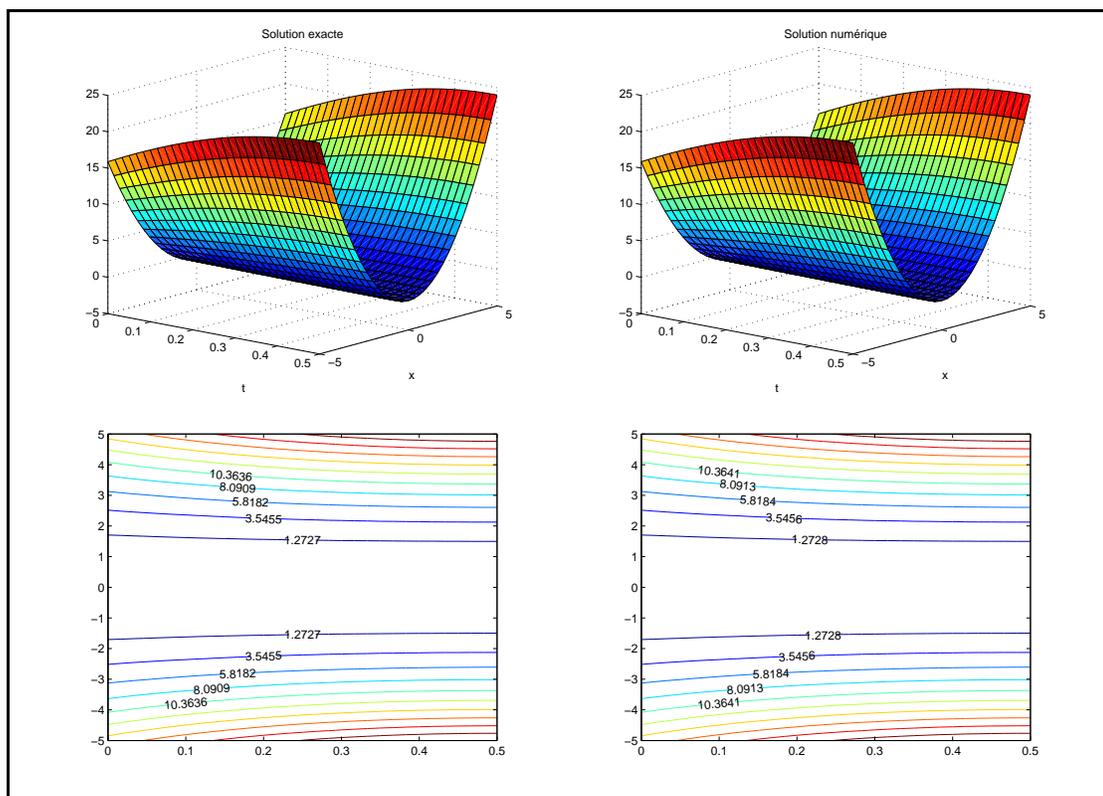


FIGURE 5.4 – Exemple avec les paramètres : $a = -5$, $b = 5$, $1/\beta_a = \zeta_a = 1$, $1/\beta_b = \zeta_b = 1/2$, $t_0 = 0$, $T = 0.5$, $\alpha_0 = 1$, $\kappa_0 = 0.5$, $v_0 = 10^{-4}$, $m = 50$, $p = 50$ et $n = 100$.

Annexe A

Intégration numérique

A.1 La formule de quadrature de Gauss-Hermite

Les polynômes d' Hermite sont des fonctions polynômiales orthogonales définies sur \mathbb{R} relativement à la fonction poids $w(x) = e^{-x^2}$. La formule générale de la suite des polynômes d'Hermite est donnée par

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}), \quad n \geq 0. \quad (\text{A.1.1})$$

Cette même suite de polynômes $(H_n(x))_n$ peut être construite par un processus de récurrence donné par la formulation suivante

$$\begin{cases} H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), & n \geq 1, \\ H_{-1}(x) = 0, \quad H_0(x) = 1. \end{cases} \quad (\text{A.1.2})$$

On considère la fonction f dans la classe $C^{2m+2}(\mathbb{R})$, on note φ la fonction donnée par $\varphi(x) = f(x)e^{x^2}$, alors on a

$$\mathcal{I}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)e^{-x^2} dx. \quad (\text{A.1.3})$$

Pour calculer l'intégrale donnée en (A.1.3), on utilise la formule de quadrature de Gauss-Hermite suivante,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)e^{-x^2} dx = \sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi(\omega_i) + E_m(\varphi), \quad (\text{A.1.4})$$

où les nœuds $(\omega_i)_{0 \leq i \leq m}$ sont les racines de la fonction polynômiale d'Hermite H_{m+1} de degré $m+1$ et les coefficients poids $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq m}$ sont calculés par la formule de Christoffel-Darboux (c.f. [2]),

$$\alpha_i = \frac{1}{H'_{m+1}(\omega_i)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_{m+1}(\omega)}{\omega - \omega_i} e^{-\omega^2} d\omega = \frac{2^m m! \sqrt{\pi}}{(m+1)[H_m(\omega_i)]^2}. \quad (\text{A.1.5})$$

Pour tout $k \geq 1$, la fonction dérivée du polynôme H_k est donnée par la formule

$$H'_k(x) = 2kH_{k-1}(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

L'erreur E_m liée aux calculs numériques par la formule de quadrature de Gauss-Hermite (A.1.4) est donnée par la formule générale suivante

$$E_m(\varphi) = \frac{(m+1)!\sqrt{\pi}}{2^{m+1}(2m+2)!} \varphi^{(2m+2)}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

pour toute fonction φ de classe $C^{2m+2}(\mathbb{R})$.

La forme analytique des nœuds est bien connue seulement pour des valeurs petites du degré m du polynôme d'Hermite. Pour avoir plus de précisions, on choisit m relativement grand. Par la formule (A.1.2), on calcule les coefficients du polynôme H_{m+1} de degré $m+1$ pour un m donné. Puis, on calcule les valeurs propres de la matrice "compagnon" associée à ces coefficients. On rappelle que la matrice compagnon d'un polynôme

$$H_{m+1}(x) = x^{m+1} + a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

de degré $m+1$ est la matrice

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & 0 & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{m+1} \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de cette matrice sont les racines de H_{m+1} . Par la formule (2.2.30), on calcule les poids α_i correspondants.

Pour une fonction f de la forme $f(x) = \varphi(x)e^{-x^2}$ où $\varphi \in \mathbb{P}_{2m-1}$, alors la formule de quadrature de Gauss-Hermite est exacte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)e^{-x^2} dx = \sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi(\omega_i).$$

Par exemple, si φ est la fonction donnée par $\varphi(x) = \cos(x)$, alors la formule de quadrature de Gauss-Hermite

$$\sqrt{\pi}e^{-1/4} = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x)e^{-x^2} dx = \sum_{i=0}^m \alpha_i \cos(\omega_i),$$

où $(\omega_i)_{1 \leq i \leq m}$ sont les racines du polynôme d'Hermite de degré m qui sont aussi les valeurs propres de la matrice compagnon \mathcal{M} et $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq m}$ sont les coefficients poids donnés comme dans la formule (A.1.5).

A.2 La formule de la quadrature de Simpson

La formule d'intégration numérique de Simpson consiste à approcher une intégrale abstraite de type

$$\int_a^b f(x)dx,$$

par une formule facile pour la programmation. Il s'agit ici d'une approche de l'intégrale réalisée avec une faible erreur. La formule de Simpson peut être obtenue en remplaçant une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ par son polynôme d'interpolation de degré 2 aux nœuds $x_0 = a$, $x_1 = (a+b)/2$ et $x_2 = b$. Les poids sont donnés par $\alpha_0 = \alpha_2 = (b-a)/6$ et $\alpha_1 = 4(b-a)/6$, alors la formule s'écrit

$$I_{2,1}(f) = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{b-a}{2}\right) + f(b) \right]. \quad (\text{A.2.1})$$

Si $f \in C^4([a, b])$, l'erreur de quadrature est

$$\mathcal{E}_{2,1}(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi), \quad h = \frac{b-a}{2},$$

où $\xi \in]a, b[$. On en déduit que la formule A.2.1 a un degré d'exactitude égal à 3.

En remplaçant f par son polynôme composite de degré 2 sur $[a, b]$, on obtient la formule composite correspondante à (A.2.1). On introduit les nœuds de quadrature $x_k = a + kH/2$, pour $k = 0, \dots, 2m$ et on pose $H = (b-a)/m$, avec $m \geq 1$. On a alors

$$I_{2,m}(f) = \frac{b-a}{6m} \left[f(a) + 2 \sum_{\ell=1}^{m-1} f(x_{2\ell}) + 4 \sum_{\ell=0}^{m-1} f(x_{2\ell+1}) + f(b) \right]. \quad (\text{A.2.2})$$

Si $f \in C^4([a, b])$, l'erreur de quadrature associée à la formule de Simpson (A.2.2) est

$$\mathcal{E}_{2,m}(f) = -\frac{b-a}{180} \left(\frac{H}{2}\right)^4 f^{(4)}(\xi),$$

où $\xi \in]a, b[$; le degré d'exactitude de la formule (A.2.2) est 3. On a

$$\left| \int_a^b f(x)dx - I_{2,m}(f) \right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880m^4} \|f^{(4)}\|_\infty.$$

Le terme $\frac{(b-a)^5}{2880m^4} \|f^{(4)}\|_\infty$ est de valeurs très petites lorsque m est grand, ce qui montre que le choix de la subdivision de l'intervalle $[a, b]$ joue un rôle primordial et déterministe.

Annexe B

La trace et la trace normale : théorèmes de trace

Nous faisons un rappel sur les théorèmes de trace. Ces notions de trace sont utilisées plusieurs fois dans le corps de ce manuscrit. Il s'agit de la trace et de la trace normale. On désigne par Ω un domaine inclus dans \mathbb{R}^d .

B.1 L'opérateur de trace γ_0

Définition B.1.1. Soit ϕ une fonction dans $H^1(\Omega)$, on note par $\phi|_{\partial\Omega}$ la restriction de la fonction ϕ aux bords $\partial\Omega$ du domaine Ω . La fonction $\phi|_{\partial\Omega}$ est dite la trace aux bords, de la fonction ϕ . On note encore $\phi|_{\partial\Omega} = \gamma_0(\phi)$.

Théorème B.1.1. L'ensemble $\{\gamma_0(\phi) / \phi \in H^1(\Omega)\}$ des traces aux bords des fonctions de $H^1(\Omega)$, est un sous espace vectoriel de $L^2(\partial\Omega)$ et il est noté par

$$H^{1/2}(\partial\Omega) := \{\gamma_0(\phi) / \phi \in H^1(\Omega)\},$$

et on note $\gamma_0(H^1(\Omega)) = H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$.

Démonstration. Pour plus de détails concernant la preuve, on réfère à J.N. Reddy [130, 129] où bien à Raviart-Thomas [128]. \square

Théorème B.1.2. (Théorème de trace) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine ouvert régulier de classe C^1 où $\Omega = \mathbb{R}_+^d$. On définit l'application de trace γ_0 :

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\Omega) \cap C(\Omega) &\longrightarrow L^2(\partial\Omega) \cap C(\partial\Omega) \\ \phi &\longrightarrow \gamma_0(\phi) = \phi|_{\partial\Omega}, \end{aligned}$$

alors, il existe une extension par continuité de l'application γ_0 en une application continue, notée encore $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$.

De plus, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que, pour tout $\phi \in H^1(\Omega)$ on a

$$\|\gamma_0(\phi)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_1 \|\phi\|_{H^1(\Omega)}.$$

Démonstration. Soit $\Omega = \mathbb{R}_+^d := \{x = (x', x_d) \in \mathbb{R}^d, x_d \geq 0\}$ où $x' = (x_1, \dots, x_{d-1})$. Soit v une fonction dans $H^1(\mathbb{R}_+^d)$. On définit l'opérateur \mathbf{P} par

$$\mathbf{P}v(x) = \begin{cases} v(x', x_d) & \text{si } x_d > 0 \\ v(x', -x_d) & \text{si } x_d < 0. \end{cases}$$

On a la fonction dérivée

$$\frac{\partial(\mathbf{P}v)}{\partial x_d}(x) = \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x_d}(x', x_d) & \text{si } x_d > 0 \\ -\frac{\partial v}{\partial x_d}(x', -x_d) & \text{si } x_d < 0. \end{cases}$$

Soit (v_n) la suite de fonctions à support compact $C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^d})$ telle que,

$$\|v_n - v\|_{H^1} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty,$$

alors on a

$$|v_n(x', 0)|^2 = -2 \int_0^{+\infty} v_n(x', x_d) \frac{\partial v_n}{\partial x_d}(x', x_d) dx_d,$$

en utilisant l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$ valable pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |v_n(x', 0)|^2 dx' \leq \int_0^{+\infty} \left(|v_n(x', x_d)|^2 + \left| \frac{\partial v_n}{\partial x_d}(x', x_d) \right|^2 \right) dx' dx_d.$$

D'où

$$\|v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} \leq \|v_n\|_{H^1(\mathbb{R}_+^d)}.$$

□

B.2 L'opérateur de trace normale γ_1

Définition B.2.1. Soit $\phi \in H^2(\Omega)$, on note par $\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega}$ la restriction de la dérivée normale $\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}$ aux bords $\partial\Omega$ du domaine Ω . La fonction $\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}$ est dite la trace normale aux bords de la fonction ϕ . On la note encore $\gamma_1(\phi) := \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = \nabla\phi \cdot \mathbf{n}$.

Théorème B.2.1. *L'ensemble $\{\gamma_0(\phi) / \phi \in H^2(\Omega)\}$ des traces aux bords de fonctions de $H^2(\Omega)$, est un sous espace vectoriel de $L^2(\partial\Omega)$, noté encore par*

$$H^{3/2}(\partial\Omega) := \{\gamma_0(\phi) / \phi \in H^2(\Omega)\}.$$

On a $\gamma_0(H^2(\Omega)) = H^{3/2}(\partial\Omega) \subset H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$.

De plus, l'ensemble $\{\gamma_1(\phi) / \phi \in H^2(\Omega)\}$ des traces normales aux bords de fonctions de $H^2(\Omega)$ est un sous espace vectoriel de $L^2(\partial\Omega)$ et on a $\gamma_1(H^2(\Omega)) = H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$.

Théorème B.2.2. *(Théorème de trace normale) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de classe C^1 où bien $\Omega = \mathbb{R}_+^d$. On définit l'opérateur de trace normale γ_1 par*

$$\begin{aligned} \gamma_1 : H^2(\Omega) \cap C(\Omega) &\longrightarrow L^2(\partial\Omega) \cap C(\partial\Omega) \\ \phi &\longrightarrow \gamma_1(\phi) = \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega}, \end{aligned}$$

alors, il existe un prolongement par continuité de γ_1 en une application linéaire continue, notée encore par $\gamma_1 : H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$.

De plus, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que, pour tout $\phi \in H^2(\Omega)$ on a

$$\|\gamma_1(\phi)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_1 \|\phi\|_{H^2(\Omega)}.$$

Théorème B.2.3. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de classe C^1 . Si $g_1 \in H^{3/2}(\partial\Omega)$ et $g_2 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, alors il existe une fonction $\phi_{g_1 g_2} \in H^2(\Omega)$ telle que :*

$$\gamma_0(\phi_{g_1 g_2}) = \phi_{g_1 g_2}|_{\partial\Omega} = g_1 \quad \text{et} \quad \gamma_1(\phi_{g_1 g_2}) = \frac{\partial\phi_{g_1 g_2}}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = g_2.$$

De plus, il existe une constante $C_2 > 0$ telle que, pour tout $\phi \in H^2(\Omega)$ on a

$$\|\gamma_0(\phi)\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|\gamma_1(\phi)\|_{L^2(\partial\Omega)} = \|g_1\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|g_2\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_2 \|\phi\|_{H^2(\Omega)}.$$

Annexe C

Paramètres et coefficients physiques et biologiques

Nous nous intéresserons à la propagation de l'énergie lumineuse. Ce sujet peut être traité dans le cadre de la théorie des équations de transports. Les conditions physiques et mathématiques d'approximation nous permettent de procéder par une approche qui débouche sur des équations aux dérivées partielles EDP dites aussi équations d'advection-diffusion.

Dans un premier temps, nous allons rappeler brièvement les divers paramètres intervenant comme facteurs dans la description des EDP étudiées.

Le comportement de la lumière au contact d'un matériau dépend des propriétés des surfaces de ce matériau par rapport à la lumière, ainsi que les longueurs d'onde de cette lumière. Les rayons lumineux se propagent depuis les sources lumineuses et arrivent sur des surfaces. Ils sont alors soit réfléchis (diffusés), absorbés ou rétractés.

C.1 Coefficient d'atténuation

Dans le cadre de la tomographie par rayon X, les faisceaux lumineux sont supposés purement monochromatiques (sources de Dirac). Ainsi, chaque photon représente un niveau d'énergie E se propageant à une fréquence constante. Si $\mathcal{N}(x)$ désigne le nombre de photons par second passant par une position x alors l'intensité du faisceaux en x est donnée par $\mathcal{I}(x) = E \cdot \mathcal{N}(x)$. Chaque substance par laquelle passe le faisceaux lumineux, possède la propriété suivante : *chaque millimètre de substance absorbe une certaine proportion de photons passant par elle*. Cette proportion $x \mapsto \mathcal{A}(x)$ est une fonction réelle positive, appelée le coefficient d'*atténuation* du matériel. Pour comparer l'atténuation d'un matériau par rapport à l'atténuation de l'eau, les radiologues ont introduit l'unité *Hounsfield* (H), du nom de G.M. Hounsfield, le fondateur du premier scanner. L'atténuation d'un matériau par rapport à l'atténuation de l'eau est donnée par la relation suivante

$$H := \frac{\mathcal{A} - \mathcal{A}_{eau}}{\mathcal{A}_{eau}}.$$

Nous donnons quelques valeurs du coefficients d'atténuation de certaines substances par rapport à l'atténuation de l'eau :

Substance	Unité en Hounsfield	Substance	Unité en Hounsfield
Os	1000	Rein	30
Foie	40 à 60	Liquide cérébro-spinal	15
Matière blanche	20 à 30	Eau	0
Matière grise	37 à 45	Graisse	-100 à -50
Sang	40	Air	-1000
Muscle	10 à 40		

TABLE C.1 – Les mesures de quelques matières à l'unité Hounsfield (H).

Pour une lumière localisée dans un intervalle $[x, x + dx]$ avec un coefficient d'atténuation $\mathcal{A}(x)$, la proportion de photons absorbés dans cet intervalle est $p(x) = \mathcal{A}(x)dx$. Le nombre par second de photons qu'absorbe le matériau dans l'intervalle $[x, x + dx]$ est

$$p(x)\mathcal{N}(x) = \mathcal{A}(x).\mathcal{N}(x).dx,$$

en multipliant par E pour obtenir l'écart d'intensité correspondant à l'écart de longueur dx selon l'équation

$$d\mathcal{I} = -\mathcal{A}(x).\mathcal{I}(x).dx.$$

On obtient l'équation différentielle connue sous le nom de *loi de Beer-Lambert*

$$\frac{d\mathcal{I}}{dx} = -\mathcal{A}(x).\mathcal{I}(x).$$

La solution \mathcal{I} de l'équation de Beer-Lambert est

$$\mathcal{I}(x) = \mathcal{I}(x_0) \exp \left(- \int_0^1 \mathcal{A}(x_0 + \tau(x - x_0)) d\tau \right).$$

Exemple. On donne τ un nombre réel positif fixé. On considère la fonction d'atténuation donnée par

$$\mathcal{A}(x) = \begin{cases} 1 - |x|^3 & \text{si } 0 \leq |x| \leq \tau, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (\text{C.1.1})$$

On calcule la solution \mathcal{I} et on trouve

$$\mathcal{I}(x) = \begin{cases} 1 & x \leq -\tau, \\ e^{-x - \frac{1}{4}x^4 - \tau + \frac{1}{4}\tau^4} & -\tau \leq x \leq 0, \\ e^{-x + \frac{1}{4}x^4 - \tau + \frac{1}{4}\tau^4} & 0 \leq x \leq \tau, \\ e^{-2\tau + \frac{1}{2}\tau^4} & \tau \leq x, \end{cases} \quad (\text{C.1.2})$$

et

$$\mathcal{N}(x) = \frac{1}{E} \begin{cases} 1 & x \leq -\tau, \\ e^{-x - \frac{1}{4}x^4 - \tau + \frac{1}{4}\tau^4} & -\tau \leq x \leq 0, \\ e^{-x + \frac{1}{4}x^4 - \tau + \frac{1}{4}\tau^4} & 0 \leq x \leq \tau, \\ e^{-2\tau + \frac{1}{2}\tau^4} & \tau \leq x. \end{cases} \quad (\text{C.1.3})$$

C.2 La transformée de Radon \mathcal{R}

Pour $t \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, on désigne par $\ell_{t,\theta}$ la droite définie par

$$\ell_{t,\theta} = \{(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) : -\infty < s < +\infty\}.$$

Pour toute fonction $f \in L^1(\ell_{t,\theta}, ds)$, la transformée de Radon de f , notée $\mathcal{R}f$ est définie par

$$(\mathcal{R}f)(t, \theta) := \int_{\ell_{t,\theta}} f(s) ds,$$

La fonction f représente le faisceau émis à l'entrée et $(\mathcal{R}f)$ est la réponse reçue à la sortie. L'objectif est de reconstruire l'information à l'intérieur du domaine à partir des réponses $(\mathcal{R}f)$ obtenues d'une manière successive.

Pour tout $(x, y) \in \ell_{t,\theta}$, on a $x = t \cos \theta - s \sin \theta$, $y = t \sin \theta + s \cos \theta$:

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} ds = \sqrt{(-\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2} ds = ds,$$

et

$$x^2 + y^2 = t^2 + s^2.$$

Pour une fonction donnée $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur \mathbb{R}^2 , on a

$$(\mathcal{R}\mathcal{A})(t, \theta) := \int_{\ell_{t,\theta}} \mathcal{A}(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds.$$

Exemple. On considère la fonction d'atténuation donnée par

$$\mathcal{A}(x, y) = \begin{cases} R - \sqrt{x^2 + y^2} & \text{si } x^2 + y^2 \leq R^2, \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 > R^2, \end{cases} \quad (\text{C.2.1})$$

En calculant la fonction \mathcal{A} en fonction de s , t et θ , on trouve

$$\mathcal{A}(x, y) = \begin{cases} R - \sqrt{t^2 + s^2} & \text{si } -\sqrt{R^2 - t^2} \leq s \leq \sqrt{R^2 - t^2}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (\text{C.2.2})$$

où $|t| \leq R$. Alors

$$(\mathcal{R}\mathcal{A})(t, \theta) = \int_{\ell_{t,\theta}} \mathcal{A}(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds = \int_{-\sqrt{R^2 - t^2}}^{\sqrt{R^2 - t^2}} (R - \sqrt{t^2 + s^2}) ds \quad (\text{C.2.3})$$

$$(\mathcal{R}\mathcal{A})(t, \theta) = \begin{cases} R\sqrt{R^2 - t^2} - \frac{1}{2}t^2 \ln \left(\frac{R + \sqrt{R^2 - t^2}}{R - \sqrt{R^2 - t^2}} \right) & \text{si } -R \leq t \leq R, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (\text{C.2.4})$$

C.3 Coefficient d'absorption

L'absorption est un phénomène de transformation de l'énergie lumineuse absorbée en une autre type d'énergie. Les chromophores se présentent généralement sous la forme de particules microscopiques, telles que les hématies qui transportent l'hémoglobine. Chaque chromophore est caractérisé par une section efficace d'absorption σ_{a_i} dépendant de la longueur d'onde λ où i est l'indice du chromophore considéré. De façon globale, dans le cadre de la théorie du transfert radiatif, on introduit le coefficient d'absorption μ_a est considéré comme une fonction réelle dépendant du domaine étudié

$$\mu_a(x, \lambda) = \sum_i \rho_{a_i}(x) \sigma_{a_i}(\lambda), \quad (\text{C.3.1})$$

où $\rho_{a_i}(x)$ est la densité volumique du chromophore d'indice i .

Le coefficient d'absorption représente l'énergie absorbée par unité de longueur traversée dans le milieu, il dépend beaucoup de la longueur d'onde, ce qui ouvre une issue à l'analyse spectroscopique du milieu étudié [45, 46, 60, 164]. C'est par la mesure de ce coefficient que l'on pourra remonter aux concentrations d'hémoglobines oxygénée et réduite, et par là à l'oxygénation du domaine.

C.4 Coefficient de dispersion

La réflexion est le changement que subit un rayon lumineux incident. Ce rayon est renvoyé par la surface réfléchissante dans une direction symétrique à la direction d'incidence par rapport à la normale. Il se trouve qu'il existe deux types de surfaces : brillante et mate (*non brillante*), alors selon les propriétés caractéristiques des matériaux, il existe principalement deux types de réflexion : réflexion spéculaire et réflexion diffuse, correspondant respectivement aux surfaces brillantes et non brillantes.

Dans ce manuscrit, nous nous intéressons à la réflexion diffuse. Le phénomène de diffusion intervient sur les interfaces non brillantes. Le rayon lumineux incident est absorbé et réémis de manière non cohérente ou aléatoire, dans plusieurs directions indépendantes. L'énergie du rayon incident est redistribuée dans une multitude de rayon réfléchis. La réflexion diffuse peut être parfaitement diffuse quand l'intensité de la lumière diffusée est la même d'une direction à l'autre. On introduit le coefficient de dispersion de manière analogue à l'absorption ; on associe à chaque centre diffuseur une section efficace de dispersion σ_{sc_i} dépendant de la longueur d'onde λ , et on définit le coefficient de dispersion μ_{sc} qui est considéré comme une fonction réelle dépendant du domaine étudié et de la longueur d'onde,

$$\mu_{sc}(x, \lambda) = \sum_i \rho_{sc_i}(x) \sigma_{sc_i}(\lambda), \quad (\text{C.4.1})$$

où ρ_{sc_i} est la densité volumique du diffuseur d'indice i .

Le coefficient de dispersion représente le profil de l'énergie diffusée par unité de longueur traversée dans le milieu. Son inverse est le libre parcours moyen de dispersion, à savoir la longueur moyenne parcourue par un photon entre deux événements de diffusion. À partir des coefficients de l'absorption μ_a et de la dispersion μ_{sc} , on définit

le coefficient d'extinction ou de transport μ_{tr} , qui regroupe les pertes d'énergie liées à l'absorption et à la dispersion,

$$\mu_{tr}(x, \lambda) = \mu_a(x, \lambda) + \mu_{sc}(x, \lambda). \quad (\text{C.4.2})$$

Ce coefficient est une fonction réelle dépendant de la variable x représentant le domaine étudié et de la variable λ représentant la longueur d'onde de la lumière utilisée.

C.5 Fonction de phase

Les lois géométriques de réflexion et de réfraction ne s'appliquent que sur des surfaces parfaitement lisses. Cependant, dans la pratique, les surfaces des objets ont généralement des irrégularités, des impuretés et donc leur interaction avec la lumière est plus complexe. Un photon se disperse d'une direction s vers une direction s' dépendant d'une densité de probabilité $(s, s') \mapsto \frac{1}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \eta(s, s')$. Cette fonction décrit la façon de la diffusion de la lumière à travers une surface qui peut être rugueuse.

Lors d'un évènement de diffusion, l'énergie lumineuse est redistribuée dans toutes les directions de l'espace, cette distribution bidirectionnelle est décrite par la fonction de phase $\eta(s, s') > 0$. Ainsi, pour une lumière incidente provenant de la direction s , la quantité $\frac{1}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \eta(s, s') ds'$ représente la proportion de l'énergie diffusée se propageant dans la direction s' à ds' près [47, 86, 87]. La mesure ds représente l'élément de surface sur l'ensemble \mathbb{S}^{d-1} s'écrivant sous la forme suivante

$$ds = (\sin \theta_1)^{d-2} \dots (\sin \theta_{d-3})^2 \sin \theta_{d-2} d\theta_1 \dots d\theta_{d-3} d\theta_{d-2} d\theta_{d-1}, \quad (\text{C.5.1})$$

avec $0 \leq \theta_i \leq \pi$ pour $1 \leq i \leq d-2$ et $0 \leq \theta_{d-1} \leq 2\pi$.

On suppose que η satisfait la propriété de normalisation suivante

$$\frac{1}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \eta(s, s') ds = 1, \quad (\text{C.5.2})$$

ceci exprime la conservation de particules le long d'un évènement de dispersion pur de s vers s' . Toutefois, cette distribution de la lumière représente le regroupement de la distribution de réflectance liée aux composantes de la lumière réfléchiée et la distribution de transmission liée aux composantes de la lumière transmises, ce qui permet de caractériser des matériaux semi-transparentes. La distribution caractérisant la réflectance doit satisfaire le principe de réciprocité de Helmholtz, c'est-à-dire que la fonction de phase η est symétrique : $\eta(s, s') = \eta(s', s)$, ce qui signifie que la fonction $(s, s') \mapsto \eta(s, s')$ est indépendante de la direction du flux lumineux. Cette symétrie rend possible le suivi inverse des rayons lumineux depuis l'observateur vers la source lumineuse. A savoir que s'il s'agit d'un matériaux isotrope, alors il existe une fonction $\tilde{\eta} : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que la fonction de phase est exprimée sous la forme suivante [15, 115]

$$\eta(s, s') = \tilde{\eta}(s^T s'). \quad (\text{C.5.3})$$

Dans la pratique, le domaine est supposé isotrope, alors la fonction de phase est bien définie et satisfait (C.5.2) et (C.5.3). Les tissus biologiques sont anisotropiquement dispersifs, avec une fonction de phase très piquée vers l'avant. Pour les tissus

optique, la fonction de phase communément appliquée est La fonction de phase introduite par les astro-physiciens Henyey-Greenstein en 1941 donnée par (c.f.[81])

$$\eta(s, s') = \frac{1 - \rho^2}{(1 + \rho^2 - 2\rho s^T s')^{d/2}}. \quad (\text{C.5.4})$$

où $0 \leq \rho \leq 1$ est un paramètre. Soit $(L_n)_{n \geq 0}$ la suite réursive des polynômes de Legendre donnés par

$$L_{n+1}(\tau) = \frac{2n+1}{n+1} \tau L_n(\tau) - \frac{n}{n+1} L_{n-1}(\tau) \quad n = 1, 2, \dots$$

et $L_0(\tau) = 1$, $L_1(\tau) = \tau$.

En réalité, la fonction de phase est simulée numériquement en utilisant une base générée par les polynômes de Legendre

$$\tilde{\eta}(s^T s') = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \rho^n L_n(s^T s'),$$

Exemple. Pour $d = 2; 3$, on a $s^T s' = \cos \theta$ et d'après (C.5.1), l'angle θ représente l'angle de diffusion d'un photon de la direction s vers la direction s' .

Les gens ont l'habitude d'utiliser cette fonction puisqu'elle est exacte, dépendant d'un seul paramètre d'ajustement ρ qui peut être lié au domaine. La fonction de phase possède la formule d'expansion de Legendre suivante (c.f. [95])

$$\tilde{\eta}(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \rho^n L_n(\cos \theta), \quad (\text{C.5.5})$$

Pour $d = 2$, $|\mathbb{S}^1| = 2\pi$ est le périmètre du cercle unité \mathbb{S}^1 . On considère \mathcal{P} la fonction de phase normalisée définie par

$$\mathcal{P}(\rho, \theta) := \frac{1}{|\mathbb{S}^1|} \eta(s, s').$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : [0, 1] \times [-\pi, \pi[&\longrightarrow [0, +\infty[\\ (\rho, \theta) &\longmapsto \mathcal{P}(\rho, \theta) := \frac{1}{2\pi} \frac{1 - \rho^2}{(1 + \rho^2 - 2\rho \cos \theta)}. \end{aligned} \quad (\text{C.5.6})$$

Pour $d = 3$, $|\mathbb{S}^2| = 4\pi$ est la circonférence de la sphère unité \mathbb{S}^2 . Soit \mathcal{P} la fonction de dispersion définie par

$$\mathcal{P}(\rho, \theta) := \frac{1}{|\mathbb{S}^2|} \eta(s, s').$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : [0, 1] \times [-\pi, \pi[&\longrightarrow [0, +\infty[\\ (\rho, \theta) &\longmapsto \mathcal{P}(\rho, \theta) := \frac{1}{4\pi} \frac{1 - \rho^2}{(1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta))^{3/2}}. \end{aligned} \quad (\text{C.5.7})$$

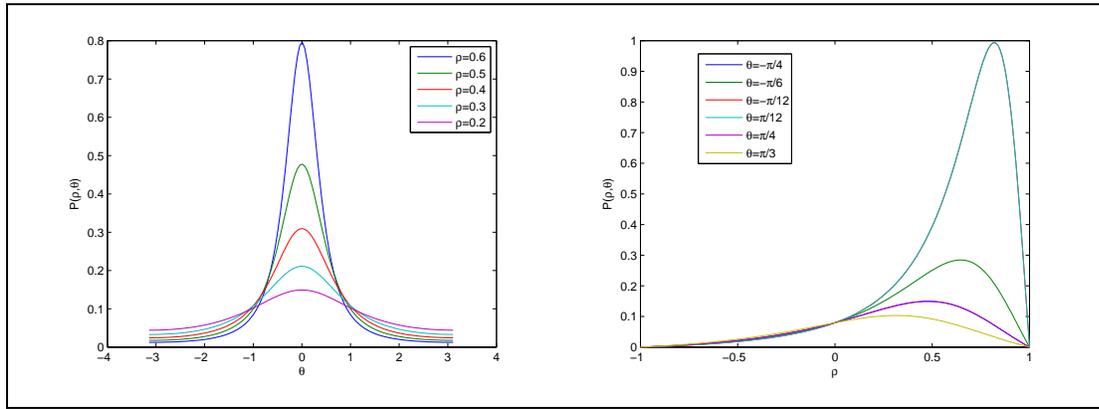


FIGURE C.1 – Cet exemple montre les différents graphes de la fonction de phase de Henyey-Greenstein

C.6 Coefficient d'anisotropie

Il est toutefois primordiale de définir le coefficient d'anisotropie puisque ce dernier varie selon les composantes caractéristiques de chaque matériau. Cependant, le moment d'ordre un de la fonction de phase $\tilde{\eta}$ définie en (C.5.3) joue un rôle déterministe qui nous permet d'introduire le coefficient d'anisotropie comme le cosinus moyen de l'angle de diffusion [15]

$$\vartheta := \frac{1}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \tilde{\eta}(s^T s') s^T s' ds \in [0, 1]. \quad (\text{C.6.1})$$

Le coefficient ϑ est supposé constant dans un domaine de mêmes caractéristiques. Pour $d = 3$ on a $|\mathbb{S}^2| = 4\pi$ et par un changement de variable $\tau = \cos(\theta_1)$, on obtient

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \tilde{\eta}(\cos(\theta_1)) \cos \theta_1 \sin \theta_1 d\theta_1 d\theta_2 \\ &= -\frac{1}{2} \int_1^{-1} \frac{1 - \rho^2}{(1 + \rho^2 - 2\rho\tau)^{3/2}} \tau d\tau = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \tau \tilde{\eta}(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

et on a $\vartheta = 0$ si $\rho = 0; 1$, et $\vartheta = \rho$ si $\rho \in]0, 1[$.

C.7 Coefficient de diffusion

Étant donnée d la dimension de l'espace, le coefficient de dispersion réduit $\tilde{\mu}_{sc}$ est définie par l'expression

$$\tilde{\mu}_{sc}(x, \lambda) = (1 - \vartheta)\mu_{sc}(x, \lambda), \quad \text{avec } \vartheta \in [0, 1].$$

Le coefficient de diffusion $D(x, \lambda)$ est lié au coefficient d'absorption $\mu_a(x, \lambda)$ et au coefficient de dispersion réduit $\tilde{\mu}_{sc}(x, \lambda)$ par la relation suivante

$$D(x, \lambda) = \frac{1}{d(\mu_a(x, \lambda) + \tilde{\mu}_{sc}(x, \lambda))}. \quad (\text{C.7.1})$$

Alors, le coefficient de diffusion est une fonction réelle, positive et bornée.

- i) Les milieu à diffusion isotrope correspond à $\vartheta = 0$, dans ce cas $D(x, \lambda) = \frac{1}{d\mu_{tr}(x, \lambda)}$.
- ii) Dans les tissus biologiques, la diffusion est très anisotrope correspondant à $\vartheta \approx 1$, dans ce cas $D(x, \lambda) \approx \frac{1}{d\mu_a(x, \lambda)}$.

C.8 L'indice de réfraction et vitesse de la lumière

La réfraction est le changement de direction que subit un rayon lumineux incident en passant à travers une interface qui sépare deux milieux. Chaque milieu homogène est caractérisé par sa capacité à ralentir la lumière. Dans des domaines complexes tels que le cas des milieux biologiques, se sont observées des fluctuations aléatoires dont la capacité est modélisée par l'indice de réfraction ν . Ce dernier est considéré comme une fonction réelle bornée dépendant du domaine étudié, on a $\nu(x) = c_0/c(x)$ où c_0 est la vitesse de la lumière dans le vide et $c(x)$ est la vitesse de la lumière dans le milieu étudié [119]. En optique géométrique, la réfraction est généralement décrite par les lois de Descartes les plus populaires :

Soient θ_1 l'angle d'incidence et θ_2 l'angle orienté entre la normale au point d'incidence et le rayon réfracté (*angle de réfraction*), alors la loi de la réfraction de Descartes s'énonce

- i) Le rayon réfracté est dans le plan d'incidence.
- ii) Les indices de réfraction ν_1 et ν_2 de chacun des milieux et les angles incident θ_1 et réfracté θ_2 sont liés par la relation : $\nu_1 \sin(\theta_1) = \nu_2 \sin(\theta_2)$.

C.9 Sources de lumières monochromatiques

Pour des longueurs d'ondes situées dans l'infrarouge proche, les tissus biologiques présentent une fenêtre de transmission qui permet à la lumière d'y pénétrer très profondément. Il est ainsi possible de sonder les tissus en profondeur, et l'on peut même détecter un signal lumineux à travers une partie du tissu. La tomographie par cohérence optique utilise une partie du spectre optique, la lumière infrarouge, pour laquelle les photons peuvent traverser le corps et en ressortir en nombre suffisant pour être exploités. Cette lumière, lorsqu'elle est à l'intérieur du corps, est diffusée par les microstructures du tissu puis ressort en fournissant des informations sur la profondeur et la qualité de ces diffusions. C'est une méthode d'imagerie non destructive, non invasive et sans contact qui permet de visualiser la structure des tissus biologiques sous la peau. Le LASER (*Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*) désigne une amplification lumineuse puissante obtenue à partir d'une manipulation du photon. Une source LASER $(x, s, t) \mapsto q(x, s, t)$ placée à une position x_s à un instant t_s dans une direction s_s , est représentée par une distribution de Dirac dans le temps et dans l'espace. Pour un temps t , une position x de l'espace et une direction s de l'espace, la distribution q est donnée par

$$q(x, s, t) = E \delta(t - t_s) \delta(s - s_s) \delta(x - x_s),$$

où E est le niveau d'énergie de la source lumineuse.

Une nouvelle technique issue d'un mariage entre l'optique et l'acoustique, a réussi à allier les avantages des ultrasons et de la tomographie optique. Elle utilise l'exploration des tissus en profondeur que permettent les ultrasons, et le contraste élevé de la tomographie optique [114, 116]. Une lumière monochromatique (LASER, rayon X, . . .), qui émet de courtes impulsions lumineuses, fournit de l'énergie qui est absorbée par les tissus dans la zone exposée et y produit une onde de pression acoustique. Celle-ci se propage dans le corps. A son arrivée à la surface de la peau, elle est enregistrée par un détecteur de sons. L'évolution du signal ainsi enregistré fournit des informations sur l'absorption de la lumière laser dans le tissu, ce qui permet ensuite d'en localiser les structures et en partie aussi de les identifier.

Bibliographie

- [1] A. ABBADI, D. BARRERA, P. IBÁÑEZ et D. SBIBIH : A general method for constructing quasi-interpolants from B-splines. *J. Comput. Appl. Math.*, 234(4):1324–1337, 2010.
- [2] M. ABRAMOWITZ et I. A. Setgun (EDS). : *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Numéro 890. 9th printing, New York : Dover, 1972.
- [3] R. A. ADAMS : *Sobolev spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [4] M. ADDAM : An inverse problem for the one-dimensional diffusion problem in optical tomography. *LMPA technic report, preprint*.
- [5] M. ADDAM, A. BOUHAMIDI et K. JBILOU : Signal reconstruction for the diffusion transport equation using tensorial B-spline Galerkin approximation. *To appear in Appl. Num. Math.*
- [6] M. ADDAM, A. BOUHAMIDI et K. JBILOU : A numerical method for one dimensional diffusion problem using fourier transform and the B-spline Galerkin method. *Appl. Math. Comput.*, 215:4067–4079, 2010.
- [7] J. H. AHLBERG et E. N. NILSON : The approximation of linear functionals. *SIAM J. Numer. Anal.*, 3:173–182, 1966.
- [8] J. H. AHLBERG, E. N. NILSON et J. L. WALSH : *The theory of splines and their applications*. Academic Press, New York, 1967.
- [9] P. ALFRED et L. L. SCHUMAKER : Bounds on the dimension of trivariate spline spaces. *Advances in Comp. Math.*, 29:315–335, 2008.
- [10] D. APPRATO et C. GOUT : A result about scale transformation families in approximation : application to surface fitting from rapidly varying data. *Numerical Algorithms*, 23:263–279, 2000.
- [11] D. APPRATO, C. GOUT et P. SÉNÉCHAL : C^k -reconstruction of surfaces from partial data. *Mathematical Geology*, 32(8):969–983, 2000.
- [12] R. ARCANGÉLI, Cruz López de SILANES et J. J. TORRENS : *Multidimensional Minimizing splines*. Kluwer Academic Publishers, Grenoble Sciences, Université Joseph Fourier, 2004.
- [13] L. ARMIJO : Minimization of functions having lipschitz-continuous first partial derivatives. *Pacific J. Math.*, 16.

- [14] N. ARONSAJN : Theory of reproducing kernels. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1950.
- [15] S. R. ARRIDGE : Optical tomography in medical imaging. *Inverse Problems*, 15:R41–R93, 1999.
- [16] M. ATTÉA : *Hilbertian kernels and spline functions*. Studies in Computational Mathematics, North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [17] R. N. BARCEWELL : Strip integration in radio astronomy. *J. Phys.*, 9:198–217, 1956.
- [18] R. N. BARCEWELL et A. C. RIDDLE : Inversion of fan-beam scans in radio astronomy. *Astrophysical J.*, 150(22):427–434, 1967.
- [19] Alex H. BARNETT : A fast numerical method for time-resolved photon diffusion in general stratified turbid media. *J. Comput. Physics*, 201:771–797, 2004.
- [20] D. BARRERA, M. A. FORTES, P. GONZÁLEZ et M. PASADAS : Minimal energy surfaces on powell-sabin type triangulations. *Appl. Numer. Math.*, 58(5):635–645, 2008.
- [21] D. BARRERA, A. GUESSAB, P. IBÁÑEZ et O. NUISSE : Optimal bivariate C^1 cubic quasi-interpolation on a type-2 triangulation. *J. Comput. Appl. Math.*, 234:1188–1199, 2010.
- [22] M.-N. BENBOURHIM et A. BOUHAMIDI : Pseudo-polyharmonic vectorial approximation for div-curl and elastic semi-norms. *Numer. Math.*, 109:333–364, 2008.
- [23] S. BERGMANN : *Les fonctions orthogonales de plusieurs variables complexes, avec les applications à la théorie des fonctions analytiques*. Interscience Publishers, New-York, 1941.
- [24] S. BERGMANN et M. SCHIFFER : *Kernel functions and elliptic differential equations in Mathematical Physics*. Academic Press, New-York, 1953.
- [25] A. BOCAGE : Procédé et dispositif de radiographie sur plaque en mouvement. *Brevet Français*, pages 534–464, 1922.
- [26] L. BOLTZMANN : Weitere studien über das wärme-gleichgewicht unter gasmolekülen sitzungs. *Akad. Wiss. Wien*, 66:275–370, 1872.
- [27] A. BOUHAMIDI : *Interpolation et approximation par des fonctions splines radiales à plusieurs variables*. Thèse de doctorat, 2 Juillet 1992.
- [28] A. BOUHAMIDI : Weighted thin plate spline. *Analysis and its Applications.*, 3(3): 297–324, 2005.
- [29] A. BOUHAMIDI, K. JBILOU, L. REICHEL et H. SADOK : An extrapolated TSVD method for linear discrete ill-posed problems with kroneker structure. *Preprint*, 2010.
- [30] A. BOUHAMIDI et A. Le MÉHAUTÉ : Multivariate interpolating (m, ℓ, s) -splines. *Adv. Comput. Math.*, 11:287–314, 1999.
- [31] A. BOUHAMIDI et A. Le MÉHAUTÉ : Radial basis functions under tension. *Journal of Approximation Theory*, 127:135–154, 2004.

- [32] M. BOULANOUAR : Le transport neutronique avec des conditions aux limites générales. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* 329:121–124, 1999.
- [33] M. BOULANOUAR : Nouveaux résultats pour les équations de la neutronique. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* 347:623–626, 2009.
- [34] Vasco BRATTKA et Atsushi YOSHIKAWA : Towards computability of elliptic boundary value problems in variational formulation. *Journal of Complexity*, 22:858–880, 2006.
- [35] H. BRÉZIS : *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*. Dunod, Paris, 1999.
- [36] F. BREZZI : On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrange multipliers. *RAIRO Numer. Anal.*, 8:129–151, 1974.
- [37] F. BREZZI et M. FORTIN : *Mixed and Hybrid finite element methods*. Springer, Berlin, 1991.
- [38] M. D. BUHMANN : Radial functions on compact support. *Proc. Edin. Soc. II*, 41:33–46, 1998.
- [39] M. D. BUHMANN : Radial basis functions. *Acta Numer.*, pages 1–38, 2000.
- [40] Schnabel R. B. BYRD, R. H et G. A. SCHULTZ : Parallel quasi-Newton methods for unconstrained optimization. *Mathematical Programming*, 42.
- [41] T. CARLEMAN : Sur la théorie de l'équation intégrodifférentielle de boltzmann. *Acta Math.*, 60:91–146, 1933.
- [42] K. M. CASE et P. F. ZWEIFEL : *Linear transport theory*. Plenum Press, New York, 1967.
- [43] M. CESSENAT : Théorème de trace L^p pour des espaces de fonctions de la neutronique. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* 299:S.831–834, 1984.
- [44] M. CESSENAT : Théorème de trace pour des espaces de fonctions de la neutronique. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* 300:S.89–92, 1985.
- [45] B. CHANCE : *Photon migration in tissues(ed.)*. Plenum Press, New York, 1989.
- [46] B. CHANCE : It time-resolved spectroscopy and imaging of tissues (ed.). *Proc. SPIE*, 1431, 1991.
- [47] S. CHANDRASEKHAR : *Radiative Transfer*. Oxford Univ. Press, London, 1950.
- [48] M. CHOULLI et P. STEFANOV : An inverse boundary value problem for the stationary transport equation. *Osaka J. Math.*, 36:87–104, 1999.
- [49] G. COHEN : *Higher-order numerical methods for transient wave equations*. Springer Verlag, 2002.
- [50] T. J. CONNOLLY et J. N. WALL : On fréchet differentiability of some nonlinear operators occurring in inverse problems : an implicit function theorem approach. *Inverse Problems*, 6:949–966, 1990.
- [51] A. M. CORMACK : Representation of a function by its line integrals with some radiological applications. *J. Appl. Phys.*, (34):2722–2727, 1963.

- [52] A. M. CORMACK : Representation of a function by its line integrals with some radiological applications. *J. Appl. Phys.*, (35):298–313, 1964.
- [53] A. M. CORMACK : Early two-dimensional reconstruction (ct scanning) and recent topics stemming from it nobel lecture. *J. Comput. Assist. Tomography*, (4):658–664, 1980.
- [54] R. DAUTRAY et J. L. LIONS : *Analyse mathématiques et calcul numérique pour les sciences et les techniques : Modèles physiques*. Masson, Paris, 1987.
- [55] R. DAUTRAY et J. L. LIONS : *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology*. Springer, Berlin, 1990.
- [56] O. DAVYDOV et L. L. SCHUMAKER : Stable approximation and interpolation with C^1 quadric bivariate spline. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39:1732–1748, 2002.
- [57] C. de BOOR : *A practical guide to splines*. Springer-Verlag, New York, 1978.
- [58] C. de BOOR : Topics in multivariate approximation theory. *Lectures notes in mathematics*, 965:39–78, 1982.
- [59] C. de BOOR : On interpolation by radial polynomials. *Adv. in Comput. Math.*, 24:143–153, 2006.
- [60] D. DELPY : Optical spectroscopy for diagnosis. *Physics World Aug.*, page S.34ff, 1994.
- [61] J. DUCHON : Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces. *Rev. Française Automat. Informat. Rech. Opér. Anal. Numer.*, 10:5–12, 1976.
- [62] J. DUCHON : Splines minimizing rotation-invariant semi-norms in sobolev spaces. in w. schempp and k. zeller. *editors, Constructive Theory of Functions of several Variables*, pages 85–100, 1979.
- [63] G. E. FASSHAUER : Solving differential equations with radial basis functions : multilevel methods and smoothing. *Adv. Comput. Math.*, 11(2-3):139–159, 1999.
- [64] B. FISCHER et L. REICHEL : Newton interpolation in fejér and chebyshev points. *Math. of Comput.*, 53(187):265–278, 1989.
- [65] C. FRANKE et R. SCHABACK : Solving partial differential equations by collocation using radial basis functions. *Appl. Math. and Comput.*, 93:73–82, 1998.
- [66] R. FRANKE, H. HAGEN et Gregory M. NIELSON : Least squares surface approximation to scattered data using multiquadratic functions. *Advances in Computational Mathematics.*, 2:81–99, 1994.
- [67] I. M. GAMBA, V. PANFEROV et C. VILLANI : Upper maxwellian bounds for the spatially homogeneous boltzmann equation. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 194: 253–282, 2009.
- [68] A. A. GOLDSTEIN : On newton's method. *Numerische Mathematik.*, 7.
- [69] F. GOLSE, P.-L. LIONS, B. PERTHAME et R. SENTIS : Regularity of the moments of the solution of a transport equation. *Journ. Funct. Anal.*, 76:S.110–125, 1988.

- [70] P. GONZÁLEZ-CASANOVA et C. GOUT : Approximation near the boundary of a radial quasi-interpolant in polygonal domains. *Int. J. Comput. Math.*, 81(12): 1445–1454, 2004.
- [71] C. GOUT, C. LE GUYADER, L. ROMANI et A-G. SAINT-GUIRONS : Approximation of surfaces with fault(s) and/or rapidly varying data, using a segmentation process, D^m -splines and the finite element method. *Numer. Algorithms*, 48(1), 2008.
- [72] Philip M. GRESHO, David F. GRIFFITHS et David J. SILVESTER : Adaptive time-stepping for incompressible flow part I : scalar advection-diffusion. *SIAM J. Sci. Comput.*, 30(4):2018–2054, 2008.
- [73] G. GROSSMANN : Procédé et dispositif pour la représentation radiographique des sections des corps. *Brevet Français*, pages 771–887, 1934.
- [74] K. GUO, S. HU et X. SUN : Conditionally positive definite functions and laplace-stieltjes integrals. *J. Approx. Theory*, 74:249–265, 1993.
- [75] R. L. HARDER et R. N. DESMARAIS : Interpolation using surface splines. *J. Aircraft*, 9:189–191, 1972.
- [76] R. L. HARDY : Multiquadratic equations of topography and other irregular surfaces. *J. Geophys. Res.*, 76:1905–1915, 1971.
- [77] R. L. HARDY : Geodetic applications of multiquadratic analysis. *AVN Allg. Vermess. Nachr.*, 79:389–406, 1972.
- [78] R. L. HARDY : Research results in the applications of multiquadratic equations to surveying and mapping problems. *Surv. Mapp.*, 35:321–332, 1975.
- [79] S. HE, H. ZHANG et V. ROMANOV : Explicit identification of multiple small breast cancers in an optical mammographic imaging. *Inverse Problems*, 18:1555–1567, 2002.
- [80] J. HEJTMANEK : *Time-Dependant Linear Transport Theory, in Kinetic Theories and the Boltzmann Equation*. Lectures notes in Mathematics 1048, Eds. A.Dold, B. Eckmann, 1981.
- [81] L. G. HENYEVY et J. L. GREENSTEIN : Diffuse radiation in the galaxy. *Astrophysical Journal*, 93:70–83, 1941.
- [82] D. HONG et L. L. SCHUMAKER : Surface compression using a space of C^1 cubic splines with a hierarchical basis. *Computing*, 72:79–92, 2004.
- [83] G. N. HOUNSFIELD : A method of and apparatus for examination of a body by radiation such as x or gamma radiation. *The Patent office*, page Patent Specification 1283915, 1972.
- [84] G. N. HOUNSFIELD : Computerized transverse axial scanning tomography. *British J. Radiology*, 46:1016–1022, 1973.
- [85] V. ISAKOV : *Inverse Problems in partial differential equations*. Springer, New York, 1998.
- [86] A. ISHIMARU : *Single scattering and transport theory wave propagation and scattering in random media I and II*. Academic Press, New York, 1978.

- [87] A. ISHIMARU : Diffusion of light in turbid material. 28(12):S.2210ff, 1989.
- [88] K. JBILOU, L. REICHEL et H. SADOK : Vector extrapolation enhanced tsvd for linear discrete ill-posed problems. *Numer. Algor.*, 51:195–208, 2009.
- [89] K. JBILOU et H. SADOK : Vector extrapolation methods. applications and numerical comparison. *J. Comput. Appl. Math.*, 122:149–165, 2000.
- [90] J. P. KALTENBACH et M. KASCHKE : Frequency and time-domain modelling of light transport in random media, in medical optical tomography : functional imaging and monitoring, g. müller (ed.). *SPIE Optical Engineering Press*, IS11:65–86, 1993.
- [91] C. KANZOW, N. YAMASHITA et M. FUKUSHIMA : Levenberg-marquardt methods with strong local convergence properties for solving nonlinear equations with convex constraints. *J. Comput. Appl. Math.*, 172:375–397, 2004.
- [92] H. G. KAPER, C. G. LEKKERKERKER et J. HEJTMANEK : *Spectral methods in linear transport theory*. Birkhäuser, Basel, 1982.
- [93] T. KATO : *Perturbation Theory for linear operators*. Springer-Verlag, New York, 1966.
- [94] Otared KAVIAN : *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*. Springer-Verlag, Paris-France, 1983.
- [95] A. D. KLOSE et E. W. LARSEN : Light transport in biological tissue based on the simplified spherical harmonics equations. *J. Comput. Phys.*, 200:441–470, 2006.
- [96] D. E. KUHI, R. Q. EDWARDS, A. R. RICCI et M. REIVICH : Quantitative section scanning using orthogonal tangent correction. *J. Nucl. Med.*, (14):196–200, 1973.
- [97] M.-J. LAI et L. L. SCHUMAKER : A domain decomposition method for computing bivariate spline fits of scattered data. *SIAM J. Numer. Anal.*, 47(2):911–928, 2009.
- [98] E. W. LARSEN : Solution of neutron transport problems in L_1 . *Comm. Pure Appl. Math.*, 28:729–746, 1975.
- [99] E. W. LARSEN : Solution of three dimensional inverse transport problems. *Transp. Theory and Statist. Physics.*, 17 (2&3):S.147–167, 1988.
- [100] Edward W. LARSEN et J. E. MOREL : Asymptotic solutions of numerical transport problems in optically thick, diffusive regimes ii. *J. Comput. Phys.*, 83:212–236, 1989.
- [101] P. G. LEMARIÉ : Fonctions à support compact dans les analyses multi-résolutions. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 7(2):157–182, 1991.
- [102] P. G. LEMARIÉ : La propriété de support minimal dans les analyses multi-résolution. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 312(11):773–776, 1991.
- [103] J. L. LIONS et E. MAGENES : *Non-homogeneous boundary value problems and applications*. Vol.I, Springer-Verlag, New York, 1972.

- [104] Marie-Laurence MAZURE : On the equivalence between existence of B-spline bases and existence of blossoms. *Constr. Approx.*, 20(4):603–624, 2004.
- [105] Marie-Laurence MAZURE : Towards existence of piecewise chebyshevian B-spline bases. *Numer. Algorithms*, 39(4):399–414, 2005.
- [106] Marie-Laurence MAZURE : A few remark on recurrence relations for geometrically continuous piecewise chebyshevian B-spline bases. *Numer. Algorithms*, 51(4):401–428, 2009.
- [107] Marie-Laurence MAZURE : On differentiation formulae for chebyshevian bernstein and B-spline bases. *Jaén J. Approx.*, 1(1):111–143, 2009.
- [108] N. J. MCCORMICK : Recent developments in inverse scattering transport methods. *Transp. Theory and Statist. Physics.*, 13 (1&2):S.15–28, 1984.
- [109] N. J. MCCORMICK : Methods for solving inverse problems for radiation transport-an update. *Transp. Theory and Statist. Physics.*, 15 (6&7):S.759–772, 1986.
- [110] Charles A. MECHELLI : Interpolation of scattered data : distance matrices and conditionally positive definite functions. *Constr. Approx.*, 2:11–22, 1986.
- [111] S. MISHLER et B. PERTHAME : Boltzman equation with infinite energy : renormalized solutions and distributional solutions for small initial data close to a maxwellian. *SIAM J. Math. Anal.*, 28(5):1015–1097, 1997.
- [112] M. MOKHTAR-KHARROUBI et A. ZEGHAL : Inverse problems for periodic transport equations. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, (6) 9(3):487–507, 2000.
- [113] P. M. MORSE et K. U. INGARD : *Theoretical acoustics*. Princeton University Press, 1986.
- [114] W. MUNK et P. WORCHESTER : *Ocean acoustic tomography*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [115] F. NATTERER, H. SIELSCHOTT, O. DORN, T. DIERKES et V. PALAMODOV : Fréchet derivatives for some bilinear inverse problems. *SIAM J. Appl. Math.*, 62(6):2092–2113, 2002.
- [116] F. NATTERER et F. WÜBBELING : A propagation–backpropagation method for ultrasound tomography. *Inverse Problems*, 11:1225–1232, 1995.
- [117] Gregory M. NIELSON : Bivariate spline functions and the approximation of linear functionals. *Numer. Math.*, 21:138–160, 1973.
- [118] R. G. NOVIKOV : Multidimensional inverse spectral problem for the equation $-\Delta\psi + (v(x) - Eu(x))\psi = 0$. *Trans. Funkt. Analiz Priloz.*, 22(4):11–22, 1989.
- [119] R. G. NOVIKOV : $\bar{\partial}$ -method with nonzero background potential application to inverse scattering for the two-dimensional acoustic equation. *Commun. in Partial Differential equation*, 21 (3&4):597–618, 1996.
- [120] W. H. OLDENDORF : Isolated flying spot detection of radiodensity discontinuities : displaying the internal structural pattern of a complex object. *IRE. Trans. Bio. med. Electr.*, (BME-8):68–72, 1961.

- [121] W. H. OLDENDORF : The quest for an image of the brain : computerized tomography in the perspective of past and future imaging methods. *New York : Raven*, pages 77–88, 1980.
- [122] M. PASADAS et M. L. RODRÍGUEZ : Multivariate approximation by pde splines. *J. Comput. Appl. Math.*, 218(2):556–567, 2008.
- [123] A. I. PRILEPKO et N. P. VOLKOV : Inverse problems of finding parameters of nonstationary transport equation from integral overdetermination. *Differential Equations*, pages S.91–101, 1991.
- [124] A. PULVIRENTI et B. WENNEBERG : A maxwellian lower bound for solutions to the boltzmann equation. *Comm. Math. Phys.*, 183(1):145–160, 1997.
- [125] A. QUARTERONI et A. VALLI : *Numerical Approximation of partial differential equations*. volume 23, Springer series in computational mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [126] J. K. A. RADON : Analogic corporation, trans. on the dertermination of functions by their integral values along certain manifolds. *Ber Vehr Sachs Akad Wiss*, 69(16):262–277, 1917.
- [127] J. K. A. RADON : Über die bestimmung von funktionen durch ihre integralwerte längs gewissermannigfaltigkeiten. *Berichte Sächsische akademie der Wissenschaften*, 69:262–277, 1917.
- [128] P.-A. RAVIART et J.-M. THOMAS : *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, 1983.
- [129] J. N. REDDY : *Applied functional analysis and variational methods in engineering*. McGraw-Hill, New York, 1986.
- [130] J. N. REDDY : *An introduction to the finite element method*. McGraw Hill, New York, 1993.
- [131] M. REED et B. SIMON : *Methods of modern mathematical physics*, volume 3. Academic Press, New York, 1979.
- [132] R. SCHABACK : Lower bounds for norms of inverses of interpolation matrices for radial basis functions. *J. Approx. Theory*, 79:287–306, 1994.
- [133] R. SCHABACK : Approximation by radial basis functions with finitely many centers. *Constr. Approx.*, 12:331–340, 1996.
- [134] R. SCHABACK : Improved error bounds for scattered data interpolation by radial basis functions. *Math. Comput.*, 68(225), 1999.
- [135] R. SCHABACK : Convergence of unsymmetric kernel-based meshless collocation methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, 45:333–351, 2007.
- [136] R. SCHABACK : Limit problems for interpolation by analytic radial basis functions. *J. Comp. Appl. Math.*, 212:127–149, 2008.
- [137] R. SCHABACK : Solving the laplace equation by meshless collocation using harmonic kernels. *Adv. Comput. Math.*, 31(4):457–470, 2009.

- [138] R. SCHABACK : Unsymmetric meshless methods for operator equations. *Numerische Mathematik*, 114:629–651, 2010.
- [139] R. SCHABACK et H. WENDLAND : Kernel techniques : from machine learning to meshless methods. *Acta Numer.*, 15:543–639, 2006.
- [140] I. J. SCHOENBERG : Contribution to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. *Quart. of Appl. Math.*, 4:45–141, 1946.
- [141] M. H. SCHULTZ : L-splines. *Numer. Math.*, 10:345–369, 1967.
- [142] M. H. SCHULTZ et R. S. VARGA : *Splines Analysis*. Prentice-Hall, Englewood cliffs, New Jersey, 1973.
- [143] T. SCHÜLTZE et H. SCHWETLICK : Bivariate free knot splines. *BIT Numerical Mathematics*, 43:153–178, 2003.
- [144] L. L. SCHUMAKER : On super spline and finite elements. *SIAM J. Numer. Anal.*, 26:997–1005, 1989.
- [145] L. L. SCHUMAKER : Computing bivariate splines inscattered data fitting and the finite-element method. *Numer. Algorithms*, 48:237–260, 2008.
- [146] L. L. SCHUMAKER et T. SOROKINA : C^1 quintic splines on type-4 tetrahedral partitions. *Adv. in Comput. Math.*, 21:421–444, 2004.
- [147] L. SCHWARTZ : *Théorie des distributions*. Hermann, Paris,France, 1966.
- [148] L. SCHWARTZ : *Analyse : topologie générale et analyse fonctionnelle*. Hermann, Paris,France, 2008.
- [149] A. SOMMARIVA et M. VIANELLO : Product gauss cubature over polygons based on green’s integration formula. *BIT*, 47(2):441–453, 2007.
- [150] A. SOMMARIVA et M. VIANELLO : Gauss-Green cubature and moment computation over arbitrary geometries. *J. Comput. Appl. Math.*, 231(2):886–896, 2009.
- [151] P. STEFANOV : Inverse problems in transport theory. inside out : inverse problems and applications. *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, 47:111–131, 2003.
- [152] T. TARVAINEN, M. VAUHKONEN, V. KOLEHMAINEN, S. R. ARRIDGE et J. P. KAIPIO : Coupled radiative transfer equation and diffusion approximation model for photon migration in turbid mediaum with low-scattering and non-scattering regions. *Phys. Med. Biol.*, 50:4913–4930, 2005.
- [153] I. TELEAGA, M. SEAİD, I. GASSER, A. KLAR et J. STRUKMEIER : Radiation models for thermal flows at law mach number. *J. Comput. Phys.*, 205:506–525, 2006.
- [154] A. N. TIKHONOV et V. Y. ARSEININ : *Solutions of ill posed problems*. Winston Wiley, New York, 1977.
- [155] M. UNSER : Splines : a perfect fit for signal and image processing. *IEEE Signal Processing Magazine*, 16(6):22–38, 1999.
- [156] A. VALLEBONA : Una modalità di tecnica per la dissociazione radiografica delle ombre applicata allo studio del cranio. *Radiol. Med.*, 17:1090–1097, 1930.

- [157] C. VILLANI : A review of mathematical topics in collisional kinetic theory. *Handbook of mathematical fluid dynamics*, Vol.I, North-Holland, Amsterdam:71–305, 2002.
- [158] H. WENDLAND : Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree. *Adv. Comput. Math.*, 4(4):389–396, 1995.
- [159] H. WENDLAND : *Scattered data approximation*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [160] G. WIDMER, R. HIPTMAIR et Ch. SCHWAB : Sparse adaptive finite elements for radiative transfer. *J. Comput. Phys.*, 227(12):6071–6105, 2008.
- [161] P. WOLFE : Convergence conditions for ascent methods. *SIAM Review*, 11.
- [162] P. WOLFE : Convergence conditions for ascent methods II : some corrections. *SIAM Review*, 13.
- [163] Z. WU : Compactly supported positive definite radial functions. *Adv. in Comput. Math.*, 4:283–292, 1995.
- [164] A. YODH et B. CHANCE : Spectroscopy and imaging with diffusing light. *Physics Today*, 48:S.34ff, March 1995.
- [165] B.G. ZIEDSES DES PLANTES : Een bijzondere methode voor het maken van röntgenphoto's van schedel en wervelkolom. *Ned Tijdschr Geneesk*, 75:5218–5122, 1931.

Index

- Équation cinétique de Boltzmann, 8
- Approximation de diffusion, 19
- B-spline cubique, 34
- Beer-Lambert, 16, 170
- Coefficient d'absorption, 172
- Coefficient d'anisotropie, 175
- Coefficient d'extinction, 173
- Coefficient de diffusion, 175
- Coefficient de dispersion, 172
- Conditions de Robin au bord, 22
- Dérivée de Fréchet de DtN, 117, 134
- Diffusion non-stationnaire, 19
- Diffusion stationnaire, 21
- Dirichlet-to-Neumann, 110
- EDP, 2, 169
- Equation de Sturm-Liouville, 29
- Espace $X^{m,\ell,s}$, 90
- Espace $X^{m,s}$, 89
- Espace de Beppo-Levi, 89
- ETR, 4, 7, 12, 14, 19, 20
- ETR non-stationnaire, 12
- ETR stationnaire, 16
- Flot optique, 14
- Fonction de phase, 173
- Fonctions (m, ℓ, s) -splines, 90
- Fonctions (m, s) -Splines, 89
- Fonctions de plaque mince (TPS), 89
- Fonctions radiales CDP, 78
- Fonctions radiales de Buhmann, 85
- Fonctions radiales de Sobolev, 87
- Fonctions radiales de Wendland, 82
- Fonctions radiales de Wu, 84
- Fonctions radiales Gaussiennes (G), 87
- Fonctions radiales sous tension, 92
- Formule de cubature, 97
- Gauss-Hermite, 38
- Henye-Greenstein, 174
- Indice de réfraction, 176
- Lemme de Céa, 40, 64
- Lumière monochromatique, 176
- Méthode de Galerkin, 35
- Moment d'une fonction, 19
- Multiquadratiques (MQs), 88
- Multiquadratiques inverses (IMQs), 88
- Nuage de points, 102
- Opérateur d'Albedo, 107
- Points concentriques, 101
- Points de Halton, 100
- Problème de diffusion adjoint, 119, 137
- Quadrature de Gauss-Hermite, 161
- Quadrature de Simpson, 163
- Résolution par lignes de niveau, 148
- Schéma itératif de Newton, 126, 145
- Sources de Dirac, 12
- Sources Gaussiennes, 24
- Splines tensorielles, 54
- Théorème de trace, 165
- Théorème de trace normale, 167
- Thin plate spline TPS, 88
- Transformée de Fourier, 24
- Transformée de Radon, 171
- Unité approchée, 25